HAL
open science

Modélisation de la propagation des ondes élastiques dans un milieu composite à microstructure 3D

Matthieu Hollette

To cite this version:

Matthieu Hollette. Modélisation de la propagation des ondes élastiques dans un milieu composite à microstructure 3D. Autre. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2013. Français. NNT : 2013BOR14777 . tel-00840603

HAL Id: tel-00840603

https://theses.hal.science/tel-00840603v1

Submitted on 2 Jul 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 4777

Université Bordeaux 1,
Ecole Doctorale des Sciences Physiques et de l'Ingénieur,
CEA –List,
Laboratoire de Simulation et de Modélisation Acoustique

Thèse

présentée par

Matthieu HOLLETTE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

spécialité : **mécanique**

Modélisation de la propagation des ondes élastiques dans un milieu composite à microstructure 3D

Soutenue le 22 avril 2013

Après avis de :

Mme C. Potel, professeur, Université du Maine — Rapporteurs
M. G. Haïat, chargé de recherche CNRS, Université Paris-Est

Devant la commission d'examen formée de :

M. J-M. Conoir, directeur de recherche CNRS — Président
M. C. Aristégui, professeur, université Bordeaux 1
M. A. Lhémery, ingénieur de recherche, CEA-List/LSMA
Mme C. Potel, professeur, Université du Maine
M. G. Haïat, chargé de recherche CNRS, Université Paris-Est

Je voudrais tout d'abord remercier
Les chefs de départements présent et passé ;
Philippe Benoit qui me fit venir et commencer,
Clarisse Poidevin qui me vit finir bien qu'épuisé.

Je remercie aussi,
Pierre Calmon, directeur de la recherche de base
Et Sylvain Chatillon, Chef de laboratoire,
Ainsi que Steve Mahaut, le précédent qui tint ce titre.

A tous ces gens je dis merci de m'avoir accueilli.

Viennent ensuite les mercis d'une autre catégorie,
Nous avons vu les sincères mais polis,
Et maintenant voyons plus grand !
Un grand merci
A Christophe Aristégui
Pour m'avoir suivi,
Bien que de loin,
Et pour s'être investi
Jusqu'à la fin.

Le remerciement qui s'ensuit
S'adresse à celui
Sans qui rien de ceci
N'aurait pu être écrit :
Alain Lhémery !
L'origine et la cause de tous mes soucis
Mais aussi de tout ce que j'appris ou accomplis,
Que ce soit grand ou que ce soit petit
Pour tout cela je te remercie.

Vient ensuite la pelletée gaillarde
Des thésards et thésardes
Qui m'ont accompagné
Pendant ces trois années :
Thomas et Antoine parce qu'on a galéré,
Clémence et Audrey pour m'avoir bien saoulé,
Et Blandine et Marouane, Adrien, Souad, Jason et Warida,
Bien que ce soit en vrac
A chacun, soyez en certains,
J'adresse le merci le plus vif et le plus jouasse !

Et pour finir, mes parents qui surent
Me soutenir, les amis qui furent
Là pour me dire : « même si on est sûr
Qu'tu fous rien de tes journées,
T'inquiète, ça va bien se passer »

Pour tous ces gens là, les mercis
Couvrent plus de ces trois années ci.

INTRODUCTION **1**

CHAPITRE I. DESCRIPTION DU MATERIAU ET DES PHENOMENES ONDULATOIRES RESPONSABLES DE L'ATTENUATION ET DE LA DISPERSION DES ONDES S'Y PROPAGEANT **8**

1. PRESENTATION DU MATERIAU 8
2. PHENOMENES ONDULATOIRES 9
   1. La viscoélasticité 9
   2. L'anisotropie 11
   3. La diffusion par un ensemble de fibres 13
3. DESCRIPTION DE DEUX METHODES D'HOMOGENEISATION DYNAMIQUE DE MATERIAUX COMPOSITES 15
   1. Homogénéisation asymptotique 16
   2. Méthode de Sébastien Lonné : modèle à trois phases en incidence normale 18
      a. Définition du problème 18
      b. Expression des potentiels dans chaque phase 20
      c. Résolution du problème de diffraction 22
      d. Principaux résultats de la méthode 22

CHAPITRE II. IDENTIFICATION DES RIGIDITES A PARTIR DES PROPRIETES DES ONDES GUIDEES **24**

1. MODELISATION DE LA PROPAGATION DES ONDES GUIDEES 24
2. METHODE D'INVERSION A PARTIR DES PROPRIETES DES ONDES GUIDES 26
   1. Principe 26
   2. Calcul des modes guidés dans le milieu hétérogène 27
      a. Définition de la mèche 28
      b. Exemple de courbes de dispersion 29
   3. Calcul des modes guidés dans le milieu homogène 30
   4. Études des propriétés des modes et de leur sensibilité aux coefficients de rigidité 31
      a. Champ de déplacements du mode de compression 31
      b. Champ de déplacements du mode de torsion 33
      c. Champ de déplacements des modes de flexion 35
   5. Sensibilité de la méthode aux coefficients de rigidité : conclusion 36
3. COMPORTEMENT DE LA METHODE D'INVERSION A PARTIR DE DONNEES SIMULEES 37
4. CONCLUSIONS 40

CHAPITRE III. MODELE A TROIS PHASES ET INCIDENCE OBLIQUE **42**

1. DEFINITION DU MODELE A TROIS PHASES 42
2. DIFFRACTION DES ONDES DE VOLUME EN INCIDENCE OBLIQUE SUR UN CYLINDRE A SYMETRIE ISOTROPE TRANSVERSE 43
   1. Description du problème et méthode de résolution 43
   2. Expression des potentiels dans chacun des milieux 45
      a. Expression des potentiels dans le milieu environnant 45
      b. Expression des potentiels dans le milieu intérieur 47
   3. Résolution du problème 50
3. MODELE A TROIS PHASES EN INCIDENCE OBLIQUE 52
   1. Expression des potentiels correspondant aux ondes diffractées dans le milieu environnant 52
   2. Expression des potentiels correspondants à l'onde incidente 53
   3. Expression des potentiels dans le milieu intermédiaire 54
   4. Définition du système 55
   5. Fonctions d'amplitude de diffraction 56
4. METHODE DE RESOLUTION 57
   1. Équation de Yang & Mal (Yang et Mal 1994) 57
   2. Équation de Kim (J. Y. Kim 2004) 58
   3. Résolution du problème dans le cas de l'incidence oblique 59
   4. Validation dans le cas de l'incidence normale 61
5. METHODE DE RESOLUTION EN INCIDENCE OBLIQUE UTILISANT L'ALGORITHME GENETIQUE 62

1. Onde incidente 62
2. Gestion des angles critiques 63
a. Prise en compte des ondes évanescentes apparaissant dès les deux premiers angles critiques. 64
b. Prise en compte des ondes évanescentes apparaissant dès le troisième angle critique. 66
c. Cas des faibles concentrations en fibres 67
6. UTILISATION DE LA METHODE AUX PETITS ANGLES 67
1. Définition de la plage angulaire 67
2. Définition de la fonction coût 68
3. Étude de la dépendance des paramètres à la configuration considérée 70
7. RESULTATS FINAUX 71
1. Étude de la dépendance des paramètres à la fréquence 71
a. Étude de l'évolution des parties réelles des coefficients de rigidité en fonction de la fréquence 72
b. Étude de l'évolution des parties imaginaires des coefficients de rigidité en fonction de la fréquence 73
c. Étude de la valeur des fonctions coût atteinte par la méthode 75
d. Conclusion 75
2. Dépendance à la concentration 76
a. Étude de l'évolution des parties réelles des coefficients de rigidité en fonction de la concentration 76
b. Étude de l'évolution des parties imaginaires des coefficients de rigidité en fonction de la concentration 77
c. Étude de la valeur des fonctions coût atteinte par la méthode 78
d. Comparaison avec les valeurs obtenues en incidence normale 79
e. Conclusion 81
3. Dépendance à l'angle d'incidence 81
a. Évolution du coefficient $C66$ 82
b. Évolution du coefficient $C11$ 83
c. Discussion sur la dépendance angulaire 84
8. CONCLUSIONS 86

CONCLUSION GENERALE 88

BIBLIOGRAPHIE 91

ANNEXE A. CARACTERISTIQUES MECANIQUES DES MATERIAUX UTILISEES POUR TOUTES LES APPLICATIONS NUMERIQUES 96

ANNEXE B. METHODE SAFE 97

1. CAS BIDIMENSIONNEL 97
2. CAS UNIDIMENSIONNEL 99
3. RESOLUTION DU SYSTEME 101
1. Cas bidimensionnel 101
2. Cas unidimensionnel 101

ANNEXE C. DEVELOPPEMENT D'UN ALGORITHME GENETIQUE. 103

1. ESPACE DE RECHERCHE ET FONCTION COUT 105
2. CODAGE 106
3. SELECTION 106
4. CROSS-OVER 107
5. MUTATION 107
6. CRITERE D'ARRET 108
7. L'ALEATOIRE COMME FACTEUR DE ROBUSTESSE 108

ANNEXE D. OBTENTION DES POTENTIELS ASSOCIES AUX CHAMPS DE DEPLACEMENT CREES PAR LES ONDES DIFFRACTEES PAR UN CYLINDRE 109

ANNEXE E. DIFFRACTION PAR UN CYLINDRE INFINI PLACE DANS UNE MATRICE INFINIE 115

ANNEXE F. SYSTEME A RESOUDRE DANS LE CAS DU PROBLEME A TROIS PHASES 118

1. INTERFACE MATRICE/MILIEU INTERIEUR $\boldsymbol{r = a}$ 118
2. INTERFACE MILIEU ENTOURANT/MATRICE $\boldsymbol{r = b}$ 121
3. ONDE INCIDENTE 123

ANNEXE G. OBTENTION DES POTENTIELS A L'INTERIEUR DU CYLINDRE POUR UNE INCIDENCE DEPASSANT TOUS LES ANGLES CRITIQUES A L'INTERIEUR DE CELUI-CI 125

ANNEXE H. ÉCHELLE MESOSCOPIQUE 127

1. DESCRIPTION DU MATERIAU 127
2. PHENOMENES ONDULATOIRES 128
3. DEFINITION D'UNE VALEUR STATIQUE DE L'ESPACE DE RECHERCHE 129
4. HOMOGENEISATION DU VER COMPLET 131
   1. Adaptation du modèle à trois phases au cas du VER 131
   2. Fonction coût 133
   3. Calcul d'une valeur non représentative de la microstructure permettant de prendre en compte la diffusion sur les mèches. 134
   4. Limitations 135
5. CONCLUSION 137

Introduction

Les matériaux composites sont de plus en plus utilisés dans l'industrie et sont présents dans une gamme très variée de secteurs d'applications. Un matériau est dit composite lorsqu'il est constitué de plusieurs éléments distincts et non miscibles, dont la combinaison permet d'obtenir des propriétés spécifiques. Il existe des matériaux composites qui sont avantageux comparés aux matériaux usuels dans des domaines aussi variés que la diffusion de la chaleur, la propagation de courants électriques, de la lumière, ou, dans le cas qui nous intéresse, les propriétés mécaniques. Le grand avantage de ces composites est que leur rigidité finale dépend de leur structure interne, structure dont la forme est complètement maîtrisée. Ainsi on va pouvoir fabriquer des matériaux ayant les propriétés mécaniques spécifiques à l'utilisation qui en sera faite. Les composites que l'on se propose d'étudier plus particulièrement sont les composites fibreux, constitués de fibres pouvant être de Carbone, de verre ou autre, et d'une résine polymère, très souvent de l'époxy. Les fibres ont l'intérêt particulier de présenter une très grande rigidité dans le sens de leur longueur et une très faible dans la direction transverse. On peut fabriquer une couche unidirectionnelle en alignant toutes les fibres selon une même direction, ce qui a pour effet de grandement renforcer la rigidité du matériau : il pourra subir une forte contrainte dans cette direction sans risquer de rompre. La résistance du matériau sera par contre très faible dans la direction perpendiculaire aux fibres. Pour pallier ce problème, des composites constitués de plusieurs couches unidirectionnelles désorientées les unes par rapport aux autres, ont été fabriqués, augmentant ainsi la résistance aux efforts dans toutes les directions du plan des fibres. La figure 1 a) représente un arrangement de couches désorientées dont les plans sont à 0°, +45°, -45°. La rigidité dans la direction perpendiculaire à ces plans (x_1 sur la figure) reste par contre inchangée et ces matériaux sont donc très sensibles aux impacts subis selon cette direction. La figure 1 b) montre à titre d'exemple les valeurs du module de cisaillement d'un tel arrangement dans le plan des fibres et dans la direction perpendiculaire, pour des matériaux composites contenant des fibres de différentes natures.

Afin de renforcer le matériau dans toutes les directions, on peut considérer un arrangement tridimensionnel des fibres. Cela peut être fait au travers de différentes méthodes allant d'un arrangement de composites unidirectionnels (torons) dans les trois directions, nommé composite 3D orthogonal, (Figure 2 a), aux structures plus complexes que sont le tissage (Figure 2 b) et le nouage, (Figure 2 c). Remarquons ici que ce ne sont pas des fibres uniques qui forment les structures mais des mèches constituées d'un grand nombre de fibres. Chacun des arrangements présentés sur la Figure 2 a des propriétés mécaniques différentes, et sera donc avantageux pour différentes applications.

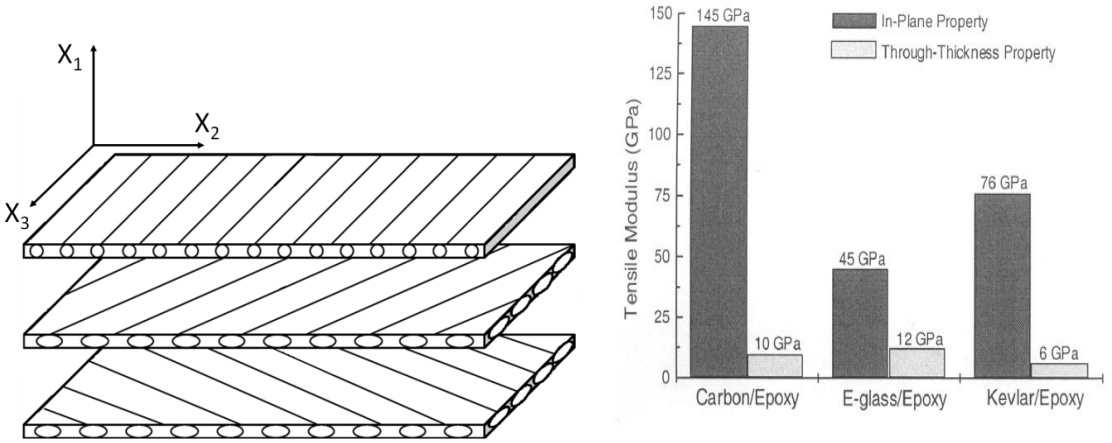

Figure 1. a) Arrangement multicouches de composites unidirectionnels, b) module de cisaillement de ces matériaux selon le type de fibres utilisé. (Tong, Mouritz et Bannister 2002)

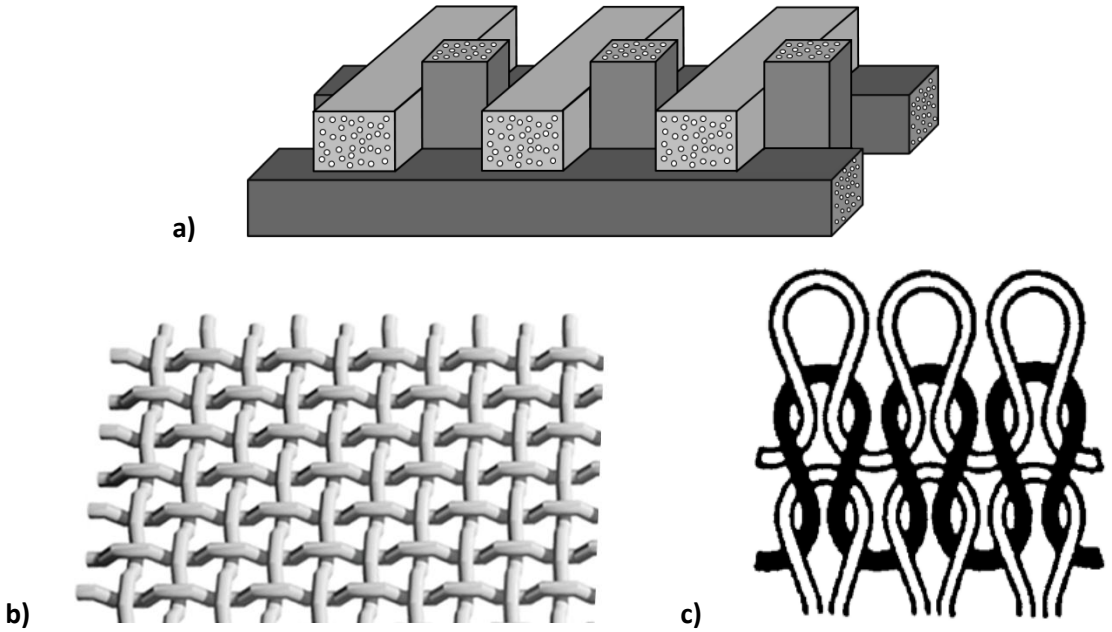

Figure 2. a) Composite 3D orthogonal, b) composite tissé, c) composite noué (Tong, Mouritz et Bannister 2002)

Pour une description détaillée des applications possibles de chaque arrangement, nous redirigeons le lecteur vers la référence (Tong, Mouritz et Bannister 2002). Précisons simplement que ces matériaux sont principalement utilisés dans l'industrie aéronautique pour leurs avantages sur les alliages métalliques habituels. Le premier, qui vaut autant pour les composites 2D que 3D, est leur très faible rapport masse/rigidité. Les configurations tridimensionnelles ont cependant des avantages certains par rapport aux arrangements planaires pour ce qui concerne les possibilités de conception de structures ; en effet, la

plupart des arrangements 3D permettent de fabriquer les pièces d'un seul et unique bloc, supprimant ainsi les problèmes inhérents à l'arrangement multicouche propre aux configurations 2D.

Dans cette étude, nous nous intéressons aux matériaux composites tissés. La préforme tissée est constituée d'un motif périodique, communément nommé le nœud représentatif, qui est répété sur l'ensemble d'une couche de composite. Un exemple type de nœud représentatif d'une couche de composite tissée est montré sur la Figure 3.

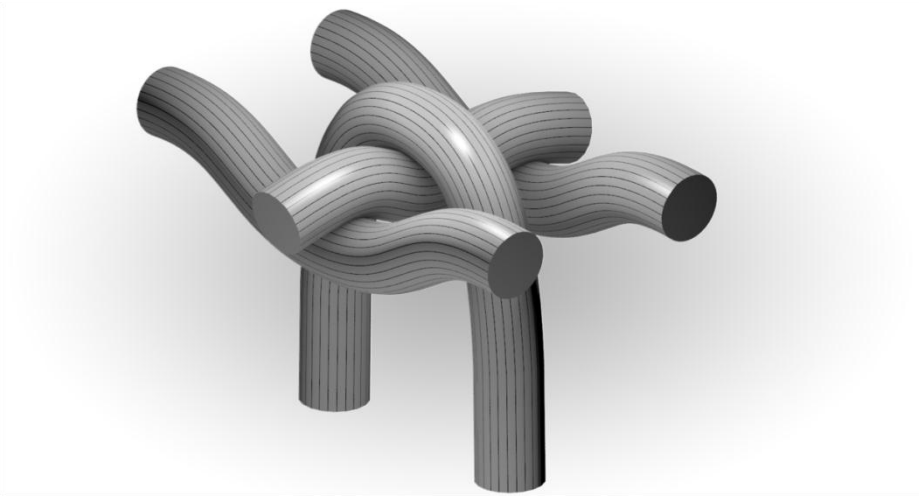

Figure 3. Représentations d'un nœud standard de composite tissé selon trois directions.

L'arrangement 3D qui constitue la préforme n'est que la première étape de la fabrication d'un matériau composite. Afin de pouvoir l'utiliser, cette structure de base est consolidée à l'aide d'une résine polymère. L'injection de la résine dans la préforme peut se faire suivant différents procédés décrits précisément dans (Tong, Mouritz et Bannister 2002). Le but est de noyer complètement la préforme dans la résine ; pour ce faire, la résine est injectée sous pression dans la structure ; la viscosité de la résine dépendant de sa température, il faut choisir précautionneusement les conditions de température et de pression pour ne pas que des zones restent sèches en cas de trop faible pression mais aussi pour ne pas que la structure de base soit déformée en cas de trop forte pression. Ce type de procédé est nommé **RTM**, pour **R**esin **T**ransfer **M**olding, ce qui signifie que l'on place la préforme tissée dans un moule avant d'injecter la résine ; cette opération, qui permet de définir l'aspect final de la pièce, est représentée sur la Figure 4.

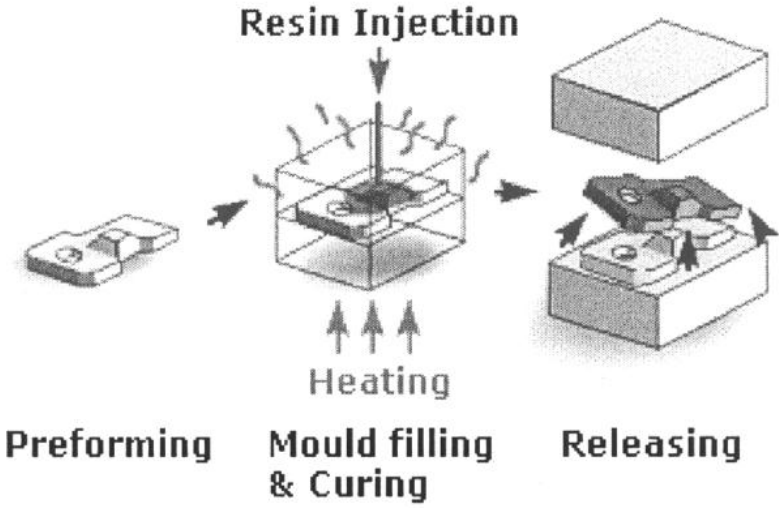

Figure 4. Injection de la résine dans la préforme par le procédé RTM. (Tong, Mouritz et Bannister 2002)

Le matériau est constitué de fibres de Carbone regroupées en mèches qui sont ensuite tissées selon un motif particulier. Comme nous l'avons précisé, lors de la fabrication du matériau, la préforme une fois tissée sera ensuite moulée dans une résine époxy, le nœud représentatif de la Figure 3 sera donc entouré de matrice époxy pour former le **V**olume **É**lémentaire **R**eprésentatif (VER) de notre matériau à l'échelle mésoscopique. Ce motif sera répété sur l'ensemble de la couche de composite et on peut donc, pour étudier la couche de matériau composite tissée, se concentrer sur l'étude du VER puisque le comportement mécanique de la couche sera identique à celui de ce volume. Enfin, une dernière étape de fabrication consistera en l'empilement de plusieurs couches de matériau tissées, qui pourront être plus ou moins écrasées, cet aspect pouvant être pris en compte par la définition de plusieurs VER.

On remarque que la structure étudiée est hétérogène à plusieurs échelles : à l'échelle microscopique où plusieurs milliers de fibres de Carbone sont regroupées en mèches, à l'échelle mésoscopique où les mèches sont assemblées pour former le VER et à l'échelle macroscopique où les couches tissées sont superposées. La structure complexe de chaque échelle sera détaillée plus précisément dans les chapitres suivants.

Comme évoqué précédemment, certaines étapes de la fabrication sont susceptibles de créer des défauts à l'intérieur de la structure. Par exemple, lors du tissage, les fibres peuvent se briser, ou, lors du transfert de résine, les mèches peuvent localement se déplacer faussant la préforme initiale, ou encore, la résine peut ne pas se répartir uniformément dans la pièce fabriquée. Il est donc crucial de vérifier l'absence de défaut dans la pièce au sortir de l'étape de fabrication. De même au cours du vieillissement de la pièce, certains défauts peuvent apparaître comme des délaminages (pour le cas des matériaux multicouches) ou la destruction de fibres à la suite d'un impact ; l'évolution des défauts mineurs de fabrication est aussi à surveiller.

Afin de vérifier la qualité des pièces tout au long de leur utilisation, les industriels du secteur aéronautique font appel, entre autre, au Contrôle Non Destructif. Il existe diverses techniques de contrôle telles que les rayons X, les courants de Foucault, ou les ultrasons. Les

contrôles par courant de Foucault s'effectuent uniquement sur des pièces métalliques électriquement conductrices et ne permettent qu'un contrôle en surface. La mise en œuvre d'un contrôle par rayons X, quant à elle, est plus complexe et moins adaptée au contrôle de structure de grande taille. Ainsi, parmi les diverses techniques existantes, le contrôle par ultrasons apparaît comme le mieux adapté pour examiner des composantes des structures aéronautiques en composite.

La complexité de la structure des matériaux composites tissés dépend d'un grand nombre de paramètres qu'il est possible de faire varier au cours de leur fabrication. Certains de ces paramètres influencent très fortement la propagation des ultrasons dans la pièce, et ont un impact direct sur la qualité du contrôle qu'il est possible d'effectuer (par exemple le coefficient d'atténuation de la résine utilisée). De même, lors du contrôle, le choix du capteur, de la fréquence de contrôle ou bien encore du type de contrôle (immersion, contact, etc) fera très fortement varier la manière dont les ondes se propagent dans le matériau. Afin d'optimiser les paramètres d'un contrôle, il est très intéressant d'utiliser des outils de simulation qui prédisent la propagation des ultrasons dans des pièces plus ou moins complexes et permettent de tester différentes configurations plutôt que de faire des coûteuses expériences pour chacune : par ces études, il est possible de définir une configuration optimale de contrôle pour un type de composite donné.

Il existe des méthodes numériques permettant de modéliser la propagation des ultrasons dans les pièces hétérogènes. Cependant, les matériaux étudiés ici sont particuliers de par leur aspect multi-échelle. Leur structure interne est non seulement complexe à représenter (ondulations des mèches) mais contient des éléments dont les dimensions diffèrent typiquement d'un facteur 10^3 (fibres $\rightarrow$ mèches) ce qui empêche la prise en compte des deux échelles dans un même calcul numérique. Afin qu'une méthode numérique puisse s'appliquer, le matériau devra d'abord subir au moins une étape d'homogénéisation.

L'homogénéisation consiste à décrire le comportement macroscopique d'une structure hétérogène par des variables dites effectives (champ moyen configurationnel ou spatial par exemple), satisfaisant des équations de la mécanique des milieux continus homogènes. Cette approche définit la notion de milieu homogène équivalent, dont le modèle de loi de comportement est choisi *a priori*.

On distingue deux domaines d'homogénéisation : les domaines statique et dynamique. Beaucoup de travaux concernent l'homogénéisation statique des pièces composites, en particulier les travaux de (Mori et Tanaka 1973) font référence en la matière et permettent d'homogénéiser une très large gamme de matériaux. Ces méthodes sont utilisées industriellement au cours du développement des matériaux afin de dimensionner les pièces selon leur usage.

Dans le cadre de l'homogénéisation dynamique qui intéresse cette étude, les phénomènes ondulatoires seront à prendre en compte et interviendront différemment selon l'échelle. Parmi ces phénomènes, deux nous intéressent particulièrement, à savoir **l'atténuation** des ondes ultrasonores à la traversée du matériau et **la dispersion** de leur vitesse de phase. En effet, lorsqu'au cours d'un contrôle on cherche à localiser un défaut, la quantité utilisée sera le temps de vol, qui correspond au temps que met une onde plane à parcourir le trajet (direct ou indirect) qui sépare l'émetteur ultrasonore du récepteur ; le temps de vol dépend donc directement de la vitesse de propagation et potentiellement d'un phénomène de

dispersion. De plus, il faudra connaître le coefficient d'atténuation du matériau afin d'adapter au mieux la puissance du signal émis dans la pièce : en dessous d'une certaine puissance, il serait possible qu'un écho réémis par un défaut soit trop fortement atténué et ne puisse être détecté. Il nous faudra donc étudier les phénomènes ondulatoires responsables de l'atténuation et de la dispersion des ondes à chacune des échelles de notre matériau.

Par sa forme élémentaire, la loi de Hooke, représentative en particulier des milieux viscoélastiques linéaires et reliant les spectres des contraintes effectives et des déformations effectives par l'intermédiaire de constantes de rigidité notées C_{ij}, est un premier choix naturel de loi constitutive pour décrire les propriétés d'un milieu homogène équivalent. Dans le cadre des sollicitations quasi-statiques, elle s'est révélée appropriée à la modélisation du comportement dynamique de milieux périodiques ou aléatoires. Il existe une abondante littérature passée et actuelle à ce sujet et les articles de (Conoir et Norris 2010) ou (Linton et Martin 2005) contiennent des références aux principaux travaux publiés.

Néanmoins, la capacité de la loi de Hooke à modéliser la propagation tridimensionnelle d'ondes dans des milieux multifissurés, à partir d'un tenseur de rigidité effectif (indépendant de la sollicitation acoustique) peut être questionnée à partir de résultats présentés dans (Caleap, Aristégui et Poncelet 2013). Cette même loi de comportement s'est également avérée inadaptée à la description de la propagation d'ondes dans un empilement périodique de couches parallèles sous incidence oblique et de longueurs d'ondes intermédiaires (Shuvalov, et al. 2011). Appliquée à cette configuration, la loi de Hooke conduit à des problèmes structurels que les auteurs ont pu contourner en considérant les lois constitutives généralisées proposées par Milton et Willis (Milton et Willis 2007), reliant les contraintes effectives, à la fois aux déformations et aux impulsions (quantités de mouvement) effectives. À l'aide de cette formulation, le modèle de comportement associé tient compte des couplages élasto-inertiels à l'échelle de la microstructure, mais dépend toujours de la sollicitation (angle d'incidence).

Notons que les remises en cause très récentes des relations classiques de l'élastodynamique par les relations de Willis font encore l'objet de travaux (y compris par Willis) ; les développements théoriques se poursuivent et leurs applications à des cas réels ne semblent pas immédiates.

Le Département d'Imagerie et Simulation pour le Contrôle du CEA-Saclay, où j'ai effectué ce travail de thèse, développe un logiciel de CND appelé CIVA. Ce logiciel comprend une partie consacrée aux ultrasons, permettant la simulation du contrôle d'une large gamme de matériaux anisotropes ou hétérogènes. Ce logiciel se base sur des modèles de propagation de faisceaux pour la simulation du champ ultrasonore (Gengembre et Lhémery 2000) et sur un autre modèle (Lhémery, et al. 2000) pour la description de l'interaction avec les défauts. Ces modèles supposent que les milieux constitutifs des pièces, même complexes, sont décrits par un ensemble de milieux homogènes.

De précédentes études menées au CEA (Lonné 2003) et (Deydier 2006) concernant l'homogénéisation dynamique de matériaux composites dans le formalisme de Hooke et surtout la volonté d'exploiter directement les résultats de nos travaux dans le logiciel CIVA, nous ont naturellement conduit à considérer cette loi comme constitutive du milieu homogène équivalent que nous cherchons à définir.

Notons que les coefficients de rigidité C_{ij} constituent les données d'entrée des modèles de simulation. En effet, d'après la décomposition de Fourier, tout champ élastodynamique peut être décrit comme une combinaison de champs élémentaires obtenus à partir des nombres d'onde des ondes se propageant dans chaque direction et pour chaque fréquence. L'utilisation de l'équation de Christoffel (A. H. Nayfeh 1995) nous permet ensuite de déterminer les nombres d'onde à valeurs complexes à partir des rigidités C_{ij} à valeurs complexes.

L'objectif de nos travaux est donc, à partir de la structure du volume élémentaire représentatif et des propriétés de chacun de ses constituants, de **définir les propriétés du milieu homogène représentatif** des phénomènes ondulatoires ayant lieu en son sein, aussi appelé milieu effectif dans notre document.

Il est important de noter que dans cette étude nous nous focalisons sur le régime propagatif des ondes planes dans le milieu hétérogène ; le régime diffusif, le bruit de structure résultant de l'interaction des ondes ultrasonores avec la structure interne du matériau (en l'absence de défaut) n'est pas pris en compte. Il existe des méthodes permettant de traiter le bruit dans le cas de certains matériaux. Des thèses très récentes effectuées au CEA traitent, l'une, du cas des matériaux métalliques (acier à gros grains) (Bedetti 2012) où l'on considère une structure hétérogène à trois dimensions, l'autre du cas des matériaux composites multicouches (Journiac 2012). Ici, nous chercherons uniquement à nous placer dans un régime fréquentiel minimisant les perturbations apportées par le bruit de structure.

Les développements effectués pour traiter l'échelle microscopique ont été menés dans l'optique d'alimenter les modèles permettant l'homogénéisation à l'échelle mésoscopique. Cependant, ces développements ayant été problématique, nous n'avons pu faire aboutir les méthodes qui s'appliquent à l'échelle mésoscopique. Mais nous avons toujours considéré cette échelle ainsi que des pistes de recherche lors des réflexions concernant l'échelle microscopique. N'ayant pu faire aboutir les méthodes développées pour l'échelle méso, nous présentons les développements effectués et les réflexions menées dans l'annexe H de ce document.

Le corps de ce document s'articulera comme suit. À l'échelle microscopique où nous traitons le matériau comme une couche unidirectionnelle, nous présenterons, dans un premier chapitre, les phénomènes complexes dont on cherche à rendre compte tout en faisant un état de l'art sur les méthodes préexistantes qui observent le matériau sous l'incidence normale des ondes de volume. Nous pourrons alors mettre en avant la nécessité de développer une méthode faisant l'objet du chapitre deux et qui considère des ondes guidées se propageant dans la direction des fibres afin de compléter les résultats obtenus par les méthodes précédemment citées. À la vue des résultats de la méthode considérant les ondes guidées, nous verrons qu'il nous faut considérer une autre manière d'approcher le problème qui consistera en l'extension de la première méthode considérant les ondes de volumes en incidence normale au cas de l'incidence oblique et que nous détaillerons dans le chapitre trois. Nous pourrons alors conclure sur les méthodes présentées en fonction des résultats obtenus.

Chapitre I.

Description du matériau et des phénomènes ondulatoires responsables de l'atténuation et de la dispersion des ondes s'y propageant

Dans ce premier chapitre, nous cherchons à établir une méthode d'homogénéisation qui rende compte des phénomènes **d'atténuation** et de **dispersion** des ondes se propageant dans le matériau : on souhaite définir les coefficients décrivant la rigidité d'un matériau homogène équivalent (appelé matériau effectif) et représentatifs des mécanismes au sein de la mèche (échelle microscopique). Après avoir présenté le matériau à cette échelle ainsi que les caractéristiques de ses constituants, les sources de dissipation et de dispersion seront détaillées. Nous ferons ensuite un état de l'art des méthodes permettant d'homogénéiser le matériau à cette échelle afin d'en tirer les justifications nous ayant menés au développement de méthodes qui visent à compléter les travaux préexistants.

1. Présentation du matériau

À cette échelle, le matériau dont nous cherchons à déterminer les propriétés effectives est une mèche constituée de fibres de Carbone parallèles et entourées de matrice époxy. Les fibres élastiques sont isotropes transverses et la matrice viscoélastique est isotrope ; la symétrie macroscopique de la mèche est donc **l'isotropie transverse**. Notons que dans la suite de ce chapitre, nous considérons la mèche comme étant équivalente à une couche unidirectionnelle de composite (Figure I-1), c'est-à-dire que l'on s'affranchit de sa géométrie cylindrique (ou elliptique) réelle et ne conservons comme caractéristiques que la concentration et le rayon des fibres.

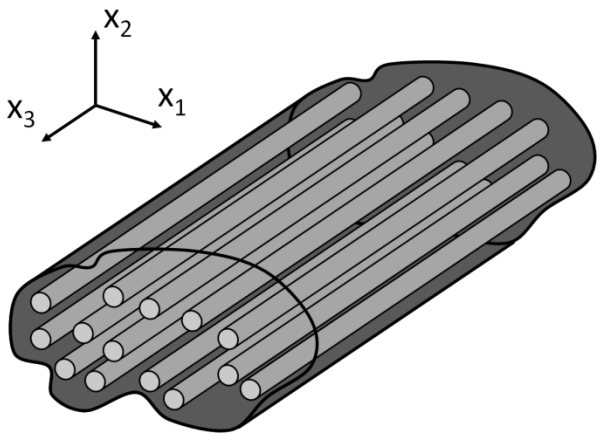

Figure I-1. Couche unidirectionnelle de composite.

Ce choix est justifié par le fait que ces matériaux sont constitués d'un grand nombre (quelques milliers) de fibres micrométriques, rendant difficile leur représentation

hétérogène complète. Notons de plus que la fraction volumique de fibres que présentent les mèches est très élevée puisqu'elle se situe entre 50% et 90% (ce dernier pourcentage représentant la répartition la plus compacte possible de cylindres dans un volume en arrangement hexagonal).

Décrivons maintenant les phénomènes ondulatoires responsables de l'atténuation et de la dispersion dans la couche unidirectionnelle de composite.

2. Phénomènes ondulatoires

En présence de fibres de Carbone isotropes transverses et d'une résine polymère viscoélastique, les phénomènes atténuants que l'on s'attend à observer sont les pertes visqueuses dans la matrice et les pertes par diffusion sur les fibres.

1. La viscoélasticité

La résine époxy est un matériau viscoélastique ; au cours de sa propagation dans la résine, une onde élastique est atténuée proportionnellement à la distance parcourue. Le phénomène d'atténuation viscoélastique peut être décrit à l'aide de différents modèles rhéologiques, couplant oscillateurs et amortisseurs idéaux, qui conduisent à une expression de l'atténuation en fonction de la fréquence. Trois modèles unidimensionnels sont couramment utilisés ; le modèle de Maxwell, le modèle de Kelvin-Voigt et le modèle de Zener, représentés sur la Figure I-2.

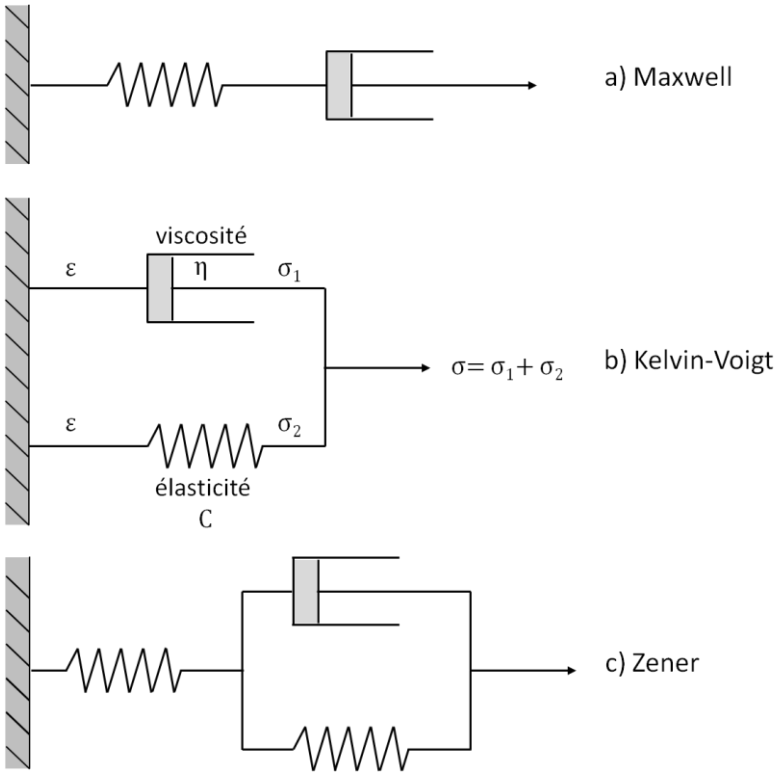

Figure I-2. Modèles rhéologique d'atténuation unidimensionnels couramment utilisé a) Maxwell, b) Kelvin-Voigt, c) Zener.

On s'intéresse tout particulièrement à la dépendance fréquentielle de l'atténuation engendrée par le modèle de Kelvin-Voigt, celui-ci étant le plus fréquemment utilisé dans la

littérature pour sa capacité à donner des résultats proches de l'expérience (sur une petite gamme de fréquence) et la simplicité de sa définition par deux paramètres η et C.

L'expression des nombres d'onde des ondes de compression, respectivement de cisaillement, se propageant dans la résine isotrope viscoélastique est donnée par :

$$k_L = \frac{\omega}{c_L(\omega)} + i\alpha_L(\omega) \quad , \quad k_S = \frac{\omega}{c_S(\omega)} + i\alpha_S(\omega) \tag{1.1}$$

avec ω la pulsation, c_L et c_S les vitesses de phase respectives des ondes L (compression) et S (cisaillement) et α_L, α_S leur coefficient d'atténuation.

En supposant les variables de champ comme étant des fonctions harmoniques du temps (dépendance en $e^{\pm i\omega t}$), la loi de Hooke

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\,, \tag{1.2}$$

où la contrainte est linéairement proportionnelle à la déformation, et la loi de Newton

$$\sigma_{ij} = \eta_{ijkl}\frac{d\varepsilon_{kl}}{dt}\,, \tag{1.3}$$

où la contrainte est linéairement dépendante de la vitesse de déformation, utilisées dans l'équation d'onde unidimensionnelle nous amènent, après quelques manipulations (Auld 1990), à considérer une atténuation proportionnelle au carré de la fréquence.

Par exemple, dans le cas d'une traction uni-axiale selon la direction 1, on montre (Auld 1990) que l'expression du coefficient d'atténuation α est :

$$\alpha^2 = \frac{\rho\omega^2}{2C_{11}}\left(\frac{1}{\left(1+\left(\frac{\omega\eta_{11}}{C_{11}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left(1+\left(\frac{\omega\eta_{11}}{C_{11}}\right)^2\right)^2}\right). \tag{1.4}$$

On fait ensuite l'approximation de faible viscosité donnée par :

$$\left(\frac{\omega\eta_{11}}{C_{11}}\right)^2 \ll 1\,, \tag{1.5}$$

ce qui conduit à

$$\alpha \cong \frac{1}{2}\frac{\eta_{11}}{C_{11}}\sqrt{\frac{\rho}{C_{11}}}\,\omega^2. \tag{1.6}$$

Par une approche empirique, qui consiste à effectuer des mesures de l'atténuation dans l'époxy à différentes fréquences pour ensuite interpoler les résultats expérimentaux par une loi fréquentielle adaptée, certains auteurs (Kinra, Petraitis et Datta 1980), (Rokhlin, et al. 1986) ont montré que l'atténuation dans la résine époxy dépendait linéairement de la

fréquence. Les phénomènes physiques complexes intervenant à l'échelle moléculaire, qui sont à l'origine de l'atténuation, n'étant que partiellement compris, il est difficile de définir un modèle permettant de retrouver les résultats expérimentaux. Dans un article récent (Challis et al. 2009), les auteurs offrent de faire une comparaison de plusieurs modèles d'atténuation dont les modèles apparaissant sur la Figure I-2. Cette comparaison est basée sur l'étude de leur capacité à simuler le lien linéaire, mis en évidence par l'expérience, entre l'atténuation et la fréquence. Parmi ces modèles, les auteurs utilisent des modèles développés dans le cadre de l'électronique et vérifient leur applicabilité au cas de l'élasticité ainsi que leur capacité à reproduire les résultats expérimentaux. Certains modèles (Debye, Cole-Cole…) permettent une meilleure prédiction, au prix d'une complexité accrue.

L'introduction de deux coefficients de Lamé à valeurs complexes $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ donnés par (Biwa, Idekoba et Ohno 2002) pour représenter la viscoélasticité de la matrice supposée isotrope nous donne un lien simple entre ces coefficients et l'atténuation. On a :

$$\begin{cases} \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} = \rho\left(\dfrac{2\pi f}{k_L}\right)^2 = \rho c_L^2(\omega)\left(1 + i\dfrac{c_L(\omega)\alpha_L(\omega)}{2\pi f}\right)^{-2} \\ \bar{\mu} = \rho\left(\dfrac{2\pi f}{k_T}\right)^2 = \rho c_S^2(\omega)\left(1 + i\dfrac{c_S(\omega)\alpha_S(\omega)}{2\pi f}\right)^{-2} \end{cases} . \tag{1.7}$$

On remarque alors que si l'on considère, tel que montré empiriquement, une atténuation ayant une dépendance linéaire à la fréquence et des vitesses de phase qui ne présentent aucune dispersion ($c_p(\omega) = c_p\ ,\quad p = L, S$), les coefficients de rigidité à valeurs complexes apparaissent comme indépendants de la fréquence (Rokhlin, et al. 1986).

Nous basant sur les résultats obtenus expérimentalement, nous considérerons dans cette étude que les coefficients $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ de la matrice époxy sont indépendants de la fréquence. Les valeurs utilisées sont données en annexe A.

2. *L'anisotropie*

Une autre particularité de notre matériau est l'anisotropie des fibres de Carbone. En effet celles-ci sont de symétrie isotrope transverse ce qui signifie que le plan perpendiculaire à l'axe de la fibre est un plan isotrope : les ondes s'y propagent à la même célérité dans toutes les directions. Les vitesses de propagation sont par contre dépendantes de la direction de propagation hors de ce plan. Les coefficients de rigidité sont représentés par le tenseur C_{ijkl} qui apparaît dans la relation de Hooke :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\ , \tag{1.8}$$

reliant les composantes du tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ à celles du tenseur des déformations $\bar{\bar{\varepsilon}}$.

Dans le cas de l'isotropie transverse, seules cinq composantes du tenseur $\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}}$ sont indépendantes (Auld 1990). On exprime dans la suite tous les coefficients de rigidité du tenseur en utilisant la notation en indice réduit définie par :

$$1 \rightarrow 11,\ 2 \rightarrow 22,\ 3 \rightarrow 33,\ 4 \rightarrow 23,\ 5 \rightarrow 13,\ 6 \rightarrow 12.$$

Ainsi, le tenseur de rigidité d'ordre 4 d'un matériau isotrope transverse ayant pour axe de symétrie l'axe 3, prend la forme d'une matrice 6x6 :

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{11}-2C_{66} & C_{13} & & & \\ C_{11}-2C_{66} & C_{11} & C_{13} & & 0 & \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & 0 & & & C_{44} & \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix}. \qquad (1.9)$$

À titre indicatif, nous présentons les courbes de lenteur des ondes de volumes qui se propageraient dans un milieu continu infini ayant les propriétés élastiques des fibres de Carbone ; ces courbes sont calculées à partir des valeurs données en annexe A utilisées dans l'ensemble du document.

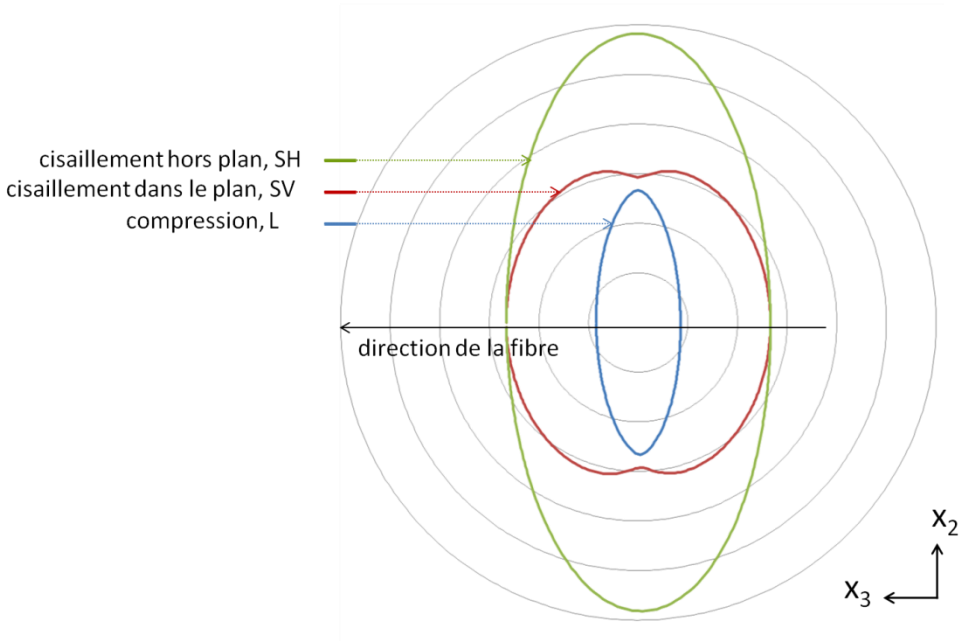

Figure I-3. Courbes de lenteur du Carbone.

Contrairement à la matrice époxy, les fibres de Carbone sont considérées comme étant purement élastiques : une onde ne sera donc pas atténuée lors de sa propagation dans les fibres ; ses coefficients de rigidité sont à valeurs réelles.

La présence des fibres de Carbone dans notre matériau amènera par contre des pertes d'énergie par diffraction des ondes sur celles-ci et un phénomène de dispersion des vitesses de phase associées pourra potentiellement être observé.

Dans le mémoire, nous nommerons *diffusion* le phénomène global d'interaction entre une onde et les hétérogénéités présentent dans un milieu et *diffraction* le phénomène unitaire de l'interaction de l'onde sur un objet.

3. La diffusion par un ensemble de fibres

Une quantité qui régit de façon essentielle le problème de la diffusion d'une onde par un ensemble d'hétérogénéités est le rapport de la longueur d'onde de l'onde se propageant dans le milieu hétérogène à la taille caractéristique des diffuseurs ; ceci nous amènera tout au long de l'étude à traiter les problèmes en termes de fréquence adimensionnée représentée par le produit $\frac{\omega}{c}a$ ou fa, avec a le rayon des fibres, c la célérité et f la fréquence de l'onde se propageant dans le milieu. De par le contexte industriel du Contrôle Non Destructif dans lequel s'inscrit cette étude, les fréquences typiques de contrôle dans ces matériaux nous amèneront à nous placer dans les régimes où la longueur d'onde est très supérieure au rayon des fibres, c'est-à-dire, en terme de nombre d'onde, que l'on aura $\frac{\omega}{c}a \ll 1$.

Lorsque l'on considère une onde se propageant dans un milieu contenant un grand nombre de diffuseurs identiques (des cylindres parallèles d'extension infinie dans notre cas), deux comportements généraux peuvent être considérés suivant la concentration en diffuseurs, leur géométrie et la fréquence de l'onde.

La première manière de rendre compte de la diffusion d'une onde consiste à représenter l'interaction de cette onde avec tous les diffuseurs comme la somme de son interaction avec chaque diffuseur : chacun est alors vu comme isolé dans un milieu infini lors de la résolution du problème de la diffraction. Ce régime de comportement est nommé régime de diffusion simple. La Figure I-4 représente son principe.

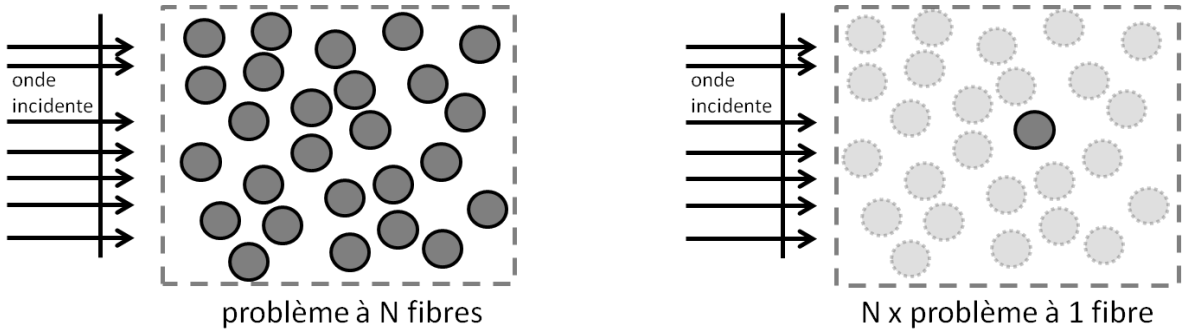

Figure I-4. Représentation du phénomène de diffusion simple.

