Sur la convergence sous-exponentielle de processus de Markov

Xinyu Wang

N° d'Ordre: D.U. 2253

UNIVERSITE BLAISE PASCAL

U.F.R. Sciences et Technologies

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES
N° 718

THESE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITE

Spécialité:
Mathématiques Appliquées

Par **WANG Xinyu**

Master Université de Wuhan

Sur la convergence sous-exponentielle de processus de Markov

Soutenue publiquement le 4 Juillet 2011, devant la commission d'examen.

Président :	WU Liming,	Professeur	
Examinateurs:	BOLLEY François,	Maître de conférences	
	CATTIAUX Patrick,	Professeur	(Rapporteur)
	CHUPIN Laurent,	Professeur	
	GENTIL Ivan,	Professeur	(Rapporteur)
	GUILLIN Arnaud,	Professeur	

Remerciements

Je souhaite en premier lieu exprimer toute ma gratitude à Arnaud Guillin et Liming WU pour ces trois année de travail passionnant. Je leur suis infiniment reconnaissant, non seulement pour leur encadrement scientifique, mais aussi pour leur confiance et leur soutien.

Je remercie très sincérement Patrick Cattiaux et Ivan Gentil d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Je suis très honoré par leur lecture attentive de ce manuscrit, leurs précieux commentaires et leur intérêt pour mon travail.

Je remercie chaleureusement Francois Bolley et Laurent Chupin pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de participer à mon jury de thèse.

Je n'oublie pas de saluer l'ensemble des membres du laboratoire de Mathématiques de l'UBP ainsi que les autres thésards qui ont traversé ces trois années avec moi. Je pense à Valère Bitseki Penda, Jöel Cohen, Mariane Chatard, Mehdi FHIMA, Stéphane Charpentier, Hacène Djellout, Damien Ferney et Cédric Barrel.

J'adresse mes plus sincères remerciements aux personnels administratifs du laboratoire de Mathématiques de l'UBP, à savoir : Valérie Sourlier, Karine Darot.

Je terminerai en remerciant évidemment ma famille et ma belle famille qui m'ont beaucoup soutenu pendant ces trois années. Merci à mes amis en France : Huanxiu Guo et Hang Xiong.

Avec beaucoup de tendresse, merci Shulan pour ton soutien et ta patience.

The highest form of pure thought is in mathematics

Plato

Résumé

Ma thèse de doctorat se concentre principalement sur le comportement en temps long des processus de Markov, les inégalités fonctionnelles et les techniques relatives. Plus spécifiquement, Je vais présenter les taux de convergence sous-exponentielle explicites des processus de Markov dans deux approches : la méthode Meyn-Tweedie et l'hypocoercivité (faible). Le document se divise en trois parties.

Dans la première partie, Je vais présenter quelques résultats importants et des connaissances connexes. D'abord, un aperçu de mon domaine de recherche sera donné. La convergence exponentielle (ou sous-exponentielle) des chaînes de Markov et des processus de Markov (à temps continu) est un sujet d'actualité dans la théorie des probabilité. La méthode traditionnelle développée et popularisée par Meyn-Tweedie est largement utilisée pour ce problème. Dans la plupart des résultats, le taux de convergence n'est pas explicite, et certains d'entre eux seront brièvement présentés. De plus, la fonction de Lyapunov est cruciale dans l'approche Meyn-Tweedie, et elle est aussi liée à certaines inégalités fonctionnelles (par exemple, inégalité de Poincaré). Cette relation entre fonction de Lyapounov et inégalités fonctionnelles sera donnée avec les résultats au sens L^2. En outre, pour l'exemple de l'équation cinétique de Fokker-Planck, un résultat de convergence exponentielle explicite de la solution sera introduite à la manière de Villani : l'hypocoercivité. Ces contenus sont les fondements de mon travail, et mon but est d'étudier la décroissance sous-exponentielle.

La deuxième partie, fait l'objet d'un article écrit en coopération avec d'autres sur les taux de convergence sous-exponentielle explicites des processus de Markov à temps continu. Comme nous le savons, les résultats sur les taux de convergence explicites ont été donnés pour le cas exponentiel. Nous les étendons au cas sous-exponentielle par l'approche Meyn-Tweedie. La clé de la preuve est l'estimation du temps de passage dans un ensemble "petite", obtenue par Douc, Fort et Guillin, mais pour laquelle nous donnons une preuve plus simple. Nous utilisons aussi la construction du couplage et donnons une ergodicité sous-exponentielle explicite. Enfin, nous donnons quelques applications numériques.

Dans la dernière partie, mon second article traite de l'équation cinétique de Fokker-Planck. Je prolonge l'hypocoercivité à l'hypocoercivité faible qui correspond à inégalité de Poincaré faible. Grâce à cette extension, on peut obtenir le taux de convergence explicite de la solution, dans des cas sous-exponentiels. La convergence est au sens H^1 et au sens L^2. À la fin de ce document, j'étudie le cas de l'entropie relative comme Villani, et j'obtiens la convergence au sens de l'entropie. Enfin, Je donne deux exemples pour les potentiels qui impliquent l'inégalité de Poincaré faible ou l'inégalité de Sobolev logarithmique faible pour la mesure invariante.

Mots clés : méthode de couplage, ergodicité, hypocoercivité, équation cinétique de Fokker-Planck, fonction de Lyapunov, processus de Markov, ensemble petite, ensemble petit, inégalité de Poincaré faible, inégalités de Sobolev logarithmique faible.

Abstract

My Ph.D dissertation mainly focuses on long time behavior of Markov processes, functional inequalities and related techniques. More specifically, I will present the computable sub-exponential convergence rate of the Markov process in two approaches : Meyn-Tweedie's method and (weak) hypocoercivity. The paper consists of three parts.

In the first part, I will introduce some important results and related knowledge. Firstly, overviews of my research field are given. Exponential (or sub-exponential) convergence of Markov chains and (continuous time) Markov processes is a hot issue in probability. The traditional method - Meyn-Tweedie's approach is widely applied for this problem. Most of the results about convergence rate is not explicit, and some of them will be introduced briefly. In addition, Lyapunov function is crucial in Meyn-Tweendie's aproach, and it is also related to some functional inequalities (for example, Poincaré inequality). The relationship of them will be given with results in L^2 sense. Furthermore, as a example of kinetic Fokker-Planck equation, a computable result of exponential convergence of the solution of it will be introduced in Villani' way - hypocoercivity. These contents are foundations of my work, and my destination is to study the sub-exponential decay.

In the second part, it is my article cooperated with others about sub-exponential convergence rate of continuous time Markov processes. As we all know, the explicit results of convergence rate is about the exponential case. We extend them to sub-exponential case in Meyn-Tweedie's approach. The key of the proof is the estimation of the hitting time to small set which was got by Douc, Fort and Guillin, for which we also propose an alternative simpler proof. We also use coupling construction as others and give a quantitative sub-exponential ergodicity. At last, we give some calculations for examples.

In the last part, my second article deal with the kinetic Fokker-Planck equation. I extend the hypocoercivity to weak hypocoercivity which correspond to weak Poincaré inequality. Through the extension, one can get the computable rate of convergence of the solution, which is also sub-exponential case. The convergence is in H^1 sense and in L^2 sense. In the end of this paper, I study the relative entropy case as C.Villani, and get convergence in entropy. Finally, I give two examples for potentials that implies weak Poincaré inequality or weak logarithmic Sobolve inequality for invarient measure.

Mots clés : coupling method, ergodicity, hypocoercivity, kinetic Fokker-Planck equation, Lyapunov function, Markov process, petite set, small set, weak Poincaré inequality, weak logarithmic Sobolev inequality.

Table des matières

I Présentation générale des résultats 3

1 Aperçu de la thèse 4

1.1 Introduction . . . 4

1.1.1 Définition et notation du processus de Markov . . . 4

1.1.2 Processus de Markov et ergodicité : un bref rappel historique 4

1.1.3 Semi-groupe, mesure invariante, et processus de Markov réversible . . . 5

1.1.4 Processus de Markov conduit par une équation différentielle stochastique . . . 6

1.2 Ergodicité exponentielle des chaînes et processus de Markov . . . 7

1.2.1 Ergodicité exponentielle des chaînes de Markov . . . 7

1.2.2 Bornes quantitatives pour les taux de convergence exponentielles de processus de Markov . . . 8

1.3 Inégalité de Poincaré et temps d'atteinte . . . 10

1.4 Convergence sous-exponentielle des processus de Markov . . . 11

1.5 Inégalité fonctionnelle et L^2-décroissance de processus de Markov 12

1.5.1 Le lien entre inégalité de Poincaré (faible) et la convergence L^2 (sous) exponentielle . . . 13

1.5.2 De Lyapunov à Poincaré et vice versa . . . 14

1.5.3 Inégalité de Lyapunov-Poincaré et fonction de Lyapunov . 15

1.5.4 Inégalité faible de Sobolev logarithmique et convergence pour l'entropie . . . 17

1.6 Un autre aperçu sur l'ergodicité des chaînes de Markov . . . 18

1.7 Hypocoercivité et décroissance exponentielle . . . 19

1.7.1 Opérateur $L = A^*A + B$, coercivité et hypocoercivité . . 20

1.8 L'équation linéaire cinétique de Fokker-Planck . . . 21

1.8.1 Une nouvelle norme équivalente à $\mathcal{H}^1$ . . . 22

1.8.2 Hypocoercivité et convergence exponentielle dans le sens H^1 et L^2 . . . 22

1.8.3 Convergence exponentielle au sens entropique . . . 23

1.8.4 Comparaison entre les approches habituelles . . . 24

2 Convergence sous-exponentielle de processus de Markov en temps continu **26**
2.1 Taux de convergence explicites sous-exponentielles en temps discret 26
2.2 Les hypothèses et les définitions 28
2.2.1 *Petite ensemble et* $\mathbf{D}(\mathbf{C},\mathbf{V},\phi,b)$ 28
2.2.2 Conditions de Lyapunov pour $\mathbf{D}(\mathbf{C},\mathbf{V},\phi,b)$ 29
2.3 Une estimation des moments de temps de retour 30
2.4 Résultats principaux et les preuves 30
2.4.1 Taux sous-exponentielle de convergence 30
2.4.2 La construction de la trajectoire 31
2.4.3 Condition de dérive bivariée et contrôle du temps de régénération 32
2.4.4 Preuves 33
2.5 Application et exemple 34
2.5.1 Le cas réversible 34
2.6 Problèmes ouverts 37

3 Convergence sous-exponentielle dans l'équation cinétique linéaire de Fokker-Planck **38**
3.1 Construction de la nouvelle norme 38
3.2 Convergence sous-exponentielle dans H^1 et dans L^2 39
3.2.1 Convergence sous-exponentielle dans H^1 39
3.2.2 Convergence sous-exponentielle dans L^2 40
3.3 Convergence sous-exponentielle dans le sens entropique 40
3.3.1 entropie modifiée 41
3.3.2 Inégalité de Sobolev logarithmique faible et l'équation cinétique de Fokker-Planck 41
3.4 Deux exemples 42
3.4.1 Potentiels comme $(1+\alpha)\log(1+|x|)$ 42
3.4.2 Potentiels comme $|x|^p$ 43
3.5 problème ouvert 44

II Explicit sub exponential rates of convergence for continuous time Markov processes **54**

III Sub-exponential decay in Fokker-Planck equation : weak hypocoercivity **76**

Première partie

Présentation générale des résultats

Chapitre 1

Aperçu de la thèse

1.1 Introduction

1.1.1 Définition et notation du processus de Markov

Dans la théorie des probabilités et des statistiques, un processus de Markov est un processus stochastique qui satisfait à la propriété de Markov. Un processus satisfait la propriété de Markov, si on peut prévoir l'avenir de processus fondée uniquement sur son état actuel et non conditionnellement à tout le passé, i.e., conditionnellement à l'état présent du système, l'avenir et le passé sont indépendants. Mathématiquement, on définit un processus de Markov de la façon suivante.

Définition 1.1.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré ; un processus adapté* X *d'espace d'état* $(E, \mathcal{E})$ *est un processus de Markov homogène adapté à* $(\mathcal{F})_t$*, de semi groupe de transition* P_s*, si pour toute* $f \in \mathcal{E}_+$ *et tout* (s,t) *vérifiant* $s < t$*,*

$$\mathbb{E}[f(X_t)|(\mathcal{F})_s] = P_{t-s}f(X_s) \qquad \mathbb{P} - p.p..$$

1.1.2 Processus de Markov et ergodicité : un bref rappel historique

Les modèles de Markov sont largement appliqués à différents domaines. Malgré son apparition datant d'environ un siècle, l'étude des processus de Markov est plus que jamais d'actualité, tant dans des applications pratiques que pour des résultats théoriques fins. Dans cet thèse, on s'intéresse principalement au comportement du processus de Markov à long terme, et plus particulièrement, à la convergence sous-exponentielle du processus de Markov vers sa probabilité invariante (qui existera toujours sous nos hypothèses).

Tout d'abord, en temps discret, la stabilité stochastique et la théorie ergodique des chaînes de Markov ont été systématiquement étudiées par Meyn et Tweedie dans le livre référence [101], qui fournit un cadre général pour l'étude du comportement en temps long des chaînes de Markov mais principalement avec des contrôles non explicites (sauf pour des conditions de type Doeblin). Par la suite l'étude de bornes quantitatives pour la convergence des chaînes de Markov a connu un essor énorme ces 20 dernières années suivant l'explosion de l'attractivité des méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov,. Par exemple, Meyn et Tweedie [101], Rosenthal [114], Roberts et Rosenthal [110], Douc, Moulines et Rosenthal [62] ont obtenu les vitesses quantitatives de convergence pour les chaînes de Markov (in)homogènes, avec vitesses exponentielles principalement. Robert et Rosenthal [110] (voir aussi [102, 103]) ont développé ces résultats pour les processus de Markov à temps continu, en utilisant des conditions de dérive dites aussi de Lyapunov et des conditions de minoration, liées à des méthodes de couplage. Pourtant, la convergence mentionnée ci-dessus est généralement exponentielle (ergodicité géométrique). A ma connaissance, l'étude de conditions pratiques pour la convergence sous exponentielle des chaînes de Markov a débuté par Nummelin et Tuominen [106], mais avec des conditions de Lyapunov itérées malheureusement peu exploitables. Douc, Moulines et Soulier [108] ont généralisé les résultats sur la convergence sous-exponentielle des chaînes de Markov et ont donné des conditions simples pour avoir des vitesses calculables de convergence .

Suite à ces travaux en temps discret, Fort et Roberts [65] furent parmi les premiers à étudier, systématiquement, l'ergodicité sous-exponentielle de processus de markov (fort) en temps continu. Ils ont pu donné une suite de conditions de Lyapunov imbriquées pour établir des vitesses polynomiales. La généralisation à toute vitesse sous exponentielle par une simple condition de Lyapunov a été donnée par Douc, Fort et Guillin [61], qui comme nous le montrerons dans cette thèse permet de plus d'être d'une grande utilité pour l'obtention de bornes quantitatives !

1.1.3 Semi-groupe, mesure invariante, et processus de Markov réversible

Nous sommes maintenant prêts pour nos définitions de base et quelques notations. Soit $\{(X_t)_{t\in\mathbb{T}}, (\mathbb{P}^x)_{x\in E}\}$ un processus de Markov à temps continu sur un espace d'état E, on prend $\mathbb{T}$ égale à $\mathbb{N}$ (temps discret) ou $\mathbb{R}^+$ (temps continu). On introduit le semi-groupe associé P_t défini pour fonctions bornées mesurables f par $P_tf(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)]$. La propriété de semi-groupe est $P_{t+s} = P_t \circ P_s$ qui est une conséquence de la propriété de Markov, et on supposera $P_0 = I$. Dans le cas temps discret, on notera $P = P_1$ et $P^n = P_n$.

On supposera dans la suite l'existence d'une mesure de probabilité invariante μ, i.e. tel que $\mu P_t = \mu$ pour tout t. Les conditions de type Lyapunov, que nous imposerons par la suite, garantirons cette hypothèse. On dira que μ est réversible ou symétrique par rapport à (P_t) si

$$\mathbb{E}_\mu[f(X_0)g(X_t)] = \int fP_tgd\mu = \int gP_tfd\mu = \mathbb{E}_\mu[g(X_0)f(X_t)].$$

Le semi-groupe se prolonge facilement à tout $L^p(\mu)$ pour $1 \leq p \leq \infty$ comme une contraction (i.e. chaque P_t a une norme d'opérateur égal à 1). Le semi-groupe adjoint sera désigné par P_t^*. En particulier, pour toute densité de probabilité suffisamment régulière h par rapport à ν, $\int P_t(x,\cdot)h(x)\nu(dx) = P_t^* h d\nu$. Au moins au niveau formel, on peut considérer que P_t^* agit sur les mesures (probabilités), via la formule $< f, P_t^*\nu >= \int P_t f d\nu$ écrite pour des fonctions f bornées. $P_t^*\nu$ est donc la loi du processus au moment t, lorsque la distribution initiale est ν. Evidemment, $P_t^*\nu = \nu P_t$. Si $\nu = \delta_x$, on désigne aussi cette distribution par $P_t(x,\cdot)$.

Enfin, on introduit le générateur infinitésimal du semi-groupe désigné par L qui est défini par $L = P - Id$ dans le cas à temps discret, et $Lf = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t f - f)$ dans le cas à temps continu, lorsque cette limite a un sens. Les fonctions pour qui la limite existe sont les éléments du domaine $D(L)$ de L, ce domaine dépend de la topologie choisie (en général, certains $L^p(\mu)$) et pour $t > 0$, $P_t f \in D(L)$. On supposera toujours l'existence d'un noyau avec les bonnes propriétés usuelles $\mathcal{C}$ dans le domaine. On a alors

$$\frac{d}{ds} P_s f|_{s=t} = LP_t f = P_t L f$$

Pour toute mesure de probabilité ν, on définit l'énergie $\mathcal{E}_\nu(f,g) = \int (-Lf) g d\nu$, et si $f = g$, on note $\mathcal{E}_\nu(f) = \int -f L f d\nu$. De plus, on suppose toujours l'existence d'un opérateur bilinéaire symétrique Γ appelé “carré du champ”, c'est-à-dire, l'existence d'une algèbre qui est le noyau du générateur L et tel que pour f et g dans cette algèbre,

$$\Gamma(f,g) := \frac{1}{2}(L(fg) - fLg - gLf).$$

et $\Gamma(f) = \Gamma(f,f)$.

1.1.4 Processus de Markov conduit par une équation différentielle stochastique

Si l'équation différentielle stochastique a la forme

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

ou $X_t \in \mathbb{R}^n$, $b(x) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma(x) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et B_t est un mouvement Brownien de dimension m. La solution est généralemnt appelée diffusion d'Itô (homogène). Il est bien connu que la diffusion d'Itô est un processus de Markov (fort). Nous pouvons lui associer un opérateur différentiel du second ordre L. L est justement le générateur (infinitésimal) du processus X_t. Si $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, et $f \in \mathcal{D}(L)$ et

$$Lf(x) = \sum_i b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma_T)_{i,j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

On pose $u(t,x) = \mathbb{E}^x[f(X_t)]$, puis $u(t,\cdot) \in \mathcal{D}(L)$ pour chaque t et satisfait l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Lu, t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = f(x), x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

1.2 Ergodicité exponentielle des chaînes et processus de Markov

La convergence exponentielle des chaînes de Markov a été bien étudiée sous différentes formes. Ce travail a été motivé en grande partie par l'intérêt pour les MCMC, algorithmes comprennant l'échantillonneur de Gibbs et Metropolis-Hastings notamment. Une question fondamentale à propos des méthodes MCMC est leur taux de convergence. Plus précisément, il s'agit de savoir combien de temps il faut faire tourner la chaîne avant d'être proche de l'équilibre. Il y a eu des approches différentes pour établir la convergence exponentielle. On introduit un de ces résultats quantitatifs à partir de Rosenthal [115], dont la preuve est très courte et simple et permet d'appréhender plusieurs concepts intéressants pour notre étude.

1.2.1 Ergodicité exponentielle des chaînes de Markov

Comme beaucoup d'idées du temps continu sont parfois plus accessibles en temps discret, nous présentons ici la preuve de [115] sur l'ergodicité exponentielle. On dit qu'une chaîne de Markov avec un noyau de transition $P(x, dy)$ sur l'espace d'état E satisfait une condition de minoration sur un sous-ensemble $C \subseteq E$, s'il existe une mesure de probabilité Q sur E, un nombre entier positif k_0, et $\epsilon > 0$, tel que

$$P_{k_0}(x, A) \geq \epsilon Q(A), \forall x \in C, \tag{1.1}$$

pour toutes les parties mesurables $A \subseteq E$. Ici, C est appelé (k_0, ϵ)-small. Nous définissons l'opérateur $\tilde{P}$ sur $E \times E$ comme

$$\tilde{P}h(x,y) := \int_E \int_E h(z,w) P(x,dz) P(y,dw).$$

Nous disons que $\tilde{P}$ satisfait une condition de dérive, si

$$\tilde{P}h(x,y) \leq \alpha h(x,y), x \notin E \times E \tag{1.2}$$

pour une fonction $h : E \times E \to [1, \infty)$ et un certain $\alpha < 1$. Finalement on note

$$B = \max[1, \alpha^{-1}(1-\epsilon) \sup_{E \times E} \tilde{R}h], \tag{1.3}$$

où pour $(x,y) \in E \times E$,

$$\tilde{R}h(x,y) = \int_E \int_E (1-\epsilon)^{-2} h(z,w)(P(x,dz) - \epsilon Q(dz))(P(y,dw) - \epsilon Q(dw)).$$

L'ergodicité exponentielle est donnée dans le résultat suivant.

Théorème 1.2.1. *Considérons une chaîne de Markov sur un espace d'état E, ayant un noyau de transition $P(x, dy)$. Supposons l'existence de $C \subseteq E$, $h : E \times E \to [1, \infty)$, une mesure de probabilité $Q(\cdot)$ sur E, $\alpha < 1$ et $\epsilon > 0$, tel que (1.1) et (1.2) soient verifiées. Définissons B par (1.3) et supposons $B < +\infty$. Alors pour toute distribution jointe initiale $\mathcal{L}(X_0, X_0')$, et tous entiers $1 \leq j \leq k$, si X_k et X_k' sont deux copies de la chaîne de Markov de distribution jointe initiale $\mathcal{L}(X_0, X_0')$,*

$$\|\mathcal{L}(X_k) - \mathcal{L}(X_k')\|_{TV} \leq (1-\epsilon)^j + \alpha^k B^{j-1} \mathbb{E}[h(X_0, X_0')].$$

Remark 1.2.2. Dans [62], Douc, Moulines et Rosenthal étendent ce résultat, l'extension nous permet d'envisager des modifications de la distance en variation totale, soient des distances pondérées, et les chaînes de Markov non homogènes.

1.2.2 Bornes quantitatives pour les taux de convergence exponentielles de processus de Markov

En outre, Robert et Rosenthal [110] ont étendu ces résultats aux processus de Markov à temps continu, et ont appliqué leurs résultats à quelques exemples de diffusions de Langevin. Les conditions de dérive et de minoration permettent d'établir des couplages ou des couplages par translation, similaires au cas discret. On a alors l'analogue

Théorème 1.2.3. *Soit un processus de Markov de probabilités de transition $P_t(x, \cdot)$ et de distribution stationnaire μ, supposons que $C \subseteq E$ est (t^*, ϵ)-small, pour un certain temps positif t^*, et un certain $\epsilon > 0$. Supposons plus qu'il existe $\delta > 0$ et une fonction $h : E \times E \to [1, \infty)$, telle que*

$$\mathbb{E}_{x,y}(e^{\delta \tau_{C\times C}}) \leq h(x, y), \qquad (x, y) \notin C \times C, \tag{1.4}$$

où $\tau_{C\times C}$ est le premier temps d'atteinte de $C \times C$ (pour le processus $\tilde{P}$). Fixons $A = \sup_{(x,y)\in C\times C} \mathbb{E}_{x,y}(h(X_{t^*}, Y_{t^*}))$, où X_t et Y_t sont défini conjointement comme dans la preuve ci-dessous. Supposons que $A < \infty$. Alors pour $t > 0$, et pour tout $0 < r < 1/t^*$,

$$\|\mathcal{L}(X_t) - \mu\|_{TV} \leq (1-\epsilon)^{[rt]} + e^{-\delta(t-t^*)} A^{[rt]-1} \mathbb{E}(h(X_0, Y_0)).$$

Nous donnons la preuve de ce résultat ici, car les concepts utilisés pour le cas sous-exponentiel sont les mêmes (et une petite erreur de leur démonstration est corrigée).

Démonstration. Nous construisons d'abord un temps d'arrêt aléatoire T avec $\mathcal{L}(X_T) = Q(\cdot)$ (Q est la mesure dans la condition de minoration), alors pour tout $0 < r < 1/t^*$ et $s > 0$,

$$\mathbb{P}(T > s) \leq (1-\epsilon)^{[rs]} + e^{-\delta(s-t^*)} A^{[rt]-1} \mathbb{E}(V(X_0)).$$

Nous construisons X_t comme suit. Nous commençons par choisir $q \sim Q(\cdot)$, et soit $Z_1, Z_2, \cdots$ une suite de v.a.i.i.d. $\mathbb{P}(Z_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(Z_i = 0) = \epsilon$. Soit

τ_1 la première fois où le processus (X_t) est dans l'ensemble C. Si $Z_1 = 1$, nous posons $X_{\tau_1+t^*} = q$. Si $Z_1 = 0$, nous choisissons $X_{\tau_1+t^*} \sim \frac{1}{1-\epsilon}(P(X_{\tau_1}, \cdot) - \epsilon Q(\cdot))$. Ceci définit le processus (X_t) pour tout temps $t > 0$, tel que (X_t) soit encore markovien de transitions $P_t(x, \cdot)$. Pour procéder, on définit $N_t = \max i; \tau_i \leq t$. Maintenant, pour tout $0 < r < \frac{1}{t^*}$,

$$\mathbb{P}(T > s) \leq (1-\epsilon)^{[rs]} + \mathbb{P}(N_{s-t^*} < [rs]).$$

En notant $D_1 = \tau_1$ et $D_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ pour $i \geq 2$, pour tout entier positif j, nous avons que

$$\mathbb{P}(N_s = j) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{j} D_i > s) \leq e^{-\delta s}\mathbb{E}(\prod_{i=1}^{j} e^{\delta D_i}).$$

En outre, nous avons que

$$\mathbb{E}(\prod_{i=1}^{j} e^{\delta D_i}) \leq \mathbb{E}((\prod_{i=1}^{j-1} e^{sD_i})\mathbb{E}(e^{sD_j}|\mathcal{F}_{j-1})) \leq A^{j-1}\mathbb{E}(V(X_0)),$$

où $\mathcal{F}_i = \sigma\{X_t; 0 \leq t \leq \tau_i\}$. Alors, on construit les processus (X_t) et (Y_t) conjointement comme suit. Soient $t_0 = inf\{t \geq 0; (X_t, Y_t) \in C \times C\}$, et $t_n = inf\{t \geq t_{n-1} + t^*; (X_t, Y_t) \in C \times C\}$ pour $n \geq 1$. Ensuite, pour chaque temps t_i, si nous n'avons pas encore couplé, on procéde comme suit. Avec une probabilité ϵ, nous posons $X_{t_i+t^*} = Y_{t_i+t^*} = q$, définissons $T = t_i + t^*$, et déclarons que les procédés sont couplés. Autrement (avec une probabilité $1-\epsilon$),nous choisissons $X_{t+t^*} \sim \frac{1}{1-\epsilon}(P_{t^*}(X_t, \cdot) - \epsilon Q(\cdot))$ et $Y_{t+t^*} \sim \frac{1}{1-\epsilon}(P_{t^*}(Y_t, \cdot) - \epsilon Q(\cdot))$, conditionnellement indépendants. Dans les deux cas, on remplit les valeurs X_s et Y_s pour $t_i < s < t_i + t^*$ conditionnellement indépendantes, en utilisant les distributions conditionnelles adaptées des données X_{t_i}, Y_{t_i}, $X_{t_i+t^*}$, $Y_{t_i+t^*}$. Enfin, si (X_t) et (Y_t) ont déjà couplé, nous les laissons évoluer de manière conditionnellement indépendante.

Il est facile de voir que (X_t) et (Y_t) suivent marginalement les probabilités de transition $P_t(\cdot, \cdot)$. En outre, T est un temps de couplage. Nous avons controlé déjà $\mathbb{P}(T > s)$. Le résultat découle alors de l'inégalité de couplage. □

Généralement, il est difficile d'établir (1.4) directement, et nous avons donc envie de rapporter cette borne à une condition simple de Lyapunov. Nous avons la proposition ci-dessous (voir [110]).

Proposition 1.2.4. *Supposons que $C \subseteq E$ est (t^*, ϵ)-small, et en outre qu'il existe une fonction $V \in \mathcal{D}(L)$ avec $V(x) \geq 1$ pour tout $x \in E$, $\lambda > 0$ et $\Lambda < \infty$, tel que*

$$LV(x) \leq -\lambda V(x) + \Lambda 1_C(x), \qquad x \in E.$$

Alors, en notant $B = \inf_{x \notin C} V(x)$, nous avons que (1.4) est vérifiée avec $h = \frac{1}{2}(V(x) + V(y))$ et avec $\delta = \lambda - \frac{\Lambda}{B}$. D'où la conclusion du Théorème 1.2.3 est valide dans ce cas. En outre, nous avons que $A \leq \frac{\Lambda}{\delta} + e^{-\delta t^*} \sup_{x \in C} V(x)$.

1.3 Inégalité de Poincaré et temps d'atteinte

Dans cette section, nous allons exploiter l'interaction entre inégalités fonctionnelles et les fonctions de Lyapunov utilisées dans l'approche Meyn-Tweedie. Comme nous l'avons vu, la méthode de couplage (la théorie du renouvellement) est aussi une clé. Nous allons donner un résultat présenté par Cattiaux, Guillin et Zitt [50].

Pour plus de simplicité, nous considérerons les processus de diffusion $(X_t)_{t>0}$ valeur de $\mathbb{R}^n$ avec générateur

$$L = \sum_{i,j} a_{ij}\partial^2_{ij} + \sum_i b_i \partial_i$$

où $a = \sigma^*\sigma$, σ_{ij} et b_i étant assez lisse (C^∞ par exemple). Donc le carré du champ $\Gamma(f,g) = \langle \sigma\nabla f, \sigma\nabla g\rangle$. De plus on suppose que $\mu(dx) = e^{-V(x)}dx$ est une mesure de probabilité symétrique pour le processus, où le potentiel V est aussi supposé d'être lisse. Donc L génère un semi-groupe P_t μ-symétrique et le théorème d'ergodicité L^2 nous dit que pour tout $f \in L^2(\mu)$,

$$\lim_{t\to+\infty} \|P_t f - \int f d\mu\|_2 = 0$$

Si C est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, on définit $T_C = \inf\{t > 0; X_t \in C\}$.

Considérons les énoncés suivants :

(H1) Il existe une fonction de Lyapunov V, i.e. une fonction lisse $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, telle que $V \geq 1$, une constante $\lambda > 0$ et une partie bornée ouverte connectée C telle que $LV \leq -\lambda V$ sur $(\overline{C})^c$.

(H2) Il existe un sous-ensemble ouvert connexe borné C et une constante $\delta > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{E}^x(e^{\delta T_C}) \leq \infty$, et $x \to \mathbb{E}^x(e^{\delta T_C})$ est localement bornée.

(H2μ) Il existe une partie bornée ouverte connectée C et une constante $\delta > 0$ telles que $\mathbb{E}_\mu(e^{\delta T_C}) \leq \infty$.

(H3) Il existe des constantes $\lambda > 0$ et $c > 0$ et une fonction $V \geq 1$ appartenant à $L^1(\mu)$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|P_t(x,\cdot) - \mu\|_{TV} \leq cV(x)e^{-\lambda t}$.

(H4) μ satisfait à une inégalité de Poincaré, i.e. il existe une constante C_p telle que pour tout lisse f, $\mathrm{Var}_\mu(f) \leq C_p \int \Gamma(f,f)d\mu$.

(H5) Il existe des constantes $\theta > 0$ et $c > 0$ telles que pour toute f bornée, $\mathrm{Var}_\mu(P_t f) \leq ce^{-\theta t}\,\mathrm{Osc}^2(f)$.

(H6) Il existe une constante C_S telle que pour tout $f \in L^2(\mu)$, $\mathrm{Var}_\mu(P_t f) \leq e^{-C_S t}\,\mathrm{Var}_\mu(f)$.

Définition 1.3.1. *On dira que L est hypoelliptique fortement s'il peut être écrit sous forme d'Hörmander $L = \sum_i X_i^2 + Y$ où X_i's et Y sont des champs de vecteurs lisses tel que l'algèbre de Lie générée par X_i's est pleine à chaque $x \in \mathbb{R}^n$ (i.e. spans l'espace tangent à chaque x).Remarquons que dans cette situation $\Gamma(f,f) = \sum_i |X_i f|^2$.*

On dira que L est hypoelliptique uniformément fortement si tous les X_i sont bornés avec des dérivés bornés (de n'importe quel ordre) et s'il existe $N \in \mathbb{N}$,

$\alpha > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{Z \in L_N(x)} \langle Z(x), \xi \rangle^2 \geq \alpha |\xi|^2$$

où $L_N(x)$ représente l'ensemble des crochets de Lie de longueur inférieure ou égale à N calculés en x.

Nous avons la suite d'équivalence (voir [50])

Théorème 1.3.2. *Les relations suivantes sont vérifiees (μ est symétrique)*
- $(H1) \Rightarrow (H3) \Rightarrow (H4) \Leftrightarrow (H5) \Leftrightarrow (H6)$
- $(H1) \Rightarrow (H2)$ *et* $(H2\mu)$
- *Si L est hypoelliptique uniformément fortement, alors* $(H4) \Rightarrow (H2)$ *et* $(H2\mu)$, *et* $(H2)$ *ou* $(H2\mu) \Rightarrow (H1)$.

Sauf le troisième point, tous ces relations sont vérifiés pour les chaînes de Markov.

Exemples pour les conditions de la dérive

En considérant l'opérateur $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$ et la mesure $\mu(dx) = e^{-V(x)}dx$ avec $V(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$, nous avons que
- S'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $R \geq 0$, telles que pour $|x| \geq R$, $x \cdot \nabla V(x) \geq \alpha |x|$, la fonction $W = e^{a|x|}$ pour $a > 0$ suffisamment petit vérifie la condition de dérive.
- S'il existe des constantes $a \in (0,1)$, $c > 0$ et $R \geq 0$, telles que pour $|x| \geq R$, $(1-a)|\nabla V(x)|^2 - \Delta V(x) \geq c$, $W = e^{aV(x)}$ est pour a petit une fonction de Lyapunov.

Pour ces deux exemples, les inégalités de Poincaré et la convergence exponentielle peuvent donc être prouvées.

1.4 Convergence sous-exponentielle des processus de Markov

De l'étude de la convergence exponentielle, on a développé certaines méthodes faciles à manipuler pour vérifier l'ergodicité. La clé de ces méthodes est la recherche d'une fonction dite de Lyapunov pour le générateur ([63] et [103]). La convergence sous exponentielle ou polynomiale peut également être étudiée (voir [65]) de cette façon. Une forme très générale de la méthode est expliquée dans l'article de Douc, Fort et Guillin [61], et cette partie de leurs résultats sera montrée plus en détails.

Désormais, le processus de Markov à temps continu (X_t) est supposé être un processus de Markov fort homogène avec trajectoires càdlàg. Pour tout $t^* > 0$ et tout sous-ensemble fermée $C \in \mathcal{B}(E)$, soit $\tau_C^{t^*} = \inf\{t \geq t^*, X_t \in C\}$ le temps d'atteinte de C retardé de t^*.

Redonnons la définition d'ensemble petit et également celle de *petite* ensemble.

Définition 1.4.1 (Ensemble petit, *Petite* ensemble)**.** *Nous disons que un sous-ensemble non vide $C \subseteq E$ est (t^*, ϵ)-petit (simplement petit) , pour un temps positif t^* et un $\epsilon > 0$, s'il existe une mesure de probabilité $Q(\cdot)$ sur E satisfaisant à la condition minorisation*

$$P^{t^*}(x, \cdot) \geq \epsilon Q(\cdot) \qquad \forall x \in C.$$

Le sous-ensemble C est ν_a-petite (simplement petite) s'il existe une mesure de probabilité a sur le Borel σ-field of $[0, +\infty)$ et une non-triviale σ-finie mesure ν_a sur E tel que

$$\int_0^\infty P^t(x, \cdot)a(dt) \geq \nu_a(\cdot) \qquad \forall x \in C.$$

Définition 1.4.2. *Soit ϕ une fonction positive défini sur $[1, +\infty)$ et $\lim_{x \to +\infty} \phi' = 0$. Nous disons que $V \in D(L)$ est une fonction de ϕ-Lyapunov si $V \geq 1$ et s'il existe une constante b et un petite ensemble fermé C tels que pour tout x,*

$$LV(x) \leq -\phi \circ V(x) + b1_C(x).$$

Quand ϕ est linéaire ($\phi(x) = ax$), nous appelons simplement V une fonction de Lyapunov. L'existence d'une fonction de Lyapunov signifie décroissance exponentielle (voir [63] et [103]), comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents.

