



HAL
open science

**Caractérisation expérimentale et modélisation du
comportement des élastomères en dynamique rapide.
Application aux plots de suspension.**

Jean-Christophe Petiteau

► **To cite this version:**

Jean-Christophe Petiteau. Caractérisation expérimentale et modélisation du comportement des élastomères en dynamique rapide. Application aux plots de suspension.. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2012. Français. NNT: . tel-00841462

HAL Id: tel-00841462

<https://theses.hal.science/tel-00841462>

Submitted on 4 Jul 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Centrale de Nantes

École Doctorale

Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture

Année 2012-2013

N° B. U. :

Thèse de Doctorat

Spécialité : MÉCANIQUE DES SOLIDES, DES MATÉRIAUX, DES STRUCTURES ET DES SURFACES

Présentée et soutenue par :

Jean-Christophe PETITEAU

Le 20 Décembre 2012
à l'École Centrale de Nantes

Caractérisation expérimentale et modélisation du comportement des élastomères en dynamique rapide. Application aux plots de suspension.

JURY

Président	Alain Combescure	Professeur des Universités, INSA de Lyon
Rapporteurs	Moussa Nait Abdelaziz Lucien Laiarinandrasana	Professeur des Universités, Polytech'Lille Maître de recherches, HDR, Mines ParisTech
Examineurs	Nicolas Saintier Erwan Verron Hervé Le Sourne	Maître de conférences, HDR, ENSAM de Bordeaux Professeur des Universités, ECN Enseignant chercheur, ICAM Nantes
Invités	Jean-François Sigrist Ramzi Othman	Ingénieur R&D, HDR, DCNS research Maître de conférences, HDR, ECN

Directeur de thèse :	Erwan Verron	Professeur des Universités
Laboratoire :	Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique, École Centrale Nantes	
Co-encadrant :	Hervé Le Sourne	Enseignant chercheur
Laboratoire :	Institut Catholique des Arts et Métiers Nantes	
Co-encadrant :	Ramzi Othman	Maître de conférences, HDR
Laboratoire :	Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique, École Centrale Nantes	

N° E. D. : 498-260

Remerciements

Ce mémoire de thèse est le fruit d'un travail de trois ans de thèse effectué au sein de l'équipe MPTC du GeM à l'Ecole Centrale de Nantes. Cependant, cette thèse a été réalisée avec plusieurs partenaires qui sont pour la partie académique, l'ICAM de Nantes et pour la partie industrielle la DGA et DCNS.

Bien que la mise en place administrative ait pris *beaucoup* de temps pour les uns et les autres, l'implication de chacun des membres du projet a permis à ce projet d'exister, et j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler avec des personnes ayant des intérêts parfois différents (qui n'ont pas toujours été simples à concilier), mais qui ont su garder un esprit toujours très ouvert et qui m'ont donc laissé beaucoup d'autonomie. Je tiens donc à remercier dans un premier temps mes encadrants :

Hervé Le Sourne pour m'avoir proposé et fortement incité à faire cette thèse et m'avoir aidé sur la partie simulation, pour sa disponibilité et ses conseils précieux. Erwan Verron pour m'avoir conseillé tout au long de la thèse tout en me laissant beaucoup d'autonomie, pour sa rigueur tout autant que sa bonne humeur et pour m'avoir « booster » lorsque le pessimisme me gagnait. Ramzi Othman pour m'avoir aidé à comprendre les phénomènes rapides et pour sa gentillesse.

Je tiens aussi à remercier Guillaume Barras (DGA) et Jean-François Sigrist (DCNS) d'avoir permis à cette thèse de garder un objectif industriel important tout en laissant le champ libre pour faire de la science. J'aimerais aussi les remercier pour leur réactivité et le temps qu'ils ont pris malgré des agendas bien chargés.

J'aimerais associer à cette équipe « officielle » Pierrick Guégan avec qui j'ai passé une très bonne année au CRED et Franck Pasco à qui j'adresse un grand merci pour le temps passé, les retours de vacances un peu plus rapides et les arrachages de cheveux pour arriver à monter les essais, mais surtout sa patience et sa rigueur sans lesquelles les essais n'auraient pas été aussi bons.

Je tiens aussi à remercier messieurs Lucien Laiarinandrasana et Moussa Naït Abdelaziz d'avoir rapporté ce travail et amené des questions pertinentes qui m'ont permis de creuser un peu plus le sujet, monsieur Nicolas Saintier d'avoir accepté de le juger, et monsieur Alain Combescure de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.

Un grand merci à l'équipe « Soft Materials » dans son ensemble pour les discussions fructueuses, les conseils que j'ai pu recevoir, en espérant avoir su renvoyer l'ascenseur de temps à autre, mais surtout pour l'ambiance au travail et en dehors.

Je voudrais aussi remercier toutes les personnes de l'équipe MPTC et en particulier les doctorants pour le temps passé à parler de science et surtout d'autres choses ainsi que pour toutes les parties de coinche du midi qui m'ont permis de démarrer l'après-midi avec plus d'entrain.

Enfin, je voudrais saluer mes amis et ma famille pour leurs encouragements et pour m'avoir permis de me faire penser à autre chose durant ces trois années somme toute intenses.

Avertissement

Pour des raisons de confidentialité, certaines valeurs numériques ont volontairement été enlevées de ce rapport. Ainsi on ne trouvera pas les valeurs :

- des contraintes, des forces et des paramètres de la loi de comportement relatifs au matériau d'étude ;
- des courbes de déplacement et de vitesse en pied de plot correspondant à une explosion sous-marine ;
- des caractéristiques force-déplacement des plots.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Caractérisation expérimentale du comportement dynamique	5
1.1 Etat de l'art	5
1.1.1 Essais de traction classiques	6
1.1.2 Essais sur barres d'Hopkinson	7
1.1.3 Essais pour les moyennes vitesses de déformation	8
1.2 Méthodologie des essais de traction et de compression	8
1.2.1 Méthodologie expérimentale pour les essais de traction	8
1.2.2 Results and discussion	13
1.2.3 Compression sur machine hydraulique	19
1.2.4 Compression par barre tombante	21
1.3 Application au matériau d'étude	24
1.3.1 Traction	25
1.3.2 Compression	29
1.4 Conclusion	31
2 Modélisation	33
2.1 Modèles de comportement viscoélastique en grandes déformations	34
2.1.1 Hyperélasticité et viscoélasticité linéaire	34
2.1.2 Viscoélasticité en grandes déformations	36
2.2 Comparaison des deux approches de la viscoélasticité	38
2.2.1 Introduction	38
2.2.2 Two simple models for large strain viscoelasticity of rubber	38
2.2.3 Results and discussion	47
2.2.4 Closing remarks	51
2.3 Recalage des modèles	53
2.3.1 Modèle utilisé	53
2.3.2 Stabilité	54
2.3.3 Identification	55
2.4 Conclusion	57
3 Mise en œuvre numérique	61
3.1 Implantation de la loi de comportement	62
3.1.1 Séparation sphérique-déviatorique	62
3.1.2 Partie hyperélastique	63
3.1.3 Méthode de calcul de la contribution viscoélastique	64
3.1.4 Algorithme de calcul de la UMAT	65
3.1.5 Énergie de déformation volumique	65

3.1.6	Remarque sur le pas de temps critique	65
3.2	Validation de la loi de comportement	68
3.2.1	Essais de traction	68
3.2.2	Essais de compression	69
3.2.3	Propagation d'onde	71
3.2.4	Bilan sur la validation	85
3.3	Application au plot	86
3.3.1	Géométrie de plot	86
3.3.2	Sollicitations simples	87
3.3.3	Macro-élément et sollicitation de type explosion sous-marine	92
3.4	Conclusion	98
Conclusion générale		99
A Comparaison de deux modèles viscoélastiques différentiels		107
A.1	Équations constitutives des modèles	107
A.1.1	Modèles généraux	107
A.1.2	Modèles simples	109
A.2	Étude des limites	110
A.2.1	Réponse pour un chargement infiniment rapide	110
A.2.2	Réponse quasi-statique	110
A.3	Conclusion	110
B Implémentation de la loi de comportement pour un schéma implicite		113
B.1	Hyperélasticité	113
B.1.1	Tenseur d'élasticité lagrangien	114
B.1.2	Tenseur d'élasticité eulérien	115
B.2	Viscoélasticité grandes déformations avec décomposition volumétrique	116
B.2.1	Tenseur d'élasticité lagrangien	117
B.2.2	Tenseur d'élasticité eulérien	117
C Algorithme d'une loi viscoélastique dépendant des invariants de $\bar{\mathbf{C}}_t^{-1}$		119

Table des figures

1	Choc sur une frégate de type Lafayette	2
2	Chargement de pied de plot correspondant à une explosion sous-marine	2
3	Chargement de pied de plot correspondant à l'onde de choc primaire	3
1.1	Utilisation des moyens d'essais en fonction de la vitesse de déformation	6
1.2	Schéma du dispositif des barres d'Hopkinson	7
1.3	Sample design	9
1.4	Position of the points used for tracking	11
1.5	Experimental set-up	12
1.6	Stretch ratio and true strain rate at 0.01 s^{-1}	13
1.7	Stretch ratio and true strain rate at 10 s^{-1}	14
1.8	Stretch ratio and true strain rate at 100 s^{-1}	14
1.9	Engineering stress versus time for a strain rate $\alpha = 0.01 \text{ s}^{-1}$	15
1.10	Engineering stress versus time for a strain rate $\alpha = 10 \text{ s}^{-1}$	16
1.11	Engineering stress versus time for a strain rate $\alpha = 100 \text{ s}^{-1}$	17
1.12	Engineering stress-stretch ratio for different strain rates for SBR20	17
1.13	Engineering stress-stretch ratio for different strain rates for SBR40	18
1.14	Dissipation and initial stiffness depending on the strain rate	18
1.15	Eprouvette de compression (en mm)	19
1.16	Déplacement imposé lors d'un essai de compression	20
1.17	Vue d'ensemble du dispositif de compression sur la machine MTS 819	20
1.18	Courbe effort-déplacement des essais de compression	21
1.19	Vue d'ensemble du dispositif de barre tombante	22
1.20	Application du principe fondamental de la dynamique à un tronçon de barre	23
1.21	Forces enregistrées par les jauges et force calculée	24
1.22	Eprouvette de traction lors de l'essai	25
1.23	Elongations recueillies pour différentes vitesses	26
1.24	Propagation d'onde dans le matériau à 100 s^{-1}	27
1.25	Dilatation et vitesse de déformation vraie à $0,01 \text{ s}^{-1}$	28
1.26	Dilatation et vitesse de déformation vraie à $0,1 \text{ s}^{-1}$	28
1.27	Dilatation et vitesse de déformation vraie à 1 s^{-1}	29
1.28	Dilatation et vitesse de déformation vraie à 10 s^{-1}	29
1.29	Dilatation et vitesse de déformation vraie à 100 s^{-1}	30
1.30	Contrainte nominale-élongation pour différentes vitesses de déformation	30
1.31	Effet tonneau sur éprouvette de compression	31
1.32	Courbe effort déplacement des essais de compression	31
2.1	Domaine d'application de chaque modèle	33
2.2	Modèles viscoélastiques	35
2.3	Deformation gradient with respect to current time configuration	39

2.4	Multiplicative decomposition of the deformation gradient	41
2.5	Prescribed stretch ratio vs. time for different strain rates	48
2.6	Stress-strain curves for rubber-like viscoelastic models: (a) CIM, (b) IVM	49
2.7	Ratios of stress for different strain rates	49
2.8	Reduced Cauchy stress for different strain rates: (a) CIM, (b) IVM	50
2.9	Adimensionalized energy dissipated \mathcal{D}/\mathcal{E}	51
2.10	Dissipation ratio for different maximum stretch λ_{max} : (a) CIM, (b) IVM	52
2.11	Recalage de la loi hyperélastique	56
2.12	Energie libre en fonction du premier invariant de \mathbf{C}	57
2.13	Recalage de la partie viscoélastique	59
3.1	Courbes contrainte-déformation en fonction du coefficient de compressibilité	67
3.2	Déformation logarithmique au sein de l'éprouvette de traction	70
3.3	Comparaison des courbes forces-déplacement en traction	71
3.4	Effet tonneau en fonction du coefficient de frottement à 1 s^{-1}	72
3.5	Comparaison des courbes forces-déplacement en compression	73
3.6	Courbe contrainte-déformation typique d'un élastomère (Knowles, 2002)	74
3.7	Vitesse de propagation des ondes en fonction de la déformation	74
3.8	Schéma du milieu uniaxial	74
3.9	Vitesses particulières en fonction du temps	76
3.10	Diagrammes spatio-temporel de la propagation d'onde	76
3.11	Profil de vitesse particulière en fonction du temps	78
3.12	Trajectoire des particules au cours du temps (ondes simples)	79
3.13	Vitesse particulière en différents points de l'éprouvette	79
3.14	Trajectoire des particules au cours du temps (ondes de choc)	80
3.15	Vitesse particulière en différents points de l'éprouvette	81
3.16	Courbe contrainte-déformation du latex	81
3.17	Recalage des courbes contrainte-déformation du latex	82
3.18	Propagation de l'onde de traction dans le modèle élément fini	83
3.19	Trajectoires des points de l'éprouvette en fonction du temps	83
3.20	Vitesses particulières des points de l'éprouvette en fonction du temps	84
3.21	Plan du plot de suspension MN45	86
3.22	Maillage du plot	87
3.23	Contrainte de Von-Mises dans le plot soumis à de la traction	88
3.24	Courbes force-déplacement du plot en traction	89
3.25	Contrainte de Von-Mises dans le plot soumis à de la compression	89
3.26	Courbes force-déplacement du plot en compression	90
3.27	Contrainte de Von-Mises dans le plot soumis à du cisaillement	91
3.28	Courbes force-déplacement du plot en cisaillement	91
3.29	Courbes moment-déplacement du plot en cisaillement	92
3.30	Contrainte de Von-Mises dans le plot soumis à de la torsion	92
3.31	Courbes moment-angle de torsion	93
3.32	Courbes force-angle de torsion	93
3.33	Contrainte de Von-Mises dans le plot soumis à de la rotation	94
3.34	Courbes moment-angle de rotation	94
3.35	Courbes force-angle de rotation	95
3.36	Loi de comportement globale dépendant de la vitesse	96
3.37	Réponse des deux éléments soumis à un signal de déplacement triangulaire	96
3.38	Déplacement d'une base de plot soumis à une explosion sous-marine	97

Table des matières

3.39	Extension du modèle de plot ainsi que des deux macro-éléments	97
A.1	Modèles rhéologiques simples A et B	107

Table des matières

Liste des tableaux

1.1	Parameters used for the camera	11
1.2	Frequencies used for the gauge signals	12
1.3	Average and standard deviation of the strain rate obtained	14
1.4	Essais de compression sur MTS 819 - Paramètres caméra vidéo SA1	20
1.5	Essais de compression sur barre tombante - Paramètres caméra vidéo SA1	23
2.1	Material parameters of the models	47
2.2	Termes polyconvexes	54
2.3	Paramètres hyperélastiques du matériau	55
2.4	Paramètres viscoélastiques du matériau avec le second recalage	57
3.1	Algorithme utilisé dans la routine UMAT intégrée à LS-DYNA	66
3.2	Exemples d'énergie de déformation volumique utilisée dans la littérature	67
3.3	Paramètres du matériau d'étude	68
3.4	Paramètres de notre loi de comportement recalée pour le latex	83

Table des matières

Introduction générale

Les élastomères sont des matériaux possédant de nombreuses aptitudes. Leur capacité à fortement se déformer sans rompre, ainsi que leurs propriétés dissipatives, leur vaut d'être très largement utilisés dans l'industrie pour des pièces d'interface et notamment pour les plots de suspension utilisés à bord des sous-marins. Ces plots de suspension sont généralement montés entre la structure résistante du navire et les berceaux suspendus (et matériels embarqués) afin de découpler leurs cinématiques respectives. Ils assurent ainsi deux fonctions principales :

- la discrétion acoustique du navire en filtrant le bruit transmis dans l'eau, dû aux fréquences de fonctionnement des matériels internes ;
- la limitation des niveaux de sollicitation transmis aux matériels suspendus en cas d'agression extérieure de type explosion sous-marine.

Aujourd'hui, ces plots sont dimensionnés dans le cadre de l'acoustique linéaire et leur comportement vibratoire est donc bien connu. Toutefois, leur comportement en cas d'explosion sous-marine, telle que l'on peut voir sur la figure 1, reste encore un domaine mal maîtrisé. Il est donc indispensable d'approfondir cette connaissance afin de pouvoir simuler et de mieux connaître les chargements vus par les matériels embarqués. La gamme de sollicitation à laquelle sont soumis les plots tant d'un point de vue vitesse que déplacement est large puisqu'on peut distinguer deux phases différentes lors d'une explosion sous-marine (Cole, 1948) :

1. Tout d'abord, la propagation et l'impact contre le navire d'une onde de choc primaire qui résulte de l'explosion proprement dite et qui génère les accélérations les plus importantes ;
2. Puis, la pulsation de la bulle issue des produits de détonation qui correspond aux phases successives d'expansion et de contraction, dans l'eau, de la bulle de gaz formée après réaction complète de l'explosif. Ce phénomène est dû aux différences de pressions interne et externe à la surface de la bulle. Ce mouvement pulsatoire s'accompagne d'une migration verticale de la bulle en direction de la surface.

Des modèles d'interaction fluide-structure permettent de déterminer les déplacements caractéristiques de la coque d'un sous-marin sujet à ce type de sollicitations (Barras, 2012) . Ce sont ces déplacements qui seront imposés à la base des plots de suspension. La figure 2 présente les courbes de déplacement et de vitesse que l'on peut déterminer grâce à ces calculs. On remarque que les vitesses sont très importantes (de l'ordre d'une dizaine de mètre par seconde) pour la partie initiale de la courbe relative au choc primaire comme on peut le voir sur la figure 3 mais qu'elles correspondent à des temps caractéristiques tellement courts que le déplacement du plot, même s'il est rapide, est finalement de faible amplitude (de l'ordre du centimètre) comparé à ceux induits aux temps longs lors de la pulsation de bulle qui sont plutôt de l'ordre du décimètre pour une fréquence de l'ordre du hertz.



FIGURE 1 – Choc sur une frégate de type Lafayette

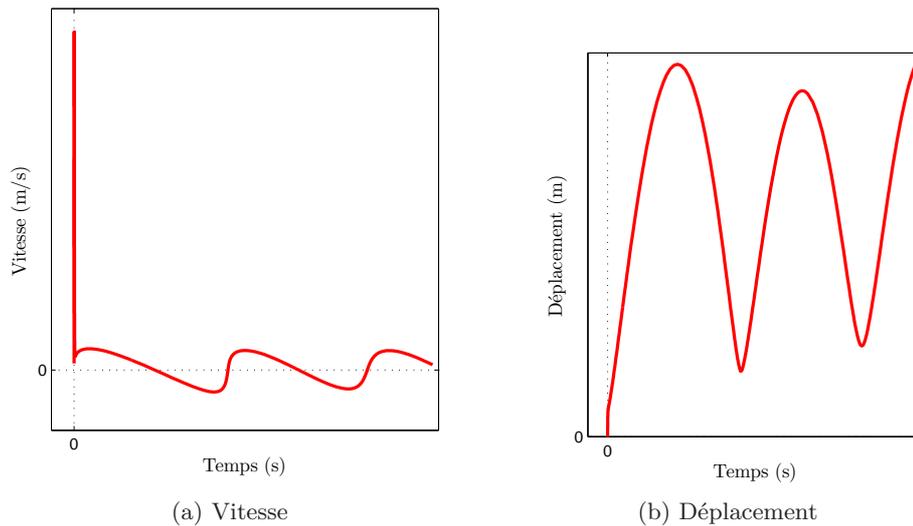


FIGURE 2 – Chargement de pied de plot correspondant à une explosion sous-marine

Les sollicitations subies par un plot peuvent être déduites de ces courbes. Ainsi, les plots composés généralement de caoutchouc naturel chargé aux noirs de carbone vont subir des déformations de l'ordre de 100 %. Durant le choc primaire, les vitesses de déformation seront de l'ordre de 10 s^{-1} et de 1 s^{-1} lors du pulse de bulle. Localement, ces valeurs peuvent être plus (ou moins) importantes. La gamme de vitesse de déformation globale s'étend donc de $0,1$ à 100 s^{-1} . Or, les élastomères sont connus pour leur caractère très non-linéaire que ce soit en fonction du niveau de déformation ou de la vitesse de déformation. Afin de connaître le comportement du plot, il faut donc d'une part prédire le comportement du matériau qui compose cet élément et d'autre part pouvoir faire un calcul de structure pour savoir comment il réagit.

Le présent travail de thèse est mené en collaboration avec DCNS et DGA et a pour objectif final d'aboutir à l'élaboration d'un « macro-élément » qui reproduise fidèlement le comportement sous choc d'un plot de suspension dans son ensemble pouvant être intégré à un calcul de sous-marin complet. Pour cela, plusieurs étapes sont nécessaires :

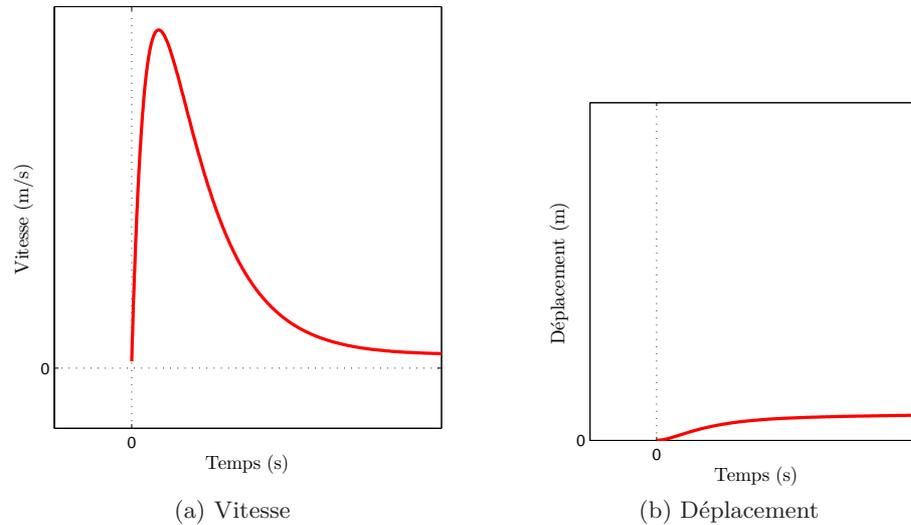


FIGURE 3 – Chargement de pied de plot correspondant à l’onde de choc primaire

1. Mettre en œuvre des essais sur l’élastomère utilisé afin de connaître le comportement du matériau en fonction de la vitesse de déformation ;
2. Modéliser le comportement du caoutchouc par des modèles viscoélastiques en grandes déformations ;
3. Simuler le comportement du plot en utilisant la loi de comportement préalablement établie.

Ainsi, dans le premier chapitre, seront présentées les méthodes classiquement utilisées pour faire des essais mécaniques. Ces méthodes n’étant pas adaptées aux moyennes vitesses de déformation, on présentera les méthodes permettant d’effectuer des essais à vitesse de déformation imposée constante en traction ainsi qu’en compression. On mettra en évidence l’influence de la vitesse de déformation sur la réponse du matériau tant pour la raideur que pour les propriétés dissipatives. Dans un deuxième chapitre, sera proposée une comparaison des approches intégrale et différentielle pour les modèles de comportement viscoélastiques grandes déformations. Ces approches permettent toutes les deux de modéliser le type de comportement observé lors des essais expérimentaux, mais sur la base de cette comparaison, on choisira un modèle particulier dont les paramètres seront recalés avec les essais de traction. Enfin, dans un troisième chapitre, l’algorithme correspondant à la loi de comportement choisie sera développé, les essais de validation de cette loi seront utilisés pour déterminer les paramètres et enfin les simulations du plot proprement dit seront menées à bien puis serviront à construire le « macro-élément ».

Chapitre 1

Caractérisation expérimentale du comportement dynamique des élastomères en grandes déformations

Les élastomères sont des matériaux très utilisés de par leur capacité à se déformer très fortement sans rompre, et leur aptitude à dissiper de l'énergie, induite par leur nature viscoélastique. Cependant, ce sont aussi des matériaux présentant de très fortes non-linéarités que ce soit en terme de niveau de déformation, de vitesse de déformation ou encore de température. Ainsi, il est important de pouvoir les caractériser convenablement au moyen d'essais expérimentaux simples.

Notre étude portant principalement sur la dépendance des élastomères à la vitesse de déformation en grandes déformations, nous proposons donc un état de l'art des techniques d'essais employées classiquement pour déterminer le comportement à différentes vitesses de déformation. Dans un second temps, les méthodes d'essais de traction ainsi que de compression, qui ont été développées et utilisées lors de cette étude seront présentées avant de faire un bilan des résultats obtenus pour notre matériau.

1.1 Etat de l'art

La plage de vitesse de sollicitation qui nous intéresse étant assez étendue (0.01 à 100 s^{-1}), nous allons tout d'abord présenter les différents moyens d'essais qui peuvent être utilisés. La figure 1.1 montre que divers moyens d'étude existent, associés à des gammes différentes de vitesses de déformation. Ainsi, on réalise les essais quasi-statiques sur les machines de traction classiques pour des vitesses de déformation inférieures à 1 s^{-1} . D'autre part, des essais sur barres d'Hopkinson sont utilisés pour des vitesses supérieures à 100 s^{-1} . Dans l'intervalle des vitesses moyennes (de 1 à 100 s^{-1}), aucun consensus sur la méthodologie à employer n'existe. On trouve ainsi des machines de traction rapide qui permettent d'atteindre des vitesses de quelques mètres par seconde et des montages spécifiques conçus chacun pour un type d'essai bien précis. Pour une vision plus complète de ces moyens d'essais, le lecteur pourra se référer à [Roland \(2006\)](#).

La difficulté des essais vient du fait que pour les matériaux dits « mous » ou à fortes vitesses de déformation, on peut s'approcher de la vitesse de propagation des ondes, c , dans le matériau ($c = \sqrt{E/\rho}$). Les temps de propagation deviennent donc du même ordre

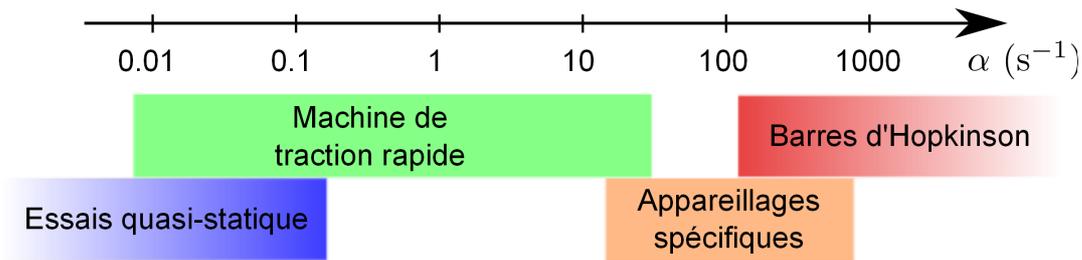


FIGURE 1.1 – Utilisation des moyens d’essais en fonction de la vitesse de déformation souhaitée

de grandeur que la durée d’essais. Cela implique que les champs de déformation et de contrainte ne sont plus homogènes dans l’éprouvette (Song et Chen, 2004; Pattofatto *et al.*, 2006) et donc que l’hypothèse de champs moyens n’est plus vérifiée.

1.1.1 Essais de traction classiques

Pour les plus basses vitesses de déformation, on utilise des machines de traction classiques. Une éprouvette est placée entre les mors pour les essais de traction et entre des plateaux pour les essais de compression. Étant à de faibles vitesses de déformation, l’état d’équilibre dynamique est vérifié à chaque instant. Ceci permet de négliger tout effet d’inertie à l’intérieur du matériau. Une mesure de force est effectuée à l’une des extrémités de l’éprouvette. La déformation est calculée à partir du déplacement u du vérin; toutefois, afin d’être plus précis et de ne pas avoir à prendre en compte les effets de bord, on peut également utiliser un extensomètre. On peut donc en déduire la déformation de l’ingénieur ε_{ing} ou l’allongement λ plus classiquement utilisé pour les caoutchoucs :

$$\varepsilon_{ing} = \frac{u}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \lambda - 1 \quad (1.1)$$

La mesure de la force F à l’une des extrémités de l’éprouvette de volume V_0 permet de calculer la contrainte nominale p en utilisant S_0 la section de l’éprouvette au début de l’essai :

$$p = \frac{F}{S_0} \quad (1.2)$$

On peut aussi déterminer la contrainte vraie ou contrainte de Cauchy σ en utilisant S la section de l’éprouvette dans l’état déformé :

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (1.3)$$

Le caoutchouc naturel utilisé dans cette étude étant supposé incompressible (volume $V = V_0$), on a :

$$\lambda = \frac{l}{l_0} = \frac{S_0}{S} \quad (1.4)$$

et donc la relation entre contrainte vraie et contrainte nominale est :

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{F}{S_0} \frac{S_0}{S} = p\lambda \quad (1.5)$$

Cependant, les progrès effectués en corrélation d'images permettent de retrouver un champ de déformation et non plus une mesure de déformation moyenne en filmant l'essai et en traitant les images ainsi enregistrées. La précision des mesures est fonction du nombre de millimètres par pixels. Si cette valeur est importante, on ne pourra donc mesurer que de grandes déformations.

1.1.2 Essais sur barres d'Hopkinson

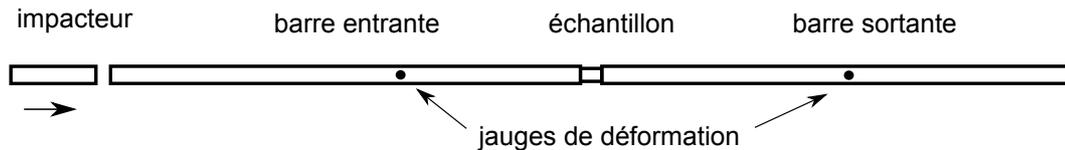


FIGURE 1.2 – Schéma du dispositif des barres d'Hopkinson

Les essais sur barres d'Hopkinson (ou de [Kolsky \(1963\)](#)) sont généralement des essais de compression. Pour cet essai, on place un échantillon entre deux barres de mesure et une barre plus petite, l'impacteur, est projetée sur la première barre comme le présente la figure 1.2. Cela génère une onde de compression élastique qui se propage dans la première barre et vient en partie se réfléchir à l'extrémité de celle-ci tandis que l'autre partie est transmise à l'échantillon puis à la deuxième barre. Une jauge placée sur la première barre permet d'enregistrer à la fois l'onde incidente et l'onde réfléchiée tandis qu'une autre jauge placée sur la deuxième barre permet d'enregistrer le signal correspondant à l'onde transmise. L'étude de ces signaux permet d'aboutir à une mesure de la contrainte moyenne et de la déformation moyenne dans l'échantillon. Ainsi, si on considère que l'éprouvette est uniformément chargée, on mesure la vitesse de déformation moyenne :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2c}{l_0}\varepsilon_r(t) \quad (1.6)$$

où ε_r est la déformation réfléchiée, l_0 la longueur initiale de l'éprouvette et c la vitesse de propagation d'onde dans la barre incidente. Simultanément, on mesure la contrainte moyenne dans l'éprouvette :

$$\sigma(t) = \frac{S_t}{S_e} E_t \varepsilon_t(t) \quad (1.7)$$

où ε_t est la déformation transmise, S_t la section de la seconde barre et S_e la section initiale de l'éprouvette. On détermine ainsi la loi de comportement du matériau à une vitesse de déformation donnée.

Pour les matériaux mous tels que les élastomères, cette technique n'est pas simple d'utilisation ([Chen et Song, 2010](#)). En effet, la faible raideur de ces matériaux implique que les signaux enregistrés dans la barre transmise sont faibles et donc difficiles à mesurer. De plus, la vitesse de propagation d'onde étant faible pour ces matériaux, il est difficile d'imposer une déformation uniforme dans l'éprouvette. Cependant, un certain nombre d'études ont pu être effectuées notamment en utilisant des barres de moindre raideur en polymère (polycarbonate par exemple) ([Wang et al., 1994](#); [Shim et al., 2004](#)). La taille des échantillons testés est aussi réduite afin d'établir plus rapidement l'état d'équilibre qui apparaît lorsque les ondes ont fait plusieurs aller-retours dans le matériau. Cependant, il est difficile d'atteindre des vitesses de déformation de l'ordre de 100 s^{-1} . Pour des essais hors équilibre, des techniques inverses appliquées aux essais permettent de connaître le

comportement du matériau (Gary et Zhao, 1993). Othman *et al.* (2010) ont aussi développé une méthode permettant de prendre en compte directement les effets d'inerties pour en déduire le comportement du matériau.

1.1.3 Essais pour les moyennes vitesses de déformation

Dans la gamme des moyennes vitesses de déformation, il y a peu d'essais qui ont été effectués. Les machines de traction hydrauliques permettent d'atteindre environ 100 s^{-1} . Cependant, pour des vitesses de déformations supérieures à une valeur critique de l'ordre de 10 à 60 s^{-1} (Haugou *et al.*, 2001; Langrand *et al.*, 2002), la fiabilité du dispositif est remise en cause car on atteint les fréquences propres des capteurs classiquement utilisés. Ainsi, Othman *et al.* (2009) ont proposé une mesure du signal de force basée sur les travaux de LeBlanc et Lassila (1996) en utilisant une barre sur laquelle sont collées trois jauges de déformations. Cette technique applique la méthodologie de mesure des barres d'Hopkinson aux machines de traction rapide. En utilisant une technique de séparation d'ondes (Bussac *et al.*, 2002), le signal de force est ainsi recueilli. On trouve aussi d'autres dispositifs spécifiquement conçus pour atteindre une certaine vitesse de déformation. Ainsi, Hoo Fatt et Bekar (2004), et Hoo fatt et Ouyang (2008) ont proposé l'utilisation d'un essai de Charpy modifié. Dans ces essais, on cherche à atteindre un état homogène à la fois pour le champ de déformation et pour le champ de contrainte en tirant simultanément sur les deux extrémités de l'éprouvette au moyen d'un système de câbles et de poulies. Roland *et al.* (2007) ont utilisé le même concept en modifiant un puits de chute. Cependant, dans ces dispositifs, le déplacement généré dépend fortement de la conception des poulies et des câbles, qui doivent permettre une synchronisation des forces appliquées à chaque extrémité de l'éprouvette. Néanmoins, aucun consensus sur la méthode à employer n'existe à l'heure actuelle.

1.2 Notre travail : méthodologie des essais de traction et de compression

Travaillant uniquement sur la gamme de vitesse allant de $0,01$ à 100 s^{-1} , nous avons choisi d'effectuer les essais, pour la plus grande part sur une machine de traction rapide, afin d'obtenir des résultats aisément comparables les uns avec les autres. Sachant que notre problématique de départ est de comprendre le comportement des élastomères en fonction de la vitesse de déformation, des essais de traction et de compression à différentes vitesses de déformation ont été effectués. Plutôt que de faire des essais à vitesse de déformation nominale constante, le choix a été fait de réaliser des essais à vitesses de déformation vraie imposée constante. Utilisant cette vitesse, nous pensons être ainsi plus proches de ce que « subit » le matériau. Des essais à vitesse de déformation constante peuvent être effectués sur des moyens d'essais utilisant des comes (Cam-plastometer : voir ASM (2000)), cependant, cela nécessite un équipement complexe qui n'a jamais été utilisé pour des élastomères. Nous allons donc présenter, dans un premier temps, la méthode qui a été mise en place pour les essais de traction et son application à deux SBR (Styrene Butadiene Rubber) et dans un deuxième temps, la méthode utilisée pour les essais de compression.

1.2.1 Méthodologie expérimentale pour les essais de traction

La majeure partie de ce travail a été rédigée dans un article publié dans *Polymer Testing* (2013, volume 32(2), pages 394-401). Nous reprendrons donc cet article, pour la

partie méthodologie ; nous conserverons la langue anglaise afin de respecter le travail déjà soumis. L'application au matériau d'étude sera ensuite présentée dans la partie suivante. Pour ces essais de traction uniaxiale réalisés à vitesse de déformation vraie imposée constante, la technique de mesure utilisée est similaire à celle proposée par Othman *et al.* (2009). L'éprouvette utilisée a été conçue afin, d'une part d'obtenir rapidement un état de déformation et de contrainte homogène dans l'éprouvette pour ne pas avoir à corriger le signal de force récupéré (comme proposé dans Aloui *et al.* (2008); Othman *et al.* (2010)), et d'autre part d'obtenir la déformation souhaitée pour un déplacement imposé.

1.2.1.1 Material and sample

The major objective of our experiments is to demonstrate the ability to perform constant true strain rate tension tests for a wide range of strain rate while achieving large strains. As the measurement of strain can not be direct, we can not use a regulation loop to prescribe a constant true strain rate in central part of the sample. Therefore, the feedback loop must be considered in terms of displacement. For this reason, we developed a specific sample for the present test. Classical dumbbell samples can not be used for large strain rates, because the sample center is stretched more than the zone near the grips and, as rubber response is non-linear, it becomes difficult to predict the strain field in the different parts of the specimen. Thus, the sample section must be constant between the clamps to ensure the best possible homogeneity of both strain and strain rate fields (see Fig. 1.3). The section of the sample was defined in order to have stresses high enough to be measured by the force transducer and the length of the sample was defined in order to have uniaxial test and, at the same time, to be able to prescribe the desired displacement speed depending on the machine used. The sample were obtained by water jet cutting.

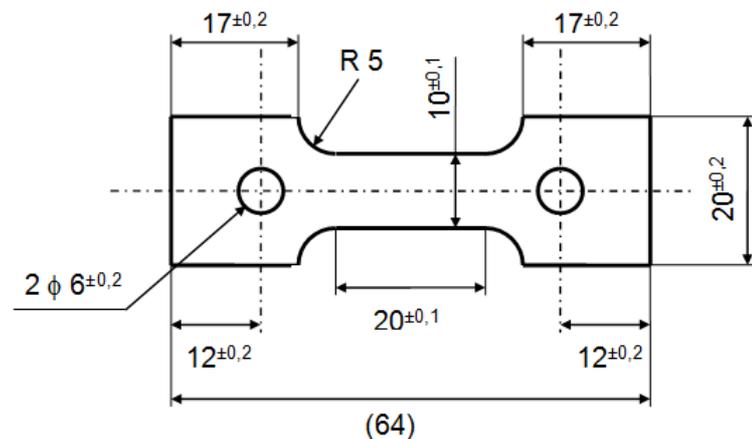


Figure 1.3: Sample design

Two different Styrene Butadiene Rubber (SBR) filled respectively with 20 and 40 phr of carbon black are considered; in the following they will be referred to as SBR20 and SBR40. The gauge (central part) is 20 mm long. Considering a wave velocity of some hundreds meters per second, the time necessary to achieve homogeneous stress and strain is of some hundreds micro-seconds. In the most limiting case, i.e., for strain rates of about 100s^{-1} , the elongation of the sample is only a few percents before attaining fields homogeneity in the sample. Moreover, the sample is strained less than 1% before reaching stress and strain homogeneity at a strain rate of about 10s^{-1} . Finally, the stress and strain in the

specimen are legitimately assumed homogeneous; and then, the stress is deduced from the measurement of a boundary (extremity) force.

1.2.1.2 Machine and loading conditions

The experimental device is a high speed hydraulic machine (MTS 819). The displacement of the cylinder is controlled by a computer, using a LABVIEW program specially developed for these experiments.

Performing tensile experiments at constant true strain rate means that the symmetric part of the velocity gradient \mathbf{D} remains constant. We assume that the deformation is homogeneous in the sample, and denote \mathbf{F} the deformation gradient. Noting $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ the velocity field, two different velocity gradients can be defined: the first one with respect to the undeformed configuration, i.e. the nominal velocity gradient,

$$\text{grad}_{\mathbf{X}} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t), \quad (1.8)$$

and the second one with respect to the current configuration, i.e. the *true* velocity gradient,

$$\text{grad}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{L}(\mathbf{x}, t). \quad (1.9)$$

The relationship between these two quantities is:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}. \quad (1.10)$$

Eliminating the rotation contribution of the motion, the strain rate tensor is the symmetric part of \mathbf{L} :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T). \quad (1.11)$$

For uniaxial tension, denoting \mathbf{e}_1 the stretching direction and \mathbf{e}_2 and \mathbf{e}_3 the transverse directions, the deformation gradient of an incompressible material reduces to:

$$\mathbf{F} = \lambda \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad (1.12)$$

where λ is the stretch ratio, i.e. the ratio of the deformed and undeformed lengths l/l_0 . Then, the true strain rate is simply:

$$\mathbf{D} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{\dot{\lambda}}{2\lambda} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3). \quad (1.13)$$

To ensure that \mathbf{D} remains constant, the stretch ratio must be written as $\lambda = e^{\alpha t}$, instead of $\lambda = \alpha t$ as it is commonly prescribed for uniaxial extension experiment at constant engineering strain rate. Finally, the deformation gradient reduces to:

$$\mathbf{F} = e^{\alpha t} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + e^{-\frac{\alpha t}{2}} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3). \quad (1.14)$$

In order to prescribe a constant true strain rate, we must control the displacement of the lower grip of the stretching machine such as $u = l_0(e^{\alpha t} - 1)$. One can notice that for small strain, i.e. $\lambda \approx 1$, the two strain rates $\dot{\mathbf{F}}$ and \mathbf{D} coincide.

Strain rate of the test	0.01	10	100
Frame frequency (fs ⁻¹)	20	10000	16000
Resolution (pixels ²)	256×1024		

Table 1.1: Parameters used for the camera

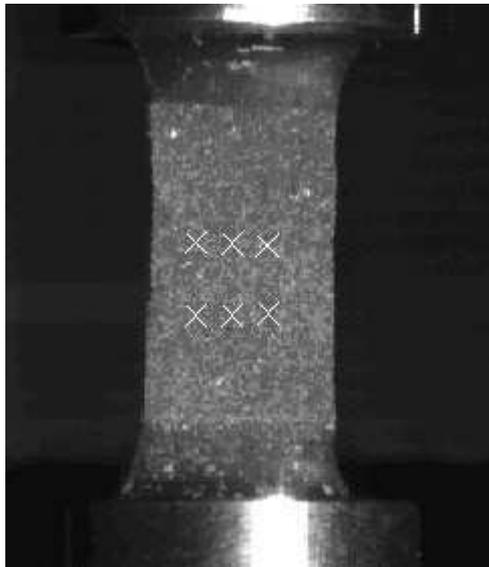


Figure 1.4: Position of the points used for tracking

1.2.1.3 Measurement of strain

Strain is measured by a point tracking technique. So, a random speckle is painted on the sample and each test is recorded using a high-speed camera (PHOTRON FASTCAM SA1), which parameters are given in Table 1.1. Note that the sample must be enlightened with a spotlight to properly record images. As shown in Figure 1.4, the displacement of several points in the recorded images is determined by the point tracking software TEMA Automotive. Once the displacements obtained, the time evolution of the longitudinal stretch ratio (in direction \mathbf{e}_1) is calculated in various points i of the sample:

$$\lambda(t) = \frac{l(t)}{l_0} = \frac{X_2(t) - X_1(t)}{X_2(0) - X_1(0)} \quad (1.15)$$

where X is the coordinate in the \mathbf{e}_1 -direction and the subscript 1 and 2 stand for close measurement points. Finally, the strain rate is deduced using Eq. (1.13). Note that the displacement along the transverse direction is very small and then cannot be accurately determined with our point tracking technique.

1.2.1.4 Measurement of stress

As mentioned above, the stress field is assumed homogeneous. Thus, the stress is averaged by measuring the force at an extremity of the specimen. Here, two methods are considered to measure this force. The first method consists in the use of a classical force cell. Nevertheless, as transient effects becomes increasingly significant as strain rate increases, large oscillations are observed on the force signals. To overcome this limitation, we consider a second method to measure the force. The servo-hydraulic machine is equipped

with a second force transducer which is a tubular aluminum bar instrumented with three strain gauges; this method is inspired by the work of [Othman *et al.* \(2009\)](#). Nevertheless, there are two differences. First, an aluminum tube rather than a steel rod is used here in order to increase the signal-to-noise ratio for soft materials as suggested by [Chen *et al.* \(1999\)](#). Second, the wave separation technique is not considered here; as the tube is 0.4 m long and the distance between gauges is about 0.15 m, the time for the wave to travel from one gauge to the other is about $30 \mu\text{s}$, and it is insignificant as compared with experiment duration. Thus, the tube can be considered as quasi-statically loaded, the signals of the three strain-gauges are averaged, and finally the force is deduced considering the Young modulus and the section of the tube. Obviously, the accuracy of the method is also related to the acquisition frequency of the gauge signals; for the different strain rates they are given in Table 1.2.

Strain rate of the test	0.01	10	100
Acquisition frequency (kHz)	0.1	100	500

Table 1.2: Frequencies used for the gauge signals

To summarize, a sketch of the experimental set-up is presented in Figure 1.5.

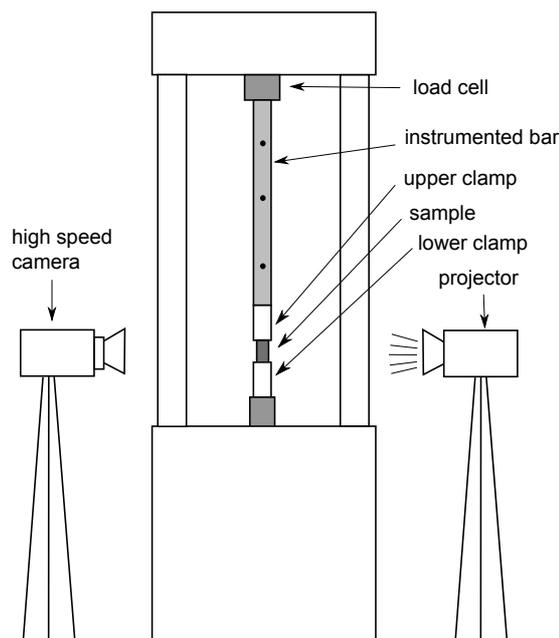


Figure 1.5: Experimental set-up

1.2.1.5 Experimental procedure

For a given sample, the procedure is as follow. First, five uniaxial extension cycles up to $\lambda = 2.6$ at a strain rate of 0.01s^{-1} are performed the day before the experiment to remove the Mullins effect. Second, after placing the painted sample in the grips, the initial length of the specimen, i.e. the length between grips, is measured and entered as an input in the LABVIEW program. Third, the strain rate is chosen and the function displacement vs. time is calculated by the LABVIEW program. Finally, the test starts.

1.2.2 Results and discussion

1.2.2.1 Measurement of strain and strain rate

As mentioned above, for each test and for each time, the stretch ratio at different positions in the sample is measured. The value of the stretch ratio at a given time is simply the mean value over the sample. Nevertheless, measured signals are noisy, and then we use the local polynomial interpolation smoothing technique proposed by [Othman *et al.* \(2010\)](#) to obtain a relevant signal. For each point of the stretch vs. time curve, 15 points before and 15 points after it are considered; the curve composed by these 31 points is then fitted with a second order polynomial function; finally the value of this function at the measurement point is considered as the stretch. With this method, the stretch vs. time curve is sufficiently smooth to calculate the true strain rate α by derivation. Figures [1.6](#), [1.7](#) and [1.8](#) present the stretch ratio vs. time and true strain rate vs. time curves for 0.01 s^{-1} , 10 s^{-1} and 100 s^{-1} respectively.

