HAL open science

Combinatoire analytique et modèles d'urnes

Basile Morcrette

To cite this version:

Basile Morcrette. Combinatoire analytique et modèles d'urnes. Combinatoire [math.CO]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2013. Français. NNT : . tel-00843046

HAL Id: tel-00843046

https://theses.hal.science/tel-00843046v1

Submitted on 10 Jul 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE – PARIS 6
ÉCOLE DOCTORALE EDITE – ED130

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'Université Pierre et Marie Curie – Paris 6
Mention Informatique

Basile Morcrette

Combinatoire Analytique et Modèles d'Urnes

Thèse dirigée par Philippe Flajolet,
Philippe Dumas et Michèle Soria

soutenue le **mercredi 26 juin 2013**

devant le **jury** composé de

Mme Béatrice Bérard	Université Pierre et Marie Curie
M. Alin Bostan	INRIA Saclay
Mme Mireille Bousquet-Mélou	Université de Bordeaux - CNRS
M. Philippe Chassaing	Université Henri Poincaré
Mme Brigitte Chauvin	Université de Versailles
M. Philippe Dumas	INRIA Saclay
Mme Michèle Soria	Université Pierre et Marie Curie
Mme Brigitte Vallée	Université de Caen - CNRS

après avis des **rapporteurs**

Mme Brigitte Chauvin	Université de Versailles
M. Hsien-Kuei Hwang	Academia Sinica, Taiwan

Combinatoire Analytique

et

Modèles d'Urnes

Basile MORCRETTE

LIP6, UPMC
INRIA

Version du 25 juin 2013

À mes parents,
Michel et Sylvie.

Remerciements

C'est après quelques cours au MPRI puis autour d'un croque-monsieur-frite à 16h dans le café face à Chevaleret que Philippe Flajolet a allumé en moi la flamme de la curiosité dans la recherche. En le suivant à l'Inria Rocquencourt, j'étais loin de m'imaginer ce qui m'attendait. En quelques mois de stage, il a réussi à me donner envie de me lancer dans ce défi de trois ans, quoiqu'il advienne. Je m'étonne toujours qu'il ait su prédire une richesse dans ce sujet de thèse ; dès les premiers mois, il a semé différentes graines afin qu'elles germent tout au long de ces trois ans, et qui demandent encore à fleurir. Merci de m'avoir fait confiance, de m'avoir donné une autonomie, d'avoir développé la recherche effective, notamment en apprivoisant MAPLE. Je suis admiratif de la vision globale qu'il avait sur les sciences, de sa connaissance en toute humilité, de son génie humaniste. De là où il est, je lui dédie cette thèse. J'ai tenté, à ma manière, de lui rendre hommage en m'inspirant de sa pédagogie, de ses méthodes et de ses sujets de prédilection.

Je ne remercierai jamais assez son successeur, Philippe Dumas, qui a repris sans hésiter le flambeau de la direction de thèse. Toujours bienveillant, rigoureux et exigeant, avec un trait d'humour, il a su sans cesse trouver les mots, les encouragements face à mes doutes. Je suis fier d'avoir poursuivi cette entreprise avec lui, afin de faire perdurer la méthode Pifou.

Merci à Michèle, qui m'a suivi, conseillé, épaulé, soutenu tout au long de ces trois ans.

Un grand merci à Brigitte et Hsien-Kuei, mes rapporteurs, pour leur relecture pertinente, leurs remarques constructives, ainsi que pour leur soutien et pour les discussions que l'on ait pu partager.

Je remercie chaleureusement les membres du jury d'avoir accepté d'être présents à ma soutenance. Je pense particulièrement à Alin et Brigitte qui ont su braver outre-atlantique les contraintes horaires et numériques.

Je souhaite également remercier les laboratoires et équipes d'accueil qui m'ont hébergé durant la thèse. Aux anciens membres du projet ALGO (Bruno, Alin, Frédéric, Nicolas, ...) pour la bonne ambiance qui régnait au bâtiment 9, scientifiquement très ouverte et humainement fort sympathique. Comment ne pas évoquer trois éléments caractéristiques : la secrétaire légendaire *Calamity Virginie* qui dompte l'administratif plus vite que son ombre ; le séminaire Algo et ses joutes verbales (Bravo à Kilian qui s'en est tiré admirablement, lors de ma toute première visite à l'Inria, en février 2010) ; la mythique salle café/clopes/pari chocolat/conjecture/re-café/bibliothèque/débat/re-re-café/...

Aux membres du LIP6, et particulièrement à l'équipe APR qui m'a accueilli durant ces trois ans. Une pensée pour Louise, Mourad, et Jules qui seront les prochains à affronter la dernière ligne droite. À mes co-bureaux, dans ce bureau définitivement toujours trop chaud.

Au récent projet Specfun à l'Inria Saclay, et à Pierre qui me prête régulièrement son bureau.

À mes co-auteurs, Hosam, Alin, Philippe, Nicolas pour le bonheur d'échanger nos idées scientifiques, et pour le partage du soucis de style et de pédagogie lors de la rédaction. Merci à vous d'avoir entretenu la flamme de la recherche qui par moments s'était mise en veille.

Aux enseignants, et enseignantes de l'UPMC pour avoir partagé ma passion pour l'enseignement. Merci Maryse, Alix et Béatrice ! Merci aux étudiants d'avoir essuyer les plâtres de mes premiers pas en tant que prof. Merci à eux d'avoir subi, commenté, et s'être amusé avec mes interros surprises parfois extravagantes.

À celles et ceux qui constituent une véritable communauté scientifique et humaine autour de la combinatoire. Merci à ALEA, à AofA ainsi qu'aux projets ANR Boole et Magnum, où les nombreuses réunions furent l'objet de belles rencontres humaines, scientifiques et musicales. J'ai envie d'évoquer les après-midis ensoleillées dans les calanques, les soirées sur le Vieux-Port de Marseille, les fameux jeudis soirs musicaux à Luminy (merci aux Juliens, guitare et voix), les nuits de Vienne (merci Jérémie), la chaleur des rues de Montréal (merci Luc et Marie), la campagne polonaise (merci Bob), ou encore les plages de Minorque (bravo Conrado et Alfredo), et bien d'autres . . .

Aux amis rencontrés dans cette communauté. En vrac, Cécile (*maybe ... just keep walking*), Adeline (*au pays des lamas*), Kerstin (*musique et tourisme, d'Oxford à New York*) Julien (*dans le port d'Amsterdam*), Elie (*force tranquille au Tai-ki-fu-kwando*), Alice (*game master de renom*), Gwendal (*dit Gwendy la gourmande*), Julien (*car c'est dans tes yeux...*), et je m'excuse auprès de tous ceux que j'aurais pu oublier.

À Jérémie pour son amitié sincère et indéfectible.

Je conclurai par tous ceux qui m'ont permis vivre des aventures en dehors de la recherche, et grâce à qui, cette entreprise de trois ans fût possible.

À mes amis de toujours, du lycée jusqu'à aujourd'hui : Benoît, Nicolas et Juliette.

À celles et ceux dont j'ai croisé la route à Valenciennes, Cachan et Paris, en particulier Clélia et Antoine.

Durant ces années en région parisienne, j'ai découvert de formidables personnes, musiciens et amis, et je tenais à les remercier aujourd'hui, car le pied dans la musique fût indispensable à mon épanouissement, et peut-être aussi à l'énergie créatrice nécessaire lorsque l'on se lance dans la recherche. Merci donc à tous ceux qui font et qui ont fait la PPP, le COGE, Oya, l'OSLP, les Clés, . . . Je ne me risquerai pas à citer tous ceux que j'ai en tête par peur d'omission, mais je suis sûr qu'ils se reconnaîtront, que ce soit en orchestre, en musique de chambre, autour d'une Grim', d'un babyfoot, d'une coinche, et autres repas, pique-niques, tournées, jeux, . . .

À Juliette qui m'a accompagné et soutenu particulièrement dans cette dernière année, et pour tout ce qu'elle me fait vivre. Merci.

Résumé

Cette thèse étudie les urnes de Pólya à travers le prisme de la combinatoire analytique. Les urnes sont des modèles, conceptuellement très simples, de dynamique de croissance ou d'extinction dont les comportements limites sont extrêmement variés. Ces modèles sont largement étudiés par des approches probabilistes mais la compréhension précise des diverses lois limites reste une question ouverte. Les travaux de Flajolet *et al.* en 2005 ont illustré que pour ces questions, une approche par combinatoire analytique peut se révéler très fructueuse : l'étude des propriétés (nature, singularités) des séries génératrices associées aux urnes donne accès à des lois limites avec grande précision.

Cette thèse s'inscrit dans la continuité de ces travaux et commence par identifier les séries des urnes de nature algébrique, grâce à un algorithme sophistiqué issu du calcul formel (Divination/Preuve automatique). Pour les classes d'urnes algébriques, nous menons des analyses, exacte et asymptotique, afin de connaître avec précision les comportements limites (structures des moments, vitesse de convergence, aspects limites locaux). Puis, l'étude d'urnes non algébriques est faite au travers d'exemples concrets portant sur la modélisation de réseaux sociaux, ainsi que sur la combinatoire des formules booléennes. Enfin, à travers des modèles d'urnes plus généraux (absence d'équilibre et présence d'aléa au sein des règles de substitution), nous montrons que l'approche symbolique de la combinatoire analytique est robuste. En particulier, une étude combinatoire générale des urnes sans condition d'équilibre est réalisée pour la première fois, unissant toute urne à une équation aux dérivées partielles.

Mots-clés : combinatoire analytique, probabilités et lois limites, urnes de Pólya et applications, algorithmique et calcul formel, systèmes différentiels et équations aux dérivées partielles.

Abstract

This thesis studies Pólya urns through the analytic combinatorics point of view. Urns are conceptually very simple models of growth or extinction dynamics for which the limiting behaviors are extremely diverse. Those models are widely studied by probabilistic approach, but the precise understanding of the variety of limit laws is still an open question. Since 2005, the work of Flajolet *et al.* shows that an analytic combinatorics approach can be very fruitful for those questions: the study of the properties (nature, singularities) of generating functions linked to urns provides access to many precisions on limit laws.

This thesis is a continuation of this work. First, the determination of the nature of the generating functions of urns by a high tech algorithm of computer algebra (automatic Guess'n'Prove) identifies which functions are algebraic. Then, we lead exact and asymptotic analysis for algebraic classes and precise properties on limiting behaviors are thus derived (moments structure, rate of convergence, local limit properties). Second, a study of some non algebraic urns is done through concrete examples linked to some models of social networks, or the combinatorics of some boolean formulas. Third, through the extension of classical models (unbalanced models, random entries for substitution rules), we show that the symbolic aspects of analytic combinatorics are thriving. More specifically, a general combinatorial study for non necessarily balanced urns is done for the first time and links any urn to a partial differential equation.

Keywords: analytic combinatorics, probability and limit laws, Pólya urns and applications, computer algebra algorithmics, differential systems and partial differential equations.

Table des matières

Introduction **1**

I Urnes et combinatoire analytique **11**

1 Combinatoire analytique : aperçu et techniques **13**
1.1 Séries génératrices 14
1.2 Paramètres et séries génératrices multivariées 16
1.3 Asymptotique et analyse complexe 17
1.4 Lois limites 19
1.5 Théorème de Cauchy-Kowalevski 23

2 Urnes et combinatoire analytique - Les fondamentaux **25**
2.1 Les histoires d'une urne 25
2.2 Urnes de Pólya et système différentiel 29
2.3 Résultats par combinatoire analytique 33

II Urnes algébriques **35**

Introduction **37**

3 Recherche automatique des urnes algébriques **41**
3.1 La démarche sur un exemple 41
3.2 Remarques préliminaires à l'automatisation 44
3.3 L'algorithme de Guess'n'Prove 47
3.4 Résultats de la recherche automatique 56
3.5 Repousser les limites 60

4 Preuves d'algébricité **67**
4.1 Le cas trivial $p = 0$ 68
4.2 Les urnes à croissance préférentielle : cas (ii) 69
4.3 Les urnes à croissance adverse : cas (iii) 71
4.4 Les urnes algébriques non strictement additives 75
Conclusion - Récapitulatif 77

III Analyse asymptotique des urnes algébriques **79**

Introduction **81**

5 Asymptotique des urnes $\mathscr{CP}$ **83**
5.1 Moyenne, Variance, Moments 84
5.2 Résultats asymptotiques 87
5.3 Analyse asymptotique par méthode de col 89

6 Asymptotique des urnes $\mathscr{CA}$ **107**
6.1 Moments de A_n 108
6.2 Résultats asymptotiques 108
6.3 Analyse asymptotique par analyse des singularités 110

IV Applications et extensions des modèles d'urnes **117**

7 Urnes additives et réseaux sociaux **119**
7.1 Urnes équilibrées additives avec $p > 0$ 119
7.2 Quelques exemples d'urnes additives avec $p > 0$ 122
7.3 Urnes et k-arbres 124

8 Urnes multicolores et fonctions booléennes **137**
8.1 Le cas de l'urne 3×3 139
8.2 Généralisation par une urne $(k+2) \times (k+2)$ 141
8.3 Un peu de combinatoire bijective 144
Conclusion 148

9 Urnes à coefficients aléatoires **149**
9.1 Basic definitions 150
9.2 An isomorphism theorem for urn schemes with random entries 153
9.3 Examples of exactly solvable urns with random entries 155
Conclusion 162

10 Urnes non équilibrées **165**
Préambule 165
10.1 Fonctions génératrices sans équilibre 167
10.2 Méthode des caractéristiques 171
10.3 Résolution générale de l'équation aux dérivées partielles 172
10.4 Quelques exemples concrets d'urnes non équilibrées 175
10.5 Extensions à plus de deux couleurs 178
10.6 Extensions avec coefficients aléatoires 179
Conclusion 180

Conclusion **181**

A Code MAPLE de l'algorithme de GUESS'N'PROVE **185**

B Résultats MAPLE de l'algorithme de GUESS'N'PROVE **187**

Bibliographie **196**

Liste des figures **203**

Liste des tableaux et algorithmes **204**

Introduction

Quel rapport y a-t-il entre la propagation d'une épidémie, le passage d'un gaz entre deux compartiments, l'expansion d'un réseau social, la ruine d'un joueur ou d'une banque, la collection de vignettes, la génétique des populations, la croissance d'une branche dans un arbre ou encore une campagne électorale désastreuse ?

A priori, ces problèmes sont de natures très différentes, cependant ils partagent tous certaines caractéristiques. Tout d'abord, il s'agit toujours de phénomènes évolutifs : croissance, décroissance ou échange au cours du temps. Ensuite, nous pouvons distinguer deux types de caractères dans chacun des exemples : individus sains contre individus infectés par une épidémie ; compartiment A ou B pour un gaz ; présence ou absence d'un individu dans un réseau social ; possession ou non d'argent pour un joueur ; possession ou non d'une vignette dans la collection ; présence ou non d'un gène chez un individu ; feuille ou nœud dans la branche d'un arbre ; partisans du candidat X ou Y dans la campagne électorale.

Enfin, il se dégage une propriété d'uniformité parmi l'ensemble des individus, atomes, particules ou objets considérés. À un instant donné, chaque individu peut devenir infecté ; n'importe quelle particule de gaz peut changer de compartiment ; n'importe qui peut rejoindre ou quitter le réseau ; toute pièce de monnaie peut être gagnée ou perdue ; n'importe quelle vignette peut être découverte ; le gène de chaque individu peut muter d'une génération à une autre ; la branche de l'arbre peut pousser au niveau d'une feuille ou d'un nœud ; chaque partisan peut changer de camp à tout moment.

Tous ces phénomènes se regroupent dans un même modèle : *les urnes*. Nous disposons d'une urne contenant des boules toutes identiques, de deux couleurs différentes. Chaque boule représente un individu, un objet, une particule. La couleur de la boule désigne une propriété : présence ou absence, catégorie A ou B, candidat X ou Y, feuille ou nœud. Ainsi, tous ces problèmes sont regroupés dans un même formalisme. Une fois ce modèle statique adopté, nous voulons modéliser l'évolution du modèle au cours du temps. Pour cela, il suffit de choisir au hasard et à chaque instant une boule dans l'urne, puis d'appliquer une règle de transformation qui permet de modéliser la dynamique que l'on souhaite étudier. Ce formalisme est celui des *urnes de Pólya*.

Historique des urnes de Pólya

L'étude des urnes remonte à quelques siècles. Certains problèmes d'échange de particules de gaz entre deux compartiments sont traités via des urnes par J. Bernoulli (fin XVIIe) et P. S. Laplace (fin XVIIIe). Les premières modélisations des urnes telles qu'elles sont traitées dans ce manuscrit datent de 1923 : l'étude de la propagation d'épidémie par G. Pólya et F. Eggenberger [EP23] débute par la modélisation suivante [Pól30] :

> *"Une urne contient originalement N boules, dont R sont rouges et S noires, $R+S=N$. Nous faisons dans l'urne des tirages successifs en ajoutant à l'urne, après chaque tirage, à la place de la boule tirée $1+\Delta$ boules* de la même couleur. *Si Δ est positif, le nombre de boules augmente après chaque tirage, chaque succès obtenu favorise les chances de succès à obtenir, chaque insuccès gâte encore les chances des épreuves suivantes, le succès ainsi que l'insuccès sont* contagieux."

Ce modèle s'est généralisé au cours du XXe siècle. Nous appelons urne de Pólya le processus suivant. Prenez une urne contenant initialement des boules de deux couleurs différentes, noires et blanches. À chaque instant, piochez une boule dans l'urne uniformément, regardez sa couleur et replacez la dans l'urne. Si la couleur est noire, ajoutez a boules noires et b boules blanches dans l'urne ; si la couleur est blanche, ajoutez c boules noires et d boules blanches. Les règles d'évolution ainsi décrites se résument dans la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

où a,b,c,d sont des entiers. Nous noterons également cette matrice $[a,b,c,d]$. Ces entiers peuvent être négatifs : cela signifie que des boules sont retirées de l'urne. Par exemple, si a et d valent -1, cela signifie que le tirage d'une boule se fait sans remise. Ce modèle s'étend naturellement à un nombre quelconque de couleurs, mais nous resterons principalement sur les modèles à deux couleurs.

Les modèles couramment étudiés imposent une condition d'équilibre sur les règles de l'urne. Les urnes équilibrées sont telles qu'à chaque instant, un nombre constant de boules est ajouté dans l'urne. Cette constante, appelée balance de l'urne, est notée σ et vaut $\sigma = a+b = c+d$.

Notons (A_n, B_n) la composition de l'urne après n tirages successifs, A_n étant le nombre de boules noires dans l'urne et B_n le nombre de boules blanches. Deux questions se posent alors : pour un entier n fixé, que contient l'urne ? Quelle est la composition de l'urne lorsque le nombre de tirages est très grand, lorsque n tend vers l'infini ? D'une part, nous cherchons la distribution de probabilité du vecteur (A_n, B_n), d'autre part nous cherchons la loi limite qui gouverne le comportement de l'urne. La Figure 1 (p.8) illustre les comportements très divers des urnes de Pólya. Ce modèle est très simple dans son énoncé. La diversité des règles fait sa richesse, et ses possibilités infinies traduisent des comportements multiples. Le but est de comprendre les phénomènes limites à partir des règles imposées au départ.

Une infinité d'applications

Le modèle des urnes de Pólya est très riche par la diversité des règles. Les applications des urnes touchent de ce fait un très grand nombre de domaines : les probabilités et statistiques classiques, l'épidémiologie, la physique statistique, la génétique des populations ou encore la finance [CGH12]. Le livre de N. L. Johnson et S. Kotz [JK77] et livre de H. M. Mahmoud [Mah08] regorgent d'applications de ces modèles. Nous rappelons quelques exemples classiques.

Urnes de Pólya–Eggenberger. Le modèle originel de contagion de Pólya–Eggenberger correspond à la matrice de règles

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix},$$

où Δ est un entier quelconque.

Urne d'Ehrenfest. Considérons un gaz composé de N particules toutes contenues dans une chambre A, la chambre B est vide. Les deux chambres communiquent et l'évolution est modélisée ainsi : à chaque instant, une particule de gaz est choisie et passe dans la chambre opposée. Ce modèle est dû à P. et T. Ehrenfest [EE07]. En associant la couleur noire aux particules de la chambre A, et la couleur blanche aux particules de la chambre B, le modèle d'urne est le suivant : l'urne contient N boules originellement toutes noires, et la matrice de règles est

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Urnes de Friedman. Prenons une campagne électorale du second tour où les deux candidats sont tellement peu convaincants que lorsqu'un partisan d'un candidat assiste à un meeting de son camp, il décide de changer de camp et de voter pour l'autre. Un tel modèle a été introduit par B. Friedman [Fri49] et correspond à une urne de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les urnes dites *de Friedman* sont une généralisation de ce modèle, $[s, a, a, s]$ où s, $a \geq 0$.

Collectionneur de coupons. Un collectionneur veut faire la collection de N objets. Les objets qu'il possède déjà sont représentés par les boules blanches, et les objets qu'il recherche sont représentés par les boules noires. Au départ, l'urne contient N boules noires, et à chaque tirage de boule noire, celle-ci devient blanche ; en revanche, chaque tirage de boule blanche ne change rien à la situation, puisque le collectionneur trouve un objet qu'il possède déjà. L'urne associée est

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les urnes de Pólya trouvent également leurs applications en informatique fondamentale, notamment en ce qui concerne l'analyse d'algorithme. Les articles [BP85, FDP06] fournissent des applications variées.

Urnes et informatique fondamentale

Analyse d'algorithme. L'informatique est l'art de traiter l'information de façon automatique. Ainsi, les algorithmes sont l'objet au cœur de cette discipline. Un algorithme n'est rien d'autre qu'une succession d'instructions de base qu'une machine doit effectuer. Ces instructions permettent d'agir automatiquement sur une donnée fournie en entrée de l'algorithme. Les données de départ sont structurées et peuvent prendre des formes diverses (entiers, mots, arbres, graphes, etc). L'évaluation des performances d'un algorithme se fait essentiellement sur le temps de calcul du résultat. Pour avoir une évaluation précise du temps de calcul, il est indispensable de bien comprendre les structures de données fournies en entrée. La donnée du temps moyen de calcul sur une entrée quelconque est une mesure précise de la performance de l'algorithme. L'analyse d'algorithme repose donc sur la compréhension fine des structures de données, et de leur propriétés génériques (celles que l'on observe dans le cas moyen).

Depuis une dizaine d'années, les urnes de Pólya ont permis de modéliser certaines structures de données et certains comportements présents en informatique. Citons par exemple les arbres de recherches au pire cas garanti, tels que les arbres 2–3, ou encore les *B-trees* en base de données. L'urne $[-2, 3, 4, -3]$ modélise la croissance des arbres 2–3, structure utilisée pour le tri et la recherche de données. Un autre exemple est lié aux fonctions de hachage [Dur04], outil très présent pour les algorithmes de fouille de flots de données (*streaming algorithms*) ou encore en cryptographie. Des connections existent également avec la modélisation de croissance de réseaux sociaux (modèles d'attachement préférentiel, graphe du web, k-arbres).

L'apport probabiliste

Toutes ces applications se sont fortement développées au XXe siècle. La théorie a apporté de nombreuses réponses, en grande partie par des méthodes probabilistes.

Les résultats mêlent combinatoire et probabilité pour de nombreuses classes d'urnes ; le livre de H. M. Mahmoud [Mah08] fait une synthèse des travaux sur les urnes. Des résultats asymptotiques avec une approche très générale sont obtenus par S. Janson [Jan04, Jan06], et nous rappelons ici un résultat asymptotique fondamental.

> *Pour une urne équilibrée $[a, b, c, d]$ de balance $\sigma = a + b = c + d$, nous notons p la constante $p = c - a = b - d$. Notons λ le rapport de ces deux quantités $\lambda = -p/\sigma$. Si la quantité λ est inférieure ou égale à $1/2$, le comportement limite de l'urne est gaussien : les variables aléatoires A_n et B_n comptant le nombre de boules noires et blanches convergent après renormalisation vers une gaussienne. Lorsque la quantité λ est strictement supérieure à $1/2$, les lois limites ne sont pas gaussiennes.*

Lorsque $\lambda \leq 1/2$, l'usage est de parler de *petites urnes* ; lorsque $\lambda > 1/2$, la terminologie *grandes urnes* est employée. Il est donc connu que les petites urnes ont un comportement gaussien. Pour les grandes urnes, des avancées sur la compréhension des lois limites sont dans les articles de N. Pouyanne *et al.* [Pou05, Pou08, CPS11, CMP13].

L'article de S. Janson [Jan04] donne également des résultats généraux de convergence dans un cadre plus large, sans condition d'équilibre, par des méthodes de plongement en temps continu.

La vision de Philippe Flajolet

Les travaux de P. Flajolet et coauteurs [FGP05, FDP06] sont un retour à une vision purement combinatoire des urnes.

La combinatoire analytique, domaine développé dans [FS09] par P. Flajolet et R. Sedgewick , a montré ces vingt dernières années sa pertinence dans le traitement systématique des objets combinatoires classiques (mots, arbres, graphes, permutations, . . .). En partant simplement de dénombrement et de récurrences sur les objets, la combinatoire est ensuite manipulée via des *fonctions génératrices*, outil essentiel de la combinatoire analytique.

Les articles de P. Flajolet *et al.* illustrent l'intérêt de cette approche pour la compréhension des urnes de Pólya. Grâce à l'analyse systématique d'équation aux dérivées partielles [FGP05] puis de systèmes différentiels [FDP06], la combinatoire analytique apporte une certaine nouveauté sur les propriétés asymptotiques de plusieurs classes d'urnes. La vitesse de convergence ainsi que des précisions locales sur la distribution limite s'ajoutent au phénomène gaussien.

C'est ainsi que cette thèse a vu le jour il y a trois ans, dans la continuité des travaux de P. Flajolet, P. Dumas, V. Puyhaubert, J. Gabarró et H. Pekari. Notre étude est le développement de la combinatoire analytique pour les classes d'urnes de Pólya non analysées par ces auteurs.

Calcul formel

Nous verrons dès le Chapitre 2 que le traitement des urnes de Pólya par la combinatoire analytique repose sur un objet fondamental : les séries génératrices. La compréhension de ces objets est la clé pour l'obtention des propriétés limites sur les urnes. Notre démarche est de trouver un cadre général pour l'étude des urnes de Pólya. Pour cela, nous nous focalisons sur une propriété intéressante : l'algébricité. Il s'agit de connaître les cas où la série génératrice étudiée est solution d'une équation polynomiale.

Les mathématiques expérimentales offrent aujourd'hui des outils puissants pour deviner, vérifier et même prouver des conjectures. En travaillant avec des structures de données exactes (polynômes, équations différentielles), le calcul formel permet un traitement systématique des problèmes combinatoires en travaillant sur les séries génératrices. Cette vision est à rapprocher des études récentes faites sur les marches aléatoires

dans le quart de plan. Ces travaux s'intéressent à la nature de la série génératrice des marches, et il est naturel d'effectuer un travail similaire pour les urnes, car ces objets peuvent se voir également comme des marches pondérées dans le quart de plan.

Bilan et plan

Le point de départ de cette thèse est donc l'objet combinatoire simple qu'est une urne de Pólya. Le point d'arrivée est l'établissement des propriétés limites d'une telle urne. Cela nécessite la compréhension de la distribution de probabilité après n tirages, ainsi que la loi limite. La méthodologie est double : une démarche expérimentale par le calcul formel permet de deviner et prouver automatiquement des résultats d'algébricité sur les séries génératrices ; ces résultats s'exploitent ensuite par les outils liés à la combinatoire analytique (analyse complexe, singularités, cols).

Nous terminons cette introduction par un plan détaillé ainsi qu'un résumé des contributions principales. Ce manuscrit se découpe en quatre parties et dix chapitres. La Figure 2 p.9 illustre l'articulation des parties et des chapitres de cette thèse.

La Partie I est une introduction aux urnes de Pólya par la combinatoire analytique. Le Chapitre 1 est un aperçu de la combinatoire analytique. L'outil principal de cette thèse y est abordé : les séries génératrices. Les théorèmes récurrents dans la suite du manuscrit y sont également rappelés. Le Chapitre 2 introduit le formalisme des urnes de Pólya ainsi que leur traitement par série génératrice.

La suite développe les contributions personnelles.

Les Parties II et III constituent le cœur de notre travail. Nous obtenons des résultats asymptotiques très précis pour un ensemble d'urnes jusqu'alors non étudiées par la combinatoire analytique. Pour y parvenir, nous commençons par une *recherche algébrique* (Partie II) puis par une *analyse asymptotique* (Partie III). En Partie II, nous tentons de classifier les urnes de Pólya équilibrées à deux couleurs selon la nature de leur série génératrice. Grâce à un algorithme de GUESS'N'PROVE (deviner et prouver), le calcul formel permet d'automatiser la recherche d'urnes algébriques. Nous obtenons ensuite une classification partielle par des conditions arithmétiques selon la nature de la série : algébrique ou non holonome (p.78). Le caractère algébrique est ensuite prouvé élémentairement pour deux classes infinies d'urnes, $\mathscr{CA}$ et $\mathscr{CP}$. En Partie III, nous étudions en détail les classes algébriques $\mathscr{CA}$ (p.107) et $\mathscr{CP}$ (p.83). La première utilise une analyse de singularité, et la seconde met en jeu une méthode de cols non générique. Dans les deux cas, des résultats limites précis sont obtenus (Th. 10, 11, 12 et 13).

Enfin, la Partie IV étend la compréhension des urnes par la combinatoire analytique. Les Chapitres 7 et 8 sont centrés sur des exemples d'application en informatique fondamentale. D'une part, nous effectuons le traitement asymptotique d'une classe d'urnes reliée à la modélisation de réseaux sociaux ou du web : les k-arbres. Ces structures de graphes sont comprises asymptotiquement par l'étude du comportement limite des urnes associées (Th.17). D'autre part, nous modélisons par une urne un problème combinatoire sur les formules booléennes, et nous obtenons la loi limite de l'urne (Th.18).

Les deux derniers chapitres (9 et 10) traitent de modèles plus généraux, extensions du modèle d'urnes de Pólya classique. Nous montrons que la combinatoire analytique apporte un nouvel éclairage pour comprendre ces modèles. Au Chapitre 9, nous étendons l'approche de Flajolet *et al.* à toute urne équilibrée dont les coefficients sont des variables aléatoires à valeurs entières (Th.20). Dans le Chapitre 10, nous établissons un moyen d'approche de toutes les urnes non équilibrées par les séries génératrices, via la solution à une équation aux dérivées partielles (Th.23). Il est à noter que jusqu'à présent, toute étude générale des urnes par des moyens combinatoires reposent sur la propriété d'équilibre (mise à part les travaux *ad hoc* sur des cas particuliers).

Publications

Une partie des travaux de cette thèse ont fait l'objet de publications.

Une version très partielle du Chapitre 5 a été présentée et publiée à LATIN 2012,

[Mor12] *Fully Analyzing an Algebraic Pólya Urn Model* , B. Morcrette, Latin American Symposium on Theoretical Informatics. LNCS 7256, pp. 568-581, Springer, Avril 2012.

Le Chapitre 9 est un travail effectué avec H. M. Mahmoud, présenté et publié dans AofA 2012,

[MM12] *Exactly solvable balanced tenable urns with random entries via the analytic methodology*, B. Morcrette et H.M. Mahmoud, 23rd International Meeting on Probabilistic, Combinatorial, and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms. DMTCS Proceedings, vol. AQ, pp. 219–232, Juin 2012.

Les Parties II et III font l'objet d'un article en préparation avec A. Bostan et P. Dumas,

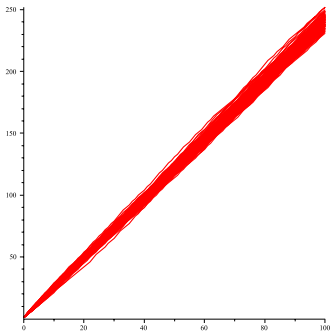
[BDM13a] *Algebraic balanced Pólya urns : experimental classification and asymptotic analysis.*

La Section 3.5 et le Chapitre 10 sont des travaux en cours avec A. Bostan et P. Dumas,

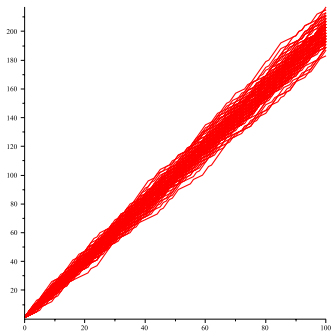
[BDM13b] *Classifying algebraic Pólya urns.*
[DM13] *Analytic combinatorics for non balanced Pólya urns.*

Principales contributions

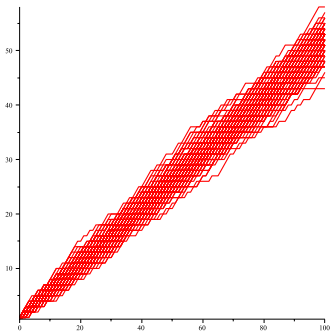
Les principales contributions de cette thèse sont :
- la classification partielle *Algébrique / Non holonome* des urnes de Pólya équilibrées (Figure 4.1, p.78) ;
- les propriétés limites précises des urnes algébriques $\mathscr{CP}$ (Théorèmes 10, 11 et 12, p.88) et $\mathscr{CA}$ (Théorème 13 p.109) et des k-arbres (Théorème 17, p.134) ;
- l'expression explicite de la série génératrice de probabilité pour les urnes non équilibrées (Théorème 23, p.174) ;
- l'extension du système différentiel pour les urnes équilibrées à coefficients aléatoires (Théorème 20, p.154).



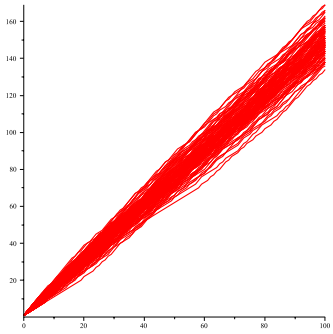
(a) $[2,2,3,1]$, Chap. 7



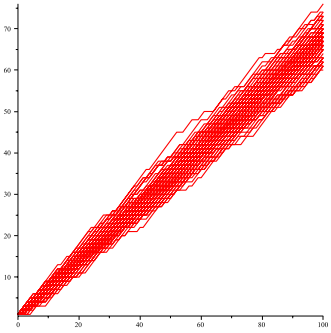
(b) $[1,3,3,1]$, Chap. 6



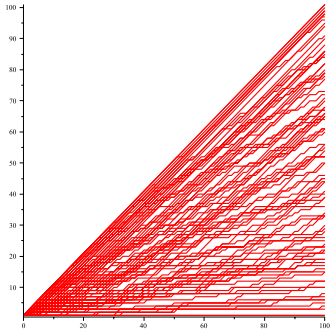
(c) $[0,1,1,0]$, Chap. 9



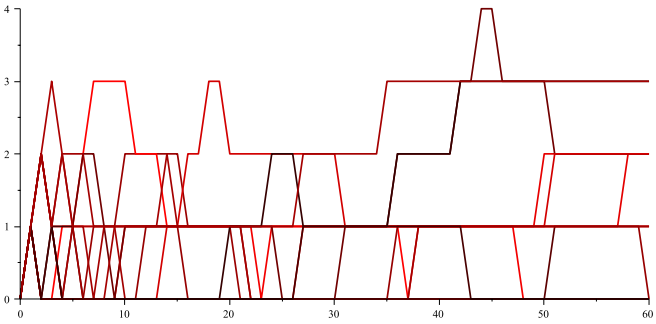
(d) $[2,1,1,2]$, Chap. 5



(e) $[0,2,1,1]$, Chap. 7



(f) $[1,0,0,1]$, Chap. 9



(g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Chap. 8

FIGURE 1 – Divers comportements asymptotiques des urnes de Pólya. Chaque courbe rouge représente le nombre de boules noires lors d'une simulation de 100 tirages. Chaque graphe comporte 100 simulations. Les urnes de (a) à (e) ont un comportement gaussien, l'urne (f) a un comportement uniforme, l'urne (g) a un comportement Poisson.

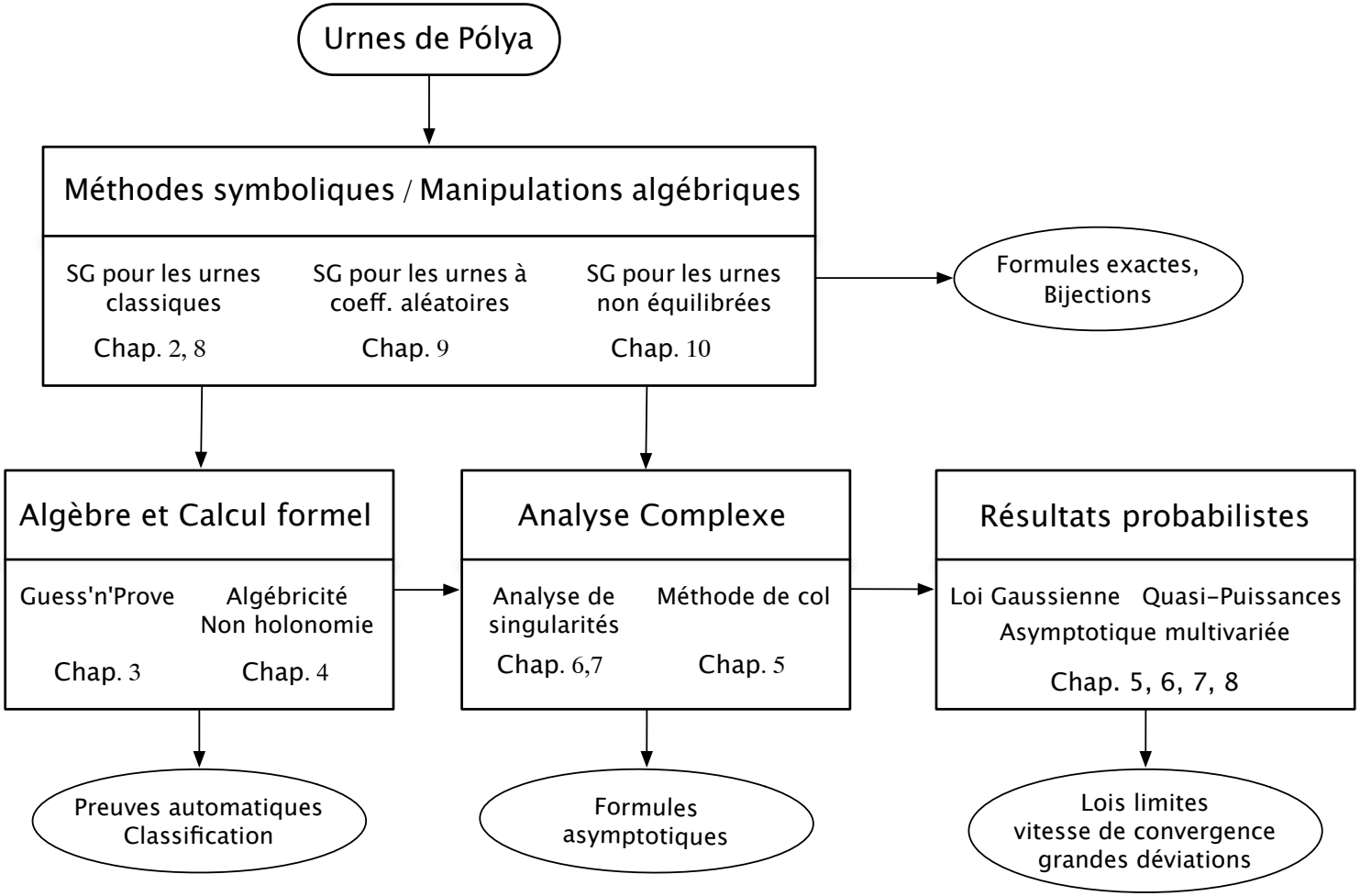


FIGURE 2 – Traitement des *urnes de Pólya* à travers le prisme de la *combinatoire analytique*. Les rectangles correspondent aux méthodes, les ellipses aux résultats. L'abréviation SG est pour Série Génératrice. Ce schéma est inspiré du panorama de *Analytic Combinatorics* [FS09, Figure 0.07, p.11].

Première partie

Urnes et combinatoire analytique

Chapitre 1

Combinatoire analytique : Aperçu et techniques

Cette thèse étudie les modèles d'urnes de Pólya sous l'angle de la combinatoire analytique. Nous présentons dans ce chapitre quelques points de cette théorie, ainsi que des théorèmes généraux d'analyse réelle et complexe, qui verront leur application tout au long de ce manuscrit.

La combinatoire analytique se donne pour but l'étude des structures combinatoires de grande taille, par l'intermédiaire de l'analyse de fonctions génératrices, objets fondamentaux de cette théorie. Plusieurs aspects interviennent alors : les objets combinatoires et leurs séries génératrices associées sont traités tout d'abord algébriquement, d'une manière formelle. Ensuite, les séries génératrices sont vues comme des fonctions de la variable complexe, et cette étude analytique permet d'accéder, via les singularités des fonctions, au comportement asymptotique des objets combinatoires. Enfin, l'utilisation symbolique de fonctions génératrices multivariées permet l'étude de paramètres caractéristiques sur les objets combinatoires. L'analyse complexe intervient encore afin de dériver des propriétés probabilistes sur ces objets aléatoires de grande taille.

Cette théorie s'applique parfaitement à de très nombreuses structures mathématiques. Citons de façon non exhaustive les mots, les permutations, les arbres, les graphes, les cartes, les partitions. Pour un panorama complet sur la combinatoire analytique, la référence est le livre de Philippe Flajolet et Robert Sedgewick [FS09]. Les sections de ce chapitre en sont quelques morceaux choisis. Les Sections 1.1 et 1.2 introduisent les séries génératrices univariées et multivariées afin d'étudier de façon exacte des paramètres sur les objets combinatoires. La Section 1.3 plonge ces séries dans le plan complexe pour trouver l'asymptotique des coefficients. La Section 1.4 utilise l'asymptotique multivariée afin de déduire des lois limites sur les paramètres étudiés. Un schéma récapitulatif, Figure 2 p.9, permet de mettre en perspective les différents chapitres de cette thèse par rapport aux trois grands aspects de la combinatoire analytique : les méthodes symboliques, l'asymptotique complexe et les structures aléatoires.

1.1 Séries génératrices

Cette section rappelle les classes combinatoires et leurs séries génératrices associées afin de décrire des objets combinatoires [FS09, Chap. I et II].

Définition 1 (Classe combinatoire)**.** *Une classe combinatoire est un ensemble $\mathscr{A}$ fini ou dénombrable, muni d'une fonction de taille, notée $|\cdot| : \mathscr{A} \to \mathbb{N}$, et tel que pour chaque taille il n'y ait qu'un nombre fini d'éléments.*

Pour une classe combinatoire $\mathscr{A}$, nous notons $\mathscr{A}_n$ le sous-ensemble fini de $\mathscr{A}$ contenant les éléments de taille n. Nous notons a_n le cardinal de l'ensemble $\mathscr{A}_n$. Cette séquence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ code combinatoirement la classe $\mathscr{A}$.

Définition 2 (SGO)**.** *La série génératrice ordinaire (SGO) d'une classe combinatoire $\mathscr{A}$ est définie par la série formelle*

$$A(z) = \sum_{a\in\mathscr{A}} z^{|a|} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n .$$

Notation. Pour retrouver la séquence des coefficients à partir d'une série génératrice ordinaire, nous utilisons l'opérateur d'extraction noté par une paire de crochets et défini par

$$a_n = [z^n]A(z) .$$

Ces séries ordinaires sont utilisées pour compter des objets combinatoires dits *non étiquetés*, lorsque les atomes constituant l'objet sont indistinguables.

Exemple 1. *Soit l'alphabet binaire $\{N, B\}$, et soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des mots sur cet alphabet :*

$$\mathscr{M} = \{\epsilon, N, B, NN, NB, BN, BB, NBB, NBN, NNB, \ldots\} .$$

L'ensemble $\mathscr{M}$ est une classe combinatoire, où la fonction de taille est le nombre de lettres dans un mot. Le mot vide, de taille 0, est noté ϵ. Les atomes N et B sont de taille 1, et dans un mot donné, il n'y a pas de distinction entre les occurrences d'une même lettre. Cette structure combinatoire est donc non étiquetée. La séquence associée est $M_n = 2^n$ et la série génératrice ordinaire des mots binaires est

$$M(z) = \sum_{n\geq 0} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z} .$$

Dans le mot NBB, les deux lettres B sont indistinguables. Pour les distinguer, il faut numéroter ces lettres, et en partant du mot NBB, nous avons les $3! = 6$ possibilités : $N_1B_2B_3$, $N_1B_3B_2$, $N_2B_1B_3$, $N_2B_3B_1$, $N_3B_1B_2$ et $N_3B_2B_1$.

En toute généralité, pour étudier une structure combinatoire où les atomes sont tous distingués, nous collons une étiquette avec un numéro sur chacun des atomes. Pour un objet de taille n, nous prenons les étiquettes dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, et chaque étiquette doit être utilisée une et une seule fois. Nous parlons alors de structure combinatoire *étiquetée*. Les séries génératrices utilisées pour compter les structures étiquetées sont dites *exponentielles*.

Définition 3 (SGE)**.** *La série génératrice exponentielle (SGE) d'une classe combinatoire $\mathscr{A}$ est définie par la série formelle*

$$A(z) = \sum_{a \in \mathscr{A}} \frac{z^{|a|}}{|a|!} = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!} .$$

Notation. À partir d'une série génératrice exponentielle, la séquence des coefficients s'obtient par extraction,

$$a_n = n![z^n]A(z) .$$

Exemple 2. *La classe des mots binaires étiquetés $\mathscr{W}$ a comme suite associée $W_n = n!\,2^n$, puisque chaque mot de longueur n peut être étiqueté de $n!$ façons différentes. La série génératrice exponentielle associée est*

$$W(z) = \sum_{n \geq 0} W_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z} .$$

Dans tous les cas, étiquetés et non étiquetés, on dit que la variable z compte la taille des objets dans la série génératrice, exponentielle ou ordinaire.

Exemple 3. *Considérons la classe combinatoire $\mathscr{U}$ des urnes à une seule couleur. Une urne est une boîte contenant n boules distinguables. Chaque boule est étiquetée, mais la boîte est considérée comme un ensemble. Il existe une seule urne de taille n : celle qui contient n boules étiquetées par l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ainsi pour $n \geq 0$, $U_n = 1$. La série génératrice exponentielle associée est,*

$$U(z) = \sum_{n \geq 0} 1 \times \frac{z^n}{n!} = \exp(z) = e^z .$$

Nous décrirons dans le Chapitre 2 les objets combinatoires qui permettent de coder les urnes de Pólya bicolores. Les boules seront de deux couleurs, étiquetées, et nous compterons les suites de tirages successifs, dites *histoires de l'urne*.

Méthode symbolique. Il existe un dictionnaire entre la description symbolique des classes combinatoires et les équations sur les séries génératrices. Cette traduction automatique est l'un des avantages de la combinatoire analytique. Les constructeurs sur les classes combinatoires permettent d'exprimer entre autres, les atomes vide ε et unitaire $\mathscr{Z}$, l'union disjointe $+$, le produit cartésien $\times$, les séquences SEQ, les ensembles SET, les cycles CYC.

Nous décrivons uniquement l'opération de pointage. Cette opération consiste à distinguer un atome particulier parmi les constituants d'un objet de taille n.

Définition 4 (Pointage)**.** *Le* pointage *d'une classe $\mathscr{B}$ est défini par*

$$\mathscr{A} = \Theta\mathscr{B} \qquad \textit{si et seulement si} \qquad \mathscr{A}_n = \{1, 2, \ldots, n\} \times \mathscr{B}_n .$$

Ainsi, d'après cette définition, pour générer un élément de $\mathscr{A}_n$, il suffit de sélectionner l'une des n étiquettes et de pointer celle-ci. Cela se traduit par les équations

$$A_n = n \cdot B_n \quad \Longrightarrow \quad A(z) = z \frac{d}{dz} B(z) .$$

Urnes L'opération de piocher une boule puis de la remettre dans l'urne est exactement l'opération de pointage (application en Section 2.2.1, p.30).

Dans toute la suite, les séries génératrices seront exponentielles.

1.2 Paramètres et séries génératrices multivariées

Cette section introduit l'étude de paramètres sur les objets combinatoires, et la traduction en terme de séries génératrices [FS09, Chap. III]. Elle développe également les outils pour exprimer de manière exacte les moments de tels paramètres (moyenne, variance, etc), en les voyant comme des variables aléatoires.

Définition 5 (SGB). *Soit $\mathscr{A}$ une classe combinatoire, $|\cdot|$ sa fonction de taille, et $\chi : \mathscr{A} \to \mathbb{N}$ une fonction dite* paramètre. *Nous notons $a_{n,k}$ le cardinal de l'ensemble des objets a de $\mathscr{A}$ tels que $|a| = n$ et $\chi(a) = k$. La série génératrice bivariée (SGB) associée aux nombres $(a_{n,k})_{n,k\geq 0}$ est définie par*

$$A(z,u) \quad = \quad \sum_{a\in\mathscr{A}} u^{\chi(a)} \frac{z^{|a|}}{|a|!} \quad = \quad \sum_{n,k\geq 0} a_{n,k}\, u^k \frac{z^n}{n!} \quad = \quad \sum_{n\geq 0} a_n(u) \frac{z^n}{n!} ,$$

où $a_n(u)$ est le polynôme en u, $a_n(u) = \sum_k a_{n,k}\, u^k$.

La variable z compte la taille et la variable u compte le paramètre χ. La fonction univariée des $(a_n)_{n\geq 0}$ se retrouve à partir de la série multivariée, en spécifiant $u = 1$. En effet, le polynôme $a_n(u)$ devient $a_n(1) = a_n$, et $A(z,1) = \sum_n a_n z^n/n! = A(z)$.

Espace de probabilité pour $\mathscr{A}$. Considérons une classe combinatoire $\mathscr{A}$. Nous munissons chaque sous-ensemble $\mathscr{A}_n$ de la distribution de probabilité uniforme. Ainsi tout élément a de $\mathscr{A}_n$ a la même probabilité qui vaut $1/a_n$. Le paramètre χ définit sur chaque $\mathscr{A}_n$ une variable aléatoire discrète,

$$\mathbb{P}_{\mathscr{A}_n}\{\chi = k\} = \frac{a_{n,k}}{a_n} = \frac{a_{n,k}}{\sum_k a_{n,k}} .$$

Définition 6 (FGP). *Étant donné une variable aléatoire discrète X, la fonction génératrice de probabilité (FGP) est définie par*

$$p(u) = \sum_k \mathbb{P}\{X = k\}\, u^k .$$

Proposition 1 (FGP)**.** *Soit $A(z,u)$ la fonction génératrice bivariée d'une classe combinatoire $\mathscr{A}$ comptée avec le paramètre χ. Alors la fonction génératrice de probabilité de χ sur $\mathscr{A}_n$ est donnée par*

$$p_n(u) = \sum_k \mathbb{P}_{\mathscr{A}_n}\{\chi = k\}\, u^k = \frac{[z^n]A(z,u)}{[z^n]A(z,1)}\,.$$

Proposition 2 (Moyenne, variance, moments factoriels)**.** *Les moments factoriels d'ordre r d'un paramètre χ sont déterminés à partir de la série génératrice bivariée $A(z,u)$ par la succession de r différenciations suivies de l'évaluation en $u = 1$,*

$$\mathbb{E}_{\mathscr{A}_n}\left[\chi(\chi-1)\ldots(\chi-r+1)\right] = \frac{[z^n]\partial_u^r A(z,u)|_{u=1}}{[z^n]A(z,1)}\,.$$

En particulier, les premiers moments vérifient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathscr{A}_n}(\chi) &= \frac{[z^n]\partial_u A(z,u)|_{u=1}}{[z^n]A(z,1)} \\
\mathbb{E}_{\mathscr{A}_n}(\chi^2) &= \frac{[z^n]\partial_u^2 A(z,u)|_{u=1}}{[z^n]A(z,1)} + \frac{[z^n]\partial_u A(z,u)|_{u=1}}{[z^n]A(z,1)}\,,
\end{aligned}$$

et la variance

$$\mathbb{V}(\chi) = \mathbb{E}(\chi^2) - \mathbb{E}(\chi)^2\,.$$

1.3 Asymptotique et analyse complexe

Les outils précédents permettent d'avoir des expressions précises des coefficients des séries génératrices, ainsi que l'expression des moments. La présente section rappelle les résultats importants de combinatoire analytique concernant l'asymptotique des séries génératrices [FS09, Chap. VI]. Le point principal, basé sur l'analyse de singularité est le lemme de transfert, dû à P. Flajolet et A. Odlyzko [FO90]. Dans cette section, nous considérons une série génératrice $f(z)$ issue d'une description combinatoire, et nous la voyons comme une fonction de la variable complexe.

Les coefficients f_n ont un comportement asymptotique du type $f_n \sim \lambda^n \theta(n)$, qui satisfait les deux principes suivants.

Premier principe de l'analyse asymptotique. L'emplacement des singularités de la fonction $f(z)$ donne le facteur λ^n de croissance exponentielle des coefficients f_n.

Second principe de l'analyse asymptotique. Le nature des singularités de la fonction $f(z)$ détermine le facteur de croissance sous-exponentiel $\theta(n)$ des coefficients f_n.

Le théorème suivant est le lien entre l'analyse complexe et les coefficients des séries génératrices. C'est une simple application du théorème des résidus.

Théorème 1 (Formule de Cauchy des coefficients). *Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un ouvert Ω contenant 0, et soit γ un chemin qui boucle simplement autour de 0, orienté positivement. Alors le coefficient $[z^n]f(z)$ admet la représentation intégrale suivante,*

$$\frac{f_n}{n!} = [z^n]f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\,.$$

Considérons une série génératrice $f(z)$. Les deux principes énoncés précédemment s'appliquent sous des hypothèses simples concernant les singularités de $f(z)$. La singularité principale ρ donne le facteur ρ^{-n} dans l'asymptotique des coefficients f_n. Il suffit de connaître le comportement de la fonction f au voisinage de cette singularité pour obtenir le facteur sous-exponentiel. En étudiant $[z^n]f(\rho z)$, on se ramène à une singularité en $z = 1$. Les théorèmes qui suivent décrivent comment se ramener à l'étude de fonctions standard, pour lesquelles l'asymptotique précise est connue.

Théorème 2 (Asymptotique des fonctions standard). *Soit α un complexe de $\mathbb{C}$ tel que $\alpha \notin \{0,-1,-2,\ldots\}$. Les coefficients de z^n de la fonction standard $f(z) = (1-z)^{-\alpha}$ admettent le développement asymptotique*

$$\begin{aligned}[z^n]\frac{1}{(1-z)^\alpha} \quad \sim \quad & \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2n}+\frac{\alpha(\alpha-2)(3\alpha-1)}{24n^2}\right.\\ & \left.+\frac{\alpha^2(\alpha-1)^2(\alpha-2)(\alpha-3)}{48n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right).\end{aligned}$$

La fonction Γ est la fonction d'Euler, définie pour tout s complexe avec $\Re e(s) > 0$ par

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}\,t^{s-1}\,dt\,,$$

et se prolonge analytiquement dans le plan complexe privé des entiers négatifs $0,-1,\ldots$

Pour étudier l'asymptotique d'une série génératrice $f(z)$, nous cherchons à l'approximer au voisinage de sa singularité par une fonction standard $(1-z)^{-\alpha}$.

Définition 7 (Δ-domaine). *Soient φ et R deux réels tels que $R > 1$ et $0 < \varphi < \pi/2$. Le domaine ouvert $\Delta(\varphi,R)$ est défini par*

$$\Delta(\varphi,R) = \left\{z \mid z \neq 1,\ |z| < R,\ |\arg(z-1)| > \varphi\right\}\,,$$

où $\arg(z)$ est une valeur de l'argument comprise entre $-\pi$ et π. Un domaine est dit Δ-domaine en 1 s'il s'écrit comme $\Delta(\varphi,R)$ pour un R et un φ. Pour un complexe $\lambda \neq 0$, un Δ-domaine en λ est l'image par la fonction $z \mapsto \lambda z$ d'un Δ-domaine en 1. Une fonction est dite Δ-analytique si elle est analytique dans un Δ-domaine.

Théorème 3 (Transfert, Flajolet–Odlyzko [FO90]). *Soit α un réel et $f(z)$ une fonction Δ-analytique. Si dans l'intersection entre le Δ-domaine de $f(z)$ et un voisinage de 1, la fonction $f(z)$ satisfait*

$$f(z) = O\left((1-z)^{-\alpha}\right), \qquad \textit{alors} \qquad [z^n]f(z) = O\left(n^{\alpha-1}\right);$$
$$\textit{si} \qquad f(z) = o\left((1-z)^{-\alpha}\right), \qquad \textit{alors} \qquad [z^n]f(z) = o\left(n^{\alpha-1}\right).$$

Si α est un nombre complexe tel que $\alpha \notin \{0, -1, -2, \ldots\}$ et si dans l'intersection entre le Δ-domaine de $f(z)$ et un voisinage de 1, la fonction $f(z)$ satisfait

$$f(z) \sim (1-z)^{-\alpha}, \qquad \textit{alors} \qquad [z^n]f(z) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Cette section a énoncé les principes l'analyse de singularité. Lorsque les fonctions complexes sont plus régulières (pas de singularités), nous avons recours à une autre méthode pour l'analyse asymptotique des coefficients. Il s'agit de la méthode de col qui sera présentée en détail au Chapitre 5.

1.4 Lois limites

Grâce à la méthode symbolique et à l'analyse asymptotique, la combinatoire analytique permet de comprendre les comportements limites des structures combinatoires avec paramètre. En connaissant le comportement limite de la fonction génératrice de probabilité, et en utilisant l'incontournable théorème central limite des probabilités, des théorèmes de convergence vers une limite gaussienne se déduisent.

Soit $\mathscr{A}$ une classe combinatoire munie d'une taille $|\cdot|$ et d'un paramètre χ. Sur chaque $\mathscr{A}_n$, le paramètre χ induit une variable aléatoire, notée X_n,

$$\mathbb{P}\{X_n = k\} = \mathbb{P}_{\mathscr{A}_n}\{\chi = k\}.$$

Soit $p_n(u)$ la fonction génératrice de probabilité de X_n. Comprendre le comportement de cette fonction lorsque n tend vers l'infini permet de connaître la loi limite de X_n.

Fonction de répartition et convergence en loi. Pour une suite de variables aléatoires (X_n), on définit la suite de ses fonctions de répartition (F_n) par $F_n(x) = \mathbb{P}\{X_n \leq x\}$. Les fonctions de répartition caractérisent les lois des variables X_n. Soit X une variable aléatoire et F sa fonction de répartition. On dit que la suite (X_n) converge en loi vers X si pour tout réel x où F est continue,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

On parle alors de *convergence en loi* ou *convergence en distribution*. Soit (ε_n) une suite réelle qui tend vers 0. Si de plus, on a pour tout x où F est continue,

$$\left|F_n(x) - F(x)\right| \leq O\left(\varepsilon_n\right),$$

on dit que la *vitesse de convergence* est en ε_n.

Fonction caractéristique. La loi d'une variable aléatoire X est aussi entièrement déterminée par sa fonction caractéristique $\phi(t)$, définie par

$$\phi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] .$$

La suite de variables aléatoires (X_n) a pour suite de fonctions caractéristiques $(\phi_n(t))$, reliées aux fonctions génératrices de probabilité par $\phi_n(t) = p_n(e^{it})$.

Phénomène gaussien. La loi normale est la loi continue la plus fréquente en probabilités. Pour de très nombreuses structures combinatoires, les phénomènes limites sont gaussiens. Une variable aléatoire X suit une loi gaussienne centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ si sa fonction de répartition est Φ, définie pour tout x réel par

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-w^2/2}\, dw .$$

De plus, la fonction caractéristique d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \nu^2)$ de moyenne μ et de variance ν^2 est

$$\phi(t) = p(e^{it}) = e^{it\mu - \frac{1}{2}\nu^2 t^2} .$$

L'étude des fonctions $p_n(u)$ est la clé pour connaître les lois limites des variables aléatoires X_n. Les trois théorèmes énoncés ci-dessous donnent des résultats précis de convergence gaussienne sur la distribution, lorsque la fonction génératrice de probabilité $p_n(u)$ peut s'écrire comme une quasi-puissance. Ces théorèmes dus à H.-K. Hwang [Hwa94, Hwa96, Hwa98a, Hwa98b] sont rassemblés dans [FS09, Chap. IX].

La Figure 1.1 décrit le lien entre l'étude complexe de la fonction génératrice de probabilité et les propriétés limites de la distribution.

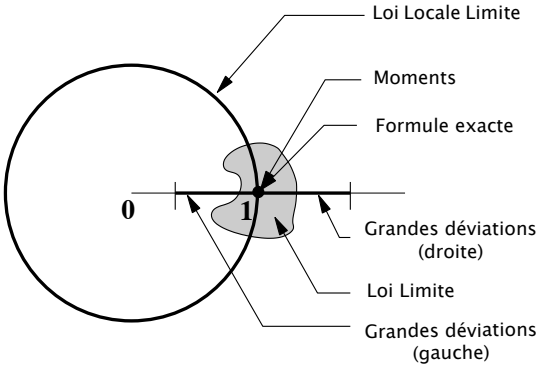


FIGURE 1.1 – Lieu d'étude de validité de $p_n(u)$ par rapport aux résultats limites. Dessin extrait de [FS09, Figure IX.9, p.649].

Nous avons déjà vu en Section 1.2 que les moments s'obtiennent en regardant le comportement en $u = 1$.

Théorème 4 (Quasi-Puissances). *Soit X_n une variable aléatoire discrète à valeur dans $\mathbb{N}$, et soit $p_n(u)$ sa fonction génératrice de probabilité. Soient (β_n) et (κ_n) deux suites tendant vers l'infini. Supposons que la fonction $p_n(u)$ se comporte, uniformément pour un voisinage complexe de $u = 1$, comme*

$$p_n(u) = A(u) \cdot B(u)^{\beta_n} \left(1 + O\left(\frac{1}{\kappa_n}\right)\right),$$

où les fonctions $A(u)$ et $B(u)$ sont analytiques en $u = 1$, avec $A(1) = B(1) = 1$. Supposons de plus que $B(u)$ vérifie la condition de variabilité

$$v(B) = B''(1) + B'(1) - B'(1)^2 \neq 0\,.$$

Sous toutes ces conditions, la moyenne et la variance de X_n vérifient

$$\mu_n = \mathbb{E}(X_n) = \beta_n B'(1) + A'(1) + O\left(\kappa_n^{-1}\right),$$

$$v_n^2 = \mathbb{V}(X_n) = \beta_n v(B) + v(A) + O\left(\kappa_n^{-1}\right).$$

La distribution de X_n après normalisation est asymptotiquement gaussienne, avec une vitesse de convergence en $O\left(\kappa_n^{-1} + \beta_n^{-1/2}\right)$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left\{ \frac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_n)}} \leq x \right\} - \Phi(x) \right| \leq O\left(\frac{1}{\kappa_n} + \frac{1}{\sqrt{\beta_n}}\right),$$

où $\Phi(x)$ est la fonction de distribution de la loi normale standard,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-w^2/2}\, dw\,.$$

Sur la Figure 1.1, il faut regarder $p_n(u)$ pour u dans un petit voisinage complexe autour de 1 (partie grisée). Ce théorème de Quasi-Puissances donne la convergence en loi vers une loi gaussienne de la suite de variables aléatoires (X_n), avec précision de la vitesse de convergence.

Définition 8 (Loi locale limite). *Une suite de distributions de probabilité discrètes, $p_{n,k} = \mathbb{P}\{X_n = k\}$, avec une moyenne μ_n et une variance v_n^2 vérifie une* loi locale limite de type gaussien *si pour une suite (ε_n) tendant vers 0,*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| v_n\, p_{n,\lfloor \mu_n + x v_n \rfloor} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right| \leq \varepsilon_n\,.$$

La loi locale limite a pour vitesse de convergence ε_n.

Théorème 5 (Quasi-Puissances, Loi Locale Limite). *Soit X_n une suite de variables aléatoires discrètes à valeur dans $\mathbb{N}$, de fonctions génératrices de probabilité $p_n(u)$. Supposons que $p_n(u)$ vérifie les hypothèses du théorème des Quasi-Puissances, et en particulier,*

$$p_n(u) = A(u) \cdot B(u)^{\beta_n} \left(1 + O\left(\frac{1}{\kappa_n}\right)\right),$$

valable uniformément dans un voisinage complexe de 1, noté Ω. Supposons de plus qu'il existe une borne uniforme de type

$$|p_n(u)| < K^{-\beta_n},$$

pour un $K > 1$ et pour tout u dans l'intersection du cercle unité et du complémentaire $\mathbb{C}\backslash\Omega$. Sous ces hypothèses, la distribution des X_n vérifie une loi locale limite de type gaussien, *avec une vitesse de convergence de l'ordre de $O\left(\beta_n^{-1/2} + \kappa_n^{-1}\right)$.*

Sur la Figure 1.1, il faut étudier $p_n(u)$ pour $|u| = 1$, sur le cercle unité, et obtenir une majoration uniforme sur ce cercle en dehors du petit voisinage complexe de 1. Ce théorème (local limite) assure une convergence locale, non pas des fonctions de répartitions, mais directement de la distribution de probabilité discrète vers la fonction de densité de la loi gaussienne $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Définition 9 (Grandes déviations). *Soit β_n une suite tendant vers l'infini. Une suite X_n de variables aléatoires, de moyenne $\mathbb{E}_n \sim \mu\beta_n$, satisfait une* propriété de grandes déviations *relative à l'intervalle $[x_0, x_1]$ contenant μ, s'il existe une fonction $W(x)$ telle que $W(x) > 0$ pour $t \neq \mu$, et pour n suffisamment grand,*

$$\forall x, \quad x_0 < x < \mu, \quad \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}\left\{X_n \leq x\beta_n\right\} = -W(x) + o(1) \qquad \textit{(queue gauche)},$$

$$\forall x, \quad \mu < x < x_1, \quad \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}\left\{X_n \geq x\beta_n\right\} = -W(t) + o(1) \qquad \textit{(queue droite)}.$$

W(x) est la fonction de taux, *et β_n est le* facteur d'échelle.

Théorème 6 (Quasi-Puissances, Grandes déviations). *Soit X_n une suite de variables aléatoires discrètes à valeur dans $\mathbb{N}$, de fonction génératrice de probabilité $p_n(u)$. Supposons que $p_n(u)$ vérifie les hypothèses du théorème des Quasi-Puissances. En particulier, il existe des fonctions $A(u)$ et $B(u)$ analytiques sur un intervalle $[u_0, u_1]$ avec $0 < u_0 < 1 < u_1$, telles que l'on ait uniformément,*

$$p_n(u) = A(u) \cdot B(u)^{\beta_n} \left(1 + O(\kappa_n^{-1})\right).$$

Alors la suite X_n vérifie une propriété de grandes déviations, relative à l'intervalle $[x_0, x_1]$, où $x_0 = u_0 B'(u_0)/B(u_0)$ et $x_1 = u_1 B'(u_1)/B(u_1)$. Le facteur d'échelle est β_n et la fonction de taux $W(x)$ est donnée par

$$W(x) = -\min_{u \in [u_0, u_1]} \log\left(\frac{B(u)}{u^x}\right).$$

Sur la Figure 1.1, il faut étudier $p_n(u)$ pour u réel proche de 1, sur un segment réel centré en 1. Ce théorème (grandes déviations) permet de donner des estimations sur les queues de la distribution limite gaussienne, et il donne des majorations exponentiellement petites.

1.5 Théorème de Cauchy-Kowalevski

Nous verrons dans le Chapitre 2 que les séries génératrices codant les urnes de Pólya vérifient une équation aux dérivées partielles. Voici un théorème local d'existence et d'unicité de la solution à une telle équation, tiré de [Hör76, p.119].

Théorème 7 (Cauchy–Kowalevski)**.** *Soit une équation aux dérivées partielles d'ordre m,*

$$\sum_{\alpha} c^{\alpha}(\mathbf{z}) D^{\alpha} u(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{z}), \tag{1.1}$$

où les exposants α sont des multi-indices, les fonctions c^{α} sont des fonctions de la variable $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$, et l'opérateur D vaut $D = \big(\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n\big)$. Soit $\mathbf{z_0}$ un point quelconque tel que sa n-ième coordonnée soit nulle. Supposons que les fonctions c^{α} et ψ soient analytiques au voisinage de $\mathbf{z_0}$ et que le coefficient devant D_n^m est différent de 0 lorsque $\mathbf{z} = \mathbf{z_0}$. Alors pour toute fonction φ analytique au voisinage de $\mathbf{z_0}$, il existe une unique solution u de (1.1), analytique au voisinage de $\mathbf{z_0}$ et satisfaisant les conditions aux bords,

$$D_n^j(u - \varphi)(\mathbf{z}) = 0 \qquad \textit{lorsque} \quad z_n = 0 \quad \textit{et} \quad j < m\,.$$

Conclusion

L'analyse complexe fournit de puissants théorèmes pour l'analyse asymptotique des séries génératrices issues d'objets combinatoires. Nous nous appuyons sur ces résultats dans toute la suite, mais il nous faut en premier lieu établir le lien entre les séries génératrices et les urnes de Pólya.

Chapitre 2

Urnes et combinatoire analytique - Les fondamentaux

Résumé. Comment mettre la combinatoire analytique au service des urnes de Pólya ? Pour cela, introduisons la notion d'*histoire d'une urne*. Cet objet combinatoire permet de coder le comportement d'urne urne de Pólya par une série génératrice trivariée $H(x, y, z)$. Nous détaillons les propriétés analytiques de cette fonction, et notamment l'outil fondamental pour notre étude, le théorème liant la série à un certain système différentiel, dit *théorème d'isomorphisme*. Ce chapitre reprend les résultats énoncés par P. Flajolet *et al.* dans [FDP06, FGP05].

2.1 Les histoires d'une urne

Jouer avec les séries génératrices nécessite un objet combinatoire codant la complexité du problème abordé. C'est ainsi qu'apparaissent les *histoires*.

Exemple 4. *Prenons l'urne* $[0, 2, 1, 1]$ *et la configuration initiale* $(1, 1)$. *Nous débutons le processus avec une boule noire* N *et une boule blanche* B. *Cette configuration est codée par le mot* NB. *Supposons que la boule noire soit tirée ; elle est remise et deux boules blanches sont ajoutées. La nouvelle configuration est codée par le mot* NBBB. *Voici un exemple de suite de tirages possibles, où la boule tirée est soulignée et les boules ajoutées sont en gras,*

$$\underline{\mathtt{N}}\mathtt{B} \longrightarrow \mathtt{N}\mathbf{\underline{BB}}\mathtt{B} \longrightarrow \mathtt{NBB}\mathbf{\underline{N}}\mathtt{B} \longrightarrow \mathtt{NBBN}\mathbf{BB}\mathtt{B}\underline{\mathtt{B}} \longrightarrow \mathtt{NBBNBBBB}\mathbf{NB} \quad .$$

Cette suite de mots, de longueur 4, partant de la configuration initiale $(1, 1)$ *et finissant dans la configuration* $(3, 7)$ *est appelée* histoire.
La séquence suivante est une autre histoire de longueur 4 *entre les configurations* $(1, 1)$ *et* $(3, 7)$,

$$\mathtt{N}\underline{\mathtt{B}} \longrightarrow \underline{\mathtt{N}}\mathtt{B}\mathbf{NB} \longrightarrow \underline{\mathtt{N}}\mathbf{BB}\mathtt{BNB} \longrightarrow \mathtt{N}\mathbf{BB}\mathtt{BB}\underline{\mathtt{B}}\mathtt{NB} \longrightarrow \mathtt{NBBBBB}\mathbf{NB}\mathtt{NB} \quad .$$

D'après la Figure 2.1, il y a exactement 8 *histoires de longueur* 2 *pour l'urne* $[0, 2, 1, 1]$ *partant de la configuration initiale* $(1, 1)$, *dont une terminant en* $(1, 5)$, *deux terminant en* $(3, 3)$ *et cinq terminant en* $(2, 4)$.

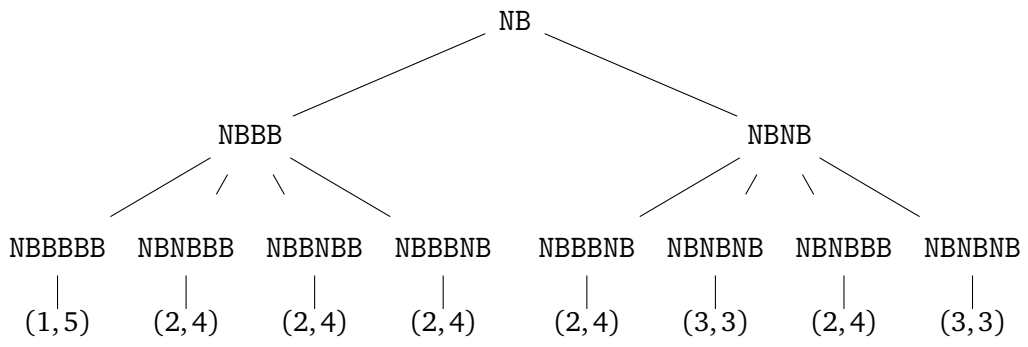


FIGURE 2.1 – Arborescence de tous les tirages possibles de l'urne $[0,2,1,1]$, à partir de la configuration initiale $(1,1)$ suivie de deux tirages. Cela donne l'ensemble des histoires possibles de longueur 2, une histoire étant un chemin depuis la racine de cet arbre jusqu'à une feuille. Une version plus compacte de cet arbre est donné en Figure 2.1

Notations. La matrice de règles d'une urne de Pólya est

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad a,d \in \mathbb{Z}, \quad b,c \in \mathbb{N},$$

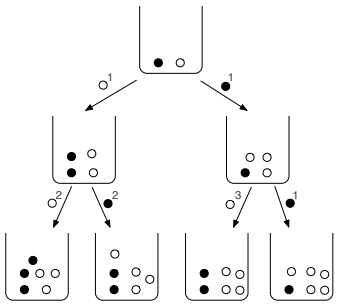
et se note également $[a,b,c,d]$. La configuration initiale est (a_0, b_0) : au départ, l'urne contient a_0 boules noires et b_0 boules blanches.

Équilibre. La plupart des urnes traitées par la combinatoire analytique sont équilibrées, c'est-à-dire que les sommes des lignes de la matrice sont égales, $a+b=c+d$. Cette constante, appelée balance de l'urne, est notée σ. C'est le nombre total de boules ajoutées à chaque instant. Le cas des urnes non équilibrées est abordé dans le Chapitre 10.

