



**HAL**  
open science

# Dynamique du glacier émissaire des processus à l'application sur un glacier école, Astrolabe, Antarctique de l'Est

Anne-Sophie Drouet

► **To cite this version:**

Anne-Sophie Drouet. Dynamique du glacier émissaire des processus à l'application sur un glacier école, Astrolabe, Antarctique de l'Est. Sciences de la Terre. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT : 2012GRENU022 . tel-00843026

**HAL Id: tel-00843026**

**<https://theses.hal.science/tel-00843026>**

Submitted on 10 Jul 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Thèse

Pour obtenir le grade de

### **Docteur de l'Université de Grenoble**

Spécialité : **Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Anne-Sophie DROUET**

Thèse dirigée par **Emmanuel LE MEUR**

et codirigée par **Gaël DURAND**

préparée au sein **du Laboratoire de Glaciologie et de Géophysique de l'Environnement**

et de **l'Ecole Doctorale Terre, Univers, Environnement**

## **Dynamique du glacier émissaire : des processus à l'application sur un glacier école, l'Astrolabe, Antarctique de l'Est**

Thèse soutenue publiquement le **9 Novembre 2012**,  
devant le jury composé de :

**Mme Frédérique RÉMY**

Directeur de Recherche, CNRS, LEGOS, Rapporteur

**M. Donald D. BLANKENSHIP**

Professeur, Université du Texas, Rapporteur

**M. Frank PATTYN**

Professeur, Université de Bruxelles, Examineur

**M. Jean BRAUN**

Professeur, Université de Grenoble, IsTerre, Examineur

**M. Emmanuel LE MEUR**

Maître de conférence, Université de Grenoble, LGGE, Directeur de thèse

**M. Gaël DURAND**

Chargé de recherche CNRS, LGGE, Co-Directeur de thèse





## Résumé

Le bilan de masse de l'Antarctique dépend de deux contributions principales : le bilan de masse de surface constitué par l'ensemble des processus de perte et de gain de masse agissant en surface (précipitation, fonte, sublimation, transport par le vent...) et le transfert dynamique de glace de la calotte vers la mer. Ce transfert a lieu au niveau des glaciers émissaires côtiers et représente 90% de la perte du volume total de glace de la calotte. Ces systèmes côtiers constituent ainsi les principaux régulateurs de l'évolution du bilan de masse de la calotte et de la contribution de cette dernière à l'élévation du niveau des mers. Les observations récentes révèlent une diminution accrue du bilan de masse en certaines zones de la calotte polaire telle que la partie Ouest et une contribution à l'élévation du niveau des mers de la part de la calotte qui augmente progressivement par rapport à l'expansion thermique. L'étude de la dynamique des glaciers émissaires par modélisation permet ainsi de mieux comprendre leur fonctionnement, de prédire leur réponse à une quelconque sollicitation, et d'évaluer l'impact potentiel sur l'élévation du niveau des mers.

Ce travail de thèse vise à apporter de nouveaux éléments pour mieux contraindre ces modèles d'écoulement de la calotte antarctique. Il se scinde en deux axes principaux. La première partie s'intéresse à l'implémentation des processus physiques dans le modèle numérique, en particulier représenté par la migration de la ligne d'échouage qui sépare la partie posée de la partie flottante. Elle se base sur des cas synthétiques 2D. Nous mettons en évidence dans cette partie la diversité des modèles d'écoulement de calotte impliqués et les différences et similitudes associées. En particulier, la majorité de ces modèles repose sur deux hypothèses fortes que sont la stationnarité et la prédominance du glissement basal sur l'écoulement dont le bien-fondé est remis en question. L'étude d'intercomparaison révèle certaines divergences entre les modèles en terme de contribution à l'élévation du niveau des mers, les résultats nécessitent donc d'être pris avec précaution et les efforts doivent se concentrer sur la validité des hypothèses et l'implémentation du processus de migration de la ligne d'échouage. La deuxième partie consiste à appliquer le modèle Elmer/ice, qualifié de 'full-Stokes', au cas réel 3D du Glacier de l'Astrolabe situé en Terre Adélie en Antarctique de l'Est. Cette application nous a permis de tester la sensibilité du modèle full-Stokes aux incertitudes sur les données d'entrées telles que la description du socle rocheux. Cette sensibilité s'avère significative recommandant une bonne connaissance de l'élévation du socle sous jacent à la glace et des méthodes appropriées pour sa détermination sur les noeuds du maillage associé au modèle.

Mots-clés : Antarctique, dynamique, glacier émissaire, niveau des mers, modélisation, processus, écoulement

## Abstract

Two main contributions dominate the mass balance of Antarctica : surface mass balance, represented by all processes of gain and loss of mass acting at the upper surface (precipitation, melting, sublimation, wind transport...) and dynamical transport from grounded ice to the sea. This transfer takes place through outlet glaciers and represents 90% of the total loss of the whole ice sheet volume. These coastal systems act as regulators for the evolution of the ice sheet mass balance and for its contribution to sea level rise. Recently, observations emphasize a relevant decrease of mass balance in certain zones of Antarctica such as the West Coast, and an associated contribution to sea level rise from the ice sheet which increases significantly with respect to thermal expansion. Studying dynamics of outlet glaciers by modelisation thus participates at a better understanding of involved processes and enables to predict their response to any external solicitations and to assess their potential impact on sea level budget.

This work aims at providing with new elements for constraining these ice flow models for Antarctica. It is composed of two main parts. The first one concerns the implementation of physical processes into numerical models, in particular represented by grounding line migration, delimitating the grounded part from the floating one. It is based on 2 dimensionnal synthetic cases. The diversity of flow line ice sheet models is emphasized, with the associated differences and similarities. Most of these models lie on two strong assumptions, e.g. steadyness and dominance of basal sliding on ice flow, which are not always fulfilled. Moreover, the intercomparison work reveals discrepancies between models in terms of sea level contribution suggesting particular caution to be taken when considering corresponding results. Efforts have now to converge towards the validity of assumptions and on methods for implementing grounding line migration. The second part consists in applying the so-called 'full-Stokes' Elmer/Ice model to the 3D real case of the Astrolabe Glacier situated in Adélie Land in the east part of Antarctica. This application allows us to conduct sensitivity tests of the model to input uncertainties such as the ones of bedrock description. This sensitivity appears to be significant, recommending a good knowledge of bedrock elevations and appropriate methods for its determination on the mesh nodes associated to the model.

Keywords : Antarctica, dynamics, outlet glacier, sea level, modelisation, processus, flow.

## Merci...

Tout d'abord, je tiens à remercier les membres du jury, Frédérique Rémy, Don Blankenship, Frank Pattyn et Jean Braun pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Un grand Merci Manu pour m'avoir permis de découvrir cet univers de la glaciologie, il y a 6 ans... je n'aurais jamais cru à l'époque pouvoir un jour fouler non seulement l'Antarctique, mais également les chemins de la modélisation numérique, outil qui décelait bien trop de mystères pour moi.

Gaël, milles mercis pour avoir accepté de m'encadrer dans ce travail de thèse au pied levé. Ton enthousiasme et ton inspiration débordante ont été une réelle source de motivation, essentielle pour surmonter les moments difficiles. Ta disponibilité infallible a participé à un merveilleux équilibre me permettant de prendre de nombreuses responsabilités tout en étant justement encadrée et aiguillée. J'ai appris beaucoup en travaillant à tes côtés. Merci.

Merci à Fabien et Lionel pour le temps consacré à me conter les joies de Elmer/Ice, que j'avais par moments un peu de mal à cerner, ainsi qu'à Catherine et Olivier pour avoir enrichi les discussions relatives à la dynamique de cette calotte du pôle Sud, qui n'en finit pas de faire couler de l'encre... et de la glace...

Je remercie également David Docquier, Richard Hindmarsh, Frank Pattyn et Thomas Zwinger pour la collaboration scientifique entreprise ensemble, qui a constituée une partie de ce travail de thèse. Ce partage d'idées aura été très enrichissant et formateur.

L'aboutissement de ce travail est le résultat d'un tournant entrepris grâce à l'appui de certaines personnes rencontrées au cours de cette thèse, merci à Raphaëlle Herbin, Thierry Gallouët et Jean Braun pour m'avoir expliqué la difficulté de l'analyse numérique et encouragé à rediriger mon sujet.

Merci à Marie et Antoine pour les coups de pouce informatiques salvateurs.

La mise en oeuvre de cette expérience de recherche dans les murs du laboratoire a été permise grâce au personnel de l'administration (Aurore, Elizabeth, Emmanuelle, Maud, Michèle) et de la direction du LGGE (J-L. Jaffrezo, G. Krinner, P. Laj). Je les remercie pour avoir apporté ce cadre administratif essentiel.

Je n'oublie pas les personnes ici au labo qui ont participé aux pauses récréatives, bienvenues pour recharger les batteries... Un merci particulier à Vincent, Cécile, Adri, Antoine, Jo, Marion,

Martin, Xav, Lionel, Soazig, Alex ainsi qu'à Delph' et Christian pour m'avoir permis de me rafraîchir les idées au grand air en bonne compagnie!!

Merci aux collègues enseignants-chercheurs, moniteurs ainsi qu'aux étudiants rencontrés pour toutes ces chouettes discussions, explications, justifications, débats qui ont animés ces trois années passées à l'Université. Merci à l'école doctorale Terre Univers Environnement et au CIES de Grenoble pour avoir participé à enrichir cette formation doctorale au travers de l'organisation de nombreuses formations, journées et évènements tout aussi intéressants que variés.

Les amis, Merci d'avoir écouté tous ces grands états d'âme et participé à les calmer, tous ces moments passés ensemble ont eux aussi, contribué à faire avancer la connaissance, c'est certain. Merci à Cam', Alex, Adri, Soph', Gasp, Benjamin, Lola, Sophie...

Merci à l'équipe de la Haute-Loire, Odette et Christian, Pierre et Christine, Anne-Laure et Thierry, Claire et François pour leurs présences et leurs encouragements.

Je tiens enfin à remercier ceux qui sont là depuis un moment déjà, ou qui l'ont toujours été, et ont contribué à l'accomplissement de ce travail. Merci pour leur soutien, pour leur confiance. Merci à mes parents, mes soeurs, Cécile et Solenne, à Véro et Jérôme.

Merci mon Flo pour cette aventure partagée au quotidien.

Enfin, je voudrais te remercier, frère, pour m'avoir appris et communiqué cet enthousiasme de la découverte qui t'animait tant. Cette envie d'aller toujours plus loin, elle est là, dans cette thèse, que je te dédie.

# Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
Remerciements	iii
Notations	ix
Introduction	1
<b>1 Dynamique de la glace : historique et fondements</b>	<b>3</b>
1.1 Les observations de la cryosphère : un peu d'histoire...	3
1.1.1 Les débuts	3
1.1.2 Les observations satellitaires de surface	4
1.1.3 Les observations en profondeur	7
1.2 Etude des propriétés de l'écoulement des glaciers	9
1.2.1 Les propriétés mécaniques de la glace : du micro au macro	10
1.2.2 Le glissement basal	13
1.3 Le rôle du glacier émissaire dans le bilan de masse de l'Antarctique	17
1.3.1 Migration de la ligne d'échouage	18
1.3.2 Les mécanismes sur l'ice shelf	18
1.3.3 Les mécanismes sur la partie posée	19
1.3.4 La zone de transition	19
<b>2 Modélisation de la dynamique des glaciers émissaires</b>	<b>21</b>
2.1 Construction mathématique et outils pour le problème d'écoulement	21
2.1.1 Le problème continu	21
2.1.1.1 Le domaine modélisé	21
2.1.1.2 La glace : un fluide non newtonien	21
2.1.1.3 Les conditions aux limites	23
2.1.1.4 Evolution des surfaces libres	24
2.1.1.5 Description du problème de contact	25



---

2.1.1.6	Résumé du problème à résoudre . . . . .	26
2.1.2	Les approximations à l'équation de Stokes . . . . .	28
2.1.2.1	L'approximation hydrostatique . . . . .	28
2.1.2.2	L'approximation de la couche mince (SIA)-Ordre 0 . . . . .	28
2.1.2.3	L'approximation Shallow Shelf-Shelfy Stream (SSA) . . . . .	30
2.1.2.4	Les ordres supérieurs . . . . .	31
2.1.3	La résolution inverse . . . . .	32
2.1.3.1	Définition . . . . .	32
2.1.3.2	La méthode de Robin . . . . .	33
2.2	Approche numérique pour l'étude de l'écoulement glaciaire . . . . .	35
2.2.1	Les motivations . . . . .	35
2.2.2	Introduction aux méthodes numériques . . . . .	36
2.2.3	Présentation de deux types de méthodes numériques . . . . .	38
2.2.3.1	Les volumes finis . . . . .	38
2.2.3.2	Les éléments finis . . . . .	39
2.2.4	Problématiques associées à la résolution numérique . . . . .	40
2.2.5	Conclusions . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Processus d'écoulement à la ligne d'échouage : application 2D</b>	<b>45</b>
3.1	Etat de l'art . . . . .	45
3.1.1	Introduction . . . . .	45
3.1.2	Les premiers modèles de migration de la ligne d'échouage . . . . .	46
3.1.3	La théorie de <i>Schoof</i> (2007) . . . . .	48
3.1.4	Les intercomparaisons récentes et principales conclusions . . . . .	50
3.2	Comparaison modèle full-Stokes - modèle couche limite en régime stationnaire . . . . .	52
3.2.1	Introduction . . . . .	52
3.2.2	Description des tests de sensibilité . . . . .	53
3.2.3	Sensibilité à la contribution relative du glissement . . . . .	54
3.3	Intercomparaison de modèles pour le régime transitoire . . . . .	56
3.3.1	Introduction . . . . .	56
3.3.2	Model description . . . . .	58
3.3.2.1	Governing equations . . . . .	58
3.3.2.2	Boundary conditions . . . . .	60
3.3.2.3	Shallow shelf/shelfy stream approximation (SSA) . . . . .	61
3.3.2.4	Grounding line treatment . . . . .	62
3.3.2.5	Calving front boundary condition and the specification of but- tressing . . . . .	63
3.3.3	Experimental setup . . . . .	64
3.3.4	Results and discussion . . . . .	66

---

3.3.4.1	Transient behaviour of direct observable variables on actual ice sheets . . . . .	66
3.3.4.2	Divergence from the boundary-layer solution . . . . .	70
3.3.4.3	Changes in Volume Above Flotation ( $\Delta VAF$ ) . . . . .	70
3.3.5	Conclusions . . . . .	73
3.4	Conclusion . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Application 3D au cas du glacier de l’Astrolabe</b>	<b>75</b>
4.1	Présentation de la zone d’étude : contexte et données . . . . .	76
4.1.1	Topographie du glacier émissaire . . . . .	76
4.1.1.1	Topographie de la surface . . . . .	76
4.1.1.2	Topographie du socle . . . . .	77
4.1.1.3	Localisation de la ligne d’échouage . . . . .	79
4.1.2	Accumulation . . . . .	82
4.1.3	Dynamique de surface de la glace . . . . .	83
4.2	Modélisation du glacier de l’Astrolabe . . . . .	84
4.2.1	Construction du maillage 3D . . . . .	84
4.2.1.1	Détermination du bassin versant . . . . .	84
4.2.1.2	Maillage 2D . . . . .	87
4.2.1.3	Description de la surface inférieure . . . . .	87
4.2.1.4	Maillage 3D de <i>référence</i> . . . . .	90
4.2.2	Détermination des conditions basales . . . . .	91
4.2.2.1	Description de la méthode . . . . .	92
4.2.2.2	Régularisation . . . . .	93
4.2.2.3	Résultats et discussion . . . . .	94
4.2.3	Relaxation de <i>référence</i> de l’Astrolabe . . . . .	94
4.2.3.1	Configuration initiale . . . . .	95
4.2.3.2	Résultats . . . . .	96
4.3	Sensibilité du modèle d’écoulement à la description du socle . . . . .	98
4.3.1	Méthode . . . . .	99
4.3.1.1	Idée générale . . . . .	99
4.3.1.2	Perturbation sur le socle . . . . .	99
4.3.2	Résultats . . . . .	100
4.3.2.1	Comparaison méthodes <i>directe/indirecte</i> . . . . .	100
4.3.2.2	Recherche de la résolution critique . . . . .	101
4.4	Un outil pour la description du socle . . . . .	102
4.5	Conclusion . . . . .	104
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>105</b>

<b>Annexe A : Démonstrations associées à l'étude d'intercomparaison de modèles d'écoulement</b>	<b>109</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>111</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>112</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>114</b>

# Notations

Notation	Description	Unités
$\tau$	Tenseur des contraintes déviatoires	[Pa]
$\sigma$	Tenseur des contraintes de Cauchy	[Pa]
$\eta$	Viscosité effective	[Pa s]
$n$	Exposant de Glen	
$\mathbf{D}$	Tenseur taux de déformation	[s <sup>-1</sup> ]
$A$	fluidité	[Pa <sup>-3</sup> s <sup>-1</sup> ]
$D_e$	Second invariant du taux de déformation	[s <sup>-1</sup> ]
$Q$	Energie d'activation	[J mol <sup>-1</sup> ]
$R$	Constante des gaz parfaits	[J mol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
$T$	Température	[K]
$E$	Facteur d'amplification pour l'anisotropie	
$\tau_b$	Traction basale	[Pa]
$u_b$	Vitesse basale	[m s <sup>-1</sup> ]
$A_s$	Coefficient de glissement	
$N$	Pression effective	[Pa]
$\sigma_{nn}$	Composante normale du tenseur des contraintes	[Pa]
$P_w$	Pression de l'eau	[Pa]
$C$	Paramètre de la loi de frottement	[Pa m <sup>-1/3</sup> s <sup>1/3</sup> ]
$m$	Exposant de la loi de frottement	
$\beta$	Coefficient de frottement de la loi linéaire	[Pa s m <sup>-1</sup> ]
$\rho_i$	Densité de la glace	[kg m <sup>-3</sup> ]
$\rho_w$	Densité de l'eau de mer	[kg m <sup>-3</sup> ]
$\mathbf{u}$	Vecteur vitesse	[m s <sup>-1</sup> ]
$t$	Temps	[s]
$\mathbf{g}$	Gravité	[m s <sup>-2</sup> ]
$\Omega$	Vitesse de rotation de la terre	[rad s <sup>-1</sup> ]
$p$	Pression isotrope	[Pa]

---

$\mathbf{n}$	Vecteur normal à une surface	
$a_{s/b}$	Taux de fonte/d'accumulation	[m s <sup>-2</sup> ]
$\ell_w$	Niveau marin	[m]
$\Omega$	Volume du domaine modélisé	
$\Gamma_b$	Surface inférieure domaine modélisé	
$\Gamma_s$	Surface supérieure du domaine modélisé	
$\Sigma_s$	Surface latérale du domaine modélisé	
$x$	Coordonnée horizontale dans le repère cartésien	[m]
$y$	Coordonnée horizontale dans le repère cartésien	[m]
$z$	Coordonnée verticale dans le repère cartésien	[m]
$z_s$	Altitude de la surface supérieure du système glaciaire	[m]
$z_b$	Altitude de la surface inférieure du système glaciaire	[m]
$u_H$	Vecteur vitesse horizontale	[m s <sup>-1</sup> ]
$\epsilon$	Rapport d'aspect	
$H$	Epaisseur caractéristique du système	
$L$	Etendue caractéristique du système	
$h$	Epaisseur locale de la colonne de glace	[m]
$u$	Composante du vecteur vitesse selon l'axe des x	[m s <sup>-1</sup> ]
$v$	Composante du vecteur vitesse selon l'axe des y	[m s <sup>-1</sup> ]
$w$	Composante du vecteur vitesse selon l'axe des z	[m s <sup>-1</sup> ]
$Q_H$	flux horizontal de glace	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]
$\tau_b^x$	Composante de la traction basale selon l'axe des x	[Pa]
$\tau_b^y$	Composante de la traction basale selon l'axe des y	[Pa]
$b$	Élévation du socle	[m]
$G$	Opérateur comportant les équations d'un système algébrique	
$\mathbf{d}$	Inconnues du système	
$\mathbf{p}$	Paramètres du système	
$J_0$	Fonction coût initiale	
$u_N$	Vitesses selon le problème de Neumann	[m s <sup>-1</sup> ]
$u_D$	Vitesses selon le problème de Dirichlet	[m s <sup>-1</sup> ]
$J_{tot}$	Fonction coût totale	
$J_{reg}$	Fonction coût de régularisation	
$\lambda$	Paramètre de régularisation	
$\theta$	Paramètre de la force d'arc-boutant selon <i>Schoof</i> (2007)	
$q_g$	Flux de glace à la ligne d'échouage	[m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]
$h_g$	Epaisseur à la ligne d'échouage	[m]
$h_f$	Epaisseur au front de vélage	[m]
$x_g$	Position de la ligne d'échouage	[m]

$C_F$	Paramètre de la force d'arc-boutant selon 3.3	
$V_{AF}$	Volume au-dessus de la flottaison (2D)	$[m^2]$



# Introduction

Face à la hausse de la température moyenne annuelle de l'atmosphère constatée au cours du 20ème siècle, de l'ordre de  $0.75^{\circ}\text{C}$  entre 1906 et 2005 (*IPCC, Climate Change, 2007*), l'homme s'interpelle. Le changement climatique ainsi avéré, on essaie d'en comprendre les causes et d'en prévoir les impacts. En particulier, on constate une élévation du niveau des mers de  $1.8$  [ $1.3$ - $2.3$ ]  $\text{mm an}^{-1}$  depuis 1961, laquelle s'accélère depuis 1993, atteignant la valeur de  $3.1$  [ $2.4$ - $3.8$ ]  $\text{mm an}^{-1}$  (*IPCC, Climate Change, 2007*). Cette élévation n'est pas sans conséquences, impliquant de nombreux problèmes environnementaux et sociétaux : inondation, érosion côtière, déplacement massif de populations, destruction de zones de production de denrées alimentaires etc... Deux contributions à cette hausse prédominent : la dilatation thermique de l'océan en réponse à son réchauffement et l'apport d'eau des réservoirs d'eau douce présents sur terre. La cryosphère, composante englacée (eau sous forme solide) de la planète terre est constituée des appareils suivants : grandes calottes de l'Antarctique et du Groenland, calottes glaciaires plus petites situées dans l'hémisphère Nord, glaciers de montagne, banquise, pergélisol, névé/neige. Si la contribution de chacun de ces éléments à l'élévation du niveau des mers et encore très mal connue et soumise à de grandes incertitudes, elle apparait prédominante sur la dernière décennie, contribuant à 80% de l'élévation du niveau des mers entre 2003 et 2007 (*Cazenave et al., 2009*). On observe en particulier une accélération de la perte de masse des calottes d'Antarctique et du Groenland participant à une hausse du niveau de mers de  $1.3$   $\text{mm an}^{-1}$  en 2006 (*Rignot et al., 2011a*) (contre  $0.7$   $\text{mm an}^{-1}$  entre 1993 et 2003). Ces deux grandes calottes, qui représentent 90% du stockage de glace sur terre (75% du stockage d'eau douce) ont un temps de réponse plus lent que les autres éléments de la cryosphère, n'atténuant pas pour autant leur forte contribution potentielle à une élévation du niveau de mers, qui s'élèverait à 65 m si elles venaient toutes deux à disparaître. Ce dernier fait étant pour l'instant peu probable, il illustre cependant une contribution prépondérante des calottes d'Antarctique et du Groenland à l'évolution future du niveau des mers.

La compréhension des mécanismes responsables du changement de masse annuel (bilan de masse global) de chacune des calottes posées apparait primordiale pour établir la contribution future de ces dernières à l'élévation du niveau des mers. Le bilan de masse d'une calotte est le résultat de deux contributions principales : (i) Le bilan de masse en surface (BMS), incluant un ensemble de processus de gain et de perte de glace (précipitations, sublimation, fusion/ruissellement, érosion) et (ii) le transport de glace de la calotte glaciaire reposant sur le



socle (calotte posée) vers la mer (processus de perte de glace). En Antarctique, les conditions atmosphériques sont telles que la fusion de surface est négligeable et l'essentiel de la masse de glace (90%) est perdue par transfert dynamique de glace. Ce transfert de glace a lieu en périphérie de la calotte au niveau des glaciers émissaires, qualifiés de systèmes exutoires. Sur les marges, sous l'influence de la pression de l'eau, la calotte se met à flotter sur la mer, cette délimitation constituant la ligne d'échouage. Pour mieux saisir les processus en jeu dans ce transfert de glace contrôlant le bilan de masse de l'Antarctique, on utilise la modélisation de l'écoulement de la calotte (du glacier émissaire) et son observation. La modélisation permet d'une part de représenter les processus physiques en jeu et de les valider par les observations, et d'autre part de prédire l'évolution du système de la calotte en réponse au forçage climatique. Cependant, les processus physiques responsables de l'écoulement proche de la ligne d'échouage restent mal compris, rendant leur implémentation numérique hasardeuse. De plus, la représentation des cas réels qui nous intéressent dépendent de notre interprétation et utilisation des observations, et n'en sont donc pas une copie conforme, ajoutant un biais supplémentaire aux résultats de la modélisation.

Cette thèse vise ainsi à apporter de nouveaux éléments pour mieux contraindre les modèles d'écoulement de calotte visant à prédire leur contribution à l'élévation future du niveau des mers. Elle se scinde en deux parties principales, l'une portant sur l'implémentation des processus physiques dans le modèle numérique, et l'autre s'intéressant à l'utilisation des observations et à la sensibilité du modèles d'écoulement à cette représentation. Au cours de ce travail, nous exploiterons largement l'outil numérique Elmer/Ice, modèle d'écoulement 'full-Stokes' de la glace basé sur la méthode des éléments finis, développé au CSC (Finlande). Il nous servira de base principale pour une double application ; à un cas synthétique de calotte bidimensionnelle et au cas réel du glacier de l'Astrolabe, situé en Antarctique de l'Est, correspondant respectivement aux problématiques de la première et deuxième partie.

Ce travail de thèse est présenté en 4 chapitres. Le premier constitue un préambule à l'étude de la dynamique de la calotte Antarctique. Il expose l'historique de la dynamique glaciaire et les résultats théoriques et observationnels essentiels sur lesquels seront basés nos travaux. Le deuxième chapitre présente le formalisme mathématique des processus physiques, et le principe de l'outil numérique dans lequel ils seront insérés. On discutera en particulier du choix de l'outil numérique utilisé. Dans un troisième chapitre, nous considérerons les différentes approches existantes pour les modèles d'écoulement bidimensionnels de calotte, et analyserons la différence de comportement qui en résulte. Une partie de ce travail a été soumis à 'The Cryosphere'. Enfin, le quatrième et dernier chapitre concerne l'application du modèle d'écoulement Elmer/Ice au cas réel du glacier de l'Astrolabe. Une attention particulière sera accordée à l'utilisation des observations radar du socle sous-jacent à la calotte et à la sensibilité du modèle d'écoulement à sa représentation.

# Chapitre 1

## Dynamique de la glace : historique et fondements

L'étude des glaciers émissaires, bien que relativement récente, repose néanmoins sur de nombreuses observations et théories érigées au fil des années dont la plus ancienne remonte aux années 1750. Nous allons au cours de ce chapitre expliciter les principales étapes de l'investigation de la dynamique glaciaire nous conduisant à la problématique de la modélisation de l'objet d'étude qu'est le glacier émissaire. Dans un premier temps, l'historique de l'étude de la dynamique des glaciers, en général, puis en Antarctique, est présentée et met en évidence la diversité des approches utilisées. Cette frise chronologique permet en particulier de replacer notre étude dans le contexte scientifique actuel de l'acquisition de données. Ensuite, nous expliciterons la théorie développée dans le cadre de l'étude des deux composantes principales de l'écoulement de la glace, à savoir la déformation viscoplastique et le glissement basal. Ces deux contributions constituent la base théorique de l'investigation de la dynamique glaciaire. Enfin, le rôle du glacier émissaire dans le contrôle du bilan de masse de la calotte sera explicité. Nous présenterons ses composantes, son fonctionnement et les mécanismes principaux contribuant à l'évacuation de glace vers la mer.

### 1.1 Les observations de la cryosphère : un peu d'histoire...

#### 1.1.1 Les débuts

C'est dans l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert, éditée entre 1750 et 1771, qu'un ouvrage évoque pour la première fois la pesanteur et le glissement comme cause principale de l'écoulement d'un glacier selon le naturaliste Altmann 1751. La déformation visqueuse est ensuite discutée par *Bordier* (1773), puis par Forbes et Agassiz après les premières mesures effectuées dans les années 1840 sur un glacier des Alpes Suisses (*Agassiz*, 1842; *Forbes*, 1842). D'autres études notamment celle de *Rendu* (1840) ont également qualifié ce processus d'écoulement basé selon une rhéologie ductile. Mais certains ne sont pas de cet avis : en 1850 apparaissent les premières

expérimentations en laboratoire sur de la glace conduisant Tyndall et Huxley à réfuter la viscosité du matériau glace. Selon eux, le mouvement observé des glaciers résulterait de l'enchaînement des processus de fractures, regel, dilation (*Tyndall and Huxley*, 1857).

D'autres expérimentations en laboratoire suivent sur cette fin du 19ème siècle, mais c'est seulement en 1955 que la déformation viscoplastique de la glace se formalise et qu'une proposition de relation entre la déformation de la glace et la contrainte appliquée est émise (*Glen*, 1955) (paragraphe 1.2.1).

Par ailleurs, dans les années 1920-1930, *Ahlmann et al.* (1929) et *Sverdrup* (1936) mettent en évidence les interactions entre le comportement du glacier et son environnement climatique au travers d'observations de l'extension spatiale des glaciers scandinaves. Un glacier se forme par accumulation successive de neige qui persiste d'une année sur l'autre. Cette neige se transforme progressivement en glace sous l'effet de la compaction, phénomène résultant du poids des couches supérieures. L'extension du glacier, témoignant du volume glaciaire, est ainsi très dépendante des précipitations neigeuses et de l'ablation estivale et donc des conditions climatiques environnantes. Ces dernières étant tributaires de la source radiative du soleil, la formation des systèmes glaciaires s'effectue prioritairement au niveau des hautes latitudes (calottes du Groenland et de l'Antarctique), des zones de hautes altitudes, ou sur les versants Nord. De plus, ces conditions évoluent également dans le temps et sont en partie responsables des alternances d'avancée/retrait des glaciers. A titre d'exemple, le petit Age de Glace, défini pour les Alpes, représente une période d'avancée importante de l'ensemble de glaciers alpins au cours de la période du 14ème au 19ème siècle.

Les observations deviennent plus nombreuses sur les glaciers alpins à l'entrée dans le 20ème siècle et s'étendent aussi à des contrées plus éloignées. Ainsi, l'expédition de Wegener à partir de 1913 représente la première campagne d'observations au Groenland (*Koch and Wegener*, 1930) tandis que l'Antarctique ne fera l'objet de premières mesures détaillées qu'en 1942 (*DeQ.Robin*, 1953). L'ère moderne de la glaciologie débute à partir de 1950 avec l'apport des approches interdisciplinaires. La physique et les mathématiques aident à la compréhension des processus dynamiques (section 1.2) tandis que l'étude des mécanismes à la base et à la surface du glacier est complétée par une approche plutôt géologique et climatique.

### 1.1.2 Les observations satellitaires de surface

En parallèle, l'apparition des outils de télédétection aident considérablement à l'observation de la cryosphère dans son ensemble. La famille des satellites Nimbus 1 à 7, lancés à partir de 1972, offre pour la première fois une image de l'extension spatiale des calottes polaires (*Parkinson and Cavalieri*, 1989). L'embarquement sur les satellites des instruments de mesure sont en effet d'une aide précieuse pour l'étude de la dynamique des calottes car les mesures de terrain, ou aéroportées souvent lourdes du point de vue logistique et financier ne peuvent échantillonner qu'une infime partie des calottes polaires sur des durées limitées (6 mois de l'année). Elles rendent donc difficilement compte de l'évolution temporelle de l'ensemble du système.

Dans le cadre de l'étude de la dynamique de la glace, ces instruments de mesure permettent de nous renseigner sur la variabilité spatiale et temporelle de grandeurs telles que la topographie de la surface de la calotte, la vitesse de déplacement de la surface de glace, l'accumulation de surface etc...

Ces instruments de mesure correspondent à des capteurs d'ondes électromagnétiques, qui diffèrent selon deux principes : la longueur d'onde détectée et son origine. Selon le premier principe on différenciera ainsi trois types de capteurs : les capteurs optiques (partie visible du spectre électromagnétique), capteurs thermiques (Infra Rouge), et les capteurs radar (ondes radio et micro ondes). En ce qui concerne le deuxième principe, les ondes reçues peuvent soit être émises par l'objet que l'on cherche à caractériser, on parlera de capteur passif, soit être émises par le capteur lui-même que l'on qualifiera dans ce cas d'actif (capteur-émetteur). Les capteurs radar actifs sont les capteurs d'intérêt majeur pour le suivi de l'état des calottes polaires. Il en existe plusieurs types. L'altimètre est un instrument à visée verticale qui nous renseigne sur la topographie de surface avec émission-réception des ondes hautes fréquences ( $>3-4$  GHz). Le radar SAR (pour Synthetic Aperture Radar) est une image radar haute résolution bidimensionnelle qui permet de remonter aux vitesses de surface. Ces deux instruments ont été montés pour la première fois dans un but d'observation de la cryosphère sur le satellite européen ERS-1 en 1991. Ils ont permis l'observation de l'ensemble du Groenland et de 80% de l'Antarctique. Les capteurs optiques peuvent nous procurer des images tridimensionnelles (après restitution stéréoscopique) à très haute résolution telles que les images acquises par les satellites de la famille Spot (dont Spot5 porté par le projet Spirit (*Korona et al.*, 2009)), mais ils sont très dépendants des conditions atmosphériques (nuages, obscurité). Enfin, les radiomètres passifs (détecteur micro-ondes) sont utilisés pour mesurer l'émissivité du manteau neigeux de sub-surface, mesures renseignant sur l'accumulation de surface (*Arthern et al.*, 2006) et la nature de la neige.

Les observations de télédétection dédiées à la dynamique de la glace et son expression en surface apparaissent dans les années 1990, après le lancement de nombreux satellites à vocation scientifique. La première étude permettant de mesurer l'écoulement de la glace est faite par *Bindschadler and Scambos* (1991) sur un glacier de la péninsule antarctique à partir d'images optiques. *Goldstein et al.* (1993) décrivent une autre technique basée sur l'imagerie radar (interférométrie) permettant d'échantillonner la vitesse des larges courants de glace. De nombreuses autres études basées sur l'utilisation de ces imageries satellitaires suivent alors et toutes relèvent la même conclusion quant à la répartition spatiale de la dynamique glaciaire : des écoulements rapides de glace ( $>900$  m an<sup>-1</sup>) côtoient des zones de glace plus stagnantes (vitesses 10 fois inférieures), et sont ainsi responsables du transfert de 90% de la glace continentale en direction de la mer. Les résultats de la mission RadarSat (1997) dévoilant l'image entière de la surface antarctique semblent reproduire ces grands appareils glaciaires (*Jezeq*, 1999). Ces derniers, dénommés fleuves de glace (ou *ice streams*) se forment à l'intérieur de la calotte, où l'écoulement en direction de la périphérie serait progressivement accéléré sous l'influence principale du glissement basal (paragraphe 1.2.2). Sur la partie côtière, ces grands fleuves de glace soumis à la topographie, convergent vers les glaciers émissaires qui, lorsqu'ils atteignent l'océan, se mettent

à flotter. Cette partie est dénommée plate-forme flottante ou *ice shelf*. Une étude récente de *Rignot et al.* (2011b) synthétise ces mesures d'interférométrie radar haute résolution (900 m) acquises récemment au cours des campagnes de 2007 à 2009. Les vitesses correspondantes sont représentées sur la figure 1.1. On remarque sur les marges de la calotte glaciaire la présence de zones de vitesses particulièrement importantes au niveau des glaciers émissaires. La mission RadarSat (1997) permet également de déterminer l'extension de la calotte par mesure du trait de côte et de délimiter la partie posée de la partie flottante par mesure des déplacements verticaux (non négligeables dans le cas de la glace flottante soumises aux mouvements de marées). Cette limite constitue la ligne d'échouage. Les missions qui ont suivi ont mis en évidence les tendances temporelles des précédentes mesures. Comme exemple de suivi temporel, on peut citer les mesures de variations d'épaisseur, ou d'élévation de surface  $dS/dt$  (*Pritchard et al.*, 2009; *Flament and Rémy*, 2012), montrant un amincissement prépondérant au niveau de la périphérie de la calotte (figure 1.2).

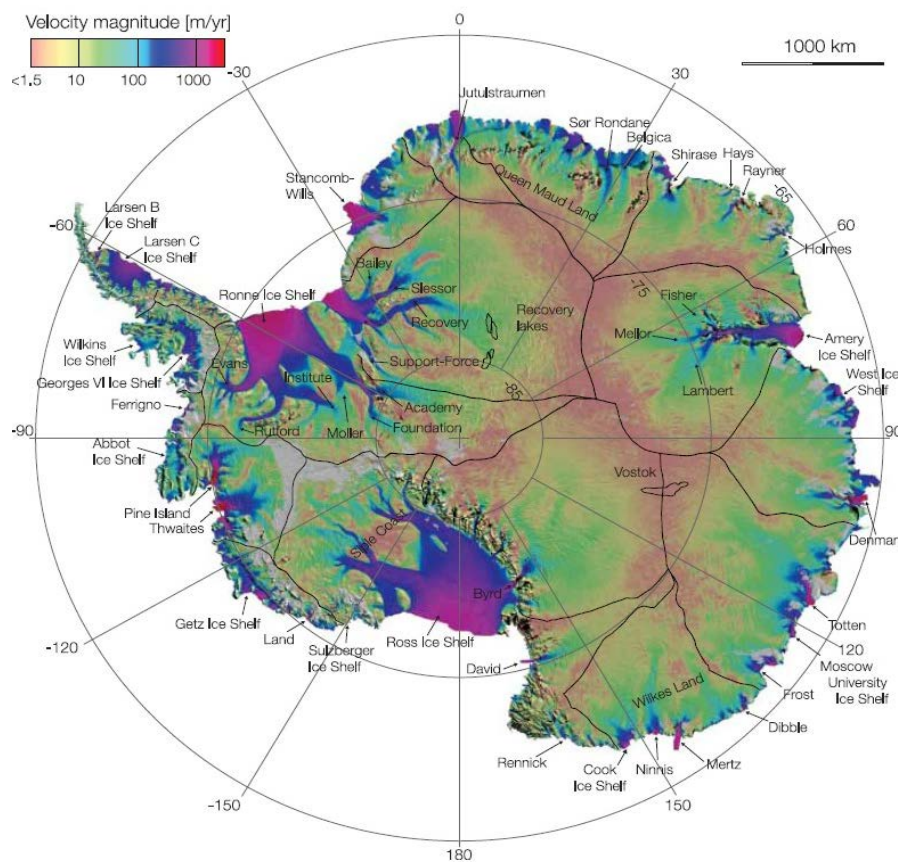


FIGURE 1.1 – Vitesses de surface obtenues par interférométrie radar sur les satellites ALOS PALSAR, Envisat ASAR, RADARSAT-2, et ERS-1/2. Les lignes noires épaisses délimitent les principaux bassins versants, tandis que les plus fines représentent le contour des lacs sous-glaciaires majeurs (*Rignot et al.*, 2011b).

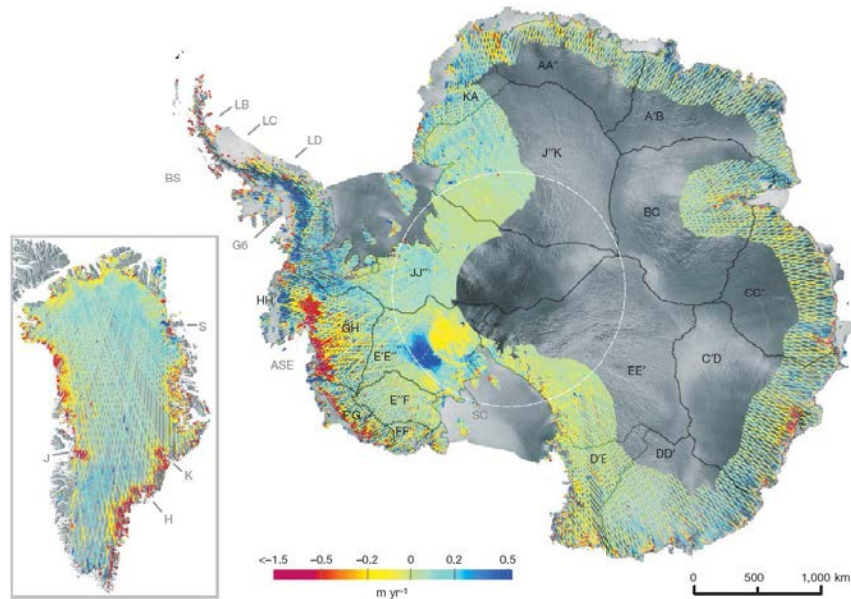


FIGURE 1.2 – Mesures des changements d'élévation de surface par altimétrie radar pour l'Antarctique et le Groënland sur la période 2003-2007 (*Pritchard et al.*, 2009).

### 1.1.3 Les observations en profondeur

Nous avons cité précédemment l'usage de capteurs radar (altimètres, SAR) embarqués sur les satellites. Ces capteurs n'échantillonnent que la surface ou sub-surface de la calotte. Des capteurs de plus basses fréquences, inférieures à 400 MHz permettent de pénétrer plus profondément dans la couche de glace et donc de renseigner sur les propriétés de l'intérieur des systèmes glaciaires. Cette technique détecte la présence d'interfaces en profondeur par mesure du temps de propagation de l'onde séparant l'écho de surface de glace à l'écho de l'interface considérée (en supposant la vitesse de l'onde radar dans la glace connue). En général, ces appareils de mesures sont plutôt placés à bord d'avions survolant les zones d'intérêt, même si, selon les moyens et l'étendue couverte, l'acquisition peut aussi s'effectuer au sol. Les interfaces détectées peuvent être des strates internes à la glace assimilées à des isochrones (*Fujita and others*, 1999), ou si le signal pénètre à une profondeur suffisante, la surface basale représentée par le socle rocheux, la surface de lacs glaciaires ou l'interface glace-océan.

Les isochrones représentent les anciennes surfaces supérieures de glace, ayant été progressivement enfouies et compactées par les accumulations successives. Leurs mesures permettent d'obtenir de nombreuses informations quant à l'écoulement de la glace et sa reconstruction. On citera par exemple l'étude de *Weertman* (1976), mettant en évidence l'infléchissement des isochrones au niveau des zones de transition de conditions basales de non glissement à celles de glissement (caractérisées par une augmentation des valeurs de vitesses verticales).

Les échos radar apportent différentes informations en ce qui concerne la surface basale. Tout d'abord, ils permettent de mesurer l'épaisseur de glace (différence de l'écho de surface et de profondeur) et d'en déduire l'élévation du socle rocheux de la calotte antarctique, (par soustraction de l'élévation de la surface). Ces données sont très précieuses pour les glaciologues. En effet, elles permettent tout d'abord de remonter à l'information sur le volume de glace présent en Antarctique et donc d'évaluer la potentielle contribution de la calotte polaire à l'élévation du niveau des mers en cas d'instabilité. La première carte d'élévation du socle de l'Antarctique apparaît en 1983 et montre pour la première fois une épaisseur moyenne de glace à 2.5 km, une profondeur maximum de 4.7 km et un volume de glace d'environ  $30 \cdot 10^6 \text{ km}^3$  (*Drewry*, 1983). Elle met en évidence la division de la calotte en deux parties Est et Ouest : la partie continentale de l'Antarctique de l'Est est posée sur un socle globalement au dessus du niveau des mers et est donc considérée comme stable tandis que le socle de l'Antarctique de l'Ouest, majoritairement sous le niveau actuel marin pourrait être favorable à une déstabilisation de la glace de cette zone susceptible de se produire en réponse à une élévation du niveau des mers, ou à un amincissement de la calotte (*Mercer*, 1978). Ce dernier aspect, qui sera traité dans le chapitre 3, est au coeur des programmes glaciologiques récents et justifie l'importance de la connaissance de la topographie basale. C'est ainsi que de nombreuses campagnes de mesures sont consacrées à des mesures radar, aéroportées ou au sol, de la topographie sous-glaciaire. La compilation de ces dernières, complétées par des mesures sismiques, gravimétriques et l'analyse de carottes de glace a permis de mettre en place une base de données pour tout le continent (BEDMAP :BEDRock MApping Project), et de construire un modèle numérique d'élévation du socle à 5 km de résolution (*Lythe et al.*, 2001). Nous verrons par la suite (chapitre 3 et 4) que la topographie du socle est également nécessaire pour contraindre les modèles d'écoulement de glace, et que cette dernière base de données a été largement utilisée par la communauté des modélisateurs de l'écoulement.

Une autre particularité des mesures radar concerne les propriétés des échos caractéristiques du réflecteur. La rugosité et le coefficient de réflexion du socle nous renseignent sur la géologie basale, la présence d'eau dans le substrat voire sur la présence de lacs glaciaires. Ces derniers points ont une influence potentielle sur la dynamique de la glace (paragraphe 1.2.2). A titre d'exemple, *Siegert et al.* (2004) démontrent que les grands courants de glace de la région de Siple Coast en Antarctique de l'Ouest sont généralement associés à des valeurs de rugosité faibles tandis que les crêtes ou zones de glace stagnantes correspondent à une topographie plus perturbée et sont alors associées à des rugosités élevées. L'identification des lacs glaciaires sur les échos radar a été faite pour la première fois à la fin des années 1960, où *Robin et al.* (1977) ont remarqué des réflecteurs particulièrement plats et intenses dans les enregistrements (figure 1.3). Les méthodes de détection de ces appareils hydrologiques ont été fortement aidées par la découverte de l'immense lac glaciaire de Vostok en Antarctique de l'Est (*Oswald and Robin*, 1973).

L'étude de la dynamique de la glace a ainsi fait un saut considérable au cours des dernières décennies par le développement des méthodes d'observations aéroportées et par la télédétection

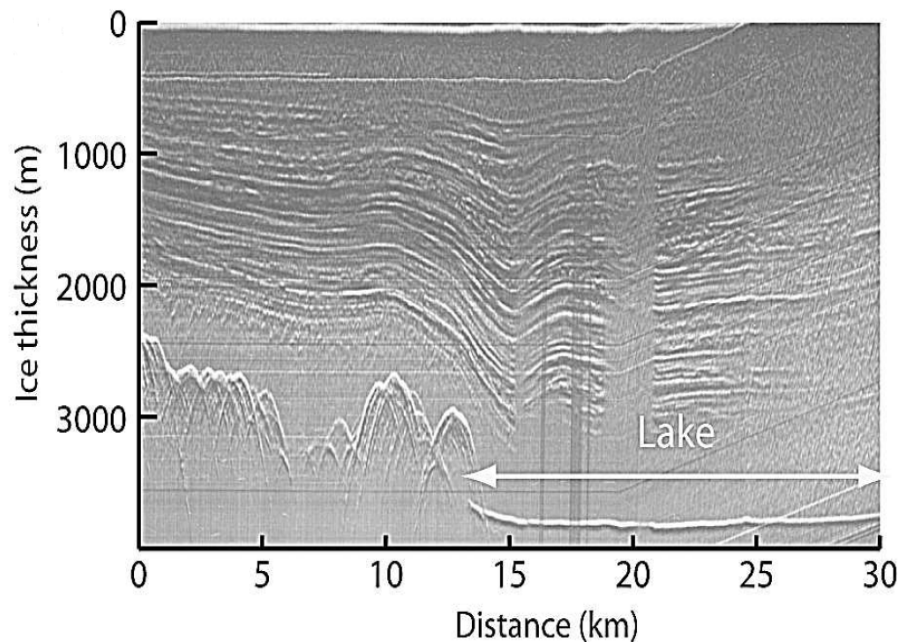


FIGURE 1.3 – Exemple du lac sous-glaciaire de Vostok identifié par échos radar (Radio-Echo Sounding) (*Siegert et al.*, 2005).

de la cryosphère. On dispose maintenant d'une importante quantité de données passées et actuelles permettant de mieux comprendre les mécanismes physiques de la dynamique glaciaire de la calotte Antarctique d'une part (observations complémentaires de la théorie) et commencer à prédire son évolution dans le futur d'autre part. La prochaine partie de ce chapitre est dédiée à l'étude théorique de l'écoulement de la glace (comportement mécanique de la glace et glissement) qui représente le processus central dans la dynamique globale d'un système glaciaire.

## 1.2 Etude des propriétés de l'écoulement des glaciers

Il a fallu quelques dizaines d'années, voire quelques siècles pour comprendre les fondements physiques de l'écoulement des glaciers. Cet écoulement s'effectue selon trois mécanismes. Le glissement à la base du glacier fut reconnu très tôt (1751) par les naturalistes et représente la contribution principale de l'écoulement des glaciers alpins, la déformation du socle sous-jacent à la glace peut également contribuer à l'écoulement de glace observé en surface, ce processus étant très dépendant du type de socle et du processus de glissement évoqué précédemment (il sera donc traité à l'intérieur du processus de glissement basal). Enfin, la déformation viscoplastique de la glace est évoquée au début du 19ème, comme composante du mouvement des glaciers. Ces trois mécanismes sont représentés sur la figure 1.4.