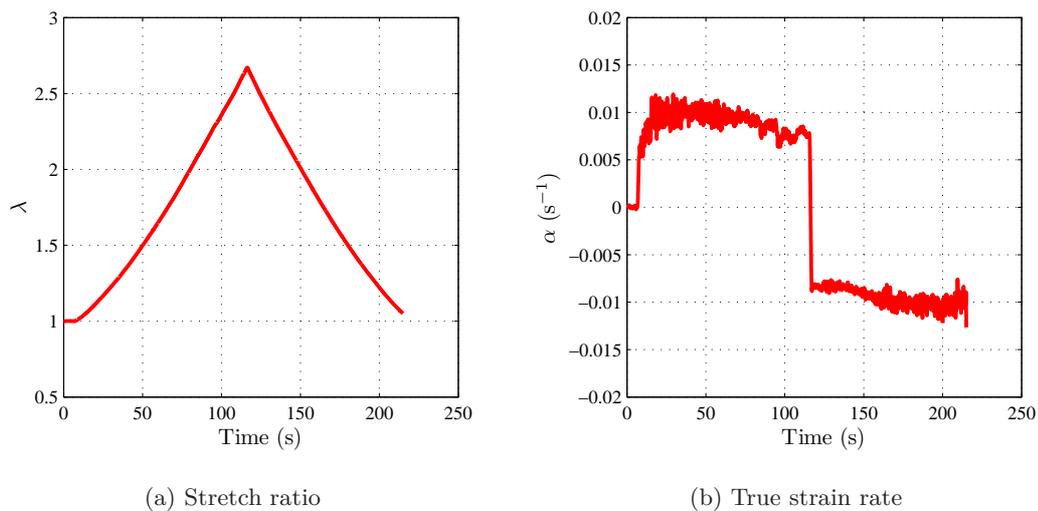
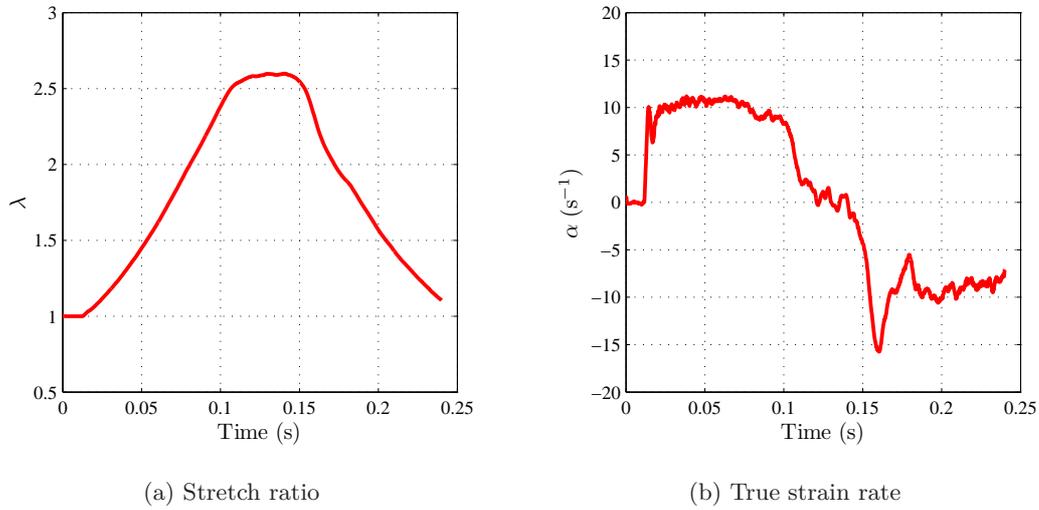
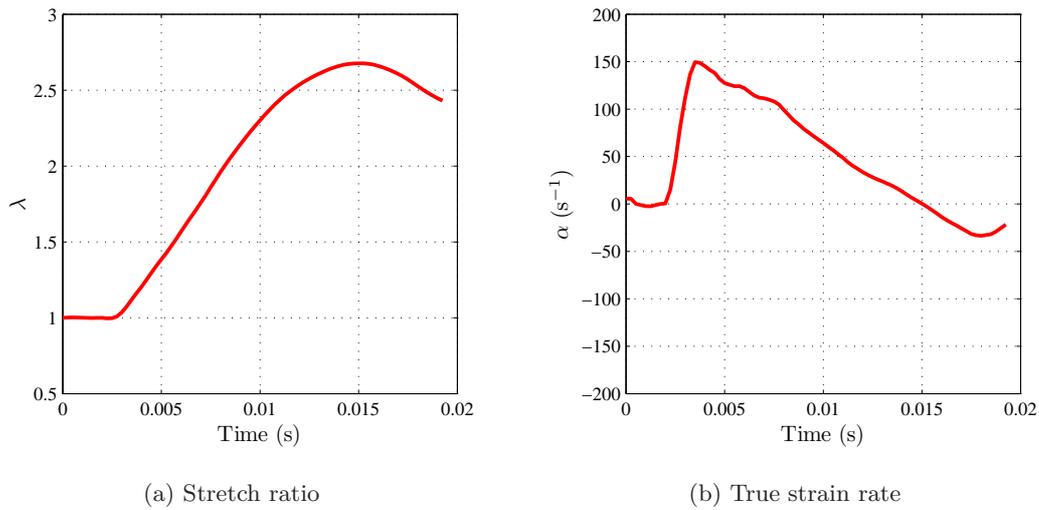


Figure 1.6: Stretch ratio and true strain rate at 0.01 s^{-1}

In order to discuss the method, we calculate the average true strain rate over loading and unloading parts of the cycles for each desired strain rate, and the corresponding standard deviation; the results are given in [Table 1.3](#). These results and the strain rate vs. time curves in [Fig. 1.6-1.8\(b\)](#) confirm that the set-up is well-designed and permits constant true strain rates experiments ranging from 0.01 to 10 s^{-1} . During experiments at 100 s^{-1} , the delay between the prescribed and the recorded displacements is more important than at lower strain rates. Moreover, only the loading part of the cycle has been prescribed in order to prevent the clamps to collide during unloading. In fact, at 100 s^{-1} we attained the limitations of the machine and we were not able to perform perfect constant true strain rates experiments. Note however that the strain rate recorded is not so far from the prescribed value (see [Fig. 1.8\(b\)](#)), and that the experiment leads to valuable information as well because we are able to record all the values during the test.

Figure 1.7: Stretch ratio and true strain rate at 10 s^{-1} Figure 1.8: Stretch ratio and true strain rate at 100 s^{-1}

Desired true train rate	0.01		10		100
	load	unload	load	unload	load
Average true strain rate	0.0091	-0.0095	9.9	-9.4	84
Standard deviation	0.0012	0.0009	0.93	1.93	42

Table 1.3: Average and standard deviation of the strain rate obtained

1.2.2.2 Measurement of stress

A hardware low-pass filter with a cut-off frequency of 10 kHz has been used for the tests at 0.01 s^{-1} because higher frequencies do not bring any information at this strain rate. For 10 and 100 s^{-1} , no hardware filter has been used in order to record the maximum

of data. Figures 1.9, 1.10 and 1.11 present (a) the data measured by the force cell, (b) the data measured by the three strain gauges and (c) the filtered signal for $\alpha = 0.01 \text{ s}^{-1}$, $\alpha = 10 \text{ s}^{-1}$ and $\alpha = 100 \text{ s}^{-1}$ respectively.

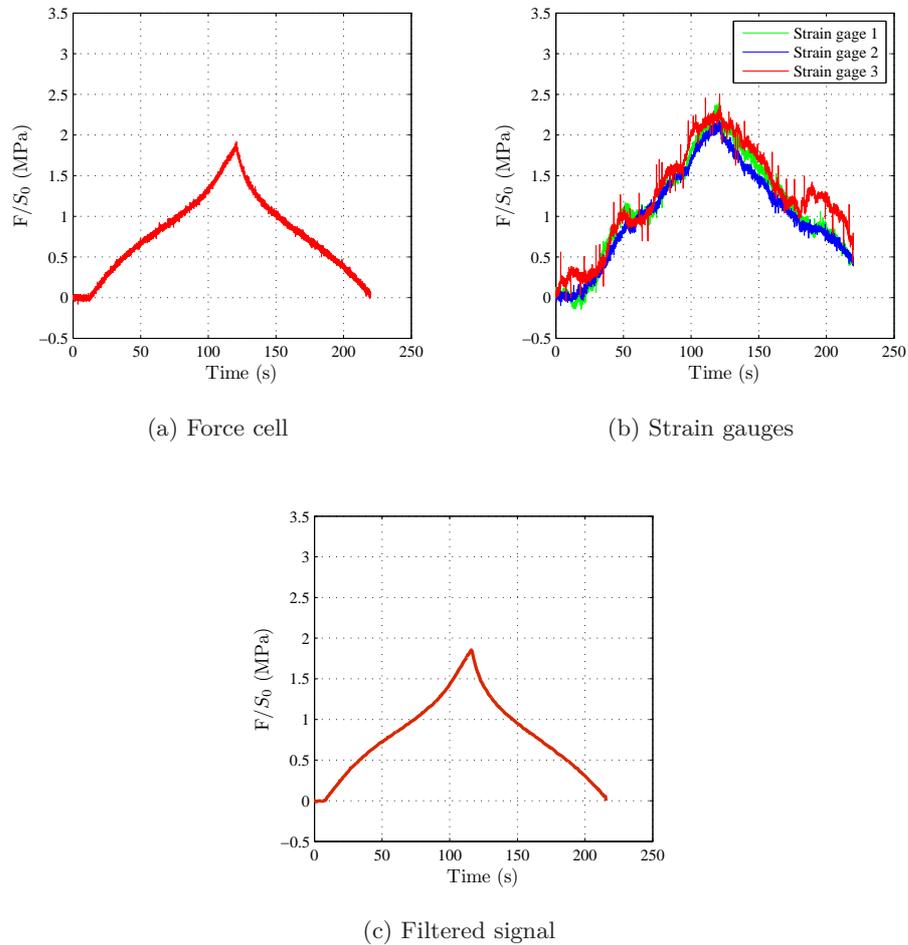


Figure 1.9: Engineering stress versus time for a strain rate $\alpha = 0.01 \text{ s}^{-1}$

As shown in Figure 1.9(a), and as expected, the force cell gives relevant results for low strain rates. On the contrary, as the strain rate increases noise and perturbation in signals are observed (see Figs 1.10 and 1.10(a)): natural frequencies of the force cell are excited in the intermediate strain rate range (Othman *et al.*, 2009). On the other hand, the signal recorded by the strain gauges placed on the aluminum bar gives good results at intermediate strain rates (see Figs 1.10-1.11(b)) but deviates for low strain rates (see Fig. 1.9(b)). This deviation is due to the heating of the bar because of the spotlight used to enlighten the sample.

Finally, for small strain rates (0.01 s^{-1}) we only consider the force cell to determine the stress. At intermediate strain rates ($10\text{-}100 \text{ s}^{-1}$), we only consider the gauge instrumented bar technique. As there is no noticeable time shifting between the three curves, the mean value over the three gages is considered instead of using a wave separation technique. A similar smoothing technique that the one considered for strain measurement is used to smooth the curves; in this case, 35 points before and 35 points after the considered point are taken into account. The final stress vs. time curves are shown in Figs 1.9-1.11(c).

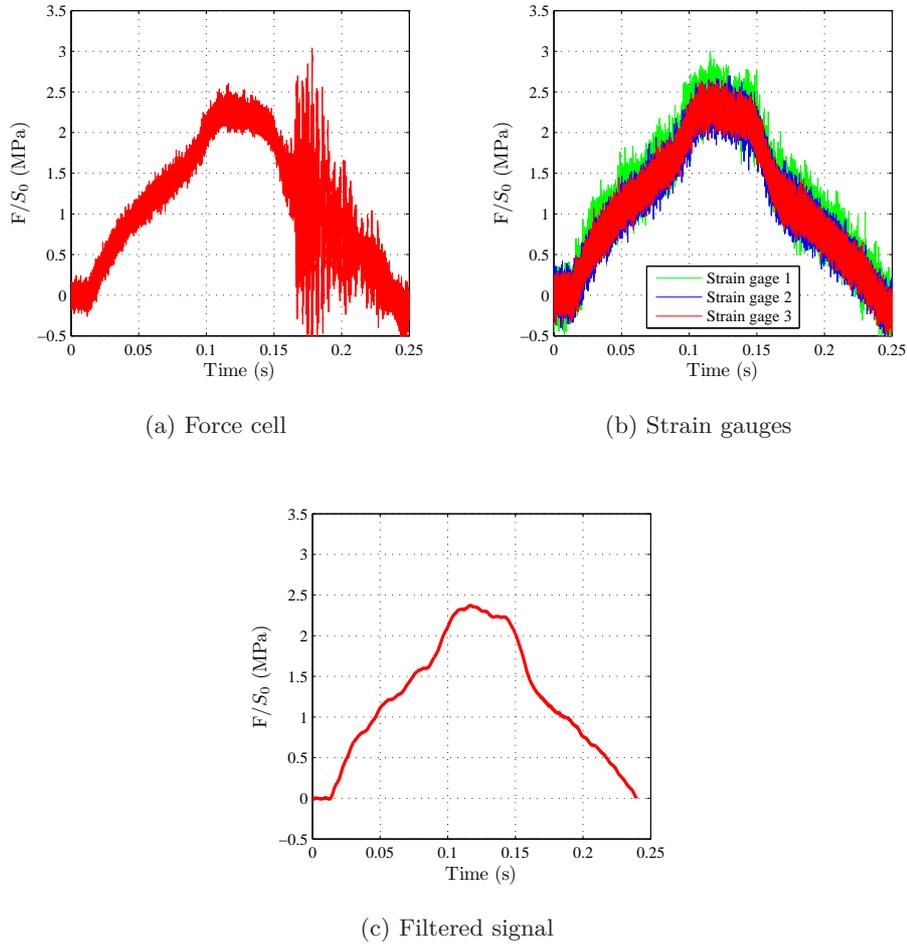


Figure 1.10: Engineering stress versus time for a strain rate $\alpha = 10 \text{ s}^{-1}$

1.2.2.3 Determination of the stress-strain response

In sections 1.2.2.1 and 1.2.2.2, we succeeded to measure stretch and stress versus time, respectively. However, the time line is not the same for both measurements because the acquiring hardwares are different. To synchronize the measurements, the starting time ($t = 0 \text{ s}$) is set by considering that the maximum stress and strain occurs at the same time. Moreover, as acquisition frequencies differ for stretch and stress, the time steps are different. Hence, the stretch and stress are interpolated with respect to the same time line.

Figures 1.12 and 1.13 present the stress-stretch relationship of SBR20 and SBR40 respectively, at several strain rates. Both materials experience an important strengthening as strain rate increases. Moreover, as shown in Figure 1.14(a), the initial stiffness, i.e. the slope of the stress-stretch curve at small strain, is more important for large strain rates: the initial stiffness of SBR20 at 100s^{-1} is more than three times the stiffness at 0.01s^{-1} , and the initial stiffness of SBR40 at 100s^{-1} is at least five times larger than the one at 0.01s^{-1} . Furthermore, Figs. 1.12 and 1.13 show that the hysteresis loop is larger for large strain rates. Even if we are unable to perform the unloading part of the cycles at 100s^{-1} , the reader can easily guess that the hysteresis loop at 100s^{-1} is more important than at 10 and 0.01s^{-1} . The larger is the hysteresis loop, the more important the dissipation;

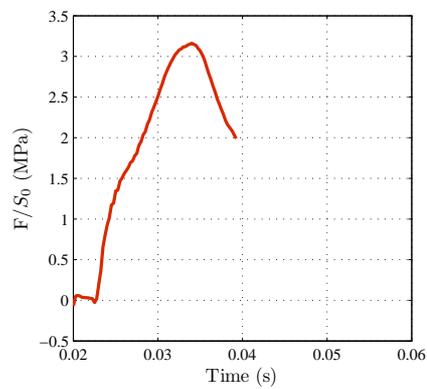
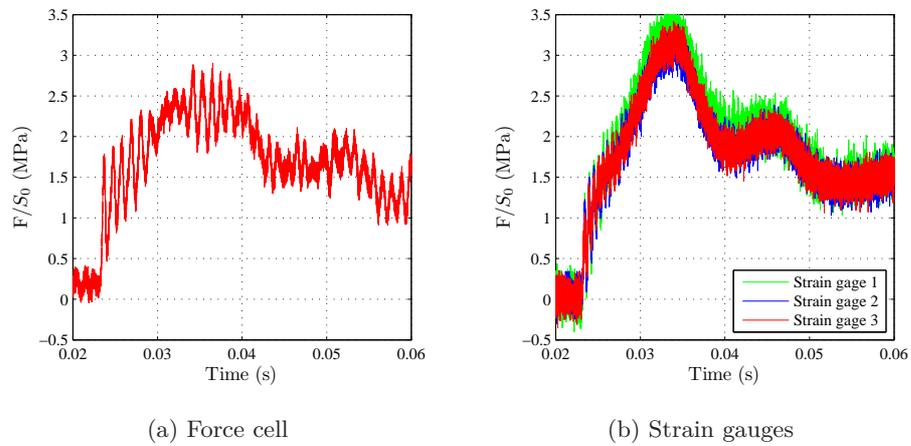
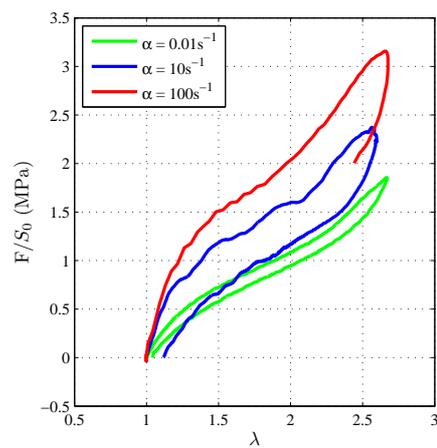
Figure 1.11: Engineering stress versus time for a strain rate $\alpha = 100 \text{ s}^{-1}$ 

Figure 1.12: Engineering stress with respect to stretch ratio for different strain rates for SBR20

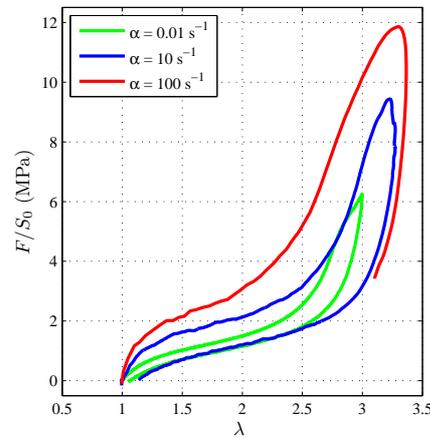
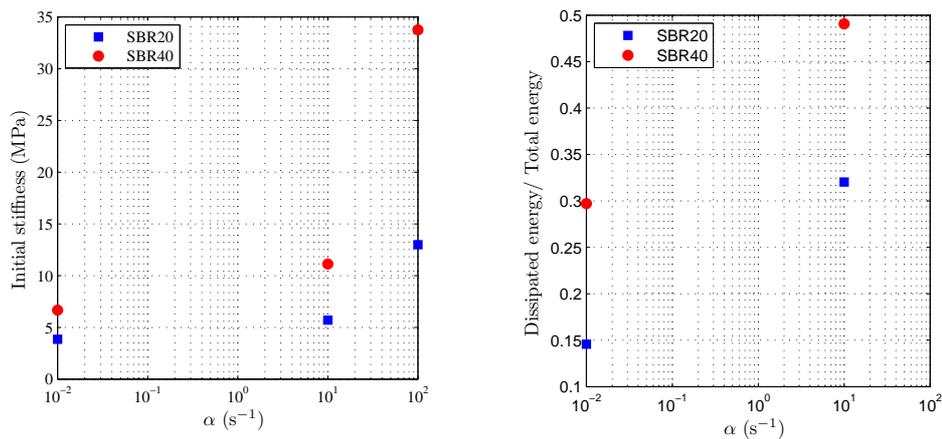


Figure 1.13: Engineering stress with respect to stretch ratio for different strain rates for SBR40



(a) Initial stiffness

(b) Ratio of dissipated energy over total energy

Figure 1.14: Dissipation and initial stiffness depending on the strain rate

therefore both materials exhibit dissipative properties that increase with the strain rate as shown in Fig. 1.14(b): the dissipation at 10s^{-1} is at least one and a half (1.5) times the dissipation observed under quasi-static loading conditions.

1.2.2.4 Discussion

The main objective of this study was to achieve constant true strain rate in uniaxial extension experiments of soft materials for large strain and intermediate strain rates.

- For strain rates up to 10s^{-1} , this aim is completely fulfilled as shown in Figs. 1.6(b) and 1.7(b).
- For 100s^{-1} , the task has been revealed harder. The strain rate measured during loading changes from 80 to 150 s^{-1} during the first 7 ms of the test. It shows that

we are able to attain the good order of magnitude for the strain rate. The major drawback of the largest strain rate test, i.e. at 100s^{-1} , is the difficulty to unload the specimen. Consequently, no data are available to estimate dissipation at this strain rate.

Our methodology has been applied to two SBR. The results highlight an important sensitivity of their response to strain rate.

- Namely, both materials exhibit strengthening as the strain rate increases; it is in good agreement with the observations of [Hoo fatt et Ouyang \(2008\)](#). Similar results were also obtained for polyurea ([Sarva et al., 2007](#); [Shim et Mohr, 2009](#)).
- As the strain rate increases, the hysteresis loop between the loading and the unloading parts of the cycle becomes larger and dissipation increases for both materials. There is no similar results in literature, so no comparison can be proposed for the dependence of dissipation on strain rate.

1.2.3 Compression sur machine hydraulique

Comme pour les essais de traction, le but est d'étudier le comportement en compression d'un élastomère en fonction de la vitesse de déformation. On étudiera la même gamme de vitesse de déformation à savoir de $0,01$ à 100 s^{-1} . Les essais de compression, de $0,01$ à 10 s^{-1} , ont été réalisés sur la machine de traction hydraulique rapide MTS 819 du laboratoire (référence BSN F1-10), utilisée pour les essais de traction. Les essais de compression à 100 s^{-1} seront détaillés dans la section suivante.

1.2.3.1 Éprouvette et déplacement imposé

Pour ces essais, les éprouvettes devaient avoir une épaisseur équivalente à celle des éprouvettes de traction (soit 4 mm) puisque ces éprouvettes ont été taillées dans des plaques de cette épaisseur. Cela permet de tester le matériau suivant la même orientation au cas où il y aurait anisotropie du comportement due à la fabrication. Partant de cette contrainte et du fait que l'éprouvette ne doit pas être trop petite afin de pouvoir effectuer des mesures, la géométrie de la figure 1.15 a été adoptée.

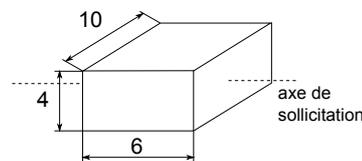


FIGURE 1.15 – Epreuve de compression (en mm)

Comme précédemment, on calcule la courbe de déplacement à partir de la vitesse de déformation que l'on souhaite imposer. On obtient de la même façon :

$$u = l_0(\exp(\alpha t) - 1) \quad (1.16)$$

où α est la vitesse de déformation (négative). Ces essais ont été effectués jusqu'à $\lambda = 0,5$. La courbe de déplacement correspondante est présentée sur la figure 1.16. Au fil de la déformation de l'éprouvette, le déplacement du vérin est ralenti et non accéléré comme en traction.

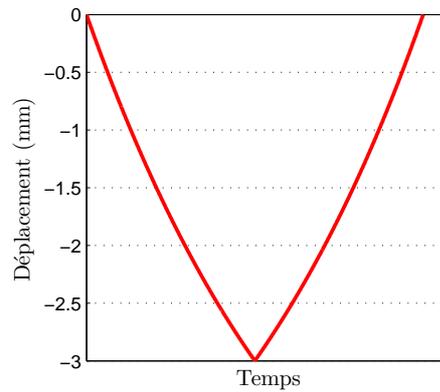


FIGURE 1.16 – Déplacement imposé lors d'un essai de compression

1.2.3.2 Mesures de déformation et de force

Pour mesurer les déformations, une caméra rapide est employée dans une configuration similaire à celle de la traction comme le montre la figure 1.17. Les images issues de la

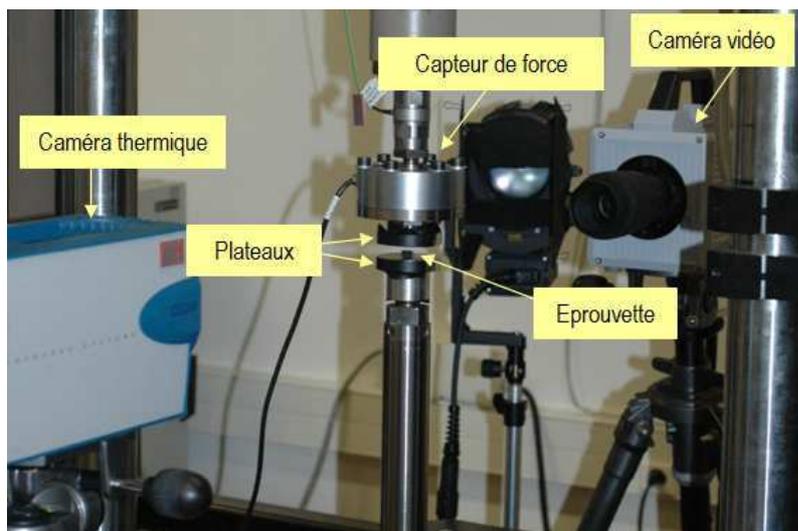


FIGURE 1.17 – Vue d'ensemble du dispositif de compression sur la machine MTS 819

caméra sont ensuite post-traitées par corrélation d'images, à l'aide du logiciel TEMA Automotive. Ce logiciel permet d'effectuer un suivi de points sur la séquence d'images. Pour la circonstance, six points sont placés sur la partie utile de l'éprouvette. La corrélation permet d'obtenir leurs ordonnées respectives X_1 et X_2 pour chaque image de la séquence. La dilatation $\lambda_i(t)$ peut ensuite être déterminée par l'équation (1.15).

Les paramètres caméra employés pour les essais sont donnés dans le tableau 1.4.

Vitesse de déformation (s^{-1})	0,01	0,1	1	10
Fréquence d'acquisition (i/s)	50	250	2000	10000
Résolution (pixels ²)	256×256			

TABLE 1.4 – Essais de compression sur MTS 819 - Paramètres caméra vidéo SA1

Pour la mesure de force, la barre instrumentée n'a pas été utilisée car pour des vitesses de déformations identiques à celles utilisées en traction, les vitesses de sollicitation sont plus faibles à cause des dimensions de l'éprouvette. Le capteur de force piézo-électrique de capacité ± 5 kN (référence J3-8), permet d'obtenir ici de bons résultats comme on peut le voir sur la figure 1.18. Deux plateaux en aluminium, qui sont enduits de graisse afin de limiter le frottement, permettent l'écrasement de l'éprouvette dans des conditions de « compression pure ».

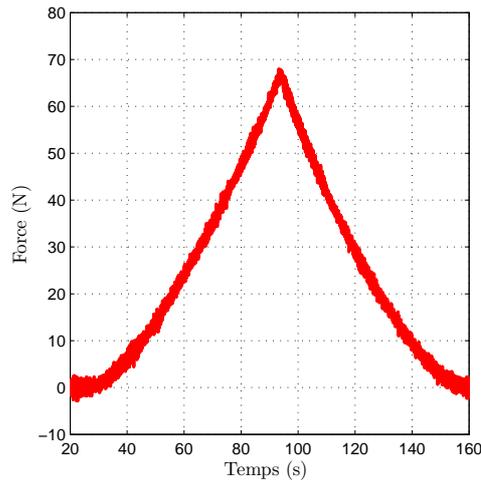


FIGURE 1.18 – Courbe effort-déplacement des essais de compression

Finalement, la procédure d'essais pour la compression est la même que pour la traction sauf que tous les cycles ont été effectués à un allongement maximal $\lambda = 0,5$.

1.2.4 Compression par barre tombante

Pour une vitesse de déformation de 100 s^{-1} , il n'est pas possible de réaliser les essais sur la machine hydraulique à cause des risques de dégradation du matériel expérimental. En effet, les déplacements, s'ils ne sont pas maîtrisés, peuvent conduire à la collision des plateaux inférieur et supérieur. Afin de s'affranchir de ces difficultés, nous avons mis au point un montage composé d'une barre verticale instrumentée qu'on laisse tomber sur un échantillon.

1.2.4.1 Déplacement imposé

Ce dispositif expérimental de la figure 1.19 allie le principe du puits de chute et la technique de mesure présentée dans la partie concernant la traction. Afin d'imposer la vitesse souhaitée, il faut donc déplacer la barre d'une certaine hauteur suivant la formule suivante :

$$z = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} \quad (1.17)$$

où z est le déplacement vertical de la barre, v la vitesse d'impact souhaitée et g l'accélération de la pesanteur.

Les éprouvettes utilisées sont les mêmes que pour les essais précédents et possèdent donc une hauteur de 6 mm. On obtient donc un déplacement z de 18 mm environ pour une vitesse de déformation de 100 s^{-1} . Sachant que cette formule ne prend pas en compte les frottements qui ont lieu au niveau des paliers qui guident la barre, un ajustement de la hauteur est effectué avant de réaliser les essais proprement dits.

Cependant, en utilisant cette méthodologie, le déplacement que l'on obtient dépend de la raideur de l'échantillon ainsi que de la masse de la barre ; on ne peut donc pas imposer le déplacement souhaité au cours du temps. Toutefois, avec une barre suffisamment lourde, on peut tendre vers une vitesse constante sur une part assez importante du chargement. Une masse en acier a donc été placée au dessus de la barre aluminium, afin d'obtenir le niveau d'énergie permettant de déformer suffisamment l'échantillon. On ne peut utiliser directement une barre acier sur laquelle seraient placées les jauges puisque l'impédance de la barre de mesure doit être suffisamment faible pour pouvoir enregistrer des déformations dans la barre lors de l'impact.

Puisque nous voulons imposer une vitesse de déplacement constante sur une part importante de l'essai (jusqu'à des élongations λ de 0,5) la déformation maximale imposée à l'échantillon est donc beaucoup plus importante que lors des essais sur machine hydraulique.

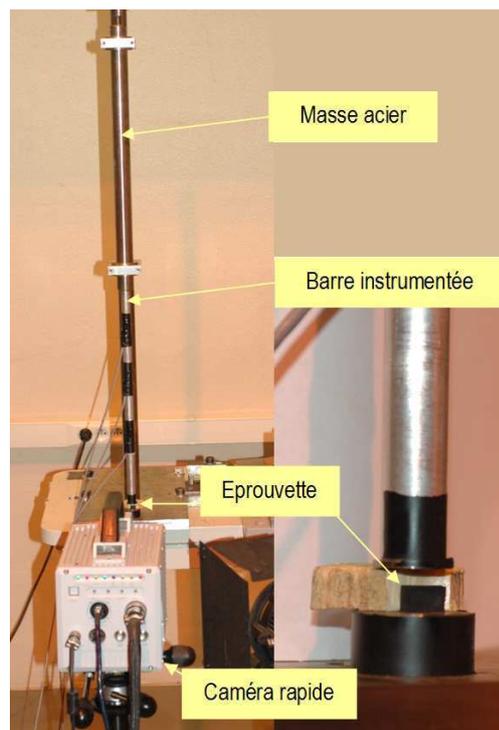


FIGURE 1.19 – Vue d'ensemble du dispositif de barre tombante

1.2.4.2 Mesures de force et de déformation

Au niveau des moyens de mesure, on utilise une caméra rapide qui filme l'éprouvette au cours de l'essai, ce qui permet ainsi d'obtenir la vitesse de déplacement du plateau supérieur et le champ de déformation sur une des faces de l'éprouvette, préalablement recouverte d'un mouchetis, comme cela a été présenté pour la traction et les essais de compression sur machine hydraulique. Les paramètres caméra employés pour ces essais

sont donnés dans le tableau 1.5.

Vitesse de déformation (s^{-1})	100
Fréquence d'acquisition (i/s)	30000
Résolution (pixels ²)	512×352

TABLE 1.5 – Essais de compression sur barre tombante - Paramètres caméra vidéo SA1

Pour la mesure des forces, on utilise la barre instrumentée qui comme pour les essais de traction, est en fait un tube en aluminium sur lequel ont été collés trois ponts de jauges de déformation qui permettent de déterminer la force exercée sur l'éprouvette.

L'aluminium et l'acier sont des matériaux dans lesquels les ondes passent rapidement ($c = \sqrt{E_{alu}/\rho_{alu}} \simeq \sqrt{E_{acier}/\rho_{acier}} \simeq 5200$ m/s) ce qui permet aux ondes de s'équilibrer dans la barre en un temps court comparé à celui de l'essai. On estime ce temps au temps d'un aller-retour dans le tube aluminium, soit environ $15 \mu s$. Ceci permet donc à la masse d'être « vue » de façon quasi-instantanée par l'éprouvette. Ces hypothèses ont été vérifiées *a posteriori* lors des essais. En effet, sur les mesures de force, on ne voit pas apparaître d'oscillations dues à la propagation d'ondes dans le tube. On peut donc considérer l'ensemble tube aluminium et masse acier comme un solide se déplaçant à une vitesse homogène. Toutefois, la mesure de force n'est pas directe. En effet, la barre instrumentée utilisée ici, et contrairement aux essais de traction, est mobile et subit donc des accélérations. Les mesures que l'on effectue peuvent alors être assimilées à l'accélération de la barre multipliée par la masse de la barre d'acier et de la portion du tube en aluminium présente au-dessus des jauges.

Si l'on considère uniquement la section de tube comprise entre deux jauges, dessinée sur la figure 1.20, et que l'on applique la seconde loi de Newton, on obtient :

$$F_1 - F_2 = m\gamma \quad (1.18)$$

où F_1 et F_2 sont les forces appliquées à chaque extrémité du tronçon, m la masse du tronçon et γ l'accélération globale de la barre.

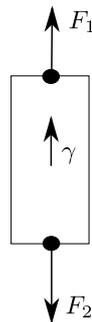


FIGURE 1.20 – Application du principe fondamental de la dynamique à un tronçon de barre

Les mesures de déformations obtenues par les jauges permettent de calculer la contrainte et la force. Il est donc possible à partir de deux mesures de force de déterminer l'accélération de la barre :

$$\gamma = \frac{F_1 - F_2}{m} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)S}{m} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)ES}{m} \quad (1.19)$$

où E est le module d'Young du matériau de la barre, S sa section, σ_1 et σ_2 les contraintes à chaque extrémité du tronçon, et ε_1 et ε_2 les déformations associées. A partir des mesures de forces obtenues par les trois jauges et en considérant chacun des trois tronçons, on peut ainsi déduire l'accélération moyenne de la barre. Connaissant la masse du tronçon de la barre placé entre les jauges et la platine qui vient écraser l'échantillon, on calcule donc la force exercée par l'échantillon sur la barre. Ainsi, sur la figure 1.21 où sont tracées les forces obtenues par les trois jauges au cours du temps ainsi que la force calculée, on peut voir que comme la barre subit une décélération lors de l'écrasement de l'éprouvette, la force exercée par l'éprouvette sur la barre est supérieure à la force enregistrée par les jauges. La différence entre les jauges et la force calculée est évidemment la plus importante pour le maximum de force, c'est-à-dire le moment où la décélération est maximale.

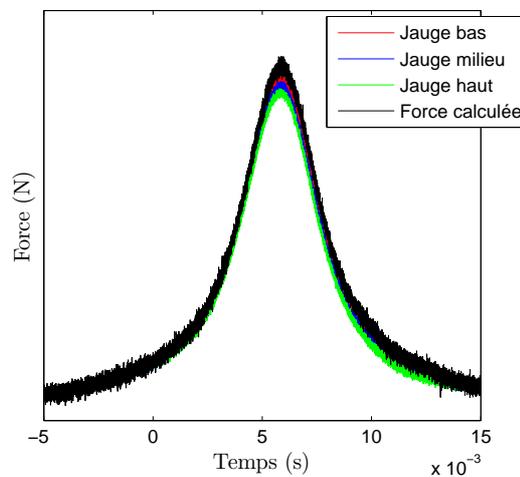


FIGURE 1.21 – Forces enregistrées par les jauges et force calculée

1.2.4.3 Protocole d'essai

Comme pour les essais de compression sur machine hydraulique, cinq cycles de chargement jusqu'à $\lambda = 0,5$ ont été effectués avant les essais, ce qui permet de s'affranchir de l'effet Mullins. Cependant, seule la charge jusqu'à une déformation $\lambda = 0,5$ pourra être considérée durant les essais : au delà, l'effet Mullins est activé et les déplacements hors de la profondeur de champ de la caméra ne permettent pas une mesure de déformation correcte.

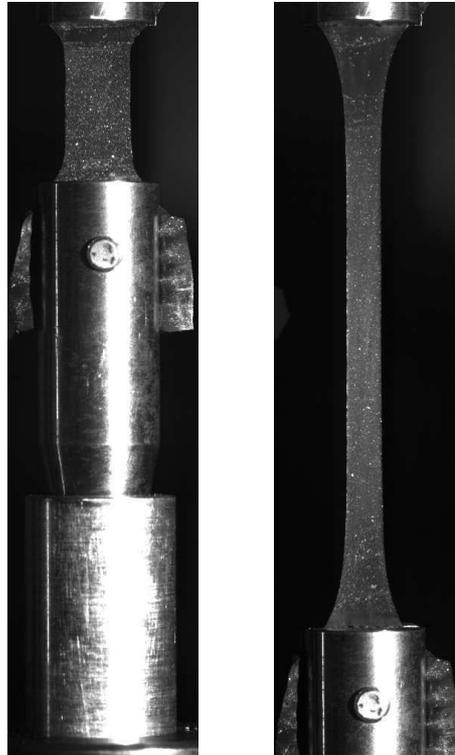
1.3 Application au matériau d'étude

Le matériau étudié est un caoutchouc naturel chargé aux noirs de carbone utilisé dans les plots de suspension de la marine. La composition exacte du mélange n'est cependant pas connue.

Pour définir l'évolution du comportement du caoutchouc, cinq vitesses de déformation ont été considérées (et non pas trois comme pour les essais de traction sur les SBR) : $0,01 \text{ s}^{-1}$, $0,1 \text{ s}^{-1}$, 1 s^{-1} , 10 s^{-1} et 100 s^{-1} . Pour chacune de ces vitesses, des essais de traction et de compression ont été effectués dans les conditions de la méthodologie définie dans la partie précédente.

1.3.1 Traction

Ces essais sont effectués jusqu'à une élongation $\lambda = 4$ comme le montre la figure 1.22.



(a) Eprouvette au repos (b) Eprouvette étirée

FIGURE 1.22 – Eprouvette de traction lors de l'essai

1.3.1.1 Homogénéité de la déformation dans l'éprouvette

Une zone correspondant au milieu de l'éprouvette (voir fig. 1.4) a été définie afin de mesurer les déformations. Dans cette zone, à l'aide du logiciel de suivi de points TEMA, trois courbes de l'élongation λ en fonction du temps ont pu être obtenues à partir du placement de six points sur l'éprouvette comme on peut le voir sur la figure 1.4. La figure 1.23 présente, pour les différentes vitesses de déformation, les trois élongations que l'on a recueillies sur un même essai.

On voit que pour chaque vitesse ces différentes courbes sont globalement proches, attestant ainsi de l'homogénéité de la déformation dans la zone considérée. Cependant, plus la vitesse imposée est importante, plus les écarts sont importants. Cette différence est sûrement due au défaut de coaxialité qui existe entre les mors du haut et du bas. A faible vitesse, ce défaut est automatiquement corrigé par la simple raideur de l'éprouvette. Cependant, aux hautes vitesses, les mors n'ont pas le temps de se remettre en face : il y a oscillation autour de l'axe vertical.

On remarque aussi que sur les premiers instants de déformation, à 100 s^{-1} , le champ de déformation n'est pas homogène dans toute l'éprouvette, car on aperçoit une onde de propagation de la déformation passer dans le matériau comme le montre la figure 1.24. En augmentant la vitesse de déformation de l'éprouvette, on augmente la vitesse de déplacement du vérin qui s'approche ici d'une vitesse de propagation d'onde de déformation

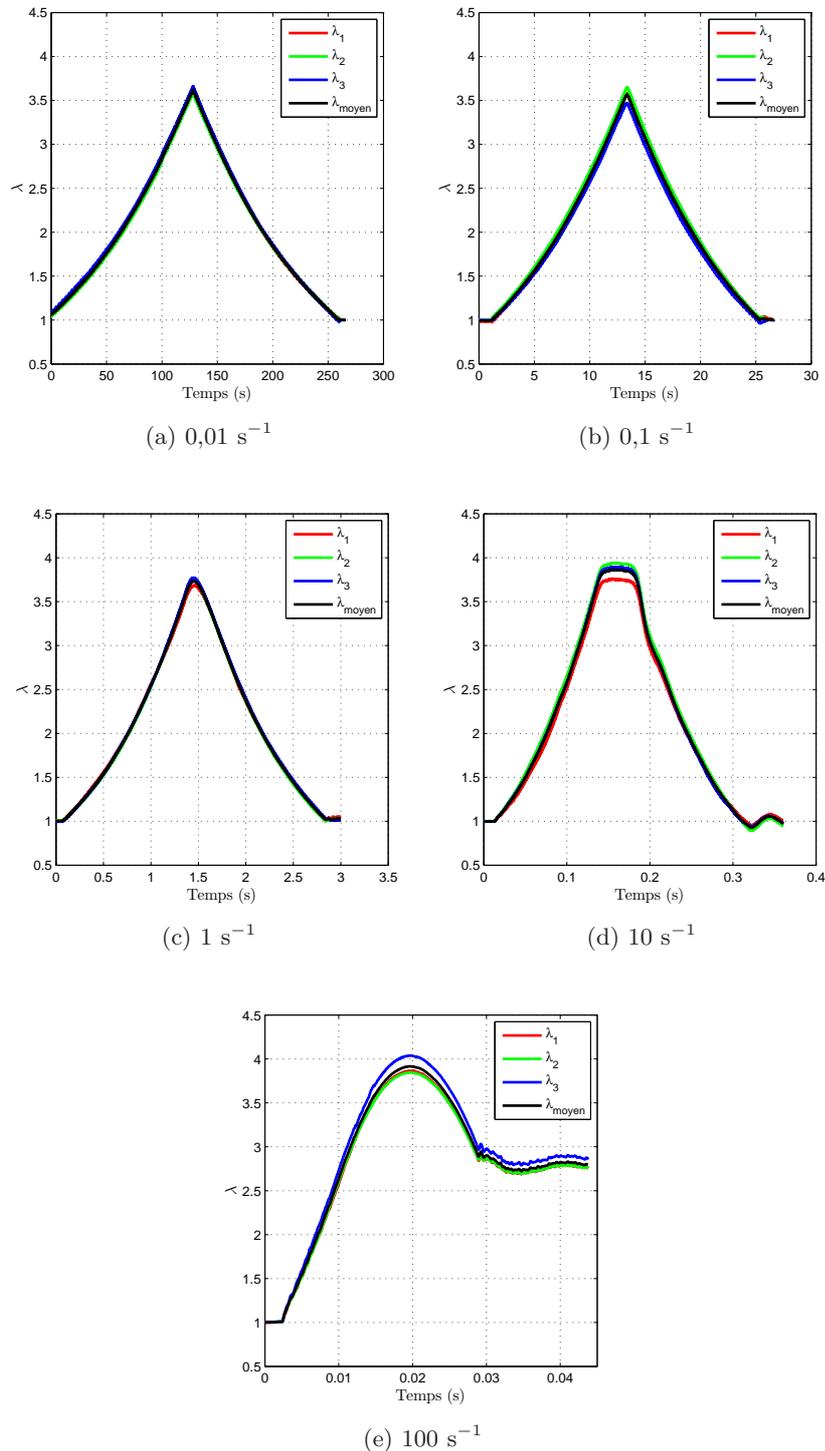


FIGURE 1.23 – Elongations recueillies pour différentes vitesses

dans le matériau. Cependant, sans avoir filmé la tranche de l'éprouvette, il n'est pas possible de déterminer s'il s'agit d'onde de traction ou de flexion. Si on considère que le matériau est incompressible, les ondes de traction se propagent à vitesse infinie et il ne peut alors s'agir que d'onde de flexion. Le but de la méthodologie d'essais mise en place était

de faire des essais à vitesse de déformation vraie constante. On atteint donc les limites de la méthode puisqu'on n'a plus homogénéité du champ de déformation et donc des vitesses de déformation. Cette limite est imposée par la vitesse de propagation des ondes dans le matériau.

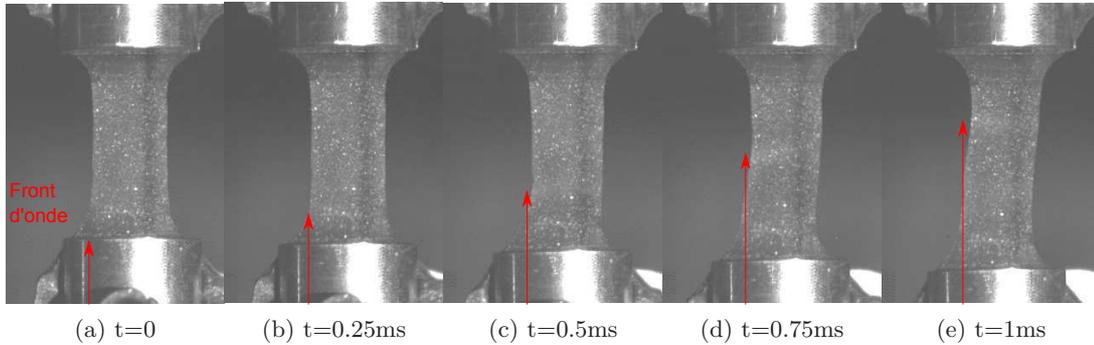


FIGURE 1.24 – Propagation d'onde dans le matériau à 100s^{-1}

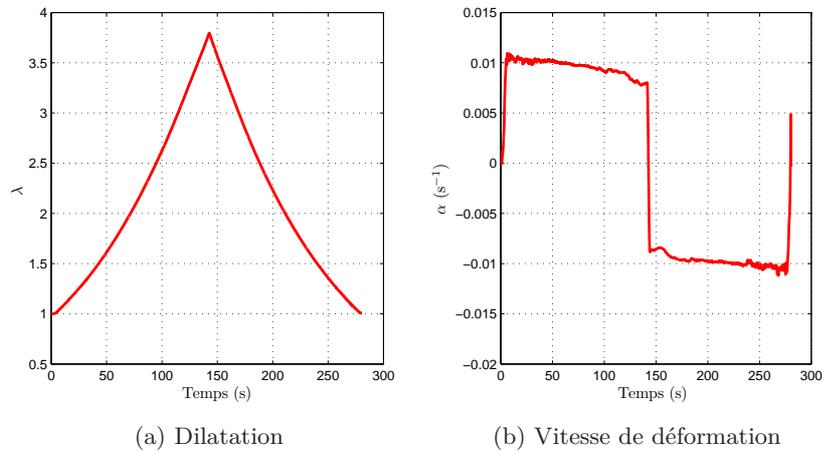
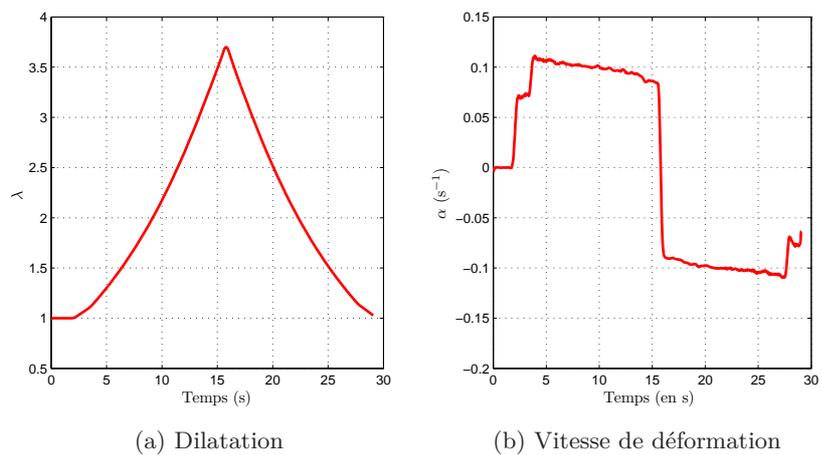
On peut donc considérer le champ de déformation comme homogène jusqu'à 10 s^{-1} . Il reste à vérifier que l'on impose bien une vitesse de déformation vraie constante au cours de l'essai.