Théorème 1.4.3. *([[61], Théorème 3.10, 3.12]) Supposons qu'il existe une fonction de ϕ-Lyapunov V croissante lisse et concave tel que V est bornée sur un petite ensemble C. De plus, supposons que le processus est irréductible dans un certain sens (voir [63] et [61] pour les définitions précises). Alors il existe une constante positive c telle que pour tout x,*

$$\|P_t(x, \cdot) - \mu\|_{TV} \leq cV(x)\psi(t),$$

où $\psi(t) = 1/(\phi \circ H_\phi^{-1})(t)$ pour $H_\phi(t) = \int_1^t (1/\phi(s))ds$.

Pour les cas généraux, nous obtiendrons la décroissance sous-exponentielle et des taux calculables dans le chapitre 2.

1.5 Inégalité fonctionnelle et L^2-décroissance de processus de Markov

En fait les résultats énoncés dans les paragraphes ci-dessus peuvent être renforcés par des choix de distances appropriés plus fortes (que la distance en variation totale) au détriment de taux plus lent de convergence (voir [63] et [61]). Par ailleurs, dans le théorème 1.2.3, si l'on choisit une mesure initiale $\mathcal{L}(X_0) = f\mu$ pour une fonction f "sympathique", la convergence se réduit à l'étude de $P_t^* h$ pour grand t. Cela devient un problème sur le comportementen temps long de semi-groupes, qui est connue comme être liée aux inégalités fonctionnelles comme nous l'avons vu précédement. Le cadre le plus familier est assurément le cadre L^2 et l'inégalité de Poincaré (ou Poincaré faible) dont nous allons présenter rapidement les concepts qui nous intéressent pour le temps long.

1.5.1 Le lien entre inégalité de Poincaré (faible) et la convergence L^2 (sous) exponentielle

Théorème 1.5.1. *Les deux déclarations suivantes sont équivalentes.*

(Décroissance exponentielle) Pour tout $f \in L^2$, il existe C_P telle que

$$\|P_t f - \int f d\mu\|_2^2 \leq e^{-t/C_p}\|f - \int f d\mu\|_2^2.$$

(Poincaré inégalité) Pour tout $f \in D_2(L)$ (le domaine de l'extension Fredholm de L),

$$\mathrm{Var}_\mu(f) := \|f - \int f d\mu\|_2^2 \leq C_p \int -2fLfd\mu. \tag{1.5}$$

Démonstration. Pour plus de simplicité, nous supposons que $\int f d\mu = 0$. Si la décroissance exponentielle $\|P_t f\|_2^2 \leq e^{-t/C_p}\|f\|_2^2$ est valide, alors pour $f \in D(L)$,

$$\begin{aligned} -\int fLfd\mu = -\langle Lf, f\rangle &= \lim_{t\to 0} \frac{\|f\|_2^2 - \|P_t f\|_2^2}{2t} \\ &\geq \liminf_{t\to 0} \frac{(1 - e^{-t/C_p})\|f\|_2^2}{2t} = \frac{\|f\|_2^2}{2C_p}, \end{aligned}$$

soit l'inégalité de Poincaré. En revanche, l'inégalité de Poincaré implique

$$\frac{d}{dt}\|P_t f\|_2^2 = 2\langle LP_t f, P_t f\rangle \leq -1/C_p\|P_t f\|_2^2$$

Par le lemme de Gronwall, nous terminons la preuve. □

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et comme P_t et P_t^* ont la même norme L^2, l'inégalité de Poincaré implique un taux exponentiel de convergence en distance en variation totale, au moins pour les lois initiales avec une densité L^2 par rapport à μ.

Comme pour l'approche Meyn-Tweedie, on peut obtenir des conditions suffisantes pour des taux plus lents de convergence, en utilisant l'inégalité faible de Poincaré introduite par Rockner et Wang [111] :

Théorème 1.5.2. *Soit Φ satisfaisant $\Phi(\lambda f) = \lambda^2\Phi(f)$, $\Phi(P_t f) \leq \Phi(f)$ pour tout t et $\Phi(f) \geq \|f\|_2^2$. Supposons qu'il existe une fonction décroissante β telle que pour tout $s > 0$ et toute f convenable, l'inégalité suivante (inégalité faible de Poincaré) soit vérifiée :*

$$\|f - \int f d\mu\|_2^2 \leq \beta(s)\int -fLfd\mu + s\Phi(f - \int f d\mu). \tag{1.6}$$

Alors

$$\|P_t f - \int f d\mu\|_2^2 \leq \xi(t)\Phi(f - \int f d\mu),$$

où $\xi(t) = 2\inf\{s > 0, \beta(s)\log(1/s) \leq t\}$

Dans le cas symétrique, nous avons une réciproque partielle de ce théorème (voir [111] Théorème 2.3).

Théorème 1.5.3. *Supposons que L est normal (i.e. $LL^* = L^*L$), s'il existe $\Phi : L^2(\mu) \to [0, \infty]$ et $\xi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ décroissante, tel que $\Phi(\lambda f) = \lambda^2 \Phi(f)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in L^2(\mu)$, $\xi(t) \downarrow 0$ lorsque $t \uparrow \infty$, et*

$$\|P_t f - \int f d\mu\|_2^2 \leq \xi(t)\Phi(f - \int f d\mu), \tag{1.7}$$

Alors (1.6) est valide avec

$$\beta(s) = 2s \inf_{t>0} \frac{1}{t} \xi^{-1}(t \exp[1 - t/s])$$

où $\xi^{-1}(t) := \inf\{r > 0 : \xi(r) \leq t\}$. Particulièrement, si (1.7) est vraie pour $\xi(t) = \exp[-\lambda t]$ pour $\lambda > 0$, alors l'inégalité de Poincaré est vérifiée avec $C_p = 2\lambda$.

Remark 1.5.4. Dans le cas de l'exponentielle, la preuve originale par [111] est relativement complexe. En fait, nous pouvons utiliser un argument simple : supposons $\int f d\mu = 0$, pour $\lambda > 0$. Il est facile de voir que $t \to \log \|P_t f\|^2 + \lambda t$ est convexe et bornée supérieurement parce que $\mathrm{Var}_\mu(P_t f) \leq c_f e^{-\lambda t}$. Mais une fonction convexe bornée sur $\mathbb{R}^+$ est nécessairement décroissante. Donc $\|P_t f\|_2^2 \leq e^{-\lambda t} \|f\|_2^2$.

En général, l'inégalité de Poincaré faible est écrite pour $\Phi = \|\cdot\|_\infty$ ou $\mathrm{Osc}(\cdot)$. Ce qui est particulièrement marquant, c'est que pour tout μ sur $\mathbb{R}^n$, absolument continue par rapport à Lebesgue mesure, $d\mu = e^{-V} dx$ avec une V localement bornée, satisfait une inégalité faible de Poincaré.

1.5.2 De Lyapunov à Poincaré et vice versa

Nous savons que l'existence d'une fonction de ϕ-Lyapunov est une condition suffisante tractable pour la stratégie de Meyn-Tweedie (et même une condition nécessaire et suffisante pour le cas exponentielle). Néanmoins, des conditions suffisantes générales tractables et précises pour Poincaré ou d'autres inégalités fonctionnelles sont moins connues. C'est la motivation du travail de Bakry, Cattiaux et Guillin [6]. Ils ont étudié la relation entre la méthode Meyn-Tweedie et l'approche d'inégalité fonctionnelle. Nous présentons ici quelques résultats. Soit μ une mesure invariante pour un processus de générateur L. L'existence d'un "carré du champ" est supposé. Ensuite, nous avons (voir [6] Théorème 2.1)

Théorème 1.5.5 (De Lyapunov à Poincaré)**.** *Sous les hypothèses du théorème 1.4.3, pour toute f telle que $\int f d\mu = 0$ et tout $0 < \beta < 1$, on a*

$$\int (P_t^* f)^2 d\mu \leq C_\beta \psi^\beta(t) \left(\int |f| V d\mu \right)^\beta \left(\int |f|^{\frac{2-\beta}{1-\beta}} d\mu \right)^{1-\beta}.$$

Le résultat s'étend à $\beta = 1$ à condition que f soit bornée, et dans ce cas,

$$\int (P_t^* f)^2 d\mu \leq C \left(\int V d\mu \right) \|f\|_\infty^2 \psi(t).$$

Si en plus μ est symétrique (ou plus généralement L est normal, i.e. $L^*L = LL^*$) pour le processus, alors μ satisfait une inégalité faible de Poincaré avec $\Phi(f) = C(V)\|f\|_\infty^2$ et

$$\beta(s) = s \inf_{u>0} \frac{1}{u}\psi^{-1}(ue^{(1-u/s)}) \quad \textit{with} \quad \psi^{-1}(a) := \inf\{b > 0, \psi(b) \leq a\}.$$

Particulièrement si $\psi(t) = e^{-\lambda t}$, μ satisfait une inégalité de Poincaré.

Démonstration. Supposons les hypothèses vérifiées, et soit f une fonction bornée tel que $\int f d\mu = 0$. Alors, si f n'est pas identiquement nulle, on peut définir $h = f_+/\int f_+ d\mu$ qui est une densité de probabilité bornée. Par conséquent, si $V \in L^1(\mu)$, $\int hV d\mu < \infty$. Il s'ensuit que $\|P_t^* - 1\|_{L^1}$, qui est la distance en variation totale entre μ et la loi au moment t (à partir de $h\mu$), tend vers 0 dès que $t \to +\infty$, avec un taux $c\psi(t)$. Donc pour $0 < \beta < 1$,

$$\begin{aligned}
\int |P_t^* f_+ - \int f_+ d\mu|^2 d\mu &= \left(\int f_+ d\mu\right)^2 \int (P_t^* - 1)^\beta \, (P_t^* h - 1)^{2-\beta} d\mu \\
&\leq \left(\int f_+ d\mu\right)^2 \left(\int |P_t^* - 1| d\mu\right)^\beta \left(\int |P_t^* h - 1|^{\frac{2-\beta}{1-\beta}} d\mu\right)^{1-\beta} \\
&\leq c_\beta \psi^\beta(t) \left(\int f_+ V d\mu\right)^\beta \left(\int |f_+ - \int f_+ d\mu|^{\frac{2-\beta}{1-\beta}} d\mu\right)^{1-\beta} \\
&\leq c_\beta \psi^\beta(t) \left(\int f_+ V d\mu\right)^\beta \left(\int (2f_+)^{\frac{2-\beta}{1-\beta}} d\mu\right)^{1-\beta}.
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé ce que P_t^* est un opérateur avec la norme égale à 1 dans tous les L^p's ($p \geq 1$), la relation élémentaire $|a+b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$ pour tout $p \geq 1$ et l'inégalité de Hölder. Alors,

$$\begin{aligned}
\int (P_t^* f)^2 d\mu &\leq 2\left(\int |P_t^* f_+ - \int f_+ d\mu|^2 d\mu + \int |P_t^* f_- - \int f_- d\mu|^2 d\mu\right) \\
&\leq 2^{4-\beta} c_\beta \psi^\beta(t) \left(\int |f| V d\mu\right)^\beta \left(\int |f|^{\frac{2-\beta}{1-\beta}} d\mu\right)^{1-\beta}.
\end{aligned}$$

Dans le cas symétrique, on applique le théorème 2.3 dans [111] pour prouver la deuxième partie. □

Le résultat analogue est également mis en place pour la décroissance de l'entropie relative, voit [6] Théorème 2.2.

Certains réciproques possibles ont été discutées brièvement dans [6]. Il est suggéré de référer à Section 2 de [6] pour plus de résultats. Et [6] a également souligné que il n'est pas possible d'obtenir une réciproque exacte à partir de l'inégalité faible de Poincaré.

1.5.3 Inégalité de Lyapunov-Poincaré et fonction de Lyapunov

Nous avons vu que l'existence de la fonction de Lyapunov fournit des inégalités fonctionnelles dans le cas symétrique, dans ces sections, nous allons étudier les relations entre certaines inégalités modifiées de Poincaré (et donc décroissance exponentielle) et l'existence de la fonction de Lyapunov, sans suppposer de symétrie. Ces inégalités ont été introduites dans [6].

Définition 1.5.6 (Inégalité (w)-Lyapunov-Poincaré)**.** *Nous dirons que μ satisfait une (w)-Lyapunov-Poincaré inégalité, s'il existe une fonction $W \in D(L)$ avec $W \geq 1$ et une constante C telles que pour toutes fonctions "sympathiques" f avec $\int f = 0$,*

$$\int f^2 W d\mu \leq C \int (W\Gamma(f) - f^2 LW) d\mu.$$

Ici et dans toute la thèse, "sympathique" signifie que f appartient au domaine du générateur et l'ensemble de ces fonctions est dense dans le domaine de la forme de Dirichlet (par exemple, fonctions lisse à support compact dans les cas euclidiens usuels).

Nous avons la proposition ci-dessous pour décrire la relation entre (w)-Lyapunov-Poincaré l'inégalité et la décroissance exponentielle.

Proposition 1.5.7. *Les relations suivantes sont équivalentes :*
- *μ satisfait une (w)-Lyapunov-Poincaré inégalité,*
- *$\int (P_t^* f)^2 W d\mu \leq e^{-t/C} \int f^2 W d\mu$ pour tout f avec $\int f d\mu = 0$*

Particulièrement pour toute fonction f tel que $\int f^2 W d\mu < \infty$, $P_t f$ et $P_t^* f$ convergent vers $\int f d\mu$ sur $L^2(d\mu)$ avec un taux exponentiel.

La preuve suit le même raisonnement que pour l'inégalité de Poincaré dans le Théorème 1.5.1. Notez qu'une inégalité de Lyapunov-Poincaré n'est pas une inégalité de Poincaré pondérée (nous supposons que $\int f d\mu = 0$) et dépend du générateur L (pas seulement du carré du champ). Mais comme ce que nous avons déjà mentionné, Théorème 2.3 dans [111] nous dit que, dans le cas symétrique, si $\int P_t^2 f d\mu \leq ce^{-\delta t} \|f\|_\infty^2$ pour tout f tel que $\int f d\mu = 0$, donc μ satisfait l'inégalité habituelle de Poincaré avec $C = 1/\delta$. Alors,

Exemple : en utilisant des conditions de Lyapunov

Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov V, i.e. $LV \leq -\alpha V + b1_C$ pour un ensemble C. Supposons que l'on peut trouver un ensemble (grand) U tel que μ satisfait une inégalité locale de Poincaré sur U :

$$\int_U f^2 d\mu \leq \kappa_U \int_E \Gamma(f) d\mu + (1/\mu(U)) \left(\int_U f d\mu \right)^2 .$$

pour un certain κ_U, pour tout f avec $\int_E f d\mu = 0$. Supposons que de plus :

1. Soit U contient $C' = C \cup \{V \leq 2b\alpha\}$ et $2\alpha\mu(U) > b\mu(U^c)$,
2. ou bien U contient $\{V \leq 2b/\alpha\}$ et $\mu(U) > \mu(U^c)$.

On peut alors trouver $\lambda > 0$ tel que si $W = V + \lambda$, μ satisfait une inégalité de (w)-Lyapunov-Poincaré .

1.5.4 Inégalité faible de Sobolev logarithmique et convergence pour l'entropie

Comme nous avons vu que l'inégalité (faible) de Poincaré est un outil puissant pour l'étude du comportement en temps long L^2 (aussi pour l'étude d'isopérimétrie, concentration de la mesure). Cependant, les contrôles de L^2 ne sont pas bien adaptés dans différentes situations (mécanique statistique, EDP non linéaire), où descontrôles en entropie sont plus naturels. Donc nous allons introduire l'inégalité faible de Sobolev logarithmique et la convergence entropique pour le semi-groupe. Le contenu lié peut être lu dans [41].

Définition 1.5.8. *Nous disons que la mesure μ satisfait une inégalité faible de Sobolev logarithmique, s'il existe une fonction décroissante $\beta(s) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$, telle que pour tout $s > 0$ et chaque $f \in C_b^1(E)$,*

$$\operatorname{Ent}_\mu f^2 := \int f^2 \log\left(\frac{f^2}{\int f^2 d\mu}\right) d\mu \leq \beta(s) \int |\nabla f|^2 d\mu + s \operatorname{Osc}^2(f)$$

Soit h une fonction bornée, densité par rapport à la mesure invariante μ. Nous introduisons le premier résultat de la décroissance dans l'entropie avec l'oscillation de h.

Théorème 1.5.9. *Si μ satisfait une inégalité faible de Sobolev logarithmique avec fonction β, alors pour chaque $h \geq 0$ avec $\int h d\mu = 1$, pour t assez grand,*

$$\operatorname{Ent}_\mu(P_t h) \leq (2 + e^{-1} + \epsilon)\xi_\epsilon(t) \operatorname{Osc}^2(\sqrt{h})$$

où $\xi_\epsilon(t)$ est donnée par, pour r assez petit,

$$\xi_\epsilon^{-1}(r) = -\frac{1}{2}\beta(r) \log(\frac{r}{\epsilon}).$$

En revanche, s'il existe ξ décroissante, telle que pour chaque $h \geq 0$ avec $\int h d\mu = 1$, nous obtenons

$$\forall t > 0, \qquad \operatorname{Ent}_\mu(P_t h) \leq \xi(t) \operatorname{Osc}^2(\sqrt{h}),$$

alors μ satisfait une inégalité faible de Sobolev logarithmique avec fonction $\beta(t) = \psi^{-1}(t)$ où $\psi(t) = 2\sqrt{2\xi(t)}$. Particulièrement si $\xi(t) \leq ce^{-\alpha t}$, μ satisfait une inégalité de Poincaré.

v

Ce théorème est juste l'analogue du théorème 1.5.2 pour l'inégalité faible de Poincaré. Il est manifeste que le résultat couvre la relation d'équivalence entre la décroissance exponentielle dans l'entropie et l'inégalité de Sobolev logarithmique.

Un exemple

Pour $\alpha \in [1, 2]$, la mesure $\mu_\alpha(dt) = Z_\alpha e^{-|t|^\alpha} dt$, $t \in \mathbb{R}$, (Z_α est une normalisation constante) satisfait l'inégalité faible de Sobolev logarithmique avec

$\beta(s) = C(\log 1/s)^{(2-\alpha)/\alpha}$, $C > 0$. Alors on peut trouver $C(\alpha) > 0$ tel que pour tout la densité bornée de probabilité h,

$$\mathrm{Ent}_{\mu_\alpha}(P_t h) \leq e^{-t/[C(\alpha)(1+\log^{(2/\alpha)-1}(\|h\|_\infty))]}\,\mathrm{Ent}_{\mu_\alpha}(h).$$

1.6 Un autre aperçu sur l'ergodicité des chaînes de Markov

Les preuves traditionnelles dans l'étude des chaînes de Markov (processus de Markov) sont établis par l'approche Meyn-Tweedie : trouver une fonction de Lyapunov avec un ensemble petit, décomposer les chaînes de Markov en excursion loin de l'ensemble petit et analyser la queue exponentielle de la loi de longueur des excursions. Hairer et Mattingly [87] ont développé une autre méthode pour obtenir la contractivité de semi-groupes dans une certaine distance de variation totale pondérée. C'est le résultat très intéressant que nous allons décrire maintenant.

D'abord, deux hypothèses sont encore supposées pour les chaînes de Markov avec $P(x,\cdot)$ sur un espace mesurable E :

1. (A.1 fonction de Lyapunov) Il existe une fonction $V : E \to [0,\infty)$ et des constantes $K \geq 0$ et $\gamma \in (0,1)$ telles que
$$PV(x) \leq \gamma V(x) + K, \forall x \in E.$$
2. (A.2 ensemble petit) Il existe une constante $\alpha \in (0,1)$ et une mesure de probabilité ν tel que
$$\inf_{x\in C} P(x,\cdot) \geq \alpha\nu(\cdot),$$
avec $C = \{x \in E : V(x) \leq R\}$ pour certain $R > 2K/(1-\gamma)$ où K et γ sont les constantes de A.1.

Afin de présenter le théorème de Harris, nous introduisons la norme du supremum pondérée suivante :

$$\|\phi\| = \sup_x \frac{|\phi(x)|}{1+V(x)}. \tag{1.8}$$

Alors, nous avons

Théorème 1.6.1. *Sous A.1 et A.2, P admet une unique mesure invariante μ et il existe des constantes $C > 0$ et $\gamma \in (0,1)$ telles que*

$$\|P^n\phi - \mu\phi\| \leq C\gamma^n\|\phi - \mu(\phi)\|$$

pour toute fonction mesurable $\phi : E \to \mathbb{R}$ telle que $\|\phi\| < \infty$.

Alors que ce résultat est bien connu, les preuves trouvées dans la littératures sont souvent compliquées et dépendent des estimations de l'intégrabilité des temps de retour à l'ensemble petit. Mais Hairer et Mattingly [87] ont fourni une preuve très courte et élémentaire du théorème basé sur une astuce simple. Au lieu de travailler directement avec (1.8), ils ont défini toute une famille de normes supremum pondérés selon un paramètre d'échelle $\beta > 0$ qui sont toutes équivalentes à la norme originale (1.8) :

$$\|\phi\|_\beta = \sup_x \frac{|\phi(x)|}{1 + \beta V(x)}. \tag{1.9}$$

Ils définissent également la métrique dual associée ρ_β sur les mesures de probabilité donnée par

$$\rho_\beta(\mu_1, \mu_2) = \sup_{\phi : \|\phi\|_\beta \le 1} \int_E \phi(x)(\mu_1 - \mu_2)dx$$

Il est bien connu que ρ_β est une distance de variation totale pondérée :

$$\rho_\beta(\mu_1, \mu_2) = \int_E (1 + \beta V(x))|\mu_1 - \mu_2|dx$$

Avec ces notations, nous avons que

Théorème 1.6.2. *Sous A.1 et A.2, il existe* $\bar{\alpha} \in (0, 1)$ *et* $\beta > 0$ *telles que*

$$\rho_\beta(P\mu_1, P\mu_2) \le \bar{\alpha}\rho_\beta(\mu_1, \mu_2)$$

pour toute mesure de probabilité μ_1 *et* μ_2 *sur* E*. Particulièrement, pour toute* $\alpha_0 \in (0, \alpha)$ *et* $\gamma_0 \in (\gamma + 2K/R, 1)$ *on peut choisir* $\beta = \alpha_0/K$ *et* $\bar{\alpha} = (1 - (\alpha - \alpha_0)) \vee (2 + R\beta\gamma_0)/(2 + R\beta)$.

Bien qu'il soit possible de régler β de façon à ce que P soit une contraction stricte pour la distance ρ_β, ça ne signifie pas que P est une contraction pour ρ_1.

Cette nouvelle approche nous inspire que le choix des normes appropriées des opérateurs nous aidera à étudier l'ergodicité du système. En fait, dans l'étude de équations d'évolution dissipatives, Villani [126] introduit un nouveau terme "hypocoercivité" qui a été utilisé pour résoudre la convergence à l'équilibre pour certains opérateurs. Il a étendu la coercivité à l'hypocoercivité en choisissant les normes appropriés, et a établi une nouvelle théorie de coercivité de façon systématique et abstraite. Nous allons l'introduire dans la prochaine section.

1.7 Hypocoercivité et décroissance exponentielle

Dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées, on rencontre souvent des équations d'évolution dissipatives dans lesquelles apparait (1) un opérateur dissipatif dégénéré et (2) un opérateur conservatif présentant certaines propriétés de symétrie, tels que la combinaison des deux opérateurs implique la convergence vers un état d'équilibre déterminé de façon unique. Dès que l'existence et l'unicité d'un état stable a été établie, il y a beaucoup d'outils souples pour prouver la convergence vers l'état stationnaire. Dans l'étude des opérateurs de Markov, nous avons déjà établi la convergence (sous) exponentielle. Par l'approche Meyn-Tweedie, on essaie de capturer des informations sur le comportement de trajectoires, mais le taux n'est généralement pas quantitatif ou de mauvaise qualité. En utilisant les inégalités fonctionnelles pour obtenir la convergence, nous devrions connaître la mesure invariante et peut être obtenir une borne précise du taux de convergence. Mais pour les processus de Markov conduits par des équation différentielles stochastiques totalement dégénérée, les méthodes traditionnelles ne conviennent pas.

Par exemple, l'équation cinétique de Fokker-Planck

$$\begin{cases} dX_t = Y_t dt \\ dY_t = \sqrt{2}dB_t - \nabla V(X_t)dt - Y_t dt \end{cases} \tag{1.10}$$

associée avec

$$L = \Delta_v + v \cdot \nabla_v + v \cdot \nabla_x - \nabla V(x) \cdot \nabla_v.$$

a une mesure invariante $d\mu = \frac{e^{-[V(x)+\frac{|v|^2}{2}]}}{Z} dxdv$.

Mais μ n'est pas symétrique, et L est entièrement dégénéré, l'inégalité de Poincaré (avec $\mathcal{E}$) n'est pas vraie pour μ associée à la forme de Dirichlet générée par L. Notamment, la courbure de Bakry-Emery du semi-groupe est égale à $-\infty$.

Villani a utilisé l'hypocoercivité afin d'obtenir des résultats sur la convergence vers equilibre pour cette équation. Dans cet thèse, nous allons surtout introduire la première partie du mémoire [126] : l'opérateur $A^*A + B$.

1.7.1 Opérateur $L = A^*A + B$, coercivité et hypocoercivité

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable réel, pouvant être considéré comme $L^2(\mu)$, où μ est quelque mesure d'équilibre ; $\mathcal{H}$ est doté de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ issue d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$. Dans cette section,nous allons considérer des opérateurs linéaires de la forme

$$L = A^*A + B, B^* = -B$$

et le semi-groupe $P_t = e^{-tL}$.

Définition 1.7.1 (coercivity). *Soit L un opérateur non borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, avec un noyau $\mathcal{K}$. $D(L)$ est dense dans $\mathcal{H}$. On dit que l'opérateur L est λ-coercif sur $\mathcal{K}^\perp$, si*

$$\langle h, Lh \rangle_{\mathcal{H}} \geq \lambda \|h\|^2_{\mathcal{H}}, \qquad \forall h \in \mathcal{K}^\perp \cap D(L).$$

On dit que l'opérateur L est coercif sur $\mathcal{H}$ s'il est λ-coercif sur $\mathcal{H}$ pour un $\lambda > 0$.

La propriété de coercivité est équivalente à la convergence L^2 du semi-groupe (en supposant qu'il est bien défini) :

Théorème 1.7.2. *L est λ-coercitif sur $\mathcal{H}$ si et seulement si $\|e^{-tL}h_0\|_{\mathcal{H}} \leq e^{-\lambda t}\|h_0\|_{\mathcal{H}}$ pour tous $h_0 \in \mathcal{H}$ et $t \geq 0$.*

La définition de l'hypocoercivité est

Définition 1.7.3 (hypocoercivité)**.** *Soit L un opérateur non borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, avec un noyau $\mathcal{K}$, $D(L)$ est dense dans $\mathcal{H}$. L génére un semi-groupe continu $(e^{-tL})_{t\geq 0}$. L'opérateur L est appelé λ-hypocoercif sur $\mathcal{K}^{\perp}$, s'il existe une constante finie C telle que*

$$\|e^{-tL}h_0\|_{\mathcal{H}} \leq Ce^{-\lambda t}\|h_0\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall h_0 \in \mathcal{H}, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.11}$$

L'opérateur L est appelé hypocoercif sur $\mathcal{H}$ s'il est λ-hypocoercif sur $\mathcal{H}$ pour un $\lambda > 0$.

Par rapport à la définition de la coercitivité en terme de semi-groupe, la seule différence réside dans l'apparition de la constante C dans le côté droit de (1.11) (évidemment $C = 1$ signifie coercivité). L'hypocoercivité est invariante en vertu de changement de norme equivalente sur $\mathcal{H}$, pas comme la coercivité. Cela a une conséquence pratique importante : si l'on trouve une norme équivalente pour laquelle l'opérateur est coercitif, il s'ensuit qu'il est hypocoercif.

Villani [126] a donné un résultat général sur l'hypocoercivité pour l'opérateur $L = A^*A + B$ de manière abstraite. Et il l'a appliqué à l'équation cinétique de Fokker-Planck. Ici, nous portons principalement une attention aux résultats pour l'équation de Fokker-Planck, et parlons de la stratégie de son approche pour ce modèle.

1.8 L'équation linéaire cinétique de Fokker-Planck

Soit une fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ minorée, au moins C^1 , et convergeant vers l'infini à l'infini. Définissons

$$A_i := \frac{\partial}{\partial v_i}, A := \nabla_v, B := v \cdot \nabla_x - \nabla V(x) \cdot \nabla_v, C := [A, B] = \nabla_x,$$

$$L := -\Delta_v + v \cdot \nabla_v + v \cdot \nabla_x - \nabla V(x) \cdot \nabla_v.$$

L'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre qui nous intéresse est l'équation cinétique de Fokker-Planck (la version stochastique est (1.10)) avec un potentiel de confinement V, sous la forme

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h - \nabla V(x) \cdot \nabla_v h = \Delta_v h - v \cdot \nabla_v h. \tag{1.12}$$

Par calcule directement dans $L^2(\mu)$, on peut vérifier que l'équation prend la forme $\partial h/\partial t + Lh = 0$. Pour $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, posons

$$\rho_\infty(x, v) = \frac{e^{-[V(x)+\frac{|v|^2}{2}]}}{Z}, \qquad \mu(dxdy) = \rho_\infty(x, v)dxdv,$$

où Z est choisie pour que μ soit une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. La mesure invariante est μ, et nous choisissons l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := L^2(\mu)$.

Avant de considérer la convergence vers l'équilibre pour ce modèle, nous devrions résoudre les problèmes analytiques sur la régularité et le caractère bien posé de l'équation. Cela a été présenté par Helffer et Nier[[88], Section 5.2], ainsi (1.12) génère un semi-groupe de contraction C^∞, régularisant dans $L^2(\mu)$ dès que V est dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Villani a utilisé des approximations lisses pour obtenir un théorème pour un potentiel moins régulièr V :

Théorème 1.8.1. *Soit $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$ minorée. Alors pour tout $h_0 \in L^2(\mu)$, l'équation* (1.12) *admet une solution distribution unique $h = h(t,x,v) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_v)) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(\mu)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1_v(\mu))$, telle que $h(0,\cdot) = h_0$.*

1.8.1 Une nouvelle norme équivalente à $\mathcal{H}^1$

Pour l'équation cinétique de Fokker-Planck, il y a une norme $\mathcal{H}^1$-Sobolev naturelle $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1(\mu)}$:

$$\|h\|^2_{\mathcal{H}^1(\mu)} = \|h\|_2^2 + \|Ah\|_2^2 + \|Ch\|_2^2 = \|h\|_2^2 + \|\nabla h\|_2^2$$

Le produit scalaire associée à cette norme sera noté par $\langle \cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}^1}$. Par ailleurs, nous définissons un autre produit scalaire $((\cdot,\cdot))$:

$$((h,h)) = \|h\|_2^2 + a\|Ah\|_2^2 + 2b\langle Ah, Ch\rangle_2 + c\|Ch\|_2^2.$$

Où les constantes positives a, b, c sera choisi de façon que $c \le b \le a$, $b^2 < ac$ et

$$((h, Lh)) \ge \kappa(\|Ah\|_2^2 + \|Ch\|_2^2). \tag{1.13}$$

Nous pouvons voir que $\langle \cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}^1}$ et $((\cdot,\cdot))$ définissent norme équivalente :

$$\begin{aligned} \min(1,a,c)(1 - \frac{b}{\sqrt{ac}})\|h\|^2_{\mathcal{H}^1} &\le ((h,h)) \\ &\le \max(1,a,c)(1 + \frac{b}{\sqrt{ac}})\|h\|^2_{\mathcal{H}^1}. \end{aligned}$$

Par polarisation, le produit scalaire $((\cdot,\cdot))$ définit une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{H}^1$. Le choix des constantes a, b, c est primordial et dépend du potentiel $V(x)$. Dans ma thèse, je donnerais une preuve simplifiée sous une condition sur le potentiel $V(x)$ un peu plus fort que Villani mais adaptée au cas sous-exponentiel.

1.8.2 Hypocoercivité et convergence exponentielle dans le sens H^1 et L^2

Il est évident que la coercivité de $A^*A + C^*C$ signifie inégalité de Poincaré pour la mesure μ. Notez que l'inégalité de Poincaré ici est en un sens de l'opérateur ∇, pas de l'énergie $\mathcal{E}(f)$ ($\int -fLf d\mu = \int |\nabla_v f|^2 d\mu \ne \int |\nabla f|^2 d\mu$) associée au processus.

Dans Villani [126] Théorème 35, la convergence exponentielle dans le sens de $\mathcal{H}^1$ sous coercivité de $A^*A + C^*C$ est obtenu par le théorème suivant :

Théorème 1.8.2. *Pour l'équation cinétique de Fokker-Planck, supposons que $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$ avec $|\nabla^2 V(x)| \leq M(1 + |\nabla V|)$ pour une constante $M \geq 0$ et la mesure μ satisfait l'inégalité de Poincaré. Alors, il y a des constantes $C \geq 1$ et $\lambda > 0$, explicitement calculables, telles que pour tout $h \in \mathcal{H}^1(\mu)$, $\int h d\mu = 0$,*

$$\|e^{-tL}h\|_{\mathcal{H}^1(\mu)} \leq Ce^{-\lambda t}\|h\|_{\mathcal{H}^1(\mu)}, \forall t \geq 0.$$

De plus, il existe une constante $C' \geq 1$ tel que pour tout $t \geq 1$ et pour tout $h \in L^2(\mu)$ avec $\int h d\mu = 0$,

$$\|e^{-tL}h\|_{\mathcal{H}^1(\mu)} \leq C'e^{-\lambda t}\|h\|_2.$$

1.8.3 Convergence exponentielle au sens entropique

C. Villani a également étudié une autre décroissance dans la même idée. Il a introduit une modification de l'entropie en combinant l'information de Kullback et l'information de Fisher déformée. Dans le prochain résultat, la coercivité de $A^*A + C^*C$ sera changée en inégalité de Sobolev logarithmique pour μ. Tous les résultats et les preuves sont similaires à la convergence dans $\mathcal{H}^1$.

Associé au Théorème 28 dans [126], on peut facilement obtenir :

Théorème 1.8.3. *Pour l'équation cinétique de Fokker-Planck, supposons que $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$ avec $|\nabla^2 V(x)| \leq M$ (norme de Hilbert-Schmidt, ponctuelle sur $\mathbb{R}^n$) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Il y a une function $x \to S(x)$, à valeur dans l'espace de matrices symmétriques positives, uniformément bornées, telles que si l'on définit,*

$$\mathcal{E}(h) := \int h \log h d\mu + \int \frac{\langle S\nabla h, \nabla h\rangle}{h} d\mu, h \geq 0,$$

on a l'estimation

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(e^{-tL}h) \leq -\alpha \int \frac{\langle S\nabla e^{-tL}h, \nabla e^{-tL}h\rangle}{e^{-tL}h} d\mu,$$

pour $\alpha > 0$, explicitement calculable.

Par ailleurs, nous avons que

Théorème 1.8.4. *Avec les mêmes conditions que précédemment, nous pouvons choisir a, b, c, tel que*

$$\mathcal{E}(h) = \int h \log h d\mu + a \int \frac{|Ah|^2}{h} d\mu + 2b \int \frac{\langle Ah, Ch\rangle}{h} d\mu + c \int \frac{|Ch|^2}{h} d\mu$$

satisfait les conclusions du théorème 3.3.1. Si, en plus, la mesure μ satisfait l'inégalité de Sobolev logarithmique avec la constante k

$$Ent_\mu(f^2) \leq k \int |\nabla f|^2 d\mu.$$

Alors pour h positive avec $\int h d\mu = 1$, il existe $\lambda > 0$, telle que

$$\mathcal{E}(e^{-tL}h) \leq e^{-\lambda t}\mathcal{E}(h).$$

La preuve de ce théorème suit la preuve du Théorème 1.8.2. Si nous mettons $f = e^{-[V(x)+\frac{|v|^2}{2}]}h$ dans l'équation (1.12), alors l'équation devient :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \nabla V(x) \cdot \nabla_v f = \Delta_v f + \nabla_v \cdot (vf). \tag{1.14}$$

auquel cas f au temps t peut être interprétée (si non négative) en tant que densité de particules, ou (si densité de probabilité) comme la loi d'une variable aléatoire dans l'espace de phase. Mais les hypothèses relatives aux (1.14) sont plus générales que pour (1.12), voir Théorème 7 dans [126]. Ce résultat du Théorème 3.3.2 peut être utilisé pour étudier la convergence pour des densités de probabilité, voit Théorème 39 dans [126] pour plus de détails.

Jusqu'ici, nous avons introduit trois types de méthodes pour l'étude du comportement en temps long des processus de Markov : l'approche Meyn-Tweedie, la contraction de normes et les inégalités fonctionnelles. Nous donnerons une remarque pour ces approches.

