HAL
open science

Nouvelle méthode de traitement d'images multispectrales fondée sur un modèle d'instrument pour la haut contraste : application à la détection d'exoplanètes

Marie Ygouf

▶ **To cite this version:**

Marie Ygouf. Nouvelle méthode de traitement d'images multispectrales fondée sur un modèle d'instrument pour la haut contraste : application à la détection d'exoplanètes. Autre [cond-mat.other]. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT : 2012GRENY100 . tel-00843202

HAL Id: tel-00843202

https://theses.hal.science/tel-00843202

Submitted on 10 Jul 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Astrophysique et Milieux Dilués**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Marie Ygouf

Thèse dirigée par **Jean-Luc Beuzit**
et codirigée par **Thierry Fusco**

préparée au sein de **l'IPAG (CNRS), du DOTA (ONERA)**
et de **L'École Doctorale de Physique de Grenoble**

Nouvelle méthode de traitement d'images multispectrales fondée sur un modèle d'instrument pour le haut contraste : Application à la détection d'exoplanètes

Thèse soutenue publiquement le **6 décembre 2012**,
devant le jury composé de :

M. Thierry Forveille
Astronome au CNAP, IPAG, Président
M. Jérôme Idier
Directeur de recherche au CNRS, IRCCyN, Rapporteur
M. René Doyon
Professeur agrégé au Département de Physique de l'Université de Montréal, Rapporteur
M. Éric Thiébaut
Astronome Adjoint au CNAP, CRAL, Examinateur
M. Daniel Rouan
Directeur de recherche au CNRS, LESIA, Examinateur
M. Jean-Luc Beuzit
Directeur de recherche au CNRS, IPAG, Directeur de thèse
M. Laurent Mugnier
Chercheur à l'ONERA, DOTA, Encadrant
M. David Mouillet
Astronome au CNAP, IPAG, Encadrant

À mes grands-mères...

Remerciements

16 Mai 2012

« Chère Marie, tu vois, on survit, et plutôt bien, à ce genre de défi... ». C'est en pleine rédaction de thèse, correction d'article et j'en passe, que je découvre avec émotion la petite dédicace laissée par Laurent, un de mes encadrants de thèse, sur l'exemplaire de sa HDR [1] qu'il m'avait envoyée un peu plus tôt. Le soleil, diffusant ses rayons réconfortants à travers les vitres de mon bureau, me rappelle avec tristesse que l'été n'est plus très loin et qu'avec lui approchent, trop vite ?, les dernières étapes de la vie d'un thésard, à savoir la soumission du manuscrit et la soutenance de thèse. Je me laisse alors submerger par la déception de devoir mettre un terme au travail amorcé deux ans et demi plus tôt, l'angoisse du futur et de l'inconnu, la crainte, probablement infondée, que ma carrière académique puisse s'arrêter alors qu'elle vient à peine de commencer. . . En effet, après avoir passé mes deux premières années de thèse sur un petit nuage, heureuse de pouvoir enfin, après tant d'années d'attente, goûter aux plaisirs de la recherche, la troisième année a été le théâtre de beaucoup de remises en question. Cette journée sonne donc un peu comme le moment où j'ai commencé, peut-être un peu prématurément, à dresser le bilan de cette expérience. Elle marque non seulement la fin de mes études universitaires mais également celle de trois années très riches sur beaucoup de points de vue.

*
* *

Cette thèse aura avant tout été pour moi un cadeau, à la fois professionnel et personnel, et je le dois beaucoup aux personnes que j'ai côtoyé durant ces trois années. Parmi elles, celles qui ont contribué à ce succès sont si nombreuses qu'il m'est difficile d'être exhaustive tout en gardant pour ces remerciements une longueur raisonnable.

Ma toute première pensée vient pour ceux sans qui cette thèse n'aurait été possible : mes directeurs de thèse Jean-Luc Beuzit et Thierry Fusco et mes encadrants Laurent Mugnier et David Mouillet. Je ne remercierai jamais assez cette équipe de choc de m'avoir fait confiance en me proposant de travailler avec eux. Pour sûr, vous avez tous joué un grand rôle dans le déroulement et l'aboutissement de cette thèse. J'adresse une pensée toute particulière à Laurent

1. Habilitation à Diriger des Recherches. Sésame pour pouvoir encadrer « officiellement » des thèses.

et David qui, au plus près du front, et chacun à leur manière, se sont toujours rendus disponibles dans les moments de travail intense et productif mais qui aussi, dans les moments de doute, ont su me rassurer et me guider. J'ai particulièrement apprécié votre rigueur, votre patience et votre dynamisme et je me réjouis de croiser à nouveau votre chemin dans les prochaines années.

Ma deuxième pensée est pour ceux sans qui je ne serais pas diplômée aujourd'hui : je remercie ainsi Messieurs Thierry Forveille, Jérôme Idier, René Doyon, Éric Thiébaut et Daniel Rouan qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury de thèse. Je garderai un très bon souvenir de ma soutenance et les discussions constructives que nous avons eu y sont pour beaucoup.

Je souhaite remercier également les différentes personnes que j'ai croisées aux cours de ces trois ans, pendant des séminaires ou conférences qui m'ont apporté, même très brièvement un petit quelque chose. Je pense en particulier à Éric Thiébaut, Jean-François Giovanelli, Richard Dekany, Laurent Pueyo et Rémi Soummer.

Dans un tout autre registre, je remercie tout particulièrement Isa, qui m'a gracieusement recommandée auprès de l'équipe DOTA-HRA de l'ONERA avec laquelle j'espérais secrètement travailler. Les membres de cette équipe m'ont prouvé à quel point j'ai été chanceuse de pouvoir travailler à leur côté pendant presque deux ans. Merci à vous pour votre accueil chaleureux. J'adresse une pensée particulière pour les doctorants de l'unité HRA, avec qui j'ai de nombreux souvenirs de pauses, sorties ciné et parties de *Laser Game*. Merci à mon co-bureau Leo d'avoir partagé les hauts et les bas de la vie de thésard. Un grand merci à Sarah et Amélie pour nos soirées à refaire le monde ainsi que Juliette et Manal qui nous ont rejointes par la suite. Les événements personnels riches en rebondissement que nous avons vécu pendant cette période seront à jamais associés à ma thèse. Merci d'avoir perpétué ces moments sur la toile après mon départ pour Grenoble en fin de deuxième année.

Ceci m'amène à remercier le personnel de l'IPAG, mon second foyer en quelque sorte au cours de ma thèse. J'adresse une pensée particulière à mes deux co-bureaux Julien et Christophe, avec qui j'ai partagé des moments heureux mais également des moments plus difficiles. Je tiens à remercier également les doctorants de l'IPAG pour m'avoir chaleureusement accueillie à Grenoble lors de ma troisième année. J'aurais aimé profiter un peu plus longtemps de la bonne ambiance qui règne entre les doctorants, des nombreuses sorties au Callaghan, mais plus que tout des fameux et certainement bientôt célèbres dans toute la communauté astrophysique, *mails-spam* de RU et *tea-time*. Votre présence et votre bonne humeur m'ont permis de tenir le coup et ont grandement contribué à ma motivation pendant la dernière ligne droite.

Je souhaite également remercier les membres de ma famille qui ont été d'un soutien sans faille, parfois à leur façon. Je pense tout particulièrement à ma grand-mère « Mamie Yvette ». Même si tu ne comprends pas tout ce que je t'ai raconté, tu as toujours été présente et à l'écoute. Un grand merci à Maryse et Jean-Yves sans qui le pot de thèse n'aurait pas été tout à fait le même. Pour finir, je ne remercierai jamais assez Pierrick qui m'a supportée dans les deux sens du terme. Ton soutien, tu le sais, a été essentiel pour moi avant, pendant et il le sera également, j'en suis certaine, après la thèse.

*

* *

8 Février 2013

« Tu avais raison Laurent, je peux à présent dire que j'ai survécu, tout comme toi et nombre de mes prédécesseurs, à ce défi ». J'ai maintenant envie de passer le relai en vous souhaitant tout plein de courage si, par intérêt, ou par pur hasard, vous tenez ce manuscrit entre les mains et que comme moi vous vous engagez dans cette aventure qu'est la thèse. Je pense également aux autres, ceux qui ne s'y aventurent pas ou encore ceux qui n'ont pas trouvé en cette expérience ce qu'ils attendaient. Je nous souhaite à tous beaucoup de courage pour les nombreux défis que la vie nous apporte, que l'on surmonte et qui nous rendent plus forts.

Abstract

This research focuses on high contrast multispectral imaging in the view of directly detecting and characterizing exoplanets. In this framework, the development of innovative image post-processing methods is essential in order to eliminate the quasi-static speckles in the final image, which remain the main limitation for high contrast. Even though the residual instrumental aberrations are responsible for these speckles, no post-processing method currently uses a model of coronagraphic imaging, which takes these aberrations as parameters.

The research approach adopted includes the development of a method, in a Bayesian Framework, based on an analytical coronagraphic imaging model and an inversion algorithm, to estimate jointly the instrumental aberrations and the object of interest, i.e. the exoplanets, in order to separate properly these two contributions. The instrumental aberration estimation directly from focal plane images, also named *phase retrieval*, is the most difficult step because the model of on-axis instrumental response, of which these aberrations depend on, is highly non-linear. The development and the study of an approximate model of coronagraphic imaging thus proved very useful to understand the problem at hand and inspired me some minimization strategies. I finally tested my method and estimated its performances in terms of robustness and exoplanets detection. For this, I applied it to simulated images and I studied the effect of the different parameters of the imaging model I used. The findings from this research provide evidence that this method, in association with an optimization scheme based on a good knowledge of the problem at hand, can operate in a relatively robust way, despite the difficulties of the *phase retrieval* step. In particular, it allows the detection of exoplanets in the case of simulated images with a detection level compliant with the goal of the SPHERE instrument.

The next steps will be to verify the efficiency of this new method on simulated images using more realistic coronagraphs and on real images from the SPHERE instrument. In addition, the extension of the method for the characterization of exoplanets is relatively easy, as its extension to the study of larger objects such as circumstellar disks. Finally, the results of this work will also bring some crucial insights for the development of future instruments. In particular, the Extremely Large Telescopes have already risen some technical challenges for the next generation of planet finders, which may partly be addressed by an image processing method based on an imaging model.

Résumé

Ce travail de thèse porte sur l'imagerie multispectrale à haut contraste pour la détection et la caractérisation directe d'exoplanètes. Dans ce contexte, le développement de méthodes innovantes de traitement d'images est indispensable afin d'éliminer les tavelures quasi-statiques dans l'image finale qui restent à ce jour, la principale limitation pour le haut contraste. Bien que les aberrations résiduelles instrumentales soient à l'origine de ces tavelures, aucune méthode de réduction de données n'utilise de modèle de formation d'image coronographique qui prend ces aberrations comme paramètres.

L'approche adoptée dans cette thèse comprend le développement, dans un cadre bayésien, d'une méthode d'inversion fondée sur un modèle analytique d'imagerie coronographique. Cette méthode estime conjointement les aberrations instrumentales et l'objet d'intérêt, à savoir les exoplanètes, afin de séparer correctement ces deux contributions. L'étape d'estimation des aberrations à partir des images plan focal (ou *phase retrieval* en anglais) est la plus difficile car le modèle de réponse instrumentale sur l'axe dont elle dépend est fortement non-linéaire. Le développement et l'étude d'un modèle approché d'imagerie coronographique plus simple se sont donc révélés très utiles pour la compréhension du problème et m'ont inspiré des stratégies de minimisation. J'ai finalement pu tester ma méthode et estimer ses performances en terme de robustesse et de détection d'exoplanètes. Pour cela, je l'ai appliquée sur des images simulées et j'ai notamment étudié l'effet des différents paramètres du modèle d'imagerie utilisé. J'ai ainsi démontré que cette nouvelle méthode, associée à un schéma d'optimisation fondé sur une bonne connaissance du problème, peut fonctionner de manière relativement robuste, en dépit des difficultés de l'étape de *phase retrieval*. En particulier, elle permet de détecter des exoplanètes dans le cas d'images simulées avec un niveau de détection conforme à l'objectif de l'instrument SPHERE.

Ce travail débouche sur de nombreuses perspectives dont celle de démontrer l'utilité de cette méthode sur des images simulées avec des coronographes plus réalistes et sur des images réelles de l'instrument SPHERE. De plus, l'extension de la méthode pour la caractérisation des exoplanètes est relativement aisée, tout comme son extension à l'étude d'objets plus étendus tels que les disques circumstellaires. Enfin, les résultats de ces études apporteront des enseignements importants pour le développement des futurs instruments. En particulier, les *Extremely Large Telescopes* soulèvent d'ores et déjà des défis techniques pour la nouvelle génération d'imageurs de planètes. Ces challenges pourront très probablement être relevés en partie grâce à des méthodes de traitement d'image fondées sur un modèle direct d'imagerie.

Acronymes

ADC	*Atmospheric Dispersion Corrector*
ADI	*Angular Differential Imaging*
ANDROMEDA	*ANgular Differential OptiMal Exoplanet Detection Algorithm*
BFGS	Algorithme *Broyden, Fletcher, Goldfarb & Schano*
CONICA	*Near-Infrared Imager and Spectrograph*
DBI	*Dual Band Imaging*
DSP	Densité Spectrale de Puissance
ELT	*Extremely Large Telescope*
E-ELT	*European ELT*
EPICS	*Exo-Planets Imaging Camera and Spectrograph (of the E-ELT)*
ESO	*European Southern Observatory*
Ex-OA	Optique Adaptative Extrême
FEP	Fonction d'Étalement de Point
FTO	Fonction de Transfert Optique
GPI	*Gemini Planet Imager*
HiCIAO	*High Contrast Instrument for the Subaru Next Generation Adaptive Optics*
HRA	Haute Résolution Angulaire
IDL	*Interactive Data Language*
IFS	*Integral Field Spectrometer*
IFU	*Integral Field Unit*
IR	Infra-Rouge
IRDIS	*IR Differential Imaging Spectrometer*
LOCI	*Locally Optimized Combination of Images*
MAP	Maximum *a posteriori*
MV	Maximum de Vraisemblance
NICI	*Near-Infrared Coronagraphic Imager*
NaCo	NAOS-CONICA
NAOS	*Nasmyth Adaptive Optics System*, première optique adaptative du VLT
OA	Optique Adaptative
PSF	*Point Spread Function* ou FEP en Français
RMS	*Root Mean Square*

SAXO	*Sphere Ao for eXoplanet Observation*
SDI	*Simultaneous Differential Imaging*
SINFONI	*Spectrograph for INtegral Field Observations in the Near Infrared*
SPHERE	*Spectro-Polarimetric High-contrast Exoplanet REsearch*
TIGER	Traitement Intégral des Galaxies par l'Étude de leurs Rays
TF	Transformée de Fourier
UA	Unité Astronomique
VLT	*Very Large Telescope*
VMLM-B	*Variable Metric with Limited Memory and Bounds*
ZIMPOL	*Zurich Imaging POLarimeter*

Principales notations

$\boldsymbol{\rho}$, ρ_x, ρ_y	Coordonnées angulaires dans un plan pupille
$\boldsymbol{\alpha}$, α_x, α_y	Coordonnées angulaires dans un plan focal (détecteur ou ciel)
t	Variable temporelle
λ	Longueur d'onde
$f_\lambda^\star$	Flux de l'étoile à la longueur d'onde λ
$\mathbf{o}$	Objet circumstellaire à reconstruire, i.e. scène observée privée de l'étoile centrale
$\mathbf{i}$	Cube d'images multispectrales
$\mathbf{i}_\lambda$	Image à la longueur d'onde λ
$\boldsymbol{\mathcal{P}}$	Pupille
$\boldsymbol{\mathcal{P}}_u$	Pupille en amont du coronographe ou pupille « *upstream* »
$\boldsymbol{\mathcal{P}}_d$	Pupille en aval du coronographe ou pupille « *downstream* »
$\boldsymbol{\phi}_u$	Phase instrumentale *upstream*
$\boldsymbol{\phi}_d$	Phase instrumentale *downstream*
$\boldsymbol{\phi}_r$	Phase turbulente résiduelle
$\boldsymbol{\delta}_u$	Aberrations instrumentales *upstream*
$\boldsymbol{\delta}_d$	Aberrations instrumentales *downstream*
$\boldsymbol{\delta}_r$	Aberrations turbulentes résiduelles
$\mathbf{S}_{\boldsymbol{\phi}_r}$	Densité spectrale de puissance de la phase résiduelle turbulente
$\mathbf{S}_{\boldsymbol{\delta}_r}$	Densité spectrale de puissance des aberrations résiduelles turbulentes
$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\delta}_r}$	Fonction de structure des aberrations résiduelles turbulentes
$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\phi}_r}$	Autocorrélation de la phase résiduelle turbulente
$\mathbf{h}_\lambda$	Fonction d'étalement de points ou réponse impulsionnelle de l'instrument à la longueur d'onde λ
$\tilde{\mathbf{h}}_\lambda$	Fonction de transfert optique à la longueur d'onde λ
$\mathbf{h}^{nc}$	Réponse impulsionnelle de l'instrument non coronographique, i.e. hors axe
$\mathbf{h}^{c}$	Réponse impulsionnelle de l'instrument coronographique, i.e. sur axe
$\mathbf{b}$	Bruit de mesure
$\mathscr{L}$	Vraisemblance
f	Fréquence
f_c	Fréquence de coupure

D	Diamètre de la pupille
σ_ϕ^2	Variance spatiale des aberrations ϕ
r_0	Échelle spatiale caractéristique des défauts de phase turbulente
S	Surface de la pupille *upstream*
N_p	Nombre de pixels
η_0	Projection du champ entrant sur une tache d'Airy
J	Critère de qualité
J_{MAP}	Estimateur du Maximum *a posteriori*
∇	Gradient
$\Re$	Partie réelle
$\Im$	Partie imaginaire
δ	Fonction de Dirac
j	Nombre complexe tel que $j^2 = -1$
P	Fonction Piston
M_J	Masse de Jupiter
d	Hyperparamètre qui pilote le type de la régularisation sur l'objet
s	Hyperparamètre qui pilote la force de la régularisation sur l'objet

Table des matières

Introduction générale **1**

1 Les enjeux de l'imagerie directe d'exoplanètes **5**
1.1 Essor de la science des exoplanètes 6
1.1.1 Méthodes de détection indirectes 6
1.1.2 L'imagerie directe d'exoplanètes 13
1.2 L'instrumentation au service de l'imagerie directe d'exoplanètes 19
1.2.1 Les défis de la haute résolution angulaire et du haut contraste 19
1.2.2 L'instrument SPHERE 24
1.2.3 La correction des aberrations : un défi majeur pour le haut contraste . . . 29
1.3 Le traitement d'images pour l'élimination des défauts instrumentaux résiduels . . 34
1.3.1 Élimination des tavelures dans le cadre de la détection d'exoplanètes . . . 34
1.3.2 Le traitement d'images multispectrales 35
1.3.3 Traitements d'images envisagés sur les instruments SPHERE et GPI . . . 36
1.4 Conclusion du chapitre 37

2 Outils et méthodes **39**
2.1 Outils de modélisation des instruments 39
2.1.1 Éléments de formation des images 39
2.1.2 Imagerie à travers la turbulence et résidus après correction par l'OA . . . 41
2.1.3 Modèle analytique d'imagerie coronographique 42
2.2 Éléments de traitement d'image 47
2.2.1 Du modèle direct au problème inverse 47
2.2.2 Méthode du maximum *a posteriori* 48
2.2.3 Méthodes de descente de critères 49
2.3 Conclusion du chapitre 51

3 Méthode d'estimation conjointe des aberrations et de l'objet d'intérêt **53**
3.1 Critère à minimiser dans une approche bayésienne 53
3.1.1 Définition du critère à minimiser 54
3.1.2 Calcul analytique du flux de l'étoile 55
3.1.3 Conditionnement du problème 56

3.2 Choix d'un schéma d'optimisation 58
3.2.1 Déconvolution multispectrale 59
3.2.2 *Phase retrieval* 60
3.3 Mise en place algorithmique 60
3.3.1 Gestion des images multispectrales 60
3.3.2 Choix d'un algorithme d'optimisation et expression du gradient du critère 62
3.4 Conclusion du chapitre 62

4 Modèle approché de formation d'image coronographique 65
4.1 Simplification du modèle initial par développement limité au second ordre 66
4.1.1 Hypothèses pour le développement limité 66
4.1.2 Développement limité 66
4.1.3 Enseignements apportés par le modèle simplifié 71
4.1.4 Comparaison d'images simulées avec les modèles initial et simplifié . . . 72
4.2 Réduction du nombre d'inconnues dans le modèle initial 78
4.3 Conclusion du chapitre 80
4.4 Publication 81

5 Mise en œuvre de la méthode d'estimation conjointe 87
5.1 Conclusions tirées de la mise en œuvre de la méthode d'inversion 88
5.1.1 Hypothèses de simulation 88
5.1.2 Définition d'estimateurs de la performance de la méthode 89
5.1.3 Schéma d'optimisation assurant la performance de la méthode 91
5.1.4 Robustesse de la méthode 91
5.1.5 Performances en terme de détection de la méthode 92
5.1.6 Publication 92
5.1.7 Compléments à l'article : discussion sur la double initialisation 109
5.2 Le rôle des aberrations résiduelles turbulentes 109
5.2.1 Résidus turbulents, une difficulté ou une aide ? 109
5.2.2 Résolution des difficultés rencontrées en l'absence d'aberrations résiduelles turbulentes 111
5.2.3 Ajout des aberrations résiduelles turbulentes 112
5.3 L'importance d'une bonne estimation du flux de l'étoile 114
5.3.1 Effet de la contrainte de positivité 115
5.3.2 Effet de la contrainte de support sur l'objet 117
5.4 Le rôle des aberrations *downstream* 117
5.4.1 Effet de la quantité d'aberrations *downstream* utilisée pour les simulations 118
5.4.2 Effet d'une erreur d'étalonnage des aberrations *downstream* 119
5.5 Le rôle de la régularisation sur l'objet 121
5.5.1 Remarques sur la régularisation utilisée dans les tests précédents 121
5.5.2 Étude plus approfondie de la régularisation sur l'objet 123
5.5.3 Effet des différents régimes de régularisation sur la robustesse 129
5.6 Conclusion du chapitre 133

Discussion **135**
Axes d'amélioration de la méthode . . . 135
Modifications du modèle d'imagerie . . . 135
Combinaison avec d'autres méthodes . . . 137
Application de la méthode pour la reconstruction d'autres types de données . . . 137
Autre intérêt de la méthode . . . 138

Conclusion générale et perspectives **139**
Bilan des travaux . . . 139
Perspectives . . . 140

A Calcul des gradients analytiques longue pose du critère **143**
A.1 Notations et Convention . . . 143
A.2 Expression des gradients du critère en l'absence de turbulence . . . 144
A.3 Calcul de l'expression des gradients du critère longue pose . . . 145
A.3.1 Calcul de $\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t(\boldsymbol{\alpha}_i)}\right]_{LP}$ . . . 145
A.3.2 Calcul de $\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}_k)}\right]_{LP}$ . . . 145
A.3.3 Calcul de $\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \boldsymbol{\phi}_d(\boldsymbol{\rho}_k)}\right]_{LP}$ . . . 148

B Calcul de l'expression analytique approchée d'une image coronographique **151**
B.1 Calcul de l'expression analytique approchée longue pose : méthode 1 . . . 152
B.1.1 Développement limité de l'expression exacte courte pose . . . 152
B.1.2 Moyenne temporelle de l'expression exacte courte pose . . . 156
B.2 Calcul de l'expression analytique approchée longue pose : méthode 2 . . . 158
B.2.1 Notations . . . 158
B.2.2 Calcul de $\mathbf{h}_n$ . . . 158
B.2.3 Calcul de $\left\langle |\eta_0|^2 \right\rangle \mathbf{h}_d$ . . . 160
B.2.4 Calcul de $-\frac{2}{S}\Re\left\{\mathrm{TF}^{-1}\left[\Psi_{ud}(\boldsymbol{\alpha})\left(e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\phi_r}} \star \Psi_u^*\right)(\boldsymbol{\alpha})\right]\mathbf{A}_d^*\right\}$ . . . 160
B.2.5 Calcul du terme global $\mathbf{h}^c$ . . . 163
B.2.6 Autres démonstrations . . . 164

C Image coronographique courte pose : cas d'un coronographe non parfait **171**
C.1 Rappels des résultats du coronographe parfait . . . 171
C.2 Résultats du coronographe non parfait . . . 172
C.2.1 Calcul du terme C.2 . . . 172
C.2.2 Calcul du terme C.4 . . . 173
C.2.3 Calcul du terme C.3 . . . 173
C.2.4 Conditions aux limites . . . 175
C.3 Conclusion . . . 175

D Réglage des hyperparamètres de la régularisation sur l'objet 177
D.1 Deux bandes spectrales 178
D.2 Trois bandes spectrales 179
D.3 Quatre bandes spectrales 180
D.4 Cinq bandes spectrales 181
D.5 Six bandes spectrales 182

E Le Nouveau Chapitre de la Thèse : Valorisation des compétences des docteurs 183
E.1 Cadre général, enjeux et présentation du projet de recherche 183
E.1.1 Présentation succincte 183
E.1.2 Ma thèse dans son contexte 185
E.1.3 Pourquoi une thèse et pourquoi sur ce sujet 187
E.2 Déroulement, gestion et estimation du coût du projet 188
E.2.1 Préparation et cadrage du projet 188
E.2.2 Conduite du projet 189
E.2.3 Estimation et prise en charge du coût du projet 189
E.3 Identification, hiérarchisation et illustration des compétences mises en œuvre . . 190
E.3.1 Compétences développées pendant la thèse 190
E.3.2 Construction d'un réseau professionnel / personnel 194
E.3.3 Compétences transférables en dehors de mon domaine de recherche . . . 195
E.4 Résultats, impact de mes recherches 195
E.5 Identification de pistes professionnelles 197
E.5.1 Secteur académique 199
E.5.2 Secteur privé 199
E.6 Conclusion 200

Liste des publications 203

Bibliographie 212

Table des figures

1.1 Masse et séparation des planètes détectées. 7
1.2 Méthode de détection par vitesses radiales. 10
1.3 Méthode de détection par transits. 11
1.4 Méthode de détection par lentilles gravitationnelles. 12
1.5 Spectre en transmission de la planète GJ1214b obtenu lors d'un transit. 13
1.6 Première image d'exoplanète autour de la naine brune 2M1207. 15
1.7 Image du système multiple HR8799. 16
1.8 Environnement proche des étoiles Beta Pictoris et Fomalhaut. 16
1.9 Effet de la turbulence sur l'image d'un objet ponctuel. 18
1.10 Principe de l'optique adaptative. 20
1.11 Principe de la diversité de phase. 21
1.12 Principe de fonctionnement d'un coronographe. 22
1.13 Schéma du masque focal d'un coronographe 4 quadrants. 22
1.14 Schémas de l'instrument SPHERE 26
1.15 Formation d'image dans SPHERE 27
1.16 Schéma de principe du fonctionnement de l'IFS. 29
1.17 DSP des aberrations quasi-statiques résiduelles de l'instrument SPHERE. 33

2.1 Schéma optique de principe d'un imageur coronographique. 45
2.2 Exemples de critères à 1 minimum et à plusieurs minima. 50

3.1 Évolution du champ de tavelures avec la longueur d'onde. 57
3.2 Régularisations L1-L2 et L1. 59
3.3 Schéma d'optimisation pour l'estimation conjointe des aberrations et de l'objet. . 61

4.1 DSP des aberrations *upstream* utilisées pour la simulation. 73
4.2 Profils d'intensité moyennés circulairement. 75
4.3 Comparaison des modèles approché et initial. 76
4.4 Comparaison des modèles sans aberrations *downstream*. 76
4.5 Comparaison des modèles sans aberrations *downstream* et sans turbulence. 77
4.6 Évolution de la non-centrosymétrie des tavelures. 79
4.7 Non-centrosymétrie des tavelures. 79

4.8 Évolution des tavelures avec la longueur d'onde. 80

5.1 Image de l'objet simulée. 89
5.2 Robustesse de l'algorithme en régime sous-régularisé avec une seule initialisation. 110
5.3 Robustesse de l'algorithme en régime sous-régularisé avec deux initialisations. . 110
5.4 Exemple d'estimation des aberrations *upstream* dans un cas sans turbulence. . . . 111
5.5 Effet des aberrations résiduelles turbulentes sur la forme du critère. 113
5.6 Importance d'une bonne estimation du flux de l'étoile. 116
5.7 Effet de la contrainte de positivité sur l'estimation du flux de l'étoile. 116
5.8 Effet d'une contrainte de support sur l'objet sur l'estimation du flux de l'étoile. . 118
5.9 Effet du niveau des aberrations *downstream* sur la performance de la méthode. . . 119
5.10 Effet d'une erreur sur les aberrations *downstream* sur la performance de la méthode. 121
5.11 Effet d'une erreur d'étalonnage sur les aberrations *downstream*. 122
5.12 Effet de la régularisation sur l'objet utilisée jusqu'à maintenant. 123
5.13 Réglage des hyperparamètres. 125
5.14 Effet de la force de la régularisation. 126
5.15 Effet du réglage des hyperparamètres sur le type et la force de la régularisation. . 127
5.16 Effet de la régularisation sur la qualité de l'inversion. 128
5.17 Robustesse de l'algorithme en régime sous-régularisé. 130
5.18 Robustesse de l'algorithme en régime sous-régularisé avec 100 nm de *downstream*. 131
5.19 Robustesse de l'algorithme en régime correctement régularisé. 132
5.20 Robustesse de l'algorithme en combinant deux régimes de régularisation. 133

D.1 Réglage des hyperparamètres dans une inversion à deux bandes spectrales. 178
D.2 Réglage des hyperparamètres dans une inversion à trois bandes spectrales. 179
D.3 Réglage des hyperparamètres dans une inversion à quatre bandes spectrales. . . . 180
D.4 Réglage des hyperparamètres dans une inversion à cinq bandes spectrales. 181
D.5 Réglage des hyperparamètres dans une inversion à six bandes spectrales. 182

E.1 Organigrammes des laboratoires d'accueil. 186
E.2 Déroulement de la thèse : principales étapes. 190
E.3 Provenance des financements et répartition des dépenses. 191
E.4 Savoirs, savoir-faire et savoir-être développés pendant la thèse. 196

Liste des tableaux

4.1 Contribution des différents types d'aberrations à l'erreur liée au DL. 76

E.1 Compétences attendues d'un chercheur expérimenté. 198
E.2 Offre de CDI en Recherche Avancée pour l'entreprise ***. 200

Introduction générale

Depuis la découverte de la première exoplanète en 1995, les quinze dernières années ont vu fleurir plusieurs techniques de détection. Parmi elles, l'imagerie à haut contraste est une méthode prometteuse pour compléter la fenêtre de détection des planètes et pour caractériser et suivre les objets les plus intéressants. Si les méthodes de détection indirectes d'exoplanètes ont permis de détecter plusieurs centaines d'objets, seulement une poignée de systèmes a été imagée. Dans ce domaine émergent, on se heurte en effet à plusieurs difficultés.

La première difficulté est de séparer angulairement l'étoile hôte et la planète, séparation qui peut varier de quelques dixièmes à quelques centièmes de seconde d'arc. Ceci nécessite des télescopes de diamètre suffisamment grand et interdit pour le moment d'aller dans l'espace. L'observation depuis la Terre permet l'utilisation de grands télescopes mais elle est contrainte par la présence de l'atmosphère qui elle-même provoque de la turbulence. Cette turbulence mélange complètement les signaux de l'étoile et de la planète. Afin d'obtenir de la haute résolution angulaire, l'optique adaptative permet de corriger en temps réel la turbulence de l'atmosphère afin de séparer angulairement l'étoile et sa planète. La seconde difficulté est de réduire le fort contraste existant entre une exoplanète et son étoile hôte, contraste qui peut varier de 10 pour une naine brune à plus de 10^9 pour une planète tellurique en passant par 10^6 pour un Jupiter relativement jeune et encore tiède. Ceci peut-être fait grâce à un composant optique : un coronographe qui éteint la lumière de l'étoile tout en préservant les photons de la planète, afin de réduire le contraste entre ces deux objets.

À ce jour, les instruments entièrement dédiés au haut contraste sont rares. C'est pourquoi peu d'images ont été réalisées jusqu'à présent et celles qui l'ont été s'expliquent par des conditions particulièrement favorables. C'est le cas d'étoiles, de type naines brunes, ou d'exoplanètes très brillantes relativement éloignées de leur étoile. La performance atteinte par les instruments actuels n'étant pas suffisante, une nouvelle génération d'instruments dédiés arrive. C'est notamment le cas de l'instrument SPHERE (*Spectro-Polarimetric-High-Contrast-Exoplanet-Research*) de l'*European Organisation for Astronomical Research in the Southern Hemisphere* (ESO). La performance finale de l'instrument, autrement-dit sa capacité à détecter et caractériser des exoplanètes, dépend notamment de ses spécifications (qualité optique, mécanique...) et de la façon dont ses défauts sont étalonnés (procédure d'étalonnage qui élimine les défauts limitant la performance). Cependant, une fois les défauts dominants caractérisés et éliminés, des défauts résiduels vont à leur tour venir limiter la capacité à détecter des exoplanètes. En effet, l'étalonnage imparfait des défauts de l'instrument est à l'origine de défauts dans l'image finale que l'on appelle

tavelures ou *speckles*.

La conséquence pénalisante de ces tavelures est qu'elles limitent la détection des exoplanètes car elles ont la même extension spatiale que celle d'une planète et de plus, leur intensité est plus importante.

C'est pourquoi de nombreuses études ont été réalisées pour discriminer les tavelures dans l'image finale afin d'obtenir un meilleur rapport signal à bruit. L'idée générale est de soustraire les tavelures en utilisant au moins deux images, sans pour autant soustraire la planète. Marois et al. (2000) ont amélioré une méthode déjà existante s'appuyant sur la soustraction de deux images prises simultanément à deux longueurs d'onde différentes, ou méthode SDI pour *Spectral Differential Imaging*. Ils ont ainsi soustrait non pas deux mais trois images deux à deux, afin d'améliorer la suppression des tavelures. Cette méthode de « doubles différences » n'utilise pas de modèle de formation d'image et les images utilisées ont été simulées sans coronographe. Sparks & Ford (2002) ont utilisé la méthode dite de « déconvolution spectrale ». Cette technique, améliorée ensuite par Thatte et al. (2007) utilise un cube d'images multispectrales pour ajuster un polynôme décrivant l'évolution des tavelures avec la longueur d'onde. Cette technique testée sur des images réelles de compagnon stellaire de faible masse prises avec un instrument sans coronographe permet d'atteindre un contraste de 10^4. Crepp et al. (2010) ont poussé encore plus loin la méthode de déconvolution spectrale de Sparks & Ford en appliquant l'algorithme LOCI qui permet de trouver la meilleure combinaison linéaire entre les images d'un cube multispectral. Le contraste atteint avec cette technique est de 10^5.

Ces différentes méthodes permettent toutes d'obtenir un gain dans la réduction du niveau des tavelures. Cependant, leur principal inconvénient est qu'elles n'utilisent pas de modèle de formation d'image. D'une part, les possibilités d'évolution de ces méthodes s'en trouvent réduites. D'autre part, la présence de la planète n'est pas explicitement modélisée ce qui augmente la probabilité d'éliminer une partie du signal de la planète au cours de la soustraction limitant les possibilités de détection. Burke et al. (2010) ont bien utilisé un modèle de formation d'image dans un algorithme d'inversion mais il s'applique uniquement au traitement d'images non coronographiques.

Aucune de ces méthodes n'utilisent de modèle d'imagerie coronographique pour l'estimation conjointe du champ de tavelures et de l'objet d'intérêt, à savoir les exoplanètes. C'est ce qui justifie cette étude.

Mon objectif est de développer une méthode d'estimation conjointe des aberrations et de l'objet fondée sur un modèle de formation d'images pour la nouvelle génération d'instruments à haut contraste. La mise en œuvre de cette méthode pour le traitement d'images simulées, via un algorithme d'inversion, doit permettre de confirmer sa capacité à détecter des exoplanètes.

Ce manuscrit de thèse est découpé en 5 chapitres. Le chapitre 1 introduit le contexte et la problématique générale. Tout d'abord, je rappelle les bases de la détection d'exoplanètes avant de me pencher plus particulièrement sur les avantages et les difficultés de l'imagerie directe. Je décris ensuite les techniques instrumentales qui ouvrent la voie à cette technique en insistant sur l'instrument SPHERE et ses défauts dominants. Enfin, différentes méthodes de traitement d'images sont étudiées afin de bien comprendre leurs limites.

Les outils, méthodes et notations permettant une bonne compréhension de mon travail de thèse sont regroupés dans le chapitre 2. J'y rappelle notamment quelques éléments de formation d'images avec les particularités liées à l'imagerie coronographique multispectrale corrigée par optique adaptative. Un modèle existant d'imagerie coronographique, qui va jouer un rôle prépondérant dans ma méthode d'estimation conjointe, y est décrit avec précision.

Le chapitre 3 décrit la nouvelle méthode de traitement d'image pour la détection d'exoplanètes que j'ai développée dans cette thèse. Afin d'optimiser l'élimination du champ de tavelures, tout en conservant les photons de la planète, l'idée a été d'estimer conjointement le champ de tavelures et l'objet. Pour la première fois, un modèle paramétrique d'imagerie coronographique qui décrit la réponse de l'instrument est utilisé pour l'inversion d'images multispectrales. L'inversion est réalisée dans un cadre bayésien, ce qui permet d'utiliser des informations *a priori* pour contraindre le problème. Pour mettre en œuvre cette méthode, j'ai développé un algorithme itératif qui estime successivement les tavelures, puis l'objet. À cause de la forte non-linéarité du modèle analytique d'imagerie coronographique envisagé pour l'inversion et de l'important nombre d'inconnues à estimer, l'étape d'estimation des tavelures a été identifiée comme un point dur de la méthode.

Dans une phase exploratoire, afin de simplifier les problèmes numériques d'inversion et aussi de mieux comprendre les paramètres importants du système et leur impact sur les images, j'ai eu l'idée, dans le chapitre 4, de développer un modèle simple d'imagerie coronographique décrivant le champ de tavelures. Je compare ensuite le modèle simplifié au modèle de départ ce qui m'apporte des informations intéressantes sur ce dernier. Cette étude comparative m'a notamment permis de déterminer lequel de ces deux modèles je devais utiliser dans ma méthode d'estimation conjointe.

Après avoir choisi un modèle d'imagerie coronographique, j'ai implémenté l'algorithme d'inversion. Afin de déterminer si l'algorithme fonctionne, c'est à dire s'il permet de détecter une exoplanète en estimant conjointement le champ de tavelures et l'objet, je teste dans le chapitre 5, sa capacité de convergence sur des images simulées avec le même modèle utilisé pour l'inversion. Ces tests m'ont permis de mettre en évidence de nombreuses difficultés de minimisation. Ces difficultés de minimisation concernent à la fois l'étape d'estimation des tavelures mais également l'estimation conjointe. Dans ce dernier chapitre, j'apporte des solutions concrètes et originales à ces difficultés de minimisation. Une fois mises en œuvre, ces solutions m'ont permis de démontrer la capacité de convergence de l'algorithme et de déterminer le niveau de contraste théorique atteignable en estimant conjointement le champ de tavelures et l'objet à partir de cubes d'images multispectrales.

Dans la partie discussion, j'identifie des pistes d'amélioration de la méthode et j'évoque des points d'échanges constructifs qui ont eu lieu lors des rencontres que j'ai effectuées pendant ma thèse avec d'autres acteurs du domaine. Enfin, dans les conclusions et perspectives, j'effectue un bilan de mes travaux qui m'ont menée à disposer d'une méthode suffisamment aboutie pour la tester sur d'autres types de données et notamment réelles. Le niveau de performance sur données réelles dépendra de l'adéquation du modèle et de la qualité des *a priori* (de la connaissance) que l'on a de l'instrument. Le formalisme en place permet d'exploiter de telles informations si on les a effectivement. Au-delà de cette application, il existe également un enjeu pour les futurs instruments.

Chapitre 1

Les enjeux de l'imagerie directe d'exoplanètes

La science des exoplanètes, relativement jeune, a tout d'abord été motivée par un intérêt astrophysique majeur : celui de savoir s'il existe d'autres planètes dans l'univers que les planètes connues de notre système solaire. Cette question en appelle des dizaines d'autres que l'on peut regrouper en deux enjeux conceptuels majeurs : quels nouveaux horizons s'ouvrent-ils (avec quelle diversité, quelle fréquence) ? Quel retour cela peut-il avoir sur la vision de notre propre système (avec une nouvelle vue fondamentale sur sa position dans l'univers, mais aussi, plus concrètement, avec des nouveaux éléments de compréhension de sa formation et de son évolution) ?

C'est en 1995 que Mayor et Queloz [1] ont détecté pour la première fois une planète orbitant autour d'une étoile semblable à notre soleil. La découverte de cet objet, bien différent des planètes de notre système solaire, a ouvert la voie à l'étude de la nature, de la structure et de l'évolution des exoplanètes.

Durant la décennie suivante, de nombreuses planètes de ce type ont ainsi été découvertes. Leur diversité a surpris les astrophysiciens et de nombreuses questions ont été soulevées. Notre système solaire est-il unique par sa composition ? Qu'en est-il de la validité de nos modèles de formation planétaires ? Existe-t-il des exoplanètes ressemblant à la Terre et pouvant abriter la vie ? Les réponses à ces questions sont délicates et nécessitent des études statistiques pour tenter de créer un bestiaire d'exoplanètes le plus exhaustif possible. Ces enjeux scientifiques sont l'objet de la section 1.1 de ce chapitre.

C'est notamment pour tenter de répondre à ces questions, et bien d'autres, que nous cherchons aujourd'hui à imager directement des exoplanètes. Pour cela, des instruments de plus en plus perfectionnés sont mis au point. La section 1.2 décrit les techniques instrumentales qui permettent de détecter les photons des planètes et dresse le portrait de l'instrumentation actuelle pour l'imagerie directe. L'instrument SPHERE permettra notamment d'obtenir des images multispectrales utiles pour la caracté-

risation des exoplanètes. Néanmoins, les défauts résiduels de l'instrument limitent fortement la détection.
Un traitement d'images est indispensable pour s'affranchir de ces défauts résiduels. Parmi les techniques, désormais nombreuses, de traitement d'images dédiées au haut contraste, certaines d'entre elles tirent profit de l'imagerie multispectrale que nous offrent les nouveaux instruments. Dans la section 1.3, je me penche sur ces différentes méthodes et leurs limites avant de dégager de nouvelles perspectives d'étude.

1.1 Essor de la science des exoplanètes

L'objet de cette section est d'expliquer le contexte et les enjeux scientifiques de l'imagerie directe d'exoplanètes. Après avoir présenté les méthodes de détection indirectes et leur limites (1.1.1), je présente l'historique et les avantages d'une toute autre technique en plein essor : l'imagerie directe (1.1.2). Les problématiques de haute résolution angulaire et de haut contraste, étroitement liées à ce type d'imagerie sont également introduites.

1.1.1 Méthodes de détection indirectes

Les astrophysiciens disposent de différentes méthodes afin de détecter et caractériser les exoplanètes. Historiquement, les premières méthodes sont indirectes. Elles détectent la présence de la planète sans pour autant mesurer ses photons. Elles offrent également la possibilité de caractériser certaines propriétés physiques des exoplanètes détectées.

1.1.1.1 Détection d'exoplanètes avec les méthodes indirectes

Les méthodes indirectes ont apporté de nombreux résultats en détection d'exoplanètes. Parmi les 771 planètes connues à ce jour [1], 740 ont été découvertes par le biais de méthodes indirectes. La figure 1.1 montre l'ensemble des exoplanètes détectées toutes méthodes confondues.

La méthode des vitesses radiales (cf. Figure 1.2) est de loin la plus efficace en terme de nombre d'exoplanètes détectées. Il s'agit en effet d'une méthode très sensible à l'origine de la première détection d'exoplanète en 1995 [1]. Elle a notamment permis de mettre en évidence l'existence de planètes de type « Jupiter Chauds ». Ces planètes se caractérisent par leur masse importante, de l'ordre de la masse de Jupiter ou supérieure, et leur faible distance à l'étoile, ce qui se traduit par une température de surface très élevée. Ce type de planète n'a pas d'équivalent dans notre système solaire et remet donc en question les modèles de formation planétaires qui faisaient foi jusque-là.

1. À la date du 2 juin 2012 , d'après les données de l'Encyclopédie des Planètes Extrasolaires, `http://exoplanet.eu/catalog.php)`. Ce site indique aussi les critères retenus pour figurer dans cette liste, les nombres exacts dépendant bien sûr des critères exacts pour la qualification d'exoplanète, de l'état de confirmation des candidats, etc...

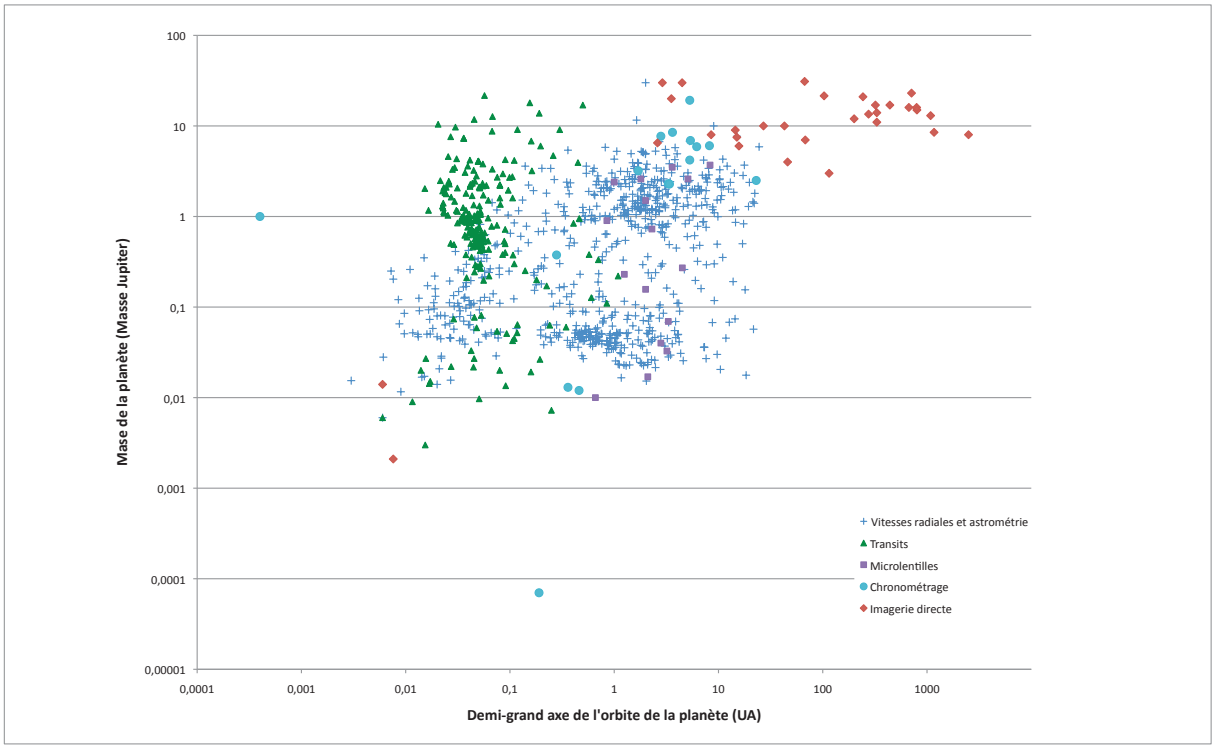


FIGURE 1.1 – **Masse et séparation des planètes détectées.** Données tirées du site web `http://exoplanet.eu/`, mise à jour du 2 juin.

La deuxième méthode en terme de nombre de détections est la méthode des transits (cf. Figure 1.3). Cette méthode est cependant restreinte à la détection de systèmes orientés selon la tranche par rapport à l'observateur. Plus le diamètre de la planète est grand, plus profond sera le transit et plus facile sera la détection. Tout comme la méthode des vitesses radiales, la méthode des transits est fortement biaisée vers la détection de planètes à faible période de révolution.

Il existe donc un besoin en détection de planètes à grande période de révolution. Une réponse à ce besoin est la méthode des lentilles gravitationnelles (cf. Figure 1.4) et l'astrométrie.

La méthode des lentilles gravitationnelles a statistiquement le plus de probabilité de détection des planètes à 1 ou quelques UA de leur étoile. Si ces détections peuvent apporter des informations statistiques précieuses sur la statistique de planètes (même de faible masse) à ces séparations, elles ne permettent pas l'identification de planètes proches du soleil et donc les plus aptes à des caractérisations détaillées dans le futur.

Tout comme la méthode des vitesses radiales, l'astrométrie mesure le mouvement réflexe de l'étoile. La détection complète requiert donc un suivi sur le temps de la période orbitale de la planète. Il faut ainsi envisager des campagnes d'observations de plusieurs années (ou plus de 10 ans) si on veut explorer des séparations supérieures à 1 ou quelques UA. Toutefois, au contraire des vitesses radiales, le signal à détecter croît avec la séparation et il est moins perturbé par l'activité stellaire. Sur ce créneau, cette technique pourra dans le futur apporter de nouvelles informations.

Bien que ne présentant pas les mêmes limitations que la méthode des vitesses radiales et la méthode des transits, la méthode des lentilles gravitationnelles et l'astrométrie restent loin derrière en terme de nombre de détections.

Les détections obtenues, toutes méthodes confondues, sont nombreuses et montrent déjà clairement que la formation planétaire est un phénomène fréquent en conditions variées. Des statistiques existent pour certaines populations de planètes, surtout à faible séparation, et surtout autour d'étoiles semblables au soleil [2, 3, 4, 5]. Des tendances sont également identifiées ou suspectées (vers les plus petites masses ou différents types d'étoiles). Mais le panorama reste incomplet, en particulier pour les grandes séparations et la diversité des étoiles (dont le cas particulier important des étoiles jeunes). Ces manques sont importants, non seulement quantitativement mais aussi qualitativement, pour la compréhension des systèmes planétaires. En effet, les mécanismes de formation dans les disques planétaires demandent de connaître l'ensemble des planètes en présence. On sait également que la présence de planètes massives externes peut être déterminant pour l'évolution dynamique de l'ensemble d'un système planétaire (comme c'est le cas dans le système solaire). Enfin, l'évolution des planètes est directement conditionnée par les premières phases de formation en interaction avec le disque.

1.1.1.2 Caractérisation d'exoplanètes issues des méthodes indirectes

Les méthodes indirectes permettent non seulement de détecter des planètes mais également de mesurer certaines de leur caractéristiques physiques, comme leur masse, leur rayon, leur période, leur orbite ou leur densité. Dans quelques cas très spécifiques d'objets assez chauds,

détectables avec la méthode des transits, il est possible d'accéder directement aux photons de l'atmosphère de la planète, comme le montre la figure 1.5. Ceci permet, après dispersion de la lumière reçue, de mesurer des spectres et de caractériser l'atmosphère de la planète. Cependant, le nombre de spectres réalisés de cette façon est très faible [6, 7, 8, 9, 10] et des missions dédiées sont nécessaires afin de détecter plus de spectres.

1.1.1.3 Conclusion sur ces méthodes indirectes

Les méthodes indirectes ont démontré leur intérêt pour la détection de systèmes planétaires. Les détections se font à un rythme de plus en plus soutenu, encouragées par de nombreuses missions dédiées. Les missions en développement prendront le relais ensuite et assurerons la continuité des détections. Les méthodes indirectes permettent également de caractériser les exoplanètes en ayant accès à des paramètres intrinsèques du système tels que la masse des planètes, leur orbite, leur période, et même leur spectre avec la méthode des transits dans certains cas très spécifiques. Cependant, ces méthodes sont biaisées et ne permettent de découvrir que des planètes à courtes périodes pour les méthodes les plus productives que sont la méthode des vitesses radiales et la méthode des transits. Il y a donc un intérêt majeur à améliorer les méthodes existantes que sont la méthode des lentilles gravitationnelles et l'astrométrie. Quant à la caractérisation directe, elle est très limitée avec la méthode des transits. Le développement d'une nouvelle méthode est donc indispensable pour combler les limites des méthodes indirectes en terme de détection et de caractérisation. L'imagerie directe répond à ces deux objectifs.

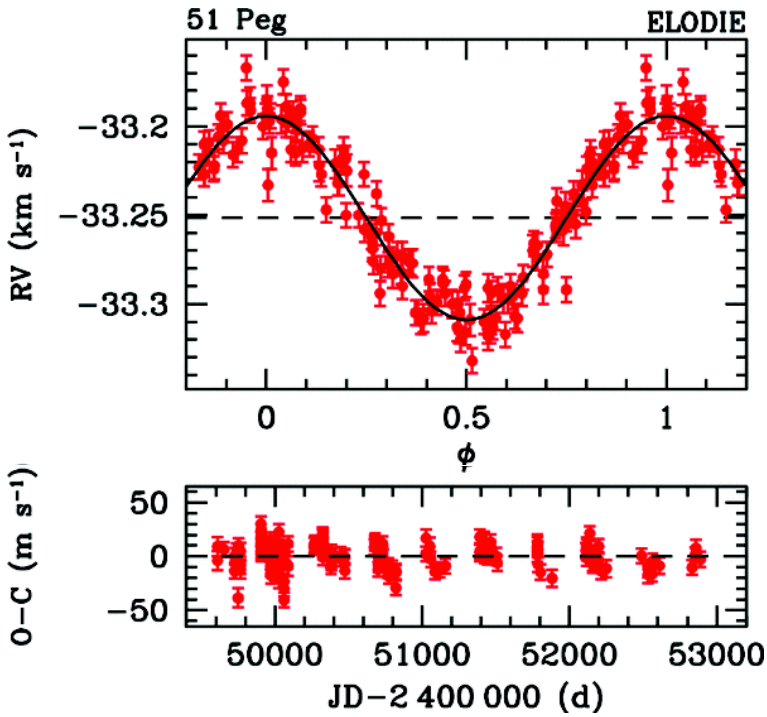
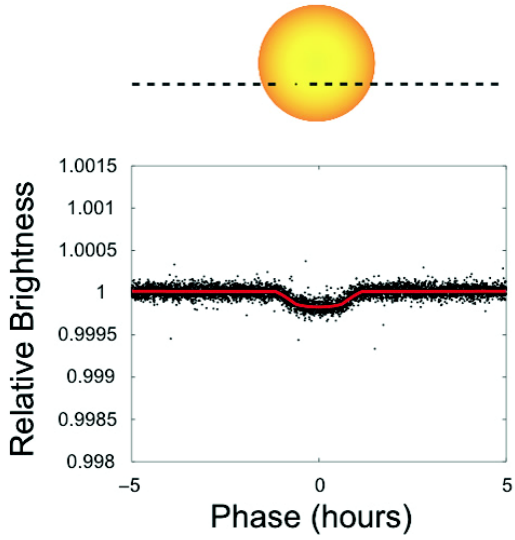


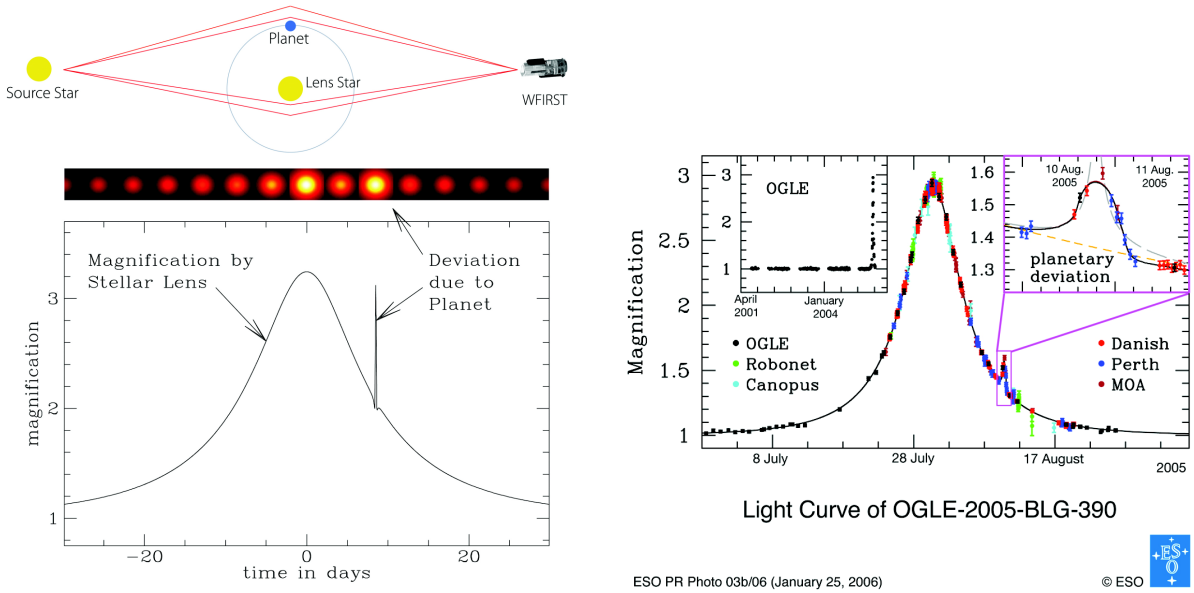
FIGURE 1.2 – **Méthode de détection par vitesses radiales**. La méthode des vitesses radiales repose sur la mesure du mouvement d'un système étoile-planète autour du centre de gravité de ce système. L'étoile, beaucoup plus brillante que la planète, est le seul objet observé. On mesure donc les très faibles mouvements de l'étoile par effet Doppler-Fizeau qui se traduisent par un décalage spectral de la lumière émise. Lorsque l'étoile s'éloigne de nous, son spectre se décale vers les grandes longueurs d'onde, tandis que lorsqu'elle se rapproche de nous, son spectre se décale vers les petites longueurs d'onde. La présence d'une planète est confirmée par une variation périodique de la vitesse relative de l'étoile, comme on peut le voir sur la mesure des vitesses radiales sur l'étoile 51 Peg avec le spectrographe ELODIE, par Mayor et Queloz [1].



(a) Courbe de luminosité du système Kepler 10 à l'occasion du transit planétaire de Kepler 10b. © Nasa/Kepler Mission

(b) Transit de Vénus du 6 juin 2012. © Julien Milli

FIGURE 1.3 – **Méthode de détection par transits.** La méthode des transits permet de détecter une planète qui passe entre son étoile et l'observateur, à l'instar des transits de Mercure et de Vénus dans notre système solaire, résultant en une diminution temporaire du flux de l'étoile reçu. Cette diminution du flux est détectable en considérant le flux global reçu, même si pour les exoplanètes et contrairement au cas solaire, le passage de la planète devant le disque stellaire n'est pas résolu. Tout comme dans le cas des vitesses radiales, l'observation périodique du phénomène, correspondant à plusieurs rotations de la planète sur son orbite, est nécessaire afin de confirmer la présence d'une planète. La méthode des transits permet de déterminer le diamètre de la planète par mesure de la profondeur relative du transit. La période du transit donne la période de rotation de la planète autour de son étoile.



(a) Un petit pic de luminosité, s'ajoutant à celui produit par l'étoile hôte par effet de microlentille, permet de détecter l'exoplanète. © Nasa

(b) Courbe de luminosité de la planète OGLE-05-390Lb.

FIGURE 1.4 – **Méthode de détection par lentilles gravitationnelles.** La notion de lentille gravitationnelle intervient dans le cadre de la relativité générale d'Einstein. Cette théorie prédit en effet qu'un objet massif courbe les rayons lumineux qui passent à sa proximité. La théorie est testée avec succès en 1919 lors d'une éclipse de soleil : les rayons provenant d'une étoile située en arrière-plan de l'éclipse sont courbés au voisinage du soleil et ont donc une position apparente dans le ciel différente qu'en l'absence du soleil. Ce dernier agit comme une lentille qui focalise le flux lumineux de l'étoile lointaine. Le flux de cette étoile lointaine est alors temporairement accru lors du passage d'une étoile-lentille exactement sur la ligne de visée. Cette amplification présente éventuellement une perturbation caractéristique en présence de planète.

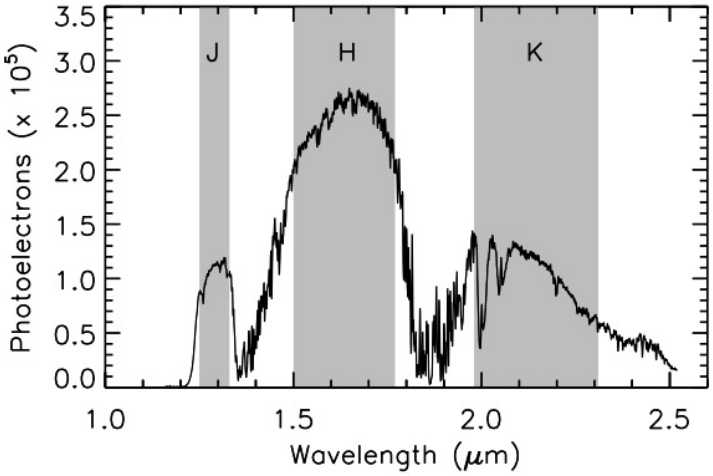


FIGURE 1.5 – **Spectre en transmission de l'atmosphère de la planète GJ1214b obtenu lors d'un transit.** (Bean et al. 2011) [11]

1.1.2 L'imagerie directe d'exoplanètes

Depuis moins d'une dizaine d'années, l'imagerie directe d'exoplanètes est venue s'ajouter aux méthodes de détection. Imager une exoplanète permet de collecter directement les photons de la planète, élargissant la brèche entrouverte par la méthode des transits dans la mesure de spectres pour la caractérisation des atmosphères exoplanétaires.

1.1.2.1 Enjeux de l'imagerie directe d'exoplanètes

Il existe une forte complémentarité entre l'imagerie directe et les méthodes de détection indirectes. La population de planètes accessibles avec l'imagerie directe est en effet différente de celle des méthodes indirectes.

Dans le cas des vitesses radiales et des transits, nous avons vu que la principale limitation concernait la séparation accessible entre l'étoile et la planète, restreinte aux proches environnements circumstellaires à moins de 4-5 UA. L'accès complémentaire à des plus grandes séparations (> 5 UA) est permise par l'imagerie à haut contraste. En effet, et il s'agit d'une limitation de l'imagerie directe, pour imager une exoplanète, il faut pouvoir la séparer angulairement de l'étoile. L'imagerie directe présente alors l'avantage de fournir une image globale des systèmes planétaires utile à la fois pour une analyse statistique et l'étude en profondeur des systèmes individuels.

Les vitesses radiales et les transits sont également plus favorables à l'étude des systèmes autour d'étoiles froides et calmes alors que l'imagerie directe peut couvrir différents types d'hôtes stellaires (avec différentes masses, âges et statuts évolutionnaires). À grande séparation, on détecte l'émission propre de la planète, ce qui favorise néanmoins les planètes massives et jeunes,

plus chaudes. Il n'est donc pas étonnant de voir que la plupart des planètes détectées par imagerie directe se situent dans la partie supérieure droite du diagramme de la figure 1.1.

La complémentarité en termes de capacité de détection s'étend également aux informations fournies par l'imagerie directe. En plus de certaines caractéristiques de la planète qui sont accessibles par méthodes indirectes, collecter directement les photons d'une planète permet d'accéder aux propriétés de son atmosphère. La détection directe offre ainsi l'opportunité de caractériser la structure des atmosphères planétaires, leur composition et leur évolution.

1.1.2.2 Premières images directes d'exoplanètes

À ce jour [2], une trentaine d'exoplanètes ont été imagées, dans des conditions relativement favorables. Il s'agit de compagnons d'étoiles, dont la masse est (certainement ou possiblement, de manière compatible avec les incertitudes) dans le domaine planétaire (< 13 Masses de Jupiter (M_J)). En réalité, seule une poignée d'entre elles sont suffisamment proches de leur étoile et peu massives pour être envisagées s'être formées réellement comme des planètes dans un disque proto-planétaire.

La toute première image d'exoplanète (2M1207) a été réalisée avec l'instrument NaCo sur le VLT, autour d'une naine brune [12, 13] (cf. Figure 1.6). Le point commun des toutes premières images d'exoplanètes obtenues ci-dessus est qu'elles ont toutes au moins l'une des caractéristiques suivantes :

- Ce sont de jeunes planètes (quelques millions d'années ou 10 millions d'années) ;
- Elles orbitent autour de naines brunes ou étoiles de faible masse (dans ce cas, le faible rapport de masse entre l'étoile et le compagnon de masse planétaire est essentiellement incompatible avec un scénario de formation dans un disque, ce qui ne fait pas réellement de ce compagnon une exoplanète mais leur étude reste tout de même intéressante pour commencer à étudier la physique de ces objets de très faible masse) ;
- Elles se trouvent à une grande séparation de leur étoile (plusieurs dizaines voire même plusieurs centaines d'UA).

Le cas de la planète 2M1207 réunit ces 3 conditions.

Plus tard, avec la capacité d'observer des compagnons à la fois plus près de leur étoile et moins brillants, les premières exoplanètes réellement susceptibles de s'être formées dans et en interaction avec le disque proto-planétaire sont détectées, comme dans le cas de BetaPic [14, 15] et HR8799 [16, 17] (cf. Figures 1.7 et 1.8(a)). Des cas comme HR8799 ou Beta Pic apportent pour la première fois des séparations plus faibles (< 10-20 UA) autour d'une étoile massive et donc à un endroit où l'on peut supposer un disque assez massif pour former des planètes. C'est ce qui rend ces cas particulièrement intéressants.

À ces deux exemples, s'ajoute le cas de Fomalhaut b [18] (cf. Figure 1.8(b)), à bien plus grande séparation, mais lui aussi autour d'une étoile A, et à proximité et en interaction avec un disque de débris bien connu.

2. À la date du 2 juin 2012 , d'après les données de l'Encyclopédie des Planètes Extrasolaires, `http://exoplanet.eu/catalog.php`).

Deux systèmes planétaires multiples ont même été mis en évidence dont un autour de l'étoile HR 8799 [16, 17] où pas moins de quatre planètes ont été imagées (cf. Figure 1.7) à 15, 27, 43 et 68 UA de l'étoile.

On notera que les trois exoplanètes, dont l'imagerie est publiée fin 2008, HR8799 [16], Formalhaut [18] et BetaPic [14] présentent des caractéristiques communes et intéressantes. Aussi, dans ces trois cas, l'étoile présente un excès infrarouge révélateur d'un disque de poussière important (résolu ou non). Il existe un intérêt à préciser la corrélation entre fréquence de planètes et disque de débris, dans un premier temps, et par la suite, plus en détail, tous les indicateurs d'interaction dynamique entre la planète et le disque. Ces questions sont également un sujet de prédilection de l'imagerie à grand contraste, à la fois par la capacité d'imagerie du disque qu'elle propose, et pour les cibles concernées les plus jeunes.

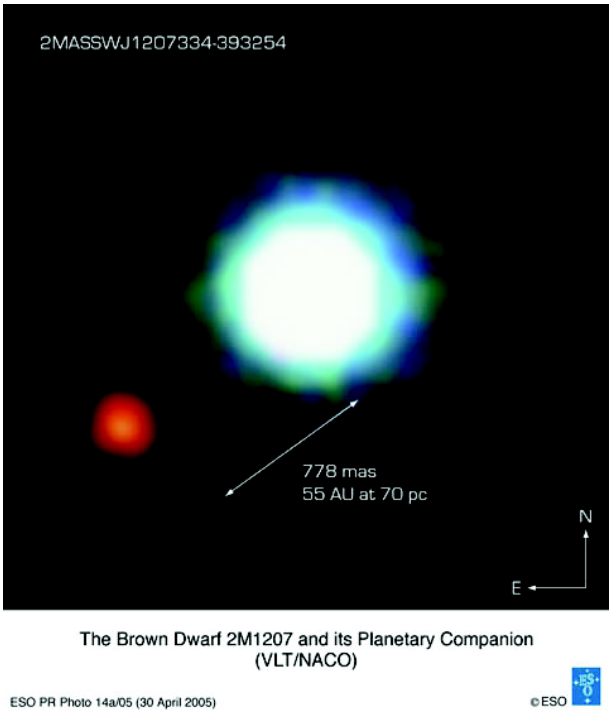


FIGURE 1.6 – **Première image d'exoplanète autour de la naine brune 2M1207.** (Chauvin et al. 2005) [12, 13]

L'imagerie directe est donc une technique en plein essor qui a démontré sa capacité à détecter et caractériser des exoplanètes. Elle s'annonce d'ores et déjà comme une méthode incontournable puisqu'elle permet un accès à la partie du diagramme inaccessible aux méthodes de détection indirectes. Les relevés d'imagerie ont fourni les premières images ainsi que les premiers spectres à basse résolution de compagnons de masse planétaire et ont apporté des contraintes statistiques sur le contenu à très grandes séparations (typiquement supérieures à 30-50 UA). La capacité d'imagerie des premiers compagnons réellement planétaires pouvant s'être formé dans des disques a

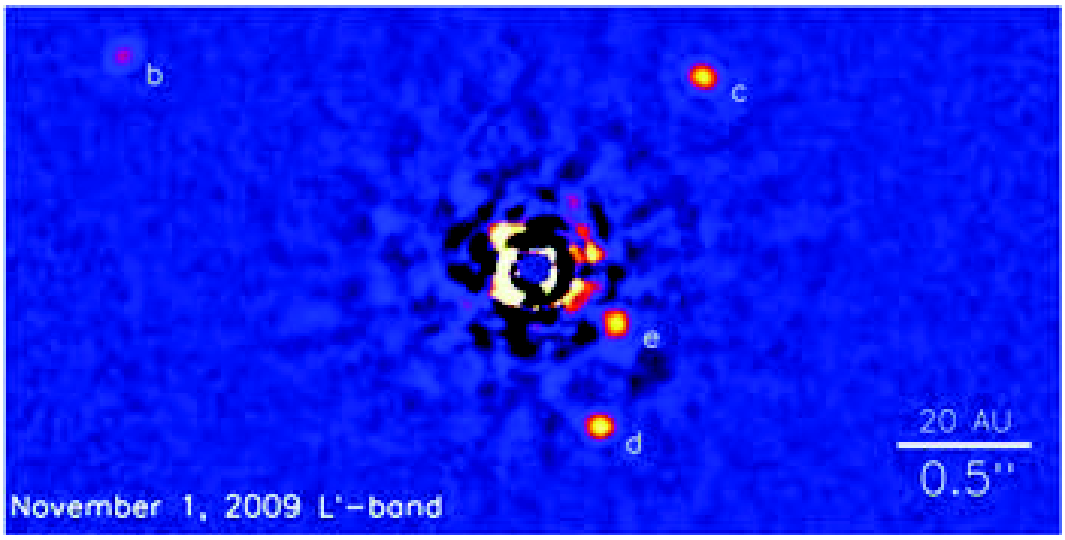
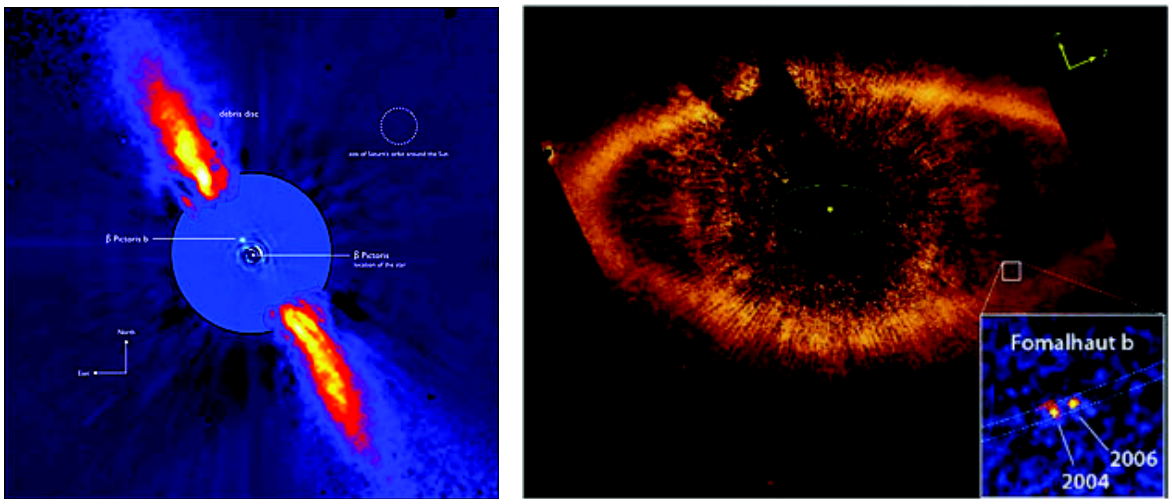


FIGURE 1.7 – **Image du système multiple HR8799.** (Marois et al. 2010) [16, 17]



(a) Beta Pictoris (b) Fomalhaut

FIGURE 1.8 – **Environnement proche des étoiles Beta Pictoris et Fomalhaut**. On peut y voir des disques de débris ainsi que les planètes Formalhaut b (Kalas et al. 2008) et Beta Pictoris b (Lagrange et al. 2009, 2010) [14, 15].