1.3.1.2 Elongation et vitesse de déformation

Après avoir fait une moyenne des différentes courbes d'élongation pour chaque essai et calculé leur moyenne pour chacune des vitesses de déformation que l'on souhaite imposer, on obtient, après filtrage, les courbes d'élongation ($\lambda = l(t)/L_0$) et de vitesse de déformation vraie $\alpha(t) = \partial(\ln(\lambda(t))/\partial t$). Les résultats sont très similaires à ceux obtenus pour les deux SBR. Ainsi, pour les faibles vitesses de déformation ($\leq 1\text{ s}^{-1}$), les figures 1.25, 1.26 et 1.27 montrent que la méthodologie mise en place fonctionne parfaitement et permet donc d'obtenir des vitesses de déformation réelles quasiment constantes, que ce soit lors de la charge ou de la décharge. Pour $0,1\text{ s}^{-1}$ (voir fig.1.26), la vitesse de déformation montre un premier palier à $0,07\text{ s}^{-1}$ avant de passer à $0,1\text{ s}^{-1}$. Ceci est en fait un artefact dû à la moyenne qui a été effectuée sur les différents essais. En effet, pour certains essais, la déformation qui est atteinte est un peu plus faible, mais la pente de la courbe est la même. La durée de chargement est donc elle aussi plus faible. Ainsi, en nous basant sur le maximum de déformation pour remettre les courbes sur une même échelle de temps, permettant d'effectuer la moyenne, on obtient des courbes où la déformation commence à augmenter alors que pour certaines autres, la déformation est encore nulle. Néanmoins, malgré cette approximation, les résultats sont très satisfaisants.

A 10 s^{-1} , le contrôle de la vitesse de déformation est un peu moins précis comme le montre la figure 1.28. Si, pour la charge on obtient de très bons résultats, lors de la décharge, l'asservissement est un peu moins satisfaisant et il y a donc des oscillations plus marquées.

A 100 s^{-1} , on n'effectue pas de décharge et la valeur de la déformation maximum entrée dans le programme est plus faible. En effet, comme on atteint les limites de la machine, on observe un fort dépassement de la consigne et on risque de casser une pièce en revenant à la position initiale. Cependant, on se rend compte sur la figure 1.29 que pour la charge, la vitesse de déformation que l'on obtient est dans le bon ordre de grandeur. Ces essais sont donc parfaitement exploitables, même s'ils ne rentrent pas tout à fait dans le cadre des

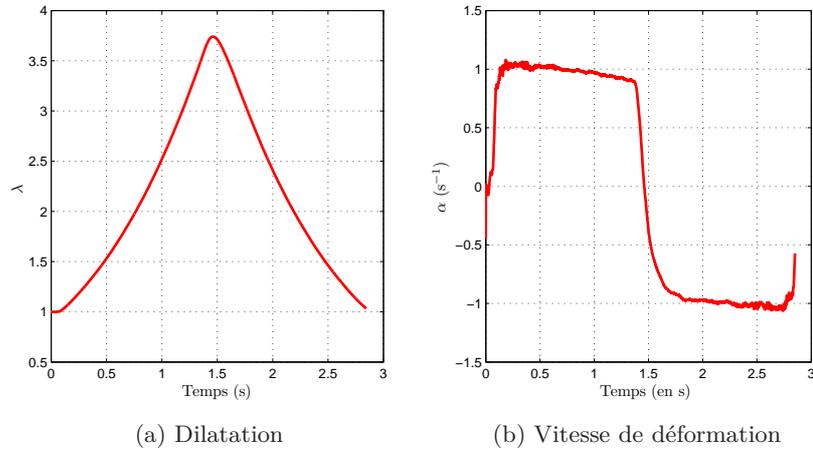
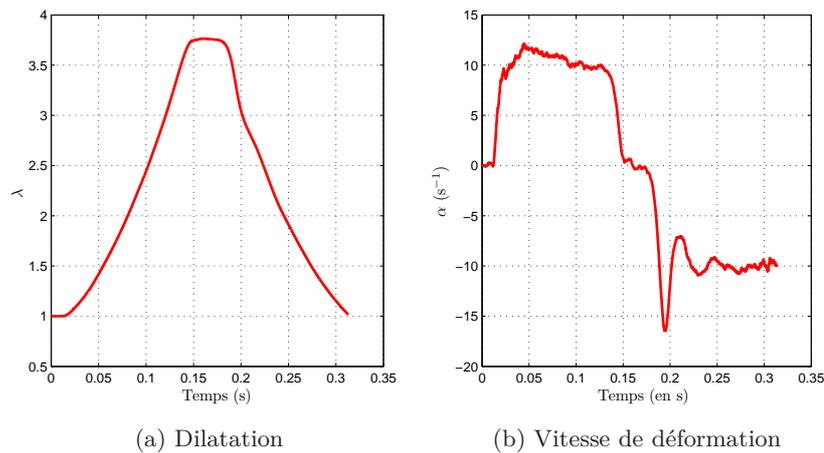
FIGURE 1.25 – Dilatation et vitesse de déformation vraie à $0,01 \text{ s}^{-1}$ FIGURE 1.26 – Dilatation et vitesse de déformation vraie à $0,1 \text{ s}^{-1}$

essais à vitesse de déformation vraie constante.

1.3.1.3 Courbes contrainte-déformation

De la même façon que pour la dilatation, une moyenne des forces obtenues pour les différents essais effectués à même vitesse est faite. A partir de ces courbes de force, on obtient, après filtrage, des courbes lissées de contrainte en fonction du temps. En corrélant les courbes de contrainte en fonction du temps et d'élongation en fonction du temps, on obtient la figure 1.30 qui présente les courbes de contrainte-élongation pour les différentes vitesses de déformation imposées.

On peut tout d'abord remarquer que les courbes relatives aux différentes vitesses sont relativement proches, notamment pour les vitesses de déformation inférieures à 100 s^{-1} . A 100 s^{-1} , on se détache un peu plus des autres courbes. L'énergie dissipée lors des essais semble relativement faible pour les vitesses de déformation inférieures à 100 s^{-1} . A 100 s^{-1} , l'énergie dissipée semble plus importante. Cependant, il est difficile de la comparer aux autres puisque le cycle n'est pas complet et qu'il ne suit pas une courbe telle que nous

FIGURE 1.27 – Dilatation et vitesse de déformation vraie à 1 s^{-1} FIGURE 1.28 – Dilatation et vitesse de déformation vraie à 10 s^{-1}

l'avons spécifiée pour les autres vitesses. Le caractère viscoélastique du matériau de notre étude, bien que présent, semble donc assez faible. On ne semble l'activer que pour les plus hautes vitesses de déformation considérées ici.

1.3.2 Compression

Que ce soit pour les essais de compression sur la machine hydraulique ou sur la barre, on remarque sur la figure 1.31 que, malgré la lubrification des plateaux, on ne peut pas éviter l'effet « tonneau » résultant du frottement entre les plateaux et l'éprouvette. Celui-ci prouve que le champ de déformation n'est pas homogène dans l'éprouvette pour la durée de l'essai. Ainsi, bien que le signal de déplacement en exponentielle décroissante soit convenablement généré, ceci empêche d'une part d'imposer une vitesse de déformation constante au cours de l'essai, mais aussi d'obtenir une courbe contrainte-déformation. En effet, même s'il était possible de mesurer une déformation en surface de l'éprouvette grâce à la corrélation d'images, il est impossible de connaître les déformations à l'intérieur de l'éprouvette. De plus, la condition d'homogénéité de la transformation n'étant pas

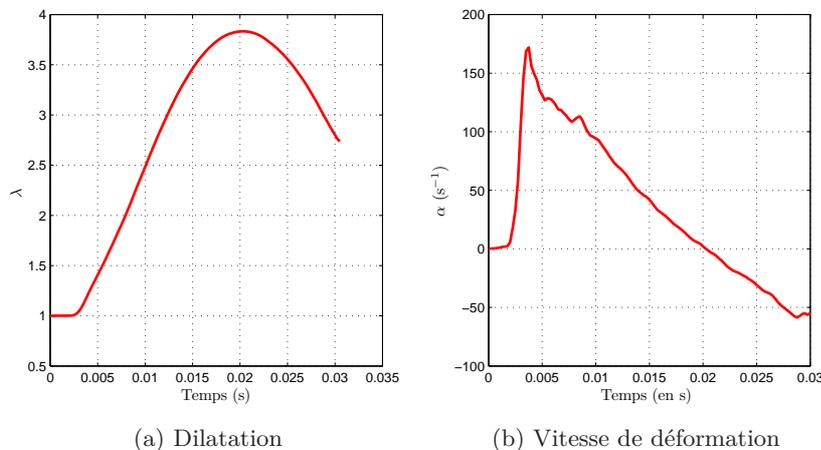
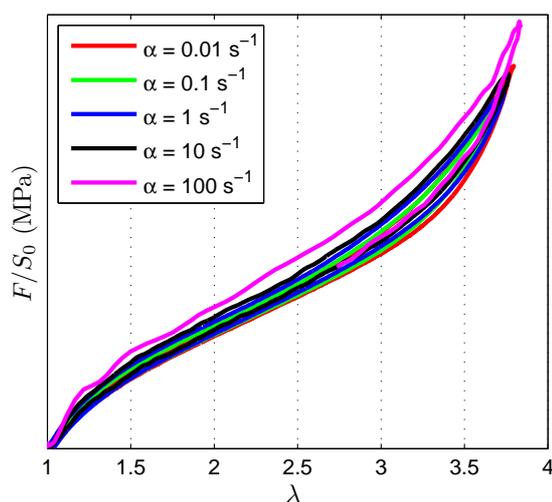
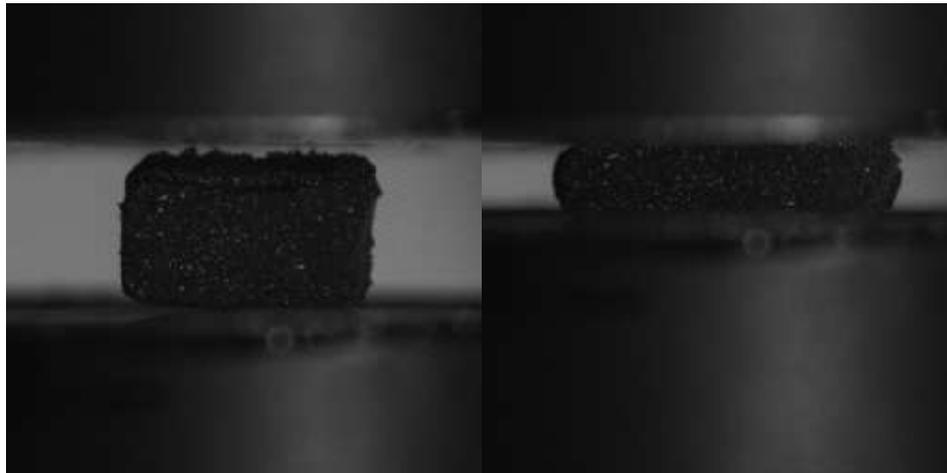
FIGURE 1.29 – Dilatation et vitesse de déformation vraie à 100 s^{-1} 

FIGURE 1.30 – Contrainte nominale-élongation pour différentes vitesses de déformation

respectée, on ne peut calculer la contrainte. On remarque aussi que certaines éprouvettes flambent sur leur hauteur; ceci est sans doute dû à leur géométrie. En effet, celles-ci ont été découpées au jet d'eau et les éprouvettes ainsi obtenues ne sont pas parfaitement parallélépipédiques et ont une certaine variabilité au niveau des cotes.

Les résultats de ces essais ne sont donc pas exploitables directement. Cependant, après recalage des modèles en traction, des essais numériques pourront être effectués pour voir si on obtient les mêmes réponses ou au moins les mêmes ordres de grandeur. Ils serviront ainsi d'essais de validation. Pour cela on se basera sur les courbes effort-déplacement obtenues lors de ces essais et présentées sur la figure 1.32.

Ces courbes mettent en évidence une certaine rigidification du matériau avec la vitesse de déformation en accord avec la bibliographie. Cependant, pour des déplacements supérieur à 2 mm, la courbe force-déplacement à $0,01 \text{ s}^{-1}$ présente des forces plus importantes que celles à $0,1 \text{ s}^{-1}$. Il faut noter que cette impression est peut-être trompeuse car beaucoup de paramètres peuvent influencer sur le comportement obtenu : le frottement qui dépend peut-être de la vitesse et de la quantité de graisse appliquée, la forme de l'éprouvette, l'im-



(a) Epreuve non comprimée

(b) Epreuve comprimée

FIGURE 1.31 – Effet tonneau sur éprouvette de compression

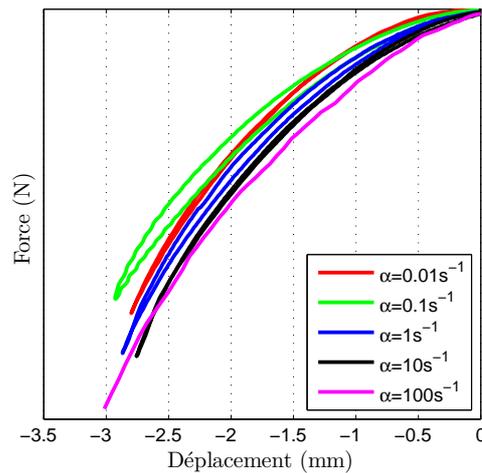


FIGURE 1.32 – Courbe effort déplacement des essais de compression

précision des cotes... Cependant, ces essais permettent de déterminer un ordre de grandeur des forces mises en jeu qui sera très utile pour la partie simulation de notre étude.

1.4 Conclusion

Une méthode d'essais de traction uniaxiale à vitesse de déformation vraie imposée constante a été développée. Elle fournit de bons résultats pour des vitesses de déformation allant de $0,01$ à 10 s^{-1} . A 100 s^{-1} , on atteint les limites de la méthode, puisqu'on n'arrive pas à imposer exactement le déplacement souhaité. De plus, la vitesse appliquée doit approcher la vitesse de propagation d'onde dans le matériau puisque le passage d'une onde est identifiée pour les premiers pourcentages de déformation. Ceci permet cependant de se faire une idée assez juste des phénomènes présents à ces vitesses de déformation.

Les essais de compression qui ont été effectués d'une part sur une machine hydraulique et d'autre part en utilisant un dispositif de type « barre tombante » conçu durant la thèse,

ne donnent pas de résultats aussi intéressants que la traction puisque les frottements entre l'éprouvette et les plateaux génèrent des inhomogénéités qui ne permettent pas d'obtenir une courbe contrainte-déformation.

Les résultats de traction montrent cependant que notre matériau présente un caractère viscoélastique beaucoup plus faible que les deux SBR qui ont été testés par ailleurs. Bien que celle-ci soit faible, il y a cependant rigidification du matériau avec la vitesse de déformation. Cet effet se produit probablement en compression aussi. Cependant, même si des différences entre les courbes apparaissent, nous n'observons pas d'évolution logique. Les différences peuvent notamment s'expliquer par des conditions de frottement différentes entre les essais.

Chapitre 2

Modélisation

Les élastomères étant des matériaux présentant de multiples non linéarités, la modélisation de leur comportement a fait l'objet de beaucoup d'études et est un problème toujours d'actualité. De nombreuses théories ont été développées pour permettre de modéliser ce comportement. Ainsi, les modèles hyperélastiques conviennent parfaitement pour des sollicitations quasi statiques, mais aussi à très grandes vitesses de déformation (voir [Hoo Fatt et Bekar \(2004\)](#)), afin de reproduire le comportement en grandes déformations de ces matériaux. La dépendance à la vitesse de déformation dans le cadre des petites déformations est elle aussi bien maîtrisée grâce à l'utilisation de modèles viscoélastiques linéaires. Cependant, dans le cadre de notre étude, il nous faut modéliser le comportement en grandes déformations et la dépendance à la vitesse de déformation, ce qui est beaucoup plus compliqué. Les modèles utilisés doivent permettre de prendre en compte la dissipation d'énergie ainsi que la rigidification avec la vitesse de déformation observée lors des essais. Pour cela nous utiliserons des modèles viscoélastiques en grandes déformations. La figure 2.1 reprend les différents cas de chargement possibles et les modèles associés.

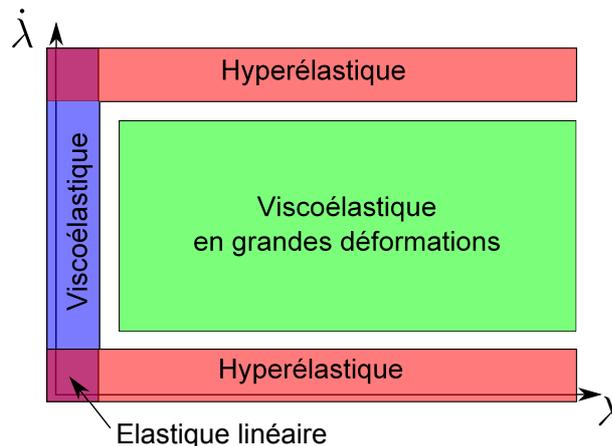


FIGURE 2.1 – Domaine d'application de chaque modèle

Dans le cadre des modèles viscoélastiques en grandes déformations, il existe, entre autres, deux approches différentes qui ont été largement utilisées. Dans ce chapitre, on rappelle dans un premier temps les bases de ces modèles. Une comparaison des deux approches existantes est ensuite effectuée. Enfin, la loi de comportement qui a été utilisée pour notre étude est présentée avec le recalage des paramètres effectué à partir des essais de traction présentés dans le chapitre précédent.

2.1 Modèles de comportement viscoélastique en grandes déformations

Les modèles viscoélastiques en grandes déformations qui nous intéressent dans le cadre de cette étude se basent à la fois sur l'hyperélasticité et la viscoélasticité linéaire. Pour cette raison, on rappelle, très brièvement, dans un premier temps, ces deux théories avant de présenter plus en détails les modèles viscoélastiques, et plus particulièrement deux des approches qui ont été le plus fortement utilisées.

Remarque La partie bibliographique sur les modèles est succincte et s'inspire pour beaucoup de [Bever \(1992\)](#), [Verron \(2003\)](#) ou encore [Amin et al. \(2006\)](#). Le but est avant tout de rappeler les éléments nécessaires à la compréhension des travaux effectués.

2.1.1 Hyperélasticité et viscoélasticité linéaire

2.1.1.1 Hyperélasticité

L'élasticité caractérise l'aptitude d'un solide à se déformer et à reprendre sa forme initiale après suppression de la sollicitation, tout cela sans dissipation d'énergie. L'hyperélasticité suppose l'existence d'une énergie de déformation W permettant de lier l'état de déformation à l'état de contrainte. Le principe d'objectivité permet d'exprimer cette énergie en fonction du tenseur de Cauchy Green droit $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$. On peut ainsi en déduire une expression du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad (2.1)$$

où \mathbf{F} est le tenseur gradient de la transformation et $J = \det \mathbf{F}$. Pour un matériau isotrope, on peut écrire W en fonction des invariants, I_1 , I_2 et I_3 , de \mathbf{C} ou encore de ses valeurs propres λ_i^2 . On obtient donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \left[I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{I} + \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^2 \right] \quad (2.2)$$

Pour un matériau incompressible, le troisième invariant $I_3 = \det \mathbf{C}$ est égal à l'unité. On obtient ainsi une autre expression du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^2 \quad (2.3)$$

$$= -p \mathbf{I} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \quad (2.4)$$

où p est la pression hydrostatique qui permet d'assurer l'incompressibilité de la réponse mécanique.

La difficulté majeure reste donc d'exprimer l'expression de l'énergie libre de déformation W . De nombreuses expressions ont été développées dans la littérature ; elles sont basées sur des approches phénoménologiques (par exemple : [Mooney \(1940\)](#); [Rivlin \(1948a,b\)](#); [Ogden \(1972\)](#)) ou physiques (par exemple : [Treloar \(1943\)](#); [James et Guth \(1943\)](#); [Arruda et Boyce \(1993\)](#)). Les approches physiques permettent de proposer des expressions dépendant de la micro-structure du matériau et plus particulièrement du réseau moléculaire. Les approches phénoménologiques, quant à elles, proposent des fonctions mathématiques permettant de décrire directement le comportement macroscopique du matériau. Pour un résumé et classement des modèles existants, le lecteur peut se référer à [Marckmann et Verron \(2006\)](#).

2.1.1.2 Viscoélasticité linéaire

La viscosité traduit la capacité d'un matériau à dissiper de l'énergie sans endommagement de celui-ci. Cela s'applique aussi bien aux solides qu'aux liquides. Les théories linéaires utilisées dans ce cadre sont parfaitement établies (voir pour plus de détails : [Christensen \(1982\)](#); [Tschoegl \(1989\)](#); [Wineman et Rajagopal \(2000\)](#)).

Les modèles qui sont utilisés reposent sur des schémas rhéologiques composés de ressorts (solide élastique) et d'amortisseurs (fluide visqueux), pour décrire le comportement uniaxial. Ainsi, on utilise souvent deux modèles de base : le modèle de Maxwell et le modèle de Kelvin-Voigt dont les schémas rhéologiques sont représentés sur la figure 2.2a et 2.2b. Cependant ces deux modèles ne permettent pas de modéliser le comportement global d'un matériau viscoélastique. En effet, le premier ne permet pas de prendre en compte le phénomène de fluage tandis que le second ne saurait représenter le phénomène de relaxation. Ils sont donc combinés afin de parfaire leur représentativité d'un matériau. On obtient par exemple les modèles de Zener et de Poynting-Thomson (voir fig. 2.2c et 2.2d). Cela conduit à des équation différentielles qui lient la contrainte et la déformation. Ces modèles ont été étendus au cas tridimensionnel en utilisant la forme tensorielle.

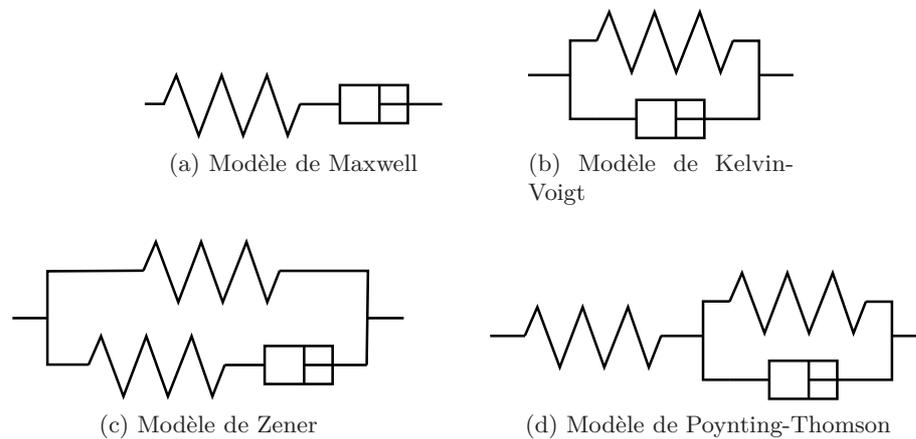


FIGURE 2.2 – Modèles viscoélastiques

Une autre approche de la viscoélasticité repose sur l'utilisation du principe de Boltzmann (voir [Ward \(1983\)](#) par exemple) selon lequel la contrainte dépend non seulement de la déformation à un instant donné mais aussi de toute l'histoire des déformations. Ainsi, chaque chargement va amener une contribution différente qui sera ensuite additionnée aux autres afin d'obtenir la réponse du modèle. Ainsi, pour le cas isotrope, on trouve la relation contrainte-déformation :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_{-\infty}^t \lambda(t - \tau) \frac{d}{d\tau} [\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}(\tau)] d\tau + \int_{-\infty}^t 2\mu(t - \tau) \frac{d}{d\tau} [\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)] d\tau \quad (2.5)$$

où λ et μ sont respectivement les modules de relaxation de compressibilité et de cisaillement ([Haddad \(1988\)](#)), qui sont en quelque sorte les équivalents viscoélastiques des coefficients de Lamé. C'est l'intégrale de convolution sur le temps qui permet ici de modéliser le comportement dissipatif du matériau.

Ces deux approches conduisent à des résultats identiques en petites déformations.

2.1.2 Viscoélasticité en grandes déformations

Les modèles hyperélastiques ne prenant pas en compte la dissipation d'énergie qui apparaît dans le matériau, et les modèles viscoélastiques linéaires n'étant pas adaptés aux grandes déformations, des modèles viscoélastiques étendus aux grandes déformations ont été développés. Ils permettent de modéliser le comportement du matériau lors de grands déplacements à plus fortes vitesses de déformation. On peut classer ces modèles suivant deux approches différentes : les modèles intégraux et les modèles à variables internes.

Historiquement, ce sont les modèles intégraux qui ont été les premiers utilisés. Mais, depuis les années 1990, des modèles à variables internes ont été proposés, fournissant des résultats très probants. Cependant, ces deux approches ont surtout été utilisées pour de faibles vitesses de déformation. Ainsi, on ne connaît pas leurs performances aux moyennes et aux grandes vitesses de déformation. Ces deux approches sont chacune issues de celles utilisées en viscoélasticité linéaire ; cependant, s'il y a une équivalence entre celles-ci dans le cadre des petites déformations, ce n'est plus le cas en grandes déformations. On va ici présenter les origines de ces modèles avant de les comparer dans la section 2.2.

2.1.2.1 Modèles intégraux

Ces modèles sont une extension en grandes déformations du principe de Boltzmann, tel qu'il est utilisé pour la viscoélasticité linéaire. Ils reposent sur les travaux de [Green et Rivlin \(1957\)](#), et de [Coleman et Noll \(1961\)](#). Dans les deux cas, la contrainte dépend uniquement de l'histoire du gradient de la transformation :

$$\boldsymbol{\sigma} = \underset{\tau=-\infty}{\overset{t}{\mathfrak{F}}} \{ \mathbf{F}(\tau) \} \quad (2.6)$$

Green et Rivlin proposent, pour des questions d'objectivité, de réécrire cette relation sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}(t) \left[\underset{\tau=-\infty}{\overset{t}{\mathfrak{G}}} \{ \mathbf{E}(\tau), \mathbf{E}(t) \} \right] \mathbf{F}^T(t) \quad (2.7)$$

Ici, une opération de *push-forward* permet de déterminer le tenseur des contraintes de Cauchy à partir du second tenseur de Piola-Kirchhoff lié au tenseur de Green-Lagrange $\mathbf{E}(\tau)$ par la fonctionnelle \mathfrak{G} . En faisant l'hypothèse que les déformations changent peu dans un passé récent, la fonctionnelle est ensuite approchée par développement polynomial de fonctionnelles linéaires :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) = & -p\mathbf{I} + \mathbf{F}(t) \left[\int_{-\infty}^t G_1(t-\tau) \frac{d\mathbf{E}(\tau)}{d\tau} d\tau + \right. \\ & \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t G_2(t-\tau_1, t-\tau_2) \frac{d\mathbf{E}(\tau_1)}{d\tau_1} \frac{d\mathbf{E}(\tau_2)}{d\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 + \\ & \left. \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t G_3(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) \frac{d\mathbf{E}(\tau_1)}{d\tau_1} \frac{d\mathbf{E}(\tau_2)}{d\tau_2} \frac{d\mathbf{E}(\tau_3)}{d\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots \right] \mathbf{F}^T(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

où $G_1(\tau)$, $G_2(\tau_1, \tau_2)$, $G_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$... sont les fonctions de relaxation. En pratique, il est difficile d'utiliser ce type de décomposition puisque le nombre de fonctions de relaxation à déterminer augmente très rapidement avec l'ordre utilisé.

[Christensen \(1980\)](#) reprend ce développement et propose une troncature à l'ordre 1 :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = -p\mathbf{I} + \mathbf{F}(t) \left[g_0\mathbf{I} + \int_{-\infty}^t g_1(t-\tau) \frac{d\mathbf{E}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \mathbf{F}^T(t) \quad (2.9)$$

avec $g_1(t - \tau) = g_1 e^{-\frac{t-\tau}{\tau_R}}$. On obtient donc un modèle viscoélastique en grandes déformations qui dépend uniquement de 3 paramètres : g_0 , g_1 et τ_R le temps de relaxation.

De leur côté, [Coleman et Noll \(1961\)](#) proposent de développer la fonctionnelle non pas en prenant l'état de départ comme l'état de référence mais plutôt l'état actuel. Cela conduit à la définition du gradient de la transformation relativement à l'état actuel $\mathbf{F}_t(\tau)$:

$$\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{F}^{-1}(t). \quad (2.10)$$

On obtient donc la contrainte dépendant d'une fonctionnelle \mathfrak{h} , qui est un terme élastique, d'une autre fonctionnelle \mathfrak{H} qui elle dépend de l'histoire des déformations (et donc de τ), et pour des raisons d'objectivité de \mathbf{R} qui est le tenseur de rotation issu de la décomposition polaire de \mathbf{F} .

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{R}(t) \underset{\tau=-\infty}{\overset{t}{\mathfrak{h}}} \{ \mathbf{C}(t) \} \mathbf{R}^T(t) + \mathbf{R}(t) \underset{\tau=-\infty}{\overset{t}{\mathfrak{H}}} \{ \mathbf{C}_t(\tau), \mathbf{C}(t) \} \mathbf{R}^T(t) \quad (2.11)$$

où $\mathbf{C}_t(\tau)$ est défini comme suit :

$$\mathbf{C}_t(\tau) = \mathbf{F}_t^T(\tau)\mathbf{F}_t(\tau) \quad (2.12)$$

En faisant la même hypothèse de faible évolution des déformations dans un passé récent, on peut obtenir la relation contrainte-déformation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \underset{\tau=-\infty}{\overset{t}{\mathfrak{k}}} \{ \mathbf{B}(t) \} + \int_{-\infty}^t \mathbb{K}(\mathbf{B}(t), t - \tau) : (\mathbf{C}_t(\tau) - \mathbf{I}) d\tau \quad (2.13)$$

avec \mathfrak{k} la contribution élastique et \mathbb{K} un tenseur d'ordre 4 contenant les fonctions de relaxation. On peut voir qu'à la différence de Green et Rivlin, les fonctions de relaxation utilisées ici ne dépendent plus seulement du temps, mais aussi de l'amplitude des déformations.

Ces travaux conduisent tous à un nombre de fonction de relaxation très important qu'il n'est, en pratique, pas possible d'identifier. Cependant, ils posent les bases de tous les modèles viscoélastiques intégraux tels que le modèle K-BKZ ([Bernstein *et al.*, 1963](#); [Kaye, 1962](#)) qui sera décrit plus en détail dans la partie [2.2](#), ou encore le modèle CBT de [Chang *et al.* \(1976\)](#).

2.1.2.2 Modèles à variables internes

[Green et Tobolsky \(1946\)](#), proposent l'introduction d'une variable interne dont l'évolution est pilotée par une équation différentielle. Cependant, ce n'est qu'en 1985 que ce travail est réutilisé par [Lubliner \(1985\)](#) dans le cadre de l'étude d'un matériau compressible. S'appuyant sur les travaux de [Sidoroff \(1974\)](#), il utilise la décomposition multiplicative du gradient de la transformation comme l'a proposée [Lee \(1969\)](#) pour la plasticité :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_i \quad (2.14)$$

où \mathbf{F}_e est la contribution élastique de la transformation et \mathbf{F}_i la contribution inélastique. L'énergie libre est ensuite découpée en trois parties. La première partie correspond à l'énergie de déformation volumique relative à la compressibilité du matériau. La seconde partie est l'énergie élastique qui permet d'obtenir la réponse à l'équilibre du matériau, tandis que la dernière partie correspond à l'énergie inélastique. Cette dernière partie est dépendante de \mathbf{C}_i qui est le tenseur de Cauchy-Green droit associé au gradient de transformation inélastique \mathbf{F}_i . C'est aussi la variable interne qui suit la loi d'évolution :

$$\dot{\mathbf{C}}_i^{-1} = \frac{1}{\tau_R} \left[\beta \mathbf{I} + (1 - \beta) \overline{\mathbf{C}}^{-1} - \mathbf{C}_i^{-1} \right] \quad (2.15)$$

où $\bar{\mathbf{C}}$ est le tenseur de Cauchy-Green gauche de la déformation totale incompressible, τ_r et β étant des paramètres matériau. De façon similaire, [Simo \(1987\)](#) réutilise les travaux de Green et Tobolsky, et sépare la contrainte en une partie élastique et en une partie inélastique qui utilise une variable interne qui suit une loi d'évolution basée sur une équation différentielle. Il présente en plus, de façon très détaillée, l'implantation numérique du modèle.

Basé sur ces travaux, de nombreux modèles vont ensuite voir le jour ([Johnson et al. \(1992, 1995\)](#); [Spathis \(1997\)](#); [Bergström et Boyce \(1998\)](#); [Huber et Tsakmakis \(2000\)](#) par exemple). Ces modèles se basent toujours sur la même théorie mais utilisent des énergies de déformation, des variables internes et des lois d'évolution différentes, permettant de mieux simuler le comportement du matériau.

2.2 Comparaison des deux approches de la viscoélasticité non-linéaire

La comparaison des deux approches précédentes de la viscoélasticité en grandes déformations (à variable interne et intégrale) est développée dans une étude publiée dans *Mechanics of Time-dependent Materials* (DOI : 10.1007/s11043-012-9188-7). Pour cette raison, la plus grande partie de cette section est issue de cet article et rédigée en anglais, afin de ne pas dénaturer le document publié.

2.2.1 Introduction

The aim of this study is the comparison of the two above-mentioned theories for intermediate strain rates as depicted in Fig. 2.1. In this way, we derive two simple models for large strain viscoelasticity: the first one referred to as a Convolution Integral Model (CIM) is a solid extension of the K-BKZ model, and the second one, referred to as an Internal Variable Model (IVM), is the large strain counterpart of the Zener model as proposed by [Huber et Tsakmakis \(2000\)](#). Then, for equivalent sets of material parameters, their uniaxial responses, i.e. their stiffness and associated dissipation, are compared and discussed with respect to the strain rate.

2.2.2 Two simple models for large strain viscoelasticity of rubber-like materials

We consider an elastomeric material; it is assumed homogeneous, isotropic and incompressible. We focus on the viscoelastic nature of its mechanical response and we consider two simple models: the former based on the convolution integral approach, and the latter based on internal variables theory.

2.2.2.1 A simple Convolution Integral Model (CIM)

2.2.2.2 General derivation

The model considered here is the sum of a large strain hyperelastic model for the elastic part and a fluid K-BKZ model for the viscous part. It is to note that this model is different from the solid version of the K-BKZ formulation that was proposed in the paper of [Bernstein et al. \(1963\)](#).

The key mechanical quantity of the convolution integral approach is the relative deformation gradient $\mathbf{F}_t(\tau)$, i.e. the deformation gradient at the current time τ in the

current configuration (\mathcal{C}_τ) with respect to the final deformed configuration (\mathcal{C}) at time t , as described in Figure 2.3:

$$\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{F}^{-1}(t). \quad (2.16)$$

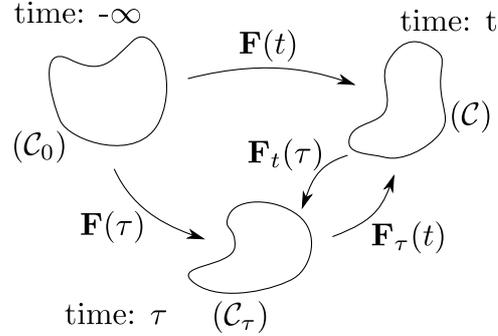


Figure 2.3: Deformation gradient with respect to current time configuration

In a similar way, we define $\mathbf{F}_\tau(t)$, the deformation gradient in (\mathcal{C}) with respect to the deformation gradient at the current time τ :

$$\mathbf{F}_\tau(t) = \mathbf{F}_t^{-1}(\tau) = \mathbf{F}(t)\mathbf{F}^{-1}(\tau). \quad (2.17)$$

Introducing the right Cauchy-Green strain tensor $\mathbf{C}_\tau(t)$, and the Green-Lagrange strain tensor $\mathbf{E}_\tau(t)$:

$$\mathbf{E}_\tau(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_\tau(t) - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_t^T(\tau)\mathbf{F}_t(\tau) - \mathbf{I}), \quad (2.18)$$

where \mathbf{I} is the 3×3 identity tensor and \cdot^T stands for the transposition, the K-BKZ model leads to the following expression of the Cauchy stress tensor (Bernstein *et al.*, 1963)

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = -p(t)\mathbf{I} + \int_{-\infty}^t \left[\mathbf{F}_\tau(t) \frac{\partial U_1(\mathbf{C}_\tau(t), t - \tau)}{\partial \mathbf{E}_\tau(t)} \mathbf{F}_\tau^T(t) \right] d\tau, \quad (2.19)$$

in which p stands for the Lagrange multiplier due to the incompressibility constraint, referred to as the hydrostatic pressure, and U_1 is a strain energy density per unit of volume in the current configuration (\mathcal{C}_τ). Considering objectivity and incompressibility, this strain energy is a function of the two first strain invariants of the right Cauchy-Green strain tensor $\mathbf{C}_\tau(t)$, $I_{\mathbf{C}_\tau(t)}$ and $II_{\mathbf{C}_\tau(t)}$. Thus

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = -p(t)\mathbf{I} + \int_{-\infty}^t 2\mathbf{F}_\tau(t) \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial I_{\mathbf{C}_\tau}} + I_{\mathbf{C}_\tau} \frac{\partial U_1}{\partial II_{\mathbf{C}_\tau}} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial U_1}{\partial II_{\mathbf{C}_\tau}} \mathbf{C}_\tau(t) \right] \mathbf{F}_\tau^T(t) d\tau, \quad (2.20)$$

where the two first invariants of a tensor \mathbf{X} are:

$$I_{\mathbf{X}} = \text{tr} \mathbf{X} \quad \text{and} \quad II_{\mathbf{X}} = \frac{1}{2} \left((\text{tr} \mathbf{X})^2 - \text{tr} \mathbf{X}^2 \right). \quad (2.21)$$

Moreover, as the material is isotropic, the strain energy U_1 can be written as a function of the left Cauchy-Green strain tensor $\mathbf{B}_\tau(t)$ that is equal to $\mathbf{C}_t^{-1}(\tau)$, i.e. in terms of their

invariants $I_{\mathbf{C}_t^{-1}}$ and $II_{\mathbf{C}_t^{-1}}$. Finally, recalling that (see for example Eq. (5.93) in [Holzapfel \(2000\)](#))

$$\mathbf{B}_\tau^2(t) = I_{\mathbf{B}_\tau} \mathbf{B}_\tau(t) - II_{\mathbf{B}_\tau} \mathbf{I} + \mathbf{B}_\tau^{-1}(t) \quad (2.22)$$

and after some simple algebraic manipulations,

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = -p'(t)\mathbf{I} + \int_{-\infty}^t 2 \left[\frac{\partial U_1}{\partial I_{\mathbf{C}_t^{-1}}} \mathbf{C}_t^{-1}(\tau) - \frac{\partial U_1}{\partial II_{\mathbf{C}_t^{-1}}} \mathbf{C}_t(\tau) \right] d\tau \quad (2.23)$$

in which $p'(t)$ is the modified hydrostatic pressure, that will be simply denoted $p(t)$ in the following.

Eq. (2.23) represents the classical fluid K-BKZ constitutive equation. In order to consider solids, we simply add a hyperelastic contribution defined by a strain energy function written in terms of the two first strain invariants of the left Cauchy-Green strain tensor of the whole deformation, $\mathbf{B}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{F}^T(t)$, $U_0(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}})$; finally the corresponding Cauchy stress tensor is:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) = -p(t)\mathbf{I} + 2 \left(\frac{\partial U_0}{\partial I_{\mathbf{B}}} \mathbf{B}(t) - \frac{\partial U_0}{\partial II_{\mathbf{B}}} \mathbf{B}^{-1}(t) \right) \\ + 2 \int_{-\infty}^t \left[\frac{\partial U_1}{\partial I_{\mathbf{C}_t^{-1}}} \mathbf{C}_t^{-1}(\tau) - \frac{\partial U_1}{\partial II_{\mathbf{C}_t^{-1}}} \mathbf{C}_t(\tau) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.2.2.3 A simple model

In order to define the simplest model based on the previous derivation, we consider that

- the elastic part obeys the neo-Hookean constitutive equation:

$$U_0(\mathbf{B}) = g_0(I_{\mathbf{B}} - 3), \quad (2.25)$$

- for the viscous part, the effects of time and strain are separable. Thus, the strain energy U_1 can be chosen as the product of a decreasing exponential time function with only one relaxation time τ_R and of a neo-Hookean strain energy density in terms of $\mathbf{C}_t^{-1}(\tau)$

$$U_1(t - \tau, \mathbf{C}_t^{-1}(\tau)) = \frac{g_1}{\tau_R} \exp\left(-\frac{t - \tau}{\tau_R}\right) (I_{\mathbf{C}_t^{-1}} - 3). \quad (2.26)$$

Thus, our CIM involves only three material parameters: two stiffnesses g_0 and g_1 (in MPa), and one relaxation time τ_R (in seconds); and the stress-strain relationship reduces to

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = -p(t)\mathbf{I} + 2g_0\mathbf{B}(t) + 2 \int_{-\infty}^t \frac{g_1}{\tau_R} \exp\left(-\frac{t - \tau}{\tau_R}\right) \mathbf{C}_t^{-1}(\tau) d\tau. \quad (2.27)$$

This equation can be integrated by parts to explicitly introduce the influence of the strain rate $\partial\mathbf{C}^{-1}(\tau)/\partial\tau$:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = -p(t)\mathbf{I} + 2g_0\mathbf{B}(t) - 2\mathbf{F}(t) \int_{-\infty}^t g_1 \exp\left(-\frac{t - \tau}{\tau_R}\right) \frac{\partial\mathbf{C}^{-1}(\tau)}{\partial\tau} d\tau \mathbf{F}^T(t). \quad (2.28)$$

2.2.2.4 A simple Internal Variable Model (IVM)

2.2.2.5 General derivation

The model is based on the multiplicative split of the whole deformation gradient \mathbf{F} between elastic, \mathbf{F}_e , and inelastic, \mathbf{F}_i , parts:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_i. \quad (2.29)$$

This split leads to the definition of an intermediate configuration (\mathcal{C}_i) between the reference undeformed configuration (\mathcal{C}_0) and the final deformed configuration (\mathcal{C}), as shown in Figure 2.4(a). The intermediate configuration is assumed stress-free and represents the state of the material once loading is infinitely fast removed.

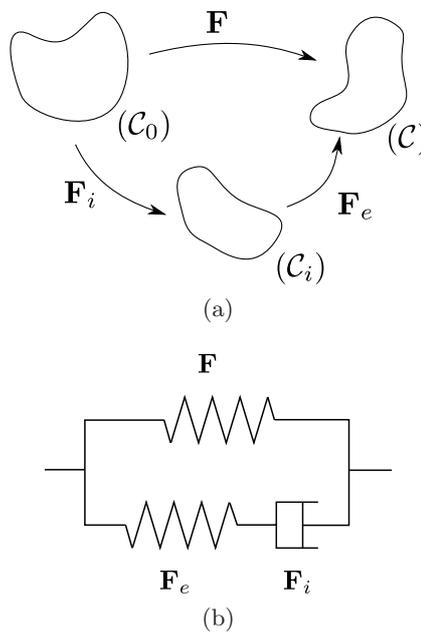


Figure 2.4: Multiplicative decomposition of the deformation gradient

The simplest internal variable constitutive equations for the viscoelastic elastomers were derived by [Huber et Tsakmakis \(2000\)](#). The authors studied the two large strain counterparts to the classical Standard Linear Solids: model A stands for the Maxwell form of this model, i.e. a Maxwell model and a dashpot in parallel, and model B for the Zener form, i.e. a Kelvin-Voigt model and a spring in series. In the present paper, we consider the former one, because the model B does not reduce to a hyperelastic model when strain rate tends to zero (see Appendix A). Fig. 2.4(b) shows the rheological representation of the model and the strain in its components.