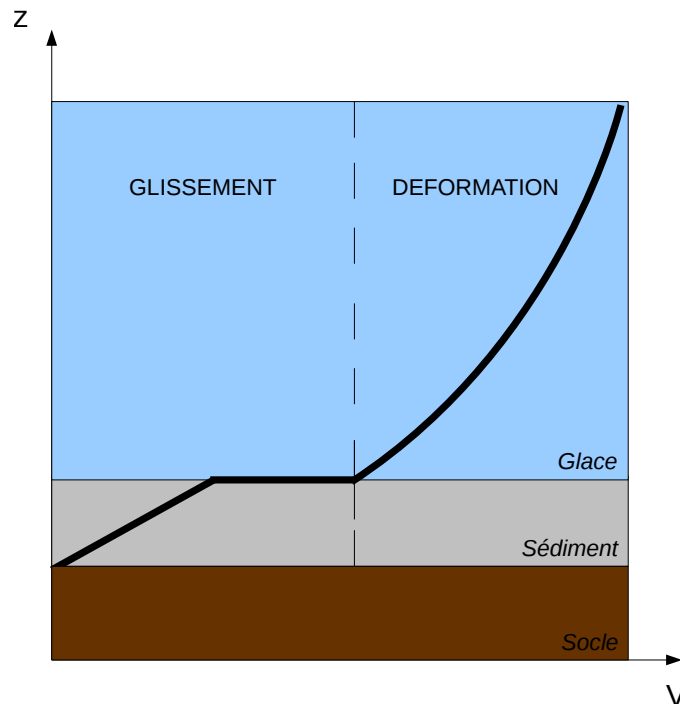


FIGURE 1.4 – Schéma représentant les trois principaux mécanismes responsables de l'écoulement d'un glacier : profil vertical de la vitesse  $V$ .

### 1.2.1 Les propriétés mécaniques de la glace : du micro au macro

Un ensemble de lois caractérisant le comportement du matériau glace a été déterminé à partir de nombreuses expériences en laboratoires sur des échantillons de glace artificiels complétées par des observations *in-situ* sur les glaciers. Ce qui suit en résume les principales lignes directrices.

Tout d'abord, l'étude de l'arrangement cristallographique de la glace aide à la compréhension de sa réponse mécanique globale face à des sollicitations extérieures. La structure d'un monocristal de glace dépend des propriétés de la molécule d'eau, et présente une cristallisation hexagonale où les atomes d'oxygène se trouvent arrangés préférentiellement selon des couches, appelés plans basaux (caractérisé par le vecteur  $\mathbf{c}$ , perpendiculaire au plan basal). Cet arrangement, représenté sur la figure 1.5, ressemble fortement à celui des métaux tels que le magnésium et le cadmium. Une contrainte cisailante appliquée parallèlement aux plans basaux conduit à une importante vitesse de déformation cisailante selon ces plans, 4 à 5 fois supérieure à celle obtenue à contrainte équivalente pour un essai en compression avec une contrainte perpendiculaire à ces plans (Duval *et al.*, 1983). La manière dont ces cristaux vont se déformer dépend donc fortement de la direction d'application de la contrainte, justifiant la qualification d'anisotropie mécanique. La déformation, qui consiste en un glissement sur le plan basal correspond en fait à la transmission de mouvements de dislocation des atomes. L'échelle du système qui nous pré-

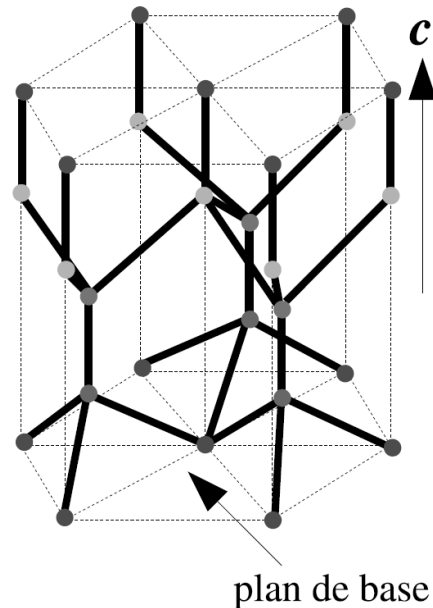


FIGURE 1.5 – Schéma de la structure hexagonale du cristal de glace (*Gillet-Chaulet, 2006*)

occupe, l'échelle des glaciers émissaires est macroscopique et consiste en un nombre important de cristaux de glace en interaction. Une échelle intermédiaire pertinente pour la rhéologie des glaces polaires est donc celle du polycristal, *i.e.* l'assemblage de plusieurs dizaines, centaines de cristaux. La réponse mécanique de ce polycristal résulte de nombreux processus de migration, recristallisation, diffusion conduisant à une orientation préférentielle des cristaux, caractéristique de ce qu'on appelle la fabrique du polycristal. La fabrique correspond à l'ensemble des orientations de l'axe  $\mathbf{c}$  de chacun des cristaux. Ainsi, un polycristal à fabrique isotrope sera constitué de monocristaux dont les plans basaux n'ont pas d'orientation préférentielle.

L'ensemble de ces mécanismes microscopiques impacte sur le fluage de la glace à plus large échelle. Ce fluage sous l'effet d'une contrainte donnée, peut être caractérisé en considérant l'évolution temporelle du taux de déformation (ou du taux de déformation en fonction de la déformation). Sur la figure 1.6, on distingue trois phases principales : la phase transitoire, ou phase primaire pendant laquelle la vitesse de déformation diminue rapidement jusqu'à atteindre un minimum (à ce stade, la déformation totale n'est que de 1%, quelque soit l'état de contrainte et la température). On atteint le durcissement du matériau lié à l'accumulation des dislocations aux joints de grains. La phase secondaire correspond à une vitesse de déformation constante du matériau. Dans la glace, cette étape est très courte. La relation reliant la valeur de ce minimum de taux de déformation à la contrainte appliquée est une loi puissance de type Norton-Hoff. Elle est communément appelé loi de Glen en glaciologie en hommage aux travaux pionniers de *Glen* (1955) pour déterminer ses paramètres à partir d'essais en laboratoire et de données acquises sur le terrain :

$$\tau = 2\eta\mathbf{D} \quad (1.1)$$

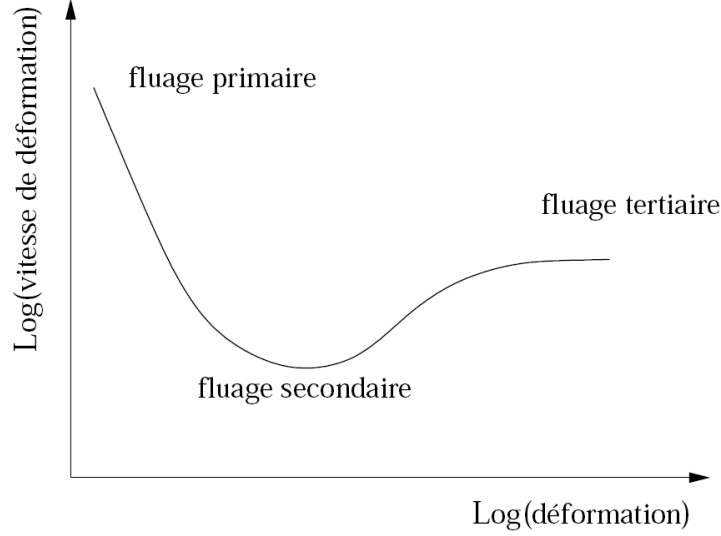


FIGURE 1.6 – Représentation schématique des différents modes de fluage (*Gillet-Chaulet, 2006*).

où  $\boldsymbol{\tau}$  représente le tenseur des contraintes déviatoires et  $\mathbf{D}$  le tenseur taux de déformation défini par  $D_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  avec  $\mathbf{u}$  le vecteur de vitesse. La viscosité effective  $\eta$  est donnée par :

$$\eta = \frac{1}{2} A^{-1/n} D_e^{(1-n)/n} \quad (1.2)$$

où  $A$  est la fluidité,  $n$  est l'exposant de Glen, et  $D_e^2 = 2D_{ij}D_{ij}$  est le second invariant de  $\mathbf{D}$ . La fluidité dépend de la température  $T_h$  selon la loi d'Arrhénius suivante :

$$A = A_0 e^{\left(\frac{-Q}{RT_h}\right)} \quad (1.3)$$

où  $A_0$  correspond à une fluidité de référence,  $Q$  à l'énergie d'activation (associée au processus de migration des dislocations) et  $R$  à la constante des gaz parfaits. D'après les expériences en laboratoire,  $n$  est proche de 3. Cependant, cette valeur est très incertaine dans les conditions réelles de la calotte polaire car elle varie selon la profondeur (la température et l'état de contraintes). Certaines études mettent en évidence des valeurs inférieures à 2 voire égales à 1 (*Weertman, 1972; Marschall et al., 2002*), mais également des valeurs égales à 4, voire 5 (*Gillet-Chaulet et al., 2011*). La valeur de l'énergie d'activation  $Q$  est également soumise à des incertitudes et dépend de l'amplitude de la contrainte appliquée. Des mesures de terrain ont conduit *Paterson (1991a)* à donner une valeur de  $Q$  de l'ordre de  $60 \text{ kJ mol}^{-1}$  pour des températures inférieures à  $-10^\circ\text{C}$ . Quant à la fluidité de référence, elle peut varier selon la taille des grains et le contenu en impuretés (*Paterson, 1991b*).

La phase tertiaire, ou phase stationnaire correspond à une réaugmentation de la vitesse de déformation, permise par des processus de rotation et de recristallisation des grains par migration

des joints (*Lliboutry and Duval, 1985*). De nouveau, la loi de Glen (1.1) permet de décrire ce comportement, cependant, le taux de déformation étant au moins 100 fois supérieur au taux minimum, dans cette phase, la fluidité  $A$  est 3 à 4 fois supérieure à celle de la phase secondaire.

Dans le cas des glaciers, les déformations cumulées causées par l'écoulement sont très souvent élevées, et le cisaillement vertical associé est très certainement associé à du fluage tertiaire. Pour la représentation de l'écoulement de glace dans les modèles, les glaciologues utilisent généralement la loi de Glen associée à ce fluage tertiaire avec un exposant  $n = 3$ . Cette loi qui représente l'expression macroscopique de l'ensemble des processus mécaniques agissant à plus petite échelle, constituera donc la base de la compréhension de l'écoulement du glacier émissaire. Il est important de noter que ces trois stades de fluage décrits précédemment sont observés non seulement sur des polycristaux isotropes mais également sur ceux anisotropes. En revanche, un échantillon de glace, avec une orientation préférentielle de ses axes optiques se déformera beaucoup plus facilement qu'un échantillon isotrope si il est soumis à un cisaillement perpendiculaire à cette direction préférentielle. La loi de Glen décrite précédemment n'est ainsi plus appropriée pour des polycristaux de glace anisotropes. C'est pour cette raison que certains auteurs introduiront le concept de facteur d'amplification ('enhancement factor'), multipliant artificiellement la fluidité  $A$  de la loi de Glen, pour rendre compte de la déformation préférentielle causée par l'anisotropie (*Lile, 1978*).

### 1.2.2 Le glissement basal

Le glissement à la base des glaciers, au même titre que la déformation viscoplastique de la glace, a fait et est encore l'objet de nombreuses études. Il permet de comprendre la relation entre la traction basale  $\tau_b$  et la vitesse  $u_b$  à l'interface du glacier avec le socle,  $\tau_b = f(u_b)$ . Cette relation est communément appelée aussi loi de frottement. Ce processus, contribuant de façon non négligeable à la dynamique glaciaire (plus de 90% des vitesses observées en surface dans certains cas), s'avère relativement complexe à étudier. Cette complexité est amplifiée par deux aspects agissant conjointement :

- la diversité des mécanismes susceptibles de se produire dans cette zone basale, en particulier due à la différence de propriétés entre les types de socle et aux fortes interactions entre la glace, le socle et l'eau en circulation.
- la difficulté d'accéder aux données.

En ce qui concerne le premier point, il s'agira de considérer de manière séparée le cas des substrats rigides, non déformables et celui des substrats déformables. Quant au deuxième point, en dépit de leur forte inaccessibilité, quelques observations, directes ou indirectes existent et ont cependant permis de corroborer certaines lois. S'agissant d'observations directes, on citera le cas du creusement d'un tunnel à la base d'un glacier permettant de mettre en place des dispositifs simples d'enregistrements du glissement tels que cela a été fait au Glacier d'Argentière (Massif du Mont Blanc) par exemple (*Vivian, 1980*). Les méthodes indirectes peuvent mettre en évidence, par mesure de l'inclinaison de trous de forages, la déformation de la glace, et donc déterminer

la contribution du glissement basal sur les mesures des vitesses de surface. Tout d'abord, le processus de glissement ne peut s'effectuer qu'en présence d'eau liquide ; dans le cas contraire, la glace reste collée par le gel au socle sous jacent. Ceci implique des conditions de températures et de pression telles que la fusion de la glace puisse se produire à la base du glacier (température de fusion à  $0^\circ\text{C}$  à la pression atmosphérique, et à  $-1.6^\circ\text{C}$  sous 2000 m de glace). Cette forte dépendance à la présence d'eau explique en partie l'importante variabilité spatiale et temporelle du processus. L'eau provient de la fusion à la base même du glacier (provoquée par des apports de chaleur par le flux géothermique, la friction et la déformation), ainsi que de l'éventuel apport d'eau de surface (fusion de la neige/glace des couches supérieures, précipitations).

La théorie moderne de la caractérisation du glissement basal sur un socle rigide a été initiée par les travaux de Weertman. En 1957, il propose la combinaison de deux mécanismes principaux pour le glissement de la glace sur un socle rigide rugueux : le processus de fusion-regel dominant sur les petites rugosités et le fluage agissant plutôt sur celles de plus grande longueur d'onde (Weertman, 1957). Cette analyse est reprise par Nye et Kamb (Nye, 1969, 1970; Kamb, 1970) avec un modèle de forme du socle plus en accord avec les caractéristiques mesurées. La formulation de cette théorie est représentée par l'équation non linéaire suivante :

$$\tau_b = \left( \frac{u_b}{A_s} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (1.4)$$

avec  $A_s$ , le coefficient de glissement et  $n$  le paramètre de Glen. Le développement de ces idées repose cependant sur des hypothèses fortes et pour certaines pas réalistes. Elles considèrent par exemple la présence d'un film d'eau continu entre le socle et la glace. De plus, le problème ainsi posé ne reproduit pas les valeurs fortes des vitesses mesurées, ni la fluctuation temporelle de ces dernières à l'échelle journalière.

Lliboutry (1968, 1975) introduit sa théorie de formation de cavités largement controversée à l'époque, mais qui, selon lui, est la seule permettant de reproduire les vitesses élevées en considérant une rugosité de socle réaliste. Ces cavités sont le lieu de remplissage d'eau séparant localement la glace du socle. Un réseau irrégulier de canaux relativement larges relierait ces cavités formées à l'aval des bosses du socle. La mise en place d'un tel réseau repose sur le rôle de la pression d'eau, pris en compte par la quantification de la pression effective  $N$  définie de la manière suivante :

$$N = -\sigma_{nn} - P_w \quad (1.5)$$

où  $\sigma_{nn} = -\rho gh$  représente la composante normale du tenseur des contraintes, avec  $h$  l'épaisseur de glace et  $g$ , l'accélération de la pesanteur.  $P_w$  est la pression de l'eau à la base du glacier. Ainsi, la prise en compte du phénomène de cavitation dans la loi de glissement implique une nouvelle formulation de cette dernière, laquelle dépend maintenant de  $N$  :

$$\tau_b = f(u_b, N) \quad (1.6)$$

Cette variable peut être mesurée directement sur le terrain en considérant le niveau de l'eau à l'intérieur des trous de forages et permet ainsi de vérifier la corrélation avec les vitesses de surface. Un exemple de ce type d'étude est présenté sur la figure 1.7. L'introduction de cette nouvelle variable hydrologique met en évidence l'importance du drainage sous glaciaire et permet de distinguer la formation de deux principaux systèmes hydrologiques : le système de drainage inefficace est en place lorsque peu d'eau circule à l'interface (grandes valeurs de  $N$ ) et devient un système efficace lorsque la pression d'eau devient conséquente et que la création de nouveaux chenaux est nécessaire pour accommoder cet excès d'eau. Ce principe de seuil implique que le rapport  $\frac{\tau_b}{N}$  soit borné. Ce principe est largement repris par des études récentes (*Schoof, 2005; Gagliardini et al., 2007*). La loi phénoménologique qui en découle reprend le concept de seuil précédemment énoncé tout en gardant la dépendance non linéaire. Elle devient :

$$\frac{\tau_b}{N} = C \left( \frac{\chi}{1 + \alpha_q \chi^m} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (1.7)$$

avec  $\chi$  donné par l'expression suivante :

$$\chi = \frac{u_b}{C^n N^n A_s}$$

où  $A_s$  et  $n$  sont respectivement le taux de glissement en l'absence de cavitation et l'exposant de la loi de frottement (équivalent à celui de la loi de Glen) et  $\alpha$  est défini comme

$$\alpha = \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}.$$

où  $m$  est l'exposant contrôlant la décroissance de la loi de frottement après qu'elle ait atteint son maximum. Le paramètre  $C$  correspond à la borne supérieure définie par *Iken (1981)*.

Ce qui précède se réfère au processus de glissement sur un socle rigide, et ne concerne pas les socles déformables. Cependant, de nombreux glaciers sont assujettis à ces derniers cas, où des couches de sédiments meubles recouvrent le socle plus dur. On citera le cas de grands fleuves de glace en Antarctique de l'Ouest, tel que le l'Ice Stream B ou l'Ice stream D pour lesquels des mesures de sismiques réflexions révèlent une couche épaisse de sédiments gorgée d'eau (*Blankenship et al., 1987; Kamb, 2001*). Selon les cas encore, la répartition du glissement total entre glissement de la glace sur le substrat et déformation au sein de ce substrat varie. La répartition spatiale de ces couches de sédiments pourrait en partie expliquer l'observation de "patches" locaux de fort ralentissement de la glace au sein de fleuves de glace relativement rapides. Nous ne rentrerons pas davantage dans les détails concernant le glissement sur les substrats déformables, initialement étudié par *Alley et al. (1986)*. De plus amples informations peuvent être trouvées dans une partie spécialement dédiée au glissement basal par *Cuffey and Paterson (2010)*.

Il est important de noter que la friction à la base des glaciers fait actuellement l'objet de nombreuses recherches et qu'il apparaît difficile de la représenter par une unique loi paramétrique

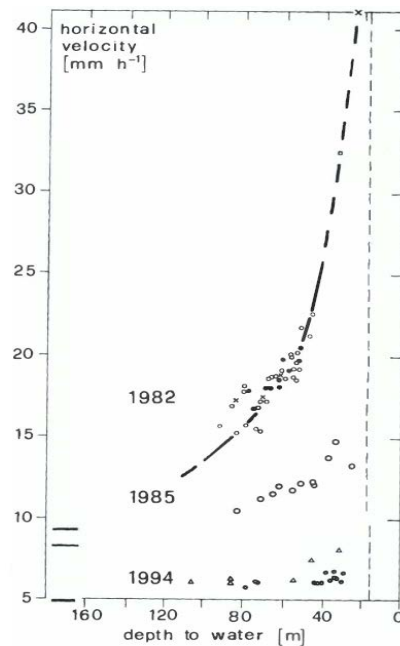


FIGURE 1.7 – Mesures des vitesses d’écoulement de surface en fonction de la pression d’eau effective (*Iken and Truffer, 1997*)

qui à elle seule ne peut reproduire la complexité des processus impliqués. Aucune n’apparaît forcément plus appropriée qu’une autre, et la détermination des paramètres est souvent faite de manière empirique sans contraintes précises. Certaines approches récentes ont ainsi opté pour une résolution prédictive des processus physiques (modèle hydrologique) (*DeFleurian, 2009*). Ils consistent en fait à calculer la pression effective, ensuite utilisée comme variable d’entrée pour le calcul des vitesses basales (équation (1.7)). Cependant, de nombreux paramètres restent encore mal contraints. Une approche de quantification *in-situ* de ces processus de glissement par méthode inverse permet de pallier cet obstacle (section 2.1.3). Au cours de notre étude, cette dernière approche inverse sera utilisée pour les cas de systèmes glaciaires réels (chapitre 4), tandis qu’une approche empirique permettra de représenter le glissement pour des études de cas synthétiques (chapitre 3).

L’établissement de grandes lois théoriques représentant les processus majeurs responsables de l’écoulement des systèmes glaciaires, à savoir le glissement basal et la déformation, ont permis une meilleure caractérisation de ces derniers. Notre étude, qui a pour but d’affiner la compréhension de l’écoulement des glaciers émissaires, repose donc sur la représentation couplée de ces deux processus. Les lois théoriques présentées dans ce qui précède sont donc reprises par la suite dans le cadre d’une étude mécanique globale. Avant d’exposer le formalisme de ce cadre mécanique (qui fera l’objet du chapitre 2), nous présentons dans la dernière section les différents mécanismes proposés dans la littérature mettant en évidence le rôle du glacier émissaire dans l’évolution du bilan de masse globale de la calotte Antarctique.

### 1.3 Le rôle du glacier émissaire dans le bilan de masse de l'Antarctique

Les observations de la cryosphère témoignent d'une diminution du volume de la calotte Antarctique (figure 1.2), dont la tendance s'est accrue au cours de la dernière décennie (*Velicogna, 2009*). Le bilan de masse global de la calotte, concernant le volume de glace sur la partie posée, dépend directement des processus de perte et de gain de masse de glace. L'apport principal de glace correspond aux processus de précipitations en surface de la calotte (contribution climatique), tandis que la perte de glace s'effectue majoritairement par flux de glace en périphérie, au niveau de la ligne d'échouage (contribution dynamique). Ces deux contributions sont illustrées sur la figure 1.8. Ce flux de glace calotte-océan contrôle ainsi en partie l'évolution du bilan de masse globale de la calotte. Cette contribution dynamique semble être responsable de l'accélération de la diminution du bilan de masse de l'Antarctique observée ces dernières décennies (*Pritchard et al., 2009; Flament and Rémy, 2012*). On parle de 'dynamic thinning', se référant à une observation de l'amincissement de la calotte résultant de processus dynamiques se caractérisant par un flux de glace accru vers la mer.

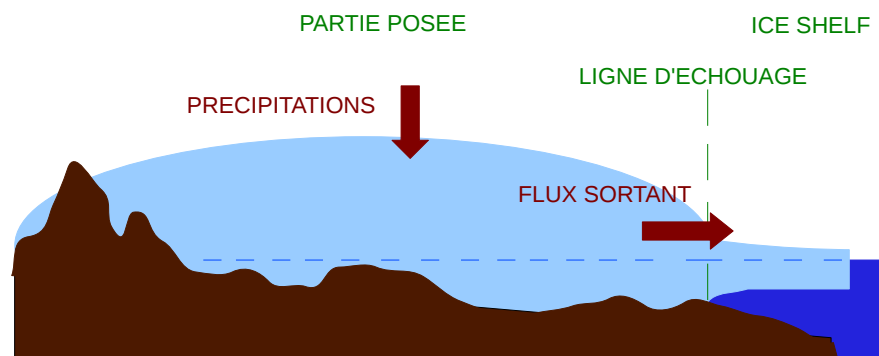


FIGURE 1.8 – Représentation schématique des composantes (vert) et contributions (rouge) au bilan de masse de la calotte antarctique.

Ce transfert de glace a lieu au niveau des glaciers émissaires. Ils représentent la composante 'exutoire' de la calotte Antarctique (10% du linéaire côtier) au niveau de laquelle l'essentiel de la masse de glace accumulée sur le continent (90%) est drainée et évacuée vers la mer (figure 1.1). Il apparaît donc essentiel de comprendre les différents mécanismes influant sur ce transfert de glace calotte-océan intervenant au niveau du glacier émissaire. Nous en résumons ici les principaux points.



### 1.3.1 Migration de la ligne d'échouage

Le glacier émissaire est constitué d'une partie posée et d'une partie flottante ou ice shelf (définition du glacier émissaire section 1.1.2). La partie flottante reposant sur l'océan est à l'équilibre hydrostatique et contribue donc directement au niveau marin. Pour évaluer l'évolution du bilan de masse du glacier émissaire, il nous faut comprendre les mécanismes à l'origine de la perte de masse de la partie posée qui s'exprimera au travers du flux de glace à la ligne d'échouage. L'extension dans les terres de la partie posée du glacier émissaire est définie par son bassin versant, tandis que celle côtière est représentée par la ligne d'échouage. Si l'ensemble des précipitations en surface du bassin versant équilibre le flux de glace à la ligne d'échouage, le système est en état stationnaire. L'épaisseur du glacier (et donc son extension spatiale dictée par l'épaisseur à la ligne d'échouage) n'évolue pas en fonction du temps. En revanche, si les deux termes ne s'équilibrent plus, le volume du glacier va évoluer résultant en une migration de la ligne d'échouage. L'enjeu est donc de comprendre les différents mécanismes à l'origine d'une augmentation du flux à la ligne d'échouage initiant son retrait.

### 1.3.2 Les mécanismes sur l'ice shelf

Les processus de perte de masse de la plate-forme flottante n'affectent pas directement le niveau marin puisqu'elle flotte et a déjà contribué à son élévation. Cependant, le couplage mécanique et massique avec la partie posée influençant l'écoulement à la ligne d'échouage, l'ice shelf impacte aussi de manière indirecte sur ce niveau marin. En particulier, la configuration géométrique de ce dernier, lorsqu'il est confiné dans un fjord ou que sa base frotte localement sur le socle ('pinning point'), exerce une force s'opposant à l'écoulement. C'est l'effet d'arc-boutant, impliquant un rôle stabilisant de l'ice shelf. Des variations de cette configuration modifient cette force, ayant un impact direct sur la décharge de glace posée (*DeAngelis and Skvarca, 2003; Rignot et al., 2004a,b*). La perte de glace par vêlage d'icebergs sur les bords, et la fusion à la base de l'ice shelf résultent tout deux en une diminution du volume de celui-ci (amincissement, diminution de l'extension) réduisant la surface de contact responsable de l'effet d'arc-boutant. Ces processus ont été mis en évidence sur la partie Ouest de l'Antarctique, et semblent être responsables en particulier de la désintégration de l'ice shelf Larsen B, et de l'amincissement des glaciers de la baie d'Amundsen (*Scambos et al., 2004b,a; Shepherd et al., 2003*). Une étude récente met en évidence des amincissements d'ice shelves particulièrement importants sur la péninsule Antarctique, de l'ordre de  $-7 \text{ m an}^{-1}$  (*Pritchard et al., 2012*).

Les processus responsables de cet amincissement sont le résultat d'une forte interaction avec l'océan et l'atmosphère, dont les réchauffements respectifs résulteraient en une augmentation du taux de fonte sur la surface inférieure et supérieure respectivement. Selon *Pritchard et al. (2012)*, l'amincissement observé sur les ice shelves de la péninsule serait principalement dû au processus de fusion à leur base. Les études récentes indiquent une forte corrélation entre l'amincissement des ice shelves entourant l'Antarctique et l'accélération des glaciers émissaires qui les alimentent. L'écoulement de la glace posée semble donc être très sensible à la circulation océanique sous les

plates formes flottantes.

### 1.3.3 Les mécanismes sur la partie posée

Comme évoqué dans la section 1.2, la glace s'écoule sur son socle par déformation viscoplastique et par glissement basal. Le réseau hydrologique sous glaciaire de l'Antarctique, composé en particulier de nombreux lacs sous glaciaires, mis en évidence par *Siegert et al.* (2005) (paragraphe 1.1.3), fut considéré jusqu'à récemment comme un système à l'état stationnaire, avec un temps de résidence de l'eau relativement long. Depuis quelques années, les observations de ce réseau sous-glaciaire antarctique remettent en question cette stationnarité. Ce réseau, complexe et changeant serait le lieu de transferts d'eau rapides, influençant l'écoulement de glace de manière non négligeable (*Gray et al.*, 2005; *Fricke et al.*, 2007; *Wingham et al.*, 2006a,b). L'écoulement observé le long des principaux fleuves de glace et en amont des bassins versants, apparaît en effet être contrôlé majoritairement par ce glissement basal (*Rignot et al.*, 2011a). Ce dernier est fortement dépendant de la nature du socle et également de sa rugosité. La topographie du socle a donc aussi une influence sur le processus de glissement. Elle reste cependant encore peu contrainte par les observations. Si le glissement basal domine l'écoulement des fleuves de glace, la zone en amont des bassins versants, sur les lignes de crête est le lieu de fortes déformations intrinsèques à la glace.

### 1.3.4 La zone de transition

Au niveau des zones de transition, caractérisant la partie posée proche de la ligne d'échouage, l'écoulement est un couplage entre un régime dominé par des contraintes longitudinales, caractéristique de l'ice shelf et un régime dominé par un cisaillement vertical, lorsque la glace repose sur le socle. C'est à cet endroit que se produit la transmission de contraintes entre ice shelf et partie posée.

La représentation des mécanismes responsables de l'écoulement dans cette zone de transition est le principal enjeu pour l'étude des variations du bilan de masse de l'Antarctique puisque c'est cet endroit qui contrôle l'extension de la calotte posée. Nous avons choisi d'investiguer deux principaux points pour améliorer notre connaissance du fonctionnement des glaciers émissaires et pouvoir prédire leur comportement face à certaines perturbations (telles que les scénarios climatiques). Le premier point consiste à s'intéresser aux processus physiques ayant lieu dans la zone de transition, à investiguer leur implémentation dans les modèles numériques et à établir leurs différences en terme de réponse. Une partie sera consacrée à un exercice d'intercomparaison de tels modèles. Cela fera l'objet du chapitre 3. Le second point est une application du modèle d'écoulement à un cas réel nous permettant de confronter observations et théories et d'affiner notre compréhension quant à la sensibilité de l'écoulement face à des perturbations topographiques par exemple.



## Chapitre 2

# Modélisation de la dynamique des glaciers émissaires

Ce chapitre présente la méthode utilisée pour étudier les mécanismes d'écoulement du système du glacier émissaire. Il est scindé en deux principales parties. Dans la première, la formulation mathématique du problème est exposée, avec une présentation succincte des différentes manières de simplifier et de résoudre le problème. Ensuite, une seconde partie traite de l'outil numérique nous permettant de résoudre l'intégralité du système mathématique présenté dans la première partie.

### 2.1 Construction mathématique et outils pour le problème d'écoulement

Nous explicitons tout d'abord les différentes équations composant le problème.

#### 2.1.1 Le problème continu

##### 2.1.1.1 Le domaine modélisé

Le but de l'étude est de caractériser l'écoulement tridimensionnel d'un glacier émissaire. Schématiquement, celui-ci est défini par son volume  $\Omega$  délimité par sa surface inférieure  $\Gamma_b$ , sa surface supérieure  $\Gamma_s$  et ses bords latéraux  $\Sigma_b$ , représentés sur la figure 2.1.

##### 2.1.1.2 La glace : un fluide non newtonien

Le comportement mécanique de la glace solide soumise à des contraintes extérieures ne peut pas être décrit par les conceptions classiques de l'élasticité ou de la mécanique des fluides newtoniens. La réponse de la glace à une sollicitation extérieure correspond à la fois à la déformation d'un solide et à l'écoulement d'un fluide, ce qui explique le terme de rhéologie utilisé pour sa description. En effet, la précédente partie explicite les mouvements de dislocations des atomes

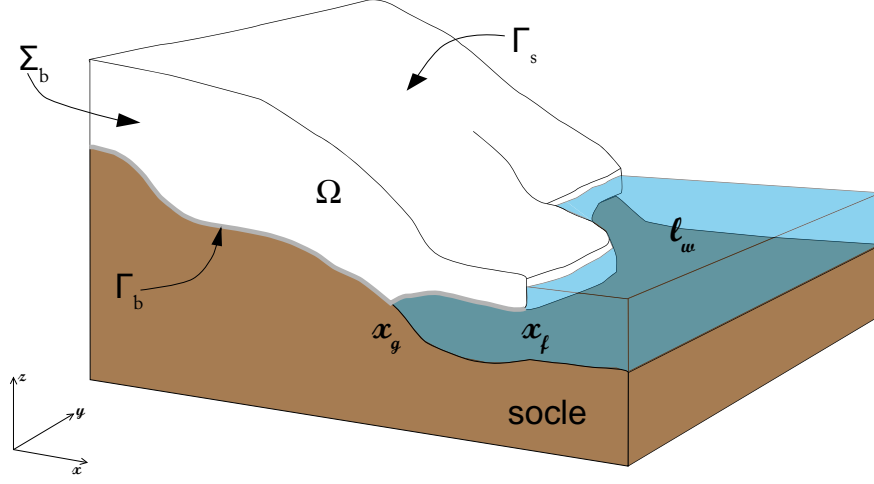


FIGURE 2.1 – Représentation du domaine modélisé  $\Omega$ , défini par la surface supérieure  $\Gamma_s$ , la surface inférieure  $\Gamma_b$  (ligne grise), les bords latéraux  $\Sigma_b$ , et le front de vêlage délimité par  $x_f$ .  $x_g$  correspond à la position de la ligne d'échouage et  $\ell_w$  au niveau de la mer.

dans l'espace cristallin organisé permettant d'accommoder la sollicitation. Lorsque celle-ci est très forte, le matériau devient même fragile et peut être soumis au mécanisme de rupture. Ces processus sont typiques des matériaux solides et ne peuvent s'exercer pour un fluide. On peut se questionner sur cette assertion lorsque l'on considère les nombreuses observations faites à une échelle spatiale et temporelle plus grande : la glace subit un écoulement fluide. D'après la loi de Glen (1.1), le champ de vitesse de cet écoulement est caractérisé par une relation non linéaire entre le taux de déformation et la contrainte appliquée, typique des écoulements non newtoniens. Dans le cadre de l'étude de la dynamique d'un glacier, on cherche à caractériser cette approche d'écoulement fluide de la glace, basé sur une loi rhéologique, et on ne considèrera pas l'aspect fragile de la glace. A l'échelle du glacier émissaire, les crevasses apparentes, bien que témoins de taux de déformation importants, n'exercent que peu (voire pas) d'influence sur la dynamique globale du système. Leur formation s'effectuent sur de courtes périodes de temps (inférieures à l'heure), tandis que les processus d'écoulement que l'on cherchera à caractériser dans cette étude concernent des durées supérieures au mois. Pour représenter le champ de vitesse de cet écoulement  $\mathbf{u}$ , on utilise les équations de la dynamique des fluides incompressibles ; on considère la conservation des moments et de la masse (équations de Navier-Stokes) appliquée à une portion continue du domaine qui s'expriment respectivement de la manière suivante :

$$\rho_i \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_i \mathbf{g} - 2\rho_i \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

où  $\rho_i$ , est la densité de la glace,  $\frac{d}{dt}$ , la dérivée lagrangienne,  $\mathbf{g}$  la gravité,  $2\rho_i \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}$  la force de Coriolis. Le tenseur des contraintes de Cauchy,  $\boldsymbol{\sigma}$  est défini comme suit :  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}$  avec

$p = -\frac{\text{tr}\boldsymbol{\sigma}}{3}$ , la pression isotrope et  $\boldsymbol{\tau}$ , le tenseur des contraintes déviatoires. La relation entre les contraintes déviatoires et la vitesse, nécessaire pour fermer le système d'équation, est donnée par la loi de Glen (1.1).

Après analyse dimensionnelle du système du glacier émissaire, la dérivée lagrangienne et la force de Coriolis de l'équation des moments sont négligeables par rapport aux termes de viscosité et à la force de gravité (écoulement très visqueux et très lent), l'équation 2.1 devient donc :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_i \mathbf{g} = 0 \quad (2.3)$$

On obtient ainsi un système d'équations aux dérivées partielles, non linéaires pour les vitesses. Ceci constitue le système de Stokes.

La résolution du système de Stokes (2.2,2.3) nécessite la prescription de conditions aux limites.

### 2.1.1.3 Les conditions aux limites

Pour la modélisation de l'écoulement tridimensionnel de la glace, nous avons besoin des conditions aux limites sur les bords du domaine.

On distingue trois types de conditions aux limites pour le système de Stokes : la condition de Dirichlet, la condition de Neumann et la condition de Robin.

- **Condition de Dirichlet** : on impose une condition sur la vitesse (ou l'une des composante de la vitesse).

Cette dernière peut s'appliquer à l'interface avec le socle ( $\Gamma_b$  en contact avec le socle), pour la composante normale à la surface, on parle de condition de non pénétrabilité :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à l'interface avec le socle. Lorsque que la glace est collée à ce dernier, on a :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{t}$  est le vecteur unitaire tangentiel à l'interface.

La condition de non pénétrabilité peut aussi s'appliquer sur les bords latéraux du bassin versant ( $\Sigma_b$ ), qui dans ce cas, représentent une frontière 'fictive' et pas une limite 'naturelle'.

On choisit d'imposer la condition de flux nul aux contours :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.6)$$

où  $\mathbf{n}$  représente le vecteur normal à la surface latérale.

Enfin, cette condition est utilisée pour la représentation de la fonte ou de l'accrétion de

glace sur les surfaces du glacier :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = a_{s/b} \quad (2.7)$$

où  $a_{s/b}$  se réfère au taux de fonte/accumulation sur la surface supérieure ( $a_s$ ) ou inférieure ( $a_b$ ).

- **Condition de Neumann** : la condition se fait sur la contrainte.

La surface en contact avec l'atmosphère  $\Gamma_s$  est une surface libre (on néglige la contribution de la pression atmosphérique), d'où la formulation suivante pour la contrainte normale :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.8)$$

Les surfaces en contact avec l'océan (surface inférieure de l'ice shelf, partie de  $\Gamma_b$  et front de vêlage  $x_f$ ) sont également soumises à des conditions pour la contrainte, où l'on impose cette fois la pression de l'eau :

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = p_w(t). \\ \mathbf{t} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{t}) = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{n}$  représentent les vecteurs normal et tangentiel à la surface de glace. La pression est définie de la manière suivante :  $p_w(z, t) = \begin{cases} \rho_w g (\ell_w(t) - z) & \text{si } z < \ell_w(t) \\ 0 & \text{si } z > \ell_w(t) \end{cases}$  où  $\rho_w$  est la densité de l'eau de mer et  $\ell_w$ , le niveau marin.

- **Condition de Robin** : on impose une condition sur la combinaison vitesse-contrainte.

La loi de glissement présentée dans la section 1.2.2 est un condition aux limites de Robin que l'on applique à l'interface avec le socle  $\Gamma_b$ . Au cours de ce travail, deux types de loi ont été appliquées :

une loi linéaire :

$$\tau_b = \mathbf{t} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})|_b = \beta u_b \quad (2.10)$$

une loi non linéaire

$$\tau_b = \mathbf{t} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})|_b = C |u_b|^{m-1} u_b \quad (2.11)$$

où  $\tau_b$  est la contrainte tangentielle basale,  $C$ ,  $m$  et  $\beta$  sont les paramètres de frottement et  $u_b$  désigne la vitesse basale.

#### 2.1.1.4 Evolution des surfaces libres

Les surfaces libres supérieure et inférieure en contact avec l'océan sont par définition mobiles et nous utilisons les équations de transport pour résoudre cette migration. Ces équations sont à la base de l'évolution dans le temps des variables dynamiques (équations pronostiques). L'équation

de transport représente la condition cinématique pour la surface considérée. Chaque surface possède sa propre équation de transport, qui se présente de la manière suivante :

$$\frac{\partial z_s(x,t)}{\partial t} + \mathbf{u}_H \cdot \nabla_H z_s(x,t) - u_z(x, z_s) = a_s(x,t) \quad \text{pour } \Gamma_S(t) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial z_b(x,t)}{\partial t} + \mathbf{u}_H \cdot \nabla_H z_b(x,t) - u_z(x, z_b) = a_b(x,t) \quad \text{pour } \Gamma_b(t) \quad (2.13)$$

où  $z_s$  et  $z_b$  représentent l'élévation de la surface supérieure et inférieure respectivement et  $a_s(t)$  et  $a_b(t)$  représentent le taux de perte/gain de masse sur les surfaces supérieure et inférieure respectives. L'indice  $H$  indique la composante horizontale des grandeurs vectorielles. L'apport ou la perte de masse de glace à la surface supérieure s'effectue par de nombreux processus atmosphériques (précipitations, dépôt, érosion suite au transport par le vent, fusion...). Sur une année entière, la somme en un endroit donné de cette surface du gain et de la perte en glace correspond au bilan de masse de surface, noté  $a_s(\mathbf{x}, t)$ . Concernant la surface inférieure en contact avec l'océan (surface inférieure de l'ice shelf), le gain de masse s'effectue par le processus d'accrétion de glace marine ayant lieu sur la partie à proximité du front de vêlage, tandis que la fusion est responsable de la perte de masse généralement plus proche de la ligne d'échouage.

### 2.1.1.5 Description du problème de contact

Nous venons de voir que les conditions aux limites s'appliquant sur la surface inférieure en contact avec le socle sont différentes de celles pour la surface en contact avec l'océan. La position de la ligne d'échouage qui constitue la limite entre ces deux surfaces doit être déterminée. Il existe plusieurs manières de résoudre la migration de la ligne d'échouage, elles seront exposées dans le prochain chapitre (chapitre 3). Nous explicitons ici la méthode se basant sur le problème de contact qui est implémentée dans le modèle que l'on utilisera par la suite. Cette méthode est utilisée pour la première fois par *Kikuchi and Oden* (1988) pour les problèmes de type Signorini, c'est à dire impliquant un contact unilatéral d'un objet élastique sur un socle rigide. Par contact unilatéral, on entend contact entre les deux milieux sans interpénétrabilité. Dans notre cas, la glace est uniquement autorisée à se déplacer le long de l'interface avec le socle, ou de s'en éloigner. En un point donné, la glace est en contact avec le socle si elle se trouve à la même altitude que le socle et si la contrainte normale à l'interface appliquée par la glace sur le socle est supérieure à la pression hydrostatique. Si, au contraire, l'altitude du point devient supérieure à l'élévation du socle (ou si elle touche le socle) et que la contrainte normale est inférieure à la pression de l'eau, le point se met à flotter (figure 2.2). Ces dernières conditions sont formulées de la façon suivante :

la condition aux limites de Dirichlet (2.4) s'applique si

$$z_b(x,t) \geq b(x) \quad \text{et} \quad -\sigma_{nn}|_{z_b} \leq p_w, \quad (2.14)$$



La condition de Neumann (2.9) s'applique si

$$z_b(x,t) = b(x) \quad \text{et} \quad -\sigma_{nn}|_{z_b} > p_w, \quad (2.15)$$

où  $b(x)$  représente l'altitude du socle,  $\sigma_{nn}|_{z_b}$ , la contrainte normale à l'interface à l'altitude  $z_b$ .

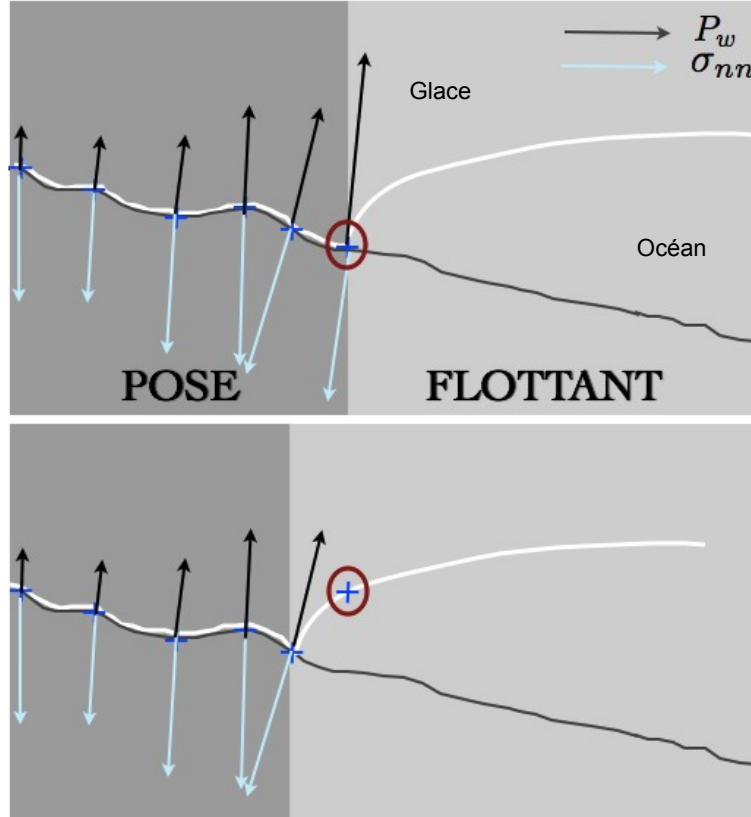


FIGURE 2.2 – Illustration du problème de contact : pour tous les noeuds posés (croix bleues), la différence entre la contrainte normale à la surface inférieure de glace  $\sigma_{nn}$  et la pression exercée par l'eau  $P_w$  est testée. Lorsque cette dernière est supérieure, la condition aux limites appliquée à ce noeud est une condition aux limites de Neumann (cercle rouge) (équation 2.9), le noeud devient flottant et la ligne d'échouage recule.

### 2.1.1.6 Résumé du problème à résoudre

Finalement, résoudre la dynamique de l'écoulement du système glaciaire tridimensionnel du glacier émissaire revient à déterminer les trois composantes de la vitesse  $u(\mathbf{x},t), v(\mathbf{x},t), w(\mathbf{x},t)$ , la pression  $p(\mathbf{x},t)$  et l'altitude des surfaces supérieure  $z_s(\mathbf{x},t)$  et inférieure  $z_b(\mathbf{x},t)$  à partir de la résolution du système suivant :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_i \mathbf{g} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega(t) \quad (2.16)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\mathbf{u})\mathbf{D} - p\mathbf{I}$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega(t) \quad (2.17)$$

Les conditions aux bords sont données par

$$\sigma_{nn} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_s(t) \quad (2.18)$$

$$\text{sur } \Gamma_b(t) \begin{cases} \tau_b = C |u_b|^{m-1} u_b & \text{si } z_b(x,t) \geq b(x) \quad \text{et } -\sigma_{nn}|_{z_b} \leq p_w \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = p_w(t) & \text{si } z_b(x,t) = b(x) \quad \text{et } -\sigma_{nn}|_{z_b} > p_w \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\text{si } x = x_f \begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = p_w(t) & \text{si } z < \ell_w(t) \\ \mathbf{t} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{t}) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.20)$$

Enfin, les équations de transport sont décrites par :

$$\frac{\partial z_s(x,t)}{\partial t} + \mathbf{u}_H \cdot \nabla_H z_s(x,t) - u_z(x, z_s) = a_s(x,t) \quad \text{sur } \Gamma_s(t) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial z_b(x,t)}{\partial t} + \mathbf{u}_H \cdot \nabla_H z_b(x,t) - u_z(x, z_b) = a_b(x,t) \quad \text{sur } \Gamma_b(t) \quad (2.22)$$

Une phase d'analyse mathématique est nécessaire pour le bon déroulement des étapes suivantes de résolution. Elle consiste à vérifier si le problème est bien posé, et à étudier les propriétés attendues de la solution. Un problème bien posé au sens de *Hadamard* (1923) est un problème pour lequel les trois conditions suivantes doivent être vérifiées : l'existence de la solution, l'unicité de la solution et la stabilité de la solution. Cette étape permet de mieux comprendre la structure du problème (le comportement des équations en jeu) et d'assurer la consistance du modèle lui-même, à partir du choix de la méthode numérique. La glace n'est pas un fluide newtonien, sa viscosité dépend elle-même du taux de déformation et donc du champ de vitesse, rendant l'équation de Stokes non linéaire. L'objet de cette thèse n'étant pas porté sur l'analyse mathématique, aucune démonstration ne sera faite ici. Cependant, nous nous sommes assurés du caractère bien posé de cette dernière formulation : le problème non linéaire de Stokes détient en effet une solution unique faible (solution de la formulation faible, formulation de l'équation pour les éléments finis). La viscosité étant fortement dépendante de la température, ce problème de Stokes est normalement un problème thermo-mécanique couplé et nécessiterait une équation conjointe d'évolution de la température pour une formulation complète. Nous n'utiliserons dans cette étude que des températures imposées, ne prenant en compte que la variabilité spatiale de la viscosité.

Il est important de noter que ce système d'équations peut être simplifié dans certains cas d'écoulements de systèmes glaciaires. Le régime d'écoulement et de déformation de la glace varie spatialement, et par endroits, un régime prédomine par rapport à un autre. On utilise alors des approximations au système précédent, qui, lorsqu'il est considéré tel quel dans son intégralité est

dénoté “full-Stokes”. La partie suivante propose une rapide description de ces approximations utilisées en glaciologie.

### 2.1.2 Les approximations à l’équation de Stokes

La résolution des équations de Stokes précédemment décrites, appliquées à de grands domaines comme l’ensemble de la calotte Antarctique nécessite d’importantes ressources de calculs. Plusieurs simplifications de ces équations sont progressivement apparues, dont la plus connue se dénomme l’approximation de la couche mince (Shallow Ice Approximation, SIA). Cette dernière, appliquée pour la première fois de manière rigoureuse sur la glace par *Hutter* (1983) et également utilisée dans d’autres branches de la mécanique des fluides (ondes de gravité de surface, films liquides fins). Elle se base sur le rapport des échelles spatiales représentatives où les échelles verticales sont très petites par rapport à celles horizontales. Cette considération permet de négliger certains termes de l’équation de Stokes. Cette simplification n’est cependant pas applicable à de nombreux cas d’écoulements glaciologiques, tels que les glaciers alpins, les grands fleuves de glace, ou encore les zones de transition typiques de la ligne d’échouage qui concernent le système des glaciers émissaires. Nous verrons dans cette partie que des alternatives existent, où seuls les termes nécessaires sont conservés pour permettre une meilleure prise en compte de la physique du système concerné.