1.8.4 Comparaison entre les approches habituelles

Pour la méthode Meyn-Tweedie, nous devons trouver un ensemble petit (ou un petite ensemble) et une fonction de Lyapunov, ensuite construire les processus de couplage de Markov en utilisant le temps d'atteinte de l'ensemble petit, alors nous pouvons obtenir le résultat de convergence. Mais il y a quelques difficultés que nous rencontrons souvent. D'abord, l'ensemble petit et la fonction de Lyapunov sont généralement difficiles à trouver (par exemple, jusqu'ici, il n'y a pas/peu de condition de minoration explicite pour le processus de Markov dans l'équation cinétique du Fokker-Planck) ; Deuxièmement, même si nous pouvons obtenir la bonne estimation de la convergence du taux par Meyn-Tweedie, par exemple, dans la décroissance exponentielle à la distance en variation totale, nous ne savons pas généralement la valeur de la constante avant l'exponentielle $e^{-\lambda t}$, il est donc difficile d'obtenir des évaluations quantitatives.

L'avantage de la l'approche Meyn-Tweedie, c'est que nous n'avons pas besoin de connaître la forme exacte de la mesure invariante. Mais pour la méthode des inégalités fonctionnelles, il est nécessaire de bien la connaître. Si nous avons explicitement inégalité de Poincaré (faible), nous pouvons obtenir le taux explicite de la convergence. Dans le cas symétrique, l'équivalence entre l'inégalité de Poincaré (faible) et la décroissance (sous-)exponentielle est un beau résultat. Cependant, pas parfait dans l'inégalité de Poincaré (faible) qui ne "boucle" pas.

La dernière méthode est l'hypocoercivité, extension naturelle de la méthode précédente. Dans le modèle de l'équation cinétique de Fokker-Planck, bien que l'inégalité de Poincaré ne soit pas satisfaite pour la mesure invariente μ (pas pour $\mathcal{E}$), nous avons encore le taux explicite exponentielle de la convergence. Ici, le changement des normes est la clé. Le résultat est aussi quantitatif.

Dans les deux prochains chapitres, nous utilisons d'abord l'approche Meyn-Tweedie pour obtenir la convergence sous-exponentielle générale pour des processus de Markov à temps continu. Au dernier chapitre, on étend l'hypocoercivité à l'hypocoervité faible et on obtient la convergence sous-exponentielle pour la solution de l'équation cinétique de Fokker-Planck.

Ces deux chapitres dont les résumés suivent constituent deux articles

1. la convergence sous-exponentielle explicite par l'approche couplage de Meyn-Tweedie, dont une version longue mais préliminaire, se trouve en Partie 2, écrite avec S.V. Bitseki Penda, A. Guillin et M. Hairer. Cet article devrait être soumis d'ici un mois.
2. l'extension au cas sous exponentiel de l'hypocercivité, actuellement soumis aux *Bulletin de la Société Mathématique de France*.

Chapitre 2

Convergence sous-exponentielle de processus de Markov en temps continu

Dans ce chapitre, nous allons introduire quelques résultats sur la convergence sous-exponentielle de processus de Markov à temps continu. Et nous utilisons l'approche Meyn-Tweedie pour ces résultats.

2.1 Taux de convergence explicites sous-exponentielles en temps discret

Rappelons un résultat de convergence explicite pour des chaînes de Markov qui a été obtenu par Douc, Moulines et Soulier [108].

Nous donnons quelques hypothèses, la première est la condition de minoration en discret

(A1) Il existe un ensemble $C \in \mathcal{B}(E)$, une constante $\epsilon > 0$ et une mesure de probabilité $Q(\cdot)$ tels que, pour tout $x \in C$, $P(x, \cdot) \geq \epsilon\nu(\cdot)$.

Soit $\overline{P}$ un noyau de transition de Markov sur $E \times E$ tel que, pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\begin{aligned}
\overline{P}(x, x', A \times E) &= P(x, A)1_{(C\times C)^c}(x, x') + Q(x, A)1_{C\times C}(x, x') \\
\overline{P}(x, x', E \times A) &= P(x', A)1_{(C\times C)^c}(x, x') + Q(x', A)1_{C\times C}(x, x')
\end{aligned}$$

où Q est le noyau résiduel, défini pour $x \in C$ et $A \in \mathcal{B}(E)$, par

$$Q(x, A) = \begin{cases} (1-\epsilon)^{-1}(P(x, A) - \epsilon\nu(A)), 0 < \epsilon < 1, \\ \nu(A), \epsilon = 1. \end{cases}$$

Notre seconde condition est une borne du moment de temps d'atteinte de la chaîne bivariée à $C \times C$ sous la probabilité $\overline{P}_{x,x'}$. Soit $r(n) \in \Lambda$ une suite croissante , $\log r(n)/n \downarrow 0$ quand $n \to \infty$, et $R(n) := \sum_{k=0}^{n-1} r(k)$. Soit $\sigma_{C\times C} := \inf\{n \geq 0, (X_n, X'_n) \in C \times C\}$ et $\tau_{C\times C} := \inf\{n \geq 1, (X_n, X'_n) \in C \times C\}$ (le premier temps d'atteinte et de retour à $C \times C$) et posons

$$U(x,x') := \overline{\mathbb{E}}_{x,x'}\left[\sum_{k=0}^{\sigma_{C\times C}} r(k)\right].$$

Soit $v : E \times E \to [0,\infty)$ une fonction mesurable et

$$V(x,x') = \overline{\mathbb{E}}_{x,x'}\left[\sum_{k=0}^{\sigma_{C\times C}} v(X_k, X'_k)\right].$$

(A2) Pour chaque $(x,x') \in E \times E$, $U(x,x') < \infty$ et $b_U < \infty$, où

$$b_U = \sup_{(x,x')\in C\times C} \overline{P}U(x,x') = \sup_{(x,x')\in C\times C} \overline{\mathbb{E}}_{x,x'}\left[\sum_{k=0}^{\tau_{C\times C}-1} r(k)\right].$$

(A3) Pour chaque $(x,x') \in E \times E$, $V(x,x') < \infty$ et $b_V < \infty$ où

$$b_V = \sup_{(x,x')\in C\times C} \overline{P}V(x,x') = \sup_{(x,x')\in C\times C} \overline{\mathbb{E}}_{x,x'}\left[\sum_{k=1}^{\tau_{C\times C}} v(X_k, X'_k)\right].$$

Définissons $\|\mu\|_f := \sup_{|g|\leq f} |\int g d\mu|$ (f-norme). Nous allons montrer que la différence de $P(x,\cdot) - P(x',\cdot)$ reste bornée en f-norme pour chaque fonction f satisfaisant $f(x)+f(x') \leq V(x,x')$ pour chaque $(x,x') \in E\times E$. En utilisant une technique d'interpolation, nous en déduirons un taux de convergence $1 \leq s \leq r$ associé à quelque g-norme, $0 \leq g \leq f$. Pour construire une telle interpolation, nous considérons une paire de fonctions positives (α, β) satisfaisant, pour $0 \leq \rho \leq 1$,

$$\alpha(u)\beta(v) \leq \rho u + (1-\rho)v, \tag{2.1}$$

pour chaque $(u,v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Théorème 2.1.1. *Supposons (A1), (A2) et (A3). Définissons*

$$M_U := \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \left(b_U r(k) \frac{1-\epsilon}{\epsilon} - R(k+1) \right)_+ \right\} \text{ and } M_V := b_V \frac{1-\epsilon}{\epsilon},$$

Alors, pour chaque $(x,x') \in E \times E$,

$$\begin{aligned} \|P^n(x,\cdot) - P^n(x',\cdot)\|_{TV} &\leq \frac{U(x,x') + M_U}{R(n) + M_U}, \\ \|P^n(x,\cdot) - P^n(x',\cdot)\|_f &\leq V(x,x') + M_V, \end{aligned}$$

pour chaque fonction non négative f *satisfaisant, pour chaque* $(x,x') \in E \times E$, $f(x) + f(x') \leq V(x,x') + M_V$. *Soit* (α,β) *deux fonctions positives satisfaisant (2.1) pour un* $0 \leq \rho \leq 1$. *Alors, pour chaque* $(x,x') \in E \times E$ *et* $n \geq 1$,

$$\|P^n(x,\cdot) - P^n(x',\cdot)\|_g \leq \frac{\rho(u(x,x') + M_U) + (1-\rho)(V(x,x') + M_V)}{\alpha \circ \{R(n) + M_U\}},$$

pour chaque fonction g *positive satisfaisant, pour chaque* $(x,x') \in E\times E$, $g(x) + g(x') \leq \beta \circ \{V(x,x') + M_V\}$.

Nous allons utiliser la même idée pour obtenir l'analogue pour des processus de Markov à temps continu.

2.2 Les hypothèses et les définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E})$ une famille de Markov sur un espace localement compact métrique séparable E doté de sa σ-algèbre $\mathcal{B}(E)$: $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace mesurable, $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{\geq 0}$ et $\mathbb{P}_x$ (resp. $\mathbb{E}_x$) désigne la probabilité canonique (resp. espérance) associée au processus de Markov avec une distribution initiale la masse de Dirac au point x. Tout au long de ce chapitre, le procéssus est supposé être un processus de Markov fort homogène avec des trajectoires càdlàg, et nous notons la fonction de transition associée par P_t sur $(E, \mathcal{B}(E))$.

2.2.1 *Petite ensemble et* $\mathbf{D}(\mathbf{C}, \mathbf{V}, \phi, b)$

Considérons la condition de dérive suivante par rapport à un *petite* ensemble fermé C (voyez Définition 1.4.1).

$\mathbf{D}(\mathbf{C}, \mathbf{V}, \phi, b)$: Il y a un *petite* ensemble fermé C, une fonction càdlàg $V : E \longrightarrow [1, \infty)$, une fonction croissante concave différentiable positive $\phi : [1, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ et une constante $b < \infty$ tels que pour chaque $s \geq 0$, $x \in X$,

$$\mathbb{E}_x\Big[V(X_s)\Big] + \mathbb{E}_x\left[\int_0^s \phi \circ V(X_u)du\right] \leq V(x) + b\mathbb{E}_x\left[\int_0^s 1_C(X_u)du\right]. \qquad (2.2)$$

Notez que (2.2) est équivalente à la condition que la fonctionnelle

$$s \longrightarrow V(X_s) - V(X_0) + \int_0^s \phi \circ V(X_u)du - b\int_0^s 1_C(X_u)du$$

soit pour chaque $x \in E$ une $\mathbb{P}_x$-surmartingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Stabilité et taux sous-exponentielles de la convergence ont été étudiés dans ([61]) sous l'hypothèse principale $\mathbf{D}(\mathbf{C}, \mathbf{V}, \Phi, b)$. Plus précisément, Douc, Fort et Guillin [61] ont montré la proposition suivante.

Proposition 2.2.1 ([61], Proposition 3.9 et Théorème 3.10)**.** *Supposons que* $\mathbf{D}(\mathbf{C}, \mathbf{V}, \phi, b)$ *et* $\sup_C V < \infty$. *Alors, le processus est récurrent positif avec une mesure de probabilité invariante* μ *tel que* $\mu(\phi \circ V) < \infty$. *Si de plus chaîne squelette* P^m *est irréductible pour un temps* $m > 0$ *et* $\lim_{+\infty} \phi' = 0$, *alors il existe une constante finie c telle que pour tout* $t > 0$ *et tout* $x \in E$,

$$\phi \circ H_\phi^{-1}(t)\|P^t(x, \cdot) - \mu(\cdot)\|_{TV} \leq cV(x) \qquad (2.3)$$

où la fonction H_ϕ *est défini par*

$$H_\phi(u) = \int_1^u \frac{ds}{\phi(s)}, \forall u \geq 1.$$

Notez que (2.3) signifie une convergence plus lente que la convergence exponentielle. Soit Λ_0 la classe des fonctions mesurables et croissante $r : [0, +\infty) \to [2, +\infty)$ tel que $\log r(t)/t \downarrow 0$ quand $t \to +\infty$. Soit Λ la classe des fonctions mesurables positives $\overline{r}$ telles que pour un certain $r \in \Lambda_0$,

$$0 < \liminf_t \frac{\overline{r}(t)}{r(t)} \leq \limsup_t \frac{\overline{r}(t)}{r(t)} < \infty.$$

On s'intéresse généralement aux conditions qui impliquent qu'il existe une constante positive c, telle que pour tout $x \in E$, il existe une $r(t) \in \Lambda$ telle que

$$r(t)\|P^t(x, \cdot) - \mu(\cdot)\|_f \leq cV(x),$$

Malheureusement, la constante c qui apparaît dans (2.3) n'est pas déterminée. Notre objectif principal est donc d'obtenir une borne quantitative pour le taux de convergence sous-exponentielle du processus vers sa distribution de probabilité stationnaire μ. Plus précisément, pour déterminer une fonction $g : X \to [0, \infty)$, qui peut être calculée explicitement, telle que

$$r(t)\|P^t(x, \cdot) - \mu(\cdot)\|_{TV} \leq g(x), \forall x \in E, \tag{2.4}$$

où $r \in \Lambda$.

2.2.2 Conditions de Lyapunov pour $\mathbf{D}(\mathbf{C}, \mathbf{V}, \phi, b)$

Généralement, la condition de dérive $\mathbf{D}(\mathbf{C}, \mathbf{V}, \phi, b)$ n'est pas facile à obtenir. Il est donc important de fournir une condition suffisante qui est plus maniable. Pour cela, nous utilisons les critères habituels basée sur le générateur étendu. Soit $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : E \to \mathbb{R}$ avec la propriété suivante : il existe une fonction mesurable $h : E \to \mathbb{R}$ telle que la fonction $t \mapsto h(X_t)$ est intégrable $\mathbb{P}_x-$a.s. pour chaque $x \in E$ et le processus

$$t \mapsto f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t h(X_s)ds$$

est une $\mathbb{P}_x-$martingale locale pour tout x. On dit alors que $h = \mathcal{A}f$, et f est dans le domaine du générateur étendu $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$. Définissons $\mathcal{C} = \Big\{\phi : [1, \infty) \to \mathbb{R}^+ : \phi$ est croissante, différentiable,
concave, $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = +\infty$, $\lim_{t\to\infty} \phi'(t) = 0, \log \phi(t)/t \downarrow 0$ as $t \to \infty\Big\}$. Nous avons alors

Théorème 2.2.2 ([61], Théorème 3.11)**.** *Supposons qu'il existe un petite ensemble fermé C, une fonction càdlàg $V : X \to [1, +\infty)$ avec $V \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\phi \in \mathcal{C}$, et une constante $b < \infty$ tels que pour tout $x \in X$,*

$$\mathcal{A}V(x) \leq -\phi \circ V(x) + b1_C(x). \tag{2.5}$$

alors $\mathbf{D}(\mathbf{C}, \mathbf{V}, \phi, b)$ est satisfaite.

2.3 Une estimation des moments de temps de retour

Enonçons le résultat suivant qui sera utile pour la preuve de nos résultats. Définissons $\tau_C^{t^*} := \inf\{t \geq t^*, X_t \in C\}$.

Théorème 2.3.1 ([61], Théorème 3.1)**.** *Supposons $\mathbf{D}(\mathbf{C}, \mathbf{V}, \phi, b)$, alors nous avons l'estimation des moments ci-dessous,*

– *Pour tout $x \in X$ et $t^* > 0$,*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C^{t^*}} \phi \circ V(X_s) ds \right] \leq V(x) - 1 + bt^*.$$

– *Pour tout $x \in X$ et $t^* \geq 0$,*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C^{t^*}} \phi \circ H_\phi^{-1}(s) ds \right] \leq V(x) - 1 + \frac{b}{\phi(1)} \int_0^{t^*} \phi \circ H_\phi^{-1}(s) ds.$$

Une preuve simple de ce résultat est présentée dans la version longue de l'article.

2.4 Résultats principaux et les preuves

Maintenant, nous commençons à présenter nos résultats et l'idée de preuve.

2.4.1 Taux sous-exponentielle de convergence

Théorème 2.4.1. *Soit un processus de Markov X_t avec les probabilités de transition $P_t(x, \cdot)$, supposons que $\mathbf{D}(\mathbf{C}, \mathbf{V}, \phi, b)$ et $\sup_C V < \infty$, $\Phi \in \mathcal{C}$, $C \in \mathcal{B}(E)$, qui est (t^*, ϵ)-small, pour un certain temps positif t^*, et $\epsilon > 0$, la distribution stationnaire est μ, alors si $\mu(V) < \infty$*

$$\|\mathcal{L}(X_s) - \mu\|_{TV} \leq \sum_{0 \leq n, s \geq nt^*} (1-\epsilon)^n \widetilde{A}_1 \frac{H_\phi^{-1}(\lambda \widetilde{A}_0 n)}{H_\phi^{-1}(\lambda(s - t^*))} \leq \frac{\widetilde{A}_1 \widetilde{A}_{\epsilon,\phi}}{H_\phi^{-1}(\lambda(s - t^*))}$$

où

$$\widetilde{A}_0 =: \frac{2}{\lambda \Phi(1)} \sup_{x \in C} \left\{ V(x) - 1 + \frac{b}{\phi(1)} \int_0^{t^*} \phi \circ H_\phi^{-1}(\lambda s) ds) \right\} < \infty,$$

$$\widetilde{A}_1 = \max \left\{ \frac{\mathbb{E}\Big[V(X_0)\Big] + \mu(V) - 2}{H_\phi^{-1}(\lambda \widetilde{A}_0)}, 1 \right\},$$

et

$$d_0 = \inf_{x \notin C} V(x), \quad 0 < \lambda \leq 1 - \frac{b}{\phi(d_0)}, \quad \widetilde{A}_{\epsilon,\phi} = \sum_{0 \leq n, s \geq nt^*} (1-\epsilon)^n H_\phi^{-1}(\lambda \widetilde{A}_0 n) < \infty.$$

En général on a

$$\|\mathcal{L}(X_s^x) - \mathcal{L}(X_s^y)\|_{TV} \leq \frac{A(V(x)+V(y))}{H_\phi^{-1}(\lambda(s-t^*))}$$

pour A donnée par

$$A = \max\left\{\frac{1}{V(x)+V(y)}, \frac{1}{H_\phi(\lambda \widetilde{A}_0)}\right\} \times \widetilde{A}_{\epsilon,\phi}.$$

Remark 2.4.2. On a utilisé facilement la condition de Lyapunov pour trouver que $\mu(\phi(V)) < \infty$ mais $\mu(V)$ n'est pas contrôlée a priori. Cependant, si nous supposons que $\mu(\psi(V)) < \infty$, et $\phi(x) \leq \psi(x) \leq x$ pour x grand et ψ concave, on peut obtenir

$$||\mathcal{L}(X_s^x) - \mu||_{TV} \leq \frac{A(V(x))}{H_\phi^{-1}(\lambda(s-t^*))} + CR(t)$$

pour quelque constante C et R. De plus, R converge vers zéro quand $t \to \infty$.

Enonçons maintenant un résultat concernant le couplage par translation [110], qui fournit la borne sur la moyenne ergodique de la distance à la distribution stationnaire.

Théorème 2.4.3. *Soit un processus de Markov X_t avec les probabilités de transition $P_t(x,\cdot)$ et distribution stationnaire $\mu(\cdot)$, supposons $\mathbf{D}(\mathbf{C},\mathbf{V},\phi,b)$ et* $\sup_C V < \infty$*, $C \in \mathcal{B}(E)$ est (t^*,ϵ)-small pour un certain temps positif t^* et $\epsilon > 0$. Alors pour $t > 0$*

$$\left\|\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{P}(X_s \in \cdot)ds - \mu(\cdot)\right\|_{TV} \leq \frac{1}{t}\left(2t^* + c + c'\right),$$

où

$$c = A_1 A_{\varepsilon,\phi}\int_{t^*}^{+\infty} \frac{1}{H_\phi^{-1}(s-t^*)}ds, \quad c' = A_1' A_{\varepsilon,\phi}\int_{t^*}^{+\infty} \frac{1}{H_\phi^{-1}(s-t^*)}ds,$$

avec

$$A_1 = \max\left\{\frac{\mathbb{E}\Big[V(X_0)\Big]-1}{H_\phi^{-1}(A_0)}, 1\right\}, \quad A_1' = \max\left\{\frac{\mathbb{E}_\mu\big[V\big]-1}{H_\phi^{-1}(A_0)}, 1\right\} \quad \textit{and} \quad A_{\varepsilon,\phi} < \infty.$$

2.4.2 La construction de la trajectoire

On rappelle que $C \in \mathcal{B}(E)$ est (t^*,ϵ)-small dans $\mathbf{D}(\mathbf{C},\mathbf{V},\Phi,b)$, ce qui signifie $P_{t^*}(x,\cdot) \geq \epsilon Q(\cdot)$ pour $x \in C$. Nous allons utiliser la construction ci-dessous, qui est celle notamment utilisée par Roberts et Rosenthal ([110], la preuve du Lemme 6). Soit une suite de v.a.i.i.d. $Z_1, Z_2, ..., Z_i \sim B(1,\epsilon)$, Nous construisons (X_t, X_t') et le temps d'arrêt aléatoire

$$\widetilde{T} = \inf\left\{\widetilde{\tau}_i^{t^*} + t^*, \left(X_{\widetilde{\tau}_i^{t^*}}, X'_{\widetilde{\tau}_i^{t^*}}\right) \in C \times C, Z_i = 1\right\}.$$

Soit

$$\widetilde{\tau}^{t^*}_{C\times C} = \inf\left\{t \geq t^*, (X_t, X'_t) \in C \times C\right\}, \quad \widetilde{\tau}^{t^*}_1 = \widetilde{\tau}^0_{C\times C},$$

and

$$\widetilde{\tau}^{t^*}_i = \inf\left\{t \geq \widetilde{\tau}^{t^*}_{i-1} + t^*, (X_t, X'_t) \in C \times C\right\}, \quad i \geq 2.$$

Pour chaque $\widetilde{\tau}^{t^*}_i$, si X_t, X'_t n'ont pas encore couplé, alors on procède comme suit :

1. Si $Z_i = 1$, posons
$$X_{\widetilde{\tau}^{t^*}_i + t^*} = X'_{\widetilde{\tau}^{t^*}_i + t^*} \sim Q(\cdot),$$
et nous déclarons que les processus ont couplé, et à partir du moment de couplage, on pose $X_{\widetilde{\tau}^{t^*}_i + t^*} = X'_{\widetilde{\tau}^{t^*}_i + t^*}$;
2. Si $Z_i = 0$, posons
$$X_{\widetilde{\tau}^{t^*}_i + t^*} \sim \frac{1}{1-\epsilon}\Big(P_{t^*}(X_{\widetilde{\tau}^{t^*}_i}, \cdot) - \epsilon Q(\cdot)\Big) \quad \text{et} \quad X'_{\widetilde{\tau}^{t^*}_i + t^*} \sim \frac{1}{1-\epsilon}\Big(P_{t^*}(X'_{\widetilde{\tau}^{t^*}_i}, \cdot) - \epsilon Q(\cdot)\Big)$$
conditionnellement indépendante.

Dans les deux cas ci-dessus, nous complétons X_t et X'_t pour $\widetilde{\tau}^{t^*}_i < t < \widetilde{\tau}^{t^*}_i + t^*$ conditionnellement indépendante, en utilisant les distributions correctes conditionnelles données par $X_{\widetilde{\tau}^{t^*}_i}, X'_{\widetilde{\tau}^{t^*}_i}, X_{\widetilde{\tau}^{t^*}_i + t^*}, X'_{\widetilde{\tau}^{t^*}_i + t*}$. $\widetilde{T}$ est le temps de couplage. Il est facile de voir que X_t et X'_t suivent marginalement les probabilités de transition $P_t(x, \cdot)$.

2.4.3 Condition de dérive bivariée et contrôle du temps de régénération

À partir de la condition de dérive originale (2.5), nous pouvons obtenir la condition de dérive bivariée pour la construction de notre couplage.

Lemma 2.4.4. *Supposons que la condition de dérive (2.5) est satisfaite pour les probabilités de transition $P_t(x, \cdot)$, nous construisons le processus de Markov bidimensionel (X_t, X'_t) sur $E \times E$ comme ci-dessus avec les probabilités de transition $\widetilde{P}_t(x, x', \cdot, \cdot)$, donc $\widetilde{P}_t$ satisfait la condition de dérive bivariée ($\widetilde{\mathcal{A}}$ est le générateur du semi-goupe $\widetilde{P}_t$) :*

$$\widetilde{\mathcal{A}}W(x, x') \leq -\lambda\phi \circ W(x, x') + 2b1_{C\times C}(x, x')$$

avec $W(x, x') = V(x) + V(x') - 1$, $d_0 = inf_{x\notin C}V(x)$, $0 < \lambda \leq 1 - \frac{b}{\phi(d_0)}$

Par ailleurs, la condition $\mathbf{D}(\mathbf{C}, \mathbf{V}, \phi, b)$ a changé pour (X_t, X'_t).

Lemma 2.4.5. *Supposons que la condition de dérive (2.5) est satisfaite, donc $\mathbf{D}(\mathbf{C}, \mathbf{V}, \phi, b)$ est satisfaite pour P_t et $\mathbf{D}(\mathbf{C} \times \mathbf{C}, \mathbf{W}, \lambda\phi, 2b)$ est satisfaite pour $\widetilde{\mathbb{P}}_t$ avec $W(x, x') = V(x) + V(x') - 1$, $d_0 = \inf_{x\notin C} V(x)$, $0 < \lambda \leq 1 - \frac{b}{\phi(d_0)}$.*

Le contrôle des moments du temps de couplage suit.

Lemma 2.4.6. *Supposons que $P_t(x,\cdot)$ est satisfait avec $\mathbf{D}(\mathbf{C},\mathbf{V},\phi,b)$ et $\sup_C V < \infty$, $\Phi \in \mathcal{C}$, $C \in \mathcal{B}(E)$ est (t^*,ϵ)-small, pour un certain temps positif t^*, et $\epsilon > 0$, nous construisons le processus (X_t, X'_t) et le temps de couplage $\widetilde{T}$ comme ci-dessus, alors nous avons que*

$$\mathbb{P}(\widetilde{T} > s) \leq \sum_{0\leq n, s\geq nt^*} (1-\epsilon)^n \widetilde{A}_1 \frac{H_\phi^{-1}(\lambda \widetilde{A}_0 n)}{H_\phi^{-1}(\lambda(s-t^*))} \leq \frac{\widetilde{A}_1 \widetilde{A}_{\epsilon,\phi}}{H_\phi^{-1}(\lambda(s-t^*))},$$

où

$$\widetilde{A}_0 =: \frac{2}{\lambda\Phi(1)} \sup_{x\in C} \left\{ V(x) - 1 + \frac{b}{\phi(1)} \int_0^{t^*} \phi \circ H_\phi^{-1}(\lambda s) ds \right\} < \infty,$$

$$\widetilde{A}_1 = \max\left\{ \frac{\mathbb{E}\Big[V(X_0) + V(X'_0)\Big] - 2}{H_\phi^{-1}(\lambda \widetilde{A}_0)}, 1 \right\},$$

$$\widetilde{A}_{\epsilon,\Phi} = \sum_{0\leq n, s\geq nt^*} (1-\epsilon)^n H_\phi^{-1}(\lambda \widetilde{A}_0 n) < \infty,$$

and

$$d_0 = \inf_{x\notin C} V(x), \quad 0 < \lambda \leq 1 - \frac{b}{\phi(d_0)}.$$

2.4.4 Preuves

Nous avons construit les processus (X_t, X'_t) conjointement comme ci-dessus, et obtenu la condition de dérive appropriée et le contrôle des moments du temps de régénération. Alors par l'inégalité de couplage $\|\mathcal{L}(X_t) - \mathcal{L}(X'_t)\|_{TV} \leq \mathbb{P}(\widetilde{T} > t)$, avec $\mathcal{L}(X'_0) = \mu$, nous pouvons obtenir directement Théorème 2.4.1.

Pour la preuve du Théorème 2.4.3, nous utilisons la même façon de construire les deux processus X_t et Y_t, qui suivent les probabilités de transition P_t et il y a les temps T et T' tel que $\mathcal{L}(X_T) = \mathcal{L}(Y_{T'}) = Q(\cdot)$.

Nous définissons le processus joint (X_t, X'_t) comme suit

$$\begin{cases} X'_{T'} = X_T \\ X'_{T'+t} = X_{T+t} \text{ for } t \geq 0 \\ X'_t = Y_t \text{ for } t < T' \end{cases}$$

Il est facile de voir que X'_t suit encore les probabilités de transition $P_t(x,\cdot)$.Les temps T et T' sont les "temps de couplage par translation" pour X_t et X'_t. Les bornes supérieures de $\mathbb{P}(T > s)$ et $\mathbb{P}(T' > s)$ peuvent être obtenues de la même manière, voir Lemme 2.4.6.

Par l'inégalité de couplage par translation (voir e.g [110], Proposition 5), nous avons

$$
\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{P}(X_s \in .)ds - \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{P}(X'_s \in .)ds \right\|_{TV} \\
&\quad \leq \frac{1}{t}\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > s)ds + \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T' > s)ds \right) \\
&\quad \leq \frac{1}{t}\left(2t^* + \int_{t^*}^{+\infty} \mathbb{P}(T > s)ds + \int_{t^*}^{+\infty} \mathbb{P}(T' > s)ds \right).
\end{aligned}
$$

Soit $\mathcal{L}(X'_0) = \mu(\cdot)$, le résultat du Théorème 2.4.3 est établi par intégration des bornes supérieures de $\mathbb{P}(T > s)$ et $\mathbb{P}(T' > s)$.

2.5 Application et exemple

2.5.1 Le cas réversible

Soit $\{X_t\}$ un processus de diffusion n-dimensionel définit par

$$
dX_t = dB_t + \frac{1}{2}\nabla \ln \pi(X_t)dt, \tag{2.6}
$$

où B_t est un mouvement brownien standard n-dimensionel.

Nous supposons que $\pi(x) = e^{-V(x)}$ où $V(x) = (1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}$, et $0 < \alpha < 1$. Il est connu que π est la densité à une constante de normalisation sur $\mathbb{R}^n$ par rapport à la mesure de Lebesgue, de la distribution de probabilité invariante unique du processus $\{X_t\}$ (voir par exemple [6], [3] ou [42]). Dans la suite, π représente en même temps la probabilité invariante et la fonction de densité. Nous rappelons que le générateur du processus est donné par $L = \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\nabla \ln \pi(x) \cdot \nabla$ (où le point indique produit scalaire).

Fonction de Lyapunov

Soit $\iota \in]0,1[$. Nous définissons la fonction W par

$$
W(x) = e^{\iota\left(1+|x|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}}
$$

Donc $W \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. La partie suivante est déduite en partie des calculs de [61], Section 4.1 ; voir aussi [6] Section 4.3.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}W = \quad LW &= \tfrac{1}{2}\Big\{ \iota\alpha n \left(1+|x|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-1} + \iota\alpha(\alpha-2)|x|^2\left(1+|x|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-2} + \iota^2\alpha^2|x|^2\left(1+|x|^2\right)^{\alpha-2} \\
&\qquad -\iota\alpha^2|x|^2\left(1+|x|^2\right)^{\alpha-2} \Big\} \times e^{\iota\left(1+|x|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}} \\
&= -\tfrac{1}{2}\underbrace{\left\{ -\frac{\alpha n \iota^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}} + \frac{\iota^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\alpha(2-\alpha)|x|^2}{(1+|x|^2)^{1+\frac{\alpha}{2}}} - \frac{\iota\iota^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\alpha^2|x|^2}{1+|x|^2} + \frac{\iota^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\alpha^2|x|^2}{1+|x|^2} \right\}}_{g(x)} \\
&\qquad \times\Big(\log W(x)\Big)^{-2\frac{1-\alpha}{\alpha}} \times \exp\Big(\iota(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\Big).
\end{aligned}
$$

Soit M tel que pour tout $|x| > M$, $g(x) > 0$. Un tel M existe car nous pouvons voir que le graphe de g a la forme d'un bol. Soit $C = \overline{B}(0, M)$ la boule fermée centrée au 0 et le rayon M. Posons $\kappa = \frac{1}{2} \inf_{x \notin C} g(x)$. Pour tout $a > 0$, nous avons

$$\mathcal{A}W(x) \leq -\Phi \circ W(x) + b\mathbf{1}_C(x)$$

où

$$\Phi(x) = \kappa x \Big(a + \log x\Big)^{-2\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad b = \sup_C \mathcal{A}W + \sup_C \Phi \circ W.$$

W est donc une fonction de Lyapunov sous l'hypothèse que C vérifie la condition de minoration.

Maintenant afin d'être dans le cadre de l'application du Lemme 2.4.4 et Lemma 2.4.5 nous choisissons $d_0 > 0$ de façon que $\Phi(d_0) > b$ et $M' = \sqrt{\left(\frac{\ln d_0}{\iota}\right)^{\frac{2}{\alpha}} - 1} > M$ (c'est toujours possible car la fonction Φ est non décroissante et $\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = +\infty$). Posons encore $C = B(0, M')$. Donc nous avons

$$\mathcal{A}W(x) \leq -\Phi \circ W(x) + b\mathbf{1}_C(x)$$

et $d_0 = \inf_{x \notin C} W(x)$, $\Phi(d_0) > b$.

Conditions de minoration

Nous avons besoin d'une nouvelle définition pour la condition de minoration.

Définition 2.5.1 ((t, ϵ)-pseudo ensemble petit)**.** *Un sous-ensemble $S \subset E$ est appelé (t, ϵ)-pseudo ensemble petit, si pour tout x, $y \in S$, il existe une mesure de probabilité $Q_{xy}(\cdot)$ sur E, telle que*

$$P_t(x, \cdot) \geq \epsilon Q_{xy}(\cdot) \ \textit{and} \ P_t(y, \cdot) \geq \epsilon Q_{xy}(\cdot).$$

Dans ce qui suit, nous allons vérifier que l'hypothèse du Théorème 9 (ou Théorème 7 dans un cas unidimensionnel) de [110] est satisfaite.

Soit $C = \mathbf{B}(0, M') = \prod_{i=1}^{n} [-M', M']$ où M' est comme ci-dessus. Nous désignons le diamètre de C par D, i.e $D = 2\sqrt{n}M'$. Soit $a > M'$, $S = \prod_{i=1}^{n} [-a, a]$. Posons $\nabla \ln \pi(x) = (\mu_1(x), \cdots, \mu_n(x))$ où $\mu_i(x) = \frac{\alpha x_i}{(1+|x|^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}}$. Posons c et d tel que $c \leq \mu_i(x) \leq d$ pour tout $x \in S$. Posons $L = \sqrt{n}(d - c)$.

Alors, soit $t_0 > 0$, pour tout $t \geq t_0$, C est (t, ϵ)-pseudo petit (petit dans un cas unidimensionnel) avec

$$\begin{aligned}
\varepsilon \ &= \Psi(\tfrac{-D - t_0 L}{\sqrt{4t_0}}) + e^{-\frac{DL}{2}} \Psi(\tfrac{t_0 L - D}{\sqrt{4t_0}}) \\
&-2n\Psi(\tfrac{-(a-M') - t_0 c}{\sqrt{t_0}}) - 2ne^{-2(a-M')c}\Psi(\tfrac{t_0 c - (a-M')}{\sqrt{t_0}}) \\
&-2n\Psi(\tfrac{-(a-M') + t_0 d}{\sqrt{t_0}}) - 2ne^{2(a-M')d}\Psi(\tfrac{-t_0 d - (a-M')}{\sqrt{t_0}})
\end{aligned}$$

où $\Psi(s) = \int_{-\infty}^{s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$.

Remark 2.5.2. Dans le cas unidimensionnel, nous avons

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \Psi(\tfrac{-D-t_0L}{\sqrt{4t_0}}) + e^{-\frac{DL}{2}}\Psi(\tfrac{t_0L-D}{\sqrt{4t_0}}) \\ &-\Psi(\tfrac{-(a-M')-t_0c}{\sqrt{t_0}}) - e^{-2(a-M')c}\Psi(\tfrac{t_0c-(a-M')}{\sqrt{t_0}}) \\ &-\Psi(\tfrac{-(a-M')+t_0d}{\sqrt{t_0}}) - e^{2(a-M')d}\Psi(\tfrac{-t_0d-(a-M')}{\sqrt{t_0}})\end{aligned}$$

Bornes dans le cas de pseudo ensemble petit

Dans le cas multidimensionnel, nous avons obtenu des pseudoensembles petits au lieu d'ensembles petits. Les résultats que nous allons donner nous permettront d'avoir la même borne que dans le Théorème 2.4.1.

Théorème 2.5.3. *Soit un processus de Markov de transition $P_t(x,\cdot)$ et de distribution stationnaire $\pi(\cdot)$, supposons $C \in \mathcal{B}(E)$ es (t^*,ε) pseudo petit, pour un t^* et $\varepsilon > 0$. Supposons de plus $\mathbf{D}(\mathbf{C},\mathbf{V},\Phi,b)$ and $\sup_C V$. Alors*

$$\|\mathcal{L}(X_s) - \pi\|_{TV} \leq \sum_{0\leq n, s\geq nt^*} (1-\epsilon)^n \widetilde{A}_1 \frac{H_\Phi^{-1}(\lambda \widetilde{A}_0 n)}{H_\Phi^{-1}(\lambda(s-t^*))} \leq \frac{\widetilde{A}_1\widetilde{A}_{\epsilon,\Phi}}{H_\Phi^{-1}(\lambda(s-t^*))},$$

où $\widetilde{A}_0$, $\widetilde{A}_1$, λ, et $\widetilde{A}_{\varepsilon,\Phi}$ sont comme dans Théorème 2.4.1.