As rubber is assumed incompressible, $\det \mathbf{F} = 1$; moreover, we also consider that each deformation is incompressible: $\det \mathbf{F}_e = \det \mathbf{F}_i = 1$. We now introduce the total strain energy density per unit of undeformed volume Ψ ; it depends on both \mathbf{F} and \mathbf{F}_e . With the incompressibility assumption, the volume in (\mathcal{C}_0) and (\mathcal{C}_i) remains the same and then Ψ can be written as

$$\Psi(\mathbf{F}, \mathbf{F}_e) = \Psi_1(\mathbf{F}) + \Psi_2(\mathbf{F}_e), \quad (2.30)$$

where Ψ_1 is the strain energy involved in the deformation between (\mathcal{C}_0) and (\mathcal{C}), and Ψ_2 is the strain energy involved in the deformation between (\mathcal{C}_i) and (\mathcal{C}); they correspond to

the two springs in Fig. 2.4(b). With the objectivity principle and the isotropic nature of the material, these strain energy densities can be written as

$$\Psi_1(\mathbf{F}) = \Psi_1(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}}) \quad (2.31)$$

and

$$\Psi_2(\mathbf{F}_e) = \Psi_2(I_{\mathbf{B}_e}, II_{\mathbf{B}_e}), \quad (2.32)$$

where \mathbf{B}_e is the left Cauchy-Green strain tensor associated with the elastic deformation, i.e. $\mathbf{F}_e \mathbf{F}_e^T$. Application of the Second Principle of Thermodynamics leads to:

$$\mathcal{D}_{\text{int}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \dot{\Psi} \geq 0, \quad (2.33)$$

where \mathcal{D}_{int} is the internal dissipation and \mathbf{D} is the rate of deformation tensor. With the specific form of the strain energy density, it leads to:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{B}} : \dot{\mathbf{B}} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{B}_e} : \dot{\mathbf{B}}_e \geq 0. \quad (2.34)$$

After some algebraic manipulations, one establishes:

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{L}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{L}^T, \quad (2.35)$$

where \mathbf{L} is the velocity gradient defined as $\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$, and:

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{L}\mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e\mathbf{L}^T - 2\mathbf{F}_e\mathbf{D}_i\mathbf{F}_e^T, \quad (2.36)$$

where \mathbf{D}_i is the inelastic strain rate tensor defined as:

$$\mathbf{D}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_i + \mathbf{L}_i^T) \quad \text{with} \quad \mathbf{L}_i = \dot{\mathbf{F}}_i\mathbf{F}_i^{-1}. \quad (2.37)$$

With these expressions and basic algebraic manipulations, the second principle Eq. (2.34) becomes:

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - 2\frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{B}}\mathbf{B} - 2\frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{B}_e}\mathbf{B}_e \right) : \mathbf{D} + 2\mathbf{F}_e^T \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{B}_e} \mathbf{F}_e : \mathbf{D}_i \geq 0. \quad (2.38)$$

Next we apply the Coleman et Noll (1963) procedure that consists in satisfying this inequality for all possible deformation processes, i.e. for all possible \mathbf{F} and \mathbf{F}_i which satisfy the incompressibility constraints. It leads to the stress-strain relationship:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{B}}\mathbf{B} + 2\frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{B}_e}\mathbf{B}_e, \quad (2.39)$$

and the dissipation:

$$2\mathbf{F}_e^T \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{B}_e} \mathbf{F}_e : \mathbf{D}_i \geq 0. \quad (2.40)$$

Similarly than in Huber et Tsakmakis (2000), we consider the simplest sufficient condition to satisfy Eq. (2.40):

$$\mathbf{D}_i = \frac{2}{\eta} \left(\mathbf{F}_e^T \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{B}_e} \mathbf{F}_e \right)^D, \quad (2.41)$$

where $(\cdot)^D$ stands for the deviatoric operator, i.e. $(\cdot) - \text{tr}(\cdot)\mathbf{I}/3$. This equation gives the following evolution equation for the elastic strain

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{L}\mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e\mathbf{L}^T - \frac{4}{\eta}\mathbf{B}_e \left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial\mathbf{B}_e}\mathbf{B}_e \right)^D. \quad (2.42)$$

Considering now the isotropic nature of the material, each strain energy density depends on the two first invariants of the corresponding strain tensors and the model reduces to:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\frac{\partial\Psi_1}{\partial I_{\mathbf{B}}}\mathbf{B} - 2\frac{\partial\Psi_1}{\partial II_{\mathbf{B}}}\mathbf{B}^{-1} + 2\frac{\partial\Psi_2}{\partial I_{\mathbf{B}_e}}\mathbf{B}_e - 2\frac{\partial\Psi_2}{\partial II_{\mathbf{B}_e}}\mathbf{B}_e^{-1}, \quad (2.43)$$

and:

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{L}\mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e\mathbf{L}^T - \frac{4}{\eta}\mathbf{B}_e \left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial I_{\mathbf{B}_e}}\mathbf{B}_e - \frac{\partial\Psi_2}{\partial II_{\mathbf{B}_e}}\mathbf{B}_e^{-1} \right)^D. \quad (2.44)$$

2.2.2.6 A simple model

In order to define the simplest model based on the previous derivation, we consider that both strain energy functions are of the neo-Hookean type:

$$\Psi_1(\mathbf{B}) = C_1 (I_{\mathbf{B}} - 3) \quad (2.45)$$

and:

$$\Psi_2(\mathbf{B}_e) = C_2 (I_{\mathbf{B}_e} - 3). \quad (2.46)$$

Thus, our IVM involves only three material parameters: two stiffnesses C_1 and C_2 (in MPa) and a viscosity η (in MPa.s); the stress-strain relationship reduces to:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2C_1\mathbf{B} + 2C_2\mathbf{B}_e, \quad (2.47)$$

and the evolution equation of \mathbf{B}_e is

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{L}\mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e\mathbf{L}^T - \frac{4C_2}{\eta} \left(\mathbf{B}_e^2 - \frac{1}{3}I_{\mathbf{B}_e}\mathbf{B}_e \right). \quad (2.48)$$

2.2.2.7 Comparison of the models: choice of the material parameters

In order to compare the two above-mentioned simple models, it is necessary to consider material parameters that render them comparable. In this way, we investigate three limit responses of the material:

1. the quasi-static limit response, i.e. very low strain rates,
2. the infinitely fast limit response, i.e. very high strain rates,
3. the linear viscoelastic limit response, i.e. small strain.

These three limit responses will lead to three equations to relate the two sets of material parameters, i.e. (g_0, g_1, τ_R) and (C_1, C_2, η) .

2.2.2.8 Quasi-static response

We consider infinitely slow deformation processes such that the strain-stress path corresponds to the static path of equilibrium states. For the CIM, we consider the method proposed by Christensen (1980) that consists in simulating accelerated or decelerated strain histories with a change in time scale of the strain: $\mathbf{C}(\alpha t)$ with $\alpha > 1$ corresponds to accelerated strain histories and $\alpha < 1$ corresponds to decelerated strain histories. In this case, the Cauchy stress tensor Eq. (2.28) is then:

$$\boldsymbol{\sigma}(t/\alpha) = -p(t)\mathbf{I} + 2g_0\mathbf{B}(t) - \mathbf{F}(t) \left[\int_{-\infty}^{t/\alpha} 2g_1 \exp\left(-\frac{t/\alpha - \tau}{\tau_R}\right) \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}(\alpha\tau)}{\partial \tau} d\tau \right] \mathbf{F}^T(t), \quad (2.49)$$

which can also be written as:

$$\boldsymbol{\sigma}(t/\alpha) = -p(t)\mathbf{I} + 2g_0\mathbf{B}(t) - \mathbf{F}(t) \left[\int_{-\infty}^t 2g_1 \exp\left(-\frac{t - \gamma}{\alpha\tau_R}\right) \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}(\gamma)}{\partial \gamma} d\gamma \right] \mathbf{F}^T(t). \quad (2.50)$$

Then, the quasi-static response is obtained by considering the infinitely decelerated strain history, i.e. $\alpha \rightarrow 0$:

$$\boldsymbol{\sigma}(t/\alpha)|_{\alpha \rightarrow 0} = -p(t)\mathbf{I} + 2g_0\mathbf{B}(t). \quad (2.51)$$

For the IVM, the quasi-static response is defined by the nullity of the strain rate tensor:

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_e \dot{\mathbf{F}}_i = 0. \quad (2.52)$$

As this equation must be satisfied for all possible deformation processes, i.e. for all possible \mathbf{F}_e and \mathbf{F}_i , all strain rate tensors $\dot{\mathbf{F}}_e, \dot{\mathbf{F}}_i, \mathbf{L}, \dot{\mathbf{B}}_e, \dots$ must be null. Thus, Eq. (2.48) reduces to:

$$(\mathbf{B}_e)^D = 0 \quad (2.53)$$

which means that \mathbf{B}_e is a spherical tensor:

$$\mathbf{B}_e = q\mathbf{I}, \quad (2.54)$$

q being a scalar quantity. Thus, the quasi-static limit response of the IVM is:

$$\boldsymbol{\sigma} = -(p - C_2q)\mathbf{I} + 2C_1\mathbf{B}. \quad (2.55)$$

Finally, comparing Eqs (2.51) and (2.55) gives the following relationship between the material parameters

$$C_1 = g_0. \quad (2.56)$$

2.2.2.9 Infinitely fast response

We consider infinitely fast deformation processes such that viscous effects do not have time to take place. For the CIM, we consider Eq. (2.50) with $\alpha \rightarrow \infty$; then the constitutive equation Eq. (2.28) reduces to:

$$\boldsymbol{\sigma}(t/\alpha)|_{\alpha \rightarrow \infty} = -p(t)\mathbf{I} + 2(g_0 + g_1)\mathbf{B}(t). \quad (2.57)$$

For the IVM, when the strain rate \mathbf{D} tends to infinity, $\dot{\mathbf{F}}$ tends also to infinity because \mathbf{F} is finite. As viscous effects do not take place, \mathbf{F}_i tends to \mathbf{I} and $\dot{\mathbf{F}}_i$ tends to zero, thus \mathbf{F}_e tends to \mathbf{F} , and \mathbf{F}_e tends to infinity. Then, as \mathbf{B}_e tends to \mathbf{B} , we have:

$$\boldsymbol{\sigma}|_{\mathbf{D} \rightarrow \infty} = -p\mathbf{I} + 2(C_1 + C_2)\mathbf{B}. \quad (2.58)$$

Finally, comparing Eqs (2.57) and (2.58), and recalling Eq. (2.56) leads to the following relationship between the material parameters:

$$C_2 = g_1. \quad (2.59)$$

2.2.2.10 Linear viscoelastic response

In order to compare the small strain responses of the two models, we consider the uniaxial extension defined by the deformation gradient:

$$\mathbf{F} = \lambda \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3), \quad (2.60)$$

where λ is the stretch ratio, \mathbf{e}_1 is the extension direction, and \mathbf{e}_2 and \mathbf{e}_3 are the transverse directions. With the small strain assumption, the kinematical (linearized) quantities are:

$$\mathbf{F}_l = (1 + \varepsilon) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad (2.61)$$

$$\dot{\mathbf{F}}_l = \mathbf{L}_l = \mathbf{D}_l = \dot{\varepsilon} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{\dot{\varepsilon}}{2} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad (2.62)$$

$$\mathbf{C}_l = \mathbf{B}_l = (1 + 2\varepsilon) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + (1 - \varepsilon) (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad (2.63)$$

$$\mathbf{C}_l^{-1} = (1 - 2\varepsilon) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + (1 + \varepsilon) (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad (2.64)$$

where the subscript \cdot_l stands for the linearized counterpart of the given tensor and ε is the true strain in the extension direction. Similar results apply to \mathbf{F}_e . Once the linearized quantities defined, we now consider dynamic processes and introduce the classical complex notation for both strain and stress in the extension direction:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \exp(i\omega t) \quad \text{and} \quad \sigma = \sigma_0 \exp(i(\omega t + \delta)) \quad (2.65)$$

where ε_0 and σ_0 are the strain and stress amplitude, ω is the loading frequency and δ is the phase angle.

Considering that the transverse stresses σ_{22} and σ_{33} are null, the CIM stress-strain relationship Eq. (2.28) reduces to:

$$\sigma(t) = 6g_0\varepsilon(t) + \int_{-\infty}^t 6g_1 \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_R}\right) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.66)$$

or with the complex quantities,

$$\sigma_0 \exp(i\omega t) \exp(i\delta) = 6g_0\varepsilon_0 \exp(i\omega t) + i\omega 6g_1\varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_R}\right) \exp(i\omega\tau) d\tau. \quad (2.67)$$

Integrating the last right-hand side term:

$$\int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_R}\right) \exp(i\omega\tau) d\tau = \frac{1}{\frac{1}{\tau_R} + i\omega} \exp(i\omega t), \quad (2.68)$$

we easily obtain the complex modulus E^* :

$$E^* = \frac{\sigma}{\varepsilon} = 6g_0 + i6g_1\omega \frac{1}{\frac{1}{\tau_R} + i\omega}. \quad (2.69)$$

Thus, the storage and loss moduli, i.e. the real and imaginary parts of E^* respectively, are:

$$E' = 6g_0 + 6g_1 \frac{\omega^2 \tau_R^2}{1 + \omega^2 \tau_R^2} \quad (2.70)$$

and:

$$E'' = 6g_1 \frac{\omega \tau_R}{1 + \omega^2 \tau_R^2}. \quad (2.71)$$

With the aforementioned linearized quantities, the IVM stress-strain relationship Eqs (2.47) and (2.48) simplify into the following set of equations:

$$\sigma = 6C_1\varepsilon + 6C_2\varepsilon_e \quad (2.72)$$

$$\dot{\varepsilon}_e = \dot{\varepsilon} - \frac{4C_2}{\eta} \varepsilon_e. \quad (2.73)$$

Introducing the complex representation of the elastic deformation:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_{e0} \exp(i(\omega t + \delta')) \quad (2.74)$$

in which ε_{e0} is the elastic strain amplitude and δ' its phase angle with ε , Eq. (2.73) reduces to:

$$i\omega\varepsilon_{e0} \exp(i\delta') = i\omega\varepsilon_0 - \frac{4C_2}{\eta} \varepsilon_{e0} \exp(i\delta') \quad (2.75)$$

and permits to express the elastic strain in terms of the total strain:

$$\varepsilon_{e0} \exp(i\delta') = \varepsilon_0 \left[\frac{\omega^2}{\omega^2 + \left(\frac{4C_2}{\eta}\right)^2} + i \frac{\omega \frac{4C_2}{\eta}}{\omega^2 + \left(\frac{4C_2}{\eta}\right)^2} \right]. \quad (2.76)$$

Reporting this equation into Eq. (2.72) leads to the expression of the complex modulus:

$$\sigma_0 \exp(i\delta) = E^* \varepsilon_0 = \left\{ 6C_1 + 6C_2 \left[\frac{\omega^2}{\omega^2 + \left(\frac{4C_2}{\eta}\right)^2} + i \frac{\omega \frac{4C_2}{\eta}}{\omega^2 + \left(\frac{4C_2}{\eta}\right)^2} \right] \right\} \varepsilon_0, \quad (2.77)$$

and then to the storage modulus:

$$E' = 6C_1 + 6C_2 \frac{\omega^2}{\omega^2 + \left(\frac{4C_2}{\eta}\right)^2}, \quad (2.78)$$

and to the loss modulus:

$$E'' = 6C_2 \frac{\omega \frac{4C_2}{\eta}}{\omega^2 + \left(\frac{4C_2}{\eta}\right)^2}. \quad (2.79)$$

Finally, with the help of the previously established relationships between the material parameters Eqs (2.56) and (2.59), equalizing the storage moduli Eqs (2.70) and (2.78), and of the loss moduli Eqs (2.71) and (2.79) gives:

$$\tau_R = \frac{\eta}{4C_2}. \quad (2.80)$$

2.2.3 Results and discussion

In order to compare the two models, we study here their stress-strain responses in uniaxial extension. First, we define the sets of material parameters that will permit this comparison. By examining the two models and their response at low and high strain rates, it appears that the parameters g_0 in the CIM and C_1 in the IVM represent the stiffness for quasi-static loading conditions, and that the parameters g_1 in the CIM and C_2 in the IVM represent the additional stiffness reached at high strain rates. The third parameters, respectively τ_R for the CIM and η for the IVM, account for the dependence of the behaviour on the strain rate: they drive the increase in stiffness at high strain rates, and both size and shape of the hysteresis loop during loading-unloading response. In order to respect the previously established relationships between the parameters, Eqs (2.56), (2.59), (2.80), we adopt the values given in Table 2.1. These values are not founded on experimental

CIM		IVM	
g_0 (MPa)	1	C_1 (MPa)	1
g_1 (MPa)	9	C_2 (MPa)	9
τ_R (s)	1/36	η (MPa.s)	1

Table 2.1: Material parameters of the models

measurements, and the large values for g_1 and C_2 are chosen in order to emphasize the phenomena (hysteresis, strengthening) and to highlight the differences between the two approaches.

As mentioned above, we consider uniaxial cyclic tension. In order to investigate the influence of strain rate on the models, we consider cycles at constant *true* strain rate, i.e. in terms of the strain rate tensor \mathbf{D} . In fact, we consider the strain rate that is actually borne by the material in the actual deformed configuration. Noting $\lambda(t)$ the stretch ratio in the extension direction \mathbf{e}_1 and recalling the incompressibility assumption, the deformation gradient is:

$$\mathbf{F}(t) = \lambda(t)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda(t)}} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3), \quad (2.81)$$

and the strain rate tensor defined as:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{F}}^T \right) \quad (2.82)$$

reduces to:

$$\mathbf{D}(t) = \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3). \quad (2.83)$$

Considering that this tensor is constant, we introduce the strain rate α that is equal to $\dot{\lambda}(t)/\lambda(t)$; and then the prescribed stretch ratio is:

$$\lambda(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} & \text{during loading} \\ \lambda_{max} e^{-\alpha(t-t_{max})} & \text{during unloading} \end{cases} \quad (2.84)$$

where λ_{max} is the maximum stretch during the cycle, and t_{max} is the corresponding time given by $\log \lambda_{max}/\alpha$. Loading curves for $\lambda_{max} = 4$ and different values of α are presented in Figure 2.5.

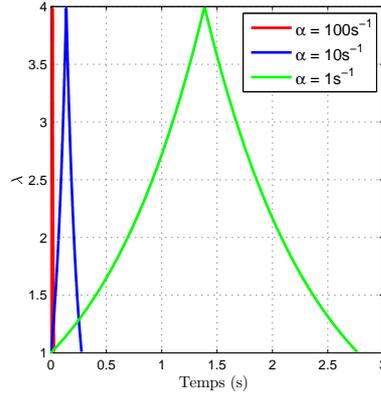


Figure 2.5: Prescribed stretch ratio vs. time for different strain rates

The stretch history being defined, we now determine the stress for both models. In uniaxial extension, the unique non-zero stress is σ_{11} and the equation $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ is used to determine the value of the hydrostatic pressure p . Thus, recalling Eq. (2.28), the CIM stress-strain response is:

$$\sigma_{11}(t) = 2g_0 \left(\lambda^2(t) - \frac{1}{\lambda(t)} \right) + \int_{-\infty}^t 2g_1 \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_R}\right) \left[\frac{1}{\lambda(\tau)} \frac{\partial \lambda(\tau)}{\partial \tau} \left(2\frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(\tau)} + \frac{\lambda(\tau)}{\lambda(t)} \right) \right] d\tau, \quad (2.85)$$

and recalling Eqs (2.47) and (2.48), the IVM stress-strain response is

$$\sigma_{11}(t) = 2C_1 \left(\lambda^2(t) - \frac{1}{\lambda} \right) + 2C_2 \left(\lambda_e^2(t) - \frac{1}{\lambda_e(t)} \right) \quad (2.86)$$

$$\dot{\lambda}_e(t) = \lambda_e(t) \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} - \frac{4C_2}{3\eta} \left(\lambda_e^3(t) - 1 \right). \quad (2.87)$$

The (Cauchy) stress-strain curves obtained for different strain rates α are shown in Figure 2.6 for both the CIM and the IVM; the limit curves of quasi-static and infinitely fast loading conditions are also shown in this figure.

At first sight, the two models exhibit the same response: strengthening and a change in the hysteresis loop as the strain rate increases. Nevertheless, quantitative differences exist. Firstly, strengthening differs: as an example the stress at $\lambda = 4$ is larger for the CIM than for IVM for all strain rates but this is not the case at $\lambda = 1.5$. Secondly, the hysteresis loop is larger for IVM than for CIM. These differences will be discussed in the two following sections that focus on the stiffness of the models and on their dissipative properties, respectively.

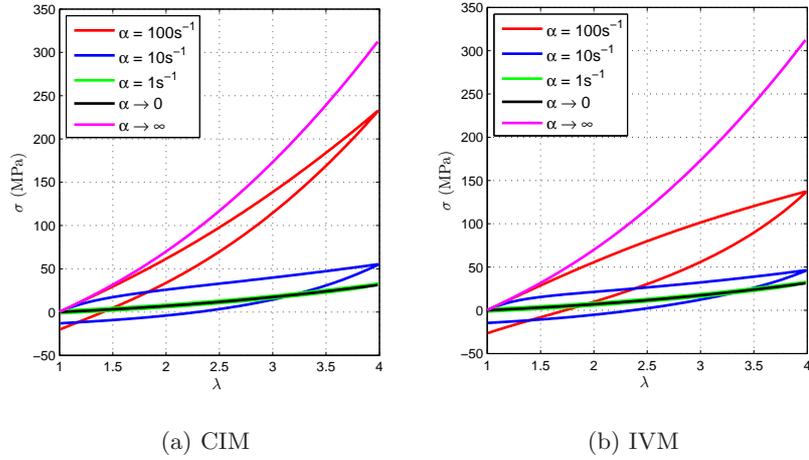


Figure 2.6: Stress-strain curves for rubber-like viscoelastic models: (a) CIM, (b) IVM

2.2.3.1 Comparison of the loading curves

In this section, only the loading part of the stress-strain curves are discussed. In order to study the difference in the responses, we consider the ratio of stress of both models, i.e. $\sigma_{11IVM}/\sigma_{11CIM}$, for different strain rates as shown in Figure 2.7.

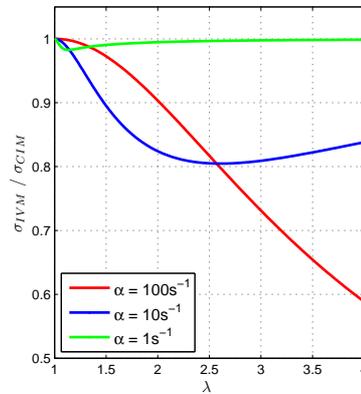


Figure 2.7: Ratios of stress for different strain rates

First, it is to note that the quasi-static and the infinitely fast ratios are equal to 1 for all stretch values because the models coincide in these two cases; they are not shown in the figure. For intermediate strain rates the three curves differ with no similarity in their evolution. We can only mention that the three curves tend to 1 as the stretch tends to 1, i.e. for small strain. This result is obvious, because we choose the material parameters such as the two models coincide for small strain.

As the two models cannot be easily compared, we choose to investigate the influence of the strain rate on their responses, individually. Figure 2.8 presents the evolution of the reduced Cauchy stress with respect to the stretch for CIM (Fig. 2.8(a)) and IVM (Fig. 2.8(b)); in order to render comparable the results, the stress is normalized with respect to the quasi-static ($\alpha = 0$) stress of the same model.

These curves lead to the following comments:

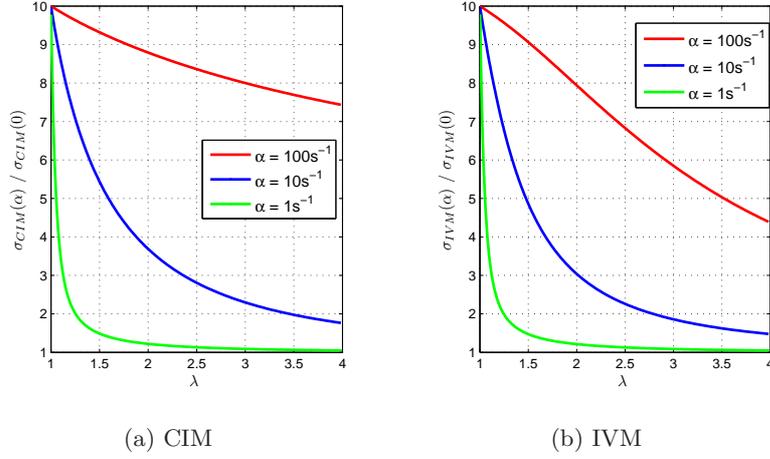


Figure 2.8: Reduced Cauchy stress for different strain rates: (a) CIM, (b) IVM

- For both models, all curves tend to 10 as the stretch tends to 1; it is easily explained by recalling that the initial stiffness of the models is the one of the elastic infinitely fast response which is ten times larger than the stiffness of the quasi-static response, i.e. $(g_0 + g_1)/g_0 = 10$ for CIM and $(C_1 + C_2)/C_1 = 10$ for IVM. For low strain rates, the stress ratios of both models quickly decrease to attain the horizontal asymptote $\sigma(\alpha)/\sigma(0) = 1$, indeed the stress-strain response tends to the quasi-static limit response. As the strain rate increases, the decrease in the response becomes less important, and CIM and IVM exhibit different results that are emphasized in the following.
- For the CIM, all curves monotonically decrease without inflection point. This behaviour can be explained by the decreasing exponential function of time in the integral: for high strain rates, the time scale is revealed very small as compared with the relaxation time, and then the stress does not noticeably decrease in the range of stretch.
- For the IVM, all curves also decrease; nevertheless we observe an inflection point on the curve $\alpha = 100\text{ s}^{-1}$ at about $\lambda = 1.5$. This can be explained by the behaviour of the dashpot during stretching. At the beginning of loading, the dashpot is not stretched because a certain duration is necessary before its activation, and the spring in series with the dashpot is highly stretched (see Fig. 2.4(b)). Thus, the corresponding stress-strain curve tends to the infinitely fast response. Afterwards, as the dashpot becomes active, the spring is not stretched more, the stress in it remains constant and the corresponding elastic stretch ratio, i.e. λ_e drops.

2.2.3.2 Dissipative properties

Dissipation of the models are quantified by the shape and size of the hysteresis loop between loading and unloading stress-strain curves. As emphasized above, both shape and size change with the strain rate. Dissipation is null as the strain rate tends to zero and to infinity, because the two models reduces to their hyperelastic counterparts. In order to discuss the dissipation, we calculate the energy dissipated over one cycle as follow

$$\mathcal{D} = \int_0^{t_e} \boldsymbol{\sigma}(t) : \mathbf{D}(t) dt \quad (2.88)$$

where the time at the beginning of the cycle is set to 0 and t_e is the time of the end of the cycle. Similarly, we define the elastic energy stored in the material during loading, i.e. the area under the loading curve as

$$\mathcal{E} = \int_0^{t_e/2} \boldsymbol{\sigma}(t) : \mathbf{D}(t) dt. \quad (2.89)$$

Figure 2.9 presents the ratio \mathcal{D}/\mathcal{E} as a function of the strain rate for both models.

First, we notice that the maximum value of the ratio is about 1, which would mean that all the stored energy is dissipated. Obviously, it is not representative of real elastomers; it is due to the large value of the second stiffness parameters, i.e. g_1 and C_2 , and also because the energy stored during unloading has been neglected. Nevertheless, the ratio represents a relevant measure of dissipation. As expected, the energy dissipated tends to zero for very low and very high strain rates, and increases for intermediate strain rates. For strain rates smaller than 5 s^{-1} , the responses of the two models are nearly superimposed. For higher strain rates, differences take place: the IVM exhibits more dissipation and over a wider range of strain rate than the CIM.

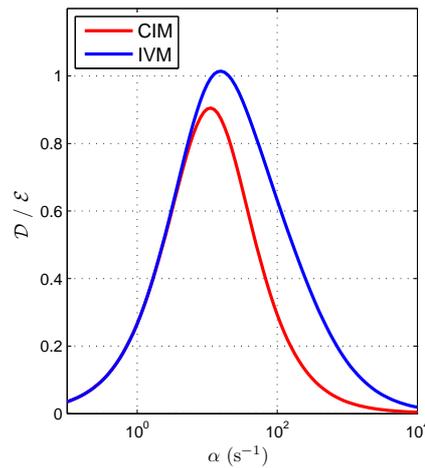


Figure 2.9: Adimensionalized energy dissipated \mathcal{D}/\mathcal{E}

We also investigate the influence of the maximum stretch λ_{max} on the dissipative properties. As shown in Figure 2.10, changing the maximum stretch of a cycles leads to different ratios of dissipated energy for both the CIM (Fig. 2.10(a)) and the IVM (Fig. 2.10(b)). For a given maximum stretch, the ratio is identical for both models; and for a given model, it differs as the maximum stretch changes. The maximum dissipation decreases as the maximum stretch increases for both models. Nevertheless, there is an important difference between the two approaches. For a given dissipation ratio, the CIM admits a limit value of strain rate, e.g. $\mathcal{D}/\mathcal{E} < 0.4$ when $\alpha > 80 \text{ s}^{-1}$. Oppositely, the curves of dissipation ratio for the IVM admit a decreasing maximum value and are only shifted to the right as λ_{max} increases.

2.2.4 Closing remarks

As a summary, we compare two large strain viscoelastic frameworks, i.e. convolution integral and internal variable models, by studying the response of two simple constitutive equations that are equivalent for very small and large strain rates, and small strain. It

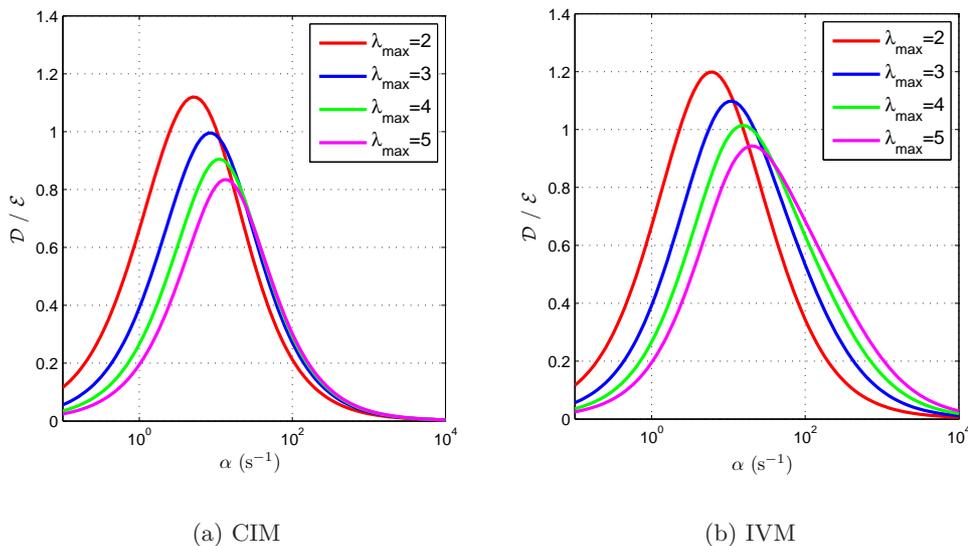


Figure 2.10: Dissipation ratio for different maximum stretch λ_{max} : (a) CIM, (b) IVM

has been shown that the responses of these models differ for intermediate strain rates. Nevertheless, it is quite difficult to determine which model must be preferred for dynamic applications. To help the choice, we can invoke two aspects that were not discussed previously: the foundations of the approaches and numerical considerations.

The convolution integral approach is based on the extension to large strain of the well-established Boltzmann superposition principle: the time dependence is accounted for by a decreasing time function in a convolution integral (Christensen, 1982). This approach is the most natural extension of linear viscoelasticity to large strain. A large relaxation spectrum can be easily handled by considering multiple relaxation times and a Prony series for the relaxation function. One of the major criticism is that it is not founded on the calculation of the dissipation; thus the material functions must be carefully chosen and the second principle of thermodynamics must be verified *a posteriori*. The internal variable approach is founded on a completely different point of view: the split of the deformation gradient was proposed by Sidoroff (1974) as a transposition to viscoelasticity of the plastic split due to Lee (1969). Obviously, there is no problem with the dissipation: the constitutive equations are directly derived from the application of the second principle of thermodynamics. Nevertheless, in the case of viscoelasticity the split of the deformation gradient is questionable: the intermediate reference configuration defined by \mathbf{F}_i is not an equilibrium configuration, and thus it tends to relax to the reference configuration. Indeed, it is considered as an equilibrium configuration if the time scale of the phenomena is highly smaller than the relaxation time. Indeed, if the time scale of the phenomena evolves, the inelastic part of the deformation gradient may become elastic! Solutions have been proposed to consider large relaxation spectra for quasi-static problems (Knauss, 1981; Govindjee et Simo, 1993; Holzapfel, 2000).

From a numerical point of view, on the one hand, it is accepted that IVMs are well-suited for implicit (static in most of the cases) finite element analysis considering similar methods as those employed for plasticity (see for example Simo et Hughes (1998)). On the other hand, the CIMs approach is well-adapted to dynamic explicit finite element analysis, it is quite easy to implement explicit recurrence formula for the computation of the convolution integrals (Feng, 1992; Shrivastava et Tang, 1993; Verron *et al.*, 2001;

Marckmann *et al.*, 2001).

Thus, with these remarks, the choice of a constitutive equation framework for large strain viscoelasticity of rubberlike materials must be discussed in regards with the range of strain rates that is involved in the problem; for dynamical applications, we believe that the CIM framework provides the best compromise between theoretical requirements and numerical efficiency.

2.3 Recalage des modèles

2.3.1 Modèle utilisé

D'après les essais (voir section 1.3), dans la gamme de vitesses de déformation étudiée, la raideur et la dissipation du matériau de notre étude augmentent, indiquant qu'on se situe dans la zone correspondant plutôt aux petites vitesses de déformation pour ce matériau. Une loi de comportement de type différentiel aurait donc pu être envisagée. Cependant, suite à la comparaison des modèles qui a été effectuée, l'approche intégrale a été privilégiée parce que les simulations seront réalisées sous LS-DYNA qui est un code explicite.

Le choix a été fait de considérer une partie viscoélastique simple dans le modèle puisque l'effet de la viscosité semble être relativement faible. Cependant, la partie hyperélastique correspondant aux petites vitesses de déformation doit être complexifiée si l'on souhaite pouvoir approcher correctement le comportement réel du matériau et notamment le raidissement qui apparaît pour des élongations supérieures à 2,5. Nombre de formulations de l'énergie de déformation correspondant à la partie hyperélastique ont pu être établies (néo Hookéen, Mooney-Rivlin, Ogden, Arruda-Boyce... voir Marckmann et Verron (2006) et Boyce et Arruda (2000) par exemple).

Cette étude étant faite dans un cadre industriel, notre choix s'est porté sur une formulation simple exigeant peu de paramètres mais relativement robuste sur la gamme de déformation étudiée. Pour cette raison, nous avons utilisé une série de Rivlin (1948a,b).

$$W = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (2.90)$$

où C_{ij} sont les paramètres du modèle et I_1 et I_2 sont respectivement les premier et second invariants du tenseur de Cauchy-Green gauche. Cependant, il était important de limiter le nombre de termes. Pour cela, nous avons adopté la forme d'énergie proposée par Biderman (1958) :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (2.91)$$

Cette forme d'énergie fait intervenir un seul terme dépendant du deuxième invariant I_2 du tenseur de Cauchy-Green gauche \mathbf{B} contre trois pour le premier invariant I_1 . Ceci est en accord avec le travail de Yeoh (1990, 1993), qui suggère que l'énergie de déformation dépend peu du deuxième invariant. En utilisant la formulation générale 2.24 et la forme particulière de l'énergie de la partie visqueuse 2.26, on obtient finalement le modèle viscoélastique suivant :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) = & -p\mathbf{I} + 2(C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2)\mathbf{B}(t) \\ & - 2C_{01}\mathbf{B}^{-1}(t) - \mathbf{F}(t) \left[\int_{-\infty}^t 2g_1 \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_R}\right) \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right] \mathbf{F}^T(t) \end{aligned} \quad (2.92)$$

2.3.2 Stabilité

Pour être stable, une loi de comportement de type hyperélastique doit vérifier une condition de quasi-convexité (Morrey, 1952), ce qui assure ainsi de trouver un minimum de déformation pour l'énergie libre utilisée et soumise à certaines conditions aux limites. Cependant, cette condition est difficilement démontrable. C'est pourquoi, Ball (1977) a introduit une condition plus simple : la polyconvexité. En assurant la polyconvexité de l'énergie de déformation, on assure la stabilité de la loi de comportement. Une fonction W est dite polyconvexe si et seulement si il existe une fonction P telle que :

$$W(\mathbf{F}) = P(\mathbf{F}, \text{adj } \mathbf{F}, \det \mathbf{F}) \quad \text{avec} \quad \text{adj } \mathbf{F} = (\det \mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}. \quad (2.93)$$

et que cette fonction est convexe.

Il n'est pas toujours aisé de démontrer cette propriété pour toutes les formes d'énergie de déformation. Cependant, en utilisant la norme de Frobenius, pour le cas incompressible, il est possible de trouver un assez grand nombre d'énergies de déformation qui suivent cette condition de polyconvexité. La norme de Frobenius est définie telle que :

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} \quad (2.94)$$

Si on utilise cette norme avec \mathbf{F} on a donc :

$$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{\text{tr } \mathbf{C}} = \sqrt{I_1} \quad (2.95)$$

Dans le cas incompressible, $\text{adj } \mathbf{F} = \mathbf{F}^{-1}$ puisque $\det \mathbf{F} = 1$. Donc, si on applique cette norme à l'adjoint de \mathbf{F} on obtient :

$$\|\text{adj } \mathbf{F}\| = \sqrt{\text{tr } \mathbf{B}^{-1}} = \sqrt{I_2} \quad (2.96)$$

Comme toute norme, cette fonction est convexe. Or, la composée d'une fonction convexe et strictement croissante et d'une fonction convexe est convexe. Donc, pour qu'une loi de comportement soit stable, dans le cas incompressible, il suffit que l'énergie de déformation soit la somme de fonctions convexes et strictement croissantes de $\sqrt{I_1}$ ou de $\sqrt{I_2}$.

Bien que notre modèle ait été étudié en incompressible, il nous faudra le formuler sous la forme quasi-incompressible pour une utilisation dans un code de calcul. Dans ce cas, on exprime souvent l'énergie de déformation non pas en fonction de \mathbf{F} et des invariants I_1 et I_2 de \mathbf{B} mais plutôt en fonction de $\bar{\mathbf{F}} = (\det \mathbf{F})^{-1/3}\mathbf{F}$ et des invariants \bar{I}_1 et \bar{I}_2 de $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{F}}^T$. Dans ce cadre il est plus difficile de démontrer la polyconvexité. Hartmann et Neff (2003) ont cependant démontré qu'une énergie libre composée des termes du tableau 2.2 est polyconvexe et donc stable. Il faut cependant que les paramètres matériau associés

$\psi_1(I_{\bar{\mathbf{C}}}) = \left(I_{\bar{\mathbf{C}}}^j - 3^j\right)^i$	$i \geq 1, j \geq 1$
$\psi_2(II_{\bar{\mathbf{C}}}) = \left(I_{\bar{\mathbf{C}}}^{3l/2} - 3^{3l/2}\right)^k$	$k \geq 1, l \geq 1$

TABLE 2.2 – Termes polyconvexes

à chacun de ces termes soient positifs. On peut donc démontrer que le modèle de Yeoh (Yeoh, 1990) quasi-incompressible est stable si les coefficients utilisés sont positifs. En revanche, il n'a pas été démontré que le terme de notre modèle utilisant le deuxième invariant est polyconvexe. Cependant, cette condition de positivité des paramètres utilisés conduit à des identifications de moins bonne qualité d'après Przybylo et Arruda (2000).

De même, les travaux de [James et al. \(1975\)](#); [James et Green \(1975\)](#) montrent que C_{10} , C_{01} et C_{30} doivent être positifs et C_{20} négatif afin d'être le plus proche du comportement d'un caoutchouc naturel. D'autres auteurs tels que [Renaud et al. \(2009\)](#); [Kanyanta et Ivankovic \(2010\)](#), ont par exemple utilisé le modèle de Yeoh en utilisant un coefficient $C_{20} \leq 0$. Bien que l'on soit obligé de travailler dans le cadre de la quasi-incompressibilité, on souhaite se rapprocher du cas incompressible ; on imposera donc lors de l'identification, que les coefficients C_{10} , C_{01} et C_{30} doivent être positifs alors que C_{20} peut être négatif. On s'assurera *a posteriori* que la loi incompressible avec les paramètres déterminés par le recalage est bien polyconvexe.

2.3.3 Identification

Pour recalcer le modèle, nous avons mis en place une stratégie d'identification en deux temps :

1. Identification des paramètres de la loi hyperélastique (C_{10} , C_{01} , C_{20} et C_{30}) par recalage sur les données d'essais à $0,01 \text{ s}^{-1}$;
2. Identification des paramètres de la partie viscoélastique (g_1 et τ) par recalage sur l'ensemble des données d'essais.

L'identification aurait pu être réalisée en une seule étape. Cependant, connaissant les fondements du modèle utilisé, on sait que la partie hyperélastique représente la réponse du matériau quand la vitesse de déformation tend vers zéro. Cela permet donc de bien représenter le comportement aux faibles vitesses, mais aussi de faciliter le recalage de la partie viscoélastique puisqu'il n'y a plus que deux paramètres à identifier grâce à la totalité des courbes.

2.3.3.1 Recalage des paramètres de la loi hyperélastique

Le recalage des paramètres de la loi hyperélastique est fait de façon classique en minimisant l'erreur au sens des moindres carrés entre la contrainte nominale calculée et celle des essais pour une même élongation. Ainsi, on trouve les paramètres du tableau 2.3.

Paramètres	C_{10} (MPa)	C_{01} (MPa)	C_{20} (MPa)	C_{30} (MPa)
Valeurs	-	0	-	-

TABLE 2.3 – Paramètres hyperélastiques du matériau

Pour ces valeurs on trouve une bonne adéquation entre les essais et le modèle comme le montre la figure 2.11. La forme de la courbe est globalement représentée. Par contre, l'hystérésis qui apparait sur les essais ne peut être représentée avec la loi hyperélastique.

On peut voir que le paramètre C_{01} est nul ce qui montre bien que l'influence du deuxième invariant I_2 est très peu importante pour les caoutchoucs naturels. On pourrait ne prendre que les termes dépendant du deuxième invariant et ainsi se ramener à l'énergie de déformation proposée par [Yeoh \(1990\)](#). Cependant, cette étude est avant tout la mise en place d'une méthode qui pourra être appliquée à d'autres élastomères utilisés dans le même cadre. Pour cette raison, la loi de comportement telle qu'elle a été définie sera conservée pour la suite.

Il convient de s'assurer de la polyconvexité de l'énergie de déformation. Pour cela, on définit $J = \sqrt{I_1}$ et on s'assure que les dérivées première et seconde de W par rapport à J

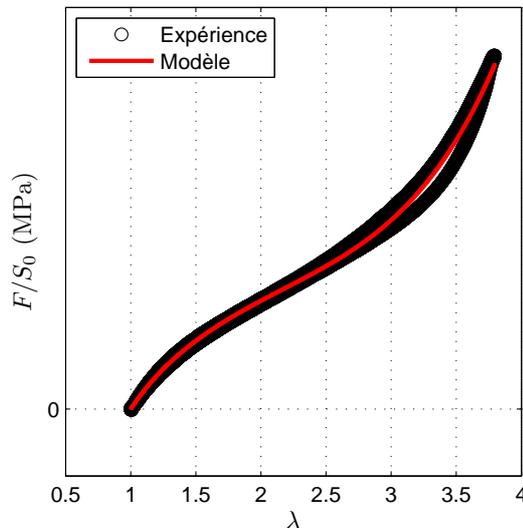


FIGURE 2.11 – Recalage de la loi hyperélastique

sont positives pour $J \geq \sqrt{3}$ (dans le cas incompressible, $I_1 \geq 3$). Cela permet d'assurer la croissance et la convexité de la fonction. On obtient :

$$\frac{\partial W}{\partial J} = 2C_{10}J + 4C_{20}J(J^2 - 3) + 6C_{30}J(J^2 - 3)^2 \quad (2.97)$$

et

$$\frac{\partial^2 W}{\partial J^2} = 2C_{10} + 12C_{20}(J^2 - 1) + 6C_{30}(5J^4 - 18J^2 + 9) \quad (2.98)$$

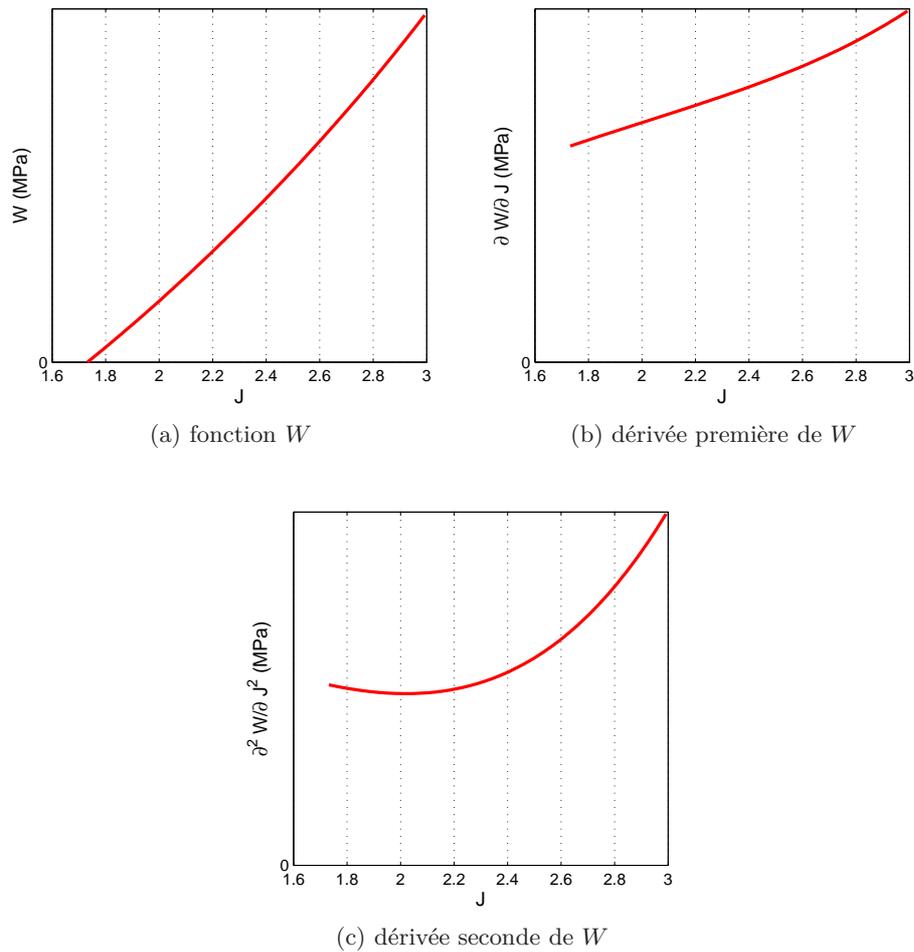
On trace sur la figure 2.12 l'évolution de W en fonction de J ainsi que les dérivées première et seconde et on s'aperçoit qu'avec le jeu de paramètres obtenu, la fonction $W(J)$ est strictement croissante et convexe pour $J \geq \sqrt{3}$: cela permet d'assurer que l'énergie de déformation $W(\mathbf{F})$ est polyconvexe et donc que la loi de comportement est stable.

2.3.3.2 Recalage des paramètres de la loi viscoélastique

Pour effectuer ce recalage, on définit une fonction erreur f . Pour cela, on calcule la différence au sens des moindres carrés entre la contrainte nominale issue du modèle p_{mod} et celle des essais p_{ess} pour chacun des chargements, c'est-à-dire pour la courbe de l'élongation en fonction du temps associée à chaque vitesse de déformation considérée. On effectue ensuite une somme de ces différentes erreurs au prorata du nombre de points de chaque courbes (qui dépend des fréquences d'acquisition utilisées lors des essais). Cela permet d'avoir le même poids pour chacune des vitesses dans la fonction erreur f :

$$f = \sum_{i=1}^{N_{courbes}} \sqrt{\frac{1}{N_{points}(i)} \sum_{j=1}^{N_{points}(i)} [p_{mod}^i(j) - p_{ess}^i(j)]^2} \quad (2.99)$$

En minimisant cette fonction, on obtient les paramètres fournis dans le tableau 2.4.

FIGURE 2.12 – Energie libre en fonction du premier invariant de \mathbf{C}

Paramètres	g_1 (MPa)	τ (s)
Valeurs	-	-

TABLE 2.4 – Paramètres viscoélastiques du matériau avec le second recalage

Les comparaisons entre essais et modèle sont présentées avec ce jeu de paramètres sur la figure 2.13. On peut voir que les courbures sont globalement bien représentées. L'hystérésis est sous-estimée pour toutes les vitesses de déformation. La raideur globale du matériau est néanmoins bien représentée pour chacune des courbes. On peut aussi noter que la différence entre la charge et la décharge semble plus importante pour les plus grandes élongations lorsqu'il s'agit des essais. Pour le modèle, cette différence semble plus importante aux faibles déformations. Cela est sans doute dû à l'utilisation d'une fonction de relaxation qui ne prend pas en compte l'amplitude de déformation.

2.4 Conclusion

L'étude des modèles de comportement viscoélastiques en grandes déformations a permis de choisir la formulation intégrale, plutôt que différentielle, en se basant non pas sur la

capacité à représenter le comportement d'un matériau à une vitesse donnée mais sur l'efficacité des algorithmes utilisés. L'utilisation du modèle intégral a permis de bien représenter le comportement du caoutchouc naturel pour la gamme de vitesses de déformation ainsi que pour les niveaux de déformation testés. On notera que la raideur du matériau est bien représentée mais que l'énergie dissipée par le matériau est sous-estimée. Cela est dû à l'utilisation d'un seul terme dans la partie viscoélastique du modèle. Cependant, cette représentation est suffisante pour notre application et permet de limiter le nombre de paramètres à recalculer.