Les interactions entre diffuseurs étant considérées comme négligeables, seul le problème général de la diffraction d'une onde par un cylindre doit être résolu. On cherche à déterminer l'expression du champ diffracté par un cylindre d'extension infinie placé dans un milieu infini induit par une onde incidente de compression ou de cisaillement. Ces expressions peuvent être obtenues analytiquement, en utilisant notamment les conditions aux limites traduisant la continuité des déplacements et du vecteur contrainte à l'interface cylindre-milieu environnant. On montre par ailleurs, (Hinders 1993), qu'il est nécessaire de prendre en compte les conversions de mode entre les ondes de compression et de cisaillement qui ont lieu à cette interface. Sous cette hypothèse de diffusion simple, (Biwa 2001) détermine l'atténuation due à la diffusion en calculant un coefficient de diffraction des ondes faisant intervenir la section efficace de diffraction (*scattering cross-section* en anglais) des objets diffusants.

L'hypothèse revenant à considérer un diffuseur comme isolé n'est valide que si les interactions entre les diffuseurs peuvent être négligées, c'est-à-dire lorsque la distance moyenne entre les diffuseurs est suffisamment grande (par rapport à la longueur d'onde) ou encore que leur concentration est faible.

Dans le cas des matériaux comportant une forte densité de diffuseurs, cette hypothèse n'est plus valide et il nous faut prendre en compte les interactions entre diffuseurs. On se place alors dans le régime de la diffusion multiple où la proximité des diffuseurs fait apparaître des chemins de diffusion le long desquels les ondes multiplement diffractées vont pouvoir se sommer de manière cohérente, Figure I-5.

La couche unidirectionnelle de composite qui représente les mèches est constituée d'un grand nombre de fibres de Carbone et les concentrations considérées sont supérieures à 50% : il nous faudra donc prendre en compte le phénomène de diffusion multiple entre les fibres.

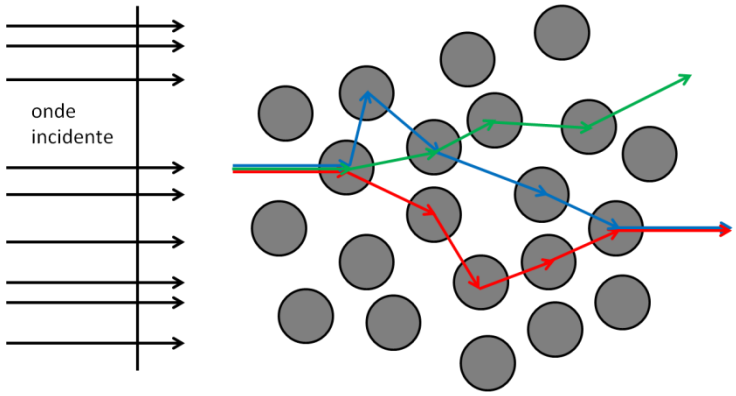

Figure I-5. Représentation du phénomène de diffusion multiple.

La théorie de la diffusion multiple et la manière de prendre en compte les interactions entre diffuseurs ont été traitées par (Waterman et Truell 1961) qui reprenaient les travaux pionniers de (Foldy 1945) et (Lax 1951) afin d'estimer les propriétés dynamiques des ondes planes se propageant dans un milieu tel que représenté sur la Figure I-5. Ils traitaient le cas de diffuseurs sphériques et se basaient sur la résolution du problème de la diffraction sur un objet isolé, couplée à des considérations statistiques sur le milieu. Ces méthodes utilisent

des approximations (hypothèse de fermeture) qui ne les rendent valides que pour de faibles concentrations de diffuseurs.

Reprenant ces théories dans le cadre des modèles dit « auto-cohérents » (*self consistent model* en anglais) des auteurs comme (Yang et Mal 1994) (cas cylindrique), (J. Y. Kim 2004) (cas cylindrique) ou encore (Kanaun, Levin et Sabina 2004) (cas sphérique) développent des approches permettant de déterminer un milieu effectif ayant les mêmes propriétés en terme de diffusion que le matériau hétérogène et dont les caractéristiques sont représentatives de la microstructure des diffuseurs. Ces méthodes sont adaptées aux matériaux à forte concentration en diffuseurs.

On notera enfin les travaux de (Huang et Rokhlin 1995) qui étudient la dispersion de la vitesse de phase des ondes dans la couche unidirectionnelle de composite ; ils montrent que dans la direction d'incidence normale aux fibres, aucun phénomène de dispersion n'est observé ; par contre, lorsque les ondes de volume se propagent dans la direction des fibres, ils observent un fort phénomène de dispersion.

Nous avons décrit au cours de cette section les phénomènes responsables de l'atténuation et de la dispersion dans le composite unidirectionnel représentatif de la mèche ; nous exposons maintenant les méthodes d'homogénéisation d'un tel composite par la détermination des propriétés mécaniques dynamiques d'un milieu effectif représentatif des phénomènes ondulatoire vus précédemment.

3. Description de deux méthodes d'homogénéisation dynamique de matériaux composites

Il existe un grand nombre de méthodes d'homogénéisation dynamique de matériaux composites. En plus des articles évoqués dans l'introduction, nous orientons le lecteur vers deux récents articles de revue comportant de nombreuses références bibliographiques (Charalambakis 2010) et (J. Y. Kim 2010). Le premier est une revue très complète de l'ensemble des méthodes pouvant être mises en œuvre ou développées pour l'homogénéisation dynamique. Le second se place spécifiquement dans le cas des composites 2D et compare les résultats obtenus avec un grand nombre de méthodes sur une large gamme de concentrations.

Les paragraphes suivants sont consacrés à la description de deux de ces méthodes ; la première est appelée méthode d'homogénéisation asymptotique et permet d'homogénéiser, dans le cas dynamique, les couches unidirectionnelles de matériaux composites. Elle s'applique principalement aux matériaux périodiques, même si de récents résultats semblent permettre de l'appliquer au cas de matériaux dont la répartition des hétérogénéités est aléatoire ; ces derniers restent cependant à confirmer expérimentalement.

La seconde méthode que nous décrirons est une méthode développée antérieurement à nos travaux et qui nous sert de point de départ. Cette approche développée au CEA, proposée par (S. Lonné 2003) au cours de sa thèse, étend le modèle auto-cohérent développé par (Yang et Mal 1994) au cas de matériaux viscoélastiques. Nous ne présenterons pas ici le détail de cette méthode puisque ces travaux seront repris dans le chapitre III ; nous en

rappellerons simplement les principes et certains résultats afin de développer les arguments qui justifient notre étude.

1. Homogénéisation asymptotique

Dans le but d'illustrer le problème, nous nous intéressons au cas unidimensionnel représenté par la Figure I-6 (Andrianov, et al. 2008).

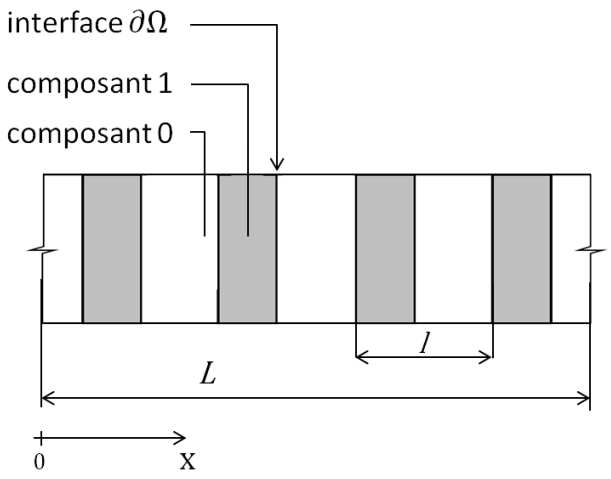

Figure I-6. Matériau hétérogène unidimensionnel.

L'équation d'onde unidimensionnelle correspondant à la propagation d'une onde de compression dans la direction x est :

$$E^{(j)}\frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial x^2} = \rho^{(j)}\frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial t^2} \quad , \tag{1.10}$$

avec $E^{(j)}$ les modules d'Young des matériaux constituants : $j = 0,1$.

On suppose ensuite la continuité des déplacements et des contraintes à l'interface $\partial\Omega$, ce qui nous donne :

$$\left\{u^{(0)} = u^{(1)}\right\}_{\partial\Omega} \tag{1.11}$$

et

$$\left\{E^{(0)}\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x^2} = E^{(1)}\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2}\right\}_{\partial\Omega} \quad . \tag{1.12}$$

Les équations (1.10)-(1.12) forment le BVP (Boundary Value Problem) que l'on cherche à résoudre en utilisant la méthode d'homogénéisation asymptotique.

Ce type de méthode se base sur la définition de deux variables l et L qui correspondent respectivement aux échelles mésoscopique et microscopique. On définit un petit paramètre ε, tel que $\varepsilon = l/L$, qui nous permet de définir les coordonnées lentes (x) et rapides (y) du problème $y = \varepsilon^{-1}x$. On exprime ensuite le déplacement sous la forme d'un développement asymptotique fonction de ces coordonnées, par l'équation suivante :

$$u^{(j)} = u_0(x) + \varepsilon u_1^{(j)}(x,y) + \varepsilon^2 u_2^{(j)}(x,y) + \cdots \quad , \tag{1.13}$$

où le premier terme $u_0(x)$ correspond à la partie homogène de la solution, variant peu sur l'ensemble du matériau, les autres termes $u_i^{(j)}$, $i = 1,2, \dots , n$, fournissant des corrections aux ordres ε^i, décrivent les variations locales du déplacement à l'échelle des hétérogénéités.

En substituant ensuite cette expression dans les équations (1.10) - (1.12), on en vient à poser n BVP qui impliquent chacun une équation de propagation à l'échelle microscopique :

$$E^{(j)} \left(\frac{\partial^2 {u_{i-2}}^{(j)}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 {u_{i-1}}^{(j)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 {u_i}^{(j)}}{\partial y^2} \right) = \rho^{(j)} \frac{\partial^2 {u_{i-2}}^{(j)}}{\partial t^2} \quad , \tag{1.14}$$

avec $i = 1,2, \dots , n$ et $u_{-1}^{(j)} = 0$, et des conditions aux limites à l'échelle microscopique :

$$\left\{ {u_i}^{(1)} = {u_i}^{(2)} \right\}_{\partial\Omega} \ , \tag{1.15}$$

et

$$\left\{ E^{(1)} \left(\frac{\partial\, {u_{i-1}}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial\, {u_i}^{(1)}}{\partial y} \right) = E^{(2)} \left(\frac{\partial\, {u_{i-1}}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial\, {u_i}^{(2)}}{\partial y} \right) \right\}_{\partial\Omega} \ . \tag{1.16}$$

Le matériau considéré est périodique, ainsi, on a :

$$u^{(j)}(x,y) = u^{(j)}(x, y + L) \ . \tag{1.17}$$

On peut ensuite obtenir une solution analytique au problème cellulaire (domaine $\Omega_0 + \Omega_1$) posé par les équations (1.14) à (1.17).

L'équation de propagation homogène à l'ordre ε^{i-1} est ensuite obtenue en faisant l'intégrale de l'équation (1.14) sur la cellule unitaire :

$$\begin{aligned} E^{(0)} \int_{\Omega_0} \frac{\partial^2 {u_{i-1}}^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 {u_i}^{(0)}}{\partial x \partial y} \, dy + E^{(1)} \int_{\Omega_1} \frac{\partial^2 {u_{i-1}}^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 {u_i}^{(1)}}{\partial x \partial y} \\ = \rho^{(0)} \int_{\Omega_0} \frac{\partial^2 {u_{i-1}}^{(0)}}{\partial t^2} + \rho^{(1)} \int_{\Omega_1} \frac{\partial^2 {u_{i-1}}^{(1)}}{\partial t^2} \ . \end{aligned} \tag{1.18}$$

La combinaison des équations homogènes (1.18) aux différents ordres nous permet ensuite de déterminer les propriétés effectives du milieu.

Par exemple, l'équation homogène à l'ordre ε^2 est :

$$\langle E \rangle_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \varepsilon^2 L^2 \langle E \rangle_2 \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + O(\varepsilon^4) = \langle \rho \rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \ . \tag{1.19}$$

avec

$$\langle E \rangle_0 = \frac{E^{(0)} E^{(1)}}{(1-c) E^{(1)} + c E^{(0)}} \ , \tag{1.20}$$

où $\langle E \rangle_0$ est le module d'Young effectif à l'ordre 0, $\langle \rho \rangle$ est la masse volumique effective et c est la fraction volumique de l'élément Ω_1, et

$$\langle E \rangle_2 = \frac{1}{12} c^2 (1-c)^2 \frac{\langle E \rangle_0^3 \left(E^{(1)} \rho^{(1)} - E^{(0)} \rho^{(0)} \right)}{\langle \rho \rangle^2 (E^{(1)} E^{(0)})^2} \quad , \tag{1.21}$$

est le module d'Young effectif à l'ordre 2.

Il est à noter que dans le cas bidimensionnel, le problème cellulaire que l'on pose en suivant un raisonnement similaire n'a pas de solution analytique ; des méthodes numériques sont alors utilisées pour le résoudre.

On notera aussi la possibilité d'utiliser l'expansion asymptotique des variables temporelles de la même manière que les variables d'espace afin de prendre en compte les effets par exemple de dispersion ou d'atténuation (Chen et Fish 2001).

Les méthodes utilisant l'homogénéisation asymptotique permettent d'obtenir de bons résultats lors de l'homogénéisation de composite unidirectionnel avec des fibres de sections quelconques et reparties périodiquement (Parnell et Abrahams 2008) ; il faudra par contre effectuer une résolution du problème cellulaire pour chaque type de section des hétérogénéités et pour chaque configuration. Dans notre cas d'étude, on cherche à définir une méthode analytique multi-échelle adaptée. On notera par ailleurs l'article très récent de (Willoughby, et al. 2012) qui utilise l'homogénéisation asymptotique dans le cas de composites unidirectionnels à répartition aléatoire de fibres et étudie les questions de la définition de la cellule élémentaire en termes de configuration et de forme, ainsi que la stabilité des résultats vis-à-vis des différentes configurations.

2. *Méthode de Sébastien Lonné : modèle à trois phases en incidence normale*

Nous présentons maintenant une méthode permettant d'effectuer l'homogénéisation d'une couche unidirectionnelle de composite en utilisant un modèle auto-cohérent (S. Lonné 2003).

a. **Définition du problème**

Afin de déterminer les propriétés homogénéisées du matériau, on définit un milieu à trois phases comme représenté par la Figure I-7.

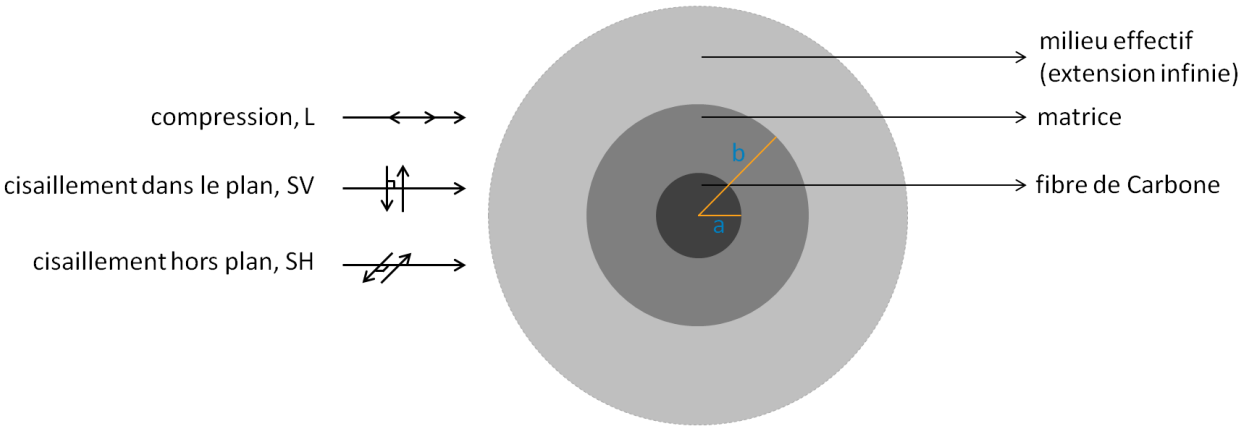

Figure I-7. Milieu à trois phases en incidence normale.

Les dimensions de chaque phase sont données par deux paramètres d'entrée, à savoir, le rayon des fibres a, et la fraction volumique de fibres c ; le rayon b de la phase intermédiaire est défini par $b = a/\sqrt{c}$.

On définit ensuite la masse volumique du milieu effectif comme étant classiquement la moyenne pondérée des masses volumiques des deux milieux, à savoir :

$$\rho = \rho_m(1-c) + \rho_f c \ , \tag{1.22}$$

avec ρ_f la masse volumique des fibres et ρ_m la masse volumique de la matrice époxy.

Notons que cette définition de la masse volumique du milieu effectif est valide lorsque l'on considère un matériau dont les constituants sont des solides ayant des masses volumiques proches l'une de l'autre, les effets d'inerties étant alors négligeables ; sinon, (Martin 2010) proposent des expressions de la densité effective suivant les cas (fluide/fluide, fluide/solide, solide/solide, …). Dans le cas de matériaux constitués par exemple de phases solide et fluide, l'expression de la densité effective est donnée par :

$$\frac{\rho_e}{\rho_m} = \frac{(1-cQ_2)}{(1+cQ_2)} \ , \tag{1.23}$$

avec

$$Q_2 = \frac{(\rho_m - \rho_f)}{(\rho_m + \rho_f)},$$

où la masse volumique effective ρ_e fait intervenir des termes du second ordre.

Dans notre cas, les constituants sont des solides et leurs densités volumiques, données en Annexe A, diffèrent peu : on conservera donc la relation (1.22).

La méthode consiste en la détermination des nombres d'onde effectifs des ondes se propageant dans le milieu environnant. Pour cela, on résout le problème de la diffraction des trois types de polarisation d'onde (L, SV, SH) sur chacune des interfaces.

Les trois phases étant cylindriques, on détaille, dans la section suivante, la méthode de résolution du problème de la diffraction des différents types d'onde en incidence normale sur les cylindres ayant les propriétés décrites précédemment.

b. Expression des potentiels dans chaque phase

Sur la Figure I-7 les trois types d'ondes incidentes sont représentées : les ondes de compression notées L, les ondes de cisaillement polarisées dans le plan d'incidence notées SV, et les ondes de cisaillements polarisées dans le plan perpendiculaire au plan incident notées SH. Notons que du fait de l'isotropie du plan d'incidence, chacune des ondes L ou SV incidentes pourra donner naissance aux deux types d'ondes lors de la diffraction. Les ondes SH, quant à elles, généreront uniquement des ondes de même polarisation après diffraction ; on peut donc séparer le problème en deux problèmes distincts, le cas de l'incidence des ondes SH et le cas de l'incidence des ondes L et SV.

Pour résoudre la diffraction des ondes sur le cylindre, on cherche à exprimer le champ de déplacement dans chacun des milieux. Le champ de déplacement $u(r,\theta,z,t)$ en tout point de l'espace peut s'exprimer en fonction de trois potentiels scalaires ϕ, χ et ψ (Morse et Feshbach 1953) :

$$u = \nabla\phi + \nabla \times (\psi \hat{\boldsymbol{e}}_z) + \nabla \times \nabla \times (\chi \hat{\boldsymbol{e}}_z) \ , \tag{1.24}$$

avec a le rayon du cylindre et $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ le vecteur unitaire dans la direction de l'axe du cylindre

Ici les potentiels ϕ, ψ, χ correspondent respectivement aux ondes de compression, de cisaillements polarisées dans le plan transverse et aux ondes polarisées selon l'axe du cylindre. On a vu qu'en incidence normale le comportement des ondes SH se découplait de celui des ondes P et SV, on peut donc formuler le problème plus simplement.

<u>Onde SH incidente</u>

On considère une onde plane monochromatique de polarisation SH incidente sur le modèle. Les champs de déplacement dans chaque milieu n'auront de composante que selon la direction de polarisation (direction 3) et prennent la forme (Bose et Mal 1973):

$$\begin{cases} u_z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left[i^n J_n(k_{SH,2} r) + A_n H_n^{(1)}(k_{SH,2} r) \right] \sin n\theta \, e^{i\omega t} & , \quad r > b \\ u_z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left[B_n H_n^{(1)}(k_{SH,1} r) + C_n H_n^{(2)}(k_{SH,1} r) \right] \sin n\theta \, e^{i\omega t} & , \quad a < r < b \\ u_z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} D_n J_n(k_{SH,0} r) \sin n\theta \, e^{i\omega t} & , \quad r < a \end{cases} \tag{1.25}$$

où la partie gauche de l'expression du déplacement dans le milieu environnant ($r > b$) correspond à l'onde incidente, avec J_n la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n,

$H_n^{(1)}$ la fonction de Hankel de première espèce d'ordre n et $k_{SH,p}$ le nombre d'onde des ondes de cisaillement polarisées dans le plan.

Notons que nous ne reportons plus le facteur $e^{i\omega t}$, celui-ci étant commun à toutes les expressions.

Les coefficients A_n, B_n, C_n, D_n sont les amplitudes modales des ondes diffractées. Afin de les déterminer, on écrit les équations de continuité en déplacement et en contrainte aux interfaces $r = a$ et $r = b$ qui nous permettent de définir un système de quatre équations.

<u>Ondes P, SV incidentes</u>

On considère maintenant que l'onde incidente est une onde plane monochromatique L ou SV. On utilise la décomposition de Helmholtz afin d'exprimer le champ de déplacement en fonction des potentiels des ondes L et SV, ici ϕ et ψ :

$$\vec{u} = \overrightarrow{grad}\phi + \overrightarrow{rot}(\psi\overrightarrow{e_z}) \,. \tag{1.26}$$

Les potentiels auront la même forme que celle présentée dans le cas des ondes SH, à savoir :

$$\begin{cases} \phi = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[i^n J_n(k_{L,2}r) + E_n H_n^{(1)}(k_{L,2}r)\right]\cos n\theta \\ \psi = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[i^n J_n(k_{SV,2}r) + F_n H_n^{(1)}(k_{SV,2}r)\right]\cos n\theta \end{cases} \quad , \quad r > b \ , \tag{1.27}$$

$$\begin{cases} \phi = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[G_n H_n^{(1)}(k_{L,1}r) + M_n H_n^{(2)}(k_{L,1}r)\right]\cos n\theta \\ \psi = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[N_n H_n^{(1)}(k_{SV,1}r) + O_n H_n^{(2)}(k_{SV,1}r)\right]\cos n\theta \end{cases} \quad , \quad a < r < b \ , \tag{1.28}$$

$$\begin{cases} \phi = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n J_n(k_{L,0}r)\cos n\theta \\ \psi = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n J_n(k_{SV,0}r)\cos n\theta \end{cases} \quad , \quad r < a \ . \tag{1.29}$$

avec $k_{L,p}$ et $k_{SV,p}$ le nombre d'onde des ondes de compression respectivement de cisaillement polarisées dans le plan dans le milieu $p = 0,1,2$.

De la même manière que pour le cas des ondes polarisées selon l'axe du cylindre, on écrit les équations de continuité des déplacements et des contraintes en $r = a$ et en $r = b$, ce qui nous donne un système de huit équations.

c. Résolution du problème de diffraction

Les systèmes d'équations obtenus précédemment ont pour inconnues les amplitudes diffractées et les nombres d'onde du milieu environnant. Le système comportant plus d'inconnues que d'équations, il ne peut être résolu directement et l'on doit donc considérer des équations supplémentaires faisant intervenir les nombres d'onde ainsi que les amplitudes des ondes diffractées. Les auteurs (Yang et Mal 1994) proposent d'utiliser des équations rendant compte de la diffusion multiple :

$$\left(\frac{\langle k_p \rangle}{k_p}\right)^2 = \left[1 - \frac{2in_0 f_p(0)}{{k_p}^2}\right]^2 - \left[\frac{2in_0 f_p(\pi)}{{k_p}^2}\right]^2 , \quad p = L, SV, SH , \tag{1.30}$$

où $f_p(0)$ et $f_p(\pi)$ sont les fonctions d'amplitude de diffraction définies par :

$$\begin{cases} f_L(0) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} E_n & f_L(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n} E_n \\ f_{SV}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} F_n \quad , & f_{SV}(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n} F_n \ . \\ f_{SH}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} A_n & f_{SH}(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n} A_n \end{cases} \tag{1.31}$$

Ils proposent ensuite une méthode itérative qui permet d'obtenir les nombres d'onde des ondes se propageant dans le milieu effectif environnant.

d. Principaux résultats de la méthode

Afin de prendre en compte le phénomène de diffusion multiple sur les fibres, la viscosité de la résine ainsi que le couplage de ces phénomènes, on peut utiliser dans les équations des coefficients à valeurs complexes (S. Lonné 2003) dont la partie imaginaire est représentative de l'atténuation. L'équation de Christoffel (A. H. Nayfeh 1995) nous permet ensuite de relier les célérités des ondes dans un solide aux coefficients de rigidité de celui-ci pour déterminer trois des cinq coefficients qui caractérisent le milieu effectif isotrope transverse, à savoir les coefficients C_{11}, C_{44}, C_{66} – où nous rappelons que l'axe de symétrie de notre matériau est l'axe 3. En effet seuls ces trois coefficients influencent la propagation des ondes dans la direction perpendiculaire aux fibres.

Les principaux résultats obtenus par Lonné à l'aide de cette méthode, en fonction de la concentration en fibres ou de la fréquence des ondes sont les suivants :

- **aucun phénomène de dispersion** n'est observé sous cette direction d'incidence,
- l'atténuation dépend linéairement de la fréquence et décroît en fonction de la concentration.

Il est à noter que toutes les méthodes présentées jusqu'ici traitent le problème de la diffusion par un ensemble de cylindres sous la direction d'incidence normale à ceux-ci. Il n'existe, à notre connaissance, aucune méthode permettant de rendre compte des phénomènes ondulatoires complexes ayant lieu lors de la propagation d'une onde dans une couche unidirectionnelle de composite hors de cette incidence.

Parmi les deux méthodes présentées, la seconde méthode nous intéresse particulièrement par son aspect analytique permettant de prendre en compte toute la gamme de concentrations en fibres sans avoir à nous soucier de leur répartition réelle. Cependant, l'utilisation de cette méthode nous permet d'accéder à seulement trois paramètres sous la direction d'observation normale aux fibres ; il nous faudra donc développer une méthode permettant d'obtenir les deux coefficients restants afin de déterminer complètement les coefficients de rigidité d'une couche unidirectionnelle qui représente ici une mèche.

Pour cela, on s'intéresse au comportement des ondes se propageant dans le matériau selon la direction des fibres. La propagation des ondes de volume dans cette direction est très difficile à modéliser du fait de la complexité de la structure du matériau ; on choisit donc de s'intéresser à des ondes élastiques guidées se propageant dans la direction des fibres pour observer le matériau selon cette direction.

Chapitre II.

Identification des rigidités à partir des propriétés des ondes guidées

On considère désormais la couche unidirectionnelle comme étant de géométrie cylindrique. Le matériau sera donc semblable aux mèches dont on cherche les propriétés mais il est important de noter que nous ne travaillons pas avec les caractéristiques des mèches réelles au sens où nous considérons seulement un matériau représentatif du point de vue des dimensions des fibres, de leur répartition (le milieu doit être statistiquement homogène), de leur concentration. Il serait en effet trop coûteux, compte tenu des méthodes que nous utiliserons, de modéliser la mèche contenant plusieurs dizaines de milliers de fibres. Nous détaillerons les choix que nous avons faits lors de la définition du matériau homogène équivalent ainsi que les justifications qui les orientèrent.

Soit un guide d'ondes cylindrique de rayon R, d'extension infinie et contenant un grand nombre de fibres parallèles et alignées selon l'axe du cylindre.

1. Modélisation de la propagation des ondes guidées

Les ondes guidées se propageant dans un guide ainsi défini peuvent être décrites de manière modale ; l'existence des modes résulte du couplage des mouvements particulaires de compression-dilatation et de cisaillement aux parois du guide quand la longueur d'onde des ondes de volumes est du même ordre de grandeur que la section du guide.

Il existe plusieurs méthodes permettant de calculer les nombres d'onde des modes se propageant dans un guide. Une première méthode consiste à résoudre l'équation de dispersion correspondant à notre guide ; dans le cas de guides de géométrie simple, comme par exemple un cylindre homogène ou une plaque isotrope, les équations de dispersion sont connues de manière analytique respectivement comme les équations de Pochhammer et de Lamb (Royer et Dieulesaint 2000) ; on les résout numériquement afin d'obtenir les nombres d'onde à une fréquence donnée. Dans le cas des matériaux multicouches, on peut calculer les nombres d'onde en utilisant la méthode des matrices globales proposée par (Lowe 1995) pour des couches aussi bien anisotropes que viscoélastiques.

Une autre méthode permettant d'étudier la propagation des ondes guidées, particulièrement intéressante pour notre cas d'application, est la méthode SAFE (**S**emi-**A**nalytic **F**inite **E**lement). Elle consiste à utiliser des éléments finis dans une section droite du guide et d'exprimer de façon analytique la dépendance à la direction de propagation.

Dans le cas d'un maillage bidimensionnel de la section, le champ de déplacement en un point d'un triangle du maillage s'écrit sous la forme d'une interpolation par rapports aux nœuds, soit :

$$u(x,y) = N(x,y)U^i e^{j\omega t} \tag{2.1}$$

où $N(x,y)$ est la matrice d'interpolation et U^i contient les composantes du déplacement particulaire aux trois nœuds de l'élément i.

La relation entre déformation et déplacement écrite sous forme matricielle est :

$$\varepsilon = \left[L_x \frac{\partial}{\partial x} + L_y \frac{\partial}{\partial y} + L_z \frac{\partial}{\partial z}\right] u, \qquad L_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

En utilisant de plus la loi de Hooke, qui permet de relier le tenseur des contraintes à celui des déformations par :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \ , \tag{2.3}$$

le principe des travaux virtuels donné par :

$$\int_V \delta u^T t \, dV = \int_V \delta\varepsilon^T \sigma \, dV + \int_V \delta u^T \rho \, \ddot{u} \, dV \ , \tag{2.4}$$

prend alors la forme du système matriciel (2.5) :

$$(K_1 - i\beta K_2 + \beta^2 K_3)d - \omega^2 M d = f \ , \tag{2.5}$$

avec ω la pulsation, d le déplacement, β les nombres d'ondes des modes se propageant dans le guide, f les forces extérieures et K_1, K_2, K_3 les matrices de rigidité issues de l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires dépendantes des propriétés mécaniques locales.

Le système (2.5) est ensuite linéarisé et s'exprime (en l'absence de forces extérieures, $f = 0$) sous la forme :

$$(A - \beta B)Q = 0 \tag{2.6}$$

L'expression des matrice A, B et Q ainsi que la description complète de la méthode SAFE utilisée dans nos travaux fait l'objet de l'annexe B.

On ne résout donc plus l'équation de dispersion, comme dans les méthodes citées précédemment mais un système aux valeurs propres quadratiques.

Le principal avantage de cette méthode pour notre cas d'étude est la possibilité de simuler la propagation des ondes guidées dans un matériau hétérogène puisque le caractère hétérogène du guide pourra être pris en compte lors du calcul éléments finis dans la section. De même on rend compte de l'anisotropie et de la viscoélasticité d'un matériau en assignant aux éléments du maillage correspondants des propriétés mécaniques particulières représentées par le tenseur de rigidité $C_{ij}^{(n)}$, n correspondant aux différents matériaux.

Au cours de cette thèse, nous avons étendu l'implémentation de la méthode SAFE (présentée dans (Jezzine et Lhémery 2007)) au cas de matériaux orthotropes et viscoélastiques.

2. Méthode d'inversion à partir des propriétés des ondes guidés

1. *Principe*

Contrairement aux ondes de volume pour lesquelles l'équation de Christoffel nous permet de faire le lien entre les nombres d'onde des ondes de volume et les propriétés mécaniques du milieu, on ne peut inverser directement les nombres d'onde des ondes guidées pour connaître les rigidités C_{ij} de notre milieu de par le caractère dispersif de ces ondes. Il nous faut donc définir une méthode permettant d'inverser les nombres d'onde des modes guidés pour obtenir les coefficients de rigidité du matériau.

La Figure II-1 représente le schéma d'inversion que nous proposons ; nous expliquerons tout d'abord la méthode globale, avant d'en détailler chacune des étapes.

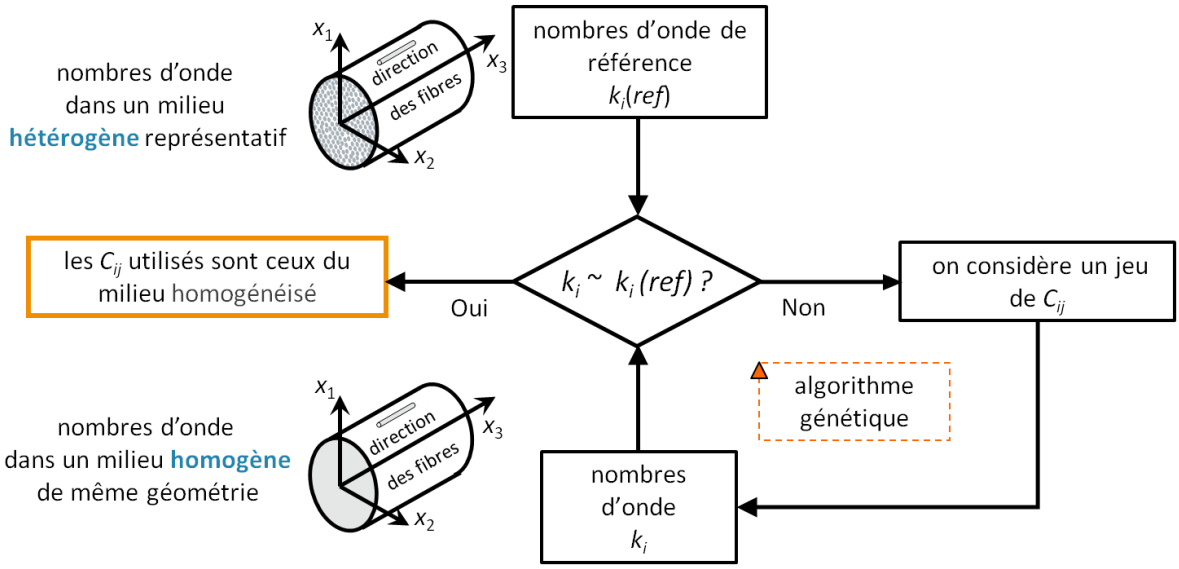

Figure II-1. Schématisation de la méthode d'inversion.

La première étape consiste à calculer, à l'aide de la méthode SAFE, les nombres d'onde des modes guidés qui se propagent dans le milieu hétérogène défini en début de chapitre. Ce calcul est assez coûteux car dépendant du nombre de fibres que contient la mèche représentative. Il n'est cependant effectué qu'une seule fois : les nombres d'onde obtenus sont conservés comme référence. On considère ensuite un milieu homogène de même géométrie que le milieu hétérogène de référence (cylindre de même diamètre) ayant pour coefficients de rigidité un jeu de C_{ij} choisis aléatoirement, puis on calcule les nombres d'onde des modes guidés qui se propagent dans ce milieu. Ces nombres d'onde sont alors comparés aux nombres d'onde de référence à l'aide de la fonction coût suivante :

$$err = \sum_{i=0}^{nb} \frac{\left(\Re(k_p) - \Re(k_{p,ref})\right)^2}{\Re(k_{p,ref})^2} + \sum_{i=0}^{nb} \frac{\left(\Im(k_p) - \Im(k_{pref})\right)^2}{\Im(k_{p,ref})^2}, \qquad (2.7)$$

avec nb le nombre de modes sur lequel on effectue l'inversion – ce point sera discuté dans la suite du document –, $\Re(k_{p,ref})$ et $\Im(k_{p,ref})$ respectivement les parties réelles et imaginaires des nombres d'onde de références résultants du calcul SAFE dans le milieu hétérogène, et $\Re(k_p)$, $\Im(k_p)$, les parties réelles et imaginaires respectives des nombres

d'onde correspondants aux modes se propageant dans le milieu homogène. Si les résultats de cette comparaison sont supérieurs à une valeur seuil prédéfinie, on retourne à l'étape 2, où l'on choisit aléatoirement un autre jeu de coefficients de rigidité. Cette opération est effectuée jusqu'à ce que la condition d'arrêt $err < seuil$ soit atteinte : on considère alors que les C_{ij} supposés du milieu homogène sont les coefficients de rigidité du milieu effectif recherché. Cette stratégie de rechercher un meilleur jeu de paramètres au sens d'une fonction coût est nommée optimisation.

Il existe un grand nombre d'algorithmes permettant d'effectuer l'optimisation de paramètres ; par exemple, les algorithmes génétiques ou les gradients-based algorithms. Chacune de ces familles d'algorithmes sera adaptée à la résolution d'un type de problème en particulier ; elles présentent des caractéristiques différentes en termes de vitesse de convergence ou de robustesse. On peut trouver dans (Chu, Degtyar et Rokhlin 1994) une méthode permettant d'obtenir les coefficients de rigidité d'un matériau orthotrope à partir de vitesses de propagation des ondes de volume hors des plans de symétrie principaux et qui utilise une méthode des moindres carrés non linéaire pour l'inversion.

On trouve aussi dans (Aristégui et Baste 1997) la description d'une méthode d'optimisation avec contrainte (dualité Lagrangienne) s'appliquant à la détermination des propriétés élastiques des matériaux à partir de mesure des vitesses de propagation des ondes dans le matériau. Les auteurs montrent que cette méthode d'optimisation permet la détermination des coefficients d'élasticité de matériaux ayant différents degrés d'anisotropie (jusqu'au cas le plus général) tout en restant robuste au choix des valeurs initiales.

Une autre méthode proposée par (Leymarie, et al. 2002) s'affranchit des mesures de vitesses en cherchant à reconstruire les formes d'ondes par l'identification des rigidités du milieu.

Toutes ces techniques sont basées sur des recherches locales de minimum. Dans nos travaux, on privilégie les méthodes globales, c'est pourquoi nous choisissons de nous intéresser aux algorithmes génétiques qui sont particulièrement adaptés à l'exploration de grands espaces de recherche.

Ce type d'algorithme a été utilisé dans la détermination des propriétés mécaniques de matériaux en effectuant l'optimisation à partir des vitesses de phases des ondes guidées (Vishnuvardhan, Krishnamurthy et Balasubramaniam 2007) ou des ondes de volume (Balasubramania et Rao 1998) dans une plaque de composite unidirectionnel ayant une symétrie orthotrope. Les auteurs y montrent la robustesse des algorithmes génétiques quant aux erreurs de mesure des valeurs sur lesquelles on effectue l'inversion. Pour une description globale des principes sur lesquels sont basés les algorithmes génétiques, nous redirigeons les lecteurs vers les livres de (Goldberg 1989) ou (Mitchell 1998) ; par ailleurs, nous consacrons l'annexe C de ce document à la description précise de l'algorithme génétique que nous avons développé au cours de la thèse.

2. Calcul des modes guidés dans le milieu hétérogène

Après avoir décrit le fonctionnement global de la méthode d'inversion, détaillons-en maintenant les étapes.

a. Définition de la mèche

Le calcul des nombres d'onde des ondes guidées qui se propagent dans la mèche hétérogène avec la méthode SAFE nous servira de référence ; il est donc important de définir le milieu hétérogène équivalent avec précaution. En effet, il nous faut pouvoir représenter correctement les phénomènes ondulatoires complexes qui siègent dans la mèche, sans pour autant avoir à modéliser les milliers de fibres qui la composent. Les paramètres importants à conserver sont le produit fa, de la fréquence au rayon des fibres et la concentration en fibres puisque ces deux paramètres régissent principalement le phénomène de diffusion. On choisit alors de réduire le rayon de la mèche équivalente et de conserver un nombre de fibres raisonnable pour le calcul par éléments finis, celui-ci restant suffisant pour que le milieu puisse être considéré statistiquement homogène. Un exemple de maillage bidimensionnel de la section d'une mèche hétérogène est reporté sur la Figure II-2.

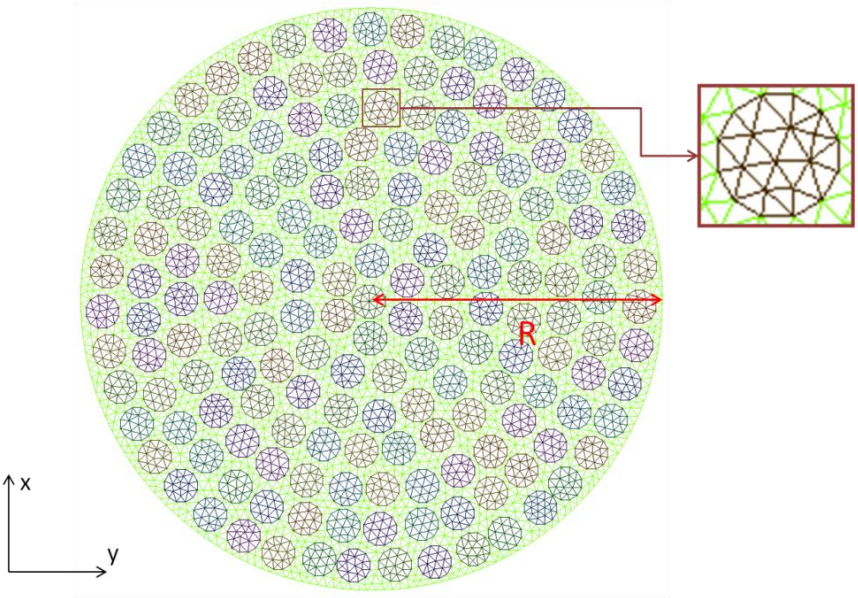

Figure II-2. Maillage d'une mèche pour une concentration élément finis de 54.8%.

La mèche présentée comporte 173 fibres ayant un rayon de 3,5 µm, tandis que le rayon R de la mèche est de 59,5 µm. La concentration théorique en fibres est donc de 59,8%. On peut observer dans le maillage que les disques représentant les fibres sont constitués d'un arrangement de 26 triangles. La concentration réelle, au sens de la surface couverte par les triangles représentant les fibres rapportée à celle couverte par les triangles représentant la matrice (en vert sur la figure), est donc de 55,06%. Les concentrations utilisées dans la suite du chapitre découleront toujours de ces considérations des surfaces des éléments finis.

Après avoir rappelé que les ondes guidées se propageant à l'intérieur d'un cylindre pouvaient être décrites de manière modale, nous proposons dans la section qui suit d'étudier les différents modes qui se propagent dans la mèche en fonction de la fréquence considérée.

b. Exemple de courbes de dispersion

La Figure II-3 représente les courbes de dispersion $(\omega/\Re\left(k_p(\omega)\right)$ de la mèche présentée sur la Figure II-2 pour la gamme de fréquence [0,1-16] MHz, obtenues en résolvant l'équation (2.5) aux différentes fréquences considérées.

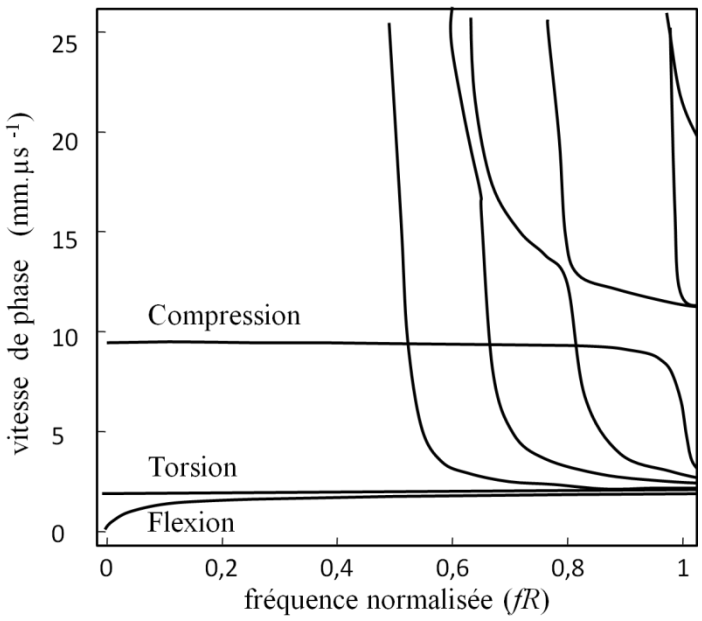

Figure II-3. Courbes de dispersion de la mèche hétérogène en fonction de la fréquence normalisée fR.

Nous avons choisi d'exprimer les vitesses de phases en fonction de la fréquence normalisée fR puisque dans le cas des ondes guidées, c'est ce produit qui en gouverne la propagation : il revient au même de faire varier le rayon du guide que la fréquence des ondes qui s'y propagent.

Chaque courbe représente la vitesse de phase d'un mode en fonction de la fréquence. Selon la fréquence à laquelle on se place, le comportement des ondes guidées peut être plus ou moins complexe à étudier. On nomme fréquence de coupure la fréquence à partir de laquelle un mode devient propagatif : avant celle-ci, le mode est inhomogène ou évanescent. Observons la présence de quatre modes fondamentaux ne comportant pas de fréquence de coupure : il s'agit du premier mode de compression, du premier mode de torsion et des deux premiers modes de flexion qui sont ici superposés. Ces modes de flexion représentent un mouvement particulaire dans les directions x et y de la section ; le fait qu'ils soient égaux sur l'ensemble de la gamme de fréquences représentée valide l'hypothèse que nous faisons de considérer la mèche comme isotrope transverse.

La méthode d'inversion est basée sur une comparaison entre les nombres d'onde des modes qui se propagent dans le matériau hétérogène à une fréquence donnée et les nombres d'onde des modes qui se propagent dans le milieu homogène. Il est certain que le comportement complexe des modes guidés au dessus de la première fréquence de coupure rendra plus difficile cette comparaison ; c'est pourquoi nous choisissons de ne travailler qu'en dessous de celle-ci. Ces fréquences sont d'ailleurs dictées par le cadre industriel du CND dans lequel ces travaux s'inscrivent. Ainsi, nous adapterons le rayon de la mèche afin

que le produit (fR) pour lequel l'inversion est effectuée nous place sous la première fréquence de coupure.

Le jeu de nombres d'onde de référence que nous utilisons pour la comparaison est constitué du mode de compression, du mode de torsion et de la moyenne des deux modes de flexion. En effet, dans le cas de plus faibles concentrations, la répartition des fibres dans la mèche peut varier et d'une configuration à une autre on observe de légères variations (inférieures au pourcent) dans les valeurs des nombres d'onde des modes de flexion ; ces variations sont atténuées en prenant la moyenne des deux valeurs, ce qui est statistiquement justifié.

Nous avons défini les dimensions de la mèche représentative afin de pouvoir rendre compte le mieux possible des phénomènes ondulatoires ayant lieu dans la mèche réelle tout en conservant une méthode stable et des temps de calcul raisonnables. Intéressons-nous maintenant au moyen de calculer les nombres d'onde des modes se propageant dans la mèche homogène équivalente (dont la géométrie est identique à celle de la mèche hétérogène).

3. Calcul des modes guidés dans le milieu homogène

Le calcul des propriétés des modes qui se propagent dans la mèche homogène (dont les propriétés effectives sont encore inconnues) s'effectue de même par la méthode SAFE, mais en utilisant cette fois-ci des éléments finis unidimensionnels. En effet, par hypothèse, les propriétés du matériau sont constantes selon l'axe du cylindre, axisymétriques et homogènes, donc indépendantes des variables z et θ. Nous exploitons donc la géométrie cylindrique du milieu en discrétisant uniquement le rayon du cylindre (Figure II-4).

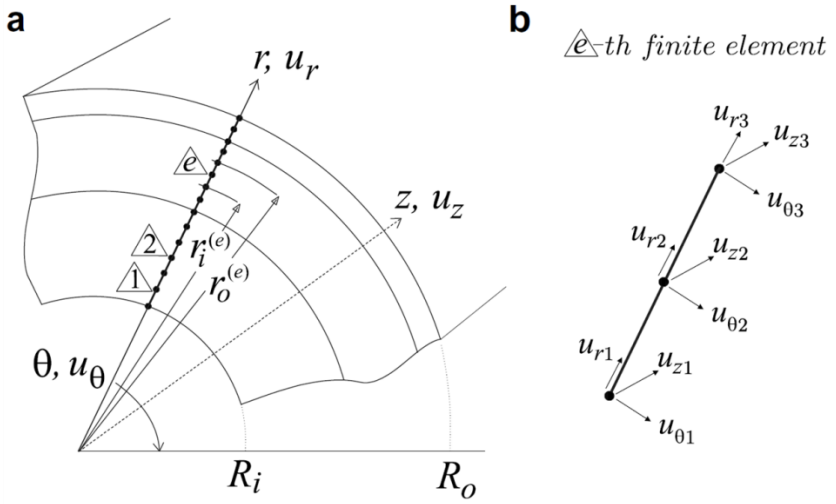

Figure II-4 .a) Maillage unidimensionnel du cylindre homogène,
b) e-ième élément fini comprenant trois degrés de liberté par nœud (Marzani 2008).

Du fait de sa rapidité, ce calcul est très intéressant puisque nous aurons, au cours de la convergence de la méthode, à l'effectuer un grand nombre de fois

Afin de mieux comprendre le comportement d'un guide d'ondes cylindrique, étudions les solutions analytiques existantes pour ce type de géométrie. Deux formes

d'expression sont possibles pour le déplacement particulaire en coordonnées cylindriques, chacune faisant apparaitre le paramètre n_θ appelé indice circonférentiel (Thurston 1978).

Les différentes solutions (définissant les modes) de l'équation de dispersion d'un guide cylindrique, appelée équation de Pochhammer (Royer et Dieulesaint 2000), sont classées selon deux indices : l'indice circonférentiel n_θ et un second indice, noté n, correspondant aux racines de l'équation de dispersion. Les modes d'ordre circonférentiel nul ($n_\theta = 0$) sont axisymétriques et peuvent être des modes de torsion ou de compression, notés respectivement $L(0,n)$ et $T(0,n)$. Les modes d'ordre circonférentiel égal à 1, quant à eux, sont appelés modes de flexion et notés $F(1,n)$. Il nous faudra donc effectuer un calcul pour chaque indice circonférentiel $n_\theta = 0$ et 1 afin d'obtenir les nombres d'onde des modes de compression, torsion et un mode de flexion (le second mode de flexion est obtenu pour $n_\theta = -1$ mais nous est inutile puisque de même nombre d'onde que celui le premier).

4. *Études des propriétés des modes et de leur sensibilité aux coefficients de rigidité*

Au cours de l'inversion, nous comparons les nombres d'onde des ondes guidées qui se propagent dans le guide cylindrique représentatif de la mèche hétérogène réelle aux nombres d'onde des ondes guidées se propageant dans la mèche homogène équivalente. Afin de nous assurer qu'une telle comparaison puisse être effectuée, étudions les profils de déplacements des différents modes que nous utilisons dans l'inversion : les modes $L(0,1)$, $T(0,1)$ et $F(1,1)$, tous trois propagatifs.

a. **Champ de déplacements du mode de compression**

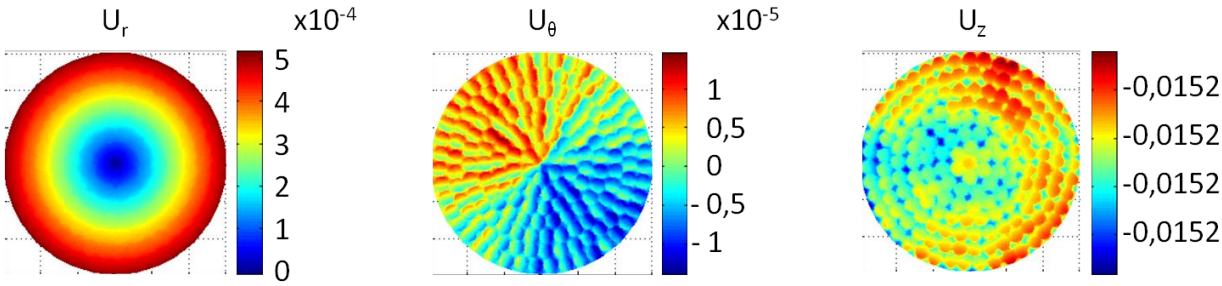

Figure II-5. Profil de déplacement du mode de compression dans une section du guide hétérogène.

La Figure II-5 représente le déplacement particulaire associé au mode de compression selon chaque direction du repère cylindrique dans le cas de la mèche hétérogène. Ce déplacement est obtenu lors de la résolution du système (2.5) comme le vecteur propre associé à la valeur propre β correspondante.