Calcul des constantes

Nous allons traiter le calcul des constantes qui apparaissent dans Théorème(2.4.1) et Théorème (2.5.3) ci-dessus .

Nous avons d'abord que

$$H_\Phi^{-1}(x) = \exp\left(\left(\kappa\left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right)x + a^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - a\right)$$

où κ est donnée ci-dessus.

$d_0 = \inf_{x\notin C} W(x)$ and $\Phi(d_0)$ est trouvé par la résolution de l'équation $\phi(d_0) > b$.

$$\lambda \in \left]0, 1 - \frac{b}{\Phi(d_0)}\right[.$$

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_0 &= \frac{2}{\lambda\Phi(1)}\sup_C\left\{W(x) - 1 + \frac{b}{\Phi(1)}\int_0^{t^*}\Phi\circ H_\Phi^{-1}(\lambda s)ds\right\} \\ &= \frac{2}{\lambda\Phi(1)}\left\{d_0 - 1 - \frac{b}{\lambda\Phi(1)} + \frac{b\exp\left(\left(\kappa\left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right)\lambda t^* + a^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right)}{\exp(a)\lambda\Phi(1)}\right\}.\end{aligned}$$

$\widetilde{A}_1 = \max\left\{\frac{\mathbb{E}\left[W(X_0)\right]+\pi(W)-2}{H_\Phi^{-1}(\lambda\widetilde{A}_0)}, 1\right\}$ est trouvé d'après la distribution initiale de notre chaîne.

Mettons $n_0' = \left[\frac{\left(\ln\left(\frac{1-a_\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right)^{\frac{2-\alpha}{2(\alpha-1)}}}{\left(\kappa\lambda\widetilde{A}_0\right)^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}\left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right)} - \frac{\alpha}{(2-\alpha)\kappa\lambda\widetilde{A}_0}\right]$ où $[x]$ est la partie entière de x.

Alors,

$$\widetilde{A}_{\varepsilon,\Phi} = \frac{\exp\left(\left(\kappa\left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right)\lambda\widetilde{A}_0 n_0 + 1\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - 1 - n_0\ln\left(\frac{1-a_\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right)}{a_\varepsilon}$$

où $n_0 = 1$ si n_0' est non positif, d'autre n_0 est une des valeurs n_0' ou $n_0' + 1$

2.6 Problèmes ouverts

Les deux éléments clés de l'approche Meyn-Tweedie sont la condition de Lyapunov et la condition de minoration. En fonction de ces deux conditions, nous pouvons construire le processus de Markov (ou un processus de Markov conjointement) satisfaisant les probabilités de transition données et un temps de couplage. Nous pouvons facilement contrôler la queue du temps de couplage par la construction de trajectoire et la condition de Lyapunov. Chaque étape ci-dessus est précisément quantitative. Finalement, nous pouvons obtenir un taux de convergence calculable du processus de Markov par couplage.

Cependant, dans les applications, la condition de dérive et conditions minorisation peuvent être difficile à obtenir.

Pour des diffusions standarts, et meme dans le cas de Fokker-Planck cinétique, on peut relativmeent aisément écrire ces conditions de Lyapunov. Mais pour des modèles plus compliqués, par exemple des chaînes d'oscillateurs, le problème reste entier. Seul le cas de 3 oscillateurs a été traité par Hairer et Mattingly et la fonction de Lyapunov est alors non explicite (se basant sur des contrôles de haute et basse énergie). Des méthodes de recoupement de fonctions de Lyapunov existent également (voir Mattingly et ses coauteurs), mais une méthode "générique" serait vraiment un grand pas.

De même l'obtention de bornes fines sur l'ensemble petit sont difficiles à obtenir. Jusqu'ici, pour le modèle de l'équation cinétique de Fokker-Planck, nous ne pouvons pas établir la condition de dérive et la condition minoration dans le cas général et surtout la coupler avec la condition de Lyapunov, bien que nous sachions que les résultats de convergence (sous) exponentielles sont établis par l'hypocoercivité (voir le chapitre suivant). C'est donc également un travail important à réaliser. Dans le cas réversible, la méthode d'inégalités fonctionnelles par conditions de Lyapunov remplace la condition de minoration par une condition de Poincaré locale, il serait également intéressant d'étudier les liens entre les deux.

Chapitre 3

Convergence sous-exponentielle dans l'équation cinétique linéaire de Fokker-Planck

3.1 Construction de la nouvelle norme

Rappelons-nous que l'équation cinétique linéaire de Fokker-Planck est une équation différentielle stochastique dégénérée sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} dX_t = Y_t dt \\ dY_t = \sqrt{2} dB_t - \nabla V(X_t) dt - Y_t dt \end{cases}$$

L'EDP correspondante a la forme :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h - \nabla V(x) \cdot \nabla_v h = \Delta_v h - v \cdot \nabla_v h.$$

Nous supposerons toujours que le potentiel $V(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et $|\nabla^2 V(x)| \leq M$ pour quelque $M > 0$. Sous cette hypothèse, le calcul de la nouvelle norme qui est équivalente à $\mathcal{H}^1$ est plus claire. En fait, toutes les conclusions sont également correctes dans le cas général plus $|\nabla^2 V(x)| \leq M(1+|\nabla V|)$ pour $M > 0$ mais avec de plus mauvaises estimations des constantes. En utilisant les mêmes notations que dans le chapitre 1,

$$A_i := \frac{\partial}{\partial v_i}, A := \nabla_v, B := v \cdot \nabla_x - \nabla V(x) \cdot \nabla_v, C := [A, B] = \nabla_x,$$

$$L := A^* A + B = -\Delta_v + v \cdot \nabla_v + v \cdot \nabla_x - \nabla V(x) \cdot \nabla_v.$$

La norme de $\mathcal{H}^1$-Sobolev naturelle est $\| \cdot \|_{\mathcal{H}^1(\mu)}$:

$$\|h\|^2_{\mathcal{H}^1(\mu)} = \|h\|^2_2 + \|Ah\|^2_2 + \|Ch\|^2_2 = \|h\|^2_2 + \|\nabla h\|^2_2$$

Nous définissons un autre produit scalaire $((\cdot,\cdot))$:

$$((h,h)) = \|h\|_2^2 + a\|Ah\|_2^2 + 2b\langle Ah, Ch\rangle_2 + c\|Ch\|_2^2.$$

Où les constantes positives a, b, c seront choisies telles que $c \leq b \leq a$, $b^2 < ac$ et il existe $\kappa > 0$,

$$((h, Lh)) \geq \kappa(\|Ah\|_2^2 + \|Ch\|_2^2).$$

La construction de la nouvelle norme peut être créée par la proposition ci-dessous.

Proposition 3.1.1. *Pour l'équation cinétique de Fokker-Planck, $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et $|\nabla^2 V(x)| \leq M$ avec une constante $M \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Il y a une constante $\kappa > 0$, telle que*

$$((h, Lh)) \geq \kappa(\|Ah\|_2^2 + \|Ch\|_2^2).$$

$\kappa := \min(\frac{3}{4} + a - bM, b - (a+b+cM)^2)$ dépend de a, b, c, M. Par exemple, nous pouvons choisir $c < \frac{1}{M(M+2)^2}$, $b = cM$, $a = cM^2$.

3.2 Convergence sous-exponentielle dans H^1 et dans L^2

3.2.1 Convergence sous-exponentielle dans H^1

Si la mesure invariante μ satisfait l'inégalité de Poincaré faible (pour l'opérateur ∇, pas pour le carré du champ), nous pouvons obtenir le taux de convergence sous-exponentielle explicite de la solution dans la nouvelle norme et donc dans H^1. Nous avons la contrepartie du Théorème 18 et Théorème 35 dans [126] par Villani.

Théorème 3.2.1. *Avec les mêmes conditions que dans la proposition 3.1.1, nous pouvons choisir a, b, c tels que*

$$((h,h)) = \|h\|_2^2 + a\|Ah\|_2^2 + 2b\langle Ah, Ch\rangle_2 + c\|Ch\|_2^2$$

satisfait la conclusion de la Proposition 3.1.1. Si, de plus, la mesure μ satisfait l'inégalité de Poincaré faible

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \beta(s)\int |\nabla f|^2 d\mu + s\|f\|_\infty^2, s > 0.$$

Alors il y a la même constante κ que dans la Proposition 3.1.1 et pour $\int h d\mu = 0$ et $t > 0$, tel que

$$((e^{-tL}h, e^{-tL}h)) \leq \inf_{\substack{s>0\\ \beta(s)>0}} \left(((h,h)) \exp\{-\lambda(s)t\} + \frac{\kappa s}{\beta(s)\lambda(s)} \sup_{0\leq t'\leq t} \|e^{-t'L}h\|_\infty^2 \right).$$

avec,

$$\lambda(s) = \min(\kappa, \frac{\kappa}{\beta(s)}) \left(\max(1,a,c)(1 + \frac{b}{\sqrt{ac}}) \right)^{-1}$$

Par ailleurs,

$$((e^{-tL}h, e^{-tL}h)) \leq \xi(t)\left(((h,h)) + \|h\|_\infty^2\right),$$

avec

$$\xi(t) = K \inf_{\substack{s>0\\ \beta(s)>0}} \left\{ \frac{s}{\min(\beta(s),1)}, t \geq -\frac{1}{\lambda(s)} \log \frac{Ks}{\min(\beta(s),1)} \right\},$$

$$K = \max(1,a,c)(1+\frac{b}{\sqrt{ac}}).$$

En particulier, on a $\xi(t) \to 0$ *quand* $t \to \infty$

La preuve du théorème est simplement établi par le Lemme de Gronwall, le choix de la nouvelle norme est habile et crucial. De plus, par l'équivalence entre $\langle \cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}^1}$ et $((\cdot,\cdot))$, nous avons

Corollary 3.2.2. *Avec les mêmes notations que le Théorème ci-dessus, pour* $\int h d\mu = 0$*, nous avons*

$$\|e^{-tL}h\|_{\mathcal{H}^1}^2 \leq \frac{1}{\min(1,a,c)(1-\frac{b}{\sqrt{ac}})}\xi(t)\left(\max(1,a,c)(1+\frac{b}{\sqrt{ac}})\|h\|_{\mathcal{H}^1}^2 + \|h\|_\infty^2\right).$$

3.2.2 Convergence sous-exponentielle dans L^2

Du travail de Guillin et Wang [84], nous pouvons obtenir l'estimation du gradient des solutions.

Lemma 3.2.3. *Soit h fonction mesurable bornée, alors il existe une constante* $d_0 > 0$*, pout tout* $0 < t_0 < 1$*, tel que*

$$\|\nabla e^{-t_0 L}h\|_2^2 \leq \frac{d_0\|h\|_\infty^2}{t_0^3}$$

Par calcul direct et en remarquant la relation entre les normes dans L^2 et dans $\mathcal{H}^1$,

Théorème 3.2.4. *Soit h fonction mesurable bornée, donc il existe une constante* $d > 0$*, pout tout* $0 < t_0 < 1$*, pour* $\int h d\mu = 0$*, tel que*

$$\|e^{-(t+t_0)L}h\|_2^2 \leq d_1\left(K\|h\|_2^2 + d_2\|h\|_\infty^2\right)\xi(t)$$

avec, $d_1 = (\min(1,a,c)(1-\frac{b}{\sqrt{ac}}))^{-1}$*,* $d_2 = (\frac{d_0 d_2}{t_0^3}+1)$*,* $K = \max(1,a,c)(1+\frac{b}{\sqrt{ac}})$.

3.3 Convergence sous-exponentielle dans le sens entropique

Dans cette section, nous allons considérer la décroissance dans le sens entropique. Dans le Théorème suivant, on déforme l'information de Fisher en utilisant un champ approprié de forme quadratique, et on le combine avec l'information de Kullback. L'inégalité de Poincaré faible sera changée en inégalité de Sobolev logarithmique faible. Tous les résultats et les preuves sont similaires à celles de la section précédente à quelques détails techniques près.

3.3.1 entropie modifiée

Théorème 3.3.1. *Pour l'équation cinétique de Fokker-Planck, $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$ avec $|\nabla^2 V(x)| \leq M$ (norme de Hilbert-Schmidt, ponctuelle sur $\mathbb{R}^n$) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Il y a une fonction $x \to S(x)$, à valeur dans l'espace des matrices $n \times n$ symétriques positives, uniformément bornée, telle que si l'on définit,*

$$\mathcal{E}(h) := \int h \log h d\mu + \int \frac{\langle S\nabla h, \nabla h\rangle}{h} d\mu, h \geq 0$$

on a l'estimation

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(e^{-tL}h) \leq -\alpha \int \frac{\langle S\nabla e^{-tL}h, \nabla e^{-tL}h\rangle}{e^{-tL}h} d\mu,$$

pour $\alpha > 0$, explicitement calculable.

En fait, $\mathcal{E}(h)$ est une combinaison linéaire de l'information de Fisher et de l'information de Kullback. La construction sera présentée en détail dans le Théorème suivant.

3.3.2 Inégalité de Sobolev logarithmique faible et l'équation cinétique de Fokker-Planck

Associée à l'inégalité de Sobolev logarithmique faible, nous obtenons :

Théorème 3.3.2. *Avec les mêmes conditions que dans le Théorème 3.3.1, nous pouvons choisir a, b, c, tel que*

$$\mathcal{E}(h) = \int h \log h d\mu + a \int \frac{|Ah|^2}{h} d\mu + 2b \int \frac{\langle Ah, Ch\rangle}{h} d\mu + c \int \frac{|Ch|^2}{h} d\mu$$

satisfait la conclusion du Théorème 3.3.1. Si, de plus, la mesure μ satisfait l'inégalité de Sobolev logarithmique faible

$$Ent_\mu(f^2) \leq \beta(s) \int |\nabla f|^2 d\mu + s\|f\|_\infty^2, s > 0.$$

avec $\beta(s)$ est une fonction décroissante positive sur $(0, +\infty)$, $\beta(s) \downarrow 0$, quand $s \uparrow \infty$. Alors il y a la même constante α que dans le Théorème 3.3.1 et pour $\int h d\mu = 1$,

$$\mathcal{E}(e^{-tL}h) \leq \inf_{\substack{s>0 \\ \beta(s)>0}} \left\{ \mathcal{E}(h) \exp[-\alpha\lambda(s)t] + \frac{ks}{2\beta(s)\lambda(s)} \sup_{0 \leq t' \leq t} \|\sqrt{e^{-t'L}h}\|_\infty^2 \right\}$$

avec $\lambda(s) = \min(\frac{kK^{-1}}{2}, \frac{2k}{\beta(s)})$, $k = \min(a - b\sqrt{\frac{a}{c}}, c - b\sqrt{\frac{c}{a}}) > 0$, $K = \max(a + b\sqrt{\frac{a}{c}}, c + b\sqrt{\frac{c}{a}})$. De plus,

$$\mathcal{E}(e^{-tL}h) \leq \xi(t) \left(\mathcal{E}(h) + \|h\|_\infty\right)$$

avec,

$$\xi(t) = \inf_{\substack{s>0 \\ \beta(s)>0}} \left\{ \frac{s}{\min(\beta(s)K^{-1}, 4)}, t \geq -\frac{1}{\alpha\lambda(s)} \log \frac{s}{\min(\beta(s)K^{-1}, 4)} \right\}.$$

En particulier, on a $\xi(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.

3.4 Deux exemples

Nous allons donner deux types de potentiel $V(x)$, tels que l'inégalité de Poincaré faible et l'inégalité de Sobolev logarithmique faible soient satisfaites pour la mesure invariente μ. Donc le taux de la convergence sous-exponentielle peut être calculé.

D'abord, nous considérons le cas unidimensionnel. Il est bien connu que $(1+\alpha)\log(1+|x|)$ et $|x|^p$ satisfont séparément deux inégalités fonctionnelles faibles. Deuxièmement, nous allons les lisser en 0. Enfin, pour le cas n-dimensionnel, en construisant la mesure produit, nous obtiendrons les conditions appropriées pour le Théorème 3.2.1 et le Théorème 3.3.2.

3.4.1 Potentiels comme $(1+\alpha)\log(1+|x|)$

Inégalité de Poincaré faible pour $(1+\alpha)\log(1+|x|)$

Soit $\alpha > 0$. Pour n=1, soit $\tilde{V}(x) = (1+\alpha)\ln(1+|x|)$, $\frac{1}{Z_{\tilde{V}}}e^{-\tilde{V}(x)}dx = d\tilde{m}_\alpha(x) = \frac{1}{2}\alpha(1+|x|)^{-1-\alpha}dx$ satisfait l'inégalité de Poincaré faible

$$\mathrm{Var}_{\tilde{m}_\alpha}(f) \le \tilde{\beta}(s)\int |\nabla f|^2 d\tilde{m}_\alpha + s\,\mathrm{Osc}(f)^2.$$

Où $\tilde{\beta}(s) = \tilde{c}_\alpha s^{-2/\alpha}$ pour $0 < s < 1/4$, et $\tilde{\beta}(s) = 0$ pour $s \ge 1/4$, voir [12]. Mais $\tilde{V}(x) = (1+\alpha)\ln(1+|x|)$ n'est pas lisse au point 0, donc nous devons la modifier. Soit

$$V(x) = \begin{cases} (1+\alpha)\ln(1+|x|), & |x| \ge 1 \\ -\frac{3(1+\alpha)}{32}x^4 + \frac{7(1+\alpha)}{16}x^2 + (1+\alpha)(\ln 2 - \frac{17}{32}), & |x| < 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Il est facile de voir que $V(x)$ est $C^2(\mathbb{R})$, bornée et minorée par $(1+\alpha)(\ln 2 - 17/32) > 0$, et 0 est la médiane de la mesure $\frac{1}{Z_V}e^{-V(x)}dx$. Par le Corollaire 4 dans [12], on peut vérifier que la mesure modifiée $dm_\alpha(x) = \frac{1}{Z_V}e^{-V(x)}dx$ satisfait encore l'inégalité de Poincaré faible ($\mathrm{Osc}(f)$ remplace $\|f\|_\infty$) comme la mesure initiale $\tilde{m}_\alpha(x)$. Comme $\tilde{m}_\alpha(x)$, $\beta(s) = \tilde{c}_\alpha s^{-2/\alpha}$ pour $0 < s < 1/4$ et $\beta(s) = 0$ pour $s \ge 1/4$.

Soit m_α^n le $n-$produit tensoriel de m_α, i.e. $m_\alpha^n(x) = \otimes^n m_\alpha(x)$. Grâce à la propriété de sous-additivité de la variance, m_α^n satisfait l'inégalité de Poincaré faible

$$\mathrm{Var}_{m_\alpha^n}(f) \le c_\alpha(\frac{s}{n})^{-2/\alpha}\int |\nabla f|^2 dm_\alpha^n + s\,\mathrm{Osc}(f)^2, 0 < s < 1/4.$$

Parce que la mesure gaussienne $d\gamma^n(v) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|v|^2}{2}}dv$ satisfait l'inégalité de Poincaré avec $C_p = 1$, donc la mesure produit $m_\alpha^n \otimes \gamma^n$ satisfait l'inégalité de Poincaré faible :

$$\mathrm{Var}_{m_\alpha^n\otimes\gamma^n}(f) \le \beta(s)\int |\nabla f|^2 dm_\alpha^n \otimes \gamma^n + s\|f\|_\infty^2.$$

où $\beta(s) = \max(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}c_\alpha(\frac{s}{n})^{-2/\alpha})$ pour $0 < s < 1$, et $\beta(s) = 0$ pour $s \ge 1$.

D'autre part, il est facile de vérifier que $|\nabla^2 V(x)| \leq M$ pour une constante $M \geq 0$. Alors les résultats de la convergence dans $\mathcal{H}^1$ et dans L^2 peuvent être établis pour ce cas par les Théorèmes précédents.

Inégalité de Sobolev logarithmique faible pour $(1+\alpha)\log(1+|x|)$

Pour le cas unidimensionnel, il a été obtenu que la mesure $\frac{1}{Z_{\tilde{V}}} e^{-\tilde{V}(x)} dx = d\tilde{m}_\alpha(x)$ satisfait une inégalité de Sobolev logarithmique faible, voir [41]. En utilisant la méthode de lissage de (3.1), la mesure modifiée $dm_\alpha(x) = \frac{1}{Z_V} e^{-V(x)} dx$ satisfait l'inégalité de Sobolev logarithmique faible (en utilisant $\mathrm{Osc}(f)$) avec la fonction

$$\forall s > 0, \beta(s) = C \frac{(\log 1/s)^{1+2/\alpha}}{s^{2/\alpha}}$$

avec une constante $C > 0$. Le résultat de tensorisation pour l'inégalité de Sobolev logarithmique faible a été établi par Proposition 6.1 dans [41]. Alors la mesure $v_p^n \otimes \gamma^n$ satisfait l'inégalité de Sobolev logarithmique faible avec la fonction

$$\forall s > 0, \beta(s) = \max(1/2, C(\log n/s)^{(2-p)/p})$$

pour certain $C_n > 0$.

3.4.2 Potentiels comme $|x|^p$

Iinégalité de Poincaré faible pour $|x|^p$

Soit $0 < p < 1$. Nous considérons tout d'abord $n = 1$. Soit $\tilde{V}(x) = |x|^p$, $\frac{1}{Z_{\tilde{V}}} e^{-\tilde{V}(x)} dx = d\tilde{v}_p(x) = \frac{e^{-|x|^p}}{2\Gamma(1+1/p)} dx$ satisfait l'inégalité de Poincaré faible

$$\mathrm{Var}_{\tilde{v}_p}(f) \leq \tilde{\beta}(s) \int |\nabla f|^2 d\tilde{v}_p + s\,\mathrm{Osc}(f)^2$$

avec $\tilde{\beta}(s) = \tilde{c}_p(\log(2/s))^{\frac{2}{p}-2}$ pour $0 < s < 1/4$, et $\tilde{\beta}(s) = 0$ pour $s \geq 1/4$, voir [12]. Soit

$$V(x) = \begin{cases} |x|^p, & |x| \geq 1 \\ \frac{p(p-2)}{8}x^4 + \frac{p(4-p)}{4}x^2 + (1 - \frac{3}{4}p + \frac{1}{8}p^2), & |x| < 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Il est facile de voir que $V(x)$ est $C^2(\mathbb{R})$, bornée et minorée par $1 - \frac{3}{4}p + \frac{1}{8}p^2 > 0$, et 0 est la médiane de la mesure $\frac{1}{Z_V} e^{-V(x)} dx$. Par le Corollaire 4 dans [12], on peut vérifier que la mesure modifiée $dv_p = \frac{1}{Z_V} e^{-V(x)} dx$ satisfait encore l'inégalité de Poincaré ($\mathrm{Osc}(f)$ remplace $\|f\|_\infty$) comme la mesure initiale $\tilde{v}_p(x)$. Comme $\tilde{v}_p(x)$, $\beta(s) = c_p(\log(2/s))^{\frac{2}{p}-2}$ pour $0 < s < 1/4$ et $\beta(s) = 0$ pour $s \geq 1/4$.

Soit v_p^n le n-produit tensoriel de v_p, i.e. $v_p^n(x) = \otimes^n v_p(x)$. Alors v_p^n satisfait l'inégalité :

$$\mathrm{Var}_{v_p^n}(f) \leq c_p(\log(2n/s))^{\frac{2}{p}-2} \int |\nabla f|^2 dv_p^n + s\,\mathrm{Osc}(f)^2, 0 < s < 1/4.$$

La mesure produit $v_p^n \otimes \gamma^n$ satisfait l'inégalité de Poincaré faible :

$$\mathrm{Var}_{v_p^n\otimes\gamma^n}(f) \le \beta(s)\int |\nabla f|^2 dv_p^n \otimes \gamma^n + s\|f\|_\infty^2.$$

où $\beta(s) = \max(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}c_p(\log(2n/s))^{\frac{2}{p}-2})$ pour $0 < s < 1$, et $\beta(s) = 0$ pour $s \ge 1$.

$|x|^p$ pour l'inégalité de Sobolev logarithmique faible

Pour $0 < p < 2$ et le cas unidimensionnel, il a été obtenu que la mesure $\frac{1}{Z_{\tilde{V}}}e^{-\tilde{V}(x)}dx = d\tilde{v}_p(x)$ satisfait l'inégalité de Sobolev logarithmique faible, voir [41]. En utilisant la même méthode de lissage que pour (3.2), la mesure modifiée $dv_p(x) = \frac{1}{Z_V}e^{-V(x)}dx$ satisfait aussi l'inégalité de Sobolev logarithmique faible (en utilisant $\mathrm{Osc}(f)$) avec la fonction

$$\forall s > 0, \beta(s) = C(\log 1/s)^{(2-p)/p}$$

pour quelque constante $C > 0$.

La procédure naïve de tensorization peut nous dire que la mesure $v_p^n \otimes \gamma^n$ satisfait l'inégalité de Sobolev logarithmique faible avec la fonction

$$\forall s > 0, \beta(s) = \max(1/2, C(\log n/s)^{(2-p)/p})$$

pour quelque constante $C_n > 0$.

Enfin il est facile de voir que $|\nabla^2 V(x)| \le M$ pour un certain $M \ge 0$.

3.5 problème ouvert

Récemment, Dolbeault, Mouhot, et Schmeiser [89] ont développé une nouvelle méthode pour prouver l'hypocoercivité pour une grande classe d'équations linéaires cinétiques avec seulement une loi de conservation. Ils ont aussi donné une décroissance exponentielle dans $L^2(\mu)$ pour l'équation de Fokker-Planck. Ils considèrent l'espace des positions et l'espace des vitesses séparément par projection sur l'ensemble des équilibres locaux. Ils ont introduit le terme"microscopic coercivity" et "macroscopic coercivity" qui impliquent les inégalités de Poincaré sur l'espace des positions et l'espace des vitesses séparément. Ils ont aussi construit une nouvelle norme qui est équivalente à la norme de L^2 par un opérateur auxiliaire. Le contrôle de la norme de l'opérateur auxiliaire est important et technique.

Pour les décroissance sous-exponentielle, nous devrions considérer un "macroscopic coercivity" plus faible sur l'espace des positions. La difficulté est de savoir comment équilibrer les deux parties, dont l'un est "microscopic coercivity", l'autre est "macroscopic coercivity" plus faible. Ce sera notre travail futur.

Bibliographie

[1] S. Aida. Uniform positivity improving property, Sobolev inequalities and spectral gaps. *J. Funct. Anal.*, 158 :152–185, 1998.

[2] S. Aida, T. Masuda, and I. Shigekawa. Logarithmic Sobolev inequalities and exponential integrability. *J. Funct. Anal.*, 126(1) :83–101, 1994.

[3] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, and G. Scheffer. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, volume 10 of *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, Paris, 2000.

[4] D. Bakry. L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes. In *Lectures on Probability theory. École d'été de Probabilités de St-Flour 1992*, volume 1581 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–114. Springer, Berlin, 1994.

[5] D. Bakry, F. Barthe, P. Cattiaux, and A. Guillin. A simple proof of the Poincaré inequality for a large class of probability measures. *Electronic Communications in Probability.*, 13 :60–66, 2008.

[6] D. Bakry, P. Cattiaux, and A. Guillin. Rate of convergence for ergodic continuous Markov processes : Lyapunov versus Poincaré. *J. Func. Anal.*, 254 :727–759, 2008.

[7] D. Bakry and M. Émery. Diffusions hypercontractives. In *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, volume 1123 of *Lecture Notes in Math.*, pages 177–206. Springer, Berlin, 1985.

[8] D. Bakry and M. Ledoux. Levy-Gromov isoperimetric inequality for an infinite dimensional diffusion generator. *Invent. Math.*, 123 :259–281, 1996.

[9] R. E. Barlow, A. W. Marshall, and F. Proschan. Properties of probability distributions with monotone hazard rate. *The Annals of Math. Statistics*, 34(2) :375–389, 1963.

[10] F. Barthe. Levels of concentration between exponential and Gaussian. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 10(3) :393–404, 2001.

[11] F. Barthe. Isoperimetric inequalities, probability measures and convex geometry. In *European Congress of Mathematics*, pages 811–826. Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.

[12] F. Barthe, P. Cattiaux, and C. Roberto. Concentration for independent random variables with heavy tails. *AMRX*, 2005(2) :39–60, 2005.

[13] F. Barthe, P. Cattiaux, and C. Roberto. Interpolated inequalities between exponential and Gaussian, Orlicz hypercontractivity and isoperimetry. *Rev. Mat. Iber.*, 22(3) :993–1066, 2006.

[14] F. Barthe, P. Cattiaux, and C. Roberto. Isoperimetry between exponential and Gaussian. *Electronic J. Prob.*, 12 :1212–1237, 2007.

[15] F. Barthe and A. V. Kolesnikov. Mass transport and variants of the logarithmic Sobolev inequality. *J. Geom. Anal.*, 18(4) :921–979, 2008.

[16] F. Barthe and C. Roberto. Sobolev inequalities for probability measures on the real line. *Studia Math.*, 159(3), 2003.

[17] F. Barthe and C. Roberto. Modified logarithmic Sobolev inequalities on $\mathbb{R}$. To appear in Potential Analysis, 2008.

[18] F. Barthe and Z.. Zhang. Private communication. 2009.

[19] A. Blanchet, M. Bonforte, J. Dolbeault, G. Grillo, and J. L. Vázquez. Asymptotics of the fast diffusion equation via entropy estimates. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 191(2) :347–385, 2009.

[20] S. G. Bobkov. Isoperimetric inequalities for distributions of exponential type. *Ann. Probab.*, 22(2) :978–994, 1994.

[21] S. G. Bobkov. A functional form of the isoperimetric inequality for the Gaussian measure. *J. Funct. Anal*, 135 :39–49, 1996.

[22] S. G. Bobkov. Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability measures. *Ann. Prob.*, 27(4) :1903–1921, 1999.

[23] S. G. Bobkov. Spectral gap and concentration for some spherically symmetric probability measures. In *Geometric Aspects of Functional Analysis, Israel Seminar 2000-2001,*, volume 1807 of *Lecture Notes in Math.*, pages 37–43. Springer, Berlin, 2003.

[24] S. G. Bobkov. Large deviations and isoperimetry over convex probability measures. *Electr. J. Prob.*, 12 :1072–1100, 2007.

[25] S. G. Bobkov, I. Gentil, and M. Ledoux. Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations. *J. Math. Pu. Appli.*, 80(7) :669–696, 2001.

[26] S. G. Bobkov and F. Götze. Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities. *J. Funct. Anal.*, 163(1) :1–28, 1999.

[27] S. G. Bobkov and C. Houdré. Isoperimetric constants for product probability measures. *Ann. Prob.*, 25 :184–205, 1997.

[28] S. G. Bobkov and C. Houdré. Some connections between isoperimetric and Sobolev-type inequalities. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 129(616), 1997.

[29] S. G. Bobkov and C. Houdré. Weak dimension-free concentration of measure. *Bernoulli*, 6(4) :621–632, 2000.

[30] S. G. Bobkov and M. Ledoux. Poincaré's inequalities and Talagrand's concentration phenomenon for the exponential distribution. *Probab. Theory Related Fields*, 107(3) :383–400, 1997.

[31] S. G. Bobkov and M. Ledoux. Weighted Poincaré-type inequalities for Cauchy and other convex measures. *Ann. Probab.*, 37(2) :403–427, 2009.

[32] S. G. Bobkov and B. Zegarlinski. Entropy bounds and isoperimetry. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 176(829), 2005.

[33] S. G. Bobkov and B. Zegarlinski. Distribution with slow tails and ergodicity of markov semigroups in infinite dimensions. Preprint, 2007.

[34] S.G. Bobkov and M. Ledoux. PoincareÕs inequalities and talagrandÕs concentration phenomenon for the exponential distribution. *Prob. Theor. Rel. Fields*, 107 :383–400, 1997.

[35] C. Borell. The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space. *Invent. Math.*, 30(2) :207–216, 1975.

[36] C. Borell. Convex set functions in d-space. *Period. Math. Hungar.*, 6(2) :111–136, 1975.

[37] E. Carlen. Superadditivity of Fisher's information and Logarithmic Sobolev inequalities. *J. Func. Anal.*, 101 :194–211, 1991.

[38] E. Carlen, S. Kusuoka, and D. Stroock. Upper bounds for symmetric Markov transition functions. *Ann. Inst. Henri Poincaré. Prob. Stat.*, 23 :245–287, 1987.

[39] P. Cattiaux. A pathwise approach of some classical inequalities. *Potential Analysis*, 20 :361–394, 2004.

[40] P. Cattiaux. Hypercontractivity for perturbed diffusion semi-groups. *Ann. Fac. des Sc. de Toulouse*, 14(4) :609–628, 2005.

[41] P. Cattiaux, I. Gentil, and A. Guillin. Weak logarithmic Sobolev inequalities and entropic convergence. *Probab. Theory Related Fields*, 139(3-4) :563–603, 2007.

[42] P. Cattiaux, N. Gozlan, A. Guillin, and C. Roberto. Functional inequalities for heavy tailed distributions and applications to isoperimetry. Preprint., 2008.

[43] P. Cattiaux and A. Guillin. On quadratic transportation cost inequalities. *J. Math. Pures Appl.*, 88(4) :341–361, 2006.

[44] P. Cattiaux and A. Guillin. Deviation bounds for additive functionals of Markov processes. *ESAIM Probability and Statistics*, 12 :12–29, 2008.

[45] P. Cattiaux and A. Guillin. Trends to equilibrium in total variation distance. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 45(1) :117–145, 2009.

[46] P. Cattiaux and A. Guillin. Long time behavior of Markov processes and functional inequalities : Lyapunov conditions approach. Book in preparation, 2010.

[47] P. Cattiaux, A. Guillin, F.Y. Wang, and L. Wu. Lyapunov conditions for super Poincaré inequalities. *J. Funct. Anal.*, 256(6) :1821–1841, 2009.

[48] P. Cattiaux, A. Guillin, and L. Wu. A note on Talagrand transportation inequality and logarithmic Sobolev inequality. To appear in Prob. Theo. Rel. Fields., 2008.

[49] P. Cattiaux, A. Guillin, and L. Wu. Some remarks on weighted logarithmic Sobolev inequalities. Preprint, 2010.

[50] P. Cattiaux, A. Guillin, and P.A. Zitt. Poincaré inequalities and hitting times. To appear in ?., 2010.

[51] D. Chafaï. Entropies, convexity, and functional inequalities. *J. Math. Kyoto Univ.*, 44(2) :325–363, 2004.

[52] X. Chen and F. Y. Wang. Construction of larger Riemannian metrics with bounded sectional curvatures and applications. Preprint., 2007.

[53] C. B. Croke. Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates. *Ann. Sci. Éc. Norm. Super.*, 13 :419–435, 1980.

[54] E. B. Davies. *Heat kernels and spectral theory.* Cambridge University Press, 1989.

[55] J. Denzler and R. J. McCann. Fast diffusion to self-similarity : complete spectrum, long-time asymptotics and numerology. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 175(3) :301–342, 2005.

[56] J.D. Deuschel and D. W. Stroock. *Large deviations*, volume 137 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1989.

[57] H. Djellout, A. Guillin, and L. Wu. Transportation cost-information inequalities and applications to random dynamical systems and diffusions. *Ann. Probab.*, 32(3B) :2702–2732, 2004.

[58] J. Dolbeault, I. Gentil, A. Guillin, and F.Y.. Wang. l^q functional inequalities and weighted porous media equations. *Pot. Anal.*, 28(1) :35–59, 2008.

[59] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. III. *Comm. Pure Appl. Math.*, 29(4) :389–461, 1976.

[60] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. IV. *Comm. Pure Appl. Math.*, 36(2) :183–212, 1983.

[61] R. Douc, G. Fort, and A. Guillin. Subgeometric rates of convergence of f-ergodic strong Markov processes. *Stochastic Process. Appl.*, 119(3) :897–923, 2009.

[62] R. Douc, E. Moulines, and J.S. Rosenthal. Quantitative bounds on convergence of time-inhomogeneous Markov chains. *Stochastic Process. Appl.*, 14(4) :1643–1665, 2004.

[63] N. Down, S. P. Meyn, and R. L. Tweedie. Exponential and uniform ergodicity of Markov processes. *Ann. Prob.*, 23(4) :1671–1691, 1995.

[64] F. Dragoni. Metric Hopf-Lax formula with semicontinuous data. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 17(4) :713–729, 2007.

[65] G. Fort and G.O. Roberts. Subgeometric ergodicity of strong Markov processes. *Ann. Appl. Probab.*, 15(2) :1565–1589, 2005.

[66] P. Fougères. Spectral gap for log-concave probability measures on the real line. In *Séminaire de probabilités, XXXVIII*, volume 1857 of *Lecture Notes in Math.*, pages 95–123. Springer, Berlin, 2005.

[67] I. Gentil. Inégalités de Sobolev logarithmiques et de Poincaré pour la loi uniforme. Preprint. Available on http ://www.ceremade.dauphine.fr/ gentil/logsob-segment.pdf, 2006.

[68] I. Gentil, A. Guillin, and L. Miclo. Modified logarithmic Sobolev inequalities and transportation inequalities. *Probab. Theory Related Fields*, 133(3) :409–436, 2005.