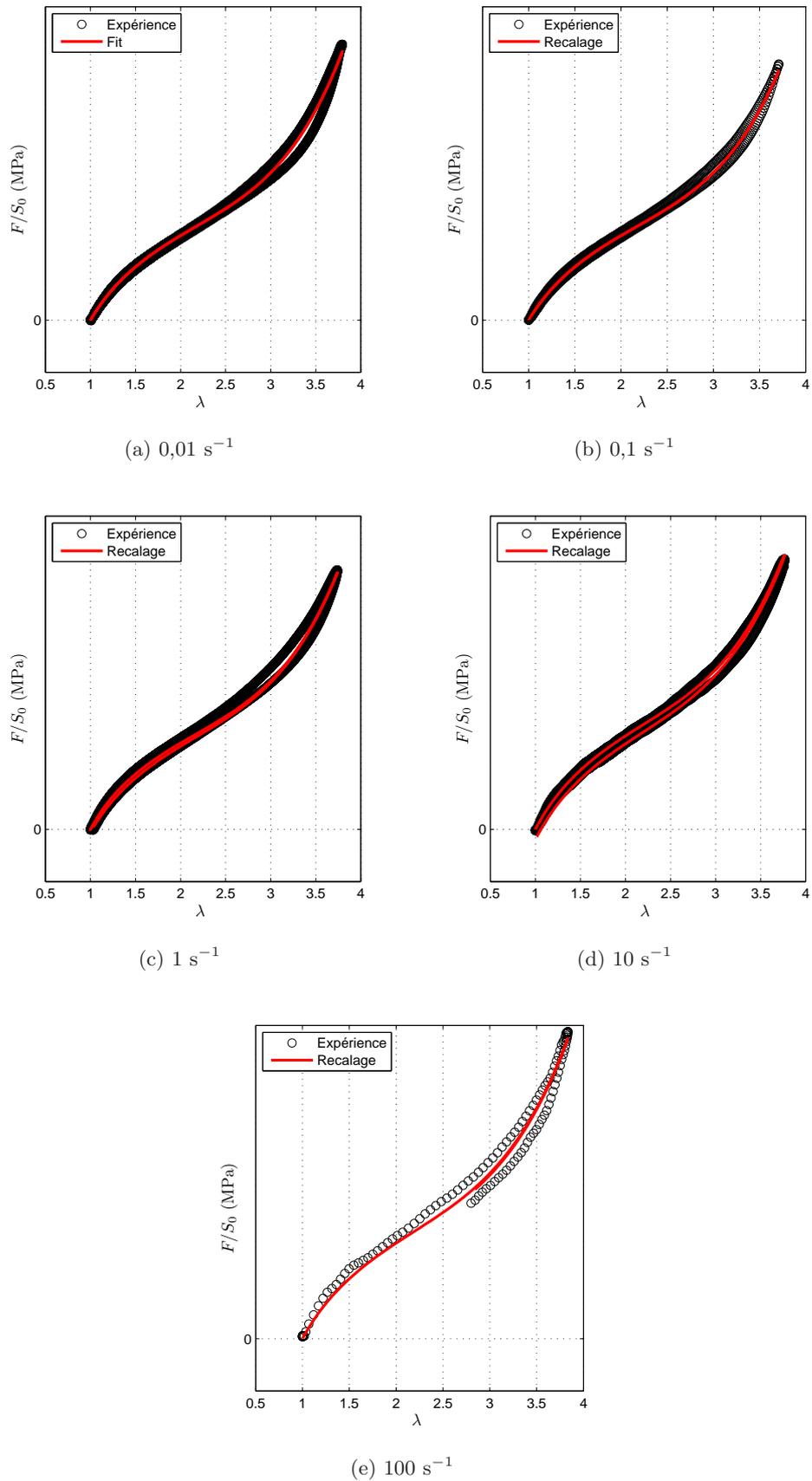


FIGURE 2.13 – Recalage de la partie viscoélastique

Chapitre 3

Mise en œuvre numérique

Le comportement du matériau étant modélisé au moyen d'une loi de comportement viscoélastique en grandes déformations, il reste à prédire le comportement du plot. Pour cela, le logiciel de calcul par éléments finis [LS-DYNA \(2006, 2007\)](#) est utilisé. Ce logiciel, développé par LSTC (Livermore Software Technology Corporation), permettait initialement de faire des analyses non linéaires en dynamique transitoire en utilisant un schéma d'intégration temporelle explicite. Depuis quelques années, un module permet également de faire des analyses en utilisant un schéma temporel implicite. Néanmoins, ce module n'est pas encore tout à fait au point dans sa version actuelle (LS-DYNA 971) pour les applications qui nous intéressent. En effet, de simples essais de traction uniaxiale sur des éprouvettes comportant une dizaine d'éléments et une loi de comportement de type Mooney-Rivlin ne peuvent pas être simulés au-delà d'une certaine amplitude de déformation. Pour cette raison, les résultats qui seront présentés ici ont été réalisés avec le module explicite. Néanmoins, le pas de temps critique des calculs réalisés étant de l'ordre de la microseconde, cela impose de nous limiter aux vitesses de déformation les plus importantes que nous ayons testées, c'est-à-dire de 1 à 100 s⁻¹, afin d'avoir des temps de calcul acceptables.

De nombreuses lois de comportement sont déjà implémentées dans LS-DYNA. Un certain nombre d'entre elles est adapté aux élastomères. Ainsi, on retrouve des lois hyperélastiques comme la loi *MAT_27 pour le modèle de Mooney-Rivlin ou la loi *MAT_127 pour le modèle d'Arruda-Boyce ([Arruda et Boyce, 1993](#)). On y retrouve aussi des lois viscoélastiques linéaires. Certaines lois, comme la loi *MAT_77, se rapprochent davantage de celles étudiées ici en utilisant une partie hyperélastique auquel est ajoutée une partie viscoélastique de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}^{visco} = \mathbf{F} \left[\int_0^t G \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_R}\right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tau} d\tau \right] \mathbf{F}^T \quad (3.1)$$

Cette composante viscoélastique est celle qui est utilisée dans le modèle de [Christensen \(1980\)](#), et c'est la seule composante viscoélastique en grandes déformations qui soit présente dans LS-DYNA. Elle n'avait pas été retenue durant la phase de choix des modèles car la limite de son comportement lorsque la vitesse de déformation tend vers l'infini ne correspond pas à un modèle hyperélastique simple néo-Hookéen. Il convient de noter que cette loi est une troncature à l'ordre 1 du développement de [Green et Rivlin \(1957\)](#) qui utilise des fonctions de relaxation ne mettant en jeu que le temps et non l'amplitude de déformation. Bien que notre modèle ne prenne pas en compte, lui non plus, l'amplitude de déformation, il est issu du modèle K-BKZ qui permet de la prendre en compte en faisant intervenir les deux premiers invariants du tenseur $\mathbf{C}_t^{-1}(\tau)$. De ce fait, il s'avérera plus facilement généralisable.

La loi de comportement qui a été définie dans le chapitre précédent est donc implantée dans LS-DYNA au moyen d'une routine de type UMAT écrite en FORTRAN. Bien que le module implicite de LS-DYNA n'ait pas été utilisé, l'algorithme pour l'utilisation de notre loi dans un schéma d'intégration implicite est présenté à l'annexe B. On présentera dans la suite différents essais qui ont été effectués afin de valider la loi de comportement. Les essais de traction ont donc été simulés et comparés aux résultats expérimentaux. Les essais de compression ont ensuite été étudiés et les courbes force-déplacement expérimentales ont été comparées à ceux-ci. Enfin, une étude sur la propagation des ondes dans le caoutchouc a été effectuée en se basant sur les travaux de Knowles (2002) et de Niemczura et Ravi-Chandar (2011a,b,c)

3.1 Implantation de la loi de comportement

3.1.1 Séparation sphérique-déviatorique

Pour rappel, la loi de comportement qui a été retenue pour le matériau est la suivante (éq. 2.92) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) = & -p\mathbf{I} + 2(C_{10} + C_{20}(I_B - 3) + C_{30}(I_B - 3)^2)\mathbf{B}(t) \\ & - 2C_{01}\mathbf{B}^{-1}(t) - \mathbf{F}(t) \left[\int_{-\infty}^t 2g_1 \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_R}\right) \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right] \mathbf{F}^T(t) \end{aligned}$$

Théoriquement, cette loi nécessite l'introduction d'une pression hydrostatique p , issue de l'hypothèse d'incompressibilité du matériau. Néanmoins, la prise en compte de l'incompressibilité pose des problèmes numériques. Certaines solutions ont été proposées dans la littérature, comme l'utilisation d'un multiplicateur de Lagrange (Sidoroff, 1982). Cependant, la méthode la plus utilisée est la séparation du tenseur des contraintes en deux parties : déviatorique et sphérique, introduite par Ogden (1984) et utilisée par Bonet et Wood (1997); Holzapfel (2000); Simo et Hughes (1998) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{dev} + \boldsymbol{\sigma}_{sph}. \quad (3.2)$$

Le premier tenseur correspond à l'état de contrainte sans variation de volume tandis que le deuxième correspond aux contraintes hydrostatiques. On sépare donc toutes les grandeurs en une partie liée à la variation de volume tandis que l'autre correspond à l'état de déformation isochore (qui sera dénotée dans la suite par une barre $\overline{(\cdot)}$). Ainsi, on pose :

$$\overline{\mathbf{F}} = J^{-1/3}\mathbf{F} \quad (3.3)$$

avec $J = \det \mathbf{F}$ et $\det \overline{\mathbf{F}} = 1$. On a ainsi séparé la partie isochore et la partie volumétrique de la transformation. Les tenseurs de Cauchy Green droit et gauche de la partie isochore s'écrivent donc :

$$\overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{F}}^T \overline{\mathbf{F}} = J^{-2/3}\mathbf{C} \quad (3.4)$$

$$\overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{F}}\overline{\mathbf{F}}^T = J^{-2/3}\mathbf{B} \quad (3.5)$$

A partir de cette séparation, les contraintes correspondant à l'hyperélasticité et à la viscoélasticité vont être établies, afin d'aboutir à leur contribution respective à la contrainte de Cauchy.

3.1.2 Partie hyperélastique

On s'intéresse ici aux équations correspondant à l'hyperélasticité dans le cadre de la séparation déviatorique-sphérique. Ainsi, on suppose que l'énergie de déformation est composée additivement d'une partie isochore et d'une partie volumétrique, qui pour un matériau hyperélastique s'écrit :

$$W(\mathbf{C}) = U(J) + \overline{W}(\overline{\mathbf{C}}). \quad (3.6)$$

La partie isochore dépend uniquement des invariants « incompressibles » \overline{I}_1 et \overline{I}_2 de $\overline{\mathbf{C}}$ avec $\overline{I}_1 = J^{-2/3}I_1$ et $\overline{I}_2 = J^{-4/3}I_2$. L'énergie libre s'écrit donc :

$$W(\mathbf{C}) = U(J) + \overline{W}(\overline{I}_1, \overline{I}_2) \quad (3.7)$$

On obtient alors le second tenseur de Piola-Kirchhoff :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{dev} + \mathbf{S}^{sph} \quad (3.8)$$

$$= 2 \frac{\partial \overline{W}(\overline{I}_1, \overline{I}_2)}{\partial \overline{\mathbf{C}}} + 2 \frac{\partial U(J)}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \overline{\mathbf{C}}} \quad (3.9)$$

$$= 2 \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{I}_1} \frac{\partial \overline{I}_1}{\partial \overline{\mathbf{C}}} + 2 \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{I}_2} \frac{\partial \overline{I}_2}{\partial \overline{\mathbf{C}}} + J \frac{\partial U(J)}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \quad (3.10)$$

En développant chacune des dérivées par rapport au tenseur \mathbf{C} , on obtient :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} \frac{\partial (I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2))}{\partial \mathbf{C}} = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} \quad (3.12)$$

et :

$$\frac{\partial J^{-2/3}}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{1}{3} J^{-2/3} \mathbf{C}^{-1} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial J^{-4/3}}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{2}{3} J^{-4/3} \mathbf{C}^{-1} \quad (3.14)$$

et enfin :

$$\frac{\partial \overline{I}_1}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \overline{I}_2}{\partial \mathbf{C}} = J^{-4/3} \left(I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (3.16)$$

On obtient ainsi une autre expression du second tenseur de Piola-Kirchhoff :

$$\mathbf{S} = 2J^{-2/3} \left[\frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{I}_1} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) + \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{I}_2} J^{-2/3} \left(I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{C}^{-1} \right) \right] + J \frac{\partial U(J)}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \quad (3.17)$$

Or, le tenseur $\overline{\mathbf{B}}$ étant défini pour une déformation isochore, son équation caractéristique peut s'écrire :

$$\overline{\mathbf{B}}^2 = \overline{I}_1 \overline{\mathbf{B}} - \overline{I}_2 \mathbf{I} + \overline{\mathbf{B}}^{-1} \quad (3.18)$$

Et donc :

$$\mathbf{S} = 2J^{-2/3} \left[\text{DEV} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \mathbf{I} - J^{-2/3} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \mathbf{C}^{-2} \right) \right] + J \frac{\partial U(J)}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \quad (3.19)$$

avec $\text{DEV}(\cdot) = (\cdot) - \frac{1}{3} [(\cdot) : \mathbf{C}] \mathbf{C}^{-1}$ l'opérateur déviatorique sur la configuration matérielle. On peut donc en déduire le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T = \boldsymbol{\sigma}^{dev} + \boldsymbol{\sigma}^{sph} \quad (3.20)$$

$$= 2J^{-1} \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \left(\bar{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \mathbf{I} \right) - \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \left(\bar{\mathbf{B}}^{-1} - \frac{1}{3} \bar{I}_2 \mathbf{I} \right) \right] + \frac{\partial U(J)}{\partial J} \mathbf{I} \quad (3.21)$$

Sachant qu'en utilisant l'équation (3.18), on a : $\bar{I}_2(\bar{\mathbf{B}}) = \text{tr}(\bar{\mathbf{B}}^{-1})$, il vient :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \text{dev} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \bar{\mathbf{B}} - \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \bar{\mathbf{B}}^{-1} \right) + \frac{\partial U(J)}{\partial J} \mathbf{I} \quad (3.22)$$

avec $\text{dev}(\cdot) = (\cdot) - \frac{1}{3} \text{tr}(\cdot) \mathbf{I}$ l'opérateur déviatorique sur la configuration spatiale.

3.1.3 Méthode de calcul de la contribution viscoélastique

On montre ici comment le calcul de la partie viscoélastique tel qu'il a été défini dans l'équation (2.92), peut être réalisé sans avoir à conserver toutes les données correspondant à l'histoire des déformations. Dans la suite, on notera les variables calculées au temps n avec l'indice $..n$. Ainsi on veut déterminer la contribution viscoélastique de la contrainte au temps n :

$$\boldsymbol{\sigma}_n^{visco} = \frac{2g_1}{J} \text{dev} \left(\int_{-\infty}^{t_n} \exp \left(-\frac{t_n - \tau}{\tau_R} \right) \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}_t^{-1}}{\partial \tau} d\tau \right) \quad (3.23)$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}_n^{visco} = \frac{1}{J} \text{dev} \left[\bar{\mathbf{F}}_n \bar{\mathbf{H}}_n \bar{\mathbf{F}}_n^T \right] \quad (3.24)$$

où $\bar{\mathbf{H}}_n$ s'écrit :

$$\bar{\mathbf{H}}_n = 2g_1 \int_{-\infty}^{t_n} \exp \left(-\frac{t_n - \tau}{\tau_R} \right) \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}^{-1}}{\partial \tau} d\tau \quad (3.25)$$

Cette expression permet de n'avoir que des variables dépendant du temps τ à l'intérieur de l'intégrale. En séparant, ensuite l'intégrale en deux, on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}_n &= 2g_1 \int_{-\infty}^{t_{n-1}} \exp \left(-\frac{t_n - t_{n-1}}{\tau_R} \right) \exp \left(-\frac{t_{n-1} - \tau}{\tau_R} \right) \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}^{-1}}{\partial \tau} d\tau \\ &+ 2g_1 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \exp \left(-\frac{t_n - \tau}{\tau_R} \right) \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}^{-1}}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \quad (3.26)$$

avec t_{n-1} le temps de calcul précédent. En posant $\Delta t = t_n - t_{n-1}$, le pas de temps utilisé pour le calcul, on obtient :

$$\bar{\mathbf{H}}_n = \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_R} \right) \bar{\mathbf{H}}_{n-1} + 2g_1 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \exp \left(-\frac{t_n - \tau}{\tau_R} \right) \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}^{-1}}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.27)$$

On applique la méthode du point milieu, qui est une approximation à l'ordre 1, qui signifie que l'on approche la valeur τ par $(t_n - t_{n-1})/2$:

$$\bar{\mathbf{H}}_n = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_R}\right) \bar{\mathbf{H}}_{n-1} + 2g_1 \exp\left(-\frac{\Delta t}{2\tau_R}\right) \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}^{-1}}{\partial \tau} d\tau \quad (3.28)$$

$$= \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_R}\right) \bar{\mathbf{H}}_{n-1} + 2g_1 \exp\left(-\frac{\Delta t}{2\tau_R}\right) [\bar{\mathbf{C}}^{-1}]_{t_{n-1}}^{t_n} \quad (3.29)$$

Pour un algorithme permettant de calculer la partie viscoélastique lorsque certains invariants sont présents dans l'expression de la partie visqueuse, comme c'est le cas dans le modèle K-BKZ non simplifié, on se reportera à l'annexe C.

3.1.4 Algorithme de calcul de la UMAT

On présente dans le tableau 3.1 l'algorithme qui a été utilisé pour créer la UMAT.

3.1.5 Énergie de déformation volumique

La loi de comportement du matériau dépend de trois contributions : la contribution hyperélastique dépendant de W , la contribution viscoélastique qui ne dépend ici que de deux paramètres, g_1 et τ_R , et la contribution volumique qui dépend de U . Les deux premières contributions ont été définies dans les sections précédentes. Pour la partie compressible, différentes énergies de déformation ont été définies dans la littérature. Le lecteur pourra se référer au tableau 3.2 pour quelques exemples.

Toutes ces énergies de déformation dépendent entre autres d'un paramètre K (le coefficient de compressibilité). Ne cherchant pas à modéliser cette variation de volume mais à s'approcher autant que possible du cas incompressible, on prendra l'une des énergies de déformation les plus simples, à savoir celle proposée par Simo (1988) associée à un coefficient K grand devant les paramètres de la loi hyperélastique :

$$U(J) = \frac{K}{2}(J - 1)^2 \quad (3.30)$$

Bien qu'elle soit relativement commune, il faut cependant noter que cette énergie de déformation ne répond pas à certaines conditions. En effet, l'énergie de déformation devrait tendre vers l'infini lorsque J tend vers zéro, ce qui n'est pas le cas ici. Cependant, si on choisit K suffisamment grand, on est assez proche du cas incompressible.

3.1.6 Remarque sur le pas de temps critique

Le code de calcul par élément finis utilise un schéma d'intégration explicite qui impose pour des problèmes de stabilité de respecter la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (Courant *et al.*, 1928). Cette condition impose que le pas de temps maximal Δt_{crit} à utiliser pendant le calcul doit être inférieur au temps de trajet d'une onde à travers un élément :

$$\Delta t_{crit} \leq \frac{\Delta x}{c} \quad (3.31)$$

où Δx est une longueur caractéristique de l'élément et c la vitesse de propagation d'onde dans le matériau. Dans le cas uniaxial et pour un matériau élastique linéaire, la vitesse de propagation est $c = \sqrt{E/\rho}$ et ne fait donc intervenir que la raideur en traction et la

0. Pour un incrément de chargement à un temps t_n , on récupère le gradient de la déformation \mathbf{F}_n , le pas de temps dt , et les données stockées : l'inverse du tenseur de Cauchy Green droit du pas précédent $\overline{\mathbf{C}}_{n-1}^{-1}$ et $\overline{\mathbf{H}}_{n-1}$

1. Calcul du déterminant de \mathbf{F}_n et du gradient de la déformation incompressible :

$$J = \det \mathbf{F}_n$$

$$\overline{\mathbf{F}}_n = J^{-1/3} \mathbf{F}_n$$

2. Calcul du tenseur de Cauchy Green gauche relatif à la déformation incompressible

$$\overline{\mathbf{B}}_n = \overline{\mathbf{F}}_n \overline{\mathbf{F}}_n^T$$

et de ses deux premiers invariants (le troisième étant égal à 1) :

$$\overline{I}_1 = \text{tr}(\overline{\mathbf{B}}_n) \quad \overline{I}_2 = \frac{1}{2} [\overline{I}_1^2 - \text{tr}(\overline{\mathbf{B}}_n^2)]$$

3. Calcul de la contribution hyperélastique :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_n^{hyper} = 2J^{-1} \text{dev} \left[\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{I}_1} + \overline{I}_1 \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{I}_2} \right) \overline{\mathbf{B}}_n - \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{I}_2} \overline{\mathbf{B}}_n^2 \right]$$

$$\text{avec } \overline{W} = C_{10}(\overline{I}_1 - 3) + C_{20}(\overline{I}_1 - 3)^2 + C_{30}(\overline{I}_1 - 3)^3 + C_{01}(\overline{I}_2 - 3)$$

4. Calcul de la contribution volumique :

$$\boldsymbol{\sigma}_n^{sph} = \frac{\partial U(J)}{\partial J} \mathbf{I} \quad \text{avec} \quad U = \frac{K}{2} (J - 1)^2 \ln J$$

5. Calcul de la contribution viscoélastique

$$\overline{\mathbf{C}}_n^{-1} = (\overline{\mathbf{F}}_n^T \overline{\mathbf{F}}_n)^{-1}$$

$$\overline{\mathbf{H}}_n = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_R}\right) \overline{\mathbf{H}}_{n-1} + 2g_1 \exp\left(-\frac{\Delta t}{2\tau_R}\right) [\overline{\mathbf{C}}_n^{-1} - \overline{\mathbf{C}}_{n-1}^{-1}]$$

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_n^{visco} = J^{-1} \text{dev} [\overline{\mathbf{F}}_n \overline{\mathbf{H}}_n \overline{\mathbf{F}}_n^T]$$

6. Actualisation de $\overline{\mathbf{C}}_{n-1}^{-1}$ et de $\overline{\mathbf{H}}_{n-1}$

$$\overline{\mathbf{C}}_{n-1}^{-1} \leftarrow \overline{\mathbf{C}}_n^{-1} \quad \overline{\mathbf{H}}_{n-1} \leftarrow \overline{\mathbf{H}}_n$$

7. Calcul du tenseur des contraintes de Cauchy final

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_n^{sph} + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_n^{hyper} - \overline{\boldsymbol{\sigma}}_n^{visco}$$

TABLE 3.1 – Algorithme utilisé dans la routine UMAT intégrée à LS-DYNA afin d'avoir un modèle viscoélastique grandes déformations

Référence	Énergie
Valanis et Landel (1967)	$U(J) = \frac{K}{2} (\ln J)^2$
Simo (1988); van den Bogert et de Borst (1990)	$U(J) = \frac{K}{2} (J - 1)^2$
Simo et Taylor (1982); van den Bogert et de Borst (1990)	$U(J) = K \frac{(J - 1)^2 + (\ln J)^2}{4}$
Liu <i>et al.</i> (1994)	$U(J) = K(J \ln J - J + 1)$

TABLE 3.2 – Exemples d'énergie de déformation volumique utilisée dans la littérature (d'après Chagnon (2003))

densité ρ du matériau. Dans notre cas, cette raideur est assez faible ce qui permet d'avoir des pas de temps relativement élevés.

Cependant, dans le cas tridimensionnel, les ondes se propagent suivant deux modes différents : ondes de pression et ondes de cisaillement. Les vitesses de propagation d'onde associées sont respectivement c_p et c_c , pour un matériau élastique linéaire :

$$c_p = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad (3.32)$$

$$c_c = \sqrt{\frac{2G}{\rho}} \quad (3.33)$$

où K est le module de compressibilité et G le module de cisaillement du matériau. Pour notre matériau, le module de compressibilité K est grand devant les autres paramètres afin d'être assez proche du cas incompressible. Cependant, si on augmente trop K , le pas de temps critique du calcul sera très faible. Il faut donc trouver un compromis entre les deux. Pour cela, un élément finis a été sollicité en traction uniaxiale en utilisant les paramètres précédemment établis et en considérant K égal à 100, 1000 et 10000 MPa. Les résultats sont présentés sur la figure 3.1.

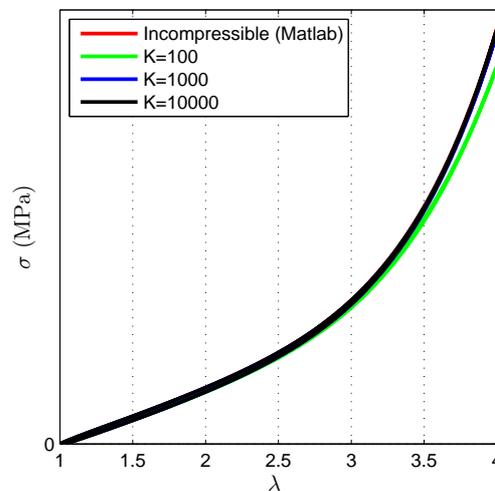


FIGURE 3.1 – Courbes contrainte-déformation en fonction du coefficient de compressibilité

On peut voir sur ces courbes que pour $K = 100$ MPa, on est assez loin de représenter le cas théorique incompressible. Pour $K = 1000$ MPa et $K = 10000$ MPa, les courbes sont très proches et apparaissent donc superposées avec le cas incompressible sur la figure 3.1. Le coefficient de compressibilité $K = 1000$ MPa a finalement été retenu afin d'être assez proche du résultat incompressible avec un pas de temps critique raisonnable. La vitesse de propagation d'onde dans ce matériau est ainsi $c_p \simeq 1000$ m/s, ce qui correspond à environ un cinquième de la vitesse de propagation d'onde dans l'acier alors que la raideur en traction est, elle, environ 10000 fois plus faible!

3.2 Validation de la loi de comportement

Suite à quelques essais de routine afin de vérifier le code et l'algorithme utilisé, une validation du modèle est effectuée. Pour cela, dans un premier temps, les essais de traction ont donc été simulés. Les essais de compression ont eux aussi été simulés et les résultats (simulation et expérience) ont donc pu être comparés sur la base des courbes force-déplacement obtenues. Enfin, comme les phénomènes dynamiques sont amplifiés pour les plus fortes vitesses comme le montrent les essais expérimentaux, les prédictions du modèle pour des essais de propagation d'onde de traction dans un milieu uniaxial sont aussi présentées.

Pour cela, le jeu de paramètres du tableau récapitulatif 3.3 est appliqué pour simuler le comportement du matériau avec LS-DYNA.

Paramètres	Valeurs
C_{10} (MPa)	-
C_{01} (MPa)	0
C_{20} (MPa)	-
C_{30} (MPa)	-
g_1 (MPa)	-
τ (s)	-
K (MPa)	1000

TABLE 3.3 – Paramètres du matériau d'étude

3.2.1 Essais de traction

Les coefficients utilisés pour la loi de comportement ont été recalés sur la base des essais de traction. Comme première étape de validation, les essais de traction ont donc été simulés. Pour cela, seule la partie centrale de l'éprouvette a été modélisée, c'est-à-dire la partie se trouvant entre les mors.

On remarque que les conditions aux limites qui sont imposées ont une influence importante sur le déroulement du calcul. En première approximation, seul le déplacement des nœuds dans la direction de sollicitation, à l'une des extrémités, a été bloqué. Dans ce cas, chaque élément se retrouve en traction uniaxiale parfaite et la simulation se déroule parfaitement. On obtient exactement les courbes d'essais.

Cependant, si l'on considère un encastrement parfait au niveau des mors, c'est-à-dire que les nœuds sont bloqués dans les deux directions normales à la direction de sollicitation, la simulation a plus de mal à s'effectuer. Les éléments présents aux extrémités ont du mal à se déformer : ils sont fortement sollicités en traction et en cisaillement et la forme imposée par la quasi-incompressibilité du matériau ne permet pas d'aboutir à un champ de

déplacement convenable dans l'éprouvette. Cela conduit dans certains cas à des problèmes d'« hourglass »¹.

Sachant que, durant la phase d'essai, on ne se trouve dans aucun des cas idéaux présentés ci-dessus, l'éprouvette a été modélisée de façon à ce que, pour chaque nœud présent à l'une des extrémités de l'éprouvette, celui-ci soit lié à un ressort linéaire dont l'autre extrémité voit ses translations bloquées dans les directions normales à la direction de traction. Cela permet d'aboutir à un problème avec des effets de bords, comme dans le cas encastré, mais tout en ayant assez de flexibilité pour que les difficultés mentionnées plus haut n'apparaissent pas. Ainsi, comme le montre la figure 3.2, l'éprouvette s'écrase suivant l'épaisseur, ce qui est plus réaliste que les cas libre et encastré.

En comparant les courbes force-déplacement de la figure 3.3, on remarque que les différences entre essais et simulation sont très faibles. Cela permet de confirmer que les effets de bords n'affectent que peu la réponse force-déplacement obtenue et que la loi de comportement implantée est valide pour les essais de traction. On notera que l'hystérésis est plus faible pour la simulation que les essais. Ceci est lié au fait que le modèle, comme on l'a vu dans la section 2.3, ne permet pas de représenter correctement l'hystérésis observée lors des essais mais permet cependant de prendre en compte la rigidification du matériau avec la vitesse de déformation.

3.2.2 Essais de compression

Les essais de compression n'ont pas permis de trouver de loi de comportement pour ce type de sollicitation. En effet, un effet « tonneau » apparaît pour chaque éprouvette testée. Cela atteste de la présence de frottement à l'interface entre l'éprouvette en caoutchouc et les plateaux de compression en aluminium. Il reste cependant très important de vérifier que les coefficients recalés en traction sont valides en compression. En effet, il est assez facile de recalculer une loi de comportement en traction. Cependant, des comportements relativement similaires en traction, peuvent conduire à des comportements différents en compression ou dans d'autres modes de sollicitation. Il est donc très important de vérifier que la loi de comportement permet d'obtenir des résultats cohérents en compression.

Un frottement de Coulomb a été introduit dans la simulation à l'interface entre la surface d'appui et les éléments de l'éprouvette. Ne connaissant pas le coefficient de frottement entre les deux surfaces, plusieurs simulations ont été effectuées avec des coefficients allant de 0 à 0,2. On remarque, sur la figure 3.4, que l'effet tonneau constaté lors des essais n'apparaît pour des amplitudes semblables qu'aux plus forts coefficients de frottement (supérieurs à 0,1). Sur les courbes force-déplacement de la figure 3.5, obtenues pour les différents essais, on s'aperçoit que plus le frottement est important plus l'hystérésis est importante. Cependant, bien qu'une partie de cette hystérésis soit due à une perte d'énergie liée au frottement au niveau des interfaces entre les plateaux et l'éprouvette, une partie provient de la dissipation due au caractère viscoélastique du matériau. Celui-ci est plus important que lors des essais pour lesquels la dissipation semblait presque négligeable. D'autre part, plus le coefficient de frottement est important plus la force enregistrée est importante. Ainsi, on se rend compte que les raideurs sont globalement bien représentées en compression, notamment pour les plus grands coefficients de frottement.

La condition de contact a un effet important sur les résultats de la simulation. D'une part, ce frottement est sans doute dépendant de la vitesse de déplacement à l'interface et d'autre part, durant les essais, on note que lorsqu'on sollicite les éprouvettes, que ce soit

1. Le hourglass est dû à l'utilisation d'éléments sous-intégrés. Un mode de hourglass est un mode à énergie de déformation nulle mais à déformation non nulle.

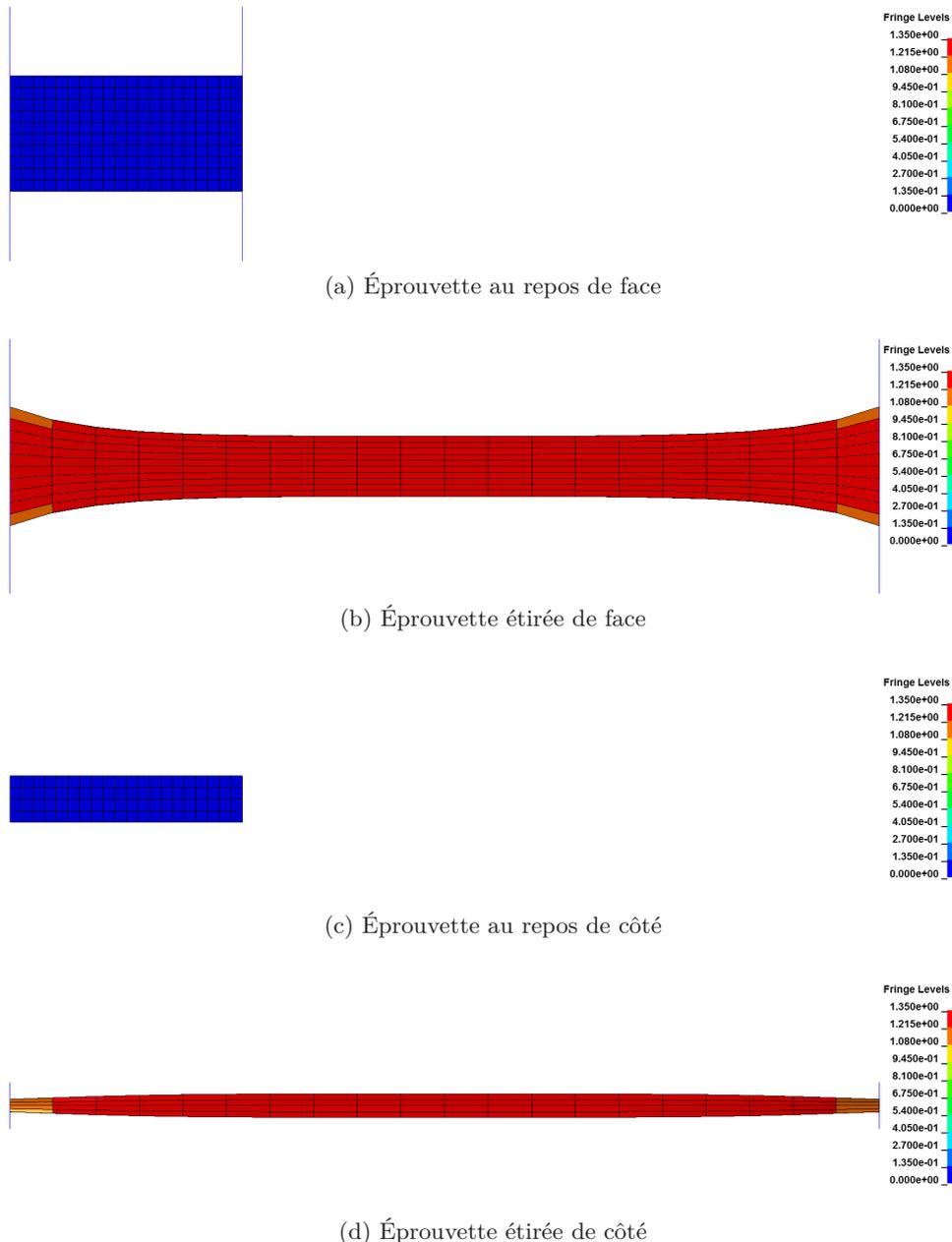


FIGURE 3.2 – Déformation logarithmique au sein de l'éprouvette au minimum et au maximum d'extension

en traction ou en compression, une sorte de graisse semble en « suinter ». Celle-ci est peut être utilisée dans le cadre de la fabrication du caoutchouc en question. Malgré la graisse minérale appliquée sur les plateaux afin de jouer le rôle de lubrifiant, les plateaux, après essai, sont un peu plus collants qu'avant l'essai. Ainsi, les conditions de frottement sont donc modifiées au cours de l'essai. Il est donc difficile de juger ces essais de compression et surtout de les simuler de façon précise. La condition de contact est donc discutable. Elle semble en effet avoir un effet important sur la dissipation et la force enregistrée. Cependant, bien que le comportement dissipatif soit surestimé, les résultats au niveau de la raideur sont proches de la réalité ce qui laisse penser que le comportement est globalement bien représenté.

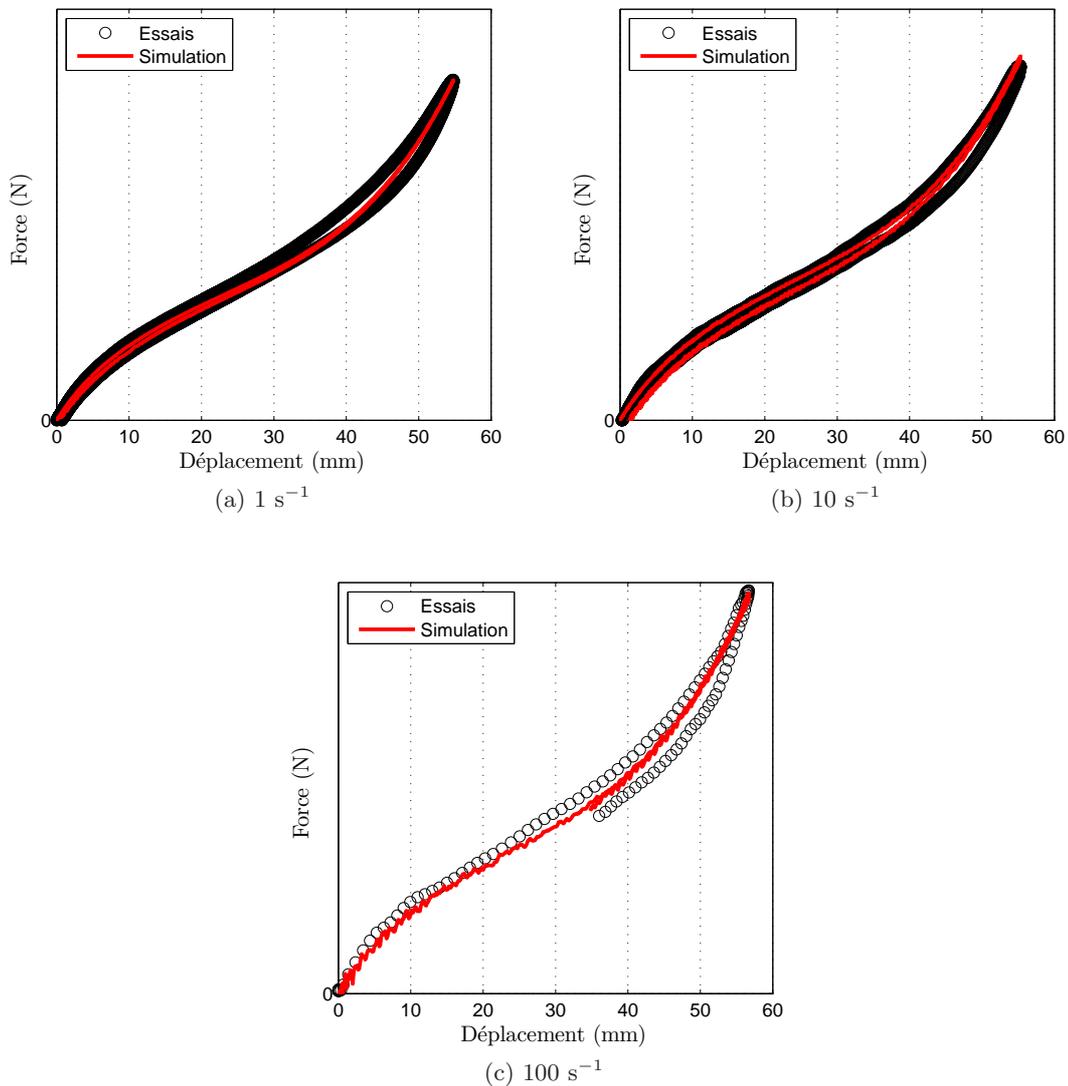


FIGURE 3.3 – Comparaison des courbes forces-déplacement en traction

3.2.3 Propagation d'onde

Comme on a pu le constater lors des essais, pour des vitesses de déformation de l'ordre de 100 s^{-1} , on approche de la vitesse de propagation du son dans le matériau et le champ de déformation ne reste plus vraiment homogène. En effet, il faut que les ondes aient le temps de faire plusieurs aller-retour dans le matériau pour que les champs de contrainte et de déformation s'homogénéisent lorsqu'on le soumet à une sollicitation quelconque. Cela est lié à la vitesse de propagation des ondes dans le matériau. Cet effet, bien que présent lors des essais, n'a qu'une faible influence sur le comportement. Cependant, pour des vitesses de déformation similaires appliquées à un plot, qui est une structure plus grande que l'éprouvette de traction, les vitesses de sollicitation mises en jeu seront plus importantes et donc on s'approchera de la vitesse de propagation d'onde dans le matériau. Il est donc intéressant de s'intéresser à ce que l'on observe, en utilisant la loi de comportement proposée, lors d'un phénomène de propagation d'onde. On va donc chercher dans cette partie à valider notre loi de comportement pour ce type de sollicitation.

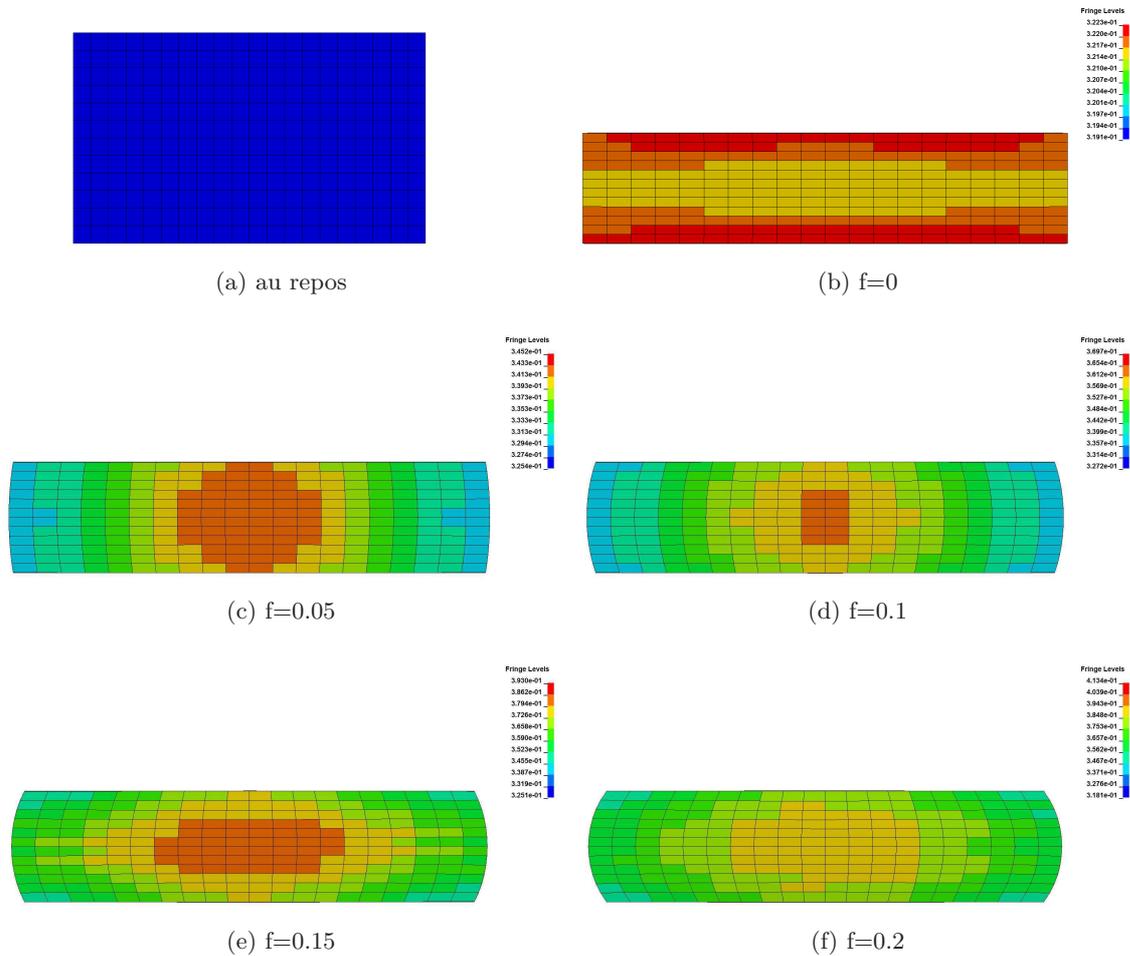


FIGURE 3.4 – Effet tonneau en fonction du coefficient de frottement à 1 s^{-1} La déformation logarithmique est présentée pour chacun des cas

Dans le cas d'un matériau dont le comportement est linéaire, il est connu que la vitesse de propagation en milieu unidirectionnel est $c = \sqrt{E/\rho}$ avec E le module d'Young du matériau et ρ sa masse volumique. Cependant, pour des matériaux élastomères, la réponse à la propagation d'onde est plus complexe, à cause des non-linéarités du matériau. Ce phénomène de propagation d'onde a été étudié notamment en traction par Knowles (2002). On reprendra ici cette publication afin de présenter les phénomènes qui sont mis en jeu dans ce cadre. N'ayant pas effectué d'essais de propagation d'onde lors de cette thèse, on reprendra ensuite une série de publications de Niemczura et Ravi-Chandar (2011a,c,b) qui présentent des essais de propagation d'onde effectués en se basant sur les travaux de Knowles.