Parmi les trois composantes U_r, U_θ et U_z, la composante principale du déplacement est la composante U_z, c'est-à-dire selon la direction guidante. On remarque que la microstructure de la mèche hétérogène est visible sur cette composante du déplacement ; en fait la variation d'amplitude du déplacement est extrêmement faible, l'effet est visuel car la dynamique de la palette de couleurs est de l'ordre d'un 1 ‰ sur toute la section du guide : ce que l'on voit apparaître sur la figure est de l'ordre des erreurs de calculs par éléments finis.

On effectue un test de sensibilité pour ce mode afin d'étudier l'influence des paramètres recherchés sur le nombre d'onde associé. Pour effectuer ce test nous utilisons comme valeurs de départ, celles obtenues par la méthode de S. Lonné pour les trois paramètres (C_{11}, C_{44}, C_{66}) et par un calcul statique (Datta, Ledbetter et Kriz 1984) pour les paramètres restants, C_{33} et C_{13}. Nous faisons ensuite varier ces paramètres de -20% à +20% de leur valeur initiale, et calculons les valeurs obtenues pour le nombre d'onde du mode de compression. Les Tableau II-1 et Tableau II-2 regroupent les variations des parties réelle et imaginaire du nombre d'onde exprimées en pourcentage de variation par rapport à la valeur de base (valeur correspondant à 0% de variation des coefficients).

Tableau II-1. Variation (en %) de la partie réelle du nombre d'onde du mode de compression en fonction des coefficients de rigidité. Comme dans tous les tableaux à venir les rigidités ont chacune leur valeur originelle sauf le coefficient de la première colonne dont la perturbation est reportée sur la première ligne.

$\mathfrak{R}(\boldsymbol{k_{comp}})$	-20%	-10%	10%	20%
$\mathfrak{R}(C_{33})$	12,14	5,55	4,76	8,90
$\mathfrak{R}(C_{13})$	0,44	0,23	0,26	0,55
$\mathfrak{R}(C_{44})$	0	0	0	0
$\mathfrak{R}(C_{66})$	0,064	0,033	0,035	0,072
$\mathfrak{R}(C_{11})$	0	0	0	0
$\mathfrak{I}(C_{33})$	0	0	0	0
$\mathfrak{I}(C_{13})$	0,003	0,002	0,002	0,004
$\mathfrak{I}(C_{44})$	0	0	0	0
$\mathfrak{I}(C_{66})$	0,0006	0,0003	0,0003	0,0007
$\mathfrak{I}(C_{11})$	0	0	0	0

Tableau II-2. Variation (en %) de la partie imaginaire du nombre d'onde du mode de compression en fonction des coefficients de rigidité.

$\mathfrak{I}(\boldsymbol{k_{comp}})$	-20%	-10%	10%	20%
$\mathfrak{R}(C_{33})$	41,05	17,60	13,61	24,39
$\mathfrak{R}(C_{13})$	41,60	79,51	120,13	240,16
$\mathfrak{R}(C_{44})$	0	0	0	0
$\mathfrak{R}(C_{66})$	63,16	32,39	34,13	70,14
$\mathfrak{R}(C_{11})$	0	0	0	0
$\mathfrak{I}(C_{33})$	241,38	120,69	79,31	41,38
$\mathfrak{I}(C_{13})$	83,67	58,16	141,84	283,68
$\mathfrak{I}(C_{44})$	0	0	0	0
$\mathfrak{I}(C_{66})$	24,86	12,43	12,42	24,83
$\mathfrak{I}(C_{11})$	0	0	0	0

On remarque dans le Tableau II-1 que la partie réelle du nombre d'onde du mode de compression est principalement affectée par la partie réelle du coefficient C_{33}. Les autres

coefficients n'ont que très peu d'influence (100 fois moins pour le coefficient C_{13}) et seront difficilement identifiables à partir de la partie réelle du nombre d'onde de ce mode.

La partie imaginaire du nombre d'onde de compression est quant à elle affectée par les coefficients C_{33}, C_{13} et C_{66} (Tableau II-2). Le coefficient qui influe le plus fortement semble être le coefficient C_{13}. Cependant, on remarque que son influence est très différente selon qu'il diffère de plus ou moins 20% de sa valeur initiale ; ceci indique que l'influence des coefficients sur le nombre d'onde du mode de compression dépend fortement de la valeur autour de laquelle on l'étudie. Faute d'une identification précise d'une zone où se situent ces valeurs, les résultats présentés dans le tableau doivent être considérés avec précaution. Nous notons tout de même que la partie imaginaire du nombre d'onde du mode de compression est sensible aux paramètres que nous recherchons.

b. Champ de déplacements du mode de torsion

La Figure II-6 représente les composantes du déplacement particulaire du mode de torsion dans une section droite du guide d'ondes. La composante u_θ qui représente un mouvement de torsion de la section du guide est prédominante.

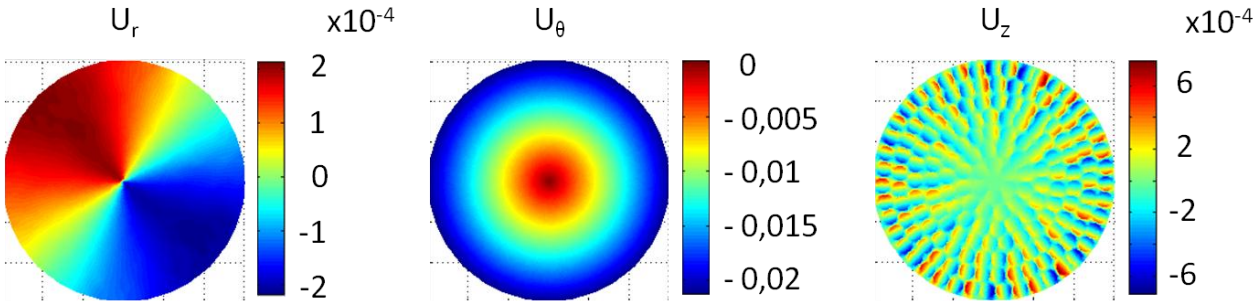

Figure II-6. Profil de déplacement du mode de torsion dans une section du guide hétérogène.

De même que précédemment, un test de sensibilité est réalisé afin d'étudier l'influence des cinq rigidités sur les propriétés de ce mode. Les résultats de ce test sont regroupés dans les Tableau II-3 et Tableau II-4.

Tableau II-3. Variation (en %) de la partie réelle du nombre d'onde du mode de torsion en fonction des coefficients de rigidité.

$\Re(k_{tors})$	-20%	-10%	10%	20%
$\Re(C_{33})$	0	0	0	0
$\Re(C_{13})$	0	0	0	0
$\Re(C_{44})$	11,7190	5,3760	4,6315	8,6754
$\Re(C_{66})$	0	0	0	0
$\Re(C_{11})$	0	0	0	0
$\Im(C_{33})$	0	0	0	0
$\Im(C_{13})$	0	0	0	0
$\Im(C_{44})$	0,0485	0,0256	0,0282	0,0591
$\Im(C_{66})$	0	0	0	0
$\Im(C_{11})$	0	0	0	0

Tableau II-4. Variation (en %) de la partie imaginaire du nombre d'onde du mode de torsion en fonction des coefficients de rigidité.

$\mathfrak{I}(\boldsymbol{k_{tors}})$	-20%	-10%	10%	20%
$\mathfrak{R}(C_{33})$	0	0	0	0
$\mathfrak{R}(C_{13})$	0	0	0	0
$\mathfrak{R}(C_{44})$	39,5783	17,0598	13,2878	23,8753
$\mathfrak{R}(C_{66})$	0	0	0	0
$\mathfrak{R}(C_{11})$	0	0	0	0
$\mathfrak{I}(C_{33})$	0	0	0	0
$\mathfrak{I}(C_{13})$	0	0	0	0
$\mathfrak{I}(C_{44})$	19,9354	9,9616	9,9482	19,8818
$\mathfrak{I}(C_{66})$	0	0	0	0
$\mathfrak{I}(C_{11})$	0	0	0	0

Le nombre d'onde de ce mode dépend uniquement du coefficient C_{44}. Cette unidépendance et l'indépendance à la fréquence de sa vitesse de phase (Figure II-3), nous conduisent à effectuer une inversion directe du nombre d'onde du mode de torsion afin d'obtenir le coefficient C_{44} :

$$C_{44} = \rho \left(\frac{\omega}{k_{tors}} \right)^2 . \tag{2.8}$$

La validité de cette démarche est maintenant étudiée à partir de confrontations aux résultats obtenus par la méthode de S. Lonné, présentée dans la section 3 du chapitre I, qui identifie cette rigidité à partir du nombre d'onde effectif de l'onde de volume polarisée selon l'axe des fibres. Ces deux valeurs sont regroupées dans le Tableau II-5.

Les résultats obtenus par chacune des méthodes sont similaires : les erreurs relatives sur les parties réelle et imaginaire sont respectivement de 13% et 3%. Le bon accord entre les approches est d'autant plus remarquable que les identifications reposent sur les ondes se propageant perpendiculairement et parallèlement aux fibres.

Tableau II-5. Valeurs de la rigidité C_{44} identifiée par la méthode S. Lonné et par la relation (2.8)

ondes guidées	ondes de volume
$5{,}24 - 0{,}32i$	$4{,}53 - 0{,}31i$

c. Champ de déplacements des modes de flexion

Les Figure II-7 et Figure II-8 représentent les composantes du déplacement particulaire des deux modes de flexion dans une section droite du guide d'ondes. Notons que nous avons choisi de représenter les composantes U_x et U_y du déplacement afin de mettre en évidence l'équivalence des profils pour les deux modes de flexions. On constate qu'ils possèdent des profils semblables à une rotation de $\frac{\pi}{2}$ près dans le plan XY.

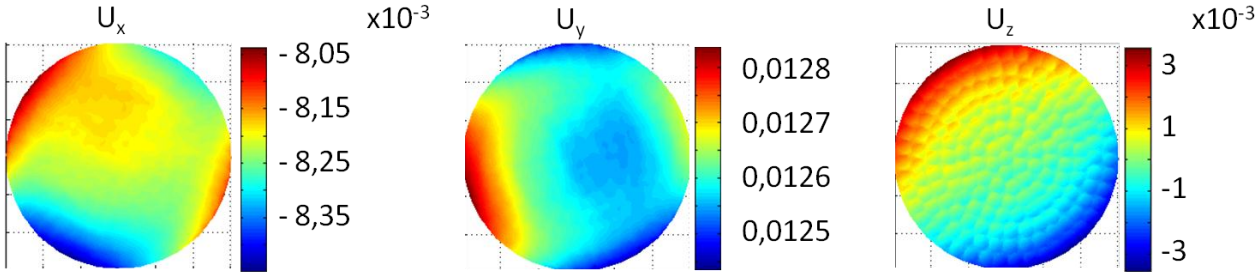

Figure II-7. Profil de déplacement du premier mode de flexion dans une section du guide hétérogène.

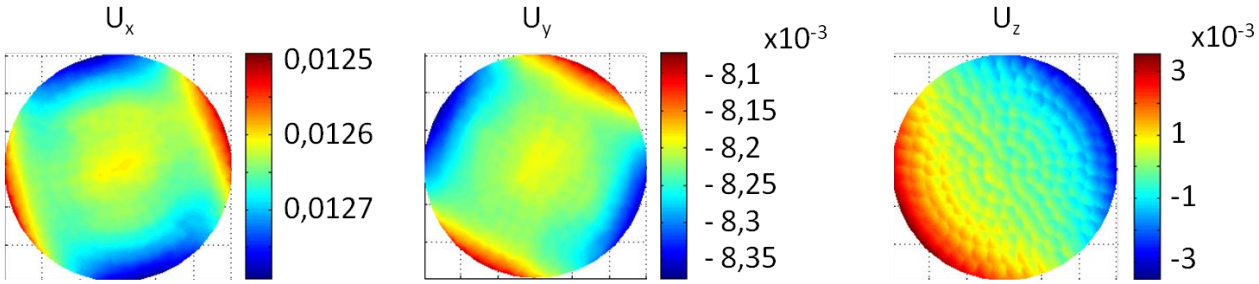

Figure II-8. Profil de déplacement du second mode de flexion dans une section du guide hétérogène.

Les résultats du test de sensibilité des propriétés des modes aux coefficients de rigidité sont reportés dans les Tableau II-6 et

Tableau II-7.

Tableau II-6. Variation (en %) de la partie réelle du nombre d'onde de la moyenne des modes de flexion en fonction des coefficients de rigidité.

$\Re(k_{flex})$	-20%	-10%	10%	20%
$\Re(C_{33})$	3,4999	1,6065	1,3850	2,5946
$\Re(C_{13})$	0,1018	0,0545	0,0620	0,1316
$\Re(C_{44})$	5,2266	2,3294	1,9098	3,5016
$\Re(C_{66})$	0,0117	0,0060	0,0064	0,0131
$\Re(C_{11})$	0	0	0	0
$\Im(C_{33})$	0,0003	0,0001	0,0001	0,0002
$\Im(C_{13})$	0,0012	0,0007	0,0007	0,0015
$\Im(C_{44})$	0,0273	0,0144	0,0159	0,0333
$\Im(C_{66})$	0,0002	0,0001	0,0001	0,0002
$\Im(C_{11})$	0	0	0	0

Tableau II-7. Variation (en %) de la partie imaginaire du nombre d'onde de la moyenne des modes de flexion en fonction des coefficients de rigidité.

$\mathfrak{I}(\boldsymbol{k_{flex}})$	-20%	-10%	10%	20%
$\mathfrak{R}(C_{33})$	5,7397	2,7173	2,4643	4,7150
$\mathfrak{R}(C_{13})$	1,1164	0,5630	0,5736	1,1590
$\mathfrak{R}(C_{44})$	54,9361	23,1235	17,2849	30,5141
$\mathfrak{R}(C_{66})$	0,2216	0,1137	0,1199	0,2465
$\mathfrak{R}(C_{11})$	0	0	0	0
$\mathfrak{I}(C_{33})$	0,9006	0,4503	0,4503	0,9007
$\mathfrak{I}(C_{13})$	0,8623	0,4311	0,4310	0,8620
$\mathfrak{I}(C_{44})$	19,8035	9,8924	9,8717	19,7206
$\mathfrak{I}(C_{66})$	0,0584	0,0292	0,0292	0,0583
$\mathfrak{I}(C_{11})$	0	0	0	0

Il apparaît que le nombre d'onde du mode de flexion (la moyenne des deux nombres d'onde) dépend de tous les coefficients de rigidité à l'exception de C_{11}. Sa partie réelle dépend principalement des parties réelles des coefficients C_{33} et C_{44}, coefficients dont nous avons déjà constaté la grande influence sur les modes de compression et torsion. La partie imaginaire, quant à elle, dépend des parties réelle et imaginaire du coefficient C_{44}, et faiblement des autres.

Cette étude nous permet maintenant de conclure sur la sensibilité globale de notre méthode d'inversion aux paramètres recherchés.

5. *Sensibilité de la méthode aux coefficients de rigidité : conclusion*

L'étude de sensibilité présentée dans la section précédente permet de dégager plusieurs points à partir desquels on affine la méthode d'homogénéisation par ondes guidées. Tout d'abord, le coefficient $C_{11}(= C_{22})$ n'influence aucun des modes que nous utilisons pour l'inversion et ne peut donc pas être déterminé à partir de cette méthode : nous conservons la valeur obtenue par la méthode en ondes de volume de S. Lonné.

Le coefficient C_{44} est défini à partir de l'équation (2.8) et donc du nombre d'onde du mode de torsion.

Le coefficient C_{66} est identifié par la méthode de S. Lonné d'après la similarité mise en évidence pour le coefficient C_{44} dans le Tableau II-5.

On cherche donc à identifier les deux coefficients restant (C_{33}, C_{13}) à partir des modes de compression et de flexions.

Parmi ces deux coefficients, la partie réelle de C_{33} est le paramètre qui influence le plus la partie réelle du nombre d'onde du mode de compression : il sera donc déterminé à partir de ce mode.

Les relations entre la partie imaginaire du nombre d'onde du mode de compression et les coefficients C_{33}, C_{13} sont complexes, et l'information fournie par ce mode n'est pas suffisante (une seule information) pour qu'ils puissent être identifiés.

Les modes de flexions peuvent être utilisés, mais bien qu'ils soient affectés par ces paramètres, ils sont très faiblement influencés par le coefficient C_{13} ; ils ne sont pas considérés dans la suite.

Afin de surdéterminer le système de données que l'on cherche à inverser, on pourrait envisager d'effectuer l'inversion à plus hautes fréquences afin d'utiliser un plus grand nombre de modes. Cependant, nous avons vu sur les courbes de dispersions de la mèche représentées sur la Figure II-3 que le comportement des ondes guidées devenait très complexe au dessus de la première fréquence de coupure. Deux problèmes apparaissent alors : l'identification des modes et la présence de fréquences de coupure.

L'identification des modes à comparer dans les cas hétérogène et homogène a pu être menée pour les modes de compression et de torsion, ceux-ci présentant un profil de déplacement très facilement identifiable pour les composantes U_r et U_θ ainsi que le montrent les Figure II-5 et Figure II-6.

Cependant, la présence de fréquences de coupure biaise les résultats obtenus par l'algorithme génétique rendant l'inversion complexe à réaliser.

3. Comportement de la méthode d'inversion à partir de données simulées

Le Tableau II-8 regroupe les paramètres qui régissent l'évolution de l'algorithme génétique. Notons la terminologie particulière de ce type d'algorithme où l'on nomme une solution contenant l'ensemble des paramètres un *chromosome* et la famille de solution une *génération*. Pour une description détaillée du fonctionnement de l'algorithme génétique que nous avons développé, se reporter à l'annexe C.

Tableau II-8. Paramètres de l'algorithme génétique utilisés dans la méthode d'inversion présentée.

taux de mutation	10%
nombre d'élite	2
nombre de générations	1000
nombre de chromosomes	30
nombre de bits	20

Ces paramètres ont été choisis de manière empirique. Le fort taux de mutation nous permet d'explorer largement l'espace de recherche tout en nous affranchissant du problème des

minima locaux. Le nombre de générations est pris très grand afin que l'algorithme converge malgré le fort taux de mutation. Le nombre de chromosomes constituant une génération a été choisi afin de conserver une diversité suffisante dans la population.

Notons ici que l'espace dans lequel on recherche les coefficients de rigidité est défini *a priori.* Pour les parties réelles des coefficients les bornes sont définies par la valeur de chacun des constituants (annexe A). Ne pouvant avoir d'idée précise des valeurs des parties imaginaires, on recherche celles-ci dans l'espace [-1,0].

Nous présentons les résultats obtenus par la méthode pour dix réalisations, où une réalisation correspond à une convergence complète de la méthode. On considère que la méthode a convergé lorsque le critère d'arrêt a été atteint (voir annexe C). Nous avons ici choisi comme critère d'arrêt un nombre fixé de générations puisqu'il est difficile de définir la valeur seuil de la fonction coût en-deçà de laquelle on peut considérer que la méthode a convergé.

La Figure II-9 représente la valeur d'erreur (2.8), atteinte par la méthode après 1000 générations pour 10 réalisations induites par une évolution aléatoire. Ces erreurs correspondent à une différence inférieure à 1% entre les nombres d'onde de référence et les nombres d'onde calculés, et ce pour les parties réelles comme pour les parties imaginaires.

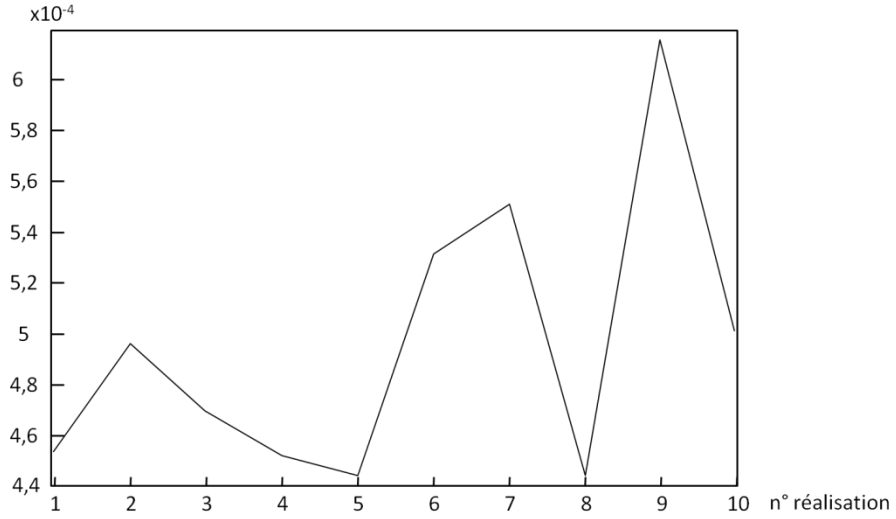

Figure II-9. Erreur (2.8) obtenue par la méthode pour chacune des 10 réalisations.

La Figure II-10 représente les parties réelles des coefficients de rigidité obtenues par la méthode pour chaque réalisation en utilisant la mèche présentée sur la Figure II-2 à une fréquence de 3 MHz ($fR = 0{,}18$). La partie réelle du coefficient C_{33} est stable sur les différentes réalisations. En effet, sa variation sur les 10 réalisations est de l'ordre de 3%. Les parties réelles des coefficients C_{66} et C_{13}, quant à elles, varient fortement d'une réalisation à l'autre (la variation est de l'ordre de 30%). Nous avons de plus reporté les parties réelles des coefficients C_{11}et C_{44} qui ont les valeurs fixes évoquées précédemment.

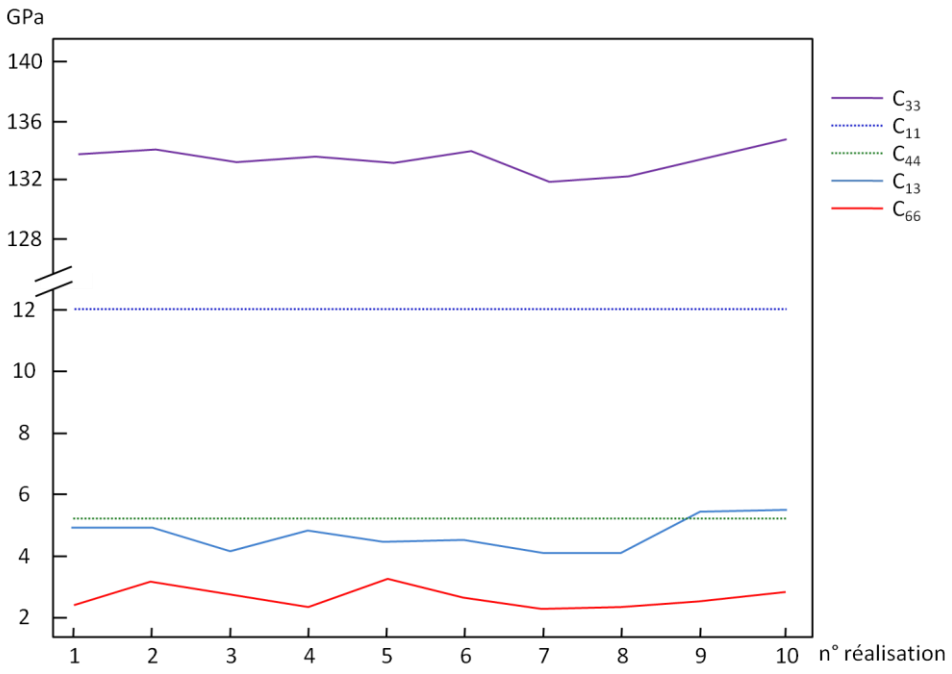

Figure II-10. Parties réelles des rigidités C_{ij} obtenues par la méthode pour chacune des 10 réalisations. Les coefficients C_{11} et $(C_{33}, C_{44}, C_{13}, C_{66})$ sont obtenus respectivement par ondes de volume et ondes guidées ainsi que pour les autres figures.

Le coefficient C_{44} est calculé à partir de (2.8) indépendamment des autres coefficients. Une alternative est de le déterminer simultanément avec les autres rigidités, en utilisant tous les modes guidés (compression, torsion, flexion). Ces deux stratégies conduisent à la même valeur du coefficient C_{44}.

Intéressons-nous maintenant aux parties imaginaires des coefficients obtenues par la méthode, représentées sur la Figure II-11.

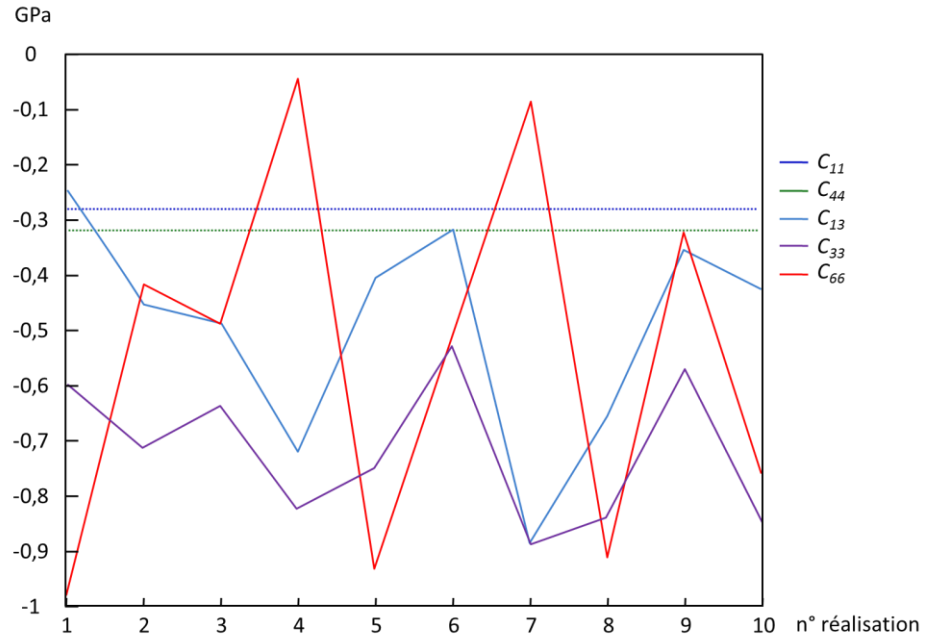

Figure II-11. Parties imaginaires des C_{ij} obtenues par la méthode pour chaque réalisation.

Ces valeurs varient très fortement d'une réalisation à l'autre tout en étant uniformément réparties dans tout l'espace de recherche défini *a priori*, soit [-1,0]. Ces larges variations montrent que la méthode est peu sensible à ces quantités. Si l'on considère les deux meilleures solutions trouvées parmi ces dix réalisations (les n°5 et 8), on observe que les rigidités associées diffèrent fortement.

La vraisemblance des parties imaginaires du coefficient C_{66} (Tableau II-9) est à considérer avec précaution du fait des variations très fortes de ce paramètre entre les différentes réalisations.

Tableau II-9. Valeurs des rigidités identifiées lors des 5ème et 8ème réalisations mentionnées sur la Figure II-11

	erreur (x10^{-4})	C_{33}(GPa)	C_{13}(GPa)	C_{66}(GPa)
réalisation n°5	4,437	$133{,}23 - 0{,}75i$	$4{,}48 - 0{,}41i$	$3{,}30 - 0{,}93i$
réalisation n°8	4,427	$132{,}38 - 0{,}84i$	$4{,}14 - 0{,}66i$	$2{,}41 - 0.92i$

4. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode visant à déterminer les propriétés effectives d'un milieu représentatif des phénomènes de dispersion et d'atténuation qui siègent dans la mèche. Elle complète les travaux existants qui ne considéraient que les ondes de volumes se propageant dans la direction perpendiculaire aux fibres. L'identification des nombres d'onde des ondes guidées se propageant dans la direction des fibres est réalisée en comparant les nombres d'onde des ondes guidées se propageant dans un milieu hétérogène représentatif du matériau réel à ceux des ondes guidées se propageant dans un milieu homogène de même géométrie ayant les propriétés effectives recherchées. Cependant, en effectuant les tests de sensibilité de la méthode aux rigidités à identifier, nous avons mis en évidence la complexité de l'inversion par le fait que les modes basses fréquences utilisés ne fournissaient pas les informations suffisantes. Pour résoudre ce problème le choix a été fait de garder les valeurs C_{11} et C_{66} (onde de volume)

On note cependant, que la méthode permet de déterminer avec une très bonne précision la partie réelle du coefficient C_{33} ainsi que le coefficient C_{44} qui prend une valeur similaire à celle obtenue par la méthode S. Lonné.

Du fait de la faible sensibilité de la méthode aux coefficients C_{33}(partie imaginaire) et C_{13}, nous choisissons de développer à présent une autre approche qui consiste à étendre la méthode de S. Lonné au cas des ondes de volume se propageant selon une direction quelconque au sein de la couche unidirectionnelle de composite.

Chapitre III.

Modèle à trois phases et incidence oblique

Dans ce chapitre, on souhaite étendre le modèle présenté au chapitre I.3 au cas de l'incidence oblique. Cela consiste à déterminer les propriétés mécaniques d'un milieu effectif au travers de la résolution du problème de la diffraction des ondes de volume sur les différentes interfaces d'un milieu à trois phases.

1. Définition du modèle à trois phases

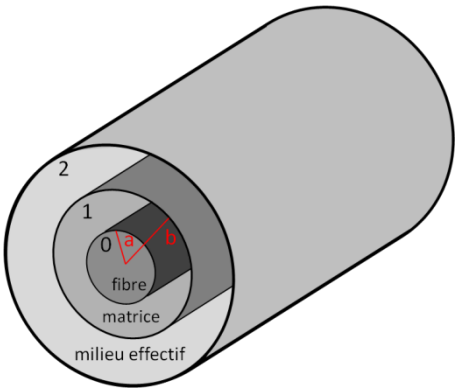

Figure III-1. Le modèle à trois phases.

Le milieu considéré est schématisé par la Figure III-1. Les trois phases sont de géométrie cylindrique et sont concentriques. La phase interne est la fibre de rayon a et a les propriétés mécaniques du Carbone. La phase intermédiaire constituée de matrice époxy est de rayon b. La troisième phase est une couche de milieu effectif que l'on suppose de symétrie isotrope transverse et dont les propriétés sont celles que l'on recherche : ces propriétés résulteront de l'homogénéisation dynamique des fibres et de la matrice. La masse volumique du milieu effectif est donnée par :

$$\rho = (1 - c)\rho_m + c\rho_f \tag{3.1}$$

avec ρ_m, ρ_f les masses volumique respectives de la matrice et de la fibre et c la concentration en fibres. Ainsi que vu dans le premier chapitre, cette définition de la masse volumique effective ne reste valide que dans le cas des basses fréquences.

Le rayon b de la couche intermédiaire de matrice est défini à partir de la concentration en fibres du milieu que l'on souhaite modéliser. En effet, on a $c = S_{mat}/S_{fibre}$ où S_{mat}, respectivement S_{fibre}, est la surface couverte par la matrice, respectivement la fibre, selon la section plane du cylindre telle que définie sur la Figure III-2. Dans le cas de l'incidence oblique, les sections planes de chaque cylindre sont des ellipses ; on a donc $S_{fibre} = \pi \times a \times$

$a/\cos\alpha$ et $S_{mat} = \pi \times b \times b/\cos\alpha$, ce qui amène à $c = a^2/b^2$. L'expression de la concentration en fibres c reste donc la même que celle du cas de l'incidence normale et nous permet de définir le rayon b du cylindre de matrice de la même manière, *i.e.* $b = a/\sqrt{c}$.

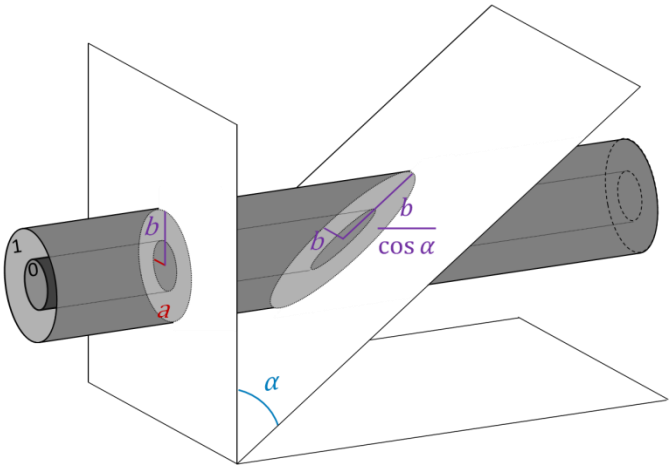

Figure III-2. Section plane des cylindres sous incidences normale et oblique.

Les caractéristiques géométriques de chacune des couches de notre milieu à trois phases ayant été définies, développons la méthode permettant d'obtenir les propriétés du milieu effectif environnant.

De manière similaire au cas de l'incidence normale, au cœur de cette méthode se trouve le problème de la résolution de la diffraction d'une onde plane insonifiant sous incidence oblique un cylindre isotrope transverse. Sous une telle incidence, l'anisotropie du cylindre joue un rôle essentiel du fait des conversions de mode aux interfaces.

La section suivante est consacrée à la résolution du problème de diffraction d'une onde plane par un cylindre isotrope transverse ; l'aspect multiphasique du problème sera traité dans les sections qui suivront.

2. Diffraction des ondes de volume en incidence oblique sur un cylindre à symétrie isotrope transverse

1. *Description du problème et méthode de résolution*

Soit un cylindre d'extension infinie de symétrie **isotrope transverse** situé dans un milieu infini de symétrie **isotrope**. Afin de nous placer dans un cadre proche du problème global que nous cherchons à traiter, le milieu environnant est défini comme étant viscoélastique et le cylindre comme élastique. Les nombres d'onde et les coefficients de rigidité C_{ij} associés au milieu environnant (1) sont à valeurs complexes, tandis que les quantités associées au milieu intérieur (0) sont à valeurs réelles. Nous n'emploierons pas de notations spéciales pour différencier les quantités à valeurs complexes de celles à valeurs réelles afin d'alléger les expressions.

On considère une onde de polarisation quelconque se propageant dans le plan P_{23}, défini à partir des directions 2 et 3 représentées sur la Figure III-3 et comprenant l'axe du cylindre ; l'onde est incidente dans ce plan et se propage selon une direction formant un angle α avec la normale à l'axe du cylindre. La Figure III-3 représente les trois types de polarisations des ondes de volume ; on nommera onde L l'onde de compression polarisée selon la direction de propagation, onde SV (Shear Vertical) l'onde de cisaillement polarisée perpendiculairement à la direction de propagation dans le plan d'incidence P_{23}, et onde SH (Shear Horizontal) l'onde de cisaillement polarisée perpendiculairement à l'axe du cylindre. Il est important de noter que ces nominations ne correspondent pas à celles utilisées dans le cas de l'incidence normale : l'onde de cisaillement polarisée hors plan (SH) correspond à l'onde de cisaillement polarisée dans le plan (SV) du chapitre I.

L'isotropie transverse du cylindre conduit à ce que le problème de la diffraction soit indépendant de l'angle azimutal θ tel que défini par la Figure III-3 ; les plans P_{23} et P_{13} (coordonnées x et y) sont donc équivalents.

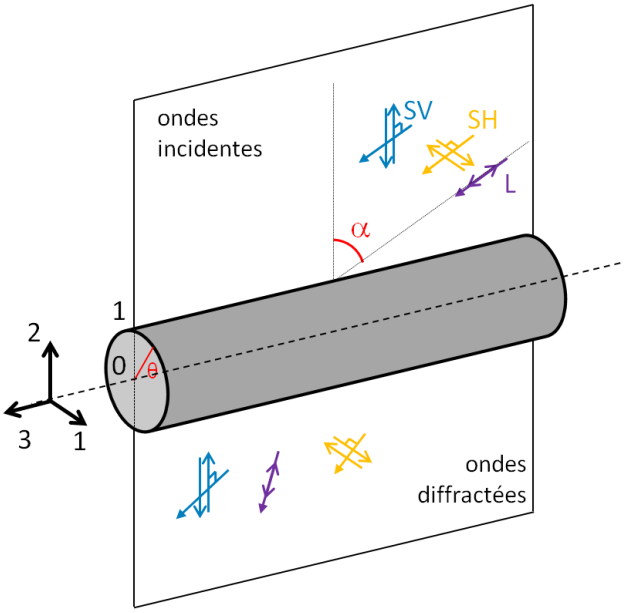

Figure III-3. Définition du problème de la diffraction des trois types d'ondes en incidence oblique. Le cylindre isotrope transverse et élastique est plongé dans une matrice isotrope viscoélastique.

Des méthodes de résolution du problème de la diffraction d'une onde par un cylindre isotrope transverse ont été proposées par plusieurs auteurs tels que (Honarvar et Sinclair 1996) ou (Ahmad et Rahman 2000) qui considèrent la diffraction des ondes sur un cylindre placé dans un milieu fluide.

Pour résoudre le problème général de la diffraction d'une onde par un cylindre, nous devons exprimer le champ de déplacements dans chacun des milieux. La différence majeure existant entre les méthodes proposées réside dans le choix de la décomposition du champ de déplacements. Le premier de ces articles se base sur la décomposition la plus générale d'un champ vectoriel sous la forme de trois potentiels scalaires proposée par (Morse et Feshbach 1953) telle que :

$$\vec{u} = \nabla\phi + \nabla \times (\psi \hat{\boldsymbol{e}}_z) + \nabla \times \nabla \times (\chi \hat{\boldsymbol{e}}_z) \ . \tag{3.2}$$

avec $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ vecteur unitaire selon la direction 3.

Les auteurs du second article se basent sur une décomposition qui utilise aussi trois potentiels scalaires mais permet d'aboutir à des expressions plus simples du champ de déplacements à l'intérieur de chaque milieu *i.e.*

$$\vec{u} = \nabla\phi + \nabla \times (\psi\, \hat{\boldsymbol{e}}_z) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \hat{\boldsymbol{e}}_z \ . \tag{3.3}$$

On notera que chacune de ces décompositions vérifie que n'importe quel champ vectoriel peut être exprimé sous la forme de deux champs distincts : un champ scalaire dont le gradient est le vecteur nul et un champ vectoriel dont le rotationnel est le vecteur nul.

Néanmoins, (Fan, Sinclair et Honarvar 1999) développent les expressions correspondant au problème de la diffraction d'une onde par un cylindre isotrope transverse placé dans un milieu solide isotrope infini en utilisant la décomposition donnée par (3.2). Pour cette raison, ainsi que pour son aspect général, nous privilégions cette décomposition dans notre étude en nous plaçant dans nos conventions d'écriture.

2. *Expression des potentiels dans chacun des milieux*

Pour résoudre ce problème, on souhaite définir les potentiels correspondant aux ondes incidentes et diffractées dans chaque phase, pour ensuite déterminer les champs de déplacements et de contraintes dans chacune des phases. Les conditions de continuité de ces champs à l'interface conduisent à un système carré dont les inconnues sont les amplitudes modales associées aux ondes diffractées. Le système est ensuite résolu à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

a. **Expression des potentiels dans le milieu environnant**

Dans le milieu environnant, les champs de déplacements et de contraintes sont composés de la somme des champs de déplacements et de contraintes engendrés par l'onde incidentes et de ceux engendrés par l'onde réfléchie à l'interface milieu environnant/matrice. Définissons les expressions des potentiels correspondant à ces deux familles d'ondes.

Soit une onde plane incidente d'amplitude unitaire se propageant dans le milieu environnant. L'expression d'une telle onde peut être donnée sous la forme générique :

$$\vec{u} = \hat{\mathrm{u}}_{\boldsymbol{p}} e^{-i\omega t} e^{ik_p(y\cos\alpha + z\sin\alpha)} \ , \tag{3.4}$$

avec $\hat{\mathrm{u}}_p$ le vecteur polarisation de l'onde de type $p\ (= L, SV, SH)$ et k_p son nombre d'onde, α l'angle d'incidence de l'onde, y et z les coordonnées dans les directions 2 et 3 respectivement.

On utilise ensuite l'identité suivante :

$$e^{ik_p r} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(k_p r) \cos n\theta \ , \tag{3.5}$$

avec ε_n le coefficient de Neumann défini par $\varepsilon_n = 1$ pour $n = 0$ et $\varepsilon_n = 2$ sinon, pour établir l'expression des potentiels correspondant à chaque type d'onde incidente (White 1958):

$$\begin{cases} \phi_{inc} = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n i^n J_n(k_{L\perp,1} r) \cos n\theta \, e^{i(k_{Lz,1} z - \omega t)}, & \text{pour l'onde L ,} \\ \chi_{inc} = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n i^n J_n(k_{S\perp,1} r) \cos n\theta \, e^{i(k_{Sz,1} z - \omega t)}, & \text{pour l'onde SV,} \\ \psi_{inc} = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n i^n J_n(k_{S\perp,1} r) \sin n\theta \, e^{i(k_{Sz,1} z - \omega t)}, & \text{pour l'onde SH,} \end{cases} \tag{3.6}$$

où J_n représente la fonction de Bessel de première espèce, $\mathrm{k_{L\perp,1}} = \mathrm{k_{L,1}} \cos\alpha$ et $\mathrm{k_{Lz,1}} = \mathrm{k_{L,1}} \sin\alpha$ avec $\mathrm{k_{L,1}}$ le nombre d'onde des ondes de compression dans le milieu environnant. On a de même $\mathrm{k_{S\perp,1}} = \mathrm{k_{S,1}} \cos\alpha$ et $\mathrm{k_{Sz,1}} = \mathrm{k_{S,1}} \sin\alpha$ avec $\mathrm{k_{S,1}}$ le nombre d'onde des ondes de cisaillement dans le milieu environnant.

Le milieu environnant étant isotrope, les potentiels correspondant aux ondes réfléchies sont connus de la littérature et s'expriment sous la forme suivante (White 1958) :

$$\begin{cases} \phi_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \, H_n^{(1)}(k_{L\perp,1} r) \cos n\theta \, e^{i(k_{Lz,1} - \omega t)} \\ \chi_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \, H_n^{(1)}(k_{S\perp,1} r) \cos n\theta \, e^{i(k_{Sz,1} - \omega t)} \\ \psi_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \, H_n^{(1)}(k_{S\perp,1} r) \sin n\theta \, e^{i(k_{Sz,1} - \omega t)} \end{cases} , \tag{3.7}$$

où $H_n^{(1)}$ représente la fonction de Hankel de premier type définie par :

$$H_n^{(1)}(sr) = J_n(sr) + iY_n(sr) \ , \tag{3.8}$$

avec Y_n la fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre n.

Les fonctions de Hankel de second type $H_n^{(2)}$permettent aussi de décrire les potentiels dans le milieu environnant mais seules les fonctions de premier type rendent compte d'une onde se propageant vers l'extérieur du cylindre.

Dans la suite, nous allons exprimer d'une manière analogue à (3.7), les potentiels dans le cas d'un milieu isotrope transverse.

b. Expression des potentiels dans le milieu intérieur

Nous cherchons maintenant à déterminer les expressions des potentiels à l'intérieur du cylindre de rayon a et de masse volumique ρ_f et de tenseur des rigidités $C_{ij}^{(0)}$. Pour cela, on suppose dans un premier temps que les variables du problème sont indépendantes, c'est-à-dire que l'on utilise la méthode de séparation des variables en écrivant les potentiels sous la forme :

$$\phi(r,\theta,z,t) = \phi(r)\phi(\theta)\phi(z)\phi(t) \ , \tag{3.9}$$

que l'on réécrit :

$$\phi(r,\theta,z,t) = \phi_r\phi_\theta\phi_z\phi_t \ . \tag{3.10}$$

En remplaçant ces expressions dans les équations de propagation exprimées en fonction des potentiels données par :

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Bigg\{&C_{11}^{(0)}\nabla^2\phi + \left(C_{13}^{(0)} + 2C_{44}^{(0)} - C_{11}^{(0)}\right)\frac{\partial^2\phi}{z^2} - \rho_f\frac{\partial^2\phi}{t^2}\\ &+ a\frac{\partial}{\partial z}\Bigg[\left(C_{11}^{(0)} - C_{13}^{(0)} - C_{44}^{(0)}\right)\nabla^2\psi + \left(C_{13}^{(0)} + 2C_{44}^{(0)} - C_{11}^{(0)}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\\ &- \rho_f\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\Bigg]\Bigg\} = 0 \ ,\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(C_{13}^{(0)} + 2C_{44}^{(0)}\right)\nabla^2\phi + \left(C_{33}^{(0)} - C_{13}^{(0)} - 2C_{44}^{(0)}\right)\frac{\partial^2\phi}{z^2} - \rho_f\frac{\partial^2\phi}{t^2}\right]\\ &+ a\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \nabla^2\right)\left[C_{44}^{(0)}\nabla^2\psi + \left(C_{33}^{(0)} - C_{13}^{(0)} - 2C_{44}^{(0)}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \rho_f\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right] = 0 \ ,\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[C_{66}^{(0)}\nabla^2\chi + \left(C_{44}^{(0)} - C_{66}^{(0)}\right)\frac{\partial^2\chi}{z^2} - \rho_f\frac{\partial^2\chi}{t^2}\right] = 0 \ , \tag{3.13}$$

et après quelques manipulations (Mirsky 1965), on obtient l'équation différentielle :

$$r^2\phi_r'' + r\phi_r' + \left(\left(\frac{(C_{13} + 2C_{44})}{C_{11}}\frac{\phi_z''}{\phi_z} - \frac{\rho_f}{C_{11}}\frac{\phi_t''}{\phi_t}\right)r^2 + \frac{\phi_\theta''}{\phi_\theta}\right)\phi_r = 0 \ , \tag{3.14}$$

où l'on reconnait la forme générale de l'équation différentielle de Bessel vérifiée par ϕ_r :

$$r^2y'' + ry' + ((sr)^2 - n^2)y = 0 \ , \tag{3.15}$$

ainsi que des équations différentielles harmoniques en $\phi_\theta, \phi_z, \phi_t$.

La forme générale de la solution pour le potentiel ϕ sera donc donnée par l'expression :

$$\phi(r,\theta,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(D_{n1}J_n(s_0 r) + D_{n2}Y_n(s_0 r)\right)(D_{n3}\cos n\theta + D_{n4}\sin n\theta) \times \left(D_{n5}e^{ik_{z,0}z} + D_{n6}e^{-ik_{z,0}z}\right)\left(D_{n7}e^{i\omega t} + D_{n8}e^{-i\omega t}\right), \tag{3.16}$$

où les coefficients D_{nj}, $j = 1..8$ sont les amplitudes modales et s_0 représente la partie radiale du nombre d'onde de l'onde se propageant dans le milieu intérieur (0). Ce nombre d'onde est encore inconnu.

Parmi les solutions possibles, on choisit alors celle qui correspond à la physique de notre problème.

On souhaite modéliser le comportement des ondes à l'intérieur du cylindre. Ainsi, la solution en Y_n ne nous intéresse pas puisque cette fonction a un comportement singulier lorsque son argument tend vers 0, *i.e.* $Y_n(s_0 r)|_{r\to 0} \to \infty$. Notons, d'ailleurs, que les fonctions de Hankel de premier et deuxième types $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$ sont aussi solutions de l'équation différentielle de Bessel mais présentent la même singularité à l'origine.

De même, nos conventions d'écriture nous font considérer seulement une partie des solutions pour les autres variables à savoir que l'on considère la propagation d'une onde progressive dans le sens des z et des temps positifs ($e^{i(k_z z-\omega t)}$).

En appliquant la même méthode aux potentiels χ et ψ, on obtient l'expression des potentiels à l'intérieur du cylindre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \phi_0(r,\theta,z) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n J_n(s_0 r)\cos n\theta e^{i(k_{z,0}z-\omega t)} \\ \chi_0(r,\theta,z) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n J_n(s_0 r)\cos n\theta\, e^{i(k_{z,0}z-\omega t)} \\ \psi_0(r,\theta,z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n J_n(s_0 r)\sin n\theta\, e^{i(k_{z,0}z-\omega t)} \end{cases}, \tag{3.17}$$

On remplace ensuite ces expressions dans les équations de propagation (3.11)-(3.13) qui relient les déplacements aux contraintes et, en utilisant la méthode d'expansion des modes orthogonaux, on montre que les potentiels à l'intérieur du cylindre prennent la forme donnée par l'équation (3.18) – le développement de ces équations et le raisonnement permettant d'obtenir ces expressions sont détaillés en annexe D. On a alors :

$$\begin{cases} \phi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} [D_n J_n(s_{10}r) + q_{20}E_n J_n(s_{20}r)]\cos n\theta\, e^{ik_{z,0}z} \\ \chi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} [q_{10}D_n J_n(s_{10}r) + E_n J_n(s_{20}r)]\cos n\theta\, e^{ik_{z,0}z} \\ \psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} F_n J_n(s_{30}r)\sin n\theta\, e^{ik_{z,0}z} \end{cases}, \tag{3.18}$$

où le terme $e^{-i\omega t}$ est omis puisque celui-ci est commun à toutes les expressions.

avec

$$q_{10} = \frac{-C_{11}^{(0)} {s_{10}}^2 - \left(C_{13}^{(0)} + 2C_{44}^{(0)}\right) {k_{z,0}}^2 + \rho_f \omega^2}{aik_{z,0}\left[-\left(C_{11}^{(0)} - C_{13}^{(0)} - C_{44}^{(0)}\right) {s_{10}}^2 - C_{44}^{(0)} {k_{z,0}}^2 + \rho_f \omega^2\right]} \ , \tag{3.19}$$

$$q_{20} = \frac{aik_{z,0}\left[-\left(C_{11}^{(0)} - C_{13}^{(0)} - C_{44}^{(0)}\right) {s_{20}}^2 - C_{44}^{(0)} {k_{z,0}}^2 + \rho_f \omega^2\right]}{-C_{11}^{(0)} {s_{20}}^2 - \left(C_{13}^{(0)} + 2C_{44}^{(0)}\right) {k_{z,0}}^2 + \rho_f \omega^2} \ , \tag{3.20}$$

$${s_{10}}^2 = \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 4\zeta C_{11}^{(0)} C_{44}^{(0)}}}{2C_{11}^{(0)} C_{44}^{(0)}} \ , \tag{3.21}$$

$${s_{20}}^2 = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 4\zeta C_{11}^{(0)} C_{44}^{(0)}}}{2C_{11}^{(0)} C_{44}^{(0)}} \ , \tag{3.22}$$

$${s_{30}}^2 = \frac{(\rho\omega^2 - C_{44}^{(0)} {k_{z,0}}^2)}{C_{66}^{(0)}} \ , \tag{3.23}$$

où

$$\xi_0 = \left(C_{13}^{(0)} + C_{44}^{(0)}\right)^2 {k_{z,0}}^2 + C_{11}^{(0)}\left(\rho_f \omega^2 - C_{33}^{(0)} {k_{z,0}}^2\right) + C_{44}^{(0)}\left(\rho_f \omega^2 - C_{44}^{(0)} {k_{z,0}}^2\right) \ , \tag{3.24}$$

et

$$\zeta_0 = \left(\rho_f \omega^2 - C_{44}^{(0)} {k_{z,0}}^2\right)\left(\rho_f \omega^2 - C_{33}^{(0)} {k_{z,0}}^2\right) \ . \tag{3.25}$$

Les conditions aux frontières écrites quel que soit z imposent, qu'à l'interface, la partie axiale du nombre d'onde incident k_z soit conservée. On aura donc $k_{z,0} = k_{Lz,1}$ dans le cas de l'incidence d'une onde de compression et $k_{z,0} = k_{Sz,1}$ dans le cas de l'incidence d'une onde de cisaillement. De plus, dans le cylindre, **seule la partie réelle** de k_z sera conservée puisque ce milieu est élastique (Deschamps 1991).

Notons ici que les développements présentés ne sont valides que pour des angles d'incidences inférieurs au premier angle critique, angle critique d'incidence à partir duquel un type d'onde n'est plus généré lors de la diffraction à l'interface entre les deux milieux. Nous verrons dans la suite de ce document que la prise en compte des angles critiques nécessitera de modifier les expressions que l'on vient de présenter ; ces modifications ainsi qu'une discussion concernant les problématiques soulevées par le traitement des angles critiques sont présentées dans le cas du milieu à trois phases.