[69] I. Gentil, A. Guillin, and L. Miclo. Modified logarithmic sobolev inequalities in null curvature. To appear in Revista Matematica Iberoamericana, 2006.

[70] P.W. Glynn and S. P. Meyn. A Liapounov bound for solutions of the Poisson equation. *Ann. Probab.*, 24(2) :916–931, 1996.

[71] F. Z. Gong and F. Y. Wang. Functional inequalities for uniformly integrable semigroups and applications to essential spectrums. *Forum Math.*, 14 :293–313, 2002.

[72] F. Z. Gong and L. M. Wu. Spectral gap of positive operators and its applications. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1*, t 331 :983–988, 2000.

[73] N. Gozlan. Characterization of Talagrand's like transportation-cost inequalities on the real line. *J. Func. Anal.*, 250(2) :400–425, 2007.

[74] N. Gozlan. Poincaré inequalities and dimension free concentration of measure. Preprint, 2007.

[75] N. Gozlan. Poincaré inequalities for non euclidean metrics and transportation inequalities. Preprint, 2007.

[76] N. Gozlan and C. Leonard. Transportation-information inequalities. preprint, 2009.

[77] L. Gross. Logarithmic Sobolev inequalities. *Amer. J. Math.*, 97(4) :1061–1083, 1975.

[78] L. Gross. Logarithmic Sobolev inequalities and contractivity properties of semi-groups. in Dirichlet forms. Dell'Antonio and Mosco eds. *Lect. Notes Math.*, 1563 :54–88, 1993.

[79] A. Guillin. Moderate deviations of inhomogeneous functionals of Markov processes and application to averaging. *Stochastic Process. Appl.*, 92(2) :287–313, 2001.

[80] A. Guillin. Averaging principle of SDE with small diffusion : moderate deviations. *Ann. Probab.*, 31(1) :413–443, 2003.

[81] A. Guillin, A. Joulin, C. Léonard, and L. Wu. Transportation-information inequalities for Markov processes iii. Preprint, 2010.

[82] A. Guillin, C. Léonard, L. Wu, and F.Y. Wang. Transportation-information inequalities for Markov processes ii. Preprint, 2009.

[83] A. Guillin, C. Léonard, L. Wu, and N. Yao. Transportation-information inequalities for Markov processes. *Probab. Theory Related Fields*, 144(3-4) :669–695, 2009.

[84] A. Guillin and F.Y. Wang. Degenerate Fokker-Planck equations : Bismut formula, gradient estimate and Harnack inequality. arXiv :1103.2817.

[85] A. Guionnet and B. Zegarlinski. Lectures on logarithmic Sobolev inequalities. Séminaire de Probabilités XXXVI. *Lect. Notes Math.*, 1801, 2002.

[86] M. Hairer and J. C. Mattingly. Slow energy dissipation in anharmonic oscillator chains. Preprint. Available at arXiv :0712.3884, 2007.

[87] M. Hairer and J.C. Mattingly. Yet another look at Harris' ergodic theorem for Markov chains. Preprint. Available at arXiv :0810.2777v1, 2008.

[88] B. Helffer and F. Nier. In Hypoellipticity and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians. *Lecture Notes in Math*, 1862, 2005.

[89] C. Mouhot J. Dolbeault and C. Schmeiser. Hypocoercivity for linear Kinetic equations conserving mass. to appear in *Trans. Am. Math. Soc.*, see also arXiv :1005.1495v1, 2010.

[90] R. Kannan, L. Lovász, and M. Simonovits. Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma. *Discrete Comput. Geom.*, 13(3-4) :541–559, 1995.

[91] A. V. Kolesnikov. Modified log-Sobolev inequalities and isoperimetry. Preprint. Available on Mathematics ArXiv.math.PR/0608681, 2006.

[92] I. Kontoyiannis and S. P. Meyn. Spectral theory and limit theorems for geometrically ergodic Markov processes. *Ann. Appl. Probab.*, 13(1) :304–362, 2003.

[93] I. Kontoyiannis and S. P. Meyn. Large deviations asymptotics and the spectral theory of multiplicatively regular Markov processes. *Electron. J. Probab.*, 10 :no. 3, 61–123 (electronic), 2005.

[94] S. Kusuoka and D. Stroock. Some boundedness properties of certain stationary diffusion semigroups. *J. Func. Anal.*, 60 :243–264, 1985.

[95] R. Latała and K. Oleszkiewicz. Between Sobolev and Poincaré. in geometric aspects of Functional Analysis. *Lect. Notes Math.*, 1745 :147–168, 2000.

[96] M. Ledoux. On Talagrand's deviation inequalities for product measures. *ESAIM Probab. Statist.*, 1 :63–87 (electronic), 1995/97.

[97] M. Ledoux. Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities. In *Séminaire de Probabilités XXXIII*, volume 1709 of *Lecture Notes in Math.*, pages 120–216. Springer, Berlin, 1999.

[98] M. Ledoux. *The concentration of measure phenomenon*, volume 89 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[99] M. Ledoux. Spectral gap, logarithmic Sobolev constant, and geometric bounds. In *Surveys in differential geometry.*, volume IX, pages 219–240. Int. Press, Somerville MA, 2004.

[100] K. Marton. Bounding $\bar{d}$-distance by informational divergence : a method to prove measure concentration. *Ann. Prob.*, 24 :857–866, 1996.

[101] S. P. Meyn and R. L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability.* Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag London Ltd., London, 1993.

[102] S. P. Meyn and R. L. Tweedie. Stability of markovian processes II : continuous-time processes and sampled chains. *Adv. Appl. Proba.*, 25 :487–517, 1993.

[103] S. P. Meyn and R. L. Tweedie. Stability of markovian processes III : Foster-Lyapunov criteria for continuous-time processes. *Adv. Appl. Proba.*, 25 :518–548, 1993.

[104] E. Milman. On the role of convexity in isoperimetry, spectral-gap and concentration. *Invent. math.*, 177 :1–43, 2009.

[105] B. Muckenhoupt. Hardy's inequality with weights. *Studia Math.*, 44 :31–38, 1972. collection of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity, **I**.

[106] E. Nummelin and P. Tuominen. The rate of convergence in Orey'stheorem for Harris recurrent Markov chains with applications to renewal theory. *Stochastic Processes and their Applications*, 15 :295–311, 1983.

[107] F. Otto and C. Villani. Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality. *J. Funct. Anal.*, 173(2) :361–400, 2000.

[108] E. Moulines R. Douc and P. Soulier. Computable convergence rates for sub-geometric ergodic Markov chains. *Bernoulli*, 13(3) :831–848, 2007.

[109] C. Roberto and B. Zegarlinski. Orlicz-Sobolev inequalities for sub-gaussian measures and ergodicity of Markov semi-groups. To appear in *J. Funct. Anal.*., 2005.

[110] G.O. Roberts and J.S. Rosenthal. Quantitative bounds for convergence rates of continuous time Markov processees. 1(9) :1–21, 1996.

[111] M. Röckner and F. Y. Wang. Weak Poincaré inequalities and L^2-convergence rates of Markov semigroups. *J. Funct. Anal.*, 185(2) :564–603, 2001.

[112] M. Röckner and F. Y. Wang. Supercontractivity and ultracontractivity for (non-symmetric) diffusion semi-groups on manifolds. *Forum Math.*, 15(6) :893–921, 2003.

[113] A. Ros. The isoperimetric problem. In *Global theory of minimal surfaces*, volume 2 of *Clay Math. Proc.*, pages 175–209. Amer. Math. Soc., 2005.

[114] J.S. Rosenthal. Minorization conditions and convergence rates for Markov chain monte carlo. *Journal of the American Statistical Association*, 90(430) :558–566, 1995.

[115] J.S. Rosenthal. Quantitative convergence rates of Markov chains : A simple account. *Electronic Communications in Probability*, 7 :123–128, 2002.

[116] G. Royer. *Une initiation aux inégalités de Sobolev logarithmiques*. S.M.F., Paris, 1999.

[117] L. Saloff-Coste. On global Sobolev inequalities. *Forum Mathematicum*, 6 :271–286, 1994.

[118] L. Saloff-Coste. *Aspects of Sobolev type inequalities*. Cambridge University Press, 2002.

[119] E. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton University Press, 1970.

[120] V. N. Sudakov and B. S. Cirel′son. Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures. *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 41 :14–24, 165, 1974. Problems in the theory of probability distributions, II.

[121] M. Talagrand. A new isoperimetric inequality and the concentration of measure phenomenon. In *Geometric aspects of functional analysis (1989–90)*, volume 1469 of *Lecture Notes in Math.*, pages 94–124. Springer, Berlin, 1991.

[122] M. Talagrand. The supremum of some canonical processes. *Amer. J. Math.*, 116(2) :283–325, 1994.

[123] M. Talagrand. Transportation cost for Gaussian and other product measures. *Geom. Funct. Anal.*, 6 :587–600, 1996.

[124] J. L. Vázquez. An introduction to the mathematical theory of the porous medium equation. In *Shape optimization and free boundaries (Montreal, PQ, 1990)*, volume 380 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 347–389. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.

[125] A. Yu. Veretennikov. On polynomial mixing bounds for stochastic differential equations. *Stochastic Process. Appl.*, 70(1) :115–127, 1997.

[126] C. Villani. *Hypocoercivity*, volume 202. Mem. Amer. Math. Soc., 2009.

[127] C. Villani. *Optimal transport*, volume 338 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2009. Old and new.

[128] F. Y. Wang. Existence of the spectral gap for elliptic operators. *Arkiv Mat.*, 37(3) :395–407, 1999.

[129] F. Y. Wang. Functional inequalities for empty essential spectrum. *J. Funct. Anal.*, 170(1) :219–245, 2000.

[130] F. Y. Wang. Functional inequalities on arbitrary Riemannian manifolds. *J. Math. Anal. Appl.*, 30 :426–435, 2004.

[131] F. Y. Wang. *Functional inequalities, Markov processes and Spectral theory*. Science Press, Beijing, 2005.

[132] F. Y. Wang. A generalization of Poincaré and log-Sobolev inequalities. *Potential Anal.*, 22(1) :1–15, 2005.

[133] F. Y. Wang. From Super Poincaré to Weighted Log-Sobolev and Entropy-Cost Inequalities. To appear in J. Math. Pures Appl., 2008.

[134] L. Wu. Large and moderate deviations and exponential convergence for stochastic damping Hamiltonian systems. *Stochastic Process. Appl.*, 91(2) :205–238, 2001.

[135] L. Wu. Essential spectral radius for Markov semigroups. I. Discrete time case. *Probab. Theory Related Fields*, 128(2) :255–321, 2004.

Deuxième partie

Explicit sub exponential rates of convergence for continuous time Markov processes

EXPLICIT SUB EXPONENTIAL RATES OF CONVERGENCE FOR CONTINUOUS TIME MARKOV PROCESSES

S. VALÈRE BITSEKI PENDA$^{\diamond}$, **ARNAUD GUILLIN**$^{\diamond}$, **MARTIN HAIRER***, AND **XINYU WANG**$^{\diamond}$

$\diamond$ Université Blaise Pascal, $*$ Warwick University

Abstract. Using a coupling approach, we provide here quantitative sub exponential rates of convergence to equilibrium for continuous time process. Our main assumptions are based on Lyapunov conditions, introduced in [8], and an usual small set assumption. A comparison, in the reversible case, with results obtained by functional inequalities is done.

Key words : Markov processes, Lyapunov conditions, small sets, sub exponential ergodicity.

MSC 2000 : 60J25, 37A25.

1. Introduction and definitions

Let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in X})$ be a Markov family on a locally compact separable metric space X endowed with its Borel σ-field $\mathcal{B}(X)$: $(\Omega, \mathcal{F})$ is a measurable space, $(X_t)_{t\geq 0}$ is a Markov process with respect to the filtration $(\mathcal{F}_t)_{\geq 0}$ and $\mathbb{P}_x$ (resp. $\mathbb{E}_x$) denotes the canonical probability (resp. expectation) associated to the Markov process with initial distribution the point mass at x. Throughout this paper, the process is assumed to be a time-homogeneous strong Markov process with cád-làg paths, and we denote by $(P_t)_{t\geq 0}$ the associated semigroup on $(X, \mathcal{B}(X))$.

There are two important notions in the study of long time behavior of Markov processes: small sets and hitting times and their integrability properties. It is largely due to the following heuristics: a small set is a set with a nice behavior, i.e. a local version of a Doeblin condition, and integrability of the hitting times of this small set measures the speed of return of the process to this nice set. Let us be more precise with the following definitions.

For any $t^* > 0$ and any closed set $C \in \mathcal{B}(X)$, let $\tau_C^{t^*} = \inf\{t \geq t^*, X_t \in C\}$ be the hitting time on C delayed by t^*.

We say that a non-empty subset $C \subseteq X$ is (t^*, ε)-small (or simply small), for a positive time t^* and $\varepsilon > 0$, if there exists a probability measure $Q(\cdot)$ on X satisfying the minorization condition

$$P_{t^*}(x,\cdot) \geq \varepsilon Q(\cdot) \quad \forall x \in C. \tag{1.1}$$

For completeness, let us give also the definition of a petite set. The subset C is ν_a-petite (or simply petite) if there exists a probability measure a on the Borel σ-field of $[0,+\infty)$ and a non-trivial σ-finite measure ν_a on $\mathcal{B}(X)$ such that

$$\int_0^\infty P_t(x,\cdot)a(dt) \geq \nu_a(\cdot) \quad \forall x \in C.$$

One can thus see that every small set is a petite set.

Long time behavior of Markov process has been studied a lot through various set of techniques, but mainly for exponential speed of decay, such as coupling, control of hitting times and functional inequalities. It is of course a too long story to be exhaustive but let us refer to [21, 17, 20, 10] for Markov chains, [16, 18, 19, 22, 23, 12] for Markov processes via hitting times and Lyapunov conditions and [7, 2, 3, 4] for Markov processes via functional inequalities (Poincaré inequality, logarithmic Sobolev inequality). The case of sub exponential speed of decay with practical conditions has been considered only recently and only partial results exist, first for Markov chains [11] via Lyapunov type conditions, and extended to continuous time Markov process in [8]. See also [30] for a coupling approach and [6] for functional inequalities (weak Poincaré inequality). If usually functional inequalities usually provide quantitative estimates, even poor due to the difficulty to estimate precisely say the spectral gap constant, the hitting times approach of [8] furnishes speed of decay but not the constant multiplicative of this speed, so that the results are difficult to use in practice. It is the main goal of this paper: give quantitative estimates under easy to verify conditions. Our main assumptions will be Lyapunov conditions and small set conditions.

Let us consider the following Lyapunov (or drift) condition towards a closed petite set C.

We will say that a Φ-Lyapunov condition holds if there exist a closed petite set C, a cád-làg function $V : X \longrightarrow [1,\infty)$, an increasing differentiable concave positive function $\Phi : [1,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ and a constant $b < \infty$ such that for any $s \geq 0$, $x \in X$,

$$\mathbb{E}_x\Big[V(X_s)\Big] + \mathbb{E}_x\left[\int_0^s \Phi\circ V(X_u)du\right] \leq V(x) + b\mathbb{E}_x\left[\int_0^s 1_C(X_u)du\right]. \tag{1.2}$$

note that (1.2) is equivalent to the condition that the functional

$$s \longmapsto V(X_s) - V(X_0) + \int_0^s \Phi\circ V(X_u)du - b\int_0^s 1_C(X_u)du$$

is for all $x \in X$ a $\mathbb{P}_x$-supermartingale with respect to the filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Stability and subgeometric rates of convergence have been studied in [8] under the main hypothesis of a $\Phi-$Lyapunov condition. More precisely, they showed the following.

Proposition 1.1 ([8], proposition 3.9 and theorem 3.10)**.**

Assume that a $\Phi-$Lyapunov condition holds and $\sup_C V < \infty$. Then the process is positive Harris recurrent with an invariant probability measure π such that $\pi(\Phi \circ V) < \infty$. If moreover some skeleton chain is irreducible and $\lim_{+\infty} \Phi' = 0$, then there exists a finite constant c such that for all $t > 0$ and all $x \in X$,

$$\Phi \circ H_\Phi^{-1}(t) \|P_t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq cV(x) \tag{1.3}$$

where the function H_Φ is defined by

$$H_\Phi(u) = \int_1^u \frac{ds}{\Phi(s)} \quad \forall u \geq 1.$$

Note that the inequality obtained in [8] is more general than (1.3). More precisely, let Λ_0 denote the class of the measurable and non-decreasing functions $r : [0, +\infty) \to [2, +\infty)$ such that $\log r(t)/t \downarrow 0$ as $t \to +\infty$. Let Λ denote the class of positive measurable functions $\overline{r}$ such that for some $r \in \Lambda_0$,

$$0 < \liminf_t \frac{\overline{r}(t)}{r(t)} \leq \limsup_t \frac{\overline{r}(t)}{r(t)} < \infty.$$

Then there exists a positive constant c such that for $r(t) \leq \Phi \circ H_\Phi^{-1}(t)$

$$r(t)\|P_t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f \leq cV(x),$$

where $r \in \Lambda$, for a signed measure μ, $\|\mu\|_f = \sup_{|g| \leq f} \mu(g)$ and $f : X \to [0, \infty)$ a measurable function f linked to the choice of r (via inverse Young function).

Unfortunately, the constant c which appears in (1.3) is not explicit. Our main goal is thus to obtain quantitative bounds for the subgeometric convergence rates of the process to its stationary probability distribution π. More precisely, to determine a function $g : X \to [0, \infty)$, which can be computed explicitly, such that

$$r(t)\|P_t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq g(x) \quad \forall x \in X, \tag{1.4}$$

where $r \in \Lambda$.

Lyapunov conditions. As explained in [8], the $\Phi-$Lyapunov condition is not easy to derive. It is thus important to provide a sufficient condition which is more tractable. For this, we use the usual criteria based on extended generator. Let $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ denote the set of measurable functions $f : X \to \mathbb{R}$ with the following property: there exists a measurable function $h : X \to \mathbb{R}$ such that the function $t \mapsto h(X_t)$ is integrable $\mathbb{P}_x-$a.s. for each $x \in X$ and the process

$$t \mapsto f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t h(X_s) ds$$

is a $\mathbb{P}_x-$local martingale for all x. Then we write $h = \mathcal{A}f$, and f is said to be in the domain of the extended generator $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$. We then have.

Theorem 1.2 ([8], Theorem 3.11). *Assume that there exist a closed petite set C, a cád-làg function $V : X \to [1, +\infty)$ with $V \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, an increasing differentiable concave positive function $\Phi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, and a constant $b < \infty$ such that for all $x \in X$,*

$$\mathcal{A}V(x) \leq -\Phi \circ V(x) + b1_C(x). \tag{1.5}$$

then a $\Phi-$Lyapunov condition holds.

The Lyapunov conditions are the most useful one to verify in practice, even if of course they can be tricky to exhibit (see for example the oscillator case [15]). In particular, we will be able to construct such a Lyapunov conditions for a coupling process which will be the key tool for our main result. Due to this last result we will use now the following formal definition even if the generator applied to the function makes no sense (remembering in this case that the first definition is in charge):

$$\mathcal{A}V(x) \leq -\Phi \circ V(x) + b1_C(x).$$

As explained before, the key tool to establish speed of convergence to equilibrium is the proof of integrability of hitting time, we thus recall the following result which will be useful for the proof of our results.

Theorem 1.3 ([8], Theorem 3.1). *Assume that a $\Phi-$Lyapunov condition holds.*
i)For all $x \in X$ and $t^* > 0$,

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C^{t^*}} \Phi \circ V(X_s) ds \right] \leq V(x) - 1 + bt^*.$$

ii)For all $x \in X$ and $t^* \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C^{t^*}} \Phi \circ H_\Phi^{-1}(s) ds \right] \leq V(x) - 1 + \frac{b}{\Phi(1)} \int_0^{t^*} \Phi \circ H_\Phi^{-1}(s) ds.$$

Note that we will provide in Appendix a shorter (and we believe clearer) proof of a modified version of this result, however perfectly fitted for our use.

The paper is then organized as follows. In section 2 we state our main results. This includes quantitative bounds of the distance of $\mathcal{L}(X_t)$ and ergodic average laws $\int_0^t P(X_s \in \cdot) ds$ to the stationarity. Section 3 is devoted to the proof of our main results. Section 4 focuses on some examples. The appendix is dedicated to a short proof of the integrability of Hitting times under Lyapunov conditions.

2. Main results

2.1. **Notations and a preliminary lemma.** Let us begin by some notations. Define

$$\mathcal{C} = \Big\{ \Phi : [1, \infty) \to \mathbb{R}^+ : \Phi \text{ is increasing, differentiable, concave}, \lim_{t \to +\infty} \Phi(t) = +\infty, \\ \lim_{t \to +\infty} \Phi'(t) = 0, \log \Phi(t)/t \downarrow 0 \text{ as } t \to +\infty \Big\}.$$

For $\Phi \in \mathcal{C}$, let

$$H_\Phi(u) = \int_1^u \frac{ds}{\Phi(s)}, \quad u \geq 1.$$

It's easy to see that

$$(H_\Phi^{-1})' = \Phi \circ H_\Phi^{-1}, (H_\Phi^{-1})'' = \Phi' \circ H_\Phi^{-1} \cdot \Phi \circ H_\Phi^{-1}, (\ln \Phi \circ H_\Phi^{-1})' = \Phi' \circ H_\Phi^{-1},$$
$$\lim_{s\to+\infty} \frac{\ln H_\Phi^{-1}(s)}{s} = \lim_{s\to+\infty} \frac{\Phi \circ H_\Phi^{-1}(s)}{H_\Phi^{-1}(s)} = \lim_{t\to+\infty} \Phi'(t) = 0.$$

Then H_Φ^{-1} is increasing, convex, sub-geometric. By the log-concavity of $\Phi \circ H_\Phi^{-1}$,

$$z \to \frac{\Phi \circ H_\Phi^{-1}(z+s)}{\Phi \circ H_\Phi^{-1}(z)} \quad \text{is non-increasing for } s > 0.$$

Let us first state the following elementary lemma.

Lemma 2.1. *$H_\Phi^{-1}(\lambda a) = H_{\lambda\Phi}^{-1}(a)$, $H_\Phi^{-1}(a+b) \leq H_\Phi^{-1}(a) H_\Phi^{-1}(b)$, $H_\Phi^{-1}(an) \leq n H_\Phi^{-1}(a)$ for any $\lambda > 0$, $a \geq 0, b \geq 0$ and integer $n \geq 1$.*

2.2. **Quantitative subexponential ergodicity.** We are now in position to present our main results.

Theorem 2.2. *Given a Markov process (X_t) with semigroup (P_t), assume that a $\Phi-$Lyapunov condition holds and $\sup_C V < \infty$, $\Phi \in \mathcal{C}$, $C \in X$ is (t^*, ϵ)-small, for some positive time t^*, and $\epsilon > 0$, stationary distribution is π, then if $\pi(V) < \infty$*

$$||\mathcal{L}(X_s) - \pi||_{TV} \leq \sum_{0 \leq n, s \geq nt^*} (1-\epsilon)^n \widetilde{A}_1 \frac{H_\Phi^{-1}(\lambda \widetilde{A}_0 n)}{H_\Phi^{-1}(\lambda(s-t^*))} \leq \frac{\widetilde{A}_1 \widetilde{A}_{\epsilon,\Phi}}{H_\Phi^{-1}(\lambda(s-t^*))}, \forall s \geq t^*$$

where $\widetilde{A}_{\epsilon,\Phi}$ will be given later and

$$\widetilde{A}_0 =: \frac{2}{\lambda \Phi(1)} \sup_{x\in C} \left\{ V(x) - 1 + \frac{b}{\Phi(1)} \int_0^{t^*} \Phi \circ H_\Phi^{-1}(\lambda s) ds) \right\} < \infty,$$
$$\widetilde{A}_1 = \max \left\{ \frac{\mathbb{E}\Big[V(X_0)\Big] + \pi(V) - 2}{H_\Phi^{-1}(\lambda \widetilde{A}_0)}, 1 \right\},$$

and

$$d_0 = \inf_{x \notin C} V(x), \quad 0 < \lambda \leq 1 - \frac{b}{\Phi(d_0)}, \quad \widetilde{A}_{\epsilon,\Phi} < \infty.$$

In general we have,

$$||\mathcal{L}(X_s^x) - \mathcal{L}(X_s^y)||_{TV} \leq \frac{A(V(x) + V(y))}{H_\Phi^{-1}(\lambda(s-t^*))}, \forall s \geq t^*$$

for A given by

$$A = \max\left\{\frac{1}{V(x)+V(y)}, \frac{1}{H_\Phi(\lambda \widetilde{A}_0)}\right\} \times \widetilde{A}_{\varepsilon,\Phi}.$$

In particular,

$$||\mathcal{L}(X_s^x) - \pi||_{TV} \leq \frac{A(V(x)+\pi(V))}{H_\Phi^{-1}(\lambda(s-t^*))}, \forall s \geq t^*.$$

Remark 2.3. One has easily using the Lyapunov condition that $\pi(\Phi(V)) < \infty$ and $\pi(V)$ is not controlled. However, if we suppose that $\pi(\psi(V)) < \infty$ (eventually use Φ) for $\Phi(x) \leq \psi(x) \leq x$ for large x and ψ concave, one can get

$$||\mathcal{L}(X_s^x) - \pi||_{TV} \leq \frac{A(V(x))}{H_\Phi^{-1}(\lambda(s-t^*))} + CR(t)$$

for some constant C and R decaying to zero and being solution to the minimization in R of

$$\frac{R}{\psi(R)H_\Phi^{-1}(t)} + \frac{1}{\psi(R)}.$$

Let us state now a result related to shift-coupling [24], which provides for bounds on the ergodic averages of distances to stationary distributions.

Theorem 2.4. *Given a Markov process (X_t) with semigroup (P_t) and stationary distribution $\pi(.)$, assume that a $\Phi-$Lyapunov condition holds and $\sup_C V < \infty$, $C \in \mathcal{X}$ is (t^*, ε)-small for some positive time t^* and $\varepsilon > 0$. Then for $t > 0$*

$$\left\|\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{P}(X_s \in .)ds - \pi(.)\right\|_{TV} \leq \frac{1}{t}\left(2t^* + c + c'\right),$$

where

$$c = A_1 A_{\varepsilon,\Phi}\int_{t^*}^{+\infty} \frac{1}{H_\Phi^{-1}(s-t^*)}ds, \quad c' = A_1' A_{\varepsilon,\Phi}\int_{t^*}^{+\infty} \frac{1}{H_\Phi^{-1}(s-t^*)}ds,$$

with

$$A_1 = \max\left\{\frac{\mathbb{E}\Big[V(X_0)\Big]-1}{H_\Phi^{-1}(A_0)}, 1\right\}, \quad A_1' = \max\left\{\frac{\mathbb{E}_\pi\big[V\big]-1}{H_\Phi^{-1}(A_0)}, 1\right\} \quad \textit{and} \quad A_{\varepsilon,\Phi} < \infty.$$

Proof. Theorem 2.2 and 2.4 are proven in the next section. □

One interesting point, compared to the one of [23] where they only treated the exponential case, is that we obtain the same speed, i.e. t^{-1}, but valid as soon as $1/H_\Phi^{-1}$ is integrable at infinity. We may now a little bit further in the details of the constants appearing in our main results.

Explicit constant $A_{\epsilon,\Phi}$ ($\widetilde{A}_{\epsilon,\Phi}$). For any $0 < a_\epsilon < \epsilon$, We choose α_c, such that

$$(1-\epsilon)^n H_\Phi^{-1}(cn) \le \alpha_c (1-a_\epsilon)^n \quad \text{for } n \ge 1.$$

In fact, we can choose $\alpha_c = \sup_{n\ge 1} \frac{H_\Phi^{-1}(cn)}{(\frac{1-a_\epsilon}{1-\epsilon})^n} < \infty$. Then we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-\epsilon)^n H_\Phi^{-1}(cn) \le \alpha_c \sum_{n=0}^{\infty} (1-a_\epsilon)^n = \frac{\alpha_c}{a_\epsilon}.$$

So we can get more explicit expressions:

$$A_{\epsilon,\Phi} = \frac{\sup_{n\ge 1} \frac{H_\Phi^{-1}(A_0 n)}{(\frac{1-a_\epsilon}{1-\epsilon})^n}}{a_\epsilon}, \qquad \widetilde{A}_{\epsilon,\Phi} = \frac{\sup_{n\ge 1} \frac{H_\Phi^{-1}(\lambda \widetilde{A}_0 n)}{(\frac{1-a_\epsilon}{1-\epsilon})^n}}{a_\epsilon}$$

(I) $\Phi(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. $H_\Phi^{-1}(x) = ((1-\alpha)x + 1)^{\frac{1}{1-\alpha}}$,

$$A_{\epsilon,\Phi} = \frac{\sup_{n\ge 1} \frac{((1-\alpha)A_0 n+1)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{(\frac{1-a_\epsilon}{1-\epsilon})^n}}{a_\epsilon}$$
$$\widetilde{A}_{\epsilon,\Phi} = \frac{\sup_{n\ge 1} \frac{((1-\alpha)\lambda \widetilde{A}_0 n+1)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{(\frac{1-a_\epsilon}{1-\epsilon})^n}}{a_\epsilon}.$$

(II) $\Phi(x) = \frac{x}{(\ln x)^\alpha}$, $\alpha > 0$. $H_\Phi^{-1}(x) = \exp((1+\alpha)x)^{\frac{1}{1+\alpha}}$, and we get the similar expressions.

3. Useful results and proof of our main theorems

3.1. **Proof of Theorem 2.2.**

Our proof relies mainly on coupling method as presented for example in Roberts-Rosenthal [23]. Namely we build two Markov processes which will have some coupling property, which as usual give some upper bound on the total variation norm of the difference of the law of the two processes via a control of the tail of the coupling time.

To control this coupling time we need two tools. The minorization condition is needed to validate the coupling construction. The second important tool is a good control of expectation of subexponential moments of the coupling time. We will show that we are able to do so using the Lyapunov condition.

We will show first, to simplify the arguments, how to control the tail of regeneration time of some process with a minorization condition, and we hope that it will help the reader to understand the proof for the coupled process.

3.1.1. ***Trajectory construction and control of the tail of regeneration time.***

$C \in X$ is (t^*, ϵ)-small in the $\Phi-$Lyapunov condition, that means $\mathbb{P}^{t^*}(x, \cdot) \geq \epsilon Q(\cdot)$ for $x \in C$. we shall use the following construction in this paper, which is from Roberts and Rosenthal ([23], proof of Lemma 6). Given a sequence of i.i.d random variables $Z_1, Z_2, ..., Z_i \sim B(1, \epsilon)$, We construct X_t and the random stopping time $T = \inf\left\{\tau_i^{t^*} + t^*, X_{\tau_i^{t^*}} \in C, Z_i = 1\right\}$. let $\tau_1^{t^*} = \tau_C^0$, $\tau_i^{t^*} = \inf\left\{t \geq \tau_{i-1}^{t^*} + t^*, X_t \in C\right\}, i \geq 2$.

- (1) if $Z_1 = 1$, $\tau_1^{t^*} = \tau_C^0$ is the first time the process $\{X_t\}$ is in the set C, set $X_{\tau_1^{t^*}+t^*} \sim Q(\cdot)$;
  (2) if $Z_1 = 0$, set $X_{\tau_1^{t^*}+t^*} \sim \frac{1}{1-\epsilon}(P_{t^*}(X_{\tau_1^{t^*}}, \cdot) - \epsilon Q(\cdot))$.
  in either case above, fill in X_t for $\tau_1^{t^*} < t < \tau_1^{t^*} + t^*$ from the appropriate conditional distributions.
- similarly, for $i \geq 2$, if $Z_i = 1$, set $X_{\tau_i^{t^*}+t^*} \sim Q(\cdot)$; otherwise $Z_i = 0$, set $X_{\tau_i^{t^*}+t^*} \sim \frac{1}{1-\epsilon}(P_{t^*}(X_{\tau_i^{t^*}}, \cdot) - \epsilon Q(\cdot))$.

