



**HAL**  
open science

## Forme d'équilibre d'une rivière

Grégoire Seizilles

► **To cite this version:**

Grégoire Seizilles. Forme d'équilibre d'une rivière. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2013. Français. NNT: . tel-00840081

**HAL Id: tel-00840081**

**<https://theses.hal.science/tel-00840081>**

Submitted on 1 Jul 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris Diderot

Institut de Physique du Globe de Paris – Dynamique des fluides géologiques

Sorbonne Paris Cité

## THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (Paris 7)

École doctorale 109 des sciences de la terre, spécialité : Géophysique

présentée par  
Grégoire SEIZILLES DE MAZANCOURT

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris Diderot (Paris 7)

---

# FORME D'ÉQUILIBRE D'UNE RIVIÈRE

---

Soutenue le 28 juin 2013 devant le jury composé de :

**Yves Couder**

**Pierre-Yves Lagrée**

**Daniel Rothman**

**Laurie Barrier**

**Eric Lajeunesse**

**Olivier Devauchelle**

Président du jury

Rapporteur

Rapporteur

Directeur de thèse

Co-encadrant de thèse





## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes chefs, Eric et Olivier, qui m'ont proposé ce beau sujet. Durant ces trois ans, ils m'ont aidé et conseillé au quotidien et m'ont fait découvrir le monde merveilleux des rivières (en laboratoire). Mes pensées vont aussi à l'ensemble de l'équipe de Dynamique des Fluides Géologiques avec qui j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler. Je remercie Claude et Julien, qui les premiers m'ont fait découvrir les joies de la géophysique et l'équipe de géomorphologie composée de François (le vénérable du sommet) et de Clément, ainsi bien sûr que, temporairement, de Hugo, Laure, Morgane, Pierre, Odin, Mike, Adrien, Pauline, Gao, Deguo et Lv Ping. Cette thèse doit beaucoup à toute l'équipe d'ingénieurs de choc du laboratoire : Yves et Antonio d'une part et Angela, Hélène et Thierry d'autre part qui ont toujours été disponibles pour m'aider à chaque montage expérimental (et chaque bêtise en découlant...). Je n'oublie pas Stéphanie qui a le don pour rendre les tâches administratives faciles. Enfin, l'ambiance de travail aurait été bien plus désagréable sans la présence des nombreux thésards de l'IPGP et d'ailleurs avec qui j'ai partagé le quotidien durant ces trois ans.



Olivier et Eric trouvant que mon explication manque de clarté

Je suis très reconnaissant à MM. Lagrée, Rothman, Couder et à Mme Barrier d'avoir accepté d'être dans mon jury. J'ai eu la chance d'avoir des discussions passionnantes sur mon sujet avec les deux premiers et leurs rapports m'ont permis d'améliorer grandement ce manuscrit.

Je remercie également les nombreux scientifiques avec qui j'ai échangé et qui m'ont permis de progresser : Patrick Meunier, Chris Paola et Doug Jerolmack dans mon domaine mais aussi Rodolphe, Hervé, Arezki ou Mokhtar durant ma scolarité.

Cette thèse est dédiée à ma famille qui m'a toujours soutenu et qui m'a formé. Ma famille nucléaire bien sûr : papa, maman, mais aussi mes deux sœurs, Marine et Sarah qui, chacune à sa manière, ont grandement contribué à la qualité de mon travail. Et ma famille élargie, mes grands-parents, oncles et tantes toujours disposés à me conseiller.

Ma passion des sciences vient des classes préparatoires, je dois beaucoup à mes premiers mentors scientifiques, Mmes Lefebvre et Thore qui, chacune dans sa matière, m'ont fait découvrir les joies des sciences durant des cours brillants. Bien entendu, ces enseignements n'auraient pas été si agréables sans la présence d'Antoine, Anton (qui m'a tout appris), Domitille, Emmanuel, François, Jamil (qui nous a quitté trop tôt) et Sandra. Bien plus tard, j'ai redécouvert cette passion pour l'enseignement avec Alexandre et Pascal avec qui j'ai passé un monitorat passionnant.

Les périodes de repos m'ont permis de prendre un recul constructif sur mon sujet. Je remercie donc l'ensemble des personnes avec qui j'ai eu la chance de naviguer durant ces années, en particulier Antoine, Arnaud, Benoît, Eric, Eric, Eric, Goustan et tous les Castins.

Enfin, je dois beaucoup à tous ceux qui ont partagé mon quotidien et avec qui mes rapports furent aussi divers qu'enrichissants, en vrac Alexis, Céline, Damien, Edouard, Fanny, Jonas, Lise, Lucie, Pauline, Soline et tous les autres.



*“I am an old man now, and when I die and go to Heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am really rather optimistic.”*

Sir Horace Lamb, 1932



# Sommaire

<b>1</b>	<b>Avant-propos</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Rivières sans transport de sédiments</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Introduction à la géomorphologie fluviale</b>	<b>5</b>
2.1	Les rivières naturelles . . . . .	5
2.2	Le seuil de mise en mouvement . . . . .	8
2.2.1	Angle d'avalanche . . . . .	8
2.2.2	Érosion des grains par un fluide . . . . .	10
2.3	Quelle forme a une rivière sans transport ? . . . . .	12
2.3.1	Contrainte sur le lit . . . . .	12
2.3.2	Forme d'équilibre . . . . .	13
2.4	Les équations de régime pour un écoulement turbulent . . . . .	16
2.4.1	Raisonnement théorique . . . . .	16
2.4.2	Comparaison avec les rivières naturelles . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Expériences de rivières en régime laminaire</b>	<b>19</b>
3.1	Pourquoi faire des rivières en laboratoire ? . . . . .	19
3.2	Comment construire une rivière sur 2 m <sup>2</sup> . . . . .	20
3.2.1	Matériau granulaire . . . . .	21
3.2.2	Fluide visqueux . . . . .	22
3.3	Le déroulement de l'expérience . . . . .	23
3.3.1	Dynamique de création . . . . .	23
3.3.2	État d'équilibre . . . . .	26
3.3.3	Résultats préliminaires . . . . .	27
3.4	Les équations de régime pour un écoulement laminaire . . . . .	27
3.4.1	Raisonnement théorique . . . . .	27
3.4.2	Vérification expérimentale . . . . .	29
3.5	La section expérimentale de la rivière . . . . .	30
3.5.1	Mesures par projection d'une nappe laser . . . . .	30
3.5.2	Vérification de la forme sinusoïdale . . . . .	33
3.5.3	Section moyenne de la rivière . . . . .	33
3.6	Vérification des hypothèses . . . . .	35
3.6.1	Faible pente latérale . . . . .	35
3.6.2	Contrainte fluide . . . . .	36
3.7	La forme d'équilibre dans le cas général . . . . .	37
3.7.1	Champ de vitesse . . . . .	37
3.7.2	Forme de la section . . . . .	37

3.7.3	Angle de contact de la berge avec l'air . . . . .	39
3.8	La section expérimentale est-elle une solution ? . . . . .	39
	Conclusion . . . . .	40
<b>II</b>	<b>Physique des sédiments charriés</b>	<b>43</b>
<b>4</b>	<b>D'un grain en mouvement au débit de sédiments</b>	<b>45</b>
4.1	Le suivi expérimental de grains . . . . .	45
4.1.1	Procédure expérimentale . . . . .	45
4.1.2	Alimentation en sédiments . . . . .	47
4.1.3	Enregistrement d'une trajectoire . . . . .	48
4.2	Les échanges avec le lit . . . . .	49
4.2.1	Détermination du mouvement d'une particule . . . . .	49
4.2.2	Grains en mouvement : une couche homogène . . . . .	50
4.3	La vitesse des grains . . . . .	51
4.4	Équilibre érosion-sédimentation . . . . .	52
4.4.1	Taux d'érosion . . . . .	52
4.4.2	Vol d'un grain . . . . .	55
4.4.3	Taux de sédimentation . . . . .	57
4.5	Loi de transport . . . . .	58
4.5.1	Équilibre, loi de transport . . . . .	58
4.5.2	Vérification expérimentale . . . . .	58
4.5.3	Concentration de particules en mouvement . . . . .	60
	Conclusion . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Le paradoxe du lit érodé mais stable</b>	<b>63</b>
5.1	Une rivière qui transporte des sédiments devrait être instable . . . . .	63
5.2	Les modèles de rivières . . . . .	64
<b>6</b>	<b>L'apparition d'un flux diffusif</b>	<b>67</b>
6.1	Vitesse des grains charriés . . . . .	67
6.1.1	Vitesses parallèles à l'écoulement . . . . .	67
6.1.2	Vitesses transverses . . . . .	67
6.2	Dispersion transverse d'une particule . . . . .	69
6.3	Modèle de marche aléatoire . . . . .	71
6.3.1	Marche aléatoire . . . . .	71
6.3.2	Temps de corrélation . . . . .	72
6.4	Coefficient de diffusion . . . . .	74
6.4.1	Flux de diffusion . . . . .	74
6.4.2	Lien entre le flux diffusif et le flux de sédiments . . . . .	75
6.4.3	Longueur de diffusion . . . . .	75
6.4.4	Mesure expérimentale de la longueur de diffusion . . . . .	76
6.4.5	Coefficient de diffusion . . . . .	77
	Conclusion . . . . .	77

<b>III</b>	<b>Équilibre des rivières avec transport de sédiments</b>	<b>79</b>
<b>7</b>	<b>Des rivières stabilisées par la diffusion</b>	<b>81</b>
7.1	Introduction . . . . .	81
7.2	Mise en équation . . . . .	82
7.2.1	Flux diffusif . . . . .	82
7.2.2	Équilibre des flux . . . . .	82
7.3	Solutions numériques . . . . .	84
7.3.1	Comportements généraux . . . . .	84
7.3.2	Point critique . . . . .	85
7.3.3	Solutions limites . . . . .	85
7.3.4	Calcul des flux . . . . .	85
7.4	Portrait de phase . . . . .	86
7.5	Approximation de rivière rectangulaire . . . . .	88
7.5.1	Présentation du modèle . . . . .	88
7.5.2	Équations de régime . . . . .	89
7.5.3	Profils . . . . .	91
7.6	Résolution près du seuil . . . . .	92
7.6.1	Formulation du problème . . . . .	92
7.6.2	Calcul de la largeur . . . . .	93
7.6.3	Flux totaux . . . . .	96
7.6.4	Équations de régime . . . . .	97
7.6.5	Vérification numérique . . . . .	97
7.7	Rivières naturelles . . . . .	98
	Conclusion . . . . .	100
<b>IV</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>101</b>
<b>8</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>103</b>
8.1	Conclusion générale . . . . .	103
8.2	Perspectives . . . . .	105
8.2.1	Expériences de micro-rivières avec transport . . . . .	105
8.2.2	Et dans la nature? . . . . .	109
<b>V</b>	<b>Suppléments</b>	<b>113</b>
<b>9</b>	<b>Annexes sur le seuil de mise en mouvement</b>	<b>115</b>
9.1	A l'échelle du grain . . . . .	115
9.2	Seuil de mise en mouvement des grains dans l'écoulement . . . . .	117
9.3	Étude de l'article de Loiseleux et coll. . . . .	120
<b>10</b>	<b>Annexes sur la rivière sans transport</b>	<b>125</b>
10.1	Modification du profil avec la portance . . . . .	125
10.2	Expériences réalisées avec de l'eau . . . . .	129
10.2.1	Forme de la rivière à l'équilibre . . . . .	129
10.2.2	Équations de régime . . . . .	129
10.2.3	Problèmes expérimentaux . . . . .	131

10.3 Développement du cosinus au second ordre . . . . .	131
<b>11 Annexes sur la théorie de diffusion</b>	<b>135</b>
11.1 Méthode de résolution numérique . . . . .	135
11.1.1 Équation et calculs des paramètres physiques . . . . .	135
11.1.2 Développement proche du fond . . . . .	135
11.2 Étude des tresses . . . . .	136
11.2.1 Multiples chenaux identiques . . . . .	137
11.2.2 Multiples chenaux indépendants . . . . .	138
<b>12 Annexes expérimentales</b>	<b>141</b>
12.1 Matériel expérimental . . . . .	141
12.1.1 Matériaux granulaires . . . . .	141
12.1.2 Mesure du débit liquide . . . . .	143
12.1.3 Appareils photo . . . . .	143
12.1.4 Commande du doseur de grains . . . . .	144
12.1.5 Mesure par méthode de moiré . . . . .	146
12.2 Codes . . . . .	149
12.2.1 Commande de l'Arduino pour envoyer un courant . . . . .	149
12.2.2 Commande de l'appareil photo à distance . . . . .	150
12.2.3 Mesure de la trajectoire des grains . . . . .	152
<b>13 Articles</b>	<b>155</b>
13.1 Width of laminar laboratory rivers – PRE . . . . .	156
13.2 Cross-stream diffusion in bedload transport – POF . . . . .	162
<b>Bibliographie</b>	<b>179</b>

## Tableau des symboles utilisés

Symbole	Définition	dimension	valeur
$x$	coordonnée dans le sens de l'écoulement	$L$	
$y$	coordonnée dans la direction transverse à l'écoulement	$L$	
$z$	coordonnée dans la direction verticale	$L$	
$\vec{T}$	vecteur tangent à la berge	$\vec{L}$	
$\vec{N}$	vecteur normal à la berge	$\vec{L}$	
$W$	largeur ( <i>Width</i> )	$L$	10 cm
$D$	profondeur ( <i>Depth</i> )	$L$	1 cm
$S$	pente longitudinale ( <i>Slope</i> )		1 %
$Q_w$	débit volumique d'eau	$L^3.T^{-1}$	1 L/min
$Q_s$	débit de sédiments massique ou en nombre de particules	$M.T^{-1}$	1 g/min
$\phi$	pente de la berge avec l'horizontale		15°
$\phi_A$	angle d'avalanche		36°
$\rho$	densité du fluide	$M.L^{-3}$	$10^3 \text{ kg/m}^3$
$\nu$	viscosité cinématique du fluide	$L^2.T^{-1}$	$10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
$g$	accélération de la gravité	$L.T^{-2}$	$10 \text{ m/s}^2$
$u$	vitesse du fluide	$L.T^{-1}$	10 cm/s
$\tau$	contrainte fluide	$M.L^{-1}.T^{-2}$	0,1 Pa
$C_f$	coefficient de frottement (Chezy, Manning)		0,1
$d_s$	diamètre des grains	$L$	250 $\mu\text{m}$
$\rho_s$	densité des sédiments	$M.L^{-3}$	$1,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
$u_s$	vitesse du fluide au niveau des sédiments	$L.T^{-1}$	0,1 cm/s
$V_s$	vitesse de Stokes $V_s = d_s^2(\rho_s - \rho)g/(18\rho\nu)$	$L.T^{-1}$	1 cm/s
$v$	vitesse des sédiments dans la direction de l'écoulement	$L.T^{-1}$	0,5 cm/s
$n$	nombre de grains en mouvement par unité de surface	$L^{-2}$	$1 \text{ mm}^{-2}$
$\alpha, \beta$	facteurs de forme		1
$\mathcal{L}$	longueur caractéristique du sédiment $\mathcal{L} = \alpha d_s(\rho_s - \rho)/(\beta\rho)$	$L$	25 $\mu\text{m}$
$F_{\parallel}$	force tangentielle à la surface des sédiments	$M.L.T^{-2}$	10 nN
$F_{\perp}$	force perpendiculaire à la surface des sédiments	$M.L.T^{-2}$	10 nN
$\theta$	nombre de Shields $\theta = \tau/(d_s(\rho_s - \rho)g)$		0,1
$\Theta$	nombre de Shields généralisé $\Theta = F_{\parallel}/F_{\perp}$		1
$\theta_t$	nombre de Shields critique		0,1
$\mu$	seuil de mise en mouvement $\mu = \tan(\phi_A)$		0,7
$q_s$	débit de sédiments dans la direction de l'écoulement	$L^{-1}.T^{-1}$	$50 \text{ mm}^{-1}/\text{s}$
$q_d$	débit de sédiments diffusif perpendiculaire à l'écoulement	$L^{-1}.T^{-1}$	$1 \text{ mm}^{-1}/\text{s}$
$\ell_d$	longueur de diffusion	$L$	10 $\mu\text{m}$
$\zeta$	coefficient de diffusion $\zeta = \ell_d v$	$L^2.T^{-1}$	$1 \text{ mm}^2/\text{s}$
Re	nombre de Reynolds $\text{Re} = uD/\nu$		500
$\text{Re}_s$	nombre de Reynolds de grain $\text{Re}_s = u_s d_s/\nu$		10
Pe	nombre de Peclet $\text{Pe} = v\mathcal{L}/(\zeta S)$		500

TABLE 1 – Table des symboles utilisés et leur valeur typique dans nos expériences.



# Chapitre 1

## Avant-propos

La géomorphologie est la science qui explique la forme des paysages. Elle s'efforce de répondre aux questions concernant par exemple la taille des dunes, la formation des vallées ou la largeur d'équilibre des rivières. Les réponses à ces questions permettent de reconstituer l'histoire géologique des paysages et de prédire comment ils vont évoluer en réponse à un forçage extérieur. Le soulèvement tectonique crée des montagnes, le vent peut transporter le sable et ainsi créer des dunes ou les rivières incisent le paysage. Si les reliefs sont observés et analysés depuis longtemps, les premières explications physiques avancées pour expliquer leurs morphologies sont plus récentes. D'échelles et de formes très variées, ces reliefs peuvent souvent être appréhendés par des phénomènes physiques intuitifs.

Ces dernières années, de nombreuses recherches se sont concentrées sur la physique des matériaux granulaires et l'étude du couplage entre l'air et des sédiments<sup>[1]</sup>. Dans ce travail, nous nous focaliserons sur l'étude du couplage entre l'eau et les sédiments dans le cadre de l'étude des rivières.

Si l'écoulement est gouverné par la forme du lit qui le délimite, ce lit est modelé par la contrainte que lui impose l'écoulement. Malgré cette apparente complexité, de nombreuses mesures ont permis de montrer que les rivières ont un comportement général relativement simple. Leur largeur, par exemple, varie proportionnellement à la racine carrée du débit d'eau. Cette loi est étonnamment robuste et se vérifie pour tous les cours d'eau terrestres, depuis les ruisseaux de quelques dizaines de centimètres de large jusqu'au fleuve Amazone (quelques dizaines de kilomètres de large). Cette loi d'échelle nous laisse penser que les phénomènes physiques qui contrôlent la forme des rivières ne dépendent pas du cours d'eau.

On peut distinguer deux types de rivières : les rivières à fond rocheux (surtout présentes en montagne) qui coulent sur la roche mère à nu et les rivières alluviales (présentes en plaine) qui coulent sur une couche épaisse de sédiments. Contrairement aux rivières à fond rocheux, l'écoulement des rivières alluviales peut librement se charger en sédiments ou au contraire en déposer. Nous limiterons notre étude à ces seules rivières alluviales, qui présentent la particularité de créer leur lit dans les sédiments qu'elles apportent et donc de s'auto-former.

En étudiant plus précisément les interactions entre le lit de la rivière et l'écoulement, on remarque que lorsque la contrainte subie par les sédiments est suffisamment importante, les grains qui composent la surface du lit sont transportés par l'écoulement, ce qui crée un débit de sédiments susceptibles de se déposer en aval. On distingue alors deux types de transport : le transport en suspension et le transport par charriage. Le



FIGURE 1.1 – Rivière passant d’une géométrie en tresses (à gauche) à une géométrie en méandres (à droite). Le trait blanc représente 100 m et la rivière coule de la gauche vers la droite (Tiān Shān, Chine, Google Earth).

transport en suspension ne concerne que les particules suffisamment fines (des limons ou des sables très fins). Les particules sont alors transportées sur de très longues distances par l’écoulement. Les sédiments plus grossiers (sables, graviers, galets...) sont habituellement trop lourds pour être en suspension, ils sont enlevés du lit par la contrainte fluide et poussés par le fluide en aval, roulant sur le fond avant de se redéposer sur le lit après une distance parcourue de l’ordre de quelques dizaines de diamètres de grain. C’est le transport par charriage<sup>[2;3]</sup>. Ce type de transport est le principal responsable des changements morphologiques (les particules transportées en suspension étant souvent trop fines pour exercer une influence importante sur la forme de la rivière).

Les variations de transport sédimentaire peuvent changer drastiquement la forme des rivières alluviales<sup>[4;5]</sup>. Dans la nature, les rivières avec un fort débit de sédiments ont plutôt une forme de tresse, c’est-à-dire qu’elles sont composées de plusieurs chenaux séparés par des bancs de sédiments affleurant à la surface, tandis que les rivières transportant peu de sédiments n’ont qu’un seul chenal qui peut présenter une sinuosité, on parle alors d’une rivière en méandres<sup>[6]</sup>. Une même rivière peut d’ailleurs passer d’une morphologie en tresses à une morphologie en méandres en l’espace de quelques kilomètres à peine<sup>[7]</sup> (figure 1.1).

Au cours de cette thèse, nous étudierons comment la physique à l’échelle du sédiment permet de déterminer la forme d’équilibre des chenaux. Comme nous ne pouvons pas contrôler les paramètres gouvernant les rivières naturelles (choix du débit d’eau ou de la pente par exemple) et que les mesures sur le terrain ne sont pas aisées, nous avons choisi dans cette étude de vérifier nos modèles théoriques avec des expériences de laboratoire.

Nous commencerons par discuter le cas limite des rivières qui ne transportent pas de sédiments. Nous montrerons que la contrainte subie par la surface du lit est alors égale au seuil de mise en mouvement, c’est-à-dire à la contrainte nécessaire pour faire bouger un grain initialement au repos. Dans ce cas, le débit d’eau détermine entièrement la forme et la pente de la rivière.

Nous nous intéresserons ensuite à la physique des sédiments charriés en étudiant la trajectoire des grains transportés. Nous expliquerons comment ce charriage de grains modifie la section d’une rivière qui transporte des sédiments.

# Première partie

## Rivières sans transport de sédiments



James Bond mesurant la largeur d'une rivière.

*L'Homme au pistolet d'or (The Man with the Golden Gun). G. Hamilton, 1974*

Expérience de création de rivière

$Q_w = 0.8 \text{ L/min}$   
1 image/4 minutes



# Chapitre 2

## Introduction à la géomorphologie fluviale

### 2.1 Les rivières naturelles

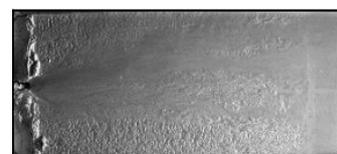
Les rivières naturelles présentent une grande diversité d'échelles et de formes. La formation de ces rivières résulte de l'érosion du paysage par un écoulement d'eau. Elle dépend donc du débit d'eau, c'est-à-dire du taux de précipitations couplé au relief du paysage mais aussi du type de sédiments transportés (sable, galets, roches...). Dans ce travail, nous nous intéresserons uniquement aux rivières alluviales, c'est-à-dire aux rivières qui circulent sur un lit de sédiments qu'elles peuvent éroder. Il existe aussi des rivières à fond rocheux où le lit est fixe.

Nous pouvons distinguer plusieurs échelles dans ces systèmes : tout d'abord l'échelle élémentaire est basée sur les grains de sables qui composent le lit. L'organisation de ces grains entre eux détermine la forme du lit de la rivière. Puis l'échelle avec laquelle nous sommes le plus familier : elle concerne la largeur et la profondeur des rivières. Certains phénomènes morphologiques comme l'apparition de méandres ou de tresses se réalisent aussi à cette échelle. Si nous nous éloignons encore, nous constatons que les rivières interagissent les unes avec les autres pour former un réseau. Des affluents se jettent dans le fleuve et augmentent soudainement son débit d'eau. A cette échelle, chaque rivière influe sur la morphologie de tous les bassins versants situés à proximité. Malgré cette diversité d'échelle, ces systèmes sont tous bien définis. Ils présentent plusieurs propriétés remarquables.

Nous travaillerons ici à l'échelle d'un chenal. C'est-à-dire que nous resterons à une échelle où il n'y a pas d'affluent qui entre en jeu et nous considérerons que le débit d'eau et la topographie du paysage sont constants à l'échelle de notre étude. La première caractéristique d'une rivière à cette échelle est sa largeur. C'est le paramètre observable et mesurable le plus facilement. C'est aussi celui qui a été le plus étudié. Regardons une rivière par satellite (figure 2.1). Malgré des méandres, nous voyons que cette largeur est globalement constante.

Cette largeur constante est une propriété remarquable des rivières. Une fois la largeur connue, intéressons nous à la forme de la rivière. La section de cette même rivière est présentée figure 2.1. Le profil comporte une concavité qui n'est pas parfaitement symétrique et qui présente quelques angles mais qui semble dans l'ensemble relativement facile à décrire.

En dépit de cette apparente simplicité, nous sommes incapables de prédire la forme



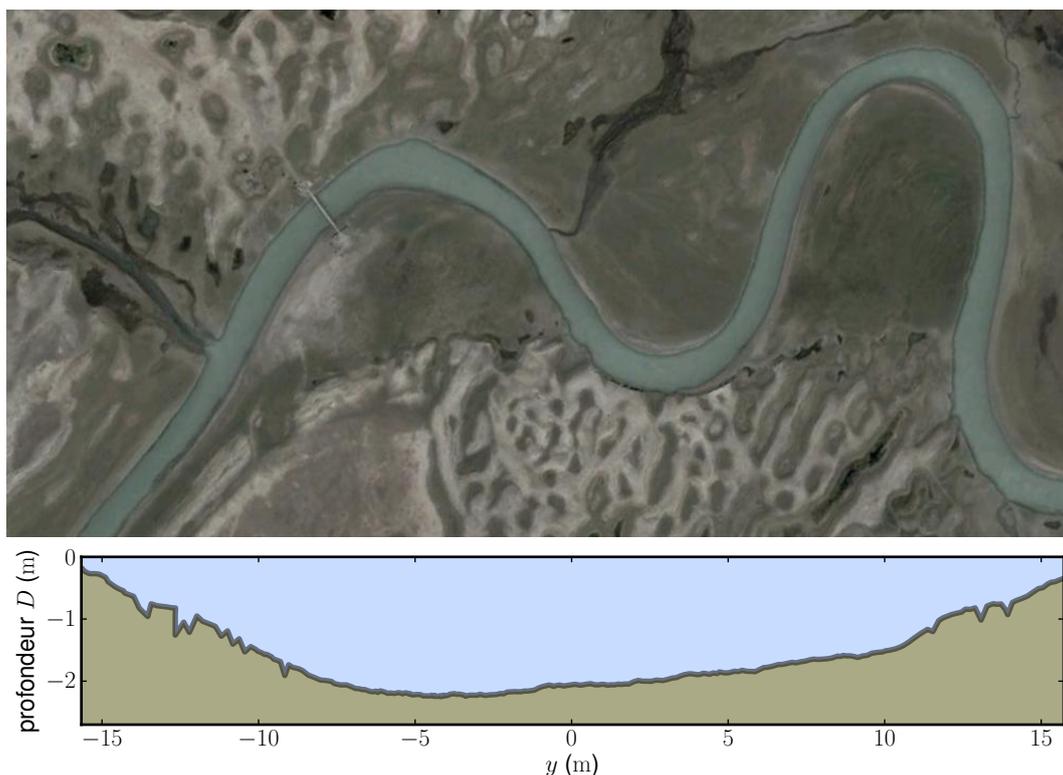


FIGURE 2.1 – Photo satellite et section de la rivière Kaidu (Chine, Google Earth).

d'une rivière à partir d'un débit ou d'une pente fixés.

L'étude de la forme d'équilibre des rivières commença à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et fut à ses débuts motivée par le besoin de construction de canaux d'irrigation. Les ingénieurs cherchaient à comprendre comment construire un canal stable, c'est-à-dire qui ne serait sensible ni à l'érosion, ni au dépôt de sédiments et qui conserverait sa forme et son efficacité au cours du temps. Les premières études furent réalisées au Pakistan par Kennedy<sup>[8]</sup>, qui mesura la vitesse moyenne de l'écoulement, la profondeur, la largeur et le débit d'eau dans une trentaine de canaux.

A partir de là, les ingénieurs multiplièrent les mesures pour essayer de relier ces quantités entre elles. En se basant sur des mesures de canaux et de rivières, Lindley et Woods, vers 1920<sup>[9]</sup>, proposèrent des relations entre la largeur et la profondeur des rivières et trouvèrent que le produit de la pente par le logarithme du débit d'eau était constant.

En 1930, Lacey<sup>[10]</sup> reprit toutes les mesures réalisées précédemment et tenta de relier les caractéristiques morphologiques des rivières naturelles (largeur, profondeur et pente) au débit d'eau. Il établit empiriquement que la largeur de la rivière variait comme la racine carrée du débit (loi de Lacey, figure 2.2) et proposa des équations pour décrire la forme des sections. Il remarqua aussi que ces relations, appelées équations de régime, dépendaient de la quantité et de la nature du sédiment transporté. Ces équations de régime sont valables sur de nombreux ordres de grandeurs, allant du ruisseau au fleuve.

Plusieurs autres lois furent trouvées. Ainsi, de même que la largeur, la pente d'une rivière varie en fonction de la racine carrée du débit (figure 2.3).

Les rivières présentent aussi une grande variété de morphologies : certaines sont composées d'un seul chenal tandis que d'autres sont constituées de plusieurs chenaux qui se croisent (rivières en tresses). Ces types de rivières n'ont pas les mêmes comportements.

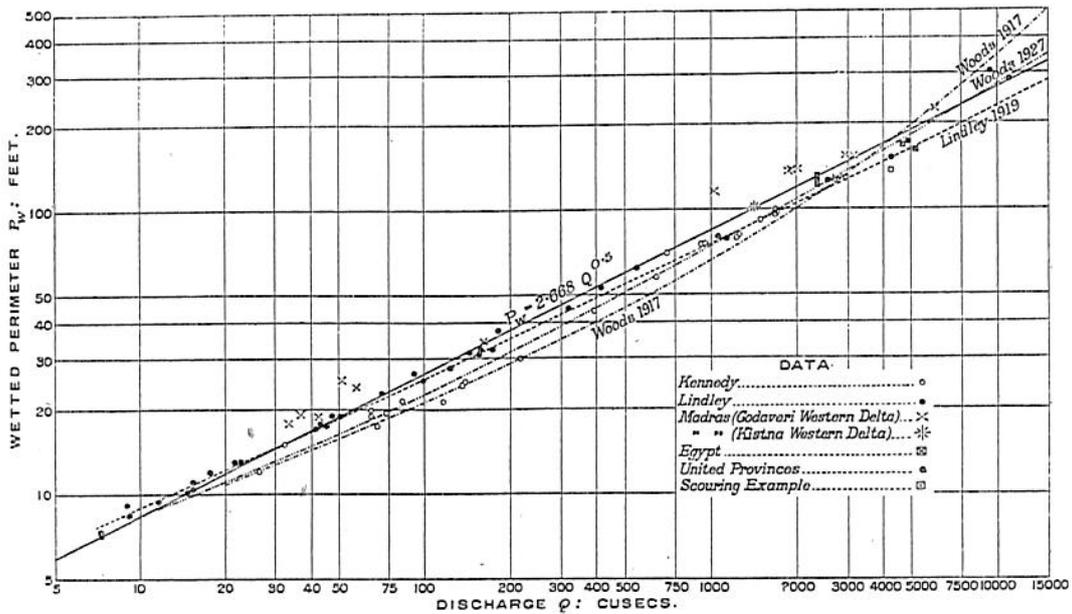


FIGURE 2.2 – Largeur de la rivière en fonction de son débit d'eau. Lacey 1930<sup>[10]</sup>

En particulier, les rivières en tresse ont statistiquement une pente et un débit de sédiments plus importants que les rivières en méandres<sup>[6;7;11]</sup>.

Les équations de régime discutées précédemment sont fondées sur l'interprétation de mesures effectuées sur le terrain et les relations trouvées sont donc empiriques<sup>[9;10;12;13]</sup>. En 1951, Glover et Florey<sup>[14]</sup> proposèrent un modèle physique pour expliquer la forme du profil d'une rivière. Ce modèle s'appuie sur le postulat qu'à l'équilibre, la contrainte appliquée sur les sédiments à la surface du lit correspond au seuil de mise en mouvement.

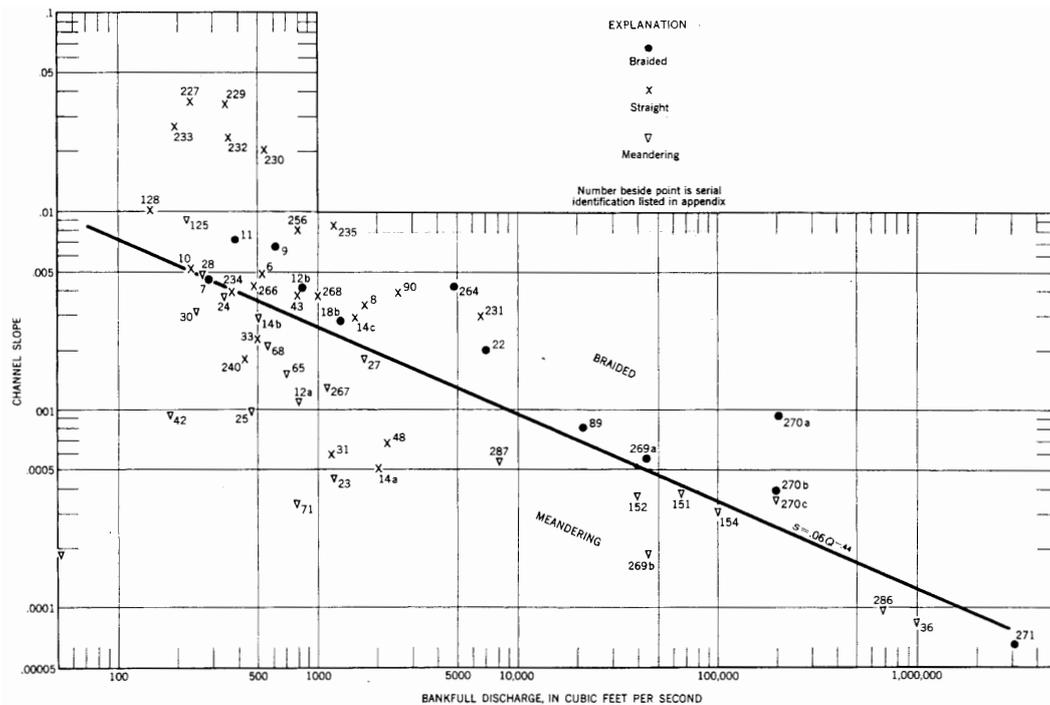
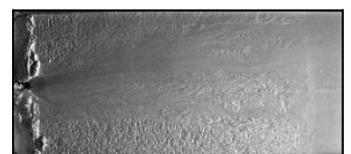


FIGURE 2.3 – Pente de la rivière en fonction de son débit d'eau. Leopold 1957<sup>[11]</sup>



Cette hypothèse contraint la forme de la rivière. La compréhension de ce mécanisme nécessite l'analyse de ce seuil de mise en mouvement.

## 2.2 Le seuil de mise en mouvement

Intuitivement, on sait qu'il faut exercer une certaine force sur un solide au repos pour qu'il se mette à bouger. Cela est dû au fait que les solides en contact frottent entre eux. Les premières études de tribologie (science des frottements) ont été réalisées par de Vinci (figure 2.4). Il montra expérimentalement que la force nécessaire pour mettre en mouvement un solide au repos sur une surface ne dépend pas de sa surface de contact. A la fin du XVII<sup>e</sup> siècle, Amontons confirma ce résultat<sup>[15]</sup> et trouva de plus que la force nécessaire au mouvement du solide est proportionnelle à la pression exercée sur ce solide. Le rapport entre ces deux forces est appelé seuil de mise en mouvement et dépend du matériau. L'étude la plus complète fut menée par Coulomb près d'un siècle plus tard<sup>[16]</sup>. Il mesura précisément différents seuils de mise en mouvement et étudia la différence de frottement entre deux solides au repos et en mouvement.

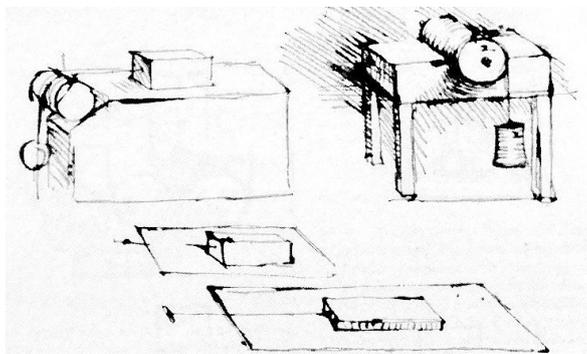


FIGURE 2.4 – Schémas d'expériences réalisées par de Vinci pour mesurer le frottement solide. Chaque solide, quelle que soit sa surface, est soumis à une force constante par le biais d'un poids.

### 2.2.1 Angle d'avalanche

Ce seuil de mise en mouvement apparaît clairement dans la nature : c'est l'angle d'avalanche. Examinons un tas de sable. L'angle que fait le tas de sable avec l'horizontale est sensiblement le même, quel que soit le tas de sable considéré. Nous le notons  $\phi_A$ , angle d'avalanche. On le constate notamment sur la face d'avalanche des dunes de la figure 2.5.

Selon la loi de Coulomb, la force tangentielle, que nous noterons  $F_{\parallel}$ , nécessaire pour faire bouger un solide doit être supérieure en norme à la force normale, notée  $F_{\perp}$ , multipliée par un coefficient de friction statique  $\mu$  qui dépend du solide. Dans le cas limite, au seuil de mise en mouvement,

$$F_{\parallel} = \mu F_{\perp}. \quad (2.1)$$

Pour un tas de sable, la seule force à laquelle est soumise un grain de sable est son poids  $\vec{F}_g$ . On peut décomposer cette force en une composante tangentielle au tas et une

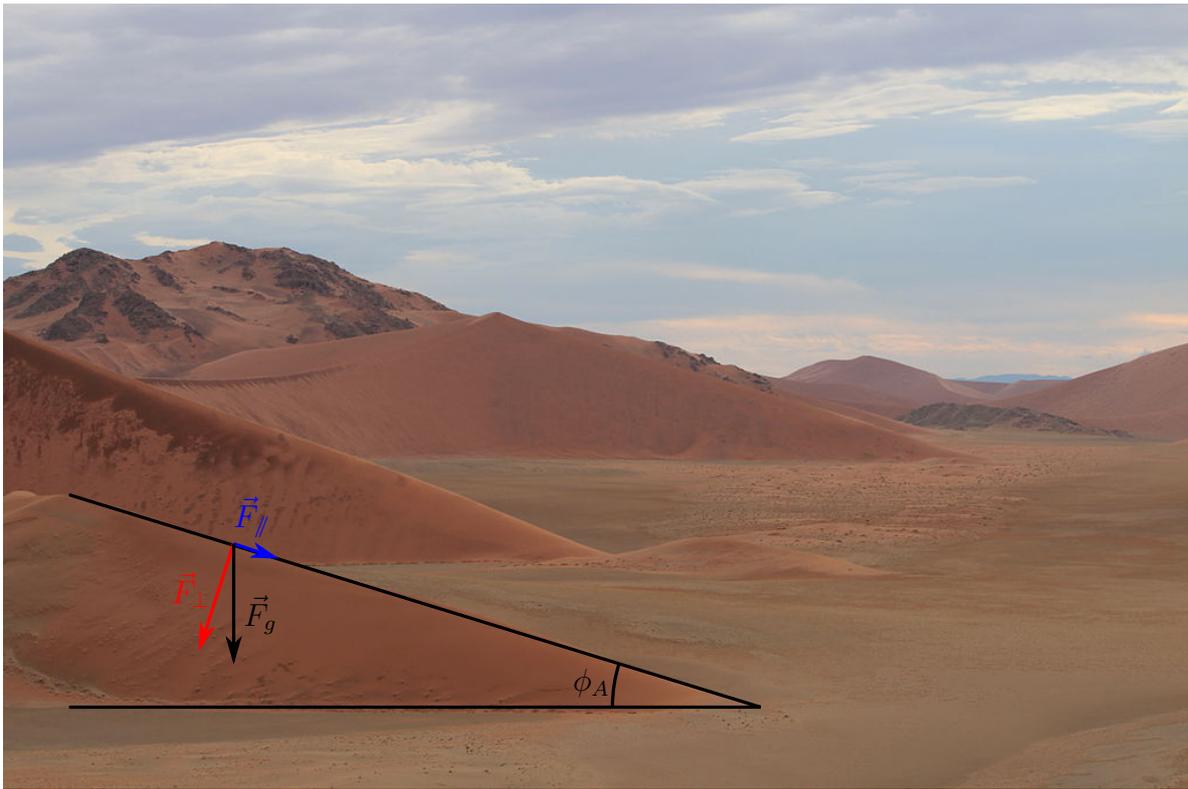


FIGURE 2.5 – Dunes, Sossusvlei. Namibie. Les dunes forment toutes le même angle avec l'horizontale,  $\phi_A$ . (source : [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:2011-02-09\\_066.JPG](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:2011-02-09_066.JPG), Anagoria)

composante normale au tas :

$$\begin{aligned} F_{\parallel} &= F_g \sin \phi \\ F_{\perp} &= F_g \cos \phi \end{aligned} \quad (2.2)$$

L'angle d'avalanche  $\phi_A$  est l'angle maximal que peut présenter le tas de sable. On peut calculer cet angle en fonction du coefficient de friction  $\mu$ .

$$\begin{aligned} \frac{F_{\parallel}}{F_{\perp}} &= \tan \phi_A = \mu \\ \phi_A &= \arctan \mu \end{aligned} \quad (2.3)$$

Si  $\phi > \phi_A$ , alors la force tangentielle est suffisamment importante pour que le grain bouge, entraîné par la gravité. Il se forme une avalanche et l'angle du tas diminue jusqu'à atteindre un angle de repos, plus faible de quelques degrés que l'angle d'avalanche. Ces deux angles étant très proches, nous ne les différencierons pas durant cette thèse.

Si  $\phi < \phi_A$ , alors le tas est stable et le sable peut continuer à s'accumuler jusqu'à atteindre l'angle d'avalanche.

Concrètement, l'angle d'avalanche généralement mesuré dans la nature est  $\phi_A \approx 35^\circ$ , ce qui correspond à un seuil de mise en mouvement de  $\mu \approx 0,7$ . C'est cette valeur que nous utiliserons par défaut dans la suite de la thèse.



### 2.2.2 Érosion des grains par un fluide

Depuis les années 1930, les ingénieurs ont cherché à comprendre les mécanismes conduisant au transport de sédiments dans un écoulement. L'article fondateur fut écrit en 1936 par Shields<sup>[17]</sup>. Il réalisa une expérience simple pour étudier le transport de sédiments : il remplit un canal de sédiments et lui imposa une pente. Une fois le lit prêt, il fit couler de l'eau sur les sédiments, observa leurs mouvements et comment le lit évoluait. En augmentant la contrainte, il remarqua l'existence d'une contrainte fluide critique à partir de laquelle les grains commençaient à rouler sur le lit. C'est la contrainte correspondant au seuil de mise en mouvement (figure 2.6). S'il continuait à augmenter la contrainte, les grains étaient alors soulevés pour se mélanger à l'écoulement (seuil de mise en suspension). Shields établit la courbe de mise en mouvement des grains.

Dans les années 1960, Bagnold<sup>[18]</sup> continua ces travaux et mit en relation le mouvement des grains avec leur disposition sur le lit et leurs interactions avec la couche limite de l'écoulement. Il en déduisit en particulier une courbe donnant la contrainte du seuil de mise en suspension. Au-delà de ce seuil, les grains restent en suspension dans l'écoulement.

Depuis, de nombreuses études ont été faites pour déterminer le seuil de mise en mouvement, que ce soit pour des écoulements visqueux<sup>[20;21]</sup>, intermédiaires<sup>[19]</sup> ou turbulents<sup>[22]</sup>, à une ou plusieurs tailles de grains<sup>[23]</sup>.

Considérons un grain de diamètre  $d_s$  plongé dans un fluide de densité  $\rho$ . Ce grain, de densité  $\rho_s$ , est toujours soumis à son poids  $F_g$ , en partie compensé par la poussée d'Archimède lorsqu'il est plongé dans un liquide. La somme de ces deux forces, appelée poids déjaugé, s'écrit

$$F_g = \alpha d_s^3 (\rho_s - \rho) g \quad (2.4)$$

avec  $g$  l'accélération de la gravité et  $\alpha$  un facteur de forme d'ordre 1 qui dépend de la géométrie du grain ( $\alpha = \pi/6$  pour une sphère et  $\alpha = 1$  pour un cube par exemple).

La force qui met le grain en mouvement provient du fluide. On note cette force  $F_f$ . La force fluide qui s'exerce sur un grain est proportionnelle à la contrainte  $\tau$  qu'exerce le fluide sur le fond, multipliée par la surface effective du grain de l'ordre de  $d_s^2$ . Nous pouvons donc écrire

$$F_f = \beta d_s^2 \tau \quad (2.5)$$

avec  $\beta$  un facteur de forme d'ordre 1 qui dépend, entre autres, de la géométrie du grain et de la surface d'application de la contrainte. Quelques exemples de valeurs de  $\beta$  sont illustrés figure 2.7 en supposant différentes surfaces d'application (carré représentant la surface moyenne occupée par un grain au sol, projection normale sur un disque ou surface de la demi-sphère du grain). Malgré les variations de  $\beta$ , le rapport  $\alpha/\beta$  reste du même ordre,  $\alpha/\beta \approx 0,5$ .

La détermination exacte de  $\beta$  est complexe. Ce coefficient dépend aussi de l'arrangement du grain par rapport aux autres grains du lit<sup>[24]</sup> (si le grain est protégé du fluide par ses voisins, la force du fluide sur le grain sera écrantée et  $\beta$  sera plus petit que si le grain est posé sur un fond totalement lisse) et du nombre de Reynolds de grain.

Dans un fluide, le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces inertielles et les forces visqueuses dans l'écoulement  $Re = ul/\nu$  avec  $u$  et  $l$  respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques de l'écoulement et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. Le Reynolds de grain  $Re_s$  est le nombre de Reynolds rapporté à l'échelle du grain. A l'échelle du grain, la longueur caractéristique devient la dimension du grain  $d_s$  et la vitesse caractéristique est la vitesse du fluide au niveau du grain  $u_s$  qui n'est pas

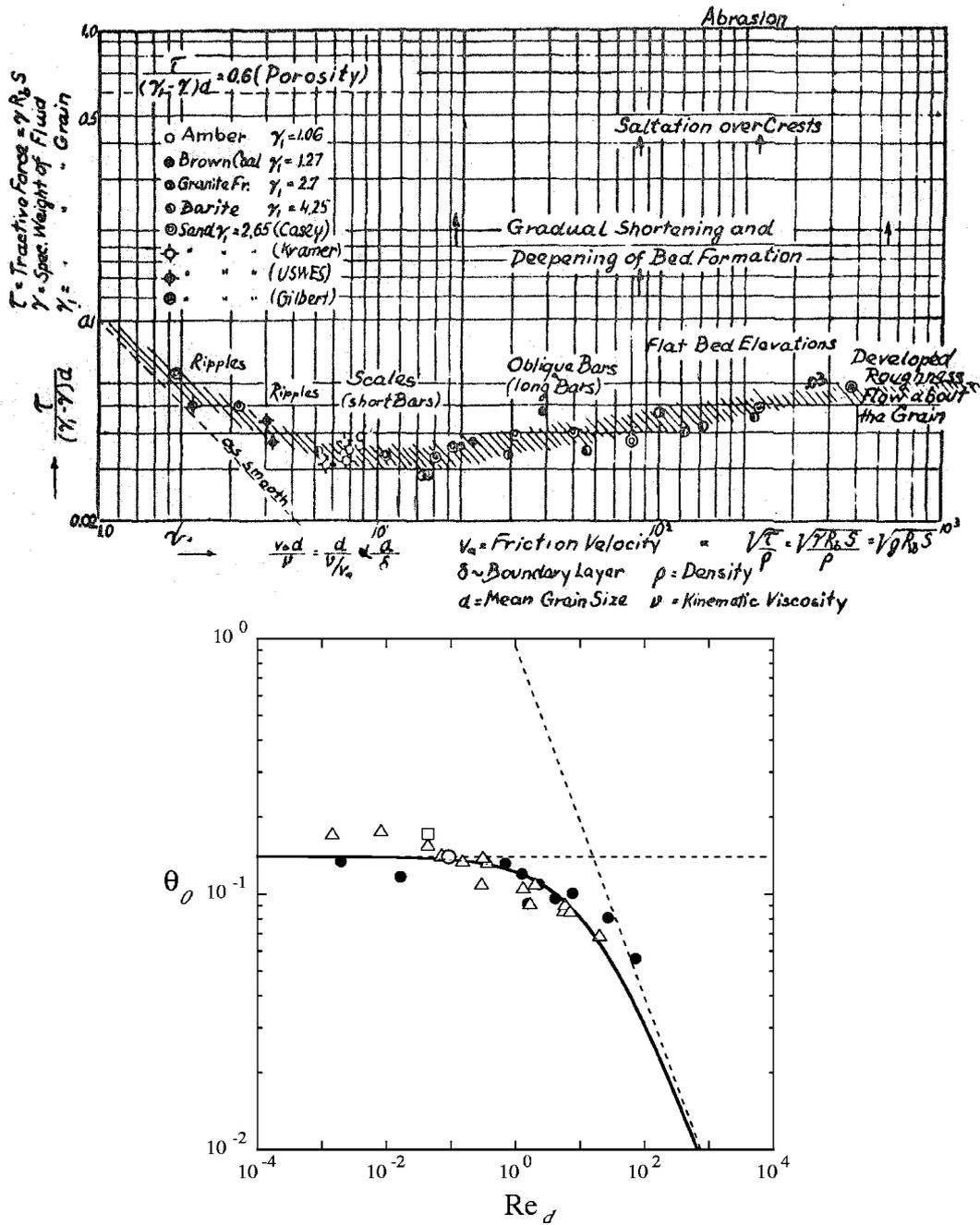


FIGURE 2.6 – Haut : seuil de mise en mouvement mesuré par Shields en 1936<sup>[17]</sup>. Bas : seuil de mise en mouvement mesuré par Loiseleux et coll. en 2005<sup>[19]</sup>

nécessairement la vitesse de l'écoulement  $u$ . La viscosité reste la même. Le Reynolds de grain s'écrit donc

$$Re_s = \frac{u_s d_s}{\nu} \tag{2.6}$$

Dans le cas d'un grain immergé sur un lit plat horizontal, la loi de Coulomb s'écrit alors

$$\frac{F_{\parallel}}{F_{\perp}} = \frac{F_f}{F_g} = \frac{\beta \tau}{\alpha d_s (\rho_s - \rho) g} = \mu \tag{2.7}$$

En géomorphologie fluviale, la loi de Coulomb est souvent exprimée en fonction du nombre de Shields  $\theta$ , défini comme le rapport entre la contrainte fluide et le poids.



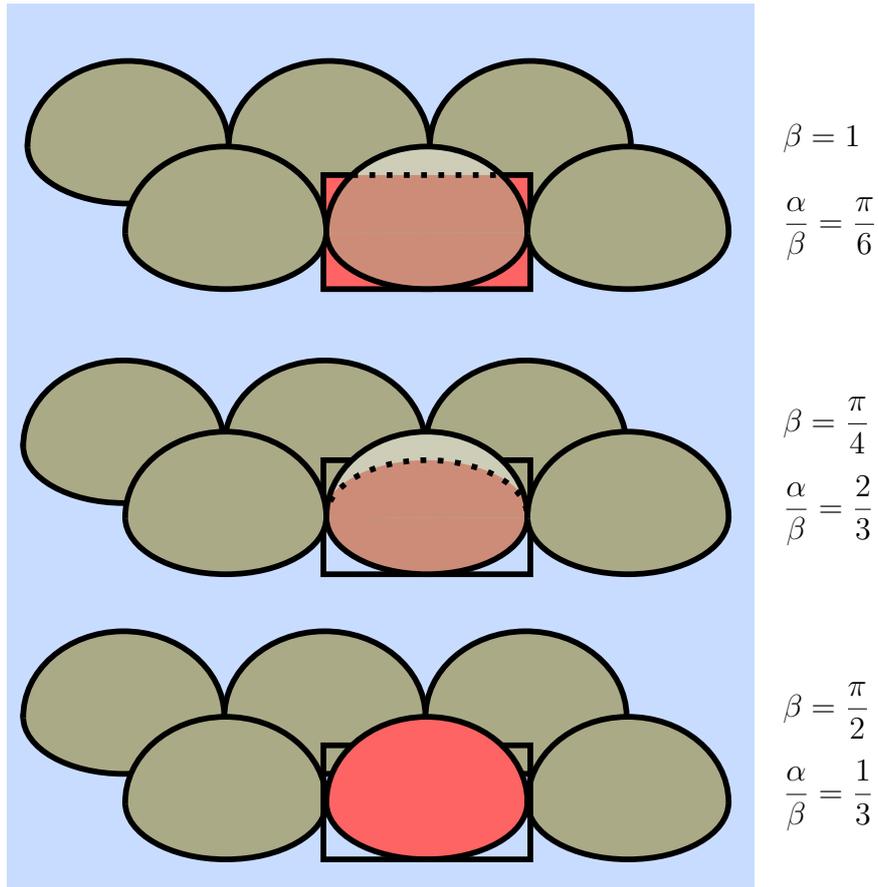


FIGURE 2.7 – Comparaison de  $\beta$  en fonction de la surface d'application (surface rouge) de la contrainte fluide en supposant un arrangement homogène.

$$\theta = \frac{\tau}{d_s (\rho_s - \rho) g} \quad (2.8)$$

Le nombre de Shields critique  $\theta_t$  est le nombre de Shields correspondant au seuil de mise en mouvement. Ce nombre de Shields critique est directement lié au seuil de mise en mouvement par les facteurs de forme.

$$\theta_t = \mu \frac{\alpha}{\beta} \quad (2.9)$$

Le nombre de Shields critique doit donc être une constante égale à environ la moitié du coefficient de friction, c'est-à-dire  $\theta_t \approx 0,3$ . Ces résultats sont valables lorsque le nombre de Reynolds de grain est suffisamment faible<sup>[21;25]</sup>. Nous trouverons en annexe 9 une étude plus complète de ce nombre de Shields pour différents nombres de Reynolds.

## 2.3 Quelle forme a une rivière sans transport ?

### 2.3.1 Contrainte sur le lit

Le seuil de mise en mouvement dépend donc de la contrainte exercée par le fluide. Afin de déterminer la forme de la rivière, Glover et Florey font d'abord l'hypothèse que

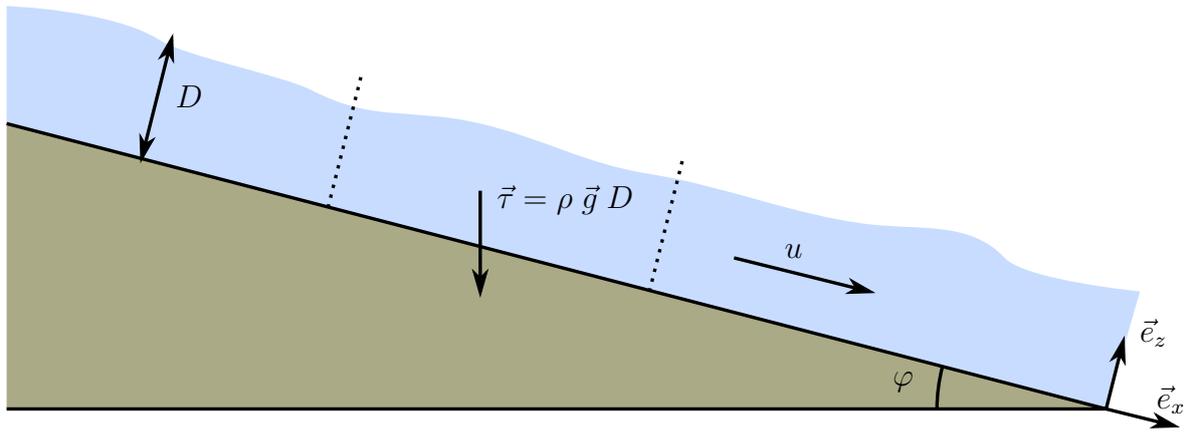


FIGURE 2.8 – Écoulement de la rivière dans le sens longitudinal sur un plan incliné de pente  $S = \tan \varphi$ .

la contrainte fluide est proportionnelle à la hauteur d'eau. Cette hypothèse se démontre à partir d'un bilan de quantité de mouvement.

Nous définissons une base orthonormée  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  telle que l'écoulement moyen de la rivière a lieu dans la direction  $x$  et que le vecteur  $\vec{e}_z$  soit dans la direction verticale. La rivière coule sur un plan incliné d'un angle  $\varphi$ . La pente  $S$  est définie comme  $S = \tan \varphi$ . Les pentes rencontrées dans la nature sont relativement faibles,  $\varphi < 10^{-2}$ <sup>[6]</sup>. Nous pouvons donc considérer  $\varphi \ll 1$  d'où  $\cos \varphi = 1$  et  $\sin \varphi = S$ .

De plus, nous supposons qu'à notre échelle la rivière est rectiligne et uniforme. A l'équilibre, la vitesse de la rivière est constante, sa quantité de mouvement est donc conservée. L'écoulement est soumis à deux forces : la gravité qui accélère la rivière et le frottement sur le fond qui a tendance à la ralentir. A l'équilibre, ces deux forces se compensent. Pour une rivière à fond plat, la réaction normale des grains sur le lit compense la projection du poids de la colonne d'eau dans la direction  $\vec{e}_z$ . La projection des forces dans la direction de l'écoulement nous permet alors de déduire la contrainte fluide sur le fond  $\tau$  :

$$\tau = \rho g D S. \quad (2.10)$$

avec  $D$  la hauteur d'eau.

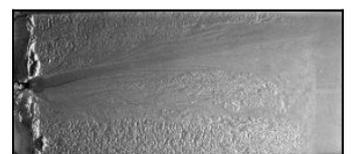
La force fluide est proportionnelle à la hauteur d'eau et à la pente de la rivière. Ce résultat est indépendant de la nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent) et est utilisé dans la plupart des études sur les rivières<sup>[26]</sup>.

### 2.3.2 Forme d'équilibre

Regardons maintenant la section d'une rivière. La surface du lit fait un angle avec l'horizontale noté  $\phi$  (figure 2.9). Lorsque le rapport d'aspect, c'est à dire le rapport entre la largeur de la rivière et sa profondeur, est important, cet angle est faible ( $\phi \ll 1$ ) et nous pouvons écrire cet angle en fonction de la variation de la hauteur d'eau le long de la rivière.

$$\phi = -\frac{dD}{dy} = -D' \quad (2.11)$$

Dans la théorie de Coulomb, le rapport entre la force tangentielle et la force normale aux berges de la rivière est une constante égale au seuil de mise en mouvement.



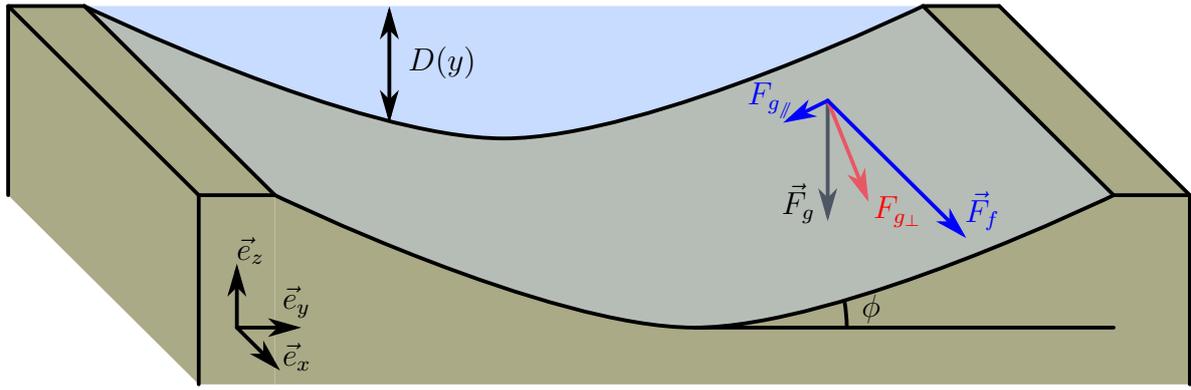


FIGURE 2.9 – Base vectorielle utilisée pour la projection des forces

Seule la gravité a une composante normale à la berge. La force normale est donc

$$F_{\perp} = \alpha d_s^3 (\rho_s - \rho) g. \quad (2.12)$$

La contrainte tangentielle à la berge a deux composantes, la force fluide (équations 2.5 et 2.10) dans la direction de l'écoulement et la force de gravité perpendiculaire à l'écoulement. Ces deux contraintes sont orthogonales, la norme de la contrainte tangentielle peut donc s'écrire

$$F_{\parallel}^2 = (\beta \rho g D S)^2 + (\alpha d_s (\rho_s - \rho) g D')^2. \quad (2.13)$$

Pour une rivière sans transport de sédiments, nous supposons que le rapport entre les contraintes tangentielles et les forces normales est une constante égale au seuil de mise en mouvement. Cette relation s'écrit

$$\sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha d_s} \frac{\rho}{\rho_s - \rho} D S\right)^2 + D'^2} = \mu. \quad (2.14)$$

avec  $\mu$  le seuil de mise en mouvement.

Nous notons  $\mathcal{L}$  la longueur caractéristique du problème, d'une échelle similaire à la taille des sédiments, définie comme

$$\mathcal{L} = \frac{\alpha d_s}{\beta} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \quad (2.15)$$

cette longueur ne dépend que du choix des sédiments et du fluide utilisé. Elle ne dépend au premier ordre ni de la vitesse de l'écoulement ni du débit de la rivière. Les facteurs de forme sont trouvés en mesurant le nombre de Shields critique à l'aide d'une expérience similaire à celle de Shields et en faisant le rapport avec le seuil de mise en mouvement.

En regardant l'équation 2.14, nous remarquons qu'au niveau de la surface ( $D = 0$ ), les berges ont une pente égale à  $\mu$ . Nous retrouvons l'angle d'avalanche des sédiments. En effet, à la surface, la contrainte fluide est nulle et donc les sédiments se comportent comme le bord d'un tas de sable.

La résolution de l'équation différentielle 2.14 s'intègre pour donner une forme analytique de la section de la rivière

$$D(y) = \mu \frac{\mathcal{L}}{S} \cos\left(S \frac{y}{\mathcal{L}}\right) \quad (2.16)$$

Aux facteurs de forme près, nous retrouvons la forme sinusoidale décrite par Glover et Florey<sup>[14]</sup>. Pour un type de sédiment fixé, la taille d'une rivière est déterminée par sa pente  $S$ . En particulier, la pente représente le facteur d'échelle liant la taille d'un grain ( $\mathcal{L}$ ) à la taille d'une rivière ( $D$ ).

Les rivières doivent donc avoir une section de forme sinusoidale quel que soit le débit d'eau. La différence entre un ruisseau et un fleuve sera la taille de cette section. La largeur de la rivière se calcule en cherchant l'endroit où la hauteur d'eau s'annule. Cette largeur, que nous notons  $W$  s'écrit alors

$$W = \pi \frac{\mathcal{L}}{S}. \quad (2.17)$$

Nous trouvons une première loi d'échelle qui est que le produit de la pente de la rivière par sa largeur est une constante. Cette loi a beaucoup plus de conséquences qu'il n'y paraît. En particulier, elle prédit que pour une largeur donnée il n'existe qu'une seule pente d'équilibre possible (et inversement). Pour une rivière où les berges sont au seuil de mise en mouvement, il est donc impossible d'imposer à la fois la pente de la rivière et sa largeur.

Le rapport d'aspect de la rivière, selon que nous considérons sa profondeur maximale ou sa profondeur moyenne, est :

$$\frac{W}{D_M} = \frac{\pi}{\mu} \quad \text{ou} \quad \frac{W}{\langle D \rangle} = \frac{\pi^2}{2\mu}. \quad (2.18)$$

Ce rapport d'aspect ne dépend d'aucun paramètre et est donc constant. Nous obtenons encore une deuxième loi d'échelle qui lie la largeur de la rivière à sa hauteur d'eau. Les paramètres morphologiques de la rivière ( $W$ ,  $D$  et  $S$ ) sont donc reliés entre eux. En choisir un revient à fixer les autres.

Cette théorie fut reprise par Lane<sup>[26]</sup> puis par Henderson<sup>[27]</sup> qui proposa différentes sections de rivières dont les berges étaient au seuil de mise en mouvement (figure 2.10). Tous ces profils étaient basés sur une forme en cosinus (type B). Comme la contrainte est identique sur toute la section, il était possible soit d'insérer une partie plate de profondeur constante (type A) soit au contraire de retirer une partie du profil (type C). On obtenait un profil modifié qui était toujours au seuil de mise en mouvement en tout point.

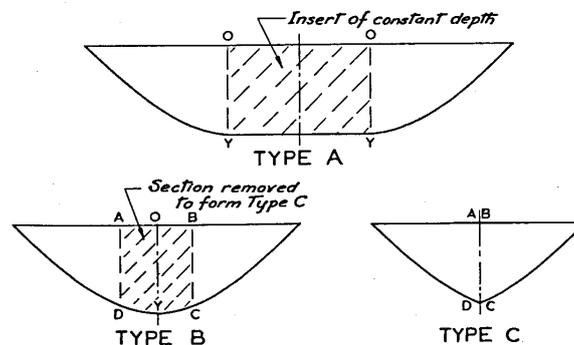
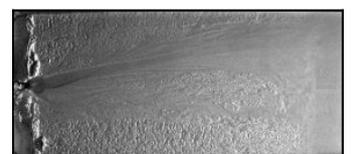


FIG. 2.—ALTERNATIVE TYPES OF STABLE CHANNEL PROFILE

FIGURE 2.10 – Profils de rivières à contrainte constante basés sur une forme d'équilibre en cosinus. Henderson 1961<sup>[27]</sup>



## 2.4 Les équations de régime pour un écoulement turbulent

### 2.4.1 Raisonnement théorique

Dans la nature, le seul paramètre fixé n'est ni la largeur, ni la pente mais le débit d'eau. Nous cherchons donc à comprendre comment ce débit d'eau influe sur la forme de la rivière. En considérant la section en cosinus de notre rivière, nous pouvons calculer ce débit d'eau en intégrant simplement le profil de vitesse sur la largeur de la section.

Dans les rivières naturelles, l'écoulement est turbulent. La vitesse de la rivière se retrouve de manière dimensionnelle à partir de la contrainte fluide. La contrainte dépend de la vitesse et de la densité du fluide de la manière suivante<sup>[28]</sup> :

$$\tau = \rho (C_f u)^2 \quad (2.19)$$

avec  $u$  la vitesse du fluide moyenne sur la hauteur d'eau et  $C_f$  un coefficient de frottement sans dimension (aussi appelé coefficient de Chezy ou de Manning). Expérimentalement, ce coefficient vaut environ  $C_f \approx 0,1$  mais il peut varier selon la rugosité sur le fond ou encore la vitesse ou la taille de l'écoulement<sup>[29]</sup>. Cette équation est similaire à l'équation de Darcy–Weisbach<sup>[30]</sup> selon laquelle la perte de charge due aux frottements avec le fond est proportionnelle au carré de la vitesse du fluide.

La vitesse de l'écoulement dépend donc de la profondeur d'eau et de la pente et s'écrit

$$u = \frac{\sqrt{g D S}}{C_f} \quad (2.20)$$

Le débit d'eau  $Q_w$  se calcule en intégrant cette vitesse sur la largeur de la rivière

$$Q_w = \int_W \int_D u \, dz \, dy = \mu^{3/2} \frac{2^{3/2} \mathcal{K}[1/2]}{3} \frac{\sqrt{g}}{C_f} \frac{\mathcal{L}}{S^2} \quad (2.21)$$

avec  $\mathcal{K}$  l'intégrale elliptique complète de première espèce :  $\mathcal{K}(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta}}$ . Numériquement,  $\mathcal{K}(1/2) \approx 1,85$ .

Notons qu'il n'y a dans cette formule aucun paramètre ajustable. Le seuil de mise en mouvement, la densité et la taille du grain sont fonctions du sédiment et le coefficient de frottement peut se mesurer. Nous voyons l'apparition de la première équation de régime : le produit du débit d'eau par le carré de la pente est une constante. La pente varie donc comme l'inverse de la racine carrée du débit d'eau.

Pour un débit d'eau fixé, il n'existe qu'une seule pente à l'équilibre. Ce résultat n'est pas du tout intuitif, nous aurions pu penser que la forme des rivières est déterminée et par le débit d'eau et par la pente de la rivière. Ici, cette relation prédit que la rivière modifie son lit jusqu'à ce que ce dernier atteigne la pente d'équilibre correspondant au débit d'eau imposé.

Comme nous avons vu précédemment que la pente, la largeur et la hauteur d'eau étaient liées (équations 2.17 et 2.18), nous pouvons trouver les équations de régime pour les rivières turbulentes<sup>[31]</sup>

$$\begin{aligned}
S &= \mu^{3/4} \sqrt{\frac{2^{3/2} \mathcal{K}[1/2]}{3}} \frac{g^{1/4}}{\sqrt{C_f}} \mathcal{L}^{5/4} \frac{1}{\sqrt{Q_w}} \\
W &= \frac{\pi}{\mu^{3/4}} \sqrt{\frac{3}{2^{3/2} \mathcal{K}[1/2]}} \frac{\sqrt{C_f}}{g^{1/4}} \frac{1}{\mathcal{L}^{1/4}} \sqrt{Q_w} \\
\langle D \rangle &= \frac{\mu^{1/4}}{\pi} \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{\mathcal{K}[1/2]}} \frac{\sqrt{C_f}}{g^{1/4}} \frac{1}{\mathcal{L}^{1/4}} \sqrt{Q_w}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Nous retrouvons la loi de Lacey, à savoir que la largeur augmente proportionnellement à la racine carrée du débit d'eau. Ces équations expriment en plus la variation de la pente et de la hauteur d'eau moyenne avec le débit d'eau. Ces équations, déterminées empiriquement à l'origine, peuvent donc être démontrées<sup>[31;32]</sup> à l'aide d'un modèle simple. Mieux, tous les paramètres de ces équations peuvent être déterminés indépendamment et il n'y a donc pas de paramètre ajustable.

Nous pouvons aussi remarquer un phénomène original, la vitesse moyenne d'une rivière à l'équilibre ne dépend pas du débit d'eau mais seulement des sédiments.

$$\langle u \rangle = \sqrt{\mu} \frac{\sqrt{2} \mathcal{K}[1/2]}{3} \frac{\sqrt{g}}{C_f} \sqrt{\mathcal{L}} \tag{2.23}$$

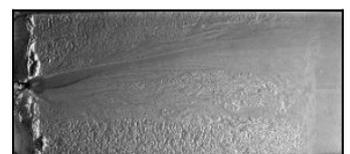
Ce résultat est en accord avec le fait que la vitesse de la rivière est fonction de la contrainte et que nous supposons la contrainte constante sur le lit. Lorsque le débit de la rivière évolue, la variation de débit est absorbée par une modification de la taille et de la pente de la rivière tandis que la vitesse du fluide reste inchangée.

### 2.4.2 Comparaison avec les rivières naturelles

Dans son article de 1930<sup>[10]</sup>, Lacey trace la largeur en fonction du débit d'eau. Figure 2.11, nous reprenons les données compilées par Lacey (Kennedy<sup>[8]</sup> en bleu, Lindley<sup>[9]</sup> en vert et des mesures faites à Madras en cyan) avec la prédiction théorique donnée par l'équation 2.22 (droite rouge). Pour cela, nous avons pris comme paramètres :  $\mu = 0,7$  (angle d'avalanche usuel),  $\theta_t = 0,3$  (seuil de mise en mouvement trouvé pour du sable<sup>[21]</sup>),  $d_s = 0,4 \text{ mm}$  (taille de grain mesurée par Lacey) et  $\rho_s = 2,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  (densité du quartz). Les facteurs de forme sont trouvés en faisant le rapport entre le nombre de Shields critique et le seuil de mise en mouvement (équation 2.9).

L'accord entre nos prédictions théoriques et les données est très bon. La loi de puissance est retrouvée et malgré l'absence de paramètres ajustables, la courbe théorique explique les données rapportées dans la littérature. Cet accord est confirmé par la mesure de la vitesse dans les rivières. Lacey parle d'une valeur mesurée sur le terrain de  $\langle u \rangle = 0,27 \text{ m/s}$  tandis que nous trouvons une vitesse théorique de  $\langle u \rangle \approx 0,37 \text{ m/s}$  avec l'équation 2.23.

Le principal paramètre qui varie d'une rivière à l'autre est la longueur caractéristique  $\mathcal{L}$ . Cette longueur dépend de la taille et de la densité des grains ainsi que de facteurs du forme. La largeur de la rivière est très peu sensible à cette longueur qui n'apparaît qu'à la puissance un quart. Cela explique en partie pourquoi l'accord est si bon.



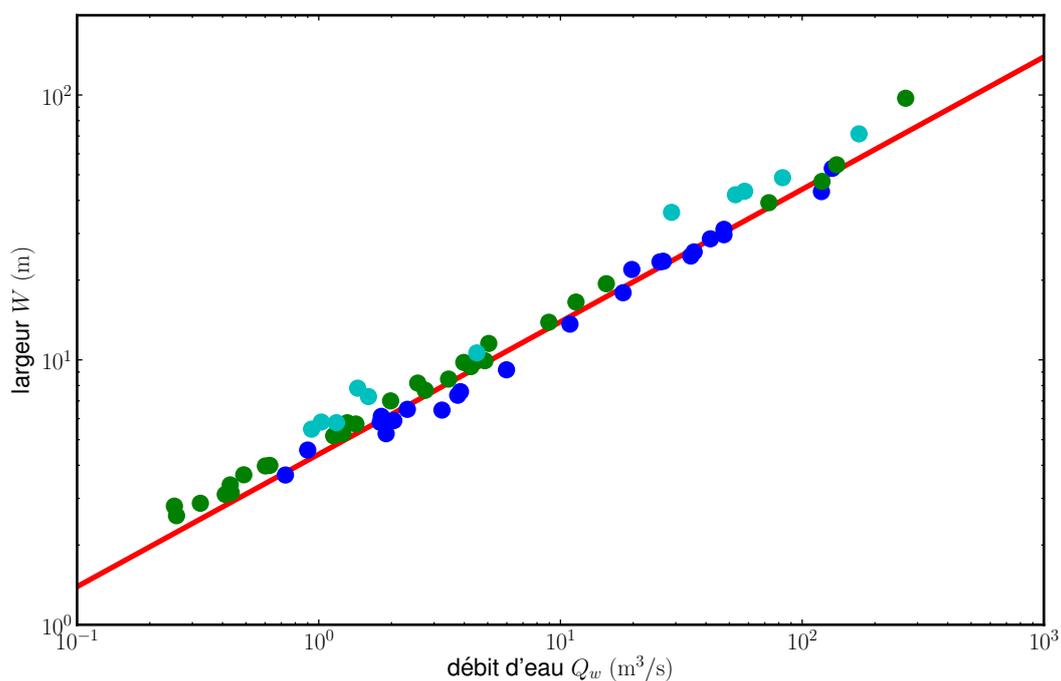


FIGURE 2.11 – Comparaison de l'équation de régime théorique (—) avec les données de Kennedy (●), Lindley (●) et des mesures faites à Madras (●) compilées par Lacey<sup>[10]</sup> en 1930.

## Chapitre 3

# Expériences de rivières en régime laminaire

### 3.1 Pourquoi faire des rivières en laboratoire ?

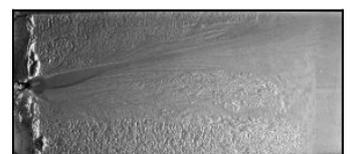
Les mesures de terrain présentent plusieurs difficultés. La première d'entre elles est que l'on ne peut pas maîtriser les paramètres contrôlant la création de la rivière : la pente du terrain et le débit d'eau sont mesurables mais ne peuvent pas être choisis. De plus, toutes les grandeurs changent d'une rivière à l'autre, non seulement les débits d'eau et de sédiments ne sont pas identiques, mais chaque rivière a ses propres tailles de grains, végétation, cohésion des berges... il est donc très difficile d'isoler l'effet d'un paramètre en particulier. Enfin, ces données ne sont pas toujours constantes, le débit d'eau varie au cours de l'année entre les périodes de crues et les périodes de sécheresse.

Il est aussi difficile de savoir si la rivière est à l'équilibre. Même si des études sédimentologiques nous renseignent sur son passé, il est difficile d'avoir accès précisément à son évolution temporelle. Nous mesurons la rivière à l'instant présent sans savoir si elle va continuer à évoluer. En outre, la présence de végétation et la multiplication des constructions (digues, barrages...) imposent parfois la forme des rivières.