Définition 10. *Soit $[a,b,c,d]$ une urne équilibrée de balance σ. Si $\sigma < 0$, les urnes sont dites* soustractives *(ou diminuantes). Si $\sigma > 0$, les urnes sont dites* additives*. Si de plus, les coefficients sont strictement positifs, $a,b,c,d > 0$, nous parlerons d'urnes* strictement additives*. Enfin, si $\sigma = 0$, les urnes sont dites* à balance nulle*.*

Tenabilité. Notons que pour les urnes additives, les coefficients de la matrice ne sont pas nécessairement positifs. En effet, dans la définition des urnes de Pólya, les coefficients diagonaux peuvent être négatifs, ce qui signifie que l'on retire des boules dans l'urne. Lorsque certains coefficients de la matrice sont négatifs, il faut s'assurer que le processus ne se bloque pas au fur et à mesure des tirages. Si lors d'un tirage, il y a plus de boules à retirer que de boules effectivement présentes, les règles de remplacement ne s'appliquent plus. Par exemple, pour une matrice de règles $[-2,3,0,1]$ et une configuration $(1,1)$, il est possible de tirer une boule noire, mais il est impossible d'appliquer la

règle "retirer deux boules noires". Des conditions dites de *tenabilité* permettent d'éviter ce phénomène.



(a) arbre des histoires

$$H(x,y,z) = xy + \left(x^2y^2 + xy^3\right) z + \left(2x^3y^3 + 5x^2y^4 + xy^5\right) \frac{z^2}{2} + \dots$$

(b) série génératrice des histoires

FIGURE 2.2 – *À gauche* : configurations possibles de l'urne $[0,2,1,1]$, partant de l'état initial $(1,1)$, après deux tirages. Sur chaque flèche est indiquée la couleur de la boule tirée ainsi que le nombre de façons d'effectuer cette transition. Cela donne une représentation des histoires plus condensée que la Figure 2.1. Le nombre d'histoires partant de l'état initial et arrivant dans une des feuilles est obtenu en multipliant les poids sur les flèches rencontrées sur le chemin reliant les deux configurations. *À droite* : premiers termes de la série génératrice des histoires, où x marque les boules noires, y marque les boules blanches et z marque la longueur de l'histoire.

Définition 11 (Tenabilité)**.** *Soit une urne $[a,b,c,d]$ de configuration initiale (a_0,b_0). Ce processus est dit* tenable *si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*
- *si $a < -1$, alors les entiers a_0 et c sont divisibles par $-a$,*
- *si $d < -1$, alors les entiers b_0 et b sont divisibles par $-d$.*

Dans toute notre étude, les urnes seront supposées équilibrées et tenables.

Mots. La configuration initiale de l'urne est représentée par le mot $W_0 = \mathtt{N}^{a_0}\mathtt{B}^{b_0}$. Pour simuler un tirage dans l'urne, nous procédons comme suit. Nous marquons la lettre correspondant à la boule piochée. Si la lettre est N, elle est remplacée par $\mathtt{NN}^a\mathtt{B}^b$, si la lettre est B, elle est remplacée par $\mathtt{BN}^c\mathtt{B}^d$. Cela permet de passer d'un mot W_n à un mot W_{n+1}.

Définition 12 (Histoires)**.** *Une histoire de longueur n commençant dans la configuration (a_0,b_0) et finissant dans la configuration (i,j) est une suite de mots $W_0, W_1, W_2, \dots, W_n$ codant les configurations successives de l'urne. Nous notons $H_{n,i,j}(a_0,b_0)$ le nombre d'histoires de longueur n, débutant en (a_0,b_0) et finissant en (i,j).*

Pour l'Exemple 4, nous avons $H_{2,1,5}(1,1) = 1$, $H_{2,2,4}(1,1) = 5$ et $H_{2,3,3}(1,1) = 2$.

À partir de ces objets combinatoires, nous décrivons l'objet principal d'étude de cette thèse : la série génératrice. Les boules dans l'urne sont distinguables : en effet,

en représentant la configuration par un mot, il est sous-entendu que chaque boule est étiquetée par un entier déterminant sa place dans le mot. Nous sommes en présence d'une structure étiquetée, donc la série génératrice est exponentielle.

Définition 13 (Série génératrice des histoires)**.** *Pour une urne* $[a,b,c,d]$ *et une configuration initiale* (a_0,b_0)*, nous notons* $H(x,y,z;a_0,b_0)$ *la série génératrice des histoires de l'urne,*

$$H(x,y,z;a_0,b_0)=\sum_{n\geq 0}\sum_{\substack{i\geq 0\\ j\geq 0}} H_{n,i,j}(a_0,b_0)\,x^i\,y^j\,\frac{z^n}{n!}\,. \tag{2.1}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur la configuration initiale, nous noterons simplement $H_{n,i,j}$ *et* $H(x,y,z)$*.*

Balance et équiprobabilité. Cette approche combinatoire repose sur un principe fondamental : *toutes les histoires de longueur n sont équiprobables*. En notant H_n le nombre d'histoires de longueur n, nous voulons que chaque histoire de longueur n se réalise avec probabilité exactement $1/H_n$. Pour satisfaire ce principe, la combinatoire analytique traite des urnes de Pólya équilibrées, où la balance est $\sigma=a+b=c+d$. Notons A_n (resp. B_n) le nombre de boules noires (resp. blanches) après n tirages dans l'urne. Nous notons $s_n=A_n+B_n$ le nombre total de boules dans l'urne après n étapes. En étudiant les urnes équilibrées, le nombre total de boules dans l'urne est déterministe,

$$s_n=s_0+n\sigma=a_0+b_0+n\sigma\,.$$

Ainsi, le nombre total d'histoires, noté H_n de longueur n est aussi déterministe. Quels que soient les tirages effectués durant les k premiers tirages, le nombre de boules dans l'urne est s_k, ainsi les possibilités de branchement vers de nouvelles histoires sont au nombre de s_k, et ce choix est uniforme. Pour toute urne équilibrée de balance strictement positive, $\sigma>0$, nous avons

$$H_n=s_0(s_0+\sigma)(s_0+2\sigma)\ldots(s_0+(n-1)\sigma)=\sigma^n\frac{\Gamma\left(n+s_0/\sigma\right)}{\Gamma\left(s_0/\sigma\right)}=n!\sigma^n\binom{n+s_0/\sigma-1}{n}.$$

La série génératrice exponentielle associée est

$$H(1,1,z)=\sum_{n\geq 0}H_n\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{(1-\sigma z)^{s_0/\sigma}}\,.$$

Par l'analyse de singularité (Section 1.3, p.17), l'asymptotique des coefficients H_n s'en déduit immédiatement [1],

$$H_n=n!\,\sigma^n\frac{n^{s_0/\sigma-1}}{\Gamma\left(s_0/\sigma\right)}\left(1+\frac{s_0(s_0-\sigma)}{2\sigma^2 n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\,. \tag{2.2}$$

1. Bien sûr, il est aussi possible de procéder directement par développement en série entière sur cet exemple élémentaire.

Grâce à cette propriété d'équiprobabilité, l'étude combinatoire des histoires des urnes équilibrées est équivalente à l'étude classique probabiliste. Le lien est donné par la relation suivante,

$$\mathbb{P}\left\{A_n = i, B_n = j\right\} = \frac{\left[x^i y^j z^n\right] H(x,y,z)}{[z^n]\, H(1,1,z)}\,.$$

Urnes non additives. Si la balance de l'urne est nulle, alors le nombre d'histoire est $H_n = s_0^n$, et la série génératrice associée est

$$H(1,1,z) = \sum_{n\geq 0} s_0^n \frac{z^n}{n!} = e^{s_0 n}\,.$$

Si la balance est négative, on retire des boules à chaque tirage. Le processus étant tenable, il s'arrête dans une configuration où au moins l'une des deux couleurs a complètement disparue. Dans ce cas, l'histoire la plus longue est de longueur $s_0/|\sigma|$. La série génératrice est un polynôme,

$$H(1,1,z) = (1+|\sigma|z)^{s_0/|\sigma|}\,.$$

Proposition 3 (Domaine d'analyticité de $H(x,y,z)$)**.** *Soit $[a,b,c,d]$ une urne équilibrée de balance positive $\sigma > 0$. Alors, pour tout $R \geq 1$, la série génératrice des histoires $H(x,y,z;a_0,b_0)$ est analytique dans le domaine*

$$|x| \leq R, \qquad |y| \leq R, \qquad |z| < \frac{1}{\sigma R^\sigma}\,.$$

Démonstration. Pour $|x| \leq R$, $|y| \leq R$, le terme en $[z^n]$ dans $H(x,y,z)$ est majoré par

$$\left|\sum_{i,j} H_{n,i,j} x^i y^j \frac{1}{n!}\right| < \frac{R^{s_0+n\sigma}}{n!} H_n = O\left(R^{n\sigma}\sigma^n n^{s_0/n-1}\right)\,.$$

□

2.2 Urnes de Pólya et système différentiel

Cette section renferme le résultat principal sur le traitement analytique des urnes de Pólya. Il s'agit du théorème, dit *basic isomorphism* [FDP06], qui relie chaque urne à un système différentiel exprimant la série génératrice $H(x,y,z)$. Ce théorème est le point de départ des travaux présentés dans ce manuscrit.

Théorème 8 (Flajolet, Dumas, Puyhaubert, 2006)**.** *Soit $[a,b,c,d]$ une urne équilibrée de condition initiale (a_0,b_0). Soient x et y deux nombres complexes tels que $xy \neq 0$. Pour tout z assez proche de l'origine, la série génératrice des histoires s'exprime par*

$$H(x,y,z;a_0,b_0) = X(z)^{a_0}\, Y(z)^{b_0}\,, \tag{2.3}$$

où les fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ sont les solutions du problème de Cauchy suivant

$$\begin{array}{rcl} \dot{X} & = & X^{a+1}\,Y^{b}\,, \\ \dot{Y} & = & X^{c}\,Y^{d+1}\,, \\ X(0) & = & x\,, \\ Y(0) & = & y\,. \end{array} \tag{2.4}$$

Les notations $\dot{X}$ et $\dot{Y}$ indiquent la différentiation par rapport à la variable t.

Convolution multiplicative. L'équation (2.3) peut se voir comme le produit indépendant des histoires de chaque boule de la configuration initiale prise séparément. En effet, en commençant avec uniquement une boule noire, nous obtenons $H(x,y,z;1,0) = X(z)$; en commençant avec une blanche nous obtenons $H(x,y,z;0,1) = Y(z)$. Ainsi, l'équation (2.3) se récrit

$$H(x,y,z;a_0,b_0) = H(x,y,z;1,0)^{a_0}\,H(x,y,z;0,1)^{b_0}\,.$$

Cela permet d'étudier uniquement les fonctions $X(z)$ ou $Y(z)$, sans perte de généralité. Cette propriété et ce système différentiel interviennent dans un contexte différent (plongement en temps continu du processus de branchement lié à l'urne) dans [CPS11], mais le lien reste à ce jour mystérieux.

2.2.1 Preuve du théorème d'isomorphisme

Le système différentiel apparaît après quelques manipulations symboliques de la série génératrice des histoires. Tout repose sur la description symbolique du processus d'urne : bien que la série génératrice des histoires ne se déduise pas directement de la dite *méthode symbolique* [FS09, Chap. I et II], la construction repose sur la même doctrine.

Combinatoire classique. Considérons une urne contenant n boules noires. Il s'agit d'un produit étiqueté de n atomes, codé par le monôme x^n. L'opération $x\partial_x[x^n] = nx^n$ se voit combinatoirement,

$$x\partial_x[xx\cdots x] = \left(\underline{x}x\cdots x\right) + \left(x\underline{x}\cdots x\right) + \ldots + \left(xx\cdots \underline{x}\right)\,.$$

Supposons que l'urne contienne i boules noires et j boules blanches après n tirages. Le monôme codant cette configuration est $x^i\,y^j$. Détaillons les possibilités pour le $(n+1)$-ième tirage. Nous avons i façons de tirer une boule noire et dans ce cas, nous ajoutons a noires et b blanches ; nous avons j façons de tirer une boule blanche et dans ce cas, nous ajoutons c noires et d blanches. Cette étape de tirage transforme le monôme $x^i y^j$ en polynôme $ix^{i+a}y^{j+b} + jx^{i+c}y^{j+d}$.

Combinatoire symbolique. Les opérations faites sur l'urne (piocher avec remise, ajout de boules) se codent de manière symbolique. Piocher une boule avec remise est exactement l'opération de pointage (Déf. 4, p.15). Ajouter une boule (noire ou blanche) se traduit symboliquement par la multiplication monomiale (par x ou y). Nous associons ainsi à l'urne $[a,b,c,d]$ son opérateur $\mathscr{D}$ qui simule un tirage,

$$\mathscr{D} = x^a y^b \Theta_x + x^c y^d \Theta_y \,, \tag{2.5}$$

où $\Theta_u = u\partial_u$. Ainsi la simulation d'un tirage à partir de la configuration (i,j) s'obtient par l'application de l'opérateur sur le monôme codant la configuration,

$$\mathscr{D}[x^i y^j] = i\, x^{i+a} y^{j+b} + j\, x^{i+c} y^{j+d} \,. \tag{2.6}$$

Pour simuler n tirages à partir de la configuration initiale (a_0, b_0), il suffit d'itérer l'opérateur $\mathscr{D}$. Nous obtenons :

$$\mathscr{D}^n \left[x^{a_0} y^{b_0}\right] = \sum_{i,j} H_{n,i,j} x^i y^j \,.$$

La série génératrice des histoires s'écrit symboliquement grâce à cet opérateur,

$$H(x,y,z;a_0,b_0) = \sum_{n\geq 0} \mathscr{D}^n \left[x^{a_0} y^{b_0}\right] \frac{z^n}{n!} = e^{z\mathscr{D}} \left[x^{a_0} y^{b_0}\right] \,. \tag{2.7}$$

Oublions momentanément ces considérations combinatoires et regardons le problème de Cauchy suivant,

$$\begin{aligned} \dot{X} &= X^{a+1} Y^b \,, \\ \dot{Y} &= X^c Y^{d+1} \,. \end{aligned}$$

Soient $X(t)$ et $Y(t)$ des solutions de ce système différentiel. Observons l'effet de la différentiation en t sur le produit $X(t)^i Y(t)^j$,

$$\begin{aligned} \partial_t \left(X^i Y^j\right) &= i X^{i-1} \dot{X} Y^j + j X^i Y^{j-1} \dot{Y} \\ &= i X^{i+a} Y^{j+b} + j X^{i+c} Y^{j+d} \,. \end{aligned}$$

L'effet est le même que l'opérateur $\mathscr{D}$ dans (2.6). Nous avons l'isomorphisme d'opérateurs,

$$\partial_t \left(X^i Y^j\right) = \mathscr{D} \left[x^i y^j\right]\Big|_{\substack{x\to X \\ y\to Y}} \,.$$

En appliquant cette identité à l'expression (2.7), nous obtenons,

$$\begin{aligned} H(X(t),Y(t),z;a_0,b_0) = \sum_{n\geq 0} \mathscr{D}^n \left[x^{a_0} y^{b_0}\right]\Big|_{\substack{x\to X(t) \\ y\to Y(t)}} \frac{z^n}{n!} &= \sum_{n\geq 0} \partial_t^n \left(X(t)^{a_0} Y(t)^{b_0}\right) \frac{z^n}{n!} \\ &= X(t+z)^{a_0}\, Y(t+z)^{b_0} \,, \end{aligned}$$

la dernière égalité étant l'application de la formule classique de Taylor.

Choisissons comme conditions initiales pour le système différentiel $X(0) = x$, et $Y(0) = y$, avec x et y deux complexes tels que $xy \neq 0$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité locales du problème de Cauchy, ce qui permet de conclure la preuve du théorème d'isomorphisme en posant $t = 0$.

2.2.2 Équation aux dérivées partielles

La vision symbolique de la section précédente permet de retrouver le premier résultat sur la série génératrice des histoires, énoncé dans [FGP05]. Dans cet article, les auteurs montrent que la série $H(x,y,z)$ est solution d'une équation aux dérivées partielles. Celle-ci se retrouve grâce à l'expression (2.7). Symboliquement, si $H = e^{z\mathscr{D}}$, alors $\partial_z H = \mathscr{D} H$. Ainsi la fonction $H(x,y,z)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles,

$$\partial_z H = x^{a+1} y^b \partial_x H + x^c y^{d+1} \partial_y H \,. \tag{2.8}$$

Du trivarié au bivarié. Dans la série $H(x,y,z)$, les coefficients non nuls $x^i y^j z^n$ ont une propriété d'homogénéité grâce à la condition d'équilibre. En effet, la balance étant σ, nous avons la relation $i+j = a_0 + b_0 + n\sigma = s_0 + n\sigma$. Des trois variables x,y,z, l'une d'elles est redondante. Nous choisissons d'oublier la variable y, sans perte de généralité, en posant $y = 1$. Ce lien sur les exposants se traduit sur les opérateurs ∂_x, ∂_y et ∂_z, de la façon suivante,

$$x\partial_x + y\partial_y = \left(a_0 + b_0\right) + \sigma z \partial_z \,.$$

Notons $H(x,z) = H(x,1,z)$. Cette série génératrice bivariée vérifie l'équation aux dérivées partielles,

$$\left(1 - \sigma z x^c\right) \partial_z H(x,z) + \left(x^{c+1} - x^{a+1}\right) \partial_x H(x,z) - s_0 x^c H(x,z) = 0 \,. \tag{2.9}$$

2.2.3 Une intégrale première

Proposition 4. *Soit $[a,b,c,d]$ une urne équilibrée de balance $\sigma = a+b = c+d$. Soient $X(t)$ et $Y(t)$ les solutions du système différentiel*

$$\begin{aligned} \dot{X} &= X^{a+1} Y^b \,, \\ \dot{Y} &= X^c Y^{d+1} \,, \end{aligned}$$

avec les conditions initiales $X(0) = x$ et $Y(0) = y$ telles que $xy \neq 0$. Alors, pour t dans un voisinage de 0, une intégrale première du système est

$$X(t)^p - Y(t)^p = x^p - y^p \,, \tag{2.10}$$

où $p = c - a = b - d$, par condition d'équilibre. L'entier p est appelé indice de dissimilarité.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\partial_t \left(X(t)^p - Y(t)^p\right) = 0$. □

Dans le cas particulier où $p = 0$, l'équation (2.10) devient triviale. Nous avons dans ce cas $a = c$ et $b = d$. Ainsi le système différentiel permet de déduire la relation $Y\dot{X} = X\dot{Y}$. En intégrant cette équation par des logarithmes, puis en appliquant la fonction exponentielle, nous trouvons, avec $X(0) = x$ et $Y(0) = y$,

$$X(z) = \frac{x}{y} Y(z) \,.$$

2.3 Résultats par combinatoire analytique

Nous regroupons dans cette section les résultats sur les urnes de Pólya obtenus par la combinatoire analytique.

Urnes bicolores équilibrées. Soit $[a, b, c, d]$ une urne équilibrée. Pour tous les cas suivants,

- si $a < 0$ et $d < 0$, $bc \neq 0$: urnes purement sacrificielles, traitées dans [FGP05, FDP06] ;
- si $a < 0$, $d > 0$, et $bc \neq 0$: urnes semi-sacrificielles, traitées dans [FDP06] ;
- si $b = 0$ ou $c = 0$, $\sigma > a > 0$: urnes triangulaires, traitées dans [Puy05, FDP06] ;

des études par la combinatoire analytique ont été menées. Des résultats précis sur l'expression exacte et asymptotique de la série génératrice sont obtenus. Soit X_n le nombre de boules noires dans l'urne après n tirages. Les moments de la variable aléatoire X_n sont calculables explicitement et asymptotiquement. La convergence en loi avec vitesse de convergence est également retrouvée. Des résultats de loi locale limite ainsi que des bornes sur les grandes déviations sont prouvés.

Notre contribution. Dans cette thèse, nous nous concentrons dans un premier temps sur les urnes bicolores équilibrées strictement additives ($a, b, c, d > 0$). Nous identifions automatiquement par le calcul formel des classes d'urnes algébriques (Chapitre 3), puis nous prouvons à la main le caractère algébrique des séries génératrices (Chapitre 4). Une classification de la nature des urnes de Pólya bicolores équilibrées est ainsi obtenue jusqu'à une certaine borne sur les coefficients. Pour les urnes strictement additives algébriques (Chapitres 5 et 6), nous obtenons les mêmes types de résultats asymptotiques (moments, loi gaussienne, loi locale limite, grandes déviations).

Pour les urnes strictement additives non algébriques, nous donnons une expression exacte de la série génératrice, et une classe particulière reliée aux k-arbres est entièrement analysée : les mêmes résultats asymptotiques sont obtenus (Chapitre 7).

Urnes polychromatiques. Pour les urnes à plus de deux couleurs, la méthode à base de séries génératrices est toujours valable. Le Théorème 8 s'adapte à toutes les urnes équilibrées à k couleurs. Il s'agit de résoudre un système différentiel composé de k équations différentielles monomiales. Des problèmes de non intégrabilité interviennent alors. Une approche générale et systématique comme pour les urnes à deux couleurs n'est donc pas envisageable. Un exemple concret d'application des urnes multicolores est donné dans le Chapitre 8, relié aux statistiques sur les formules booléennes.

Urnes non équilibrées. L'étude des urnes non équilibrées est difficile. Des classes particulières d'urnes ont été traitées récemment par des méthodes analytiques, dans les travaux de H.-K. Hwang, M. Kuba et A. Panholzer [HKP07, KP08, KP12a, KP12b]. Nous proposons une approche générale pour toute urne non équilibrée en utilisant des fonctions génératrices au Chapitre 10.

Deuxième partie

Urnes algébriques

Introduction

Des urnes en marche. Prenons une urne $[a, b, c, d]$, et une configuration à i boules noires et j boules blanches. Cette configuration peut être représentée par un point (i, j) dans le plan. Les abscisses comptent le nombre de boules noires, et les ordonnées le nombre de boules blanches. Dans ce contexte, un tirage dans l'urne donne une nouvelle configuration, et donc un nouveau point dans le plan. Cette description combinatoire impose des abscisses et ordonnées positives. Une suite de tirages est alors visualisée par une marche dans le quart de plan.

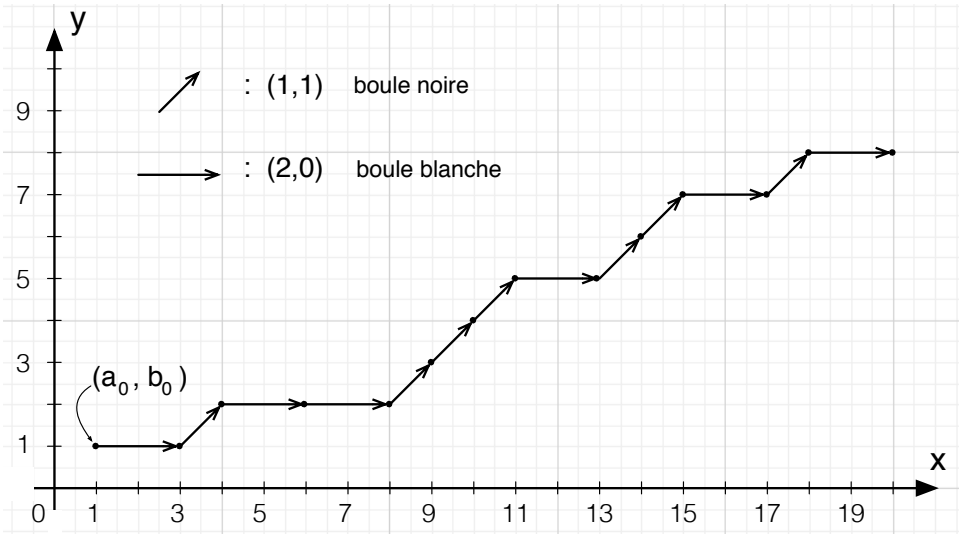


FIGURE 2.3 – Une marche de l'urne $[1, 1, 2, 0]$ de configuration initiale $(1, 1)$.

La matrice de règles $[a, b, c, d]$ donne lieu à deux types de pas : un pas (a, b) si une boule noire est tirée et un pas (c, d) dans le cas d'une blanche. À un instant donné, le choix des pas à effectuer est dicté par le point où l'on se trouve. Pour le point (i, j), deux pas sont possibles : un déplacement vers le point $(i + a, j + b)$ avec probabilité $i/(i + j)$, ou un déplacement vers le point $(i + c, j + d)$ avec probabilité $j/(i + j)$. L'histoire d'une urne est donc une marche pondérée dans le quart de plan.

Marches dans le quart de plan. Détaillons le problème classique du dénombrement des marches "à petits pas" dans le plan. Plaçons nous dans le plan vu comme un réseau de points à coordonnées entières, $\mathbb{Z}^2$. Partant de l'origine $(0,0)$, un ensemble fixé $\mathscr{P}$ de pas unitaires est autorisé : c'est un sous-ensemble des 8 pas unitaires possibles,

À chaque étape, un pas est choisi uniformément dans $\mathscr{P}$. La question combinatoire naturelle est celle du nombre de marches débutant à l'origine et terminant en un point quelconque du plan (i,j), en utilisant uniquement l'ensemble $\mathscr{P}$. Ce problème peut se traiter sous l'angle des séries génératrices, et dans ce cas, l'objet d'étude est la fonction

$$G^{\mathscr{P}}(x,y,z) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i,j} g^{\mathscr{P}}_{n,i,j} x^i y^j\right) z^n,$$

où $g^{\mathscr{P}}_{n,i,j}$ est le nombre de marches partant de l'origine et arrivant au point (i,j) en n pas de l'ensemble $\mathscr{P}$. Ces dernières années, des recherches se sont portées sur la question de la nature de cette série. Est-elle

- rationnelle (quotient de deux polynômes) ?
- algébrique, i.e. racine d'un polynôme à coefficients polynomiaux en x,y,z ?
- holonome (ou différentiellement finie), i.e. solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux ?
- non holonome ?

Cette hiérarchie sur la nature des fonctions est stricte :

$$\{\text{rationnelle}\} \subset \{\text{algébrique}\} \subset \{\text{holonome}\}.$$

Pour les marches non contraintes dans le plan (dans $\mathbb{Z}^2$), la série $G^{\mathscr{P}}(x,y,z)$ est rationnelle. En revanche, si l'on impose que les marches soient confinées dans un sous-espace du plan (le demi-plan $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$, ou le quart de plan $\mathbb{N}^2$), la nature de la série génératrice diffère. Par exemple, dans le demi-plan, la série $G^{\mathscr{P}}(x,y,z)$ est algébrique [BMP03]. Intuitivement, la nature de la série reflète la complexité combinatoire du problème.

Plaçons-nous dans le quart de plan avec un ensemble de pas $\mathscr{P}$. La série génératrice $G^{\mathscr{P}}(x,y,z)$ vérifie la classification suivante. Des $2^8 = 256$ ensembles de pas possibles, il est possible de supprimer les cas simples et de tirer parti des symétries afin de se ramener à l'étude de 79 cas intrinsèquement différents. Parmi ces 79 cas, il y a 4 cas algébriques, 19 cas holonomes non algébriques, et 56 cas non holonomes.

De nombreux travaux ont été menés pour d'obtenir cette classification. M. Bousquet-Mélou, M. Petkovsek and M. Mishna [BMP03, BM05, Mis09, BMM10] proposent une classification, avec des conjectures sur les cas non holonomes. A. Bostan et M. Kauers [BK09, BK10] adoptent une approche de mathématiques expérimentales automatisée, fondée sur le *guessing* suivi de preuves, qui confirme les conjectures ; K. Raschel *et al.* [FR10, KR11, Ras12, FR12] proposent une vision unifiée du problème et prouvent des résultats de non holonomie.

Nature des urnes. Dans les deux cadres (marches et urnes), la suite des points du plan $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ constitue un processus de Markov en temps discret : le choix des positions P_{n+1} au temps $n+1$ est entièrement déterminé par la position P_n au temps n. La distinction profonde entre les deux cadres d'étude est l'aléa considéré pour le choix des pas.

Dans le cadre des marches dans le quart de plan, le passage du point P_n à P_{n+1} s'effectue par un tirage uniforme dans l'ensemble des pas unitaires autorisés. Ainsi, le choix du pas ne dépend ni du temps n, ni de la position dans le quart de plan (sous réserve de ne pas toucher un des bords). Si p est un pas quelconque de l'ensemble des pas $\mathscr{P}$ et si P_n prend ses valeurs dans le quart de plan privé des bords $\mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0}$, alors

$$\mathbb{P}\left\{\text{le pas choisi est } p \text{ pour passer de } P_n \text{ à } P_{n+1}\right\} = \frac{1}{|\mathscr{P}|}.$$

Dans le cadre des urnes, ces propriétés d'invariance spatiale et d'uniformité dans le choix des pas n'existent plus. Le pas choisi à l'étape n pour une urne $[a, b, c, d]$ dépend en effet de la position P_n dans le plan au temps n. Notons (x_n, y_n) les coordonnées du point P_n à l'étape n. Les deux pas possibles sont (a, b) ou (c, d), et les probabilités sont les suivantes,

$$\mathbb{P}\left\{\text{le pas choisi est } (a,b) \text{ pour passer de } P_n \text{ à } P_{n+1}\right\} = \frac{x_n}{x_n + y_n},$$

$$\mathbb{P}\left\{\text{le pas choisi est } (a,b) \text{ pour passer de } P_n \text{ à } P_{n+1}\right\} = \frac{y_n}{x_n + y_n}.$$

Cette dépendance spatiale est le point clé de la difficulté et de l'intérêt de ces modèles d'urnes. C'est également cette dépendance qui fait la richesse de modélisation de ces systèmes dynamiques.

Dans le modèle des urnes de Pólya, nous nous posons les mêmes questions de classification : comment se situent les séries génératrices des histoires vis-à-vis de l'algébricité et de l'holonomie ?

Le cas univarié a été évoqué dans la partie précédente. Il s'agit de déterminer $H(1,1,z)$, c'est-à-dire le nombre total d'histoires de longueur n. Pour toute urne équilibrée additive de balance $\sigma > 0$, nous rappelons l'expression de la série génératrice univariée des histoires,

$$H(1,1,z) = \frac{1}{(1-\sigma z)^{1/\sigma}}.$$

Ainsi, toute urne équilibrée de balance strictement positive a une fonction génératrice univariée $H(1,1,z)$ algébrique. La question naturelle qui se pose ensuite concerne le cas multivarié. Quelle est la nature de la série $H(x,y,z)$? Est-elle aussi algébrique ?

Plan. Ces deux parties s'articulent en quatre chapitres. Le Chapitre 3 décrit la procédure automatique de GUESS'N'PROVE qui permet de découvrir les urnes algébriques dans le paysage des urnes équilibrées additives. Une classification suivant les propriétés arithmétiques des coefficients de la matrice est ainsi pressentie. Le Chapitre 4 confirme

cette classification en trois familles par des preuves élémentaires. La Partie III exploite la classification trouvée pour prouver des théorèmes limites sur la distribution de ces urnes. Le Chapitre 5 analyse l'une des classes d'urnes algébriques en utilisant une méthode de cols multiples et coalescents. La méthode est rappelée puis appliquée pour aboutir aux lois limites. Le Chapitre 6 traite la dernière classe d'urnes algébriques par une analyse de singularité.

Chapitre 3

Recherche automatique des urnes algébriques

Notre objet d'étude est la fonction génératrice trivariée $H(x,y,z)$ qui code les histoires combinatoires de l'urne $[a,b,c,d]$ à partir de la configuration initiale (a_0,b_0). Dans cette partie, toutes les urnes considérées seront dites *positives* : tous les coefficients de la matrice de remplacement sont positifs, i.e. $a,b,c,d \geq 0$. Nous nous proposons de rechercher les matrices de règles pour lesquelles la fonction H est algébrique. Pour une balance fixée σ, il existe $(\sigma+1)^2$ matrices de règles pour les urnes équilibrées positives. La recherche d'algébricité parmi l'ensemble des urnes équilibrées peut s'effectuer de façon systématique grâce au calcul formel. Nous détaillons ici la méthode de GUESS'N'PROVE. Utilisée par A. Bostan et M. Kauers dans le cadre des marches dans le quart de plan, elle permet de démontrer l'algébricité de la série génératrice des marches de Gessel [BK10], et de vérifier les résultats sur l'ensemble des marches dans le quart de plan de façon systématique et automatique [BK09].

3.1 La démarche sur un exemple

Prenons l'exemple de l'urne $[4,1,2,3]$, et partons de la condition initiale $(a_0,b_0) = (0,1)$. Nous allons tout d'abord rechercher un polynôme annulateur pour la fonction génératrice des histoires univariée $H(1,1,z)$, puis pour la multivariée $H(x,y,z)$.

3.1.1 En une variable

Devinette. Notons $h(z) = H(1,1,z)$. En partant de la configuration de départ (le coefficient $[z^0]$ de la fonction $h(z)$), l'itération des règles de la matrice de remplacement fournit les coefficients successifs :

$$h(z) = 1\frac{z^0}{0!} + 1\frac{z^1}{1!} + 6\frac{z^2}{2!} + 66\frac{z^3}{3!} + 1056\frac{z^4}{4!} + 22176\frac{z^5}{5!} + 576576\frac{z^6}{6!} + O(z^7).$$

Au départ, il y a une boule ; il y a donc une histoire de longueur 1. Puis, l'urne contient 6 boules, il y a donc 6 histoires de longueur 2. Ensuite, l'urne contient 11 boules, donc 6×11 histoires de longueur 3, etc.

À partir de ce développement en série, nous cherchons une équation algébrique sur $h(z)$. Pour cela, calculons les puissances successives de $h(z)$ à précision 7. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
h(z) &= 1 + z + 3z^2 + 11z^3 + 44z^4 + \frac{924}{5}z^5 + \frac{4004}{5}z^6 + O(z^7),\\
h(z)^2 &= 1 + 2z + 7z^2 + 28z^3 + 119z^4 + \frac{2618}{5}z^5 + \frac{11781}{5}z^6 + O(z^7),\\
h(z)^3 &= 1 + 3z + 12z^2 + 52z^3 + 234z^4 + \frac{5382}{5}z^5 + \frac{25116}{5}z^6 + O(z^7),\\
h(z)^4 &= 1 + 4z + 18z^2 + 84z^3 + 399z^4 + \frac{9576}{5}z^5 + \frac{46284}{5}z^6 + O(z^7),\\
h(z)^5 &= 1 + 5z + 25z^2 + 125z^3 + 625z^4 + 3125z^5 + 15625z^6 + O(z^7).
\end{aligned}$$

Les coefficients de la dernière ligne $h(z)^5$ sont frappants et nous constatons

$$h(z)^5 = \frac{1}{1-5z} \mod z^7 .$$

Le polynôme $P(T) = 1-(1-5z)\,T^5$ est alors un bon candidat pour un polynôme annulateur : la fonction $h(z)$ est une racine de P à précision 7. L'obtention de ce polynôme est l'étape de *divination* (GUESS).

Preuve. La seconde étape de la démarche consiste à étudier le polynôme P deviné. Soit $\alpha(z)$ une racine de P. La dérivation par rapport à z de l'égalité $P(\alpha(z)) = 0$ donne la relation suivante :

$$(1-5z)\partial_z\alpha(z) = \alpha(z).$$

Ainsi, nous vérifions que toute racine de P est solution de l'équation différentielle des histoires (2.9) p.32, prise avec $\sigma = 5$ et $s_0 = 1$,

$$(1-5z)\,\partial_z H - H = 0.$$

Par définition, h, fonction génératrice univariée des histoires, vérifie aussi cette équation. La condition initiale nous permet de conclure : la seule racine de P qui vérifie $\alpha(0) = 1 = h(0)$ est la fonction $(1-5z)^{-1/5}$. Les fonctions h et $(1-5z)^{-1/5}$ vérifient toutes les deux l'équation différentielle avec la même condition initiale, et le théorème de Cauchy-Kowalevski (Th. 7, p.23) donne l'unicité d'une telle solution. Les deux fonctions sont donc égales. Cette seconde étape est la *preuve* (PROVE).

3.1.2 En plusieurs variables

Devinette. Nous adoptons une démarche similaire au cas univarié pour trouver la fonction bivariée $H(x,1,z)$. Le calcul des premiers coefficients se fait en appliquant

successivement les règles de la matrice, à partir du monôme initial $y = x^0 y^1$, qui correspond à la composition initiale $(a_0, b_0) = (0, 1)$. Nous imposons ensuite $y = 1$, comme cela est usuel pour une urne équilibrée (Principe 1, p.46).

$$\begin{aligned} H(x,1,z) = & \frac{z^0}{0!} + x^2\frac{z^1}{1!} + (2x^6 + 4x^4)\frac{z^2}{2!} + (12x^{10} + 26x^8 + 28x^6)\frac{z^3}{3!} \\ & + (120x^{14} + 280x^{12} + 376x^{10} + 280x^8)\frac{z^4}{4!} \\ & + (1680x^{18} + 4200x^{16} + 6280x^{14} + 6376x^{12} + 3640x^{10})\frac{z^5}{5!} + O(z^6)\,. \end{aligned}$$

Dans cet exemple, nous avons développé jusqu'à l'ordre 6 pour des raisons de place, mais en pratique nous développons en série jusqu'à l'ordre 30. Ensuite, nous calculons les r puissances successives de $H(x,1,z)$, et nous recherchons une combinaison linéaire des puissances de $H(x,1,z)$ dont les coefficients sont des polynômes en x et z. Dans l'exemple, nous cherchons $r+1$ polynômes $a_i(x,z)$, de degrés bornés, tels que

$$\sum_{i=0}^{r} a_i(x,z) H^i(x,1,z) = 0 \mod z^{30}\,.$$

Le choix des degrés pour x, z, ainsi que le choix de la borne r seront discutés plus tard, dans la Section 3.3.3 traitant de la procédure automatique de devinette. Il s'agit alors de résoudre le problème d'algèbre linéaire sur $[1, H(x,1,z), \ldots, H(x,1,z)^r]$, et nous obtenons

$$3x^2 + (5 - 5x^2)H(x,1,z)^2 + (-5 + 2x^2 + 15x^2 z)H(x,1,z)^5 = O(z^{30})\,.$$

Ainsi, $H(x,1,z)$ annule à précision 30 le polynôme

$$P(T,x,z) = 3x^2 + (5 - 5x^2)T^2 + (-5 + 2x^2 + 15x^2 z)T^5\,.$$

L'étape de divination est ainsi close, et nous passons ensuite à l'étape de preuve.

Preuve. En partant de ce polynôme P, nous montrons comme précédemment que toute racine $\alpha(x,z)$ de P vérifie l'équation aux dérivées partielles des histoires (2.9), avec $a = 4$, $c = 2$, $s_0 = 1$ et $\sigma = 5$,

$$(1 - 5zx^2)\partial_z \alpha(x,z) + (x^3 - x^5)\partial_x \alpha(x,z) - x^2 \alpha(x,z) = 0\,. \tag{3.1}$$

Cela s'obtient directement en combinant les relations provenant de

$$P(\alpha(x,z),x,z) = 0\,, \quad \partial_x P(\alpha(x,z),x,z) = 0\,, \quad \text{et } \partial_z P(\alpha(x,z),x,z) = 0\,.$$

Les deux dernières relations permettent d'exprimer les dérivées partielles $\partial_x \alpha$ et $\partial_z \alpha$ en fonction de α,

$$\begin{aligned} \alpha\, g(x,\alpha)\, \partial_x \alpha &= -(4x + 30xz)\alpha^5 + 10x\alpha^2 - 6x\,, \\ \alpha\, g(x,\alpha)\, \partial_z \alpha &= -15x^2\alpha^5\,, \end{aligned}$$

avec $g(x,\alpha) = 2(5-5x^2)\alpha + 5\alpha^4(-5+2x^2+15x^2z)$. De ces trois relations, nous relions l'équation aux dérivées partielles avec l'équation $P(\alpha(x,z),x,z)$,

$$\begin{aligned}\alpha g(x,\alpha)&\left[(1-5zx^2)\partial_z\alpha + (x^3-x^5)\partial_x\alpha - x^2\alpha\right]\\ &= 2x^2(x^2-1)\left[3x^2+(5-5x^2)\alpha^2+(-5+2x^2+15x^2z)\alpha^5\right] = 0\,. \quad (3.2)\end{aligned}$$

Les fonctions $\alpha(x,z)$ et $g(x,\alpha(x,z))$ sont non nulles, d'où l'expression (3.1).

De plus, le polynôme P, vu comme série formelle sur $\mathbb{Q}[x][[z,T]]$, vérifie les conditions $P(1,0,0) = 0$ et $\partial_T P(1,0,0) \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites sur les séries formelles garantit l'existence d'une série $s(x,z)$ sur $\mathbb{Q}[x][[z]]$ telle que $P(s(x,z),x,z) = 0$ et $s(x,0) = 1$. Ainsi, cette série $s(x,z)$ en tant que racine de P vérifie l'équation (3.1), avec la condition $s(x,0) = 1$. Or, avec ces hypothèses, le théorème de Cauchy-Kowalevski (Th. 7, p.23) garantit l'unicité d'une telle solution au voisinage de $(x,z) = (0,0)$. Mais $H(x,1,z)$ est aussi une série formelle qui vérifie l'équation (3.1) et telle que $H(x,1,0) = 1$. Par unicité, $s(x,z)$ et $H(x,1,z)$ sont égales dans un voisinage de $(0,0)$, et donc égales en tant que séries formelles. La fonction $H(x,1,z)$ est finalement algébrique, puisqu'elle est racine de $P(T,x,z)$.

Nous voulons désormais rendre cette étude de cas entièrement automatique.

3.2 Remarques préliminaires à l'automatisation

Avant de parcourir l'ensemble des urnes strictement additives ($a,b,c,d > 0$), nous traitons séparément les urnes équilibrées qui possèdent un zéro dans leur matrice de règles. Ensuite, nous dégageons quelques principes de simplification qui découlent des propriétés analytiques et combinatoires de ces urnes.

3.2.1 Les urnes équilibrées positives avec zéro

L'urne triviale. L'urne $[0,0,0,0]$ n'est pas algébrique. Sa fonction génératrice associée est

$$H(x,y,z) = x^{a_0}y^{b_0}e^{(a_0+b_0)z}\,.$$

Démonstration. Le système $\{\dot{X} = X,\ \dot{Y} = Y\}$, avec $X(0) = x$ et $Y(0) = y$, donne $X(x,y,z) = xe^z$ et $Y(x,y,z) = ye^z$. □

Les urnes $[\sigma,0,0,\sigma]$, avec $\sigma > 0$. Elles généralisent le modèle initial de contagion de Pólya $[1,0,0,1]$. Ces urnes sont algébriques et la série génératrice est

$$H(x,y,z) = \frac{x^{a_0}}{(1-\sigma x^\sigma z)^{a_0/\sigma}}\,\frac{y^{b_0}}{\left(1-\sigma y^\sigma z\right)^{b_0/\sigma}}\,.$$

Démonstration. Le système $\{\dot{X} = X^{\sigma+1},\ \dot{Y} = Y^{\sigma+1},\ X(0) = x,\ Y(0) = y\}$ donne $x^\sigma X^{-\sigma} = 1-\sigma x^\sigma z$ et $y^\sigma Y^{-\sigma} = 1-\sigma y^\sigma z$. □

Les urnes $[\sigma, 0, \sigma, 0]$ ou $[0, \sigma, 0, \sigma]$, avec $\sigma > 0$. Elles généralisent l'urne des records $[1, 0, 1, 0]$ et sont algébriques.

$$H(x, y, z) = \frac{x^{a_0} y^{b_0}}{(1 - \sigma x^\sigma z)^{s_0/\sigma}} .$$

Démonstration. Le système $\{\dot{X} = X^{\sigma+1}, \dot{Y} = X^\sigma Y, X(0) = x, Y(0) = y\}$ donne $x^\sigma X^{-\sigma} = 1 - \sigma x^\sigma z$ et $Y = y/xX$. □

Les urnes $[0, \sigma, \sigma, 0]$, avec $\sigma > 0$. Elles généralisent l'urne de Friedman $[0, 1, 1, 0]$ et ne sont pas algébriques.

Démonstration. Le système $\{\dot{X} = XY^\sigma, \dot{Y} = X^\sigma Y, X(0) = x, Y(0) = y\}$ associé à l'intégrale première $X^\sigma - Y^\sigma = \Delta^\sigma$ (avec la notation usuelle $\Delta^\sigma = x^\sigma - y^\sigma$) donne l'équation sur Y, $\dot{Y} = Y(Y^\sigma + \Delta^\sigma)$. Le polynôme $Y^\sigma + \Delta^\sigma$ possède σ racines distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma$, et par décomposition en éléments simples, il existe des coefficients $(c_i)_{i=1..\sigma+1}$ tels que

$$\dot{Y}\left(\frac{c_1}{Y} + \frac{c_2}{Y - \alpha_1} + \ldots + \frac{c_{\sigma+1}}{Y - \alpha_\sigma}\right) = 1 .$$

Supposons que la fonction recherchée Y soit algébrique. Par intégration de l'équation précédente, puis par passage à l'exponentielle, l'égalité se récrit $f(Y) = e^{z-\lambda}$ où f est une fonction algébrique ne faisant pas intervenir la variable z. Ainsi, en particularisant $z = \lambda + 2ik\pi$, on obtient une infinité de racines pour la fonction algébrique $f(Y) - 1$. Cela implique $f = 1$, d'où la contradiction. Y n'est donc pas algébrique, et il en est de même pour la fonction génératrice $H(x, 1, z)$ (Principe 2, p.46). □

Les urnes triangulaires. Toutes les urnes triangulaires sont algébriques [FDP06] : $[a, \sigma - a, 0, \sigma]$ (et $[\sigma, 0, \sigma - a, a]$), où $\sigma > a > 0$.

$$H(x, 1, z) = x^{a_0}(1 - \sigma z)^{-b_0/\sigma}\left(1 - x^a\left(1 - (1 - \sigma z)^{a/\sigma}\right)\right)^{-a_0/a} .$$

Les urnes anti-triangulaires. Il s'agit des urnes $[0, \sigma, p, \sigma - p]$ ou $[\sigma - p, p, \sigma, 0]$, avec $\sigma > p > 0$. Ces urnes ne sont pas algébriques.

Démonstration. Le système $\{\dot{X} = XY^\sigma, \dot{Y} = X^p Y^{\sigma-p+1}, X(0) = x, Y(0) = y\}$ associé à l'intégrale première $X^p - Y^p = \Delta^p$ avec $\Delta^p = x^p - y^p$ donne l'équation sur Y, $\dot{Y} = Y^{\sigma-p+1}(Y^p + \Delta^p)$. Le polynôme $Y^p + \Delta^p$ possède p racines distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. En décomposant en éléments simples, il existe des coefficients $(c_i)_{i=1..\sigma-p+1}$ et $(d_j)_{j=1..p}$ tels que

$$\dot{Y}\left(\frac{c_1}{Y} + \frac{c_2}{Y^2} + \ldots + \frac{c_{\sigma-p+1}}{Y^{\sigma-p+1}} + \frac{d_1}{Y - \alpha_1} + \ldots + \frac{d_p}{Y - \alpha_p}\right) = 1 .$$

Supposons que Y soit algébrique. Alors, par intégration puis par application de l'exponentielle, l'équation se récrit $f(Y)e^{g(Y)} = e^{z-\lambda}$, où f et g sont deux fonctions algébriques. En particularisant z à $\lambda - 2ik\pi$, on obtient une infinité de 0 pour la fonction

$f(Y)e^{g(Y)} - 1$. Alors, la fonction algébrique $f(Y)$ peut s'écrire comme $f(Y) = e^{-g(Y)}$, où $g(Y)$ est algébrique aussi, ce qui est contradictoire. □

Conclusion. Parmi les urnes équilibrées positives avec zéro, les urnes algébriques sont les urnes de Pólya, les urnes des records, et toutes les urnes triangulaires. En revanche, les urnes de Friedman, l'urne triviale, et toutes les urnes anti-triangulaires ne sont pas algébriques. Le Tableau 3.1 est un récapitulatif. Nous verrons (Tableau 4.1) que cette classification est incluse dans la caractérisation générale des urnes algébriques.

Coefficients	Urne	Matrice	Nature
$a = b = c = d = 0$	triviale	$[0,0,0,0]$	Non algébrique
$b = c = 0$	Pólya	$[a,0,0,a]$	Algébrique
$a = c = 0$ ou $b = d = 0$	records	$[0,b,0,b]$ $[a,0,a,0]$	Algébrique
$a = d = 0$	Friedman	$[0,b,b,0]$	Non algébrique
$b = 0$ ou $c = 0$	triangulaire	$[a,0,c,d]$ $[a,b,0,d]$	Algébrique
$a = 0$ ou $d = 0$	anti-triangulaire	$[0,b,c,d]$ $[a,b,c,0]$	Non algébrique

TABLEAU 3.1 – Classification des urnes équilibrées avec des coefficients nuls. Lorsque les coefficients de la matrice de l'urne sont désignés par des lettres (a, b, c ou d), ils sont supposés strictement positifs.

3.2.2 Améliorer la recherche automatique

Nous diminuons au mieux l'espace de recherche grâce aux quatre principes suivants.

Principe 1. *Il suffit d'étudier $H(x,1,z)$.*

Démonstration. Pour une urne équilibrée de balance σ, la fonction génératrice des histoires $H(x,y,z)$ possède une variable redondante : les exposants des variables x, y et z sont liés par la condition de balance. En effet, pour tout coefficient non nul du monôme $x^a y^b z^n$, nous avons $a + b = \sigma n + s_0$. Nous choisissons d'oublier la variable y, en spécifiant $y = 1$. Ainsi, l'étude de $H(x,y,z)$ est équivalente à celle de $H(x,1,z)$. □

Principe 2. *Il suffit de considérer le cas où l'on a uniquement une boule blanche en configuration initiale, $(a_0, b_0) = (0,1)$.*

Démonstration. La fonction génératrice $H(x,1,z)$ s'exprime comme le produit des fonctions $X(x,1,z)^{a_0}$ et $Y(x,1,z)^{b_0}$, où X et Y sont les solutions du système différentiel (2.4). Ainsi, $X(x,1,z)$ est la série génératrice des histoires dans le cas particulier

$(a_0, b_0) = (1, 0)$. De même, $Y(x, 1, z)$ est la série génératrice des histoires dans le cas symétrique $(a_0, b_0) = (0, 1)$. Ces deux fonctions génératrices sont de plus liées par l'équation de l'intégrale première,

$$X(x, 1, z)^p - Y(x, 1, z)^p = x^p - 1\,,$$

où $p = c - a = b - d$. De cette dernière équation, nous déduisons que $X(x, 1, z)$ et $Y(x, 1, z)$ possèdent la même propriété vis-à-vis de l'algébricité. Il suffit de prouver que $Y(x, 1, z)$ est algébrique, pour en déduire d'abord l'algébricité de $X(x, 1, z)$, puis l'algébricité de $H(x, 1, z)$. La réciproque est également vraie : *si H est algébrique, alors X et Y le sont aussi*. Par l'intégrale première, nous pouvons exprimer H en fonction de X. □

Principe 3. *Les urnes $[a, b, c, d]$ et $[d, c, b, a]$ ont le même comportement.*

Démonstration. Pour passer d'une urne à l'autre, il suffit d'inverser les couleurs des boules ; cela revient à étudier $X(1, x, z)$ au lieu de $Y(x, 1, z)$. Soient $X(x, y, z)$ et $Y(x, y, z)$ les solutions du système $\{\ \dot{X} = X^{a+1}Y^b,\ \dot{Y} = X^cY^{d+1},\ X(0) = x,\ Y(0) = y\ \}$, et $X_R(x, y, z)$ et $Y_R(x, y, z)$ celles du système $\{\ \dot{X}_R = X_R^{d+1}Y_R^c,\ \dot{Y}_R = X_R^bY_R^{a+1},\ X_R(0) = x,\ Y_R(0) = y\ \}$. Nous constatons que $X(x, y, z) = Y_R(y, x, z)$ et $Y(x, y, z) = X_R(y, x, z)$, par unicité de la solution au problème de Cauchy. □

Principe 4. *Il suffit de considérer les urnes dont les coefficients sont premiers entre eux.*

Démonstration. Soit δ le pgcd des coefficients a, b, c, d de l'urne.
Alors, les urnes $[a, b, c, d]$ et $[a/\delta, b/\delta, c/\delta, d/\delta]$ ont le même comportement. □

Ces principes vont nous permettre de réduire l'espace de recherche dans la section suivante. Nous nous limiterons aux urnes $[a, b, c, d]$ à coefficients strictement positifs et premiers entre eux, avec $d \leq a$. Désormais, nous cherchons à identifier l'ensemble des urnes strictement additives équilibrées dont la fonction génératrice bivariée $H(x, 1, z)$ est algébrique.

3.3 L'algorithme de GUESS'N'PROVE

Pour traiter automatiquement l'ensemble des cas positifs, nous utilisons les outils provenant du calcul formel. Dans notre étude, nous avons choisi spécifiquement le logiciel MAPLE. Le schéma algorithmique est le suivant :

Pour une urne $[a, b, c, d]$,
- nous commençons par calculer les premiers termes de la fonction génératrice $H(x, 1, z)$ (une centaine de termes) (Section 3.3.1),
- nous devinons un polynôme annulateur à partir des premiers termes de cette série tronquée (GUESS, Section 3.3.2),
- nous vérifions enfin que les racines exactes de ce polynôme sont solutions de l'équation aux dérivées partielles (2.9) (PROVE, Section 3.3.3).

La recherche jusqu'à une balance maximale de tous les cas additifs équilibrés se fait par trois boucles imbriquées. Fixons tout d'abord la borne $\sigma \leq$ `balancemax` sur la balance de l'urne.

```
balancemax := 10 ;
```
[1]

La première boucle parcourt les différentes balances possibles, `s`, avec `s` entre 2 et `balancemax`. Les deux boucles suivantes déterminent les coefficients de la matrice. Il suffit de choisir les coefficients a et d, et le reste est entièrement déterminé grâce à la balance. Le Principe 3 p.47 permet de restreindre l'ensemble des cas, et d'imposer par exemple $a \geq d$, c'est-à-dire un choix de d dans l'intervalle $[\![1, a]\!]$.

```
for s from 2 to balancemax do
    for a from 1 to s-1 do
        b := s - a ;
        for d from 1 to a do
            c := s - d
            #CORE
        end do:
    end do:
end do;
```

Le cœur de l'algorithme `#CORE` vient se greffer dans cette triple boucle. Il se décompose en une première étape de construction de la série tronquée (`#POWER SERIES EXPANSION`), en une seconde étape de divination du polynôme qui annule cette série tronquée (`#GUESSING`), pour finir en une preuve automatique (`#PROVE`).

3.3.1 Développement en série entière

Nous commençons par fixer le nombre de termes, `precision`, dans le développement en série entière, et la condition initiale, `CondInit`, qui contient le monôme initial à l'instant 0, $x^{a_0} y^{b_0}$: d'après le Principe 2, celle-ci est $(a_0, b_0) = (0, 1)$, c'est-à-dire en termes de fonctions génératrices le monôme y.

```
precision := 150 ;
CondInit := y ;
```

Vient ensuite une procédure qui permet la construction de la série tronquée. L'idée est de partir de la valeur initiale, `CondInit`, (la série tronquée à l'ordre 0), puis d'appliquer N fois l'opérateur `Dop` qui simule une étape de tirage dans l'urne ; c'est la version calcul formel de l'opérateur qui a fourni le théorème d'isomorphisme :

$$\mathscr{D} = x^{a+1} y^b \partial_x + x^c y^{d+1} \partial_y \,. \tag{3.3}$$

1. L'approche de GUESS'N'PROVE permet d'examiner toutes les urnes jusqu'à une balance de 10, en un temps de calcul raisonnable. Nous verrons à la fin de ce chapitre comment tester l'ensemble des urnes jusqu'à une balance de 100 (Section 3.5).

```
Dop:=proc(f,a,b,c,d)
    expand(x^(a+1)*y^b*diff(f,x)+x^c*y^(d+1)*diff(f,y));
end:
```

Cet opérateur est appliqué récursivement pour calculer la série génératrice jusqu'au pas désiré,

$$H_N(x,y,z) = \sum_{n=0}^{N} \mathscr{D}^n[y]\frac{z^n}{n!}.$$

La procédure `SerieCons(N, init, a,b,c,d)` construit la série génératrice tronquée au pas `N` de l'urne correspondante $[a,b,c,d]$, avec comme point de départ le monôme `CondInit`. À l'entrée de la boucle i, la variable `iter` contient $\frac{1}{(i-1)!}\mathscr{D}^{i-1}[y]$, ce qui permet de calculer

$$H_i = \sum_{n=0}^{i} \mathscr{D}^n[y]\frac{z^n}{n!} = H_{i-1} + z^i \frac{1}{i}\mathscr{D}\left[\frac{1}{(i-1)!}\mathscr{D}^{i-1}[y]\right].$$

```
SerieCons:=proc(N,init,a,b,c,d) local res, iter, i ;
    res := init ; iter := init ;
    for i from 1 to N do
        iter := 1/i * Dop(iter,a,b,c,d) ;
        res  := res + iter * z^i ;
    end do;
end proc:
```

La première étape du `#CORE` des trois boucles est donc :

```
      ### POWER SERIES EXPANSION ###
Hserie := SerieCons(precision, CondInit, a, b, c, d):
zseries := series(subs(y=1, Hserie), z, precision):
```

La variable `zseries` contient la série $H(x,1,z)$ tronquée à l'ordre `precision`.

Optimisation. Dans cette partie du code, nous avons finalement calculé $H(x,y,z)$ tronquée à l'ordre désiré. La variable y étant superflue, nous pouvons effectuer directement le calcul de la série tronquée $H(x,1,z)$. Pour cela, il suffit de partir de la condition initiale `CondInit := 1`, et de modifier légèrement les procédures `Dop` et `SerieCons` afin de ne plus différencier en y. L'inconvénient esthétique est la perte de la symétrie entre les variables x et y.

3.3.2 Divination automatique – GUESS

La seconde étape est la devinette grâce au package `gfun` de MAPLE.

```
      ### GUESSING ###
with(gfun):
guess_poly := seriestoalgeq(zseries, h(z), [ogf]):
```

Ce package `gfun` rassemble plusieurs outils de calcul formel agissant sur les séries génératrices[2]. Il a été développé par B. Salvy et P. Zimmermann [SZ94]. Nous nous servons pour notre devinette de la procédure `seriestoalgeq`. Celle-ci renvoie, lorsque cela est possible, un polynôme dont la série tronquée donnée en argument est racine. En voici l'idée.

Principe de la procédure. Soit $A(z)$ une série formelle dans $\mathbb{K}[[z]]$, où $\mathbb{K}$ est un corps, et soit N un entier. Considérons $A_N(z)$, la série tronquée $A(z)$ à l'ordre N,

$$A_N(z) = A(z) \mod z^N .$$

Connaissant $A_N(z)$, c'est-à-dire les N premiers termes de la série $A(z)$, nous pouvons chercher une équation algébrique satisfaite par $A_N(z)$. Cela donne une équation algébrique pour $A(z)$ à précision N. Autrement dit, nous cherchons un polynôme $P(T,z)$ de $\mathbb{K}[T,z]$ tel que

$$P(A(z),z) = 0 \mod z^N .$$

Soit d le degré en z de P, et r le degré en T de P. Nous pouvons écrire

$$c_r(z)A(z)^r + \ldots + c_1(z)A(z) + c_0(z) = 0 \mod z^N ,$$

avec les polynômes $c_i(z)$, tous de degré inférieur ou égal à d. Trouver un polynôme $P(T,z)$ qui convient revient à résoudre un système linéaire, et peut se faire par une élimination de Gauss sur $[1, A(z), A(z)^2, \ldots, A(z)^r]$. D'autres techniques plus sophistiquées et plus efficaces sont en réalité utilisées pour la divination de P à précision N, comme les approximants de Padé-Hermite, dont nous rappelons la définition.

Définition 14 (Approximants de Padé-Hermite)**.** *Soient* $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ *un vecteur de* n *séries formelles de* $\mathbb{K}[[z]]$*, et* $\mathbf{d} = (d_1, \ldots d_n) \in \mathbb{N}^n$*. Un vecteur non nul* $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_n)$ *de polynômes de* $\mathbb{K}(z)$ *tels que* $deg(P_i) \leq d_i$ *est appelé* approximant de Padé-Hermite de type $\mathbf{d}$ de $\mathbf{A}$*, si*

$$\sum_{i=1}^{n} P_i A_i = 0 \mod z^N , \quad \textit{avec} \quad N = \sum_{i=1}^{n} (d_i + 1) - 1 . \tag{3.4}$$

Nous reformulons ainsi le problème du *guessing algébrique* : rechercher un polynôme annulateur $P(T,z)$ de degré r en T et de degré d en z pour la série $A(z)$ revient à rechercher un approximant de Padé-Hermite $\mathbf{P} = (c_0(z), \ldots, c_r(z))$ de type $\mathbf{d} = (d, \ldots, d)$ du vecteur $\mathbf{A} = (1, A(z), \ldots, A^r(z))$.

Précision et degrés. Pour le calcul des approximants de Padé-Hermite, travailler à précision N sur la série $A(z)$ impose une borne sur les degrés r et d : l'approximant de Padé-Hermite est valable à précision N à la condition

$$N \geq (r+1) \times (d+1) .$$

2. Disponible en ligne à l'adresse `http ://algo.inria.fr/libraries/papers/gfun.html`.

Pour une série tronquée à l'ordre N, la procédure `seriestoalgeq` recherche un polynôme $P(T,z)$ en énumérant un à un les degrés r possibles pour T avec la contrainte que le degré d en z du coefficient dominant est tel que $(d+1)\times(r+1)<N$.

Exemple 5. *Reprenons notre exemple* $[4,1,2,3]$ *de la Section 3.1 p.41 , avec la condition initiale* $(a_0,b_0)=(0,1)$. *Calculons à précision* $N=20$ *les séries tronquées* $H(z)$, $H(z)^2$, $H(z)^3$, $H(z)^4$, $H(z)^5$. *Ici, nous recherchons un polynôme annulateur* $P(T,z)$ *de degré* 5 *en* T. *Le degré maximal en* z *recherché est donc de 2, car* $(2+1)\times(5+1)<N=20$. *La famille* $[1,H,H^2,H^3,H^4,H^5]$ *est liée et nous trouvons* $1-(1-5z)H^5=0$. *L'approximant de Padé-Hermite de type* $(2,2,2,2,2,2)$ *du vecteur* $(1,H,H^2,H^3,H^4,H^5)$ *est* $(1,0,0,0,0,(1-5z))$.

Algorithme et complexité. Il existe de nombreux algorithmes pour calculer des approximants de Padé-Hermite. L'algorithme de B. Beckermann et G. Labahn possède une complexité optimale [BL94] : la recherche d'un approximant pour notre problème se fait en $O(r^\theta M(N)\log(N))$ opérations dans $\mathbb{K}$, où r^θ est le coût de la multiplication de deux matrices de $\mathscr{M}_r(\mathbb{K})$, et où $M(N)$ est le coût de la multiplication de deux polynômes de $\mathbb{K}[z]$ de degré maximal N.

Le choix du corps $\mathbb{K}$. Nous avons détaillé l'algorithme de *guessing* indépendamment du corps de base. Pour les séries génératrices univariées $H(1,1,z)$, nous nous placerons dans $\mathbb{Q}$. Pour la recherche multivariée, comme $H(x,1,z)$, nous choisirons $\mathbb{Q}(x)$.

La divination est-elle fiable ? Pourquoi un polynôme deviné à précision N, à partir des premiers termes de la série uniquement, a-t-il de fortes chances d'être le bon candidat pour la série toute entière ? L'intuition est la suivante : si le polynôme $P(T,z)$ est le bon candidat, ses degrés r et d sont fixés et indépendants de la précision N. Ainsi, il doit annuler la série à n'importe quelle précision. Nous pouvons tester si le polynôme deviné à précision N annule également la série tronquée à des ordres plus élevés, $N+50$ ou $2N$. Si c'est effectivement le cas, il y a de grandes chances pour que les degrés du polynôme deviné, r et d, soient indépendants de N. Pour améliorer les chances de succès (trouver le bon candidat P), nous pouvons calculer des polynômes annulateurs à différentes précisions et prendre comme candidat le plus grand diviseur commun dans $\mathbb{Q}[T,z]$.

Minimalité. Ainsi, le polynôme P deviné est un polynôme annulateur, mais pas nécessairement minimal. En pratique, il est toujours possible de retrouver le polynôme minimal. En effet, si P n'est pas irréductible, il se factorise et la série $A(z)$ annule nécessairement l'un des facteurs. Si $A(z)$ annule plusieurs facteurs distincts à précision N, alors l'augmentation de la précision (passer de N à $2N$ par exemple) permet de discriminer les deux polynômes, quitte à devoir répéter l'opération.

Échec. Il est possible que la divination échoue, et ceci pour deux raisons : soit la fonction est effectivement non algébrique et la recherche d'un polynôme n'aboutit pas ; soit le nombre de coefficients pour le développement en série est trop faible pour déterminer un polynôme annulateur. Dans les deux cas, l'algorithme renvoie une erreur accompagnée de la matrice de l'urne correspondante. Malgré cela, cet échec fournit une information sur la série génératrice étudiée. Pour une précision N, nous pouvons conclure qu'il n'existe pas de polynôme annulateur $P(T,z)$ dont les degrés r en T et d en z vérifient $(d+1)\times(r+1)<N$.

3.3.3 Preuve automatique – PROVE

La dernière partie de l'algorithme de recherche est la vérification de la devinette. Si la devinette a fonctionné, nous pouvons procéder à sa vérification automatique. Pour cela, nous considérons le polynôme P obtenu. En pratique, P est toujours irréductible. En théorie, si P n'est pas irréductible, nous pouvons nous ramener à l'étude du facteur irréductible qui annule la série $H(x,1,z)$ tronquée. Regardons formellement ses racines `psi := RootOf(P,T)`. La preuve consiste à appliquer l'équation aux dérivées partielles que doit vérifier la fonction génératrice $H(x,1,z)$,

$$(1-\sigma z x^c)\partial_z H + (x^{c+1}-x^{a+1})\partial_x H - s_0 x^c H = 0\,, \tag{3.5}$$

avec $s_0 = a_0 + b_0 = 1$ et $\sigma = a+b$. Voici l'étape de preuve de l'algorithme :

```
if guess_poly <> 'FAIL' then
                ###  FORMAL PROOF  ###
    P := subs(h(z)=T, guess_poly[1]):
    psi := RootOf(P,T):
    EDP := (1-(a+b)*z*x^c)*diff(psi,z)
           + (x^(c+1) - x^(a+1))*diff(psi,x) - x^c*psi:
    preuve := simplify(normal(EDP)):
    init1 := eval(P, {T=1,z=0}):
    init2 := eval(diff(P,T), {T=1,x=1,z=0}):
    print(Matrix([[a,b],[c,d]]), P, preuve, init1,init2);
end if:
```

Si la variable `preuve` vaut 0, cela signifie que toutes les racines `psi` du polynôme P sont des solutions de l'équation aux dérivées partielles `EDP`. Lors de cette vérification, les différentes racines du polynôme P sont indistinguables. Ce calcul repose uniquement sur l'écriture formelle du polynôme et de l'équation (3.5). Soit $\psi(x,z)$ une racine quelconque de $P(T,z)$. Alors, nous avons la relation suivante sur ψ,

$$P(\psi(x,z),z) = 0\,.$$

En dérivant cette relation par rapport à z et à x, nous obtenons deux nouvelles relations,

$$\partial_x\left[P(\psi(x,z),z)\right] = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_z\left[P(\psi(x,z),z)\right] = 0\,.$$

De ces deux dernières relations, nous en déduisons des expressions pour $\partial_x \psi(x,z)$ et $\partial_z \psi(x,z)$. Une fois injectées dans EDP, nous vérifions que le résultat du calcul est bien nul.

Si `preuve` rend 0, il suffit alors de prouver que $H(x,1,z)$ est l'une des racines de P.

```
init1 := eval(P, {T=1,z=0}):
init2 := eval(diff(P,T), {T=1,x=1,z=0}):
```

Supposons de plus que `init1` $= 0$ et `init2` $\neq 0$, ce qui signifie $P(1,x,0) = 0$ et $\partial_T P(1,1,0) \neq 0$. Par continuité, nous en déduisons que la dérivée partielle est également non nulle pour tout x dans un voisinage de 1. Par le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction $s(x,z)$, analytique au voisinage de $(x,z) = (1,0)$ et telle que $P(s(x,z),x,z) = 0$ et $s(x,0) = 1$. Cette fonction $s(x,z)$ est racine de P au voisinage de $(x,z) = (1,0)$, donc elle est solution de l'équation (3.5), car `preuve`$= 0$. Les coefficients de cette équation aux dérivées partielles sont analytiques et, au voisinage de $(x,z) = (1,0)$, le coefficient de ∂_z n'est pas nul. Par le théorème de Cauchy-Kowalevski (Th. 7, p.23), la solution $s(x,z)$ est l'unique solution analytique au voisinage de $(1,0)$ et telle que $s(x,0) = 1$. Mais $H(x,1,z)$ est elle aussi une série formelle, analytique au voisinage de $(x,z) = (1,0)$, qui satisfait l'équation (3.5) et telle que $H(x,1,0) = 1$. Par unicité, nous concluons que $H(x,1,z) = s(x,z)$. Ainsi, $H(x,1,z)$ est bien l'une des racines de P, donc H est algébrique.

Finalement, lorsque les variables `preuve` et `init1` sont égales à 0 et que `init2` est différent de 0, nous avons prouvé que la fonction $H(x,1,z)$ est algébrique. La preuve d'algébricité est automatique en ce sens où les calculs formels des variables `preuve`, `init1` et `init2` suffisent pour conclure. Dans les autres cas, nous ne pouvons pas assurer la non algébricité. [3]

Le code MAPLE de l'algorithme en entier est reproduit en Annexe A, p.185.

3.3.4 Exécution de l'algorithme

La procédure de recherche GUESS'N'PROVE est effectuée sur l'ensemble des urnes de balance 2 à 10. Le tableau en Annexe B (p.187) rassemble les urnes algébriques trouvées, associées à leur polynôme annulateur, classées par balance croissante.

Nous verrons plus tard (Section 3.5) comment faire une recherche exhaustive pour des balances de l'ordre de la centaine. Nous regroupons ici tous les résultats devinés sur les urnes algébriques. La balance maximale pour la recherche est donc repoussée à 100.

Aspects combinatoires. Supposons dans ce paragraphe que toutes les urnes algébriques aient été trouvées par cette procédure. Nous pouvons considérer ce problème de façon combinatoire : $1,3,6,9,14,17,23,28,34,35,52,47,56,67$ [4] est le nombre d'urnes algébriques équilibrées de balance σ, avec $\sigma = 2,3\ldots,15$.

3. ... à ce stade, cf. Section 3.5.
4. Cette suite n'est pas connue dans OEIS (oeis.org), On-line Encyclopedia of Integer Sequences.

Parallèlement, le nombre total d'urnes strictement additives équilibrées de balance strictement positive σ se calcule aisément. Le choix des coefficients a et d de la matrice de règles détermine entièrement la matrice (par balance). De plus, en imposant aux 4 coefficients a, b, c, d d'être strictement positifs, cela donne $(\sigma - 1)$ possibilités pour a, et de même pour d, soit $(\sigma - 1)^2$ urnes possibles. Ainsi on obtient la suite $0, 1, 3, 7, 11, 19, 26, 36, 47, 65, 69, 97, 113, 129$ [5] pour les urnes qui ne sont pas devinées algébriques.

La Figure 3.1 permet de visualiser l'évolution du nombre d'urnes algébriques (en rouge) par rapport à la balance σ de l'urne. Nous constatons que pour les petites valeurs de σ (Figure 3.1 à gauche), le nombre d'urnes algébriques est significatif dans l'ensemble des urnes équilibrées, puisqu'il représente au moins la moitié de l'ensemble des urnes [6].

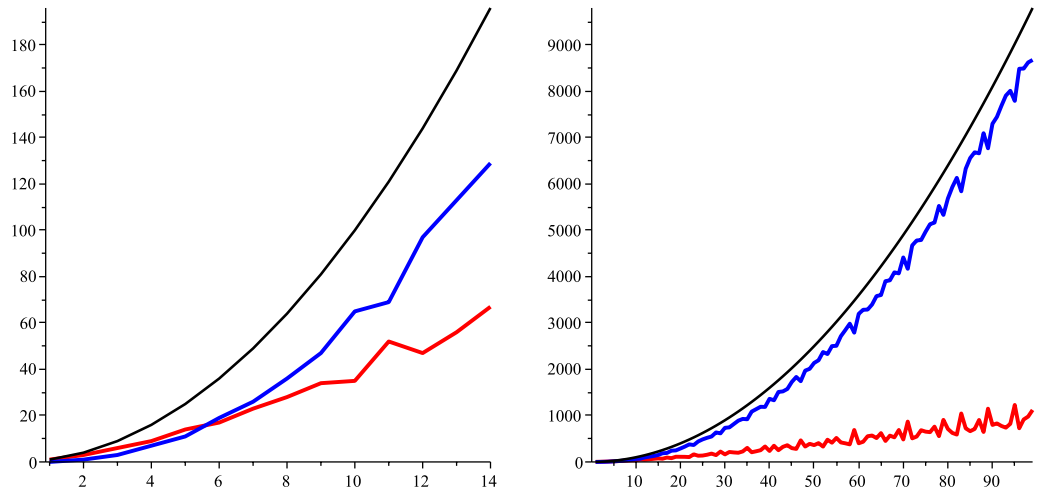


FIGURE 3.1 – *En rouge,* nombre d'urnes algébriques. *En bleu*, nombre d'urnes non algébriques. *En noir*, nombre total d'urnes strictement additives, $(\sigma - 1)^2$. La balance σ est en abscisse. *À gauche :* la balance varie entre 0 et 15. *À droite :* la balance varie entre 0 et 100.

Pour avoir une idée plus précise de la proportion d'urnes algébriques lorsque la balance est grande, regardons la Figure 3.2 qui représente le ratio (urne non algébrique)/(urne algébrique). Très grossièrement, l'ordre de croissance de ce ratio est entre $O(\sigma)$ et $O(\sigma \log \sigma)$, avec un facteur de l'ordre de 0.1. Le nombre d'urnes algébriques de balance σ a un ordre entre σ et $\sigma \log \sigma$, tandis que le nombre total est de $(\sigma - 1)^2$.