Under this construction, we get the process X_t for all times $t > 0$ with the semigroup (P_t), and a random stopping time T with $X_T \sim Q(\cdot)$

Lemma 3.1. *Assume that a $\Phi-$Lyapunov condition holds and $\sup_C V < \infty$, $\Phi \in \mathcal{C}$, $C \in X$ is (t^*, ϵ)-small, for some positive time t^*, We construct the processes $\{X_t\}$ and a random stopping time T as above, then we have*

$$\mathbb{P}(T > s) \leq \sum_{0 \leq n, s \geq nt^*} (1-\epsilon)^n \frac{A_1 H_\Phi^{-1}(A_0 n)}{H_\Phi^{-1}(s - t*)} \leq \frac{A_1 A_{\epsilon,\Phi}}{H_\Phi^{-1}(s - t*)} \tag{3.1}$$

$A_0 =: \frac{1}{\Phi(1)} \sup_{x \in C}\left\{V(x) - 1 + \frac{b}{\Phi(1)} \int_0^{t^*} \Phi \circ H_\Phi^{-1}(s) ds)\right\} < \infty$, $A_1 = \max\left\{\frac{\mathbb{E}[V(X_0)]-1}{H_\Phi^{-1}(A_0)}, 1\right\}$, $A_{\epsilon,\Phi} < \infty$

Proof. We define $N_s = \max\left\{i : \tau_i^{t^*} \leq s\right\}$. By the construction above,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > s) &\leq \sum_{0 \leq n, s \geq nt^*} \mathbb{P}\Big(T > s, N_{s-t*} \leq n\Big) \\
&= \sum_{0 \leq n, s \geq nt^*} \mathbb{P}\Big(T > s \big| N_{s-t*} \leq n\Big) \mathbb{P}\Big(N_{s-t*} \leq n\Big) \\
&\leq \sum_{0 \leq n, s \geq nt^*} (1-\epsilon)^n P\Big(N_{s-t*} \leq n\Big)
\end{aligned}$$

Setting $D_1 = \tau_1^{t^*}$ and $D_i = \tau_i^{t^*} - \tau_{i-1}^{t^*}$ for $i \geq 2$, it's easy to see that,

$$\mathbb{E}\Big[H_\Phi^{-1}(D_1)\Big] = \mathbb{E}\Big[H_\Phi^{-1}(\tau_1^{t^*})\Big] \leq \mathbb{E}\Big[V(X_0)\Big] - 1 \text{ (by theorem 1.3 } (i))$$

for $i \geq 2$, let

$$A_0 =: \frac{1}{\Phi(1)} \sup_{x\in C} \left\{ V(x) - 1 + \frac{b}{\Phi(1)} \int_0^{t^*} \Phi \circ H_\Phi^{-1}(s) ds \right\} < \infty.$$

We have

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[H_\Phi^{-1}(D_i)\Big] &= \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_i^{t^*} - \tau_{i-1}^{t^*}} \Phi \circ H_\Phi^{-1}(s) ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}^{X_{\tau_{i-1}^{t^*}}} \int_0^{\tau_C^{t^*}} \Phi \circ H_\Phi^{-1}(s) ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[V(X_{\tau_{i-1}^{t^*}}) - 1 + \frac{b}{\Phi(1)} \int_0^{t^*} \Phi \circ H_\Phi^{-1}(s) ds\right] \\
&\leq A_0 \Phi(1)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[H_\Phi^{-1}\left(\tau_i^{t^*}\right)\right] - \mathbb{E}\left[H_\Phi^{-1}\left(\tau_{i-1}^{t^*}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{\tau_{i-1}^{t^*}}^{\tau_i^{t^*}} \Phi \circ H_\Phi^{-1}(s) ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_i^{t^*} - \tau_{i-1}^{t^*}} \Phi \circ H_\Phi^{-1}\left(s + \tau_{i-1}^{t^*}\right) ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \Phi \circ H_\Phi^{-1}(s) \left(\frac{\Phi \circ H_\Phi^{-1}(\tau_{i-1}^{t^*})}{\Phi(1)}\right) 1_{s \leq \tau_C^{t^*} \circ \theta_{\tau_{i-1}^{t^*}}} ds\right] \\
&\quad \left(z \to \frac{\Phi \circ H_\Phi^{-1}(z+s)}{\Phi \circ H_\Phi^{-1}(z)} \text{is non-increasing for } s > 0\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left[\frac{\Phi \circ H_\Phi^{-1}\left(\tau_{i-1}^{t^*}\right)}{\Phi(1)} \mathbb{E}^{X_{\tau_{i-1}^{t^*}}} \int_0^{\tau_C^{t^*}} \Phi \circ H_\Phi^{-1}(s) ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\frac{\Phi \circ H_\Phi^{-1}\left(\tau_{i-1}^{t^*}\right)}{\Phi(1)} \left(V(X_{\tau_{i-1}^{t^*}}\right) - 1 + \frac{b}{\Phi(1)} \int_0^{t^*} \Phi \circ H_\Phi^{-1}(s) ds)\right] \\
&\quad \text{(by theorem 1.3 } (ii)) \\
&\leq A_0 \mathbb{E}\left[\Phi \circ H_\Phi^{-1}\left(\tau_{i-1}^{t^*}\right)\right] \\
&\leq A_0 \Phi \circ \mathbb{E}\left[H_\Phi^{-1}\left(\tau_{i-1}^{t^*}\right)\right] \text{ (by the concavity of } \Phi)
\end{aligned}$$

Then we get

$$\mathbb{E}\left[H_\Phi^{-1}\left(\tau_i^{t^*}\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[H_\Phi^{-1}\left(\tau_{i-1}^{t^*}\right)\right] + A_0 \Phi \circ \mathbb{E}\left[H_\Phi^{-1}\left(\tau_{i-1}^{t^*}\right)\right].$$

Using the following lemma 3.2, note $H_{A_1\Phi}^{-1}(n) = H_\Phi^{-1}(A_1 n)$, and let

$$A' = A_1 = \max\left\{ \frac{\mathbb{E}\Big[V(X_0)\Big] - 1}{H_\Phi^{-1}(A_0)}, 1 \right\},$$

we get

$$\mathbb{E}\left[H_\Phi^{-1}(\tau_n^{t^*})\right] \leq \quad A_1 H_\Phi^{-1}(A_0 n), \text{for } n \geq 2.$$

For any positive integer $n \geq 2$, we can get the estimation from Markov's inequality,

$$\begin{aligned}
P\Big(N_s \leq n\Big) &= P\left(\sum_{i=1}^n D_i \geq s\right) \\
&= P\left(H_\Phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n D_i\right) \geq H_\Phi^{-1}(s)\right) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}\Big[H_\Phi^{-1}(\sum_{i=1}^n D_i)\Big]}{H_\Phi^{-1}(s)} \\
&= \frac{\mathbb{E}\Big[H_\Phi^{-1}\left(\tau_n^{t^*}\right)\Big]}{H_\Phi^{-1}(s)} \\
&\leq \frac{A_1 H_\Phi^{-1}(A_0 n)}{H_\Phi^{-1}(s)}
\end{aligned}$$

This estimation combined with formula 3.2, we get

$$P(T > s) \leq \sum_{0 \leq n, s \geq nt^*} (1-\epsilon)^n \frac{A_1 H_\Phi^{-1}(A_0 n)}{H_\Phi^{-1}(s - t*)}.$$

Noting that $\lim_{s \to +\infty} \frac{\ln H_\Phi^{-1}(s)}{s} = 0$, there exits a constant $A_{\epsilon,\Phi}$, such that

$$\sum_{0 \leq n, s \geq nt^*} (1-\epsilon)^n H_\Phi^{-1}(A_0 n) \leq A_{\epsilon,\Phi} < +\infty,$$

then we finish the proof of the lemma. □

Lemma 3.2. *$\varphi \in \mathcal{C}$, if $a_{n+1} \leq c\varphi(a_n) + a_n$, where $\{a_n\}$ is a non-negative increasing sequence, then there exists a constant $A' \geq 1$, such that*

$$a_n \leq A' H_\Phi^{-1}(n)$$

where $\Phi(x) = c\varphi(x), H_\Phi(x) = \int_1^x \frac{1}{\Phi(s)} ds$

Remark 3.3. Φ is also concave, $\Phi(A'x) \leq A'\Phi(x)$ for $A' \geq 1$, $(H_\Phi^{-1})' = \Phi \circ H_\Phi^{-1}$ and $\Phi \circ H_\Phi^{-1}(n) \leq H_\Phi^{-1}(n+1) - H_\Phi^{-1}(n)$

Proof. . It is easy to choose a constant $A' \geq 1$ s.t $a_1 \leq A' H_\Phi^{-1}(1)$, by induction if $a_{n-1} \leq A' H_\Phi^{-1}(n-1)$, then

$$\begin{aligned} a_n &\leq c\varphi(a_{n-1}) + a_{n-1} = \Phi(a_{n-1}) + a_{n-1} \\ &\leq \Phi(A' H_\Phi^{-1}(n-1)) + A' H_\Phi^{-1}(n-1) \\ &\leq A'\{\Phi(H_\Phi^{-1}(n-1)) + H_\Phi^{-1}(n-1)\} \\ &\leq A' H_\Phi^{-1}(n) \end{aligned}$$

□

3.1.2. ***The coupling construction.*** Recall $C \in X$ is (t^*, ϵ)-small in the $\Phi-$Lyapunov condition. Given a sequence of i.i.d random variables $Z_1, Z_2, ..., Z_i \sim B(1, \epsilon)$, We construct (X_t, X'_t) and the random stopping time

$$\widetilde{T} = \inf \left\{ \widetilde{\tau}_i^{t^*} + t^*, \left(X_{\widetilde{\tau}_i^{t^*}}, X'_{\widetilde{\tau}_i^{t^*}} \right) \in C \times C, Z_i = 1 \right\}.$$

Let

$$\widetilde{\tau}_{C\times C}^{t^*} = \inf \left\{ t \geq t^*, (X_t, X'_t) \in C \times C \right\}, \quad \widetilde{\tau}_1^{t^*} = \widetilde{\tau}_{C\times C}^{0},$$

and

$$\widetilde{\tau}_i^{t^*} = \inf \left\{ t \geq \widetilde{\tau}_{i-1}^{t^*} + t^*, (X_t, X'_t) \in C \times C \right\}, \quad i \geq 2.$$

For each time $\widetilde{\tau}_i^{t^*}$, if X_t, X'_t have not yet coupled, then we processes as follows:

(1) if $Z_i = 1$, set

$$X_{\widetilde{\tau}_i^{t^*} + t^*} = X'_{\widetilde{\tau}_i^{t^*} + t^*} \sim Q(\cdot),$$

and we declare the processes to have coupled, and from the coupling time, let $X_{\widetilde{\tau}_i^{t^*} + t^*} = X'_{\widetilde{\tau}_i^{t^*} + t^*}$,

(2) if $Z_i = 0$, set

$$X_{\widetilde{\tau}_i^{t^*} + t^*} \sim \frac{1}{1-\epsilon} \left(\mathbb{P}^{t^*}(X_{\widetilde{\tau}_i^{t^*}}, \cdot) - \epsilon Q(\cdot) \right) \quad \text{and} \quad X'_{\widetilde{\tau}_i^{t^*} + t^*} \sim \frac{1}{1-\epsilon} \left(\mathbb{P}^{t^*}(X'_{\widetilde{\tau}_i^{t^*}}, \cdot) - \epsilon Q(\cdot) \right)$$

conditionally independently.

In either case above, we fill in X_t and X'_t for $\widetilde{\tau}_i^{t^*} < t < \widetilde{\tau}_i^{t^*} + t^*$ conditionally independently, using the correct conditional distributions given $X_{\widetilde{\tau}_i^{t^*}}$, $X'_{\widetilde{\tau}_i^{t^*}}$, $X_{\widetilde{\tau}_i^{t^*} + t^*}$, $X'_{\widetilde{\tau}_i^{t^*} + t^*}$. $\widetilde{T}$ is the coupling time, and we still have similar estimation as Lemma 3.1. It is easily seen that X_t and X'_t each marginally has the transition probabilities $P_t(x, \cdot)$.

Lemma 3.4. *Assume that the $\Phi-$Lyapunov condition (1.5) is satisfied for the generator associated to the semigroup (P_t), we build a two-dimensional Markov process (X_t, X'_t) on $X \times X$ as above with semigroup $(\widetilde{P}_t)$ and the generator $\widetilde{\mathcal{A}}$, which satisfies the bivariate Lyapunov condition:*

$$\widetilde{\mathcal{A}} W(x, x') \leq -\lambda \Phi \circ W(x, x') + 2b 1_{C\times C}(x, x')$$

with $W(x, x') = V(x) + V(x') - 1$, $d_0 = inf_{x \notin C} V(x)$, $0 < \lambda \leq 1 - \frac{b}{\Phi(d_0)}$

Proof. Note that $\Phi\circ(V(x)+V(x')-1)-\Phi\circ V(x)\leq\Phi\circ V(x')-\Phi(1)$, we have

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{A}}W(x,x') &= \mathcal{A}V(x)+\mathcal{A}V(x')\\ &\leq -\Phi\circ V(x)-\Phi\circ V(x')+b1_C(x)+b1_C(x')\\ &\leq -\Phi\circ(V(x)+V(x')-1)-\Phi(1)+b1_C(x)+b1_C(x').\end{aligned}$$

Then we can get the result easily. □

Lemma 3.5. *Assume that the drift condition (1.5) is satisfied, then the $\Phi-$Lyapunov condition is satisfied for P_t and $(\widetilde{P}_t)$ satsifies a $2\Phi-$Lyapunov condition with function $W(x,x')=V(x)+V(x')-1$, $d_0=\inf_{x\notin C}V(x)$, $0<\lambda\leq 1-\frac{b}{\Phi(d_0)}$.*

In the same way of the proof of Lemma 3.1, we get

Lemma 3.6. *Assume that a $\Phi-$Lyapunov condition is satisfied and $\sup_C V<\infty$, $\Phi\in\mathcal{C}$, $C\in X$ is (t^*,ϵ)-small, for some positive time t^*, and $\epsilon>0$, we construct the process (X_t,X'_t) and the coupling time $\widetilde{T}$ as above, then we have*

$$P(\widetilde{T}>s)\leq\sum_{0\leq n,s\geq nt^*}(1-\epsilon)^n\widetilde{A}_1\frac{H_\Phi^{-1}(\lambda\widetilde{A}_0 n)}{H_\Phi^{-1}(\lambda(s-t^*))}\leq\frac{\widetilde{A}_1\widetilde{A}_{\epsilon,\Phi}}{H_\Phi^{-1}(\lambda(s-t^*))},$$

where

$$\widetilde{A}_0=:\frac{2}{\lambda\Phi(1)}\sup_{x\in C}\left\{V(x)-1+\frac{b}{\Phi(1)}\int_0^{t^*}\Phi\circ H_\Phi^{-1}(\lambda s)ds\right\}<\infty,$$

$$\widetilde{A}_1=\max\left\{\frac{\mathbb{E}\Big[V(X_0)+V(X'_0)\Big]-2}{H_\Phi^{-1}(\lambda\widetilde{A}_0)},1\right\},$$

and

$$d_0=\inf_{x\notin C}V(x),\quad 0<\lambda\leq 1-\frac{b}{\Phi(d_0)},\quad \widetilde{A}_{\epsilon,\Phi}<\infty$$

Proof of Theorem 2.2. We construct the processes X_t and X'_t jointly as in 3.1.2. By the coupling inequality $||\mathcal{L}(X_t)-\mathcal{L}(X'_t)||_{TV}\leq P(\widetilde{T}>t)$, lemma 3.6 and setting $\mathcal{L}(X'_0)=\pi$, we can get the Theorem directly.

3.2. **Proof of Theorem 2.4.** Our proof relies mainly on the shift-coupling method presented for example in [24] (see also [1], [28], [29]).

We construct a second process (Y_t) with the same marginal $P_t(x,\cdot)$. From 3.1.1, there are times T and T' such that $\mathcal{L}(X_T)=\mathcal{L}(Y_{T'})=Q(.)$

We define the joint process (X_t,X'_t) as follows

$$\begin{cases} X'_{T'} = X_T, \\ X'_{T'+t} = X_{T+t} & \text{for } t > 0 \\ X'_t = Y_t & \text{for } t < T'. \end{cases}$$

It is easily seen that X'_t still follows the transition probabilities $P_t(x, \cdot)$. The times T and T' are the so-called shift-coupling epochs for (X_t) and (X'_t). The lemma 3.1 gives upper bounds on $P(T > s)$ and $P(T' > s)$.
By the shift-coupling inequality(see e.g [23], proposition 5), we have

$$\begin{aligned} \left\| \tfrac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}(X_s \in .)ds - \tfrac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}(X'_s \in .)ds \right\|_{TV} &\leq \tfrac{1}{t} \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > s)ds + \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T' > s)ds \right) \\ &\leq \tfrac{1}{t} \left(2t^* + \int_{t^*}^{+\infty} \mathbb{P}(T > s)ds + \int_{t^*}^{+\infty} \mathbb{P}(T' > s)ds \right). \end{aligned}$$

The result thus follows by integrating the upper bounds of $\mathbb{P}(T > s)$ and $\mathbb{P}(T' > s)$ given by the lemma 3.1 and letting $\mathcal{L}(X'_0) = \pi(.)$.

4. Applications

4.1. **The reversible case.** Let $\{X_t\}$ be a n-dimensional diffusion process defined by

$$dX_t = dB_t + \frac{1}{2} \nabla \ln \pi(X_t) dt \tag{4.1}$$

where B_t is a standard n-dimensional Brownien motion.
We suppose that $\pi(x) = e^{-V(x)}$ where $V(x) = (1 + |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}$, $0 < \alpha < 1$. It is know that π is up to a normalizing constant the density on $\mathbb{R}^n$ with respect to the Lebesgue measure, of the unique invariant probability distribution of the process $\{X_t\}$(see for example [4], [2] or [6]). In the sequel, π will denote at the same time the invariant probability and the density function. Our aim is to study the ergodicity of the solution of the stochastic differential equation (4.1). In what follows, we will study drift condition and minorization. At the end, we will compute the constant in order to apply theorem 2.2. We recall that generator of the process is given by $L = \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\nabla \ln \pi(x) \cdot \nabla$(where the dot denote scalar product).

4.1.1. *Lyapunov function.* Let $\iota \in]0, 1[$. We define the function W by

$$W(x) = e^{\iota \left(1+|x|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}}$$

Then $W \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. The following is in part deduced from the the calculations of [8], section 4.1; see also [4] section 4.3.

$$\mathcal{A}W = \quad LW = \tfrac{1}{2}\Big\{\iota\alpha n\left(1+|x|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-1} + \iota\alpha\left(\alpha-2\right)|x|^2\left(1+|x|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-2} + \iota^2\alpha^2|x|^2\left(1+|x|^2\right)^{\alpha-2}$$
$$-\iota\alpha^2|x|^2\left(1+|x|^2\right)^{\alpha-2}\Big\} \times e^{\iota\left(1+|x|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\underbrace{\left\{-\frac{\alpha n\iota^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}} + \frac{\iota^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\alpha(2-\alpha)|x|^2}{(1+|x|^2)^{1+\frac{\alpha}{2}}} - \frac{\iota\iota^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\alpha^2|x|^2}{1+|x|^2} + \frac{\iota^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\alpha^2|x|^2}{1+|x|^2}\right\}}_{g(x)}$$
$$\times\Big(\log W(x)\Big)^{-2\frac{1-\alpha}{\alpha}} \times \exp\Big(\iota(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\Big).$$

Let M such that for all $|x| > M$, $g(x) > 0$. Such M exists since we can see that the graph of g has the shape of a bowl. let $C = \overline{\mathcal{B}}(0, M)$ the closed ball centered at 0 and radius M. Set $\kappa = \frac{1}{2}\inf_{x\notin C} g(x)$. For all $a > 0$, we have

$$\mathcal{A}W(x) \le -\Phi\circ W(x) + b\mathbf{1}_C(x)$$

where

$$\Phi(x) = \kappa x\Big(a + \log x\Big)^{-2\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad b = \sup_C \mathcal{A}W + \sup_C \Phi\circ W.$$

W is thus a Lyapunov function under the hypothesis that C verifies the minorization condition.

Now in order to be within the context of application of lemma 3.4 and lemma 3.5 we choose $d_0 > 0$ in such a way that $\Phi(d_0) > b$ and $M' = \sqrt{\left(\frac{\ln d_0}{\iota}\right)^{\frac{2}{\alpha}} - 1} > M$ (this is always possible since the function Φ is non-decreasing and $\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = +\infty$). We state again $C = \mathcal{B}(0, M')$. Then we have again

$$\mathcal{A}W(x) \le -\Phi\circ W(x) + b\mathbf{1}_C(x)$$

and $d_0 = \inf_{x\notin C} W(x)$, $\Phi(d_0) > b$.

4.1.2. *Minorization condition.* We deal now with the minorization condition. In what follows, we will check that the hypothesis of theorem 9 (or theorem 7 in one dimensional case) of [23] holds. To this end let us recall the definition of a pseudo small set: a subset C is a $(t,\epsilon)-$pseudo small set if for all $x, y \in C$, there exists a probability measure Q_{xy} such that

$$P_t(x,\cdot) \ge \epsilon\, Q_{xy}(\cdot), \qquad P_t(x,\cdot) \ge \epsilon\, Q_{xy}(\cdot).$$

This definition is more convenient for the numerical calculus in high dimension than the usual definition of small set.

Let $C = \mathbf{B}(0, M') = \prod_{i=1}^{n} [-M', M']$ where M' is as above. We denote by D the diameter of C, i.e $D = 2\sqrt{n}M'$. Let $a > M'$, $S = \prod_{i=1}^{n} [-a, a]$. Set $\nabla \ln \pi(x) = (\mu_1(x), \cdots, \mu_n(x))$ where $\mu_i(x) = \frac{\alpha x_i}{(1+|x|^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}}$. Let c and d such that $c \leq \mu_i(x) \leq d$ for all $x \in S$. Set $L = \sqrt{n}(d-c)$. Then, given $t_0 > 0$, for all $t \geq t_0$, C is (t, ε)-pseudo-small (small in one dimensional case) with

$$\begin{aligned}
\varepsilon \; &= \Psi(\tfrac{-D-t_0L}{\sqrt{4t_0}}) + e^{-\frac{DL}{2}}\Psi(\tfrac{t_0L-D}{\sqrt{4t_0}}) \\
&-2n\Psi(\tfrac{-(a-M')-t_0c}{\sqrt{t_0}}) - 2ne^{-2(a-M')c}\Psi(\tfrac{t_0c-(a-M')}{\sqrt{t_0}}) \\
&-2n\Psi(\tfrac{-(a-M')+t_0d}{\sqrt{t_0}}) - 2ne^{2(a-M')d}\Psi(\tfrac{-t_0d-(a-M')}{\sqrt{t_0}})
\end{aligned}$$

where $\Psi(s) = \int_{-\infty}^{s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$.

Remark 4.1. In the one dimensional case we have

$$\begin{aligned}
\varepsilon \; &= \Psi(\tfrac{-D-t_0L}{\sqrt{4t_0}}) + e^{-\frac{DL}{2}}\Psi(\tfrac{t_0L-D}{\sqrt{4t_0}}) \\
&-\Psi(\tfrac{-(a-M')-t_0c}{\sqrt{t_0}}) - e^{-2(a-M')c}\Psi(\tfrac{t_0c-(a-M')}{\sqrt{t_0}}) \\
&-\Psi(\tfrac{-(a-M')+t_0d}{\sqrt{t_0}}) - e^{2(a-M')d}\Psi(\tfrac{-t_0d-(a-M')}{\sqrt{t_0}})
\end{aligned}$$

Proof. See ([23], theorem 7 and theorem 9). $\square$

Moreover, for one-dimensional diffusions, Roberts and Tweedie [22] have provided the following result which gives a more accessible form to get minorization condition in certain special cases

Lemma 4.2 ([22], lemma 6.1)**.** *Let X be a non-explosive one dimensional diffusion satisfying the SDE*

$$dX_t = dB_t + \zeta(X_t)dt,$$

where B_t is a standard Brownian motion. Suppose that ζ is a non-increasing function. Then for $-\infty < c < a < \infty$, $[c, a]$ is (t^*, ε)-small with

$$\varepsilon = 2\Phi\left(-\frac{a-c}{2\sqrt{t^*}}\right),$$

where Φ is the standard cumulative normal distribution function.

4.1.3. *Bounds in the case of pseudo-small sets.* In the multi-dimensional case we have obtained pseudo-small sets instead of small-sets. The results we will give now will permit us to have the same bound as in theorem 2.2 in the case the minorization condition deal with pseudo-small sets.

Theorem 4.3. *Given a Markov process (X_t) with semigroup (P_t) and stationary distribution $\pi(.)$, suppose $C \subset \mathcal{X}$ is (t^*, ε) pseudo-small, for some positive time t^* and $\varepsilon > 0$. Suppose further that a $\Phi-$Lyapunov condition holds and $\sup_C V$ hold. Then*

$$\|\mathcal{L}(X_s) - \pi\|_{TV} \leq \sum_{0 \leq n, s \geq nt^*} (1-\epsilon)^n \widetilde{A}_1 \frac{H_\Phi^{-1}(\lambda \widetilde{A}_0 n)}{H_\Phi^{-1}(\lambda(s-t^*))} \leq \frac{\widetilde{A}_1 \widetilde{A}_{\epsilon,\Phi}}{H_\Phi^{-1}(\lambda(s-t^*))},$$

where $\widetilde{A}_0$, $\widetilde{A}_1$, λ, and $\widetilde{A}_{\varepsilon,\Phi}$ are as in theorem 2.2.

Proof. We construct the process X_t and Y_t jointly and the coupling time T as in([23] theorem 8). The result thus follow by applying the coupling inequality and setting $\mathcal{L}(Y_0) = \pi(.)$ as in theorem 2.2. □

4.1.4. *Computation of the constants.* This section deals with the calculation of the constants which appear in theorem (2.2) and theorem (4.3) above.
First we have that

$$H_\Phi^{-1}(x) = \exp\left(\left(\kappa \left(\frac{2-\alpha}{\alpha} \right) x + a^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - a \right)$$

where κ is given above.

$$d_0 = \inf_{x \notin C} W(x) \quad \text{and} \quad \Phi(d_0) \quad \text{are found by the resolution of equation} \quad \Phi(d_0) > b.$$

$$\lambda \in \left] 0, 1 - \frac{b}{\Phi(d_0)} \right[.$$

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_0 &= \tfrac{2}{\lambda\Phi(1)} \sup_C \left\{ W(x) - 1 + \tfrac{b}{\Phi(1)} \int_0^{t^*} \Phi \circ H_\Phi^{-1}(\lambda s) ds \right\} \\ &= \tfrac{2}{\lambda\Phi(1)} \left\{ d_0 - 1 - \tfrac{b}{\lambda\Phi(1)} + \frac{b \exp\left(\left(\kappa\left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right)\lambda t^* + a^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right)}{exp(a)\lambda\Phi(1)} \right\}. \end{aligned}$$

$$\widetilde{A}_1 = \max\left\{ \frac{\mathbb{E}\Big[W(X_0)\Big] + \pi(W) - 2}{H_\Phi^{-1}(\lambda \widetilde{A}_0)}, 1 \right\} \quad \text{is found from the initial distribution of our chain.}$$

Set

$$n_0' = \left[\frac{\left(\ln\left(\frac{1-a_\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right)^{\frac{2-\alpha}{2(\alpha-1)}}}{\left(\kappa\lambda\widetilde{A}_0\right)^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}\left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right)} - \frac{\alpha}{(2-\alpha)\kappa\lambda\widetilde{A}_0} \right] \quad \text{where } [x] \text{ is the integer part of } x.$$

Then

$$\widetilde{A}_{\varepsilon,\Phi} = \frac{\exp\left(\left(\kappa\left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right)\lambda\widetilde{A}_0 n_0 + 1\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - 1 - n_0 \ln\left(\frac{1-a_\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right)}{a_\varepsilon}$$

where $n_0 = 1$ if n_0' is non-positive, else n_0 is one of the values n_0' or $n_0' + 1$.

4.1.5. *Numerical calculus.* We will focus here on the one dimensional case. One easily verifies that the hypothesis of lemma 4.2 are satisfied.
We choose $\alpha = 0.8$, $\iota = 0.6$
Choosing $M = 1.229915$ and $a = (\kappa)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}$, we then have $\kappa = 1.18 \times 10^{-4}$ and $b = 0.438$. We take $d_0 = 15000$. We thus have $M' = 32.05$, $\lambda \in]0, 0.23[$ and $C = \overline{\mathcal{B}}(0, M')$. λ is choosing as desired in this interval to optimize the results.
We choose $t^* = 100$ we thus have $\varepsilon = 0.001$. We choose $a_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$. We thus get $\widetilde{A}_0 = 3 \times 10^5$, $n_0' = 2 \times 10^{10}$, $\widetilde{A}_{\varepsilon,\Phi} = \frac{\exp(2.46\times 10^6)}{a_\varepsilon}$.

Now we choose $t^* = 1000$ and $a_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$. Then we get $\varepsilon = 0.31$; $\widetilde{A}_0 = 3 \times 10^5$, $n_0' = 338$, $\widetilde{A}_{\varepsilon,\Phi} = \frac{\exp(48.40)}{a_\varepsilon}$.

Finally, we choose $t^* = 10^6$ and $a_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$. Thus we have $\varepsilon = 0.974$; $\widetilde{A}_0 = 3.78 \times 10^5$, $n_0' = 0$ and $\widetilde{A}_{\varepsilon,\Phi} = \frac{\exp(-0.491)}{a_\varepsilon}$.
We recall that $\widetilde{A}_1$ is found from the initial distribution of our chain.

One can observe that there is a "trade-off" between the values of t^* and $\widetilde{A}_{\varepsilon,\Phi}$.

4.2. **Comparison with functional inequalities in the reversible case.** One common way to establish quantitative sub exponential convergence to equilibrium is to use functional inequalities such as weak Poincaré inequalities, originally introduced by Röckner-Wang [26], i.e. for all smooth bounded function f (say in H^1) there exists a mapping $\beta : [0, s_0] \to \mathbb{R}_+$ decreasing such that

$$\int (f - \pi(f)^2) d\pi \leq \beta(s) \int |\nabla f|^2 d\pi + s\|f - \pi(f)\|_\infty^2$$

which implies that

$$\|P_t f - \pi(f)\|_2^2 \leq \psi(t)\|f - \pi(f)\|_\infty^2$$

with $\psi(t) = 2\inf\{s > 0; \beta(s)\log(1/s) \leq t\}$. One notices that the convergence obtained is not expressed in the same norm. It is however not difficult to go from a total variation (which can be seen as a L^1 convergence) to a L^2 type convergence, indeed if

$$\|P_t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\|_{TV}\le cr(t)V(x)$$

and $\pi(V)<\infty$ then using [4, Th. 2.1] one gets that

$$\|P_tf-\pi(f)\|_2^2\le 8cr(t)\pi(V)\|f-\pi(f)\|_\infty.$$

Weak Poincaré inequality are however not so easy to characterize quantitatively, given a precise probability measure π, even in dimension one where Hardy's type criterion can be used. However an interesting feature is that Cattiaux&al [6] have developed a $\Phi-$Lyapunov function technique to get quantitative estimates in the weak Poincaré inequality. Let us recall their results. Assume that a $\Phi-$Lyapunov condition holds on the generator

$$\mathcal{A}V\le -\Phi\circ V+b1_C$$

and the measure π satisfies some local Poincaré inequality

$$\int_C f^2d\pi\le\kappa_C\int|\nabla f|^2d\pi+\frac{1}{\pi(C)}\pi(f1_C)^2$$

then a weak Poincaré inequality holds

$$\beta(s)=\frac{(1+b\kappa_C)}{\inf\{u;\pi(\Phi(V)\le uV)>s\}},$$

for sufficiently small s. Looking now at the way the rate of convergence is derived from $\beta(s)$, one sees that one difficulty in this approach is that every estimate has an important impact on the speed of convergence: bad estimation of b or of the local Poincaré constant has a drastic impact, for example in the sub exponential case estimated numericaly in the previous subsection, whereas in our coupling approach the speed of convergence is quantified by the Lyapunov condition only but not on the local characteristics of the small set C, which appears only in the multiplicative constant. It can have an important impact on sub exponential speed of convergence, and comparable in the polynomial case.

Of course one fundamental point is that the coupling approach may work in the non reversible case without additional difficulty (at least in the strictly elliptic with bounded diffusion coefficient) even if the invariant probabilityy measure is unknown whereas very few results are known using functional inequalities (see however [4] for an attempt in this direction using very particular Lyapunov-Poincaré inequality).

4.3. **Kinetic Fokker Planck equation.** The main goal of this subsection is to emphasize the difficulty of degenerate models such as kinetic Fokker Planck equations or more degenerate models as in the chain of oscillators case. Kinetic Fokker Planck equation can be written as

$$\begin{cases} dx_t=v_tdt\\ dv_t=\sqrt{2}dB_t-v_tdt-\nabla F(x_t)dt\end{cases}$$

which describes the position and velocity of a particle submitted to friction and confinement. If for nice F, Lyapunov conditions are quite well described, see for example [33] for the exponential Lyapunov condition or [4] in the sub exponential case, very few results exist to get quantitative small set estimations in this setting, see for example [5] however hardly quantitative or [14] but which applies only for very "small" small set and thus for very particular drift function F. To this respect, the approach initiated for example by Villani [31] using the explicit form of the invariant measure linked to this SDE and Poincaré inequality furnishes explicit constants (see [32] for the sub exponential case). It should then be rather interesting to get good explicit bounds for small sets in this setting.

Appendix A. Integrability of hitting times under Lyapunov conditions revisited

In this section, we aim at providing a simple proof of the integrability of hitting times when starting outside a chosen small set, due to [8]. It appears first in unpublished course note done by the third author.

Let us first present a preliminary proposition linked to concave functions of semimartingales, whose proof is given for a sake of completeness

Proposition A.1. *Let (Y_t) be a real valued cad lag semimartingale and let $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function C^1 in its first argument, and C^2 and concave in its second argument. Then the process*

$$\Phi(Y_t) - \int_0^t \Phi'(Y_{s-}, s)dY_s - \int_0^t \partial_t\Phi(Y_{s-}, s)ds$$

is decreasing.
Suppose moreover $\Phi' \geq 0$ and that (X_t) is a continuous time Markov process with generator $\mathcal{A}$ and let F and G be such that

$$\mathcal{A}F \leq G.$$

Then we have

$$\mathcal{A}\Phi(F) \leq \partial_t\Phi + \Phi'(F)G.$$

Proof. Since (Y_t) is a semimartingale, we can decompose it as $Y_t = A_t + M_t$ with (M_t) a martingale and (A_t) a finite variation process. Use now Itô's formula to get

$$\begin{aligned}\Phi(Y_t) &= \Phi(Y_0) + \int_0^t \Phi'(Y_{s-}, s)dY_s + \int_0^t \partial_t\Phi(Y_{s-}, s)ds \\ &\quad + \int_0^t \Phi''(Y_{s-}, s)d\langle M\rangle_t^c + \sum_{s\in[0,t]} (\Phi(Y_{s+}, s) - \Phi(Y_{s-}, s) - \Phi(Y_{s-}, s)\Delta Y_s)\end{aligned}$$

where, as usual, $\langle M\rangle_t^c$ denotes the quadratic variation of the continuous part of M and ΔY_s the size of the jump of (Y_t) at time s. The first part of the result follows as $\langle M\rangle_t^c$ is an increasing process and that Φ'' is non positive as Φ is concave.
For the second part, set $Y - t = F(X_t, t)$. It follows from the assumptions that one can write

$$dY_t = G(X_t, t)dt + dN_t + dM_t$$

where (M_t) is a cadlag martingale and N is a non increasing process. Use now the first part of the proposition to get

$$d\Phi(Y_t) \leq \Phi'(Y_{t-}, t)(G(X_t, t)dt + dN_t + dM_t) + \partial_t \Phi(Y_{t-}, t)dt.$$

The claim then follows from the fact that dN_t is a negative measure and Φ' is non negative. $\square$

The idea is then following: looking at the $\Phi-$Lyapunov condition

$$\mathcal{A}V \leq -\Phi(V) + b1_C$$

that we may simplify, if $x \in C^c$ to

$$\mathcal{A}V \leq -\Phi(V),$$

it is natural to consider the solution Φ of the ordinary differential equation

$$\partial_t \Phi = -\Phi \circ \Phi, \qquad \Phi(v, 0) = v.$$

This ODE can be solved explicitly, indeed we may choose

$$\Phi(v, t) = H_\Phi^{-1}(H_\Phi(v) - t).$$

Let us now recall that

$$\Phi^{-1}(x, t) = H_\Phi^{-1}(H_\Phi(v) + t),$$
$$\partial_x \Phi^{-1}(x, t) = \frac{\partial_t \Phi^{-1}(x, t)}{\Phi(x)} = \frac{\Phi(\Phi^{-1}(x, t))}{\Phi(x)}.$$

As Φ is concave, we easily deduce that Φ^{-1} is increasing and concave in its first argument for every fixed value of t. Using the previous proposition, we have that for $x \in C^c$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\Phi^{-1}(V(x), t) &\leq \partial_t \Phi^{-1}(V(x), t) + \partial_x \Phi^{-1}(V(x), t)\mathcal{A}V \\
&\leq \partial_t \Phi^{-1}(V(x), t) - \Phi(V(x))\partial_x \Phi^{-1}(V(x), t) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Introduce now $\tau = \inf\{t \geq 0, X_t \in C\}$, and for $x \in C^c$, we immediately deduce, using Itô's formula, and the fact that for all $t < \tau$, $X_t \notin C$,

$$\mathbb{E}_x(H_\Phi^{-1}(\tau)) \leq \mathbb{E}_x \Phi^{-1}(V(X_\tau), \tau) \leq V(x)$$

which is the desired integrability of Theorem 1.3.

References

[1] D.J. Aldous and H. Thorisson. Shift-coupling. *Stoch. Proc. Appl.*, 44:1–14, 1993.

[2] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, and G. Scheffer. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, volume 10 of *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, Paris, 2000.

[3] D. Bakry, F. Barthe, P. Cattiaux, and A. Guillin. A simple proof of the Poincaré inequality for a large class of probability measures. *Electronic Communications in Probability.*, 13:60–66, 2008.

[4] D. Bakry, P. Cattiaux, and A. Guillin. Rate of convergence for ergodic continuous Markov processes : Lyapunov versus Poincaré. *J. Func. Anal.*, 254:727–759, 2008.

[5] V. Bally and A. Kohatsu-Higa. Lower bounds for densities of Asian type stochastic differential equations. *J. Funct. Anal.*, 258(9):3134–3164, 2010.

[6] P. Cattiaux, N. Gozlan, A. Guillin, and C. Roberto. Functional inequalities for heavy tailed distributions and applications to isoperimetry. *Electron. J. Probab.*, 13(15):346–385, 2010.

[7] P. Diaconis and L. Saloff-Coste. Logarithmic Sobolev inequalities for finite Markov chains. *Ann. Appl. Probab.*, 6(3):695–750, 1996.

[8] R. Douc, G. Fort, and A. Guillin. Subgeometric rates of convergence of f-ergodic strong Markov processes. *Stochastic Process. Appl.*, 119(3):897–923, 2009.

[9] R. Douc, G. Fort, E. Moulines, and P. Soulier. Practical drift conditions for subgeometric rates of convergence. *Ann. Appl. Probab.*, 14(3):1353–1377, 2004.

[10] R. Douc, E. Moulines, and Jeffrey S. Rosenthal. Quantitative bounds on convergence of time-inhomogeneous Markov chains. *Ann. Appl. Probab.*, 14(4):1643–1665, 2004.

[11] R. Douc, E. Moulines, and P. Sourlier. Computable convergence rates for sub-geometric ergodic markov chains. *Bernouilli*, 13(3):831–848, 2004.

[12] N. Down, S. P. Meyn, and R. L. Tweedie. Exponential and uniform ergodicity of Markov processes. *Ann. Prob.*, 23(4):1671–1691, 1995.

[13] G. Fort and G. O. Roberts. Subgeometric ergodicity of strong Markov processes. *Ann. Appl. Prob.*, 15(2):1565–1589, 2005.

[14] A. Guillin and F.-Y. Wang. Bismut formula and harnack inequality for fokker-planck equations. To appear in Journal of Differential Equations, 2011.

[15] M. Hairer and J. C. Mattingly. Slow energy dissipation in anharmonic oscillator chains. To appear in Communications in Mathematical Physics, 2007.

[16] R. Z. Has′minskiĭ. *Stochastic stability of differential equations*, volume 7 of *Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids: Mechanics and Analysis.* Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980. Translated from the Russian by D. Louvish.

[17] S. P. Meyn and R. L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability.* Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag London Ltd., London, 1993.

[18] S. P. Meyn and R. L. Tweedie. Stability of markovian processes II: continuous-time processes and sampled chains. *Adv. Appl. Proba.*, 25:487–517, 1993.

[19] S. P. Meyn and R. L. Tweedie. Stability of markovian processes III: Foster-Lyapunov criteria for continuous-time processes. *Adv. Appl. Proba.*, 25:518–548, 1993.

[20] Ravi Montenegro and Prasad Tetali. Mathematical aspects of mixing times in Markov chains. *Found. Trends Theor. Comput. Sci.*, 1(3):x+121, 2006.

[21] E. Nummelin. *General irreducible Markov chains and nonnegative operators.* Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[22] G. O. Roberts and R. L. Tweedie. Rates of convergence of stochastically monotone and continuous time markov models. *J. Appl. Probab.*, 37(2):359–373, 2000.

[23] G.O. Roberts and J.S. Rosenthal. Quantitative bounds for convergence rates of continuous time markov processes. *Electron. J. Probab.*, 1(9):1–21, 1996.

[24] G.O. Roberts and J.S. Rosenthal. Shift-coupling and convergence rates of ergodic averages. *Communications in statistics. Stochastics models*, 13(1):147–165, 1996.

[25] G.O. Roberts and J.S. Rosenthal. General state space markov chains and mcmc algorithms. *Probability Surveys*, 1:20–71, 2004.

[26] M. Röckner and F. Y. Wang. Weak Poincaré inequalities and L^2-convergence rates of Markov semigroups. *J. Funct. Anal.*, 185(2):564–603, 2001.