Afin de clarifier les différentes simplifications possibles de l’équation de Stokes, nous reprenons ici l’équation (2.16), projeté sur le repère cartésien  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho_i g \end{cases} \quad (2.23)$$

#### 2.1.2.1 L’approximation hydrostatique

Cette approximation néglige les contraintes de cisaillement  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  par rapport à la contrainte verticale  $\sigma_{zz}$ , considérée proche de la pression hydrostatique  $p$ . L’équation (2.23) selon la composante  $\vec{z}$  devient donc :

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho_i g \quad (2.24)$$

Ceci conduit à égaliser le terme  $\sigma_{zz}$  à la pression hydrostatique. La pression  $p$  peut ainsi être exprimée en fonction des termes  $\sigma_{zz}$  et est éliminée de l’équation 2.16, ce qui simplifie considérablement le problème (on supprime une inconnue).

#### 2.1.2.2 L’approximation de la couche mince (SIA)-Ordre 0

La démonstration rigoureuse de cette approximation peut être trouvée dans *Hutter* (1983); *Morland* (1987); *Greve* (1997). Nous rappellerons ici juste le principe de l’élaboration de cette dernière et les principaux résultats. Pour justifier l’importance relative de certaines quantités

par rapport à d'autres, il faut tout d'abord procéder à une adimensionnalisation et à une normalisation des termes de l'équation de manière à obtenir des valeurs comprises entre 0 et 1. Le paramètre de normalisation choisi pour les calottes glaciaires est le rapport d'aspect  $\epsilon$ , défini de la manière suivante :

$$\epsilon = \frac{[H]}{[L]} \quad (2.25)$$

où  $[H]$  et  $[L]$  représentent respectivement l'épaisseur et l'étendue caractéristiques du système glaciaire. Ainsi, chaque terme de l'équation de Stokes peut s'exprimer sous la forme d'un développement en série de perturbation de ce rapport d'aspect. On obtient une équation fonction de  $\epsilon$  dont le degré de puissance détermine l'ordre de l'approximation faite. Nous nous contenterons d'exposer ici les résultats du calcul à l'ordre 0, correspondant aux cas où  $\epsilon < 10^{-3}$ . L'approximation à cet ordre revient à négliger tous les termes de l'équation (2.23) faisant intervenir les dérivées horizontales. Cela revient à faire les hypothèses suivantes :

- les contraintes de cisaillement dans le plan horizontal sont négligées :  $\sigma_{xy} \approx 0$ .
- les contraintes longitudinales sont aussi négligées :  $\sigma_{xx} \approx \sigma_{yy} \approx 0$  d'où  $\tau_{xx} \approx \tau_{yy} \approx p$
- l'approximation hydrostatique est considérée, d'où l'égalité suivante :  $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho_i g$ .
- La pente de la surface libre et du socle est faible, de l'ordre du rapport d'aspect  $\epsilon$ .

Le système 2.23 devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho_i g \end{cases} \quad (2.26)$$

Après intégration sur la verticale, la solution pour les vitesses est obtenue comme :

$$\begin{cases} u(z) = u_b - 2(\rho_i g)^n |\nabla h|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x} \int_b^z A(T)(h-z)^n dz \\ v(z) = v_b - 2(\rho_i g)^n |\nabla h|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial y} \int_b^z A(T)(h-z)^n dz \end{cases} \quad (2.27)$$

où  $u_b$  et  $v_b$  sont les vitesses horizontales à la base du glacier, et  $A$  la fluidité. Cette formulation des vitesses horizontales démontre une caractéristique importante des vitesses issues de l'approximation SIA : l'écoulement s'effectue selon la ligne de plus grande pente et dépend donc principalement de la pente de la surface locale. Pour déterminer la vitesse verticale  $w_b$ , on utilise l'intégration verticale de l'équation d'incompressibilité (2.2) :

$$w = w_b - \int_b^z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz \quad (2.28)$$

Dans le cas où  $A$  est uniforme, il existe une solution analytique à la formulation SIA de l'équation de Stokes.

En combinant l'équation de transport pour la surface supérieure (2.12) et l'équation d'incompressibilité (2.2), intégrée sur la verticale, on obtient une équation pronostique pour l'épaisseur

$h$  :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nabla_H \cdot Q_H + a_s + a_b \quad (2.29)$$

où  $Q_H$  correspond au flux horizontal de glace  $H \times (\bar{u}, \bar{v})$ .

La formulation SIA a ainsi l'avantage de réduire le problème de résolution 3D de l'équation de Stokes à 4 inconnues à un problème 2D consistant à résoudre l'équation de l'épaisseur de glace (2.29).

Selon les hypothèses énoncées, cette approximation est valide pour des systèmes dont le rapport d'aspect est très petit ( $\epsilon \ll 1$ ). Elle s'applique ainsi sur l'ensemble de la calotte excepté proche des dômes, de la côte et sur les zones à faible friction basale. Elle concerne en effet un régime d'écoulement dominé par du cisaillement vertical et ne reproduit plus la dynamique conduite par un glissement important à la base (fleuves de glace), des effets de bords (glaciers confinés dans des vallées étroites) ou encore un étirement longitudinal dominant (ice shelf).

### 2.1.2.3 L'approximation Shallow Shelf-Shelfy Stream (SSA)

Contrairement à l'écoulement de la glace posée, celui de l'ice shelf (relativement éloigné de la ligne d'échouage et du front de vêlage) n'est pas soumis à un cisaillement dans la verticale et la précédente approximation ne peut donc s'appliquer. L'ice shelf est caractérisé par des vitesses constantes selon la verticale et par un fort étirement. On parle de 'plug-flow', écoulement pour lequel les composantes  $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}$  du tenseur des contraintes déviatoires sont prédominantes. Elles sont appelées 'contraintes de membrane'. Les vitesses sont alors uniquement dépendantes des coordonnées horizontales  $x$  et  $y$ . Si *Weertman* (1957) fut le premier à s'intéresser au régime d'écoulement des ice shelves, la théorie rigoureuse équivalente à celle aboutissant à la SIA a été formulé par *Morland* (1987) et *MacAyeal* (1989). Le système final obtenu pour les vitesses horizontales est le suivant :

$$\begin{cases} 4 \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\eta} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) = \rho_i g h \frac{\partial h}{\partial x} \\ 4 \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) = \rho_i g h \frac{\partial z_s}{\partial y} \end{cases} \quad (2.30)$$

où  $\bar{\eta}$  est la viscosité intégrée dans la direction verticale,  $h$  l'épaisseur locale de l'ice shelf, et  $z_s$  l'élévation de la surface supérieure de l'ice shelf telle que  $z_s = z_b + h$ , où  $z_b$  est l'élévation de la surface inférieure.

Ce système est complété par des conditions au front de vêlage et à la ligne d'échouage. En général, la condition dynamique à la ligne d'échouage consiste à imposer le flux entrant de glace  $\mathbf{u}_{gl}$ , provenant de la partie posée. La position de la ligne d'échouage est soit imposée, soit déterminée en résolvant un problème de contact, qui dans le cas de l'approximation SSA utilise la vérification ou non de la condition de flottaison donnée par l'égalité  $z_b = \ell_w - \frac{\rho_i}{\rho_w} h$ . En ce qui concerne le front de vêlage, on impose d'une part la pression exercée par l'eau sur la colonne de glace, et si l'on autorise le déplacement de cette limite, il est nécessaire de résoudre une équation de transport pour la position du front, où le taux de vêlage sera pris en compte dans le terme

source. La vitesse verticale  $w$  est obtenue de nouveau en considérant la conservation de la masse intégrée sur la verticale.

La forme de ces équations met en évidence le caractère non local de l'approximation SSA par rapport à celle SIA : les variables d'écoulement en un point sont influencées par la géométrie et la dynamique de l'intégralité de l'ice shelf (et dépendent donc de celles caractérisant d'autres positions plus éloignées de l'ice shelf).

Les ice streams, grands fleuves de glace reposant sur du socle rocheux qui présentent de très grandes vitesses basales, peuvent être traités selon cette même formulation, en considérant un terme de frottement en plus par rapport à l'ice shelf. On parle de nouveau d'approximation SSA pour '*Shelfy Stream Approximation*'. Cette approximation ne s'applique que dans le cas où le glissement basal prédomine sur le cisaillement vertical. Cette approche est reprise dans de nombreuses études actuelles cherchant à regrouper ces systèmes d'ice shelves, de fleuves de glace et de ligne d'échouage sous un même modèle d'écoulement de calotte marine (*MacAyeal et al.*, 1996; *Hulbe and MacAyeal*, 1999; *Ritz et al.*, 2001; *Pollard and DeConto*, 2007). Le système 2.30 devient donc :

$$\begin{cases} 4 \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\eta} \frac{\partial u}{\partial x}) + 2 \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\eta} \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \tau_b^x = \rho_i g h \frac{\partial h}{\partial x} \\ 4 \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\eta} \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \tau_b^y = \rho_i g h \frac{\partial z_s}{\partial y} \end{cases} \quad (2.31)$$

où  $\tau_b^x$  et  $\tau_b^y$  représentent les composantes horizontales des contraintes basales. Ces valeurs diffèrent selon que la glace soit posée ou flottante. La condition à vérifier est la suivante :

$$\begin{cases} b(x,y) > \ell_w - \frac{\rho_i}{\rho_w} h & \text{pour la glace posée} \\ b(x,y) \leq \ell_w - \frac{\rho_i}{\rho_w} h & \text{pour la glace flottante} \end{cases} \quad (2.32)$$

avec  $b(x,y)$ , l'élévation du socle. Ainsi, le cisaillement basal devient :

$$\begin{cases} \tau_b = 0 & \text{si } b(x,y) < \ell_w - \frac{\rho_i}{\rho_w} h \\ \tau_b = C |\mathbf{u}_b|^{m-1} \mathbf{u}_b & \text{si } b(x,y) \geq \ell_w - \frac{\rho_i}{\rho_w} h \end{cases} \quad (2.33)$$

Cette approximation SSA rajoute de la complexité par rapport à la simplification SIA et sa résolution n'est pas triviale. On peut cependant simplifier la résolution en considérant de nouveau une intégration verticale des équations.

#### 2.1.2.4 Les ordres supérieurs

Les modèles ainsi appelés 'ordres supérieurs' permettent de traiter les cas des zones proches des dômes et des crêtes, les zones étroites des fleuves de glace, les zones de transition de la ligne d'échouage ainsi que les glaciers de montagne. L'ensemble de ces formulations intermédiaires entre SIA et full Stokes est décrit dans *Hindmarsh* (2004), où il procède à un classement selon la prise en compte des contraintes longitudinales.

### 2.1.3 La résolution inverse

#### 2.1.3.1 Définition

Jusqu'à maintenant, la problématique de l'étude de l'écoulement d'un glacier émissaire a été présentée par une formulation directe : le problème consiste à caractériser le champ de vitesse et de pression à partir de la résolution du système présenté dans la section 2.1.1.6, et de la connaissance des propriétés du système : mécaniques (paramètres de la loi de Glen), physiques (densité) ou géométriques (topographie du socle rocheux). Il s'agit de déterminer les effets, ici typiquement l'écoulement de glace, connaissant les causes, dans notre cas, la fluidité de la glace (viscosité), la forme de la vallée, la nature du substrat. Le problème direct est ainsi défini de la manière suivante :

$$\mathbf{d} = G(\mathbf{p}) \quad (2.34)$$

où  $\mathbf{d}$  représente le champ de vitesse et de pression,  $\mathbf{p}$  les paramètres du modèle et  $G$  l'opérateur désignant les équations du système direct à résoudre.

Cependant, il arrive souvent que certaines propriétés du modèle soient peu, voire pas connues, ou entachées d'incertitudes, rendant le calcul direct moins fiable, voire impossible. A titre d'exemple, on dispose de très peu de données nous renseignant sur les conditions à la base des glaciers (section 1.2.2). On considère donc les observations des effets  $\mathbf{d}^{obs}$ , permettant de remonter aux causes. On parle alors de problème inverse, que l'on formule ainsi :

$$\mathbf{p} = G^{-1}(\mathbf{d}^{obs}) \quad (2.35)$$

La résolution des problèmes inverses peut, suivant le contexte, se faire de manière numérique et/ou analytique. Cependant, contrairement aux problèmes directs, il est plus difficile de les résoudre, car ce sont souvent des problèmes mal posés où l'unicité et la stabilité de la solution ne sont pas respectées. En effet, il existe des cas où différentes causes produisent les mêmes effets. Il est donc nécessaire d'ajouter des contraintes, des *a priori* permettant de réduire l'espace des possibilités. Cette étape constitue l'étape de régularisation. En ce qui concerne l'écoulement des glaciers, la principale donnée inconnue du problème est le paramètre  $\beta$  (équation (2.10)) décrivant le processus de glissement s'opérant à la base des systèmes glaciaires. Ce dernier processus est pourtant l'un des principaux contributeur au déplacement observé de la glace. Il apparaît donc nécessaire de pouvoir le déduire par inversion. Les vitesses de surface et la topographie (surface et socle) sont alors les variables clés choisies comme bases pour l'inversion. C'est *MacAyeal* (1993) qui introduisit pour la première fois les méthodes inverses en glaciologie, appelées également 'méthodes de contrôle'. Deux méthodes d'inversion sont utilisées au LGGE pour déduire les conditions basales : la méthode de Robin développée par *Arthern and Gudmundsson* (2010) et la méthode de l'adjoint linéaire présentée par *Morlighem et al.* (2010). Par la suite, la méthode de Robin sera majoritairement utilisée. Nous en détaillons les principaux aspects dans le paragraphe suivant.

### 2.1.3.2 La méthode de Robin

Cette méthode appartient à la classe des méthodes dites *variationnelles*. Ces dernières, très utilisées en assimilation de données se basent sur la minimisation d'une fonction coût, qui mesure la différence entre les observations (ici les vitesses) et le modèle (les vitesses modélisées dépendant du paramètre que l'on cherche à optimiser). La méthode de Robin s'applique à tous modèles acceptant des conditions aux limites de Neumann, Dirichlet et Robin. Initialement appliquée aux problèmes de SIA et SSA, elle permet ensuite d'obtenir l'initialisation d'un problème full-Stokes. Cette méthode permet de déduire le paramètre de frottement  $\beta$ , coefficient de Robin intégré dans la loi de frottement (2.10), qui est une condition de Robin. Elle s'exprime sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \beta \mathbf{u} = O \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \quad (2.36)$$

On note que cette dernière ne reproduit pas la non linéarité de l'expression (2.11). Les développements analytiques n'ont été réalisés que pour une loi de frottement et une rhéologie linéaire. Des applications récentes (*Arthern and Gudmundsson, 2010; Jay-Allemand et al., 2011; Schafer et al., 2012; Gillet-Chaulet et al., 2012*) ont cependant montré que l'utilisation du gradient de la fonction coût dérivée analytiquement pour des lois linéaires permet aussi de minimiser la fonction coût pour des problèmes avec des lois non linéaires. Mais, dans ce cas-là, il n'existe pas a priori de garantie de trouver le minimum de la fonction coût puisque le gradient minimisé n'est qu'un gradient approché.

L'un des principaux avantages de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas de construction du modèle adjoint, mais repose sur la résolution successive des deux modèles directs suivants : le problème de Neumann, qui consiste en la résolution du système 2.1.1.6 avec la condition aux limites de surface libre, et le problème de Dirichlet, où cette fois-ci on impose des valeurs de vitesses sur la surface supérieure, de telle manière que  $u_{z_s} = u_{obs}$ , où  $u_{obs}$  représente les observations. La fonction coût que l'on cherche à minimiser a finalement la forme suivante (*Kohn and Vogelius, 1984*) :

$$J_0(\beta) = \int_{\Gamma_s} (\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^D) \cdot (\boldsymbol{\sigma}^N - \boldsymbol{\sigma}^D) \cdot \mathbf{n} \, \partial\Gamma_s \quad (2.37)$$

où  $N$  et  $D$  indiquent les solutions aux problèmes de Neumann et de Dirichlet respectivement. Le champ de  $\beta$  optimal,  $\beta_{opt}$  est obtenu pour le minimum de cette fonction coût. Il permet de reproduire au mieux les observations de vitesses de surface pour le problème de Dirichlet et la condition de surface libre pour le problème de Neumann. La dérivée de Gâteaux de  $J_0$  (équation 2.37) par rapport à  $\beta$  pour une petite perturbation  $\beta'$  est obtenue comme (*Arthern and Gudmundsson (2010)*) :

$$\partial_\beta J_0 = \int \beta' (|\mathbf{u}^D|^2 - |\mathbf{u}^N|^2) \quad (2.38)$$

où le symbole  $|\cdot|$  définit la norme du vecteur vitesse. Pour éviter que  $\beta$  ne prenne des valeurs négatives non physiques, nous utilisons le changement de variable  $\beta = 10^\alpha$  et l'optimisation est



réalisée par rapport à  $\alpha$ .

Il est commun d'utiliser le procédé de régularisation précédemment évoqué pour assurer le caractère bien posé du problème et permettre sa résolution. Dans le cas des méthodes variationnelles, le terme ajouté est un terme quadratique dont le minimum est bien défini. La fonction à minimiser devient la suivante :

$$J_{tot} = J_0 + \lambda J_{reg} \quad (2.39)$$

où  $\lambda$  est un paramètre de pondération à choisir permettant d'ajuster l'importance relative du terme de régularisation  $J_{reg}$  par rapport au terme de résidu  $J_0$  (fonction coût initial).

Nous choisissons une régularisation de type Tikhonov qui pénalise les oscillations de  $\beta$  :  $J_{reg}$  est déterminé de sorte à permettre un lissage de la solution (sorte de filtre passe-bas). Ce procédé permet de diminuer l'influence des erreurs d'observations, ou au moins d'assurer la stabilité du problème par rapport à ces erreurs. Finalement la fonction à minimiser est :

$$J_{tot} = J_0 + \frac{1}{2} \lambda \int_{\Gamma_b} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 d\Gamma \quad (2.40)$$

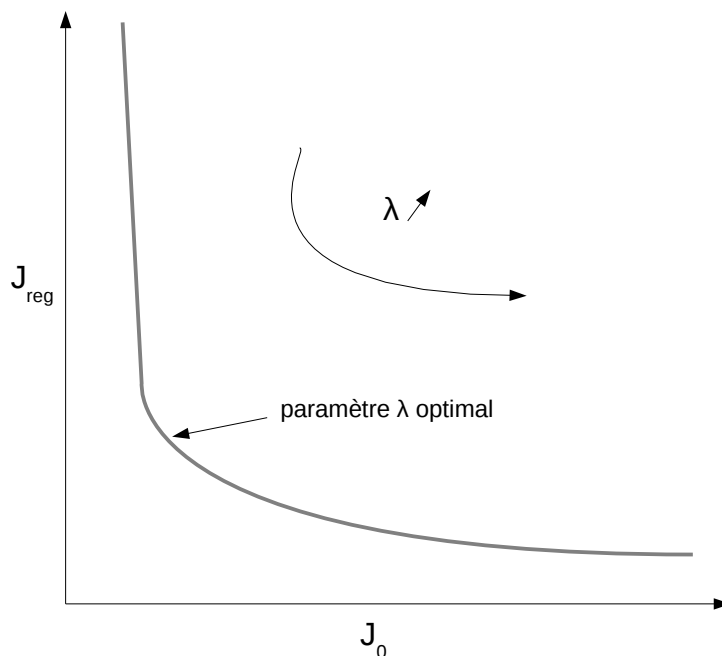


FIGURE 2.3 – Représentation schématique de l'évolution de  $J_{reg} = f(J_0)$  pour différentes valeurs de  $\lambda$ , caractérisant la 'courbe en L', typique de la régularisation de Tikhonov.

La minimisation de cette fonction coût  $J_{tot}$  dépend donc du paramètre  $\lambda$ . Cette dernière représente un compromis entre la réduction de l'écart aux observations et le lissage du champ de  $\beta$ . Ce compromis est une notion très importante et peut être illustré par la figure 2.3 représentant  $J_{reg} = f(J_0)$  obtenu par des inversions effectuées avec différents  $\lambda$ . Le paramètre  $\lambda$  optimal correspond au creux de la courbe L au niveau duquel  $J_{reg}$  et  $J_0$  sont minimisés. La minimisation

se fait par une méthode itérative de 'descente' (point fixe, gradient conjugué, méthode de quasi-Newton...)

Ces méthodes d'inversion sont très utiles en glaciologie pour l'étude des cas réels, où, en dépit du manque de données sur les conditions basales, on se doit de considérer les paramètres d'entrées du problème comme étant au plus proche de la réalité. Même si l'on commence à disposer de nombreuses lois théoriques de glissement nous permettant de l'incorporer de manière empirique dans le problème d'écoulement, l'inversion, comme assimilation de données nous offre l'opportunité de vérifier les observations au cours de la résolution du problème.

Sous sa forme full-Stokes, le problème d'écoulement du système glaciaire ne possède pas de solution analytique et sa résolution nécessite l'usage de l'outil numérique. Dans ce cas, la condition de convergence de la solution approchée vers la solution exacte est donnée par le théorème de Lax (*Lax and Richtmyer*, 1956) : "Dans un problème bien posé et avec un schéma numérique consistant, la stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence". On peut ainsi obtenir une solution à notre problème d'écoulement si certaines conditions sont bien vérifiées. Ces dernières questions de consistance et de stabilité sont expliquées dans la partie suivante, qui explore rapidement l'art du numérique appliqué aux enjeux glaciologiques.

## 2.2 Approche numérique pour l'étude de l'écoulement glaciaire

Cette deuxième partie se consacre à l'approche choisie pour investiguer la dynamique du glacier émissaire : la modélisation numérique du système global. Nous nous appliquerons ici à justifier le choix de l'approche de modélisation et à la décrire. Nous exposerons tout d'abord les motivations de ce choix de modélisation numérique. Ensuite, une introduction des méthodes numériques est présentée. Enfin, nous expliciterons les méthodes de résolution numérique des équations, décrirons certaines d'entre elles et discuterons de leurs intérêts respectifs pour la résolution du problème considéré.

### 2.2.1 Les motivations

La modélisation consiste à reproduire à partir de bases théoriques, et souvent de manière simplifiée, un ensemble de mécanismes représentant un problème. Ce problème est souvent connu par l'intermédiaire de données d'observations. Le moyen de parvenir à sa résolution (ou reproduction) peut être de deux types. Si la théorie est simple, basée sur des équations mathématiques dont les solutions sont connues, le modèle est analytique. Si le problème est plus compliqué, en particulier, si les équations qui le représentent ne possèdent pas de solutions analytiques évidentes, on s'en remet à la résolution numérique. Les solutions qu'on cherche sont alors obtenues de manière discrète, sur des noeuds de grille choisis au préalable. Dans les deux cas, le résultat sera comparé aux observations (qui justifient le développement du modèle), et leurs correspondances indiqueront la fiabilité non seulement des calculs, mais également de la base

théorique utilisée. Ce dernier point constitue une motivation forte de l'usage de la modélisation : le modèle, comme expérimentation et description est une approche aidant à la compréhension de mécanismes. Par le fort développement de l'instrumentation des pôles ces dernières années, on dispose maintenant de suffisamment d'observations pour nourrir des questionnements et des problèmes à élucider. Le système du glacier émissaire exerce un fort contrôle sur le bilan de masse global de la calotte Antarctique, de part son rôle de transfert de glace vers l'océan. La modélisation numérique à l'échelle du système du glacier pourrait nous permettre de comprendre davantage les mécanismes à l'origine de cette dynamique, leurs contributions respectives et de les quantifier. Lorsque le modèle est appliqué dans le passé, il se doit de décrire au mieux les phénomènes physiques s'appliquant à notre système de telle sorte qu'il vérifie les observations dont on dispose. Ces dernières permettent ainsi une validation de l'outil de modélisation.

La deuxième motivation pour l'usage de la modélisation numérique est la prédiction. Elle permet de représenter le comportement du système en réponse à des sollicitations extérieures susceptibles de se produire à l'avenir. Dans notre cas, prédire la dynamique du glacier émissaire face à un scénario climatique donné nous permettrait de déterminer le flux annuel de glace vers la mer, et après extrapolation, de quantifier ainsi la contribution de la dynamique de la calotte à l'élévation du niveau des mers. Cette méthode prédictive dépend fortement, d'une part des paramètres d'entrée (scénario climatique dans notre cas, reposant lui même sur un modèle climatique) qui ne peuvent être validés, et d'autre part sur l'hypothèse d'une reproductibilité des processus, qui, en dépit de leur validité dans le passé, ne sont pas forcément les mêmes dans le futur. Les prédictions sont donc souvent entachées d'incertitudes.

Plusieurs étapes caractérisent l'établissement du modèle numérique d'un problème, et chacune de ces étapes est déterminante pour sa résolution. Les deux principales sont la formulation mathématique du problème, qui a fait l'objet de la partie 1.3.1 et le choix du schéma numérique, qui sera développé dans ce qui suit.

### 2.2.2 Introduction aux méthodes numériques

Les méthodes numériques permettent la discrétisation des équations aux dérivées partielles représentant des problèmes mathématiques complexes. Elles conditionnent le système algébrique qu'il faudra ensuite résoudre pour obtenir la solution aux noeuds du maillage. Il existe de nombreux schémas de résolution numérique, appartenant aux trois catégories principales suivantes : les différences finies, les éléments finis, les volumes finis. Le choix de l'une de ces familles dépend de la complexité du problème à résoudre et du problème lui-même. Une méthode particulière pourra être davantage appropriée à un problème qu'une autre.

La discrétisation par différences finies repose sur une approximation des opérateurs de dérivée. Cette méthode, dont la mise en oeuvre est relativement simple est peu flexible et est généralement basée sur des maillages structurés, orthogonaux dont le pas en espace est constant selon une même direction. Son utilisation est ainsi restreinte aux cas de géométries simplifiées. La méthode des éléments finis consiste à décomposer le problème sur des domaines plus petits

(dont la réunion constitue l'intégralité du domaine), les éléments, sur lesquels on considère la formulation variationnelle de l'équation à résoudre. Elle permet l'utilisation de maillages non structurés adaptés aux géométries complexes. Les principes de conservation sont respectés globalement sur l'ensemble du domaine considéré, sans toutefois l'être localement à l'échelle de l'élément. Cette méthode est plus compliquée à mettre en oeuvre et nécessite davantage de ressources de calcul. Le schéma des volumes finis résout les problèmes de conservation sur chacun des volumes de contrôle constituant le domaine considéré. Ces équations de transport, écrites sous forme conservative, contiennent des opérateurs de flux à intégrer sur les faces des volumes, et permettent ainsi d'assurer la conservation de la quantité physique considérée. Cette méthode peut également gérer des maillages plus complexes sous certaines conditions.

La géométrie d'un glacier est relativement complexe et évolue au cours du temps. Afin de représenter au mieux sa forme, un pavage non structuré du glacier est plus approprié et réaliste qu'un maillage orthogonal. La majeure partie des études concernant la modélisation de l'écoulement 3D full-Stokes de la littérature se basent ainsi sur les méthodes des éléments finis et/ou des volumes finis, plutôt que sur les différences finies. (*Jouvet et al.*, 2008; *Jarosch*, 2007; *Deponti et al.*, 2006; *Martin et al.*, 2004; *Zwinger et al.*, 2007).

A un même problème, plusieurs équations sont associées. Ces équations n'ont pas nécessairement la même forme, les mêmes caractéristiques (elles appartiennent par exemple à différentes classes des équations aux dérivées partielles). Ainsi, *Jouvet et al.* (2008) utilise différents schémas numérique pour la résolution de l'équation de la surface libre et de l'équation de Stokes.

Quel que soit le schéma utilisé pour la construction numérique du problème, on procède par étapes successives :

1. Formulation mathématique du problème (décrite dans la partie précédente).
2. Formulation discrète des équations : correspond à la base de la construction de l'équation discrétisée et caractérise le type de méthode numérique.
3. Construction du maillage : division du domaine en sous domaines, appelées mailles.
4. Discrétisation : étape au cours de laquelle les équations sont écrites en fonction des inconnues sur les noeuds du maillage.
5. Résolution du système linéaire  $Ax = b$  :  $A$  est la matrice conditionnée par les opérateurs de l'équation et la méthode numérique elle-même,  $b$  est un vecteur dépendant des termes sources de l'équation et des conditions aux limites du problème et  $x$ , contient la solution approchée du problème au noeuds du maillage. A noter que cette partie se résout de manière itérative lorsque l'équation à résoudre est non linéaire.

Sur la base des travaux de modélisation entrepris sur des applications d'écoulements glaciologiques 3D (celles précédemment citées), nous allons exposer plusieurs points clés de l'élaboration d'un modèle numérique. Tout d'abord, on décrira les schémas numériques, en particulier le principe de la formulation des équations propres à chacune des méthodes des volumes finis et des

éléments finis sera explicitée (étape 2). Ensuite, on s'intéressera particulièrement aux techniques utilisées pour surmonter les difficultés associées aux étapes 3, 4, 5 de la résolution numérique.

### 2.2.3 Présentation de deux types de méthodes numériques

On expose ici le principe de chacune des méthodes, volumes finis et éléments finis lorsqu'elles sont appliquées à l'équation de Stokes. Les autres équations (surface libre, conservation de la masse) peuvent être traitées de la même manière.

#### 2.2.3.1 Les volumes finis

La méthode des volumes finis exploite l'approximation de l'intégrale de l'équation à résoudre sur le volume de contrôle. Les volumes de contrôle sont des volumes disjoints constituant l'ensemble du domaine d'étude  $\Omega$ . La méthode se base sur le théorème de Green Gauss, qui pour un volume de contrôle  $\Omega_i$  donne l'égalité suivante pour le champ vectoriel  $\mathbf{v}$  :

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \oint_{\partial\Omega_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.41)$$

Avec  $\Omega_i$  le volume,  $\partial\Omega$  le contour fermé de  $\Omega$ , et  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à la surface, dirigé vers l'extérieur.

Cette égalité reflète une équation de conservation : à une dispersion ou concentration de grandeur au sein d'un volume s'en suit la présence de flux aux interfaces de ce volume. En décomposant sur tous les bords en commun avec les volumes de contrôle voisins  $\Omega_j$  du volume  $\Omega_i$ , et en intégrant dans l'espace, le terme à droite de l'expression (2.41) devient :

$$\sum_j \int_{S^{ij}} \mathbf{v}^{ij} \cdot \mathbf{n}^{ij} \, dS = \sum_j l^{ij} v^{ij} n^{ij} \quad (2.42)$$

où  $l^{ij}$  représente la longueur de l'interface  $ij$ , et  $S_{ij}$  la surface de contact entre le volume  $\Omega_j$  et  $\Omega_i$  (figure 2.4).

La quantité  $l_{ij} v_{ij} n_{ij}$  est le flux numérique au travers de l'interface entre la maille  $i$  et la maille  $j$ . La méthode des volumes finis exploite la conservativité sous jacente des équations au niveau de l'interface  $ij$ , cad qu'elle suppose un flux numérique commun à  $i$  et à  $j$  au signe près :

$$l^{ij} v^{ij} n^{ij} = -l^{ji} v^{ji} n^{ji} \quad (2.43)$$

où le flux de  $i$  à  $j$  est l'opposé du flux de  $j$  à  $i$ . La discrétisation des équations sur les volumes de contrôle doit assurer par construction la conservativité des flux.

L'intégrale de l'équation de Stokes (2.3) sur le volume de contrôle  $\Omega_i$  conduit à l'équation suivante :

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\Omega = \int_{\Omega_i} (\nabla p - \rho_i \mathbf{g}) \, d\Omega \quad (2.44)$$

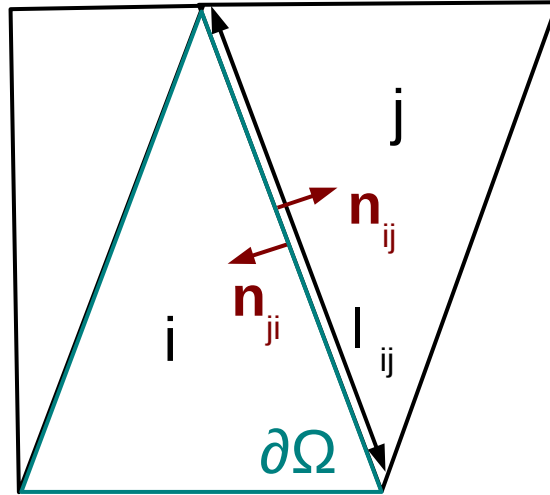


FIGURE 2.4 – Schéma du principe de la conservativité des flux.

D'où, en appliquant le théorème de Gauss au membre de gauche, on obtient :

$$\oint_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega_i} (\nabla p - \rho_i \mathbf{g}) \, d\Omega \quad (2.45)$$

Pour approximer le flux de  $\mathbf{D}$  (car  $\boldsymbol{\tau} = 2\eta\mathbf{D}$ ) sur chacune des interfaces, on pourra utiliser les différences finies par exemple. Ce dernier point justifie la confusion souvent faite entre les deux méthodes, leur appellation ne désignant pas exactement le même procédé.

### 2.2.3.2 Les éléments finis

La méthode consiste à chercher une solution approchée sous la forme d'un champ  $F(M,t)$  défini par morceaux sur des sous domaines de  $\Omega$ . Ce champ global  $F(M,t)$  correspond à la juxtaposition des champs locaux  $f(M,t)$ . Le champ local  $f(M,t)$  dans chacun de ceux ci est déterminé par des valeurs imposées en des points particuliers de ces sous domaines appelés noeuds et par les fonctions de base (ou fonctions d'interpolations entre les noeuds) qui sont propres à chacun de ces sous-domaines. Le sous domaine et sa fonction d'interpolation est appelé élément.

La méthode des éléments finis se base sur la formulation variationnelle de l'équation à résoudre. La notion de formulation variationnelle est donnée par l'égalité suivante d'analyse fonctionnelle :

$$\int \phi(x)h(x) \, dx = 0 \quad \forall \quad \phi(x) \Leftrightarrow h(x) = 0 \quad \forall \quad x \in \Omega. \quad (2.46)$$

où  $\phi(x)$  et  $h(x)$  et  $\Omega$  doivent satisfaire à certaines conditions de régularité non explicités ici. Ainsi, en remplaçant la fonction  $h(x)$  par le terme de gauche de l'équation (2.3), résoudre cette équation revient à résoudre l'équation suivante

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \nabla p) \phi \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \phi \, d\Omega \quad (2.47)$$

qui après transformation des intégrales et utilisation du théorème de Gauss donne :

$$- \int_{\Omega} (2\eta \mathbf{D} - p \mathbf{I}) \cdot \nabla \phi \, d\Omega + \oint_{\Gamma} (2\eta \mathbf{D} - p \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} \phi \, d\Gamma = \int_{\Omega} \rho g \phi \, d\Omega \quad (2.48)$$

Cette expression correspond à la formulation faible de l'équation de Stokes. Elle peut également être obtenue par construction physique d'une fonction de minimisation de l'énergie du système. Bien évidemment, dans notre cas, cette égalité n'est pas valable  $\forall \phi(x)$ , sinon, on pourrait obtenir une solution exacte. On ne cherche à satisfaire cette équation que pour certaines fonctions  $\phi_i(x)$  données, sous la condition qu'elles conduisent à un système algébrique à solution unique. Ces fonctions sont appelées fonctions tests ou fonctions de pondération. Elles sont choisies de manière à garantir la convergence de la solution approchée  $f(M,t)$  vers la solution exacte lorsque le maillage se raffine. Il existe différentes variantes de méthodes éléments finis dépendant du choix des fonctions d'interpolations  $f(M,t)$  et des fonctions tests  $\phi$ . La méthode de Galerkin est la plus utilisée. Elle correspond aux éléments finis pour lesquels les fonctions d'interpolations et les fonctions tests sont dans le même espace de fonctions. Le système linéaire obtenu est dans ce cas régulier pour les problèmes elliptiques (équations de Stokes).

A la fin de cette étape de formulation du problème (méthode des flux ou variationnelle), et après construction du maillage, on peut déduire la formulation discrète des équations sur l'ensemble du domaine concerné. On vérifie alors à ce moment la consistance du schéma numérique : lorsque  $\Delta x$ , le pas d'espace et  $\Delta t$ , le pas de temps tendent vers 0, l'équation sous sa forme discrétisée doit tendre vers la formulation continue initiale.

#### 2.2.4 Problématiques associées à la résolution numérique

La résolution du système algébrique construit après discrétisation des équations peut s'avérer complexe, voir impossible. C'est le cas lorsque la matrice  $A$  se trouve mal conditionnée, ou ne respecte pas la condition positive définie. La résolution numérique des équations aux dérivées partielles constitue un domaine de recherche en soit et s'applique à mettre en place des approches astucieuses pour trouver des solutions. Initialement, le sujet de ce travail de thèse consistait également à développer un code implémentant la méthode des volumes finis pour résoudre le problème d'écoulement des glaciers émissaires. Rapidement, les obstacles se sont présentés et ont finalement fait évoluer le sujet, passant du développement de l'outil à son application glaciologique directe par l'utilisation d'un outil numérique préexistant. Nous explicitons ici trois exemples caractérisant les propriétés de la solution numérique du problème d'écoulement gla-

ciaire. Ils illustrent trois obstacles majeurs ayant en partie empêchés mon avancée, impliquant ainsi une remise en place des objectifs de la thèse.

**Couplage Vitesse Pression** Les termes de pression apparaissent uniquement dans les équations de conservation de la quantité de mouvement et pas dans l'équation d'incompressibilité. De plus il n'existe pas de conditions aux limites pour la pression. Construit de manière directe (vitesse et pression en même temps), le système 2.1.1.6 est en général mal conditionné rendant sa résolution complexe, voire impossible. Il existe ainsi des alternatives permettant de remédier à ces matrices mal conditionnées. Les principales sont les suivantes :

- La méthode itérative de type prédiction correction : sans doute la plus connue, elle fut créée par *Patankar and Spalding* (1972). Elle consiste à partir d'un champ de pression initial qu'on injecte dans l'équation de Stokes, qui après résolution, nous donne un champ de vitesse prédit. Ce dernier champ, ne vérifie pas la condition d'incompressibilité qui est alors utilisée pour déterminer une correction de pression. Celle-ci est ajoutée au champ de pression initial, et les étapes précédentes sont réitérées jusqu'à obtenir une correction de pression nulle signe de l'établissement de la convergence. Cette méthode est utilisée dans l'étude de *Price et al.* (2007) où il construit un modèle 2D d'écoulement sur la base des volumes finis.
- La méthode de projection : elle a été introduite par Chorin en 1968 et s'utilise pour la résolution des équations de Navier Stokes (ou de Stokes) instationnaires. Elle permet de découpler les approximations de la vitesse et de la pression à chaque pas de temps. Il existe plusieurs variantes de cette méthode, dont la méthode à pas de temps séparés (fractional step method) utilisée par *Deponti et al.* (2006).
- La méthode du lagrangien augmenté associée à l'algorithme d'Uzawa pour sa résolution.

**Coercivité** Une fonction bilinéaire  $a(u,v)$  est dite coercive si et seulement si

$$a(u,u) \geq \alpha u^2 \quad (2.49)$$

La coercivité est nécessaire pour garantir la résolution d'un problème, quelque soit la méthode numérique utilisée. C'est la condition nécessaire pour que  $A$  (matrice du système algébrique à résoudre) soit positive définie. Néanmoins, selon certaines utilisations de schéma, elle peut faire défaut, et il faut alors trouver des astuces pour assurer sa présence. On prend ici l'exemple des volumes finis.

D'après la formulation (2.45), on cherche à exprimer  $\mathbf{D}$  sur les faces des volumes et  $\nabla p$  sur le volume. On considère un maillage colocalisé, c'est à dire, pour lequel les inconnues  $\mathbf{u}$  et  $p$  se trouvent sur les mêmes noeuds. Dans ce cas, on est confronté au problème du 'damier' (checker-



board en anglais) : pour le calcul de  $\nabla p$  au centre des volumes, on utilise les valeurs de  $p$  sur les centres des volumes voisins, et à chaque fois pour ce calcul, la pression ne sera prise en considération que sur un point sur deux (on ne considère pas la valeur de pression au centre du volume considéré). Un champ de pression très perturbé ne pourra pas être capté par cette formulation et surtout ne respectera pas forcément la condition de coercivité (figure 2.5). En effet le gradient de pression en un point est inférieur à la pression à ce même point :  $a(p,p) = \nabla p < p$ .

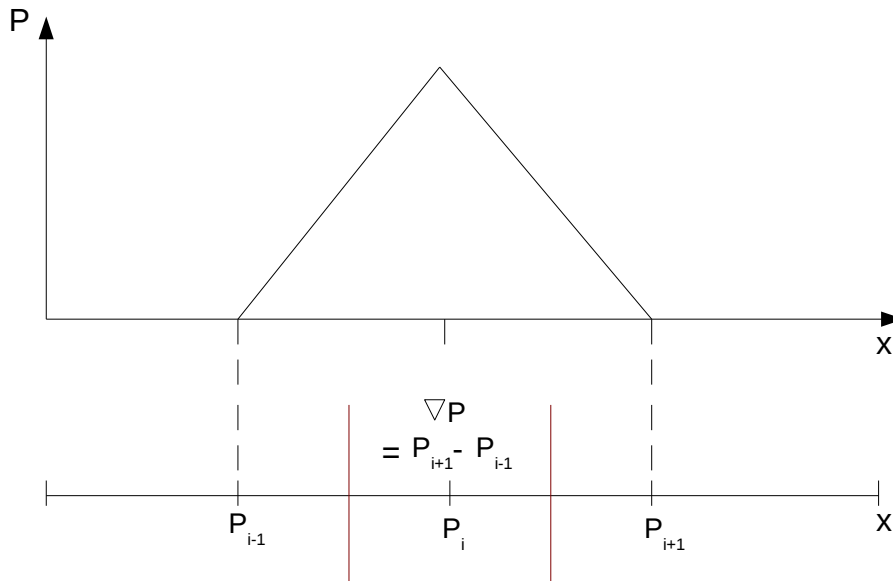


FIGURE 2.5 – Problème du damier : la valeur de  $\nabla P$  dans ce cas de maillage colocalisé apparaît nulle, ce qui ne satisfait pas la condition de coercivité.

Une alternative consiste à considérer un maillage décalé pour la vitesse et la pression ('staggered grid'), et a été mis en place par *Harlow and Welsh* (1965). Cette dernière méthode introduit cependant des complications d'implémentation surtout sur les frontières du domaine de calcul et sur les maillages non structurés. Si, plus récemment, d'autres méthodes permettant d'assurer la coercivité en considérant une seule grille de calcul ont été décrites (*Chow and Rhie*, 1983), cette condition reste cependant difficile à garantir pour la formulation en volumes finis, et implique plus de complexité quant à la manière de l'implémenter. On notera que le principe des éléments finis repose sur l'utilisation d'outils plus flexibles permettant de garantir cette condition plus facilement (modifications des fonctions de base par exemple).

**Stabilité** Il apparaît important de mentionner la stabilité qui se réfère à plusieurs notions, chacune ayant un fort impact sur la détermination de la solution. La stabilité peut se définir en regard d'un problème physique (existence de problèmes chaotique instables), d'un problème

mathématique (sensibilité) ainsi que vis à vis d'une méthode numérique. Nous nous intéresserons aux deux derniers points. Pour ce qui est de la stabilité d'une équation, elle se réfère à la propension de la solution à s'éloigner de sa valeur si des paramètres de cette dernière évoluaient légèrement, on parle donc de sensibilité. Dans le cas numérique, on considère plutôt comme stable, une méthode au cours de laquelle l'erreur numérique ne se propage pas au cours des différentes étapes. Ainsi, la stabilité est une condition nécessaire pour la détermination d'une solution numérique. Malheureusement, très peu de problèmes apparaissent réellement stables, et on est souvent contraint d'utiliser des outils pour forcer cette stabilisation quelque soit la méthode numérique utilisée. Par exemple, en considérant les éléments finis, il arrive en définitive qu'à partir de la formulation variationnelle du problème, on n'ait pas réussi à minimiser la fonction correspondante. C'est ce qu'on appelle le problème du point selle ('saddle point problem'). Pour pallier ce genre de difficultés, de nombreuses méthodes peuvent être utilisées, telles que la méthode des bulles, ou des carrés résiduels utilisé dans *Gagliardini et al. (2007)*.

### 2.2.5 Conclusions

Nous avons ainsi énoncé les principale étapes et principaux challenges à surmonter lorsqu'il s'agit de construire un algorithme de résolution d'un problème numérique. Tout d'abord, le problème continu doit être bien posé, les conditions aux limites déterminant fortement l'existence et l'unicité de la solution. Ensuite, les complexités du problème nécessitent d'être mises en évidence (particularités du domaine, non linéarités, faible couplage) pour identifier la méthode numérique à employer afin de produire un système stable et bien conditionné. De plus, chaque étape nécessite d'être vérifiée rigoureusement pour garantir la consistance du schéma. On remarque que la majorité des applications glaciologiques d'écoulement full Stokes 3D utilisent la méthode des éléments finis. Cette dernière possède en effet de nombreuses années d'expérience derrière elle (apparaît dans les années 50), et est bien adaptée à la problématique de la mécanique des milieux continus qui constitue une partie de notre problème. L'écoulement de Stokes d'un fluide non newtonien n'est pas un problème trivial et il constitue actuellement l'objet de recherche en analyse numérique pour la méthodes des volumes finis (*Eymard et al., 2006, 2007*). Si cette méthode dispose de principes intéressants à la résolution du problème d'écoulement de glace (garantit la conservativité des flux), les recherches à son sujet sont un peu trop nouvelles (et surtout impliqueraient une collaboration totale avec un numéricien) pour permettre une application directe à des problèmes glaciologiques. On utilisera donc au cours de cette thèse le modèle aux éléments finis décrit dans *Gagliardini et al. (2007)*, le modèle Elmer/Ice, développé au CSC en Finlande (Center of Scientific Computing).



## Chapitre 3

# Processus d'écoulement à la ligne d'échouage : application 2D

La ligne d'échouage délimite la partie posée de la calotte marine. Si l'on définit le bilan de masse global de la calotte pour la partie posée uniquement, le flux à la ligne d'échouage représente une contribution négative pour le bilan de masse global et a un impact direct sur le budget du niveau marin (section 1.3). Comprendre les processus régissant ce flux et également la migration de la ligne d'échouage est donc crucial pour mieux prédire l'évolution future de la contribution de la calotte Antarctique à l'élévation du niveau des mers. De nombreux modèles d'écoulement glaciologique ont été développés ces dernières décennies, et diffèrent fortement selon non seulement les approximations physiques des équations de Stokes (paragraphe 2.1.2), mais aussi selon l'implémentation des conditions aux limites, de la physique de la dynamique à la ligne d'échouage, et selon les méthodes numériques utilisées. Dans un premier temps, un état de l'art des travaux de modélisation de calotte bidimensionnelle est présenté. Les modèles et les applications seront décrits succinctement, ainsi que les conclusions importantes associées. Nous nous pencherons ensuite sur la comparaison de deux approches pour la représentation de la dynamique à la ligne d'échouage, celle 'full-Stokes' et celle de *Schoof* (2007) et évaluerons les différences d'état stationnaires. Enfin, un travail d'intercomparaison incluant d'autres modèles de calotte et se concentrant sur le comportement transitoire est décrit.

### 3.1 Etat de l'art

#### 3.1.1 Introduction

A la fin des années 70, *Weertman* (1974) et ensuite *Thomas and Bentley* (1978) proposent l'hypothèse d'instabilité de la calotte marine. Cette théorie concerne toutes calottes dont le socle rocheux se trouve sous le niveau de la mer (*Mercer*, 1978) et s'approfondit en allant vers l'intérieur des terres (socle rétrograde). Elle prévoit en cas de retrait initié de la ligne d'échouage, une irréversibilité du processus. Ce principe est illustré sur la figure 3.1 : selon les hypothèses

de Weertman, au niveau de la ligne d'échouage, le taux de déformation  $\epsilon_{xx}$  est proportionnel à la puissance 3 de l'épaisseur de glace  $H$ . Ainsi, si la ligne d'échouage se retire, dans le cas de la configuration (a) où le socle s'approfondit,  $H$  va augmenter, augmentant le flux à la ligne d'échouage, induisant de nouveau un retrait. L'Antarctique est la seule calotte marine subsistant sur terre, toutes autres anciennes calottes de ce type s'étant probablement désintégrées suite à la rétroaction positive du retrait de la ligne d'échouage menant à une réduction accrue du volume de glace posée. L'Antarctique de l'Ouest, dont la majorité du socle rocheux est située sous le niveau des mers, est donc particulièrement concerné par cette rétroaction.