5. Cette suite est également inconnue.

6. Cette remarque légitime l'intérêt porté à ces urnes algébriques. En pratique, lorsqu'une situation est modélisée par une urne, celle-ci a une faible balance.

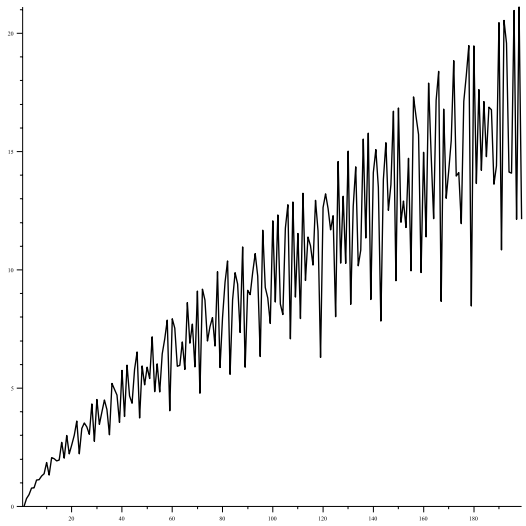


FIGURE 3.2 – En abscisse, la balance σ, entre 0 et 200. En ordonnées, le rapport entre le nombre d'urnes non algébriques et le nombre d'urnes algébriques.

Notons qu'à ce stade, nous sommes certains que les urnes algébriques trouvées sont effectivement algébriques ; mais parmi les urnes qui ont été rejetées par l'algorithme, nous ne savons pas si des urnes algébriques ont été oubliées. En effet, la condition $(r+1)\times(d+1) < N$ peut être mise en défaut, où N est la précision, r le degré en T et d le degré en z du polynôme deviné P.

Fait 1. *Si une urne de balance inférieure à* 10 *non devinée est algébrique, notons son polynôme annulateur minimal* $P(T,z)$ *avec* $r = \deg_T(P)$ *et* $d = \deg_z(P)$. *Alors il vérifie*

$$(r+1)\times(d+1) > 1000\,.$$

Démonstration. Pour vérifier ce fait, nous avons recours encore une fois au calcul formel automatique. Supposons que $P(T,z,x)$ soit un polynôme annulateur d'une série génératrice $H(x,1,z)$. Alors, $P(T,z,x_0)$ est un polynôme qui s'annule en $H(x_0,1,z)$. Calculons les N premiers termes du développement en série entière de $H(x_0,1,z)$ pour un x_0 quelconque choisi entre 0 et 1. Cette série tronquée est solution de $P(T,z,x_0)$ à précision N. Pour prouver qu'une fonction n'est pas algébrique à une précision inférieure à N, il est possible de spécifier la variable x.

De plus, choisissons un nombre premier p assez grand. Nous pouvons faire les calculs de développement en série entière ainsi que l'étape de *guessing* modulo p, via une variante de la procédure `seriestoalgeq`. S'il n'existe pas de polynôme annulateur modulo p, à précision N, alors il n'en existe pas non plus à coefficients dans $\mathbb{Q}[x]$. Ainsi nous recherchons directement un polynôme annulateur à coefficients dans le corps de caractéristique p. Pour les urnes non devinées algébriques, il n'existe pas de tel polynôme à précision $N = 1000$ et dont le degré en T est inférieur à 100. □

3.4 Résultats de la recherche automatique

Le tableau 3.2 liste les urnes algébriques trouvées par l'algorithme de GUESS'N'PROVE. A partir de ces urnes devinées, la troisième colonne compte le nombre d'urnes prouvées algébriques parmi l'ensemble des urnes additives équilibrées, en tenant compte des symétries.

Par exemple, pour les urnes de balance $\sigma = 4$, l'algorithme trouve trois urnes algébriques, [1,3,3,1], [3,1,3,1] et [3,1,2,2]. Par symétrie (Principe 3), nous déduisons l'algébricité des urnes [1,3,1,3] et [2,2,1,3]. Enfin, l'urne [2,2,2,2] est elle aussi algébrique car [1,1,1,1] l'est (Principe 4, p.47). Ainsi, le nombre total d'urnes algébriques équilibrées de balance $\sigma = 4$ est de six.

La somme des urnes prouvées algébriques et des urnes suspectées non algébriques est égale à $(\sigma - 1)^2$. Nous confirmons sur le Tableau 3.2 la transition observée sur le graphique 3.1. Pour une balance $\sigma < 7$, les urnes algébriques sont dominantes parmi les urnes additives équilibrées ; pour une balance supérieure, les urnes suspectées non algébriques reprennent l'avantage, et nous constatons pour $\sigma = 15$ que ces urnes non algébriques sont deux fois plus nombreuses que les algébriques.

3.4.1 Recherche de structure

Nous cherchons à classifier les urnes algébriques trouvées, afin de dégager des critères d'algébricité. A partir des données devinées brutes, nous constatons certains motifs dans les coefficients des urnes devinées. En effet, en observant les résultats (Annexe B, p.187), les urnes de type $[a, b, a, b]$ semblent toutes être algébriques et possèdent un polynôme annulateur très simple.

D'autres remarques sur les polynômes peuvent être faites, d'après cette Annexe B :

- Le degré en T du polynôme annulateur est souvent la balance σ. Dans ce cas, le degré en z est de 1 et la variable z apparait uniquement dans le terme de plus haut degré en T^σ. De plus, l'indice de dissimilarité $p = c - a = b - d$ est négatif.
- Lorsque l'indice p est positif, le degré en T du polynôme est plus élevé que la balance. Il semble valoir $\sigma(\sigma - p)$. Les termes en z se retrouvent dans plusieurs coefficients en T, et le degré en z semble être égal à p.

Pour le reste, il est difficile de dégager directement une structure. Nous nous proposons d'illustrer en Figure 3.3 l'ensemble des urnes trouvées par un graphique 3D, dont les axes correspondent aux coefficients a, b, c (le coefficient d est entièrement déterminé par la condition d'équilibre). Sur les graphiques de la Figure 3.3, des alignements évidents se traduisent par des relations linéaires sur les coefficients. Nous pouvons voir les relations $2c = a$ et $a = c + 1$ pour a, b, c quelconques, ou encore $a + 2 = c$ avec a, b et c impairs. De ces relations, nous conjecturons que les urnes de type $[2a, b, a, a + b]$, $[a + 1, b - 1, a, b]$ et $[2a - 1, 2b + 1, 2a + 1, 2b - 1]$ sont algébriques. En étudiant les différentes dépendances possibles du graphique, nous regroupons les urnes devinées en trois classes.

balance σ	# urnes devinées	# prouvées algébriques	# suspectées non algébriques	urnes devinées
2	1	1	0	[1,1,1,1]
3	2	3	1	[2,1,2,1] [2,1,1,2]
4	3	6	3	[1,3,3,1] [3,1,3,1] [3,1,2,2]
5	5	9	7	[3,2,3,2] [3,2,2,3] [4,1,4,1] [4,1,3,2] [4,1,2,3]
6	5	14	11	[2,4,5,1] [3,3,5,1] [4,2,3,3] [5,1,5,1] [5,1,4,2]
7	9	17	19	[4,3,4,3] [4,3,3,4] [5,2,5,2] [5,2,4,3] [5,2,3,4] [6,1,6,1] [6,1,5,2] [6,1,4,3] [6,1,3,4]
8	9	23	26	[3,5,7,1] [3,5,5,3] [5,3,7,1] [5,3,5,3] [5,3,4,4] [6,2,5,3] [6,2,3,5] [7,1,7,1] [7,1,6,2]
9	13	28	36	[4,5,7,2] [5,4,8,1] [5,4,5,4] [5,4,4,5] [6,3,5,4] [6,3,4,5] [7,2,7,2] [7,2,6,3] [7,2,5,4] [8,1,8,1] [8,1,7,2] [8,1,6,3] [8,1,4,5]
10	12	34	47	[3,7,8,2] [4,6,9,1] [5,5,7,3] [6,4,5,5] [7,3,9,1] [7,3,7,3] [7,3,6,4] [7,3,4,6] [8,2,7,3] [9,1,9,1] [9,1,8,2] [9,1,6,4]
11	18	35	65	cf. classification Fait 2, p.58
12	17	52	69	
13	24	47	97	
14	19	56	113	
15	28	67	129	

TABLEAU 3.2 – Tableau des urnes algébriques devinées et prouvées par l'algorithme GUESS'N'PROVE. Les urnes sont sans zéros, sans les symétries et avec des coefficients premiers entre eux. Nous remarquons des motifs dans les urnes devinées, tels que $[a,b,a,b]$, $[2a-1,2b+1,2a+1,2b-1]$ ou $[a+1,b-1,a,b]$. Ce tableau sera confirmé par l'algorithme de Liouville (Section 3.5) et les urnes suspectées non algébriques seront prouvées non holonomes.

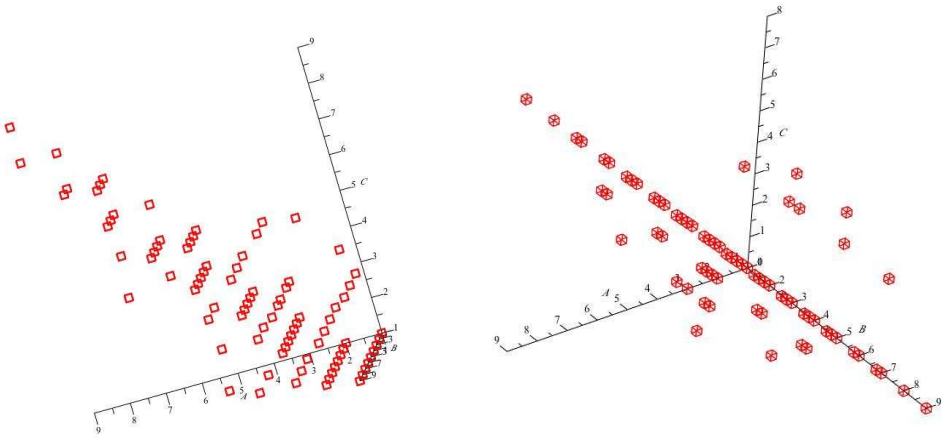


FIGURE 3.3 – Urnes algébriques affichées selon les axes a, b, c. Le coefficient d est entièrement déterminé par la condition d'équilibre. Des alignements apparaissent distinctement.

Fait 2 (Classification)**.** *Soit* $[a,b,c,d]$ *une urne équilibrée strictement additive, devinée algébrique par l'algorithme* GUESS'N'PROVE. *Avec les notations usuelles* $\sigma = a+b = c+d$, $p = c-a = b-d$, *où* $a,b,c,d > 0$, *cette urne (ou son urne symétrique* $[d,c,b,a]$*) appartient à l'une de ces trois familles disjointes :*

(i) $p = 0$,
(ii) $p < 0$ *et* $a \equiv 0 \mod p$,
(iii) $p \geq 2$, $\sigma \equiv 0 \mod p$ *et* $a \not\equiv 0 \mod p$.

Pour confirmer l'intuition de cette classification, nous regardons les urnes de balance entre 11 et 15 qui vérifient l'une des trois conditions. Après étude des symétries, il reste 106 urnes équilibrées de balance entre 11 et 15. Pour toutes ces urnes, l'algorithme de GUESS'N'PROVE trouve un polynôme annulateur et prouve l'algébricité.

Nous montrons dans le Chapitre 4 que ces conditions sont suffisantes pour garantir l'algébricité. Le caractère nécessaire reste à ce stade une conjecture. La démarche de mathématiques expérimentales adoptée permet tout de même d'affiner cette conjecture : *s'il existe des urnes algébriques en dehors de la classification proposée, alors pour une balance inférieure à 20, le polynôme annulateur* $P(T,z)$ *possède un degré en* T *supérieur à 100 ou un degré en* z *supérieur à 100.*

En ce qui concerne les urnes devinées algébriques et non algébriques, nous serons en mesure d'énoncer une conjecture beaucoup plus précise à la fin de la section suivante (Section 3.5).

3.4.2 Urnes différentiellement finies

Le travail effectué peut être réutilisé pour rechercher le caractère holonome (ou D-fini) des séries génératrices. En effet, l'algorithme `seriestodiffeq` du package `gfun` devine, à partir d'une série génératrice tronquée, une équation différentielle à coefficients polynomiaux dont la série tronquée est solution. Le ressort en est la recherche de relation de dépendance linéaire, comme pour la procédure `seriestoalgeq`. L'algorithmique derrière est similaire. En termes d'approximants de Padé-Hermite, il s'agit de trouver un approximant du vecteur $(A, A', \ldots, A^{(r)})$ au lieu du vecteur $(1, A, A^2, \ldots, A^r)$ (Définition 14). L'expérimentation a permis de trouver des séries D-finies uniquement pour les cas algébriques. Dans le cas général des séries génératrices, l'holonomie est effectivement une conséquence de l'algébricité : toute série génératrice algébrique est aussi holonome. Dans le cas particulier des séries génératrices des histoires d'urnes, il est remarquable que la réciproque soit vraie.

Proposition 5. *Toute série génératrice holonome associée à une urne équilibrée de balance $\sigma > 0$ est algébrique.*

Démonstration. Soit $[a, b, c, d]$ une urne équilibrée de série génératrice H différentiellement finie. Il suffit d'étudier le cas initial $(a_0, b_0) = (0, 1)$. En effet, dans ce cas, la série génératrice est $Y(x, y, z)$. Si Y est algébrique, alors, il en est de même pour X et donc pour H. En effet, $X^p - Y^p = x^p - y^p$ et $H = X^{a_0} Y^{b_0}$, avec $p = c - a = b - d$.

Si Y est holonome, alors il existe r un entier positif et $r + 1$ polynômes $c_i(x, y, z)$ pour $0 \leq i \leq r$, avec $c_r \neq 0$ tels que

$$\sum_{i=0}^{r} c_i(x, y, z) \frac{\partial^{(i)}}{\partial z^i} Y(x, y, z) = 0 . \tag{3.6}$$

La fonction Y n'est pas nulle donc l'entier r est strictement positif. La suite de la preuve consiste à exprimer les dérivées successives de Y comme des polynômes en X et Y. Par récurrence, montrons que les dérivées i-ème de X et Y sont des polynômes en X et Y.

Pour $i = 0$, $\partial_z^{(0)} X = X$ et $\partial_z^{(0)} Y = Y$ sont bien des polynômes en X et Y. Pour $i \geq 0$, supposons que les dérivées i-ème de X et Y soient des polynômes en X et Y. Alors $\partial_z^{(i)} X = \sum_k \lambda_k X^{a_k} Y^{b_k}$ et $\partial_z^{(i)} Y = \sum_\ell \mu_\ell X^{c_\ell} Y^{d_\ell}$. La dérivation en z de ces deux expressions va faire apparaître des facteurs dérivés $\partial_z X$ et $\partial_z Y$. Or ces deux facteurs s'expriment comme des monômes en X et Y grâce au système différentiel ; $\partial_z X = X^{a+1} Y^b$ et $\partial_z Y = X^c Y^{d+1}$. En dérivant, puis en substituant ces quantités, nous en déduisons un polynôme en X et Y pour l'expression de la dérivée $(i + 1)$-ème de X et Y.

Revenons à l'équation différentielle (3.6) vérifiée par $Y(x, y, z)$. Chaque facteur $\partial_z^{(i)}$ est remplacé par un polynôme en X et Y. Ainsi, il existe un polynôme $P(x, y, z; T, U)$ tel que

$$P(x, y, z; X(x, y, z), Y(x, y, z)) = 0 .$$

Pour conclure, il reste à montrer que ce polynôme P n'est pas identiquement nul. Dans l'équation différentielle (3.6), le coefficient dominant $c_r(x, y, z)$ est un polynôme non nul et la dérivée $\partial_z^{(r)} Y$ fait apparaître le coefficient de plus haut degré dans le polynôme

annulateur. En effet, l'action de la dérivée ∂_z est identique à l'action de l'opérateur de récurrence $\mathscr{D}$ du théorème d'isomorphisme, équation (2.5). L'opération $\mathscr{D}^r[y]$, avec $r > 0$, s'exprime ainsi comme un polynôme non nul $\sum a_{i,j}x^i y^j$, avec $a_{i,j} \geq 0$ et $i+j = 1+(r-1)\sigma$. Ainsi, $i+j \geq 1$. Le polynôme $P(x,y,z;T,U)$ possède des coefficients en T^iU^j , avec $i+j = 1+(r-1)$, dont les facteurs $a_{i,j}$, entiers strictement positifs, proviennent tous de la dérivée $\partial_z^{(r)}Y$. Les dérivées d'ordre inférieur produisent des termes en T et U dont le degré homogène est strictement inférieur à $1+(r-1)$. Le polynôme $P(x,y,z;T,U)$ est donc non nul.

Par l'intégrale première $X^p - Y^p = x^p - y^p$, X s'exprime algébriquement par rapport à Y. Cela conclut l'algébricité de $Y(x,y,z)$. □

Série génératrice des histoires et holonomie. Dans le paysage des urnes équilibrées, différents comportements sont possibles.

Pour les urnes équilibrées de balance σ strictement négative, la série génératrice $H(x,y,z)$ est un polynôme. En effet, toutes les histoires sont de longueur finie.

Pour les urnes équilibrées de balance σ nulle, la série génératrice $H(x,y,z)$ est non algébrique, mais elle peut être holonome. En effet, la Proposition 5 n'est pas valable pour $\sigma = 0$. Partant d'une configuration initiale (a_0, b_0), avec $a_0 \cdot b_0 \neq 0$, nous avons $H(1,1,z) = \exp\big((a_0+b_0)z\big)$. Ainsi, la série univariée n'est pas algébrique, donc la série multivariée $H(x,y,z)$ non plus. En revanche, $H(1,1,z)$ est holonome et pour des urnes classiques ($[0,0,0,0]$, $[-1,1,1,-1]$, $[0,0,1,-1]$), les fonctions $X(x,y,z)$ et $Y(x,y,z)$ sont aussi holonomes.

Pour les urnes équilibrées de balance σ strictement positive, la série génératrice $H(x,y,z)$ est soit algébrique, soit non holonome. Il y a un saut de nature pour ces objets combinatoires.

3.5 Repousser les limites

Cette section propose une approche différente du GUESS'N'PROVE pour rechercher les urnes algébriques. Nous montrons en effet comment cette recherche se ramène à l'étude des solutions rationnelles d'une équation différentielle linéaire. Un nouvel algorithme de recherche s'en déduit, ce qui permet de repousser la borne sur la balance de l'urne. Nous traitons ainsi l'ensemble des urnes jusqu'à balance 100, et pour chacune, nous avons une preuve du caractère algébrique ou non de leur série génératrice.

La recherche automatique de séries génératrices algébriques n'a exploité jusqu'ici que les propriétés combinatoires des urnes de Pólya : l'opérateur $\mathscr{D}$ (équation (3.3), p.48), appliqué pour connaître les premiers coefficients de la série $H(x,y,z)$, est une simple traduction de la récurrence liées aux règles de remplacement. Nous n'avons pas utilisé les propriétés liées au système différentiel fondamental. Dans cette section, nous exploitons le système différentiel afin de trouver des conditions nécessaires et suffisantes d'algébricité. Ces conditions sont résumées dans les Propositions 6 et 7. Les sous-sections qui suivent sont consacrées aux preuves.

Une première proposition lie l'algébricité de la fonction $H(x,y,z)$ à l'algébricité de la primitive d'une fonction algébrique (Preuve faite en Section 3.5.2).

Proposition 6. *La fonction génératrice des histoires $H(x,y,z)$ de l'urne équilibrée $[a,b,c,d]$, avec $p = c - a = b - d$ et $p \neq 0$ est algébrique si et seulement si la primitive $\Omega(w)$ est une fonction algébrique,*

$$\Omega(w) = \int \frac{w}{1-w^4} \left(\frac{1-w^2}{1+w^2}\right)^{2a/p} \left(\frac{1-w^2}{w}\right)^{2b/p} dw\,. \tag{3.7}$$

Nous sommes ramenés à étudier l'algébricité de cette primitive. Les travaux de J. Liouville [Lio33b] [Lio33c] [Lio33a] traitent de ces primitives et de la question suivante :

> *"Étant donnée une fonction quelconque algébrique de x, explicite ou implicite, savoir y, trouver une méthode exacte qui permette de décider si elle a ou n'a pas pour intégrale une fonction explicite ou implicite algébrique, et qui conduise en outre à la valeur de $\int y\,dx$, toutes les fois que cette quantité est exprimable algébriquement."*
>
> (J. Liouville, 1833)

Dans [Lio33b] et [Lio33a], le cas précis où la fonction intégrande est une racine p-ième d'une fraction rationnelle est décrit. De là découle la proposition suivante (Preuve faite en Section 3.5.3).

Proposition 7 (Liouville)**.** *La primitive $\Omega(w) = \int F(w)^{1/p} dw$ est algébrique si et seulement si l'équation différentielle suivante admet une solution $G(w)$ rationnelle,*

$$G'(w) + \frac{F'(w)}{pF(w)} G(w) = 1 \tag{3.8}$$

De ces deux propositions, nous en déduisons le principe suivant : l'algébricité de l'urne équivaut à l'existence d'une solution rationnelle à l'équation (3.8), équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients polynomiaux. Nous décrivons alors un algorithme de recherche exhaustive pour les urnes équilibrées $[a,b,c,d]$, à coefficients strictement positifs, sous la condition $p \neq 0$. Nous nous limitons, comme dans toute notre étude, aux urnes à coefficients premiers entre eux et telles que $a \geq d$.

Ainsi, il est possible de tester toutes les urnes jusqu'à une balance de 100. Toutes les urnes algébriques obtenues tombent dans notre classification. Nous concluons ce chapitre par le fait suivant.

Fait 3. *La classification est complète pour toutes urnes équilibrées strictement positives algébriques de balance inférieure à 100 : celles qui vérifient l'une des conditions du Fait 2 sont algébriques ; les autres ne sont pas algébriques, donc pas holonomes.*

Une classification pour les urnes de balance plus grande que 100 est possible, sous réserve de faire tourner l'algorithme de Liouville plus longtemps. Ce fait nous conforte

```
for σ = 1...n do
    for a = 1...σ − 1 do
        for d = 1...a do
            b := σ − a
            c := σ − d
            p := c − a
            if pgcd(a, b, c, d) = 1 and p ≠ 0 then
                F := (1 − w^2)^(2(a+b)−p) / ((1 + w^2)^(2a+p) w^(2b−p))
                Eq := G'(w) + F'(w)/(pF(w)) G(w) − 1
                if ratsols(Eq, G(w)) then "L'urne [a, b, c, d] est algébrique"
                else "L'urne [a, b, c, d] n'est pas algébrique"
                end if
            end if
        end for
    end for
end for
```

TABLEAU 3.3 – Algorithme de Liouville : recherche des urnes algébriques pour une balance σ inférieure à n.

dans la conjecture suivante : *une urne équilibrée strictement additive est algébrique si et seulement si elle vérifie l'une des conditions du Fait 2.* Des travaux avec A. Bostan et P. Dumas sont en cours afin de prouver cette conjecture [BDM13b].

Le chapitre suivant démontre que toutes les urnes de la classification (sans borne sur la balance) sont effectivement algébriques.

Dans la sous-section 3.5.1, nous décrivons brièvement l'algorithme sous-jacent permettant de tester l'existence d'une solution rationnelle à une équation différentielle. Les sous-sections 3.5.2 et 3.5.3 sont consacrées aux preuves.

3.5.1 Solutions rationnelles d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux

Dans l'algorithme décrit ci-dessus, l'étape de calcul à chaque itération est `ratsols` et consiste à rechercher l'existence d'une solution rationnelle à l'équation (3.8), qui peut s'écrire comme une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux. Plusieurs algorithmes pour la recherche de solutions rationnelles existent, et la plupart reposent sur le calcul de solutions polynomiales. Ces algorithmes sont rapides, ce qui permet dans notre étude de pousser la recherche jusqu'à des balances de l'ordre de la centaine. Les articles [BCS05] [AK91] [Bar97] sont des références pour le calcul rapide de solutions polynomiales et rationnelles. Pour l'expression de la complexité, la notion de

polynôme indiciel permet de trouver une borne N sur les degrés des solutions polynomiales recherchées. Les algorithmes décrits sont alors quasi-optimaux selon cette borne $\tilde{O}(N)$.

Résultats de l'algorithme. Pour notre étude, l'algorithmique implémentée dans MAPLE a été suffisante, grâce aux outils `ratsols` et `polysols` du package `DEtools`. Ainsi, le traitement de toutes les urnes équilibrées strictement additives de balance inférieure à 100 a été effectué. Il s'agit tout de même de traiter, après étude des symétries, 137 260 urnes différentes. Parmi celles-ci, l'algorithme a trouvé 13 301 urnes algébriques et 123 959 urnes non algébriques. De plus, toutes les urnes algébriques vérifient le critère de classification conjecturé (Fait 2).

Ramené à l'ensemble des urnes équilibrées strictement additives de balance inférieure à 100, cela correspond à 328 350 cas ($= \sum_{i=1}^{100}(i-1)^2$). Parmi ceux-ci se trouvent 41 020 urnes algébriques et 287 330 urnes non algébriques.

Ces calculs, effectués sur la même machine que celle décrite en Annexe B , ont nécessité environ 15 heures.

3.5.2 Preuve de la Proposition 6

Une formule pour Ω. Soit $[a,b,c,d]$ une urne équilibrée avec $p \neq 0$. La série génératrice $H(x,y,z)$ s'exprime grâce aux fonctions $X(x,y,z)$ et $Y(x,y,z)$, qui vérifient l'intégrale première du système différentiel (2.10),

$$X(x,y,z)^p - Y(x,y,z)^p = \Delta^p = x^p - y^p\,.$$

Cette équation $(X/\Delta)^p - (Y/\Delta)^p = 1$ donne l'intuition du changement de variable hyperbolique,

$$X(t) = \Delta \cosh^{2/p}(U(t))\,, \qquad Y(t) = \Delta \sinh^{2/p}(U(t))\,. \tag{3.9}$$

Ainsi, l'intégrale première se récrit $\cosh(U(t))^2 - \sinh(U(t))^2 = 1$. Le système différentiel devient, après changement de variable,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{p}\Delta \cosh^{2/p-1}(U)\sinh(U)\dot{U} &= \Delta^{a+b+1}\cosh^{2(a+1)/p}(U)\sinh^{2b/p}(U)\,,\\
\frac{2}{p}\Delta \cosh(U)\sinh^{2/p-1}(U)\dot{U} &= \Delta^{c+d+1}\cosh^{2c/p}(U)\sinh^{2(d+1)/p}(U)\,.
\end{aligned}$$

Avec la condition d'équilibre, $\sigma = a+b = c+d$, le système devient une unique équation différentielle en U,

$$\dot{U} = \frac{p}{2}\Delta^{\sigma}\cosh^{2a/p+1}(U)\sinh^{2b/p-1}(U)\,, \tag{3.10}$$

avec la condition initiale $U(0) = u$ telle que $\cosh(u) = (x/\Delta)^{p/2}$ ou $\sinh(u) = (y/\Delta)^{p/2}$, les deux équations étant équivalentes.

De là, un nouveau changement de variable s'impose, $V = \tanh(U/2)$, qui se différencie en $\dot{V} = \dot{U}\,(1 - V^2)/2$. Nous obtenons alors les équations classiques,

$$\cosh(U) = \frac{1+V^2}{1-V^2}\,, \qquad \sinh(U) = \frac{2V}{1-V^2}\,. \tag{3.11}$$

L'équation différentielle (3.10) devient par ce changement de variable et quelques simplifications,

$$\dot{V} = \frac{p}{2^{3-2b/p}}\Delta^{\sigma}\frac{1-V^4}{V}\left(\frac{1+V^2}{1-V^2}\right)^{2a/p}\left(\frac{V}{1-V^2}\right)^{2b/p}\,, \tag{3.12}$$

avec la condition initiale $V(0) = v = \tanh(u/2)$. Cette équation différentielle s'intègre et fait intervenir la primitive Ω de la proposition,

$$\Omega(V(t)) - \Omega(v) = \int_v^{V(t)} \frac{w}{1-w^4}\left(\frac{1-w^2}{1+w^2}\right)^{2a/p}\left(\frac{1-w^2}{w}\right)^{2b/p} dw = \frac{p\Delta^{\sigma}}{2^{3-2b/p}}t\,, \tag{3.13}$$

et le lien entre v et les variables de départ x et y est donné par les relations suivantes,

$$\frac{1+v^2}{1-v^2} = \left(\frac{x}{\Delta}\right)^{p/2}, \qquad \frac{2v}{1-v^2} = \left(\frac{y}{\Delta}\right)^{p/2}.$$

La primitive $\Omega(w)$ est définie à une constante près, qui ne change pas son potentiel caractère algébrique. Nous choisissons cette constante telle que $\Omega(v) = \varepsilon$.

Algébricité de H et Ω. Supposons que H soit algébrique. Alors, il en est de même pour les fonctions X et Y (Principe 2). La relation (3.9) donne l'algébricité de $\cosh(U)$ et $\sinh(U)$, puis (3.11) donne l'algébricité de V. Par (3.13), nous pouvons écrire $V(t) = \Omega^{-1}(\varepsilon + kt)$, avec k dépendant uniquement de Δ, supposé non nul. Ainsi la relation $\Omega^{-1}(s) = V((s-\varepsilon)/k)$ permet de conclure à l'algébricité de Ω^{-1}, et donc de Ω : la réciproque d'une fonction algébrique est algébrique.

Réciproquement, si Ω est algébrique, alors il en est de même pour Ω^{-1}, pour V, puis pour X, Y, et finalement H. □

3.5.3 Esquisse de la preuve de la Proposition 7

Si $\Omega(w) = \int F(w)^{1/p}dw$ admet une expression algébrique, J. Liouville [Lio33b] démontre que son expression est nécessairement de la forme

$$\int F(w)^{1/p}dw = G(w)F(w)^{1/p} + C_1\,, \tag{3.14}$$

avec C_1 une constante d'intégration. En dérivant cette expression, nous obtenons l'équation différentielle suivante,

$$F(w)^{1/p} = G'(w)F(w)^{1/p} + \frac{1}{p}F(w)^{1/p-1}F'(w)G(w)\,, \tag{3.15}$$

d'où l'équation (3.8) en divisant par $F(w)^{1/p}$, quantité non nulle. Liouville démontre ensuite que la solution de cette équation est nécessairement rationnelle, en révélant la nécessité d'une solution polynomiale pour une autre équation différentielle.

Réciproquement, si l'équation (3.8) admet une solution rationnelle $G(w)$, alors en multipliant l'équation par $F(w)^{1/p}$, nous obtenons l'expression (3.15), qui en s'intégrant donne (3.14). La solution $G(w)$ étant rationnelle, l'expression de l'intégrale est bien algébrique.

Dans notre cas, la primitive $\Omega(w)$ est l'intégrale d'une puissance $1/p$-ième d'une fonction rationnelle,

$$F(w) = \frac{(1-w^2)^{2(a+b)-p}}{(1+w^2)^{2a+p} w^{2b-p}} .$$

La dérivée logarithmique de $F(w)$ permet d'écrire

$$\frac{F'(w)}{pF(w)} = \frac{1}{w(1-w^4)} \left[\left(3 - \frac{2b}{p}\right) w^4 - 4\frac{2a+b}{p} w^2 + 1 - \frac{2b}{p} \right] .$$

Nous pouvons alors exprimer l'équation différentielle avec des coefficients polynomiaux,

$$w(1-w^4)G'(w) + \left(\left(3 - \frac{2b}{p}\right) w^4 - 4\frac{2a+b}{p} w^2 + 1 - \frac{2b}{p} \right) G(w) = w(1-w^4) .$$

De là, il suffit de rechercher les solutions rationnelles de cette équation (Sous-section 3.5.1).

Chapitre 4

Preuves d'algébricité

Dans ce chapitre, nous reprenons les familles obtenues expérimentalement dans le chapitre précédent, et démontrons l'algébricité de différentes classes d'urnes directement, sans borne sur la balance. Nous précisons le degré ainsi que la forme des polynômes annulateurs pour les séries génératrices des histoires. Ces propriétés sur les polynômes annulateurs sont ensuite exploitées dans les Chapitres 5 et 6 qui traitent de l'analyse asymptotique de ces urnes algébriques. Ce chapitre est donc consacré à la preuve du Théorème 9, pressenti au chapitre précédent.

Théorème 9. *Soit $[a, b, c, d]$ une urne équilibrée strictement additive ($a, b, c, d > 0$). Si les coefficients vérifient l'une des trois conditions arithmétiques suivantes, la série génératrice des histoires $H(x, y, z)$ est algébrique,*

(i) $p = 0$,

(ii) $p < 0$ *et* $a \equiv 0 \mod p$,

(iii) $p \geq 2$, $\sigma \equiv 0 \mod p$ *et* $a \not\equiv 0 \mod p$,

avec les notations usuelles $\sigma = a + b = c + d$ *et* $p = c - a = b - d$.

Nous en tirons immédiatement l'énoncé suivant.

Corollaire 1. *Soit $[a, b, c, d]$ une urne équilibrée strictement additive. Si ses coefficients vérifient l'une des deux conditions suivantes, sa fonction génératrice des histoires est algébrique,*

(ii bis*)* $p < 0$ *et* $d \equiv 0 \mod p$,

(iii bis*)* $p \geq 2$, $\sigma \equiv 0 \mod p$ *et* $d \not\equiv 0 \mod p$.

Démonstration. Application directe de la symétrie donnée par le Principe 3. □

La distinction des cas se fait ici suivant le signe de p, l'indice de dissimilarité. Par la suite, nous notons $r = |p|$. Ces trois cas se représentent de manière paramétrique

comme suit,

(i)	$p=0$	$\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$	avec $a,b \geq 1$;
(ii)	$p<0$ et $a \equiv 0\,[p]$	$\begin{pmatrix} (k+1)r & b \\ kr & b+r \end{pmatrix}$	avec $r,k,b \geq 1$;
(iii)	$p \geq 2$ et $\sigma \equiv 0\,[p]$, $a \not\equiv 0\,[p]$	$\begin{pmatrix} a & kp-a \\ a+p & (k-1)p-a \end{pmatrix}$	avec $a \geq 1$, $p \not| a$, $p,k \geq 2$ et $(k-1)p > a$.

Les trois sections ci-après constituent la preuve des trois cas (i), (ii) et (iii) du théorème.

4.1 Le cas trivial $p=0$

Proposition 8. *Les urnes $[a,b,a,b]$ avec $a,b \geq 0$ tels que $a+b>0$ sont algébriques.*

Démonstration. Soit l'urne $[a,b,a,b]$ avec $a,b \geq 0$ tels que $\sigma = a+b > 0$. Le système différentiel associé (2.4) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{X} &= X^{a+1}\,Y^{b}\,, \\ \dot{Y} &= X^{a}\,Y^{b+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous déduisons l'identité $X^aY^b = X^{-1}\dot{X} = Y^{-1}\dot{Y}$, qui s'intègre en $\ln(X) = \ln(Y) + k_0$, ce qui se récrit grâce aux conditions initiales $X(0)=x$ et $Y(0)=y$, en $X = xy^{-1}Y$. Cela permet d'éliminer la variable X, et ainsi Y vérifie l'équation $\dot{Y} = x^a y^{-a} Y^{a+b+1}$. Cette équation s'intègre et nous obtenons une expression close pour Y,

$$Y(x,y,z) = y\left(1-\sigma x^a y^b z\right)^{-1/\sigma}\,.$$

De cela découle la série trivariée $H = X^{a_0}\,Y^{b_0}$,

$$H(x,y,z) = \frac{x^{a_0}y^{b_0}}{\left(1-\sigma x^a y^b z\right)^{s_0/\sigma}}\,.$$

Nous déduisons ainsi que la fonction génératrice $H(x,y,z)$ est algébrique et admet un polynôme annulateur P de degré σ en T :

$$P(T,x,y,z) = (1-\sigma x^a y^b z)^{s_0}\,T^{\sigma} - x^{\sigma a_0} y^{\sigma b_0}\,.$$

□

Rationalité et degré. Dans le cas particulier où σ divise s_0, la fonction $H(x,y,z)$ est rationnelle. Dans le cas général, le polynôme minimal de H est de degré $\sigma/\mathrm{pgcd}(s_0,\sigma)$.

Asymptotique. Pour cette série génératrice, nous pouvons extraire immédiatement les coefficients exacts :

$$\begin{aligned}
[z^n]H(x,y,z) &= [z^n]\frac{x^{a_0}y^{b_0}}{\left(1-\sigma x^a y^b z\right)^{s_0/\sigma}} &&= x^{a_0+an}y^{b_0+bn}[z^n]\frac{1}{(1-\sigma z)^{s_0/\sigma}} \\
&= x^{a_0+an}y^{b_0+bn}[z^n]H(1,1,z) &&= \frac{\sigma^n}{n!}\frac{\Gamma(n+s_0/\sigma)}{\Gamma(s_0/\sigma)}x^{a_0+an}y^{b_0+bn}.
\end{aligned}$$

Cette classe d'urne est en effet triviale. Après n tirages, la configuration est entièrement déterminée, $(A_n, B_n) = (a_0 + an, b_0 + bn)$, où A_n (resp. B_n) est le nombre de boules noires (resp. blanches) après n tirages.

4.2 Les urnes à croissance préférentielle : cas (ii)

Proposition 9. *Les urnes équilibrées $[a,b,c,d]$ avec $a,b>0$ telles que $p<0$ et $a\equiv 0\,[p]$ sont algébriques.*

Soit $[a,b,c,d]$ une urne vérifiant $p = c-a = b-d < 0$ et $a \equiv 0[p]$. Nous paramétrons cette urne par $a = (k+1)r$, $b = b$, $c = kr$, $d = b+r$, avec $r,k,b \geq 1$. Alors, la balance vaut $\sigma = (k+1)r + b$, et l'indice de dissimilarité vaut $p = -r$, strictement négatif. Ce type d'urne peut modéliser l'évolution d'une population avec deux types d'individus, où chaque individu a tendance à favoriser la croissance de sa propre espèce. En effet, le tirage d'une boule dans l'urne favorise sa couleur. Si une boule noire (resp. blanche) est tirée, nous ajoutons r boules noires (resp. blanches) de plus que si une boule blanche (resp. noire) avait été tirée. Dans toute la suite, nous appellerons cette classe *classe des urnes à croissance préférentielle*, que nous noterons $\mathscr{CP}$.

Nous nous plaçons dans le cas $(a_0, b_0) = (0,1)$, afin de prouver l'algébricité de la fonction $Y(x,y,z)$ (d'après le Principe 2, p.46).

Proposition 10. *La fonction $Y(x,y,z)$ annule le polynôme P en T :*

$$P(T,x,y,z) = \left[z - K(x,y)\right]T^{r(k+1)+b} + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{(x^{-r}-y^{-r})^i}{r(k+1-i)+b}\,T^{ir},$$

où

$$K(x,y) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{(x^{-r}-y^{-r})^i}{r(k+1-i)+b}\,y^{-(r(k+1-i)+b)}.$$

Démonstration. Partons du système différentiel usuel (2.4) où la différentiation se fait par rapport à la variable z,

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= X^{kr+r+1}\,Y^b, \\
\dot{Y} &= X^{kr}\,Y^{b+r+1}.
\end{aligned}$$

L'expression de l'intégrale première (2.10), $X^{-r} - Y^{-r} = x^{-r} - y^{-r}$, permet de remplacer la variable X. Cette égalité s'écrit sous la forme $X^{kr} = Y^{kr}\left(1 + Y^r(x^{-r} - y^{-r})\right)^{-k}$. En substituant X^{kr} dans la seconde équation du système différentiel, nous obtenons l'équation différentielle univariée en Y,

$$\dot{Y} Y^{-b-r-1-rk}\left(1 + Y^r(x^{-r} - y^{-r})\right)^k = 1\,.$$

Le terme à la puissance k se développe par le binôme de Newton,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x^{-r} - y^{-r})^i\, Y^{r(i-k-1)-b-1}\, \dot{Y} = 1\,.$$

L'intégration terme-à-terme ne fait pas apparaître de logarithme. En effet, pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, nous avons l'inégalité $r(i-k-1) - b - 1 \leq -2$, qui découle des inégalités $b, r, k \geq 1$. Ainsi, nous obtenons l'équation polynomiale en Y,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x^{-r} - y^{-r})^i \frac{Y^{-(r(k+1-i)+b)}}{-(r(k+1-i)+b)} = z - K(x,y)\,,$$

où le terme $K(x,y)$ désigne la constante d'intégration par rapport à z. En multipliant l'équation par $Y^{r(k+1)+b}$, nous obtenons l'équation algébrique :

$$\left(z - K(x,y)\right) Y^{r(k+1)+b} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(x^{-r} - y^{-r})^i}{r(k+1-i)+b}\, Y^{ir} = 0\,, \tag{4.1}$$

avec

$$K(x,y) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(x^{-r} - y^{-r})^i}{r(k+1-i)+b}\, y^{-(r(k+1-i)+b)}\,. \tag{4.2}$$

□

Algébricité et degrés. Le degré en T du polynôme annulateur $P(T,x,y,z)$ est égal à $\sigma = r(k+1) + b$. De plus, le polynôme $P(T,x,y,z)$ est un polynôme en T avec ses coefficients dans le corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(x,y)$. Plus précisément, les coefficients de P font intervenir uniquement des polynômes en x^{-1} et y^{-1}. Il est aisé d'exhiber un polynôme annulateur à coefficients polynomiaux en x et y. Il suffit pour cela de multiplier le polynôme P par $x^{kr} y^{(k+1)r+b}$. Ainsi, $x^{kr} y^{(k+1)r+b} P(T,x,y,z)$ est un polynôme de $\mathbb{Q}[x,y,z][T]$, son degré en T est σ, son degré en z est 1, son degré en x est kr et son degré en y est σ [1].

1. Comme le prévoyaient les tests du GUESS'N'PROVE en Section 3.4.1.

Des racines sud-américaines. En posant $k = 1$ et $r = a$, nous obtenons la classe d'urnes $[2a, b, a, a+b]$. Cette classe est apparue naturellement durant mon stage de Master : la série génératrice possède la propriété d'algébricité. Elle a fait l'objet d'une étude asymptotique complète et les résultats sont publiés dans l'article *Fully Analyzing an Algebraic Pólya Urn Model*, suite à la conférence LATIN 2012 [Mor12]. Ces résultats sont repris et étendus dans le Chapitre 5 qui traite de l'analyse asymptotique de l'ensemble de la classe (ii) des urnes à croissance préférentielle.

4.3 Les urnes à croissance adverse : cas (iii)

Proposition 11. *Les urnes équilibrées $[a, b, c, d]$ avec $a, b, c, d > 0$ sous les conditions $p \geq 2$, $\sigma \equiv 0\,[p]$ et $a \not\equiv 0\,[p]$ sont algébriques.*

Soit $[a, b, c, d]$ une telle urne. Nous la paramétrons par $a = a$, $b = kp - a$, $c = a + p$ et $d = (k-1)p - a$, avec $a \geq 1$, $k, p \geq 2$, a non multiple de p, et $(k-1)p > a$.

Dans le cas présent, la balance est $\sigma = pk$ et l'indice de dissimilarité est $p \geq 2$. Ici, l'indice p est positif. Ce type d'urne modélise l'évolution de populations à deux types d'individus, qui ont tendance à avantager le type adverse lors de leur évolution. En effet, le tirage d'une boule favorise l'autre couleur. Si l'on tire une boule noire (resp. blanche), nous ajoutons alors p boules blanches (resp. noires) de plus que si une boule blanche (resp. noire) avait été tirée. Nous appellerons cette classe *classe des urnes à croissance adverse*, et nous la noterons $\mathscr{CA}$. De façon analogue au cas précédent, nous nous plaçons dans la configuration initiale $(a_0, b_0) = (0, 1)$, et nous démontrons l'algébricité de la fonction $Y(x, y, z)$.

Proposition 12. *Il existe un polynôme $Q(Y)$ de degré $(k-1)p$ et une fonction $K(x, y)$ indépendante de z tels que $Y(x, y, z)$ vérifie l'équation fonctionnelle suivante,*

$$\frac{Q(Y)}{(Y^p + C)^{a/p}\, Y^{(k-1)p-a}\, C^k} = z - K(x, y),$$

avec $C = x^p - y^p$. L'expression explicite du polynôme $Q(Y)$ et de la constante d'intégration $K(x, y)$ est donnée par

$$Q(Y) = C^k \sum_{s=0}^{k-1} q_s\, C^{-(s+1)}\, Y^{ps}, \tag{4.3}$$

avec

$$q_{s+1} = \frac{(-1)^s}{p(k-1-a/p)} \prod_{j=0}^{s} \frac{k-1-j}{k-2-j-a/p} \quad \textit{pour } s = 0, \ldots, k-2, \tag{4.4}$$

$$q_0 = \frac{-1}{p(k-1-a/p)},$$

et

$$K(x, y) = \frac{-Q(y)}{x^a y^{(k-1)p-a}(x^p - y^p)^k} = -\sum_{s=0}^{k-1} q_s (x^p - y^p)^{-1-s} x^{-a} y^{a-(k-s-1)p}. \tag{4.5}$$

Démonstration. Pour l'urne paramétrée $[a, kp-a, a+p, (k-1)p-a]$, avec $a \geq 1$, $p, k \geq 2$ et $(k-1)p > a$, notre système différentiel favori s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{X} &= X^{a+1}\, Y^{kp-a}\,, \\ \dot{Y} &= X^{a+p}\, Y^{(k-1)p-a+1}\,. \end{aligned}$$

L'intégrale première s'écrit $X^p - Y^p = x^p - y^p$, et nous notons $C = x^p - y^p$. Ainsi, $X^p = Y^p + C$. En substituant X dans la seconde équation du système, nous obtenons

$$\dot{Y} = X^{a+p}\, Y^{(k-1)p-a+1} = (X^p)^{1+a/p}\, Y^{(k-1)p-a+1} = (Y^p + C)^{1+a/p}\, Y^{(k-1)p-a+1}\,. \tag{4.6}$$

Équation et condition $p \nmid a$. Sur cette équation différentielle en Y, nous observons qu'il est nécessaire d'imposer $a \not\equiv 0\,[p]$. En effet, dans le cas contraire, nous aurions une équation du type $\dot{Y} = Y^u (Y^p + C)^v$, où u et v sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Après décomposition en éléments simples, l'intégration de cette équation différentielle fournit des termes à la fois logarithmiques et fractionnaires dans l'équation fonctionnelle vérifiée par Y, d'où la non-algébricité. Cela impose à a de ne pas être un multiple de p.

Revenons à l'équation différentielle (4.6) et montrons que son intégration donne le résultat énoncé dans la proposition. Pour cela, nous procédons par conditions nécessaires sur le polynôme Q. Supposons qu'il existe un polynôme $Q(Y)$ de degré δ qui vérifie

$$\frac{Q(Y)}{(Y^p + C)^{a/p}\, Y^{(k-1)p-a}\, C^k} = z - K(x, y)\,.$$

En différenciant par rapport à z cette égalité, puis en utilisant l'expression de $\dot{Y}$ donnée par (4.6), nous déduisons que le polynôme $Q(Y(z))$ doit vérifier l'équation différentielle suivante

$$Y(Y^p + C)Q'(Y) - \left[aY^p + ((k-1)p - a)(Y^p + C)\right] Q(Y) = C^k\,. \tag{4.7}$$

Soit δ le degré du polynôme $Q(Y)$. Alors, dans l'équation (4.7), le terme de plus haut degré dans le membre gauche est le terme en $Y^{\delta+p}$. Ce terme est nécessairement nul pour satisfaire l'équation. Le coefficient dominant donne la condition nécessaire $\delta - a - ((k-1)p - a) = 0$, soit $\delta = (k-1)p$. De plus, l'équation (4.7) fait intervenir des termes en $YQ'(Y)$, $Y^p YQ'(Y)$, $Q(Y)$ et $Y^p Q(Y)$. Cela traduit une récurrence de p en p sur les coefficients de Q.

Nous cherchons donc un polynôme $Q(Y)$ sous la forme

$$Q(Y) = C^k \sum_{s=0}^{k-1} q_s\, C^{-(s+1)}\, Y^{ps}\,,$$

qui vérifie l'équation différentielle (4.7). Nous cherchons à identifier les coefficients $(q_s)_{s=0,\ldots,(k-1)}$. La dérivée de Q s'écrit alors

$$Q'(Y) = C^k \sum_{s=1}^{k-1} p\, s\, q_s\, C^{-(s+1)}\, Y^{ps-1}\,.$$

L'équation (4.7) devient donc

$$(Y^p + C)C^k \sum_{s=1}^{k-1} psq_s C^{-(s+1)} Y^{ps}$$
$$+ C^k \sum_{s=0}^{k-1} (-a)\, q_s C^{-(s+1)} Y^{p(s+1)}$$
$$+ (Y^p + C)C^k \sum_{s=0}^{k-1} (a-(k-1)p)\, q_s C^{-(s+1)} Y^{ps} = C^k\,. \quad (4.8)$$

- Dans la première somme se trouvent les termes $Y^{p(s+1)}$ et Y^{ps} pour $s = 1, \ldots, k-1$.
- Dans la deuxième somme se trouvent les termes $Y^{p(s+1)}$ pour $s = 0, \ldots, k-1$.
- Dans la dernière se trouvent les termes $Y^{p(s+1)}$ et Y^{ps} pour $s = 0, \ldots, k-1$.

Nous procédons par identification des coefficients. Ici, pour tout s dans $\{1, \ldots, k\}$, le coefficient de Y^{ps} doit être nul, ce qui se traduit par des relations de récurrence sur les coefficients q_s. Le terme constant (devant Y^0) doit être égal à 1, après simplification par C^k, présent dans tous les termes.
Le coefficient de Y^0 donne comme relation $(a-(k-1)p)q_0 C^{-1+1} = 1$, d'où

$$q_0 = \frac{-1}{(k-1)p - a}\,.$$

Le coefficient Y^p donne la relation $C^{-1}pq_1 - aq_0C^{-1} + (a-(k-1)p)(q_0+q_1)C^{-1} + 0$ qui se récrit en $(a-(k-2)p)q_1 = (k-1)pq_0$, d'où

$$q_1 = \frac{-(k-1)}{k-2-a/p} q_0\,.$$

Le coefficient $Y^{p(s+1)}$ donne la relation

$$p(s+1)q_{s+1} + psq_s - aq_s + (a-(k-1)p)(q_s + q_{s+1}) = 0\,,$$

c'est-à-dire $(a-(k-s-2)p)q_{s+1} + (s-k+1)pq_s = 0$, d'où

$$q_{s+1} = \frac{-(k-1-s)}{k-2-s-a/p}\, q_s \quad \text{pour } s = 1, \ldots, k-2\,.$$

Cette expression est également valable pour $s = 0$. Enfin, le coefficient de Y^{pk} donne la relation

$$p(k-1)q_{k-1} - aq_{k-1} + (a-(k-1)p)q_{k-1} = 0\,,$$

ce qui se réduit à $0 = 0$.

Nous avons k inconnues $(q_s)_{s=0,\ldots,k-1}$, et l'équation (4.7) fournit $k+1$ équations dont une triviale. Ces équations forment un système triangulaire qui traduit une récurrence bien fondée. Alors, le polynôme Q existe et vaut nécessairement

$$Q(Y) = C^k \sum_{s=0}^{k-1} q_s Y^{ps} C^{-(s+1)}\,,$$

avec l'expression exacte des coefficients :

$$q_{s+1} = \frac{(-1)^s}{p(k-1-a/p)} \prod_{j=0}^{s} \frac{k-1-j}{k-2-j-a/p} \quad \text{pour } s = 0, \dots, k-2,$$

$$q_0 = \frac{-1}{p(k-1-a/p)}.$$

Expression de la constante d'intégration $K(x,y)$. À partir de l'équation intégrée de la Proposition 12, la constante d'intégration $K(x,y)$ s'obtient en spécifiant $z = 0$. Comme $X(x,y,0) = x$, $Y(x,y,0) = y$ et $C = x^p - y^p$, la constante s'exprime directement,

$$K(x,y) = \frac{-Q(y)}{x^a y^{(k-1)p-a}(x^p - y^p)^k} = -\sum_{s=0}^{k-1} q_s (x^p - y^p)^{-1-s} x^{-a} y^{a-(k-s-1)p}.$$

□

Une autre expression du polynôme Q. Le polynôme $Q(Y)$ recherché s'exprime par (4.7) comme la solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients polynomiaux. La résolution de l'équation homogène associée donne

$$Q(Y) = \lambda (Y^p + C)^{a/p}\, Y^{(k-1)p-a},$$

où λ est une constante. Puis, la méthode de variation de la constante $\lambda(Y)$ permet d'écrire la solution Q de l'équation (4.7),

$$Q(Y) = C^k (Y^p + C)^{a/p}\, Y^{(k-1)p-a} \int^{Y} \frac{dw}{w^{(k-1)p-a+1}\,(w^p + C)^{a/p+1}}.$$

L'expression explicite de Q de la Proposition 12 donne ainsi l'expression exacte d'une primitive de la fonction

$$f(w) = \frac{w^{(1-k)p+a-1}}{(w^p+1)^{a/p+1}}, \quad \text{avec} \quad a \geq 1, p, k \geq 2,\ a \not| p \ \text{ et } (k-1)p > a.$$

La Proposition 12 donne une équation fonctionnelle algébrique pour la série génératrice $Y(x,y,z)$, ce qui prouve la Proposition 11. Nous pouvons cependant expliciter le polynôme annulateur de $Y(x,y,z)$.

Corollaire 2. *La série génératrice $Y(x,y,z)$ vérifie une équation fonctionnelle algébrique,*

$$(Y^p + C)^{a/p}\,(z - K(x,y)) = \sum_{s=0}^{k-1} q_s\, C^{-(s+1)}\, Y^{p(s-k+1)+a}. \tag{4.9}$$

où $C = x^p - y^p$ et les coefficients q_s sont donnés par la formule (4.4).

Démonstration. Cela découle directement de la Proposition 12. □

Pour obtenir une expression d'un polynôme annulateur de Y, nous reprenons l'équation fonctionnelle (4.9). Celle-ci comporte des termes en Y à une puissance négative. L'exposant négatif le plus petit provient de la somme, pour $s = 0$. Nous trouvons $Y^{a-(k-1)p}$. Cet exposant est l'opposé du quatrième coefficient de la matrice de l'urne $(-d)$, donc bien négatif. Multiplions (4.9) par $Y^{(k-1)p-a}$. Ainsi tous les termes de l'équation ont des puissances positives ou nulles en Y. Cependant, certaines puissances ne sont pas entières, du fait de la puissance $1/p$ pour $Y^p + C$. Il suffit d'élever chaque membre de l'équation à la puissance p pour faire disparaître les exposants fractionnaires. Ce faisant, le terme de plus haut degré dans le membre de gauche de l'équation est $\left((Y^p)^{a/p} Y^{(k-1)p-a}\right)^p$, soit un exposant égal à

$$ap + p^2(k-1) - ap = p^2(k-1),$$

et son coefficient est $(z - K(x,y))^p$. Dans le membre droit, le terme de plus haut degré est pour $s = k-1$, soit $\left(Y^{p(k-1)}\right)^p$. L'exposant dominant est donc aussi égal à $p^2(k-1)$, et son coefficient est $\left(q_{k-1}C^k\right)^p$. Nous avons ainsi trouvé un polynôme annulateur pour la fonction $Y(x,y,z)$. Son degré maximal en Y est $p^2(k-1)$, soit égal à $p(\sigma - p)$, car $\sigma = pk$.[2] Son degré en z est p. Pour avoir une expression avec des polynômes aussi en x et y, il suffit de multiplier le tout par C^{pk}.

4.4 Les urnes algébriques non strictement additives

Nous cherchons à étendre notre démarche à l'ensemble des urnes équilibrées. Lorsque b ou c sont négatifs, nous ne sommes pas en présence d'urnes classiques et de nombreux problèmes de tenabilité interviennent. Nous autorisons uniquement des coefficients négatifs sur la diagonale de la matrice de remplacement.

Prenons une urne $[a,b,c,d]$ sans zéros avec au moins un coefficient diagonal négatif. Comme les coefficients anti-diagonaux sont positifs, l'indice $p = c - a = b - d$ est nécessairement positif et même supérieur ou égal à 2.

Urnes purement sacrificielles. Considérons une urne $[a,b,c,d]$, avec a et d strictement négatifs, b et c strictement positifs, avec une balance strictement positive. Ces urnes, traitées dans [FDP06], sont dites purement sacrificielles.

A quelles conditions une telle urne est algébrique ? Nous avons effectué des tests en utilisant l'algorithme de Liouville. Pour les balances de 1 à 30, aucune urne algébrique n'apparait.

La conjecture est la suivante : *les urnes purement sacrificielles ne sont pas algébriques.*

2. Comme constaté dans l'exploitation des résultats de la recherche GUESS'N'PROVE en Section 3.4.1.

Urnes semi-sacrificielles. Considérons une urne $[a, b, c, d]$, avec cette fois a strictement négatif, et b, c, d strictement positifs, avec une balance strictement positive. Ces urnes sont également traitées dans [FDP06], et sont dites semi-sacrificielles. En faisant tourner notre algorithme pour de telles urnes avec une balance entre 1 et 30, il apparaît que certaines urnes sont effectivement algébriques. Toutes les urnes devinées sont issues de la classe (iii) étendue des urnes à croissance adverse. En effet, toutes les urnes $[a, b, c, d]$ trouvées par l'algorithme sont telles que $p \geq 2$, p divise la balance σ, et p ne divise pas a.

Comme l'urne est sacrificielle, $p \geq 2$, et nous trouvons que p divise σ. Ainsi, nous avons la contrainte suivante, $2 \leq p \leq \sigma$. De plus, les conditions $a < 0$ et $c > 0$ impliquent de choisir a dans l'ensemble $\{-\sigma+1, \ldots, -1\}$, et nous avons $1 + a/p > 0$.

Fait 4. *Les seules urnes sacrificielles devinées algébriques, tenables et dont les coefficients sont premiers entre eux, sont de la forme*

$$\begin{pmatrix} -1 & \sigma+1 \\ p-1 & \sigma-p+1 \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

avec $\sigma \geq 1$, $p \geq 2$, et p diviseur de σ.

Démonstration. Soit une urne $[a, b, c, d]$ devinée algébrique par l'algorithme. Alors les conditions sont $a < 0$ et $b, c, d > 0$, ainsi que $p \geq 2$, p divise σ et p ne divise pas a. Supposons que le coefficient a soit différent de -1. Alors, le coefficient a doit diviser c pour que l'urne soit tenable. Mais dans ce cas, a divise aussi $p = c - a$. Comme p divise $\sigma = a + b = c + d$, a divise aussi σ, et donc b et d. Le pgcd est donc supérieur à $|a| > 1$. L'urne n'est donc pas minimale, i.e. ses coefficients ne sont pas premiers entre eux. Conclusion, $a = -1$ est le seul cas à étudier. □

État de l'art. Dans [FDP06] où les urnes (semi-)sacrificielles sont étudiées, il est mentionné que deux familles sont algébriques : la famille des urnes $[-1, \sigma+1, \sigma-1, 1]$ pour tout $\sigma > 1$, et la famille des urnes $[-1, \sigma+1, 1, \sigma-1]$ pour tout $\sigma > 1$ et σ pair. Ces deux familles se retrouvent grâce à notre caractérisation (4.10), en prenant $p = \sigma$ et $p = 2$.

De nouvelles urnes algébriques. Cependant, de nouvelles urnes apparaissent être algébriques, lorsque la balance σ admet des diviseurs autres que 2 et σ. Les premiers nouveaux exemples sont $[-1, 7, 2, 4]$, $[-1, 9, 3, 5]$, $[-1, 10, 2, 7]$, $[-1, 11, 4, 6]$. Nous pouvons énoncer le résultat combinatoire suivant.

Fait 5. *Le nombre d'urnes équilibrées algébriques sacrificielles et tenables, à coefficients premiers entre eux de balance σ, vaut $\delta(\sigma) - 1$, où $\delta(\sigma)$ compte le nombre de diviseurs de σ. Elles sont données par (4.10).*

Par symétrie, les urnes $[\sigma - p + 1, p - 1, \sigma + 1, -1]$, avec $\sigma > 1$ et $p \geq 2$, p diviseur de σ sont elles-aussi algébriques.

Preuve à la main. Réciproquement, nous pouvons montrer que la classe étendue des urnes à croissance adverse est bien algébrique.

Proposition 13. *Si l'urne $[a,b,c,d]$, avec $a<0$ et $b,c,d>0$, vérifie $p\geq 2$, p divise σ et p ne divise pas a ; alors cette urne admet une série génératrice algébrique.*

Esquisse de la démonstration. La preuve faite est identique à celle de la Proposition 11. En effet, nous n'avons pas besoin d'imposer la condition $a>0$. Nous posons $a<0$, et la condition $1+a/p>0$ tient toujours. Le même raisonnement et les mêmes équations sont valables, ce qui mène à un polynôme annulateur pour la série génératrice.

Dans la preuve, la condition $k\geq 2$ est imposée, avec la notation $\sigma=kp$. Ici, nous devons aussi traiter $k=1$, c'est-à-dire le cas $\sigma=p$. La preuve fonctionne à l'identique. Simplement, le polynôme $Q(Y)$ trouvé est de degré 0 et vaut $1/a$.

Pour une urne $[a,p-a,p+a,-a]$ avec $a<0$ et $p\geq 2$ tel que p ne divise pas a, nous obtenons l'équation algébrique suivante pour la série génératrice $Y(x,z)$,

$$Y(x,z)^{-a}\left(\frac{x^{-a}}{y^{-a}}+a(x^p-y^p)z\right)=\left(Y(x,z)^p+x^p-y^p\right)^{-a/p}.$$

□

Conclusion - Récapitulatif

Soit $\mathscr{U}$ une urne de Pólya équilibrée, de configuration initiale (a_0,b_0), tenable,

$$\mathscr{U}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},\qquad a,d\in\mathbb{Z},\quad b,c\in\mathbb{N},\qquad \begin{array}{lll}\sigma & =a+b & =c+d,\\ p & =c-a & =b-d.\end{array}$$

L'urne $\mathscr{U}$ est dite *négative* si l'un des coefficients diagonaux est strictement négatif ($a<0$ et/ou $d<0$). Nous noterons par "$-$" le ou les coefficients négatifs et par "$+$" les autres coefficients. L'urne $\mathscr{U}$ est dite *avec zéros* si l'un de ses coefficients est nul. Dans ce cas, nous noterons par "$\star$" les coefficients non nuls. L'urne $\mathscr{U}$ est *strictement additive* si tous ses coefficients sont strictement positifs.

Le Tableau 4.1 suivant récapitule les résultats d'algébricité de toute la Partie II.

Nous définissons les trois conditions suivantes :
(i) $p=0$,
(ii) $p<0$ et $\big(a\equiv 0 \mod p$ ou $d\equiv 0 \mod p\big)$,
(iii) $p\geq 2$, $\sigma\equiv 0 \mod p$ et $\big(a\not\equiv 0 \mod p$ ou $d\not\equiv 0 \mod p\big)$.

Mis à part l'urne triviale $[0,0,0,0]$, toutes les urnes avec zéros du Tableau 3.1 s'incluent dans cette classification : si $\mathscr{U}$ est une urne avec zéros non triviale, elle est algébrique si et seulement si elle vérifie l'une des trois conditions $(i),(ii),(iii)$.

		Nature de $H(x,y,z)$
$\sigma < 0$		polynôme
$\sigma = 0$		non algébrique
$\sigma > 0$	**Urnes négatives** a ou $d < 0$	
	$\begin{pmatrix} - & + \\ + & - \end{pmatrix}$	non holonome **?**
	$\begin{pmatrix} - & + \\ + & + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix}$ et cond. (iii)	algébrique
	$\begin{pmatrix} - & + \\ + & + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix}$ sans cond. (iii)	non holonome **?**
	Urnes avec zéros	
	$\begin{pmatrix} \star & 0 \\ 0 & \star \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \star & 0 \\ \star & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \star & 0 \\ \star & \star \end{pmatrix}$	algébrique
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & \star \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \star & \star \\ \star & 0 \end{pmatrix}$	non holonome
	Urnes strictement additives $a, b, c, d > 0$	
	cond. (i) ou (ii) ou (iii)	algébrique
	ni (i), ni (ii), ni (iii)	non holonome **?**

TABLEAU 4.1 – Nature de la série $H(x,y,z)$ des histoires d'une urne équilibrée et tenable, de balance σ. La mention "non holonome **?**" signifie que la série $H(x,y,z)$ est suspectée non holonome et que l'on ne connaît pas de preuve "à la main". Cependant, cette propriété de non holonomie est prouvée automatiquement pour toutes les urnes dont les coefficients a, b, c, d vérifient $|a|, b, c, |d| \leq 100$.

Troisième partie

Analyse asymptotique des urnes algébriques

Introduction

Que contient une urne de Pólya après un grand nombre de tirages ? Que devient son ratio boules noires–boules blanches au bout d'un temps long ? Répondre à ces questions est l'une des motivations principales de toute étude sur les urnes de Pólya. Cette problématique est celle des phénomènes limites, des comportements asymptotiques, ici de l'estimation du contenu de l'urne lorsque le nombre de tirages n tend vers l'infini. Il est remarquable de pouvoir exprimer, par exemple, la moyenne du nombre de boules noires après un million d'étapes par une expression exacte mêlant des triples sommes alternées et des produits de coefficients multinomiaux. Cependant, l'esprit pratique de l'utilisateur trouvera beaucoup plus explicite les propriétés suivantes : cette même moyenne croît linéairement, de l'ordre de cn avec une erreur de l'ordre de $1/n$, où c est une constante explicite. De plus, dans le passage de l'exact à l'asymptotique, les calculs deviennent instantanés.

Les propriétés asymptotiques des urnes sont ainsi au cœur de cette partie, et l'approche par séries génératrices révèle ici tout son intérêt. En effet, la *combinatoire analytique*, développée par P. Flajolet et R. Sedgewick [FS09], est le cadre idéal pour traiter ces questions. La vision des séries génératrices comme des fonctions de la variable complexe est l'outil primordial pour obtenir des résultats asymptotiques avec une grande précision.

Dans la partie précédente, nous avons étudié les urnes équilibrées à coefficients positifs qui possèdent une série génératrice algébrique. Deux classes non triviales se sont distinguées, les urnes à croissance préférentielle dans le cas (ii) et les urnes à croissance adverse dans le cas (iii). Cette partie est consacrée à l'étude asymptotique de ces urnes algébriques. Les conditions (ii) et (iii) montrent que ces urnes sont des petites urnes (le rapport $-p/\sigma$ est inférieur à $1/2$). Une limite gaussienne est par conséquent attendue [Jan04].

Dévoilons légèrement le lien entre les séries génératrices et les résultats de nature probabiliste. Nous désirons compter des objets selon leur taille et selon un paramètre χ, typiquement, le nombre d'histoires de longueur n qui terminent dans une configuration à k boules noires. Considérons une série génératrice bivariée $f(x,z) = \sum_{n,k} f_{n,k} x^k \frac{z^n}{n!}$, où $f_{n,k}$ compte les objets de taille n dont le paramètre χ étudié vaut k. Notons X_n la variable aléatoire qui donne la valeur du paramètre χ pour un objet de taille n. En supposant que tous les objets de taille n soient équiprobables, nous avons accès directement à la

fonction génératrice de probabilité du paramètre étudié

$$p_n(x) = \sum_k p_{n,k} x^k = \sum_k \frac{f_{n,k}}{f_n} x^k = \frac{[z^n] f(x,z)}{[z^n] f(1,z)}.$$

En notant $f_n(x) = [z^n] f(x,z)$, l'expression de $p_n(x)$ devient

$$p_n(x) = \frac{f_n(x)}{f_n(1)}.$$

La fonction $p_n(x)$ contient toutes les informations sur la distribution de la variable X_n. Le comportement limite de la variable X_n se déduit directement de l'expression asymptotique de la fonction $p_n(x)$, lorsque n tend vers l'infini.

Ici, la variable aléatoire utile est A_n, qui compte le nombre de boules noires dans l'urne après n tirages. Répondre à la question de la composition de l'urne dans le long terme correspond alors à l'étude des propriétés asymptotiques de cette variable aléatoire A_n. À cette variable aléatoire est associée une fonction génératrice de probabilité $p_n(x)$. Le caractère algébrique et les expressions précises des polynômes annulateurs obtenus dans le Chapitre 4 permettent d'obtenir une expression pour $p_n(x)$. En revanche, les techniques d'analyse complexe employées diffèrent selon les classes. Pour les urnes à croissance adverse au Chapitre 6, nous raisonnons par analyse de singularités de la série génératrice afin d'obtenir l'asymptotique. Pour les urnes à croissance préférentielle au Chapitre 5, l'analyse est fondée sur une méthode de col non générique, où les cols étudiés sont multiples et coalescents. L'étude de ces deux cas fait ainsi intervenir deux méthodes fondamentales de la combinatoire analytique. Nous présentons à chaque fois les méthodes utilisées, puis nous les appliquons afin de dégager des résultats asymptotiques généraux de grande précision.

Les résultats obtenus dans cette partie peuvent être résumés par l'énoncé suivant :

> *Pour toutes les urnes des classes $\mathscr{CP}$ (cas (ii)) et $\mathscr{CA}$ (cas (iii)), le nombre de boules noires A_n, après renormalisation, suit une loi gaussienne. De plus, la vitesse de convergence et les moments de A_n sont explicitement calculables, et la variable aléatoire A_n vérifie une loi locale limite et une propriété de grandes déviations.*

Chapitre 5

Analyse asymptotique des urnes algébriques à croissance préférentielle

Ce chapitre est consacré à l'analyse asymptotique des urnes algébriques à croissance préférentielle, c'est-à-dire le cas (ii) du Théorème 9, p.67. Dans toute la suite, nous noterons A_n la variable aléatoire comptant le nombre de boules noires dans l'urne après n étapes. La Section 5.1 traite des moments de cette variable aléatoire. La Section 5.2 énonce les principaux résultats du chapitre, à travers les Théorèmes 10, 11, et 12, qui donnent la convergence et les propriétés asymptotiques précises sur la distribution de A_n.

Définition 15 (Urnes à croissance préférentielle)**.** *Nous notons $\mathscr{CP}$ la classe des urnes à croissance préférentielle, et $\mathscr{CP}(k,r,b)$ l'urne de cette classe,*

$$\mathscr{CP}(k,r,b) = \begin{pmatrix} (k+1)r & b \\ kr & b+r \end{pmatrix}, \qquad \textit{avec} \quad r,k,b \geq 1\,.$$

Exemple 6. *Le cas le plus simple à étudier est l'urne $\mathscr{CP}(1,1,1) = [2,1,1,2]$. Tout au long du chapitre, nous reviendrons sur cet exemple afin d'illustrer la démarche adoptée.*

Les urnes $\mathscr{CP}$ sont des petites urnes : la balance σ vaut $(k+1)r+b$, l'indice de dissimilarité p vaut $-r$ et le rapport $-p/\sigma$ est ainsi inférieur à $1/2$.

Rappelons succinctement l'équation algébrique vérifiée par la série génératrice des histoires d'une urne à croissance préférentielle. Soit une urne $\mathscr{CP}(k,r,b)$ et (a_0,b_0) sa configuration initiale. La série génératrice des histoires $H(x,y,z)$ est entièrement déterminée par la fonction $Y(x,y,z)$, qui correspond à la configuration initiale à une boule blanche, $(a_0,b_0) = (0,1)$. Dans toute la suite, nous étudions sans perte de généralité cette fonction bivariée $Y(x,1,z)$, que nous abrégeons en $Y(x,z)$.

Rappel. D'après la Proposition 10, la fonction $Y(x,z)$ est définie par l'équation algébrique

$$(z-K(x))\,Y(x,z)^{r(k+1)+b}+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{(x^{-r}-1)^i}{r(k+1-i)+b}\,Y(x,z)^{ir}=0\,, \tag{5.1}$$

où $K(x)$ ne dépend pas de z et vaut

$$K(x)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{(x^{-r}-1)^i}{r(k+1-i)+b}\,. \tag{5.2}$$

Pour l'exemple $\mathscr{CP}(1,1,1)$, la fonction $Y(x,z)$ est solution de l'équation

$$(z-K(x))\,Y(x,z)^3+\frac{x^{-1}-1}{2}Y(x,z)+\frac{1}{3}=0\,,\quad \text{avec}\quad K(x)=\frac{x^{-1}-1}{2}+\frac{1}{3}\,. \tag{5.3}$$

Cette équation algébrique est le point de départ des sections suivantes. Dans un premier temps (Section 5.1), nous exploitons directement cette équation et dériver des résultats sur les moments de la variable aléatoire A_n. Dans un second temps (Section 5.2), nous utilisons l'analyse complexe pour dériver des résultats asymptotiques précis.