3.2.3.1 Physique de la propagation des déformations en traction uniaxiale

Tout ce paragraphe résume les travaux effectués par Knowles (2002). Ainsi, la seconde loi de Newton nous donne :

$$\Sigma F = m\ddot{u} \quad (3.34)$$

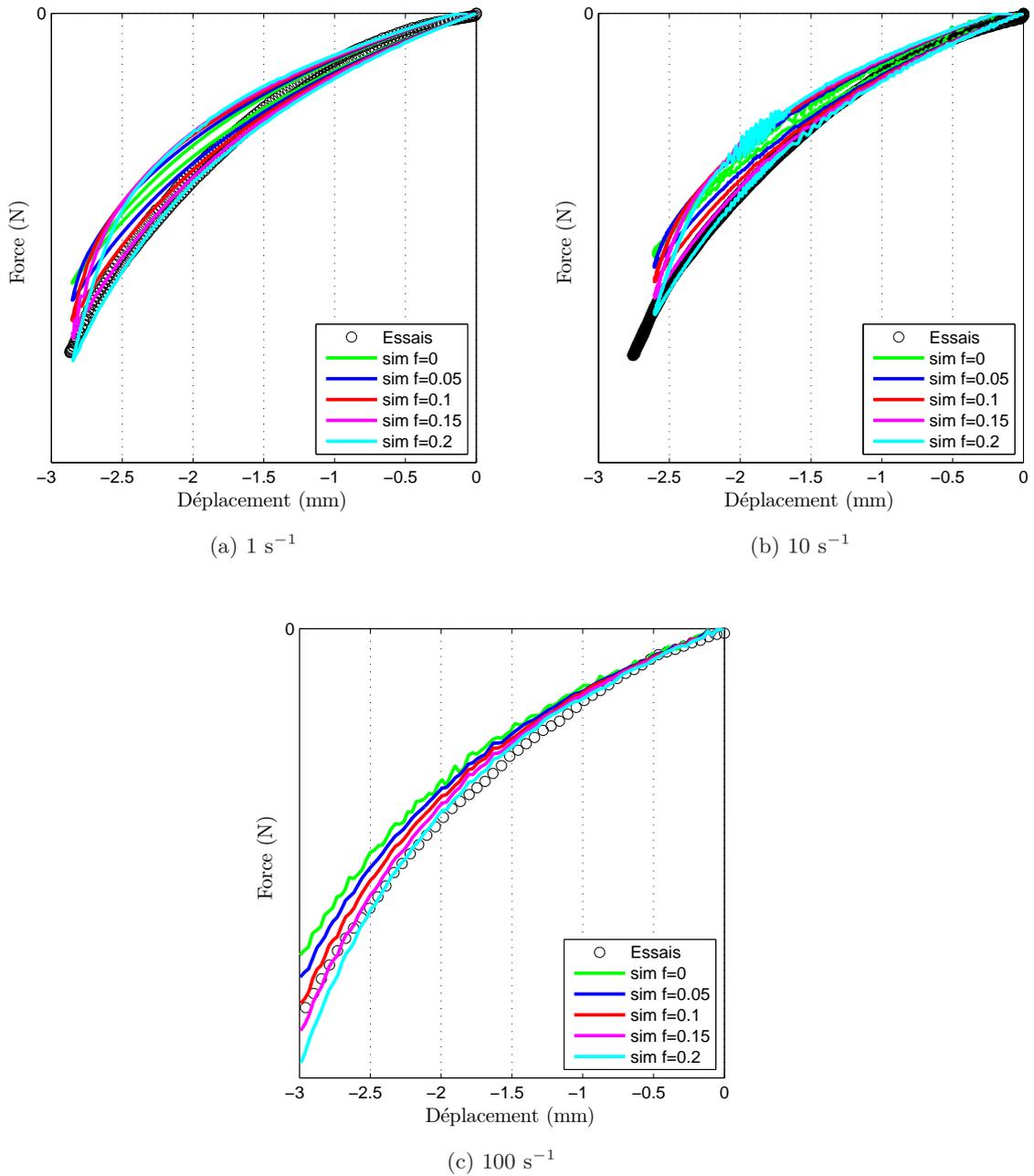


FIGURE 3.5 – Comparaison des courbes forces-déplacement en compression

avec u le déplacement et F une force. On peut en déduire dans un milieu unidimensionnel, à l'abscisse x :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \text{ avec } \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \quad (3.35)$$

avec p la contrainte nominale, ρ la masse volumique, v la vitesse particulière et ε la déformation nominale. On obtient ainsi une équation classique de propagation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.36)$$

La vitesse de propagation c obtenue est donc :

$$c = \sqrt{\frac{\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}}{\rho}} \quad (3.37)$$

Ce qui, pour les petites déformations, donne bien : $c = \sqrt{E/\rho}$. Or, les courbes contrainte-déformation pour les élastomères ont typiquement une partie concave suivie d'une partie convexe comme montré en exemple sur la figure 3.6. La figure 3.7 montre la courbe de vitesse de propagation d'onde en fonction de la déformation qui présente un minimum de vitesse, c_m , pour une déformation nominale, ϵ_0 , correspondant au point d'inflexion de la courbe contrainte-déformation. Imaginons que l'on prenne une barre dans un matériau dont le comportement est défini par la courbe de la figure 3.6. On lui applique à une extrémité une vitesse de déplacement constante comme représenté dans la figure 3.8. Une onde va alors se propager dans le matériau.

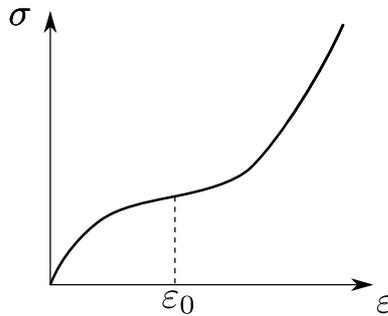


FIGURE 3.6 – Courbe contrainte-déformation typique d'un élastomère (Knowles, 2002)

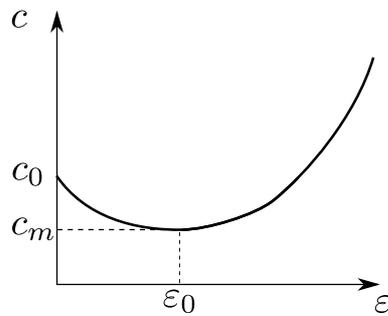


FIGURE 3.7 – Vitesse de propagation des ondes en fonction de la déformation pour un élastomère (Knowles, 2002)



FIGURE 3.8 – Schéma du milieu uniaxial dans lequel va s'effectuer la propagation d'ondes

Compression Si la sollicitation appliquée génère de la compression, d'après la figure 3.7, la vitesse de propagation augmente avec la déformation. Cela implique que les ondes qui vont se déplacer dans le matériau seront des ondes de choc. En effet, les déformations les plus importantes, plus rapides vont rejoindre les petites déformations plus lentes mais qui sont appliquées plus tôt. On va donc avoir un front d'onde, qui est une discontinuité entre une déformation nulle et une déformation finale.

Traction Pour la traction, le problème est plus complexe.

Remarque : Pour illustrer le propos, les différents modes de propagation sont présentés de deux façons différentes. On présentera ainsi les résultats sous forme de vitesses particulières en fonction du temps pour différents points de l'éprouvette sur la figure 3.9. Cela permet de visualiser la forme du front d'onde. On présentera aussi ce qui se passe dans ce milieu uniaxial au cours du temps sous la forme de diagrammes (t,x) présentés dans la figure 3.10. L'origine de ce repère correspond au moment où l'on commence à tirer sur l'éprouvette et à l'extrémité de l'éprouvette sur laquelle on va tirer au temps $t = 0$. Ainsi, pour ces différents diagrammes, on obtient à $t = 0$, aucune déformation pour toute abscisse x de l'éprouvette. Et pour un temps $t > 0$, la partie se trouvant proche de l'extrémité étirée sera déformée. La partie située à droite sera quand à elle non déformée, comme à l'état initial, puisque le front d'onde n'aura pas atteint cette zone.

Ainsi, on obtient :

- Pour de faibles vitesses imposées, les déformations seront faibles et si elles sont inférieures à ϵ_0 , la vitesse de propagation des ondes diminue lorsque la valeur de la déformation augmente. On aura alors propagation d'une onde qu'on va appeler simple. Les petites déformations se déplaçant plus vite que les grandes, on va obtenir un profil de front d'onde qui va s'aplatir au fur et à mesure de sa propagation comme le montre la figure 3.9a. On va donc avoir une zone de transition entre l'état non déformée et l'état déformée comme le montre la figure 3.10a. En effet les plus petites déformations vont se propager à une vitesse c_0 (représentés par un trait plein) alors que les déformations plus importantes vont se propager à une vitesse $c_1 < c_0$ (représentés par l'autre trait plein).
- Pour de très fortes vitesses de déplacement imposées, on retrouvera une solution avec un choc pur : une onde de choc se propage dans le matériau à une vitesse \dot{s} . On passe donc directement d'une déformation nulle à une déformation finale comme le montrent les figures 3.9b et 3.10b.
- Pour les vitesses intermédiaires, la solution du problème est non-unique et dépend de la dissipation d'énergie qui intervient au passage du front d'onde. On aura cependant toujours une onde simple suivi d'une onde de choc et on peut obtenir, d'après les équations, des fronts d'onde correspondants aux figures 3.9c et 3.9d). Comme pour les ondes simples, on va donc avoir une zone de transition entre la zone déformée et la zone non déformée comme présenté dans la figure 3.10c. Les déformations les plus faibles se déplacent toujours avec une vitesse de propagation c_0 et les plus fortes déformations correspondent à la propagation du front d'onde avec une vitesse $\dot{s} < c_0$.

La publication de Knowles s'attache à décrire le comportement du matériau dans ces trois cas, tout en définissant les vitesses de sollicitation limites qui séparent ces différents états. Ainsi, l'auteur définit trois vitesses de sollicitation limites : V_1 , V_2 et V_3 . Pour toute vitesse de sollicitation inférieure à V_1 , les ondes de traction se propageront sous forme d'ondes simples. Au-dessus de V_2 , il est possible de voir apparaître un profil d'onde de choc, et au-dessus de V_3 , les ondes observées seront forcément des ondes de choc. L'écart entre V_2 et V_3 s'explique par la non-unicité de la solution et cela dépend donc de la dissipation d'énergie qui aura lieu au passage du front d'onde.

Cependant, la loi de comportement étudiée est une loi purement élastique qui ne prend donc pas en compte la dépendance du comportement du matériau à la vitesse de déformation, ni le caractère hystérétique du matériau. Il est à noter que considérer un modèle simple comme celui qui a été présenté permet cependant de mettre en évidence les dif-

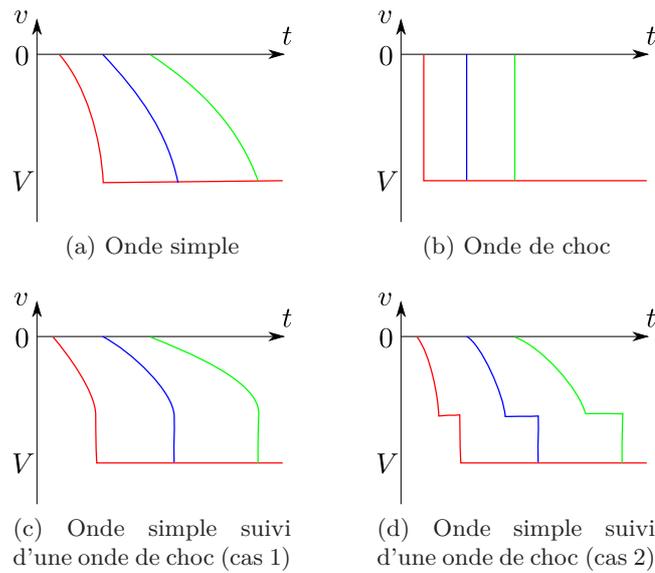


FIGURE 3.9 – Vitesses particulières en fonction du temps suivant les profils de front d'onde définis par Knowles (2002). Les couleurs correspondent à différents points de l'éprouvette comme présentés dans la figure 3.8

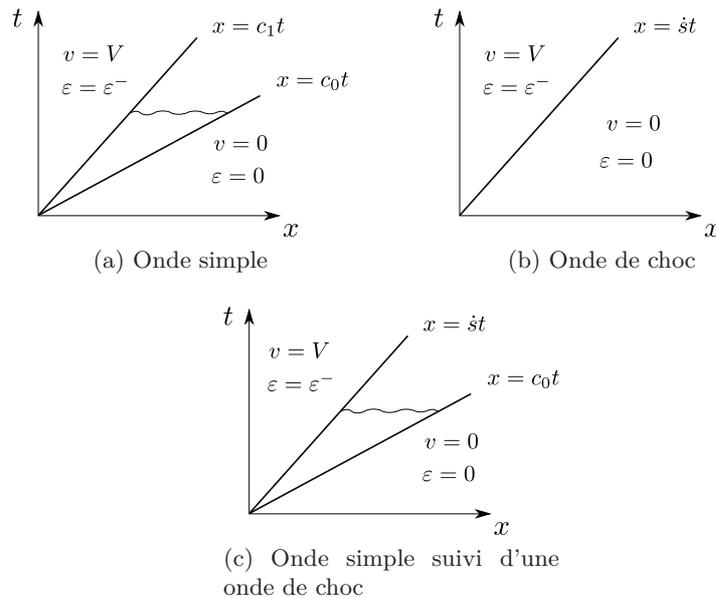


FIGURE 3.10 – Diagrammes spatio-temporel de la propagation d'onde définis dans Knowles (2002)

férents phénomènes possibles lors d'essai de traction sur une barre en élastomère.

3.2.3.2 Modélisation du problème sous Matlab

Pour vérifier que l'on retrouve les trois cas décrits par Knowles, nous avons modélisé sous MATLAB une barre de longueur 400 mm en éléments finis sur laquelle on tire à l'une des extrémités. Chaque élément de cette barre mesure 2 mm de long. La loi de comportement utilisée pour le matériau est celle définie par Knowles dans son article :

$$p = E(\varepsilon - \varepsilon_0 \varepsilon^2 - \varepsilon^3/3) \quad (3.38)$$

où E et ε_0 sont les paramètres du matériau. Ils ont été fixés de façon arbitraire tels que : $E = 0,33$ MPa et $\varepsilon_0 = 0,4$ lors de ces modélisations. Avec une telle loi matérielle, les vitesses limites peuvent être calculées et on obtient :

- $V_1 = 6,9$ m/s ;
- $V_2 = 13,8$ m/s ;
- $V_3 = 22$ m/s ;

En faisant varier, entre chaque essai, la vitesse à laquelle on tire sur l'extrémité de la barre, on retrouve bien alors les trois cas décrits par Knowles. En effet, comme le montre la figure 3.11, les vitesses particulières de différents points de l'éprouvette (référéncés par leur distance à l'extrémité tirée) ont été tracées en fonction du temps. Afin de voir comment évolue le profil, le temps 0 correspond au moment où la vitesse particulière de chaque point considéré commence à augmenter, c'est-à-dire au moment où l'onde de traction arrive au point considéré. A faible vitesse imposée (4 et 6,9 m/s (Fig. 3.11a et 3.11b)), le profil s'aplatit, ce qui est en conformité avec l'hypothèse d'ondes simples se propageant dans le matériau pour $V \leq V_1$. Pour des vitesses intermédiaires (10 et 13,6 m/s (Fig. 3.11c et 3.11d)), une première partie s'aplatit puis une partie plus abrupte suit. Ceci est en accord avec l'onde simple suivie par une onde de choc. On peut cependant remarquer que, en éléments finis, on n'a aucune dissipation d'énergie au passage du front d'onde et pourtant on retrouve une courbe qui correspond à celle décrite par Knowles pour un maximum de dissipation. Ceci est sans doute dû au fait que la dissipation devait avoir lieu dans le profil de front d'onde qui est une discontinuité parfaite. Ici, nous avons quelque chose qui se rapproche d'une discontinuité mais qui ne pourra jamais être parfait à cause de la méthode de résolution. Pour de plus grandes vitesses (18 et 22 m/s (Fig. 3.11e et 3.11f)), on peut considérer que l'on a bien un profil de front d'onde de choc. En effet, l'échelle de temps est complètement différente et on a bien le même profil pour chaque point. De plus, les vitesses de propagation d'onde sont supérieures à la vitesse c_0 correspondant aux petites déformations. Ceci est en accord avec le fait de pouvoir trouver des ondes de choc pour $V \geq V_2$. Puisqu'il n'y a pas de dissipation d'énergie au niveau du front d'onde dans notre calcul, cela entraîne des dépassements importants de la vitesse particulière par rapport à la vitesse imposée et des oscillations importantes qui ne sont pas physiques sont observées.

3.2.3.3 Essais de traction uniaxiale permettant d'observer la propagation des ondes

Suite à la publication de Knowles sur la propagation des ondes dans les matériaux élastomères, Niemczura et Ravi-Chandar ont fait des essais sur des bandes de caoutchouc. Ces essais ont pour but de voir si les trois états tels que Knowles les a définis, peuvent être observés, dans le cas de la traction. Ces essais ont été répertoriés dans une série de trois articles (Niemczura et Ravi-Chandar, 2011a,c,b) et on rappelle dans cette section les différents résultats qui ont été obtenus. Le premier traite des ondes simples, c'est-à-dire des ondes qui se propagent en cas de traction à faible vitesse. Le deuxième s'intéresse aux sollicitations à plus grandes vitesses qui induisent des ondes de choc dans le matériau. Le troisième évoque le déchargement de ces bandes de caoutchouc et l'hystérésis résultante.

Des essais préliminaires quasi-statiques en traction uniaxiale ont été effectués sur le matériau afin d'établir la courbe contrainte-déformation. Tous les essais sont ensuite réalisés sur le même montage : un projectile, auquel est attaché une des extrémités de la bande de caoutchouc est lancé avec une certaine vitesse initiale. La masse du projectile est assez importante pour que la vitesse de traction reste quasiment la même au cours de l'essai. L'autre extrémité de la bande est maintenue dans un mors fixe. Ces essais sont réalisés sur un caoutchouc latex et un caoutchouc nitrile. On ne présentera ici que les résultats

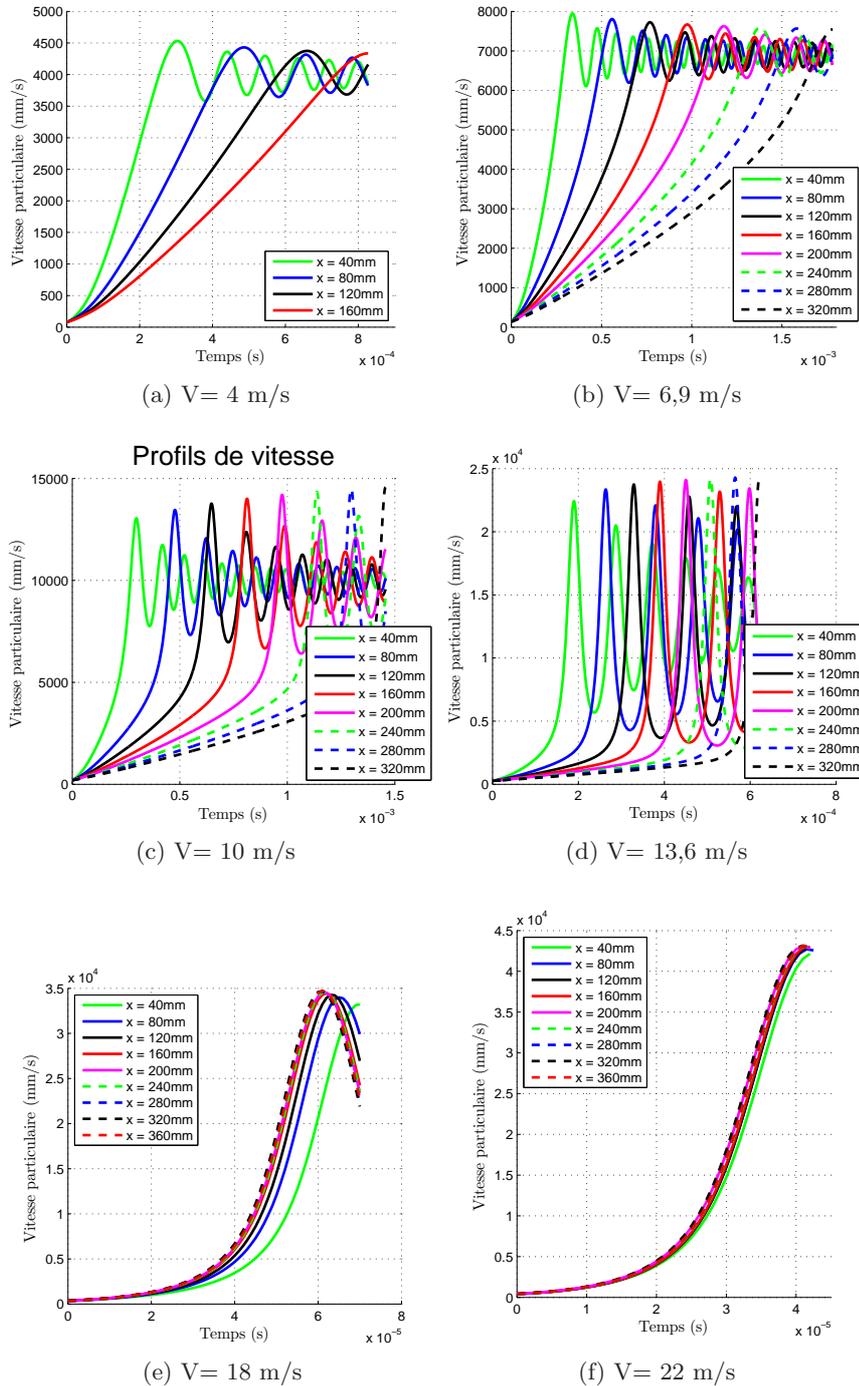


FIGURE 3.11 – Profil de vitesse particulaire en fonction du temps en différents points de l'éprouvette et pour différentes vitesses de sollicitation v

correspondant au latex. Les conclusions des auteurs sont les mêmes pour le nitrile. Lors des essais, la bande de caoutchouc est marquée avec des traits espacés de façon régulière. Ainsi, en filmant la bande au cours du temps, on peut se rendre compte de la propagation de l'onde. On obtient ainsi des trajectoires de ces points dans un repère (t, x) comme dans les figures 3.12 et 3.14. Dans ces figures, l'extrémité étirée se trouve sur le côté gauche de

l'image.

Ondes simples Pour de faibles vitesses de traction, Knowles avait prédit la propagation d'une onde simple. Cette onde simple est caractérisée par un profil d'onde qui s'aplatit au fur et à mesure de sa progression. On note sur la figure 3.12 que le passage ne se fait pas abruptement d'une zone non étirée à une zone avec la déformation maximale (ce qui aurait été le cas pour une onde choc). La transition se fait progressivement et prend de plus en plus de temps lorsqu'on s'éloigne de l'extrémité sollicitée. Ces observations sont donc bien en accord avec ce que Knowles avait écrit.

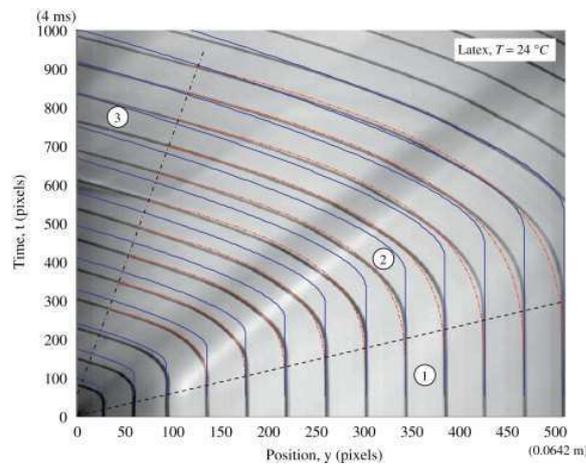


FIGURE 3.12 – Trajectoire des particules au cours du temps (D'après Niemczura et Ravi-Chandar (2011a)). Les lignes noires larges représentent l'essai, les lignes rouges pointillées et les lignes bleues continues représentent les modélisations, réalisées par Niemczura et Ravi-Chandar (2011a), utilisant respectivement la loi puissance et les données quasi-statiques

De même, la figure 3.13 présentant l'évolution de la vitesse particulière de certains points au cours du temps, montre que le profil de l'onde s'aplatit au cours de sa progression. En utilisant une loi cubique qui a été définie sur la base de la courbe de traction uniaxiale,

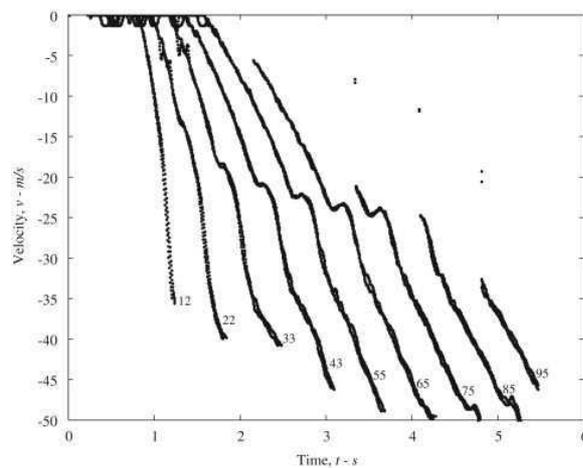


FIGURE 3.13 – Vitesse particulière en différents points de l'éprouvette repérées par leur distance à l'extrémité étirée de l'éprouvette (D'après Niemczura et Ravi-Chandar (2011a))

et en utilisant les formulations développées par Knowles, on peut tracer la position de certains points de la bande au cours du temps (lignes bleues de la figure 3.12). Il y a une

différence assez importante entre les essais et la simulation : on obtient le même type de courbe mais la propagation se fait plus rapidement dans l'essai que dans la simulation. La différence s'explique par le fait que le comportement du matériau évolue avec la vitesse de propagation. Une loi puissance a été choisie :

$$p = p_0 + \mu(\varepsilon - \varepsilon_0)^n \quad (3.39)$$

avec p_0 la raideur initiale pour une déformation ε_0 (ces deux valeurs étant déduites de la courbe contrainte-déformation quasi-statique), n et ν étant les deux paramètres à déterminer. Ces deux valeurs ont été obtenues en faisant un calcul d'optimisation utilisant les données de l'essai de propagation d'onde et les formules développées par Knowles. En comparant les résultats, une bonne adéquation entre les essais et la simulation est montrée. Les auteurs obtiennent ainsi une courbe contrainte-déformation qui est plus rigide que la première mais qui ne possède qu'une courbure.

Ondes de choc Pour générer des ondes de choc dans le matériau, les auteurs ont observé qu'il fallait à la fois une précontrainte importante ($\lambda > 2$) et une vitesse imposée importante. Dans les autres cas, on retrouve une propagation en ondes simples. En augmentant la précontrainte, on se rapproche en effet du point d'inflexion de la courbe contrainte-déformation. Étant plus proche de la zone de la courbe qui est convexe, il est donc plus facile d'observer un profil en onde de choc.

Lorsque des ondes de chocs apparaissent, la figure 3.14 montre que le passage dans la zone de déformation maximale se fait abruptement. Si on regarde les profils de vitesses particulières en différents points de l'éprouvette sur la figure 3.15, on constate qu'il sont tous très abrupts et quasiment identiques.

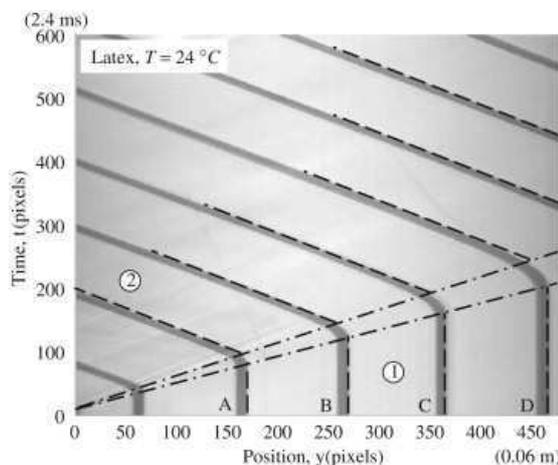


FIGURE 3.14 – Trajectoires des particules au cours du temps (D'après Niemczura et Ravi-Chandar (2011b))

La contrainte et la déformation ont été mesurées avant et après le choc. Les données d'avant le choc sont assez simples à obtenir puisqu'on applique une précharge quasi-statique. La déformation après le choc a été retrouvée à partir des films, et la contrainte en utilisant la formule :

$$p^- = p^+(\varepsilon^+) - \rho s^2(\varepsilon^+ - \varepsilon^-). \quad (3.40)$$

où les exposants $-$ et $+$ dénotent respectivement ce qui se passe avant et après passage du front d'onde. Si on répertorie les points (p^+, ε^+) pour différents essais correspondant à des

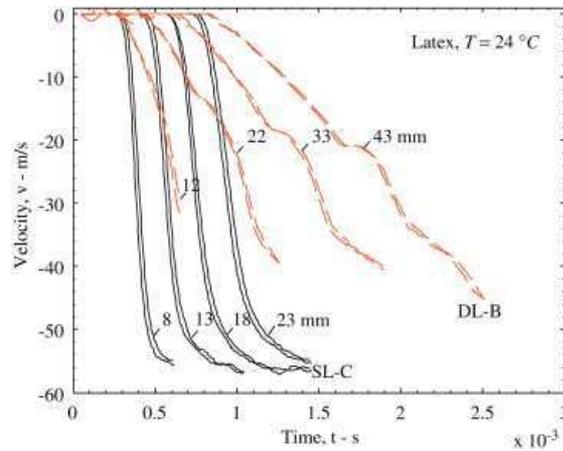


FIGURE 3.15 – Vitesse particulière en différents points de l'éprouvette repérées par leur distance à l'extrémité étirée de l'éprouvette (D'après Niemczura et Ravi-Chandar (2011b)). Les courbes rouges se rapportent à l'essai pour lequel des ondes simples apparaissent. Les courbes noires se rapportent à l'essai avec onde de choc

vitesse et des précontraintes différentes, et que l'on ajoute les données issues des essais avec ondes simples, on obtient les tracés de la figure 3.16. Ainsi, les auteurs retrouvent une courbe dont les valeurs de contrainte sont supérieures à celles obtenues dans le cas quasi-statique et qui s'approche sans doute de la courbe contrainte-déformation instantanée.

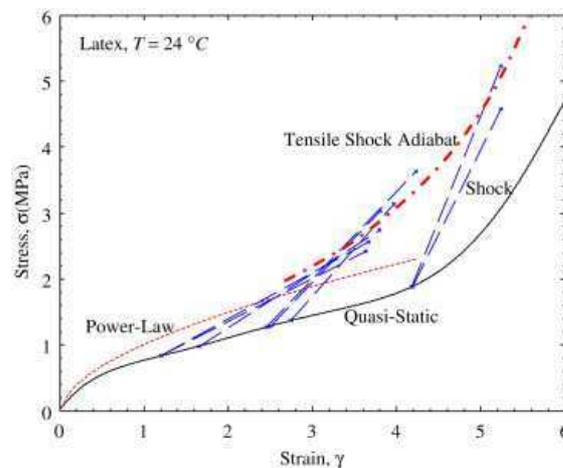


FIGURE 3.16 – Courbe contrainte-déformation du latex dans la publication de Niemczura et Ravi-Chandar (2011b)

3.2.3.4 Simulation des essais par élément finis en utilisant notre modèle

D'après les publications de Niemczura et Ravi-Chandar, le recalage du comportement du matériau à partir des essais de propagation d'ondes aboutit à une loi de comportement plus raide que celle qui a été trouvée lors des essais de traction quasi-statique. Cela est sans doute dû à la dépendance du comportement du matériau à la vitesse de déformation. Nous avons tenté de recalibrer les essais de ces publications avec la loi de comportement que nous avons utilisée pour notre matériau. Pour cela, comme pour notre matériau, on recalcule les différents paramètres hyperélastiques en se basant sur la loi de comportement en quasi-statique. Cependant, on ne possède pas de caractéristique contrainte-déformation-temps

dans ces publications. La méthode de recalage utilisée pour notre matériau n'est donc pas envisageable.

Les courbes présentées sur la figure 3.16 sont obtenues pour les essais présentant des ondes de chocs. On suppose que les vitesses de déformation rencontrées dans ce cadre sont très importantes et on recale le paramètre de raideur de la partie viscoélastique en supposant que ces courbes correspondent à la limite du modèle pour une vitesse de déformation infinie.

Comme le montre la figure 3.17, si la courbure est bien représentée en quasi-statique, à vitesse infinie la précision est moindre. Le comportement de ce matériau semble présenter une composante viscoélastique plus importante que le matériau de notre étude. Il est donc plus difficile de le représenter en n'utilisant qu'un seul paramètre viscoélastique dans notre loi de comportement. Le dernier paramètre à identifier est le temps de relaxation. Pour celui-ci, on considère les trajectoires de la figure 3.13. Pour cela, on sait qu'au point qui est à l'abscisse 64 mm de l'extrémité sur laquelle on tire, on passe d'un allongement $\lambda = 0,03$ à un allongement de $\lambda = 2,7$ en 2,45 ms environ. On peut aussi déterminer les vitesses de propagation d'ondes pour les petites et les plus grandes déformations à partir des tracés pointillés. On obtient ainsi une vitesse $c_0 = 52,5$ m/s pour les petites déformations et une vitesse $c_1 = 4,4$ m/s pour les grandes déformations. La précision des mesures sur la figure étant discutable, on n'a pas essayé de reconstruire l'histoire des déformations au cours du temps. Cependant, nous proposons de reconstruire un profil de déformation au cours du temps en utilisant une parabole d'équation :

$$\lambda = 1 + At(1 + Bt) \quad (3.41)$$

avec A et B les paramètres à déterminer. Sachant que $\lambda(t = 2,45) = 2,7$, il ne reste qu'un des paramètres à déterminer pour trouver l'autre. On va ensuite chercher à minimiser l'écart entre les vitesses de propagation calculées à partir de la loi de comportement établie et celles déterminées par les essais, en faisant varier le temps de relaxation τ_R et le paramètre B de la parabole. On obtient finalement le jeu de paramètres du tableau 3.4.

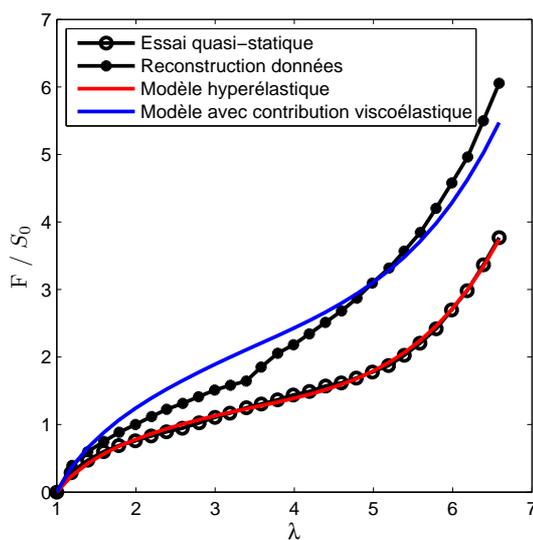


FIGURE 3.17 – Recalage des courbes contrainte-déformation du latex de la publication de Niemczura et Ravi-Chandar (2011b) avec notre modèle

Paramètres	Valeurs
C_{10} (MPa)	0,2116
C_{01} (MPa)	0,0458
C_{20} (MPa)	-0,002979
C_{30} (MPa)	0,00006215
g_1 (MPa)	0,1322
τ (s)	0,1187
K (MPa)	1000

TABLE 3.4 – Paramètres de notre loi de comportement recalée pour le latex utilisé dans les publications de Niemczura et Ravi-Chandar

Deux des essais présentés dans ces publications sont à présent simulés. Le premier correspond à l'essai noté DL-B qui consiste en un étirement à une vitesse de 50 m/s et pour lequel on observe des ondes simples. Le second est l'essai SL-C qui est un essai avec une vitesse d'étirement de 56 m/s effectué après une elongation $\lambda = 2,66$. Celui-ci conduit à la formation d'une onde de choc dans le matériau. Contrairement à ce qui été effectué avec MATLAB pour vérifier les trois modes de propagation d'ondes, les modèles utilisés ici sont des modèles LS-DYNA en éléments volumiques à intégration complète permettant de bien représenter l'essai tel qu'il a été effectué. Lors de la simulation de ces essais, on cherche à qualifier la propagation d'onde qui peut être observée dans le modèle éléments finis, comme on peut le voir sur la figure 3.18.



FIGURE 3.18 – Propagation de l'onde de traction dans le modèle élément fini. Cette figure présente la déformation logarithmique dans la direction de sollicitation dans le cadre de l'essai DL-B

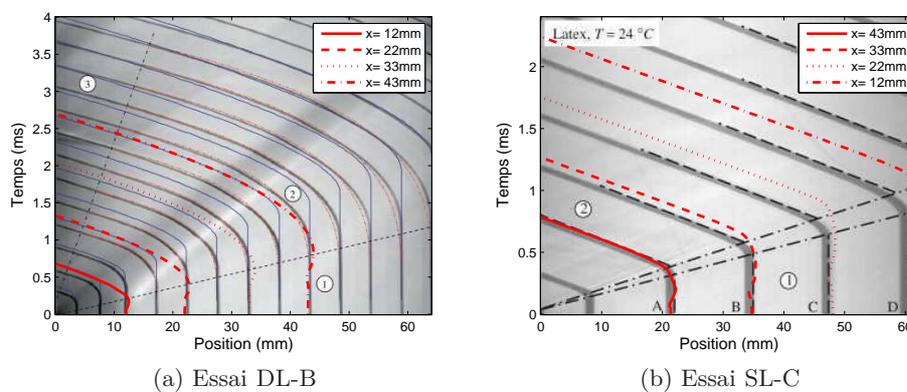


FIGURE 3.19 – Trajectoires des points de l'éprouvette en fonction du temps pour différents cas de chargement. Ces données sont extraites des publications de Niemczura et Ravi-Chandar (2011a,b). Les courbes en trait plein rouge sont les données que l'on trouve en effectuant les simulations en éléments finis de ces essais

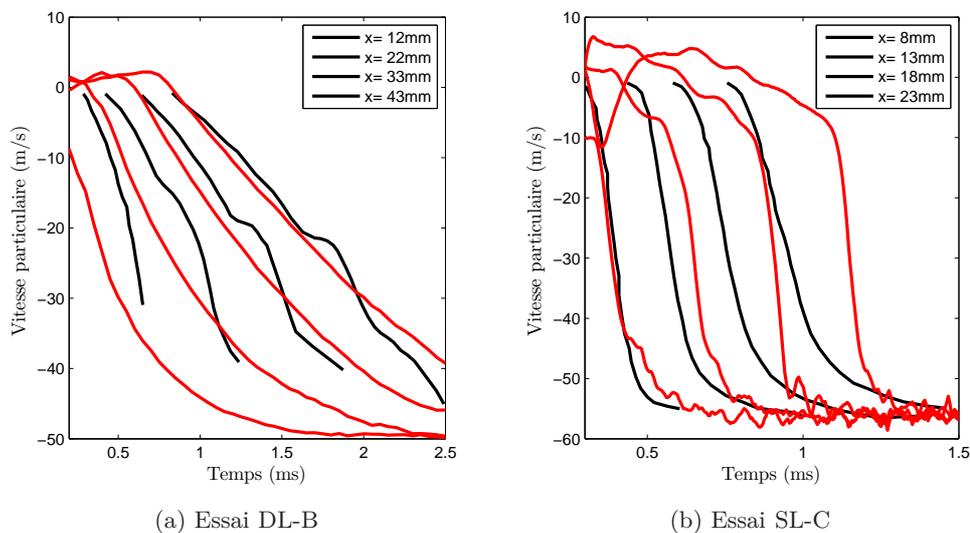


FIGURE 3.20 – Vitesses particulières des points de l'éprouvette en fonction du temps pour différents cas de chargement. Les courbes en noir sont extraites de la publication de Niemczura et Ravi-Chandar (2011b). Les courbes en rouge sont les résultats éléments finis

Pour les essais de type DL-B où une onde simple se propage dans la bandelette en latex, les trajectoires des points de l'éprouvette récupérées par la simulation ne concordent pas très bien, au départ, avec l'expérience, comme le montre la figure 3.19a. En effet, l'onde aux petites déformations arrive avec une vitesse de propagation plus importante que celle observée durant les essais, et le passage à la partie déformée se fait de façon plus brutale. A mesure que l'onde se propage dans le matériau, les résultats d'essais et de la simulation se rapprochent. La différence de temps pour laquelle l'onde arrive à un point donné entre la simulation et l'expérience se réduit au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'extrémité étirée. De même, les trajectoires suivies par ces points sont aussi plus proches lorsqu'on s'éloigne de l'extrémité étirée. De plus, on peut voir sur les courbes de vitesse particulaire de la figure 3.20a, que le profil de vitesse s'aplatit de plus en plus, montrant que l'on est bien dans le cadre de la propagation d'une onde simple dans la simulation aussi. Il faut noter que le point, à partir duquel on détermine le temps de relaxation utilisé dans le modèle, est situé plus loin de l'extrémité sur laquelle on tire que les points pour lesquels on trace ici les trajectoires. Cela explique sans doute que plus on se rapproche de ce point, plus les trajectoires se rapprochent de la réalité. L'écart pour les points les plus proches de l'extrémité sur laquelle on tire s'explique par le fait que la vitesse de déformation est plus importante à cet endroit. Ainsi, la nature viscoélastique du matériau est mise en jeu et participe à la rigidification et donc à l'apparition d'une vitesse de propagation supérieure à celle obtenue lors des essais

Pour les essais de type SL-C où apparaît une onde de choc, la figure 3.20b montre que les profils de vitesse pour les différents points ont une forme similaire et assez abrupte attestant du passage d'une onde de choc. Cependant la vitesse de cette onde est inférieure à celle des essais effectués par Niemczura et Ravi-Chandar (2011b). En effet, la figure 3.19b montrent que bien que le passage de la zone non-déformée à déformée se fasse de façon abrupte, il est aussi en retard par rapport à ce qui se passe lors des expériences. Ceci peut être dû au recalage de la loi de comportement avec uniquement un terme pour la viscoélasticité. En effet, la figure 3.16 prouve qu'en traction uniaxiale, la raideur du modèle

aux grandes déformations est inférieure à la raideur du matériau réel. Cela implique que la vitesse de propagation associée doit être plus faible que celle du matériau réel. Avoir une loi viscoélastique permettant de mieux représenter la courbure de la courbe contrainte-déformation du matériau permettrait sans doute d'avoir des résultats plus proches de la réalité lors de la propagation d'ondes.

Même si la simulation utilisée ne permet pas de reproduire de façon très précise ce qui se passe lors des essais, elle est cependant capable de reproduire qualitativement les phénomènes observés, à savoir l'onde simple et l'onde de choc. Si les vitesses et les trajectoires diffèrent de ce que l'on observe lors des essais, les résultats ne sont pas aberrants. Ainsi les profils de vitesses ou encore les trajectoires observées restent proches. La plus grande différence entre essais et simulations repose sur les vitesses de propagation mises en jeu. Ces vitesses sont dépendantes des pentes de la courbe contrainte-déformation du matériau qui ne peut être parfaitement représentée pour ce matériau avec un seul terme viscoélastique. Cependant, pour notre matériau où la part viscoélastique est peu importante, cela devrait suffire pour bien prédire le comportement du matériau même en cas de propagation d'ondes.

3.2.4 Bilan sur la validation

Pour valider la loi de comportement, trois modes de sollicitation ont été testés : la traction, la compression et la propagation d'ondes de traction. La simulation des essais de traction montre que la loi de comportement permet de parfaitement reproduire la réponse mécanique obtenue lors des essais de 1 à 100 s⁻¹. Pour la simulation des essais de compression, les résultats obtenus changent fortement en fonction du coefficient de frottement imposé à l'interface entre les plateaux et l'éprouvette. Durant les essais expérimentaux, cette condition change au cours du temps ; il est donc difficile de la modéliser correctement. Néanmoins, pour les plus grands coefficients de frottement considérés, la déformée globale de l'éprouvette est comparable à celle observée lors de la partie expérimentale. De même, pour ces coefficients de frottement, les raideurs observées dans la simulation et dans les essais expérimentaux sont très proches ; la dissipation est quant à elle surestimée. Cependant, elle dépend très fortement de la condition de frottement appliquée. Enfin, on a simulé le comportement d'une fine bandelette de caoutchouc sur laquelle on tire à l'une des extrémités, générant ainsi la propagation d'une onde de traction. Les résultats ont été comparés aux résultats expérimentaux obtenus par [Niemczura et Ravi-Chandar \(2011a,b,c\)](#). Les vitesses et les profils de front d'onde observés sont quelque peu différents mais cela est dû à une mauvaise modélisation de la viscoélasticité du matériau. En effet, les matériaux utilisés lors de ces essais ont une composante viscoélastique plus importante que le matériau de notre étude et la modéliser en utilisant un seul terme est insuffisant. Cependant, les résultats obtenus pour ces matériaux laissent penser que la propagation d'onde sera bien représentée pour notre matériau.

Ces différents essais ont donc permis de démontrer que la loi de comportement utilisée est capable de bien simuler diverses sollicitations, qu'elles soit lentes ou bien très rapides. On peut donc l'utiliser avec confiance pour prédire le comportement global du plot. Des essais de cisaillement et leur validation par calcul permettraient toutefois d'avoir une confiance encore plus importante dans les résultats obtenus. Cependant, les essais de ce type sont difficiles à mettre en place et le temps imparti pour la thèse ne permettait pas de les réaliser.

3.3 Application au plot

Rappelons que le but final de notre étude est le développement d'un « macro-élément » représentant le comportement global du plot qui puisse être intégré dans une simulation du sous-marin complet. Dans ce cadre, il est possible avec LS-DYNA d'utiliser des éléments de type *discrete beam*, qui constituent la jonction de deux noeuds mais qui peuvent être vus comme un ensemble de six ressorts : un pour chaque degré de liberté (trois translations et trois rotations). On peut associer à ces éléments une loi de comportement généralisée qui consiste à programmer une courbe force-déplacement ou moment-rotation pour chacun des degrés de liberté. De plus, il est possible de fournir des courbes supplémentaires permettant de prendre en compte l'influence de la vitesse de déformation si on utilise la loi *MAT_196 (LS-DYNA, 2007).

On va donc simuler le comportement du plot pour différentes sollicitations qui correspondent aux différents degrés de liberté. On utilise ensuite les résultats pour compléter les paramètres de la loi *MAT_196. Une simulation du plot soumis à un signal caractéristique d'explosion sous-marine est finalement comparée à celle effectuée avec ce « macro-élément ».

3.3.1 Géométrie de plot

La géométrie de plot utilisée pour les simulations est la géométrie des plots de type MN45 (voir fig. 3.21). Ces plots comportent des inserts métalliques. Cependant, ce ne sont pas des lamellés métal-caoutchouc pour lesquels l'hypothèse d'incompressibilité peut être remise en cause.

-COUPE AA-

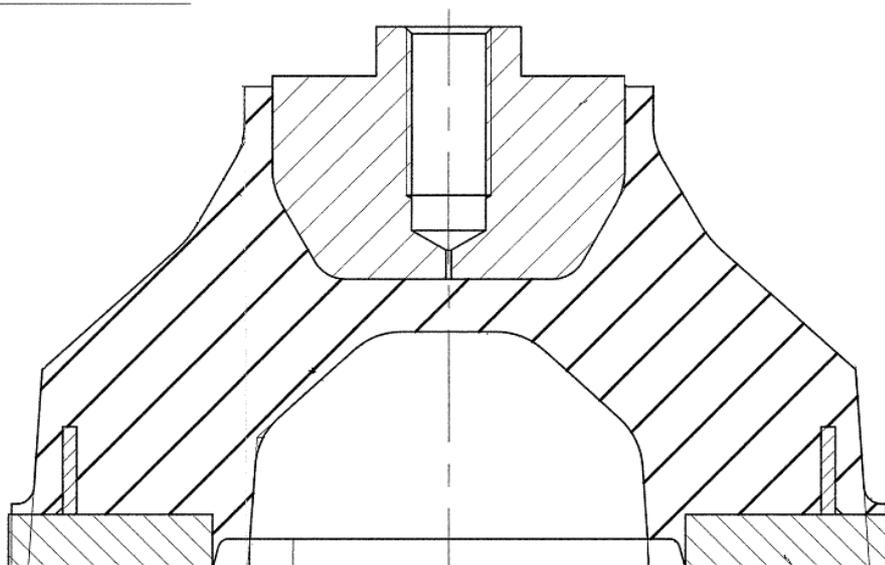


FIGURE 3.21 – Plan du plot de suspension MN45

Le plot, dont l'axe de révolution est l'axe Z, est modélisé par des éléments finis hexaédriques à 8 noeuds et à intégration complète. Le modèle de plot entier, présenté sur la

figure 3.22, compte environ 90000 nœuds et le pas de temps d'intégration critique est de 0.4 μ s environ. La platine du bas de plot est définie comme un solide rigide. Les mouvements qui sont mis en jeu dans le cas d'une explosion sous-marine font bouger la coque du sous-marin et c'est donc la platine du bas de plot qui a été choisie pour appliquer les différents déplacements et rotations. Les résultats de force ont été récupérés sur la partie haute du plot. Cette partie a été modélisée par un ensemble de poutres de raideur et de section importantes reliées à une extrémité aux nœuds correspondant à l'interface métal-caoutchouc et à l'autre à un unique nœud bloqué sur lequel sont mesurés les forces et moments. Les signaux de force et de moment récupérés sont bruités mais avec des fréquences très importantes. Cela est dû à la rigidité importante des barres et à l'utilisation d'un schéma d'intégration explicite. Toutes les courbes présentées dans la suite ont donc été filtrées pour limiter le bruit.