*Mercer* (1978) imagine le devenir de l'Antarctique de l'Ouest en réponse aux émissions de  $CO_2$  d'origine anthropique et prévoit une déglaciation rapide de cette partie de la calotte aboutissant à une élévation moyenne du niveau des mers de 5 m. Ce constat alarmant, à fort impact économique et social fut l'initialisation d'une succession d'études sur l'évolution passée, actuelle et future de la calotte Antarctique. L'étude de carottes de glace et de sédiments apporte de nombreuses informations de l'évolution passée de l'extension et de l'environnement de la calotte, ayant connue des phases de récession et des phases de croissance (*Alley and Bindshadler*, 2001). La prédiction de l'état de la calotte dans le futur, et la quantification de sa contribution à l'élévation du niveau des mers dépend de la capacité du modèle à représenter le comportement dynamique du système glaciaire. Dans ce cadre là, l'approche de la modélisation de calotte apporte de nouveaux indices sur les processus principaux de l'écoulement de glace et leurs interactions. En particulier, la migration de la ligne d'échouage jouant un grand rôle dans l'évolution du bilan de masse global de la calotte, représente le challenge principal pour les glaciologues. Nous reprenons ici les principales étapes de l'implémentation de la migration de la ligne d'échouage dans les modèles de calotte.

### 3.1.2 Les premiers modèles de migration de la ligne d'échouage

Les premières études de modélisation de la migration de la ligne d'échouage sont celles de *Thomas and Bentley* (1978); *Lingle* (1984); *VanDerVeen* (1985). Elles intègrent pour la première fois le couplage entre écoulement sur la partie flottante et celui sur la partie posée (paragraphe 2.1.2.3). Les comportements des différentes représentations de calotte s'avèrent relativement différents, et ne reproduisent pas l'instabilité prédite par *Weertman* (1974).

Le projet d'intercomparaison de modèles, projet EISMINT (European Ice Sheet Modeling INiTiative) est ensuite mis en place pour analyser ces modèles de calotte 2D appelés aussi modèle de "ligne d'écoulement" (*Huybrechts*, 1990). Basé sur des expériences prédéfinies, ce travail a pour but d'identifier les contributions numériques et physiques jouant chacune un grand rôle dans la différence de comportement du modèle. Aucun consensus cependant n'est trouvé concernant leur réponse et l'implémentation optimale de la migration de la ligne d'échouage. Deux types de modèles coexistent à cette époque : le premier est caractérisé par un couplage mécanique entre la partie posée où le cisaillement vertical prédomine et la partie flottante, dominée par des contraintes longitudinales. Ce couplage est assuré par l'équation de conservation

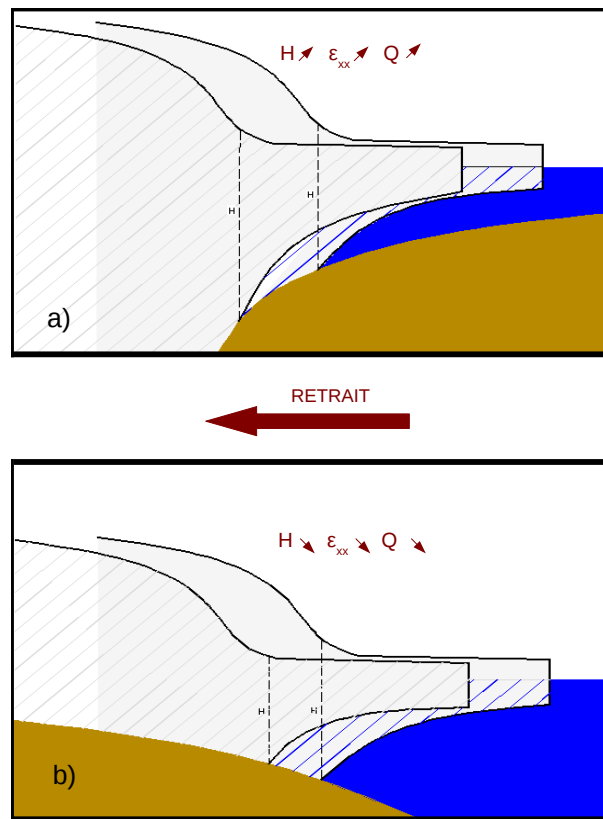


FIGURE 3.1 – Représentation du mécanisme d’instabilité de la calotte marine. Comparaison d’une configuration instable sur un socle rétrograde (a), par rapport à une configuration stable sur une socle descendant (b). L’état initial est représenté en couleur pleine, et l’état final après retrait est en hachuré.

(évolution temporelle de l’épaisseur) et la condition de flottaison (*Ritz et al.*, 2001; *Huybrechts*, 1990; *VanDerVeen*, 1985). En général, la grille associée à ces modèles est fixe. Selon l’étude de *Chugunov and Wilchinski* (1996), ce couplage a lieu dans la zone de transition, où les contraintes de la partie posée et de la partie flottante sont toutes les deux importantes. L’ordre de grandeur de l’extension de cette zone varie entre une à plusieurs épaisseurs de glace à la ligne d’échouage. L’autre type de modèle ne considère qu’une partie posée, et l’évolution de la ligne d’échouage est gouvernée par une équation pronostique. La particularité de ces derniers tient au fait que la grille bouge (“moving grid”) et que la position de la ligne d’échouage dépend uniquement de la géométrie locale, du flux et de l’accumulation à la ligne d’échouage (*Hindmarsh*, 1996a; *Hindmarsh and LeMeur*, 2001; *LeMeur and Hindmarsh*, 2001).

L’impact du schéma numérique et l’analyse de sa consistance est étudiée par *Vieli and Payne* (2005) au travers d’une nouvelle intercomparaison mettant en jeu ces deux types de modèles. La conclusion majeure est la grande dépendance des résultats à la résolution de la grille des modèles à grille fixe (premier type), mettant en doute la robustesse des modèles de prédiction (figure 3.2). Un raffinement de la grille semble nécessaire pour faire converger le modèle. Cette conclusion appelle à une plus grande considération de l’aspect numérique pour la résolution du problème,

sans quoi il apparaît difficile d'obtenir une évolution fiable de la ligne d'échouage en réponse à un quelconque forçage. L'étude de *Durand et al.* (2009a) qui utilise le modèle Elmer/Ice, full-Stokes et s'appuie sur le problème de contact pour délimiter la ligne d'échouage (*Gagliardini et al.*, 2007), se base sur l'utilisation d'un maillage raffiné spécialement autour de la ligne d'échouage, qui se déplace avec sa position  $x_g$ . On le nomme ainsi maillage évolutif. Le maillage ainsi construit permet de capturer la physique du processus tout en gardant des temps de calcul raisonnables. Il démontre qu'une résolution minimum de 100 m autour de la ligne d'échouage est requise pour obtenir des résultats consistants. Cette consistance implique des états stationnaires similaires en avancée ou en recul sur un socle de pente constante. Par ailleurs, si les modèles type *Hindmarsh* (1996a) ne semblent pas présenter de dépendance à la taille de grille et à la pente du socle, ils ne reproduisent pas l'instabilité prédite par Weertman sur les socles rétrogrades, mais plutôt un ensemble de positions d'équilibre stables bien définis. On parle alors d'équilibre neutre. Cette dernière approche, bien que disposant d'une meilleure stabilité numérique, ne prend pas en compte le couplage mécanique entre l'ice shelf et la partie posée. Or, la nécessité d'inclure la partie flottante dans les modèles de prédiction est progressivement motivé par les études qui suivent. A titre d'exemple, celle de *Payne et al.* (2004) sur la modélisation 2D du glacier de Pine Island situé en Antarctique de l'Ouest révéla une forte propagation des perturbations (effet arc-boutant) de l'ice shelf jusqu'à la ligne d'échouage et l'intérieur du bassin. De même que celles de *Dupont and Alley* (2005) et *Gagliardini et al.* (2010).

*Pattyn et al.* (2006) proposent un nouveau schéma permettant d'une part, de déterminer la position de la ligne d'échouage à une résolution inférieure à celle de la grille, et d'autre part d'introduire le rôle de la transmission des contraintes longitudinales dans la zone de transition. L'extension de la zone de transition est caractérisée par une augmentation du coefficient de friction  $C$  (intervenant dans l'équation (2.11)) en s'éloignant de la ligne d'échouage. Le modèle reproduit l'équilibre neutre en cas d'absence de zone de transition. En revanche, lorsque cette zone s'élargit, aucune position d'équilibre stable n'est trouvée pour la ligne d'échouage sur un socle rétrograde. Du moment que ces zones sont relativement petites, l'étude montre que l'ice shelf exerce peu d'influence sur l'intérieur de la calotte. La sensibilité de la calotte face à des sollicitations extérieures s'accroît avec une extension de la zone de transition, justifiant la prise en compte du cisaillement vertical et des contraintes longitudinales pour certains cas de fleuves de glace de la partie posée. En ce qui concerne le compromis trouvé pour déterminer la position de la ligne d'échouage entre deux points de grille, si il peut facilement être transposable dans un cas 3D (contrairement au schéma de grille mobile de *Hindmarsh* (1996a)), il n'en reste pas moins dépendant à la résolution du maillage.

### 3.1.3 La théorie de *Schoof* (2007)

L'étude de *Schoof* (2007) démontre le rôle de cette zone de transition sur la migration de la ligne d'échouage. Il propose une nouvelle approche pour la prise en compte de la dynamique s'établissant dans ces zones de transition. En se basant sur le développement asymptotique des

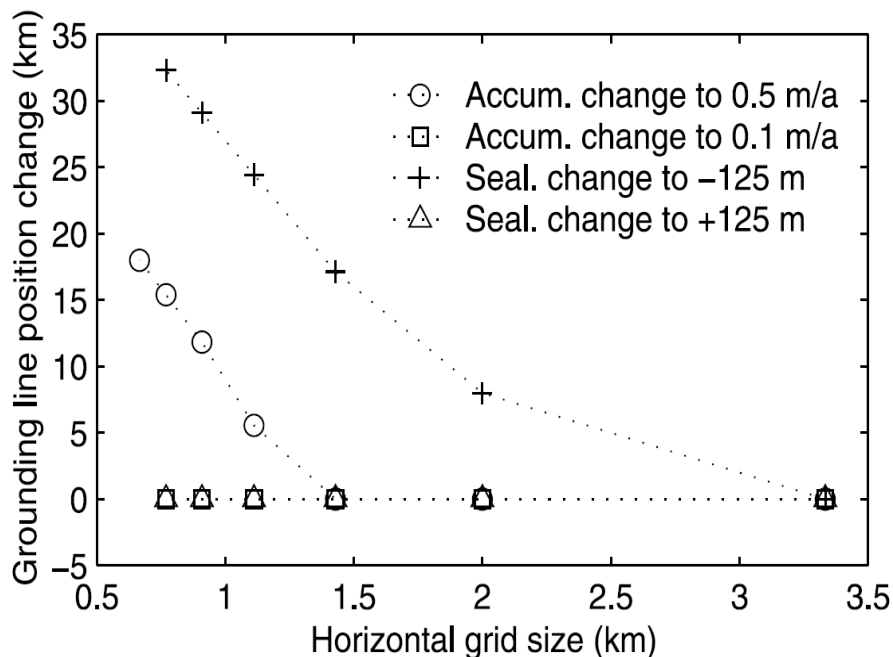


FIGURE 3.2 – Exemple de dépendance des résultats des modèles de calotte à la taille de grille : résultats du modèle de *Ritz et al.* (2001), où la variation totale de la position de la ligne d'échouage au cours d'une simulation de relaxation (après les perturbations indiquées par les symboles) est représentée en fonction de la taille de grille (*Vieli and Payne*, 2005).

équations SSA (paragraphe 2.1.2.3), il détermine de manière analytique une expression pour le flux à la ligne d'échouage dépendant de l'épaisseur à cet endroit. Cette expression a la forme suivante :

$$q_g = \left( \frac{A(\rho_i g)^{n+1} \left(1 - \frac{\rho_i}{\rho_w}\right)^n}{4^n C} \right) h_g^{\frac{m+n+3}{m+1}} \quad (3.1)$$

où  $q_g$  et  $h_g$  représentent respectivement le flux et l'épaisseur à la ligne d'échouage.  $A$  représente la fluidité de la glace,  $C$  le coefficient de friction,  $\rho_i$  et  $\rho_w$  la densité de la glace et de l'eau respectivement,  $n$  l'exposant de la loi de Glen et  $m$  l'exposant de la loi de glissement. Résoudre l'écoulement dans cette zone de transition revient à résoudre un problème de couche limite avec une frontière "libre", représentée par la ligne d'échouage. Pour que le problème soit bien posé, deux conditions aux limites doivent être appliquées : la première, prise en compte dans les modèles antérieurs correspond à la condition de flottabilité tandis que la deuxième est représentée par cette relation du flux dépendant de l'épaisseur. Cette dernière permet ainsi de paramétriser la transmission de contraintes dans cette zone de transition en terme de flux sortant à la ligne d'échouage plutôt que de résoudre le problème entier de Stokes sur l'intégralité de cette zone. Cette nouvelle condition aux limites ainsi construite autorise alors l'utilisation de grille à faible résolution capturant cependant les processus mécaniques autour de la ligne d'échouage. Dans une optique de simulation pronostique sur de grandes échelles temporelles et sur l'ensemble de



la calotte, cette approche devient intéressante car elle nécessite moins de ressources numériques qu'un raffinement autour de la ligne d'échouage. *Pollard and DeConto (2009)* tirent profit de cette formulation et en déduisent une règle, qualifiée d'heuristique pour déterminer la valeur de la vitesse au point de grille voisin de la ligne d'échouage.

L'étude de *Schoof (2007)* détient des conclusions déterminantes quant aux conditions de stabilité d'une calotte marine : il remet en question l'équilibre neutre mis en évidence par *Hindmarsh (1996a)* et démontre l'instabilité de la calotte sur des socles rétrogrades. De plus, il met en évidence le phénomène d'hystérésis sur des géométries de socle avec surcreusement local. Il construit en particulier un benchmark pour comparer avec les modèles existants et examiner leur disparité (figure 3.3).

### 3.1.4 Les intercomparaisons récentes et principales conclusions

*Pattyn et al. (2012)* reproduit un travail d'intercomparaison, où la validité des modèles est testé en référence à la solution de *Schoof (2007)*. Les modèles diffèrent selon 3 principaux points : la simplification des équations de Stokes (SIA, SSA, full-Stokes), l'implémentation des conditions aux limites et de la migration de la ligne d'échouage (flottaison, règle heuristique, solution d'une équation) et le schéma numérique utilisé (grille numérique). L'objet initial de cette intercomparaison est de mettre en évidence l'influence de chacune de ces trois contributions dans la différence de comportement des modèles. Les expériences sont reprises de l'étude de *Schoof (2007)* où on applique une perturbation progressive de la fluidité (augmentation puis diminution jusqu'à la fluidité initiale) avec états stationnaires intermédiaires, soit sur un socle à pente constante, soit sur un socle présentant un surcreusement (figure 3.3). En fin de simulation, la ligne d'échouage doit retrouver sa position de départ.

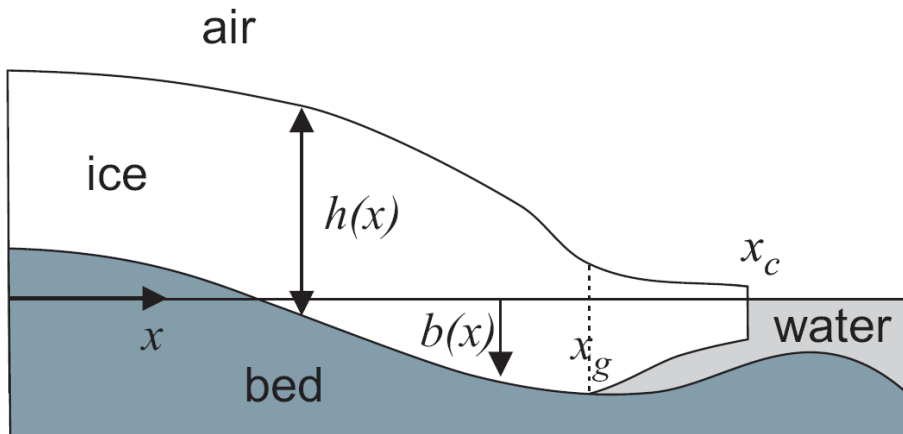


FIGURE 3.3 – Représentation schématique de la calotte marine des expériences de *Schoof (2007)*.

On se concentre tout d'abord sur l'impact de la grille numérique. En général, l'ensemble des modèles SSA reproduisent l'avancée et le retrait de la ligne d'échouage, sauf ceux dont la

résolution est trop grossière (de l'ordre de 10 km). Les modèles utilisant une grille fixe avec une plus fine résolution parviennent à reproduire la même réponse que *Schoof* (2007), mais en consommant plus de ressources informatiques que ne le font les modèles à grille évolutive, tels que celui de *Goldberg et al.* (2009). Ceux utilisant le règle heuristique (*Docquier et al.*, 2011; *Pollard and DeConto*, 2012) sont bien évidemment en accord avec *Schoof* (2007) puisque basée selon cette même théorie. Les modèles à grille mobiles, s'ils ne sont pas aussi proches de *Schoof* (2007) que les précédents ont cependant un comportement très similaire et sont les plus stables numériquement (aucune dépendance à la taille de grille puisque la position de la ligne d'échouage fait partie de la solution). Ils apparaissent donc résoudre le mieux la migration de la ligne d'échouage, mais restent difficile à exploiter pour des modèles 3D. L'ensemble des modèles testés dans *Pattyn et al.* (2012) reproduisent le phénomène d'hystérésis (hormis les modèles basés sur l'approximation SIA), aucun de ces derniers ne détient donc un état stable sur la zone rétrograde, confirmant la conclusion de *Schoof* (2007) sur l'instabilité.

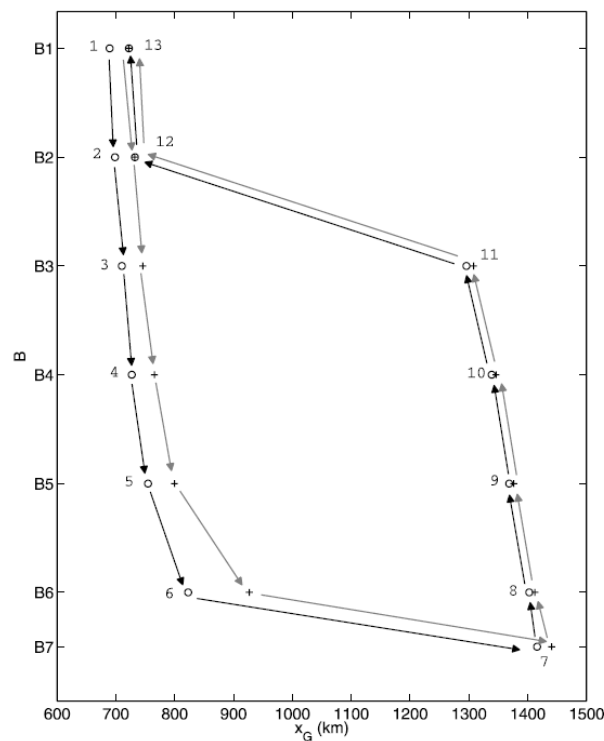


FIGURE 3.4 – Evolution de la position de la ligne d'échouage en fonction des variations de la fluidité pour les différentes étapes de l'expérience. Les cercles correspondent aux modèles Elmer/Ice tandis que les croix représentent les résultats de la théorie de la couche limite de *Schoof* (2007). Les numéros se réfèrent aux différents paliers de la valeur de fluidité ( $B = 2A$ ) (*Durand et al.*, 2009b).

Le seul modèle full-Stokes de l'étude possède le comportement le plus éloigné à la solution semi-analytique, la position stationnaire de la ligne d'échouage variant de près de 10 km. Cette différence de réponse, également mise en évidence par *Durand et al.* (2009b), peut s'expliquer

par la prise en compte des termes aux ordres supérieurs de l'approche full-Stokes. L'évolution de la position de la ligne d'échouage en fonction des valeurs de  $A$  est représentée sur la figure 3.4, où l'on remarque que pour certains états d'équilibre (en particulier ceux en avancée), la position de la ligne d'échouage diffère de celle prévue par *Schoof* (2007).

Il est important de noter que la théorie de la couche limite développée par *Schoof* (2007) se base sur deux fortes assertions : il suppose une contribution du glissement prédominante sur le cisaillement vertical (valable pour des petites valeurs du coefficient de friction  $C$ ), et admet la stationnarité. En ce qui concerne la première hypothèse, il n'existe en effet pas de solution unique au problème de *Schoof* (2007) si la calotte reste collée à son socle (*Nowicki and Wingham*, 2008). De plus, *Schoof* (2011) démontre que la théorie de la couche limite étendue au cas full-Stokes correspond à appliquer la même formulation pour le flux à la ligne d'échouage, mais sous des conditions de validité plus restrictives sur les paramètres d'écoulement, en particulier sur les paramètres  $A$  et  $C$ . On peut se questionner sur la validité de cette approche pour des cas où le cisaillement vertical domine le glissement. Par ailleurs, la théorie de la couche limite supposant un état stationnaire, elle ne semble pas appropriée pour des simulations considérant des courtes échelles de temps, telles que celles représentant la réponse de la calotte Antarctique face à une perturbation extérieure sur le siècle par exemple.

L'approche analytique de *Schoof* (2007) comporte donc certaines limites, même si elle est pour l'instant la seule approche en partie analytique qui ne contient pas les biais inhérents à l'utilisation de l'outil numérique. Il apparaît important de la garder comme simulation de référence, tout en continuant le travail initié par *Pattyn et al.* (2012). Dans ce qui suit, on se concentre particulièrement d'une part sur la sensibilité de la divergence des modèles full-Stokes/*Schoof* (2007) à l'importance relative du glissement par rapport au cisaillement vertical à la stationnarité, et d'autre part sur la différence du comportement de plusieurs modèles dans le cas particulier du régime transitoire.

## 3.2 Comparaison modèle full-Stokes - modèle couche limite en régime stationnaire

Il s'agit ici de mettre en évidence les paramètres qui contrôlent la différence des états stationnaires entre le modèle basé sur la théorie de *Schoof* (2007), que l'on nommera modèle BL (pour boundary layer, couche limite) et le modèle full-Stokes de *Durand et al.* (2009b) qui sera dénommé modèle FS (pour full-Stokes).

### 3.2.1 Introduction

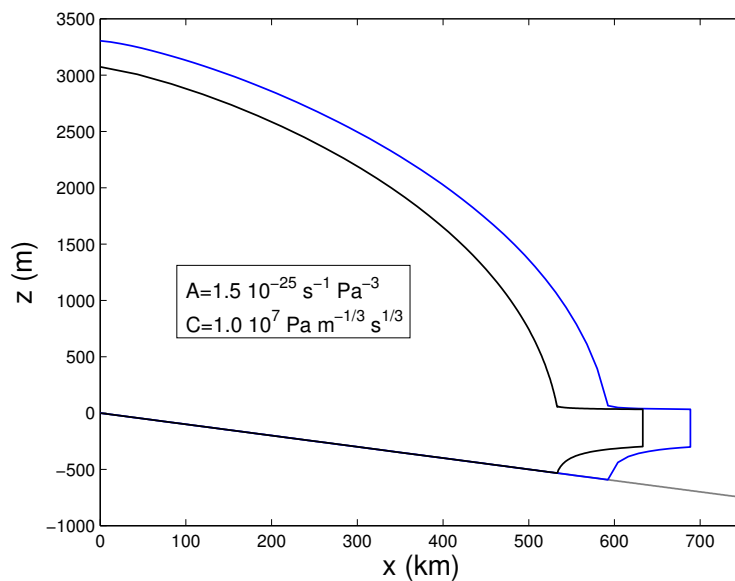
Les expériences se basent sur une configuration simplifiée de calotte avec un socle à pente uniforme, une accumulation uniforme et constante et un niveau marin stable. Les paramètres correspondants sont indiqués dans le tableau 3.1.

De la même manière que les études précédemment énoncées, pour une fluidité  $A$  et un

Parameter	Description	Value	Unit
$b$	Élévation du socle	$-x/1000$	m
$\rho_i$	Densité de la glace	900	$\text{kg m}^{-3}$
$\rho_w$	Densité de l'eau de mer	1000	$\text{kg m}^{-3}$
$g$	Accélération gravitationnelle	9.8	$\text{m s}^{-2}$
$n$	Exposant de la loi de Glen	3	
$m$	Exposant de la loi de glissement	1/3	
$\ell_w$	Niveau marin	0	m

TABLE 3.1 – Paramètres de la simulation

coefficient de friction  $C$  donné, le modèle FS semble être en retrait par rapport au modèle BL, d'environ 80 km. Cette différence est représentée sur la figure 3.5. Ceci implique un flux à la ligne d'échouage supérieur pour le modèle FS pour cet exemple donné.

FIGURE 3.5 – Etat stationnaire pour le modèle FS (noire) et le modèle BL (bleue) pour  $A$  et  $C$  donnés.

### 3.2.2 Description des tests de sensibilité

Le principe de l'expérience est de construire plusieurs états stationnaires à partir du modèle FS et de comparer les flux à la ligne d'échouage caractérisant chacun de ces états avec les flux que l'on obtiendrait avec la formulation (3.1) (modèle BL). Chacun de ces états stationnaires est obtenu en faisant varier différents paramètres du modèle. Tout d'abord, à  $A$  fixé ( $A = 1.5 \cdot 10^{-25} \text{ Pa}^{-3} \text{ s}^{-1}$ ), on effectue plusieurs simulations de relaxation, chacune caractérisée par un paramètre  $C$  différent (les valeurs sont indiquées dans le tableau 3.2). Ce dernier contrôlant la loi de frottement, on s'attend à une forte dépendance de la divergence des modèles à ce

paramètre : plus la friction basale est importante (augmentation de  $C$ ), plus on s'éloigne de l'hypothèse de *Schoof* (2007). Ensuite, on étudie la dépendance à la fluidité  $A$  pour chacune des valeurs de  $C$  utilisée. En effet, ce paramètre apparaît dans la loi rhéologique de Glen (Eq.(1.1)) exprimant la réponse en déformation face à une contrainte appliquée : une augmentation de  $A$  implique une déformation plus importante pour une même contrainte appliquée. On reproduit les expériences précédentes (relaxation avec différentes valeurs de  $C$ ), avec deux autres valeurs de la fluidité  $A$  :  $A_{sup}=3.0 \cdot 10^{-25} \text{ Pa}^{-3} \text{ s}^{-1}$  et  $A_{inf}=1.5 \cdot 10^{-26} \text{ Pa}^{-3} \text{ s}^{-1}$ .

$C \text{ (Pa}^{-1/3} \text{ s}^{1/3})$	$A \text{ (Pa}^{-3} \text{ s}^{-1})$
$1.0 \times 10^6$	$1.5 \times 10^{-26}$
$5.0 \times 10^6$	$1.5 \times 10^{-25}$
$7.5 \times 10^6$	$3.0 \times 10^{-25}$
$1.0 \times 10^7$	
$1.2 \times 10^7$	

TABLE 3.2 – Paramètres des expériences de sensibilité et valeurs associées

Les valeurs des paramètres utilisées pour ces expériences sont résumées dans le tableau 3.2.

### 3.2.3 Sensibilité à la contribution relative du glissement

Afin de quantifier l'importance du glissement basal par rapport à la déformation dans la colonne de glace, on introduit une nouvelle quantité : la moyenne spatiale du rapport de la vitesse basale  $u_b$  sur la vitesse de surface  $u_s$  :  $\langle \frac{u_b}{u_s} \rangle$ . Cette valeur représente la contribution relative du glissement au déplacement total de glace (représenté par la vitesse de surface). Ce rapport est défini comme suit :

$$\langle \frac{u_b}{u_s} \rangle = \frac{1}{x_g} \int_0^{x_g} \frac{u_b(x)}{u_s(x)} dx \quad (3.2)$$

où  $x_g$  représente la position de la ligne d'échouage.

Sur la figure 3.6, on représente cette quantité à l'état stationnaire en fonction du paramètre  $C$ , pour les trois valeurs de fluidité  $A$  (voir les croix de différentes couleurs). On remarque que pour l'ensemble des expériences choisies, la contribution du glissement se situe entre 50% et 100%. Globalement, la contribution du glissement au déplacement total dépend étroitement des paramètres  $A$  et  $C$ , avec une sensibilité comparable à ces deux paramètres.

Pour étudier la sensibilité de la différence de réponse modèle FS /modèle BL à la contribution relative du glissement par rapport à la déformation, on représente maintenant le rapport des flux de chacun des modèles,  $\frac{Q_{FS}}{Q_{BL}}$  en fonction du rapport des vitesses pour chacun des états stationnaires obtenu. Lorsque le glissement domine l'écoulement ( $\langle \frac{u_b}{u_s} \rangle > 0.9$ ), la réponse des deux modèles en terme de flux est similaire (d'ailleurs, la position de la ligne d'échouage de chacun de ces modèles est très proche pour cette configuration). Rapidement, la différence relative entre les flux atteint 20%, puis augmente progressivement jusqu'à 80%.

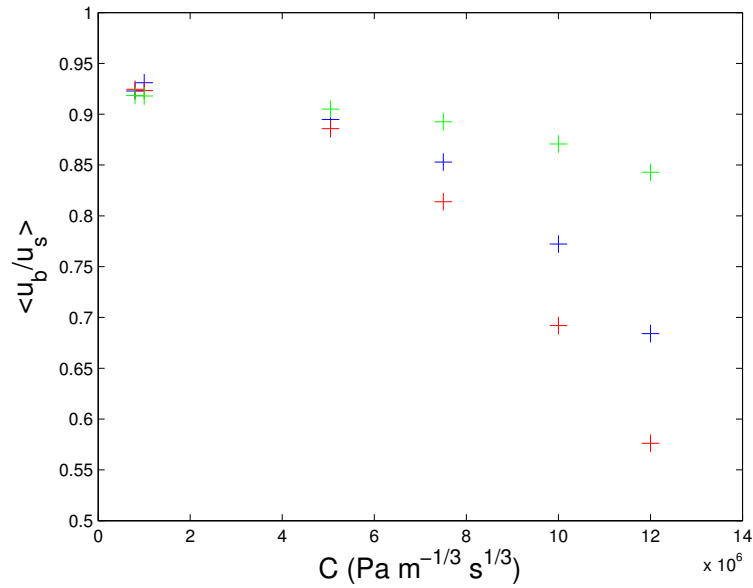


FIGURE 3.6 – Représentation de  $\langle \frac{u_b}{u_s} \rangle$  en fonction de  $C$  pour les expériences effectuées avec trois valeurs de  $A$  (bleue pour  $A=1.5 \cdot 10^{-25}$ , rouge pour  $A=3.0 \cdot 10^{-25}$  et vert pour  $A=1.5 \cdot 10^{-26}$ ).

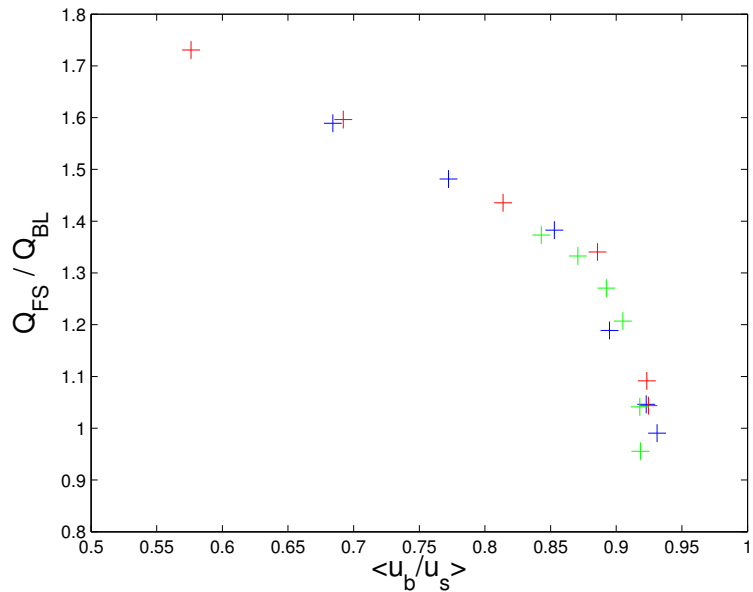


FIGURE 3.7 – Représentation de  $\frac{Q_{FS}}{Q_{BL}}$  en fonction de  $\langle \frac{u_b}{u_s} \rangle$  pour l'ensemble des expériences.

La différence de comportement entre les deux modèles apparaît par conséquent fortement liée à la contribution du glissement basal à l'écoulement total de glace. La solution de la couche limite semble être en accord avec la solution full-Stokes sous la condition que le glissement participe au moins à 90% de l'écoulement total de glace.

### 3.3 Intercomparaison de modèles pour le régime transitoire

On s'intéresse dans cette partie au comportement transitoire de différents modèles d'écoulement de calotte, et analysons la différence de réponse sur la durée du siècle en terme de contribution à l'élévation du niveau des mers. Ce travail d'intercomparaison a fait l'objet d'une soumission à The Cryosphere. Nous vous présentons par la suite le contenu de cette soumission. Certains passages sont mis *en italique*, ils correspondent à des redites par rapport à ce qui a été précédemment présenté. Ils permettent de garder la cohérence du texte.

Submitted to The Cryosphere

#### **Grounding line transient response in marine ice sheet models**

**Anne-Sophie Drouet • David Docquier • Gaël Durand • Richard Hindmarsh • Frank Pattyn • Olivier Gagliardini • Thomas Zwinger**

UJF-Grenoble1/CNRS, Laboratoire de Glaciologie et de Géophysique de l'Environnement UMR 5183, 54 rue Molière, BP 96, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France.

#### 3.3.1 Introduction

*A range of observational methodologies have shown that significant loss of Antarctic ice mass has occurred over the past decade (Wingham et al., 2006a; Rignot et al., 2008; Velicogna, 2009; Rignot et al., 2011a; Pritchard et al., 2012). Increased basal melt of ice shelves appears to be the primary control on Antarctic ice sheet loss. Its resultant thinning induces a reduction of the buttressing force, i.e. the mechanical effect of the ice shelf on the state of stress of grounded ice, which leads to an acceleration of outlet glaciers (Rignot et al., 2008; Pritchard et al., 2012). The dynamical response of the grounding line (GL), where ice loses contact with bed and, downstream, begins to float over the ocean, is an essential control on the mass balance of a marine ice sheet. In particular, a rigorous mathematical description of the long-standing hypothesis of marine ice sheet instability (Weertman, 1974) has been recently given by Schoof (2007), for a flowline type ice sheet without buttressing.*

*While observations are crucial in diagnosing the state of balance of an ice sheet, extrapolation of current trends is a limited technique in predicting ice-sheet future behaviour. Ice sheet models are therefore the central tool in forecasting the evolution of ice masses and, more particularly, their future contribution to the ongoing sea-level rise (SLR). A large suite of ice sheet models has been developed in recent years. Increasing complexity has been regularly added, enabling progressive improvements from 1D flowline models based on shallow ice approximations to full numerical solutions of the Stokes equations for an actual 3D geometry (Morlighem et al., 2010; Gillet-Chaulet and Durand, 2010; Larour et al., 2012; Gillet-Chaulet et al., 2012). However, implementing GL migration in ice flow models still represents a challenge to be faced by the community of ice sheet modellers (Vielé and Payne, 2005; Pattyn et al., 2012, submitted).*

As mentioned above, Schoof (2007) developed a boundary-layer theory establishing the relation between ice flux and ice thickness at the GL, which can be implemented as a boundary condition in ice-flow models. The boundary layer is a zone of acceleration, generally a few tens of kilometres in extent (Hindmarsh, 2006; Schoof, 2007) for high-slip cases such as we consider, where the stress regime adjusts from being shear-dominated to extension-dominated. This theoretical development demonstrated the uniqueness of steady solutions of marine ice sheets resting on a downward sloping bedrock and their unstable behaviour on an upward sloping region. Based on the Schoof (2007) results, an intercomparison effort compared the behaviour of the GL evolution of 26 different models on a flowline, as part of the Marine Ice Sheet Model Intercomparison Project (MISMIP, Pattyn et al., 2012), which was essentially designed to compare models with the semi-analytical solution proposed by Schoof (2007). However, Schoof's flux formula is derived on the assumption of near-steady-state, and its ability to represent transient behaviour has not been fully investigated. This issue was briefly touched upon during the MISMIP experiments (Pattyn et al., 2012), but it was not the primary focus of investigation.

The MISMIP experiments showed a broad range of behaviour of numerical implementations in response to an instantaneous global change of the ice rheology, with some quantitative consistency between different numerical formulations. The MISMIP experiments highlighted, along with Schoof's studies, the importance of obtaining high accuracy in the numerical solution in the boundary layer near the GL, which in practice means the use of high resolution or high accuracy methods, which has the consequence that the numerical approach used is of significant issue.

Short term predictions of rapid change in the Antarctic Ice Sheet necessarily involve transient processes, and the ability of marine ice sheet models to represent these requires quantification. Therefore, we conduct a model intercomparison dealing with rapid change in order to evaluate the transient behaviour of different models. A particular aim is to investigate the divergence of ice sheet models from the Schoof (2007) solution during these very short time scale processes. Furthermore, owing to the use of different physical approximations and numerical approaches, we expect that the same experiment carried out with different ice sheet models may give different results. Therefore, another aim of this study is to quantify these differences and understand their origin.

In contrast to the original MISMIP experiment, here we choose to investigate the physically more reasonable transient forcing of a decrease in ice-shelf buttressing. This is implemented by means of a flowline model with grounded part and a floating ice shelf. As is common with previous studies (Nick et al., 2009; Price et al., 2011; Williams et al., 2012), buttressing is implemented by varying the force applied at the calving front (downstream end) of the ice shelf. This is not an exact representation of how ice shelves generate back-pressure (Gagliardini et al., 2010), but since our primary focus is on how a release in back-pressure at the GL forces GL motion, this is sufficient for our purposes.

A recent study (Williams et al., 2012) has shown that the shallow-ice approximation, besides being invalid at short wavelength, is also invalid at sub-decadal to decadal forcing frequencies. This highlights the need to consider the nature of the mechanical model deployed in transient



studies. Ice-sheet modelling has previously mainly been achievable with vertically-integrated mechanical representations of the appropriate governing Stokes equations. With recent advances, one of the models deployed solves the Stokes equations, while the others solve the vertically-integrated shallow-shelf approximation (SSA) (*Morland, 1987; Mac Ayeal, 1992*). The four models differ thus in the mechanical model as well as in the numerical approach used. They are briefly outlined here, with more details to follow below.

The first one is the finite element full-Stokes Elmer/Ice model, denoted **FS-AG** for Full-Stokes - Adaptive Grid, firstly presented in *Durand et al. (2009b)* (<http://elmerice.elmerfem.org>). In this application, an adaptive grid refinement is used. This model is computationally two dimensional in this flowline representation. The three remaining models solve the SSA, and are therefore vertically integrated and thus computationally one-dimensional. **SSA-FG**, for SSA-Fixed Grid, and **SSA-H-FG**, for SSA-Heuristic-Fixed Grid, use a fixed grid with a resolution of 50 m and 10 km, respectively. The GL migration of **SSA-H-FG** is computed according to the *Pollard and DeConto (2009)* heuristic rule that implements the *Schoof (2007)* boundary condition (*Docquier et al., 2011*). The last model solves the SSA equations using pseudo-spectral method (*Fornberg, 1996; Hindmarsh, 2012*) on a moving grid, and will be denoted **SSA-PSMG** for SSA - Pseudo-Spectral Moving Grid. For this model, grounded ice and floating ice shelf are solved on two coupled domains, with continuity of stress and velocity across the grounding-line guaranteed. The first two models approach the problem of modelling the flow in the boundary layer by increased resolution, the third model uses a coarse resolution and a heuristic rule at the GL, and the last model addresses this issue by using high-accuracy spectral methods and explicit grounding line motion formula (*Hindmarsh and LeMeur, 2001*). All models have successfully participated in the MISMIP benchmark (*Pattyn et al., 2012*), exhibiting unique stable positions on downward sloping beds, unstable GL positions on retrograde slopes and related hysteresis behaviour over an undulated bedrock.

Details and numerical characteristics of the four models are summarised in Tab. 3.3.1. In Section 3.3.2, specificities of the models are further described. The setup of the proposed experiments is outlined in Section 3.3.3 and corresponding results are discussed in Section 3.3.4 before we conclude in Section 3.3.5.

## 3.3.2 Model description

### 3.3.2.1 Governing equations

The problem consists of solving a gravity driven flow of incompressible and isothermal ice sliding over a rigid bedrock noted  $b(x)$ . The ice is considered as a nonlinear viscous material, following the behaviour of the Glen's flow law :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta\mathbf{D}, \quad (3.3)$$

	<b>FS-AG</b>	<b>SSA-H-FG</b>	<b>SSA-FG</b>	<b>SSA-PSMG</b>
<b>Affiliation</b>	LGGE/CSC (Durand et al., 2009a)	ULB (Docquier et al., 2011)	ULB	BAS
<b>Physics</b>	Full Stokes	SSA	SSA	SSA
<b>Numerics</b>	Finite Element	Finite Diffe- rence	Finite Diffe- rence	Pseudo-spectral
<b>Vertically integrated Grid</b>	No	Yes	Yes	Yes
<b>Resolution</b>	Adaptive	Fixed and Stag- gered	Fixed and Stag- gered	Moving
<b>Time step</b>	0.1 yr	0.1 yr	0.1 yr	1 yr
<b>GL</b>	Contact pro- blem	Heuristic rule  (Pollard and DeConto, 2009)	Flotation	Margin tracking

TABLE 3.3 – Summary table of model characteristics : LGGE stands for Laboratoire de Glaciologie et de Géophysique de l’Environnement, CSC for CSC - IT for Science, ULB for Université Libre de Bruxelles, and BAS for British Antarctic Survey.

where  $\boldsymbol{\tau}$  is the deviatoric stress tensor,  $\mathbf{D}$  is the strain rate tensor defined as  $D_{ij} = (\partial_j u_i + \partial_i u_j)/2$  and  $\mathbf{u} = (u, w)$  is the velocity vector. The effective viscosity  $\eta$  is defined as follows :

$$\eta = \frac{A^{-1/n}}{2} D_e^{(1-n)/n}, \quad (3.4)$$

where  $A$  and  $n$  are the Glen’s law parameter and flow law exponent respectively, and  $D_e$  is the strain-rate invariant defined as  $D_e^2 = 2D_{ij}D_{ij}$ .

The ice flow is computed by solving the Stokes problem, expressed by the mass conservation equation in the case of incompressibility

$$\text{tr}(\mathbf{D}) = \text{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad (3.5)$$

and the linear momentum balance equation

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho_i \mathbf{g} = 0, \quad (3.6)$$

where  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}$  is the Cauchy stress tensor with  $p = -\text{tr} \boldsymbol{\sigma}/3$  the isotropic pressure,  $\rho_i$  the ice density and  $\mathbf{g}$  the gravity vector.

Both the upper ice/atmosphere interface  $z = z_s(x, t)$  and the lower ice/bedrock or ocean

interface  $z = z_b(x,t)$  are allowed to evolve following an advection equation :

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial z_i}{\partial x} - w_i = a_i \quad i = s, b, \quad (3.7)$$

where  $(u_i, w_i)$  is the surface velocity ( $i = s$ ) or the basal velocity ( $i = b$ ). For this application, the mass flux at the surface (i.e., surface mass balance) is constant and uniform ( $a_s(x,t) = a_s$ , see Tab. 3.3.3) and  $a_b = 0$ .

### 3.3.2.2 Boundary conditions

The geometry is restricted to a two-dimensional flowline along the  $x$ -direction and the  $z$ -axis is the vertically upward direction. The upstream boundary of the domain  $x = 0$  is taken to be a symmetry axis (ice divide), where we impose the horizontal velocity  $u(x = 0) = 0$ . The downstream boundary,  $x = x_f$  corresponds to the calving front. The position of the calving front  $x_f$  is fixed, and the GL position  $x_g$  is delimited by  $0 \leq x_g \leq x_f$ . In what follows, we assume a constant sea level, set to  $z = 0$ .

The upper ice surface  $z = z_s(x,t)$  is in contact with the atmosphere, where pressure is negligible with respect to involved stresses inside the ice body. This is a stress free surface, implying the following condition :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{z_s} = 0, \quad (3.8)$$

where  $\mathbf{n}$  is the outward pointing unit normal vector.

The lower surface  $z = z_b(x,t)$  is either in contact with the bedrock or with the ocean, and two different boundary conditions will be applied for the Stokes problem on these two different interfaces, defined as :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} z_b(x,t) > b(x) \quad \text{or} \\ z_b(x,t) = b(x) \quad \text{and} \quad -\sigma_{nn}|_{z_b} \leq p_w \end{array} \right. & \text{Ice/Ocean interface,} \\ \left\{ \begin{array}{l} z_b(x,t) = b(x) \quad \text{and} \quad -\sigma_{nn}|_{z_b} > p_w \end{array} \right. & \text{Ice/Bedrock interface.} \end{array} \right. \quad (3.9)$$

In Eq. (3.9), the water pressure  $p_w = p_w(z,t)$  is defined as :

$$p_w(z,t) = \begin{cases} -\rho_w g z & \text{if } z \leq 0 \\ 0 & \text{if } z > 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

where  $\rho_w$  is the water density.

Where the ice is in contact with the ocean (first condition in Eq. (3.9)), the following Neumann boundary condition applies for the Stokes equations :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p_w \mathbf{n}. \quad (3.11)$$

Where the ice is in contact with the bedrock (second condition in Eq. (3.9)), a no-penetration condition is imposed as well as a friction law, such as

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ \tau_b &= \mathbf{t} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})|_b = C u_b^m, \end{aligned} \quad (3.12)$$

where  $\tau_b$  is the tangential component of the traction,  $\mathbf{t}$  is the tangent vector to the bedrock,  $u_b$  is the sliding velocity,  $C$  is the friction parameter and  $m$  is the friction law exponent (see Tab. 3.3.3 for the adopted values).

### 3.3.2.3 Shallow shelf/shelfy stream approximation (SSA)

As mentioned previously, three of the four models use the Shallow Shelf Approximation (SSA) which is a vertically integrated approximation of the Stokes Eqs. (3.5) and (3.6). The horizontal velocity  $u(x)$  is obtained by solving the following equations (Morland, 1987; Mac Ayeal, 1992) :

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial(h\tau_{xx})}{\partial x} - C u^m = \rho_i g h \frac{\partial z_s}{\partial x} & 0 \leq x \leq x_g, \text{ for the grounded part,} \\ 2 \frac{\partial(h\tau_{xx})}{\partial x} = \gamma h \frac{\partial h}{\partial x} & x_g < x \leq x_f, \text{ for the floating part.} \end{cases} \quad (3.13)$$

where  $h = h(x)$  is the ice thickness,  $\tau_{xx} = 2\eta\partial_x u$  is the longitudinal deviatoric stress and  $u$  is the horizontal velocity in the flow direction. The effective viscosity,  $\eta$ , is computed as in (3.4), where  $D_e \approx \partial_x u$ . The parameter  $\gamma$  is defined as :

$$\gamma = \rho_i g \left( 1 - \frac{\rho_i}{\rho_w} \right). \quad (3.14)$$

According to the SSA approximation, ice deformation is dominated by membrane stresses and vertical shear within the ice is neglected. For the SSA model, the only boundary condition is  $u(x=0) = 0$  at the ice divide, whereas the boundary condition at the lower surface is already implicitly included in the set of equations (3.13) and the boundary condition at the calving front is defined in section 3.3.2.5.

The lower surface  $z_b$  is determined from the no-penetration condition and the floating condition :

$$\begin{cases} z_b(x,t) = b(x) & \text{for } x \leq x_g, \\ z_b(x,t) = -h\rho_i/\rho_w > b(x) & \text{for } x > x_g. \end{cases} \quad (3.15)$$

The upper surface  $z_s = z_b + h$  is deduced from the vertically-integrated mass conservation equation giving  $h$  as

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = a_s. \quad (3.16)$$

### 3.3.2.4 Grounding line treatment

The implementation of GL treatment differs from one model to the other. In this section we define for each model the specificities regarding the treatment of the GL.

The **FS-AG** model solves the contact problem between the ice and the bedrock. During a time step, the contact condition (3.9) is tested at each node of the mesh and the bottom boundary conditions (3.11) or (3.12) are imposed accordingly. More details about this method and its implementation can be found in *Durand et al. (2009b)*. The consistency of this GL implementation strongly depends on the grid resolution, and a grid size lower than 100 m is needed to obtain reliable results (*Durand et al., 2009a*). In order to reach this resolution while considering a reasonable number of mesh nodes, an adaptive mesh refinement around the GL is applied : the horizontal distribution of nodes is updated at every time step, such that finer elements are concentrated around the GL.

For the **SSA-FG** model the grid points are kept fixed in time and the last grounded grid point is determined through the flotation criterion, *i.e.* by solving the following equation :

$$F = h_g + b(x_g) \frac{\rho_w}{\rho_i} = 0. \quad (3.17)$$

The GL position  $x_g$  is given with sub-grid precision between the last grounded grid point and the first floating point following the method proposed by *Pattyn et al. (2006)*.