Afin de s'affranchir de ces inconvénients, plusieurs laboratoires ont commencé à utiliser des rivières expérimentales<sup>[11;33]</sup>. Ces rivières, qui font en moyenne un mètre de large et une vingtaine de mètres de long sont suffisamment grandes pour maintenir un écoulement turbulent. Elles permettent de faire varier à volonté différents paramètres tels que le débit en eau, le débit de sédiments, la pente de la rivière ou les sédiments utilisés. De plus, les mesures du profil ou de la vitesse moyenne de l'écoulement sont grandement facilitées par rapport aux mesures faites sur le terrain. Ces expériences ont été d'abord conduites pour comprendre les morphologies des rivières et pour vérifier la pertinence des modèles physiques proposés<sup>[34]</sup>.

En 1981<sup>[33]</sup>, Ikeda vérifie la loi de Lacey dans son canal et regroupe des données de rivières expérimentales mesurées par Wolman et par lui-même. Comme pour les rivières naturelles, ces données sont comparables à notre prédiction théorique (équation 2.22, figure 3.1). Dans ces expériences, la taille des grains est comprise entre  $d_s = 0,67$  mm et  $d_s = 2,0$  mm. Notre courbe est tracée pour  $d_s = 1,3$  mm qui correspond à la valeur moyenne de la taille des grains.

Ces gammes de débit sont très réduites par rapport à celles rencontrées dans la nature, néanmoins la loi de Lacey est toujours bien vérifiée même si le préfacteur de notre équation ne correspond pas parfaitement à la largeur trouvée expérimentalement.



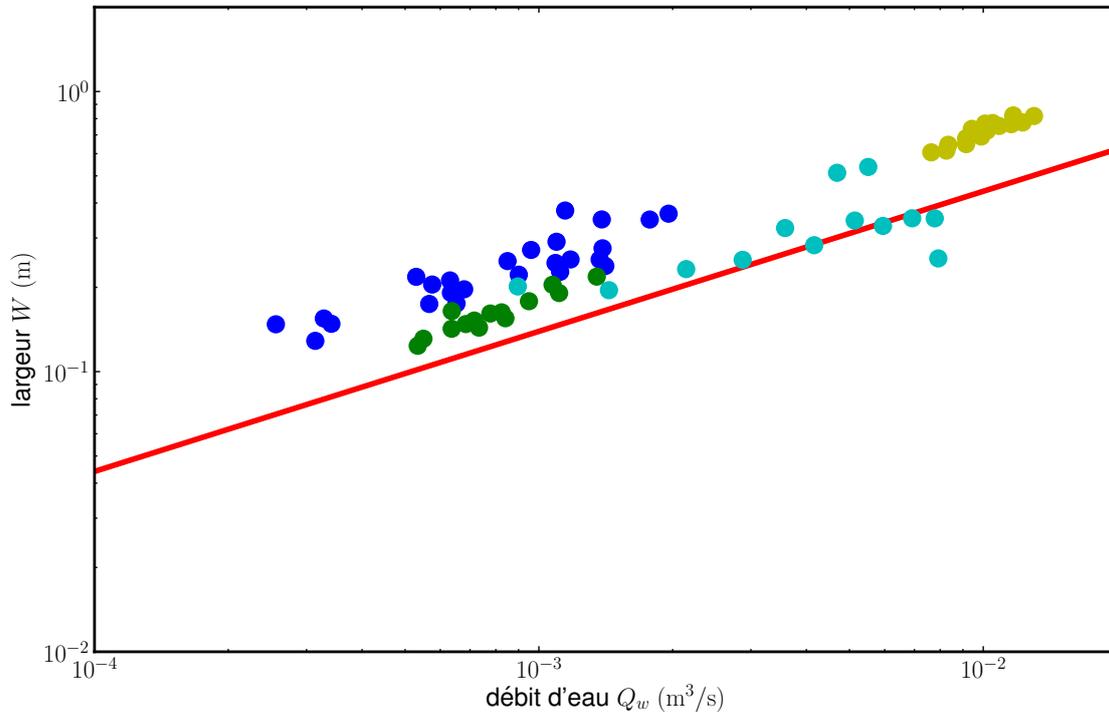


FIGURE 3.1 – Comparaison de l’équation de régime théorique (—) avec les données de Wolman (● et ●) et d’Ikeda (● et ●) compilées par Ikeda en 1981<sup>[33]</sup>.

Ces rivières expérimentales présentent des problèmes de stabilité par rapport aux rivières naturelles. En effet, personne n’a réussi à créer une rivière mono-chenal stable et les rivières ont tendance à créer des tresses<sup>[11]</sup>. Certains artefacts ont été utilisés pour forcer la forme de la rivière comme creuser un chenal initial et séparer ce chenal en deux par un mur rectiligne mais aucune solution n’est très satisfaisante.

Récemment, plusieurs groupes ont commencé à utiliser des “micro-rivières”<sup>[35–38]</sup>. Ces rivières expérimentales sont de taille centimétrique et présentent de nombreux avantages par rapport aux premières expériences. Le montage expérimental est bien plus facile et moins onéreux à monter et à modifier que sur des gros canaux. Les expériences sont souvent plus rapides ce qui permet d’en réaliser un grand nombre facilement. De plus, cela permet de réaliser des expériences en régime laminaire et donc de pouvoir contrôler et comprendre l’écoulement.

L’analogie stricte avec les rivières naturelles est alors abandonnée au profit d’une étude détaillée de phénomènes physiques isolés. Au lieu d’essayer de recréer une rivière la plus proche possible des rivières naturelles, on simplifie l’expérience au maximum pour ne garder que les paramètres physiques jugés importants. Il est alors possible de changer de matériau granulaire et remplacer le sable par des matières plastiques qui présentent des propriétés intéressantes pour créer de nouvelles rivières.

## 3.2 Comment construire une rivière sur 2 m<sup>2</sup>

Afin d’étudier la forme d’une rivière sans transport de sédiments, nous avons choisi de travailler sur ces micro-rivières.

L’expérience est composée d’une table montée sur un support inclinable. La table est une plaque de PVC de 2 m de long sur 1 m de large et est couverte d’une couche de

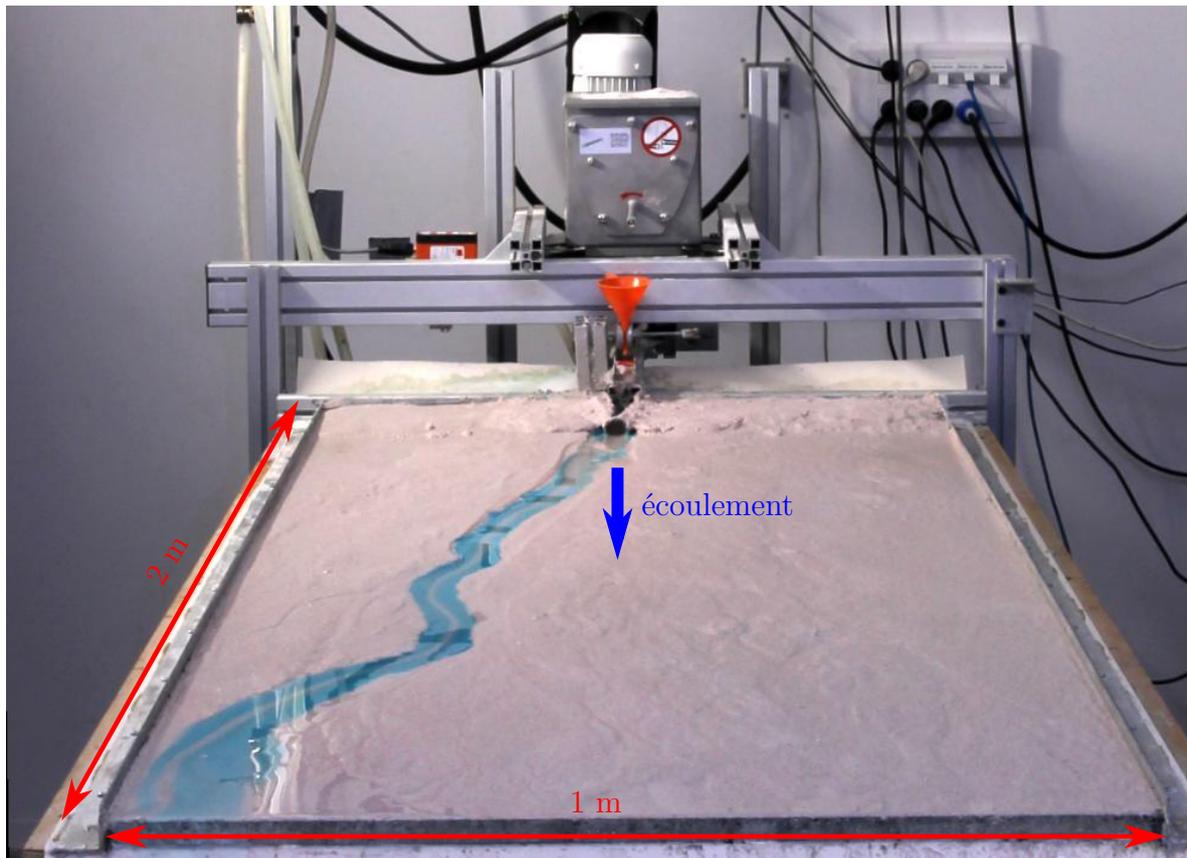


FIGURE 3.2 – Montage expérimental pour la création de micro-rivières.

sédiments d'épaisseur environ 5 cm. Des équerres en aluminium sur les côtés permettent de contenir le sable et une dernière équerre en aval permet de conserver une hauteur minimale de sable et d'éviter la propagation d'une onde d'érosion. Cette dernière équerre est percée de petits trous pour permettre l'écoulement de l'eau contenue dans la nappe phréatique (figure 3.2).

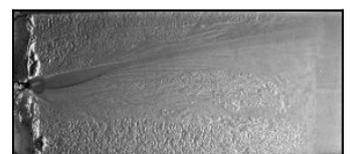
La condition d'entrée fait que l'écoulement est perturbé sur une dizaine de centimètres environ à l'amont de la rivière, tandis que la présence d'un muret en sortie modifie la rivière sur une trentaine de centimètres environ (de l'ordre de  $D/S$ ). Au final, la rivière présente une forme constante sur environ 1,50 m. Nous n'avons jamais eu de problème de nappes phréatiques qui viendraient déstabiliser nos berges.

### 3.2.1 Matériau granulaire

#### Création de rivières expérimentales

Nous avons essayé plusieurs matériaux pour créer une rivière expérimentale avec plus ou moins de succès. L'utilisation de billes de verre s'est révélée un échec, l'eau s'écoulait sur les billes sans creuser de chenal. Dans la littérature, il semblerait qu'avec d'autres montages expérimentaux l'utilisation de billes de verre permet d'obtenir des rivières en tresse<sup>[39]</sup> ou des rivières qui ne convergent pas vers un état d'équilibre<sup>[38]</sup>.

L'utilisation de sable relativement gros ( $d_s \approx 200 \mu\text{m}$ ) nous a permis de créer une petite rivière, en revanche, pour du sable trop petit ( $d_s \approx 100 \mu\text{m}$ ) la cohésion semblait prendre le dessus et nous n'avons pas réussi à créer de belles rivières (apparition d'instabilités, largeur non constante etc.).



### Le plastique c'est fantastique !

Nous présentons ici des résultats obtenus avec des billes plastiques. Plusieurs types de sédiments ont été utilisés pour nos expériences. Les sédiments sont de type DuraStrip de Guyson SA. Ce sont des matériaux plastiques utilisés industriellement pour le sablage de surfaces. Leur masse volumique  $\rho_s = 1,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \pm 0,05 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  (la mesure avec un pycnomètre donne  $\rho_s = 1,52 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ). Leur taille est de l'ordre de  $d_s = 220 \mu\text{m} \pm 85 \mu\text{m}$ . Nous avons mesuré l'angle d'avalanche  $\phi_A = 36^\circ \pm 1^\circ$ . Les caractéristiques détaillées de ces grains telles que la distribution de taille sont présentées annexe 12.1.1.

Par rapport aux billes de verre et aux sables souvent utilisés, nos sédiments présentent une forme particulièrement anguleuse (qui améliore la cohésion entre les grains) et sont plus légers ; ils sont donc transportés sur de plus longues distances et l'érosion est facilitée.

### 3.2.2 Fluide visqueux

Afin d'être en mesure de bien contrôler tous les paramètres de l'écoulement, nous nous plaçons dans un écoulement laminaire à faible nombre de Reynolds. Pour les tailles de rivières attendues (environ 5 cm de large) et les débits attendus (quelques litres par minute), l'utilisation d'eau nous donne un nombre de Reynolds de l'ordre de 500 ce qui correspond à la limite entre le régime laminaire et turbulent. Pour diminuer ce nombre et être sûr d'être en régime laminaire, nous choisissons d'utiliser un fluide visqueux.

Nous réalisons des expériences avec un mélange d'eau et de sirop de glucose, mélange qui a pour avantage d'être facilement nettoyable avec de l'eau, au contraire des huiles silicones, et qui coûte bien moins cher que l'utilisation de glycérol.

#### Caractérisation du fluide

Nous caractérisons ce fluide en mesurant sa viscosité et sa densité. La viscosité est mesurée grâce à un viscosimètre de type Thermo Haake RheoStress 600, avec une contrainte comprise entre  $\tau = 10^{-1} \text{ Pa}$  et  $\tau = 10^2 \text{ Pa}$ . Trois mesures ont été réalisées sur un même échantillon et les résultats sont présentés figure 3.3. Le mélange se comporte comme un fluide newtonien avec une viscosité indépendante de la contrainte. Typiquement, au sein de la rivière, le fluide est soumis à une contrainte de l'ordre de

$$\tau \sim \rho g D S \approx 2,5 \cdot 10^{-1} \text{ Pa.} \quad (3.1)$$

De plus, nous avons réalisé en parallèle des mesures de densité du mélange. Nous pouvons relier la densité mesurée à la viscosité. Cette relation est illustrée figure 3.4. La densité étant bien plus facile à mesurer que la viscosité, nous avons principalement mesuré cette valeur pour caractériser notre mélange.

Nos expériences durent plusieurs jours. Durant ce temps, nous observons des variations de densité et de viscosité du fluide dues principalement à l'évaporation de l'eau. Nous obtenons en moyenne  $\rho = 1,22 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \pm 0,03 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , ce qui nous donne une viscosité cinématique  $\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \pm 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Ces variations de viscosité modifient le débit d'eau dans l'expérience qui change d'environ 0,1 L/min au cours d'une même expérience. Le nombre de Reynolds correspondant à notre expérience est alors  $\text{Re} \approx 40$ . Nous sommes donc bien en régime laminaire.

### Alimentation en eau

Pour l'alimentation en fluide, on utilise un circuit fermé. Le débit est maintenu constant grâce à l'utilisation d'un système de bacs à débordement (figure 3.5). La pompe remplit un premier bac (1) qui déborde dans un deuxième (2). Le bac (1) a une hauteur d'eau constante  $\Delta h$  au cours du temps, le débit d'eau coulant dans le tuyau partant du bac (1) est donc constant au cours du temps. Il suffit ensuite de mettre une vanne sur ce tuyau pour réguler le débit à la valeur voulue. L'eau qui a débordé dans le bac (2) et l'eau qui sort du dispositif expérimental sont récupérées dans le dernier bac (3) pour être pompées.

La pompe utilisée pour alimenter le bac est une pompe de la marque Totton Pumps du type NDP25/4 prévue pour la recirculation continue de liquides. Elle peut fonctionner plusieurs jours d'affilée, n'est pas endommagée par le pompage de faibles quantités de sédiments et peut pomper des liquides visqueux.

## 3.3 Le déroulement de l'expérience

### 3.3.1 Dynamique de création

La table est inclinée avec une pente initiale d'environ 1%. Avant chaque expérience, nous égalisons la surface du sédiment avec un râteau pour avoir un lit aussi plat que possible, puis nous démarrons l'expérience en faisant couler un débit de l'ordre du litre par minute.

Au début de chaque expérience, l'eau érode le sédiment et commence à creuser une rivière. La rivière ne se creuse pas de manière homogène, nous voyons apparaître une rivière en amont qui progresse au fur et à mesure vers l'aval (figure 3.6).

Dès que la rivière apparaît, elle présente une largeur proche de sa largeur d'équilibre.

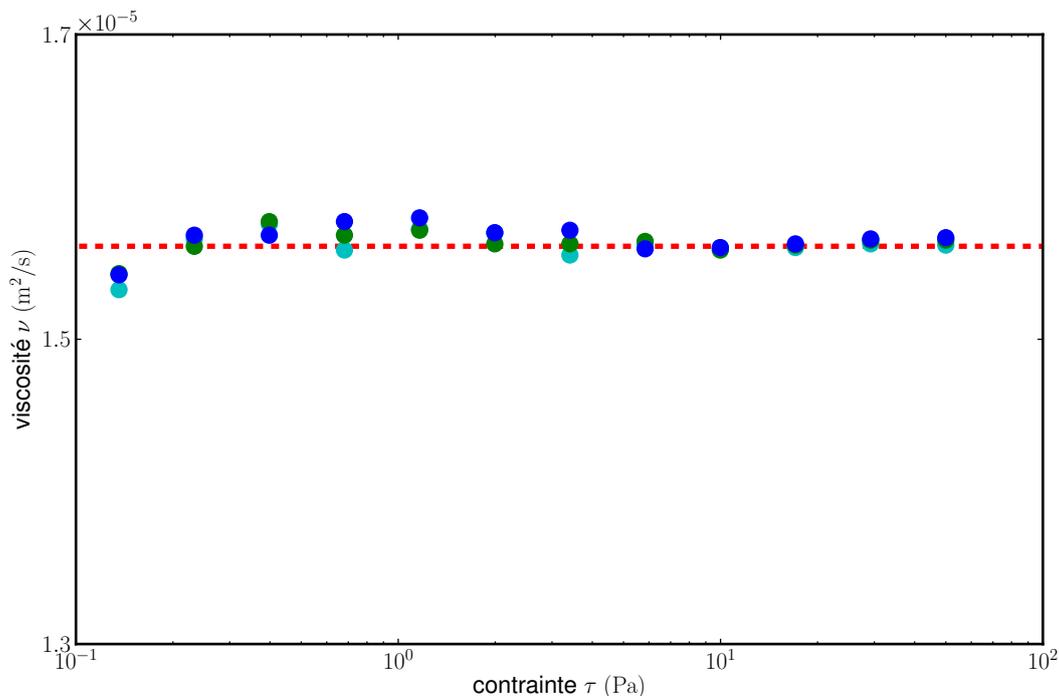
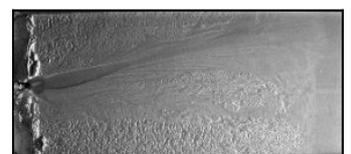


FIGURE 3.3 – Viscosité du mélange en fonction de la contrainte.



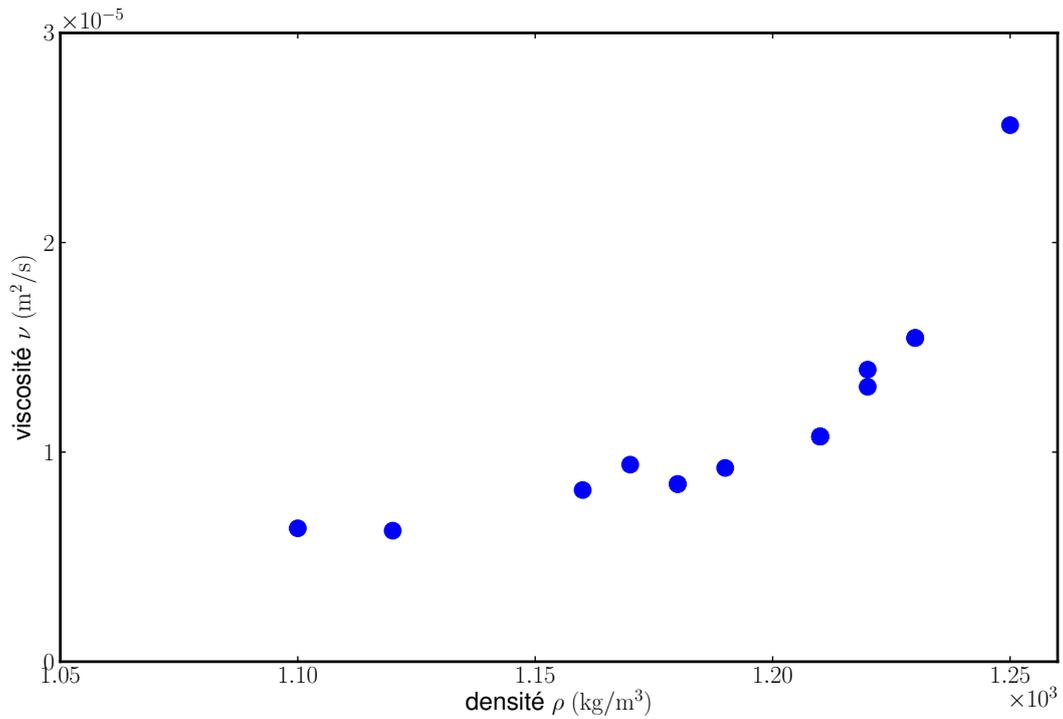


FIGURE 3.4 – Relation entre la viscosité du mélange et sa densité.

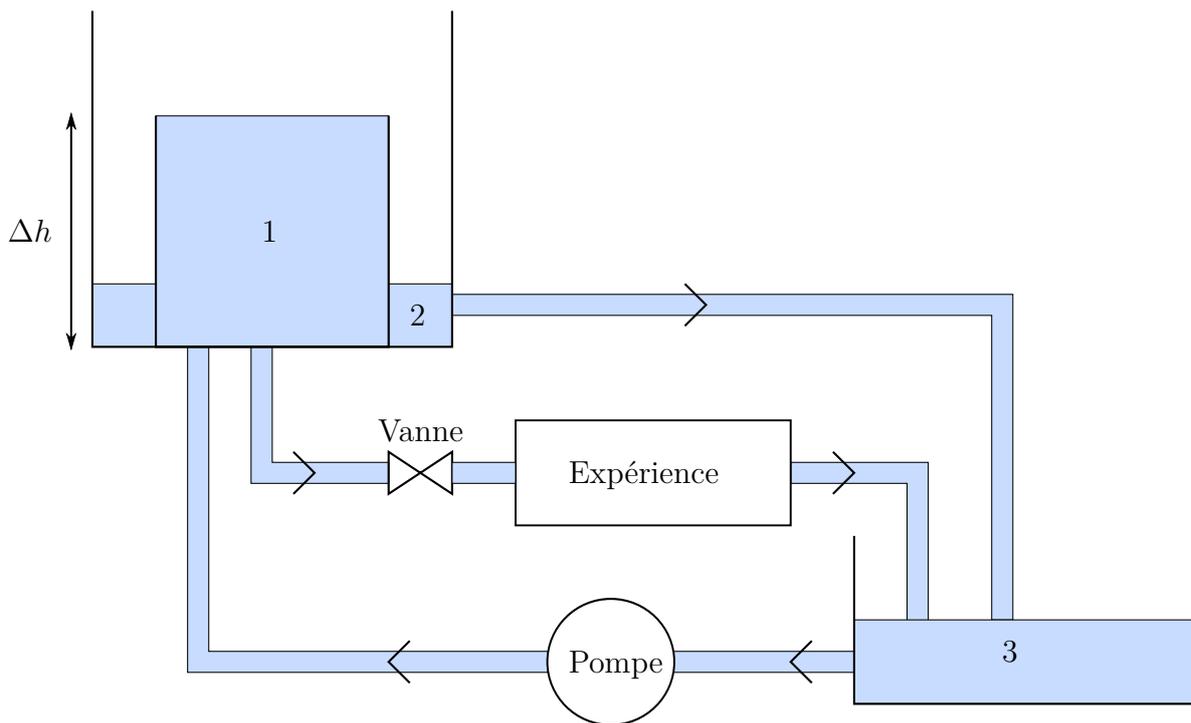


FIGURE 3.5 – Schéma de notre montage de bac à débordement.

en revanche, sa profondeur et sa pente ne sont pas encore stabilisées. Figure 3.7, nous illustrons le creusement du lit au cours du temps. Il s'agit ici du creusement du sable et non pas de la section de la rivière. En effet, nous ne savons pas où est située la surface de l'eau qui descend au fur et à mesure du temps et de la diminution de la pente de la rivière. Si la largeur du lit est quasiment définitive dès quelques heures après le début

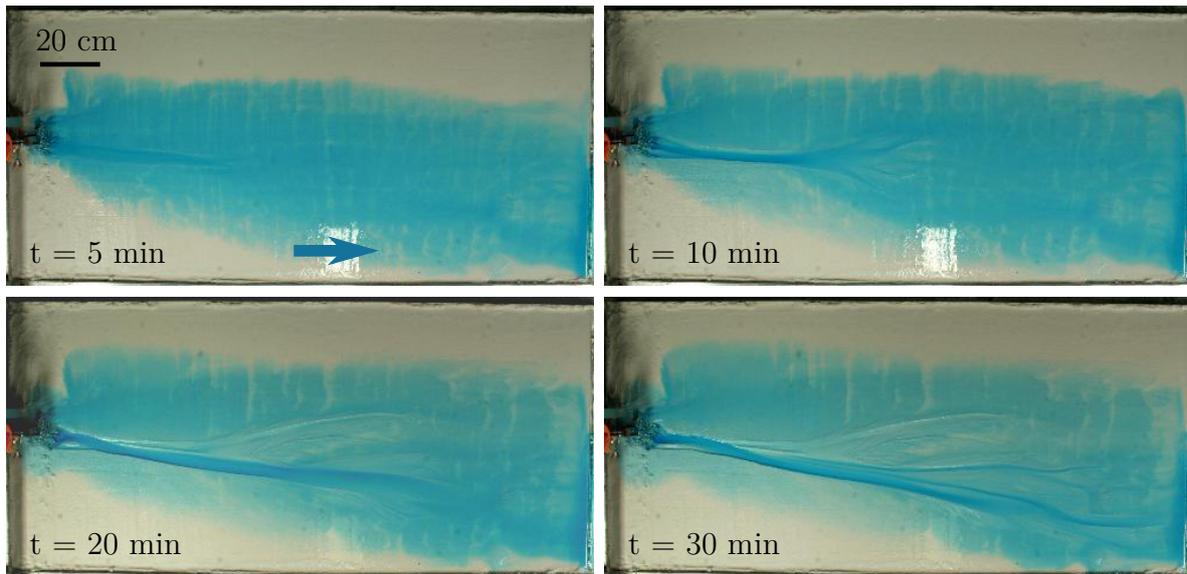


FIGURE 3.6 – 4 images successives montrant l'avancée d'une expérience. La flèche indique le sens de l'écoulement. Nous voyons l'apparition d'avulsions partant du chenal. L'ajout de colorant rend visible l'écoulement dans le matériau granulaire.

de l'expérience, la profondeur moyenne met environ 4 jours à se stabiliser.

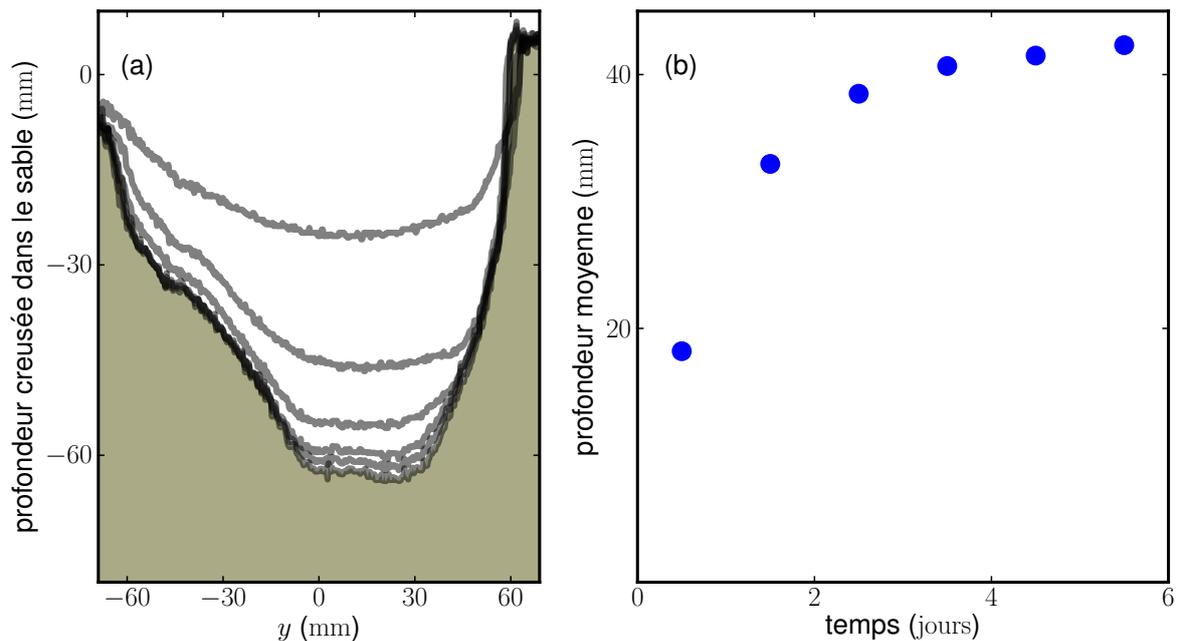
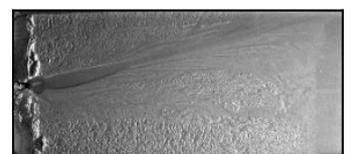


FIGURE 3.7 – Creusement d'une rivière au cours du temps pour un fluide visqueux avec un débit d'eau de  $Q_w = 1,0 \text{ L/min}$ . (a) : les courbes noires représentent une section du lit chaque jour. (b) : profondeur moyenne en fonction du temps.

Au cours de la création de ce chenal, la rivière peut changer de direction. Il est courant qu'elle abandonne son chenal originel pour creuser un nouveau chenal à côté, c'est ce que l'on appelle une avulsion. Le chenal peut aussi migrer doucement vers un côté. Les chenaux peuvent être délimités par des levées, c'est-à-dire des sédiments déposés sur le bord de la rivière créant un petit renflement sur le lit.



Une particularité de cette expérience est que, contrairement à d'autres études<sup>[38]</sup>, la pente de la rivière n'est pas imposée. L'épaisseur de sédiments est suffisante pour que la rivière puisse creuser son lit et créer ainsi sa propre pente d'équilibre indépendamment de la pente initiale. Si la pente initiale est inférieure à la pente d'équilibre, alors il ne se passe rien. La contrainte fluide est inférieure au seuil de mise en mouvement et l'eau s'écoule vers la sortie en recouvrant le sédiment. Si la pente initiale est supérieure à la pente d'équilibre, la rivière creuse davantage les sédiments en entrée qu'à la sortie et réduit ainsi sa pente. Toutefois, les dimensions de l'expérience font que ce régime transitoire est extrêmement long (plusieurs jours environ). C'est pour cela que la plupart des expériences sont réalisées avec une pente initiale la plus proche possible de la pente d'équilibre théorique par valeur supérieure.

La dynamique de création des rivières est très riche et assez sensible aux conditions initiales. Selon la pente initiale, la rivière va s'encaisser plus ou moins. Moins elle est encaissée, plus elle aura tendance à changer de lit et à faire des avulsions. L'état du lit a aussi une influence : si le sédiment n'est pas bien réparti, la rivière qui traverse une dune va se charger en sédiments et créer un cône de déposition en aval. Toutefois, l'état d'équilibre atteint à la fin de l'expérience reste toujours identique. Nous nous limiterons dans cette thèse à l'étude des rivières ayant atteint l'équilibre.

### 3.3.2 État d'équilibre

L'équilibre est atteint lorsque le transport de sédiments est nul tout le long de la rivière (ce qui se vérifie facilement à l'œil nu). Il n'y a alors ni érosion ni sédimentation dans la rivière et sa forme générale ne se modifie plus au cours du temps. Cet état est obtenu au bout d'un temps compris entre deux heures et une semaine après le début d'une expérience (le temps dépend du fluide et du sédiment utilisés et de la pente de départ, figure 3.7).

A l'issue de l'expérience, nous observons la création d'une rivière composée d'un seul chenal droit (avec une largeur bien définie et un encaissement variable, figure 3.8). Par

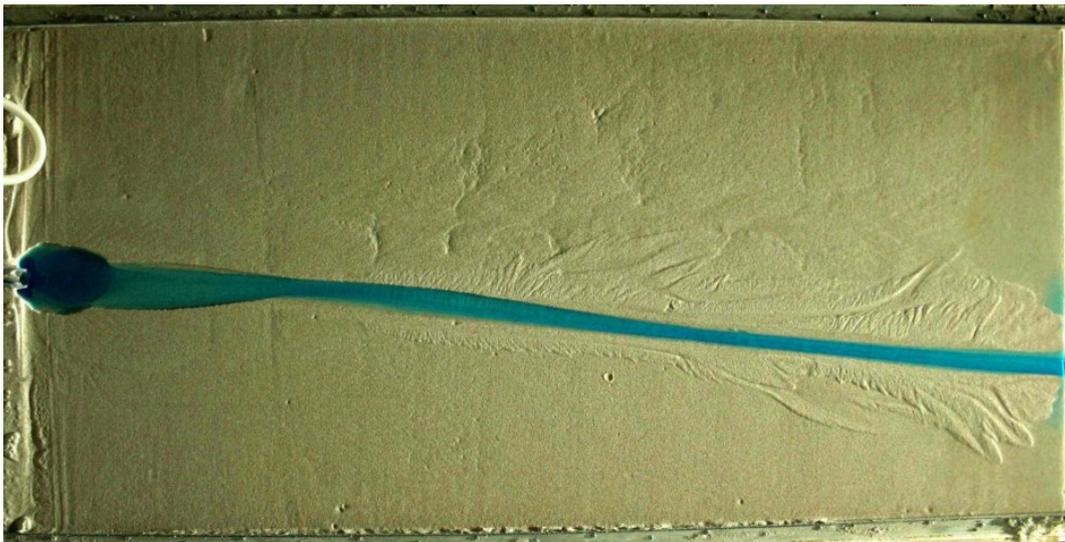


FIGURE 3.8 – Expérience réalisée avec de l'eau colorée en bleu grâce à du colorant alimentaire. La rivière coule de la gauche vers la droite. Initialement, le lit est plat. On voit le creusement d'un lit rectiligne et quelques traces d'avulsions en aval.

conséquent, il n'y a ni érosion ni sédimentation et la forme de la rivière reste stable. La rivière peut rester dans le même état plusieurs jours consécutifs. Si la dynamique de création de la rivière dépend des conditions initiales, ce n'est pas le cas de l'état d'équilibre. La rivière admet la même pente d'équilibre quelle que soit la pente initiale (seul l'encaissement de la rivière dans le lit est modifié). De même, la forme du chenal est totalement indépendante de l'état du lit, en particulier le creusement d'un chenal initial n'influe pas du tout sur la forme de la rivière qui, bien souvent, le rebouche avec les sédiments érodés en amont durant sa formation avant de recréer son lit. Nous trouvons donc expérimentalement que le débit d'eau fixe à la fois la largeur d'équilibre de la rivière et sa pente d'équilibre.

A notre connaissance, c'est la première fois qu'une rivière mono-chenal autoformée est observée expérimentalement. Par rapport aux expériences décrites dans la littérature<sup>[38;39]</sup>, les principales différences sont l'absence de débit de sédiments ainsi que le fait que la pente soit laissée libre.

### 3.3.3 Résultats préliminaires

Pour chaque expérience, nous pouvons mesurer la profondeur moyenne et la largeur de la rivière. Ces résultats sont résumés figure 3.9.

Sur ce graphique, tracé avec des échelles logarithmiques, nous voyons que la largeur et la profondeur augmentent avec le débit d'eau. Il semble que la profondeur soit corrélée à la largeur et nous pressentons que la variation de ces longueurs avec le débit d'eau est une loi de puissance. Tout cela nous rappelle la loi de Lacey que nous avons vue pour les rivières naturelles.

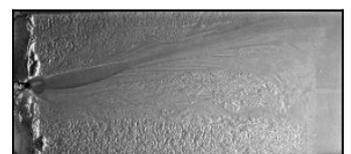
De plus, connaissant la dynamique de création de la rivière, il nous semble qu'une fois le chenal réalisé, l'eau creuse de plus en plus le sable pour diminuer ainsi la pente de la rivière au cours du temps. Comme la contrainte fluide dépend de cette pente (équation 2.10), elle diminue du même coup jusqu'à ce qu'elle soit trop faible pour entraîner les grains sur les berges. La forme de la rivière est alors stable. Cela confirme notre hypothèse que les rivières sans transport sont au seuil de mise en mouvement et pas en dessous.

Qualitativement, il semble que nos expériences soient en accord avec la théorie de Glover et Florey<sup>[14]</sup> qui suppose que les grains sont au seuil de mise en mouvement sur le lit.

## 3.4 Les équations de régime pour un écoulement laminaire

### 3.4.1 Raisonnement théorique

En supposant une section sinusoïdale (équation 2.16), nous recherchons les équations de régime pour un écoulement laminaire. Nous supposons que les variations de la vitesse du fluide ne dépendent que de la coordonnée verticale (approximation de lubrification). En imposant comme conditions aux limites une vitesse nulle sur les berges (condition de non glissement) et une contrainte nulle sur la surface libre, l'intégration de l'équation de Navier-Stokes<sup>[40]</sup> nous donne un profil de vitesse de Poiseuille<sup>[41]</sup>.



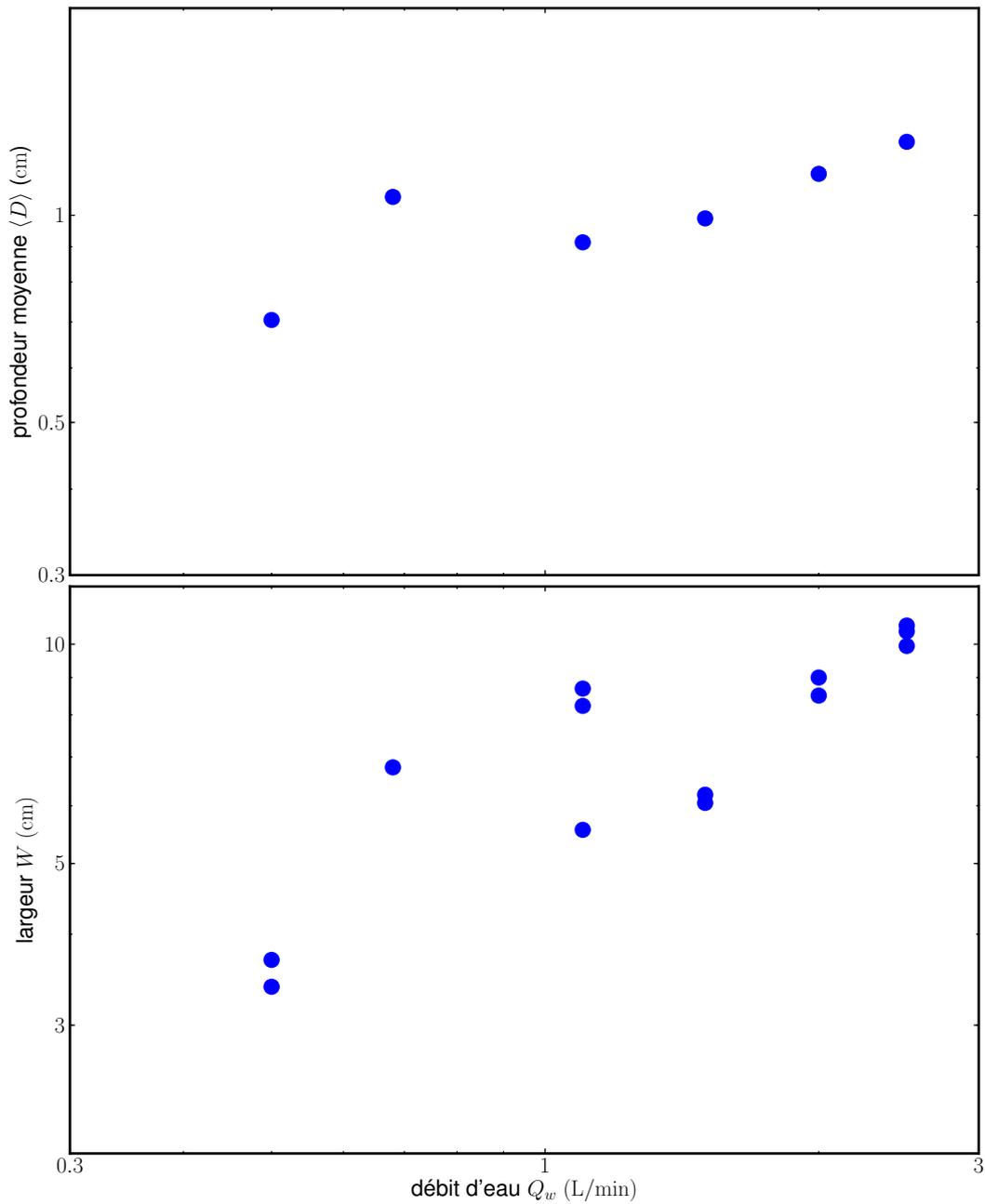


FIGURE 3.9 – Largeur expérimentale de la rivière en fonction du débit d'eau imposé en entrée.

$$u(y, z) = \frac{g S}{2\nu} (D(y)^2 - z^2) \quad (3.2)$$

Ce résultat classique prévoit un profil de vitesse parabolique. La vitesse est nulle sur le fond et atteint un maximum sur la surface libre. Nous retrouvons bien la contrainte fluide sur les berges calculée dans l'équation 2.10 à partir de l'expression de la contrainte visqueuse

$$\tau = \rho\nu \frac{\partial u}{\partial z} = \rho g D S. \quad (3.3)$$

Comme pour les rivières naturelles (équation 2.21), nous trouvons le débit d'eau  $Q_w$

en intégrant le profil de vitesse sur la section trouvée

$$Q_w = \int_W \int_D u \, dz \, dy = \mu^3 \frac{4}{9} \frac{g}{\nu} \frac{\mathcal{L}^4}{S^3}. \quad (3.4)$$

Ce débit d'eau est très sensible à la pente et à la longueur caractéristique du problème. Comme en régime turbulent, nous trouvons une loi d'échelle liant le débit d'eau à la pente. Cette fois-ci, c'est le produit du débit d'eau par le cube de la pente qui est constant et qui ne dépend que de la nature du fluide et du fond.

En utilisant les équations 2.16 et 3.4, nous trouvons les équations de régime pour un écoulement laminaire.

$$\begin{aligned} S &= \mu \left( \frac{4}{9} \frac{g}{\nu} \right)^{1/3} \mathcal{L}^{4/3} \frac{1}{Q_w^{1/3}} \\ W &= \frac{\pi}{\mu} \left( \frac{9}{4} \frac{\nu}{g} \frac{1}{\mathcal{L}} \right)^{1/3} Q_w^{1/3} \\ \langle D \rangle &= \frac{1}{\pi} \left( 18 \frac{\nu}{g} \frac{1}{\mathcal{L}} \right)^{1/3} Q_w^{1/3} \end{aligned} \quad (3.5)$$

En régime laminaire, la taille et la pente de la rivière varient avec la racine cubique du débit d'eau. Cette puissance est différente de celle trouvée par Lacey qui prédit une variation en racine carrée. Comme pour les rivières turbulentes, la détermination d'un débit d'eau impose à la fois la largeur et la pente d'équilibre de la rivière.

### 3.4.2 Vérification expérimentale

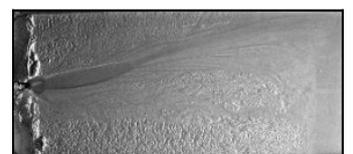
Au cours de nos différentes expériences, nous avons mesuré la largeur de la rivière. Nous n'avons pas pu mesurer sa pente car les pentes attendues et observées sont très faibles ( $S \approx 1 \cdot 10^{-3}$ ), ce qui correspond à un écart d'un millimètre environ sur la longueur de la rivière. Nous n'avons pas trouvé de manière efficace pour mesurer ces valeurs de pentes sans détruire la rivière.

Nous pouvons tout de même tracer l'évolution de la largeur en fonction du débit d'eau. Si le laser ne nous permet que d'avoir la section de la rivière en un point, nous avons pu mesurer la largeur à l'aide d'une règle en différents endroits d'une même rivière. Cette largeur présente une assez large variabilité et varie d'un facteur 2 environ entre l'endroit le plus étroit et l'endroit le plus large de la rivière. Cette variabilité est représentée par les différents points. Ces résultats expérimentaux sont confrontés avec les prédictions théoriques (équations 3.5) dans la figure 3.10.

Pour nos prédictions théoriques, nous avons mesuré directement tous les paramètres. Pour obtenir la valeur des facteurs de forme, nous avons mesuré le nombre de Shields critique et l'angle d'avalanche dans une expérience indépendante et nous avons utilisé l'équation 2.9. Nous avons trouvé  $\alpha/\beta = 0,36$ .

La largeur de la rivière, malgré une grande variabilité, correspond bien aussi à notre prédiction théorique. Elle augmente bien avec la racine cubique du débit de la rivière et le préfacteur, qui dépend à la fois du sédiment utilisé et de la viscosité du fluide, est cohérent.

Ces résultats confirment la validité de nos équations de régime.



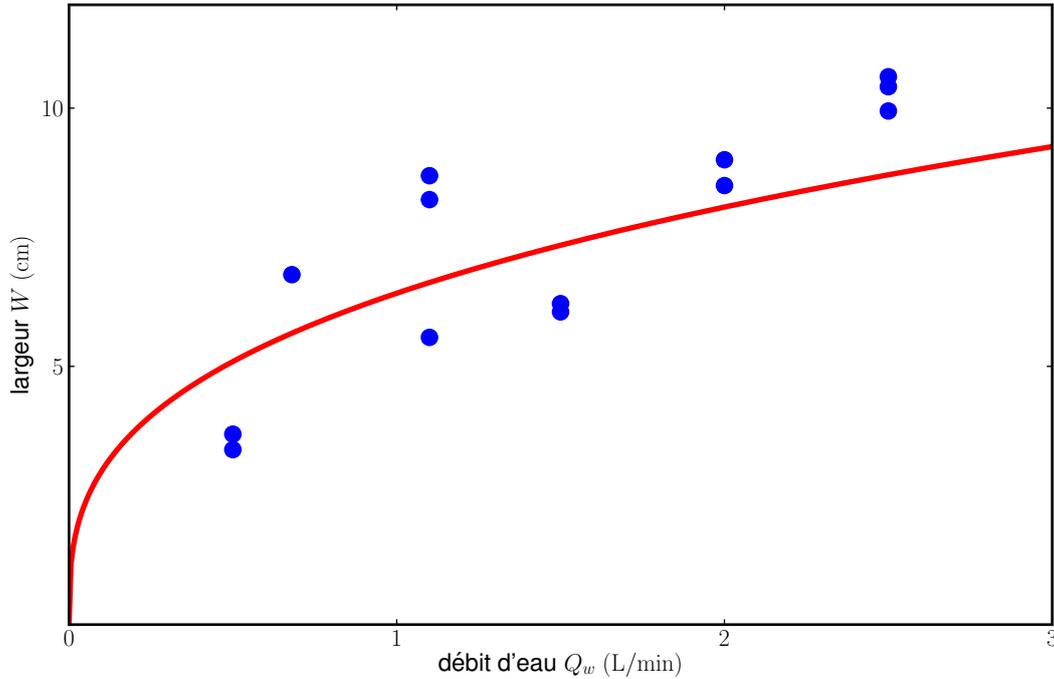


FIGURE 3.10 – Largeur de la rivière en fonction du débit de fluide visqueux (●) et prédiction théorique (—).

## 3.5 La section expérimentale de la rivière

### 3.5.1 Mesures par projection d'une nappe laser

Nous souhaitons aussi vérifier nos prédictions théoriques sur la forme de la section. Pour cela, nous avons besoin de connaître la forme de la rivière. Afin de la mesurer, nous utilisons une méthode basée sur la projection de deux nappes laser<sup>[38]</sup>. Les modules laser, achetés chez Apinex, sont focalisables et disposent d'une lentille incorporée au corps du laser pour transformer le rayon en une nappe laser. Nous avons un laser rouge ( $\lambda_r = 650$  nm, indice  $r$  dans nos notations) et un laser vert ( $\lambda_v = 532$  nm, indice  $v$  dans nos notations). Le principal intérêt d'avoir deux couleurs différentes est de pouvoir mieux traiter les données numériquement (sur une image RVB, les deux couleurs ressortent chacune sur une matrice différente). Nous cherchons à mesurer la hauteur d'eau  $D$  de la rivière sur chaque point d'une section. Nous pouvons obtenir cette hauteur géométriquement.

Nous cherchons tout d'abord à mesurer l'angle d'incidence  $i$  des lasers. Pour cela, nous projetons les lasers sur un escalier expérimental posé horizontalement sur le trajet des nappes laser (nous contrôlons l'inclinaison de l'escalier grâce à un niveau à bulle). Nous connaissons la hauteur  $\delta h = 2$  mm des marches. Chaque marche crée un décalage  $\delta x$  qui dépend de l'angle d'incidence (figure 3.11),  $\delta x = \delta h \tan i$ . La photo est prise à l'aplomb de l'expérience. Connaissant  $\delta h$  et pouvant mesurer facilement  $\delta x$ , on en déduit les deux angles d'incidence  $i_r$  pour le laser rouge et  $i_v$  pour le laser vert.

$$i = \arctan \frac{\delta x}{\delta h} \quad (3.6)$$

Une fois ces deux angles d'incidence mesurés, on peut trouver le point d'intersection des deux nappes laser (noté  $(x_0, h)$  sur la figure 3.12). On voit que  $x - x_0 = h \tan i$ . En

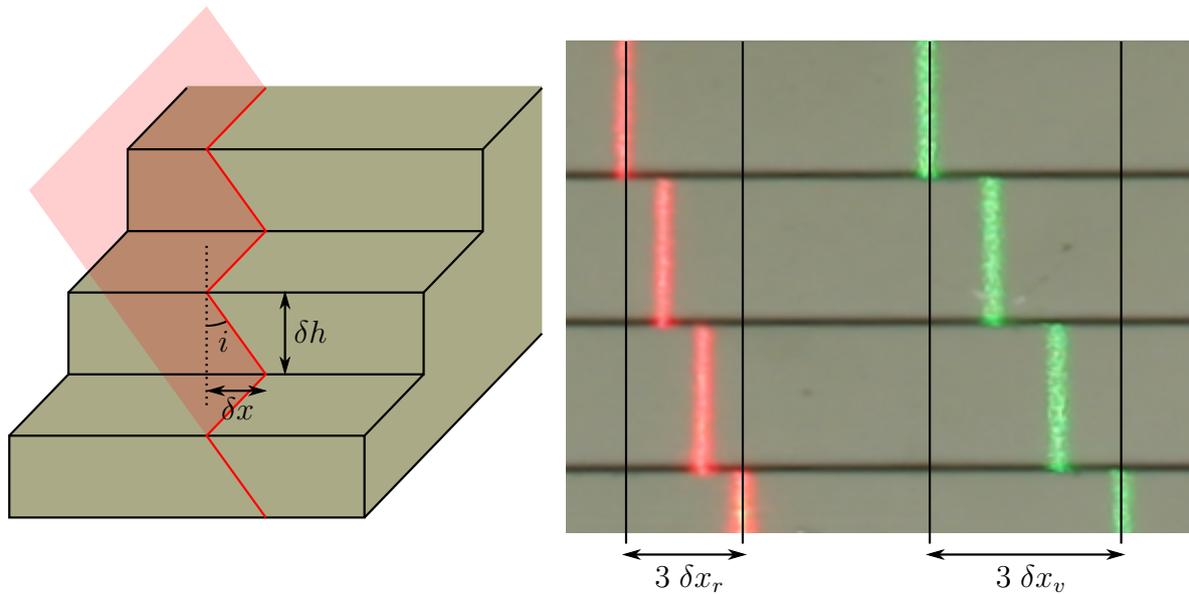


FIGURE 3.11 – Détermination de l'angle d'incidence des lasers. À gauche on peut voir un schéma explicatif de la méthode. La photo de droite est la photo de l'escalier avec les deux nappes lasers.

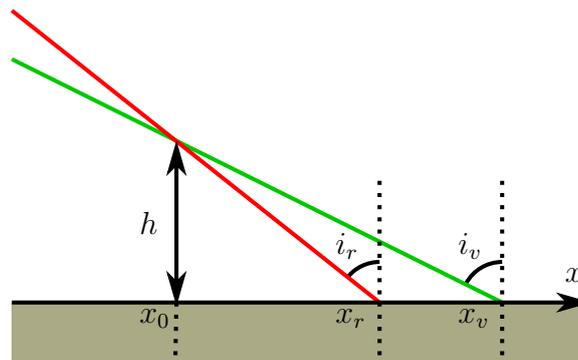


FIGURE 3.12 – Détermination du point d'intersection des lasers  $(x_0, h)$ . Sur une mesure, on a accès à  $x_v$  et  $x_r$ .

utilisant les deux lasers, on peut donc en déduire

$$x_0 = \frac{\frac{x_r}{\tan i_r} - \frac{x_v}{\tan i_v}}{\frac{1}{\tan i_r} - \frac{1}{\tan i_v}}. \quad (3.7)$$

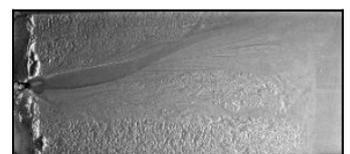
Dans notre cas, nous calculons la position  $x_0$  à partir de la position des lasers sur chaque marche de l'escalier.

Lorsque les lasers entrent dans le fluide, ils sont déviés selon la loi de Descartes,

$$\sin i = n \sin I \quad (3.8)$$

en notant  $I$  l'angle de transmission du laser dans le fluide. Dans notre cas, l'indice optique du fluide est sensiblement le même que l'eau :  $n \approx 1,33$ .

Nous cherchons à mesurer la hauteur d'eau  $D$  de la rivière (figure 3.13). Par convention, nous utilisons les lettres minuscules pour désigner les coordonnées du laser dans l'air et les lettres majuscules pour désigner les coordonnées du laser dans le fluide.



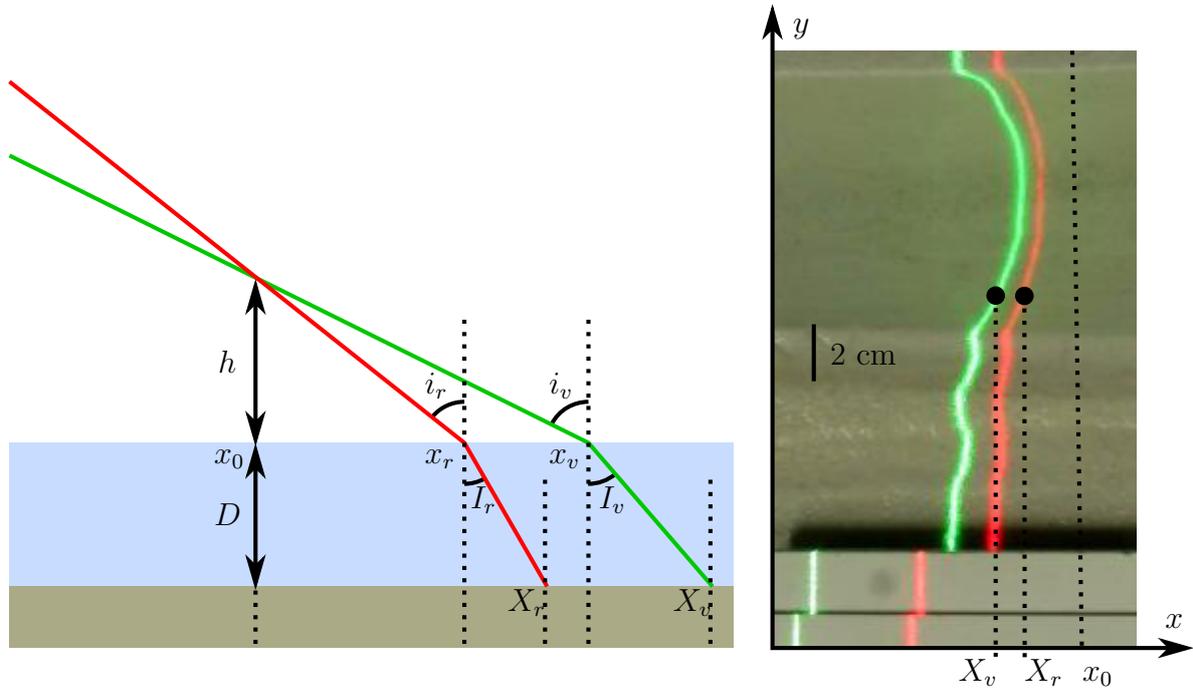


FIGURE 3.13 – Détermination de la hauteur d'eau de la rivière  $D(y)$ . On mesure d'abord les angles d'incidences des lasers grâce à l'escalier, puis  $x_0$  grâce à ce même escalier avant de trouver la hauteur d'eau en regardant les coordonnées des lasers dans la rivière ( $X_r(y)$ ,  $X_v(y)$ ).

Nous voyons directement que

$$\frac{x - x_0}{h} = \tan i$$

$$\frac{X - x}{D} = \tan I$$
(3.9)

d'où

$$X - x_0 = D \tan I + h \tan i. \quad (3.10)$$

Connaissant les angles d'incidence  $i$  (équation 3.6) et  $I$  (équation 3.8) ainsi que le lieu d'intersection des lasers  $x_0$  (équation 3.7), nous pouvons en déduire la hauteur d'eau à partir de la position des lasers mesurée sur la photo (figure 3.13).

$$D = \frac{\frac{X_r - x_0}{\tan i_r} - \frac{X_v - x_0}{\tan i_v}}{\frac{\tan I_r}{\tan i_r} - \frac{\tan I_v}{\tan i_v}} \quad (3.11)$$

Cette méthode permet donc de mesurer la hauteur d'eau à partir d'une photo prise à l'aplomb de l'expérience et de deux lasers ayant des angles d'incidences différents. En prenant des angles d'incidence relativement faibles ( $i \approx 20^\circ$ ), cette mesure nous permet d'avoir une précision inférieure au millimètre. Malheureusement, cela ne nous permet pas de mesurer la section de la rivière sur toute sa longueur.

Nous trouverons en annexe le descriptif de la méthode de moiré qui permet de mesurer la topographie de l'ensemble de la rivière mais qui présente plusieurs inconvénients et qui n'est pas utilisable pour un fluide visqueux.

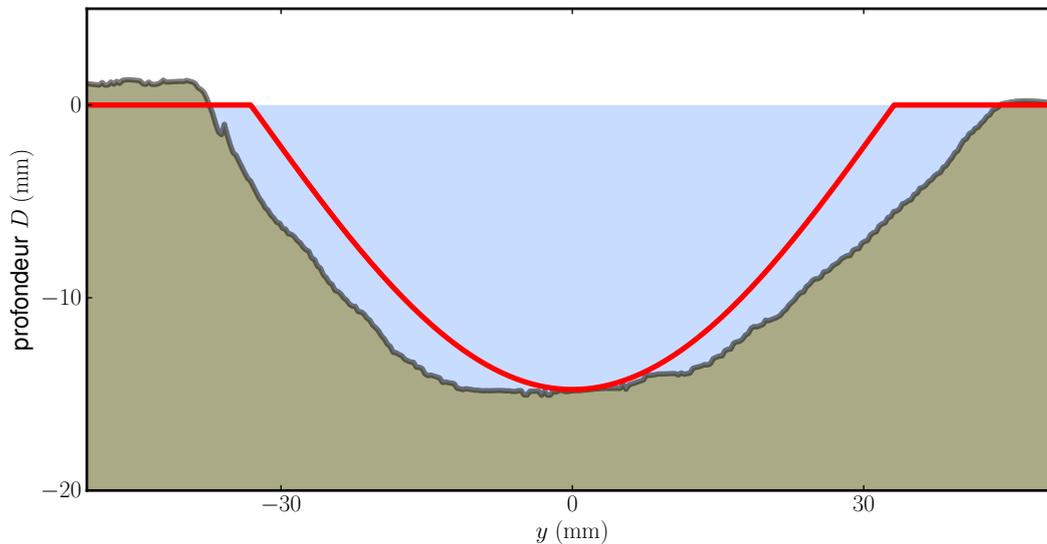


FIGURE 3.14 – Comparaison de la section expérimentale d’une rivière de fluide visqueux pour un débit  $Q_w = 1,1 \text{ L/min}$  avec le profil théorique (—).

### 3.5.2 Vérification de la forme sinusoïdale

L’utilisation de lasers nous permet de mesurer précisément la section d’une rivière. Pour un débit d’eau fixé, nous comparons cette section à sa forme théorique (figure 3.14). Encore une fois, tous les paramètres sont mesurés séparément (il n’y a aucun paramètre ajusté).

La forme présente un très bon accord avec nos prédictions théoriques. La section est proche du cosinus attendu et la pente des berges à l’intersection avec la surface semble proche de l’angle d’avalanche. La section expérimentale semble néanmoins plus large et un peu plus plate que la section théorique.

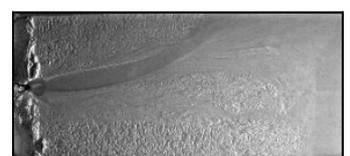
Une conséquence de la forme théorique en cosinus est que le rapport d’aspect d’une rivière sans transport doit être constant (équation 2.18). Nous avons donc mesuré le rapport d’aspect moyen de la rivière en fonction du débit d’eau et nous l’avons comparé à sa valeur théorique (figure 3.15).

Le rapport d’aspect semble bien garder une valeur constante durant nos expériences. De plus, cette valeur est cohérente avec notre prédiction théorique (équation 2.18).

Ces premiers résultats semblent bien confirmer la validité de Glover et Florey.

### 3.5.3 Section moyenne de la rivière

Nos résultats semblent montrer que la rivière a une section légèrement plus aplatie que notre cosinus théorique. Afin de voir si ce comportement se confirmait, nous avons mesuré cette section pour chaque expérience (six au total pour un débit d’eau compris entre  $0,5 \text{ L/min}$  et  $2,5 \text{ L/min}$ ). Pour pouvoir les comparer entre elles, nous les avons chacune adimensionnées par leur pente théorique trouvée à partir du débit d’eau (équation 3.5) et la longueur caractéristique du problème  $\mathcal{L}$ . Nous notons respectivement  $\tilde{D}$  et  $\tilde{y}$  la hauteur d’eau et la coordonnée transverse du problème en notation adimensionnée. Dans toute la suite, les grandeurs notées avec un tilde représenteront les variables sans dimension.



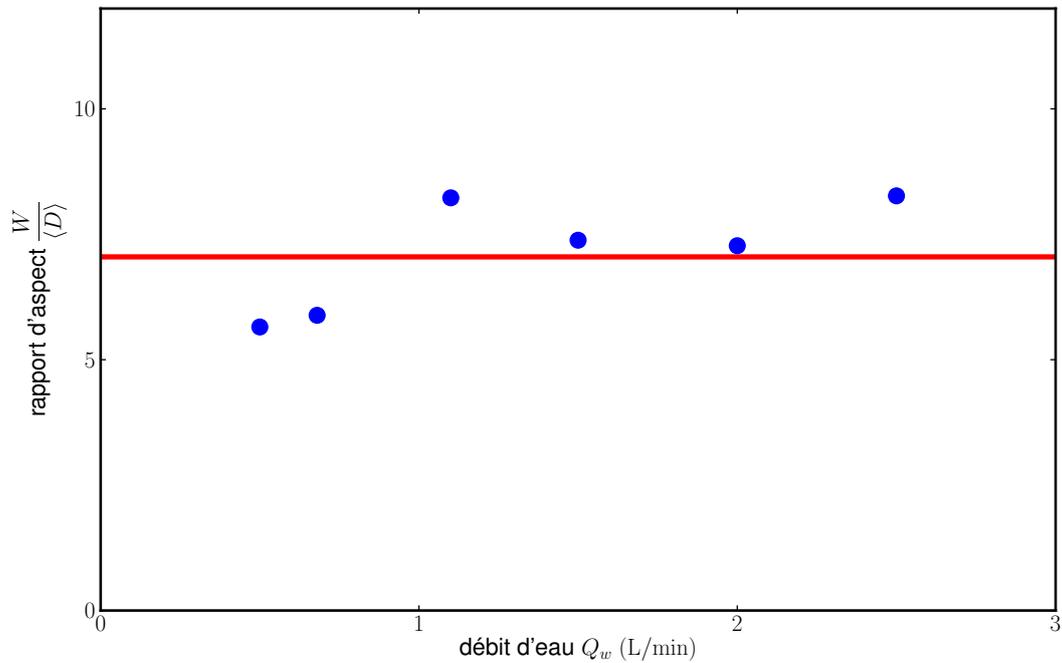


FIGURE 3.15 – Comparaison entre le rapport d'aspect moyen de la rivière en fonction du débit d'eau (●) et la prédiction théorique (—).

$$\tilde{D} = S \frac{D}{\mathcal{L}} \quad \text{et} \quad \tilde{y} = S \frac{y}{\mathcal{L}}. \quad (3.12)$$

Le profil théorique de la rivière à l'équilibre (équation 2.16) se réécrit alors simplement

$$\tilde{D} = \mu \cos(\tilde{y}) \quad (3.13)$$

et nous trouvons une largeur adimensionnée égale à  $\pi$ .

Figure 3.16, nous comparons la section moyenne de nos expériences avec le profil en cosinus théorique. La moyenne a été faite radialement en utilisant les coordonnées polaires. Là encore, la section moyenne est en accord avec le cosinus théorique. Nous

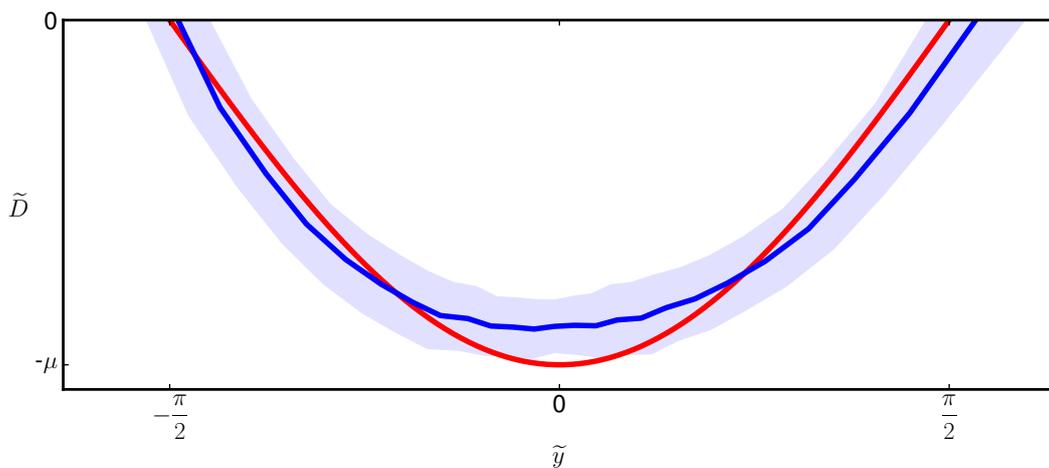


FIGURE 3.16 – Section moyennée (—) comparée avec le profil théorique (—). Les incertitudes sur la section sont dessinées en transparence.

remarquons en revanche que la section expérimentale a tendance à être un peu moins profonde et un peu plus large qu'attendu.

## 3.6 Vérification des hypothèses

Si nos résultats expérimentaux valident bien nos prédictions théoriques, l'accord n'est pas parfait. Le profil en cosinus et les équations de régime trouvées pour un écoulement laminaire (équations 2.16 et 3.5) reposent sur l'hypothèse que nous pouvons négliger les variations dans la direction transverse  $y$  devant les variations selon la verticale  $z$ . Nous allons à présent vérifier si nous sommes bien dans le domaine de validité de ces hypothèses.

### 3.6.1 Faible pente latérale

Nous considérons que le rapport d'aspect de la rivière est très grand. En particulier, nous supposons que la pente des berges est égale à la variation de la hauteur d'eau

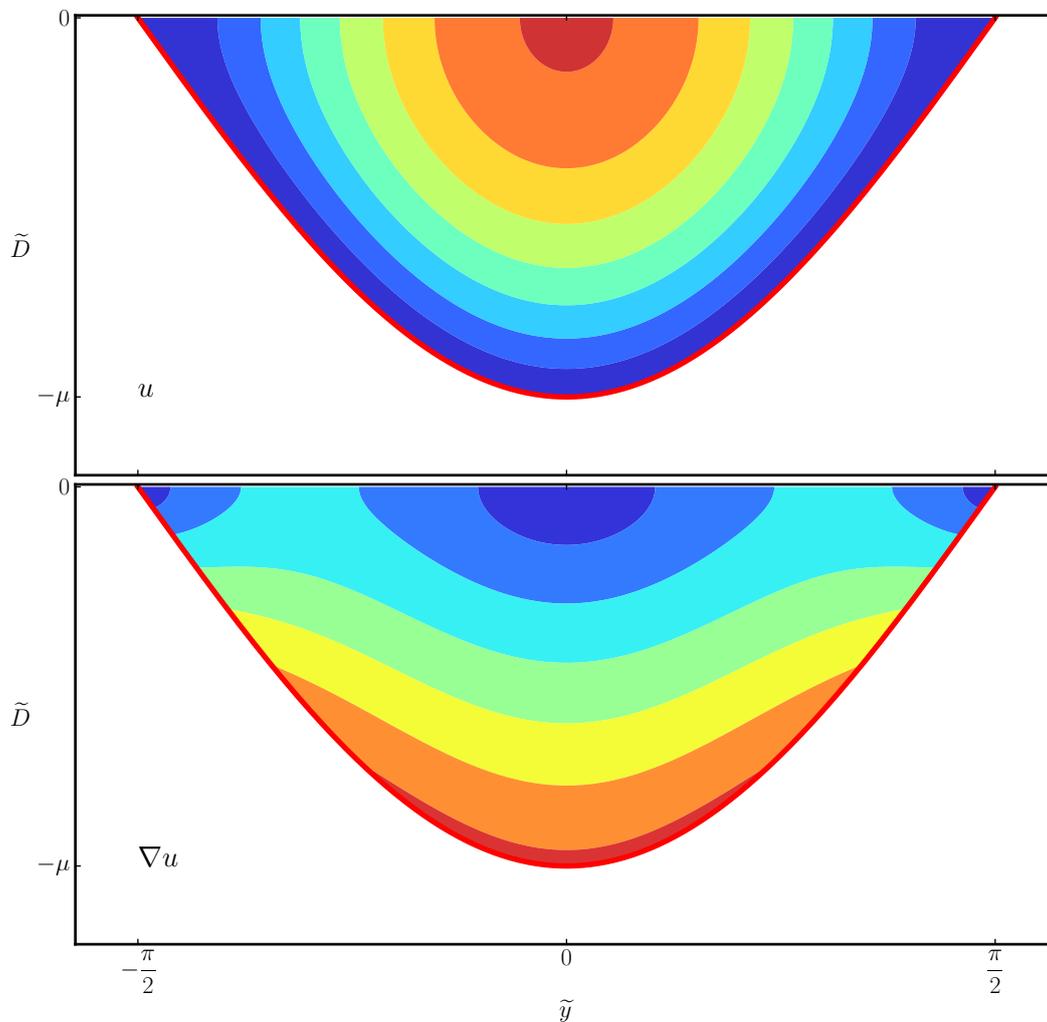
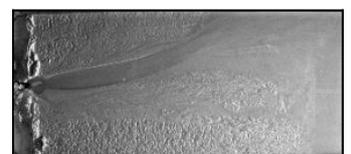


FIGURE 3.17 – Champ de vitesse (en haut) et des contraintes (en bas) calculés en résolvant l'équation 3.17 avec le profil d'équilibre en cosinus (équation 2.16) comme condition aux limites.



$dD/dy = -\sin \phi$ . Cette hypothèse revient à dire  $\tan \phi = \sin \phi$ . Notre angle d'avalanche est égal à  $\phi_A \approx 36^\circ \approx 0,6 \text{ rad}$ . Nous avons alors une différence de 20% entre notre approximation et la valeur exacte.

### 3.6.2 Contrainte fluide

Une conséquence de cette hypothèse de faible pente est que l'on considère la contrainte fluide proportionnelle à la hauteur d'eau ( $\tau \propto D$ , équation 2.10). Cela est vrai dans une rivière infiniment large (figure 2.8), sinon il faut prendre en compte la projection de la réaction normale des berges dans la direction transverse. Dans notre cas, la rivière a une largeur finie et notre rapport d'aspect est  $W/D \approx 4,5$  ce qui n'est pas si grand devant 1. Pour vérifier notre hypothèse, nous résolvons le champ de vitesse en deux dimensions  $u(y, z)$  dans la géométrie en cosinus trouvée précédemment à l'aide du logiciel FreeFEM++ (<http://www.freefem.org/ff++/>). Les champs de vitesse et de contrainte sont présentés figure 3.17.

Nous comparons ensuite le rapport entre les forces tangentielles et les forces normales sur le fond (en bleu figure 3.18). Dans notre hypothèse, ce rapport doit être une constante égale à  $\mu$ . Or, la contrainte trouvée numériquement est inférieure à  $\mu$  au centre du chenal, et supérieure sur les côtés. Intuitivement, on s'attend donc à ce que la rivière soit plus large (contrainte supérieure donc tendance à creuser davantage sur les côtés) et moins profonde (contrainte inférieure donc tendance au dépôt) que la forme théorique en cosinus. Ces deux comportements sont en accord avec les profils trouvés expérimentalement.

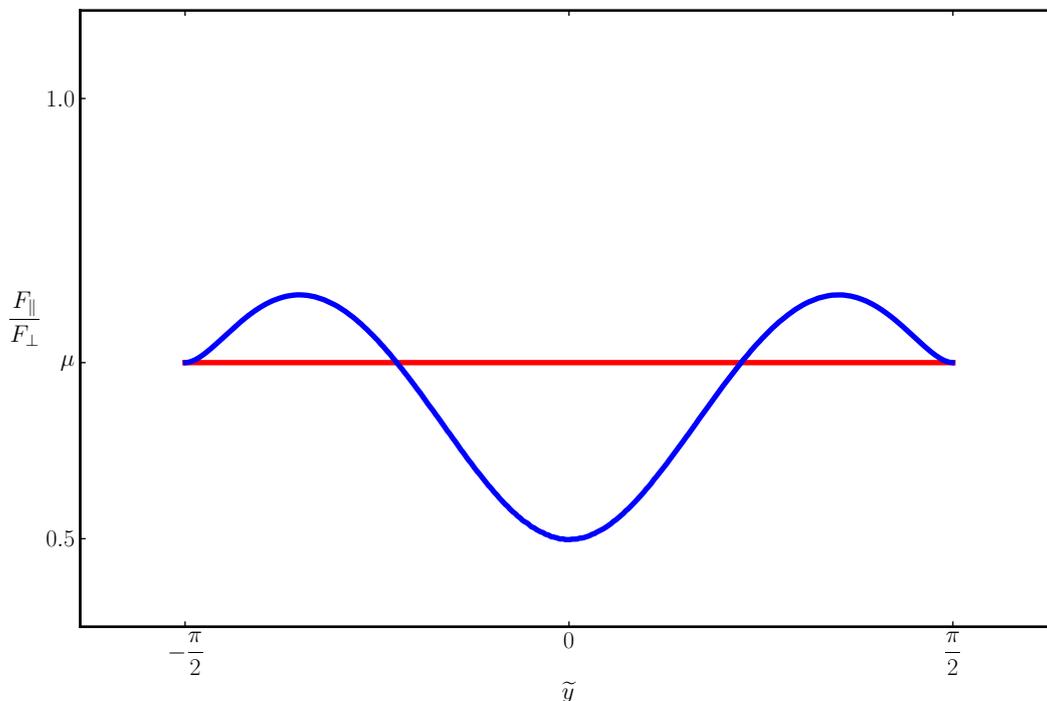


FIGURE 3.18 – Comparaison entre la contrainte trouvée numériquement (—) avec notre approximation théorique (—).

## 3.7 La forme d'équilibre dans le cas général

En restant en régime laminaire, nous cherchons cette fois le profil de la rivière dans le cas général (c'est-à-dire sans hypothèse sur le rapport d'aspect). Le problème se complique alors un peu.

### 3.7.1 Champ de vitesse

La contrainte fluide doit être déterminée à l'aide du tenseur des contraintes

$$\sigma_{ij} = \rho \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.14)$$

la contrainte  $\vec{\tau}$  s'appliquant sur une berge de vecteur normal  $\vec{N}$  est

$$\vec{\tau} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{N}. \quad (3.15)$$

Avec nos hypothèses  $\left( \frac{\partial}{\partial x} = 0, \vec{u} \cdot \vec{e}_y = \vec{u} \cdot \vec{e}_z = 0 \right)$ , la seule composante non nulle de  $\tau$  est parallèle à l'écoulement et nous trouvons

$$\vec{\tau} = \rho \nu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \vec{N} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{N} \cdot \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_x = \rho \nu \frac{\partial u}{\partial N} \cdot \vec{e}_x \quad (3.16)$$

Contrairement à l'hypothèse de lubrification utilisée précédemment, nous allons ici considérer les variations de la vitesse non seulement dans la direction verticale ( $z$ ) mais aussi dans la direction transverse ( $y$ ).