3. Résolution du problème

En remplaçant les expressions des potentiels de chaque milieu déterminées précédemment, dans les relations (3.11)-(3.13), on peut déduire les champs de déplacements et de contraintes en tous les points de notre modèle. On écrit ensuite les équations de continuité des déplacements ($\vec{u}^{(j)}$) et des vecteurs contraintes ($\bar{\bar{\sigma}}^{(j)}.\hat{e}_r$) à l'interface cylindre (j=0) /milieu environnant (j=1) :

$$\begin{bmatrix} \vec{u}^{(0)}_{(r=a)} = u^{(1)}_{(r=a)} \\ \bar{\bar{\sigma}}^{(0)}_{(r=a)}.\hat{e}_r = \bar{\bar{\sigma}}^{(1)}_{(r=a)}.\hat{e}_r \end{bmatrix} , \tag{3.26}$$

que l'on réécrit sous la forme :

$$S \times \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \end{bmatrix} = B \ , \tag{3.27}$$

où S est une matrice 6×6 contenant les expressions des déplacements et contraintes – en fonction des potentiels – des ondes diffractées dans les deux milieux, et B un vecteur colonne contenant les expressions des déplacements et contraintes – en fonction des potentiels – de l'onde incidente dans le milieu environnant. Les expressions complètes des matrices S et B sont données en annexe E.

Nous avons défini un système carré de six équations à six inconnues. On le résout en utilisant la méthode du pivot de Gauss afin d'obtenir les amplitudes modales des ondes diffractées résultant de l'interaction d'une onde incidente d'amplitude unitaire avec le cylindre.

Les quantités qui nous intéressent ne sont cependant pas directement les amplitudes modales des ondes diffractées dans le milieu environnant, mais plutôt le comportement des ondes diffractées en champ lointain. On peut donc effectuer un développement asymptotique des fonctions de Hankel pour de grands arguments, donné par :

$$H_n^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)} \text{ quand } x \to \infty \ . \tag{3.28}$$

On définit alors les fonctions d'amplitude de diffraction dans les deux directions $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ pour chaque type d'onde comme (Huang, Wang et Rokhlin 1996) :

$$\begin{cases} f_L(0) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi k_{L\perp,2} a}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} A_n \ , \ f_L(\pi) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi k_{L\perp,2} a}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} i^{n} A_n \\ f_{SV}(0) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi k_{SV\perp,2} a}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} B_n \ , \ f_{SV}(\pi) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi k_{SV\perp,2} a}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} i^{n} B_n \ , \\ f_{SH}(0) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi k_{SH\perp,2} a}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} C_n \ , \ f_{SH}(\pi) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi k_{SH\perp,2} a}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} i^{n} C_n \end{cases} \tag{3.29}$$

où les expressions ont été normalisées par $\sqrt{r/a}$ afin de supprimer la dépendance en $1/\sqrt{r}$ et d'étudier le comportement des ondes en champ lointain.

La quantité $f_p(0)$ conserve le même sens que celui qu'elle a dans le cas de l'incidence normale, c'est-à-dire qu'elle représente l'amplitude des ondes diffusées vers l'avant, dans la direction d'incidence. La quantité $f_p(\pi)$ quant à elle ne représente plus l'amplitude des ondes rétro diffusées mais l'amplitude des ondes diffractées dans le demi-plan supérieur du plan d'incidence selon l'angle $-\alpha$ comme le montre la Figure III-4.

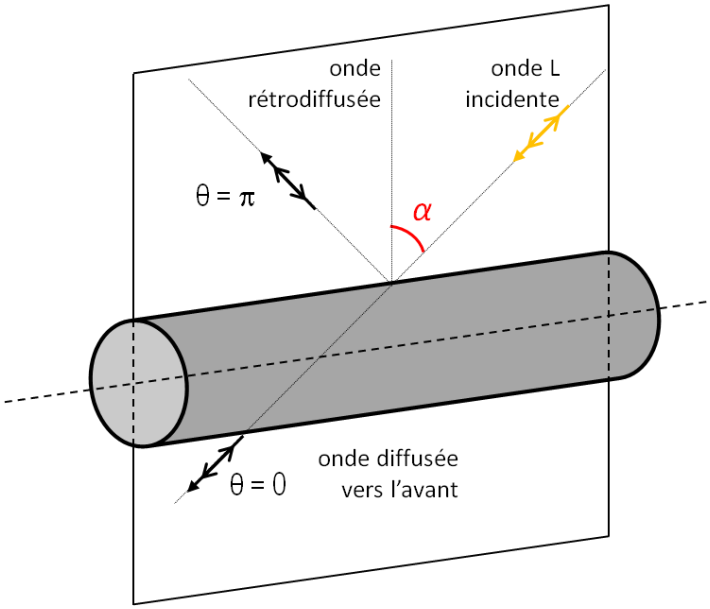

Figure III-4. Définition des directions de diffusion privilégiées.

3. Modèle à trois phases en incidence oblique

On considère à présent une onde plane se propageant selon une direction quelconque dans le plan défini par les directions 2 et 3 ($\hat{e}_r$, $\hat{e}_z$), dans le milieu à trois phases défini au début de ce chapitre. La direction de propagation de cette onde est définie par l'angle α qu'elle forme avec la normale à l'axe des cylindres, comme le montre la Figure III-5.

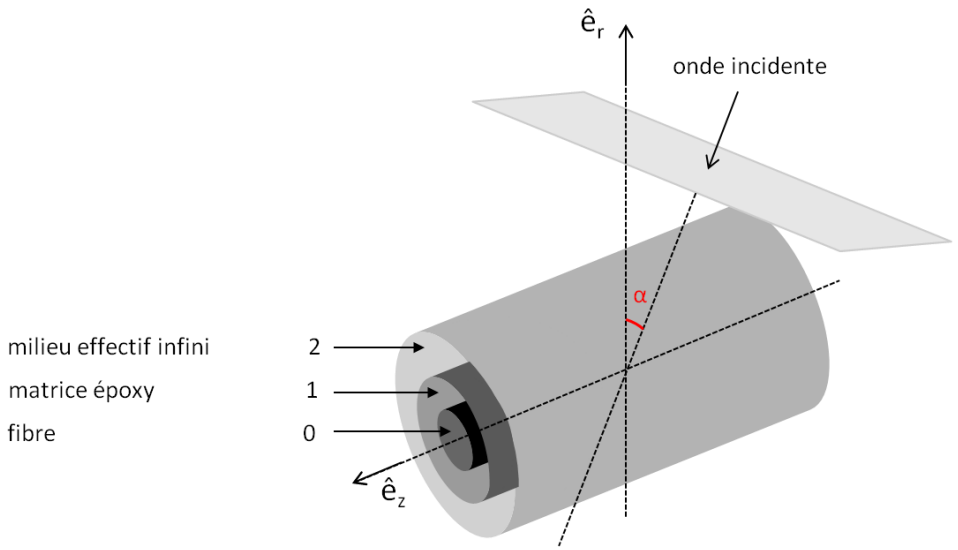

Figure III-5. Représentation du problème à trois phases. Un cylindre élastique de rayon a, de symétrie isotrope transverse, représentatif des fibres (milieu 0) est entouré d'un cylindre de rayon b, isotrope et viscoélastique, constitué de matrice (milieu 1) lui-même entouré d'un cylindre d'extension infinie, isotrope transverse et viscoélastique, ayant les propriétés du milieu effectif (milieu 2).

On souhaite résoudre le problème de la diffraction de l'onde sur chacune des interfaces. Pour cela, on procède de manière similaire au cas précédent de la diffraction d'une onde par un cylindre unique.

Dans un premier temps, il est nécessaire d'exprimer les potentiels dans chaque milieu. Nous avons vu la forme générale de ces expressions dans la section précédente, et les expressions des potentiels dans le milieu intérieur (3.18)-(3.25) sont conservées. Cependant, les expressions des potentiels des ondes diffractées dans le milieu environnant sont différentes : le milieu étant maintenant isotrope transverse, nous déterminons ces expressions en suivant le même raisonnement que dans le cas du milieu intérieur. Pour la même raison, les expressions des potentiels de l'onde incidente doivent aussi être déterminées.

1. Expression des potentiels correspondant aux ondes diffractées dans le milieu environnant

On choisit les potentiels qui vérifient les équations différentielles présentées en (3.14) comme étant de la forme :

$$\begin{cases} \phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \, H_n^{(1)}(s_2 r) \cos n\theta \, e^{ik_z z} \\ \chi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \, H_n^{(1)}(s_2 r) \cos n\theta \, e^{ik_z z} \\ \psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} R_n \, H_n^{(1)}(s_2 r) \sin n\theta e^{ik_z z} \end{cases} . \tag{3.30}$$

On remarque ensuite que les expressions des dérivées des fonctions de Hankel sont semblables aux expressions des dérivées des fonctions de Bessel, et s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_n(s_2 r)}{\partial r} &= s H_{n-1}(s_2 r) - \frac{n}{r} H_n(s_2 r) \\ &= -s H_{n+1}(s_2 r) + \frac{n}{r} H_n(s_2 r) \, . \end{aligned} \tag{3.31}$$

La méthode présentée en annexe D, qui a permis de définir l'expression des potentiels dans le milieu intérieur dans le cas de la diffraction de l'onde sur un cylindre unique, peut être utilisée pour déterminer les expressions des potentiels dans le milieu environnant.

En remplaçant (3.30) dans (3.11)-(3.13) et en suivant le raisonnement utilisé dans le cas de la diffraction sur un cylindre isotrope transverse, on obtient les expressions suivantes pour les potentiels dans le milieu 2 :

$$\begin{cases} \phi_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[P_n H_n^{(1)}(s_{12} r) + q_{22} Q_n H_n^{(1)}(s_{22} r) \right] \cos n\theta \, e^{ik_z z} \\ \chi_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[q_{12} P_n H_n^{(1)}(s_{12} r) + Q_n H_n^{(1)}(s_{22} r) \right] \cos n\theta \, e^{ik_z z} \\ \psi_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n H_n^{(1)}(s_{32} r) \sin n\theta \, e^{ik_z z} \end{cases} . \tag{3.32}$$

Les coefficients q_{12}, q_{22} et les nombres d'onde s_{12}, s_{22}, s_{32} ont des expressions semblables à celles obtenues pour le milieu intérieur (3.18)-(3.25), en remplaçant les propriétés correspondant au milieu 0 par celles correspondant au milieu 2.

2. Expression des potentiels correspondants à l'onde incidente

Le milieu effectif, dont les propriétés sont encore inconnues, est de symétrie isotrope transverse. Ainsi, les potentiels prendront des formes différentes selon le type d'onde incidente. On notera que, contrairement au cas précédent où le milieu environnant était isotrope, les potentiels ne correspondent plus chacun à un type d'onde : les potentiels ϕ et χ sont couplés dans les équations et représentent chacun les ondes L et SV tandis que le potentiel ψ continue de représenter séparément l'onde SH.

Pour le cas d'une onde de compression (onde L) les potentiels prennent la forme :

$$\begin{cases} \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(s_{12}r) \cos n\theta e^{ik_z z} \\ \chi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n q_{12} J_n(s_{12}r) \cos n\theta e^{ik_z z} \\ \psi = 0 \end{cases} . \quad (3.33)$$

Pour l'onde de cisaillement polarisée dans le plan d'incidence P_{13} (onde SV), on a:

$$\begin{cases} \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n q_{22} J_n(s_{22}r) \cos n\theta e^{ik_z z} \\ \chi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(s_{22}r) \cos n\theta e^{ik_z z} \\ \psi = 0 \end{cases} . \quad (3.34)$$

Pour l'onde de cisaillement polarisée dans le plan perpendiculaire à l'axe des cylindres P_{12} (onde SH), on a :

$$\begin{cases} \phi = 0 \\ \chi = 0 \\ \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(s_{32}r) \sin n\theta e^{ik_z z} \end{cases} . \quad (3.35)$$

3. Expression des potentiels dans le milieu intermédiaire

Dans le milieu intermédiaire, le cas le plus général d'ondes convergentes et divergentes doit être pris en compte (Pao et Mow 1973). On choisira donc de conserver dans l'équation (3.16) les termes dépendant de la fonction de Hankel de premier type ainsi que ceux dépendant de la fonction de Hankel de deuxième type. Notons que certains auteurs choisissent d'exprimer les potentiels dans le milieu intermédiaire en fonction de J_n et Y_n, les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce (Huang, Wang et Rokhlin 1996). Les fonctions de Hankel étant exprimées à partir des fonctions de Bessel de première et de deuxième espèces, les deux formulations sont équivalentes. Les potentiels ont alors la forme :

$$\begin{cases} \phi_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[D_n H_n^{(1)}(k_{L\perp,1} r) + E_n H_n^{(2)}(k_{L\perp,1} r) \right] \cos n\theta \, e^{ik_z z} \\ \chi_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[F_n H_n^{(1)}(k_{S\perp,1} r) + M_n H_n^{(2)}(k_{S\perp,1} r) \right] \cos n\theta \, e^{ik_z z} \\ \psi_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[N_n H_n^{(1)}(k_{S\perp,1} r) + O_n H_n^{(2)}(k_{S\perp,1} r) \right] \sin n\theta \, e^{ik_z z} \end{cases} , \quad (3.36)$$

avec $H_n^{(2)}$ la fonction de Hankel de deuxième type qui n'est autre que la conjuguée de la fonction de Hankel de premier type, $k_{L\perp,1} = k_{L,1} \cos \alpha$ la partie radiale du nombre d'onde

des ondes de compression dans la matrice et $k_{S\perp,1} = k_{S,1}\cos\alpha$ la partie radiale du nombre d'onde des ondes de cisaillement dans la matrice.

4. Définition du système

On peut maintenant, à l'aide de l'équation (3.2) et de l'expression des potentiels, déterminer les expressions du déplacement en tout point de l'espace. Les amplitudes modales des ondes diffractées nous sont toujours inconnues ; afin de les déterminer, on écrit les équations de continuité des déplacements $\vec{u}^{(j)}$ et du vecteur contrainte $\bar{\bar{\sigma}}^{(j)}.\hat{e}_r$ à chaque interface ($r = a$ et $r = b$) telles que :

$$\begin{bmatrix} \vec{u}^{(0)}_{(r=a)} = u^{(1)}_{(r=a)} \\ \bar{\bar{\sigma}}^{(0)}_{(r=a)}.\hat{e}_r = \bar{\bar{\sigma}}^{(1)}_{(r=a)}.\hat{e}_r \end{bmatrix}, \text{ et } \begin{bmatrix} \vec{u}^{(1)}_{(r=b)} = u^{(2)}_{(r=b)} \\ \bar{\bar{\sigma}}^{(1)}_{(r=b)}.\hat{e}_r = \bar{\bar{\sigma}}^{(2)}_{(r=b)}.\hat{e}_r \end{bmatrix}, \tag{3.37}$$

où les déplacements et les contraintes dans le milieu 2 sont la somme des composantes de l'onde incidente et des ondes diffractées :

$$\begin{cases} \begin{matrix} \vec{u}^{(2)}_{inc} + \vec{u}^{(2)}_{scat,2} = \vec{u}^{(1)}_{scat,2} \\ \bar{\bar{\sigma}}^{(2)}_{inc}.\hat{e}_r + \bar{\bar{\sigma}}^{(2)}_{scat,2}.\hat{e}_r = \bar{\bar{\sigma}}^{(1)}_{scat,2}.\hat{e}_r \end{matrix}, \quad r = b, \\ \\ \begin{matrix} \vec{u}^{(1)}_{scat,2} + \vec{u}^{(1)}_{scat,1} = \vec{u}^{(0)}_{scat,1} \\ \bar{\bar{\sigma}}^{(1)}_{scat,2}.\hat{e}_r + \bar{\bar{\sigma}}^{(1)}_{scat,1}.\hat{e}_r = \bar{\bar{\sigma}}^{(0)}_{scat,1}.\hat{e}_r \end{matrix}, \quad r = a, \end{cases} \tag{3.38}$$

avec $\vec{u}^{(i)}_{scat,j}$, respectivement $\bar{\bar{\sigma}}^{(i)}_{scat,j}.\hat{e}_r$, le déplacement, respectivement le vecteur contrainte, correspondant à l'onde diffractée dans le milieu i générée par une onde incidente dans le milieu j.

On en vient donc à considérer un système de douze équations que l'on reformule pour avoir :

$$S \times \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \\ M_n \\ N_n \\ O_n \\ P_n \\ Q_n \\ R_n \end{bmatrix} = B \ , \tag{3.39}$$

avec S une matrice 12x12 contenant les expressions des champs de déplacements et contraintes correspondant aux ondes diffractées à chacune des interfaces, et B un vecteur

colonne 12x1 contenant les expressions des champs de déplacements et contraintes correspondant à l'onde incidente dans le milieu effectif infini.

Le détail des expressions de S et B est donné dans l'annexe F.

On remarquera cependant que le système contient cette fois-ci 15 inconnues ; en effet les nombres d'onde des ondes incidentes et réfléchies dans le milieu environnant nous sont inconnus puisqu'ils dépendent des propriétés du milieu effectif que l'on recherche. Il nous faudra donc utiliser des équations supplémentaires pour résoudre ce système.

Avant de présenter les méthodes qui permettent de résoudre le système et de définir les propriétés du milieu effectif, nous donnons les expressions des fonctions d'amplitude de diffraction $f_p(0)$ et $f_p(\pi)$ qui interviendront dans les méthodes de résolution. Le milieu environnant étant de symétrie isotrope transverse, leurs expressions seront différentes du cas précédent.

5. *Fonctions d'amplitude de diffraction*

On définit les fonctions d'amplitude de diffraction comme l'expression en champ lointain des potentiels des ondes diffractées dans le milieu environnant définis par (3.32) en utilisant la relation (3.28).

On a alors :

$$\begin{cases} f_L(0) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi b}}\left(\dfrac{e^{is_{12}r}}{\sqrt{s_{12}}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n P_n + q_{22}\dfrac{e^{is_{22}r}}{\sqrt{s_{22}}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n Q_n\right) \\ f_{SV}(0) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi b}}\left(q_{12}\dfrac{e^{is_{12}b}}{\sqrt{s_{12}}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n P_n + \dfrac{e^{is_{22}b}}{\sqrt{s_{22}}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n Q_n\right) \\ f_{SH}(0) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi b s_{32}}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n R_n \end{cases},$$

et

$$\begin{cases} f_L(\pi) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi b}}\left(\dfrac{e^{is_{12}r}}{\sqrt{s_{12}}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}i^n P_n + q_{22}\dfrac{e^{is_{22}r}}{\sqrt{s_{22}}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}i^n Q_n\right) \\ f_{SV}(\pi) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi b}}\left(q_{12}\dfrac{e^{is_{12}b}}{\sqrt{s_{12}}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}i^n P_n + \dfrac{e^{is_{22}b}}{\sqrt{s_{22}}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}i^n Q_n\right) \\ f_{SH}(\pi) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi b s_{32}}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}i^n R_n \end{cases}, \qquad (3.40)$$

où l'on a de nouveau multiplié les expressions par $\sqrt{r/b}$ afin de supprimer la dépendance en $1/\sqrt{r}$.

Le système régissant le problème de la diffraction d'une onde en incidence oblique sur le milieu à trois phases a été défini en (3.39). Nous allons maintenant nous intéresser aux méthodes permettant de résoudre ce système.

4. Méthode de résolution

Afin de résoudre le système posé en (3.39), on considère une équation supplémentaire faisant intervenir les fonctions d'amplitude de diffraction ainsi que les nombres d'onde des ondes se propageant dans le milieu environnant. Nous présentons deux équations fournies par la littérature.

1. Équation de Yang & Mal (Yang et Mal 1994)

Dans le cas de l'incidence normale, les méthodes développées utilisent comme équations supplémentaires les équations de diffusion multiple proposées par (Waterman et Truell 1961) qui s'écrivent sous la forme :

$$\left(\frac{\langle k_p \rangle}{k_p}\right)^2 = \left[1 - \frac{2in_0 f_p(0)}{{k_p}^2}\right]^2 - \left[\frac{2in_0 f_p(\pi)}{{k_p}^2}\right]^2 , \quad p = L, SV, SH , \qquad (3.41)$$

où n_0 est la densité surfacique de diffuseurs définie par $n_0 = c/(\pi a^2)$, les k_p sont les nombres d'onde des ondes dans le milieu environnant et les $\langle k_p \rangle$ représentent les nombres d'onde effectifs correspondant aux différents types d'ondes. Les fonctions d'amplitude de diffraction f_p étant dépendantes des amplitudes modales, on ne peut pas résoudre directement le système. Les auteurs (Yang et Mal 1994) proposent une méthode itérative pour résoudre ce problème et déterminer les nombres d'onde $\langle k_p \rangle$.

La méthode consiste à supposer dans un premier temps que le milieu environnant est constitué de matrice (le nombre d'onde k_p est donc celui de l'onde incidente dans la matrice) ; une fois le système résolu, on utilise l'équation (3.41) pour déterminer $\langle k_p \rangle$, le nombre d'onde du milieu effectif, que l'on réinjecte ensuite dans le système comme étant le nombre d'onde de l'onde incidente k_p. On effectue cette opération jusqu'à ce que le rapport $\langle k_p \rangle / k_p$ soit suffisamment proche de 1 puisque le nombre d'onde du milieu environnant est alors égal au nombre d'onde du milieu effectif. Cette méthode de résolution est schématisée sur la Figure III-6.

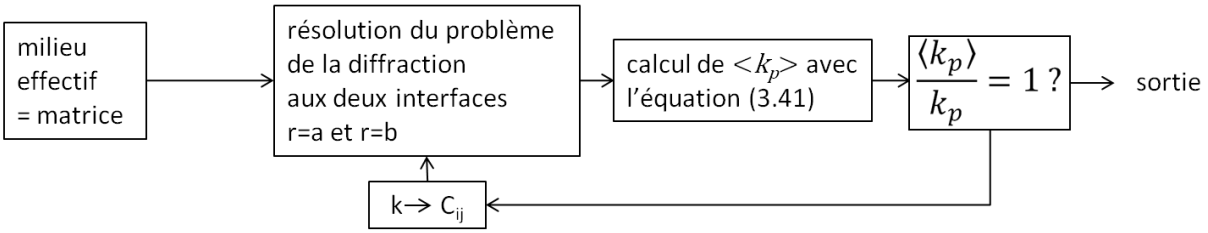

Figure III-6. Représentation de la méthode itérative de résolution proposée par Yang&Mal.

2. *Équation de Kim (J. Y. Kim 2004)*

(J. Y. Kim 2004) propose une autre équation faisant intervenir la fonction d'amplitude des ondes diffractées ; cette équation est obtenue à partir de considérations énergétiques et est connu comme étant la Potential Coherent Approximation (PCA).

Dans le modèle auto-cohérent proposé, on considère que le champ acoustique dans le milieu effectif est égal au champ moyen dans le milieu hétérogène créé par une contrainte située à l'infini. On calcule alors l'énergie totale acoustique U correspondant à la somme de l'énergie U_0 associée au champ acoustique dans le milieu vide d'hétérogénéités (ici sans fibres) et soumis à la contrainte extérieure, et de l'énergie de perturbation due à la présence des hétérogénéités $\widetilde{U}$. On écrit :

$$U = U_0 - \widetilde{U} \,. \tag{3.42}$$

L'hypothèse d'auto-cohérence revient à considérer que l'énergie totale U est égale à l'énergie du champ moyen dans le matériau hétérogène. Cette énergie n'étant autre que l'énergie U_0 de l'onde incidente dans le milieu homogène, cela amène à considérer l'énergie de perturbation $\widetilde{U}$ nulle.

L'énergie de perturbation peut s'exprimer en fonction de la section efficace de diffusion, elle-même dépendante des amplitudes de diffraction que nous avons définies en (3.40) ; elle s'exprime plus précisément en fonction de l'amplitude des ondes diffractées vers l'avant *i.e.* $f_p(0)$. L'auteur montre alors que de considérer l'énergie de perturbation comme nulle revient à considérer que l'équation suivante est vérifiée pour toute onde incidente. On a :

$$f_p(0) = 0, \qquad p = L, SV, SH \;. \tag{3.43}$$

Le sens physique de l'équation (3.43) est simple : l'amplitude des ondes diffractées vers l'avant est nulle lorsqu'il n'y a pas de diffraction, c'est-à-dire uniquement lorsque le milieu environnant est le milieu effectif équivalent.

De plus, si l'on considère que l'amplitude des ondes diffractées dans la direction de propagation est nulle et qu'il n'y a donc pas de diffraction, nous obtiendrons de même $f_p(\pi) = 0$ ce qui signifie qu'il existe un facteur $\gamma_p(\omega)$ dépendant de la fréquence tel que $f_p(0) = \gamma_p(\omega) f_p(\pi)$. En remplaçant cette expression dans l'équation proposée par Waterman et Truell (3.41), on obtient, en y substituant $k_p = \langle k_p \rangle$, la relation (3.43) ; cette condition apparait alors comme seule nécessaire pour traiter le problème de la diffraction. L'auteur montre ainsi dans son article l'équivalence des résultats obtenus en utilisant les équations (3.41) ou (3.43) pour l'homogénéisation de composites unidirectionnels ayant une faible concentration en fibres. Il n'est cependant pas fait mention de la méthode utilisée pour résoudre le système dans cet article.

Pour la suite de ces travaux, nous conservons les deux équations présentées et proposons d'en faire une comparaison sur la gamme de concentrations et de fréquences que nous étudions.

3. Résolution du problème dans le cas de l'incidence oblique

On cherche à définir les coefficients de rigidité du milieu effectif ($C_{ij}^{(2)}$ noté C_{ij} dans la suite) en considérant des ondes de volume en incidence oblique sur le modèle à trois phases défini précédemment.

La méthode de résolution schématisée sur la Figure III-6 était utilisée pour le cas de l'incidence normale sur les cylindres. Dans le cas de l'incidence oblique, on montre (Angel et Bolshakov 1997) que pour une plaque, une expression de même nature que la relation (3.41) est satisfaite par la composante du nombre d'onde perpendiculaire à l'interface, c'est-à-dire la partie radiale dans notre cas. En nous rappelant que pour les matériaux isotropes transverses, il existe des expressions permettant de relier les vitesses de propagation aux rigidités C_{ij} du matériau et que les résultats de la méthode S. Lonné nous permettent de déterminer trois des cinq coefficients de rigidité qui caractérisent notre milieu, on choisit d'utiliser ces relations de dispersion pour déterminer directement les deux coefficients C_{ij} manquant à partir des nombres d'onde effectifs des ondes L et SV solutions de l'équation (Figure III-6).

Les deux ondes de compression (L) et de cisaillement polarisée dans le plan d'incidence (SV) sont nécessaires pour effectuer cette inversion. Selon la valeur de l'angle d'incidence α, ces ondes de volumes sont générées ou non ; ceci nous amène à étudier l'impact des angles d'incidences, et par conséquent des angles critiques, sur le comportement global du milieu à trois phases.

Les angles critiques sont les angles d'incidence à partir desquels certains types d'ondes diffractées deviennent évanescents, ondes de surface qui s'atténuent très rapidement avec la distance et dont le nombre d'onde est imaginaire pur. À fin d'exemple, on représente sur la Figure III-7 les courbes de lenteur d'un matériau composite unidirectionnel calculées à partir des valeurs obtenues par la méthode de S. Lonné - dans laquelle les valeurs recherchées (C_{33} et C_{13}) sont obtenues par un calcul statique défini dans (Datta, Ledbetter et Kriz 1984) - pour une concentration en fibres de 52 % à une fréquence de 3 MHz.

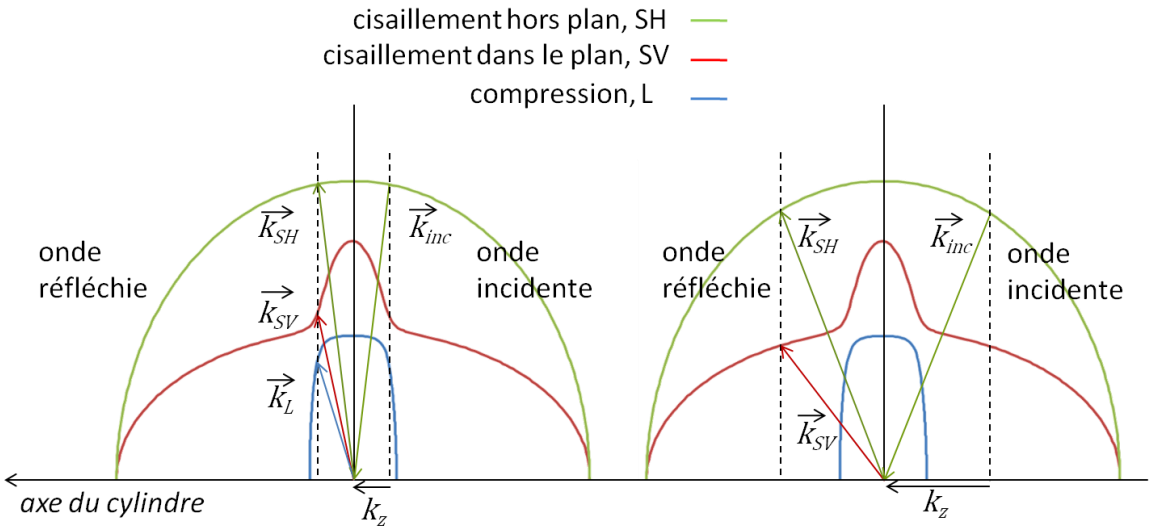

Figure III-7. Ondes réfléchies dans le milieu environnant (symétrie isotrope transverse) pour deux

angles différents. Les trois courbes de lenteurs reportées sur la figure, sont caractéristiques de la symétrie de ce milieu.

On rappelle ici qu'à chaque passage d'interface, la partie axiale du nombre d'onde de l'onde incidente $k_{z,inc}$ est conservée. Ainsi, lors de l'étude des angles critiques on raisonnera uniquement selon cette quantité et non pas en terme d'angle d'incidence, bien que ces quantités soient directement liées.

Pour le cas de l'onde incidente SH, défini sur la Figure III-3, trois ou deux modes seront réfléchis à la surface. Cette constatation est de première importance puisque pour certaines valeurs de $k_{z,inc}$, l'onde de compression ici représentée en bleu devient évanescente dans le milieu environnant. On souhaite obtenir nos deux paramètres à partir des équations reliant la vitesse de propagation des ondes de compression et de cisaillement polarisée dans le plan d'incidence, et l'on voit que pour certaines valeurs de $k_{z,inc}$, l'onde de compression n'est plus générée lors de la diffraction ; les deux paramètres de rigidité manquants ne pourront plus être déterminés par la méthode.

Nous avons montré à partir d'un nombre conséquent de simulations en incidence normale que, pour certain cas, la méthode de S. Lonné pour atteindre les nombres d'onde effectifs diverge, notamment lorsque le milieu initial est la matrice.

Afin de pouvoir appliquer le modèle de diffraction sur l'ensemble de la gamme d'angles ainsi que pour nous affranchir du problème posé par l'initialisation de la méthode itérative, nous proposons une autre méthode pour déterminer les paramètres de rigidité du milieu effectif : utiliser un algorithme génétique pour trouver le jeu de C_{ij} qui satisfasse les équations (3.41) ou (3.43).

L'algorithme génétique que nous proposons d'utiliser pour cette recherche des rigidités est semblable dans son fonctionnement à celui utilisé lors de l'inversion basée sur les nombres d'onde des modes guidés que nous avons présenté au cours du chapitre II (le détail de cet algorithme fait l'objet de l'annexe C). L'application de cet algorithme nécessite néanmoins d'adapter les nombreux paramètres qui en régissent la convergence au problème que nous cherchons à résoudre. La méthode de résolution proposée est schématisée sur la Figure III-8.

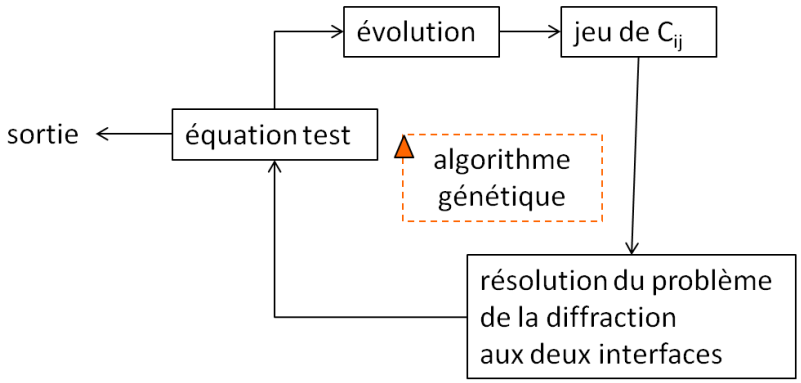

Figure III-8. Représentation de la méthode de résolution utilisant un algorithme génétique.

L'équation test pourra aussi bien être basée sur l'équation proposée par Yang&Mal (3.41) que sur celle (3.43) proposée par Kim.

4. Validation dans le cas de l'incidence normale

Afin d'étudier la validité de cette méthode de résolution et par conséquent celle des expressions permettant de résoudre le problème de la diffraction en incidence oblique, nous nous plaçons dans un premier temps dans le cas limite de l'incidence normale (l'angle d'incidence est de 0,01°, 0° étant une valeur singulière dans notre modèle) et confrontons les résultats obtenus à ceux, validés expérimentalement, obtenus par la méthode de S. Lonné (Lonné, Lhémery, et al. 2004). Sous cette incidence, seuls les trois coefficients C_{11}, C_{44}, C_{66} gouvernant la propagation des ondes (L, SV et SH) sont identifiés.

Pour obtenir ces résultats, nous avons utilisé les paramètres regroupés dans le Tableau III-1, où l'on remarquera tout particulièrement le faible taux de mutation ainsi que le faible nombre de générations que l'on utilise pour l'algorithme. En effet, en incidence normale, le profil de l'espace de recherche est assez simple au sens où le minimum global de la fonction coût est bien marqué et que l'on a peu de minima locaux. On peut donc paramétrer l'algorithme afin qu'il converge le plus rapidement possible.

Tableau III-1. Paramètres de l'algorithme génétique utilisés pour l'étude en incidence normale représenté sur la Figure III-9.

taux de mutation	1%
nombre d'élite	2
nombre de générations	100
nombre de chromosomes	30
nombre de bits	18

La Figure III-9 représente les résultats obtenus pour l'atténuation (partie imaginaire des nombres d'onde) des trois types d'ondes en fonction de la concentration c en considérant respectivement les équations (3.41), a) et (3.43), b).

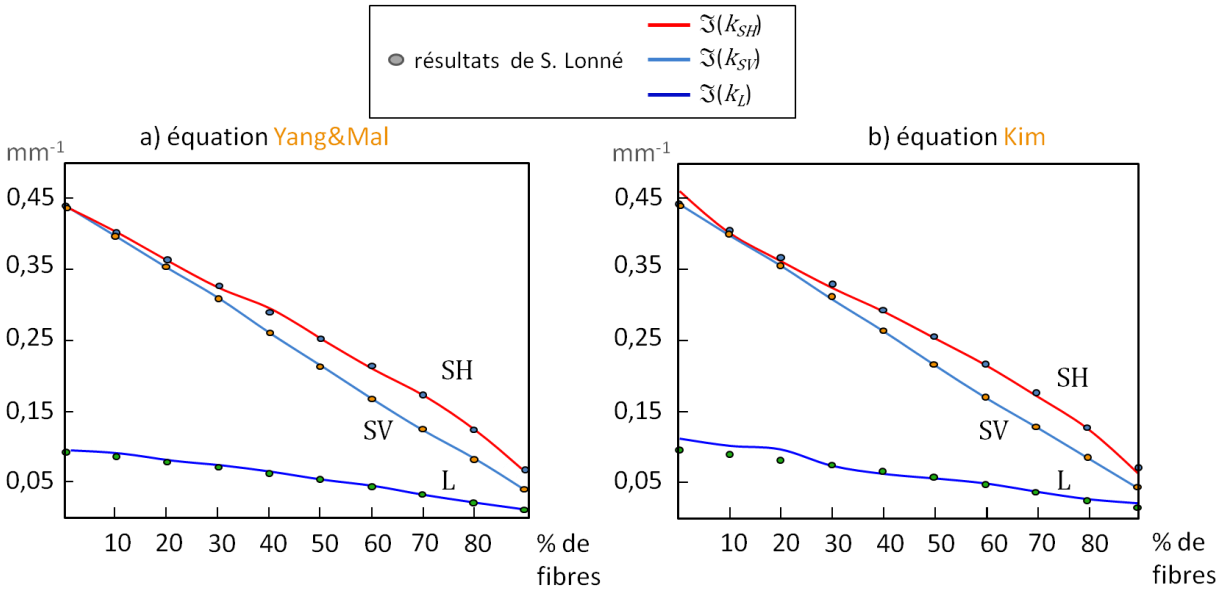

Figure III-9. Comparaison des résultats obtenus pour l'atténuation des trois types d'ondes, selon que l'on utilise l'équation de Yang&Mal ou de Kim, avec les résultats de S. Lonné.

Les résultats obtenus avec notre méthode, et ce quelle que soit l'équation utilisée pour la résolution, se superposent aux résultats validés expérimentalement. Il est important de noter que malgré le bon accord des résultats, la méthode utilisant l'algorithme génétique nécessitera en moyenne 300 fois plus d'opérations (les principales étant la définition et la résolution du système de (3.39) de dimension 12x12) que la méthode de résolution utilisée par S. Lonné. Cependant l'utilisation d'un algorithme génétique permet de rendre la méthode extrêmement robuste aux valeurs initiales choisies.

5. Méthode de résolution en incidence oblique utilisant l'algorithme génétique

On applique maintenant la méthode proposée au cas de l'incidence oblique.

1. *Onde incidente*

Soit un milieu à trois phases tel que défini en début de chapitre par la Figure III-1. On considère une onde incidente dont la direction de propagation forme un angle α avec la normale à l'axe du cylindre ; le milieu extérieur étant de symétrie isotrope transverse, trois ondes de polarisations différentes pourront s'y propager. Les conditions aux frontières impose que la valeur du $k_{z,inc}$ soit conservée à chaque interface ce qui amène ensuite à poser le système (3.39) avec une unique valeur de k_z dans toutes les expressions. Or, pour un même angle d'incidence chaque type d'onde susceptible de solliciter la structure a une valeur de $k_{z,inc}$ propre. Nous choisissons donc de considérer séparément l'incidence des ondes ainsi que le représente la Figure III-10 a) ; chacune de ces ondes pouvant donner naissance aux trois types d'ondes (selon l'angle d'incidence), il nous faudra traiter le problème des conversions de modes qui auront lieu aux interfaces.

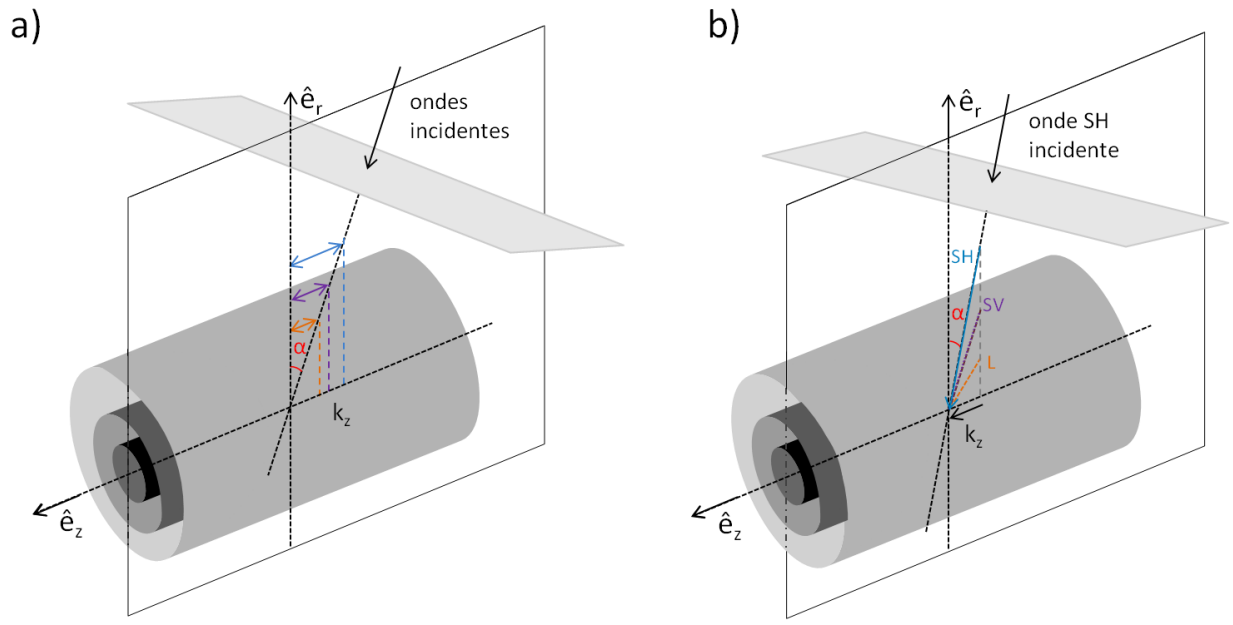

Figure III-10. Représentation de l'incidence sur le modèle à trois phases, a) selon un même angle α, et b) pour un même k_z.

Dans le but de nous affranchir des problématiques liées aux conversions de modes, on pourrait cependant considérer simultanément l'incidence des trois types d'onde. Pour cela, l'angle d'incidence propre à chacune de ces ondes serait choisi de telle façon que les parties axiales de leur nombre d'onde respectif soient égales, conduisant à un unique k_z pour les trois ondes incidentes : cette idée est représentée sur la Figure III-10 b). Nous montrerons cependant, dans la suite de ce document, que l'application de cette dernière méthode est problématique, chaque onde sera donc traitée séparément.

Nous avons évoqué précédemment la notion d'angle critique en ne considérant que deux milieux. Lorsque l'on considère le milieu à trois phases, il nous faut de même étudier l'allure des courbes de lenteur de phase de la matrice et des fibres afin d'observer le comportement des ondes réfléchies en fonction du k_z incident.

2. Gestion des angles critiques

La Figure III-11 représente les courbes de lenteur dans les trois phases qui composent notre milieu. La matrice et la fibre ayant des propriétés élastique fixées, on utilise la méthode S. Lonné, couplée à une analyse statique (Datta, Ledbetter et Kriz 1984), pour identifier les cinq rigidités à partir desquelles sont déterminées les courbes de lenteurs. Ces valeurs étaient utilisées pour tracer la Figure III-7 et correspondent à une concentration en fibres de 52% pour une fréquence de 3MHz.

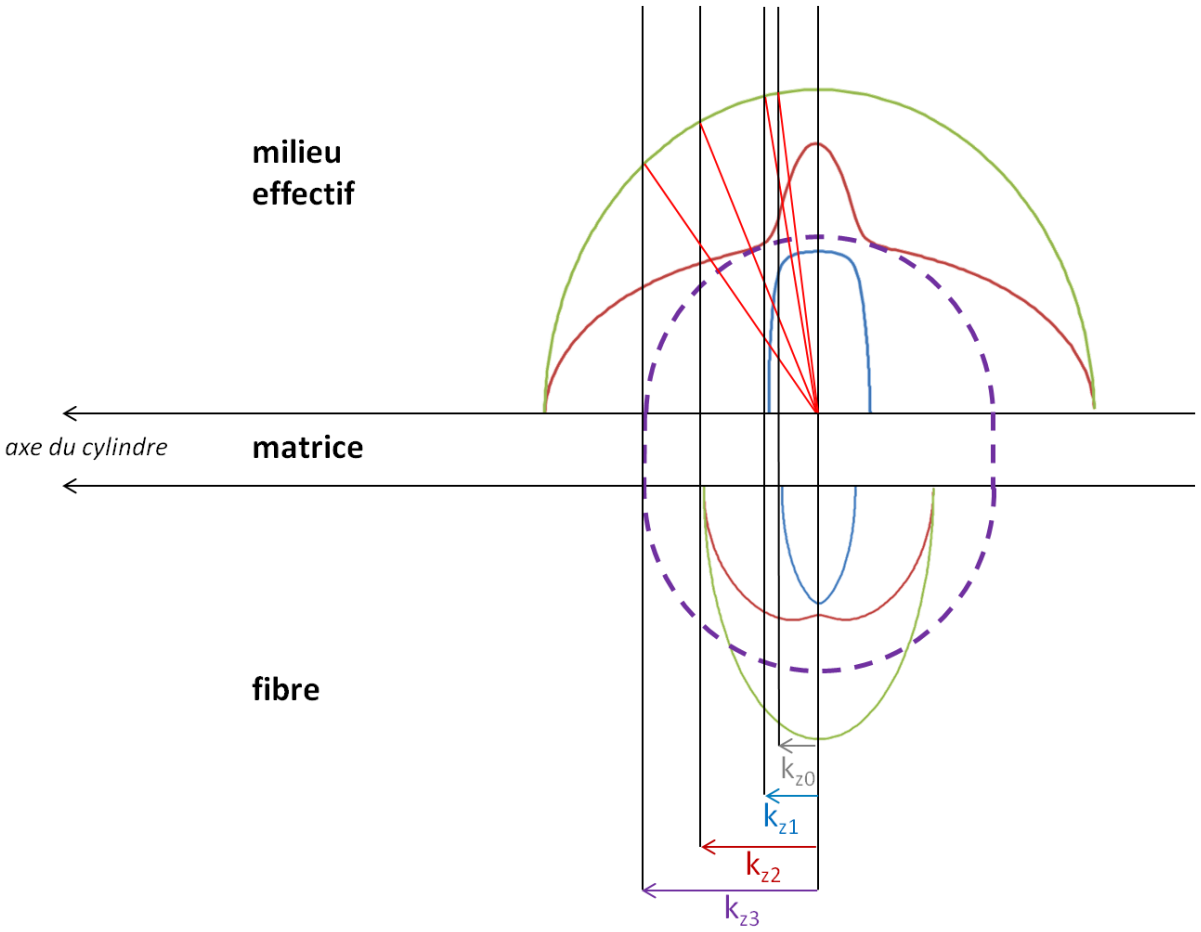

Figure III-11. Les courbes de lenteurs pour chaque milieu sont représentées. Pour le milieu intermédiaire, seule la courbe de lenteur de l'onde de compression (L) est représentée en pointillés.

Cette représentation nous permet d'envisager quatre cas de figure différents selon la valeur du k_z de l'onde incidente. Notons que l'impact des angles critiques repose sur la configuration considérée et en particulier les valeurs des angles critiques relatives au milieu extérieur et intérieur. Nous établissons dans la suite les expressions des potentiels associés aux ondes évanescentes apparaissant après ces angles critiques d'incidence. Notons cependant, que les développements nécessaires à la prise en compte de certains angles critiques n'ont pas été menés ; nous ne faisons donc que poser le problème.

a. Prise en compte des ondes évanescentes apparaissant dès les deux premiers angles critiques.

Le premier angle critique rencontré correspond à l'onde quasi-longitudinale dans la fibre, qui devient évanescente pour $k_{z,inc} > k_{z0}$. Cela signifie que le nombre d'onde s_{10} dans les expressions (3.18) est alors imaginaire pur. On remarque que si l'on remplace s_0 par is_{0r} (s_{0r} un réel) dans l'équation différentielle de Bessel (3.15), on obtient :

$$r^2y'' + ry' - ((s_{0r}r)^2 + n^2)y = 0 \ , \qquad (3.44)$$

qui n'est autre que l'équation de Bessel modifiée. Les potentiels solutions ne dépendent alors plus des fonctions de Bessel J_n et Y_n mais des fonctions de Bessel modifiées I_n et K_n.

En suivant un raisonnement similaire au cas précédent, il nous faut remplacer, dans les expressions (3.18) des potentiels ϕ_0 et ψ_0, tous les $J_n(s_{10}r)$ par $I_n(s_{10}r)$ ceci permettant de prendre en compte le premier angle critique de notre problème. Cependant il ne suffit pas de remplacer, dans les expressions des déplacements et des contraintes, les fonctions J_n par les fonctions I_n puisque les expressions des dérivées de celles-ci sont différentes, *i.e.*

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_n(s_0r)}{\partial r} &= sJ_{n-1}(s_0r) - \frac{n}{r}J_n(s_0r)\\ &= -sJ_{n+1}(s_0r) + \frac{n}{r}J_n(s_0r)\ ,\end{aligned} \tag{3.45}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_n(s_0r)}{\partial r} &= sI_{n-1}(s_0r) - \frac{n}{r}I_n(s_0r)\\ &= sI_{n+1}(s_0r) + \frac{n}{r}I_n(s_0r)\ .\end{aligned} \tag{3.46}$$

Il reste maintenant à déterminer les expressions des nombres d'onde des ondes diffractées ainsi que celles des déplacements et des contraintes correspondantes.

L'onde réfractée quasi-longitudinale étant évanescente les potentiels (3.18)(3.17) deviennent :

$$\begin{cases}\phi_0(r,\theta,z) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n\, I_n(s_0r)\cos n\theta\, e^{ik_zz}\\ \chi_0(r,\theta,z) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n\, J_n(s_0r)\cos n\theta\, e^{ik_zz}\ ,\\ \psi_0(r,\theta,z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n\, J_n(s_0r)\sin n\theta\, e^{ik_zz}\end{cases} \tag{3.47}$$

où l'on remarque que le potentiel ϕ_0 dépend maintenant de la fonction de Bessel modifiée I_n.

Ceci affecte la détermination des nombres d'ondes. Le système (D.18) s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix}\frac{I_n(s_0r)}{J_n(s_0r)}{s_0}^2\left[C_{11}{s_0}^2 - \left(C_{13}^{(0)} + 2C_{44}\right)k_z^2 + \rho_f\omega^2\right] & -aik_z{s_0}^2\left[-\left(C_{11}^{(0)} - C_{13}^{(0)} - C_{44}^{(0)}\right){s_0}^2 - C_{44}^{(0)}k_z^2 + \rho_f\omega^2\right]\\ \frac{I_n(s_0r)}{J_n(s_0r)}ik_z\left[\left(C_{13}^{(0)} + 2C_{44}^{(0)}\right){s_0}^2 - C_{33}^{(0)}k_z^2 + \rho_f\omega^2\right] & a{s_0}^2\left[-C_{44}^{(0)}{s_0}^2 - \left(C_{33}^{(0)} - C_{13}^{(0)} - C_{44}^{(0)}\right)k_z^2 + \rho_f\omega^2\right]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_n\\ E_n\end{bmatrix} = 0\ , \tag{3.48}$$

où l'on a uniquement reporté les termes dépendant des potentiels ϕ_0 et χ_0, le potentiel ψ_0 étant solution d'un problème découplé.

On remarque ici que contrairement à l'expression obtenue dans l'annexe D pour le cas où les potentiels sont tels que présentés en (3.17), les différents termes du système dépendent des fonctions de Bessel J_n **et** des fonctions de Bessel modifiées I_n. Afin de déterminer les expressions des nombres d'onde, on cherche ensuite à annuler le déterminant (D.X) de ce

système (ou 3.48 se substitue à D.10). Ce déterminant ne se factorise plus et prend la forme d'un polynôme de degré huit. Il reste alors à trier les huit solutions pour identifier les nombres d'ondes correspondants aux ondes diffractées décrites par $\phi_0$et χ_0. Notons que les expressions (3.19) et (3.20) des coefficients q_{10} et q_{20} dépendent dès lors du facteur $I_n(s_0 r)/J_n(s_0 r)$ et donc de l'indice circonférentiel n.

Dès l'apparition du second angle critique, pour $k_z = k_{z1}$, l'onde de compression dans le milieu effectif n'est plus générée lors de la diffraction comme onde de volume et devient évanescente. La méthode utilisée précédemment s'applique, et les potentiels présentés en (3.30) deviennent :

$$\begin{cases} \phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\, K_n(s_2 r) \cos n\theta\, e^{ik_z z} \\ \chi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n\, H_n^{(1)}(s_2 r) \cos n\theta\, e^{ik_z z} \\ \psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} R_n\, H_n^{(1)}(s_2 r) \sin n\theta e^{ik_z z} \end{cases} . \tag{3.49}$$

Les problématiques soulevées lors du traitement du premier angle critique se présentent de la même façon puisque les potentiels n'ont plus une dépendance commune aux fonctions de Bessel.

b. Prise en compte des ondes évanescentes apparaissant dès le troisième angle critique.