5.1 Moyenne, Variance, Moments

5.1.1 Un calcul explicite de moyenne

Regardons tout d'abord notre Exemple 6. D'après les considérations sur les séries génératrices (Section 1.2), la moyenne du nombre de boules noires après n étapes s'exprime par

$$\mathbb{E}(A_n)=\frac{[z^n]\partial_x Y(x,z)|_{x=1}}{[z^n]Y(1,z)}\,. \tag{5.4}$$

Nous connaissons déjà $Y(1,z)$, qui vaut $(1-3z)^{-1/3}$. Il suffit de connaître la dérivée partielle de Y par rapport à x, et elle s'obtient aisément en différentiant l'équation algébrique (5.3) sur $Y(x,z)$,

$$\left(-3\frac{x^{-1}-1}{2}-1\right)Y^2\partial_x Y+\frac{1}{2x^2}Y^3-\frac{1}{2x^2}\partial_x Y+\frac{x^{-1}-1}{2}Y=0\,.$$

En regroupant les termes en $\partial_x Y$, nous obtenons

$$\partial_x Y=\frac{Y(1-Y^2)}{x\left(1-x+Y^2(6xz+x-3)\right)}\,.$$

En substituant $x=1$ et Y par la valeur $Y(1,z)$, nous pouvons donner une expression exacte de $\partial_x Y(x,z)|_{x=1}$,

$$\partial_x Y(x,z)|_{x=1}=\frac{1}{2}\frac{\left(1-(1-3z)^{2/3}\right)}{(1-3z)^{4/3}}=\frac{1}{2}\left((1-3z)^{-4/3}-(1-3z)^{-2/3}\right)\,.$$

De cette expression, nous tirons une valeur exacte du coefficient $[z^n]$ en développant en série entière. L'expression asymptotique découle de la combinatoire analytique classique, précisément par le lemme de transfert de Flajolet-Odlyzko (Th. 3). Cela donne une expression asymptotique avec la précision désirée. Ces calculs s'automatisent grâce à l'outil `equivalent` dans `gfun`, bibliothèque du logiciel MAPLE [SZ94]. Pour le numérateur de (5.4), l'expression obtenue est

$$\begin{aligned}
[z^n]\partial_x Y(x,z)|_{x=1} &= \tfrac{3^n}{2}\left([z^n](1-z)^{-4/3} - [z^n](1-z)^{-2/3}\right) \\
&= \tfrac{3^n}{2}\left(\tbinom{n-1+4/3}{n} - \tbinom{n-1+2/3}{n}\right) \\
&= \tfrac{3^n}{2\cdot n!}\left(\tfrac{\Gamma(n+4/3)}{\Gamma(4/3)} - \tfrac{\Gamma(n+2/3)}{\Gamma(2/3)}\right).
\end{aligned}$$

Pour le dénominateur de (5.4), bien connu, nous avons

$$[z^n]Y(1,z) = [z^n](1-3z)^{-1/3} = 3^n\binom{n-1+1/3}{n} = \frac{3^n}{n!}\frac{\Gamma(n+1/3)}{\Gamma(1/3)}.$$

D'où une valeur exacte pour la moyenne,

$$\mathbb{E}(A_n) = \frac{3}{2}n + \frac{1}{2} - \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(n+2/3)}{2\Gamma(2/3)\Gamma(n+1/3)}.$$

À partir de l'expression exacte obtenue, ou plus simplement en partant de l'expression sous forme de série génératrice, nous accédons à une expression asymptotique,

$$\mathbb{E}(A_n) = \frac{3}{2}n - \frac{\Gamma(1/3)}{2\Gamma(2/3)}n^{1/3} + \frac{1}{2} + O\left(n^{-2/3}\right).$$

5.1.2 Moyenne

Proposition 14 (Moyenne)**.** *Soit A_n la variable aléatoire comptant le nombre de boules noires dans l'urne $\mathscr{CP}(k,r,b)$ après n étapes. Notons $\sigma = (k+1)r + b$. Alors la moyenne de A_n s'exprime de façon exacte et asymptotique,*

$$\mathbb{E}(A_n) = \frac{rk}{rk+b}\left(\sigma n + 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\sigma}\right)\Gamma\left(n+\frac{r+1}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+1}{\sigma}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{\sigma}\right)}\right), \tag{5.5}$$

$$\mathbb{E}(A_n) = \frac{rk\sigma}{rk+b}n - \frac{rk}{rk+b}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+1}{\sigma}\right)}n^{r/\sigma} + \frac{rk}{rk+b} + O\left(n^{r/\sigma-1}\right). \tag{5.6}$$

Démonstration. Nous adoptons le même schéma que pour l'exemple développé. L'expression exacte de la moyenne s'exprime par la série génératrice,

$$\mathbb{E}(A_n) = \frac{[z^n]\partial_x Y(x,z)|_{x=1}}{[z^n]Y(1,z)}.$$

L'expression de $\partial_x Y(x,z)|_{x=1}$ s'obtient en différentiant par rapport à x l'équation (5.1). De là, nous isolons $\partial_x Y(x,z)$ qui s'exprime en fonction de x, z et $Y(x,z)$. En spécifiant $x=1$, puis en substituant $Y(1,z)$ par son expression exacte $(1-\sigma z)^{-1/\sigma}$, nous obtenons

$$\partial_x Y(x,1,z)|_{x=1} = \frac{rk}{rk+b}(1-\sigma z)^{-1/\sigma}\left((1-\sigma z)^{-1} - (1-\sigma z)^{-r/\sigma}\right). \tag{5.7}$$

L'expression exacte de la moyenne s'obtient par développement en série entière, afin d'extraire le coefficient

$$[z^n]\partial_x Y(x,z)|_{x=1} = \frac{\sigma^n rk}{n!\,(rk+b)}\left(\frac{\Gamma(n+1+1/\sigma)}{\Gamma(1/\sigma+1)} - \frac{\Gamma(n+r/\sigma+1/\sigma)}{\Gamma(r/\sigma+1/\sigma)}\right).$$

Le dénominateur est le nombre total d'histoires, dont la valeur exacte est bien connue,

$$[z^n]Y(1,z) = (1-\sigma z)^{-1/\sigma} = \frac{\sigma^n\,\Gamma(n+1/\sigma)}{n!\,\Gamma(1/\sigma)}.$$

Le quotient de ces deux expressions donne le résultat (5.5). L'expression asymptotique (5.6) apparaît en appliquant le lemme de transfert de Flajolet-Odlyzko (Th. 3) sur $Y(1,z)$ et sur chacun des termes de (5.7). □

5.1.3 Variance

Proposition 15 (Variance)**.** *Soit A_n la variable aléatoire comptant le nombre de boules noires dans l'urne $\mathscr{CP}(k,r,b)$ après n étapes. Notons $\sigma = (k+1)r+b$. Alors la variance de A_n s'exprime de façon exacte et asymptotique, et*

$$\mathbb{V}(A_n) = \frac{kr^3 b\sigma}{(kr+b)^2((k-1)r+b)}n + O\left(n^{\frac{2r}{\sigma}}\right). \tag{5.8}$$

Démonstration. Pour obtenir la variance, il suffit de calculer $\partial_x^2 Y(x,z)|_{x=1}$. La même démarche s'applique : dériver deux fois l'équation (5.1), puis spécifier $x=1$, en remplaçant $\partial_x Y(x,z)$ par l'expression (5.7) trouvée précédemment, et $Y(1,z)$ par sa valeur exacte. En isolant $\partial_x^2 Y(x,z)|_{x=1}$, nous trouvons une expression exacte, et ainsi, tous les termes de la formule suivante sont connus,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(A_n) &= \mathbb{E}(A_n(A_n-1)) + \mathbb{E}(A_n) - \mathbb{E}(A_n)^2\\ &= \frac{[z^n]\partial_x^2 Y(x,z)|_{x=1}}{[z^n]Y(1,z)} + \frac{[z^n]\partial_x Y(x,z)|_{x=1}}{[z^n]Y(1,z)} - \left(\frac{[z^n]\partial_x Y(x,z)|_{x=1}}{[z^n]Y(1,z)}\right)^2.\end{aligned}$$

L'expression asymptotique s'en déduit de la même façon par le lemme de transfert de Flajolet-Odlyzko (Th. 3). □

5.1.4 Moments d'ordre supérieur

Proposition 16 (Moments). *Soit A_n la variable aléatoire comptant le nombre de boules noires dans l'urne $\mathscr{CP}(k,r,b)$ après n étapes. Tous les moments de A_n existent et sont calculables, de façon exacte et asymptotique.*

Démonstration. À partir de la moyenne et de la variance, il est possible de calculer le moment d'ordre 3, avec la même démarche. En dérivant s fois l'équation (5.1), nous pouvons atteindre le moment d'ordre s, et obtenir une forme exacte et asymptotique. Ces opérations, exactes et asymptotiques, s'automatisent par l'utilisation de MAPLE, ainsi que de la fonction `equivalent` du package `gfun`, développé par B. Salvy et P. Zimmerman [SZ94]. □

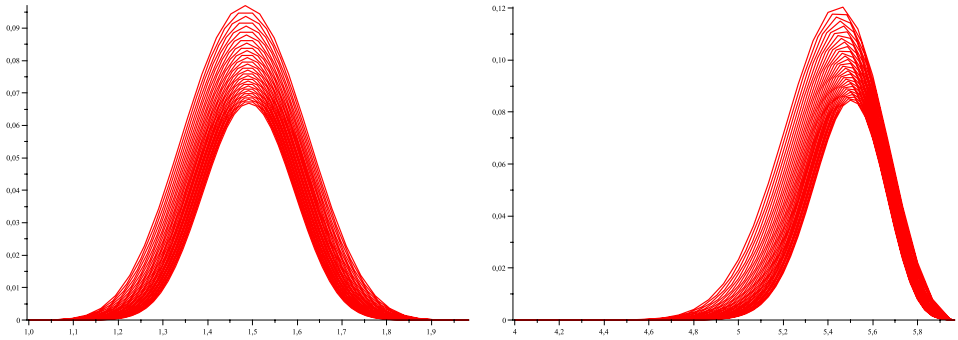


FIGURE 5.1 – Comportement de la fonction génératrice de probabilité $p_n(x)$, pour $n \in [\![30,60]\!]$. Chaque courbe correspond à une fonction $p_n(x)$, qui tend progressivement vers une gaussienne. *À gauche :* l'urne $\mathscr{CP}(1,1,1) = [2,1,1,2]$. *À droite :* l'urne $\mathscr{CP}(2,2,1) = [6,1,4,3]$. Nous observons les moyennes et les variances des variables aléatoires A_n. Pour l'urne $[2,1,1,2]$, nous avons $\mu = 3/2 = 1.5$ et $\nu^2 = 3/4 = 0.75$. Pour l'urne $[6,1,4,3]$, nous avons $\mu = 28/5 \simeq 5.6$ et $\nu^2 = 112/75 \simeq 1.5$.

5.2 Résultats asymptotiques

Les principaux résultats de ce chapitre sont énoncés ci-dessous par trois théorèmes sur la distribution asymptotique des boules dans l'urne. Ces résultats se déduisent de la Proposition 17 qui décrit le comportement limite de la fonction génératrice de probabilité $p_n(x)$. Pour obtenir cette proposition, une méthode de col adaptée est mise en œuvre et développée dans la section suivante. Les théorèmes sont ensuite une application du théorème des Quasi-Puissances de H.-K. Hwang (Section 1.4).

Soit A_n la variable aléatoire comptant, après n étapes, le nombre de boules noires dans l'urne $\mathscr{CP}(k,r,b)$. Le Théorème 10 énonce la convergence des fonctions de répartition, soit la convergence en loi de la suite de variables aléatoires (A_n).

Théorème 10 (Loi Limite Normale). *La variable aléatoire A_n a une moyenne μ_n et une variance ν_n^2, et la variable aléatoire normalisée $\dfrac{A_n - \mu n}{\nu\sqrt{n}}$ converge en loi vers une loi gaussienne centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, avec une vitesse de convergence en $O\left(1/\sqrt{n}\right)$,*

$$\mu_n = \mathbb{E}(A_n) = \mu\, n + o(n)\,, \qquad \nu_n^2 = \mathbb{V}(A_n) = \nu^2\, n + o(n)\,,$$

$$\mathbb{P}\left\{\frac{A_n - \mu n}{\nu\sqrt{n}} \le t\right\} = \Phi(t) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad \text{où} \qquad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv\,,$$

avec

$$\mu = \frac{rk\sigma}{rk+b} \qquad \text{et} \qquad \nu^2 = \frac{kr^3 b\sigma}{(kr+b)^2((k-1)r+b)}\,. \tag{5.9}$$

Le Théorème 11 énonce la convergence locale de la suite de variables aléatoires (A_n).

Théorème 11 (Loi Limite Locale). *Soit $p_{n,\ell} = \mathbb{P}\{A_n = \ell\}$. La distribution de A_n satisfait une loi locale limite de type gaussien, avec vitesse de convergence en $O\left(1/\sqrt{n}\right)$, précisément*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \nu\sqrt{n}\, p_{n,\lfloor \mu n + t\nu\sqrt{n}\rfloor} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \right| \le O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

où μ et ν sont les constantes rappelées en (5.9).

Le dernier théorème concerne les bornes de grandes déviations, dont la définition est rappelée au Chapitre 1, Déf. 9.

Théorème 12 (Grandes déviations). *Pour tout ξ tel que $0 < \xi < 1$, la suite de variables aléatoires (A_n) satisfait une propriété de grandes déviations relative à l'intervalle $[t_0, t_1]$, avec un facteur d'échelle n, et un taux de grandes déviations $W(t)$, avec $x_0 = \xi$, $x_1 = 2-\xi$,*

$$t_0 = x_0 \frac{\chi'(x_0)}{\chi(x_0)} \qquad \text{et} \qquad t_1 = x_1 \frac{\chi'(x_1)}{\chi(x_1)}\,,$$

$$W(t) = -\min_{x\in[x_0,x_1]} \log\left(\frac{\chi(x)}{x^t}\right), \qquad \text{où} \qquad \chi(x) = x^{\mu}\exp\left(\frac{\nu^2}{2}\ln(x)^2\right),$$

et où μ et ν sont les constantes rappelées en (5.9).

L'outil principal pour la preuve de ces théorèmes est l'expression asymptotique $p_n(x)$, série génératrice de probabilité.

Proposition 17 (Asymptotique de $p_n(x)$). *Pour $x = e^{iu/\sqrt{n}}$ avec u complexe dans un voisinage de 0, l'expression de la série génératrice de probabilité $p_n(x)$ vaut, asymptotiquement lorsque n tend vers l'infini,*

$$p_n(u) = \exp\left(\mu i u\sqrt{n} - \frac{\nu^2}{2}u^2\right)\left(1 + O\left(n^{-\frac{\sigma-2r-1}{2(\sigma+1)}}\right)\right), \tag{5.10}$$

avec

$$\mu = \frac{rk\sigma}{rk+b} \qquad \text{et} \qquad \nu^2 = \frac{kr^3 b\sigma}{(kr+b)^2((k-1)r+b)}\,.$$

Cette expression (5.10) de $p_n(x)$ est valide pour x paramétré par $x = e^{iu/\sqrt{n}}$, où le voisinage complexe de 0 dans lequel se trouve u est précisé :

- x dans un voisinage de 1 de rayon $n^{-1/2}$, soit $|u| < 1$ (ce qui donne la loi limite gaussienne, Théorème 10) ;
- x dans un intervalle réel centré en 1 de longueur $n^{-1/2}$, soit u imaginaire pur et $|u| < 1$ (ce qui donne les grandes déviations, Théorème 12) ;
- x sur l'arc du cercle unité proche de 1, soit u réel et $|u| < 1$ (ce qui donne la loi locale limite, Théorème 11).

La Figure 1.1 p.20 rappelle le lien entre les zones d'analyticité et les théorèmes limites.

5.3 Analyse asymptotique par méthode de col

Cette section est entièrement consacrée à la méthode de col. Cette technique, très utilisée en combinatoire analytique, est au cœur de la preuve de la proposition fondamentale sur l'asymptotique de $p_n(x)$ (Proposition 17). La preuve complète est détaillée dans la sous-section 5.3.3. Afin d'introduire cette méthode, nous nous proposons de traiter l'Exemple 6 en détail dans les Sections 5.3.1 et 5.3.2. Ainsi, nous exposons la méthode qui peut se voir comme une extension dans le plan complexe de la méthode de Laplace pour le calcul asymptotique d'intégrales.

Comme pour toute série génératrice (Section 1.3), le n-ième coefficient en z de $Y(x,z)$ s'exprime en terme d'intégrale de contour par la formule de Cauchy,

$$Y_n(x) = [z^n]Y(x,z) = \frac{1}{2i\pi}\oint \frac{Y(x,z)}{z^{n+1}}\,dz\,. \tag{5.11}$$

Par méthode de col, nous allons trouver un équivalent à cette expression lorsque n tend vers l'infini.

5.3.1 Le cas $\mathscr{CP}(1,1,1)$

La première étape dans la méthode de col est d'écrire l'intégrale de contour (5.11) sous la forme $\oint a(w)h(w)^{n+1}dw$.

Commençons simplement avec l'urne $[2,1,1,2]$. Sa série génératrice $Y(x,z)$ est définie par l'équation fonctionnelle (5.3). Nous voulons évaluer $Y_n(x)$. Afin de présenter la méthode de col, nous découpons l'étude de cet exemple en deux sous-sections. Nous traitons ici de l'exemple-jouet où l'on impose $x = 1$. Dans la sous-section 5.3.2, nous traiterons du cas x variable et des cols coalescents.

Commençons par l'exemple-jouet. Le but est de trouver $Y_n(1)$. Notons $y(z) = Y(1,z)$. L'équation (5.3) s'écrit pour $x = 1$,

$$(z - 1/3)\,y(z)^3 + 1/3 = 0\,. \tag{5.12}$$

Nous savons directement que $y(z) = (1-3z)^{-1/3}$, et que les coefficients vérifient $Y_n(1) \sim \frac{3^n n^{-2/3}}{\Gamma(1/3)}$. Retrouvons cela en calculant les coefficients $Y_n(1)$ par la formule de

Cauchy (Théorème 1), où l'intégrale est prise sur un contour entourant 0,

$$Y_n(1) = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{y(z)}{z^{n+1}} dz\,. \tag{5.13}$$

Nous regardons z et y comme deux variables liées. Le changement de variable, dit "*à la Lagrange*[1]", permet d'échanger les rôles de $y(z)$ et $z(y)$. De ce fait, nous avons par (5.12),

$$z = \frac{1}{3}(1 - y^{-3}) \qquad \text{et} \qquad dz = y^{-4} dy\,.$$

Par ce changement de variable, (5.13) se récrit

$$Y_n(1) = \frac{3^{n+1}}{2i\pi} \oint \frac{y^{-3}\, dy}{(1 - y^{-3})^{n+1}}\,, \tag{5.14}$$

avec un contour pris cette fois autour de 1 ; en effet, en $z = 0$, $y(z) = 1$. Une telle intégrale ne fournit pas de point-cols, c'est pourquoi nous faisons un nouveau changement de variable $Y = y^{-1}$, qui a pour effet de "trouver les point-cols à l'infini". Ainsi $dy = -Y^{-2} dY$, et nous obtenons

$$Y_n(1) = \frac{3^{n+1}}{2i\pi} \oint \frac{-Y\, dY}{(1 - Y^3)^{n+1}} \tag{5.15}$$

Pour revenir à un contour centré en 0, nous posons $w = 1 - Y$, et ainsi,

$$Y_n(1) = \frac{3^{n+1}}{2i\pi} \oint \frac{(1 - w)\, dw}{w^{n+1}(w^2 - 3w + 3)^{n+1}} = \frac{3^{n+1}}{2i\pi} \oint a(w) h(w)^{n+1}\, dw \tag{5.16}$$

avec

$$a(w) = 1 - w \qquad \text{et} \qquad h(w) = w^{-1}(w^2 - 3w + 3)^{-1} = \frac{1}{1 - (1 - w)^3}\,. \tag{5.17}$$

Cette intégrale, $\oint a(w) h(w)^{n+1} dw$, est le cadre typique d'application d'une méthode de col. Nous voulons un développement asymptotique pour n tendant vers l'infini, ainsi, le terme $h(w)^{n+1}$ attire notre attention. La Figure 5.2 représente le graphe de la fonction $|h(w)|$ avec w complexe centré en 1, avec un rayon de 1.5. Nous remarquons la présence de trois pôles où la fonction croît vers l'infini. Entre ces pôles se situe une sorte de plateau, signe que la dérivée de h s'annule à cet endroit : c'est un col.

Pour l'évaluation de l'intégrale, nous avons le choix du contour autour de 0, tant que ce contour est homotope, dans le plan percé des pôles, au cercle centré en 0 et ne contenant que le pôle 0. La méthode de col consiste à tourner autour de ce pôle en 0, de gravir la pente qui mène au col, puis de redescendre le long de la seconde pente (Figure 5.2). L'intuition est la suivante : *lorsque n grandit, la contribution de la portion de chemin situé autour du col va devenir dominante, et même exponentiellement*

1. Plus de détails sur l'inversion de Lagrange sont disponibles dans [FS09, Appendix A.6, p.732]

majoritaire par rapport au reste du contour. Pour obtenir une bonne approximation de l'intégrale, il suffit alors de connaître une bonne approximation de la fonction $h(w)$ autour du col.

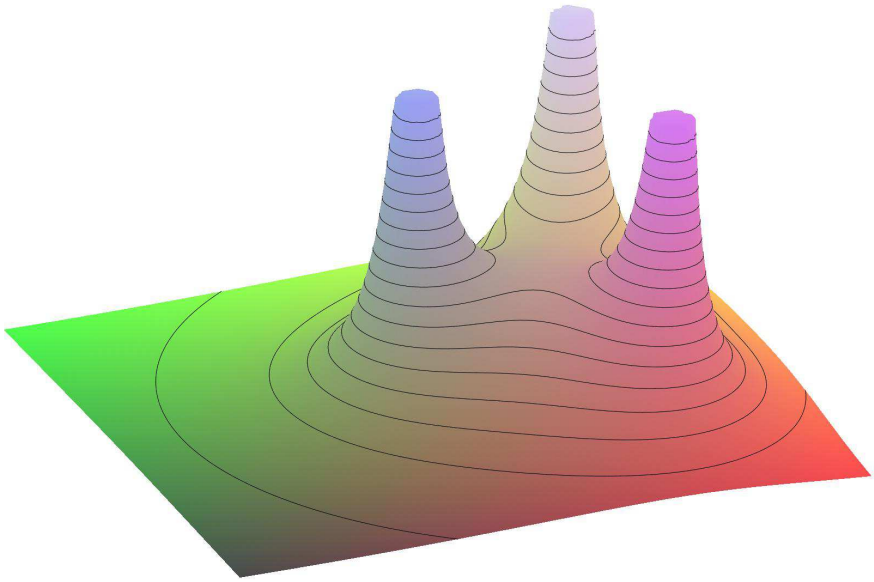


FIGURE 5.2 – Graphe de $|h(w)|$. En $w = 1$ se trouve un col double. Les trois pics correspondent aux zéros du dénominateur de $h(w)$, qui sont 0, $1 - j$ et $1 - j^2$, où j est la racine 3e de l'unité, $j = \exp(2i\pi/3)$.

Les dérivées de h fournissent un développement limité autour de $w = 1$. Nous avons

$$h'(w) = \frac{-3(w-1)^2}{w^2(w^2-3w+3)^2}\,. \tag{5.18}$$

La dérivée s'annule deux fois en $w = 1$, ce qui traduit la présence d'un col en $w = 1$, dit *col double*. Les dérivées successives sont

$$h(1) = 1\,, \quad h'(1) = h''(1) = 0\,, \quad h'''(1) = (-1)^3\,3! = -6\,,$$

$$h^{(4)}(1) = h^{(5)}(1) = 0\,, \quad h^{(6)}(1) = (-1)^6\,6! = 720\,.$$

Le développement limité au voisinage de 1 s'écrit alors

$$h(w) = 1 - (w-1)^3 + (w-1)^6 + O\left((w-1)^9\right)\,.$$

Il s'agit désormais d'évaluer $Y_n(1)$ selon le bon contour $\mathscr{C}$. Nous choisissons les directions de plus grande pente qui démarrent du col, ainsi la majoration exponentiellement grande au voisinage du col n'en sera qu'améliorée. Pour cela, nous intégrons sur un contour $\mathscr{C}$ qui se divise en trois parties :

- $\mathscr{C}_1$: chemin partant du col 1 avec un angle polaire de $2\pi/3$, de longueur L,
- $\mathscr{C}_2$: chemin partant du col 1 avec un angle polaire de $-2\pi/3$, de longueur L,
- $\mathscr{C}_3$: arc de cercle de centre 1 reliant les deux extrémités précédentes, de rayon L et d'angle polaire dans $[2\pi/3, 4\pi/3]$.

Ce contour $\mathscr{C}$ est décrit par la paramétrisation suivante :

- $\mathscr{C}_1$: pour $t \in [0, L]$, $w = 1 + te^{i\frac{2\pi}{3}}$,
- $\mathscr{C}_2$: pour $t \in [0, L]$, $w = 1 + te^{-i\frac{2\pi}{3}}$,
- $\mathscr{C}_3$: pour $\theta \in [2\pi/3, 4\pi/3]$, $w = 1 + Le^{i\theta}$.

La Figure 5.3 représente ce contour ainsi que le graphe de h en vue de dessus.

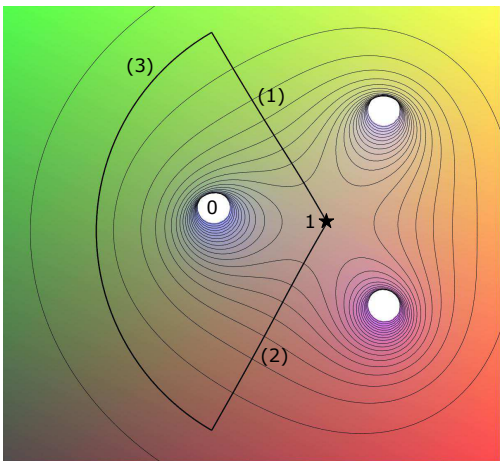


FIGURE 5.3 – Schéma vu du dessus des 3 pôles (*trous*) et du col double en 1 (*étoile*), avec le contour en trois parties $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$.

L'évaluation de l'intégrale se fait grâce aux cinq étapes suivantes.

1. Contour $\mathscr{C}_3$ négligé. Sur ce contour, l'intégrale (5.16) s'écrit

$$\frac{3^{n+1}}{2\pi} \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \frac{-L^2 e^{2i\theta}}{(1 + L^3 e^{i3\theta})^{n+1}} \, d\theta \,,$$

et

$$\left| \frac{-L^2 e^{2i\theta}}{(1 + L^3 e^{i3\theta})^{n+1}} \right| = \frac{1}{L^{3n+1} \left| e^{i3\theta} + L^{-3} \right|^{n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \,,$$

pour un choix de longueur L telle que $L \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Nous choisissons $L = n^4$. Cette contribution sera négligeable par rapport aux deux autres.

2. Contribution de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Pour $w \in \mathscr{C}_1$, nous avons $h(w)^n = \left(1 + t^3\right)^{-n}$. Ainsi,

$$h(w)^n = \exp\left(n \log\left(\frac{1}{1 + t^3} \right) \right) = \exp\left(-nt^3 + O\left(nt^6\right) \right). \tag{5.19}$$

L'intégrale (5.16) s'écrit alors

$$\frac{3^{n+1}}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}_1} a(w)h(w)^{n+1}\,dw = \frac{3^{n+1}}{2i\pi}e^{i\frac{4\pi}{3}}\int_0^L \frac{-t\;dt}{\left(1+t^3\right)^{n+1}}\,.$$

Il en est de même pour $\mathscr{C}_2$,

$$\frac{3^{n+1}}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}_2} a(w)h(w)^{n+1}\,dw = \frac{3^{n+1}}{2i\pi}e^{-i\frac{4\pi}{3}}\int_0^L \frac{-t\;dt}{\left(1+t^3\right)^{n+1}}\,.$$

Sur le chemin $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_2$, les contributions s'ajoutent et nous obtenons

$$\frac{3^{n+1}}{\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\int_0^L \frac{-t\;dt}{\left(1+t^3\right)^{n+1}}\,. \tag{5.20}$$

Nous voulons utiliser l'approximation (5.19). Pour cela, découpons le segment $[0,L]$ en deux parties $[0,\ell]$ et $[\ell,L]$. Afin d'appliquer l'approximation dans le segment $[0,\ell]$, il faut que la première partie de l'expression asymptotique, nt^3, soit prépondérante, tandis que le reste $O(nt^6)$ doit être négligeable. Choisissons ainsi la borne ℓ telle que $n\ell^3 \to \infty$ et $n\ell^6 \to 0$. Nous imposons pour la suite $\ell = n^{-1/4}$, qui vérifie ces conditions. Avec le changement de variable $u = nt^3$, nous avons $n\ell^3 = n^{1/4}$ et

$$\int_0^\ell \frac{-t\;dt}{\left(1+t^3\right)^n} = \frac{n^{-2/3}}{3}\int_0^{n\ell^3} u^{-1/3}\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n} du\,.$$

Rappelons que pour le chemin $\mathscr{C}_3$, nous avions imposé $L = n^4$.

3. Segment raccourci. Montrons que la portion $[\ell,L]$ du segment $[0,L]$ est exponentiellement négligeable. Avec le même changement de variable $u = nt^3$, nous avons

$$\int_{n^{-1/4}}^{n^4} \frac{-t\;dt}{\left(1+t^3\right)^n} = \frac{n^{-2/3}}{3}\int_{n^{1/4}}^{n^{13}} f_n(u)\,du\,,$$

où $f_n(u) = u^{-1/3}(1+u/n)^{-n}$. Cette fonction $f_n(u)$ est strictement décroissante sur $[0,\infty[$, donc le membre droit se majore,

$$\begin{aligned} n^{-2/3}\int_{n^{1/4}}^{n^{13}} f_n(u)\,du &< n^{-2/3}n^{13}f_n(n^{1/4}) \\ &< n^{-2/3}n^{13}n^{-1/12}\exp\left(-n\log\left(1+n^{-3/4}\right)\right) \\ &< n^{49/4}\exp(-n^{1/4}). \end{aligned}$$

La majoration est exponentielle, en $O\left(n^\alpha e^{-n^{1/4}}\right)$.

4. Approximation gaussienne. Pour l'approximation centrale,

$$\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-u+O(u^2n^{-1})\right) = e^{-u}\left(1+O\left(u^2n^{-1}\right)\right),$$

pour $u < n^{1/4}$, qui donne $u^2n^{-1} \to 0$. Nous exprimons ainsi l'erreur faite par cette approximation,

$$\frac{n^{-2/3}}{3}\int_0^{n^{1/4}} u^{-1/3}\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n} du = \frac{n^{-2/3}}{3}\int_0^{n^{1/4}} u^{-1/3}e^{-u}\left(1+O\left(u^2n^{-1}\right)\right) du,$$

et

$$\frac{n^{-2/3}}{3}\int_0^{n^{1/4}} e^{-u}u^{-1/3}O(n^{-1}u^2)\,du = n^{-5/3}O\left(\int_0^{n^{1/4}} e^{-u}u^{5/3}\,du\right) = O\left(n^{-5/3}\right).$$

5. Complétion gaussienne. Enfin, pour compléter l'intégrale, remarquons que

$$\int_W^\infty u^{-1/3}e^{-u}\,du \quad < \quad W^{-1/3}\int_W^\infty e^{-u}\,du \quad < \quad W^{-1/3}e^{-W}.$$

Dans notre cas, $W = n^{1/4}$, on a donc une majoration exponentielle en $O\left(n^\alpha e^{-n^{1/4}}\right)$.

Récapitulatif. Nous obtenons le résultat asymptotique pour $Y_n(1)$ par cette démarche, et l'erreur qui vient essentiellement de l'approximation centrale, est en $O\left(n^{-5/3}\right)$. La démarche se récapitule comme suit :

$$\begin{aligned}
Y_n(1) &= \frac{3^{n+1}}{2i\pi}\oint a(w)h(w)^{n+1}dw \\
&\sim \frac{3^{n+1}}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}_1-\mathscr{C}_2} a(w)h(w)^{n+1}dw && \text{(Contour } \mathscr{C}_3 \text{ négligé)} \\
&\sim \frac{3^{n+1}}{\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\int_0^{n^4}\frac{-t\,dt}{(1+t^3)^{n+1}} && \text{(Contribution de } \mathscr{C}_1 \text{ et } \mathscr{C}_2\text{)} \\
&\sim \frac{3^{n+1}}{\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\int_0^{n^{-1/4}}\frac{-t\,dt}{(1+t^3)^{n+1}} && \text{(Segment raccourci)} \\
&\sim \frac{3^{n}}{\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)n^{-2/3}\int_0^{n^{1/4}} u^{-1/3}e^{-u}du && \text{(Approximation gaussienne)} \\
&\sim \frac{3^{n}}{\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)n^{-2/3}\int_0^{\infty} u^{-1/3}e^{-u}du && \text{(Complétion gaussienne)} \\
&\sim \frac{3^n\,n^{-2/3}}{\Gamma(1/3)}.
\end{aligned}$$

5.3.2 Cols coalescents pour $\mathscr{CP}(1,1,1)$

Gardons dans cette section notre exemple de l'urne $\mathscr{CP}(1,1,1)$, et cherchons une expression pour $Y_n(x)$, pour x variable. Le raisonnement de la section précédente s'applique en traitant x comme un paramètre complexe proche de 1. Cette nouvelle dépendance en x sera notée par un indice x dans la suite (h_x et a_x). Partons de l'équation algébrique (5.3) sur $Y(x,z)$, afin d'isoler la variable z en fonction de Y et x. Nous appliquons le changement de variable "à la Lagrange", $z = z(Y)$, puis cherchons les cols à l'infini, en posant $w = 1 - Y^{-1}$. Ainsi la formule de Cauchy pour les coefficients $Y_n(x)$ s'écrit

$$Y_n(x) = \frac{3^{n+1}}{2i\pi} \oint a_x(w) h_x(w)^{n+1}\, dw\,, \tag{5.21}$$

avec

$$a_x(w) = (x^{-1} - w) \qquad \text{et} \qquad h_x(w) = w^{-1}\left(3x^{-1} - (3 + 3/2(x^{-1} - 1))w + w^2\right)^{-1}.$$

La dérivée de h_x est donnée par

$$h'_x(w) = \frac{-12x(w-1)(xw-1)}{w^2(2xw^2 - 3wx - 3w + 6)^2}\,,$$

et s'annule en $w = 1$ et $w = x^{-1}$. Ici, deux point-cols distincts sont situés en $w = 1$ et $w = x^{-1}$. Lorsque x tend vers 1, le second point-col se rapproche de 1, jusqu'à fusionner avec le premier lorsque $x = 1$. De tels point-cols sont dits *coalescents* (Figure 5.4).

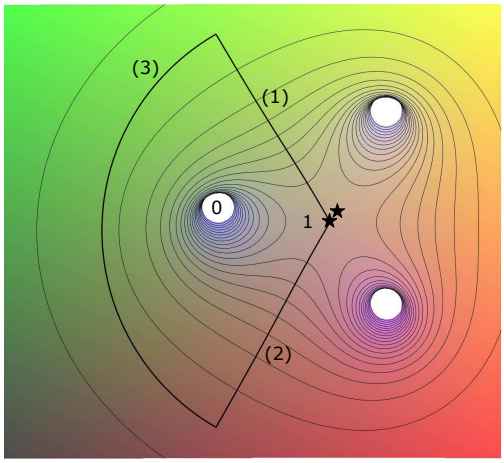


FIGURE 5.4 – Schéma, vu du dessus, des 3 pôles (*trous*) et des deux cols coalescents (*étoiles*), en 1 et en x^{-1} , avec le contour en trois parties $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$.

Nous allons appliquer, dans ce cas particulier, la méthode du point-col en utilisant le même type de contour. Comme précédemment, nous choisissons un contour qui passe par le col en 1, et comme directions de plus grande pente, les mêmes que dans le

cas particulier $x = 1$. Pour trouver un développement asymptotique au voisinage de $w = 1$, nous devons cette fois tenir compte du paramètre x. La clé est d'obtenir un développement asymptotique de $h_x(w)^n$, qui soit valable pour x dans un voisinage de 1, et de choisir la bonne renormalisation pour appliquer le même schéma d'approximation que dans la section précédente. Dans le cas où $x = 1$, la normalisation pour w était en $n^{-1/3}$. Gardons ce facteur. Pour x, nous utilisons une normalisation en $n^{-1/2}$; cela vient du fait que le résultat final est de type gaussien. Le contour de la Figure 5.4 est décrit par :

- $\mathscr{C}_1$: pour $t \in [0, L]$, $w = 1 + (t/n)^{1/3}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$,
- $\mathscr{C}_2$: pour $t \in [0, L]$, $w = 1 + (t/n)^{1/3}\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}$,
- $\mathscr{C}_3$: pour $\theta \in [2\pi/3, 4\pi/3]$, $w = 1 + Le^{i\theta}$.

Avec les mêmes arguments, nous négligeons le contour $\mathscr{C}_3$. Pour les contributions $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, nous approximons l'intégrale sur $[0, L]$ par la même intégrale sur $[0, \ell]$ (segment raccourci, noté SR), avec $L = n^4$ et $\ell = n^{1/4}$. Puis nous appliquons l'approximation trouvée pour $h_x(w)^n$ (HA), et nous complétons l'intégrale pour l'évaluer sur $[0, \infty[$ (complétion gaussienne, notée CG). L'approximation (HA) pour $h_x(w)^n$ est la suivante : pour $w = 1 + (t/n)^{1/3}\, e^{2i\pi/3}$ et $x = e^{iu/\sqrt{n}}$, nous avons

$$\exp\left(n \log\left(h_x(w)\right)\right) = \exp\left(-\frac{3}{8}u^2 + \frac{3}{2}iu\sqrt{n}\right) \exp\left(-t + O\left(n^{-1/3}t^{1/3}u^2\right)\right).$$

De plus, lorsque $t \in [0, n^{1/4}]$, pour tout u, $|u| \leq 1$,

$$\exp\left(n \log\left(h_x(w)\right)\right) = \exp\left(-\frac{3}{8}u^2 + \frac{3}{2}iu\sqrt{n}\right) e^{-t}\left(1 + O\left(n^{-1/4}\right)\right).$$

Il reste à étudier la fonction $a_x(w)$ au voisinage de $w = 1$ avec la même paramétrisation. Nous obtenons l'approximation (AA) suivante

$$a_x(w) = x^{-1} - w \sim -\frac{t^{1/3}}{n^{1/3}} e^{i2\pi/3}.$$

Pour le chemin $\mathscr{C}_1$, tout se résume à cette suite d'approximations :

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathscr{C}_1} a_x(w) h_x(w)^n dw \\
= \quad & \frac{e^{i2\pi/3}}{3} n^{-1/3} \int_0^{n^4} a_u(t) h_u(t)^n \, t^{-2/3} dt \\
\sim \quad & \frac{e^{i2\pi/3}}{3} n^{-1/3} \int_0^{n^{1/4}} a_u(t) h_u(t)^n \, t^{-2/3} dt && \text{(SR)} \\
\sim \quad & -\frac{e^{i4\pi/3}}{3} n^{-2/3} \int_0^{n^{1/4}} t^{-1/3} h_u(t) dt && \text{(AA)} \\
= \quad & -\frac{e^{i4\pi/3}}{3} n^{-2/3} \int_0^{n^{1/4}} t^{-1/3} e^{\left(-\frac{3}{8}u^2 + \frac{3}{2}iu\sqrt{n}\right)} e^{-t} \left(1 + O\left(t^{1/3} n^{-1/3}\right)\right) dt && \text{(HA)} \\
= \quad & -\frac{e^{i4\pi/3}}{3} n^{-2/3} e^{\left(-\frac{3}{8}u^2 + \frac{3}{2}iu\sqrt{n}\right)} \left(\int_0^{\infty} t^{-1/3} e^{-t} dt + O\left(n^{-1/3}\right)\right) && \text{(CG)} \\
= \quad & -\frac{e^{i4\pi/3}}{3} \Gamma(2/3) n^{-2/3} e^{\left(-\frac{3}{8}u^2 + \frac{3}{2}iu\sqrt{n}\right)} \left(1 + O\left(n^{-1/3}\right)\right).
\end{aligned}
$$

La démarche est identique pour $\mathscr{C}_2$, en remplaçant $2i\pi/3$ par $-2i\pi/3$. Le chemin $\mathscr{C}_3$ donne une contribution exponentiellement négligeable, de type $O\left(n^{\alpha} e^{-n^{1/4}}\right)$. Finalement, en ajoutant les trois contributions, l'expression asymptotique pour $Y_n(x)$ est

$$
Y_n(x) \sim \frac{3^n n^{-2/3}}{\Gamma(1/3)} \exp\left(-\frac{3}{8}u^2 + \frac{3}{2}iu\sqrt{n}\right) \left(1 + O\left(n^{-1/3}\right)\right).
$$

De là, nous déduisons $p_n(x) = Y_n(x)/Y_n(1)$, qui s'écrit, pour $x = e^{iu/\sqrt{n}}$ et pour tout u complexe tel que $|u| \leq 1$,

$$
p_n(x) = \exp\left(-\frac{3}{8}u^2 + \frac{3}{2}iu\sqrt{n}\right) \left(1 + O\left(n^{-1/3}\right)\right).
$$

De cette expression découlent les théorèmes limites par application des Quasi-Puissances de H.K. Hwang (Section 1.4). De l'expression $p_n(x)$, nous pouvons aussi directement déduire la limite gaussienne en appliquant le théorème de continuité de Lévy sur les fonctions caractéristiques $p_n(e^{iu/\sqrt{n}})$. La démarche pour obtenir $p_n(x)$ est généralisée à toute urne de la classe $\mathscr{CP}(k, r, b)$ dans la section suivante.

5.3.3 Méthode de col pour toute urne $\mathscr{CP}(k,r,b)$

Le but de l'ensemble des calculs et des approximations de cette section est de comprendre le comportement de la série génératrice de probabilité $p_n(x)$,

$$p_n(x) = \sum_{i\geq 0} \mathbb{P}\left(A_n = i\right) x^i = \frac{[z^n]Y(x,z)}{[z^n]Y(1,z)} = \frac{Y_n(x)}{Y_n(1)}\,. \tag{5.22}$$

Le cas particulier $Y_n(1)$ est très simple, puisque l'équation (5.1) spécifiée à $x = 1$, se résout directement

$$Y(1,z) = (1-\sigma z)^{-1/\sigma}\,.$$

La combinatoire analytique classique (Théorème 2) dérive automatiquement l'expression asymptotique

$$Y_n(1) \sim \frac{\sigma^n\ n^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\Gamma\left(\sigma^{-1}\right)}\,.$$

Pour $x \neq 1$, nous n'avons pas accès à une solution explicite. Mais nous allons obtenir l'asymptotique par une méthode de point-col.

Lemme 1. *Le coefficient de z^n dans la série génératrice des histoires $Y(x,z)$ s'exprime par l'intégrale de contour autour de l'origine,*

$$Y_n(x) = [z^n]Y(x,z) = \frac{\sigma^{n+1}}{2i\pi}\oint a_x(w)\,h_x(w)^{n+1}dw\,, \tag{5.23}$$

où $\sigma = (k+1)r + b$ et

$$h_x(w) = \left[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{\left(x^{-r}-1\right)^i\sigma}{\sigma - ir}\left(1-(1-w)^{\sigma-ir}\right)\right]^{-1}, \tag{5.24}$$

$$a_x(w) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(x^{-r}-1\right)^i(1-w)^{\sigma-ir-2}\,. \tag{5.25}$$

Démonstration. À partir du polynôme annulateur de $Y(x,z)$, exprimé dans l'équation (5.1), nous utilisons la formule de Cauchy (5.11). Cette formule fait intervenir une intégrale contenant $Y(x,z)$ et z. Par inversion de Lagrange[2] entre z et $Y(x,z)$, nous obtenons grâce à (5.1),

$$z(Y) = \sigma^{-1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{\left(x^{-r}-1\right)^i\sigma}{\sigma-ir}\left(1-Y^{ir-\sigma}\right)\,.$$

Si nous utilisions ce changement de variable, nous ne pourrions pas appliquer une méthode de col, car les cols se situeraient à l'infini. Afin de les ramener à distance finie de l'origine, nous choisissons le changement de variable $w = 1 - Y^{-1}$, soit $Y = (1-w)^{-1}$. Pour z proche de 0, $Y(x,z)$ est dans un voisinage de 1, ainsi w est dans un voisinage

2. Des détails sont donnés dans [FS09, Appendix A.6, p.732].

de 0. L'intégration se fait sur un contour autour du pôle 0, et l'expression de dz est donnée par

$$dz = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(x^{-r} - 1\right)^{i} (1-w)^{\sigma - ir - 1}\, dw.$$

Finalement, en sortant un facteur σ^{-1} du z^{n+1} au dénominateur de l'intégrale, et en faisant le changement de variable, nous obtenons l'expression suivante pour $Y_n(x)$:

$$\frac{\sigma^{n+1}}{2i\pi} \oint \frac{\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(x^{-r} - 1\right)^{i} (1-w)^{\sigma - ir - 2}}{\left[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\left(x^{-r}-1\right)^{i} \sigma}{\sigma - ir} \left(1 - (1-w)^{\sigma - ir}\right)\right]^{n+1}} dw\,.$$

□

Nous utilisons les mêmes idées que dans l'exemple $\mathscr{CP}(1,1,1)$ (Section 5.3.1). Pour évaluer l'intégrale de contour, choisissons un contour homotope au cercle centré en 0 et ne comportant qu'un seul pôle, celui en 0. L'intuition du choix de ce contour avec les bonnes normalisations vient de l'exemple [2,1,1,2]. La méthode de col pour $x = 1$ permet de confirmer cette intuition. La Figure 5.5 représente le comportement de $h_1(w)$ ainsi que la manière de choisir le contour.

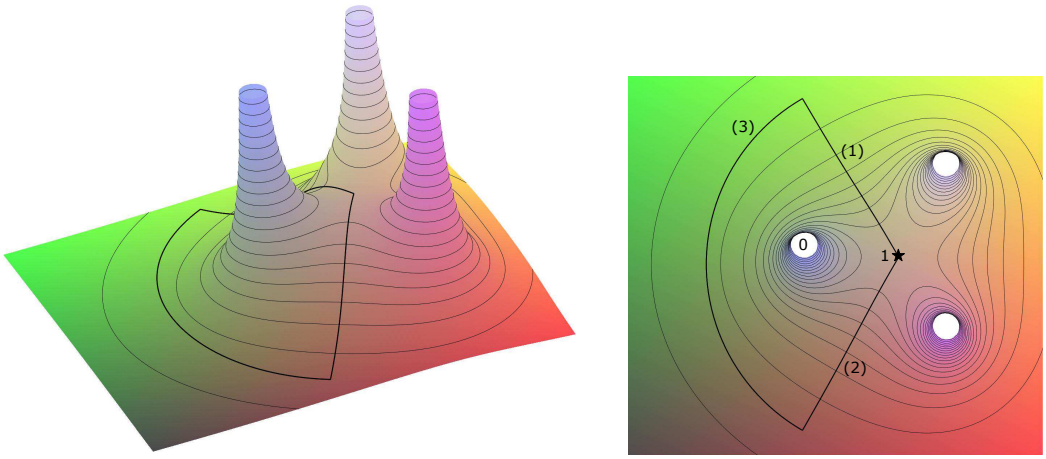


FIGURE 5.5 – *À gauche :* point-col double pour $h_1(w)$ pour l'urne $\mathscr{CP}(1,1,1)$. Les trois *pics* correspondent aux zéros du dénominateur de $h_1(w)$. *À droite :* schéma vu de dessus des trois pôles et du col double en 1, avec le contour en trois parties $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$.

Toute la suite de la section constitue la preuve de la Proposition 17, sur l'asymptotique de $p_n(x)$.

Proposition 18 (Pôles et cols)**.** *Pour x proche de 1, la fonction $h_x(w)$ possède $\sigma = (k+1)r + b$ pôles, dont un pôle simple en $w = 0$ et $\sigma - 1$ autres pôles simples. De plus, cette fonction possède $kr + 1$ point-cols distincts dont un point-col principal en $w = 1$*

avec multiplicité $b+r-1$, ainsi que kr point-cols secondaires, tous simples. Ces point-cols secondaires sont les kr racines du polynôme en w

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x^{-r}-1)^i (1-w)^{(k-i)r} . \tag{5.26}$$

Démonstration. La fonction h_x est rationnelle. Les pôles de h_x sont donnés par les zéros du dénominateur. La fonction $h_x(w)^{-1}$ est un polynôme de degré σ à racines simples, donc les pôles de h_x sont tous simples. De plus, $h_x(0)^{-1}=0$, donc $w=0$ est un pôle. Nous savons également que h_x n'a pas de pôle en $w=1$, localement autour de $x=1$ (par continuité car $h_1(1)=1$). Les point-cols sont situés là où la dérivée de h_x s'annule. Cette dernière s'écrit

$$h_x'(w) = -h_x(w)^2 \times \sigma(1-w)^{b+r-1} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x^{-r}-1)^i (1-w)^{(k-i)r} . \tag{5.27}$$

Nous en déduisons que que h_x' s'annule en $w=1$ avec multiplicité $b+r-1$. La dérivée s'annule également pour les kr racines du polynôme $\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x^{-r}-1)^i (1-w)^{(k-i)r}$. Ces racines ne coïncident pas non plus avec un pôle de la fonction h_x. □

Cols coalescents. Lorsque x tend vers 1, le polynôme (5.26) tend vers $(1-w)^{kr}$. Donc, lorsque x tend vers 1, toutes ces racines tendent vers 1 également. Pour x dans un voisinage de 1, les kr cols secondaires gravitent autour du point $w=1$, et ils fusionnent tous en ce point 1 lorsque x tend vers 1. Pour $x=1$, il n'y a un seul point-col de multiplicité $\sigma-1$. Nous sommes en présence d'un problème de col à $kr+1$ point-cols, tous coalescents. Ce problème diffère de la méthode de col classique où il est possible de traiter séparément les différents point-cols. Ici, nous devons les considérer tous ensemble pour trouver un développement asymptotique. Des phénomènes de cols coalescents apparaissent également dans le contexte des cartes aléatoires [BFSS01], mais les distributions limites ne sont pas gaussiennes et font intervenir la fonction d'Airy.

D'après l'exemple de la Section 5.3.1, nous choisissons les renormalisations suivantes pour x et w. Pour x, la normalisation est de l'ordre de $n^{-1/2}$, typique d'un résultat gaussien. Pour w, le facteur d'échelle est celui obtenu dans le cas particulier $x=1$. Le paragraphe qui suit traite de ce cas, et la normalisation est en $n^{-1/\sigma}$.

Méthode de col pour $x=1$. Dans ce cas particulier, nous avons les fonctions,

$$a_1(w) = (1-w)^{\sigma-2}, \qquad h_1(w) = (1-(1-w)^{\sigma})^{-1}, \qquad h_1'(w) = -\sigma h_1(w)^2 (1-w)^{\sigma-1} .$$

La méthode de col qui s'applique ici est simple et identique à l'Exemple 6, Section 5.3.1, avec la même géométrie. En effet, nous sommes en présence d'un unique col multiple placé en $w=1$ (Figure 5.5). La paramétrisation qui découle est :

- $\mathscr{C}_1 : w = 1 + t \exp\left(i\pi \frac{\sigma-1}{\sigma}\right)$ pour $t \in [0, L]$,

– $\mathscr{C}_2$: $w = 1 + t\exp\left(-i\pi\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)$ pour $t \in [0, L]$,

– $\mathscr{C}_3$: arc de cercle qui complète le contour.

Dans ce cas, nous évaluons l'intégrale en utilisant l'approximation

$$h_1(t)^n = \exp\left(-nt^\sigma + O\left(nt^{2\sigma}\right)\right) .$$

Nous découpons le segment $[0, L] = [0, \ell] \cup [\ell, L]$. En posant $\ell \sim n^{-1/(\sigma+1)}$, nous avons $n\ell^\sigma \to \infty$ et $n\ell^{2\sigma} \to 0$. Cette approximation permet de conclure et de retrouver l'expression connue de $Y_n(1)$.

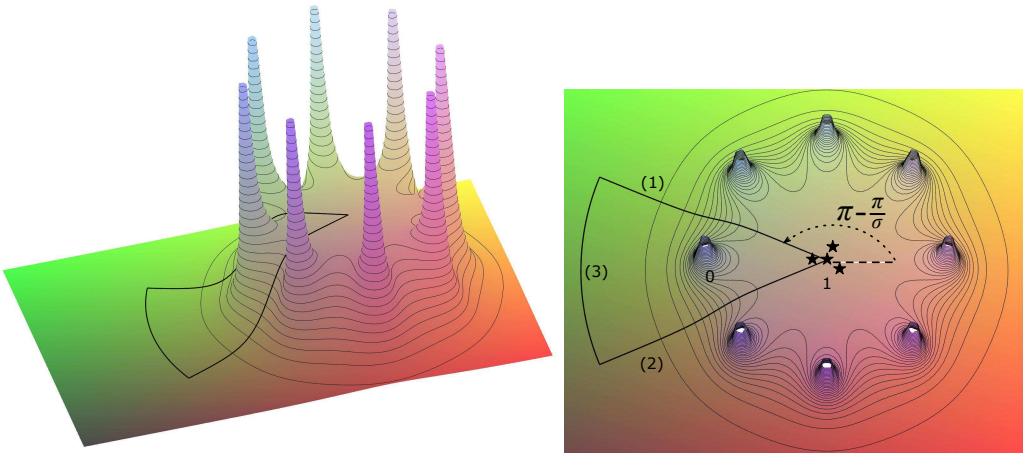


FIGURE 5.6 – *À gauche :* graphe de $|h_x(w)|$ pour l'urne $\mathscr{CP}(1,3,2) = [6,2,3,5]$. Il y a $\sigma = 8$ pôles, et 4 point-cols, au point 1 et aux trois racines α vérifiant l'équation $(1-\alpha)^3 + x^{-3} - 1 = 0$. *À droite :* schéma de point-cols multiples pour $h_x(w)$. Les *trous* (pôles) correspondent aux zéros du dénominateur de $h_x(w)$. Les *étoiles* représentent les différents point-cols (zéros de h'_x). *En noir :* le contour d'intégration autour de 0.

Méthode générale pour le contour. Le choix du contour est similaire à celui du cas particulier $x = 1$. Nous utilisons deux segments partant du point-col $w = 1$, qui suivent les directions de plus grande pente, afin d'englober uniquement le pôle situé en 0. L'angle entre l'axe des abscisses et le segment est alors de $\frac{\pi(\sigma-1)}{\sigma} = \pi - \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\sigma}$, comme nous le voyons sur la Figure 5.6 *à droite*.

Définition 16. *Le contour d'intégration est décrit en trois parties. Pour le segment $\mathscr{C}_1$, la paramétrisation est la suivante : pour $t \in [0, n^2]$,*

$$w = 1 + \left(\frac{t}{n}\right)^{1/\sigma} e^{i\pi\frac{\sigma-1}{\sigma}} . \tag{5.28}$$

La même paramétrisation est utilisée pour le second segment $\mathscr{C}_2$, avec cette fois un angle de $-\pi\frac{\sigma-1}{\sigma}$. La troisième partie, $\mathscr{C}_3$, est un arc de cercle de centre 1 et de rayon n^2 : $w = 1 + n^2 e^{i\theta}$, pour $\theta \in [\frac{\sigma-1}{\sigma}\pi, \frac{\sigma+1}{\sigma}\pi]$.

Proposition 19. *Il existe un développement asymptotique en n pour $h_x(w)^n$, sur le segment $\mathscr{C}_1$, avec $x = \exp\left(iu/\sqrt{n}\right)$,*

$$h_x(w)^n = \exp\left(iu\mu\sqrt{n} - \frac{\nu^2}{2}u^2\right) e^{-t} O\left(F(t,n,u)\right), \tag{5.29}$$

avec

$$F(t,n,u) = \exp\left(k_1 t^A n^{-B} u + k_2 n^{-1/2}\left(k_{21}u^3 + k_{22}ut\right) + k_3 u^2 t^C n^{-C} + k_4 u^2 t^D n^{-D}\right),$$

où

$$A = \frac{kr+b}{\sigma}, \quad B = \frac{(k-1)r+b}{2\sigma}, \quad C = \frac{(k-1)r+b}{\sigma}, \quad \text{et} \quad D = \frac{kr+b}{\sigma}.$$

Les constantes de moyenne μ et variance ν^2 sont

$$\mu = \frac{kr\sigma}{kr+b}, \qquad \nu^2 = \frac{kr^3 b\sigma}{(kr+b)^2((k-1)r+b)} = \mu\frac{r^2 b}{(kr+b)((k-1)r+b)},$$

Validité. Cette expression (5.29) est valide pour tout t dans $[0, n^2]$ et pour tout u. De plus, en posant $x = 1 + iun^{-1/2} - u^2 n^{-1}$, nous obtenons la même approximation. Ainsi, nous utiliserons (5.29) pour tout $|u| < 1$, et nous aurons une expression uniformément pour x proche de 1 à distance inférieure à $n^{-1/2}$. Cette hypothèse est nécessaire pour l'application du théorème des Quasi-Puissances de H.-K. Hwang. Nous utiliserons l'approximation pour x réel proche de 1 afin d'obtenir les bornes sur les grandes déviations. L'expression avec $x = e^{iu/\sqrt{n}}$ implique $|x| = 1$, hypothèse nécessaire pour le théorème sur la loi locale limite. Cela est résumé dans la Figure 1.1 p.20.

Afin d'utiliser l'approximation (5.29), nous cherchons un intervalle $[0, \ell]$ de validité pour t, tel que t tende vers l'infini, et que les quantités suivantes tendent vers 0, pour $n \to \infty$,

$$t^A n^{-B}, \quad tn^{-1/2}, \quad t^C n^{-C}, \quad t^D n^{-D}.$$

En choisissant $\ell = n^{1/(\sigma+1)}$, toutes ces conditions sont réunies. Plus de détails sont donnés en Section 5.3.4.

Lemme 2. *[Segment raccourci] La contribution du segment $\mathscr{C}_1$ est asymptotiquement équivalente sur les deux intervalles, pour $t \in [0, n^2]$ et pour $t \in \left[0, n^{\frac{1}{\sigma+1}}\right]$. Le terme d'erreur est en $O\left(n^\alpha \exp\left(-n^{\frac{1}{\sigma+1}}\right)\right)$, qui est exponentiellement négligeable.*

ESQUISSE DE PREUVE. *(Détails en Section 5.3.4)*. Sur le segment $\mathscr{C}_1$, pour $x = \exp(iu/\sqrt{n})$ et n suffisamment grand, la fonction $h_x(t)$ se comporte comme une fonction réelle et est strictement décroissante pour $t > n^{1/(\sigma+1)}$. □

Lemme 3. *[Approximation gaussienne] L'intégrale sur le segment $\mathscr{C}_1$ s'écrit*

$$\frac{\sigma^n}{2i\pi} e^{i\pi/\sigma} n^{1/\sigma-1} \exp\left(\mu i u\sqrt{n} - \nu^2/2u^2\right) \int_0^\ell t^{-1/\sigma} e^{-t} \left(1 + t^A O(un^{-B})\right) dt \ , \qquad (5.30)$$

avec $\ell = n^{1/\sigma+1}$.

ESQUISSE DE PREUVE. *(Détails en Section 5.3.4)*. Le Lemme 2 permet de passer de l'évaluation sur l'intervalle $[0, L] = [0, n^2]$ à l'intervalle restreint $[0, \ell] = [0, n^{1/\sigma+1}]$. Ensuite, nous appliquons le développement asymptotique de la Proposition 19. De plus, nous devons connaître une expression asymptotique pour $a_x(w)$ sur ce chemin, et nous trouvons, pour $x = \exp\left(iu/\sqrt{n}\right)$

$$a_x(w) \underset{n\to\infty}{\sim} (t/n)^{(\sigma-2)/\sigma} e^{-i\pi(\sigma-2)/\sigma} \ .$$

□

Lemme 4. *[Complétion gaussienne] L'intégrale de la fonction $t^{-1/\sigma}e^{-t}$ sur le segment $[0, n^{\frac{1}{\sigma+1}}]$ est équivalente à la même intégrale sur le segment étendu $[0, \infty[$. L'erreur commise est en $O\left(n^\alpha \exp\left(-n^{\frac{1}{\sigma+1}}\right)\right)$, qui est exponentiellement négligeable.*

Lemme 5. *L'intégrale sur les deux segments $\mathscr{C}_1 \cup (-\mathscr{C}_2)$ a pour expression asymptotique*

$$\frac{\sigma^n n^{1/\sigma-1}}{\Gamma(1/\sigma)} \exp\left(\mu i u\sqrt{n} - \nu^2/2u^2\right) + O(n^{-\frac{\sigma-2r-1}{2(\sigma+1)}}) .$$

ESQUISSE DE PREUVE. *(Détails en Section 5.3.4)*. La contribution de $\mathscr{C}_2$ est similaire à celle de $\mathscr{C}_1$. La différence des deux contributions donne un facteur $\left(e^{i\pi/\sigma} - e^{-i\pi/\sigma}\right)$. Grâce au Lemme 4, la partie intégrale de l'expression (5.30) s'évalue sur l'intervalle $[0, \infty[$ tout entier et se réduit au simple facteur Gamma $\Gamma\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)$. □

Lemme 6. *La partie circulaire $\mathscr{C}_3$ est exponentiellement négligeable (Section 5.3.4).*

En ajoutant toutes les contributions, et grâce aux Lemmes 5 et 6, nous obtenons l'expression globale de $Y_n(x)$ recherchée, où la fonction caractéristique d'une loi gaussienne apparaît dans le facteur exponentiel,

$$Y_n(x) = \frac{\sigma^n n^{1/\sigma-1}}{\Gamma(1/\sigma)} \exp\left(\mu i u\sqrt{n} - \nu^2/2u^2\right) + O\left(n^{-\frac{\sigma-2r-1}{2(\sigma+1)}}\right) .$$

Pour conclure, nous exprimons l'expression de $p_n(x)$ avec x dans un voisinage de 1 de rayon $n^{-1/2}$, et cette expression correspond aux hypothèses du théorème des Quasi-Puissances,

$$p_n(x) = \left(x^\mu \exp\left(\frac{\nu^2}{2}\ln(x)^2\right)\right)^n + O\left(n^{-\frac{\sigma-2r-1}{2(\sigma+1)}}\right) .$$

Pour les trois théorèmes principaux (Théorèmes 10, 11, 12), nous appliquons les théorèmes sur les Quasi-Puissances de H.-K. Hwang : *Quasi-Puissances*, *Quasi-Puissances limite locale* et *Quasi-Puissances grandes déviations* (Théorèmes 4, 5 et 6).

5.3.4 Quelques compléments sur la méthode générale de col

Voici quelques détails supplémentaires sur les lemmes de la section 5.3.3.

a) À propos de la Proposition 19

L'expression asymptotique de $h_x(w)^n$ est valide pour $t \in [0, nL^\sigma]$, où $L = n^{\frac{-1}{\sigma+1}}$. En effet, sur ce segment $[0, nL^\sigma]$, choisissons L tel que $nL^\sigma \to \infty$. Imposons $L = n^{-1/(\sigma+1)}$. Ainsi, $nL^\sigma \sim n^{1/(\sigma+1)} \to \infty$.

De plus, pour t fini, toutes les puissances de n sont négatives dans l'expression de $F(t,n,u)$ et décroissent bien vers 0. Pour $t \sim n^{1/\sigma+1}$,

$$t^A n^{-B} \sim n^{\frac{kr+b}{\sigma(\sigma+1)}} n^{-\frac{(k-1)r+b}{2\sigma}} \sim n^{-\frac{(k-1)r+b-1}{2((k+1)r+b+1)}}.$$

La quantité $(k-1)r+b-1$ est positive grâce aux conditions $b, r, k \geq 1$, donc la quantité $t^A n^{-B}$ tend vers 0.

Nous avons également $t/n \sim n^{1/\sigma+1} n^{-1} \to 0$: les quantités $t^C n^{-C}$ et $t^D n^{-D}$ tendent vers 0. Enfin, $n^{1/\sigma+1} n^{-1/2}$ tend vers 0 car $\sigma \geq 2$.
C'est pourquoi, sur l'intervalle $[0, nL^\sigma] = [0, \ell] = [0, n^{\frac{1}{\sigma+1}}]$, l'approximation de $h_x(w)^n$ est valide.

b) À propos du Lemme 2

Le chemin $\mathscr{C}_1$ doit être suffisamment long en n pour que la partie $\mathscr{C}_3$ soit négligeable. En prenant t dans l'intervalle $[0, n^2]$, le segment $\mathscr{C}_1$, de longueur $\left(n^2 n^{-1}\right)^{1/\sigma} = n^{1/\sigma}$, est suffisamment grand : son extrémité part à l'infini avec n.

Il est possible de restreindre l'évaluation de l'intégrale uniquement sur la partie proche des point-cols, c'est-à-dire pour t dans $[0, n^{\frac{1}{\sigma+1}}]$, soit une longueur effective de l'ordre de $n^{-\frac{1}{\sigma+1}}$.

Lemme 7. *Sur le chemin $\mathscr{C}_1$,la fonction $h_x(t)$ est strictement décroissante pour t tel que $t > n^{\frac{1}{\sigma+1}}$.*

Démonstration. Étudions pour cela la dérivée de h_x par rapport à t. Sur $\mathscr{C}_1$, $dw = \frac{-e^{-i\pi/\sigma}}{\sigma t}(t/n)^{\sigma^{-1}} dt$. D'après (5.27), nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dt} h_x(t) = \frac{1}{t} h_x(t)^2 \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{\sigma}} e^{-i\pi/\sigma} (1-w(t))^{b+r-1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(x^{-r}-1\right)^j (1-w(t))^{r(k-j)}.$$

Les expressions $x^{-r} - 1 = -riun^{-1/2}$ et $1 - w = (t/n)^{1/\sigma} e^{-i\pi/\sigma}$ permettent d'identifier le terme principal en n dans la somme. Tout d'abord, la condition $t > n^{1/(\sigma+1)}$ permet d'avoir $(t/n)^{\sigma^{-1}} > n^{-1/\sigma+1}$. Le facteur $(x^{-r}-1)^j (1-w)^{b+r-1+r(k-j)}$ est de l'ordre de $n^{-kr/(\sigma+1)+j(r/(\sigma+1)-1/2)}$. Comme les conditions $\sigma = (k+1)r+b$ et $k, b \geq 1$ imposent

à la quantité $(r/(\sigma+1)-1/2)$ d'être toujours négative, le terme dominant est obtenu pour $j=0$. Les autres termes de la somme sont négligeables.

Pour n suffisamment grand, nous écrivons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}h_x(t) &= \frac{1}{t}h_x(t)^2\left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{\sigma}} e^{-i\pi/\sigma}(1-w(t))^{kr+b+r-1}(1+o(1)), && (5.31)\\ &= \frac{1}{t}h_x(t)^2\frac{t}{n}e^{-i\pi}(1+o(1)), && (5.32)\\ &= \frac{-h_x(t)^2}{n}(1+o(1)). && (5.33)\end{aligned}$$

De plus, le même raisonnement peut se faire sur $h_x(t)$. Ainsi, nous obtenons pour n suffisamment grand et pour $t > n^{1/(\sigma+1)}$,

$$h_x(t) = (1+\frac{t}{n}+o(1/n))^{-1}.$$

Dans ce cas, $h_x(t)$ est asymptotiquement à valeurs réelles, la partie complexe étant dans le o. Cela permet de parler du signe de la dérivée et par l'expression (5.33), la fonction $h_x(t)$ est donc bien strictement décroissante le long du segment $[t^{1/(\sigma+1)}, n^2]$.

□

Par le Lemme 7, l'intégrale suivante, associée au segment $\mathscr{C}_1$, se majore :

$$\int_{n^{\frac{1}{\sigma+1}}}^{n^2} a_x(t)h_x(t)^n\,dt < n^2 a_x\left(n^{\frac{1}{\sigma+1}}\right)h_x^n\left(n^{\frac{1}{\sigma+1}}\right).$$

Pour $t = n^{\frac{1}{\sigma+1}}$, l'approximation de $h_x(t)^n$ s'applique par la Proposition 19, et nous avons

$$h_x^n\left(n^{\frac{1}{\sigma+1}}\right) \sim \exp\left(\mu i u\sqrt{n} - \frac{\nu^2}{2}u^2\right)\exp\left(-n^{\frac{1}{\sigma+1}}\right) = O\left(e^{-n^{\frac{1}{\sigma+1}}}\right),$$

$$a_x\left(n^{\frac{1}{\sigma+1}}\right) \sim \left(\frac{n^{1/(\sigma+1)}}{n}\right)^{\frac{\sigma-2}{\sigma}} e^{-i\pi\frac{\sigma-2}{\sigma}} = -n^{\frac{2-\sigma}{\sigma+1}}e^{2i\pi/\sigma}.$$

Ainsi, l'intégrale sur le segment $[n^{\frac{1}{\sigma+1}}, n^2]$ est asymptotiquement négligeable, puisqu'elle est de l'ordre de $n^{\alpha}e^{-n^{\frac{1}{\sigma+1}}}$.

c) À propos du Lemme 3

La dernière étape est l'évaluation de l'intégrale sur le segment $[0, n^{1/(\sigma+1)}]$. Regardons tout d'abord la partie concernant $a_x(w)$, avec x et w tels que décrits précédemment. D'après (5.25),

$$a_x(w) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(x^{-r}-1\right)^j(1-w)^{\sigma-jr-2},$$

avec $x^{-r}-1 \sim -riun^{-1/2}$ et $1-w = (t/n)^{1/\sigma}\, e^{-i\pi/\sigma}$. Dans la somme, le terme dominant parmi les $n^{\frac{2-\sigma}{\sigma}+j(r/\sigma-1/2)}$ est obtenu pour $j=0$, les autres étant alors négligeables. En effet, la quantité $r/\sigma - 1/2$ est toujours négative car $\sigma = (k+1)r+b$ et $k, b \geq 1$. Nous avons ainsi,

$$a_x(w) \underset{n\to\infty}{\sim} (t/n)^{(\sigma-2)/\sigma} e^{-i\pi(\sigma-2)/\sigma}\,.$$

Ajoutons l'expression asymptotique de $h_w(w)$ de la Proposition 19, afin d'obtenir pour l'intégrale sur le contour $\mathscr{C}_1$,

$$\frac{\sigma^{n+1}}{2i\pi}\int_0^{n^{1/(\sigma+1)}} \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{\sigma-2}{\sigma}} e^{-i\pi\frac{\sigma-2}{\sigma}} \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \frac{e^{i\pi\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\sigma t} e^{-t} e^{\mu iu\sqrt{n}-v^2/2u^2} \left(1+t^A O(un^{-B})\right) dt\,,$$

qui se récrit :

$$\frac{\sigma^n}{2i\pi} e^{i\pi/\sigma} n^{1/\sigma-1} \exp\left(\mu iu\sqrt{n} - v^2/2u^2\right) \int_0^{1/(\sigma+1)} t^{-1/\sigma} e^{-t} \left(1+t^A O(un^{-B})\right) dt\,.$$

d) À propos des Lemmes 4 et 5

Pour l'évaluation de $\int_0^{\frac{1}{\sigma+1}} t^{-1/\sigma} e^{-t}\, dt$, nous complétons l'intégrale pour avoir $\int_0^\infty$. L'erreur induite est en $O\left(e^{-n^{\frac{1}{\sigma+1}}}\right)$. Finalement, nous obtenons

$$\int_0^\infty t^{-1/\sigma} e^{-t}\, dt = \Gamma\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)\,.$$

e) À propos du Lemme 6

Pour négliger la dernière partie du contour, l'arc de cercle $\mathscr{C}_3$, nous faisons tendre le rayon R de cet arc vers l'infini. Cela est possible car les longueurs des segments $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont de l'ordre de $n^{1/(\sigma+1)}$.

Ainsi dans l'intégrale sur le contour $\mathscr{C}_3$, un facteur R^n provient du dénominateur, ce qui permet de conclure, par convergence dominée, à la convergence vers zéro de cette intégrale.

Chapitre 6

Analyse asymptotique des urnes algébriques à croissance adverse

Nous consacrons ce chapitre à l'étude asymptotique des urnes algébriques à croissance adverse, soient les urnes vérifiant la condition (iii) du Théorème 9, p.67. Nous notons A_n la variable comptant les boules noires dans l'urne après n étapes. Le découpage de ce chapitre est identique au précédent : les résultats obtenus sont similaires, bien que la méthode employée soit différente. Ici, nous n'employons pas de méthode de col, mais une simple analyse de singularités. Les Sections 6.1 et 6.2 comportent les résultats asymptotiques sur la variable aléatoire A_n. La Section 6.3 détaille les preuves par analyse de singularités.

Définition 17 (Urnes à croissance adverse)**.** *Nous désignons par $\mathscr{CA}$ la classe des urnes algébriques à croissance adverse, et $\mathscr{CA}(a,k,p)$ l'urne générique de cette classe,*

$$\mathscr{CA}(a,k,p) = \begin{pmatrix} a & kp-a \\ a+p & (k-1)p-a \end{pmatrix}, \qquad \textit{avec} \quad \begin{array}{l} a \geq 1\,,\ a \neq 0 \mod p\,, \\ p,k \geq 2\,,\ (k-1)p > a. \end{array}$$

Les urnes $\mathscr{CA}$ sont *petites* : la balance σ vaut kp, l'indice de dissimilarité est p et $k \geq 2$, ainsi le rapport $-p/\sigma$ est inférieur à $1/2$. Un résultat gaussien est donc attendu.

Rappel. Soit l'urne $\mathscr{CA}(a,k,p)$ et (a_0,b_0) sa configuration initiale. La série génératrice des histoires $H(x,y,z)$ est entièrement déterminée par la série bivariée $Y(x,z)$ correspondant à la configuration initiale $(0,1)$, dans laquelle la variable redondante y a été fixée à 1. D'après la Proposition 12, p.71, cette fonction $Y(x,z)$ vérifie l'équation algébrique suivante,

$$\left(x^a\, C(x)^k z + Q(x,1)\right)\, (Y^p + C(x))^{a/p}\ Y^{(k-1)p-a} = x^a\, Q(x,Y) \tag{6.1}$$

où $C(x) = x^p - 1$ et $Q(x,Y)$ est le polynôme suivant,

$$Q(x,Y) = \frac{-C(x)^{k-1}}{p(k-1-a/p)} + \sum_{s=1}^{k-1} \left(\frac{(-1)^{s+1}}{p(k-1-a/p)} \prod_{j=0}^{s-1} \frac{k-1-j}{k-2-j-a/p} \right) C(x)^{k-1-s}\, Y^{ps}\,. \tag{6.2}$$

6.1 Moments de A_n

Pour obtenir les différents moments de la variable aléatoire A_n, nous appliquons une méthode classique de combinatoire analytique (Proposition 2, p.17). La démarche a déjà été détaillée dans le chapitre précédent, en Section 5.1.

Proposition 20 (Moments)**.** *Tous les moments factoriels de la variable aléatoire A_n, associée à l'urne $\mathscr{CA}(a,k,p)$ sont calculables automatiquement et ont une expression hypergéométrique (combinaison linéaire finie de produits et quotients de fonctions Gamma évaluées). En particulier, les expressions asymptotiques de la moyenne et de la variance sont*

$$\mathbb{E}(A_n) = \frac{k(p+a)}{k+1}n + \frac{p+a}{p(k+1)} + O\left(\frac{1}{n^{1/k}}\right), \tag{6.3}$$

$$\mathbb{V}(A_n) = \frac{k(p+a)(pk-a)}{(k+1)^2(k+2)}n + \frac{(a+p)(pk-a)}{p(k+1)^2(k+2)} + O\left(\frac{1}{n^{1/k}}\right). \tag{6.4}$$

Démonstration. En différenciant l'équation (6.1) par rapport à x, puis en substituant $x=1$ et en remplaçant $Y(1,z)$ par sa valeur $(1-\sigma z)^{-1/\sigma}$, nous trouvons l'expression

$$\partial_x Y(x,z)|_{x=1} = \frac{k(p+a)}{k+1}(1-\sigma z)^{-1/\sigma-1} \times F\left((1-\sigma z)^{p/\sigma}\right),$$

où la fonction $F(z)$ est un polynôme. L'asymptotique s'en déduit par application du lemme de Flajolet–Odlyzko (Théorème 3, p.18). La variance s'obtient en usant des mêmes manipulations sur la dérivée seconde par rapport à x, $\partial_x^2 Y(x,z)|_{x=1}$. □

Ces calculs de moments—formules exactes et asymptotiques—s'automatisent en MAPLE par l'intermédiaire du package `gfun` [SZ94].