En régime laminaire, l'équation de Navier-Stokes projetée dans la direction de l'écoulement devient une équation de Poisson.

$$0 = g S + \nu \Delta u \quad (3.17)$$

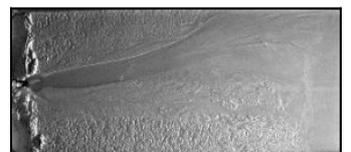
avec le laplacien  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

L'équation n'est pas soluble analytiquement, sa solution dépend de la forme des berges. Des logiciels de résolution par éléments finis permettent de trouver le profil pour une forme de berge donnée. Dans le cas particulier d'un large rapport d'aspect, alors  $\partial/\partial y \ll \partial/\partial z$  et l'équation de Poisson se simplifie pour devenir monodimensionnelle. Nous retrouvons alors un profil de vitesse parabolique et une contrainte sur le lit égale à  $\rho g D S$ .

### 3.7.2 Forme de la section

Nous nous plaçons toujours dans le cas d'une rivière sans transport de sédiments. Le rapport entre les forces tangentielles et normales est alors au seuil de mise en mouvement sur les berges (loi de Coulomb). Cela s'écrit maintenant

$$\frac{\sqrt{\left( \frac{\beta}{\alpha d_s} \frac{\rho}{\rho_s} \frac{\nu}{g} \frac{\partial u}{\partial N} \right)^2 + \sin^2 \phi}}{\cos \phi} = \mu. \quad (3.18)$$



Dans la limite du grand rapport d'aspect, nous retrouvons l'expression de l'équation 2.14. Dans le cas général, le profil de la rivière est déterminé par un système de quatre équations couplées

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\frac{g S}{\nu} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 && \text{sur la surface libre} \\ u &= 0 && \text{sur la berge} \\ \frac{\partial u}{\partial N} &= \frac{\alpha d_s}{\beta} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \frac{g}{\nu} \sqrt{\mu^2 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi} && \text{sur la berge} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Nous cherchons à adimensionner les équations. En prenant pour longueur et vitesse caractéristiques respectivement  $l^*$  et  $u^*$  telles que

$$\begin{aligned} l^* &= \frac{\mathcal{L}}{S} \\ u^* &= \mathcal{L}^2 \frac{g}{\nu S} \end{aligned} \quad (3.20)$$

avec  $\mathcal{L}$  la longueur caractéristique de l'équation 2.15. En notant avec des tildes les grandeurs sans dimension, l'équation 3.19 se résume alors à

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} &= -1 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} &= 0 && \text{sur la surface libre} \\ \tilde{u} &= 0 && \text{sur la berge} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{N}} &= \sqrt{\mu^2 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi} && \text{sur la berge.} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ces équations ne dépendent d'aucun paramètre. En grandeurs adimensionnées, la forme des berges et le profil de vitesse seront donc identiques quels que soient le débit d'eau et la nature du fond. Les grandeurs physiques et les échelles seront obtenues en multipliant les solutions trouvées par les variables caractéristiques du problème ( $l^*$  et  $u^*$ ).

L'équation 3.21 ne peut se résoudre analytiquement dans le cas général et la résolution numérique n'est pas simple non plus (nous voyons apparaître des instabilités). La solution

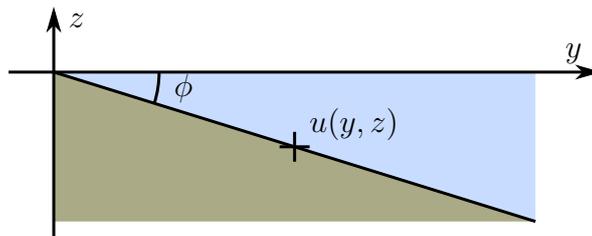


FIGURE 3.19 – Repère utilisé pour calculer l'angle de contact sur la berge.

en cosinus (équation 2.16) correspond à sa résolution au premier ordre pour un rapport d'aspect grand. Le développement à l'ordre suivant n'apporte pas de différence majeure (voir annexe 10.3). Nous pouvons toutefois déduire un résultat général concernant l'angle de contact des berges avec la surface.

### 3.7.3 Angle de contact de la berge avec l'air

En écrivant la vitesse  $u(y, z)$  sur la berge à côté de l'intersection avec la surface (que l'on prend ici comme origine de notre système de coordonnées, figure 3.19), on a

$$u(y, z) = u(0, 0) + y \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(0,0)} + z \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(0,0)} \quad (3.22)$$

or, sur le lit,  $u = 0$ , donc  $u(y, z) = 0$  et  $u(0, 0) = 0$ . La contrainte est nulle sur la surface libre donc  $\partial u / \partial z|_{(0,0)} = 0$ . Nous en déduisons que  $\partial u / \partial y|_{(0,0)} = 0$ , donc que  $\partial u / \partial N|_{(0,0)} = 0$ . D'après l'équation 3.21 nous trouvons que l'angle maximal pouvant être atteint par la berge est l'angle d'avalanche

$$\tan \phi_A = \mu \quad \text{au contact de l'air.} \quad (3.23)$$

Les sédiments à l'intersection de la berge avec la surface sont à l'angle d'avalanche. Cela doit être vrai quelle que soit la rivière et quel que soit l'écoulement considéré. C'est ce qui explique pourquoi les cailloux ont tendance à s'écrouler sous nos pieds près de la berge lorsque l'on sort d'une rivière après s'être baigné.

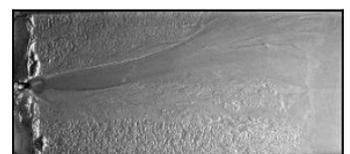
## 3.8 La section expérimentale est-elle une solution ?

Puisque nous ne pouvons pas résoudre la forme exacte de la rivière sans transport, nous pouvons vérifier si les résultats expérimentaux vérifient la condition de seuil de l'équation 3.21. Pour cela, nous utilisons le logiciel FreeFEM++ afin de déterminer le champ de vitesse de la rivière expérimentale (figure 3.20). Ce champ de vitesse nous permet de connaître précisément la contrainte fluide en tout point de la berge. Connaissant la section, nous pouvons observer le rapport entre la force tangentielle et la force normale s'appliquant sur les grains et le comparer au seuil de mise en mouvement (équation 3.21 et figure 3.20).

Au milieu de la rivière, la contrainte est constante et inférieure au seuil de mise en mouvement. Ce comportement est remarquable, la rivière a creusé son lit jusqu'à atteindre une contrainte constante proche du seuil de mise en mouvement. Ce comportement était attendu théoriquement ; les expériences vérifient qu'une rivière sans transport à l'équilibre a bien une contrainte similaire au seuil de mise en mouvement.

Sur les bords de la rivière, la contrainte augmente brusquement et dépasse le seuil de mise en mouvement. La pente des berges est plus importante que l'angle d'avalanche théorique. Ceci s'explique peut-être par l'apparition de forces capillaires à l'interface entre le fluide et l'air qui stabilisent le sable.

L'ensemble de ces résultats confirme la pertinence de la théorie du seuil de mise en mouvement dans le cas d'une rivière qui ne transporte pas de sédiments.



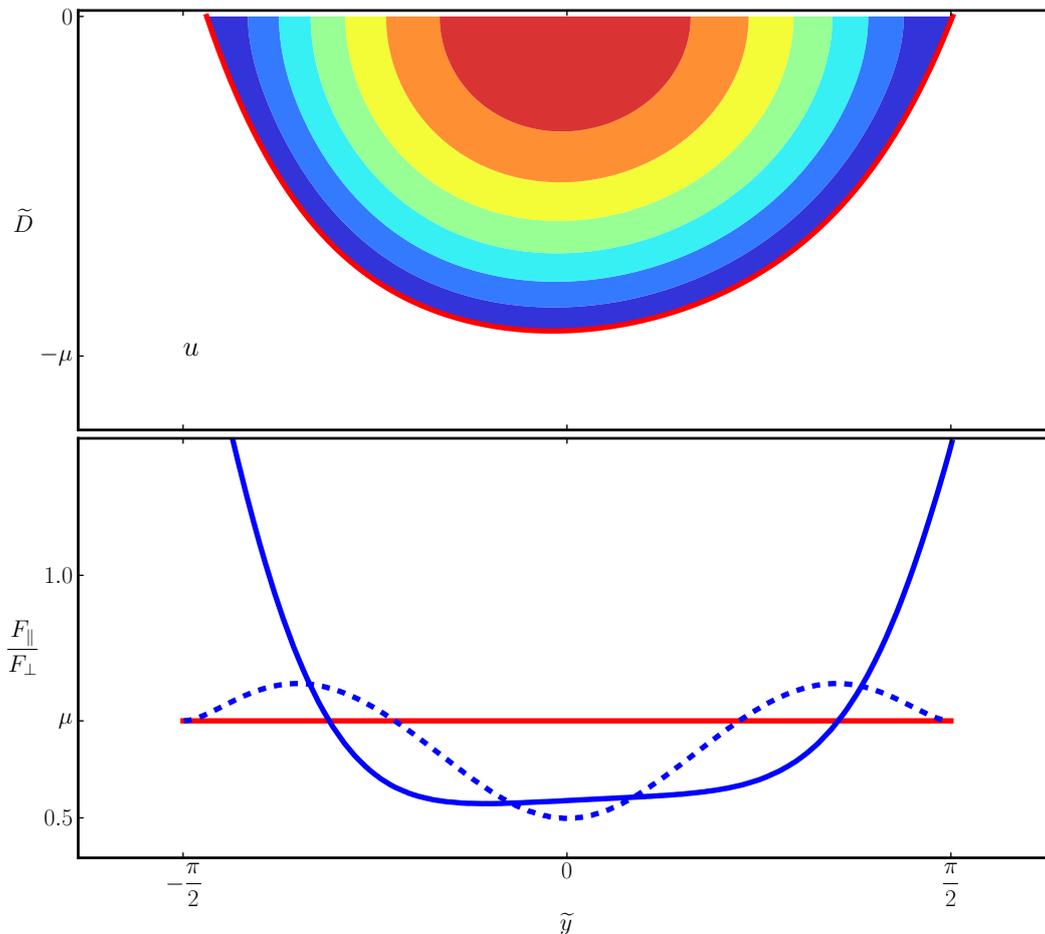


FIGURE 3.20 – Contrainte subie par les grains (—) comparée au seuil de mise en mouvement (—) et champ de vitesse de l’écoulement dans notre section expérimentale. La contrainte trouvée pour la forme théorique en cosinus est aussi représentée (- -).

## Conclusion

En nous servant des résultats sur le seuil de mise en mouvement, nous avons mis en place un modèle très simple pour expliquer la forme d’équilibre d’une rivière à fond sableux sans transport de sédiments. En supposant que les grains situés sur la berge sont au seuil de mise en mouvement, nous trouvons qu’une rivière doit avoir une forme de cosinus quel que soit le débit. Le rapport d’aspect est alors une constante.

En intégrant ensuite le profil de vitesse de l’écoulement le long de la section, on déduit théoriquement les équations de régime sans aucun paramètre ajustable. On trouve en particulier que la largeur de la rivière varie avec la racine cubique du débit d’eau en régime laminaire et avec la racine carrée du débit d’eau en régime turbulent.

Nous avons réalisé une expérience pour vérifier cette théorie en régime laminaire. Si les manipulations peuvent être délicates à mettre en place (il faut en particulier veiller à augmenter la viscosité du fluide), ces expériences nous ont permis de créer pour la première fois une rivière alluviale stable constituée d’un seul chenal. Une fois cette rivière à l’équilibre, nous avons pu vérifier la cohérence de notre modèle théorique à la fois avec la forme du profil de la rivière et avec les équations de régime.

Nous avons donc bien isolé les principaux ingrédients physiques déterminant la forme

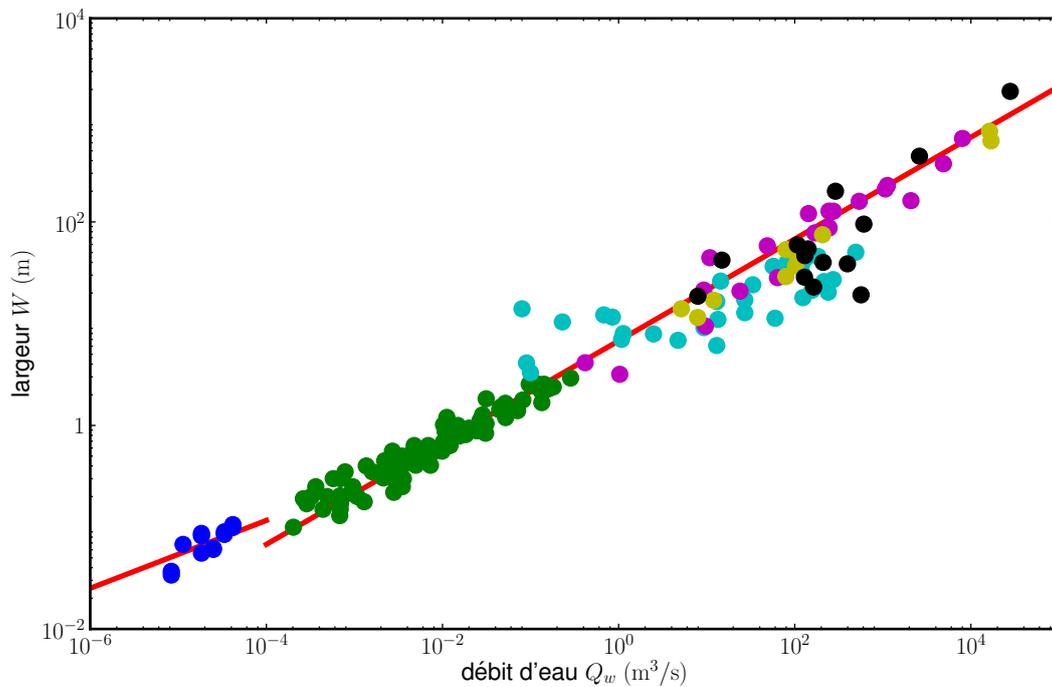


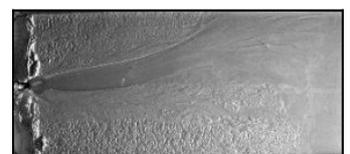
FIGURE 3.21 – Comparaison entre d’une part les équations de régime théoriques trouvées en régimes laminaires et turbulents (—) et d’autre part nos données expérimentales (●) et des données collectées dans la nature<sup>[6]</sup> par Abrams<sup>[42]</sup> (●), Osterkamp (●), Brownlie (●), Church (●) et Van den Berg (●).

d’équilibre de la rivière. Cette forme dépend de l’équilibre entre la contrainte fluide et la gravité exercée sur les grains.

Pour les écoulements turbulents, nous avons retrouvé la loi de Lacey (figure 3.21). Ici encore, l’accord entre la théorie et les données est très bon. Les lois d’échelle en particulier semblent particulièrement robustes et se vérifient sur de nombreux ordres de grandeurs. La contrainte sur le lit des rivières naturelles doit donc être proche du seuil de mise en mouvement.

En revanche, si l’on regarde le rapport d’aspect des rivières naturelles (figure 3.22), on remarque que ce dernier est bien au-dessus de ce qu’on attend. Ce résultat est étonnant car la section en cosinus ne dépend pas normalement du type d’écoulement. Cette différence peut avoir différentes origines : nous avons négligé dans notre équilibre certaines forces présentes dans la nature et qui peuvent avoir une influence sur le seuil de mise en mouvement telles que la force de portance. Cette force de portance peut modifier le seuil de mise en mouvement (annexe 9) ou la forme d’équilibre de la rivière (annexe 10.1).

Mais la principale différence entre les rivières naturelles et notre modèle théorique est que les rivières naturelles transportent des sédiments. Or, elles ne peuvent pas transporter des sédiments si le lit est exactement au seuil de mise en mouvement.



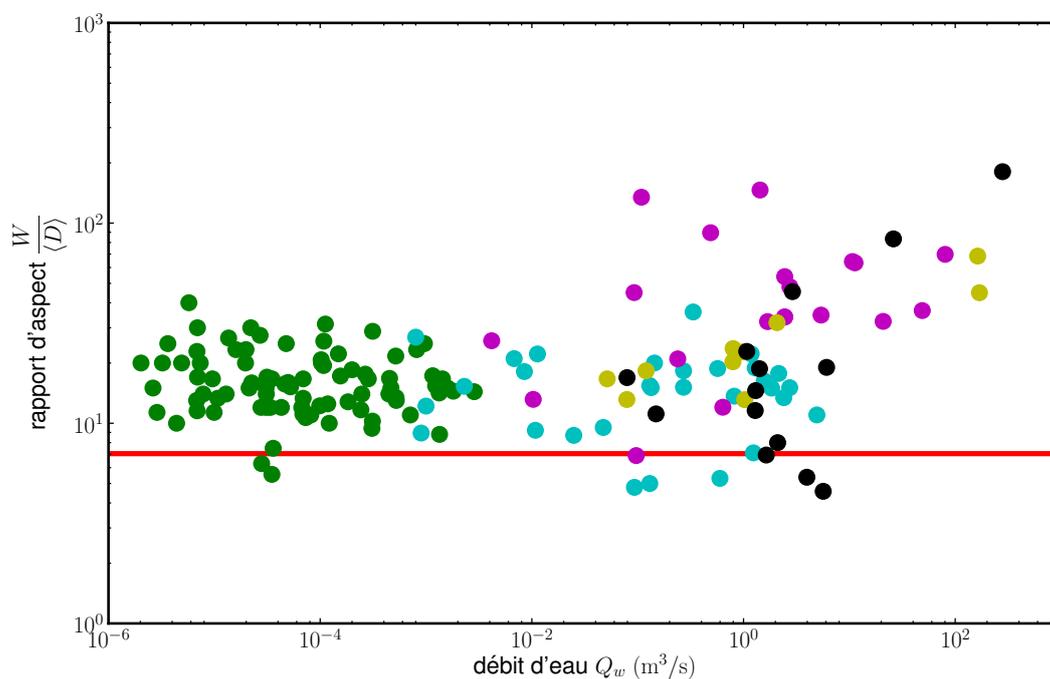


FIGURE 3.22 – Comparaison entre le rapport d'aspect théorique du cosinus (—) et des données collectées dans la nature<sup>[6]</sup> par Abrams<sup>[42]</sup> (●), Osterkamp (●), Brownlie (●), Church (●) et Van den Berg (●).

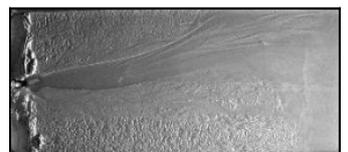
## Deuxième partie

# Physique des sédiments charriés



George Valentin étudiant les écoulements granulaires.

*The Artist.* M. Hazanavicius, 2011





# Chapitre 4

## D'un grain en mouvement au débit de sédiments

Nous avons vu dans la partie précédente que la forme d'équilibre d'une rivière à transport nul est entièrement déterminée par la condition de seuil. Ce modèle, proposé par Glover et Florey, rend compte de façon satisfaisante de la morphologie des rivières expérimentales. L'accord avec les données de terrain est cependant moins satisfaisant. Ce désaccord peut être dû au fait que la plupart des rivières naturelles transportent du sédiment.

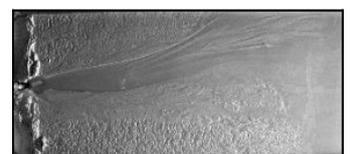
### 4.1 Le suivi expérimental de grains

Sans transport de sédiments, la forme d'une rivière est imposée par les contraintes appliquées à l'échelle du grain. Nous pensons que la modification de la forme d'une rivière lorsqu'elle transporte des sédiments est due elle aussi à des phénomènes à l'échelle des grains. Afin de mieux déterminer les caractéristiques du transport de sédiments, nous avons mis en place une expérience permettant de suivre les grains charriés. Ce type d'expérience, semblable à celle de Shields<sup>[17]</sup>, a été souvent réalisée pour étudier le transport par charriage<sup>[20;22;43-49]</sup>.

#### 4.1.1 Procédure expérimentale

L'expérience utilise un canal rectangulaire en Plexiglas mesurant 1 m de long, 3 cm de large et 5 cm de haut environ (figure 4.1). Ce canal est rempli de sédiments plastiques (semblables à ceux utilisés pour réaliser nos rivières expérimentales). Un muret de 3 cm de haut en sortie évite la propagation d'une onde d'érosion qui enlèverait les sédiments. Le canal est incliné avec une faible pente initiale de l'ordre de 1 %. Avant une expérience, nous faisons couler de l'eau saturée en sédiments dans le canal. Le sédiment se dépose sur toute la surface du canal et forme le lit. Nous démarrons ensuite l'expérience en imposant un débit d'eau (environ 1 L/min) avec un faible débit de sédiments (environ 0,1 g/min) afin d'obtenir un écoulement de grains dans l'écoulement.

Nous observons que les grains sont entraînés par l'écoulement : ils avancent à la surface du lit, formant une couche mobile d'épaisseur comparable à la taille d'un grain. Ce type de transport est appelé transport par charriage. Contrairement à d'autres études du transport de grains, en particulier pour des transports éoliens<sup>[1]</sup>, les études de charriage sont réalisées pour une contrainte proche du seuil de mise en mouvement.



Si le seuil est trop élevé, les grains passent en suspension et le transport dépend de l'écoulement dans son ensemble.

Les expériences de charriage réalisées jusqu'à présent<sup>[17;19;20;23-25]</sup> imposent le débit d'eau et la pente (donc la contrainte sur le fond) et étudient le comportement des sédiments sur des temps courts.

Cependant, des expériences menées par Charru et coll.<sup>[20]</sup> ont montré que pour une contrainte constante, le flux de sédiments diminue au cours du temps. Cette évolution est due à l'évolution de la surface du lit de sédiments. Aux temps courts, le lit est lâche et les sédiments sont facilement érodés. Au fur et à mesure que le temps passe, le lit se réorganise et l'arrachage d'un grain est de plus en plus difficile. Une fois le lit de grains entièrement réorganisé, le débit de sédiments ne varie plus.

Ici, nous ne nous intéressons qu'à l'état d'équilibre de notre système, sans tenir compte du régime transitoire. Nous utilisons donc une approche différente. Les paramètres de contrôle de l'expérience sont le débit d'eau et le débit de sédiments. La pente, quant à elle, est libre et évolue au cours du temps.

A partir du moment où le débit d'eau et le flux de sédiments démarrent, la pente du lit sur le canal évolue lentement jusqu'à atteindre sa valeur d'équilibre. Contrairement aux rivières, nous ajoutons ici un flux de sédiments en entrée. Le débit de sédiments doit être suffisamment important pour que des grains soient en mouvement sur toute la largeur du canal afin d'avoir une répartition homogène du flux de sédiments. La pente du lit peut donc soit diminuer (érosion, comme pour les rivières), soit augmenter (dépôts de grains sur le lit).

L'équilibre est atteint lorsque cette pente n'évolue plus et que le débit de sédiments est homogène sur toute la longueur du canal. Typiquement, cet état d'équilibre est atteint au bout d'une dizaine d'heures.

Le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement est de l'ordre de 1 000. L'injection de colorant dans le canal nous permet de vérifier que nous restons en régime laminaire.

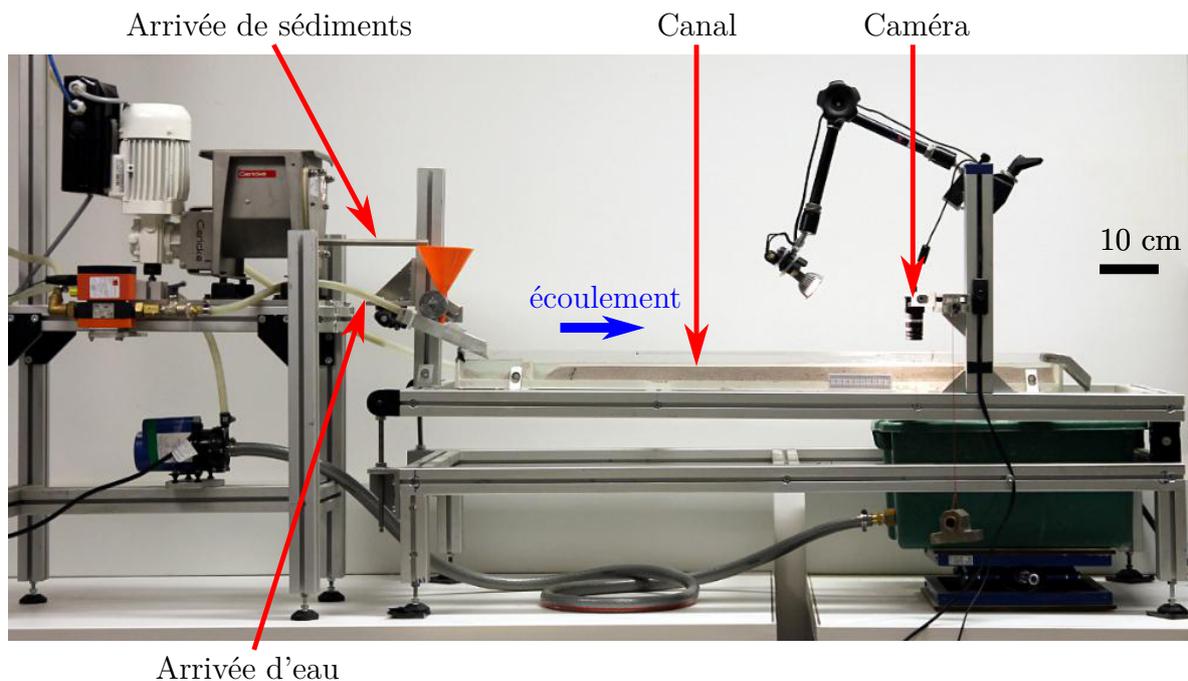


FIGURE 4.1 – Montage expérimental pour le suivi de grain.

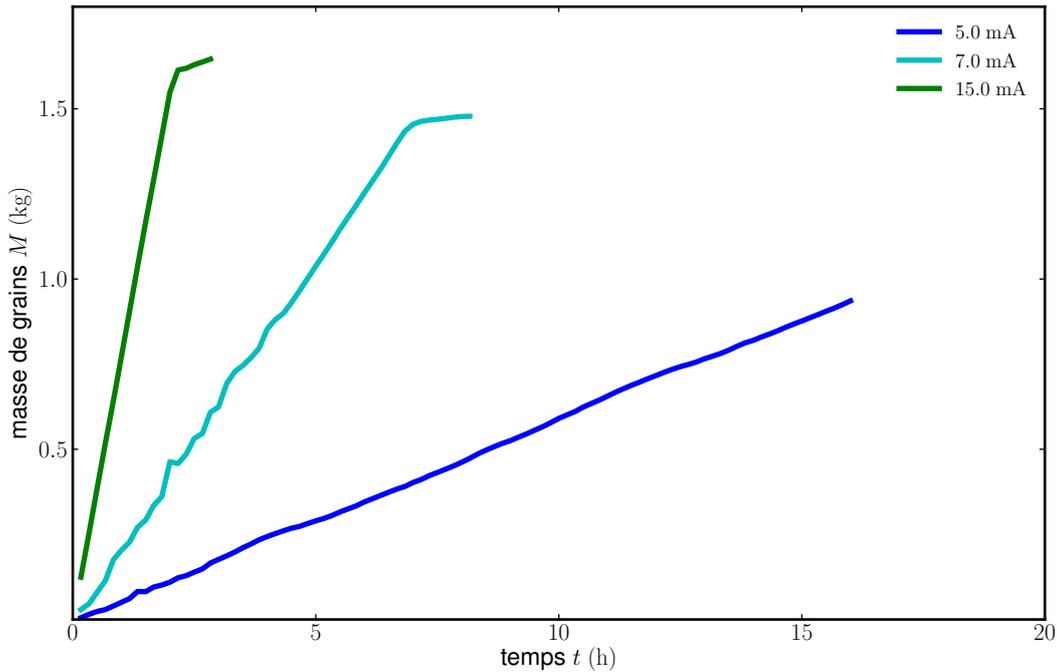


FIGURE 4.2 – Masse de grains débitée par le doseur en fonction du temps pour différents courants de contrôle. Le débit est constant. Le palier correspond au réservoir vide.

Dans notre expérience, le Reynolds de grain (équation 2.6) vaut environ 30. Cette valeur laisse présager un nombre de Shields critique aux alentours de 0,15<sup>[19]</sup> (figure 2.6 ou figure 9.2 en annexe).

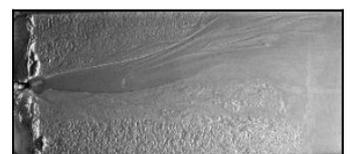
#### 4.1.2 Alimentation en sédiments

Pour l'alimentation en sédiments, nous utilisons un doseur de précision de la marque Gericke du type GLD 87 (vis de taille 00, spirale ronde). Le doseur est constitué d'un réservoir dans lequel plonge une vis sans fin, entraînée par un moteur qui la fait tourner à vitesse constante. Le moteur peut être contrôlé à distance par un courant d'entrée  $I$  avec  $I = 4 \text{ mA} - 20 \text{ mA}$ . Le courant d'entrée est produit par un montage dont les détails sont indiqués annexe 12.1.4. Pour un courant imposé, le débit de sédiments est indépendant de la quantité de sédiments dans le réservoir (figure 4.2).

La relation entre le débit de sédiments et l'intensité imposée est calibrée expérimentalement pour nos sédiments figure 4.3. Cette relation est approchée par une relation du type  $Q_s = q_I(I - I_0)$  avec  $q_I$  la pente de la droite et  $I_0$  le courant théorique à partir duquel le doseur commence à fonctionner.

Deux doseurs ont été utilisés, un pour la création des micro-rivières (appelé "Rivière") et un pour le suivi de la trajectoire de grains (appelé "Diffusion"). Les valeurs trouvées changent légèrement selon les doseurs (table 4.1).

Ces valeurs donnent de bonnes approximations pour connaître le comportement du doseur sur toute sa plage d'utilisation. Dans la suite, nous utiliserons principalement des faibles intensités conduisant à de faibles débits de grains. Pour ces valeurs caractéristiques il faut une calibration spécifique (table 4.1).



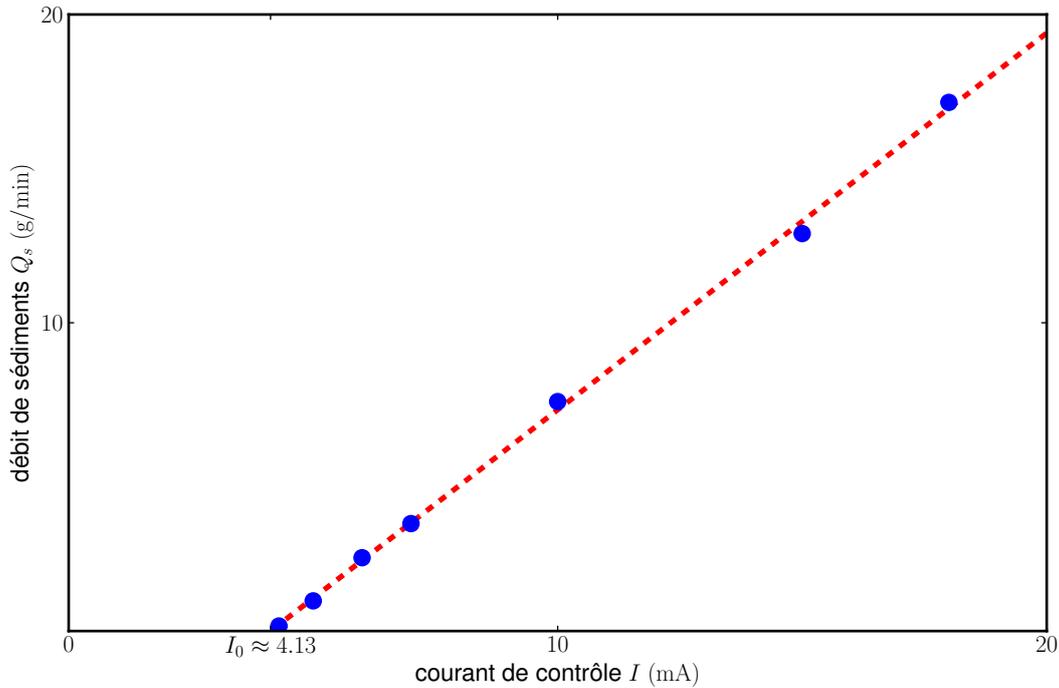


FIGURE 4.3 – Courbe de calibration du doseur de grains. Il existe une valeur seuil  $I_0$  en deçà de laquelle le doseur ne fonctionne pas.

Doseur	$q_I$ (kg/s/mA)	$I_0$ (mA)	Doseur	$I$ (mA)	$Q_s$ (g/min)
Rivière	$2,04 \cdot 10^{-5}$	4,13	Rivière	4,30	$1,64 \cdot 10^{-1}$
Diffusion	$1,93 \cdot 10^{-5}$	4,40	Diffusion	4,30	$8,10 \cdot 10^{-2}$
			Diffusion	4,40	$2,08 \cdot 10^{-2}$
			Diffusion	4,50	$3,06 \cdot 10^{-1}$

TABLE 4.1 – Calibration des deux doseurs de grains. Le tableau de gauche montre la calibration générale tandis que le tableau de droite se focalise sur les débits de sédiments obtenus pour un faible ampérage.

### 4.1.3 Enregistrement d'une trajectoire

Une caméra située au dessus du canal permet de filmer les grains transportés par charriage. Il s'agit d'une caméra uEye de la marque IDS Imaging de type UI-1540SE-M, pilotée par le logiciel uEye Cockpit (<http://www.ids-imaging.com/drivers.php?cat=2>). Elle permet l'acquisition d'une image de  $1280 \times 1024$  pixels à une fréquence de 25 images par seconde. Cette fréquence est limitée par le débit de transmission vers l'ordinateur (USB 2.0). En effet, la fréquence augmente lorsque la taille de l'image est réduite, on obtient par exemple une fréquence de 100 images par seconde pour une image de  $1024 \times 256$  pixels.

La caméra est disposée de manière à pouvoir filmer une surface d'une taille de  $35 \times 8$  mm (soit environ 2 500 grains) à une fréquence de 100 images par seconde. Environ 0,5% des grains sont teintés en noir, ce qui permet de les reconnaître et de les suivre d'une image à l'autre pour étudier leur trajectoire (un exemple de programme est donné annexe 12.2.3). La trajectoire suivie est celle du centre de gravité du grain, considérée comme le milieu de la tache noire vue par la caméra. Pour chaque expérience (débit d'eau et de sédiments fixés), entre 5 000 et 10 000 trajectoires sont enregistrées.

La mesure de la position est dans l'ensemble bonne (on trouve la position du grain avec une incertitude  $\delta x \sim d_s/5$ ) mais peut être altérée : le grain a tendance à rouler sur lui-même en même temps qu'il avance. Selon la rotation, cela peut donner l'impression que le grain s'arrête ou la surface du grain teintée devient trop petite pour que le logiciel la détecte (figure 4.4). Dans ce cas, la trajectoire s'arrête et une nouvelle commence. Cela explique en partie pourquoi nous avons peu de très longues trajectoires.

## 4.2 Les échanges avec le lit

Au cours d'une expérience, la pente du lit évolue avec le temps tandis que le débit d'eau et le débit de sédiments restent constants. Les grains charriés roulent sur la surface du lit. Ils sont donc continuellement en interaction avec le lit. L'évolution de la pente est donc due à des échanges entre les grains sur le lit et les grains en mouvement.

Chaque grain a un mouvement composé d'alternances entre des vols (durant lesquels le grain ne vole pas du tout mais roule et glisse sur le lit) et des temps de repos (durant lesquels le grain est immobile dans le lit). Il est ainsi courant qu'un grain en mouvement soit déposé sur le lit ou au contraire qu'un grain du lit passe en mouvement. Ce mécanisme est appelé mécanisme d'érosion-sédimentation (ou érosion-dépôt, *erosion-deposition* en anglais, figure 4.5)<sup>[20;22;43-45]</sup>.

### 4.2.1 Détermination du mouvement d'une particule

Comme l'eau présente une surface libre mouvante, la position du grain enregistré par la caméra varie légèrement au cours du temps. Nous cherchons à caractériser ces fluctuations de vitesse et en particulier à déterminer si un grain est en mouvement ou non. Pour cela, nous faisons une moyenne glissante de la position du grain au cours du temps et nous regardons la vitesse de la particule au cours du temps (figure 4.6). Il semble clair qu'il y a deux régimes distincts, la particule est soit en mouvement soit à l'arrêt (vers 0,5 s sur notre graphique).

Pour interpréter nos résultats, nous regardons l'écart-type de la position du grain au cours du temps. Si cet écart-type est au-dessus d'un certain seuil, nous considérons que la particule avance. En dessous du seuil, nous considérons que la particule est immobile. Cette détection dépend de deux paramètres, le nombre d'images sur lequel nous faisons notre moyenne glissante (entre 3 et 5) et le seuil à partir duquel nous considérons que la particule avance (nous prenons un écart type de  $0,1 d_s$ ). Cet analyse est illustrée figure 4.6.

Dans cet exemple, le grain semble faire 5 vols différents. Cette détection automatique n'est pas parfaite (nous avons par exemple l'impression que le temps de pause vers  $t \approx 0,8$  s n'en est pas un) mais rend bien compte du comportement du grain. Changer les paramètres de la moyenne et du seuil modifient légèrement cette détection. Nous

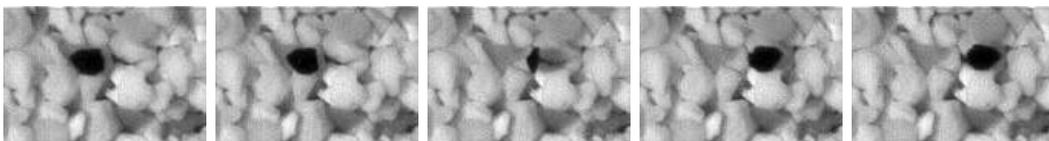
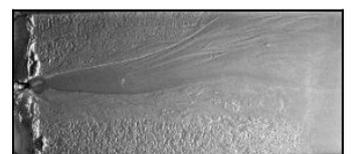


FIGURE 4.4 – Exemple d'un grain en train de rouler durant une expérience. Sa surface visible diminue considérablement.



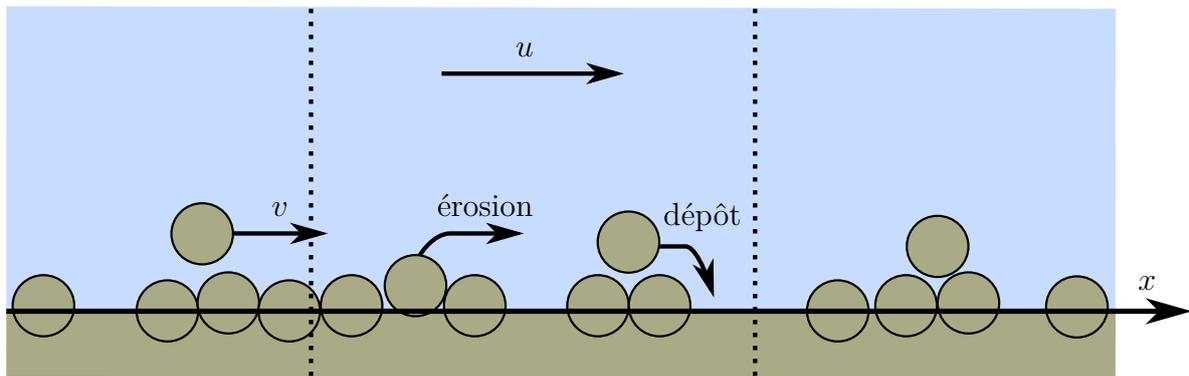


FIGURE 4.5 – Les grains en mouvement avancent à une vitesse  $v$  dans l'écoulement (vitesse du fluide  $u$ ). Il y a des échanges entre des grains du lit qui deviennent mobiles (érosion) et des grains en mouvement qui se déposent.

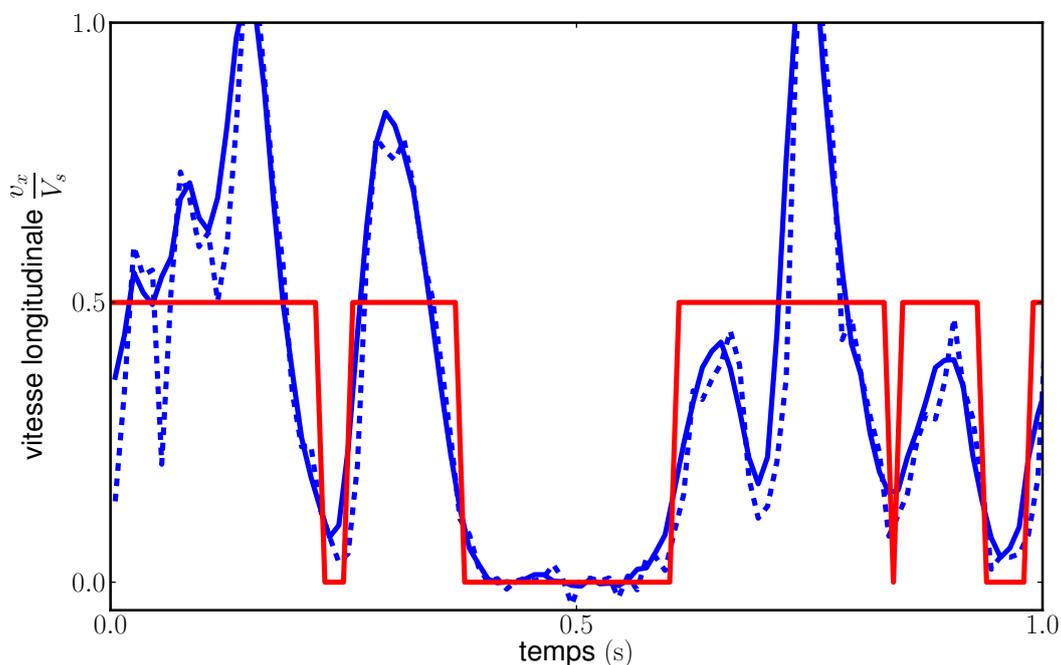


FIGURE 4.6 – Détermination du mouvement d'une particule. Nous avons tracé la vitesse de la particule au cours du temps. Nous voyons le signal brut (---), le signal moyenné sur 4 positions (—). Le signal créneau (—) indique 0,5 si le grain est considéré en mouvement et 0 s'il est considéré comme immobile.

avons réalisé des tests pour vérifier que ces changements de paramètres n'influent pas sur les résultats obtenus.

#### 4.2.2 Grains en mouvement : une couche homogène

Un grain charrié avance par périodes (figure 4.7) : la particule alterne des moments où elle avance (vols) et des moments où elle reste immobile sur le lit. Les durées de ces périodes semblent aléatoires.

Une même particule peut ainsi échanger plusieurs fois entre le fond et la couche de grains en mouvement. Inversement, une particule en mouvement peut s'arrêter sur le lit de manière définitive ou une particule à l'origine fixe peut être charriée. Il est donc plus

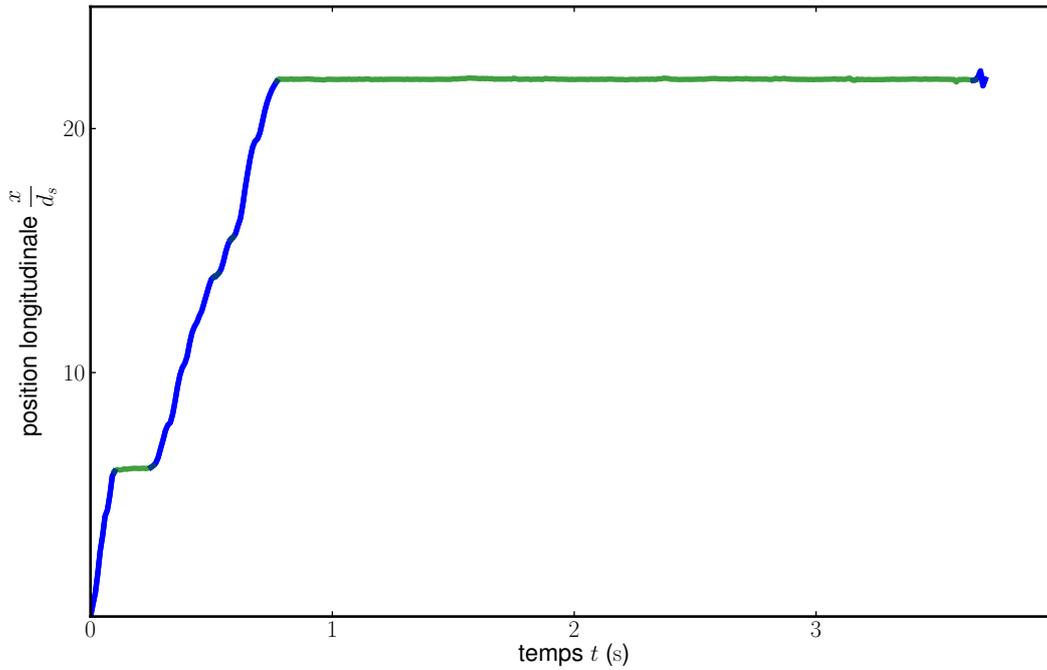


FIGURE 4.7 – Avancée d'un grain en fonction du temps. Le grain alterne des périodes de vol (—) où il est en mouvement et des périodes de repos (—) où il reste stationnaire sur le lit.

pertinent d'étudier statistiquement l'ensemble des particules en mouvement plutôt que chaque grain individuellement.

Nous ferons donc de la physique statistique en supposant que tous les grains en mouvement sont identiques et ont les mêmes propriétés. Si la couche de grains en mouvement a une épaisseur suffisamment faible (un diamètre de grain environ), nous pouvons modéliser l'ensemble des grains en mouvement par une couche homogène de grains mobiles. Dans ces conditions le flux de sédiments par unité de largeur est

$$q_s = n v. \quad (4.1)$$

en notant  $n$  la densité surfacique de grains en mouvement et  $v$  leur vitesse.

Concrètement, c'est le cas tant que la concentration de grains en mouvement est suffisamment faible ( $n d_s^2 \ll 1$ ). Si trop de grains sont en mouvement, alors cette densité surfacique dépend de l'altitude dans l'écoulement et tous les grains ne subissent pas les mêmes interactions avec le lit ; l'analyse de la trajectoire des grains devient donc plus complexe.

De plus, nous ferons une hypothèse d'un gaz parfait, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'interaction entre les grains : chaque grain est indépendant et tous les grains ont le même comportement. Pour mieux caractériser le flux de sédiments, nous cherchons à déterminer plus précisément la vitesse et la concentration de grains en mouvement.

### 4.3 La vitesse des grains

Pour relier cette couche de grains en mouvement au flux de sédiments, nous avons besoin de connaître la vitesse de la couche. Comme les grains sont entraînés par le fluide, leur vitesse  $v$  doit être fonction de la vitesse de l'écoulement. Les grains en mouvement



restent à la surface du lit, nous cherchons donc la vitesse de l'écoulement sur le lit  $u_s$  à partir du gradient de vitesse sur le fond :

$$\left. \frac{du_s}{dz} \right|_{\text{fond}} = \frac{\tau}{\rho \nu}. \quad (4.2)$$

d'où

$$u_s = \frac{\tau}{\rho \nu} d_s \quad (4.3)$$

car la couche mobile a pour épaisseur  $d_s$ . Cette vitesse se reformule en fonction du nombre de Shields  $\theta$  (équation 2.8). La vitesse du fluide au niveau du lit s'écrit donc :

$$u_s = 18 \theta V_s \quad (4.4)$$

en notant  $V_s$  la vitesse de Stokes

$$V_s = \frac{d_s^2}{18} \frac{\rho_s - \rho}{\rho \nu} g \quad (4.5)$$

qui correspond à la vitesse de sédimentation de particules sphériques dans un écoulement visqueux. La vitesse du fluide sur le lit est donc fonction de la vitesse de Stokes. Nous en déduisons la vitesse des grains en mouvement :

$$v \propto \theta V_s. \quad (4.6)$$

En régime laminaire, la vitesse des grains en mouvement dépend donc de la contrainte sur le fond et de la vitesse de Stokes. Les expériences montrent que la vitesse de la particule est inférieure mais proportionnelle à la vitesse du fluide au niveau des grains d'un facteur 5 environ, ce facteur est sans doute dû aux interactions entre la particule en mouvement et le lit.

## 4.4 Équilibre érosion-sédimentation

Intéressons nous maintenant à la concentration de particules en mouvement. La conservation de la masse le long de l'écoulement impose

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} n = \dot{n}_e - \dot{n}_s \quad (4.7)$$

avec  $\dot{n}_e$  la densité de grains du lit qui passe en mouvement par unité de temps, appelée taux d'érosion des grains et  $\dot{n}_s$  la densité de grains en mouvement qui s'immobilisent sur le lit, appelée taux de sédimentation des grains. Nous connaissons déjà l'expression de la vitesse  $v$ ; en revanche la concentration des grains en mouvement dépend de la fréquence des échanges avec le lit. Nous réinterprétons ici un modèle proposé à l'origine par Charru<sup>[20;43-45]</sup> pour le transport de grains charriés par des écoulements laminaires.

### 4.4.1 Taux d'érosion

#### Calcul du temps d'érosion

Nous nous interrogeons tout d'abord sur l'arrachement d'un grain. Ce taux d'érosion est simplement égal au quotient de la densité de grains sur le lit par un temps d'érosion.

La densité de grains sur le lit est de l'ordre de  $1/d_s^2$ . Le taux d'érosion est donc :

$$\dot{n}_e \sim \frac{1}{d_s^2} \frac{1}{t_e}. \quad (4.8)$$

Dans un écoulement laminaire, nous supposons que le grain sur le lit est soumis à deux forces : le frottement solide dû à son interaction avec les autres grains et la force d'entraînement visqueuse dite de Stokes dans la direction de l'écoulement. D'après la loi de Coulomb, la force de frottement solide est égale au poids du grain multiplié par un coefficient. Ici, nous ne tiendrons pas compte des facteurs de formes et nous nous contenterons de faire des analyses dimensionnelles. Dans ce cas, nous utilisons comme seuil de mise en mouvement le nombre de Shields critique  $\theta_t$ . La seconde loi de Newton appliquée sur le grain s'écrit alors :

$$d_s^3 \rho_s \dot{v} = \rho \nu d_s (u_s - v) - \theta_t d_s^3 (\rho_s - \rho) g. \quad (4.9)$$

Nous pouvons isoler deux temps caractéristiques du transport de sédiments, le temps inertiel  $t_i$  qui correspond au temps nécessaire au grain pour atteindre sa vitesse limite (équilibre entre l'inertie et la force de Stokes) et le temps d'érosion  $t_e$  qui correspond au temps que mettrait le grain à sortir d'une cavité de taille  $d_s$  (équilibre entre la force de Stokes et le frottement solide).

$$t_i = \frac{d_s^2 \rho_s}{\rho \nu} = 18 V_s \frac{\rho_s}{g (\rho_s - \rho)} \quad (4.10)$$

$$t_e = \frac{d_s}{18 V_s} \frac{1}{\theta - \theta_t}.$$

C'est le temps le plus long qui va gouverner la dynamique du transport de grains. Pour pouvoir les comparer, nous faisons le rapport entre ces deux temps

$$\frac{t_i}{t_e} = d_s^3 \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \frac{g}{\nu^2} \frac{\rho_s}{\rho} (\theta - \theta_t). \quad (4.11)$$

Lorsque ce nombre est suffisamment faible, l'écoulement autour des grains est visqueux et l'inertie est négligeable. Ici, nous voyons en plus que l'écart au seuil de mise en mouvement a son importance ; si nous sommes au voisinage du seuil, nous pouvons négliger d'autant plus l'inertie des grains. Pour un transport par charriage proche du seuil, c'est donc le temps d'érosion  $t_e$  qui va contrôler la dynamique du transport. La fréquence d'érosion est bien sûr l'inverse de ce temps d'érosion

Le taux d'érosion s'écrit donc (équation 4.8)

$$\dot{n}_e \sim \frac{18}{d_s^2} \frac{V_s}{d_s} (\theta - \theta_t). \quad (4.12)$$

La dépendance linéaire à l'écart au seuil est cohérente avec les expériences récemment réalisées sur le transport par charriage<sup>[20;22]</sup>.

### Suivi de l'accélération d'un grain

Nous pouvons vérifier ces résultats expérimentalement. Pour cela nous mesurons l'accélération d'un grain lors de son érosion. Nous déterminons quand le grain est en



mouvement et nous étudions sa vitesse entre le début du mouvement (le grain est théoriquement au repos) et un moment où le grain a une vitesse constante (figure 4.8). Afin de rendre les résultats plus lisibles, nous adimensionnons les unités par les grandeurs caractéristiques du charriage, c'est-à-dire le diamètre de grain  $d_s$  pour les longueurs et la vitesse de Stokes  $V_s$  pour les vitesses. Pour nos grains,

$$V_s \approx 3,15 \text{ cm/s.} \quad (4.13)$$

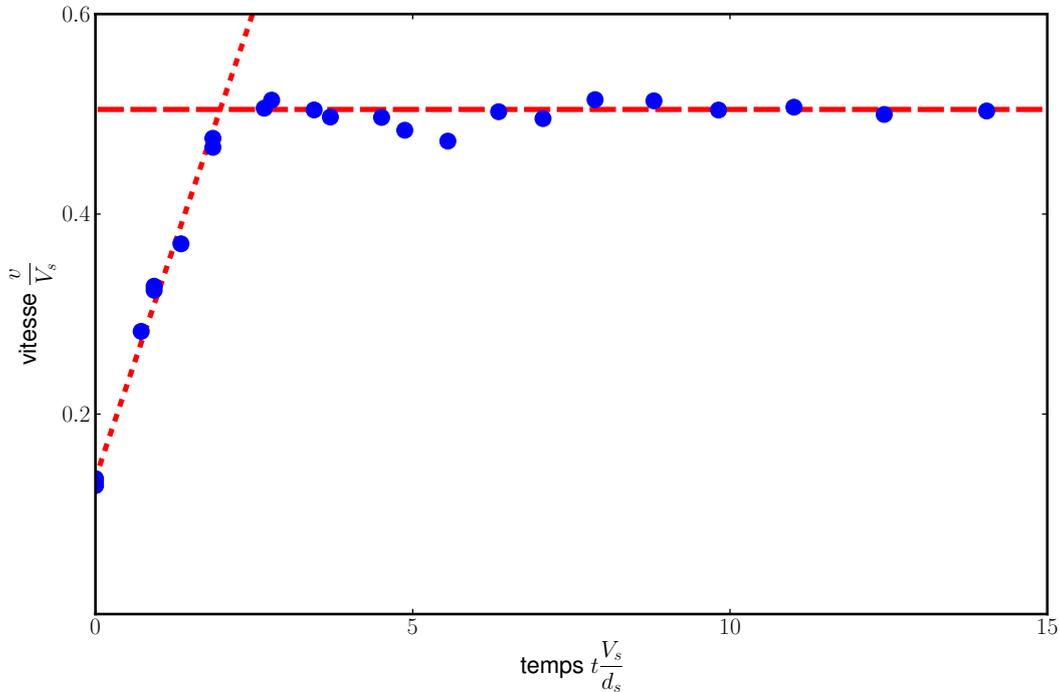


FIGURE 4.8 – Vitesse d'un grain au cours du temps. Les données expérimentales (●) sont approchées par une accélération (---) puis un régime stationnaire (—). Chaque point correspond à 1 500 données environ

Au début du vol, la vitesse du grain croît linéairement puis atteint rapidement une vitesse constante. Théoriquement, cette accélération doit avoir lieu durant un temps proche du temps d'érosion. Ici, le grain accélère durant

$$t_e \frac{V_s}{d_s} \approx 2 \quad (4.14)$$

ce qui correspondrait au temps d'érosion pour une contrainte supérieure de 20 % à la contrainte seuil (équation 4.10). L'ordre de grandeur est bon.

Cette mesure nous permet aussi de mesurer le seuil de mise en mouvement : comme la vitesse croît linéairement, l'accélération à laquelle est soumis le grain est constante au début du mouvement. Le grain est donc soumis à une force constante pour l'arracher au fond. Nous trouvons expérimentalement que l'accélération  $\dot{v}$  est

$$\dot{v} = 0,53 \text{ m/s}^2 \pm 0,14 \text{ m/s}^2 \quad (4.15)$$

ce qui nous permet de calculer la force à laquelle est soumis le grain et donc le nombre de Shields correspondant (sans tenir compte des facteurs de forme)

$$\theta_t = \frac{F}{d_s^3 (\rho_s - \rho) g} = \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho} \frac{\dot{v}}{g} \approx 0,16. \quad (4.16)$$

Le nombre de Shields critique est cohérent avec ce que l'on attend pour ce nombre de Reynolds de grain<sup>[19]</sup> (figure 2.6).

Enfin, nous pouvons étudier la vitesse finale du grain. Cette vitesse est inférieure d'un facteur 5 environ à la vitesse du fluide au niveau des grains. Cette différence peut être due au frottement avec le fond. La valeur de cette vitesse est en accord avec les observations expérimentales déjà réalisées en régime laminaire<sup>[20]</sup>.

Toutes ces observations valident très bien qualitativement le mécanisme d'érosion. Lorsque la contrainte sur le fond est supérieure au seuil de mise en mouvement, le grain est arraché du lit. Il accélère ensuite, le temps de sortir d'une cavité de taille  $d_s$ , puis sa vitesse se stabilise à une valeur inférieure à la vitesse de l'écoulement sur le lit. Malheureusement, nous manquons de précision pour étudier en détail ce régime transitoire. Des mesures faites avec une caméra rapide permettraient de préciser ces résultats.

## 4.4.2 Vol d'un grain

### Longueur de vol

Une fois arraché du lit, le grain débute son vol. Tant que le lit ne présente pas d'aspérité suffisamment importante pour que la particule reste piégée dedans, cette dernière reste en mouvement. Pour que les grains soient piégés, il faut que le défaut dans le lit ait une taille de l'ordre de  $d_s$ . Les particules ont donc une chance de se redéposer proportionnelle au nombre d'aspérités rencontrées par unité de temps<sup>[20]</sup>. Si nous supposons que les grains ont une chance  $\lambda$  de se déposer à chaque fois qu'ils passent une aspérité, nous pouvons calculer la distribution des longueurs de vol :

$$P(l_{\text{vol}}) \propto (1 - \lambda)^{l_{\text{vol}}/d_s} \Rightarrow \ln(P) \propto \frac{l_{\text{vol}}}{d_s}. \quad (4.17)$$

Cela donne une distribution qui décroît exponentiellement avec la longueur de vol. Nous avons mesuré cette distribution de longueur de vol pour nos grains figure 4.9.

Nous constatons que cette distribution montre bien une décroissance exponentielle. Nous pouvons calculer une longueur de vol moyenne :

$$\boxed{\frac{\langle l_{\text{vol}} \rangle}{d_s} \approx 4,2} \quad (4.18)$$

qui est de l'ordre de quelques tailles de grain.

### Temps de vol

Contrairement aux longueurs de vol, nous constatons que le temps de vol le plus probable a une valeur non nulle (figure 4.10).

Ce comportement est bien cohérent avec le fait que le grain accélère en début de trajet (figure 4.8). Intéressons nous aux probabilités de temps et de longueur de vols,

$$P(t_{\text{vol}}) dt_{\text{vol}} \propto P(l_{\text{vol}}) dl_{\text{vol}} \quad (4.19)$$

or, pendant l'accélération,

$$\frac{dl_{\text{vol}}}{dt_{\text{vol}}} = v(t) \propto t_{\text{vol}} \quad (4.20)$$



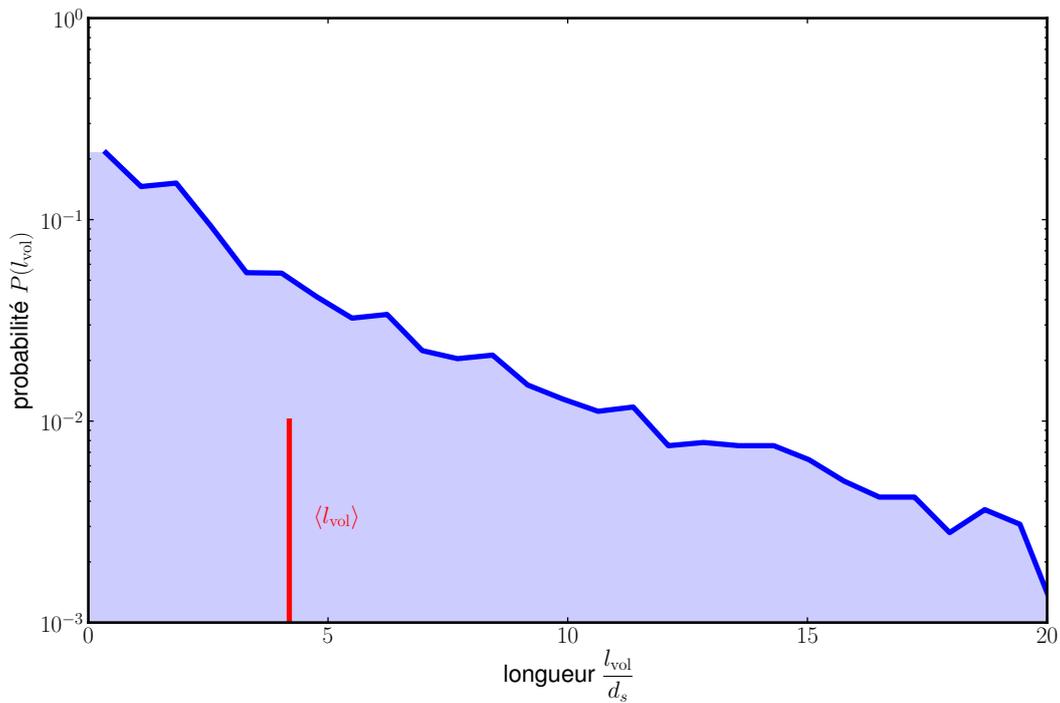


FIGURE 4.9 – Distribution des longueurs de vol moyennées sur environ 3 500 vols.

nous retrouvons alors

$$P(t_{vol}) \propto l_{vol} P(l_{vol}) \quad (4.21)$$

ce qui explique l'augmentation de probabilité pour les temps courts. Ensuite, la vitesse de la particule est stationnaire. Les deux distributions sont donc similaires et présentent une loi de distribution exponentielle.

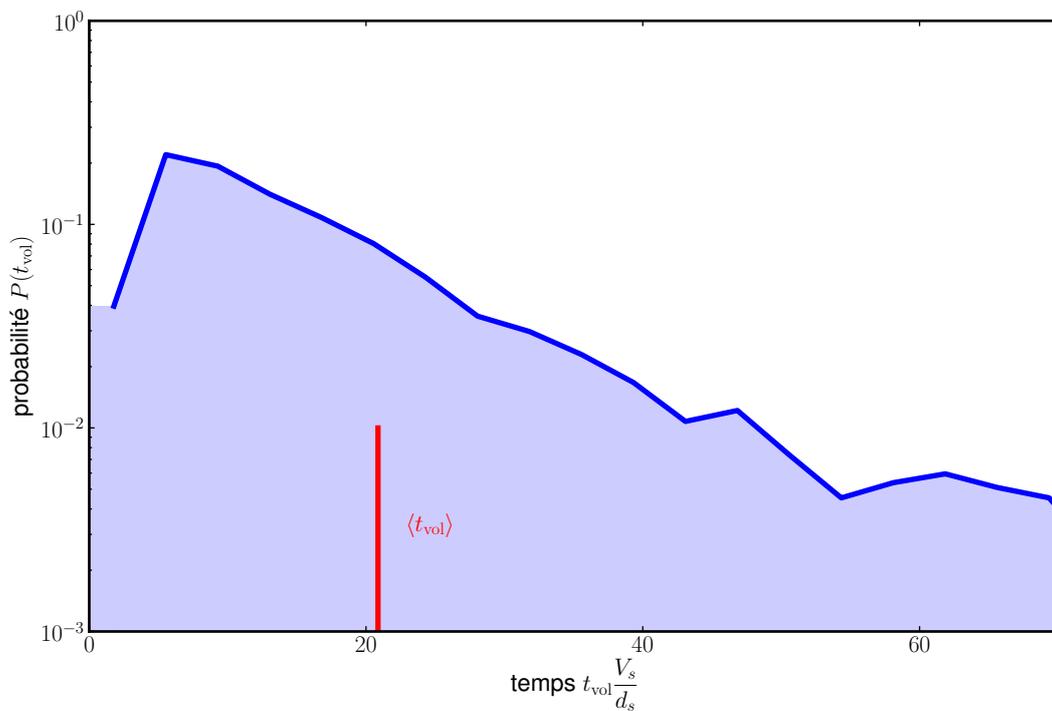


FIGURE 4.10 – Distribution des temps de vol moyennées sur environ 3 500 vols.

Le temps de vol moyen est en accord avec les expériences déjà réalisées sur le temps de sédimentation<sup>[44]</sup>.

$$\boxed{\langle t_{\text{vol}} \rangle \frac{V_s}{d_s} \approx 20} \quad (4.22)$$

Ces formes de distribution pour la longueur de vol et pour le temps de vol ont été aussi observées pour des écoulements turbulents<sup>[47]</sup>.

### 4.4.3 Taux de sédimentation

#### Calcul du taux de sédimentation

Comme pour le taux d'érosion, le taux de sédimentation est égal au quotient entre la densité de particules en mouvement  $n$  et le temps de sédimentation. Un grain a une probabilité d'être piégé proportionnelle au nombre de grains survolés sur le lit (équation 4.17). Connaissant la vitesse des grains (équation 4.6), nous déduisons le taux de sédimentation :

$$\dot{n}_s \propto n \frac{v}{d_s} \propto n \frac{\theta V_s}{d_s} \quad (4.23)$$

#### Décélération

Comme pour l'accélération, nous pouvons étudier la décélération du grain (figure 4.11). Nous étudions cette fois la vitesse du grain durant le vol jusqu'à la fin du vol.

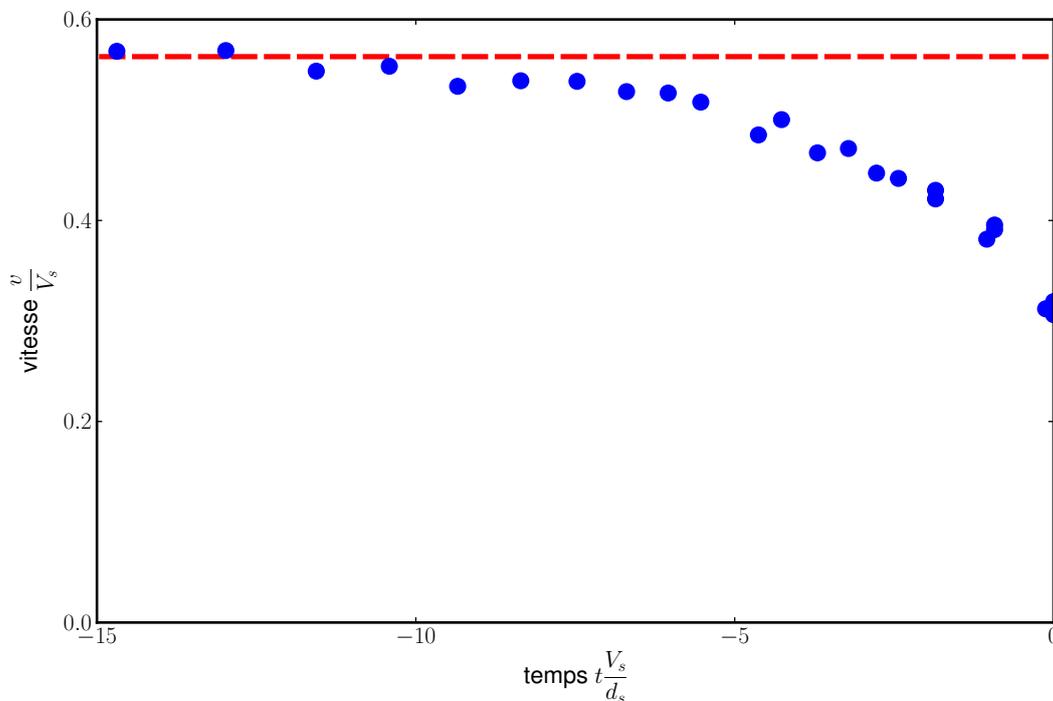


FIGURE 4.11 – Vitesse d'un grain au cours du temps avant sa chute ( $\bullet$ ,  $t = 0$  correspond au dépôt du grain). Le régime stationnaire ( $- -$ ) est mis en évidence. Chaque point correspond à 1 500 données environ.



La décélération démarre peu avant la fin du vol : entre 5 et 10 fois  $d_s/V_s$  (ce qui correspond à une longueur d'environ 3 tailles de grains) pour un vol qui peut durer jusqu'à six fois plus longtemps. Ce résultat confirme que l'inertie du grain est négligeable.

## 4.5 Loi de transport

### 4.5.1 Équilibre, loi de transport

En régime stationnaire uniforme, le taux de sédimentation compense exactement le taux d'érosion (équation 4.7), nous en déduisons donc la densité de particules en mouvement en utilisant les équations 4.12 et 4.23

$$n \propto \frac{1}{d_s^2} (\theta - \theta_t) \quad (4.24)$$

et, avec l'équation 4.6, le transport de sédiments par unité de largeur.

$$q_s = v n \propto \frac{V_s}{d_s^2} (\theta - \theta_t) \quad (4.25)$$

Cette loi n'est valable que lorsque nous restons proche du seuil. Si la contrainte devient trop importante, alors les grains sont transportés sur plusieurs couches superposées et il faudrait tenir compte de cette stratification. Proche du seuil, la vitesse des grains est une constante et la relation est linéaire

Le débit de sédiments total  $Q_s$  se retrouve simplement en intégrant ce débit de sédiments par unité de largeur  $q_s$  sur toute la largeur. Pour une contrainte proche du seuil de mise en mouvement, le débit de sédiments est donc proportionnel à l'écart au seuil.

### 4.5.2 Vérification expérimentale

Nous cherchons à vérifier expérimentalement la loi de transport trouvée équation 4.25. Pour cela, nous mesurons le nombre de Shields  $\theta$  sur le lit en fonction du débit de sédiments  $Q_s$  imposé à l'entrée. Nous mesurons la pente du lit à l'aide d'un appareil photographique placé sur le côté de l'expérience grâce auquel nous mesurons l'angle entre la surface du lit et un fil à plomb accroché à l'expérience. Avec la même photographie, nous pouvons mesurer la hauteur d'eau.

Pour déterminer le nombre de Shields, nous avons également besoin de la hauteur d'eau. Cette dernière ne peut être déterminée avec l'appareil photo à cause du ménisque, la hauteur d'eau étant de l'ordre de grandeur de la longueur capillaire. Comme nous sommes en régime laminaire, nous calculons alors la hauteur d'eau  $D$  à partir de la mesure de la pente et du débit d'eau (équation 4.26) en supposant un profil de vitesse parabolique de Poiseuille :

$$D = \left( 3 \frac{\nu}{g} \frac{Q_w}{S W} \right)^{1/3}. \quad (4.26)$$

Nous rappelons  $\tau = \rho g D S$  (équation 2.10). D'où le nombre de Shields

$$\theta = \frac{\tau}{d_s (\rho_s - \rho) g} = \left( 3 \frac{Q_w \nu}{W g} \right)^{1/3} \frac{1}{d_s} \frac{\rho}{\rho_s - \rho} S^{2/3}. \quad (4.27)$$

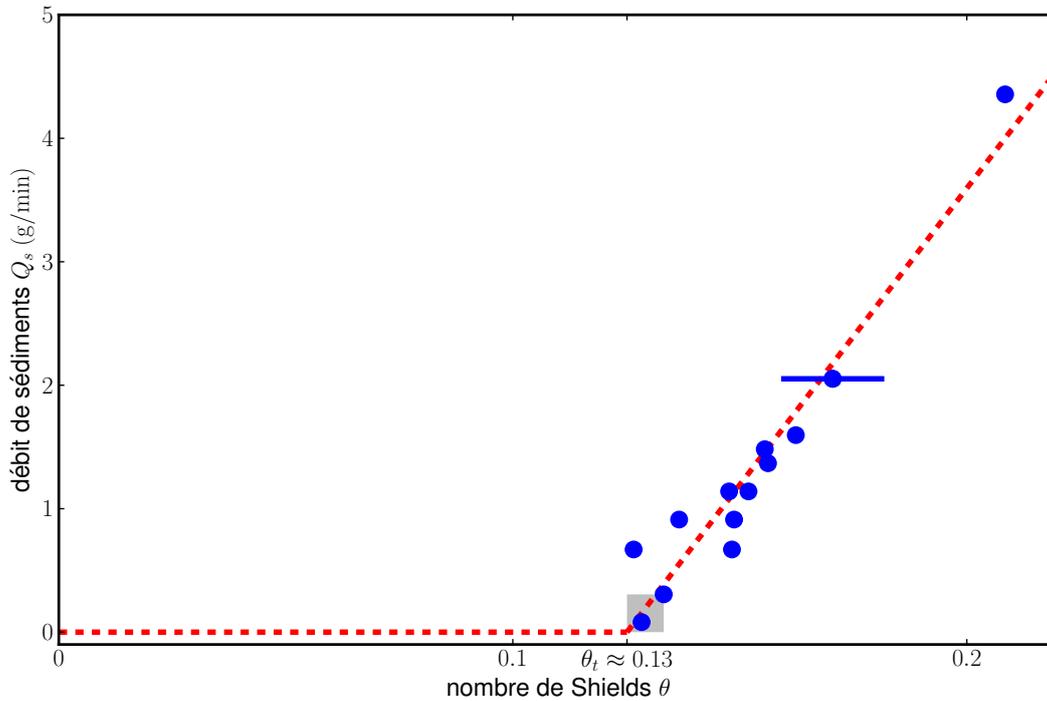


FIGURE 4.12 – Loi de transport du sédiment. On observe que le seuil de mise en mouvement est  $\theta_t \approx 0,13$ . Ensuite, le débit de sédiments augmente linéairement avec la contrainte. Le carré grisé représente la zone où ont eu lieu les expériences de suivi de grains.

Lors des expériences, nous imposons un débit d'eau  $Q_w \approx 2$  L/min et un débit de sédiments variable. Une fois le système à l'équilibre, nous mesurons la pente  $S$ . Nous pouvons donc calculer le nombre de Shields. Ces expériences ont été réalisées par Mike Bak lors de son stage de L3. Les résultats sont présentés sur la figure 4.12. Nous observons la présence d'un nombre de Shields critique en-dessous duquel le transport est nul.

$$\theta_t = 0,125 \pm 0,005 \quad (4.28)$$

La valeur de ce seuil est en accord avec les expériences faites précédemment dans la même gamme de Reynolds de grain<sup>[19;25]</sup> et avec les valeurs trouvées lors de la mesure de l'accélération du grain (équation 4.16).

Au-delà de ce seuil, le débit de sédiments augmente linéairement avec la contrainte. Nous approximons ce seuil par une loi linéaire

$$\frac{Q_s}{W} = q_s = \mathcal{Q} (\theta - \theta_t) \quad (4.29)$$

et nous trouvons comme coefficient

$$\mathcal{Q} = 2,65 \cdot 10^{-2} \text{ kg/s} \cdot \text{m}^{-1} \pm 3 \cdot 10^{-4} \text{ kg/s} \cdot \text{m}^{-1} \quad (4.30)$$

Ce type de comportement est bien en accord avec l'équation 4.25. Nous retrouvons aussi le même comportement que lors d'expériences précédentes<sup>[20;22]</sup>. Notre protocole expérimental permet de nous approcher davantage du seuil. En effet, durant toutes nos expériences, bien que notre débit de sédiments ait été multiplié par 10 entre les deux points extrêmes, le nombre de Shields est toujours resté entre  $\theta_t$  et  $2\theta_t$ . Il est donc plus simple de contrôler le débit de sédiments et de le forcer à une valeur très faible que de faire varier la contrainte pour mettre en évidence le seuil de mise en mouvement.