également été démontrée. Elle promet ainsi de compléter les connaissances sur les systèmes planétaires, d'apporter un regard nouveau sur leur dynamique (stabilité, migrations ...), de fournir des informations sur le lien entre exoplanètes et distribution de poussières dans les disques de débris et de fournir des éléments complémentaires importants pour les scénarios de formation des planètes géantes.

Cependant, les premières images d'exoplanètes ont toutes été obtenues avec des instruments d'imagerie généralistes, c'est-à-dire non optimisés pour l'imagerie directe. L'ambition des astrophysiciens est maintenant de détecter et caractériser des planètes massives présentes autour d'un grand nombre d'étoiles dans un domaine de séparation de quelques UA à quelques dizaines d'UA. Cet objectif ne pourra être atteint qu'en relevant les défis de l'imagerie directe d'exoplanètes que sont la haute résolution angulaire et le haut contraste.

1.1.2.3 Les défis de l'imagerie directe d'exoplanètes

Le défi de la haute résolution angulaire. Les inhomogénéités de température de l'air atmosphérique engendrent des fluctuations de l'indice de réfraction de l'air qui perturbent la propagation des ondes lumineuses à travers l'atmosphère. Un front d'onde plan qui traverse l'atmosphère est donc déformé. Les fluctuations d'indices, assimilés à des variables aléatoires, peuvent se décrire par une statistique de Kolmogorov, hypothèse bien vérifiée au moins pour les fréquences spatiales intervenant pour un télescope monolithique. Elles suivent alors, une loi de probabilité gaussienne, de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance (DSP) proportionnelle à $|\mu|^{-11/3}$, où μ est la fréquence spatiale 3D [19]. Par extension, comme la phase dans la pupille est la résultante de la somme des perturbations d'indice depuis la haute atmosphère jusqu'au sol, cette dernière est également supposée à statistique gaussienne. Cette phase est à l'origine d'un bruit de tavelures au niveau du plan focal image, ce qui perturbe la détection des exoplanètes.

Ces tavelures évoluent rapidement comme on peut le voir sur la figure 1.9 [gauche] qui montre l'effet de la turbulence sur l'image d'un objet ponctuel à courte et longue pose. En courte pose, c'est à dire quand le temps d'intégration t est plus court que le temps de caractéristique τ de la turbulence, les tavelures ont une extension spatiale de l'ordre de la diffraction par le miroir du télescope de diamètre D, i.e. λ/D. Les images conservent alors des informations hautes fréquences.

En longue pose, c'est à dire quand le temps d'observation est plus long que le temps de caractéristique de la turbulence (et c'est le mode d'observation utilisé pour la détection d'exoplanètes), les tavelures se moyennent comme on peut le voir sur la figure 1.9 [droite]. L'extension spatiale de la figure résultante est de l'ordre de λ/r_0, où r_0 est le paramètre de Fried qui caractérise la force de la turbulence. Ce paramètre est d'autant plus petit que la turbulence est forte [3]. En présence de turbulence, c'est ce paramètre qui détermine la fréquence de coupure de l'instrument. Elle vaut λ/r_0 en longue pose au lieu de λ/D dans le cas de l'instrument parfait. Autrement dit, c'est le paramètre de Fried et non plus le diamètre du télescope qui fixe les plus petits détails visibles d'un objet sur l'image (ou la résolution angulaire). Dans ces conditions, une étoile est indiscernable de ces compagnons. On a donc un effet lissé bien caractérisé par la DSP des aberrations turbulentes, quantité statistique qui se définit de la façon suivante, pour la statistique de

3. Il vaut typiquement 10 cm dans le visible dans un relativement bon site.

Kolmogorov :

$$S_{\phi_r}(f) = 0.023 r_0^{-5/3} f^{-11/3}. \tag{1.1}$$

Pour un traitement plus complet de la statistique temporelle de la phase turbulente, on pourra consulter [20].

Tout l'enjeu de la haute résolution angulaire est de compenser les effets de l'atmosphère afin de pouvoir résoudre, i.e. séparer angulairement, l'étoile de son ou de ses compagnon(s).

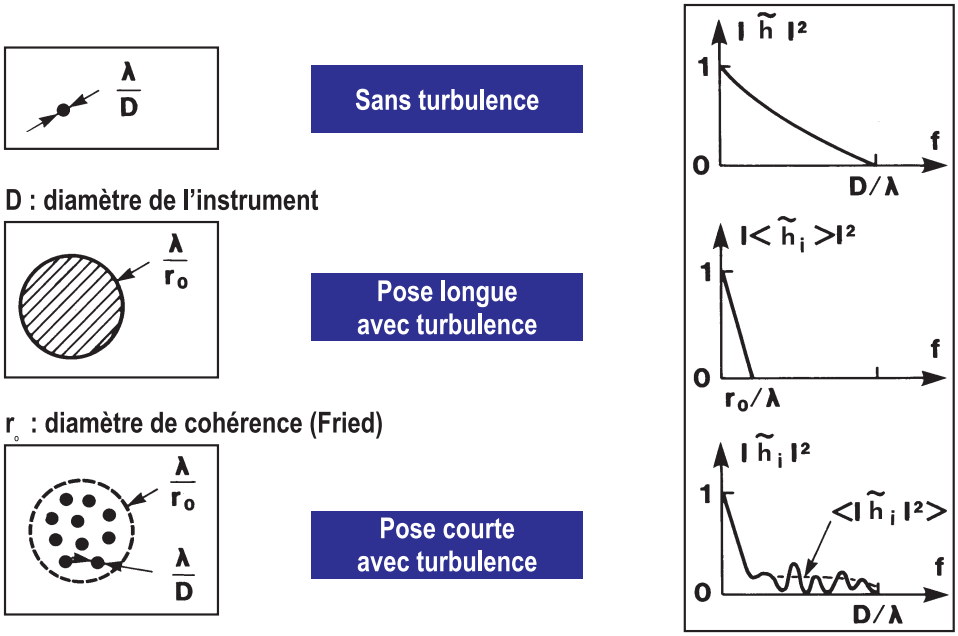


FIGURE 1.9 – **Effet de la turbulence sur l'image d'un objet ponctuel.** À gauche sont représentées les images et à droite les fonctions de transfert au carré des aberrations turbulentes.

Le défi du haut contraste. Une fois la haute résolution angulaire atteinte, le rapport de flux entre les deux objets est si grand que les photons d'un compagnon (peu nombreux sur l'image) sont indiscernables de ceux de l'étoile (qui dominent l'image). L'enjeu du haut contraste est donc de réduire le rapport de flux dans l'image afin de récupérer les photons des compagnons.

Des moyens instrumentaux existent pour relever les défis de la haute résolution angulaire et du haut contraste. C'est l'objet de la section suivante.

1.2 L'instrumentation au service de l'imagerie directe d'exoplanètes

L'objectif de cette deuxième section est d'expliquer les enjeux de l'imagerie directe d'exoplanètes, du point de vue de l'instrumentation. Après avoir fait un état des lieux des instruments actuels, des instruments en développement, ainsi que des futurs instruments permettant de faire de l'imagerie multispectrale 1.2.1, je décrirais plus particulièrement les défis à relever. Je parlerai ensuite de l'instrument SPHERE 1.2.2 et de son étalonnage 1.2.3. L'accent sera donné sur les défauts résiduels qui empêchent malgré tout de détecter une quelconque exoplanète (limites instrumentales). Ces défauts, à l'origine d'aberrations quasi-statiques, se répercutent sur l'image finale, limitant les performances atteignables avec l'instrumentation seule.

1.2.1 Une réponse instrumentale aux défis de la haute résolution angulaire et du haut contraste

Plusieurs instruments sont en cours d'étude, ou de réalisation pour tenter d'atteindre cet objectif. C'est notamment le cas de SPHERE pour le VLT, GPI pour Gemini, pour ne citer que ces exemples. Tous ces instruments ont en commun le même objectif à savoir détecter et caractériser des exoplanètes mais diffèrent par leurs spécifications et le type d'objets visés. Même s'il sont concurrents, ils pourront donc a priori se compléter sur certains points. Et la prochaine génération d'instruments se prépare, c'est notamment le cas d'EPICS pour l'E-ELT. Dans la suite, je vais particulièrement m'attarder sur le projet SPHERE qui a motivé mon travail de thèse.

1.2.1.1 Principes instrumentaux

Optique adaptative. Dans la section précédente (1.1.2.3), on a vu l'effet de la turbulence atmosphérique sur les images réalisées par les instruments au sol : celle-ci empêche notamment de résoudre un système étoile-exoplanète en longue pose. Afin de répondre à ce problème, il est possible d'utiliser des télescopes spatiaux (problèmes techniques et économiques). Mais pour les télescopes situés au sol, une solution instrumentale existe : l'optique adaptative [21]. L'optique adaptative corrige en temps réel le front d'onde déformé par la turbulence. Pour ce faire, le système est composé de trois éléments principaux : un système de mesure du front d'onde, un système de commande et un système de correction du front d'onde. Le système de commande est un logiciel qui, à partir des informations recueillies par le système de mesure, envoie les informations pour commander le miroir déformable afin que ce dernier corrige le front d'onde dans le plan pupille du télescope. Il s'agit donc d'un système qui fonctionne en boucle fermée. Au bout de plusieurs itérations, ce qui est corrigé dans le plan pupille du télescope n'est plus le front d'onde déformé par la turbulence mais les résidus de la précédente correction. En pratique, la réponse du système n'est pas instantanée, un temps de calcul est nécessaire au système de commande puis, un nouveau temps est nécessaire pour que la commande parvienne au miroir déformable et que celui-ci réponde. Ainsi, il existe des résidus de déformation du front d'onde qui sont liés au temps de réponse. De plus, toutes les fréquences ne sont pas corrigées car les

actuateurs du miroir déformable échantillonnent ce dernier. Il existe donc une fréquence de coupure du système au delà de laquelle les fréquences ne peuvent être corrigées comme le montre la figure 1.10.

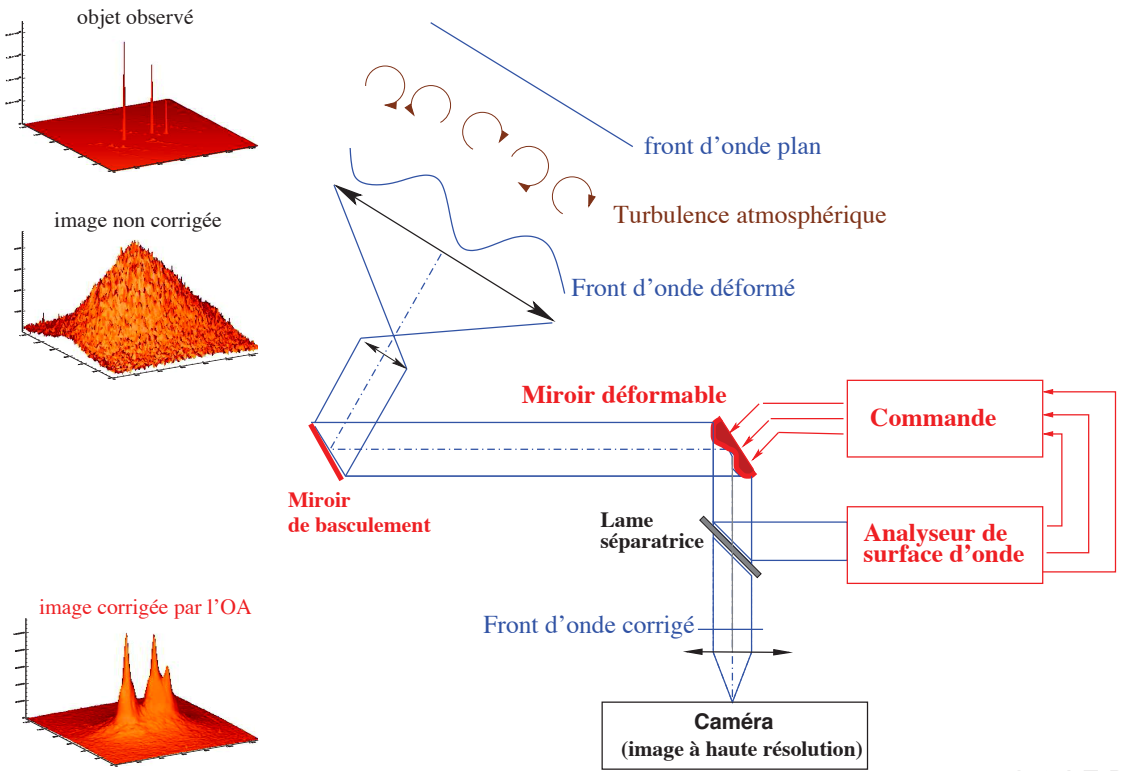


FIGURE 1.10 – **Principe de l'optique adaptative et effet de la correction sur les images.**

Un autre avantage de ce système est qu'il est capable de corriger également les défauts statiques de l'instrument situés avant le système de mesure du front d'onde, dans la limite de la fréquence de coupure. Par contre, ce n'est pas le cas des défauts situés après le système d'optique adaptative, ni des défauts de la partie non commune. Ces derniers, situés sur les optiques qui permettent le rebouclage de l'OA, sont des défauts que l'on ajoute puisqu'ils n'étaient pas là avant de mettre l'OA, il est donc nécessaire de les corriger afin de limiter l'introduction de défauts supplémentaires. Pour pouvoir les corriger, la difficulté est de les mesurer ; cela peut se faire par exemple par la méthode de diversité de phase.

Diversité de phase. Le but de la diversité de phase [22, 23] est d'estimer les aberrations à partir d'une image en plan focal sans optiques supplémentaires. L'application qui nous intéresse ici consiste en l'estimation d'aberrations non communes (entre le senseur d'OA et le détecteur scientifique) telles que mentionnées plus haut. Une autre application peut être la reconstruction du piston pour le cophasage de télescopes ou de sous-pupilles d'un même miroir de télescope

segmenté. Dans ces contextes, il est nécessaire d'ajouter des aberrations de manière contrôlée de façon à ajouter l'information qui permet de lever l'ambiguïté sur le signe de la partie paire de la phase. Pour cela, l'algorithme de diversité de phase utilise deux images, l'une dans le plan focal et l'autre affectée d'aberrations connues (défocalisée par exemple) comme le montre la figure 1.11.

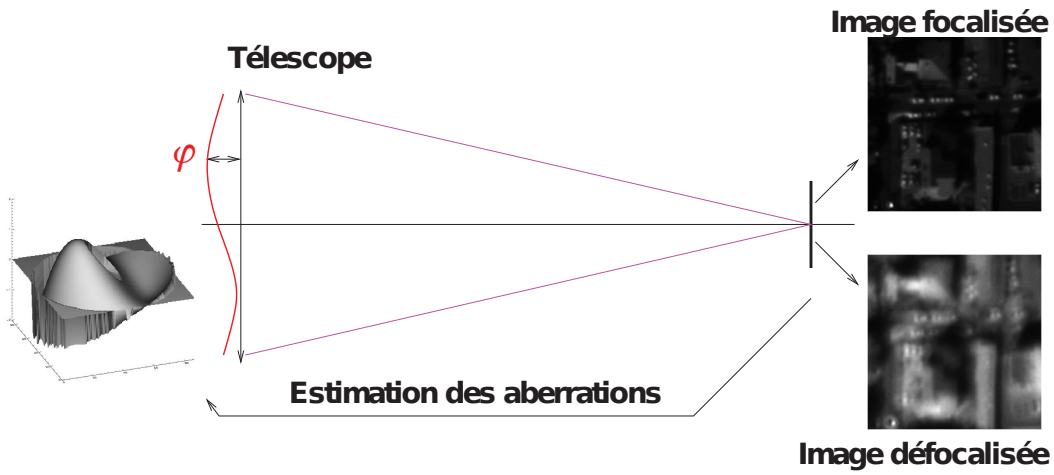


FIGURE 1.11 – **Principe de la diversité de phase.**

Coronographie. Pour relever le défi du haut contraste (cf. 1.1.2.3), un composant optique, appelé coronographe est utilisé pour éteindre la lumière de l'étoile. À l'origine, le coronographe a été inventé pour l'étude des éruptions solaires. Comme dans une éclipse où la surface de la lune cache la surface du soleil, le coronographe avait pour but de cacher artificiellement la surface du soleil [24]. Cette utilisation d'origine du coronographe a été détournée au profit de la détection directe d'exoplanètes.

Pour cette application, la partie centrale de la lumière est éteinte par un masque d'amplitude ou de phase disposé dans un plan focal de l'instrument. Le passage par un nouveau plan pupille avant détection permet de recombiner le champ provenant de l'étoile et de l'éteindre ou de l'atténuer dans tout le champ. Idéalement, toute la partie cohérente (non perturbée par la turbulence ou les aberrations optiques) de l'énergie provenant de l'étoile est ainsi rejetée.

Il existe deux familles de coronographes qui se différencient par le type de masque (amplitude ou phase) introduit dans le plan focal : les coronographes d'amplitude et les coronographes de phase. Parmi les coronographes d'amplitude, on peut citer le coronographe de Lyot et ses dérivés [24] comme le Lyot Apodisé. La figure 1.12 montre le principe de fonctionnement d'un tel coronographe. Les coronographes de phase regroupent, par exemple, le coronographe de Roddier [25], le coronographe quatre quadrants (4PQM) [26] (cf. Figure 1.13), le coronographe de Roddier & Roddier [27] ou encore le coronographe Vortex [28, 29, 30]. On pourra trouver dans [31, 32] des revues des différents types de coronographes.

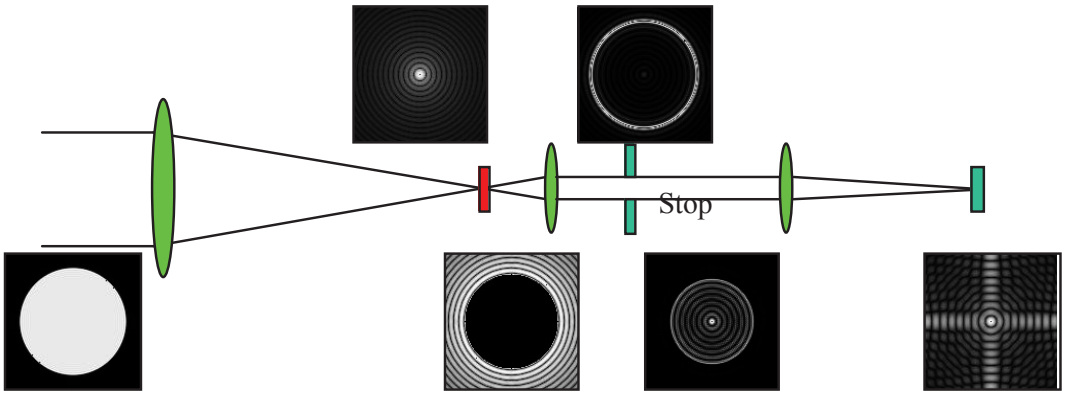


FIGURE 1.12 – **Principe de fonctionnement d'un coronographe : exemple du coronographe de Lyot.** La pupille circulaire d'un télescope est imagée dans le plan focal qui contient le masque d'amplitude. L'étoile est alors masquée par le disque opaque du masque. Au niveau de la pupille de Lyot, une part significative de la lumière de l'étoile est diffractée à l'extérieur de l'ouverture géométrique. Cette énergie est alors filtrée avec un diaphragme de Lyot.

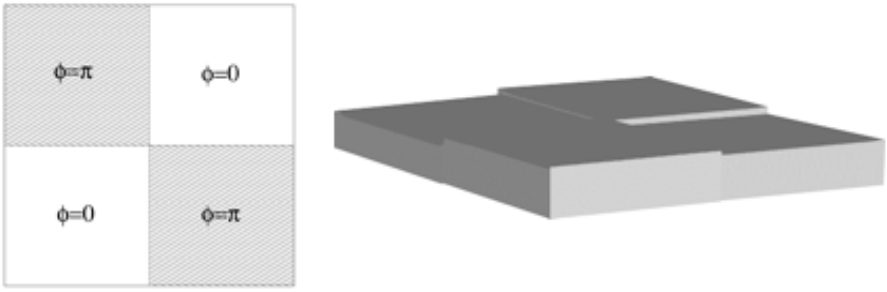


FIGURE 1.13 – **Schéma du masque focal d'un coronographe 4 quadrants.**

Imagerie multispectrale. L'évolution constante des détecteurs permet aujourd'hui de disposer de caméras avec suffisamment de pixels, qui permettent non seulement d'imager une scène à haute résolution angulaire mais également utiliser une partie des pixels pour imager la scène à différentes longueurs d'onde et ceci dans le but de réaliser des spectres pour la caractérisation d'exoplanètes. On parle de DBI pour *Dual Band Imaging* quand la scène est imagée simultanément à deux longueurs d'onde [33, 34] et d'imagerie multispectrale lorsqu'un plus grand nombre de bandes spectrales est utilisé. Le flux mesuré au niveau du détecteur est alors réparti entre information spatiale et spectrale. Il existe donc un compromis entre la résolution spatiale qui suppose d'échantillonner avec suffisamment de finesse (champ d'au moins 1" de rayon) et la résolution spectrale (au moins quelques dizaines).

Différentes méthodes pour capter sur un détecteur les images à différentes longueurs d'onde existent. On peut penser ainsi scanner temporellement en longueur d'onde, ou simultanément séparer le faisceau et faire différentes images. Il faut cependant garder en tête que, pour la détection, il est important de ne pas introduire d'importants (et/ou mal connus) défauts entre les canaux spectraux. Une solution élégante est des systèmes de type *Integral Field Spectrograph* (IFS) qui échantillonnent l'image spatialement avant dispersion ce qui limite les aberrations chromatiques [35, 36], dont le principe de fonctionnement est expliqué un peu plus loin (cf. 1.2.2.4).

Des moyens instrumentaux existent pour répondre aux défis que posent l'imagerie directe d'exoplanètes. Nous allons voir maintenant quels instruments proposent ce type de technologie.

1.2.1.2 Les instruments en activité et en développement

Nous avons vu que quelques exoplanètes ont d'ores et déjà été imagées (cf. 1.1.2.2). Ces images sont le fruit d'instruments bénéficiant des technologies pour le haut contraste décrites dans 1.2.1. Seulement, aucun d'entre eux ne les combine en même temps de manière optimale :

- Les instruments au sol bénéficient tous d'une optique adaptative mais de performance modérée (Strehl de 20-50) ;
- La plupart d'entre eux ne présentent pas de coronographe. Dans le cas contraire, leur coronographe n'est pas optimisé ni en terme de qualité, ni en terme d'efficacité de procédure. En particulier, entrer dans un régime de correction haut avec un Strehl supérieur à 80 permet d'envisager des coronographes plus efficaces, i.e. avec une meilleure réjection et une plus petit angle d'efficacité ;
- Tous ne permettent pas de faire de l'imagerie multispectrale. Certains proposent un mode DBI comme NICI sur GEMINI, NaCo sur le VLT ou encore HiCIAO sur Subaru. Seuls les instruments SINFONI (sans coronographe et avec OA modérée) et P1640 (avec coronographe mais avec des aberrations optiques très difficiles à gérer) proposent le mode imagerie multispectrale ;
- Dans tous les cas, les aberrations optiques sont difficiles à contrôler : des besoins se font sentir en terme de qualité, stabilité, achromaticité, et étalonnage.

C'est instruments ne sont donc pas dédiés au haut contraste dans le sens où ils ne sont pas optimisés pour cette application [37].

À l'inverse, deux instruments conçus dès le départ pour intégrer ces technologies, et donc dédiés au haut contraste, sont en cours de développement : GPI pour GEMINI et SPHERE pour le VLT. Ces deux instruments, qui effectueront leur première lumière en 2013, intégreront une optique adaptative extrême avec un Strehl élevé (de l'ordre de 80-90), des coronographes optimisés et de l'imagerie multispectrale. Ces instruments permettront à la communauté d'effectuer des observations massives, grâce notamment à leur grande stabilité ainsi qu'à des modes observationnels parfaitement définis et adaptés au haut contraste.

1.2.2 L'instrument SPHERE

Après un rappel des objectifs scientifiques de l'instrument SPHERE (1.2.2.1), je liste les différents sous-systèmes qui le composent (1.2.2.2). Je décris ensuite la partie commune (1.2.2.3) avant de me pencher sur les instruments qui permettent de faire de l'imagerie multispectrale (1.2.2.4). L'idée ici n'est pas de faire une description exhaustive de l'instrument SPHERE mais d'introduire les composants qui entrent en jeu pour l'analyse des défauts que j'effectue ensuite (cf. 1.2.3).

1.2.2.1 Objectifs scientifiques de SPHERE

L'objectif principal de l'instrument SPHERE est la détection et l'étude de plusieurs dizaines de nouvelles planètes géantes extrasolaires, plus massives que Jupiter, orbitant autour d'étoiles proches par imagerie directe de leur environnement circumstellaire [38].

Alors que les vitesses radiales sont la meilleure technique actuellement disponible pour étudier la partie inférieure de la distribution de planètes avec des demi grand axes inférieurs à 5 UA, l'imagerie directe a prouvé son efficacité pour découvrir des planètes dans les régions supérieures de la distribution de planètes (cf. 1.1.2.2). Avec ses capacités améliorées (gain de deux ordres de magnitude en contraste par rapport aux instruments existants), et une liste de cibles potentielles incluant plusieurs centaines d'étoiles, SPHERE va fournir une vue claire de la fréquence des planètes géantes avec de larges orbites. Les cibles visées seront à la fois des systèmes planétaires jeunes et évolués, dans le régime de séparation clé de 1 à 100 UA. L'étude comparée de planètes à différentes étapes de leur évolution permettra notamment aux astrophysiciens de mieux comprendre les mécanismes de migration des planètes.

Pour réaliser ses objectifs, l'instrument SPHERE s'appuiera notamment sur une forte complémentarité avec les instruments actuels et avec les autres études contemporaines des planètes extrasolaires. Par exemple, certaines courbes de vitesses radiales d'étoiles, autour desquelles orbitent des planètes, montrent des résidus à long-terme indiquant la possibilité de la présence de planètes plus distantes. Ces étoiles seront donc une cible privilégiée pour l'instrument SPHERE.

En plus de la fréquence d'exoplanètes en fonction de leur masse et de leur séparation aux étoiles hôtes, il sera aussi intéressant de dériver les distributions des paramètres des planètes tels que la masse, le demi-grand axe et les excentricités. L'autre objectif principal scientifique de SPHERE sera alors la description des propriétés des jeunes planètes dans le pic de région attendu de la formation des géantes gazeuses et dans les régions extérieures des systèmes.

Avec un tel objectif principal, beaucoup d'autres champs de recherche bénéficieront des larges performances en contraste de SPHERE : ce sera le cas des disques protoplanétaires, des naines brunes, des étoiles massives évoluées et plus marginalement des sciences du système solaire. Ces domaines enrichiront l'impact scientifique de l'instrument. Par ailleurs les résultats de SPHERE serviront à la préparation de futures missions d'imagerie directe d'exoplanètes.

L'instrument SPHERE a été conçu et optimisé pour atteindre le plus grand contraste dans un champ de vue limité et à de faibles distances angulaires de l'étoile centrale [39] et ainsi remplir l'ensemble de ces objectifs scientifiques.

1.2.2.2 Sous-systèmes de SPHERE

Pour être capable de remplir sa mission scientifique, l'instrument SPHERE utilise à la fois la lumière réfléchie par polarimétrie et la lumière émise par la planète dans l'infrarouge. L'instrument SPHERE est constitué de quatre sous-systèmes dont trois instruments scientifiques (cf. Figure 1.14).

Le premier sous-système, la partie commune, est commun aux trois instruments scientifiques et inclut un système d'optique adaptative et plusieurs types de coronographes.

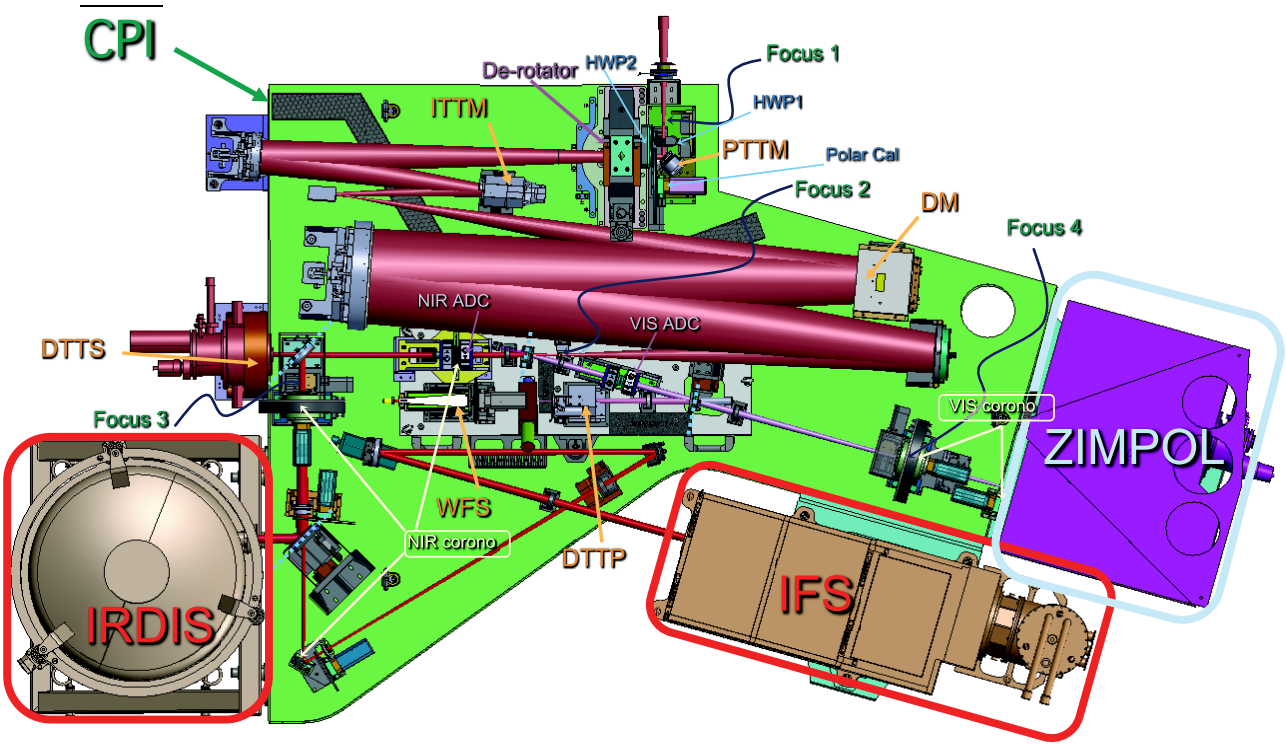
L'instrument ZIMPOL fonctionne dans le visible et utilise l'imagerie polarimétrique pour la détection d'exoplanètes et des disques de poussière. Il utilise le fait que qu'une lumière réfléchie est polarisée. La lumière émise par l'étoile est non-polarisée, alors que la lumière émise par cette même étoile et réfléchie par l'exoplanète est polarisée. Je ne décrirais pas plus cet instrument car je ne m'y suis pas intéressée pendant ma thèse.

Les deux autres instruments scientifiques, IRDIS et l'IFS se partagent la voie infrarouge pour la détection de l'émission thermique de planètes.

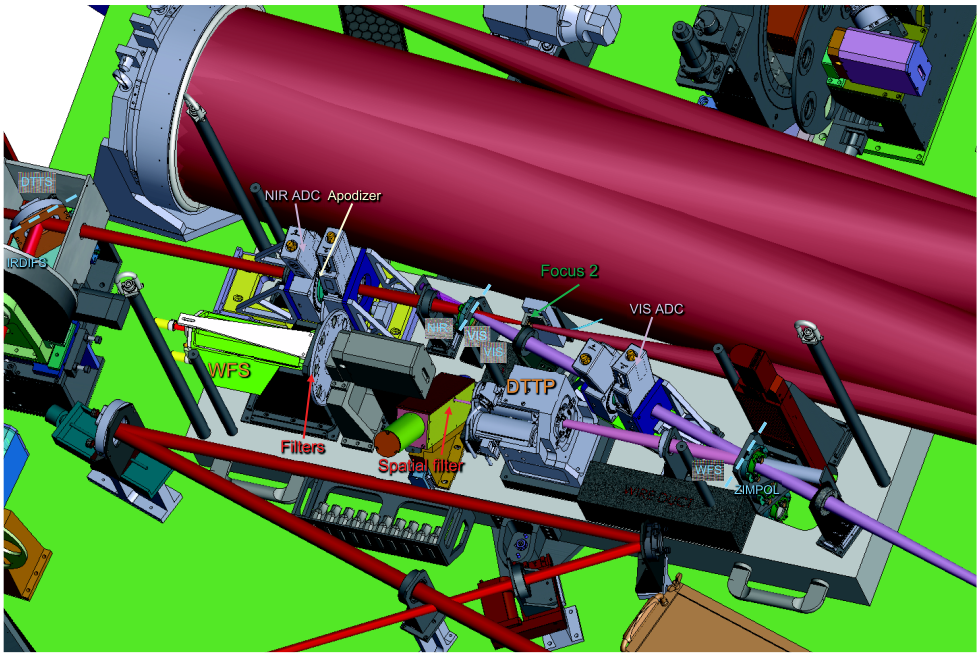
Les différents sous-systèmes de SPHERE sont représentés sous une forme schématique en figure 1.15. La lumière entre tout d'abord dans la partie commune (représentée en bleu) et traverse successivement des optiques dite pré-dé-rotateur de champ, un dérotateur de champ, des optiques pré-dichroïques, une dichroïque. La dichroïque permet de diviser le faisceau en deux parties. Une partie du faisceau part vers la voie visible (représentée en violet) dans laquelle il y a l'instrument ZIMPOL. L'autre partie part vers la voie infrarouge (représentée en rouge) dans laquelle il y a l'instrument IRDIS et l'IFS.

1.2.2.3 Partie commune

Le dérotateur de champ. L'instrument SPHERE sera installé sur une plateforme située au foyer Nasmyth du télescope. Afin de compenser le mouvement de rotation de la Terre pendant une observation, le télescope et la plateforme effectuent également un mouvement de rotation autour de l'axe optique du télescope. Comme l'instrument SPHERE sera installé sur la plateforme Nasmyth, cela entraînera une rotation du champ et de la pupille par rapport au reste de l'instrument. Un dérotateur permet de compenser cette importante rotation afin de rendre la pupille fixe par rapport à l'instrument.



(a) Vue d'ensemble



(b) Zoom sur la partie WFS.

FIGURE 1.14 – **Schémas de l'instrument SPHERE.**

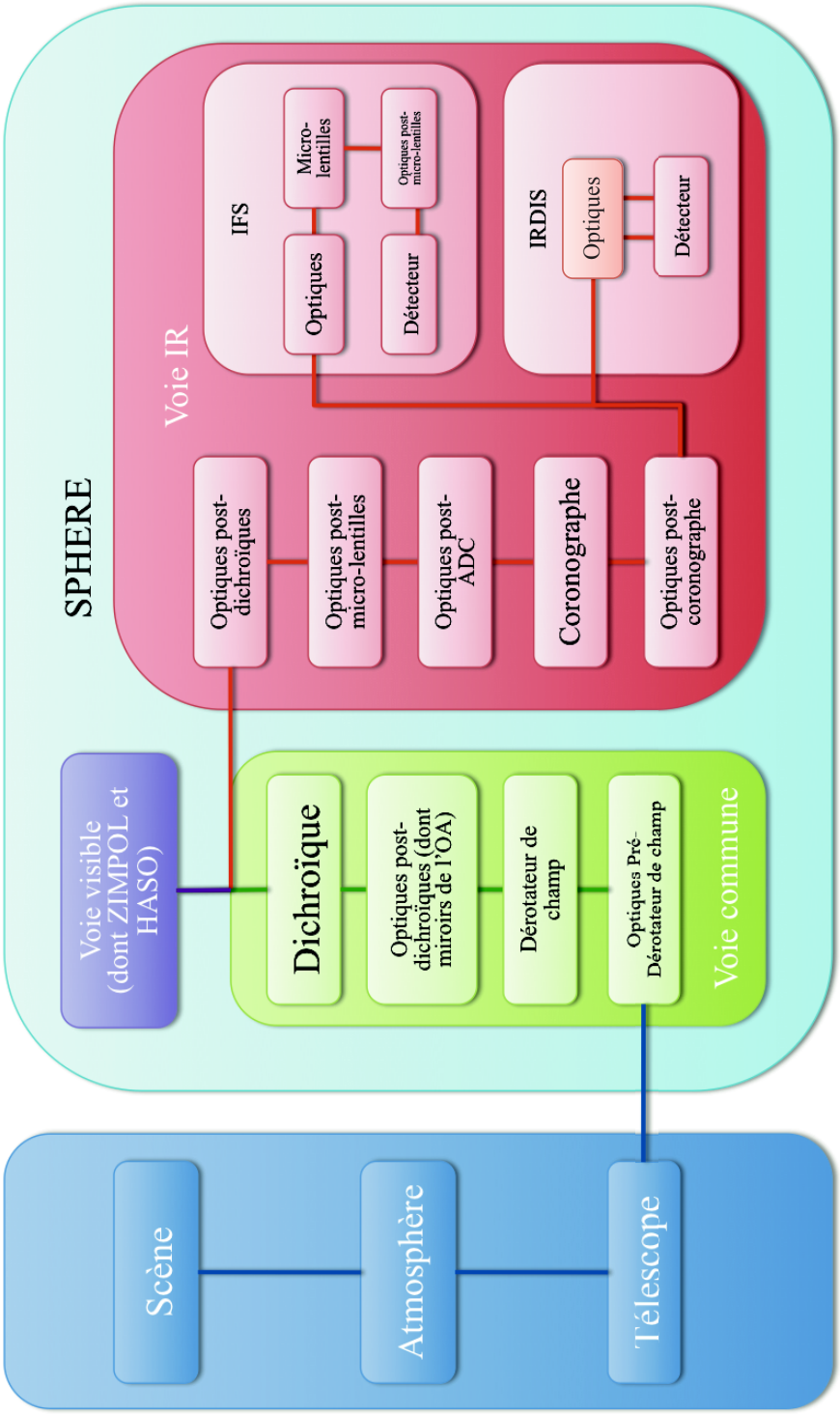


FIGURE 1.15 – **Formation d'image dans SPHERE, depuis la scène observée**.

Le système d'optique adaptative de SPHERE : SAXO. Le principe de l'optique adaptative pour le cas haute résolution angulaire a été décrit dans 1.2.1.1. Dans le cas de SPHERE, il ne s'agit pas d'une OA classique qui sera utilisée mais une optique adaptative extrême (Ex-OA) : le système d'optique adaptative SAXO [40]. L'idée de l'Ex-OA est d'obtenir un très bon Strehl sur une partie restreinte du champ. Afin d'obtenir ces spécifications, deux étages de corrections sont mis en œuvre. Un premier étage de correction permet de corriger les défauts de tip-tilt afin de conserver une bonne dynamique pour la correction des autres défauts. De plus, contrairement aux précédents systèmes d'OA sur le ciel, le fréquence de correction de SAXO est plus élevée (1.2 kHz), garantissant un réponse plus rapide du système et évitant ainsi des résidus de correction liés au temps de réponse du système.

Le coronographe. Dans le cas de l'instrument SPHERE, si 7-8 coronographes différents seront disponibles, ils appartiennent à deux types de coronographes différents : le coronographe de Lyot et le coronographe quatre quadrants.

L'ADC. L'ADC est un composant optique constitué de deux paires de prismes qui tournent à des vitesses différentes afin de corriger la dispersion atmosphérique.

1.2.2.4 Les instruments scientifiques de SPHERE permettant de faire de l'imagerie différentielle

La combinaison d'une Ex-OA et d'un coronographe sur SPHERE permettra d'imager des exoplanètes avec un contraste meilleur que 10^4. Cette limite est loin de remplir les conditions pour respecter les objectifs scientifiques de SPHERE qui sont d'atteindre un contraste de 1×10^6 avec un but de 1×10^8. Des gains supplémentaires sont possibles si des techniques d'imagerie différentielle sont appliquées à des jeux de longueurs d'onde variés. Ceci est possible avec IRDIS et l'IFS.

IRDIS. L'instrument IRDIS peut fonctionner dans plusieurs modes, avec ou sans imagerie différentielle. Dans ce dernier cas, il réalise simultanément deux images à deux longueurs d'onde différentes dans le but de les soustraire et détecter la planète. Son domaine spectral va de 950 nm à 2320 nm. Le diamètre du champ accessible est de plus de 11". L'échantillonnage spatial à 0.95μm est à Shannon.

Une limitation pour l'imagerie différentielle est que ce concept utilise des optiques différentes pour les deux images. Cette limitation identifiée est contrôlée avec des spécifications très sévères sur ces optiques menant à des aberrations différentielles < 10 nm RMS (présentes juste avant le détecteur, et donc après le détecteur). En outre, elles seront très stables et des procédures sont en place pour les mesurer et ultimement pouvoir utiliser cette information dans le traitement de données (avec des méthodes telles que celle développée dans cette thèse par exemple). Une série de paires de filtres est définie, couvrant différentes signatures spectrales planétaires attendues, avec une séparation de filtres correspondant à une résolution spectrale de 20 à 30.

IFS. L'IFS permet d'obtenir de l'information spectrale sur l'objet. L'image est successivement projetée sur une matrice de micro-lentilles qui échantillonne spatialement l'image, et sur un spectrographe qui disperse la lumière sur un détecteur. Un pré-traitement est ensuite effectué pour produire un cube de données de deux dimensions spatiales et une dimension spectrale (cf. Figure 1.16). Cet IFU est du type BIGRE [36] qui est une évolution du concept TIGRE [35] modifié pour le cas du haut contraste limité par la diffraction.

Pouvant travailler à deux largeurs de bandes différentes : de 0.95 à 1.35 µm et de 0.95 à 1.65 µm découpées en 30 à 40 bandes spectrales (avec une résolution spectrale de 50 et 30 respectivement), l'IFS a été conçu pour atteindre une détectivité à 5σ à 0.5" de 1×10^7 de contraste. Le champ accessible est de $1.35" \times 1.35"$. Tout comme pour IRDIS, l'échantillonnage spatial à 0.95 µm est à Shannon.

Les deux instruments de la voie infrarouge de SPHERE fourniront des potentiels de capacités de détection et de caractérisation complémentaires, en terme de champ de vue, contraste et domaine spectral.
Il s'agit d'ailleurs d'un objectif très important de SPHERE que d'optimiser le fonctionnement simultané de ces deux instruments (avec l'IFS en bandes Y et J et IRDIS en bande H).

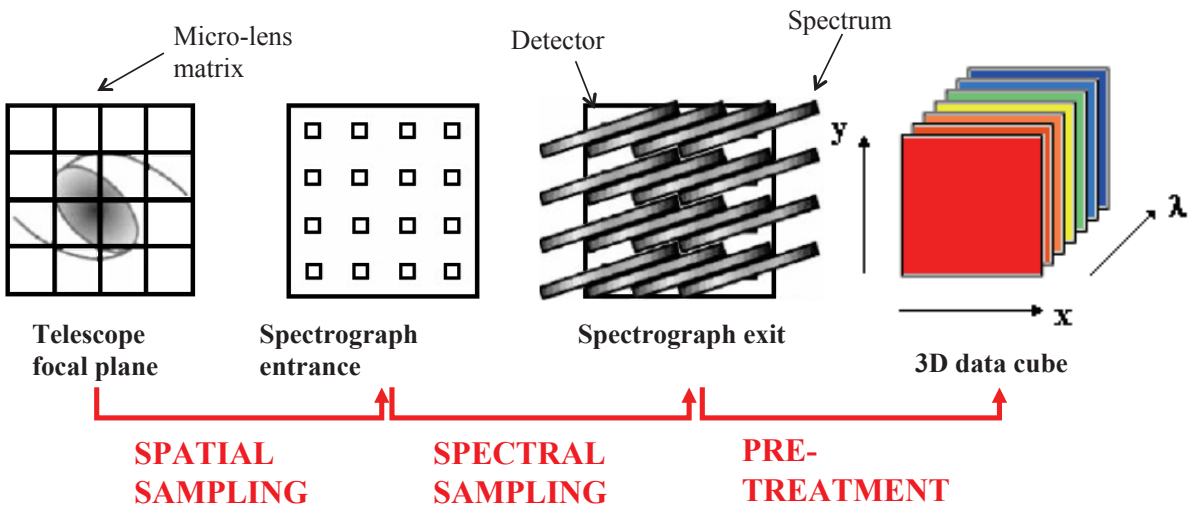


FIGURE 1.16 – **Schéma de principe du fonctionnement de l'IFS.**

1.2.3 La correction des aberrations : un défi majeur pour le haut contraste

Pour atteindre ses objectifs scientifiques, l'instrument SPHERE doit être en mesure de fournir des images d'une qualité supérieure à celle obtenue jusqu'à maintenant avec les autres instruments. Or, dans un tel instrument, de nombreuses sources d'erreur perturbent la mesure.

Ces sources d'erreur proviennent de différentes origines : l'atmosphère (perturbations du front d'onde par la turbulence, dispersion de la lumière par les molécules de l'atmosphère), le télescope (défauts des optiques du télescope, vibrations et contraintes mécaniques lors du mouvement de rotation du télescope pour suivre les objets pendant une observation, gradients de température ...), la plateforme Nasmyth (interface entre le télescope et l'instrument, elle tourne en même temps que le télescope et est également source de vibrations et de contraintes mécaniques). L'instrument en lui-même est également source d'erreurs (défauts des optiques du télescope, vibrations et contraintes mécaniques, gradients de température...).

L'analyse de ces différentes sources d'erreur est essentielle pour identifier les limites de l'instrument mais aussi pour trouver des moyens de s'en affranchir. L'énumération de la totalité de ces différentes sources d'erreur n'étant pas nécessaire ici, j'ai choisi de me focaliser sur les erreurs dominantes, les méthodes d'étalonnage associées, ainsi que les résidus qui en résultent.

1.2.3.1 Analyse des sources d'erreur dominantes de SPHERE

Les défauts introduits par les différents éléments optiques de l'instrument n'ont pas tous le même impact sur l'image finale. Par ailleurs, ces défauts se combinant, il est extrêmement difficile d'appréhender le rôle respectif des différents paramètres et leur influence sur l'image finale. C'est pourquoi j'effectue dans la suite une analyse et une classification des différents défauts en identifiant pour chacun d'entre eux les moyens mis en œuvre pour les corriger.

Classification temporelle des défauts. Tout d'abord, les défauts peuvent être classés par rapport à leurs échelles de temps typiques. Certains défauts sont stables dans le temps. Par conséquent, il est relativement aisé de les étalonner. C'est le cas des défauts de polissage des optiques par exemple.

D'autres défauts évoluent plus ou moins rapidement dans le temps. Par exemple, les défauts des optiques, provoqués par des variations de température ou des contraintes mécaniques, évoluent relativement lentement. Ces défauts ne vont donc pas être les mêmes d'une mesure à l'autre mais ils peuvent être relativement stables au cours d'une mesure. Ces défauts ne présentent pas trop de problème s'ils sont étalonnés entre chaque mesure. À l'inverse, les vibrations mécaniques provoquées par le mouvement de rotation de la plateforme du télescope ou les mouvements des composants optiques sont des perturbations très hautes fréquences dont on peut « aisément » s'affranchir par un filtrage passe-bas.

Entre ces deux extrêmes, les défauts qui ont une échelle de temps intermédiaire, évoluent significativement pendant la mesure. Ces défauts sont pour cette raison les plus problématiques.

Parmi eux, il y a les résidus de turbulence (non corrigés par l'OA) qui varient sur une échelle de temps de l'ordre de la milliseconde. On a vu que l'OA ne permet pas de corriger les défauts de front d'onde à 100% et de manière instantanée. C'est pourquoi, des résidus de turbulence interviennent dans l'image finale. Ces résidus, en courte pose, sont à l'origine de tavelures très problématiques puisque leur extension spatiale est la même que celle d'une planète (de l'ordre de

λ/D). En imagerie longue pose, comme ce sera le cas dans SPHERE, ces résidus vont se moyenner (cf. Figure 1.9). Il est donc possible, en étudiant la statistique de ces résidus de prévoir leur impact sur l'image finale. De plus, comme l'OA a une fréquence de coupure de $20\lambda/D$, le front d'onde turbulent n'est pas corrigé pour des fréquences supérieures. En tout, les aberrations turbulentes résiduelles représentent 60 nm RMS d'erreur (dans le domaine des fréquences spatiales corrigées). Sur l'image finale, ces aberrations prennent un aspect lissé que l'on peut difficilement confondre avec une planète dont l'aspect sur l'image finale est plus ponctuel.

D'autres défauts sont problématiques, on les appelle défauts quasi-statiques et ce sont ces défauts qui sont la limitation de l'imagerie à haut contraste. Ces défauts bougent très lentement car les phénomènes physiques qui les provoquent varient lentement, d'où l'appellation quasi-statique. Ils créent des variations d'intensité dans l'image, également appelées tavelures Ces tavelures constituent la principale limitation de l'imagerie à haut contraste car elles ont la même extension spatiale qu'une planète, i.e. de l'ordre de λ/D. La correction des aberrations est donc un défi majeur du haut contraste, identifié comme tel bien avant la première image d'exoplanète [41].

Classification des défauts selon l'endroit où ils interviennent dans l'instrument. Après avoir classé les défauts selon leurs échelles de temps typiques, il est également possible de les classer selon l'endroit où ils interviennent dans l'instrument.

L'exemple le plus caractéristique est celui des défauts intervenant avant (« upstream ») ou après (« downstream ») le coronographe [4]. Les défauts des optiques situées après le coronographe n'ont pas la même importance que ceux des optiques situées avant le coronographe. En effet, le rôle d'un coronographe de phase est de « rejeter, par interférences destructives, la lumière de l'étoile hors de la zone d'intérêt. » Avant le coronographe, la présence d'aberrations décorrèle la lumière de l'étoile et la rejection par interférences destructives est imparfaite car le coronographe ne peut atténuer la lumière venant d'un signal incohérent. Plus les aberrations sont importantes en amont du coronographe, plus les rayons sont décorrélés et moins l'atténuation de la lumière de l'étoile est importante. C'est pourquoi les spécifications sur les aberrations en amont du coronographe sont en général plus sévères qu'après le coronographe [5]. Les aberrations après le coronographe n'affectent que la lumière qui est effectivement passée. Ces aberrations sont convoluées avec l'image formée après le coronographe.

Les aberrations situées avant le coronographe seront en partie corrigées par l'OA. En effet, l'OA ne corrige pas seulement les défauts de front d'onde turbulent, elle est aussi capable de corriger tous les défauts qui sont situés avant l'analyseur de front d'onde. Tout comme les aberrations turbulentes, il existe des résidus d'aberrations *upstream*, les dominantes étant des aberrations quasi-statiques avec une DSP telle que celle de la figure 1.17(a). Le rôle de l'OA étant d'optimiser la correction du front d'onde au niveau du coronographe afin d'optimiser l'action de ce dernier, les aberrations situées après le coronographe ne peuvent pas être corrigées par l'OA.

4. Je reviens à de nombreuses reprises dans ce manuscrit sur cette différence entre aberrations situées avant et après le coronographe dans les sections : 2.1.3.4, 4.1.3.2 et 4.2

5. Je reviens sur ce point dans la sous-section 5.4.1 du chapitre 5.

Elles seront donc étalonnées, au même titre que les aberrations non communes, par diversité de phase. Cette correction présente néanmoins une limite car la diversité de phase ne corrige que les basses fréquences (BF). Les résidus après étalonnage par la diversité de phase seront de l'ordre de 30 nm. Leur DSP est représentée en figure 1.17(b).

Il est intéressant de noter que l'échelle temporelle des résidus de ces aberrations est différente, selon qu'elles sont situées avant ou après le coronographe. La cause cette différence est la présence d'éléments optiques rotatifs avant le coronographe, tels que le dérotateur de champ ou encore l'ADC. Les résidus d'aberrations situés avant le coronographe seront donc considérés comme étant quasi-statiques, alors que les résidus d'aberrations situés après le coronographe seront considérés comme plus stables et donc statiques.

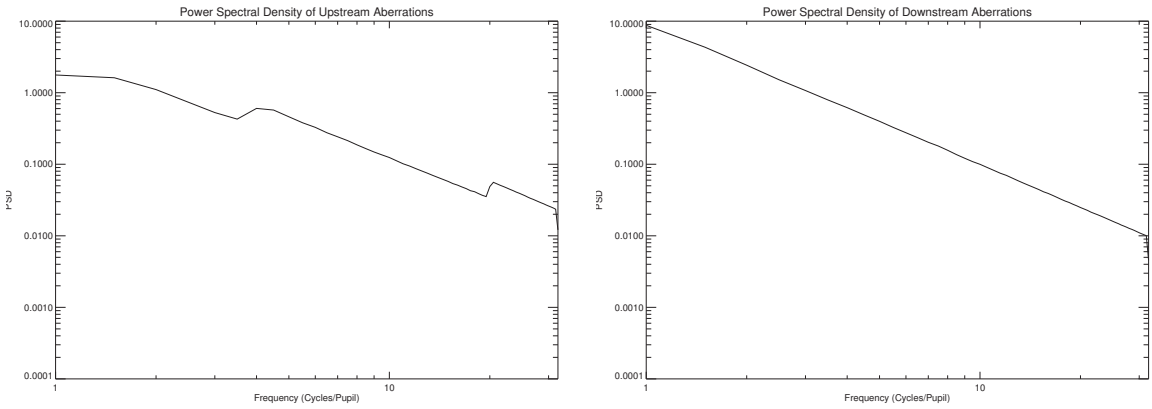
Enfin, certaines aberrations sont intrinsèques à l'un ou l'autre des instruments. Dans le cas d'IRDIS, ce sont les aberrations différentielles qui prédominent. En effet, l'instrument IRDIS utilise des filtres pour prendre des images à différentes longueurs d'onde. IRDIS prend alors simultanément deux images au travers de ces filtres via deux voies optiques indépendantes. En résulte la présence d'aberrations différentielles qui sont limitantes pour l'imagerie différentielle. L'avantage de l'IFS par rapport à IRDIS est qu'il n'est pas concerné par ces aberrations différentielles. Il est à noter également que des défauts interviennent spécifiquement à l'échelle de l'IFS. On a vu que la matrice de micro-lentilles récupère l'information spatiale en échantillonnant le champ. Après être passé par les micro-lentilles, l'important est de récupérer correctement l'information spectrale. À partir de là, ce qui va être déterminant ce sont les défauts de transmission et non plus les aberrations. En pratique, le design de l'IFS a été optimisé afin de minimiser ces erreurs de transmission. On s'attend donc à avoir un effet négligeable de ces erreurs qui nous dispense de les étalonner.

1.2.3.2 Conclusion sur l'analyse des défauts de SPHERE

Selon l'importance de leur influence sur l'image finale mais également selon leur nature, la prise en compte des sources d'erreurs dans l'instrument SPHERE ne va pas être la même. Certains défauts entraînent des erreurs dont l'effet est négligeable sur l'image finale. Ces défauts ont donc été minimisés lors de la conception et ne seront donc pas étalonnés. D'autres, en revanche, vont limiter la capacité de l'instrument à détecter des exoplanètes. Ce sont ces défauts dont il faut absolument s'occuper.

Certains de ces défauts bougent relativement vite. Ils sont donc moyennés en imagerie longue pose. C'est le cas par exemple des résidus de turbulence. Ces défauts très lisses peuvent donc être décrits par leur statistique temporelle (cf. 1.1.2.3) et peuvent difficilement être confondus avec des planètes. Néanmoins, leur flux relativement important dans l'image finale risque d'introduire des erreurs ou d'empêcher une éventuellement détection.

Parmi les défauts dont il faut également s'occuper, les aberrations quasi-statiques sont identifiées comme étant la principale limitation pour le haut contraste. Celles-ci étant pilotées par les aberrations optiques, il n'est donc pas étonnant que la correction de ces dernières soit au coeur de la problématique du développement d'un instrument comme SPHERE. L'enjeu est de construire



(a) DSP des aberrations *upstream*.

(b) DSP des aberrations *downstream*

FIGURE 1.17 – **Densité spectrale de puissance des aberrations quasi-statiques résiduelles situées avant et après le coronographe de l'instrument SPHERE.** Les aberrations *upstream* et *downstream* sont simulées aléatoirement selon un spectre en f^{-2} et avec une valeur RMS de 30 nm. Les aberrations *downstream* ne sont pas corrigées par l'OA. Les aberrations *upstream* sont corrigées jusqu'à la fréquence de coupure de l'OA, i.e. 20 cycles/pupille. Les résidus non corrigés proviennent des aberrations non communes. En-dessous de 4 cycles/pupille, ces aberrations non communes sont corrigées par la diversité de phase, mais il subsiste des résidus à cause des optiques rotatives situées avant le coronographe.

un instrument avec peu d'aberrations résiduelles, ces dernières devant être les plus stables possible.

Dans l'optique de se débarrasser de ces défauts quasi-statiques, une recherche active est effectuée sur le sujet en terme de moyens instrumentaux. L'idée est alors de corriger les aberrations quasi-statiques en temps réel, pendant l'acquisition de l'image, en amont du détecteur [42, 43, 44]. Après avoir minimisé les aberrations et leur variabilité à l'aide de tels moyens instrumentaux, il est indispensable de faire appel à des techniques de traitement d'image qui permettent de compléter la réduction des tavelures.

1.3 L'intérêt du traitement d'images pour l'élimination des défauts instrumentaux résiduels

L'objectif de cette section est d'expliquer les enjeux actuels de l'imagerie directe d'exoplanètes, du point de vue du traitement d'image. Dans la sous-section 1.3.1 je fais un bref historique du traitement d'image pour l'élimination des tavelures dans le cadre de la détection d'exoplanètes. J'insiste dans la sous-section 1.3.2 sur les techniques de traitement qui exploitent l'imagerie multispectrale avant de décrire le traitement d'image actuellement envisagé sur SPHERE (1.3.3).

1.3.1 Le traitement d'images pour l'élimination des tavelures dans le cadre de la détection d'exoplanètes

Plusieurs méthodes de traitement d'image ont déjà été proposées afin de surmonter le problème de la limite de détection causée les « tavelures quasi-statiques ».

On peut ainsi soustraire deux images pour éliminer le champ de tavelures, avec des conséquences plus ou moins importantes pour la préservation du signal de la planète. Pour ce faire, ces méthodes utilisent des propriétés de la planète qui changent entre les deux images de façon à la détecter. Ainsi, en soustrayant deux images prises à deux instants différents, on soustrait le champ de tavelures. Sur la première image, la planète est à la position p1, sur la deuxième image elle est à la position p2. Si l'on soustrait la première image à la deuxième, alors la planète à la position p2 n'est pas soustraite. Par contre, en position p1, on aura une planète négative sur l'image finale. Cette méthode, qui repose sur une soustraction entre deux images ayant tourné angulairement, se nomme donc imagerie angulaire différentielle ou *Angular Differential Imaging* (ADI). Historiquement, c'est cette méthode qui a été proposée en premier. Elle a notamment été appliquée avec le *Hubble Space Telescope* (HST) en observant la même scène selon différentes orientations de l'ensemble du satellite.

L'algorithme LOCI, conçu par Lafrenière et al. (2007), repose également sur ce type de soustraction du champ de tavelures et est basé sur la combinaison linéaire des différentes images prises à différents instants [45].

Dans mon travail de thèse, je n'ai pas travaillé sur cet aspect, mais il est tout à fait envisageable à moyen terme de combiner ADI et traitement d'images multispectrales [46, 47].

1.3.2 Le traitement d'images multispectrales

Parmi les méthodes de traitement d'images développées pour le haut contraste, certaines d'entre elles utilisent la dépendance en longueur d'onde du champ de tavelures [6] pour l'estimer et le soustraire de l'image.

Racine et al. (1999) ont suggéré de soustraire deux images à différentes longueurs d'onde pour éliminer le champ de tavelures dans des images non-coronographiques [41]. À la différence de l'ADI, les images sont générées simultanément, c'est pourquoi cette méthode est appelée « imagerie différentielle simultanée » (SDI pour « *Simultaneous Differential Imaging* »). Cependant, l'évolution du profil général du champ de tavelures avec la longueur n'étant pas une simple homothétie, des résidus subsistent lors de la soustraction et constituent la principale limitation de cette méthode. En partant du principe que l'apport de nouvelles informations permet d'affiner la soustraction, ces résidus peuvent être réduits en augmentant le nombre d'images utilisées pour la soustraction du champ de tavelures.

Marois et al. (2000) ont ainsi montré avec leur méthode de « double différence » que l'ajout d'une autre image à la méthode SDI améliore le rapport signal sur bruit dans l'image finale restaurée du compagnon [48]. Le cas des images multispectrales a été abordé par Sparks et Ford (2002) qui ont décrit une méthode dénommée « déconvolution spectrale » dans le cadre d'observations depuis l'espace pour un instrument combinant un coronographe et un IFS [49]. Ce procédé, plus tard amélioré par Thatte et al. [50], repose entièrement sur un ajustement de l'intensité du champ de tavelures par un polynôme d'ordre faible en fonction de longueur d'onde, dans le plan focal. Plus récemment, Crepp et al. (2011) ont combiné ce procédé avec l'algorithme LOCI, introduit à la sous-section précédente (1.3.1), et ont restauré des images prises sur le ciel avec l'instrument Project 1640 IFS sur le télescope Palomar [47].

Comme ces méthodes ne dépendent pas d'un modèle précis d'imagerie, leur grand avantage est qu'elles sont applicables à n'importe quel système optique, qu'il possède ou non un coronographe. Mais préserver les signaux des planètes, c'est à dire éviter qu'ils soient en partie voire totalement éliminés avec le champ de tavelures, est une tâche compliquée d'autant plus que la présence de la planète n'est pas explicitement modélisée. Ainsi, les performances de la méthode de « déconvolution spectrale », qui repose sur un ajustement d'intensité polynomial, dépendent du choix de l'ordre du polynôme utilisé. Ce choix fixe le compromis entre une bonne élimination des tavelures et une bonne restitution du flux de la planète. Dans le cas où l'ordre du polynôme est trop bas, les tavelures ne sont pas suffisamment éliminées et le flux de la planète risque d'être encore noyé dans les résidus de tavelures. Dans le cas inverse, les tavelures seront mieux éliminées, mais le risque est d'éliminer tout ou partie du flux de la planète dans le processus. Dans les deux cas, la détection de la planète est compromise. Le raisonnement est le même pour la méthode basée sur l'algorithme LOCI reposant sur des combinaisons linéaires. Ce sont alors les

6. Je reviens sur la dépendance en longueur d'onde du champ de tavelures dans 2.1.1, 3.1.3.1 et 4.1.3.1.

coefficients de cette combinaison qui sont ajustés. Dans le cas de cette méthode, des stratégies sont utilisées pour utiliser des ordres de polynôme élevés tout en limitant la perte de flux sur la planète, en faisant par exemple des combinaisons linéaires sur des parties de l'image uniquement, réduisant le risque de soustraire le flux d'une planète située hors de la zone de travail. Ces stratégies restent cependant relativement empiriques et compliquées à mettre en œuvre, tout en n'assurant pas de conserver le flux des planètes. Des travaux sont toujours en cours pour améliorer le compromis entre bonne estimation des tavelures et détection des planètes [51, 52, 53].

Par ailleurs, les informations disponibles sur le système de mesure peuvent être très utiles pour démêler une planète du champ de tavelures.

Burke et al. (2010) ont combiné des techniques empiriques classiques d'imagerie différentielle avec un *phase retrieval* multi-longueur d'onde afin d'estimer la carte d'aberrations dans le plan pupille avec un modèle d'imagerie simple, sans coronographe [54]. Ce *phase retrieval* multi-longueur d'onde est surnommé « diversité en longueur d'onde » ou « *wavelength diversity* » [55] car elle utilise des images différentes à différentes longueurs d'onde pour apporter la diversité d'informations comme on le ferait avec, par exemple, une défocalisation en « diversité de phase » [22, 56]. Mais contrairement à la « diversité de phase », la « diversité en longueur d'onde » ne supprime pas l'ambiguïté du signe de la phase. Cependant, lever l'ambiguïté du signe de la phase en traitement d'image n'est pas nécessaire contrairement à ce qu'il se passe en « diversité de phase ».

L'algorithme d'inversion utilisé par Burke et al. est basé sur une estimation du maximum de vraisemblance (MV), qui mesure l'écart entre les données et un modèle d'imagerie. La minimisation de cet estimateur est d'autant plus difficile que le nombre d'inconnues à estimer est élevé. Dans le cas du modèle d'imagerie simple de Burke et al., cette difficulté est résolue par la paramétrisation parcimonieuse des phases inconnues ϕ_λ par l'intermédiaire de la carte des erreurs de chemin optique $\boldsymbol{\delta}$, en supposant que ces dernières sont achromatiques : $\boldsymbol{\phi}(\lambda) = 2\pi\boldsymbol{\delta}/\lambda$. La carte des erreurs de chemin optique $\boldsymbol{\delta}$ étant commune à toutes les longueurs d'onde, cela permet de tirer parti conjointement des images à toutes les longueurs d'onde pour estimer efficacement les aberrations. Le nombre d'inconnues est alors limité et le problème contraint.

Cependant, dans le cas d'un système d'imagerie coronographique tel que l'instrument SPHERE, la méthode de « diversité en longueur d'onde » utilisée par Burke et al. ne s'applique pas directement, car elle suppose un système d'imagerie non-coronographique. L'utilisation d'un modèle d'imagerie coronographique est donc indispensable mais cela suppose de disposer d'un tel modèle.

1.3.3 Traitements d'images envisagés sur les instruments SPHERE et GPI

Parmi les désormais nombreuses méthodes de traitement pour le *DBI* et l'imagerie multispectrale certaines d'entre elles ont été sélectionnées pour être intégrées au *pipeline* de réduction des données des instruments IRDIS et IFS de SPHERE. Il s'agit de solutions désormais classiques de traitement d'image développées et éprouvées depuis quelques années. C'est notamment le cas de ANDROMEDA [46] et LOCI [45] pour IRDIS. Dans le cas de l'imagerie multispectrale, une étape de pré-traitement est nécessaire afin de générer des cubes d'images 3D (cf. 1.2.2.4).

Ce pré-traitement est intégré au *pipeline* de réduction des données de l'IFS [57], tout comme la méthode de « déconvolution multispectrale » de Thatte et al. [50]. L'instrument GPI pour le télescope GEMINI utilisera pour sa part la méthode LOCI adapté au traitement d'images multispectrales [47].

Si les *pipelines* de réduction des données de ces instruments ont déjà été définies, le traitement de données pour l'imagerie directes d'exoplanètes reste une thématique très active comme le témoignent les très récents travaux sur le sujet [51, 53]. Les possibilités d'amélioration sont nombreuses [7], notamment sur la possibilité de tirer profit des nombreuses informations *a priori* disponibles sur le système. C'est dans ce contexte que s'inscrit ma thèse.