Unification de la structure des moments des urnes $\mathscr{CP}$ et $\mathscr{CA}$. Les résultats obtenus dans les Propositions 14, 15 et 20 peuvent être unifiés dans l'assertion ci-dessous.

Corollaire 3. *Soit une urne $[a,b,c,d]$, équilibrée de balance $\sigma = a+b$ et d'indice de dissimilarité $p = c-a$. Si l'urne est dans la classe $\mathscr{CP}$ ou $\mathscr{CA}$, alors l'expression asymptotique de la moyenne et de la variance est donnée par la formule générale*

$$\begin{aligned} \textit{Moyenne} &\sim \frac{c\,\sigma/p}{(\sigma/p+1)}n, \\ \textit{Variance} &\sim \frac{bc\,\sigma/p}{(\sigma/p+1)^2(\sigma/p+2)}n. \end{aligned}$$

6.2 Résultats asymptotiques

Les propriétés limites de la variable aléatoire A_n, pour la classe d'urnes $\mathscr{CA}$ sont résumées dans le théorème suivant.

Théorème 13. *Soit l'urne $\mathscr{CA}(a,k,p)$ et μ et ν^2 les constantes définies par*

$$\mu = \frac{k(p+a)}{k+1}, \qquad \text{et} \qquad \nu^2 = \frac{k(p+a)(pk-a)}{(k+1)^2(k+2)}.$$

La variable aléatoire A_n associée à l'urne vérifie les trois propriétés asymptotiques :

1. *A_n est de moyenne $\mu_n = \mathbb{E}(A_n) = \mu n + o(n)$, de variance $\nu_n^2 = \nu^2 n + o(n)$, et*

$$\frac{A_n - \mu n}{\nu\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1), \text{ avec vitesse de convergence en } O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

2. *Soit $p_{n,\ell} = \mathbb{P}(A_n = \ell)$; alors A_n satisfait une loi locale limite gaussienne avec vitesse de convergence $O\left(1/\sqrt{n}\right)$, précisément*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \nu\sqrt{n}\, p_{n,\lfloor \mu n + t\nu\sqrt{n}\rfloor} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \right| \le O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

3. *La suite de variables aléatoires (A_n) satisfait une propriété de grandes déviations.*

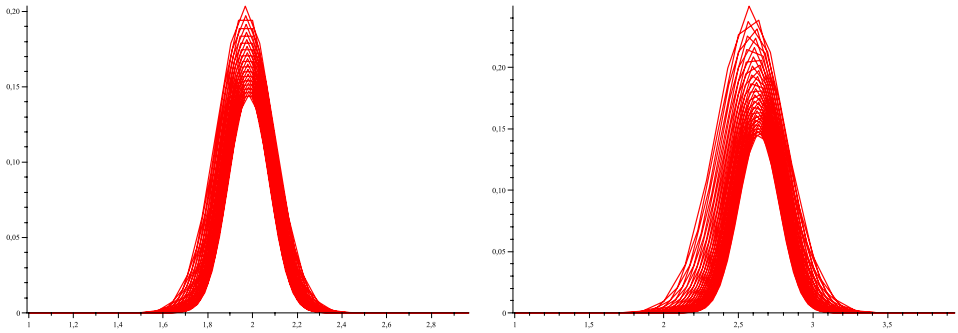


FIGURE 6.1 – Comportement de la fonction génératrice de probabilité $p_n(x)$, pour $n \in [\![30,60]\!]$. Chaque courbe correspond à une fonction $p_n(x)$, qui tend progressivement vers une gaussienne. *À gauche :* l'urne $\mathscr{CA}(1,2,2) = [1,3,3,1]$. *À droite :* l'urne $\mathscr{CA}(1,2,3) = [1,5,4,2]$. Nous observons les moyennes et les variances des variables aléatoires A_n. Pour l'urne $[1,3,3,1]$, nous avons $\mu = 2$ et $\nu^2 = 1/2 = 0.5$. Pour l'urne $[1,5,4,2]$, nous avons $\mu = 8/3 \simeq 2.7$ et $\nu^2 = 10/9 \simeq 1.1$.

Le Théorème 13 s'obtient grâce à la proposition suivante dont la preuve est faite en Section 6.3, qui donne une expression asymptotique de la série génératrice de probabilité

$$p_n(x) = \frac{[z^n]\, Y(x,z)}{[z^n]\, Y(1,z)}.$$

Proposition 21 (Asymptotique de $p_n(x)$)**.** *Pour x dans un voisinage complexe de 1, l'expression de $p_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini est*

$$p_n(x) = \frac{1}{\left(\sigma\rho(x)\right)^{1/\sigma}} \left(\frac{1}{\sigma\rho(x)}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{1/k}}\right)\right), \tag{6.5}$$

où $\rho(x)$ est la singularité principale de la série génératrice $Y(x,z)$. De plus, la fonction $Y(x,z)$ admet le développement asymptotique suivant, pour x dans un voisinage de 1 et pour z dans un voisinage de la singularité principale $\rho(x)$,

$$Y(x,z) = \frac{1}{\left(\sigma\rho(x)\right)^{1/\sigma}} \left(1 - \frac{z}{\rho(x)}\right)^{-1/\sigma} g\left((\sigma\rho(x) - \sigma z)^{1/k}\right), \tag{6.6}$$

où $g(z)$ est une fonction analytique avec $g(0) = 1$. La singularité principale de $Y(x,z)$, notée $\rho(x)$, est donnée par l'expression

$$\rho(x) = \frac{(x-1)^{-k}\left(q_{k-1}x^a - Q(x,1)\right)}{x^a\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}\right)^k}, \tag{6.7}$$

où le numérateur est effectivement un polynôme, i.e. le polynôme $\left(q_{k-1}x^a - Q(x,1)\right)$ est divisible par $(x-1)^k$.

6.3 Analyse asymptotique par analyse des singularités

Pour cette classe d'urnes, la méthode utilisée est l'analyse asymptotique classique lorsque l'on est en présence de fonctions génératrices algébriques [FS09, VII.7]. Nous recherchons les singularités possibles de la fonction $Y(x,z)$, puis nous recherchons un développement asymptotique de $Y(x,z)$ au voisinage de la singularité principale. Pour les fonctions algébriques, cela s'obtient par un calcul de résultant puis par un développement de Newton–Puiseux. Cette section est entièrement consacrée à la preuve de la Proposition 21.

6.3.1 Un aperçu de la méthode

Regardons l'exemple de l'urne $\mathscr{C}\mathscr{A}(1,2,2) = [1,3,3,1]$. La méthode adoptée ici s'automatise pour toute urne de la classe $\mathscr{C}\mathscr{A}$. Pour cette urne, le polynôme minimal $P(Y,x,z)$ de la série génératrice $Y(x,z)$ est

$$\begin{aligned} P(Y,x,z) = {} & \left(z\left(x^3 + 2x^2 + x\right) - 1\right)\left(z\left(x^3 - 2x^2 + x\right) - 1\right)Y^4 \\ & + \left(x^2 - 1\right)\left(z\left(x^3 + 2x^2 + x\right) - 1\right)\left(z\left(x^3 - 2x^2 + x\right) - 1\right)Y^2 - x^2. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Le résultant des polynômes $P(Y,x,z)$ et $\partial_Y P(Y,x,z)$ est

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(P, \partial_Y P) = {} & -16x^2\left(z\left(x^3 + 2x^2 + x\right) - 1\right)^4 \\ & \times \left(z\left(x^3 - 2x^2 + x\right) - 1\right)^4\left((x^5 - 2x^3 + x)z - x^2 - 1\right)^4. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Les singularités possibles sont dans l'ensemble des zéros de $\mathrm{Res}(P, \partial_Y P)$,

$$\left\{ \frac{1}{x(x-1)^2} \,;\, \frac{1}{x(x+1)^2} \,;\, \frac{x^2+1}{x(x-1)^2(x+1)^2} \right\}.$$

Dans cet ensemble, deux quantités divergent lorsque x tend vers 1. Le seul candidat possible est donc $\rho(x) = 1/(x(x+1)^2)$. De plus, $\rho(1) = 1/4 = \sigma^{-1}$. Cette expression de $\rho(x)$ est bien égale à l'expression suivante,

$$\frac{(x-1)^{-2}(-2x - Q(x,1))}{x(1+x)^2} \quad \text{avec} \quad Q(x,Y) = -(x^2-1) - 2Y^2 .$$

Une fois la singularité principale identifiée, nous effectuons un développement de Newton–Puiseux au voisinage de la singularité. Pour cela, nous nous ramenons à une étude en $(0,0)$ et posons $W = Y^{-1}$ et $Z = 1/(x(x+1)^2) - z$. Ainsi, pour z proche de $\rho(x)$, nous avons $(W,Z) \sim (0,0)$. Nous faisons ce changement de variable dans le polynôme $P(Y,x,z)$, et nous lions les variables W et Z en posant $W = \kappa Z^\alpha(1+o(1))$. Après changement de variable dans $P(Y,x,z)$, nous trouvons

$$\begin{aligned} P(W,x,Z) &= x^2\kappa^4 Z^{4\alpha} + \left(4\kappa^2x^2 - 4\kappa^2x^4\right) Z^{1+2\alpha} \\ &\quad + \left(\kappa^2x^2 - 3\kappa^2x^4 + 3\kappa^2x^6 - \kappa^2x^8\right) Z^{2+2\alpha} + \left(2x^4 - x^6 - x^2\right) Z^2 - 4x^2 Z . \end{aligned} \tag{6.10}$$

Observons les différents exposants asymptotiques obtenus :

$$Z, \quad Z^2, \quad Z^{2+2\alpha}, \quad Z^{1+2\alpha}, \quad Z^{4\alpha} .$$

Pour que l'approximation $W \sim \kappa Z^\alpha$ soit vérifiée, il faut que l'ordre asymptotique principal soit nul dans $P(W,x,Z)$. Pour cela, deux exposants doivent s'identifier et le coefficient associé doit être nul. Par ailleurs, les autres exposants doivent être plus grands, pour que les termes asymptotiques associés soient plus petits. Comme 2, $2+2\alpha$ et $1+2\alpha$ sont strictement plus grands que 1, nécessairement $4\alpha = 1$. Pour $\alpha = 1/4$, le coefficient devant Z est $x^2(\kappa^4 - 4)$. Pour l'annuler, il faut prendre $\kappa^4 = 4$. Nous optons pour le réel $\kappa = 4^{1/4}$, afin de choisir la branche réelle. Cela permet d'écrire $W = 4^{1/4}\left(\rho(x) - z\right)^{1/4}(1+o(1))$. Finalement, le développement asymptotique de $Y(x,z)$ pour x proche de 1 et pour z proche de $1/(x(x+1)^2)$ est

$$Y(x,z) = \left(\frac{4}{x(x+1)^2} - 4z \right)^{-1/4} (1+o(1)) .$$

L'asymptotique bivariée est une perturbation du cas univarié,

$$Y(1,z) \sim \left(1 - z/\rho(1)\right)^{-1/4} \quad \text{et} \quad Y(x,z) \sim \left(4\rho(x)\right)^{-1/4} \left(1 - z/\rho(x)\right)^{-1/4} .$$

Pour toutes les urnes $\mathscr{C}\mathscr{A}$, nous obtenons une telle expression asymptotique. Les trois sous-sections à venir détaillent la démarche dans le cas général.

6.3.2 Polynôme annulateur et singularités

Nous travaillons sur un polynôme annulateur de $Y(x,z)$. L'équation algébrique (6.1) possède des facteurs non polynomiaux dus à l'extraction de racines p-ièmes. En élevant à cette puissance p, nous obtenons le polynôme annulateur, noté $P(Y,x,z)$,

$$P(Y,x,z) = Y^{(k-1)p^2-ap}\,(Y^p + C(x))^a\,\left(x^a\,C(x)^k\,z + Q(x,1)\right)^p - (x^a\,Q(x,Y))^p\,. \tag{6.11}$$

Le polynôme $P(Y,x,z)$ se développe

$$P(Y,x,z) = c_0(x,z)Y^\delta + c_1(x,z)Y^{\delta-p} + \ldots + c_{p(k-1)}(x,z)\,,$$

avec $\delta = p^2(k-1)$, et $c_0(x,z)$ est un polynôme non identiquement nul. Les singularités possibles de $Y(x,z)$ apparaissent là où le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas sur l'équation $P(Y(x,z),x,z) = 0$. Les éventuelles singularités sont donc dans l'ensemble $S(x)$ défini par l'équation en z :

$$\mathrm{Res}_Y\left(P(Y,x,z)\,;\,\partial_Y P(Y,x,z)\right) = 0\,,$$

où le résultant est un polynôme en x et z. Les singularités possibles $s_1(x)$, $s_2(x)$, ... dans $S(x)$ possèdent toutes un facteur irréductible $(x-1)^{-1}$, toutes sauf une que nous noterons $\rho(x)$. Mise à part $\rho(x)$, toutes les singularités partent à l'infini lorsque l'on fait tendre x vers 1. Nous travaillons donc avec x proche de 1 afin qu'il ne reste qu'une singularité possible pour $Y(x,z)$, qui est $\rho(x)$. Il suffit pour cela de prendre x tel que $\rho(x)$ devienne la singularité de module minimal,

$$|\rho(x)| \leq \min\left\{|s_1(x)|,\,|s_2(x)|,\,\ldots\right\}\,.$$

Cette singularité possible $\rho(x)$ vérifie

$$\rho(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \sigma^{-1} = \rho(1)\,,$$

et σ^{-1} est bien la singularité principale de la fonction univariée $Y(1,z) = (1-\sigma z)^{-1/\sigma}$. Enfin, $\rho(x)$ est une racine de $c_0(x,z)$.

6.3.3 La singularité principale $\rho(x)$

Le polynôme $P(Y,x,z)$ est de degré $p^2(k-1)$ et son coefficient dominant est

$$c_0(x,z) = \left(x^a\,C(x)^k\,z + Q(x,1)\right)^p - \left(x^a\,q_{k-1}\right)^p\,, \tag{6.12}$$

avec q_{k-1} le coefficient dominant du polynôme $Q(x,Y)$,

$$q_{k-1} = \frac{(-1)^k}{p\,(k-1-a/p)}\prod_{j=0}^{k-2}\frac{k-1-j}{k-2-j-a/p}\,.$$

Ce polynôme est non identiquement nul, car $c_0(x,0) = Q(x,1)^p - x^{ap} q_{k-1}^p \neq 0$. La singularité principale de $Y(x,z)$ annule le coefficient dominant, $c_0(x,\rho(x)) = 0$. Soit $\beta(x)$ une racine de $c_0(x,z)$. Alors, d'après (6.12),

$$\left(\frac{x^a C(x)^k \beta(x) + Q(x,1)}{x^a q_{k-1}} \right)^p = 1 .$$

Nous pouvons écrire toute racine $\beta(x)$ comme

$$\beta(x) = \frac{x^a q_{k-1} e^{2i\ell\pi/p} - Q(x,1)}{x^a (x^p - 1)^k}, \quad \text{avec} \quad \ell \in [\![0, p-1]\!] .$$

Nous recherchons la singularité principale, qui par le théorème de Pringsheim, est réelle pour la série génératrice à coefficients positifs $Y(x,z)$. Ainsi, l'expression de $\rho(x)$ s'obtient en prenant la racine $\beta(x)$ avec $\ell = 0$.

Il reste à montrer que cette singularité est bien finie lorsque x tend vers 1. Notons $N(x)$ et $D(x)$ les polynômes numérateurs et dénominateurs de $\rho(x)$,

$$\rho(x) \quad = \quad \frac{N(x)}{D(x)} \quad = \quad \frac{q_{k-1} x^a - Q(x,1)}{x^a (x^p - 1)^k} .$$

En étudiant les dérivées successives de $N(x)$, nous vérifions que

$$N(1) = N'(1) = \ldots = N^{(k)}(1) = 0 , \qquad \text{et} \qquad N^{(k+1)}(1) \neq 0 .$$

Ainsi, le numérateur se factorise,

$$x^a q_{k-1} - Q(x,1) = (x-1)^k R(x), \quad \text{avec} \quad R(1) = p^k \sigma^{-1} .$$

La singularité $\rho(x)$ s'écrit

$$\rho(x) = \frac{R(x)}{x^a \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}\right)^k}, \qquad \text{et} \qquad \rho(1) = \frac{p^k \sigma^{-1}}{1 \times p^k} = \frac{1}{\sigma} .$$

6.3.4 Développement de Newton–Puiseux

La fonction $Y(x,z)$ tend vers l'infini lorsque nous nous plaçons au voisinage de la singularité $z = \rho(x)$. Afin de déterminer un développement de Newton–Puiseux au voisinage de la singularité, nous nous ramenons à un point singulier en $(0,0)$. Pour cela, nous effectuons les changements de variable suivants, $W = 1/Y$ et $Z = \rho(x) - z$. Plaçons-nous au point $(W,Z) = (0,0)$ et regardons le polynôme $P(Y,x,z) = F(W,x,Z)$. Pour ce nouveau polynôme F, le développement de Newton–Puiseux consiste à poser $W = \kappa Z^\alpha (1 + o(1))$, avec $\kappa \neq 0$. Avec cette écriture, nous identifions les deux plus petits exposants du polynôme F. Dans notre cas, pour que les deux plus petits termes coïncident, il faut imposer deux conditions, $\alpha\sigma = 1$ et $\kappa^\sigma = \sigma$. Cela permet d'identifier le premier terme du développement asymptotique de W. Nous avons σ possibilités

pour le choix de la constante κ. Nous traitons de combinatoire avec la série $Y(x,z)$, et la seule branche qui fait sens est la branche réelle. Pour κ, nous choisissons donc la valeur réelle positive $\kappa = \sigma^{1/\sigma}$. Ainsi, $W = (\sigma Z)^{1/\sigma}(1+o(1))$. Nous pouvons itérer cette démarche afin d'obtenir les termes suivants du développement asymptotique. Puis, en revenant aux variables z et Y, nous obtenons

$$Y(x,z)^{-1} = \left(\sigma\rho(x) - \sigma z\right)^{1/\sigma} f\left((\sigma\rho(x) - \sigma z)^{1/k}\right),$$

où $f(z)$ est une fonction analytique avec $f(0) = 1$. Nous vérifions sur cette expression que ce développement est un prolongement du développement pour la fonction univariée $Y(1,z) = (1-\sigma z)^{-1/\sigma}$. Pour x dans un voisinage de 1 et pour z dans un voisinage de $\rho(x)$, nous avons le développement asymptotique,

$$Y(x,z) = \left(\sigma\rho(x)\right)^{-1/\sigma}\left(1 - \frac{z}{\rho(x)}\right)^{-1/\sigma} g\left((\sigma\rho(x) - \sigma z)^{1/k}\right),$$

où $g(z)$ est une fonction analytique avec $g(0) = 1$. Ainsi, les coefficients s'obtiennent par lemme de transfert (Théorème 3) : pour n suffisamment grand,

$$[z^n]Y(x,z) = \left(\sigma\rho(x)\right)^{-1/\sigma} \frac{\rho(x)^{-n} n^{1/\sigma - 1}}{\Gamma\left(\sigma^{-1}\right)}\left(1 + O\left(\frac{1}{n^{1/k}}\right)\right).$$

La fonction génératrice de probabilité s'exprime alors

$$p_n(x) = \frac{[z^n]Y(x,z)}{[z^n]Y(1,z)} = \left(\sigma\rho(x)\right)^{-1/\sigma}\left(\sigma\rho(x)\right)^{-n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n^{1/k}}\right)\right),$$

ce qui permet d'appliquer le théorème des Quasi-Puissances de H.-K. Hwang (Section 1.4) et d'en déduire

1. une convergence vers une loi gaussienne avec vitesse de convergence ;
2. une loi locale limite ;
3. des bornes de grandes déviations.

Pour cela, les fonctions $A(x)$ et $B(x)$ des Théorèmes 4, 5, 6 sont

$$A(x) = \left(\sigma\rho(x)\right)^{-1/\sigma},$$
$$B(x) = \left(\sigma\rho(x)\right)^{-1}.$$

Ainsi, $A(1) = B(1) = 1$, A et B sont analytiques, et les constantes μ et ν^2 de moyenne et variance sont données par les formules suivantes,

$$\mu = B'(1) = \frac{k(p+a)}{k+1} \qquad \text{et} \qquad \nu^2 = B''(1) + B'(1) - B'(1)^2 = \frac{k(p+a)(pk-a)}{(k+1)^2(k+2)}.$$

Les seconds termes (termes constants) dans des expressions de $\mathbb{E}(A_n)$ et $\mathbb{V}(A_n)$, (6.3) et (6.4), se retrouvent par les formules

$$A'(1) = \frac{p+a}{p(k+1)} \qquad \text{et} \qquad A''(1) + A'(1) - A'(1)^2 = \frac{(p+a)(pk-a)}{p(k+1)^2(k+2)}.$$

L'approximation de $p_n(x)$ est donnée avec une erreur en $O(n^{-1/k})$. Comme $k \geq 2$, nous avons $n^{-1/k} \gg n^{-1/2}$. Les vitesses de convergence des lois limites données par les théorèmes de Quasi-Puissances sont donc en $O(1/\sqrt{n})$.

Quatrième partie

Applications et extensions des modèles d'urnes

Chapitre 7

Urnes additives et réseaux sociaux

Dans les chapitres précédents, la combinatoire analytique a permis d'analyser le comportement asymptotique des urnes de Pólya équilibrées selon certaines conditions : soit l'urne $[a, b, c, d]$ possède un ou des coefficients négatifs sur la diagonale, soit l'urne comporte des zéros [FDP06], soit l'urne n'a que des coefficients strictement positifs avec une série génératrice algébrique (Partie III).

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux urnes équilibrées additives $[a, b, c, d]$ où $a, b, c, d \geq 0$ et $\sigma = a+b = c+d > 0$ et $p > 0$. L'étude se divise en deux parties. Dans la Section 7.1, nous établissons une formule générale explicite pour la série génératrice des histoires $H(x, y, z)$. La Section 7.2 comporte deux exemples d'applications, dont le second exemple est développé dans la Section 7.3 : la classe d'urne étudiée est reliée à une structure combinatoire, les k-arbres ordonnés croissants. Une étude asymptotique complète est menée permettant de déduire des résultats limites sur ces structures combinatoires, utilisées dans la modélisation de réseaux (web, réseaux sociaux, ...).

7.1 Urnes équilibrées additives avec $p > 0$

Dans cette section, nous considérons une urne de Pólya

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad a, d \geq 0, \ b, c > 0, \quad \sigma > 0 \quad \text{et} \quad p > 0, \tag{7.1}$$

où $\sigma = a + b = c + d$ et $p = c - a = b - d$. Pour une telle urne, la proposition suivante donne une expression explicite de la série génératrice des histoires $H(x, y, z)$.

Proposition 22. *Pour une urne de Pólya $[a, b, c, d]$ vérifiant (7.1) de configuration initiale (a_0, b_0), la série génératrice $H(x, y, z)$ vérifie*

$$H(x, y, z) = \left(y^p - x^p\right)^{(a_0+b_0)/p} S_{r,\lambda}\left(\omega(x, y, z)\right)^{-a_0/\sigma} \left[1 + S_{r,\lambda}\left(\omega(x, y, z)\right)^{-p/\sigma}\right]^{b_0/\sigma}, \tag{7.2}$$

où

$$\omega(x, y, z) = J_{r,\lambda}\left(\left((y/x)^p - 1\right)^{\sigma/p}\right) - \sigma z \left(y^p - x^p\right)^{\sigma/p}.$$

Les fonctions $J_{r,\lambda}$ et $S_{r,\lambda}$ sont définies par

$$J_{r,\lambda}(u) = \int_0^u \frac{dw}{\left(1 + w^{p/\sigma}\right)^{b/p}} \qquad \textit{et} \qquad S_{r,\lambda}(J_{r,\lambda}(u^\sigma)) = u^\sigma \,,$$

avec

$$r = \frac{p}{\sigma} \qquad \textit{et} \qquad \lambda = \frac{b}{p} \,. \tag{7.3}$$

Cette proposition et sa preuve sont fortement inspirées des travaux de P. Flajolet, P. Dumas et V. Puyhaubert dans [FDP06]. Dans l'article, les auteurs donnent le même genre de formule pour $a \leq -1$.

Démonstration. Soit une telle urne (7.1) et soit (a_0, b_0) la configuration initiale. Nous repartons de l'expression de la série génératrice des histoires $H(x, y, z)$ exprimée par (2.3), des fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ du système différentiel (2.4), et de l'intégrale première (2.10). Posons la quantité $\Delta = \Delta(x, y) = \left(y^p - x^p\right)^{1/p}$. Ainsi, l'intégrale première (2.10) s'écrit $Y(t)^p - X(t)^p = \Delta^p$. La première étape consiste en le changement de variable suivant,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X(t) & = & \Delta \times \xi(t\,\Delta^\sigma) \;, \\ Y(t) & = & \Delta \times \eta(t\,\Delta^\sigma) \;, \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \xi(0) & = & x\,\Delta^{-1} \;, \\ \eta(0) & = & y\,\Delta^{-1} \;. \end{array} \right.$$

Le système différentiel (2.4)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{X} & = & X^{a+1}\,Y^b \;, \\ \dot{Y} & = & X^c\,Y^{d+1} \;, \end{array} \right.$$

devient le système découplé suivant,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\xi} & = & \xi^{a+1}\,(\xi^p + 1)^{b/p} \;, \\ \dot{\eta} & = & \eta^{d+1}\,\left(\eta^p - 1\right)^{c/p} \;. \end{array} \right.$$

En intégrant par exemple la première équation du nouveau système, nous avons

$$t = \int_{x\Delta^{-1}}^{\xi(t)} \frac{v^{-a-1}\,dv}{(1 + v^p)^{b/p}} \,.$$

Effectuons le changement de variable $w = v^{-\sigma}$ afin d'obtenir

$$\sigma t = \int_{\xi(t)^{-\sigma}}^{\left(x^{-1}\Delta\right)^\sigma} \frac{dw}{\left(1 + w^{p/\sigma}\right)^{b/p}} \,.$$

Définissons ici la fonction $J_{r,\lambda}$, pour $r = p/\sigma$ et $\lambda = b/p$,

$$J_{r,\lambda}(u) = \int_0^u \frac{dw}{(1 + w^r)^\lambda} \,.$$

Ainsi définie, la fonction $J_{r,\lambda}$ n'est pas analytique ; cependant, la fonction $u \mapsto J_{r,\lambda}(u^\sigma)$ l'est autour de 0, ce qui sera suffisant pour notre étude. Nous pouvons définir l'inverse $S_{r,\lambda}$ tel que $S_{r,\lambda}(J_{r,\lambda}(u^\sigma)) = u^\sigma$. Les développements partiels au voisinage de 0 sont donnés par

$$\begin{cases} J_{r,\lambda}(u) &= u - \dfrac{\lambda}{r+1}u^{r+1} + \dfrac{\lambda(\lambda+1)}{2(2r+1)}u^{2r+1} + O\left(u^{3r+1}\right) \quad , \\ S_{r,\lambda}(z) &= z + \dfrac{\lambda}{r+1}z^{r+1} + \dfrac{\lambda(3\lambda r + \lambda - r - 1)}{2(r+1)(2r+1)}z^{2r+1} + O\left(z^{3r+1}\right) \quad . \end{cases}$$

Grâce à ces fonctions, il est possible d'exprimer $\xi(t)$ et $\eta(t)$,

$$\begin{cases} \xi(t) &= S_{r,\lambda}\left(-\sigma t + J_{r,\lambda}\left(\Delta^\sigma x^{-\sigma}\right)\right)^{-1/\sigma} , \\ \eta(t) &= \left[1 + S_{r,\lambda}\left(-\sigma t + J_{r,\lambda}\left(\Delta^\sigma x^{-\sigma}\right)\right)^{-p/\sigma}\right]^{1/p} . \end{cases}$$

Pour conclure la preuve, la fonction $H(x,y,z)$ donnée par (2.3) se récrit avec ces changements de variable en

$$H(x,y,z) = \Delta^{a_0+b_0}\,\xi\left(z\Delta^\sigma\right)^{a_0}\,\eta\left(z\Delta^\sigma\right) .$$

□

Par la suite, nous posons sans perte de généralité $y = 1$.

Validité pour $z = 0$. Dans le cas $z = 0$, la fonction $\omega(x,y,z)$ devient $J_{r,\lambda}(\Delta^\sigma x^{-\sigma})$, avec $\Delta = (y^p - x^p)^{1/p}$. Par définition de $S_{r,\lambda}$, nous avons $S_{r,\lambda}(J_{r,\lambda}(\Delta^\sigma x^{-\sigma})) = \Delta^\sigma x^{-\sigma}$. De plus, $1 + \Delta^{-p}x^p = y^p\Delta^{-p}$. Ainsi, pour toute valeur de x, y,

$$H(x,y,0) = \Delta^{a_0+b_0}\,\Delta^{-a_0}x^{a_0}\,y^{b_0}\Delta^{-b_0} = x^{a_0}y^{b_0} .$$

Validité pour $x \to 0$. Dans notre cas (urne additive), $x = 0$ signifie qu'il n'y a pas de boule de type x dans l'urne. Cela ne peut se produire qu'à l'étape initiale si on démarre avec $a_0 = 0$, et dans aucun autre cas. On s'attend donc à obtenir $H(0,1,z) = 1$ si $a_0 = 0$, et 0 sinon.

Tout d'abord, $\Delta(0,1) = 1$, ainsi Δx^{-1} tend vers l'infini. Evaluons $J_{r,\lambda}(\infty)$. Lorsque w tend vers l'infini, nous avons l'approximation :

$$(1 + w^{p/\sigma})^{-\beta/p} \sim w^{-\beta/\sigma} .$$

De plus, nous avons $0 < \beta/\sigma \leq 1$, ce qui permet de conclure que $J_{r,\lambda}(\infty) = \infty$. Par réciprocité, $S_{r,\lambda}(\infty) = \infty$. De (7.2), nous déduisons en prenant la limite pour $x \to 0$ que si $a_0 = 0$, alors $H(0,1,z) = 1$ et si $a_0 = 1$, alors $H(0,1,z) = 0$.

Validité pour $x \to 1$. Si x tend vers 1, alors la quantité Δ tend vers 0. Dans ce cas, $J_{r,\lambda}(\Delta^\sigma x^{-\sigma}) \sim \Delta^\sigma$. Comme $S_{r,\lambda}(z) \sim z$ pour z proche de 0, nous avons les approximations suivantes,

$$S_{r,\lambda}(-\sigma z \Delta^\sigma + J_{r,\lambda}(\Delta^\sigma x^{-\sigma})) \quad \sim \quad S_{r,\lambda}(\Delta^\sigma(1-\sigma z)) \quad \sim \quad \Delta^\sigma(1-\sigma z)\,.$$

Le dernier facteur nécessaire s'écrit

$$\begin{aligned}\left(1+S_{r,\lambda}(-\sigma z\Delta^\sigma + J_{r,\lambda}(\Delta^\sigma x^{-\sigma}))^{-p/\sigma}\right)^{b_0/p} &\sim \left(1+\Delta^{-p}(1-\sigma z)^{-p/\sigma}\right)^{b_0/p}\\ &\sim \Delta^{-b_0}(1-\sigma z)^{-b_0/\sigma}\,.\end{aligned}$$

En rassemblant toutes ces approximations pour x proche de 1, nous obtenons

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} H(x,1,z) &= \Delta^{a_0+b_0}\left(\Delta^\sigma(1-\sigma z)\right)^{-a_0/\sigma}\left(\Delta^{-p}(1-\sigma z)^{-p/\sigma}\right)^{b_0/p}\\ &= (1-\sigma z)^{-(a_0+b_0)/\sigma}.\end{aligned}$$

Finalement, $\lim_{x\to 1} H(x,1,z) = H(1,1,z)$.

7.2 Quelques exemples d'urnes additives avec $p > 0$

Voyons sur quelques exemples l'application de la Proposition 22.

7.2.1 Le cas $\sigma = 1$, $p = 1$

L'exemple le plus simple possible dans ce contexte est l'urne dite de Friedman

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, les quantités r, λ et Δ deviennent

$$r = 1\,, \qquad \lambda = 1\,, \qquad \Delta = y - x\,.$$

La fonction $J_{1,1}$ et sa réciproque $S_{1,1}$ s'écrivent

$$J_{1,1}(u) = \int_0^u \frac{dw}{1+w} = \ln(1+u) \qquad \text{et} \qquad S_{1,1}(z) = \exp(z) - 1\,.$$

Ainsi les fonctions de base ξ et η s'expriment facilement,

$$\xi(t) = \frac{x}{ye^{-t} - x} \qquad \text{et} \qquad \eta(t) = \frac{y}{y - xe^t}\,.$$

Cela permet de retrouver les résultats bien connus pour l'urne de Friedman [FDP06],

$$X(z) = \frac{x(y-x)}{ye^{z(x-y)} - x} \qquad \text{et} \qquad Y(z) = \frac{y(y-x)}{y - xe^{z(y-x)}}\,.$$

7.2.2 Le cas $\sigma = 2$, $p = 1$

Pour $\sigma = 2$ et $p = 1$, la seule matrice vérifiant les conditions (7.1), à symétrie près, est

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, nous avons $r = 1/2$, $\lambda = 2$ et $\Delta = y - x$. Les fonctions $J_{1/2,2}$ et $S_{1/2,2}$ sont

$$\begin{aligned} J_{1/2,2}(u) &= \int_0^u \frac{dw}{(1+w^{1/2})^2} = 2\left(\ln\left(1+u^{1/2}\right) + \frac{1}{1+u^{1/2}}\right), \\ S_{1/2,2}(z) &= \left(e^{L\left(-e^{-z/2}\right)+z/2} - 1\right)^2, \end{aligned}$$

où la fonction L est la fonction "W de Lambert", qui vérifie $L(z)e^{L(z)} = z$. Les expressions de ξ et η en découlent,

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \frac{e^{t+\ln(x)-x}}{\exp\left(L\left(-e^{t+\ln(x)-x}\right)\right) - e^{t+\ln(x)-x}}, \\ \eta(t) &= \frac{\exp\left(L\left(-e^{t+\ln(x)-x}\right)\right)}{\exp\left(L\left(-e^{t+\ln(x)-x}\right)\right) - e^{t+\ln(x)-x}}. \end{aligned}$$

La série génératrice $H(x,1,z)$ s'exprime de façon explicite par

$$H(x,1,z) = (1-x)^{a_0+b_0} \times \xi\left(z(1-x)^2\right)^{a_0} \times \eta\left(z(1-x)^2\right)^{b_0}.$$

Nous verrons dans la section suivante que cette urne est reliée à des structures combinatoires connues, les arbres dits *PORT*. Ils sont aussi appelés *arbres planaires croissants de Catalan* (Section 7.3). L'étude asymptotique faite en Section 7.3 se base sur une écriture implicite de la série génératrice $H(x,y,z)$.

7.2.3 Une classe d'urnes non algébrique

Regardons maintenant une classe d'urnes plus générale, pour $k \geq 0$,

$$\begin{pmatrix} k-1 & 2 \\ k & 1 \end{pmatrix}.$$

La section suivante détaille le lien avec les structures de k-arbres ordonnés croissants. Ces urnes sont suspectées non algébriques par notre approche GUESS'N'PROVE. Le caractère non algébrique est confirmé par l'algorithme de Liouville, pour tous les entiers k inférieurs à 100. Enfin, cette classe d'urne a un indice $p = 1$ et ne vérifie pas les conditions de notre classification (Théorème 9, p.67). Cette classe a toutes les chances de ne pas être algébrique, ce qui est confirmé par l'expression de sa série génératrice, dans la Section 7.3.

Pour $k = 0$, nous retrouvons l'urne des *PORT*. Ici, $\sigma = k+1$, $p = 1$, $r = \sigma^{-1}$, $\lambda = 2$, $\Delta = y - x$. Les fonctions $J_{1/\sigma,2}$ et $S_{1/\sigma,2}$ possèdent le développement limité suivant pour u et z proche de 0,

$$J_{1/\sigma,2}(u) = \int_0^u \frac{dw}{(1+w^{1/\sigma})^2} = u - \frac{2\sigma}{\sigma+1} u^{1+1/\sigma} + O\left(u^{1+2/\sigma}\right),$$

$$S_{1/\sigma,2}(z) = z + \frac{2\sigma}{\sigma+1} z^{1+1/\sigma} + O\left(z^{1+2/\sigma}\right).$$

La série génératrice associée à l'urne est

$$H(x,1,z) = \Delta^{a_0+b_0} S_{1/\sigma,2}\left(-\sigma z \Delta^\sigma + J_{1/\sigma,2}\left(\Delta^\sigma x^{-\sigma}\right)\right)^{-a_0/\sigma} \times \left(S_{1/\sigma,2}\left(-\sigma z \Delta^\sigma + J_{1/\sigma,2}\left(\Delta^\sigma x^{-\sigma}\right)\right)^{-1/\sigma} + 1\right)^{b_0}. \quad (7.4)$$

Nous faisons une analyse asymptotique de ces urnes dans la section suivante. Il est à noter que l'analyse repose sur une expression implicite de la série génératrice $H(x,y,z)$.

7.3 Urnes et k-arbres

Dans cette dernière section, nous analysons une classe d'urnes additives non algébriques, modélisant des structures arborescentes : les k-arbres. Après avoir défini ces structures combinatoires ainsi que les urnes associées, nous obtenons une équation fonctionnelle sur la série génératrice des histoires. L'analyse de singularité permet ensuite de dériver des théorèmes sur la loi limite du nombre de boules noires. Mais commençons par motiver l'étude de cette classe d'urnes.

Les k-arbres croissants sont un modèle simple pouvant refléter l'évolution du web. Les pages web sont numérotées dans leur ordre de création, et lorsqu'une nouvelle page web est créée, elle possède des liens vers k pages web déjà existantes. Le choix de ces pages web "mères" est considéré uniforme. Les 1-arbres ordonnés croissants correspondent davantage aux réseaux sociaux, avec un modèle d'attachement préférentiel : plus une personne est influente (plus ses connaissances sont élevées), plus elle a de chance d'attirer un nouvel utilisateur (Figure 7.1). Les k-arbres ordonnés croissants correspondent au même type d'évolution, mais l'attachement se fait directement sur une clique de k utilisateurs (un groupe de k personnes qui se connaissent). C'est ce dernier modèle que nous allons étudier. D'autres types de k-arbres sont étudiés dans [Dar10] et [DHBS10].

7.3.1 La modélisation des k-arbres par une urne 2×2

L'article de A. Panholzer et G. Seitz [PS10] est à l'origine de ce travail. Les auteurs travaillent sur un modèle de réseaux à grande échelle : *les k-arbres ordonnés croissants*

et étudient un certain nombre de paramètres, avec des méthodes analytiques. Certaines formules, similaires à celles trouvées lors de travaux sur les urnes analytiques, nous ont poussé à faire le lien entre les deux modèles.

Définition 18. *Un* k-arbre *se construit récursivement : soit c'est une k-clique (graphe complet à k sommets) ; soit il existe un sommet* f *tel que* f *a exactement k voisins qui forment une k-clique, et* $T \backslash f$ *est un k-arbre.*
On parle de k-arbre ordonné *si on peut mettre un ordre sur les fils d'une même k-clique : on a un premier fils, un deuxième, ... Cela équivaut à introduire une notion de gauche et droite pour les fils d'une même k-clique.*
Enfin, la notion de croissance *est la même que pour les arbres classiques : on étiquette tous les sommets de l'arbre, et un sommet fils doit avoir une étiquette plus grande que tous ses parents (ici, un sommet fils a k sommets parents, qui forment une k-clique). On parle alors de* k-arbre ordonné croissant.
Une k-clique est sans descendance lorsqu'elle n'a pas de sommet fils. Pour $k = 1$*, on retrouve la définition des arbres planaires croissants de Catalan (dits PORT) (Figures 7.1 et 7.2).*

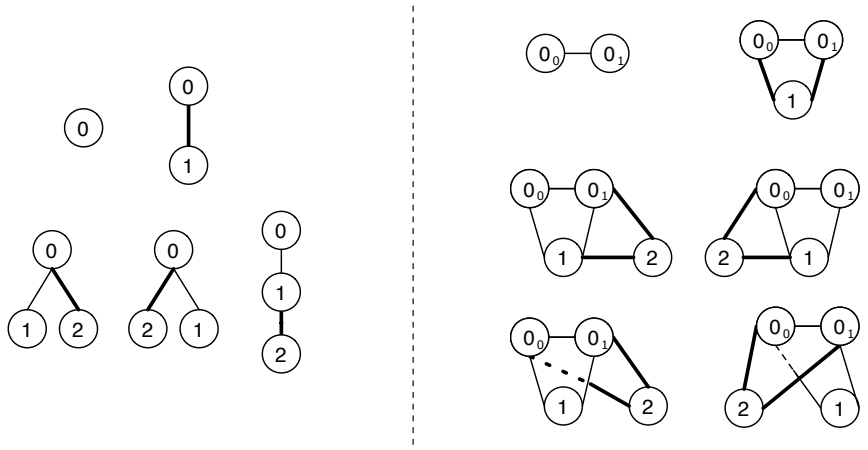


FIGURE 7.1 – *À gauche :* 1-arbres ordonnés croissants, ou arbres planaires croissants de Catalan de taille 0, 1, et 2. *À droite :* 2-arbres ordonnés croissants de taille 0, 1 et 2. À chaque fois, les attachements du nouveau sommet sont indiqués en gras.

Dans toute la suite, nous utiliserons la terminologie *k-arbre* pour désigner les k-arbres ordonnés croissants. Nous cherchons donc à décrire la croissance d'un k-arbre par un modèle d'urne. Pour cela, deux types de boules sont nécessaires : □ marque la possibilité de branchement à une clique sans descendance, et ■ marque les autres possibilités de branchement (à des cliques ayant au moins un descendant). Le plus petit k-arbre possible est simplement une k-clique, que l'on nommera k-clique *racine*. Elle est composée de k sommets tous reliés, notés $0_1, \ldots, 0_k$. Cette k-clique racine a une seule possibilité de croissance : c'est l'ajout d'un sommet étiqueté par 1, relié à tous les sommets racines. Cette première étape correspond à la configuration initiale

de notre modèle d'urne : au départ, l'urne ne contient qu'une boule □. D'après la règle de construction des k-arbres ordonnés croissants, nous avons les règles suivantes pour notre urne bicolore : à l'étape n,

- le tirage d'une boule □ correspond au choix d'une k-clique K sans descendance. En ajoutant à celle-ci un sommet fils étiqueté par n, cela va créer k nouvelles k-cliques sans descendance, chacune contenant le nouveau sommet n et $(k-1)$ sommets de K. Cela crée donc k boules □. En revanche, il faut enlever l'ancienne boule tirée □, puisque désormais la clique K a un fils, le sommet n. Ensuite, il faut ajouter deux boules ■, correspondant aux nouvelles possibilités d'attachement à K : à gauche ou à droite du sommet n. Finalement, $(k-1)$ boules □ et deux boules ■ sont ajoutées.
- si une boule ■ est tirée, le principe est le même ; en ajoutant un nouveau sommet n, cela donne k nouvelles k-cliques sans descendance, chacune contenant ce sommet feuille n ; k boules □ sont donc ajoutées. Et deux nouvelles possibilités d'attachement apparaissent : à gauche ou à droite du nouveau sommet n, soit deux autres boules ■. Enfin, il faut enlever la boule tirée, d'où un bilan de k boules □ ajoutées, et une ■.

L'urne correspondant aux k-arbres est ainsi

$$\mathscr{U}_k = \begin{pmatrix} k-1 & 2 \\ k & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

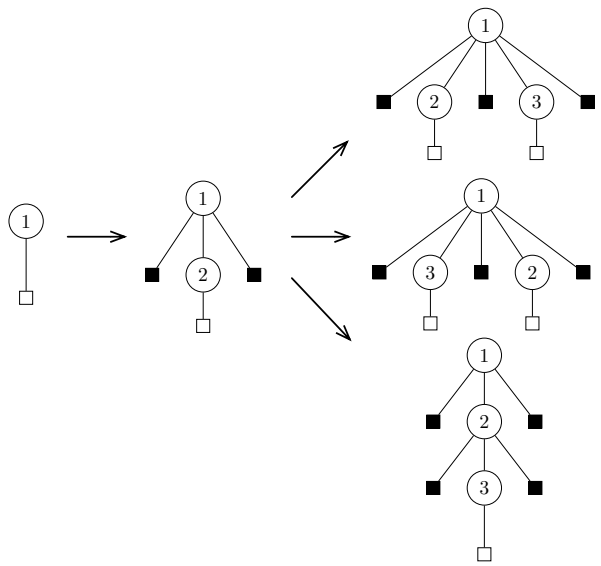


FIGURE 7.2 – 1-arbres ordonnés croissants, ou arbres planaires croissants de Catalan de taille 1, 2, et 3, avec les boules représentées, correspondant aux différentes possibilités d'ajouter un sommet.

Voici une proposition préliminaire sur la forme de la fonction génératrice.

Proposition 23. *La fonction génératrice bivariée $X(x,z)$ des histoires de l'urne $\mathscr{U}_k$, vérifie*

$$K_k(u) - z = \frac{k}{u^{k+1}}\left(\ln(X-u) - \ln(X)\right) + \frac{1}{u^k\,(X-u)} + \frac{k-1}{u^k\,X} + \frac{k-2}{2u^{k-1}\,X^2} + \ldots + \frac{1}{(k-1)u^2\;X^{k-1}}\,, \tag{7.6}$$

avec

$$K_k(u) = \frac{-k}{u^{k+1}}\ln(1+u) + \frac{1}{(k-1)u^2(u+1)^{k-1}} + \ldots + \frac{k-1}{u^k(u+1)} + \frac{1}{u^k}\,, \tag{7.7}$$

et $u = x-1$.

Démonstration. La configuration initiale est $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. Par le Théorème 8,

$$H(x,z) = X(x,z)\,.$$

Le système différentiel associé est : $\dot{X} = \dot{Y} = X^k Y^2$. Ainsi, $\dot{Y}Y^{-2} = X^k$. Par intégration puis inversion, $Y(z) = (1 - \int_0^z X^k(w)dw)^{-1}$. En posant $y = 1$,

$$X(z) = Y(z) + x - 1 = x - 1 + \frac{1}{1 - \int_0^z X^k(w)dw}\,.$$

Pour résoudre l'équation, posons

$$u = x - 1\,.$$

Ainsi, $(X-u)^{-1} = 1 - \int_0^z X^k(w)dw$. Par dérivation par rapport à z,

$$\frac{\dot{X}}{X^k(X-u)^2} = 1\,.$$

La décomposition en éléments simples suivie d'une intégration terme à terme donne le résultat. □

Cela confirme le caractère non algébrique de la série génératrice H (Section 7.2.3).

Description combinatoire. Définissons $T(z) = X(z)$ et $S(z) = \int_0^z X^k(w)dw$, ce qui permet d'obtenir la description suivante :

$$T(z) = \frac{1}{1-S(z)} \quad \text{et} \quad S'(z) = T(z)^k\,, \quad \text{avec} \quad T(0) = 1, \quad S(0) = 0\,.$$

Nous retrouvons ainsi la description combinatoire des k-arbres : $X = \textsc{Seq}(Z^{\square} \star X^k)$, en utilisant les règles de combinatoire symbolique classique [FS09, Part A]. Ici, $Z^{\square} \star X^k$ est le produit d'un atome étiqueté et de k éléments de X.

Pour l'étude de cette urne $\mathscr{U}_k$, la démarche adoptée est la suivante : nous traitons tout d'abord le cas $k = 1$ en détail. Ceci donne lieu à une loi limite gaussienne (Théorème 14), à une loi locale limite (Théorème 15), et à un principe de grandes déviations (Théorème 16). Cela est ensuite généralisé à tous les cas dans la dernière partie, ce qui donne le théorème général (Théorème 17).

7.3.2 Loi normale, loi locale limite et grandes déviations pour les 1-arbres

Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de boules $\square$ dans l'urne $\mathscr{U}_1$ après n étapes. Cela correspond, dans le cas $k = 1$, au nombre de feuilles dans un $PORT$ de taille n : les 1-cliques sans descendance dans un 1-arbre sont les feuilles.

Théorème 14. *(Loi limite normale) La variable aléatoire X_n a une moyenne μ_n et une variance ν_n^2, et la variable aléatoire normalisée $\frac{X_n-(2/3)n}{\sqrt{n/3}}$ converge en loi vers une loi gaussienne centrée réduite $\mathscr{N}(0,1)$, avec vitesse de convergence $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Plus précisément, les formules sont les suivantes,*

$$\mu_n = \mathbb{E}(X_n) = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3} + O\left(\frac{1}{n}\right) \ , \quad \nu_n^2 = \mathbb{V}(X_n) = \frac{1}{9}n + \frac{1}{18} + O\left(\frac{1}{n}\right) ,$$

$$\mathbb{P}\left\{\frac{X_n - \frac{2}{3}n}{\sqrt{\frac{n}{9}}} \leq t\right\} = \Phi(t) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) , \quad \text{où} \quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv\,.$$

Théorème 15. *(Loi limite locale) Notons $p_{n,\ell} = \mathbb{P}\{X_n = \ell\}$. La distribution des X_n satisfait une loi locale limite de type gaussienne avec vitesse de convergence $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, i.e.*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sqrt{n}}{3}p_{n,\lfloor 2n/3+t\sqrt{n}/3\rfloor} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\right| \leq O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) .$$

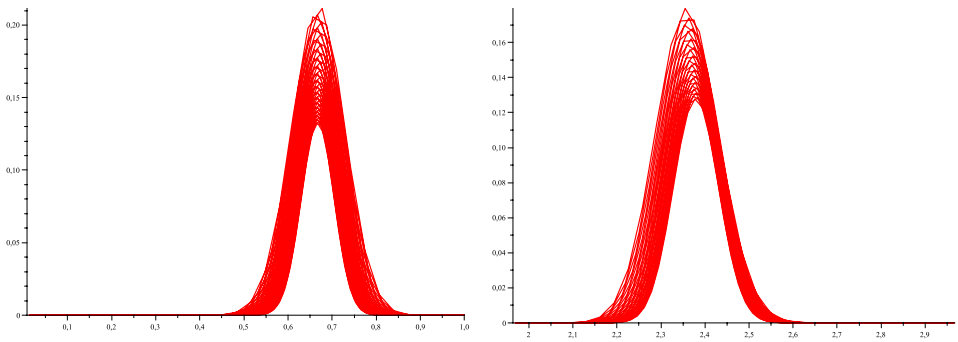


FIGURE 7.3 – Comportement de la fonction génératrice de probabilité $p_n(x)$, pour $n \in [\![30, 60]\!]$. Chaque courbe correspond à une fonction $p_n(x)$. Plus n grandit, plus la courbe se rapproche d'un comportement gaussien. *À gauche :* évolution de $p_n(x)$ pour l'urne des 1-arbres ($PORT$), $[0, 2, 1, 1]$. *À droite :* évolution de $p_n(x)$ pour l'urne des 3-arbres, $[2, 2, 3, 1]$. Nous observons les moyennes des variables aléatoires X_n. Pour les 1-arbres, la moyenne est de $2/3 \simeq 0.67$. Pour les 3-arbres, la moyenne est de $12/5 = 2.4$ (point 1 du Théorème 17).

Nous obtenons également un résultat de grandes déviations sur la variable aléatoire étudiée X_n.

Théorème 16. *Pour tout ξ vérifiant $0.1 < \xi < 1$, la suite de variables aléatoires X_n satisfait une propriété de grandes déviations relative à l'intervalle $[t_0, t_1]$, avec un facteur d'échelle n, et un taux de grandes déviations $W(t)$, avec $x_0 = \xi,\ x_1 = 2 - \xi$,*

$$t_0 = x_0 \frac{B'(x_0)}{B(x_0)} \qquad \text{et} \qquad t_1 = x_1 \frac{B'(x_1)}{B(x_1)}$$

$$W(t) = -\min_{x \in [x_0, x_1]} \log\left(\frac{B(x)}{x^t}\right), \qquad \text{où} \qquad B(x) = \frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{x - 1 - \ln(x)}.$$

La suite X_n vérifie

$$\forall t,\ t_0 < t < \frac{2}{3}, \qquad \frac{1}{n}\log \mathbb{P}(X_n \le tn) = -W(t) + o(1) \quad \textit{(queue gauche)}$$

$$\forall t,\ \frac{2}{3} < t < t_1, \qquad \frac{1}{n}\log \mathbb{P}(X_n \ge tn) = -W(t) + o(1) \quad \textit{(queue droite)}.$$

Pour $\xi = 0.1$, nous obtenons $t_0 = 0.42$ et $t_1 = 0.735$, et $W(t)$ est représenté au centre sur la Figure 7.5.

Méthode probabiliste. Le fait que $\frac{X_n - (2/3)n}{\sqrt{n/3}}$ converge en loi vers une loi gaussienne centrée réduite est un résultat déjà connu, dont la démonstration fait appel à des méthodes probabilistes, [Mah08, p.160] et [Mah03]. Pour toute la classe d'urnes, comme $p = 1$ et $\sigma = k + 1$, la quantité $-p/\sigma < 1/2$; ce sont des petites urnes, donc le comportement gaussien est connu d'après [Jan04].

Ici, les démonstrations de ces théorèmes reposent sur les théorèmes des Quasi-Puissances (Section 1.4). Le point clé est l'obtention d'une approximation de la fonction génératrice de probabilité de X_n, définie par :

$$p_n(x) = \frac{[z^n]X(x,z)}{[z^n]X(1,z)}.$$

Pour le théorème des Quasi-Puissances (Th. 4), il faut une approximation uniforme dans un voisinage de $x = 1$. Pour obtenir la loi locale limite (Th. 5), il s'agit d'étudier en plus étudier sur tout le cercle unité $|x| = 1$, afin d'obtenir une borne sur $p_n(x)$, (Figure 1.1, p.20). Pour les grandes déviations (Th. 6), une expression de $p_n(x)$ est nécessaire pour x réel sur un segment autour de 1. Nous nous référons au schéma récapitulatif, Figure 1.1, p.20.

Les variables z et $u = x - 1$ nous permettent d'étudier le comportement de la fonction X dans un voisinage de 1 pour x.

Proposition 24. *Soit $\widetilde{X}(z,u) = 1 + \dfrac{u}{X(z,u) - u}$. Alors $\widetilde{X}$ vérifie*

$$\widetilde{X} e^{-\widetilde{X}} = e^{-1} e^{-u^2(K(u) - z)}, \qquad \textit{avec} \qquad K(u) = -\frac{1}{u^2}\ln(1+u) + \frac{1}{u}. \tag{7.8}$$

Démonstration. (Proposition 24) Reprenons l'équation (7.6) avec $k = 1$,

$$z - K(u) = -\frac{1}{u^2}\ln(X-u) - \frac{1}{u}\frac{1}{X-u} + \frac{1}{u^2}\ln(X) = -\frac{1}{u^2}\ln\left(1-\frac{u}{X}\right) + \frac{1}{u}\frac{1}{X-u}.$$

$K(u)$ est la constante d'intégration déterminée par la condition initiale $X(x,0) = x$. Nous trouvons $K(u) = -\frac{1}{u^2}\ln(1+u) + \frac{1}{u}$. Par le changement de variable $\widetilde{X} = 1 + \dfrac{u}{X-u}$, i.e. $X = \dfrac{-u\widetilde{X}}{1-\widetilde{X}}$, nous obtenons une écriture plus appropriée :

$$1 + u^2(K(u) - z) = \widetilde{X} - \ln(\widetilde{X}).$$

En composant par l'exponentielle, l'équation fonctionnelle pour $\widetilde{X}$ est la suivante,

$$\widetilde{X}\exp(-\widetilde{X}) = \exp(-1 - u^2(K(u) - z)).$$

□

Influences arborescentes. Remarquons que lorsque u tend vers 0 (i.e. $x \to 1$), nous avons $K(u) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{u}{3} + o(u)$. De plus, l'équation vérifiée par $\widetilde{X}$ introduit la fonction $x \mapsto xe^{-x}$, inverse de la fonction d'arbre.

Définition 19 (Définition – Propriété)**.** *[FS09, p.403] Considérons la fonction $f(y) = ye^{-y}$. La fonction inverse de f est T, la fonction d'arbre. La fonction T est définie pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < e^{-1}$. En fait, T est analytique sur $\mathbb{C}$ privée de la demi-droite $\left[e^{-1}, \infty\right[$, et vérifie*

$$T(z) = 1 - \sqrt{2}(1-ez)^{1/2} + \frac{2}{3}(1-ez) + O\left((1-ez)^{3/2}\right),$$

$$T(e^{-1}) = 1 \qquad \textit{et} \qquad T(0) = 0.$$

La fonction T est appelée fonction d'arbre car $T(z) = ze^{T(z)}$ et la description combinatoire des arbres est $\mathscr{T} = \mathscr{Z}\,\textsc{Set}(\mathscr{T})$ [1].

Lemme 8. *Pour tout u dans un voisinage de 0 et z dans un Δ-domaine $\Delta(\varphi, R)$ en $K(u)$, nous avons*

$$X(u,z) = (2K(u) - 2z)^{-1/2} - \frac{2}{3}u + \frac{1}{12}u^2\sqrt{2K(u) - 2z} + u^2 \cdot o(\sqrt{2K(u) - 2z}). \quad (7.9)$$

Notons que lorsque u tend vers 0 (i.e. $x \to 1$), nous retrouvons la fonction génératrice classique d'une urne de balance 2, $(1-2z)^{-1/2}$.

1. Cela correspond à la description des arbres non planaires étiquetés, dits arbres de Cayley (méthode symbolique [FS09, Part A]).

Démonstration. (Lemme 8) Nous normalisons $\widetilde{X}$ en effectuant le changement de variable suivant $z := K(u)\,z$. Ainsi (7.8) se récrit

$$\widehat{X_u}(z) = \widetilde{X}(zK(u)) \qquad \text{et} \qquad \widehat{X_u}(z)e^{-\widehat{X_u}(z)} = e^{-1}\exp(-u^2K(u)(1-z)).$$

Nous notons $\alpha(u,z) = e^{-1}\exp(-u^2K(u)(1-z))$. Si $\alpha(u,z)$ est dans un domaine valide, nous pouvons écrire $\widehat{X}_u = T(\alpha(u,z))$. Discutons alors de la validité de l'inverse. Commençons par fixer un Δ-domaine pour z, $\Delta(\varphi,R)$ en 1 et voyons ce qu'il devient par la transformation $\alpha(u,z)$. Par $z \mapsto -(1-z)$, nous obtenons $\Delta(\varphi,R)$ en 0 ; puis $\Delta(\varphi,u^2K(u)R)$ en 0, après multiplication par $u^2K(u)$. Enfin, en composant par l'exponentielle, nous avons $\Delta(\varphi,\exp(u^2K(u)R))$ en 1. Ainsi, pour u assez petit, le Δ-domaine est inclus dans le domaine de validité de l'approximation de T. Il est alors possible d'avoir une approximation de $\widehat{X}_u$ valide pour u dans un voisinage de 0, et z dans le Δ-domaine fixé $\Delta(\varphi,R)$ en 1 :

$$\widehat{X}(u,z) = 1-\sqrt{2}(1-e^{-u^2K(u)(1-z)})^{1/2} + \frac{2}{3}(1-e^{-u^2K(u)(1-z)}) + O((1-e^{-u^2K(u)(1-z)})^{3/2}).$$

Mais nous avons les approximations suivantes,

$$1-e^{-s} = s+O(s^2), \qquad \sqrt{1-e^{-s}} = \sqrt{s}+O(s^{3/2}), \qquad (1-e^{-s})^{3/2} = O(s^{3/2}).$$

Finalement,

$$\widehat{X}(u,z) = 1-\sqrt{2}(u^2K(u)(1-z))^{1/2} + \frac{2}{3}(u^2K(u)(1-z)) + O\left((u^2K(u)(1-z))^{3/2}\right).$$

Donc, en revenant à $X(u,z)$,

$$X(u,z) = (2K(u)-2z)^{-1/2} - \frac{2}{3}u + \frac{1}{12}u^2\sqrt{2K(u)-2z} + u^2\cdot o\left(\sqrt{2K(u)-2z}\right).$$

□

Lemme 9. *La fonction génératrice de probabilité de la variable aléatoire X_n qui compte le nombre de boules □ après n étapes est donnée, pour u dans un voisinage de 0, par*

$$p_n(u) = \left(\frac{1}{2K(u)}\right)^{n+1/2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{7.10}$$

Démonstration. (Lemme 9) Appliquons maintenant l'analyse de singularité : la singularité principale est en $z = K(u)$. Alors asymptotiquement, en reprenant le résultat du Lemme 8,

$$n!\,[z^n]\,X(u,z) = \frac{K(u)^{-n}}{\sqrt{2K(u)}}\frac{n^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Et la probabilité $p_n(u)$ est $\dfrac{n!\,[z^n]\,X(u,z)}{n!\,[z^n]\,X(0,z)}$, d'où,

$$p_n(u) = \left(\frac{1}{2K(u)}\right)^{n+1/2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

□

Le Lemme 9 permet de conclure la preuve du Théorème 14, par application du Théorème 4.

Démonstration. (Théorème 14) Le Lemme 9 est l'hypothèse principale pour appliquer le théorème des Quasi-Puissances (Théorème 4). Il reste à vérifier la condition de "variabilité". Soit $B(u) = (2K(u))^{-1}$. Alors, $B(0) = 1$, B est analytique dans un voisinage de 0 et

$$B''(0) + B'(0) - (B'(0))^2 = 1/9 \neq 0\,, \qquad B'(0) = \frac{2}{3}\,.$$

□

Loi locale limite.

Démonstration. (Théorème 15) Regardons ce qui se passe lorsque x se promène sur le cercle unité tout entier : $|x| = 1$, i.e. $u = -1 + e^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Par le Lemme 9, nous avons une approximation de la fonction génératrice de probabilité $p_n(x)$, pour x dans un petit voisinage $\mathscr{V}$ de 1. Il reste à majorer $p_n(x)$ lorsque $|x| = 1$ et x en dehors de $\mathscr{V}$. Nous utilisons la même stratégie que dans la démonstration du Lemme 8. Remarquons que pour tout x de module 1, $-u^2K(u)$ est bien défini et est borné : $|-u^2K(u)| < 4$, et une simple analyse de fonction justifie cette inégalité illustrée par la Figure 7.4, à gauche. Par l'approximation de $p_n(u)$, on déduit que pour n suffisamment grand : $|p_n(u)| < (2K(u))^{-n-1/2}(1+\varepsilon)$. Pour tout x de module 1 et hors du voisinage $\mathscr{V}$, nous avons $2K(u) > \kappa > 1$ (voir Figure 7.4, *à droite*), nous bornons $p_n(u)$, pour n suffisamment grand, $|p_n(u)| < \kappa^{-n}$. Toutes les hypothèses du théorème de Loi-locale-limite sont ainsi vérifiées (Théorème 5, p.22). □

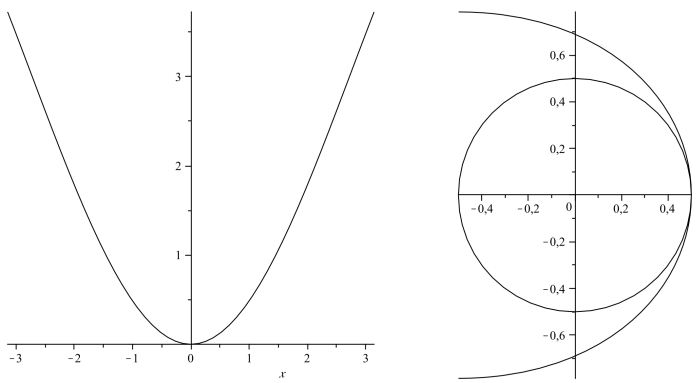


FIGURE 7.4 – *À gauche :* graphe de $|u^2K(u)|$ pour $|u+1| = 1$. *À droite :* graphe de $K(u)$ et cercle de rayon $1/2$ pour $|u+1| = 1$.

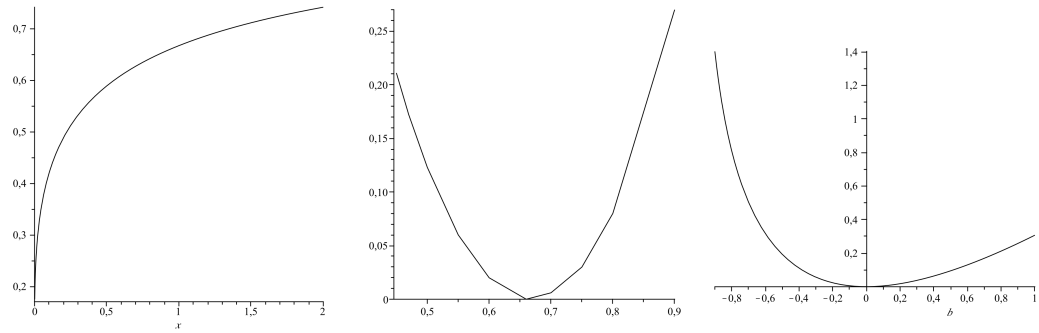


FIGURE 7.5 – *À gauche :* graphe de $x \mapsto xB'(x)/B(x)$. *Au centre :* graphe de $W(t)$. *À droite :* graphe de $u \mapsto u^2K(u)$ pour $u \in]-0.9\,,\,0.9[$.

Grandes déviations.

Démonstration. (Théorème 16) Pour les grandes déviations, une expression de $p_n(x)$ est nécessaire pour $x \in \left[x_0, x_1\right]$, avec $0 < x_0 < 1 < x_1$,

$$p_n(x) = \frac{n!\,[z^n]\,X(x,z)}{n!\,[z^n]\,X(1,z)}\,.$$

En fait, nous allons prendre $u \in]-0.9, 0.9[$, soit $x_0 = 0.1$, $x_1 = 1.9$. Soit ξ, $0.1 < \xi < 1$. Il existe ε avec $\varepsilon < 1.5$ et tel que

$$\forall u \in [-1+\xi, 1-\xi]\,, \qquad 0 \le u^2K(u) \le \varepsilon \qquad \text{cf. Figure 7.5, à droite.}$$

Le reste s'en suit comme pour la démonstration du Lemme 8. Nous appliquons le développement asymptotique de la fonction d'arbre, puis nous retrouvons $X(x,z)$, et enfin $p_n(x)$. Cela donne

$$p_n(x) = \left(\frac{1}{2K(x)}\right)^{n+1/2}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

De plus, $B(x) = (2K(x))^{-1}$ est analytique sur tout $[\xi, 2-\xi]$. Il reste alors à appliquer le théorème des grandes déviations (Théorème 6, p.22). □

7.3.3 Généralisation aux k-arbres

Dans cette section, nous généralisons le travail fait dans la Section 7.3.2, afin de couvrir toute la classe d'urnes des k-arbres. Cela donne des résultats de convergence vers une loi normale avec loi locale limite et principe de grandes déviations pour toute la classe d'urnes, à coefficient tous positifs. Cela constitue des premiers résultats dans ce sens pour une classe d'urnes additives équilibrées non algébriques.

Théorème 17. *Soit X_n le nombre de boules $\square$ dans l'urne $\mathscr{U}_k$ des k-arbres après n étapes. Alors,*

1. *X_n est de moyenne*
$$\mu_n = \frac{k(k+1)}{k+2}\, n + \frac{k}{k+2} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$
de variance
$$\nu_n^2 = \frac{2k(k+1)}{(k+2)^2\,(k+3)}\, n + \frac{2k}{(k+2)^2\,(k+3)} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$
Notons μ et ν^2 les constantes
$$\mu = \frac{k(k+1)}{k+2} \qquad \text{et} \qquad \nu^2 = \frac{2k(k+1)}{(k+2)^2\,(k+3)},$$
alors
$$\frac{X_n - \mu n}{\nu\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathscr{N}(0,1), \quad \text{avec vitesse de convergence} \quad O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

2. *Soit $p_{n,\ell} = \mathbb{P}(X_n = \ell)$. Alors X_n satisfait une loi locale limite gaussienne avec vitesse de convergence $O\left(1/\sqrt{n}\right)$, i.e.*
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \nu\sqrt{n}\, p_{n,\lfloor \mu n + t\nu\sqrt{n}\rfloor} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \right| \le O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

3. *Pour tout ξ, $0.1 < \xi < 1$, la suite de variables aléatoires X_n satisfait une propriété de grandes déviations relative à l'intervalle $[t_0, t_1]$, avec un facteur d'échelle n, et un taux de grandes déviations $W(t)$, avec $x_0 = \xi$, $x_1 = 2 - \xi$,*
$$t_0 = x_0 \frac{B_k'(x_0)}{B_k(x_0)} \qquad \text{et} \qquad t_1 = x_1 \frac{B_k'(x_1)}{B_k(x_1)},$$
$$W(t) = -\min_{x\in[x_0,x_1]} \log\left(\frac{B_k(x)}{x^t}\right),$$
où $B_k(x) = ((k+1)K_k(x-1))^{-1}$, et l'expression de $K_k(u)$ est donnée par (7.7).

Nous comptons ici les boules $\square$ dans l'urne $\mathscr{U}_k$. Cela correspond, par notre modélisation, au nombre de k-cliques sans descendance dans les k-arbres ordonnés croissants. Ce théorème répond donc à l'étude du paramètre *nombre de k-cliques "feuilles"*, sans descendance.

Démonstration. (Théorème 17) Reprenons l'équation (7.6) de la Proposition 23, Au voisinage de 0, nous avons
$$K_k(u) = \frac{1}{k+1} - \frac{k}{k+2}u + \frac{k(k+1)}{k+3}u^2 + O(u^3).$$

L'équation (7.6) se récrit

$$\frac{u^{k+1}}{k}(K_k(u)-z) = -\ln\left(\frac{X}{X-u}\right) + \frac{u}{k\,(X-u)} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{u^i\,(k-i)}{i\,k\,X^i}\,. \tag{7.11}$$

Nous appliquons ensuite un changement de variable similaire au cas des 1-arbres à la Proposition 24 : $\widehat{X} = X/(X-u)$, i.e. $X = -u\widehat{X}/(1-\widehat{X})$. Cela simplifie grandement l'équation (7.11),

$$1 + u^{k+1}(K_k(u)-z) = -k\ln(\widehat{X}) + \widehat{X} + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{k}{i}-1\right)\left(1-\widehat{X}^{-1}\right)^i\,.$$

En passant à l'exponentielle, nous obtenons une équation fonctionnelle pour $\widehat{X}(u,z)$,

$$\exp(-1-u^{k+1}(K_k(u)-z)) = \widehat{X}^k\,e^{-\widehat{X}}\,\exp\left(\sum_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{k}{i}\right)\left(1-\widehat{X}^{-1}\right)^i\right)\,. \tag{7.12}$$

Notons α et f_k les fonctions auxiliaires,

$$\alpha(u,z) = e^{-1}e^{-u^{k+1}(K_k(u)-z)} \qquad \text{et} \qquad f_k(x) = x^k e^{-x}\prod_{i=1}^{k-1}\exp\left(\left(1-\frac{k}{i}\right)\left(1-x^{-1}\right)^i\right)\,.$$

Alors (7.12) se récrit $f_k(\widehat{X}) = \alpha(u,z)$. Nous allons inverser cette équation, tout comme dans la preuve du Lemme 8.

L'étude des fonctions f_k révèle quelques propriétés regroupées dans la Proposition 25.

Proposition 25. *Les fonctions f_k possèdent les propriétés suivantes :*
(i) pour tout x, $f_1(x) = xe^{-x}$. La fonction f_1 est l'inverse de la fonction d'arbre ;
(ii) pour tout x, $f_k'(x) = -(x-1)^k e^{-x}\prod_{i=1}^{k-1}\exp\left(\left(1-\frac{k}{i}\right)\left(1-x^{-1}\right)^i\right)$;
(iii) pour tout entier j entre 1 et k, $f_k^{(j)}(1) = 0$, $f_k(1) = e^{-1}$, $f_k^{(k+1)}(1) = -k!e^{-1}$;
(iv) au voisinage de $x = 1$, f_k admet le développement :

$$f_k(x) = e^{-1} - \frac{1}{k+1}(x-1)^{k+1}e^{-1} + \frac{(k-1)}{(k+1)(k+2)}(x-1)^{k+2}e^{-1} - \frac{k(k+1)}{2(k+3)}(x-1)^{k+3}e^{-1} + O((x-1)^{k+4})\,. \tag{7.13}$$

Nous déduisons de cette proposition une expression pour $\widehat{X}$ au voisinage de $u = 0$,

$$\widehat{X} = 1 - u(k+1)^{\frac{1}{k+1}}(K_k(u)-z)^{\frac{1}{k+1}} + o(K_k(u)-z)\,.$$

En retournant à la fonction X, nous obtenons

$$X(u,z) = \big((k+1)(K_k(u)-z)\big)^{-\frac{1}{k+1}} + u\,O(K_k(u)-z)\,. \tag{7.14}$$

Cette approximation est valable, pour les mêmes raisons que dans le cas particulier $k = 1$. La singularité $K_k(u)$ est proche de $(k+1)^{-1}$ pour u voisin de 0. Nous pouvons choisir z dans un Δ-domaine contenant 0 et avec la singularité en $K_k(u)$. L'approximation suivante est valable pour u proche de 0 et uniformément en z, $|z| < (k+1)^{-1}$,

$$\exp(-1 - u^{k+1}(K_k(u) - z)) \sim e^{-1}\,.$$

La fonction génératrice de probabilité de X_n est

$$p_n(u) = \frac{n!\,[z^n]\,X(u,z)}{n!\,[z^n]\,X(0,z)} = \left(\frac{1}{(k+1)K_k(u)}\right)^{n+\frac{1}{k+1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{7.15}$$

Notons $B_k(x) = ((k+1)K_k(x-1))^{-1}$. Les fonctions B_k sont analytiques au voisinage de $x = 1$. De plus,

$$B_k'(1) = \frac{k(k+1)}{k+2}\,, \qquad \text{et} \qquad B_k''(1) + B_k'(1) - B_k'(1)^2 = \frac{2k(k+1)}{(k+2)^2\,(k+3)}\,.$$

Pour conclure, l'application des Théorèmes 4, 5 et 6, p.21, avec l'expression (7.15), permet d'obtenir :

1. une convergence vers une loi gaussienne avec vitesse de convergence ;
2. une loi locale limite ;
3. un principe de grandes déviations.