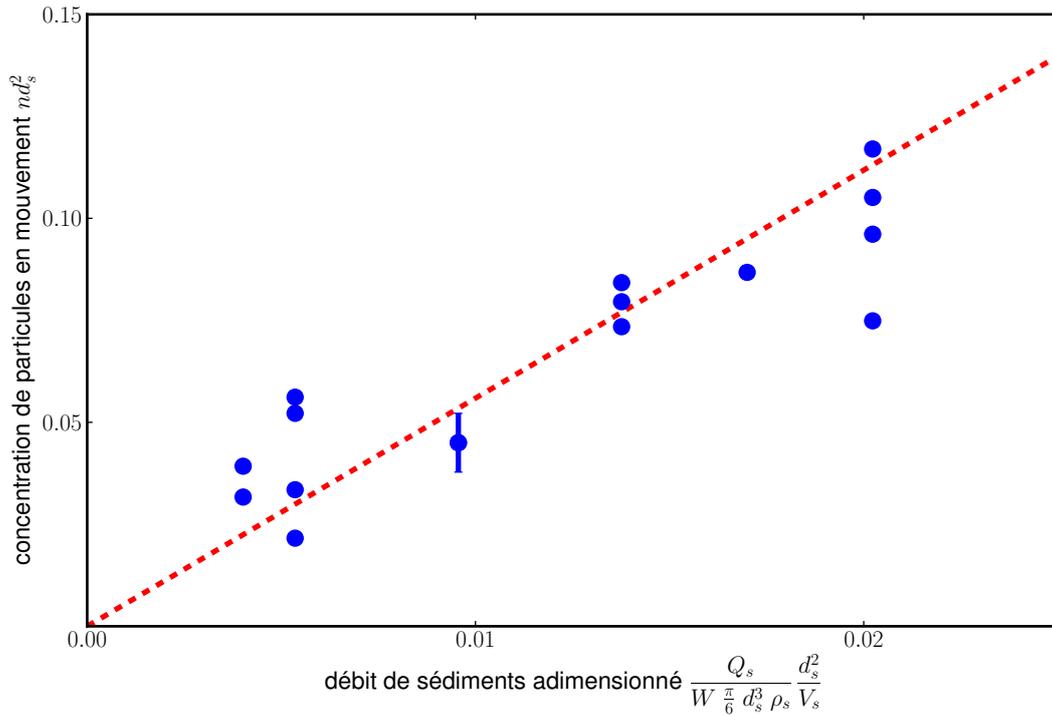


FIGURE 4.13 – Densité de particules en mouvement en fonction du débit de sédiments imposé à l'entrée.

### 4.5.3 Concentration de particules en mouvement

Nous illustrons la relation entre la densité de particules et le débit de sédiments total sur la figure 4.13. Ces mesures ont été faites seulement près du seuil (carré grisé dans la figure 4.12).

La densité de grains en mouvement est bien proportionnelle au débit de sédiments, la vitesse des sédiments est donc une constante, ce qui est conforme à nos prédictions près du seuil (équation 4.6). Néanmoins, pour un même débit de sédiments, nous observons une dispersion. Cela est dû au fait que le sédiment n'est pas transporté de manière parfaitement homogène sur toute la largeur du canal. La mesure dépend donc de la position de la caméra.

La vitesse moyenne trouvée ici est de l'ordre de

$$\boxed{\frac{v}{V_s} \approx 0,2.} \quad (4.31)$$

Cette vitesse correspond en ordre de grandeur à ce que nous pensions trouver. Elle est un peu plus faible que la vitesse des grains durant un vol à cause des temps d'accélération ou de décélération.

## Conclusion

Le transport par charriage résulte d'un échange permanent de grains entre une couche en mouvement et un lit statique. Ces échanges se caractérisent par un taux d'érosion et un taux de sédimentation. En régime permanent, le taux d'érosion compense le taux

de sédimentation et l'équilibre entre ces deux taux détermine la densité de grains en mouvement.

Le débit de sédiments est égal au produit de cette densité de grains en mouvement par la vitesse moyenne de la couche de grains. Cette vitesse est proportionnelle à la vitesse de sédimentation. L'utilisation de ce terme peut prêter à confusion : il donne l'impression que les grains décollent du fond puis retombent doucement sur le lit. En réalité, les grains sont à peine soulevés du lit puis transportés par le fluide avant de s'arrêter brusquement.

A l'équilibre, l'augmentation du débit de sédiments entraîne une augmentation de la pente du lit et donc de la contrainte sur le fond.

Dans nos expériences, nous nous plaçons près du seuil. Cela a plusieurs conséquences, tout d'abord la vitesse des grains est une constante et seule la densité surfacique de particules en mouvement influe sur le débit de sédiments global. Ensuite nous sommes dans un régime où la concentration de grains en mouvement est suffisamment faible pour que nous puissions considérer que les grains sont indépendants les uns des autres. Nous pouvons donc faire de la physique statistique en nous concentrant sur la couche de grains en mouvement plutôt que sur les grains individuellement.





## Chapitre 5

# Un lit érodé mais stable : le paradoxe de Parker

### 5.1 Une rivière qui transporte des sédiments devrait être instable

Pour aller plus loin, il est nécessaire de développer une explication physique prédisant la forme d'une rivière qui transporte des sédiments. Développer une théorie de ce type est un problème difficile, comme souligné par Parker<sup>[50]</sup>. Pour que la rivière transporte des sédiments, il faut que la contrainte à la surface du lit soit supérieure au seuil de mise en mouvement (équation 4.25).

Les grains charriés sont alors transportés dans la direction de la force tangentielle au lit  $\vec{F}_{\parallel}$ , égale à la somme de la contrainte fluide avec la composante tangentielle de la gravité. Dans notre approximation d'eau peu profonde, cette force s'écrit :

$$\vec{F}_{\parallel} = \beta d_s^2 \rho g D S \vec{e}_x + \alpha d_s^3 (\rho_s - \rho) g D' \vec{e}_y. \quad (5.1)$$

Dans le cas d'un canal horizontal ( $D' = 0$ ), la force tangentielle est parallèle à la direction de l'écoulement. Le lit d'une rivière n'est pas horizontal, les forces de gravité modifient donc la direction du transport de sédiments. Du fait de l'inclinaison des berges, les sédiments transportés par l'écoulement descendent le long de la surface du lit pour se concentrer vers le centre du chenal (figure 5.1).

Le flux de sédiments s'écrit alors (équation 4.1)

$$\vec{q}_s = n v \frac{\vec{F}_{\parallel}}{\|\vec{F}_{\parallel}\|}. \quad (5.2)$$

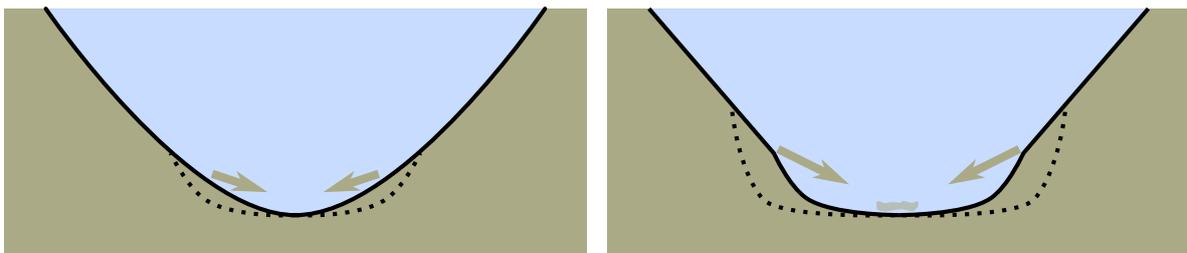


FIGURE 5.1 – Les sédiments érodés coulent au fond de la rivière ce qui conduit à l'élargissement de la rivière.



Pour un lit horizontal, la densité de particules en mouvement  $n$  est proportionnelle à l'écart du nombre de Shields au nombre de Shields critique  $(\theta - \theta_t)^{[17;20;22]}$ . Ici, comme pour l'étude de la rivière sans transport, les forces de gravité ont une influence sur la contrainte subie par les grains. En généralisant nos résultats sur le seuil de mise en mouvement, cela revient à dire que la densité de particules en mouvement est proportionnelle à l'écart entre le nombre de Shields généralisé et le seuil de mise en mouvement

$$n \propto (\Theta - \mu) \quad (5.3)$$

en définissant le nombre de Shields généralisé,

$$\Theta = \frac{F_{\parallel}}{F_{\perp}}. \quad (5.4)$$

Pour être à l'équilibre, la forme de la rivière ne doit plus évoluer au cours du temps. Nous devons donc être en régime permanent et la quantité de sédiments transportés par le fluide doit être constante au cours du temps ( $\partial n / \partial t = 0$ ). La conservation de la quantité de sédiments impose

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_s = 0. \quad (5.5)$$

La rivière est invariante dans la direction de l'écoulement, toutefois, rien ne vient compenser le flux de sédiments dirigé vers le centre de la rivière. Les berges doivent donc s'élargir de plus en plus.

En résumé, une rivière transportant du sédiment devrait s'élargir indéfiniment. Pourtant, l'observation des rivières dans la nature montrent que les rivières qui transportent du sédiment convergent vers une forme d'équilibre. Il faut donc un mécanisme pour compenser le transfert de sédiments vers le centre. Plusieurs explications ont été proposées.

## 5.2 Les modèles de rivières

**Théorie d'optimisation** Le modèle d'optimisation consiste à adapter des paramètres physiques (équivalents à des paramètres de contrôle en thermodynamique) pour optimiser un paramètre physique considéré comme primordial (équivalent au paramètre d'ordre). Cette approche consiste à maximiser le débit de sédiments, en conservant le débit d'eau et les pentes des berges<sup>[51]</sup>, ce qui contraint la géométrie de la rivière.

Cependant, aucun principe physique ne justifie cette approche.

**Courants secondaires** Une autre explication suppose l'existence de cellules de recirculation perpendiculaires à l'écoulement moyen. Ces cellules transfèrent la quantité de mouvement<sup>[52;53]</sup>. La vitesse du fluide et donc sa quantité de mouvement est plus importante au milieu de la rivière que sur les bords. Ce transfert, de type convectif, diminue la contrainte fluide (équation 2.10) subie par les berges. La contrainte appliquée sur les sédiments peut alors être sous le seuil de mise en mouvement au niveau des berges alors qu'elle reste supérieure à ce seuil sur le fond pour maintenir un flux de sédiments.

En régime laminaire, ces courants secondaires n'existent pas.

**Transfert de quantité de mouvement** L'explication la plus répandue est basée sur un flux latéral de quantité de mouvement<sup>[50;54]</sup>. Ce transfert, de type diffusif,

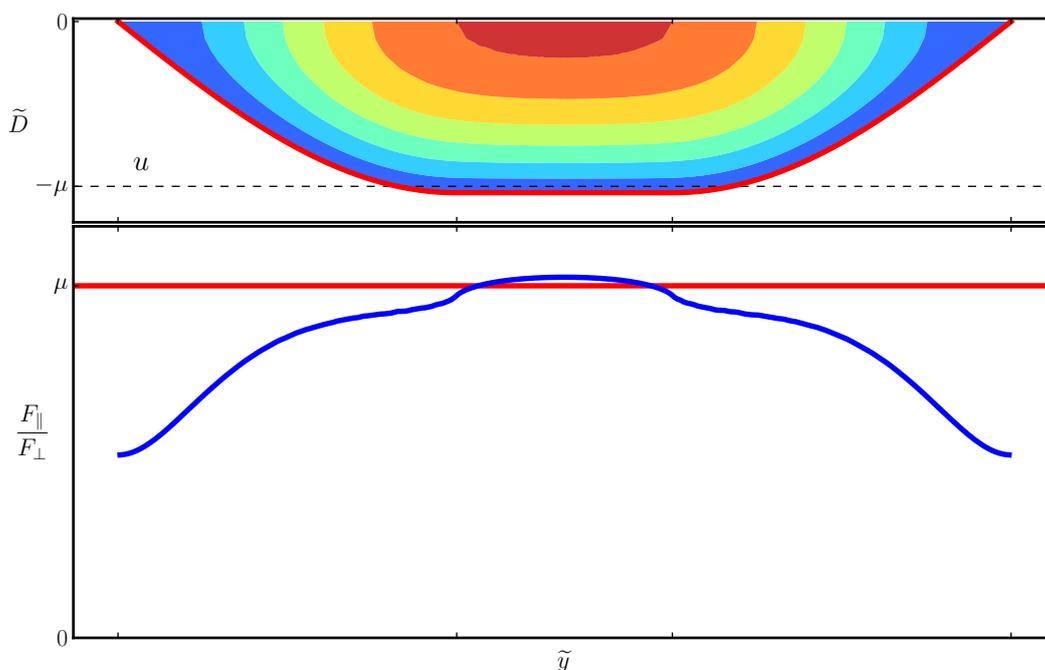


FIGURE 5.2 – Contrainte sur la surface du lit en fonction de la coordonnée transverse pour un écoulement laminaire.

diminue la contrainte subie par les berges qui se retrouvent ainsi sous le seuil de mise en mouvement.

En régime turbulent, ce modèle fait intervenir différents paramètres empiriques pour caractériser la turbulence. Cette théorie a fait l'objet de vérifications expérimentales qui l'ont confirmée<sup>[34]</sup> et est souvent utilisée en simulations numériques<sup>[54]</sup>.

Ce transfert diffusif de quantité de mouvement existe aussi en régime laminaire. Si nous résolvons l'équation de Poisson (équation 3.17), nous pouvons calculer la contrainte exercée sur les grains en tous points du lit de sédiments. Pour une section telle que celle montrée sur la figure 5.2 (un fond plat inséré entre deux cosinus), la contrainte est au-dessus du seuil de mise en mouvement au centre (comme la rivière est plate à cet endroit les sédiments ne sont pas transportés vers le centre), tandis que la contrainte reste sous le seuil de mise en mouvement sur les berges (figure 5.2). Le transfert diffusif de quantité de mouvement permet donc de proposer une solution au paradoxe de Parker.

Ces explications sont toutes fondées sur des hypothèses concernant l'écoulement et reposent sur l'idée que les sédiments sur les berges ne sont pas transportés. Un second type de théorie a été proposé, supposant que les grains dans la rivière diffusent du centre de la rivière vers la berge pour contrer l'érosion. Cette théorie a été envisagée pour de fines particules<sup>[55]</sup> en suspension dans l'écoulement.

Dans la suite de ce manuscrit, nous montrerons que le même phénomène se produit également avec le transport par charriage. Au cours de son transport, chaque grain charrié subit de petites déviations dans le sens transverse à l'écoulement, ce qui crée une dispersion transverse équivalente à un phénomène de diffusion. Ce mécanisme de diffusion de masse ne remplace pas la diffusion de quantité de mouvement. Les deux effets sont compatibles, néanmoins, pour simplifier le problème, nous conserverons l'approximation d'eau peu profonde et nous négligerons donc le transfert de quantité de mouvement.





# Chapitre 6

## L'apparition d'un flux diffusif

Nous avons étudié dans le chapitre précédent le transport des grains dans la direction de l'écoulement. Cela ne nous donne malheureusement aucun outil pour résoudre le paradoxe de Parker. Ici, nous nous intéressons donc au transport de grains dans la direction transverse à l'écoulement.

### 6.1 Vitesse des grains charriés

#### 6.1.1 Vitesses parallèles à l'écoulement

Nous avons vu que la vitesse moyenne est de l'ordre de la vitesse de Stokes (équation 4.6), les grains n'avancent toutefois pas à vitesse constante. Nous observons donc la distribution de vitesse des grains en mouvement pour une expérience représentative de nos résultats (figure 6.1).

La distribution de vitesse dans la direction de l'écoulement montre une augmentation de probabilité entre  $v_x = 0$  et une vitesse proche de la vitesse moyenne. Ensuite, nous observons une décroissance exponentielle. Ce comportement a souvent été observé dans des expériences similaires<sup>[20;22;23;47]</sup>.

Certaines vitesses mesurées dans la direction de l'écoulement sont négatives. Cela s'explique par le fait qu'un grain teinté peut être caché par un autre grain qui lui passe au-dessus (figure 6.2). Comme le logiciel reconnaît le centre de la tache noire vue par la caméra, cela crée artificiellement un grain en mouvement dans le sens inverse du courant. Heureusement, ces points sont suffisamment peu nombreux (4 % au total) pour ne pas affecter nos statistiques.

Nous vérifions que la vitesse moyenne des grains ne dépend ni de la concentration de grains en mouvement ni du débit d'eau (figure 6.3). Nous trouvons que cette vitesse vaut en moyenne

$$\boxed{\frac{v}{V_s} = 0,38 \pm 0,03.} \quad (6.1)$$

Nous retrouvons bien que la vitesse des grains est environ 5 fois plus faible que la vitesse du fluide au niveau du lit.

#### 6.1.2 Vitesses transverses

Si nous nous concentrons sur la distribution des vitesses transverses (figure 6.3), nous constatons que les grains en mouvement ont une vitesse transverse non nulle. La



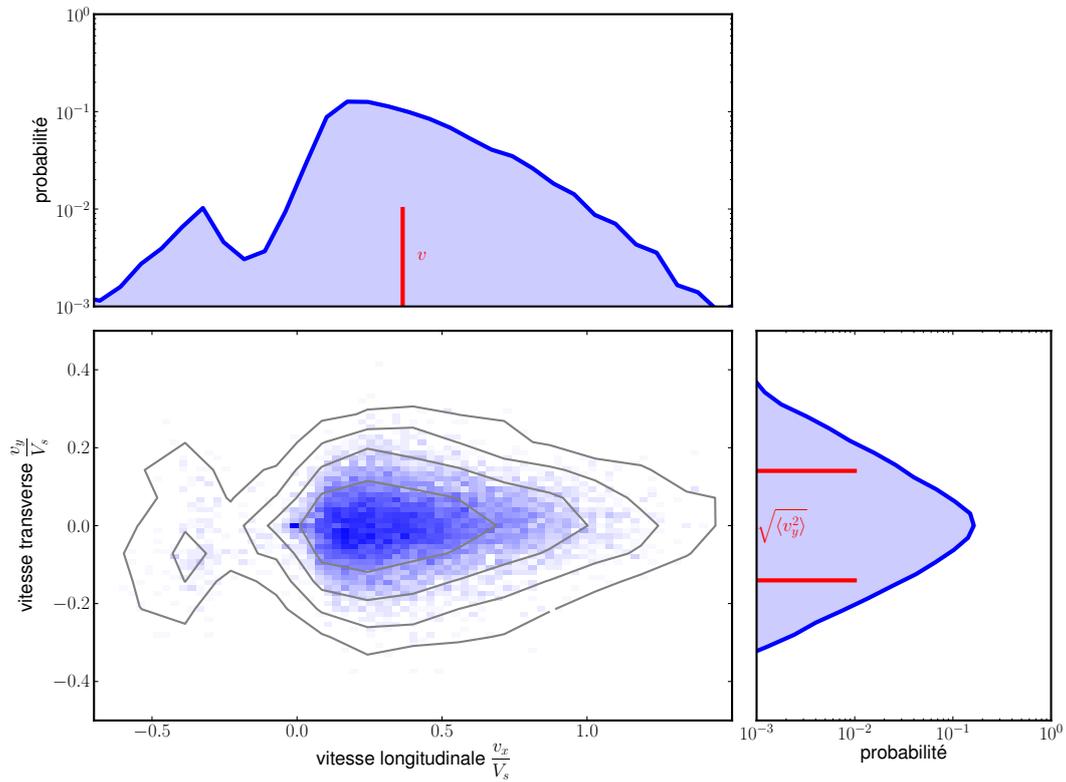


FIGURE 6.1 – Distribution des vitesses longitudinales et transverses pour  $Q_w = 2,05 \text{ L/min}$ ,  $Q_s = 6 \cdot 10^{-2} \text{ g/min}$ . L'échelle a été dilatée dans le sens transverse. Les distributions présentées ont été obtenues avec environ 10 000 points.

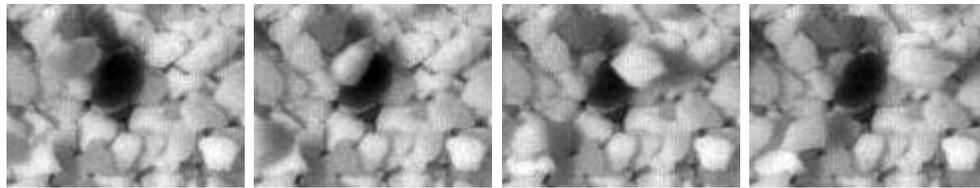


FIGURE 6.2 – Des grains peuvent être masqués par d'autres grains. Cela conduit à l'observation de grains qui vont à l'envers. Ici, le grain noir semble reculer pour le logiciel entre les images 2 et 3.

distribution présente un maximum en 0 et est symétrique, ce qui est attendu : les grains en mouvement avancent en moyenne dans la direction de l'écoulement. Toutefois, elle présente un écart type qui n'est pas négligeable comparé à la vitesse moyenne des grains. Ce comportement avait déjà été observé expérimentalement<sup>[22;45;47]</sup>. La distribution ressemble à une décroissance exponentielle symétrique :

$$P(v_y) = \frac{1}{\sqrt{\langle v_y^2 \rangle}} \exp \left( -2 \frac{|v_y|}{\sqrt{\langle v_y^2 \rangle}} \right). \quad (6.2)$$

Ce résultat a été retrouvé récemment en régime turbulent<sup>[48]</sup>.

Nous vérifions là encore que la vitesse moyenne des grains dans la direction transverse ne dépend ni de la concentration de grains en mouvement ni du débit d'eau (figure 6.3).

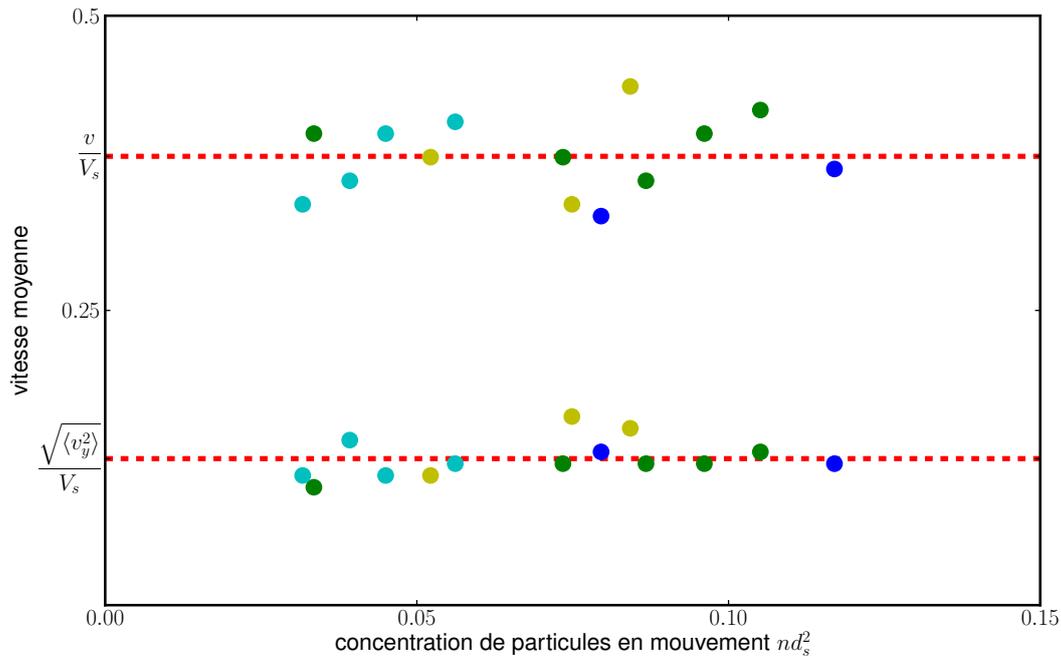


FIGURE 6.3 – Vitesse moyenne en fonction de la concentration de particules en mouvement pour plusieurs valeurs du débit d'eau ( $Q_w < 1,5$  L/min ●,  $1,5$  L/min  $< Q_w < 2$  L/min ●,  $2,0$  L/min  $< Q_w < 2,2$  L/min ● et  $2,2$  L/min  $< Q_w$  ●). Les vitesses longitudinales et transverses sont constantes.

La vitesse moyenne transverse vaut

$$\frac{\sqrt{\langle v_y^2 \rangle}}{V_s} = 0,12 \pm 0,02 \quad (6.3)$$

La vitesse transverse des grains est donc du même ordre de grandeur que la vitesse des grains dans la direction de l'écoulement. Le mouvement des grains doit donc être sensiblement dévié perpendiculairement à l'écoulement. Cette déviation doit modifier la trajectoire des particules en mouvement.

## 6.2 Dispersion transverse d'une particule

La figure 6.4 nous montre une particule noire suivie au cours de son déplacement. Le fluide se déplace de la gauche vers la droite. Le mouvement n'est pas exactement parallèle à la direction de l'écoulement et il existe des petites fluctuations qui la font dévier d'une trajectoire rectiligne. Ces petites fluctuations, en accord avec nos distributions de vitesses latérales, sont dues aux interactions avec le lit rugueux. Cette dispersion transverse est similaire à la chute d'une bille sur une surface rugueuse<sup>[56]</sup>.

Pour mieux comprendre ce mouvement transverse, nous étudions différentes trajectoires de particules (figure 6.5). Ces trajectoires sont translatées de façon à faire coïncider leurs origines. Les points représentent les endroits où la particule s'est arrêtée. La trajectoire surlignée est celle correspondant à la particule de la figure 4.7.

Durant les périodes de repos, les mouvements longitudinaux et transverses sont stoppés. Cela ne semble pas influencer la trajectoire de la particule : après ces arrêts, les particules repartent fréquemment dans la direction qu'elles avaient avant l'arrêt. Cela



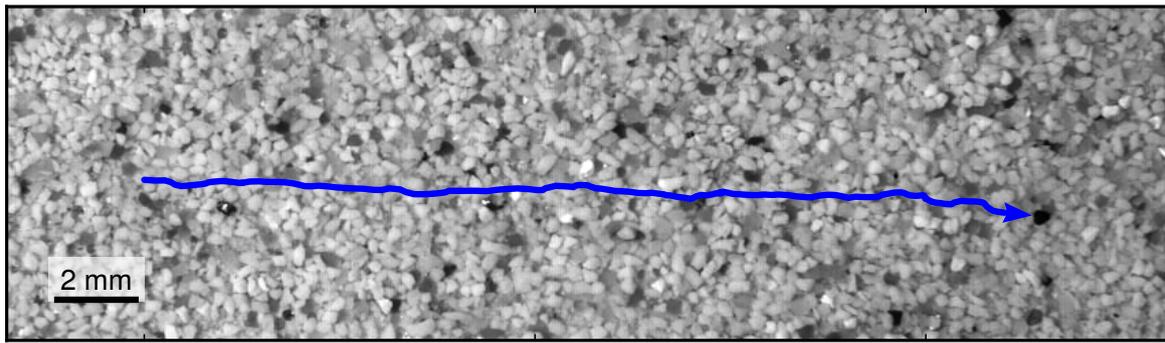


FIGURE 6.4 – Particule suivie au cours du temps. La trajectoire n'est pas rectiligne et dévie légèrement au cours du temps.

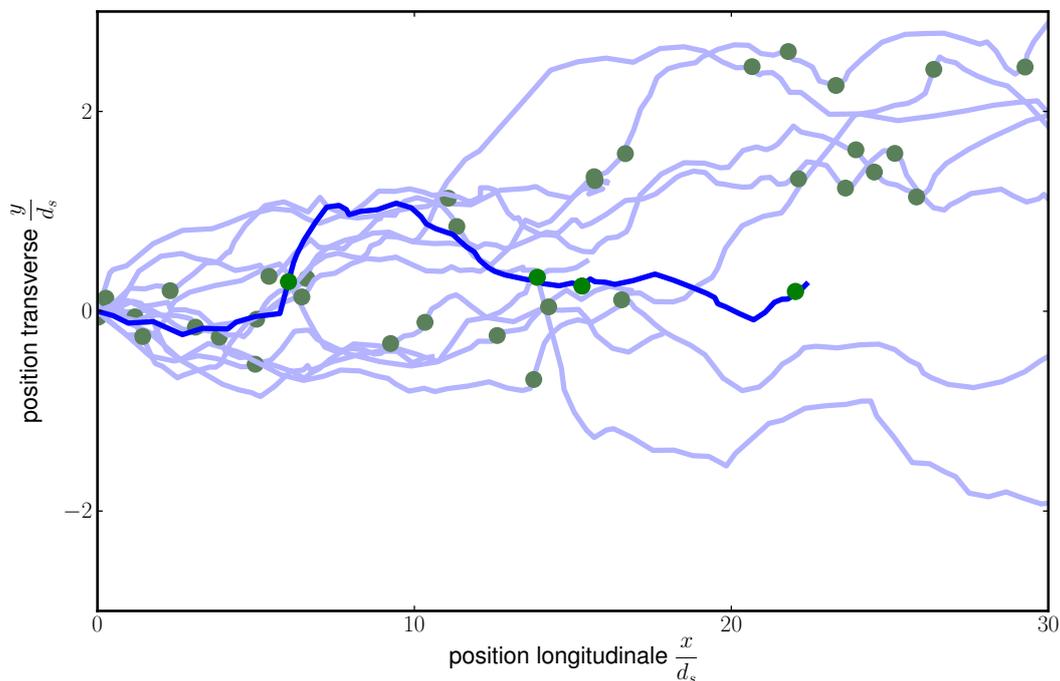


FIGURE 6.5 – Trajectoires des grains en mouvement pour  $Q_w = 2,05 \text{ L/min}$ ,  $Q_s = 6 \cdot 10^{-2} \text{ g/min}$ . Les grains alternent des périodes de vol (—) et de repos (●). L'échelle de la position transverse est dilatée

est cohérent avec le fait que les grains n'ont pas d'inertie, leur trajet est déterminé par l'écoulement.

Nous remarquons que plus l'avancée dans la direction de l'écoulement est importante, plus les particules se dispersent dans la direction transverse.

Pour mieux caractériser cette dispersion transverse, nous étudions la dispersion dans la direction transverse  $\langle y^2 \rangle$  en fonction de l'avancement dans la direction longitudinale  $x$ . Les résultats pour une expérience typique sont présentés figure 6.6. La relation est linéaire ce qui est caractéristique d'un transport diffusif. Essayons de voir si une marche aléatoire permet d'expliquer nos résultats.

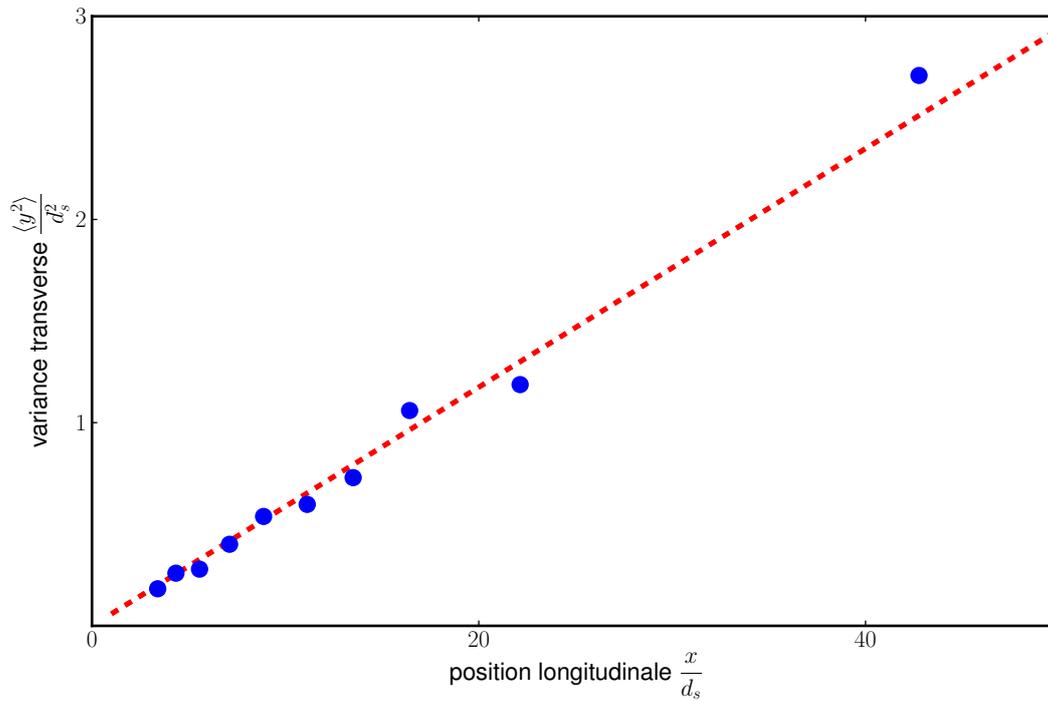


FIGURE 6.6 – Dispersion transverse en fonction de l’avancement du grain (●) pour  $Q_w = 2,05 \text{ L/min}$ ,  $Q_s = 6 \cdot 10^{-2} \text{ g/min}$ . La régression linéaire correspondante est dessinée en rouge (---).

## 6.3 Modèle de marche aléatoire

### 6.3.1 Marche aléatoire

Nous raisonnons par analogie avec une marche aléatoire classique en considérant des marcheurs aléatoires. A chaque fois que le marcheur avance d’un pas  $\delta x$  dans la direction de l’écoulement ( $x$ ), il effectue un pas  $\delta y$  aléatoirement à droite ou à gauche dans la direction transverse à l’écoulement ( $y$ ). Au bout de  $N$  pas, la position du grain est

$$x_N = \sum_{t=1}^N \delta x_t \quad \text{et} \quad y_N = \sum_{t=1}^N \delta y_t. \quad (6.4)$$

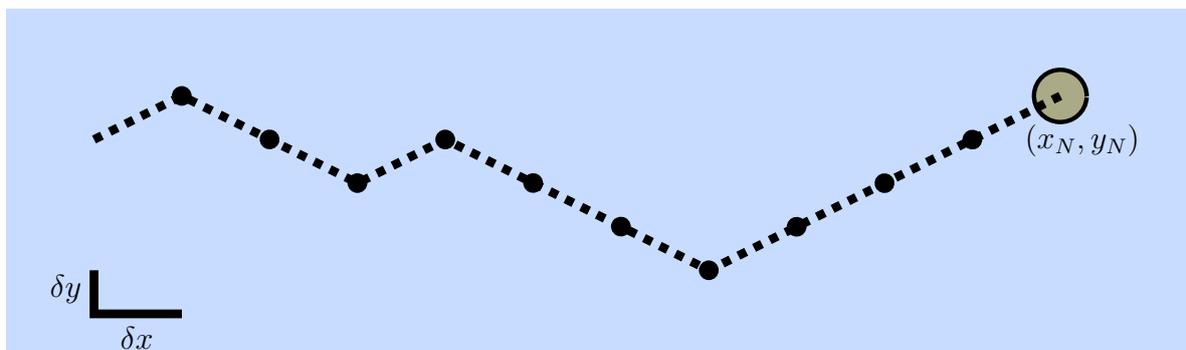


FIGURE 6.7 – Modèle de marcheur aléatoire



En moyennant sur un grand nombre de grains, la distance moyenne parcourue au bout de  $N$  pas  $\langle x_N \rangle$  ainsi que la dispersion dans la direction transverse  $\langle y_N^2 \rangle$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}\langle x_N \rangle &= \sum_{t=1}^N \langle \delta x_t \rangle = N \langle \delta x \rangle \\ \langle y_N^2 \rangle &= \left\langle \sum_{t=1}^N \delta y_t^2 + \sum_{t, t' \neq t}^N \delta y_t \delta y_{t'} \right\rangle = N \langle \delta y^2 \rangle + N(N-1) \langle \delta y \rangle^2\end{aligned}\tag{6.5}$$

Pour une distribution de pas  $\delta y_t$  de moyenne nulle,  $\langle \delta y \rangle = 0$ , les équations 6.5 nous permettent de trouver la relation entre l'avancée des grains et leur dispersion dans la direction transverse.

$$\langle y_N^2 \rangle = \frac{\langle \delta y^2 \rangle}{\langle \delta x \rangle} \langle x_N \rangle\tag{6.6}$$

Nous avons une relation linéaire entre la distance parcourue  $\langle x_N \rangle$  et la dispersion transverse  $\langle y_N^2 \rangle$ . Ce résultat est cohérent avec la figure 6.6. Il faut toutefois nous assurer que les trajectoires des particules peuvent être vues comme une succession de pas indépendants.

### 6.3.2 Temps de corrélation

Pour qu'il y ait marche aléatoire, il faut que chaque pas soit indépendant du précédent. Pour cela, il faut que deux pas consécutifs soient décorrélés. Nous cherchons donc le temps de corrélation des grains. Nous calculons la fonction d'auto-corrélation de la vitesse transverse et nous normalisons cette fonction pour que la corrélation soit égale à 1 à l'instant  $t = 0$ . La fonction d'auto-corrélation moyenne est montrée figure 6.8 dans un graphique en échelle semi-logarithmique.

La corrélation diminue exponentiellement avec le temps. Il existe donc un temps de corrélation au-delà duquel un grain oublie sa trajectoire passée. C'est ce temps qui définit la durée d'un pas.

Pour estimer ce temps, nous approchons nos points par une fonction exponentielle décroissante  $e^{-t/t_c}$  et nous calculons  $t_c$  le temps caractéristique de corrélation.

Le même comportement est observé pour toutes nos mesures expérimentales, quels que soient les débits d'eau et de sédiments (figure 6.9). Nous trouvons que le temps moyen de corrélation est

$$t_c \frac{V_s}{d_s} = 1,0 \pm 0,1\tag{6.7}$$

soit environ l'écart entre deux images.

Le temps moyen de corrélation est indépendant du débit de sédiments. Nous restons donc toujours dans un régime dilué où chaque particule agit indépendamment de sa voisine. Nous pouvons donc considérer que nos particules se comportent comme des marcheurs aléatoires indépendants.

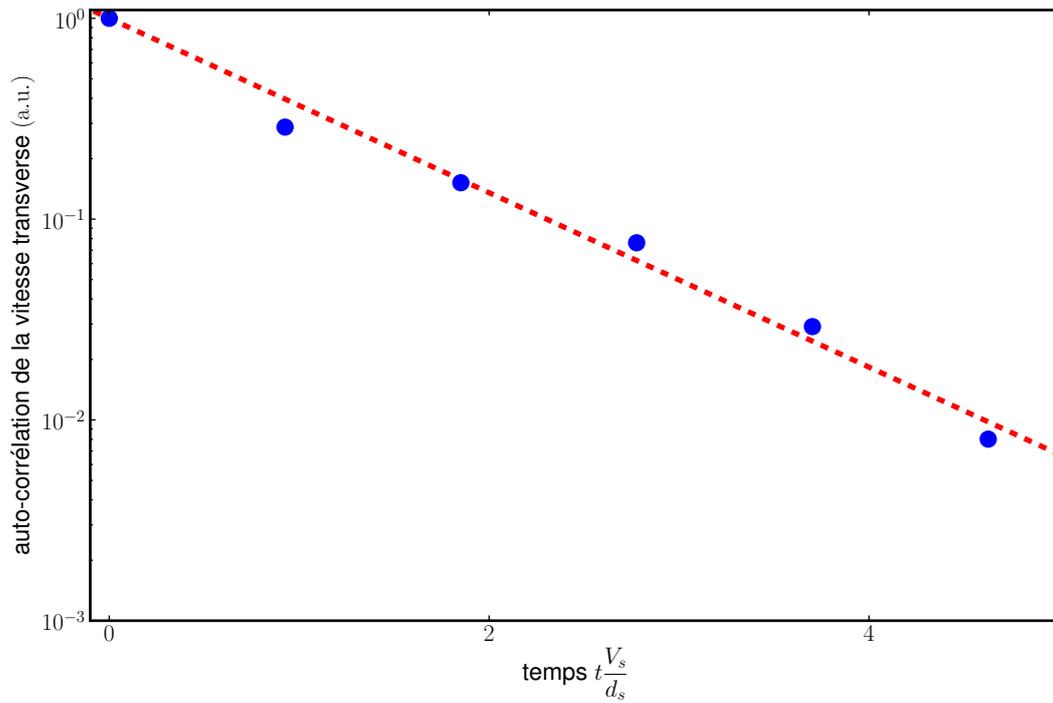


FIGURE 6.8 – Autocorrélation de la vitesse transverse en fonction du temps (●) et approche par une exponentielle décroissante (---).

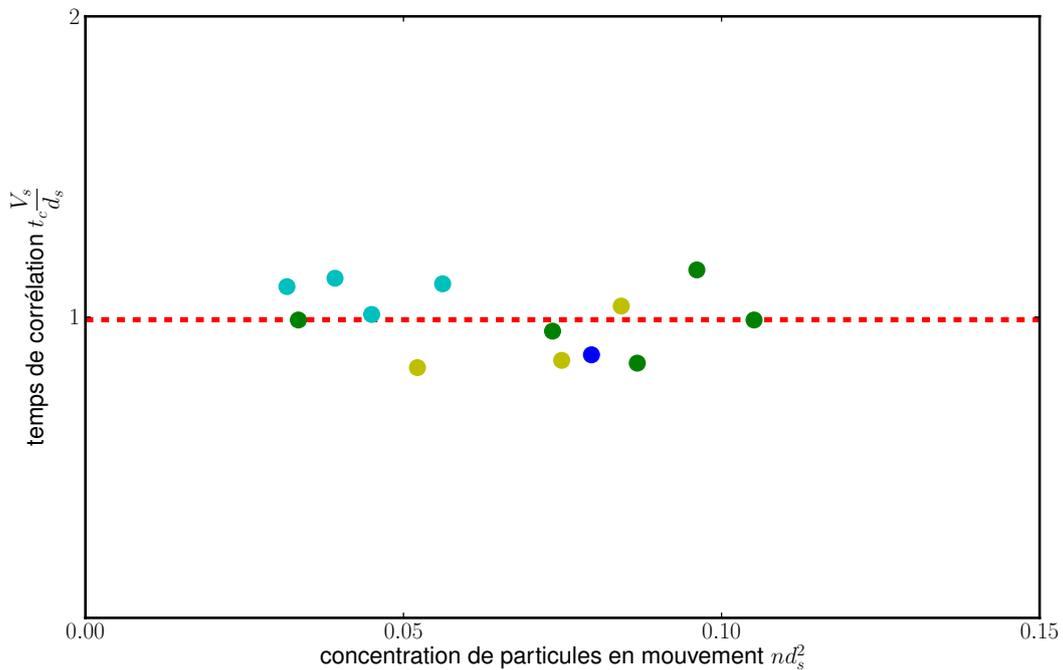


FIGURE 6.9 – Temps de corrélation de la vitesse transverse en fonction de la concentration de particules en mouvement pour plusieurs valeurs du débit d'eau ( $Q_w < 1,5$  L/min ●,  $1,5$  L/min  $< Q_w < 2$  L/min ●,  $2,0$  L/min  $< Q_w < 2,2$  L/min ● et  $2,2$  L/min  $< Q_w$  ●). Ce temps de corrélation est constant.



## 6.4 Coefficient de diffusion

### 6.4.1 Flux de diffusion

Chaque grain en mouvement se comporte donc comme un marcheur aléatoire. Nous supposons ici que le marcheur ne se déplace plus de manière discrète mais de manière continue. Chaque pas est donc associé à une probabilité  $P$ . Regardons ce que cela implique en terme de flux de sédiments.

Nous faisons un bilan par rapport à une frontière située en  $y = 0$ . Prenons une particule située à une distance  $y > 0$ , cette particule a une probabilité  $P(\delta y)$  de faire un pas  $\delta y$  à chaque intervalle de temps.  $\delta y$  peut être soit négatif soit positif. A chaque intervalle de temps, cette particule traverse la ligne  $y = 0$  si  $\delta y < -y$ . La contribution de cette particule au flux diffusif est donc

$$dt dq_d = \int_{-\infty}^{-y} P(\delta y) d\delta y. \quad (6.8)$$

Nous considérons maintenant qu'en chaque point  $y$ , il y a une densité de particules  $n(y)$ . En considérant toutes les particules situées en  $y > 0$ , le flux total de grains passant de la droite vers la gauche est

$$dt \vec{q}_- = - \int_0^{\infty} n(y) \left( \int_{-\infty}^{-y} P(\delta y) d\delta y \right) dy \vec{e}_y. \quad (6.9)$$

Similairement, le flux de grains passant de la gauche vers la droite ( $y < 0$ ) est

$$dt \vec{q}_+ = \int_{-\infty}^0 n(y) \left( \int_{-y}^{\infty} P(\delta y) d\delta y \right) dy \vec{e}_y. \quad (6.10)$$

On suppose la longueur caractéristique des variations de densité de particules grande devant la taille caractéristique des pas. Au premier ordre, nous pouvons donc écrire la densité des particules en mouvement comme  $n(y) = n(0) + \frac{dn}{dy} y$ .

De plus, on suppose que la distribution des pas dans la direction transverse à l'écoulement est symétrique ( $P(\delta y) = P(-\delta y)$ ). On en déduit alors le débit total de particules en sommant les équations 6.9 et 6.10

$$dt \vec{q}_d = -2 \frac{dn}{dy} \int_0^{\infty} y \left( \int_{|y|}^{\infty} P(\delta y) d\delta y \right) dy \vec{e}_y. \quad (6.11)$$

En intégrant par parties, nous retrouvons le moment d'ordre 2 de la distribution  $P(\delta y)$  et nous pouvons montrer que le flux de sédiments dans la direction transverse s'écrit :

$$\boxed{\vec{q}_d = -\frac{1}{2} \frac{\langle \delta y^2 \rangle}{dt} \frac{dn}{dy} \vec{e}_y.} \quad (6.12)$$

Nous retrouvons une loi de Fick classique, le gradient de concentration des grains entraîne l'apparition d'un flux diffusif. Le coefficient de diffusion dépend de la variance des pas dans la direction transverse à l'écoulement.

### 6.4.2 Lien entre le flux diffusif et le flux de sédiments

Nous pouvons calculer le flux dans la direction de l'écoulement comme nous avons fait pour le flux diffusif. Si nous supposons que les particules ne vont que dans le sens de l'écoulement et que leur densité  $n(y)$  ne dépend pas de  $x$ , nous obtenons une relation similaire.

$$dt \vec{q}_s = n \int_0^\infty \left( \int_x^\infty P(\delta x) d\delta x \right) dx \vec{e}_x = n \langle \delta x \rangle \vec{e}_x \quad (6.13)$$

Les équations 6.12 et 6.13 nous permettent de relier les flux de sédiments entre eux.

$$q_d = \frac{1}{2} \frac{\langle \delta y^2 \rangle}{\langle \delta x \rangle} \frac{dq_s}{dy} \quad (6.14)$$

Nous remarquons qu'à partir du moment où une particule fait des sauts aléatoirement perpendiculaires à la direction de l'écoulement, c'est-à-dire pour  $\langle \delta y^2 \rangle \neq 0$ , l'existence d'un flux de sédiments dans le sens de l'écoulement crée un flux latéral de sédiments perpendiculaire à l'écoulement.

### 6.4.3 Longueur de diffusion

Les équations 6.6 et 6.14 font toutes les deux intervenir une même quantité homogène à une longueur, correspondant au rapport entre l'écart quadratique d'un pas dans la direction transverse à l'écoulement et la distance moyenne du pas dans la direction de l'écoulement. Nous choisissons de définir une longueur de diffusion telle que

$$\ell_d = \frac{1}{2} \frac{\langle \delta y^2 \rangle}{\langle \delta x \rangle}. \quad (6.15)$$

Connaissant la vitesse moyenne des grains dans les deux directions, nous devons être capables de retrouver la longueur de diffusion. Chaque pas a une durée moyenne égale au temps de corrélation. Nous pouvons donc relier la taille d'un pas à la vitesse des particules

$$\sqrt{\langle \delta y^2 \rangle} = \sqrt{\langle v_y^2 \rangle} t_c \quad \text{et} \quad \langle \delta x \rangle = v t_c. \quad (6.16)$$

En utilisant les équations 6.1, 6.3 et 6.7, nous trouvons

$$\frac{\ell_d}{d_s} \approx 0,02. \quad (6.17)$$

L'équation 6.6 nous permet aussi de réécrire cette longueur de diffusion en fonction de l'avancée du grain et de sa dispersion transverse. Nous remarquons que la longueur de diffusion est égale à la moitié de la pente de la régression linéaire effectuée figure 6.6.

$$\boxed{\ell_d = \frac{1}{2} \frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x \rangle}} \quad (6.18)$$

Il nous est donc possible de mesurer expérimentalement cette longueur de diffusion.



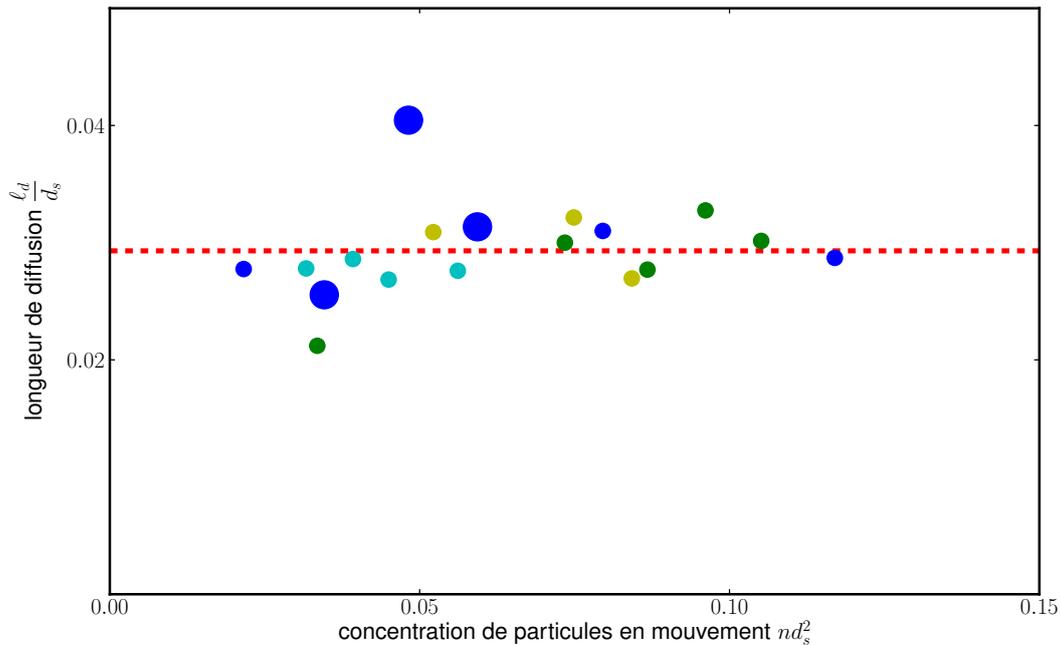


FIGURE 6.10 – Rapport entre la longueur de diffusion et la taille des grains en fonction de la concentration de particules en mouvement pour plusieurs valeurs du débit d'eau ( $Q_w < 1,5$  L/min ●,  $1,5$  L/min  $< Q_w < 2$  L/min ●,  $2,0$  L/min  $< Q_w < 2,2$  L/min ● et  $2,2$  L/min  $< Q_w$  ●) et pour deux tailles de grains ( $d_s = 340$   $\mu\text{m}$  en petits points et  $d_s = 650$   $\mu\text{m}$  en gros points).

#### 6.4.4 Mesure expérimentale de la longueur de diffusion

Nous avons réalisé des mesures de longueur de diffusion en faisant varier les débits d'eau, de sédiments et avec deux tailles de grains différentes. Les résultats sont montrés figure 6.10. Afin d'avoir une quantité sans dimension, nous divisons la longueur de diffusion par la taille des grains.

Le rapport de la longueur de diffusion sur la taille de grains ne semble pas changer dans la gamme de paramètres étudiée. Ni le débit d'eau, ni le nombre de grains en mouvement ne semblent influencer cette longueur de diffusion. Nous retrouvons les résultats précédents qui montrent que tant que nous sommes en régime dilué ( $n d_s^2 \ll 1$ ), les interactions entre les grains sont négligeables : chaque grain agit indépendamment des autres.

La valeur moyenne de la longueur de diffusion mesurée est

$$\boxed{\frac{\ell_d}{d_s} = 0,03 \pm 4 \cdot 10^{-3}.} \quad (6.19)$$

Cette valeur expérimentale est cohérente avec notre premier calcul à partir de la distribution des vitesses (équation 6.17).

Quelques expériences ont aussi été réalisées avec un mélange eau-glucose d'une viscosité environ 10 fois plus importante que celle de l'eau. Malheureusement, à cause de l'opacité du fluide, nous n'avons pas réussi à suivre les grains de manière convaincante. Les observations semblent montrer que le phénomène de diffusion existe encore quand la viscosité change mais la longueur de diffusion semble varier (dans notre cas elle était divisée par un facteur 2 environ).

La valeur mesurée de la longueur de diffusion n'est donc pas a priori une constante universelle. Toutefois, ce phénomène de dispersion transverse semble être présent dès qu'il y a transport par charriage. Nous pensons qu'il est principalement dû à la rugosité du lit.

### 6.4.5 Coefficient de diffusion

Cette longueur de diffusion nous permet aussi de relier le flux de sédiment diffusif  $q_d$  au flux de sédiments total  $q_s$ . L'équation 6.14 nous permet ainsi d'écrire

$$q_d = \ell_d \frac{dq_s}{dy}. \quad (6.20)$$

Nous pouvons aussi définir un coefficient de diffusion  $\zeta$  qui a la dimension habituelle des coefficients de diffusion ( $[L^2 T^{-1}]$ ). Pour cela, nous regardons le débit de sédiments localement. Nous avons vu qu'il s'écrit  $q_s = v n$  avec  $q_s$  le flux de sédiments par unité de largeur,  $n$  la densité de particules en mouvement et  $v$  la vitesse moyenne des sédiments dans la direction de l'écoulement. Le coefficient de diffusion est alors défini comme

$$\zeta = \ell_d v \quad (6.21)$$

et nous pouvons lier le flux local de sédiments dans la direction transverse à la concentration de particules

$$q_d = \zeta \frac{dn}{dy}. \quad (6.22)$$

Cette équation est équivalente à l'équation 6.20 à l'échelle des particules. Nous retrouvons la première loi de Fick.

## Conclusion

Une étude précise de la trajectoire des grains nous permet de vérifier que la trajectoire des grains se fait principalement dans la direction de l'écoulement mais a aussi une composante dans la direction transverse. Chaque grain se comporte comme un marcheur aléatoire. L'augmentation du nombre de grains en mouvement ne semble pas modifier ce comportement. A faible densité ( $n d_s^2 \ll 1$ ), les sédiments en mouvement forment donc un ensemble homogène de marcheurs aléatoires

Pour un grand nombre de grains, cette marche aléatoire s'illustre par une dispersion transverse des sédiments, ce qui conduit à un mouvement de diffusion collectif. Cela entraîne l'apparition d'un débit de sédiments perpendiculaire à la direction du canal.

Le charriage peut donc être décomposé comme la superposition de deux flux, un flux advectif parallèle à l'écoulement qui correspond au débit de sédiments usuel et un flux diffusif, perpendiculaire à ce dernier.





## Troisième partie

# Équilibre des rivières avec transport de sédiments



Luo Xiao Hu explique à Shu Lien comment le transport de sédiments modifie la rivière.

*Tigre et Dragon (Wo hu cang long)*. A. Lee, 2000

Expérience de suivi de grains

$Q_w = 1.5 \text{ L/min}$ ,  $nd_s^2 = 0.03$   
50 images/seconde



# Chapitre 7

## Des rivières stabilisées par la diffusion

### 7.1 Introduction

Nous avons déterminé le profil d'une rivière à l'équilibre sans transport de sédiments. Une rivière qui transporte des sédiments doit mettre des sédiments en mouvement. La contrainte sur les berges dépasse alors le seuil de mise en mouvement et la rivière les érode.

Lorsque les sédiments des berges sont érodés, ils descendent vers le centre de la rivière, il y a donc davantage de sédiments au centre que sur les côtés. Comme les sédiments diffusent, cela crée un flux latéral dirigé du centre du chenal vers les berges. Ce principe est illustré figure 7.1.

L'apparition de ce flux diffusif est une réponse possible au paradoxe de Parker. A l'équilibre, ce flux de sédiments peut compenser le flux gravitaire des sédiments érodés et donc limiter l'élargissement de la rivière. Cette hypothèse est similaire à la théorie proposée par Einstein dans son étude sur les mouvements browniens<sup>[57]</sup>. Dans ce cas, nous nous proposons de discuter les différentes formes d'équilibre possible pour une rivière ainsi que les équations de régime en découlant.

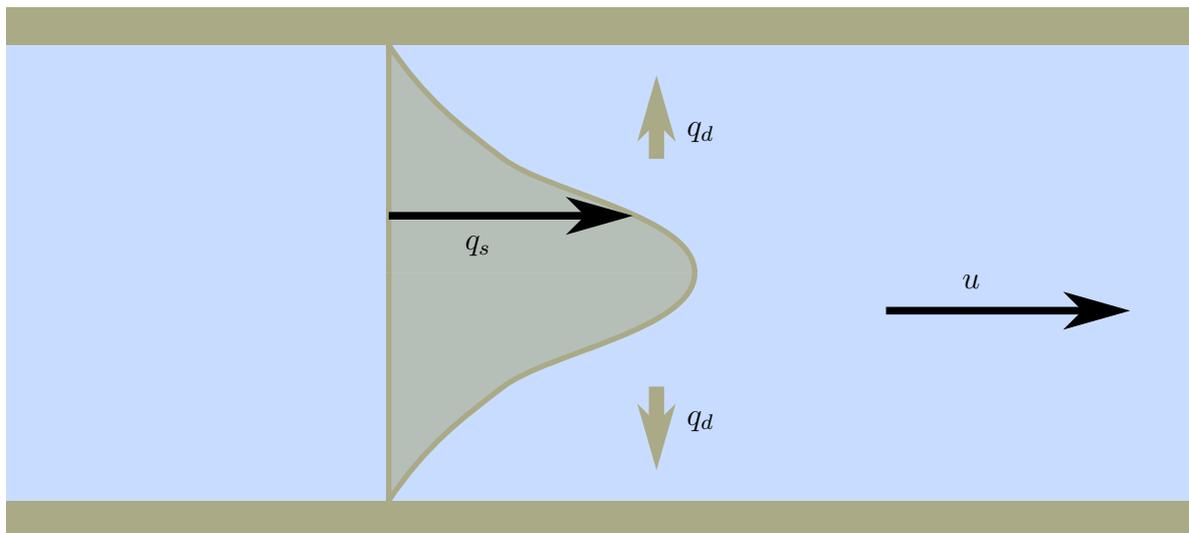
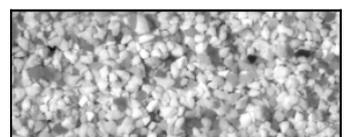


FIGURE 7.1 – Apparition d'un flux diffusif de sédiment lorsqu'il y a un gradient de transport.



## 7.2 Mise en équation

### 7.2.1 Flux diffusif

Le charriage des grains est alors constitué de deux flux de sédiments. Le flux advectif classique et un flux diffusif :

$$q_d = \zeta \nabla n \quad (7.1)$$

avec  $\zeta$  un coefficient de diffusion. Ce flux diffusif est perpendiculaire au flux advectif.

Le flux de sédiments advectif est orienté dans la direction de la contrainte tangentielle à la surface du lit, résultante de la somme de la contrainte fluide avec la contrainte gravitaire (équation 5.2).

En accord avec notre expérience précédente, nous supposons que les particules charriées ont des mouvements aléatoires perpendiculairement à la direction de charriage. Nous supposons aussi que les grains en mouvement n'interagissent pas les uns avec les autres. C'est le cas tant que la concentration de grains en mouvement est faible ( $n d_s^2 \ll 1$ ). Les mouvements de diffusion des grains à la surface du lit se font alors perpendiculairement à la direction de la contrainte tangentielle.

Les mouvements de diffusion des grains à la surface du lit sont perpendiculaires à ce flux de sédiments et sont donc dirigés dans une direction que nous notons  $\vec{T}_{\parallel}^{\perp}$  (figure 7.2) telle que :

$$\vec{T}_{\parallel}^{\perp} = \vec{N} \wedge \frac{\vec{F}_{\parallel}}{\|\vec{F}_{\parallel}\|}. \quad (7.2)$$

avec  $\vec{N}$  le vecteur normal au lit.

Le flux diffusif s'écrit donc

$$\vec{q}_d = -\zeta (\vec{\nabla} n \cdot \vec{T}_{\parallel}^{\perp}) \vec{T}_{\parallel}^{\perp} \quad (7.3)$$

et la direction du flux dépend de l'endroit où on se situe dans la rivière. Elle est perpendiculaire à l'écoulement (se confond avec l'axe  $y$ ) au centre de la rivière.

### 7.2.2 Équilibre des flux

Dans un système à l'équilibre, la forme de la rivière est constante. Nous sommes donc en régime permanent et la quantité de sédiments dans le fluide ne varie pas au

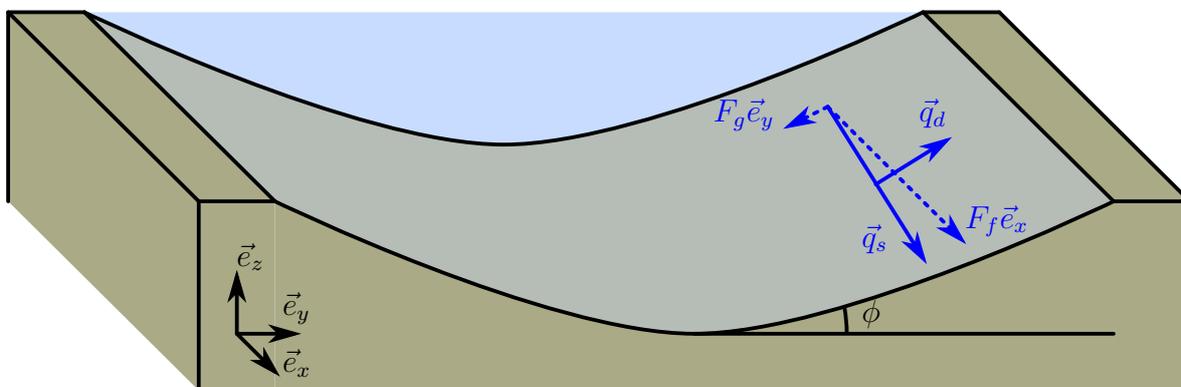


FIGURE 7.2 – Repère utilisé pour calculer les forces appliquées sur les grains de la berge.

cours du temps ( $\partial n / \partial t = 0$ ). La conservation de la quantité de sédiments impose

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{q}_d + \vec{q}_s) = 0. \quad (7.4)$$

La rivière est invariante dans le sens de l'écoulement (direction  $x$ ) et le transport par charriage se fait en contact avec le lit (la densité de grains en mouvement ne varie pas dans la direction verticale). L'équation précédente se simplifie alors en

$$\frac{\partial (\vec{q}_d + \vec{q}_s) \cdot \vec{e}_y}{\partial y} = 0. \quad (7.5)$$

Par symétrie, le flux selon  $\vec{e}_y$  est nul au centre, donc  $(\vec{q}_s + \vec{q}_d) \cdot \vec{e}_y = 0$  partout. En projetant dans la direction  $y$  les équations 5.2 et 7.3 trouvées précédemment, on obtient

$$-\zeta \frac{\partial n}{\partial y} \frac{(\beta \rho D S)^2}{\sqrt{(\beta \rho D S)^2 + (\alpha d_s (\rho_s - \rho) D')^2}} + n v \alpha d_s (\rho_s - \rho) D' = 0 \quad (7.6)$$

puis en adimensionnant l'équation

$$-\frac{\zeta}{l^*} \frac{\partial n}{\partial \tilde{y}} \frac{\tilde{D}^2}{\sqrt{\tilde{D}^2 + \tilde{D}'^2}} + n v \tilde{D}' = 0 \quad (7.7)$$

avec les notations en grandeurs sans dimension :

$$\tilde{D} = S \frac{D}{\mathcal{L}} \quad \text{et} \quad l^* = \frac{\mathcal{L}}{S} \quad (7.8)$$

$\mathcal{L}$  étant la même longueur caractéristique que celle trouvée pour les rivières sans transport (équation 2.15).

Comme la densité de particules en mouvement est proportionnelle à l'écart entre le nombre de Shields généralisé et le seuil de mise en mouvement (équation 5.3), l'équation 7.7 devient

$$-\frac{\zeta}{l^*} \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{y}} \frac{\tilde{D}^2}{\Theta} + v \tilde{D}' (\Theta - \mu) = 0 \quad (7.9)$$

En régime dilué,  $n d_s^2 \ll 1$ , la contrainte subie par les grains est proche du nombre de Shields critique. La vitesse des grains  $v$  est alors une constante qui ne dépend pas de la contrainte (équation 4.6).

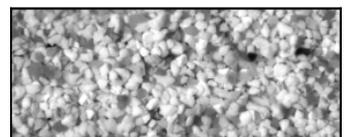
Nous pouvons alors isoler un nombre sans dimension caractéristique du problème. C'est un nombre de Péclet qui représente le rapport entre le transfert de particules par convection et le transfert de particules par diffusion. Il s'écrit en fonction du coefficient de diffusion  $\zeta$  ou de la longueur de diffusion  $\ell_d$  trouvée précédemment (équation 6.21).

$$\boxed{\text{Pe} = \frac{v l^*}{\zeta} = \frac{\mathcal{L}}{\ell_d} \frac{1}{S}} \quad (7.10)$$

L'équation 7.9 se réécrit alors en une équation différentielle d'ordre 2 qui dépend de la hauteur d'eau.

$$\boxed{\tilde{D}^2 (\tilde{D}'' + \tilde{D}) - \text{Pe} (\tilde{D}^2 + \tilde{D}'^2) (\sqrt{\tilde{D}^2 + \tilde{D}'^2} - \mu) = 0} \quad (7.11)$$

Pour résoudre ces équations, nous imposons comme conditions aux limites que la rivière a une profondeur  $\tilde{D}_M$  au centre ( $y = 0$ ). Comme la rivière est symétrique en  $y$ ,  $\tilde{D}'(0) = 0$ .



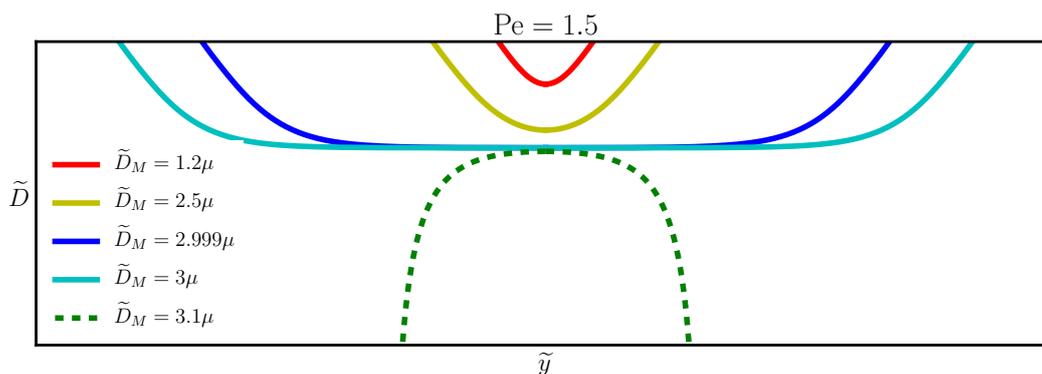


FIGURE 7.3 – Profils provenant de la résolution de l'équation 7.11 pour  $Pe = 1,5$ . Les solutions non physiques sont présentées en pointillés.

## 7.3 Solutions numériques

### 7.3.1 Comportements généraux

Cette équation différentielle n'a pas de solution analytique évidente. Elle s'intègre numériquement en fonction des deux paramètres que sont le nombre de Péclet et la profondeur maximale. La méthode de résolution numérique est détaillée annexe 11.1.

Nous résolvons tout d'abord l'équation en gardant un nombre de Péclet constant et en faisant varier la profondeur au centre (figure 7.3).

Il existe de nombreuses formes de profils possibles. Pour une profondeur proche de la profondeur correspondant à une rivière sans transport ( $\tilde{D}_m \approx \mu$ ), nos profils ressemblent à des cosinus. Si nous augmentons la profondeur, les profils s'aplatissent de plus en plus. Au delà d'une certaine valeur, le profil s'inverse et au lieu de revenir vers la surface, la profondeur d'eau diverge.

Nous refaisons la même opération cette fois en gardant la condition initiale constante et en faisant varier le nombre de Péclet (figure 7.4).

Nous observons le même comportement qu'auparavant. Pour un petit nombre de Péclet, les solutions ressemblent à des cosinus. Ensuite lorsque nous augmentons ce

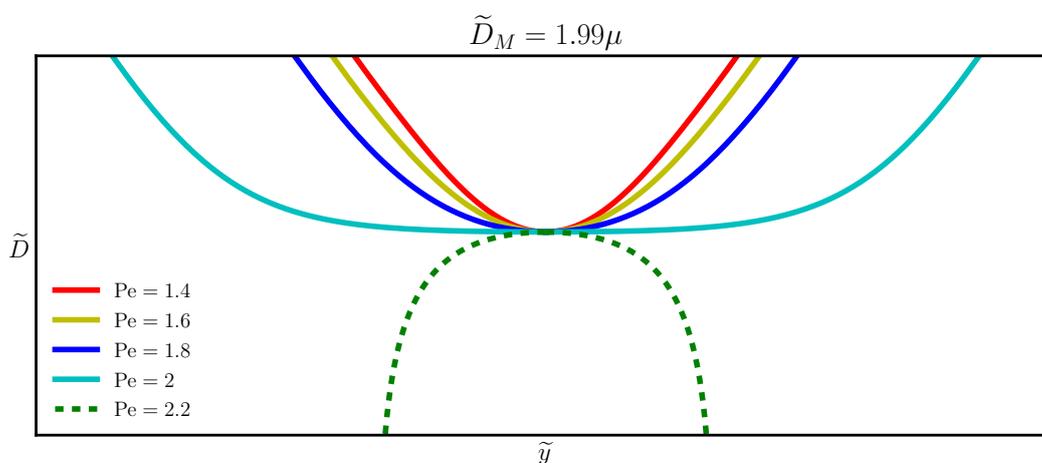


FIGURE 7.4 – Profils provenant de la résolution de l'équation 7.11 pour  $\tilde{D}_M = 1,99\mu$ . Les solutions non physiques sont présentées en pointillés.

nombre les solutions s'aplatissent de plus en plus jusqu'à passer une valeur limite où la hauteur diverge.

### 7.3.2 Point critique

Il semble en tout cas qu'il existe un point critique au delà duquel les solutions n'ont plus de réalité physique. Les coordonnées de ce point se retrouvent à partir de l'équation 7.11. Pour

$$\boxed{\widetilde{D}_M = \mu \left(1 + \frac{1}{\text{Pe} - 1}\right)} \quad (7.12)$$

la dérivée seconde s'annule. Au delà de ce point critique  $\left(\widetilde{D}_M > \mu \frac{\text{Pe}}{\text{Pe} - 1}\right)$ , la dérivée seconde change de signe et le profil de rivière diverge ( $D \rightarrow \infty$ ). Il n'existe donc plus de solution physique même si des solutions mathématiques existent.

### 7.3.3 Solutions limites

Si la résolution de l'équation différentielle 7.11 n'a pas de forme analytique simple, nous pouvons vérifier certaines solutions triviales, qui donnent des résultats intéressants.

#### Rivière sans transport

Nous avons vu que la résolution numérique des équations fait apparaître des solutions qui ressemblent à un profil en cosinus. Nous vérifions donc que le profil en cosinus de Glover et Florey (équation 2.16) est bien solution de notre équation.

$$\widetilde{D} = \mu \cos(\widetilde{y}) \quad (7.13)$$

correspond à une résolution dans le cas  $\widetilde{D}_M = \mu$ . Dans ce cas, la densité de sédiments en mouvement est bien nulle  $n \propto (\Theta - \mu) = 0$ . Le débit de sédiments est nul.

#### Rivière plate, transport infini

Au contraire, nous avons vu que le profil de la rivière peut devenir très plat. L'autre solution limite correspond à la résolution de l'équation au niveau du point critique (équation 7.12). Dans ce cas, la solution de l'équation différentielle 7.11 est un profil plat  $\widetilde{D} = \widetilde{D}_M$  de largeur infinie.

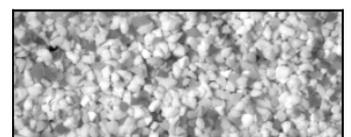
La densité de grains en mouvement est alors

$$n \propto (\Theta - \mu) = \mu \frac{1}{\text{Pe} - 1}. \quad (7.14)$$

Nous sommes dans le cas où le transport de sédiments par unité de surface est maximal (la rivière étant infiniment large, le débit de sédiments total est infini).

### 7.3.4 Calcul des flux

Une difficulté de cette équation est que les flux sont des variables implicites de notre équation. La résolution de cette équation dépend de la valeur du nombre de Péclet et de la profondeur maximale. Or, si le nombre de Péclet est lié directement à la pente de



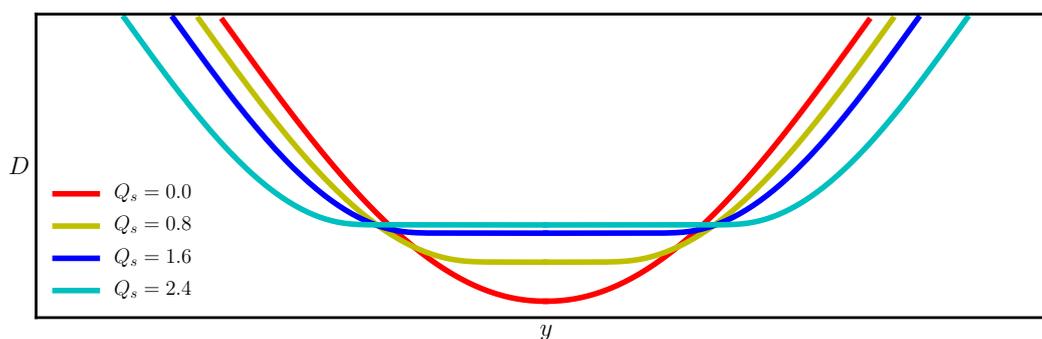


FIGURE 7.5 – Profils provenant de la résolution de l'équation 7.11 en gardant le débit d'eau constant. Les valeurs de  $Q_s$  sont en unités arbitraires.

la rivière (équation 7.10), nous voyons que la forme de la rivière est très sensible aux différents paramètres (figure 7.3 et 7.4).

Ni le débit d'eau, ni le débit de sédiments n'apparaissent dans l'équation. Afin de calculer ces débits, nous devons résoudre entièrement le profil de la rivière. Il faut ensuite intégrer le profil de vitesse le long de cette section pour avoir le débit d'eau et intégrer l'écart entre le nombre de Shields généralisé et le seuil de mise en mouvement pour trouver le débit de sédiments.

Il est difficile et long de résoudre numériquement l'équation 7.11 en gardant un débit d'eau constant. Il faut pour cela résoudre l'équation pour un grand nombre de couples  $(Pe, \tilde{D}_M)$  puis ne conserver que les valeurs qui correspondent au débit d'eau qui nous intéresse. Lorsque nous faisons cela, nous trouvons des profils tels que ceux illustrés figure 7.5.

Qualitativement, ce résultat est intéressant. Nous voyons que pour un débit de sédiments nul, nous retrouvons une forme de rivière en cosinus. Ensuite, lorsque nous augmentons le débit de sédiments à débit d'eau fixé, le rapport d'aspect s'élargit de plus en plus : la largeur augmente tandis que le fond de la rivière s'aplatit de plus en plus.

Plus le débit de sédiments augmente, plus le profil s'aplatit. Le gradient de la hauteur d'eau devient très faible et nous nous rapprochons du point critique (équation 7.12). La résolution numérique devient donc de plus en plus délicate. L'annexe 11.1 détaille la résolution du profil pour des formes très plates.

## 7.4 Portrait de phase

Nous cherchons donc à regarder plus en détail notre équation différentielle 7.11 afin de voir si nous pouvons isoler des propriétés qui nous permettraient de lier les débits d'eau et de sédiments à la forme des rivières. Pour cela, nous traçons le portrait de phase ainsi que plusieurs solutions de notre équation (figure 7.6).

Le cercle rouge montre la forme asymptotique correspondant au cosinus. La contrainte  $\Theta$  est constante et égale à  $\mu$  partout. Nous retrouvons le profil en cosinus correspondant à la rivière sans transport (équation 2.16). A l'intérieur de ce cercle, nous pouvons imaginer n'importe quelle trajectoire dans l'espace des phases qui correspondra à une rivière. Cela donnera une rivière avec une contrainte inférieure à  $\mu$  et donc avec aucun transport de sédiments.