1.4 Conclusion du chapitre

Les méthodes indirectes ont permis l'émergence de la science des exoplanètes. Ces méthodes, qui permettent à la fois de détecter des systèmes planétaires mais aussi d'en mesurer certaines caractéristiques physiques, ne permettent cependant pas de détecter directement les photons de la planète. Si la méthode du transit permet de mesurer des spectres, la détection directe des photons assure de pouvoir faire des spectres dans de meilleures conditions. L'imagerie directe est un formidable outil de détection et de caractérisation poussée des exoplanètes, ouvrant la voie à d'éventuelles détections de signatures biochimiques et d'éventuelles traces de vie. Malgré tout, les méthodes d'imagerie directe se heurtent à de grosses difficultés. Les plus significatives étant la haute résolution angulaire et le haut contraste.

L'instrumentation est capable d'apporter une réponse à ces deux problèmes. Pour le cas particulier des instruments au sol, l'optique adaptative corrige en temps réel les défauts du front d'onde apportés par la présence de l'atmosphère, permettant de faire de la haute résolution angulaire. Un coronographe permet ensuite de faire du haut contraste en éliminant une grande partie de la lumière de l'étoile. L'instrument SPHERE, en intégrant ces deux technologies, associées à une technique d'imagerie multispectrale, a la double ambition de détecter et caractériser des exoplanètes. Cependant, et malgré toute l'attention portée au développement de l'instrument et à son étalonnage, les instrumentalistes sont confrontés aux limites technologiques imposés par les procédés de fabrication des miroirs mais également aux processus physiques qui entrent en jeu lors d'une mesure (vibrations, variations de température). L'ensemble de ces effets a pour conséquence la présence de tavelures dans l'image finale qui limitent la détection. C'est pourquoi, j'ai accordé une attention toute particulière à l'étalonnage des défauts de l'instrument SPHERE afin d'identifier les sources d'erreur dominantes, ce qui constitue autant d'informations capitales pour ma thèse.

Mon travail s'inscrit dans la partie traitement d'images qui prend une place de plus en plus importante dans le domaine de la détection d'exoplanètes. Le nombre de travaux atteste de ce que peut apporter le traitement d'image pour l'élimination des tavelures. Il a longtemps permis d'améliorer les performances d'un instrument déjà existant. Dans le cas de l'instrument SPHERE, les spécifications à atteindre sont si grandes qu'un traitement d'images adapté est indispensable

7. Un workshop, organisé par Peter R. Lawson, a notamment eu lieu très récemment sur la thématique de traitement d'image pour la détection directe et a caractérisation d'exoplanètes

pour atteindre le niveau de détection requis. On assiste donc à une transition importante et les instrumentalistes et traiteurs de signal sont amenés à travailler de plus en plus ensemble. Après avoir dressé un historique des méthodes de traitement d'images pour l'élimination des tavelures résiduelles dans des cubes d'images multispectrales, j'ai introduit les méthodes intégrées aux pipelines de SPHERE et GPI. La limite principale de ces méthodes sont, pour la plupart d'entre elles, le fait qu'elles ne se basent pas sur un modèle précis de formation d'images. Une méthode se base néanmoins sur un tel modèle mais elle ne s'applique cependant qu'au traitement d'images non coronographiques.

C'est pourquoi je me suis fixé comme objectif de développer une méthode de traitement d'images pour la détection d'exoplanètes fondée sur un modèle d'imagerie coronographique et une inversion bayésienne. L'avantage principal d'une telle méthode est la possibilité d'évolution qu'elle offre ainsi que la possibilité de tirer profit d'informations *a priori* sur le système.

Après avoir expliqué les enjeux scientifiques et instrumentaux de l'imagerie directe d'exoplanètes, ainsi que la place croissante du traitement d'images dans ce domaine, je vais maintenant me pencher sur les outils et méthodes nécessaires à la bonne compréhension de ce manuscrit.

Chapitre 2

Outils et méthodes

Dans ce chapitre, je rappelle tout d'abord dans la section 2.1 quelques principes de formation d'images pour la haute résolution angulaire et le haut contraste, nécessaires à la compréhension de la suite de ce manuscrit. J'y décris avec précision le modèle d'imagerie coronographique que j'ai utilisé dans ma méthode d'inversion. Une partie des notations utilisées dans ce manuscrit sont introduites à cette occasion. La section 2.2 traite des éléments de traitement d'image dont je me sers par la suite. J'y rappelle le principe du problème inverse en détaillant plus particulièrement l'inversion bayésienne et les méthodes d'optimisation de critère.

2.1 Outils de modélisation des instruments

Après avoir rappelé quelques éléments de formation des images dans le cas d'école d'un instrument parfait, je parle du cas général d'un instrument aberrant (2.1.1). Deux types d'aberrations sont ensuite abordés dans le cadre des outils de formation d'image, l'imagerie à travers la turbulence (2.1.2) et les aberrations propres de l'instrument via le cas de l'imagerie coronographique (2.1.3). Le lecteur souhaitant en savoir plus sur la formation d'image peut se reporter à l'ouvrage de référence [58]. Pour des notions plus poussées d'imagerie à travers la turbulence, j'invite le lecteur à se référer à [19, 59].

2.1.1 Éléments de formation des images

2.1.1.1 Image d'un objet au travers un instrument

Sous l'hypothèse d'isoplanétisme [1], l'image d'un objet à la longueur d'onde λ, donnée par l'instrument considéré, est la convolution entre cet objet $\mathbf{o}_\lambda$ et la réponse impulsionnelle $\mathbf{h}_\lambda$ de

1. Le champ observé dans le cadre du haut contraste pour la détection d'exoplanètes est suffisamment petit pour que cette hypothèse soit vérifiée. On peut supposer que la réponse instrumentale est uniforme dans le champ et l'image d'un objet au travers de l'instrument peut être modélisée par un produit de convolution.

l'instrument :

$$\mathbf{i}_\lambda(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{o}_\lambda \star \mathbf{h}_\lambda(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{b}_\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \tag{2.1}$$

où $\mathbf{b}_\lambda(\boldsymbol{\alpha})$ représente un bruit additif.

2.1.1.2 Réponse impulsionnelle d'un instrument parfait

Considérons le système simple d'un instrument parfait, composé d'une pupille circulaire $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ de diamètre D et d'un détecteur situé dans le plan focal de la pupille. La réponse impulsionnelle (RI) instantanée ou fonction d'étalement de points (FEP) de l'instrument à la longueur d'onde λ est égale au module carré de la transformée de Fourier de la pupille lorsque l'objet observé est ponctuel :

$$\mathbf{h}_\lambda(\boldsymbol{\alpha}) = \left|\mathrm{TF}^{-1}\left[\boldsymbol{\mathcal{P}}\left(\lambda\boldsymbol{\rho}\right)\right]\right|^2(\boldsymbol{\alpha}). \tag{2.2}$$

La fonction pupille est définie comme $\boldsymbol{\mathcal{P}}\left(\lambda\boldsymbol{\rho}\right) = 1$ si $|\lambda\boldsymbol{\rho}| < D$ et $\boldsymbol{\mathcal{P}}\left(\lambda\boldsymbol{\rho}\right) = 0$ sinon. La variable $\boldsymbol{\alpha} \triangleq (\alpha_x, \alpha_y)$ représente la position angulaire dans le plan focal en radians et la variable $\boldsymbol{\rho} \triangleq (\rho_x, \rho_y)$ est la position angulaire dans le plan pupille en radians^{-1}. $\lambda\boldsymbol{\rho} \triangleq (\lambda\rho_x, \lambda\rho_y)$ correspond à la position spatiale dans le plan pupille en mètres. Plus généralement, dans ce manuscrit, je représente les vecteurs en gras. Par convention, j'utilise la transformée de Fourier inverse, notée TF^{-1}, pour décrire la propagation du front d'onde d'un plan pupille vers un plan focal. Inversement, la propagation d'un plan focal vers un plan pupille est modélisée par une transformée de Fourier directe.

2.1.1.3 Fonction de transfert optique

La fonction de transfert optique (FTO) est la transformée de Fourier de la FEP : $\tilde{\mathbf{h}}_\lambda(\boldsymbol{\rho}) = \mathrm{TF}\left[\mathbf{h}_\lambda(\boldsymbol{\alpha})\right]$. En remplaçant $\mathbf{h}_\lambda(\boldsymbol{\alpha})$ par l'expression de l'équation 2.2, on trouve que la FTO est l'autocorrélation de la pupille :

$$\tilde{\mathbf{h}}_\lambda(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}\left(\lambda\boldsymbol{\rho}\right) \otimes \boldsymbol{\mathcal{P}}\left(\lambda\boldsymbol{\rho}\right), \tag{2.3}$$

la corrélation entre deux fonctions à valeurs complexes g_1 et g_2 de la variable x étant définie par : $\Gamma_{g_1 g_2}(x) \triangleq g_1(x) \otimes g_2(x) = \int g_1^*(x')g_2(x'+x)\mathrm{d}x$. La FTO d'une pupille de diamètre D est caractérisée par sa fréquence spatiale de coupure $f_c = D/\lambda$, fréquence au-delà de laquelle aucune information n'est transmise par le système (cf. Figure 1.9).

On peut montrer que dans le cas d'un instrument parfait, la fonction de transfert optique dépend de la longueur d'onde de la façon suivante [60].

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\lambda_2}\left(\boldsymbol{\rho}\right) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 \times \boldsymbol{\mathcal{P}}_{\lambda_1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\boldsymbol{\rho}\right), \tag{2.4}$$

avec λ_1 et λ_2 deux longueurs d'onde différences et $\boldsymbol{\mathcal{P}}_\lambda\left(\boldsymbol{\rho}\right) = \boldsymbol{\mathcal{P}}\left(\lambda\boldsymbol{\rho}\right)$. D'une longueur d'onde à une autre, la fonction de transfert s'étale spatialement et diminue en intensité.

2.1.1.4 Dégradation de la réponse impulsionnelle

Le cas de l'instrument parfait est un cas d'école. En réalité, la réponse impulsionnelle est dégradée. L'origine de ces dégradations vient à la fois de la phase $\boldsymbol{\phi}$ et de l'amplitude du champ complexe. Dans ce manuscrit, je fais l'hypothèse que les dégradations sont uniquement des phases dans des plans pupille. Je considère qu'il n'y a pas de défauts d'amplitude. Cette hypothèse repose sur le fait que dans l'instrument SPHERE, très peu d'optiques se situent loin d'un plan pupille. L'effet de ces optiques est donc négligé dans un premier temps. Je me place donc dans le cadre d'une propagation de Fourier. En présence d'une telle perturbation, la réponse impulsionnelle devient :

$$\mathbf{h}_\lambda(\boldsymbol{\alpha}) = \left|\mathrm{TF}^{-1}\left[\boldsymbol{\mathcal{P}}\left(\lambda\boldsymbol{\rho}\right)e^{i\boldsymbol{\phi}(\lambda\boldsymbol{\rho})}\right]\right|^2(\boldsymbol{\alpha}). \tag{2.5}$$

En présence d'aberrations, la FTO est modifiée et sa fréquence de coupure peut devenir significativement inférieure à la fréquence de coupure théorique de l'instrument parfait. En pratique, comme les hautes fréquences sont moins bien restituées, cela se traduit par une dégradation de la réponse impulsionnelle.

Si le passage d'une longueur d'onde à une autre dans le cas d'un instrument parfait se fait de manière relativement simple (cf. Équation 2.4), ce n'est plus le cas pour un instrument aberrant [48]. En présence d'une aberration physique de différence de marche δ, une erreur de phase, dépendante de la longueur d'onde, $\sigma_{\boldsymbol{\phi}} = 2\pi\delta/\lambda$ intervient. La variance de phase $\sigma^2_{\boldsymbol{\phi}}$ décroît, ce qui a pour effet de changer la structure des tavelures d'une longueur d'onde à une autre. La dépendance en longueur d'onde n'est donc plus aussi triviale.

2.1.2 Imagerie à travers la turbulence et résidus après correction par l'OA

Nous avons vu dans le chapitre 1 que la phase dans la pupille est la résultante de la somme des perturbations d'indice depuis la haute atmosphère jusqu'au sol ; elle est donc supposée à statistique gaussienne. Pour décrire la réponse impulsionnelle dégradée par la turbulence atmosphérique, il suffit alors de remplacer la phase quelconque $\boldsymbol{\phi}$ dans l'équation 2.5 par la phase qui décrit la turbulence. En outre, on gardera en mémoire que cette phase d'origine turbulente varie très vite. Dans les cas les plus courants, et en particulier dans le contexte qui nous intéresse, chacune des images considérées sera en réalité la superposition de nombreuses réalisations distinctes de telles phases turbulentes. On parle alors de "longue pose". Pour décrire l'image obtenue, les propriétés statistiques de ces phases turbulentes interviennent.

La fonction de transfert optique longue pose turbulente est alors le produit de la FTO du télescope $\tilde{\mathbf{h}}_t(\boldsymbol{\alpha})$ sans atmosphère et d'une fonction de transfert de l'atmosphère $\tilde{\mathbf{h}}_a(\boldsymbol{\alpha})$ de fréquence de coupure r_0/λ, où $r_0 << D$ est l'échelle spatiale caractéristique des défauts de phase turbulente :

$$\tilde{\mathbf{h}}_\lambda(\boldsymbol{\alpha}) = \tilde{\mathbf{h}}_t(\boldsymbol{\alpha}) \times \tilde{\mathbf{h}}_a(\boldsymbol{\alpha}).$$

L'objectif de l'optique adaptative est de rétablir les hautes fréquences spatiales perdues à cause de la turbulence (cf. Figure 1.9), au-delà de la fréquence de coupure r_0/λ de l'imagerie longue pose. En compensant en temps réel la turbulence, il est ainsi possible d'obtenir des images

longues poses tout en rétablissant, au moins partiellement [59], les hautes fréquences jusqu'à la fréquence de coupure propre du télescope [21].

Le fait d'étudier des images longues poses permet de définir des quantités statistiques relatives aux aberrations turbulentes très utiles pour la description de la formation d'image. Pour une phase ϕ_r, stationnaire à l'ordre 2 et ergodique, la fonction de structure de la phase turbulente résiduelle est définie de la façon suivante :

$$\mathbf{D}_{\phi_r}(\boldsymbol{\rho}) = \left\langle \left[\phi_r(\boldsymbol{\rho}') - \phi_r(\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{\rho})\right]^2 \right\rangle_t = 2\left[\sigma^2_{\phi_r} - \mathbf{A}_{\phi_r}(\boldsymbol{\rho})\right],$$

où ϕ_r est la phase turbulente résiduelle après correction par l'optique adaptative. $\mathbf{A}_{\phi_r}(\boldsymbol{\rho})$ représente la fonction d'autocorrélation de la phase turbulente résiduelle :

$$\mathbf{A}_{\phi_r}(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}) = \left\langle \phi_r(\boldsymbol{\rho}')\, \phi_r(\boldsymbol{\rho}) \right\rangle_t. \tag{2.6}$$

La densité spectrale de puissance de la phase turbulente résiduelle me sera également utile pour le développement d'un modèle approché d'imagerie coronographique corrigé par OA :

$$\mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\mathbf{A}_{\phi_r}(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho})\right]. \tag{2.7}$$

2.1.3 Modèle analytique d'imagerie coronographique

2.1.3.1 Équation du modèle global

Afin d'établir un modèle direct paramétrique d'imagerie coronographique corrigée par optique adaptative, il est nécessaire de connaître la réponse instrumentale et donc une FEP en chaque point du champ.

Dans sa thèse, Sauvage (2007) montre qu'il est possible de simplifier l'imagerie coronographique en considérant un découpage du champ observé avec à chaque partie une approximation de la FEP [61, 62]. Il découpe donc le champ observé en deux zones distinctes : la première correspond à l'étoile sur l'axe, et la seconde correspond à l'objet $\mathbf{o}_\lambda(\boldsymbol{\alpha})$ formant l'ensemble du champ à l'exception de l'étoile [2]. La FEP au centre du champ est ainsi appelée « réponse instrumentale sur l'axe ». Elle est prise égale à la valeur en $(\alpha_x, \alpha_y) = (0, 0)$ de $\mathbf{h}_\lambda$, et est notée $\mathbf{h}^c_\lambda$ par la suite (c pour coronographe). La FEP dans le champ est appelée « réponse instrumentale hors axe ». Elle est prise pour $(\alpha_x, \alpha_y) \neq (0, 0)$, et est approximée par la FEP de l'instrument sans coronographe $\mathbf{h}^{nc}_\lambda$.

Les données $\mathbf{i}_\lambda(\boldsymbol{\alpha})$ sont ainsi modélisées comme la somme de l'image résiduelle de l'étoile de flux f^*_λ après passage par le coronographe, de l'image de la source circumstellaire (pour lequel l'impact du coronographe peut être négligé) et d'un bruit $\mathbf{b}_\lambda$:

$$\mathbf{i}_\lambda(\boldsymbol{\alpha}) = f^*_\lambda \cdot \mathbf{h}^c_\lambda(\boldsymbol{\alpha}) + \left[\mathbf{o}_\lambda \star \mathbf{h}^{nc}_\lambda\right](\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{b}_\lambda(\boldsymbol{\alpha}). \tag{2.8}$$

Le premier terme est l'image de l'étoile, qui correspond au flux de l'étoile multiplié par la réponse de l'instrument sur l'axe. Le second terme est l'image de l'objet, qui correspond à la

2. Cette description n'est pas adaptée à la réponse à un point très près de l'axe, e.g. inférieur à $2\lambda/D$, mais ici cet effet est négligeable car les planètes effectivement visées ne sont pas si près de l'axe ($> 3\lambda/D$).

convolution entre l'objet et la réponse instrumentale hors axe. Le terme $\mathbf{b}_\lambda$ regroupe les différents bruits qui perturbent l'image : bruit de photons, bruit de détecteur, bruit de fond... Ces différents types de bruit sont chacun associés à une statistique différente, mais d'après le théorème de la limite centrale, toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable aléatoire gaussienne. Ainsi, il est raisonnable de supposer dans un tel cas que le bruit est gaussien et additif, comme cela l'a déjà été fait d'ailleurs [63].

2.1.3.2 Étalonnage de certains termes du modèle global

La réponse instrumentale hors axe $\mathbf{h}_\lambda^{nc}(\boldsymbol{\alpha})$ peut être et sera estimée. En pratique, il suffit de retirer le coronographe du plan focal et de pointer vers l'étoile d'intérêt qui fait alors office d'objet ponctuel. L'image enregistrée par le détecteur est la réponse instrumentale non coronographique $\mathbf{h}_\lambda^{nc}(\boldsymbol{\alpha})$. De même le flux de l'étoile f_λ^* ainsi imagée peut être estimé en intégrant l'intensité sur cette image non coronographique (en supposant que le flux de l'objet circumstellaire est négligeable par rapport au flux de l'étoile). Cependant, ces étalonnages ne seront pas suffisants pour être utilisés tels quels dans une inversion. En effet, utiliser une réponse instrumentale mal connue dans une inversion n'est pas sans répercussions sur l'estimation du paramètre d'intérêt c'est à dire l'objet (cf. Chapitre 2, Sous-section 2.2.1). Bien qu'imparfaites, ces pré-calibrations seront malgré tout mises à profit lors de l'initialisation lors de l'inversion. Les inconnues du problème sont donc les suivantes :

- L'objet d'intérêt $\mathbf{o}_\lambda(\boldsymbol{\alpha})$, ou la source circumstellaire ;
- Le flux de l'étoile f_λ^* ;
- Les paramètres physiques d'intérêt dont dépendent les termes $\mathbf{h}_\lambda^{nc}(\boldsymbol{\alpha})$ et $\mathbf{h}_\lambda^{c}(\boldsymbol{\alpha})$.

2.1.3.3 Identification des paramètres pertinents pour la formation d'image coronographique

Afin de décrire les termes $\mathbf{h}_\lambda^c$ et $\mathbf{h}_\lambda^{nc}$, il est important d'identifier les quantités physiques pertinentes pour l'imagerie à haut contraste depuis le sol. Nous avons vu dans le chapitre 1 que le champ de tavelures quasi-statique, et donc le « bruit » de tavelures quasi-statique associé, domine ce type d'images.

Les défauts instrumentaux, ou aberrations que je note $\boldsymbol{\delta}$, sont à l'origine de ce bruit de tavelures. Dans l'instrument SPHERE, une grande partie des optiques se situe dans des plans pupille, ou près de plans pupille. Les défauts de surface de ces optiques peuvent donc s'interpréter comme des défauts de phase $\boldsymbol{\phi}$ en plan pupille. Dans le cas où ces défauts sont situés dans des plans pupille, il est possible de se placer dans un cadre de propagation de Fourier dans lequel l'image d'un point source par une lentille est simplement la transformée de Fourier du champ dans la pupille. Dans ce cas, les défauts d'amplitudes sont supposés négligeables en regard des défauts de phase. Finalement, les défauts de phase en plan pupille sont des quantités physiques pertinentes pour le problème en présence.

Ensuite, lorsque l'on observe depuis le sol avec un système d'optique adaptative, même extrême, le Strehl final n'est pas de 100%. Dans le cas d'images longues poses, les résidus d'optique adaptative, que je note $\boldsymbol{\phi}_r$, se moyennent dans le temps pour former ce que l'on appelle un halo

d'optique adaptative, caractérisé par une quantité statistique qui est la fonction de structure résiduelle de la turbulence $\mathbf{D}_{\phi_r}$. Nous avons vu dans le chapitre 1 que ce halo peut difficilement se confondre avec une planète, car il est très lisse dans l'image finale (cf. 1.2.3.1). Cependant, il est suffisamment intense pour qu'il ait un effet dominant dans l'image finale. De plus, cette intensité est en mesure de perturber la détection et la mesure du flux de la planète. Ainsi, la fonction de structure des résidus turbulents est une autre quantité physique pertinente pour la formation d'image coronographique.

Les termes $\mathbf{h}_\lambda^{nc}(\boldsymbol{\alpha})$ et $\mathbf{h}_\lambda^{c}(\boldsymbol{\alpha})$ du modèle de l'équation 2.8 qui représentent respectivement les réponses instrumentales hors axe et sur l'axe vont donc dépendre des quantités physiques $\boldsymbol{\phi}$ et $\mathbf{D}_{\phi_r}$. S'il est relativement aisé d'estimer expérimentalement la réponse instrumentale hors axe $\mathbf{h}_\lambda^{nc}(\boldsymbol{\alpha})$, il n'en est pas de même en ce qui concerne la réponse instrumentale sur l'axe $\mathbf{h}_\lambda^{c}(\boldsymbol{\alpha})$. De plus, il est d'autant plus nécessaire de connaître cette dernière que l'étoile est beaucoup plus brillante que l'objet circumstellaire. C'est pourquoi le recours à une expression analytique de la réponse instrumentale sur l'axe, en fonction des paramètres $\mathbf{D}_{\phi_r}$ et des aberrations $\boldsymbol{\phi}$, est nécessaire.

2.1.3.4 Sélection d'un modèle existant d'imagerie coronographique paramétrique

Un modèle d'imagerie coronographique longue pose $\mathbf{h}_\lambda^{c}(\boldsymbol{\alpha})$ dépend directement des résidus de turbulence $\mathbf{D}_{\phi_r}$ et des erreurs de front d'onde optiques $\boldsymbol{\phi}$. Après de précédents travaux pour modéliser des FEP non coronographiques [64] et des FEP coronographiques [65, 66], Sauvage et al. [61, 62] ont proposé une expression analytique de réponse instrumentale coronographique longue pose pour un point source sur l'axe. Ce modèle distingue les aberrations situées en amont du coronographe, aussi appelée aberrations « *upstream* », de celles situées en aval du coronographe aussi appelées aberrations « *downstream* » [3].

Système considéré. Je considère ici le système optique de la figure 2.1, utilisé dans [62], composé d'un télescope, d'un coronographe parfait (cf. 2.1.3.4) et d'un plan dans lequel il y a un détecteur. Des aberrations statiques instrumentales sont introduites et séparées en deux contributions : les aberrations situées avant le coronographe $\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})$ (u pour *upstream*) dans le plan pupille du télescope $\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})$ et les aberrations situées après le coronographe $\boldsymbol{\phi}_d(\boldsymbol{\rho})$ (d pour *downstream*) dans le plan pupille de Lyot $\boldsymbol{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\rho})$. Les aberrations turbulentes $\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}, t)$, résidus de l'optique adaptative, sont introduites dans le plan pupille du télescope. $\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}, t)$ est supposé à moyenne nulle temporellement, stationnaire, ergodique et avec une fonction de structure $\mathbf{D}_{\phi_r}$ et une densité spectrale de puissance $\mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha})$.

Notations et hypothèses du modèle existant. Je considère les mêmes notations et hypothèses que l'article de Sauvage et al. [62]. Dans tout le document, les variables seront souvent omises pour plus de lisibilité. Elles seront cependant présentes lors des démonstrations un peu plus délicates.

3. Dans la suite du manuscrit, je privilégie les appellations *upstream* et *downstream*.

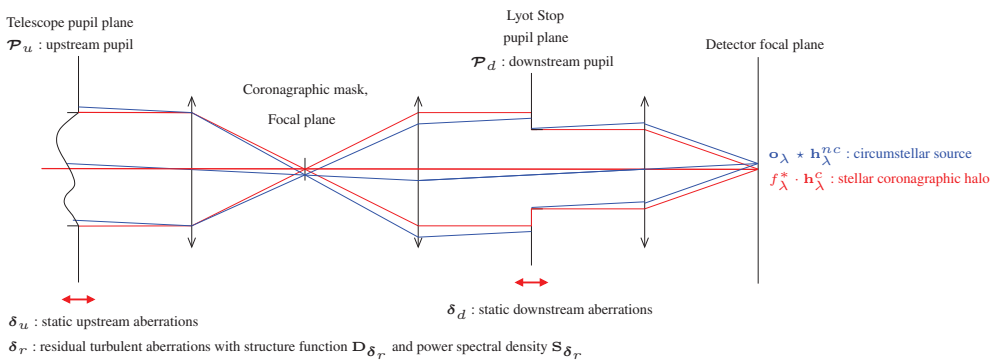


FIGURE 2.1 – **Schéma optique de principe d'un imageur coronographique.** Les aberrations statiques *upstream* et *downstream* , sont notées respectivement $\boldsymbol{\delta}_u$ and $\boldsymbol{\delta}_d$. $\mathcal{A}_i(\boldsymbol{\alpha})$ représente les amplitudes complexes dans le plan focal, alors que $\Psi_i(\boldsymbol{\rho})$ représente les amplitudes en plan pupille.

L'amplitude complexe dans le plan de la pupille d'entrée est donnée par :

$$\Psi_0\left(\boldsymbol{\rho}, t\right) = \boldsymbol{\mathcal{P}}_u\left(\boldsymbol{\rho}\right) e^{j\left[\phi_r(\boldsymbol{\rho},t)+\phi_u(\boldsymbol{\rho})\right]},$$

avec $\boldsymbol{\rho}$ la variable spatiale dans le plan de la pupille et $\boldsymbol{\mathcal{P}}_u\left(\boldsymbol{\rho}\right)$ la pupille du télescope. Je note $\Psi_u\left(\boldsymbol{\rho}\right)$ et $\Psi_{ud}\left(\boldsymbol{\rho}\right)$ les amplitudes complexes suivantes dans le plan de la pupille d'entrée :

$$\Psi_u\left(\boldsymbol{\rho}\right) = \boldsymbol{\mathcal{P}}_u\left(\boldsymbol{\rho}\right) e^{j\phi_u(\boldsymbol{\rho})},$$
$$\Psi_{ud}\left(\boldsymbol{\rho}\right) = \boldsymbol{\mathcal{P}}_u\left(\boldsymbol{\rho}\right) e^{j\left[\phi_u(\boldsymbol{\rho})+\phi_d(\boldsymbol{\rho})\right]}.$$

$\mathbf{A}_n\left(\boldsymbol{\alpha}, t\right)$ et $\mathbf{A}_d\left(\boldsymbol{\alpha}\right)$ sont les amplitudes complexes dans le plan focal du détecteur :

$$\mathbf{A}_n\left(\boldsymbol{\alpha}, t\right) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\left(\boldsymbol{\rho}\right) e^{j\phi_{tot}(\boldsymbol{\rho},t)}\right] \tag{2.9}$$
$$\mathbf{A}_d\left(\boldsymbol{\alpha}\right) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\left(\boldsymbol{\rho}\right) e^{j\phi_d(\boldsymbol{\rho})}\right], \tag{2.10}$$

avec $\boldsymbol{\alpha}$ la variable spatiale dans le plan focal, $\boldsymbol{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\rho})$ la pupille de Lyot et

$$\phi_{tot}(\boldsymbol{\rho}, t) = \phi_r(\boldsymbol{\rho}, t) + \phi_u(\boldsymbol{\rho}) + \phi_d(\boldsymbol{\rho}). \tag{2.11}$$

Je note $\mathbf{h}_n\left(\boldsymbol{\alpha}, t\right)$ et $\mathbf{h}_d\left(\boldsymbol{\alpha}\right)$ les réponses impulsionnelles suivantes dans le plan focal du détecteur :

$$\mathbf{h}_n\left(\boldsymbol{\alpha}, t\right) = \mathbf{A}_n\left(\boldsymbol{\alpha}, t\right) \mathbf{A}_n^*\left(\boldsymbol{\alpha}, t\right), \tag{2.12}$$
$$\mathbf{h}_d\left(\boldsymbol{\alpha}\right) = \mathbf{A}_d\left(\boldsymbol{\alpha}\right) \mathbf{A}_d^*\left(\boldsymbol{\alpha}\right). \tag{2.13}$$

Je définis la surface S, comme étant la surface de la pupille *upstream* :

$$S = \iint \boldsymbol{\mathcal{P}}_u\left(\boldsymbol{\rho}\right) \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_u}(0).$$

La fonction de structure de la phase turbulente résiduelle est définie de la façon suivante :

$$\mathbf{D}_{\phi_r}\left(\boldsymbol{\rho}\right) = \left\langle \left[\phi_r\left(\boldsymbol{\rho}'\right) - \phi_r\left(\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{\rho}\right)\right]^2 \right\rangle_t.$$

Notion de coronographe parfait. Sauvage (2007, 2010) considère le cas d'un coronographe idéal, ou coronographe parfait, qui effectue au niveau du plan focal la soustraction des effets diffractifs du télescope [61, 62]. Le coronographe parfait est ainsi défini comme un composant optique qui soustrait une tache d'Airy centrée au champ électromagnétique. L'équation donnant le champ électromagnétique en sortie du coronographe parfait est donc la suivante :

$$\mathbf{h}^c = \left|\mathbf{A}_n\left(\boldsymbol{\alpha}, t\right) - \eta_0(t)\mathbf{A}_d\left(\boldsymbol{\alpha}\right)\right|^2, \tag{2.14}$$

où $\eta_0(t)$ représente la projection du champ entrant sur une tâche d'Airy :

$$\eta_0(t) = \frac{1}{S}\iint_S \Psi_0^*\left(\boldsymbol{\rho}, t\right)\boldsymbol{\mathcal{P}}_u\left(\boldsymbol{\rho}\right)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} = \left\langle \Psi_0\left(\boldsymbol{\rho}, t\right)\left|\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\right.\right\rangle. \tag{2.15}$$

Finalement, l'énergie cohérente que l'on retire est définie par le rapport de Strehl instantané [67].

Expression analytique. La mise en œuvre du calcul aboutissant à l'expression analytique longue pose exacte qui modélise les images en sortie de l'instrument, a été réalisée par Sauvage (2007, 2010). Dans sa thèse [61], il aboutit à l'expression analytique suivante :

$$\mathbf{h}^c = \mathbf{h}_n + \left\langle\left|\eta_0\right|^2\right\rangle_t \mathbf{h}_d - \frac{2}{S}\Re\left\{\mathrm{TF}^{-1}\left[\Psi_{ud}\left(e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}} \star \Psi_u^*\right)\right]\mathbf{A}_d^*\right\}. \tag{2.16}$$

Cette expression longue pose, calculée sans développement limité, est exacte sous réserve de l'approximation de stationnarité. Elle dépend des quantités physiques pertinentes introduites précédemment, à savoir les aberrations statiques ($\boldsymbol{\phi}_u$ et $\boldsymbol{\phi}_d$) et les aberrations résiduelles turbulentes via la fonction de structure turbulente $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}$.

Le premier terme de l'équation 2.16, $\mathbf{h}_n$, représente la FEP non coronographique $\mathbf{h}_\lambda^{nc}\left(\boldsymbol{\alpha}\right)$. Sa transformée de Fourier $\tilde{\mathbf{h}}_\lambda^{nc}\left(\boldsymbol{\alpha}\right)$ s'exprime en fonction des caractéristiques statiques du télescope et de l'instrument (pupille, aberrations optiques) ainsi que des paramètres de la turbulence et de l'optique adaptative (fonction de structure de la phase résiduelle) :

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{h}}_n &= \tilde{\mathbf{h}}_\lambda^{nc}\\ &= \left[\boldsymbol{\mathcal{P}}_d e^{j(\boldsymbol{\phi}_u+\boldsymbol{\phi}_d)} \otimes \boldsymbol{\mathcal{P}}_d e^{j(\boldsymbol{\phi}_u+\boldsymbol{\phi}_d)}\right] \times e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\\ &= \mathrm{TF}\left\{\left|\mathrm{TF}^{-1}\left[\boldsymbol{\mathcal{P}}_d e^{j(\boldsymbol{\phi}_u+\boldsymbol{\phi}_d)}\right]\right|^2\right\} \times e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Le deuxième terme de l'équation 2.16, représente la FEP non coronographique en présence des seules aberrations *downstream*, $\mathbf{h}_d$, en facteur du coefficient de Strehl $\langle\eta_0(t)^2\rangle$ calculé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\left\langle\eta_0(t)^2\right\rangle_t &= \left\langle\left\langle\Psi_0\left(\boldsymbol{\rho}, t\right)\left|\boldsymbol{\mathcal{P}}_u\left(\boldsymbol{\rho}\right)\right.\right\rangle\left\langle\Psi_0\left(\boldsymbol{\rho}, t\right)\left|\boldsymbol{\mathcal{P}}_u\left(\boldsymbol{\rho}\right)\right.\right\rangle^*\right\rangle_t\\ &= \frac{1}{S^2}\iint_{\boldsymbol{\rho}}\iint_{\boldsymbol{\rho}'} \boldsymbol{\mathcal{P}}_u^2\left(\boldsymbol{\rho}\right)\boldsymbol{\mathcal{P}}_u^{2*}\left(\boldsymbol{\rho}'\right)\left\langle e^{-j[\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho},t)+\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})]}e^{j[\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}',t)+\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}')]}\right\rangle_t \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\\ &= \frac{1}{S^2}\iint_{\boldsymbol{\rho}}\iint_{\boldsymbol{\rho}'} \boldsymbol{\mathcal{P}}_u^2(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\mathcal{P}}_u^{2*}\left(\boldsymbol{\rho}'\right)e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho})+j[\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})-\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}')]}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\\ &= \frac{1}{S^2}\iint_{\boldsymbol{\rho}'}\left(e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}} \star \Psi_u\boldsymbol{\mathcal{P}}_u^2\right)\left(\boldsymbol{\rho}'\right)\cdot\Psi_u^*\left(\boldsymbol{\rho}'\right)\boldsymbol{\mathcal{P}}_u^2\left(\boldsymbol{\rho}'\right)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'.\end{aligned}$$

Le dernier terme de l'équation 2.16 est plus complexe et fait intervenir les trois paramètres $\boldsymbol{\phi}_u$, $\boldsymbol{\phi}_d$, $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}$.

Il est intéressant de noter que, pour la réponse non coronographique (cf. Équation (2.17), $\boldsymbol{\phi}_u$ et $\boldsymbol{\phi}_d$ jouent le même rôle. Il n'en est pas de même pour la réponse coronographique : seules les aberrations situées après le coronographe interviennent dans le deuxième terme de l'Équation (2.16 $\left\langle |\eta_0|^2 \right\rangle_t \mathbf{h}_d$. Enfin, les aberrations *upstream* et *downstream* interfèrent de manière cohérente dans le troisième terme de cette même équation, via Ψ_u^* et $\mathbf{A}_d^*$.

2.2 Éléments de traitement d'image

Dans le chapitre 1, j'ai mentionné les différentes méthodes utilisées pour le traitement d'images multispectrales dans le domaine du haut contraste. Si une grande partie d'entre elles se basent sur des ajustements de polynômes, peu reposent sur la résolution d'un problème inverse. La méthode proposée par Burke [54] est fondée sur la résolution d'un tel problème. Il ajuste les paramètres d'un modèle d'imagerie non coronographique via la méthode du maximum de vraisemblance. Dans cette section, je décris cette méthode et ses limites. Je propose d'utiliser un critère bayésien qui offre d'autres possibilités et je décris les ingrédients d'une inversion bayésienne. Le lecteur qui souhaite plus d'informations sur le sujet trouvera une introduction aux problèmes inverses appliquée à la haute résolution angulaire dans [68]. L'application de l'approche bayésienne pour les problèmes inverses fait l'objet de [69] tandis que [70] aborde cette approche dans le cadre de la séparation de sources.

2.2.1 Du modèle direct au problème inverse

Dans la section 2.1.3, j'ai décrit un modèle global d'imagerie coronographique dépendant de deux contributions : l'objet $\mathbf{o}_\lambda$ que l'on cherche à imager et la réponse instrumentale qui elle-même dépend de plusieurs paramètres f_λ^*, $\boldsymbol{\phi}_u$, $\boldsymbol{\phi}_d$, $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}$ (cf. Équation 2.8). Dans le cas où ces paramètres sont connus, le modèle permet de simuler des images coronographiques, tout comme un instrument produit des images. Ceci constitue un problème direct qui aux paramètres du modèle associe des données $\mathbf{i}_\lambda$.

Dans le cas présent, j'ai accès aux données (simulées ou instrumentales) mais les paramètres me sont inconnus. La notion de problème inverse correspond à l'idée d'inverser la loi physique qui décrit la formation des données afin d'accéder indirectement aux quantités auxquelles on s'intéresse. Il s'agit alors d'estimer conjointement l'objet $\mathbf{o}_\lambda$ et les paramètres f_λ^*, $\boldsymbol{\phi}_u$, $\boldsymbol{\phi}_d$, $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}$ à partir des données $\mathbf{i}_\lambda$ afin de distinguer les planètes des tavelures dans l'image.

Cette notion de problème inverse est aujourd'hui très répandue en physique et permet de résoudre un grand nombre de problèmes d'imagerie (tomographie, déconvolution...). Cependant dans la plupart des cas, c'est un problème difficile à résoudre car ce dernier est systématiquement mal posé. Un problème est bien posé si la solution vérifie les conditions de Hadamard : l'existence, l'unicité et la stabilité [4]. Si la solution ne vérifie pas ces conditions, le problème est

4. Une solution est stable si elle dépend continûment des données : une petite variation des données ne doit

dit mal posé et l'inversion est « instable » au sens où l'inévitable bruit de mesure est amplifié de manière non contrôlée lors de l'inversion, et conduit à une solution inacceptable [68]. Bien qu'intuitives, les méthodes d'inversion dites « classiques » que sont le filtre inverse, les moindres carrés ou encore le maximum de vraisemblance, utilisé par Burke, sont des méthodes instables en restauration d'images, quand le nombre d'inconnues est supérieur au nombre de mesures.

La méthode du maximum de vraisemblance repose sur la maximisation de la vraisemblance $\mathscr{L}(\mathbf{i}_\lambda|x)$. Ce type d'estimateur repose uniquement sur les données $\mathbf{i}_\lambda$. Il peut typiquement être utilisé dans les cas où le bruit est faible et/ou le nombre de paramètres à estimer est plus petit que le nombre d'informations dont on dispose.

En déconvolution d'images, le problème est mal posé et l'estimateur du maximum de vraisemblance n'est pas adapté. Dans le cas du traitement d'images coronographiques, le problème est d'autant plus mal posé que la déconvolution est myope, i.e. la réponse instrumentale n'est pas connue. Il est alors nécessaire de recourir à des méthodes d'inversion dites « régularisées ». Ces méthodes permettent la prise en compte d'informations supplémentaires sur l'objet (via une régularisation sur $\mathbf{o}_\lambda$) et sur le système (via des régularisations sur les paramètres de la réponse instrumentale) visant à imposer une certaine régularité (contrainte sur la valeur des pixels, sur le signe, etc) à la solution du problème. Le maximum *a posteriori* (MAP) fait partie de ces méthodes régularisées.

2.2.2 Méthode du maximum *a posteriori*

Le maximum *a posteriori* est une méthode simple qui donne de très bons résultats aux problèmes de déconvolution [71, 72, 63, 69, 73, 74] ou encore de restauration d'images interférométriques multispectrales [75]. Cette méthode fait partie de la famille des méthodes d'inversion bayésiennes. Elle permet de prendre en compte conjointement les mesures $\mathbf{i}_\lambda$ apportées par l'observation et l'information disponible *a priori* sur les grandeurs d'intérêts (ou paramètres du problème). L'estimation bayésienne utilise un formalisme probabiliste. On assigne des distributions de probabilité pour décrire les valeurs possibles des différents paramètres du modèle. Ces distributions décrivent tout ce que l'on sait à propos des valeurs possibles de ces paramètres [70].

La règle de Bayes donne ainsi une expression de la vraisemblance *a posteriori* $\mathscr{L}(x|\mathbf{i}_\lambda)$ d'un paramètre d'intérêt noté x en fonction de la vraisemblance des données $\mathscr{L}(\mathbf{i}_\lambda|x)$ et d'une loi *a priori* $\mathscr{L}(x)$:

$$\mathscr{L}(x|\mathbf{i}_\lambda) = \frac{\mathscr{L}(\mathbf{i}_\lambda|x) \times \mathscr{L}(x)}{\mathscr{L}(\mathbf{i}_\lambda)} \propto \mathscr{L}(\mathbf{i}_\lambda|x) \times \mathscr{L}(x).$$

L'estimateur MAP du paramètre d'intérêt $\hat{x}_{\text{MAP}}$ maximise la vraisemblance *a posteriori* :

$$\hat{x}_{\text{MAP}} = \arg\max \left[\mathscr{L}(\mathbf{i}_\lambda|x) \times \mathscr{L}(x)\right],$$

ce qui est équivalent à minimiser l'opposé de son logarithme :

$$J_{\text{MAP}}(x) = -\ln\mathscr{L}(\mathbf{i}_\lambda|x) - \ln\mathscr{L}(x) = J_{\text{MV}}(x) + R(x). \tag{2.18}$$

entraîner qu'une petite variation de la solution.

L'estimateur du maximum *a posteriori* $J_{\text{MAP}}(x)$ est donc la somme de deux termes : $J_{\text{MV}}(x)$, le critère d'attache aux données qui correspond également au critère de maximum de vraisemblance et $R(x)$, est un terme de régularisation (ou de pénalisation) qui traduit la fidélité aux connaissances *a priori*. La solution du maximum *a posteriori* réalise donc un compromis entre fidélité aux données et fidélité à l'*a priori*. Ce compromis est généralement ajusté par la présence d'un facteur multiplicatif appelé coefficient de régularisation ou hyperparamètre. Je reviens sur la difficulté du choix des hyperparamètres dans les chapitres 3 et 5.

Pour mettre en œuvre la méthode bayésienne, trois ingrédients sont nécessaires :

- Tout d'abord, un modèle paramétrique de formation des données. Il faut donc commencer par choisir un modèle et identifier ses paramètres. J'ai discuté d'un tel modèle dans la section précédente (cf. 2.1.3) ;
- Ensuite il faut disposer d'un estimateur ou critère de qualité à minimiser afin d'ajuster les paramètres de manière à ce que le modèle ressemble le plus aux données. Cet estimateur doit prendre en compte les informations *a priori* dont on dispose afin de contraindre le problème. Dans ma thèse, je choisis l'estimateur MAP ;
- Enfin, il s'agit de minimiser le critère défini par le choix de l'estimateur. La minimisation n'a que dans très peu de cas pratiques une solution analytique. Dans la plupart des cas, un optimiseur doit être utilisé afin d'explorer numériquement le comportement de cette fonction de coût dans l'espace des paramètres (cf. 2.2.3).

En offrant un tel formalisme, cette méthode permet ainsi de se focaliser sur les aspects : choix du modèle et des informations *a priori* à utiliser, faire des approximations utiles et sélectionner un algorithme approprié pour la descente de critère. Pour minimiser un tel critère, il faut des outils numériques car ce dernier ne peut pas être résolu analytiquement. Pour cela on utilise des méthodes de descente de critère.

2.2.3 Méthodes de descente de critères

L'objectif des méthodes de descente de critère est de trouver l'extremum d'un critère (fonction continue de préférence convexe). Pour cela, de nombreuses méthodes ont été développées (2.2.3.1). Il faut donc faire un choix adapté au problème à résoudre. J'ai choisi d'utiliser une méthode de descente locale (2.2.3.2). Je décris ici la méthode utilisée dans cette thèse et j'explique les raisons de mon choix pour cette méthode 2.2.3.3. Le lecteur désireux d'approfondir le sujet est trouvera de nombreuses informations sur la minimisation de critères dans [76].

2.2.3.1 Problématique

L'objectif d'une méthode de descente de critère est de minimiser un critère qui est une fonction d'un certain nombre de paramètres. Le but est donc de trouver les paramètres qui minimisent la fonction.

On distingue deux types de méthode de minimisation : les méthodes globales et les méthodes locales. Les méthodes globales, de type algorithmes génétiques ou recuits simulés sont des méthodes très chères, dans le sens où la vitesse d'exécution est très lente. Les méthodes locales utilisent des expressions analytiques de gradients. Elles sont donc très sensibles aux minima locaux

et au point de départ comme on peut le voir sur la figure 2.2. La performance de ces méthodes locales dépend donc de la forme du critère et donc du modèle de formation d'image utilisé. Or, le modèle d'imagerie coronographique de l'équation 2.16 est extrêmement non linéaire, ce qui risque d'engendrer de nombreux minima locaux et donc des difficultés de convergence.

Malgré cela, mon choix s'est porté sur une méthode de descente locale pour des raisons de temps de calcul. Un des enjeux de ce travail est donc de développer des stratégies de minimisation afin de contourner les minimas locaux [5].

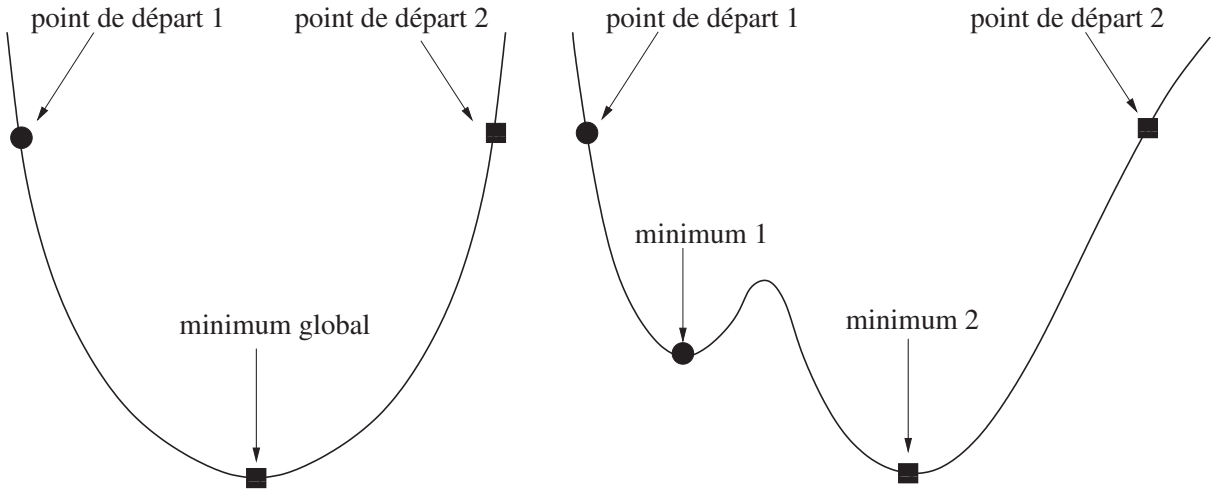


FIGURE 2.2 – **Exemples de critères à 1 minimum [gauche] et à plusieurs minima [droite].**

2.2.3.2 Méthodes de minimisation locales

Je décris dans cette section différentes méthodes de minimisation locales de fonction fondées sur le calcul du gradient. Parmi elles, la méthode de descente de critère par calcul de gradient est une méthode incontournable car elle est simple à mettre en œuvre et elle a l'avantage d'être relativement rapide.

Dans ce type de méthode, le critère à minimiser doit être une fonction différentiable. Les méthodes d'ordre 1 reposent sur un développement du critère limité au premier ordre à chaque itération et ce par rapport à chaque variable en présence. Elles utilisent le critère J et son gradient ∇J, avec :

$$\nabla J = \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

On peut citer par exemple :

5. C'est l'objet du chapitre 5.

– La méthode du gradient simple. Elle converge systématiquement vers un minimum local et en pratique très lentement ;
– La méthode du gradient conjugué est bien plus rapide que la méthode des gradients simples. Elle peut s'appliquer aux problèmes de très grande taille tels que la restauration d'images.

Les méthodes d'ordre 2 utilisent, en plus du critère et de sa dérivée, le Hessien $\frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j}$. On distingue :
– Les méthodes de Newton qui utilisent beaucoup de mémoire et sont instables.
– Les méthodes dites de quasi-Newton (Levenberg-Marquardt, BFGS, VMLM...). Ces méthodes combinent les avantages des méthodes du gradient et de Newton. Le principe est de générer à chaque itération une matrice qui tende vers l'inverse du Hessien, sans jamais à avoir à inverser de matrice. Il existe des versions à mémoire limitée : la méthode VMLM (*Variable Metric with Limited Memory*) en fait partie. Plus rapide que les méthodes de gradients conjugués, elles permettent de traiter des problèmes de grande taille [76].

Au vu de ces éléments, j'ai choisi d'utiliser une méthode de quasi-Newton qui converge plus rapidement que la méthode des gradients conjugués.

2.2.3.3 Choix de l'optimiseur VMLM-B

Pour minimiser le critère, j'ai choisi la méthode VMLM-B pour *Variable Metric with Limited Memory and Bounds* [72] [6]. Adaptée de la BFGS *variable metric method* [77], elle permet de résoudre des problèmes avec un grand nombre de paramètres. Contrairement à la méthode BFGS, la méthode VMLM-B offre la possibilité de contraindre ces paramètres (positivité, limites aux bornes, etc). Par conséquent, cette méthode a été identifiée comme étant un bon outil pour de nombreux problèmes d'inversion, en haute résolution angulaire notamment [78, 79]. Elle nécessite cependant de posséder une expression analytique du gradient du critère par rapport aux paramètres à estimer.

2.3 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, j'ai introduit les notations utiles et les notions de base sur la formation d'image multispectrale. Les notions plus poussées sur la formation d'image ont également été introduites comme la formation d'image corrigée par optique adaptative. J'ai ensuite décrit un modèle global de formation d'image coronographique qui sépare réponses instrumentales $\mathbf{h}_\lambda^c$ sur l'axe et hors axe $\mathbf{h}_\lambda^{nc}$. Le besoin d'un modèle paramétrique d'une réponse instrumentale sur l'axe a été démontré. Un tel modèle ayant été développé lors d'une précédente thèse, mon idée a été de l'utiliser. Ce modèle décrit précisément la formation d'image coronographique longue pose corrigée par optique adaptative. Il paramétrise les tavelures dans l'image finale par les aberrations quasi-statiques de l'instrument et différencie les aberrations quasi-statiques situées en amont (« *upstream* ») ϕ_u de celles situées en aval ϕ_d (« *downstream* ») du coronographe. Il prend

6. http://www-obs.univ-lyon1.fr/labo/perso/eric.thiebaut/optimpack.html

également comme paramètre la fonction de structure $\mathbf{D}_{\phi_r}$ des aberrations turbulentes résiduelles non corrigées par l'optique adaptative.

Enfin, quelques notions indispensables sur les techniques de traitement d'image ont été rappelées. En particulier, la méthode du maximum *a posteriori* est une méthode bayésienne d'inversion qui offre un cadre statistique intéressant. Elle repose sur la minimisation d'un critère formé d'un terme d'attache aux données et de termes de régularisation qui se révèlent utiles pour contraindre le problème mal posé de déconvolution. Un algorithme d'optimisation est nécessaire pour minimiser ce critère dans le cas où la solution n'est pas analytique. Dans ce cas, la minimisation dépend de la méthode utilisée mais également de la forme du critère. Plus ce dernier est non-convexe, plus il est difficile à minimiser à cause de la présence de minima locaux. Comme le critère dépend du modèle de formation d'image, il est d'autant plus difficile à minimiser que le modèle de formation d'image est complexe. Or le modèle de formation d'image coronographique étudié est fortement non-linéaire. On comprend donc que ce modèle d'imagerie coronographique risque d'être très difficilement utilisable en l'état. Un des enjeux de ce travail est donc de développer des stratégies de minimisation afin de contourner les minimas locaux.

À ce stade, j'ai rappelé les outils nécessaires pour la compréhension de mon travail de thèse qui est décrit dans les trois prochains chapitres. Le chapitre suivant est consacré au développement d'une méthode d'inversion qui repose sur ce modèle d'imagerie coronographique afin d'estimer conjointement le champ de tavelures et l'objet.

Chapitre 3

Développement d'une méthode d'estimation conjointe des aberrations et de l'objet d'intérêt

Ce chapitre décrit les différentes étapes de développement d'une méthode d'estimation conjointe des aberrations et de l'objet d'intérêt. Dans la section 3.1, je définis un critère de qualité à minimiser dépendant du modèle d'imagerie coronographique choisi dans le chapitre 2. Les inconnues à estimer sont les paramètres de ce modèle, c'est à dire le flux de l'étoile f^*, la fonction de structure des aberrations turbulentes résiduelles $\mathbf{D}_{\phi_r}$ et les aberrations quasi-statiques situées en amont $\boldsymbol{\phi}_u$ et en aval $\boldsymbol{\phi}_d$ du coronographe. La seconde étape est le choix d'un schéma d'optimisation pour obtenir les valeurs numériques optimales des paramètres qui mènent au critère minimum (3.2). La troisième et dernière étape est la mise en œuvre de ce schéma d'optimisation via un algorithme de minimisation (3.3).

3.1 Critère à minimiser dans une approche bayésienne

J'ai choisi une méthode d'inversion bayésienne décrite dans le chapitre 2 qui, pour rappel, inclut les ingrédients suivants :

- Un modèle direct paramétrique de formation d'image. Ceci a fait l'objet du chapitre 2 ;
- Un critère de qualité à minimiser pour optimiser les valeurs des paramètres à estimer. Dans le cas bayésien, ce critère est un maximum *a posteriori*. Il est composé d'un terme d'attache aux données et de différents termes de régularisation permettant de prendre en compte les informations *a priori* ;
- Un algorithme de minimisation du critère de qualité.

La méthode bayésienne offre la possibilité d'utiliser toutes les informations *a priori* dont on dispose pour contraindre le problème.

Dans cette section, je décris tout d'abord le critère à minimiser (3.1.1). Une inconnue parmi les paramètres à estimer, le flux de l'étoile f^*, peut être estimée de manière analytique. Je dérive son expression dans 3.1.2. Je reviens ensuite sur les difficultés de minimisation d'un tel critère (3.1.3) et je parcours les outils, i.e, paramétrisation des inconnues (3.1.3.1) et termes de régularisation (3.1.3.2) qui vont me permettre de contraindre le problème.

3.1.1 Définition du critère à minimiser

Résoudre le problème inverse consiste à trouver les inconnues : d'une part les caractéristiques de l'objet $\mathbf{o}\left(\boldsymbol{\alpha},\lambda\right)=\left\{\mathbf{o}_\lambda\left(\boldsymbol{\alpha}\right)\right\}_\lambda$ et d'autre part les paramètres décrivant le champ de tavelures $\mathbf{h}^c_\lambda$, qui sont les plus vraisemblables sachant les données $\mathbf{i}_\lambda$ et les informations *a priori* que l'on a sur les inconnues. Cela revient à minimiser le critère suivant :

$$\begin{aligned} J_{MAP}\left(\mathbf{o},f^*,\boldsymbol{\phi}_u,\boldsymbol{\phi}_d,\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\right) = & \sum_\lambda\sum_{\boldsymbol{\alpha}}\frac{1}{2\sigma^2_{b,\lambda}\left(\boldsymbol{\alpha}\right)}|\mathbf{i}_\lambda - f^*_\lambda\cdot\mathbf{h}^c_\lambda(\boldsymbol{\phi}_u,\boldsymbol{\phi}_d,\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}) - \mathbf{o}_\lambda\star h^{nc}_\lambda(\boldsymbol{\phi}_u,\boldsymbol{\phi}_d,\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r})|^2\left(\boldsymbol{\alpha}\right) \\ & + R_{\mathbf{o}} + R_{f^*} + R_{\boldsymbol{\phi}} + \cdots \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ce critère est la somme de deux termes (cf. Équation 2.18) : le terme d'attache aux données, qui mesure l'écart entre les données et le modèle de formation des données, et une liste non-exhaustive de termes de régularisation sur nos inconnues $R_{\mathbf{o}}$, R_{f^*}, $R_{\boldsymbol{\phi}}$. Cette recherche d'objet se fonde ainsi globalement, sur l'ensemble des données disponibles à la fois, et en particulier sur la somme des images à toutes les longueurs d'onde. La variance du bruit $\sigma^2_{b,\lambda}$ est supposée connue dans un premier temps et peut par ailleurs être estimée comme $\hat{\sigma}^2_{b,\lambda}=\hat{\sigma}^2_{ph,\lambda}+\hat{\sigma}^2_{det,\lambda}$ [63] où $\hat{\sigma}^2_{ph,\lambda}=\max(\mathbf{i}_\lambda,0)$ est le bruit de photons et $\hat{\sigma}^2_{det,\lambda}$ est le bruit de détecteur étalonné à l'avance.

Valeur théorique minimum du terme d'attache aux données. Je considère le terme d'attache aux données du critère à minimiser de l'équation 3.1 . Dans le cas où l'estimation est parfaite, i.e. $\mathbf{i}_\lambda - f^*_\lambda\cdot\mathbf{h}^c_\lambda(\boldsymbol{\phi}_u,\boldsymbol{\phi}_d,\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}) - \mathbf{o}_\lambda\star\mathbf{h}^{nc}_\lambda(\boldsymbol{\phi}_u,\boldsymbol{\phi}_d,\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}) = \sigma_{b,\lambda}$, seul reste le bruit contenu dans l'image :

$$\begin{aligned} J_{\mathrm{MV}}(\mathbf{o},f^*,\boldsymbol{\phi}_u,\boldsymbol{\phi}_d,\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}) &= \sum_\lambda\sum_{\boldsymbol{\alpha}}\frac{1}{2\sigma^2_{b,\lambda}\left(\boldsymbol{\alpha}\right)}|\sigma_{b,\lambda}|^2\left(\boldsymbol{\alpha}\right) \\ &= \sum_\lambda\sum_{\boldsymbol{\alpha}}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times N_p^2\times N_\lambda, \end{aligned}$$

avec N_p^2 le nombre de pixels des tableaux et N_λ, le nombre de longueurs d'onde utilisées pour l'inversion.

3.1.2 Calcul analytique du flux de l'étoile

3.1.2.1 Calcul analytique du flux de l'étoile au sens du maximum de vraisemblance

Le critère est quadratique par rapport au flux de l'étoile f_λ^*, il peut donc être estimé analytiquement à chaque longueur d'onde, tous les paramètres étant fixés par ailleurs. Le flux de l'étoile à chaque longueur d'onde peut être estimé à partir du critère, pourvu que la régularisation sur le flux soit quadratique ou absente. Dans ce dernier cas, la solution de maximum de vraisemblance étant donnée par $\frac{\partial J}{\partial f_\lambda^*} = 0$, j'obtiens :

$$\hat{f}_\lambda^* \left(\mathbf{o}_\lambda, \boldsymbol{\phi}_u, \boldsymbol{\phi}_d, \mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\right) = \frac{\sum_{\boldsymbol{\alpha}} \left[\mathbf{h}_\lambda^c \left(\mathbf{i}_\lambda - \mathbf{o}_\lambda \star \mathbf{h}_\lambda^{nc}\right) / \sigma_{n,\lambda}^2\right](\boldsymbol{\alpha})}{\sum_{\boldsymbol{\alpha}} \left[\left(\mathbf{h}_\lambda^c\right)^2 / \sigma_{n,\lambda}^2\right](\boldsymbol{\alpha})}. \tag{3.2}$$

Grâce à cette expression analytique, le critère à minimiser est celui de l'Eq. (3.1) avec f_λ^* remplacé par $\hat{f}_\lambda^*$, qui sera noté $J_{\text{MAP}}\left(\mathbf{o}, \boldsymbol{\phi}_u, \boldsymbol{\phi}_d, \mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\right)$, avec $\mathbf{o}_\lambda$, $\boldsymbol{\phi}_u$, $\boldsymbol{\phi}_d$, $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}$ les seules inconnues à estimer numériquement. Je reviendrais sur l'estimation de ce flux dans le chapitre 5.

Cependant, cette solution pose des problèmes lorsque $\mathbf{h}_\lambda^c$ devient très petit, c'est le cas par exemple lorsque la phase *upstream* est très faible. Dans ce cas, le flux de l'étoile estimé tend vers des valeurs non physiques. C'est pourquoi, il est possible, comme proposé ci-dessous, d'introduire un terme de régularisation permettant de gérer numériquement tous les cas, notamment celui des faibles phases.

3.1.2.2 Calcul analytique du flux de l'étoile avec régularisation

L'idée est d'utiliser un *a priori* sur le flux de l'étoile. La vraisemblance *a posteriori* du flux s'écrit :

$$\mathscr{L}\left(f_\lambda^* | \mathbf{i}'_\lambda, \boldsymbol{\phi}_u, \boldsymbol{\phi}_d, \mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\right) \propto \underbrace{\mathscr{L}\left(\mathbf{i}'_\lambda | f_\lambda^*, \boldsymbol{\phi}_u, \boldsymbol{\phi}_d, \mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\right)}_{\text{Vraisemblance des données}} \times \underbrace{\mathscr{L}\left(f_\lambda^*\right)}_{\text{Loi } a \text{ priori sur le flux}},$$

avec $\mathbf{i}'_\lambda$ les données réduites telles que : $\mathbf{i}' = \mathbf{i}_\lambda - \mathbf{o}_\lambda \star \mathbf{h}_\lambda^{nc}(\boldsymbol{\phi}_u, \boldsymbol{\phi}_d, \mathbf{D}_{\phi_r})$. Le nouveau critère à minimiser devient :

$$\begin{aligned} J'_{\text{MAP}} &= -\ln\left[\mathscr{L}\left(\mathbf{i}'_\lambda | f_\lambda^*, \boldsymbol{\phi}_u, \boldsymbol{\phi}_d, \mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\right)\right] - \ln\left[\mathscr{L}\left(f_\lambda^*\right)\right] \\ &= -\sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{\mathbf{h}_\lambda^c}{\sigma_{b,\lambda}^2}\left(\mathbf{i}'_\lambda - f_\lambda^* \cdot \mathbf{h}_\lambda^c\right) - \ln\left[\mathscr{L}\left(f_\lambda^*\right)\right]. \end{aligned}$$

Reste à définir une loi *a priori* qui rende compte du comportement du flux de l'étoile.

***A priori* sur la valeur du flux de l'étoile.** Il faut garder à l'esprit que l'on souhaite trouver une solution analytique au problème, ainsi, il est nécessaire que le critère soit quadratique. L'ancien critère était quadratique, pour que le nouveau critère soit quadratique, il faut donc que $-\ln\left[\mathscr{L}\left(f_\lambda^*\right)\right]$ soit quadratique (car chaque bout du critère doit être quadratique). Ceci implique que $\mathscr{L}\left(f_\lambda^*\right)$ doit être de forme gaussienne (en e^{-X^2}). Supposons alors que le flux de l'étoile

est en moyenne égal à f_0 avec un écart-type de σ_f ; alors la loi de probabilité *a priori* s'écrit $\mathscr{L}\left(f_\lambda^*\right) \propto \exp\left[-\frac{\left(f_\lambda^*-f_0\right)^2}{2\sigma_f^2}\right]$ et le nouveau critère devient :

$$J'_{\text{MAP}} = \sum_\lambda \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{1}{2\sigma_{b,\lambda}^2\left(\boldsymbol{\alpha}\right)} |\mathbf{i}'_\lambda - f_\lambda^* \cdot \mathbf{h}_\lambda^c|^2 + \frac{\left(f_\lambda^* - f_0\right)^2}{2\sigma_f^2}.$$

Nouveau calcul du flux de l'étoile. La dérivée du critère par rapport au flux est la suivante :

$$\frac{\partial J_{\text{MAP}}}{\partial f_\lambda^*} = -\sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{\mathbf{h}_\lambda^c}{\sigma_{b,\lambda}^2}\left(\mathbf{i}'_\lambda - f_\lambda^* \cdot \mathbf{h}_\lambda^c\right) + \frac{f_\lambda^* - f_0}{\sigma_f^2}.$$

Comme précédemment, en prenant $\frac{\partial J_{\text{MAP}}}{\partial f_\lambda^*} = 0$, on trouve le flux de l'étoile analytique :

$$\hat{f}_\lambda^* = \frac{\frac{f_0}{\sigma_f^2} + \sum_{x,y} w_\lambda \mathbf{h}_\lambda^c \mathbf{i}_\lambda}{\sum_{\boldsymbol{\alpha}} w_\lambda \left(\mathbf{h}_\lambda^c\right)^2 + \frac{1}{\sigma_f^2}},$$

avec, pour simplifier les notations, $w_\lambda = \frac{1}{\sigma_{b,\lambda}^2}$. Ainsi :

- Si $\sigma_f \to 0$, alors $\hat{f}_\lambda^* \to f_0$. Dans ce cas l'information *a priori* apportée est très forte ;
- Si $\sigma_f \to \infty$, alors $\hat{f}_\lambda^* \to \hat{f}_{\lambda,\text{MV}}^*$. Dans ce cas l'*a priori* est non informatif, on retrouve le cas non régularisé de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Pour éviter la divergence de $\hat{f}_\lambda^*$ (division par zéro) tout en ne biaisant pas en pratique l'estimation du flux, on peut prendre σ_f grand, par exemple $\sigma_f = 10$ ou $100 \times f_0$ et f_0 donné par le flux mesuré et le Strehl. Pour un tel σ_f, il est d'ailleurs tout a fait possible de prendre $f_0 = 0$, ce que j'ai fait en pratique.

3.1.3 Conditionnement du problème

Le conditionnement du problème est fondé sur la redondance d'informations offerte par l'imagerie multispectrale et prend en compte les *a priori* spatiaux et spectraux que l'on a sur l'objet. Je distingue ici deux types de conditionnements :

1. Paramétrisation des inconnues et régularisation multispectrale intrinsèque (3.1.3.1) ;
2. Termes de régularisation (3.1.3.2).

3.1.3.1 Paramétrisation des inconnues et régularisation multispectrale intrinsèque

La régularisation par paramétrisation parcimonieuse des phases inconnues permet de contraindre le problème. Dans le cas d'images multispectrales, le nombre d'inconnues, à savoir le nombre de pixel dans l'image pour estimer le champ de tavelures est multiplié par le nombre de longueurs d'onde. C'est pourquoi une première idée est d'utiliser un modèle paramétrique, afin de réduire le nombre d'inconnues. C'est ce que j'ai fait en paramétrisant le champ de tavelures par la phase, paramètre physique d'intérêt identifié au chapitre 2.

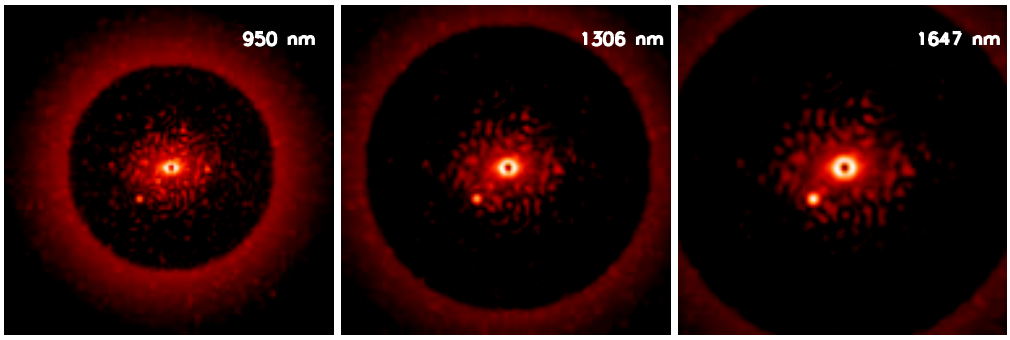


FIGURE 3.1 – **Évolution du champ de tavelures avec la longueur d'onde.** Images simulées à 950, 1306 and 1647 nm pour un contraste de flux entre l'étoile et la planète de 10^3. La dynamique de chaque image est adaptée à la visualisation. La position des tavelures évolue avec la longueur d'onde alors que la position de la planète reste fixe.

Afin de réduire à nouveau le nombre d'inconnues à estimer, et comme le faisaient déjà Burke et al. [54], je suppose que les défauts optiques peuvent se représenter comme des différences de marche en plan pupille indépendantes de la longueur d'onde. Les défauts de phase ont donc une dépendance simple et connue :

$$\boldsymbol{\phi}(\lambda) = \frac{2\pi\boldsymbol{\delta}}{\lambda}. \tag{3.3}$$

La paramétrisation parcimonieuse des phases inconnues $\boldsymbol{\phi}_\lambda(x, y)$ via la différence de marche achromatique $\boldsymbol{\delta}(x, y)$ (cf. Équation (3.3)) permet d'exploiter conjointement les images à toutes les longueurs d'onde pour estimer les aberrations de manière efficace : la carte des différences de marche inconnues $\boldsymbol{\delta}(x, y)$ est commune à toutes les longueurs d'onde, ce qui permet de limiter le nombre d'inconnues et de régulariser le problème.

Les instruments en développement cherchent à s'approcher au maximum de cette hypothèse avec des contraintes sévères en terme de chromatisme du trajet optique et de la distance des optiques au plan pupille, même si cette hypothèse n'est pas parfaitement vérifiée. On notera toutefois, que même avec cette hypothèse, l'utilisation d'un modèle d'imagerie coronographique reste un pas en avant considérable par rapport à d'autres méthodes n'utilisant que l'hypothèse beaucoup plus rudimentaire que la figure de tavelures se dilate linéairement avec la longueur d'onde.