□

Chapitre 8

Urnes multicolores et fonctions booléennes

Ce chapitre illustre, par un exemple concret de problème combinatoire sur les formules booléennes, la possibilité de manipuler des urnes à plus de deux couleurs—voire, à un nombre k quelconque de couleurs—, grâce aux méthodes analytiques du Chapitre 2. Par une urne de Pólya, nous montrons la modélisation du problème de comptage sur les formules booléennes. Nous résolvons ensuite de façon exacte et asymptotique avec les opérations classiques sur les séries génératrices (Sections 8.1 et 8.2). Enfin, nous nous autorisons une petite digression de combinatoire bijective (Section 8.3). Une partie des résultats de ce chapitre figurent également dans [CGM11] et dans la thèse de Cécile Mailler [Mai13].

Loi de Poisson dans les branches d'arbres

Le problème qui suit a été posé par Brigitte Chauvin, Cécile Mailler et Danièle Gardy à propos de formules booléennes représentées sous forme d'arbre binaire. Nous nous plaçons dans un modèle où seuls l'implication ($\Rightarrow$) et les littéraux (x_i ou $\overline{x_i}$) sont autorisés. Soit un arbre binaire représentant une telle formule. Sur sa branche droite (la suite des fils droits), ne sont que des implications, sauf la feuille terminale qui est un littéral. Sur cette branche, nous voulons déterminer le nombre de fils gauches qui sont directement des feuilles, i.e., des littéraux (Figure 8.1, à gauche). Le modèle probabiliste choisi est celui d'arbres binaires non étiquetés à croissance uniforme aux feuilles : pour passer d'un arbre de taille n à un arbre de taille $n+1$, une feuille est tirée au hasard uniformément, et elle est remplacée par un nœud interne avec deux feuilles attachées à celui-ci. Ce modèle est équivalent à celui des arbres binaires de recherche. Un tel arbre sera appelé dans la suite *arbre bourgenonnant*.

Nous nous proposons de résoudre un problème plus général, dont le résultat est le Théorème 18. Sa démonstration est donnée en Section 8.2.

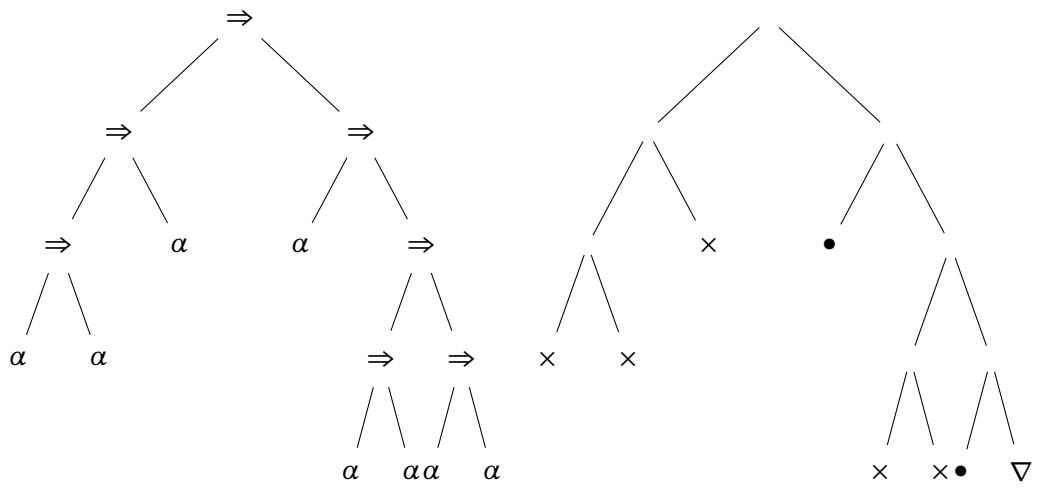


FIGURE 8.1 – *À gauche :* l'arbre d'une formule booléenne : α représente un littéral quelconque. *À droite :* sa modélisation par une urne à trois couleurs $(\times, \bullet, \nabla)$. Nous cherchons à compter les boules $\bullet$.

Rappelons une définition classique.

Définition 20 (Loi de Poisson)**.** *Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$. La variable X suit une loi de Poisson de paramètre λ, noté $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, si pour tout ℓ dans $\mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}\{X = \ell\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^\ell}{\ell!}. \tag{8.1}$$

Théorème 18. *Soit $U_{k,n}$ le nombre de sous-arbres gauches de taille k directement accrochés à la branche droite d'un* arbre bourgeonnant *de taille n. Alors, la variable $U_{k,n}$ converge en loi, où la limite U_k suit une loi de Poisson de paramètre $1/k$.*

$$U_{k,n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} U_k, \qquad \textit{avec} \qquad U_k \sim \mathscr{P}\left(\frac{1}{k}\right). \tag{8.2}$$

La vitesse de convergence est en $O\left((2k)^n/n!\right)$.

Ce théorème est fortement relié au dénombrement des permutations selon les longueurs des k-cycles, et aux espacements entre records en théorie statistique classique. Ces liens seront détaillés dans la Section 8.3 : nous expliciterons la bijection entre les histoires d'urnes et les permutations, puis nous rappellerons le lien entre les permutations et les records. Nous retournerons ainsi aux urnes en faisant le lien entre le dénombrement des cycles d'une permutation et celui des sous-arbres, sans nous préoccuper de leur taille.

Dans la Section 8.1, nous résolvons le problème combinatoire initial, c'est-à-dire le cas $k = 1$ du Théorème 18,

$$U_{1,n} \overset{\text{loi}}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} U_1 \qquad \text{où} \qquad U_1 \sim \mathscr{P}(1). \tag{8.3}$$

8.1 Le cas de l'urne 3×3

Ici, l'objectif est de compter le nombre de sous-arbres gauches de taille 1 directement accrochés à la branche droite. Tout d'abord, nous détaillons la modélisation par urne. Pour cela, nous utilisons des boules de trois couleurs. Une boule "Déesse Mère" ∇, qui correspond à la feuille la plus à droite : elle est toujours là, et il n'y en a qu'une. Des boules $\bullet$ qui correspondent aux feuilles "directes" — les descendants directs de la branche droite. Enfin, les boules $\times$ représentent toutes les autres feuilles de l'arbre (Figure 8.1). Nous débutons le processus avec la seule "Déesse Mère" ∇. Les règles d'évolution sont les suivantes :

- si la boule ∇ est choisie, elle est conservée et une feuille "directe" $\bullet$ est créée (1re ligne de la matrice (8.4)) ;
- si une boule $\bullet$ est choisie, alors cette feuille est transformée en arbre binaire à deux feuilles, donc nous créons $\times$ $\times$, et nous supprimons $\bullet$ (2e ligne de (8.4)) ;
- enfin, si une boule $\times$ est choisie, nous créons $\times$ $\times$, tout en supprimant la boule tirée (3e ligne de (8.4)).

L'urne 3×3 suivante code le processus :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Cette urne est équilibrée de balance 1. Au départ, l'urne contient 1 boule de type x (∇), 0 boule de type y ($\bullet$), et 0 boule de type u ($\times$).

Démonstration. (*Cas $k = 1$, Éq. (8.3)*) Nous considérons la fonction génératrice exponentielle des histoires $H(x, y, u, z)$ (Déf. 13) . Le système différentiel associé est

$$\begin{aligned} \dot{X} &= XY, \\ \dot{Y} &= U^2, \\ \dot{U} &= U^2, \end{aligned}$$

avec les conditions initiales variables $X(0) = x$, $Y(0) = y$, et $U(0) = u$. Ce système est triangulaire, ce qui permet d'obtenir U, Y et X par intégrations successives,

$$U = \frac{u}{1-uz}, \qquad Y = \frac{u}{1-uz} + (y-u), \qquad X = \frac{x}{1-uz}\exp((y-u)z).$$

La configuration initiale est $(a_0, b_0, c_0) = (1, 0, 0)$, donc par le théorème d'isomorphisme (Théorème 8), la fonction génératrice des histoires est donnée par $H = X^1 Y^0 U^0$, soit

$$H(x, y, u, z) \quad = \quad X(x, y, u, z) \quad = \quad \frac{x}{1-uz}\exp((y-u)z). \tag{8.5}$$

La série H a quatre variables codant le processus d'urne :

z^n : n compte la longueur de l'histoire. La balance vaut 1 donc l'entier n compte le nombre de boules dans l'urne : $n + 1$. C'est aussi le nombre de feuilles dans l'arbre.

x^a : a compte le nombre de nœuds tout au bout de la branche droite : il n'y en a toujours qu'un. Cette information est inutile, nous prenons alors $x = 1$.

y^b : b compte le nombre de nœuds "directs", la première génération de descendants de la branche droite directement feuilles : c'est la quantité à étudier.

u^c : c compte le nombre de feuilles restantes. Or, l'urne est équilibrée, les quantités a, b, c, n sont liées par $n + 1 = a + b + c$. Compter c est donc redondant. Nous supprimons une variable en posant $u = 1$.

Il reste à étudier la fonction bivariée $H(y,z) = H(1,y,1,z)$,

$$H(y,z) \quad = \quad \frac{1}{1-z}\exp((y-1)z) \quad = \quad \frac{e^{-z}}{1-z}e^{yz}. \tag{8.6}$$

La probabilité recherchée est le nombre d'histoires de longueur n ayant ℓ boules "directes" (de type y), divisé par le nombre d'histoires de longueur n, c'est-à-dire,

$$\mathbb{P}\left\{U_{1,n} = \ell\right\} = \frac{\left[z^n y^\ell\right] H(y,z)}{[z^n]\, H(1,z)}. \tag{8.7}$$

Immédiatement, le dénominateur s'écrit $[z^n]\, H(1,z) = [z^n]\,(1-z)^{-1} = 1$. Pour le numérateur, nous développons $H(y,z)$ en série entière,

$$H(y,z) = \left(\sum_{n\geq 0} z^n\right)\left(\sum_{m\geq 0}(y-1)^m \frac{z^m}{m!}\right) \;=\; \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{(y-1)^j}{j!}\right) z^n,$$

puis nous extrayons le coefficient voulu,

$$\left[z^n y^\ell\right] H(y,z) = \frac{1}{\ell!}\sum_{j=0}^{n-\ell}\frac{(-1)^j}{j!} \;=\; \frac{e^{-1}}{\ell!} - \frac{1}{\ell!}\sum_{j\geq n-\ell+1}\frac{(-1)^j}{j!}.$$

Finalement,

$$\mathbb{P}\left\{U_{1,n} = \ell\right\} = \frac{e^{-1}}{\ell!} - \frac{1}{\ell!}\sum_{j\geq n-\ell+1}\frac{(-1)^j}{j!}, \tag{8.8}$$

d'où la convergence en loi vers une loi de Poisson de paramètre 1. Le calcul de l'erreur se fait par une simple majoration de $\mathbb{P}\left\{U_{1,n} \leq \ell\right\} - \mathbb{P}\left\{U_1 \leq \ell\right\}$, en appliquant une majoration sur les séries alternées. □

Combinatoire des permutations. La fonction génératrice est la même que celle des permutations où l'on compte le nombre de points fixes :

$$H(y,z) = \frac{1}{1-z}\exp\left((y-1)z\right) = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{1-z}\right) - z + yz\right). \tag{8.9}$$

Grâce à la méthode symbolique [FS09, Part A], cette formule s'identifie à la description combinatoire suivante,

$$\mathscr{H} = \textsc{Set}(\,\textsc{Cyc}_{>1}(\mathscr{Z}) \;\cup\; \mathscr{Y}\mathscr{Z}\,). \tag{8.10}$$

Nous retrouvons ainsi la probabilité d'avoir un dérangement, c'est-à-dire une permutation de $\mathscr{S}_n$ de taille n sans point fixe. Cela correspond au cas $\ell = 0$ dans (8.8). Dans notre contexte, cela revient à regarder la probabilité d'avoir une histoire qui se termine dans une configuration sans boule $\bullet$, ou encore la probabilité qu'un arbre bourgeonnant ne possède pas de feuille "directe" sur sa branche droite. Ces probabilités s'expriment par la formule classique

$$\mathbb{P}(U_{1,n} = 0) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!},$$

qui tend vers e^{-1} lorsque n tend vers l'infini. Nous reviendrons sur ces aspects bijectifs dans la Section 8.3.

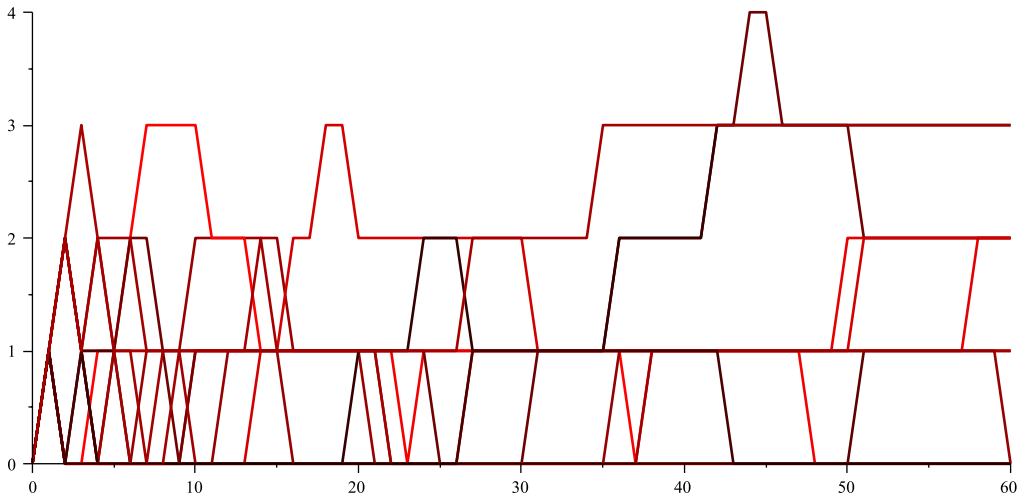


FIGURE 8.2 – Chaque ligne brisée représente l'évolution du nombre de boules $\bullet$ (en ordonnées) en fonction du nombre de tirages (en abscisses). La simulation a été faite 10 fois, en partant de l'urne contenant uniquement la boule ∇, et le nombre de tirages consécutifs est 40.

8.2 Généralisation par une urne $(k+2)\times(k+2)$

Nous étendons le résultat de la section précédente afin de prouver le Théorème 18. Cette section est consacrée à sa preuve. Désormais, nous considérons une urne contenant des boules de $k+2$ couleurs différentes : une boule spéciale ∇ (toujours notre "Déesse Mère") ; k types de boule $\bullet_1, \ldots, \bullet_k$ comptant les sous-arbres à $1, 2, \ldots, k$ feuilles ; enfin, un type $\times$ pour les sous-arbres ayant plus de k feuilles. Les règles de l'urne sont données par (8.11), où la flèche indique le remplacement sans remise du membre gauche par le membre droit. La matrice de remplacement code ces règles. Les lignes

et les colonnes sont indexées par les différentes couleurs de boules dans cet ordre : ∇, $\bullet_1$, $\bullet_2$, $\ldots$, $\bullet_k$, $\times$.

$$\begin{array}{ccc}
\nabla & \to & \bullet_1\ \nabla \\
\bullet_1 & \to & \bullet_2\ \bullet_2 \\
\bullet_2\ \bullet_2 & \to & \bullet_3\ \bullet_3\ \bullet_3 \\
 & \vdots & \\
\underbrace{\bullet_k \cdots \bullet_k}_{k \text{ fois}} & \to & \underbrace{\times\ \times \cdots \times}_{k+1 \text{ fois}} \\
\times & \to & \times\ \times
\end{array}
\qquad
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & -1 & 2 & \ddots & & \\
\vdots & \ddots & -2 & 3 & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & -k & k+1 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}
\tag{8.11}$$

8.2.1 Fonction génératrice

Nous associons les variables $X, U_1, \ldots, U_k, V$ aux couleurs $\nabla, \bullet_1, \ldots, \bullet_k, \times$. Le système différentiel associé s'écrit

$$\begin{cases}
\dot{X} & = & XU_1 \\
\dot{U}_1 & = & U_2^2 \\
\dot{U}_2 & = & U_2^{-1}U_3^3 \\
 & \vdots & \\
\dot{U}_j & = & U_j^{-j+1}U_{j+1}^{j+1} \\
 & \vdots & \\
\dot{U}_k & = & U_k^{-k+1}V^{k+1} \\
\dot{V} & = & V^2,
\end{cases}$$

avec les conditions initiales $\{X(0) = x,\ V(0) = v,\ U_1(0) = U_1(0),\ \ldots,\ U_k(0) = U_k(0)\}$. Nous spécifierons plus tard les conditions initiales pour les $U_j(0)$. Le système est triangulaire. Pour le résoudre, nous partons de la dernière ligne : V s'intègre directement en $\dfrac{v}{1-vz}$, et nous posons $v = 1$: cette information est superflue, car l'urne est équilibrée. Ainsi,

$$V(z) = \frac{1}{1-z}\,.$$

Nous en déduisons U_k par intégration de $\dot{U}_k U_k^{k-1} = V^{k+1}$:

$$U_k^k = k\int \frac{dz}{(1-z)^{k+1}} = \frac{1}{(1-z)^k} + (U_k^k(0) - 1)\,.$$

Pour la suite, remarquons la propriété suivante : pour $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, l'équation du système définissant U_j s'intègre en $U_j^j = j\int U_{j+1}^{j+1}$. En itérant cette dernière égalité, nous

obtentons

$$U_j^j = j(j+1)\dots(k-1)\underbrace{\int\int\dots\int}_{k-j \text{ fois}} U_k^k .$$

En intégrant $k-1$ fois U_k, nous trouvons explicitement

$$U_1 = \frac{1}{1-z} + \sum_{j=1}^{k}(U_j^j(0)-1)z^{j-1} .$$

Enfin $\dot{X}X^{-1} = U_1$ s'intègre en

$$X(z) = x\cdot\exp\left(\ln\left(\frac{1}{1-z}\right) + \sum_{j=1}^{k}(U_j^j(0)-1)\frac{z^j}{j}\right) .$$

Les termes $U_j(0)$ apparaissent uniquement à la puissance j. Nous choisissons de noter $u_j = U_j^j(0)$. Avec ce changement de variable, u_j compte directement le nombre d'arbres à j feuilles. Nous posons sans perte d'information $x=1$: la "Déesse Mère" ne disparaît jamais ! Ainsi, nous obtenons l'expression de la série génératrice des histoires de l'urne, débutant en $(1,0,\dots,0,0)$:

$$\begin{aligned} X(u_1,\dots,u_k,z) &= \exp\left(\ln\left(\frac{1}{1-z}\right) + (u_1-1)z + (u_2-1)\frac{z^2}{2} + \dots + (u_k-1)\frac{z^k}{k}\right) \\ &= \exp\left(u_1 z + u_2\frac{z^2}{2} + \dots + u_k\frac{z^k}{k} + \sum_{j>k}\frac{z^j}{j}\right) . \end{aligned} \tag{8.12}$$

Nous retrouvons au passage la série génératrice des permutations où u_j compte le nombre de j-cycles (cycles de longueur j), et en extrayant les coefficients, nous obtenons une formule originellement due à Cauchy [FS09, p.188].

8.2.2 Probabilité limite

Posons $X_k(u_k,z) = X(1,\dots,1,u_k,z) = \dfrac{1}{1-z}\exp\left((u_k-1)\dfrac{z^k}{k}\right)$. Nous cherchons la loi limite du nombre de sous-arbres à k feuilles directement accrochés à la branche droite. La quantité à étudier est donc le coefficient en $u_k^\ell z^n$ dans $X_k(u_k,z)$,

$$X_k(u_k,z) = \left(\sum_{n\geq 0} z^n\right)\left(\sum_{m\geq 0}\left(\frac{u_k-1}{k}\right)^m\frac{z^{km}}{m!}\right) \quad \text{donc} \quad [z^n]X_k(u_k,z) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/k\rfloor}\frac{\left(\frac{u_k-1}{k}\right)^j}{j!} .$$

En suivant les mêmes calculs que dans la section précédente, nous avons

$$\left[u_k^\ell z^n\right]X_k(u_k,z) = \frac{e^{-1/k}}{k^\ell \ell!} - \frac{1}{k^\ell \ell!}\sum_{j\geq\lfloor n/k\rfloor-\ell+1}\frac{(-1/k)^j}{j!} .$$

Comme précédemment, $[z^n]\,X_k(1,z) = [z^n]\,(1-z)^{-1} = 1$, donc la variable aléatoire $U_{k,n}$ vérifie

$$\mathbb{P}\left\{U_{k,n} = \ell\right\} \quad = \quad \frac{\left[u_k^\ell z^n\right] X_k(u_k,z)}{[z^n]\,X_k(1,z)} \quad = \quad \frac{e^{-1/k}}{k^\ell \ell!} - \frac{1}{k^\ell \ell!} \sum_{j \geq \lfloor n/k \rfloor - \ell + 1} \frac{(-1/k)^j}{j!}\,.$$

Si n tend vers l'infini, $\mathbb{P}\left\{U_{k,n} = \ell\right\}$ tend vers $e^{-1/k}/\left(\ell! k^\ell\right)$. Nous avons ainsi une convergence en loi vers une loi de Poisson de paramètre k^{-1}. La vitesse de convergence s'obtient par une majoration de $\mathbb{P}(U_{k,n} \leq \ell) - \mathbb{P}(U_k \leq \ell)$. Nous trouvons $O\left((2k)^n/n!\right)$.

Analyse de singularités. L'analyse du pôle en $z = 1$ donne

$$[z^n]\,\frac{1}{1-z} e^{(u_k-1)\frac{z^k}{k}} \sim e^{\frac{u_k-1}{k}}\,.$$

Or, $e^{(u-1)\lambda}$ est la fonction génératrice de probabilité d'une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ. Nous retrouvons ainsi notre résultat d'une autre manière, par le théorème de continuité des fonctions génératrices de probabilité [FS09, p.625].

8.3 Un peu de combinatoire bijective

Nous avons montré que la série génératrice obtenue pour l'urne est la même que celle qui compte les permutations selon leurs k-cycles (Formules (8.9), (8.10), et (8.12)). Nous allons tout d'abord donner une bijection entre les histoires de l''urne comptant les arbres bourgeonnants et les permutations. Puis nous rappellerons le lien entre records et permutations, ce qui permet de retrouver des résultats bien connus en combinatoire et en théorie statistique. Nous terminerons cette section en donnant la construction d'une urne faisant le lien entre les histoires et le nombre de cycles dans une permutation.

Proposition 26. *Il existe une bijection constructive entre les histoires de longueur n de l'urne (8.11) comptant les sous-arbres de taille $1, 2, \ldots, k$ et les permutations de taille n où l'on compte le nombre de cycles de longueur $1, 2, \ldots, k$.*

Retour sur le cas simple. Pour $k = 1$, nous retrouvons la bijection (Formule (8.10)) entre les permutations de taille n ayant p points fixes et les histoires de l'urne (8.11) de longueur n terminant dans une configuration avec p boules $\bullet_1$.

Pour la preuve de la Proposition 26, nous avons recours à une urne plus simple, de taille 2. Elle est donnée par les règles suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \nabla & \to & \bullet\nabla \\ \bullet & \to & \bullet\bullet \end{array}\,, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.13}$$

Cette urne est également appelée urne des records [FDP06]. Sa configuration initiale est ∇. Le système différentiel associé est

$$\begin{cases} \dot{X} &= XY \\ \dot{Y} &= Y^2 \end{cases} .$$

Ainsi, la série génératrice de cette urne est

$$X(z) = \frac{1}{1-z} = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)\right) .$$

Il s'agit en fait d'une grammaire (8.13) qui génère les arbres binaires enracinés, et où l'on marque le nœud terminal de la branche la plus à droite.

Lemme 10. *Il existe une construction bijective entre les histoires de l'urne (8.13) de longueur n et les permutations de taille n.*

Démonstration. Une histoire de longueur n (suite des évolutions) permet de construire une permutation, et réciproquement. Nous allons détailler la construction bijective. Notons tout d'abord que pour obtenir une unique permutation à partir d'une histoire d'urne, il faut considérer toute l'histoire de l'urne, et non pas sa configuration finale, ni la configuration d'arbre finale. La permutation se construit pas à pas : lorsque l'histoire est de longueur i, nous ajoutons l'entier i dans la permutation. Pour cela, nous construisons une permutation de $\mathscr{S}_i$ à partir d'une permutation de $\mathscr{S}_{i-1}$. Détaillons le processus. Dans la suite, nous représentons les permutations comme un ensemble de cycles à supports disjoints, où chaque cycle est organisé en plaçant le plus petit élément en tête, et où les différents cycles sont rangés dans l'ordre croissant de leur élément de tête. Cela donne une écriture canonique pour chaque permutation.

Partant de ∇, la seule action possible dans l'urne donne $\bullet\ \nabla$: on fait correspondre cette histoire à l'unique permutation (1) de $\mathscr{S}_1$. Les boules $\bullet$ correspondent aux éléments de la permutation. Nous étiquetons la boule $\bullet$ par l'entier i lorsque celle-ci correspond à l'élément i d'une permutation, et nous notons $\bullet^i$. Pour le premier tirage dans l'urne, nous obtenons donc $\bullet^1\ \nabla$. Le principe pour la suite est simple : si on choisit ∇ à l'étape i, cela créé un nouveau cycle (i) de taille 1 dans la permutation ; précisément, à partir de la permutation σ à l'étape $i-1$, nous construisons σ' de l'étape i en posant

$$\sigma' = (i) \circ \sigma ,$$

où $\circ$ représente la concaténation de cycles à support disjoints. Si ∇ n'est pas choisie dans l'urne, la boule frappée $\bullet$ correspond à un élément j. Nous remplaçons j par $j\,i$ dans la représentation de la permutation ; précisément, à partir de la permutation σ à l'étape $i-1$, nous construisons σ' de l'étape i en posant

$$\sigma'[j] = i, \quad \sigma'[i] = \sigma[j], \quad \text{et} \quad \forall \ell \neq i, j, \quad \sigma'[\ell] = \sigma[\ell] .$$

Par exemple, regardons l'histoire suivante, où les flèches représentent un tirage dans l'urne et où l'étiquette de la flèche est la boule tirée,

$$\nabla \xrightarrow{\nabla} \bullet^1\ \nabla \xrightarrow{\nabla} \bullet^1\ \bullet^2\ \nabla \xrightarrow{\bullet^1} \bullet^1\ \bullet^3\ \bullet^2\ \nabla \xrightarrow{\bullet^2} \bullet^1\ \bullet^3\ \bullet^2\ \bullet^4\ \nabla$$
$$\xrightarrow{\bullet^2} \bullet^1\ \bullet^3\ \bullet^2\ \bullet^5\ \bullet^4\ \nabla \xrightarrow{\nabla} \bullet^1\ \bullet^3\ \bullet^2\ \bullet^5\ \bullet^4\ \bullet^6\ \nabla$$

Cette histoire correspond de façon unique à la permutation (1 3)(2 5 4)(6). En effet, la construction donne

$$\emptyset \xrightarrow{\nabla}_1 (1) \xrightarrow{\nabla}_2 (1)(2) \xrightarrow{\bullet^1}_3 (1\ 3)(2) \xrightarrow{\bullet^2}_4 (1\ 3)(2\ 4)$$
$$\xrightarrow{\bullet^2}_5 (1\ 3)(2\ 5\ 4) \xrightarrow{\nabla}_6 (1\ 3)(2\ 5\ 4)(6)\,.$$

Pour la réciproque, il suffit de se donner une permutation σ de taille n. Nous la représentons par son écriture canonique : décomposition en cycles à supports disjoints, où chaque cycle est organisé en plaçant le plus petit élément en tête, et où les différents cycles sont rangés dans l'ordre croissant de leur élément de tête. De cette écriture, nous déduisons une histoire qui démarre par (1), soit le premier tirage $\nabla \xrightarrow{\nabla} \bullet\ \nabla$. À l'étape $i-1$, supposons que nous ayons construit une histoire H_{i-1}. Pour passer à l'étape i, nous regardons où est placé l'élément i dans la permutation : si i est en tête d'un cycle, alors l'urne évolue en piochant ∇ (un nouveau cycle est ainsi créé). Sinon nous regardons l'élément qui précède i, appelons-le j. Si $j < i$, alors il y a déjà une boule $\bullet^j$ dans l'histoire de l'urne : c'est elle qui est sélectionnée. En revanche, si $j > i$, nous regardons le premier élément avant j dans le cycle de la permutation qui est plus petit que i : c'est celui-ci qui est sélectionné (son existence vient du fait que le premier élément de chaque cycle est le plus petit parmi les éléments du cycle).

Reprenons la permutation (1 3)(2 5 4)(6). Les éléments 1 et 2 sont en tête de cycle, nous commençons donc par $\xrightarrow{\nabla}\xrightarrow{\nabla}$. Le 3 est juste après 1 : nous choisissons $\xrightarrow{\bullet^1}$. Ensuite, 4 est après 5 (trop grand), lui même après 2, donc nous avons la transition $\xrightarrow{\bullet^2}$; puis 5 est après 2, et nous appliquons $\xrightarrow{\bullet^2}$. Pour 6, nous terminons par $\xrightarrow{\nabla}$. □

La preuve de la Proposition 26 découle de la construction donnée dans la preuve du Lemme 10 : si désormais, nous avons différentes couleurs de boules qui marquent le nombre de feuilles de 1 à k dans les sous arbres gauches de la branche droite, cela correspond exactement à marquer les cycles de longueur 1 à k dans les permutations.

Records et permutations. Nous rappelons le lien entre les records dans les permutations et le nombre de cycles.

Définition 21. *Un* record *dans une permutation est un élément qui n'a pas d'élément plus grand que lui à sa gauche. Par exemple,* $\underline{3}\ 2\ \underline{5}\ 4\ 1\ \underline{8}\ \underline{9}\ 6\ 7$.

Proposition 27. *Les permutations de $\mathscr{S}_n$ à k records sont en bijection avec les permutations à k cycles.*

Démonstration. Il suffit de découper la permutation suivant ses records : ainsi nous obtenons pour notre exemple : (3 2) (5 4 1) (8) (9 6 7). Par ce procédé, une permutation à k records donne une permutation à k cycles, telle que le plus grand élément de chaque cycle apparaisse en tête, et telle que les cycles soient ordonnés selon les éléments de tête croissants.

Réciproquement, se donner une permutation à k cycles, c'est se donner une permutation à k records : il suffit de placer en tête de chaque cycle l'élément le plus grand, puis d'ordonner les cycles par éléments de tête croissants, et d'oublier les parenthèses. □

Ce résultat peut être affiné tout en utilisant la même construction bijective :

Proposition 28. *Les permutations avec s_1 cycles de longueur 1 (points fixes), s_2 cycles de longueur 2 (transpositions), ..., s_k cycles de longueur k, sont en bijection avec les permutations dont les records sont espacés s_1 fois de 1, s_2 fois de 2, ..., s_k fois de k.*

Pour résumer cette partie, en utilisant les Propositions 26 et 28 nous énonçons le théorème suivant :

Théorème 19. *Pour k fixé, il existe une bijection constructive entre les histoires de longueur n de l'urne (8.11) finissant avec p_1 boules $\bullet_1$, ..., p_k boules $\bullet_k$, les permutations de taille n avec p_1 points fixes, p_2 transpositions, ..., p_k k-cycles, et les permutations de taille n avec p_1 records espacés de 1, ..., p_k records espacés de k.*

Résultat classique. Nous retrouvons ainsi un résultat bien connu en combinatoire : dans une permutation de grande taille ($n \to \infty$), le nombre de records espacés de k suit une loi de Poisson de paramètre $1/k$. C'est également vrai pour le nombre de k-cycles dans une permutation.

Retour aux urnes. Pour conclure la section, il est possible de compter directement le nombre de sous-arbres gauches de la branche droite, ce qui revient par la bijection, à compter le nombre de cycles d'une permutation. Examinons la série génératrice qui dénombre les permutations et où la variable u marque les cycles :

$$H(z,u) = \exp\left(u \ \ln\left(\frac{1}{1-z}\right)\right) = (1-z)^{-u}.$$

Cette écriture correspond à la description symbolique, $\textsc{Perm} = \textsc{Set}(u\ \textsc{Cyc}(\mathscr{Z}))$. Le lien avec les arbres avec "modèle de croissance uniforme" est le suivant : à chaque nouveau cycle créé (i.e. lorsque l'on frappe ∇, la "Déesse Mère"), il faut compter 1 avec une boule $\bullet$ qui ne disparaît plus et n'engendre pas de $\bullet$: une sorte de "Déesse Fille" . Ainsi les règles sont les suivantes, avec comme ordre ∇, $\bullet$, $\times$,

$$\begin{array}{l} \nabla \to \bullet\nabla \\ \bullet \to \times\bullet \\ \times \to \times\times \end{array}, \qquad \text{d'où l'urne} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette urne donne $H(z,u)$ comme fonction génératrice, où z marque la longueur et u marque le nombre de $\bullet$. Nous trouvons à nouveau un résultat classique.

Proposition 29. *Le nombre moyen de cycles dans une permutation de taille n est H_n, asymptotique à $\ln(n)$ lorsque $n \to \infty$, où $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.*

Conclusion

Ce chapitre, simple d'un point de vue technique apporte un nouvel éclairage sur des résultats classiques de combinatoire. Il permet de résoudre un problème concret de combinatoire sur les formules booléennes. Ainsi, il illustre la modélisation par urne avec un grand nombre de couleurs, et le traitement analytique aisé du système différentiel, dans le cas où le système est triangulaire.

En effet, la théorie des systèmes différentiels rend très difficile le traitement des urnes multicolores (à plus de trois couleurs) par la méthode des séries génératrices en toute généralité. Des problèmes de non intégrabilité se présentent. Par exemple, le système suivant n'est pas intégrable [FDP06, p.102],

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Y^2, \\ \dot{Y} &= U^2, \\ \dot{U} &= X^2. \end{aligned}$$

Nous ne pouvons donc pas obtenir de série génératrice à partir de ce système pour l'urne correspondante,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En gardant le point de vue des séries génératrices et du système différentiel pour les urnes équilibrées, nous ne pouvons traiter que des exemples particuliers d'urnes multicolores.

Enfin, ce chapitre attire l'attention sur un aspect symbolique des urnes. Nous avons créé explicitement un lien entre certaines urnes et les permutations. Nous obtenons ainsi des séries génératrices multivariées qui appartiennent à l'ensemble des séries constructibles par la méthode symbolique de la combinatoire analytique. Se pose la question de l'intersection entre ces ensembles. Quelles séries génératrices H des histoires des urnes ont également une interprétation combinatoire en terme de méthode symbolique ?

Une urne existe pour la construction $\textsc{Set}(\textsc{Cyc}(\mathscr{Z}))$. Qu'en est-il des autres constructions ? Une restriction s'impose tout de même : toutes les séries génératrices des urnes équilibrées ont pour série génératrice univariée $H(z)$ une série algébrique du type $(1-\sigma z)^{-1/\sigma}$, ce qui n'est généralement pas le cas pour les séries génératrices issue de la méthode symbolique. Pour une définition complète des séries génératrices bien fondées par méthode symbolique, voir le récent travail de C. Pivoteau, B. Salvy et M. Soria [PSS12].

Chapitre 9

Urnes à coefficients aléatoires

Ce chapitre correspond à l'article [MM12], *Exactly solvable balanced tenable urns with random entries via the analytic methodology*, publié avec Hosam M. Mahmoud à AofA 2012.

Résumé. This paper develops an analytic theory for the study of some Pólya urns with random rules. The idea is to extend the isomorphism theorem in P. Flajolet *et al.* [FDP06], which connects deterministic balanced urns to a differential system for the generating function. The methodology is based upon adaptation of operators and use of a weighted probability generating function. Systems of differential equations are developed, and when they can be solved, they lead to characterization of the exact distributions underlying the urn evolution. We give a few illustrative examples.

Introduction

A classical definition of the Pólya urn scheme specifies it as an urn which contains balls of up to two colors (say black and white), and which is governed by a set of evolution rules. A step then consists in randomly picking a ball from the urn, placing it back, and depending on its color, adding or discarding a fixed number of black and white balls.

[FDP06] introduces an analytic method to deal with a class of two-color Pólya urns with deterministic addition rules. The method leads to a fundamental connection to differential equations via an isomorphism theorem. In the present manuscript, we extend the method to deal with Pólya urns with *random addition rules*. One can think of schemes with random replacements as mixtures of deterministic schemes, with appropriate probabilities.

We develop an analytic theory for the study of balanced tenable Pólya urns with random rules (we shall make the terms “balanced" and “tenable" more precise in Section 9.1). Balance and tenability are restrictions on the rules that admit an analytic treatment through generating functions. Our main result is the following: *to each system of random rules satisfying the balance and tenability conditions, one can associate a*

differential system which describes the generating function counting the sequence of configurations of the urn scheme. A formal statement of this theorem appears in Section 9.2.

When the system can be solved, it leads to characterization of the exact distributions underlying the urn evolution. In Section 9.3, we give some examples where the generating function is explicit. Some of them include uniform and binomial discrete random variable in their rules. Other examples investigate some coupon collector variants. Finding the generating function and deducing the probability distributions is quite mechanical, owing to classical analytic combinatorics.

9.1 Basic definitions

In Pólya's classical urn model, we have an urn containing balls of up to two different colors, say black and white. The system evolves with regards to particular evolution rules: at each step, add (possibly a negative number) black and white balls. These rules are specified by a 2×2 matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad a, d \in \mathbb{Z}, \quad b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{9.1}$$

The rows of the matrix are indexed with the colors black and white respectively. The columns of the matrix are indexed by the same colors: they are from left to right indexed by black and white.

The asymptotics of this construct have been approached by traditional probabilistic methods in [AK68], [Smy96] and [Jan04]. [Mah08] presents some of these findings.

In this manuscript we deal with a model where the constants a, b, c, and d are replaced by random variables. We attempt to provide an approach for the study of the urn's composition after a finite, and possibly small, number of ball draws. This is an equally important line of attack and can be viewed as more important in practice, [1] when the number of draws is not sufficiently large to warrant approximation by asymptotics. We focus on exact distributions in this paper.

9.1.1 Balanced tenable urns with random entries

We consider urns for which the dynamics of change are now represented by the replacement matrix

$$\begin{pmatrix} \mathscr{A} & \mathscr{B} \\ \mathscr{C} & \mathscr{D} \end{pmatrix}, \tag{9.2}$$

where $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ and $\mathscr{D}$ are discrete random variables. If a random variable has a negative realization, it means we discard balls.

1. For example, the Ehrenfest urn is a model for the exchange of gases. If the gas is being exchanged between an airconditioned room and the outside, the user is more interested in what happens within the next hour or so, not what ultimately happens at infinity.

Let A_n and B_n be respectively the number of black and white balls after n draws from the urn. We call the pair (A_n, B_n) the *configuration* of the urn after n steps (draws). We start with a deterministic initial configuration $(A_0, B_0) = (a_0, b_0)$. At each step, a ball is uniformly drawn from the urn. We look at its color and *we put it back in the urn*: if the color is black, we add $\mathscr{A}$ black balls and $\mathscr{B}$ white balls; if the color is white, we add $\mathscr{C}$ black and $\mathscr{D}$ white balls; the random variables are generated independently at each step.

We now recall a few definitions, that serve to delineate the scope of our study.

Définition 22 (Balance)**.** *An urn with the replacement matrix (9.2) is said to be* balanced*, if the sums across rows are equal, that is if $\mathscr{A} + \mathscr{B} = \mathscr{C} + \mathscr{D}$, and these sums are always constant and equal to a fixed value σ. The parameter σ is called the* balance *of the urn.*

All urns considered in this paper are balanced. As a consequence, the random variables are governed by the relations $\mathscr{B} = \sigma - \mathscr{A}$, and $\mathscr{C} = \sigma - \mathscr{D}$. In addition, we will only consider urns with nonnegative balance, $\sigma \geq 0$. The case $\sigma < 0$ refers to diminishing urn models. Questions and results on these models are completely different; see [HKP07, KP08, KP12a] for an analytic development.

Since we allow the random variables $\mathscr{A}$ and $\mathscr{D}$ to take negative integer values, it is necessary to consider the concept of tenability.

Définition 23 (Tenability)**.** *An urn scheme is said to be* tenable*, if it is always possible to apply a rule, i.e., if it never reaches a deadlocked configuration (that is, choosing with positive probability a rule that cannot be applied because there are not enough balls).*

To illustrate this notion, suppose we have an urn of black and white balls, with the replacement matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

This matrix, together with an even initial number of black balls and an even initial number of white balls form a tenable scheme. Any other initial condition makes this scheme untenable. For instance, if we start with two black balls and one white ball, the scheme gets stuck upon drawing a white ball.

No negative nondiagonal entries and no unbounded supports. A tenable balanced urn scheme cannot have negative realizations for the nondiagonal entries $\mathscr{B} = \sigma - \mathscr{A}$ and $\mathscr{C} = \sigma - \mathscr{D}$, and they cannot have unbounded supports, either. Indeed, if $\mathscr{B}$ has a negative realization, say $-k$ for positive k, we discard k white balls upon withdrawing a black ball. In view of the balance condition, we must add at the same step $\sigma + k$ black balls; we can apply this rule repeatedly until we take out all white balls, and the scheme comes to a halt (contradicting tenability). Therefore, $\mathscr{B}$ and $\mathscr{C}$ must have only nonnegative realizations. Furthermore, suppose the urn at some step has N black balls; if $\mathscr{B}$ has an unbounded support, it includes a value greater than $\sigma + N$. Here $\mathscr{A}$ must realize a value less then $-N$. A draw of a black ball requires taking out more than N black balls (contradicting tenability).

Exemple 7. *This example illustrates a mixed model urn in the class we are considering. It has random entries in the replacement matrix and is balanced and tenable. Consider the Pólya-Friedman urn scheme with the replacement matrix*

$$\begin{pmatrix} \mathscr{B}_p & 1-\mathscr{B}_p \\ 1-\mathscr{B}_p & \mathscr{B}_p \end{pmatrix}, \tag{9.3}$$

where $\mathscr{B}_p$ is a Ber*(p) random variable.*[2] *Such a scheme has balance one, and alternates between*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \textit{and} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

that is between Pólya-Eggenberger's urn *(with probability p) and* Friedman's urn *(with probability $1-p$). The transition in the limit distribution of black balls when p goes from 0 to 1 is quite unusual. For $p=0$ (Friedman's urn), a properly normalized number of black balls has the classical* Gaussian distribution*, and for $p=1$ (Pólya-Eggenberger's urn), a properly scaled number of black balls has a* beta distribution*. The scheme with replacement matrix (9.3) is an interesting example that warrants further investigation, and will be a special case of two illustrative examples (Subsections 9.3.2 and 9.3.3).*

9.1.2 Definitions for the analytic methodology

The first use of analytic combinatorics for the treatment of urn models is in [FGP05], where some balanced urns are linked to a partial differential equation and elliptic functions. We now describe the analytic tools we use for our study.

The total number of balls after n draws, denoted by $s_n = A_n + B_n$, is deterministic because of the balance condition. Indeed, at each step, we add a constant number of balls (the balance σ), so

$$s_n = s_0 + \sigma n = a_0 + b_0 + \sigma n\,. \tag{9.4}$$

The main tool in this study is the *weighted probability generating function*

$$Q(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i,j\geq 0} s_0 s_1 \ldots s_{n-1}\, \mathbb{P}\{A_n = i, B_n = j\{\; x^i y^j \frac{z^n}{n!}\,. \tag{9.5}$$

The variable x counts black balls, y counts white balls, and z counts the number of draws. As i, j and n are governed by (9.4), one of the variables is redundant. So we can set $y=1$ without loss of generality: it is sufficient to study a marginal distribution because it determines the joint probability distribution.

2. The notation Ber(p) stands for the Bernoulli random variable with parameter p, that assumes the value 1 with success probability p, and the value 0 with failure probability $1-p$.

Counting paths. The kernel $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ corresponds to the total number of paths of length n starting from the initial configuration. Indeed, at step 0 we can pick a ball among the s_0 balls in the urn; at step 1 we can pick a ball among the s_1 balls in the urn, etc.

Generating function of weighted histories. The coefficient[3] $[x^b y^w z^n/n!]Q(x,y,z)$ does not represent a combinatorial count; this quantity can be fractional. Nevertheless, it is closely connected to the notion of *history* described in [FDP06]. A history is nothing but a finite sequence of draws from the urn. One history of length n describes one possible evolution from step 0 to step n. It can be viewed as a path in the evolution tree of the urn. In the context of deterministic rules, histories are combinatorial counts. However, in our case, we need more information to have a complete description of a sequence of n draws. At each step, we can choose different rules depending on the realization of the random entries at that step. So, we are now dealing with *weighted histories*, that is the sequence of n draws with a weight factor corresponding to the probability of applying the n different rules we use along the path from step 0 to step n. If we denote by $Q_{n,i,j}$ the contribution of weighted histories beginning at step 0 in the configuration (a_0, b_0) and ending at step n in the *configuration* (i,j), we have

$$Q(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i,j\geq 0} Q_{n,i,j}\, x^i y^j \frac{z^n}{n!}\,. \tag{9.6}$$

The kernel $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ is obtained by adding all weighted histories of length n, that is by setting x and y to 1:

$$Q(1,1,z) = (1-\sigma z)^{-s_0/\sigma}\,; \qquad n!\,[z^n]Q(1,1,z) = s_0 s_1 \dots s_{n-1} = \sigma^n \frac{\Gamma(n+s_0/\sigma)}{\Gamma(s_0/\sigma)}\,.$$

In this way, we preserve the equivalence between the probabilistic model and the combinatorial aspects of weighted history. The balance condition is key to this equivalence:

$$\mathbb{P}\left\{A_n = i, B_n = j\right\} = \frac{\left[x^i y^j z^n\right] Q(x,y,z)}{[z^n]\, Q(1,1,z)} = \frac{Q_{n,i,j}}{s_0 \dots s_{n-1}}\,. \tag{9.7}$$

9.2 An isomorphism theorem for urn schemes with random entries

In this section, we state our main result through the following theorem which links the behavior of a tenable balanced urn to a differential system. The theorem always yields a differential system, and the difficulty then lies in extracting information on the generating function: indeed, the system obtained may not be always explicitly solvable by currently known techniques.

3. We use the operator $[x_1^{j_1} \dots x_k^{j_k}]$ to extract the coefficient of $x_1^{j_1} \dots x_k^{j_k}$ from a generating function of $x_1, \dots, x_k$.

Théorème 20. *Given a balanced tenable urn with the replacement matrix*

$$\begin{pmatrix} \mathscr{A} & \sigma - \mathscr{A} \\ \sigma - \mathscr{D} & \mathscr{D} \end{pmatrix},$$

where $\mathscr{A}$ and $\mathscr{D}$ are discrete random variables with distributions

$$\mathbb{P}\{\mathscr{A} = k\} = \pi_k\,, \qquad \mathbb{P}\{\mathscr{D} = k\} = \tau_k\,,$$

for $-K \le k \le \sigma$, (for some $K > 0$), the probability generating function of the urn is given by

$$Q\left(x, y, z\right) = X^{a_0}(z)\, Y^{b_0}(z)\,,$$

where (a_0, b_0) is the starting configuration, and the pair $(X(t), Y(t))$ is the solution to the differential system

$$\begin{cases} x'(t) &= \displaystyle\sum_{k=-K}^{\sigma} \pi_k\, x^{k+1}(t)\, y^{\sigma-k}(t)\,, \\ y'(t) &= \displaystyle\sum_{k=-K}^{\sigma} \tau_k\, x^{\sigma-k}(t)\, y^{k+1}(t)\,, \end{cases}$$

applied at $t = 0$, and any initial conditions $x = x(0)$ and $y = y(0)$, such as $xy \neq 0$.

Proof. The proof follows and generalizes that in [FDP06]. The basic idea in this proof is that the monomial $x^i y^j$ represents the configuration $(A_n, B_n) = (i, j)$. The actions of the urn transform such a configuration into $x^{i+k} y^{j+\sigma-k}$, if a black ball is drawn and if the nth realization of the replacement matrix is such that $\mathscr{A} = k$, and $\sigma - \mathscr{A} = \sigma - k$ (which occurs with probability π_k); there are i choices for such a black ball. Alternatively, the monomial is transformed into $x^{i+\sigma-k} y^{j+k}$, if a white ball is drawn and if the nth realization of the replacement matrix is such that $\sigma - \mathscr{D} = \sigma - k$, and $\mathscr{D} = k$ (which occurs with probability τ_k); there are j choices for such a white ball. We represent the transformation by the operator

$$\mathscr{M} = \sum_{k=-K}^{\sigma} \pi_k\, x^k\, y^{\sigma-k}\, \Theta_x + \tau_k\, x^{\sigma-k}\, y^k\, \Theta_y\,,$$

where $\Theta_u = u\partial_u$ is the *pick and replace* operator.[4] When this operator is applied to the configuration (i, j), it yields

$$\mathscr{M}(x^i y^j) = \sum_{k=-K}^{\sigma} i\, \pi_k\, x^{i+k}\, y^{j+\sigma-k} + j\, \tau_k\, x^{i+\sigma-k}\, y^{j+k}\,.$$

This operator is used to represent all possible configurations of the urn at step $n+1$, given the configurations at step n. Indeed, if we write $Q(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x, y) z^n / n!$, as a function in one variable z, the operator $\mathscr{M}$ represents the transition

$$q_{n+1}(x, y) = \mathscr{M}\left(q_n(x, y)\right) \quad \text{thus} \quad q_n(x, y) = \mathscr{M}^n\left(q_0(x, y)\right) = \mathscr{M}^n\left(x^{a_0} y^{b_0}\right).$$

4. See Subsection I.6.2 p.86 in [FS09] for more details on the *Symbolic method*.

Let $x(t)$ and $y(t)$ be two functions that have Taylor series expansion near $t=0$. Recall that the Taylor series expansion of the product $x^\ell(t+z)\,y^m(t+z)$ is

$$x^\ell(t+z)\,y^m(t+z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(x^\ell(t)\,y^m(t)\right)\frac{z^n}{n!}.$$

We also have

$$Q\left(x(t),y(t),z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathscr{M}^n\left(x^{a_0}(t)\,y^{b_0}(t)\right)\frac{z^n}{n!}.$$

Take $\ell=a_0$, and $m=b_0$, and these two expansions coincide, if the operators $\mathscr{M}$ and $\partial/\partial t$ are the same. This is possible if, for all $i,j\geq 0$,

$$\sum_{k=-K}^{\sigma} i\,\pi_k\,x^{i+k}(t)\,y^{j+\sigma-k}(t)+j\,\tau_k\,x^{i+\sigma-k}(t)\,y^{j+k}(t)$$
$$=i\,x^{i-1}(t)\,y^j(t)\,x'(t)+j\,x^i(t)\,y^{j-1}\,y'(t),$$

and can happen by choosing

$$\begin{cases} x'(t) &= \displaystyle\sum_{k=-K}^{\sigma}\pi_k\,x^{k+1}(t)\,y^{\sigma-k}(t);\\ y'(t) &= \displaystyle\sum_{k=-K}^{\sigma}\tau_k\,x^{\sigma-k}(t)\,y^{k+1}(t).\end{cases}$$

Hence, if $(X(t),Y(t))$ is a solution of this system with initial conditions $x=X(0)$ and $y=Y(0)$, we have $Q(X(t),Y(t),z)=X^{a_0}(t+z)\,Y^{b_0}(t+z)$.[5] The statement follows by letting $t=0$. □

9.3 Examples of exactly solvable urns with random entries

We now consider a variety of examples for which Theorem 20 admits an exact solution, and an exact probability distribution is obtained. In Subsection 9.3.1 we treat a variation of the coupon-collector problem. In Subsections 9.3.2 and 9.3.3, we study urns with binomial random variables and uniform random variables. In Subsection 9.3.4, we study a variation of the coupon-collector problem that is modeled with three colors, demonstrating that the analytic methods can be extended to more colors.

By probabilistic techniques, [Jan04] and [Smy96] provide broad asymptotic urn theories covering some of the urns in the class considered here; our focus is on the *exact distributions*.

5. A classic theorem of Cauchy and Kovalevskaya guarantees the existence of a solution, and the condition $xy\neq 0$ guarantees an analytic expansion near $t=0$; see, for example, [Fol95] (Chap. 1 Sect. D., p.46–55).

9.3.1 An urn for coupon collection with delay

Collecting k coupons can be represented by a number of urn schemes. One standard urn model considers uncollected coupons to be balls of one color (say black) and collected coupons to be balls of another color (say white); initially all k coupons are not collected (all k balls are black). When a coupon is collected for the first time (a black ball is drawn from the urn), one now considers that coupon type as acquired, so the black ball is recolored white and deposited back in the urn. Collecting an already collected coupon type (drawing a white ball from the urn) results in no change (the white ball is returned to the urn). Thus, the standard coupon collection is represented by the replacement matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Occasionally, the coupon collector may misplace or lose a collected coupon *immediately* after collecting it; the coupon still needs to be collected. That is, the drawing of a black ball may sometimes result in no change too, delaying the overall coupon collection. This can be represented by the replacement matrix

$$\begin{pmatrix} -\mathscr{B}_p & \mathscr{B}_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.8}$$

where $\mathscr{B}_p$ is a Ber(p) random variable. Under any nonempty starting conditions, this scheme is balanced and tenable.

Proposition 30. *For the urn (9.8), the exact probability distribution of the number A_n of uncollected coupons (black balls) after n draws is given by*

$$\mathbb{P}\{A_n = i\} = \sum_{j=i}^{a_0} (-1)^{j-i} \binom{a_0}{j} \binom{j}{i} \left(\frac{s_0 - pj}{s_0}\right)^n.$$

Proof. The urn scheme (9.8) is amenable to the analytic method described, and leads to an exactly solvable system of differential equations. By Theorem 20, the associated differential system is

$$\begin{cases} x'(t) &= (1-p)\,x(t) + p\,y(t); \\ y'(t) &= y(t), \end{cases}$$

with solution

$$X(t) = ye^t + (x-y)\,e^{(1-p)t}, \qquad \text{and} \qquad Y(t) = ye^t.$$

Thus,

$$Q(x,1,z) = \left(e^z + (x-1)e^{(1-p)z}\right)^{a_0} e^{b_0 z}.$$

In the course of coupon collection the total number of coupons (balls in the urn) does not change; that is, $s_n = s_0$, for all $n \geq 0$. Extracting coefficients, we get

$$\begin{aligned}\frac{s_0 \dots s_{n-1}}{n!}\,\mathbb{P}\{A_n = i\} &= [x^i z^n]\, e^{b_0 z} \sum_{j=0}^{a_0} \binom{a_0}{j} (x-1)^j e^{(1-p)jz} \times e^{(a_0-j)z} \\ &= [z^n]\, e^{b_0 z} \sum_{j=i}^{a_0} \binom{a_0}{j} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} e^{((1-p)j+a_0-j)z}.\end{aligned}$$

Since $s_0 = a_0 + b_0$, we can write this as

$$\frac{s_0^n}{n!}\,\mathbb{P}\{A_n = i\} = [z^n] \sum_{j=i}^{a_0} (-1)^{j-i} \binom{a_0}{j} \binom{j}{i} e^{(s_0-pj)z}.$$

Consequently, we find the probability expression. □

9.3.2 A binomial urn

Consider an urn scheme with replacement matrix

$$\begin{pmatrix} \mathscr{X}_{\sigma,p} & \sigma - \mathscr{X}_{\sigma,p} \\ \sigma - \mathscr{X}_{\sigma,p} & \mathscr{X}_{\sigma,p} \end{pmatrix}, \tag{9.9}$$

where $\mathscr{X}_{\sigma,p}$ is distributed like $\mathrm{Bin}(\sigma, p)$.[6] Under any nonempty starting conditions, this is a balanced tenable scheme of balance σ. For an expression of the probability distribution of black balls after n draws, it seems that a solution for general p is too difficult. We focus here on the tractable unbiased case $p = 1/2$.

Proposition 31. *For the unbiased case $p = 1/2$ of the urn (9.9), the exact probability distribution of the number of black balls A_n is*

$$\mathbb{P}\{A_n = i\} = \frac{1}{2^{\sigma n}} \binom{\sigma n}{i - a_0}, \quad \text{for } i \in \{a_0, a_0+1, \dots, a_0 + \sigma n\}.$$

In other words, we have $A_n = a_0 + \mathrm{Bin}(\sigma n, 1/2)$. Asymptotics follow easily from the normal approximation to the binomial distribution. Let $\mathscr{N}(0, \nu^2)$ be a normal random variate with variance ν^2. We see that

$$\frac{A_n - \frac{1}{2}\sigma n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{D}} \mathscr{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{4}\right),$$

where the symbol $\xrightarrow{\mathscr{D}}$ stands for convergence in distribution, and σ is still the balance.

6. The notation $\mathrm{Bin}(k, p)$ stands for a binomially distributed random variable that counts the number of successes in k independent identically distributed trials with rate of success p per trial.

Link with Pólya–Friedman's scheme. The replacement matrix (9.3) is the special case where $\sigma = 1$, and as mentioned in the introduction it alternates between Pólya-Eggenberger's urn (with probability p) and Friedman's urn (with probability $1-p$). So, one may think of the urn process as a mixture model that chooses between two given models at each step. It is well known that the number of white balls in a pure Pólya-Eggenberger urn (scaled by n) converges to a beta distribution (see [Pól30]), whereas the number of white balls in a pure Friedman's urn satisfies the central limit tendency (see [Fre65]):

$$\frac{B_n - \frac{1}{2}n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{D}} \mathscr{N}\left(0, \frac{1}{12}\right).$$

In an unbiased mixture we get $\mathscr{N}(0, 1/4)$ as limit, with centering and scaling similar to that in Friedman's urn. The normal limit for an unbiased mixture has a larger variance than a pure Friedman's urn, in view of occasional perturbation by the Pólya-Eggenberger choice. Because Friedman's urn is *mean reverting*, the entire mixed process is mean reverting, that is having tendency for average equilibrium around an even split. We thus see that the Friedman effect is stronger than the Pólya-Eggenberger.

Proof. (Proposition 31) By Theorem 20, the associated differential system is

$$\begin{cases} x'(t) &= \displaystyle\sum_{k=0}^{\sigma} p^k (1-p)^{\sigma-k} \binom{\sigma}{k} x^{k+1}(t)\, y^{\sigma-k}(t); \\ y'(t) &= \displaystyle\sum_{k=0}^{\sigma} p^k (1-p)^{\sigma-k} \binom{\sigma}{k} x^{\sigma-k}(t)\, y^{k+1}(t). \end{cases}$$

The unbiased case, $p = 1/2$, yields an explicit solution:

$$X(t) = \frac{x}{\left(1 - \sigma\left(\frac{x+y}{2}\right)^{\sigma} t\right)^{1/\sigma}}, \qquad \text{and} \qquad Y(t) = \frac{y}{\left(1 - \sigma\left(\frac{x+y}{2}\right)^{\sigma} t\right)^{1/\sigma}}.$$

The probability generating function $Q(x,y,z) = X(z)^{a_0}\, Y(z)^{b_0}$ gives

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i,j\geq 0} s_0 s_1 \ldots s_{n-1}\, \mathbb{P}\left\{A_n = i, B_n = j\right\}\, x^i y^j \frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{x^{a_0} y^{b_0}}{\left(1 - \sigma\left(\frac{x+y}{2}\right)^{\sigma} z\right)^{\frac{a_0+b_0}{\sigma}}}. \end{aligned}$$

Note that $\mathbb{P}\left\{A_n = i, B_n = j\right\}$ is 0 for all values of i and j, except for $j = \sigma n + s_0 - i$, when the probability may differ from zero. In other words, the joint probability distribution

can be determined from either marginal distribution. We compute

$$\begin{aligned} Q(x,1,z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i,j\geq 0} s_0 s_1 \ldots s_{n-1}\, \mathbb{P}\{A_n = i, B_n = j\}\; x^i \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} s_0 s_1 \ldots s_{n-1}\, \mathbb{P}\{A_n = i\}\; x^i \frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{x^{a_0}}{\left(1-\sigma\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\sigma} z\right)^{\frac{a_0+b_0}{\sigma}}}. \end{aligned}$$

Extraction of coefficients yields [7]

$$\begin{aligned} [x^i z^n]\, Q(x,1,z) &= \frac{s_0 \ldots s_{n-1}}{n!}\, \mathbb{P}\{A_n = i\} \\ &= [x^i z^n]\, x^{a_0} \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\sigma\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\sigma} z\right)^n \binom{-\frac{a_0+b_0}{\sigma}}{n} \\ &= [x^i]\, x^{a_0} \frac{1}{2^{\sigma n}} (x+1)^{\sigma n} \frac{s_0 \ldots s_{n-1}}{n!} \\ &= [x^i]\, x^{a_0} \frac{1}{2^{\sigma n}} \sum_{i=0}^{\sigma n} \binom{\sigma n}{i} x^i \frac{s_0 \ldots s_{n-1}}{n!}. \end{aligned}$$

From this last expression we deduce the stated probability distribution for the number of black balls. □

9.3.3 A uniform urn

Consider an urn scheme with replacement matrix

$$\begin{pmatrix} \mathscr{U}_\sigma & \sigma - \mathscr{U}_\sigma \\ \sigma - \mathscr{U}_\sigma & \mathscr{U}_\sigma \end{pmatrix}, \tag{9.10}$$

where $\mathscr{U}_\sigma$ is a uniformly distributed random variable on the set $\{0, 1, \ldots, \sigma\}$. Under any nonempty starting conditions, this is a balanced tenable scheme.

Proposition 32. *The exact probability distribution of black balls for the urn (9.10) is given by*

$$\mathbb{P}\{A_n = i\} = \frac{T_{\sigma,n,i-a_0}}{(\sigma+1)^n}, \quad \text{for } i \in \{a_0, a_0+1, \ldots, a_0+\sigma n\},$$

where $T_{\sigma,n,k} = [x^k]\,(1 + x + \ldots + x^\sigma)^n$.

7. Recall that for $n, k \geq 0$, $\binom{-k}{n} = \frac{-k(-k-1)\ldots(-k+n-1)}{n!}$.

The numbers $T_{\sigma,n,k}$ are known in the classical literature (see [Eul01]) and have numerous combinatorial interpretations. For instance, in [FS09, I.15, p.45] , $T_{r-1,k,n-k}$ is the number of compositions of size n with k summands each at most r. In other words, $T_{2,n,k}$, called the trinomial coefficient, is the number of distinct ways in which k indistinguishable balls can be distributed over n distinguishable urns allowing at most two balls to fall in each urn. Several other interpretations related to counting strings, partitions and unlabeled trees of height 3 exist; see [And90].

Proof. (Proposition 32) By Theorem 20, the associated differential system is

$$\begin{cases} x'(t) &= \displaystyle\sum_{k=0}^{\sigma} \frac{1}{\sigma+1} x^{k+1}(t)\, y^{\sigma-k}(t); \\ y'(t) &= \displaystyle\sum_{k=0}^{\sigma} \frac{1}{\sigma+1} x^{\sigma-k}(t)\, y^{k+1}(t). \end{cases}$$

This yields an explicit solution:

$$X(t) = \frac{x}{\Big(1 - \dfrac{\sigma}{\sigma+1}\Big(\displaystyle\sum_{l=0}^{\sigma} x^l y^{\sigma-l}\Big)t\Big)^{1/\sigma}}; \qquad Y(t) = \frac{y}{\Big(1 - \dfrac{\sigma}{\sigma+1}\Big(\displaystyle\sum_{l=0}^{\sigma} x^l y^{\sigma-l}\Big)t\Big)^{1/\sigma}}.$$

Thus, the probability generating function $Q(x,1,z) = X(z)^{a_0}\, Y(z)^{b_0}$ is

$$\begin{aligned} Q(x,1,z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} s_0 s_1 \dots s_{n-1}\, \mathbb{P}\{A_n = i\}\; x^i\, \frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{x^{a_0}}{\Big(1 - \dfrac{\sigma}{\sigma+1}\Big(\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\sigma} x^\ell\Big)z\Big)^{\frac{a_0+b_0}{\sigma}}}. \end{aligned}$$

Extraction of coefficients yields

$$\begin{aligned} \frac{s_0 \dots s_{n-1}}{n!}\, \mathbb{P}\{A_n = i\} &= [x^i z^n]\, x^{a_0} \sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{\sigma}{\sigma+1}\Big(\sum_{\ell=0}^{\sigma} x^\ell\Big)z\Big)^n \binom{-\frac{a_0+b_0}{\sigma}}{n} \\ &= [x^i]\, x^{a_0} \frac{1}{(\sigma+1)^n}\, (1 + x + \dots + x^\sigma)^n\, \frac{s_0 \dots s_{n-1}}{n!}. \end{aligned}$$

We thus obtain the stated probability expression. □

9.3.4 An urn for a two-type coupon collection

The method has obvious extensions for $k \geq 2$ colors. Consider, for instance, the balanced tenable three-color coupon collection urn scheme with the entries

$$\begin{pmatrix} -1 & \mathscr{B}_p & 1 - \mathscr{B}_p \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.11}$$

in which a collected coupon is randomly categorized to fall in one of two classes. Here again, $\mathscr{B}_p$ is a Ber(p) random variable. The uncollected coupons correspond to black balls in the urn (replacement rules on the first row), and the white balls of the previous example are now ramified into red and green balls (second and third rows). The columns of the matrix are indexed by the same colors: they are from left to right indexed by black, red and green. Let A_n, B_n, C_n be respectively the number of black, red and green balls in the urn after n draws.

Proposition 33. *For the urn (9.11), the distribution of red balls B_n is given by the following probabilities:*

$$\mathbb{P}\{B_n = j\} = \left(\frac{p}{(1-p)}\right)^j \sum_{i=0}^{a_0} (-1)^i \binom{i}{j} \binom{a_0}{i} (1-p)^i \sum_{k=0}^{j} \binom{i}{k} (-1)^k \left(\frac{k}{s_0}\right)^n .$$

Proof. This scheme has the underlying differential system

$$\begin{cases} x'(t) &= p\,y(t) + (1-p)h(t); \\ y'(t) &= y(t); \\ h'(t) &= h(t). \end{cases}$$

This system of differential equations has the solution

$$\begin{aligned} X(t) &= \big(p\,y + (1-p)h\big)(e^t - 1) + x\,; \\ Y(t) &= y\,e^t\,; \\ H(t) &= h\,e^t\,. \end{aligned}$$

Note that in this scheme the total number of balls after any number of draws remains the same at all times. The corresponding generating function is

$$Q(x,y,h,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i,j,k\geq 0} s_0^n\, \mathbb{P}\{A_n = i, B_n = j, C_n = k\}\, x^i y^j h^k \frac{z^n}{n!}\,.$$

The extended isomorphism theorem then gives

$$Q\left(x,y,h,z\right) = X^{a_0}(t)\, Y^{b_0}(t)\, H^{c_0}(t)\,.$$

One can extract univariate and joint distributions from this. For instance,

$$\begin{aligned} \frac{s_0^n}{n!}\,\mathbb{P}\{B_n = j\} &= \left[y^j z^n\right] Q(1,y,1,z) \\ &= \left[y^j z^n\right] \left(p\,(y-1)\,(e^z - 1) + e^z\right)^{a_0} y^{b_0} e^{b_0 z} e^{c_0 z}\,. \end{aligned}$$

Extracting coefficients (details omitted) we find the probability distribution for red balls. □

Conclusion

We presented a generalization of the isomorphism theorem for deterministic schemes. The generalization covers the class of balanced tenable two-color urn schemes with random entries. The result is particularly useful when the system of ordinary differential equations is amenable to a simple solution, from which exact probability distributions can be extracted in a fairly mechanical fashion.

Our last example (see Proposition 33) shows it is straightforward to extend our theorem to additional colors: an urn with k colors will lead to a differential system of k equations. This theorem invites further work, using asymptotic tools from [FS09], to obtain limit laws. For instance, the first example (see Proposition 31, a model mixing Pólya and Friedman urn models, and Fig. 9.1 and 9.2) raises various questions such as: Can we obtain an exact explicit expression for the generating function for general $p \in (0, 1)$? What is the limit law, and what is the asymptotic behavior? How does the phase transition between a Gaussian regime and a beta regime take place?

Applications of this generic methodology are used in [Mah13] for deriving statistics of node degrees in series-parallel graphs. Connections with random graph process should be a large domain of application for our methods.

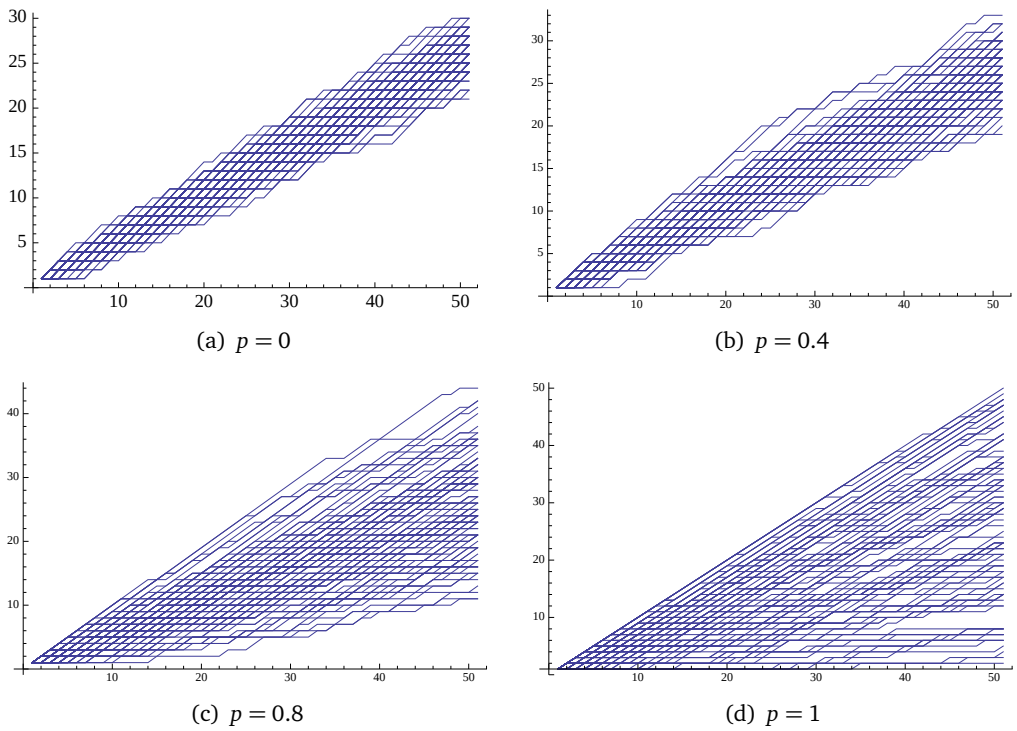
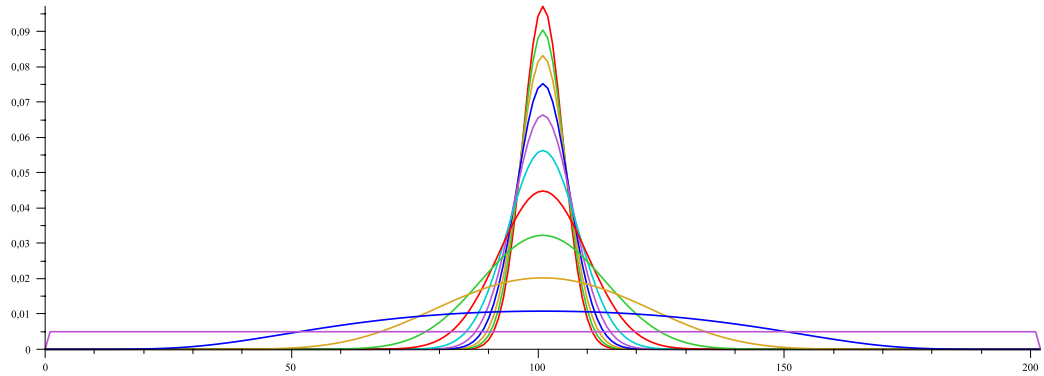
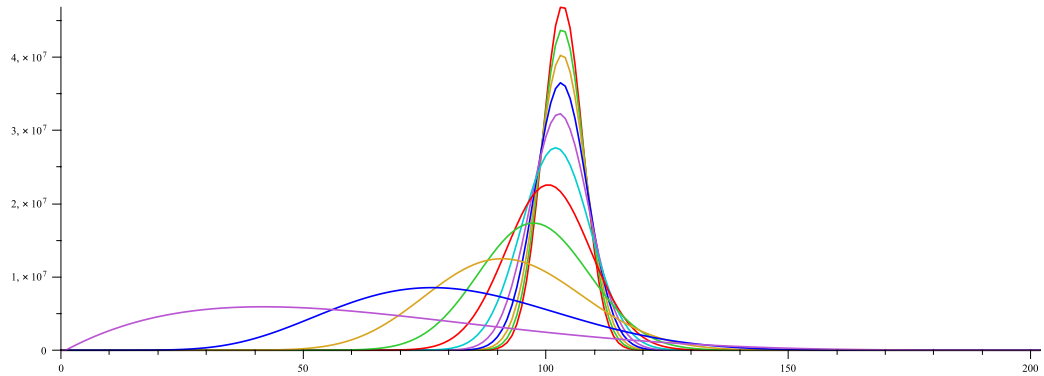


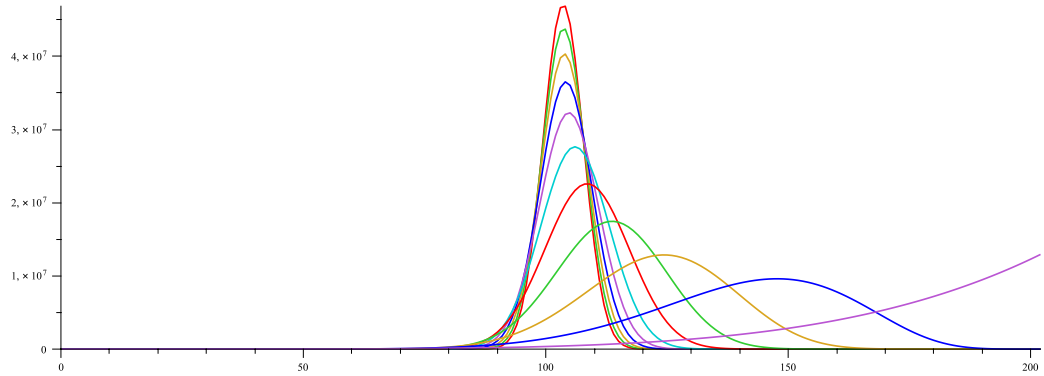
Figure 9.1: Each graph represents a simulation of 100 histories of length 50 for the Pólya–Friedman's urn (9.3) (see Example 7) with parameter $p \in \{0, 0.4, 0.8, 1\}$. There is a transition between a *Gaussian* behavior (Fig.9.1(a)) and a *beta* behavior (Fig.9.1(d)).