The GL position is also determined with sub-grid precision following *Pattyn et al. (2006)* for the **SSA-H-FG**, but while **SSA-FG** uses the flotation criterion as a boundary condition at the GL, the **SSA-H-FG** model makes use of an additional boundary condition based on the semi-analytical solution of *Schoof (2007)*. The ice flux at the GL  $q_g$  is calculated as a function of ice thickness at the GL  $h_g$  :

$$q_g = \left( \frac{A\rho_i g \gamma^n}{4^n C} \right)^{\frac{1}{m+1}} \theta^{\frac{n}{m+1}} h_g^{\frac{m+n+3}{m+1}}, \quad (3.18)$$

and is used in a heuristic rule to enable GL migration (*Pollard and DeConto, 2009*). This parameterization allows relatively coarse resolutions to be used (10 km in this study) and gives steady-state results of GL position that are independent of the chosen resolution and agree well with the semi-analytical solution given by *Schoof (2007)* (*Docquier et al., 2011*). In Eq. (3.18), the coefficient  $\theta$  accounts for buttressing and is defined as

$$\theta = \frac{4\tau_{xx}|_{x_g}}{\gamma h_g}. \quad (3.19)$$

The numerical approach used by the pseudo-spectral **SSA-PSMG** model consists in explicitly calculating the rate of GL migration,  $\dot{x}_g$ , according to the following explicit formula

(*Hindmarsh and LeMeur*, 2001)

$$\dot{x}_g = -\frac{\partial_t F}{\partial_x F}, \quad (3.20)$$

where  $F$  is given by Eq. (3.17). At each time step, a new position is computed and the grid moves accordingly, so that the GL coincides exactly with a grid point (*Hindmarsh*, 1996b). Moving grids have the ability to ensure that a grid-point always coincides with the GL, allowing easy representation of gradients at this location, but are not always convenient to implement.

### 3.3.2.5 Calving front boundary condition and the specification of buttressing

The experiments we propose are driven by changes in the buttressing force. One approach could have consisted of applying lateral friction on the ice shelf following the method of *Gagliardini et al.* (2010), but the total buttressing force would then have been function of the ice-shelf area and ice-shelf velocities, and therefore different for all models. In order to ensure the same buttressing force for all models, we follow the method proposed by *Price et al.* (2011), in which the inward force at the calving front is modified by a factor, noted  $C_F$  in our study.

For vertically integrated models, the horizontal force acting on the calving front is entirely due to the hydrostatic water pressure and the longitudinal deviatoric stress at the front is given by *MacAyeal et al.* (1996) :

$$\tau_{xx}|_{x_f} = \frac{\gamma}{4} h_f, \quad (3.21)$$

where  $h_f$  is the ice thickness at the calving front. In the case of the vertically integrated models **SSA-FG**, **SSA-H-FG** and **SSA-PSMG**, a factor  $C_F$  is then used to modify longitudinal deviatoric stress (3.21), which becomes :

$$\tau_{xx}|_{x_f} = C_F \frac{\gamma}{4} h_f. \quad (3.22)$$

A value of  $C_F = 1$  means that the longitudinal deviatoric stress at the calving front is opposed solely by water pressure, corresponding to no buttressing. Values less than one induce a lower extensional longitudinal deviatoric stress at the front, simulating the effect of buttressing. Note that this procedure implies an additional *force* applied at the calving front ; this results in a varying contribution of the buttressing to the *stress* as the ice thickens upstream.

Moreover, for **SSA-H-FG**, the buttressing parameter  $C_F$  is by construction incorporated in the boundary condition at the GL. This boundary condition relates the ice flux  $q_g$  to the ice thickness  $h_g$  at the GL and includes the buttressing factor  $\theta$  as defined by Eq. (3.19). From the SSA equations in the ice shelf, we derive (see Appendix A.1) the relation that links  $\theta$  and  $C_F$

through both the ice thickness at the GL  $h_g$  and the ice thickness at the calving front  $h_f$  :

$$\theta = 1 - (1 - C_F) \left( \frac{h_f}{h_g} \right)^2. \quad (3.23)$$

The other two SSA models solve for the longitudinal variation of  $\tau_{xx}$  in the ice shelf to compute the value at the GL.

For the **FS-AG** model, the hydrostatic pressure  $p_w(z)$  is imposed along the ice column in contact with the sea, so that the longitudinal Cauchy stress is not uniform on this boundary. This non-uniform stress induces a bending of the ice shelf near the front. To avoid an increase of this bending when adding the buttressing, the stress condition at the front is modified by adding a uniform buttressing stress  $p_b$ , such that

$$\sigma_{xx}|_{x_f}(z,t) = p_w(z) + p_b(t). \quad (3.24)$$

Using Eqs. (3.24) and (3.22), and assuming the equality of the mean longitudinal Cauchy stress for both parameterisations, the buttressing stress to be applied at the front of the full-Stokes model is obtained as a function of  $C_F$  (see Appendix A.2), such as

$$p_b = \frac{\rho_w g z_b^2}{2\rho_i h_f} (\rho_w - \rho_i) (C_F - 1). \quad (3.25)$$

Note that  $p_b$  has to be computed at each time step since it depends on the ice thickness at the front, which is not constant.

### 3.3.3 Experimental setup

We consider an ice sheet resting on a downward sloping bedrock, with the calving front fixed at 1000 km, as shown in Fig. 3.8. The GL never advances as far as this in the experiments. The flow parameters summarised in Tab. 3.3.3 are used by each model in order to calculate a steady state geometry. The steady state is obtained with a buttressed ice shelf ( $C_F = 0.4$ ). Computed steady surfaces are in good agreement between models, exhibiting only a slight difference in GL position of less than 20 km (see Fig. 3.8). We chose the simpler, stable case of a forward slope for the simple reason that computing comparable initial starting conditions on the unstable reverse slope is a practical impossibility. GL retreat rates are governed by the water depth and the buttressing, and we chose values that were physically acceptable and also produced physically reasonable retreat rates.

Ice-sheet geometry is subsequently perturbed by a release of the initial buttressing force. This process, arising from increased melt of the ice shelf, appears to be responsible for the observed acceleration of Antarctic outlet glacier (*Wingham et al.*, 2006a; *Rignot et al.*, 2008; *Pritchard et al.*, 2012). Starting from the steady geometries obtained with initial factor  $C_F = 0.4$ ,

Parameter	Description	Value	Unit
$b$	Bed elevation	$-x/1000$	m
$\rho_i$	Ice density	900	$\text{kg m}^{-3}$
$\rho_w$	Water density	1000	$\text{kg m}^{-3}$
$g$	Gravitational acceleration	9.8	$\text{m s}^{-2}$
$A$	Glen's law coefficient	$1.5 \times 10^{-25}$	$\text{Pa}^{-3} \text{s}^{-1}$
$n$	Glen's law exponent	3	
$C$	Basal friction parameter	$10^6$	$\text{Pa m}^{-1/3} \text{s}^{1/3}$
$m$	Basal friction exponent	1/3	
$a_s$	Accumulation rate	0.3	$\text{m a}^{-1}$
$C_F$	Buttressing parameter	0.4	

TABLE 3.4 – Parameters of initial steady state

the buttressing force is decreased at  $t = 0$  ( i.e.  $C_F$  increases) and kept constant during the simulation. Since we focus on the transient behaviour, simulations are run during 200 years. Three different amplitudes of the perturbation are investigated with corresponding modified values of  $C_F = 0.5, 0.8$  and  $1$ .

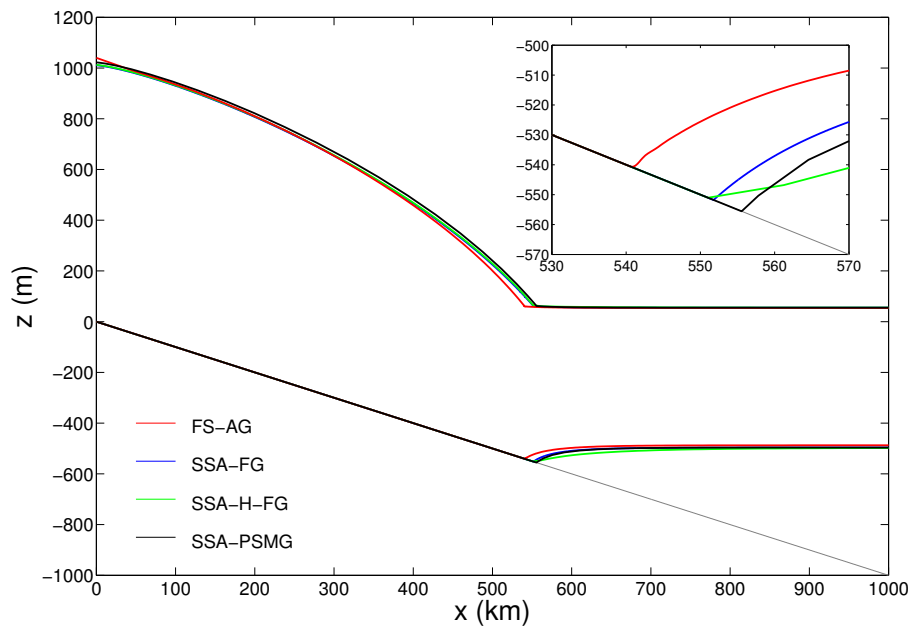


FIGURE 3.8 – Initial steady state geometry ( $C_F = 0.4$ ) for all models. The inset emphasizes the differences in GL position. **SSA-H-FG** lower surface has a quite different shape with respect to the three other models due to its coarser resolution (10 km).



	<b>FS-AG</b>	<b>SSA-FG</b>	<b>SSA-H-FG</b>	<b>SSA-PSMG</b>
$C_F=0.4$	540.5	551.8	554.1	556.1
$C_F=0.5$	523.8 (16.7)	534.7 (17.1)	530.4 (23.8)	539.2 (16.9)
$C_F=0.8$	482.0 (58.5)	488.5 (63.3)	474.8 (79.3)	495.2 (60.9)
$C_F=1$	463.7 (76.8)	468.9 (82.9)	454.3 (99.8)	476.8 (79.3)

TABLE 3.5 – GL position for the initial steady state ( $C_F = 0.4$ ) and for the different perturbations for each model after 200 years. The difference between the initial steady state and the perturbed state is given in brackets. All values are in km.

### 3.3.4 Results and discussion

#### 3.3.4.1 Transient behaviour of direct observable variables on actual ice sheets

We first evaluate the response of the various models regarding the variables that are currently observed over actual ice sheets, namely GL position (Fig. 3.9), surface elevation change (Fig. 3.10) and surface velocity (Fig. 3.11).

As expected, release of buttressing induces a GL retreat, and the greater the release, the larger the amount and rate of retreat (*Gagliardini et al.*, 2010). Retreat can reach up to almost 100 km in 200 years following a complete loss of buttressing restraint ( $C_F = 1$ , see Fig. 3.9 and Tab. 3.3.4.1). The different models show a similar trend regarding the temporal evolution of GL position (left panels in Fig. 3.9). However, owing to the various initial steady state profiles, the GL position differs between models. For the three perturbations, **SSA-H-FG** shows the highest GL retreat compared to the initial position, followed by **SSA-FG**, then **SSA-PSMG**, and finally **FS-AG** (Tab. 3.3.4.1). The evolution of the GL position of **SSA-H-FG** has a step-like behaviour due to the model grid size (10 km).

Rates of GL migration (right panels in Fig. 3.9) for **SSA-PSMG** and **SSA-FG** exhibit a very similar pattern, *i.e.* a high retreat rate value in the beginning of the perturbation and then a convergence towards a zero-value. Moreover, the greater the perturbation (higher value of  $C_F$ ), the larger the retreat rates in the beginning of the perturbation. The smooth decrease of the migration rate computed by **SSA-PSMG** is due to the explicit way the GL migration is computed (see model description above). Because the **SSA-FG** interpolates the GL position between the last grounded point and the first floating point (*Pattyn et al.*, 2006), it also ensures a smooth description of GL migration rate. However, **FS-AG** and **SSA-H-FG** show discontinuous GL migration rate induced by numerical artefacts : both models give results that are affected by their grid size. The stepped patterns obtained with **FS-AG** are due to high frequency oscillation between two successive nodes during GL migration : the GL retreats, then stays at the same position during one time step, then retreats, etc. so that the GL migration rate oscillates with an amplitude of  $500 \text{ m a}^{-1}$  (*i.e.* grid size divided by time step). The numerical noise found in **SSA-H-FG** is due to a combination of both the grid size effect and *single-cell dithering*, *i.e.*, flipping back and forth between upstream and downstream grid points (*Pollard and DeConto*, 2012). As a general trend, the GL retreats by 10 km steps as a consequence of the model resolution (grid size

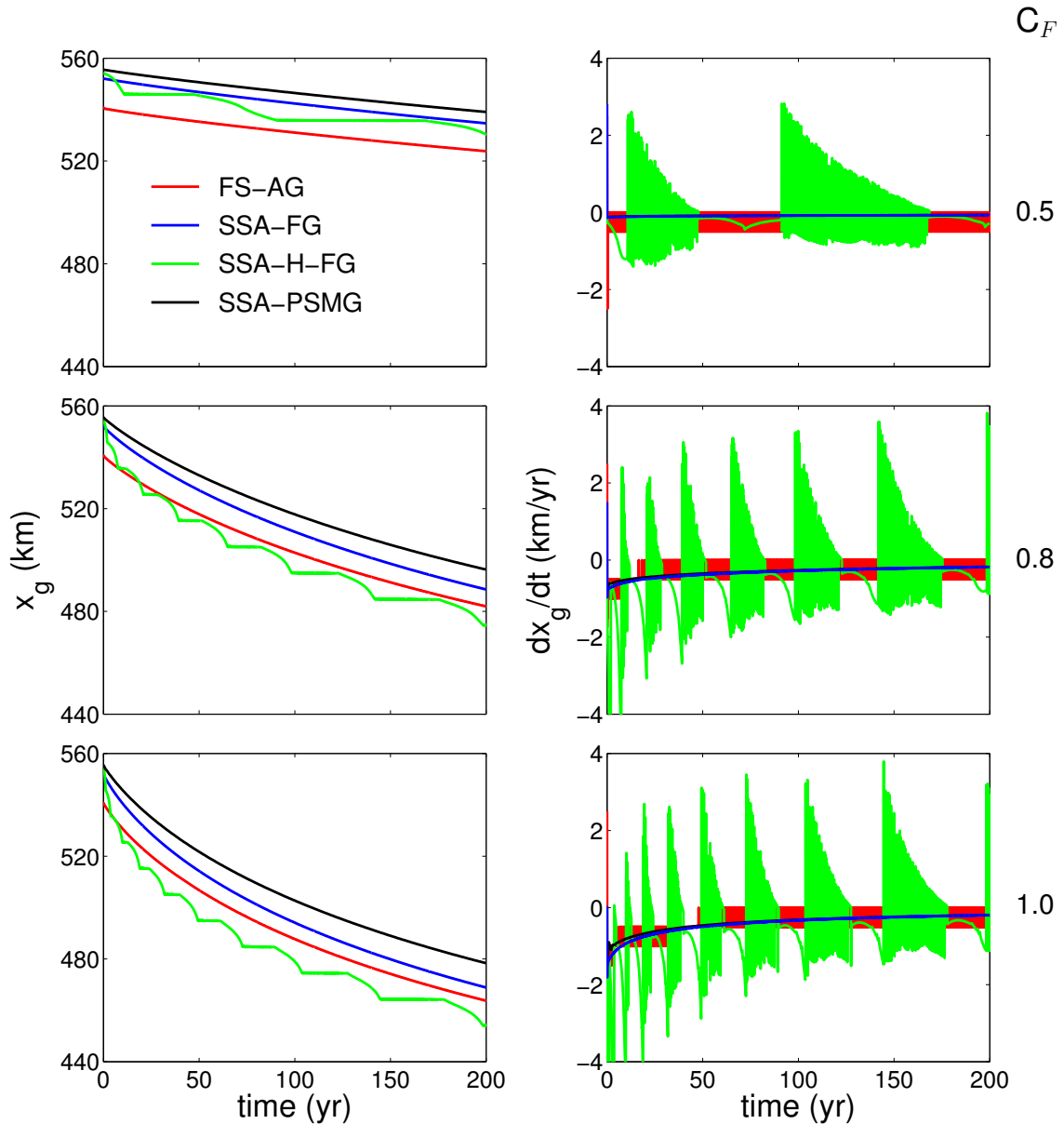


FIGURE 3.9 – Grounding line position  $x_g$  (left) and migration rate  $dx_g/dt$  (right) as a function of time for the four models and for the three buttressing values ( $C_F = 0.5$  on the first line,  $C_F = 0.8$  on the second line and  $C_F = 1$  on the third line).

effect). At some discrete GL positions (every 10 km), the rate of GL migration varies significantly due to the heuristic rule used in the model (flux imposed either upstream or downstream the GL), so that the GL slightly advances and retreats within the same grid cell (single-cell dithering). In summary, the GL retreats by 10 km (corresponding to the model resolution) and reaches a discrete position where it oscillates within the same grid cell, and then retreats before reaching another discrete position again, etc...

Rates of surface elevation change through time and distance from the ice divide are presented

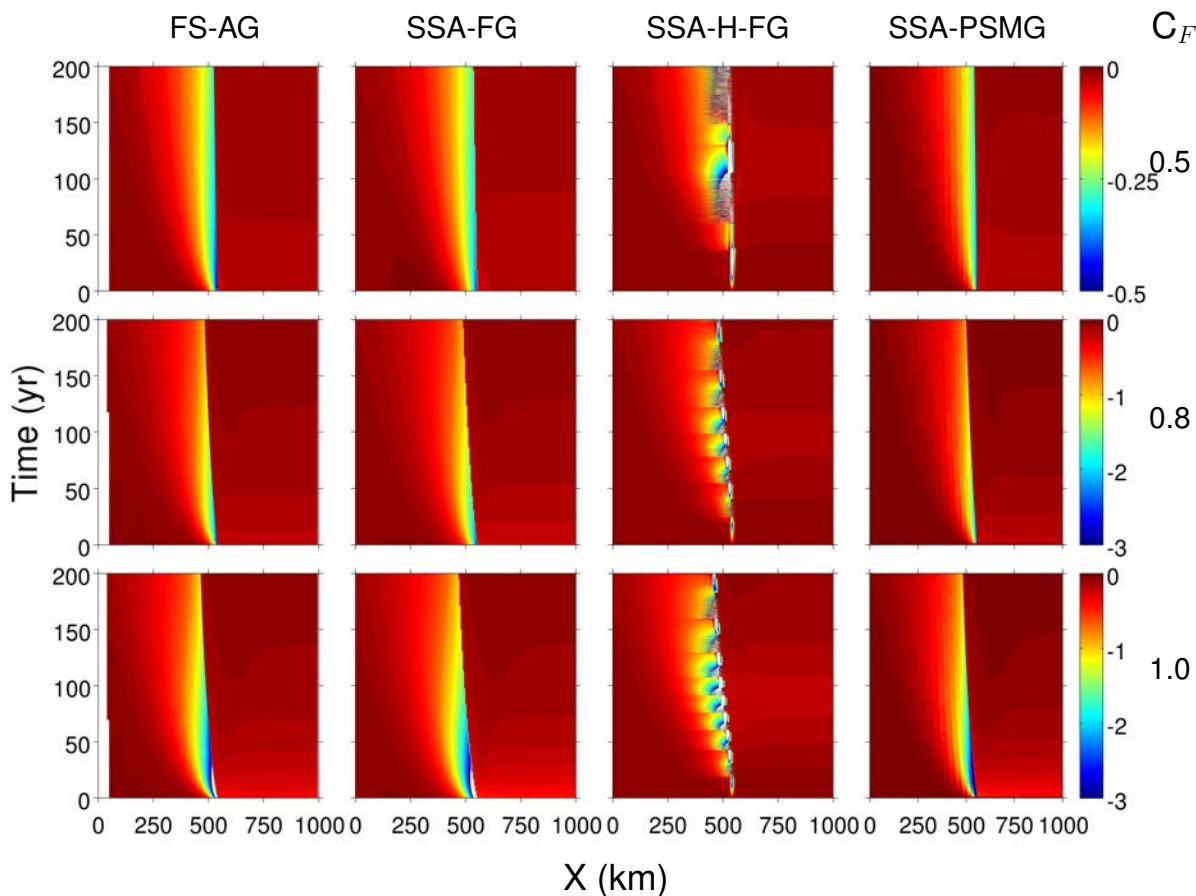


FIGURE 3.10 – Rate of surface elevation change ( $\text{m yr}^{-1}$ ) as a function of time and horizontal distance ( $x = 0$  corresponds to the ice divide and  $x_f = 1000$  km is the calving front) for the three buttressing values (lines) and for the four models (columns).

in Fig. 3.10 for the various models and perturbations. The horizontal surface velocity is similarly plotted (see Fig. 3.11). The largest perturbation ( $C_F = 1$ ) exhibits rates of surface elevation change of a few meters per year in the beginning, with horizontal velocities above one kilometer per year. Together with GL migration rates of the order of a kilometer per year (Fig. 3.9), those are in general agreement with the observation for currently recessing glaciers of West Antarctica, and Pine Island Glacier in particular (*Rignot, 1998; Rignot et al., 2011a*). That confirms the relevance of the amplitude of the perturbations applied. Rates of surface elevation change are quite similar between the four models (Fig. 3.10). The highest thinning rates appear in the vicinity of the GL at the beginning of the perturbation. Similarly, the surface velocities steadily decrease during the simulation (Fig. 3.11). High frequency and small amplitude numerical noise in **FS-AG** appear not to significantly affect the surface response. However, with **SSA-H-FG** the high frequency and amplitude variabilities drastically affect the surface thinning rate and velocities over short time scales (*i.e.* about a decade).

We deliberately chose a low spatial resolution (uniform 10 km along the flowline) for the **SSA-H-FG** model compared with other models. Indeed, in contrast to other approaches, such

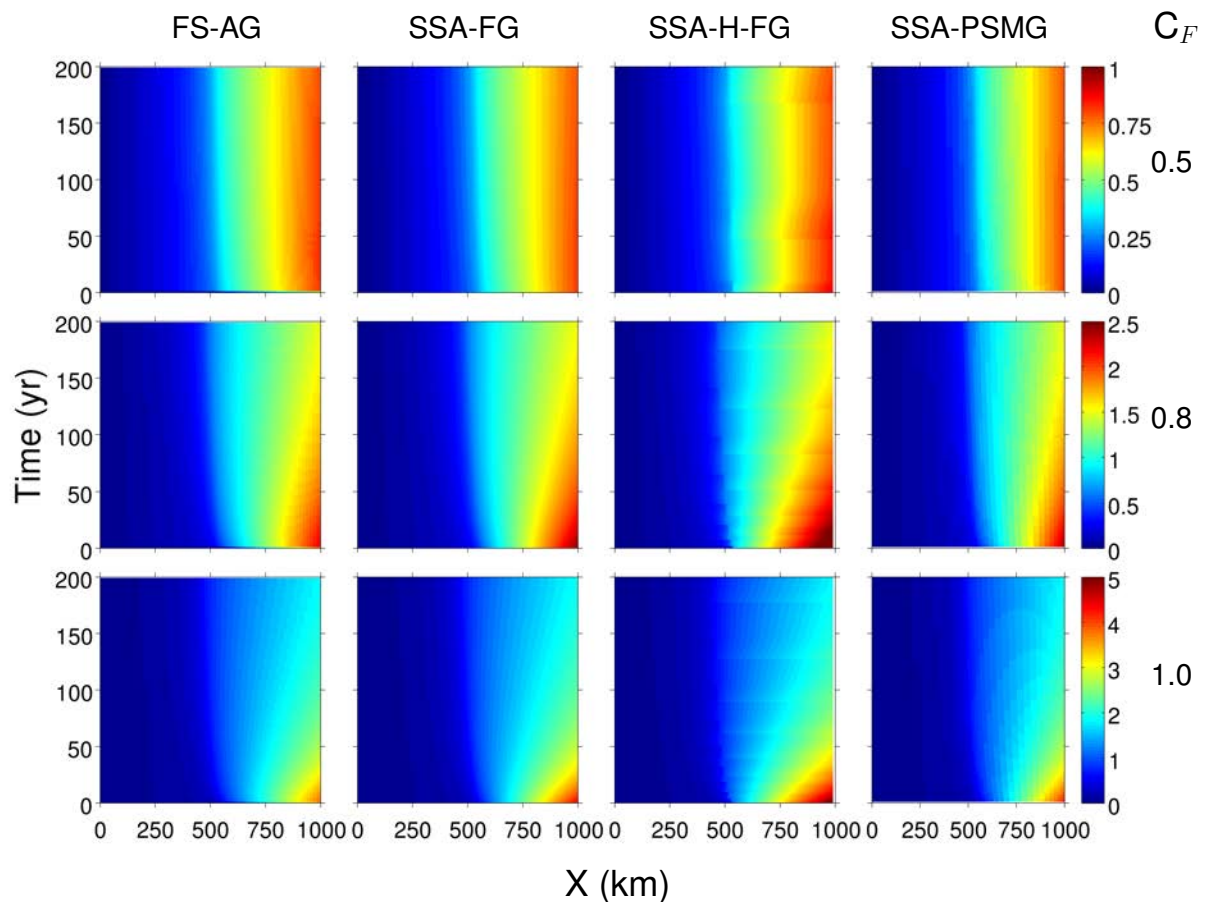


FIGURE 3.11 – Surface horizontal velocity ( $\text{m yr}^{-1}$ ) as a function of time and horizontal distance ( $x = 0$  corresponds to the ice divide and  $x_f = 1000$  km is the calving front) for the three buttressing values (lines) and for the four models (columns).

type of models produces consistent steady geometries at low spatial resolution (*Docquier et al.*, 2011), which is the main motivation for applying such parameterizations in large-scale ice sheet models. One can also note that ice-sheet models using a flux boundary condition at the grounding line with a similar resolution are currently used on centennial time scale to estimate Antarctic evolution (*Bindschadler et al.*, 2012). However, evaluating their performance with similar numerics on controlled experiments remains to be done. Increasing the resolution (down to 500 m) allows removal of high frequency numerical artefacts, but the general trend of variables such as GL migration rate and surface elevation changes over 200 years does not depend on resolution (data not shown). Moreover, refining the grid size significantly increases its numerical cost, so that the major advantage of this model is lost, as well as its applicability to large-scale ice-sheet models.

### 3.3.4.2 Divergence from the boundary-layer solution

Despite the numerical noise exhibited by **SSA-H-FG** and **FS-AG** models, the evolution of the geometry during the simulations appears very similar for all four models. However, the boundary layer theory implemented in the **SSA-H-FG** model hypothesizes near-steady conditions and its ability to represent transients requires evaluation. In Fig. 3.12, the flux at the GL is plotted as a function of the instantaneous ice thickness at the GL for all models and simulations. By construction, **SSA-H-FG** essentially follows the boundary layer prescription. This can most clearly be seen for the case  $C_F = 1$  (see the bottom of Fig. 3.12) where the close correspondence of the curves of *Schoof* (2007) and **SSA-H-FG** is evident. This correspondence is not as clear for the other perturbations, since the **SSA-H-FG** boundary condition for the flux now relies on a parameterization of  $\theta$ , which in turn depends on the quantity  $h_f/h_g$  (see Eq. 3.23). Since this ratio varies in time, the steady-state condition of the Schoof condition is not fulfilled.

Interestingly, and despite their very different physical and numerical approaches, all the other models show very similar behaviour, with the boundary layer theory result attained after some time. This is most obvious for the largest perturbation ( $C_F = 1$ ) but also clearly visible for the weaker perturbations ( $C_F = 0.8$  and  $0.5$ ). However, during the highly transient phase, for a given ice thickness at the GL, the ice flux is substantially overestimated by the boundary layer theory, consequently overestimating the outflow during the whole period of 200 years.

### 3.3.4.3 Changes in Volume Above Flotation ( $\Delta\text{VAF}$ )

From the perspective of projecting the future contribution of Antarctica to sea-level rise (SLR), the change in Volume Above Flotation ( $\Delta\text{VAF} = \text{VAF}(t) - \text{VAF}(t = 0)$ ) is certainly a pertinent variable to investigate. Indeed, plotting  $\Delta\text{VAF}$  (Fig.3.13) has the advantage of integrating through time both the contribution coming from outflow at the GL and the consequence of grounding-line retreat in terms of ice release. In our case, this also allows the investigation of the spread in the transient behaviour of the various models in response to similar perturbations. We also plotted the evolution of  $\Delta\text{VAF}$  for each model relative to  $\Delta\text{VAF}$  computed by **FS-AG** as it directly emphasizes the difference between models (Fig.3.13). Choice of **FS-AG** model as a reference was arbitrary.

As anticipated, **SSA-H-FG** shows the greatest change in VAF compared with other models. Relative to **FS-AG**, **SSA-H-FG** overestimates the contribution to SLR by more than 100 % during the first 50 years of the simulation, which decreases to a 40 % overestimation after 200 years. **SSA-FG** shows a similar pattern with a smaller overestimation (about 15 % after 200 years). On the other hand, **SSA-PSMG** briefly underestimates the change in VAF relative to **FS-AG** at the beginning of the perturbation, but after 20 years the contribution of the models to SLR is remarkably similar to the one computed by **FS-AG**, with relative difference below 5 %. It seems striking that response in terms of relative  $\Delta\text{VAF}$  is extremely similar from one perturbation to the other, while the response of the models is highly modulated by the amplitude of the perturbation. This particularity may allow in the future to weight the response of a model

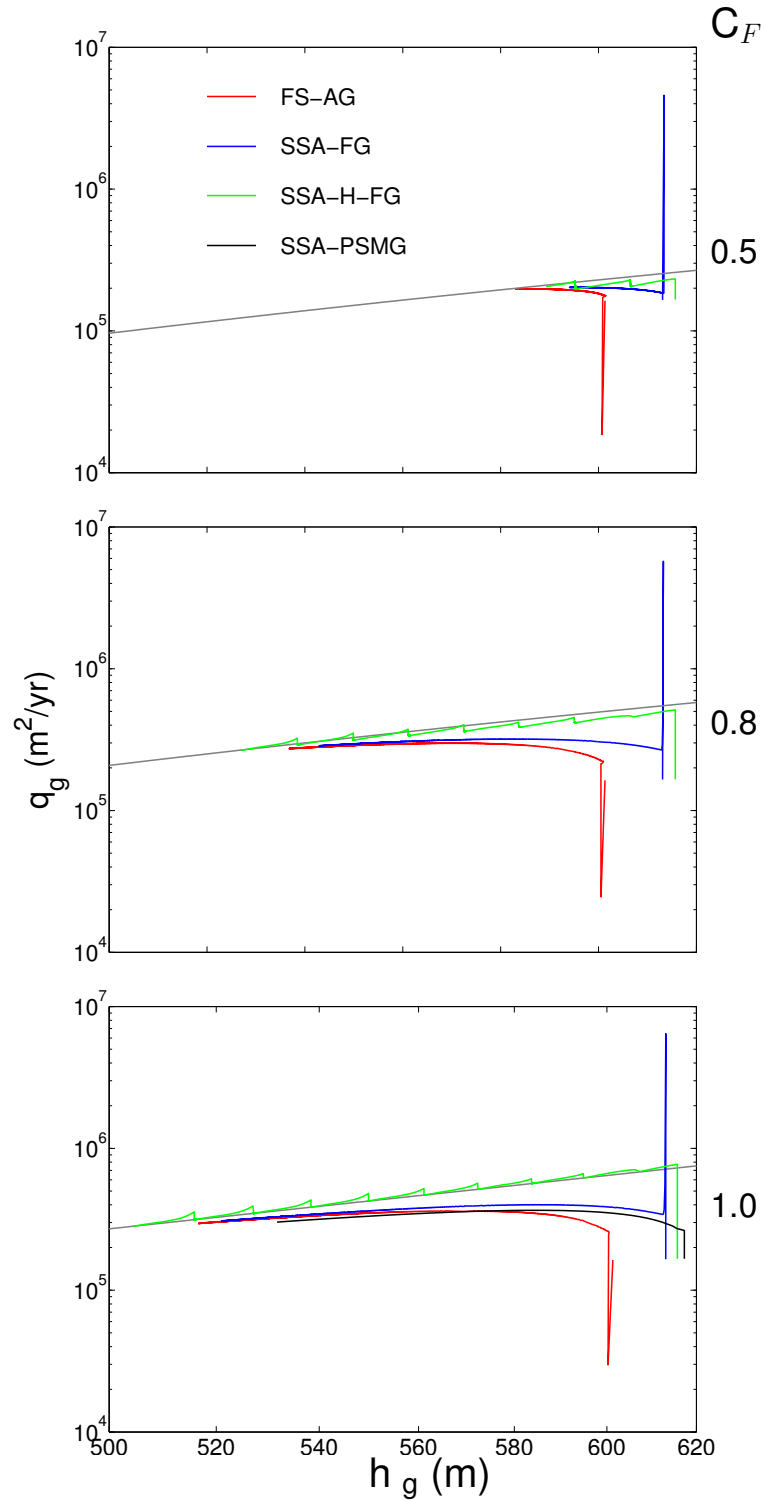


FIGURE 3.12 – GL ice flux  $q_g$  as a function of GL ice thickness  $h_g$  for the four models and for the three different buttressing values, compared with the *Schoof* (2007) solution (in grey).

according to the physics implemented in.

This intercomparison strongly suggests that models prescribing flux at the GL according to

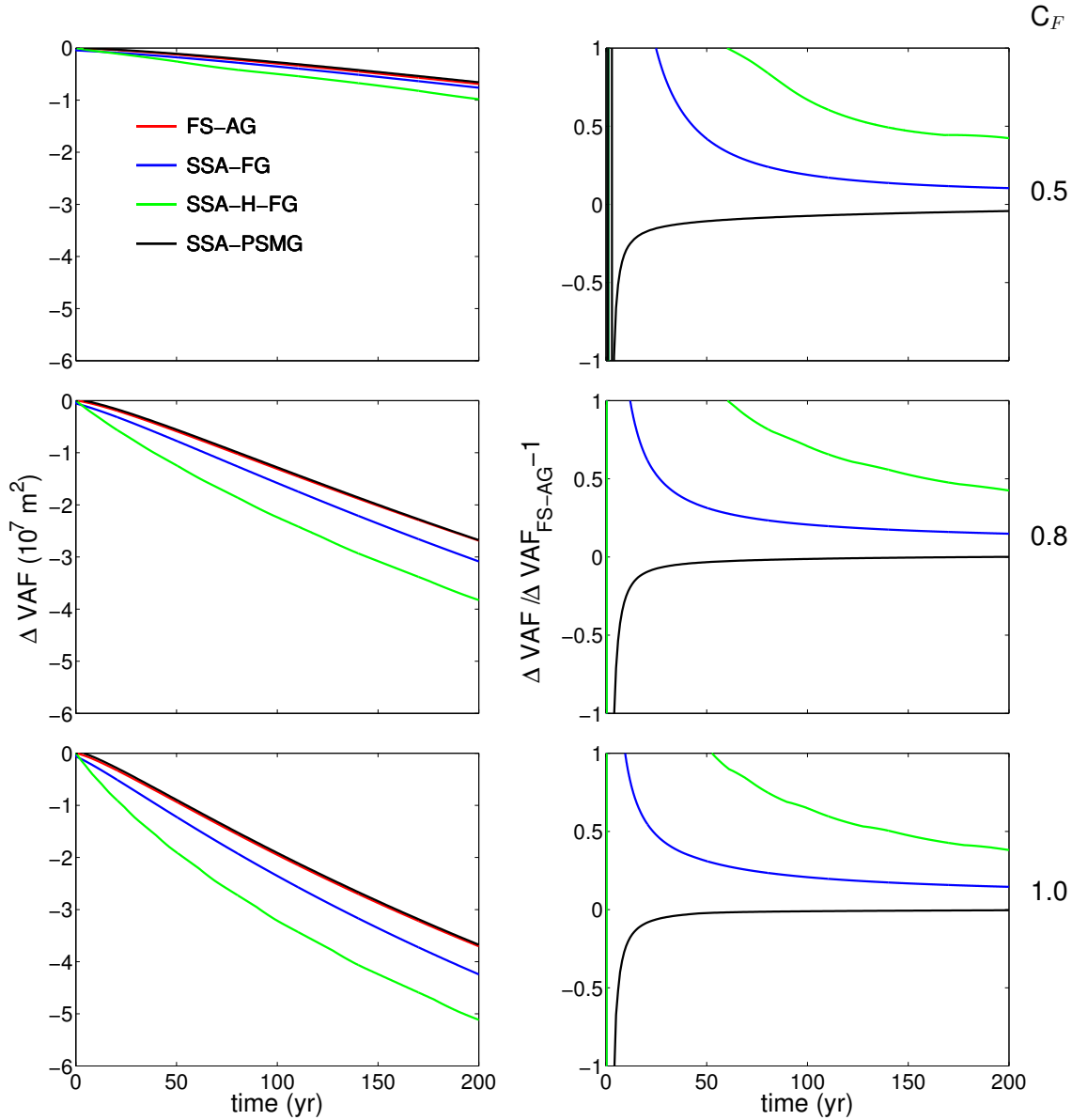


FIGURE 3.13 – Temporal evolution of the variation of Volume above Flotation ( $\Delta VAF$ ) for each model (left) and, expressed relative to **FS-AG** ( $\Delta VAF_{FS-AG}$ ) for the three remaining models (right), for the three butressing values (lines).

the boundary layer theory most probably overestimate ice discharge, with significant difference at the very beginning of the transient simulation. It also clearly shows that the rate of contribution to SLR significantly differs from one model to the other, even for a relatively simple and constrained experiment. When extrapolated to the current imbalance of the Antarctic ice sheet, this would have important consequences. According to *Rignot et al.* (2011a), the Antarctic ice sheet drained about 100 Gt/yr in 2000 with an increasing acceleration trend in mass loss of 14.5 Gt/yr<sup>2</sup>. Following that trend, the Antarctic ice sheet have contributed by 4.6 mm of SLR between 2000 and 2010. Assuming ice-sheet models were capable of describing exactly the ice

dynamical conditions in 2000, and also assuming the parameters forcing enhanced ice discharge to be properly known, we can compute a broad scale of uncertainties on predicted SLR arising from the use of the four different models. If we arbitrarily consider the **FS-AG model** as the one that would give the SLR prediction of 4.6 mm in 2010 after a given perturbation, the use of the other models would lead to an erroneous contribution to SLR between 3 mm (under estimation of 30 % by **SSA-PSMG**) and 18 mm (over estimation of 300 % by **SSA-H-FG**). Furthermore, as ice sheets are still in a transient phase (*i.e.*, perturbations are sustained through time) the discrepancy of the models would eventually increase with time integration. Of course, these assertions have to be moderated by the fact that the complexity of actual 3D geometries could mitigate the discrepancy between model results, which is the focus of future research.

### 3.3.5 Conclusions

We have computed the transient response of four flowline ice-sheet models to a reduction in the buttressing force exerted by an ice shelf onto the upstream grounded ice sheet. The intensity of buttressing perturbations was chosen in order to reproduce changes in geometry that are comparable to those observed on current ice sheets. Compared with MISMIP, we investigated the transient response in more detail and applied a perturbation that reflects direct mechanical forcing.

The dynamics (or momentum balance) are implemented in a different way in the different models (from SSA to the solution of the full-Stokes equations), while the models differ in their numerical treatment as well (finite difference and finite element). One of the models includes the heuristic rule of *Pollard and DeConto* (2009), *i.e.* the flux-thickness relation proposed by *Schoof* (2007) is imposed at the GL. All models have successfully participated in the MISMIP benchmark (*Pattyn et al.*, 2012), exhibiting unique stable positions on downward sloping beds, unstable GL positions on retrograde slopes and related hysteresis behaviour over an undulated bedrock.

Surprisingly, and despite the different physics and numerics implemented, all models broadly give similar results in terms of changes in surface geometry and migration of the GL. However, discrepancies remain in between models. Particularly, the **SSA-H-FG** model which directly implements the boundary layer theory exhibits faster grounding line retreat and larger surface thinning (Fig.3.9 and Fig.3.10). Once cumulated over years, this leads to significant differences in predicted discharge. Moreover, the prescription of flux at the GL introduces high frequency, large amplitude numerical noise deteriorating the surface change signal over decadal time scales. Finally, it seems that, at least in these experiments, the boundary layer theory overestimates the discharge during the transient evolution. As a consequence, models that prescribe the flux at the GL should be used with particular caution when dealing with small spatial and temporal scales.

Estimation of the contribution to SLR through numerical modelling still exhibits large uncertainties, with results from different models showing > 100 % spread on a decadal time-scale



and still around 40 % two hundred years after the initial change in buttressing. There may be a large uncertainty in models that are seeking to establish reliable projection of coming contribution of Antarctic ice sheet to SLR. Further model intercomparison must be pursued to better constrain the rate of discharge, and intercomparisons on specific Antarctic outlet glaciers should be encouraged in the near future.

### 3.4 Conclusion

La validité des deux hypothèses de base de l'approche de *Schoof* (2007) est analysée au cours de ce chapitre par une méthode d'intercomparaison par rapport au modèle full-Stokes et à d'autres modèles récemment développés.

Différentes expériences de sensibilité ont été mises en place pour évaluer l'impact des différents paramètres du modèle full-Stokes sur la contribution relative du glissement à l'écoulement total et évaluer la différence de réponse entre cette approche et l'approche de la couche limite. Lorsque l'écoulement de la calotte n'est plus assurée majoritairement par du glissement (contribution inférieure à 90%), la dynamique à la ligne d'échouage à l'état stationnaire de l'approche full-Stokes s'éloigne fortement du modèle basé sur la théorie de la couche limite (différence relative de flux à la ligne d'échouage supérieure à 20%). La relation de dépendance entre le rapport des flux et la contribution relative du glissement étant non linéaire, cette divergence devient notable relativement rapidement. Le glissement basal (glissement de la glace sur le socle et déformation du sédiment) semble être le mécanisme contrôlant majoritairement l'écoulement dans les parties rapides de la calotte tels que les fleuves de glace (*Rignot et al.*, 2011a), qui sont eux-mêmes les principaux contributeurs du flux à la ligne d'échouage. Ce dernier aspect justifie donc en partie l'hypothèse de Schoof supposant un glissement dominant. Cependant, le processus de glissement comporte des non linéarités ainsi que des effets de seuil (section 1.2.2), et demeure encore maintenant très mal contraint. Si de nombreuses études s'intéressent aux conditions basales de l'ensemble de la calotte influant sur le processus de glissement (*Pattyn*, 2010; *Llubes et al.*, 2006), aucune ne permet encore de déterminer quantitativement la contribution relative de chacun des deux mécanismes glissement/déformation sur l'écoulement de la calotte Antarctique.

Par ailleurs, une deuxième partie de ce chapitre a consisté à comparer le comportement transitoire des différents modèles en réponse à une perturbation mécanique (effet arc-boutant). Il apparait que ce dernier diffère fortement d'un modèle à l'autre et implique par conséquence une divergence importante dans la contribution à l'élévation du niveau des mers. On observe en effet une différence relative de  $\Delta VAF$  entre le modèle basé sur la couche limite et le modèle full-Stokes supérieure à 100% dans les 100 premières années. La prédiction de la migration de la ligne d'échouage implique l'intervention de processus hautement transitoires (tels que l'effet arc-boutant étudié) qui remettent en question l'hypothèse de la stationnarité utilisée par l'approche de la couche limite, pour des simulations prédictives à l'échelle du siècle. Utilisée le cas échéant, elle semble surestimer la contribution à l'élévation du niveau des mers par rapport aux autres modèles.

## Chapitre 4

# Application 3D au cas du glacier de l’Astrolabe

Au cours du chapitre précédent, nous avons présenté les différentes approches pour inclure la migration de la ligne d’échouage dans les modèles de ligne d’écoulement. Les expériences principales ont été exposées, et la divergence des modèles analysée. Ces expériences présentent certaines limites. Ce sont des expériences bidimensionnelles qui traitent de cas synthétiques, qui ne s’avèrent en particulier pas réalistes. Si elles nous permettent de tester simplement la robustesse des modèles d’écoulement, elles ne représentent pas la réalité des systèmes que constituent les glaciers émissaires dont on cherche à comprendre et prédire le comportement. De plus, le caractère bidimensionnel ne tient pas compte de la dimension transversale, limitant ainsi la prise en compte des effets des bords. La seule manière de les représenter dans des cas 2D est d’utiliser des paramétrisations physiques (*Gagliardini et al.*, 2010; *Goldberg et al.*, 2009) et de les ajouter dans les termes des forces de surface ou de volume. Ces techniques sont cependant qualitatives et ne constituent pas un formalisme rigoureux du processus physique de frottement. L’application 2D présente un fort intérêt pour le test des modèles et des processus en jeu, mais l’extension 3D de l’approche présentée dans le chapitre 2 apparaît également nécessaire. Ce chapitre expose donc une application 3D du modèle d’écoulement Elmer/Ice résolvant la migration de la ligne d’échouage, décrit pour la première fois dans l’étude de *Favier et al.* (2012). Cette application se base également sur des techniques d’inversion présentées dans *Gillet-Chaulet et al.* (2012). Le glacier d’étude choisi est le glacier de l’Astrolabe situé en Terre Adélie, dans la partie Est de l’Antarctique. Dans un premier temps, le contexte et les données acquises sur la zone du glacier émissaire sont décrits. Nous présentons ensuite les étapes de modélisation de la dynamique du glacier de l’Astrolabe. Enfin, une étude de la sensibilité de la dynamique d’écoulement à la description du socle sous-jacent à la glace est proposée.

## 4.1 Présentation de la zone d'étude : contexte et données

Le glacier de l'Astrolabe ( $140^{\circ} 00' E$ ,  $66^{\circ} 42' S$ ) se situe en Terre Adélie, en Antarctique de l'Est. Il se trouve à proximité de la base française Dumont d'Urville. Cette base doit son nom à l'explorateur E. Dumont d'Urville qui accoste sur ces terres en 1840 avec son équipage, à bord des corvettes de l'Astrolabe et de la Zélée. Le nom de chacune de ces dernières est donné aux glaciers environnants. La langue glaciaire qui domine l'île des Péterles, sur laquelle la base scientifique fut bâtie en 1957, est alors appelé l'Astrolabe. Le glacier de l'Astrolabe est un petit glacier, dont la partie flottante fait environ 7 km de large sur 15 km de long. Ce glacier prend naissance à l'intérieur de la calotte dans les terres de Wilkes. Comparé à ses voisins, les glaciers Cook et Mertz, son bassin versant est de petite taille ( $8000 \text{ km}^2$  pour l'Astrolabe contre  $83000 \text{ km}^2$  pour le Mertz (*Rignot, 2002*)). Sa contribution à l'élévation du niveau des mers est certainement négligeable par rapport aux deux autres, néanmoins ce glacier présente deux points d'intérêt. C'est un glacier émissaire comportant une partie flottante et une partie posée, avec une dynamique importante, matérialisée par une zone de glace rapide s'écoulant au travers d'une glace plus stagnante. Ce glacier dispose ainsi d'une dynamique représentative de celle caractérisant les grands glaciers émissaires de l'Antarctique. De plus, l'instrumentation est facilitée de par sa proximité à la base scientifique de Dumont d'Urville. Ces derniers aspects ont motivé l'initiation du projet *DACOTA* (*Dynamique Antarctique COtière Terre Adélie*, pour investiguer la dynamique de cette zone. Ce projet, financé pour 4 ans (2007 à 2011) a permis de développer l'instrumentation du glacier de l'Astrolabe par des installations et mesures pérennes ou temporaires, mises en place au cours des campagnes estivales. Des collaborations avec d'autres équipes scientifiques ont permis de compléter cette instrumentation. Cette partie présente les différents types de données disponibles concernant le glacier de l'Astrolabe, lesquelles seront largement utilisées dans le cadre des travaux de modélisation qui suivent.

### 4.1.1 Topographie du glacier émissaire

Dans un but de modéliser l'écoulement du système du glacier émissaire, la topographie représente la principale donnée d'entrée du modèle (partie 2.1).

#### 4.1.1.1 Topographie de la surface

La topographie de la surface glaciaire peut influencer l'écoulement de la glace. Par exemple, on a vu dans la section 2.1.2 que selon l'approche basée sur la SIA, les vitesses de surface sont directement dépendantes de la pente de la surface de glace.

L'élévation de la surface supérieure de la glace peut être obtenue selon différentes méthodes. On utilise dans notre étude deux principaux jeux de données issus de deux méthodes différentes : le jeu de *Bamber et al. (2001)* obtenu à partir d'altimétrie satellitaire et le jeu du projet SPIRIT (*Korona et al., 2009*), qui consiste en l'acquisition d'images stéréoscopiques HRS (Haute Résolution Spatiale) par le satellite Spot 5. Ces jeux seront dénommés respectivement MNT

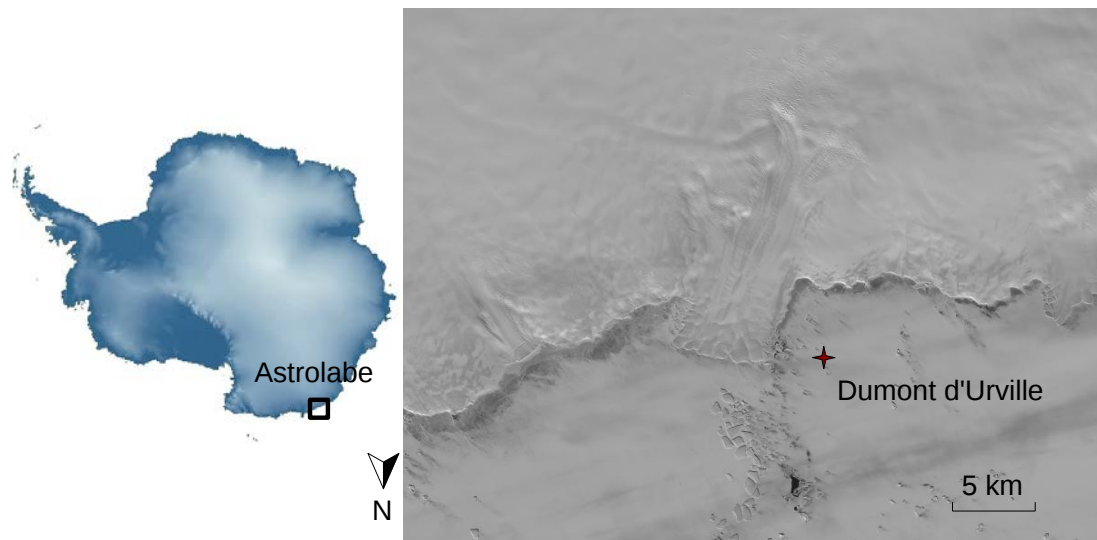


FIGURE 4.1 – Localisation de l'Astrolabe en Antarctique de l'Est. Le glacier se situe proche de la base Dumont d'Urville (*Image Aster, E. Berthier*).