D'autre part, la figure de tavelures évolue avec la longueur d'onde alors que la position de la planète reste fixe d'une longueur d'onde à une autre comme le montre la figure (3.1), ce qui aide à discriminer l'objet des tavelures.

3.1.3.2 Termes de régularisation

Dans le formalisme offert par l'inversion bayésienne, il est très facile d'introduire autant de termes de régularisation que l'on souhaite. Cela peut, sans changer la structure de l'algorithme,

être ajusté en fonction des cas astrophysiques traités. Cette possibilité d'adaptation est un avantage important de l'approche choisie. Des exemples de telles régularisations ont déjà été discutés par exemple dans des approches de déconvolution en astrophysique [80, 78, 81, 75]. Les régularisations détaillées dans ce chapitre sont celles que j'ai choisi d'utiliser à des fins de tests de la méthode.

Régularisation sur l'objet. Le terme de régularisation R_o porte sur les *a priori* spatiaux et spectraux que l'on a sur l'objet. L'*a priori* spatial sur l'objet est l'indépendance entre les pixels et l'*a priori* spectral est fondé sur la douceur du spectre de l'objet. Je considère que l'objet est gris, i.e. à spectre constant afin de simplifier le problème dans un premier temps. La régularisation spatiale est de type L1-L2 blanche (c'est-à-dire indépendante entre pixels) [78] tandis que la régularisation est infinie spectralement.

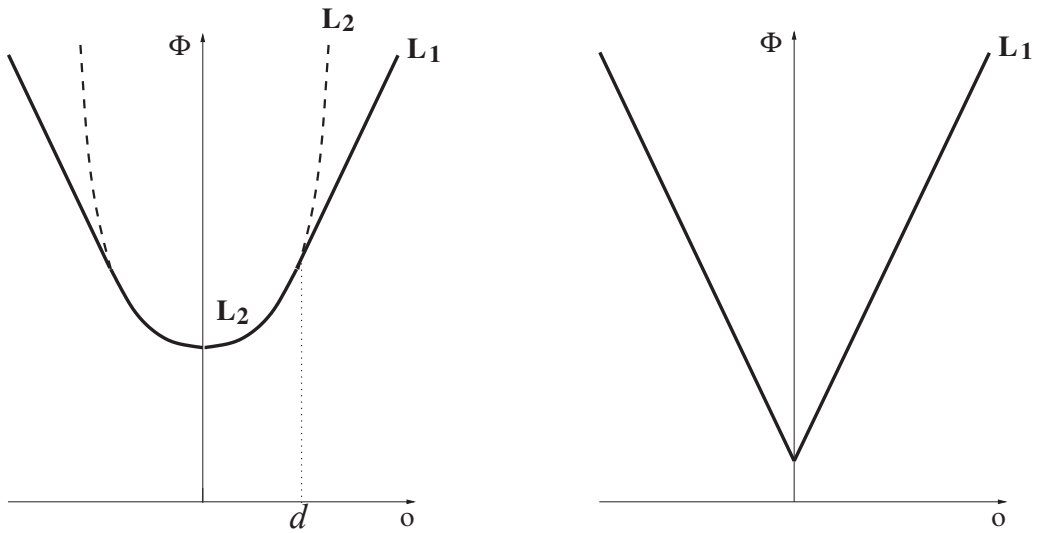
Je choisis ici une régularisation spatiale blanche de type L1-L2 (cf. Figure **??**) qui suppose l'indépendance entre les pixels [78] car je recherche des sources ponctuelles. Comme je recherche des planètes ponctuelles, je pourrais également utiliser une régularisation L1 pure. Cependant, une telle régularisation n'est pas dérivable en zéro comme on peut le voir sur la figure **??** ce qui peut être à l'origine de difficultés de minimisation. C'est pourquoi je préfère utiliser une régularisation L1-L2.

Même si la déconvolution multispectrale non myope présente un critère convexe qui assure une minimisation relativement simple, une difficulté classique repose sur le réglage des deux hyperparamètres de la régularisation choisie de type L1-L2. Un premier hyperparamètre, d, règle le lien entre la régularisation L1 et la régularisation L2. Un second hyperparamètre, s, pilote la force de la régularisation. Le niveau de bruit dans la carte de l'objet estimé peut dépendre du choix des hyperparamètres. Une conséquence directe de ceci est que la performance de l'algorithme sur la détectivité et sur l'estimation du flux des planètes peut être affectée par le choix de ces hyperparamètres. Dans le chapitre 5, je reviens plus en détails sur le réglage des hyperparamètres.

Sauf mention contraire, j'utiliserai une contrainte de positivité sur l'objet en plus de la régularisation L1-L2.

3.2 Choix d'un schéma d'optimisation

Après avoir défini un critère à minimiser permettant d'estimer à la fois la réponse de l'instrument (et donc le champ de tavelures et sa réponse impulsionnelle) et l'objet d'intérêt, je décris maintenant le schéma choisi pour mener à bien cette minimisation. La structure du terme d'attache aux données suggère de réaliser l'estimation conjointe de l'objet et des aberrations à l'aide d'un algorithme alterné. Pour cela, j'ai développé un algorithme qui estime en tout premier lieu les aberrations en supposant l'objet connu (*phase retrieval*) (3.2.2). Dans un deuxième temps, il estime l'objet en supposant les aberrations connues (déconvolution multispectrale) (3.2.1). Ce schéma d'optimisation est synthétisé en figure 3.3.



(a) Régularisation L1-L2. (b) Régularisation L1.

FIGURE 3.2 – **Régularisations L1-L2 et L1.**

3.2.1 Déconvolution multispectrale

Si je considère, temporairement, le champ de tavelures connu, je peux le soustraire aux données i_λ, ce qui me ramène à un problème de déconvolution classique. Les données réduites sont : $\mathbf{i}''_\lambda = \mathbf{i}_\lambda - f^*_\lambda \cdot \mathbf{h}^c_\lambda(\boldsymbol{\phi}_u, \boldsymbol{\phi}_d, \mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r})$. Après soustraction de la contribution stellaire, les données sont, au bruit près, l'objet circumstellaire $\mathbf{o}_\lambda$ convolué par la réponse instrumentale hors axe $\mathbf{h}^{nc}_\lambda$. Les aberrations étant ici supposées connues, la réponse instrumentale hors axe l'est aussi : il s'agit d'une déconvolution non myope. Le critère réduit est donc le suivant :

$$J''_{\text{MAP}}(\mathbf{o}) = \sum_\lambda \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{1}{2\sigma^2_{b,\lambda}(\boldsymbol{\alpha})} |\mathbf{i}''_\lambda - \mathbf{o}_\lambda \star \mathbf{h}^{nc}_\lambda(\boldsymbol{\phi}_u, \boldsymbol{\phi}_d, \mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r})|^2 (\boldsymbol{\alpha}) + R_o + R_{f^*} + R_{\boldsymbol{\phi}} + \cdots, \quad (3.4)$$

Le nombre d'inconnues à estimer est de N_p^2, où N_p le nombre de pixels dans l'image.

Dans cette déconvolution non myope, le critère est convexe car il est la somme de deux termes convexes :

- Le terme d'attache aux données est quadratique donc convexe ;
- Le terme de régularisation choisi est L1-L2 donc convexe.

Pour un jeu donné d'aberrations, il n'y a donc qu'une seule solution et par conséquent un seul objet possibles. La difficulté reste ici la gestion du bruit. Cette gestion est ajustée par les paramètres de régularisation et j'y reviens au chapitre 5.

3.2.2 *Phase retrieval*

De manière complémentaire, si l'objet est supposé connu, alors on peut soustraire sa contribution sur l'image. Le problème est alors d'ajuster aux données le champ de tavelures par la paramétrisation parcimonieuse des aberrations (telle que décrite dans la section précédente), au travers du modèle d'image coronographique. Ce problème, difficile, est connu sous le terme de *phase retrieval*. Les données réduites sont ici : $\mathbf{i}'_\lambda = \mathbf{i}_\lambda - \mathbf{o}_\lambda \star \mathbf{h}^{nc}_\lambda(\boldsymbol{\phi}_u, \boldsymbol{\phi}_d, \mathbf{D}_{\phi_r})$. Le critère de qualité se réduit à :

$$J'_{\text{MAP}}(f^*, \boldsymbol{\phi}_u) = \sum_\lambda \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{1}{2\sigma^2_{b,\lambda}(\boldsymbol{\alpha})} |\mathbf{i}'_\lambda - f^*_\lambda \cdot \mathbf{h}^c_\lambda(\boldsymbol{\phi}_u, \boldsymbol{\phi}_d, \mathbf{D}_{\phi_r})|^2 (\boldsymbol{\alpha}) + R_o + R_{f^*} + R_{\boldsymbol{\phi}} + \cdots. \quad (3.5)$$

Ce critère est quadratique par rapport au flux de l'étoile car celui-ci est élevé au carré. Par contre le critère n'est pas quadratique par rapport aux aberrations *upstream* car celles-ci paramétrisent le modèle qui lui, est fortement non-linéaire. Par conséquence, au lieu d'avoir un seul minimum global comme dans le cas de l'estimation de l'objet à aberrations connues, je me retrouve avec un critère non-linéaire avec de nombreux minimas locaux. Ceci va rendre la minimisation extrêmement compliquée.

De plus, dans l'étape de *phase retrieval*, le nombre de paramètres à estimer pour reconstruire les aberrations est très grand : $\pi N_p^2/16$ pour une pupille de diamètre $N_p/2$. Ceci, combiné au fait que le critère est fortement non convexe, complique le problème.

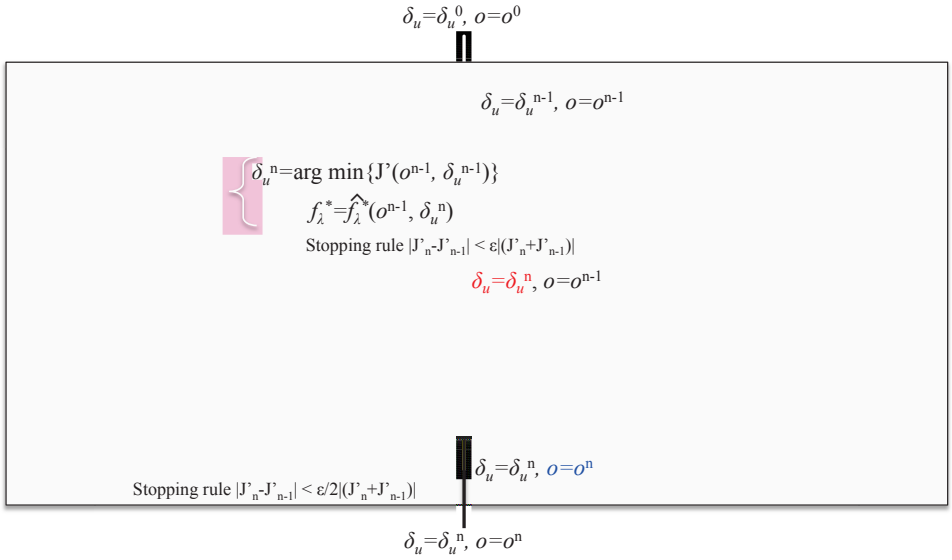
Plus généralement, retrouver des aberrations à partir de l'image en plan focal est un problème compliqué auquel de nombreux travaux ont été consacrés. [82, 83, 22, 84, 85, 54, 86].

3.3 Mise en place algorithmique

Manipuler des images à différentes longueurs d'onde peut conduire à des erreurs numériques si aucune précaution n'est prise, c'est pourquoi je consacre la sous-section 3.3.1 aux choix algorithmiques que j'ai fait pour la gestion des cubes d'images multispectrales en cours d'inversion. Dans la seconde sous-section (3.3.2), je reviens sur l'algorithme d'optimisation choisi. Cet algorithme nécessite des gradients analytiques par rapport aux paramètres à estimer que j'ai développés à cette occasion.

3.3.1 Gestion des images multispectrales

Dans un cube d'images multispectrales, le champ de tavelures évolue avec la longueur d'onde (cf. Figure 3.1). Pour simplifier le raisonnement, je prends l'exemple d'une tache d'Airy, qui est l'image d'une source ponctuelle. Le diamètre de la tache d'Airy est proportionnel à λ/D, où D est le diamètre de la pupille. Modifier la taille de la pupille revient donc à changer celle de la tache d'Airy ce qui correspond à une longueur d'onde différente. Numériquement, il est possible d'agir sur le diamètre de la tache d'Airy (en pixels) en modifiant le rapport taille du tableau sur diamètre de la pupille. Ceci peut se faire de deux façons :


$\delta_u=\delta_u^0$, $o=o^0$
$\delta_u=\delta_u^{n-1}$, $o=o^{n-1}$
$\delta_u^n=\arg\min\{J'(o^{n-1}, \delta_u^{n-1})\}$
$f_\lambda^*=\hat{f}_\lambda^*(o^{n-1}, \delta_u^n)$
Stopping rule $|J'_n-J'_{n-1}| < \varepsilon|(J'_n+J'_{n-1})|$
$\delta_u=\delta_u^n$, $o=o^{n-1}$
$\delta_u=\delta_u^n$, $o=o^n$
Stopping rule $|J'_n-J'_{n-1}| < \varepsilon/2|(J'_n+J'_{n-1})|$
$\delta_u=\delta_u^n$, $o=o^n$

3.3.2 Choix d'un algorithme d'optimisation et expression du gradient du critère

Afin de minimiser les critères des équations 3.4 et 3.5, j'ai besoin d'une méthode d'optimisation.

J'ai discuté dans le chapitre 2 (2.2.3.3) les avantages d'une méthode de type quasi-Newton combinée avec la possibilité d'ajouter des contraintes aux bornes (telle qu'une contrainte de positivité par exemple). La méthode VMLM-B [72] remplit ces critères. Cependant ce type de méthode nécessite en entrée le gradient du critère.

Pour mettre en œuvre la méthode d'optimisation VMLM-B, il m'a été nécessaire de calculer le gradient longue pose du critère par rapport aux aberrations *upstream* et *downstream* [1]. Pour ce faire, je suis partie des expressions des gradients du critère en l'absence d'aberrations turbulentes, développées par Paul et al. [87]. J'ai introduit des aberrations turbulentes par un changement de variable adéquat avant de moyenner temporellement les expressions. J'ai ainsi obtenu les expressions suivantes :

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}_k)}\right]_{LP} &= 2\Im\left\{\Psi_{ud}^* \cdot \left[\Psi_{ud} \star \left(\mathrm{TF}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right]\right\} \\
&- \frac{2}{S}\Im\left\{\Psi_{ud}^* \cdot \mathrm{TF}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_d\right) \cdot \left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_u \Psi_0 \star e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right\} \\
&- 2\Re\left\{\left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^* \mathrm{TF}^{-1}\left[\mathrm{TF}\left(\Psi_{ud}\right) \star \left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_d^*\right) \cdot \mathrm{TF}\left(e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right]\right\} \\
&+ \frac{2}{S}\Re\left[\left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^* \cdot \left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_u \Psi_0 \star e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right] \sum_i \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{h}^c} \left|\mathbf{A}_d\right|^2, \\
\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \boldsymbol{\phi}_d(\boldsymbol{\rho}_k)}\right]_{LP} &= 2\Im\left\{\Psi_{ud}^* \cdot \left[\Psi_{ud} \star \left(\mathrm{TF}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right]\right\} \\
&- \frac{2}{S}\Im\left\{\Psi_{ud}^* \cdot \mathrm{TF}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_d\right) \cdot \left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_u \Psi_0 \star e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right\} \\
&- 2\Im\left\{\eta_0{}^* \Psi_d^* \cdot \left[\Psi \star \left(\mathrm{TF}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right]\right\} \\
&+ \frac{2}{S}\Im\left\{\eta_0{}^* \Psi_d^* \cdot \mathrm{TF}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_d\right) \cdot \left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_u \Psi_0 \star e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Les calculs sont détaillés dans l'annexe A.

3.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, j'ai développé une méthode d'estimation conjointe des aberrations et de l'objet d'intérêt. Cette méthode utilise la redondance d'informations offerte par les cubes

1. Je n'ai pas eu besoin de calculer le gradient du critère par rapport aux aberrations résiduelles turbulentes (cf. section 4.2 du chapitre 4 pour plus d'explications).

d'images multispectrales et des informations *a priori* qui se traduisent sous la forme de termes de régularisation ou de contraintes aux bornes. Les inconnues influencent chacune des images (à chaque longueur d'onde) d'une manière prédite par le modèle. Les estimations de ces inconnues utilisent donc globalement l'ensemble de ces images à la fois.

J'ai tout d'abord choisi une méthode d'inversion bayésienne car celle-ci permet de prendre en compte des informations *a priori* sur le système, par l'intermédiaire de termes de régularisation. Un avantage de cette méthode est donc la possibilité d'ajouter autant de termes de régularisation que nécessaire afin de contraindre le problème inverse. Des possibilités de régularisation sont envisagées, avec avantages et inconvénients, et ce de manière à pouvoir résoudre d'éventuelles difficultés de minimisation. Ces choix peuvent évoluer en fonction du type d'objet que l'on souhaite reconstruire ou encore de l'instrument que l'on considère.

Le critère de qualité associé à la méthode bayésienne est un maximum *a posteriori*. Il dépend du modèle paramétrique d'imagerie coronographique décrit au chapitre précédent. La forme du critère, séparable en deux parties, m'a conduit à utiliser un algorithme alterné. Les aberrations sont tout d'abord estimées en supposant l'objet connu lors de l'étape de *phase retrieval*. L'objet est ensuite estimé en supposant les aberrations connues, lors de l'étape de *déconvolution spectrale non myope*. Ces deux étapes se succèdent par itérations jusqu'à ce qu'une condition de convergence de l'algorithme soit atteinte.

J'ai démontré dans ce chapitre que l'estimation de l'objet à aberrations connues me conduisait à un critère convexe, ce qui simplifie grandement la tâche de l'inversion. La partie « estimation des aberrations à objet connu » est identifiée comme plus difficile. En effet, le critère correspondant dépend du modèle d'imagerie coronographique décrit dans le chapitre précédent, qui est fortement non-linéaire. Ceci nous expose donc à des difficultés de minimisation lors de cette partie de l'inversion. Dans le chapitre suivant, j'étudie plus avant la difficulté associée à ce modèle non linéaire ; pour cela, je le compare à un modèle approché que j'ai développé.

Chapitre 4

Développement et étude d'un modèle approché de formation d'image coronographique

La méthode d'estimation conjointe des aberrations et de l'objet d'intérêt développée au chapitre précédent repose sur un modèle paramétrique d'imagerie coronographique. Le modèle idéal doit décrire avec précision la formation d'image, c'est-à-dire la propagation de la lumière depuis l'objet observé, jusqu'à l'image obtenue, en passant par l'instrument qui la contraint et les perturbations associées. En ce sens, le modèle d'imagerie coronographique présenté au chapitre 2 répond parfaitement à ces exigences. Cependant, la précision du modèle va de pair avec la quantité d'information qui lui est associé et donc sa complexité d'utilisation dans une méthode d'inversion. Il existe donc un compromis entre précision du modèle et simplicité de l'inversion.

Le modèle choisi (cf. Équation 2.16), décrivant avec précision la formation d'image coronographique, risque d'être très difficile à utiliser dans l'inversion. En effet, il dépend des trois paramètres $\boldsymbol{\phi}_u$, $\boldsymbol{\phi}_d$, $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}$, or plus le nombre d'inconnues à estimer est grand, plus l'inversion est un problème mal posé. De plus, la forte non-linéarité de l'expression va entraîner un critère avec de nombreux minima locaux, rendant l'inversion encore plus ardue. Enfin, comme les différents paramètres interviennent dans les trois différents termes de l'expression, il est difficile dans ces conditions de faire des hypothèses simplificatrices. C'est pourquoi il est intéressant de linéariser le problème.

Dans ce chapitre, je réalise un développement limité à l'ordre deux en les aberrations du modèle d'imagerie coronographique. Le modèle approché ainsi obtenu doit être simple, c'est-à-dire avec un nombre restreint de paramètres à estimer pour que l'inversion soit réalisable. Mais il doit être suffisamment précis afin d'atteindre une réduction de contraste importante. Une comparaison de ces deux modèles me permet

ensuite de choisir le modèle le plus apte à remplir sa fonction dans un algorithme d'inversion.

4.1 Simplification du modèle initial par développement limité au second ordre

Dans cette section, je développe une expression approchée du modèle d'imagerie coronographique choisi [1] et j'effectue des tests de comparaison entre les deux expressions afin de déterminer quel modèle je vais utiliser par la suite dans l'inversion.

4.1.1 Hypothèses pour le développement limité

Le modèle d'imagerie coronographique développé dans le chapitre 2 (cf. 2.16) est insensible à un piston P, car les phases sont en argument d'exponentielles. Or, ce n'est pas le cas dans un développement limité de ce modèle. En effet :

$$\begin{aligned} e^{j(\boldsymbol{\phi})} &\simeq 1 + j\boldsymbol{\phi}, \\ e^{j(\boldsymbol{\phi}+P)} &\simeq 1 + j\boldsymbol{\phi} + jP. \end{aligned} \tag{4.1}$$

$e^{j(\boldsymbol{\phi})}$ et $e^{j(\boldsymbol{\phi}+P)}$ donnent la même image alors que $1 + j\boldsymbol{\phi}$ et $1 + j\boldsymbol{\phi} + jP$ donnent une image différente. Comme le développement limité du modèle d'imagerie repose sur l'hypothèse faibles phases, il est d'autant plus proche de l'expression initiale que la phase est petite. C'est pourquoi, pour les besoins du développement limité, je définis une phase turbulente résiduelle $\boldsymbol{\phi}'_r$ à piston nul sur la pupille, quel que soit t. Cette phase peut être représentée comme la différence entre la phase stationnaire à l'ordre 2 et ergodique $\boldsymbol{\phi}_r$ et son piston sur la pupille :

$$\boldsymbol{\phi}'_r(\boldsymbol{\rho}, t) \triangleq \boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}, t) - P[\boldsymbol{\phi}_r](t),$$

avec $P[\boldsymbol{\phi}_r](t)$ le piston de $\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}, t)$ sur la pupille. La quantité $\boldsymbol{\phi}_{tot}$, définie au chapitre 2, (cf. 2.11) devient :

$$\boldsymbol{\phi}'_{tot}(\boldsymbol{\rho}, t) = \boldsymbol{\phi}'_r(\boldsymbol{\rho}, t) + \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\phi}_d(\boldsymbol{\rho}). \tag{4.2}$$

Il est intéressant de remarquer qu'il n'est pas possible de définir les quantités statistiques des équations 2.6 et 2.7 pour la phase $\boldsymbol{\phi}'_r(\boldsymbol{\rho}, t)$ non stationnaire à l'ordre 2 et non ergodique.

Les phases $\boldsymbol{\phi}_u$ et $\boldsymbol{\phi}_d$ sont supposées à piston nul sur la pupille.

4.1.2 Développement limité

En supposant que l'approximation des faibles phases est vérifiée, et que les moyennes spatiales des différentes phases sont égales à zéro sur l'ouverture, je dérive une expansion de Taylor

1. Les termes modèle choisi, modèle initial et modèle exact se référent tous au modèle de Sauvage et al.

au premier ordre en les phases du modèle de l'équation 2.16. Pour cela je pars de l'expression courte pose (CP) de cette même équation, que l'on peut retrouver dans l'article de Sauvage et al. (cf. Éq. 11, [62]) :

$$[\mathbf{h}^c]_{\mathrm{CP}} = \mathbf{h}_n + |\eta_0|^2 \mathbf{h}_d - 2\Re\left(\eta_0 \mathbf{A}_n^* \mathbf{A}_d\right). \tag{4.3}$$

Je dérive cette équation avant de la moyenner [2]. Les calculs intermédiaires sont consultables en annexe B.

4.1.2.1 Calcul analytique de l'expression courte pose

Les calculs successifs des trois termes $\mathbf{h}_n$, $|\eta_0|^2 \mathbf{h}_d$ et $-2\Re\left(\eta_0 \mathbf{A}_n^* \mathbf{A}_d\right)$ de l'expression courte pose de l'équation B.1 donnent les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_n &= \mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^* \\ &= \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2 + 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}'}_{tot}^*\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}'}_{tot}\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}'}_{tot}^* \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}'}_{tot}^*\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right),\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}|\eta_0|^2 \mathbf{h}_d &= |\eta_0|^2 \mathbf{A}_d \mathbf{A}_d^* \\ &= |\eta_0|^2 \left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2 - 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)\right\},\end{aligned} \tag{4.5}$$

et

$$\begin{aligned}-2\Re\left(\eta_0 \mathbf{A}_n^* \mathbf{A}_d\right) = &-2\Re\left(\eta_0 \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2\right) - 2\Re\left\{j\eta_0\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right) - \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}'}_{tot}^*\right)\right]\right\} \\ &- 2\Re\left[\eta_0\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}'}_{tot}^*\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] \\ &+ \Re\left\{\eta_0 \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d + \widetilde{\boldsymbol{\phi}'}_{tot}^* \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}'}_{tot}^*\right)\right]\right\} + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Finalement, en additionnant les trois précédents termes $[\mathbf{h}^c]_{\mathrm{CP}}$ se simplifie de la manière suivante :

$$[\mathbf{h}^c]_{\mathrm{CP}} = \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}'}_r\right)\right|^2 + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right). \tag{4.7}$$

Le résultat est un terme d'ordre deux en les phases. Le terme $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2$, qui correspond à une FEP non entachée d'aberrations et qui intervient dans l'expression de $\mathbf{h}_n$, n'apparaît pas dans cette expression approchée. En effet, c'est l'effet du coronographe qui fait disparaître ce terme d'ordre 0. Le coronographe permet également de se débarrasser des termes d'ordre un. Il est important de noter que cela est vrai sous l'hypothèse d'un coronographe parfait. Ce résultat rejoint ceux d'autres travaux pour l'imagerie coronographique [88] et même non coronographique [89, 64]

2. Notons qu'une dérivation à partir de l'image longue pose a aussi été effectuée. Elle conduit au même résultat et est présentée dans la section B.2 de l'annexe B.

(cf. deuxième ordre de la PSF). Ainsi, même si on fait un développement limité à l'ordre un, les termes d'ordre zéro et d'ordre un en les phases disparaissent et l'on se retrouve avec une expression à l'ordre deux en les phases.

Ce qui est remarquable c'est que le terme ϕ_d n'apparaît pas dans ce résultat. Ainsi les aberrations *downstream* n'ont pas un impact dominant dans l'image finale par rapport aux aberrations ϕ_u et ϕ_r qui elles, interviennent à part égale. Ceci est un résultat important car il confirme par le calcul les résultats des tests qui ont été réalisés lors de la définition de l'instrument SPHERE. Cavarroc et al. avaient obtenu un résultat similaire en étudiant le cas des aberrations différentielles *downstream* dans un cas d'imagerie différentielle [65]. Les aberrations *downstream* interviennent au deuxième ordre dès que l'on s'éloigne de l'hypothèse de coronographe parfait (cf. Annexe C).

Il est intéressant de noter également que la pupille *upstream* $\mathcal{P}_u$ n'intervient pas non plus dans cette expression approchée. Seule la pupille de Lyot ou pupille *downstream* $\mathcal{P}_d$ intervient.

Dans cette expression, qui peut s'interpréter comme la densité spectrale de puissance de la fonction $\mathcal{P}_d \cdot (\phi_u + \phi'_r)$, les termes ϕ_u et ϕ'_r sont croisés.

4.1.2.2 Calcul analytique de l'expression approchée longue pose

Après avoir dérivé l'expression courte pose du modèle d'imagerie coronographique, je moyenne le résultat obtenu pour obtenir une expression longue pose approchée :

$$\begin{aligned}\langle[\mathbf{h}^c]_{\mathrm{CP}}\rangle_t &\simeq \left\langle \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \left(\widetilde{\phi}_u + \widetilde{\phi'}_r\right)\right|^2 \right\rangle_t \\ &\simeq \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi}_u\right|^2 + \left\langle \left(\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi'}_r\right)^2 \right\rangle_t + 2\Re\left[\left(\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi}_u\right)\left(\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \left\langle \widetilde{\phi'}_r^* \right\rangle_t\right)\right].\end{aligned}$$

Le dernier terme est nul car $\left\langle \widetilde{\phi'}_r^* \right\rangle_t = \left\langle \left[\mathrm{TF}^{-1}(\phi'_r)\right]^* \right\rangle_t = \left[\mathrm{TF}^{-1}\left(\langle \phi'_r \rangle_t\right)\right]^* = 0$, avec $\langle \phi'_r \rangle_t = 0$.

$$\langle[\mathbf{h}^c]_{\mathrm{CP}}\rangle_t \simeq \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi}_u\right|^2 + \left\langle |\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi'}_r|^2 \right\rangle_t \tag{4.8}$$

Calcul du terme $\left\langle |\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi'}_r|^2 \right\rangle_t$. Afin d'obtenir une description du second terme en fonction d'une quantité statistique telle que la fonction de structure $\mathbf{D}_{\phi_r}$ ou la densité spectrale de puissance $\mathbf{S}_{\phi_r}$, j'exprime le terme $\left\langle \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi'}_r\right|^2 \right\rangle_t$ en fonction de la phase $\phi_r(\boldsymbol{\rho}, t)$ stationnaire à l'ordre 2 et ergodique :

$$\begin{aligned}\left\langle \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi'}_r\right|^2 \right\rangle_t &= \left\langle \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \left\{\widetilde{\phi_r} - \widetilde{P}\left[\phi_r\right]\right\}\right|^2 \right\rangle_t \\ &= \left\langle \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi}_r\right|^2 \right\rangle_t + \left\langle \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{P}\left[\phi_r\right]\right|^2 \right\rangle_t - \left\langle 2\Re\left\{\left[\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi}_r\right]\left[\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{P}\left[\phi_r\right]\right]\right\} \right\rangle_t \\ &= \left\langle \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi}_r\right|^2 \right\rangle_t + \left\langle \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{P}\left[\phi_r\right]\right|^2 \right\rangle_t - \left\langle 2\Re\left\{\left[\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi}_r\right]\left[\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{P}\left[\phi_r\right]\right]\right\} \right\rangle_t \\ &\quad - \left\langle 2\Re\left\{\left|\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{P}\left[\phi_r\right]\right|^2\right\} \right\rangle_t.\end{aligned}$$

Le troisième terme est nul. En effet, pour passer de $\boldsymbol{\phi}_r$ à $\boldsymbol{\phi}'_r$, j'ai soustrait le piston. Ainsi, $\boldsymbol{\phi}_r$ et $P\left[\boldsymbol{\phi}_r\right]$ sont décorrélés. Je peux donc écrire : $\left\langle \boldsymbol{\phi}_r P\left[\boldsymbol{\phi}_r\right]\right\rangle_t = \left\langle \boldsymbol{\phi}_r\right\rangle_t \left\langle P\left[\boldsymbol{\phi}_r\right]\right\rangle_t = 0$. Avec $\left\langle \boldsymbol{\phi}'_r\right\rangle_t = 0$ (cf. 4.1.1). En remarquant que le piston $P\left[\boldsymbol{\phi}_r\right](t)$ est un scalaire dépendant du temps et en posant $\delta(\boldsymbol{\alpha})$ la fonction de Dirac, je trouve :

$$\begin{aligned}
\left\langle \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}'}_r\right|^2\right\rangle_t &= \left\langle \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right|^2\right\rangle_t - \left\langle \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{P}\left[\boldsymbol{\phi}_r\right]\right|^2\right\rangle_t \\
&= \left\langle \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right|^2\right\rangle_t - \left\langle \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left\{P\left[\boldsymbol{\phi}_r\right]\cdot\delta\right\}\right|^2\right\rangle_t \\
&= \left\langle \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right|^2\right\rangle_t - \left\langle \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \cdot P\left[\boldsymbol{\phi}_r\right]\right|^2\right\rangle_t \\
&= \left\langle \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right|^2\right\rangle_t - \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\right|^2 \cdot \left\langle \left|P\left[\boldsymbol{\phi}_r\right]\right|^2\right\rangle_t .
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\left\langle \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}'}_r\right|^2\right\rangle_t = \left\langle \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right|^2\right\rangle_t - \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\right|^2 \cdot \left\langle \left|P\left[\boldsymbol{\phi}_r\right]\right|^2\right\rangle_t . \tag{4.9}$$

Calcul du terme $\left\langle \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right|^2\right\rangle_t$.

$$\begin{aligned}
\left\langle \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right|^2\right\rangle_t &= \left\langle \int_{\boldsymbol{\alpha}_1} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\left(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1 \int_{\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,*}\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r^{*}\left(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2\right\rangle_t \\
&= \left\langle \iint_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,*}\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\left(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1\right)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r^{*}\left(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2\right\rangle_t \\
&= \iint_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,*}\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)\left\langle \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\left(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1\right)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r^{*}\left(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2\right)\right\rangle_t \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2 \\
&= \iint_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,*}\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)\left\langle \int_{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\phi}_r\left(\boldsymbol{\rho}\right)e^{-2j\pi\left(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1\right)\boldsymbol{\rho}}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}\int_{\boldsymbol{\rho}'} \boldsymbol{\phi}_r\left(\boldsymbol{\rho}'\right)e^{2j\pi\left(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2\right)\boldsymbol{\rho}'}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'\right\rangle_t \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2 \\
&= \iint_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,*}\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)\left[\iint_{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}'} \left\langle \boldsymbol{\phi}_r\left(\boldsymbol{\rho}\right)\boldsymbol{\phi}_r\left(\boldsymbol{\rho}'\right)\right\rangle_t e^{-2j\pi\left(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1\right)\boldsymbol{\rho}}e^{2j\pi\left(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2\right)\boldsymbol{\rho}'}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2.
\end{aligned}$$

En utilisant les équations 2.6 et 2.7, je peux écrire :

$$\left\langle \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right|^2\right\rangle_t = \iint_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,*}\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)\left[\iint_{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}'} \mathbf{A}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho})e^{-2j\pi\left(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1\right)\boldsymbol{\rho}}e^{2j\pi\left(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2\right)\boldsymbol{\rho}'}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2.$$

Effectuons le changement de variable suivant : $\boldsymbol{\rho}'' = \boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \left| \widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi}_r \right|^2 \right\rangle_t &= \iint_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\mathcal{P}}_d\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right) \widetilde{\mathcal{P}}_d^{\,*}\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right) \left\{ \int_{\boldsymbol{\rho}} \left[\int_{\boldsymbol{\rho}''} \mathbf{A}_{\phi_r}\left(\boldsymbol{\rho}''\right) e^{2j\pi(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\rho}''} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'' \right] e^{-2j\pi(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\rho}} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho} \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2 \\
&= \iint_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\mathcal{P}}_d\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right) \widetilde{\mathcal{P}}_d^{\,*}\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right) \left[\int_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{S}_{\phi_r}\left(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2\right) e^{-2j\pi(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\rho}} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho} \right] \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2 \\
&= \int_{\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\mathcal{P}}_d^{\,*}\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right) \mathbf{S}_{\phi_r}\left(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2\right) \left[\int_{\boldsymbol{\alpha}_1} \widetilde{\mathcal{P}}_d\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right) \delta\left(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1\right) \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1 \right] \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2 \\
&= \int_{\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\mathcal{P}}_d^{\,*}\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right) \mathbf{S}_{\phi_r}\left(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2\right) \widetilde{\mathcal{P}}_d\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right) \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2 \\
&= \int_{\boldsymbol{\alpha}_2} \left| \widetilde{\mathcal{P}}_d \right|^2 \left(\boldsymbol{\alpha}_2\right) \mathbf{S}_{\phi_r}\left(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2\right) \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2 \\
&= \left[\left| \widetilde{\mathcal{P}}_d \right|^2 \star \mathbf{S}_{\phi_r} \right] \left(\boldsymbol{\alpha}\right). \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Ce résultat est particulièrement important et constitue le cœur du travail effectué. Il montre que, dans le cas d'une phase ϕ_r stationnaire et ergodique, la relation suivante est vérifiée :

$$\left\langle \left| \widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi}_r \right|^2 \right\rangle_t = \left| \widetilde{\mathcal{P}}_d \right|^2 \star \mathbf{S}_{\phi_r}. \qquad (4.11)$$

Ce résultat a été présenté à la conférence de la Société Française d'Astronomie et d'Astrophysique en 2010 [90] (cf. Publication en Section (4.4).

Ainsi, l'expression longue pose approchée se déduit des équations B.8, 4.9 et 4.11 :

$$\mathbf{h}_\lambda^c \simeq \left| \widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi}_u \right|^2 + \left| \widetilde{\mathcal{P}}_d \right|^2 \star \mathbf{S}_{\phi_r} - \left| \widetilde{\mathcal{P}}_d \right|^2 \cdot \left\langle \left| P\left[\phi_r\right] \right|^2 \right\rangle_t. \qquad (4.12)$$

Le développement limité à l'ordre un de l'expression analytique initiale est beaucoup plus intuitif que l'expression exacte. Il est la somme de deux termes :

1. Un terme statique, la transformée de Fourier de la pupille convoluée par la transformée de Fourier des aberrations *upstream* ϕ_u ;
2. Un terme turbulent, lui-même séparé en deux parties :
   - La densité spectrale de puissance des résidus de phase turbulente, vue à la résolution de l'instrument, c'est à dire convoluée par la tache d'Airy de la pupille (FEP non aberrante) ;
   - Un terme correctif $\left| \widetilde{\mathcal{P}}_d \right|^2 \cdot \left\langle \left| P\left[\phi_r\right] \right|^2 \right\rangle_t$, qui compense le fait que $\phi_r(\boldsymbol{\rho}, t)$ est stationnaire et par conséquence pas à piston nul sur l'ouverture à chaque instant. On peut noter que $\left| \widetilde{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\alpha}) \right|^2$ est la tache d'Airy formée par la pupille $\mathcal{P}_d(\boldsymbol{\alpha})$.

Contrairement à l'expression courte pose, les contributions statiques et turbulentes sont séparées. Ceci est cohérent avec l'analyse de Soummer et al. [66], avec l'avantage que ces termes sont exprimés ici explicitement en fonction des paramètres d'intérêt que sont les aberrations *upstream* et les aberrations résiduelles turbulentes.

4.1.3 Enseignements apportés par le modèle simplifié

Cette expression est de loin plus intuitive que celle de Sauvage et al. [62] et apporte de nombreux enseignements sur l'imagerie coronographique.

4.1.3.1 Évolution avec la longueur d'onde

Tout d'abord, j'exprime l'expression 4.12 en fonction de la longueur d'onde, en notant $\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}, t)$, $\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})$ et $\boldsymbol{\phi}_d(\boldsymbol{\rho})$ les phases résiduelle turbulente, statique *upstream* et statique *downstream* respectivement :

$$\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}, t) = 2\pi \frac{\boldsymbol{\delta}_r(\boldsymbol{\rho}, t)}{\lambda}, \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}) = 2\pi \frac{\boldsymbol{\delta}_u(\boldsymbol{\rho})}{\lambda}, \boldsymbol{\phi}_d(\boldsymbol{\rho}) = 2\pi \frac{\boldsymbol{\delta}_d(\boldsymbol{\rho})}{\lambda},$$

avec, $\delta_r(\boldsymbol{\rho}, t)$, $\delta_u(\boldsymbol{\rho})$ et $\delta_d(\boldsymbol{\rho})$ les différences de marche des aberrations turbulentes résiduelles, statique *upstream* et statique *downstream* respectivement. J'obtiens alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}^{\mathbf{c}}_{\lambda}(\lambda\rho) = & \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left\{ \left| \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\lambda\boldsymbol{\rho}) \star \widetilde{\boldsymbol{\delta}_u}(\lambda\boldsymbol{\rho}) \right|^2 \right\} \\
& + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left\{ \left| \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\lambda\boldsymbol{\rho}) \right|^2 \star \mathbf{S}_{\boldsymbol{\delta}_r}(\boldsymbol{\alpha}) - \left\langle \left| P\left[\boldsymbol{\delta}_r(\lambda\boldsymbol{\rho}, t)\right] \right|^2 \right\rangle_t \cdot \left| \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\lambda\boldsymbol{\rho}) \right|^2 \right\} \\
& + o\left(\boldsymbol{\delta}^2\right).
\end{aligned}$$

Le champ de tavelures est alors une homothétie radiale en λ et son intensité évolue en $1/\lambda^2$ dans le cube de données. Cela est cohérent avec l'analyse de Sparks and Ford [49], qui ajustent les coefficients de polynômes de bas-ordre par rapport à la longueur d'onde, après avoir remis à la même échelle radiale tout le cube.

4.1.3.2 Différence fondamentale entre les aberrations *upstream* et *downstream*

Tout comme dans l'analyse sur l'expression approchée courte pose, les aberrations *downstream* n'apparaissent pas dans l'expression approchée longue pose. Cela confirme que les aberrations *upstream* et *downstream* du coronographe jouent un rôle bien différent dans l'image finale et que les aberrations *upstream* sont dominantes.

4.1.3.3 Jeux d'aberrations « quasi-équivalentes »

Quatre jeux d'aberrations *upstream* équivalents : $\boldsymbol{\delta}_u(\boldsymbol{\rho})$, $\boldsymbol{\delta}_u(-\boldsymbol{\rho})$, $-\boldsymbol{\delta}_u(\boldsymbol{\rho})$ et $-\boldsymbol{\delta}_u(-\boldsymbol{\rho})$, que nous appelons cartes d'aberrations « quasi-équivalentes » dans la suite, conduisent à la même image (cf. Annexe A de l'article en Section 5.1.6). Ceci aura un impact important sur la résolution du problème inverse. Ce point est discuté dans l'article en section 5.1.6.

4.1.3.4 Indétermination entre flux de l'étoile et valeur RMS de la phase

En utilisant l'expression approchée pour $\mathbf{h}_\lambda^c$ de l'équation 4.12 dans le modèle d'imagerie (2.8), nous pouvons voir qu'il existe une dégénérescence à faible phase entre la valeur du flux de l'étoile et la valeur RMS de la carte d'aberrations *upstream*, s'il n'y a pas de turbulence. En effet, en l'absence de turbulence, le modèle approché multiplié par le flux de l'étoile s'écrit comme suit :

$$f_\lambda^* \cdot \mathbf{h}_\lambda^c = f_\lambda^* \cdot \left| \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \right|^2 . \tag{4.13}$$

On voit donc que si la valeur RMS de la phase $\boldsymbol{\phi}_u$ est multipliée par un facteur k et le flux f_λ^* divisé par k^2 :

$$\frac{f_\lambda^*}{k^2} \cdot \mathbf{h}_\lambda^c \left(k \cdot \boldsymbol{\phi}_u\right) = \frac{f_\lambda^*}{k^2} \cdot k^2 \cdot \left| \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \right|^2 = f_\lambda^* \cdot \left| \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \right|^2 , \tag{4.14}$$

on retrouve la même image, quel que soit le facteur k.

Je reviens sur cette indétermination entre le flux de l'étoile et la valeur RMS de la phase plus loin dans ce manuscrit (cf. 5.2.3).

J'ai donc obtenu une expression approchée d'imagerie coronographique corrigée par optique adaptative qui est plus simple que l'expression exacte de Sauvage [62]. Cette expression ne dépend plus des aberrations *downstream*, elle possède donc un paramètre en moins. De plus, elle est moins non-linéaire que l'expression initiale. Il est à présent intéressant de valider cette expression en déterminant l'erreur commise par rapport à l'expression exacte, liée au développement limité.

4.1.4 Comparaison d'images simulées avec le modèle initial et le modèle simplifié

Dans la sous-section précédente, j'ai développé une expression approchée d'imagerie coronographique corrigée par optique adaptative. Qualitativement, l'expression obtenue confirme les résultats de précédents travaux sur l'imagerie coronographique et non-coronographique. Elle apporte également des précisions par rapport aux précédents travaux. Je vais à présent discuter quantitativement le niveau d'erreur par rapport à l'expression exacte due à l'approximation dans des conditions de simulation typiques de celles d'un instrument de type SPHERE.

4.1.4.1 Hypothèses de simulation

Je considère ici une étoile située sur l'axe, observée avec un télescope terrestre de 8 mètres de diamètre équipé d'une optique adaptative. Les simulations tiennent compte à la fois de la turbulence corrigée par OA ainsi que des aberrations statiques. Les conditions de simulation sont typiques d'un instrument de type SPHERE [91] et sont les mêmes que celles utilisées par Sauvage [62].

Le système d'OA considéré est celui de l'instrument SPHERE SAXO. Dans leur article, Sauvage et al. utilisent une méthode de simulation basée sur la décomposition de Fourier. Les performances de l'OA sont décrites via la densité spectrale de puissance de la phase résiduelle.

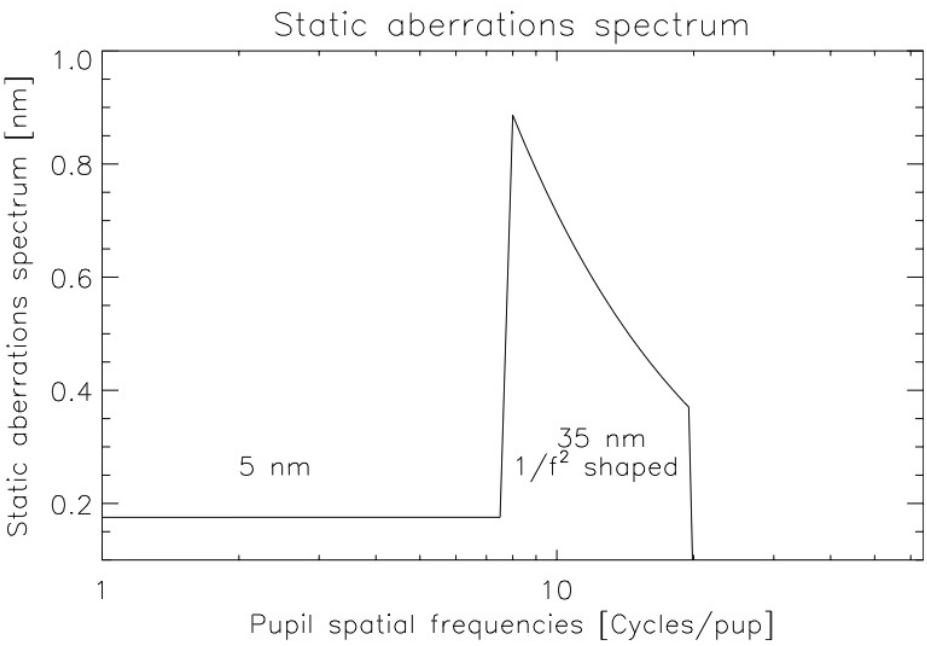


FIGURE 4.1 – **Densités spectrales de puissance des aberrations *upstream* utilisées pour la simulation.** Les basses fréquences sont corrigées par l'optique adaptative à hauteur de 5 nm RMS. Les moyennes fréquences suivent un spectre en $1/f^2$ avec une valeur RMS de 35 nm.

La simulation prend en compte le jeu de paramètres réalistes suivant : un analyseur de Shack-Hartmann de 41×41 sous-ouvertures, une fréquence d'échantillonnage de 1,2 kHz, une étoile guide de magnitude 8, une turbulence de Kolmogorov et un seeing de 0.8 arcsec at $0.5\,\mu$m. La phase résiduelle turbulente est supposée à moyenne nulle sur l'ensemble du support et non sur la pupille.

En plus des aberrations résiduelles turbulentes, je définis des aberrations statiques dans ces simulations. Selon l'analyse réalisée pour la spécification de l'instrument SPHERE, je considère un spectre spatial d'aberrations *upstream* qui suit la forme de la figure 4.1. Les moyennes fréquences, de 8 à 20 cycles par pupille (fréquence de coupure de l'OA), présentent un écart quadratique de 35 nm. Les aberrations statiques *downstream* sont générées aléatoirement selon un spectre en f^{-2} , f étant la fréquence spatiale dans la pupille avec une erreur totale de 100 nm [3]. Les images, tableaux de 256×256 pixels, sont simulées à une longueur d'onde de $\lambda = 1.6\,\mu$m et sont échantillonnées à la fréquence de Shannon.

3. À l'époque de cette étude (2010), je me suis appuyée sur les spécifications de SPHERE pour le choix des hypothèses. En particulier la valeur RMS des aberrations quasi-statiques *downstream* était de 100 nm. Par la suite, cette valeur a été revue à la baisse sur la base de la connaissance effective des aberrations dans SPHERE. Je reviendrai sur ce point dans le chapitre 5.

4.1.4.2 Comparaison du modèle approché avec le modèle initial

Afin de comparer le modèle approché et le modèle initial, j'ai créé deux procédures différentes pour simuler l'expression analytique longue pose exacte et l'expression analytique longue pose approchée.

Je veux comparer l'expression approchée à l'expression « exacte » de Sauvage et al. (ou modèle initial) pour déterminer l'erreur due au développement de Taylor. Pour cela, j'ai créé deux procédures différentes, développées en IDL [4] :

- La première simule une FEP coronographique longue pose avec le modèle exact analytique ;
- La deuxième simule une FEP coronographique longue pose avec le modèle approché analytique.

Je définis le critère de performance suivant, qui va me permettre d'évaluer l'erreur commise par rapport à un modèle de référence :

$$\sigma_{\mathrm{DL}} = \sqrt{\frac{\sum_{\boldsymbol{\alpha}} \left|\mathbf{i}^{\text{modele exact}} - \mathbf{i}^{\mathrm{DL}}\right|^2}{\sum_{\boldsymbol{\alpha}} \left|\mathbf{i}^{\text{modele exact}}\right|^2}} \times 100. \tag{4.15}$$

Résultat de la comparaison des expressions exacte et approchée. J'ai tracé en figure 4.2 les profils d'intensité, moyennés circulairement, du modèle exact, du modèle approché et de l'écart quadratique moyen de la différence entre les deux modèles. Ces profils d'intensité sont tracés en fonction du champ en pixels, l'intensité étant normalisée par rapport à l'intensité totale dans la pupille d'entrée. En d'autres termes, l'intégrale de la FEP sans coronographe est de 1. La valeur en zéro est proportionnelle au rapport de Strehl. La zone du plan focal comprise entre 0 et $20\lambda/D$ est la zone de la FEP corrigée par l'optique adaptative alors que la zone située au delà de $20\lambda/D$ correspond au halo résiduel des hautes fréquences des aberrations turbulentes non-corrigées par l'OA. Le rapport de Strehl est de 87%. Les tavelures introduites par les aberrations *upstream* sont les principaux contributeurs aux résidus de l'étoile entre 8 et $20\lambda/D$. Les résidus d'optique adaptative sont dominants en dessous de $8\lambda/D$ et au-delà de $20\lambda/D$. J'ai représenté en figure 4.3 les images obtenues avec le modèle exact, le modèle approché et la différence entre les deux. Enfin, j'ai calculé le critère de performance défini ci-dessus et la différence entre les deux modèles est de 29%.

La différence entre les deux modèles étant relativement importante, il est intéressant de quantifier l'influence de chaque type d'aberrations $\boldsymbol{\phi}_u$, $\boldsymbol{\phi}_d$ et $\boldsymbol{\phi}_r$.

Résultat comparaison expressions exacte et approchée sans aberrations *downstream*. Nous avons vu que les aberrations *downstream* n'interviennent pas dans l'expression approchée. Afin d'estimer la part des aberrations *downstream* dans l'erreur totale, je compare les expressions exacte et approchée en l'absence d'aberrations *downstream*. Le critère de performance associé est de 17.1%. Ainsi, pour 100 nm d'aberrations *downstream*, celles-ci interviennent à hauteur de 11.8%.

4. L'ensemble des simulations réalisées pendant la thèse l'a été avec IDL.

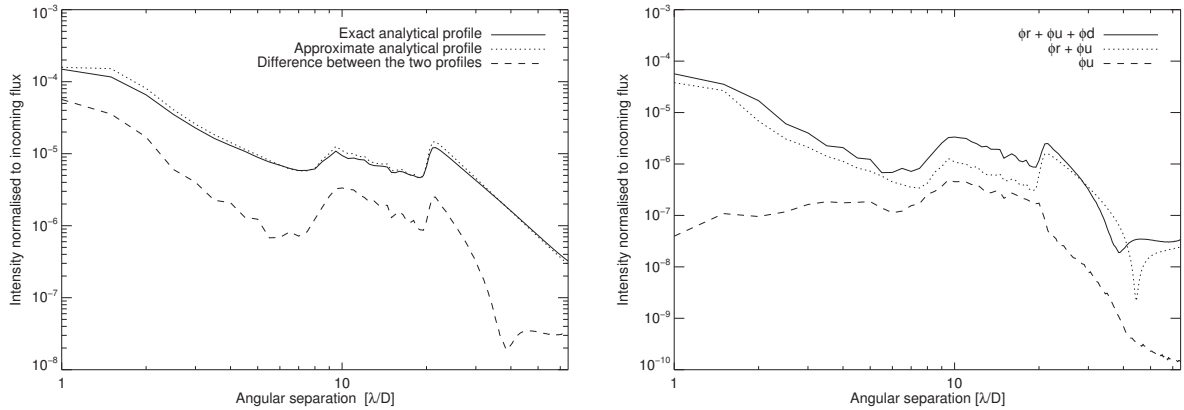


FIGURE 4.2 – **Profils d'intensité moyennés circulairement.** [Gauche] Modèle analytique exact, développement de Taylor et différence entre les deux modèles. [Droite] Évolution de l'erreur entre les deux modèles en fonction du type d'aberrations introduites.

J'ai représenté en figure 4.4 les images obtenues avec le modèle exact, le modèle approché et la différence entre les deux.

Résultat comparaison expressions exacte et approchée sans aberrations *downstream* et sans turbulence. Afin d'estimer la part des aberrations *upstream* et turbulentes dans l'erreur totale, je compare les expressions exacte et approchée en l'absence d'aberrations *downstream* et d'aberrations turbulentes. Le critère de performance associé est de 6.6%. Ainsi, pour 30 nm d'aberrations *upstream*, celles-ci interviennent à hauteur de 6.6%. Quand aux aberrations turbulentes, elles interviennent à hauteur de 10.4% si on compare les résultats sans *downstream* et sans turbulence avec le résultat sans *downstream* et avec turbulences.

J'ai représenté en figure 4.5 les images obtenues avec le modèle exact, le modèle approché et la différence entre les deux.

Conclusions des simulations. La synthèse des résultats précédents est la suivante (cf. Table 4.1) :

- En présence de toutes les aberrations, l'erreur correspondante est d'environ 29% ;
- Comme le modèle approché ne prend pas en compte les aberrations *downstream*, il est intéressant de compiler les mêmes résultats sans les aberrations *downstream* pour le modèle exact. L'erreur correspondante est d'environ 17%. Cela signifie que la contribution des aberrations *downstream* est d'environ moins de 1/3 de l'erreur totale ;
- En l'absence d'aberrations turbulentes résiduelles, l'erreur correspondante est d'environ 7%. Ici encore, je peux en déduire la contribution des aberrations résiduelles turbulentes et des aberrations *upstream* qui sont approximativement égales pour ces conditions de simulation représentatives de SPHERE.

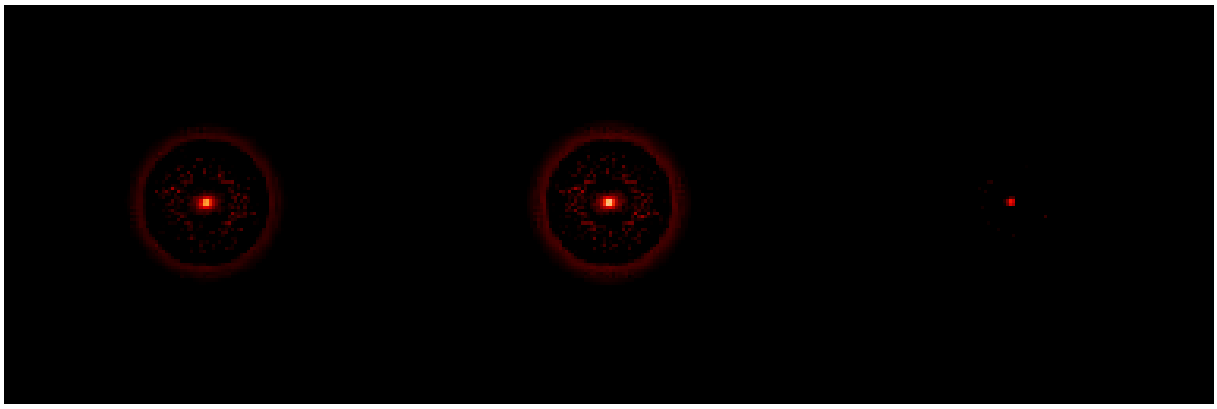


FIGURE 4.3 – **Comparaison des modèles approché et initial.** Modèle analytique exact longue pose [gauche], modèle analytique approché longue pose [centre], valeur absolue de la différence [droite], représentés avec la même dynamique le tout avec turbulence et avec aberrations *downstream*.

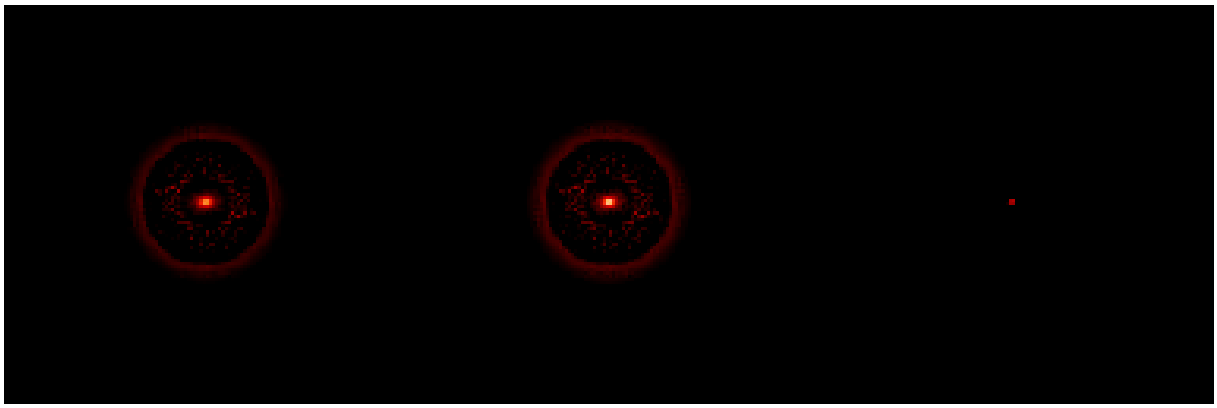


FIGURE 4.4 – **Comparaison des modèles sans aberrations *downstream*.** Modèle analytique exact longue pose [gauche], modèle analytique approché longue pose [centre], valeur absolue de la différence [droite], représentés avec la même dynamique le tout avec turbulence et sans aberrations *downstream*.

Type d'aberrations	Erreur
Aberrations *downstream*	11.8%
Aberrations résiduelles turbulentes	11.4%
Aberrations *downstream*	6.6%

TABLE 4.1 – **Contribution des différents types d'aberrations à l'erreur liée au développement limité.**

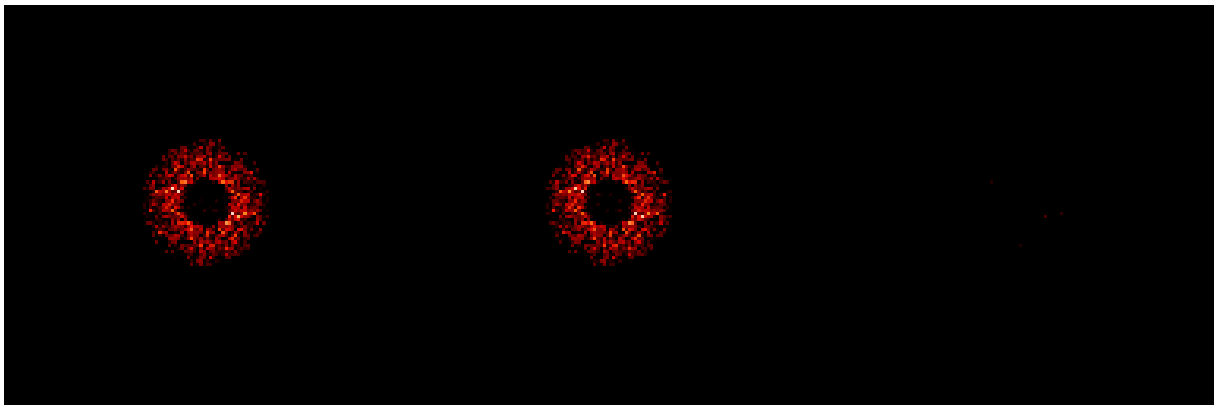


FIGURE 4.5 – **Comparaison des modèles sans aberrations *downstream* et sans turbulence.** Modèle analytique exact longue pose [gauche], modèle analytique approché longue pose [centre], valeur absolue de la différence [droite], représentés avec la même dynamique le tout sans turbulence et sans aberrations *downstream*.

Il est intéressant de remarquer que les trois types d'aberrations ont approximativement la même erreur non négligeable. Nous devons donc être extrêmement prudents avec ce résultat qui est valable pour l'instrument SPHERE où les aberrations *downstream* sont trois fois plus importantes que les aberrations *upstream*. En conséquence, si les aberrations *downstream* étaient trois fois inférieures comme cela semble être le cas à présent, on peut penser que leur part dans l'erreur due au développement limité va décroître. Ainsi, ce résultat ne remet pas en question le fait que les aberrations en amont sont prédominantes par rapport aux aberrations aval.

Les différences sur l'image finale entre les deux modèles ne sont pas négligeables comme nous pouvons le voir sur les profils de moyenne circulaire de la figure 4.2. A cause de la complexité de l'expression de Sauvage et al., j'ai tout d'abord pensé à utiliser le modèle approché dans notre algorithme d'inversion afin de diminuer le nombre d'inconnues à estimer et ainsi simplifier le critère à minimiser. Mais une étude de ce modèle approché a montré que l'image simulée avec le modèle approché est trop différente de celle simulée avec l'expression de Sauvage : le calcul de l'écart quadratique moyen de la différence entre les deux images donne une erreur relative de 29% entre les deux modèles. Par conséquent, même si l'utilisation du modèle approché diminuerait de façon conséquence la non-convexité du critère, cela ne mènerait probablement pas à de bons résultats pour l'inversion. Cependant, et ceci sera discuté plus loin dans ce manuscrit, ce modèle approché sera utile afin d'améliorer la convergence de notre minimisation de critère, ce qui est un point plus que critique.

4.1.4.3 Discussion

À cause de la complexité de l'expression de Sauvage et al., j'ai tout d'abord pensé à utiliser le modèle approché dans ma méthode d'inversion de façon à diminuer le nombre d'inconnues à

estimer et ainsi simplifier le critère à minimiser. Mais l'étude de ce modèle approché à démontré que l'image résultante est trop différente de celle simulée avec l'expression de Sauvage et al. : la valeur RMS de la différence entre les deux images mène à une erreur conséquente, de l'ordre de 30% dans des conditions de simulation typiques de l'instrument SPHERE [90].

Symétrie des tavelures. Une part non négligeable de la différence entre les deux modèles est liée au fait que dans le modèle approché les tavelures quasi-statiques sont purement centrosymétriques. Par conséquence, si j'élimine la part centrosymétrique de l'image en la soustrayant à sa version retournée de 180° comme suit :

$$i_{\text{antisym}} = \frac{i - i_{180^\circ}}{2}, \tag{4.16}$$

il n'y a aucun résidus dans l'image résultante. Mais ce n'est pas le cas d'une image plus réaliste simulée avec le modèle de Sauvage et al. Le niveau de résidus après une telle soustraction est déterminé par la quantité d'aberrations *upstream* comme le montre la figure 4.6. Par exemple, avec 30 nm RMS d'aberrations *upstream*, le niveau de résidus est environ six fois plus petit que la valeur RMS de l'image simulée (cf. Figure 4.7). Par conséquent, pour une quantité non négligeable d'aberrations *upstream*, utiliser le modèle de Sauvage et al. plutôt que le modèle approché pour une inversion devrait mener à moins de résidus sur l'image finale.

Évolution des tavelures avec la longueur d'onde. Une autre différence entre les deux modèles favorise le modèle de Sauvage et al. En effet, dans le modèle approché, l'évolution des tavelures avec la longueur d'onde est inversement proportionnelle à λ^2. Si l'on soustrait une image à 950 nm à sa dilatation à 1650 nm, il n'y a pas de résidus avec ce modèle. La même opération avec le modèle de Sauvage et al. (cf. Figure 4.8) montre des résidus à un niveau 2.5 fois inférieur à celui de la valeur RMS de l'image simulée., ce qui atteste que ce n'est pas une pure dilatation de tavelures. Pour ce faire, je prends les images aux extrêmes de la bande spectrale soit 950 et 1650 nm. L'image à 950 nm est remise à l'échelle par rapport à l'image à 1650 nm. J'effectue ensuite la différence spectrale suivante : $i_{\text{diff}_{1650}} = i_{1650\,\text{nm}} - \gamma i_{950\,\text{nm}}$, où γ est un coefficient qui minimise les moindres carrés : $|i_{\text{max}} - \gamma i_{\text{min}}|^2$, donné par Cornia et al. [46] :

$$\gamma = \frac{\sum_\rho i_{950\,\text{nm}}(\rho) i_{1650\,\text{nm}}(\rho)}{\sum_\rho i^2_{1650\,\text{nm}}(\rho)}, \tag{4.17}$$

Un modèle fin du champ de tavelures doit tenir compte des tavelures non centrosymétriques ainsi que de la réelle évolution des tavelures avec la longueur d'onde. C'est pourquoi j'ai décidé d'utiliser le modèle de Sauvage et al. plutôt que le modèle approché dans ma méthode d'inversion.

4.2 Réduction du nombre d'inconnues dans le modèle initial

Les enseignements tirés de l'étude du modèle approché m'ont aidé à définir des hypothèses clé pour la réussite de l'inversion avec le modèle de FEP coronographique longue pose de Sauvage et al. Comme elles ont un impact différent sur l'image finale, il est important de distinguer

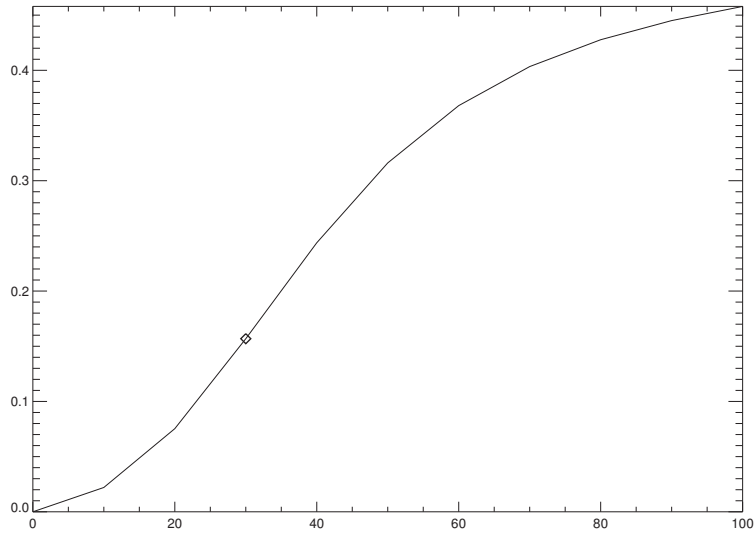


FIGURE 4.6 – **Évolution de la non-centrosymétrie des tavelures.** Évolution du niveau de résidus en fonction de la valeur RMS des aberrations quasi-statiques *upstream* dans une images simulée avec le modèle de Sauvage et al. (2010). Ces résidus correspondent à la part antisymétrique de l'image.

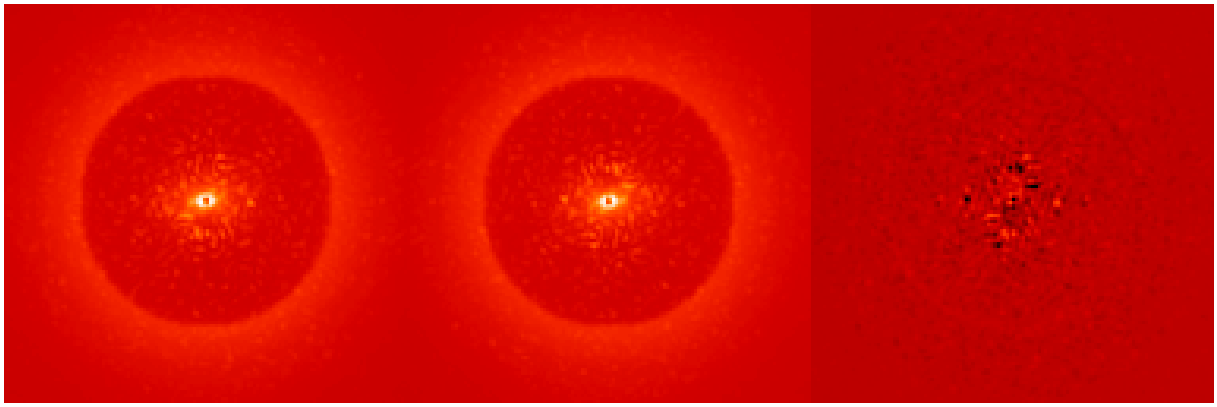


FIGURE 4.7 – **Non-centrosymétrie des tavelures.** Avec la même dynamique : image simulée [gauche], même image retournée de 180° [centre] et résidus après soustraction de ces deux images [droite]. Le gain sur la valeur RMS après la soustraction des tavelures est de 2.8.