(a) $(a_0, b_0) = (1, 1)$



(b) $(a_0, b_0) = (2, 5)$



(c) $(a_0, b_0) = (6, 1)$

Figure 9.2: Normalized distribution of the number of black balls after 200 draws (A_{200}) for the Pólya–Friedman's urn (9.3) with different values of $p \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$. Here, the starting configuration is a_0 black and b_0 white ball. We observe a transition between a Gaussian distribution and a beta distribution, $\beta(a_0, b_0)$.

Chapitre 10

Urnes non équilibrées

Résumé. Nous commençons une analyse globale des urnes non équilibrées additives. Pour cela nous utilisons un codage particulier, en terme de fonctions génératrices de probabilité pondérées par la taille de l'urne. Par une méthode symbolique, nous obtenons une équation aux dérivées partielles, vérifiée par cette série génératrice. La méthode des caractéristiques permet ensuite de donner une expression explicite pour cette fonction génératrice dans le cas où il est possible d'exprimer les solutions d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

Préambule

> *Dans une boîte sont placées 1000 boucles de ficelles. Un morceau de ficelle est pioché au hasard. Ce morceau est alors coupé à un endroit quelconque puis replacé dans la boîte. Ce processus de sélection/découpe est répété 1000 fois. Sachant que chaque bout de ficelle (boucle ou fil) est pioché avec la même probabilité, quelle est la longueur moyenne des bouts de ficelles dans la boîte ?*

Ce petit problème de combinatoire, intitulé *"cutting loops"*, est résolu par D. E. Knuth dans une courte note [Knu11]. Cette note est à l'origine de notre travail sur les urnes non équilibrées. Dans celle-ci, Knuth ne mentionne aucun lien avec les urnes ; cependant, il fait intervenir des séries génératrices et des récurrences proches de la combinatoire analytique. Ce traitement par l'analyse d'un problème lié à une urne non équilibrée est une lueur d'espoir pour une vision analytique des urnes non équilibrées.

Le problème de "cutting loops" cache en effet une urne non équilibrée. Tout d'abord, la longueur totale de ficelle est constante et fixée au départ par le nombre de boucles dans la boîte. Pour connaître la longueur moyenne à l'étape n, il suffit de connaître le nombre moyen de brins à l'étape n. Ensuite, il y a deux types de bouts de ficelle dans la boîte : des ficelles sans bouts (des boucles) et des ficelles à bouts (des fils). Enfin, les règles sont les suivantes : si une boucle est tirée, elle est coupée et devient un fil ; si un fil est tiré, il est coupé et devient deux fils. Ainsi, en codant par une boule noire les

boucles et par une boule blanche les fils, l'urne sous-jacente est

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette urne est non équilibrée. Le nombre total S_n de boules à l'étape n n'est plus déterministe. Si le processus commence avec m boucles dans la boîte et si $0 \leq n \leq m$, la quantité S_n est une variable aléatoire à valeur dans l'ensemble $\{m, m+1, \ldots, m+n-1\}$. Dans ce cas, compter les histoires possibles et normaliser par le nombre total d'histoires ne correspond plus au modèle probabiliste. En effet, à l'étape n, toutes les histoires ne sont plus équiprobables. La Figure 10.1 illustre ce phénomène. Par exemple, les histoires de longueur 3 commençant en x^3 et finissant en y^3 sont toutes de poids $1/27$ tandis que celles finissant en x^2y^3 ont un poids $1/36$. Il n'y a pas non plus de lien entre le poids d'une histoire et son arrivée : en effet, suivant le chemin emprunté, une histoire finissant en xy^3 peut avoir un poids de $1/27$ ou $1/36$.

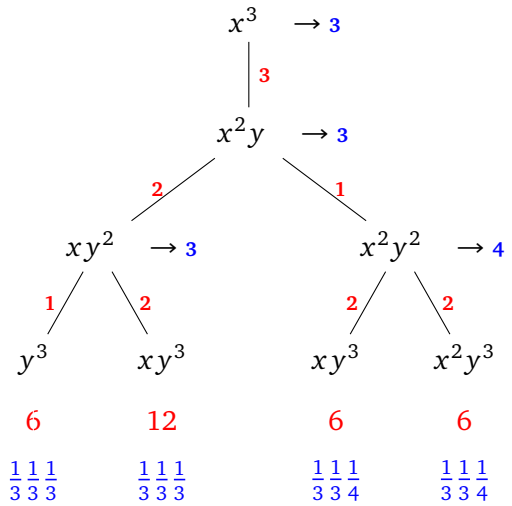


FIGURE 10.1 – Arborescence des configurations possibles de l'urne $[-1, 1, 0, 1]$, partant de la configuration initiale $(3, 0)$. Chaque branche gauche (resp. droite) correspond au tirage d'une boule noire (resp. blanche). Sur chaque branche est indiqué *en rouge* le nombre de façons d'emprunter celle-ci. Les nombres en rouge aux feuilles de l'arbre correspondent aux nombres d'histoires : c'est le produit des poids rouges lus sur le chemin entre la racine et une feuille. *En bleu* dans l'arbre est indiqué le nombre total de boules dans l'urne à chaque instant ; aux feuilles est indiqué *en bleu* la pondération correspondante : c'est le produit des inverses des poids bleus lus sur le chemin entre la racine et une feuille.

La combinatoire des histoires ne correspond pas à l'évolution probabiliste du processus d'une urne non équilibrée. C'est pourquoi nous travaillerons désormais directement

avec les séries génératrices de probabilité,

$$P(x,y,z) = \sum_{n\geq 0} p_n(x,y) z^n ,$$

$$p_n(x,y) = \sum_{i,j} \mathbb{P}\left\{A_n = i, B_n = j\right\} x^i y^j .$$

Pour notre exemple $[-1,1,0,1]$ avec $(a_0, b_0) = (3,0)$, nous avons

$$P(x,y,z) = x^3 + x^2yz + \left(\frac{2}{3}xy^2 + \frac{1}{3}x^2y^2\right) z^2 + \left(\frac{2}{9}y^3 + \frac{11}{18}xy^3 + \frac{1}{6}x^2y^3\right) z^3 + \dots .$$

Plan. Ce chapitre est une approche générale des urnes non équilibrées. Dans la Section 10.1, nous élargissons le cadre d'étude jusqu'alors adopté dans ce manuscrit. Y figure également le théorème principal du chapitre : *l'évolution de toute urne non équilibrée additive est reliée à la solution d'une équation aux dérivées partielles* (Théorème 21). Les Sections 10.2 et 10.3 tirent parti de la méthode des caractéristiques afin d'obtenir une expression explicite de la fonction génératrice des urnes non équilibrées (Théorème 23). La Section 10.4 illustre par des exemples le procédé d'obtention de la série génératrice grâce à la méthode des caractéristiques. Les Sections 10.5 et 10.6 abordent quelques extensions de ce modèle, avec plusieurs couleurs, et des coefficients aléatoires.

10.1 Fonctions génératrices sans équilibre

Où l'on constate la puissance de la symbolique.

Nous nous plaçons ici dans un contexte très général d'urnes de Pólya bicolores, définies par leur configuration initiale (a_0, b_0) et par leur matrice de règles

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{Z} .$$

Nous n'imposons pas de condition de balance. Pour éviter tout blocage dans le processus d'urne lié aux problèmes de tenabilité (discutés par exemple dans [Mah08]), nous imposons les conditions suivantes sur les coefficients,

$$a,d \geq -1 , \qquad b,c \geq 0 , \qquad a+b \geq 0 , \qquad c+d \geq 0 . \tag{10.1}$$

Ainsi, une boule est retirée seulement si elle a été piochée et le nombre de boules au cours du temps ne peut pas décroître. Les urnes vérifiant ces conditions (10.1) sont appelées *urnes générales additives*. Le vecteur aléatoire décrivant la composition de l'urne à l'étape n est noté (A_n, B_n). Ces urnes sont caractérisées par une équation aux dérivées partielles, au cœur du théorème suivant.

Théorème 21 (EDP). *Soit $[a,b,c,d]$ une urne de Pólya générale additive (10.1), de configuration initiale (a_0,b_0), avec a_0,b_0 entiers positifs ou nuls tels que $a_0+b_0>0$. Définissons la fonction génératrice de probabilité pondérée $\Psi(x,y,z)$,*

$$\Psi(x,y,z)=\sum_{n\geq 0}\sum_{i,j}\mathbb{P}\left\{A_n=i,\,B_n=j\right\}\frac{x^i\,y^j}{i+j}z^n\,.$$

Alors Ψ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\left(x-x^{a+1}y^bz\right)\partial_x\Psi+\left(y-x^cy^{d+1}z\right)\partial_y\Psi=x^{a_0}y^{b_0}\,, \tag{10.2}$$

avec la condition initiale

$$\Psi(x,y,0)=\frac{x^{a_0}\,y^{b_0}}{a_0+b_0}\,. \tag{10.3}$$

Démonstration. Dans cette preuve, nous utilisons diverses fonctions génératrices de probabilité à l'étape n :

- les fonctions génératrices de probabilité $p_n(x,y)$;
- les fonctions génératrices de probabilité étendues $p_n(x,y,t)$, où l'on marque le nombre total de boules dans l'urne grâce à la variable additionnelle t ;
- les fonctions génératrices de probabilité pondérées $\psi_n(x,y)$;
- les fonctions génératrices de probabilité pondérées étendues $\psi_n(x,y,t)$.

Elles sont définies par

$$p_n(x,y)=\sum_{i,j}\mathbb{P}\left\{A_n=i,B_n=j\right\}x^iy^j\,,\qquad p_n(x,y,t)=\sum_{i,j}\mathbb{P}\left\{A_n=i,B_n=j\right\}x^iy^j\,t^{i+j}\,,$$

$$\psi_n(x,y)=\sum_{i,j}\mathbb{P}\left\{A_n=i,\,B_n=j\right\}\frac{x^i\,y^j}{i+j}\,,\quad \psi_n(x,y,t)=\sum_{i,j}\mathbb{P}\left\{A_n=i,\,B_n=j\right\}\frac{x^i\,y^j}{i+j}t^{i+j}.$$

Les relations suivantes permettent de passer d'une fonction à une autre :

$$\psi_n(x,y,t)=\int_0^t p_n(x,y,w)\frac{dw}{w}\,,\qquad \psi_n(x,y,1)=\psi_n(x,y)\,, \tag{10.4}$$

$$p_n(x,y,t)=t\partial_t\psi_n(x,y,t)\,,\qquad p_n(x,y,1)=p_n(x,y)\,. \tag{10.5}$$

Nous voulons obtenir une récurrence sur les fonctions génératrices $\psi_n(x,y)$. Pour cela, partons d'une configuration quelconque (i,j) à l'étape n, et cherchons toutes les configurations possibles après un tirage. La variable t auxiliaire compte le nombre total de boules dans l'urne à l'étape n. Le monôme de départ est donc $x^iy^jt^{i+j}$. Nous reprenons l'opérateur de l'urne $\mathscr{D}$ (éq. (2.5), p.31), modifié par la nouvelle variable t,

$$\mathscr{D}=x^ay^bt^{a+b}\Theta_x+x^cy^dt^{c+d}\Theta_y\,.$$

Nous ajoutons l'opérateur intégral $\mathscr{I}$, pour toute fonction $f(t)$,

$$\mathscr{I}[f(t)]=\int_0^t f(w)\frac{dw}{w}\,.$$

L'opérateur $\mathscr{I}$ permet de passer de la fonction $p_n(x,y,t)$ à la fonction $\psi_n(x,y,t)$. En effet, nous avons $\mathscr{I}\left[x^i y^j t^{i+j}\right] = x^i y^j t^{i+j}/(i+j)$, et d'après (10.4),

$$\psi_n(x,y,t) = \mathscr{I}\left[p_n(x,y,t)\right] . \tag{10.6}$$

Nous simulons un tirage pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$,

$$\mathscr{D} \circ \mathscr{I}\left[x^i y^j t^{i+j}\right] = \frac{i}{i+j} x^{i+a} y^{j+b} t^{i+j+a+b} + \frac{j}{i+j} x^{i+c} y^{j+d} t^{i+j+c+d} .$$

Cette dernière équation donne, après sommation sur tous les i, j, la relation

$$p_{n+1}(x,y,t) = \mathscr{D} \circ \mathscr{I}\left[p_n(x,y,t)\right] . \tag{10.7}$$

Cette récurrence itérée donne une alternance d'opérateurs d'intégration et de dérivation, ce qui rend son traitement difficile. D'après les relations (10.5) et (10.6), nous récrivons la récurrence (10.7),

$$t\partial_t \psi_{n+1}(x,y,t) = \mathscr{D}\left[\psi_n(x,y,t)\right] . \tag{10.8}$$

Dans les fonctions génératrices $\psi_n(x,y,t)$, les exposants des monômes sont liés : si le coefficient du monôme $x^i y^j t^k$ est non nul, alors nous avons $k = i+j$. Cette relation se traduit sur les opérateurs de pointage par $t\partial_t = \Theta_x + \Theta_y = x\partial_x + y\partial_y$. La variable t devient superflue et l'équation (10.8) se récrit, après avoir posé $t = 1$,

$$(\Theta_x + \Theta_y) \circ \psi_{n+1}(x,y) = (x^a y^b \Theta_x + x^c y^d \Theta_y) \circ \psi_n(x,y) . \tag{10.9}$$

Il reste à multiplier (10.9) par z^{n+1} et à sommer sur tous les n afin de faire apparaître la fonction recherchée $\Psi(x,y,z) = \sum_{n\geq 0} \psi_n(x,y,t) z^n$,

$$(\Theta_x + \Theta_y) \circ \left[\Psi(x,y,z) - \psi_0(x,y)\right] = \left[z x^a y^b \Theta_x + z x^c y^d \Theta_y\right] \circ \Psi(x,y,z) .$$

Comme $\psi_0(x,y) = x^{a_0} y^{b_0}/(a_0+b_0)$, l'équation aux dérivées partielles apparaît,

$$\left[(1 - z x^a y^b)\Theta_x + (1 - z x^c y^d)\Theta_y\right] \circ \Psi(x,y,z) = (\Theta_x + \Theta_y) \circ \psi_0(x,y) = x^{a_0} y^{b_0} .$$

□

Retour à la fonction $P(x,y,z)$. Le lien entre la fonction génératrice de probabilité classique $P(x,y,z) = \sum_n p_n(x,y) z^n$ et la fonction pondérée $\Psi(x,y,z)$ est donné par la relation

$$P(x,y,z) = \partial_t \Psi(xt, yt, z)\big|_{t=1} . \tag{10.10}$$

Équation fonctionnelle sur P. Notons $\mathscr{T} = \mathscr{D} \circ \mathscr{I}$. La récurrence (10.7) sur les fonctions $p_n(x,y,t)$ devient $p_{n+1} = \mathscr{T}\left[p_n\right]$. En itérant, nous obtenons $p_n(x,y,t) = \mathscr{T}^n\left[p_0(x,y,t)\right]$. Symboliquement, nous pouvons écrire

$$P(x,y,t,z) = \sum_{n\geq 0} \mathscr{T}^n\left[p_0(x,y,t)\right] z^n = (1-z\mathscr{T})^{-1}\left[x^{a_0} y^{b_0} t^{a_0+b_0}\right].$$

Il est possible de différentier par rapport à z, ce qui donne l'équation fonctionnelle

$$\partial_z P(x,y,t,z) = \mathscr{T} \circ (1-z\mathscr{T})^{-1}\left[P(x,y,t,z)\right], \tag{10.11}$$

mais cette écriture cache l'alternance des opérateurs, intégration $\mathscr{I}$ et différentiation $\mathscr{D}$, et oblige la présence de la variable supplémentaire t. Nous n'obtenons pas d'équation simple directement sur $P(x,y,z)$.

Retour au cas équilibré. Dans le cas où l'urne possède la propriété d'équilibre, la proposition suivante fait le lien entre la fonction génératrice de probabilité pondérée $\Psi(x,y,z)$ et la fonction génératrice des histoires $H(x,y,z)$.

Proposition 34. *Soient $[a,b,c,d]$ une urne équilibrée additive de balance $\sigma > 0$, et (a_0,b_0) la configuration initiale. Notons $s_0 = a_0 + b_0$. Les fonctions génératrices Ψ et H sont liées par*

$$\Psi(x,y,z) = \frac{1}{\sigma}\int_0^1 t^{s_0/\sigma-1} H\left(x,y,z\frac{1-t}{\sigma}\right) dt. \tag{10.12}$$

Démonstration. Pour une urne équilibrée, la série génératrice des histoires $H(x,y,z)$ est

$$H(x,y,z) = \sum_{n,i,j} H_{n,ij} x^i y^j \frac{z^n}{n!},$$

et en notant $H_n = \sum_{i,j} H_{n,i,j}$, la fonction génératrice de probabilité pondérée s'exprime ainsi,

$$\Psi(x,y,z) = \sum_{n,i,j} \mathbb{P}\left\{A_n = i,\, B_n = j\right\} \frac{x^i\, y^j}{i+j} z^n = \sum_{n,i,j} \frac{H_{n,i,j}}{H_n} \frac{x^i\, y^j}{i+j} z^n.$$

Nous devons faire le lien entre $1/n!$ et $1/(H_n(i+j))$. Dans le cas équilibré, H_n vaut $s_0(s_0+\sigma)\dots(s_0+(n-1)\sigma)$, et $i+j = s_0+\sigma n$. Il suffit de multiplier la quantité $H_{n,i,j}/n!$ par $n!/[s_0(s_0+\sigma)\dots(s_0+n\sigma)]$. Nous avons la relation suivante,

$$\frac{n!}{s_0(s_0+\sigma)\dots(s_0+\sigma n)} = \frac{n!}{\sigma^{n+1}\frac{s_0}{\sigma}\left(\frac{s_0}{\sigma}+1\right)\dots\left(\frac{s_0}{\sigma}+n\right)} = \frac{1}{\sigma^{n+1}} B\left(\frac{s_0}{\sigma}, n+1\right),$$

où la fonction Beta, $B(x,y)$, est définie par

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.$$

Ainsi, nous trouvons la relation entre les coefficients de Ψ et de H,

$$\frac{H_{n,i,j}}{(i+j)H_n} = \frac{H_{n,i,j}}{n!} \times \frac{1}{\sigma} \int_0^1 t^{s_0/\sigma - 1} \left(\frac{1-t}{\sigma} \right)^n dt\,.$$

Il reste simplement à multiplier par le monôme $x^i y^j z^n$ et à sommer sur les entiers i, j, n afin de conclure la preuve. □

Par cette proposition, nous retrouvons les fonctions génératrices des histoires combinatoires dans le cas équilibré grâce à la résolution de l'équation aux dérivées partielles sur Ψ.

10.2 Méthode des caractéristiques

L'équation aux dérivées partielles obtenue (10.2) est linéaire du premier ordre. Les solutions d'une telle équation peuvent être appréhendées par la méthode dite des caractéristiques. Nous rappelons ici le principe de cette méthode, détaillée par exemple dans [ZT86].

Méthode pratique. Nous voulons résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante, d'inconnue $w(x, y)$,

$$f(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y,w)\,. \tag{10.13}$$

Pour cela, nous procédons en trois étapes :

1. nous identifions le domaine où $h(x, y, w) = 0$;
2. dans le domaine où $h(x, y, w) \neq 0$, nous cherchons deux intégrales premières U et V du système caractéristique associé, fonctionnellement indépendantes ;
3. toute solution de (10.13) est alors définie par $F(U(x, y, w), V(x, y, w)) = 0$ où F est une fonction $\mathscr{C}^1$ quelconque. Cela définit w implicitement en fonction de x, y. Il faut bien évidemment que l'une des deux intégrales premières dépende effectivement de w.

Cette méthode requiert quelques définitions.

Système caractéristique. À partir de l'équation aux dérivées partielles (10.13), on définit le système (10.14), appelé *système caractéristique*,

$$\frac{dx}{f} = \frac{dy}{g} = \frac{dw}{h}\,. \tag{10.14}$$

Intégrale première. Une intégrale première du système caractéristique (10.14) est une fonction U de classe $\mathscr{C}^1$ en x, y, w non constante, et telle que pour toute solution (ϕ, ψ, η) de l'équation (10.13), la fonction $U\big(\phi(t), \psi(t), \eta(t)\big)$ soit constante. Une intégrale première est une fonction constante le long des solutions du système. La fonction $w(x, y)$ est solution de (10.13) si l'intégrale première $U(x, y, w)$ vérifie

$$f(x,y,w)\frac{\partial U}{\partial x} + g(x,y,w)\frac{\partial U}{\partial y} + h(x,y,w)\frac{\partial U}{\partial w} = 0\,.$$

Solutions fonctionnellement indépendantes. Deux intégrales premières U et V de classe $\mathscr{C}^1$ dans un ouvert G sont *fonctionnellement indépendantes* si les seules fonctions H différentiables des deux variables U et V qui vérifient $H(U,V) = constante$ dans G sont les constantes, i.e. $H(U,V) = a \Longrightarrow \forall (u,v) \in G,\ H(u,v) = a$.

Théorème 22. *Soient U et V deux intégrales premières fonctionnellement indépendantes de $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dw}{R}$. Toute intégrale première W s'exprime alors en fonction de U et V, i.e. il existe F de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $W = F(U,V)$.*

10.3 Résolution générale de l'équation aux dérivées partielles

Pour appliquer la méthode des caractéristiques à l'équation (10.2) nous devons résoudre le système caractéristique suivant

$$\frac{dx}{x - zx^{a+1}y^b} = \frac{dy}{y - zx^c y^{d+1}} = \frac{dw}{x^{a_0}y^{b_0}}\,, \tag{10.15}$$

dans un domaine où $xy \neq 0$.

Première intégrale première. Prenons uniquement la première équation de ce système caractéristique (10.15). Il s'agit simplement de résoudre une équation différentielle ordinaire, mais en général non linéaire,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(1 - zx^a y^b)}{y(1 - zx^c y^d)}\,. \tag{10.16}$$

Supposons que $x = g(y, z, u)$ soit une solution de (10.16) dépendant d'une constante d'intégration u. En isolant cette constante, nous trouvons une équation fonctionnelle du type $u = f(x, y, z)$. Se dégage alors une intégrale première du système caractéristique, notée $U(x, y, z) = f(x, y, z)$.

Seconde intégrale première. Regardons la seconde partie du système caractéristique,

$$\frac{dw}{dy} = \frac{x^{a_0}y^{b_0}}{y(1 - zx^c y^d)}\,. \tag{10.17}$$

Il s'agit aussi d'une équation différentielle ordinaire. Pour la résoudre, il faut ici prendre en compte la dépendance entre x et y précédemment remarquée. Nous effectuons la substitution $x = g(y,z,u)$, ce qui nous donne par intégration de l'équation,

$$w = \int_0^y \frac{g(t,z,u)^{a_0} t^{b_0-1}}{1 - zg(t,z,u)^c t^d}\, dt + V\,. \tag{10.18}$$

La constante d'intégration V fournit la seconde intégrale première du système caractéristique. La suppression de la variable u est faite grâce à la première intégrale première, car $U(x,y,z) = u$.

Indépendance. Les deux intégrales trouvées U et V sont fonctionnellement indépendantes puisque V dépend de la variable w tandis que U est indépendant de w.

Solution générale. Toute solution de l'équation (10.2) est alors définie implicitement par l'équation $F(U,V) = 0$, où F est une fonction $\mathscr{C}^1$ quelconque. Or, l'intégrale première U s'écrit $U = f(x,y,z)$ tandis que l'intégrale première V s'écrit $V = w - e(x,y,z)$. L'équation $F(U,V) = 0$ s'écrit donc $F(f(x,y,z), w - e(x,y,z)) = 0$. Afin d'expliciter une solution, il faut isoler w, ce qui donne $w - e(x,y,z) = F^{-1}(f(x,y,z))$. Cela nous amène à la proposition suivante.

Proposition 35. *Soit l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(x - x^{a+1} y^b z\right) \partial_x w + \left(y - x^c y^{d+1} z\right) \partial_y w = x^{a_0} y^{b_0}\,.$$

Toute solution $S(x,y,z)$ à cette équation définie dans un voisinage où $xy \neq 0$ s'écrit

$$S(x,y,z) = \int_0^y \frac{g(t,z,U(x,y,z))^{a_0} t^{b_0-1}}{1 - zg(t,z,U(x,y,z))^c t^d}\, dt + \Phi\left(U(x,y,z)\right)\,, \tag{10.19}$$

où Φ est une fonction $\mathscr{C}^1$ quelconque, où $g(y,z,u)$ est l'expression des solutions générales de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(1 - zx^a y^b)}{y(1 - zx^c y^d)}\,,$$

avec u une constante d'intégration. Enfin, $U(x,y,z)$ est l'intégrale première associée à ces solutions $x = g(y,z,u)$.

Nous pouvons être un peu plus précis sur ces solutions grâce à notre connaissance de Φ lorsque $z = 0$. Dans toute cette étude, la variable z est en fait considérée comme un paramètre. Qu'en est-il lorsque ce paramètre vaut 0 ?

Le cas $z = 0$. Le système caractéristique devient très simple,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dw}{x^{a_0} y^{b_0}}\,.$$

En intégrant la première égalité, nous obtenons $x/y = u$, où u est une constante d'intégration. L'intégrale première qui en découle est $U(x,y) = x/y$. La fonction $g(y,z,u)$ décrivant les solutions de $dx/dy = x/y$ est $g(y,0,u) = yu$. Ainsi les solutions générales de l'équation aux dérivées partielles données par (10.19) sont

$$\begin{aligned}
S(x,y,0) = & \int_0^y g(t,0,U)^{a_0} t^{b_0-1}\,dt + \Phi(U) \\
= & \int_0^y (tU)^{a_0} t^{b_0-1}\,dt + \Phi(U) \\
= & \; U^{a_0} \int_0^y t^{a_0+b_0-1}\,dt + \Phi(U) \\
= & \; \frac{x^{a_0}}{y^{a_0}} \frac{y^{a_0+b_0}}{a_0+b_0} + \Phi\left(\frac{x}{y}\right) \\
= & \; \frac{x^{a_0} y^{b_0}}{a_0+b_0} + \Phi\left(\frac{x}{y}\right) \\
= & \; \Psi(x,y,0) + \Phi\left(\frac{x}{y}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction Φ associée à la solution particulière $\Psi(x,y,z)$ vérifie pour tout x,y tels que $xy \neq 0$, $\Phi(x/y) = 0$. En effet, lorsque la solution $S = \Psi$, l'écriture devient $\Psi(x,y,0) = \Psi(x,y,0) + \Phi(x/y)$. Finalement, la fonction Φ est identiquement nulle pour la fonction génératrice recherchée $\Psi(x,y,z)$.

Théorème 23. *En conservant les notations de la Proposition 35, la fonction génératrice de probabilité pondérée $\Psi(x,y,z)$ est solution de l'équation (10.2) et vérifie, pour $xy \neq 0$,*

$$\Psi(x,y,z) = \int_0^y \frac{g(t,z,U(x,y,z))^{a_0}\, t^{b_0-1}}{1 - z\, g(t,z,U(x,y,z))^c\, t^d}\,dt\,. \tag{10.20}$$

Le problème réside dans l'obtention de l'intégrale première $U(x,y,z)$ liée à l'expression explicite et de la solution générale $x = g(y,z,u)$ de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(1 - zx^a y^b)}{y(1 - zx^c y^d)}\,.$$

Lorsque ces expressions sont explicites, nous avons accès à une formule explicite pour la série génératrice codant le comportement de l'urne. Le Corollaire 4 p.178 est une version symétrique de ce théorème (en échangeant les rôles de x et y).

10.4 Quelques exemples concrets d'urnes non équilibrées

10.4.1 Le problème de "cutting loops"

Revenons au problème introductif de ce chapitre, sur les bouts de ficelles de Knuth. Le modèle d'urne est décrit par

$$\mathscr{K} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (a_0, b_0) = (m, 0).$$

Son comportement est donné par la proposition suivante :

Proposition 36. *La fonction génératrice de probabilité pondérée de l'urne $\mathscr{K}$ est*

$$\Psi_{\mathscr{K}}(x,y,z) = \int_0^y \frac{\left(\frac{x(1-zy)}{y} + z\ln(y) - z\ln(t)\right)^m t^{m-1}}{(1-zt)^{m+1}}\, dt\,.$$

De plus, comme ce processus ajoute exactement une boule blanche à chaque étape, les variables y et z comptent la même quantité. Ainsi nous spécifions sans perte de généralité $y = 1$, ce qui permet d'écrire,

$$\Psi_{\mathscr{K}}(x,1,z) = \int_0^1 \frac{t^{m-1}}{(1-zt)^{m+1}} \left(x(1-z) - z\ln(t)\right)^m dt\,.$$

Démonstration. (Proposition 36) Le système caractéristique associé à la matrice de règles $\mathscr{K}$ est

$$\frac{dx}{x(1-zx^{-1}y)} = \frac{dy}{y(1-zy)} = \frac{dw}{x^m}\,.$$

L'équation différentielle ordinaire liée à la première intégrale première est

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x-zy}{y(1-zy)},$$

qui est une équation linéaire du premier ordre avec second membre. L'ensemble des solutions est donné par

$$x(y,z) = \frac{y}{1-zy}\left(\lambda - z\ln(y)\right),$$

où λ est une constante d'intégration. De cette expression, nous déduisons l'intégrale première $U(x,y,z)$ ainsi que la fonction $g(y,z,u)$,

$$U(x,y,z) = \frac{x(1-zy)}{y} + z\ln(y), \tag{10.21}$$

$$g(y,z,u) = \frac{y}{1-zy}\left(u - z\ln(y)\right). \tag{10.22}$$

En appliquant le Théorème 23 avec les expressions (10.21) et (10.22), nous concluons cette preuve. □

10.4.2 Les urnes diagonales

Étudions une famille d'urne à deux paramètres, traitée par S. Balaji et H.M. Mahmoud [BM06],

$$\mathscr{BM} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \qquad a, d > 0.$$

Ces urnes possèdent une expression explicite pour la fonction génératrice de probabilité pondérée.

Proposition 37. *La fonction génératrice $\Psi(x,y,z)$ de l'urne $\mathscr{BM}$ est*

$$\Psi_{\mathscr{BM}}(x,y,z) = \int_0^y \left[(x^{-a} - z) \left(\frac{t^{-d} - z}{y^{-d} - z} \right)^{a/d} + z \right]^{-a_0/a} \frac{t^{b_0 - 1}}{1 - zt^d} \, dt.$$

Cette fonction génératrice s'exprime comme la primitive d'une fonction algébrique. Une question à approfondir est le caractère algébrique de la série génératrice. Dans ce cadre, les travaux de J. Liouville [Lio33b, Lio33c, Lio33a] permettent de connaître la nature (algébrique ou non) de ce type de fonction.

Démonstration. (Proposition 37) Le système caractéristique lié aux urnes $\mathscr{BM}$, de condition initiale (a_0, b_0) est

$$\frac{dx}{x(1 - zx^a)} = \frac{dy}{y(1 - zy^d)} = \frac{dw}{x^{a_0} y^{b_0}}.$$

La première égalité s'intègre de la façon suivante,

$$\frac{1}{a} \ln \left(\frac{x^a}{1 - zx^a} \right) = \frac{1}{d} \ln \left(\frac{y^d}{1 - zy^d} \right) + k, \tag{10.23}$$

où k est une constante d'intégration. En prenant l'exponentielle sur (10.23), nous obtenons la relation suivante, avec k' une autre constante,

$$\frac{x}{(1 - zx^a)^{1/a}} = k' \frac{y}{(1 - zy^d)^{1/d}}. \tag{10.24}$$

Nous déduisons de (10.24) l'intégrale première $U(x,y,z)$ ainsi que la fonction $g(y,z,u)$ donnant l'ensemble des solutions,

$$U(x,y,z) = \frac{\left(y^{-d} - z\right)^{1/d}}{\left(x^{-a} - z\right)^{1/a}}, \tag{10.25}$$

$$g(y,z,u) = \left(\frac{\left(y^{-d} - z\right)^{a/d}}{u^a} + z \right)^{-1/a}. \tag{10.26}$$

Pour terminer, il suffit de substituer les formules (10.25) et (10.26) dans le Théorème 23. □

10.4.3 L'urne de Kotz–Mahmoud–Robert

L'article de S. Kotz, H.M. Mahmoud, et P. Robert [KMR00] traite d'une urne non équilibrée particulière,

$$\mathscr{KMR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons encore une fois une expression explicite, pour toute configuration initiale (a_0, b_0).

Proposition 38. *La série génératrice de probabilité pondérée est donnée par la formule*

$$\Psi_{\mathscr{KMR}}(x,y,z) = \int_0^x \frac{t^{a_0-1}}{1-zt} \left(\frac{zt}{1-(1-zt)(zU(x,y,z)-\ln(1-zt))} \right)^{b_0} dt,$$

où

$$U(x,y,z) = \frac{y - zx + y(1-zx)\ln(1-zx)}{yz(1-zx)}.$$

Dans cette urne, une boule noire exactement est ajoutée à chaque tirage. Ainsi les rôles de x et z sont redondants. Nous choisissons $x = 1$, ce qui simplifie l'expression de la série génératrice,

$$\Psi_{\mathscr{KMR}}(1,y,z) = \int_0^1 \frac{t^{a_0-1}}{1-zt} \left(\frac{zt}{1-(1-zt)\left[\frac{1}{1-z} - \frac{z}{y(1-z)} + \ln(1-z) - \ln(1-zt)\right]} \right)^{b_0} dt.$$

Démonstration. (Proposition 38) Le système caractéristique de l'urne $\mathscr{KMR}$ est

$$\frac{dx}{x(1-zx)} = \frac{dy}{y(1-zxy)} = \frac{dw}{x^{a_0} y^{b_0}}.$$

Cette fois, nous allons étudier l'équation différentielle ordinaire sur $y(x,z)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1-zxy)}{x(1-zx)}.$$

Cette équation différentielle se résout et les solutions sont de la forme,

$$y(x,z) = \frac{zx}{(1-zx)\ln(1-zx) + 1 - \lambda z(1-zx)}, \tag{10.27}$$

où λ est une constante. De (10.27), nous exprimons l'intégrale première $U(x,y,z)$ ainsi que la fonction $g(x,z,u)$ des solutions de l'équation différentielle ordinaire,

$$U(x,y,z) = \frac{y - zx + y(1-zx)\ln(1-zx)}{yz(1-zx)}, \tag{10.28}$$

$$g(x,z,u) = \frac{zx}{1-(1-zx)(zu-\ln(1-zx))}. \tag{10.29}$$

Pour conclure ici, nous n'appliquons pas le Théorème 23 *stricto sensu*, mais une variante symétrique (Corollaire 4) obtenue en intervertissant les rôles de x et y. □

Corollaire 4. *Soit l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(x - x^{a+1}y^b z\right)\partial_x w + \left(y - x^c y^{d+1} z\right)\partial_y w = x^{a_0} y^{b_0}\,. \tag{10.30}$$

La fonction génératrice de probabilité pondérée Ψ, solution de (10.30), vérifie pour $xy \neq 0$,

$$\Psi(x,y,z) = \int_0^x \frac{t^{a_0-1} g(t,z,U(x,y,z))^{b_0}}{1 - z t^a g(t,z,U(x,y,z))^b}\, dt\,, \tag{10.31}$$

où $g(x,z,u)$ est l'expression des solutions générales de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1 - z x^c y^d)}{x(1 - z x^a y^b)}\,,$$

avec u la constante d'intégration, et $U(x,y,z)$ l'intégrale première associée à ces solutions $g(x,z,u)$.

10.5 Extensions à plus de deux couleurs

La méthode adoptée pour traiter les urnes bicolores non équilibrées additive, s'étend de façon naturelle aux urnes multicolores non équilibrées. Pour une urne à k couleurs, telle que la somme sur chaque ligne soit positive, nous pouvons définir une fonction génératrice de probabilité pondérée. Notons l'urne

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 & \dots & c_1^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_k^1 & \dots & c_k^k \end{pmatrix}\,,$$

où le vecteur $\mathbf{c}_i = (c_i^1, \dots, c_i^k)$ contient les coefficients de la ligne i. Soit $\mathbf{j}_0 = (j_0^1, \dots, j_0^k)$ la configuration initiale de l'urne. Soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ le vecteur de variables complexes marquant les boules de type $1, 2, \dots, k$ dans l'urne. Soit $\mathbf{U}_n = (U_n^1, U_n^2, \dots, U_n^k)$ le vecteur des variables aléatoires comptant les boules de couleur $1, 2, \dots, k$. La série génératrice étudiée est

$$\Psi(\mathbf{u}, z) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\mathbf{m}} \mathbb{P}\left\{\mathbf{U}_n = \mathbf{m}\right\} \frac{\mathbf{u}^{\mathbf{m}}}{|\mathbf{m}|} z^n\,,$$

où $\mathbf{m}$ est un multi-indice, et $|\mathbf{m}|$ la taille de $\mathbf{m}$: si $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k)$ alors $|\mathbf{m}| = \sum_i m_i$.

Théorème 24 (EDP pour les urnes non équilibrées multicolores additives)**.** *La fonction Ψ est solution de l'équation aux dérivées partielles*

$$\left[\sum_{i=1}^k (1 - z\mathbf{u}^{\mathbf{c}_i})\Theta_{u_i}\right] \circ \Psi(\mathbf{u}, z) = \mathbf{u}^{\mathbf{j}_0}\,,$$

avec la condition initiale

$$\Psi(\mathbf{u},0) = \frac{\mathbf{u}^{\mathbf{j}_0}}{|\mathbf{j}_0|} = \frac{\mathbf{u}^{\mathbf{j}_0}}{\sum_{i=1}^{k} j_0^i}\,.$$

Démonstration. La preuve est une simple extension de celle du Théorème 21. □

L'équation aux dérivées partielles reste linéaire du premier ordre et la méthode des caractéristiques s'applique. Dans ce contexte, le système caractéristique est

$$\frac{du_1}{u_1(1-z\mathbf{u}^{\mathbf{c}_1})} = \cdots = \frac{du_k}{u_k(1-z\mathbf{u}^{\mathbf{c}_k})} = \frac{dw}{\mathbf{u}^{\mathbf{j}_0}}\,.$$

Il suffit de trouver k intégrales premières indépendantes, $V_1,\ldots,V_k$ pour ce système caractéristique, afin d'obtenir les solutions de l'équation aux dérivées partielles sous la forme implicite, $F(V_1,\ldots,V_k)=0$, où F est une fonction $\mathscr{C}^1$ quelconque.

10.6 Extensions avec coefficients aléatoires

En reprenant les idées du Chapitre 9, nous étendons le domaine d'application de la combinatoire analytique aux urnes non équilibrées à coefficients aléatoires.

Ce formalisme a pour motivation l'étude de structure de graphes via les modèles d'urnes. Pour les urnes déterministes (à coefficients entiers), des liens existent entre les structures arborescentes et les urnes (Chapitres 7 et 8). Pour les structures de graphes aléatoires, regardons tout de suite un exemple.

Graphes aléatoires. Soit n un entier représentant le nombre de sommets dans un graphe. Nous commençons un processus d'urne avec $\binom{n}{2}$ boules noires. Cela correspond à avoir toutes les arêtes. La configuration initiale est celle d'un graphe complet. Les règles d'évolution sont les suivantes : à chaque instant, nous tirons une arête. Avec probabilité p, nous décidons de conserver l'arête : nous la marquons avec une boule blanche. Avec probabilité $1-p$, nous supprimons cette arête. Le problème est le suivant : lorsque chaque arête a été traitée exactement une fois, combien d'arêtes reste-t-il dans le graphe ? Cette question est relative à un modèle d'urne à coefficients aléatoires et non équilibré. En effet, l'urne sous-jacente est

$$\begin{pmatrix} -1 & \mathscr{B}_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\mathscr{B}_p$ désigne la variable de Bernoulli ; $\mathbb{P}\left\{\mathscr{B}_p = 1\right\} = p$ et $\mathbb{P}\left\{\mathscr{B}_p = 0\right\} = 1-p$. Ainsi, nous tirons chaque boule noire une fois au plus, et lorsqu'une boule noire est tirée, un tirage à pile ou face détermine si nous la gardons ou pas.

Ce genre de problème sur les graphes aléatoires se rapproche du modèle $G_{n,p}$ [1]. La littérature probabiliste est très vaste sur ces sujets. Nous conseillons le livre de N. Alon

1. Un graphe $G_{n,p}$ est un graphe à n sommets où chaque arête est présente avec probabilité p.

et J. Spencer [AS04] pour une bonne introduction au sujet. Les références du domaine sont l'article fondateur de P. Erdös et A. Rényi [ER60], ainsi que les livres [Bol01, JLR00]. Nous proposons ici un angle d'attaque combinatoire via les urnes.

Le traitement symbolique utilisé pour obtenir l'équation aux dérivées partielles sur les urnes non équilibrées (preuve du Théorème 21) se généralise ici en ajoutant une pondération, tout comme l'extension pour les urnes équilibrées à coefficients aléatoires (Chapitre 9).

Théorème 25. *Pour une urne à coefficients aléatoires, non équilibrée additive, de configuration initiale* (a_0, b_0)*, la fonction génératrice de probabilité est définie par*

$$\Psi(x,y,z) = \sum_n \sum_{i,j} \mathbb{P}\left\{A_n = i,\, B_n = j\right\} \frac{x^i y^j}{i+j} z^n .$$

Elle vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\Theta_x + \Theta_y - z\mathscr{M}\right) \circ \Psi(x,y,z) = x^{a_0} y^{b_0} , \tag{10.32}$$

où $\mathscr{M}$ *est l'opérateur régissant les règles aléatoires de l'urne,*

$$\mathscr{M} = \left(\sum_\ell p_\ell x^{a_\ell} y^{b_\ell}\right) x\partial_x + \left(\sum_m q_m x^{c_m} y^{d_m}\right) y\partial_y ,$$

p_ℓ *étant la probabilité d'ajouter* a_ℓ *boules noires et* b_ℓ *boules blanches dans l'urne sachant qu'une boule noire a été tirée ;* q_m *étant la probabilité d'ajouter* c_m *boules noires et* d_m *boules blanches dans l'urne sachant qu'une boule blanche a été tirée.*

Pour revenir à notre exemple sur les graphes aléatoires, la fonction génératrice de probabilité pondérée $\Psi(x,y,z)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\left(x - (py + 1 - p)z\right) \partial_x \Psi + \left(y - zy\right) \partial_y \Psi = x^{\binom{n}{2}} ,$$

pour la matrice $[-1, \mathscr{B}_p, 0, 0]$ et la configuration initiale $\left(\binom{n}{2}, 0\right)$.

Conclusion

Cette approche par série génératrice des urnes non équilibrées est très prometteuse et ouvre de nouvelles perspectives de recherches pour la compréhension de ces modèles.

Elle appelle de nombreux développements. Par exemple, notre méthode doit s'appliquer aux différentes classes d'exemples traitées par H.-K. Hwang, M. Kuba et A. Panholzer [HKP07, KP08, KP12a], afin d'obtenir des formules explicites pour les problèmes de pilules, de cannibales, etc. Lorsque nous avons accès aux séries génératrices, le travail est celui de l'extraction des coefficients via des formules exactes ou via une étude asymptotique. Il est par exemple possible de retrouver et améliorer les résultats asymptotiques déjà connus sur les quelques exemples traités. Notamment, dans le cas de l'urne $\mathscr{KMR}$, il serait intéressant de retrouver le résultat étonnant de [KMR00] : en commençant avec uniquement des boules noires, le nombre de boules noires est de l'ordre de $n/\log n$ après n tirages.

Conclusion

À travers cette thèse, nous avons illustré que la combinatoire analytique a son mot à dire pour l'analyse des urnes de Pólya. Dans la continuité des travaux de P. Flajolet, P. Dumas et V. Puyhaubert [FDP06], nous avons établi des résultats précis sur les propriétés asymptotiques des urnes équilibrées dont la série génératrice est algébrique.

Cela nous a amené à classifier les urnes équilibrées selon la nature de leur série. Un fait remarquable sur ces objets combinatoires est le saut de nature de la série : pour les urnes, la série génératrice est soit algébrique, soit non holonome. Il n'existe donc pas d'urne de balance strictement positive pour laquelle la série génératrice $H(x,y,z)$ est holonome et non algébrique. Le calcul formel et les techniques de Divination/Preuve nous ont permis d'établir l'algorithme GUESS'N'PROVE pour trouver automatiquement les séries algébriques. Un second algorithme (Liouville) permet de conclure sur la nature de la série dans tous les cas. Ainsi, nous connaissons la nature des séries génératrices de toutes les urnes équilibrées jusqu'à une balance fixée, $\sigma < 100$.

Nous avons exhibé deux classes d'urnes équilibrées, dont les coefficients sont reliés par des conditions arithmétiques. Pour chaque classe, nous avons démontré que les séries génératrices sont algébriques. Ensuite, ces deux classes sont analysées par méthode de col et par analyse de singularité afin d'obtenir les propriétés limites de ces urnes.

Pour les classes $\mathscr{CA}$, $\mathscr{CP}$ et pour les urnes des k-arbres, nous connaissons désormais avec précision la distribution limite : le comportement est gaussien, avec une vitesse de convergence, une loi locale limite et des bornes de grandes déviations. Les moments sont également connus.

Nous avons montré que les méthodes formelles et symboliques utilisées pour les urnes équilibrées s'appliquent à des modèles d'urnes plus généraux, toujours codés par les séries génératrices. Ainsi, les urnes équilibrées à coefficients aléatoires vérifient elles-aussi un théorème d'isomorphisme, en reliant la série génératrice des histoires à un système différentiel. Pour les urnes non équilibrées, nous montrons qu'un traitement unifié est possible via des séries génératrices de probabilité pondérées. Leur étude se résume à la résolution d'une équation aux dérivées partielles par méthode des caractéristiques.

Cette thèse ouvre également de nombreuses perspectives de recherche.

Critère d'algébricité. La question de l'algébricité des urnes de Pólya reste en suspens. Pour toute urne de Pólya, même non équilibrée, la notion d'histoire peut être définie. En revanche, la propriété d'équiprobabilité des histoires de longueur fixée ne

tient plus. D'un point de vue combinatoire, on peut s'intéresser au nombre d'histoires de longueur n terminant en un point du plan (i, j). Dans ce cas, le système différentiel est toujours valide. Avec ce système, il est possible de relier l'algébricité de la série génératrice des histoires combinatoires de toute urne (même non équilibrée) à l'algébricité d'une intégrale d'une fonction algébrique. Une caractérisation algébrique pour toute urne de Pólya est alors possible (travail en cours [BDM13b]).

Petites et grandes urnes. Une autre question fondamentale reste ouverte : le lien entre la combinatoire analytique et le facteur $1/2$ des traitements probabilistes. Dans toute notre étude, les urnes pour lesquelles on connaît le comportement limite sont petites. Cela se traduit par un comportement gaussien. Deux questions se posent alors : comment traiter généralement l'ensemble des petites urnes par la combinatoire analytique ? La combinatoire analytique peut-elle traiter des grandes urnes ? Si notre critère d'algébricité est vrai, toutes les grandes urnes possèdent une série génératrice non holonome, ce qui rend intuitivement leur traitement plus difficile. La compréhension des grandes urnes de type $[k, 1, 1, k]$ avec $k \geq 3$, permettrait par exemple de les aborder.

Urnes multicolores équilibrées. Pour les extensions des modèles d'urnes, le traitement général des urnes équilibrées à plus de deux couleurs reste un problème largement ouvert. Le système différentiel est valable, mais des problèmes de non intégrabilité apparaissent lorsque le nombre de couleurs est strictement plus grand que deux. Une approche unifiée par la combinatoire analytique semble alors difficile.

Urnes équilibrées à coefficients aléatoires. Les urnes à coefficients aléatoires sont également une source d'investigation. D'une part, elles peuvent servir pour des modèles de graphes aléatoires. Des connections avec les connaissances sur les graphes aléatoires sont à développer. D'autre part, nous avons désormais à notre disposition un système différentiel pour exprimer la série génératrice codant le comportement d'une urne équilibrée à coefficients aléatoires. Un traitement asymptotique sur ce système, même de manière partielle sur de simples exemples, ouvre la voie à une classification des différentes lois limites possibles.

Urnes non équilibrées. Pour les urnes non équilibrées, le traitement asymptotique général doit passer par une étude précise des équations différentielles du type

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\left(1 - zx^c y^d\right)}{x\left(1 - zx^a y^b\right)}.$$

La résolution de cette équation pour de nombreuses classes d'urnes est possible ce qui ouvre la porte aux études asymptotiques et comportements limites.

Urnes à pioches multiples. Enfin, la combinatoire analytique peut s'utiliser pour d'autres modèles d'urnes non standard, où il faut piocher deux boules avant de décider de la règle à appliquer. Un exemple de ces modèles est le processus de Bernoulli–Laplace : à chaque instant, deux particules sont tirées, une dans chaque compartiment, puis elles sont échangées. Un autre exemple est celui des circuits récursifs aléatoires [TM01]. Ce type de processus se modélise aussi par l'itération d'un opérateur $\mathscr{D}$ sur un monôme de départ codant la configuration initiale, mais cet opérateur est d'ordre deux dans la dérivation (il correspond au tirage de deux boules qui précède toute décision).

L'étude générale de telles urnes est aujourd'hui à faire, et le lien avec les opérateurs de Création et Annihilation semble pertinent [BF11]. La création correspond à la multiplication par un monôme, et l'annihilation correspond à la dérivation. Ces opérateurs intervenant en physique quantique permettent d'unifier un grand nombre de problèmes combinatoires (involutions, partitions, arbres, urnes) à travers une structure unique : les *diagrams on gates* [BF11].

La démarche symbolique d'opérateurs utilisée pour les urnes non équilbrées peut s'étendre pour les tirages multiples. Les travaux de M. Kuba *et al.* [KC13, KMP13] sont à rapprocher de nos méthodes symboliques.

Annexe A

Code MAPLE de l'algorithme de GUESS'N'PROVE

```
            ### INITIALIZATION ###

balancemax := 10; # balance maximale des urnes considérées
precision := 200; # ordre de troncature des séries génératrices
CondInit := y;    # configuration initiale : une boule blanche

            ### CONSTRUCTION DE LA SERIE TRONQUEE ###

# Dop applique l'opérateur de l'urne [a,b,c,d] à la fonction f.

Dop := proc(f,a,b,c,d)
    expand( x^(a+1)*y^(b)*diff(f,x) + x^(c)*y^(d+1)*diff(f,y) ):
end:


# SerieCons construit la série des histoires H(x,y,z) de l'urne
# [a,b,c,d], partant de la configuration initiale init (exprimée
# comme un monôme en x et y), tronquée à précision N.

SerieCons := proc(N,init,a,b,c,d) local res, iter, i:
    res := init:
    iter := init:
    for i from 1 to N do
        iter := 1/i * Dop(iter,a,b,c,d):
        res  := res + iter * z^i:
    end do:
end proc:
```

```
            ### ALGORITHM GUESS-AND-PROVE ###

# Recherche des urnes additives équilibrées de balance entre 2 et
# balancemax qui possèdent une série génératrice algébrique. Cet
# algorithme affiche les matrices pour lesquelles un polynôme
# annulateur a été trouvé pour la série génératrice tronquée à
# l'ordre "precision" ainsi que ce polynôme trouvé, suivi de la
# preuve que ce polynôme est bien annulateur pour la série
# (non tronquée) des histoires H(x,y,z).

with(gfun):
for s from 2 to balancemax do
for a from 0 to s-1 do
for d from 1 to a do
    b := s - a:
    c := s - d:
    if gcd(gcd(gcd(a,b),c),d)=1 then

                ### POWER SERIES EXPANSION ###
          Hserie := SerieCons(precision, CondInit, a, b, c, d):
          zseries := series(subs(y=1, Hserie), z, precision):

                ### GUESSING ###
          guess_poly := seriestoalgeq(zseries, h(z), [ogf]):

          if guess_poly <> 'FAIL' then

                ### FORMAL PROOF ###
                P := subs(h(z)=T, guess_poly[1]):
                psi := RootOf(P,T):
                EDP :=   (1 - (a+b)*z*x^c) * diff(psi,z)
                       + (x^(c+1)-x^(a+1)) * diff(psi,x)
                       - x^c * psi :
                preuve := simplify(normal(EDP)):
                init1 := eval(P, {T=1,z=0}):
                init2 := eval(diff(P,T), {T=1,x=1,z=0}):

                if init1=0 and init2<>0 then
                    print(Matrix([[a,b],[c,d]]),P,preuve,0):
                end if:
          end if:
    end if:

end do: end do: end do:
```

Annexe B

Résultats MAPLE de l'algorithme de GUESS'N'PROVE

L'algorithme de GUESS'N'PROVE (Chapitre 3), dont le code est détaillé en Annexe A, devine si une urne a une série génératrice algébrique. Pour toutes les urnes de balance 2 à 10, nous affichons les résultats de l'algorithme. Les urnes affichées sont celles devinées algébriques ; elles sont suivies de leur polynôme minimal. Les deux zéros affichés ensuite sont les certificats de la preuve formelle.

Caractéristiques techniques. Les calculs ont été effectués avec le logiciel MAPLE 13.0 sur une machine MacBookPro, Mac OS X 10.6.8, Processeur 2,53 GHz, Intel Core 2 Duo, Mémoire 4 Go 1067 Mhz DDR3.

GUESS'N'PROVE **des urnes algébriques.** Pour deviner la plupart des urnes algébriques de balance 2 à 10, il suffit de développer la série à précision 50. Le temps de calcul est de 12 minutes, et la mémoire utilisée est de 45 Mo. Cela permet de deviner 52 urnes algébriques. En poussant l'algorithme à plus grande précision, cela permet d'obtenir 7 nouvelles urnes algébriques : $[3,5,7,1]$, $[4,5,7,2]$, $[5,4,8,1]$, $[7,2,5,4]$, $[3,7,8,2]$, $[4,6,9,1]$ et $[7,3,4,6]$. Pour cela, nous développons la série à précision 200, le temps de calcul est de plus de 5h et la mémoire utilisée est d'environ 150 Mo.

Certificat de non-algébricité. Pour se convaincre de la non algébricité des autres urnes, nous pouvons faire des calculs modulaires. Pour une urne, nous calculons la série univariée $H(1/2,1,z)$ à précision 1000, modulo un grand nombre premier $p = 2011$. Cela prend un temps de calcul entre 1 et 3 minutes, et la mémoire utilisée est de 100 Mo. Il est possible de faire le guessing modulo p à un ordre d'équation r donné pour H. Le temps de calcul de l'algorithme pour un ordre donné r est proportionnel à cet ordre, ainsi le calcul pour tous les ordres entre 1 et R est de l'ordre de R^2. Le temps de calcul pour tous les ordres entre 1 et 100 est d'environ 45 minutes, et la mémoire est de l'ordre de 100Mo. Ainsi, pour certifier que les cas non devinés algébriques n'ont pas de polynôme annulateur $P(T,z)$ pour la série H avec $\deg_T(P) < 100$ et $\deg_T(P) \times \deg_z(P) < 1000$, cela prend environ 3 jours de calcul.

```
### TOUTES LES URNES DEVINEES AVEC LEUR POLYNOME,
### POUR UNE BALANCE ENTRE 2 ET 10
### URNES [a,b,c,d] avec a,b,c,d strictement positifs
### (urnes avec zero(s) traitées à part)
### avec coeff premiers entre eux (Principe 4)
### avec d choisi dans l'intervalle [1,a] (Principe 3)
### le polynôme associé est P(T,z,x) et vaut zéro pour T=H(x,1,z)
### où H(x,1,z) est la Série Génératrice
### des Histoires combinatoires  (Principe 1)
### en démarrant avec une seule boule blanche (Principe 2)
### La preuve donne 0 lorsque les racines de P vérifient
### l'Equation aux Dérivées Partielle des histoires.
### La preuve de condition initiale donne 0 lorsque
### le polynome P(T,z,1) a pour racine H(1,1,z).
```

%%%%%%%%%%%%%%%%%% BALANCE = 2, %%%%%%%%%%%%%%%%%%

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, 1 + (-1 + 2\,x\,z)\,T^2, 0, 0$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%% BALANCE = 3, %%%%%%%%%%%%%%%%%%

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, 1 + \left(-1 + 3\,x^2\,z\right)\,T^3, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, 2\,x - 3\,(x-1)\,T + (x - 3 + 6\,x\,z)\,T^3, 0, 0$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%% BALANCE = 4, %%%%%%%%%%%%%%%%%%

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, -x^2 + (x-1)\,(x+1)\,\left(x^3\,z + 2\,x^2\,z + x\,z - 1\right)\,\left(x^3\,z - 2\,x^2\,z + x\,z - 1\right)\,T^2 + \left(x^3\,z + 2\,x^2\,z + x\,z - 1\right)\,\left(x^3\,z - 2\,x^2\,z + x\,z - 1\right)\,T^4, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, 1 + \left(-1 + 4\,x^3\,z\right)\,T^4, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, 3\,x^2 - 8\,x\,(x-1)\,T + 6\,(x-1)^2\,T^2 + \left(-6 + 4\,x - x^2 + 12\,x^2\,z\right)\,T^4, 0, 0$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%% BALANCE = 5, %%%%%%%%%%%%%%%%%%

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, 1 + \left(-1 + 5\,x^3\,z\right)\,T^5, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, 6\,x^2 - 15\,x\,(x-1)\,T + 10\,(x-1)^2\,T^2 + \left(-10 + 5\,x - x^2 + 30\,x^2\,z\right)\,T^5, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, 1 + \left(-1 + 5\,x^4\,z\right)\,T^5, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, 4\,x^3 - 15\,x^2\,(x-1)\,T + 20\,x\,(x-1)^2\,T^2 - 10\,(x-1)^3\,T^3 + \left(-10 + 10\,x - 5\,x^2 + x^3 + 20\,x^3\,z\right)\,T^5, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, 3\,x^2 - 5\,(x-1)\,(x+1)\,T^2 + \left(-5 + 2\,x^2 + 15\,x^2\,z\right)\,T^5, 0, 0$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%% BALANCE = 6, %%%%%%%%%%%%%%%%%%

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, -8\,x^6 + 8\,x^9 + \left(8\,z^3\,x^{24} - 48\,z^3\,x^{21} - 24\,z^2\,x^{19} + 120\,z^3\,x^{18} + 84\,z^2\,x^{16} - 160\,z^3\,x^{15} + 24\,x^{14}\,z - 96\,z^2\,x^{13} + 120\,z^3\,x^{12} - 24\,x^{11}\,z + 24\,z^2\,x^{10} - 8\,x^9 - 48\,z^3\,x^9 - 18\,x^8\,z + 24\,z^2\,x^7 + 8\,z^3\,x^6 + 24\,x^6 + 12\,x^5\,z - 12\,z^2\,x^4 - 6\,x^3 + 6\,x^2\,z - 1\right)\,T^3 + 2\,(x-1)\,\left(x^2 + x + 1\right)\,\left(2\,x^6\,z + 4\,x^5\,z + 6\,x^4\,z + 4\,x^3\,z + 2\,x^2\,z - 1 - 2\,x\right)\,\left(4\,z^2\,x^{12} - 8\,z^2\,x^{11} + 4\,z^2\,x^{10} - 8\,z^2\,x^9 + 16\,z^2\,x^8 - 8\,z^2\,x^7 - 8\,x^7\,z + 4\,z^2\,x^6 + 10\,x^6\,z - 8\,z^2\,x^5 + 4\,x^5\,z + 4\,z^2\,x^4 - 10\,x^4\,z + 8\,x^3\,z - 4\,x^2\,z + 4\,x^2 - 2\,x + 1\right)\,T^6 + \left(2\,x^6\,z + 4\,x^5\,z + 6\,x^4\,z + 4\,x^3\,z + 2\,x^2\,z - 1 - 2\,x\right)\,\left(4\,z^2\,x^{12} - 8\,z^2\,x^{11} + 4\,z^2\,x^{10} - 8\,z^2\,x^9 + 16\,z^2\,x^8 - 8\,z^2\,x^7 - 8\,x^7\,z + 4\,z^2\,x^6 + 10\,x^6\,z - 8\,z^2\,x^5 + 4\,x^5\,z + 4\,z^2\,x^4 - 10\,x^4\,z + 8\,x^3\,z - 4\,x^2\,z + 4\,x^2 - 2\,x + 1\right)\,T^9, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, -9\,x^8 + 9\,x^6 + \left(30\,x^4 - 12\,x^2 - 36\,x^6 + 9\,x^8 + 1 + 9\,z^2\,x^6 + 18\,x^{11}\,z - 54\,z^2\,x^{16} + 135\,z^2\,x^{10} - 6\,x^3\,z - 108\,x^7\,z + 60\,x^9\,z - 18\,x^{13}\,z - 180\,z^2\,x^{12} + 135\,z^2\,x^{14} + 9\,z^2\,x^{18} + 54\,x^5\,z - 54\,z^2\,x^8\right)\,T^2 + 3\,(x-1)^2\,(x+1)^2\,\left(3\,x^6\,z + 9\,x^5\,z + 9\,x^4\,z + 3\,x^3\,z - 3\,x - 1\right)\,\left(3\,x^6\,z - 9\,x^5\,z + 9\,x^4\,z - 3\,x^3\,z - 3\,x + 1\right)\,T^4 + 3\,(x-1)\,(x+1)\,\left(3\,x^6\,z + 9\,x^5\,z + 9\,x^4\,z + 3\,x^3\,z - 3\,x - 1\right)\,\left(3\,x^6\,z - 9\,x^5\,z + 9\,x^4\,z - 3\,x^3\,z - 3\,x + 1\right)\,T^6 + \left(3\,x^6\,z + 9\,x^5\,z + 9\,x^4\,z + 3\,x^3\,z - 3\,x - 1\right)\,\left(3\,x^6\,z - 9\,x^5\,z + 9\,x^4\,z - 3\,x^3\,z - 3\,x + 1\right)\,T^8, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, 10\,x^3 - 36\,x^2\,(x-1)\,T + 45\,x\,(x-1)^2\,T^2 - 20\,(x-1)^3\,T^3 + \left(-20 + 15\,x - 6\,x^2 + x^3 + 60\,x^3\,z\right)\,T^6, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, 1 + \left(-1 + 6\,x^5\,z\right)\,T^6, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, 5\,x^4 - 24\,x^3\,(x-1)\,T + 45\,x^2\,(x-1)^2\,T^2 - 40\,x\,(x-1)^3\,T^3 + 15\,(x$$

$$-1)^4 T^4 + \left(-15 + 20x - x^4 + 6x^3 - 15x^2 + 30x^4 z\right) T^6, 0, 0$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%% BALANCE = 7, %%%%%%%%%%%%%%%%%%

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, 1 + \left(-1 + 7x^4 z\right) T^7, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, 20x^3 - 70x^2 (x-1) T + 84x (x-1)^2 T^2 - 35 (x-1)^3 T^3 + \left(-35 + 21x - 7x^2 + x^3 + 140x^3 z\right) T^7, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, 1 + \left(-1 + 7x^5 z\right) T^7, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, 15x^4 - 70x^3 (x-1) T + 126x^2 (x-1)^2 T^2 - 105x (x-1)^3 T^3 + 35 (x-1)^4 T^4 + \left(-35 + 35x - x^4 + 7x^3 - 21x^2 + 105x^4 z\right) T^7, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, -25x^{10} + 105x^8 (x-1)(x+1) T^2 - 154x^6 (x-1)^2 (x+1)^2 T^4 + 70x^4 (x-1)^3 (x+1)^3 T^6 + 35x^2 (x-1)^4 (x+1)^4 T^8 - 35 (x-1)^5 (x+1)^5 T^{10} + \left(-35 + 4x^{10} - 140x^4 + 140x^2 + 84x^6 - 28x^8 + 140x^3 z - 490x^5 z + 1225z^2 x^{10}\right) T^{14}, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, 1 + \left(-1 + 7x^6 z\right) T^7, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, 6x^5 - 35x^4 (x-1) T + 84x^3 (x-1)^2 T^2 - 105x^2 (x-1)^3 T^3 + 70x (x-1)^4 T^4 - 21 (x-1)^5 T^5 + \left(-21 + 35x - 7x^4 + 21x^3 - 35x^2 + x^5 + 42x^5 z\right) T^7, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, 15x^4 - 42x^2 (x-1)(x+1) T^2 + 35 (x-1)^2 (x+1)^2 T^4 + \left(-35 - 8x^4 + 28x^2 + 105x^4 z\right) T^7, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, 4x^3 - 7 (x-1)\left(x^2 + x + 1\right) T^3 + \left(-7 + 3x^3 + 28x^3 z\right) T^7, 0, 0$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%% BALANCE = 8, %%%%%%%%%%%%%%%%%%

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, -81x^{12} - 81x^{20} + 162x^{16} + (x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(1 + 54x^8 + 12x^4 - 324x^{12} + 81x^{16} - 648z^4 x^{16} + 2268z^4 x^{20} + 81z^4 x^{12} + 2268z^4 x^{36} + 486z^2 x^{30} - 1620z^2 x^{26} - 4212z^3 x^{29} + 4860z^3 x^{25} + 324z^3 x^{13} - 648z^4 x^{40} + 81z^4 x^{44} + 324zx^{19} - 324zx^{23} + 1674z^2 x^{22} + 1836z^3 x^{33} - 324z^3 x^{37} - 4536z^4 x^{32} - 4536z^4 x^{24} + 5670z^4 x^{28} + 54z^2 x^6 - 12x^3 z - 2700z^3 x^{21} - 120x^{11} z + 108z^2 x^{10} - 108z^3 x^9 - 84x^7 z - 486z^2 x^{14} - 216z^2 x^{18} + 216zx^{15} + 324z^3 x^{17}\right) T^4 + 3\left(1 + 54x^8 + 12x^4 - 180x^{12} + 81x^{16} - 648z^4 x^{16} + 2268z^4 x^{20} + 81z^4 x^{12} + 2268z^4 x^{36} + 486z^2 x^{30} - 1620z^2 x^{26} - 4212z^3 x^{29} + 4860z^3 x^{25} + 324z^3 x^{13} - 648z^4 x^{40} + 81z^4 x^{44} + 324zx^{19} - 324zx^{23} + 1674z^2 x^{22} + 1836z^3 x^{33} - 324z^3 x^{37} - 4536z^4 x^{32} - 4536z^4 x^{24} + 5670z^4 x^{28} + 54z^2 x^6 - 12x^3 z - 2700z^3 x^{21} - 120x^{11} z + 108z^2 x^{10} - 108z^3 x^9 - 84x^7 z - 486z^2 x^{14} - 216z^2 x^{18} + 216zx^{15} + 324z^3 x^{17}\right) T^8 + 3(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(3x^9 z + 6x^8 z + 9x^7 z + 12x^6 z + 9x^5 z + 6x^4 z + 3x^3 z - 1 - 2x - 3x^2\right)\left(9x^7 z - 6x^8 z + 3x^9 z + 9x^5 z - 12x^6 z + 3x^3 z - 6x^4 z - 1 + 2x - 3x^2\right)\left(9z^2 x^{18} - 18z^2 x^{16} - 9z^2 x^{14} + 36z^2 x^{12} - 18x^{11} z - 9z^2 x^{10} + 36x^9 z - 18z^2 x^8 - 24x^7 z + 9z^2 x^6 + 12x^5 z + 9x^4 - 6x^3 z - 2x^2 + 1\right) T^{12} + \left(3x^9 z + 6x^8 z + 9x^7 z + 12x^6 z + 9x^5 z + 6x^4 z + 3x^3 z - 1 - 2x - 3x^2\right)\left(9x^7 z - 6x^8 z + 3x^9 z + 9x^5 z - 12x^6 z + 3x^3 z - 6x^4 z - 1 + 2x - 3x^2\right)\left(9z^2 x^{18} - 18z^2 x^{16} - 9z^2 x^{14} + 36z^2 x^{12} - 18x^{11} z - 9z^2 x^{10} + 36x^9 z - 18z^2 x^8 - 24x^7 z + 9z^2 x^6 + 12x^5 z + 9x^4 - 6x^3 z - 2x^2 + 1\right) T^{16}, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, -x^{10} - x^6 + 2x^8 + 12x^6 (x-1)(x+1) T^2 + 12x^6 T^4 + (x-1)^3 (x+1)^3 \left(3x^7 z - 12x^6 z + 18x^5 z - 12x^4 z + 3x^3 z - x^2 + 4x - 1\right)\left(3x^7 z + 12x^6 z + 18x^5 z + 12x^4 z + 3x^3 z - x^2 - 4x - 1\right) T^6 + 3(x-1)^2 (x+1)^2 \left(3x^7 z - 12x^6 z + 18x^5 z - 12x^4 z + 3x^3 z - x^2 + 4x - 1\right)\left(3x^7 z + 12x^6 z + 18x^5 z + 12x^4 z + 3x^3 z - x^2 - 4x - 1\right) T^8 + 3(x-1)(x+1)\left(3x^7 z - 12x^6 z + 18x^5 z - 12x^4 z + 3x^3 z - x^2 + 4x - 1\right)\left(3x^7 z + 12x^6 z + 18x^5 z + 12x^4 z + 3x^3 z - x^2 - 4x - 1\right) T^{10} + \left(3x^7 z - 12x^6 z + 18x^5 z - 12x^4 z + 3x^3 z - x^2 + 4x - 1\right)\left(3x^7 z + 12x^6 z + 18x^5 z + 12x^4 z + 3x^3 z - x^2 - 4x - 1\right) T^{12}, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, -25x^{10} - 25x^{14} + 50x^{12} + (x-1)(x+1)\left(25z^2 x^{26} - 200z^2 x^{24} + 700z^2 x^{22} - 1400z^2 x^{20} - 50zx^{19} + 1750z^2 x^{18} + 50x^{17} z - 1400z^2 x^{16} + 350zx^{15} + 700z^2 x^{14} - 910x^{13} z + 25x^{12} - 200z^2 x^{12} + 890x^{11} z - 150x^{10}$$

$$+ 25 z^2 x^{10} - 410 x^9 z + 175 x^8 + 90 x^7 z - 140 x^6 - 10 x^5 z + 55 x^4 - 10 x^2 + 1)$$
$$T^2 + 5 \left(-410 x^9 z + 90 x^7 z + 50 x^{17} z + 55 x^4 + 25 z^2 x^{10} - 50 z x^{19} - 910 x^{13} z\right.$$
$$+ 700 z^2 x^{14} - 10 x^2 + 1 - 110 x^{10} + 700 z^2 x^{22} + 25 z^2 x^{26} - 1400 z^2 x^{16}$$
$$+ 890 x^{11} z - 1400 z^2 x^{20} + 1750 z^2 x^{18} - 200 z^2 x^{24} - 10 x^5 z + 350 z x^{15} + 25 x^{12}$$
$$\left.+ 175 x^8 - 140 x^6 - 200 z^2 x^{12}\right) T^4 + 10 (x-1)^3 (x+1)^3 \left(5 x^9 z + 20 x^8 z\right.$$
$$+ 30 x^7 z + 20 x^6 z + 5 x^5 z - 5 x^2 - 4 x - 1\Big) \left(5 x^9 z - 20 x^8 z + 30 x^7 z - 20 x^6 z\right.$$
$$\left.+ 5 x^5 z - 5 x^2 + 4 x - 1\right) T^6 + 10 (x-1)^2 (x+1)^2 \left(5 x^9 z + 20 x^8 z + 30 x^7 z\right.$$
$$+ 20 x^6 z + 5 x^5 z - 5 x^2 - 4 x - 1\Big) \left(5 x^9 z - 20 x^8 z + 30 x^7 z - 20 x^6 z + 5 x^5 z\right.$$
$$\left.- 5 x^2 + 4 x - 1\right) T^8 + 5 (x-1)(x+1) \left(5 x^9 z + 20 x^8 z + 30 x^7 z + 20 x^6 z\right.$$
$$\left.+ 5 x^5 z - 5 x^2 - 4 x - 1\right) \left(5 x^9 z - 20 x^8 z + 30 x^7 z - 20 x^6 z + 5 x^5 z - 5 x^2 + 4 x\right.$$
$$\left.- 1\right) T^{10} + \left(5 x^9 z + 20 x^8 z + 30 x^7 z + 20 x^6 z + 5 x^5 z - 5 x^2 - 4 x - 1\right) \left(5 x^9 z\right.$$
$$\left.- 20 x^8 z + 30 x^7 z - 20 x^6 z + 5 x^5 z - 5 x^2 + 4 x - 1\right) T^{12}, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, 1 + \left(-1 + 8 x^5 z\right) T^8, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, 35 x^4 - 160 x^3 (x-1) T + 280 x^2 (x-1)^2 T^2 - 224 x (x-1)^3 T^3 + 70 (x$$
$$- 1)^4 T^4 + \left(-70 + 56 x - x^4 + 8 x^3 - 28 x^2 + 280 x^4 z\right) T^8, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, 21 x^5 - 120 x^4 (x-1) T + 280 x^3 (x-1)^2 T^2 - 336 x^2 (x-1)^3 T^3 + 210 x (x$$
$$- 1)^4 T^4 - 56 (x-1)^5 T^5 + \left(-56 + 70 x - 8 x^4 + 28 x^3 - 56 x^2 + x^5\right.$$
$$\left.+ 168 x^5 z\right) T^8, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, 5 x^3 - 8 (x-1) \left(x^2 + x + 1\right) T^3 + \left(-8 + 3 x^3 + 40 x^3 z\right) T^8, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, 1 + \left(-1 + 8 x^7 z\right) T^8, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, 7 x^6 - 48 x^5 (x-1) T + 140 x^4 (x-1)^2 T^2 - 224 x^3 (x-1)^3 T^3 + 210 x^2 (x$$
$$- 1)^4 T^4 - 112 x (x-1)^5 T^5 + 28 (x-1)^6 T^6 + \left(-28 + 56 x - 28 x^4 - 70 x^2\right.$$
$$\left.+ 56 x^3 - x^6 + 8 x^5 + 56 x^6 z\right) T^8, 0, 0$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%% BALANCE = 9, %%%%%%%%%%%%%%%%%%