Le point rouge montre l'autre limite correspondant à une rivière infiniment plate. Dans ce cas, la contrainte  $\Theta$  est aussi constante et égale à  $\mu(1 + 1/(Pe - 1))$ . Les

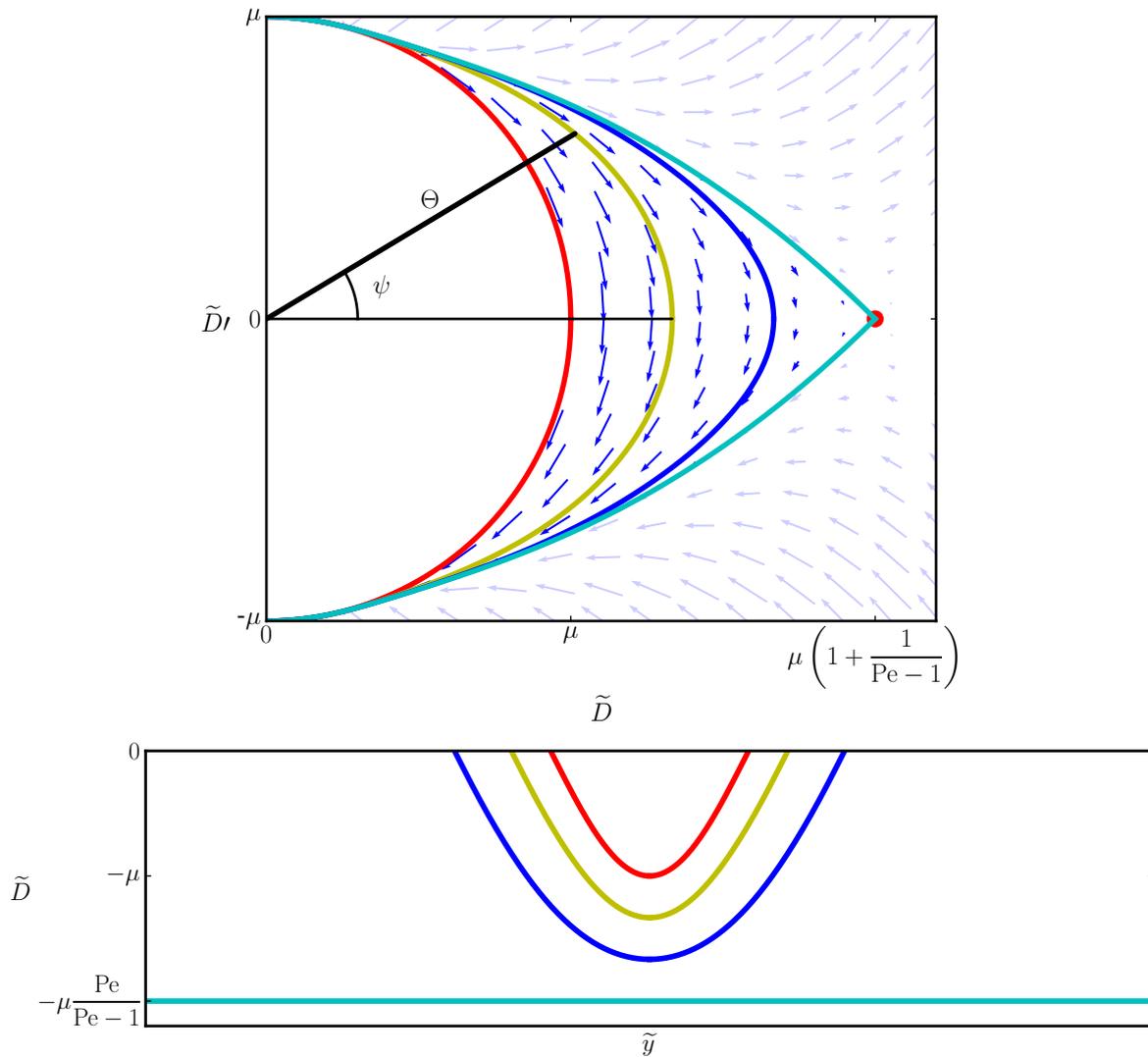
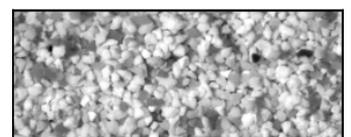


FIGURE 7.6 – Diagramme de phase et solutions de l'équation 7.11 pour  $Pe = 2$ . Toutes les solutions sont comprises entre la courbe correspondant au profil en cosinus (—) et le profil limite passant par le point critique (profil plat dont les berges remontent à l'infini, —).

trajectoires en transparence à l'extérieur de la courbe en cyan sont des trajectoires qui correspondent à des solutions de l'équation 7.11 pour une condition aux limites au-delà du point critique. Elles n'ont aucune réalité physique (elles correspondent à des rivières où la hauteur d'eau diverge).

L'ensemble des rivières a une trajectoire dans l'espace des phases située entre ces deux cas limites. Certaines sont dessinées figure 7.6. Ce sont des profils avec une contrainte qui dépend de la profondeur mais qui reste toujours de l'ordre de  $\mu$ . Plus nous nous éloignons du cosinus et nous nous rapprochons du point critique, plus les rivières s'aplatissent. Nous retrouvons une morphologie qui ressemble aux profils représentés figures 7.3 et 7.4. Ces profils sont tracés en gardant un nombre de Péclet constant, la pente est donc la même pour toutes les rivières représentées ( $Pe \propto 1/S$ ). Comme l'aire varie, ces rivières n'ont pas toutes le même débit d'eau.

Pour toutes les rivières, quel que soit le débit de sédiments, la contrainte est toujours comprise entre  $\mu$  et  $\mu(1 + 1/(Pe - 1))$ . Lorsque le nombre de Péclet augmente, nous



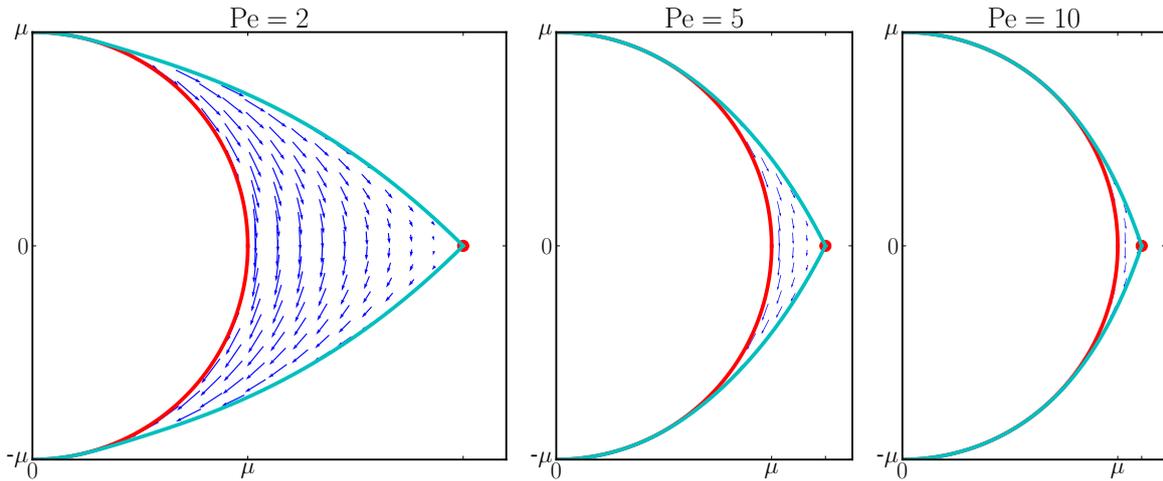


FIGURE 7.7 – Diagramme de phase des solutions de l'équation 7.11 pour  $Pe = 2$ . Toutes les solutions sont comprises entre la courbe correspondant au profil en cosinus (—) et le profil limite passant par le point critique (profil plat dont les berges remontent à l'infini, —).

observons que le point critique se rapproche de plus en plus de la solution en cosinus (figure 7.7).

Typiquement, pour les rivières que nous étudions,

$$\text{Pe} = \frac{\mathcal{L}}{\ell_d} \frac{1}{S} \sim \frac{10}{S} \approx 100 - 10\,000 \quad (7.15)$$

ce nombre est donc très grand. En regardant le portrait de phase (figure 7.7), nous pouvons considérer que la trajectoire de l'ensemble des rivières est confondue avec le cercle représentant la solution en cosinus sauf au niveau du point critique.

C'est un résultat étonnant, en terme de flux de sédiments, le cosinus représente la forme d'une rivière avec un débit de sédiments nul tandis que le point critique correspond à une rivière avec un débit de sédiments infini. Ces deux comportements présentent pourtant une profondeur maximale  $\widetilde{D}_M$  semblable. Nous pouvons considérer que la contrainte reste proche du seuil de mise en mouvement,  $\Theta \sim \mu$ , quelle que soit la rivière. Toutes les rivières peuvent donc transporter mais leur contrainte reste toujours proche du seuil. Ce résultat se vérifie dans la nature : les rivières avec un fond en graviers qui transportent des sédiments conservent une contrainte voisine du seuil de mise en mouvement<sup>[6]</sup>.

## 7.5 Approximation de rivière rectangulaire

### 7.5.1 Présentation du modèle

Pour un grand nombre de Péclet, l'ensemble des solutions se trouve concentré entre la solution asymptotique correspondant à la forme en cosinus et le point critique.

Nous supposons donc que la rivière est composée d'une combinaison de ces deux solutions. Au centre le fond de la rivière est plat (contribution du point critique) et sur les côtés, les berges sont sinusoïdales pour rejoindre la surface (contribution de la

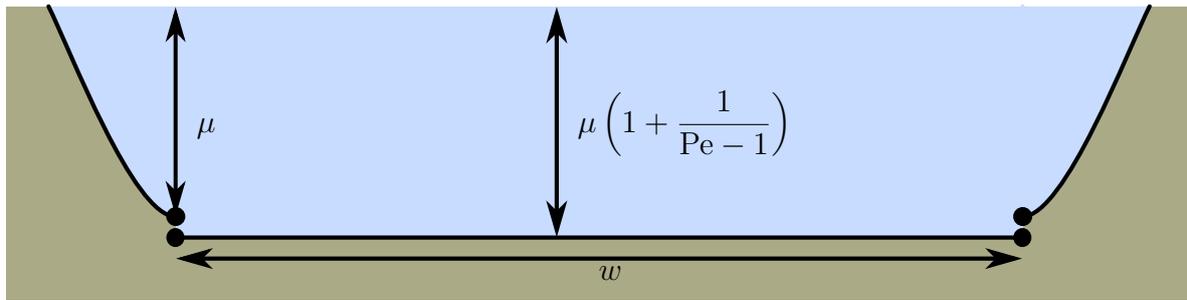


FIGURE 7.8 – Approximation de la rivière rectangulaire, composée d'un profil de rivière avec un fond plat et des berges sinusoïdales.

solution de Glover et Florey). Cette approximation, que nous nommons “approximation de la rivière rectangulaire”, est illustrée figure 7.8.

Le poids des deux contributions est contrôlé par la largeur du fond plat notée  $w$ . Pour  $w = 0$  nous retrouvons le cosinus (rivière sans transport de sédiments) et pour  $w = \infty$  le fond plat (solution correspondant au point critique). Cette rivière présente une discontinuité de l'ordre de  $\mu/Pe$  à la jonction des deux parties mais comme  $Pe \gg 1$ , la hauteur d'eau correspondant à la rivière située au point critique est très proche de la hauteur d'eau au centre de la rivière sans transport. La discontinuité est donc très faible.

### 7.5.2 Équations de régime

Nous nous intéressons aux grandeurs physiques adimensionnées, nous avons directement les relations géométriques suivantes :

$$\begin{aligned}\widetilde{W} &= w + \pi \\ \langle \widetilde{D} \rangle &= \mu \frac{2 + w}{\pi + w}\end{aligned}\tag{7.16}$$

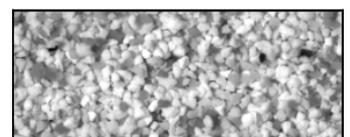
Localement, le débit de sédiments  $q_s$  est proportionnel à l'écart entre le nombre de Shields généralisé et le seuil de mise en mouvement. Ici, la partie sinusoïdale des berges est par construction au seuil de mise en mouvement, elle ne contribue donc pas au transport. En revanche, le fond plat a une contrainte légèrement supérieure au seuil. C'est là que le transport intervient. Il est proportionnel à la largeur  $w$  de cette section avec comme coefficient de proportionnalité une constante  $q$  qui dépend du sédiment.

$$Q_s = q \int_W (\Theta - \mu) dy = q w \frac{\mathcal{L}}{S} \frac{\mu}{Pe} = Q_s^* w\tag{7.17}$$

Nous voyons apparaître un débit de sédiments caractéristique de notre rivière qui ne dépend que des caractéristiques du sédiment utilisé (taille, angle d'avalanche, loi de transport...).

$$\boxed{Q_s^* = q \ell_d \mu}\tag{7.18}$$

Par construction, la rivière ne transporte que dans la partie plate et pas sur les côtés. Nous retrouvons un résultat similaire à ceux découverts par Parker<sup>[50]</sup> dans sa théorie sur le transfert de quantité de mouvement. Les berges restent au seuil tandis que la contrainte est au-dessus du seuil sur le fond de la rivière.



Le débit d'eau est égal à la somme du débit dans les parties en cosinus et du débit sur la partie plate. En régime laminaire, nous restons avec un profil parabolique de Poiseuille, nous déduisons donc le débit d'eau dans la rivière en sommant le débit dans la partie plate et dans la partie en cosinus.

$$Q_w = \frac{\mu^3}{3} \frac{g}{\nu} \frac{\mathcal{L}^4}{S^3} \left( \frac{4}{3} + w \right) \quad (7.19)$$

Nous retrouvons le débit d'eau trouvé dans la rivière sans transport (équation 3.4) avec un terme correctif qui dépend de la largeur du fond plat. Cette correction n'est pas nécessairement petite, en effet, il existe un cas limite où le fond est entièrement plat et la largeur infinie, dans ce cas  $w = \infty$ .

Comme le débit de sédiments est proportionnel à la taille du fond plat, les équations 7.17 et 7.19 nous donnent les nouvelles équations de régime en fonction des débits d'eau et de sédiments (figure 7.9) en régime laminaire.

$$\begin{aligned} S &= \mu \left( \frac{4}{9} \frac{g}{\nu} \right)^{1/3} \mathcal{L}^{4/3} \left( \frac{1}{Q_w} \right)^{1/3} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{Q_s}{Q_s^*} \right)^{1/3} \\ W &= \frac{\pi}{\mu} \left( \frac{9}{4} \frac{\nu}{g} \frac{1}{\mathcal{L}} \right)^{1/3} Q_w^{1/3} \frac{1 + \frac{1}{\pi} \frac{Q_s}{Q_s^*}}{\left( 1 + \frac{3}{4} \frac{Q_s}{Q_s^*} \right)^{1/3}} \\ \frac{W}{D_M} &= \frac{\pi}{\mu} \left( 1 + \frac{Q_s}{\pi Q_s^*} \right) \end{aligned} \quad (7.20)$$

Nous retrouvons bien les équations de régime précédentes (équation 7.44). Lorsque le débit de sédiments est faible ( $Q_s \ll Q_s^*$ ), on retrouve toujours les relations trouvées pour une rivière qui ne transporte pas et la forme de la section est très proche du cosinus (équations 3.5). Au contraire, pour  $Q_s \gg Q_s^*$ , le fond plat devient prépondérant et l'équation 7.20 devient

$$\begin{aligned} S &= \mu \left( \frac{4}{3} \frac{g}{\nu} \right)^{1/3} \mathcal{L}^{4/3} \left( \frac{1}{Q_w} \right)^{1/3} \left( \frac{Q_s}{Q_s^*} \right)^{1/3} \\ W &= \frac{1}{\mu} \left( 3 \frac{\nu}{g} \frac{1}{\mathcal{L}} \right)^{1/3} Q_w^{1/3} \left( \frac{Q_s}{Q_s^*} \right)^{2/3} \end{aligned} \quad (7.21)$$

Le débit caractéristique  $Q_s^*$  (équation 7.18) ne dépend aucunement de l'écoulement (régime laminaire ou turbulent). Le débit d'eau en particulier ne le modifie pas. Nous constatons donc un phénomène remarquable : le rapport d'aspect de la rivière ne dépend pas du débit d'eau mais seulement du débit de sédiments. Pour deux rivières composées d'un même sédiment (et donc d'un  $Q_s^*$  identique), l'augmentation d'une même quantité du débit de sédiments aura la même influence sur le rapport d'aspect dans les deux cas. Par exemple, l'ajout d'un débit de sédiments de  $Q_s = 1$  g/min aura la même influence sur le rapport d'aspect d'une rivière de 1 cm ou de 1 m de large.

Dans ce modèle, ce comportement s'explique par le fait que pour des rivières avec un plus gros débit, le fond est plus proche de la contrainte seuil. La concentration de particules en mouvement est donc plus faible et il faut une largeur d'autant plus importante pour transporter la même quantité de sédiments.

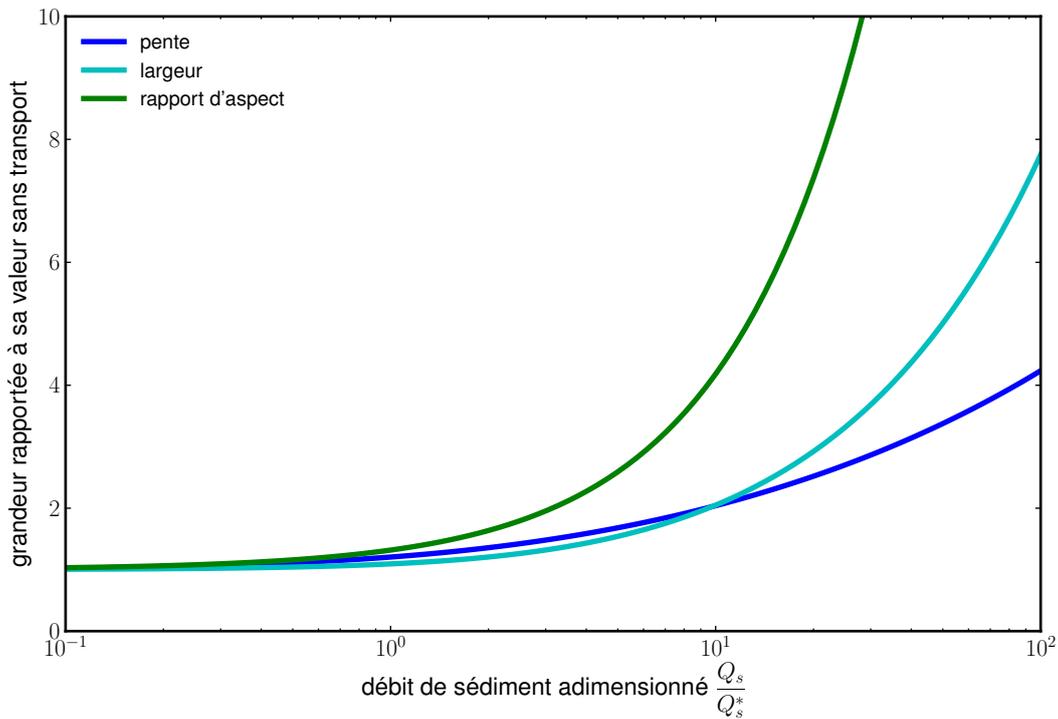


FIGURE 7.9 – Variations théoriques de la pente (—), de la largeur (—) et du rapport d'aspect (—) avec le débit de sédiments pour un débit d'eau imposé. Ces valeurs sont normalisées par la valeur théorique sans transport de sédiments.

### 7.5.3 Profils

En utilisant cette approximation de la rivière rectangulaire, nous pouvons aussi tracer différents profils de la rivière à débit d'eau constant mais en faisant varier le débit de sédiments (figure 7.10). Nous voyons clairement l'aplatissement de la rivière qui devient très rapide lorsque  $Q_s > Q_s^*$ .

A débit d'eau constant, la modification du profil de la rivière entraîne une modification de la vitesse de l'eau et donc une modification de la pente. Lorsque le débit de sédiments augmente, la pente augmente.

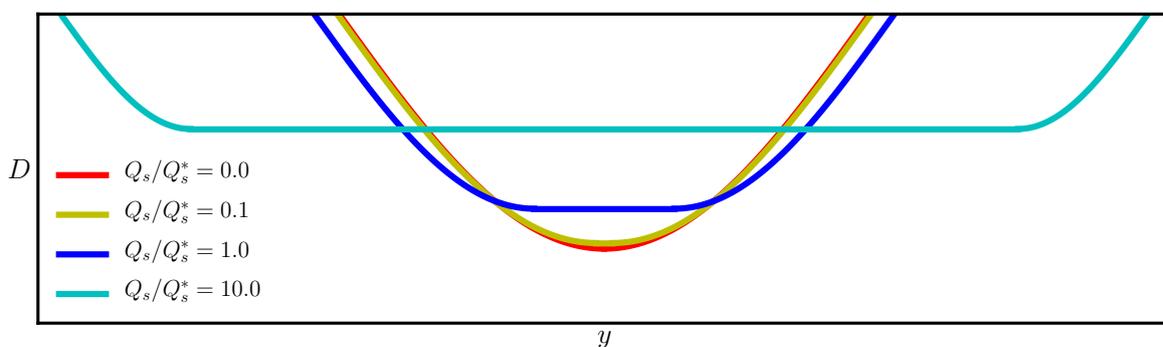
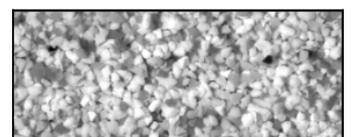


FIGURE 7.10 – Profils de rivières dans l'approximation de la rivière rectangulaire pour un débit d'eau constant et à différents débits de sédiments.



## 7.6 Résolution près du seuil

Notre modèle de rivière rectangulaire présente des propriétés étonnantes. Ces propriétés peuvent être dues à une trop grande simplicité de notre modèle. Nous allons donc faire un modèle un peu plus précis, en particulier dont la hauteur d'eau ne présente pas de discontinuité.

### 7.6.1 Formulation du problème

Pour un fort nombre de Péclet, la contrainte de la rivière est très près du seuil de mise en mouvement. Nous essayons donc de résoudre notre équation en la développant au voisinage de la contrainte seuil. Pour cela, nous allons étudier le problème dans l'espace des phases en passant en coordonnées polaires (figure 7.6). Nous avons alors directement  $\widetilde{D} = \Theta \cos \psi$  et  $\widetilde{D}' = -\Theta \sin \psi$  (le signe négatif est dû à notre convention, la profondeur diminue lorsque l'on parcourt la rivière dans le sens des  $y$  croissants).

L'équation 7.11 peut se réécrire en faisant intervenir la contrainte

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \widetilde{D}} \frac{\widetilde{D}^2}{\Theta} - \text{Pe} (\Theta - \mu) = 0 \quad (7.22)$$

L'intégration de cette équation donne

$$\Theta(\widetilde{D}) = \mu \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{\mu}{\widetilde{D}_M}\right) \exp\left(-\text{Pe} \mu \left(\frac{1}{\widetilde{D}} - \frac{1}{\widetilde{D}_M}\right)\right)}. \quad (7.23)$$

Afin de mettre en évidence les profils asymptotiques, nous choisissons de reformuler notre condition aux limites  $\widetilde{D}_M$  en fonction d'une variable qui ne dépend pas du nombre de Péclet. Nous introduisons  $\delta$  tel que :

$$\widetilde{D}_M = \mu \left(1 + \frac{1}{\text{Pe} - 1} \delta\right) \quad (7.24)$$

avec  $\delta \in [0, 1]$ .  $\delta = 0$  correspond à une forme de cosinus,  $\delta = 1$  correspond à une rivière infiniment plate.

Pour  $\text{Pe} \gg 1$ , l'équation 7.23 devient alors

$$\Theta = \mu + \mu \frac{\delta}{\text{Pe}} \exp\left(-\text{Pe} \left(\frac{\mu}{\Theta \cos \psi} - 1 + \frac{\delta}{\text{Pe}}\right)\right) \quad (7.25)$$

La contrainte est égale au seuil de mise en mouvement plus un terme correctif d'autant plus faible que le nombre de Péclet est grand. Nous retrouvons encore une fois que les berges présentent l'angle d'avalanche à l'intersection avec la surface et que la contrainte est maximale au centre de la rivière. Pour  $\delta = 0$ , nous retrouvons encore la contrainte égale au seuil de mise en mouvement (rivière sans transport de sédiments).

La contrainte de la rivière est très proche du seuil de mise en mouvement partout. Nous faisons alors le développement suivant :

$$\Theta = \mu + \frac{\mu}{\text{Pe}} \Theta_1 \quad \text{avec} \quad \Theta_1 \in [0, 1] \quad (7.26)$$

L'équation 7.25 devient alors

$$\Theta_1 = \delta \exp \left( \text{Pe} \left( 1 - \frac{1}{\cos \psi} \right) + \frac{\Theta_1}{\cos \psi} - \delta \right)$$

$$\psi(\Theta_1) = \arccos \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{\text{Pe}} \left( \Theta_1 - \delta + \ln \frac{\delta}{\Theta_1} \right)} \right) \quad (7.27)$$

### 7.6.2 Calcul de la largeur

Dans ce modèle, nous ne pouvons pas trouver de manière analytique la forme du profil de la rivière, toutefois nous pouvons avoir accès aux quantités physiques intégrées le long du profil.

Nous commençons donc par calculer la largeur sans dimension  $\widetilde{W}$  de la rivière en fonction de ces nouvelles unités. Par définition,

$$\widetilde{W} = 2 \int_{\widetilde{y}=0}^{\widetilde{W}/2} d\widetilde{y} = 2 \int_{\widetilde{D}=\widetilde{D}_M}^0 \frac{1}{\widetilde{D}'} d\widetilde{D} = 2 \underbrace{\int_{\psi=0}^{\pi/2} d\psi}_{\pi} + 2 \int_{\Theta=\mu}^{\widetilde{D}_M} \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \frac{1}{\Theta} d\Theta. \quad (7.28)$$

Le premier terme de l'intégrale nous permet de retrouver la largeur sans dimension de la rivière sans transport. Le deuxième terme est un peu plus complexe à calculer. Nous le transformons d'abord en utilisant le développement en  $\Theta_1$ .

$$2 \int_{\Theta=\mu}^{\widetilde{D}_M} \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \frac{1}{\Theta} d\Theta = \frac{2}{\text{Pe}} \int_{\Theta_1=0}^{\delta} \frac{\cos \psi}{\sin \psi} d\Theta_1. \quad (7.29)$$

### Hypothèses mathématiques

Par définition,  $\Theta_1(\psi = 0) = \delta$ . Si nous observons le comportement de  $\Theta_1$  en fonction de  $\psi$  pour  $\text{Pe} \gg 1$  (figure 7.11, pour  $\text{Pe} = 20$ ), on remarque que  $\Theta_1$  diminue rapidement lorsque  $\psi$  augmente et devient négligeable pour  $\psi \sim 1$ . Ce, quelle que soit sa valeur de départ. Il est facile de prouver avec l'équation 7.27 que  $\Theta_1$  décroît de manière monotone avec  $\psi$ .

Nous souhaitons alors quantifier cette décroissance et en particulier montrer que  $\Theta_1$  ne sera pas négligeable si et seulement si  $\psi \ll 1$ . Pour cela, nous nous intéressons à deux régimes limites

- Supposons  $\frac{1}{\text{Pe}} \left( \Theta_1 - \delta + \ln \frac{\delta}{\Theta_1} \right) \ll 1$ .

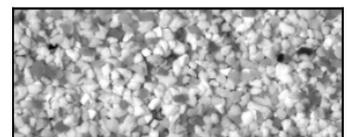
Alors nous faisons un développement limité de l'équation 7.27 pour trouver

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{\text{Pe}}} \sqrt{\Theta_1 - \delta + \ln \frac{\delta}{\Theta_1}} \ll 1. \quad (7.30)$$

- Supposons maintenant  $\frac{1}{\text{Pe}} \left( \Theta_1 - \delta + \ln \frac{\delta}{\Theta_1} \right) \sim 1$ .

Comme  $\text{Pe} \gg 1$  et  $(\delta, \Theta_1) \in [0, 1]^2$ , nous avons alors  $\frac{\Theta_1 - \delta}{\text{Pe}} \ll 1$  d'où  $\ln \frac{\delta}{\Theta_1} \sim \text{Pe}$ .

On en déduit  $\Theta_1 \sim \delta e^{-\text{Pe}} \ll \frac{1}{\text{Pe}}$ . Nous pouvons négliger  $\Theta_1$ .



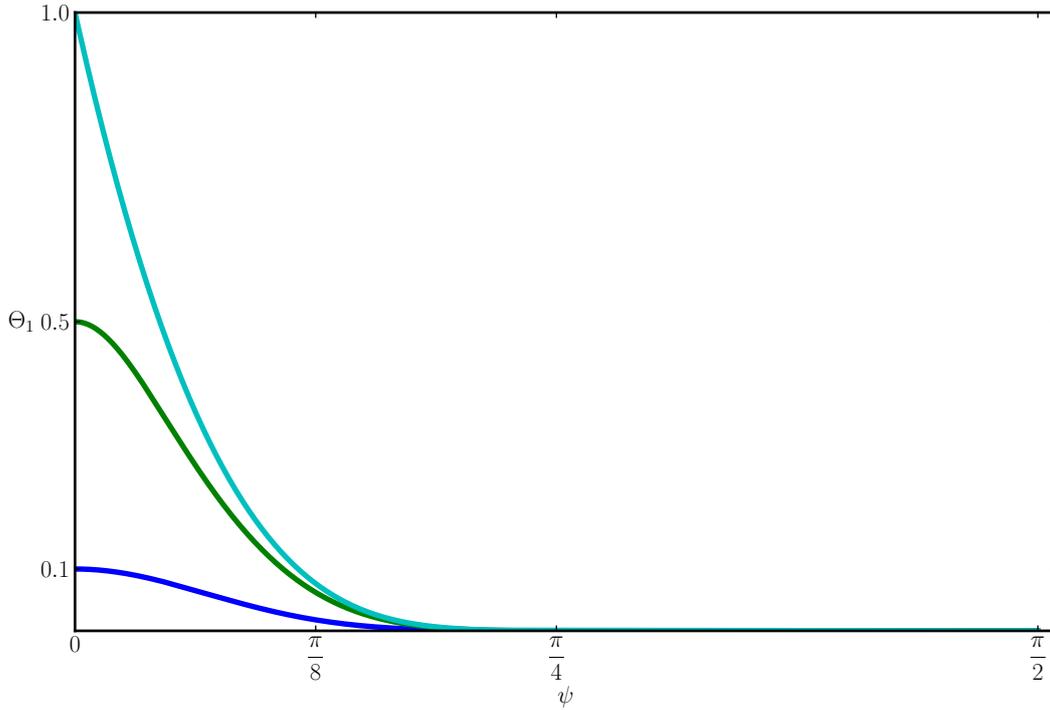


FIGURE 7.11 – Dépendance de  $\Theta_1$  en fonction de  $\psi$  pour  $Pe = 20$  en prenant différentes valeurs de  $\delta$  (ici,  $\delta = 0,1$  —,  $\delta = 0,5$  — et  $\delta = 1$  —).

Pour un angle  $\psi$  suffisamment grand,  $\Theta_1$  est donc négligeable. Regardons maintenant comment cela intervient dans notre intégration (équation 7.29). Nous pouvons séparer cette intégrale en deux parties, une partie où l'hypothèse de l'équation 7.30 s'applique et une autre partie pour compléter l'intégrale. Nous allons montrer que la seconde partie de l'intégrale est négligeable dans notre développement.

$$\int_{\Theta_1=0}^{\delta} \frac{\cos \psi}{\sin \psi} d\Theta_1 = \int_{\Theta_1=\delta e^{-\sqrt{Pe}}}^{\delta} \frac{\cos \psi}{\sin \psi} d\Theta_1 + \int_{\Theta_1=0}^{\delta e^{-\sqrt{Pe}}} \frac{\cos \psi}{\sin \psi} d\Theta_1 \quad (7.31)$$

– Pour la première partie de l'intégrale,  $\Theta_1 \in [\delta e^{-\sqrt{Pe}}, \delta]$ . Nous vérifions que

$$\frac{1}{Pe} \left( \Theta_1 - \delta + \ln \frac{\delta}{\Theta_1} \right) < \frac{1}{Pe} \left( \delta (e^{-\sqrt{Pe}} - 1) + \sqrt{Pe} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{Pe}} \ll 1 \quad (7.32)$$

Nous pouvons donc utiliser l'équation 7.30 et nous avons  $\psi \ll 1$ .

– Pour la deuxième partie de l'intégrale, nous trouvons des majorants :  $\cos \psi < 1$  et  $\sin \psi > \sin [\psi(\Theta_1 = \delta e^{-\sqrt{Pe}})]$ . Or,

$$\sin [\psi(\delta e^{-\sqrt{Pe}})] = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{Pe} (\delta (e^{-\sqrt{Pe}} - 1) + \sqrt{Pe})\right)^2}} \sim \sqrt{\frac{2}{\sqrt{Pe}}} \quad (7.33)$$

donc pour  $Pe \gg 1$ ,

$$\int_{\Theta_1=0}^{\delta e^{-\sqrt{Pe}}} \frac{\cos \psi}{\sin \psi} d\Theta_1 < \delta e^{-\sqrt{Pe}} Pe^{1/4} \ll \frac{1}{Pe} \quad (7.34)$$

et cette partie est négligeable dans notre développement.

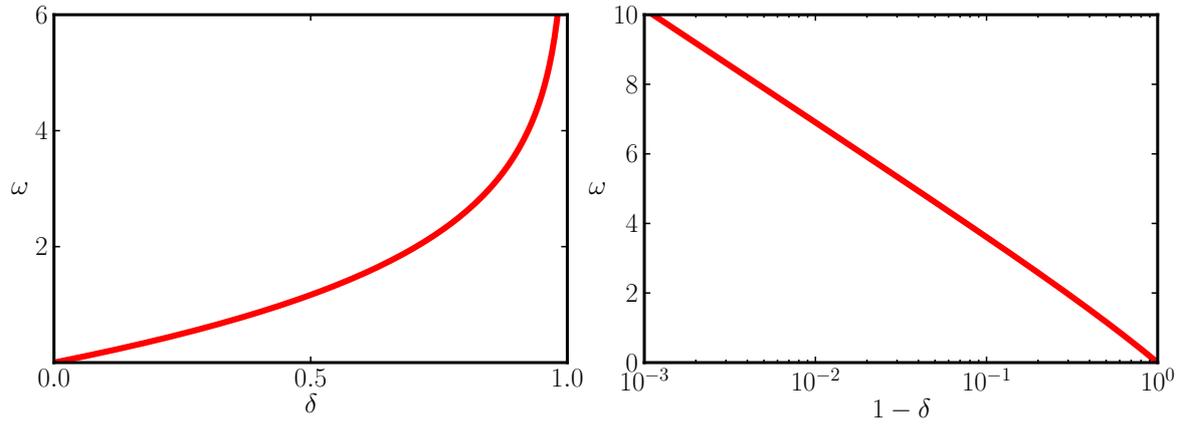


FIGURE 7.12 – Evolution de la largeur avec  $\delta$  (—). On retrouve bien les résultats précédents, si  $\delta = 0$ , alors  $w = 0$ , tandis que  $w$  diverge lorsque  $\delta \rightarrow 1$ .

Lorsque nous intégrerons des quantités physiques sur la largeur de la rivière, la seule contribution du terme correctif  $\Theta_1$  se fera lorsque  $\psi \ll 1$ . L'intégration peut donc se réécrire

$$\int_{\Theta_1=0}^{\delta} \frac{\cos \psi}{\sin \psi} d\Theta_1 = \int_{\Theta_1=0}^{\delta} \frac{1}{\psi} d\Theta_1 = \sqrt{\frac{\text{Pe}}{2}} \int_{\Theta_1=0}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{\Theta_1 - \delta + \ln \frac{\delta}{\Theta_1}}} d\Theta_1 \quad (7.35)$$

### Largeur

En utilisant les équations 7.28, 7.29 et 7.35, la largeur de la rivière s'écrit

$$\tilde{W} = \pi + \sqrt{\frac{2}{\text{Pe}}} \int_{\Theta_1=0}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{\Theta_1 - \delta + \ln \frac{\delta}{\Theta_1}}} d\Theta_1. \quad (7.36)$$

Si  $\delta = 0$ , nous retrouvons bien notre rivière sans transport. Plus l'écart au seuil (donc  $\delta$ ) augmente, plus le terme correctif devient important. Il peut en particulier devenir très grand devant la largeur initiale. Par analogie avec le modèle précédent, nous notons  $w$  la perturbation de largeur. Cette perturbation s'écrit

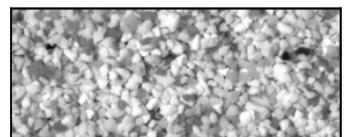
$$w(\text{Pe}, \delta) = \sqrt{\frac{2}{\text{Pe}}} \int_{\Theta_1=0}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{\Theta_1 - \delta + \ln \frac{\delta}{\Theta_1}}} d\Theta_1 = \sqrt{\frac{2}{\text{Pe}}} \omega(\delta). \quad (7.37)$$

Cette perturbation est très sensible aux conditions initiales. Si nous sommes au seuil,  $\delta = 0$  et la perturbation est nulle. Elle augmente ensuite linéairement avec  $\delta$  ( $\omega(\delta) \sim \delta$  pour des faibles  $\delta$ ). Lorsque nous nous rapprochons du point critique, cette perturbation croît exponentiellement ( $\omega(\delta) \sim \ln(1 - \delta)$ ) jusqu'à diverger au niveau du point critique ( $\delta = 1$ ) ce qui conduit à une largeur infinie (figure 7.12).

La largeur de la rivière s'écrit alors

$$W = \frac{\mathcal{L}}{S} (\pi + w(\text{Pe}, \delta)) \quad (7.38)$$

nous voyons bien apparaître les deux termes distinctement, celui provenant de la rivière sans transport et la correction apportée par le transport de sédiments.



### 7.6.3 Flux totaux

#### Débit de sédiments dans le sens de l'écoulement

Le débit de sédiments par unité de largeur  $q_s$  est proportionnel à l'écart du nombre de Shields généralisé au seuil de mise en mouvement avec un coefficient de proportionnalité  $q$ ,  $q_s = q(\Theta - \mu)$ . Ce débit de sédiments est orienté dans la direction de la contrainte tangentielle. Dans notre cas, nous nous intéressons uniquement au débit de sédiments dans la direction de l'écoulement (l'intégration du débit de sédiments dans la direction transverse est nulle par symétrie), la projection de la contrainte tangentielle dans la direction de l'écoulement fait apparaître un terme géométrique  $\widetilde{D}/\Theta$  en plus. Le débit de sédiments est donc

$$Q_s = 2q \frac{\mathcal{L}}{S} \int_{y=0}^{\widetilde{W}/2} (\Theta - \mu) \frac{\widetilde{D}}{\Theta} d\widetilde{y} = 2q \frac{\mathcal{L}}{S} \frac{\mu}{\text{Pe}} \int_{y=0}^{\widetilde{W}/2} \Theta_1 \cos \psi d\widetilde{y}. \quad (7.39)$$

De même que pour la largeur (équations 7.29, 7.30 et 7.35), nous pouvons montrer que

$$Q_s = \underbrace{q \ell_d \mu}_{Q_s^*} \left( 2 \underbrace{\int_{\psi=0}^{\pi/2} \Theta_1 \cos \psi d\psi}_{\frac{2}{\text{Pe}} \int_{\Theta_1=0}^{\delta} \frac{1-\Theta_1}{\psi} d\Theta_1} + 2 \underbrace{\int_{\Theta=\mu}^{\widetilde{D}_M} \Theta_1 \cos \psi \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \frac{1}{\Theta} d\Theta}_{\frac{2}{\text{Pe}} \int_{\Theta_1=0}^{\delta} \frac{\Theta_1}{\psi} d\Theta_1} \right). \quad (7.40)$$

Ce qui nous donne

$$Q_s = Q_s^* w(\text{Pe}, \delta). \quad (7.41)$$

Comme pour la rivière rectangulaire, le débit de sédiments varie linéairement avec le terme correctif de largeur  $w$ . Encore une fois, nous retrouvons que pour une rivière sans transport de sédiments, le terme correctif s'annule. Ensuite, ce terme augmente proportionnellement à la quantité de sédiments charriés.

#### Débit d'eau

En régime laminaire, le débit d'eau est proportionnel à l'intégration de  $D^3$ . Au premier ordre, la correction en  $\Theta_1$  n'intervient pas dans l'intégration d'où

$$Q_w = \frac{2}{3} \frac{g}{\nu} \frac{\mathcal{L}^4}{S^3} \int_{y=0}^{\widetilde{W}/2} \Theta^3 \cos^3 \psi d\widetilde{y} = \mu^3 \frac{2}{3} \frac{g}{\nu} \frac{\mathcal{L}^4}{S^3} \int_{y=0}^{\widetilde{W}/2} \mu^3 \cos^3 \psi d\widetilde{y}. \quad (7.42)$$

De la même manière que précédemment, l'intégration nous donne ensuite

$$Q_w = \frac{\mu^3}{3} \frac{g}{\nu} \frac{\mathcal{L}^4}{S^3} \left( \frac{4}{3} + w(\text{Pe}, \delta) \right). \quad (7.43)$$

Ici encore, nous trouvons naturellement que le débit de la rivière est égal à la somme du débit de la rivière sans transport et du débit d'une rivière plate de largeur  $w$ . Nous retrouvons le même résultat que pour notre rivière rectangulaire.

### 7.6.4 Équations de régime

Nous obtenons exactement les mêmes formules que pour la rivière rectangulaire. La seule différence est que le terme correctif de largeur  $w$  dépend cette fois-ci explicitement du nombre de Péclet et de la profondeur maximale de la rivière. En remplaçant  $w$  par  $Q_s/Q_s^*$ , nous retrouvons les équations de régime.

$$\begin{aligned}
 S &= \mu \left( \frac{4}{9} \frac{g}{\nu} \right)^{1/3} \mathcal{L}^{4/3} \left( \frac{1}{Q_w} \right)^{1/3} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{Q_s}{Q_s^*} \right)^{1/3} \\
 W &= \frac{\pi}{\mu} \left( \frac{9}{4} \frac{\nu}{g} \frac{1}{\mathcal{L}} \right)^{1/3} Q_w^{1/3} \frac{1 + \frac{1}{\pi} \frac{Q_s}{Q_s^*}}{\left( 1 + \frac{3}{4} \frac{Q_s}{Q_s^*} \right)^{1/3}} \\
 \frac{W}{D_M} &= \frac{\pi}{\mu} \left( 1 + \frac{Q_s}{\pi Q_s^*} \right)
 \end{aligned} \tag{7.44}$$

Encore une fois, si le transport de sédiments s'annule, nous retrouvons les équations de régime pour les rivières sans transport. Nous remarquons aussi que, quel que soit le débit de sédiments, les dépendances avec le débit d'eau  $Q_w$  sont identiques à celles trouvées sans transport de sédiments. Cela explique pourquoi les lois d'échelles trouvées dans le cadre d'une rivière sans transport de sédiments sont valables dans la nature même si les rivières transportent des sédiments.

Il existe deux comportements limites selon la valeur de  $Q_s$  par rapport à  $Q_s^*$ . Avec un débit de sédiments faible ( $Q_s \ll Q_s^*$ ), on retrouve bien les relations trouvées pour une rivière qui ne transporte pas (équations 3.5). Pour  $Q_s \gg Q_s^*$ , toutes les valeurs augmentent avec une loi de puissance.

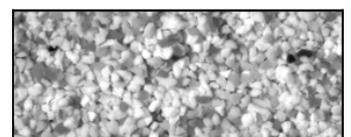
Le rapport d'aspect de la rivière est le paramètre le plus sensible à l'introduction d'un débit de sédiments. Nous retrouvons le même résultat que pour les rivières rectangulaires, c'est-à-dire que l'évolution du rapport d'aspect est indépendante du débit d'eau.

### 7.6.5 Vérification numérique

Les lois de régime sont très difficiles à vérifier numériquement. En effet, comme les débits d'eau et de sédiments sont des variables implicites du problème, il est très long de créer une série de rivières à débit d'eau constant avec variation du débit de sédiments ou vice-versa. Nous n'avons donc pas vérifié les équations 7.44.

En revanche, nous connaissons théoriquement l'évolution de la correction de largeur  $w$  avec le nombre de Péclet  $Pe$  et la condition initiale  $\delta$  (équation 7.37). Nous pouvons donc vérifier numériquement les équations 7.38, 7.41 et 7.43 qui donnent chacune la dépendance de la largeur, du débit de sédiments et du débit d'eau en fonction de nos paramètres de contrôle.

Pour cela, nous résolvons numériquement le cas de sections de rivière d'abord en fixant  $\delta = 0,5$  et en faisant varier  $Pe$  puis nous fixons  $Pe = 200$  et nous faisons varier  $\delta$  (figure 7.13). A chaque résolution, nous mesurons la largeur, le débit d'eau et le débit de sédiments trouvés pour une section et nous comparons ces valeurs aux équations de régime théoriques. Comme les comportements divergent lorsque  $\delta \rightarrow 1$ , nous traçons les quantités en fonction de  $1 - \delta$  en échelle logarithmique.



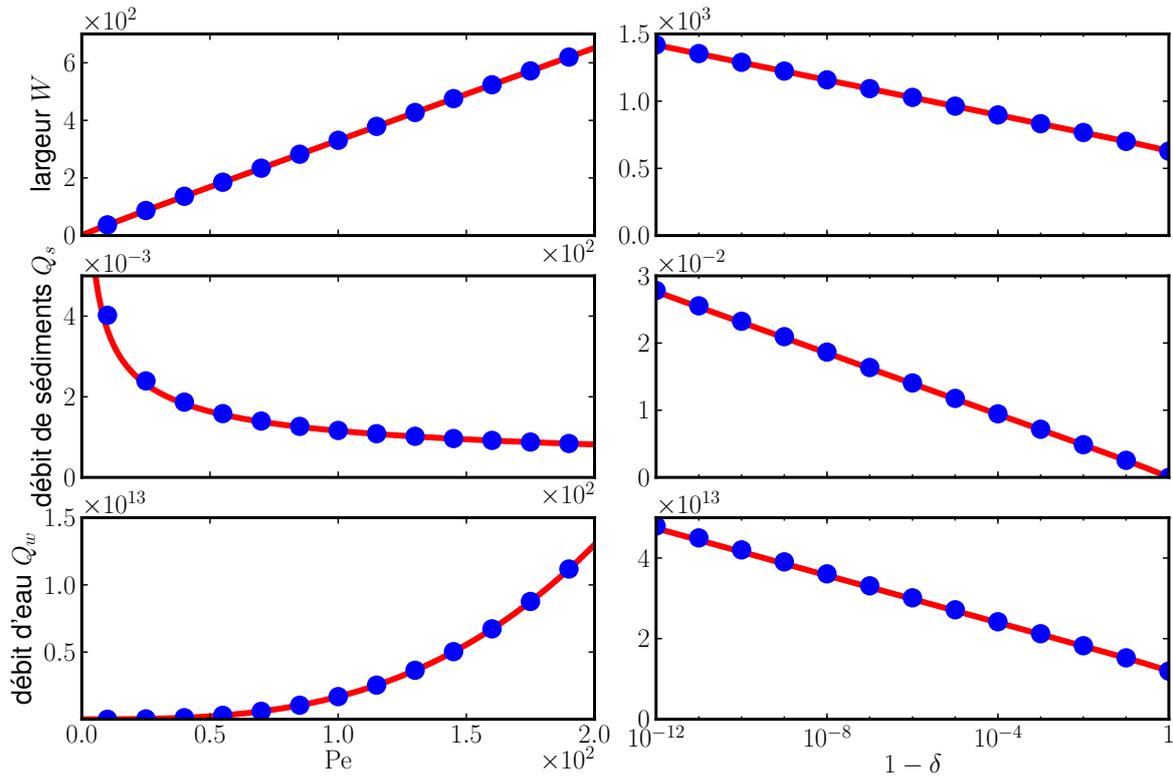


FIGURE 7.13 – Variation de la largeur  $W$ , du débit de sédiments  $Q_s$  et du débit d'eau  $Q_w$  en fonction de  $Pe$  pour  $\delta = 0,5$  et de  $\delta$  pour  $Pe = 200$ . On compare les valeurs théoriques trouvées (—) avec des simulations numériques (•). Les unités sont arbitraires.

Nous remarquons que les résultats numériques correspondent bien aux équations théoriques. Notre développement près du seuil est donc une bonne approximation des solutions de notre équation différentielle (équation 7.11) et nous pouvons considérer que les équations de régime trouvées décrivent bien le comportement d'une rivière dont la forme serait contrôlée par la diffusion transverse de sédiments.

## 7.7 Rivières naturelles

Notre modèle de diffusion doit continuer à être valable pour des écoulements en régime turbulent. En particulier l'équation différentielle 7.11 reste valable. Tout le raisonnement qui en découle reste bon et les rivières naturelles doivent donc rester proche du seuil. Les équations qui déterminent la géométrie de la rivière ont été trouvées sans faire d'hypothèse sur l'écoulement, les équations 7.38 et 7.41 doivent donc rester valables.

En revanche, le profil de vitesse de l'écoulement est modifié (équation 2.20), le débit d'eau devient donc :

$$Q_w = \mu^{3/2} \frac{\sqrt{g}}{C_f} \frac{\mathcal{L}^{5/2}}{S^2} \left( \frac{2^{3/2} \mathcal{K}[1/2]}{3} + w(Pe, \delta) \right) \quad (7.45)$$

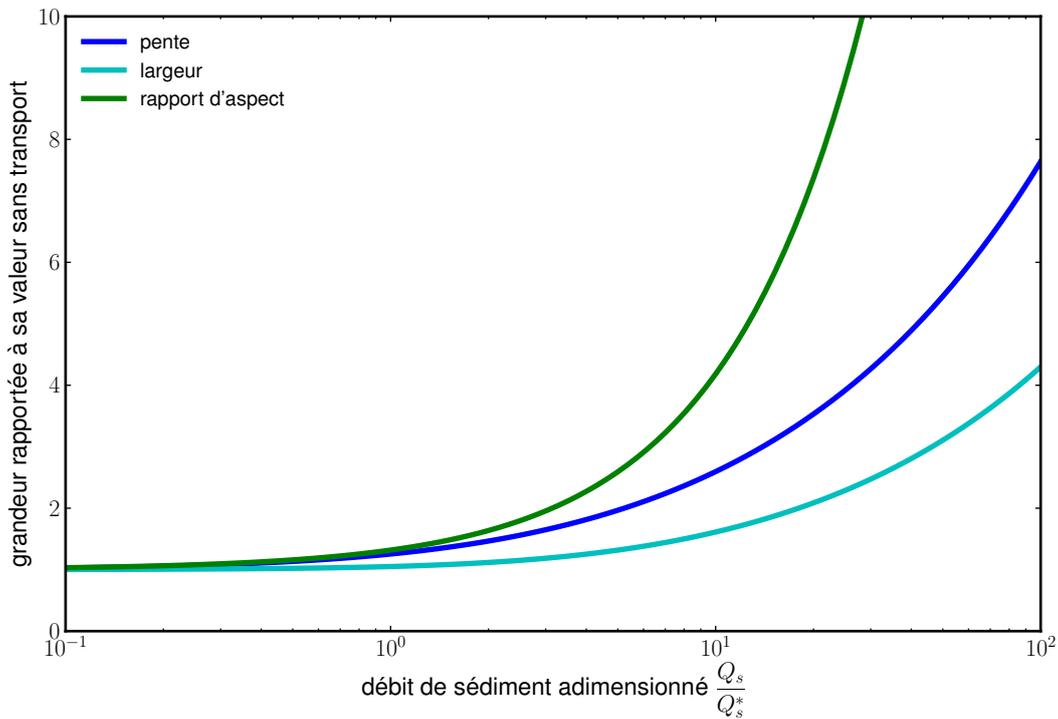
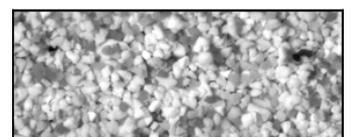


FIGURE 7.14 – Variation théorique de la pente (—), la largeur (—) et du rapport d’aspect (—) avec le débit de sédiments pour un débit d’eau imposé en régime turbulent. Ces valeurs sont normalisées par la valeur théorique sans transport de sédiments.

et les équations de régime qui en découlent s’écrivent (figure 7.14) :

$$\begin{aligned}
 S &= \mu^{3/4} \sqrt{\frac{2^{3/2} \mathcal{K}[1/2]}{3}} \frac{g^{1/4}}{\sqrt{C_f}} \mathcal{L}^{5/4} \frac{1}{\sqrt{Q_w}} \sqrt{1 + \frac{3}{2^{3/2} \mathcal{K}[1/2]} \frac{Q_s}{Q_s^*}} \\
 W &= \frac{\pi}{\mu^{3/4}} \sqrt{\frac{3}{2^{3/2} \mathcal{K}[1/2]}} \frac{\sqrt{C_f}}{g^{1/4}} \frac{1}{\mathcal{L}^{1/4}} \sqrt{Q_w} \frac{1 + \frac{1}{\pi} \frac{Q_s}{Q_s^*}}{\sqrt{1 + \frac{3}{2^{3/2} \mathcal{K}[1/2]} \frac{Q_s}{Q_s^*}}} \\
 \frac{W}{D_M} &= \frac{\pi}{\mu} \left( 1 + \frac{Q_s}{\pi Q_s^*} \right)
 \end{aligned} \tag{7.46}$$

Comme en régime laminaire, ces relations sont similaires à celles trouvées pour une rivière sans transport lorsque le débit de sédiments s’annule et c’est le rapport d’aspect qui est le plus fortement modifié par l’augmentation du débit de sédiments. Contrairement au régime laminaire, pour des débits de sédiments importants, la pente et la largeur augmentent avec la même loi de puissance. La variation de pente est donc plus sensible au débit de sédiments en régime turbulent qu’en régime laminaire tandis que la variation de largeur est moins sensible.



## Conclusion

Dans le cas d'une rivière qui transporte des sédiments, l'existence d'un flux diffusif permet de proposer un modèle pour expliquer l'équilibre des rivières qui transportent des sédiments.

Ce flux diffusif stabilise les berges en compensant le flux de sédiments gravitaire qui va vers le centre de la rivière. Cette théorie permet de prédire les équations de régime et la forme d'équilibre d'une rivière en fonction de son débit d'eau et de son débit de sédiments. L'ajout de sédiments tend à élargir la rivière, augmenter sa pente et aplatir le fond. Encore une fois, imposer les débits d'eau et de sédiments détermine entièrement la morphologie de la rivière.

Le rapport d'aspect est particulièrement sensible à l'ajout d'un débit de sédiments. Dans les rivières sans transport ce rapport d'aspect était constant. Ici encore, il est indépendant du débit d'eau mais augmente avec le transport de sédiments.

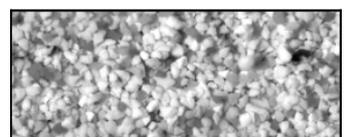
# Quatrième partie

## Conclusion et perspectives



Norman et Paul Maclean appliquant les équations de Poisson aux rivières.

*Et au milieu coule une rivière (A River Runs Through It)*. R. Redford, 1992





# Chapitre 8

## Conclusion et perspectives

### 8.1 Conclusion générale

Au cours de cette thèse, nous avons montré que la forme d'équilibre des rivières est contrôlée par la physique des sédiments à l'échelle du grain.

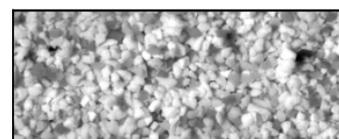
Dans un écoulement, la force entraînant les sédiments provient de la contrainte exercée par l'écoulement sur le lit et par la gravité. Le seuil de mise en mouvement, habituellement exprimé en fonction du nombre de Shields, est l'équivalent de la loi de Coulomb utilisée dans le cas du frottement solide : pour amorcer le mouvement, le rapport entre la force tangentielle et la force normale appliquées à un grain doit être supérieur au seuil de mise en mouvement.

Pour une rivière qui ne transporte pas de sédiments, les grains qui composent le lit sont au seuil de mise en mouvement. Cet équilibre entre la contrainte fluide et le poids des grains impose une forme de cosinus au lit, quels que soient la nature de l'écoulement ou le débit d'eau. Le rapport d'aspect des rivières est alors constant.

Connaissant la section des rivières, nous pouvons calculer les équations de régime qui déterminent comment varient les paramètres morphologiques de la rivière (largeur, pente, profondeur...) avec le débit en eau. Ces équations de régime prévoient que la largeur et la pente de la rivière varient avec la racine cubique du débit pour un écoulement en régime laminaire et avec la racine carrée du débit en régime turbulent. Ces équations ne font intervenir aucun paramètre ajustable.

Les équations montrent que pour une rivière sans transport, imposer le débit d'eau détermine entièrement la forme de la rivière, en particulier sa largeur et sa pente. Il est donc impossible en pratique d'atteindre un équilibre en fixant à la fois la pente et le débit de la rivière. Nous pensons que c'est pour cette raison que personne n'avait jusqu'à présent réussi à créer expérimentalement une rivière auto-formée sans transport à l'équilibre. Pour vérifier nos équations expérimentalement, nous avons donc créé une micro-rivière mono-chenal capable d'adapter sa pente à débit fixé. Cette rivière nous a permis de vérifier que la forme de la section et les équations de régime étaient bien en accord avec nos prédictions théoriques en régime laminaire. En régime turbulent, les largeurs mesurées dans la nature pour des rivières sableuses vérifient elles aussi nos prédictions théoriques.

Nous nous sommes ensuite concentré sur l'étude expérimentale des sédiments charriés en réinterprétant le modèle d'érosion-sédimentation<sup>[22;44]</sup>. Lorsque la contrainte fluide sur le lit est supérieure au seuil de mise en mouvement, des sédiments sont charriés par



l'écoulement. Au voisinage du seuil de mise en mouvement, nous pouvons modéliser le charriage par une couche homogène de grains en mouvement qui se déplace à la surface du lit à vitesse constante. Il y a des échanges incessants entre les grains en mouvement et le lit statique. La concentration de grains en mouvement compose un ensemble statistique cohérent.

En observant les mouvements des grains, nous avons vu que le déplacement des grains ne se fait pas exclusivement dans la direction de l'écoulement mais comporte aussi une composante perpendiculaire à l'écoulement. La trajectoire d'un grain s'apparente à une marche aléatoire classique. La couche de grains en mouvement peut être modélisée par une superposition de marcheurs aléatoires indépendants les uns des autres. Les fluctuations de trajectoires créent alors une dispersion transverse qui entraîne l'apparition d'un débit de sédiments diffusif transverse au sens de l'écoulement. Au voisinage du seuil de mise en mouvement, ce comportement ne dépend ni du débit d'eau ni du débit de sédiments dans l'écoulement.

Ce flux diffusif nous permet de proposer un modèle pour expliquer la forme d'équilibre des rivières qui transportent du sédiment. Dans les rivières qui transportent, la gravité entraîne les sédiments vers le centre du chenal. La concentration de sédiments est donc plus importante au centre de la rivière que sur les côtés. Ce gradient de concentration entraîne l'apparition d'un flux diffusif vers les berges qui équilibre le flux gravitaire.

Dans les rivières, le débit de sédiments qui peut être transporté par diffusion (équivalent à l'inverse du nombre de Péclet dans nos équations) est très faible. Le flux diffusif ne peut donc compenser qu'un flux advectif faible. Pour maintenir un équilibre, la contrainte sur le lit doit donc rester très proche du seuil de mise en mouvement. A cause de cela, les rivières ont une forme bien particulière qui peut être décomposée en deux parties différentes : un fond plat au centre de la rivière, où la contrainte est au-dessus du seuil de mise en mouvement et où le transport a lieu, et des berges en forme de cosinus, où la contrainte est au seuil de mise en mouvement. La forme de la rivière est directement gouvernée par le débit d'eau et le débit de sédiments. A débit d'eau constant, l'augmentation du débit de sédiments entraîne un aplatissement de la rivière qui passe d'une rivière en forme de cosinus à une rivière de plus en plus plate.

Connaissant la forme de ces rivières, nous obtenons des équations de régime théoriques prédisant l'évolution de la largeur, de la pente et du rapport d'aspect de la rivière en fonction du débit d'eau et du débit de sédiments. Ces équations font apparaître un débit de sédiments caractéristique du système. Pour un débit de sédiments inférieur à ce débit caractéristique, les rivières se comportent comme des rivières sans transport. Si le débit de sédiments devient grand devant le débit caractéristique, l'élargissement et l'augmentation de la pente des rivières sont décrits par de nouvelles lois d'échelle. Les lois d'échelles reliant les paramètres morphologiques au débit d'eau restent quant à elles identiques.

Le principal effet de la prise en compte du flux de sédiments concerne le rapport d'aspect de la rivière. En effet, l'évolution de ce rapport d'aspect est indépendante du débit d'eau et dépend seulement de la quantité de sédiments transportés. Cela est particulièrement intéressant car la mesure du rapport d'aspect nous renseignerait alors directement sur la quantité de sédiments transportés par la rivière.

Cette thèse offre donc un cadre théorique pour comprendre la forme d'équilibre des rivières en fonction des flux imposés. Toutefois, ce cadre repose sur de nombreuses simplifications :

Nous nous plaçons dans l'approximation d'eau peu profonde. Nous avons vu dans le cas sans transport que les résultats étaient cohérents mais nous n'avons pas étudié comment cela pouvait modifier le flux diffusif lorsqu'il y a un débit de sédiments.

Toutes nos expériences ont été réalisées en régime laminaire tandis que les rivières présentent un écoulement turbulent. Un certain nombre d'études<sup>[36;58;59]</sup> suggèrent cependant que la physique soit similaire à celle observée en régime turbulent.

Il y a de nombreux paramètres dont nous n'avons pas tenu compte dans nos expériences :

- la présence de végétation, qui stabilise les berges
- la diversité de la taille des grains, qui peut modifier le seuil de mise en mouvement du lit et la loi de transport
- les phénomènes tectoniques, qui modifient en permanence la pente de la rivière.

Enfin, les débits d'eau et de sédiments varient durant l'année. Il est donc possible que les rivières naturelles soient en permanence hors équilibre. Ce comportement pourrait être étudié expérimentalement en laboratoire.

## 8.2 Perspectives

Cette thèse permet de mieux comprendre la forme d'équilibre des rivières. Pour aller plus loin, il faudrait vérifier les prédictions théoriques du modèle diffusif avec des expériences en configuration simplifiée puis, à plus long terme, sur de véritables rivières naturelles.

### 8.2.1 Expériences de micro-rivières avec transport

Plusieurs expériences préliminaires pour vérifier nos prédictions ont été réalisées avec Odin Marc lors de son stage de M2. Les expériences ont été réalisées en utilisant le même montage expérimental que celui utilisé pour la création des rivières sans transport. Cette fois-ci, cependant, nous imposons non seulement un débit d'eau constant, mais également un débit de sédiments.

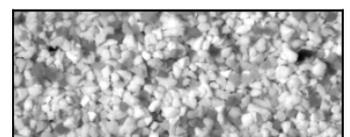
#### Section d'équilibre

Les premiers résultats sont encourageants. En particulier nous observons que l'ajout d'un débit de sédiments rend le fond de la rivière particulièrement plat. Figure 8.1, nous illustrons cette propriété en présentant différentes rivières avec un débit d'eau constant et un débit de sédiments croissant. Contrairement à la figure 3.13 où la mesure avait été faite pour une rivière sans transport, la rivière est ici bien plus large et beaucoup plus plate au centre.

Conformément à la théorie, la forme de la rivière varie donc fortement avec l'augmentation du débit de sédiments. Plus le débit de sédiments augmente, plus le rapport d'aspect s'aplatit (figure 8.1). Nous avons aussi constaté que la pente augmente. Nous illustrons ce comportement en traçant le rapport d'aspect d'une rivière en fonction du débit de sédiments pour un jeu d'expériences faites à débit d'eau constant (figure 8.2).

L'ajustement de ces données expérimentales par une loi conforme à notre prédiction théorique (équation 7.20) donne un résultat satisfaisant (figure 8.2) avec un débit de sédiments caractéristique

$$Q_s^* \approx 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ kg/s.} \quad (8.1)$$



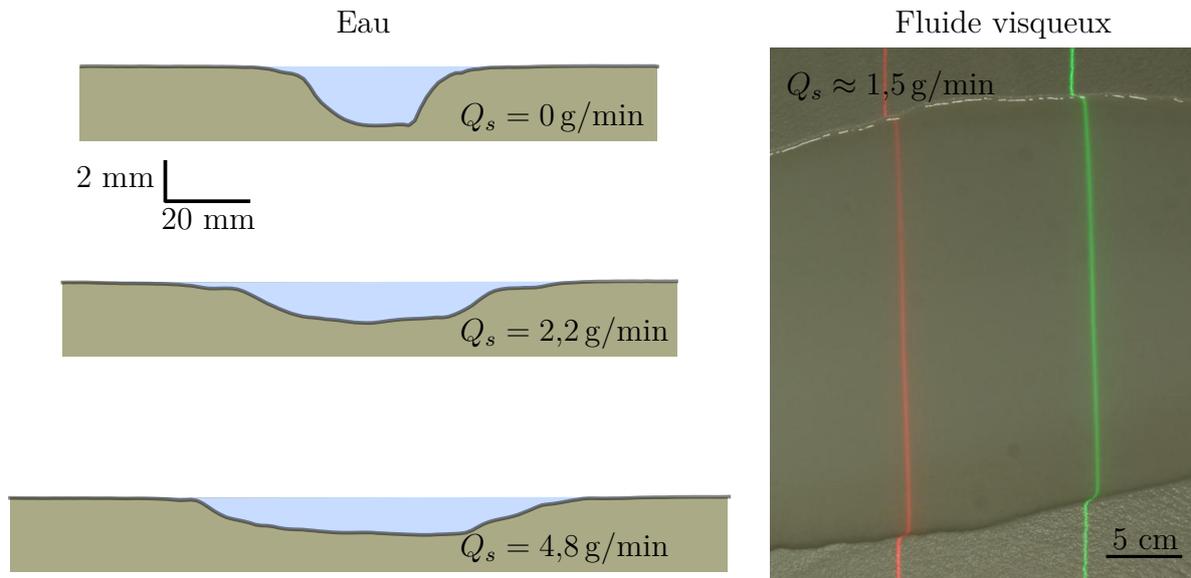


FIGURE 8.1 – Sections de rivières obtenues avec transport de sédiments. Avec un débit d'eau de  $Q_w = 0,7 \text{ L/min}$  (à gauche). La photographie sur la droite montre le trajet de deux nappes lasers pour une rivière visqueuse ( $Q_w = 1,0 \text{ L/min}$ ) avec transport de sédiments.

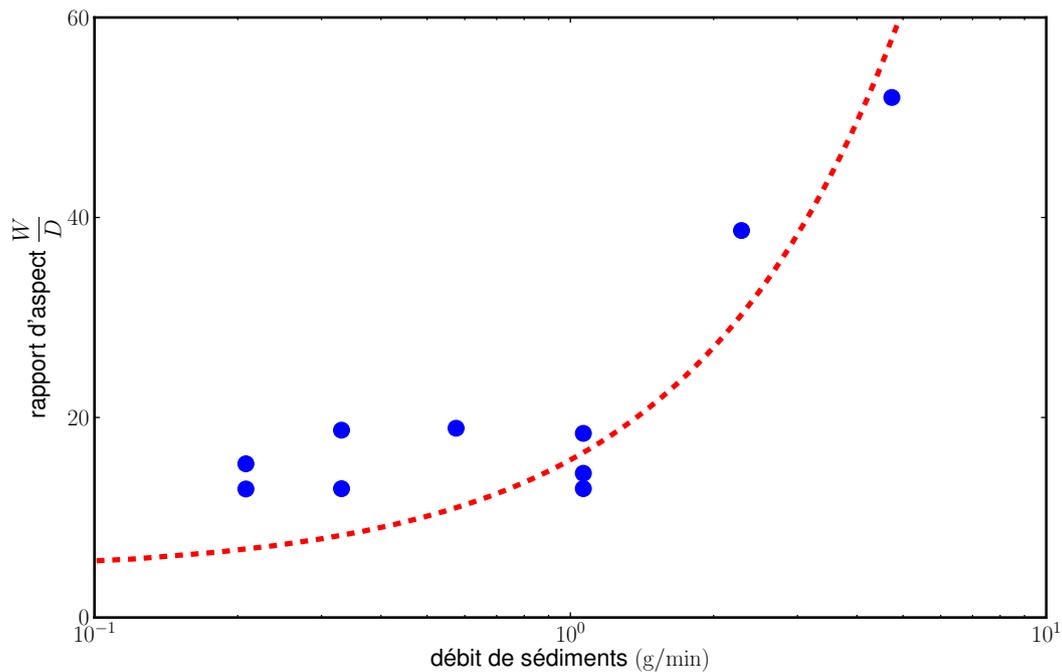


FIGURE 8.2 – Variation du rapport d'aspect avec le débit de sédiments pour un débit d'eau  $Q_w = 0,7 \text{ L/min}$ . On compare les valeurs mesurées expérimentalement (●) avec notre modèle (---).

Cette valeur est supérieure d'un facteur 100 environ à la valeur du débit de sédiments caractéristique calculée en utilisant l'équation 7.18. Cependant, ces expériences ont été réalisées avec de l'eau. De ce fait, il n'est pas certain que le régime soit laminaire. De plus, aucune mesure de flux de sédiments n'est faite en sortie, la situation d'équilibre n'est donc pas vérifiée.

Il faudrait finaliser les expériences en laboratoire pour confirmer le bien fondé de

notre théorie de diffusion et mieux comprendre comment le transport de sédiments modifie la forme des rivières. Des expériences sont actuellement en cours avec un fluide visqueux et en essayant de mesurer le flux de grains dans la rivière afin de pouvoir vérifier quantitativement cette théorie.

### Transition vers les rivières en tresse

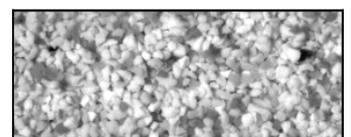
Dans nos expériences, nous observons également que l'augmentation du débit de sédiments entraîne un changement de morphologie de la rivière. Un exemple est illustré figure 8.3. Les images (a), (b) et (c) montrent des expériences réalisées avec le même débit d'eau mais avec un débit de sédiments croissant.

Avec un faible débit de sédiments, la rivière n'a qu'un seul chenal de profondeur constante tout du long. Lorsque le débit de sédiments augmente, on voit apparaître des bancs sur le fond qui forment des motifs de type barres alternées<sup>[60;61]</sup>. Lorsque le débit de sédiments augmente encore, la rivière se destabilise en tresses et crée de nombreux chenaux.

Plusieurs expériences réalisées avec différents débits d'eau nous ont permis de déterminer que cette transition vers de multiples chenaux a lieu lorsque le rapport d'aspect de la rivière dépasse une valeur critique correspondant environ à  $W/D \approx 35$ .

### Bilan

Qualitativement, nos prédictions théoriques se vérifient très bien expérimentalement. L'ajout d'un débit de sédiments aplatit la section de la rivière et augmente son rapport d'aspect. Nous avons aussi remarqué qu'au-delà d'un certain rapport d'aspect, la rivière se destabilise et adopte une morphologie en tresse. Ces résultats sont encourageants. Pour aller plus loin, il est à présent nécessaire de réaliser une série complète d'expériences permettant d'explorer en détail les dépendances de la morphologie de la rivière avec le débit de sédiments.



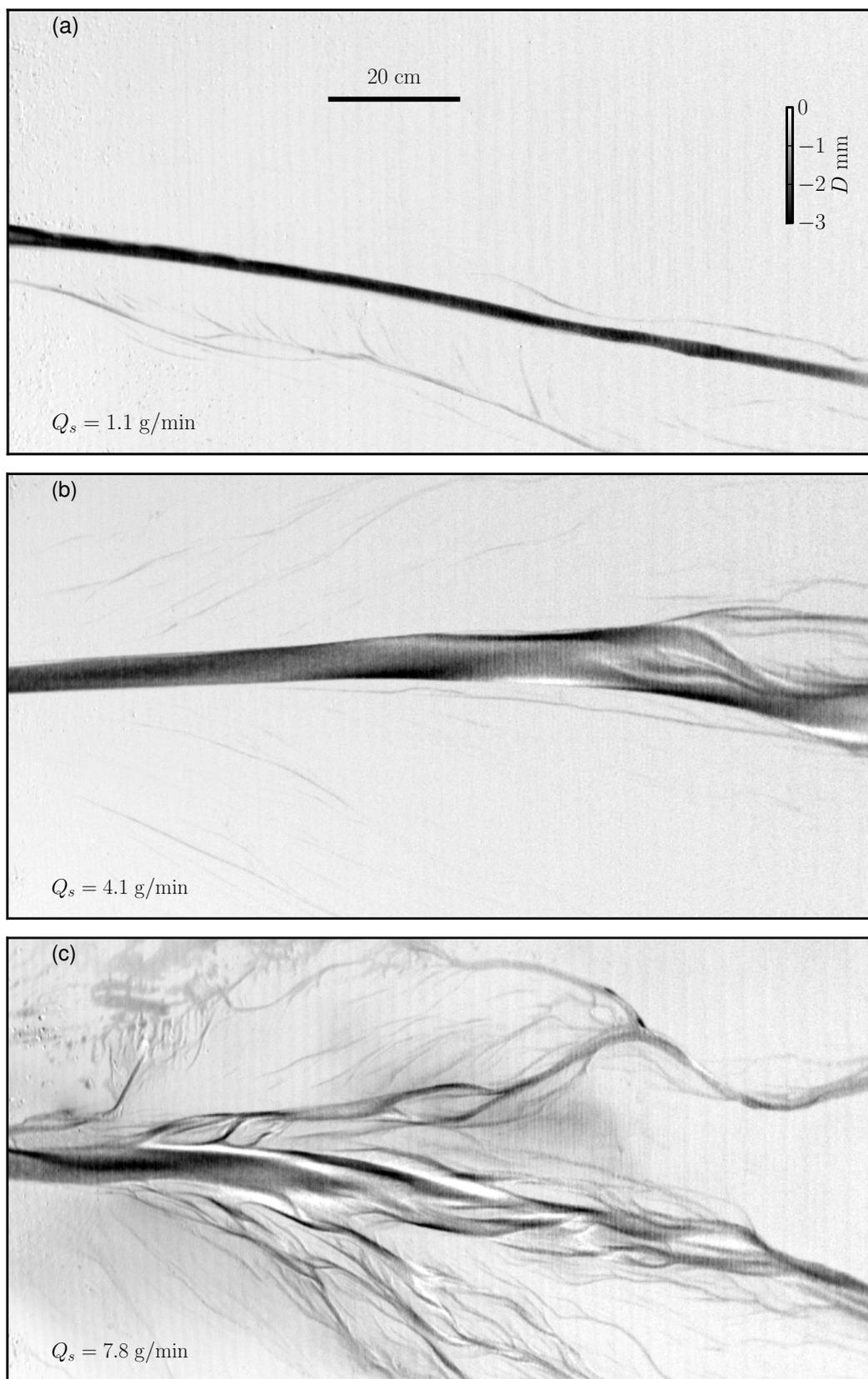


FIGURE 8.3 – Variation de la forme de la rivière avec l'augmentation du débit de sédiments pour un débit d'eau constant  $Q_w = 0,7 \text{ L/min}$ .



FIGURE 8.4 – Mesures de flux de sédiments sur la rivière Ürümqi (Chine).

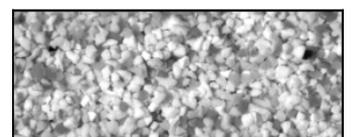
### 8.2.2 Et dans la nature ?

Nous nous sommes concentrés durant cette thèse sur les rivières expérimentales en régime laminaire. Ces expériences ont permis de dégager un cadre physique expliquant l'évolution morphologique des rivières : à débit d'eau constant, la pente et le rapport d'aspect de la rivière sont contrôlés par le débit de sédiments. Quand ce dernier augmente, la largeur augmente tandis que la profondeur diminue. Au-delà d'un rapport d'aspect critique, de l'ordre de 35, la rivière se déstabilise et forme une rivière en tresse. Ce scénario d'évolution, valable en laboratoire, s'applique-t-il également aux rivières naturelles ?

La plupart des jeux de données répertorient la largeur, la pente, le débit d'eau et parfois la forme des rivières naturelles. Il est malheureusement très difficile de mesurer le débit de sédiments dans la nature : il suffit en laboratoire de placer une balance à la sortie de notre expériences, cette méthode n'est toutefois pas adaptée aux mesures sur le terrain qui sont difficiles à mettre en place (figure 8.4). Nous disposons donc de très peu de mesures pour vérifier nos théories. Nous présenterons néanmoins ci-dessous quelques observations prometteuses.

#### L'existence d'un flux diffusif

La figure 8.5 présente une mesure de flux de sédiments charriés réalisée par l'équipe de géomorphologie le long d'une section de la rivière Ürümqi en Chine. Le flux de sédiments n'est pas homogène sur la largeur de la rivière. Il est très élevé au centre tandis qu'il est nul sur les berges. D'après nos mesures de laboratoire, cela devrait conduire à l'existence d'un flux diffusif perpendiculaire dirigé vers les berges.



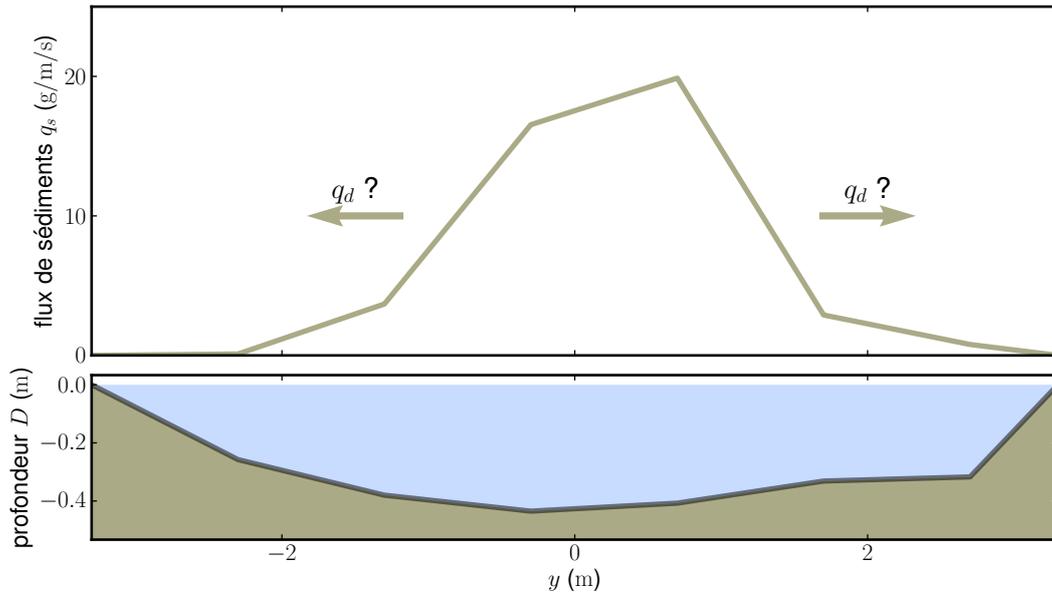


FIGURE 8.5 – Flux de sédiments et profil de la rivière Ürümqi (Chine).