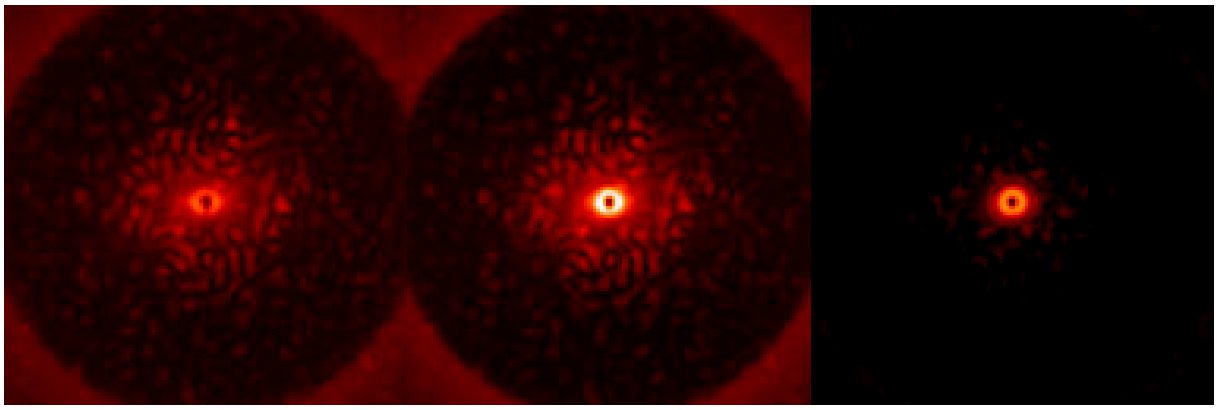


FIGURE 4.8 – **Évolution des tavelures avec la longueur d'onde.** Avec la même dynamique : [gauche] image à 950 nm remise à l'échelle à 1650 nm et multipliée par le coefficient γ, image à 1650 nm [centre] avant et [droite] après la soustraction des tavelures. Le gain sur la valeur RMS après la soustraction est de 2.5.

les aberrations situées avant et après le coronographe. L'effet des aberrations *downstream* est inférieur à celui des aberrations *upstream* et de plus, dans les futurs systèmes, on s'attend à ce qu'elles soient bien plus stables et plus facile à étalonner que les aberrations *upstream*.

De plus, dans le cas d'images longue pose, les aberrations résiduelles turbulentes sont moyennées et forment un halo lisse aisément distinguable d'une planète. La quantité statistique $\mathbf{D}_{\phi_r}$ qui caractérise ce halo sera mesuré par le senseur de front d'onde du système d'optique adaptative [92].

Par conséquent, dans la suite de ce manuscrit, je suppose que les aberrations statiques *downstream* et les aberrations résiduelles turbulentes seront étalonnées et donc connues. Cela diminue le nombre d'inconnues car la seule carte d'aberrations à estimer afin de connaître parfaitement la FEP coronographique est la carte des aberrations *upstream* quasi-statiques. Je noterai donc par la suite la FEP coronographique longue pose par $\mathbf{h}^c_\lambda\left(\boldsymbol{\delta}_u; \boldsymbol{\delta}_d, \mathbf{D}_{\phi_r}\right)$ à la place de $\mathbf{h}^c_\lambda\left(\boldsymbol{\delta}_u, \boldsymbol{\delta}_d, \mathbf{D}_{\phi_r}\right)$ pour souligner le fait que $\boldsymbol{\delta}_d$ and $\mathbf{D}_{\phi_r}$ sont supposés connus.

Un avantage de cette approche est que ces hypothèses peuvent évoluer. Le formalisme autorisera ainsi à modifier la méthode si finalement, on décide d'estimer les aberrations *downstream* et/ou les aberrations turbulentes résiduelles. Ainsi, il est possible d'accroître petit à petit la complexité du problème, on anticipe donc le fait d'utiliser les données réelles de l'instrument SPHERE ou d'un autre instrument.

4.3 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, j'ai développé un modèle approché d'imagerie coronographique décrivant la formation d'image par un instrument de type SPHERE.

Ce modèle approché est la somme de trois termes simples. Le premier dépend des aberrations quasi-statiques *upstream*, les deux autres dépendent des aberrations turbulentes résiduelles. Les

aberrations *downstream* n'interviennent pas dans cette expression au second ordre. Dans un cube d'images multispectrales simulé avec le modèle approché, l'intensité est proportionnelle à $1/\lambda^2$, et une simple mise à l'échelle en $1/\lambda$ est observée lorsque l'on passe d'une longueur d'onde à une autre.

La comparaison du modèle initial et du modèle simplifié m'a apporté de nombreux enseignements sur le modèle initial. Une première conclusion est que le modèle simplifié présente des différences notables par rapport au modèle initial, pour des hypothèses de simulation typiques d'un instrument comme SPHERE. Ceci a motivé mon choix d'utiliser le modèle initial dans la méthode d'inversion que j'ai développée. Cela n'enlève en rien l'intérêt du modèle approché, qui pourrait être utilisé pour d'autres systèmes avec des aberrations plus faibles. Une deuxième conclusion concerne les enseignements apportés par l'étude du modèle approché. Ils m'ont permis d'asseoir les intuitions physiques que j'avais concernant les aberrations *downstream*. Ceci m'a permis de prendre des hypothèses simplificatrices afin de rendre le critère moins non-convexe et donc utilisable pour l'inversion. Ainsi, j'ai pris comme hypothèses fortes que les aberrations turbulentes et les aberrations quasi-statiques *downstream* sont supposées connues. Enfin, le modèle approché a joué un rôle important pour la compréhension des mécanismes de minimisation lors du développement de stratégies d'optimisation [5].

À ce stade, je possède donc un modèle paramétrique d'imagerie coronographique suffisamment simple pour pouvoir être utilisé dans une inversion. Je vais à présent utiliser ce modèle dans la méthode d'estimation conjointe des aberrations et de l'objet développée dans le chapitre 3. N'ayant pas réussi à simplifier le modèle autant que je l'aurais voulu, je m'attends à des difficultés de minimisation lors de la mise en œuvre de l'algorithme de minimisation. L'objectif du chapitre suivant et donc de tester l'algorithme ainsi développé à partir de la méthode d'inversion sur des images simulées afin d'identifier et de résoudre d'éventuelles difficultés de minimisation.

4.4 Publication : Approximate Analytical Expression for AO-Corrected Coronagraphic Imaging in Preparation of Exoplanets Signal Extraction

5. cf. Sections 5.2, 5.3 et 5.4 du Chapitre 5

SF2A 2010
S. Boissier, M. Heydari-Malayeri, R. Samadi and D. Valls-Gabaud (eds)

APPROXIMATE ANALYTICAL EXPRESSION FOR AO-CORRECTED CORONAGRAPHIC IMAGING IN PREPARATION OF EXOPLANET SIGNAL EXTRACTION

Ygouf, M.[1], Mugnier, L.[1], Sauvage, J-F.[1], Fusco, T.[1], Mouillet, D.[2] and Beuzit, J-L.[2]

Abstract. The next step in the field of extrasolar planets imaging is on the verge of being reached with instruments such as SPHERE (Spectro Polarimetric High contrast Exoplanet REsearch), which will be capable of performing at the same time direct detection and spectral characterization thanks to integral field spectrograph (IFS) images.

In these multispectral images, the star is not completely cancelled by the AO-corrected coronagraphic system because of residual aberrations of the latter. In particular, the star image comprises quasi-static speckles that must be disentangled from the planet signal in order to get the sought information: is there a planet, where is it and what is its spectrum?

We are developing a specific image post-processing method using a Bayesian inverse problem approach. The essential required building block of such a method is a data model (often called "direct model") with a minimal number of unknown parameters. In the framework of the SPHERE project for the VLT, we propose an approximate analytical direct model of a long-exposure star image for an AO-corrected coronagraphic imaging system and we present some preliminary numerical simulations to validate this model.

Keywords: Exoplanets, Direct detection, Multispectral deconvolution, Inverse problems, Instrumentation, SPHERE, IFS

1 Introduction

Ground-based instruments have now demonstrated the capability to detect planetary mass companions (Chauvin et al. 2004; Lagrange et al. 2009; Marois et al. 2008; Kalas et al. 2008). First detections have been possible in favourable cases, at large separations and in young systems when low mass companion are still warm (>= 1000 K) and therefore not too faint. There is a very strong astrophysical case to improve the high contrast detection capability very close to stars.

Thus, several instruments combining adaptive optics (AO) and coronagraphs are currently under construction. It is the case of SPHERE (Beuzit et al. 2010), GPI (Graham et al. 2007) and several others that will follow such as EPICS (Kasper et al. 2008). All these instruments will be capable of performing multispectral imaging and will allow characterizing the planets by measuring their spectra.

One of the main limitations for high contrast imaging is the presence of speckles in the focal plane (Racine et al. 1999). They find their origin in wave front imperfections and evolves on various time scale. In order to distinguish a planet from these speckles, it is important to modelize the speckle pattern in function of the aberrations in presence of a coronagraph and adaptive optics.

2 Envisaged post-processing method

In the case of multispectral imaging, some post-processing methods have already been proposed in order to overcome the problem of detection limitation caused by the non-static speckles. Thus, Sparks and Ford (2002)

[1] Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales, Optics Department, BP 72, F-92322 Châtillon Cedex, France
[2] Laboratoire d'Astrophysique de l'Observatoire de Grenoble, BP53X, 414 Rue de la Piscine, 38041 Grenoble, France
© Société Francaise d'Astronomie et d'Astrophysique (SF2A) 2010

were the first to describe the so-called "spectral deconvolution" method in the framework of space-based observations for an instrument combining a coronagraph and an integral-field spectrograph. The goal of this method is to take advantage of the wavelength dependence of the PSF in order to remove the speckles while preserving both the flux and spectrum of the planet. The method is entirely based on the fit of a low-order polynomial. Latter, Thatte et al. (2007) presented an extension of the spectral deconvolution method to achieve very high contrast at small inner working radii for AO-corrected ground-based observations but without a coronagraph.

Nevertheless, the current spectral deconvolution method presents some limitations. It is an empirical method where no physical model is made explicit. Moreover, if some planets are present, they perturb the fit. That is why we propose an alternative approach, the Bayesian inverse problem (Idier 2008), which could estimate simultaneously the speckle field and the planet position by taking into account both the prior information we have on the speckles and the one we have on the possible planets.

3 Direct model

3.1 Model of coronagraphic imaging

In order to carry out the Bayesian inverse problem method, we need to derive a parametric direct model of coronagraphic imaging. We assume that, for an AO-corrected coronagraphic image, the direct model is the following sum of three terms, separating the coronagraphic stellar halo, the circumstellar source (for which the impact of coronagraph is neglected) and noise n_λ:

$$i_\lambda(x,y) = h_\lambda^c(x,y) + o_\lambda(x,y) \star h_\lambda^{nc}(x,y) + n_\lambda(x,y), \tag{3.1}$$

where the data are: $i_\lambda(x,y)$, the image we have access to and $h_\lambda^{nc}(x,y)$, the non-coronagraphic PSF which can be calibrated separately. Solving the inverse problem is finding the unknowns: the object $o_\lambda(x,y)$ and the speckle field $h_\lambda^c(x,y)$ which is the coronagraphic "point spread function".

A model description of $h_\lambda^c(x,y)$ directly depends on the turbulence residuals and optical wave front errors. In case of coronagraphic imaging, it is important to distinguish pre-coronagraphic aberrations from post-coronagraphic aberrations. After previous works to model non coronagraphic PSFs (Perrin et al. 2003) and coronagraphic PSFs (Cavarroc et al. 2006; Soummer et al. 2007), Sauvage et al. (2010) proposed an analytical expression for coronagraphic image with a distinction between upstream and downstream aberrations. In the perspective of using such an expression as a basis for inversion, we derive and discuss the merits of an approximation of the Sauvage et al. (2010) expression.

3.2 Model of a non-perfectly corrected approximate coronagraphic PSF

We consider the optical system of Figure 1 of Sauvage et al. (2010)'s paper composed of a telescope, a perfect coronagraph and a detector plane. Some residual turbulent aberrations $\phi_r(\rho,t)$ are introduced in the telescope pupil plane. $\phi_r(\rho,t)$ is assumed to be temporally zero-mean, stationary, ergodic and with a power spectral density $S_{\phi_r}(\alpha)$. The static aberrations are separated into two contributions: the aberrations upstream of the coronagraph $\phi_u(\rho)$, in the telescope pupil plane $\mathcal{P}_u(\rho)$ and the aberrations downstream of the coronagraph $\phi_d(\rho)$ in the Lyot Stop pupil plane $\mathcal{P}_d(\rho)$. The perfect coronagraph is defined as an optical device that subtracts a centered Airy pattern to the electromagnetic field.

Assuming that all the phases are small and that the spatial mean of $\phi_u(\rho)$ and $\phi_d(\rho)$ are equal to zero on aperture, we derive a second-order Taylor expansion of expression 24 of Sauvage et al. (2010)'s paper:

$$h_c(\alpha) = \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d(\alpha) \star \widetilde{\phi}_u(\alpha)\right|^2 + \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d(\alpha)\right|^2 \star S_{\phi_r}(\alpha) - \left\langle |P[\phi_r](t)|^2 \right\rangle_t \cdot \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d(\alpha)\right|^2 + o\left(\phi^2\right), \tag{3.2}$$

where $\tilde{\mathcal{P}}_d(\alpha)$ and $\tilde{\phi}_u(\alpha)$ are the Fourier transforms of the downstream pupil and upstream aberrations respectively and $P[\phi_r](t)$ denotes the piston of phase $\phi_r(\rho,t)$. $\left\{\left\langle |P[\phi_r(\alpha,t)]|^2 \right\rangle_t \cdot \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d(\alpha)\right|^2\right\}$ is a corrective term that compensates for the fact that $\phi_r(\rho,t)$ is stationary and thus non-piston-free on the aperture at every instant. Note that $\left|\widetilde{\mathcal{P}}_d(\alpha)\right|^2$ is the Airy pattern formed by the pupil $\mathcal{P}_d(\alpha)$.

4 First results of validation

Qualitative validation This expression is far more intuitive than Equation (24) of Sauvage et al. (2010) and brings physical insight to it:

- firstly, the downstream aberrations do not appear in this expression. While the exact expression depends on three parameters ($\phi_u(\rho)$, $\phi_d(\rho)$ and $D_{\phi_r}(\rho)$), the approximate expression depends on only two parameters which are the Fourier transform of the static upstream phase aberrations $\widetilde{\phi}_u(\alpha)$ and the PSD of the residual turbulent aberrations $S_{\phi_r}(\alpha)$. Cavarroc et al. (2006) had already showed that the main limitation comes from the static aberrations, now we have analytical confirmation that the static upstream aberrations are predominant with respect to the static downstream aberrations;
- secondly, we can separate our expression into two terms: one static term and one turbulent term which is coherent with the Soummer et al. (2007)'s paper and makes a connection between this paper and the physical parameters of interest $\widetilde{\phi}_u(\alpha)$ and $S_{\phi_r}(\alpha)$;
- thirdly, we can show that if we rewrite Equation (3.2) as a function of wavelength we can validate theoretically the spectral deconvolution method.

Quantitative validation We want to compare the approximate expression of Equation (3.2) to the exact expression of Equation (24) in Sauvage et al. (2010) to determine the error due to the Taylor expansion. The simulated instrumental conditions are typical of a SPHERE-like instrument (Fusco et al. 2006) and the same as these of Sauvage et al. (2010). Three simulation programs were used:

- the first simulates an empirical long exposure PSF by adding one hundred short-exposure coronagraphic PSF's;
- the second simulates the analytical long exposure coronagraphic image model;
- the third simulates the approximate analytical long exposure coronagraphic image model.

In order to test the approximate expression for each kind of aberration and to quantify the errors due to the Taylor expansion, we compared it with the exact expression. The results of this comparison are shown in Figure 1. We plotted the circularly averaged intensity profiles of the exact model, the approximate model and the circularly averaged root mean square residual of the difference between them in different configurations to quantify the influence of each kind of aberration:

- in presence of all kinds of aberrations, the corresponding error is about twenty-nine percent (Figure 1, left);
- because the approximate model do not take the downstream aberrations into account, it is interesting to compute the same results without downstream aberrations for the exact model. The corresponding error is about seventeen percent. That means that the contribution of the downstream aberrations is about less than a third of the total error (Figure 1, right);
- if we do the same, without residual turbulent aberrations, the corresponding error is about seven percent. Here again, we can deduce the contribution of the residual turbulent aberrations and upstream aberrations which are approximately equal for these simulation conditions representative of SPHERE (Figure 1, right).

It is interesting to see that the three kinds of aberrations have approximately the same non-negligible error. We must be careful with this result which is right for the SPHERE instrument where the downstream aberrations are three times more important than the upstream aberrations. Thus, it does not call the fact that the upstream aberrations are predominant besides the downstream aberration into question.

These results raise some interesting questions as for example: What happens if we consider a non perfect coronagraph? How do these errors propagate and how do they affect the detection and characterization performances if we use our approximate expression in an inversion process?

5 Conclusion and prospects

We have obtained an approximate expression for AO coronagraphic image that is much simpler than the exact expression of Sauvage et al. (2010). Because it has one less parameter, it would be easier to implement in an inversion process. Qualitatively, the result is consistent with the previous works on coronagraphic and non-coronagraphic imaging. We also have discussed quantitatively the error level with respect to the exact expression due to the approximation in SPHERE-like conditions.

We are currently finalizing the numerical validation of the approximate expression by comparing the results obtained with a perfect 4-quadrant coronagraph and by propagating the aberrations errors into the inversion process. This will allow us to decide if we will use this approximate expression or the exact expression to perform the inversion. Then, we shall implement a first inversion on simulated images before adapting our inversion to real images from the SPHERE instrument.

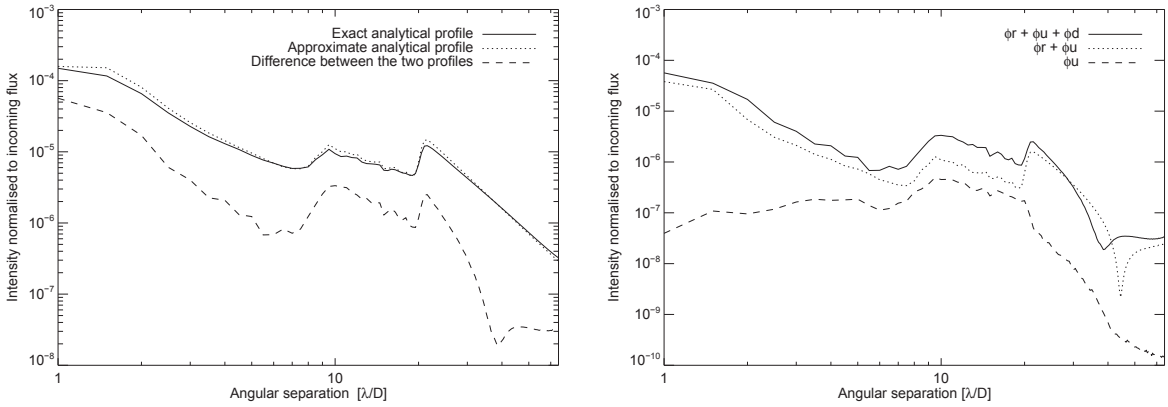


Figure 1. Circularly averaged profiles. [Left] Exact analytical model versus Taylor expansion and error between the two models. [Right] Evolution of the error between the two models in function of the kind of aberrations introduced.

References

Beuzit, J.-L., et al. 2010, SPHERE: a planet imager for the VLT. In *Telescopes and Systems*. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Cavarroc, C., et al. 2006, Fundamental limitations on Earth-like planet detection with extremely large telescopes. *Astron. Astrophys.*, 447:397–403.

Chauvin, G. et al. 2004, A giant planet candidate near a young brown dwarf. Direct VLT/NACO observations using IR wavefront sensing. *Astron. Astrophys.*, 425:L29–L32.

Fusco, T. et al. 2006, High order adaptive optics requirements for direct detection of extra-solar planets. application to the sphere instrument. *Opt. Express*, 14(17):7515–7534

Graham, J. R. et al. 2007, Ground-Based Direct Detection of Exoplanets with the Gemini Planet Imager (GPI). *ArXiv e-prints*.

Idier, J. 2008, *Bayesian Approach to Inverse Problems*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc

Kalas, P. et al. 2008, Optical Images of an Exosolar Planet 25 Light-Years from Earth. *Science*, 322:1345–.

Kasper, M. et al. 2008, EPICS: the exoplanet imager for the E-ELT. In *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, volume 7015 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*

Lagrange, A.-M. et al. 2009, A probable giant planet imaged in the β pictoris disk. VLT/NaCo deep L'-band imaging. *Astron. Astrophys.*, 493:L21–L25.

Marois, C. et al. 2008, Direct Imaging of Multiple Planets Orbiting the Star HR 8799. *Science*, 322:1348–.

Perrin, M. D. et al. 2003, The Structure of High Strehl Ratio Point-Spread Functions. *Astrophys. J.*, 596:702–712.

Racine, R. et al. 1999, Speckle noise and the detection of faint companions. *Pub. Astron. Soc. Pacific*, 112:587–594.

Sauvage, J.-F. et al. in press, Analytical expression of long-exposure AO-corrected coronagraphic image. First application to exoplanet detection. *J. Opt. Soc. Am.*.

Soummer, R. et al. 2007, Speckle Noise and Dynamic Range in Coronagraphic Images. *Astrophys. J.*, 669:642–656.

Sparks, W. B. and Ford, H. C. 2002, Imaging Spectroscopy for Extrasolar Planet Detection. *Astrophys. J.*, 578:543–564.

Thatte, N. et al. 2007 Very high contrast integral field spectroscopy of ab doradus c: 9-mag contrast at 0.2 arcsec without a coronagraph using spectral deconvolution. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 378:1229–1236.

Chapitre 5

Mise en œuvre de la méthode d'estimation conjointe des aberrations et de l'objet

Dans ce manuscrit, j'ai posé les bases d'une nouvelle méthode d'estimation conjointe des aberrations et de l'objet pour la détection d'exoplanètes. J'ai identifié les difficultés majeures de cette méthode, à savoir, l'ambiguïté qui existe entre les deux inconnues à estimer et la difficulté de minimisation associée à l'étape de *phase retrevial*. L'étape suivante consiste en l'application de la méthode sur des images simulées afin d'appréhender son fonctionnement. Est-elle capable d'abaisser le niveau de tavelures résiduelles dans l'image de l'objet afin d'y distinguer des planètes ? Si oui, avec quel niveau de précision peut-on déterminer leur position et leur flux ? Dans quelle mesure les ingrédients de la méthode développée, à savoir le modèle d'imagerie utilisé, les informations *a priori* et la redondance multispectrale des images, aident-il à trouver une solution exploitable parmi les nombreuses solutions possibles du problème de minimisation du critère ?

L'article [93] (5.1.6) présente les éléments les plus importants de ce travail. Le lecteur pourra y trouver une synthèse de ce que j'ai décrit jusqu'à présent, mais également les réponses à ces nouvelles questions. Cependant, il ne décrit pas les différentes étapes qui m'ont permis d'appréhender le fonctionnement de la méthode. Ces étapes, dont fait l'objet ce dernier chapitre, m'ont permis d'identifier plusieurs stratégies de minimisation du critère complexe et de proposer un schéma d'optimisation pour la détection d'exoplanètes.

Avant toute chose, je rappelle les conclusions auxquelles j'ai abouti dans l'article dans la section 5.1. Je reviens ensuite sur les difficultés rencontrées et les solutions apportées. J'étudie notamment le rôle des aberrations turbulentes (5.2) et l'effet d'une mauvaise estimation du flux de l'étoile (5.3). J'aborde également l'impact du niveau d'aberrations *downstream* sur l'inversion (5.4). Enfin, je discute l'impact du réglage des hyperparamètres de la régularisation sur l'objet, dont le rôle est important pour lever l'indétermination qui existe entre les aberrations et l'objet (5.5).

5.1 Principales conclusions tirées de la mise en œuvre de la méthode d'inversion sur des images simulées

La mise en œuvre de la méthode d'inversion sur des images simulées est la toute première étape de sa validation. Après un bref rappel des hypothèses de simulation des images utilisées pour l'inversion (5.1.1), j'introduis les estimateurs de la qualité de convergence de l'algorithme qui m'ont servi lors de cette étude (5.1.2). Je présente brièvement un schéma d'optimisation qui assure le fonctionnement de la méthode (5.1.3), sa robustesse (5.1.4) et ses performances en terme de détection (5.1.5). Vient alors l'article proprement dit qui rassemble les principaux résultats obtenus (5.1.6). Pour finir, j'apporte des informations supplémentaires qui complètent les résultats décris dans l'article (5.1.7).

5.1.1 Hypothèses de simulation

Afin de tester ma méthode, j'ai simulé différentes images avec le même modèle d'imagerie utilisé pour l'inversion (cf. section 2.1.3 du chapitre 2). Les hypothèses sont typiques des situations attendues pour les instruments de nouvelle génération comme SPHERE. Sauf mention contraire, le niveau des aberrations *upstream* et *downstream* est d'environ 30 nm. Quatre planètes sont insérées dans l'image de l'objet (cf. Figure 5.1) [1]. Numérotées de 1 à 4, elles présentent différentes séparations angulaires à l'étoile et différents rapports de flux [2] :

- La **planète 1** est la planète la plus brillante avec un contraste de 10^5 par rapport à l'étoile et aussi relativement proche de l'étoile (à 0.2 arcsec) ;
- La **planète 2** a un contraste plus grand (10^6) que la planète 1, à la même séparation ;
- La **planète 3** a le même contraste que la planète 2 (10^6) mais à une plus grande séparation de l'étoile (à 0.4 arcsec) que les deux précédentes planètes ;
- La **planète 4** a un contraste 10^7 à une séparation identique à celle de la planète 3.

Pour rappel, pour les ordres de grandeur, la limite de détection attendue pour SPHERE est au minimum de 10^6 à 0.5 arcsec et de 5×10^5 à 0.1 arcsec. Le niveau de performance ultime, éventuellement même au delà de 10^7, pourra aussi s'appuyer sur la stabilité temporelle de la réponse instrumentale [3].

Sauf mention contraire, les inconnues du problème, ou paramètres à estimer, sont le flux de l'étoile f^*, la carte d'aberrations quasi-statiques upstream $\boldsymbol{\delta}_u$ et la carte objet $\mathbf{o}$ identique à toutes les longueurs d'onde (cf. 2.1.3.3 et 4.2 pour une discussion sur les inconnues du problème).

Les images simulées sont monochromatiques, i.e. la largeur de chaque bande spectrale est nulle [4].

1. Par souci de confort visuel, je préfère illustrer, ici et dans la suite du manuscrit, les images en plan focal.
2. Par la suite, et pour plus de simplicité, j'appellerai « contraste » le rapport de flux entre une étoile hôte et une des ses planètes.
3. Cet aspect temporel n'est pas abordé dans cette thèse.
4. Il serait intéressant de simuler des cas plus réalistes et voir les dégradations en performance que cela implique, mais ceci ne fait pas l'objet de cette thèse.

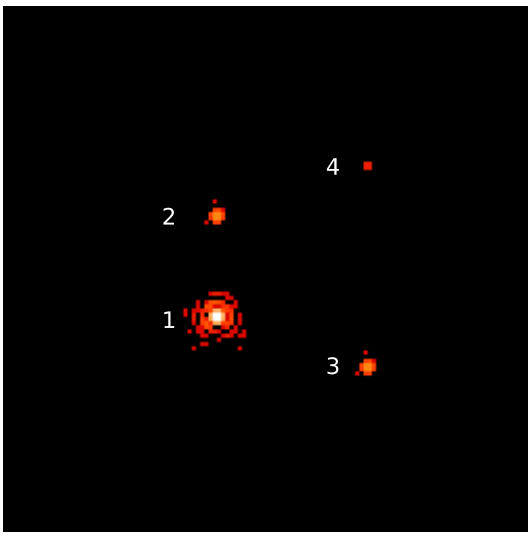


FIGURE 5.1 – **Image de l'objet simulée.** Quatre planètes sont simulées : (1) contraste de 10^5 et séparation de 0.2 arcsec, (2) contraste de 10^6 et séparation de 0.2 arcsec, (3) contraste de 10^6 et séparation de 0.4 arcsec, (4) contraste de 10^7 et séparation de 0.4 arcsec.

5.1.2 Définition d'estimateurs de la performance de la méthode

Comme il est très difficile de trouver le minimum global du critère à minimiser qui est la meilleure solution du problème dans une telle inversion, il est relativement compliqué de définir un estimateur unique de la performance de la méthode. C'est pourquoi, durant ma thèse, je me suis servie de plusieurs estimateurs. Avant toute chose, je me propose définir les termes fonctionnement, robustesse et performance de la méthode, que j'emploie dans la suite du manuscrit.

5.1.2.1 Terminologie

Le fonctionnement de la méthode est étroitement lié à l'estimation des aberrations *upstream*. Si ces dernières ne sont pas correctement estimées, alors la carte de phase que l'on obtient est très loin de la carte de phase vraie [5]. Cela signifie deux choses :

- L'algorithme est tombé dans un minimum local (cf. 2.2.3.1) ;
- Cela rend la détection de planètes impossible à cause d'un fort résidu de tavelures dans l'objet.

Pour que la méthode fonctionne, il est donc essentiel que l'erreur sur la phase estimée soit nettement inférieure à la phase vraie.

Une fois que l'on est capable de déterminer si la méthode fonctionne, il est intéressant de s'intéresser à sa robustesse et sa performance. Dans la suite, la robustesse mesurera la probabilité que la méthode fonctionne sur un échantillon de réalisations à cartes de phases vraies variables. La performance sera synonyme de qualité d'estimation de la carte objet.

5. La figure 6(i) de l'article montre de tels cas de phases estimées pour lesquelles la méthode n'a pas fonctionné.

5.1.2.2 Estimateurs

Il est tout d'abord utile, afin de déterminer si la méthode fonctionne, de regarder la carte d'aberrations, et de déterminer la valeur RMS de la différence entre les aberrations simulées et les aberrations estimées :

$$\sigma_{\boldsymbol{\delta}_u} = \frac{\sqrt{\sum_{\boldsymbol{\rho}} \left[\boldsymbol{\delta}_u^{\text{simulé}}(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\delta}_u^{\text{estimé}}(\boldsymbol{\rho})\right]^2}}{\sqrt{\sum_{\boldsymbol{\rho}} \left[\boldsymbol{\delta}_u^{\text{simulé}}(\boldsymbol{\rho})\right]^2}} \times 100. \tag{5.1}$$

Un autre critère pour évaluer la réussite de la minimisation est de relever la valeur du critère à convergence. La valeur théorique du terme d'attache aux données étant connue, un critère à convergence trop éloigné de cette valeur quantifie la performance de la méthode.

Par ailleurs, une erreur sur l'estimation du flux de l'étoile est à l'origine de tavelures résiduelles dans l'objet. Il est donc important que cette erreur, calculée comme suit :

$$\sigma_{f^*} = \frac{f^*_{\text{simulé}} - f^*_{\text{estimé}}}{f^*_{\text{simulé}}} \times 100, \tag{5.2}$$

soit la plus faible possible.

Quand le niveau de tavelures résiduelles dans l'objet devient plus faible que l'intensité des planètes, ces dernières deviennent détectables. Il est alors possible de déterminer si une planète est détectée simplement en regardant l'image de l'objet estimé ou l'objet lui-même.

Une fois une ou plusieurs planètes détectées, il est légitime de vouloir quantifier plus finement les performances de la méthode. On peut regarder alors avec quelle précision on est capable d'estimer le flux des planètes [6] :

$$\sigma_{f_p} = \frac{f_p^{\text{simulé}} - f_p^{\text{estimé}}}{f_p^{\text{simulé}}} \times 100. \tag{5.3}$$

Il est également intéressant d'estimer le flux résiduel du fond de l'objet, i.e, tous les pixels qui ne correspondent pas à une position de planète :

$$\sigma_{\mathbf{o}} = \sqrt{\sum_{\lambda} \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \left[m(\boldsymbol{\alpha})\, \mathbf{o}_{\lambda}^{\text{estimé}}(\boldsymbol{\alpha})\right]^2},$$

où $m(\boldsymbol{\alpha})$ est un masque égal à 0 sur les pixels où se trouvent les planètes et 1 ailleurs. Le fond de l'objet simulé étant égal à zéro, la présence d'énergie dans le fond de l'objet estimé est la preuve que des résidus d'aberrations ou de bruit subsistent dans l'objet. Dans les tests effectués, l'objet est supposé à spectre plat, i.e. avec un flux identique à toutes les longueurs d'onde. Dans ce cas, le critère précédent se simplifie comme suit :

$$\sigma_{\mathbf{o}} = \sqrt{\sum_{\boldsymbol{\alpha}} \left[m(\boldsymbol{\alpha})\, \mathbf{o}^{\text{estimé}}(\boldsymbol{\alpha})\right]^2}. \tag{5.4}$$

6. Lorsque j'estimerai le flux des planètes (ou de l'étoile), je le ferais systématiquement sur les images à 950 nm et ce, quel que soit le nombre de bandes spectrales utilisées pour l'inversion. Ceci me permettra de comparer aisément tous les cas. De même, les images choisies pour les illustrations sont, sauf mention contraire, toutes à 950 nm.

Ces estimateurs de la performance de la méthode ne sont, pour la plupart, utilisables que parce j'ai accès aux images vraies et aux paramètres des images simulées [7]. Il s'agit de critères qui m'ont aidé pour le développement de la méthode et qui ne seront en aucun cas utilisables dans le cas d'images réelles. Dans le cas d'un travail sur de vraies images, ce qui n'a pas fait l'objet de cette thèse, il sera nécessaire de déterminer de nouveaux critères de détection.

5.1.3 Schéma d'optimisation assurant la performance de la méthode

À cause de la forte non-linéarité du modèle analytique d'imagerie coronographique et le nombre d'inconnues à estimer (environ 10^3 dans ce cas), l'étape de *phase retrieval* reste un problème difficile, même dans le cas où les données à restaurer sont multispectrales [8]. Malgré tout, j'ai réussi à trouver une solution me permettant de détecter des planètes.

Pour cela, j'ai mis en place un schéma d'optimisation permettant d'y parvenir. La figure 8 de l'article intitulée : *Block diagram of the algorithm used for the joint estimation of the object map and the upstream aberrations*, résume les différentes étapes de ce schéma d'optimisation. Il utilise des stratégies originales, inspirées par l'étude du modèle d'imagerie notamment, pour répondre aux difficultés de minimisation du *phase retrieval*. Un élément de solution est d'utiliser une petite carte de phase aléatoire comme point de départ (cf. section 4.4.1 de l'article), ce qui aide à s'affranchir de certains minimas locaux. Une phase d'initialisation est alors réalisée (cf. section 4.4.2 de l'article), en explorant les différentes directions offertes par les cartes d'aberrations « quasi-équivalentes » définies au chapitre 4 (cf. section 4.1.3.3). La solution qui conduit au plus petit critère est sélectionnée, ce qui permet de contourner d'autres minimas locaux. Ensuite, l'algorithme itératif décrit dans le chapitre 3 (cf. Figure 3.3), qui alterne entre l'estimation des aberrations (*phase retrieval* multispectral) et l'estimation de l'objet (*déconvolution multispectrale*), est lancé. Des itérations sont effectuées (cf. section 4.3 de l'article) jusqu'à ce que la règle de convergence de l'algorithme (cf. Figure 8 de l'article) soit vérifiée.

5.1.4 Robustesse de la méthode

J'ai mis en place une approche de minimisation qui reste relativement rapide (i.e. sans explorer de manière systématique l'espace des paramètres à la recherche du minimum global), mais avec une bonne robustesse malgré tout : des tests extensifs montrent que l'algorithme converge vers le minimum global dans 90% des cas de manière systématique, et dans les autres cas, l'erreur apparaît de façon flagrante dans les résultats avec aucun risque de confusion et peut motiver des tests avec des approches alternatives de minimisation du critère. Ces tests extensifs m'ont notamment permis de tirer les conclusions suivantes, concernant l'intérêt de l'imagerie multispectrale pour l'inversion :

7. Certains indices ou critères restent utilisables, au moins la valeur du critère d'attache aux données à convergence.

8. Comme on le verra plus loin, la redondance d'informations apportée par des données multispectrales est utile pour améliorer les performances de l'algorithme mais ne suffit pas à elle seule pour le faire fonctionner.

– L'augmentation du nombre de bandes spectrales pour l'inversion permet de détecter des planètes plus faibles, ce qui confirme l'intérêt du multispectral pour distinguer aberrations et objet. De plus, l'erreur sur l'estimation du flux des planètes est plus faible lorsque le nombre de bandes spectrales augmente ;
– L'inversion est d'autant plus robuste que le nombre de longueurs d'onde augmente car le nombre de détections de planètes pour des cartes d'aberration différentes augmente avec le nombre de bandes spectrales utilisées pour l'inversion.

La façon dont on gère le nombre de bandes spectrales utilisées pour l'inversion a également un impact important pour la convergence de l'algorithme. En effet, un schéma d'optimisation avec des inversions successives qui utilisent un nombre croissant de bandes spectrales semble, à ce stade, plus efficace et plus robuste qu'une seule inversion avec un grand nombre de bandes spectrales.

5.1.5 Performances en terme de détection de la méthode

La reconstruction des images simulées avec un coronographe parfait est très encourageante pour l'extraction du signaux planétaires à des niveaux commençant à être astrophysiquement intéressants. J'ai démontré l'efficacité de la méthode avec seulement deux bandes spectrales, même proches (100 nm de largeur de bande, ce qui peut être très intéressant du point du vue du DBI), en atteignant un contraste de 10^5 à 0.2 arcsec. La redondance multispectrale améliore la détection, permettant d'atteindre un contraste de 10^6 à 0.2 arcsec avec six bandes spectrales.

5.1.6 Publication : Simultaneous Exoplanet Detection and Instrument Aberration Retrieval in Multispectral Coronagraphic Imaging

Cette publication a été soumise dans la revue Astronomy and Astrophysics.

Astronomy & Astrophysics manuscript no. aa20318-12
February 27, 2013
© ESO 2013

Simultaneous exoplanet detection and instrument aberration retrieval in multispectral coronagraphic imaging

M. Ygouf[1 2] and L. M. Mugnier[1] and D. Mouillet[2] and T. Fusco[1] and J.-L. Beuzit[2]

[1] ONERA - The French Aerospace Lab F-92322 Châtillon, France

[2] UJF-Grenoble 1 / CNRS-INSU, Institut de Planétologie et d'Astrophysique de Grenoble (IPAG) UMR 5274, Grenoble, F-38041, France

Received 31 August 2012 / Accepted 16 November 2012

ABSTRACT

Context. High-contrast imaging for the detection and characterization of exoplanets relies on the instrument's capability to block out the light of the host star. Some current post-processing methods for calibrating out the residual speckles use information redundancy offered by multispectral imaging but do not use any prior information on the origin of these speckles.
Aims. We investigate whether additional information on the system and image formation process can be used to more finely exploit the multispectral information.
Methods. We developed an inversion method in a Bayesian framework that is based on an analytical imaging model to estimate both the speckles and the object map. The model links the instrumental aberrations to the speckle pattern in the image focal plane, distinguishing between aberrations upstream and downstream of the coronagraph.
Results. We propose and validate several numerical techniques to handle the difficult minimization problems of *phase retrieval* and achieve a contrast of 10^6 at 0.2 arcsec from simulated images, in the presence of photon noise.
Conclusions. This opens up the the possibility of tests on real data where the ultimate performance may override the current techniques if the instrument has good and stable coronagraphic imaging quality. This paves the way for new astrophysical exploitations or even new designs for future instruments.

Key words. High angular resolution - Image processing - Detection

1. Introduction

Ground-based instruments have now demonstrated the capability of detecting planetary mass companions (Chauvin et al. 2004; Lagrange et al. 2010; Marois et al. 2008) around bright host stars. By combining adaptive optics (AO) system and coronagraphs, some first direct detections from the ground have been possible in favorable cases, at large separations and in young systems when low-mass companions are still warm ($\geq 1000\,$K) and therefore not too faint. There is a very strong astrophysical case to improve the high-contrast detection capability (10^5 for a young giant planet to 10^{10} for an earth-like planet in the near infrared) very close to stars (< 0.1" to 1").

Several instruments will be capable of performing multispectral imaging and will allow characterizing the planets by measuring their spectra. This is the case of GPI (Gemini) (Graham et al. 2007), Palm 3000 (Palomar) (Hinkley et al. 2011), SCExAO (Subaru) (Martinache & Guyon 2009), SPHERE (VLT) (Beuzit et al. 2008), and several others that will follow, such as EPICS (E-ELT) (Kasper et al. 2008). By combining extreme adaptive optics (Ex-AO) and more accurate coronagraphs than before, the level of star light cancellation is highly improved, leading to a better signal-to-noise ratio. Even so, the residual host star light is affected by the instrument aberrations and forms a pattern of intensity variations or "speckle noise" on the final image. Part of the speckles cannot be calibrated because they evolve on various time scales (neither fast enough to smooth down to a halo nor stable enough to remove) and for this reason, these "quasi-static speckles" are one of the main limitations for high-contrast imaging.

Several authors have discussed the challenge posed by the elimination of speckle noise in high-contrast multispectral images. It can be done by post-processing, after the best possible observations. Because images are highly spectrally correlated, one can use the wavelength dependence of the speckles to subtract them. In the particular case of coronagraphic multispectral imaging, only some empirical methods have been developed to subtract the speckle field from the image in the focal plane.

We propose an alternative approach based on a parametrized imaging model for the post-processing of multispectral coronagraphic imaging corrected by an extreme AO system in the near-infrared domain. The aberrations and bright companions at small separations are estimated jointly in a Bayesian framework. In particular, it is possible to take advantage of prior information such as a knowledge on the aberration levels. This type of approach will be all the more efficient as the instruments improve with lower or more stable aberrations and more efficient coronagraphs.

In section 2, we explain how previous methods used the information redundancy to suppress the speckles in high-contrast imaging. Then, we describe the advantages of a joint Bayesian estimation of the aberrations in the pupil

plane and of the planet map, based on a parametrized model of coronagraphic imaging. Section 3 presents the long-exposure coronagraphic imaging model that is used to simulate the images and to restore them. We also study the case of an approximate model. Section 4 describes the proposed Bayesian joint estimation method as well as theoretical and numerical problems of an alternating restoration algorithm. In particular, we address the strong minimization difficulties associated to the aberration estimation and we propose some solutions. In Section 5, our method is validated by restoring images simulated with a perfect coronagraph.

2. Post-processing speckle subtraction and multispectral imaging

Several empirical post-processing methods have already been proposed to overcome the problem of detection limitation caused by the quasi-static speckles. Some of these methods used the wavelength dependence of the speckle pattern (Fig. 1) to estimate it and subtract it from the image, while preserving both the flux and spectrum of the planet.

Racine et al. (1999) suggested to subtract two images at different wavelengths to eliminate both the point-spread function (PSF) and the speckle field in non-coronagraphic images. The main limitation of this *simultaneous differential imaging* (SDI) method comes from the residuals caused by the evolution of the general PSF profile and of the speckle pattern with wavelength. These residuals can be reduced by increasing the number of images used for the speckle field subtraction. Marois et al. (2000) showed with their *double difference* method that adding another image to the SDI theoretically improves the signal-to-noise ratio in the final image of the restored companion. The case of multispectral images has been tackled by Sparks & Ford (2002), who described the so-called *spectral deconvolution* method in the framework of space-based observations for an instrument combining a coronagraph and an integral-field spectrometer (IFS). The method, subsequently improved and tested on ground-based non-coronagraphic data by Thatte et al. (2007), is entirely based on a speckle intensity fit by low-order polynomials as a function of wavelength in the focal plane. More recently, Crepp et al. (2011) combined this method with the LOCI algorithm, which is based on a linear combination of images (Lafrenière et al. 2007). They tested this approach to restored on-sky images from the Project 1640 IFS on the Palomar telescope. These methods are applicable to any optical system and in particular to those with coronagraphs. However, it is challenging to prevent the planet signals from being eliminated with the speckles because the planet presence is not explicitly modeled.

In addition, some information on the measurement system can be very useful to distinguish a planet from the speckle field. Burke & Devaney (2010) combined classical empirical techniques of differential imaging with a multi-wavelength *phase retrieval* method to estimate the aberration pattern in the pupil plane with a simple imaging model without a coronagraph. This multi-wavelength *phase retrieval* is nicknamed wavelength diversity (Gonsalves 1982). Information diversity is obtained here by different wavelengths whereas it is obtained by introducing a known phase, e.g. defocus, in *phase diversity*. But in contrast to the *phase diversity*, the wavelength diversity does not remove the phase sign ambiguity. In Burke & Devaney (2010), the inversion algorithm is based on a maximum-likelihood estimator, which measures the discrepancy between the data and an imaging model. The minimization of this estimator is all the more difficult as the number of unknowns to estimate is high. This problem is overcome by the sparse parametrization of the unknown phases ϕ_λ through the optical-path-errors (or aberrations) δ, assuming that the former are achromatic: $\phi(\lambda) = 2\pi\delta/\lambda$. This allows one to exploit jointly the images at all wavelengths to estimate the aberrations efficiently: the map of the unknown optical-path-errors δ is common to all wavelengths. The number of unknowns is thus limited and the problem constrained. In the present case, Burke's wavelength diversity method does not apply readily, because it assumes non-coronagraphic imaging, whereas we consider the highly non-linear case of a coronagraphic imaging model.

That is why we propose to take advantage of a combined use of wavelength diversity applied in a case of a coronagraphic imaging model, and a Bayesian inversion to jointly estimate the aberrations in the pupil plane and the planet map. The joint estimation aims at taking up the challenge of preserving the planets signal. An advantage of the Bayesian inversion is that it can potentially include an important regularization diversity to constrain the problem, using for example prior information on the noise, the planet map (position, spectrum, etc.) or the aberrations. In the Bayesian framework, the criterion to be minimized is the sum of two terms: the data fidelity term, which measures the distance between the data and the imaging model, and one or more penalty terms. An important difficulty is to define a realistic coronagraphic imaging model, that depends on parameters (e.g. aberrations) that can be either calibrated beforehand or estimated from the data.

3. Parametric model for multispectral coronagraphic imaging

To carry out the Bayesian inversion, we need a parametric direct model of coronagraphic imaging. This direct model will also be useful to simulate our test images.

We used a non-linear analytical expression of the coronagraphic image as proposed by Sauvage et al. (2010), with an explicit role of the optical aberrations before and after the coronagraph, and turbulence residuals. This model assumes that the coronagraph is "perfect" in the sense that the coherent energy is perfectly canceled out. The presence of upstream aberration however, will result in remaining intensity from the star in the image. The aberrations, or optical-path-errors, δ, are assumed to be achromatic as an approximation. The most recent spectro-imagers take increasing care to avoid any source of chromatism, such as out-of-pupil aberrations, down to a level compatible with contrasts higher than 10^6. The variable $\alpha \equiv (\alpha_x, \alpha_y)$ represents the angular position in the focal plane in radians and the variable $\rho \equiv (\rho_x, \rho_y)$ is the angular position in the pupil plane in radians^{-1}. Finally, $\lambda\rho \equiv (\lambda\rho_x, \lambda\rho_y)$ corresponds to a spatial position in the pupil plane in meters.

We recall and discuss this model below. In particular, we estimate its simplified expression in the asymptotic case of very low phase, with its second-order Taylor expansion. This simplified expression helps to understand the explicit

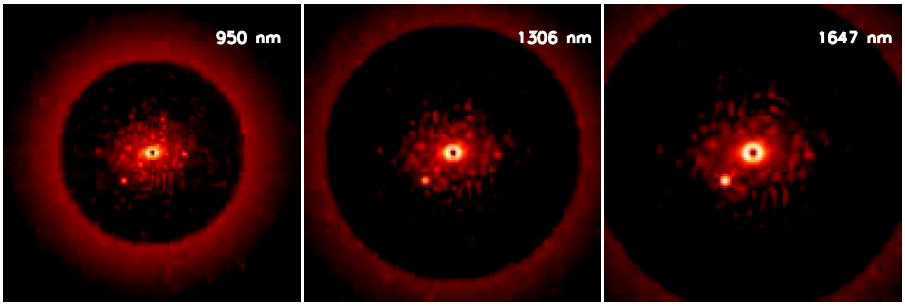


Fig. 1. Evolution of the speckle field with the wavelength. Simulated images at 950, 1306, and 1647 nm for a 10^3 stellar flux over planet flux contrast. The dynamic range is adapted to the visualization. The speckle field moves with the wavelength but not with the planet position.

way in which each type of aberration impacts the image. It also helps to identify some important ambiguities with different sets of phases that can produce similar images, which will guide the subsequently selected approach for phase retrieval. We also estimate the departure from this low-phase approximation when the phase grows and discuss the validity of this approximation in a SPHERE-like case.

3.1. Imaging model

We assume that for an AO-corrected coronagraphic image at the wavelength λ, the direct model is the following sum of three terms, separating the residual coronagraphic stellar halo, the circumstellar source (for which the impact of coronagraph is neglected), and noise n_λ:

$$i_\lambda(\alpha) = f_\lambda^* \cdot h_\lambda^c(\alpha) + [o_\lambda \star h_\lambda^{nc}](\alpha) + n_\lambda(\alpha), \qquad (1)$$

where $i_\lambda(\alpha)$ is the data, i.e., the image to which we have access, f_λ^* is the star flux at wavelength lambda and $h_\lambda^{nc}(\alpha)$, the non-coronagraphic PSF, which can be estimated separately. Solving the inverse problem is finding the unknowns, namely the object $o_\lambda(\alpha)$ and the speckle field $h_\lambda^c(\alpha)$, which we also call the "coronagraphic PSF".

3.2. Long-exposure coronagraphic PSF model

A model description of $h_\lambda^c(\alpha)$ directly depends on the turbulence residuals and optical wave-front errors. After previous works to model non-coronagraphic PSFs (Perrin et al. 2003) and coronagraphic PSFs (Cavarroc et al. 2006; Soummer et al. 2007), Sauvage et al. (2010) proposed an analytical expression for the coronagraphic image with a distinction between upstream and downstream aberrations (cf. Equation (16) in Appendix B). The considered optical system is composed of a telescope, a perfect coronagraph, and a detector plane (cf. Figure (2)). Some residual turbulent aberrations $\delta_r(\rho,t)$ are introduced in the telescope pupil plane. $\delta_r(\rho,t)$ is assumed to be temporally zero-mean, stationary and ergodic. Because we only consider exposure times that are long with respect to turbulence timescales, these turbulent aberrations contribute only through their statistical spatial properties: power spectral density $S_{\delta_r}(\alpha)$ or structure function D_{ϕ_r}. The static aberrations are separated into two contributions: the aberrations upstream of the coronagraph $\delta_u(\rho)$, in the telescope pupil plane $\mathcal{P}_u(\rho)$ and the aberrations downstream of the coronagraph $\delta_d(\rho)$ in the Lyot Stop pupil plane $\mathcal{P}_d(\rho)$. The perfect coronagraph is defined as an optical device that subtracts a centered Airy pattern of maximal energy from the electromagnetic field. Finally, the coronagraphic PSF depends on three parameters that define our system: the aberration maps δ_u, δ_d and, the residual phase structure function D_{ϕ_r}.

3.2.1. Approximate long-exposure coronagraphic model in the low-phase regime

Because the analytical expression for h_λ^c is a highly non-linear function of the aberrations (Sauvage et al. 2010), we derived and studied the relevance of an approximate expression for this model (Ygouf et al. 2010). Approximate coronagraphic imaging models have been derived in several works. Cavarroc et al. (2006) have developed a short-exposure expression and showed by simulations that the main limitation comes from the static aberrations and particularly the aberrations upstream of the coronagraph. Here, we consider a long-exposure imaging model and confirm analytically the dominance of the upstream aberrations. Soummer et al. (2007) have developed a two-term expression with one static and one turbulent term. Nevertheless, these terms are not explicitly linked to the aberrations, which is what we are interested in.

Assuming that all phases are small and that the spatial means of $\phi_u(\rho)$ and $\phi_d(\rho)$ are equal to zero on the aperture, we derive a second-order Taylor expansion of expression 24 of Sauvage et al. (2010):

$$\begin{aligned}[h_\lambda^c]^{app}(\alpha) = &\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left\{ \left| \widetilde{\mathcal{P}_d(\lambda\rho)} \star \widetilde{\delta_u(\lambda\rho)} \right|^2 \right\} \\ &+ \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left\{ \left| \widetilde{\mathcal{P}_d(\lambda\rho)} \right|^2 \star S_{\delta_r}(\alpha) \right\} \\ &- \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left\{ \left\langle |P[\delta_r(\lambda\rho,t)]|^2 \right\rangle_t \cdot \left| \widetilde{\mathcal{P}_d(\lambda\rho)} \right|^2 \right\} \\ &+ o\left(\delta^2\right), \end{aligned} \qquad (2)$$

where $\widetilde{\mathcal{P}_d(\lambda\rho)}$ and $\widetilde{\delta_u(\lambda\rho)}$ are the Fourier transforms of the downstream pupil and upstream aberrations and $P[\delta_r(\lambda\rho,t)]$ denotes the piston of the aberration map $\delta_r(\lambda\rho,t)$. $\left\{ \left\langle |P[\delta_r(\lambda\rho,t)]|^2 \right\rangle_t \cdot \left| \widetilde{\mathcal{P}_d(\lambda\rho)} \right|^2 \right\}$ is a corrective term that compensates for the fact that $\delta_r(\lambda\rho,t)$ is stationary and

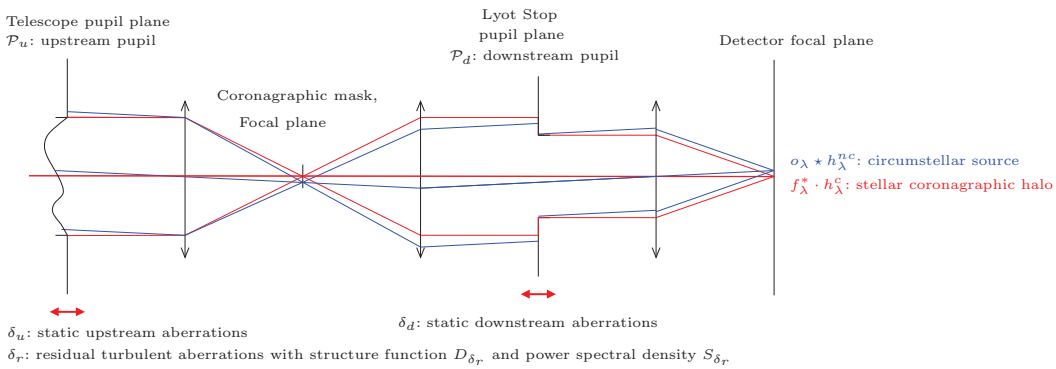


Fig. 2. Optical scheme of a coronagraphic imager. The upstream and downstream static aberrations, and the adopted notations are denoted δ_u and δ_d. $\mathcal{A}_i(\boldsymbol{\alpha})$ denote focal plane complex amplitudes, whereas $\Psi_i(\boldsymbol{\rho})$ denotes pupil plane amplitudes.

thus non-piston-free on the aperture at every instant. $\left|\widetilde{\mathcal{P}_d\,(\lambda\rho)}\right|^2$ is the Airy pattern formed by the pupil $\mathcal{P}_d\,(\lambda\rho)$.

This approximate expression brings physical insight into the long-exposure coronagraphic PSF model of Sauvage et al.:

- The speckle pattern scales radially in λ within the approximate model and evolves as $1/\lambda^2$ in intensity in the data cube. It is consistent with the analysis of Sparks & Ford (2002), who performed fits of low-order polynomials as a function of the wavelength after rescaling radially.
- The approximate expression can be separated into one static and one turbulent term. This is consistent with the analysis of Soummer et al. (2007) with the advantage that these terms depend on the parameters of interest. The turbulent term is simply the turbulent aberration power spectral density, as seen at the resolution of the instrument, i.e., convolved by the output pupil Airy pattern. The static term is explicitly a function of the upstream aberrations.
- The downstream aberrations do not appear in the static term. This confirms that the role of the aberrations upstream and downstream of the coronagraph is very different and that upstream aberrations are dominant in the final image.
- Four equivalent upstream aberration sets, $\delta_u(\rho)$, $\delta_u(-\rho)$, $-\delta_u(\rho)$ and $-\delta_u(-\rho)$, which we call quasi-equivalent aberration maps in the following, lead to the same image (cf. Appendix A). This item is discussed in more detail in section 4.4.2.
- By using this approximate expression for h_λ^c in the imaging model (1), we can see that there is a degeneracy between the value of the star flux and the rms value of the aberration map, if there is no turbulence. Indeed, without turbulent aberrations, the approximate model multiplied by the star flux can be written as

$$f_\lambda^* \cdot h_\lambda^c(\delta_u) = f_\lambda^* \cdot \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} \cdot \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\delta}_u\right|^2 . \tag{3}$$

This is discussed in section 4.4.1 in greater depth.

3.2.2. Discussion

Because of the complexity of the long-exposure coronagraphic PSF model of Sauvage et al., we first considered using the approximate model in our inversion algorithm to decrease the number of unknowns to estimate and simplify the criterion to minimize. But a study of this approximate model showed that the resulting image is too different from the one simulated with the Sauvage et al. expression: computing the root mean square of the difference between the two images leads to a substantial error of typically 30% in SPHERE-like conditions (Ygouf et al. 2010).

Speckle non-centrosymmetry. A substantial part of this error arises because in the approximate model, the quasi-static speckles are purely centrosymmetric. Thus, if we eliminate the centrosymmetric part of the image by combining it with a 180 degree rotated version of itself as follows:

$$i_{\text{antisym}} = \frac{i - i_{180}}{2}, \tag{4}$$

there are no residuals with this model, i.e. $i_{\text{antisym}} = 0$. But this is not the case with a more physically realistic image such as the one simulated with the model of Sauvage et al.. The level of residuals after such a subtraction is determined by the quantity of upstream aberrations, as we can see in Figure 3. For example, with 30 nm rms of upstream aberrations, the level of residuals is about six times lower than the rms value of the simulated image (cf. Figure 4). Thus, for a significant quantity of upstream aberrations, using the model of Sauvage et al. rather than the approximate model for an inversion, should lead to fewer residuals on the final image.

Speckle dilation. Another difference between the two models tips the balance toward the model of Sauvage et al.. Indeed, in the approximate model the speckle dilation is powered by the $1/\lambda^2$ factor. If we subtract an image at 950 nm from its 1650 nm-dilation, there are no residuals with this model. The same operation with the model of Sauvage et al. (cf. Figure 5) shows some residuals, at a level 2.5 lower than the rms value of the simulated image, which attests that it is not a pure speckle dilation.

To do this, we took the images at the minimum and maximum wavelengths and rescaled the image at 950 nm with respect to the image at 1650 nm. Finally, we performed the following spectral differences between the two images: $i_{\mathrm{diff}_{1650}} = i_{1650\,\mathrm{nm}} - \gamma i_{950\,\mathrm{nm}}$, where γ is a coefficient that minimizes the squared difference $|i_{\max} - \gamma i_{\min}|^2$, and is given by Cornia et al. (2010):

$$\gamma = \frac{\sum_\rho i_{950\,\mathrm{nm}}(\rho) i_{1650\,\mathrm{nm}}(\rho)}{\sum_\rho i^2_{1650\,\mathrm{nm}}(\rho)}. \quad (5)$$

A fine model of the speckle field must be able to account for deviations form centrosymmetry and for deviations from a radial scaling of the speckles proportional to the wavelength. That is why we adopted the model of Sauvage et al. rather than the approximate one in the inversion.

3.2.3. Assumptions on the long-exposure coronagraphic PSF model

The information we obtained from the approximate model study helped us define some key assumptions for the success of the speckle field estimation with the Sauvage et al. long-exposure coronagraphic PSF model.

Because they have quite a different impact on the final image, it is important to distinguish the aberrations upstream and downstream of the coronagraph. The effect of the downstream aberrations is lower than that of the upstream aberrations, and furthermore, in predicted systems such as SPHERE, they are expected to be much more stable and easier to calibrate than upstream aberrations. Additionally, because we consider long-exposure images, the residual turbulent aberrations will be averaged to form a smooth halo that is easily distinguishable from a planet. Furthermore, the statistical quantity D_{ϕ_r}, which characterizes this halo, will be measured through the AO system wavefront sensor (Véran et al. 1997). Therefore, we here assumed that both the static downstream aberrations and the residual turbulent aberrations are calibrated and known. This decreases the number of unknowns because the only aberration map to estimate in order to access the coronagraphic PSF is the quasi-static upstream aberrations. We therefore denote the long-exposure coronagraphic PSF by $h^c_\lambda(\delta_u; \delta_d, D_{\phi_r})$ instead of $h^c_\lambda(\delta_u, \delta_d, D_{\phi_r})$ to underline the fact that δ_d and D_{ϕ_r} are assumed to be known.

An advantage of our approach is that these assumptions can evolve. The formalism will allow us to refine our method if we finally decide to estimate either the downstream aberrations or the residual turbulent aberrations. Thus, we can slowly increase the complexity of the problem in anticipation of using real data from SPHERE or from another instrument.

4. Joint estimation of wavefront and object algorithm and minimization strategy

This section introduces the criterion to be minimized (4.1) as well as the regularization elements that were used to constrain the problem for the present validations (4.2). The minimization algorithm is then described, stressing the two stages that constitute its core (4.3). One of these stages presents some convergence difficulties. A minimization strategy is described in Subsection (4.4). The chosen optimizer in described in Subsection 4.5.

4.1. Definition of the criterion to be minimized

Following the Bayesian inverse problem approach, solving the inverse problem consists of finding the unknowns, firstly the object characteristics $o(\alpha, \lambda) = \{o_\lambda(\alpha)\}_\lambda$, secondly the parameters of the speckle field $h^c_\lambda(\delta_u; \delta_d, D_{\phi_r})$ and $f^*(\lambda) = \{f^*_\lambda\}_\lambda$, which are the most likely given the data and our prior information about the unknowns. This can be reduced to minimizing the following criterion:

$$\begin{aligned} J(o, f^*, \delta_u) = \sum_\lambda \sum_\alpha \frac{1}{2\sigma^2_{n,\lambda}(\alpha)} |i_\lambda - f^*_\lambda \cdot h^c_\lambda(\delta_u; \delta_d, D_{\phi_r}) \\ - o_\lambda \star h^{nc}_\lambda(\delta_u; \delta_d, D_{\phi_r})|^2(\alpha) \\ + R_o + R_{f^*} + R_\delta + \cdots. \end{aligned} \quad (6)$$

This criterion is the sum of two terms: the data fidelity term, which measures the distance between the data and the imaging model, and a non-exhaustive list of regularization terms on our unknowns R_o, R_{f^*}, R_δ. We consider that the noise is the sum of a photonic contribution and a detector contribution, that it is white and approximately Gaussian, which is a valid approximation for the flux as considered in this application. The noise variance is assumed to be known here and if it were not, it could be estimated as $\hat{\sigma}^2_{n,\lambda} = \hat{\sigma}^2_{ph,\lambda} + \hat{\sigma}^2_{det,\lambda}$ (Mugnier et al. 2004), where $\hat{\sigma}^2_{ph,\lambda} = \max(i_\lambda, 0)$ is the photon noise variance and $\hat{\sigma}^2_{det,\lambda}$ is the detector noise variance previously calibrated. It is assumed that the noise is not correlated from pixel to pixel or between images.

The star flux at each wavelength can be analytically estimated from the criterion provided the regularization on flux is quadratic or absent. In the latter case, the maximum likelihood solution being given by $\frac{\partial J}{\partial f^*_\lambda} = 0$, we obtain:

$$\hat{f}^*_\lambda(o_\lambda, \delta_u) = \frac{\sum_\alpha \left[h^c_\lambda (i_\lambda - o_\lambda \star h^{nc}_\lambda)/\sigma^2_{n,\lambda}\right](\alpha)}{\sum_\alpha \left[(h^c_\lambda)^2/\sigma^2_{n,\lambda}\right](\alpha)}. \quad (7)$$

Thanks to this analytical expression, the criterion to be minimized is that of Eq. (6) with f^*_λ replaced by $\hat{f}^*_\lambda$, which will be denoted by $J'(o, \delta_u)$ and depends explicitly on o_λ and δ_u only.

Estimating both the object and the aberrations from a single image is a highly underdetermined problem. Any diffraction-sized feature in the halo can be interpreted either as a circumstellar point-source or as a part of the stellar speckle halo. This ambiguity can be decreased by using multispectral images but it is not sufficient. It is thus necessary to regularize the problem by adding more constraints. This is the role of the regularization terms. In this paper, we study the case of constraints on the object that is sufficient for the simulated images we used, but we should keep in mind that it is also possible to use constraints on the aberration map.

4.2. Regularization terms and constraints

We describe below the regularization terms that we used for the validation tests of this paper. Other regularizations could be chosen depending on the kind of images to be processed.

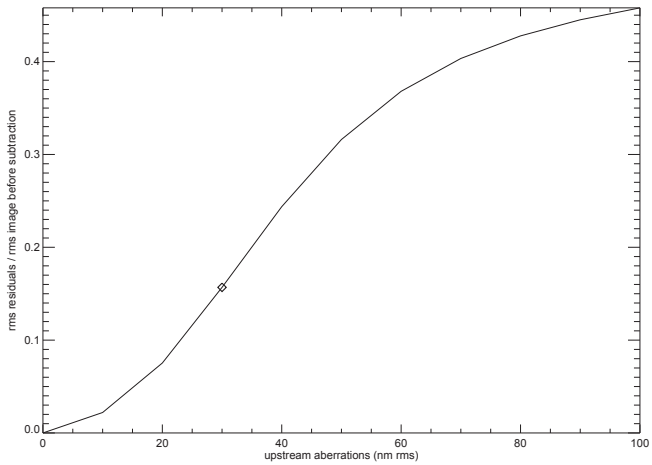


Fig. 3. Speckle non-centrosymmetry. Evolution of the level of residuals with respect to the rms value of the upstream quasi-static aberrations in an image simulated with the model of Sauvage et al. These residuals correspond to the antisymmetric part of the image.

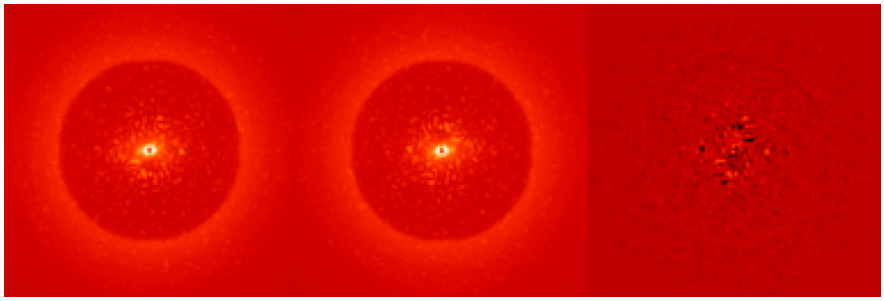


Fig. 4. Speckle non-centrosymmetry. In the same dynamic range: (left) simulated image, (center) 180 degree rotated version of the image and (right) residuals after combination of the image with the 180 degree rotated version of itself. The gain on the rms value after the subtraction is about 6.

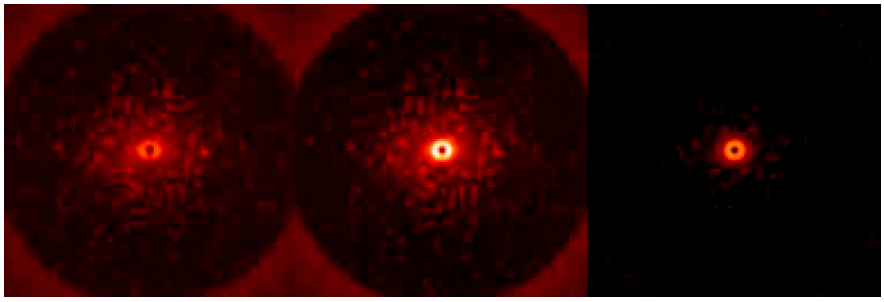


Fig. 5. Speckle dilation. In the same dynamic range: (left) image at 950 nm rescaled at 1650 nm and multiplied by the γ coefficient, image at 1650 nm (center) before and (right) after speckle subtraction. The gain on the rms value after the subtraction is 2.5.

4.2.1. Regularization on the object R_o

A regularization on the object is fundamental to help compensating for the degeneracy that exists in the inversion between the aberrations and the object. By penalizing the energy in the object map, it favors the energy in the aberration map and prevents the speckles from being mistaken for a planet.

The regularization term R_o includes the prior spatial and spectral information we have on the object. We chose here an L1-L2 white spatial regularization, which assumes independence between the pixels (Meimon et al. 2009) be-

cause we are mainly looking for point sources. We used an L1-L2 regularization rather than a true L1 regularization to keep a differentiable criterion, which simplifies the minimization problem. The spectral prior is based on smoothness of the object spectrum. We currently assume that the object is white (constant spectrum) but as the final aim is to extract some spectra, for future validations we will use a L2 correlated spectral regularization (Thiébaut & Mugnier 2006), which will involve the differences between the spectrum at neighboring wavelength at each pixel and will enforce smoothness on the object spectrum.

The regularization on the object is necessary to obtain a sparse object. Without the regularization many residuals remain on the estimated object.

4.2.2. Positivity and support constraints on the object

The object intensity map is a set of positive values, which is an important prior information. One should therefore enforce a positivity constraint on the object. This constraint can be implemented in various ways, such as criterion minimization under the positivity constraint, reparameterization of the object, or explicit modification of the a priori probability distribution (e.g., addition of an entropic term). Mugnier et al. (2004) have found that the best way to ensure positivity, with respect both to speed and to not introducing local minima, is to directly minimize the criterion under this constraint. We proceeded similarly.

Because the star light is concentrated around the optical axis, the flux is essentially estimated on this very bright region (cf. Equation 7). But if there are too many residuals on the object, the flux estimation can be biased. Thus, imposing, as is physically meaningful, that the object is null very close to the star, in a region of typically $3\lambda/D$ radius, helps us estimate the star flux accurately.