(pour Modèle Numérique de Terrain) de Bamber et MNT Spirit. Le MNT de Bamber est de 1 km de résolution et couvre l'ensemble de l'Antarctique tandis que le MNT Spirit dispose d'une résolution très fine de 40 m, mais couvre des zones dont l'extension est limitée à la côte. Cette dernière restriction provient des exigences de la méthode, applicable uniquement sur des zones caractérisées par des signatures de surface (crevasses, front de vèlage). Le MNT Spirit (représenté sur la figure 4.2) décrit la surface de manière plus précise avec des pentes localement plus importantes, dont les valeurs sont lissées sur le MNT Bamber. Le MNT Spirit sera donc utilisé préférentiellement à celui de Bamber. Pour la partie plus à l'intérieur des terres, ce dernier complètera le jeu de données de Spirit.

#### 4.1.1.2 Topographie du socle

Le socle contrôle également la dynamique de la glace, de par sa nature, mais également de par sa topographie (chapitre 3). Une vallée canalise par exemple un écoulement, qui devient plus rapide lorsque la pente sur laquelle il repose s'accroît.

Les mesures radar décrites dans la section 1.1.3 permettent d'accéder aux informations du socle. On dispose de plusieurs jeux de données radar. Comme énoncé dans le paragraphe 1.1.3, une base de données de l'élévation du socle couvrant l'ensemble de l'Antarctique est accessible à tous (BEDMAP). Cette dernière cependant est à 5 km de résolution et ne décrit que grossièrement la topographie de la zone côtière (partie posée et ice shelf). Dans notre cas, la zone de la ligne d'échouage étant relativement restreinte (7 km de large et 20 km de long), on ne dispose donc que de très peu de points pour contraindre la topographie. On dispose par ailleurs d'autres données nous renseignant sur le socle. La première acquisition radar sur l'Astrolabe s'est faite au sol pendant la saison 2008-2009 et a permis d'instrumenter la zone à proximité

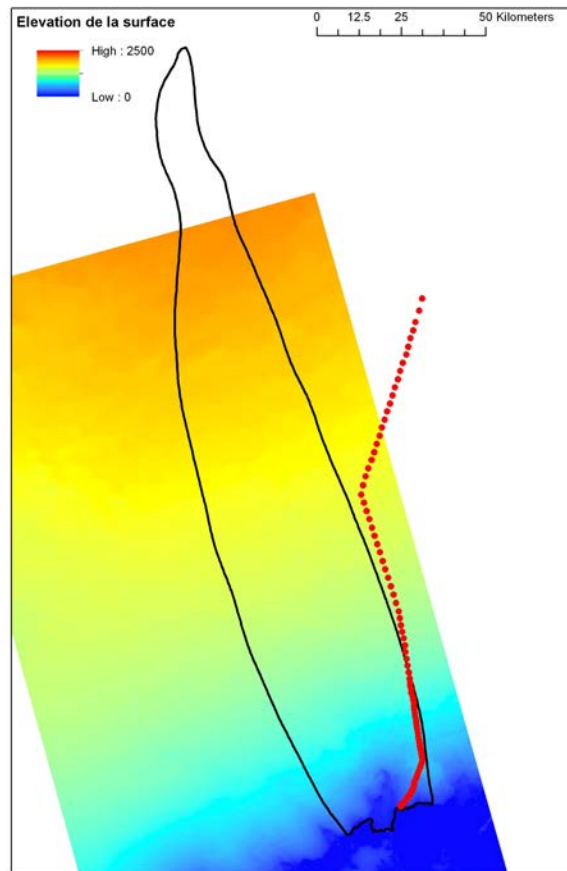


FIGURE 4.2 – Elévation de la surface de glace d’après le MNT Spirit (*Korona et al., 2009*) avec représentation du réseau de balises d’accumulation de l’observatoire GLACIOCLIM-SAMBA en rouge (paragraphe 4.1.2) et représentation du contour du bassin versant en noir (paragraphe 4.2.1.1).

de la ligne d’échouage. Quatre lignes radar ont ainsi été produites. Afin de couvrir la partie en amont, plusieurs campagnes de radar aéroporté ont suivi. Dans le cadre du programme Ice Bridge, l’Université du Texas, en collaboration avec le programme DACOTA, à partir d’un radar de fréquence 60 MHz à bord de l’avion DC-T3 a effectué de nombreuses lignes de vol au cours des saisons 2008-2009, 2009-2010, 2010-2011 et 2011-2012 (*Blankenship et al., 2011*). L’équipe du JPL a également réalisé une campagne aéroportée de mesures radar, de fréquence 2.5 Mhz pendant la saison 2008-2009. L’ensemble de ces mesures est représenté sur la figure 4.3. La résolution le long des lignes radar est d’environ 40 m, tandis que l’espace entre chacune d’elles est variable, de l’ordre du kilomètre. Les mesures radar permettent d’obtenir l’information sur l’épaisseur de glace (différence des temps d’arrivées de l’écho de surface et de l’écho du socle), mais pas directement de l’altitude du socle. On utilise par conséquent les altitudes interpolées

du MNT Spirit, auxquelles on soustrait les épaisseurs mesurées correspondantes.

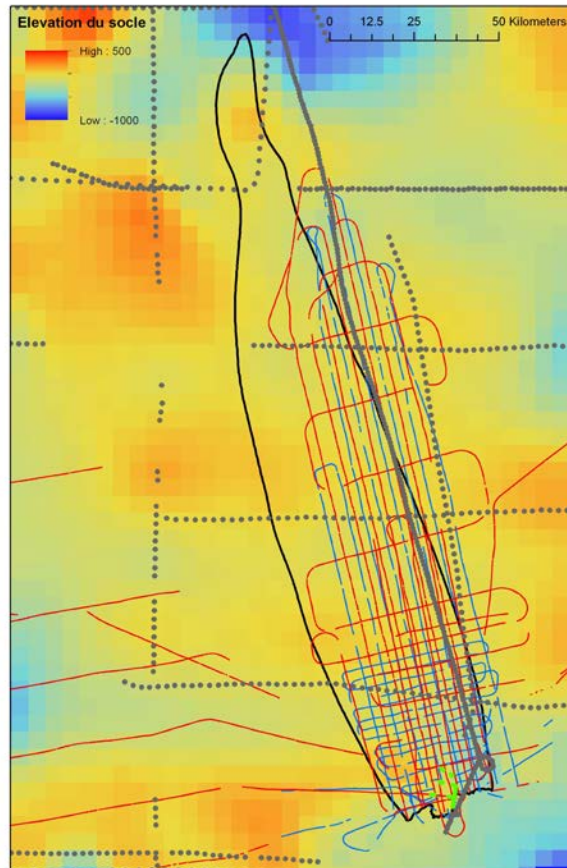


FIGURE 4.3 – Représentation de l'élevation du socle selon BEDMAP (*Lythe et al.*, 2001), et traces radar associées aux différentes campagnes de mesures : rouge pour les campagnes aéroportées de l'Université du Texas, bleue pour celles du JPL et verte pour les mesures au sol. Les points gris représentent le jeu de données original utilisé pour la construction de la base BEDMAP.

#### 4.1.1.3 Localisation de la ligne d'échouage

La ligne d'échouage délimitant deux types de conditions basales, et donc deux régimes d'écoulement bien distincts (paragraphe 2.1.1) est une donnée d'entrée primordiale pour initialiser le modèle d'écoulement. La localisation de la ligne d'échouage, c'est à dire de l'endroit précis où la glace se décolle du socle et se met à flotter, n'est pas triviale. *Drewry* (1980) essaie de déterminer cette limite par la méthode radar, sans succès. Sous la partie posée de la glace, le socle, très certainement composé de sédiments gorgés d'eau, renvoie un écho très proche de celui constituant l'interface glace/eau ne permettant pas de distinguer l'un de l'autre. Sous l'effet des marées (et forçages océaniques/atmosphériques), l'ice shelf subit des mouvements verticaux, atténués et

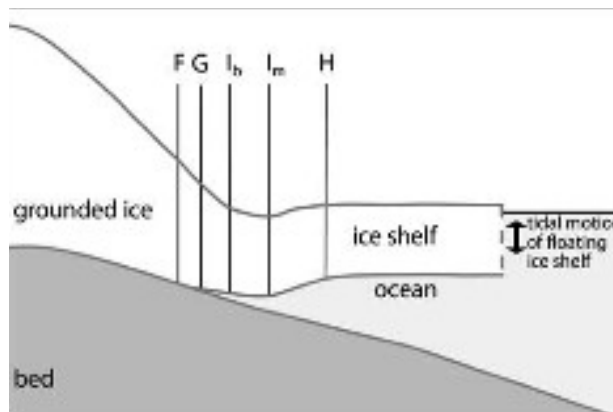


FIGURE 4.4 – Schéma de représentation de la 'zone d'échouage' : G représente la ligne d'échouage, F, le point le plus continental subissant un mouvement vertical (flexure), H, le point le plus continental à l'équilibre hydrostatique.  $I_b$  et  $I_m$  sont les points correspondant respectivement à la pente locale maximale et au minimum d'élévation de surface (*Fricker and Padman, 2006*).

déphasés par la réponse visco-élastique de la glace. Ainsi, le point de décollement de la ligne d'échouage migre en fonction des cycles des marées, et ne reste pas fixe. Une limite supérieure de cette ligne d'échouage peut être déterminée, en considérant le point le plus continental, au niveau duquel un mouvement vertical peut encore être enregistré (point F sur le schéma 4.4). Par ailleurs, si la glace devient physiquement flottante, elle ne respecte l'équilibre hydrostatique qu'à partir du moment où elle devient suffisamment libre mécaniquement, et ne ressent plus l'effet des bords (point H sur le schéma 4.4). Une 'zone d'échouage', incluant la ligne d'échouage (point G sur le schéma) peut donc être définie : elle est délimitée par le point le plus continental, subissant une flexure F et le point distal à l'équilibre hydrostatique H. La distance entre le point F et le point H dépend de la longueur d'onde de flexure (*Vaughan, 1995*), dépendant elle-même de l'épaisseur, de la rigidité de la glace et du rapport de densité entre la glace de l'ice shelf et l'eau de mer.

Historiquement, la méthode pour localiser la ligne d'échouage consiste à mesurer les mouvements verticaux de la glace et déterminer l'endroit où ces derniers s'annulent. Les instruments de mesure pour détecter ce mouvement vertical se sont progressivement améliorés, passant de l'instrument mesurant l'inclinaison *in-situ* (*Stephenson et al., 1979*) à la méthode InSaR, déterminant la vitesse verticale avec une précision millimétrique (*Rignot et al., 2011c*). L'utilisation de GPS disposés en différents points du glacier permet également d'accéder aux variations d'altitude de surface au cours d'un cycle de marée (*Vaughan, 1994, 1995*). D'autres études utilisent la méthode statique consistant à repérer la signature de surface de la ligne d'échouage : à l'aplomb du décollement, la transition de la contrainte de cisaillement implique un changement abrupt de pente de la surface suivie d'un minimum local d'élévation (point  $I_b$  et  $I_m$  respectivement sur la figure 4.4). Le point  $I_b$  correspond à la ligne d'échouage selon *Fricker and Padman (2006)* et *Bindschadler et al. (2011)*.

En ce qui concerne l'Astrolabe, nous disposons de données issues de chacune des deux mé-

thodes, dynamique et statique. Des mesures de déplacements verticaux ont été effectuées au cours d'un cycle entier de marée le long de 3 profils situés sur la zone de transition (figure 4.5). A partir de ces dernières, 5 points de contrôle délimitant la glace posée au socle de celle subissant les mouvements de marées ont été déterminés (LeMeur *et al.*, 2012). La méthode de détermination des points de contrôle à l'intérieur du fjord est illustrée sur la figure 4.5.

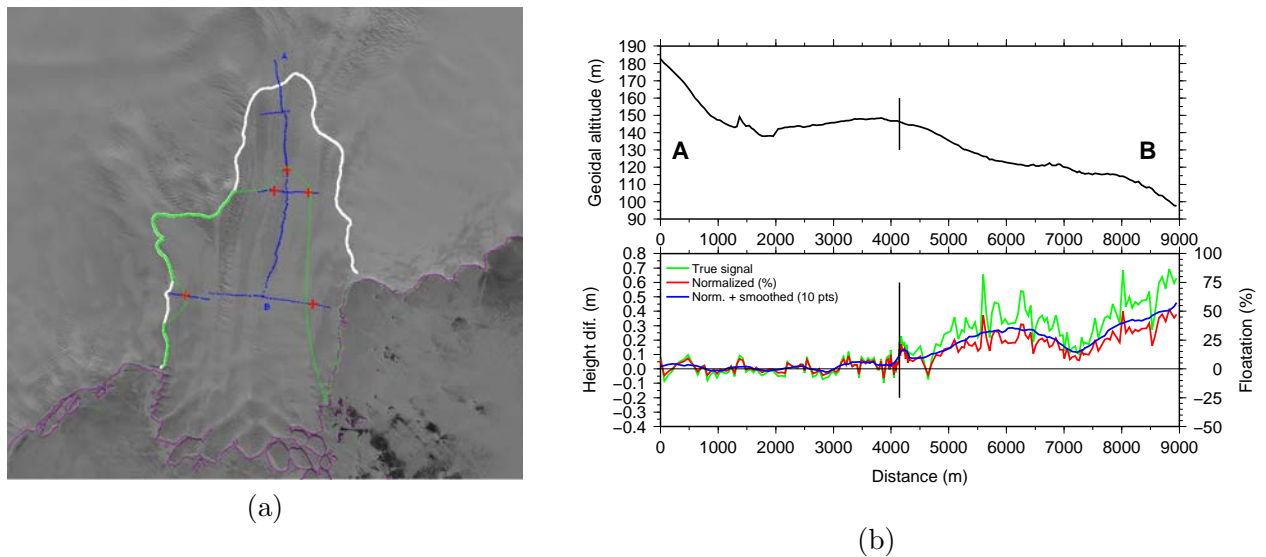


FIGURE 4.5 – Représentation de la méthode dynamique *in situ* pour délimiter la ligne d'échouage de l'Astrolabe : (a) sur fond d'image Spot (Korona *et al.*, 2009), représentation des profils GPS en bleu, et des points de contrôle déduits de la méthode, en rouge. La ligne d'échouage de Bindschadler *et al.* (2011) est en blanc. En vert est reportée la ligne d'échouage prévisionnelle, plus cohérente avec l'ensemble des données (voir texte) (b) exemple de déduction du point de contrôle sur le profil AB à partir de la mesure de différence d'élévation entre les deux extremas de marées le long de ce profil (en vert). Cette différence est normalisée par rapport à l'amplitude de marée prédite par un modèle de marée (courtesy of B. Legrésy) au moment de la mesure (en rouge, exprimée en %) (LeMeur *et al.*, 2012)

Ces points de contrôle sont confrontés à la ligne d'échouage obtenue par Bindschadler *et al.* (2011). On note que au niveau du fjord, cette dernière est située 3-4 km plus en amont que notre point de contrôle du profil AB. Cette zone d'altitude élevée (700 m) correspond à un plateau qui domine la dépression topographique, dans laquelle les profils se situent. Il apparait donc fort peu probable que la glace se décolle à cet endroit car cela impliquerait une épaisseur de glace anormalement élevée (de plus de 5000 m!). Certaines études remettent également en question la variation brutale de pente comme signature de surface de la ligne d'échouage (Fricker and Padman, 2006; Fricker *et al.*, 2009; Brunt *et al.*, 2011). Dans ces dernières, la variation brutale de pente se situe souvent plusieurs kilomètres en amont de la réelle ligne d'échouage comme c'est le cas ici. Par ailleurs, un forage a été effectué à proximité du point du profil situé le plus proche de la mer et a atteint le socle. On a donc la certitude que la glace sur la rive gauche de l'ice shelf est de la glace posée. On déduit donc finalement une ligne d'échouage prévisionnelle



pour l'Astrolabe comme un compromis entre les points de contrôle issus de l'étude de *LeMeur et al.* (2012) et les points de *Bindschadler et al.* (2011) (représentée en vert sur la figure 4.5). La ligne d'échouage de *Bindschadler et al.* (2011) sur la rive droite est conservée, tandis qu'elle est avancée pour l'autre partie, de telle sorte que toute la rive gauche repose sur du socle.

### 4.1.2 Accumulation

Le bilan de masse apparaît dans l'équation de transport de la surface supérieure (équation (2.12)) et participe directement à l'évolution temporelle de la géométrie du glacier. Il représente l'apport de masse au système glaciaire et contrôle de manière indirecte la dynamique de la glace. Il apparaît donc important de le contraindre. Il existe plusieurs bases de données de l'accumulation de surface sur l'ensemble de l'Antarctique (*Vaughan et al.*, 1999; *Arthern et al.*, 2006), mais la résolution de ces dernières ne descend pas en-dessous de 10 km. Un réseau important de balises d'accumulation a été développé en Terre Adélie dans le cadre de l'observatoire GLACIOCLIM-SAMBA. Une ligne de balises de 154 km de long, suivant la trajectoire du raid logistique reliant la côte à l'intérieur des terres (Dôme Concordia) est mesurée chaque année depuis 2004 (voir figure 4.2 pour situation). Le réseau, de par sa proximité au bassin versant apparaît être bien représentatif des précipitations caractérisant le glacier de l'Astrolabe. De plus, ces mesures d'accumulation, comparées à celles obtenues à partir de carottes de glace semblent être représentatives d'une spatialisation du bilan de masse sur le long terme, sur des échelles temporelles supérieures à la décennie (voir figure 4.6 tirée de *Agosta et al.* (2012)). Superposé à la forte variabilité spatiale à petite échelle (supposée provenir de l'interaction du vent avec la topographie), on distingue à l'échelle mésoscopique deux tendances principales : sur les 40 premiers kilomètres, l'accumulation augmente fortement suite à la décompression adiabatique des masses d'air venant butter contre le relief, tandis que plus loin de la côte, sur le plateau, l'accumulation diminue suite à l'assèchement des masses d'air. Afin de tenir compte de cette double tendance pour la spatialisation du bilan de masse dans le modèle d'écoulement, on approxime la relation entre l'accumulation et l'altitude par deux fonctions linéaires :

$$\begin{cases} a_s = -0.1095 + 0.565110^{-3}z & \text{pour } 0 < z < 675 \text{ m} \\ a_s = 0.6053 - 0.168610^{-3}z & \text{pour } z > 675 \text{ m} \end{cases} \quad (4.1)$$

On utilise la dépendance de l'accumulation à l'altitude plutôt que celle à la distance à la côte (voir figure 4.6) car c'est la seule variable à laquelle on a accès pour la modélisation, et elle se trouve être fortement corrélée à la distance à la côte. Il est important de noter que pour le moment, aucune analyse d'erreurs correspondant aux régressions n'a été entreprise car nous verrons par la suite que les études de modélisation concernant l'Astrolabe faites dans le cadre de cette thèse ne cherchent pas à reproduire la réalité exacte. Nous nous permettons donc de nous affranchir momentanément des incertitudes liées à l'utilisation de ces deux régressions linéaires pour l'accumulation.

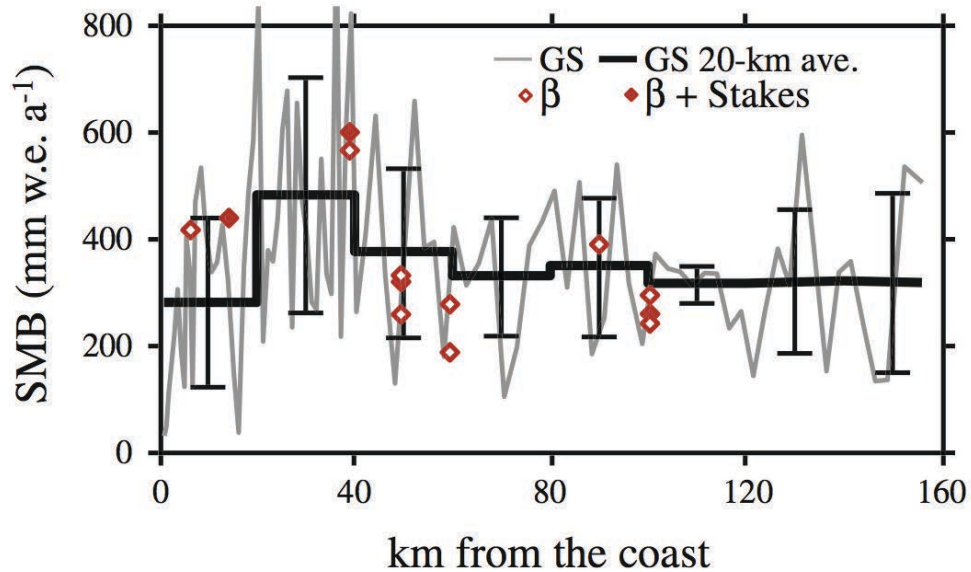


FIGURE 4.6 – Moyenne des mesures du Bilan de Masse de Surface effectuées à partir d'émergence de balises le long de la ligne du raid logistique sur la période 2004-2008 (ligne grise). La moyenne spatiale sur 20 km est représentée en noire, et les barres verticales représentent l'écart type pour chacune des valeurs moyennées sur 20 km. Les diamants rouges correspondent à des mesures d'accumulations à partir de détections d'horizons radioactifs  $\beta$  complétés (ou pas) par des mesures de balises (Agosta et al., 2012).

### 4.1.3 Dynamique de surface de la glace

Nous disposons de deux types de mesures pour représenter l'écoulement en surface de la glace. La première nous permet d'obtenir des séries temporelles de vitesses lagrangiennes : l'instrument de mesure se déplace à la surface du glacier. La figure 4.7 illustre ce genre de dispositif. La méthode consiste à déposer un GPS sur la surface du glacier, ancrée à cette dernière de manière à lui être solidaire. L'instrument relève ensuite la position à chaque pas de temps prédéfini, qui sont enregistrés successivement. On obtient ainsi la vitesse lagrangienne de la glace. Cette technique nécessite l'approvisionnement d'énergie par des batteries, dont la recharge s'effectue par panneau solaire (effectifs uniquement quelques mois de l'année) ou éolienne. On représente sur la figure 4.8(a) la disposition de ces balises au sein d'un réseau, lequel a été mis en place dans le cadre du programme DACOTA. Une série temporelle associée à l'une de ces balises est présentée sur la figure 4.8(b). On remarque un déplacement cohérent figurant des lignes de courant plus ou moins parallèles avec cependant un gradient entre l'axe du glacier (GPS 1 à 4) et les rives (GPS 5 à 8). D'après la figure 4.8(b), aucun signal saisonnier significatif ne semble se dessiner à ce stade de l'analyse.

Le deuxième type de mesure nous permet d'obtenir une image instantanée de la spatialisation de la dynamique en surface. C'est la méthode d'interférométrie radar qui a été présentée dans le chapitre 1. Les données dont on dispose pour la zone de l'Astrolabe sont issues de l'étude de Rignot et al. (2011a). Elles sont représentées sur la figure 4.9. La résolution de ce jeu de données



FIGURE 4.7 – Photographie d'une balise GPS implantée sur la partie posée du glacier de l'Astrolabe. On distingue l'antenne GPS fixée en haut du mât en métal, l'éolienne blanche sur le devant. Le panneau solaire est fixé sur deux poteaux, à gauche du mât. La valise noire placée au pied du mât contient la batterie et le récepteur GPS (*Photo : E. LeMeur*)

est très fine de l'ordre de 900 m. On distingue clairement une zone de glace rapide sur la partie côtière du glacier, où les vitesses atteignent des valeurs de l'ordre de 800 à 900 m an<sup>-1</sup>. Cette glace s'écoule en direction de la mer et traverse une zone de glace très lente, où les vitesses sont presque nulles (base de Cap Prud'Homme).

## 4.2 Modélisation du glacier de l'Astrolabe

Cette partie explicite les différentes étapes permettant d'intégrer l'ensemble des données exposées précédemment afin de modéliser l'écoulement de glace de l'Astrolabe. Il s'agit tout d'abord de construire le maillage 3D pavant l'ensemble du glacier émissaire, puis d'initialiser les différents paramètres intervenant dans les équations de base du problème mécanique. Enfin, l'évolution temporelle du glacier peut être modélisée.

### 4.2.1 Construction du maillage 3D

On délimite dans un premier temps l'extension spatiale de l'entité mécanique du glacier émissaire, afin de créer le maillage horizontal. Ensuite, le maillage est extrudé dans la verticale entre les surfaces supérieure et inférieure du glacier.

#### 4.2.1.1 Détermination du bassin versant

Tout d'abord, il s'agit de déterminer le contour du bassin versant. Pour délimiter ce dernier sur la partie posée, on construit de manière itérative la trajectoire suivie par chacune des deux particules de glace atteignant le portail glaciaire. Normalement celui-ci est défini par les deux

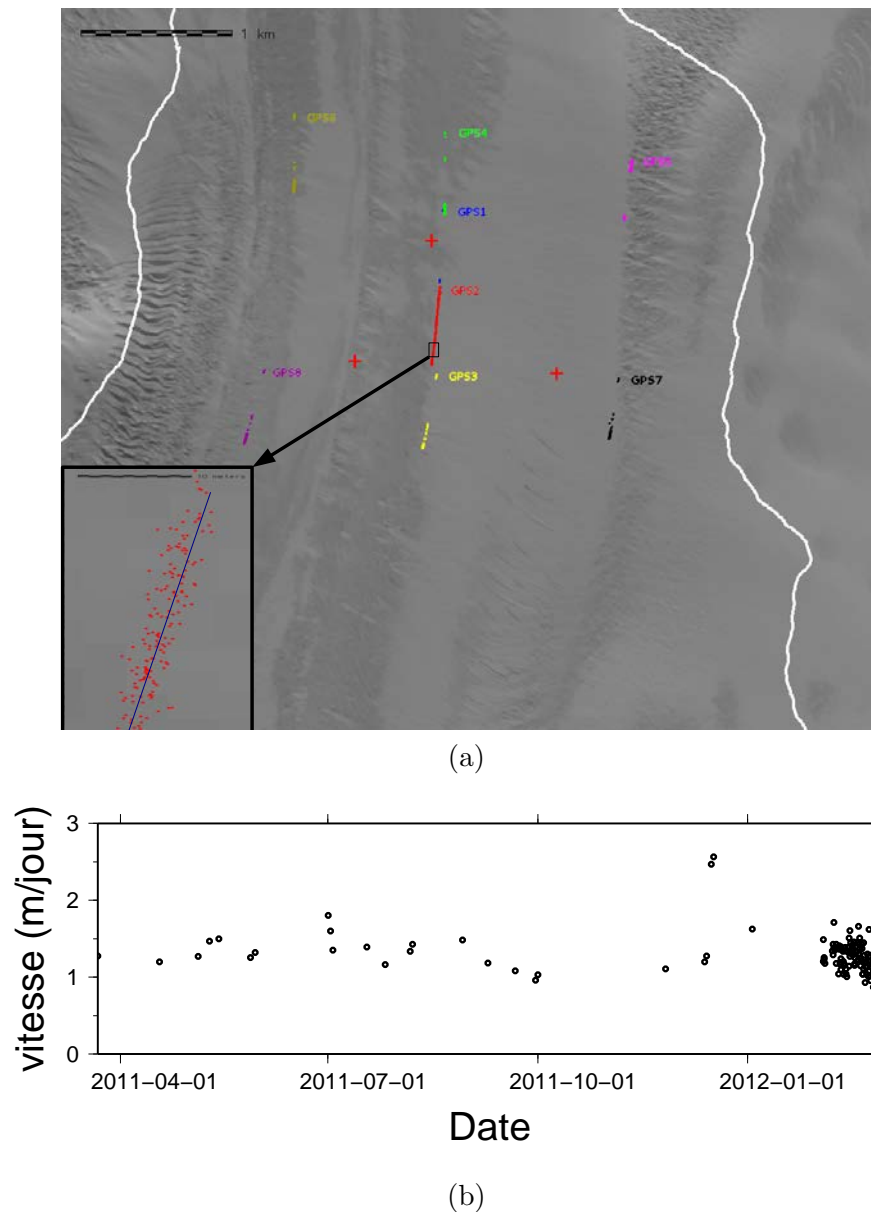


FIGURE 4.8 – (a) Ensemble des points mesurés par le réseau GPS permanent de l'Astrolabe entre Janvier 2011 et Avril 2012. Les labels GPS1 à GPS8 représentent la position initiale des stations GPS, placées de telle sorte à échantillonner à la fois l'amont et l'aval de la position supposée de la ligne d'échouage. L'encart montre la dispersion des données en grande partie due à une incertitude de l'ordre de 2 à 3 m dans le positionnement GPS absolu lorsque la solution différentielle n'est pas implémentée (en cours d'analyse). (b) Vitesse de déplacement du GPS 6 sur 14 mois. Le nombre réduit de points vient d'un filtrage ne gardant que les points qui (i) sont suffisamment proches de la droite de régression représentant l'azimut du déplacement (voir encart figure (a)) et (ii) ceux dont le calcul de vitesse s'est fait sur une durée d'au moins 5 jours.



FIGURE 4.9 – Vitesses de surface mesurées par interférométrie radar dans la région de l'Astrolabe (*Rignot et al., 2011a*).

extrémités de l'ice shelf, là où la ligne d'échouage intersecte la ligne de côte. Afin d'être certain de prendre en compte l'intégralité de l'entité mécanique du glacier, on choisit ces deux points sur la côte de part et d'autres du fjord. La reconstruction des trajectoires suppose un écoulement parallèle à la direction de plus grande pente de la surface de glace. On utilise pour cela le MNT de surface Spirit et lorsque ce dernier n'est plus disponible, le MNT de Bamber (figure 4.2). A chaque itération, la direction de plus grande pente est déduite de la fonction biquadratique qui représente au mieux (au sens des moindres carrés) l'élévation de la surface dans un rayon de 5 km autour du point considéré. Le contour de la partie flottante est déterminé à partir de l'image de Spot5 et la ligne de côte est déduite de *Bohlander and Scambos (2008)*. Le contour final est représenté sur la figure 4.2.

#### 4.2.1.2 Maillage 2D

On pave ensuite l’espace à l’aide d’un maillage triangulaire non structuré et raffiné sur des zones préférentielles au niveau desquelles les processus dynamiques majeurs interviennent. L’adaptation de maillage est une technique commune largement utilisée en simulation numérique, car elle diminue le coût de calcul tout en conservant la robustesse des résultats (*Frey and Alauzet, 2005; Nikiforakis, 2009*). En effet, nous avons vu au cours du chapitre 3 qu’un raffinement autour de la ligne d’échouage est nécessaire pour capturer l’essentiel des processus physiques, permettre la migration de la ligne d’échouage (*Durand et al., 2009a*) et assurer la robustesse du modèle (*Vieli and Payne, 2005*). On utilise ici l’outil YAMS, en libre accès, développé par *Frey and Alauzet (2005)*. Dans cette méthode, la taille de grille est calculée de manière à distribuer équitablement l’erreur d’interpolation induite par le maillage. Cette erreur d’interpolation peut être bornée en fonction de la courbure du champ que l’on cherche à modéliser, à savoir la vitesse de surface. Par conséquent, le tenseur de métrique anisotrope caractérisant la taille des mailles dans le plan horizontal est construit à partir de la matrice Hessienne des vitesses de surface observées (*Rignot et al., 2011a*). Afin de rajouter une dépendance de la taille de grille à la distance à la ligne d’échouage, on définit une taille de maille maximale admissible en fonction d’une certaine distance à la ligne d’échouage. Le maillage résultant sur la partie côtière est représenté sur la figure 4.10. On remarque des éléments relativement grands (de l’ordre de 1.5 km de côté) sur la partie la plus continentale, tandis que le maillage se raffine progressivement lorsque l’on se déplace vers la ligne d’échouage et vers des zones à forte courbure de vitesse (taille de maille de 100 m). La ligne d’échouage utilisée ici est décrite dans le paragraphe 4.1.1.3 précédent. On obtient finalement un maillage 2D comportant 15230 noeuds.

#### 4.2.1.3 Description de la surface inférieure

Pour effectuer l’extrusion verticale du maillage plan, il nous faut déterminer l’élévation de la surface supérieure et celle de la surface inférieure sur chacun des noeuds de ce dernier. Ces données seront dénommées respectivement DESCRIPTION de la surface supérieure de glace et DESCRIPTION de la surface inférieure.

Concernant la surface supérieure, le jeu de données à disposition est d’une résolution supérieure à la résolution de notre maillage, la DESCRIPTION de la surface supérieure est donc un sous échantillonnage du MNT Spirit. La surface inférieure du glacier est plus complexe à construire. Tout d’abord, la nature de cette dernière est de deux types : soit elle repose sur le socle, et dans ce cas son élévation est similaire à celle du socle, soit elle est en contact avec l’eau (surface inférieure de l’ice shelf) et dans ce cas, la colonne de glace est proche de l’équilibre hydrostatique. Il s’agit donc de traiter de manière différente les deux zones situées de part et d’autres de la ligne d’échouage. Par ailleurs, si l’élévation de la surface inférieure de l’ice shelf peut être déduite de l’élévation de la surface supérieure et de l’épaisseur autorisant la flottaison de la glace, l’élévation de la surface inférieure pour la partie posée repose sur la connaissance de



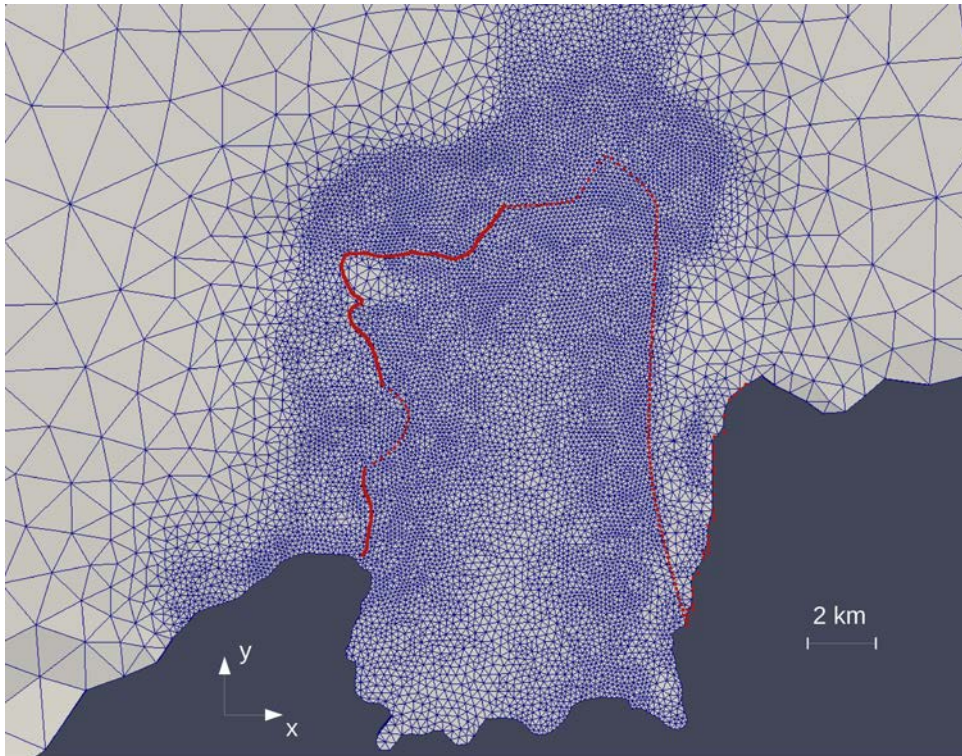


FIGURE 4.10 – Maillage 2D de l'Astrolabe sur la partie côtière. La taille minimale des éléments est de 100 m, celle maximale de 1.5 km. La ligne d'échouage est représentée en rouge.

l'altitude du socle. Les données disponibles nous renseignant sur le socle sont décrites dans le paragraphe 4.1.1.2.

La base de données BEDMAP est la seule base de données d'élévation du socle accessible à l'ensemble de la communauté glaciologique, elle est donc couramment utilisée par les modélisateurs d'écoulement. Cependant, la taille de la grille BEDMAP est de 5 km, cette résolution étant largement plus grossière que la résolution de notre maillage (la maille la plus fine est de 100 m de coté), on s'attend à ce que l'interpolation de cette base de données sur les noeuds du maillage non structuré crée un lissage important des données d'élévation du socle. De plus, une étape d'interpolation des données originales a été nécessaire pour la construction de cette grille régulière, ce qui implique une double interpolation pour la création de la DESCRIPTION de la surface inférieure (non structurée) que l'on recherche. Cette double interpolation conduira vraisemblablement à une perte d'information puisque les données originales que sont les données radar ont été largement lissées par la première opération d'interpolation. Enfin, sur cette zone particulière de l'Astrolabe, les données originales servant à la construction de la base de BEDMAP sont très peu nombreuses (voir figure 4.3), ce qui rend cette base de donnée relativement incertaine quant à la représentativité du socle sous-jacent. Il existe par ailleurs pour l'Astrolabe un autre jeu de données relativement conséquent, représenté par l'ensemble des lignes radar acquises lors de la collaboration franco-américaine de ces dernières années. On dispose d'un échantillonnage important du socle le long de ces lignes puisque 40 m sépare deux mesures consécutives tan-

dis que l’échantillonnage de la direction transversale, dépendant de la distance entre les lignes, est moindre (environ 1 km). Ces données étant disponibles, on peut effectuer une interpolation directe de celles-ci sur la maillage non structuré, permettant de conserver le maximum d’information.

On se propose ici de comparer deux méthodes de construction de la DESCRIPTION de la surface inférieure de la partie posée (correspondant également à la DESCRIPTION du socle). La première, la plus directe et naturelle, consiste à interpoler directement les données radar sur les noeuds du maillage, comme explicitée précédemment. Cela présuppose l’accès aux données radar. On appelle cette méthode la méthode *directe*. La seconde, imitant l’utilisation de la grille BEDMAP, consiste à effectuer une double interpolation : on interpole tout d’abord les données radar de l’Astrolabe sur une grille à 5 km (que l’on dénomme grille intermédiaire), puis on réinterpole les valeurs de cette grille sur les noeuds du maillage. Celle-ci sera dénommée la méthode *indirecte*. On n’utilise pas directement les données d’élévation ayant servi à construire la base BEDMAP car elles sont peu nombreuses dans la région de l’Astrolabe (voir figure 4.3). De plus, dans un soucis de comparaison, on cherche à utiliser les mêmes données originales pour les deux méthodes *directe* et *indirecte*. La méthode d’interpolation utilisée est la méthode des voisins naturels (Natural Neighbour Interpolation) initialement introduite par *Sibson* (1981). Cette méthode ne nécessite pas de spécification de paramètres a priori et n’a donc pas de biais associé. De plus, elle est particulièrement bien adaptée à l’irrégularité de la distribution spatiale des points caractérisant les données radar. Les résultats de ces deux méthodes sont présentés sur la figure 4.11. On remarque sur la figure 4.11 (a) que les principales formes topographiques sont reproduites par les deux méthodes : par exemple, les plateaux à hauteur du niveau marin ainsi que les larges collines culminant à 700 m d’altitude ou les dépressions locales passant sous le niveau des mers. En revanche, il apparaît clairement que la topographie obtenue à partir de la méthode *indirecte* est davantage lissée, supprimant les formes locales à plus petites échelles spatiales que l’on distingue à partir de la méthode *directe*. En particulier, à proximité de la ligne d’échouage, les dépressions assez profondes et étroites qui semblent résulter en un fjord sous la partie flottante sont très peu discernables sur la méthode *indirecte*. Dans la zone côtière, la différence relative de l’épaisseur déduite des deux méthodes atteint 100% de différence par endroits (figure 4.11(b)). Ceci mène à des différences importantes dans les valeurs de pente, ainsi que dans la direction de plus grande pente, laquelle peut être opposée entre les deux méthodes.

Par ailleurs, les élévations provenant de la méthode *indirecte* dépendent étroitement de la position de la grille intermédiaire. En particulier, cette méthode, appliquée sur une grille décalée de 2.5 km, conduit à des résultats sensiblement différents, notamment dans la zone à proximité du fjord. Cette échelle spatiale de 2.5 km représente en effet l’échelle spatiale caractéristique de certaines structures de l’Astrolabe, telle que la configuration du fjord.

Comme évoqué au cours du chapitre 3, la topographie du socle apparaît être l’un des facteurs majeurs contrôlant la réponse dynamique d’un système glaciaire (*Schoof*, 2007). On présume



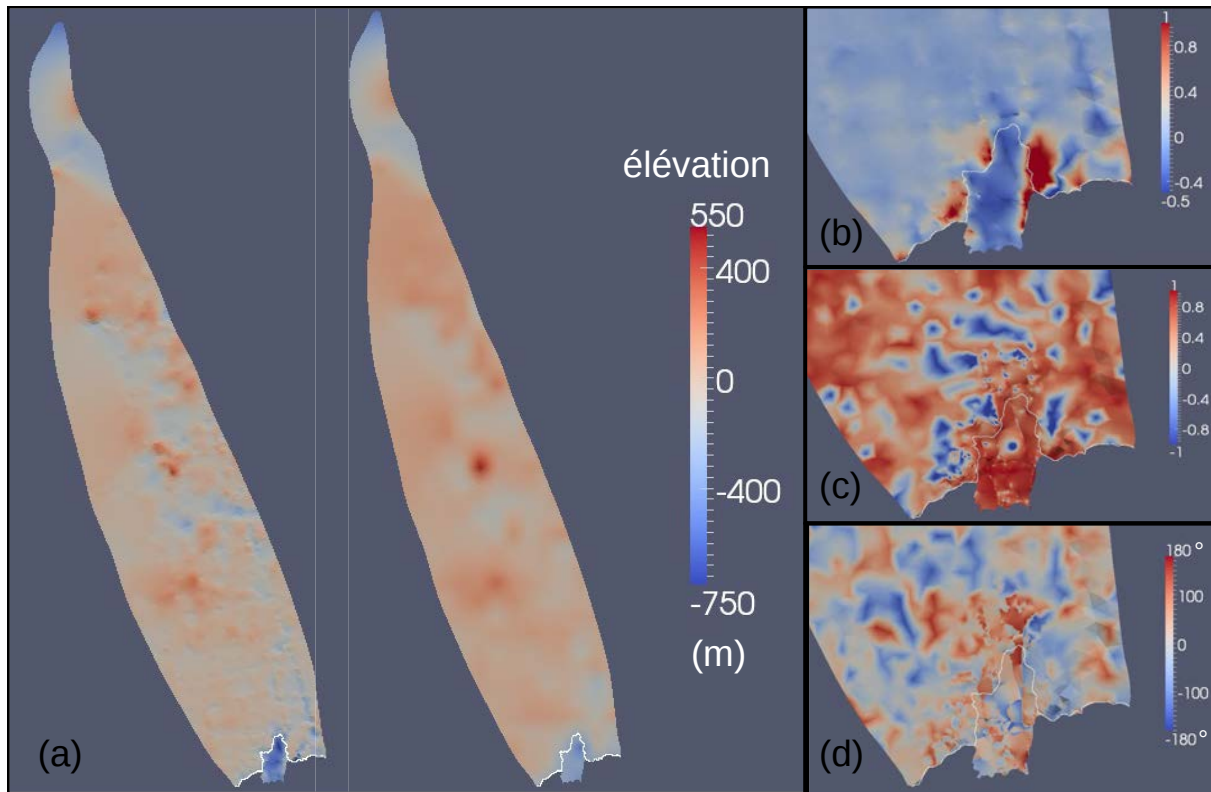


FIGURE 4.11 – (a) Elévation du socle sur les noeuds du maillage 2D, interpolé à partir de la méthode directe (gauche) et de la méthode indirecte (droite). Différence relative entre les deux méthodes de l'épaisseur de glace (b), de l'amplitude de la pente (c). (d) Différence d'azimut de la pente.

donc une forte dépendance des résultats du modèle d'écoulement du glacier de l'Astrolabe à la représentation du socle que l'on utilise. On s'intéresse par la suite (section 4.3) à la sensibilité du modèle d'écoulement Elmer/Ice à cette représentation du socle, et plus particulièrement à l'impact de l'utilisation de la méthode *indirecte* sur l'écoulement. Il nous faut par conséquent construire un état de *référence*, caractérisé par un socle 'parfait' très bien décrit, afin de disposer d'un référentiel de comparaison. On décrit dans ce qui suit la modélisation de ce cas de *référence*.

#### 4.2.1.4 Maillage 3D de *référence*

La modélisation de l'Astrolabe que l'on présente dans ce chapitre ne correspond pas tout à fait au cas le plus réaliste du glacier. La géométrie que l'on construit, surnommée géométrie de *référence* s'inspire en grande partie des données (paragraphe 4.1.1.3 et 4.2.1.3), mais requiert également un ajout artificiel d'informations, là où les données manquent. La nouvelle DESCRIPTION de la surface inférieure pour les noeuds posés (ou DESCRIPTION du socle) est construite comme suit : on crée tout d'abord une grille régulière d'élévation à 1 km de résolution à partir de l'interpolation directe des données radar. Ensuite, un signal bruité est superposé, afin d'atteindre une résolution de 62.5 m. Ce bruit correspond en fait à une méthode itérative consis-

tant à déplacer de manière récursive le milieu de chaque segment de droite en lui imposant une dimension fractal de 1.3 (random mid-point displacement). Pour la DESCRIPTION de la surface inférieure de l'ice shelf, on déduit l'élévation  $z_b$  à partir de l'élévation de surface  $z_s$  et de l'équilibre hydrostatique :

$$z_b = \frac{\ell_w \rho_w - z_s \rho_i}{\rho_w - \rho_i} \quad (4.2)$$

où on impose  $\ell_w = 0$ ,  $\rho_i = 900 \text{ kg m}^{-3}$  et  $\rho_w = 1028 \text{ kg m}^{-3}$ .

On procède finalement à l'extrusion verticale du maillage plan, les surfaces horizontales supérieure et inférieure étant définies par les DESCRIPTIONS explicitées précédemment. Le maillage obtenu, constitué de 8 couches est représenté sur la figure 4.12. On obtient finalement un maillage composé de 121 840 noeuds au total. On remarque que la surface inférieure sous l'ice shelf apparaît relativement bruitée. L'expression 4.2 amplifie en effet le signal de l'élévation de surface à courte longueur d'onde (en plus de l'effet dû à la résolution qui est très fine sur l'ice shelf).

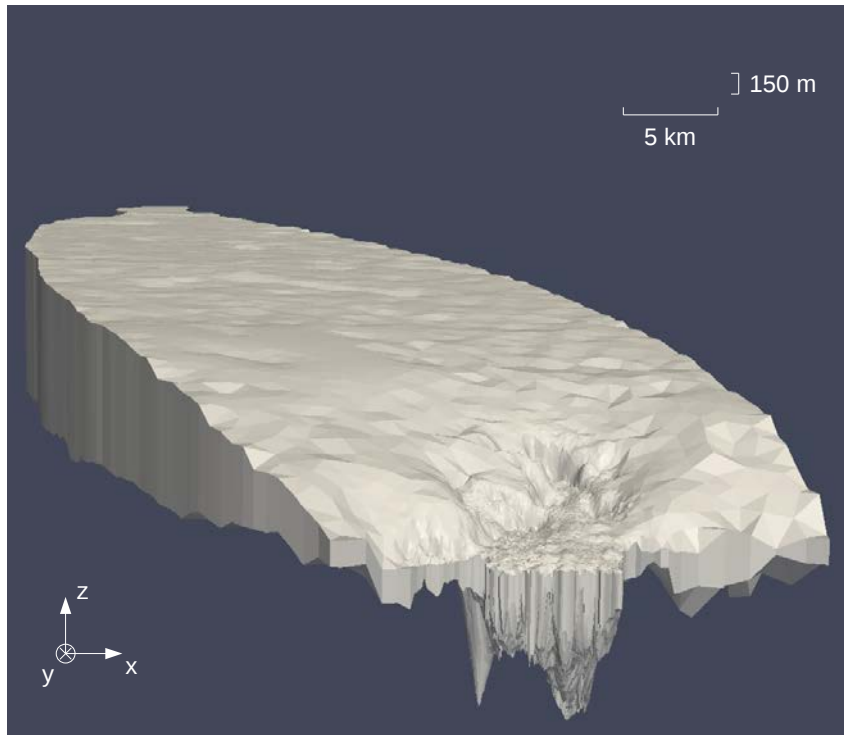


FIGURE 4.12 – Maillage 3D initial de l'Astrolabe.