Il serait donc à présent nécessaire de vérifier si ce flux diffusif existe et mesurer des coefficients de diffusion dans la nature : non seulement les grains dans la nature évoluent sur un fond rugueux, mais en plus ils sont soumis à des fluctuations turbulentes de vitesse qui peuvent faciliter la dispersion des sédiments sur le côté. Le coefficient de diffusion des grains dans la nature peut alors être bien supérieur à celui mesuré dans nos expériences.

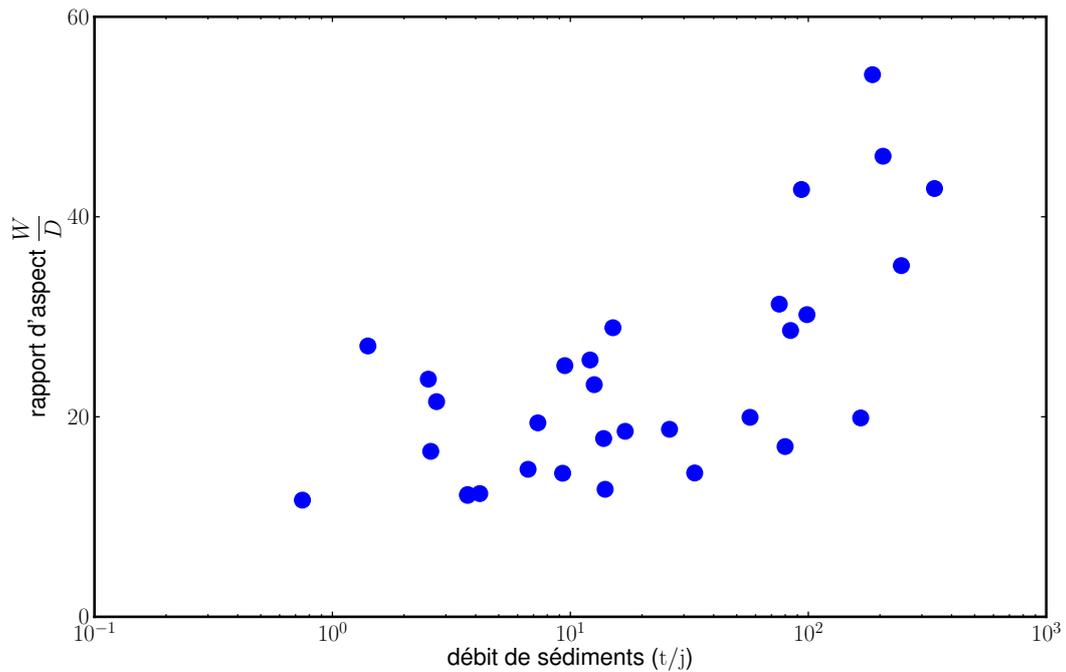


FIGURE 8.6 – Rapport d'aspect de rivières naturelles en fonction du débit de sédiments<sup>[6;62]</sup>.

## Modification du rapport d'aspect avec le transport

Des mesures sur les rivières avec un lit en gravier montrent que le rapport d'aspect augmente avec le débit de sédiments<sup>[6;62]</sup> (figure 8.6). Malgré une grande dispersion, ce comportement est en accord avec notre modèle.

## Déstabilisation des rivières en tresses

Ces données sur le rapport d'aspect concernent exclusivement des rivières composées d'un seul chenal. Au-delà d'un certain rapport d'aspect, il n'y a plus de données. Au vu de nos expériences, nous sommes tentés de conclure que les rivières mono-chenal n'existent que pour un rapport d'aspect suffisamment faible (inférieur à 50 environ). Nous pensons que pour un débit de sédiments trop important, les rivières se déstabilisent en tresses. Cette idée est confirmée par une étude sur la William River publiée par Smith et Smith en 1984<sup>[7]</sup>.

La William River est une rivière à fond sableux située dans la province du Saskatchewan au Canada ( $59^{\circ}02' \text{ N}$ ,  $109^{\circ}10' \text{ O}$ ). Cette rivière, qui présente en amont une morphologie en méandres, traverse un champ de dunes situé une trentaine de kilomètres avant son embouchure. Elle se charge alors en sédiments et la largeur de la rivière augmente rapidement avant que la rivière ne se déstabilise en tresses (figures 8.7 et 8.8).

Ce genre de comportement est aussi observé sur quelques rivières en Namibie ( $23^{\circ}32' \text{ S}$ ,  $15^{\circ}00' \text{ E}$  par exemple).

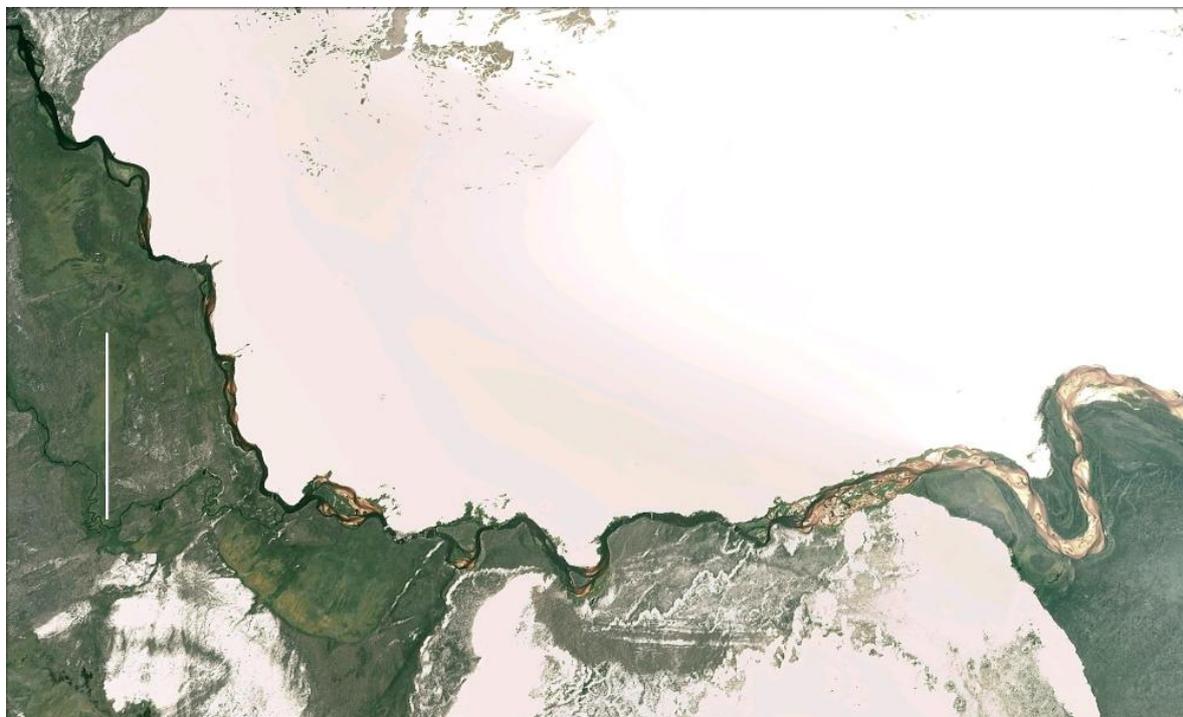
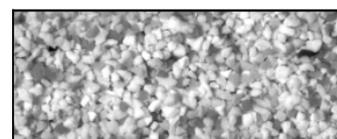


FIGURE 8.7 – William River qui passe de méandres (à gauche) en tresses (à droite) au fur et à mesure de son écoulement au sein d'un champ de dunes. La rivière coule de la gauche vers la droite. Le trait blanc représente une échelle 2 km (Canada, Google Earth).



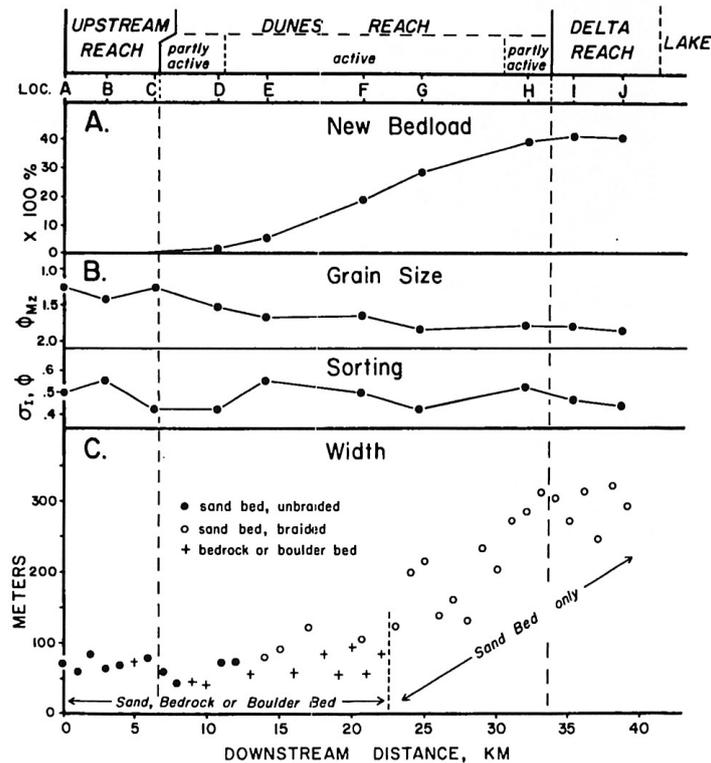


FIGURE 8.8 – Evolution du débit de sédiments et de la largeur pour la William River. Smith et Smith 1984<sup>[7]</sup>.

## Bilan

Tous ces exemples naturels sont cohérents avec les résultats théoriques et expérimentaux présentés au cours de cette thèse. Toutefois, nous ne disposons pas de suffisamment de données pour vérifier quantitativement nos modèles. Pour compléter cette étude, il est à présent nécessaire d'aller sur le terrain pour tester les prédictions sur la forme de la section et les lois d'échelle reliant la largeur et la pente de la rivière aux débits d'eau et de sédiments. Cela suppose d'acquérir des données sur différentes rivières couvrant une large gamme de débits d'eau et de sédiments.

Un autre axe de travail concerne la transition en tresses. De même que pour l'apparition de bancs alternés dans une rivière, une analyse de stabilité doit nous permettre de déterminer un rapport d'aspect critique au-delà duquel la rivière se scinde en plusieurs chenaux<sup>[63;64]</sup>. Dans les rivières en tresses, fixer le débit d'eau et de sédiments ne suffit pas à déterminer la forme d'équilibre des rivières car cette dernière peut adapter son nombre de chenaux. Ce nouveau degré de liberté peut conduire à plusieurs équilibres possibles selon le nombre de chenaux (quelques calculs préliminaires sont présentés annexe 11.2). De nombreuses interrogations existent encore pour savoir si chaque chenal a une forme similaire à celle des rivières avec un seul chenal ou si l'ensemble des chenaux forme un équilibre dynamique. Encore une fois, des expériences doivent nous aider à comprendre ces phénomènes.

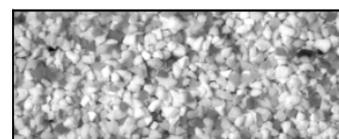
# Cinquième partie

## Suppléments



Rivière cherchant à quitter son lit pour se jeter dans la mer.

*Apocalypse Now.* F. F. Coppola, 1979

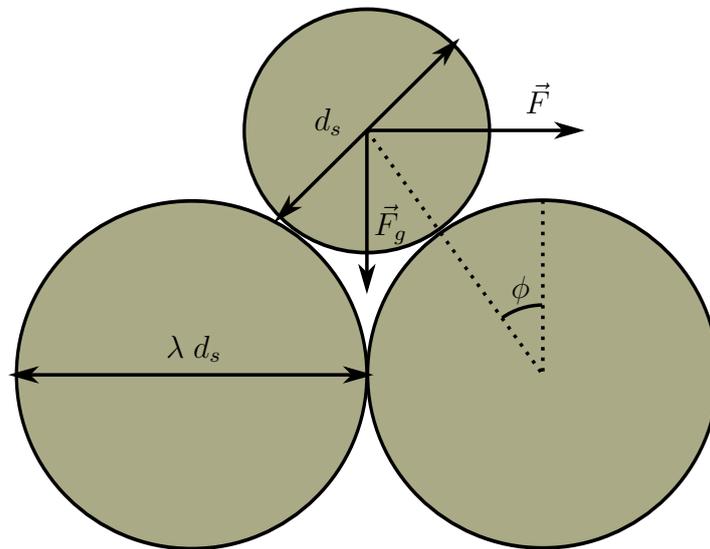




## Chapitre 9

# Annexes sur le seuil de mise en mouvement

### 9.1 A l'échelle du grain

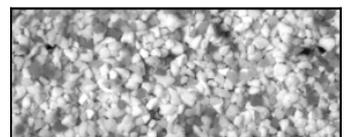


Nous avons vu l'expression de l'angle d'avalanche d'un grain lorsque nous considérons le tas de sable comme un milieu continu (équation 2.3). Nous pouvons aussi considérer un empilement granulaire à l'échelle du grain. Prenons un grain de taille  $d_s$ , soumis à son poids, posé sur des grains de taille  $d_{s_2} = \lambda d_s$  avec  $\lambda \in [0, \infty[$ , le grain du dessus peut être indifféremment plus gros ou plus petit que le grain du dessous. Nous cherchons la force  $\vec{F}$ , horizontale, nécessaire à mettre ce grain en mouvement. La somme du moment des forces sur le grain s'écrit

$$\mathcal{M} = F_g \sin \phi - F \cos \phi. \quad (9.1)$$

Le grain est mis en mouvement lorsque la force  $F$  est suffisamment importante pour que le moment change de signe. Dans la limite où  $\mathcal{M} = 0$ , nous retrouvons une relation similaire à l'angle d'avalanche pour un tas (équation 2.3),

$$\frac{F}{F_g} = \tan \phi. \quad (9.2)$$



A l'équilibre, un peu de trigonométrie nous permet de trouver l'angle  $\phi$

$$\sin \phi = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \quad (9.3)$$

on trouve en particulier  $\phi = 30^\circ$  pour un tas de grains identiques ( $\lambda = 1$ ).

Le seuil de mise en mouvement est alors

$$\frac{F}{F_g} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + 2\lambda}}. \quad (9.4)$$

Nous pouvons ajouter à ce modèle une force de friction solide proportionnelle à la force normale. On note  $\mu_m$  ce coefficient de friction à l'échelle des grains. Dans ce cas, le moment cinétique se réécrit

$$\mathcal{M} = F_g \sin \phi - F \cos \phi + \mu_m (F_g \cos \phi + F \sin \phi) \quad (9.5)$$

et on retrouve le seuil de mise en mouvement

$$\frac{F}{F_g} = \frac{\lambda + \mu_m \sqrt{1 + 2\lambda}}{\sqrt{1 + 2\lambda} - \mu_m \lambda}. \quad (9.6)$$

En 1966, Miller et Byrne's<sup>[65]</sup> ont mesuré expérimentalement le seuil de mise en mouvement de grains posés sur un fond rugueux en changeant la taille des motifs rugueux. Ils ont réalisé ces expériences pour des sphères, du sable et des quartz. Ces données sont représentées figure 9.1. Nous voyons que l'équation 9.6 (lignes en pointillés)

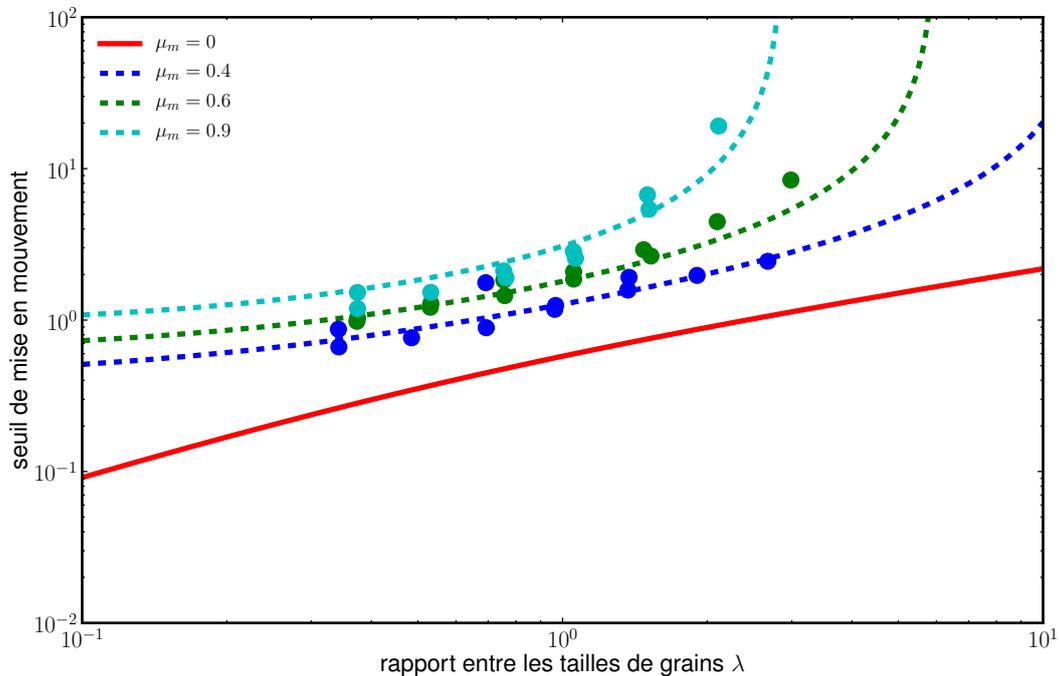


FIGURE 9.1 – Seuil de mise en mouvement en fonction du rapport entre deux tailles de grains pour différents coefficients de friction microscopiques : sans friction (—), avec une friction  $\mu_m = 0,4$  (---),  $\mu_m = 0,6$  (---) et  $\mu_m = 0,9$  (---) d'après l'équation 9.6. On peut comparer les courbes avec les données compilées par Wiberg<sup>[65]</sup> pour des sphères (●), du sable (●) et des quartz (●).

permet d'expliquer les résultats expérimentaux en ajustant le coefficient de friction microscopique selon le matériau.

Ce comportement a aussi été constaté dans des expériences récentes dans le cas où la force  $\vec{F}$  était une force de friction créée par un écoulement turbulent<sup>[23;66]</sup>. L'étude est alors bien plus complexe car il faut prendre en compte la force de portance.

## 9.2 Seuil de mise en mouvement des grains dans l'écoulement

Nous avons vu comment le nombre de Shields critique peut être lié au seuil de mise en mouvement en fonction des facteurs de formes (équation 2.9). En réalité, ce nombre de Shields critique n'est pas une constante mais dépend du nombre de Reynolds de grain.

Pour un nombre de Reynolds très faible,

$$\theta_t = \mu \frac{\alpha}{\beta} \quad (9.7)$$

nous notons ce nombre  $\theta_t^0$ .

Si nous regardons la courbe de Shields (figure 2.6) et des points expérimentaux trouvés par Shields<sup>[17]</sup>, Mantz, Loiseleux<sup>[19]</sup> et Yalin<sup>[25]</sup> (figure 9.2), nous voyons que le nombre de Shields critique varie avec le Reynolds de grain.

Pour des faibles nombres de Reynolds, nous retrouvons une valeur du nombre de Shields critique correspondant à celle trouvée précédemment. Pour des forts nombres de Reynolds, le nombre de Shields critique est une constante environ dix fois plus petite.

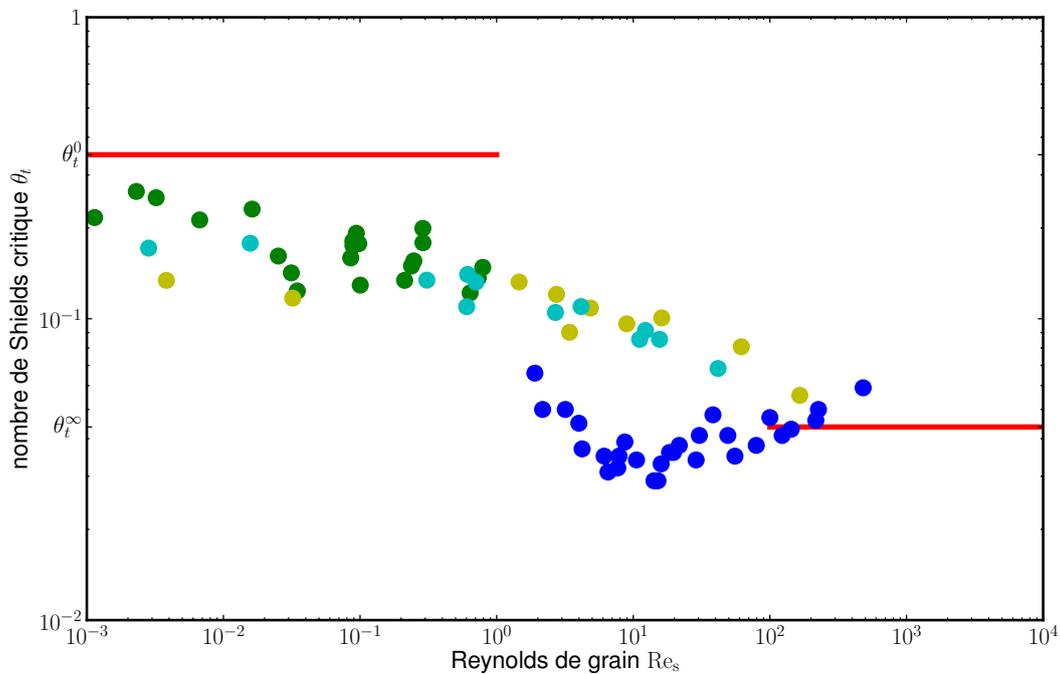
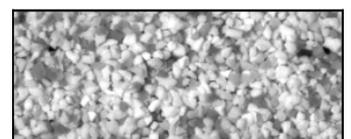


FIGURE 9.2 – Comparaison de notre modèle théorique (—) avec les données de Shields<sup>[17]</sup> (●), Mantz (●), Loiseleux (●) et Yalin (●). Ces trois derniers jeux de données ont été compilés par Ouriemi<sup>[25]</sup>.



Entre ces deux comportements asymptotiques, il existe un régime intermédiaire où le nombre de Shields critique diminue mais cette diminution ne semble pas très bien définie. En particulier les points de Shields sont bien plus bas que les points de Loiseleux et Yalin pour des gammes de Reynolds de grain intermédiaires  $Re_s \sim 1 - 100$ . Cette diminution peut-être due à plusieurs facteurs : l'apparition d'une force de portance et le développement de la turbulence à l'échelle du grain. Cette modification de l'écoulement influe aussi sur la valeur du facteur de forme  $\beta$ . Il est donc ardu de trouver les équations caractérisant la variation du nombre de Shields en fonction du Reynolds de grain, toutefois nous pouvons traiter le cas asymptotique correspondant à un écoulement turbulent à l'échelle du grain.

### Écoulement turbulent à l'échelle des grains

Pour les grains de grandes tailles, on peut avoir  $Re_s > 10^3$ . L'écoulement autour du grain est alors inertiel et le grain est soumis à de nouvelles forces telles que la force de portance, notée  $F_z$ , que nous écrivons

$$F_z = d_s^2 \rho (C_z u_s)^2 \quad (9.8)$$

avec  $C_z$  un coefficient de portance qui prend en compte la géométrie du grain et  $u_s$  la vitesse du fluide au niveau du sable<sup>1</sup>. Typiquement,  $C_z^2 \approx 0,1$ .

Dans ce cas, le nouvel équilibre des forces au seuil de mise en mouvement est :

$$\frac{F_{\parallel}}{F_{\perp}} = \frac{\beta \tau}{\alpha d_s (\rho_s - \rho) g - \rho (C_z u_s)^2} = \mu. \quad (9.9)$$

En régime turbulent, la vitesse au niveau des grains est comparable à la vitesse du fluide. Or, nous avons vu que la vitesse du fluide est fonction de la contrainte fluide (équation 2.20) donc

$$u_s = \frac{\sqrt{g D S}}{C_f}. \quad (9.10)$$

Nous trouvons alors la nouvelle valeur du nombre de Shields critique en utilisant les équations 9.9 et 2.20

$$\theta_t = \mu \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{1 + \frac{\mu}{\beta} \left( \frac{C_z}{C_f} \right)^2}. \quad (9.11)$$

Comme pour un Reynolds de grain faible, le nombre de Shields critique est une constante. Toutefois, sa valeur est diminuée d'un facteur 10 environ pour atteindre  $\theta_t \approx 0,03$ . Nous notons ce nombre de Shields critique  $\theta_t^{\infty}$ .

### Bilan

Les relations trouvées (équations 9.7 et 9.11) décrivent bien les points expérimentaux de la figure 9.2. Nous avons choisi comme paramètres  $\mu = 0,7$  (angle d'avalanche pour du sable),  $\alpha = \pi/6$  et  $\beta = 1$  (facteurs de forme pour une sphère soumise à une contrainte s'appliquant à une surface de taille  $d_s^2$ ),  $C_f = 0,1$  et  $C_z^2 = 0,1$  (valeurs généralement trouvées expérimentalement).

1. le coefficient de portance habituellement défini est égal au carré de notre  $C_z$ . Nous avons choisi cette convention pour être cohérent avec la définition du coefficient de friction.

La loi de Coulomb explique bien les valeurs du seuil de mise en mouvement pour des Reynolds de grain très faible ou très importants. Entre ces deux comportements asymptotiques, le nombre de Shields critique diminue avec l'apparition de la force de portance et le développement de la turbulence.

### Caractérisation de l'écoulement

Le nombre de Reynolds de grain, comme le nombre de Shields, dépend de la contrainte fluide. Il nous semble plus judicieux d'utiliser un nouveau nombre sans dimension, qui ne dépendrait que de la taille des grains et pas de la contrainte, afin de pouvoir caractériser le comportement de nos écoulements. Cette approche a déjà été effectuée<sup>[1;67]</sup> mais n'est pas encore d'un usage courant. Nous introduisons donc ici le nombre de Galilée,  $Ga$ , qui est égal au rapport entre les forces gravitationnelles et inertielles sur les forces visqueuses.

$$\boxed{Ga^2 = d_s^3 \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \frac{g}{\nu^2}} \quad (9.12)$$

Dans le cas d'un écoulement laminaire, ce nombre peut être relié au nombre de Reynolds de grain par le biais du nombre de Shields critique.

$$Re_s = \frac{u_s d_s}{\nu} = \frac{\tau d_s}{\rho \nu} \frac{d_s}{\nu} = \theta_t Ga^2 \quad (9.13)$$

Pour  $Ga \ll 1$ , alors les forces prépondérantes sont les forces visqueuses et on peut négliger la portance. Lorsque  $Ga \gg 1$  alors l'inertie de l'écoulement est prépondérante et les forces de portance jouent un rôle.

Ce nombre se simplifie en définissant un diamètre visqueux  $d_\nu$  tel que

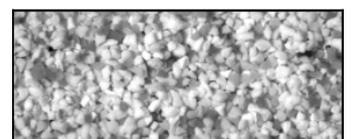
$$d_\nu^3 = \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{\nu^2}{g} \quad (9.14)$$

caractéristique de l'échelle à partir de laquelle l'écoulement devient inertiel dans le fluide. Typiquement, pour du sable dans l'eau,  $d_\nu \approx 0,2$  mm. Le nombre de Galilée est alors  $Ga = (d_s/d_\nu)^{3/2}$  et nous pouvons regarder la valeur du nombre de Shields critique (données compilées par Andreotti et coll.<sup>[67]</sup>) en fonction du nombre de Galilée (figure 9.3). La dispersion semble être moins importante que lorsque le nombre de Shields est tracé en fonction du Reynolds de grain (figure 9.2). Toutefois, cela peut s'expliquer par le fait qu'il y a moins de données représentées (en particulier les données de Shields ne sont pas montrées).

Ce nombre de Galilée se retrouve aussi lorsque nous regardons les forces qui agissent à l'échelle du grain pour déterminer le taux d'érosion. Le rapport entre le temps d'inertie et le temps d'érosion du grain (équation 4.11) peut se réécrire en fonction du nombre de Galilée.

$$\frac{t_i}{t_e} = d_s^3 \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \frac{g}{\nu^2} \frac{\rho_s}{\rho} (\theta - \theta_t) = Ga \frac{\rho_s}{\rho} (\theta - \theta_t) \quad (9.15)$$

A la vue de ces résultats, le nombre de Galilée nous semble pertinent pour caractériser l'écoulement à l'échelle du grain, en particulier pour prédire son nombre de Shields critique et pour pouvoir déterminer quelles sont les forces qui s'appliquent dessus.



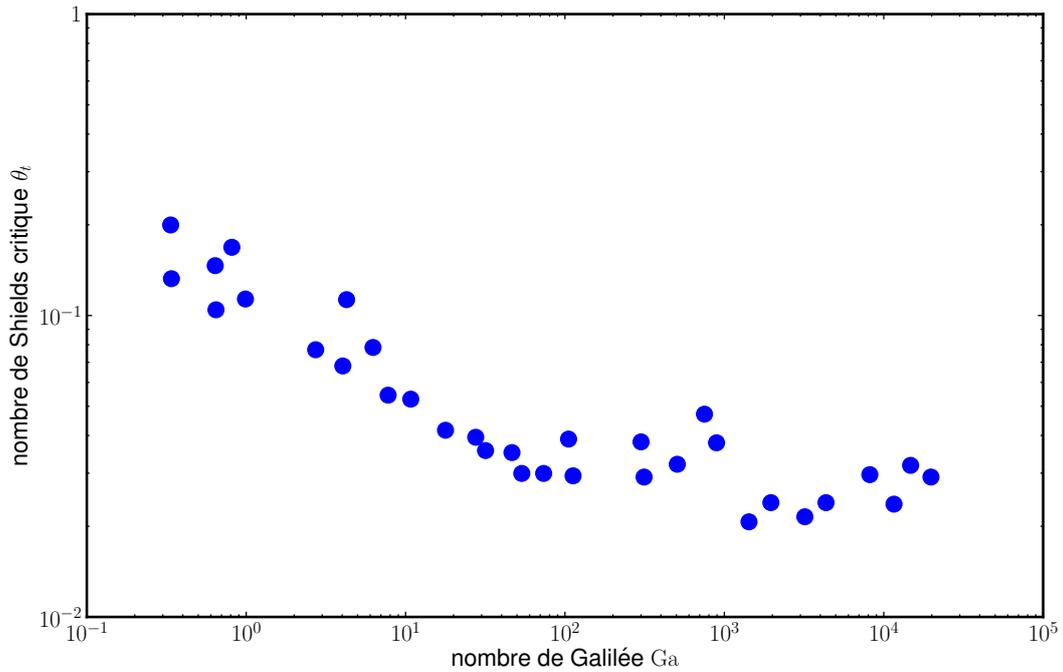


FIGURE 9.3 – Nombre de Shields critique en fonction du rapport entre la taille des grains et le diamètre visqueux. D’après Andreotti et coll. 2011<sup>[67]</sup>

### 9.3 Étude de l’article de Loiseleux et coll.

L’étude de la courbe de Shields à l’aide du formalisme de Coulomb nous permet d’interpréter plusieurs résultats sur le seuil de mise en mouvement. Nous nous focalisons ici sur un article de Loiseleux et coll. publié en 2005<sup>[19]</sup>.

Leur expérience consiste à faire pencher un canal rempli de sédiments et d’eau d’une pente  $\phi$  et à faire circuler de l’eau pour créer une contrainte sur le fond. L’originalité est que la pente peut prendre des valeurs positives ou négatives. L’eau peut donc se trouver à “remonter” les grains. Un schéma simplifié est dessiné figure 9.4.

L’étude présente un graphique montrant le nombre de Shields critique nécessaire

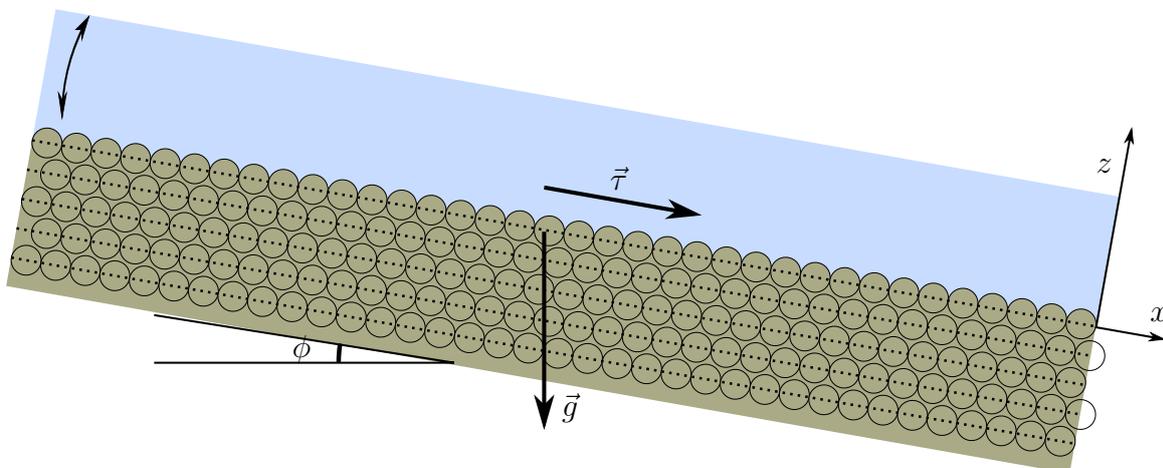


FIGURE 9.4 – Schéma de l’expérience de Loiseleux et coll.. La pente peut être indifféremment dans le sens de l’écoulement ou dans le sens inverse.

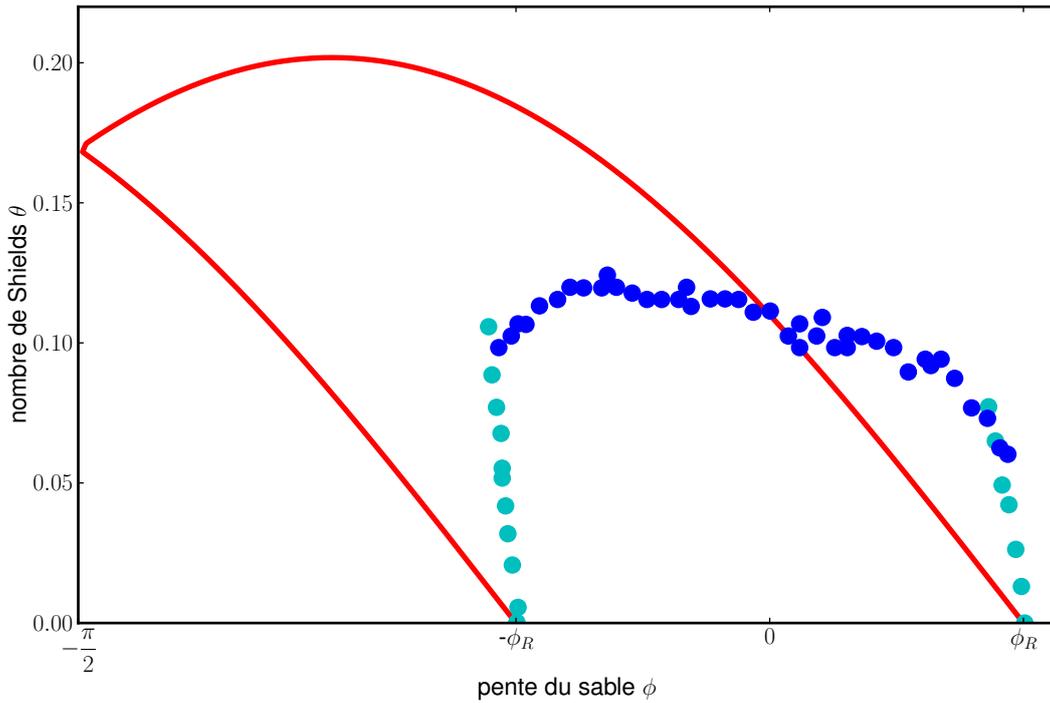


FIGURE 9.5 – Comparaison des données expérimentales de l'article avec notre théorie pour  $d_s = 180 \mu\text{m}$ . Les points correspondant à de l'érosion (●) et aux avalanches (●) sont confrontés à la courbe théorique de notre modèle (—), (équation 9.16).

pour faire bouger les grains en fonction de la pente (figure 9.5).

En écrivant le bilan des forces en supposant la contrainte au seuil, on trouve

$$\frac{F_{\parallel}}{F_{\perp}} = \frac{|\alpha d_s (\rho - \rho_s) g \sin \phi + \beta \tau|}{\alpha d_s (\rho - \rho_s) g \cos \phi} = \frac{\left| \sin \phi + \frac{\beta}{\alpha} \theta_t \right|}{\cos \phi} = \mu \cdot s \quad (9.16)$$

La valeur absolue est nécessaire car la pente peut changer de signe. Calculé à partir des valeurs d'angle de repos données dans l'article,  $\mu \approx 0,65$ . Nous prenons  $\beta/\alpha = \mu/\theta_t$  avec  $\theta_t \approx 0,11$  (valeur du nombre de Shields mesurée pour une pente nulle). Comparons ce que donne ce simple modèle (courbe en rouge) par rapport aux points expérimentaux (points bleus et verts, figure 9.5).

On remarque que la courbe théorique est éloignée des points expérimentaux, toutefois elle rend compte de plusieurs comportements, en particulier une forme en cloche et l'asymétrie des résultats. La principale incohérence vient du fait que les deux parties de la courbe se rejoignent pour une pente de  $\phi = \pi/2$  ce qui est très loin des résultats observés.

En plus de l'érosion, l'article fait référence à des avalanches qui se produisent pour de fortes pentes. Nous allons donc essayer d'affiner notre modèle en prenant en compte le mouvement sur plusieurs couches de grains. Le principal changement est que les grains des couches inférieures sont soumis au poids des grains des couches supérieures. Un grain de la couche  $N$  est donc soumis à une force de gravité  $F_g = N \alpha d_s^3 (\rho_s - \rho) g$ . Le bilan des forces pour un grain de la couche  $N$  est donc

$$\frac{F_{\parallel}}{F_{\perp}}[\phi, \tau, N] = \frac{\left| N \sin \phi + \frac{\beta}{\alpha} \theta_t \right|}{N \cos \phi} = \mu. \quad (9.17)$$



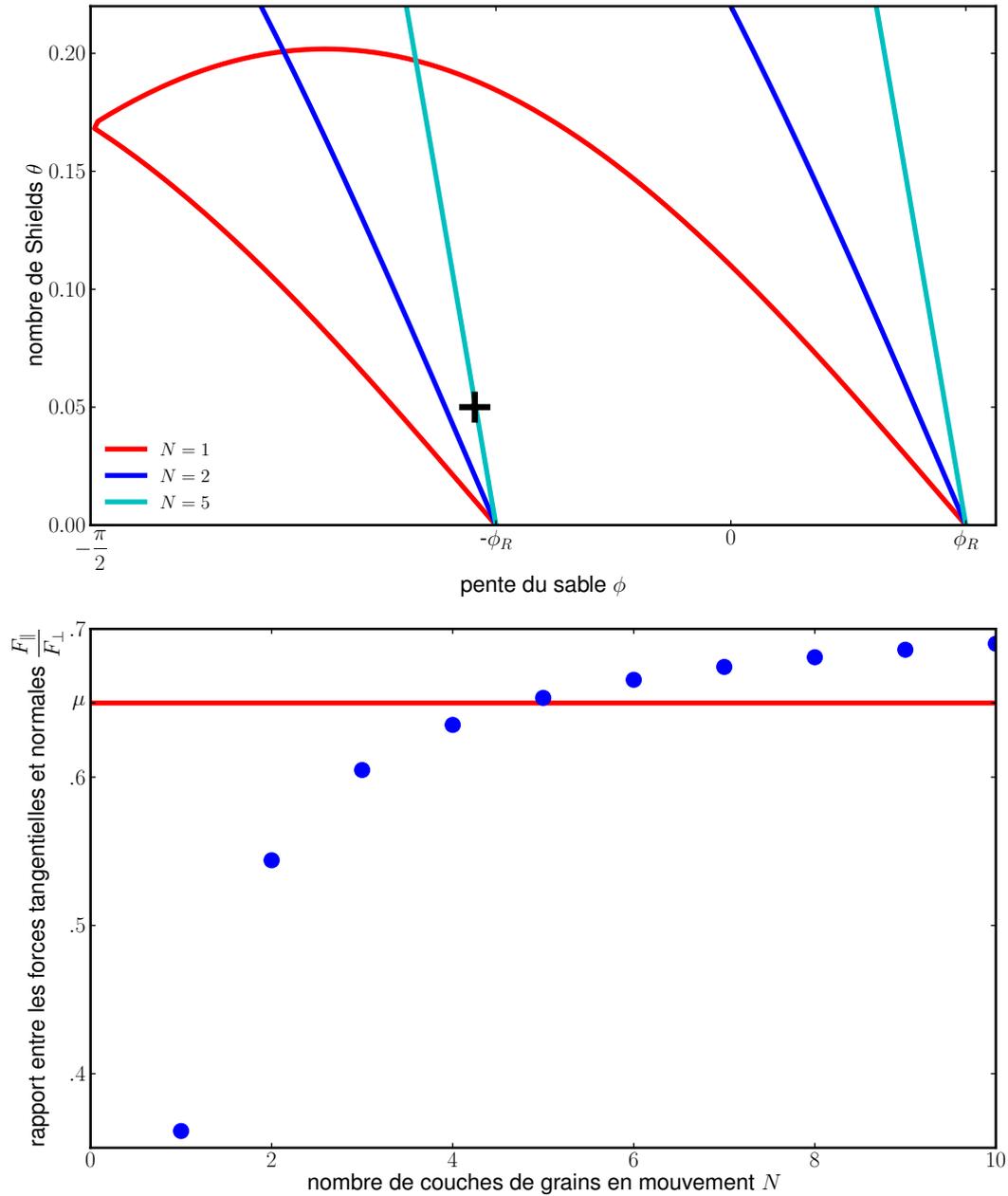


FIGURE 9.6 – Variation de notre modèle avec le nombre de couches de grains en mouvement (équation 9.17). Le comportement du point de coordonnées  $(\phi = \pi/5, \theta = 0,05)$ ,  $\dagger$ , est illustré dans le graphe du dessous.

Pour que le mouvement se déclenche, il suffit qu'il existe un  $(\phi, \tau, N)$  tel que  $\frac{F_{\parallel}}{F_{\perp}}[\phi, \tau, N] > \mu$ . Dans ce cas, le mouvement se déclenche sur  $N$  couches de grains. En particulier si on ne s'intéresse qu'à l'érosion,  $N = 1$  et on retrouve les équations précédentes. Pour les avalanches,  $N > 1$  et dans le cas limite  $N \rightarrow \infty$ . On retrouve alors un seuil de mise en mouvement correspondant à l'angle de repos. Regardons l'évolution de la courbe théorique quand  $N$  varie (figure 9.6).

Plus  $N$  augmente, plus les courbes ont tendance à se redresser (elles continuent à se rejoindre pour  $\phi = \pi/2$ ). En particulier, pour des expériences avec une pente  $\phi$  supérieure à l'angle d'avalanche, il existe des contraintes qui permettent de déstabiliser

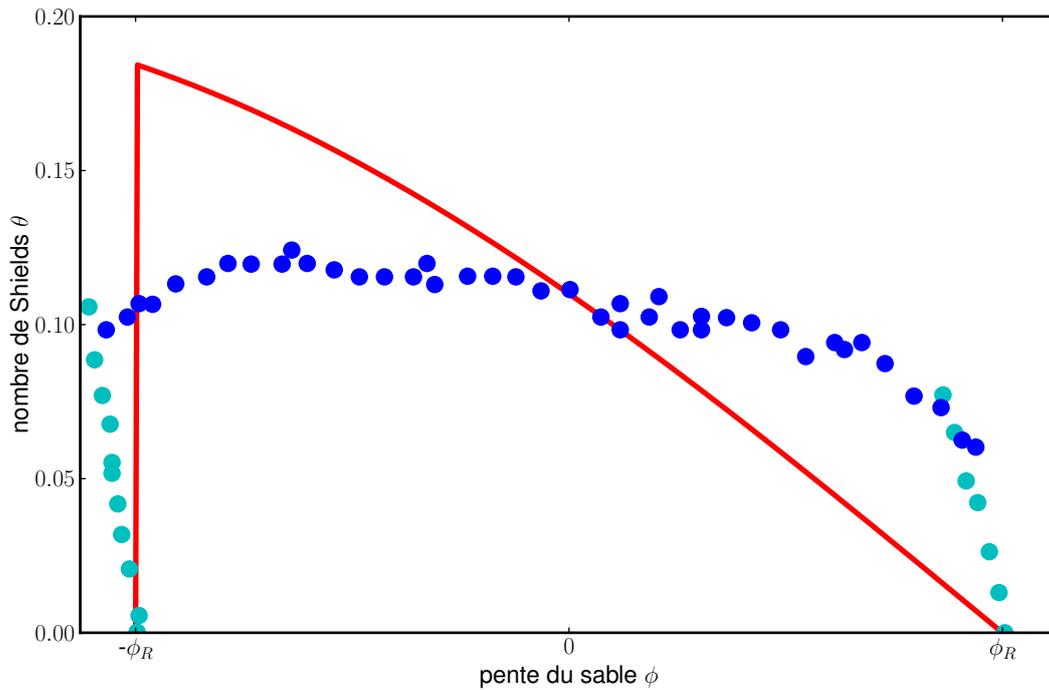


FIGURE 9.7 – Comparaison des données expérimentales (● et ●) avec les cas limites (—).  
 Courbe pour  $N = 1$  pour  $-\phi_R < \phi < \phi_R$ , courbe pour  $N = \infty$  pour  $\phi > \phi_R$ .

plusieurs couches de grains plutôt qu'une seule (figure 9.6). Les points correspondent aux seuils de mise en mouvement, on dessine donc la courbe limite à l'extérieur de laquelle au moins une couche de grain est en mouvement. Cette courbe se compose, pour des pentes inférieures au seuil d'avalanche, de la courbe correspondant au mouvement d'une seule couche de grains ( $N = 1$ ) et au delà, de la courbe correspondant au mouvement de l'ensemble des grains ( $N = \infty$ ). On obtient alors la courbe dessinée figure 9.7.

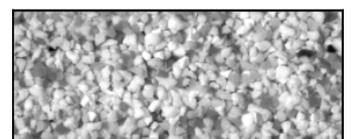
Le comportement général est bien retrouvé mais la courbure reste mauvaise. En réalité, on a utilisé dans tous nos modèles  $\beta/\alpha = \mu/\theta_t = \text{constante}$ . Or cette relation n'est valable que pour un faible Reynolds de grain et en réalité  $\beta$  varie avec le Reynolds de grain. En particulier, pour  $\text{Re}_s \ll 1$ , on doit trouver  $\theta_t^0 \approx 0,3$  tandis que pour  $\phi = 0$  on trouve dans ces expériences  $\theta_t(\phi = 0) \approx 0,1$ .

Nous faisons alors un modèle simple qui fait varier linéairement le coefficient  $\beta/\alpha$  avec  $\theta$ .

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\mu}{\theta_t^0} \left( 1 + \left( \frac{\theta_t^0}{\theta_t[\phi = 0]} - 1 \right) \frac{\theta}{\theta_t[\phi = 0]} \right) \quad (9.18)$$

Afin d'avoir le moins de variations possible, nous utilisons les données faites pour le Reynolds de grain le plus faible, c'est-à-dire dans l'article avec des grains de diamètre  $d_s = 110 \mu\text{m}$ . Pour cette taille de grains, les mesures d'avalanche ne sont pas indiquées, on compare donc juste les mesures d'érosion (figure 9.8).

On trouve bien un comportement similaire. La variation des facteurs de forme avec la contrainte peut expliquer aussi pourquoi les courbes de l'article diffèrent.





# Chapitre 10

## Annexes sur la rivière sans transport

### 10.1 Modification du profil avec la portance

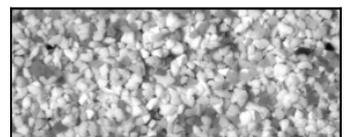
Nous souhaitons voir l'évolution du profil d'équilibre d'une rivière sans transport avec l'apparition d'une force de portance. Cette portance influe principalement les écoulements inertiels au niveau du grain, c'est-à-dire les rivières avec un grand diamètre de grain, donc plutôt avec un fond en galets. Dans ce cas, le seuil de mise en mouvement se réécrit comme dans le cas d'une rivière sans portance (équation 2.14) en ajoutant une force de portance (équation 9.8) qui vient compenser une partie du poids dans la direction normale

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha d_s} \frac{\rho}{\rho_s - \rho} D S\right)^2 + D^2}}{1 - \frac{1}{\alpha d_s} \frac{\rho}{(\rho_s - \rho) g} (C_z u_s)^2} = \mu. \quad (10.1)$$

Nous nous plaçons en régime turbulent à l'échelle du grain, la vitesse du fluide à l'échelle du grain est similaire à la vitesse du fluide dans l'écoulement, trouvée équations 2.20 et 9.10. Au seuil de mise en mouvement, la section de la rivière vérifie donc l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\sqrt{\left(S \frac{D}{\mathcal{L}}\right)^2 + D^2}}{1 - \frac{S}{\beta} \left(\frac{C_z}{C_f}\right)^2 \frac{D}{\mathcal{L}}} = \mu. \quad (10.2)$$

Si la portance est nulle ( $C_z = 0$ ), nous remarquons que le dénominateur vaut 1 et nous retrouvons notre forme en cosinus. Pour des valeurs de  $C_z$  qui augmentent, la pente  $S$  doit diminuer afin que la force de portance reste inférieure à la force de gravité (dénominateur qui reste positif). Nous nous attendons donc à une pente de plus en plus faible au fur et à mesure que la portance prend de l'importance. L'intégration de l'équation différentielle donne lieu à trois équations de profil différentes, selon la valeur de  $C_z$  :



$$\begin{aligned}
D(y) &= \mu \frac{\mathcal{L}}{S} \frac{\cos \left( S \frac{y}{\mathcal{L}} \sqrt{1 - \left( \frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} \right)^2} \right) - \frac{\mu}{\beta} \left( \frac{C_z}{C_f} \right)^2}{1 - \left( \frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} \right)^2} & \text{si } \frac{\mu}{\beta} \left( \frac{C_z}{C_f} \right)^2 < 1 \\
D(y) &= \frac{\mu}{2} \frac{\mathcal{L}}{S} (1 - y^2) & \text{si } \frac{\mu}{\beta} \left( \frac{C_z}{C_f} \right)^2 = 1 \\
D(y) &= \mu \frac{\mathcal{L}}{S} \frac{\frac{\mu}{\beta} \left( \frac{C_z}{C_f} \right)^2 - \cosh \left( S \frac{y}{\mathcal{L}} \sqrt{\left( \frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} \right)^2 - 1} \right)}{\left( \frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} \right)^2 - 1} & \text{si } \frac{\mu}{\beta} \left( \frac{C_z}{C_f} \right)^2 > 1.
\end{aligned} \tag{10.3}$$

En absence de portance ( $C_z = 0$ ), on retrouve bien le profil en cosinus. Lorsque la portance augmente, ce profil s'élargit de plus en plus pour former un cosinus hyperbolique. Si nous considérons que le coefficient de portance est comparable au coefficient de traînée, nous avons pour une sphère  $C_z^2 \approx 0,1$ , dans ce cas,  $\frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} \approx 5 > 1$ , nous sommes donc dans le cas où le profil est un cosinus hyperbolique. En réalité, ce coefficient est sans doute plus faible (il est égal à 0 pour une sphère stationnaire au milieu d'un écoulement homogène et 0,5 environ pour une aile d'avion). Nous supposons quand même que ce coefficient est supérieur à 1.

Nous en déduisons alors la largeur

$$W = 2 \frac{\mathcal{L}}{S} \frac{\operatorname{argcosh} \left( \frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} \right)}{\sqrt{\left( \frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} \right)^2 - 1}} \tag{10.4}$$

et que le rapport d'aspect s'élargit avec l'augmentation de la portance

$$\frac{W}{D_M} = \frac{2}{\mu} \frac{\operatorname{argcosh} \left( \frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} \right) \sqrt{\left( \frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} \right)^2 - 1}}{\frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} - 1}. \tag{10.5}$$

Pour calculer le débit d'eau dans cette nouvelle section, nous nous plaçons bien sûr en régime turbulent. Une fois la vitesse intégrée sur la largeur de la section nous trouvons

$$Q_w = \mu^{3/2} \mathcal{I} \left[ \frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} \right] \frac{\sqrt{g}}{C_f} \frac{\mathcal{L}^{5/2}}{S^2}. \tag{10.6}$$

En définissant l'intégrale  $\mathcal{I}$  telle que

$$\mu^{3/2} \mathcal{I} \left[ \frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} \right] = \int_{\tilde{w}} \tilde{D}(\tilde{y})^{3/2} d\tilde{y} \tag{10.7}$$

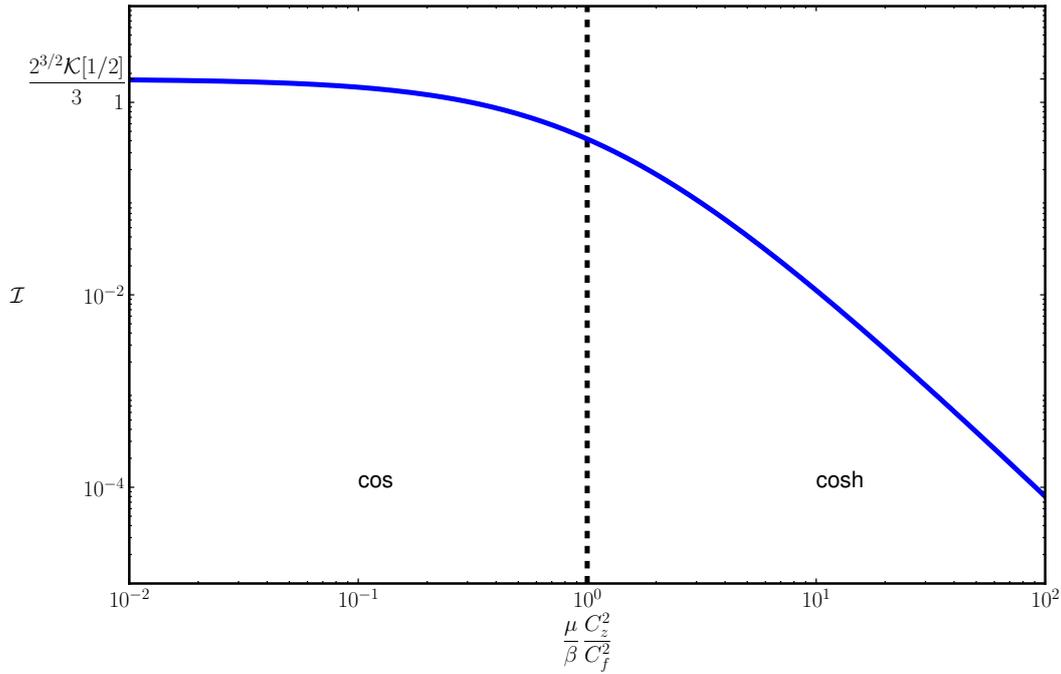


FIGURE 10.1 – Comportement du préfacteur numérique  $\mathcal{I}$ . Lorsque la portance s’annule on retrouve bien la valeur trouvée précédemment.

nous trouvons exactement la même équation qu’en régime turbulent sans portance, la seule différence est que le préfacteur numérique  $2^{3/2} \mathcal{K}[1/2]/3$  trouvé en absence de portance est remplacé par  $\mathcal{I} \left[ \frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} \right]$ .

$\mathcal{I}$  n’admet pas de formulation analytique simple. Toutefois cette intégrale est bien définie et on peut étudier son comportement en fonction de  $\frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2}$  (tracé figure 10.1).

Lorsque  $\frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2}$  tend vers 0, alors on retrouve la valeur numérique correspondant au profil sans portance et la forme en cosinus. Plus la portance augmente, plus  $\mathcal{I}$  diminue, ce qui entraîne donc à débit d’eau constant une diminution de la pente et une augmentation de la largeur (équation 10.8).

Nous calculons les équations de régime dans un écoulement avec portance (équation 10.8). Ce sont les mêmes formules que celles trouvées pour une rivière en écoulement turbulent sans portance (équations 2.22). La seule différence reste le préfacteur numérique. Les dépendances restent identiques.

$$\begin{aligned}
 S &= \mu^{3/4} \sqrt{\mathcal{I} \left[ \frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} \right]} \frac{g^{1/4}}{\sqrt{C_f}} \mathcal{L}^{5/4} \frac{1}{\sqrt{Q_w}} \\
 W &= \frac{\pi}{\mu^{3/4}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{I} \left[ \frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} \right]}} \frac{\sqrt{C_f}}{g^{1/4}} \frac{1}{\mathcal{L}^{1/4}} \sqrt{Q_w}
 \end{aligned} \tag{10.8}$$

On passe continûment du profil sans portance à un profil avec de plus en plus de



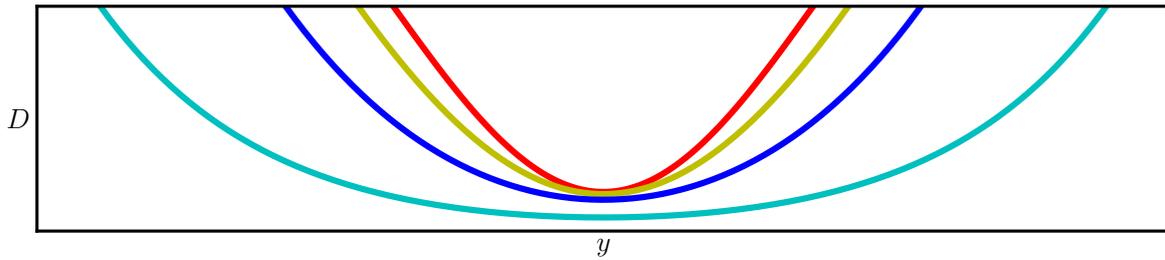


FIGURE 10.2 – Différents profils à débit d'eau constant en changeant l'importance de la portance. On remarque que l'on passe d'un profil en cosinus (—, sans portance) à un profil en cosinus hyperbolique de plus en plus aplati (pour  $\frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} = 0.5, 2$  et 10 respectivement —, — et —).

portance. Nous notons que plus la portance est importante, plus la rivière s'élargit et moins sa pente est importante, ce qui est en accord avec le fait que la portance doit rester inférieure à la gravité (équation 10.1).

Figure 10.2, on compare plusieurs profils à débit constant et en changeant l'influence de la portance. Le profil sans portance est en rouge (on retrouve le cosinus) et est comparé à des profils avec de plus en plus de portance. Plus la portance joue un rôle important, plus le profil s'aplatit.

Comparons ces prédictions avec des données expérimentales. Figure 10.3, nous comparons un jeu de données compilées par Parker et des mesures effectuées par

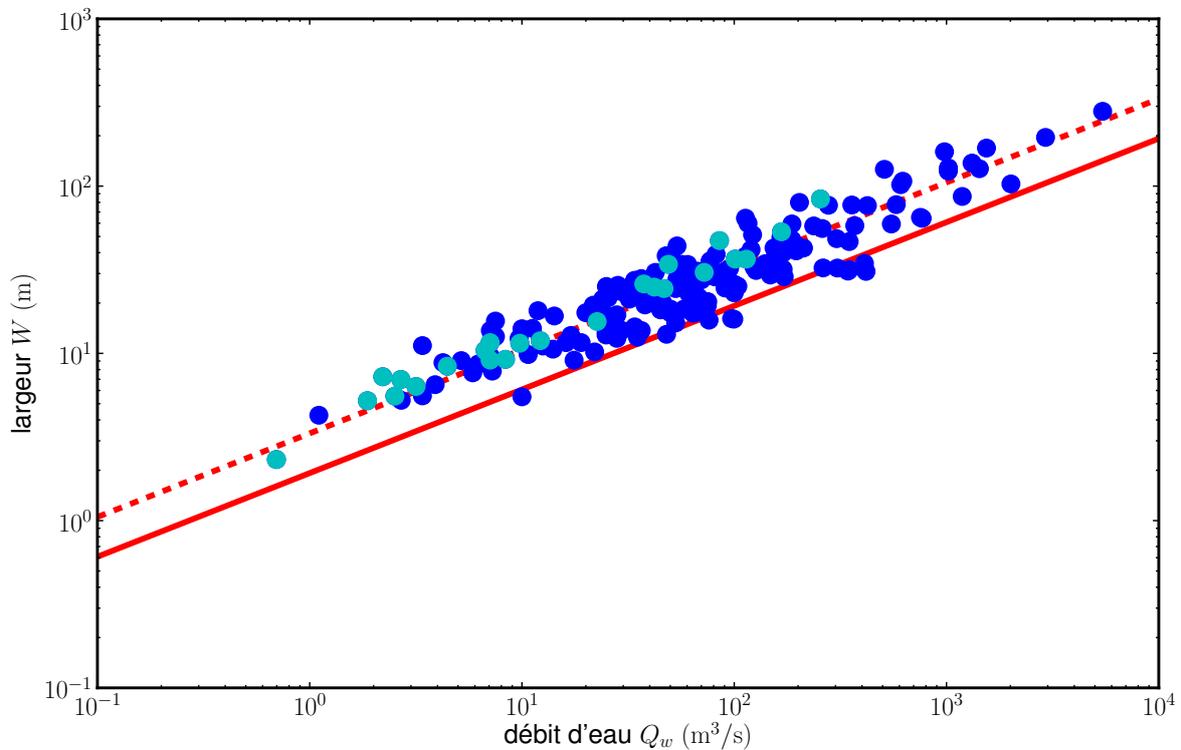


FIGURE 10.3 – Largeur de rivières à graviers relevées par Parker (●) et Andrews (●). Prédiction théorique sans portance (—) et pour  $\frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} = 0,7$  (- - -).

Andrews<sup>[68]</sup> sur des rivières avec un fond en galets ( $d_s \approx 6$  cm). Nous comparons ces données à l'équation de régime sans portance et à celle avec portance en utilisant  $\frac{\mu}{\beta} \frac{C_z^2}{C_f^2} = 0,7$ . Ce coefficient permet de bien approcher les points mais est bien plus faible que la valeur à laquelle nous nous attendions.

## 10.2 Expériences réalisées avec de l'eau

Les premières expériences de rivières sans transport que nous avons faites ont été réalisées en utilisant de l'eau pour un débit variant entre 0,2 L/min et 3,0 L/min avec un faible débit de sédiments ( $Q_s = 0,2$  g/min). Le nombre de Reynolds pour ces expériences est de l'ordre de 500.

Toutes les mesures de cette partie ont été faites en utilisant un système de moiré (annexe 12.1.5).

### 10.2.1 Forme de la rivière à l'équilibre

Une fois la hauteur d'eau en tous points mesurée, nous avons accès à la forme d'une section de rivière. Nous avons vu que la forme d'équilibre d'une rivière doit être un cosinus (équation 2.16). Nous vérifions ici ce modèle en comparant la section moyenne d'une rivière expérimentale avec la forme théorique (figure 10.4).

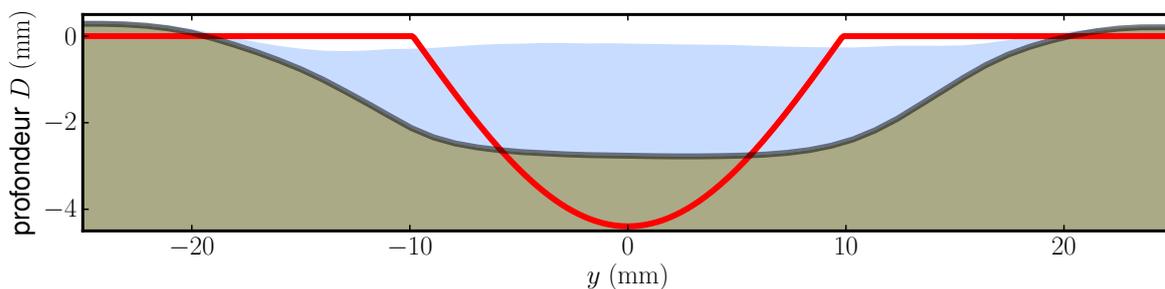
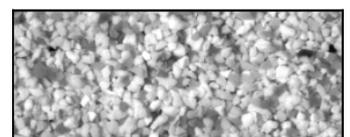


FIGURE 10.4 – Section d'une rivière pour un débit d'eau  $Q_w = 0,7$  L/min et un débit de sédiments  $Q_s = 0,2$  g/min. Le rapport d'aspect est exagéré d'un facteur 2 dans la direction verticale.

L'ordre de grandeur est bon : si la rivière expérimentale est plus large et moins profonde qu'attendu, l'aire est sensiblement la même. La différence entre la théorie et l'expérience n'est que d'un facteur 2 ce qui est remarquable sachant qu'il n'y a ici aucun paramètre ajustable.

### 10.2.2 Équations de régime

Vérifions ces équations expérimentalement : connaissant la topographie de la rivière, nous pouvons calculer sa largeur moyenne. De plus, l'utilisation de la méthode de moiré nous permet de connaître la pente de la rivière. Nous avons donc mesuré pour l'ensemble des expériences la largeur et la pente d'équilibre de la rivière. Pour certaines expériences, nous avons aussi la profondeur moyenne (figure 10.5). Les mesures expérimentales (points bleus) sont confrontées aux prédictions théoriques (équation 3.5, trait plein en rouge).



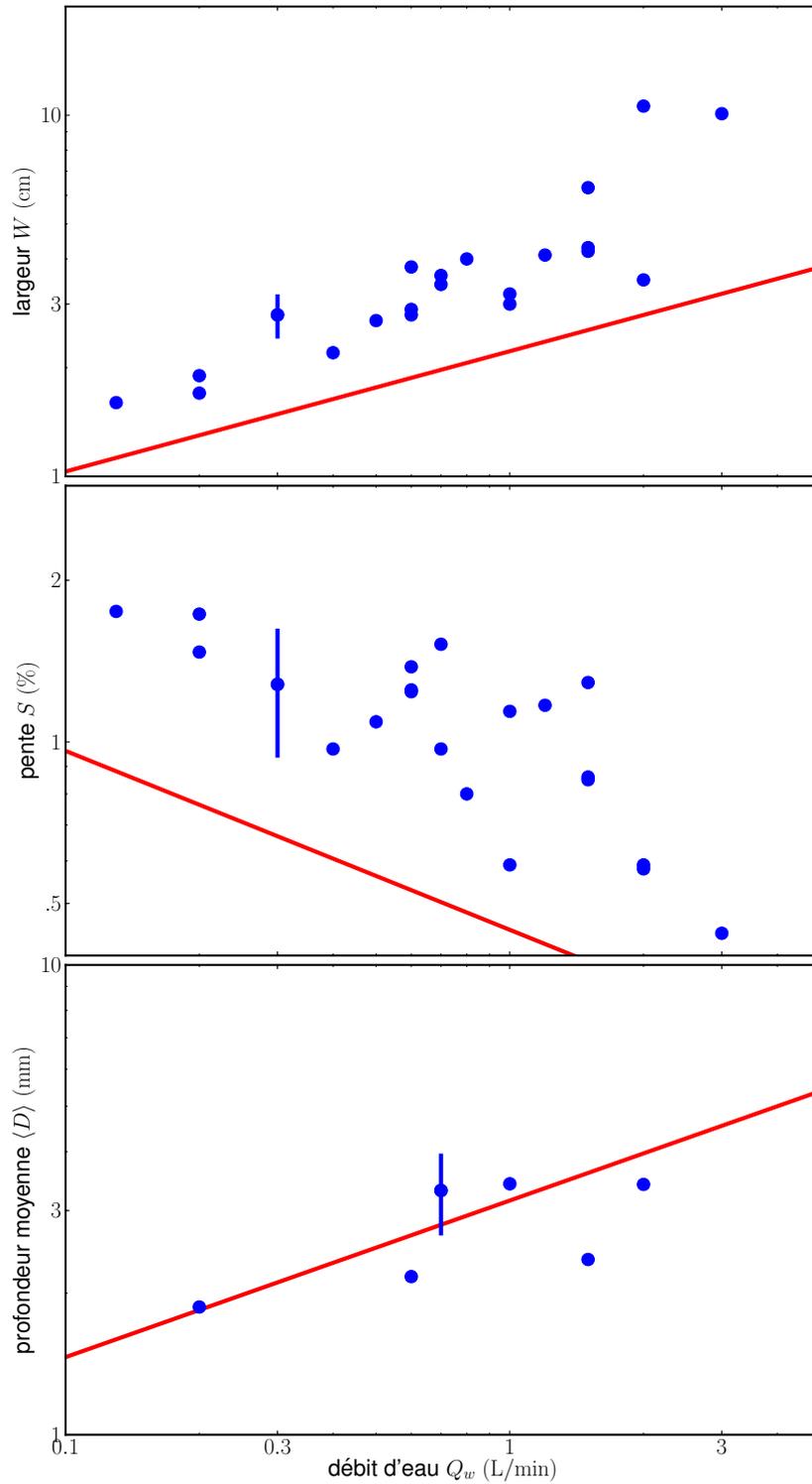


FIGURE 10.5 – Paramètres expérimentaux de la rivière en fonction du débit d'eau (●) et prédiction théorique (—). Les lois de puissance sont en accord avec la prédiction théorique mais le préfacteur n'est pas bon.

Les barres d'erreur représentent la variabilité des grandeurs physiques sur la longueur de la rivière.

La loi de puissance trouvée expérimentalement est cohérente avec la loi trouvée théoriquement. Toutefois, le préfacteur n'est pas bon. Pour un débit d'eau fixé, nous

trouvons une rivière trop large. Pour des débits d'eau trop importants ( $Q_w > 2 \text{ L/min}$ ), l'écoulement devient turbulent et la loi de puissance de la largeur n'est plus bonne. La profondeur moyenne semble être correcte mais la profondeur maximale n'est pas assez importante. Cela apparaît bien sur la mesure de la pente. La vitesse de la rivière étant proportionnelle au carré de la profondeur et à la pente, si la profondeur est trop faible, la rivière doit avoir une pente supérieure pour compenser.

### 10.2.3 Problèmes expérimentaux

Tentons d'expliquer les différences entre nos points expérimentaux et nos prédictions théoriques. Même si nous restons en régime laminaire (nous vérifions cela grâce à l'injection de colorants dans l'écoulement), nous ne sommes jamais très loin de la transition turbulente. Ainsi, les expériences réalisées sans transport de sédiments ont montré l'apparition ponctuelle d'instabilités conduisant à la formation de piscines, l'écoulement devenant localement turbulent (figure 10.6). L'ajout d'un faible débit de sédiments ( $Q_s = 0,2 \text{ g/min}$ ) dans l'eau permet de diminuer considérablement l'apparition de ces instabilités mais nous sortons du cadre strict de Glover et Florey où la rivière ne transporte aucun sédiments.



FIGURE 10.6 – Apparition d'une piscine, on voit le lit de la rivière suivre un cours rectiligne à gauche et à droite de l'instabilité.

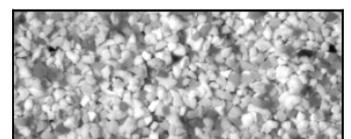
De plus, l'écoulement n'étant pas visqueux à l'échelle des grains, il se peut que la portance commence à avoir de l'effet.

Les différences entre les résultats expérimentaux et les prédictions théoriques peuvent être dues à l'utilisation d'un débit de sédiments ou au fait que l'écoulement est parfois localement turbulent. Afin de nous affranchir de ces problèmes nous avons modifié notre dispositif expérimental pour créer des rivières avec un fluide visqueux.

## 10.3 Développement du cosinus au second ordre

### Calcul de la forme

Si nous ne pouvons pas résoudre la forme de la rivière dans le cas général, nous pouvons quand même pousser le développement de la forme en cosinus à l'ordre suivant en  $\phi$ . Comme  $\frac{W}{D} \sim \frac{1}{\mu}$  on pose le changement de variable suivant,  $\tilde{z} = \mathcal{Z} \mu$  et  $\tilde{y} = \mathcal{Y}$ . De cette manière,  $\mathcal{Z}$  et  $\mathcal{Y}$  sont du même ordre. On raisonne avec des grandeurs adimensionnées et en considérant  $D < 0$  ( $D$  représentant alors l'altitude de la berge plutôt que la hauteur



d'eau) pour des facilités de calcul. Le premier ordre, trouvé précédemment donne alors

$$\begin{aligned}\widetilde{D}(\mathcal{Y}) &= -\mu \cos(\mathcal{Y}) = \mu \widetilde{D}_0 \\ \widetilde{u}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) &= \frac{\mu^2}{2} (\cos^2(\mathcal{Y}) - \mathcal{Z}^2) = \mu^2 \widetilde{u}_0.\end{aligned}\quad (10.9)$$

De plus, les dérivées s'écrivent alors

$$\frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mathcal{Z}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \widetilde{y}} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} \quad (10.10)$$

$\widetilde{D}$  et  $\widetilde{u}$  sont déjà respectivement d'ordre 1 et 2 en  $\mu$ , nous cherchons des solutions de la forme

$$\begin{aligned}\widetilde{D} &= \mu \widetilde{D}_0 + \mu^3 \widetilde{D}_1 \\ \widetilde{u} &= \mu^2 \widetilde{u}_0 + \mu^4 \widetilde{u}_1\end{aligned}\quad (10.11)$$

(il est rapide de vérifier que l'ordre en  $\mu^2$  pour  $\widetilde{D}$  et l'ordre en  $\mu^3$  pour  $\widetilde{u}$  sont nuls). Une fois ces développements réinjectés dans l'équation 3.21, on trouve les quatre équations suivantes à résoudre

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}_0}{\partial \mathcal{Z}^2} + \mu^2 \left( \frac{\partial^2 \widetilde{u}_0}{\partial \mathcal{Y}^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}_1}{\partial \mathcal{Z}^2} \right) = -1 \quad (10.12)$$

$$\mu \frac{\partial \widetilde{u}_0}{\partial \mathcal{Z}} + \mu^3 \frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial \mathcal{Z}} = 0 \quad \text{sur la surface libre } (\mathcal{Z} = 0) \quad (10.13)$$

$$\mu^2 \widetilde{u}_0 + \mu^2 \widetilde{u}_1 = 0 \quad \text{sur la berge } (\mathcal{Z} = \widetilde{D}_0 + \mu^2 \widetilde{D}_1) \quad (10.14)$$

$$\mu \left. \frac{\partial(\widetilde{u}_0 + \mu^2 \widetilde{u}_1)}{\partial \mathcal{Z}} \right|_{\text{berge}} \cos \phi + \mu^3 \left. \frac{\partial(\widetilde{u}_0 + \mu^2 \widetilde{u}_1)}{\partial \mathcal{Y}} \right|_{\text{berge}} \sin \phi = \sqrt{\mu^2 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi}. \quad (10.15)$$

Si on identifie les ordres en  $\mu$ , les équations 10.12 et 10.13 nous permettent de trouver la vitesse  $\widetilde{u}_1$  a une constante près

$$\widetilde{u}_1 = \frac{1}{2} \mathcal{Z}^2 \cos(2\mathcal{Y}) + A \quad (10.16)$$

avec  $A$  une constante d'intégration. La correction de la vitesse a toujours une forme parabolique mais cette parabole est modifiée selon la position en  $\mathcal{Y}$ .