4.2.3. Regularization on the star flux R_{f^*}

To make the minimization more robust, it can be useful to constrain the flux estimation to physical values. Indeed, if there are no turbulent aberrations, there is an indetermination between the star flux value and the phase rms value in the approximate model of Eq. (13). Consequently, for aberrations with very low rms values, the coronagraphic PSF h^c_λ is close to zero and thus the analytical flux estimate given by Eq. (6) can diverge. The presence of known turbulent aberrations naturally constrains the flux value, but to make the method more robust, we chose to prevent the flux from diverging. In practice, we regularized the flux estimation by the following quadratic metric: $R_{f^*} = \frac{(f^*_\lambda - f_0)^2}{2\sigma^2_{f,\lambda}}$. This metric can be interpreted as a Gaussian prior low on the flux, but its role is not as essential for the criterion minimization as that of the L1-L2 regularization and the positivity constraint. This leads to the following expression for the analytic star flux:

$$\hat{f}^*_\lambda = \frac{\sum_\alpha h^c_\lambda \left(i_\lambda - o_\lambda \star h^{nc}_\lambda\right)/\sigma^2_{n,\lambda} + f_0/\sigma^2_{f,\lambda}}{\sum_\alpha \left(h^c_\lambda\right)^2/\sigma^2_{n,\lambda} + 1/\sigma^2_{f,\lambda}}. \quad (8)$$

In practice, we chose a very high standard deviation $\sigma_{f,\lambda} = 100 \times \sum_\alpha i_\lambda$, to avoid biasing the flux. With this standard deviation, we can choose any mean flux, for example, $f_0 = 0$. This is sufficient to avoid the division by zero in the flux computation and thus the flux divergence.

4.3. Iterative algorithm

The structure of the joint criterion of Eq. (6) prompted us to adopt an estimation of wavefront and object that alternates between estimation of the aberrations, assuming that the object is known (multispectral *phase retrieval*) and estimation of the object assuming that the aberrations are known (*multispectral deconvolution*).

Multispectral deconvolution. For given aberrations, we define the following intermediate data where the (assumed known) stellar halo is subtracted, keeping then only the circumstellar object as seen in classical imaging: $i''_\lambda = i_\lambda - f^*_\lambda \cdot h^c_\lambda(\delta_u; \delta_d, D_{\phi_r})$. By inserting these intermediate data into the the criterion of Eq. (6), we obtain:

$$J''(o, f^*, \delta_u) = \sum_\lambda \sum_\alpha \frac{1}{2\sigma^2_{n,\lambda}(\alpha)} |i''_\lambda - o_\lambda \star h^{nc}_\lambda(\delta_u; \delta_d, D_{\phi_r})|^2(\alpha) + R_o + R_{f^*} + R_\delta + \cdots, \quad (9)$$

which shows that the problem at hand is a *non-myopic multispectral deconvolution* of images i''_λ. The chosen regularization leads to a convex criterion (Mugnier et al. 2004) and thus to a unique solution for a given set of aberrations and a given object regularization.

Phase retrieval. If we replace the intermediate data $i'_\lambda = i_\lambda - o_\lambda \star h^{nc}_\lambda(\delta_u; \delta_d, D_{\phi_r})$ into the the criterion of Eq. (6), we obtain:

$$J'(o, f^*, \delta_u) = \sum_\lambda \sum_\alpha \frac{1}{2\sigma^2_{n,\lambda}(\alpha)} |i'_\lambda - f^*_\lambda \cdot h^c_\lambda(\delta_u; \delta_d, D_{\phi_r})|^2(\alpha) + R_o + R_{f^*} + R_\delta + \cdots, \quad (10)$$

which shows that the problem at hand is essentially a *phase retrieval* problem. In this *phase retrieval* stage, the combination of a high number of parameters to estimate (typically 10^3, see Section 5) and of a highly non-convex criterion complicates the problem. To avoid local minima, several numerical solutions resulting from a fine understanding of the imaging process are necessary and are described below.

4.4. Phase retrieval: dealing with local minima

4.4.1. Choice of an appropriate starting point: very small random phase

To keep the computation time reasonable, we used the local descent algorithm described in Subsection 4.5 to minimize the criterion. Because the latter is highly non-convex, the chosen starting point so that we are fully in the conditions where the Taylor expansion developed in 3.2.1 is valid and where the criterion is less non-convex. It allows the algorithm to avoid many wrong directions, and thus many local minima. As the algorithm converges, the upstream aberration rms value increases toward its true value and a gradual non-linearity of the model is gradually introduced.

We tested the phase retrieval capability of our algorithm with respect to the chosen starting point, assuming that there is no object to estimate. We give the rms value of

the estimated upstream aberration map and the rms value of the difference between the simulated and the estimated maps estimated as follows:

$$\mathrm{rms}^{\mathrm{diff}} = \frac{\left[\sum_\rho \left(\delta_u^{\mathrm{simulated}} - \delta_u^{\mathrm{estimated}}\right)^2\right]^{1/2}}{\left[\sum_\rho \left(\delta_u^{\mathrm{simulated}}\right)^2\right]^{1/2}} \times 100. \quad (11)$$

The inversion is performed with one spectral channel and without turbulence. Figure 6 compares some estimated upstream aberration maps (a, b, c) to the simulated one ("true"):

(a) Using a random aberration map with the same rms value as the true aberrations (30 nm at 950 nm) as a starting point does not help in finding the global minimum. Indeed, the algorithm converges very quickly toward a local minimum and the estimated aberration map ($\mathrm{rms}^{\mathrm{a}} = 307$ nm at 950 nm) is completely different from the simulated one ($\mathrm{rms}^{\mathrm{diff,a}} = 10^3\%$).
(b) Using a zero-aberration map as a starting point does not work either. This is probably because the approximate model is an even function. For this particular starting point, the gradient is null, which leads to some convergence difficulties. The rms of the difference between the two maps is about $1.4 \times 10^4\%$. The estimated aberration pattern ($\mathrm{rms}^{\mathrm{b}} = 4069$ nm at 950 nm) seems to show that the algorithm does not explore the high frequencies.
(c) The solution we propose is to use as a starting point for the minimization a non-null random aberration map with a low rms value compared to those of the "true" simulated aberration map. In practice, we chose an rms value about 10^8 times lower than the "true" value. This leads to a correct estimation of the aberration map ($\mathrm{rms}^{\mathrm{c}} = 30.2$ nm at 950 nm) with an rms of the difference between the two maps of about 0.6%.

If we plot the same results for images simulated with turbulence, the conclusions are not the same. The convergence to an aberration map that resembles the true one and has similar rms value is easier:

(a') By using a random aberration map with the same rms value as the true aberrations (30 nm at 950 nm) as a starting point, the rms value of the estimated aberration map (30.7 nm) is close to the true value. After a careful inspection, the estimated aberration map turned out to be similar to the opposite of the simulated one. This is discussed in more detail in 4.4.2.
(b') Using a zero-aberration map as a starting point leads to a good pattern and a good rms value of aberration map (30.1 nm).
(c') Using a non-null random aberration map with a low rms value as a starting point also leads to a good pattern and a good rms value of the aberration map (30.1 nm).

For the (b') and (c') cases, the difference between the two maps is bigger than before (17%) but the estimated aberration map is a sufficiently good starting point for the alternating minimization.

The choice of an appropriate starting point seems not to be as essential with turbulent aberrations as it was without turbulent aberrations. Indeed, the presence of turbulent aberrations raises the ambiguity that exists between the value of the star flux value and the rms value of the upstream aberration map. Nevertheless, even if we assume that there are turbulent aberrations in the following, we chose to use a random aberration map with a low rms value as a starting point of the *phase retrieval* because it allows us to avoid some local minima by linearizing the highly non-linear model used in the inversion.

4.4.2. Avoiding some local minima by testing quasi-equivalent starting points

In the approximate model, four different aberration maps can give the same image (cf. Equation (15) in Appendix A). This means that, from a given starting point, the minimization algorithm can take four different but equivalent directions from the approximate model point of view. But from the point of view of the model used in the inversion, this is not the case because it depends on downstream aberrations, which break the symmetry. That is why we call them "quasi-equivalent" aberrations maps (cf. 3.2.1).

The idea is then to explore the several regions offered by the four different quasi-equivalent aberrations maps to determine which of these solutions gives the smallest criterion. To do this, we performed an initialization step where the very small random phase is taken as a starting point. A first *phase retrieval* stage was performed with this starting point, leading to a first estimated aberration map denoted by ${\delta_u}^{init,1}(\rho)$. Then, the three other quasi-equivalent aberration maps ${\delta_u}^{init,1}(-\rho)$, $-{\delta_u}^{init,1}(\rho)$ and $-{\delta_u}^{init,1}(-\rho)$ were taken as starting points for three other *phase retrieval* stages. This led to three more estimated aberration maps denoted by ${\delta_u}^{init,2}$, ${\delta_u}^{init,3}$ and ${\delta_u}^{init,4}$.

Figure (7) shows the four estimated aberration maps at the end of the initialization step. These estimated aberration maps are compared to the simulated one (Fig. (6.d)). The final aberration map chosen as a starting point for the alternating algorithm is the one that gives the minimum value for criterion J of Equation 6:

$$(\delta_u)_{init} = \arg\min \left\{ J\left[\delta_u^{init,1}\right], J\left[\delta_u^{init,2}\right], J\left[\delta_u^{init,3}\right], J\left[\delta_u^{init,4}\right] \right\}. \quad (12)$$

In practice, quite often and in particular in this simulation, it turns out that the chosen set of aberrations is also the one whose rms value ($\mathrm{rms}^{\mathrm{b'}} = 30.1$ nm at 950 nm) is closest to the 'true" phase (Fig. (6i. "true") and Fig. (6ii. "true")).

4.4.3. Avoiding some local minima in the multispectral inversions by taking the previously estimated aberration map as starting point

We used a local descent algorithm to minimize the criterion. For this, the gradients are computed for each explored direction and the computation is all the longer as there are spectral channels. That is why it is useful to perform several inversions by gradually increasing the number of spectral channels. This also helps us avoid some local minima. We begin by an inversion with one spectral channel. Then, we add some more spectral channels for new inversions and each time, we take the previous estimated aberration map as a starting point.

Because an inversion with only one spectral channel sometimes leads to a local minimum, it is useful to also test

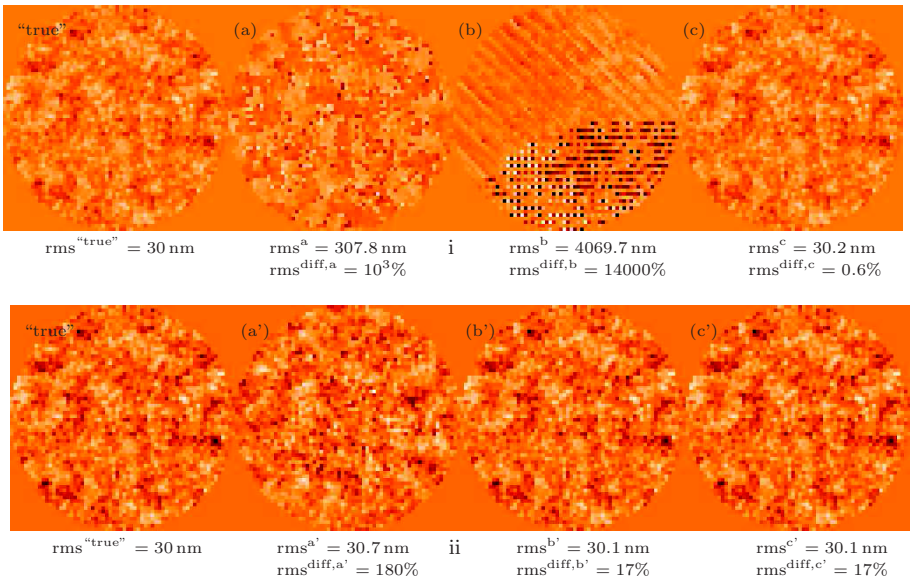


Fig. 6. Choice of an appropriate starting point. Estimated upstream aberration maps with one spectral channel for three different starting points. [i] Without turbulent aberrations in the simulated images. [ii] With turbulent aberrations in the simulated images. From left to right, with a dynamic range adapted to the visualization: "true" simulated aberration map, (a) and (a') estimated aberrations with a random aberration map (rms value of the simulated aberrations) as starting point, (b) and (b') estimated aberrations with a zero aberration map as starting point, and (c) and (c') estimated aberrations with a random aberration map (rms value 10^8 times lower than the "true" one) as starting point. The estimation is performed with a regularization on the star flux.

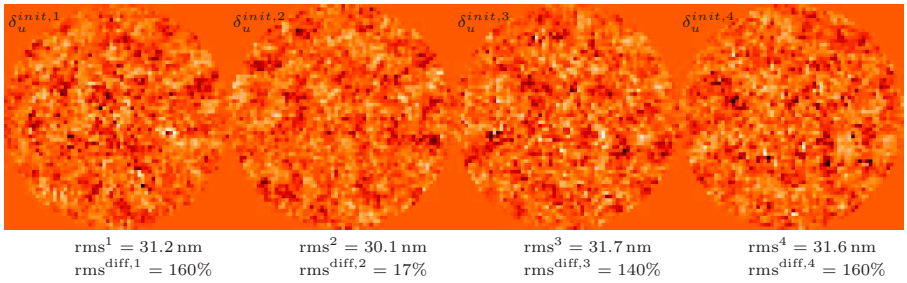


Fig. 7. Estimated upstream aberrations for the four quasi-equivalent aberration maps as starting points. From left to right, with the same dynamic range: $\delta_u^{init,1}$, $\delta_u^{init,2}$, $\delta_u^{init,3}$, $\delta_u^{init,4}$. The image simulation is performed with one spectral channel in the presence of turbulent aberrations.

the four quasi-equivalent starting points with two spectral channels (cf. Section 4.4.2).

4.5. VMLM optimizer

To minimize the criterion, we chose the variable metric with limited memory and bounds (VMLM-B) method (Thiébaut 2002). Updated from the BFGS *variable metric* method (Press et al. 2007), it is usable for a problem of large dimensionality. Moreover, it offers the possibility to constrain these parameters. This makes this method a good tool for many inversion problems in high angular resolution (Meimon et al. 2009; Gratadour et al. 2005). It is available from `http://www-obs.univ-lyon1.fr/labo/perso/eric.thiebaut/optimpack.html`.

4.6. Summary of the developed algorithm

Figure (8) summarizes the different steps of the developed algorithm. The choice of a very small random phase as a starting point is essential because it avoids falling into some local minima (Section 4.4.1). An initialization phase is performed. It consists in running the algorithm for the four quasi-equivalent solutions (Section 4.4.2). The solution that leads to the lowest criterion value is selected. Then, the minimization core is performed, alternating between the aberration estimation, assuming that the object is known (multispectral *phase retrieval*), and the object estimation, assuming that the aberrations are known (*non-myopic multispectral deconvolution*). Regularization terms and constraints prevent the algorithm from falling into other local minima (Section 4.2.3). Iterations are performed (Section

4.3) until the stopping rule of the algorithm is verified. The chosen optimizer is the VMLM-B (Thiébaut 2002) (Section 4.5).

5. Validation of the inversion method by simulations

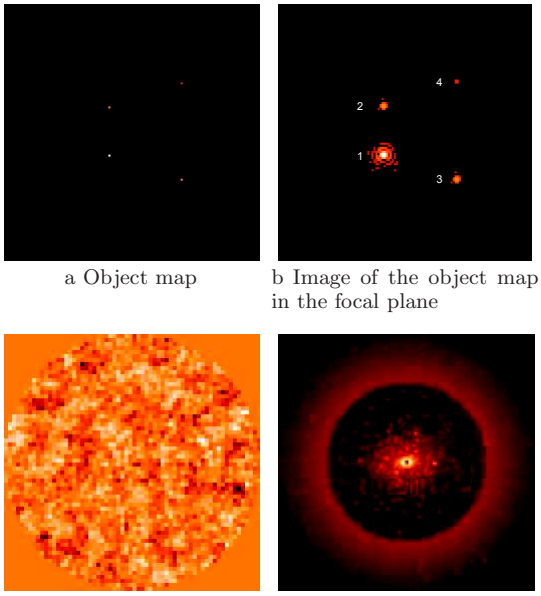
In this section, we validate the exoplanet detection capabilities of our inversion method. After giving the numerical simulation conditions, we investigate the estimation quality of the aberrations and the object as a function of the number of images at different wavelengths used. We also study the algorithm robustness with respect to the simulated images and with respect to the starting point we use. Finally, we study the effect of the bandwidth on the quality of the object estimation.

5.1. Simulation hypothesis

From a data cube of six images simulated with the image formation model of equation (1) and the Sauvage et al. (2010) analytical expression for coronagraphic imaging (cf. Equation (16) in Appendix B), we jointly estimated the speckle field and the object map. We chose pixel indicator functions as the basis for the phase rather than, e.g., a truncated basis of Zernike polynomials, to model and reconstruct phases with a high spatial frequency content. The hypotheses are typical of a SPHERE-like instrument: upstream δ_u and downstream δ_d aberrations simulated with standard deviation of 30 nm (cf. their power spectral densities in Figure (10)), star-planet angular separations of 0.2 and 0.4 arcsec, contrasts, i.e. ratio of star flux over planet flux of 10^5, 10^6 and 10^7, a [950 nm;1647 nm] spectral bandwidth and an integrated flux of 4×10^{11} on the data cube in presence of photon noise and a transmission (throughput and quantum efficiency) of 10%, corresponding to the observation of a 6-magnitude star for 25 minutes with the VLT. We used 128×128 pixels to simulate our images, Shannon-sampled at 950 nm. This results in a number of unknowns to estimate for the aberration map of about 3×10^3. If we add the unknowns to estimate for the object map, which is 16×10^3, the total number of unknowns is about 2×10^4. Figure (9) shows the simulated objet map (9a) and the associated image in the focal plane (9b). For an easier visualization, we represent the images in the focal plane and not the object map in the following. Figure 9 shows the simulated aberration map (9c) and the associated image of the speckle field in the focal plane (9d).

5.2. Algorithm robustness and performance studies

We jointly estimated the upstream quasi-static aberration map and the object map with multispectral data. To study the robustness of the method we have developed, we ran several simulations in a Monte Carlo-like manner. Both different simulated images (5.2.1) and different starting point (5.2.2) were used for the inversion. The results of the inversions with two and six spectral channels were compared to study the effect of the redundancy of information offered by the multispectral imaging.



a Object map

b Image of the object map in the focal plane

c Aberration map

d Image of the speckle field in the focal plane

Fig. 9. Simulated images at $\lambda = 950$ nm. (a) Simulated object map and (b) associated image in the focal plane. The following planets are simulated: one with a star-over-planet contrast of 10^5 at a separation of 0.2 arcsec (planet 1), two with star-over-planet contrast of 10^6 at separations of 0.2 (planet 2) and 0.4 (planet 3), respectively, and one with a star-over-planet contrast of 10^7 at a separation of 0.4 arcsec (planet 4). The image in the focal plane is obtained by convolving the object map o_λ by the non-coronagraphic psf h_λ^{nc}. (c) Simulated aberrations and (d) associated image of the speckle field in the image focal plane. The image is given by the coronagraphic PSF h_λ^c.

5.2.1. Different simulated phases

We applied our method to ten images simulated with different random upstream aberration maps to assess the algorithm robustness. Figure 11 shows the estimated images of the object from these images for a two-spectral channel inversion (a) and a six-spectral channel inversion (b). These results bring several conclusions, both on the robustness of the method and the multispectral redundancy.

Robustness of the method. In one out of ten cases, some residuals from the speckle field remain on the object. The level of this residual prevents one from detecting any planet. In the other nine cases, the level of the residuals is negligible, which allows one to detect at least one planet. These observations, independent of the number of spectral channels used for the inversion, shows that the method is relatively robust, given the minimization difficulties we met.

Multispectral redundancy. We can see some significant differences between the two-spectral channel inversion and the six-spectral channel inversion:

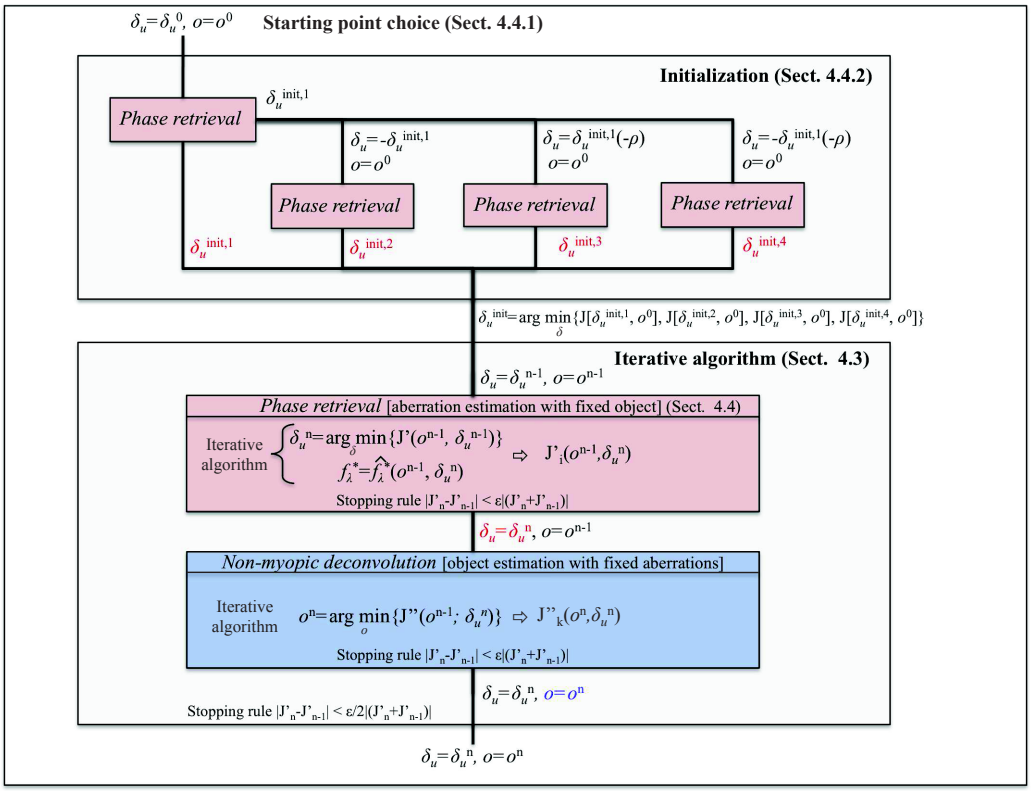


Fig. 8. Block diagram of the algorithm used for the joint estimation of the object map and the upstream aberrations.

- The planet with a contrast of 10^5 is detected in eight out of ten cases with two spectral channels and in nine out of ten cases with six spectral channels.
- Only one planet with a contrast of 10^6 is detected with two spectral channels in three out of ten cases. The same planet is detected in nine out of ten cases with six spectral channels.
- The other planet with a contrast of 10^6 is detected in three out of ten cases with six spectral channels.
- Furthermore, the estimation of the flux of the planets is more accurate with six spectral channels. The inversion shown in Figure 12 is representative of a large body of simulated tests and is performed with two and six spectral channels. The simulated and estimated image of the object maps for these two different inversions are represented as the errors on the estimated planet flux when the planet is effectively detected.

These results show that multispectral redundancy helps us detect the planets. However, we note that even if the convergence problems were solved with our minimization strategy in most cases, there are still challenges to be overcome to arrive at a perfectly robust algorithm.

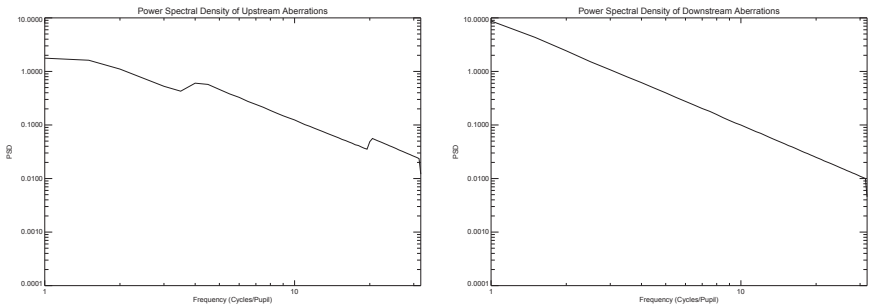
5.2.2. Different starting points

For each of the ten previous simulated phases, we took ten different random aberration maps with the same level of rms value as starting points to demonstrate than any random aberration map, provided it is small, allows us to find a good solution. Figure 13 shows the estimated images of the object for the ten different random aberration maps, used as starting points, for one phase.

The starting point does not have a strong impact on the planet detection. In all cases, the three brightest planets are detected. In only one out of ten cases, a false planet is detected. Despite all the attention given to the initialization of the algorithm, the choice of starting point can have, to a limited extent, an effect on detection.

5.3. Bandwidth effect

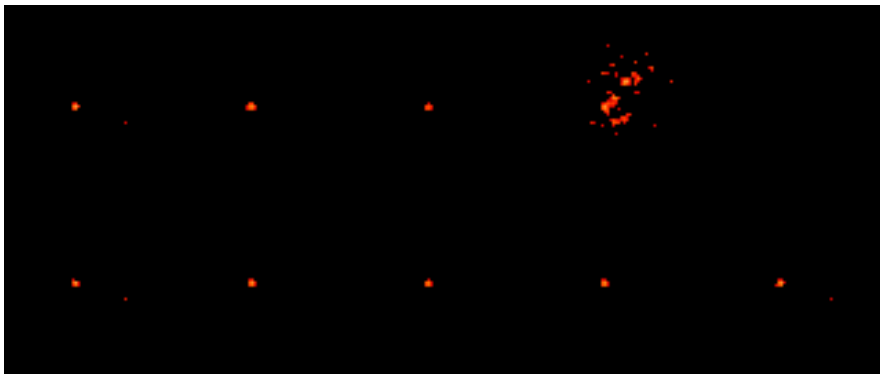
We study here the bandwidth effect on the planet image estimation quality. We selected the following spectral bandwidths: [950 nm;1050 nm], [950 nm;1150 nm], [950 nm;1350 nm], and [950 nm;1650 nm]. The two last bandwidths correspond to operational modes of the SPHERE-IFS instrument, whereas the other bandwidths are produced for the purpose of our study's completeness. Figure (14) compares the estimated planet image maps for



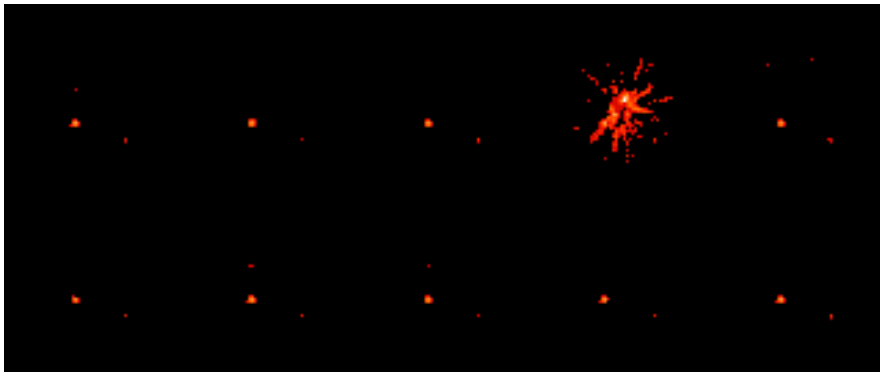
a Power spectral density of the upstream aberrations.

b Power spectral density of the downstream aberrations.

Fig. 10. Power spectral densities of the simulated aberrations. The upstream and downstream aberrations are randomly generated according to a f^{-2} spectrum and with an rms value of 30 nm. The downstream aberrations are not corrected by the adaptive optics. The upstream aberrations are corrected by the adaptive optics up to 20 cycles/pupil. The residuals are due to the non-common path aberrations. Below 4 cycles/pupil, these non-common path aberrations are corrected but there are some residuals from rotative optics.



a two-spectral channel inversion



b six-spectral channel inversion

Fig. 11. Robustness study on the simulated phases. With the same dynamic range, at 950nm: estimated planet images $[o_\lambda \star h_\lambda^{nc}](x, y)$ from different images, simulated with ten different randomly generated upstream aberration maps.

these different inversions. If the planet with a contrast of 10^5 is detected each time, only the two broader bandwidths (700 and 400 nm) allow one to detect the two planets with a contrast of 10^6. With a 200 and a 100 nm bandwidth, the planet with a contrast of 10^6 which is at a separation of 0.4 arcsec is detected, whereas the one that is at a separation of 0.2 arcsec is not.

The detection performance increases with the bandwidth because the incorporated spectral information helps the algorithm to distinguish between speckles and planets. Indeed, from one wavelength to another, the amplitude of a

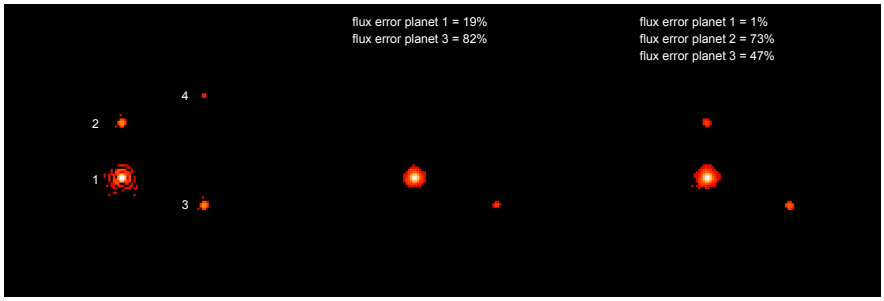


Fig. 12. Multispectral redundancy. With the same dynamic range, at 950nm, from left to right: simulated planet image $[o_\lambda \star h_\lambda^{nc}](x,y)$ and estimated ones with a two- and six-spectral channel inversion. The errors on the planet flux estimations are computed when the planet is detected.

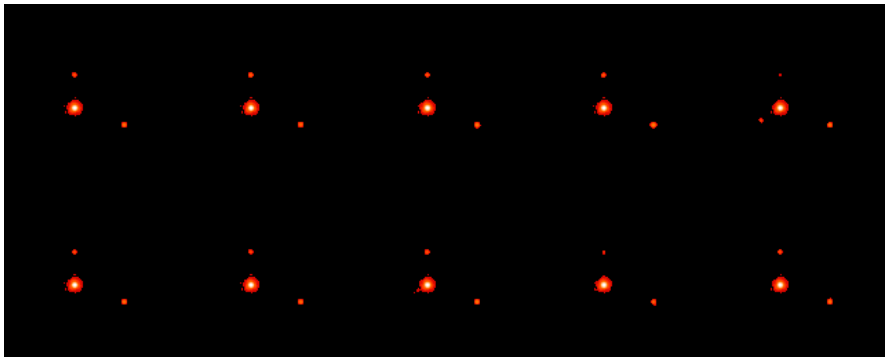


Fig. 13. Robustness study on the aberrations maps used as starting points. With the same dynamic range, at 950nm: estimated planet images $[o_\lambda \star h_\lambda^{nc}](x,y)$ from one image with different random aberration maps used as starting points.

speckle movement is proportional to the wavelength difference and to the radial position of the speckle. For a given spectral bandwidth, it is therefore easier to detect a planet that is far away from the star than a planet than is close to the star.

6. Conclusion

We have proposed an original method that jointly estimates the object (multispectral deconvolution) and the aberrations (multispectral phase retrieval) for the new generation of planet finders. For the first time, a fine parametric model of coronagraphic imaging, describing the instrument response, is used for the inversion of simulated multispectral images in a solid statistical framework. Even though the model remains a simplification of reality, in particular when assuming achromatic wavefront errors, it goes much further than only assuming that the spatial speckle pattern essentially scales with wavelength. We have shown that the second-order approximation of the imaging model has the same behavior as the often-used model for the problem at hand: the speckle pattern is centrosymmetric, it scales with the wavelength, and it is not dependent on the downstream aberrations. The departure from this case quickly becomes very significant as the phase grows. It is clear that the ability of a finite phase to produce non-symmetric speckles induces a strong ambiguity between the estimates of the aberrations and the object, even if the latter is a point-like companion.

To set up our method, we developed an iterative algorithm. With only one spectral channel, this joint estimation is an underdetermined problem, as we emphasized before. This underdetermination results mathematically in a degeneracy of the global minimum. A multispectral inversion raises this underdetermination but it is still possible to fall into local minima. Because of the high non-linearity of the coronagraphic imaging analytical model and the number of unknowns to estimate (about 10^3 in our case), the phase retrieval, even if it is multispectral, remains a difficult problem. We set-up a minimization approach that remains quite fast (without systematically exploring the whole parameter space in a search for global minimum) but that is still relatively robust: extensive tests showed the success in converging to a good solution in 90% of the cases in a systematic manner, and in the other cases, the failure appears obviously in the results with no risk of confusion and can motivate tests with alternative criterion minimization approaches. We obtained these convergence capabilities of the algorithm by bringing original solutions to the minimization difficulties of the phase retrieval, inspired by studying the imaging model. One element of the solution is to use a small random aberration map as starting point. Another element is to explore the several directions offered by the quasi-equivalent aberration maps.

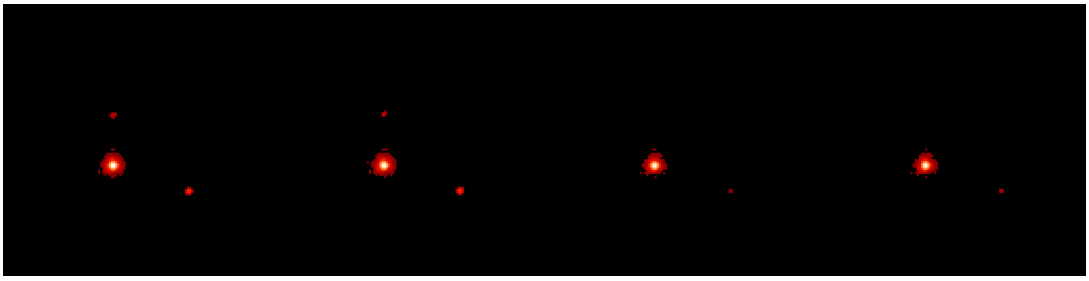


Fig. 14. Bandwidth effect. With the same dynamic range, at 950nm, from left to right: estimated planet images $[o_\lambda \star h_\lambda^{nc}](x,y)$ with a 700, 400, 200, and 100 nm-bandwidth inversion.

A wide variety of prior information, either about the system (aberrations, flux, noise) or about the object of interest, can be used to constrain the problem. The choice of a Bayesian approach allows this flexibility. In particular, a regularization that minimizes the energy on the object map helped us in separating the aberrations from the object and in decreasing the speckle noise in the reconstructed object map.

The restoration of images simulated with a perfect coronagraph is very encouraging for the extraction of planetary signals at levels that begin to be astrophysically interesting. We demonstrated the efficiency of the method even with only two spectral channels, by achieving a contrast of 10^5 at 0.2 arcsec. Multispectral redundancy improves the detection, which allowed us to achieve a contrast of 10^6 at 0.2 arcsec with six spectral channels.

We therefore believe that this approach will be quite powerful when we are faced with experimental data. This deserves to be studied, as well as how the performance will evolve in the cases of images simulated with a non-perfect coronagraph, real images from the SPHERE instrument in the lab, or real images from an instrument on-sky. Eventually, this method could be used to improve the performance of the existing multispectral imaging instruments, providing better astrophysical exploitations. Now that we demonstrated that we can manage the difficulties linked to the criterion minimization, we can now focus on its applicability, and on adding more prior information, starting with the full set of information that can be obtained from the instrument calibrations.

The lessons learned by applying the method could also facilitate the approach for the design of future instruments such as EPICS for the European Extremely Large Telescope (Kasper et al. 2008), and the definition of their calibration procedures.

Appendix A: Indetermination on the estimated aberrations from an image simulated with our approximate model

We show here that four sets of upstream aberrations give the same image for our approximate model. We re-write the expression below as a function of $\phi_u = (2\pi/\lambda) \times \delta_u$ and without the variables for better readability:

$$\begin{aligned}[h_\lambda^c]^{app} &= \left|\widetilde{\mathcal{P}_d} \star \widetilde{\phi_u}\right|^2 \\ &+ \left|\widetilde{\mathcal{P}_d}\right|^2 \star S_{\phi_r}(\alpha) - \left\langle |P[\phi_r]|^2 \right\rangle_t \cdot \left|\widetilde{\mathcal{P}_d}\right|^2 \\ &+ o\left(\phi^2\right). \end{aligned} \tag{13}$$

We consider here the static term $\left|\widetilde{\mathcal{P}_d} \star \widetilde{\phi_u}\right|^2$ and re-write it in the form of a correlation. For this, we consider two functions $f = \mathcal{P}_d$ and $g = \delta_u$ of the two variables ρ_x and ρ_y and denote $\check{f}(\rho) = f(-\rho) = f(-\rho_x, -\rho_y)$.

By using the definition of the correlation $\Gamma_{fg}(\rho)$ and the convolution $\mathcal{C}_{fg}(\rho)$ of the two functions $f(\rho)$ and $g(\rho)$,

$$\Gamma_{fg}(\rho) = f(\rho) \otimes g(\rho) = \int f^*(\rho')g(\rho' + \rho)\mathrm{d}\rho,$$

$$\mathcal{C}_{fg}(\rho) = f(\rho) \star g(\rho) = \int f(\rho')g(\rho - \rho')\mathrm{d}\rho,$$

and the properties

$$\left(\widetilde{f}\right)^* = \widetilde{\check{f}^*} \text{ and } f \star g = f \otimes \check{g}^*,$$

we obtain

$$\left|\widetilde{f} \star \widetilde{g}\right|^2 = \widetilde{fg} \cdot (\widetilde{fg})^* = \widetilde{fg} \cdot \widetilde{(\check{fg})^*} = \widetilde{fg \star (\check{fg})^*} = \widetilde{fg \otimes fg} = \widetilde{\Gamma_{fg}}.$$

This yields

$$\left|\widetilde{\mathcal{P}_d} \star \widetilde{\phi_u}\right|^2 = \widetilde{\Gamma_{(\mathcal{P}_d \cdot \phi_u)}}. \tag{14}$$

The properties of the autocorrelation

$$\Gamma_{f(\rho)} = \Gamma_{f^*(-\rho)}$$

and

$$\Gamma_{-f(\rho)} = \Gamma_{f(\rho)},$$

lead to

$$\left| \begin{array}{ll} \Gamma_{(\mathcal{P}_d \cdot \delta_u)(\rho)} & = \Gamma_{(\mathcal{P}_d \cdot \delta_u)(-\rho)} \\ \Gamma_{(\mathcal{P}_d \cdot (-\delta_u))(\rho)} & = \Gamma_{(\mathcal{P}_d \cdot (-\delta_u))(-\rho)} \end{array} \right.$$

and

$$\Gamma_{(\mathcal{P}_d \cdot (-\delta_u))(\rho)} = \Gamma_{(\mathcal{P}_d \cdot \delta_u)(\rho)}.$$

This yields

$$\Gamma_{(\mathcal{P}_d\cdot\delta_u)(\rho)} = \Gamma_{(\mathcal{P}_d\cdot\delta_u)(-\rho)} = \Gamma_{(\mathcal{P}_d\cdot(-\delta_u))(\rho)} = \Gamma_{(\mathcal{P}_d\cdot(-\delta_u))(-\rho)}, \quad (15)$$

which means that the upstream aberration sets $\delta_u(\rho)$, $\delta_u(-\rho)$, $-\delta_u(\rho)$ and $-\delta_u(-\rho)$ are equivalent with respect to the approximate model, because they give the same image. This is true even in the presence of the turbulent term $\left|\widetilde{\mathcal{P}_d}\right|^2 \star S_{\phi_r}(\alpha) - \left\langle \left|P\left[\phi_r\right]\right|^2 \right\rangle_t \cdot \left|\widetilde{\mathcal{P}_d}\right|^2$.

Appendix B: Indetermination on the estimated aberrations from an image simulated with the Sauvage et al. model

In classical imaging, i.e. "non-coronagraphic imaging", the sign of the even part of the phase cannot be deduced from only one image in the focal plane (Blanc 2002). In other words, if we denote ϕ_e and ϕ_o, the even and the odd parts of the phase, the two phases $\phi = \phi_e + \phi_o$ and $\phi' = -\phi_e + \phi_o$ give the same image. In this appendix, we show that this is also the case for the Sauvage et al. expression (Sauvage et al. 2010) in coronagraphic imaging, if we assume that the sign of the even part changes for all phase errors.

The expression of Sauvage et al. is

$$h^c_\lambda = \langle A_n A_n^* \rangle + \left\langle |(\eta_0)|^2 \right\rangle A_d A_d^* - 2\Re\left\{\langle \eta_0 A_n^* \rangle A_d\right\}, \quad (16)$$

with $A_n(\alpha) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\mathcal{P}_d(\rho)\, e^{j\phi_{tot}(\rho)}\right]$, $A_d(\alpha) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\mathcal{P}_d(\rho)\, e^{j\phi_d(\rho)}\right]$, $\phi_i(\rho) = 2\pi\frac{\delta_i(\rho)}{\lambda}$ and $\phi_{tot}(\rho) = \phi_r(\rho) + \phi_u(\rho) + \phi_d(\rho)$. TF [.] denotes the Fourier Transform. $\left\langle |(\eta_0)|^2 \right\rangle$ represents the mean Strehl ratio during observation, such as

$$\begin{aligned}\eta_0(t) &= \langle \Psi_0(\rho) | \mathcal{P}_u(\rho) \rangle \\ &= \frac{1}{S}\iint_\rho \Psi_0^*(\rho)\mathcal{P}_u(\rho)\mathrm{d}^2\rho \\ &= \frac{1}{S^2}\iint_\rho \mathcal{P}_u^2(\rho) e^{-j\phi(\rho,t)}\mathrm{d}^2\rho,\end{aligned}$$

with $\phi(\rho,t) = \phi_r(\rho,t) + \phi_u(\rho)$.

The first term of Sauvage et al.'s expression $\langle A_n A_n^* \rangle$ is the classical case of non-coronagraphic PSF, which is well-known (Blanc 2002). The term $A_n A_n^*$ stays identical whatever the sign of the even part of the phase.

The second term of Sauvage et al.'s expression is the product of two factors: $\left\langle |(\eta_0)|^2 \right\rangle$ and $A_d A_d^*$. The latter stays identical whatever the sign of the even part of the phase. We take the following phase $\phi' = -\phi_e + \phi_o$ and calculate the corresponding $\eta_0'(t)$, assuming that $\rho'' = -\rho$:

$$\begin{aligned}\eta_0'(t) &= \frac{1}{S^2}\iint_\rho \mathcal{P}_u^2(\rho) e^{-j\phi'(\rho,t)}\mathrm{d}^2\rho \\ &= \frac{1}{S^2}\iint_\rho \mathcal{P}_u^2(\rho) e^{-j[-\phi_e(\rho,t)+\phi_o(\rho,t)]}\mathrm{d}^2\rho \\ &= \frac{1}{S^2}\iint_\rho \mathcal{P}_u^2(\rho) e^{j[\phi_e(-\rho,t)+\phi_o(-\rho,t)]}\mathrm{d}^2\rho \\ &= \frac{1}{S^2}\iint_{\rho''} \mathcal{P}_u^2(\rho'') e^{j\left[\phi_e(\rho'',t)+\phi_o(\rho'',t)\right]}\mathrm{d}^2\rho'' \\ &= \frac{1}{S^2}\iint_{\rho''} \mathcal{P}_u^2(\rho'') e^{j\left[\phi(\rho'',t)\right]}\mathrm{d}^2\rho'' \\ &= [\eta_0(t)]^*.\end{aligned}$$

$\left\langle |(\eta_0)|^2 \right\rangle = \left\langle |(\eta_0 \cdot \eta_0(t)^*)|^2 \right\rangle$ is then independent of the sign of the even part of the phase. Thus, the product $\left\langle |(\eta_0)|^2 \right\rangle A_d A_d^*$ is also independent of the sign of the even part of the phase.

We study now the third term $2\Re\left\{\langle \eta_0 A_n^* \rangle A_d\right\}$. Assuming that $\phi_d = (\phi_d)_e + (\phi_d)_o$ and $\phi_d' = -(\phi_d)_e + (\phi_d)_o$:

$$\begin{aligned}A_d'(\alpha) &= \mathrm{TF}^{-1}\left[\mathcal{P}_d(\rho)\, e^{j\phi_d'(\rho)}\right] \\ &= \iint_{\rho'}\left[\mathcal{P}_d(\rho)\, e^{j[-(\phi_d)_e(\rho)+(\phi_d)_o(\rho)]}\right] e^{-2i\pi(\rho\alpha)}\mathrm{d}^2\rho \\ &= \iint_{\rho'}\left[\mathcal{P}_d(\rho'')\, e^{-j\left[(\phi_d)_e(\rho'')+(\phi_d)_o(\rho'')\right]}\right] e^{2i\pi(\rho''\alpha)}\mathrm{d}^2\rho'' \\ &= [A_d]^*.\end{aligned}$$

In the same way as the previous demonstration, we can show that $A_n^* = A_n$. Under the effect of the transformation $\phi \to \phi'$, the different terms become

$$\begin{cases} \eta_0 \to \eta_0^* \\ A_n^* \to A_n \\ A_d \to A_d^*. \end{cases}$$

In other words, $\langle \eta_0 A_n^* \rangle A_d \to [\langle \eta_0 A_n^* \rangle A_d]^*$ When we take the conjugate of a complex number, only the sign of the imaginary part changes. Because we take the real part of this expression, changing the sign of the even part of the phase does not change the term.

To conclude, like in classical imaging, changing the sign of the even part of the phase does not change the image in the focal plane. This means that two sets of aberrations give the same image. But if we assume like in this communication that the downstream aberrations are fixed and known, this removes the degeneracy.

Acknowledgements. This research is supported by the "Groupement d'Intérêt Scientifique" PHASE.

References

Beuzit, J.-L., Feldt, M., Dohlen, K., et al. 2008, in Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, Vol. 7014, Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series

Blanc, A. 2002, PhD thesis, Université Paris XI Orsay

Burke, D. & Devaney, N. 2010, Journal of the Optical Society of America A, 27, A260000

Cavarroc, C., Boccaletti, A., Baudoz, P., Fusco, T., & Rouan, D. 2006, Astron. Astrophys., 447, 397
Chauvin, G., Lagrange, A.-M., Dumas, C., et al. 2004, Astron. Astrophys., 425, L29
Cornia, A., Mugnier, L. M., Mouillet, D., et al. 2010, in Adaptive Optics Systems II, ed. B. L. Ellerbroek, M. Hart, N. Hubin, & P. L. Wizinowich, Vol. 7736, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 7736 1E
Gonsalves, R. A. 1982, Optical Engineering, 21, 829
Graham, J. R., Macintosh, B., Doyon, R., et al. 2007, ArXiv e-prints
Gratadour, D., Mugnier, L. M., & Rouan, D. 2005, Astron. Astrophys., 443, 357
Hinkley, S., Oppenheimer, B. R., Zimmerman, N., et al. 2011, Pub. Astron. Soc. Pacific, 123, 74
Kasper, M. E., Beuzit, J.-L., Verinaud, C., et al. 2008, in Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, Vol. 7015, Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series
Lafrenière, D., Marois, C., Doyon, R., Nadeau, D., & Artigau, É. 2007, Astrophys. J., 660, 770
Lagrange, A.-M., Bonnefoy, M., Chauvin, G., et al. 2010, Science, 329, 57
Marois, C., Doyon, R., Racine, R., & Nadeau, D. 2000, Pub. Astron. Soc. Pacific, 112, 91
Marois, C., Macintosh, B., Barman, T., et al. 2008, Science, 322, 1348
Martinache, F. & Guyon, O. 2009, in Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, Vol. 7440, Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series
Meimon, S., Mugnier, L. M., & Le Besnerais, G. 2009, J. Opt. Soc. Am. A, 26, 108
Mugnier, L. M., Fusco, T., & Conan, J.-M. 2004, Journal of the Optical Society of America A, 21, 1841
Perrin, M. D., Sivaramakrishnan, A., Makidon, R. B., Oppenheimer, B. R., & Graham, J. R. 2003, Astrophys. J., 596, 702
Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 2007, Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing, 3rd edn. (New York, NY, USA: Cambridge University Press)
Racine, R., Walker, G. A., Nadeau, D., & Marois, C. 1999, Pub. Astron. Soc. Pacific, 112, 587
Sauvage, J.-F., Mugnier, L., Rousset, G., & Fusco, T. 2010, J. Opt. Soc. Am. A
Soummer, R., Ferrari, A., Aime, C., & Jolissaint, L. 2007, Astrophys. J., 669, 642
Sparks, W. B. & Ford, H. C. 2002, Astrophys. J., 578, 543
Thatte, N., Abuter, R., Tecza, M., et al. 2007, Mon. Not. R. Astron. Soc., 378, 1229
Thiébaut, E. 2002, in Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, Vol. 4847, Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, ed. J.-L. Starck & F. D. Murtagh, 174–183
Thiébaut, E. & Mugnier, L. 2006, in IAU Colloq. 200: Direct Imaging of Exoplanets: Science & Techniques, ed. C. Aime & F. Vakili, 547–552
Véran, J.-P., Rigaut, F., Maître, H., & Rouan, D. 1997, J. Opt. Soc. Am. A, 14, 3057
Ygouf, M., Mugnier, L., Sauvage, J.-F., et al. 2010, in In the Spirit of Lyot 2010

5.1.7 Compléments à l'article : discussion sur la double initialisation

Lors des tests de robustesse, dont les résultats sont présentés dans la section 5.2.1 de l'article, j'ai réalisé deux étapes d'initialisation au cours de l'inversion :

- Une première lors de l'inversion à une bande spectrale ;
- Une seconde lors de l'inversion à deux bandes spectrales. Lors de cette seconde initialisation, la carte de phase estimée avec une bande spectrale est conservée et l'objet estimé est jeté. J'explore alors les quatre directions offertes par les aberrations quasi-équivalentes (cf. section 4.4.2 de l'article) et la carte de phase pour laquelle le critère est le plus petit est conservée pour la suite de l'inversion.

La figure 5.2 montre le résultat d'une inversion avec uniquement la première initialisation : la méthode n'est alors pas robuste car on détecte la planète à 10^5 dans la moitié des cas seulement. La figure 5.17 montre le résultat d'une inversion avec les deux initialisations : la méthode se révèle plus robuste car la planète à 10^5 est détectée 9 fois sur 10. Il est donc très utile, du point de vue de la robustesse, de réaliser une deuxième phase d'initialisation lors de l'inversion à deux bandes spectrales [9].

Après avoir résumé les principales conclusions de mon travail, je vais à présent décrire la démarche qui m'a permis d'aboutir à ces résultats. C'est l'occasion d'étudier plus en profondeur le comportement de la méthode vis à vis des différents paramètres en présence.

5.2 Le rôle des aberrations résiduelles turbulentes

Comme le problème d'estimation conjointe des aberrations et de l'objet est compliqué, j'ai tout d'abord envisagé de le simplifier en n'intégrant pas les aberrations résiduelles turbulentes. Des images sans aberrations turbulentes ont moins de flux provenant de l'étoile que des images avec aberrations turbulentes et sont intuitivement plus facile à inverser. En pratique, ce qui devait être une simplification a rendu le problème plus difficile, mais aussi, riche en enseignements. Dans ces conditions, il est en effet assez difficile de converger vers une bonne solution si l'on ne prend pas de précautions (5.2.1). Je présente dans la sous-section 5.2.2 une stratégie de minimisation en l'absence d'aberrations résiduelles turbulentes. Je montre ensuite l'effet de l'ajout des aberrations turbulentes (5.2.3).

5.2.1 Résidus turbulents, une difficulté ou une aide ?

Dans une phase exploratoire, afin de valider le fonctionnement de ma méthode d'estimation, j'ai tout d'abord décidé de simuler des images en l'absence d'aberrations turbulentes. Je me suis alors donné pour premier objectif d'estimer les aberrations *upstream* en réalisant uniquement l'étape de *phase retrieval*. Pour ce faire, j'ai initialisé l'algorithme avec une carte de phase

9. Dans le cas présent, la phase d'initialisation est présente uniquement dans les inversions à une ou deux bandes spectrales. Il est malgré tout intéressant de se demander si le fait de réaliser cette initialisation à chaque début d'inversion, i.e. à chaque fois que l'on ajoute une bande spectrale supplémentaire, permet d'apporter une amélioration significative.

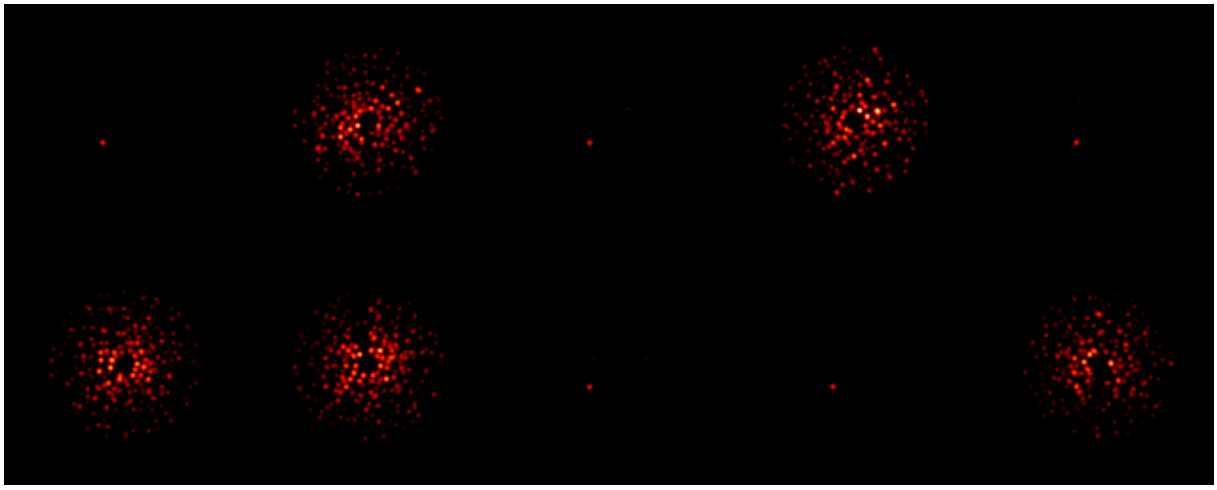


FIGURE 5.2 – **Robustesse de l'algorithme en régime sous-régularisé avec une seule initialisation.** L'initialisation est réalisée au début de l'inversion à une bande spectrale.

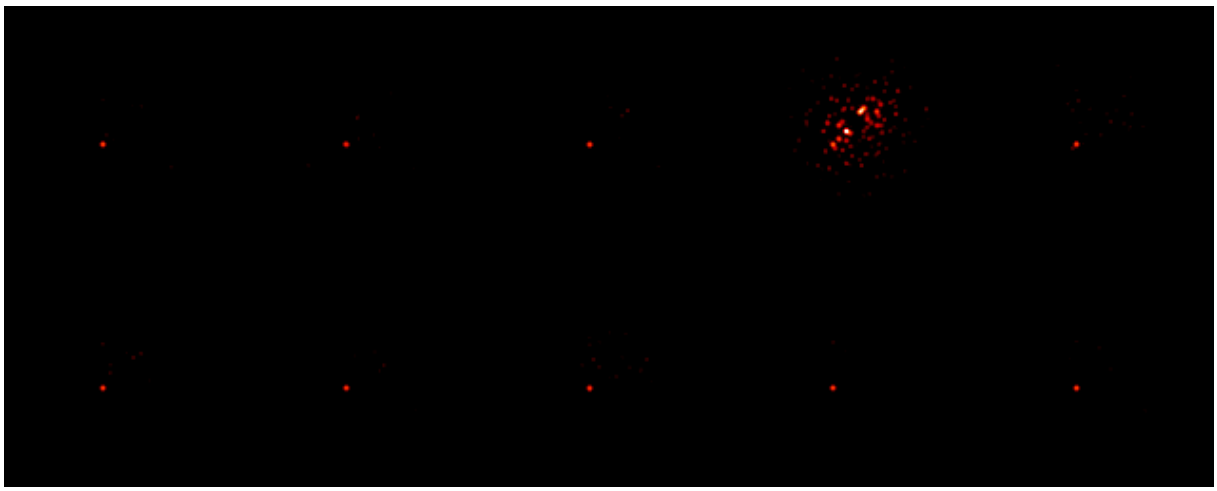
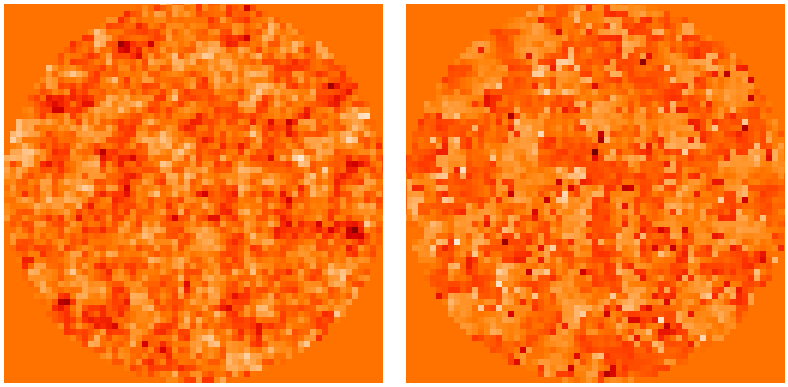


FIGURE 5.3 – **Robustesse de l'algorithme en régime sous-régularisé avec deux initialisations.** La première initialisation est réalisée au début de l'inversion à une bande spectrale et la seconde est réalisée au début de l'inversion à deux bandes spectrales.

aléatoire de statistique gaussienne à DSP constante. La seule information dont je dispose sur la phase *upstream* réelle est sa valeur RMS (30 nm). Dans ce cas simulé, il est vrai que je connais exactement cette valeur, mais dans un cas réel, il est possible d'estimer cette valeur par la caractérisation des optiques en présence par exemple. Intuitivement, je me suis dit qu'utiliser une telle information *a priori* était susceptible de contraindre le problème en réduisant la complexité du critère à minimiser.

En initialisant l'algorithme avec une carte de phase aléatoire de 30 nm RMS, le résultat de l'estimation des aberrations *upstream* est une carte de phase qui ne ressemble en aucun point à la carte de phase *upstream* simulée comme on peut le voir sur la figure 5.4. De plus, et bien que j'ai pris soin de fixer la valeur RMS de la phase de départ à sa valeur vraie, la phase estimée possède une valeur RMS 10 fois supérieure à la valeur attendue puisque celle-ci est évaluée à environ 300 nm.

L'utilisation de la valeur RMS vraie de la phase *upstream* en initialisation de l'algorithme ne semble donc pas être une information *a priori* suffisante pour contraindre le problème. Or, l'estimation de l'objet étant un problème convexe, l'estimation de la phase conditionne fortement l'ensemble du problème d'estimation conjointe. Il est donc indispensable de trouver un moyen d'estimer correctement cette phase *upstream*.



(a) **Phase *upstream* simulée.** (b) **Phase *upstream* estimée.**

FIGURE 5.4 – **Exemple d'estimation des aberrations *upstream* dans un cas sans turbulence.** Cartes d'aberrations simulée [gauche] et estimée [droite] avec une bande spectrale. Les deux représentations n'ont pas la même dynamique et la valeur RMS de la phase estimée est 10 fois supérieure à celle de la phase estimée.

5.2.2 Résolution des difficultés rencontrées en l'absence d'aberrations résiduelles turbulentes

En pratique, j'ai donc rencontré d'importantes difficultés de convergence. Comme la solution trouvée était très dépendante du point de départ utilisé, j'ai décidé de tester plusieurs points de départ différents et de comparer les phases estimées dans ces différents cas. Trois phases

différentes ont été testées comme points de départ de l'algorithme. Les résultats de l'estimation des aberrations *upstream* sont décrits dans la section 4.4.1. de l'article et les cartes d'aberrations correspondantes sont représentées en figure 6(i) [10].

La conclusion de ces tests est que l'utilisation d'une petite phase aléatoire en initialisation de l'algorithme permet une estimation bien meilleure de la phase dans un cas sans turbulence. Mon interprétation est que, dans le cas où la phase d'initialisation est petite, je me place dans le cadre de l'approximation faibles phases, pour laquelle l'expression approchée développée dans le chapitre 4 est valable. Or, on a vu que cette expression approchée est moins non-linéaire que l'expression initiale utilisée dans le modèle. Quand l'approximation faibles phases est valable, le critère est plus lissé, ce qui permet d'éviter de nombreux minimas locaux. Au fur et à mesure que l'algorithme converge, la valeur RMS de la phase augmente et on sort peu à peu de l'approximation faibles phases en introduisant une non-linéarité de manière graduelle. C'est à nouveau le modèle initial qui domine avec ses avantages, en particulier la possibilité de générer des tavelures antisymétriques et une meilleure description de leur évolution avec la longueur d'onde. En l'absence d'aberrations résiduelles turbulentes, cela m'a permis de résoudre le problème de minimisation, insoluble jusqu'alors.

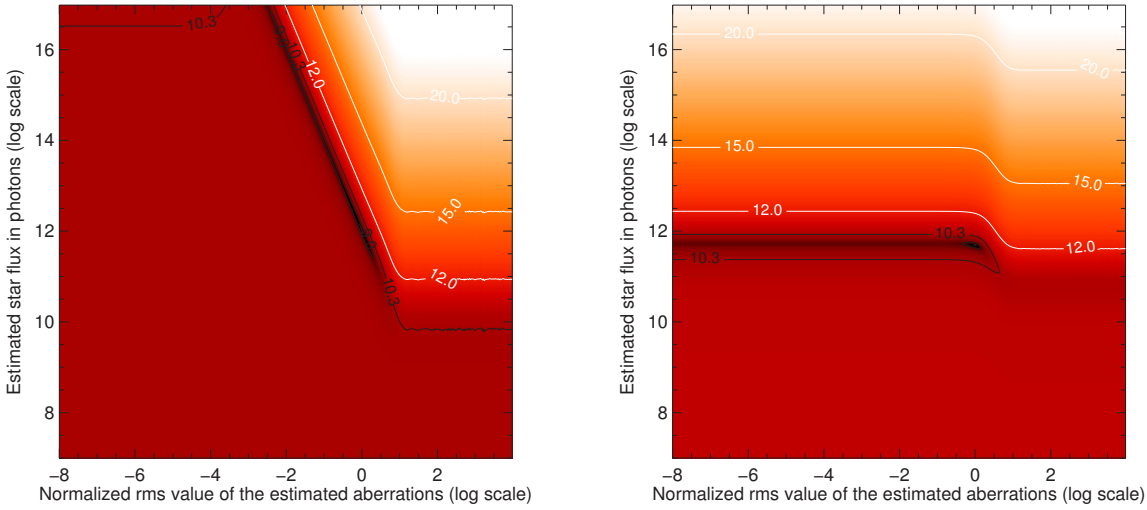
5.2.3 Ajout des aberrations résiduelles turbulentes

Une fois en possession d'une méthode qui fonctionne en présence d'aberrations *downstream* supposées connues et d'aberrations *upstream* à estimer, l'étape suivante a été d'introduire des aberrations turbulentes dans les images simulées. En ajoutant les aberrations résiduelles turbulentes, je me suis rendu compte que ces dernières contraignaient fortement le problème. Le fait de mettre les aberrations résiduelles turbulentes permet en effet de contraindre l'estimation du flux de l'étoile car l'intensité du halo turbulent est proportionnelle à ce dernier [11]. Si l'estimation du flux de l'étoile est plus précise, le champ de tavelures est mieux estimé et cela facilite grandement l'inversion.

En réalisant les mêmes tests que précédemment, pour des images simulées avec de la turbulence, la convergence s'effectue plus facilement que dans le cas sans turbulence. En effet, la présence d'aberrations turbulentes contraint le problème. La figure 5.5 montre l'évolution du critère en fonction de la valeur RMS de la phase en abscisses et le flux de l'étoile en ordonnées, sans (5.5(a)) et avec (5.5(b)) turbulence. La valeur RMS de la phase est normalisée par rapport à la valeur RMS de la phase vraie et l'axe des abscisses est représenté par le paramètre k tel que $\sigma_{\phi_u} = k \times \sigma_{\phi_u^{\text{vrai}}}$. Les lignes iso-critères, i.e. parallèles à la vallée, montrent la dégénérescence à faible phase entre le flux de l'étoile et la valeur RMS de la phase. Le critère minimum global correspond à la carte d'aberrations simulée (valeur zéro de l'axe des abscisses) et à un flux de

10. Pour mener à bien ces tests, il m'a fallu mettre en place une régularisation sur le flux afin de permettre à l'algorithme de ne pas rester bloqué près du point de départ dans le cas où la carte d'aberrations utilisée comme point de départ est petite. Effectivement, dans le modèle approché, qui est valide dans l'approximation faibles phases, il existe une indétermination entre la valeur du flux de l'étoile f^* et la valeur RMS de la phase. Cette régularisation est décrite dans la sous-section 3.1.2.2 du chapitre 3.

11. Cf. section 5.3 pour plus de détails sur ce point.



(a) **Sans turbulence.** (b) **Avec turbulence.**

FIGURE 5.5 – **Effet des aberrations résiduelles turbulentes sur la forme du critère.** Évolution du critère sans [gauche] et avec [droite] turbulence en fonction de k avec $\sigma_{\phi_u} = k \times \sigma_{\phi_u^{\text{vrai}}}$ (abscisses) et du flux de l'étoile f^* (ordonnées). En l'absence d'aberrations turbulentes, l'indétermination entre la valeur RMS des aberrations *upstream* et le flux de l'étoile se traduit par une vallée du critère parallèle aux lignes d'iso-critères, i.e. parallèles à la vallée. En présence d'aberrations turbulentes, le flux de l'étoile est au contraire parfaitement déterminé avec une vallée du critère parallèle à l'axe des abscisses.

l'étoile d'environ 10^{12} sur l'axe des ordonnées.

À cause de la dégénérescence entre la valeur du flux de l'étoile et la valeur RMS de la carte d'aberrations *upstream* du modèle approché dans le cas sans turbulences (cf. 4.1.3.4), un très petit point de départ est compensé par une forte valeur de flux de l'étoile. Cela correspond à la région en haut à gauche de l'évolution du critère sur la figure 5.5(a). Dans cette région, le critère est relativement plan, ce qui mène à des difficultés de convergence pour joindre la vallée (ligne sombre) et le minimum global.

Heureusement, l'évolution du critère dépend fortement de la présence d'aberrations résiduelles turbulentes comme on peut le voir sur la figure 5.5(b) : la direction de la vallée est parallèle à l'axe des abscisses et la courbe d'évolution du critère est courbée dans la région des forts flux d'étoile et des petites valeurs RMS de phase dans la direction de la nouvelle vallée. En effet, en présence d'aberrations turbulentes résiduelles, il n'y a plus de dégénérescence entre la valeur du flux de l'étoile et la valeur RMS de la carte d'aberrations. Pour ces raisons, la présence d'aberrations résiduelles turbulentes aide l'algorithme à converger vers le minimum global.

En conclusion, l'absence de turbulence dans les images simulées s'est révélée être une source de difficultés plutôt qu'une simplification du problème. En résolvant ces difficultés, j'ai imaginé et développé un processus d'inversion beaucoup plus robuste qui permet d'éviter de nombreux minima locaux, qui même s'il peut paraître parfois superflu dans le cas du traitement d'images simulées, sera sans nul doute très utile lors du traitement d'images réelles.

5.3 L'importance d'une bonne estimation du flux de l'étoile

Si les tests sans turbulence réalisés au paragraphe précédent m'ont permis de comprendre qu'une estimation correcte du flux de l'étoile est indispensable pour que la méthode fonctionne, je démontre ici que le niveau des aberrations résiduelles dans l'objet restauré dépend fortement de cette estimation.

Dans le chapitre 2, j'ai présenté le modèle d'imagerie coronographique, à la fois utilisé dans l'algorithme d'inversion mais aussi pour la simulation des images (cf. Équation 2.8) :

$$\mathbf{i}_\lambda(\alpha) = f^*_\lambda \cdot \mathbf{h}^c_\lambda(\alpha) + [\mathbf{o}_\lambda \star \mathbf{h}^{nc}_\lambda](\alpha) + \mathbf{b}_\lambda(\alpha).$$

Le premier terme de ce modèle est le flux de l'étoile f^* multiplié par la réponse de l'instrument sur l'axe $\mathbf{h}^c_\lambda(\alpha)$. Dans le chapitre 4, j'ai proposé un modèle approché paramétrique de réponse instrumentale sur l'axe (cf. Équation 4.12) :

$$\mathbf{h}^c_\lambda \simeq \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}_u}\right|^2 + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\right|^2 \star \mathbf{S}_{\boldsymbol{\phi}_r} - \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\right|^2 \cdot \left\langle |P[\boldsymbol{\phi}_r]|^2 \right\rangle_t.$$

En première approximation, une composante de l'image est donc le flux de l'étoile multiplié par le halo des aberrations turbulentes résiduelles : $f^* \cdot \left[\left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\right|^2 \star \mathbf{S}_{\boldsymbol{\phi}_r} - \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\right|^2 \cdot \left\langle |P[\boldsymbol{\phi}_r]|^2 \right\rangle_t\right]$, comme cela apparaît très clairement dans le modèle simplifié rappelé ci-dessus. Dans le cas où le flux de

l'étoile est mal estimé, une partie de cette composante se retrouve dans l'objet. La structure des aberrations turbulentes en longue pose étant parfaitement connue et très lisse (cf. Équation 2.7 du chapitre 1), il est très aisé de repérer visuellement ce type d'artefacts sur l'objet et l'image correspondante dans le plan focal. C'est précisément ce que l'on observe dans la figure 5.6. Toujours en première approximation, le flux de l'étoile est également en facteur des aberrations quasi-statiques *upstream* : $f^* \cdot \left[\left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u\right|^2\right]$. De même que pour les aberrations turbulentes résiduelles, une mauvaise estimation du flux se répercute par des résidus d'aberrations quasi-statiques dans l'objet. Si les aberrations *downstream* sont absentes du modèle approché, elles interviennent néanmoins et il est possible que des résidus d'aberrations statiques se retrouvent également dans l'objet. Dans ces conditions, on comprend bien qu'il est indispensable d'estimer précisément le flux de l'étoile.

Afin de bien comprendre l'importance d'une bonne estimation du flux de l'étoile, je réalise une inversion avec deux bandes spectrales en supposant que ce dernier est connu. Pour ce faire, je fixe le flux de l'étoile à sa valeur vraie et je n'autorise pas le flux à varier lors de l'inversion. Dans la figure 5.6, je compare l'image de l'objet simulé (à gauche) avec les images de l'objet estimé dans un cas à flux de l'étoile variable (au centre) et dans un cas à flux de l'étoile fixé (à droite).