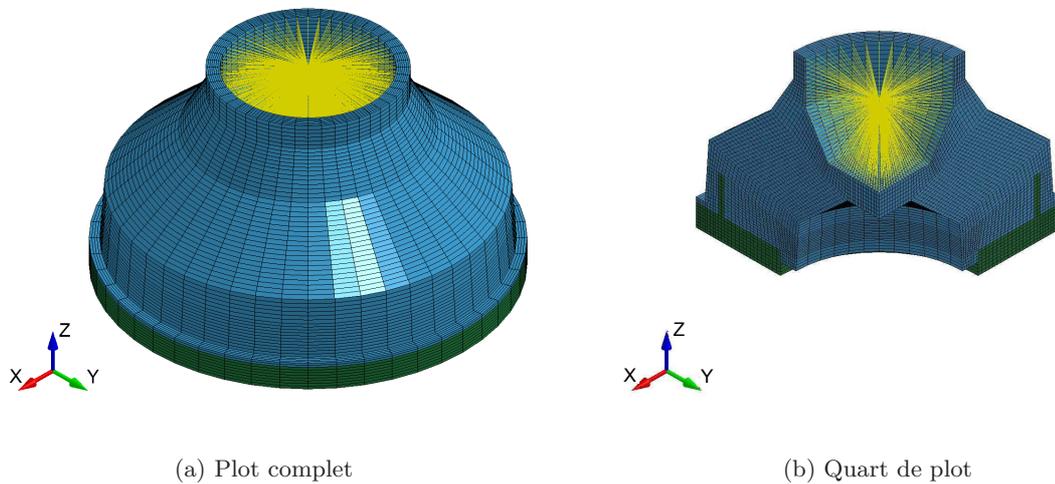


FIGURE 3.22 – Maillage du plot

3.3.2 Sollicitations simples

On va réaliser les différentes simulations permettant d'obtenir les courbes nécessaires à la loi *MAT_196 selon des sollicitations simples, à savoir :

- la traction (axe Z),
- la compression (axe Z),
- le cisaillement (axes X et Y),
- la torsion (axe Z),
- la rotation (axes X et Y).

On réalise ces simulations pour différentes vitesses, afin d'estimer l'influence de la vitesse de déformation présente dans le modèle. Il faut noter que le comportement n'est pas complètement représentatif du plot dans son utilisation car, pour ces essais, aucune précontrainte du plot due à une charge n'a été prise en compte. Cela permet cependant de voir comment réagit la structure et de déterminer si la loi de comportement implantée fournit de bons résultats.

3.3.2.1 Traction

Des simulations de traction sont réalisées sur le plot. Pour cela, une rampe de déplacement est imposée à différentes vitesses, afin de comparer les effets sur la structure. Sachant que la distance entre les inserts métalliques bas et haut est d'environ 64 mm, des vitesses de 64, 640 et 6400 mm/s correspondant donc à des vitesses de déformation nominales du plot d'environ 1, 10 et 100 s⁻¹ ont été appliquées. Le problème étant axisymétrique, les simulations ne sont effectuées que sur un quart de plot comme on peut le voir sur la figure 3.23.

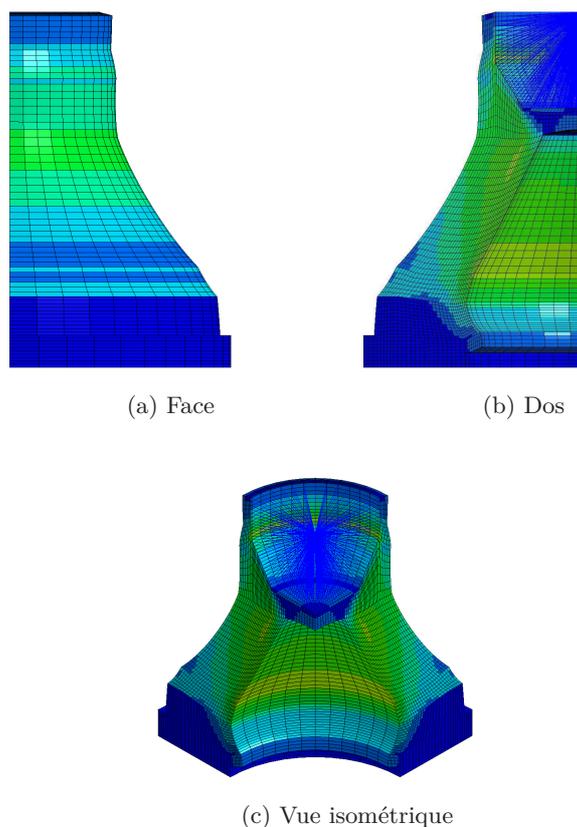


FIGURE 3.23 – Contrainte de Von-Mises dans le plot soumis à de la traction

On observe sur la figure 3.24 que les courbes pour 64 et 640 mm/s sont très proches, même si on note une légère rigidification du matériau. Sur la courbe à 6400 mm/s, on voit apparaître de fortes oscillations qui sont dues aux effets d'inerties dans le matériau. En effet, des ondes de forte amplitude se propagent dans le plot à cette vitesse alors qu'aux autres vitesses cet effet n'est pas visible. Il devient donc difficile de déterminer un comportement global du plot pour les vitesses les plus importantes.

3.3.2.2 Compression

Les mêmes essais sont effectués en compression sur le plot.

Comme pour la traction on note une légère rigidification entre la courbe à 64 et la courbe à 640 mm/s. On voit aussi les effets dynamiques apparaître à 6400 mm/s.

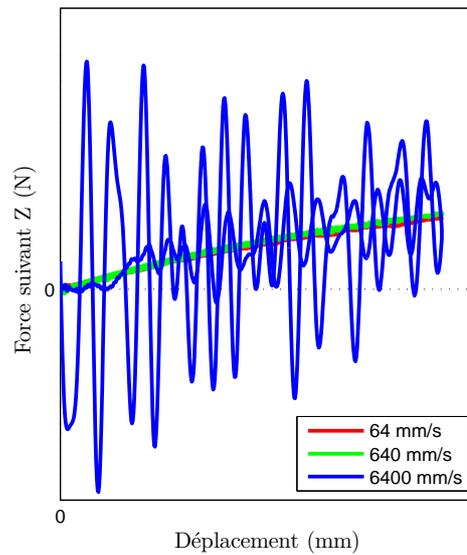


FIGURE 3.24 – Courbes force-déplacement du plot en traction obtenues pour les différentes vitesses simulées

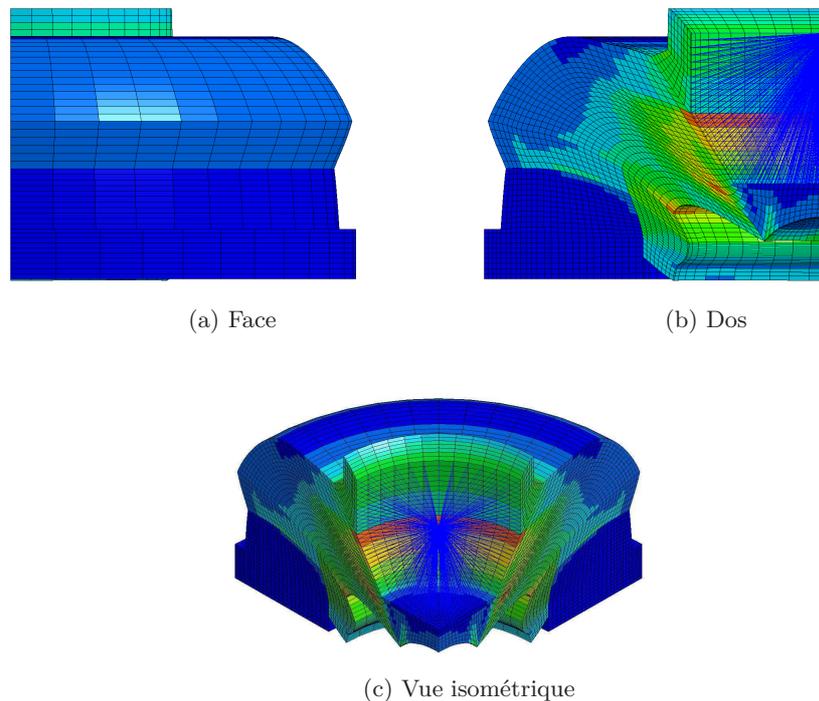


FIGURE 3.25 – Contrainte de Von-Mises dans le plot soumis à de la compression

3.3.2.3 Cisaillement

Le plot est à présent sollicité en cisaillement simple. Pour cela, la platine du bas est animé d'un mouvement de translation suivant l'axe Y normal à l'axe de révolution Z du plot, les autres degrés de libertés sont bloqués, comme le montre la figure 3.27. Les mêmes

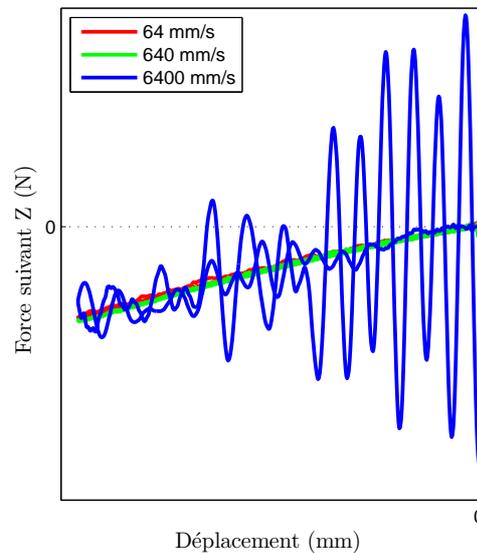


FIGURE 3.26 – Courbes force-déplacement du plot en compression obtenues pour les différentes vitesses simulées

vitesses de sollicitation que pour la traction ou la compression sont considérées.

On notera sur la figure 3.28 que même s'ils sont assez faibles, les effets d'inertie apparaissent dès 640 mm/s. De plus, contrairement à la traction et la compression, le cisaillement en plus de générer une force suivant l'axe de sollicitation Y, génère un moment autour de X représenté sur la figure 3.29. On s'aperçoit que les effets d'inertie apparaissent aussi à 640 mm/s mais de façon plus marquée pour les courbes de moment.

3.3.2.4 Torsion

Le plot est maintenant sollicité en torsion comme on peut le voir sur la figure 3.30. Pour cela, on applique une rotation suivant l'axe Z pour des vitesses de rotation de $45^\circ/\text{s}$, $450^\circ/\text{s}$ et $4500^\circ/\text{s}$, et on bloque les autres degrés de liberté.

Les effets d'inerties apparaissent pour la plus grande vitesse de rotation appliquée comme le montre la figure 3.31. Comme pour le cisaillement, des effets couplés apparaissent en torsion. On peut ainsi voir sur la figure 3.32 que le plot est comprimé suivant l'axe Z lors de la torsion.

3.3.2.5 Rotation

Le dernier type de sollicitation testé est la rotation de la platine du bas autour de l'axe X tout en bloquant les autres degrés de liberté comme le montre la figure 3.33. Cette rotation est appliquée jusqu'à un angle à des vitesses de 25, 250 et $2500^\circ/\text{s}$

La figure 3.34 montre le moment résultant en tête de plot. Ayant bloqué, en pied de plot, les degrés de liberté autres que la rotation, on obtient aussi une force suivant l'axe Y qui est présentée sur la figure 3.35. On remarque que le moment récupéré en tête de plot est de signe opposé à la rotation imposée. Ceci est dû au fait que les moments en pied et tête de plot sont de même signe car l'influence du moment exercé par la force de réaction est important.

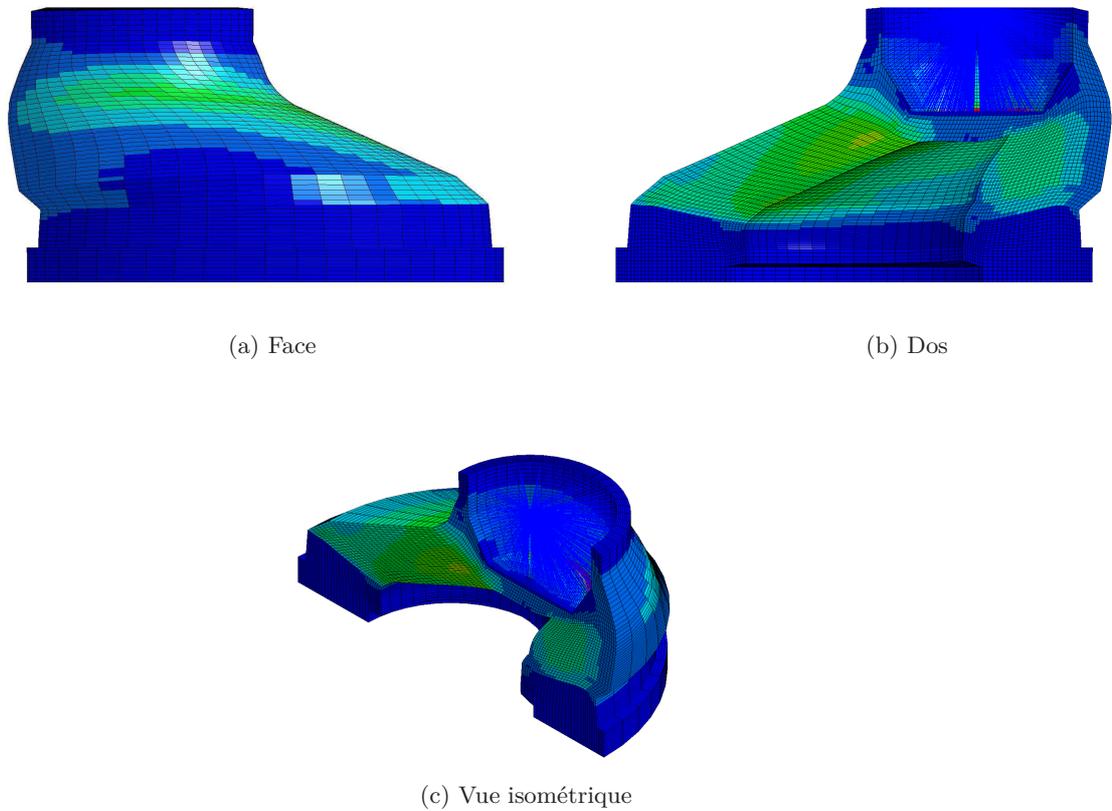


FIGURE 3.27 – Contrainte de Von-Mises dans le plot soumis à du cisaillement

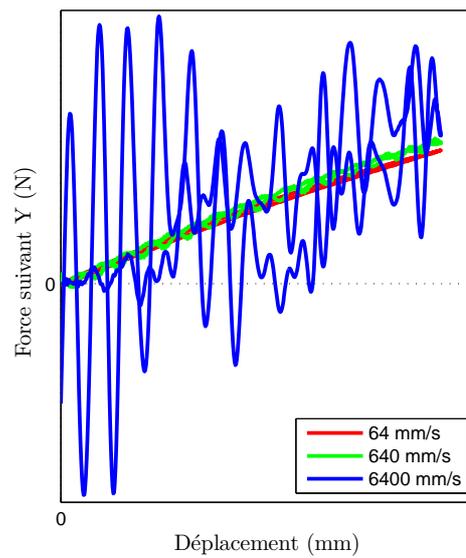


FIGURE 3.28 – Courbes force-déplacement du plot en cisaillement obtenues pour les différentes vitesses simulées

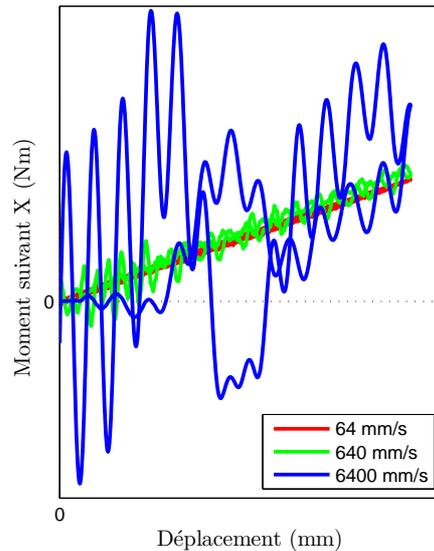


FIGURE 3.29 – Courbes moment-déplacement du plot en cisaillement obtenues pour les différentes vitesses simulées

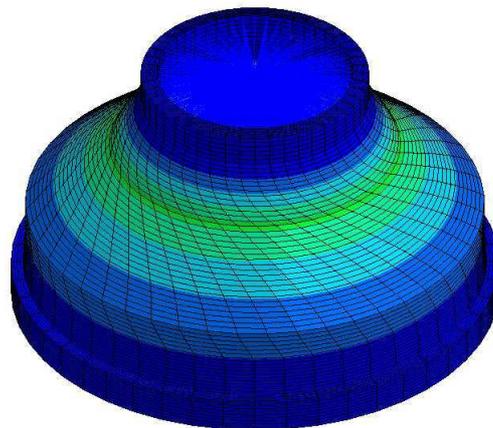


FIGURE 3.30 – Contrainte de Von-Mises dans le plot soumis à de la torsion

3.3.3 Macro-élément et sollicitation de type explosion sous-marine

3.3.3.1 Création des deux types de « macro-élément »

Ces différentes courbes caractéristiques permettent de définir le comportement global du plot. Afin de pouvoir utiliser cela dans une simulation du comportement dynamique d'un sous-marin à échelle un, il faudrait développer un élément qui intégrerait le comportement global du plot. En première approximation, un élément de type *discrete_beam* tel que défini dans LS-DYNA peut être utilisé. Ces éléments agissent comme six ressorts (trois en translation et trois en rotation) correspondant aux différents modes de sollicitation possibles. Pour chaque ressort, on peut programmer une courbe force-déplacement ou moment-rotation. Cependant, ces éléments ne permettent pas de prendre en compte les termes de couplage. Nous avons donc construit un premier macro-élément (noté macro-

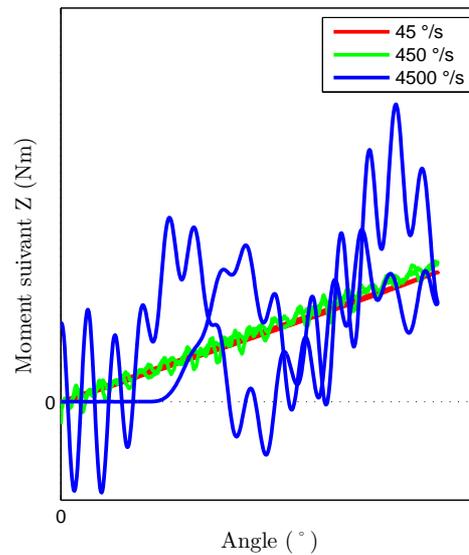


FIGURE 3.31 – Courbes moment-angle de torsion obtenues pour les différentes vitesses simulées

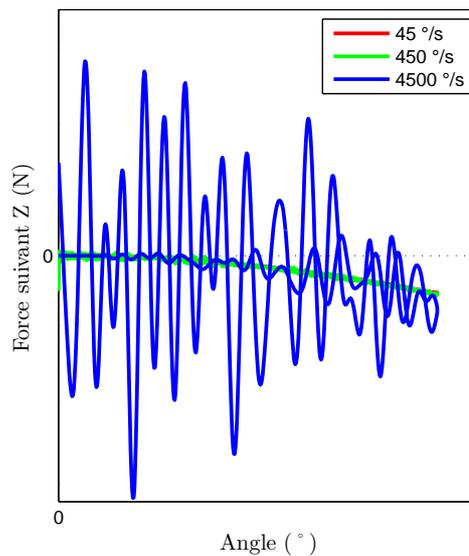


FIGURE 3.32 – Courbes force-angle de torsion obtenues pour les différentes vitesses simulées

élément n° 1) pour lequel sont considérées les courbes force-déplacement correspondant aux plus faibles vitesses.

Remarque Pour les macro-éléments, seul le comportement en traction-compression a été intégré et testé.

Pour améliorer la modélisation, il est possible de définir des courbes qui font dépendre le comportement de la vitesse de sollicitation et de construire un deuxième macro-élément (noté macro-élément n° 2). Ainsi, pour un déplacement ΔL , on obtient une force F de la

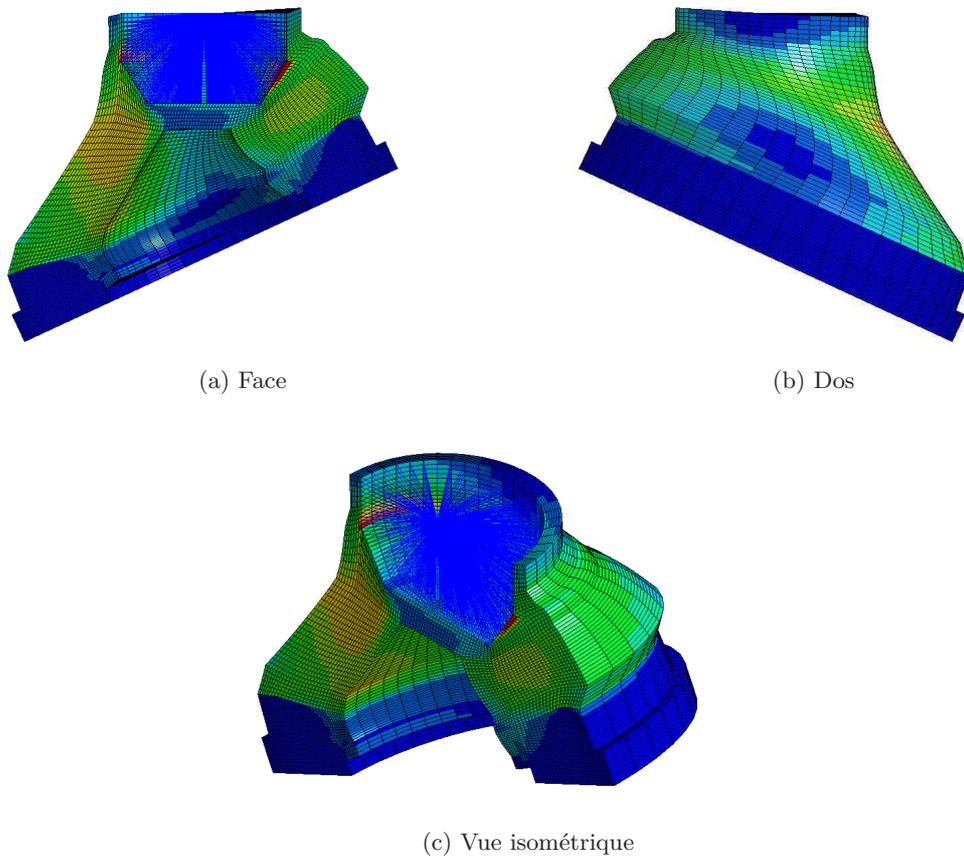


FIGURE 3.33 – Contrainte de Von-Mises dans le plot soumis à de la rotation

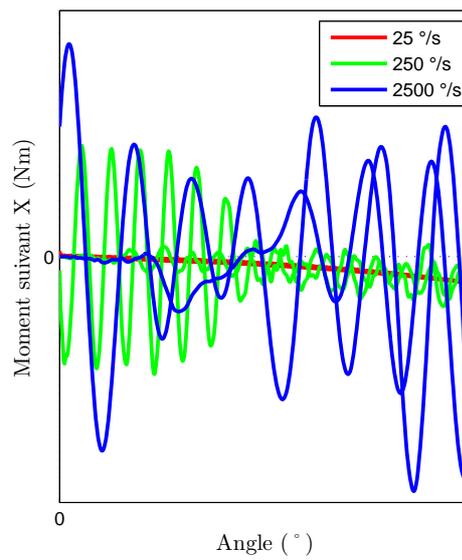


FIGURE 3.34 – Courbes moment-angle de rotation obtenues pour les différentes vitesses simulées

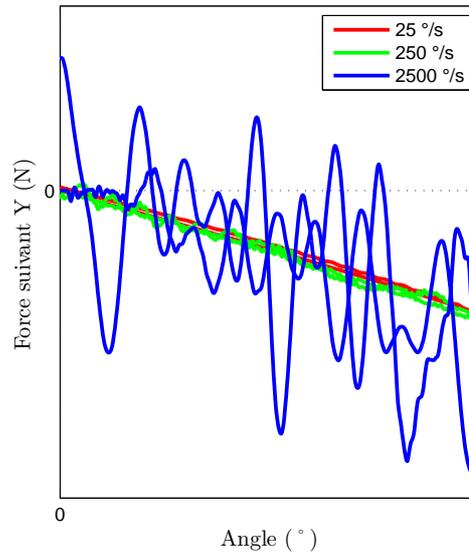


FIGURE 3.35 – Courbes force-angle de rotation obtenues pour les différentes vitesses simulées

forme :

$$F = f(\Delta L) + g(\Delta L)h(\Delta \dot{L}) \quad (3.42)$$

où $f(\Delta L)$, comme le montre la figure 3.36 correspond aux courbes programmées pour notre premier macro-élément, $g(\Delta L)$ est la courbe correspondant à l'augmentation de force pour chaque déplacement qui intervient avec le changement de vitesse et $h(\Delta \dot{L})$ est une autre courbe correspondant au coefficient multiplicateur de l'augmentation de force en fonction de la vitesse de sollicitation. Pour la courbe g , nous avons considéré la différence entre les résultats obtenus pour la simulation à la vitesse intermédiaire (640 mm/s) et celle à la plus faible vitesse (64 mm/s). La fonction h est imposée nulle pour des vitesses inférieures à 64 mm/s, et évolue linéairement de zéro à un sur l'intervalle entre 64 et 640 mm/s, puis reste constante au-delà. Cette courbe n'est absolument pas représentative du comportement du matériau mais sert à tester ce macro-élément. La figure 3.37 présente les courbes de force obtenues lorsqu'on applique un signal de déplacement triangulaire avec une vitesse de sollicitation de 640 mm/s. Le deuxième macro-élément montre un comportement plus raide et donc plus proche de ce qu'on a pu observer lors des simulations de plot. Néanmoins, ce type de comportement n'est pas sans poser certains problèmes. En effet, lorsqu'on atteint le déplacement maximal, la force diminue brusquement pour rejoindre celle du premier macro-élément avant de remonter tout aussi brusquement lorsqu'on impose le retour à zéro déplacement. Cela est dû au fait qu'on passe par un point où la vitesse est nulle avant de redescendre. La vitesse étant nulle, la force obtenue est uniquement due à la fonction f . Ceci ne correspond pas au comportement physique du plot. En effet, il faut se rappeler que la dépendance du matériau et donc du plot à la vitesse n'est pas directe et provient de la dépendance à l'histoire des déformations. Ainsi, une telle réponse génère des comportements qui peuvent être aberrants et ne pas correspondre à la réalité.

Si l'on veut prendre en compte la dépendance à la vitesse dans l'élément plot de manière plus réaliste, il faudra donc développer un élément plot qui prendra en compte l'histoire des déplacements appliqués, un peu comme le modèle de comportement du matériau dépend

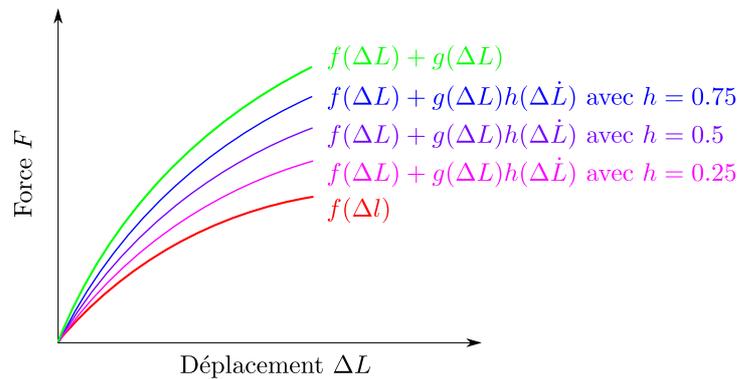


FIGURE 3.36 – Loi de comportement globale dépendant de la vitesse

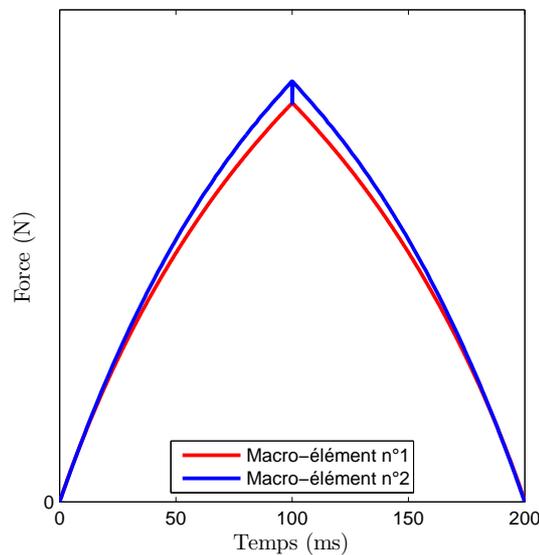


FIGURE 3.37 – Réponse des deux éléments soumis à un signal de déplacement triangulaire

de l'histoire des déformations.

3.3.3.2 Comparaison des résultats du modèle de plot et des macro-éléments pour une sollicitation de type explosion sous-marine

Afin d'évaluer les performances de ces macro-éléments, un déplacement suivant la courbe de la figure 3.38 est appliqué en pied du modèle de plot ainsi que des macro-éléments.

Remarque Tous ces calculs ont été effectués en appliquant ces courbes de déplacement suivant l'axe Z, c'est-à-dire pour un mouvement de traction-compression du plot. Ceci n'est pas un cas réaliste mais il permet de tester dans un premier temps les réponses des macro-éléments.

On peut voir sur la figure 3.39 que l'extension du modèle de plot ainsi que des macro-éléments au cours du temps sont très proches. On notera cependant que les macro-éléments présentent un léger retard quand à l'extension obtenue au cours du temps ainsi que des déplacements plus importants. Le modèle de plot utilisant la loi matériau implémentée

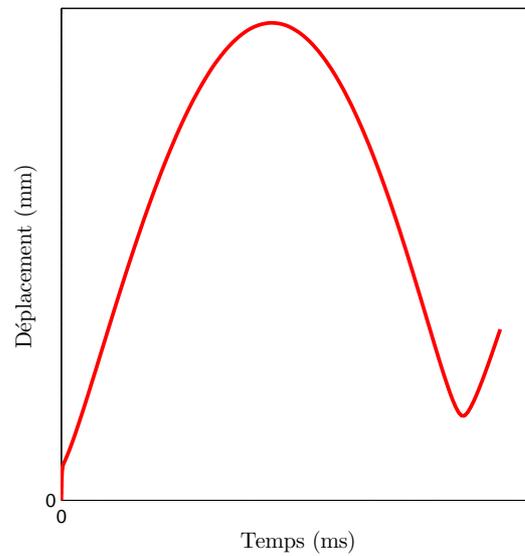


FIGURE 3.38 – Profil de déplacement caractéristique d'une base de plot soumise à une explosion sous-marine

rigidifie avec la vitesse de déformation, alors que le premier macro-élément ne rigidifie pas du tout et que le second ne rigidifie pas au-delà de ce qui est imposé par la courbe à 640 mm/s. La différence de raideur explique le retard entre les différentes courbes puisque pour une structure plus raide, les efforts et déplacements sont plus rapidement transmis et les effets d'inertie sont moins importants ce qui limite donc l'amplitude des déformations.

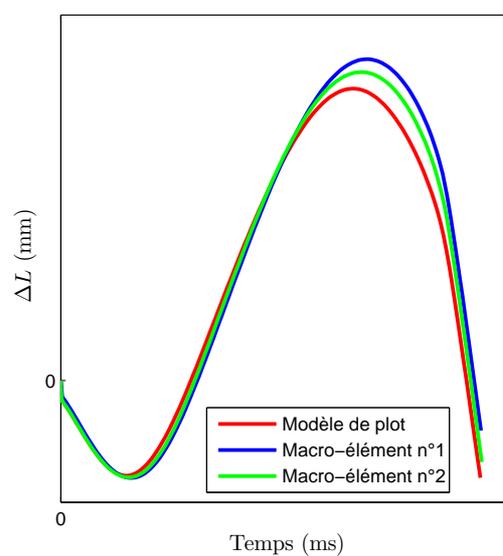


FIGURE 3.39 – Extension du modèle de plot ainsi que des deux macro-éléments soumis à un profil caractéristique d'explosion sous-marine

Pour les différents cas de chargement considérés dans la section 3.3.2, on a noté de très fortes oscillations sur les courbes force-déplacement qui sont liées aux phénomènes

d'inertie dans le matériau. Lorsqu'on utilise un macro-élément, il n'est pas possible de reproduire ce type de comportement. Cependant, malgré cette différence importante, il est possible de reproduire le comportement global du plot de façon assez précise. Néanmoins, ces oscillations posent des problèmes. En effet, même si on était capable de modéliser parfaitement la dépendance de la réponse du plot à la vitesse de sollicitation, il serait difficile d'évaluer à quel point le plot rigidifie puisque les oscillations ne permettent pas d'établir une courbe force-déplacement moyenne.

3.4 Conclusion

La loi de comportement qui a été développée dans la partie 2.3 a été implémentée dans le code de calcul LS-DYNA. Pour cela, il a fallu passer d'une formulation incompressible à une formulation quasi-incompressible pour laquelle les contributions volumique et déviatorique du tenseur gradient de la déformation \mathbf{F} sont séparées. Un algorithme de calcul de la partie viscoélastique a été mis en place permettant de prendre en compte l'histoire des déformations en ne s'appuyant que sur des données relatives au temps de calcul précédent.

Cette loi a été validée pour divers cas de chargement. Ainsi, la comparaison des résultats de la simulation et des essais de traction a fourni de très bons résultats. Dans le cas de la compression, les différences entre essais et simulation ont fourni d'un peu moins bons résultats qu'en traction. Cependant, on se rend compte que les courbes force-déplacement obtenues dépendent pour beaucoup de la condition de frottement entre les plateaux et l'éprouvette. Néanmoins, on arrive à simuler un comportement semblable aux essais en utilisant la loi matériau et les paramètres recalés avec les essais de traction. Enfin, en se basant sur les résultats des publications de Niemczura et Ravi-Chandar (2011a,b), on a pu modéliser de façon assez satisfaisante les profils de propagation d'ondes observés dans le cas de traction uniaxiale à différentes vitesses de sollicitation. Les différences sont dues à une représentation imparfaite du caractère viscoélastique du matériau utilisé dans ces publications, par notre loi de comportement. En effet, on utilise un seul terme dans la partie viscoélastique du modèle choisi, ce qui est suffisant pour le matériau de notre étude mais pas pour le matériau de Niemczura et Ravi-Chandar.

Notre loi présentant des résultats satisfaisants pour différents modes de sollicitation, elle a été utilisée pour modéliser le comportement du plot sous différents chargements. Les courbes caractéristiques ont ensuite pu être utilisées pour construire une ébauche de macro-élément. Celui-ci semble donner des résultats conformes à ceux du modèle de plot entier dans le cas d'un profil de déplacement dû à une explosion sous-marine dans le cas de la traction. On notera cependant que tous ces essais ont été effectués sans avoir préchargé le plot. Les courbes de comportement du plot seraient donc différentes dans ce cas, mais la faisabilité de notre méthode est avérée.

Conclusion générale

La présente étude s'inscrit dans le cadre général de la caractérisation mécanique des caoutchoucs, domaine qui fait l'objet de nombreuses études depuis plus de soixante-dix ans. Dans ce contexte, les techniques d'essais utilisées à l'heure actuelle rendent difficile la caractérisation du comportement aux moyennes vitesses de déformation ; pour cette raison, très peu d'études ont été réalisées. L'objectif de cette thèse était de comprendre et de modéliser le comportement d'un plot de suspension en caoutchouc qui sont celles des navires militaires exposés aux explosions sous-marines. La démarche qui a été établie consiste à caractériser le matériau en grandes déformations pour des vitesses de déformation allant de $0,1$ à 100 s^{-1} , puis de modéliser ce comportement afin de pouvoir simuler numériquement le plot.

Dans le premier chapitre de cette thèse, une méthode expérimentale permettant de réaliser des essais de traction à vitesse de déformation constante jusqu'à 100 s^{-1} a été développée. En compression, un dispositif de barre tombante a été mis en place afin d'effectuer des essais à 100 s^{-1} . Ces essais ont permis de déterminer que le matériau d'étude rigidifie avec la vitesse de déformation et que la dissipation augmente, mais que ces phénomènes sont bien inférieurs à ceux observés pour deux SBR classiques. Cette rigidification est due au comportement viscoélastique du matériau. Pour cette raison, les modèles viscoélastiques en grandes déformations ont été étudiés dans le deuxième chapitre. Un modèle hyperélastique associé à une partie viscoélastique de type K-BKZ a été retenu. Dans le troisième chapitre, cette loi a été validée d'une part par la simulation des essais de traction et de compression et d'autre part en étudiant la propagation d'ondes de traction en simulant des essais effectués par Niemczura et Ravi-Chandar (2011a,b,c). Forts de ces résultats, nous avons pu mener à bien des simulations du plot montrant que pour des vitesses importantes, des ondes de fortes amplitudes se propagent dans le matériau. Les courbes force-déplacement de traction compression obtenues aux plus faibles vitesses simulées ont été intégrées à une ébauche de macro-élément. S'il est possible d'intégrer une dépendance du comportement de cet élément à la vitesse, on ne pourra cependant pas reproduire les effets d'inertie observés pour le modèle de plot complet. Cependant, la réponse en déplacement du plot soumis à un signal de déplacement correspondant aux effets d'une explosion sous-marine sur un navire est similaire à la réponse obtenue avec le macro-élément, montrant ainsi que notre méthode est valide et qu'elle pourra être utilisée pour les autres modes de sollicitation.

Dans ce travail, les contributions majeures qui ont été apportées sont à notre avis :

- **Des essais de traction à vitesse de déformation vraie imposée constante.** La forme de l'éprouvette permet d'obtenir un champ de déformation uniforme rapidement et de faire varier l'extension de façon proportionnelle au déplacement imposé. Ainsi, l'asservissement en déplacement de la machine permet d'obtenir l'extension souhaitée. On a ainsi pu faire des essais à vitesse de déformation vraie constante ce

qui à notre connaissance n'a jamais été effectué pour ce type de matériau.

- **Une comparaison rigoureuse des deux approches de la viscoélasticité en grandes déformations.** Bien que les deux modèles choisis aient des comportements identiques pour des sollicitations quasi-statiques, à très grande vitesse de déformation et pour de petites déformations, la réponse est différente pour les grandes déformations et les moyennes vitesses de déformation. Pour les plus faibles vitesses de déformation, les comportements sont similaires. En se basant sur les algorithmes utilisés dans les codes de calcul, nous pensons que les modèles intégraux doivent être remis au goût du jour pour simuler le comportement des élastomères à moyenne vitesse de déformation.
- **La simulation du comportement d'un matériau élastomère soumis à des ondes de traction.** Si un simple modèle hyperélastique permet de bien représenter le comportement observé lors d'essais de propagation d'ondes, à savoir propagation d'ondes simples ou d'ondes de choc suivant la vitesse de sollicitation, nous avons montré que la nature viscoélastique du matériau permet en plus d'avoir les bons ordres de grandeur de vitesse de propagation et donc de bien reproduire la réponse obtenue lors des essais. En effet, pour ce type de sollicitation, la gamme de vitesse de déformation observée est large et donc l'influence de la viscoélasticité est importante.

A la lumière des travaux qui ont été effectués, plusieurs perspectives de recherche peuvent être envisagées. Dans un premier temps, il sera intéressant de réaliser des essais à vitesses de déformation nominale et vraie constantes sur un matériau ayant un fort caractère viscoélastique pour mettre en exergue et ainsi mieux comprendre les phénomènes mis en jeu lors de la rigidification du matériau. Afin de bien définir le comportement du matériau, il conviendra de mettre au point des essais de cisaillement à différentes vitesses de sollicitation. Ceci permettrait de recalibrer le modèle sur diverses sollicitations et ainsi d'améliorer la pertinence de la simulation. Bien que les simulations de plot fournissent de bons résultats, les confronter à des essais de choc sur plot permettrait de vérifier ces résultats et de valider la méthode. Mais pour que le comportement du plot puisse être convenablement modélisé, il faudra avant tout réaliser des calculs implicites afin de déterminer l'influence d'une précharge sur le plot. Enfin, pour pouvoir utiliser un macro-élément complet, il faudra créer un élément qui puisse prendre en compte les termes de couplage ce qui n'est pas possible avec les éléments présents dans la version actuelle de LS-DYNA. Il devra aussi être capable d'intégrer l'influence de l'histoire des déplacements plutôt que celle de la vitesse afin de reproduire la rigidification de la structure due à cette dernière.