En se servant du fait que sur la berge,  $\phi = \arctan\left(\frac{dD}{dy}\right)$ , on peut développer les termes en  $\phi$  en puissances de  $\mu$ . L'identification des ordres en  $\mu$  de l'équation 10.15 nous donne alors une équation différentielle en  $\widetilde{D}_1$ .

$$-2 \cos(\mathcal{Y}) \widetilde{D}_1 + \cos^2(\mathcal{Y}) \sin^2(\mathcal{Y}) - 2 \cos^2(\mathcal{Y}) \cos(2\mathcal{Y}) = -\sin^2(\mathcal{Y}) + \sin^4(\mathcal{Y}) - 2 \sin(\mathcal{Y}) \frac{d\widetilde{D}_1}{d\mathcal{Y}} \quad (10.17)$$

qui peut s'intégrer pour nous donner la correction du profil

$$\widetilde{D}_1 = -\frac{5}{2} \mathcal{Y} \sin(\mathcal{Y}) - \cos(\mathcal{Y}) - \frac{3}{4} \sin(2\mathcal{Y}) \sin(\mathcal{Y}). \quad (10.18)$$

Enfin, connaissant  $\widetilde{D}$ , on peut résoudre l'équation 10.14 pour trouver la constante d'intégration restante dans le profil de vitesse de l'équation 10.16. On obtient  $A =$

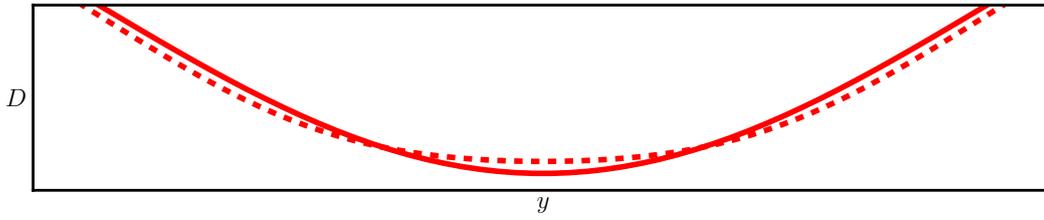


FIGURE 10.7 – On compare le profil en cosinus trouvé équation 2.16 (—) avec la correction de l'ordre suivant (- - -) pour  $\mu = 0,3$ .

$-\frac{1}{2} \cos^2(\mathcal{Y}) \cos(2\mathcal{Y}) - \cos(\mathcal{Y}) \widetilde{D}_1$ . Au final, en repassant en coordonnées  $(\tilde{y}, \tilde{z})$ , on obtient la section et la vitesse corrigées à l'ordre suivant :

$$\begin{aligned} \widetilde{D} &= -\mu \cos(\tilde{y}) - \mu^3 \left( \frac{5}{2} \tilde{y} \sin(\tilde{y}) + \cos(\tilde{y}) + \frac{3}{4} \sin(2\tilde{y}) \sin(\tilde{y}) \right) \\ \tilde{u} &= \frac{1}{2} (\mu^2 \cos^2(\tilde{y}) - \tilde{z}^2) + \frac{\mu^2}{2} \left( \mu^2 \frac{1}{4} \cos(\tilde{y}) (9 \cos(\tilde{y}) - 5 \cos(3\tilde{y}) + 20 \tilde{y} \sin(\tilde{y})) + \tilde{z}^2 \cos(2\tilde{y}) \right) \end{aligned} \quad (10.19)$$

Lorsque  $\mu$  diminue, la correction devient négligeable et on retrouve un profil en cosinus.

La section étant modifiée, la largeur a aussi changé. On peut trouver la nouvelle largeur en effectuant toujours un développement en  $\mu$ ,  $\widetilde{W} = \widetilde{W}_0 + \mu^2 \widetilde{W}_2$  telle que  $\widetilde{D} \left( \frac{\widetilde{W}}{2} \right) = 0$ . On obtient  $\widetilde{W} = \pi + \mu^2 \frac{5\pi}{2}$  et le rapport d'aspect est alors modifié  $\frac{W}{D_M} = \frac{\pi}{\mu} + \frac{3\pi\mu}{2}$ .

Figure 10.7 et 10.8, nous traçons les deux profils correspondant à l'ordre 1 (en trait plein) et à l'ordre 2 (en trait pointillé) pour un débit d'eau constant. La figure 10.7 est réalisée pour  $\mu = 0,3$ . On remarque que le profil a tendance à s'élargir. De plus, le fond s'aplatit légèrement.

Dans notre cas,  $\mu = 0,7$  (figure 10.8). Cela donne un profil totalement farfelu. Il

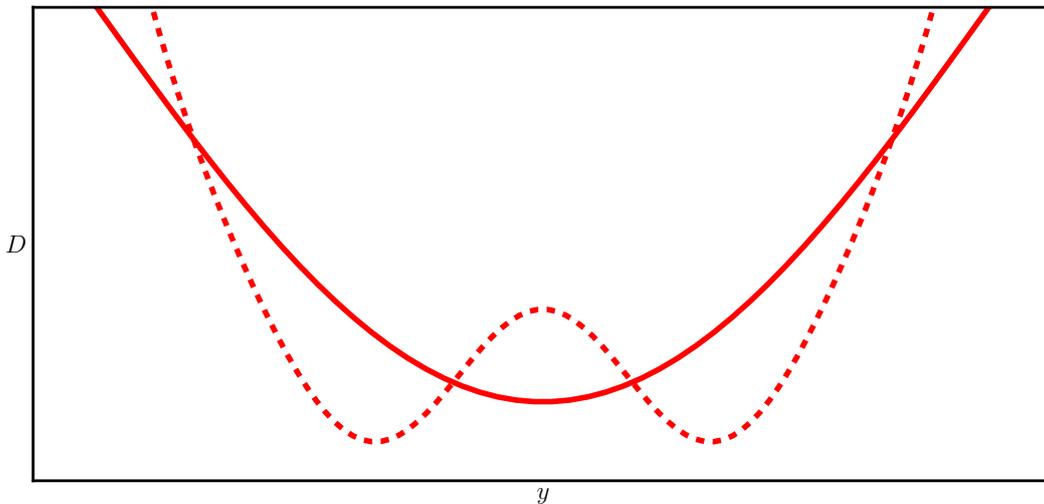


FIGURE 10.8 – On compare le profil en cosinus trouvé équation 2.16 (—) avec la correction de l'ordre suivant (- - -) pour  $\mu = 0,7$ .



faudrait sûrement pousser à l'ordre suivant pour corriger le développement ( $\mu^2 \approx 0,5$  ce qui n'est pas très petit devant 1).

### Équations de régime

En régime laminaire, le nouveau débit calculé en intégrant le nouveau profil de vitesse sur la section corrigée donne

$$Q_w = \mu^3 \frac{4}{9} \frac{g}{\nu} \frac{\mathcal{L}^4}{S^3} \left(1 + \mu^2 \frac{29}{5}\right) \quad (10.20)$$

on retrouve bien dans le cas limite ( $\mu \ll 1$ ) le débit d'eau de l'équation 3.4. On peut en déduire les nouvelles équations de régime :

$$\begin{aligned} S &= \mu \left(\frac{4}{9} \frac{g}{\nu}\right)^{1/3} \mathcal{L}^{4/3} \frac{1}{Q_w^{1/3}} \left(1 + \mu^2 \frac{29}{15}\right) \\ W &= \frac{\pi}{\mu} \left(\frac{9}{4} \frac{\nu}{g} \frac{1}{\mathcal{L}}\right)^{1/3} Q_w^{1/3} \left(1 + \mu^2 \frac{17}{30}\right) \\ \langle D \rangle &= -\frac{1}{\pi} \left(18 \frac{\nu}{g} \frac{1}{\mathcal{L}}\right)^{1/3} Q_w^{1/3} \left(1 - \mu^2 \frac{13}{30}\right) \end{aligned} \quad (10.21)$$

La correction ne change pas les lois d'échelle dans les équations de régime, mais seulement les préfacteurs numériques. La largeur et la pente ont tendance à augmenter tandis que la profondeur moyenne diminue.

Nous ne prendrons donc pas en compte la correction d'ordre 2 dans la suite de notre exposé. Nous nous contenterons de retenir que qualitativement, cette correction a tendance à augmenter légèrement le rapport d'aspect de la rivière. Ces résultats sont en accord avec nos expériences et avec l'étude numérique de l'écoulement résolu dans une géométrie sinusoïdale (figure 3.16 et 3.18). Les lois de puissance dans les équations de régime ne sont pas modifiées par ces développements.

# Chapitre 11

## Annexes sur la théorie de diffusion

### 11.1 Méthode de résolution numérique

#### 11.1.1 Équation et calculs des paramètres physiques

Il n'est pas possible d'avoir une solution analytique de l'équation 7.11 pour notre modèle de diffusion. Nous pouvons toutefois trouver les profils en résolvant numériquement l'équation différentielle 11.1 (équivalente à l'équation 7.23).

$$\tilde{D}' = - \sqrt{\left( \frac{\mu}{1 - \left(1 - \frac{\mu}{\tilde{D}_M}\right) \exp\left[-\text{Pe} \mu \left(\frac{1}{\tilde{D}} - \frac{1}{\tilde{D}_M}\right)\right]} \right)^2} - \tilde{D}^2 \quad (11.1)$$

La résolution est effectuée avec le logiciel Mathematica. Les paramètres nécessaires pour la résolution numérique sont le nombre de Peclet,  $\text{Pe}$ , et la condition aux limites,  $\delta$ . L'équation est intégrée jusqu'à atteindre la profondeur  $\tilde{D}(\tilde{y}_{\max}) = 0$ . Une fois le profil résolu, nous pouvons en déduire les différentes quantités physiques sans dimension en intégrant numériquement les profils trouvés

**la largeur**  $\tilde{W} = 2 \tilde{y}_{\max}$

**le débit de sédiments**  $\tilde{Q}_s = \int_{\tilde{W}} \left( \sqrt{\tilde{D}^2 + \tilde{D}'^2} - \mu \right) d\tilde{y}$

**le débit d'eau**  $\tilde{Q}_w = \int_{\tilde{W}} \tilde{D}^3 d\tilde{y}$  en régime laminaire ou  $\tilde{Q}_w = \int_{\tilde{W}} \tilde{D}^{3/2} d\tilde{y}$  en régime turbulent

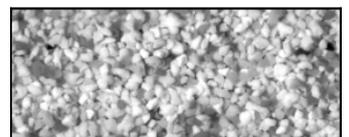
**la pente** la pente est directement imposée par le choix du nombre de Péclet.

Afin d'obtenir les grandeurs avec les bonnes dimensions, nous multiplions les quantités trouvées par les grandeurs physiques caractéristiques de notre problème. La longueur caractéristique  $l^*$  se déduit directement à partir du nombre de Péclet (équation 7.10).

$$l^* = \frac{\mathcal{L}}{S} = \text{Pe} \ell_d \quad (11.2)$$

#### 11.1.2 Développement proche du fond

La partie la plus délicate lors de la résolution numérique est la partie plate située proche du centre ( $y = 0$ ), en particulier lorsque nous sommes proche du point fixe



$\delta \approx 1$ . C'est l'endroit où la rivière est la plus plate, une approximation numérique qui changerait la courbure de notre solution aurait des conséquences importantes. Pour éviter au maximum ces erreurs, nous réalisons un développement analytique de l'équation 7.11 proche du centre de la rivière,  $(\widetilde{D}, \widetilde{D}') \sim (\widetilde{D}_M, 0)$ . Nous trouvons l'équation différentielle suivante :

$$\widetilde{D}'' = (\text{Pe} - 1)(\widetilde{D} - \widetilde{D}_M) + (\text{Pe} - 1)\widetilde{D}_M - \text{Pe} \mu \quad (11.3)$$

qui s'intègre en

$$\widetilde{D}(\widetilde{y}) = \mu \frac{\text{Pe} - (1 - \delta) \cosh(\widetilde{y} \sqrt{\text{Pe} - 1})}{\text{Pe} - 1}. \quad (11.4)$$

Cette approximation rend très bien compte de la partie plate au centre de la rivière mais devient rapidement fautive lorsque les berges se rapprochent de la surface. Nous nous servons de ce profil analytique pour résoudre la partie plate,  $\widetilde{D} \sim \widetilde{D}_M$  et  $y \sim 0$ , puis les berges sont résolues numériquement.

En pratique, nous utilisons l'équation 11.4 tant que  $\widetilde{D}_M > \widetilde{D} > \widetilde{D}_M(1 - \varepsilon)$  avec  $\varepsilon \ll 1$ . Cela correspond à une résolution pour  $0 < \widetilde{y} < \widetilde{y}_{\text{num}}$  avec

$$\widetilde{y}_{\text{num}} = \frac{\text{argcosh}\left(1 + \varepsilon \frac{\text{Pe} - 1 + \delta}{1 - \delta}\right)}{\sqrt{\text{Pe} - 1}} \quad (11.5)$$

pour  $\widetilde{y} > \widetilde{y}_{\text{num}}$ , l'équation 7.23 est résolue numériquement. Nous résumons notre résolution dans la table 11.1

$\widetilde{D}$	$\widetilde{y}$	résolution
$\widetilde{D}_M > \widetilde{D} > \widetilde{D}_M(1 - \varepsilon)$	$0 < \widetilde{y} < \widetilde{y}_{\text{num}}$	cosh analytique
$\widetilde{D}_M(1 - \varepsilon) > \widetilde{D} > 0$	$\widetilde{y}_{\text{num}} < \widetilde{y} < \widetilde{y}_{\text{max}}$	résolution numérique

TABLE 11.1 – Méthode de résolution numérique des profils.

Nous vérifions la convergence de cette méthode en faisant varier  $\varepsilon$  et en mesurant la largeur de la rivière trouvée (figure 11.1). Pour  $\varepsilon < 10^{-3}$ , notre approximation converge bien.

Pour  $\text{Pe} \gg 1$  et  $\delta \approx 1$ , nous trouvons que  $\widetilde{D}'(\widetilde{y}_{\text{num}}) \sim -\mu \sqrt{\text{Pe}} \varepsilon$ . Dans la suite de nos simulations, nous avons pris  $\varepsilon = 10^{-6}$  afin d'être sûr d'avoir une pente suffisamment importante pour que les approximations numériques soient négligeables mais aussi suffisamment faible pour que notre approximation analytique soit correcte.

## 11.2 Étude des tresses

La création de nouveaux chenaux rajoute un degré de liberté dans le système qui peut alors choisir soit sa pente soit son nombre de chenaux.

Nous présentons ici quelques résultats préliminaires sur l'application de notre théorie de diffusion aux rivières en tresse.

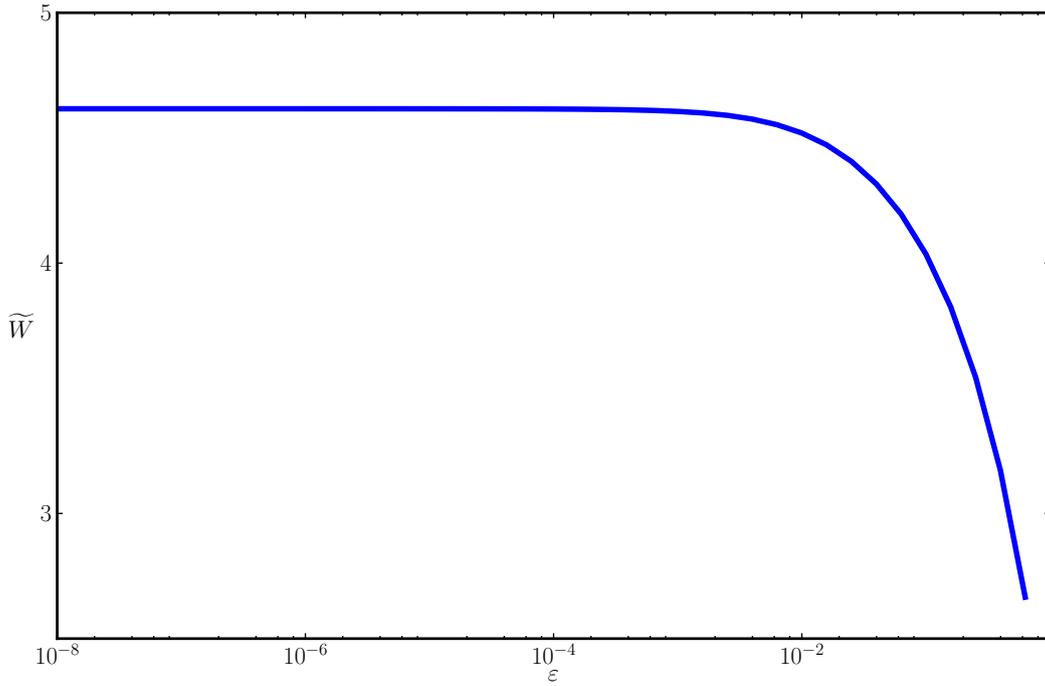
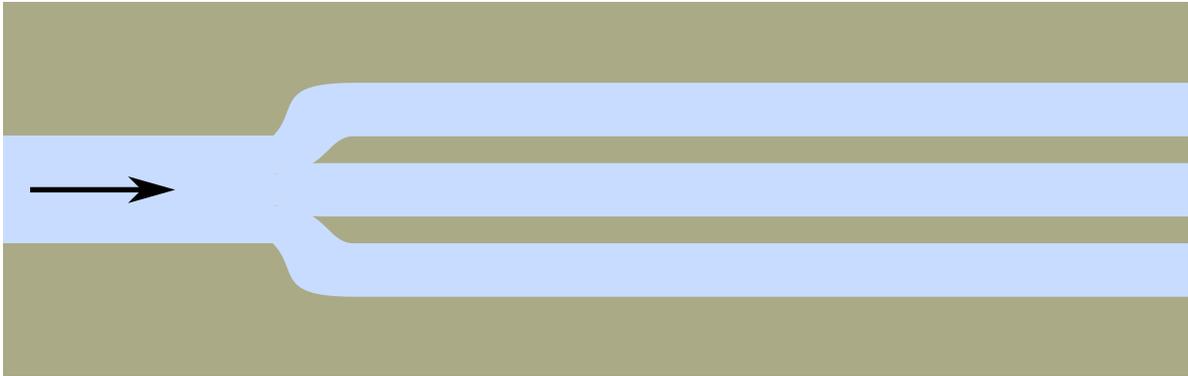


FIGURE 11.1 – Convergence de la largeur adimensionnée en fonction du paramètre  $\varepsilon$  utilisé dans la résolution numérique. Pour cet exemple,  $Pe = 1000$ ,  $\delta = 1 - 10^{-10}$ .

### 11.2.1 Multiples chenaux identiques

Supposons tout d'abord le cas le plus simple où une rivière se scinde en  $N$  chenaux identiques qui ont tous le même débit de sédiments et le même débit d'eau.



En régime laminaire (équation 7.20), on a alors les équations suivantes :

$$S = \mu \left( \frac{4}{9} \frac{g}{\nu} \right)^{1/3} \mathcal{L}^{4/3} \left( \frac{N}{Q_w} \right)^{1/3} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{Q_s}{N Q_s^*} \right)^{1/3}$$

$$W_{\text{chenal}} = \frac{\pi}{\mu} \left( \frac{9}{4} \frac{\nu}{g \mathcal{L}} \right)^{1/3} \left( \frac{Q_w}{N} \right)^{1/3} \frac{1 + \frac{1}{\pi} \frac{Q_s}{N Q_s^*}}{\left( 1 + \frac{3}{4} \frac{Q_s}{N Q_s^*} \right)^{1/3}} \quad (11.6)$$

$$\frac{W_{\text{chenal}}}{D_M} = \frac{\pi}{\mu} \left( 1 + \frac{Q_s}{N \pi Q_s^*} \right).$$



Chaque bras de rivière a la même pente et la même largeur. La pente de la rivière augmente lorsque le nombre de chenaux augmente. La largeur de chaque bras de rivière diminue avec le nombre de chenaux mais la largeur totale de la rivière qu'on suppose égale à  $N$  fois la largeur d'un bras augmente.

A priori, on pense qu'il existe suffisamment de chenaux pour que chaque chenal ait un rapport d'aspect juste inférieur à son rapport d'aspect critique, on peut alors calculer le nombre de chenaux

$$N = \left\lceil \frac{Q_s}{Q_s^*} \frac{1}{\mu \frac{W}{D} \Big|_{\text{crit}} - \pi} \right\rceil. \quad (11.7)$$

Si les chenaux ne se déstabilisent jamais, alors  $W/D|_{\text{crit}} = \infty$  et  $N$  vaut 1. Au contraire, le nombre de chenaux diverge si le rapport d'aspect critique diminue.

### 11.2.2 Multiples chenaux indépendants

Nous supposons maintenant un cas plus général, la rivière a  $N$  chenaux indépendants et chaque chenal  $i$  a un débit d'eau  $Q_{w_i} = \lambda_{w_i} Q_w$  et un débit de sédiments  $Q_{s_i} = \lambda_{s_i} Q_s$  avec  $Q_w$  et  $Q_s$  les débits d'eau et de sédiments de la rivière totale.

La conservation du débit d'eau et du débit de sédiments nous impose

$$\sum_{i=1}^N \lambda_{w_i} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N \lambda_{s_i} = 1. \quad (11.8)$$

#### Même pente

Si de plus, nous supposons que chaque chenal a une même pente  $S$ , alors il existe une quantité conservée  $S_0$  pour chaque chenal

$$S_0 = \frac{1}{\lambda_{w_i}} \left( 1 + \frac{3 \lambda_{s_i} Q_s}{4 Q_s^*} \right). \quad (11.9)$$

Le choix du débit d'eau dans un chenal  $\lambda_{w_i}$  impose donc le choix de la quantité de sédiments transportée  $\lambda_{s_i}$ . En utilisant l'équation de conservation (équation 11.8), nous trouvons que

$$\sum_{i=1}^N \lambda_{w_i} = \frac{1}{S_0} \sum_{i=1}^N \left( 1 + \frac{3 \lambda_{s_i} Q_s}{4 Q_s^*} \right) = \frac{1}{S_0} \left( N + \frac{3 Q_s}{4 Q_s^*} \right) = 1 \quad (11.10)$$

La pente ne peut prendre que des valeurs discrètes qui dépendent du nombre de chenaux.

$$S(N) = \mu \left( \frac{4g}{9\nu} \right)^{1/3} \mathcal{L}^{4/3} \frac{1}{Q_w^{1/3}} \left( N + \frac{3 Q_s}{4 Q_s^*} \right)^{1/3} \quad (11.11)$$

Cette pente est celle que l'on aurait si toutes les rivières étaient identiques ( $\lambda_{w_i} = \lambda_{s_i} = 1/N$ ). De même la largeur totale de la rivière est similaire à la largeur trouvée pour  $N$  chenaux identiques.

$$W(N) = \frac{\pi}{\mu} \left( \frac{9\nu}{4g} \frac{1}{\mathcal{L}} \right)^{1/3} Q_w^{1/3} \frac{N + \frac{1}{\pi} \frac{Q_s}{Q_s^*}}{\left( N + \frac{3}{4} \frac{Q_s}{Q_s^*} \right)^{1/3}} \quad (11.12)$$

Chaque chenal peut pourtant avoir une largeur libre.

### Pente libre

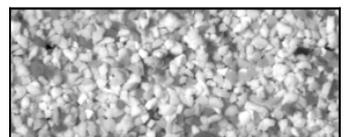
Si l'on suppose maintenant que chaque chenal a une pente et une largeur propre, nous pouvons trouver des majorants. Nous avons envie de dire que le cas où les  $N$  chenaux sont identiques correspond à un extremum. Dans ce cas, nous pouvons dire que la pente moyenne est supérieure à la pente trouvée précédemment

$$\langle S \rangle > \mu \left( \frac{4g}{9\nu} \right)^{1/3} \mathcal{L}^{4/3} \left( \frac{N}{Q_w} \right)^{1/3} \quad (11.13)$$

et la largeur totale de la rivière est comprise entre la largeur d'une rivière mono-chenal et la largeur d'une rivière avec  $N$  chenaux identiques

$$\frac{\pi}{\mu} \left( \frac{9\nu}{4g} \frac{1}{\mathcal{L}} \right)^{1/3} Q_w^{1/3} \frac{1 + \frac{1}{\pi} \frac{Q_s}{Q_s^*}}{\left( 1 + \frac{3}{4} \frac{Q_s}{Q_s^*} \right)^{1/3}} < W < \frac{\pi}{\mu} \left( \frac{9\nu}{4g} \frac{1}{\mathcal{L}} \right)^{1/3} Q_w^{1/3} \frac{N + \frac{1}{\pi} \frac{Q_s}{Q_s^*}}{\left( N + \frac{3}{4} \frac{Q_s}{Q_s^*} \right)^{1/3}} \quad (11.14)$$

Ainsi, la largeur d'une rivière en tresse semble pouvoir être relativement bien contrainte. Bien sûr, il faudrait compléter ces études et les vérifier expérimentalement.





# Chapitre 12

## Annexes expérimentales

### 12.1 Matériel expérimental

#### 12.1.1 Matériaux granulaires

Nous avons utilisé différents grains. Leurs propriétés sont résumées dans la section ci-dessous.

**Grains de type 1** Ce sont des grains roses qui ont une granulométrie de 60/80 MESH d'après le fabricant. On a pu déterminer  $d_{s50} \approx 351 \mu\text{m}$  et  $d_{s90} \approx 469 \mu\text{m}$ . Ces grains ont été utilisés pour la création de micro-rivières en utilisant de l'eau comme fluide et pour les mesures de diffusion.

**Grains de type 2** Ce sont des grains blancs qui ont une granulométrie de 60/80 MESH d'après le fabricant. Ces grains ont été utilisés pour la création de micro-rivières sans transport avec du fluide visqueux.

**Grains de type 3** Ce sont des grains roses qui ont une granulométrie de 30/40 MESH d'après le fabricant. Ces grains ont été utilisés pour des mesures de diffusion.

La granulométrie des grains de type 1 est vérifiée lors d'une expérience de diffraction laser avec Patrick Meunier au laboratoire de géologie de l'École Normale Supérieure (figure 12.1)

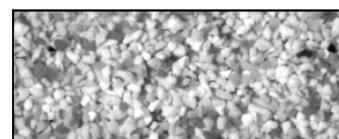
Les grains suivent une loi de distribution similaire à une loi log-normale. Après avoir constaté que les résultats sont similaires à ceux trouvés avec l'expérience de diffraction, on mesure la granulométrie des grains par analyse d'image avec le logiciel ImageJ (<http://rsbweb.nih.gov/ij/>). Le mode opératoire est illustré figure 12.2 : on photographie des grains et on mesure leur aire moyenne. Le diamètre moyen est ensuite la moyenne de la racine carrée de cette aire.

Nous avons mesuré la vitesse de sédimentation moyenne des grains de type 1 (la variation de taille des grains au sein d'un même échantillon fait que les grains ne tombent pas tous à la même vitesse). Pour cela, nous avons rempli d'eau une éprouvette graduée et chronométré le temps mis par les grains pour tomber au fond (figure 12.3).

Nous avons fait ces mesures pour des grains secs et des grains déjà imbibés d'eau. On trouve

$$\begin{aligned} V_s^{\text{sec}} &= 1,5 \text{ cm/s} \pm 0,2 \text{ cm/s} \\ V_s^{\text{mouille}} &= 1,3 \text{ cm/s} \pm 0,2 \text{ cm/s}. \end{aligned} \quad (12.1)$$

La vitesse de sédimentation varie légèrement avec l'absorption d'eau. Quand l'urée absorbe de l'eau, le poids déjaugé d'un grain reste le même, par contre nous pensons



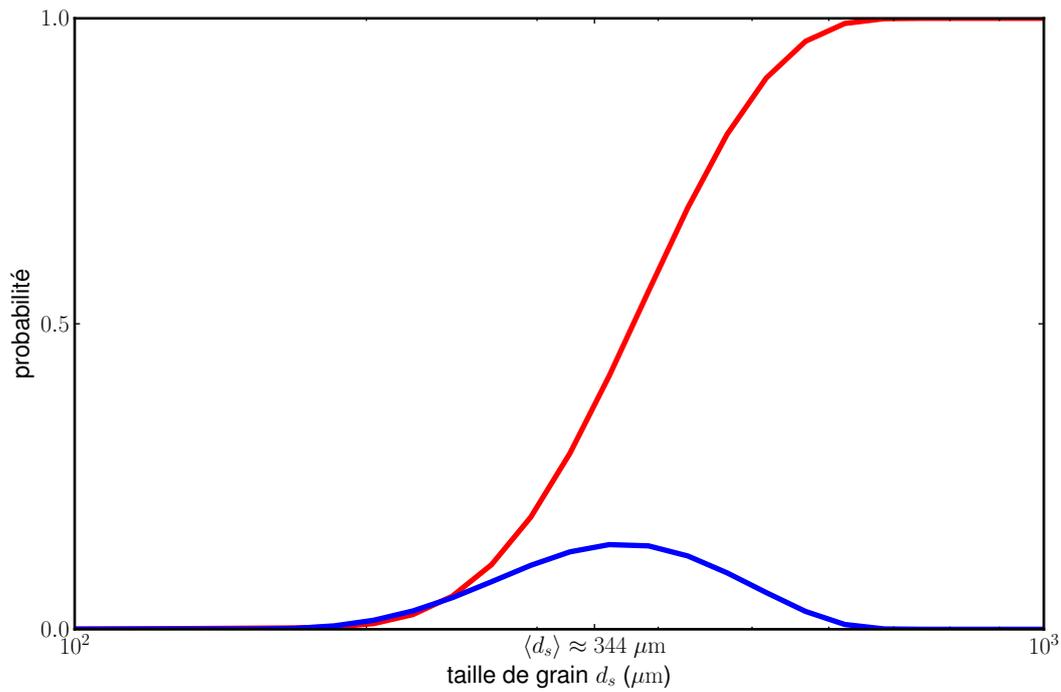


FIGURE 12.1 – Granulométrie des grains de type 1. La fonction de répartition est tracée en rouge, la loi de probabilité est en bleu. La granulométrie est tracée ici avec une échelle semi-logarithmique.

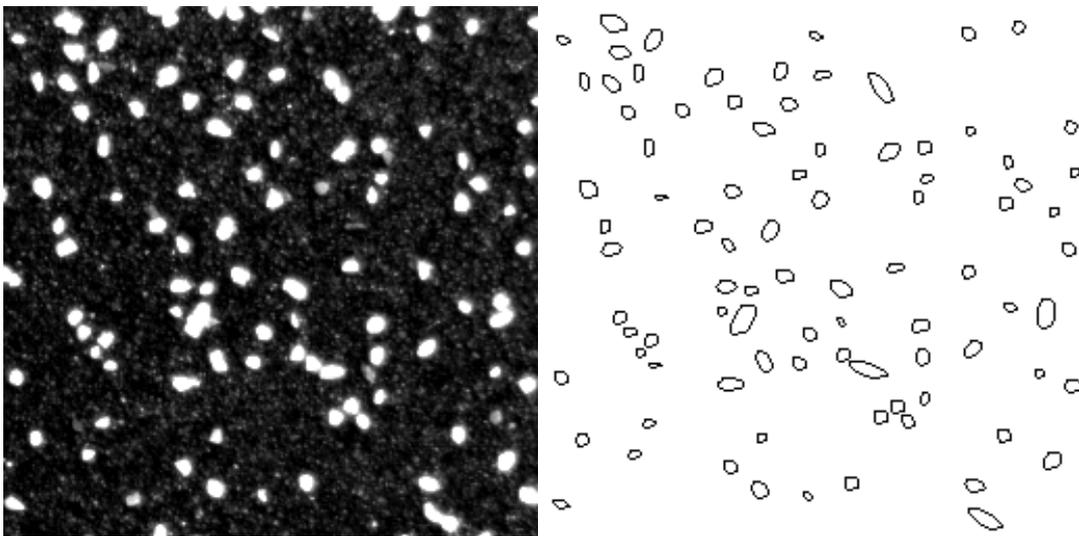


FIGURE 12.2 – Exemple d'une image analysée pour des grains de type 1.

qu'il doit gonfler. Le frottement visqueux est donc plus important et la vitesse de sédimentation diminue. A titre de comparaison, la vitesse théorique de sédimentation pour un grain sphérique nous donne  $V_s^{\text{sphère}} = 3,1 \text{ cm/s}$ .

Les caractéristiques des différents types de grain utilisés sont résumées table 12.1.

Le seuil de mise en mouvement a été mesuré dans une expérience indépendante.



FIGURE 12.3 – Mesure de vitesse de sédimentation des grains dans une éprouvette graduée. On voit la ségrégation, les grains plus gros tombent plus vite que les grains plus fins.

Type	Taille	Méthode
Type 1	$\langle d_s \rangle = 344 \mu\text{m} \pm 90 \mu\text{m}$	diffraction laser
	$\langle d_s \rangle = 320 \mu\text{m} \pm 82 \mu\text{m}$	analyse d'image
Type 2	$\langle d_s \rangle = 220 \mu\text{m} \pm 85 \mu\text{m}$	analyse d'image
Type 3	$\langle d_s \rangle = 630 \mu\text{m} \pm 173 \mu\text{m}$	analyse d'image

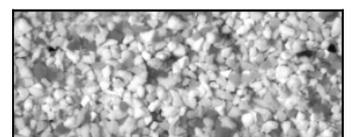
TABLE 12.1 – Résumé de la granulométrie des différents types de grains.

### 12.1.2 Mesure du débit liquide

Les débitmètres utilisés sont de la marque Kobold. Ce sont des débitmètres électromagnétiques qui ont pour avantage de n'avoir aucune pièce en mouvement. Ils ne sont donc ni endommagés ni bloqués par le passage de sédiments en suspension. Deux débitmètres sont utilisés selon le débit d'eau mesuré. Le MIK-5NA10AE34R pour un débit d'eau compris entre 0,05 L/min et 1,0 L/min et le MIK-5NA20AE34R pour un débit d'eau compris entre 0,5 L/min et 10,0 L/min.

### 12.1.3 Appareils photo

Les appareils photo utilisés lors de cette thèse sont de marque Canon et de divers modèles (EOS 20D ou EOS 1100D). Si nécessaire, ils sont contrôlés à distance grâce



au logiciel EOS Utility sur Windows ou grâce à la librairie gphoto2 (<http://gphoto.sourceforge.net/>) sur Linux. Un exemple de code est présenté annexe 12.2.2.

### 12.1.4 Commande du doseur de grains

#### Matériel

Pour contrôler certains appareils depuis l'ordinateur, en particulier le doseur de grains, nous utilisons une carte Arduino Uno couplée à un convertisseur numérique analogique de type AD420 (commercialisé par Analog Devices). L'Arduino est une plaquette connectée par USB à l'ordinateur qui permet d'enregistrer des signaux analogiques et d'envoyer des signaux numériques. Ici, l'ordinateur communique avec l'Arduino qui envoie des signaux numériques à la puce AD420. Cette dernière convertit les commandes numériques en sortie analogique afin de pouvoir contrôler les appareils (en tension ou en courant).

Le montage électronique étant rapidement encombrant, nous avons fait faire un circuit imprimé à connecter à l'Arduino par le biais du site <http://fritzing.org/>. Le schéma du montage est détaillé figure 12.4 (les valeurs de résistances et de condensateurs ne sont données qu'à titre indicatif). Les fils d'alimentation en tension, ceux reliés à la terre, ceux connectant l'Arduino au convertisseur AD420 et enfin ceux transmettant les données sont de différentes couleurs.

Sans entrer dans les détails, cette carte permet de sortir un courant compris entre 0 mA et 24 mA ou une tension comprise entre 0 V et 10 V (cette valeur peut être facilement modifiée en changeant la valeur des résistances du circuit). Elle permet aussi d'enregistrer une tension (borne  $V_{in}$ ) ou un courant (borne  $I_{in}$ ). La mesure du courant n'est toutefois pas idéale car nous nous contentons d'amplifier une tension mesurée aux bornes d'une faible résistance connue. Le fonctionnement n'est pas aussi efficace que celui du galvanomètre traditionnel, en particulier à cause des pertes dues à l'effet Joule.

#### Logiciel

Pour contrôler l'Arduino depuis l'ordinateur, on utilise le langage de programmation Python. Pour cela on charge le protocole de communication Firmata dans l'Arduino grâce au logiciel d'Arduino (<http://arduino.cc/en/Main/Software>) (Menu : Files/Examples/Firmata/StandardFirmata) puis on installe le package pyFirmata (<https://github.com/tino/pyFirmata>) qui permet de convertir le langage Python en langage Firmata. Un exemple de programme qui permet de contrôler le courant envoyé est présenté annexe 12.2.1.

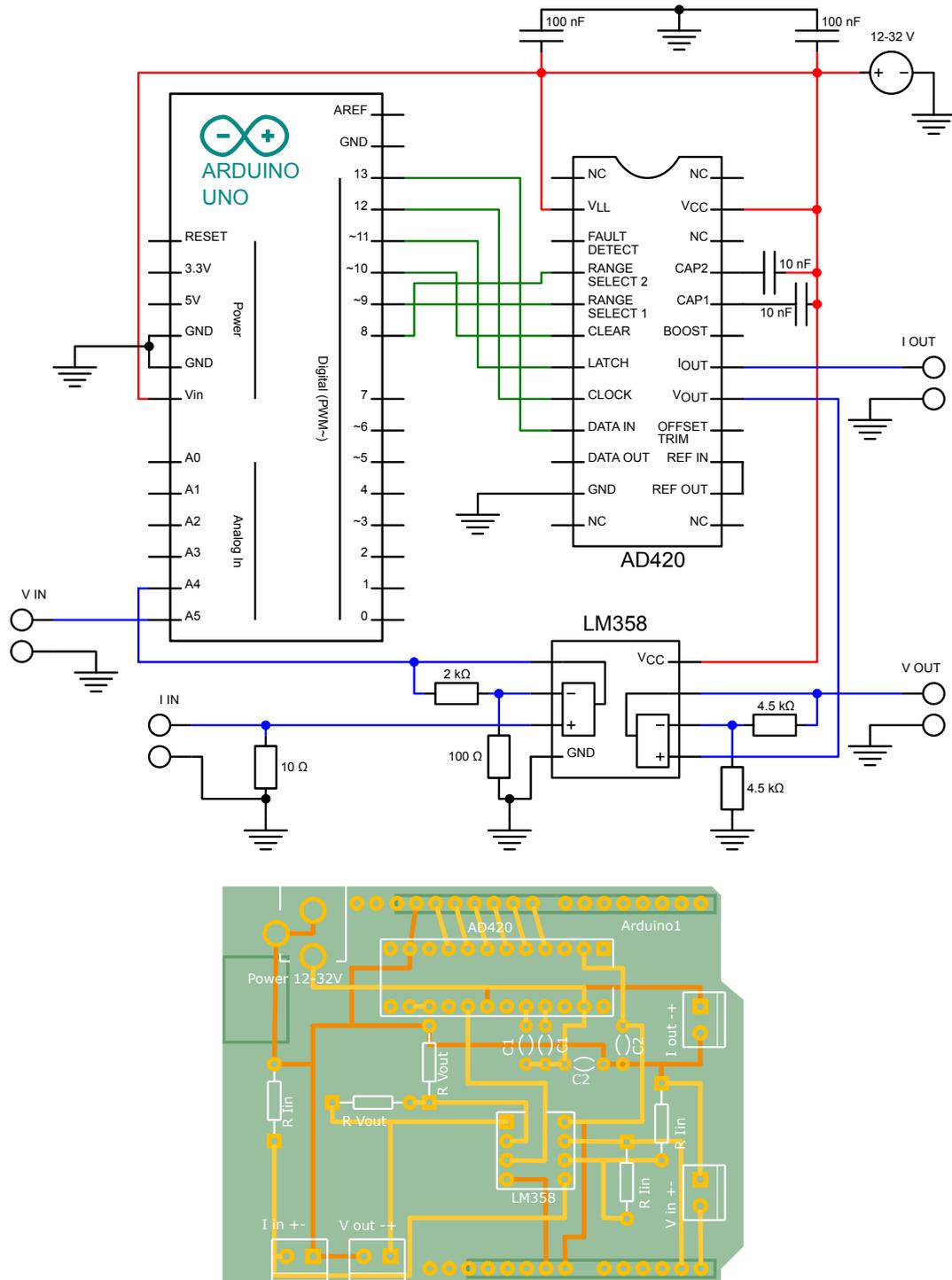
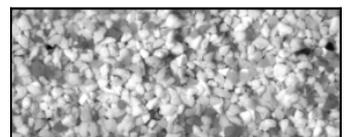


FIGURE 12.4 – Circuit imprimé pour Arduino. On voit en haut le schéma du circuit. On peut différencier les fils d'alimentation en tension (—), ceux reliés à la terre (—), ceux connectant l'Arduino au convertisseur AD420 (—) et enfin ceux transmettant les données (—). Les valeurs des résistances et des condensateurs sont données à titre indicatif. Le circuit imprimé est dessiné en bas. Il est gravé sur deux faces (les fils jaunes sont au dessus (—), les fils oranges en dessous (—)).



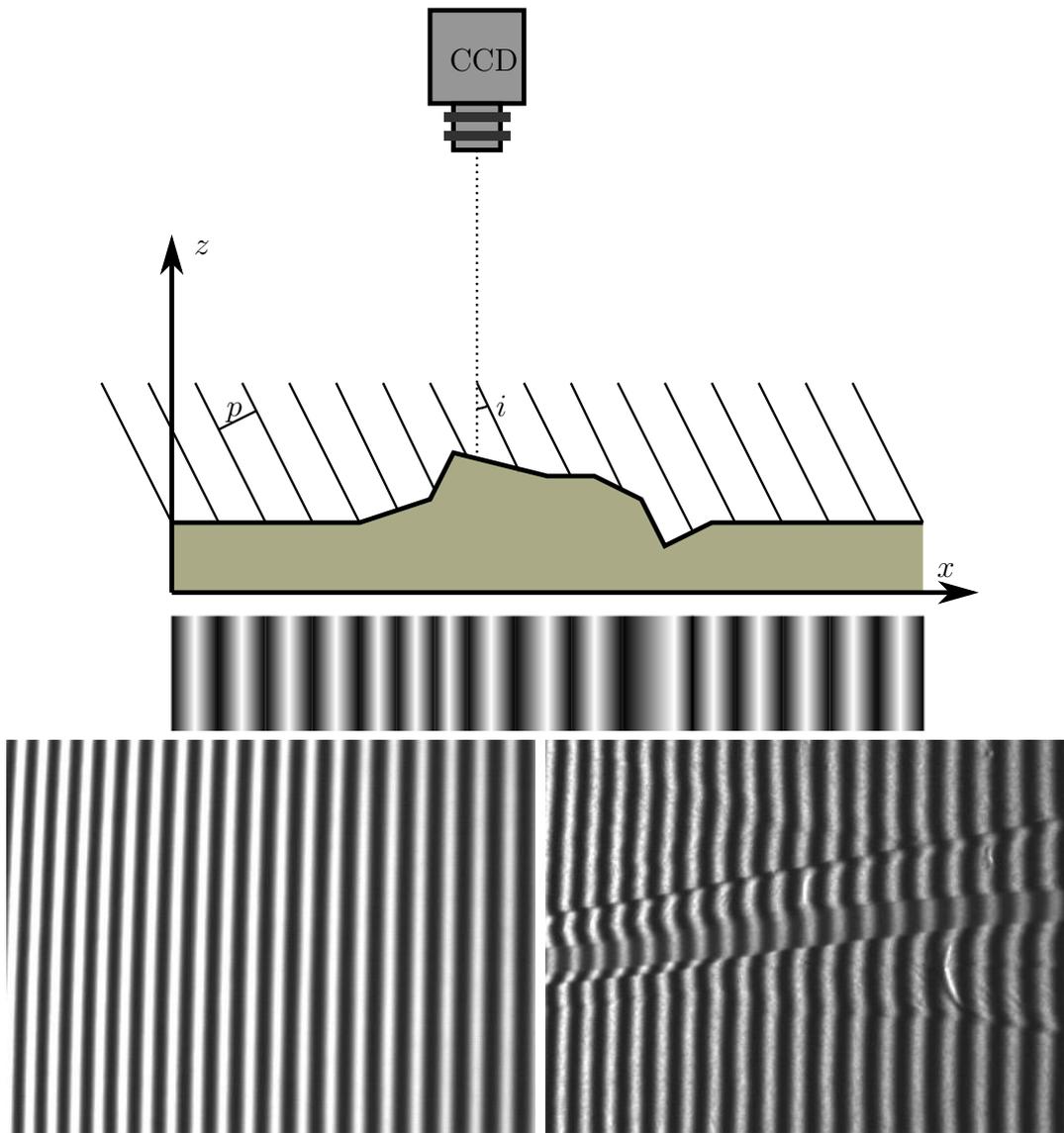


FIGURE 12.5 – Illustration de la méthode Moiré. Les franges sont envoyées avec un angle d'incidence  $i$ . Le motif enregistré par la caméra est représenté sous la surface. Projection de franges sur deux surfaces, une totalement plate (à gauche) et une avec du relief (à droite).

### 12.1.5 Mesure par méthode de moiré

Pour obtenir la morphologie de toute une rivière, nous pouvons utiliser une méthode de démodulation de frange de moiré (mise au point dans les années 1970<sup>[69]</sup>). Le principe général est illustré figure 12.5 : à l'aide d'un vidéoprojecteur, on projette une image composée de franges sinusoïdales de pas  $p$  avec un angle d'incidence  $i$ .

Nous enregistrons le motif grâce à une caméra située à la verticale de l'expérience. Si les franges sont projetées sur une surface plane, alors la phase est régulièrement espacée ( $\varphi[x] = \frac{2\pi}{p} x \cos i$ ), par contre, si la surface présente des irrégularités, alors le motif est déphasé en fonction des irrégularités. Ce déphasage est proportionnel à la hauteur de la surface ( $\delta\varphi[z] = \frac{2\pi}{p} z \tan i$ ). Une fois la phase enregistrée grâce à la caméra, on peut démoduler la fréquence et retrouver le relief de la surface grâce à des transformées

de Fourier<sup>[70]</sup>. En utilisant les lois de l'optique géométrique, cette méthode permet aussi de mesurer des reliefs sous l'eau<sup>[71]</sup>.

Pour les mesures de relief, nous utilisons une surface de référence. La méthode est illustrée figure 12.7. On choisit une surface dont on connaît précisément la topographie en tout point :  $z_{\text{ref}}[x, y]$  et on mesure son relief grâce à la méthode de moiré ( $z_{\text{ref}}^{\text{exp}}[x, y]$ ). On peut alors regarder la différence entre les deux reliefs trouvés. Cela nous donne une carte d'erreurs ( $\delta z[x, y] = z_{\text{ref}}^{\text{exp}}[x, y] - z_{\text{ref}}[x, y]$ ) dues par exemple aux aberrations optiques ou à la précision de la calibration. Cette carte d'erreur n'étant due qu'au montage expérimental et pas à la surface mesurée, nous enlèverons donc la carte d'erreur mesurée à chaque surface ( $z$ ) dont nous mesurons la topographie ( $z^{\text{exp}}$ ). Cela nous permettra de connaître la différence de relief entre notre expérience et la surface de référence  $z - z_{\text{ref}} = z^{\text{exp}} - z_{\text{ref}}^{\text{exp}}$ .

Le plus simple pour les calculs est d'avoir une surface de référence totalement plane, nous avons donc rempli notre dispositif expérimental de lait (opaque,  $z_{\text{ref}} = 0$ ) et mesuré le relief trouvé ( $z_{\text{ref}}^{\text{exp}}$ , figure 12.7 et 12.6).

Pour chaque expérience, nous avons mesuré le relief donné par la démodulation d'onde (figure 12.7)  $z^{\text{exp}}$  et soustrait la valeur trouvée avec le lait pour obtenir la topographie de notre expérience.

Nous faisons ces mesures deux fois pour chaque expérience, une fois avec de l'eau en train de couler puis après avoir fermé l'arrivée d'eau et avoir attendu que la rivière s'assèche par drainage. La combinaison de ces deux mesures nous permettait d'obtenir la hauteur d'eau en tous points.



FIGURE 12.6 – Calibration de la surface de référence avec du lait.



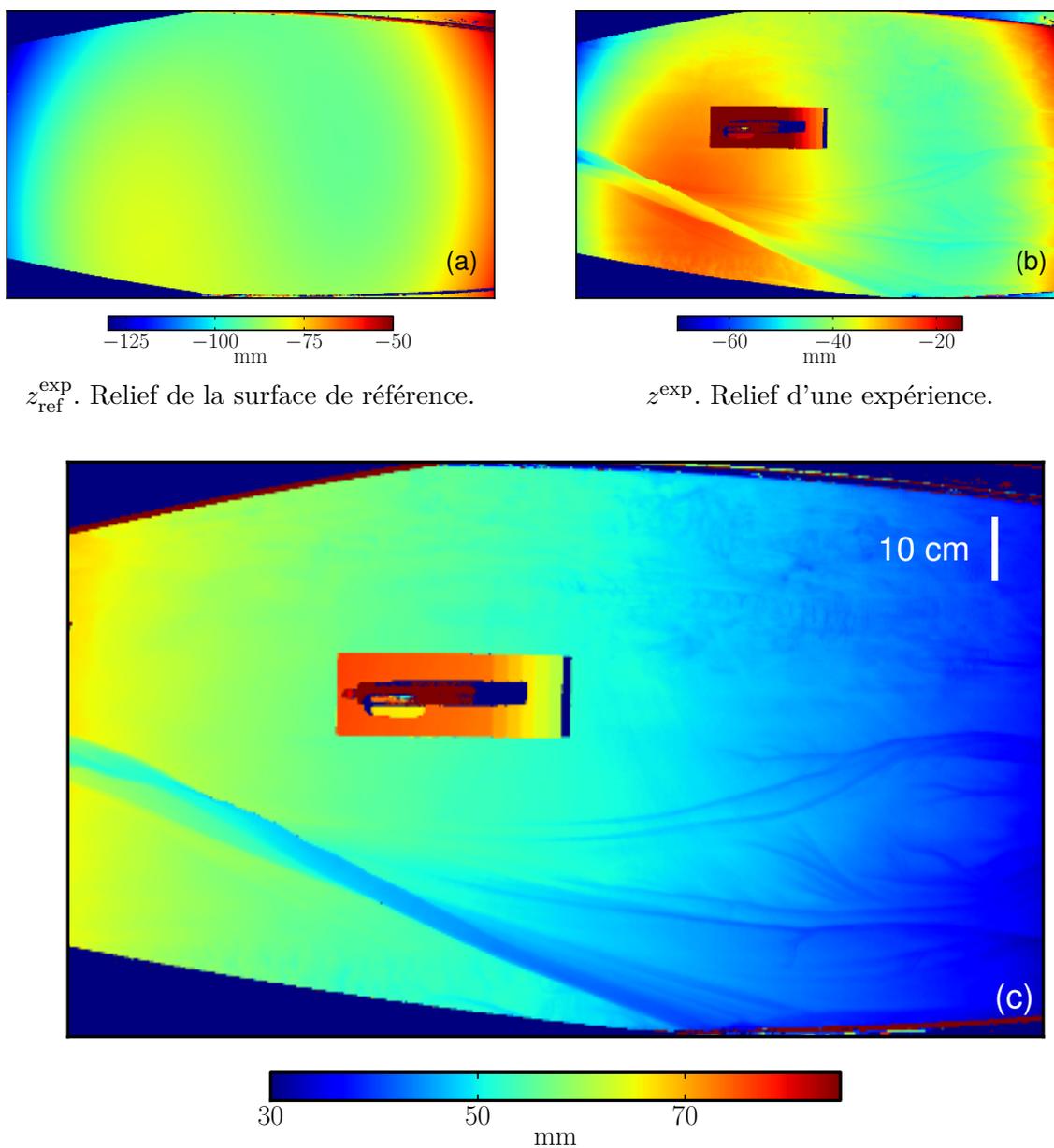


FIGURE 12.7 – Différentes cartes de relief obtenues grâce à la méthode de moiré. Dans notre cas, la surface de référence doit être plate, or son relief mesuré présente des variations (a). Cette erreur est ensuite retranchée à tous les reliefs mesurés (b) pour retrouver la topographie réelle (c).

## 12.2 Codes

L'ensemble des codes écrit pour cette thèse a été fait avec le langage Python (<http://www.python.org/>). Ils fonctionnent normalement tous avec Python 2.7.2 et IPython 0.12 (<http://ipython.org/>) en utilisant les modules de base NumPy (<http://www.numpy.org/>), SciPy (<http://www.scipy.org/>) et matplotlib (<http://matplotlib.org/>). L'installation de Python a été réalisée grâce à Enthought pour Mac OS (<http://www.enthought.com/products/edownload.php>), Python(x,y) pour Windows (<http://code.google.com/p/pythonxy/>) et directement par l'installation de paquets sous Linux (en utilisant synaptic pour Ubuntu).

Nous présentons ici quelques codes qui peuvent être utiles, il s'agit de codes pour contrôler des appareils à distance tel que l'Arduino (pour cela il faut rajouter les modules pySerial (<http://pyserial.sourceforge.net/>) et pyFirmata (<https://github.com/tino/pyFirmata>) ou un appareil photo sous Linux avec la librairie gphoto (<http://gphoto.sourceforge.net/>). Mais aussi d'un code pour pouvoir facilement suivre des particules.

### 12.2.1 Commande de l'Arduino pour envoyer un courant

```

1  import pyfirmata as pf

#AD420 – Arduino. Table of connections
#Range select 2 – pin 8
#Range select 1 – pin 9
6  #Clear – pin 10
#Latch – pin 11
#Clock – pin 12
#Data in – pin 13

11 #clear function, reset the chip AD420
def clear(board, bool_value, pin = 10):

    if bool_value == 0 or bool_value == 1:
        pinclear = board.digital[pin]
16        pinclear.write(bool_value)
        board.digital[13].write(1 - bool_value)

    else:
        print 'bool_value must be 0 or 1'

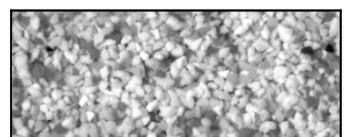
21 #send signal from the chip AD420
def signal(board, value, Nbit = 16, delay = 1e-3, pins = [13, 12, 11,
10, 9, 8]):

    #clear funtion, does the operation continues after message ?
26 #0 : yes
#1 : no

    board.digital[pins[3]].write(0)

31 #select the range of the operation
#(0, 0) : 0-5 V output
#(0, 1) : 4-20 mA output

```



```

36     #(1, 0) : 0–20 mA output
       #(1, 1) : 0–24 mA output

       #there we choose to send current between 0 and 20 mA
       board.digital[pins[4]].write(1)
       board.digital[pins[5]].write(0)
41
       #convert value into Nbit then binary
       value = int( value*(2**Nbit - 1)/20 )
       binary = bin(value)[2:]
       binary = bin(2**(Nbit - len(binary)))[3:] + binary
46
       #define pins
       data = board.digital[pins[0]]
       clock = board.digital[pins[1]]
       latch = board.digital[pins[2]]
51
       #initialize sequence
       data.write(0)
       clock.write(0)
       latch.write(0)
56
       #send the value wanted to the chip
       for i in range(Nbit):
           data.write( int( binary[i] ) )
           board.pass_time(delay)
61           clock.write(1)
           board.pass_time(delay)
           clock.write(0)

       #end sequence
66       data.write(0)
       clock.write(0)
       latch.write(1)
       board.pass_time(delay)
       latch.write(0)

```

## 12.2.2 Commande de l'appareil photo à distance

```

from pylab import *
import os
import subprocess
import time
5
#different parameters value for the camera. Each index corresponds to a
  classical value. For Canon EOS20D, the default indexes are
#isoindex = 0 <=> iso = 50
#shutterspeedindex = 20 <=> shutterspeed = .4
#apertureindex = 21 <=> aperture = 14.
10
#path of the folder for the pictures
folder = '/home/manip/Bureau/Photo/photomanip'

#choose and display the paramaters of the camera
15 def param(iso = 0, shutterspeed = 20, aperture = 21):
    os.system('gphoto2 --set-config-index iso=%i' % iso)
    os.system('gphoto2 --set-config-index shutterspeed=%i' %
              shutterspeed)

```

```

os.system('gphoto2 --set-config-index aperture=%i' % aperture)
time.sleep(2)
20
os.system('gphoto2 --get-config iso')
os.system('gphoto2 --get-config shutter speed')
os.system('gphoto2 --get-config aperture')

25 #capture a picture and get its path. The picture stays on the camera
def capture():
    photo = subprocess.check_output('gphoto2 --capture-image',
        shell=True)
    print photo
    time.sleep(2)
30
    indini = photo.find('_/') + 1
    indfin = photo.find('/IMG')
    pathphoto = str(photo[indini:indfin])

35    return pathphoto

#download on the computer the last picture taken. The picture remains
also on the camera
def downloadlastphoto(path, pathoutput = folder, nameoutput =
'photo.jpg'):
    nameoutput = pathoutput + nameoutput
40
    number = subprocess.check_output('gphoto2 -f \\' + path + '\\ '
        --num-files', shell=True)
    print number
    time.sleep(2)
    ind = number.find(':_')
45    number = int(number[ind + 1:])

    os.system('gphoto2 --filename \\' + nameoutput + '\\ '
        --force-overwrite -f \\' + path + '\\ --get-file %i' % (number))
    time.sleep(5)

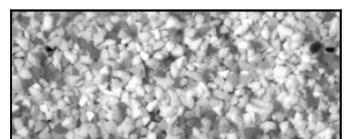
50 #capture and download the picture on the computer
def capturedownload():
    pathphoto = capture()

    downloadlastphoto(pathphoto)
55
#delete the last picture taken from the camera. Does not work well on
our camera (we can not communicate with the camera anymore after that)
def deletelastphoto(path):
    number = subprocess.check_output('gphoto2 -f \\' + path + '\\ '
        --num-files', shell=True)
    print number
60    time.sleep(2)
    ind = number.find(':_')
    number = int(number[ind + 1:])

    os.system('gphoto2 -f \\' + pathphoto + '\\ --delete-file %i' %
        (number))
65    time.sleep(5)

#special parameters to take a picture with no lights

```



```

def laser(isov = 0, shutterspeedv = 22, aperturev = 21):
    param(iso = isov, shutterspeed = shutterspeedv, aperture = aperturev)
70
    pathphoto = capture()

    downloadlastphoto(pathphoto)

75 #take N pictures with a given frequency
def remote(Nphoto, dt):
    i = 0
    if dt < 30:
        print 'error , frequency too high'
80    else:
        dt = dt - 15

        while i < Nphoto:
            name = 'photo%i.jpg' % (i+68)

85
            pathphoto = capture()

            downloadlastphoto(pathphoto, nameoutput = name)

90
            i = i + 1
            time.sleep(dt)

```

### 12.2.3 Mesure de la trajectoire des grains

```

import numpy as npy
import scipy.ndimage as si
import matplotlib.pyplot as mpl
4
#define the parameters to spot the particles, color threshold and
    minimum size
threshold = .23
size = 6

9 path = '~/path'

#function to find the position of the particles
def posparticle3(picture, size):
    [lblim, N] = si.label(picture)
14 #only spot the particles larger than a given size
    ind = npy.where( si.sum(picture, lblim, range(N+1)) > size**2 )[0]
    #return the position of the center of mass
    pos = si.center_of_mass(picture, lblim, ind)

19 return pos

#load a picture then spot the particles
def particlepict(i):
    picture = npy.array(mpl.imread(path + '%i.png' % (i+1))[:, :, 0] <
        threshold, dtype = int).T
24 return posparticle3(picture, size)

#load all the pictures of the experiment and record the positions
Npictures = 5000
Nrun = 10
29

```

```

positions = numpy.array([])

for i in range(Nrun):
    run = 'run' + '%i' % (i+1)
34    path = path + '/' + run + '/' + run + '-'
    print path
    positionsrun = [particlepict(i) for i in range(Npictures)]
    positions = numpy.append(positions, positionsrun)

39 #start the variables
#positions of the particles, each line would correspond to a different
    particle
results = positions[0]*1
#number of particles encountered
counter = numpy.size(positions[0], 0)
44 #pictures corresponding to each particle, each line would correspond to
    a different particle
time = 0*numpy.ones((counter), dtype = int)
time = time.tolist()

#define which particle in a given picture correspond to which particle
    in the whole experiment
49 liste = range(counter)
matching = [liste, range(counter)]

#maximal square distance that a particle can travel between two
    consecutives pictures
dmax = (5*size)**2
54

#matching of the particles between two consecutive pictures
for i in range(0, Npictures - 1):
    i = i + 1
    #position of the particles in two consecutive pictures
59    pos = positions[i - 1]
    pos2 = positions[i]

#determine the number of particles on each picture
N1 = numpy.size(pos, 0)
64    N2 = numpy.size(pos2, 0)

#determine the square distance between two positions
def distance(duo):
    i = duo[0]
69    j = duo[1]
    return (pos[i][0] - pos2[j][0])**2 + (pos[i][1] - pos2[j][1])**2

#list of the particles on each picture
list1 = range(N1)
74    list2 = range(N2)

Nparticlepicture = []
Nparticlepicture2 = []

79 #match if there is at least one particle per picture
if N1 >= 1 and N2 >= 1:
    #measure the distance between each couple of particles between
        the two pictures
    couple = [(x,y) for x in range(N1) for y in range(N2)]

```



```

dist = numpy.array( map(distance , couple), dtype = int
                    ).reshape(N1*N2, 1)
84
#sort the distance and indicate to which couple it corresponds
dist2 = numpy.hstack((dist , couple))
dist2 = numpy.array( sorted(dist2 , key = lambda x:(x[0])) )

89
#only keep the couples for which the distance is under the
    maximal distance
ind = numpy.nonzero(dist2[:,0] < dmax)[0]
listeN = dist2[ind, 1].tolist()
listeN2 = dist2[ind, 2].tolist()

94
for k in range(numpy.size(ind)):
    #we only consider particles where the matching has no
        ambiguity (each particle is in only one couple)
    if listeN.count(listeN[k]) == 1 and
        listeN2.count(listeN2[k]) == 1:

        Nparticlepicture.append( listeN[k] )
99        Nparticlepicture2.append( listeN2[k] )

        list1.remove(listeN[k])
        list2.remove(listeN2[k])

104 temporary = matching[1]*1
for k in range(N1):
    #if the particle in the picture 1 matches a particle in the
        picture 2, we save its position at the place of the
        corresponding particle
    if Nparticlepicture.count(k) == 1:
        place = temporary.index(k)
109        place2 = Nparticlepicture2.index(k)
        matching[1][place] = Nparticlepicture2[place2]
        results[ matching[0][place] ] = numpy.append( results[
            matching[0][place] ], pos2[Nparticlepicture2[place2]] )
        time[ matching[0][place] ] = numpy.append( time[
            matching[0][place] ], i )
    #if the particle in the picture 1 has no unique match in the
        picture 2, we do not consider the particle of the picture 2
114    else:
        place = temporary.index(k)
        matching[0].remove(matching[0][place])
        del matching[1][place]
        temporary.remove(k)

119
#if a new particle appears in picture 2, we add a line to the
    position and time tables
for k in range(N2):
    if list2.count(k) == 1:
        matching[0].append(counter)
124        matching[1].append(k)
        results.append(pos2[k])
        time.append(i)
        counter = counter + 1

```

# Chapitre 13

## Articles

**Width of laminar laboratory rivers** Accepté dans *Physical Review E*. Reprend les travaux de l'étude de la rivière sans transport.

**Cross-stream diffusion in bedload transport** Soumis à *Physics of Fluids*. Reprend les travaux concernant le mouvement de diffusion des sédiments charriés.



## Width of laminar laboratory rivers

G. Seizilles, O. Devauchelle,<sup>a)</sup> E. Lajeunesse, and F. Métévier  
*Institut de Physique du Globe de Paris, 1 rue Jussieu, 75238 Paris cedex 05,  
 France*

(Dated: 18 April 2013)

A viscous fluid flowing over plastic grains spontaneously generates single-thread channels. With time, these laminar analogues of alluvial rivers reach a reproducible steady state, showing a well-defined width and cross section. In the absence of sediment transport, their shape conforms with the threshold hypothesis which states that, at equilibrium, the combined effects of gravity and of flow-induced stress maintain the bed surface at the threshold of motion. This theory explains how the channel selects its size and slope for a given discharge. In its light, laboratory rivers illustrate the similarity between the avalanche angle of granular materials and Shields's criterion for sediment transport.

### I. INTRODUCTION

As alluvial rivers carve their bed in the sediment they carry, they show a beautiful variety of shapes and sizes<sup>1</sup>. The interaction between water flow and sediment transport spontaneously generates a specific morphology and selects a characteristic scale, in a remarkable illustration of morphogenesis<sup>2,3</sup>. When the sediment discharge increases, rivers typically develop a network of closely intertwined threads to produce a braided pattern<sup>4-6</sup>. Conversely, at moderate transport rates, alluvial rivers exhibit a well-defined channel over distances much longer than their width. The morphology of single-thread rivers obeys empirical scaling laws<sup>7,8</sup> such as Lacey's equation<sup>9</sup>, which states that the width of a river is proportional to the square root of its discharge. This universal behavior suggests a common physical origin<sup>10</sup>, yet there is no consensus about what this origin is.

A simple way to explain Lacey's law is to assume that the river bed is at the threshold of sediment transport<sup>11-13</sup>. According to this theory, the sum of gravity and fluid friction maintains the sediment exactly at the threshold of motion, everywhere across the river bed. For a given discharge, this mechanism sets the width and the streamwise slope of a channel. Despite its simplicity, this theory accords well with field data<sup>14-16</sup>, at least in order of magnitude. However, it is often considered incomplete, as it cannot account for sediment transport<sup>17</sup> while most alluvial rivers are active. In addition, the threshold theory neglects many aspects of natural streams, such as bank cohesion and vegetation, sediment heterogeneity or variations of the water discharge. It is therefore delicate to discriminate between theories on the basis of field measurements only<sup>18,19</sup>.

Laboratory flumes imitate natural rivers, while vastly reducing the number of parameters susceptible to influence their shape<sup>20,21</sup>. This relative simplicity facilitates the physical interpretation of experimental observations. As long as the experimental set-up preserves the essential

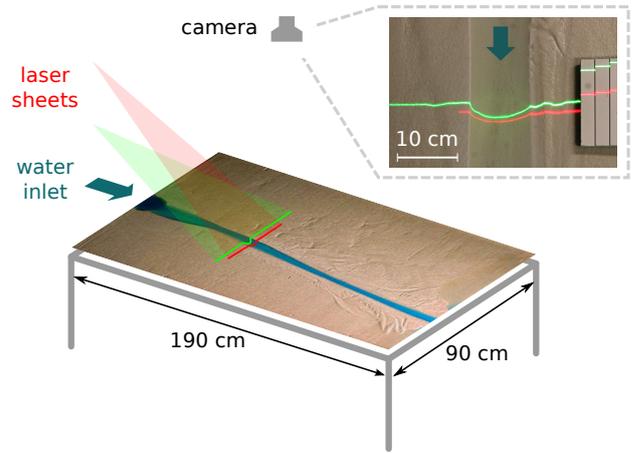


FIG. 1. Schematic view of the experimental set-up. Inset: top view of a laminar river, with the two laser sheets used to measure the cross-section.

processes, laboratory experiments can greatly help us to understand natural rivers.

Most laboratory flumes form braids<sup>22,23</sup>, probably due to the growth of unstable bedforms<sup>24</sup>. To maintain a single channel, Ikeda halved his flume with a solid wall<sup>25</sup>. Here, we combine a viscous fluid with low-density sediment grains to increase the saturation length of sediment transport, and thus stabilize the bed<sup>26,27</sup>. As a result, our experimental set-up spontaneously generates stable single-thread channels. We use these channels to evaluate the threshold hypothesis.

### II. LABORATORY RIVERS

The experimental set-up consists of an inclined plane ( $190 \times 90$  cm) covered with an initially flat layer of plastic sediment (fig. 1). We use plastic grains (density  $\rho_s \approx 1520 \pm 50 \text{ g L}^{-1}$ , grain diameter  $d_s \approx 220 \pm 80 \mu\text{m}$ ) to reduce their density, and thus increase the typical distance a grain travels over when transported by the flow. The grains are irregularly shaped. At the outlet, the sediment layer is held by a 25 mm-high slat, over which

<sup>a)</sup>Electronic mail: devauchelle@ipggp.fr

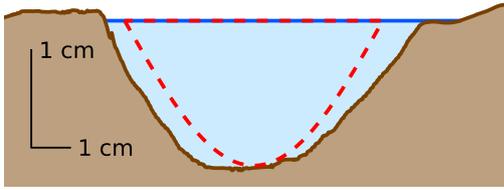


FIG. 2. Example of a laminar river cross-section at equilibrium. The brown and blue lines show the sediment bed elevation and the average position of the water surface, respectively. The discharge is  $Q_w = 1.1 \text{ L min}^{-1}$ . The red line shows the theoretical cross-section (equations (9) and (13)).

water runs before leaving the experiment. The sediment layer is always thicker than the river depth.

An experiment begins when water is allowed to flow over the sediment bed at a constant discharge. To increase the viscosity of the fluid, we mix glucose and water (about 50% in weight, viscosity  $\nu \approx 15 \cdot 10^{-6} \pm 5 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-2}$ , density  $\rho_f \approx 1220 \pm 30 \text{ g L}^{-1}$ ). This maintains the Reynolds number at a low value, and guarantees that the flow remains laminar ( $\text{Re} \approx 20 - 50$ , calculated with the flow depth). Additionally, a high viscosity further increases the sediment travel distance.

During the first minutes of an experiment, the flow spreads over the entire sediment surface, forming a uniform sheet of water. After a few tens of minutes, a favored flow path appears near the center of the experiment. As sediment is further removed from this higher-flow area, a channel becomes apparent. Around it, the sediment surface emerges from the flow.

During the next day or two, the channel gets narrower and deeper, as it transports less and less sediment, until it reaches its equilibrium state (no visible moving grains). At equilibrium, a channel is a few centimeters wide, depending on the fluid discharge. In most experimental runs, the channel is a single straight thread, although some rivers show a weak sinuosity and multiple threads near the outlet.

The channel planform is typically smooth, with a well-defined width (fig. 1). The inlet deforms the channel morphology over 5 to 20 cm, a distance much larger than the expected saturation length for sediment transport (about the grain size in a viscous flow<sup>28</sup>). The influence of the outlet extends upstream over a comparable distance.

The equilibrium state of the channel does not depend significantly on the initial conditions. Imperfections of the sediment layer do not seem to force the final position of the stream, nor does an initially fabricated channel. If the plane is steeper than the equilibrium slope, the channel incises the sediment layer in the neighborhood of the water inlet and deposits sediment near the outlet, creating a small alluvial fan. If, conversely, the initial slope is too low, the channel reaches its equilibrium slope with the inverse configuration. In both cases, the time to equi-

librium increases. We therefore start each experiment as close to the equilibrium slope as possible, by trial and error.

Once the channel has reached equilibrium, we measure its cross section with two laser sheets at different incidence angles (fig. 1). This technique yields both the sediment bed elevation and the position of the water surface<sup>29</sup>. Most channels have a regular and symmetrical cross-section (fig. 2), perturbed only by low-amplitude bedforms or miniature terraces created by the lateral displacement and the narrowing of the channel. In some cases, the river has created small levees in the deposition zone.

Overall the experiments are very reproducible. The channel width is chiefly controlled by the water discharge, and it varies by less than 30% along the river (except near the plane limits).

### III. RIVERS AT THRESHOLD

Our experimental rivers slowly evolve towards a stationary shape, which does not depend significantly on the initial conditions. This behavior suggests that, at the end of an experiment, the channel has reached a mechanical equilibrium. We suggest that this equilibrium corresponds to the theory first proposed by Glover and Florey<sup>11</sup>, namely that the river bed is at threshold for sediment transport.

In this section, we re-derive the threshold theory from basic principles, in order (i) to adapt it to laminar flows, and (ii) to relate the Shields parameter, which defines the threshold for sediment transport, to the avalanche angle of granular materials.

#### A. Avalanche angle and Shields parameter

The conical shape of a heap of dry sand is determined, at first order, by the avalanche angle of the sand. This angle materializes the equilibrium of a grain lying at the surface of the heap and submitted to gravity. The tangential force  $\mathbf{f}_t$  tends to dislodge the grain, whereas the normal force  $\mathbf{f}_n$  holds the grain in place. The maximum slope a heap can sustain defines the Coulomb friction coefficient  $\mu$  as

$$\mu = \frac{\|\mathbf{f}_t\|}{\|\mathbf{f}_n\|} = \tan \phi_r \quad (1)$$

where  $\phi_r$  is the avalanche angle. The slope of a slowly-built heap of our sediment corresponds to a friction coefficient of  $\mu \approx 0.7$ , a typical value for a non-cohesive granular material.

When a flow applies a force on a grain, the same reasoning holds. A fluid flowing above a horizontal layer of sediments applies a tangential force to each grain, of norm

$$\|\mathbf{f}_t\| = \alpha d_s^2 \tau \quad (2)$$

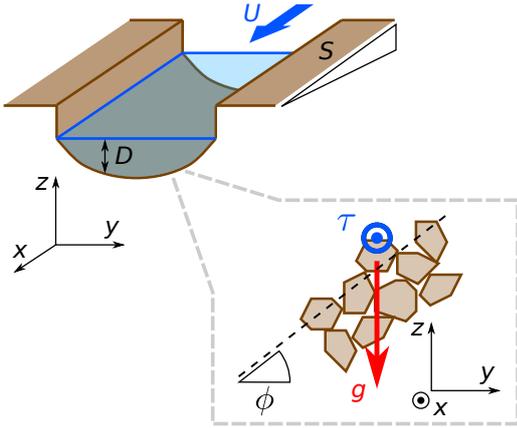


FIG. 3. Schematic representation of a laboratory river. Both the depth  $D$  and the velocity  $U$  are functions of the transverse coordinate  $y$ . The river is invariant in the streamwise direction  $x$ .

where  $d_s$ ,  $\tau$  and  $\alpha$  are the grain diameter, the shear stress applied by the flow and a coefficient of order one, respectively. The coefficient  $\alpha$  depends on the grain's shape, and on the Reynolds number of the flow around it. At low grain Reynolds number ( $\text{Re}_s = d_s^2 \tau / (\rho_f \nu^2)$ ), we expect no vertical force on the grain other than weight and buoyancy. The normal force thus reads

$$\|\mathbf{f}_n\| = \beta (\rho_s - \rho_f) g d_s^3 \quad (3)$$

where  $g$  and  $\beta$  are the acceleration of gravity and a shape factor of order 1 respectively. At the threshold of motion, the ratio of tangential and normal forces equals the critical friction coefficient. This relationship is usually expressed with the Shields parameter and its threshold value  $\theta_t$ <sup>30</sup>:

$$\frac{\tau}{(\rho_s - \rho_f) g d_s} = \frac{\beta}{\alpha} \mu \equiv \theta_t. \quad (4)$$

The threshold Shields parameter depends weakly on the grain Reynolds at the grain scale, with typical values between 0.01 (turbulent flow) and 0.3 (viscous flow<sup>31</sup>). We have measured the threshold of motion for our plastic sediment in an independent 3 cm-wide, hard-walled channel. At a grain Reynolds number of  $\text{Re}_s \approx 0.03$ , we find  $\theta_t \approx 0.25$ .

Equation (4) illustrates the fundamental equivalence between the threshold for sediment transport, and the onset of avalanches in dry granular materials<sup>32</sup>. This equivalence manifests itself in the geometry of laminar rivers.

## B. Equilibrium theory

As long as we consider a horizontal layer of sediments, the shape factors  $\alpha$  and  $\beta$  may seem artificial, since exper-

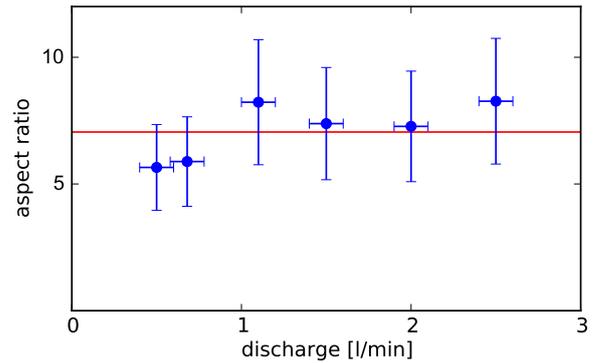


FIG. 4. Aspect ratio of laminar laboratory rivers at equilibrium, as a function of the water discharge (blue dots). The red line corresponds to the theoretical aspect ratio  $\pi^2 / (2\mu) \approx 7.0$ . Each data point is the average of 2 or 3 cross-sections measured on the same river (for the fifth run only, width and depth were measured with a ruler). The width varies by less than 30% along the river (vertical error bars). During an experiment, the water discharge varies by less than  $0.1 \ell \text{ min}^{-1}$  (horizontal error bars).

iments yield directly the critical Shields parameter (although Shields himself introduces shape factors<sup>30</sup>). However, the configuration of alluvial rivers requires that we explicitly distinguish between the effect of gravity and the effect of the flow.

We consider a straight laminar river, which has carved its bed in a layer of uniform sediment (fig. 3). We further assume that the equilibrium channel is such that, everywhere across the bed, sediment grains are at the threshold of motion. Noting that gravity and the flow-induced stress are orthogonal components of the tangential force, the threshold condition reads

$$\left( \frac{\alpha \tau}{\beta (\rho_s - \rho_f) g d_s} \right)^2 + \sin^2 \phi = \mu^2 \cos^2 \phi \quad (5)$$

where  $\phi$  is the angle of the bed with respect to the horizontal, in the transverse direction. We have neglected the longitudinal slope of the river in the expression of the grain weight (the effect of slope is embedded in the fluid friction only). In our experiments, the resulting error is less than 1%.