Lorsque $k_z > k_{z2}$, les trois ondes générées dans la fibre deviennent évanescentes. Chacun des potentiels décrivant le déplacement s'exprime en fonction de I_n et les nombres d'onde correspondants (s_{20} et s_{30}) sont obtenus d'une manière similaire au cas où $k_z < k_{z0}$.

Dans ce cas de figure, le système (D.18) ou (3.48) prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} {s_0}^2\left[C_{11}^{(0)}{s_0}^2 - \left(C_{13}^{(0)} + 2C_{44}^{(0)}\right)k_z^2 + \rho_f\omega^2\right] & aik_z{s_0}^2\left[\left(C_{11}^{(0)} - C_{13}^{(0)} - C_{44}^{(0)}\right){s_0}^2 - C_{44}^{(0)}k_z^2 + \rho_f\omega^2\right] \\ ik_z\left[\left(C_{13}^{(0)} + 2C_{44}^{(0)}\right){s_0}^2 - C_{33}^{(0)}k_z^2 + \rho_f\omega^2\right] & -a{s_0}^2\left[C_{44}^{(0)}{s_0}^2 - \left(C_{33}^{(0)} - C_{13}^{(0)} - C_{44}^{(0)}\right)k_z^2 + \rho_f\omega^2\right] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_n \\ E_n \end{bmatrix} = 0 \ . \tag{3.50}$$

La recherche des zéros du déterminant de ce système conduit à l'expression des nombres d'onde L et SV dans le milieu environnant (annexe G).

Il est cependant à noter que dans la configuration considérée, lorsque $k_z > k_{z2}$, l'angle critique correspondant à $k_z = k_{z1}$ est dépassé. Il n'existe donc pas de plage angulaire au delà de $k_z = k_{z0}$ pour laquelle on puisse définir le système à résoudre de façon semblable à celui établi sous le premier angle critique.

Ces conclusions sont tirées de la Figure III-11 et seront à revoir selon le type de matériau étudié et selon la concentration considérée.

c. Cas des faibles concentrations en fibres

Avec les données matériaux utilisées, dans le cas où la concentration en fibres c est inférieure à 5%, l'ordre des k_z correspondants aux angles critiques est modifié et il existe une plage angulaire pour laquelle tous les modes se propageant dans le milieu intérieur sont évanescents tandis que les trois types d'onde de volume sont générés lors de la diffraction dans le milieu effectif. On a alors accès aux expressions des nombres d'onde s_{10}, s_{20}, s_{30} directement (sans passer par le prix de huit solutions). Les expressions sont détaillées en annexe G bien que les matériaux à faible concentration en fibres sortent du cadre de cette étude.

6. Utilisation de la méthode aux petits angles

Nous avons vu que nous devions limiter le domaine d'application de cette méthode à la plage $k_z < k_{z0}$. Dans la section suivante nous présentons les résultats obtenus sous ces incidences.

1. Définition de la plage angulaire

L'objectif de la méthode est de définir les coefficients de rigidité de la couche unidirectionnelle sur l'ensemble de la plage angulaire telle que $k_z < k_{z0}$ afin de surdéterminer le système de données à analyser.

Connaissant les coefficients de rigidité de la fibre, nous pouvons déterminer la valeur du nombre d'onde $k_0 = k_{z0}$, en utilisant l'équation de Christoffel (A. H. Nayfeh 1995) dans la direction des fibres qui nous donne :

$$k_{z0} = \frac{\omega}{v_L^{(0)}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{C_{33}^{(0)}}{\rho_f}}} \ , \tag{3.51}$$

avec $v_L^{(0)}$ la célérité des ondes longitudinales se propageant dans la fibre selon la direction 3 (axe du cylindre), $C_{ij}^{(0)}$ le tenseur des rigidités de la fibre.

Définissons la valeur d'incidence en deçà de laquelle les ondes en présence restent des ondes de volume.

L'angle d'incidence critique maximal pour lequel la méthode reste valide, correspond à l'angle critique α_0 associé au mode SH, le plus lent, pour lequel $k_{z,inc} = k_{z0}$ et sa valeur est obtenue en résolvant :

$$\alpha_0 = \operatorname{asin}\left(\frac{k_{z0}}{k_{SH,inc}}\right), \tag{3.52}$$

où k_{SH} est défini par :

$$k_{SH} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{C_{66}^{(0)}\cos^2\alpha_0 + C_{44}^{(0)}\sin^2\alpha_0}{\rho_f}}} \,. \tag{3.53}$$

Nous pouvons ainsi effectuer l'inversion sur toute la gamme d'angle $\alpha = [0, \alpha_0]$ en étant sûr de ne rencontrer aucun angle critique.

2. Définition de la fonction coût

Au cours de la section 4.2 de ce chapitre, nous avons souligné l'équivalence des formulations (3.41) et (3.43) de Yang&Mal et Kim respectivement. Nous choisissons de nous concentrer sur la formulation proposée par Kim dont le sens physique nous parait le plus simple et le plus intuitif ; nous effectuerons cependant des comparaisons régulières avec les résultats obtenus par la méthode en utilisant les équations de Yang&Mal.

Afin de limiter l'espace de recherche et d'améliorer les performances de l'algorithme, nous utilisons une forme simplifiée des fonctions d'amplitude de diffraction définies en (3.40) ; on définit les fonctions $f_p(0)$ et $f_p(\pi)$ de la même manière que dans le cas où le milieu environnant est isotrope, à savoir :

$$\begin{cases} f_L(0) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} A_n & f_L(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n} A_n \\ f_{SV}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} B_n \quad , & f_{SV}(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n} B_n \,. \\ f_{SH}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} C_n & f_{SH}(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n} C_n \end{cases} \tag{3.54}$$

avec A_n l'amplitude des ondes de compression diffractées en considérant l'incidence d'une onde de compression, B_n l'amplitude des ondes SV diffractées en considérant l'incidence d'une onde SV et C_n l'amplitude des ondes SH diffractées en considérant l'incidence d'une onde SH.

Observons que les solutions $f_p(0) = 0$ dans (3.54) sont solutions de $f_p(0) = 0$ dans (3.40)

Dans la section 5.1 nous avons choisi de considérer l'incidence successive des trois types d'ondes pour un même angle d'incidence α comme le représente la Figure III-10. Sous les faibles incidences, chaque type d'onde donne naissance à trois ondes par conversion de mode à l'interface *r=b*. Nous modifions les fonctions d'amplitude de diffraction (3.54) pour tenir compte de ces conversions :

$$\begin{cases} f_L(0) = \sum_p \left| \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} A_n^p \right| & f_L(\pi) = \sum_p \left| \sum_{n=0}^{\infty} i^{n} A_n^p \right| \\ f_{SV}(0) = \sum_p \left| \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} B_n^p \right| \quad , & f_{SV}(\pi) = \sum_p \left| \sum_{n=0}^{\infty} i^{n} B_n^p \right| , \quad p = L, SV, SH \ , \\ f_{SH}(0) = \sum_p \left| \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} C_n^p \right| & f_{SH}(\pi) = \sum_p \left| \sum_{n=0}^{\infty} i^{n} C_n^p \right| \end{cases} \tag{3.55}$$

avec A_n^p l'amplitude de l'onde de type p diffractée en considérant l'incidence d'une onde de type L, B_n^p l'amplitude de l'onde de type p diffractée en considérant l'incidence d'une onde de type SV et C_n^p l'amplitude de l'onde de type p diffractée en considérant l'incidence d'une onde de type SH. On notera que les amplitudes modales des ondes diffractées (A_n, B_n, C_n) et par conséquent les fonctions d'amplitude de diffraction (3.55), dépendent de l'angle d'incidence α.

Les fonctions coût à minimiser à l'aide de l'algorithme génétique deviennent donc, en considérant l'équation de Kim (3.43):

$$\mathrm{F}(\alpha) = \sum_p \left| f_p^{(\alpha)}(0) \right| \ , \ p = L, SV, SH \ , \tag{3.56}$$

et celle de Yang&Mal (3.41)

$$\mathrm{F}(\alpha) = \sum_p \left| -1 + \left[1 - \frac{2in_0 f_p^{(\alpha)}(0)}{k_{\perp p,inc}^2} \right]^2 - \left[\frac{2in_0 f_p^{(\alpha)}(\pi)}{k_{\perp p,inc}^2} \right]^2 \right| , \tag{3.57}$$

avec n_0 la densité surfacique de diffuseurs définie dans le cas de l'incidence oblique par :

$$n_0 = \frac{c}{\pi a^2} \cos\alpha \ ,$$

et $k_{\perp p,inc} = k_{p,inc} \cos\alpha$ la partie radiale du nombre d'onde de l'onde incidente de polarisation $p(= L, SV, SH)$. Les fonctions $f_p^{(\alpha)}$ sont données par (3.55) ; néanmoins pour souligner leur dépendance à l'angle d'incidence α via les amplitudes modales $(A_n(\alpha), B_n(\alpha), C_n(\alpha))$ nous les notons désormais $f_p^{(\alpha)}$. Finalement les fonctions coût (3.56), (3.57) dépendent de l'angle d'incidence α.

Surdéterminons le système de données utilisées en appliquant la méthode sur l'ensemble des angles disponibles ; la fonction coût s'écrit alors :

$$\mathrm{Eq} = \sum_\alpha \left| \mathrm{F}^{(\alpha)}(0) \right| \quad , \tag{3.58}$$

avec $F^{(\alpha)}$ défini par (3.56) ou (3.57). Rappelons que dans ce problème, nous considérons

séparément l'incidence des ondes de compression (L), transverse dans le plan (SV), et transverse hors plan (SH).

La Figure III-12 illustre la méthode de résolution mise en œuvre, où apparait la sommation angulaire.

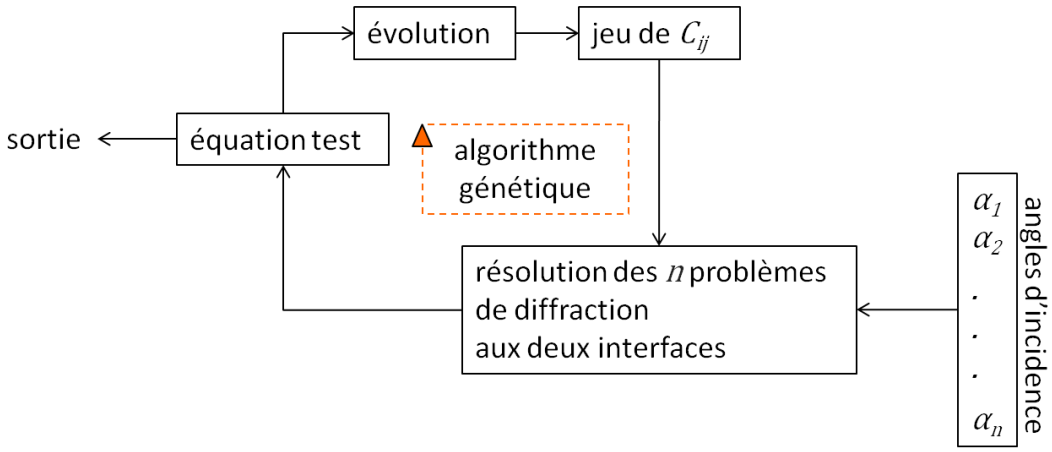

Figure III-12. Méthode de résolution pour une plage de n angles d'incidence.

3. *Étude de la dépendance des paramètres à la configuration considérée*

La méthode repose sur le choix d'une loi de comportement pour le milieu effectif qui s'exprime à partir de rigidités C_{ij} constantes à valeurs complexes.

Les premières simulations sous incidence oblique ont montré que les cinq rigidités dépendaient de la fréquence. Les travaux de S. Lonné ne considérant que l'incidence normale n'avaient pas mis en évidence cette dépendance fréquentielle pour les trois rigidités (C_{11}, C_{44}, C_{66}). Cependant (Huang et Rokhlin 1995) ont quant à eux montré l'existence d'un phénomène de dispersion lorsque les ondes se propagent dans la direction des fibres. Choisissant de ne plus nous appuyer sur les résultats de S. Lonné (qui nous permettait de fixer trois des cinq rigidités), nous avons adapté notre méthode de résolution à la recherche de l'ensemble des rigidités inconnues $C_{ij}(\omega)$.

D'autres simulations remettent en question la loi de comportement choisie (1.8). En effet, il apparait de manière surprenante que les rigidités effectives dépendent également de l'angle d'incidence. Ce résultat a déjà été identifié dans la littérature. Cette dépendance angulaire ($C_{ij}(\alpha)$) nous a conduits à abandonner la fonction coût (3.58) au profit des fonctions (3.56) et (3.57).

Nous présentons maintenant les résultats $C_{ij}(\alpha, \omega)$ pour une concentration, une pulsation et un angle donné.

7. Résultats finaux

Les résultats sont obtenus en utilisant la méthode décrite, schématisée par la Figure III-8 avec pour équations test celle proposée par Kim (3.56) ainsi que celle proposée par Yang&Mal (3.57). Ces résultats sont présentés en fonction des valeurs d'intérêt que sont la concentration en fibres, la fréquence ou l'angle d'incidence.

L'espace dans lequel on recherche les coefficients de rigidité est défini, pour les parties réelles, par les propriétés des constituants données en Annexe A, et, pour les parties imaginaires par l'intervalle [-1,0]. L'aléatoire étant un facteur d'évolution de l'algorithme génétique (Annexe C), nous effectuerons toujours les calculs cinq fois (valeur choisie arbitrairement) pour étudier la validité des valeurs obtenues. On jugera de cette validité à partir de la répartition des valeurs sur les différentes réalisations : si la répartition est compacte, on pourra considérer le résultat comme fiable, mais si les valeurs se repartissent sur un large intervalle, alors celles-ci doivent être considérées avec précaution.

Ces intervalles sont représentés sur les figures par des barres verticales (I) regroupant les valeurs obtenues à l'aide de la fonction coût (3.56) (Kim) sur les cinq réalisations pour une valeur d'intérêt. Les courbes tracées passent par la valeur des coefficients associée à la valeur minimale de la fonction coût obtenue parmi les cinq réalisations.

Remarquons que nous ne comparons pas les performances de la méthode selon que l'on emploie l'une ou l'autre des fonctions coût. Il pourrait être intéressant de le faire en termes de vitesse de convergence et d'erreur finale obtenue mais il faudrait pour cela avoir pu définir préalablement une valeur seuil de convergence. Nous ne pouvons pas ici définir de valeur seuil *a priori* pour la fonction coût, le critère d'arrêt que nous utilisons est donc le nombre de générations.

Remarquons enfin que les fonctions coûts (3.56) et (3.57) n'ayant pas la même dimension, il est impossible de les comparer directement.

1. Étude de la dépendance des paramètres à la fréquence

Nous étudions tout d'abord la dépendance à la fréquence des coefficients de rigidité identifiés par la méthode. Notons que nous exprimerons les résultats en fonction de la fréquence absolue. La gamme de fréquence représentée correspond à la gamme de fréquence adimensionnée $\omega/(c_{SH}\, a)$ = [0,01 - 0,075] , avec a le rayon des fibres et c_{SH} la célérité des ondes SH dans le milieu environnant. Les gammes de fréquences adimensionnées rapportées aux célérités des ondes L et SV sont respectivement les intervalles [0,004 – 0,036] et [0,006 – 0,056].

Les courbes suivantes représentent l'évolution des parties réelles et imaginaires des coefficients de rigidité C_{ij} sur la gamme de fréquences [0,5-4,5] MHz pour une concentration en fibres de 52% et un angle d'incidence $\alpha = 4°$. Cet angle d'incidence permet que l'on ne rencontre aucun angle critique sur toute la gamme de fréquences étudiée. Les paramètres utilisés dans l'algorithme génétique pour obtenir ces résultats sont regroupés dans le Tableau III-2.

Tableau III-2. Paramètres utilisés pour l'algorithme génétique lors de l'étude de la dépendance des rigidités C_{ij} à la fréquence

taux de mutation	4%
nombre d'élite	2
nombre de générations	500
nombre de chromosomes	30
nombre de bits	20

Ces paramètres ont été déterminés de manière empirique et dépendent de la définition des opérateurs d'évolution de l'algorithme. Le taux de mutation choisi ici permet d'éviter que l'algorithme se retrouve bloqué dans les minima locaux les plus profonds tout en conservant une vitesse de convergence correcte. Par exemple, un algorithme ayant un taux de mutations de 1% convergera très rapidement mais sera facilement bloqué dans un minimum local, tandis qu'un algorithme ayant un taux de mutation de 10% évitera le piège des minima locaux mais retournera des valeurs stables pour un nombre de générations supérieur environ d'un facteur 10.

a. Étude de l'évolution des parties réelles des coefficients de rigidité en fonction de la fréquence

Sur la Figure III-13, on représente l'évolution des parties réelles des cinq coefficients de rigidité en fonction de la fréquence. L'évolution fréquentielle des différents coefficients C_{ij} est discutée au cas par cas.

Pour la partie réelle du coefficient C_{33} en fonction de la fréquence, représentée en violet sur la figure, les valeurs obtenues par la méthode sont disséminées dans l'espace de recherche et leur validité est donc à considérer avec précaution. On remarque de plus que les résultats obtenus en utilisant la fonction coût basée sur l'équation de Yang&Mal ou celle basée sur l'équation de Kim diffèrent fortement.

Les mêmes constations peuvent être faites en observant le comportement de la partie réelle du coefficient C_{13} qui prend des valeurs allant du maximum au minimum de l'espace dans lequel nous le recherchons, cet espace étant défini par les propriétés des constituants.

Les parties réelles des coefficients C_{11} et C_{66} sont déterminées, quant à elles, avec une grande précision. En effet, les résultats obtenus par la méthode sont extrêmement proches d'une réalisation à une autre pour chacune des fréquences considérées. On remarque de plus que le coefficient C_{11} dépend faiblement de la fréquence (variations inférieures à 10% sur la gamme de fréquences considérée) et que le coefficient C_{66}, quant à lui, en dépend plus fortement puisqu'il varie d'environ 30%. On notera de plus que les courbes obtenues en utilisant l'équation de Yang&Mal ou celle de Kim sont exactement superposées.

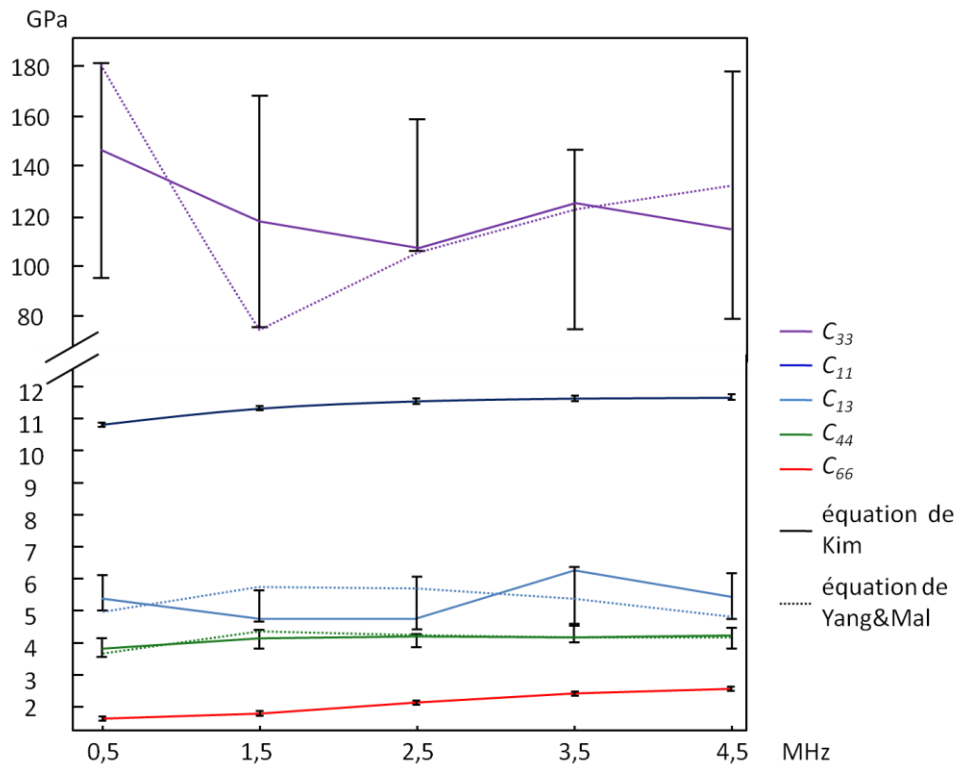

Figure III-13. Évolution des parties réelles des coefficients C_{33}(violet), C_{11} (bleu foncé), C_{13}(bleu clair), C_{44}(vert) et C_{66}(rouge) en fonction de la fréquence adimensionnée $k_{SH}a$; trait plein, équation de Kim, pointillés équation de Yang&Mal.

La partie réelle du coefficient C_{44} est elle aussi déterminée avec une précision satisfaisante, puisque les résultats se repartissent dans l'espace de recherche (entre les réalisations) sur une largeur de l'ordre de 10% pour chaque fréquence. De plus les résultats obtenus pour chacune des fonctions coût sont en bon accord, ce qui ajoute à leur validité. On remarquera enfin que la partie réelle du coefficient C_{44} semble dépendre faiblement de la fréquence de l'onde incidente.

Notons que ces courbes tendent, à mesure que la fréquence augmente, vers les valeurs obtenues par la méthode de S. Lonné en incidence normale avec laquelle aucune dispersion n'était observée, Tableau III-3.

Intéressons nous à présent aux parties imaginaires des coefficients obtenus par la méthode proposée.

b. Étude de l'évolution des parties imaginaires des coefficients de rigidité en fonction de la fréquence

La Figure III-14 représente l'évolution des parties imaginaires des coefficients de rigidité C_{ij} en fonction de la fréquence, où nous avons choisi de ne représenter que les parties imaginaires des coefficients C_{11}, C_{44} et C_{66}. En effet, les parties imaginaires des deux coefficients C_{33} et C_{13} varient dans tout l'espace de recherche [-1,0] défini *a priori* sans qu'un comportement cohérent ne puisse être observé. Cette répartition aléatoire des valeurs dans l'espace de recherche est due à la très faible influence qu'ont ces coefficients

sur le problème ; les parties réelles des coefficients elles aussi ne pouvaient être obtenues avec précision comme vu sur la Figure III-13.

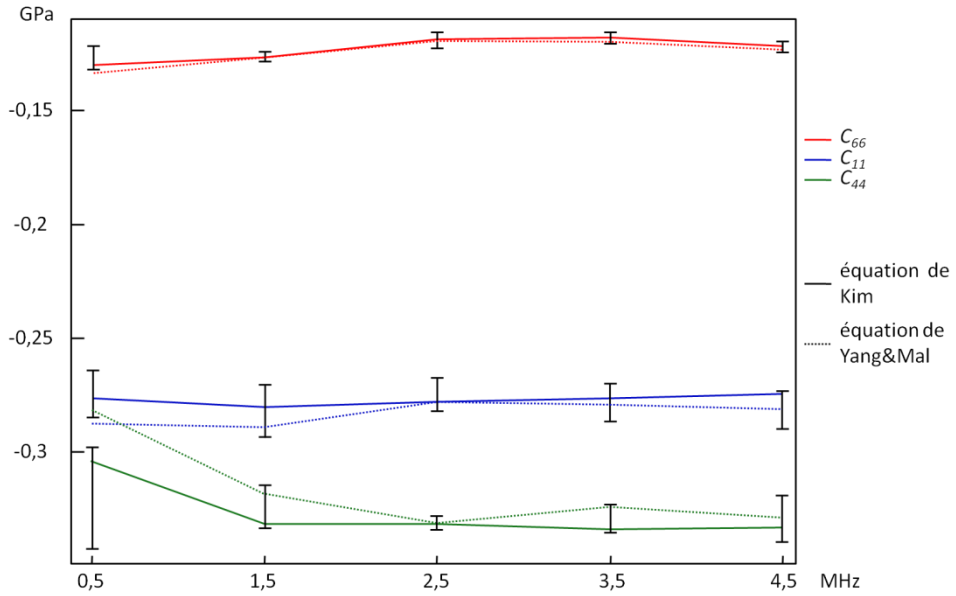

Figure III-14. Évolution des parties imaginaire des coefficients C_{11} (bleu foncé), C_{44}(vert), C_{66}(rouge) en fonction de la fréquence adimensionnée $k_{SH}a$; trait plein, équation de Kim ; pointillés, équation de Yang&Mal.

Les parties imaginaires des coefficients représentées sur la Figure III-14 sont définies avec une précision suffisante pour considérer leur validité (à l'exception du coefficient C_{44} pour la fréquence 0,5 MHz). En effet, leur répartition sur les cinq réalisations est suffisamment compacte et les valeurs obtenues par la méthode en utilisant l'une ou l'autre des fonctions coût sont proches. Cependant, l'imprécision que l'on a sur les valeurs nous empêche de trancher entre une dépendance ou une indépendance des valeurs à la fréquence.

Dans le Tableau III-3, nous comparons les valeurs obtenues pour les fréquences maximale et minimale des Figure III-13 et Figure III-14 avec la valeur obtenue en incidence normale (résultats indépendants de la fréquence).

Tableau III-3. Comparaison des résultats obtenus par la méthode en incidence oblique à deux fréquences distinctes avec les résultats obtenus par la méthode en incidence normale.

C_{ij}(GPa)	Incidence Oblique (*Équation Kim*)		Incidence normale
	$k_{SH}a = 0{,}01$ (500 kHz)	$k_{SH}a = 0{,}075$ (4,5 MHz)	
C_{11}	10,80 – 0,28i	11,66 - 0,27i	11,69 - 0,29i
C_{44}	3,80 - 0,30i	4,23 - 0,33i	4,23 - 0,29i
C_{66}	1,64 - 0,13i	2,56 - 0,12i	2,72 - 0,13i

où nous avons uniquement représenté les valeurs fiables car stables sur les différentes réalisations. Comme il était indiqué précédemment, on constate que les valeurs des rigidités obtenues en incidence oblique à la plus haute fréquence considérée sont très voisines de celles obtenues en incidence normale.

c. Étude de la valeur des fonctions coût atteinte par la méthode

Sur la Figure III-15 nous représentons les valeurs atteintes par les fonctions coût selon que l'on utilise celle basée sur l'équation de Kim *a)* ou sur celle de Yang&Mal *b).*

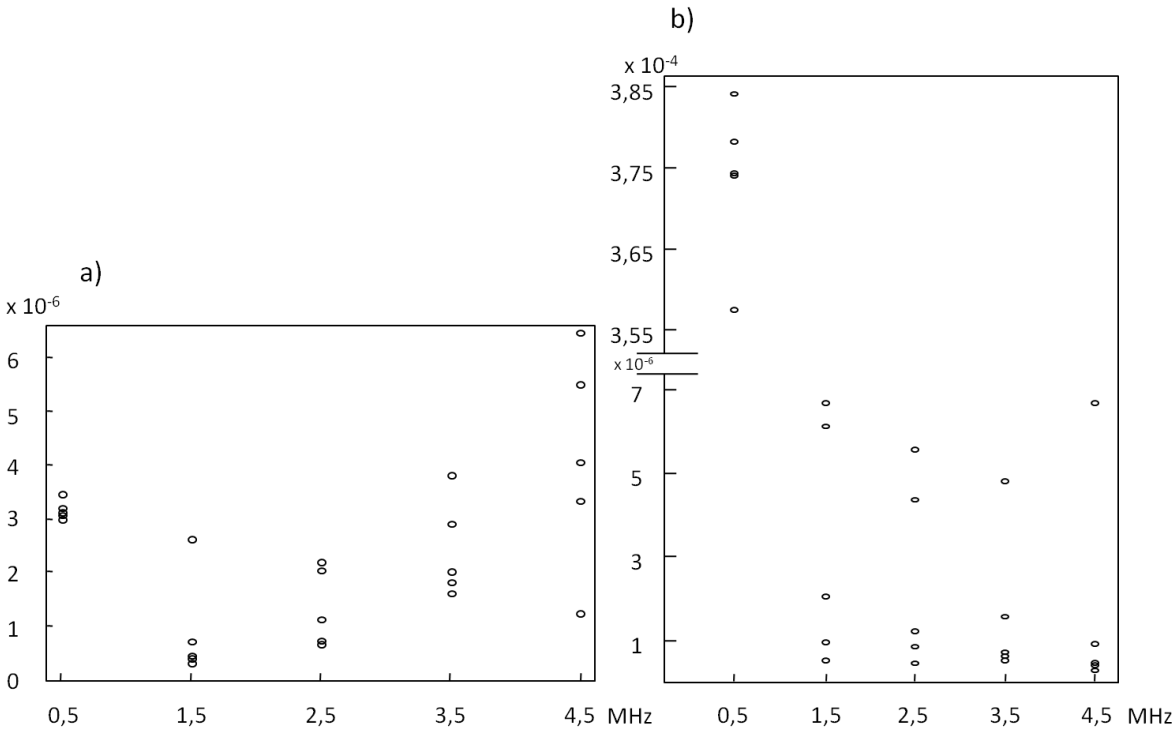

Figure III-15. Valeurs atteintes pour les fonctions coût :
a) Kim ou b) Yang&Mal.

Les valeurs atteintes par la méthode sont très faibles pour les deux fonctions coût, à l'exception de celles atteintes en utilisant la fonction coût basée sur l'équation de Yang&Mal dans le cas des basses fréquences.

d. Conclusion

Dans cette étude de la dépendance de nos coefficients à la fréquence nous avons montré que les formulations de Yang&Mal et de Kim sont équivalentes sur l'ensemble de la gamme de fréquence étudiée. En effet, les courbes de chacune diffèrent uniquement pour les coefficients dont la stabilité entre les différentes réalisations n'est pas satisfaisante.

De plus nous avons mis en évidence que les parties réelles des coefficients C_{11}, C_{44} et C_{66}, obtenues avec une très bonne précision, présentaient une dépendance à la fréquence, ce qui va à l'encontre des résultats obtenus par S. Lonné dans le cas de l'incidence normale où aucun phénomène de dispersion n'était observé. On remarque de plus que les valeurs

obtenues en incidence normale constituent la limite haute fréquence vers laquelle tendent les coefficients identifiés par notre méthode. Il est par contre difficile de déterminer si les parties imaginaires de ces coefficients sont indépendantes ou non de la fréquence de par l'imprécision avec laquelle ces valeurs sont obtenues.

2. Dépendance à la concentration

Nous étudions maintenant la dépendance à la concentration des coefficients de rigidité obtenus par la méthode.

Les courbes suivantes représentent l'évolution des parties réelles et imaginaires des C_{ij} sur la gamme de concentrations allant de 2% à 82% de fibres à une fréquence de 3MHz et pour un angle d'incidence $\alpha = 4°$. Les coefficients utilisés pour l'algorithme génétique sont les mêmes que ceux employés précédemment et sont regroupés dans le Tableau III-2.

a. **Étude de l'évolution des parties réelles des coefficients de rigidité en fonction de la concentration**

Sur la Figure III-16, on représente l'évolution des parties réelles des cinq coefficients de rigidité en fonction de la concentration.

La partie réelle du coefficient C_{33} augmente à mesure que la concentration augmente ce qui est un comportement attendu puisque les rigidités des fibres sont supérieures à celles de la matrice (du fait de la forte anisotropie des fibres, la différence est particulièrement grande pour le coefficient C_{33}). Les différentes valeurs obtenues pour les cinq réalisations à chaque concentration sont réparties sur un grand intervalle. On remarque de même que les valeurs obtenues par la méthode en utilisant, dans la fonction coût, les équations de Kim et de Yang&Mal sont très différentes ; ainsi il nous faudra considérer ces valeurs avec précautions puisqu'elles ne sont pas stables sur les différentes réalisations.

De même, l'évolution de la partie réelle du coefficient C_{13} semble erratique sur toute la gamme de concentrations et ne permet pas de discerner de comportement cohérent, que les résultats soient obtenus en utilisant la fonction coût basée sur l'équation de Kim ou en utilisant celle basée sur l'équation de Yang&Mal.

Les parties réelles des coefficients C_{11}, C_{44} et C_{66} se répartissent, pour chaque valeur de la concentration, sur de très petits intervalles ; pour les coefficients C_{11} et C_{66} ces intervalles ont une largeur inférieure à 0,1% tandis que pour le coefficient C_{44} les intervalles ont une largeur d'environ 10%. On remarque de plus que les solutions obtenues selon que l'on utilise l'équation de Kim ou celle de Yang&Mal dans la fonction coût sont exactement superposées pour les coefficients C_{11} et C_{66} et qu'elles sont proches (écart inférieur à 10%) pour le coefficient C_{44}.

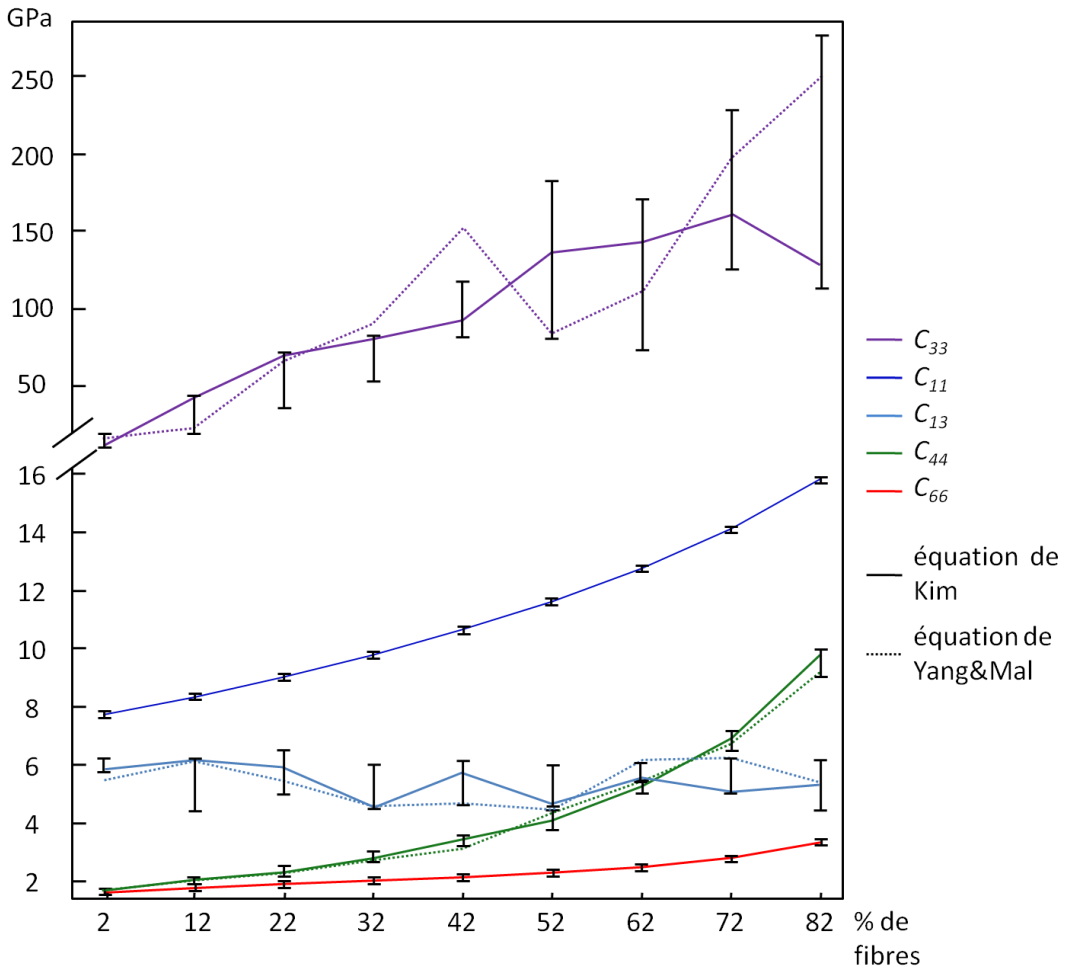

Figure III-16. Évolution des parties réelles des coefficients C_{33}(violet), C_{11} (bleu foncé), C_{13}(bleu clair), C_{44}(vert) et C_{66}(rouge) en fonction de la concentration ; trait plein, équation de Kim, pointillés équation de Yang&Mal.

b. Étude de l'évolution des parties imaginaires des coefficients de rigidité en fonction de la concentration

Nous étudions ensuite l'évolution des parties imaginaires des coefficients de rigidité en fonction de la concentration représentée sur la Figure III-17. Notons que nous avons seulement représenté la variation des parties imaginaires des coefficients C_{11}, C_{66} et C_{44} pour les même raisons que dans le cas où nous étudions la dépendance à la fréquence.

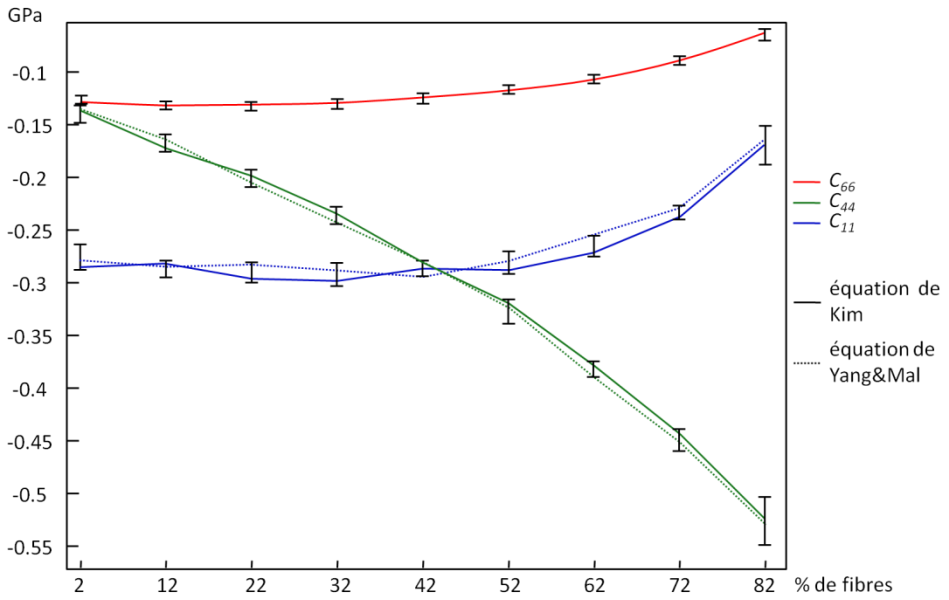

Figure III-17. Évolution de la partie imaginaire des coefficients C_{11} (bleu foncé), C_{44} (vert) et C_{66}(rouge) en fonction de la concentration en fibres; trait plein équation Kim, pointillés équation Yang&Mal.

Les parties imaginaires des trois coefficients étudiés sont obtenues avec une fiabilité satisfaisante puisque les solutions sont stables sur les différentes réalisations et que les résultats obtenus pour chacune des fonctions coût sont très proches. Notons de plus que l'évolution de la partie imaginaire des coefficients de rigidité en fonction de la concentration représentée ici correspond à une atténuation (partie imaginaire des nombres d'onde) qui décroît en fonction de la concentration bien que la partie imaginaire du coefficient C_{44} croisse (en valeur absolue) avec la concentration en fibres.

c. Étude de la valeur des fonctions coût atteinte par la méthode

Sur la Figure III-18 nous représentons les valeurs atteintes par les fonctions coût selon que l'on utilise celle basée sur l'équation de Kim *a)* ou sur celle de Yang&Mal *b).*

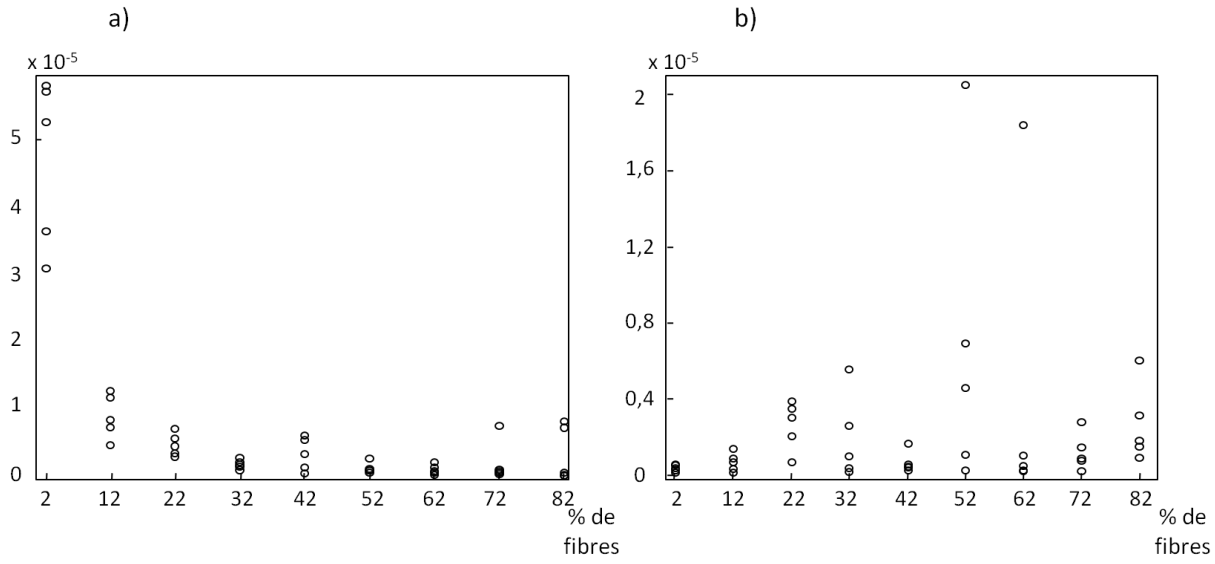

Figure III-18. Valeurs atteintes pour les fonctions coût :
a) Kim ou b) Yang&Mal.

Les valeurs atteintes par la méthode sont très faibles que l'on utilise l'une ou l'autre des fonctions coût. Notons que dans le cas de l'équation de Kim, Figure III-18 a), les valeurs atteintes affichent une dépendance à la concentration. Lorsque l'équation de Yang&Mal est utilisée, Figure III-18 b), cette dépendance n'est pas visible, l'équation (3.57) comprenant le terme n_0 directement lié à la concentration en hétérogénéités.

d. Comparaison avec les valeurs obtenues en incidence normale

Afin d'observer la différence qu'il peut y avoir dans l'évolution des coefficients en fonction de la concentration nous comparons les résultats obtenus en incidence normale, à ceux présentés précédemment.

Partie Réelle

Nous comparons, sur la Figure III-19, les résultats obtenus pour les parties réelles à une fréquence de 3 MHz. On peut voir que la différence entre les résultats obtenus en incidence oblique diffèrent peu des résultats obtenus en incidence normale pour les parties réelles des coefficients C_{11} et C_{44} mais diffèrent de plus de 15% pour la partie réelle du coefficient C_{66}.

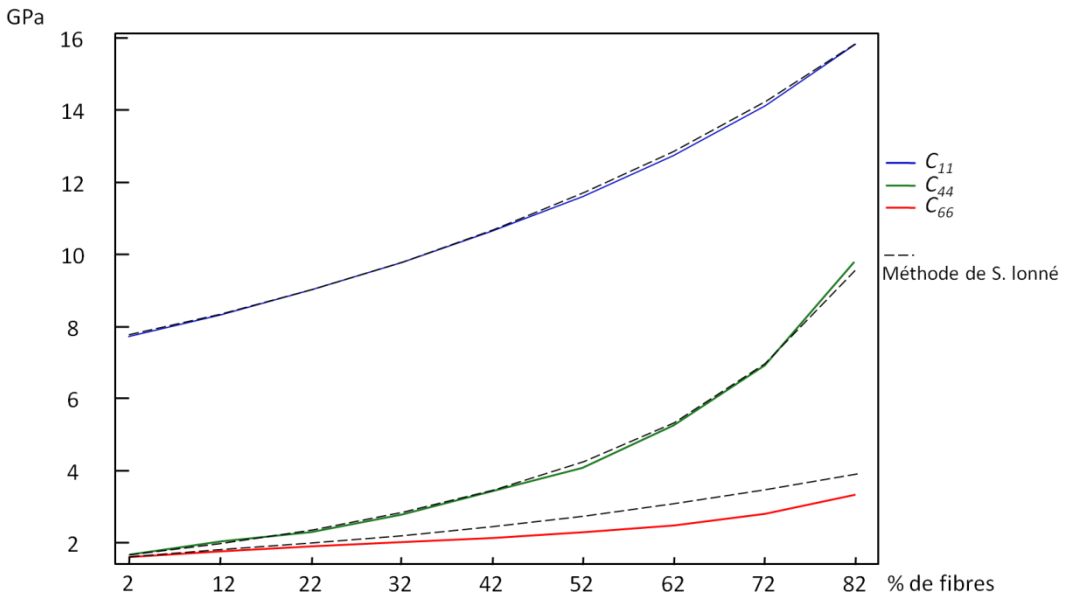

Figure III-19. Comparaison entre les résultats obtenus par la méthode en incidence normale (- - -) et en incidence oblique (trait plein, équation Kim) pour la partie réelle des coefficients C_{11}, C_{44} et C_{66}.

<u>Partie imaginaire</u>

Les résultats obtenus par chaque méthode diffèrent plus nettement dans le cas des parties imaginaires, Figure III-20. La partie imaginaire du coefficient C_{44} diffère d'environ 10 % par rapport à celle obtenue en incidence oblique sur toute la gamme de concentration, tandis que l'écart entre les parties imaginaires obtenues avec les deux méthodes du coefficient C_{66} dépasse 50 % pour les fortes concentrations en fibres.

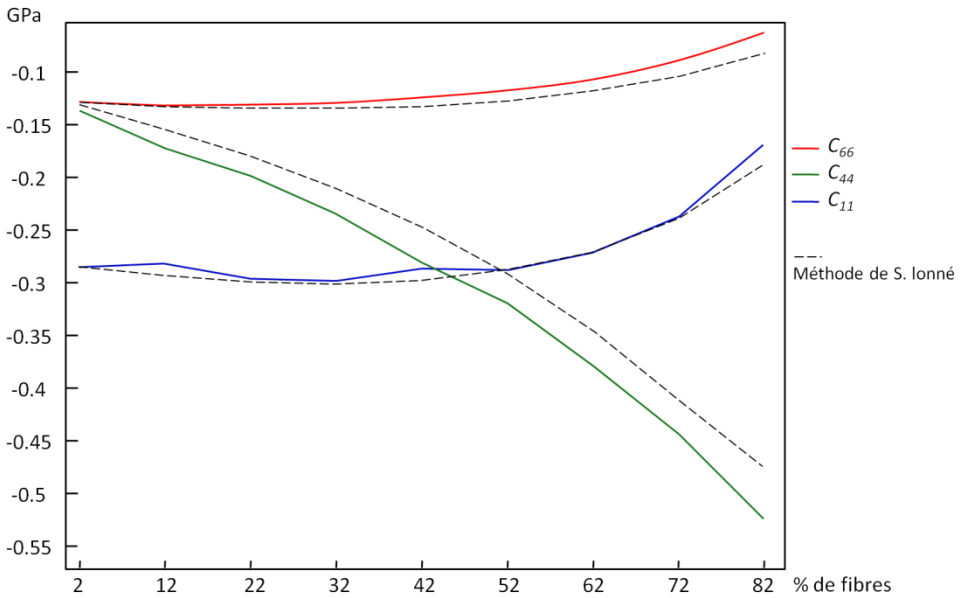

Figure III-20. Comparaison entre les résultats obtenus par la méthode en incidence normale (- - -) et en incidence oblique (trait plein, équation Kim) pour la partie réelle des coefficients C_{11}, C_{44} et C_{66}.

e. **Conclusion**

L'équivalence des formulations de Kim et de Yang&Mal est de nouveau montrée. De même que précédemment, seuls les coefficients C_{11}, C_{44} et C_{66} sont obtenus avec une précision satisfaisante bien que l'évolution de la partie réelle du coefficient C_{33} avec la concentration soit assez claire malgré l'imprécision.

La comparaison entre les valeurs obtenues sous 4° d'incidence et celles obtenues en incidence normale permet de voir que les parties réelles sont faiblement différentes, tandis que les parties imaginaires varient assez fortement pour les grandes concentrations. Cependant, nous avons vu que les valeurs obtenues par la méthode dépendaient de la fréquence et plus particulièrement que les parties réelles de coefficients de rigidité tendaient vers les valeurs obtenues en incidence normale quand la fréquence augmentait. Ainsi, il est à attendre que la différence entre les parties réelles des coefficients soit plus marquée pour des fréquences plus faibles.

3. Dépendance à l'angle d'incidence

Nous présentons dans les paragraphes suivants, les résultats obtenus par la méthode en fonction de l'angle d'incidence α de l'onde sur les cylindres. Nous choisissons ici de ne représenter que l'évolution des parties réelles des coefficients C_{11} et C_{66} puisque les valeurs prises par ces coefficients sont les plus fiables ainsi que nous avons pu le constater précédemment. En effet, la dépendance des solutions à l'angle d'incidence est un aspect surprenant de notre modèle et nous limitons notre discussion aux comportements qui sont interprétables de façon claire.

Pour étudier la dépendance angulaire de nos résultats, nous avons choisi de nous placer dans des cas très différents en termes de fréquence et de concentration. Les figures suivantes représentent chacune les évolutions d'un coefficient en fonction de l'angle pour une concentration fixe (10% ou 50%) et à deux fréquences (0,5 et 5 MHz).

Les paramètres utilisés pour l'algorithme génétique sont identiques à ceux présentés dans le Tableau III-2.

Nous étudions dans un premier temps l'évolution du coefficient C_{66}. La Figure III-21 représente les valeurs obtenues par la méthode pour des angles d'incidences allant de 4 à 0,1 degrés pour une concentration en fibres de 10% à deux fréquences distinctes de 0,5MHz et 5 MHz (ces deux fréquences correpondent alors respectivement à une fréquence adimensionnée $k_{SH}a$ d'environ 10^{-2} et 10^{-1}).

Pour cette concentration et pour 4° d'incidence, on atteint une valeur limite du modèle au sens où lors du processus de recherche le premier angle critique correspondant à $k_z > k_{z0}$ est parfois dépassé. Cependant les solutions obtenues dans ce cas de figure sont naturellement exclues lors du processus d'évolution de l'algorithme génétique.

a. Évolution du coefficient C_{66}

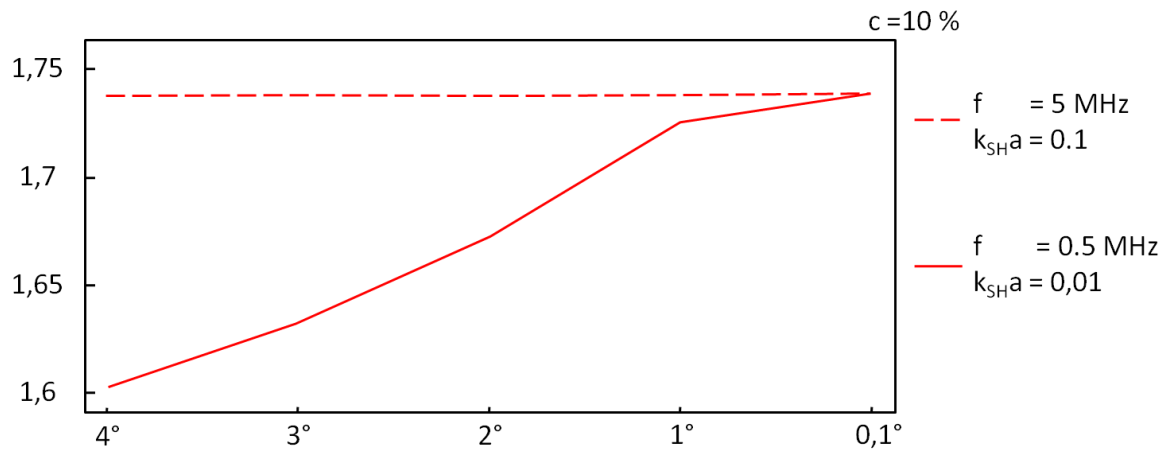

Figure III-21. Évolution de la partie réelle du coefficient C_{66} en fonction de l'angle d'incidence pour une concentration en fibres de 10% aux deux fréquences 5 MHz (- - -) et 0,5 MHz (trait plein).