Dans le cas où le flux de l'étoile est estimé en même temps que les aberrations et l'objet, il reste beaucoup d'aberrations dans l'objet, que ce soient les aberrations turbulentes résiduelles très lisses ou les aberrations quasi-statiques sous la forme de tavelures bien caractéristiques. L'estimation de la carte objet n'est donc pas optimale. L'erreur d'estimation sur le flux de l'étoile est quant à elle de 0.04 %.

En fixant le flux, le niveau des aberrations résiduelles dans l'objet est considérablement réduit comme on peut le voir sur l'image de droite de la figure 5.6. On comprend donc, au regard de ces précédents résultats, qu'il est indispensable d'estimer très précisément le flux de l'étoile pour s'affranchir au maximum de la lumière résiduelle de l'étoile dans l'objet estimé.

Dans la suite, j'analyse deux stratégies différentes qui me permettent de débiaiser l'estimation du flux : en retirant la contrainte de positivité et en imposant une contrainte de support sur l'objet.

5.3.1 Effet de la contrainte de positivité

La contrainte de positivité a un fort effet sur l'estimation du flux de l'étoile comme on peut le voir sur la figure 5.7. La contrainte de positivité, en forçant la valeur des pixels à être positive, biaise l'estimation du flux de l'étoile qui est alors systématiquement sous-estimé. Ce dernier est en effet estimé analytiquement, comme je l'ai montré dans le chapitre 3, de la façon suivante :

$$\hat{f}^*_\lambda\left(\mathbf{o}_\lambda, \boldsymbol{\delta}_u\right) = \frac{\sum_{\boldsymbol{\alpha}} \left[\mathbf{h}^c_\lambda \left(\mathbf{i}_\lambda - \mathbf{o}_\lambda \star \mathbf{h}^{nc}_\lambda\right) / \sigma^2_{n,\lambda}\right](\boldsymbol{\alpha})}{\sum_{\boldsymbol{\alpha}} \left[\left(\mathbf{h}^c_\lambda\right)^2 / \sigma^2_{n,\lambda}\right](\boldsymbol{\alpha})}.$$

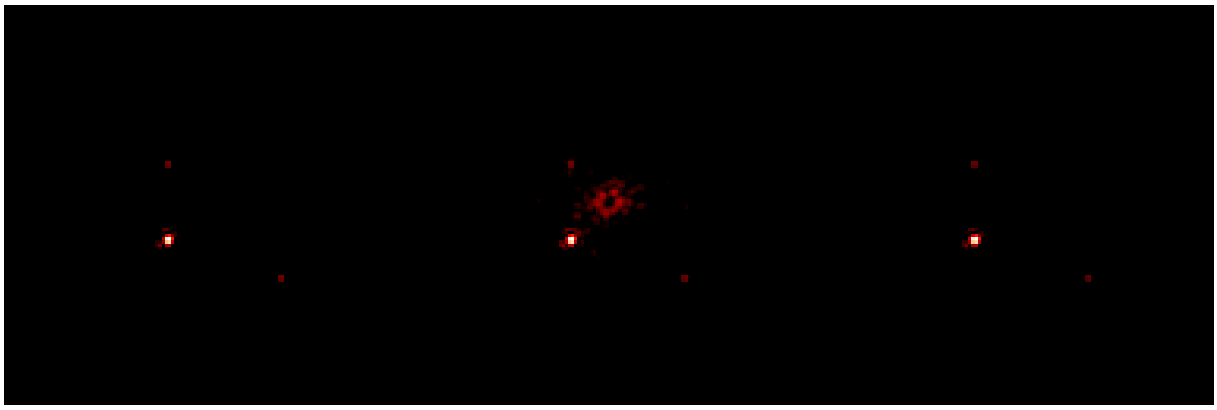


FIGURE 5.6 – **Importance d'une bonne estimation du flux de l'étoile.** Avec la même dynamique : [gauche] image de l'objet simulée, [centre] image de l'objet estimée avec deux bandes spectrales en autorisant le flux de l'étoile à varier et [droite] image de l'objet estimée avec deux bandes spectrales en fixant le flux de l'étoile à sa valeur vraie.

On peut voir au numérateur de cette expression que le flux de l'étoile est déterminé par la somme $\mathbf{i}_\lambda - \mathbf{o}_\lambda \star \mathbf{h}_\lambda^{nc}$ pondéré par la réponse instrumentale sur l'axe $\mathbf{h}_\lambda^{c}$. Or, dans ce terme, le flux est principalement concentré autour de l'étoile et au-delà de la fréquence de coupure de l'OA, i.e. 20 cycles par pupille. Si le terme $\mathbf{o}_\lambda \star \mathbf{h}_\lambda^{nc}$, que l'on contraint à être positif, est sur-estimé dans ces régions, le flux de l'étoile est par conséquence sous-estimé.

Sur l'inversion avec deux bandes spectrales, enlever la contrainte se traduit par l'élimination quasi-complète des aberrations avec une répartition du bruit résiduel autour de zéro. Quant à l'erreur effectuée sur l'estimation du flux de l'étoile, elle est de $0.001\,\%$ sans contrainte de positivité alors qu'elle était de $0.04\,\%$ avec la contrainte.

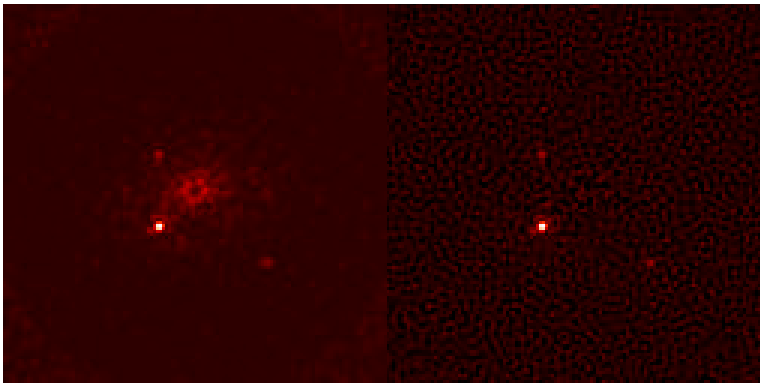


FIGURE 5.7 – **Effet de la contrainte de positivité sur l'estimation du flux de l'étoile.** Avec la même dynamique : [gauche] image de l'objet simulée et [droite] image de l'objet estimée avec deux bandes spectrales sans contrainte de positivité.

Cependant, il est dommage de se priver d'une information telle que la positivité de l'objet. On sait en effet qu'on recherche un objet positif. C'est donc une information qui permet de contraindre le problème. J'ai donc réfléchi à une solution permettant de débiaiser l'estimation du flux de l'étoile tout en conservant la contrainte de positivité. Cette solution, c'est la contrainte de support sur l'objet.

5.3.2 Effet de la contrainte de support sur l'objet

La connaissance de la structure des aberrations résiduelles turbulentes permet d'évaluer l'effet d'une mauvaise estimation de l'étoile sur les différentes régions de l'objet. Les résidus de l'étoile sont assez forts au centre de l'image, à la position de l'étoile. Sans aucune contrainte sur cette région, l'algorithme est libre de mettre le flux de l'étoile dans les aberrations ou dans l'objet. Si l'algorithme est libre de mettre du flux dans l'objet à cet endroit, cela biaise l'estimation du flux. C'est pourquoi je propose d'imposer une contrainte de support dans l'objet. J'ai ainsi testé deux contraintes différentes :

- La première contrainte fixe une valeur maximum aux pixels de 500 photons au-delà de 20 cycles par pupille. L'image de l'objet estimé dans une inversion sous cette contrainte est représentée en figure 5.8 au centre. Une nette amélioration est observée par rapport à l'image de l'objet estimé dans une inversion sans contrainte de support (cf. Figure 5.8, gauche). Si l'erreur sur l'estimation du flux de l'étoile était de 0.04 % pour cette dernière inversion, elle est légèrement plus faible dans l'inversion avec contrainte de support : 0.02 %.
- Avec la seconde contrainte, la valeur maximum des pixels en dehors de la zone de correction de l'optique adaptative, i.e. en deçà de 3 cycles par pupille et au-delà de 20 cycles par pupille, est fixée à zéro. Cette contrainte, combinée à la contrainte de positivité qui impose une valeur positive aux pixels de l'objet, fige la valeur des pixels à zéro. Ceci a pour conséquence que tout le flux de l'image dans ces régions est systématiquement affecté aux aberrations (cf. Figure 5.8, droite). L'inconvénient d'une telle contrainte est qu'il est impossible de détecter une planète dans la zone contrainte. L'avantage est une meilleure estimation du flux de l'étoile avec une erreur qui se rapproche de celle de l'estimation du flux de l'étoile dans une inversion sans contrainte de positivité de 0.002 % (cf. sous-section précédente : 5.3.1).

Dans la suite, et sauf mention contraire, j'utilise la seconde contrainte de support sur l'objet qui offre une meilleure estimation du flux de l'étoile.

5.4 Le rôle des aberrations *downstream*

Bien qu'ayant un effet limité sur l'image finale (cf. 4.1.3.2), les aberrations *downstream* jouent un rôle important dans l'inversion. C'est ce que je me propose de démontrer dans cette section. Je montre tout d'abord l'effet de la quantité d'aberrations *downstream* utilisée pour les simulations sur le fonctionnement et la performance de la méthode en terme de détection (5.4.1). J'étudie ensuite l'effet d'une erreur d'étalonnage des aberrations *downstream* sur l'inversion (5.4.2).

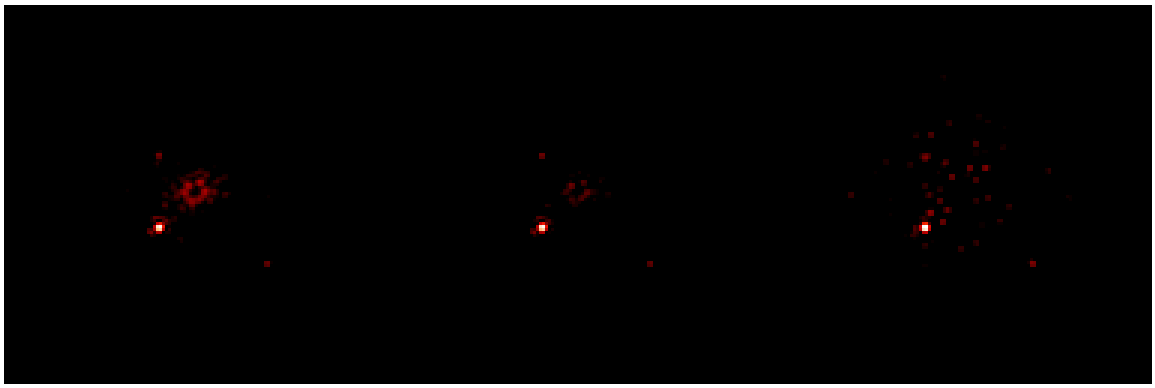


FIGURE 5.8 – **Effet d'une contrainte de support sur l'objet sur l'estimation du flux de l'étoile.** Avec la même dynamique : [gauche] image de l'objet estimé sans contrainte de support et avec contrainte de positivité, [centre] image de l'objet estimé avec deux bandes spectrales avec une contrainte de support à 500 au-delà de 20 cycles/pupilles et [droite] image de l'objet estimé avec deux bandes spectrales avec une contrainte de support à 0 au-delà de 20 cycles/pupilles et en deçà de $3\lambda/D$.

5.4.1 Effet de la quantité d'aberrations *downstream* utilisée pour les simulations

À l'origine, l'instrument SPHERE a été spécifié avec 100 nm d'aberrations *downstream*. Cette spécification assez relâchée est justifiée par le faible impact de ces aberrations. J'ai donc tout d'abord commencé par appliquer ma méthode sur des images simulées avec 100 nm d'aberrations *downstream*. Cependant, les performances de l'instrument SPHERE sont bien meilleures que ce qui avait été spécifié car il reste en réalité seulement 30 nm d'aberrations *downstream*. C'est pourquoi j'ai également appliqué ma méthode sur des images simulées avec 30 nm d'aberrations *downstream*.

La comparaison des tests avec 30 nm et 100 nm d'aberrations *downstream* a été très instructive. J'ai ainsi pu observer qu'il est beaucoup plus simple de converger vers une solution acceptable dans le cas où la quantité d'aberrations est plus élevée. Alors que cela fonctionnait de manière robuste pour différentes images simulées avec 100 nm d'aberrations *downstream*, cela n'est pas le cas avec 30 nm.

À première vue, il peut paraître contre-intuitif qu'augmenter le niveau d'aberrations *downstream* donne des meilleurs résultats pour l'inversion. En effet, plus la quantité d'aberrations *downstream* est élevée, plus leur impact est grand dans l'image finale, ce qui peut poser problème pour l'estimation des aberrations *upstream*. Mais il faut comprendre que cette nouvelle méthode ne repose pas sur l'ajustement des coefficients d'un polynôme mais sur celui des paramètres d'un modèle fin d'imagerie coronographique. J'ai montré, dans le chapitre 4, qu'il existait des solutions « quasi-équivalentes » pour ce modèle correspondant aux solutions équivalentes du modèle approché. Ces solutions ne sont pas équivalentes dans le modèle utilisé à cause de la présence des aberrations *downstream* (qui n'interviennent pas dans le modèle approché). Mon

interprétation est que de fortes aberrations *downstream* aident à lever cette dégénérescence et rendent plus robuste l'estimation de la phase *upstream*. Ceci étant dit, on comprend mieux le fait qu'un niveau plus important d'aberrations *downstream* permette de faciliter la convergence. Avec un faible niveau d'aberrations *downstream*, il est plus probable qu'une mauvaise des quatre solutions équivalentes soit choisie avec pour conséquence de tomber dans un minimum local. Les aberrations *downstream* jouent donc le rôle d'une contrainte. En effet, je montre en annexe B de l'article que lorsque les aberrations *downstream* sont fixées, celles-ci contraignent le signe de la partie paire de la phase. On peut donc y voir une analogie avec la diversité de phase classique : les fortes aberrations *downstream* jouent alors le rôle de l'image défocalisée qui lève l'ambiguïté de signe sur la partie paire de la phase.

À la vue de ces résultats, j'ai donc été tentée de réaliser une étude plus exhaustive sur le sujet en faisant varier de manière continue la quantité d'aberrations *downstream*. Dans un cas qui a bien fonctionné, j'ai réalisé des inversions pour des niveaux d'aberrations *downstream* allant de 10 nm à 100 nm avec deux bandes spectrales (cf. Figure 5.9). Le résultat qui en ressort est que la quantité d'aberrations *downstream* a un effet sur la qualité de l'inversion (en plus d'avoir un effet sur sa robustesse). Plus la quantité d'aberrations *downstream* augmente, plus le niveau de tavelures résiduelles dans l'objet diminue. On peut également remarquer que, dans ce cas bien précis, aucune planète n'est détectée avec 10 nm d'aberrations *downstream*.

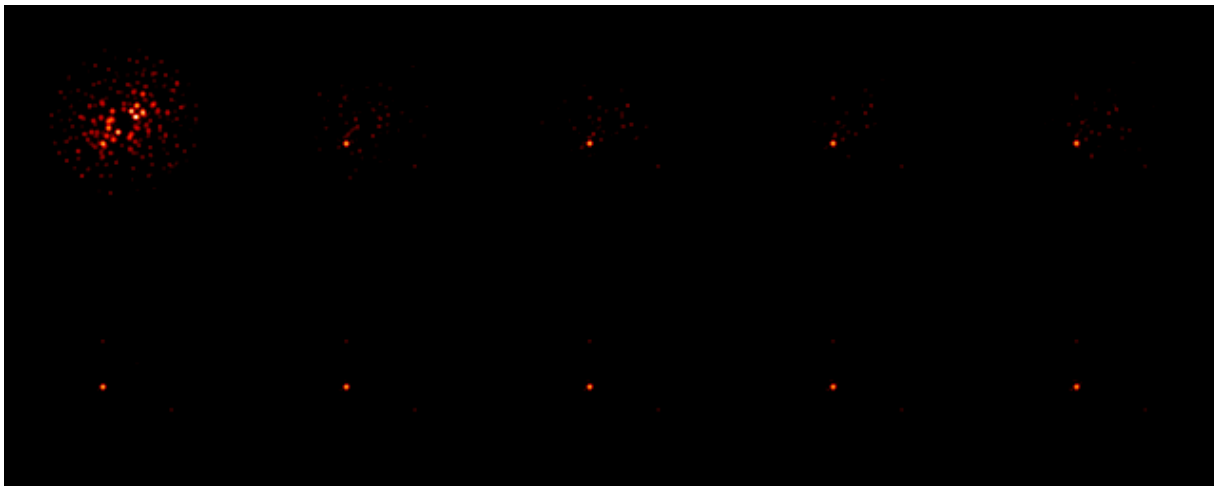


FIGURE 5.9 – **Effet du niveau des aberrations *downstream* sur la performance de la méthode.** De gauche à droite et de haut en bas, avec la même dynamique : images des objets estimés à partir des images simulées avec des niveaux d'aberrations *downstream* de 10 à 100 nm. Une contrainte de support sur l'objet a été appliquée et les résultats sont obtenus avec deux bandes spectrales.

5.4.2 Effet d'une erreur d'étalonnage des aberrations *downstream*

Les résultats précédents ont été obtenus en supposant que les aberrations *downstream* sont parfaitement connues. Cette hypothèse repose sur deux justifications (cf. section 4.2). Tout d'abord,

l'effet de ces aberrations sur l'image est moins important que celui des aberrations *upstream*. Ensuite, dans un instrument tel que SPHERE, les aberrations *downstream* sont bien plus stables et faciles à étalonner que les aberrations *upstream*. Elles seront relativement stables sur une nuit et seront donc étalonnées une fois par jour. Mais si en pratique ces aberrations seront étalonnées, elles ne seront connues qu'à une erreur près, c'est pourquoi j'ai étudié l'impact sur l'inversion d'une erreur sur les aberrations *downstream*. Par conséquent, deux types d'erreurs sont susceptibles d'intervenir : une erreur d'étalonnage et le fait que les aberrations évoluent entre deux étalonnages.

Ces deux types d'erreur sont simulés par un bruit blanc [12] gaussien de 1%, 3%, 5% and 10% sur les aberrations *downstream*, ce qui correspond à ajouter une carte aléatoire de 1, 3, 5 ou 10 nm d'écart-type à la carte d'aberrations downstream simulée. Dans ces tests, les images sont simulées avec 100 nm d'aberrations *downstream*. Aucune contrainte de support n'est appliqué sur l'objet lors de l'inversion.

Sur la figure 5.10, qui représente les images des objets estimés pour les différentes erreurs introduites, on voit clairement l'effet d'une erreur d'étalonnage des aberrations *downstream* sur l'estimation du flux de l'étoile. Les résidus d'aberrations turbulentes augmentent avec l'erreur sur les aberrations *downstream*. On observe également une augmentation des résidus d'aberrations *upstream* dans l'objet. En conséquence, les planètes avec un contraste de 10^6 sont de moins en moins détectables à mesure que l'erreur sur les aberrations *downstream* augmente. La planète avec un contraste de 10^5 reste détectable même avec une erreur de 10% sur les aberrations *downstream*.

La figure 5.11 montre les évolutions de la valeur RMS de la différence entre les images des objets simulé et estimé pour différentes erreurs sur la carte d'aberrations *downstream* dans la région corrigée par l'OA. Ces évolutions sont comparées à l'évolution sans erreur sur les aberrations *downstream*, représentée en trait plein noir. Toutes les inversions tirent profit d'une augmentation du nombre de bandes spectrales. Une telle augmentation permet de compenser une erreur modérée sur les aberrations *downstream*. En effet, avec une erreur d'étalonnage de 3%, une inversion avec six bandes spectrales mène à la même valeur RMS de la différence entre les images des objets simulé et estimé qu'une inversion avec deux bandes spectrales sans erreur. Il est également possible, avec une erreur d'étalonnage de 1%, de retrouver la même qualité de reconstruction d'image que dans un cas sans erreur en passant de deux à six bandes spectrales.

Cette étude, bien que réalisée à un stade préliminaire des tests (sans contrainte de support sur l'objet, sans réglage optimal de la régularisation sur l'objet et avec 100 nm d'aberrations downstream) est néanmoins très instructive pour déterminer quelle erreur sur l'étalonnage des aberrations *downstream* est admissible pour une estimation correcte de l'objet avec la méthode que j'ai développée. Dans l'hypothèse où cette méthode serait retenue pour le traitement d'image des futurs instruments, ce type de tests serait indispensable pour la spécification des budgets

12. L'étalonnage de la phase *downstream* sera réalisé par diversité de phase. Or, la propagation du bruit en diversité de phase est indépendante de la fréquence [94]. C'est pourquoi je modélise l'erreur sur la carte d'aberrations *downstream* par un bruit blanc.

d'erreur.

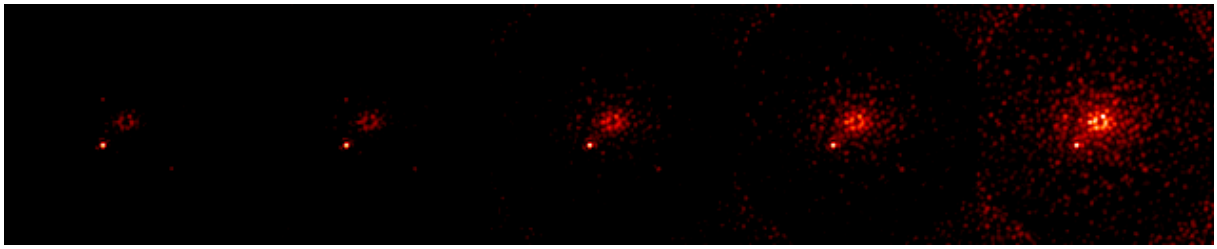


FIGURE 5.10 – **Effet d'une erreur sur les aberrations *downstream* sur la performance de la méthode.** De gauche à droite, avec la même dynamique : images des objets estimées sans erreur sur les aberrations *downstream* et avec une erreur sur les aberrations *downstream* de 1%, 3%, 5% and 10%. Les résultats sont obtenus avec deux bandes spectrales sans contrainte de support sur l'objet.

5.5 Le rôle de la régularisation sur l'objet

Dans le chapitre 3, j'ai présenté le critère de qualité à minimiser lors de l'inversion (cf. Équation 3.1). Ce critère, qui s'appuie sur une inversion bayésienne, est la somme d'un terme d'attache aux données et d'autant de termes de régularisation que l'on veut. Le choix de ces termes de régularisation se fait en fonction des informations *a priori* que l'on a sur le système. Pour la mise en œuvre de ma méthode sur des images simulées, j'ai choisi d'utiliser un seul terme de régularisation qui pénalise l'énergie dans la carte objet. Dans cette section, je me propose de montrer que cette régularisation sur l'objet joue un rôle déterminant dans l'inversion (5.5.1). En particulier, la performance de la méthode dépend du poids attribué à cette régularisation (5.5.2). Enfin, je montre que la régularisation peut également jouer sur la robustesse de la méthode (5.5.3).

5.5.1 Remarques sur la régularisation utilisée dans les tests précédents

Dans les tests précédents, la régularisation sur l'objet a été réglée une bonne fois pour toutes et je ne l'ai pas changée par la suite. Après analyse, je me suis rendue compte que le problème était largement sous-régularisé. Pour le démontrer, j'ai réalisé deux inversions dans les mêmes conditions : l'une avec la régularisation utilisée jusqu'à maintenant, et l'autre en l'absence de régularisation. Les images de l'objet estimées avec deux bandes spectrales sont représentées en figure 5.12.

En réalité, il y a peu de différences entre le cas sous-régularisé utilisé jusqu'ici et le cas sans régularisation. Dans les deux images, les planètes avec des contrastes de 10^5 et 10^6 se détachent relativement bien du bruit de tavelures résiduelles. Il est donc tout à fait possible de détecter des planètes même en l'absence de régularisation. Il existe malgré tout une différence entre les deux images : elle réside dans le niveau des tavelures résiduelles comme on peut le voir

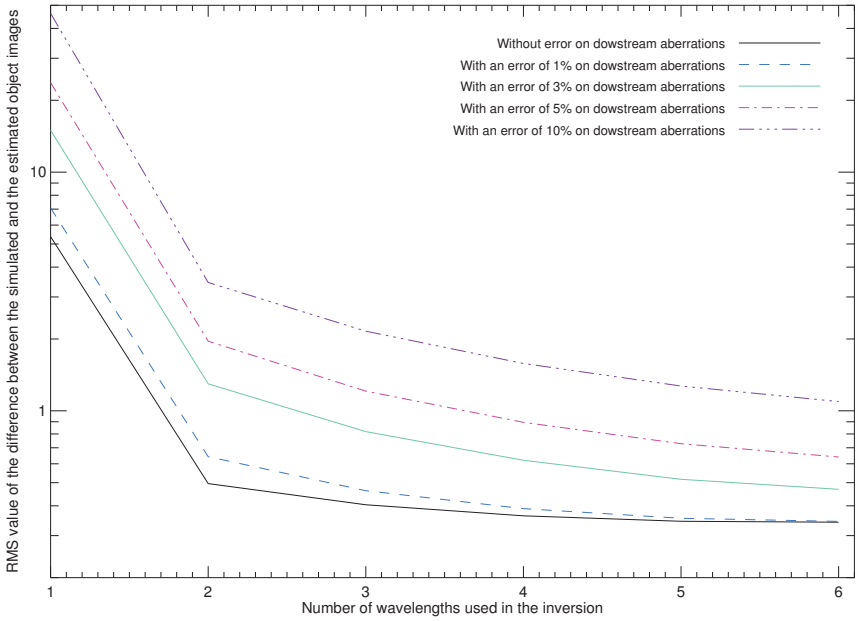


FIGURE 5.11 – **Effet d'une erreur d'étalonnage sur les aberrations *downstream*.** Évolution de la valeur RMS de la différence entre les images des objets simulé et estimé, dans la région corrigée par l'OA, en fonction du nombre de bandes spectrales utilisées pour l'inversion, pour différents niveaux d'erreurs sur la carte d'aberrations *downstream*.

sur l'image de droite qui représente la différence entre les deux images estimées. Le niveau de tavelures résiduelles dans l'image estimée est plus faible dans le cas avec régularisation que dans le cas sans régularisation. Cela signifie qu'une régularisation sur l'objet, même faible, permet de diminuer les résidus de tavelures dans l'objet.

Dans le cas sans régularisation, l'algorithme est libre de mettre autant d'énergie dans l'objet qu'il le souhaite car il n'est pas contraint. En effet, si l'énergie de l'objet n'est pas limitée, l'algorithme met des tavelures dans l'objet au lieu de les expliquer par des aberrations. Ainsi, il y a bien des ambiguïtés entre l'objet et la phase, que la régularisation contribue à lever. Une manière de contraindre l'énergie dans l'objet est donc de régulariser ce dernier un peu plus fortement que précédemment. Dans la suite, je me propose de faire une étude plus exhaustive sur cette régularisation sur l'objet.

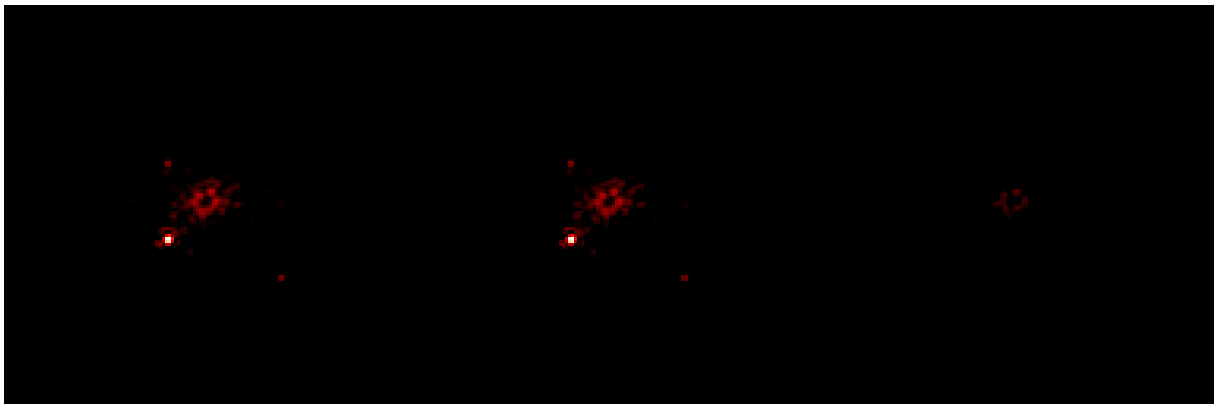


FIGURE 5.12 – **Effet de la régularisation sur l'objet utilisée jusqu'à maintenant sur les objets estimés.** Avec la même dynamique : [gauche] image de l'objet estimé avec la régularisation sur l'objet utilisée jusqu'à présent, [centre] image de l'objet estimé sans régularisation et [droite] différence entre les deux multipliée par 50. 100 nm d'aberrations downstream ont été introduites dans les images simulées. Aucune contrainte de support n'a été utilisée dans ces inversions.

5.5.2 Étude plus approfondie de la régularisation sur l'objet

J'ai démontré précédemment que, d'une part, la régularisation sur l'objet peut avoir un impact sur la performance de la méthode, et d'autre part, le réglage que j'en ai fait n'est pas optimal puisqu'il est très proche d'un cas non régularisé. Dans la suite, je montre tout d'abord que ce réglage n'est pas trivial (5.5.2.1). Je propose alors une technique empirique pour régler ce poids, dans le cas d'images simulées, qui consiste à estimer l'objet à aberrations pour différentes valeurs d'hyperparamètres (5.5.2.2). J'effectue ensuite une comparaison détaillée des images de l'objet obtenues en régime sous-régularisé et en régime correctement régularisé (5.5.2.3). Pour finir, je conclus et soulève la question de la difficulté de ce réglage dans le cas d'images réelles (5.5.2.4).

5.5.2.1 Description du rôle respectif des hyperparamètres qui pilotent la régularisation sur l'objet

La régularisation sur l'objet utilisée, du type L1-L2 (cf. 3.1.3.2 pour les raisons de ce choix), prend la forme suivante :

$$R_{\mathbf{o}} = d^2 \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \Phi \left[\frac{\mathbf{o}\left(\boldsymbol{\alpha}\right)}{s \times d} \right],$$

avec $\Phi(z) = |z| - \ln\left(1 + |z|\right)$.

Les hyperparamètres s et d sont des scalaires. Le premier, s, pilote la force de la régularisation. Plus ce paramètre est petit plus le bruit résiduel dans l'objet estimé diminue. Il joue en effet le rôle de l'inverse d'un paramètre de régularisation. Plus précisément, à d grand, la régularisation est proportionnelle à $1/s^2$ et à d petit, elle est proportionnelle à d/s. Le second hyperparamètre, d, pilote le type de régularisation. Plus ce paramètre est petit, plus on tend vers une régularisation L1 qui privilégie les objets ponctuels. À l'inverse, plus d augmente et plus la régularisation devient L2 qui privilégie les objets lissés.

La forme de régularisation choisie fait intervenir les hyperparamètres s et d de manière dépendante, ce qui rend le réglage assez difficile en pratique. C'est pourquoi j'ai réalisé des tests avec plusieurs valeurs d'hyperparamètres afin de déterminer le meilleur couple d'hyperparamètres.

5.5.2.2 Réglage optimal des hyperparamètres

Afin d'étudier le comportement de l'inversion par rapport au bruit pour différents jeux d'hyperparamètres, j'ai fixé les aberrations à leur valeur vraie et j'ai estimé l'objet avec 2, 3, 4, 5 et 6 bandes spectrales en faisant varier les hyperparamètres s et d. J'ai ainsi testé 81 jeux d'hyperparamètres pour des valeurs de s et d variant entre 10^{-4} et 10^4. Pour chaque jeu d'hyperparamètres, je représente l'image de l'objet estimé. La totalité des images obtenues est représentée en annexe D. Pour illustrer mes propos, je représente en figure 5.13 les images estimées, dans le cas de l'inversion avec 6 bandes spectrales.

En observant les images ainsi obtenues, trois régimes de régularisation se détachent :

- La partie inférieure gauche de la figure 5.13 est similaire à l'image de gauche de la figure 5.14. Il n'y a très peu d'énergie dans l'objet [13] ; il s'agit d'un régime sur-régularisé.
- Toute la partie droite de la figure 5.13 est similaire à l'image de droite de la figure 5.14. Des planètes se détachent mais la région corrigée par OA est très bruitée. Cette régularisation ne pénalise pas assez fortement l'énergie dans l'objet : il s'agit d'un cas sous-régularisé.
- Une diagonale se dessine entre ces deux précédentes régions pour laquelle les images sont similaires à l'image au centre de la figure 5.14. Ces images correspondent à un cas « correctement » régularisé. Les planètes apparaissent nettement dans ces images et le bruit a fortement diminué.

Ces trois régions sont représentées de manière schématique dans la figure 5.15. Avec le couple d'hyperparamètres que j'ai utilisé jusqu'à présent dans mes tests, i.e. $s \simeq 5000$ en fin d'inversion

13. En réalité, il y a un peu d'énergie dans l'objet mais on ne la voit pas sur les figures 5.13 et 5.14 car elle est négligeable par rapport à l'énergie des images des autres régimes de régularisation.

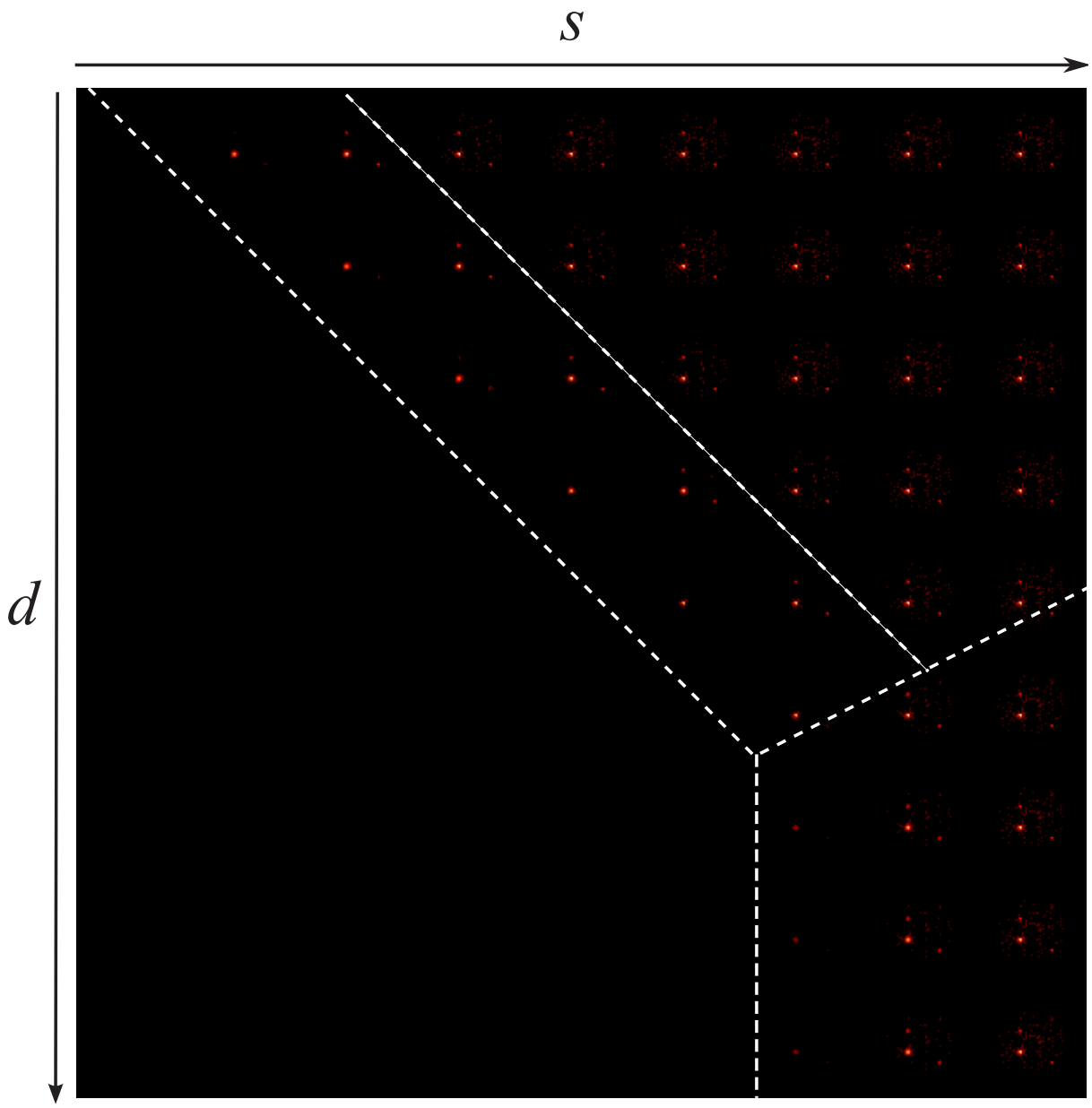


FIGURE 5.13 – **Réglage des hyperparamètres.** Images des objets estimés à aberrations supposées connues et fixées à leur vraie valeur pour une inversion à 6 bandes spectrales. De gauche à droite, l'hyperparamètre s augmente de 10^{-4} à 10^{4}. De haut en bas, l'hyperparamètre d croît de 10^{-4} à 10^{4}. En abscisse de gauche à droite : s = [0.0001,0.001,0.01,0.1,1.,10,100,1000,10000]. En ordonnée de haut en bas : d = [0.0001,0.001,0.01,0.1,1.,10,100,1000,10000].

et $d \simeq 0.01$, je me situe dans la partie supérieure droite de la figure 5.13. Ceci confirme bien que le couple d'hyperparamètres utilisé jusqu'à présent n'est pas idéal (il reste beaucoup de bruit).

En comparant les images estimées pour un nombre différent de bandes spectrales utilisées, il est intéressant de remarquer qu'un jeu d'hyperparamètres valable pour un certain nombre de bandes spectrales peut ne pas être le meilleur pour un nombre différent de bandes spectrales. Par exemple, la région qui regroupe les cas « correctement » régularisés se déplace vers la gauche à mesure que le nombre de longueurs d'ondes augmente. Autrement dit une inversion avec six bandes spectrales est meilleure pour s plus petit qu'une inversion avec une ou deux bandes spectrales. Il est important de faire attention à choisir le meilleur jeu d'hyperparamètres commun à toutes les inversions.

On peut également remarquer que la région « correctement » régularisée s'étend en augmentant le nombre de bandes spectrales utilisé pour l'inversion (cf. Annexe D). Ce qui démontre une fois de plus l'intérêt de l'imagerie multispectrale pour l'inversion.

Je me propose à présent d'étudier plus en détails les comportements de la méthode d'estimation conjointe des aberrations et de l'objet que j'ai développée pour deux régimes différents de régularisation.

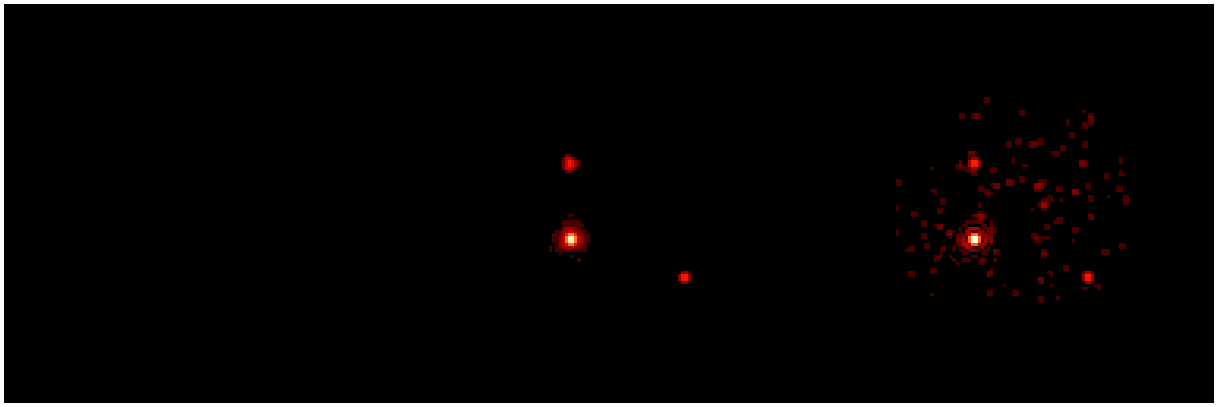


FIGURE 5.14 – **Effet de la force de la régularisation.** Images des objets estimées dans trois régimes différents de régularisation, représentés avec la même dynamique : [gauche] inversion sur-régularisée, [centre] inversion bien régularisée et [droite] inversion sous-regularisée.

5.5.2.3 Comparaison d'un cas d'inversion très peu régularisé et d'un cas d'inversion correctement régularisé

Je compare les résultats d'inversion pour 2, 3, 4, 5 et 6 bandes spectrales dans deux régimes de régularisation différents :

- Un cas sous-régularisé avec $s = 2370$ et $d = 0.01$ (cf. Figure 5.16(a)) ;
- Un cas correctement régularisé avec $s = 3$ et $d = 0.05$ (cf. Figure 5.16(b)).

Le cas sous-régularisé se situe dans la partie supérieure droite de la figure 5.13 alors que le cas correctement régularisé se situe dans la partie diagonale de la même figure. Je discute le rôle de

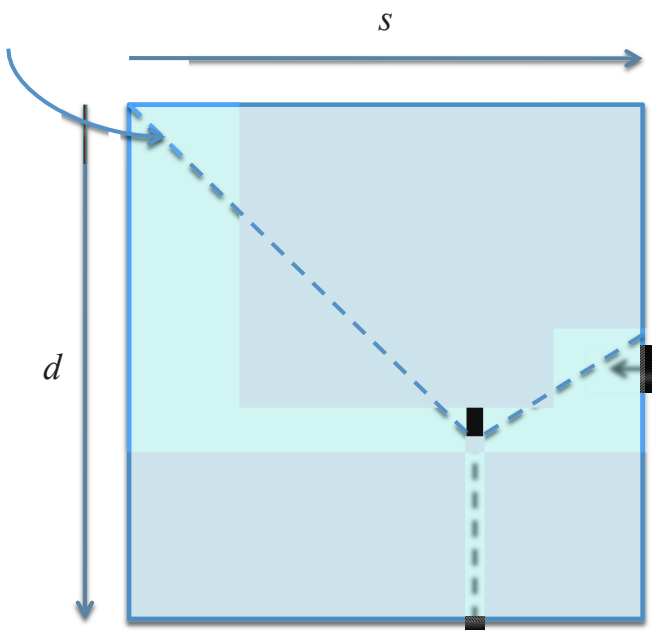


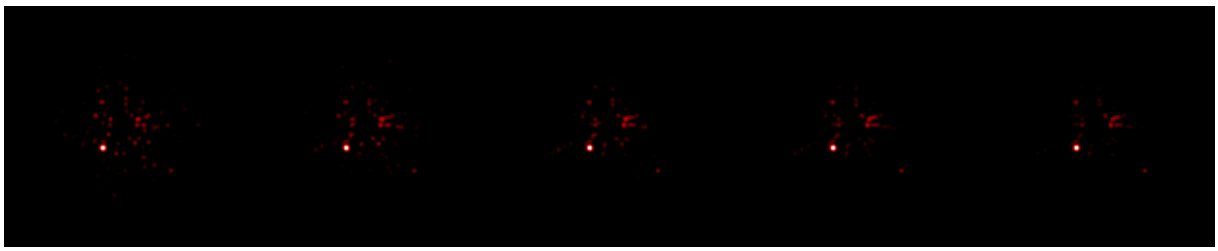
FIGURE 5.15 – **Effet du réglage des hyperparamètres s et d sur le type et la force de la régularisation.**

la régularisation sur le niveau de bruit résiduel dans l'objet, l'aspect des planètes reconstruites et l'estimation de leur flux.

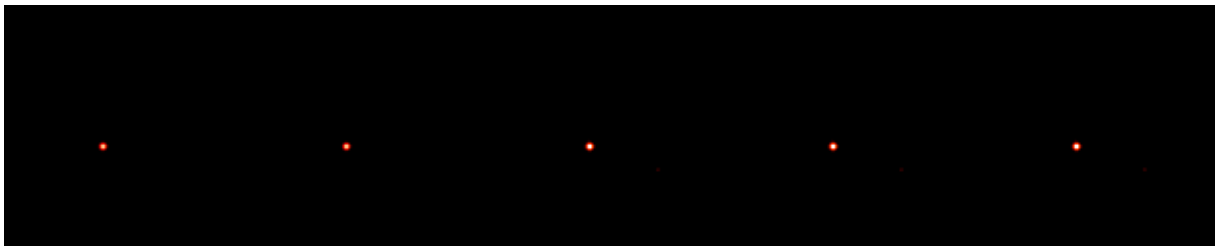
Rôle de la régularisation sur le niveau de bruit résiduel dans l'objet. Les deux cas de régularisation diffèrent par le niveau de bruit résiduel dans l'objet. Dans le cas sous-régularisé, la contrainte sur l'énergie de l'objet n'étant pas élevée, il reste un niveau important de bruit dans l'objet. Dans le cas correctement régularisé, le niveau de bruit est négligeable.

Rôle de la régularisation sur l'estimation du flux des planètes. Le flux des planètes est mieux estimé dans le régime sous-régularisé que dans le régime correctement régularisé. Ceci semble logique car le régime correctement régularisé pénalise plus fortement l'énergie dans l'objet que le régime sous-régularisé, ce qui mène à une sous-estimation du flux des planètes.

Effet d'une erreur d'estimation sur les aberrations. Contrairement au cas des tests sur le réglage des hyperparamètres (cf. Annexe D), les planètes n'apparaissent pas ici à 2 et 3 lambda, comme on peut le voir sur la figure 5.16, car les aberrations sont aussi estimées. Elles ne sont pas considérées comme connues ; des résidus d'aberrations *upstream* apparaissent en plus du bruit, ce qui complique encore le problème.



(a) Inversion avec une faible régularisation sur l'objet.



(b) Inversion avec une régularisation correcte sur l'objet.

FIGURE 5.16 – **Effet de la régularisation sur la qualité de l'inversion.** De gauche à droite, avec la même dynamique : images des objets estimés après inversion avec 2, 3, 4, 5 et 6 bandes spectrales.

Effet du nombre de bandes spectrales utilisées pour l'inversion. Les inversions réalisées avec les deux régimes de régularisation différents ont en commun une amélioration du niveau de détection en fonction du nombre de longueurs d'onde utilisé. C'est très flagrant dans le cas « correctement » régularisé : les deux planètes à 10^6 n'apparaissent qu'à partir de l'inversion à quatre bandes spectrales.

Cependant, les planètes avec un contraste de 10^6 n'apparaissent pas dans les inversions avec 2 et 3 bandes spectrales. Seule la planète avec un contraste de 10^5 apparaît. À nombre de longueurs d'onde constant il est nécessaire de relâcher la régularisation afin de voir apparaître les planètes. Cette relaxation se fait au détriment de plus de bruit dans l'objet.

5.5.2.4 Conclusion sur le réglage optimal des hyperparamètres

Dans cette étude sur le réglage des hyperparamètres, j'ai illustré le comportement de l'énergie de l'objet par rapport au bruit. Il s'agit d'un problème classique de déconvolution pour lequel le réglage des hyperparamètres joue sur la répartition entre l'objet et le bruit. Les tests réalisés ne sont cependant pas exhaustifs dans le sens ou seulement une centaine de jeux d'hyperparamètres ont été passés en revue. J'ai malgré tout j'ai pu montrer qu'il est possible de trouver un jeu d'hyperparamètres convenable du fait de la sensibilité logarithmique du réglage des hyperparamètres.

Le jeu d'hyperparamètres choisi est un jeu qui se trouve dans la région correctement régularisée mais ce n'est sans doute pas le meilleur possible. Pour régler les hyperparamètres de façon plus optimale, il faudrait passer en revue plus de jeux d'hyperparamètres dans la région correcte-

ment régularisée et déterminer plus finement la sensibilité du réglage par rapport à l'estimation du flux des planètes par exemple.

Dans le cas plus réaliste d'images pour lesquelles on ne connaît pas parfaitement les aberrations et pour lesquelles on ne sait pas si des planètes sont présentes, il est impossible d'effectuer un tel réglage des hyperparamètres à aberrations supposées connues. Il semble donc qu'il s'agisse d'un point difficile lors du traitement d'images réelles. Cependant, des solutions existent et devront être exploitées :

- Une idée serait de régler les hyperparamètres sur des images simulées très proches des images réelles, dont on connait les paramètres ;
- Il est ensuite possible de rendre les deux hyperparamètres indépendants pour faciliter le réglage. Cela peut se faire simplement en considérant les nouveaux paramètres d' et μ tels que $d' = s \times d$ et $\mu = d^2$ [63]. En prenant une valeur suffisamment petite de d', la régularisation est L1 (cf. Figure 5.15), ce qui assure d'avoir des planètes ponctuelles. Il ne reste alors plus qu'à régler la force de la régularisation avec le paramètre μ ;
- L'utilisation d'une régularisation purement L1 est également possible mais une telle régularisation n'est pas dérivable en zéro. Cela implique donc de changer d'algorithme de minimisation ;
- Enfin, il existe des méthodes de restauration multiobjectifs, qui permettent d'estimer à la fois l'objet d'intérêt et les hyperparamètres [95].

Par ailleurs, j'ai montré que le nombre de bandes spectrales utilisées pour l'inversion joue un rôle dans l'étendue de la région « correctement » régularisée. Cet effet est visible avec un faible nombre de bandes spectrales utilisé, c'est-à-dire 6, il reste donc une marge de manœuvre pour un instrument tel que l'IFS SPHERE qui peut réaliser des cubes d'images de 40 bandes spectrales.

Après avoir choisi un jeu d'hyperparamètres dans la région correctement régularisée, j'ai pu mettre en œuvre ma méthode d'inversion sur des images simulées afin d'étudier un autre effet : il s'agit de l'échange d'énergie entre l'objet et les aberrations. À cause de ce deuxième effet, il existe des différences entre un résultat à aberrations connues et un résultat après inversion car, dans ce dernier cas, les aberrations ne sont pas estimées parfaitement.

Nous allons voir à présent, que les effets combinés d'échange d'énergie entre bruit et objet et entre aberrations et objet jouent également sur la robustesse de la méthode.

5.5.3 Effet des différents régimes de régularisation sur la robustesse de l'algorithme

On a vu qu'il existe plusieurs régimes de régularisation pour lesquels la performance de la méthode en terme de niveau de détection n'est pas la même. Je vais à présent montrer que le réglage des hyperparamètres de la régularisation sur l'objet peut compromettre la robustesse de la méthode. J'applique ma méthode sur 10 cubes d'images à deux bandes spectrales, simulés avec des phases aléatoires différentes. Pour chaque test, je réalise deux initialisations : une lors de l'inversion à une bande spectrale, et une autre lors de l'inversion à deux bandes spectrales [14]. Sauf mention contraire, un niveau de 30 nm d'aberrations downstream est utilisé pour la simulation

14. Pour rappel, cette initialisation supplémentaire permet d'améliorer la robustesse de l'algorithme cf. 5.1.7

des images et j'applique une contrainte de support lors de l'inversion sur l'objet telle que définie à la section 5.3 de ce chapitre. Je réalise ces tests de robustesse dans deux régimes différents d'inversion : un régime sous-régularisé (5.5.3.1) et un régime « correctement » régularisé (5.5.3.1). Je propose enfin une configuration d'inversion qui tire profit de ces deux régimes (5.5.3.3).

5.5.3.1 Régime d'inversion sous-régularisé

L'étude du cas d'inversion sous-régularisée ($s = 2370$ et $d = 0.01$) sur les dix différentes images simulées montre que les résultats obtenus sont très similaires, à l'exception de l'image 4 pour laquelle il est impossible de distinguer les planètes (cf. Figure 5.17). Dans tous les autres cas, c'est-à-dire 9 cas sur 10, la planète avec un contraste de 10^5 se détache. Les images ainsi estimées constituent donc de nouveaux points de départ intéressants pour la suite du schéma d'optimisation, c'est-à-dire l'inversion à 3 bandes spectrales. J'en conclus que l'algorithme est relativement robuste dans ce cas d'inversion sous-régularisé.

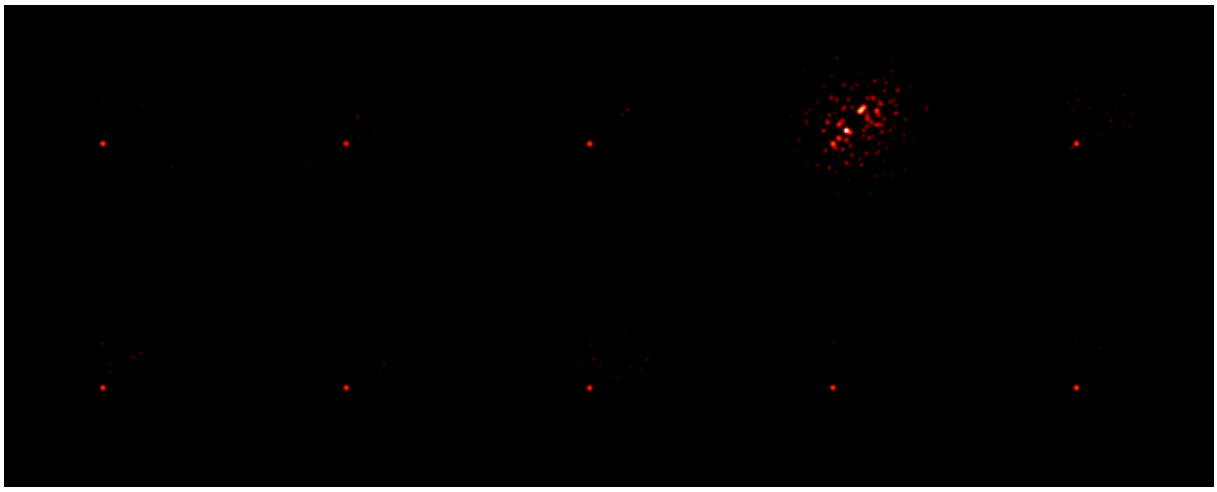


FIGURE 5.17 – **Robustesse de l'algorithme en régime sous-régularisé.** De gauche à droite et de haut en bas, avec la même dynamique : images des objets estimés à partir des images numérotées de 1 à 10. La planète avec un contraste de 10^5 se détache dans 9 cas sur 10. L'image 4 présente quant à elle un niveau de tavelures résiduelles trop élevé pour détecter les planètes.

Il est important de rappeler que le niveau d'aberrations *downstream* est ici de 30 nm. Le même test de robustesse, réalisé avec 100 nm d'aberrations *downstream* (cf. Figure 5.18), avec une seule étape d'initialisation lors de l'inversion à une bande spectrale et sans contrainte de support sur l'objet, donne des résultats convaincants dans 100% des cas, ce qui confirme encore une fois le rôle des aberrations *downstream* dans le processus de minimisation [15].

15. On peut noter que ces images sont différentes de celles obtenues avec 30 nm d'aberrations downstream. On peut en effet voir un fort résidu de halo turbulent. Ceci est dû au fait qu'aucune contrainte de support n'a été utilisée lors de l'inversion.

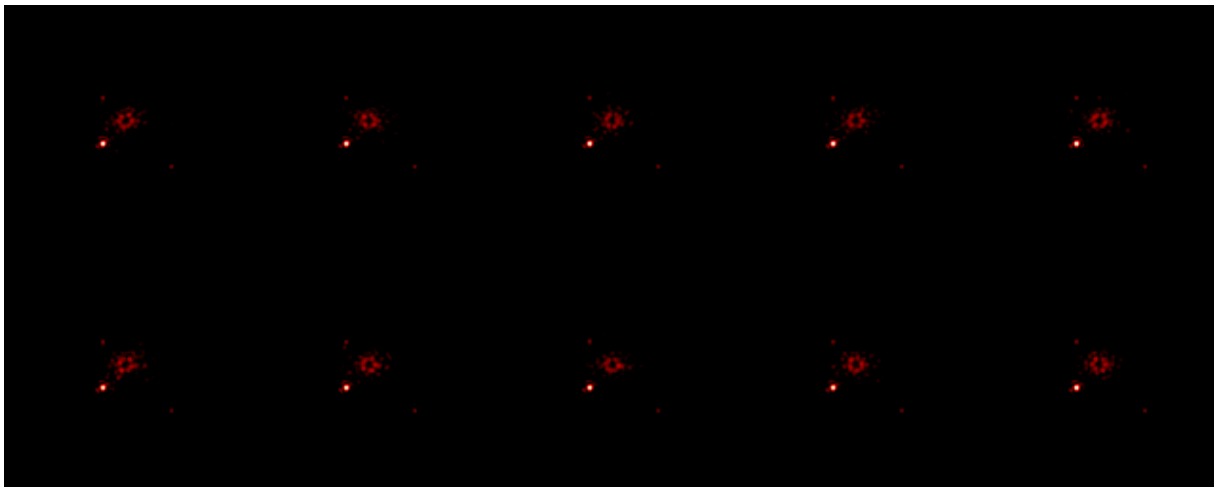


FIGURE 5.18 – **Robustesse de l'algorithme en régime sous-régularisé avec 100 nm d'aberrations *downstream*.** De gauche à droite et de haut en bas, avec la même dynamique : images des objets estimés à partir des images numérotées de 1 à 10. Quelle que soit la carte d'aberrations *upstream* utilisée pour simuler les images, le résultat de l'inversion est le même. Multiplier la quantité d'aberrations downstream par 3 a donc permis d'améliorer la robustesse de l'algorithme [16].

5.5.3.2 Régime d'inversion correctement régularisé

L'étude du cas d'inversion correctement régularisé ($s = 3$ et $d = 0.05$) sur les dix différentes images simulées (cf. Figure 5.19) montre que les résultats obtenus sont très différents, contrairement au cas d'inversion sous-régularisée. Les images estimées peuvent être regroupées en trois catégories [17] :

1. La planète avec un contraste de 10^5 est détectée et le niveau de tavelures résiduelles dans l'image de l'objet estimée est négligeable (cas 1, 2, 6, 7 et 9) ;
2. Le niveau de tavelures résiduelles dans l'image de l'objet estimée est négligeable, mais aucune planète n'est détectée (cas 3 et 5) ;
3. Le niveau de tavelures résiduelles domine dans l'image de l'objet estimée, ce qui ne permet pas de distinguer les planètes (cas 4, 8 et 10).

Ainsi, si un régime d'inversion correctement régularisé permet d'obtenir dans la moitié des cas (première catégorie d'images) une détection bien plus marquée de la planète la plus brillante, l'algorithme est par ailleurs moins robuste, puisque dans 50 % des cas il ne détecte pas la planète avec un contraste de 10^5.

17. Pour rappel : j'utilise deux bandes spectrales pour l'inversion, il est donc possible de détecter uniquement la planète avec un contraste de 10^5 mais pas les autres (cf. Figure 5.16(b)).

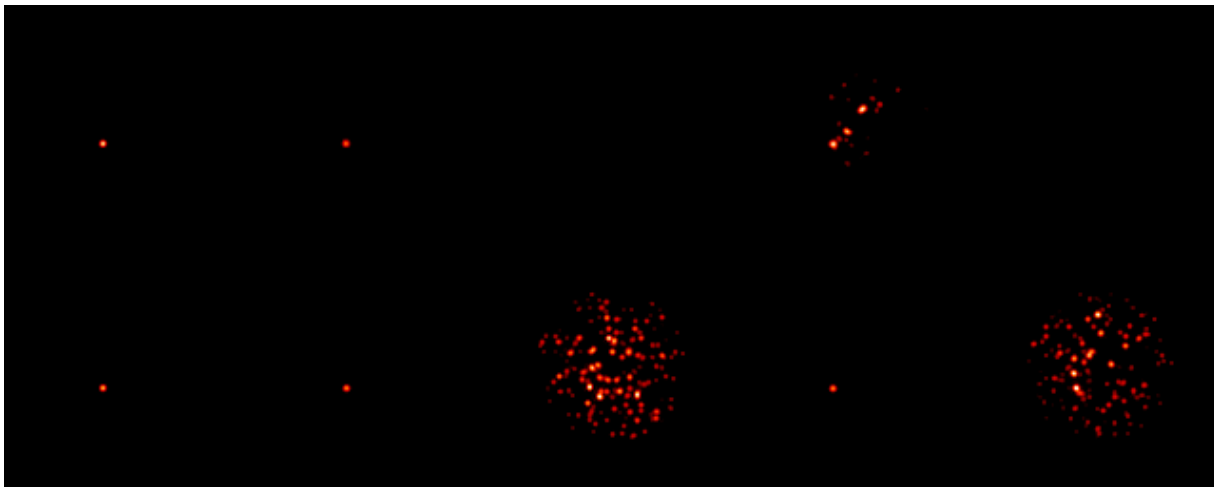


FIGURE 5.19 – **Robustesse de l'algorithme en régime correctement régularisé.** De gauche à droite et de haut en bas, avec la même dynamique : images des objets estimés à partir des images numérotées de 1 à 10. La planète avec un contraste de 10^5 est détectée dans la moitié des cas. L'autre moitié présente trop ou pas assez d'énergie dans l'image de l'objet estimée.

5.5.3.3 Détermination d'une configuration intermédiaire combinant les deux régimes d'inversion précédents

Le régime d'inversion sous-régularisé est relativement robuste mais peu performant. Le régime d'inversion correctement régularisé est plus performant car il permet de d'abaisser le niveau des tavelures tout en détectant au moins une planète, mais il n'est pas très robuste au sens où il est plus probable de rester sur un minimum local. Face à ce constat, l'idée ici est de combiner les effets de ces deux régimes de régularisation afin d'obtenir un algorithme à la fois robuste et performant.

Pour cela, j'utilise la première configuration qui me permet d'obtenir un algorithme robuste. Deux inversions successives sont ainsi réalisées avec une et deux bandes spectrales en régime sous-régularisé. Le résultat de l'estimation conjointe des aberrations et de l'objet me donne un point de départ pour la deuxième configuration qui elle, me permet d'obtenir un algorithme performant : la carte d'aberrations obtenue me sert de carte d'initialisation pour une nouvelle inversion avec deux bandes spectrales, avec un régime correctement régularisé.

Les résultats obtenus avec deux bandes spectrales sont représentés en figure 5.20 [18]. La figure 11(b) de l'article montre ce qu'il se passe lorsque l'on ajoute des bandes spectrales supplémentaires. L'ajout de bandes spectrales supplémentaires ne permet pas d'améliorer le cas qui n'a pas fonctionné. Par contre, pour les autres cas, la performance de la méthode en terme de détection d'exoplanètes s'en trouve améliorée.

18. cf. aussi Figure 11(a) de l'article.

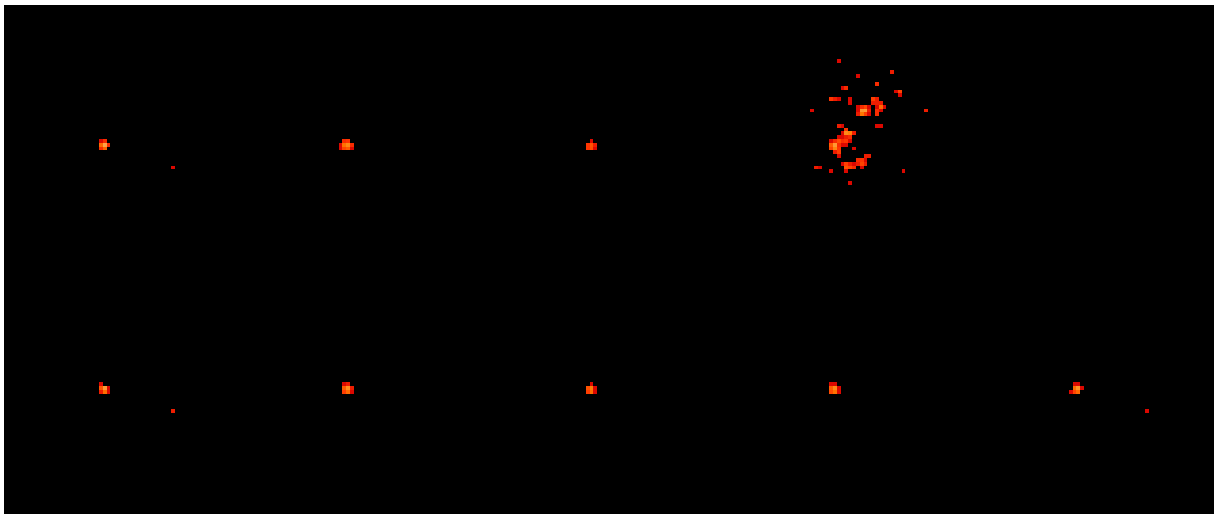


FIGURE 5.20 – **Robustesse de l'algorithme sur en combinant successivement deux régimes de régularisation.** De gauche à droite et de haut en bas, avec la même dynamique : images des objets estimés à partir des images numérotées de 1 à 10. La planète avec un contraste de 10^5 est détectée dans 90 % des cas.

5.6 Conclusion du chapitre

Dans ce dernier chapitre, j'ai mis en œuvre ma méthode d'inversion pour l'estimation conjointe du champ de tavelures et de l'objet sur des cubes d'images multispectrales simulés. Lors du développement de la méthode (cf. chapitre 3), l'étape de *phase retrieval* avait été identifiée comme étant la plus difficile. Le critère associé présente en effet de nombreux minima locaux en raison de la forte non linéarité du modèle d'imagerie coronographique utilisé pour l'inversion. Comme prévu, j'ai rencontré des difficultés de minimisation liées à la forme du critère et au nombre relativement important d'inconnues à estimer.

Une grande partie de ce travail de thèse a consisté à mettre en œuvre des stratégies efficaces pour contourner ces difficultés. Grâce à ces stratégies, j'ai montré que la méthode fonctionne tout en étant relativement robuste. Le schéma d'optimisation que j'ai proposé permet donc un traitement systématique, testé sur un grand nombre de réalisations aléatoires. Dans des cas particuliers (cas rares de non convergence), il est toujours possible de modifier le schéma d'optimisation afin de les régler au cas par cas. J'ai également estimé les performances de l'inversion en terme de détection d'exoplanètes et d'estimation de leur flux, ce dernier point étant important dans l'optique de mesurer des spectres. Ce travail, exposé dans l'article en section 5.1.6 de ce chapitre, m'a conduite à modifier le schéma d'optimisation auquel j'avais abouti au chapitre 3.

Une étude plus complète sur les différents paramètres du critère m'a également permis de mieux appréhender le fonctionnement de la méthode. Outre l'exploration des directions offertes par les quatre phases « quasi-équivalentes », directement inspirée du modèle approché développé dans le chapitre 4, j'ai identifié trois ingrédients qui jouent un rôle important dans la minimisa-

tion. Un fort niveau d'aberrations *downstream* en est un, un réglage fin et évolutif de la régularisation sur l'objet en est un autre. Enfin, l'aspect multispectral joue également fortement, une augmentation progressive du nombre de bandes spectrales utilisées dans l'inversion semblant plus robuste que d'utiliser directement un grand nombre de bandes spectrales. Un grand nombre de bandes spectrales permet également de relâcher la contrainte sur le réglage de la régularisation en élargissant la région « correctement régularisée », ce qui est un avantage certain pour le traitement d'images réelles. D'autres ingrédients de la méthode permettent d'en améliorer encore les performances. C'est le cas de la contrainte de support sur l'objet qui induit une diminution des tavelures résiduelles dans l'objet via une estimation non biaisée du flux de l'étoile. La régularisation permet également une diminution du bruit de tavelures dans l'objet. Enfin, la redondance multispectrale permet dans un régime sous-régularisé comme dans un régime « correctement régularisé » de diminuer l'erreur d'estimation sur le flux des planètes.

Il est maintenant clair, à la vue de ces résultats, qu'appliquer la méthode d'inversion sans prendre de précautions peut conduire à de fortes déconvenues. La redondance multispectrale à elle seule ne suffit pas à obtenir des résultats convaincants ; il en est de même pour la régularisation sur l'objet. Au contraire, une compréhension fine des mécanismes de minimisation et de la formation des images par l'instrument est essentielle pour mener à bien une telle inversion. Ceci confirme notamment qu'une plus grande connaissance sur l'instrument, comme ce sera le cas des futurs instruments, permettra de tirer tous les bénéfices de cette méthode. Tout ceci est essentiel pour fabriquer un schéma d'optimisation rapide et robuste qui pourra servir de manière intensive lors du traitement des données d'un instrument tel que SPHERE.

Discussion

J'ai développé une méthode de traitement d'images multispectrales fondée sur un modèle d'imagerie coronographique pour la détection d'exoplanètes. S'appuyant sur une inversion bayésienne, elle autorise l'utilisation de termes de régularisation. Je l'ai testée avec un terme de régularisation sur l'objet, dans le cas idéal d'images simulées avec le même modèle utilisé dans l'inversion et des aberrations turbulentes et *downstream* supposées parfaitement connues. Dans ce cas de figure, et avec un réglage adapté de la régularisation sur l'objet, j'ai montré qu'il est possible d'estimer avec une grande précision les aberrations *upstream* et l'objet d'intérêt.

Je suis ainsi parvenue à montrer que l'on peut gérer la difficulté intrinsèque de la méthode d'inversion, liée à la présence de nombreux minimas locaux, ainsi que les problèmes numériques. Par conséquent, les limites fondamentales de cette technique sont la précision du modèle utilisé pour l'inversion et la précision avec laquelle les aberrations supposées connues sont estimées. Le potentiel de la méthode pourra être d'autant mieux exploité que ces connaissances *a priori* seront meilleures. Ainsi, les capacités de détection de cette méthode vont dépendre très étroitement des connaissances que l'on a sur l'instrument, c'est pourquoi le modèle d'imagerie et l'étalonnage des aberrations vont jouer un rôle capital. Les évolutions de la méthode devront donc prendre en compte ces éléments.

Dans cette discussion, j'identifie des axes d'amélioration de la méthode. Le réglage de la régularisation sur l'objet et la gestion de l'initialisation de l'algorithme sont également des questions fondamentales car cela conditionne grandement la détection. Il y aura donc un deuxième volet à cette discussion qui traitera plus particulièrement des pistes de minimisation envisagées pour le traitement de données plus réalistes.