The shear stress  $\tau$  results from the flow which, in turn, depends on the river's shape. Equation (5) thus defines a free-boundary problem—the channel cross-section must be such that the flow satisfies it. At low Reynolds number, the flow in a straight channel is laminar and satisfies a two-dimensional Poisson equation in the transverse plane ( $y, z$ ). However, the exact two-dimensional free-boundary problem is not solvable analytically, and proves numerically challenging. For the sake of simplicity, we assume that the channel is flat enough to use the shallow-water approximation (that is, we neglect the cross-stream transfer of momentum). Consequently, the

fluid friction on the river bed balances gravity:

$$\tau = \rho_f g S D \quad (6)$$

where  $S$  is the longitudinal slope of the channel. In accordance with the shallow-water approximation, the transverse slope is moderate ( $\cos \phi \approx 1$ ) and equation (5) becomes a first-order differential equation:

$$\left(\frac{SD}{L}\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)^2 = \mu^2 \quad (7)$$

where we define the characteristic length

$$L = \frac{\theta_t (\rho_s - \rho_f) d_s}{\mu \rho_f} \quad (8)$$

based on equation (4). This length, which depends on the sediment only, is of the order of the grain size (except for almost buoyant materials). After equation (7), the typical scale of the channel is  $L/S$ . A small slope thus induces a clear separation between the grain scale and the channel size.

A solution to the differential differential equation (7) is

$$D = \frac{\mu L}{S} \cos\left(\frac{Sy}{L}\right). \quad (9)$$

The cross-section of our laboratory channels resemble a cosine (fig. 2). More specifically, the theory predicts an aspect ratio of  $\pi^2/(2\mu) \approx 7.0$  (width over average depth), regardless of the water discharge. Despite considerable scatter in the data, our experiments conform to this prediction reasonably (fig. 4).

According to equation (9), the banks are at the angle of repose. This remark holds beyond the shallow-water approximation, since the fluid friction vanishes at the bank.

As illustrated by equation (7), a river at threshold embodies the two end-members of a grain equilibrium: the force balance introduced by Shields at the center of the channel ( $\partial D/\partial y = 0$ ), and Coulomb's equilibrium at the banks ( $D = 0$ ).

### C. Scaling laws for laminar rivers

So far, the threshold hypothesis predicts the river's shape, but not its size. Indeed, the scale of the cosine channel represented by equation (9) depends on the river slope  $S$ . To go further, we need to consider the mass and momentum balances for the fluid.

According to the shallow-water approximation (also referred to as the "lubrication approximation" for viscous flows), the fluid friction at the bottom of the channel balances gravity. The resulting Poiseuille flow satisfies

$$\frac{3\nu U}{D} = g S D, \quad (10)$$

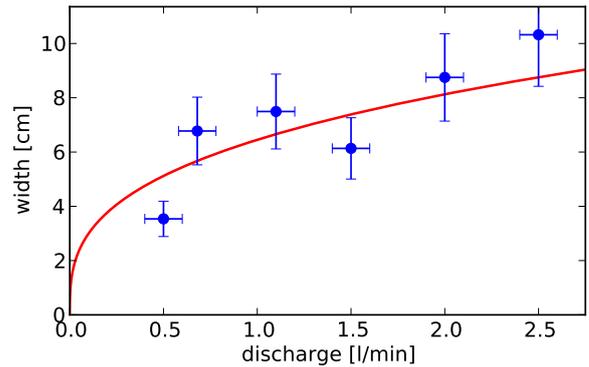


FIG. 5. Width of laboratory rivers as a function of discharge (blue dots). The red line corresponds to the threshold theory, without any fitted parameter (equation (13)). Each data point is the average of 2 or 3 cross-sections measured on the same river (for the fifth run only, width and depth were measured with a ruler). The width varies by less than 30% along the river (vertical error bars). During an experiment, the water discharge varies by less than  $0.1 \ell \text{ min}^{-1}$  (horizontal error bars).

where  $U$  is the vertically-averaged water velocity. Finally, the discharge reads

$$Q_w = \int_{\text{channel}} U D dy. \quad (11)$$

In combination with the momentum balance (10) and the threshold cross-section (9), the water mass balance yields two scaling laws:

$$S = \left(\frac{\theta_t (\rho_s - \rho_f) d_s}{\rho_f}\right)^{4/3} \left(\frac{4g}{9\mu\nu Q_w}\right)^{1/3} \quad (12)$$

$$W = \frac{\pi L}{S} = \frac{\pi}{\mu^{2/3}} \left(\frac{9\nu\rho_f Q_w}{4g\theta_t(\rho_s - \rho_f)d_s}\right)^{1/3}. \quad (13)$$

Equation (13) is the equivalent of Lacey's law for a laminar river, where the cubic root of the water discharge takes the place of the classical square root dependence.

Our experimental data gather around this prediction (fig. 5). Its significant dispersion results from the actual variability of the river width, rather than from measurement uncertainties. Indeed, the widest cross-section of a river can be 30% wider than the narrowest one, whereas the measurement uncertainty is of the order of the capillary length only (a few millimeters).

With our experimental set-up, discharges smaller than  $0.5 \ell \text{ min}^{-1}$  or larger than  $2.5 \ell \text{ min}^{-1}$  are impracticable. As a consequence, the data do not constrain strongly the exponent of the width-discharge relation. However, the threshold theory correctly predicts both its order of magnitude and its trend, without any fitted parameter. We thus believe that the balance between shear stress

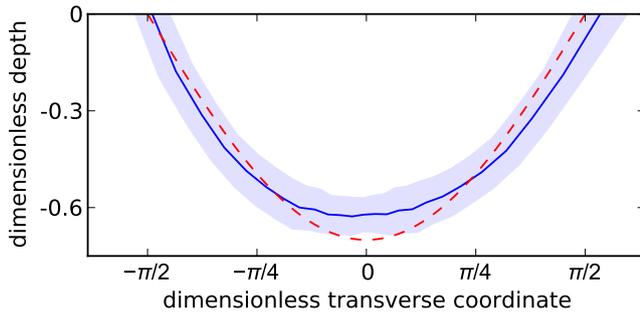


FIG. 6. Average cross-section of laboratory rivers. For each water discharge, the cross-section is re-scaled with  $L/S$  (equations (8) and (12)). The average is computed in polar coordinates relative to the center of the cross-section. The shaded area indicates the variance of the cross-sections sample. Red dashed line: cosine cross-section predicted by equation (9).

and fluid friction embodied by equation (7) sets the size of our laboratory rivers.

Assuming this is correct, we use equations (8) and (12) to rescale the measured cross-section according to the water discharge. Doing so for each run, we then compute the mean cross-section for all our experiments (fig. 6). The resulting shape resemble a cosine, with a more rounded base. This slight disagreement might result from the flow two-dimensionality, which we have neglected to derive the cosine cross-section.

According to equation (12), the discharge of a river not only sets its size, but also imposes its slope. Unfortunately, assessing this prediction experimentally is difficult. In our experiments, we expect a slope of about  $10^{-3}$ ; over the entire river, this corresponds to a change of about a millimeter in bed elevation. We have not reached this accuracy, despite an attempt with a moiré technique<sup>33</sup>. However, before each experiment, we set the slope of the initial flat bed close to its theoretical value. If the initial bed is too steep, the river incises deeply into the sediment layer near the water inlet. Conversely, too small a slope generates an alluvial fan near the inlet, indicating deposition. These observations suggest that the river tends towards an equilibrium slope.

#### IV. DISCUSSION AND CONCLUSION

The characteristic size and shape of laminar laboratory channels accord closely with the threshold theory of alluvial rivers. This need not have been the case, for two reasons at least. First, the shallow-water hypothesis is a rather severe approximation, especially since we expect the slope to reach the avalanche angle at the bank. Second, the cosine solution to the equilibrium equation (7) is not unique. Indeed, as Henderson pointed out, a flat section at threshold enclosed with two half cosines is also a solution<sup>12</sup>. To understand why the narrowest solution

is selected, we need to consider the path towards equilibrium. To take this history into account, we must add sediment transport to the theory.

The threshold theory has been compared with reasonable success to field data<sup>14,15</sup>, suggesting that the force balance it is based on sets the shape of alluvial streams. However, the aspect ratio of most rivers is significantly larger than the theoretical value. Since alluvial rivers generally transport a non-vanishing load of sediments, the threshold theory appears as a limit case that explains the orders of magnitudes, but still lacks an ingredient.

Assuming that the bed is slightly above threshold in the framework proposed here leads to a paradox: moving particles would be pulled towards the middle of the channel by gravity, thus preventing equilibrium<sup>17</sup>. Various mechanisms have been invoked to compensate for gravity: suspended particle diffusion<sup>34</sup>, diffusion of lateral momentum<sup>17</sup> or riparian vegetation<sup>35</sup>. None of them, though, applies to laminar laboratory rivers, and the stable channel paradox remains a stimulating question for future investigations.

#### ACKNOWLEDGMENTS

We are grateful to A. Limare, H. Bouquerel, Y. Gambin, T. Rivet and A. Vieira for building the experimental setup, and developing the measurement methods. We also thank P. Y. Lagrée and Y. Klinger for stimulating suggestions. O. D. would like to thank A. P. Petroff, H. Seybold and D. H. Rothman for fruitful discussions.

- <sup>1</sup>M. Church, “Bed material transport and the morphology of alluvial river channels,” *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* **34**, 325–354 (2006).
- <sup>2</sup>M. Cross and H. Greenside, *Pattern formation and dynamics in nonequilibrium systems* (Cambridge University Press New York, 2009).
- <sup>3</sup>J.P. Gollub and JS Langer, “Pattern formation in nonequilibrium physics,” *Reviews of Modern Physics* **71**, 396–403 (1999).
- <sup>4</sup>J.H. Mackin, “Concept of the graded river,” *Geological Society of America Bulletin* **59**, 463–512 (1948).
- <sup>5</sup>S.A. Schumm, M.P. Mosley, and W. Weaver, “Experimental fluvial geomorphology,” (1987).
- <sup>6</sup>F. Métivier and L. Barrier, “Alluvial landscape evolution: What do we know about metamorphosis of gravel-bed meandering and braided streams?,” *Gravel-Bed Rivers*, 474–501(2010).
- <sup>7</sup>L. B. Leopold and T. Maddock, *The hydraulic geometry of stream channels and some physiographic implications*, Vol. 252 (US Govt. Print. Off., 1953).
- <sup>8</sup>Gary Parker, Peter R. Wilcock, Chris Paola, William E. Dietrich, and John Pitlick, “Physical basis for quasi-universal relations describing bankfull hydraulic geometry of single-thread gravel bed rivers,” *Journal of Geophysical Research* **112** (2007).
- <sup>9</sup>G Lacey, “Stable channels in alluvium,” (1930).
- <sup>10</sup>C. Paola and M. Leeder, “Simplicity versus complexity,” *Nature* **469** (2011).
- <sup>11</sup>R. E. Glover and Q. L. Florey, “Stable channel profiles,” *U. S. Bur. Reclamation, Hydr.* **325** (1951).
- <sup>12</sup>F. M. Henderson, “Stability of alluvial channels,” *J. Hydraulics Div., ASCE* **87**, 109–138 (1961).
- <sup>13</sup>H Savenije, “The width of a bankfull channel; lacey’s formula explained,” *Journal of Hydrology* **276**, 176 (2003).

- <sup>14</sup>E. D. Andrews, "Bed-material entrainment and hydraulic geometry of gravel-bed rivers in Colorado," *Bulletin of the Geological Society of America* **95**, 371 (1984).
- <sup>15</sup>O. Devauchelle, A. P. Petroff, A. E. Lobkovsky, and D. H. Rothman, "Longitudinal profile of channels cut by springs," *Journal of Fluid Mechanics* **667**, 38 (2011).
- <sup>16</sup>A. P. Petroff, O. Devauchelle, A. Kudrolli, and D. H. Rothman, "Four remarks on the growth of channel networks," *Comptes Rendus Geoscience* **344**, 33–40 (2012).
- <sup>17</sup>G. Parker, "Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. part 2. the gravel river," *Journal of Fluid Mechanics* **89**, 127–146 (1978).
- <sup>18</sup>M. S. Yalin and A. M. F. da Silva, *Fluvial processes* (IAHR (International Association of Hydraulic Engineering and Research), Delft, 2001).
- <sup>19</sup>R. G. Millar, "Theoretical regime equations for mobile gravel-bed rivers with stable banks," *Geomorphology* **64**, 207–220 (2005).
- <sup>20</sup>L. Malverti, E. Lajeunesse, and F. Métivier, "Small is beautiful: upscaling from microscale laminar to natural turbulent rivers," *Journal of Geophysical Research* **113**, F04004 (2008).
- <sup>21</sup>E. Lajeunesse, L. Malverti, P. Lancien, L. Armstrong, F. Métivier, S. Coleman, C. E. Smith, T. Davies, A. Cantelli, and G. Parker, "Fluvial and submarine morphodynamics of laminar and near-laminar flows: A synthesis," *Sedimentology* **57**, 1–26 (2009).
- <sup>22</sup>L.B. Leopold and M.G. Wolman, *River channel patterns: braided, meandering, and straight* (US Government Printing Office Washington (DC), 1957).
- <sup>23</sup>B. Federici and C. Paola, "Dynamics of channel bifurcations in noncohesive sediments," *Water Resources Research* **39**, 1162 (2003).
- <sup>24</sup>O. Devauchelle, C. Josserand, P.Y. Lagrée, and S. Zaleski, "Morphodynamic modeling of erodible laminar channels," *Physical Review E* **76**, 056318 (2007).
- <sup>25</sup>S. Ikeda, "Self-formed straight channels in sandy beds," *Journal of the Hydraulics Division* **107**, 389–406 (1981).
- <sup>26</sup>F. Charru, "Selection of the ripple length on a granular bed sheared by a liquid flow," *Physics of Fluids* **18**, 121508 (2006).
- <sup>27</sup>O. Devauchelle, L. Malverti, E. Lajeunesse, P.Y. Lagrée, C. Josserand, and K.D.N. Thu-Lam, "Stability of bedforms in laminar flows with free surface: from bars to ripples," *Journal of Fluid Mechanics* **642**, 329–348 (2010).
- <sup>28</sup>F. Charru, H. Mouilleron, and O. Eiff, "Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow," *Journal of Fluid Mechanics* **519**, 55 (2004).
- <sup>29</sup>A. Fourrière, *Morphodynamique des rivières: Sélection de la largeur, rides et dunes.*, Ph.D. thesis, Université Paris Diderot (2009).
- <sup>30</sup>A. Shields, W. P. Ott, and J. C. van Uchelen, "Application of similarity principles and turbulence research to bed-load movement," (1936).
- <sup>31</sup>A.E. Lobkovsky, A.V. Orpe, R. Molloy, A. Kudrolli, and D.H. Rothman, "Erosion of a granular bed driven by laminar fluid flow," *Journal of Fluid Mechanics* **605**, 47–58 (2008).
- <sup>32</sup>T. Loiseleux, P. Gondret, M. Rabaud, and D. Doppler, "Onset of erosion and avalanche for an inclined granular bed sheared by a continuous laminar flow," *Physics of Fluids* **17**, 103304 (2005).
- <sup>33</sup>A. Limare, M. Tal, M.D. Reitz, E. Lajeunesse, and F. Métivier, "Optical method for measuring bed topography and flow depth in an experimental flume," *Solid Earth Discussions* **3**, 187–215 (2011).
- <sup>34</sup>G. Parker, "Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. part 1. the sand-silt river," *J. Fluid Mech* **89**, 109–125 (1978).
- <sup>35</sup>M. Tal and C. Paola, "Dynamic single-thread channels maintained by the interaction of flow and vegetation," *Geology* **35**, 347–350 (2007).

# Cross-stream diffusion in bedload transport

Grégoire Seizilles,<sup>1</sup> Eric Lajeunesse,<sup>1</sup> Olivier Devauchelle,<sup>1</sup> and Mike Bak<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institut de Physique du Globe - Sorbonne Paris Cité, Equipe de Dynamique des fluides géologiques, 1 rue Jussieu, 75238 Paris cedex 05, France.*

<sup>2</sup>*Department of Earth and Environmental Science, University of Pennsylvania, 154A Hayden Hall/6316, 240 S. 33rd St., Philadelphia, PA 19104*

(Dated: 17 April 2013)

We investigate experimentally the statistical properties of bedload transport induced by a steady, uniform and laminar flow. We restrict our analysis to experiments where the flow-induced shear stress is just above the threshold for sediment transport. We find that, in this regime, the concentration of moving particles is low enough to neglect interactions between themselves. We can therefore represent bedload as a thin layer of independent walkers traveling over the bed surface. In addition to their downstream motion, the particles show significant fluctuations of their cross-stream velocity, likely due to the roughness of the underlying sediment bed. This causes particles to disperse laterally. Based on thousands of individual trajectories, we show that this lateral spreading is the manifestation of a random walk, which we expect to cause Fickian diffusion.

## I. INTRODUCTION

When a fluid runs over a granular bed, it applies a shear stress on the superficial layer of grains. If the stress exceeds a threshold, some grains are entrained by the flow. Their displacement then deforms the bed, and the resulting interaction between flow and sediment transport generates a beautiful variety of river shapes and coastal morphologies<sup>1-4</sup>. Understanding this process requires a sound theory of bedload transport.

At moderate shear stress, the particles move by a combination of rolling, sliding, and bouncing, while gravity maintains them close to the bed surface. The layer of entrained grains, referred to as “bedload layer”, is only a few grain diameters thick. Due to this confinement, and contrary to transport in suspension, shear stress is the primary control on bedload transport. As it increases, bedload transport intensifies<sup>5-14</sup>.

At first order, one may characterize the bedload layer by its surface concentration  $n$  (the number of moving particles per unit bed surface) and its average velocity  $V_x$ . The bedload flux  $q_x$  then reads

$$q_x = V_x n, \quad (1)$$

where both the surface concentration and the average grain velocity depend on the intensity of the shear stress<sup>15,16</sup>.

The interpretation of bedload transport embodied by equation (1) proves reasonable over a broad range of shear stress<sup>15-17</sup>. It can be extended to sediments with multiple grain sizes<sup>18</sup> and to out-of-equilibrium systems<sup>19-21</sup>. Treating the bedload layer as a uniform ensemble of moving particles, one can establish a statistical theory of bedload transport<sup>22-25</sup>. At high shear stress, however, the bedload layer becomes vertically stratified<sup>26</sup>. Equation (1) then breaks down, and must be replaced with a vertical integral.

As bedload particles move downstream, their cross-stream velocity fluctuates and they disperse laterally. Prior authors noted this behavior in their experiments but, as far as we know, it has received only incidental attention<sup>15,16,23</sup>. Here we track bedload particles in a laminar laboratory channel. From their horizontal trajectories, we evaluate the statistics of bedload motion, focusing chiefly on lateral spreading.

This statistical approach is relevant only if we neglect all interactions between moving particles, so that the macroscopic transport is only the superposition of independent trajectories. We expect this assumption to hold in the low concentration limit ( $n d_s^2 \ll 1$ , where  $d_s$  is the grain size), that is, when the shear stress hardly suffices to transport a few particles. Fortunately, a low concentration also simplifies particle tracking. Therefore, the experiments and the theory presented here are restricted to near-threshold conditions. We believe this is typical of

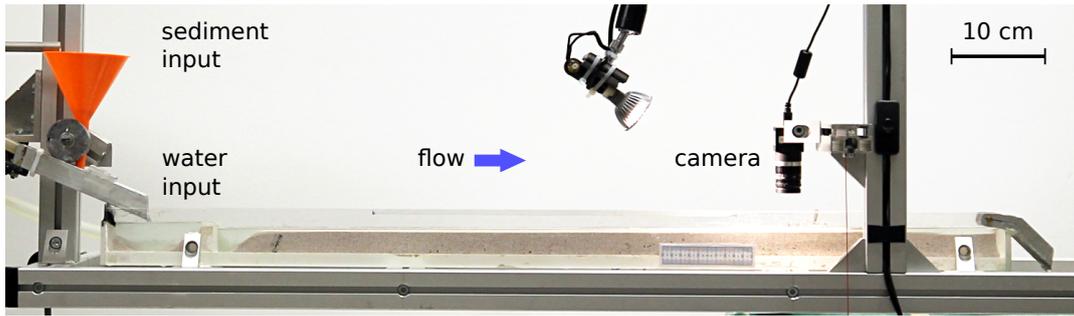


FIG. 1. Experimental laminar channel. Water and sediments are introduced at constant rate from the left end. The video camera records the trajectories of bedload particles through the water surface.

many natural systems, since alluvial rivers often maintain their bed just above the threshold of motion<sup>27–29</sup>.

## II. TRANSPORT NEAR THRESHOLD

### A. Experimental set-up

A straight channel (length 1 m, width  $W = 3$  cm, figure 1) is filled with irregularly shaped plastic grains (density  $\rho_s = 1520 \pm 50$  g/L, diameter  $d_s = 344 \pm 90$   $\mu$ m). As water flows above the 3 cm-thick granular layer, superficial grains are entrained towards the outlet, while their trajectory is recorded with a video camera. We introduce water and grains at constant rate ( $Q_w$  and  $Q_s$ , respectively) at the upstream end of the channel. At the outlet, the sediment layer is held by a 3 cm slat over which water and sediments runs to exit the channel. Assuming that sediment transport is homogeneous across the channel, the local particle flux reads

$$q_x = \frac{Q_s}{W}, \quad (2)$$

where  $Q_s$  is expressed in grains per second ( $s^{-1}$ ). After about one day, the experiment reaches its equilibrium regime (the bed elevation does not evolve any more).

As the flow-induced shear stress increases, more grains are entrained and the sediment discharge increases (figure 2). In most experimental set-ups, the shear stress is imposed and the sediment flux varies accordingly<sup>16</sup>. Here we impose the sediment discharge and measure the shear stress, once the experiment has reached equilibrium. This method allows us to sustain long experiments without recirculating the sediments<sup>15</sup>.

The flow is only a few millimeters deep, thus maintaining the Reynolds number  $Re = Q_w/(W\nu)$  between 500 and 1400 (where  $\nu$  is the viscosity of water). The particle Reynolds number  $Re_s = u d_s/\nu$  is about 25 ( $u$  is the flow velocity at the grain scale). Injecting dye in the channel indicates that the flow is laminar. Assuming a parabolic velocity profile, the shear stress  $\tau$  reads

$$\tau = \rho (S g)^{2/3} \left( \frac{3 Q_w \nu}{W} \right)^{1/3} \quad (3)$$

where  $\rho$ ,  $S$  and  $g$  are the density of water, the bed slope, and the gravity acceleration respectively. Measuring the average bed slope with respect to a plumb line, we evaluate the shear stress with an accuracy of about 10%.

### B. Erosion and deposition

If the flow-induced stress is strong enough to overcome the weight of a bed particle, the latter is entrained as bedload. This is usually expressed in terms of the Shields parameter  $\theta$ , that is,

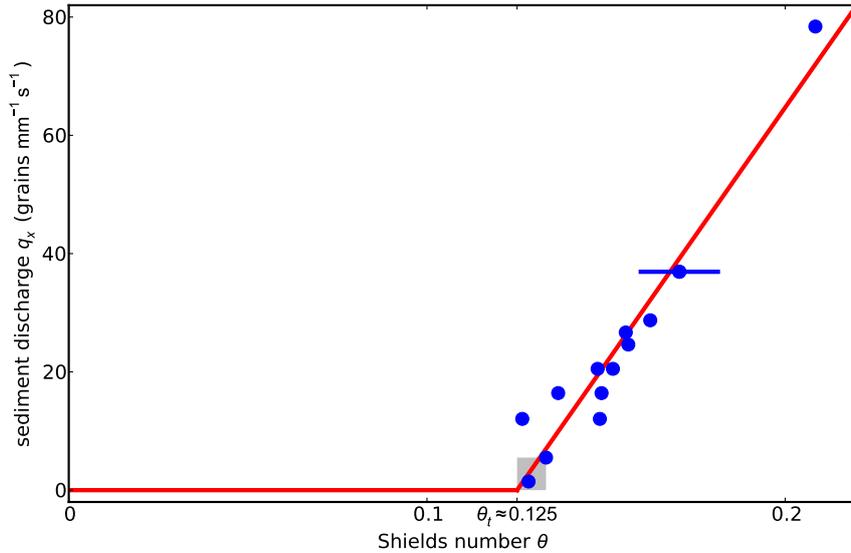


FIG. 2. Imposed bedload flux  $q_x$  as a function of the measured Shields parameter  $\theta$  (blue dots). The transport law (13) is fitted to the data (red line,  $q_x = \alpha V_s \theta_t (\theta - \theta_t)/d_s^2$  with  $\alpha = 0.025$  and  $\theta_t = 0.125$ ). The particle tracking experiments are limited to the shaded area.

the ratio of the shear stress to the weight of a grain<sup>5</sup>:

$$\theta = \frac{\tau}{(\rho_s - \rho) g d_s}. \quad (4)$$

Bedload transport starts when the Shields parameter crosses the threshold  $\theta_t$ , and further increases with shear stress (figure 2). According to equation (1), this increase results either from faster particles, from a more concentrated bedload layer, or from any combination of the two. In the following, we reinterpret the erosion-deposition model<sup>15,16</sup> to identify what primarily controls bedload transport in the neighborhood of the threshold.

The flow applies a viscous drag  $f_\nu$  on the bed particles. As a bed particle gets entrained, the viscous drag is proportional to the fluid velocity  $u$  with respect to the particle velocity  $V_e$ :

$$f_\nu \sim \rho \nu d_s^2 (u - V_e). \quad (5)$$

About a grain diameter above the bed surface, the fluid velocity is proportional to the shear rate, and consequently to the shear stress:

$$u \sim d_s \frac{\partial u}{\partial z} \sim V_s \theta \quad (6)$$

where  $z$  is the vertical coordinate and  $V_s = (\rho_s - \rho) g d_s^2 / (18 \rho \nu)$  is Stokes's settling velocity (for our particles,  $V_s \approx 3.3 \text{ cm s}^{-1}$ ). When the viscous drag overcomes the particle weight, the flow entrains a bed particle. If the grain Reynolds number is low enough, we can neglect the particle inertia during the entrainment process. The viscous drag then balances gravity:

$$f_\nu \sim (\rho_s - \rho) g d_s^3 \quad (7)$$

Combined with relations (5) and (6), the above balance reads

$$V_e \sim V_s (\theta - \theta_t) \quad (8)$$

where  $\theta_t$  is, at this point, an arbitrary dimensionless coefficient. Naturally, we identify it with the threshold Shields parameter since the grain velocity vanishes when  $\theta = \theta_t$ . The above expression results from the balance between viscous drag and gravity. It is therefore valid only as long as the particle remains in contact with immobile particles, that is, during the entrainment process.

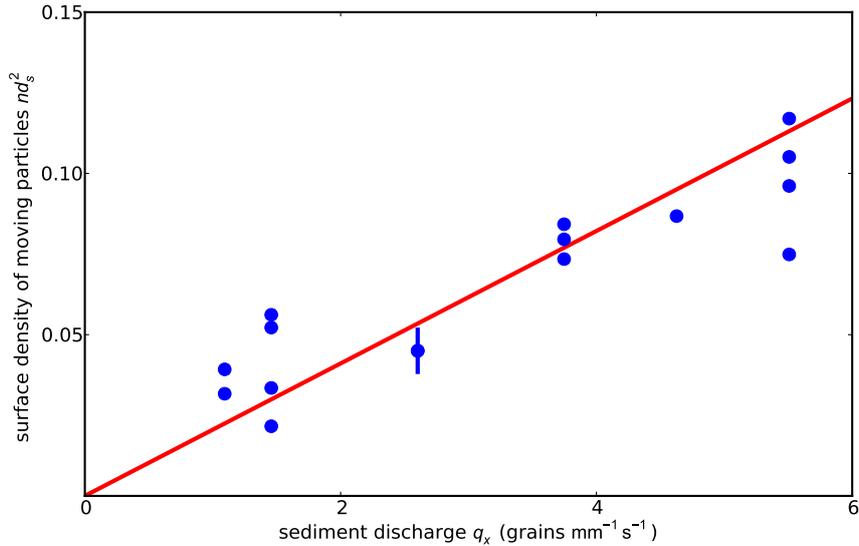


FIG. 3. Surface concentration of moving particles  $n d_s^2$  as a function of the sediment discharge  $Q_s$ . This data set corresponds to the shaded area of figure 2.

A bed particle gets entrained as bedload when it escapes its neighbors, which takes a characteristic time of about  $d_s/u_s$ . We expect the average entrainment rate to be proportional to the inverse of this time, and to the bed surface concentration  $1/d_s^2$ :

$$\dot{n}_e \sim \frac{V_s}{d_s^3} (\theta - \theta_t). \quad (9)$$

Once it has joined the bedload layer, a particle travels on average at the velocity of the fluid. After equation (6), the average velocity of bedload particles scales as

$$V_x \sim V_s \theta_t \quad (10)$$

near the threshold. At first order in  $\theta - \theta_t$ , the velocity of bedload particles is constant.

As it travels downstream, an entrained particle explores the bed surface and eventually gets trapped by immobile grains. The rate at which a particle encounters a trap scales as  $V_x/d_s$ . Consequently, we expect the settling rate per unit surface to read

$$\dot{n}_s \sim \frac{n V_s}{d_s}. \quad (11)$$

In steady state, the settling and erosion rate compensate each other ( $\dot{n}_e = \dot{n}_s$ ). Thus, according to equations (11) and (9), we find that the concentration of moving grains is proportional to the shear stress in excess of the threshold:

$$n \sim \frac{\theta - \theta_t}{d_s^2}. \quad (12)$$

Finally, after equation (1), the sediment transport rate at equilibrium reads

$$q_x = \frac{\alpha V_s \theta_t}{d_s^2} (\theta - \theta_t), \quad (13)$$

where  $\alpha$  is a dimensionless parameter. This approximation proves valid over a broad range of shear stress (figure 2). The linear extrapolation of our data yields a threshold Shields stress of about 0.12, consistent with previous reports at similar particle Reynolds number<sup>5,15,30</sup>.

The above reasoning illustrates the nature of bedload transport near the threshold: the properties of the moving particles are virtually independent of the shear stress (their average velocity

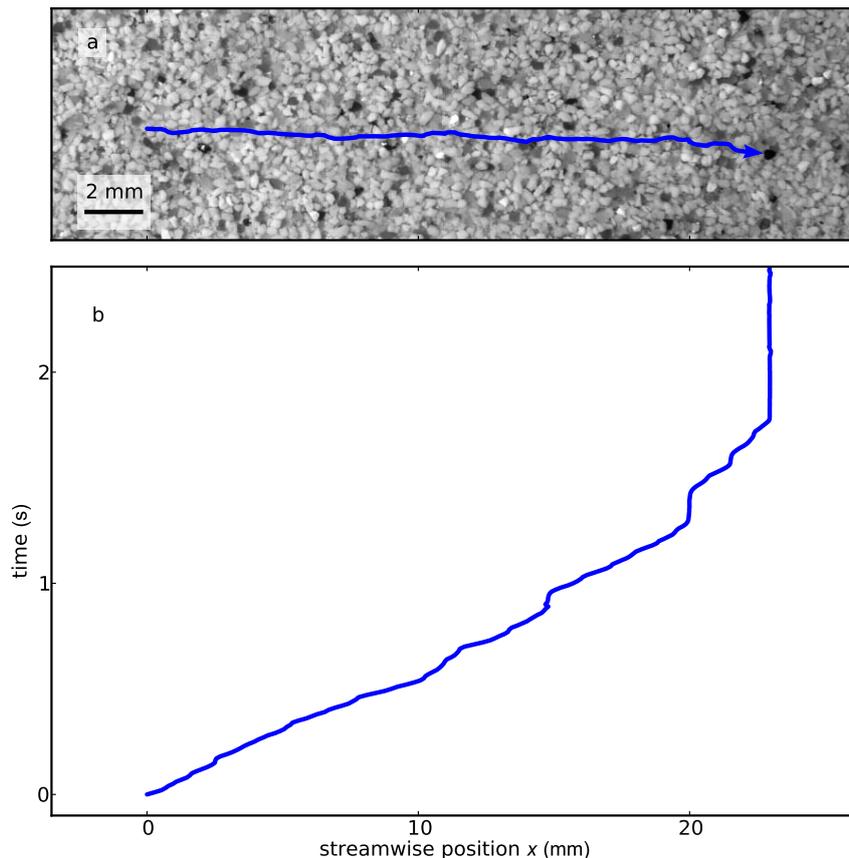


FIG. 4. (a) Particle trajectory seen through the water surface. (b) Streamwise position of the same particle  $x/d_s$  as a function of time. The final period of rest lasts more than two seconds, but was truncated for readability.

is constant). The bedload layer is thus a collection of similar particles, and sediment transport is the sum of individual particle movements. Consequently, the sediment flux increases in proportion to the concentration of moving grains, as long as the latter remains small ( $n d_s^2 \ll 1$ ). Our experiments support this interpretation (figure 3).

Measuring accurately the bottom shear stress in a channel is challenging. To the contrary, computerized image processing allows us to count moving particles accurately. Moreover, the concentration of moving particles varies by a factor of about four in our experiments, while the Shields parameter varies by less than 10% (shaded area on figure 2). Finally, the flow is not perfectly uniform across the channel, due to surface tension and viscous friction on the walls, and the average Shields parameter might not represent adequately the local flow conditions. Accordingly, we choose to characterize the state of our system by the concentration of moving grains  $n$ , as measured by image processing. To vary this parameter, we change the sediment input. The channel slope then adjusts to the sediment discharge.

### III. PARTICLE MOTION

#### A. Velocity

We record the motion of bedload particles with a camera placed above the water surface (100 frames per second,  $1024 \times 256$  pixels). To isolate individual particles, we dye about 0.5% of the grains. The proportion of dyed particles is low enough to unambiguously identify a single particle on successive pictures of the experiment, and thus to follow its trajectory (figure 4).

The center of mass of a particle is located with a precision of  $50 \mu\text{m}$  on each picture (the particle diameter corresponds to about 10 pixels).

A particle moves essentially downstream, with an intermittent pace. It alternates between motion and rest, the succession of which is randomly distributed<sup>15,16,23,31–33</sup> (figure 4). When moving, a particle rolls, slides and sometimes gets lifted a few grain diameters above the bed surface.

Although the velocity of moving particles varies significantly, we can unambiguously distinguish between the bedload layer and the immobile bed surface on successive pictures. More specifically, we label a particle as “moving” if the standard deviation of its position over four successive pictures is larger than  $0.1 d_s$ . This procedure allows us to separate actual motion from the flickering caused by small surface waves.

For each experimental run, we record about 10 independent movies, each of them containing about 5 000 frames. After separating moving particles from immobile ones, we obtain between 5 000 and 10 000 particle trajectories for each run. Since a particle flight typically lasts much longer than the time between successive frames, we can measure the velocity distribution of moving particles (figure 5). The particle streamwise velocity appears to be of the order of the settling velocity  $V_s$ , and essentially positive, in accordance with equation (10). We suspect that most negative velocities result from image processing errors (for instance, when an unmarked particle runs above an immobile marked particle, the latter appears to move backwards).

Discarding the negative velocities, an exponential function approximates reasonably the distribution  $f_x$  of streamwise velocity  $v_x$ , in accordance with previous experiments involving glass beads<sup>15</sup> or sand<sup>16,23</sup>:

$$f_x(v_x) = \frac{1}{V_x} e^{-v_x/V_x} \quad (14)$$

where  $V_x$  is the average particle velocity introduced in the mass balance equation (1). Close to the threshold for sediment transport, we find that the average particle velocity does not depend on the particle concentration (figure 6), with an average over all experiments of  $V_x/V_s = 0.38 \pm 0.03$ . This value compares favorably with equation (10) and with prior findings<sup>15</sup>. Hereafter, we only assume that the average particle velocity is well-defined and independent of  $n$ , without specifying the shape of the distribution.

As bedload particles move downstream, their cross-stream velocity  $v_y$  fluctuates around zero (figure 5). The distribution of cross-stream velocities is symmetrical, with typical velocities three times smaller than the streamwise velocity. The distribution resembles a symmetric exponential function,

$$f_y(v_y) = \frac{1}{V_y} e^{-2|v_y|/V_y} \quad (15)$$

where  $V_y$  is the standard deviation of the cross-stream velocity. Again, this distribution is consistent with previous experimental findings<sup>23</sup>. Like the streamwise velocity, the cross-stream velocity does not depend on the concentration of moving particles (figure 6), and we find a standard deviation of  $V_y/V_s = 0.12 \pm 0.02$  (average over all experiments).

## B. Cross-stream spreading

As the grains are entrained by the flow, they also disperse stochastically in the cross-stream direction (figure 7). On average, bedload particles do not move across the stream, but individual trajectories drift away from the  $x$  axis due to fluctuations of the cross-stream velocity.

To quantify the spreading of bedload particles, we track the trajectories of a large number of them ( $N \approx 7\,500$ ), and compute the variance  $\sigma_y^2$  of their position across the channel:

$$\sigma_y^2(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(x)^2 \quad (16)$$

where  $y_i(x)$  is the trajectory of the  $i$ -th particle in the horizontal plane. The trajectories are shifted so that they all start from zero ( $y_i(0) = 0$ ). The variance  $\sigma_y^2$  represents the average spreading of a particle as a function of downstream distance, regardless of travel time.

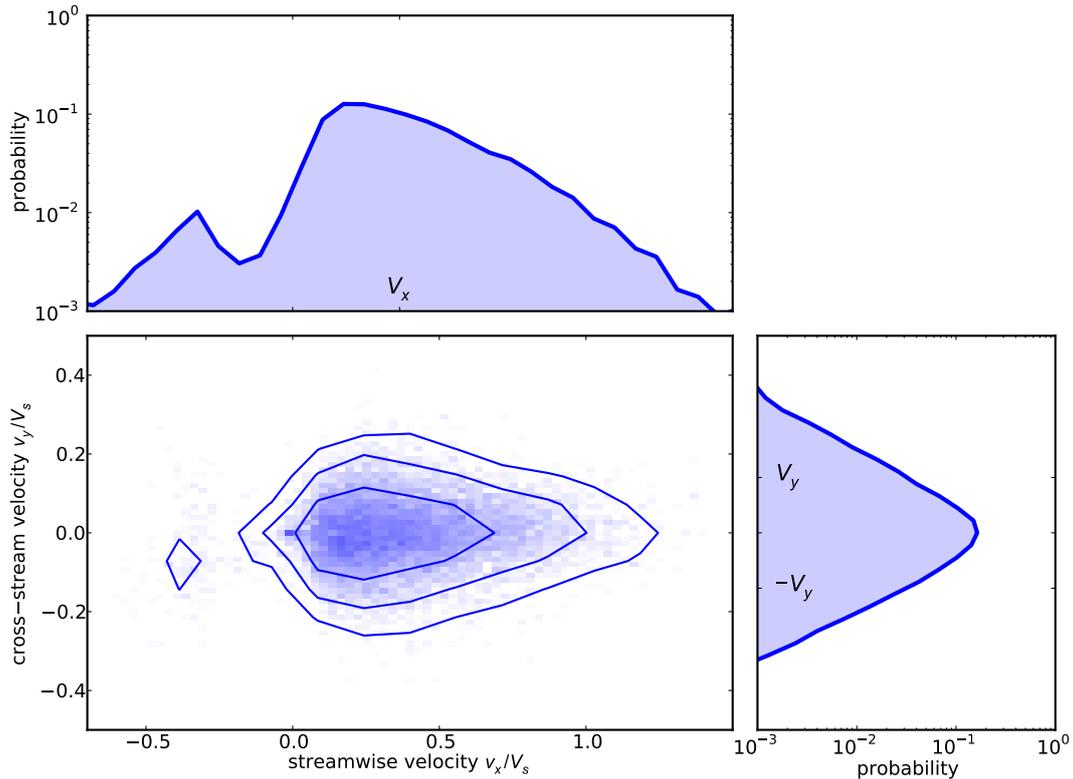


FIG. 5. Velocity distribution of moving particles, computed from about 15 000 individual velocities ( $Q_w = 2.05$  L/min and  $Q_s = 0.06$  g/min). The ticks indicate the average streamwise velocity and the cross-stream velocity variance.

We find that the variance increases linearly with the downstream distance (figure 7), which defines a diffusion length  $\ell_d$  such that

$$\sigma_y^2 = 2 \ell_d x. \quad (17)$$

For instance,  $\ell_d = 9.5 \pm 0.8 \mu\text{m}$  in figure 7, that is, about  $0.028 d_s$ . Repeating the same procedure for all experimental runs, we observe that the diffusion length  $\ell_d$  is independent of the concentration of moving particles, within the range explored here (figure 8). On average over all experiments, we find a diffusion length of

$$\frac{\ell_d}{d_s} = 0.030 \pm 0.004. \quad (18)$$

This value is about ten times smaller than the diffusion length of a ball rolling down a slope covered with fixed grains<sup>34</sup>. In our experiment, the fluid probably attenuates the bed influence on moving particles.

### C. Random walk

The linear dependence of the particle dispersion with respect to the travel distance evokes a random walk. To elaborate on this analogy, let us represent the bedload particle as a walker which takes a random step of length  $\delta_y$  in the cross-stream direction each times it travels downstream over a distance  $\delta_x$ . A more physical picture, perhaps, is to consider that a moving particle deflects off immobile particles as it travels downstream. Accordingly, we expect both  $\delta_x$  and  $\delta_y$  to scale with the grain diameter.

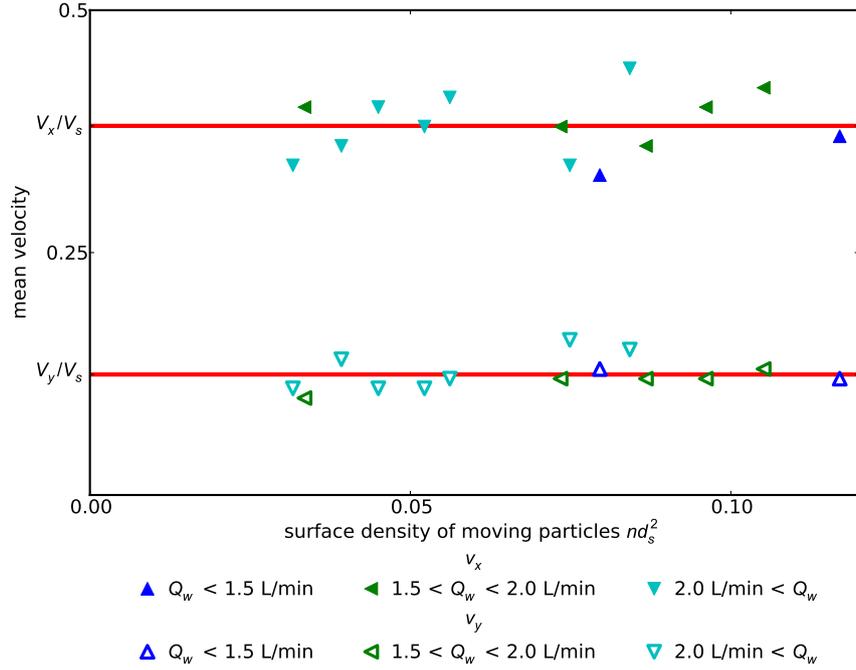


FIG. 6. Mean streamwise velocity ( $V_x/V_s$ , filled triangles) and cross-stream velocity variance ( $V_y/V_s$ , empty triangles) as a function of the number of moving particles,  $nd_s^2$ . Symbols and colors changes with water discharge.

The walker's trajectory is a sum of successive steps, the variance of which reads

$$\sigma_y^2 = \frac{\delta_y^2}{\delta_x} x \quad (19)$$

where  $x$  is the downstream distance from the starting point. We can identify the above relation with equation (17), which provides an interpretation for the diffusion length:

$$\ell_d = \frac{\delta_y^2}{2\delta_x}. \quad (20)$$

The random walk analogy is meaningful only if we can define an average step length (that is, a decorrelation length). Since the particle velocity has well-defined averages in both directions (section III A), we simply need to ascertain the existence of a decorrelation time. To do so, we compute the autocorrelation function of the cross-stream velocity. Averaging over a large number of trajectories, we find that the autocorrelation decays exponentially with time (figure 9). This decay defines a decorrelation time  $t_c$ , which can be averaged over all experimental runs:

$$\frac{t_c V_s}{d_s} = 1.0 \pm 0.1. \quad (21)$$

It is about the time to pass an immobile grain at velocity  $V_x$ . Equivalently, the decorrelation distance  $t_c V_x$  compares with  $d_s$ , and consequently compares to the bed roughness.

To be consistent with the random walk analogy, we expect the downstream and cross-stream step lengths to satisfy

$$\delta_x \approx V_x t_c, \quad \delta_y \approx V_y t_c. \quad (22)$$

Accordingly, using equation (20), we obtain an independent measure of the diffusion length:

$$\ell_d = \frac{V_y^2 t_c}{2V_x}. \quad (23)$$

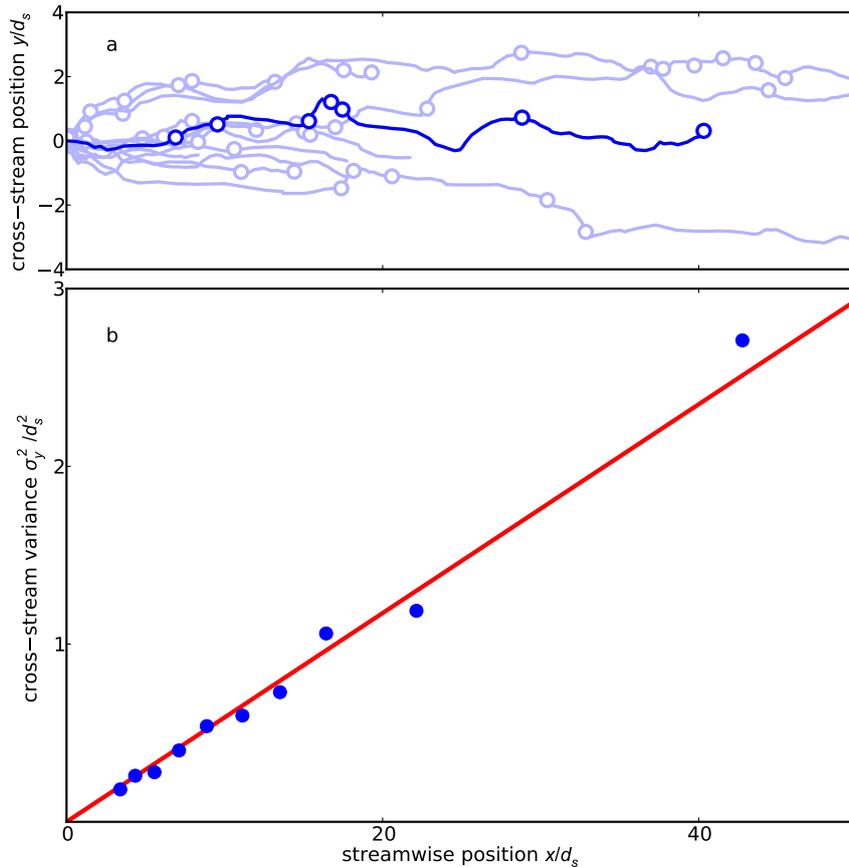


FIG. 7. (a) Particle trajectories in the horizontal plane (same experimental run as Figure 5). The trajectories have been translated to collapse their origin. Empty dots indicate rest. The aspect ratio is exaggerated in the cross-stream direction. (b) Cross-stream variance of the particle position  $\sigma_y^2$  as a function of the streamwise position  $x$  ( $Q_w = 2.05$  L/min and  $Q_s = 0.06$  g/min).

Replacing the average velocities with their experimental values, we find  $\ell_d/d_s = 0.02 \pm 0.01$ , in reasonable accord with equation (18).

The step length of the random walk is about the size of a particle:  $\delta_x \approx 0.4 d_s$ , which is much shorter than a typical particle flight (figure 4). Thus, the velocity decorrelation that causes dispersion occurs many times before the particle settles down, probably due to the roughness of the bed surface.

#### IV. DISCUSSION AND CONCLUSION

The experiments presented here, based on particle tracking, supports the erosion-deposition model of bedload transport, at least near the threshold Shields parameter. In addition we observe that, at first order, the statistical properties of the moving particles do not depend on their concentration  $n$ . We thus propose the following interpretation of bedload transport near threshold.

The moving particles constitute a thin layer traveling downstream at constant velocity. At equilibrium, this layer exchanges particles with the underlying sediment bed while maintaining its concentration  $n$ . As a result of the bed roughness, or of the associated flow perturbation, bedload particles disperse sideways as they progress downstream, like a ball rolling down a bumpy surface.

An inevitable attribute of any collection of random walkers is diffusion. We thus expect that a cross-stream gradient of walkers concentration will induce a flow of particles. This Fickian

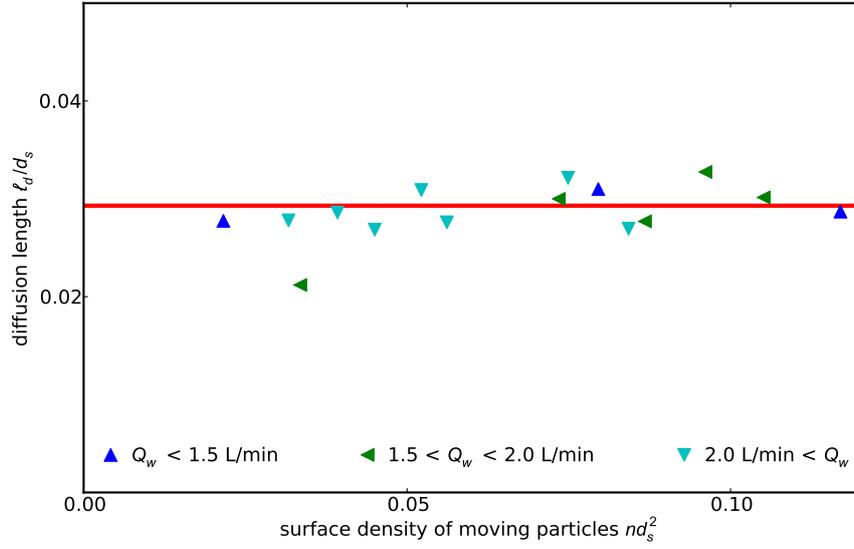


FIG. 8. Dependence of the diffusion length  $\ell_d/d_s$  on the concentration of moving particles  $n d_s^2$ . The red line indicates the mean diffusion length.

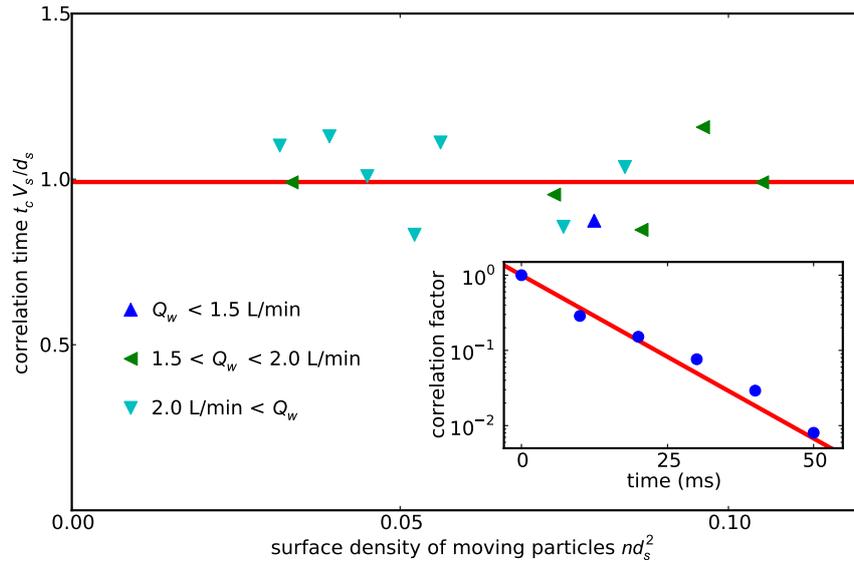


FIG. 9. Mean correlation time  $t_c V_s/d_s$  as a function of the concentration of moving particles  $n d_s^2$ . The red dashed line shows the average correlation time. Inset: correlation between successive images as function of time (same run as Figure 5). The red line shows a fitted exponential decay.

flux will be oriented towards the less populated areas, with an intensity proportional to the concentration gradient:

$$q_y = -D \frac{\partial n}{\partial y} \quad (24)$$

where  $D$  is the diffusion coefficient associated to bedload transport. Based on our experiments, we expect it to read

$$D = \ell_d V_x = \frac{V_y^2 t_c}{2} \approx 0.03 V_s d_s. \quad (25)$$

Since the streamwise flux of sediment  $q_x$  is the product of the particles velocity with their concentration, an equivalent expression of the diffusive flux is

$$q_y = -\ell_d \frac{\partial q_x}{\partial y}, \quad (26)$$

which might prove more practical than equation (25). To measure the diffusive flux experimentally, we would need to create a cross-stream gradient of bedload transport. For instance, a ring channel could generate a stronger shear near the outer wall<sup>15</sup>, and thus induce a concentration gradient.

The continual exchange of particles between the bedload layer and the immobile bed plays no role in the above reasoning since, on average, a new particle is entrained for each deposited particle. The fate of individual particles, on the contrary, depends crucially on this transfer. The longer a particle remains part of the bedload layer, the faster it travels downstream. The random nature of erosion and deposition thus disperse the bedload particles along the flow direction. This distinct dispersion mechanism is the subject of present work<sup>35</sup>.

## ACKNOWLEDGEMENTS

We are grateful to H. Boucquerel, A. Veira and A. Limare for building the experimental set-up. We also thank D. H. Rothman, P. Claudin and F. Metivier for fruitful discussions.

<sup>1</sup>W.E. Dietrich and J.D. Smith, "Bed load transport in a river meander," *Water Resources Research* **20** (1984).

<sup>2</sup>B. Gomez, "Bedload transport," *Earth-Science Reviews* **31**, 89–132 (1991).

<sup>3</sup>W. Graf and M. Altinakar, *Hydraulique Fluviale, Ecoulement non permanent et phenomenes de transport* (Eyrolles, Paris, 1996).

<sup>4</sup>M.S. Yalin and A.M.A.F. da Silva, *Fluvial Processes* (IAHR, 2001).

<sup>5</sup>A. S. Shields, "Anwendung der aehnlichkeitsmechanik und der turbulenzforschung auf die geschiebebewegung," *Mitteilung der Preussischen Versuchsanstalt fur Wasserbau und Schiffbau* **26** (1936).

<sup>6</sup>E. Meyer-Peter and R. Muller, "Formulas for bed-load transport," in *Proceedings, 2nd Congress, International Association of Hydraulic Research*, edited by Sweden Stockholm (1948) pp. 39–64.

<sup>7</sup>H.A. Einstein, *The bed-load function for sediment transportation in open channel flows* (US Department of Agriculture. Soil Conservation Service, 1950).

<sup>8</sup>K. Ashida and M. Michiue, "Studies on bed-load transport rate in open channel flows," in *IAHR Int. Symp. River Mech., Bangkok, 1* (1973) pp. 407–417.

<sup>9</sup>R. Fernandez-Luque and R. Van Beek, "Erosion and transport of bed-load sediment," *Journal of Hydraulic Research* **14**, 127–144 (1976).

<sup>10</sup>F. Engelund and J. Fredsoe, "A sediment transport model for straight alluvial channels," *Nordic Hydrol.* **7**, 293–306 (1976).

<sup>11</sup>J.C. Bridge and D.F. Dominic, "Bed load grain velocity and sediment transport rates," *Water Resources Research* **20**, 476–490 (1984).

<sup>12</sup>L.C. Van Rijn, "Sediment transport, part i: bed load transport," *Journal of hydraulic Engineering* **110**, 1431–1456 (1984).

<sup>13</sup>Y. Nino and M. Garcia, "Gravel saltation. part i: Experiments," *Water Resources Research* **30**, 1907–1914 (1994).

<sup>14</sup>C. Ancey, AC Davison, T. Bohm, M. Jodeau, and P. Frey, "Entrainment and motion of coarse particles in a shallow water stream down a steep slope," *J. Fluid Mech.* **595**, 83–114, doi: 10.1017/S0022112007008774 (2008).

<sup>15</sup>F. Charru, H. Mouilleron, and O. Eiff, "Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow," *Journal of Fluid Mech.* **519**, 55–80 (Nov 2004), ISSN 0022-1120.

<sup>16</sup>E. Lajeunesse, L. Malverti, and F. Charru, "Bedload transport in turbulent flow at the grain scale: experiments and modeling," *J. Geophys. Res. Earth Surface* **115**, F04001, doi:10.1029/2009JF001628 (2010).

<sup>17</sup>C. Ancey, "Stochastic modeling in sediment dynamics: Exner equation for planar bed incipient bed load transport conditions," *J. Geophys. Res.* **115**, F00A11, doi:10.1029/2009JF001260 (2010).

<sup>18</sup>M. Houssais and E. Lajeunesse, "Bedload transport of a bimodal sediment bed," *J. Geophys. Res.* **117**, F04015 (2012).

<sup>19</sup>F. Charru, "Selection of the ripple length on a granular bed sheared by a liquid flow," *Phys. Fluids* **18**, 121508–1–121508–9, doi: 0.1017/S002211200500786X (2006).

<sup>20</sup>F. Charru and E.J. Hinch, "Ripple formation on a particle bed sheared by a viscous liquid. part 1. steady flow," *J. Fluid Mech.* **550**, 111–121 (2006).

<sup>21</sup>O. Devauchelle, L. Malverti, E. Lajeunesse, P. Y. Lagree, C. Josserand, and K. D. N. Thu-Lam, "Stability of bedforms in laminar flows with free surface: from bars to ripples," *Journal of Fluid Mechanics* **642**, 329–348 (2010).

<sup>22</sup>D.J. Furbish, P.K. Haff, J.C. Roseberry, and M.W. Schmeeckle, "A probabilistic description of the bed load sediment flux: 1. theory," *Journal of Geophysical Research* **117**, F03031 (2012).

<sup>23</sup>J.C. Roseberry, M.W. Schmeeckle, and D.J. Furbish, "A probabilistic description of the bed load sediment flux: 2. particle activity and motions," *Journal of Geophysical Research* **117**, F03032 (2012).

- <sup>24</sup>D.J. Furbish, J.C. Roseberry, and M.W. Schmeeckle, “A probabilistic description of the bed load sediment flux: 3. the particle velocity distribution and the diffusive flux,” *Journal of Geophysical Research* **117**, F03033 (2012).
- <sup>25</sup>D.J. Furbish, A.E. Ball, and M.W. Schmeeckle, “A probabilistic description of the bed load sediment flux: 4. fickian diffusion at low transport rates,” *Journal of Geophysical Research* **117**, F03034 (2012).
- <sup>26</sup>O. Durán, B. Andreotti, and P. Claudin, “Numerical simulation of turbulent sediment transport, from bed load to saltation,” *Physics of fluids* **24**, 103306 (2012).
- <sup>27</sup>G. Parker, “Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. part 1. the sand-silt river,” *J. Fluid Mech.* **89**, 109–125 (1978).
- <sup>28</sup>O. Devauchelle, A. P. Petroff, A. E. Lobkovsky, and D. H. Rothman, “Longitudinal profile of channels cut by springs,” *Journal of Fluid Mechanics* **667**, 38–47.
- <sup>29</sup>G. Seizilles, O. Devauchelle, E. Lajeunesse, and F. Métiver, “Width of laminar laboratory rivers,” *Phys. Rev. E* (submitted).
- <sup>30</sup>JR Agudo and A. Wierschem, “Incipient motion of a single particle on regular substrates in laminar shear flow,” *Physics of Fluids* **24**, 093302 (2012).
- <sup>31</sup>F. Charru, E. Larrieu, J-B. Dupont, and R. Zenit, “Motion of a particle near a rough wall in a viscous shear flow,” *J. Fluid Mech.* **570**, 431–453 (2007).
- <sup>32</sup>A.E. Lobkovsky, A.V. Orpe, R. Molloy, A. Kudrolli, and D.H. Rothman, “Erosion of a granular bed driven by laminar fluid flow,” *Journal of Fluid Mechanics* **605**, 47–58 (2008).
- <sup>33</sup>R.L. Martin, D.J. Jerolmack, and R. Schumer, “The physical basis for anomalous diffusion in bed load transport,” *Journal of Geophysical Research* **117**, F01018 (2012).
- <sup>34</sup>L. Samson, I. Ippolito, GG Batrouni, and J. Lemaitre, “Diffusive properties of motion on a bumpy plane,” *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* **3**, 377–385 (1998).
- <sup>35</sup>E. Lajeunesse, O. Devauchelle, M. Houssais, and G. Seizilles, “Advection and exchange in bedload transport,” Submitted to *Advances in Geosciences*(2013).



# Bibliographie

- [1] O. Durán, P. Claudin, and B. Andreotti. On aeolian transport : Grain-scale interactions, dynamical mechanisms and scaling laws. *Aeolian Research*, 3 :243–270, 2011. 1, 4.1.1, 9.2
- [2] E. Meyer-Peter and R. Müller. Formulas for bed-load transport. *International Association for Hydraulic Structures Research*, 1948. 1
- [3] B. Gomez. Bedload transport. *Earth-Science Reviews*, 31 :89–132, 1991. 1
- [4] S. A. Schumm. Patterns of alluvial rivers. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, 13 :5–27, 1985. 1
- [5] M. Church. Bed material transport and the morphology of alluvial river channels. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, 34 :325–354, 2006. 1
- [6] F. Métivier and L. Barrier. *Gravel-bed Rivers. Processes, Tools, Environments*, chapter 34, Alluvial Landscape Evolution : What Do We Know About Metamorphosis of Gravel-bed Meandering and Braided Streams ? Wiley – Blackwell, 2012. 1, 2.1, 2.3.1, 3.21, 3.22, 7.4, 8.6, 8.2.2
- [7] N. D. Smith and D. G. Smith. William river : An outstanding example of channel widening and braiding caused by bed-load addition. *Geology*, 12 :78–82, February 1984. 1, 2.1, 8.2.2, 8.8
- [8] R. G. Kennedy. The prevention of silting in irrigation canals. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 119(2826), 1895. 2.1, 2.4.2
- [9] E. S. Lindley. Regime channels. *Proc. Punjab Engineering Congress*, 1919. 2.1, 2.1, 2.4.2
- [10] G. Lacey. Stable channels in alluvium. *Minutes of Proceedings, the Inst. C. E.*, 229(4736), 1930. 2.1, 2.2, 2.1, 2.4.2, 2.11
- [11] L. B. Leopold and M. G. Wolman. River channel patterns : Braided, meandering and straight. *Physiographic and hydraulic studies of rivers*, 1957. 2.1, 2.3, 3.1, 3.1
- [12] E. W. Lane. Stable channels in erodible material. *Transactions, American Society of Civil Engineers*, 102(1957), 1937. 2.1
- [13] E. W. Lane. Progress report on results of studies on design of stable channels. *US Bureau of Reclamation, Hydr. Lab. Report*, Hyd-352, 1952. 2.1
- [14] R. E. Glover and Q. L. Florey. Stable channel profile. *US Bureau of Reclamation, Hydr. Lab. Report*, Hyd-325, 1951. 2.1, 2.3.2, 3.3.3

- [15] G. Amontons. De la résistance causée dans les machines. *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, pages 206–227, 1699. 2.2
- [16] C. A. Coulomb. *Théorie des machines simples*. Bachelier, 1779. 2.2
- [17] A. S. Shields. Anwendung der aehnlichkeitsmechanik und der turbulenzforschung auf die geschiebebewegung. *Mitteilung der Preussischen Versuchsanstalt fur Wasserbau und Schiffbau*, 26, 1936. 2.2.2, 2.6, 4.1, 4.1.1, 5.1, 9.2, 9.2
- [18] R. A. Bagnold. An approach to the sediment transport problem from general physics. *Physiographic and hydraulic studies of rivers*, 1966. 2.2.2
- [19] T. Loiseleux, P. Gondret, M. Rabaud, and D. Doppler. Onset of erosion and avalanche for an inclined granular bed sheared by a continuous laminar flow. *Physics of fluids*, 17(103304), 2005. 2.2.2, 2.6, 4.1.1, 4.4.1, 4.5.2, 9.2, 9.3
- [20] F. Charru, H. Mouilleron, and O. Eiff. Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 519 :55–80, 2004. 2.2.2, 4.1, 4.1.1, 4.2, 4.4, 4.4.1, 4.4.1, 4.4.2, 4.5.2, 5.1, 6.1.1
- [21] A. Lobkovsky, A. V. Orpe, R. Molloy, A. Kudrolli, and D. H. Rothman. Erosion of a granular bed driven by laminar fluid flow. *J. Fluid Mech.*, 605 :47–58, 2008. 2.2.2, 2.2.2, 2.4.2
- [22] E. Lajeunesse, L. Malverti, and F. Charru. Bed load transport in turbulent flow at the grain scale : Experiments and modeling. *Journal of geophysical research*, 115, 2010. 2.2.2, 4.1, 4.2, 4.4.1, 4.5.2, 5.1, 6.1.1, 6.1.2, 8.1
- [23] M. Houssais and E. Lajeunesse. Bedload transport of a bimodal sediment bed. *Journal of geophysical research*, 117, 2012. 2.2.2, 4.1.1, 6.1.1, 9.1
- [24] J. R. Agudo and A. Wierschem. Incipient motion of a single particle on regular substrates in laminar shear flow. *Physics of fluids*, 24(093302), 2012. 2.2.2
- [25] M. Ouriemi, P. Aussillous, M. Medale, Y. Peysson, and E. Guazzelli. Determination of the critical shields number for particle erosion in laminar flow. *Physics of fluids*, 19(061706), 2007. 2.2.2, 4.1.1, 4.5.2, 9.2, 9.2
- [26] E. W. Lane. Design of stable channels. *Transactions, American Society of Civil Engineers*, 120(2776), 1955. 2.3.1, 2.3.2
- [27] F. M. Henderson. Stability of alluvial channels. *Journal of the hydraulics division*, 87(HY6), November 1961. 2.3.2, 2.10
- [28] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press. 2.4.1
- [29] L. F. Moody. Friction factors for pipe flow. *Transactions of the A.S.M.E.*, November 1944. 2.4.1
- [30] H. Darcy. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Victor Dalmont, 1856. 2.4.1
- [31] O. Devauchelle, A. Petroff, A. E. Lobkovsky, and D. H. Rothman. Longitudinal profile of channels cut by springs. *J. Fluid Mech.*, 667 :38–47, 2011. 2.4.1, 2.4.1

- [32] H. H. G. Savenije. The width of a bankfull channel; lacey's formula explained. *Journal of Hydrology*, 276 :176–183, 2003. 2.4.1
- [33] S. Ikeda. Self-formed straight channels in sandy beds. *Journal of the hydraulics division*, 107(HY4), April 1981. 3.1, 3.1
- [34] S. Ikeda, G. Parker, and Y. Kimura. Stable width and depth of straight gravel rivers with heterogeneous bed materials. *Water resources research*, 24(5) :713–722, May 1988. 3.1, 5.2
- [35] F. Métivier and P. Meunier. Input and output mass flux correlations in an experimental braided stream. implications on the dynamics of bed load transport. *Journal of Hydrology*, 271 :22–38, 2003. 3.1
- [36] L. Malverti, E. Lajeunesse, and F. Métivier. Small is beautiful : Upscaling from microscale laminar to natural turbulent rivers. *Journal of geophysical research*, 113, 2008. 8.1
- [37] C. Paola, K. M. Straub, D. C. Mohrig, and L. Reinhardt. The “unreasonable effectiveness” of stratigraphic and geomorphic experiments. *Earth-Science Reviews*, 97 :1–43, 2009.
- [38] A. Fourrière. *Morphodynamique des rivières. Sélection de largeur, rides et dunes*. PhD thesis, ESPCI, 2009. 3.1, 3.2.1, 3.3.1, 3.3.2, 3.5.1
- [39] P. Meunier. *Dynamique des rivières en tresses*. PhD thesis, Institut de Physique du Globe de Paris, 2004. 3.2.1, 3.3.2
- [40] H. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, 6, 1823. 3.4.1
- [41] J.-L. M. Poiseuille. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. *Compte rendu des séances de l'Académie des sciences*, pages 961–967, 1041–1048, July 1840. 3.4.1
- [42] D. M. Abrams, A. E. Lobkovsky, A. Petroff, K. M. Straub, B. McElroy, D. C. Mohrig, A. Kudrolli, and D. H. Rothman. Growth laws for channel networks incised by groundwater flow. *Nature Geoscience*, 2, March 2009. 3.21, 3.22
- [43] F. Charru and E. J. Hinch. Ripple formation on a particle bed sheared by a viscous liquid. *J. Fluid Mech.*, 550, 2006. 4.1, 4.2, 4.4
- [44] F. Charru. Selection of the ripple length on a granular bed sheared by a liquid flow. *Physics of fluids*, 18(121508), 2006. 4.4.2, 8.1
- [45] F. Charru, E. Larrieu, J.-B. Dupont, and R. Zenit. Motion of a particle near a rough wall in a viscous shear flow. *J. Fluid Mech.*, 570(431-453), 2007. 4.2, 4.4, 6.1.2
- [46] D. J. Furbish, P. K. Haff, J. C. Roseberry, and M. W. Schmeeckle. A probabilistic description of the bed load sediment flux : 1. theory. *Journal of geophysical research*, 117, 2012.

- [47] J. C. Roseberry, M. W. Schmeeckle, and D. J. Furbish. A probabilistic description of the bed load sediment flux : 2. particle activity and motions. *Journal of geophysical research*, 117, 2012. 4.4.2, 6.1.1, 6.1.2
- [48] D. J. Furbish, J. C. Roseberry, and M. W. Schmeeckle. A probabilistic description of the bed load sediment flux : 3. the particle velocity distribution and the diffusive flux. *Journal of geophysical research*, 117, 2012. 6.1.2
- [49] D. J. Furbish, A. E. Ball, and M. W. Schmeeckle. A probabilistic description of the bed load sediment flux : 4. fickian diffusion at low transport rates. *Journal of geophysical research*, 117, 2012. 4.1
- [50] G. Parker. Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. part 2. the gravel river. *J. Fluid Mech.*, 89, 1978. 5.1, 5.2, 7.5.2
- [51] B. C. Eaton and R. G. Millar. Optimal alluvial channel width under a bank stability constraint. *Geomorphology*, 62 :34–45, 2004. 5.2
- [52] I. G. Wilson. Equilibrium cross-section of meandering and braided rivers. *Nature*, 241, 1973. 5.2
- [53] S. Cao and D. W. Knight. Design for hydraulic geometry of alluvial channels. *Journal of hydraulic engineering*, May 1998. 5.2
- [54] G. G. Vigilar and P. Diplas. Stable channels with mobile bed : Formulation and numerical solution. *Journal of hydraulic engineering*, March 1997. 5.2
- [55] G. Parker. Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. part 1. the sand-silt river. *J. Fluid Mech.*, 89, 1978. 5.2
- [56] L. Samson, I. Ippolito, G. G. Batrouni, and J. Lemaitre. Diffusive properties of motion on a bumpy plane. *Eur. Phys. J. B*, 3 :377–385, 1998. 6.2
- [57] A. Einstein. Investigations on the theory of the brownian movement. *Ann. der Physik*, 17, 1905. 7.1
- [58] E. Lajeunesse, L. Malverti, P. Lancien, L. Armstrong, F. Métivier, S. Coleman, C. E. Smith, T. Davies, A. Cantelli, and G. Parker. Fluvial and submarine morphodynamics of laminar and near-laminar flows : a synthesis. *Sedimentology*, 57 :1–26, 2010. 8.1
- [59] C. Paola. Simplicity versus complexity. *Nature*, 469, 2001. 8.1
- [60] O. Devauchelle, C. Josseland, P.-Y. Lagrée, and S. Zaleski. Morphodynamic modeling of erodible laminar channels. *Physical Review E*, 76(056318), 2007. 8.2.1
- [61] B. Andreotti, P. Claudin, O. Devauchelle, O. Durán, and A. Fourrière. Bedforms in a turbulent stream : ripples, chevrons and antidunes. *J. Fluid Mech.*, 690 :94–128, 2012. 8.2.1
- [62] E. R. Mueller and J. Pitlick. Morphologically based model of bed load transport capacity in a headwater stream. *Journal of geophysical research*, 110, 2005. 8.6, 8.2.2

- [63] G. Parker. On the cause and characteristic scales of meandering and braiding rivers. *J. Fluid Mech.*, 76 :457–480, 1976. 8.2.2
- [64] O. Devauchelle. *Ecoulements de surface et érosion*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2007. 8.2.2
- [65] P. L. Wiberg and J. D. Smith. Calculations of the critical shear stress for motion of uniform and heterogeneous sediments. *Water resources research*, 23(8) :1471–1480, August 1987. 9.1
- [66] M. Houssais. *Etude expérimentale du transport en rivière par charriage d'un sédiment bimodal : vers un modèle général du transport à plusieurs tailles de grains*. PhD thesis, Université Paris Diderot, 2013. 9.1
- [67] B. Andreotti, Y. Forterre, and O. Pouliquen. *Les milieux granulaires, entre fluide et solide*. EDP Sciences, Collection Savoirs Actuels, 2011. 9.2, 9.2, 9.3
- [68] E. D. Andrews. Bed-material entrainment and hydraulic geometry of gravel-bed rivers in colorado. *Geological Society of America Bulletin*, 95 :371–378, March 1984. 10.1
- [69] J. H. Bruning, D. R. Herriott, J. E. Gallagher, D. P. Rosenfeld, A. D. White, and D. J. Brangaccio. Digital wavefront measuring interferometer for testing optical surfaces and lenses. *Applied Optics*, 13(11), November 1974. 12.1.5
- [70] F. Brémand. A phase unwrapping technique for object relief determination. *Optics and Lasers in Engineering*, 21 :49–60, 1994. 12.1.5
- [71] A. Limare, M. Tal, M. D. Reitz, E. Lajeunesse, and F. Métivier. Optical method for measuring bed topography and flow depth in an experimental flume. *Solid Earth*, 2 :1–12, 2011. 12.1.5



# Résumé

La forme des rivières alluviales est contrôlée par l'interaction des sédiments composant le lit avec l'écoulement : l'écoulement, déterminé par la forme du lit, entraîne les sédiments et modifie la forme du lit. Les sédiments sont transportés lorsqu'ils sont soumis à une contrainte supérieure au seuil de mise en mouvement.

Dans la première partie de ce manuscrit, nous discutons le cas des rivières qui ne transportent pas de sédiments. Pour ces rivières, la contrainte sur les berges est égale au seuil de mise en mouvement. Cette condition détermine entièrement la géométrie de la rivière, c'est-à-dire la forme de sa section mais aussi sa pente. L'intégration de l'écoulement sur ce profil permet d'obtenir des équations de régime déterminant la variation de la largeur et de la pente avec le débit d'eau. Ces équations de régime en régime laminaire prédisent correctement la forme de micro-rivières de laboratoires. L'application aux données de terrain est moins satisfaisante : l'exposant des lois d'échelle est bien prédit mais le rapport d'aspect des rivières naturelles est souvent supérieur à sa valeur théorique.

Dans la seconde partie du manuscrit, nous montrons que cet effet s'explique par le fait que la forme des rivières dépend également de la quantité de sédiments charriés. Au cours de son transport par l'écoulement, chaque grain voit sa trajectoire subir de petites déviations dans le sens transverse à l'écoulement, ce qui crée une dispersion transverse équivalente à un phénomène de diffusion. Cette diffusion des grains permet d'expliquer la stabilité d'une rivière pour laquelle la contrainte sur les berges est supérieure au seuil de mise en mouvement. Nous déterminons ainsi de nouvelles équations de régime valables pour le cas des rivières avec transport de sédiments. Nous montrons en particulier qu'augmenter le transport de sédiments augmente le rapport d'aspect et la pente de la rivière. Ce comportement est vérifié qualitativement à la fois expérimentalement et dans la nature. Au-delà d'un rapport d'aspect critique, on observe expérimentalement que le chenal se déstabilise en plusieurs chenaux, conduisant à la formation d'une rivière en tresse.

---

# Abstract

The shape of alluvial rivers is controlled by the feedback between the water flow and sediment transport. The flow, depends on the shape of the banks. It then entrains sediments and modifies the shape of the bed. Sediments are eroded when the flow-induced stress exceeds a threshold stress.

In the first part of this manuscript, we discuss rivers without any sediment transport. In this case, the tangential stress exerted on the banks equals the threshold stress. This condition selects the river morphology and predicts the width and slope of the river as a function of the water discharge. These so-called regime equations correctly predict the shape of laminar laboratory rivers. The application to field data is less satisfactory: the exponent of the scaling laws are well predicted but the aspect ratio of natural rivers is wider than predicted from the regime equations.

In the second part of this thesis, we show that the shape of a river cross-section also depends on the sediment discharge. In addition to their downstream motion, sediments entrained by the flow show significant fluctuations of their cross-stream velocity, likely due to the roughness of the underlying sediment bed. This causes particles to disperse laterally. We show that this lateral spreading is the manifestation of a random walk, which causes transverse Fickian diffusion. The shape of a river cross-section is selected by the balance between the transverse flux of sediments induced by gravity and this diffusive process. This balance leads to new regime equations relating the river width and slope to the sediment and water discharges. In particular, increasing the sediment discharge increases the aspect ratio and the slope of the river. Above a threshold aspect ratio, the river destabilizes and forms a braided river. This behavior is observed qualitatively in both laminar flow experiments and in Nature.