On peut voir sur cette figure que le coefficient C_{66} présente une dépendance à l'angle d'incidence très différente selon la fréquence considérée. Pour une fréquence de 0,5 MHz, ce coefficient varie d'environ 10 % sur la gamme d'angle, alors qu'à 5 MHz, la variation est inférieure à 0,1%.

Si l'on regarde la dépendance angulaire affichée par ce coefficient aux deux mêmes fréquences mais pour une concentration en fibres de 50% représentée sur la Figure III-22, on remarque que, similairement au cas précédent, la dépendance angulaire est plus forte aux basses fréquences. Notons de plus que la courbe correspondant à l'évolution du coefficient C_{66} à la fréquence $f = 0{,}5\ \mathrm{MHz}$ tend, pour les plus grands angles, vers la valeur de ce coefficient dans la matrice pure. Cette valeur est une limite du modèle puisque les propriétés homogénéisées que l'on recherche sont situées entre les valeurs de rigidité de la matrice et des fibres. Cette constatation est importante quant à la cohérence du modèle puisque l'intervalle dans lequel on autorisait le coefficient à évoluer avait une valeur minimale inférieure à cette valeur limite.

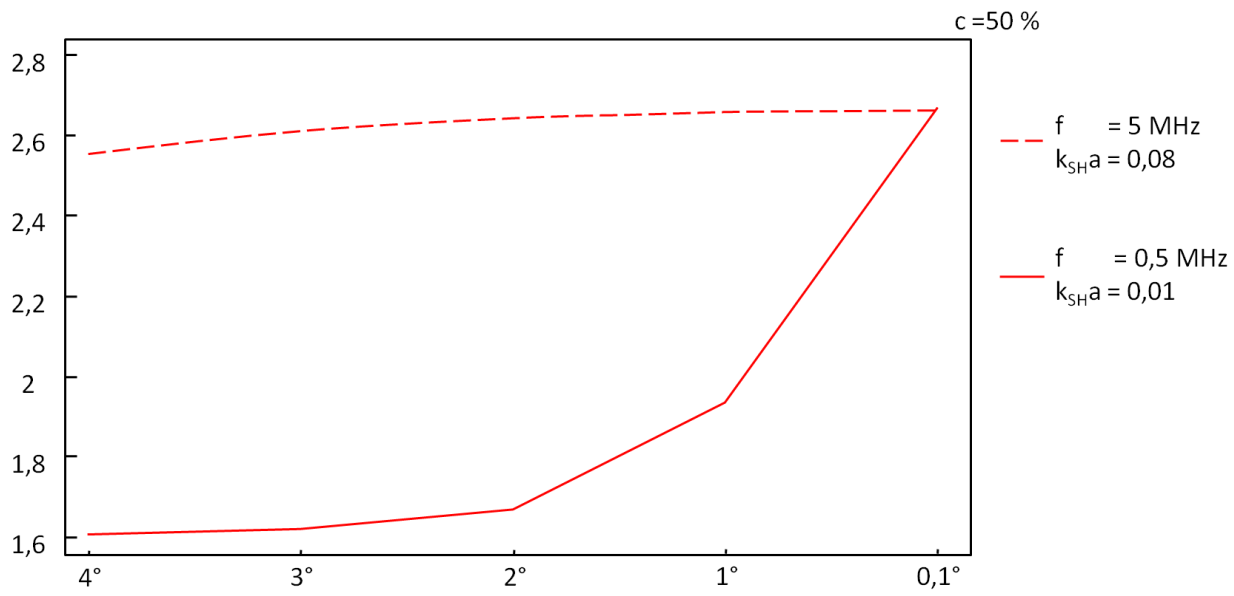

Figure III-22. Évolution de la partie réelle du coefficient C_{66} en fonction de l'angle d'incidence pour une concentration en fibres de 10% aux deux fréquences 5 MHz (- - -) et 0,5 MHz (trait plein).

b. Évolution du coefficient C_{11}

Intéressons-nous maintenant au comportement du coefficient C_{11} sur cette gamme d'angles d'incidence pour les deux mêmes fréquences tel que représenté sur la Figure III-23. On peut voir que le comportement de ce coefficient est comparable à celui du coefficient C_{66} bien que la dépendance angulaire soit moins marquée puisque de l'ordre de 0,5% pour une fréquence de 5 MHz.

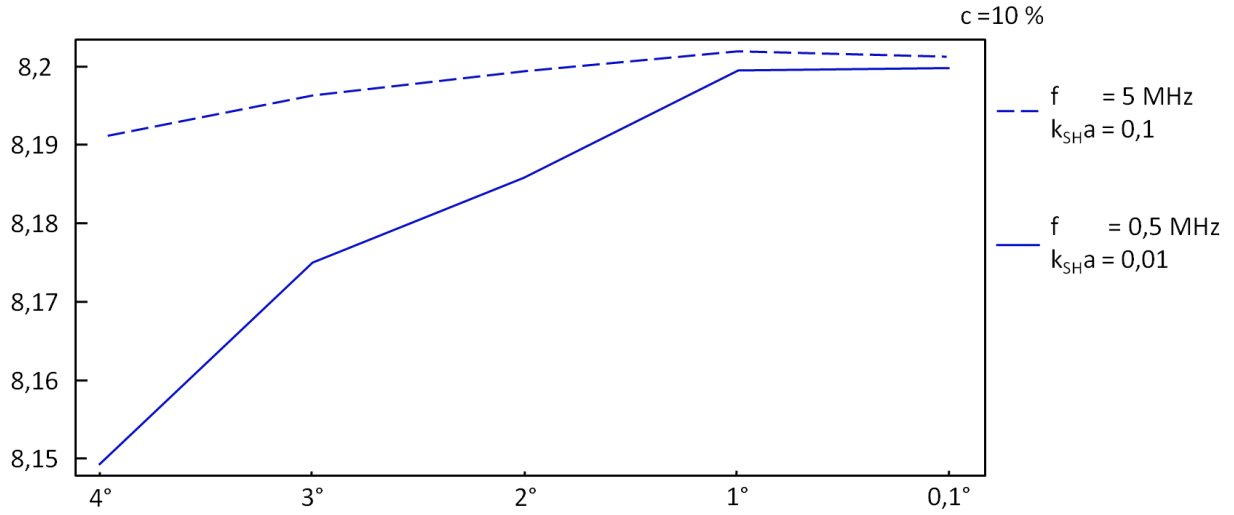

Figure III-23. Évolution de la partie réelle du coefficient C_{11} en fonction de l'angle d'incidence pour une concentration en fibres de 10% aux deux fréquences 5 MHz (- - -) et 0,5 MHz (trait plein).

La dépendance angulaire de ce coefficient pour une concentration en fibres de 50% pour les deux fréquences est illustrée par la Figure III-24.

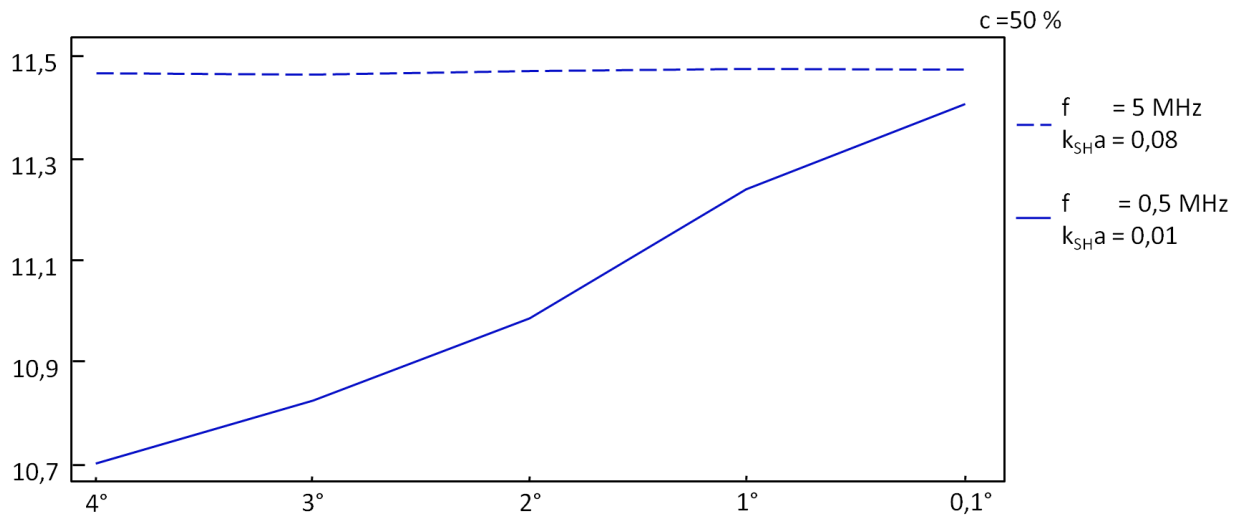

Figure III-24. Évolution de la partie réelle du coefficient C_{11} en fonction de l'angle d'incidence pour une concentration en fibres de 50% aux deux fréquences 5 MHz (- - -) et 0,5 MHz (trait plein).

On constate que similairement au coefficient C_{66}, le coefficient C_{11} dépend plus fortement de l'angle d'incidence pour une faible fréquence. Cependant, la variation du coefficient sur la gamme d'angle est faible comparée à celle du C_{66} puisque elle est d'environ 3% pour la fréquence de 0,5 MHz.

Nous ne représentons pas ici les valeurs atteintes pour les fonctions coût, celles-ci ne présentant pas de comportement particulier vis-à-vis de l'angle d'incidence. Notons cependant que similairement aux cas précédents de la dépendance en fréquence ou à la concentration, les valeurs d'erreurs atteintes sont très faibles et qu'il est seulement possible de définir un seuil en dessous duquel on peut considérer avoir obtenu avec une précision suffisante les coefficients C_{11} et C_{66}.

c. Discussion sur la dépendance angulaire

La dépendance à la direction d'incidence que présentent nos paramètres est très inattendue. En effet, dans les théories classiques de l'élasticité, le tenseur C_{ij} des rigidités est exprimé dans le repère cristallin du matériau qui est défini de manière absolue. On a donc habituellement un tenseur des rigidités qui permet de décrire la propagation des ondes dans toutes les directions d'un matériau et nos travaux de thèse ont été menés sous cette hypothèse fondamentale.

Cependant, certains auteurs qui étudient la diffusion multiple d'une onde se propageant dans un fluide idéal rempli de diffuseurs cylindriques, (Luppé et Conoir 2011), ont montré dans leurs travaux que lorsque l'on cherche à définir un milieu effectif homogène qui rende compte de la diffusion multiple entre des diffuseurs, il est nécessaire de considérer une masse volumique effective ρ_{eff} ainsi qu'un coefficient de viscosité de dilation η_{eff} qui dépendent de l'angle d'incidence.

Ces travaux se basent sur la définition du nombre d'onde effectif complexe d'une onde plane hétérogène représentative du champ moyen dans le milieu diffusant. Pour déterminer cette

expression, les auteurs considèrent l'interface entre un fluide homogène et ce même fluide dans lequel sont disposés des diffuseurs cylindriques. L'expression analytique du nombre d'onde effectif K a été donnée tout d'abord par (Twersky 1962) pour être ensuite corrigée par (Linton et Martin 2005). On cherche alors à définir les propriétés effectives du milieu ρ_{eff} et η_{eff} en égalisant l'expression du coefficient de réflexion entre deux milieux homogènes et celui du coefficient de réflexion entre un milieu homogène et le milieu hétérogène.

Notons que les études citées précédemment ne se placent pas dans le même cadre que le nôtre ; en effet, les auteurs considèrent une propagation de l'onde dans le plan perpendiculaire à l'axe des cylindres et l'angle d'incidence est défini par la direction de propagation de l'onde par rapport à la normale à l'interface entre le milieu contenant les diffuseurs et le milieu homogène ainsi que représenté par la Figure III-25.

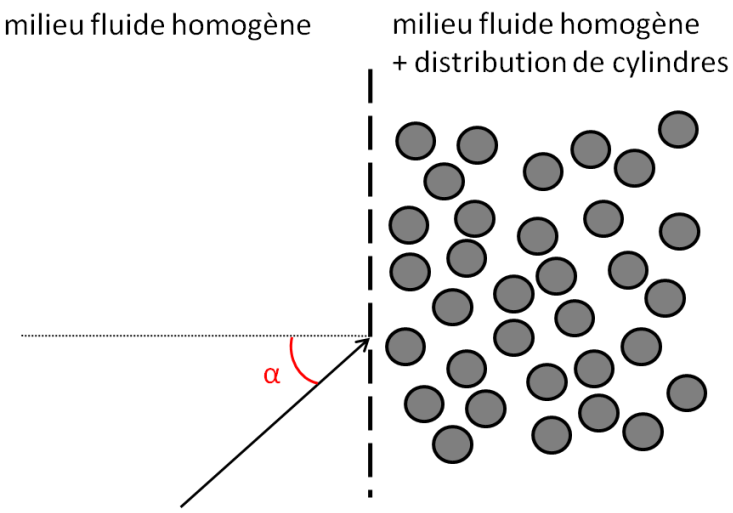

Figure III-25. Représentation du problème étudié par Luppé et Conoir.

Les raffinements apportés par Luppé et Conoir dans leur méthode relèvent cependant de théories fondées sur l'étude de l'interaction d'une onde avec les hétérogénéités du matériau et sont donc d'une nature semblable à celle des études présentées dans cette thèse (« approche acousticienne »).

A contrario, une « approche mécanicienne » du problème de l'homogénéisation dynamique est en cours de développement, comme nous l'avons évoqué dans l'introduction. Les articles de (J. R. Willis 2011), (Nemat-Nasser et Srivastava 2011), montrent dans leurs travaux que dans le cas de matériaux composites, les équations de l'élastodynamique classique doivent être modifiées (Milton et Willis 2007). Les champs moyens de contraintes ne sont alors plus liés uniquement à la déformation (comme dans la loi de Hooke) mais aussi à la quantité de mouvement et ils montrent qu'il n'y a pas unicité des équations constitutives. Il faut alors ajouter des conditions aux limites spécifiques au problème pour permettre que les équations constitutives soient définies de manière unique (Willis, A comparison of two formulations for effective relations for waves in a composite 2012). Parmi les quantités modifiées intervenant dans les relations, la masse volumique devient un tenseur du second ordre, comme démontré rigoureusement par (J. R. Willis 1985).

Nous faisons ici ce point bibliographique afin de nourrir la discussion que nous pouvons avoir relativement à la dépendance angulaire que présentent nos résultats. Dans le développement de notre méthode, nous avons conservé les équations classiques qui relient les champs moyens dans le milieu effectif. Selon l' « approche mécanicienne », il nous faudrait utiliser des équations modifiées, à définir pour notre cas d'application, afin de modéliser correctement le problème. Les auteurs (Shuvalov, et al. 2011) montrent à ce propos que, dans le cas de l'homogénéisation dynamique de composites stratifiés (problème unidimensionnel), l'utilisation des équations constitutives de Willis permet la résolution du problème qui n'était pas solvable en utilisant les relations classiques. Les coefficients de rigidités effectifs qu'ils obtiennent affichent cependant toujours une dépendance à l'angle d'incidence.

Il est important de noter que les auteurs (Luppé et Conoir 2011) observent que la dépendance angulaire du paramètre ρ_{eff} disparaît aux basses fréquences dans le cas de basses concentrations. Dans les résultats que nous avons présentés cependant, on observe que la dépendance angulaire de nos coefficients est plus marquée lorsque l'on considère des hautes fréquences et cela pour des concentrations fortes (50%) comme faibles (10%). Cependant, dans l'un et l'autre cas, les angles considérés ne sont rappelons-le pas les mêmes.

8. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons cherché à obtenir les cinq coefficients de rigidité d'un milieu effectif représentatif de l'atténuation et de la dispersion des ondes se propageant dans la couche unidirectionnelle de composite. Pour cela, nous avons cherché à développer un modèle permettant de rendre compte des deux phénomènes élémentaires que sont la viscoélasticité et la diffusion par les fibres.

Nous observons sur l'ensemble des résultats présentés que les coefficients C_{13} et C_{33} sont obtenus avec une très faible précision du fait des faibles angles d'incidence auxquels nous sommes limités. Les résultats obtenus pour les trois autres coefficients sont ceux dont l'interprétation est la plus claire.

Nous avons montré que les deux formulations de Yang&Mal et de Kim sont équivalentes pour toutes les concentrations et fréquences étudiées. Ceci est un résultat pressenti par l'auteur (J. Y. Kim 2004) mais qui n'avait été montré que pour de faibles concentrations en fibres.

En étudiant l'évolution des coefficients en fonction de la fréquence, nous avons montré qu'un phénomène de dispersion était observé sur les parties réelles des coefficients et que les valeurs obtenues en incidence normale en constituent la limite à haute fréquence. L'imprécision avec laquelle les parties imaginaires sont obtenues nous empêche de définir un comportement remarquable de celles-ci vis-à-vis de la fréquence.

L'étude de l'évolution des coefficients en fonction de la concentration permet d'observer un comportement semblable à ce qui a été observé par S. Lonné en incidence normale tant sur les parties réelles que sur les parties imaginaires. Une différence notable des valeurs

obtenues par chaque méthode est cependant observée du fait de la dépendance à la fréquence des coefficients dans le cas de l'incidence oblique.

On montre de plus que les coefficients identifiés par notre méthode présentent une dépendance à l'angle d'incidence. Nous pressentons qu'un tel résultat pourrait être expliqué en développant une méthode similaire à celle présentée ici, mais basée sur des équations constitutives à obtenir à partir des théories récentes d'homogénéisation dynamique (approche « mécanicienne » de Willis).

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse s'inscrit dans le domaine de la simulation du contrôle non-destructif par ultrasons des matériaux composites à microstructure 3D. Dans ces matériaux, le comportement des ondes est très complexe, rendant les résultats de contrôle difficilement interprétables. La simulation du contrôle par ultrasons est largement utilisée industriellement afin d'optimiser les configurations et d'aider l'interprétation des résultats de mesure. Nos travaux ont consisté à développer des outils théoriques permettant de réaliser de telles simulations pour ces matériaux.

Leur structure étant hétérogène à plusieurs échelles, nous avons développé des méthodes d'homogénéisation dans le but de définir les propriétés mécaniques d'un matériau effectif représentatif des phénomènes ondulatoires qui interviennent aux différentes échelles. Nous nous sommes placés dans le cadre théorique de l'homogénéisation dynamique en choisissant la loi de Hooke pour loi constitutive du milieu effectif permettant de relier linéairement le tenseur des contraintes à celui des déformations, afin que les modèles développés permettent de prédire l'atténuation et de la dispersion des différentes ondes.

La prise en compte du tissage tridimensionnel des mèches à l'échelle mésoscopique nous oblige à connaître au préalable l'ensemble des coefficients de rigidité du milieu effectif représentatif de la mèche. Nos travaux ont donc consisté à développer des méthodes permettant de définir l'ensemble des coefficients de rigidité d'une couche unidirectionnelle de composite. Dans ce but, nous avons successivement développé des modèles prédisant le comportement des ondes guidées se propageant dans la direction des fibres puis celui des ondes de volume se propageant suivant une direction d'incidence oblique sur les fibres.

<u>Homogénéisation dynamique basée sur les ondes guidées</u>

Une méthode développée antérieurement à nos travaux permet d'obtenir trois des cinq coefficients recherchés considérant des ondes de volume en incidence normale ; pour accéder aux autres coefficients, nous avons choisi d'observer le matériau dans la direction des fibres. Suivant cette direction, nous nous sommes intéressés aux ondes guidées et avons développé une méthode d'inversion permettant de déterminer le jeu de coefficients de rigidité effectifs décrivant un milieu homogène à partir des nombres d'onde des modes guidés calculés dans un matériau hétérogène représentatif de la mèche. Ces calculs ont été effectués en utilisant la méthode SAFE et la recherche du jeu de coefficients de rigidité (inversion) a été réalisée au moyen d'un algorithme génétique.

Nous avons montré que l'inversion ne pouvait s'effectuer avec robustesse que sur une plage limitée de fréquences inférieures à la première fréquence de coupure pour la mèche considérée. Sur cette plage de fréquences, seuls quatre modes sont propagatifs et l'on montre ensuite que l'utilisation de ces modes dans l'inversion nous permet de définir sans ambigüité la partie réelle du coefficient C_{33} ainsi que les parties réelles et imaginaires du coefficient C_{44} ; ces dernières sont très proches de celles déjà obtenues à l'aide de la méthode onde de volume en incidence normale (S. Lonné). L'identification d'un jeu unique de coefficients par cette méthode d'inversion n'a pu complètement aboutir du fait de la

faible dépendance des nombres d'onde de certains modes guidés aux coefficients recherchés.

Homogénéisation dynamique basée sur les ondes de volume en incidence oblique

Afin de compléter les travaux précédents et de nous placer dans un cas où tous les coefficients ont une influence, nous avons ensuite étendu le modèle à trois phases développé par S. Lonné du cas de l'incidence normale au cas de l'incidence oblique. Rassemblant les théories concernant la diffraction d'ondes en incidence oblique par un cylindre isotrope transverse et celles utilisées pour modéliser le problème à trois phases en incidence normale, nous avons pu mettre en place le modèle complet de la diffraction en incidence oblique sur le modèle à trois phase ; ce modèle prend en compte des couches isotropes transverses ainsi que viscoélastiques. Nous avons ensuite montré que la problématique soulevée par la prise en compte des angles critiques nous empêchait de poser correctement le système d'équations représentant la diffraction des ondes sur les deux interfaces pour des incidences dépassant le premier angle critique. Or, aux petits angles d'incidence (proche de la normale), les deux coefficients C_{33} et C_{13} n'influent que faiblement sur le problème.

Nous plaçant aux petits angles, nous avons mis en évidence qu'un phénomène de dispersion influait sur les coefficients C_{11}, C_{44} et C_{66} alors qu'en incidence normale, ce phénomène n'était pas observé.

Il apparaît enfin que les coefficients du milieu effectif identifiés par la méthode présentent une dépendance à l'angle d'incidence. Ce comportement très inattendu nous amène à remettre en cause le choix de la loi constitutive sur laquelle les modèles sont basés. Ainsi que le proposent des éléments d'une littérature récente, de nouvelles équations constitutives reliant les champs moyens de contraintes et de déformations dans le milieu effectif peuvent être utilisées à la place de la loi de Hooke pour réaliser l'homogénéisation dynamique de milieux composites. L'adoption de telles lois dans le modèle à trois phases que nous avons développé est envisageable.

Perspectives pour le traitement de l'échelle microscopique

Les perspectives directes de développement de nos travaux consistent en la résolution du problème posé par les angles critiques dans le cas de la diffraction des ondes de volume en incidence oblique. La voie à suivre a été clairement identifiée dans le document (Chapitre III.5). Ce travail technique demande un temps de développement et de tests dont nous n'avons pas disposé dans le cadre de cette thèse.

Une fois le problème des angles critiques résolu, on pourra utiliser la méthode d'identification des coefficients de rigidité développée sur l'ensemble des angles d'incidence et ainsi nous placer aux incidences où les coefficients C_{13} et C_{33} ont une plus forte influence, afin de les mieux déterminer. Suivant les résultats obtenus, et spécifiquement, suivant les dépendances angulaires des coefficients identifiés, on pourra envisager d'intégrer les valeurs obtenues sur l'ensemble de la gamme [0° – 90°] afin de nous affranchir de cette dépendance, afin de les utiliser dans le cadre du logiciel de simulation CIVA développé par le département.

Les développements effectués pour la détermination des rigidités effectives de la couche unidirectionnelle l'ont été dans l'optique d'alimenter un modèle permettant d'identifier les coefficients de rigidité du matériau tissé à l'échelle d'un nœud représentatif (échelle mésoscopique). Les développements concernant le traitement de l'échelle mésoscopique n'ont pas été menés à termes mais font l'objet de l'annexe H.

Une autre approche serait de développer l'ensemble des modèles en choisissant les équations de Willis comme loi constitutive du milieu effectif à la place de la loi de Hooke.

Bibliographie

Ahmad, F., et A. Rahman. «Acoustic scattering by transversely isotropic cylinders.» *Int. J. Eng. Sci.* 38 (2000): 325-335.

Andrianov, I. V., V. I. Bolshakov, V. V. Danishevs'kyy, et D. Weichert. «Higher order asymptotic homogenization and wave propagation in periodic composite materials.» *Proc. R. Soc. A* 464 (2008): 1181-1201.

Angel, Y. C., et A. Bolshakov. «Oblique coherent waves inside and outside a randomly cracked elastic solid.» *J. Acoust. Soc. Am. 102 (6)* 102, n° 6 (1997): 3290-3299.

Aristégui, C., et S. Baste. «Optimal recovery of the elasticity tensor of general anisotropic materials from ultrasonic velocity data.» *J. Acoust. Soc. Am.* 101, n° 2 (1997): 813-833.

Aristegui, C., et Y. C. Angel. «Effective material properties for shear-horizontal acoustic waves in fiber composites.» *Phys. Rev. E* 75 , n° (5 Pt 2) (2007a): 056607.

Aristégui, C., et Y.C. Angel. «Effective mass density and stiffness derived from P-wave multiple scattering.» *Wave Motion* 44 (2007b): 153-164.

Auld, B.A. *Acoustic fields and waves in solids.* New-York: Wiley-Interscience publication, 1990.

Balasubramania, K., et N. S. Rao. «Inversion of composite material elastic constants from ultrasonic bulk wave phase velocity data using genetic algorithms.» *Composites Part B* 29B (1998): 171-180.

Bedetti, T. «Étude de la diffusion multiple des ultrasons en vue de la modélisation du bruit de structure et de la caractérisation des aciers moulés inoxydables à gros grains.» Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7), 2012.

Biwa, S. «Independent scattering and wave attenutation in composites.» *Mech. Mat* 33, n° 11 (2001): 635-647.

Biwa, S., S. Idekoba, et N. Ohno. «Wave attenuation on particulate polymer composites: independent scattering/absorption analysis and comparison to measurements.» *Mech. Mat.* 34 (2002): 671-682.

Bose, S.K., et A.K. Mal. «Longitudinal shear waves in a fiber-reinforced composite.» *Int. J. Solids Struct.* 9 (1973): 1075-1085.

Caleap, M., B. W. Drinkwater, et P. D. Wilcox. «Effective dynamic constitutive parameters of acoustic metamaterials with random microstructure.» *New Journal of Physics* 14 (2012): 033014.

Caleap, M., C. Aristégui, et O. Poncelet. «Using dispersion equation for orthotropic media to model antiplane coherent wave propagation in cracked solids.» *J. Acoust. Soc. Am.* 133, n° 1 (2013): 17-24.

Challis, R.E., et al. «Models of Ultrasonic Wave Propagation in Epoxy Materials.» *IEEE T ULTRASON FERR* 56, n° 6 (2009): 1225-1237.

Charalambakis, N. «Homogenization techniques and micromechanics. A survey and perspectives.» *Appl. Mech. Rev.* 63 (2010): 030803.

Chen, W., et J. Fish. «A Dispersive Model for Wave propagation in Periodic Heterogeneous media Based on Homogenization with Multiple Spatial and Temporal Scales.» *J. App. Mech.* 68 (2001): 153-161.

Chu, Y. C., A. D. Degtyar, et S. I. Rokhlin. «On determination of orthotropic material moduli from ultrasonic velocity data in nonsymmetry planes.» *J. Acoust. Soc. Am.* 95, n° 6 (1994): 3191-3203.

Conoir, J-M., et A. N. Norris. «Effective wavenumbers and reflection coefficients for an elastic medium containing random configurations of cylindrical scatterers.» *Wave Motion* 47 (2010): 183-197.

Datta, S. K., H. M. Ledbetter, et R. D. Kriz. «Calculated elastic constants of composite containing anisotropic fibers.» *Int. J. Solids Struct.* 20 (1984): 429-438.

Dejong, K. A. *Analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems.* PhD, University of Michigan Ann Arbo, 1975.

Deschamps, M. «L'onde plane hétérogène et ses applications en acoustique linéaire.» *HDR.* Université de Bordeaux 1, 1991.

Deydier, S. «Modélisation par une méthode d'homogénéisation de la propagation ultrasonore dans les composites multicouches : application à la simulation du contrôle non destructif.» Thèse - Université Paris Diderot - Paris 7., 2006.

Drugan, W.J., et J.R. Willis. «A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites.» *J. Mech. Phys. Solids* 44, n° 4 (1996): 497-524.

Fan, Y., A. N. Sinclair, et F. Honarvar. «Scattering of a plane acoustic wave from a transversely isotropic cylinder encased in a solid elastic medium.» *J. Acoust. Soc. Am.* 106, n° 3 (1999): 1229-1236.

Foldy, L.L. «The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scatering by randomly distributed scatterers.» *Phy. Rev.* 67 (1945): 107-119.

Gengembre, N., et A. Lhémery. « Pencil method in elastodynamics. Application to ultrasonic field computation.» *Ultrasonics* 38 (2000): 495-499.

Goldberg, D. E. *Genetics algorithms in search, optimization and machine learning.* Addison-Wesley Pub. Co. (Reading, Mass.), 1989.

Hinders, M.K. «Elastic wave scattering from an elastic cylinder.» *Il nuovo Cimento* 108B (1993): 285-301.

Honarvar, F., et al. «Wave propagation in transversely isotropic cylinders.» *Int. J. Solids Struct.* 44 (2007): 5236-5246.

Honarvar, S., et A.N. Sinclair. «Acoustic wave scattering from transversely isotropic cylinders.» *J. Acoust. Soc. Am.* 100, n° 1 (1996): 57-63.

Huang, W., et S. I. Rokhlin. «Frequency dependences of ultrasonic wave velocity and attenuation in fiber composites. Theory and experiments.» *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* 14 (1995): 1233-1240.

Huang, W., Y. J. Wang, et S. I. Rokhlin. «Oblique scattering of an elastic wave from a multilayered cylinder in a solid. Transfer matrix approach.» *J. Acoust. Soc. Am.* 99, n° 5 (1996): 2742-2754.

Jezzine, K., et A. Lhémery. «Simulation of guided wave inscpection based non the reciprocity principle and the semi-analytical finite element method.» *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* 26 (2007): 39-46.

Jin, C. «On the estimation of dynamic mass density of random composites.» *J. Acoust. Soc. Am.* 132, n° 2 (2012): 615-620.

Journiac, S. «Simuation des contrôles non destructifs par ultrasons dans les composites Carbone Epoxy.» Université du Maine, Le Mans, 2012.

Kanaun, S.K., V.M. Levin, et F.J. Sabina. «Propagation of elastic waves in composites with random set of spherical inclusions (effective medium approach).» *Wave Motion* 40 (2004): 69–88.

Kanit, T., S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, et D. Jeulin. «Determination of the size of the representative volume element of random composites: statistical and numerical approach.» *Int. J. Solids Struct.* 40 (2003): 3647-3679.

Kim, J. Y. «On the generalized self-consistent model for elastic wave popagation in composite materials.» *Int. J. Solids Struct.* 41 (2004): 4349-4360.

Kim, J. Y. «Models for wave propagation in two-dimensional random composites : a comparative study.» *J. Acoust. Soc. Am* 127, n° 4 (2010): 2201-2209.

Kinra, V. K., M. S. Petraitis, et S. K. Datta. «Ultrasonic wave propagation in a random particulate composite.» *Int. J. Solids Struct* 16 (1980): 301-312.

Lax, M. «Multiple scattering of waves.» *Rev. Mod. Phys.* 23 (1951): 287-310.

Lehoucq, R.B., D. C. Sorensen, et C. Yang. *ARPACK Users'Guide: Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarded Arnoldi Methods.* Philadelphia: SIAM Publications, 1998.

Leymarie, N., C. Aristégui, B. Audoin, et S. Baste. «Identification of complex stiffness tensor from waveform reconstruction.» *J. Acoust. Soc. Am.* 111, n° 3 (2002): 1232-1244.

Lhémery, A., P. Calmon, I. Lecœur-Taïbi, R. Raillon, et L. Paradis. «Modeling tools for ultrasonic inspection of welds.» *NDT & E Int.* 33 (2000): 499-513.

Linton, C. M., et P. A. Martin. «Multiple scattering by random configurations of circular cylinders: Second-order corrections for the effective wavenumber.» *J. Acoust. Soc. Am.* 117, n° 6 (2005): 3413-3423.

Lonné, S. «Modélisation de la propagation ultrasonore dans les matériaux composites obtenus par le procédé de fabrication RTM.» Thèse Université Bordeaux 1, 2003.

Lonné, S., A. Lhémery, P. Calmon, S. Biwa, et F. Thévenot. «Modeling of Ultrasonic Attenuation in Uni-Directional Fiber Reinforced Composites Combining Multiple-Scattering and Viscoelastic Losses.» *Review of Quantitative Nondestructive Evaluation* 700 (2004): 875-882.

Lowe, M. J. S. «Matrix techniques for modelling ultrasonic waves in multilayered media.» *IEEE T ULTRASON FERR* 42 (1995): 525-542.

Luppé, F., et J-M. Conoir. «Multiple scattering by cylinders randomly located in a fluid : effective properties.» *J. Phys.: Conf. Ser.* 269, n° 012015 (2011).

Martin, P. A., Maurel, A., and Parnell, W. J. «Estimating the dynamic effective mass density of random composites.» *J. Acoust. Soc. Am.* 128, n° 2 (2010): 571-577.

Marzani, Alessandro. «Time-transient response for ultrasonic guided waves propagating in damped cylinders.» *Int. J. Solids Struct.* 45 (2008): 6347–6368.

Milton, G., et J. Willis. «On modifications of Newton's second law and linear continuum elastodynamics.» *Proc. R. Soc. A* 463 (2007): 855-880.

Mirsky, I. «Wave propagation on transversely isotropic circular cylinders. Part I: Theory.» *J. Acoust. Soc. Am* 37, n° 6 (1965): 1016-1021.

Mitchell, M. *An introduction to genetic algorithms.* Cambridge: MIT Press, 1998.

Mori, T., et K. Tanaka. «Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions.» *Acta Metallurgica* 231 (1973): 571-574.

Morse, P. M., et H. Feshbach. *Methods of theoritical physics.* New York: McGraw-Hill, 1953.

Nayfeh, A. H. *Wave propagation in layered anisotropic media with applications to composites.* Elsevier, 1995.

Nayfeh, A.H., et D. E. Chimenti. «Ultrasonic plate waves in three-dimensional braided composites.» *J. Acoust. Soc. Am.* 97, n° 4 (1995): 2056-2062.

Nemat-Nasser, S., et A. Srivastava. «Overall dynamic constitutive relations of layered elastic composites.» *J. Mech. Phys. Solids* 59 (2011): 1953-1965.

Pao, Y. H., et C. C. Mow. *Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations.* New York: Crane Russak, 1973.

Parnell, W.J., et I. D. Abrahams. «Homogenization for wave propagation in periodic fibre-reinforced media with complex microstructure. I - Theory.» *J. Mech. Phys. Solids* 56 (2008): 2521-2540.

Rokhlin, S., D. K. Lewis, K. F. Graff, et l. Adler. «Real-time study of frequency dependence if attenuation and velocity of ultrasonic waves during the curing reaction of epoxy resin.» *J. Acoust. Soc. Am.* 79 (1986): 1789-1793.

Rose, J. L. *Ultrasonic Waves in Solid Media.* Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

Royer, D., et E. Dieulesaint. *Ondes élastiques dans les solides.* PARIS: Masson et Cie, 2000.

Shuvalov, A. L., A. A. Kutsenko, A. N. Norris, et O. Poncelet. «Effective Willis constitutive equations for periodically stratified anisotropic elastic media.» *Proc. R. Soc. A* 467 (2011): 1749-1769.

Srivastava, A., et S. Nemat-Nasser. «Universal theorems for total energy of the dynamics of linearly elastic heterogeneous solids.» *Mech. Mat.* 43, n° 12 (2011): 913-917.

Thurston, R. N. «Elastic waves in rods and clad rods.» *J. Acoust. Soc. Am.* 64 (1978): 1-37.

Tong, L., A. P. Mouritz, et M. Bannister. *3D fibre reinforced polymer composites.* Elsevier Science, 2002.

Twersky, V. «On scattering of waves by random distributions. I. Free-space Scatterer Formalism.» *J. Math. Phys.* 3, n° 4 (1962): 700-715.

Vishnuvardhan, J., C. V. Krishnamurthy, et K. Balasubramaniam. «Genetic algorithm based reconstruction of the elastic moduli of orthotropic plates using an ultrasonic guided wave single-transmitter-multiple-receiver SHM array.» *Smart Mater. Struct.* 16 (2007): 1639–1650.

Waterman, P. C., et R. Truell. «Multiple scattering of waves.» *J. Math. Phys.* 2, n° 4 (1961): 512-538.

White, R.M. «Elastic Wave Scattering at a Cylindrical Discontinuity in a Solid.» *J. Acoust. Soc. Am.* 30, n° 8 (1958): 771-785.

Willis, J. R. «A comparison of two formulations for effective relations for waves in a composite.» *Mech. Mat.* 47 (2012): 51-60.

Willis, J. R. «Effective constitutive relations for waves in composites and metamaterials.» *Proc. R. Soc. A* 467 (2011): 1865-1879.

Willis, J. R. «The non-local influence of density variations in a composite.» *Int. J. Solids Struct.* 210 (1985): 805-817.

Willoughby, N., W. J. Parnell, A. L. Hazel, et I. D. Abrahams. «Homogenization methods to approximate the effective response of random fibre-reinforced Composites.» *Int. J. Solids Struct.* 49 (2012): 1421-1433.

Yang, R. B., et A. K. Mal. «multiple scattering of elastic waves in a fiber-reinforced composite.» *J. Mech. Phys. Solids* 42, n° 12 (1994): 1945-1968.

Annexe A.

Caractéristiques mécaniques des matériaux utilisées pour toutes les applications numériques

Dans cette annexe, nous avons effectué un bilan des caractéristiques mécaniques relatives à l'époxy et au carbone que nous avons utilisées. Toutes les applications numériques des modèles ont été faites à partir de ces valeurs.

Tout d'abord, l'époxy est un matériau isotrope et viscoélastique, qui peut être simplement décrit par les caractéristiques suivantes :

- Masse volumique (en kg/m^3) : $\rho_m = 1230$
- Coefficients de Lamé (en GPa) : $\lambda_m = 4.45 - 0.027\, i$
  $\mu_m = 1.58 - 0.128\, i$

Puis, les caractéristiques du carbone sont celles d'un matériau isotrope transverse. L'indice L signifie dans le sens des fibres, et l'indice T signifie dans le sens orthogonal aux fibres. On a alors :

- Masse volumique (en kg/m^3) : $\rho_f = 1670$
- Modules d'Young (en GPa) : $EfL = 232$
  $EfT = 13.4$
- Coefficients de Poisson : $\nu fL = 0.215$
  $\nu fT = 0.33$
- Modules de cisaillement (en GPa) : $\mu fL = 24$
  $\mu fT = 5.02$
- Module de Compressibilité (en GPa) : $kf = 13.13$
- Module de Compression latérale (en GPa) : $KfT = 14.8$

Enfin, dans les matériaux composites auxquels nous nous sommes intéressés, le diamètre des fibres de carbone est de $a = 7\ \mu m$.

Annexe B.
Méthode SAFE

Dans cette annexe, nous présentons la méthode des éléments finis semi-analytiques utilisée pour calculer les nombres d'onde des modes guidés dans les cas d'une section quelconque (bidimensionnelle) ou axisymétrique (unidimensionnelle). Nous rappelons que notre apport a été de développer la méthode et le code la mettant en œuvre afin de prendre en compte un milieu défini hétérogène et anisotrope de géométrie complexe.

1. Cas bidimensionnel

Les éléments finis sont des triangles dans lesquels le champ de déplacement en un point s'écrit sous la forme d'une interpolation par rapport aux nœuds constituée de polynômes de degré 1 (élément fini de Lagrange P1).

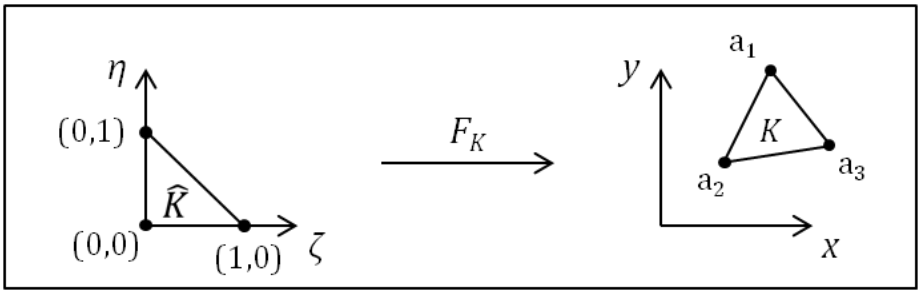

Figure B-1. Élément fini triangulaire de Lagrange P1

Les fonctions de base locales sur l'élément fini de référence $\widehat{K}$ sont alors définies de manière unique par :

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta,\eta) &= 1-\zeta-\eta, \\ \phi_2(\zeta,\eta) &= \zeta, \\ \phi_3(\zeta,\eta) &= \eta, \end{aligned} \tag{B.1}$$

Le champ de déplacement en un point d'un triangle du maillage s'écrit sous la forme d'une interpolation par rapports aux nœuds (numérotation locale de 1 à 3) :

$$u(x,y,z) = N(x,y)U^i e^{j\omega t}\,, \tag{B.2}$$

où $N(x,y)$ est la matrice d'interpolation et U^i contient les composantes du déplacement particulaire aux trois nœuds de l'élément i :

$$N(x,y) = \begin{pmatrix} \phi_1(\zeta,\eta) & 0 & 0 & \phi_2(\zeta,\eta) & 0 & 0 & \phi_3(\zeta,\eta) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1(\zeta,\eta) & 0 & 0 & \phi_2(\zeta,\eta) & 0 & 0 & \phi_3(\zeta,\eta) & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(\zeta,\eta) & 0 & 0 & \phi_2(\zeta,\eta) & 0 & 0 & \phi_3(\zeta,\eta) \end{pmatrix},$$

avec $\zeta(x,y)$ et $\eta(x,y)$ défini par la transformation F_K d'un élément de référence (fonction de (η,ζ)) en un élément réelle (fonction de (x,y)) représenté sur le figure (B.1), et :

$$U^i = \left[u_x^{i,1}, u_y^{i,1}, u_z^{i,1}, u_x^{i,2}, u_y^{i,2}, u_z^{i,2}, u_x^{i,3}, u_y^{i,3}, u_z^{i,3}\right]^T \ ,$$

$u_\beta^{i,\alpha}$ correspondant au déplacement selon la coordonnée β du $\alpha^{\text{ème}}$ nœud de l'élément i.

La relation entre déformation et déplacement écrite sous forme matricielle est alors :

$$\varepsilon = \left[L_x \frac{\partial}{\partial x} + L_y \frac{\partial}{\partial y} + L_z \frac{\partial}{\partial z}\right] u, \ L_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{B.3}$$

qui peut se réécrire $\varepsilon = \left[J_a N_{,(\zeta,\eta)} - j\beta L_z N\right] U^i e^{j\omega t}$ avec :

$$J_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix},$$

et

$$N_{,(\zeta,\eta)} = \begin{pmatrix} \phi_{1,\zeta} & 0 & 0 & \phi_{2,\zeta} & 0 & 0 & \phi_{3,\zeta} & 0 & 0 \\ \phi_{1,\eta} & 0 & 0 & \phi_{2,\eta} & 0 & 0 & \phi_{3,\eta} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{1,\zeta} & 0 & 0 & \phi_{2,\zeta} & 0 & 0 & \phi_{3,\zeta} & 0 \\ 0 & \phi_{1,\eta} & 0 & 0 & \phi_{2,\eta} & 0 & 0 & \phi_{3,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{1,\zeta} & 0 & 0 & \phi_{2,\zeta} & 0 & 0 & \phi_{3,\zeta} \\ 0 & 0 & \phi_{1,\eta} & 0 & 0 & \phi_{2,\eta} & 0 & 0 & \phi_{3,\eta} \end{pmatrix}.$$

On définit alors les matrice B_1et B_2 comme $B_1 = J_a N_{,(\zeta,\eta)}$ et $B_2 = L_z N$, et on suppose U^i de la forme $U^i = d^i e^{-j\beta z}$.

L'expression de la déformation devient :

$$\varepsilon = [B_1 - j\beta B_2] U^i e^{j\omega t} \ . \tag{B.4}$$

On applique ensuite le principe des travaux virtuels donné par :

$$\int_V \delta u^T t \, dV = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma \, dV + \int_V \delta u^T \rho \, \ddot{u} \, dV \ . \tag{B.5}$$

En utilisant la loi de Hooke, qui permet de relier le tenseur des contraintes à celui des déformations avec la relation

$$\sigma = C_H \varepsilon \ , \tag{B.6}$$

ainsi que les relations (B.2), (B.4), dans (B.5), on obtient un système matricielle qui à la forme :

$$(K_1 - i\beta K_2 + \beta^2 K_3)d - \omega^2 M d = f \ , \tag{B.7}$$

avec ω la pulsation, d le déplacement et f les forces extérieur et K_1, K_2, K_3 les matrices de rigidité issues de l'assemblage des matrice de rigidité élémentaire données par :

$$K_1^e = \int_{S_e} B_1^T C_H B_1 dS \,, \qquad K_2^e = \int_{S_e} (B_1^T C_H B_2 - B_2^T C_H B_1) dS \ ,$$
$$K_3^e = \int_{S_e} B_2^T C_H B_2 dS \,, \qquad M^e = \int_{S_e} \rho N^T N dS \ .$$

On notera de plus que S_e représente la surface de l'élément e et que C_{ij} représente la matrice de rigidité qui s'y associe ; elle dépend du matériau auquel il est rattaché et pourra varier d'un élément à l'autre dans le cas de matériau hétérogène.

2. Cas unidimensionnel

On utilise des éléments finis monodimensionnels ayant trois degrés de liberté par nœud, associés au déplacement u_r, u_θ, u_z Figure B-2 (Marzani 2008)

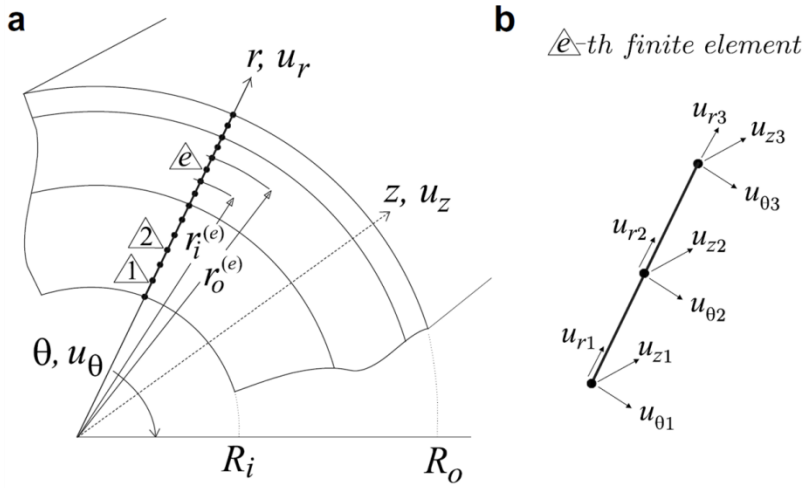

Figure B-2. a) Maillage unidimensionnel du cylindre homogène,
b) e-ième élément fini comprenant trois degrés de liberté par nœud (Marzani 2008).

L'expression approximative du déplacement donné par ce maillage est

$$u(r,\theta,z) = N(r)U^i(z)e^{in\theta}e^{j\omega t} \tag{B.8}$$

où n est l'indice circonférentiel et

$$N(x,y) = \begin{pmatrix} \phi_1(\zeta) & 0 & 0 & \phi_2(\zeta) & 0 & 0 & \phi_3(\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1(\zeta) & 0 & 0 & \phi_2(\zeta) & 0 & 0 & \phi_3(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(\zeta) & 0 & 0 & \phi_2(\zeta) & 0 & 0 & \phi_3(\zeta) \end{pmatrix} \text{ avec } \zeta = \frac{r - r_1}{r_3 - r_1}$$

et

$$U^i = \left[u_r^{i,1}, u_\theta^{i,1}, u_z^{i,1}, u_r^{i,2}, u_\theta^{i,2}, u_z^{i,2}, u_r^{i,3}, u_\theta^{i,3}, u_z^{i,3}\right]^T$$

avec $u_k^{i,\xi}$ correspondant au déplacement selon la coordonnée k du $\xi^{\text{ème}}$ nœud de l'élément i.

Les fonctions d'interpolations sont définies par

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta,\eta) &= (\zeta - 1)(2\zeta - 1), \\ \phi_2(\zeta,\eta) &= 4\zeta(1 - \zeta), \\ \phi_3(\zeta,\eta) &= \zeta(2\zeta - 1), \end{aligned} \tag{B.9}$$

La relation entre déformation et déplacement exprimée sous forme matricielle est alors

$$\varepsilon = \left[L_1 \frac{\partial}{\partial z} + L_2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + L_3 \frac{\partial}{\partial r} + L_4 \frac{1}{r}\right] u,$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

que l'on réécrit

$$\varepsilon = B_1 U_{,z}^i + B_2 U_{,\theta}^i + B_3 U^i \tag{B.10}$$

où $U_{,z}^i$ et $U_{,\theta}^i$ sont les dérivées du déplacement nodal en fonction de z et θ respectivement et

$$\begin{aligned} B_1 &= L_1 N, \\ B_2 &= \frac{1}{r} L_2 N, \\ B_3 &= L_3 N_{,r} + \frac{1}{r} L_4 N, \end{aligned} \tag{B.11}$$

On remplace ensuite (B.8), (B.10), (B.6) dans (B.5), pour obtenir l'expression matricielle,

$$(\beta^2 K_1 + n\beta K_2 - i\beta K_3 + n^2 K_4 - inK_5 + K_6)d - \omega^2 Md = f \tag{B.12}$$

avec

$$K_1^e = \int_{r_i^{(e)}}^{r_o^{(e)}} B_1^T C_H B_1 r dr\,, \qquad K_2^e = \int_{r_i^{(e)}}^{r_o^{(e)}} (B_1^T C_H B_2 + B_2^T C_H B_1) r dr$$

$$K_3^e = \int_{r_i^{(e)}}^{r_o^{(e)}} (B_1^T C_H B_3 - B_3^T C_H B_1) r dr\,, \qquad K_4^e = \int_{r_i^{(e)}}^{r_o^{(e)}} B_2^T C_H B_2 r dr\,,$$

$$K_3^e = \int_{r_i^{(e)}}^{r_o^{(e)}} (B_2^T C_H B_3 - B_2^T C_H B_3) r dr\,, \qquad K_6^e = \int_{r_i^{(e)}}^{r_o^{(e)}} B_3^T C_H B_3 r dr\,,$$

$$M^e = \int_{r_i^{(e)}}^{r_o^{(e)}} \rho N^T N r dr,$$

3. Résolution du système

Dans les cas 2D et 1D, on aboutit aux systèmes matriciels donnés respectivement par (B.7) et (B.12). On montre alors que l'on peut linéariser ces systèmes pour les exprimer (en l'absence de forces extérieures) sous la forme

$$(A - \beta B)Q = 0 \tag{B.13}$$

avec

1. *Cas bidimensionnel*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & K1 - \omega^2 M \\ K1 - \omega^2 M & -jK_2 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} K1 - \omega^2 M & 0 \\ 0 & -K_3 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} d \\ \beta d \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{B.14}$$

2. *Cas unidimensionnel*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & n^2 K_4 - inK_5 + K_6 - \omega^2 M \\ n^2 K_4 - inK_5 + K_6 - \omega^2 M & nK_2 - jK_3 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} n^2 K_4 - inK_5 + K_6 - \omega^2 M & 0 \\ 0 & -K_1 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} d \\ \beta d \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{B.15}$$

On résout ensuite le système quadratique posé (B.13) en utilisant la librairie mathématique ARPACK (Lehoucq, Sorensen et Yang 1998).

Annexe C.
Développement d'un algorithme génétique.

Les algorithmes génétiques font partie de la famille des algorithmes évolutifs, c'est-à-dire que leur fonctionnement est basé sur l'évolution d'une population de solutions qui tend vers une « meilleure » solution au sens d'une fonction coût. Cette évolution se fait selon la loi naturelle de la *survie du mieux adapté* ; ainsi, à chaque étape, toutes les solutions seront évaluées à l'aide de la fonction coût, puis évolueront par différentes opérations afin d'obtenir une nouvelle population de solutions à évaluer. Ces opérations sont effectuées jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt prédéfini soit atteint considérant alors que la meilleure solution a été trouvée.