[27] J.S. Rosenthal. Minorization conditions and convergence rates for markov chain monte carlo. *J. Amer. Stat. Assoc.*, 90:558–566, 1995.

[28] H. Thorisson. Coupling and shift-coupling random sequences. *Contemp. Math.*, 149, 1993.

[29] H. Thorisson. Shift-coupling in continuous times. *Probab. Theory Relat. Fields*, 99:477–483, 1994.

[30] A. Yu. Veretennikov. On polynomial mixing bounds for stochastic differential equations. *Stochastic Process. Appl.*, 70(1):115–127, 1997.

Troisième partie

Sub-exponential decay in Fokker-Planck equation : weak hypocoercivity

SUBEXPONENTIAL DECAY IN KINETIC FOKKER-PLANCK EQUATION : WEAK HYPOCOERCIVITY

par

WANG Xinyu

Résumé. — We consider here quantitative convergence to equilibrium for the kinetic Fokker-Planck equation. We present here a weak hypocoercivity approach *à la* Villani, using weak functional inequalities, such as weak Poincaré inequality or weak logarithmic Sobolev inequality, ensuring sub-exponential convergence to equilibrium in L^2 sense or in entropy.

Key words : coercivity, weak Poincaré inequality, weak Logarithmic Sobolev inequality.

MSC 2000 : 26D10, 47D07, 60G10, 60J60.

1. Introduction

The long-time behavior of kinetic linear Fokker-Planck equation has been studied for a long time and is by itself a very interesting problem as being one of the simplest hypoelliptic model, noticeably hard to study. From a probabilistic point of view, we are interested in the law of the following degenerate stochastic differential equation on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} dX_t = Y_t dt \\ dY_t = \sqrt{2} dB_t - \nabla V(X_t) dt - Y_t dt \end{cases}$$

The corresponding partial differential equation has the form:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h - \nabla V(x) \cdot \nabla_v h = \Delta_v h - v \cdot \nabla_v h. \tag{1}$$

Before considering convergence to equilibrium for this model,let us recall some analytical issues about regularity and well-posedness. It is shown by Helffer and Nier[[**14**], Section 5.2] that (1) generates a C^∞ regularizing contraction semigroup in $L^2(\mu)$ as soon as V lies in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, here $d\mu = \frac{e^{-[V(x)+\frac{|v|^2}{2}]}}{Z}dxdv$ with regularizing constant Z. In [**19**], Villani used smooth approximation to get the same type of results under less regular potential V:

Theorem 1.1. — *Let $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$, lower bounded. Then for any $h_0 \in L^2(\mu)$, equation* (1) *admits a unique distributional solution $h = h(t, x, v) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_v)) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(\mu)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1_v(\mu))$, such that $h(0, \cdot) = h_0$.*

If we set $f = e^{-[V(x)+\frac{|v|^2}{2}]}h$, then the equation becomes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \nabla V(x) \cdot \nabla_v f = \Delta_v f + \nabla_v \cdot (vf). \tag{2}$$

in which case f at time t can be interpreted (if it is nonnegative) as a density of particles, or (if it is a probability density) as the law of a random variable in phase space. But the assumptions for (2) are more general than for (1), see Theorem 7 in [**19**].

Our main purpose is to study the long time behavior of the solution of this equation. On this basis, Villani [**19**] established different kinds of exponential convergence with a explicitly computable rate, in H^1 sense [Theorem 35], in L^2 sense [Theorem 37], and in the sense of relative entropy [Theorem 39]. In fact, for the kinetic Fokker-Planck equation, the coercivity is equivalent to Poincaré inequality or Logarithmic Sobolev inequality for the invariant measure μ previously defined. Note that it is well known that Poincaré inequality is equivalent to L^2 exponential convergence for symmetric Markov process. However due to the degeneracy of the generator associated to the Fokker-Planck equation, a Poincaré inequality for the present dynamic cannot hold. More generally, for non symmetric Markov process, an exponential convergence of the L^2 norm (not uniform) is not equivalent to a Poincaré inequality. In fact, in many fields of applied mathematics, people usually encounter some dissipative evolution equations, which involve (i) a degenerate dissipative operator, and (ii) a conservative operator presenting certain symmetry properties, such that the combination of both operators implies convergence to a uniquely determined equilibrium state. Typically, the dissipative part is not coercive. This situation is very similar to problems encountered in the theory of hypoellipticity. Hence, Villani [**19**] has studied hypocoercivity and developed a new method for studying convergence problems in a rather systematic and abstract way. It is suggested to refer to the Part I. of [**19**] for a nice presentation of coercivity and hypocoercivity.

Recently, J. Dolbeault, C. Mouhot, and C. Schmeiser [**9**] have developed a new method for proving hypocoercivity for a large class of linear kinetic equations with only one conservation law. They also gave the exponential decay in $L^2(\mu)$ for our model.

In the other part, there are fewer examples about subexponential decay. In [**2**] Remark 6.7, Bakry, Cattiaux and Guillin have given an example of the subexponential decay by using Lyapunov function (Meyn-Tweedie's method [**17**]), see also [**6**] for the quantitative coupling approach. This approach relies however on the calculus of the constants of a "small set" for which only (if available) bad evaluations are known. Remark however that no knowledge of the explicit form of the invariant measure is needed.

In this paper, we will study subexponential decay under the weak coercivity condition and the explicit constant of convergence will be given. Here, weak coercivity means the weak Poincaré inequality. We will also consider the weak logarithmic Sobolev inequality for the results in the sense of entropy. For kinetic linear Fokker-Planck equation, searching a suitable norms is the key to get the rate of convergence. We will use the same choice of the norm as [**19**]. This paper is organized as follows. In section 2, we present the definitions and some useful results. The weak hypocoercivity and examples will be given in section 3 and section 4 separately. After that, the results in entropic sense and examples are shown in section 5 and section 6 separately. In appendix, proofs of technical lemmas are given.

2. Framework and useful results

2.1. Derivations in $L^2(\mu)$, semigroup, weak coercivity. — We consider the real Hilbert space $L^2(\mu)$, here $\mu(dx) = \rho_\infty dx$ is the equilibrium measure on $\mathbb{R}^n$, with density ρ_∞ with respect to Lebesgue measure. $A = (A_1, \ldots, A_m)$, A_j's and B are derivations on $\mathbb{R}^n$, i.e. there are vector fields $a_j(x)$ and $b(x)$ on $\mathbb{R}^n$ such that

$$A_j h = a_j \cdot \nabla h, \qquad Bh = b \cdot \nabla h.$$

In short, there is an $m \times n$ matrix $\sigma = \sigma(x)$ such that

$$A = \sigma \nabla.$$

Linear operator $L = A^*A + B = \sum A_i^* A_i + B$ is to be thought as the generator of the semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$: $P_t = e^{-tL}$, here $B^* = -B$. We always assume that the semigroup $(t, h) \to e^{-tL}h$ is continuous as a function of both t and h, satisfying the semigroup property $e^{0L} = Id$, $e^{-(t+s)L} = e^{-tL}e^{-sL}$ for $t, s \geq 0$, and

$$\forall h \in D(L), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0+} e^{-tL}h = -Lh.$$

It is well known that the semigroup is nonexpansive, i.e. $\forall t \geq 0, p \geq 1, ||e^{-tL}||_{L^p(\mu)} \leq 1$. It is easy to verify that :

$$B^* = -B \iff \nabla \cdot (b\rho_\infty) = 0$$

$$A^* g = -\nabla \cdot (\sigma^* g) - < \nabla \log \rho_\infty, \sigma^* g > .$$

Let $\sigma \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{m\times n})$, $\xi \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, and $D := \sigma\sigma^*$. If $(X_t)_{t\geq 0}$ is a stochastic process solving the stochastic differential equation

$$dX_t = \sqrt{2}\sigma(X_t)dB_t + \xi(X_t)dt,$$

where $(B_t)_{t\geq 0}$ is a standard Brownian motion in $\mathbb{R}^m$. By Itô formula, the law $(\rho_t)_{t\geq 0}$ of X_t satisfies the diffusion equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla\rho - \xi\rho).$$

Assume that the equation above admits an invariant measure $\mu_\infty(dx) = \rho_\infty dx$ (with finite or infinite mass), where ρ_∞ lies in $C^2(\mathbb{R}^n)$ and is positive everywhere. Then the new unknown $h(t,x) := \rho(t,x)/\rho_\infty(x)$ solves the diffusion equation

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla h) - (\xi - 2D\nabla \log \rho_\infty) \cdot \nabla h,$$

which is of the form $\partial_t h + Lh = 0$ with $L = A^*A + B$, $B^* = -B$, if one defines $A := \sigma\nabla$, and $B := (\xi - D\nabla \log \rho_\infty) \cdot \nabla$.

Similar to the definition of coercivity, we define $(\beta, \Phi)-$weak coercivity of operator L as the following, which will be abbreviated to weak coercivity.

***Definition 2.1* (weak coercivity).** — *Let L be an unbounded operator on a Hilbert space $\mathcal{H}$, with kernel $\mathcal{K}$. $D(L)$ is dense in $\mathcal{H}$. The operator L is said to be $(\beta,\Phi)-$weak coercive on $\mathcal{K}^\perp$, if*

$$\beta(s)\langle h, Lh\rangle_{\mathcal{H}} \geq \|h\|^2_{\mathcal{H}} - s\Phi(h), \forall s > 0, h \in \mathcal{K}^\perp \cap D(L).$$

$\beta(s)$ is a nonnegative and non-increasing function on $(0,+\infty)$, $\beta(s) \downarrow 0$, as $s \uparrow +\infty$. And $\Phi : \mathcal{H} \to [0,\infty]$ satisfies $\Phi(ch) = c^2\Phi(h)$.

Remark 2.2. — If $\lim_{s\to 0} \beta(s) = \lambda < +\infty$, we obtain exactly $\lambda-$coercivity. The form of this inequality imitate the weak Poincaré inequality. In this paper, the Hilbert space $\mathcal{H}$ is always $L^2(\mu)$, $\Phi(h) := \|h\|^2_\infty$. Sometimes, $\Phi(h) := \mathrm{Osc}(h)^2$.

As previously recalled, the coercivity is equivalent to "$\|e^{-tL}h\|^2_{\mathcal{H}} \leq e^{-2\lambda t}\|h\|^2_{\mathcal{H}}$ for all $h \in \mathcal{H}$" (see Proposition 9 in [**19**]). We have here

Theorem 2.3. — *Assume that L is $(\beta,\Phi)-$weak coercive on $\mathcal{K}^\perp$, then*

$$\|e^{-tL}h\|^2_{\mathcal{H}} \leq \inf_{\substack{s>0\\ \beta(s)>0}} \left\{ s \sup_{r\in[0,t]} \Phi(e^{-rt}h) + \exp[-2t/\beta(s)]\|h\|^2_{\mathcal{H}} \right\}, t > 0, h \in \mathcal{K}^\perp.$$

Consequently, if $\Phi(e^{-tL}h) \leq \Phi(h)$ for any $t \geq 0$, then

$$\|e^{-tL}h\|^2_{\mathcal{H}} \leq \xi(t)\left[\Phi(h) + \|h\|^2_{\mathcal{H}}\right], t > 0, h \in \mathcal{K}^\perp.$$

Where $\xi(t) := \inf\{s > 0 : -\frac{1}{2}\beta(s)\log s \leq t\}$ for $t > 0$. In particular, $\xi(t) \downarrow 0$ as $t \uparrow \infty$.

Démonstration. — By density, assume that $h \in \mathcal{K}^\perp \cap D(L)$. Let $H(t) := \|e^{-tL}h\|^2_{\mathcal{H}}$. By weak coercivity,

$$H'(t) = -2\langle e^{-tL}h, Le^{-tL}h\rangle \leq -\frac{2}{\beta(s)}H(t) + \frac{2s}{\beta(s)}\Phi(e^{-tL}h), t \geq 0, \beta(s) > 0.$$

So by Gronwall's lemma, we can get the results. □

2.2. The kinetic Fokker-Planck equation. — Given a nice (at least C^1, lower bounded) function $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, converging to ∞ at infinity. For $(x,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, set

$$\rho_\infty(x,v) = \frac{e^{-[V(x)+\frac{|v|^2}{2}]}}{Z}, \qquad \mu(dxdy) = \rho_\infty(x,v)dxdv,$$

where Z is chosen for that μ is a probability measure on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Define

$$A_i := \frac{\partial}{\partial v_i}, \qquad A := \nabla_v, \qquad B := v \cdot \nabla_x - \nabla V(x) \cdot \nabla_v,$$

$$L := -\Delta_v + v \cdot \nabla_v + v \cdot \nabla_x - \nabla V(x) \cdot \nabla_v.$$

The associated equation is the kinetic Fokker-Planck equation with confinement potential V, in the form

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h - \nabla V(x) \cdot \nabla_v h = \Delta_v h - v \cdot \nabla_v h.$$

By direct computation in $L^2(\mu)$, we can check that

$$A_i^* = -\frac{\partial}{\partial v_i} + v_i, \qquad A^*A = \sum_{i=1}^n A_i^* A_i = -\Delta_v + v \cdot \nabla_v,$$

$$B^* = -B, \qquad L = A^*A + B.$$

Then the equation takes the form $\partial h/\partial t + Lh = 0$. By more calculations, we can get

$$[A_i, A_j^*] = A_i A_j^* - A_j^* A_i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

$$C_i := [A_i, B] = A_i B - B A_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad C := [C_1, \dots, C_n] = \nabla_x,$$

$$[A_i^*, C_j] = A_i^* C_j - C_j A_i^* = 0, \qquad [A_i, C_j] = A_i C_j - C_j A_i = 0,$$

$$[B, C_i] = BC_i - C_i B = (v \cdot \nabla_x - \nabla V \cdot \nabla_v)\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}(v \cdot \nabla_x - \nabla V \cdot \nabla_v) = \sum_{j=i}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial v_j}$$

$$[A, C] = [A^*, C] = 0, \qquad [A, A^*] = I, \qquad [B, C] = \nabla^2 V(x) \cdot \nabla_v.$$

2.3. Poincaré inequality and weak Poincaré inequality. — Poincaré inequality is important in study of the rate of convergence for ergodic continuous Markov processes, the relationship between Poincaré inequality and variant decays is a hot and interesting issue. Generally, Poincaré inequality means exponential decay, for example in [**2**][Theorem 1.3]. In order to describe convergence rates slower than exponential, the weak Poincaré inequality was introduced by M. Rockner and F. -Y. Wang (see [**18**]). We refer to [**1**] for a nice introduction on the subject of functional inequalities.

Definition 2.4. — *We say that the measure μ satisfies a Poincaré inequality, if there exists a constant C_P, such that, for all $f \in C_b^1$,*

$$Var_\mu(f) := \|f - \int f d\mu\|_2^2 \leq C_P \int |\nabla f|^2 d\mu.$$

Definition 2.5. — *We say that the measure μ satisfies a weak Poincaré inequality, if for all $s > 0$ and $f \in C_b^1$,*

$$Var_\mu(f) \leq \beta(s) \int |\nabla f|^2 d\mu + s\|f\|_\infty^2. \tag{3}$$

here, $\beta(s)$ is a nonnegative and non-increasing function on $(0, +\infty)$, $\beta(s) \downarrow 0$, as $s \uparrow +\infty$.

It has to be noted that for $d\mu = e^{-V}dx$ a probability measure with V locally bounded, there exists β such that μ verifies a weak Poincaré inequality. Thus, our theorems around convergence of the kinetic Fokker Planck equations will furnish convergence estimates for nearly all the cases left by Villani.

Remark 2.6. — Sometimes we consider another form of the weak Poincaré inequality:

$$Var_\mu(f) \leq \beta(s) \int |\nabla f|^2 d\mu + s\,\mathrm{Osc}(f)^2.$$

Note that $\mathrm{Osc}(f) \leq 2\|f\|_\infty$, the latter is stronger than the former in a sense. Since $\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \mathrm{Osc}(f)^2/4$, we may set $\beta(s) = 0$ for $s \geq 1$ in the former, and $\beta(s) = 0$ for $s \geq 1/4$ in the latter.

Remark 2.7. — Note that using capacity-measure criterion, Zitt [**21**, Th. 29] shows that a weak Poincaré inequality is indeed equivalent to other variants with weaker norms than the L^∞ one: if ϕ, ψ are two Young functions with $\phi(x) = \psi(x^2)$, a measure μ satisfies a weak Poincaré inequality (3) if and only if denoting N_ϕ the Orlicz norm associated to ϕ

$$Var_\mu(f) \leq \alpha_\phi(s) \int |\nabla f\|^2 d\mu + sN_\phi(f^2)$$

with $\alpha_\phi(s) = c\beta(\hat{\psi}^{-1}(s/2)/4)$, c an universal constant, and $\hat{\psi}(x) = ((\psi^*)^{-1}(1/x))^{-1}$ where ψ^* is the Fenchel-Legendre dual of ψ.
We may thus for example consider L^p norms instead of L^∞ norms.

2.4. Logarithmic Sobolev inequality and weak Logarithmic Sobolev inequality. — Once again, we refer to [**1**] for criterion and results (Bakry-Emery, perturbation,...) about logarithmic Sobolev inequality.

Definition 2.8. — *We say that the measure μ satisfies a Logarithmic Sobolev inequality, if there exists a constant C_L, such that for any positive $f \in C_b^1$,*

$$Ent_\mu(f) := \int f \log f d\mu - \int f d\mu \log \int f d\mu \leq C_{LS} \int |\nabla f|^2 d\mu.$$

It was then natural to introduce a weak version of this inequality. It was done in [**8**] for two purposes : give subexponential convergence to equilibrium and also examples where non absolutely continuous initial measures can be given.

Definition 2.9. — *We say that the measure μ satisfies a weak Logarithmic Sobolev inequality, if for all $s > 0$ and $f \in C_b^1$,*

$$Ent_\mu(f^2) \leq \beta(s) \int |\nabla f|^2 d\mu + s\|f\|_\infty^2.$$

here, $\beta(s)$ is a nonnegative and non-increasing function on $(0, +\infty)$, $\beta(s) \downarrow 0$, as $s \uparrow +\infty$.

Remark 2.10. — The two remarks previously made for weak Poincaré inequality are still true here. As previously announced, $\mathrm{Osc}(f)$ may also replace $\|f\|_\infty$ in the weak logarithmic Sobolev inequality:

$$Ent_\mu(f^2) \leq \beta(s) \int |\nabla f|^2 d\mu + s\, \mathrm{Osc}(f)^2.$$

Note that the weak Poincaré inequality is translation invariant. Hence it is enough to check it for non negative functions f, thanks to the inequality $\mathrm{Var}_\mu(f) \leq Ent_\mu(f^2)$. Hence the weak logarithmic Sobolev inequality (or logarithmic Sobolev inequality) is stronger than the weak Poincaré inequality (or the Poincaré inequality).

Since, by homogeneity, $Ent_\mu(f^2) \leq (2 + 1/e)\,\mathrm{Osc}(f)$, we may set $\beta(s) = 0$ for $s \geq (8 + 4/e)$ in the former, and $\beta(s) = 0$ for $s \geq (2 + 1/e)$ in the latter.
Secondly, modifying β in an adequate α_ϕ, one may also give versions of the weak logarithmic Sobolev inequality with controls by Orlicz norms rather than the sole L^∞ one.

3. decay in $\mathcal{H}^1$ under weak coercivity of A^*A+C^*C

For the kinetic Fokker-Planck equation, there is a natural $\mathcal{H}^1$-Sobolev norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1(\mu)}$:

$$\|h\|_{\mathcal{H}^1(\mu)}^2 = \|h\|_2^2 + \|Ah\|_2^2 + \|Ch\|_2^2 = \|h\|_2^2 + \|\nabla h\|_2^2$$

In Villani[**19**] theorem 35, the exponential convergence in $\mathcal{H}^1$ sense under coercivity of A^*A+C^*C is got by the following theorem:

Theorem 3.1. — *For the kinetic Fokker-Planck equation, assume that $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$ with $|\nabla^2 V(x)| \leq M(1+|\nabla V|)$ for a constant $M \geq 0$ and the measure μ satisfies the Poincaré inequality. Then there are constants $C \geq 1$ and $\lambda > 0$, explicitly computable, such that for all $h \in \mathcal{H}^1(\mu)$, $\int h d\mu = 0$,*

$$\|e^{-tL}h\|_{\mathcal{H}^1(\mu)} \leq Ce^{-\lambda t}\|h\|_{\mathcal{H}^1(\mu)}.$$

In the above theorem, coercivity of A^*A+C^*C means the Poincaré inequality for invariant measure μ. Next, We will consider the convergence under weak coercivity of A^*A+C^*C, which means the weak Poincaré inequality. And the condition for potential $V(x)$: $|\nabla^2 V(x)| \leq M(1+|\nabla V|)$ will be replaced by $|\nabla^2 V(x)| \leq M$.

There is an associated scalar product to the $\mathcal{H}^1$-Sobolev norm, which will be denoted by $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}^1}$. Furthermore, we define another scalar product $((\cdot,\cdot))$:

$$((h,h)) = \|h\|_2^2 + a\|Ah\|_2^2 + 2b\langle Ah, Ch\rangle_2 + c\|Ch\|_2^2.$$

Where the positive constant a, b, c will be chosen later on, in such a way that $c \leq b \leq a$ and $b^2 < ac$, that is similar to the choice in the proof of Theorem 5.1. We can see that $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}^1}$ and $((\cdot,\cdot))$ define equivalent norm:

$$\begin{aligned}\min(1,a,c)(1-\frac{b}{\sqrt{ac}})\|h\|_{\mathcal{H}^1}^2 &\leq ((h,h)) \\ &\leq \max(1,a,c)(1+\frac{b}{\sqrt{ac}})\|h\|_{\mathcal{H}^1}^2.\end{aligned}$$

By polarization, the scalar products $((\cdot,\cdot))$ defines a bilinear symmetric form on $\mathcal{H}^1$. So we easily get

Proposition 3.2. — *For $h \in \mathcal{H}^1 \cap D(L)$,*

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}((e^{-tL}h, e^{-tL}h)) = ((e^{-tL}h, Le^{-tL}h)).$$

In particular,

$$-\left.\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\right|_{t=0}((e^{-tL}h, e^{-tL}h)) = ((h, Lh)).$$

The proposition below is the key in the next theorem. A proof is provided in Appendix 7.1. It can be seen as a particular case of a result by Villani, with a simpler and self contained proof, which moreover leads to easily traceable constants.

Proposition 3.3. — *For the kinetic Fokker-Planck equation, we always assume that $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$ and $|\nabla^2 V(x)| \le M$ with a constant $M \ge 0$, for all $x \in \mathbb{R}^n$. There is a constant $\kappa > 0$, such that*

$$((h, Lh)) \ge \kappa(\|Ah\|_2^2 + \|Ch\|_2^2).$$

with $\kappa := \min(\frac{3}{4}+a-bM, b-(a+b+cM)^2)$. For example, we can choose $c < \frac{1}{M(M+2)^2}$, $b = cM$, $a = cM^2$.

Remark 3.4. — $|\nabla^2 V(x)| \le M$ is satisfied for all the examples which we will consider later. For instance, for $\alpha > 0$, $0 < p < 2$, let $\tilde{V}(x) = (n+\alpha)\ln(1+|x|)$ and $\tilde{V}(x) = |x|^p$. In order to $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$, we have to modify them to make them smooth enough in a very small neighborhood of 0, but $|\nabla^2 V(x)| \le M$ is still correct for the modified $V(x)$. We will see these examples later.

Remark 3.5. — Recall that one may weaken the assumption to $|\nabla^2 V(x)| \le M(1 + |\nabla V|)$ (of course, κ is then poorly estimated). This is due to the first part of Theorem18 and Lemma A.24 in Appendix A.23 in Villani's work [**19**].

It is obvious that weak coercivity of $A^*A + C^*C$ in $L^2(\mu)$ is equivalent to weak Poincaré inequality for measure μ. By the Proposition 3.3, we can get our main results.

3.1. Convergence to equilibrium in $\mathcal{H}^1$. — It is now clear that weak coercivity of $A^*A + C^*C$ in $L^2(\mu)$ is equivalent to weak Poincaré inequality for measure μ. By the Proposition 3.3, we can get our main results.

Theorem 3.6. — *With the same conditions in Proposition 3.3, we can choose a, b, c such that*

$$((h, h)) = \|h\|_2^2 + a\|Ah\|_2^2 + 2b\langle Ah, Ch\rangle_2 + c\|Ch\|_2^2.$$

satisfies the concludes of the Proposition 3.3. If, in addition, the measure μ satisfies the weak Poincaré inequality

$$Var_\mu(f) \le \beta(s)\int |\nabla f|^2 d\mu + s\|f\|_\infty^2, s > 0.$$

Then there is the same constant κ as in the Proposition 3.3 and for $\int h d\mu = 0$ and $t > 0$, such that

$$((e^{-tL}h, e^{-tL}h)) \le \inf_{\substack{s>0\\ \beta(s)>0}} \left(((h,h)) \exp\{-\lambda(s)t\} + \frac{\kappa s}{\beta(s)\lambda(s)} \sup_{0\le t'\le t} \|e^{-t'L}h\|_\infty^2 \right).$$

Here,

$$\lambda(s) = \min(\kappa, \frac{\kappa}{\beta(s)}) \left(\max(1, a, c)(1 + \frac{b}{\sqrt{ac}}) \right)^{-1}$$

Furthermore,

$$((e^{-tL}h, e^{-tL}h)) \le \xi(t) \left(((h,h)) + \|h\|_\infty^2 \right).$$

Here,

$$\xi(t) = K \inf_{\substack{s>0 \\ \beta(s)>0}} \left\{ \frac{s}{\min(\beta(s),1)}, t \geq -\frac{1}{\lambda(s)} \log \frac{Ks}{\min(\beta(s),1)} \right\},$$

$$K = \max(1,a,c)(1+\frac{b}{\sqrt{ac}}).$$

In particular, $\xi(t) \to 0$ as $t \to \infty$

Démonstration. — By the weak Poincaré inequality, we have

$$\|Ah\|_2^2 + \|Ch\|_2^2 = \int |\nabla h|^2 d\mu \geq \frac{1}{\beta(s)}\|h\|_2^2 - \frac{s}{\beta(s)}\|h\|_\infty^2.$$

Then,

$$\begin{aligned} ((h, Lh)) &\geq \frac{\kappa}{2}(\|Ah\|_2^2 + \|Ch\|_2^2) + \frac{\kappa}{2}(\frac{1}{\beta(s)}\|h\|_2^2 - \frac{s}{\beta(s)}\|h\|_\infty^2) \\ &\geq \kappa'\|h\|_{\mathcal{H}^1} - \frac{\kappa s}{2\beta(s)}\|h\|_\infty^2 \qquad \left(\kappa' = \min(\frac{\kappa}{2}, \frac{\kappa}{2\beta(s)})\right) \\ &\geq \kappa''((h,h)) - \frac{\kappa s}{2\beta(s)}\|h\|_\infty^2. \\ &\quad \left(\kappa'' = \kappa'\left(\max(1,a,c)(1+\frac{b}{\sqrt{ac}})\right)^{-1}\right) \end{aligned}$$

Let $\lambda(s) = 2\kappa''$, we have

$$\frac{d}{dt}((e^{-tL}h, e^{-tL}h)) \leq -\lambda(s)((e^{-tL}h, e^{-tL}h)) + \frac{\kappa s}{\beta(s)}\|e^{-tL}h\|_\infty^2.$$

By Gronwall's lemma, we can finish the first conclude. Using the proposition $\|e^{-tL}h\|_\infty^2 \leq \|h\|_\infty^2$ and setting $\frac{\kappa s}{\beta(s)\lambda(s)} \leq \exp\{-\lambda(s)t\}$, we get the second part. It is easy to see that $\frac{1}{\lambda(s)}$ is decreasing and $\frac{s}{\min(\beta(s),1)}$ is increasing, so $\xi(t) \to 0$ as $t \to \infty$. □

By the equivalence of $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}^1}$ and $((\cdot,\cdot))$, we have

Corollary 3.7. — *With the same notations of theorem above, for $\int h d\mu = 0$, we have*

$$\|e^{-tL}h\|_{\mathcal{H}^1}^2 \leq \frac{1}{\min(1,a,c)(1-\frac{b}{\sqrt{ac}})}\xi(t)\left(\max(1,a,c)(1+\frac{b}{\sqrt{ac}})\|h\|_{\mathcal{H}^1}^2 + \|h\|_\infty^2\right).$$

Remark 3.8. — One may find that using an L^∞ control is too strong. Recall however than, using Remark 2.7, one may get weaker norms (L^p for $p > 2$ or more general Orlicz norms) to the price of a slower rate of convergence to equilibrium. One may also use truncation arguments to do so.

The previous theorem suffers however from a serious drawback. Indeed it is required that the initial condition is in $\mathcal{H}^1$. It is the contempt of the next subsection to use hypoelliptic regularization technique to get rid of this stringent assumption.

3.2. Convergence to equilibrium in L^2. — From the work of Guillin-Wang [**13**], we can get the gradient estimate of the solutions below providing the regularizing effect we need

Lemma 3.9. — *Let h be bounded measurable function, then there exists a constant $d_0 > 0$, for all $0 < t_0 < 1$, such that*

$$\|\nabla e^{-t_0 L} h\|_2^2 \leq \frac{d_0 \|h\|_\infty^2}{t_0^3}$$

By direct computation and noticing the relationship between norms in L^2 and in $\mathcal{H}^1$,

Theorem 3.10. — *Let h is bounded measurable function, then there exists a constant $d > 0$, for $0 < t_0 < 1$ and $\int h d\mu = 0$, such that*

$$\|e^{-(t+t_0)L} h\|_2^2 \leq d_1 \left(K\|h\|_2^2 + d_2\|h\|_\infty^2\right) \xi(t)$$

here, $d_1 = (\min(1,a,c)(1 - \frac{b}{\sqrt{ac}}))^{-1}$, $d_2 = (\frac{d_0 d_2}{t_0^3} + 1)$, $K = \max(1,a,c)(1 + \frac{b}{\sqrt{ac}})$.

4. Examples for a weak Poincaré inequality

Two class of potentials in position space for the probability measure $\frac{1}{Z_V} e^{-V(x)} dx$ will be considered separately in this section with $V(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$, where Z_V is the proper normalizing constant. We will verify that all conditions are satisfied for these $V(x)$, then the weak Poincaré inequality can be set up for the invariant measure $\frac{e^{-[V(x)+\frac{|v|^2}{2}]}}{Z} dxdv$. So we can get the conclusions of Theorem 3.6 and Theorem 3.10.

4.1. For the generalization of $(1+\alpha)\ln(1+|x|)$. — Here, $\alpha > 0$. For n=1, let $\tilde{V}(x) = (1+\alpha)\ln(1+|x|)$, $\frac{1}{Z_{\tilde{V}}} e^{-\tilde{V}(x)} dx = d\tilde{m}_\alpha(x) = \frac{1}{2}\alpha(1+|x|)^{-1-\alpha} dx$ satisfies the weak Poincaré inequality

$$\mathrm{Var}_{\tilde{m}_\alpha}(f) \leq \tilde{\beta}(s) \int |\nabla f|^2 d\tilde{m}_\alpha + s\,\mathrm{Osc}(f)^2.$$

Here $\tilde{\beta}(s) = \tilde{c}_\alpha s^{-2/\alpha}$ for $0 < s < 1/4$, and $\tilde{\beta}(s) = 0$ for $s \geq 1/4$, see [**4**]. But $\tilde{V}(x) = (1+\alpha)\ln(1+|x|)$ is not smooth at point 0, so we have to modify it. In the following, we will generalize it to the case $n \geq 1$ in two different ways formally. Meanwhile, we will give the suitable modifications.

(A) Let

$$V(x) = \begin{cases} (1+\alpha)\ln(1+|x|), & |x| \geq 1 \\ -\frac{3(1+\alpha)}{32}x^4 + \frac{7(1+\alpha)}{16}x^2 + (1+\alpha)(\ln 2 - \frac{17}{32}), & |x| < 1. \end{cases} \tag{4}$$

It is easy to see that $V(x)$ is $C^2(\mathbb{R})$, bounded below by $(1+\alpha)(\ln 2 - 17/32) > 0$, and 0 is the median of the measure $\frac{1}{Z_V}e^{-V(x)}dx$. By the Corollary 4 in [**4**], we can verify that the modified measure $dm_\alpha(x) = \frac{1}{Z_V}e^{-V(x)}dx$ still satisfies the weak Poincaré inequality (Osc(f) replaces $\|f\|_\infty$)as the original measure $\tilde{m}_\alpha(x)$. As $\tilde{m}_\alpha(x)$, $\beta(s) =$ for $0 < s < 1/4$ and $\beta(s) = 0$ for $s \geq 1/4$.

We set m_α^n is the n-fold product of m_α, i.e. $m_\alpha^n(x) = \otimes^n m_\alpha(x)$. Thanks to the sub-additivity property of the variance, m_α^n satisfies the weak Poincaré inequality

$$\mathrm{Var}_{m_\alpha^n}(f) \leq c_\alpha(\frac{s}{n})^{-2/\alpha}\int |\nabla f|^2 dm_\alpha^n + s\,\mathrm{Osc}(f)^2, 0 < s < 1/4.$$

Since the gaussian measure $d\gamma^n(v) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|v|^2}{2}}dv$ satisfies the Poincaré inequality with $C_p = 1$, So the product measure $m_\alpha^n \otimes \gamma^n$ satisfies the weak Poincaré inequality:

$$\mathrm{Var}_{m_\alpha^n \otimes \gamma^n}(f) \leq \beta(s)\int |\nabla f|^2 dm_\alpha^n \otimes \gamma^n + s\|f\|_\infty^2.$$

where $\beta(s) = \max(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}c_\alpha(\frac{s}{n})^{-2/\alpha})$ for $0 < s < 1$, and $\beta(s) = 0$ for $s \geq 1$.

In the other hand, it is easy to verify that $|\nabla^2 V(x)| \leq M$ for a constant $M \geq 0$. Then the results of convergence in $\mathcal{H}^1$ and in L^2 can be established for this case by the theorems before.

(B) By the Proposition 4.9 in [**7**], let $\tilde{V}(x) = (n+\alpha)\ln(1+|x|)$, $\frac{1}{Z_{\tilde{V}}}e^{-\tilde{V}}dx$ satisfies the weak Poincaré inequality with $\tilde{\beta}(s) = \tilde{c}_{\alpha,n}s^{-2/\alpha}$ for $0 < s < 1$ (here Osc(f) replaces $\|f\|_\infty$). We choose a function $\rho_\epsilon(x)$ in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, such that

$$\rho_\epsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq \epsilon < 1 \\ 0 < \rho_\epsilon(x) < 1, & \epsilon < |x| < 1 \\ 1, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Let $V(x) = \tilde{V}\rho_\epsilon$, then $V(x)$ is in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. By the construction of $V(x)$, it is easy to verify that $|\nabla^2 V(x)| \leq M$, and there are constants $0 < e_1$ and $e_2 \geq e_1$, such that

$$0 < e_1 \leq \frac{\frac{1}{Z_V}e^{-V(x)}dx}{\frac{1}{Z_{\tilde{V}}}e^{-\tilde{V}(x)}dx} \leq e_2.$$

By the perturbation property of measure (refer to Theorem 3.4.1 in [**1**]), $\frac{1}{Z_V}e^{-V(x)}dx$ also satisfies the weak Poincaré inequality(here Osc(f) replaces $\|f\|_\infty$)with $\beta(s) = c_{\alpha,n}s^{-2/\alpha}$, for $0 < s < 1$. Furthermore, the product measure

$\mu(dxdy) = \frac{e^{-(V(x)+\frac{|v|^2}{2})}}{Z}dxdv$ satisfies the satisfies the weak Poincaré inequality, where $\beta(s) = \max(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}c_{\alpha,n}s^{-2/\alpha})$ for $0 < s < 1$, and $\beta(s) = 0$ for $s \geq 1$. So we can get the same convergence as the above for this case.

Corollary 4.1. — *If the potential belongs to the class of $(1+\alpha)\ln(1+|x|)$, for $\int h d\mu = 0$, there exist constants $K \geq 1$, $c_{\alpha,n} > 0$, $\kappa > 0$, such that*

$$(\!(e^{-tL}h, e^{-tL}h)\!) \leq \xi(t)\left((\!(h,h)\!) + \|h\|_\infty^2\right).$$

Here,

$$\xi(t) = K \inf_{\substack{s>0\\ \beta(s)>0}} \left\{ \frac{s}{\min(\beta(s),1)}, t \geq -\frac{1}{\lambda(s)} \log \frac{Ks}{\min(\beta(s),1)} \right\},$$

with $\beta(s) = \max(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}c_{\alpha,n}s^{-2/\alpha})$ and $\lambda(s) = K^{-1}\min(\kappa, \frac{\kappa}{\beta(s)})$. Further more, for a fixed h with $\int h d\mu = 0$, there exit constant $A > 1$ such that for all $t > t_0$,

$$\|e^{-tL}h\|_2 \leq A\|h\|_\infty [1+t]^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

4.2. For the generalization of $|x|^p$. — Here, $0 < p < 1$. As the steps above, we firstly consider n=1. Let $\tilde{V}(x) = |x|^p$, $\frac{1}{Z_{\tilde{V}}}e^{-\tilde{V}(x)}dx = d\tilde{v}_p(x) = \frac{e^{-|x|^p}}{2\Gamma(1+1/p)}dx$ satisfies the weak Poincaré inequality

$$\mathrm{Var}_{\tilde{v}_p}(f) \leq \tilde{\beta}(s)\int |\nabla f|^2 d\tilde{v}_p + s\,\mathrm{Osc}(f)^2.$$

Here $\tilde{\beta}(s) = \tilde{c}_p(\log(2/s))^{\frac{2}{p}-2}$ for $0 < s < 1/4$, and $\tilde{\beta}(s) = 0$ for $s \geq 1/4$, see [**4**]. But $\tilde{V}(x) = |x|^p$ is not smooth at point 0 also. In the following, we will deal with it in two different ways as for the former example.