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, 8 x^{21} - 24 x^{18} + 24 x^{15} - 8 x^{12} + 144 x^{12} (x-1)^2 \left(x^2 + x + 1\right)^2 T^3 + (x$$
$$- 1) \left(x^2 + x + 1\right) \left(1 + 48 z^2 x^8 + 186 x^6 - 416 x^9 - 24 x^3 + 600 x^{12} - 96 x^{15}\right.$$
$$- 8 x^{18} + 912 z^2 x^{26} - 288 z x^{19} + 2304 z^3 x^{33} - 12 x^4 z - 8064 z^3 x^{24} + 5376 z^3 x^{21}$$
$$- 2304 z^3 x^{18} + 576 z^3 x^{15} - 64 z^3 x^{12} + 228 x^7 z + 2364 x^{13} z + 2928 z^2 x^{14}$$
$$- 1332 z x^{10} + 240 z x^{22} - 1248 z x^{16} + 48 z x^{25} + 192 z^2 x^{29} - 4128 z^2 x^{23}$$
$$- 672 z^2 x^{11} - 6144 z^2 x^{17} - 96 z^2 x^{32} + 64 z^3 x^{39} - 576 z^3 x^{36} - 5376 z^3 x^{30}$$
$$\left.+ 8064 z^3 x^{27} + 6960 z^2 x^{20}\right) T^6 + 4 \left(1 + 48 z^2 x^8 + 186 x^6 - 416 x^9 - 24 x^3\right.$$
$$+ 384 x^{12} - 96 x^{15} - 8 x^{18} + 912 z^2 x^{26} - 288 z x^{19} + 2304 z^3 x^{33} - 12 x^4 z$$
$$- 8064 z^3 x^{24} + 5376 z^3 x^{21} - 2304 z^3 x^{18} + 576 z^3 x^{15} - 64 z^3 x^{12} + 228 x^7 z$$
$$+ 2364 x^{13} z + 2928 z^2 x^{14} - 1332 z x^{10} + 240 z x^{22} - 1248 z x^{16} + 48 z x^{25}$$
$$+ 192 z^2 x^{29} - 4128 z^2 x^{23} - 672 z^2 x^{11} - 6144 z^2 x^{17} - 96 z^2 x^{32} + 64 z^3 x^{39}$$
$$\left.- 576 z^3 x^{36} - 5376 z^3 x^{30} + 8064 z^3 x^{27} + 6960 z^2 x^{20}\right) T^9 + 6 (x-1)^2 \left(x^2\right.$$
$$\left.+ x + 1\right)^2 \left(4 z x^{10} + 12 x^9 z + 24 x^8 z + 28 x^7 z + 24 x^6 z + 12 x^5 z + 4 x^4 z - 1\right.$$
$$\left.- 3 x - 6 x^2 - 2 x^3\right) \left(1 - 3 x + 16 z^2 x^8 + 4 x^6 + 30 x^4 - 12 x^5 - 14 x^3 + 3 x^2\right.$$
$$+ 24 x^5 z - 8 x^4 z - 48 z^2 x^{19} + 144 z^2 x^{16} - 144 z^2 x^{13} - 84 x^{11} z + 48 z^2 x^{10}$$
$$- 156 x^8 z + 72 x^7 z + 84 x^9 z - 16 x^{13} z + 144 z^2 x^{12} + 96 z^2 x^{14} + 48 z^2 x^{18}$$
$$- 24 x^6 z + 60 z x^{10} - 64 z^2 x^{11} - 64 z^2 x^{17} + 48 z x^{12} - 144 z^2 x^{15} - 48 z^2 x^9$$
$$\left.+ 16 z^2 x^{20}\right) T^{12} + 4 (x-1) \left(x^2 + x + 1\right) \left(4 z x^{10} + 12 x^9 z + 24 x^8 z + 28 x^7 z\right.$$
$$\left.+ 24 x^6 z + 12 x^5 z + 4 x^4 z - 1 - 3 x - 6 x^2 - 2 x^3\right) \left(1 - 3 x + 16 z^2 x^8 + 4 x^6\right.$$
$$+ 30 x^4 - 12 x^5 - 14 x^3 + 3 x^2 + 24 x^5 z - 8 x^4 z - 48 z^2 x^{19} + 144 z^2 x^{16}$$
$$- 144 z^2 x^{13} - 84 x^{11} z + 48 z^2 x^{10} - 156 x^8 z + 72 x^7 z + 84 x^9 z - 16 x^{13} z$$
$$+ 144 z^2 x^{12} + 96 z^2 x^{14} + 48 z^2 x^{18} - 24 x^6 z + 60 z x^{10} - 64 z^2 x^{11} - 64 z^2 x^{17}$$
$$\left.+ 48 z x^{12} - 144 z^2 x^{15} - 48 z^2 x^9 + 16 z^2 x^{20}\right) T^{15} + \left(4 z x^{10} + 12 x^9 z + 24 x^8 z\right.$$
$$\left.+ 28 x^7 z + 24 x^6 z + 12 x^5 z + 4 x^4 z - 1 - 3 x - 6 x^2 - 2 x^3\right) \left(1 - 3 x + 16 z^2 x^8\right.$$
$$+ 4 x^6 + 30 x^4 - 12 x^5 - 14 x^3 + 3 x^2 + 24 x^5 z - 8 x^4 z - 48 z^2 x^{19} + 144 z^2 x^{16}$$
$$- 144 z^2 x^{13} - 84 x^{11} z + 48 z^2 x^{10} - 156 x^8 z + 72 x^7 z + 84 x^9 z - 16 x^{13} z$$
$$+ 144 z^2 x^{12} + 96 z^2 x^{14} + 48 z^2 x^{18} - 24 x^6 z + 60 z x^{10} - 64 z^2 x^{11} - 64 z^2 x^{17}$$
$$\left.+ 48 z x^{12} - 144 z^2 x^{15} - 48 z^2 x^9 + 16 z^2 x^{20}\right) T^{18}, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}, 125 x^{24} - 125 x^{15} - 375 x^{21} + 375 x^{18} + (x-1)^2 \left(x^2 + x + 1\right)^2 \left(1 + 60 x^6\right.$$
$$+ 25 x^9 - 15 x^3 - 300 x^{12} + 750 x^{15} - 125 x^{18} - 375 z^2 x^{34} - 375 z x^{23}$$
$$+ 3000 z^2 x^{22} - 10500 z^3 x^{33} - 15 x^5 z + 10500 z^3 x^{24} - 4500 z^3 x^{21} - 4875 z^2 x^{19}$$
$$+ 1125 z^3 x^{18} + 3000 z^2 x^{16} - 125 z^3 x^{15} + 390 x^{14} z - 825 z^2 x^{13} - 720 x^{11} z$$

$$+ 75 z^2 x^{10} + 195 x^8 z + 1050 x^{17} z - 3300 z^2 x^{28} - 1125 z^3 x^{39} + 4500 z^3 x^{36}$$
$$+ 125 z^3 x^{42} + 15750 z^3 x^{30} - 15750 z^3 x^{27} - 900 z x^{20} + 375 z x^{26} + 1875 z^2 x^{31}$$
$$+ 1425 z^2 x^{25}) T^3 + 5 (x-1) (x^2+x+1) (1 + 60 x^6 + 25 x^9 - 15 x^3 - 300 x^{12}$$
$$+ 435 x^{15} - 125 x^{18} - 375 z^2 x^{34} - 375 z x^{23} + 3000 z^2 x^{22} - 10500 z^3 x^{33} - 15 x^5 z$$
$$+ 10500 z^3 x^{24} - 4500 z^3 x^{21} - 4875 z^2 x^{19} + 1125 z^3 x^{18} + 3000 z^2 x^{16} - 125 z^3 x^{15}$$
$$+ 390 x^{14} z - 825 z^2 x^{13} - 720 x^{11} z + 75 z^2 x^{10} + 195 x^8 z + 1050 x^{17} z$$
$$- 3300 z^2 x^{28} - 1125 z^3 x^{39} + 4500 z^3 x^{36} + 125 z^3 x^{42} + 15750 z^3 x^{30}$$
$$- 15750 z^3 x^{27} - 900 z x^{20} + 375 z x^{26} + 1875 z^2 x^{31} + 1425 z^2 x^{25}) T^6 + 5 (2$$
$$+ 120 x^6 + 50 x^9 - 30 x^3 - 600 x^{12} + 735 x^{15} - 250 x^{18} - 750 z^2 x^{34} - 750 z x^{23}$$
$$+ 6000 z^2 x^{22} - 21000 z^3 x^{33} - 30 x^5 z + 21000 z^3 x^{24} - 9000 z^3 x^{21} - 9750 z^2 x^{19}$$
$$+ 2250 z^3 x^{18} + 6000 z^2 x^{16} - 250 z^3 x^{15} + 780 x^{14} z - 1650 z^2 x^{13} - 1440 x^{11} z$$
$$+ 150 z^2 x^{10} + 390 x^8 z + 2100 x^{17} z - 6600 z^2 x^{28} - 2250 z^3 x^{39} + 9000 z^3 x^{36}$$
$$+ 250 z^3 x^{42} + 31500 z^3 x^{30} - 31500 z^3 x^{27} - 1800 z x^{20} + 750 z x^{26} + 3750 z^2 x^{31}$$
$$+ 2850 z^2 x^{25}) T^9 + 10 (x-1)^2 (x^2+x+1)^2 (5 x^{11} z + 15 z x^{10} + 30 x^9 z$$
$$+ 35 x^8 z + 30 x^7 z + 15 x^6 z + 5 x^5 z - 1 - 3 x - 6 x^2 - 5 x^3) (1 - 3 x + 25 x^6$$
$$+ 21 x^4 - 30 x^5 - 8 x^3 + 3 x^2 + 25 z^2 x^{22} - 10 x^5 z - 100 z^2 x^{19} + 150 z^2 x^{16}$$
$$- 50 x^{14} z - 100 z^2 x^{13} - 135 x^{11} z + 25 z^2 x^{10} + 60 x^8 z - 30 x^7 z - 150 x^9 z$$
$$+ 105 x^{13} z + 75 z^2 x^{12} + 225 z^2 x^{14} + 225 z^2 x^{18} + 30 x^6 z + 195 z x^{10} - 75 z^2 x^{11}$$
$$- 225 z^2 x^{17} - 75 z^2 x^{21} - 15 z x^{12} - 225 z^2 x^{15} + 75 z^2 x^{20}) T^{12} + 5 (x-1) (x^2$$
$$+ x + 1) (5 x^{11} z + 15 z x^{10} + 30 x^9 z + 35 x^8 z + 30 x^7 z + 15 x^6 z + 5 x^5 z - 1$$
$$- 3 x - 6 x^2 - 5 x^3) (1 - 3 x + 25 x^6 + 21 x^4 - 30 x^5 - 8 x^3 + 3 x^2 + 25 z^2 x^{22}$$
$$- 10 x^5 z - 100 z^2 x^{19} + 150 z^2 x^{16} - 50 x^{14} z - 100 z^2 x^{13} - 135 x^{11} z + 25 z^2 x^{10}$$
$$+ 60 x^8 z - 30 x^7 z - 150 x^9 z + 105 x^{13} z + 75 z^2 x^{12} + 225 z^2 x^{14} + 225 z^2 x^{18}$$
$$+ 30 x^6 z + 195 z x^{10} - 75 z^2 x^{11} - 225 z^2 x^{17} - 75 z^2 x^{21} - 15 z x^{12} - 225 z^2 x^{15}$$
$$+ 75 z^2 x^{20}) T^{15} + (5 x^{11} z + 15 z x^{10} + 30 x^9 z + 35 x^8 z + 30 x^7 z + 15 x^6 z$$
$$+ 5 x^5 z - 1 - 3 x - 6 x^2 - 5 x^3) (1 - 3 x + 25 x^6 + 21 x^4 - 30 x^5 - 8 x^3 + 3 x^2$$
$$+ 25 z^2 x^{22} - 10 x^5 z - 100 z^2 x^{19} + 150 z^2 x^{16} - 50 x^{14} z - 100 z^2 x^{13} - 135 x^{11} z$$
$$+ 25 z^2 x^{10} + 60 x^8 z - 30 x^7 z - 150 x^9 z + 105 x^{13} z + 75 z^2 x^{12} + 225 z^2 x^{14}$$
$$+ 225 z^2 x^{18} + 30 x^6 z + 195 z x^{10} - 75 z^2 x^{11} - 225 z^2 x^{17} - 75 z^2 x^{21} - 15 z x^{12}$$
$$- 225 z^2 x^{15} + 75 z^2 x^{20}) T^{18}, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, 1 + (-1 + 9 x^5 z) T^9, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, 70 x^4 - 315 x^3 (x-1) T + 540 x^2 (x-1)^2 T^2 - 420 x (x-1)^3 T^3 + 126 (x$$
$$- 1)^4 T^4 + (-126 + 84 x - x^4 + 9 x^3 - 36 x^2 + 630 x^4 z) T^9, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, 56 x^5 - 315 x^4 (x-1) T + 720 x^3 (x-1)^2 T^2 - 840 x^2 (x-1)^3 T^3 + 504 x (x$$
$$- 1)^4 T^4 - 126 (x-1)^5 T^5 + (-126 + 126 x - 9 x^4 + 36 x^3 - 84 x^2 + x^5$$
$$+ 504 x^5 z) T^9, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, 35 x^4 - 90 x^2 (x-1) (x+1) T^2 + 63 (x-1)^2 (x+1)^2 T^4 + (-63 - 8 x^4$$
$$+ 36 x^2 + 315 x^4 z) T^9, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, 1 + (-1 + 9 x^7 z) T^9, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, 28 x^6 - 189 x^5 (x-1) T + 540 x^4 (x-1)^2 T^2 - 840 x^3 (x-1)^3 T^3$$
$$+ 756 x^2 (x-1)^4 T^4 - 378 x (x-1)^5 T^5 + 84 (x-1)^6 T^6 + (-84 + 126 x - 36 x^4$$
$$- 126 x^2 + 84 x^3 - x^6 + 9 x^5 + 252 x^6 z) T^9, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, -49 x^{14} + 315 x^{12} (x-1) (x+1) T^2 - 837 x^{10} (x-1)^2 (x+1)^2 T^4$$
$$+ 1155 x^8 (x-1)^3 (x+1)^3 T^6 - 819 x^6 (x-1)^4 (x+1)^4 T^8 + 189 x^4 (x$$
$$- 1)^5 (x+1)^5 T^{10} + 105 x^2 (x-1)^6 (x+1)^6 T^{12} - 63 (x-1)^7 (x+1)^7 T^{14} + ($$
$$-63 + 144 x^{10} + 504 x^6 - 504 x^4 - 336 x^8 - 36 x^{12} + 336 x^2 + 4 x^{14} + 252 x^5 z$$
$$- 1134 x^7 z + 3969 z^2 x^{14}) T^{18}, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}, 1 + (-1 + 9 x^8 z) T^9, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, 8 x^7 - 63 x^6 (x-1) T + 216 x^5 (x-1)^2 T^2 - 420 x^4 (x-1)^3 T^3 + 504 x^3 (x$$
$$- 1)^4 T^4 - 378 x^2 (x-1)^5 T^5 + 168 x (x-1)^6 T^6 - 36 (x-1)^7 T^7 + (-36$$
$$+ 84 x - 84 x^4 - 126 x^2 + x^7 + 126 x^3 - 9 x^6 + 36 x^5 + 72 x^7 z) T^9, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, 35 x^6 - 135 x^4 (x-1) (x+1) T^2 + 189 x^2 (x-1)^2 (x+1)^2 T^4 - 105 (x$$
$$- 1)^3 (x+1)^3 T^6 + (-105 - 72 x^4 + 126 x^2 + 16 x^6 + 315 x^6 z) T^9, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, 5\,x^4 - 9\,(x-1)\,(x+1)\,\left(x^2+1\right) T^4 + \left(-9 + 4\,x^4 + 45\,x^4\,z\right) T^9, 0, 0$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%% BALANCE = 10, %%%%%%%%%%%%%%%%%%%

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}, 243\,x^{15}\,(x-1)^3\,\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)^3 + 2025\,x^{15}\,(x-1)^2\,\left(x^4+x^3+x^2\right.$$
$$\left.+x+1\right)^2 T^5 + (x-1)\,\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)\left(-32 - 240\,x^5 - 720\,x^{10} - 810\,x^{20}\right.$$
$$+ 5670\,x^{15} - 12960\,z^4\,x^{12} - 28800\,z^2\,x^{26} - 97200\,z^3\,x^{29} - 4050\,z\,x^{23}$$
$$+ 181440\,z^4\,x^{32} - 2880\,z^2\,x^6 + 480\,x^3\,z + 99360\,z^3\,x^{24} + 15120\,z^2\,x^{16} + 8640\,z^3\,x^9$$
$$+ 1920\,x^8\,z + 1200\,x^{13}\,z - 243\,x^{25} + 1620\,z\,x^{28} - 1440\,z^2\,x^{11} + 144720\,z^3\,x^{39}$$
$$+ 6480\,z^2\,x^{31} + 7776\,z^5\,x^{65} - 19440\,z^4\,x^{57} + 2430\,z\,x^{33} + 19440\,z^3\,x^{49}$$
$$- 933120\,z^5\,x^{50} + 1632960\,z^5\,x^{45} - 1959552\,z^5\,x^{40} + 1632960\,z^5\,x^{35}$$
$$- 933120\,z^5\,x^{30} + 349920\,z^5\,x^{25} - 77760\,z^5\,x^{20} + 7776\,z^5\,x^{15} - 6480\,z^3\,x^{19}$$
$$- 25920\,z^3\,x^{14} + 1800\,z^2\,x^{21} + 725760\,z^4\,x^{42} - 635040\,z^4\,x^{37} + 181440\,z^4\,x^{27}$$
$$- 207360\,z^4\,x^{22} + 84240\,z^4\,x^{17} - 51840\,z^3\,x^{34} - 440640\,z^4\,x^{47} + 349920\,z^5\,x^{55}$$
$$- 3600\,z\,x^{18} + 142560\,x^{52}\,z^4 - 77760\,x^{60}\,z^5 - 90720\,x^{44}\,z^3 + 19440\,x^{36}\,z^2$$
$$\left.- 9720\,z^2\,x^{41}\right) T^{10} + 3\,\left(-32 - 240\,x^5 - 720\,x^{10} - 810\,x^{20} + 2670\,x^{15}\right.$$
$$- 12960\,z^4\,x^{12} - 28800\,z^2\,x^{26} - 97200\,z^3\,x^{29} - 4050\,z\,x^{23} + 181440\,z^4\,x^{32}$$
$$- 2880\,z^2\,x^6 + 480\,x^3\,z + 99360\,z^3\,x^{24} + 15120\,z^2\,x^{16} + 8640\,z^3\,x^9 + 1920\,x^8\,z$$
$$+ 1200\,x^{13}\,z - 243\,x^{25} + 1620\,z\,x^{28} - 1440\,z^2\,x^{11} + 144720\,z^3\,x^{39} + 6480\,z^2\,x^{31}$$
$$+ 7776\,z^5\,x^{65} - 19440\,z^4\,x^{57} + 2430\,z\,x^{33} + 19440\,z^3\,x^{49} - 933120\,z^5\,x^{50}$$
$$+ 1632960\,z^5\,x^{45} - 1959552\,z^5\,x^{40} + 1632960\,z^5\,x^{35} - 933120\,z^5\,x^{30}$$
$$+ 349920\,z^5\,x^{25} - 77760\,z^5\,x^{20} + 7776\,z^5\,x^{15} - 6480\,z^3\,x^{19} - 25920\,z^3\,x^{14}$$
$$+ 1800\,z^2\,x^{21} + 725760\,z^4\,x^{42} - 635040\,z^4\,x^{37} + 181440\,z^4\,x^{27} - 207360\,z^4\,x^{22}$$
$$+ 84240\,z^4\,x^{17} - 51840\,z^3\,x^{34} - 440640\,z^4\,x^{47} + 349920\,z^5\,x^{55} - 3600\,z\,x^{18}$$
$$\left.+ 142560\,x^{52}\,z^4 - 77760\,x^{60}\,z^5 - 90720\,x^{44}\,z^3 + 19440\,x^{36}\,z^2 - 9720\,z^2\,x^{41}\right) T^{15}$$
$$+ 3\,(x-1)\,\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)\left(6\,x^3\,z + 12\,z\,x^{10} + 6\,x^{11}\,z + 24\,x^6\,z + 18\,x^9\,z\right.$$
$$\left.+ 18\,x^5\,z + 30\,x^7\,z + 12\,x^4\,z + 24\,x^8\,z - 2 - 4\,x - 6\,x^2 - 3\,x^3\right)\left(16 - 32\,x\right.$$
$$+ 864\,z^2\,x^8 - 72\,x^7 + 360\,x^8 - 162\,x^{11} - 156\,x^6 - 270\,x^9 - 80\,x^4 + 168\,x^5 + 40\,x^3$$
$$+ 16\,x^2 + 216\,x^{10} + 81\,x^{12} + 1296\,z^4\,x^{12} + 3564\,z^2\,x^{26} + 12960\,z^3\,x^{29}$$
$$+ 17280\,z^3\,x^{25} + 2160\,z^3\,x^{13} + 1296\,z^4\,x^{44} + 1296\,z\,x^{19} + 3492\,z^2\,x^{22} + 2160\,z^3\,x^{33}$$
$$+ 19440\,z^4\,x^{32} + 19440\,z^4\,x^{24} + 51840\,z^4\,x^{28} - 192\,x^5\,z + 864\,z^2\,x^6 - 192\,x^3\,z$$
$$+ 384\,x^4\,z - 15120\,z^3\,x^{24} - 3960\,z^2\,x^{19} - 8640\,z^3\,x^{18} - 2916\,z^2\,x^{16} - 8640\,z^3\,x^{15}$$
$$+ 942\,x^{14}\,z - 936\,z^2\,x^{13} - 1080\,z^3\,x^{12} - 1680\,x^{11}\,z - 2160\,z^2\,x^{10} - 1728\,z^3\,x^9$$
$$- 1224\,x^8\,z - 1728\,z^2\,x^7 + 720\,x^7\,z + 1128\,x^9\,z - 876\,x^{13}\,z - 828\,z^2\,x^{12}$$
$$+ 360\,z^2\,x^{14} + 1224\,z^2\,x^{18} - 360\,x^6\,z + 504\,z\,x^{15} + 1620\,x^{17}\,z + 1944\,z^2\,x^{28}$$
$$+ 2520\,z^2\,x^{24} + 336\,z\,x^{10} - 1710\,z\,x^{16} - 3096\,z^2\,x^{23} + 1944\,z^2\,x^{11} + 2952\,z^2\,x^{17}$$
$$- 2592\,z^3\,x^{36} - 17280\,z^3\,x^{30} + 4320\,z^3\,x^{27} - 648\,z\,x^{20} - 3240\,z^2\,x^{25} + 4320\,z^3\,x^{19}$$
$$+ 3240\,z^3\,x^{14} - 3456\,z^2\,x^{21} + 1296\,z^4\,x^{42} - 7776\,z^4\,x^{37} - 25920\,z^4\,x^{27}$$
$$+ 19440\,z^4\,x^{22} - 7776\,z^4\,x^{17} - 3672\,z^3\,x^{34} - 1458\,z\,x^{18} + 1410\,z\,x^{12} - 8640\,z^3\,x^{28}$$
$$+ 12960\,z^3\,x^{23} + 1080\,z^2\,x^{15} - 8640\,z^3\,x^{26} + 4320\,z^3\,x^{16} + 8640\,z^3\,x^{31}$$
$$- 6480\,z^3\,x^{22} - 1080\,z^3\,x^{32} + 5184\,z^3\,x^{35} - 3888\,x^{27}\,z^2 - 7776\,z^4\,x^{19} - 2592\,z^4\,x^{43}$$
$$- 7776\,z^4\,x^{39} + 19440\,z^4\,x^{34} - 25920\,z^4\,x^{29} - 38880\,z^4\,x^{33} - 38880\,z^4\,x^{23}$$
$$+ 15552\,z^4\,x^{18} + 15552\,z^4\,x^{38} + 1296\,z^4\,x^{14} - 2592\,z^4\,x^{13} + 3456\,z^3\,x^{10}$$
$$\left.- 1728\,z^3\,x^{11} + 1080\,z^2\,x^9 + 4320\,z^3\,x^{17} + 4320\,z^2\,x^{20}\right) T^{20} + \left(6\,x^3\,z + 12\,z\,x^{10}\right.$$
$$+ 6\,x^{11}\,z + 24\,x^6\,z + 18\,x^9\,z + 18\,x^5\,z + 30\,x^7\,z + 12\,x^4\,z + 24\,x^8\,z - 2 - 4\,x - 6\,x^2$$
$$\left.- 3\,x^3\right)\left(16 - 32\,x + 864\,z^2\,x^8 - 72\,x^7 + 360\,x^8 - 162\,x^{11} - 156\,x^6 - 270\,x^9\right.$$
$$- 80\,x^4 + 168\,x^5 + 40\,x^3 + 16\,x^2 + 216\,x^{10} + 81\,x^{12} + 1296\,z^4\,x^{12} + 3564\,z^2\,x^{26}$$
$$+ 12960\,z^3\,x^{29} + 17280\,z^3\,x^{25} + 2160\,z^3\,x^{13} + 1296\,z^4\,x^{44} + 1296\,z\,x^{19}$$
$$+ 3492\,z^2\,x^{22} + 2160\,z^3\,x^{33} + 19440\,z^4\,x^{32} + 19440\,z^4\,x^{24} + 51840\,z^4\,x^{28} - 192\,x^5\,z$$
$$+ 864\,z^2\,x^6 - 192\,x^3\,z + 384\,x^4\,z - 15120\,z^3\,x^{24} - 3960\,z^2\,x^{19} - 8640\,z^3\,x^{18}$$
$$- 2916\,z^2\,x^{16} - 8640\,z^3\,x^{15} + 942\,x^{14}\,z - 936\,z^2\,x^{13} - 1080\,z^3\,x^{12} - 1680\,x^{11}\,z$$
$$- 2160\,z^2\,x^{10} - 1728\,z^3\,x^9 - 1224\,x^8\,z - 1728\,z^2\,x^7 + 720\,x^7\,z + 1128\,x^9\,z$$
$$- 876\,x^{13}\,z - 828\,z^2\,x^{12} + 360\,z^2\,x^{14} + 1224\,z^2\,x^{18} - 360\,x^6\,z + 504\,z\,x^{15}$$
$$+ 1620\,x^{17}\,z + 1944\,z^2\,x^{28} + 2520\,z^2\,x^{24} + 336\,z\,x^{10} - 1710\,z\,x^{16} - 3096\,z^2\,x^{23}$$
$$+ 1944\,z^2\,x^{11} + 2952\,z^2\,x^{17} - 2592\,z^3\,x^{36} - 17280\,z^3\,x^{30} + 4320\,z^3\,x^{27} - 648\,z\,x^{20}$$
$$- 3240\,z^2\,x^{25} + 4320\,z^3\,x^{19} + 3240\,z^3\,x^{14} - 3456\,z^2\,x^{21} + 1296\,z^4\,x^{42} - 7776\,z^4\,x^{37}$$
$$- 25920\,z^4\,x^{27} + 19440\,z^4\,x^{22} - 7776\,z^4\,x^{17} - 3672\,z^3\,x^{34} - 1458\,z\,x^{18} + 1410\,z\,x^{12}$$
$$- 8640\,z^3\,x^{28} + 12960\,z^3\,x^{23} + 1080\,z^2\,x^{15} - 8640\,z^3\,x^{26} + 4320\,z^3\,x^{16}$$
$$+ 8640\,z^3\,x^{31} - 6480\,z^3\,x^{22} - 1080\,z^3\,x^{32} + 5184\,z^3\,x^{35} - 3888\,x^{27}\,z^2 - 7776\,z^4\,x^{19}$$
$$- 2592\,z^4\,x^{43} - 7776\,z^4\,x^{39} + 19440\,z^4\,x^{34} - 25920\,z^4\,x^{29} - 38880\,z^4\,x^{33}$$
$$- 38880\,z^4\,x^{23} + 15552\,z^4\,x^{18} + 15552\,z^4\,x^{38} + 1296\,z^4\,x^{14} - 2592\,z^4\,x^{13}$$
$$\left.+ 3456\,z^3\,x^{10} - 1728\,z^3\,x^{11} + 1080\,z^2\,x^9 + 4320\,z^3\,x^{17} + 4320\,z^2\,x^{20}\right) T^{25}, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}, 1024\,x^{35} + 3072\,x^{25} - 3072\,x^{30} - 1024\,x^{20} + (x-1)^2\,\left(x^4+x^3+x^2+x\right.$$

$$+ 1)^2 \left(-1 - 160 z^2 x^8 - 20 x^5 - 160 x^{10} + 5120 x^{20} - 640 x^{15} - 1280 z^4 x^{16}\right.$$
$$+ 197120 z^4 x^{36} + 1600 z x^{19} - 131840 z^3 x^{37} + 20 x^4 z + 1300 x^{14} z - 1280 z^2 x^{13}$$
$$+ 640 z^3 x^{12} + 280 x^9 z - 960 z^2 x^{18} - 1024 x^{25} + 2400 z^2 x^{28} + 9600 z^2 x^{23}$$
$$+ 123520 z^3 x^{42} + 2560 z^3 x^{27} - 5120 z x^{29} - 10240 z^5 x^{65} + 215040 z^5 x^{50}$$
$$- 258048 z^5 x^{45} + 215040 z^5 x^{40} - 122880 z^5 x^{35} + 46080 z^5 x^{30} - 10240 z^5 x^{25}$$
$$+ 1024 z^5 x^{20} - 122880 z^5 x^{55} + 46080 x^{60} z^5 - 10880 z^3 x^{22} + 60800 z^3 x^{32}$$
$$+ 5120 x^{21} z^4 - 71680 x^{31} z^4 + 5120 z x^{34} - 3200 z x^{24} - 32640 z^2 x^{33}$$
$$+ 33280 z^2 x^{38} - 10240 z^2 x^{43} + 1024 z^5 x^{70} - 133120 x^{51} z^4 - 286720 x^{41} z^4$$
$$- 5120 x^{61} z^4 + 250880 x^{46} z^4 + 1280 z^3 x^{17} + 39680 x^{56} z^4 + 5120 x^{26} z^4$$
$$\left.+ 10240 x^{52} z^3 - 56320 x^{47} z^3\right) T^5 + 4 (x - 1) \left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right) \left(-1\right.$$
$$- 160 z^2 x^8 - 20 x^5 - 160 x^{10} + 2720 x^{20} - 640 x^{15} - 1280 z^4 x^{16} + 197120 z^4 x^{36}$$
$$+ 1600 z x^{19} - 131840 z^3 x^{37} + 20 x^4 z + 1300 x^{14} z - 1280 z^2 x^{13} + 640 z^3 x^{12}$$
$$+ 280 x^9 z - 960 z^2 x^{18} - 1024 x^{25} + 2400 z^2 x^{28} + 9600 z^2 x^{23} + 123520 z^3 x^{42}$$
$$+ 2560 z^3 x^{27} - 5120 z x^{29} - 10240 z^5 x^{65} + 215040 z^5 x^{50} - 258048 z^5 x^{45}$$
$$+ 215040 z^5 x^{40} - 122880 z^5 x^{35} + 46080 z^5 x^{30} - 10240 z^5 x^{25} + 1024 z^5 x^{20}$$
$$- 122880 z^5 x^{55} + 46080 x^{60} z^5 - 10880 z^3 x^{22} + 60800 z^3 x^{32} + 5120 x^{21} z^4$$
$$- 71680 x^{31} z^4 + 5120 z x^{34} - 3200 z x^{24} - 32640 z^2 x^{33} + 33280 z^2 x^{38}$$
$$- 10240 z^2 x^{43} + 1024 z^5 x^{70} - 133120 x^{51} z^4 - 286720 x^{41} z^4 - 5120 x^{61} z^4$$
$$+ 250880 x^{46} z^4 + 1280 z^3 x^{17} + 39680 x^{56} z^4 + 5120 x^{26} z^4 + 10240 x^{52} z^3$$
$$\left.- 56320 x^{47} z^3\right) T^{10} + 2 \left(-3 - 480 z^2 x^8 - 60 x^5 - 480 x^{10} + 6160 x^{20} - 1920 x^{15}\right.$$
$$- 3840 z^4 x^{16} + 591360 z^4 x^{36} + 4800 z x^{19} - 395520 z^3 x^{37} + 60 x^4 z + 3900 x^{14} z$$
$$- 3840 z^2 x^{13} + 1920 z^3 x^{12} + 840 x^9 z - 2880 z^2 x^{18} - 3072 x^{25} + 7200 z^2 x^{28}$$
$$+ 28800 z^2 x^{23} + 370560 z^3 x^{42} + 7680 z^3 x^{27} - 15360 z x^{29} - 30720 z^5 x^{65}$$
$$+ 645120 z^5 x^{50} - 774144 z^5 x^{45} + 645120 z^5 x^{40} - 368640 z^5 x^{35} + 138240 z^5 x^{30}$$
$$- 30720 z^5 x^{25} + 3072 z^5 x^{20} - 368640 z^5 x^{55} + 138240 x^{60} z^5 - 32640 z^3 x^{22}$$
$$+ 182400 z^3 x^{32} + 15360 x^{21} z^4 - 215040 x^{31} z^4 + 15360 z x^{34} - 9600 z x^{24}$$
$$- 97920 z^2 x^{33} + 99840 z^2 x^{38} - 30720 z^2 x^{43} + 3072 z^5 x^{70} - 399360 x^{51} z^4$$
$$- 860160 x^{41} z^4 - 15360 x^{61} z^4 + 752640 x^{46} z^4 + 3840 z^3 x^{17} + 119040 x^{56} z^4$$
$$\left.+ 15360 x^{26} z^4 + 30720 x^{52} z^3 - 168960 x^{47} z^3\right) T^{15} + 4 (x - 1) \left(x^4 + x^3 + x^2 + x\right.$$
$$\left.+ 1\right) \left(4 x^4 z + 8 x^{11} z + 4 z x^{12} + 16 x^7 z + 12 z x^{10} + 12 x^6 z + 20 x^8 z + 8 x^5 z\right.$$
$$+ 16 x^9 z - 1 - 2 x - 3 x^2 - 4 x^3\Big) \left(1 - 2 x + 96 z^2 x^8 + 18 x^7 + 25 x^8 - 192 x^{11}\right.$$
$$- 31 x^6 + 20 x^9 + 5 x^4 + 8 x^5 + x^2 + 16 x^{10} + 256 x^{12} + 256 z^4 x^{16} + 3840 z^4 x^{36}$$
$$+ 1536 z^2 x^{30} + 400 z^2 x^{26} - 5120 z^3 x^{29} + 512 z^3 x^{13} + 256 z^4 x^{48} + 96 z x^{19}$$
$$- 80 z^2 x^{22} - 6400 z^3 x^{33} - 384 z^3 x^{37} + 10240 z^4 x^{32} + 3840 z^4 x^{28} + 32 x^5 z$$
$$- 16 x^4 z + 2560 z^3 x^{24} + 1280 z^3 x^{21} + 288 z^2 x^{19} - 320 z^3 x^{18} + 400 z^2 x^{16}$$
$$- 8 x^{14} z + 96 z^2 x^{13} - 256 z^3 x^{12} - 192 x^{11} z + 96 z^2 x^{10} - 60 x^8 z - 72 x^9 z$$
$$- 80 x^{13} z + 240 z^2 x^{12} - 912 z^2 x^{14} - 464 z^2 x^{18} - 16 x^6 z + 1056 z x^{15} + 200 x^{17} z$$
$$- 1024 x^{21} z + 16 z^2 x^{28} + 2928 z^2 x^{24} + 324 z x^{10} - 1268 z x^{16} - 2112 z^2 x^{29}$$
$$+ 256 z^2 x^{23} - 320 z^2 x^{17} - 1024 z^3 x^{39} - 320 z^3 x^{36} - 1280 z^3 x^{27} + 1088 z x^{20}$$
$$- 2304 z^2 x^{25} - 256 z^3 x^{14} - 800 z^2 x^{21} + 3072 z^4 x^{42} - 7680 z^4 x^{37} - 7680 z^4 x^{27}$$
$$+ 3072 z^4 x^{22} - 512 z^4 x^{17} + 3840 z^3 x^{34} - 512 z^4 x^{47} + 140 z x^{18} - 200 z x^{12}$$
$$+ 8320 z^3 x^{28} - 3840 z^3 x^{23} + 576 z^2 x^{15} - 1920 z^3 x^{26} - 320 z^3 x^{16} + 1280 z^3 x^{31}$$
$$+ 1280 z^3 x^{32} + 160 x^{27} z^2 - 1536 z^4 x^{43} - 5120 z^4 x^{33} - 1536 z^4 x^{23} + 256 z^4 x^{18}$$
$$+ 3840 z^4 x^{38} - 192 z^2 x^9 - 1536 x^{21} z^4 - 5120 x^{31} z^4 - 1536 x^{41} z^4 + 256 x^{46} z^4$$
$$\left.+ 640 z^3 x^{17} + 96 z^2 x^{20} + 3840 x^{26} z^4 + 1728 x^{38} z^3\right) T^{20} + \left(4 x^4 z + 8 x^{11} z\right.$$
$$+ 4 z x^{12} + 16 x^7 z + 12 z x^{10} + 12 x^6 z + 20 x^8 z + 8 x^5 z + 16 x^9 z - 1 - 2 x - 3 x^2$$
$$\left.- 4 x^3\right) \left(1 - 2 x + 96 z^2 x^8 + 18 x^7 + 25 x^8 - 192 x^{11} - 31 x^6 + 20 x^9 + 5 x^4\right.$$
$$+ 8 x^5 + x^2 + 16 x^{10} + 256 x^{12} + 256 z^4 x^{16} + 3840 z^4 x^{36} + 1536 z^2 x^{30}$$
$$+ 400 z^2 x^{26} - 5120 z^3 x^{29} + 512 z^3 x^{13} + 256 z^4 x^{48} + 96 z x^{19} - 80 z^2 x^{22}$$
$$- 6400 z^3 x^{33} - 384 z^3 x^{37} + 10240 z^4 x^{32} + 3840 z^4 x^{28} + 32 x^5 z - 16 x^4 z$$
$$+ 2560 z^3 x^{24} + 1280 z^3 x^{21} + 288 z^2 x^{19} - 320 z^3 x^{18} + 400 z^2 x^{16} - 8 x^{14} z$$
$$+ 96 z^2 x^{13} - 256 z^3 x^{12} - 192 x^{11} z + 96 z^2 x^{10} - 60 x^8 z - 72 x^9 z - 80 x^{13} z$$
$$+ 240 z^2 x^{12} - 912 z^2 x^{14} - 464 z^2 x^{18} - 16 x^6 z + 1056 z x^{15} + 200 x^{17} z$$
$$- 1024 x^{21} z + 16 z^2 x^{28} + 2928 z^2 x^{24} + 324 z x^{10} - 1268 z x^{16} - 2112 z^2 x^{29}$$
$$+ 256 z^2 x^{23} - 320 z^2 x^{17} - 1024 z^3 x^{39} - 320 z^3 x^{36} - 1280 z^3 x^{27} + 1088 z x^{20}$$
$$- 2304 z^2 x^{25} - 256 z^3 x^{14} - 800 z^2 x^{21} + 3072 z^4 x^{42} - 7680 z^4 x^{37} - 7680 z^4 x^{27}$$
$$+ 3072 z^4 x^{22} - 512 z^4 x^{17} + 3840 z^3 x^{34} - 512 z^4 x^{47} + 140 z x^{18} - 200 z x^{12}$$
$$+ 8320 z^3 x^{28} - 3840 z^3 x^{23} + 576 z^2 x^{15} - 1920 z^3 x^{26} - 320 z^3 x^{16} + 1280 z^3 x^{31}$$
$$+ 1280 z^3 x^{32} + 160 x^{27} z^2 - 1536 z^4 x^{43} - 5120 z^4 x^{33} - 1536 z^4 x^{23} + 256 z^4 x^{18}$$
$$+ 3840 z^4 x^{38} - 192 z^2 x^9 - 1536 x^{21} z^4 - 5120 x^{31} z^4 - 1536 x^{41} z^4 + 256 x^{46} z^4$$
$$\left.+ 640 z^3 x^{17} + 96 z^2 x^{20} + 3840 x^{26} z^4 + 1728 x^{38} z^3\right) T^{25}, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, 25 x^{10} - 75 x^{12} - 25 x^{16} + 75 x^{14} + 400 x^{10} (x - 1)^2 (x + 1)^2 T^2 + 800 x^{10} (x$$
$$- 1) (x + 1) T^4 + \left(9 + 5670 x^8 - 600 x^{14} - 3240 x^6 + 940 x^4 - 120 x^2 - 5000 x^{10}\right.$$

$$+ 2700\, x^{12} + 25\, x^{16} + 225\, z^2\, x^{30} + 10125\, z^2\, x^{26} - 7800\, z\, x^{19} - 150\, z\, x^{23}$$
$$+ 47250\, z^2\, x^{22} - 90\, x^5\, z - 27000\, z^2\, x^{16} + 18600\, x^{11}\, z + 225\, z^2\, x^{10} + 1050\, x^7\, z$$
$$- 6600\, x^9\, z - 24300\, x^{13}\, z - 2250\, z^2\, x^{12} + 10125\, z^2\, x^{14} + 47250\, z^2\, x^{18} + 11340\, z\, x^{15}$$
$$+ 5400\, x^{17}\, z + 2550\, x^{21}\, z - 2250\, z^2\, x^{28} - 27000\, z^2\, x^{24} - 56700\, z^2\, x^{20}\big)\, T^6$$
$$+ 5\, (x-1)^4\, (x+1)^4\, \big(15\, z\, x^{10} - 75\, x^9\, z + 150\, x^8\, z - 150\, x^7\, z + 75\, x^6\, z - 15\, x^5\, z$$
$$- 5\, x^3 + 25\, x^2 - 15\, x + 3\big)\, \big(15\, z\, x^{10} + 75\, x^9\, z + 150\, x^8\, z + 150\, x^7\, z + 75\, x^6\, z$$
$$+ 15\, x^5\, z - 5\, x^3 - 25\, x^2 - 15\, x - 3\big)\, T^8 + 10\, (x-1)^3\, (x+1)^3\, \big(15\, z\, x^{10} - 75\, x^9\, z$$
$$+ 150\, x^8\, z - 150\, x^7\, z + 75\, x^6\, z - 15\, x^5\, z - 5\, x^3 + 25\, x^2 - 15\, x + 3\big)\, \big(15\, z\, x^{10}$$
$$+ 75\, x^9\, z + 150\, x^8\, z + 150\, x^7\, z + 75\, x^6\, z + 15\, x^5\, z - 5\, x^3 - 25\, x^2 - 15\, x - 3\big)\, T^{10}$$
$$+ 10\, (x-1)^2\, (x+1)^2\, \big(15\, z\, x^{10} - 75\, x^9\, z + 150\, x^8\, z - 150\, x^7\, z + 75\, x^6\, z - 15\, x^5\, z$$
$$- 5\, x^3 + 25\, x^2 - 15\, x + 3\big)\, \big(15\, z\, x^{10} + 75\, x^9\, z + 150\, x^8\, z + 150\, x^7\, z + 75\, x^6\, z$$
$$+ 15\, x^5\, z - 5\, x^3 - 25\, x^2 - 15\, x - 3\big)\, T^{12} + 5\, (x-1)\, (x+1)\, \big(15\, z\, x^{10} - 75\, x^9\, z$$
$$+ 150\, x^8\, z - 150\, x^7\, z + 75\, x^6\, z - 15\, x^5\, z - 5\, x^3 + 25\, x^2 - 15\, x + 3\big)\, \big(15\, z\, x^{10}$$
$$+ 75\, x^9\, z + 150\, x^8\, z + 150\, x^7\, z + 75\, x^6\, z + 15\, x^5\, z - 5\, x^3 - 25\, x^2 - 15\, x - 3\big)\, T^{14}$$
$$+ \big(15\, z\, x^{10} - 75\, x^9\, z + 150\, x^8\, z - 150\, x^7\, z + 75\, x^6\, z - 15\, x^5\, z - 5\, x^3 + 25\, x^2$$
$$- 15\, x + 3\big)\, \big(15\, z\, x^{10} + 75\, x^9\, z + 150\, x^8\, z + 150\, x^7\, z + 75\, x^6\, z + 15\, x^5\, z - 5\, x^3$$
$$- 25\, x^2 - 15\, x - 3\big)\, T^{16}, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, 126\, x^5 - 700\, x^4\, (x-1)\, T + 1575\, x^3\, (x-1)^2\, T^2 - 1800\, x^2\, (x-1)^3\, T^3$$
$$+ 1050\, x\, (x-1)^4\, T^4 - 252\, (x-1)^5\, T^5 + \big(-252 + 210\, x - 10\, x^4 + 45\, x^3 - 120\, x^2$$
$$+ x^5 + 1260\, x^5\, z\big)\, T^{10}, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}, 3675\, x^{18} - 1225\, x^{20} + 1225\, x^{14} - 3675\, x^{16} + (x-1)^2\, (x+1)^2\, \big(35\, x^{17}\, z$$
$$- 175\, z\, x^{15} + 350\, x^{13}\, z - 350\, x^{11}\, z + 175\, x^9\, z - 35\, x^8 - 35\, x^7\, z + 140\, x^7 - 140\, x^6$$
$$+ 70\, x^4 - 28\, x^2 + 5\big)\, \big(35\, x^{17}\, z - 175\, z\, x^{15} + 350\, x^{13}\, z - 350\, x^{11}\, z + 175\, x^9\, z$$
$$- 35\, x^8 - 35\, x^7\, z - 140\, x^7 - 140\, x^6 + 70\, x^4 - 28\, x^2 + 5\big)\, T^2 + 7\, (x-1)\, (x$$
$$+ 1)\, \big(25 + 12390\, x^8 - 7000\, x^{14} - 5320\, x^6 + 1484\, x^4 - 280\, x^2 - 17640\, x^{10}$$
$$+ 14700\, x^{12} + 1225\, x^{16} + 55125\, z^2\, x^{30} + 257250\, z^2\, x^{26} + 1225\, z^2\, x^{34} - 99960\, z\, x^{19}$$
$$+ 2450\, z\, x^{23} + 257250\, z^2\, x^{22} - 12250\, z^2\, x^{16} - 18200\, x^{11}\, z - 350\, x^7\, z + 3710\, x^9\, z$$
$$+ 57400\, x^{13}\, z + 1225\, z^2\, x^{14} + 55125\, z^2\, x^{18} - 116900\, z\, x^{15} + 144900\, x^{17}\, z$$
$$+ 29400\, x^{21}\, z - 147000\, z^2\, x^{28} - 308700\, z^2\, x^{24} - 2450\, z\, x^{25} - 12250\, z^2\, x^{32}$$
$$- 147000\, z^2\, x^{20}\big)\, T^4 + 7\, \big(75 + 37170\, x^8 - 19880\, x^{14} - 15960\, x^6 + 4452\, x^4$$
$$- 840\, x^2 - 52920\, x^{10} + 44100\, x^{12} + 3675\, x^{16} + 165375\, z^2\, x^{30} + 771750\, z^2\, x^{26}$$
$$+ 3675\, z^2\, x^{34} - 299880\, z\, x^{19} + 7350\, z\, x^{23} + 771750\, z^2\, x^{22} - 36750\, z^2\, x^{16}$$
$$- 54600\, x^{11}\, z - 1050\, x^7\, z + 11130\, x^9\, z + 172200\, x^{13}\, z + 3675\, z^2\, x^{14}$$
$$+ 165375\, z^2\, x^{18} - 350700\, z\, x^{15} + 434700\, x^{17}\, z + 88200\, x^{21}\, z - 441000\, z^2\, x^{28}$$
$$- 926100\, z^2\, x^{24} - 7350\, z\, x^{25} - 36750\, z^2\, x^{32} - 441000\, z^2\, x^{20}\big)\, T^6 + 35\, (x$$
$$- 1)^4\, (x+1)^4\, \big(35\, z\, x^{12} + 175\, x^{11}\, z + 350\, z\, x^{10} + 350\, x^9\, z + 175\, x^8\, z + 35\, x^7\, z$$
$$- 35\, x^3 - 47\, x^2 - 25\, x - 5\big)\, \big(35\, z\, x^{12} - 175\, x^{11}\, z + 350\, z\, x^{10} - 350\, x^9\, z + 175\, x^8\, z$$
$$- 35\, x^7\, z - 35\, x^3 + 47\, x^2 - 25\, x + 5\big)\, T^8 + 35\, (x-1)^3\, (x+1)^3\, \big(35\, z\, x^{12}$$
$$+ 175\, x^{11}\, z + 350\, z\, x^{10} + 350\, x^9\, z + 175\, x^8\, z + 35\, x^7\, z - 35\, x^3 - 47\, x^2 - 25\, x - 5\big)$$
$$\big(35\, z\, x^{12} - 175\, x^{11}\, z + 350\, z\, x^{10} - 350\, x^9\, z + 175\, x^8\, z - 35\, x^7\, z - 35\, x^3 + 47\, x^2$$
$$- 25\, x + 5\big)\, T^{10} + 21\, (x-1)^2\, (x+1)^2\, \big(35\, z\, x^{12} + 175\, x^{11}\, z + 350\, z\, x^{10} + 350\, x^9\, z$$
$$+ 175\, x^8\, z + 35\, x^7\, z - 35\, x^3 - 47\, x^2 - 25\, x - 5\big)\, \big(35\, z\, x^{12} - 175\, x^{11}\, z + 350\, z\, x^{10}$$
$$- 350\, x^9\, z + 175\, x^8\, z - 35\, x^7\, z - 35\, x^3 + 47\, x^2 - 25\, x + 5\big)\, T^{12} + 7\, (x-1)\, (x$$
$$+ 1)\, \big(35\, z\, x^{12} + 175\, x^{11}\, z + 350\, z\, x^{10} + 350\, x^9\, z + 175\, x^8\, z + 35\, x^7\, z - 35\, x^3$$
$$- 47\, x^2 - 25\, x - 5\big)\, \big(35\, z\, x^{12} - 175\, x^{11}\, z + 350\, z\, x^{10} - 350\, x^9\, z + 175\, x^8\, z$$
$$- 35\, x^7\, z - 35\, x^3 + 47\, x^2 - 25\, x + 5\big)\, T^{14} + \big(35\, z\, x^{12} + 175\, x^{11}\, z + 350\, z\, x^{10}$$
$$+ 350\, x^9\, z + 175\, x^8\, z + 35\, x^7\, z - 35\, x^3 - 47\, x^2 - 25\, x - 5\big)\, \big(35\, z\, x^{12} - 175\, x^{11}\, z$$
$$+ 350\, z\, x^{10} - 350\, x^9\, z + 175\, x^8\, z - 35\, x^7\, z - 35\, x^3 + 47\, x^2 - 25\, x + 5\big)\, T^{16}, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, 1 + \big(-1 + 10\, x^7\, z\big)\, T^{10}, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, 84\, x^6 - 560\, x^5\, (x-1)\, T + 1575\, x^4\, (x-1)^2\, T^2 - 2400\, x^3\, (x-1)^3\, T^3$$
$$+ 2100\, x^2\, (x-1)^4\, T^4 - 1008\, x\, (x-1)^5\, T^5 + 210\, (x-1)^6\, T^6 + \big(-210 + 252\, x$$
$$- 45\, x^4 - 210\, x^2 + 120\, x^3 - x^6 + 10\, x^5 + 840\, x^6\, z\big)\, T^{10}, 0, 0$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, 343\, x^{24} - 1960\, x^{21}\, (x-1)\, \big(x^2 + x + 1\big)\, T^3 + 4305\, x^{18}\, (x-1)^2\, \big(x^2 + x$$
$$+ 1\big)^2\, T^6 - 4040\, x^{15}\, (x-1)^3\, \big(x^2 + x + 1\big)^3\, T^9 + 350\, x^{12}\, (x-1)^4\, \big(x^2 + x$$
$$+ 1\big)^4\, T^{12} + 2184\, x^9\, (x-1)^5\, \big(x^2 + x + 1\big)^5\, T^{15} - 1190\, x^6\, (x-1)^6\, \big(x^2 + x$$
$$+ 1\big)^6\, T^{18} - 280\, x^3\, (x-1)^7\, \big(x^2 + x + 1\big)^7\, T^{21} + 315\, (x-1)^8\, \big(x^2 + x + 1\big)^8\, T^{24}$$
$$+ \big(-315 + 270\, x^{21} + 6804\, x^9 - 1215\, x^{18} + 2240\, x^3 - 5670\, x^6 - 5670\, x^{12}$$
$$+ 3240\, x^{15} - 27\, x^{24} + 1890\, x^4\, z - 12600\, x^7\, z + 21000\, z\, x^{10} + 44100\, z^2\, x^{14}$$
$$- 147000\, z^2\, x^{17} + 343000\, z^3\, x^{24}\big)\, T^{30}, 0, 0$$

$$\left[\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, 36\,x^7 - 280\,x^6\,(x-1)\,T + 945\,x^5\,(x-1)^2\,T^2 - 1800\,x^4\,(x-1)^3\,T^3 + 2100\,x^3\,(x-1)^4\,T^4 - 1512\,x^2\,(x-1)^5\,T^5 + 630\,x\,(x-1)^6\,T^6 - 120\,(x-1)^7\,T^7 + \left(-120 + 210\,x - 120\,x^4 - 252\,x^2 + x^7 + 210\,x^3 - 10\,x^6 + 45\,x^5 + 360\,x^7\,z\right)\,T^{10}, 0, 0\right.$$

$$\left[\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}, 1 + \left(-1 + 10\,x^9\,z\right)\,T^{10}, 0, 0\right.$$

$$\left[\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}, 9\,x^8 - 80\,x^7\,(x-1)\,T + 315\,x^6\,(x-1)^2\,T^2 - 720\,x^5\,(x-1)^3\,T^3 + 1050\,x^4\,(x-1)^4\,T^4 - 1008\,x^3\,(x-1)^5\,T^5 + 630\,x^2\,(x-1)^6\,T^6 - 240\,x\,(x-1)^7\,T^7 + 45\,(x-1)^8\,T^8 + \left(-45 + 120\,x - 210\,x^4 - 210\,x^2 + 10\,x^7 + 252\,x^3 - 45\,x^6 - x^8 + 120\,x^5 + 90\,x^8\,z\right)\,T^{10}, 0, 0\right.$$

$$\left[\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, 14\,x^6 - 40\,x^3\,(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)T^3 + 35\,(x-1)^2\left(x^2 + x + 1\right)^2 T^6 + \left(-35 + 30\,x^3 - 9\,x^6 + 140\,x^6\,z\right)\,T^{10}, 0, 0\right. \quad \textbf{(1)}$$

Bibliographie

[AK68] Krishna B. Athreya and Samuel Karlin. Embedding of urn schemes into continuous time Markov branching processes and related limit theorems. *Annals of Mathematical Statistics*, 39 :1801–1817, 1968.

[AK91] Sergei A. Abramov and K. Yu Kvashenko. Fast algorithms to search for the rational solutions of linear differential equations with polynomial coefficients. In *Proc. of ISSAC'91, International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation Bonn Germany*, Stephen M. Watt, editor, pages 267–270. ACM Press, 1991.

[And90] George E. Andrews. Euler's "Exemplum memorabile inductionis fallacis" and q–trinomial coefficients. *Journal of the American Mathematical Society*, 3 :653–669, 1990.

[AS04] Noga Alon and Joel H. Spencer. *The probabilistic method*, volume 57. Wiley-Interscience, 2004.

[Bar97] Moulay A. Barkatou. *A fast algorithm to compute the rational solutions of systems of linear differential equations*. IMAG, Institut d'informatique et de mathématiques appliquées, Grenoble, 1997. Technical Report Research, 973-M.

[BCS05] Alin Bostan, Thomas Cluzeau, and Bruno Salvy. Fast algorithms for polynomial solutions of linear differential equations. In *Proc. of ISSAC'05, International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 45–52. ACM Press, 2005.

[BDM13a] Alin Bostan, Philippe Dumas, and Basile Morcrette. Algebraic balanced Pólya urns : experimental classification and asymptotic analysis. 2013. En préparation.

[BDM13b] Alin Bostan, Philippe Dumas, and Basile Morcrette. Classifying algebraic Pólya urns. 2013. En préparation.

[BF11] Pawel Blasiak and Philippe Flajolet. Combinatorial models of Creation-Annihilation. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, 65(B65c) :1–78, 2011.

[BFSS01] Cyril Banderier, Philippe Flajolet, Gilles Schaeffer, and Michèle Soria. Random maps, coalescing saddles, singularity analysis, and Airy phenomena.

Random Structures Algorithms, 19(3-4) :194–246, 2001. Analysis of algorithms (Krynica Morska, 2000).

[BK09] Alin Bostan and Manuel Kauers. Automatic classification of restricted lattice walks. *DMTCS Proceedings*, (01) :201–215, 2009.

[BK10] Alin Bostan and Manuel Kauers. The complete generating function for Gessel walks is algebraic. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 138(9) :3063–3079, 2010.

[BL94] Bernhard Beckermann and George Labahn. A uniform approach for the fast computation of matrix-type Padé approximants. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 15(3) :804–823, 1994.

[BM05] Mireille Bousquet-Mélou. Walks in the quarter plane : Kreweras' algebraic model. *The Annals of Applied Probability*, 15(2) :1451–1491, 2005.

[BM06] Srinivasan Balaji and Hosam M. Mahmoud. Exact and limiting distributions in diagonal Pólya processes. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 58(1) :171–185, 2006.

[BMM10] Mireille Bousquet-Mélou and Marni Mishna. Walks with small steps in the quarter plane. *Contemp. Math*, 520 :1–40, 2010.

[BMP03] Mireille Bousquet-Mélou and Marko Petkovšek. Walks confined in a quadrant are not always D-finite. *Theoretical Computer Science*, 307(2) :257–276, 2003.

[Bol01] Béla Bollobás. *Random graphs*, volume 73 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2001.

[BP85] Arunabha Bagchi and A. K. Pal. Asymptotic normality in the generalized Pólya-Eggenberger urn model, with an application to computer data structures. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 6(3) :394–405, 1985.

[CGH12] Pasquale Cirillo, Mauro Gallegati, and Jürg Hüsler. A Pólya lattice model to study leverage dynamics and contagious financial fragility. *Advances in Complex Systems*, 15(2) :26 pages, 2012.

[CGM11] Brigitte Chauvin, Danièle Gardy, and Cécile Mailler. The growing tree distribution on Boolean functions. *8th SIAM Workshop on Analytic Algorithmics and Combinatorics (ANALCO)*, pages 45–56, 2011.

[CMP13] Brigitte Chauvin, Cécile Mailler, and Nicolas Pouyanne. Smoothing equations for large Pólya urns. *arXiv preprint arXiv :1302.1412*, 2013.

[CPS11] Brigitte Chauvin, Nicolas Pouyanne, and Réda Sahnoun. Limit distributions for large Pólya urns. *The Annals of Applied Probability*, 21 :1–32, 2011.

[Dar10] Alexis Darrasse. *Structures arborescentes complexes : analyse combinatoire, génération aléatoire et applications*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2010.

[DHBS10] Alexis Darrasse, Hsien-Kuei Hwang, Olivier Bodini, and Michèle Soria. The connectivity-profile of random increasing k-trees. *Workshop on Analytic Algorithmics and Combinatorics (ANALCO10)*, 2010.

[DM13] Philippe Dumas and Basile Morcrette. Analytic combinatorics for non balanced Pólya urns. 2013. En préparation.

[Dur04] Marianne Durand. *Combinatoire analytique et algorithme des ensembles de données*. PhD thesis, École Polytechnique, 2004.

[EE07] Paul Ehrenfest and Tatiana Ehrenfest. Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche H-Theorem. *Physikalische Zeitschrift*, 8(9) :311–314, 1907.

[EP23] Florian Eggenberger and György Pólya. Über die Statistik verketteter Vorgänge. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1 :279–289, 1923.

[ER60] Paul Erdös and Alfréd Rényi. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci*, 5 :17–61, 1960.

[Eul01] Leonhard Euler. De evolutione potestatis polynomialis cuiuscunque $(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots)^n$. *Nova Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae*, 12 :47–57, 1801.

[FDP06] Philippe Flajolet, Philippe Dumas, and Vincent Puyhaubert. Some exactly solvable models of urn process theory. In Philippe Chassaing, editor, *Fourth Colloquium on Mathematics and Computer Science*, volume AG of *DMTCS Proceedings*, pages 59–118, 2006.

[FGP05] Philippe Flajolet, Joaquim Gabarró, and Helmut Pekari. Analytic urns. *Annals of Probability*, 33 :1200–1233, 2005.

[FO90] Philippe Flajolet and Andrew M. Odlyzko. Singularity analysis of generating functions. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 3(2) :216–240, 1990.

[Fol95] Gerald B. Folland. *Introduction to Partial Differential Equations*. University Press, Princeton, New Jersey, 1995.

[FR10] Guy Fayolle and Kilian Raschel. On the holonomy or algebraicity of generating functions counting lattice walks in the quarter-plane. *Markov Processes and Related Fields*, 16(3) :485–496, 2010.

[FR12] Guy Fayolle and Kilian Raschel. Some exact asymptotics in the counting of walks in the quarter plane. *DMTCS Proceedings*, (01) :109–124, 2012.

[Fre65] David A. Freedman. Bernard Friedman's urn. *Annals of Mathematical Statistics*, 36 :956–970, 1965.

[Fri49] Bernard Friedman. A simple urn model. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 2 :59–70, 1949.

[FS09] Philippe Flajolet and Robert Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.

[HKP07] Hsien-Kuei Hwang, Markus Kuba, and Alois Panholzer. Analysis of some exactly solvable diminishing urn models. In *19th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, volume Nankai University, Tianjin of *FPSAC Proceedings*, 2007. available at http ://www.fpsac.cn/PDF-Proceedings/Posters/43.pdf.

[Hör76] Lars Hörmander. *Linear partial differential operators*. Springer Verlag, Berlin, 1976.

[Hwa94] Hsien-Kuei Hwang. *Théorèmes limites pour les structures combinatoires et les fonctions arithmetiques*. Ph.D. Thesis, École Polytechnique, December 1994.

[Hwa96] Hsien-Kuei Hwang. Large deviations for combinatorial distributions. I. Central limit theorems. *The Annals of Applied Probability*, 6(1) :297–319, 1996.

[Hwa98a] Hsien-Kuei Hwang. Large deviations of combinatorial distributions. II. Local limit theorems. *The Annals of Applied Probability*, 8(1) :163–181, 1998.

[Hwa98b] Hsien-Kuei Hwang. On convergence rates in the central limit theorems for combinatorial structures. *European Journal of Combinatorics*, 19(3) :329–343, 1998.

[Jan04] Svante Janson. Functional limit theorems for multitype branching processes and generalized Pólya urns. *Stochastic Processes and Applications*, 110(2) :177–245, 2004.

[Jan06] Svante Janson. Limit theorems for triangular urn schemes. *Probability Theory Related Fields*, 134(3) :417–452, 2006.

[JK77] Norman L. Johnson and Samuel Kotz. *Urn Models and Their Application*. John Wiley & Sons, 1977.

[JLR00] Svante Janson, Tomasz Luczak, and Andrzej Ruciński. *Random graphs*. John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, 2000.

[KC13] Markus Kuba and May-Ru Chen. On generalized Pólya urn models. *Journal of Applied Probability Theory*, 2013. To appear.

[KMP13] Markus Kuba, Hosam M. Mahmoud, and Alois Panholzer. Analysis of a generalized Friedman's urn with multiple drawings. *Discrete Applied Mathematics*, 2013. To appear.

[KMR00] Samuel Kotz, Hosam M. Mahmoud, and Philippe Robert. On generalized Pólya urn models. *Statistics & Probability Letters*, 49(2) :163–173, 2000.

[Knu11] Donald E. Knuth. Comment on JRM Problem 2680. 2011. Note du 9 Janvier 2011, 3 pages. Disponible sur la page web de D.E. Knuth, `http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/papers/JRM2680.pdf`.

[KP08] Markus Kuba and Alois Panholzer. Limit laws for a class of diminishing urn models. *DMTCS Proceedings*, (1), 2008.

[KP12a] Markus Kuba and Alois Panholzer. Limiting distributions for a class of diminishing urn models. *Advances in Applied Probability*, 44(1) :87–116, 2012.

[KP12b] Markus Kuba and Alois Panholzer. On death processes and urn models. *DMTCS Proceedings*, (01) :29–42, 2012.

[KR11] Irina Kurkova and Kilian Raschel. Explicit expression for the generating function counting Gessel's walks. *Advances in Applied Mathematics*, 47(3) :414–433, 2011.

[Lio33a] Joseph Liouville. Note sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 10 :347–359, 1833.

[Lio33b] Joseph Liouville. Premier mémoire sur la détermination des Intégrales dont la valeur est algébrique. *Journal de l'École Polytechnique*, 14 :124–148, 1833.

[Lio33c] Joseph Liouville. Second mémoire sur la détermination des Intégrales dont la valeur est algébrique. *Journal de l'École Polytechnique*, 14 :149–193, 1833.

[Mah03] Hosam M. Mahmoud. Pólya urn models and connections to random trees : A review. *JIRSS* **2,** n° 1, pages 53–114, 2003.

[Mah08] Hosam M. Mahmoud. *Urn Models*. Chapman, Orlando, Florida, 2008.

[Mah13] Hosam M. Mahmoud. Some node degree properties of series–parallel graphs evolving under a stochastic growth model. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, FirstView :1–11, 2 2013.

[Mai13] Cécile Mailler. *Arbres booléens aléatoires et urnes de Pólya : approches combinatoire et probabiliste*. PhD thesis, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, 2013.

[Mis09] Marni Mishna. Classifying lattice walks restricted to the quarter plane. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 116(2) :460–477, 2009.

[MM12] Basile Morcrette and Hosam M. Mahmoud. Exactly solvable balanced tenable urns with random entries via the analytic methodology. In *Analysis of Algorithms (AofA) 2012*, volume AQ of *DMTCS Proceedings*, pages 219–232, Montreal, Canada, 2012.

[Mor12] Basile Morcrette. Fully analyzing an algebraic Pólya urn model. In *LATIN 2012*, volume 7256 of *LNCS*, pages 568–581, 2012.

[Pól30] György Pólya. Sur quelques points de la théorie des probabilités. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 1 :117–161, 1930.

[Pou05] Nicolas Pouyanne. Classification of large Pólya-Eggenberger urns with regard to their asymptotics. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, AD :275–286, 2005.

[Pou08] Nicolas Pouyanne. An algebraic approach to Pólya processes. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 44 :293–323, 2008.

[PS10] Alois Panholzer and Georg Seitz. Ordered increasing k-trees : Introduction and analysis of a preferential attachment network model. *DMTCS Proceedings of AofA'10*, 2010.

[PSS12] Carine Pivoteau, Bruno Salvy, and Michele Soria. Algorithms for combinatorial structures : Well-founded systems and Newton iterations. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 119(8) :1711–1773, 2012.

[Puy05] Vincent Puyhaubert. *Modèles d'urnes et phénomènes de seuil en combinatoire analytique*. PhD thesis, École Polytechnique, 2005.

[Ras12] Kilian Raschel. Counting walks in a quadrant : a unified approach via boundary value problems. *Journal of the European Mathematical Society*, 14 :749–777, 2012.

[Smy96] Robert T. Smythe. Central limit theorems for urn models. *Stochastic Processes and their Applications*, 65(1) :115–137, 1996.

[SZ94] Bruno Salvy and Paul Zimmerman. Gfun : a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 20(2) :163–177, 1994.

[TM01] Tatsuie Tsukiji and Hosam M. Mahmoud. A limit law for outputs in random recursive circuits. *Algorithmica*, 31(3) :403–412, 2001.

[ZT86] Eleftherios C. Zachmanoglou and Dale W. Thoe. *Introduction to partial differential equations with applications*. Courier Dover Publications, 1986.

Liste des figures

1 Divers comportements des urnes de Pólya ; simulations du nombre de boules noires pour les urnes traitées dans cette thèse 8
2 *Combinatoire analytique* et *urnes de Pólya* : squelette de la thèse 9

1.1 Relation entre la validité de $p_n(u)$ et les résultats probabilistes limites . . . 20

2.1 Arbre des histoires de l'urne $[0,2,1,1]$ 26
2.2 Évolution de l'urne $[0,2,1,1]$ et lien avec la série génératrice des histoires $H(x,y,z)$ 27
2.3 Une marche de l'urne $[1,1,2,0]$ de configuration initiale $(1,1)$. 37

3.1 Graphiques sur la combinatoire des urnes algébriques et non algébriques. 54
3.2 Graphe du rapport *Nombre d'urnes non algébriques/Nombre d'urnes algébriques* 55
3.3 Représentation en 3D des urnes devinées algébriques par le GUESS'N'PROVE 58

5.1 Convergence gaussienne des fonctions $p_n(x)$ pour les urnes $\mathscr{CP}$ 87
5.2 Méthode de col pour l'urne $\mathscr{CP}(1,1,1)$ – visualisation des pôles et cols . 91
5.3 Méthode de col pour l'urne $\mathscr{CP}(1,1,1)$ – vue de dessus et contour d'intégration 92
5.4 Méthode de col pour l'urne $\mathscr{CP}(1,1,1)$ – cols coalescents en vue de dessus et contour d'intégration 95
5.5 Méthode de col générale – géométrie et contour pour $h_1(w)$ 99
5.6 Méthode de col générale – géométrie et contour pour $h_x(w)$ 101

6.1 Convergence gaussienne des fonctions $p_n(x)$ pour les urnes $\mathscr{CA}$ 109

7.1 Représentation des k-arbres ordonnés croissants, pour $k=1,2$. 125
7.2 Représentation des 1-arbres ordonnés croissants, de taille $k=1,2,3$. . . . 126
7.3 Convergence gaussienne des fonctions $p_n(x)$ pour les urnes des k-arbres . 128
7.4 Graphes de $|u^2K(u)|$ et $K(u)$ pour les propriétés limites des k-arbres . . . 132
7.5 Graphes pour les grandes déviations sur les k-arbres 133

8.1 Représentation d'une formule booléenne et urne à trois couleurs associée 138
8.2 Simulations du nombre de boules • pour l'urne des formules booléennes (évolution de type Poisson) 141

9.1 Simulations de 100 histoires de longueur 50 pour l'urne Pólya–Friedman (transition de phase entre une loi *gaussienne* et une loi *beta*) 163
9.2 Distribution des boules noires pour l'urne de Pólya–Friedman, avec variation du paramètre de Bernoulli p 164

10.1 Arbre des configurations pour l'urne non équilibrée des ficelles $[-1, 1, 0, 1]$166

Liste des tableaux et algorithmes

3.1 Classification des urnes équilibrées positives avec des coefficients nuls . . 46
3.2 Urnes algébriques devinées et prouvées par l'algorithme GUESS'N'PROVE . . 57
3.3 Algorithme de Liouville : recherche des urnes algébriques pour une balance σ inférieure à n. 62

4.1 Nature de la série des histoires $H(x, y, z)$ pour les urnes équilibrées 78

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE – PARIS 6

COMBINATOIRE ANALYTIQUE ET MODÈLES D'URNES

Basile MORCRETTE

Résumé

Cette thèse étudie les urnes de Pólya à travers le prisme de la combinatoire analytique. Les urnes sont des modèles, conceptuellement très simples, de dynamique de croissance ou d'extinction dont les comportements limites sont extrêmement variés. Ces modèles sont largement étudiés par des approches probabilistes mais la compréhension précise des diverses lois limites reste une question ouverte. Les travaux de Flajolet *et al.* en 2005 ont illustré que pour ces questions, une approche par combinatoire analytique peut se révéler très fructueuse : l'étude des propriétés (nature, singularités) des séries génératrices associées aux urnes donne accès à des lois limites avec grande précision.

Cette thèse s'inscrit dans la continuité de ces travaux et commence par identifier les séries des urnes de nature algébrique, grâce à un algorithme sophistiqué issu du calcul formel (Divination/Preuve automatique). Pour les classes d'urnes algébriques, nous menons des analyses, exacte et asymptotique, afin de connaître avec précision les comportements limites (structures des moments, vitesse de convergence, aspects limites locaux). Puis, l'étude d'urnes non algébriques est faite au travers d'exemples concrets portant sur la modélisation de réseaux sociaux, ainsi que sur la combinatoire des formules booléennes. Enfin, à travers des modèles d'urnes plus généraux (absence d'équilibre et présence d'aléa au sein des règles de substitution), nous montrons que l'approche symbolique de la combinatoire analytique est robuste. En particulier, une étude combinatoire générale des urnes sans condition d'équilibre est réalisée pour la première fois, unissant toute urne à une équation aux dérivées partielles.

Mots-clés : combinatoire analytique, probabilités et lois limites, urnes de Pólya et applications, algorithmique et calcul formel, systèmes différentiels et équations aux dérivées partielles.

Abstract

This thesis studies Pólya urns through the analytic combinatorics point of view. Urns are conceptually very simple models of growth or extinction dynamics for which the limiting behaviors are extremely diverse. Those models are widely studied by probabilistic approach, but the precise understanding of the variety of limit laws is still an open question. Since 2005, the work of Flajolet *et al.* shows that an analytic combinatorics approach can be very fruitful for those questions: the study of the properties (nature, singularities) of generating functions linked to urns provides access to many precisions on limit laws.

This thesis is a continuation of this work. First, the determination of the nature of the generating functions of urns by a high tech algorithm of computer algebra (automatic Guess'n'Prove) identifies which functions are algebraic. Then, we lead exact and asymptotic analysis for algebraic classes and precise properties on limiting behaviors are thus derived (moments structure, rate of convergence, local limit properties). Second, a study of some non algebraic urns is done through concrete examples linked to some models of social networks, or the combinatorics of some boolean formulas. Third, through the extension of classical models (unbalanced models, random entries for substitution rules), we show that the symbolic aspects of analytic combinatorics are thriving. More specifically, a general combinatorial study for non necessarily balanced urns is done for the first time and links any urn to a partial differential equation.

Keywords: analytic combinatorics, probability and limit laws, Pólya urns and applications, computer algebra algorithmics, differential systems and partial differential equations.