L'évolution des algorithmes génétiques est basée sur une analogie à la reproduction des chromosomes dans une cellule, ainsi, la terminologie y est adaptée. Une solution candidate sera nommée chromosome ; celui-ci est constituée de l'ensemble des paramètres à optimiser qui sont appelés gènes ; l'ensemble des chromosomes constitue une génération. La terminologie propre aux algorithmes génétiques ainsi que la structure des données que nous utilisons sont représentées sur la Figure C-1

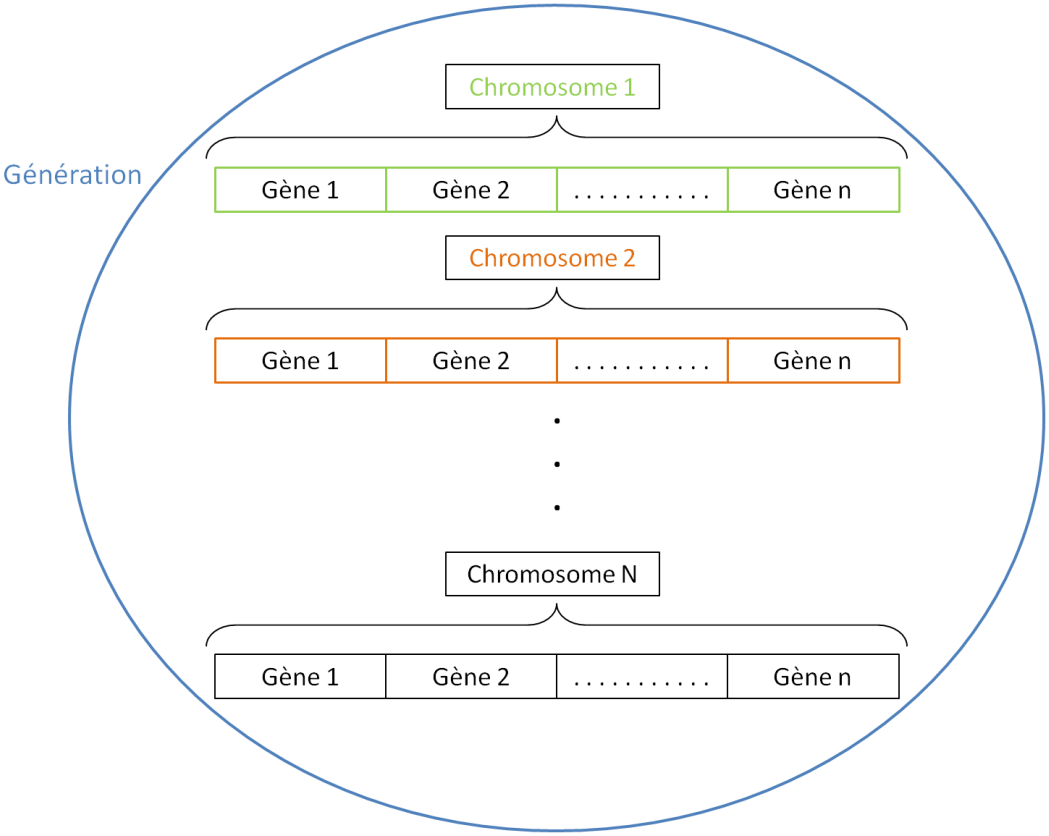

Figure C-1. Représentation de la structure d'une génération

Nous allons maintenant expliquer en détails le fonctionnement de l'algorithme génétique que nous avons développé ; nous verrons que son fonctionnement fait appel à un grand nombre de paramètres qui auront chacun leur influence sur la convergence globale de

l'algorithme. Nous ne donnerons pas les valeurs de ces paramètres ici puisque l'algorithme génétique est utilisé dans plusieurs cas au cours de l'étude pour rechercher des jeux de paramètres différents; nous ne donnerons ainsi que leur fonction dans l'évolution de l'algorithme et nous définissons leur valeur et les raisons qui nous ont poussées à les choisir ainsi dans l'étude principale. Nous regroupons dans le Tableau C-1 la liste de ces paramètres et l'influence qu'ils ont sur l'évolution des solutions.

Tableau C-1. Description du rôle des paramètres de l'algorithme génétique

borne supérieure	Définition de la borne supérieure de l'espace de recherche pour chaque paramètre
borne inférieure	Définition de la borne inférieure de l'espace de recherche pour chaque paramètre
$nombre\ de\ Chromosomes$	Nombre de chromosomes pour une génération ; plus le nombre est grand plus on explore de points de l'espace de recherche à la fois – cela au prix du temps de calcul
$nombre\ de\ Bits$	Nombre de bits sur lequel les solutions sont codées : c'est la précision avec laquelle on « maille » l'espace de recherche. Plus les trains binaires sont grands plus on est précis mais plus l'évolution est lente.
$nombre\ de\ Générations$	Nombre de générations maximum, *i.e.* nombre de fois où l'on fait évoluer une famille de solutions
$nombre\ de\ Selectionnés$	Nombre de chromosomes que l'on sélectionne pour évoluer et engendrer la génération suivante
$nombre\ d'Elites$	Nombre de chromosome que l'on conserve sans évolution d'une génération à la suivante
P_m	Probabilité pour chaque bit de muter en son opposé

La Figure C-2 schématise le fonctionnement global de l'algorithme génétique.

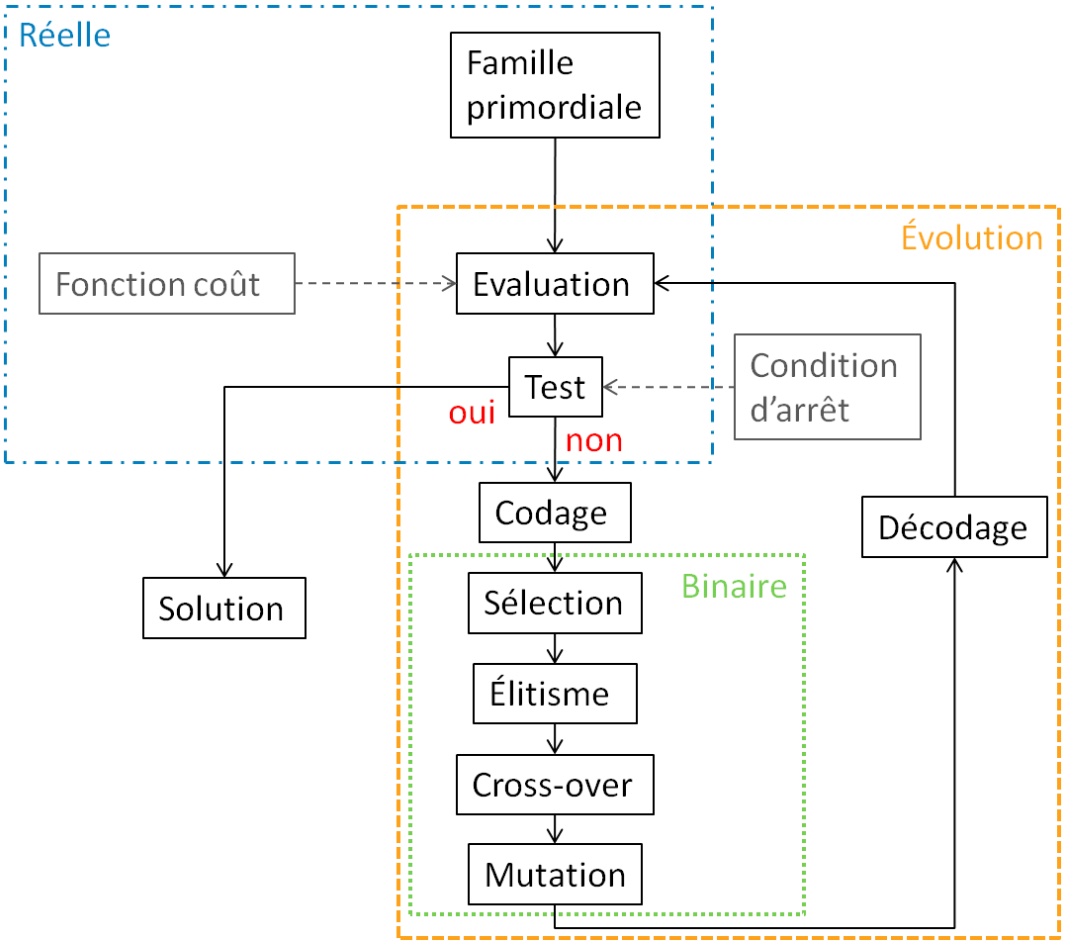

Figure C-2. Fonctionnement global d'un algorithme génétique.

1. Espace de recherche et fonction coût

On définit tout d'abord un espace de recherche, constitué des intervalles dans lesquels variera chaque paramètre ; ces intervalles peuvent être grands mais doivent être finis. On définit ensuite une fonction coût avec laquelle nous évaluerons la « qualité » de chaque solution ; la définition de cette fonction doit se faire avec soin puisque la vitesse de convergence de la méthode en dépendra fortement. L'équation (1)(C.1) est un exemple de fonction coût typiquement utilisée,

$$F = \sum_i \left(Val_i - Val_{ref,i}\right)^2 \qquad \text{(C.1)}$$

où l'on cherche à faire correspondre un jeu de i valeurs, calculées à l'aide des paramètres que l'on recherche, à un jeu de i valeurs de référence obtenues par exemple au cours d'une manipulation expérimentale.

Pour initialiser l'algorithme, une première famille de chromosomes (génération) est générée aléatoirement dans l'espace de recherche. On calcule ensuite l'ensemble des valeurs Val_i à l'aide de ces paramètres puis l'on fait correspondre, à l'aide de la fonction coût, une valeur d'erreur à chaque jeu de paramètres (chromosome). Les chromosomes sont ensuite classés

de la plus faible valeur à la plus grande (puisqu'on recherche ici un minimum de la fonction coût).

2. Codage

Les chromosomes sont ensuite codés afin de les transformer en train binaire. On choisit d'utiliser un codage de Gray plutôt qu'un codage binaire classique pour effectuer cette opération puisqu'il permet que deux solutions proches dans l'espace de recherche aient une faible distance binaire ; en effet le codage de Gray fait que les représentations binaires de deux valeurs consécutives de l'espace de recherche ne diffère que d'un bit ainsi que le montre le Tableau C-2.

Tableau C-2. Codage de Gray

Valeur codée	Binaire naturel	Codage de Gray
1	0001	0001
2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110
5	0101	0111
6	0111	0101
7	1000	0100
8	1001	1100
9	1010	1000

Une fois l'opération de codage effectuée, les chromosomes ont alors la forme montrée sur la Figure C-3.

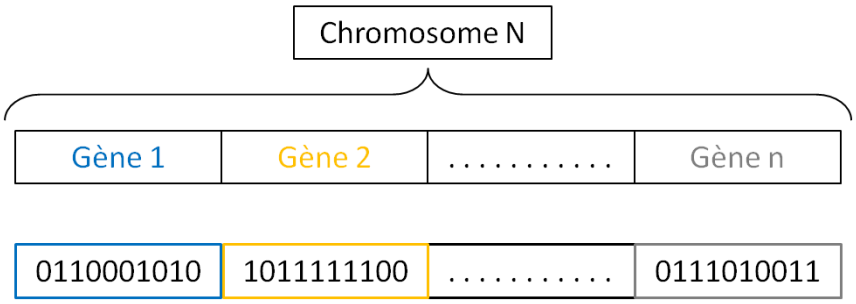

Figure C-3. Représentation de la structure binaire d'un chromosome

3. Sélection

Nos chromosomes sont désormais codés en binaire ; une partie des meilleurs chromosomes est sélectionnée (leur nombre est défini par le paramètre $nombre\ de\ Selectionnés$) pour évoluer afin d'engendrer la prochaine génération de chromosomes. On choisit aussi d'inclure une étape d'élitisme, c'est-à-dire qu'un certain

nombre ($nombre\ d'Elites$) des meilleurs chromosomes sera transmis sans modification à la génération suivante.

4. Cross-Over

La première étape de l'évolution est l'étape de croisement (« cross-over » en anglais). Au cours de cette étape, on choisit deux chromosomes parmi ceux sélectionnés précédemment pour être croisés. On définit alors, aléatoirement toujours, deux longueurs de croisement $l_1 < l_2$ qui correspondent aux positions respectives des premier et dernier bits du train binaire que les chromosomes vont échanger. La Figure C-4 illustre cette opération.

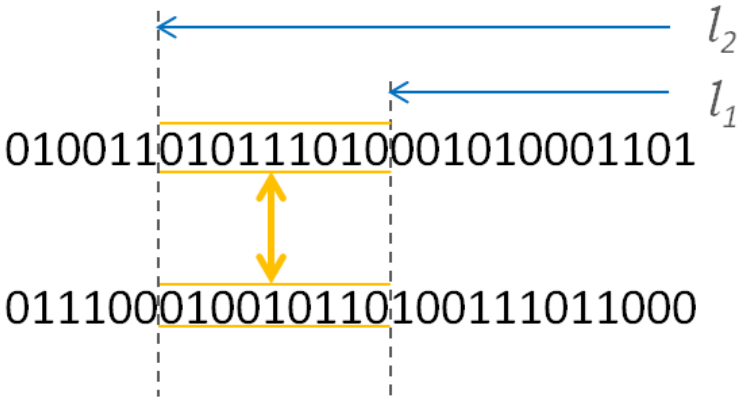

Figure C-4. Représentation de l'opération de Cross-Over

Les deux chromosomes résultant du croisement, appelés chromosomes fils sont rajoutés à la génération suivante ; on effectue cette opération jusqu'à ce que l'on ait reconstitué une génération complète c'est-à-dire que l'on ait obtenu N ($= nombreChromosomes - nombre\ d'Elites$) nouveaux chromosomes.

Le choix des chromosomes qui subiront cette opération n'est pas fait entièrement aléatoirement : on choisit les meilleurs chromosomes que l'on fait se reproduire avec plusieurs autres choisis aléatoirement. Le nombre de fois que chacun de ces chromosomes se reproduira est déterminé en fonction du rang du chromosome et de la taille de la population à reconstituer afin que les meilleurs chromosomes se reproduisent le plus.

5. Mutation

Tous ces chromosomes nouvellement créés vont ensuite subir une étape de mutation où chaque bit a une probabilité p_m de s'inverser (les 0 deviennent 1 et vice-versa) permettant ainsi de faire apparaitre de nouveaux motifs binaires dans l'ensemble des chromosomes et d'enrichir le patrimoine génétique de la génération.

Cette nouvelle génération, adjointe aux chromosomes conservés lors de l'élitisme, est ensuite utilisée pour calculer un nouveau jeu de valeurs V_i qui sera évalué de la même manière qu'à la première étape à l'aide de la fonction coût. Les chromosomes subiront ensuite les mêmes étapes d'évolution que précédemment et ainsi de suite jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint.

6. Critère d'arrêt

Il existe plusieurs types de critères d'arrêt pour les algorithmes génétiques. Les deux les plus répandus sont la valeur de la fonction coût et le nombre de générations, c'est-à-dire que l'on considère que l'algorithme a convergé lorsque, respectivement, la valeur de la fonction se situe en dessous d'un seuil prédéfini (cas de minimisation) ou que le nombre d'itérations, *i.e.* le nombre de fois que la population a évolué, dépasse une valeur fixée. Dans chacun des cas, il faut fixer un seuil par avance.

On voit dans le corps de cette étude qu'il peut parfois être complexe de définir une valeur seuil en dessous de laquelle on peut considérer que se trouve le minimum global recherché.

7. L'aléatoire comme facteur de robustesse

L'évolution de ces algorithmes est basée sur l'aléatoire contenu dans chaque étape de l'évolution, qui permet de diversifier la population de chromosomes ce qui rend l'algorithme robuste aux problèmes de minima locaux ainsi qu'à celui des valeurs choisies au départ. C'est d'ailleurs un des intérêts principaux des algorithmes évolutifs de manière générale que de pouvoir chercher une meilleure solution à un problème d'optimisation dans un espace de recherche de grande taille.

Afin de vérifier la capacité de notre algorithme à trouver le minimum global d'un profil d'inversion comportant de nombreux minima locaux, nous avons utilisé les fonctions test proposée par (Dejong 1975) dans ses travaux de thèse. Cela nous a aussi permis d'orienter le choix de paramètres que nous avons fait dans notre algorithme ; l'arrêt des choix présentés dans le document a ensuite été fait de manière empirique en utilisant des cas limites de validation pour chaque problème.

Annexe D.

Obtention des potentiels associés aux champs de déplacement créés par les ondes diffractées par un cylindre

On considère un milieu à deux phases, composé d'une matrice infinie isotrope transverse entourant un cylindre d'extension infinie de symétrie isotrope transverse ; la figure suivante représente cette configuration.

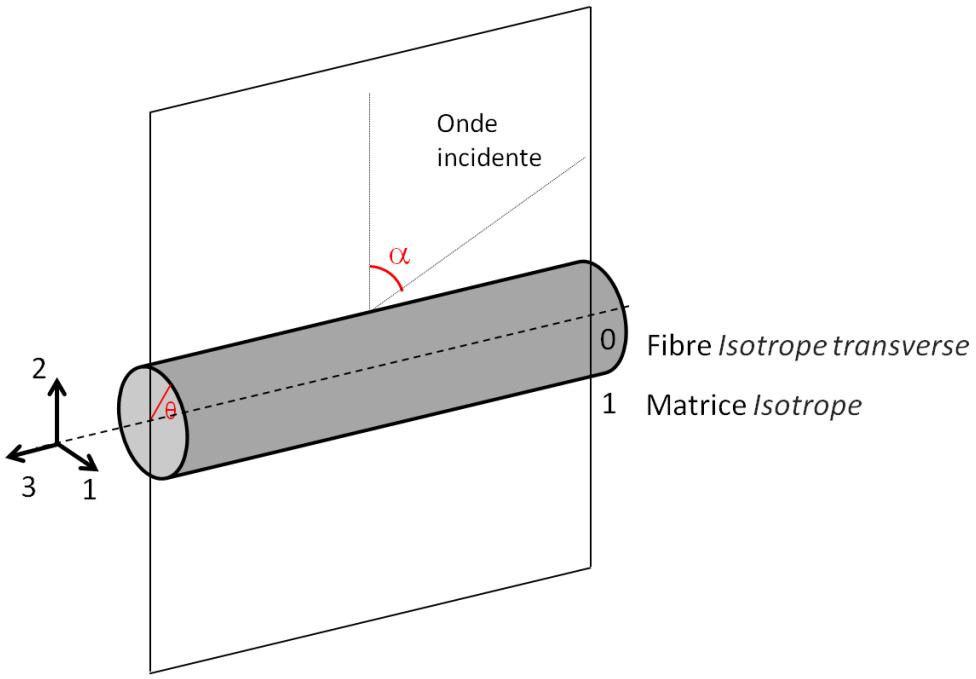

Figure D-1. Représentation du problème de la diffraction d'une onde en incidence oblique sur un cylindre de symétrie isotrope transverse.

Le champ de déplacement en tout point de l'espace peut être exprimé en fonction de trois potentiels sous la forme (Morse et Feshbach 1953):

$$u = \nabla\phi + \nabla \times (\psi \boldsymbol{e}_z) + a\nabla \times \nabla \times (\chi \boldsymbol{e}_z). \tag{D.1}$$

Dans le cas particulier où $\alpha = 0$, en incidence normale, les trois potentiels correspondent respectivement aux composantes de compression, de cisaillement horizontal (plan $r - \theta$) et de cisaillement vertical (plan $r - z$). Mais dans le cas de l'incidence oblique, du fait de l'anisotropie du cylindre, cette séparation n'est plus possible : seul ψ continue de représenter la composante de cisaillement horizontal.

La loi de Hooke généralisée permet de relier les contraintes aux déplacements par l'intermédiaire de l'équation :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \left(\frac{\partial u_l}{\partial k} + \frac{\partial u_k}{\partial l} \right). \tag{D.2}$$

Les équations de propagation dans un milieu continu en l'absence de force extérieure prennent la forme :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = \rho_c \frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2}, \tag{D.3}$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} = \rho_c \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2}, \tag{D.4}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho_c \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}, \tag{D.5}$$

avec σ_{ij} les composantes de la contrainte, U_r, U_θ, U_z les déplacements dans les directions r, θ, z respectivement et $\rho_c$la densité volumique du cylindre.

En remplaçant (D.1) dans (D.2) puis dans (D.3), (D.4), (D.5) on obtient les équations suivantes :

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left\{C_{11}\nabla^2\phi + (C_{13} + 2C_{44} - C_{11})\frac{\partial^2\phi}{z^2} - \rho_0\frac{\partial^2\phi}{t^2} + a\frac{\partial}{\partial z}\left[(C_{11} - C_{13} - C_{44})\nabla^2\psi + (C_{13} + 2C_{44} - C_{11})\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right]\right\} = 0, \tag{D.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(C_{13} + 2C_{44})\nabla^2\phi + (C_{33} - C_{13} - 2C_{44})\frac{\partial^2\phi}{z^2} - \rho_0\frac{\partial^2\phi}{t^2}\right] + a\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \nabla^2\right)\left[(C_{44})\nabla^2\psi + (C_{33} - C_{13} - 2C_{44})\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right] = 0, \tag{D.7}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[C_{66}\nabla^2\chi + (C_{44} - C_{66})\frac{\partial^2\chi}{z^2} - \rho_0\frac{\partial^2\chi}{t^2}\right] = 0. \tag{D.8}$$

L'onde de compression représentée par ϕ et l'onde de cisaillement polarisée dans le plan d'incidence représentée par ψ sont couplées. L'onde de cisaillement polarisée dans le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre représentée par χ est découplée du problème.

En suivant une méthode proposée par (Mirsky 1965), on remarque qu'une solution particulière de l'équation (D.6) consiste à annuler les termes contenus dans l'accolade, *i.e.* :

$$C_{11}\nabla^2\phi + (C_{13} + 2C_{44} - C_{11})\frac{\partial^2\phi}{z^2} - \rho_0\frac{\partial^2\phi}{t^2} = 0, \tag{D.9}$$

et

$$(C_{11} - C_{13} - C_{44})\nabla^2\psi + (C_{13} + 2C_{44} - C_{11})\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \tag{D.10}$$

avec

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad . \tag{D.11}$$

On suppose ensuite que les variables du problème sont indépendantes, c'est-à-dire que l'on utilise la méthode de séparation des variables en écrivant les potentiels sous la forme :

$$\phi(r,\theta,z,t) = \phi(r)\phi(\theta)\phi(z)\phi(t) \ , \tag{D.12}$$

que l'on réécrit :

$$\phi(r,\theta,z,t) = \phi_r\phi_\theta\phi_z\phi_t \ . \tag{D.13}$$

En remplaçant l'expression (D.13) dans (D.9), et après quelques manipulations (Honarvar et al. 2007) on obtient l'équation différentielle :

$$r^2\phi_r'' + r\phi_r' + \left(\left(\frac{(C_{13} + 2C_{44})}{C_{11}}\frac{\phi_z''}{\phi_z} - \frac{\rho_f}{C_{11}}\frac{\phi_t''}{\phi_t}\right)r^2 + \frac{\phi_\theta''}{\phi_\theta}\right)\phi_r = 0 \ , \tag{D.14}$$

où l'on reconnait la forme générale de l'équation différentielle de Bessel vérifiée par ϕ_r :

$$r^2y'' + ry' + ((s_0r)^2 - n^2)y = 0 \ , \tag{D.15}$$

ainsi que des équations différentielles harmoniques en $\phi_\theta, \phi_z, \phi_t$.

La forme générale de la solution pour le potentiel ϕ sera donc donnée par l'expression :

$$\phi(r,\theta,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(D_{n1}J_n(s_0r) + D_{n2}Y_n(s_0r)\big)\,(D_{n3}\cos n\theta + D_{n4}\sin n\theta) \times \big(D_{n5}e^{ik_zz} + D_{n6}e^{-ik_zz}\big)\big(D_{n7}e^{i\omega t} + D_{n8}e^{-i\omega t}\big), \tag{D.16}$$

Parmi les solutions possibles, on choisit alors celle qui correspond à la physique de notre problème. On souhaite modéliser le comportement des ondes à l'intérieur du cylindre. Ainsi, la solution en Y_n ne nous intéresse pas puisque cette fonction a un comportement singulier lorsque son argument tend vers 0, *i.e.* $Y_n(s_0r)|_{r\to 0} \to \infty$. Notons, d'ailleurs, que les fonctions de Hankel de premier et deuxième types $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$ sont aussi solutions de l'équation différentielle de Bessel mais présentent la même singularité à l'origine.

De même, nos conventions d'écriture nous font considérer seulement une partie des solutions pour les autres variables à savoir que l'on considère la propagation d'une onde progressive dans le sens des z et des temps positifs ($e^{i(k_zz-\omega t)}$).

En appliquant la même méthode aux potentiels χ et ψ, on obtient l'expression des potentiels à l'intérieur du cylindre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \phi_0 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n J_n(s_0r)e^{in\theta}e^{ik_z} \\ \chi_0 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n J_n(s_0r)e^{in\theta}e^{ik_z} \\ \psi_0 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n J_n(s_0r)e^{in\theta}e^{ik_z} \end{cases} \tag{D.17}$$

où la dépendance temporelle des potentiels, représentée par le terme $e^{-i\omega t}$, étant commune à toutes les expressions, est supprimée par soucis de clarté.

En remplaçant maintenant ces expressions dans les équations (D.6), (D.7) et (D.8) on obtient le système

$$\begin{bmatrix} -s^2[-C_{11}s^2 - (C_{13}+2C_{44})^2k_z^2 + \rho_0\omega^2] & -aik_zs^2[-(C_{11}-C_{13}-C_{44})s^2 - C_{44}k_z^2 + \rho_0\omega^2] & 0 \\ ik_z[-(C_{13}+2C_{44})s^2 - C_{33}k_z^2 + \rho_0\omega^2] & as^2[-C_{44}s^2 - (C_{33}-C_{13}-C_{44})k_z^2 + \rho_0\omega^2] & 0 \\ 0 & 0 & -s^2[-C_{66}s^2 + (\rho_0\omega^2 - C_{44}k_z^2)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_n \\ E_n \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{D.18}$$

On cherche les solutions qui annulent le déterminant du système ; on obtient l'équation

$$s^2(s^2+k_z^2)(C_{44}C_{11}s^4 - \xi s^2 + \zeta)\big(-C_{66}s^2 + (\rho_0\omega^2 - C_{44}k_z^2)\big) = 0 \tag{D.19}$$

avec

$$\xi = (C_{13} + C_{44})^2 {k_z}^2 + C_{11}(\rho_0\omega^2 - C_{33}{k_z}^2) + C_{44}(\rho_0\omega^2 - C_{44}{k_z}^2)$$

(D.20)

et

$$\zeta = (\rho_0\omega^2 - C_{44}{k_z}^2)(\rho_0\omega^2 - C_{33}{k_z}^2)$$

(D.21)

La solution $s^2 = 0$ est triviale et la solution $s^2 = -k_z^2$ correspond à une onde évanescente qui se propage à la surface du cylindre et s'atténue très rapidement. Les trois solutions restantes de l'équation (D.19) sont

$${s_{10}}^2 = \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 4\zeta C_{11}C_{44}}}{2C_{11}C_{44}} \tag{D.22}$$

$${s_{20}}^2 = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 4\zeta C_{11}C_{44}}}{2C_{11}C_{44}} \tag{D.23}$$

$${s_{30}}^2 = \frac{2(\rho_0\omega^2 - C_{44}k_z^2)}{(C_{11} - C_{12})} \tag{D.24}$$

Les nombres d'onde $s_1$et s_2 forment une base des solutions à partir de laquelle on peut, en utilisant l'expansion des modes normaux, exprimer ϕ, χ et ψ tels que

$$\begin{cases} \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left[D_{n_1}J_n(s_{10}r) + D_{n_2}J_n(s_{20}r)\right] \cos n\theta \, e^{ik_z z} \\ \chi = \sum_{n=0}^{\infty} \left[E_{n_1}J_n(s_{10}r) + E_{n_2}J_n(s_{20}r)\right] \cos n\theta \, e^{ik_z z} \\ \psi = \sum_{n=0}^{\infty} F_n J_n(s_{30}r) \sin n\theta \, e^{ik_z z} \end{cases} \tag{D.25}$$

où l'on remarque que les coefficients D_{n_i} et E_{n_i} ne sont pas indépendants. En utilisant (D.18), il vient

$$D_{n_1} = \frac{-C_{11}{s_{10}}^2 - (C_{13} + 2C_{44}){k_z}^2 + \rho_0\omega^2}{aik_z[-(C_{11} - C_{13} - C_{44}){s_{10}}^2 - C_{44}{k_z}^2 + \rho_0\omega^2]} E_{n_2} \tag{D.26}$$

$$D_{n_2} = \frac{aik_z[-(C_{11} - C_{13} - C_{44}){s_{20}}^2 - C_{44}{k_z}^2 + \rho_0\omega^2]}{-C_{11}{s_{20}}^2 - (C_{13} + 2C_{44})\,{k_z}^2 + \rho_0\omega^2} E_{n_1} \tag{D.27}$$

Annexe E.

Diffraction par un cylindre infini placé dans une matrice infinie

Au cours du chapitre III.2 nous avons étudié le problème de la diffraction des ondes de volume en incidence oblique sur un cylindre élastique infini contenu dans un milieu matriciel viscoélastique infini. On explicite ici le système (3.27).

S est une matrice 6x6 dont les coefficients S_{ij} sont donnés par :

$$S_{11} = (1 + iaq_1k_z)[nJ_n(s_1a) - s_1a\,J_{n+1}(s_1a)\,]$$
$$S_{22} = (q_2 + iak_z)[nJ_n(s_2a) - s_2aJ_{n+1}(s_2a)]$$
$$S_{13} = nJ_n(s_3a)$$
$$S_{14} = -nH_n\left(k_{L\perp,1}a\right) + k_{L\perp,1}aH_{n+1}\left(k_{L\perp,1}a\right)$$
$$S_{15} = -iak_z\left[nH_n\left(k_{S\perp,1}a\right) - k_{S\perp,1}aH_{n+1}\left(k_{S\perp,1}a\right)\right]$$
$$S_{16} = -nH_n\left(k_{S\perp,1}a\right)$$

$$S_{21} = (-n - inak_zq_1)J_n(s_1a)$$
$$S_{22} = (-nq_2 - inak_z)J_n(s_2a)$$
$$S_{23} = -nJ_n(s_3a) + s_3aJ_{n+1}(s_3a)$$
$$S_{24} = nH_n\left(k_{L\perp,1}a\right)$$
$$S_{25} = inak_zH_n\left(k_{S\perp,1}a\right)$$
$$S_{26} = nH_n\left(k_{S\perp,1}a\right) - k_{S\perp,1}aH_{n+1}\left(k_{S\perp,1}a\right)$$

$$S_{31} = (as_1^2q_1 + ik_z)J_n(s_1a)$$
$$S_{32} = (as_2^2 + ik_zq_2)J_n(s_2a)$$
$$S_{33} = 0$$
$$S_{34} = -ik_zH_n\left(k_{L\perp,1}a\right)$$
$$S_{35} = -ak_{S\perp,1}^2H_n\left(k_{S\perp,1}a\right)$$
$$S_{36} = 0$$

$$\begin{aligned} S_{41} = {} & \left[C_{11}^{(0)} + iak_zq_1\left(C_{11}^{(0)} - C_{13}^{(0)}\right)\right][(n^2 - n - s_1^2a^2)J_n(s_1a) + s_1aJ_{n+1}(s_1a)] \\ & + \left[C_{12}^{(0)} + \left(C_{12}^{(0)} - C_{13}^{(0)}\right)iak_zq_1\right][nJ_n(s_1a) - s_1aJ_{n+1}(s_1a)] \\ & + \left[-C_{13}^{(0)}k_z^2a^2 - C_{12}^{(0)}n^2 + \left(C_{13}^{(0)} - C_{12}^{(0)}\right)ian^2q_1k_z\right]J_n(s_1a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{42} = {} & \left[C_{11}^{(0)}q_2 + iak_z\left(C_{11}^{(0)} - C_{13}^{(0)}\right)\right][(n^2 - n - s_2^2a^2)J_n(s_2a) + s_2aJ_{n+1}(s_2a)] \\ & + \left[C_{12}^{(0)}q_2 + \left(C_{12}^{(0)} - C_{13}^{(0)}\right)iak_z\right][nJ_n(s_2a) - s_2aJ_{n+1}(s_2a)] \\ & + \left[-C_{13}^{(0)}k_z^2q_2a^2 - C_{12}^{(0)}n^2q_2 + \left(C_{13}^{(0)} - C_{12}^{(0)}\right)ian^2k_z\right]J_n(s_2a) \end{aligned}$$

$$S_{43} = \left(C_{11}^{(0)} - C_{12}^{(0)}\right) n[(n-1)J_n(s_3 a) - s_3 a J_{n+1}(s_3 a)]$$

$$S_{44} = -\left[C_{11}^{(1)}\left(n^2 - n - k_{L\perp,1}^2 a^2\right) + C_{12}^{(1)} n(1-n) - C_{13}^{(1)} k_z a^2\right] H_n(k_{L\perp,1} a) + \left(C_{12}^{(1)} - C_{11}^{(1)}\right) k_{L\perp,1} a H_{n+1}(k_{L\perp,1} a)$$

$$S_{45} = -iak_z\left(C_{11}^{(1)} - C_{13}^{(1)}\right)\left[\left(n^2 - n - k_{S\perp,1} a\right) H_n(k_{S\perp,1} a) + k_{S\perp,1} a H_{n+1}(k_{S\perp,1} a)\right] - \left(C_{12}^{(1)} - C_{13}^{(1)}\right) iak_z\left[nh_n(k_{S\perp,1} a) - k_{S\perp,1} a\, H_{n+1}(k_{S\perp,1} a)\right] - \left(C_{13}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right) ian^2 k_z H_n(k_{S\perp,1} a)$$

$$S_{46} = -\left(C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right) n\left[(n-1) H_n(k_{S\perp,1} a) - k_{S\perp,1} a H_{n+1}(k_{S\perp,1} a)\right]$$

$$S_{51} = n\left(C_{11}^{(0)} - C_{12}^{(0)}\right)(1 + iaq_1 k_z)[(1-n)J_n(s_1 a) + s_1 a J_{n+1}(s_1 a)\ ]$$

$$S_{52} = n\left(C_{11}^{(0)} - C_{12}^{(0)}\right)(q_2 + iak_z)[(1-n)J_n(s_2 a) + s_2 a J_{n+1}(s_2 a)]$$

$$S_{53} = C_{66}^{(0)}\left[\left(s_3^2 a^2 - 2n(n-1)\right) J_n(s_3 a) - 2s_3 a J_{n+1}(s_3 a)\right]$$

$$S_{54} = \left(C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right)\left[H_n(k_{L\perp,1} a) n(n-1) - nk_{L\perp,1} a H_{n+1}(k_{L\perp,1} a)\right]$$

$$S_{55} = \left(C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right)\left[H_n(k_{S\perp,1} a) iak_z n(n-1) - ink_z a^2 H_{n+1}(k_{S\perp,1} a)\right]$$

$$S_{56} = C_{66}^{(1)}\left[H_n(k_{S\perp,1} a)\left(2n(n-1) - k_{S\perp,1}^2 a^2\right) + 2k_{S\perp,1} a H_{n+1}(k_{S\perp,1} a)\right]$$

$$S_{61} = C_{44}^{(0)}[q_1(s_1^2 a - k_z^2 a) + 2ik_z][nJ_n(s_1 a) - s_1 a J_{n+1}(s_1 a)]$$

$$S_{62} = C_{44}^{(0)}(s_2^2 a - ak_z^2 + 2ik_z q_2)[nJ_n(s_2 a) - s_2 a J_{n+1}(s_2 a)]$$

$$S_{63} = C_{44}^{(0)} ink_z J_n(s_3 a)$$

$$S_{64} = C_{44}^{(1)}\left[-2ink_z H_n(k_{L\perp,1} a) + 2ik_z k_{L\perp,1} a H_{n+1}(k_{L\perp,1} a)\right]$$

$$S_{65} = C_{44}^{(1)}\left(k_z^2 - k_{S\perp,1}^2\right)\left[anH_n(k_{S\perp,1} a) - k_{S\perp,1} a^2 H_{n+1}(k_{S\perp,1} a)\right]$$

$$S_{66} = -C_{44}^{(1)} ink_z H_n(k_{S\perp,1} a)$$

B est une matrice 6x1 contenant les déplacement et contraintes associés à l'onde incidente en $r = a$. Ces expressions seront différentes selon que l'onde incidente est de compression, de cisaillement vertical ou de cisaillement horizontal.

Si l'onde incidente est une onde de compression, les éléments de B s'écrivent :

$$B_1 = \epsilon_n i^n\left[nJ_n(k_{L\perp,1} a) - k_{L\perp,1} a J_{n+1}(k_{L\perp,1} a)\right]$$

$$B_2 = -n\epsilon_n i^n J_n(k_{L\perp,1} a)$$

$$B_3 = \epsilon_n i^{n+1} k_z J_n(k_{L\perp,1}a)$$

$$B_4 = \epsilon_n i^n \left[C_{11}^{(1)}\left(n^2 - n - k_{L\perp,1}^2 a^2\right) + C_{12}^{(1)} n(1-n) - C_{13}^{(1)} k_z^2 a^2\right] J_n(k_{L\perp,1}a) - \epsilon_n i^n \left(C_{12}^{(1)} - C_{11}^{(1)}\right) k_{L\perp,1} a J_{n+1}(k_{L\perp,1}a)$$

$$B_5 = \epsilon_n i^n \left(C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right)\left[J_n(k_{L\perp,1}a)(n-n^2) + n k_{L\perp,1} a J_{n+1}(k_{L\perp,1}a)\right]$$

$$B_6 = C_{44}^{(1)} 2\epsilon_n i^{n+1} k_z \left[n J_n(k_{L\perp,1}a) - k_{L\perp,1} a J_{n+1}(k_{L\perp,1}a)\right]$$

Lorsque l'onde incidente est une onde de cisaillement horizontal (polarisée dans le plan $(r-\theta)$, ces expressions deviennent

$$B_1 = \epsilon_n i^n n J_n(k_{S\perp,1}a)$$

$$B_2 = -\epsilon_n i^n \left(n J_n(k_{S\perp,1}a) - k_{S\perp,1} a J_{n+1}(k_{S\perp,1}a)\right)$$

$$B_3 = 0$$

$$B_4 = \epsilon_n i^n \left(C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right) n\left[(n-1) J_n(k_{S\perp,1}a) - k_{S\perp,1} a J_{n+1}(k_{S\perp,1}a)\right]$$

$$B_5 = \epsilon_n i^n C_{66}^{(1)} \left[J_n(k_{S\perp,1}a)\left(2n(n-1) - k_{S\perp,1}^2 a^2\right) + 2k_{S\perp,1} a J_{n+1}(k_{S\perp,1}a)\right]$$

$$B_6 = \epsilon_n i^n C_{44}^{(1)} i n k_z J_n(k_{S\perp,1}a)$$

Enfin lorsque l'onde incidente est une onde de cisaillement verticale (polarisation dans le plan $r-z$), on a

$$B_1 = \epsilon_n i^{n+1} a k_z \left[n J_n(k_{S\perp,1}a) - -k_{S\perp,1} a J_{n+1}(k_{S\perp,1}a)\right]$$

$$B_2 = -\epsilon_n i^{n+1} n a k_z J_n(k_{S\perp,1}a)$$

$$B_3 = \epsilon_n i^n a\, k_{S\perp,1}^2 J_n(k_{S\perp,1}a)$$

$$B_4 = \epsilon_n i^{n+1} a k_z \left(C_{11}^{(1)} - C_{13}^{(1)}\right)\left[\left(n^2 - n - k_{S\perp,1}^2 a^2\right) J_n(k_{S\perp,1}a) + k_{S\perp,1} a J_{n+1}(k_{S\perp,1}a)\right] - \left(C_{13}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right)\epsilon_n i^{n+1} a k_z \left[n J_n(k_{S\perp,1}a) - k_{S\perp,1} a J_{n+1}(k_{S\perp,1}a)\right] - \left(C_{12}^{(1)} - C_{13}^{(1)}\right)\epsilon_n i^{n+1} a n^2 k_z J_n(k_{S\perp,1}a)$$

$$B_5 = \left(C_{12}^{(1)} - C_{11}^{(1)}\right)\epsilon_n i^{n+1}\left[J_n(k_{S\perp,1}a) a k_z n(n-1) - n k_z k_{S\perp,1} a^2 J_{n+1}(k_{S\perp,1}a)\right]$$

$$B_6 = C_{44}^{(1)}\left(k_{S\perp,1}^2 - k_z^2\right)\epsilon_n i^n \left[a n J_n(k_{S\perp,1}a) - k_{S\perp,1} a^2 J_{n+1}(k_{S\perp,1}a)\right]$$

Annexe F.
Système à résoudre dans le cas du problème à trois phases

On explicite ici le système (3.39) :

$$S \times \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \\ M_n \\ N_n \\ O_n \\ P_n \\ Q_n \\ R_n \end{bmatrix} = B \ ,$$

S est une matrice 12x12 dont les coefficients S_{ij} représentent les déplacements et les contraintes associés aux ondes diffractées.

Dans les expressions qui suivent, les quantités s_{1m}, s_{2m}, s_{3m}, représentent les nombres d'onde des ondes diffractées dans le milieu $m = 0,2$ et q_{1m}, q_{2m}représentent les coefficients de couplage dans le milieu $m = 0,2$. De plus notons que la matrice des coefficients de rigidités du milieu m est notée $C_{ij}^{(m)}$, tandis que les fonctions $H_n^{(1)}$ou $H_n^{(2)}$ représentent les fonctions de Hankel de premier et deuxième type respectivement.

1. Interface Matrice/Milieu intérieur $\boldsymbol{r = a}$

$$S_{1,1} = (1 + iaq_{10}k_z)[nJ_n(s_{10}a) - s_{10}a\, J_{n+1}(s_{10}a)\,]$$
$$S_{1,2} = (q_{20} + iak_z)[nJ_n(s_{20}a) - s_{20}aJ_{n+1}(s_{20}a)]$$
$$S_{1,3} = nJ_n(s_{30}a)$$
$$S_{1,4} = -nH_n^{(1)}(k_{L\perp,1}a) + k_{L\perp,1}aH_{n+1}^{(1)}(k_{L\perp,1}a)$$
$$S_{1,5} = -nH_n^{(2)}(k_{L\perp,1}a) + k_{L\perp,1}aH_{n+1}^{(2)}(k_{L\perp,1}a)$$
$$S_{1,6} = -iak_z\left[nH_n^{(1)}(k_{S\perp,1}a) - k_{S\perp,1}aH_{n+1}^{(1)}(k_{S\perp,1}a)\right]$$
$$S_{1,7} = -iak_z\left[nH_n^{(2)}(k_{S\perp,1}a) - k_{S\perp,1}aH_{n+1}^{(2)}(k_{S\perp,1}a)\right]$$

$$S_{1,8} = -nH_n^{(1)}\left(k_{S\perp,1}a\right)$$

$$S_{1,9} = -nH_n^{(2)}\left(k_{S\perp,1}a\right)$$

$$S_{1,10} = S_{1,11} = S_{1,12} = 0$$

$$S_{2,1} = (-n - inak_z q_{10})J_n(s_{10}a)$$
$$S_{2,2} = (-nq_{20} - inak_z)J_n(s_{20}a)$$
$$S_{2,3} = -nJ_n(s_{30}a) + s_{30}aJ_{n+1}(s_{30}a)$$
$$S_{2,4} = nH_n^{(1)}\left(k_{L\perp,1}a\right)$$
$$S_{2,5} = nH_n^{(2)}\left(k_{L\perp,1}a\right)$$
$$S_{2,6} = inak_z H_n^{(1)}\left(k_{S\perp,1}a\right)$$
$$S_{2,7} = inak_z H_n^{(2)}\left(k_{S\perp,1}a\right)$$
$$S_{2,8} = nH_n^{(1)}\left(k_{S\perp,1}a\right) - k_{S\perp,1}aH_{n+1}^{(1)}\left(k_{S\perp,1}a\right)$$
$$S_{2,9} = nH_n^{(2)}\left(k_{S\perp,1}a\right) - k_{S\perp,1}aH_{n+1}^{(2)}\left(k_{S\perp,1}a\right)$$
$$S_{2,10} = S_{2,11} = S_{2,12} = 0$$

$$S_{3,1} = (as_{10}^2 q_{10} + ik_z)J_n(s_{10}a)$$
$$S_{3,2} = (as_{20}^2 + ik_z q_{20})J_n(s_{20}a)$$
$$S_{3,3} = 0$$
$$S_{3,4} = -ik_z H_n^{(1)}\left(k_{L\perp,1}a\right)$$
$$S_{3,5} = -ik_z H_n^{(2)}\left(k_{L\perp,1}a\right)$$
$$S_{3,6} = -ak_{S\perp,1}^2 H_n^{(1)}\left(k_{S\perp,1}a\right)$$
$$S_{3,7} = -ak_{S\perp,1}^2 H_n^{(2)}\left(k_{S\perp,1}a\right)$$
$$S_{3,8} = 0$$
$$S_{3,9} = 0$$
$$S_{3,10} = S_{3,11} = S_{3,12} = 0$$

$$\begin{aligned} S_{4,1} = {} & \left[C_{11}^{(0)} + iak_z q_{10}\left(C_{11}^{(0)} - C_{13}^{(0)}\right)\right]\left[(n^2 - n - s_{10}^2 a^2)J_n(s_{10}a) + s_{10}aJ_{n+1}(s_{10}a)\right] \\ & + \left[C_{12}^{(0)} + \left(C_{12}^{(0)} - C_{13}^{(0)}\right)iak_z q_{10}\right]\left[nJ_n(s_{10}a) - s_{10}aJ_{n+1}(s_{10}a)\right] \\ & + \left[-C_{13}^{(0)}k_z^2 a^2 - C_{12}^{(0)}n^2 + \left(C_{13}^{(0)} - C_{12}^{(0)}\right)ian^2 q_{10}k_z\right]J_n(s_{10}a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{4,2} = {} & \left[C_{11}^{(0)}q_{20} + iak_z\left(C_{11}^{(0)} - C_{13}^{(0)}\right)\right]\left[(n^2 - n - s_{20}^2 a^2)J_n(s_{20}a) + s_{20}aJ_{n+1}(s_{20}a)\right] \\ & + \left[C_{12}^{(0)}q_{20} + \left(C_{12}^{(0)} - C_{13}^{(0)}\right)iak_z\right]\left[nJ_n(s_{20}a) - s_{20}aJ_{n+1}(s_{20}a)\right] \\ & + \left[-C_{13}^{(0)}k_z^2 q_{20}a^2 - C_{12}^{(0)}n^2 q_{20} + \left(C_{13}^{(0)} - C_{12}^{(0)}\right)ian^2 k_z\right]J_n(s_{20}a) \end{aligned}$$

$$S_{4,3} = \left(C_{11}^{(0)} - C_{12}^{(0)}\right)n\left[(n-1)J_n(s_{30}a) - s_{30}aJ_{n+1}(s_{30}a)\right]$$

$$S_{4,4} = -\left[C_{11}^{(1)}\left(n^2 - n - k_{L\perp,1}^2 a^2\right) + C_{12}^{(1)} n(1-n) - C_{13}^{(1)} k_z a^2\right] H_n^{(1)}\left(k_{L\perp,1} a\right) + \left(C_{12}^{(1)} - C_{11}^{(1)}\right) k_{L\perp,1} a H_{n+1}^{(1)}\left(k_{L\perp,1} a\right)$$

$$S_{4,5} = -\left[C_{11}^{(1)}\left(n^2 - n - k_{L\perp,1}^2 a^2\right) + C_{12}^{(1)} n(1-n) - C_{13}^{1} k_z a^2\right] H_n^{(2)}\left(k_{L\perp,1} a\right) + \left(C_{12}^{(1)} - C_{11}^{(1)}\right) k_{L\perp,1} a H_{n+1}^{(2)}\left(k_{L\perp,1} a\right)$$

$$S_{4,6} = -iak_z\left(C_{11}^{(1)} - C_{13}^{(1)}\right)\left[\left(n^2 - n - k_{S\perp,1} a\right) H_n^{(1)}\left(k_{S\perp,1} a\right) + k_{S\perp,1} a H_{n+1}^{(1)}\left(k_{S\perp,1} a\right)\right] - \left(C_{12}^{(1)} - C_{13}^{(1)}\right) iak_z\left[nH_n^{(1)}\left(k_{S\perp,1} a\right) - k_{S\perp,1} a\, H_{n+1}^{(1)}\left(k_{S\perp,1} a\right)\right] - \left(C_{13}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right) ian^2 k_z H_n^{(1)}\left(k_{S\perp,1} a\right)$$

$$S_{4,7} = -iak_z\left(C_{11}^{(1)} - C_{13}^{(1)}\right)\left[\left(n^2 - n - k_{S\perp,1} a\right) H_n^{(2)}\left(k_{S\perp,1} a\right) + k_{S\perp,1} a H_{n+1}^{(2)}\left(k_{S\perp,1} a\right)\right] - \left(C_{12}^{(1)} - C_{13}^{(1)}\right) iak_z\left[nH_n^{(2)}\left(k_{S\perp,1} a\right) - k_{S\perp,1} a\, H_{n+1}^{(2)}\left(k_{S\perp,1} a\right)\right] - \left(C_{13}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right) ian^2 k_z H_n^{(2)}\left(k_{S\perp,1} a\right)$$

$$S_{4,8} = -\left(C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right) n\left[(n-1) H_n^{(1)}\left(k_{S\perp,1} a\right) - k_{S\perp,1} a H_{n+1}^{(1)}\left(k_{S\perp,1} a\right)\right]$$

$$S_{4,9} = -\left(C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right) n\left[(n-1) H_n^{(2)}\left(k_{S\perp,1} a\right) - k_{S\perp,1} a H_{n+1}^{(2)}\left(k_{S\perp,1} a\right)\right]$$

$$S_{4,10} = S_{4,11} = S_{4,12} = 0$$

$$S_{5,1} = n\left(C_{11}^{(0)} - C_{12}^{(0)}\right)(1 + iaq_{10} k_z)[(1-n) J_n(s_{10} a) + s_{10} a J_{n+1}(s_{10} a)\,]$$

$$S_{5,2} = n\left(C_{11}^{(0)} - C_{12}^{(0)}\right)(q_{20} + iak_z)[(1-n) J_n(s_{20} a) + s_{20} a J_{n+1}(s_{20} a)]$$

$$S_{5,3} = C_{66}^{(0)}\left[\left(s_3^2 a^2 - 2n(n-1)\right) J_n(s_3 a) - 2s_3 a J_{n+1}(s_3 a)\right]$$

$$S_{5,4} = \left(C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right)\left[H_n^{(1)}\left(k_{L\perp,1} a\right) n(n-1) - nk_{L\perp,1} a H_{n+1}^{(1)}\left(k_{L\perp,1} a\right)\right]$$

$$S_{5,5} = \left(C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right)\left[H_n^{(2)}\left(k_{L\perp,1} a\right) n(n-1) - nk_{L\perp,1} a H_{n+1}^{(2)}\left(k_{L\perp,1} a\right)\right]$$

$$S_{5,6} = \left(C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right)\left[H_n^{(1)}\left(k_{S\perp,1} a\right) iak_z n(n-1) - ink_z a^2 H_{n+1}^{(1)}\left(k_{S\perp,1} a\right)\right]$$

$$S_{5,7} = \left(C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right)\left[H_n^{(2)}\left(k_{S\perp,1} a\right) iak_z n(n-1) - ink_z a^2 H_{n+1}^{(2)}\left(k_{S\perp,1} a\right)\right]$$

$$S_{5,8} = C_{66}^{(1)}\left[H_n^{(1)}\left(k_{S\perp,1} a\right)\left(2n(n-1) - k_{S\perp,1}^2 a^2\right) + 2k_{S\perp,1} a H_{n+1}^{(1)}\left(k_{S\perp,1} a\right)\right]$$