### 4.2.2 Détermination des conditions basales

Afin de déterminer les conditions de glissement caractérisant la surface basale du glacier, on n'a pas d'autres moyens que de déduire le coefficient de friction  $\beta$  de la loi (2.10) à partir des caractéristiques en surface telles que l'écoulement ou la variation temporelle d'épaisseur selon la procédure d'inversion explicitée au chapitre 2. Pour l'Astrolabe, nous ne disposons pas de données temporelles, mais uniquement d'une spatialisaiton de l'écoulement de surface (paragraphe 4.1.3).

Nous utilisons donc le jeu de données de *Rignot et al. (2011a)* pour l'inversion. La méthode d'inversion est décrite dans la partie 2.1.3. Nous rappelons ici rapidement le principe de cette méthode, exposons les paramètres utilisés pour cette modélisation et les résultats obtenus.

#### 4.2.2.1 Description de la méthode

On utilise la méthode d'inversion de Robin (*Arthern and Gudmundsson, 2010*) qui consiste en une simulation diagnostique de la dynamique du glacier. Le principe est de déterminer le paramètre  $\beta$  de la loi de glissement (2.10) en minimisant la fonction coût  $J_0$  (équation 2.37), dont on rappelle la définition :

$$J_0(\beta) = \int_{\Gamma_s} (\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^D) \cdot (\boldsymbol{\sigma}^N - \boldsymbol{\sigma}^D) \cdot \mathbf{n} \, \partial\Gamma_s \quad (4.3)$$

où  $N$  et  $D$  indiquent les solutions aux problèmes de Neumann et de Dirichlet respectivement.

On doit ainsi résoudre les équations de Stokes pour chacun de ces deux problèmes. De ce fait, un champ de température doit être imposé pour le calcul de la fluidité apparaissant dans l'expression de la viscosité effective (1.2). Nous utilisons le champ de température modélisé provenant de l'étude de *Pattyn (2010)* que nous interpolons sur les noeuds du maillage 3D. Afin d'éviter des valeurs négatives pour  $\beta$ , on effectue le changement de variable  $\beta = 10^\alpha$ . La minimisation, qui consiste à déterminer le minimum de la fonction coût  $J_{tot}$  par rapport à  $\alpha$  est faite à partir de l'algorithme M1QN3 (*Gilbert and Lemaréchal, 1989*), se basant sur la méthode itérative de Quasi-Newton. On choisit un champ initial de  $\alpha$  de telle sorte que  $\beta$  soit inversement proportionnel à la vitesse de surface observée. Lorsqu'on ne dispose pas de données, on impose une constante, différant selon que le point soit posé ou flottant. L'estimation initiale, appliquée en définitive au paramètre  $\alpha$  se résume ainsi :

$$\begin{cases} \text{Si pas de données} & \begin{cases} \alpha = 1 & \text{pour les noeuds posés} \\ \alpha = -10.0 & \text{pour les noeuds flottants} \end{cases} \\ \text{Sinon} & \alpha = \log_{10} \left( \frac{1.0}{V_{obs}} \right) \quad \text{partout} \end{cases} \quad (4.4)$$

Les paramètres utilisés pour cette étape d'inversion sont précisés dans le tableau 4.1.

#### 4.2.2.2 Régularisation

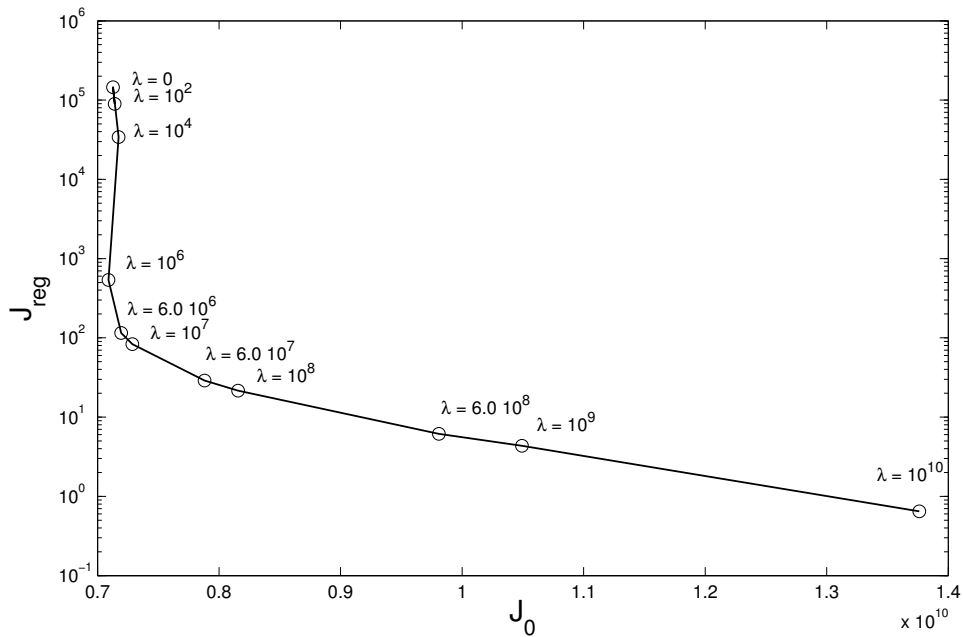
Afin d'obtenir un champ de  $\alpha$  lissé, on utilise la méthode de régularisation explicitée au paragraphe 2.1.3.2. Ce procédé permet en général d'assurer la stabilité du problème d'inversion par rapport aux erreurs d'observations. Elle implique en pratique une pénalisation des dérivées spatiales du paramètre recherché  $\beta$ . On rappelle ici la forme de la fonction coût totale  $J_{tot}$  lorsque la régularisation est utilisée :

$$J_{tot} = J_0 + \frac{1}{2} \lambda \int_{\Gamma_b} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 d\Gamma \quad (4.5)$$

Paramètre	Description	Valeurs	Unités
$\rho_i$	Densité de la glace	900	kg m <sup>-3</sup>
$\rho_w$	Densité de l'eau de mer	1028	kg m <sup>-3</sup>
$g$	Accélération gravitationnelle	9.8	m s <sup>-2</sup>
$n$	Exposant de la loi de Glen	3	
$E$	Facteur d'amplification	1.0	
$A_0(T < -10^\circ C)$	Fluidité de référence (Eq.(1.3))	$3.985 \cdot 10^{-13}$	Pa <sup>-3</sup> s <sup>-1</sup>
$A_0(T > -10^\circ C)$		$1.916 \cdot 10^{-3}$	Pa <sup>-3</sup> s <sup>-1</sup>
$Q(T < -10^\circ C)$	Energie d'activation (Eq.(1.3))	-60	kJ mol <sup>-1</sup>
$Q(T > -10^\circ C)$		-139	kJ mol <sup>-1</sup>

TABLE 4.1 – Paramètres de la simulation d'inversion.

avec  $J_0$ , la fonction coût initiale et  $\lambda$  le paramètre de régularisation qui permet d'ajuster le poids donné à la régularisation dans la fonction coût totale. Pour choisir ce paramètre, on effectue plusieurs simulations d'inversion avec différentes valeurs pour ce dernier, et on applique la méthode de la courbe en L : la figure 4.13 représente la fonction coût de régularisation  $J_{reg}$  en fonction de la fonction coût initiale  $J_0$  pour chacun des paramètres  $\lambda$  choisi. On remarque que la fonction coût de régularisation décroît de plusieurs ordres de grandeur lorsque le paramètre  $\lambda$  augmente. A partir de  $\lambda = 10^7$ , le champ de  $\alpha$  devient trop lissé et la fonction coût initiale  $J_0$ , représentant l'écart le problème de Dirichlet et le problème de Neumann, augmente légèrement. On considère préférentiellement le paramètre  $\lambda$  de la simulation qui correspond à la courbure maximale de la courbe en L, ce qui correspond au cas où  $\lambda = 10^7$ .

FIGURE 4.13 – Représentation de  $J_{reg}$  en fonction de  $J_0$  de différentes inversions, chacune étant caractérisée par un paramètre  $\lambda$ . Le paramètre de régularisation  $\lambda$  optimal est  $\lambda = 10^7$ .

### 4.2.2.3 Résultats et discussion

Les résultats de l’inversion avec le paramètre de régularisation  $\lambda = 10^7$  sont représentés sur la figure 4.14. On remarque que la distribution spatiale du paramètre  $\beta$  obtenu après inversion (4.14(a)) reproduit les deux principaux régimes de glissement basaux : sur la partie posée, la friction prédomine (grandes valeurs de  $\beta$ ) et sur la partie flottante, la friction est négligeable (valeurs très faibles, de l’ordre de  $10^{-6}$ ). Par ailleurs, au sein même de la partie posée, l’optimisation met en évidence certaines zones où les valeurs de  $\beta$  sont plus faibles que l’entourage (au centre du bassin versant). Ce patch local de faible valeur de  $\beta$  pourrait être associée à la topographie du socle, qui à cet endroit est caractérisée par une dépression relativement large (voir sur la figure 4.11). On a représenté sur les figures 4.14(b) et 4.14(c) la spatialisation de la vitesse de surface modélisée et de l’erreur relative des vitesses de surface à la fin de la procédure d’optimisation. Cette erreur s’étend sur plusieurs ordres de grandeurs, de l’ordre du % à l’intérieur du bassin versant jusqu’à 100 % sur certaines zones, telles que sur les bordures et l’ice shelf. Plusieurs raisons peuvent expliquer ce comportement (*Gillet-Chaulet et al.*, 2012). Tout d’abord, comme mentionné dans la partie 2.1.3, l’inversion du problème d’écoulement basé sur une loi non linéaire apparaît possible, mais on n’a pas de garantie quant à l’obtention du minimum de la fonction coût  $J_{tot}$  (*Goldberg and Sergienko*, 2011). Ceci est d’autant plus vrai pour l’inversion de cas réels, où le minimum de la fonction coût est sans doute peu marqué (faible courbure de  $J_{tot}$ ). Ainsi, on peut ne pas atteindre le minimum global, mais uniquement un minimum local, qui ne correspond pas à celui que l’on recherche. Par ailleurs, la procédure d’inversion, dont le but essentiel est de déterminer le paramètre  $\beta$ , compense par la même occasion les incertitudes associées à d’autres paramètres du modèle tels que les données d’épaisseur de la glace, de topographie de la surface, ou de vitesses d’écoulement. En particulier, la quasi absence de données d’épaisseur pour l’extrémité continentale du bassin versant pourrait expliquer l’erreur importante sur les vitesses observée.

### 4.2.3 Relaxation de référence de l’Astrolabe

L’initialisation de l’Astrolabe décrite dans ce qui précède se base sur des observations géométriques (description de la surface supérieure et inférieure et de la ligne d’échouage) et dynamiques (vitesses de surface) qui n’attestent pas nécessairement d’un état stationnaire. Ces observations représentent très certainement une réponse transitoire à des contraintes extérieures qui ne sont pas forcément prises en compte par notre modélisation. De plus, l’étape d’interpolation de ces données ajoute des incertitudes sur la description de l’état initial, impliquant des anomalies de divergence de flux inévitables (*Seroussi et al.*, 2011) qui ne proviennent pas de processus physiques. Afin de s’affranchir de ces deux effets (représentativité de l’état stationnaire et erreurs d’interpolation des données), qui impliquent des variations temporelles de la dynamique de surface non physiques, l’étape de relaxation apparaît nécessaire. Les surfaces inférieure (partie flottante) et supérieure peuvent évoluer librement, ainsi que la ligne d’échouage, qui délimite la

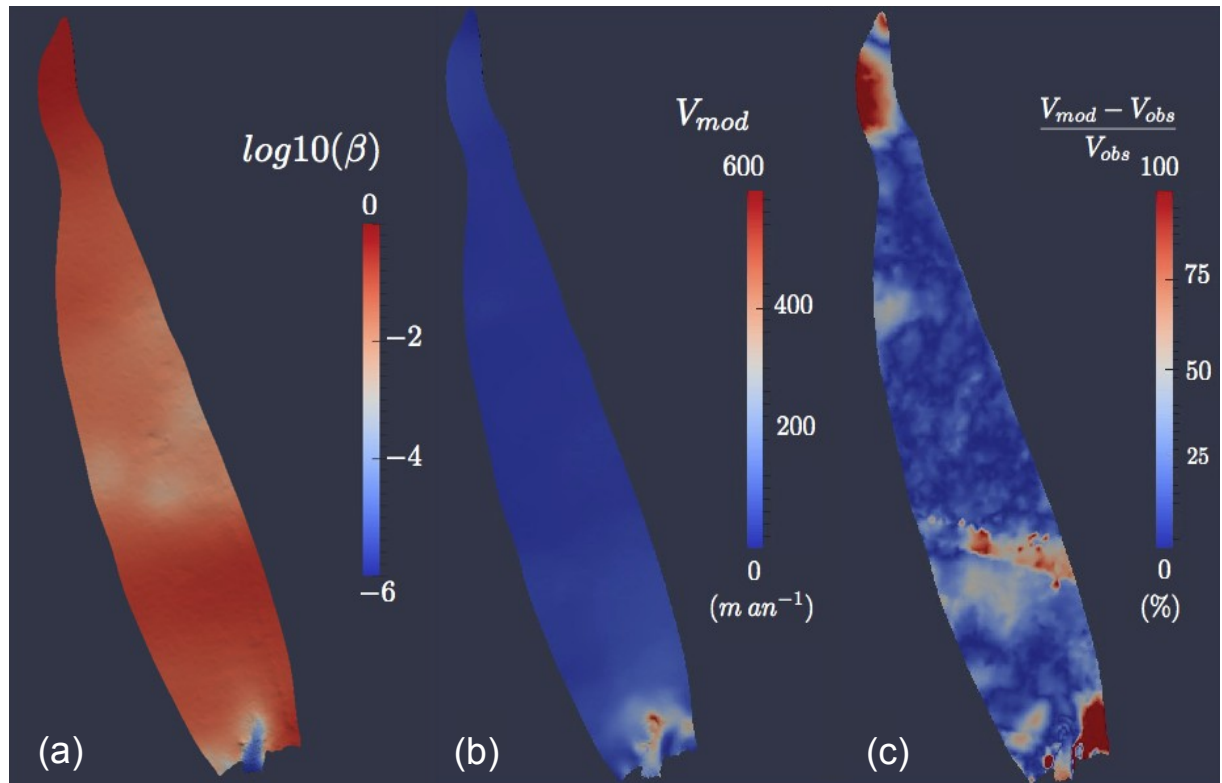


FIGURE 4.14 – Représentation des résultats à la fin de l’optimisation avec  $\lambda = 10^7$  : (a) paramètre  $\alpha$  déduit de la minimisation de la dérivée de la fonction coût. (b) vitesses de surface modélisées (vitesses de Neumann). (c) erreur relative des vitesses de surface,  $\frac{|u_{obs} - u_{mod}|}{u_{obs}}$  en %.

partie posée de celle flottante. Afin d’accommoder cette évolution, le maillage se déforme selon la verticale, en revanche les noeuds conservent leurs positions dans le plan.

#### 4.2.3.1 Configuration initiale

Le maillage initial utilisé pour cette simulation de *référence* est décrit dans la partie 4.2.1.4. La DESCRIPTION du socle entier (pour la partie posée ET la partie flottante) est requise pour permettre la résolution du problème de contact (paragraphe 2.1.1.5), et donc la migration de la ligne d’échouage. On utilise la DESCRIPTION de la surface inférieure de *référence* pour les noeuds de la partie posée. Concernant la partie flottante, la bathymétrie sous l’ice shelf est peu connue, mais certaines données de bathymétrie dans l’entourage du glacier de l’Astrolabe (*Beaman et al.*, 2010) mettent en évidence la présence d’un fjord relativement profond au front du glacier. On impose donc pour les noeuds situés sous la plate-forme la présence d’une vallée d’une profondeur maximale de 1500 m, que l’on impose en un point particulier du front du glacier. L’altitude de chacun des noeuds est obtenue à partir d’une pondération de la profondeur maximale de la vallée et de la profondeur de la surface inférieure du point de la ligne d’échouage le plus proche du point considéré.

Le bilan de masse de surface (intervenant dans l’équation de transport (2.12)) que l’on utilise

est exposé dans la partie 4.1.2. L'accumulation est supposée constante et dépend uniquement de l'altitude de surface. En ce qui concerne la surface inférieure, aucune condition de fusion ou d'accrétion de la glace n'est imposée. Les autres paramètres de la simulation sont similaires à ceux correspondant aux simulations d'inversion, et sont exposés dans le tableau 4.1.

#### 4.2.3.2 Résultats

Un état quasi-stationnaire est obtenu après environ 400 ans de relaxation. A partir de ce moment, le volume de glace n'évolue presque plus, sa valeur a atteint un plateau. Au cours des premiers pas de temps, les vitesses verticales sont relativement hautes (largement supérieures à  $10 \text{ m an}^{-1}$ ), en particulier sur les bords et là où les mailles sont les plus grandes. Ces anomalies sont principalement dues aux erreurs sur les données et à la procédure d'interpolation, lesquelles sont d'autant plus importantes lorsque le maillage est grossier. Sur les derniers pas de temps, les vitesses verticales atteignent des valeurs de l'ordre de la dizaine de  $\text{cm an}^{-1}$ , hormis deux zones caractérisées par des valeurs importantes ( $10 \text{ m an}^{-1}$ ) (angle Nord-Est du bassin versant et partie côtière Nord Est)(figure 4.15(a)). Les fortes vitesses observées dans ces zones sont probablement dues à une mauvaise interprétation de la topographie (topographie basale). Nous considérons néanmoins cet état comme un 'état quasi-stationnaire'. En effet, on a atteint un état où l'essentiel des vitesses sont physiquement interprétables et pour l'application qui suit, la stationnarité totale n'est pas nécessairement requise. On rappelle que l'objectif principal de cette étape de modélisation n'est pas tant de modéliser le comportement le plus réaliste du glacier (ne supprimant pas pour autant son intérêt), mais plutôt de s'assurer de la robustesse du modèle quant à sa représentation physique de la dynamique de l'écoulement. Nous sommes conscients en particulier d'un écart singulier à la représentativité réelle du glacier de part notre description en partie 'fictive' de la topographie du socle (ajout de bruit dans les données). Sur la figure 4.15(b), les surfaces apparaissent plus lissées que celles initialement prescrites (figure 4.12), mettant en évidence l'effet de la relaxation sur la topographie du glacier. On a fait disparaître les angles du maillage, provenant de l'étape d'interpolation des données et amplifiés par l'hypothèse de flottaison pour les surfaces de l'ice shelf.

A la fin de la simulation, la ligne d'échouage s'est légèrement retirée à l'intérieur des terres (figure 4.15(a)), d'environ 2 km, le retrait s'effectuant majoritairement sur les 50 premières années. On note que la position finale de cette ligne dans la partie la plus continentale du fjord n'atteint pas celle de *Bindschadler et al.* (2011). Il est cependant délicat d'établir une quelconque interprétation de cette divergence, de par notre description de la topographie basale qui ne reflète pas totalement la réelle connaissance du socle (données interpolées sur une grille régulière de 1 km), notamment en comparaison à la résolution requise par le modèle (100 m). Cette résolution est néanmoins nécessaire pour capturer le processus de migration de la ligne d'échouage (chapitre 3). On remarque quand même que le champ de vitesse modélisé, représenté sur la figure 4.15 reproduit bien les principales caractéristiques du champ de vitesse observé de *Rignot et al.* (2011a), telles que la ligne d'écoulement principale, mais aussi l'autre zone d'écoulement

préférentiel sur la rive droite du glacier.

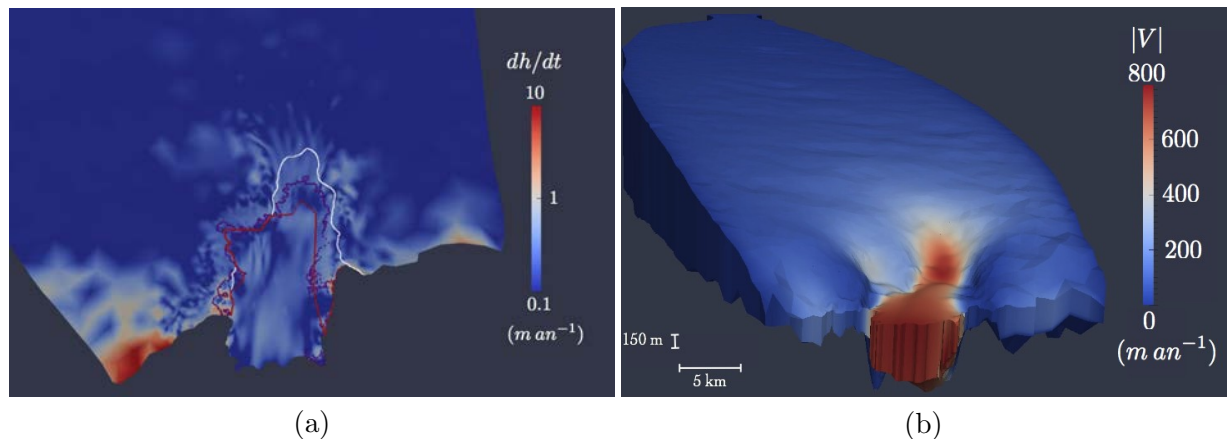


FIGURE 4.15 – Résultats de la fin de la relaxation : (a) représentation des vitesses verticales de surface,  $dh/dt$  et de la ligne d’échouage finale (violette), en comparaison à la ligne d’échouage initiale (rouge) et à celle déduite de *Bindenschadler et al.* (2011) (blanc). (b) représentation du maillage “quasi-stationnaire” et de la norme des vitesses modélisées associées.

On compare la différence relative entre l’épaisseur modélisée et l’épaisseur déduite de la flottaison sur la zone flottante du glacier. Cette erreur est représentée sur la figure 4.16. Globalement, on remarque que l’erreur est la plus importante sur les bords de l’ice shelf en contact avec la partie posée, contrairement aux zones centrales ou sur le bord libre du front du glacier. Cette différence illustre bien l’effet du confinement et la transmission de contraintes associée entre la partie posée et celle flottante dominées par deux régimes mécaniques bien distincts. On note une anomalie négative d’épaisseur modélisée (autour de 20%) sur une centaine de mètres, généralement suivie d’une anomalie positive, en particulier sur la partie centrale du fjord au niveau de la ligne d’écoulement principale. Cet écart à l’équilibre hydrostatique, sur une zone de la centaine de mètres à 2-3 km, certainement contrôlé par le changement brutal de conditions basales, est en accord avec d’autres études telles que celles de *Bell et al.* (2006, 2007), *Anandakrishnan et al.* (2007) et *Durand et al.* (2009b). Par ailleurs, on remarque que des lignes bien précises caractérisées par des erreurs similaires de l’ordre de 5%, se dessinent sur l’ice shelf. On remarque ce genre de forme topographique également sur le MNT de Spirit, ce qui laisse à penser qu’elles pourraient être associées aux processus de fonte sur la surface basale évoqués dans l’étude de *Vaughan et al.* (2012). Cependant, comme mentionné dans le paragraphe 4.2.3.1, on ne prend pas en compte de processus de fonte à la base de l’ice shelf, mettant de côté cette hypothèse initiale. Ces lignes seraient plus vraisemblablement héritées de la topographie du socle à la ligne d’échouage, au niveau de laquelle la glace n’atteint pas l’équilibre hydrostatique, et semblent probablement représenter des lignes préférentielles d’advection de glace. Ces lignes sont relativement fines, de largeur de l’ordre de quelques centaines de mètres de largeur. La résolution du maillage, relativement élevée dans cette zone, nous permet de capturer cette advection locale.



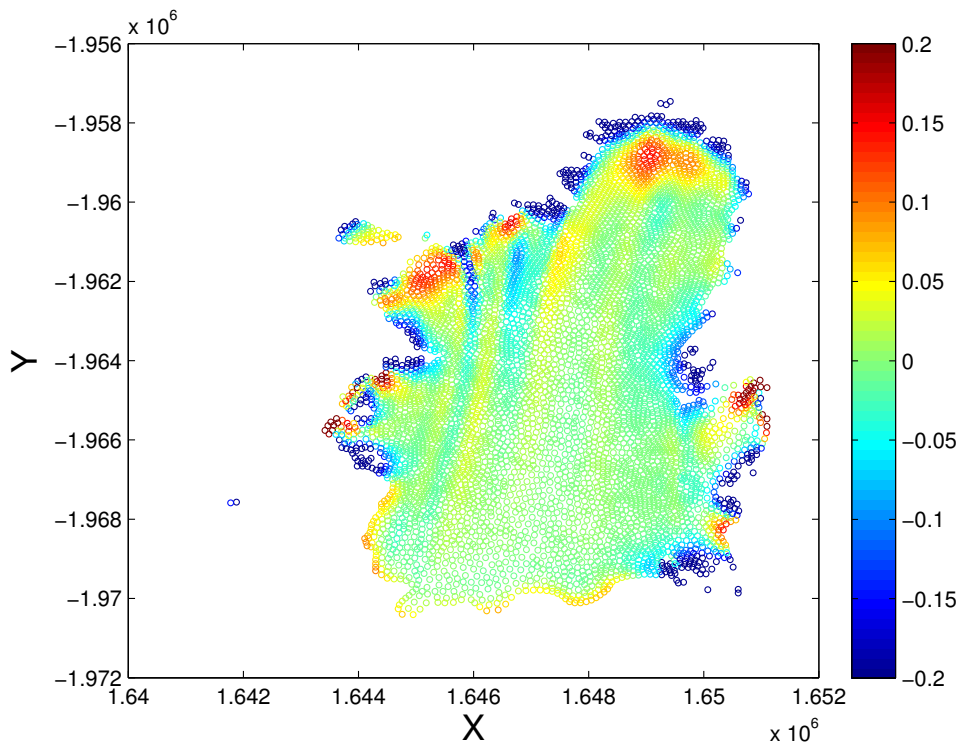


FIGURE 4.16 – Erreur relative de l'épaisseur de glace modélisée par rapport à l'épaisseur de glace théorique en supposant l'équilibre hydrostatique :  $\frac{H_{mod} - H_{th}}{H_{th}}$ .

Enfin, nous nous sommes intéressés à la contribution du glissement basal à l'écoulement de surface modélisé pour cet état de *référence* de l'Astrolabe, supposé proche de la stationnarité. Il apparaît finalement qu'en dehors de la zone de l'ice shelf où la contribution atteint les 100%, cette dernière ne dépasse pas la moitié de la participation à l'écoulement total (résultats non montrés). Ainsi, d'après les travaux présentés dans la partie 3.2, on s'attend à une représentation de la dynamique par la théorie de la couche limite singulièrement différente.

### 4.3 Sensibilité du modèle d'écoulement à la description du socle

Au cours de la partie précédente, nous avons exposé les principales étapes nécessaires pour simuler l'évolution temporelle de la dynamique du glacier de l'Astrolabe. Nous avons en particulier mis en évidence les différentes méthodes possibles pour construire une DESCRIPTION du socle pour le modèle. Il apparaît que les résultats sont très différents d'une méthode à l'autre. Comme énoncé dans le paragraphe 4.2.1.3, on s'attend à ce que la dynamique du système glaciaire soit très dépendante de la méthode utilisée pour décrire le socle sous l'Astrolabe. Cette dernière partie s'intéresse donc à tester la sensibilité du modèle d'écoulement Elmer/Ice à la description

du socle. On présente dans un premier temps la méthode utilisée pour tester cette sensibilité, puis nous exposons les résultats associés.

### 4.3.1 Méthode

#### 4.3.1.1 Idée générale

Les tests de sensibilité effectués par la suite correspondent à des simulations diagnostiques de l'écoulement où l'on procède à l'inversion du champ de  $\beta$  à partir du champ de vitesse de *référence* (issue de la relaxation de *référence*), avec une géométrie tridimensionnelle caractérisée par une *perturbation* sur le socle (par rapport à la géométrie de *référence* où la surface supérieure est conservée). On utilise comme coefficient de friction initial celui utilisé pour la relaxation de *référence* (décrit dans le paragraphe 4.2.2). L'idée est de déterminer si l'optimisation du paramètre  $\beta$  de la procédure d'inversion, en réponse à l'information de surface, parvient à compenser, en partie, les erreurs introduites par la perturbation de la géométrie de *référence* sur la topographie du socle. Et, le cas échéant, si cette compensation est affectée par l'intensité de la perturbation. On analysera en particulier la convergence entre les vitesses de surface de Dirichlet représentant l'état de *référence* et celles du problème de Neumann (représentant l'état 'perturbé'). Les paramètres du modèle sont les mêmes que dans l'expérience précédente d'inversion (tableau 4.1), mais on n'utilise pas de terme de régularisation ( $\lambda = 0$ ) car l'objectif n'est pas centré sur le résultat de  $\beta$  et de ses propriétés. On décrit dans ce qui suit la construction de la *perturbation* sur la topographie basale du maillage 3D.

#### 4.3.1.2 Perturbation sur le socle

On débute initialement avec la grille de données de *référence* du socle présenté dans le paragraphe 4.2.1.4, de résolution 62.5m. Cette dernière est ensuite sous-échantillonnée selon des lignes de vols 'fictives'. Le tracé imite les lignes de vols de l'ensemble des jeux de données présentés en 4.1.1.2. Les données correspondantes sont équivalentes aux données de *référence*, mais en représentent un sous-échantillonnage plus ou moins prononcé (figure 4.17).

On procède ensuite à l'étape d'interpolation permettant d'obtenir l'élévation du socle sur les noeuds du maillage à partir du jeu de données fictif à disposition. De la même manière que dans le paragraphe 4.2.1.3, on utilise soit la méthode *directe*, soit celle *indirecte*, nous conduisant à deux DESCRIPTIONS différentes pour le socle à partir d'un même jeu de donnée. Pour la délimitation entre la partie posée et la partie flottante, nous utilisons la ligne d'échouage de l'état relaxé, décrite dans le paragraphe 4.2.3. L'élévation du socle est finalement imposée pour l'élévation de la surface inférieure de l'ensemble des noeuds posés. L'élévation des noeuds flottants de la surface inférieure est reprise de celle de la surface inférieure relaxée. Les résultats des expériences de perturbation sont exposés dans ce qui suit. Les expériences associées aux perturbations sur la topographie du socle sont nommées respectivement  $Bed_d$  et  $Bed_i$  pour la DESCRIPTION du socle obtenu à partir des méthodes *directe* et *indirecte*.

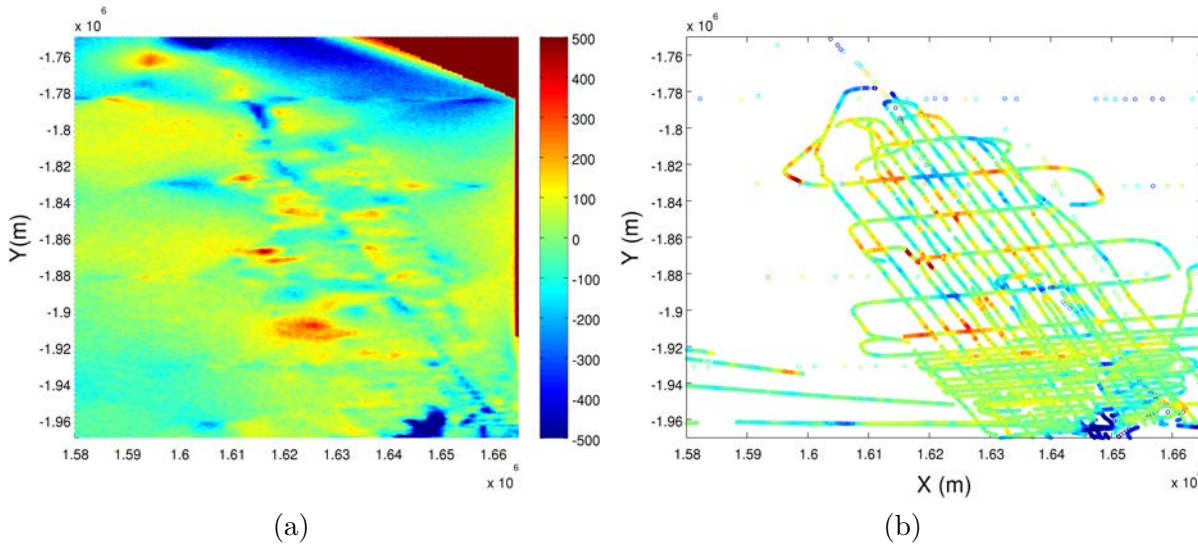


FIGURE 4.17 – Représentation des deux jeux de données de l'expérience : (a) jeu de données de référence (b) jeu de données selon les lignes de radar 'fictives'.

### 4.3.2 Résultats

#### 4.3.2.1 Comparaison méthodes *directe*/*indirecte*

Les résultats des expériences  $Bed_d$  et  $Bed_i$  sont représentés sur la figure 4.18.

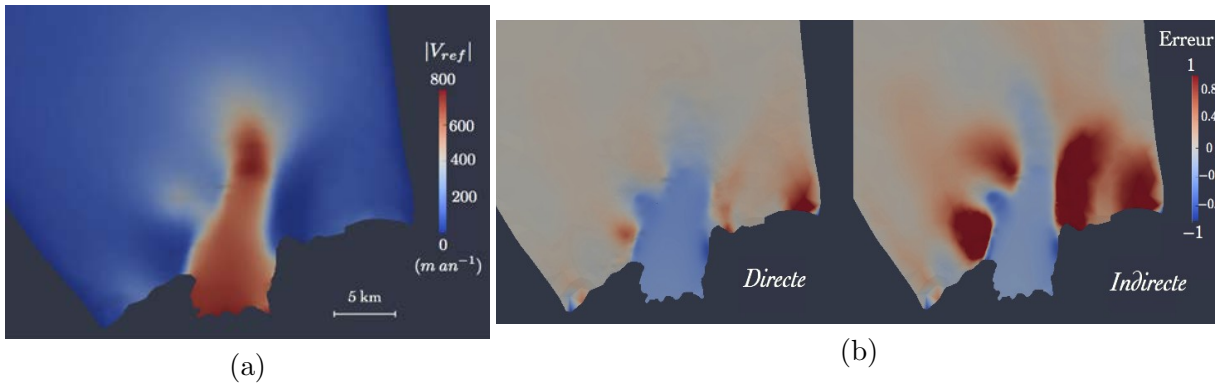


FIGURE 4.18 – Comparaison des perturbations de socle obtenus par méthode *directe* et *indirecte* par rapport à l'état de référence : (a) norme de la vitesse horizontale de l'état de référence relaxé et (b) différence relative de la vitesse de Neumann (vitesse modélisée) par rapport à la vitesse de Dirichlet (vitesse de référence)  $\frac{V_N - V_D}{V_D}$  pour chacune des méthodes *directe* et *indirecte*.

On a choisi de représenter la spatialisation de la différence relative entre la vitesse de surface obtenue après inversion (vitesse modélisée selon le problème de Neumann) et celle de l'état de référence (vitesse de Dirichlet), pour les deux expériences. L'erreur sur l'ice shelf (autour de -50%) est similaire d'une expérience à l'autre car celles-ci disposent toutes deux de la même épaisseur de glace à cet endroit (définition de la surface inférieure paragraphe 4.3.1.2). L'erreur systématiquement négative provient de la différence de condition aux limites appliquée : on

impose dans ces expériences d'inversion une loi de glissement à la base qui implique davantage de friction que lorsque la condition de pression unique est imposée (cas de la relaxation). Les vitesses modélisées (vitesses de Neumann) sont ainsi forcément plus faibles que les vitesses de *référence* (vitesses de Dirichlet). Sur la partie posée, on remarque des erreurs relatives bien plus importantes pour l'expérience  $Bed_i$  (de l'ordre de 100%) que pour  $Bed_d$  en plusieurs zones proches du fjord. Ces dernières observations mettent en évidence la plus grande difficulté du modèle à converger vers la solution de Dirichlet lorsque la configuration géométrique est trop loin de la *référence*. Dans le cas de l'expérience  $Bed_d$ , on note également quelques zones où l'erreur atteint des valeurs relativement importantes, telles qu'aux coins côtiers du bassin versant. Ces zones correspondent à des endroits caractérisés par des erreurs importantes soit sur les 'données' (biais d'interpolation due à un manque d'information sur les données originales) comme c'est le cas sur le coin Ouest (voir figure 4.17(b)), soit sur le modèle de *référence* (état hors équilibre) correspondant à l'erreur sur le coin Est.

Cette comparaison montre que le modèle d'inversion a plus de mal à compenser les erreurs introduites par la méthode *indirecte*, plus nombreuses que celles issues de la méthode *directe*. Cette dernière apparaît donc ainsi plus appropriée à utiliser pour déterminer l'élévation du socle sur l'Astrolabe, pour lequel nous avons la chance de disposer des données originales. De plus, ces données couvrent une zone relativement importante du bassin versant du glacier à une bonne résolution (distance entre les lignes radar de l'ordre du km). On peut maintenant se questionner sur le sens de 'bonne résolution', et déterminer à partir de quel seuil de résolution la méthode *directe* s'affranchit des biais significatifs introduits par la méthode *indirecte*. Dans ce qui suit, on s'attache à rechercher cette résolution critique.

#### 4.3.2.2 Recherche de la résolution critique

De la même manière que pour les expériences  $Bed_d$  et  $Bed_i$ , on construit de nouvelles perturbations du socle de *référence* à partir de l'interpolation selon la méthode *directe* et *indirecte* de jeux de données fictifs (paragraphe 4.3.1.2). Pour la construction de ces derniers, on utilise également un sous-échantillonnage de la grille de données de *référence* du socle à 62.5 m de résolution, mais selon des lignes 'fictives' organisées selon un grille régulière avec différentes résolutions (125 m, 250 m, 500 m, 1 km, 2 km, 4 km, 5 km).

Le tableau 4.2 récapitule l'ensemble des perturbations appliquées à la topographie du socle.

On présente dans ce qui suit les résultats des expériences de perturbation du socle à partir des grilles régulières ( $Bed_d - 125m$ ,  $Bed_d - 250m$ ,  $Bed_i - 125m...$ etc). Afin de prendre en compte l'erreur sur les vitesses de surface sur l'ensemble du bassin versant on utilise l'erreur moyenne de la vitesse au sens des moindres carrées défini comme suit :

$$Err = |\delta V| = \sqrt{\frac{1}{S} \int_S |(V_D - V_N)|^2 dS} \quad (4.6)$$

On procède également à une simulation diagnostique du problème de Neumann et du pro-

Type de jeu original	Interpolation directe	Interpolation indirecte
Lignes radar	$Bed_d$	$Bed_i$
Grille 125m	$Bed_d - 125m$	$Bed_i - 125m$
Grille 250m	$Bed_d - 250m$	$Bed_i - 250m$
Grille 500m	$Bed_d - 500m$	$Bed_i - 500m$
Grille 1km	$Bed_d - 1km$	$Bed_i - 1km$
Grille 2km	$Bed_d - 2km$	$Bed_i - 2km$
Grille 4km	$Bed_d - 4km$	$Bed_i - 4km$
Grille 5km	$Bed_d - 5km$	$Bed_i - 5km$

TABLE 4.2 – Tableau récapitulatif des expériences de perturbations du socle.

blème de Dirichlet à partir des vitesses de surface de *référence* pour la topographie de *référence*. Les deux problèmes ne sont pas exactement similaires car les vitesses de *référence* ont été obtenues avec une condition de glissement sur la surface sous l’ice shelf tandis que la procédure diagnostique d’inversion implique une condition de non pénétration sous l’ice shelf (paragraphe précédent). On s’attend donc à obtenir une erreur sur les vitesses  $\delta V_{ref}$  différente de 0. Afin de comparer l’erreur moyenne de la vitesse des expériences de perturbation à celle de l’expérience de *référence*, on effectue une normalisation de l’erreur de perturbation  $Err_{pert}$  par l’erreur de référence  $Err_{ref}$ . Les résultats sont exposés sur la figure 4.19.

Globalement, l’erreur associée aux expériences dont le socle est déduit par la méthode *indirecte* est plus élevée que celle associée aux expériences se basant sur la méthode *directe* (en moyenne de 25% supérieure). Pour les expériences utilisant la méthode *indirecte*, l’erreur apparaît relativement constante quelque soit la résolution de la grille utilisée. L’écart entre ces erreurs donne un indicateur de l’incertitude sur l’erreur normalisée, qui apparaît être de l’ordre de 5%. Cette différence significative d’erreur par rapport à la référence (même en considérant l’incertitude) confirme non seulement la sensibilité du modèle d’écoulement à la description du socle, mais aussi la pertinence de l’utilisation de la méthode *directe* par rapport à la méthode *indirecte*. De plus, on note que pour les expériences basées sur la méthode *directe*, l’erreur augmente progressivement avec la résolution à partir de la résolution de 1 km, jusqu’à atteindre l’erreur caractéristique des expériences *indirecte* pour la résolution de 5 km.

La dépendance de la méthode *directe* à la résolution du jeu de données initiale indique que cette dernière requiert une résolution minimale inférieure au kilomètre pour apporter une amélioration significative sur la réponse du modèle d’écoulement par rapport à l’usage de la méthode *indirecte*.

## 4.4 Un outil pour la description du socle

L’utilisation de bases de données telles que celle de BEDMAP comporte de nombreux points d’intérêt : (i) implémentation facilitée pour les utilisateurs, (ii) procédure d’interpolation appropriée, effectuée par des ‘spécialistes’ et (iii) confidentialité des données pour satisfaire l’exigence

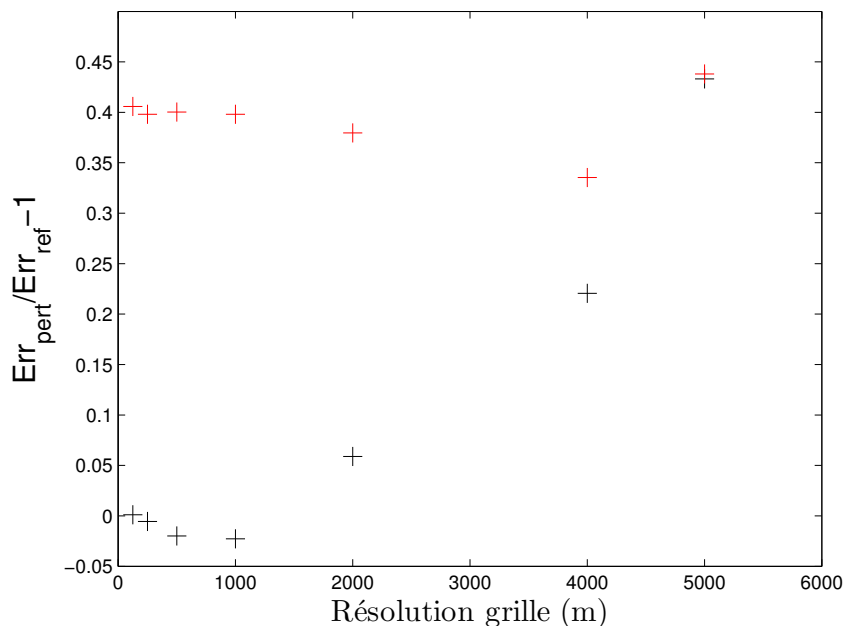


FIGURE 4.19 – Représentation de l’erreur moyenne de vitesse  $|\delta V|$  normalisée sur l’erreur moyenne des vitesses pour l’inversion de *référence*, en fonction de la résolution de la grille du jeu de données original, pour les expériences dont le socle est déduit à partir de la méthode *directe* (noir) et *indirecte* (rouge).

de certains. En dépit de ces derniers, nous avons démontré dans la partie précédente (4.3) que l’utilisation de tels jeux de données sur des grilles régulières ne répond plus aux attentes des maillages désormais utilisés pour la modélisation d’écoulement glaciaire, en particulier les maillages non structurés.

Nous proposons ici un nouveau procédé nous permettant de nous affranchir de l’utilisation de la méthode *indirecte* tout en conservant les principaux avantages des bases de données régulières précédemment énoncés. Les données radar disponibles sont compilées dans une base de données reliée à un serveur web. Ce dernier se charge d’interpoler directement les données sur la grille fournie par l’utilisateur. Cette formule permet une actualisation de la base de données et de la méthode d’interpolation relativement rapide et simplifiée. Elle peut également s’adapter aux propriétés de la grille et reste ainsi utilisable pour une grille régulière.

Une telle application est disponible à l’adresse suivante : <http://lgge-pc240.obs.ujf-grenoble.fr/nm.html>. Cette interface web est déjà reliée à la base de données d’élévation du socle de l’Astrolabe présentée dans le paragraphe 4.1.1.2. L’implémentation de la procédure d’interpolation utilisée est celle issue de l’étude de *Braun and Sambridge (1995)* (basée sur la méthode des voisins naturels (NNI)).

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté l'application 3D du modèle d'écoulement Elmer/Ice au cas du glacier de l'Astrolabe, glacier émissaire de l'Antarctique de l'Est. L'étude s'est répartie en trois principaux points, lesquels reposent sur des types de travaux et principes différents, mais intimement connectés, à savoir (i) l'acquisition de données, (ii) l'initialisation et l'appréhension de l'outil numérique et enfin (iii) l'application de cet outil et sa sensibilité aux paramètres d'entrées.

Les deux dernières étapes relatant l'utilisation du modèle d'écoulement reposent entièrement sur la première étape nous permettant de construire les données d'entrée du modèles. Pour l'Astrolabe, cette base de données s'étoffe d'année en année et fait de ce lieu un des endroits le mieux instrumenté de la calotte Antarctique. Les données disponibles nous renseignent sur la géométrie, la dynamique de la glace, ainsi que sur l'accumulation dans cette zone et le régime thermique. Cette diversité offre une base solide de données pour la contrainte du modèle d'écoulement. On remarque toutefois que certaines de ces données ne sont pas toujours en accord. On peut citer l'exemple de la délimitation de la ligne d'échouage (paragraphe 4.1.1.3), dont les méthodes de définition et les estimations divergent. Un autre exemple correspond à la définition du contour du glacier, où l'on remarque que celui utilisé pour la côte (*Bohlander and Scambos, 2008*) est quelque peu différent de celui de *Rignot et al. (2011b)*. Ce genre de divergence peut s'expliquer par des différences dans les dates d'acquisition de ces jeux de données. Il est nécessaire d'utiliser un compromis entre les différents choix et d'analyser la réponse du modèle d'écoulement.

La simulation effectuée au cours de cette étude ne reproduit pas exactement la réalité car la topographie basale a été construite en partie par de l'ajout artificiel de données (bruit fractal). Cet ajout a permis de créer une modélisation de référence, laquelle était nécessaire pour le troisième volet de l'étude. Certaines conclusions peuvent néanmoins en être tirées. La procédure d'inversion apparaît très sensible à la présence/absence de données, et détecte les zones où ces dernières sont entachées d'incertitudes (sous-échantillonnage). Elle parvient à délimiter de façon relativement précise les deux régimes de conditions basales que représentent la partie posée et la partie flottante, à partir des vitesses de surface. Un état stationnaire est atteint après que la glace ait initié un léger retrait (2 km). On met en évidence une oscillation de l'élévation de surface dans la zone de transition caractérisant une anomalie pour l'équilibre hydrostatique sur une distance kilométrique, qui avait déjà été observé le long de la ligne d'écoulement lors d'expériences bidimensionnelles.

Enfin, une attention particulière a été portée sur les méthodes de description du socle et la sensibilité du modèle d'écoulement full-Stokes à ces dernières. L'interpolation directe des données originales sur les noeuds du maillage permet de conserver l'essentiel de l'information, qui apparaît déterminante dans le modèle d'écoulement. Ce dernier est en effet affecté par le lissage inhérent à la méthode *indirecte* majoritairement utilisée par les modélisateurs d'écoulement. Une application web est finalement proposée en fin de chapitre pour permettre l'utilisation de la méthode *directe* sur le glacier de l'Astrolabe.

# Conclusion et perspectives

Un vaste effort est actuellement mis en oeuvre par la communauté glaciologique pour améliorer la compréhension des mécanismes dynamiques et climatiques de la calotte Antarctique et sa contribution à l'élévation du niveau des mers. Les travaux menés au cours de cette thèse s'inscrivent dans ce contexte particulier et se consacrent à l'aspect dynamique.

La première partie du travail (chapitre 3) s'intéresse à l'implémentation des processus physiques dans les modèles numériques actuels. La migration de la ligne d'échouage qui contrôle le bilan de masse global de la calotte représente une problématique prépondérante pour la communauté des modélisateurs d'écoulement glaciaire. Les différents types d'implémentation, s'ajoutant aux approximations des équations et à la variété de méthodes numériques multiplient la diversité des modèles d'écoulement actuels. Les travaux d'intercomparaison permettent de faire le bilan sur le comportement de chacun des modèles et leur réponse à une quelconque sollicitation. L'approche de *Schoof* (2007), basé sur la théorie de la couche limite a constitué la base de nos travaux. Cette dernière s'affranchit d'une part des biais du numérique liés à la discrétisation spatiale et diminue donc la part d'incertitude qui y est associée. D'autre part, elle apporte une paramétrisation du flux à la ligne d'échouage permettant d'inclure les effets de couplage mécanique caractéristiques de la zone sans recourir à la résolution complète du problème. Les simulations prédictives sur l'ensemble de la calotte sont ainsi moins coûteuses en terme de ressource de calcul.