Bibliographie

- ALOUI, S., OTHMAN, R., POITOU, A., GUÉGAN, P. et EL-BORGI, S. (2008). Non-parametric identification of the non-homogeneous stress in high strain-rate uni-axial experiments. *Mechanics Research Communications*, 35:392–397. [9](#)
- AMIN, A. F. M. S., LION, A., SEKITA, S. et OKUI, Y. (2006). Nonlinear dependence of viscosity in modeling the rate-dependent response of natural and high damping rubbers in compression and shear : Experimental identification and numerical verification. *International Journal of Plasticity*, 22:1610–1657. [34](#)
- ARRUDA, E. et BOYCE, M. (1993). A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(2):389–412. [34](#), [61](#)
- ASM (2000). High Strain Rate Tension and Compression Tests. In *ASM Handbook Volume 8, Mechanical Testing and Evaluation*, pages 429–446. [8](#)
- BALL, J. (1977). Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 63:337–403. [54](#)
- BARRAS, G. (2012). *Interaction fluide-structure : Application aux explosions sous-marines en champ proche*. Thèse - un édition. [1](#)
- BERGSTRÖM, J. et BOYCE, M. (1998). Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(5):931–954. [38](#)
- BERNSTEIN, B., KEARSLEY, E. A. et ZAPAS, L. J. (1963). A study of Stress Relaxation with Finite Strain. *Transactions of the society of rheology*, 7(1):391–410. [37](#), [38](#), [39](#), [119](#)
- BEVER, A. D. (1992). *Dynamic behaviour of rubber and rubberlike materials*. WFW-report 92006. [34](#)
- BIDERMAN, V. L. (1958). Calculation of rubber parts. *Rascheti na Prochnost*, page 40. [53](#)
- BONET, J. et WOOD, R. D. (1997). *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge. [62](#), [113](#)
- BOYCE, M. et ARRUDA, E. M. (2000). Constitutive models of rubber elasticity : A review. *Rubber Chemistry and Technology*, 73(3):504–523. [53](#)
- BUSSAC, M.-N., COLLET, P., GARY, G. et OTHMAN, R. (2002). An optimisation method for separating and rebuilding one-dimensional dispersive waves from multi-point measurements . Application to elastic or viscoelastic bars. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50:321 – 349. [8](#)

- CHAGNON, G. (2003). *Modélisation de l'effet Mullins dans les élastomères*. Thèse - Ecole Centrale Nantes. 67
- CHANG, W. V., BLOCH, R. et TSCHOEGL, N. W. (1976). On the theory of the viscoelastic behavior of soft polymers in moderately large deformations. *Rheologica Acta*, 15(7-8):367–378. 37
- CHEN, W. et SONG, B. (2010). *Split Hopkinson (Kolsky) Bar. Design, Testing and Applications*. Springer. 7
- CHEN, W., ZHANG, B. et FORRESTAL, M. J. (1999). A Split Hopkinson Bar Technique for Low-impedance Materials. *Experimental Mechanics*, pages 81–85. 12
- CHRISTENSEN, R. (1980). A nonlinear theory of viscoelasticity for application to elastomers. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 47:762–768. 36, 44, 61
- CHRISTENSEN, R. (1982). *Theory of Viscoelasticity*. Academic Press, New York, seconde édition. 35, 52
- COLE, R. H. (1948). *Underwater explosions*. Princeton University Press. 1
- COLEMAN, B. D. et NOLL, W. (1961). Foundations of linear viscoelasticity. *Reviews of Modern Physics*, 33:239–249. 36, 37
- COLEMAN, B. D. et NOLL, W. (1963). The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 13(167-178). 42, 108
- COURANT, R., FRIEDRICHS, K. et LEWY, H. (1928). Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100:32–74. 65
- FENG, W. W. (1992). Viscoelastic behavior of elastomeric membranes. *Journal of Applied Mechanics ASME*, 59:S29–S34. 52
- GARY, G. et ZHAO, H. (1993). Inverse Methods for the dynamic study of the nonlinear material with a split Hopkinson pressure bar. *Applied Mechanics Reviews Edition*, pages 185–189. 8
- GOVINDJEE, S. et SIMO, J. C. (1993). Coupled stress-diffusion : case II. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41:863–867. 52
- GREEN, A. E. et RIVLIN, R. S. (1957). The Mechanics of Non-Linear Materials with Memory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1(1):1–34. 36, 61
- GREEN, M. S. et TOBOLSKY, A. V. (1946). A new approach for the theory of relaxing polymeric media. *Journal of Chemical Physics*, 14:87–112. 37
- HADDAD, Y. M. (1988). On the theory of viscoelastic solid. *Res Mechanica*, 25:225–259. 35
- HARTMANN, S. et NEFF, P. (2003). Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility. *International Journal of Solids and structures*, 40:2767–2791. 54

- HAUGOU, G., FABIS, J., LANGRAND, B., DELETOMBE, E. et MARKIEWICZ, E. (2001). Mise en oeuvre d'une méthode originale pour l'identification des modes propres et la conception d'un montage d'essais dynamiques. *In Proceedings of the international conference on multidisciplinary design in engineering, CSME-MDE*. 8
- HOLZAPFEL, G. A. (2000). *Nonlinear solid mechanics - A continuum approach for engineering*. John Wiley and Sons, LTD. 40, 52, 62, 113
- HOO FATT, M. et OUYANG, X. (2008). Three-dimensional constitutive equations for Styrene Butadiene Rubber at high strain rates. *Mechanics of Materials*, 40(1-2):1-16. 8, 19
- HOO FATT, M. S. et BEKAR, I. (2004). High-speed testing and material modeling of unfilled styrene butadiene vulcanizates at impact rates. *Journal of Materials Science*, 39(23):6885-6899. 8, 33
- HUBER, N. et TSAKMAKIS, C. (2000). Finite deformation viscoelasticity laws. *Mechanics of Materials*, 32(1):1-18. 38, 41, 42, 107, 109
- JAMES, A., GREEN, A. et SIMPSON, G. (1975). Strain energy functions of rubber. I Characterization of gum vulcanizates. *Journal of Applied Polymer Science*, 19:2033-2058. 55
- JAMES, A. G. et GREEN, A. (1975). Strain energy functions of rubber II The characterization of filled vulcanizates. *Journal of Applied Polymer Science*, 19:2319-2330. 55
- JAMES, H. M. et GUTH, E. (1943). Theory of the elastic properties of rubber. *Journal of Chemical Physics*, 11:455-481. 34
- JOHNSON, A. R., QUIGLEY, C. J. et FREESE, C. E. (1995). A viscohyperelastic finite element model for rubber. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127:163-180. 38
- JOHNSON, A. R., QUIGLEY, C. J., YOUNG, D. J. et DANIK, J. A. (1992). Viscohyperelastic modeling of rubber vulcanizates. *Tire Science and Technology*, 21:179-199. 38
- KANYANTA, V. et IVANKOVIC, A. (2010). Mechanical characterisation of polyurethane elastomer for biomedical applications. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 3(1):51-62. 55
- KAYE, A. (1962). Non-Newtonian Flow in Incompressible Fluids. (*College of Aeronautics Press, Cranford, U.K., 1962*), Note 134. 37, 119
- KNAUSS, W. (1981). Non-linear viscoelasticity based on free volume considerations. *Computers & Structures*, 13:123-128. 52
- KNOWLES, J. K. (2002). Impact-Induced Tensile Waves in a Rubberlike Material. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 62(4):1153. x, 62, 72, 74, 76
- KOLSKY, H. (1963). *Stress Waves in solids*. Dover, New York. 7
- LANGRAND, B., BOS, F., DRAZETIC, P., MARKIEWICZ, E., GEOFFROY, P. et PETITNIOT, J. (2002). Identification paramétrique des lois de comportement de l'acier XC48 en compression, évolution vers une méthode inverse. *Mécanique industrielle et métaux*, 49:89-91. 8

- LEBLANC, M. M. et LASSILA, D. H. (1996). A Hybrid technique for compression testing at intermediate strain rates. *Experimental Techniques*, 20(5):21–24. 8
- LEE, E. H. (1969). Elastic-plastic deformation at finite strain. *Journal of Applied Mechanics*, 35:1–25. 37, 52
- LIU, C. H., HORFSTETTER, G. et MANG, H. A. (1994). 3D finite element analysis of rubber-like materials at finite strains. *Engineering with Computers*, 11:111–128. 67
- LS-DYNA (2006). Theory Manual. 61
- LS-DYNA (2007). *Keyword User Manual, version 971*. 61, 86
- LUBLINER, J. (1985). A model of rubber viscoelasticity. *Mechanics Research Communications*, 12:93–99. 37
- MARCKMANN, G. et VERRON, E. (2006). Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. *Rubber Chemistry and Technology*, 79:835–858. 34, 53
- MARCKMANN, G., VERRON, E. et PESEUX, B. (2001). Finite element analysis of blow-molding and thermoforming processes using a dynamic explicit procedure. *Polymer Engineering & Science*, 41(3):426–439. 53
- MOONEY, M. (1940). A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 11:582–592. 34
- MORREY, C. B. (1952). Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals. *Pacific Journal of Mathematics*, 2:25–33. 54
- NIEMCZURA, J. et RAVI-CHANDAR, K. (2011a). On the response of rubbers at high strain rates - I. Simple waves. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(2):423–441. 62, 72, 77, 79, 83, 85, 98, 99
- NIEMCZURA, J. et RAVI-CHANDAR, K. (2011b). On the response of rubbers at high strain rates - II. Shock waves. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(2):442–456. 62, 72, 77, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 98, 99
- NIEMCZURA, J. et RAVI-CHANDAR, K. (2011c). On the response of rubbers at high strain rates - III. Effect of hysteresis. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(2):457–472. 62, 72, 77, 85, 99
- OGDEN, R. W. (1972). Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 326:565–584. 34
- OGDEN, R. W. (1984). Recent advances in the phenomenological theory of rubber elasticity. *Rubber Chemistry and Technology*, 59:361–383. 62
- OTHMAN, R., ALOUI, S. et POITOU, A. (2010). Identification of non-homogeneous stress fields in dynamic experiments with a non-parametric method. *Polymer Testing*, 29(5):616–623. 8, 9, 13
- OTHMAN, R., GUEGAN, P., CHALLITA, G., PASCO, F. et LEBRETON, D. (2009). A modified servo-hydraulic machine for testing at intermediate strain rates. *International Journal of Impact Engineering*, 36:460–467. 8, 9, 12, 15

- PATTOFATTO, S., POITOU, A., TSITSIRIS, H. et ZHAO, H. (2006). A New Testing Method to Investigate the Compacting Behaviour of Fresh Concretes Under Impact Loading. *Experimental Mechanics*, 46(3):377–386. 6
- PRZYBYLO, P. A. et ARRUDA, E. M. (2000). Experimental investigations and numerical modeling of incompressible elastomers during non-homogeneous deformations. *Rubber Chemistry and Technology*, 71:730–749. 54
- RENAUD, C., CROS, J.-M., FENG, Z.-Q. et YANG, B. (2009). The Yeoh model applied to the modeling of large deformation contact/impact problems. *International Journal of Impact Engineering*, 36(5):659–666. 55
- RIVLIN, R. S. (1948a). Large elastic deformations of isotropic materials - IV Further developpements of the general theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 241:379–397. 34, 53
- RIVLIN, R. S. (1948b). Some topics in finite elasticity - I fundamentals concepts. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, A240:459–490. 34, 53
- ROLAND, C. (2006). Mechanical behavior of rubber at high strain rates. *Rubber Chemistry and Technology*, 79(3):429–459. 5
- ROLAND, C., TWIGG, J., VU, Y. et MOTT, P. (2007). High strain rate mechanical behavior of polyurea. *Polymer*, 48(2):574–578. 8
- SARVA, S. S., DESCHANEL, S., BOYCE, M. C. et CHEN, W. (2007). Stress-strain behavior of a polyurea and a polyurethane from low to high strain rates. *Polymer*, 48(8):2208–2213. 19
- SHIM, J. et MOHR, D. (2009). Using split Hopkinson pressure bars to perform large strain compression tests on polyurea at low, intermediate and high strain rates. *International Journal of Impact Engineering*, 36(9):1116–1127. 19
- SHIM, V. P. W., YANG, L. M., LIM, C. T. et LAW, P. H. (2004). A visco-hyperelastic constitutive model to characterize both tensile and compressive behavior of rubber. *Journal of Applied Polymer Science*, 92(1):523–531. 7
- SHRIVASTAVA, S. et TANG, J. (1993). Large deformation finite element analysis of nonlinear viscoelastic membranes with reference to thermoforming. *Journal of Strain Analysis*, 28(1):31–51. 52
- SIDOROFF, F. (1974). Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire. *Journal de Mécanique*, 13:679–713. 37, 52
- SIDOROFF, F. (1982). *Cours sur les grandes déformations*. Rapport GRECO, Ecole d'été Sophia-Antipolis. 62
- SIMO, J. C. (1987). On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model : formulation and computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 60:153–173. 38
- SIMO, J. C. (1988). A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition : Part I. Continuum formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66:199–219. 65, 67

- SIMO, J. C. et HUGHES, T. J. R. (1998). *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, Berlin. 52, 62, 113
- SIMO, J. C. et TAYLOR, R. L. (1982). Penalty function formulations for incompressible non-linear elastostatics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 35:107–118. 67
- SONG, B. et CHEN, W. (2004). Dynamic Stress Equilibration in Split Hopkinson Pressure Bar Tests on Soft Materials. *Stress : The International Journal on the Biology of Stress*, 44(3). 6
- SPATHIS, G. (1997). Non-linear constitutive equations for viscoelastic behaviour of elastomers at large deformations. *Polymer Gels and Networks*, (5):55–68. 38
- TRELOAR, L. R. G. (1943). The elasticity of a network of long chain molecules (I and II). *Transactions of the Faraday Society*, 39:36–64 ; 241–246. 34
- TSCHOEGL, N. W. (1989). *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Springer-Verlag, Berlin. 35
- VALANIS, K. C. et LANDEL, R. F. (1967). The strain energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios. *Journal of Applied Physics*, 38:2997–3002. 67
- van den BOGERT, P. A. J. et de BORST, R. (1990). Constitutive aspects and finite elements analysis of 3D rubber specimens in compression and shear. In PANDLE, G. N. et MIDDLETON, J., éditeurs : *Numerical methods in engineering : Theory and Applications*, pages 870–877. 67
- VERRON, E. (2003). *Modelisation du comportement des structures et des materiaux elastomeres*. HDR - Ecole Centrale de Nantes. 34
- VERRON, E., MARCKMANN, G. et PESEUX, B. (2001). Dynamic inflation of non-linear elastic and viscoelastic rubberlike membrane. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(5):1233–1251. 52
- WANG, L. L., LALIBES, K., AZARI, Z. et PLUVINAGE, G. (1994). Generalization of the split Hopkinson bar technique to use viscoelastic bars. *International Journal of Impact Engineering*, 15:669–686. 7
- WARD, I. M. (1983). *Mechanical properties of Solid Polymers*. John Wiley and Sons, LTD, seconde édition. 35
- WINEMAN, A. S. et RAJAGOPAL, K. R. (2000). *Mechanical response of Polymers. An introduction*. Cambridge University Press, Cambridge. 35
- YEOH, O. H. (1990). Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates. *Rubber Chemistry and Technology*, 63:792–805. 53, 54, 55
- YEOH, O. H. (1993). Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 66:754–751. 53

Annexe A

Comparaison de deux modèles viscoélastiques différentiels

De nombreux modèles viscoélastiques ont été proposés dans la littérature. Pour les modèles différentiels, beaucoup se basent sur une des configurations utilisées classiquement en viscoélasticité linéaire ; elles consistent soit à mettre en parallèle des modèles de Maxwell, soit à mettre en série des modèles de Zener. On présente ici un travail de comparaison de deux modèles développés par [Huber et Tsakmakis \(2000\)](#), qui s'appuient sur ces deux configurations, dans le cas de chargement dynamique afin d'étudier l'influence de la vitesse de déformation. Ainsi le premier modèle, noté A, est un modèle de Zener alors que le second est un modèle de Poynting-Thomson, noté B (voir figure A.1). Ce travail a fait l'objet d'une communication au 19th *DYMAT Technical Meeting*, à Strasbourg.

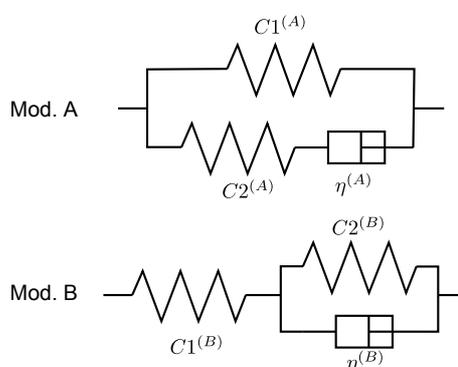


FIGURE A.1 – Modèles rhéologiques simples A et B

A.1 Équations constitutives des modèles

A.1.1 Modèles généraux

Le modèle A est le modèle qui a été présenté comme le modèle différentiel (IVM) dans la section 2.2.2.5. On ne le développera donc pas ici. On rappelle que ces deux modèles sont basés sur la décomposition multiplicative du gradient de la déformation \mathbf{F}_e en une partie élastique \mathbf{F}_i et une partie inélastique :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_i. \tag{A.1}$$

Pour le modèle, l'énergie de déformation utilisée est séparée en une partie liée à la déformation totale \mathbf{F} et une partie liée à la partie élastique de la déformation \mathbf{F}_e . Ces deux parties correspondent aux contributions de chacun des deux ressorts. De la même façon que pour le modèle A, on va séparer l'énergie de déformation Ψ^B correspondant au modèle B en deux parties

$$\Psi^B(\mathbf{F}_e, \mathbf{F}_i) = \Psi_1^B(\mathbf{F}_e) + \Psi_2^B(\mathbf{F}_i), \quad (\text{A.2})$$

où Ψ_1^B est l'énergie de déformation correspondant à la déformation élastique et Ψ_2^B l'énergie de déformation correspondant à la déformation inélastique. En utilisant le principe d'objectivité et isotropie du matériau, on peut réécrire ces fonctions :

$$\Psi_1^B(\mathbf{F}_e) = \Psi_1^B(I_{\mathbf{B}_e}, II_{\mathbf{B}_e}) \quad (\text{A.3})$$

et

$$\Psi_2^B(\mathbf{F}_i) = \Psi_1^B(I_{\mathbf{B}_i}, II_{\mathbf{B}_i}), \quad (\text{A.4})$$

où \mathbf{B}_e et \mathbf{B}_i sont les tenseurs de Cauchy-Green gauche associés respectivement aux déformation élastique et inélastique, c'est à dire $\mathbf{F}_e \mathbf{F}_e^T$ et $\mathbf{F}_i \mathbf{F}_i^T$. L'application du Second Principe de la Thermodynamique donne :

$$\mathcal{D}_{\text{int}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \dot{\Psi}^B \geq 0, \quad (\text{A.5})$$

où \mathcal{D}_{int} est la dissipation interne et \mathbf{D} est le tenseur des vitesses de déformations vraies. Avec les formes d'énergie libre définies pour le modèle B, on obtient :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{\partial \Psi_1^B}{\partial \mathbf{B}_e} : \dot{\mathbf{B}}_e - \frac{\partial \Psi_2^B}{\partial \mathbf{B}_i} : \dot{\mathbf{B}}_i \geq 0. \quad (\text{A.6})$$

On peut établir que :

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{L} \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{L}^T - 2 \mathbf{F}_e \mathbf{D}_i \mathbf{F}_e^T, \quad (\text{A.7})$$

où $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$ est le tenseur gradient de la vitesse et \mathbf{D}_i est le tenseur des vitesses de déformations vraies associé à la déformation inélastique défini de la façon suivante :

$$\mathbf{D}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_i + \mathbf{L}_i^T) \quad \text{avec} \quad \mathbf{L}_i = \dot{\mathbf{F}}_i \mathbf{F}_i^{-1}. \quad (\text{A.8})$$

De la même façon, on peut obtenir :

$$\dot{\mathbf{B}}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{L}_i^T \quad (\text{A.9})$$

On peut donc réécrire le second principe :

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - 2 \frac{\partial \Psi_1^B}{\partial \mathbf{B}_e} \right) : \mathbf{D} + \left(2 \mathbf{F}_e^T \frac{\partial \Psi_1^B}{\partial \mathbf{B}_e} \mathbf{F}_e - 2 \frac{\partial \Psi_2^B}{\partial \mathbf{B}_i} \mathbf{B}_i \right) : \mathbf{D}_i \geq 0. \quad (\text{A.10})$$

Comme pour le modèle A, on applique la procédure de [Coleman et Noll \(1963\)](#) et cela conduit à la relation contrainte-déformation :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2 \frac{\partial \Psi_1^B}{\partial \mathbf{B}_e} \mathbf{B}_e, \quad (\text{A.11})$$

et à l'expression de la dissipation :

$$\left(2\mathbf{F}^T \frac{\partial \Psi_1^B}{\partial \mathbf{B}_e} \mathbf{F}_e - 2 \frac{\partial \Psi_2^B}{\partial \mathbf{B}_i} \mathbf{B}_i \right) : \mathbf{D}_i \geq 0. \quad (\text{A.12})$$

En prenant la condition la plus simple satisfaisant cette équation, comme cela a été effectué par [Huber et Tsakmakis \(2000\)](#), on obtient :

$$\mathbf{D}_i = \frac{1}{\eta} \left(\mathbf{F}_e^T \frac{\partial \Psi_1^B}{\partial \mathbf{B}_e} \mathbf{F}_e + \frac{\partial \Psi_2^B}{\partial \mathbf{B}_i} \mathbf{B}_i \right)^D, \quad (\text{A.13})$$

où $(\cdot)^D$ où est l'opérateur déviatorique. On obtient donc le système d'équations suivant pour un matériau incompressible dépendant des deux premiers invariants du tenseur de Cauchy-Green gauche :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_e \quad (\text{A.14a})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_e = 2 \frac{\partial \Psi_1^B}{\partial I_{\mathbf{B}_e}} \mathbf{B}_e + 2 \frac{\partial \Psi_1^B}{\partial II_{\mathbf{B}_e}} \mathbf{B}_e^{-1} \quad (\text{A.14b})$$

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \mathbf{B}_e - 2 \mathbf{F}_e \mathbf{D}_i \mathbf{F}_e^T \quad (\text{A.14c})$$

$$\mathbf{F}_e \mathbf{D}_i \mathbf{F}_e^T = \frac{1}{\eta^{(B)}} \left\{ \mathbf{B}_e (\boldsymbol{\sigma}_e)^D - \mathbf{F}_e (\boldsymbol{\sigma}_i)^D \mathbf{F}_e^T \right\} \quad (\text{A.14d})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i = 2 \frac{\partial \Psi_2^B}{\partial I_{\mathbf{B}_i}} \mathbf{B}_i + 2 \frac{\partial \Psi_2^B}{\partial II_{\mathbf{B}_i}} \mathbf{B}_i^{-1} \quad (\text{A.14e})$$

On rappelle que le système d'équations obtenu pour le modèle A est :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2 \frac{\partial \Psi_1^A}{\partial I_{\mathbf{B}}} \mathbf{B} + 2 \frac{\partial \Psi_1^A}{\partial II_{\mathbf{B}}} \mathbf{B}^{-1} + 2 \frac{\partial \Psi_2^A}{\partial I_{\mathbf{B}_e}} \mathbf{B}_e + 2 \frac{\partial \Psi_2^A}{\partial II_{\mathbf{B}_e}} \mathbf{B}_e^{-1} \quad (\text{A.15a})$$

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \mathbf{B}_e - \frac{2}{\eta^{(A)}} \mathbf{B}_e \left(2 \frac{\partial \Psi_2^A}{\partial I_{\mathbf{B}_e}} \mathbf{B}_e + 2 \frac{\partial \Psi_2^A}{\partial II_{\mathbf{B}_e}} \mathbf{B}_e^{-1} \right)^D \quad (\text{A.15b})$$

A.1.2 Modèles simples

Pour comparer ces modèles, on va étudier les modèles les plus simples que l'on puisse avoir dans ce contexte général en utilisant des énergies de déformation de types néo-Hookéen ($\Psi = C(I_1 - 3)$). On obtient ainsi pour le modèle A :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2C_1^{(A)} \mathbf{B} + 2C_2^{(A)} \mathbf{B}_e \quad (\text{A.16a})$$

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \mathbf{B}_e - \frac{2C_2^{(A)}}{\eta^{(A)}} \left(\mathbf{B}_e^2 - \frac{1}{3} I_{\mathbf{B}_e} \mathbf{B}_e \right) \quad (\text{A.16b})$$

De la même façon on obtient pour le modèle B :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2C_1^{(B)} \mathbf{B}_e \quad (\text{A.17a})$$

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \mathbf{B}_e - \frac{2C_1^{(B)}}{\eta^{(B)}} \left(\mathbf{B}_e^2 - \frac{1}{3} I_{\mathbf{B}_e} \mathbf{B}_e \right) - \frac{2C_2^{(B)}}{\eta^{(B)}} \left(\mathbf{B} - \frac{1}{3} I_{\mathbf{B}_i} \mathbf{B}_e \right) \quad (\text{A.17b})$$

A.2 Étude des limites

Afin de les comparer, on va étudier les limites des modèles simples pour le cas quasi-statique et pour de très grandes vitesses de déformation.

A.2.1 Réponse pour un chargement infiniment rapide

On a montré dans la section 2.2.2.9 que la limite pour des chargements très rapides du modèle A est :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\left(C_1^{(A)} + C_2^{(A)}\right)\mathbf{B} \quad (\text{A.18})$$

De la même façon, pour le modèle B, lorsque $\dot{\mathbf{F}}$ tend vers l'infini, la partie inélastique \mathbf{F}_i tend vers \mathbf{I} et donc \mathbf{B}_e tend vers \mathbf{B} .

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2C_1^{(B)}\mathbf{B} \quad (\text{A.19})$$

Pour que ces deux modèles aient des limites infinies identiques, il suffit que :

$$C_1^{(A)} + C_2^{(A)} = C_1^{(B)} \quad (\text{A.20})$$

A.2.2 Réponse quasi-statique

En quasi-statique, on a vu (voir section 2.2.2.8) que tous les tenseurs de vitesse de déformation ($\dot{\mathbf{F}}, \dot{\mathbf{F}}_e, \dot{\mathbf{F}}_i, \dot{\mathbf{B}}_e, \mathbf{D}, \dots$) tendent vers zéro et donc la limite du modèle A devient :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2C_1^{(A)}\mathbf{B} \quad (\text{A.21})$$

Pour le modèle B on obtient uniquement une relation entre les parties élastiques et inélastiques :

$$(C_1^{(B)}\mathbf{C}_e - C_2^{(B)}\mathbf{B}_i)^D \rightarrow 0 \quad (\text{A.22})$$

Cette relation ne permet cependant pas de déterminer un modèle limite simple pour la réponse obtenue. En fait chaque terme correspond à la contribution de l'un des ressorts et ces deux contributions doivent être égales.

A.3 Conclusion

La comparaison de la limite des modèles A et B lorsque la vitesse de déformation est importante conduit à une relation simple entre les coefficients utilisés dans les deux modèles. Pour le cas quasi-statique, on ne peut trouver de modèle limite simple qui corresponde au modèle B, alors que l'on a utilisé uniquement des formes d'énergie libre de type néo-Hookéen. Bien que le modèle montre une réponse élastique en quasi-statique, on n'est pas capable de dire si le comportement obtenu est hyperélastique. On peut par contre bien connaître le comportement contrairement du modèle A pour lequel la limite est clairement définie puisque l'on retrouve un modèle néo-Hookéen. L'aptitude des modèles hyperélastiques à modéliser le comportement des élastomères en quasi-statique est pourtant bien établie. L'utilisation du modèle B pourrait aussi conduire à des problèmes d'identification.

En effet, pour le modèle A on est capable d'identifier le paramètre $C_1^{(A)}$ en faisant un essai quasi-statique ce qui est impossible pour le modèle B, pour lequel il faudrait manifestement identifier tous les paramètres en une seule fois. Pour cette raison, nous préconisons l'utilisation des modèles différentiels basés sur une mise en parallèle de modèle de Maxwell plutôt que ceux faisant intervenir une mise en série de modèle de Zener, dans le cadre des déformations à basse vitesse de déformation.

Annexe B

Implémentation de la loi de comportement pour un schéma d'intégration implicite

Sachant que le matériau utilisé pour notre étude subit une précharge, il atteint un état d'équilibre avant d'être sollicité en dynamique. De plus, même en dynamique, les vitesses mises en jeu ne sont pas forcément très importantes. Il serait donc intéressant de pouvoir implémenter notre modèle de comportement dans un code élément fini utilisant un schéma d'intégration implicite. Le code de calcul LS-DYNA utilisé lors de notre étude, possède un module implicite. Cependant, après quelques essais réalisés avec des modèles déjà implémentés dans LS-DYNA, et en association avec LSTC, l'entreprise qui développe LS-DYNA, il apparaît que ce module ne semble pas bien fonctionner dans sa version actuelle lorsque les déformations sont importantes $\lambda \geq 2$. Ces problèmes devraient cependant être résolus dans la prochaine version. Les formules et algorithmes nécessaires à l'implémentation de la loi sont donc présentés dans la suite. Ils sont pour beaucoup issus de [Holzapfel \(2000\)](#); [Bonet et Wood \(1997\)](#) et [Simo et Hughes \(1998\)](#). La relation entre contrainte et déformation peut être utilisée de la même façon que pour l'explicite. Cependant, il est nécessaire de rentrer en plus la matrice correspondant aux modules tangents, qui est en fait le tenseur d'élasticité Eulérien correspondant. On présentera ici la matrice des modules tangents correspondant dans un premier temps au modèle hyperélastique seul puis, dans un deuxième temps, la contribution viscoélastique.

B.1 Hyperélasticité

On sait que, dans le cadre général de l'hyperélasticité, la décomposition volumétrique permet d'obtenir l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy suivant :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \text{dev} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \bar{\mathbf{B}} - \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \bar{\mathbf{B}}^{-1} \right) + \frac{\partial U(J)}{\partial J} \mathbf{I} \quad (\text{B.1})$$

avec $\text{dev}(\cdot) = (\cdot) - \frac{1}{3} \text{tr}(\cdot) \mathbf{I}$ l'opérateur déviateur sur la configuration spatiale. De façon équivalente, on peut exprimer le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = 2J^{-2/3} \left[\text{DEV} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \mathbf{I} - J^{-2/3} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \mathbf{C}^{-2} \right) \right] + J \frac{\partial U(J)}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{B.2})$$

avec $\text{DEV}(\cdot) = (\cdot) - \frac{1}{3} [(\cdot) : \mathbf{C}] \mathbf{C}^{-1}$ l'opérateur déviateur sur la configuration matérielle.

Pour pouvoir utiliser cette formulation dans un code explicite, on cherche à exprimer le tenseur d'élasticité eulérien associé à cette expression.

B.1.1 Tenseur d'élasticité lagrangien

Le tenseur d'élasticité lagrangien est défini de la façon suivante :

$$\mathbb{C}^L = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}^2}. \quad (\text{B.3})$$

On en déduit donc :

$$\mathbb{C}^L = \mathbb{C}_{dev}^L + 2 \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \otimes \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} + 2J \mathbf{C}^{-1} \otimes \frac{\partial^2 U}{\partial J \partial \mathbf{C}} + 2J \frac{\partial U}{\partial J} \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}, \quad (\text{B.4})$$

avec la partie déviatorique :

$$\mathbb{C}_{dev}^L = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{dev}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left[J^{-2/3} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) + J^{-4/3} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \left(I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{C}^{-1} \right) \right]. \quad (\text{B.5})$$

On obtient donc :

$$\mathbb{C}^L = \mathbb{C}_{dev}^L + J \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + J^2 \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2J \frac{\partial U}{\partial J} \mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}} \quad (\text{B.6})$$

où

$$\mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}} = \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{1}{2} \left(\mathbf{C}_{ik}^{-1} \mathbf{C}_{jl}^{-1} + \mathbf{C}_{il}^{-1} \mathbf{C}_{jk}^{-1} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \quad (\text{B.7})$$

La partie déviatorique peut ensuite être exprimée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{dev}^L = & -\frac{4}{3} J^{-2/3} \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \right] \otimes \mathbf{C}^{-1} \\ & + 4J^{-4/3} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1^2} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \otimes \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \\ & + 4J^{-6/3} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \otimes \left(I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{C}^{-1} \right) \\ & - \frac{4}{3} J^{-2/3} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} \left(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{I} + I_1 \mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}} \right) \\ & - \frac{8}{3} J^{-4/3} \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \left(I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{C}^{-1} \right) \right] \otimes \mathbf{C}^{-1} \\ & + 4J^{-8/3} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_2^2} \left(I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{C}^{-1} \right) \otimes \left(I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{C}^{-1} \right) \\ & + 4J^{-6/3} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2} \left(I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{C}^{-1} \right) \otimes \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \\ & + 4J^{-4/3} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \mathbb{I} - \frac{2}{3} \left(\mathbf{C}^{-1} \otimes (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}) + I_2 \mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

ou encore en regroupant les termes par la dérivée de l'énergie de déformation en fonction du (ou des) même(s) invariant(s) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{dev}^L = & \frac{4}{3}J^{-2/3}\frac{\partial\bar{W}}{\partial\bar{I}_1}\left(\frac{1}{3}I_1\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}-\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{I}-\mathbf{I}\otimes\mathbf{C}^{-1}-I_1\mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}}\right) \\
& +4J^{-4/3}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\bar{I}_1^2}\left(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}-\frac{1}{3}I_1\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{I}+\mathbf{I}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right)+\frac{1}{9}I_1^2\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right) \\
& +\frac{\partial\bar{W}}{\partial\bar{I}_2}J^{-4/3}\left(-\frac{8}{3}I_1\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{I}+\mathbf{I}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right)+\frac{8}{3}\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}+\mathbf{C}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right)\right. \\
& \left.+\frac{16}{9}I_2\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}+4\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}-\frac{8}{3}I_2\mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}}-4\mathbb{I}\right) \\
& +4J^{-8/3}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\bar{I}_2^2}\left(I_1^2\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}+\mathbf{C}\otimes\mathbf{C}+\frac{4}{9}I_2^2\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}-I_1\left(\mathbf{C}\otimes\mathbf{I}+\mathbf{I}\otimes\mathbf{C}\right)\right. \\
& \left.-\frac{2}{3}I_2I_1\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{I}+\mathbf{I}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right)+\frac{2}{3}I_2\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}+\mathbf{C}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right)\right) \\
& +4J^{-6/3}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\bar{I}_1\partial\bar{I}_2}\left(2I_1\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}-\frac{1}{3}I_1^2\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{I}+\mathbf{I}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right)-\left(\mathbf{C}\otimes\mathbf{I}+\mathbf{I}\otimes\mathbf{C}\right)\right. \\
& \left.+\frac{1}{3}I_1\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}+\mathbf{C}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right)-\frac{2}{3}I_2\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{I}+\mathbf{I}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right)+\frac{4}{9}I_1I_2\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right)
\end{aligned} \tag{B.9}$$

B.1.2 Tenseur d'élasticité eulérien

On effectue un *push forward* du tenseur d'élasticité lagrangien pour obtenir le tenseur d'élasticité eulérien :

$$(\mathbb{C}^e)_{abcd} = \frac{1}{J}F_{aA}F_{bB}F_{cC}F_{dD}(\mathbb{C}^L)_{ABCD} \tag{B.10}$$

On obtient donc la partie volumique :

$$\mathbb{C}^e = \mathbb{C}_{dev}^e + \left(\frac{\partial U}{\partial J}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} + J\frac{\partial^2 U}{\partial J^2}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} - 2\frac{\partial U}{\partial J}\mathbb{I}\right) \tag{B.11}$$

et la partie déviatorique :

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{dev}^e = & \frac{1}{J}\left[\frac{4}{3}\frac{\partial\bar{W}}{\partial\bar{I}_1}\left(\frac{1}{3}\bar{I}_1\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}-\mathbf{I}\otimes\bar{\mathbf{B}}-\bar{\mathbf{B}}\otimes\mathbf{I}+\bar{I}_1\mathbb{I}\right)\right. \\
& +4\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\bar{I}_1^2}\left(\bar{\mathbf{B}}\otimes\bar{\mathbf{B}}-\frac{1}{3}\bar{I}_1\left(\mathbf{I}\otimes\bar{\mathbf{B}}+\bar{\mathbf{B}}\otimes\mathbf{I}\right)+\frac{1}{9}\bar{I}_1^2\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\right) \\
& +4\frac{\partial\bar{W}}{\partial\bar{I}_2}\left(-\frac{2}{3}\bar{I}_1\left(\mathbf{I}\otimes\bar{\mathbf{B}}+\bar{\mathbf{B}}\otimes\mathbf{I}\right)+\frac{2}{3}\left(\mathbf{I}\otimes\bar{\mathbf{B}}^2+\bar{\mathbf{B}}^2\otimes\mathbf{I}\right)\right. \\
& \left.+\frac{4}{9}\bar{I}_2\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}+\bar{\mathbf{B}}\otimes\bar{\mathbf{B}}+\frac{2}{3}\bar{I}_2\mathbb{I}-\bar{\mathbb{I}}_{pf}\right) \\
& +4\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\bar{I}_2^2}\left(\bar{I}_1^2\bar{\mathbf{B}}\otimes\bar{\mathbf{B}}+\bar{\mathbf{B}}^2\otimes\bar{\mathbf{B}}^2+\frac{4}{9}\bar{I}_2^2\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}-\bar{I}_1\left(\bar{\mathbf{B}}^2\otimes\bar{\mathbf{B}}+\bar{\mathbf{B}}\otimes\bar{\mathbf{B}}^2\right)\right. \\
& \left.-\frac{2}{3}\bar{I}_2\bar{I}_1\left(\mathbf{I}\otimes\bar{\mathbf{B}}+\bar{\mathbf{B}}\otimes\mathbf{I}\right)+\frac{2}{3}\bar{I}_2\left(\mathbf{I}\otimes\bar{\mathbf{B}}^2+\bar{\mathbf{B}}^2\otimes\mathbf{I}\right)\right) \\
& +4\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\bar{I}_1\partial\bar{I}_2}\left(2\bar{I}_1\bar{\mathbf{B}}\otimes\bar{\mathbf{B}}-\frac{1}{3}\bar{I}_1^2\left(\mathbf{I}\otimes\bar{\mathbf{B}}+\bar{\mathbf{B}}\otimes\mathbf{I}\right)-\left(\bar{\mathbf{B}}^2\otimes\bar{\mathbf{B}}+\bar{\mathbf{B}}\otimes\bar{\mathbf{B}}^2\right)\right. \\
& \left.+\frac{1}{3}\bar{I}_1\left(\mathbf{I}\otimes\bar{\mathbf{B}}^2+\bar{\mathbf{B}}^2\otimes\mathbf{I}\right)-\frac{2}{3}\bar{I}_2\left(\mathbf{I}\otimes\bar{\mathbf{B}}+\bar{\mathbf{B}}\otimes\mathbf{I}\right)+\frac{4}{9}\bar{I}_1\bar{I}_2\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\right)\left. \right]
\end{aligned} \tag{B.12}$$

avec :

$$\bar{\mathbb{I}}_{pf} = \bar{F}_{aA}\bar{F}_{bB}\bar{F}_{cC}\bar{F}_{dD}(\mathbb{I})_{ABCD} = \frac{1}{2} \left(\bar{B}_{ac}\bar{B}_{bd} + \bar{B}_{ad}\bar{B}_{bc} \right) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}_c \otimes \mathbf{e}_d \quad (\text{B.13})$$

où \bar{B}_{ij} sont les composantes du tenseur de Cauchy Green gauche relatif à la déformation isochore $\bar{\mathbf{B}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{dev}^e = & \frac{1}{J} \left[\frac{4}{9} \left(\bar{I}_1 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1^2} + 4\bar{I}_2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} + 4\bar{I}_2^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_2^2} + 4\bar{I}_1\bar{I}_2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right. \\ & - \frac{4}{3} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1^2} + 2\bar{I}_1 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} + 2\bar{I}_2\bar{I}_1 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_2^2} + (\bar{I}_1^2 + 2\bar{I}_2) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2} \right) (\mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{I}) \\ & + \frac{4}{3} \left(\bar{I}_1 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} + 2\bar{I}_2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \right) \mathbb{I} - 4 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \bar{\mathbb{I}}_{pf} \\ & + 4 \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1^2} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} + \bar{I}_1^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_2^2} + 2\bar{I}_1 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2} \right) \bar{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{B}} \\ & + \frac{2}{3} \left(4 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} + \bar{I}_2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_2^2} + 2\bar{I}_1 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2} \right) (\mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{B}}^2 + \bar{\mathbf{B}}^2 \otimes \mathbf{I}) \\ & \left. + 4 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_2^2} \bar{\mathbf{B}}^2 \otimes \bar{\mathbf{B}}^2 - 4 \left(\bar{I}_1 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_2^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2} \right) (\bar{\mathbf{B}}^2 \otimes \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{B}}^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Pour notre énergie de déformation élastique, cela se réduit à :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{dev}^e = & \frac{1}{J} \left[\frac{4}{9} \left(\bar{I}_1 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1^2} + 4\bar{I}_2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right. \\ & - \frac{4}{3} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1^2} + 2\bar{I}_1 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \right) (\mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{I}) \\ & + \frac{4}{3} \left(\bar{I}_1 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_1} + 2\bar{I}_2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \right) \mathbb{I} - 4 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \bar{\mathbb{I}}_{pf} + 4 \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_1^2} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} \right) \bar{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{B}} \\ & \left. + \frac{8}{3} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_2} (\mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{B}}^2 + \bar{\mathbf{B}}^2 \otimes \mathbf{I}) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

B.2 Viscoélasticité grandes déformations avec décomposition volumétrique

La partie viscoélastique s'exprime en quasi incompressible de façon identique à la partie hyperélastique et on obtient l'expression suivante du tenseur des contraintes de Cauchy (voir partie 3.1.3).

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n = \frac{1}{J} \text{dev} \left[\bar{\mathbf{F}}_n \bar{\mathbf{H}}_n \bar{\mathbf{F}}_n^T \right] \quad (\text{B.16})$$

avec :

$$\bar{\mathbf{H}}_n = 2g_1 \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_R}\right) \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}^{-1}}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{B.17})$$

L'indice $.n$ faisant référence au pas de temps n auquel on se trouve. De la même façon, on peut écrire le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff :

$$\bar{\mathbf{S}}_n = J^{-2/3} \text{DEV} [\bar{\mathbf{H}}_n] \quad (\text{B.18})$$

B.2.1 Tenseur d'élasticité lagrangien

Comme pour la partie hyperélastique on exprime d'abord le tenseur d'élasticité lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{dev}^L &= 2 \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{2}{3} J^{-2/3} \text{DEV} [\bar{\mathbf{H}}_n] \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2 J^{-2/3} \frac{\partial \text{DEV} [\bar{\mathbf{H}}_n]}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{B.19}) \\ &= -\frac{2}{3} J^{-2/3} \text{DEV} [\bar{\mathbf{H}}_n] \otimes \mathbf{C}^{-1} - \frac{2}{3} J^{-2/3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{H}}_n - \frac{2}{3} J^{-2/3} (\bar{\mathbf{H}}_n : \mathbf{C}) \mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}} \\ &= -\frac{2}{3} J^{-2/3} (\text{DEV} [\bar{\mathbf{H}}_n] \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \text{DEV} [\bar{\mathbf{H}}_n]) + (\bar{\mathbf{H}}_n : \mathbf{C}) \mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}} \\ &\quad + \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{H}}_n : \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \end{aligned}$$

B.2.2 Tenseur d'élasticité eulérien

En effectuant une opération de *push forward*, on obtient ensuite le tenseur d'élasticité eulérien :

$$\mathbb{C}_{dev}^e = \frac{1}{J} \left[-\frac{2}{3} (\text{dev} [\bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{H}}_n \bar{\mathbf{F}}^T] \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \text{dev} [\bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{H}}_n \bar{\mathbf{F}}^T]) + \frac{2}{3} (\bar{\mathbf{H}}_n : \bar{\mathbf{C}}) \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \right] \quad (\text{B.20})$$

La détermination de $\bar{\mathbf{H}}_n$ pouvant être effectuée de la manière présentée dans la partie [3.1.3](#). On a ainsi de façon incrémentale l'expression de la matrice des modules tangents correspondant à la partie viscoélastique. La matrice complète est donc la somme des trois contributions : la partie sphérique, la partie déviatorique hyperélastique et la partie déviatorique viscoélastique.

Annexe C

Algorithme pour l'utilisation d'une loi viscoélastique dépendant des invariants de $\bar{\mathbf{C}}_t^{-1}$

L'algorithme présenté dans la section 3.1 permet de calculer la contribution viscoélastique de la contrainte sans avoir à enregistrer toute l'histoire des déformations; il est développé pour le cas le plus simple. En effet, dans l'expression de la partie viscoélastique on ne fait intervenir que $\bar{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau)$. Cependant, si on se reporte à l'expression originale du modèle K-BKZ (Bernstein *et al.*, 1963; Kaye, 1962), on se rend compte que l'expression fait intervenir les invariants du tenseur $\bar{\mathbf{C}}_t^{-1}$. Si l'on prend en compte uniquement le premier invariant de ce tenseur, on obtient des termes de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}_n^{visco} = \frac{2g_1}{J} dev \left(\int_{-\infty}^{t_n} \exp \left(-\frac{t_n - \tau}{\tau_R} \right) \frac{\partial \bar{I}_1 \bar{\mathbf{C}}_t^{-1}}{\partial \tau} d\tau \right) \quad (\text{C.1})$$

avec $\bar{I}_1 = \text{tr} \bar{\mathbf{C}}_t^{-1} = \bar{\mathbf{C}}_t^{-1} : \mathbf{I} = \bar{\mathbf{F}}(t) \bar{\mathbf{C}}^{-1} \bar{\mathbf{F}}^T(t) : \mathbf{I} = (\bar{\mathbf{F}}(t) \bar{\mathbf{C}}^{-1}) : (\mathbf{I} \bar{\mathbf{F}}(t)) = \bar{\mathbf{C}}^{-1} : (\bar{\mathbf{F}}^T(t) \mathbf{I} \bar{\mathbf{F}}(t)) = \bar{\mathbf{C}}^{-1} : \bar{\mathbf{C}}(t)$

Si on réécrit la contrainte en fonction de $\bar{\mathbf{H}}_n$ qui contient l'histoire des déformations, on obtient :

$$\boldsymbol{\sigma}_n^{visco} = \frac{1}{J} dev \left[\bar{\mathbf{F}}_n \bar{\mathbf{H}}_n \bar{\mathbf{F}}_n^T \right] \quad (\text{C.2})$$

où $\bar{\mathbf{H}}_n$ s'exprime :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{H}}_n &= 2g_1 \left[\int_{-\infty}^{t_n} \exp\left(-\frac{t_n - \tau}{\tau_R}\right) \frac{\partial \bar{I}_1 \bar{\mathbf{C}}^{-1}}{\partial \tau} d\tau \right] \\
&= 2g_1 \left[\int_{-\infty}^{t_n} \exp\left(-\frac{t_n - \tau}{\tau_R}\right) \frac{\partial (\bar{\mathbf{C}}^{-1} : \bar{\mathbf{C}}(t)) \bar{\mathbf{C}}^{-1}}{\partial \tau} d\tau \right] \\
&= 2g_1 \left[\int_{-\infty}^{t_n} \exp\left(-\frac{t_n - \tau}{\tau_R}\right) \frac{\partial (\bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1}) : \bar{\mathbf{C}}(t)}{\partial \tau} d\tau \right] \\
&= 2g_1 \left[\int_{-\infty}^{t_n} \exp\left(-\frac{t_n - \tau}{\tau_R}\right) \frac{\partial (\bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1})}{\partial \tau} : \bar{\mathbf{C}}(t) d\tau \right] \\
&= 2g_1 \left[\int_{-\infty}^{t_n} \exp\left(-\frac{t_n - \tau}{\tau_R}\right) \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1}}{\partial \tau} d\tau \right] : \bar{\mathbf{C}}(t) \tag{C.3}
\end{aligned}$$

De la même façon que sans invariant, en découpant l'intégrale en deux parties puis en utilisant le théorème du point milieu on obtient :

$$\bar{\mathbf{H}}_n = \bar{\mathbf{H}}_n^* : \bar{\mathbf{C}}(t) = \left(\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_R}\right) \bar{\mathbf{H}}_{n-1}^* + 2g_1 \left[\exp\left(-\frac{\Delta t}{2\tau_R}\right) [\bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1}]_{t_{n-1}}^{t_n} \right] \right) : \bar{\mathbf{C}}(t) \tag{C.4}$$

De la même façon, sachant que $\bar{I}_2 = \text{tr} \bar{\mathbf{C}}_t = \bar{\mathbf{C}} : \bar{\mathbf{C}}^{-1}(t)$ on peut arriver à déterminer σ_n^{visco} si celui ci dépend du deuxième invariant et donc de terme de la forme :

$$\sigma_{n_{visco}} = \frac{2g_1}{J} \text{dev} \left(\int_{-\infty}^{t_n} \exp\left(-\frac{t_n - \tau}{\tau_R}\right) \frac{\partial \bar{I}_2 \bar{\mathbf{C}}_t}{\partial \tau} d\tau \right) \tag{C.5}$$

De la même façon, on réécrit la contrainte :

$$\sigma_{n_{visco}} = \frac{1}{J} \text{dev} [\bar{\mathbf{F}}_n \bar{\mathbf{H}}_n \bar{\mathbf{F}}_n^T] \tag{C.6}$$

Où $\bar{\mathbf{H}}_n$ s'exprime :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{H}}_n &= 2g_1 \left[\int_{-\infty}^{t_n} \exp\left(-\frac{t_n - \tau}{\tau_R}\right) \frac{\partial \bar{I}_2 \bar{\mathbf{C}}}{\partial \tau} d\tau \right] \\
&= 2g_1 \left[\int_{-\infty}^{t_n} \exp\left(-\frac{t_n - \tau}{\tau_R}\right) \frac{\partial \bar{\mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{C}}}{\partial \tau} d\tau \right] : \bar{\mathbf{C}}^{-1}(t)
\end{aligned}$$

et ainsi :

$$\bar{\mathbf{H}}_n = \bar{\mathbf{H}}_n^* : \bar{\mathbf{C}}(t) = \left(\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_R}\right) \bar{\mathbf{H}}_{n-1}^* + 2g_1 \left[\exp\left(-\frac{\Delta t}{2\tau_R}\right) [\bar{\mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{C}}]_{t_{n-1}}^{t_n} \right] \right) : \bar{\mathbf{C}}^{-1}(t) \tag{C.7}$$

On obtient ainsi des expressions permettant de calculer une contribution viscoélastique en utilisant uniquement le pas de temps précédent. Cela permet donc de ne pas avoir à enregistrer toute l'histoire des déformations. Il faut cependant noter que ces expressions n'ont été développées que pour des termes utilisant les premier et second invariants au premier ordre. Le nombre de données à stocker est cependant beaucoup plus important que lorsque les invariants n'apparaissent pas. En effet, $\bar{\mathbf{H}}_n^*$ est un tenseur d'ordre quatre alors que lorsque l'on ne fait pas intervenir les invariants, on utilise $\bar{\mathbf{H}}_n$ qui est un tenseur d'ordre deux.

Résumé

Les travaux présentés dans cette thèse visent à caractériser expérimentalement le comportement des élastomères sous sollicitation dynamique en grandes déformations et de définir un (ou des) modèle(s) de comportement adapté(s). Des essais de traction et de compression à vitesse de déformation vraie constante ont été menés afin de mettre en évidence l'influence de la vitesse de déformation sur le comportement du matériau. Pour cela, des moyens d'essais originaux ont été développés. La rigidification du matériau avec la vitesse de déformation ainsi qu'une augmentation de la dissipation d'énergie sur la gamme de vitesse de déformation considérée ont été mises en évidence. Pour modéliser ces matériaux, des lois de comportement viscoélastiques en grandes déformations ont été choisies. Une comparaison des deux approches les plus utilisées dans ce domaine, à savoir intégrale et différentielle, a été effectuée afin de déterminer la plus apte à modéliser le comportement des matériaux élastomères dans le cadre de chargement à moyenne vitesse de déformation ; l'approche intégrale a été retenue. Les paramètres d'un modèle de ce type ont été recalés de façon satisfaisante à partir des essais de traction. Finalement, cette loi a été implantée dans le code de calcul LS-DYNA. Des essais de validation ont ensuite été effectués pour différents modes de sollicitation : traction, compression mais aussi propagation d'ondes de traction. Les différents modes de sollicitation étant globalement bien représentés, des simulations d'un plot de suspension utilisé dans les sous marins sont proposées sous divers chargements ; elles permettent la mise en œuvre d'un macro-élément reproduisant le comportement global du plot.

Mots-clés Elastomères ; choc ; caractérisation expérimentale ; vitesse de déformation ; viscoélasticité grandes déformations ; simulation

Experimental characterization and modelling of the behaviour of elastomers under fast dynamic loading. Application to suspension mounts

The mechanical response of elastomers is known for its non-linearity depending on the strain level but also on the strain rate. In this context, the objective of the present Ph.D. thesis is to experimentally characterize the mechanical response of elastomers under dynamic loading and define one (or more) relevant model(s). Tensile and compression tests were carried out at constant true strain rate in order to highlight the influence of strain rate on the material behaviour. New test facilities have been developed because traditional testing methods are not adapted for average strain rates. We have highlighted the stiffening of the material with strain rate as well as the increase in energy dissipation over the range of strain rates considered; it is mainly due to the viscoelastic nature of the material. To model the response of these materials, large strain viscoelastic constitutive equations were investigated. A comparison of the two most widely used approaches, namely integral and differential approaches, is proposed to determine the most suitable one to predict the behaviour of elastomers under average strain rates. The integral approach has been adopted. The parameters of a model of this type have been determined with the help of the tensile tests. Eventually, this law has been implemented in the LS-DYNA code. Validation tests were carried out for different types of loading conditions: tension, compression but also propagation of tensile waves. Those different loading conditions are generally well represented, so simulations of a suspension mount under various loading conditions are proposed; they allow to propose a macro-element that reproduces the overall behaviour of the rubber mount.

Keywords Elastomers; shock; experimental characterization; strain rate; large strain viscoelasticity; simulation

Discipline Sciences de l'ingénieur