$$S_{5,9} = C_{66}^{(1)}\left[H_n^{(2)}\left(k_{S\perp,1} a\right)\left(2n(n-1) - k_{S\perp,1}^2 a^2\right) + 2k_{S\perp,1} a H_{n+1}^{(2)}\left(k_{S\perp,1} a\right)\right]$$

$$S_{5,10} = S_{5,11} = S_{5,12} = 0$$

$$S_{6,1} = C_{44}^{(0)}[q_{10}(s_{10}^2 a - k_z^2 a) + 2ik_z][nJ_n(s_{10} a) - s_{10} a J_{n+1}(s_{10} a)]$$

$$S_{6,2} = C_{44}^{(0)}(s_{20}^2 a - ak_z^2 + 2ik_z q_{20})[nJ_n(s_{20} a) - s_{20} a J_{n+1}(s_{20} a)]$$

$$S_{6,3} = C_{44}^{(0)} ink_z J_n(s_{30} a)$$

$$S_{6,4} = C_{44}^{(1)}\left[-2ink_zH_n^{(1)}(k_{L\perp,1}a) + 2ik_zk_{L\perp,1}aH_{n+1}^{(1)}(k_{L\perp,1}a)\right]$$

$$S_{6,5} = C_{44}^{(1)}\left[-2ink_zH_n^{(2)}(k_{L\perp,1}a) + 2ik_zk_{L\perp,1}aH_{n+1}^{(2)}(k_{L\perp,1}a)\right]$$

$$S_{6,6} = C_{44}^{(1)}(k_z^2 - k_{S\perp,1}^2)\left[anH_n^{(1)}(k_{S\perp,1}a) - k_{S\perp,1}a^2H_{n+1}^{(1)}(k_{S\perp,1}a)\right]$$

$$S_{6,7} = C_{44}^{(1)}(k_z^2 - k_{S\perp,1}^2)\left[anH_n^{(2)}(k_{S\perp,1}a) - k_{S\perp,1}a^2H_{n+1}^{(2)}(k_{S\perp,1}a)\right]$$

$$S_{6,8} = -C_{44}^{(1)}ink_zH_n^{(1)}(k_{S\perp,1}a)$$

$$S_{6,9} = -C_{44}^{(1)}ink_zH_n^{(1)}(k_{S\perp,1}a)$$

$$S_{6,10} = S_{6,11} = S_{6,12} = 0$$

2. Interface milieu entourant/Matrice $r = b$

$$S_{7,1} = S_{7,2} = S_{7,3} = 0$$
$$S_{7,4} = -nH_n^{(1)}(k_{L\perp,1}b) + k_{L\perp,1}aH_{n+1}^{(1)}(k_{L\perp,1}b)$$
$$S_{7,5} = -nH_n^{(2)}(k_{L\perp,1}b) + k_{L\perp,1}aH_{n+1}^{(2)}(k_{L\perp,1}b)$$
$$S_{7,6} = -iak_z\left[nH_n^{(1)}(k_{S\perp,1}b) - k_{S\perp,1}aH_{n+1}^{(1)}(k_{S\perp,1}b)\right]$$
$$S_{7,7} = -iak_z\left[nH_n^{(2)}(k_{S\perp,1}b) - k_{S\perp,1}aH_{n+1}^{(2)}(k_{S\perp,1}b)\right]$$
$$S_{7,8} = -nH_n^{(1)}(k_{S\perp,1}b)$$
$$S_{7,9} = -nH_n^{(2)}(k_{S\perp,1}b)$$
$$S_{7,10} = (1 + q_{12}ibk_z)\left[nH_n^{(1)}J_n(s_{12}b) - s_{12}b\,H_{n+1}^{(1)}(s_{12}b)\right]$$
$$S_{7,11} = (q_{22} + ibk_z)\left[nH_n^{(1)}(s_{22}b) - s_{22}bH_{n+1}^{(1)}(s_{22}b)\right]$$
$$S_{7,12} = nH_n^{(1)}(s_{32}b)$$

$$S_{8,1} = S_{8,2} = S_{8,3} = 0$$
$$S_{8,4} = nH_n^{(1)}(k_{L\perp,1}b)$$
$$S_{8,5} = nH_n^{(2)}(k_{L\perp,1}b)$$
$$S_{8,6} = inak_zH_n^{(1)}(k_{S\perp,1}b)$$
$$S_{8,7} = inak_zH_n^{(2)}(k_{S\perp,1}b)$$
$$S_{8,8} = nH_n^{(1)}(k_{S\perp,1}b) - k_{S\perp,1}bH_{n+1}^{(1)}(k_{S\perp,1}b)$$
$$S_{8,9} = nH_n^{(2)}(k_{S\perp,1}b) - k_{S\perp,1}bH_{n+1}^{(2)}(k_{S\perp,1}b)$$
$$S_{8,10} = (-n - inbk_zq_{12})H_n^{(1)}(s_{12}b)$$
$$S_{8,11} = (-nq_{22} - inbk_z)H_n^{(1)}(s_{22}b)$$
$$S_{8,12} = -nH_n^{(1)}(s_{32}b) + s_{32}bH_{n+1}^{(1)}(s_{32}b)$$

$$S_{9,1} = S_{9,2} = S_{9,3} = 0$$

$$S_{9,4} = -ik_z H_n^{(1)}(k_{L\perp,1}b)$$
$$S_{9,5} = -ik_z H_n^{(2)}(k_{L\perp,1}b)$$
$$S_{9,6} = -bk_{S\perp,1}^2 H_n^{(1)}(k_{S\perp,1}b)$$
$$S_{9,7} = -bk_{S\perp,1}^2 H_n^{(2)}(k_{S\perp,1}b)$$
$$S_{9,8} = 0$$
$$S_{9,9} = 0$$
$$S_{9,10} = (bs_{12}^2 q_{12} + ik_z)H_n^{(1)}(s_{12}b)$$
$$S_{9,11} = (bs_{22}^2 + ik_z q_{22})H_n^{(1)}(s_{22}b)$$
$$S_{9,12} = 0$$

$$S_{10,1} = S_{10,2} = S_{10,3} = 0$$
$$S_{10,4} = -\left[C_{11}^{(1)}(n^2 - n - k_{L\perp,1}^2 b^2) + C_{12}^{(1)} n(1-n) - C_{13}^{(1)} k_z a^2\right] H_n^{(1)}(k_{L\perp,1}b) + \left(C_{12}^{(1)} - C_{11}^{(1)}\right) k_{L\perp,1} b H_{n+1}^{(1)}(k_{L\perp,1}b)$$

$$S_{10,5} = -\left[C_{11}^{(1)}(n^2 - n - k_{L\perp,1}^2 b^2) + C_{12}^{(1)} n(1-n) - C_{13}^{(1)} k_z a^2\right] H_n^{(2)}(k_{L\perp,1}b) + \left(C_{12}^{(1)} - C_{11}^{1}\right) k_{L\perp,1} b H_{n+1}^{(2)}(k_{L\perp,1}b)$$
$$S_{10,6} = -ibk_z\left(C_{11}^{(1)} - C_{13}^{(1)}\right)\left[(n^2 - n - k_{S\perp,1}b)H_n^{(1)}(k_{S\perp,1}b) + k_{S\perp,1} b H_{n+1}^{(1)}(k_{S\perp,1}b)\right] - \left(C_{12}^{(1)} - C_{13}^{(1)}\right) ibk_z\left[nH_n^{(1)}(k_{S\perp,1}b) - k_{S\perp,1} b\, H_{n+1}^{(1)}(k_{S\perp,1}b)\right] - \left(C_{13}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right) ibn^2 k_z H_n^{(1)}(k_{S\perp,1}b)$$
$$S_{10,7} = -ibk_z\left(C_{11}^{(1)} - C_{13}^{(1)}\right)\left[(n^2 - n - k_{S\perp,1}b)H_n^{(2)}(k_{S\perp,1}b) + k_{S\perp,1} b H_{n+1}^{(2)}(k_{S\perp,1}b)\right] - \left(C_{12}^{(1)} - C_{13}^{(1)}\right) ibk_z\left[nH_n^{(2)}(k_{S\perp,1}b) - k_{S\perp,1} b\, H_{n+1}^{(2)}(k_{S\perp,1}b)\right] - \left(C_{13}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right) ibn^2 k_z H_n^{(2)}(k_{S\perp,1}b)$$
$$S_{10,8} = -\left(C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right) n\left[(n-1)H_n^{(1)}(k_{S\perp,1}b) - k_{S\perp,1} b H_{n+1}^{(1)}(k_{S\perp,1}b)\right]$$

$$S_{10,9} = -\left(C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right) n\left[(n-1)H_n^{(2)}(k_{S\perp,1}b) - k_{S\perp,1} b H_{n+1}^{(2)}(k_{S\perp,1}b)\right]$$

$$S_{10,10} = \left[C_{11}^{(2)} + ibk_z q_{12}\left(C_{11}^{(2)} - C_{13}^{(2)}\right)\right]\left[(n^2 - n - s_{12}^2 b^2)H_n^{(1)}(s_{12}b) + s_1 b H_{n+1}^{(1)}(s_{12}b)\right] + \left[C_{12}^{(2)} + \left(C_{12}^{(2)} - C_{13}^{(2)}\right) ibk_z q_{12}\right]\left[nH_n^{(1)}(s_{12}b) - s_{12} b H_{n+1}^{(1)}(s_{12}b)\right] + \left[-C_{13}^{(2)} k_z^2 b^2 - C_{12}^{(2)} n^2 + \left(C_{13}^{(2)} - C_{12}^{(2)}\right) ibn^2 q_{12} k_z\right] H_n^{(1)}(s_{12}b)$$
$$S_{10,11} = \left[C_{11}^{(2)} q_{22} + ibk_z\left(C_{11}^{(2)} - C_{13}^{(2)}\right)\right]\left[(n^2 - n - s_{22}^2 b^2)H_n^{(1)}(s_2 b) + s_{22} b H_{n+1}^{(1)}(s_{22}b)\right] + \left[C_{12}^{(2)} q_{22} + \left(C_{12}^{(2)} - C_{13}^{(2)}\right) ibk_z\right]\left[nH_n^{(1)}(s_{22}b) - s_{22} b H_{n+1}^{(1)}(s_{22}b)\right] + \left[-C_{13}^{(2)} k_z^2 q_{22} b^2 - C_{12}^{(2)} n^2 q_{22} + \left(C_{13}^{(2)} - C_{12}^{(2)}\right) ibn^2 k_z\right] H_n^{(1)}(s_{22}b)$$
$$S_{10,12} = \left(C_{11}^{(2)} - C_{12}^{(2)}\right) n\left[(n-1)H_n^{(1)}(s_{32}b) - s_{32} b H_{n+1}^{(1)}(s_{32}b)\right]$$

$$S_{11,1} = S_{11,2} = S_{11,3} = 0$$
$$S_{11,4} = \left(C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right)\left[H_n^{(1)}(k_{L\perp,1}b)n(n-1) - nk_{L\perp,1}bH_{n+1}^{(1)}(k_{L\perp,1}b)\right]$$
$$S_{11,5} = \left(C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right)\left[H_n^{(2)}(k_{L\perp,1}b)n(n-1) - nk_{L\perp,1}bH_{n+1}^{(2)}(k_{L\perp,1}a)\right]$$
$$S_{11,6} = \left(C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right)\left[H_n^{(1)}(k_{S\perp,1}b)ibk_z n(n-1) - ink_z b^2 H_{n+1}^{(1)}(k_{S\perp,1}b)\right]$$
$$S_{11,7} = \left(C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}\right)\left[H_n^{(2)}(k_{S\perp,1}b)iak_z n(n-1) - ink_z b^2 H_{n+1}^{(2)}(k_{S\perp,1}b)\right]$$
$$S_{11,8} = C_{66}^{(1)}\left[H_n^{(1)}(k_{S\perp,1}b)\left(2n(n-1) - k_{S\perp,1}^2 b^2\right) + 2k_{S\perp,1}bH_{n+1}^{(1)}(k_{S\perp,1}b)\right]$$
$$S_{11,9} = C_{66}^{(1)}\left[H_n^{(2)}(k_{S\perp,1}b)\left(2n(n-1) - k_{S\perp,1}^2 b^2\right) + 2k_{S\perp,1}bH_{n+1}^{(2)}(k_{S\perp,1}b)\right]$$
$$S_{11,10} = n\left(C_{11}^{(2)} - C_{12}^{(2)}\right)(1 + ibq_{12}k_z)\left[(1-n)H_n^{(1)}(s_{12}b) + s_{12}bH_{n+1}^{(1)}(s_{12}b)\right]$$
$$S_{11,11} = n\left(C_{11}^{(2)} - C_{12}^{(2)}\right)(q_{22} + ibk_z)\left[(1-n)H_n^{(1)}(s_2 b) + s_{22}b(s_{22}b)\right]$$
$$S_{11,12} = C_{66}^{(2)}\left[\left(s_{32}^2 b^2 - 2n(n-1)\right)H_n^{(1)}(s_{32}2b) - 2s_{32}bH_{n+1}^{(1)}(s_{32}2b)\right]$$

$$S_{12,1} = S_{12,2} = S_{12,3} = 0$$
$$S_{12,4} = C_{44}^{(1)}\left[-2ink_z H_n^{(1)}(k_{L\perp,1}b) + 2ik_z k_{L\perp,1}bH_{n+1}^{(1)}(k_{L\perp,1}b)\right]$$
$$S_{12,5} = C_{44}^{(1)}\left[-2ink_z H_n^{(2)}(k_{L\perp,1}b) + 2ik_z k_{L\perp,1}bH_{n+1}^{(2)}(k_{L\perp,1}b)\right]$$
$$S_{12,6} = C_{44}^{(1)}\left(k_z^2 - k_{S\perp,1}^2\right)\left[bnH_n^{(1)}(k_{S\perp,1}b) - k_{S\perp,1}b^2 H_{n+1}^{(1)}(k_{S\perp,1}b)\right]$$
$$S_{12,7} = C_{44}^{(1)}\left(k_z^2 - k_{S\perp,1}^2\right)\left[bnH_n^{(2)}(k_{S\perp,1}b) - k_{S\perp,1}b^2 H_{n+1}^{(2)}(k_{S\perp,1}b)\right]$$
$$S_{12,8} = -C_{44}^{(1)}ink_z H_n^{(1)}(k_{S\perp,1}b)$$
$$S_{12,9} = -C_{44}^{(1)}ink_z H_n^{(1)}(k_{S\perp,1}b)$$
$$S_{12,10} = C_{44}^{(2)}[q_{12}(s_{12}^2 b - k_z^2 b) + 2ik_z]\left[nH_n^{(1)}(s_{12}b) - s_1 bH_{n+1}^{(1)}(s_{12}b)\right]$$
$$S_{12,11} = C_{44}^{(2)}(s_{22}^2 b - bk_z^2 + 2ik_z q_{22})\left[nH_n^{(1)}(s_{22}b) - s_{22}bH_{n+1}^{(1)}(s_{22}b)\right]$$
$$S_{12,12} = C_{44}^{(2)}ink_z H_n^{(1)}(s_{32}b)$$

3. Onde incidente

B est une matrice 12x1 contenant les déplacement et contraintes associés à l'onde incidente en $r = b$.

On a vu dans l'annexe E que les éléments de B dépendaient de la polarisation de l'onde incidente. Dans le cas présenté ici le milieu entourant est isotrope transverse ; ainsi les expressions de B seront, pour le cas d'une onde incidente longitudinale

$B_i = 0 \ , \qquad i = 1 \dots 6 \ ,$

$B_i = B_{i,L} + q_{12} B_{i,SV} \ \ , \ \ i = 7 \dots 12.$

Pour le cas d'une onde de cisaillement polarisée dans le plan d'incidence P_{13}

$B_i = 0 \ , \qquad i = 1 \dots 6 \ ,$

$B_i = q_{22} B_{i,L} + B_{i,SV} \ \ , \ \ i = 7 \dots 12.$

Pour le cas d'une onde de cisaillement polarisée perpendiculairement à l'axe des fibres :

$B_i = 0 \ , \qquad i = 1 \dots 6 \ ,$

$B_i = B_{i,SH} \ \ , \ \ i = 7 \dots 12 \ ,$

avec B_L, B_{SV} et B_{SH} les expressions de B correspondantes respectivement à l'incidence d'une onde L, SV ou SH données en annexe E.

Annexe G.

Obtention des potentiels à l'intérieur du cylindre pour une incidence dépassant tous les angles critiques à l'intérieur de celui-ci

Nous avons pu voir dans le corps du document qu'une fois tous les angles critiques à l'intérieur de la fibre dépassés, les potentiels pouvaient être supposés de la forme

$$\begin{cases} \phi_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n\, I_n(sr) e^{in\theta} e^{ik_z z} \\ \chi_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n\, I_n(sr) e^{in\theta} e^{ik_z z} \\ \psi_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n\, I_n(sr) e^{in\theta} e^{ik_z z} \end{cases} \tag{G.1}$$

où I_n sont les fonctions de Bessel modifiées de première espèce et s est réel pur.

On effectue ensuite les mêmes développements que ceux présentés dans l'annexe D en remplaçant les expressions des potentiels (G.1) dans les équations de mouvement en fonction des potentiels (D.6)-(D.8) pour obtenir le système :

$$\begin{bmatrix} s^2[C_{11}s^2 - (C_{13}+2C_{44})^2 k_z^2 + \rho_0\omega^2] & aik_z s^2[(C_{11}-C_{13}-C_{44})s^2 - C_{44}k_z^2 + \rho_0\omega^2] & 0 \\ ik_z[(C_{13}+2C_{44})s^2 - C_{33}k_z^2 + \rho_0\omega^2] & -as^2[C_{44}s^2 - (C_{33}-C_{13}-C_{44})k_z^2 + \rho_0\omega^2] & 0 \\ 0 & 0 & s^2[C_{66}s^2 + (\rho_0\omega^2 - C_{44}k_z^2)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_n \\ E_n \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{G.2}$$

On cherche les solutions qui annulent le déterminant du système, ce qui amène

$$-s^2(s^2 - k_z^2)(C_{44}C_{11}s^4 - \xi s^2 + \zeta)\big(C_{66}s^2 + (\rho_0\omega^2 - C_{44}k_z^2)\big) = 0 \tag{G.3}$$

où

$$\xi = (C_{13}+C_{44})^2 {k_z}^2 + C_{11}(\rho\omega^2 - C_{33}{k_z}^2) + C_{44}(\rho\omega^2 - C_{44}{k_z}^2) \tag{G.4}$$

et

$$\zeta = (\rho\omega^2 - C_{44}{k_z}^2)(\rho\omega^2 - C_{33}{k_z}^2) \tag{G.5}$$

La solution $s = 0$ est triviale, la solution $s^2 = k_z^2$ est à traiter, et l'on obtient des expressions équivalentes au cas précédent pour les nombres d'onde $s_1$et s_2, à savoir :

$$s_1{}^2 = \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 4\zeta C_{11}C_{44}}}{2C_{11}C_{44}} \tag{G.6}$$

$$s_2{}^2 = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 4\zeta C_{11}C_{44}}}{2C_{11}C_{44}} \tag{G.7}$$

L'expression de s_3 est différente et devient :

$$s_3^2 = \frac{-(\rho_0\omega^2 - C_{44}k_z^2)}{C_{66}} \tag{G.8}$$

On aura donc $s_3^2 < 0$ pour $\rho_0\omega^2 > C_{44}k_z^2$

L'expression des potentiels devient alors :

$$\begin{cases} \phi = \sum_{n=0}^{\infty} [D_n I_n(s_1 r) + q_2 E_n I_n(s_2 r)] \cos n\theta \, e^{ik_z z} \\ \chi = \sum_{n=0}^{\infty} [q_1 D_n I_n(s_1 r) + E_n I_n(s_2 r)] \cos n\theta \, e^{ik_z z} \\ \psi = \sum_{n=0}^{\infty} F_n I_n(s_3 r) \sin n\theta \, e^{ik_z z} \end{cases}, \tag{G.9}$$

avec

$$q_1 = \frac{C_{11}s_1{}^2 - (C_{13} + 2C_{44})k_z^2 + \rho\omega^2}{aik_z[(C_{11} - C_{13} - C_{44})s_1{}^2 - C_{44}k_z{}^2 + \rho\omega^2]}, \tag{G.10}$$

$$q_2 = \frac{aik_z[(C_{11} - C_{13} - C_{44})s_2{}^2 - C_{44}k_z{}^2 + \rho\omega^2]}{C_{11}s_2{}^2 - (C_{13} + 2C_{44})k_z^2 + \rho\omega^2}, \tag{G.11}$$

Les expressions permettant de définir le système 12x12 de l'équation (3.39) devront ensuite être modifiées en conséquence.

Annexe H.
Échelle mésoscopique

Nous avons présenté deux méthodes dont l'objectif était de déterminer l'ensemble des coefficients d'élasticité de la couche unidirectionnelle de composite qui représente une mèche. Les résultats apportés par ces deux méthodes ne permettent cependant pas de déterminer avec une précision satisfaisante l'ensemble des coefficients de rigidité de la mèche. La méthode utilisant un modèle à trois phases sous l'incidence oblique des ondes de volumes, objet du chapitre III, nous montre cependant des résultats importants concernant la dépendance des coefficients d'élasticité à la fréquence ainsi qu'à l'angle d'incidence considéré ; on a mis en évidence que, sous les incidences auxquelles nous étions limités, certains paramètres influençaient faiblement la propagation des ultrasons dans la mèche ; leur valeur n'a donc que peu d'importance pour ces incidences.

On cherche dans cette annexe à définir les propriétés élastiques d'un milieu effectif représentatif des phénomènes d'atténuation et de dispersion ayant lieu dans le matériau à l'échelle mésoscopique. Nous nous plaçons ici dans le cadre du contrôle non Destructif de ce type de matériaux, ce qui dictera une gamme de fréquence de travail ainsi qu'une configuration particulière de contrôle.

1. Description du matériau

L'échelle mésoscopique est l'échelle du nœud représentatif. Comme nous l'avions expliqué dans l'introduction, le nœud représentatif est répété périodiquement pour former une couche tissée qui sera finalement moulée dans une résine polymère afin de donner sa forme finale à la pièce. Le volume constitué du nœud représentatif entouré de résine forme le **V**olume **E**lémentaire **R**eprésentatif ; la Figure H-1 représente la couche tissée ainsi que le nœud représentatif que nous proposons d'étudier.

Le nœud considéré ici est le nœud d'un tissage dit « plain-weave ». Nous choisissons de nous concentrer sur ce type de nœuds afin de simplifier la discussion que nous aurons tant sur son homogénéisation que sur les limitations des méthodes employées. Les développements effectués ici sont cependant applicables à des nœuds plus complexes.

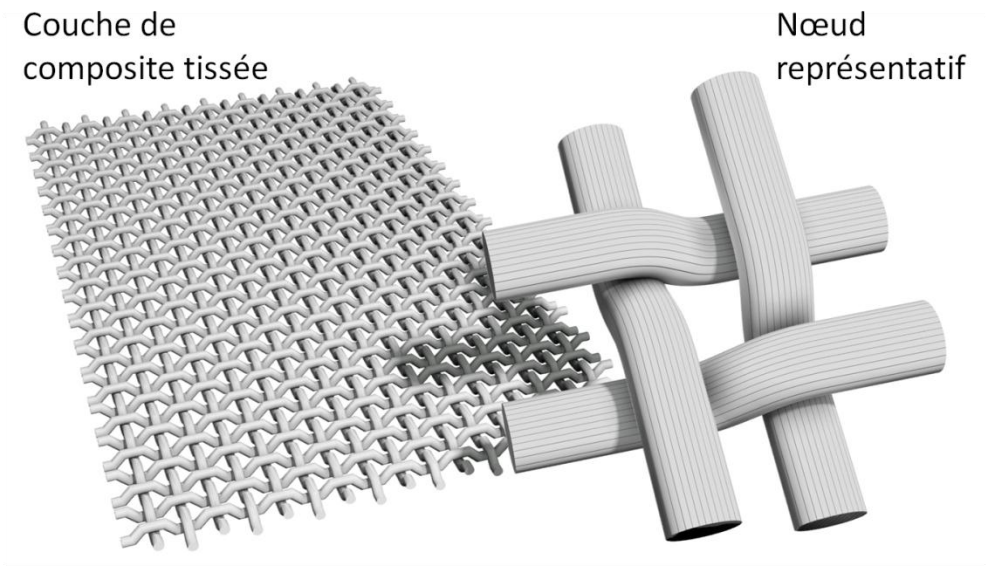

Figure H-1. Une couche de composite tissée et le nœud constitutif répété périodiquement sur l'ensemble de la couche.

Afin de simplifier l'étude du VER, nous adoptons les systèmes de coordonnées représentés sur la Figure H-2.

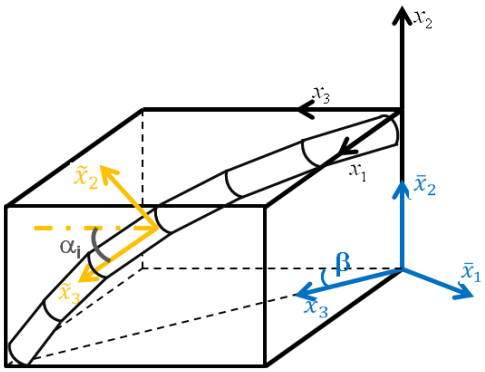

Figure H-2. Définition de trois systèmes de coordonnées permettant d'étudier le VER.

Le système noté $(x_1, x_2 x_3)$ sert de repère global pour le VER ; c'est dans celui-ci que nous exprimerons les résultats finaux de notre méthode. Nous construisons ensuite un repère désorienté d'un angle β autour de l'axe x_2 du repère précédent qui correspond au repère propre à une mèche et que l'on note $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$. Nous définissons alors un dernier repère, cette fois-ci désorienté d'un angle α_i autour de l'axe $\bar{x}_1$ du repère précédent, qui permet de décrire la courbure de la mèche, ce repère est noté $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$. Un tel système de coordonnées est inspiré de l'étude des composites tissés de (Nayfeh et Chimenti 1995).

2. Phénomènes ondulatoires

Lors de la propagation des ultrasons dans le VER, différents phénomènes ondulatoires vont avoir lieu. À l'instar de l'échelle microscopique, les phénomènes qui sont

responsables de l'atténuation ou de la dispersion des ondes se propageant dans le VER sont la viscoélasticité de la matrice et la diffusion sur les mèches.

Nous rappelons qu'en ce qui concerne la viscoélasticité, nous considérons les coefficients de rigidité de la matrice comme indépendants de la fréquence et nous utilisons ceux donnés en Annexe A.

Le phénomène de diffusion sur les mèches est quant à lui très différent à cette échelle. En effet, les hétérogénéités que sont les mèches ont cette fois-ci des dimensions proches de la longueur d'onde ; on se place donc dans le régime de diffusion où $ka \approx 1$. Dans un tel régime on s'attend à ce que la vitesse de propagation des ondes soit perturbée par la diffusion sur les mèches et qu'on observe donc de la dispersion, c'est à dire une dépendance de la vitesse à la fréquence.

Cependant, contrairement au cas de l'échelle microscopique, nous faisons ici l'hypothèse que le phénomène de diffusion sur les mèches relèvera du seul régime de la diffusion simple.

Cette hypothèse de diffusion simple est justifiée par plusieurs points. Tout d'abord, la différence entre les propriétés (rigidités, masse volumique) de la matrice et celles de la mèche homogénéisée (constituée de fibres et de matrice) est faible. Ainsi, à chaque diffraction, les ondes réfléchies auront une faible amplitude, ce qui ne permet pas la construction de chemins de diffusion cohérents entre les hétérogénéités (Figure I-5).

De plus, l'arrangement spatial du VER est moins favorable à un effet cohérent de diffusion des ondes s'y propageant, contrairement à l'arrangement unidirectionnel des fibres à l'échelle microscopique.

Enfin, la concentration en hétérogénéités dans le cas de l'échelle mésoscopique étant plus faible, le phénomène de diffusion multiple en est affaibli d'autant.

3. Définition d'une valeur statique de l'espace de recherche

Une première valeur que l'on peut calculer rend compte de la courbure des mèches ainsi que de leur nombre, mais ne prend pas en compte le phénomène de la diffusion des ondes sur les mèches. Pour effectuer ce calcul, on intègre les valeurs C_{ij}^{m} des mèches le long de la courbure et on somme sur le nombre de mèches :

$$C_{ij,struct} = \sum_{n} \int_{\alpha} C_{ij}^{m}(\alpha, \beta_n) d\alpha \quad , \qquad (1.32$$

où $C_{ij}^{m}(\alpha, \beta_n)$ est la matrice des coefficients de rigidité du tronçon désorienté d'un angle α appartenant à la n-ième mèche désorientée d'un angle β_n.

Afin de prendre en compte la concentration de matrice environnante, on applique ensuite :

$$C_{ij,noeud} = cC_{ij,struct} + (1-c)C_{ij,mat} \quad , \qquad (1.33$$

avec c la concentration de mèche dans le VER définie par :

$$c = \frac{V_{tronçon}}{V_{tot}} \, nb_{tronçon} \quad , \qquad (1.34$$

avec $V_{tronçon}$ le volume occupé par un tronçon cylindrique, V_{tot} le volume total du VER, et $nb_{tronçon}$ le nombre de tronçons dans le VER.

Cette valeur est intéressante de par la simplicité de sa définition ; elle ne rend par contre pas compte du phénomène de diffraction des ondes sur les mèches homogénéisées ; elle nous permet cependant d'avoir une idée des valeurs que vont prendre les coefficients recherchés.

Afin de donner un ordre de grandeur des valeurs recherchées, nous proposons d'utiliser comme coefficients de rigidité C_{ij}, la matrice donnée par :

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 11.68 & 6.28 & 5.10 & & & \\ 6.28 & 11.68 & 5.10 & & 0 & \\ 5.10 & 5.10 & 127 & & & \\ & & & 4.23 & & \\ & 0 & & & 4.23 & \\ & & & & & 2.70 \end{pmatrix}. \qquad (1.35$$

Cette matrice est celle obtenue par la méthode S. Lonné pour une concentration en fibre 52% ayant un rayon $a = 0.0035\, mm$ – nous ne représentons que la partie réelle des coefficients de rigidité, puisque le calcul que nous proposons ici est un calcul statique.

Nous appliquons alors la méthode détaillée précédemment à une mèche dont le détail des mesures prises pour en décrire l'ondulation est illustré par la Figure H-3.

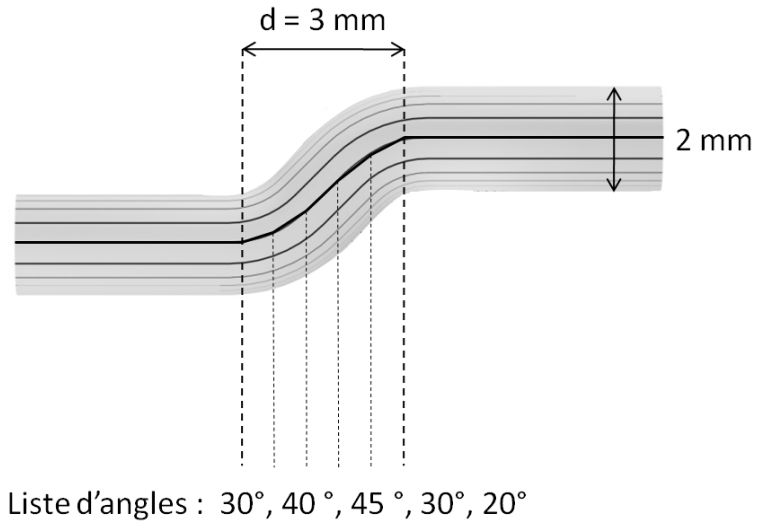

Figure H-3. Discrétisation de l'ondulation d'une mèche.

On effectue l'intégrale sur la courbure, ce qui nous donne :

$$C_{ij,mèche} = \begin{pmatrix} 10{,}01 & 5{,}13 & 4{,}62 & -0{,}34 & 0 & 0 \\ 5{,}13 & 19{,}61 & 19{,}02 & 11{,}52 & 0 & 0 \\ 4{,}62 & 19{,}02 & 69{,}96 & 21{,}74 & 0 & 0 \\ -0{,}34 & 11{,}52 & 21{,}74 & 18{,}27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}30 & 0{,}44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}44 & 2.64 \end{pmatrix}. \quad (1.36$$

En sommant ensuite avec les différentes mèches désorientées selon la direction perpendiculaire ($\beta = 90°$), on obtient la matrice de coefficients d'élasticité du nœud complet :

$$C_{ij,struct} = \begin{pmatrix} 39{,}99 & 12{,}08 & 4{,}62 & -0{,}17 & 0 & -10{,}87 \\ 12{,}08 & 15.45 & 12{,}08 & 5{,}76 & 0 & -5{,}76 \\ 4{,}62 & 12{,}08 & 39{,}99 & 10{,}87 & 0 & 0{,}17 \\ -0{,}17 & 5{,}76 & 10{,}87 & 10{,}45 & -0{,}22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}22 & 3{,}30 & 0{,}22 \\ -10{,}87 & -5{,}76 & 0{,}17 & 0 & 0{,}22 & 10{,}45 \end{pmatrix}. \quad (1.37$$

Pour le cas d'un VER comprenant 30 % de mèches, la prise en compte de la matrice en utilisant (H.2) amène :

$$C_{ij,VER} = \begin{pmatrix} 17{,}32 & 6{,}74 & 4{,}50 & -0{,}05 & 0 & -3{,}26 \\ 6{,}74 & 11{,}21 & 6{,}74 & 1{,}73 & 0 & -1{,}73 \\ 4{,}50 & 6{,}74 & 17{,}32 & 3{,}26 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}05 & 1{,}73 & 3{,}26 & 4{,}24 & -0{,}07 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}07 & 2{,}10 & 0{,}07 \\ -3{,}26 & -1{,}73 & 0{,}05 & 0 & 0{,}07 & 4{,}24 \end{pmatrix}. \quad (1.38$$

4. Homogénéisation du VER complet

1. Adaptation du modèle à trois phases au cas du VER

Nous nous intéressons maintenant à une méthode permettant d'homogénéiser dynamiquement l'ensemble du VER. On se place dans une configuration typique du contrôle des matériaux composites en considérant la propagation des ondes L (compression) en incidence normale par rapport au plan de la pièce ; cette configuration de contrôle est appelée contrôle en L0°.

La méthode que nous proposons se base sur un découpage des mèches qui composent le VER en tronçons cylindriques ; ces tronçons sont définis de manière tout à fait similaire à la représentation faite sur la Figure H-2. On va ensuite chercher à regrouper les tronçons ayant le même couple d'angle (α, β), c'est-à-dire ayant la même désorientation par rapport au plan horizontal (α) et la même direction (β) afin de les homogénéiser ensemble.

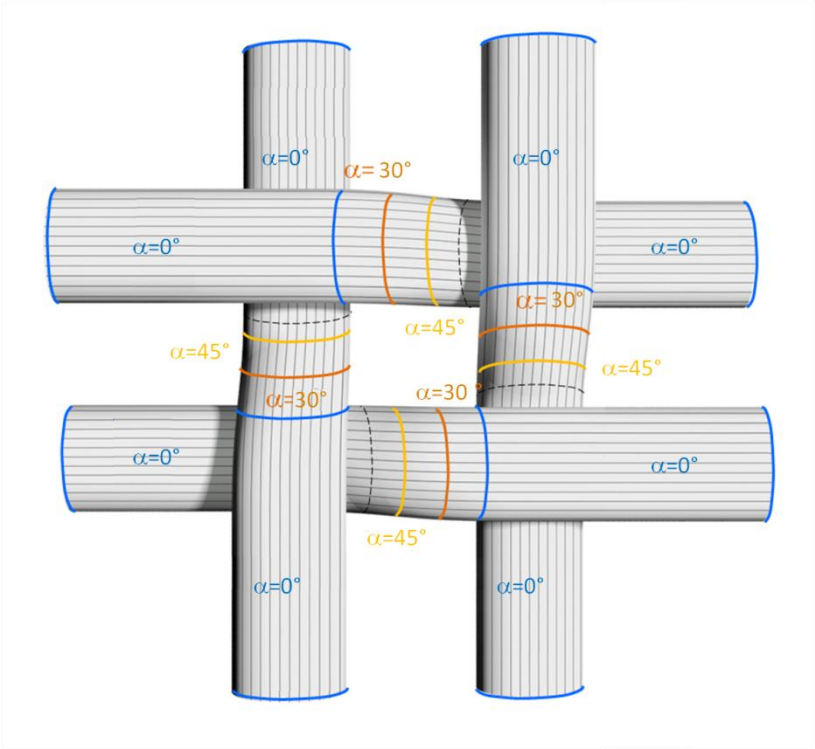

Figure H-4. Nœuds représentatif vu sous incidence L0°. La discrétisation de la courbure des mèches est représentée par les zones bleues ($\alpha = 0°$) , marron ($\alpha = 30°$), jaune ($\alpha = 45°$), etc.

On peut remarquer que, sous l'incidence L0°, l'ensemble des tronçons désorientés d'un angle α donné peuvent être considérés comme des diffuseurs identiques, indépendamment de la direction β de la mèche, de par leur symétrie isotrope transverse. En effet, la diffraction d'une onde en incidence oblique sur un cylindre ayant cette symétrie sera indépendante de l'angle azimutal θ (coordonnées cylindriques). Ainsi, les tronçons marqués en bleu sur la figure seront tous vus comme des diffuseurs identiques par l'onde L incidente ; il en est exactement de même pour les tronçons désorientés de 30° etc.

On propose ici d'utiliser la méthode développée au cours du chapitre III pour l'homogénéisation des mèches, en l'adaptant aux dimensions et à la géométrie particulière de notre problème, c'est-à-dire que le milieu à trois phases que l'on va considérer devient ici comme représenté sur la Figure H-5.

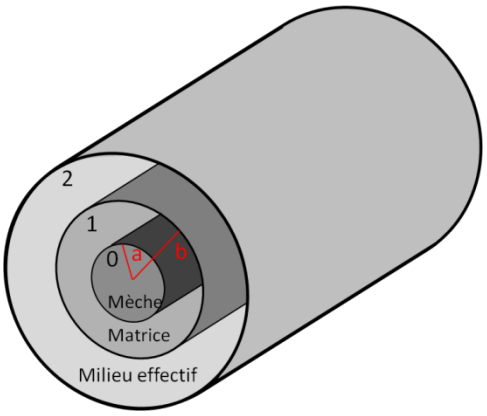

Figure H-5.Représentation du problème à trois phases. Un cylindre viscoélastique de rayon a, de symétrie isotrope transverse, représentatif des mèches (milieu 0) est entouré d'un cylindre de rayon b, isotrope et viscoélastique, constitué de matrice (milieu 1) lui-même entouré d'un cylindre d'extension infinie, isotrope transverse et viscoélastique, ayant les propriétés du milieu effectif (milieu 2).

Il est important de noter que si nous appliquions simplement la méthode aux tronçons ayant pour propriétés les $C_{ij}^{(\alpha)}$obtenus à l'aide de la première méthode, il ne serait pas tenu compte de la microstructure réelle du matériau. La concentration en tronçons sera différente selon les angles ; il nous faut donc définir un $c(\alpha)$ tel que :

$$c(\alpha) = \frac{V_{tronçon}}{V_{tot} - V_{mèche}}\, nb_{tronçon}(\alpha), \qquad (1.39$$

avec $V_{tronçon}$ le volume occupé par un tronçon, V_{tot} le volume total du VER, $V_{mèche}$ le volume occupé par les mèches et $nb_{tronçon}(\alpha)$ le nombre de tronçons désorientés d'un angle α par rapport au plan horizontal.

2. Fonction coût

Nous basant sur l'équation proposée par Kim (J. Y. Kim 2004), nous allons chercher à homogénéiser le VER complet en cherchant le jeu de coefficients de rigidité C_{ij} pour lequel l'amplitude des ondes diffractés dans la direction d'incidence est nulle, supposant alors qu'il n'y a pas de diffraction sur les mèches puisque le milieu environnant est alors le milieu effectif.

Dans ce but, on cherche à appliquer le modèle à trois phases sur l'ensemble des angles α_i suivant lesquels sont désorientés les tronçons. La méthode de convergence fonctionne alors comme évoqué dans le chapitre III lorsque nous cherchions à homogénéiser la couche unidirectionnelle sur un ensemble d'angles ; cette méthode est représentée sur la Figure III-13. La fonction coût que l'on souhaite minimiser ici est tirée de l'équation proposée par Kim et aura pour expression :

$$F = \sum_j \left| f_p^{(j)}(0) \right| \quad , \quad p = L, SV, SH. \qquad (1.40$$

avec $f_p^{(j)}$ la fonction d'amplitude de diffraction correspondant à une onde incidente de type p sur un tronçon désorienté d'un angle α_j par rapport au plan horizontal.

3. Calcul d'une valeur non représentative de la microstructure permettant de prendre en compte la diffusion sur les mèches.

Dans un premier temps, on définit une valeur qui rend compte de la diffusion de l'onde sur les mèches ; elle ne tient cependant pas compte de la microstructure du matériau. Cette valeur est obtenue en appliquant le modèle à trois phases en incidence oblique à un ensemble de *mèches* parallèles. La différence avec l'idée précédente réside dans le fait que l'on n'ait qu'une seule direction d'incidence et une seule concentration associée. La valeur que nous obtenons par ce calcul nous permet d'avoir un ordre de grandeur, pour les coefficients de rigidité, tenant compte de la diffusion sur les mèches contrairement au calcul statique précédent. Ce calcul surestimera le phénomène de diffusion multiple car il ajoute une cohérence géométrique au milieu.

Afin de nous affranchir des problèmes soulevés au cours du chapitre III concernant l'incidence oblique des ondes de volumes sur les fibres, nous considérons ici l'incidence normale des ondes sur les mèches avec une concentration $c = 0{,}3$ en mèches de rayon $a = 1\ mm$. On obtient :

$$C_{ij,mèches} = \begin{pmatrix} 8.31-0.33i & 4.65-0.07i & 5.10 & & & \\ 4.65-0.07i & 8.31-0.33i & 5.10 & & 0 & \\ 5.10 & 5.10 & 127 & & & \\ & & & 2.06-0.21i & & \\ & 0 & & & 2.06-0.21i & \\ & & & & & 1.83-0.13i \end{pmatrix}. \qquad (1.41$$

Le même traitement que dans la section 3 est ensuite appliqué à la partie réelle de la matrice (H.10) mais cette fois ci sans la prise en compte de la fraction volumique de matrice époxy donné par (H.2) puisque le résultat (H.10) en tient déjà compte. On a alors :

$$C_{ij,VER} = \begin{pmatrix} 35{,}08 & 12{,}71 & 4{,}26 & 0{,}07 & 0 & -11{,}12 \\ 12{,}71 & 19 & 12{,}71 & 6{,}98 & 0 & -6{,}98 \\ 4{,}26 & 12{,}71 & 35{,}08 & 11{,}12 & 0 & -0{,}07 \\ 0{,}07 & 6{,}98 & 11{,}12 & 10{,}18 & -0{,}04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}04 & 1{,}71 & 0{,}04 \\ -11{,}12 & -6{,}98 & -0{,}07 & 0 & 0{,}04 & 10{,}18 \end{pmatrix}. \qquad (1.42$$

On remarque que les résultats obtenus en (H.11) sont proches des résultats obtenus en (H.6) avant la prise en compte de la fraction volumique dans le VER.

4. Limitations

Nous avons développé, au cours du chapitre III, une méthode permettant d'obtenir les coefficients de rigidité d'un milieu effectif représentatif des phénomènes ondulatoires complexes qui avaient lieu à l'échelle microscopique en considérant des ondes de volumes en incidence oblique sur la couche unidirectionnelle de composite supposée équivalente à la mèche. Nous avons aussi montré que l'application de cette méthode était limitée aux seuls angles d'incidence inférieurs au premier angle critique ; cet angle critique correspondait à l'onde de compression qui n'était alors plus générée dans la fibre. L'application de cette méthode à l'échelle mésoscopique nous fait considérer cette fois-ci un modèle à trois phases constitué de la mèche entourée de matrice elle-même entourée du milieu effectif recherché, ainsi que le représente la Figure H-5.

Si l'on représente maintenant les courbes de lenteur de la mèche et du milieu entourant, obtenues respectivement à partir des rigidités présentées en (H.4) et (H.5), sur la Figure H-6 on observe que le premier angle critique sera celui des ondes longitudinales dans la mèche et que nous pourrons par conséquent appliquer la méthode à une gamme d'angles légèrement plus large que dans le cas de l'échelle microscopique. Nous plaçant dans le cadre d'un contrôle de ce type de matériau en L0°, nous pouvons envisager d'appliquer la méthode sur les matériaux dont aucun des angles α_j ne dépasse la valeur limite fixée par k_{z0} à partir du mode SH incident.

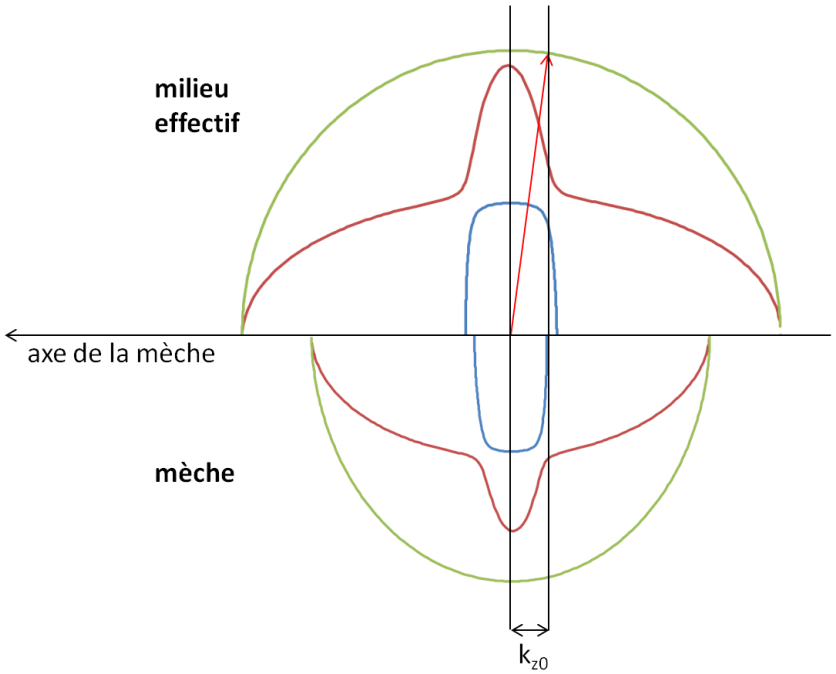

Figure H-6. Les courbes de lenteurs de la mèche et de la matrice sont représentées.

Cet angle dépend des coefficients d'élasticité de la mèche et des résultats de l'étape d'homogénéisation à l'échelle microscopique, et celui-ci pourra varier selon les propriétés

des mèches. Cependant, les valeurs que nous avons utilisées sont des valeurs usuelles pour ce type de matériaux.

L'angle d'incidence pris en compte dans le calcul correspond, vis-à-vis d'une incidence en L0°, à l'angle de désorientation α du tronçon. Ainsi, le calcul proposé n'est applicable qu'aux structures dont les tronçons sont au maximum désorientés d'un angle égal à cet angle critique.

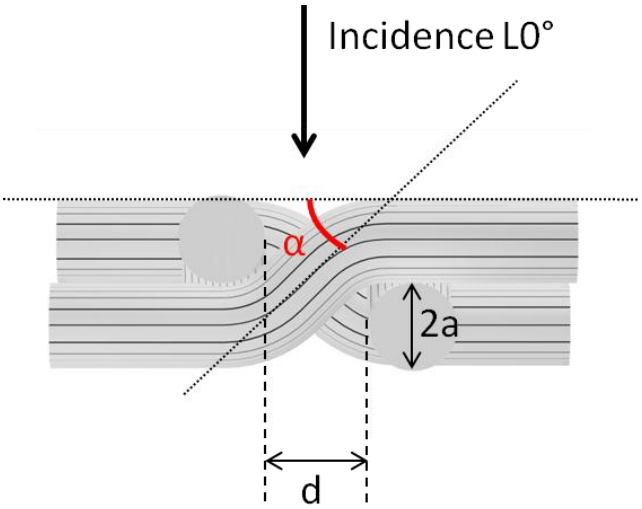

Figure H-7. Représentation paramétrique de la géométrie du nœud.

Le calcul ne peut donc s'appliquer qu'à des structures pour lesquelles la valeur de la distance minimale d entre les mèches est donnée par :

$$d = \frac{2a}{\tan(\alpha_c)} \ , \qquad (1.43$$

avec a le rayon de la mèche et α_c la valeur du premier angle critique.

On montre, à partir de la Figure H-7 et des résultats obtenus par le modèle à trois phases, que l'angle maximal de désorientation des tronçons de la structure pour la matrice d'élasticité (H.4), ne dépasse pas 6°. Pour des mèches de rayon $a = 1\ mm$ la formule (H.6) conduit à une distance minimale entre les mèches de $d = 20\ mm$. Les fréquences typiques de contrôles de ces matériaux sont d'environ 1 MHz, ce qui correspond à des longueurs d'onde de l'ordre du millimètre pour les ondes SH. Le VER aura donc des dimensions supérieures d'un ordre de grandeur par rapport à la longueur d'onde, ce qui sort du cadre de l'homogénéisation.

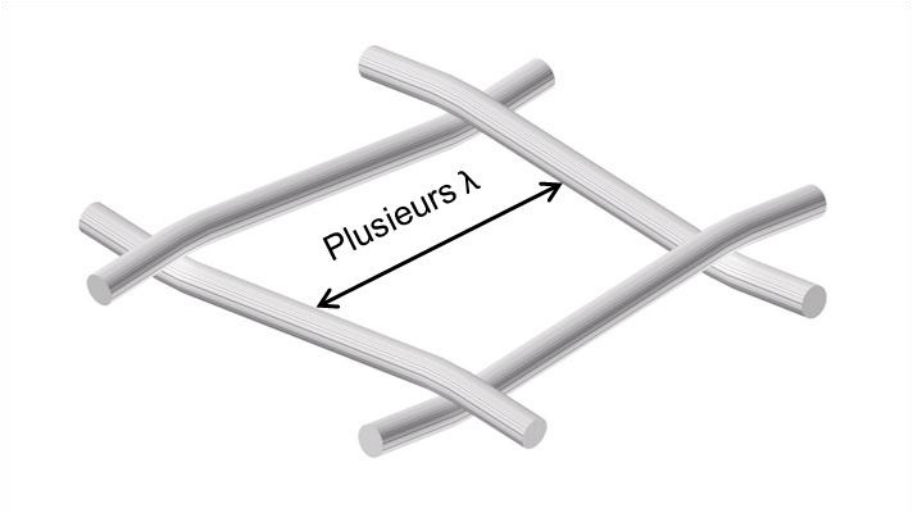

Figure H-8. Représentation, à l'échelle, d'un nœud dans le cas de mèche de rayon $a = 1\ mm$ *désorienté d'un angle maximum* $\alpha = 6°$ *par rapport à l'horizontale.*

5. Conclusion

En considérant les mèches comme une succession de tronçons cylindriques droits désorientés, il est possible de définir une valeur statique (partie réelle des coefficients de rigidité) prenant en compte les ondulations par le biais d'une intégration. Le nombre de mèches présentes dans le VER est ensuite pris en compte par une somme des coefficients d'élasticité. L'ensemble est ensuite pondéré en termes de fraction volumique en tenant compte de la matrice entourant les mèches.

Nous avons ensuite proposé d'utiliser la méthode d'homogénéisation dynamique développée au chapitre III, pour homogénéiser le VER complet, où la prise en compte de la structure tissée du matériau se fait par l'ajout d'une concentration dépendante de l'angle de désorientation α des tronçons. Compte tenu de la limitation de la méthode d'homogénéisation à des angles d'incidence sur les éléments diffractants inférieurs au premier angle critique, l'application pratique de cette méthode aux matériaux typiques conduit à la possibilité de traitement de structures sortant géométriquement du cadre de notre étude.

Une fois traitée la question des angles critiques pour la diffraction dans le modèle à trois phases, il deviendra possible d'appliquer la méthode dynamique décrite dans cette annexe à des matériaux à mésostructure réaliste.