(A) Let

$$V(x) = \begin{cases} |x|^p, & |x| \geq 1 \\ \frac{p(p-2)}{8}x^4 + \frac{p(4-p)}{4}x^2 + (1 - \frac{3}{4}p + \frac{1}{8}p^2), & |x| < 1. \end{cases} \tag{5}$$

It is easy to see that $V(x)$ is $C^2(\mathbb{R})$, bounded below by $1 - \frac{3}{4}p + \frac{1}{8}p^2 > 0$, and 0 is the median of the measure $\frac{1}{Z_V}e^{-V(x)}dx$. By the Corollary 4 in [**4**], we can verify that the modified measure $dm_\alpha(x) = \frac{1}{Z_V}e^{-V(x)}dx$ still satisfies the weak Poincaré inequality ($\mathrm{Osc}(f)$ replaces of $\|f\|_\infty$) as the original measure $\tilde{v}_p(x)$. As $\tilde{v}_p(x)$, $\beta(s) = c_p(\log(2/s))^{\frac{2}{p}-2}$ for $0 < s < 1/4$ and $\beta(s) = 0$ for $s \geq 1/4$.

We set v_p^n is the n-fold product of v_p, i.e. $v_p^n(x) = \otimes^n v_p(x)$. Then v_p^n satisfies the inequality:

$$\mathrm{Var}_{v_p^n}(f) \leq c_p(\log(2n/s))^{\frac{2}{p}-2}\int |\nabla f|^2 dv_p^n + s\,\mathrm{Osc}(f)^2, 0 < s < 1/4.$$

similarly, the product measure $v_p^n \otimes \gamma^n$ satisfies the weak Poincaré inequality:

$$\mathrm{Var}_{v_p^n \otimes \gamma^n}(f) \leq \beta(s)\int |\nabla f|^2 dv_p^n \otimes \gamma^n + s\|f\|_\infty^2.$$

where $\beta(s)=\max(\frac{1}{4},\frac{1}{4}c_p(\log(2n/s))^{\frac{2}{p}-2})$ for $0<s<1$, and $\beta(s)=0$ for $s\geq 1$.
At last, it is easy to see $|\nabla^2 V(x)|\leq M$ for a constant $M\geq 0$.

(B) If we set $\tilde{V}(x)=|x|^p$, then $\frac{1}{Z_{\tilde{V}}}e^{-\tilde{V}}dx$ satisfies the weak Poincaré inequality with $\tilde{\beta}(s)=\tilde{c}_{p,n}(\log(1/s))^{\frac{2}{p}-2}$ for $0<s<1/4$ (here $\mathrm{Osc}(f)$ replaces $\|f\|_\infty$), see the Proposition 4.11 in [**7**]. In the same way as the above example, We choose a function $\rho_\epsilon(x)$ in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, let $V(x)=\tilde{V}\rho_\epsilon$, then $V(x)$ is in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\nabla^2 V(x)|\leq M$, and there are constants $0<e_1$ and $e_2\geq e_1$, such that

$$0<e_1\leq\frac{\frac{1}{Z_V}e^{-V(x)}dx}{\frac{1}{Z_{\tilde{V}}}e^{-\tilde{V}(x)}dx}\leq e_2.$$

Naturally, $\frac{1}{Z_V}e^{-V(x)}dx$ also satisfies the weak Poincaré inequality(here $\mathrm{Osc}(f)$ replaces $\|f\|_\infty$)with $\beta(s)=c_{\alpha,n}(\log(1/s))^{\frac{2}{p}-2}$, for $0<s<1$. Similarly, the product measure $\mu(dxdy)=\frac{e^{-(V(x)+\frac{|v|^2}{2})}}{Z}dxdv$ satisfies the satisfies the weak Poincaré inequality , where $\beta(s)=\max(\frac{1}{4},\frac{1}{4}c_{\alpha,n}(\log(1/s))^{\frac{2}{p}-2})$ for $0<s<1$, and $\beta(s)=0$ for $s\geq 1$. So we have verified all assumptions.

Corollary 4.2. — *If the potential belonging to the class of $|x|^p$, for $\int hd\mu=0$, there exist constants $K\geq 1$, $c_{\alpha,n}>0$, $\kappa>0$, such that*

$$(\!(e^{-tL}h,e^{-tL}h)\!)\leq\xi(t)\left((\!(h,h)\!)+\|h\|_\infty^2\right).$$

Here,

$$\xi(t)=K\inf_{\substack{s>0\\ \beta(s)>0}}\left\{\frac{s}{\min(\beta(s),1)},t\geq-\frac{1}{\lambda(s)}\log\frac{Ks}{\min(\beta(s),1)}\right\},$$

with $\beta(s)=c_{\alpha,n}(\log(1/s))^{\frac{2}{p}-2}$ and $\lambda(s)=K^{-1}\min(\kappa,\frac{\kappa}{\beta(s)})$. Further more, for a fixed h with $\int hd\mu=0$, there exist constant $A>1$ such that for all $t>t_0$,

$$\|e^{-tL}h,e^{-tL}h\|_2\leq A\|h\|_\infty e^{-t^{p/(2-p)}}.$$

5. Decay in entropic sense under weak Logarithmic Sobolev inequality

In this section, we will consider the decay in entropic sense. In the next theorem, we distort the Fisher information by using a suitable field of quadratic forms, and combine it with Kullback information. The expression is in terms of derivation operators on $\mathbb{R}^n$. Weak coercivity of A^*A+C^*C will be changed to weak logarithmic Sobolev inequality. All results and proofs are similar to that in section 3 in a sense.

Theorem 5.1. — *For the kinetic Fokker-Planck equation, assume that $V\in C^2(\mathbb{R}^n)$ with $|\nabla^2 V(x)|\leq M$ (in Hilbert-Schmidt norm, pointwise on $\mathbb{R}^n$) for all $x\in\mathbb{R}^n$.*

There is a function $x \to S(x)$, valued in the space of nonnegative symmetric $n \times n$ matrices, uniformly bounded, such that if one defines

$$\mathcal{E}(h) := \int h \log h d\mu + \int \frac{\langle S\nabla h, \nabla h\rangle}{h} d\mu,$$

one has the estimate

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(e^{-tL}h) \le -\alpha \int \frac{\langle S\nabla e^{-tL}h, \nabla e^{-tL}h\rangle}{e^{-tL}h} d\mu,$$

for some positive constants $\alpha > 0$, which is explicitly computable.

For the sake of completeness, the proof is given in Appendix 7.2. Combined with weak logarithmic Sobolev inequality, we get the following statement:

Theorem 5.2. — *With the same conditions in Theorem 5.1, we can choose a, b, c, such that*

$$\mathcal{E}(h) = \int h \log h d\mu + a \int \frac{|Ah|^2}{h} d\mu + 2b \int \frac{\langle Ah, Ch\rangle}{h} d\mu + c \int \frac{|Ch|^2}{h} d\mu$$

satisfies the concludes of the Theorem 5.1. If, in addition, the measure μ satisfies the weak Logarithmic Sobolev inequality

$$Ent_\mu(f^2) \le \beta(s) \int |\nabla f|^2 d\mu + s\|f\|_\infty^2, s > 0.$$

$\beta(s)$ is a nonnegative and decreasing function on $(0, +\infty)$, $\beta(s) \downarrow 0$, as $s \uparrow +\infty$. Then there is the same constant α as in the Theorem 5.1 and for $\int h d\mu = 1$, such that

$$\mathcal{E}(e^{-tL}h) \le \inf_{\substack{s>0 \\ \beta(s)>0}} \left\{ \mathcal{E}(h) \exp[-\alpha\lambda(s)t] + \frac{ks}{2\beta(s)\lambda(s)} \sup_{0 \le t' \le t} \|\sqrt{e^{-t'L}h}\|_\infty^2 \right\}.$$

Here $\lambda(s) = \min(\frac{kK^{-1}}{2}, \frac{2k}{\beta(s)})$, $k = \min(a - b\sqrt{\frac{a}{c}}, c - b\sqrt{\frac{c}{a}}) > 0$, $K = \max(a + b\sqrt{\frac{a}{c}}, c + b\sqrt{\frac{c}{a}})$.

Furthermore,

$$\mathcal{E}(e^{-tL}h) \le \xi(t) \left(\mathcal{E}(h) + \|h\|_\infty\right).$$

Here,

$$\xi(t) = \inf_{\substack{s>0 \\ \beta(s)>0}} \left\{ \frac{s}{\min(\beta(s)K^{-1}, 4)}, t \ge -\frac{1}{\alpha\lambda(s)} \log \frac{s}{\min(\beta(s)K^{-1}, 4)} \right\}.$$

In particular, $\xi(t) \to 0$ as $t \to \infty$.

Démonstration. — By the proof of Theorem 5.1, We can choose suitable a, b, c, such that $k = \min(a - b\sqrt{\frac{a}{c}}, c - b\sqrt{\frac{c}{a}}) > 0$, and

$$\begin{aligned} \langle S\nabla\sqrt{h}, \nabla\sqrt{h}\rangle &= a|A\sqrt{h}|^2 + 2b\langle A\sqrt{h}, C\sqrt{h}\rangle + c|C\sqrt{h}|^2 \\ &\ge k(|A\sqrt{h}|^2 + |C\sqrt{h}|^2). \end{aligned}$$

Obviously,

$$\langle S\nabla\sqrt{h},\nabla\sqrt{h}\rangle \le K(|A\sqrt{h}|^2+|C\sqrt{h}|^2).$$

So we have

$$\begin{aligned}\int\frac{\langle S\nabla h,\nabla h\rangle}{h}d\mu &= 4\int\langle S\nabla\sqrt{h},\nabla\sqrt{h}\rangle d\mu\\ \ge\quad &\int 2k(|A\sqrt{h}|^2+|C\sqrt{h}|^2)d\mu+2k(\frac{1}{\beta(s)}Ent_\mu h-\frac{s}{\beta(s)}\|\sqrt{h}\|_\infty^2).\end{aligned}$$

In the last inequality, we have used the equality $|\nabla h|^2=|Ah|^2+|Ch|^2$ and the weak Logarithmic Sobolev inequality. Then,

$$\begin{aligned}\int\frac{\langle S\nabla h,\nabla h\rangle}{h}d\mu &\ge 2kK^{-1}\langle S\nabla\sqrt{h},\nabla\sqrt{h}\rangle+2k(\frac{1}{\beta(s)}Ent_\mu h-\frac{s}{\beta(s)}\|\sqrt{h}\|_\infty^2)\\ &\ge \lambda(s)\mathcal{E}(h)-\frac{ks}{2\beta(s)}\|\sqrt{h}\|_\infty^2.\end{aligned}$$

Here $\lambda(s)=\min(\frac{kK^{-1}}{2},\frac{2k}{\beta(s)})$. This means

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(e^{-tL}h)\le-\alpha\lambda(s)\mathcal{E}(e^{-tL}h)+\frac{\alpha ks}{2\beta(s)}\|\sqrt{e^{-tL}h}\|_\infty^2$$

By Gronwall's lemma, the proof is finished. □

Remark 5.3. — Using once again regularization techniques as in Villani [**19**, App. 21] or Guillin-Wang [**13**, Cor. 3.2], to get rid of the Fisher information part in the distorted norm, and the use of different Orlicz norms than the L^∞ norm, one may obtain a subexponential convergence for the entropy to equilibrium for initial measures which are only in say $L^1\log^{1+\varepsilon}L^1$

6. Examples for a weak logarithmic Sobolev inequality

We still consider two kinds of potential which are examples for a weak Poincaré inequality: $(1+\alpha)\log(1+|x|)$ $(\alpha>0)$ and $|x|^p$ $(0<p<2)$. Note that $1\le p<2$ for $|x|^p$ is not suitable for the weak Poincaré inequality. This interesting problem has been studied in [**5**]. In one dimension case, it has been got that the measure $\frac{1}{Z_V}e^{-V(x)}dx$ satisfies a weak Logarithmic Sobolev inequality, see [**8**]. But for $n>1$, it is not clean about the weak Logarithmic Sobolev inequality for $(n+\alpha)\log(1+|x|)$ and $|x|^p$. So we cannot directly smooth them.

We have to start from one dimension, let $V_1(x)$ is the modification of $(1+\alpha)\log(1+|x|)$ as (4) and $V_2(x)$ is the modification of $|x|^p$ as (5). By the Corollary 2.5 in [**8**], we can easily verify:

– The modified measure $dm_\alpha(x) = \frac{1}{Z_{V_1}} e^{-V_1(x)} dx$ satisfies a weak Logarithmic Sobolev inequality (using $\mathrm{Osc}(f)$) with the function

$$\forall s > 0, \beta(s) = C \frac{(\log 1/s)^{1+2/\alpha}}{s^{2/\alpha}}$$

for some constant $C > 0$.

– The modified measure $dv_p(x) = \frac{1}{Z_{V_2}} e^{-V_2(x)} dx$ satisfies a weak Logarithmic Sobolev inequality (using $\mathrm{Osc}(f)$) with the function

$$\forall s > 0, \beta(s) = C(\log 1/s)^{(2-p)/p}$$

for some constant $C > 0$.

The tensorization result for the weak Logarithmic Sobolev inequality has been established by Proposition 6.1 in [**8**]. Hence, the naive procedure of tensorization is of course the same as the examples before. Note that for Gaussian measure, a Logarithmic Sobolev inequality is satisfied with $C_L = 2$. Let us give the result directly:

– The measure $m_\alpha^n \otimes \gamma^n$ satisfies a weak Logarithmic Sobolev inequality with the function

$$\forall s > 0, \beta(s) = \max(1/2, C \frac{(\log n/s)^{1+2/\alpha}}{(s/n)^{2/\alpha}})$$

for some constant $C > 0$.

– The measure $v_p^n \otimes \gamma^n$ satisfies a weak Logarithmic Sobolev inequality with the function

$$\forall s > 0, \beta(s) = \max(1/2, C(\log n/s)^{(2-p)/p})$$

for some constant $C_n > 0$.

Naturally, the assumption that $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$ with $|\nabla^2 V(x)| \leq M$ $(M > 0)$ is satisfied for $V(x) = \sum_{l=1}^n V_i(x_l)$, i=1, 2. So the convergence result in Theorem 5.2 can be set up.

For the potential like $|x|^p$, combining Theorem 5.1 and Theorem 5.2, as the Corollary 4.1, we have

Corollary 6.1. — *If the potential belonging to the class of $|x|^p$, for $\int h d\mu = 1$, there exist constants $C > 0$, $K > 0$, $k > 0$, such that*

$$\mathcal{E}(e^{-tL}h) \leq \xi(t)\left(\mathcal{E}(h) + \|h\|_\infty\right).$$

Here,

$$\xi(t) = \inf_{\substack{s>0 \\ \beta(s)>0}} \left\{ \frac{s}{\min(\beta(s)K^{-1}, 4)}, t \geq -\frac{1}{\alpha\lambda(s)} \log \frac{s}{\min(\beta(s)K^{-1}, 4)} \right\},$$

with $\beta(s) = \max(1/2, C(\log n/s)^{(2-p)/p})$ *and* $\lambda(s) = \min(\frac{kK^{-1}}{2}, \frac{2k}{\beta(s)})$. *Further more, for a fixed* h *with* $\int h d\mu = 1$, *there exist* $A > 1$, $B > 0$ *such that for all* $t > t_0$,

$$\mathcal{E}(e^{-tL}h) \leq A(\mathcal{E}(h) + \|h\|_\infty)e^{-Bt^{\frac{p}{2}}}.$$

In particular, $Ent_\mu(e^{-tL}h) \leq O(e^{-t^{p/2}})$.

Note that when $p = 2$ we recover Villani's result as a limit case. Even, using the regularization result of Guillin-Wang [**13**], we may even get that there exists $A > 1$, $B > 0$ such that for $t > t_0$,

$$Ent_\mu(e^{-tL}h) \leq Ae^{-Bt}\, Ent_\mu(h).$$

7. Appendix

In this Appendix, we use the same methodology in C. Villani [**19**].

7.1. proof of Proposition 3.3. — By polarization,

$$\begin{aligned}((h, Lh)) = \langle h, Lh\rangle + a\underbrace{\langle Ah, ALh\rangle}_{\mathrm{I}} + c\underbrace{\langle Ch, CLh\rangle}_{\mathrm{III}} \\ +b\underbrace{(\langle ALh, Ch\rangle + \langle Ah, CLh\rangle)}_{\mathrm{II}}.\end{aligned}$$

By $B^* = -B$,

$$\langle h, Lh\rangle = \langle h, A^*Ah\rangle + \langle h, Bh\rangle = \|Ah\|^2. \tag{6}$$

For each of the terms I, II and III, the contributions of A^*A and B will be estimated separately, and the resulting expressions will be denoted I_A, I_B, II_A, II_B, III_A, III_B.

First of all,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_B &= \langle Ah, ABh\rangle = \sum_i \int (A_i h)(A_i Bh)d\mu \\ &= \sum_i \int (A_i h)(BA_i h)d\mu + \sum_i \int (A_i h)(A_i Bh - BA_i h)d\mu \\ &= 0 + \langle Ah, [A, B]h\rangle = \langle Ah, Ch\rangle \geq -\|Ah\|\|Ch\|, \end{aligned} \tag{7}$$

where the antisymmetry of B was used. Then,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_A &= \langle Ah, A^*Ah\rangle = \sum_{ij}\langle A_ih, A_iA_j^*A_jh\rangle \\
&= \sum_{ij}\big(\langle A_ih, A_j^*A_iA_jh\rangle + \langle A_ih, [A_i, A_j^*]A_jh\rangle\big) \\
&= \sum_{ij}\big(\langle A_jA_ih, A_iA_jh\rangle + \langle A_ih, [A_i, A_j^*]A_jh\rangle\big) \\
&= \sum_{ij}\big(\langle A_iA_jh, A_iA_jh\rangle + \langle A_ih, [A_i, A_j^*]A_jh\rangle\big) \\
&= \|A^2h\|^2 + \langle Ah, [A, A^*]Ah\rangle = \|A^2h\|^2 + \|Ah\|^2. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Here we used the equality $[A, A^*] = I$ in the Introduction.

Next,

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_B &= \langle ABh, Ch\rangle + \langle Ah, CBh\rangle \\
&= \langle ABh, Ch\rangle + \langle Ah, BCh\rangle + \langle Ah, [C, B]h\rangle \\
&= \langle ABh, Ch\rangle - \langle BAh, Ch\rangle + \langle Ah, [C, B]h\rangle \\
&= \|Ch\|^2 + \langle Ah, [C, B]h\rangle \\
&\geq \|Ch\|^2 - \|Ah\|\|[C, B]h\| \\
&\geq \|Ch\|^2 - M\|Ah\|^2. \qquad (9)
\end{aligned}$$

(Here $|[C, B]h\| = \|\nabla^2V(x)\cdot Ah\| \leq M\|Ah\|$ was used.)

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_A &= \langle AA^*Ah, Ch\rangle + \langle Ah, CA^*Ah\rangle \\
&= \sum_{ij}\big(\langle A_iA_j^*A_jh, C_ih\rangle + \langle A_ih, C_iA_j^*A_jh\rangle\big) \\
&= \sum_{ij}\big(\langle A_j^*A_iA_jh, C_ih\rangle + \langle [A_i, A_j^*]A_jh, C_ih\rangle + \langle A_ih, A_j^*C_iA_jh\rangle\big) \\
&= \sum_{ij}\langle A_iA_jh, A_jC_ih\rangle + \sum_i\langle A_i, C_ih\rangle + \sum_{ij}\langle A_jA_ih, C_iA_jh\rangle \\
&= 2\langle A^2h, CAh\rangle + \langle Ah, Ch\rangle \geq -2\|A^2h\|\|CAh\| - \|Ah\|\|Ch\|. \qquad (10)
\end{aligned}$$

(Here we used the commutation of C with both A and A^*.)

Finally,

$$\begin{aligned}
\mathrm{III}_B &= \langle Ch, CBh\rangle = \sum_i\langle C_ih, C_iBh\rangle = 0 + \sum_i\langle C_ih, [C_i, B]h\rangle \\
&\geq -\|Ch\|\|[C, B]h\| \geq -M\|Ah\|\|Ch\| \qquad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{III}_A &= \langle Ch, CA^*Ah\rangle = \sum_{ij}\langle C_ih, C_iA_j^*A_jh\rangle = \sum_{ij}\langle C_ih, A_j^*C_iA_jh\rangle \\
&= \sum_{ij}\langle A_jC_ih, C_iA_jh\rangle = \sum_{ij}\langle C_iA_jh, C_iA_jh\rangle = \|CAh\|^2. \qquad (12)
\end{aligned}$$

(Here again the commutation of C with both A and A^* was used.)

On the whole, combined with these estimations,

$$\begin{aligned}
(\!(h, Lh)\!) \geq\ & \|Ah\|^2 + a(\|A^2h\|^2 + \|Ah\|^2 - \|Ah\|\|Ch\|) \\
&+b(\|Ch\|^2 - M\|Ah\|^2 - 2\|A^2h\|\|CAh\| - \|Ah\|\|Ch\|) \\
&+c(\|CAh\|^2 - M\|Ah\|\|Ch\|) \\
\geq\ & (1+a-bM)\|Ah\|^2 - (a+b+cM)\|Ah\|\|Ch\| + b\|Ch\|^2 \\
&+a\|A^2h\|^2 - 2b\|A^2h\|\|CAh\| + c\|CAh\|^2
\end{aligned}$$

Noting $b^2 < ac$, $a\|A^2h\|^2 - 2b\|A^2h\|\|CAh\| + c\|CAh\|^2 \geq 0$. Then

$$(\!(h, Lh)\!) \geq (1+a-bM-\frac{1}{4})\|Ah\|^2 + (b-(a+b+cM)^2)\|Ch\|^2$$

It is easy to choose a, b, c, such that $\kappa := \min(\frac{3}{4}+a-bM, b-(a+b+cM)^2) > 0$. For example, we can choose $c < \frac{1}{M(M+2)^2}$, $b = cM$, $a = cM^2$.

7.2. Proof of Theorem 5.1. — In the next statement, we shall use the notation

$$\left(\frac{d}{dt'}\right)_S \mathcal{E}(h) = \frac{d}{dt'}\bigg|_{t'=0} \mathcal{E}(e^{-t'S}h).$$

for the time-derivative of the functional $\mathcal{E}$ along the semigroup generated by the linear operator $-S$. More over, when no measure is indicated, this means that the Lebesgue measure should be used. In order to prove Theorem 5.1, We need a lemma and its corollary, the proofs of them can be found in the section 6 of [**19**].

Lemma 7.1. — *Let $\mu(dX) = e^{-E(X)}dX$, $A = (A_1, \ldots, A_m)$, B and $L = A^*A + B$ be as in Introduction 2.1. Let $C = (C_1, \ldots, C_m)$ and $C' = (C'_1, \ldots, C'_m)$ be m-tuples of derivation operator on $\mathbb{R}^N$ (all of them with smooth coefficients whose derivatives grow at most polynomially). Then, with the notation $f = he^{-E}$, $u = \log h$, one has*

$$\left(\frac{d}{dt'}\right)_B \int h \log h d\mu = 0;$$

$$-\left(\frac{d}{dt'}\right)_{A^*A} \int h \log h d\mu = \int \frac{|Ah|^2}{h} d\mu = \int f|Au|^2,$$

where by convention $|Au|^2 = \sum_i (A_iu)^2$;

$$-\left(\frac{d}{dt'}\right)_B \int \frac{\langle Ch, C'h\rangle}{h} d\mu = \int \frac{\langle Ch, [C', B]h\rangle}{h} d\mu + \int \frac{\langle [C,B]h, C'h\rangle}{h} d\mu$$
$$= \int f\langle Cu, [C', B]u\rangle + \int f\langle [C,B]u, C'u\rangle,$$

where by convention $\langle [C,B]u, C'u\rangle = \sum_j ([C_j, B]u)(C'_j u)$*;*

$$-\left(\frac{d}{dt'}\right)_{A^*A} \int \frac{\langle Ch, C'h\rangle}{h} d\mu = 2\int f\langle Cu, [C', B]u\rangle$$
$$+(\int f\langle [C, A^*]Au, C'u\rangle + \int f\langle Cu, [C', A^*]Au\rangle)$$
$$+(\int f\langle CAu, [A, C']u\rangle + \int f\langle [A, C]u, C'Au\rangle)$$
$$+ \int f Q_{A,C,C'}(u)$$

where by convention $\langle Cu, [C', A^*]Au\rangle = \sum_{ij} (C_j u)([C'_j, A_i^*]A_i u)$*, etc. And*

$$Q_{A,C,C'}(u) = \sum_{ij} \Big([A_i, C_j]^*(A_i u C'_j u) + [A_i, C'_j]^*(A_i u C_j u) \Big).$$

Remark 7.2. — For the kinetic Fokker-Planck equation, $m = n$, $[A_i, C_j] = [A_i^*, C_j] = 0$ for all i, j, then obviously $Q_{A,C,C'}(u)$ vanishes identically. And naturally, we have the following corollary.

Corollary 7.3. — *For the kinetic Fokker-Planck equation, by the Lemma 7.1, we have:*

$$-\left(\frac{d}{dt'}\right)_B \int \frac{|Ah|^2}{h} d\mu = 2\int f\langle Au, Cu\rangle; \tag{13}$$

$$-\left(\frac{d}{dt'}\right)_{A^*A} \int \frac{|Ah|^2}{h} d\mu = 2\left(\int f\langle A^2u, A^2u\rangle + \int f\langle [A, A^*]Au, Au\rangle\right); \tag{14}$$

$$-\left(\frac{d}{dt'}\right)_B \int \frac{|Ch|^2}{h} d\mu = 2\int f\langle Cu, [C, B]u\rangle; \tag{15}$$

$$-\left(\frac{d}{dt'}\right)_{A^*A} \int \frac{|Ch|^2}{h} d\mu = 2\int f\langle CAu, CAu\rangle; \tag{16}$$

$$-\left(\frac{d}{dt'}\right)_B \int \frac{\langle Ah, Ch\rangle}{h} d\mu = \int f\langle Au, [C, B]u\rangle + \int f\langle Cu, Cu\rangle; \tag{17}$$

$$-\left(\frac{d}{dt'}\right)_{A^*A} \int \frac{\langle Ah, Ch\rangle}{h} d\mu = 2\int f\langle A^2u, CAu\rangle + \int f\langle [A, A^*]Au, Cu\rangle. \tag{18}$$

The above lemma and its corollary shows the computations arising in the time-differentiation of the functional, and they are the key to the proof of Theorem 5.1 $\mathcal{E}$.

Let functional $\mathcal{E}$ be searched for in the form

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(h) &= \int h\log h d\mu + a\int \frac{|Ah|^2}{h}d\mu + 2b\int \frac{\langle Ah, Ch\rangle}{h}d\mu + c\int \frac{|Ch|^2}{h}d\mu \\ &= \int fu + a\int f|Au|^2 + 2b\int f\langle Au, Cu\rangle + c\int f|Cu|^2.\end{aligned}$$

In other words, the quadratic form S in the Theorem 5.1 will be looked for in the form

$$\langle S(x)\xi,\xi\rangle_{\mathbb{R}^n} = a|A(x)\xi|^2_{\mathbb{R}^n} + 2b\langle A(x)\xi, C(x)\xi\rangle_{\mathbb{R}^n} + c|C(x)\xi|^2_{\mathbb{R}^n}$$

By using Young's inequality, in the form

$$|2b\langle Ah, Ch\rangle|_{\mathbb{R}^n} \le 2b\|Ah\|_{\mathbb{R}^n}\|Ch\|_{\mathbb{R}^n} \le b\sqrt{\frac{a}{c}}\|Ah\|_{\mathbb{R}^n} + b\sqrt{\frac{c}{a}}\|Ch\|_{\mathbb{R}^n},$$

Let $b \le ac$, such that S will be a nonnegative symmetric matrix for all x.

Next we consider the time-derivative of the functional $\mathcal{E}$ along the semigroup. By the Lemma 7.1 and the Corollary 7.3, we set $h = e^{-tL}h_0$, $u = \log h$, then

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}\mathcal{E}(h) &= -\left(\frac{d}{dt'}\right)_{A^*A}\mathcal{E}(h) - \left(\frac{d}{dt'}\right)_{B}\mathcal{E}(h) \\ &= \int f|Au|^2 + 2a\left(\int f|A^2u|^2 + \int f|Au|^2 + \int f\langle Au, Cu\rangle\right) \\ &\quad +2b\left(2\int f\langle A^2u, CAu\rangle + \int f\langle Au, Cu\rangle + \int f\langle Au, [C,B]u\rangle + \int f|Cu|^2\right) \\ &\quad +2c\left(\int f|CAu|^2 + \int f\langle Cu, [C,B]u\rangle\right) \\ &= (1+2a)\int f|Au|^2 + 2b\int f|Cu|^2 + 2(a+b)\int f\langle Au, Cu\rangle \\ &\quad +2b\int f\langle Au, [C,B]u\rangle + 2c\int f\langle Cu, [c,B]u\rangle \\ &\quad +2a\int f|A^2u|^2 + 2c\int f|CAu|^2 + 4b\int f\langle A^2u, CAu\rangle.\end{aligned}$$

By Cauchy-Schwarz inequality (applied here for vector-valued functions), we have

$$\begin{aligned}2(a+b)\int f\langle Au, Cu\rangle &\ge -2(a+b)\sqrt{f|Au|^2}\sqrt{f|Cu|^2} \\ &\ge -\frac{1}{2}\int f|Au|^2 - 2(a+b)^2\int f|Cu|^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2b\int f\langle Au,[C,B]u\rangle &\geq -2b\sqrt{f|Au|^2}\sqrt{f|[C,B]u|^2} \\ &\geq -\frac{1}{2}\int f|Au|^2 - 2b^2\int f|[C,B]u|^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2c\int f\langle Cu,[C,B]u\rangle &\geq -2c\sqrt{f|Cu|^2}\sqrt{f|[C,B]u|^2} \\ &\geq -c\int f|Cu|^2 - c\int f|[C,B]u|^2. \end{aligned}$$

By assumption $|[C,B]u| = |\nabla^2 V(x)\cdot Au| \leq M|Au|$, and we can see obviously $2a\int f|A^2u|^2 + 2c\int f|CAu|^2 + 4b\int f\langle A^2u, CAu\rangle \geq 0$ (we have already set that $b \leq ac$), we get

$$-\frac{d}{dt}\mathcal{E}(h) \quad \geq \quad (2a - 2b^2M^2 - cM^2)\int f|Au|^2 + (2b - 2(a+b)^2 - c)\int f|Cu|^2.$$

It is easy to choose suitable $a, b, c \ll 1$ and $b < ac$, such that there is a positive constant α satisfying

$$-\frac{d}{dt}\mathcal{E}(h) \geq \alpha\int \frac{\langle S\nabla h, \nabla h\rangle}{h} d\mu. \tag{19}$$

For example, we always assume that $M > 1$, let $0 < c < 1/2(M^5 + M)(M^4 + 1)$, $a = cM^5$, $b = cM$, we can check that $b^2 < ac$, and

$$\begin{aligned} 2a - 2b^2M^2 - cM^2 > a - 2c^2M^4 > 0; \\ 2b - 2(a+b)^2 - c > cM - 2(cM^5 + cM)^2 > 0; \\ \min(a - b\sqrt{\frac{a}{c}}, c - b\sqrt{\frac{c}{a}}) = c(1 - M^{-\frac{3}{2}}); \\ \max(a + b\sqrt{\frac{a}{c}}, c + b\sqrt{\frac{c}{a}}) = cM^{\frac{7}{2}}(M^{\frac{3}{2}} + 1); \\ c(1 - M^{-\frac{3}{2}})\left(|A(x)\xi|^2_{\mathbb{R}^m} + |C(x)\xi|^2_{\mathbb{R}^m}\right) \leq \langle S(x)\xi, \xi\rangle_m \\ \leq cM^{\frac{7}{2}}(M^{\frac{3}{2}} + 1)\left(|A(x)\xi|^2_{\mathbb{R}^m} + |C(x)\xi|^2_{\mathbb{R}^m}\right). \end{aligned}$$

Let $\kappa = \min\left(2a - 2b^2M^2 - cM^2, 2b - 2(a+b)^2 - c\right)$, then

$$-\frac{d}{dt}\mathcal{E}(h) \quad \geq \quad \kappa(cM^{\frac{7}{2}}(M^{\frac{3}{2}} + 1))^{-1}\int \frac{\langle S\nabla h, \nabla h\rangle}{h} d\mu.$$

We finish the proof of Theorem 5.1.

Références

[1] C. Ané, S. Blachère, D. Chafai, P. Fougr̀es, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, G. Scheffer, Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques, Panor. Synthèses, vol. 10, Soc. Math. France, Paris (2000).

[2] D. Bakry, P. Cattiaux and A. Guillin. rate of convergence for ergodic continuous Markov processes: Lyapunov versus poincare, *J. Funct. Anal.*, 254 (2008), 727-759.

[3] D. Bakry. L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes, Lectures on Probability Theory, Ecole d'Eté de Probabilités de St-Flour 1992, Lecture Notes in Math., vol. 1581, (1994)

[4] F. Barthe, P. Cattiaux, and C. Roberto. Concentration for independent random variables with heavy tails, *AMRX* , 2 2005, pp. 39-60.

[5] F. Barthe, P. Cattiaux, and C. Roberto. Interpolated inequalities between exponential and Gaussian, Orlicz hypercontractivity and isoperimetry. *Rev.Mat. Ibero.* 22 (2006), pp. 933–1067.

[6] S-V. Bitseki Penda, A. Guillin, M. Hairer and X. Wang. Quantitative subexponential convergence to equilibrium of Markov processes, in preparation.

[7] P. Cattiaux, N. Gozlan, A. Guillin, and C. Roberto. Functional inequalities for heavy tailed distributions and application to isoperimetry, *Elec. J. Prob.*, 15 (2010), 346–385.

[8] P. Cattiaux, I. Gentil, and A. Guillin, Weak logarithmic Sobolev inequalities and entropic convergence, *Probab. Theory Related Fields*, 139 (3-4) (2007), pp. 563–603.

[9] J. Dolbeault, C. Mouhot, and C. Schmeiser, Hypocoercivity for linear Kinetic Equations conserving mass, to appear in *Trans. Am. Math. Soc.*, see also arXiv:1005.1495v1.

[10] L. Desvillettes, and C. Villani. On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating system, *Com. Pure App. Math.*, 54 (2001), 1–42.

[11] Randal Douc, Gersende Fort, Arnaud Guillin, Subgeometric rates of convergence of f-ergodic strong Markov processes, *Stoch. Proc. Appl*, 119 (2009), 897–923.

[12] G. Fort, G.O. Roberts, Subgeometric ergodicity of strong Markov processes, *Ann. Appl. Probab.*, 15 (2) (2005), pp. 1565-1589.

[13] A. Guillin, F-Y. Wang, Degenerate Fokker-Planck Equations: Bismut Formula, Gradient Estimate and Harnack Inequality, to appear in *J. Diff. Eq.*, see also arXiv:1103.2817.

[14] Helffer, and Nier In Hypoellipticity and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians, vol.1862 of Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 2005.

[15] S.P. Meyn, R.L. Tweedie, Markov Chains and Stochastic Stability, Commun. Control Engrg. Ser. Springer, London (1993).

[16] S.P. Meyn, R.L. Tweedie, Stability of Markovian processes II: Continuous-time processes and sampled chains, *Adv. Appl. Probab.*, 25 (1993), pp. 487-517.

[17] S.P. Meyn, R.L. Tweedie Stability of Markovian processes III: Foster-Lyapunov criteria for continuous-time processes *Adv. Appl. Probab.*, 25 (1993), pp. 518-548

[18] M. Rockner and F. -Y. Wang. Weak Poincaré inequalities and L^2-convergence rates of Markov semigroups, *J. Funct. Anal.* 185 (2001), 564–603.

[19] C. Villani, Hypocoercivity, Mem. Amer. Math. Soc. 202(2009), no.950.

[20] C. Villani, Hypocoercive diffusion operators, preprint, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid 2006, available on author's Web page, 2006.

[21] P-A. Zitt, Annealing diffusions in a potential function with a slow growth, *Stoch. Proc. Appl.* 118 (2008), 76–119.

July 8, 2012

WANG, X.Y., Laboratoire de Mathématiques, CNRS UMR 6620, Université Blaise Pascal, avenue des Landais 63177 Aubière. • *E-mail :* `Xin_yu.Wang@math.univ-bpclermont.fr`