L'objectif principal a été d'analyser de manière quantitative la déviation de comportement entre les modèles lorsque les conditions s'éloignent de la stationnarité et de la prédominance du glissement dans l'écoulement total (conditions nécessaires à la validité de la théorie de *Schoof* (2007)). Les prédictions sur l'échelle du siècle mettent en jeu des processus non stationnaires, mettant en doute le bien-fondé de la première hypothèse. Le glissement apparaît être la contribution majoritaire de l'écoulement global de la calotte et pourrait donc justifier l'utilisation de la seconde hypothèse. Cependant le manque d'observations sur la surface basale empêche la quantification de la contribution de ce processus caractérisé par une grande complexité (effets de seuil, intermittence), ne permettant pas de totalement valider cette hypothèse. A titre d'exemple, à partir des procédures d'inversion des vitesses de surface de l'Astrolabe, on a déduit des vitesses de glissement représentant en général moins de 50% de contribution du déplacement de surface même proche de la ligne d'échouage. Il faudrait estimer cette contribution pour des



fleuves de glace de l'Antarctique plus importants, mais cette observation pourrait remettre en cause la validité de la deuxième hypothèse. Au cours de notre travail, on a montré que l'approche full-Stokes s'éloigne significativement de celle de la couche limite lorsque la contribution du glissement devient inférieure à 90%. Par ailleurs, en régime transitoire, la variation relative de volume de la calotte est très différente selon les modèles, et l'approche de la couche limite semble surestimer la décharge de glace par rapport aux autres modèles. Ainsi, une attention particulière doit être portée aux résultats issus de l'usage de la théorie de la couche limite, car ils s'éloignent substantiellement des autres approches lorsque les hypothèses énoncées ne sont plus validées.

Il est difficile d'établir des comparaisons entre des modèles et de considérer une référence, car on n'a pas de preuves objectives que l'un est forcément plus représentatif qu'un autre du fonctionnement global de l'Antarctique. L'approche full-Stokes est certes la plus complète, mais pour autant a-t-elle nécessairement besoin de l'ensemble de cette complexité, en particulier de résoudre le problème entier de la déformation ? Le processus de glissement a sans doute un rôle prépondérant, mais il n'est représenté dans la majorité des modèles que par une unique paramétrisation encore bien mal comprise... Quant à la représentativité de nos expériences, elles se sont limitées aux cas bidimensionnels nous privant de bon nombres d'autres effets sûrement tout aussi influents sur l'écoulement global. Par conséquent ce travail d'intercomparaison nécessite d'être étendu à la troisième dimension (*Pattyn et al.*, 2012) et à un cas réel, tel que le glacier de Pine Island. Après avoir vérifié la robustesse et la cohérence entre les modèles, la confrontation avec les données permettrait de procéder à leur validation. On dispose en effet pour le glacier de Pine Island de nombreuses données permettant de contraindre le modèle, en particulier de mesures renseignant sur la variation temporelle de la géométrie du glacier (*Flament and Rémy*, 2012). De plus, de nouveaux modèles d'écoulement 3D sont apparus récemment dans la communauté et correspondent à différents degrés de complexité des équations de Stokes (*Larour et al.*, 2012; *Cornford et al.*, 2012; *Gillet-Chauvet et al.*, 2012), complétant ainsi la famille des modèles d'écoulement 3D. On semble disposer finalement de l'ensemble des éléments (données, outils) pour engager ce travail d'intercomparaison 3D sur un glacier réel.

La deuxième partie du travail (chapitre 4) porte sur la modélisation tridimensionnelle d'un glacier émissaire réel et s'intéresse à la sensibilité du modèle d'écoulement aux incertitudes sur les données d'entrée. L'enjeu majeur étant d'évaluer les flux réels de glace de l'Antarctique vers l'océan par les mesures et de prédire leur évolution par les modèles, la quantification de l'incertitude associée aux modèles devient nécessaire. Cette incertitude provient non seulement des erreurs numériques du modèle d'écoulement, mais également de l'erreur sur les données d'entrée telles que la géométrie du glacier, les paramètres des lois d'écoulement (fluidité, coefficient de glissement), le bilan de masse... De plus, intégrer l'ensemble de ces données dans le modèle et sur les noeuds spécifiques du maillage conduit inévitablement à des biais sur les résultats.

L'objectif a donc été d'évaluer ces biais et de déterminer des méthodes permettant de diminuer leur influence. En ce qui concerne le cas de l'Astrolabe, nous disposons des données

essentielles pour contraindre le modèle d'écoulement et construire une initialisation du glacier la plus proche possible de la réalité. La connaissance de la topographie du socle est primordiale puisqu'elle contrôle en partie la dynamique à la ligne d'échouage. La sensibilité du modèle d'écoulement à la description du socle a été testée au cours de notre étude et s'est avérée être significative. Les méthodes d'interpolation directes des données radar sur les grilles non structurées (dont la taille minimale atteint la centaine de mètres) doivent être privilégiées car elles conservent l'essentiel de l'information, contrairement à celles utilisant les bases de données régulières à des résolutions relativement grossières telles que BEDMAP. L'usage de ces dernières impliquent une double interpolation sur une grille intermédiaire à faible résolution, dégradant le signal initial de haute résolution des traces radar. Les données radar originales devraient pouvoir être disponibles à la communauté des glaciologues pour permettre cette interpolation directe. On propose dans ce travail la mise en place d'une interface web pour permettre cette mise à disposition.

De la même façon que la topographie du socle, celle de la surface contribue également à l'écoulement du glacier, le gradient de surface en représentant la force motrice. Si elle est bien plus accessible que le socle, en certaines zones les techniques d'altimétrie radar ne couvrent la surface qu'à une résolution supérieure au kilomètre, voire pas du tout comme c'est le cas à l'intérieur de la calotte Antarctique (au-delà de  $88^\circ$ ). En parallèle, la stéréoscopie échantillonne la surface côtière de manière très précise. Dans la perspective d'une modélisation de l'écoulement de la calotte globale, il serait intéressant de pouvoir utiliser un assemblage de ces deux types de mesures et de constituer une base de données plus robuste et représentative. La résolution de cette dernière serait adaptée selon les zones, de la même manière que la taille du maillage du modèle. L'évolution temporelle de ce genre de données, si elle existe, pourrait également être rendue disponible et apporterait davantage de contraintes aux modèles d'écoulement. Cette approche pourrait se généraliser au cas du Groënland.



# Annexe A

## Démonstrations associées à l'étude d'intercomparaison de modèles d'écoulement

### A.1 Relation for the buttressing factor

Firstly, the relation between the buttressing factors  $\theta$  in Eq. (3.19) and  $C_F$  in Eq. (3.22) is derived. The ice-shelf equation is

$$2 \frac{\partial (h\tau_{xx})}{\partial x} = \frac{\gamma}{2} \frac{\partial (h^2)}{\partial x}, \quad (7)$$

where  $h$  is the ice thickness along the ice-shelf. The longitudinal deviatoric stress within the ice shelf is then obtained as

$$\tau_{xx} = \frac{\gamma}{4} h - \frac{B}{h}, \quad (8)$$

where  $B$  is the back-force at the calving front. Evaluating this at  $x = x_f$  and using (3.22), we obtain

$$\tau_{xx}|_{x_f} = C_F \frac{\gamma}{4} h_f = \frac{\gamma}{4} h_f - \frac{B}{h_f}, \quad (9)$$

yielding

$$B = (1 - C_F) \frac{\gamma}{4} h_f^2, \quad (10)$$

and

$$\tau_{xx} = \frac{\gamma}{4} \left( h - (1 - C_F) \frac{h_f^2}{h} \right). \quad (11)$$

Now, at the GL  $x = x_g$ , by definition of  $\theta$  (3.19) :

$$\tau_{xx}|_{x_g} = \theta \frac{\gamma}{4} h_g, \quad (12)$$

so that

$$\theta = 1 - (1 - C_F) \left( \frac{h_f}{h_g} \right)^2. \quad (13)$$

## A.2 Expression for the buttressing for the FS model Elmer/Ice

Now, we demonstrate how is obtained the buttressing pressure  $p_b(t)$  in Eq.(3.24) giving the front-stress for the **FS-AG** model. We need to find  $p_b(t)$  such that the mean longitudinal Cauchy stress be the same for all models. This equality is expressed as follows :

$$\bar{\sigma}_{xx}^{SSA} = \bar{\sigma}_{xx}^{FS} \quad (14)$$

where  $\bar{\sigma}_{xx}^{SSA}$  and  $\bar{\sigma}_{xx}^{FS}$  are the longitudinal Cauchy stress of SSA models and **FS-AG** model, respectively.

The mean longitudinal Cauchy stress for SSA models reads :

$$\bar{\sigma}_{xx}^{SSA} = 2\bar{\tau}_{xx} + \bar{\sigma}_{zz} \quad (15)$$

where  $\bar{\sigma}_{zz} = -\frac{\rho_i g h_f}{2}$  and  $\bar{\tau}_{xx}$  is given by Eq. (3.22).

The longitudinal Cauchy stress for **FS-AG** model, given by Eq.(3.24), and once integrated over the ice column gives :

$$\bar{\sigma}_{xx}^{FS} = -\frac{\rho_w g z_b^2}{2h_f} + p_b \quad (16)$$

Using Eq. (15) for SSA models and Eq. (16) for **FS-AG**, Eq. (14) leads to

$$2C_F \frac{\gamma}{4} h_f - \frac{\rho_i g h_f}{2} = -\frac{\rho_w g z_b^2}{2h_f} + p_b \quad (17)$$

Using the flotation condition  $\rho_i h_f = \rho_w z_b$ , and after simplifications,  $p_b$  can be isolated and deduced as

$$p_b = \frac{\rho_w g z_b^2}{2\rho_i h_f} (\rho_w - \rho_i) (C_F - 1). \quad (18)$$

# Table des figures

1.1	Vitesses de surface de l'Antarctique mesurées à partir de la méthode d'interférométrie radar ( <i>Rignot et al., 2011b</i> ). . . . .	6
1.2	Mesures des variations temporelles d'altitude de surface par altimétrie radar ( <i>Pritchard et al., 2009</i> ). . . . .	7
1.3	Exemple du lac sous-glaciaire de Vostok identifié par échos radar (Radio-Echo Sounding)( <i>Siegert et al., 2005</i> ). . . . .	9
1.4	Schéma représentant les trois principaux mécanismes d'écoulement d'un glacier. .	10
1.5	Schéma de la structure heaxagonale du cristal de glace ( <i>Gillet-Chaulet, 2006</i> ) . .	11
1.6	Représentation schématique des différents modes de fluage ( <i>Gillet-Chaulet, 2006</i> ). .	12
1.7	Mesures des vitesses d'écoulement de surface en fonction de la pression d'eau effective ( <i>Iken and Truffer, 1997</i> ) . . . . .	16
1.8	Représentation des composantes et contributions au bilan de masse de la calotte Antarctique . . . . .	17
2.1	Représentation du domaine modélisé . . . . .	22
2.2	Illustration du problème de contact pour la résolution de la migration de la ligne d'échouage . . . . .	26
2.3	Représentation schématique de la courbe en L . . . . .	34
2.4	Schéma représentant la conservativité des flux de la méthode numérique des volumes finis. . . . .	39
2.5	Schéma illstrant le pricipie de coercivité. . . . .	42
3.1	Représentation du mécanisme d'instabilité de la calotte marine. . . . .	47
3.2	Exemple de dépendance des résultats des modèles de calotte à la taille de grille. .	49
3.3	Représentation schématique de la calotte marine des expériences de <i>Schoof (2007)</i> . .	50
3.4	Evolution de la position de la ligne d'échouage en fonction de la fluidité pour l'expérience MISMIP . . . . .	51
3.5	Comparaison de l'état stationnaire des modèles FS et BL . . . . .	53
3.6	Représentation de la contribution relative du glissement en fonction des paramètres A et C. . . . .	55

3.7	Représentation du rapport des flux à la ligne d'échouage des modèles FS et BL en fonction de la contribution relative du glissement . . . . .	55
3.8	Initial steady state geometry for all models . . . . .	65
3.9	Grounding line position and migration rate as a function of time for all experiments. . . . .	67
3.10	Rate of surface elevation change as a function of time and horizontal distance . . . . .	68
3.11	Surface horizontal velocity as a function of time and horizontal distance. . . . .	69
3.12	GL ice flux as a function of GL ice thickness for all experiments and for each model. . . . .	71
3.13	Temporal evolution of the variation of Volume above Flotation. . . . .	72
4.1	Localisation de l'Astrolabe en Antarctique de l'Est . . . . .	77
4.2	Élévation de la surface de glace dans la zone de l'Astrolabe d'après le MNT Spirit ( <i>Korona et al., 2009</i> ). . . . .	78
4.3	Élévation du socle dans la zone de l'Astrolabe selon BEDMAP ( <i>Lythe et al., 2001</i> ). . . . .	79
4.4	Schéma de représentation de la 'zone d'échouage' ( <i>Fricke and Padman, 2006</i> ) . . . . .	80
4.5	Représentation de la méthode dynamique <i>in situ</i> pour délimiter la ligne d'échouage de l'Astrolabe. . . . .	81
4.6	Mesures du Bilan de Masse de Surface en fonction de la distance à la côte ( <i>Agosta et al., 2012</i> ). . . . .	83
4.7	Balise GPS implantée sur la partie posée du glacier de l'Astrolabe. . . . .	84
4.8	Représentation du réseau GPS permanent installé sur l'Astrolabe et exemple de série temporelle. . . . .	85
4.9	Vitesses de surface mesurées par interférométrie radar dans la région de l'Astrolabe ( <i>Rignot et al., 2011a</i> ). . . . .	86
4.10	Maillage 2D de l'Astrolabe sur la partie côtière. . . . .	88
4.11	Comparaison d'élévations du socle sur les noeuds du maillage 2D interpolées à partir de la méthode <i>directe</i> et <i>indirecte</i> . . . . .	90
4.12	Maillage 3D initial de l'Astrolabe. . . . .	91
4.13	Représentation de la courbe en L pour la topographie de <i>référence</i> de l'Astrolabe. . . . .	93
4.14	Représentation des résultats de l'optimisation du coefficient de friction basale. . . . .	95
4.15	Résultats de la relaxation de <i>référence</i> de l'Astrolabe. . . . .	97
4.16	Erreur sur l'épaisseur de l'ice shelf. . . . .	98
4.17	Exemple de construction de jeux de données 'fictifs'. . . . .	100
4.18	Comparaison des expériences de perturbation de socle obtenue par méthode <i>directe</i> et <i>indirecte</i> par rapport à l'état de <i>référence</i> . . . . .	100
4.19	Représentation de l'erreur moyenne des vitesses de surface $ \delta V $ normalisée en fonction de la résolution de la grille du jeu de donnée original. . . . .	103

# Liste des tableaux

3.1	Paramètres de la simulation . . . . .	53
3.2	Paramètres des expériences de sensibilité et valeurs associées . . . . .	54
3.3	Summary table of model characteristics : LGGE stands for Laboratoire de Glaciologie et de Géophysique de l'Environnement, CSC for CSC - IT for Science, ULB for Université Libre de Bruxelles, and BAS for British Antarctic Survey. . .	59
3.4	Parameters of initial steady state . . . . .	65
3.5	GL position for the initial steady state ( $C_F = 0.4$ ) and for the different perturbations for each model after 200 years. The difference between the initial steady state and the perturbed state is given in brackets. All values are in km. . . . .	66
4.1	Paramètres de la simulation d'inversion. . . . .	92
4.2	Tableau récapitulatif des expériences de perturbations du socle. . . . .	102





# Bibliographie

- Agassiz, J. (1842), Observations on the glacier of the Aar, *Edinburgh New Philos. Journal*, *38*, 339–402.
- Agosta, C., V. Favier, C. Genthon, H. Gallée, G. Krinner, J. Lenaerts, and M. R. van den Broeke (2012), A 40-year accumulation dataset for Adelie Land, Antarctica and its application for model validation, *Clim. Dyn.*, *38*, 75–86.
- Ahlmann, H., H. Wison, and O. Trysellus (1929), Der Kaarsa-Gletscher in swedish lappland, *Geografiska Annaler, Stockolm*.
- Alley, R., and R. Bindschadler (2001), *The West Antarctic ice sheet and sea level changes : in the West Antarctic Ice Sheet : Behavior and Environment*, vol. 77, Antarct. Res. Ser,AGU, Washington D.C.
- Alley, R., D. Blankenship, C. Bentley, and T. Rooney (1986), Deformation of till beneath ice stream B, West Antarctica, *Nature*, *322*, 57–59.
- Anandakrishnan, S., G. Catania, R. Alley, and H. Horgan (2007), Discovery of till deposition at the grounding line of Whillans Ice Stream, *Science*, *315*, 1835–1838.
- Arthern, R., and G. Gudmundsson (2010), Initialization of ice-sheet forecasts viewed as an inverse Robin problem, *J. Glaciol.*, *56*, 527–533.
- Arthern, R., D. Winebrenner, and D. Vaughan (2006), Antarctic snow accumulation mapped using polarization of 4.3-cm wavelength microwave emission, *J. Geophys. Res.*, *111*, doi : 10.1029/2004JD005667.
- Bamber, J., R. Layberry, and S. Gogineni (2001), A new ice thickness and bed data set for the Greenland Ice Sheet. I-Measurement, data reduction, and errors, *J. Geophys. Res.*, *106*, 33.
- Beaman, R., P. E.O'brien, A. L. Post, and L. DeSantis (2010), A new high-resolution bathymetry model for the Terre Adélie and George V continental margin, East Antarctica, *Antarctic Science*, *23*, 95–103.
- Bell, R., M. Studinger, M. Fahnestock, and C. Shuman (2006), Tectonically controlled subglacial lakes on the flanks of the Gamburtsev Subglacial Mountains, East Antarctica, *Geophys. Res. Lett.*, *33*, doi :10.1029/2005GL025207.

- Bell, R., M. Studinger, C. Shuman, M. Fahnestock, and I. Joughin (2007), Large subglacial lakes in East Antarctica at the onset of fast-flowing ice streams, *Nature*, 445, doi : 0.1038/nature05554.
- Bindschadler, R., and T. Scambos (1991), Satellite-Image-Driven-Velocity of an Antarctic ice stream, *Science*, 252, 242–246.
- Bindschadler, R., H. Choi, R. Bingham, J. Bohlander, K. Brunt, H. Corr, R. Drews, H. Fricker, M. Hall, R. Hindmarsh, J. Kohler, L. Padman, W. Rack, G. Rotschky, S. Urbini, P. Vornberger, and N. Young (2011), Getting around Antarctica : new high-resolution mappings of the grounded and freely-floating boundaries of the Antarctic ice sheet created for the International Polar Year, *The Cryosphere*, 5, 568–588.
- Bindschadler, R., S. Nowicki, A. Abe-Yuchi, A. Aschwnaden, H. Choi, J. Fastook, G. Granzow, R. Greve, G. Gutowski, U. Herzfeld, C. Jackson, J. Johnson, C. Khroulev, A. Levermann, W. Lipscomb, M. Martin, M. Morlighem, B. Parizek, D. Pollard, S. Price, D. Ren, F. Saito, H. Seddik, H. Seroussi, K. Takahashi, R. Walker, and W. Wang (2012), Ice-sheet model sensitivities to environmental forcing and their use in projecting future sea-level (the searise project), *J. Glaciol.*, *submitted*.
- Blankenship, D., C. Bentley, T. Rooney, and R. Alley (1987), Till beneath ice stream. B1 : properties derived from seismic travel times, *J. Geophys. Res.*, 92, 8903–8911.
- Blankenship, D., S. Kempf, and D. Young (2011), IceBridge HiCARS 1 L2 Geolocated Ice Thickness, *Boulder, Colorado USA : National Snow and Ice Data Center. Digital media*.
- Bohlander, J., and T. Scambos (2008), Antarctic coastlines and grounding line derived from MODIS Mosaic of Antarctica (MOA), *Boulder, Colorado, USA : National Snow and Ice Data Center. Digital media*.
- Bordier, A. (1773), *Voyage pittoresque aux glaciers de Savoy*, Geneva.
- Braun, J., and M. Sambridge (1995), A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids, *Nature*, 376, 655–660.
- Brunt, K., H. Fricker, and L. Padman (2011), Analysis of ice plains of the Filchner-Ronne Ice shelf, Antarctica, using ICESat laser altimetry, *J. Glaciol.*, 57, 965–975.
- Cazenave, A., K. Dominh, S. Guinehut, E. Berthier, W. Llovel, G. Ramillien, M. Ablain, and Larnicol (2009), Sea level budget over 2003 to 2008 : A reevaluation from GRACE space gravimetry, satellite altimetry and Argo, *Glob. Planet. Change*.
- Chow, W., and C. Rhie (1983), Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, *AIAA Journal*, 21, 1525–1532.

- Chugunov, V., and A. Wilchinski (1996), Modelling of marine glacier and ice-sheet-ice shelf transition zone based on asymptotic analysis, *Ann. Glaciol.*, *23*, 59–67.
- Cornford, S., D. Martin, D. Graves, D. Ranken, A. LeBorcq, R. Gladstone, A. Payne, E. Ng, and W. Lipscomb (2012), Adaptive mesh, finite volume modeling of marine ice sheets, *Journal of Computational Physics*, doi :10.1016/j.jcp.2012.08.037.
- Cuffey, K., and W. Paterson (2010), *The physics of glaciers*, Elsevier.
- DeAngelis, H., and P. Skvarca (2003), Glacier surge after ice shelf collapse, *Science*, *299*, 1560–1562.
- DeFleurian, B. (2009), Développement d’un modèle d’hydrologie sous-glaciaire dédié à la simulation du glissement basal des glaciers, Ph.D. thesis, Université de Grenoble.
- Deponti, A., V. Pennati, L. D. Biase and Valter Maggi, and F. Berta (2006), A new fully three-dimensional numerical model for ice dynamics, *J. Glaciol.*, *52*, 365–375.
- DeQ.Robin, G. (1953), Norwegian-British-Swedish Antarctic Expedition, 1949-1952, *Polar Record*, *6*, 608–616.
- Docquier, D., L. Perichon, and F. Pattyn (2011), Representing Grounding Line Dynamics in Numerical Ice Sheet Models : Recent Advances and Outlook, *Surv. Geophys.*
- Drewry, D. (1980), Radio echo and magnetic sounding of the Antarctic ice sheet, *Polar. Rec.*, *20*, 43–51.
- Drewry, D. (1983), Antarctica : Glaciological and Geophysical Folio, *Cambridge University Press, Cambridge*.
- Dupont, T., and R. Alley (2005), Assessment of the importance of ice-shelf buttressing to ice-sheet flow, *J. Geophys. Res.*, *32*, doi :10.1029/2004GL022024.
- Durand, G., O. Gagliardini, T. Zwinger, E. L. Meur, and R. Hindmarsh (2009a), Full-Stokes modeling of marine ice sheets : influence of the grid size, *Ann. Glaciol.*, *50*.
- Durand, G., O. Gagliardini, B. de Fleurian, T. Zwinger, and E. L. Meur (2009b), Marine ice sheet dynamics : Hysteresis and neutral equilibrium, *J. Geophys. Res.*, *114*(F3), doi : 10.1029/2008JF001170.
- Duval, P., M. Ashby, and I. Anderman (1983), Rate-controlling processes in the creep of polycrystalline ice, *J. Phys. Chem.*, *87*, 4066–4074.
- Eymard, R., R. Herbin, and T. Gallouet (2006), On a stabilized colocated Finite Volume Scheme for the Stokes problem, *ESAIM : Mathematical modelling and Numerical Analysis*, *40*, 501–527, doi :10.1051/m2an :2006024.

- Eymard, R., R. Herbin, J. Latché, and B. Piar (2007), On the stability of colocated clustered finite volume simplicial discretizations for the 2D Stokes problem, *CALCOLO*, *44*, 219–234, doi :10.1007/s10092-007-0138-8.
- Favier, L., O. Gagliardini, G. Durand, and T. Zwinger (2012), A three-dimensional full Stokes model of the grounding line dynamics : effect of a pinning point beneath the ice shelf, *The Cryosphere*, *6*, 101–112, doi :10.5194/tc-6-101-2012.
- Flament, T., and F. Rémy (2012), Dynamic thinning of Antarctic glaciers from along-track repeat radar altimetry, *J. Glaciol.*, *58*, 830–840, doi :10.3189/2012JoG11J118.
- Forbes, J. (1842), The glacier Theory, *Edinburgh Review*, *75*, 49–105.
- Fornberg, B. (1996), A Practical guide to pseudospectral methods, *Cambridge University Press*.
- Frey, P., and F. Alauzet (2005), Anisotropic mesh adaptation for CFD computations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, *194*, 5068–5082.
- Fricker, H., and L. Padman (2006), Ice shelf grounded zone structure from laser ICESat laser altimetry, *J. Glaciol.*, *46*, 553–560.
- Fricker, H., T. Scambos, R. Bindshadler, and L. Padman (2007), An active subglacial water system in West Antarctica mapped from space, *Science*, *315*, 1544–1548.
- Fricker, H., R. Coleman, L. Padman, T. Scambos, J. Bohlander, and K. Brunt (2009), Mapping the grounding zone of the Amery Ice Shelf, *Antarctic Science*, pp. 1–18, doi : 10.1017/S095410200999023X.
- Fujita, J., et al. (1999), Nature of radio-echo layering in the Antarctic ice sheet detected by a two-frequency experiment, *J. Geophys. Res.*, *104*, 13,013–13,024.
- Gagliardini, O., D. Cohen, P. Raback, and T. Zwinger (2007), Finite-element modeling of subglacial cavities and related friction law, *J. Geophys. Res.*, *112*.
- Gagliardini, O., G. Durand, T. Zwinger, R. Hindmarsh, and E. L. Meur (2010), Coupling of ice-shelf melting and buttressing is a key process in ice-sheets dynamics, *Geophys. Res. Lett.*
- Gilbert, J., and C. Lemaréchal (1989), Some numerical experiments with variable-storage quasi-Newton algorithms, *Math. Program.*, *45*, 407–435, doi :10.1007/BF01589113.
- Gillet-Chaulet, F. (2006), Modélisation de la glace polaire anisotrope et premières applications au forage de Dôme C, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier (Grenoble 1).
- Gillet-Chaulet, F., and G. Durand (2010), Glaciology : Ice sheet Advance in Antarctica, *Nature*, *467*.

- Gillet-Chaulet, F., R. Hindmarsh, H. Corr, E. King, and A. Jenkins (2011), In-situ quantification of ice rheology and direct measurement of the Raymond Effect at Summit, Greenland using a phase-sensitive radar, *Geophys. Res. Lett.*, *38*.
- Gillet-Chaulet, F., O. Gagliardini, H. Seddik, M. Nodet, G. Durand, C. Ritz, T. Zwinger, R. Greve, and D. Vaughan (2012), Greenland Ice Sheet contribution to sea-level rise from a new-generation ice-sheet model, *The Cryosphere Discussions*, *6*, 2789–2826, doi :10.5194/tcd-6-2789-2012.
- Glen, J. W. (1955), The creep of Polycrystalline ice, *Philos Trans R. Soc. London*, *228*, 519–538.
- Goldberg, D., and O. Sergienko (2011), Data assimilation using a hybrid ice flow model, *The Cryosphere*, *5*, 315–327.
- Goldberg, D., D. Holland, and C. Schoof (2009), Grounding line movement and ice shelf buttressing in marine ice sheets, *J. Geophys. Res.*, *114*, doi :10.129/2008JF001227.
- Goldstein, R., H. Engelhardt, B. Kamb, and R. Frolich (1993), Satellite Radar Interferometry for monitoring ice motion : application to an antarctic ice stream, *Science*, *262*, 1525–1530.
- Gray, L., I. Joughin, S. Tulaczyk, V. Spikes, R. Bindshadler, and K. Jezek (2005), Evidence for subglacial water transport in the West Antarctic Ice Sheet through three dimensional satellite radar interferometry, *Geophys. Res. Lett.*, *32*, doi :10.1029/2004GL021387.
- Greve, R. (1997), A continuum-mechanical formulation for shallow polythermal ice sheets, *Phil. Trans. R. Soc. A : Mathematical, Physical and engineering sciences*, *355*, 921–974.
- Hadamard, J. (1923), Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, *Yale University Press*.
- Harlow, S., and F. Welsh (1965), Numerical calculation of Time-dependent viscous incompressible flow with free surface, *Phys. Fluids*, *8*, 2182–2189.
- Hindmarsh, R. (1996a), Stability of ice rises and uncoupled marine ice sheets, *Ann. Glaciol.*, *23*.
- Hindmarsh, R. (1996b), Qualitative dynamics of marine ice sheets in Ice in the climate system, NATO ASI Ser., Ser1., edited by W. Peltier, Springer, New York, *12*, 185–202.
- Hindmarsh, R. (2004), A numerical comparison of approximations to the Stokes equations used in ice sheet and glacier modeling, *J. Geophys. Res.*, *109*.
- Hindmarsh, R. (2006), The role of membrane-like stresses in determining the stability and sensitivity of the antarctic ice-sheets : back-pressure and grounding line motion, *Phil. Trans. R. Soc. A*, *364*, 1733–1767, doi :10.1098/rsta.2006.1797.
- Hindmarsh, R. (2012), An observationally validated theory of viscous flow dynamics at the ice-shelf calving front, *J. Glaciol.*, *58*.

- Hindmarsh, R., and E. LeMeur (2001), Dynamical processes involved in the retreat of marine ice sheets, *J. Glaciol.*, 47.
- Hulbe, L., and D. MacAyeal (1999), A new numerical model of coupled inland ice sheet, ice stream and ice shelf flow and its application to the West Antarctic Ice Sheet, *J. Geophys. Res.*, 104, 349–366.
- Hutter, K. (1983), Theoretical glaciology : material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets, *Dordrecht, etc., D. Reidel Publishing Co ; Tokyo, Terra Scientific Publishing Co.*
- Huybrechts, P. (1990), A 3-D model for the Antarctic ice sheet : a sensitivity study on the glacial interglacial contrast, *Clim. Dyn.*, 5, 79–92.
- Iken, A. (1981), The effect of the subglacial water pressure on the sliding velocity of a glacier in an idealized numerical model, *J. Glaciol.*, 27, 407–421.
- Iken, A., and M. Truffer (1997), The relationship between subglacial water pressure and velocity of Findelengletscher, Switzerland, during its advance and retreat, *J. Glaciol.*, 43, 328–338.
- IPCC, Climate Change (2007), The physical basis. contribution of the working group I to the fourth assessment, *Tech. rep.*, report of the Intergovernmental Panel on Climate Change.
- Jarosch, A. (2007), IceTools : A full Stokes finite element model for glaciers, *Computers and Geosciences*, 34, 1005–1014.
- Jay-Allemand, M., F. Gillet-Chauet, O. Gagliardini, and M. Nodet (2011), Investigating changes in basal conditions of Variegated Glacier prior to and during its 1982-1983 surge, *The Cryosphere*, 5, 659–672.
- Jezeq, K. C. (1999), Glaciological properties of the Antarctic ice sheet from RADARSAT-1 synthetic aperture radar imager, *Ann. Glaciol.*, 29, 286–290.
- Jouvet, G., M. Picasso, J. Rappaz, and H. Blatter (2008), A new algorithm to simulate the dynamics of a glacier : theory and applications, *J. Glaciol.*, 54, 801–811.
- Kamb, B. (1970), Sliding motion of glaciers : theory and observations, *Rev. Geophys.*, 8, 673–728.
- Kamb, B. (2001), Basal zone of the West Antarctic ice streams and its role in the lubrication of their rapid motion, in *The West Antarctic Ice sheet : Behavior and Environment, Antarct. Res. edited by R.B. Alley and R.A. Bindshadler, AGU, Washington, D.C.*, 77, 157–200.
- Kikuchi, and Oden (1988), Contact problems in elasticity, A study of variational inequalities and finite element method, *SIAM*.
- Koch, J., and A. Wegener (1930), Wissenschaftliche Ergebnisse der Daenischen Expedition nach Dronning Louiseland 1912-1913 unter Leitung von Hauntmann J. P Koch, *Meddelelser om Gronland*, 75.

- Kohn, R., and M. Vogelius (1984), Determining conductivity by boundary measurements, *Commun. Pure Appl. Math.*, *37*, 289–298.
- Korona, J., E. Berthier, M. Bernard, F. Rémy, and E. Thouvenot (2009), SPIRIT.SPOT5 stereoscopic survey of polar Ice : Reference Images and Topographies during the fourth International Polar Year (2007-2009), *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*.
- Larour, E., J. Schiermeier, E. Rignot, H. Seroussi, M. Morlighem, and J. Paden (2012), Sensitivity analysis of Pine Island Glacier ice flow using ISSM and DAKOTA, *J. Geophys. Res.*, *117*, doi :10.1029/2011JF002146.
- Lax, P., and R. Richtmyer (1956), Survey of the stability of linear finite difference equations, *Comm. Pure Applied Math.*, *9*.
- LeMeur, E., and R. Hindmarsh (2001), Coupled marine ice sheet earth dynamics using a dynamically consistent ice-sheet model and a self gravitating viscous Earth model, *J. Glaciol.*, *47*, 258–270.
- LeMeur, E., M. Sacchetti, S. Garambois, G. Durand, A. S. Drouet, B. de Fleurian, O. Gagliardini, E. Berthier, J. Greenbaum, D. Young, and E. Berthier (2012), Consistent grounding line position over the Astrolabe Glacier, Terre Adelie, Antarctica from both GPS and Ground Penetrating Radar measurements, *submitted to The Cryosphere*.
- Lile, R. (1978), The effect of anisotropy of the creep of polycrystalline ice, *J. Glaciol.*, *21*, 475–483.
- Lingle, C. (1984), A numerical model of interactions between a polar ice stream and the ocean : Application to ice stream E, West Antarctica, *J. Geophys. Res.*, *89*, 3523–3549.
- Lliboutry, L. (1968), General theory of subglacial cavitation and sliding of temperate glaciers, *J. Glaciol.*, *7*, 21–58.
- Lliboutry, L. (1975), Loi de glissement d'un glacier sans cavitation, *Ann. Geophys.*, *31*, 207–226.
- Lliboutry, L., and P. Duval (1985), Various isotropic and anisotropic ices found in glaciers and polar ice caps and their corresponding rheologies, *Ann. Geophys.*, *3*, 207–224.
- Llubes, M., C. Lanseau, and F. Rémy (2006), Relations between basal conditions, subglacial hydrological networks and geothermal flux in Antarctica., *Earth Planet. Sci. Lett.*, *241*, 655–662.
- Lytche, M., D. Vaughan, and the BEDMAP consortium (2001), BEDMAP : a new ice thickness and subglacial topographic model of Antarctica, *J. Geophys. Res.*, *106*, 11,335–11,351.
- Mac Ayeal, D. (1992), Irregular Oscillations of the West Antarctic Ice Sheet, *Nature*, *359*, 29–32.
- MacAyeal, D. (1989), Large scale ice flow over a viscous basal sediment, *J. Geophys. Res.*, *94*, 4071–4087.



- MacAyeal, D. (1993), A tutorial on the use of control methods in ice sheet modeling, *J. Glaciol.*, *39*, 91–98.
- MacAyeal, D., C. Hulbe, P. Huybrechts, V. Rommelaere, J. Determann, and C. Ritz (1996), An ice-shelf model test based on the Ross ice shelf, *Ann. Glaciol.*, *23*, 246–51.
- Marschall, H., J. Harper, W. Pfeffer, and N. Humphrey (2002), Depth-varying constitutive properties observed in an isothermal glacier, *Geophys. Res. Lett.*, *29*, doi :10.1029/2002GL015412.
- Martin, C., F. Navarro, J. Otero, M. Cuadrado, and M. Corcuera (2004), Three-dimensional modelling of the dynamics of Johnsons Glacier Livingston Island, Antarctica, *Ann. Glaciol.*, *39*, 1–8.
- Mercer, J. (1978), West Antarctic Ice Sheet and CO<sub>2</sub> greenhouse effect : a threat of disaster, *Nature*, *271*.
- Morland, L. (1987), Unconfined ice-shelf flow, dynamics of the West Antarctic ice sheet, *Dordrecht, etc.*, pp. 99–116.
- Morlighem, M., E. Rignot, H. Seroussi, E. Larour, H. B. Dhia, and D. Aubry (2010), Spatial patterns of basal drag inferred using control methods from a full-Stokes and simpler models for Pine Island Glacier, West Antarctica, *Geophys. Res. Lett.*, *37*.
- Nick, F. M., A. Vieli, I. M. Howat, and I. Joughin (2009), Large-scale changes in Greenland outlet glacier dynamics triggered at the terminus, *Nature Geosci.*, *2*(2), 110–114, doi : 10.1038/ngeo394.
- Nikiforakis, N. (2009), Mesh generation and mesh adaptation for large-scale Earth-systems modelling, *Phil. Trans. R. Soc. A*, *367*, 4473–4481, doi :10.1098/rsta.2009.0197.
- Nowicki, S., and D. Wingham (2008), Conditions for a steady ice sheet-shelf junction, *Earth Planet. Sci. Lett.*, *265*.
- Nye, J. (1969), A calculation on the sliding of ice over a wavy surface using a newtonian viscous approximation, *Proc. R. Soc, Ser, A*, pp. 445–467.
- Nye, J. (1970), Glacier Sliding without cavitation in a linear viscous approximation, *Proc. R. Soc, Ser, A*, *315*, 380–403.
- Oswald, G., and G. Robin (1973), Lakes beneath the Antarctic Ice Sheet, *Nature*, *245*, 251–254.
- Parkinson, C., and D. Cavalieri (1989), Artic Sea Ice 1973-1987 : seasonal regional and interannual variability, *J. Geophys. Res.*, *94*, 14,499–14,523.
- Patankar, S., and D. Spalding (1972), Calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three dimensional parabolic flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, *15*, 1787–1806.

- Paterson, W. (1991a), Secondary and tertiary creep of glacier ice as measured by borehole closure rate, *Rev. Geophys. Space Phys.*, *15*, 47–55.
- Paterson, W. (1991b), Why ice ages is sometimes 'soft', *Cold Reg. Sci. Technol.*, *20*, 75–98.
- Pattyn, F. (2010), Antarctic subglacial conditions inferred from a hybrid ice sheet/ice stream model, *Earth Planet. Sci. Lett.*, *295*.
- Pattyn, F., A. Huyghe, S. De Brabant, and B. De Schmedt (2006), Role of transition zones in marine ice sheet dynamics, *J. Geophys. Res.*, *111*, doi :10.1029/2005JF000394.
- Pattyn, F., C. Schoof, L. Perichon, R. Hindmarsh, E. Bueler, B. De Fleurian, G. Durand, O. Gagliardini, R. Galdstone, D. Goldberg, G. Gudmundsson, V. Lee, F. Nick, A. Payne, D. Pollard, O. Rybak, F. Saito, and A. Vieli (2012), Results of the Marine Ice Sheet Intercomparison project MISMIP, *The Cryosphere*, *6*, 573–588, doi :10.5194/tc-6-53-2012.
- Pattyn, F., L. Perichon, G. Durand, L. Favier, O. Gagliardini, R. Hindmarsh, T. Zwinger, T. Albrecht, S. Cornford, D. Docquier, J. Fuerst, D. Goldberg, G. H. Gudmundsson, A. Humbert, M. Huetten, P. Huybrechts, G. Jouvét, T. Kleiner, E. Larour, D. Martin, M. Morlighem, T. Payne, D. Pollard, M. Rueckamp, O. Rybak, H. Seroussi, M. Thoma, and N. Wilkens (submitted), Grounding-line migration in plan-view marine ice-sheet models : results of the ice2sea mismip3d intercomparison, *J. Glaciol.*
- Payne, A., A. Vieli, A. Shepherd, D. Wingham, and E. Rignot (2004), Recent dramatic thinning of largest West Antarctic ice stream triggered by oceans, *Geophys. Res. Lett.*, *31*, doi : 10.1029/2004GL021284.
- Pollard, D., and R. DeConto (2007), A coupled ice-sheet/ice-shelf/sediment model applied to a marine-margin flowline : forced and unforced variations, *Glac. Sed. Processes Products*, *39*, 37–52.
- Pollard, D., and R. DeConto (2009), Modelling West Antarctic ice sheet growth and collapse through the past five million years, *Nature*, *458*, 329–332.
- Pollard, D., and R. DeConto (2012), Description of a hybrid ice sheet-shelf model, and application to Antarctica, *Geoscientific Model Development Discussions*, *5*, 1077–1134, doi : 10.5194/gmdd-5-1077-2012.
- Price, S., E. Waddington, and H. Conway (2007), A full stress, thermomechanical flow band model, using the finite volume method, *J. Geophys. Res.*, *112*.
- Price, S., A. P. an I. Howat, and B. Smith (2011), Committed sea-level rise for the next century from Greenland ice sheet dynamics during the past decade, *Proc. Nat. Acad. Sci.*
- Pritchard, H., R. Arthern, D. Vaughan, and L. Edwards (2009), Extensive dynamic thinning on the margins of the Greenland and Antarctic ice sheets, *Nature*, *461*, 971–975.

- Pritchard, H. D., S. Ligtenberg, H. Fricker, D. Vaughan, M. Van den Broeke, and L. Padman (2012), Antarctic ice-sheet loss driven by basal melting of ice shelves, *Nature*, *484*, 202–205.
- Rendu (1840), *Théorie des glaciers de la Savoy, Chambéry*.
- Rignot, E. (1998), Fast recession of a West Antarctic glacier, *Science*, *281*, 549–551.
- Rignot, E. (2002), Mass balance of East Antarctic glaciers and ice shelves from satellite data, *Ann. Glaciol.*, *34*, 217–227, doi :10.3189/172756402781817419.
- Rignot, E., D. Braaten, S. Gogineni, W. Krabill, and J. McConnell (2004a), Rapid ice discharge from southeast Greenland glaciers, *Geophys. Res. Lett.*, *31*, doi :10.1029/2004GL019474.
- Rignot, E., G. Casassa, P. Gogineni, W. Krabill, A. Rivera, and R. Thomas (2004b), Accelerated ice discharge from the Antarctic peninsula following the collapse of Larsen B ice shelf, *Geophys. Res. Lett.*, *31*, doi :10.1029/2004GL020697.
- Rignot, E., J. L. Bamber, M. R. van den Broeke, C. Davis, Y. Li, W. J. van de Berg, and E. van Meijgaard (2008), Recent Antarctic ice mass loss from radar interferometry and regional climate modelling, *Nature Geosci.*, *1*(2), 106–110, doi :10.1038/ngeo102.
- Rignot, E., I. Velicogna, M. R. van den Broeke, A. Monaghan, and J. Lenaerts (2011a), Acceleration of the contribution of the Greenland and Antarctic ice sheets to sea level rise, *Geophys. Res. Lett.*, *38*, doi :201110.1029/2011GL046583.
- Rignot, E., J. Mouginot, and B. Scheuchl (2011b), Ice Flow of the Antarctic Ice Sheet, *Science*, doi :10.1126/science.1208336.
- Rignot, E., J. Mouginot, and B. Scheuchl (2011c), Antarctic grounding line mapping from differential satellite radar interferometry, *Geophys. Res. Lett.*, doi :10.1029/2011GL047109.
- Ritz, C., V. Rommelaere, and C. Dumas (2001), Modeling the evolution of Antarctic Ice sheet over the last 420 000 years : implications for altitude changes in the Vostok region, *J. Geophys. Res.*, p. 106.
- Robin, G., D. Drewry, and D. Meldrum (1977), International studies of ice sheet and bedrock, *Phil. Trans. R. Soc.*, pp. 185–196.
- Scambos, T., J. Bohlander, C. Shuman, and P. Skvarca (2004a), Glacier acceleration and thinning after ice shelf collapse in the Larsen B embayment, *Geophys. Res. Lett.*, *31*, doi : 10.1029/2004GL020670.
- Scambos, T. A., J. Bohlander, B. Raup, and T. Haran (2004b), Glaciological characteristics of Institute Ice Stream using remote sensing, *Antarctic Science*, *16*, 205–213.

- Schafer, M., T. Zwinger, P. Christoffersen, F. Gillet-Chaulet, K. Laakso, R. pettersson, V. Pohjola, T. Strozzi, and J. Moore (2012), Sensitivity of basal conditions in an inverse model : Vestfonna ice cap, Nordaustlandet/Svalbard, *The Cryosphere*, 6, 771–783, doi :10 :10.5194/tc-6-771-2012.
- Schoof, C. (2005), The effect of cavitation on glacier sliding, *Proc. R. Soc., Ser A.*, pp. 609–627.
- Schoof, C. (2007), Ice-sheet grounding line dynamics : Steady states, stability and hysteresis, *J. Geophys. Res.*, 112, doi :10.1029/2006JF/000664.
- Schoof, C. (2011), Marine ice sheet dynamics. Part2. A stokes flow contact problem, *J. Fluid Mech.*, pp. 1–34.
- Seroussi, H., M. Morlighem, E. Rignot, E. Larour, D. Aubry, and H. B. Dhia (2011), Ice flux divergence anomalies on 79north Glacier, Greenland, *Geophys. Res. Lett.*, 38, doi : 10.1029/2011GL047338.
- Shepherd, A., D. Wingham, T. Payne, and P. Skvarca (2003), Larsen ice shelf has progressively thinned, *Science*, 302, 856–859.
- Sibson, R. (1981), *A Brief Description of Natural Neighbour Interpolation*. In : Barnett, V, *Interprating Multivariate Data.*, John Wiley and Sons, New York.
- Siegert, M., J. Taylor, A. Payne, and B. Hubbard (2004), Macro-scale bed roughness of the Siple Coast ice streams in West Antarctica, *Earth Surf. Process. Land.*, 29, 1591–1596.
- Siegert, M., S. Carter, I. Tabacco, S. Popov, and D. Blankenship (2005), A revised inventory of Antarctic subglacial lakes, *Antarctic Science*, 17, 453–460.
- Stephenson, S., C. Doake, and J. Horsfall (1979), Tidal flexure of ice shelf measured by tiltmeter, *Nature*, 282, 496–497.
- Sverdurp, H. (1936), The ablation on Isachsen’s plateau and on the fourteenth of July in relation to radiation and meteoroligal conditions. Results of the Norwegian Swedish Spitsbergen Expedition in 1934.Part 4., *Geog. Ann.*
- Thomas, R., and C. Bentley (1978), A model for Holocene retreat of the West Antarctic Ice Sheet, *Quat. Res.*
- Tyndall, J., and T. Huxley (1857), On the structure and motion of Glacier, *Phil. Trans R. Soc.*, 147, 327–346.
- VanDerVeen, C. (1985), Response of a marine ice sheet to changes at the grounding line, *Quat. Res.*, 24, 257–267.
- Vaughan, D. (1994), Investigating tidal flexure on an ice shelf using kinematic GPS, *Ann. Glaciol.*, 20, 372–376.

- Vaughan, D. (1995), Tidal flexure at ice shelf margins, *J. Geophys. Res.*, *10*, 6213–6224.
- Vaughan, D., J. Bamber, M. Giovinetto, J. Russell, and A. Cooper (1999), Reassessment of net surface mass balance in Antarctica, *J. Clim.*, *12*, 933–946.
- Vaughan, D., F. Corr, A. Bindschadler, P. Dutrieux, G. Gudmundsson, A. Jenkins, T. Newman, P. Vornberger, and D. Wingham (2012), Sub-glacial channels and fracture in the floating portion of Pine Island Glacier, Antarctica, *J. Geophys. Res.*, *117*, 1–10.
- Velicogna, I. (2009), Increasing rates of ice mass loss from the Greenland and Antarctic ice sheets revealed by GRACE, *Geophys. Res. Lett.*, *36*, doi :doi :10.1029/2009GL040222.
- Vieli, A., and T. Payne (2005), Assessing the ability of numerical ice sheet models to simulate grounding line migration, *J. Geophys. Res.*, *110*, doi :10.1029/2004JF000202.
- Vivian, R. (1980), The nature of the ice-rock interface : the result of investigation of 20000m<sup>2</sup> of the rock bed of temperate glacier, *J. Glaciol.*, *25*, 327–346.
- Weertman, J. (1957), On the sliding of glaciers, *J. Glaciol.*, *3*, 33–38.
- Weertman, J. (1972), General Theory of water flow at the base of a glacier or ice sheet, *J. Glaciol.*, *6*, 287–333.
- Weertman, J. (1974), Stability of the junction of an ice sheet and an ice shelf, *J. Glaciol.*, *3*, 3–11.
- Weertman, J. (1976), General Theory of water flow at the base of a glacier or ice sheet, *Quat. Res.*, *6*, 203–207.
- Williams, C., R. C. A. Hindmarsh, and R. Arthern (2012), Frequency response of ice streams, *Proc. Roy. Soc. Ser. A*.
- Wingham, D., A. Shepherd, A. Muir, and J. Marshall (2006a), Mass Balance of the Antarctic Ice Sheet, *Phil. Trans. R. Soc. A*, doi :10.1098/rsta.2006.1792.
- Wingham, D., M. Siegert, A. Shepherd, and A. Muir (2006b), Rapid discharge connects Antarctic subglacial lakes, *Nature*, pp. 1033–1036.
- Zwinger, T., R. Greve, O. Gagliardini, T. Shiraiwa, and M. Lyly (2007), A full Stokes-flow thermo-mechanical model for firn and ice applied to the Gorshkov crater glacier, Kamchatka, *Ann. Glaciol.*, *45*, 29–37.