Axes d'amélioration de la méthode

Modifications du modèle d'imagerie

L'amélioration de la méthode concernera tout d'abord les possibilités de modification du modèle d'imagerie qui permettront de se rapprocher d'un modèle plus réaliste pour le traitement des données de l'instrument SPHERE.

Le modèle actuellement utilisé s'appuie sur l'hypothèse d'un coronographe parfait. Pour se rapprocher des données de SPHERE, il faut donc envisager de simuler des coronographes réalistes, comme des coronographes de Lyot ou quatre quadrants. Il est notamment envisageable à

très court terme d'adapter la méthode à un coronographe de Lyot. Il sera également très utile d'étudier l'effet de l'occultation centrale du VLT, ainsi que les spiders, sur les performances de l'algorithme.

Un axe abordé pendant ma thèse, qui mérite d'être approfondi, est l'étude de robustesse de l'algorithme par rapport à des erreurs d'étalonnage des aberrations. Si j'ai obtenu de premiers résultats en ce qui concerne les aberrations *downstream* en cours de thèse (avec 100 nm d'aberrations), il serait intéressant d'étudier les performances avec 30 nm d'aberrations pour le dernier schéma d'optimisation proposé. De même, une étude similaire pour les aberrations turbulentes résiduelles mérite d'être réalisée. L'étude de l'impact de ces erreurs sur la performance de l'algorithme est très importante puisque ces aberrations ne seront connues qu'à une erreur près. À ce sujet, j'ai pris comme hypothèse que l'on connaissait les aberrations turbulentes et les aberrations *downstream* mais la méthode autorise d'estimer également ces paramètres. Il sera donc important d'étudier s'il est préférable ou non de les estimer, en prenant comme point de départ les phases étalonnées par exemple. L'estimation des aberrations *downstream* pourra se faire de manière quasi-immédiate car cela est prévu d'un point de vue algorithmique. Pour les aberrations turbulentes cela nécessitera plus de travail.

L'amélioration de la méthode passera à moyen terme par son implémentation pour le traitement de données provenant d'autres instruments que SPHERE. Le traitement des images simulées GPI, qui est un instrument proche de SPHERE, sera un test déterminant pour savoir s'il est possible d'adapter la méthode à un autre type de données. Il est également possible de faire évoluer la méthode afin de traiter des images multispectrales provenant d'instruments sans coronographe comme c'est le cas de SINFONI, ou du télescope spatial Hubble.

À plus long terme, des modifications encore plus importantes du modèle d'imagerie coronographique sont à prévoir. Celui que j'ai choisi d'utiliser dans l'inversion repose sur une propagation de Fraunhofer. Cette hypothèse forte suppose que les optiques sont toutes situées dans des plans pupilles, permettant de s'affranchir des défauts d'amplitude. Le nombre de paramètres à estimer est ainsi moins important puisqu'il se réduit aux défauts de phase. Cette hypothèse est relativement compatible avec l'instrument SPHERE dont les optiques sont majoritairement dans des plans pupille. Les erreurs d'amplitude sont négligeables pour les niveaux de détection que l'on cherche à atteindre, i.e. jusqu'à un niveau de performance au delà d'un contraste de 10^6. Ce n'est pas le cas de certains instruments au sol qui présentent des erreurs d'amplitudes non négligeables. Ce ne sera pas non plus le cas des futurs instruments spatiaux qui traqueront la moindre erreur d'amplitude pour atteindre des niveaux de détection bien plus grands.

Un axe d'amélioration à plus long terme est donc celui d'envisager de prendre en compte les propagations de Fresnel dans le modèle de formation d'image afin de modéliser de façon plus précise les instruments pour lesquels les défauts d'amplitude ne sont pas négligeables. Dans le cadre des instruments spatiaux, se posent également des questions relatives à la modélisation d'un coronographe réaliste : jusqu'où peut-on aller ? La présence de défauts, ou de poussières sur le coronographe peut-elle être modélisée avec précision ?

Combinaison avec d'autres méthodes

La méthode développée exploite la redondance d'informations offerte par l'imagerie multispectrale. Cependant, il n'est pas exclu de combiner cette redondance multispectrale avec d'autres informations telles que ce que nous offre l'ADI. Lors d'une observation prolongée avec l'IFS de SPHERE, le champ effectuera un mouvement de rotation autour de l'axe optique. Les planètes tourneront alors que les aberrations resteront fixes. Cette information pourra donc également être utilisée au même titre que la redondance multispectrale pour discriminer ce qui provient des aberrations et ce qui provient de l'objet. L'ajout de cubes d'images supplémentaires contribuera ainsi à augmenter la quantité d'information et à réduire la difficulté du problème inverse.

J'ai montré qu'il est possible, même avec deux bandes spectrales d'obtenir de très bonnes estimations des aberrations et de l'objet avec de bonnes restitutions de flux. Ceci est possible notamment en optimisant en conséquence les hyperparamètres de la régularisation sur l'objet, et même dans le cas de bandes spectrales très proches. Cette méthode est donc non seulement prometteuse pour le traitement d'images multispectrales telles que les images de l'IFS mais également pour le traitement d'images données par un instrument de type *dual-band* tel que IRDIS. Il sera donc très intéressant de tester la méthode sur les images de cet instrument.

Application de la méthode pour la reconstruction d'autres types de données

Jusqu'à présent, je n'ai testé ma méthode que pour la reconstruction d'objets ponctuels tels que des planètes. Cependant il n'est pas exclu de reconstruire d'autres types d'objets comme des disques de poussières. Ce cas de figure est d'ailleurs prévu sur SPHERE et nous serons en possession de données contenant des disques sur lesquelles il sera très intéressant de tester l'algorithme. Concrètement, des changements devront s'opérer au niveau du terme de régularisation sur l'objet. Une régularisation de type L1-L2 sera idéale pour reconstruire correctement les bords francs d'un disque. Les hyperparamètres devront être cependant choisis de manière à tendre vers une régularisation L2 pour favoriser des objets étalés.

On peut également se poser la question de savoir si la présence d'un disque perturberait la détection de planètes. La capacité de détection de la méthode est extrêmement dépendante du réglage des hyperparamètres. Comme ce réglage va favoriser soit des objets ponctuels, soit des objets plutôt étalés, il serait donc extrêmement intéressant de tester la méthode sur un cas connu d'image qui contient à la fois des planètes et un disque.

Enfin, et cela pourra se faire aussi à court terme, il sera nécessaire de simuler non plus un objet blanc comme dans cette thèse mais un objet présentant un spectre de façon à reconstruire dans un cas simulé le spectre et ainsi tester la régularisation L1-L2 sur la dimension spectrale de l'objet.

Autre intérêt de la méthode

Le cas des aberrations *downstream* est également un point délicat et discutable. Il est aujourd'hui consensuel, au sein de la communauté HRA, d'affirmer que leur impact sur l'image finale est moins important que celui des aberrations *upstream*. Cet effet est d'autant plus accentué que les aberrations *upstream* sont faibles, car les aberrations *downstream* se combinent à ces dernières. Si les aberrations *upstream* sont faibles, l'impact des *downstream* est proportionnel au niveau des aberrations *upstream*. Dans le cas des instruments spatiaux, les spécifications sur les aberrations *upstream* sont tellement serrées que l'impact des aberrations *downstream* est négligeable. Dans ces conditions, on peut donc légitimement se demander pourquoi il est intéressant de modéliser malgré tout les aberrations *downstream*.

Dans ma thèse, j'ai montré que les aberrations *downstream* ont une importance pour la minimisation. Dans le cas idéal où elles sont supposées parfaitement connues, elles permettent de contraindre le problème. Il est donc plus difficile de converger lorsque les aberrations *downstream* sont faibles. Or, on a vu que dans le cadre d'un problème inverse, toutes les informations qui permettent de contraindre le problème sont très importantes. Les aberrations *downstream* se comportent ainsi comme une sonde permettant de lever l'ambiguité tout comme l'image défocalisée en diversité de phase. Sauf qu'en diversité de phase l'ambiguité se joue sur un simple signe, tandis que dans ce problème, l'ambiguité est bien plus grande.

C'est là où se joue tout l'intérêt d'une méthode comme celle-ci : les informations importantes dont la méthode a besoin pour fonctionner sont parfois des informations que les instrumentalistes cherchent à éliminer pour réduire le niveau de bruit. Pourtant, certaines techniques de traitement d'image très puissantes sont capables de faire ce que les méthodes d'étalonnage instrumental font. C'est pourquoi, il est essentiel de développer et d'étudier ce type de méthode et de travailler main dans la main avec les instrumentalistes de manière à préparer autrement la future génération d'instruments pour les ELT, à l'image de ce qui est en train de démarrer sur SPHERE. Tout comme les procédures d'étalonnage sont peu à peu pensées lors de la conception de l'instrument (c'est devenu indispensable), l'idéal serait de prendre en compte également dès le début de cette conception, la conception des méthodes de traitement d'image.

Conclusion générale et perspectives

Bilan des travaux

L'imagerie directe d'exoplanètes est un enjeu majeur de l'astrophysique d'aujourd'hui. Cette discipline, extrêmement ardue, est devenue possible pour des planètes relativement lumineuses et éloignées de leur étoile grâce à des instruments de plus en plus performants, bien que non dédiés. Une nouvelle génération d'instruments optimisée pour la détection directe et la caractérisation d'exoplanètes est sur le point d'accroître les capacités de détection en ouvrant les possibilités d'étude à des planètes moins lumineuses et plus proches de leur étoile. Néanmoins, ces capacités de détection restent limitées par la présence d'aberrations instrumentales à l'origine d'un bruit de tavelures sur les images finales. Des méthodes de traitement d'images de plus en plus évoluées permettent d'accroître les possibilités de détection des instruments en s'affranchissant d'une partie de ces tavelures. Parmi ces méthodes de traitement d'images, certaines d'entre elles fournissent des résultats intéressants sur les images que l'on dispose actuellement. Mais il est d'ores et déjà capital de préparer le traitement des données que nous offriront les nouveaux instruments. Dans cette optique, deux options s'offrent à nous : la première est l'amélioration de ces algorithmes pour qu'ils satisfassent à ces nouvelles performances ; la seconde est le développement de nouvelles méthodes qui profiteront des performances accrues des nouveaux instruments ainsi que de l'importante connaissance que l'on aura de ces instruments. Pendant ma thèse, c'est la deuxième option que j'ai choisie, souhaitant explorer ce nouveau chemin qui n'a que très rarement été emprunté par le passé.

J'ai ainsi développé une toute nouvelle méthode d'estimation conjointe des aberrations et de l'objet d'intérêt. Fondée sur une inversion bayésienne et un modèle paramétrique de formation d'image coronographique, elle bénéficie d'une connaissance approfondie de l'instrument et de l'objet que l'on souhaite observer. Sa mise en œuvre est cependant rendue difficile par le compromis qui existe entre la précision du modèle de formation d'image utilisé et la complexité de la minimisation. La complexité de la minimisation revêt plusieurs formes : une indétermination entre aberrations et objet estimé qui se traduit par une infinité de solutions possibles, un nombre important de paramètres à estimer qui définit le nombre de dimensions du problème et le degré de non-linéarité du modèle utilisé, lequel fixe la complexité de la forme du critère dans cet espace "hyperdimensionnel".

Pour tenter de résoudre ce problème ardu de minimisation, j'ai combiné plusieurs solutions.

Tout d'abord, l'exploitation de la redondance d'informations permet de baisser le niveau d'indétermination du problème. Ensuite, l'algorithme de minimisation de critère (ou optimiseur) choisi permet de contraindre les valeurs aux bords des paramètres que l'on souhaite estimer, permettant également de réduire l'indétermination. Enfin, les informations *a priori* que l'on possède sur le système ainsi que sur les données observées peuvent également être mises à profit pour modifier la forme du critère et ainsi contraindre le problème.

La forme compliquée du critère est, par ailleurs, étroitement liée à la forme du modèle d'imagerie utilisé. C'est pourquoi j'ai consacré une partie non négligeable de ma thèse sur le développement et l'étude d'un modèle approché d'imagerie coronographique à partir d'un modèle analytique pré-existant. Cette étude a permis de montrer que le modèle approché ainsi développé, s'il réduit très fortement la non-linéarité sans pour autant s'en affranchir, présente des différences non négligeables avec le modèle pré-existant, c'est-à-dire de l'ordre de grandeur ou supérieur aux planètes que l'on veut détecter. Son utilisation dans la méthode d'inversion que j'ai développée a donc été écartée. Néanmoins, ce développement limité a été très instructif pour la compréhension du modèle exact, ce qui m'a confortée dans l'idée de réduire significativement le nombre de paramètres à estimer lors de l'inversion. Cette réduction du nombre de dimensions de l'espace des paramètres décroit d'autant la difficulté de minimisation.

Après avoir développé cette nouvelle méthode, sa mise en œuvre m'a permis de tirer des enseignements importants :

- Toutes ces tentatives de simplification du problème ne suffisent pas à elles seules à résoudre aisément le problème de minimisation ;
- Dans le cas d'images simulées avec le modèle utilisé pour l'inversion, les difficultés résiduelles peuvent être contournées en utilisant des procédés / chemins précis d'optimisation qui prennent en compte une connaissance approfondie des caractéristiques de la formation d'image et des hypothèses de simulations (statistique des phases ...) et un modèle très précis de formation d'image, puisque parfait ;
- Ces procédés d'optimisation peuvent être théoriquement transposés au cas d'images réelles par une connaissance approfondie de l'instrument, des hypothèses sur la statistique et la stabilité des aberrations de l'instrument et un modèle de formation d'image, suffisamment précis, à défaut d'être parfait.

Ce dernier point m'amène aux perspectives de mon travail de thèse.

Perspectives

Ce travail débouche sur de nombreuses perspectives visant à démontrer la convergence de l'algorithme dans le cas d'images réelles. L'objectif à moyen terme est d'implémenter la méthode dans le pipeline de traitement de données des instruments IRDIS et IFS de SPHERE. Ceci est envisageable car la méthode développée présente de belles perspectives d'évolution. Un grand avantage de cette méthode est qu'elle est en effet modulable, tant par la paramétrisation du modèle que par les informations *a priori* que l'on utilise. Des axes d'amélioration ainsi que des pistes de minimisation ont été proposés dans la discussion.

Afin de transposer les résultats obtenus sur des images simulées au cas d'images réelles, une

étape intermédiaire sera essentielle : le traitement d'images plus réalistes c'est à dire avec des défauts de modèle, des erreurs d'étalonnage des phases supposées connues jusqu'à présent. L'introduction de telles erreurs compliqueront le problème et permettront d'identifier des solutions de minimisation appropriées à ces nouvelles données plus réalistes avant de pouvoir tester le cas encore plus délicat d'images réelles.

Quand la capacité de convergence de l'algorithme aura été démontrée sur des images réelles, il sera très intéressant de comparer sa capacité de détection d'exoplanètes à celle d'autres méthodes existantes de traitement d'images multispectrales.

Une fois l'aspect détection d'exoplanètes démontré, étudié et comparé, l'aspect caractérisation ne devra pas être négligé car, en estimant le flux des planètes à chaque longueur d'onde, il devient très aisé, voire immédiat, de mesurer le spectre à basse résolution des planètes et donc d'obtenir des informations sur les composants chimiques de leur atmosphère dans la bande spectrale d'étude.

Je suis par ailleurs convaincue que les enseignements tirés de ces différentes études, comme tend à le prouver l'étude du cas d'images simulées, seront très précieux pour le design des futurs instruments. Mais pour remplir ces objectifs ambitieux, la création et le maintien de liens entre les différentes communautés, à la fois entre traiteurs de signaux, instrumentalistes mais aussi observateurs sera essentielle.

Annexe A

Calcul des expressions des gradients analytiques longue pose du critère par rapport aux aberrations *upstream* et *downstream*

L'algorithme VMLM-B [72], choisi pour l'optimisation du critère de qualité J, nécessite une expression analytique des gradients de ce critère par rapport à chaque paramètre inconnu. Dans ma thèse, je me suis intéressée au calcul des gradients du critère par rapport aux aberrations *upstream* $\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}_k)}\right]_{LP}$ et *downstream* $\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}_k)}\right]_{LP}$.

Pour obtenir ces gradients, je suis partie de leurs expressions $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}_k)}$ et $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}_k)}$ données par Paul et al. [87], en l'absence de turbulence. J'ai donc introduis, dans ces précédentes expressions, les aberrations résiduelles turbulentes par un changement de variable adéquat avant de les moyenner temporellement pour obtenir leur équivalent en longue pose.

A.1 Notations et Convention

Je note $\Psi_d(\boldsymbol{\rho})$ et $\Psi_{ud}(\boldsymbol{\rho})$ les amplitudes complexes suivantes :

$$\Psi_d(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\rho})\, e^{j\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})},$$
$$\Psi_{ud}(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\rho})\, e^{j[\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})+\boldsymbol{\phi}_d(\boldsymbol{\rho})]}.$$

avec $\boldsymbol{\rho}$, la coordonnée angulaire dans un plan pupille. Je note $\mathbf{A}_d(\boldsymbol{\alpha}, t)$ et $\mathbf{A}_{ud}(\boldsymbol{\alpha})$ les amplitudes complexes suivantes dans le plan focal du détecteur :

$$\mathbf{A}_d(\boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\boldsymbol{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\rho})\, e^{j\boldsymbol{\phi}_d(\boldsymbol{\rho})}\right],$$
$$\mathbf{A}_{ud}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\boldsymbol{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\rho})\, e^{j[\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})+\boldsymbol{\phi}_d(\boldsymbol{\rho})]}\right]$$

avec $\boldsymbol{\alpha}$, la coordonnée angulaire dans un plan focal.

Les transformées de Fourier directe et inverse sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\rho}_k) &= \sum_i f(\boldsymbol{\alpha}_i) e^{-2j\pi \frac{\boldsymbol{\rho}_k \boldsymbol{\alpha}_i}{N_p}} \\ f(\boldsymbol{\alpha}_i) &= \sum_k F(\boldsymbol{\rho}_k) e^{2j\pi \frac{\boldsymbol{\rho}_k \boldsymbol{\alpha}_i}{N_p}} \end{aligned}$$

A.2 Expression des gradients du critère en l'absence de turbulence

Paul et al. (2012) considèrent le critère suivant :

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}\left|\left|\frac{\mathbf{i} - (f^* \cdot \mathbf{h}^c + b)}{\sigma_b}\right|\right|^2,$$

avec : $\mathbf{i}$ l'image, f^* le flux de l'étoile et σ_b l'écart-type du bruit. La réponse de l'instrument $\mathbf{h}^c$ est donnée par :

$$\mathbf{h}^c = |\mathbf{A}_{ud} - \eta_0 \mathbf{A}_d|^2.$$

Le paramètre η_0 a été défini dans le chapitre 2 (cf. Équation 2.15).

Les gradients du critère par rapport aux aberrations *upstream* et *downstream* se calculent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}_k)} &= \sum_i \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{h}^c(\boldsymbol{\alpha}_i)} \frac{\partial \mathbf{h}^c(\boldsymbol{\alpha}_i)}{\partial \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}_k)} \\ &= 2\Im\left\{\Psi^* \mathrm{TF}\left[\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{h}^c}(\mathbf{A}_{ud} - \eta_0 \mathbf{A}_d)\right]\right\} \\ &\quad -2\Re\left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \boldsymbol{\phi}_u} \sum_k \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{h}^c} \mathbf{A}_{ud}^* \mathbf{A}_d\right) + 2\Re\left[\left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^* \eta_0\right] \sum_k \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{h}^c} |\mathbf{A}_d|^2 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \boldsymbol{\phi}_d(\boldsymbol{\rho}_k)} &= \sum_i \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{h}^c(\boldsymbol{\alpha}_i)} \frac{\partial \mathbf{h}^c(\boldsymbol{\alpha}_i)}{\partial \boldsymbol{\phi}_d(\boldsymbol{\rho}_k)} \\ &= 2\Im\left\{(\Psi^* - \eta_0^* \Psi_d^*)\, \mathrm{TF}\left[\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{h}^c}(\mathbf{A}_{ud} - \eta_0 \mathbf{A}_d)\right]\right\} \end{aligned} \tag{A.2}$$

A.3 Calcul de l'expression des gradients du critère longue pose en présence de turbulence

Pour ajouter les aberrations turbulentes dans les expressions des équations A.1 et A.2, j'introduis les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\Psi_t(\boldsymbol{\rho}) &= \boldsymbol{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\rho})e^{j[\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho})+\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})+\boldsymbol{\phi}_d(\boldsymbol{\rho})]} = \Psi_{ud}(\boldsymbol{\rho})e^{j\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho})} \\
\Psi_0(\boldsymbol{\rho}) &= \boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})e^{j\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})} \\
\mathbf{A}_t(\boldsymbol{\alpha}) &= \mathrm{TF}^{-1}\left[\Psi_t\right] \\
\eta_{0t} &= \frac{1}{S}\sum_k \boldsymbol{\mathcal{P}}_u^2(\boldsymbol{\rho}_k)e^{j[\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}_k)+\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}_k)]} = \eta_0 e^{j\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho})}
\end{aligned}$$

J'en déduis les nouvelles expressions du critère et de la réponse instrumentale :

$$\mathcal{J}_t = \frac{1}{2}\left|\left|\frac{\mathbf{i}-(f^*\cdot\mathbf{h}_t^c+b)}{\sigma_b}\right|\right|^2 \quad , \quad \mathbf{h}^c{}_t = |\mathbf{A}_t - \eta_{0t}\mathbf{A}_d|^2$$

A.3.1 Calcul de $\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t(\boldsymbol{\alpha}_i)}\right]_{LP}$

$$\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t(\boldsymbol{\alpha}_i)}\right]_{LP} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{h}^c(\boldsymbol{\alpha}_i)}.$$

A.3.2 Calcul de $\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}_k)}\right]_{LP}$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}_k)}\right]_{LP} &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}_k)}\right\rangle_t \\
&= \left\langle 2\Im\left\{\Psi_t^*\cdot\mathrm{TF}\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_t\right]\right\}\right\rangle_t \\
&\quad - \left\langle 2\Im\left\{\Psi_t^*\cdot\mathrm{TF}\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\eta_{0t}\mathbf{A}_d\right]\right\}\right\rangle_t \\
&\quad - \left\langle 2\Re\left(\frac{\partial \eta_{0t}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\sum_i \frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_t^*\mathbf{A}_d\right)\right\rangle_t \\
&\quad + \left\langle 2\Re\left(\frac{\partial \eta_{0t}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\eta_{0t}\right)\sum_i \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{h}^c}\,|\mathbf{A}_d|^2\right\rangle_t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle 2\Im\left\{\Psi_t^*\mathrm{TF}\left[\frac{\partial\mathcal{J}_t}{\partial\mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_t\right]\right\}\right\rangle &= \left\langle 2\Im\left\{\Psi_{ud}^* e^{-j\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}_k)}\sum_i\left[\frac{\partial\mathcal{J}_t}{\partial\mathbf{h}^c{}_t}\sum_{k'}\Psi_{ud}(\boldsymbol{\rho}'_k)e^{j\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}'_k)}e^{j2\pi\frac{\boldsymbol{\rho}'_k\boldsymbol{\alpha}_i}{N_p}}e^{-j2\pi\frac{\boldsymbol{\rho}_k\boldsymbol{\alpha}_i}{N_p}}\right]\right\}\right\rangle_t \\
&= 2\Im\left\{\Psi_{ud}^*\sum_i\left[\frac{\partial\mathcal{J}_t}{\partial\mathbf{h}^c{}_t}\sum_{k'}\Psi_{ud}(\boldsymbol{\rho}'_k)\left\langle e^{j\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}'_k)}e^{-j\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}_k)}\right\rangle e^{-j2\pi\frac{(\boldsymbol{\rho}_k-\boldsymbol{\rho}'_k)\boldsymbol{\alpha}_i}{N_p}}\right]\right\} \\
&= 2\Im\left\{\Psi_{ud}^*\sum_i\left[\frac{\partial\mathcal{J}_t}{\partial\mathbf{h}^c{}_t}\sum_{k'}\Psi_{ud}(\boldsymbol{\rho}'_k)e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho}_k-\boldsymbol{\rho}'_k)}e^{-j2\pi\frac{(\boldsymbol{\rho}_k-\boldsymbol{\rho}'_k)\boldsymbol{\alpha}_i}{N_p}}\right]\right\} \\
&= 2\Im\left\{\Psi_{ud}^*\sum_{k'}\left[\Psi_{ud}(\boldsymbol{\rho}'_k)e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho}_k-\boldsymbol{\rho}'_k)}\sum_i\frac{\partial\mathcal{J}_t}{\partial\mathbf{h}^c{}_t}e^{-j2\pi\frac{(\boldsymbol{\rho}_k-\boldsymbol{\rho}'_k)\boldsymbol{\alpha}_i}{N_p}}\right]\right\} \\
&= 2\Im\left\{\Psi_{ud}^*\sum_{k'}\left[\Psi_{ud}(\boldsymbol{\rho}'_k)e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho}_k-\boldsymbol{\rho}'_k)}\mathrm{TF}\left(\frac{\partial\mathcal{J}_t}{\partial\mathbf{h}^c{}_t}\right)(\boldsymbol{\rho}_k-\boldsymbol{\rho}'_k)\right]\right\} \\
&= 2\Im\left\{\Psi_{ud}^*\left[\Psi_{ud}\star\left(\mathrm{TF}\left(\frac{\partial\mathcal{J}_t}{\partial\mathbf{h}^c{}_t}\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

On peut aussi écrire ce résultat sous la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
\left\langle\Psi_t^*\cdot\mathrm{TF}\left[\frac{\partial\mathcal{J}_t}{\partial\mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_t\right]\right\rangle &= \Psi_{ud}^*\cdot\mathrm{TF}\left\{\mathrm{TF}^{-1}\left[\Psi_{ud}\star\left(\mathrm{TF}\left(\frac{\partial\mathcal{J}_t}{\partial\mathbf{h}^c{}_t}\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right]^2\right\} \\
&= \Psi_{ud}^*\cdot\mathrm{TF}\left\{\mathbf{A}_{ud}\cdot\mathrm{TF}^{-1}\left(\mathrm{TF}\left(\frac{\partial\mathcal{J}_t}{\partial\mathbf{h}^c{}_t}\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)^2\right\} \\
&= \Psi_{ud}^*\cdot\mathrm{TF}\left\{\mathbf{A}_{ud}\cdot\left(\frac{\partial\mathcal{J}_t}{\partial\mathbf{h}^c{}_t}\star\mathrm{TF}^{-1}\left(e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right)^2\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle 2\Im\left\{\Psi_t^*\cdot\mathrm{TF}\left[\frac{\partial\mathcal{J}_t}{\partial\mathbf{h}^c{}_t}\eta_{0t}\mathbf{A}_d\right]\right\}\right\rangle_t &= 2\Im\left\{\Psi_{ud}^*\sum_i\left[\frac{\partial\mathcal{J}_t}{\partial\mathbf{h}^c{}_t}\frac{1}{S}\sum_{k'}\boldsymbol{\mathcal{P}}_u\Psi_0\left\langle e^{-j\left(\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}_k)-\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}'_k)\right)}\right\rangle_t\mathbf{A}_d e^{-j2\pi\frac{\boldsymbol{\rho}_k\boldsymbol{\alpha}_i}{N_p}}\right]\right\} \\
&= \frac{2}{S}\Im\left\{\Psi_{ud}^*\sum_i\left[\frac{\partial\mathcal{J}_t}{\partial\mathbf{h}^c{}_t}\sum_{k'}\boldsymbol{\mathcal{P}}_u\Psi_0(\boldsymbol{\rho}'_k)e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\left(\boldsymbol{\rho}_k-\boldsymbol{\rho}'_k\right)}\mathbf{A}_d(\boldsymbol{\alpha}_i)e^{-j2\pi\frac{\boldsymbol{\rho}_k\boldsymbol{\alpha}_i}{N_p}}\right]\right\} \\
&= \frac{2}{S}\Im\left\{\Psi_{ud}^*\sum_i\frac{\partial\mathcal{J}_t}{\partial\mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_d(\boldsymbol{\alpha}_i)e^{-j2\pi\frac{\boldsymbol{\rho}_k\boldsymbol{\alpha}_i}{N_p}}\sum_{k'}\boldsymbol{\mathcal{P}}_u\Psi_0(\boldsymbol{\rho}'_k)e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\left(\boldsymbol{\rho}_k-\boldsymbol{\rho}'_k\right)}\right\} \\
&= \frac{2}{S}\Im\left\{\Psi_{ud}^*\cdot\mathrm{TF}\left(\frac{\partial\mathcal{J}_t}{\partial\mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_d\right)\cdot\left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_u\Psi_0\star e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle 2\Re\left(\frac{\partial \eta_{0t}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\sum_i \frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_t^*\mathbf{A}_d\right)\right\rangle_t &= \left\langle 2\Re\left[\left(\frac{\partial \eta_{0t}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^*\sum_i \frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_t\mathbf{A}_d^*\right]\right\rangle_t \\
&= \left\langle 2\Re\left\{\left(\frac{\partial \eta_{0}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^* e^{-j\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}_k)}\sum_i\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\sum_{k'}\Psi_{ud}e^{j\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}'_k)}e^{j2\pi\frac{\boldsymbol{\rho}'_k\boldsymbol{\alpha}_i}{N_p}}\mathbf{A}_d^*\right]\right\}\right\rangle_t \\
&= 2\Re\left\{\left(\frac{\partial \eta_{0}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^*\sum_i\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\sum_{k'}\Psi_{ud}\left\langle e^{-j\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}_k)}e^{j\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}'_k)}\right\rangle_t e^{j2\pi\frac{\boldsymbol{\rho}'_k\boldsymbol{\alpha}_i}{N_p}}\mathbf{A}_d^*\right]\right\} \\
&= 2\Re\left\{\left(\frac{\partial \eta_{0}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^*\sum_{k'}\left[\Psi_{ud}\left(\boldsymbol{\rho}'_k\right)e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\left(\boldsymbol{\rho}_k-\boldsymbol{\rho}'_k\right)}\sum_i\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_d^*e^{j2\pi\frac{\boldsymbol{\rho}'_k\boldsymbol{\alpha}_i}{N_p}}\right]\right\} \\
&= 2\Re\left\{\left(\frac{\partial \eta_{0}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^*\sum_{k'}\left[\Psi_{ud}\left(\boldsymbol{\rho}'_k\right)e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\left(\boldsymbol{\rho}_k-\boldsymbol{\rho}'_k\right)}\cdot\mathrm{TF}^{-1}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_d^*\right)\left(\boldsymbol{\rho}'_k\right)\right]\right\} \\
&= 2\Re\left\{\left(\frac{\partial \eta_{0}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^*\cdot\left[\Psi_{ud}\cdot\mathrm{TF}^{-1}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_d^*\right)\right]\star e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right\} \\
&= 2\Re\left\{\left(\frac{\partial \eta_{0}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^*\cdot\mathrm{TF}^{-1}\left[\mathrm{TF}\left[\Psi_{ud}\cdot\mathrm{TF}^{-1}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_d^*\right)\right]\cdot\mathrm{TF}\left(e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right]\right\} \\
&= 2\Re\left\{\left(\frac{\partial \eta_{0}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^*\cdot\mathrm{TF}^{-1}\left[\mathrm{TF}\left(\Psi_{ud}\right)\star\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_d^*\right)\cdot\mathrm{TF}\left(e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle 2\Re\left[\left(\frac{\partial \eta_{0t}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^*\eta_{0t}\right]\sum_i\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{h}^c}\left|\mathbf{A}_d\right|^2\right\rangle_t &= \left\langle 2\Re\left[\left(\frac{\partial \eta_{0}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^* e^{-j\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}_k)}\frac{1}{S}\sum_{k'}\boldsymbol{\mathcal{P}}_u^2(\boldsymbol{\rho}'_k)e^{j\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}'_k)}e^{j\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}'_k)}\right]\right\rangle_t \\
&\quad\times\sum_i\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{h}^c}\left|\mathbf{A}_d\right|^2 \\
&= \frac{2}{S}\Re\left[\left(\frac{\partial \eta_{0}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^*\sum_{k'}\boldsymbol{\mathcal{P}}_u^2(\boldsymbol{\rho}'_k)e^{j\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}'_k)}\left\langle e^{-j\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}_k)}e^{j\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}'_k)}\right\rangle_t\right] \\
&\quad\times\sum_i\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{h}^c}\left|\mathbf{A}_d\right|^2 \\
&= \frac{2}{S}\Re\left[\left(\frac{\partial \eta_{0}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^*\sum_{k'}\boldsymbol{\mathcal{P}}_u^2(\boldsymbol{\rho}'_k)e^{j\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}'_k)}e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\left(\boldsymbol{\rho}_k-\boldsymbol{\rho}'_k\right)}\right]\sum_i\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{h}^c}\left|\mathbf{A}_d\right|^2 \\
&= \frac{2}{S}\Re\left[\left(\frac{\partial \eta_{0}}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^*\cdot\left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_u\Psi_0\star e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right]\sum_i\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{h}^c}\left|\mathbf{A}_d\right|^2
\end{aligned}
$$

En conclusion :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}_k)}\right]_{LP} &= 2\Im\left\{\Psi_{ud}^* \cdot \left[\Psi_{ud} \star \left(\mathrm{TF}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right]\right\} \\
&- \frac{2}{S}\Im\left\{\Psi_{ud}^* \cdot \mathrm{TF}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_d\right) \cdot \left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_u \Psi_0 \star e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right\} \\
&- 2\Re\left\{\left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^* \mathrm{TF}^{-1}\left[\mathrm{TF}\left(\Psi_{ud}\right) \star \left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_d^*\right) \cdot \mathrm{TF}\left(e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right]\right\} \\
&+ \frac{2}{S}\Re\left[\left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \boldsymbol{\phi}_u}\right)^* \cdot \left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_u \Psi_0 \star e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right] \sum_i \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{h}^c} \left|\mathbf{A}_d\right|^2 .
\end{aligned}$$

A.3.3 Calcul de $\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \boldsymbol{\phi}_d(\boldsymbol{\rho}_k)}\right]_{LP}$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \boldsymbol{\phi}_d(\boldsymbol{\rho}_k)}\right]_{LP} &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \boldsymbol{\phi}_d(\boldsymbol{\rho}_k)} \right\rangle_t \\
&= \left\langle 2\Im\left\{\Psi_t^* \cdot \mathrm{TF}\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_t\right]\right\}\right\rangle_t \\
&- \left\langle 2\Im\left\{\Psi_t^* \cdot \mathrm{TF}\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\eta_{0t}\mathbf{A}_d\right]\right\}\right\rangle_t \\
&- \left\langle 2\Im\left\{\eta_0{}^*\Psi_d^* \cdot \mathrm{TF}\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_t\right]\right\}\right\rangle_t \\
&+ \left\langle 2\Im\left\{\eta_0{}^*\Psi_d^* \cdot \mathrm{TF}\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\eta_{0t}\mathbf{A}_d\right]\right\}\right\rangle_t .
\end{aligned}$$

Les premier et deuxième termes sont identiques à ceux du gradient par rapport aux aberrations *upstream* :

$$\begin{aligned}
\left\langle 2\Im\left\{\Psi_t^* \cdot \mathrm{TF}\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_t\right]\right\}\right\rangle_t &= 2\Im\left\{\Psi_{ud}^*\left[\Psi_{ud} \star \left(\mathrm{TF}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right]\right\} \\
\left\langle 2\Im\left\{\Psi_t^* \cdot \mathrm{TF}\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\eta_{0t}\mathbf{A}_d\right]\right\}\right\rangle_t &= \frac{2}{S}\Im\left\{\Psi_{ud}^* \cdot \mathrm{TF}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_d\right) \cdot \left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_u \Psi_0 \star e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right\} .
\end{aligned}$$

Il reste à calculer les deux autres termes qui ressemblent beaucoup aux deux premiers :

$$\begin{aligned}
\left\langle 2\Im\left\{\eta_0{}^*\Psi_d^* \cdot \mathrm{TF}\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_t\right]\right\}\right\rangle_t &= 2\Im\left\{\eta_0{}^*\Psi_d^* \cdot \left[\Psi_{ud} \star \left(\mathrm{TF}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right]\right\} \\
\left\langle 2\Im\left\{\eta_0{}^*\Psi_d^* \cdot \mathrm{TF}\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\eta_{0t}\mathbf{A}_d\right]\right\}\right\rangle_t &= \frac{2}{S}\Im\left\{\eta_0{}^*\Psi_d^* \cdot \mathrm{TF}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_d\right) \cdot \left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_u \Psi_0 \star e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right\} .
\end{aligned}$$

En conclusion, l'expression analytique du gradient du critère par rapport aux aberrations *downs-*

tream est la suivante :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \boldsymbol{\phi}_d(\boldsymbol{\rho}_k)}\right]_{LP} &= 2\Im\left\{\Psi_{ud}^* \cdot \left[\Psi_{ud} \star \left(\mathrm{TF}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right]\right\} \\
&- \frac{2}{S}\Im\left\{\Psi_{ud}^* \cdot \mathrm{TF}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_d\right) \cdot \left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_u \Psi_0 \star e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right\} \\
&- 2\Im\left\{{\eta_0}^* \Psi_d^* \cdot \left[\Psi \star \left(\mathrm{TF}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right]\right\} \\
&+ \frac{2}{S}\Im\left\{{\eta_0}^* \Psi_d^* \cdot \mathrm{TF}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial \mathbf{h}^c{}_t}\mathbf{A}_d\right) \cdot \left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_u \Psi_0 \star e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Annexe B

Calcul de l'expression analytique approchée d'une image coronographique corrigée par OA

Afin d'approfondir l'étude du modèle analytique d'imagerie coronographique longue pose développé par Sauvage et al., j'ai entrepris de développer un modèle analytique d'imagerie coronographique approché.

Pour cela, j'ai utilisé deux méthodes qui m'ont menée au même résultat. Dans la première (cf. Section B.1), j'ai dérivé une expansion de Taylor au deuxième ordre en les phases de l'expression courte pose suivante (Eq. 11 de l'article Sauvage et al. (2010) [62]) : $[\mathbf{h}^c]_{\text{CP}} = \mathbf{h}_n + |\eta_0|^2 \mathbf{h}_d - 2\Re\left(\eta_0 \mathbf{A}_n^* \mathbf{A}_d\right)$. J'ai ensuite moyenné le résultat pour obtenir une expression approchée longue pose. Dans la seconde méthode (cf. Section B.2), j'ai directement dérivé une expansion de Taylor au deuxième ordre en les phases de l'expression longue pose de l'équation 2.16 : $\mathbf{h}^c = \mathbf{h}_n + \left\langle |\eta_0|^2 \right\rangle \mathbf{h}_d - \frac{2}{S}\Re\left\{\text{TF}^{-1}\left[\Psi_{ud}\left(e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\phi_r}} \star \Psi_u^*\right)\right]\mathbf{A}_d^*\right\}$.

Contrairement au corps du texte (cf. 4.1.2.2, chapitre 4), dans lequel je suppose que la phase ϕ_r est à moyenne nulle sur la pupille pour le développement limité [1], je suppose ici que la phase est stationnaire à l'ordre 2 et ergodique. Les résultats du développement limité donnés dans cette annexe sont donc à un terme près dépendant du piston de la phase turbulente résiduelle sur la pupille.

1. Pour rappel, il n'est pas possible de définir à la fois une phase stationnaire et à moyenne nulle sur la pupille. Le développement limité le plus précis repose sur l'hypothèse d'une phase à moyenne nulle sur la pupille alors qu'il est nécessaire de recourir à une phase stationnaire pour définir des quantités statistiques telles que $\mathbf{D}_{\phi_r}$, $\mathbf{A}_{\phi_r}$ et $\mathbf{S}_{\phi_r}$.

B.1 Calcul de l'expression analytique approchée longue pose : méthode 1

Dans cette première méthode, je dérive l'expression du modèle analytique coronographique en courte pose (B.1.1) :

$$[\mathbf{h}^c]_{\text{CP}} = \mathbf{h}_n + |\eta_0|^2 \mathbf{h}_d - 2\Re\left(\eta_0 \mathbf{A}_n^* \mathbf{A}_d\right), \tag{B.1}$$

avant de moyenner temporellement le résultat (B.1.2). Les variables de cette expression ont été définies dans le chapitre 2 (cf. Équations 2.12, 2.13, 2.9, 2.10 et 2.15).

B.1.1 Développement limité de l'expression exacte courte pose

Dans le chapitre 4, j'ai défini les hypothèses du développement limité (cf. 4.1.1). Je considère la phase à piston nul sur la pupille ϕ'_r.

B.1.1.1 Calcul du terme $\mathbf{h}_n$

Je calcule tout d'abord le premier terme de $[\mathbf{h}^c]_{\text{CP}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_n &= \mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^* \\
&= \left[\text{TF}^{-1}\left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_d e^{j\phi_{tot}}\right)\right]\left[\text{TF}^{-1}\left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_d e^{j\phi_{tot}}\right)\right]^* \\
&= \left\{\text{TF}^{-1}\left[\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\left(1 + j\phi_{tot} - \frac{1}{2}\phi_{tot}^2 + o\left(\phi^2\right)\right)\right]\right\}\left\{\text{TF}^{-1}\left[\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\left(1 + j\phi_{tot} - \frac{1}{2}\phi_{tot}^2 + o\left(\phi^2\right)\right)\right]\right\}^*,
\end{aligned}$$

avec $\phi'_{tot}(\boldsymbol{\rho}, t) = \phi'_r(\boldsymbol{\rho}, t) + \phi_u(\boldsymbol{\rho}) + \phi_d(\boldsymbol{\rho})$. Comme la transformée de Fourier est une fonction linéaire (cf. Bracewell 1965, propriétés des TF), on peut distribuer la transformée de Fourier sur chaque terme de l'addition :

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_n = &\left\{\text{TF}^{-1}\left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\right) + \text{TF}^{-1}\left(j\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\phi_{tot}\right) - \frac{1}{2}\text{TF}^{-1}\left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\phi_{tot}^2\right) + \text{TF}^{-1}\left[o\left(\phi^2\right)\right]\right\} \\
&\times\left\{\text{TF}^{-1}\left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\right) + \text{TF}^{-1}\left(j\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\phi_{tot}\right) - \frac{1}{2}\text{TF}^{-1}\left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\phi_{tot}^2\right) + \text{TF}^{-1}\left[o\left(\phi^2\right)\right]\right\}^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_n &= \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d + j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\phi}_{tot} - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\phi}_{tot} \star \widetilde{\phi}_{tot} + o\left(\widetilde{\phi} \star \widetilde{\phi}\right)\right] \\
&\times\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d + j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\phi}_{tot} - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\phi}_{tot} \star \widetilde{\phi}_{tot} + o\left(\widetilde{\phi} \star \widetilde{\phi}\right)\right]^* \\
&= \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d + j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\phi}_{tot} - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\phi}_{tot} \star \widetilde{\phi}_{tot} + o\left(\widetilde{\phi} \star \widetilde{\phi}\right)\right] \\
&\times\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^* - j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^* \star \widetilde{\phi}_{tot}^* - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^* \star \widetilde{\phi}_{tot}^* \star \widetilde{\phi}_{tot}^* + o\left(\widetilde{\phi} \star \widetilde{\phi}\right)\right].
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\mathcal{P}}_d$ étant une fonction réelle et paire, sa transformée de Fourier est réelle et paire, ce qui implique : $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^* = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}$. J'obtiens alors la relation suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_n &= \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d + j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot} - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot} + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)\right] \\
&\times \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d - j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot} - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot} + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)\right] \\
&= \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} - j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot}\right) + j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}\right) + \left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot}\right) \\
&- \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot} + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot}\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right).
\end{aligned}$$

En remarquant que :

$$-j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot}\right) + j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}\right) = 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot}\right)\right]$$

et

$$\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot} + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot} = 2\Re\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot}\right),$$

je trouve :

$$\mathbf{h}_n = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} + 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot}\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot}\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \quad \text{(B.2)}$$

J'utilise les mêmes propriétés pour calculer les deuxième et troisième termes de $[\mathbf{h}^c]_{\text{CP}}$.

B.1.1.2 Calcul du terme $|\eta_0|^2\,\mathbf{h}_d$

$$\begin{aligned}
|\eta_0|^2\,\mathbf{h}_d &= |\eta_0|^2\,\mathbf{A}_d\mathbf{A}_d^* \\
&= |\eta_0|^2\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} + 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^{\,*}\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Je peux réécrire cette expression en utilisant la propriété $\Im(z) = -\Im(\bar{z})$:

$$|\eta_0|^2\,\mathbf{h}_d = |\eta_0|^2\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} - 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)\right\}. \quad \text{(B.3)}$$

B.1.1.3 Calcul du terme $-2\Re\left(\eta_0\mathbf{A}_n^*\mathbf{A}_d\right)$

$$\begin{aligned}
-2\Re\left(\eta_0\mathbf{A}_n^*\mathbf{A}_d\right) &= -2\Re\left(\eta_0\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2}\right) - 2\Re\left\{j\eta_0\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right) - \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot}\right)\right]\right\} \\
&- 2\Re\left[\eta_0\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot}\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] \\
&+ \Re\left\{\eta_0\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot}\right)\right]\right\} + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right). \quad \text{(B.4)}
\end{aligned}$$

B.1.1.4 Calcul des termes $\eta_0(t)$ et $|\eta_0(t)|^2$

Dans [62], $\eta_0(t)$ est défini comme $\eta_0(t) = \langle \Psi_0(\boldsymbol{\rho}, t) | \boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho}) \rangle_t$, avec $\Psi_0(\boldsymbol{\rho}, t) = \boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho}) e^{-j[\phi_r(\boldsymbol{\rho},t)+\phi_u(\boldsymbol{\rho})]}$:

$$\begin{aligned}
\eta_0(t) &= \langle \Psi_0(\boldsymbol{\rho}, t) | \boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho}) \rangle_t \\
&= \frac{1}{S} \iint_{\boldsymbol{\rho}} \Psi_0^*(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho}) \, \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&= \frac{1}{S} \iint_{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\mathcal{P}}_u^*(\boldsymbol{\rho}) e^{-j[\phi_r(\boldsymbol{\rho},t)+\phi_u(\boldsymbol{\rho})]} \boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho}) \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&= \frac{1}{S} \iint_{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\mathcal{P}}_u^2(\boldsymbol{\rho}) e^{-j[\phi_r(\boldsymbol{\rho},t)+\phi_u(\boldsymbol{\rho})]} \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}.
\end{aligned}$$

Sachant que $\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho}) = 1$ sur la surface et $\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho}) = 0$ ailleurs, il en est de même pour $\boldsymbol{\mathcal{P}}_u^2$, il s'en suit :

$$\eta_0(t) = \frac{1}{S} \iint_S 1 \times e^{-j[\phi_r(\boldsymbol{\rho},t)+\phi_u(\boldsymbol{\rho})]} \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}.$$

J'effectue un développement limité de l'exponentielle à l'ordre 2 en $\boldsymbol{\phi}$:

$$\begin{aligned}
\eta_0(t) &= \frac{1}{S} \iint_S 1 \times \left\{ 1 - j\phi_r(\boldsymbol{\rho}, t) - j\phi_u(\boldsymbol{\rho}) - \frac{[\phi_r(\boldsymbol{\rho}, t) + \phi_u(\boldsymbol{\rho})]^2}{2} + o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right) \right\} \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&= \frac{1}{S} \iint_S \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&- j\frac{1}{S} \iint_S \phi_r(\boldsymbol{\rho}, t) \, \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} - j\frac{1}{S} \iint_S \phi_u(\boldsymbol{\rho}) \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&- \frac{1}{2S} \iint_S \phi_r^2(\boldsymbol{\rho}, t) \, \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} - \frac{1}{2S} \iint_S \phi_u^2(\boldsymbol{\rho}) \, \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&- \frac{1}{S} \iint_S \phi_r(\boldsymbol{\rho}, t) \, \phi_u(\boldsymbol{\rho}) \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&+ o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right)
\end{aligned}$$

D'après les équations B.14 et B.15, on peut dire que la deuxième ligne est nulle. Pour la troisième ligne, on peut écrire, avec l'hypothèse que $\phi_r(\boldsymbol{\rho}, t)$ et $\phi_u(\boldsymbol{\rho})$ sont ergodiques :

$$\frac{1}{2S} \iint_S \phi^2(\boldsymbol{\rho}) \, \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2} \left\langle \left| \phi^2(\boldsymbol{\rho}) \right| \right\rangle_t = \frac{1}{2} \langle |\phi(\boldsymbol{\rho})| \rangle_t^2 + \frac{\sigma_\phi^2}{2} = \frac{\sigma_\phi^2}{2}$$

Et :

$$\eta_0(t) = 1 - \frac{\sigma_{\phi_u}^2 + \sigma_{\phi_r}^2}{2} - \frac{1}{S} \iint_S \phi_r(\boldsymbol{\rho}, t) \, \phi_u(\boldsymbol{\rho}) \, \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} + o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right) \tag{B.5}$$

$$
\begin{aligned}
|\eta_0(t)|^2 &= \langle \Psi_0(\boldsymbol{\rho}) \,|\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\rangle \langle \Psi_0(\boldsymbol{\rho}) \,|\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\rangle^* \\
&= \left[\frac{1}{S}\iint_{\boldsymbol{\rho}} \Psi_0^*(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\right]\left[\frac{1}{S}\iint_{\boldsymbol{\rho}} \Psi_0^*(\boldsymbol{\rho})\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\right]^* \\
&= \frac{1}{S^2}\iint_{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\mathcal{P}}_u^2(\boldsymbol{\rho})\, e^{-j[\phi_r(\boldsymbol{\rho},t)+\phi_u(\boldsymbol{\rho})]}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \iint_{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\mathcal{P}}_u^2(\boldsymbol{\rho}')\, e^{j[\phi_r(\boldsymbol{\rho}',t)+\phi_u(\boldsymbol{\rho}')]}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' \\
&= \frac{1}{S^2}\iint_S 1\times\left\{1 - j\phi_r(\boldsymbol{\rho},t) - j\phi_u(\boldsymbol{\rho}) - \frac{[\phi_r(\boldsymbol{\rho},t)+\phi_u(\boldsymbol{\rho})]^2}{2} + o\left(\phi^2\right)\right\}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&\times \iint_S 1\times\left\{1 - j\phi_r(\boldsymbol{\rho}',t) - j\phi_u(\boldsymbol{\rho}') - \frac{[\phi_r(\boldsymbol{\rho}',t)+\phi_u(\boldsymbol{\rho}')]^2}{2} + o\left(\phi^2\right)\right\}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'
\end{aligned}
$$

De la même façon que précédemment, les termes en $\frac{1}{S}\iint_S \phi(\boldsymbol{\rho},t)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}$ sont nuls. Il reste :

$$
\begin{aligned}
|\eta_0(t)|^2 &= \frac{1}{S^2}\iint_S 1\times\left\{1 - \frac{\phi_r(\boldsymbol{\rho},t)^2}{2} - \frac{\phi_u(\boldsymbol{\rho},t)^2}{2} - [\phi_r(\boldsymbol{\rho},t)\,\phi_u(\boldsymbol{\rho})] + o\left(\phi^2\right)\right\}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&\times \iint_S 1\times\left\{1 - \frac{\phi_r(\boldsymbol{\rho}',t)^2}{2} - \frac{\phi_u(\boldsymbol{\rho}',t)^2}{2} - \left[\phi_r(\boldsymbol{\rho}',t)\phi_u(\boldsymbol{\rho}')\right] + o\left(\phi^2\right)\right\}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' \\
&= \frac{1}{S^2}\left[S - S\frac{\sigma_{\phi_u}^2+\sigma_{\phi_r}^2}{2} - S\iint_S \phi_r(\boldsymbol{\rho},t)\phi_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} + o\left(\phi^2\right)\right] \\
&\times \left[S - S\frac{\sigma_{\phi_u}^2+\sigma_{\phi_r}^2}{2} - S\iint_S \phi_r(\boldsymbol{\rho}',t)\phi_u(\boldsymbol{\rho}')\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' + o\left(\phi^2\right)\right] \\
&= 1 - \sigma_{\phi_u}^2 + \sigma_{\phi_r}^2 - \frac{2}{S}\iint_S \phi_r(\boldsymbol{\rho},t)\phi_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} + o\left(\phi^2\right)
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

B.1.1.5 Calcul de $[\mathrm{h}^c]_{\mathrm{CP}}$

L'addition des termes C.2, C.3 et C.4, en prenant en compte les termes B.2.6.2 et B.2.6.3, donne :

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{h}^c]_{\mathrm{CP}} &= \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2 + \left[1 - \left(\sigma_{\phi_r}^2 + \sigma_{\phi_u}^2\right) - \frac{2}{S}\iint_S \phi_r(\boldsymbol{\rho},t)\,\phi_u(\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} + o\left(\phi^2\right)\right]\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2 \\
&- 2\Re\left\{\left[1 - \frac{\sigma_{\phi_r}^2+\sigma_{\phi_u}^2}{2} - \frac{1}{S}\iint_S \phi_r(\boldsymbol{\rho},t)\phi_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} + o\left(\phi^2\right)\right]\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2\right\} \\
&+ |\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\phi}_{tot}|^2 + |\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\phi}_d|^2 \\
&- 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\phi}_d\right) - \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\phi}_{tot}^*\right)\right] - 2\Re\left\{j\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\phi}_d\right) - \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\phi}_{tot}^*\right)\right]\right\} \\
&- 2\Re\left[\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\phi}_{tot}^*\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\phi}_d\right)\right] \\
&- \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\phi}_{tot}^*\star\widetilde{\phi}_{tot}^*\right)\right] - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\phi}_d\star\widetilde{\phi}_d\right)\right] + \Re\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\left(\widetilde{\phi}_d\star\widetilde{\phi}_d + \widetilde{\phi}_{tot}^*\star\widetilde{\phi}_{tot}^*\right)\right]\right\} \\
&+ o\left(\widetilde{\phi}\star\widetilde{\phi}\right).
\end{aligned}
$$

Les deux premières et la dernière lignes s'annulent, il reste :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{h}^c]_{\text{CP}} = & \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}\right|^2 + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 \\
& - 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right) - \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot}\right)\right] - 2\Re\left\{j\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right) - \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot}\right)\right]\right\} \\
& - 2\Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot}\right]\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right) \\
& + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right).
\end{aligned}$$

Sachant que pour un nombre complexe z, $\Re(jz) = -\Im(z)$ (cf. B.2.6.5), je peux écrire :

$$\Re\left\{j\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right) - \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot}\right)\right]\right\} = -\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right) - \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot}\right)\right].$$

$[\mathbf{h}^c]_{\text{CP}}$ se simplifie alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{h}^c]_{\text{CP}} &= \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}\right|^2 + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 - 2\Re\left[\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_{tot}\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \\
&= \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left[\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right) + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right]\right|^2 + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 - 2\Re\left(\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left[\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_r\right) + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*\right]\right\}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right) + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \\
&= \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right)\right|^2 + 2\left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 + 2\Re\left\{\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right)\right]\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*\right)\right\} \\
&- 2\Re\left\{\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u^* + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r^*\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right]\right\} - 2\Re\left[\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \\
&= \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right)\right|^2 + 2\Re\left(2j\Im\left\{\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right)\right]\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*\right)\right\}\right) + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \\
&= \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right)\right|^2 + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right).
\end{aligned}$$

Finalement, je trouve comme expression approchée d'une image coronographique courte pose :

$$[\mathbf{h}^c]_{\text{CP}} = \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right)\right|^2 + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right). \tag{B.7}$$

B.1.2 Moyenne temporelle de l'expression exacte courte pose

Après avoir dérivé l'expression courte pose du modèle d'imagerie coronographique, je moyenne le résultat obtenu pour obtenir une expression longue pose approchée :

$$\begin{aligned}
\langle[\mathbf{h}^c]_{\text{CP}}\rangle_t &= \left\langle\left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right)\right|^2\right\rangle_t \\
&\simeq \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u\right|^2 + \left\langle\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right)^2\right\rangle_t + 2\Re\left[\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left\langle\widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_r\right\rangle_t\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right).
\end{aligned}$$

Le dernier terme est nul car $\left\langle\widetilde{\boldsymbol{\phi}}^*_r\right\rangle_t = \left\langle\left[\text{TF}^{-1}(\boldsymbol{\phi}_r)\right]^*\right\rangle_t = \left[\text{TF}^{-1}\left(\langle\boldsymbol{\phi}_r\rangle_t\right)\right]^* = 0$. J'utilise ici le fait que la moyenne temporelle de la phase turbulente résiduelle est nulle sur la pupille (cf. Équation B.14). J'obtiens ainsi :

$$\langle[\mathbf{h}^c]_{\text{CP}}\rangle_t = \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u\right|^2 + \left\langle|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r|^2\right\rangle_t + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right). \tag{B.8}$$

B.1.2.1 Calcul du terme $\left\langle |\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi}_r|^2 \right\rangle_t$.

Pour le calcul de ce terme, je suppose la stationnarité à l'ordre 2 et l'ergodicité de la phase turbulente résiduelle ϕ_r.

$$\begin{aligned}
\left\langle \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi}_r\right|^2 \right\rangle_t &= \left\langle \int_{\boldsymbol{\alpha}_1} \widetilde{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\alpha}_1)\, \widetilde{\phi}_r(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1 \int_{\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\mathcal{P}}_d^{\,*}(\boldsymbol{\alpha}_2)\, \widetilde{\phi}_r^{*}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2 \right\rangle_t \\
&= \left\langle \iint_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\alpha}_1)\, \widetilde{\mathcal{P}}_d^{\,*}(\boldsymbol{\alpha}_2)\, \widetilde{\phi}_r(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1)\, \widetilde{\phi}_r^{*}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2 \right\rangle_t \\
&= \iint_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\alpha}_1)\, \widetilde{\mathcal{P}}_d^{\,*}(\boldsymbol{\alpha}_2) \left\langle \widetilde{\phi}_r(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1)\, \widetilde{\phi}_r^{*}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2) \right\rangle_t \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2 \\
&= \iint_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\alpha}_1)\, \widetilde{\mathcal{P}}_d^{\,*}(\boldsymbol{\alpha}_2) \left\langle \int_{\boldsymbol{\rho}} \phi_r(\boldsymbol{\rho})\, e^{-2j\pi(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\rho}} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho} \int_{\boldsymbol{\rho}'} \phi_r(\boldsymbol{\rho}')\, e^{2j\pi(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\rho}'} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}' \right\rangle_t \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2 \\
&= \iint_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\alpha}_1)\, \widetilde{\mathcal{P}}_d^{\,*}(\boldsymbol{\alpha}_2) \left[\iint_{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}'} \left\langle \phi_r(\boldsymbol{\rho})\, \phi_r(\boldsymbol{\rho}') \right\rangle_t e^{-2j\pi(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\rho}} e^{2j\pi(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\rho}'} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}' \right] \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2
\end{aligned}$$

La phase turbulente résiduelle étant stationnaire et ergodique on peut écrire : $\mathbf{A}_{\phi_r}(\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho}) = \langle \phi_r(\boldsymbol{\rho})\, \phi_r(\boldsymbol{\rho}') \rangle_t$.

$$\left\langle \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi}_r\right|^2 \right\rangle_t = \iint_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\alpha}_1)\, \widetilde{\mathcal{P}}_d^{\,*}(\boldsymbol{\alpha}_2) \left[\iint_{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}'} \mathbf{A}_{\phi_r}(\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho}) e^{-2j\pi(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\rho}} e^{2j\pi(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\rho}'} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}' \right] \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2$$

J'effectue le changement de variable suivant : $\boldsymbol{\rho}'' = \boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left\langle \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi}_r\right|^2 \right\rangle_t &= \iint_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\alpha}_1)\, \widetilde{\mathcal{P}}_d^{\,*}(\boldsymbol{\alpha}_2) \left\{ \int_{\boldsymbol{\rho}} \left[\int_{\boldsymbol{\rho}''} \mathbf{A}_{\phi_r}(\boldsymbol{\rho}'')\, e^{2j\pi(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\rho}''} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'' \right] e^{-2j\pi(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\rho}} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho} \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2 \\
&= \iint_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\alpha}_1)\, \widetilde{\mathcal{P}}_d^{\,*}(\boldsymbol{\alpha}_2) \left[\int_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2)\, e^{-2j\pi(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\rho}} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho} \right] \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2 \\
&= \int_{\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\mathcal{P}}_d^{\,*}(\boldsymbol{\alpha}_2)\, \mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2) \left[\int_{\boldsymbol{\alpha}_1} \widetilde{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\alpha}_1)\, \delta(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1 \right] \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2 \\
&= \int_{\boldsymbol{\alpha}_2} \widetilde{\mathcal{P}}_d^{\,*}(\boldsymbol{\alpha}_2)\, \mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2)\, \widetilde{\mathcal{P}}_d(\boldsymbol{\alpha}_2)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2 \\
&= \int_{\boldsymbol{\alpha}_2} \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d\right|^2(\boldsymbol{\alpha}_2)\, \mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2 \\
&= \left[\left|\widetilde{\mathcal{P}}_d\right|^2 \star \mathbf{S}_{\phi_r} \right](\boldsymbol{\alpha}).
\end{aligned}$$

L'expression longue pose approchée se déduit des équations B.8 et 4.11 :

$$\mathbf{h}^c = \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d \star \widetilde{\phi}_u\right|^2 + \left|\widetilde{\mathcal{P}}_d\right|^2 \star \mathbf{S}_{\phi_r} + o\left(\widetilde{\phi} \star \widetilde{\phi}\right). \tag{B.9}$$

B.2 Calcul de l'expression analytique approchée longue pose : méthode 2

Le calcul réalisé précédemment étant relativement complexe, il est utile de vérifier le résultat obtenu à l'aide d'une autre méthode. Je dérive directement l' expression coronographique longue pose suivante :

$$\mathbf{h}^c = \mathbf{h}_n + \left\langle |\eta_0|^2 \right\rangle \mathbf{h}_d - \frac{2}{S}\Re\left\{\mathrm{TF}^{-1}\left[\Psi_{ud}\left(e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\phi_r}} \star \Psi_u^*\right)\right]\mathbf{A}_d^*\right\}.$$

B.2.1 Notations

Les notations spécifiques à cette section sont les suivantes :

$$\begin{aligned} f \otimes g &= f \star \breve{g}^* \\ \breve{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\boldsymbol{\rho}) &= \boldsymbol{\mathcal{P}}_d(-\boldsymbol{\rho}) \\ \boldsymbol{\phi}_{ud} &= \boldsymbol{\phi}_u + \boldsymbol{\phi}_d \end{aligned}$$

B.2.2 Calcul de $\mathbf{h}_n$

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_n &= \mathrm{TF}^{-1}\left\{\left[\boldsymbol{\mathcal{P}}_d e^{j(\boldsymbol{\phi}_u+\boldsymbol{\phi}_d)} \otimes \boldsymbol{\mathcal{P}}_d e^{j(\boldsymbol{\phi}_u+\boldsymbol{\phi}_d)}\right] e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\phi_r}}\right\} \\
&= \mathrm{TF}^{-1}\left\{\left[\boldsymbol{\mathcal{P}}_d e^{j(\boldsymbol{\phi}_u+\boldsymbol{\phi}_d)} \star \left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_d e^{j(\breve{\boldsymbol{\phi}}_u+\breve{\boldsymbol{\phi}}_d)}\right)^*\right] e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\phi_r}}\right\} \\
&= \mathrm{TF}^{-1}\left\{\left[\boldsymbol{\mathcal{P}}_d + j\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\boldsymbol{\phi}_{ud} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\boldsymbol{\phi}_{ud}^2\right] \star \left[\boldsymbol{\mathcal{P}}_d + j\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\breve{\boldsymbol{\phi}}_{ud} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\breve{\boldsymbol{\phi}}_{ud}^2\right]^*\right\} \star \mathrm{TF}^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\mathbf{D}_{\phi_r}\right) + o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right) \\
&= \mathrm{TF}^{-1}\left\{\left[\boldsymbol{\mathcal{P}}_d + j\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\boldsymbol{\phi}_{ud} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\boldsymbol{\phi}_{ud}^2\right] \star \left[\boldsymbol{\mathcal{P}}_d - j\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\breve{\boldsymbol{\phi}}_{ud} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{P}}_d\breve{\boldsymbol{\phi}}_{ud}^2\right]\right\} \star \mathrm{TF}^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\mathbf{D}_{\phi_r}\right) + o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right) \\
&= \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d + j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right] \cdot \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d - j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\breve{\boldsymbol{\phi}}}_{ud} - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\breve{\boldsymbol{\phi}}}_{ud} \star \widetilde{\breve{\boldsymbol{\phi}}}_{ud}\right] \\
&\star \mathrm{TF}^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\mathbf{D}_{\phi_r}\right) + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \\
&= \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} - j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\breve{\boldsymbol{\phi}}}_{ud}\right) + j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right) + \left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\breve{\boldsymbol{\phi}}}_{ud}\right)\right] \star \mathrm{TF}^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\mathbf{D}_{\phi_r}\right) \\
&- \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} + \widetilde{\breve{\boldsymbol{\phi}}}_{ud} \star \widetilde{\breve{\boldsymbol{\phi}}}_{ud}\right)\right] \star \mathrm{TF}^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\mathbf{D}_{\phi_r}\right) + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\phi}$ est une fonction réelle donc $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}$ est hermitique. Ainsi :

$$\Re(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}) = \Re(\widetilde{\breve{\boldsymbol{\phi}}}) \quad , \quad \Im(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}) = -\Im(\widetilde{\breve{\boldsymbol{\phi}}}).$$

L'expression de $\mathbf{h}_n$ devient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_n &= \left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2 - j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \left[\Re(\tilde{\tilde{\boldsymbol{\phi}}}_{ud}) + j\Im(\tilde{\tilde{\boldsymbol{\phi}}}_{ud})\right]\right\} + j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \left[\Re(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) + j\Im(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right]\right\}\right) \star \mathrm{TF}^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\right) \\
&+ \left(\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \left[\Re\left(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right) + j\Im\left(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right)\right]\right\}\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \left[\Re\left(\tilde{\tilde{\boldsymbol{\phi}}}_{ud}\right) + j\Im\left(\tilde{\tilde{\boldsymbol{\phi}}}_{ud}\right)\right]\right\}\right) \star \mathrm{TF}^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\right) \\
&- \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \left[\Re\left(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \star \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right) + j\Im\left(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \star \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right) + \Re\left(\tilde{\tilde{\boldsymbol{\phi}}}_{ud} \star \tilde{\tilde{\boldsymbol{\phi}}}_{ud}\right) + j\Im\left(\tilde{\tilde{\boldsymbol{\phi}}}_{ud} \star \tilde{\tilde{\boldsymbol{\phi}}}_{ud}\right)\right]\right\} \star \mathrm{TF}^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\right) \\
&+ o\left(\tilde{\boldsymbol{\phi}} \star \tilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \\
&= \left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2 - 2\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \Im\left(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right)\right]\right\} \star \mathrm{TF}^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\right) \\
&+ \left\{\left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \Re(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right|^2 + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \Im(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \star \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right)\right]\right\} \star \mathrm{TF}^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\right) \\
&+ o\left(\tilde{\boldsymbol{\phi}} \star \tilde{\boldsymbol{\phi}}\right)
\end{aligned}$$

Le terme $\left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \Re(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right|^2 + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \Im(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right|^2$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \Re(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right|^2 + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \Im(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right|^2 &= \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \Re(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right|^2 - j^2\left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \Im(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right|^2 \\
&= \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \Re(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star j\Im(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right] \cdot \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \Re(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) - \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star j\Im(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right] \\
&= \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right] \cdot \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}^*\right] \\
&= \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_n &= \left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2 - 2\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \Im\left(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \star \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right)\right]\right\} \star \mathrm{TF}^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\right) \\
&+ o\left(\tilde{\boldsymbol{\phi}} \star \tilde{\boldsymbol{\phi}}\right)
\end{aligned}$$

Calcul du terme $\mathrm{TF}^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\right)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r} &= \left\langle(\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}') - \boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{\rho}))^2\right\rangle_t \\
&= \left\langle(\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}'))^2\right\rangle_t + \left\langle(\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{\rho}))^2\right\rangle_t - 2\left\langle(\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}')\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{\rho}))\right\rangle_t \\
&= 2[\mathbf{A}_{\boldsymbol{\phi}_r}(0) - \mathbf{A}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho})] \\
&= 2[\sigma_{\boldsymbol{\phi}_r}^2 - \mathbf{A}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{TF}^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}\right) &= \mathrm{TF}^{-1}\left[1 - \sigma_{\boldsymbol{\phi}_r}^2 + \mathbf{A}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho})\right] \\
&= (1 - \sigma_{\boldsymbol{\phi}_r}^2)\delta + \mathbf{S}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\alpha})
\end{aligned}$$

où δ est la fonction de Dirac.

Après ces modifications, l'expression $\mathbf{h}_n$ devient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_n &= \left\{ \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2 - 2\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \Im\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right)\right] \right\} \\
&\quad \star \left[(1-\sigma^2_{\boldsymbol{\phi}_r})\delta + \mathbf{S}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\alpha})\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \\
&= \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2 - \sigma^2_{\boldsymbol{\phi}_r}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2 - 2\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \Im\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right)\right] + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2 \star \mathbf{S}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\alpha}) \\
&\quad + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{h}_n = (1-\sigma^2_{\boldsymbol{\phi}_r})\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2 + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2 \star \mathbf{S}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\alpha}) - 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \tag{B.10}$$

B.2.3 Calcul de $\langle|\eta_0|^2\rangle\,\mathbf{h}_d$

$$\begin{aligned}
\langle|\eta_0|^2\rangle\,\mathbf{h}_d &= \langle|\eta_0|^2\rangle\,\mathbf{A}_d\mathbf{A}_d^* \\
&= \langle|\eta_0|^2\rangle\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2 + 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right]\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \\
&= \left[1-\sigma^2_{\boldsymbol{\phi}_r} - \sigma^2_{\boldsymbol{\phi}_u}\right]\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2 + 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right]\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \\
&= \left[1-\sigma^2_{\boldsymbol{\phi}_r} - \sigma^2_{\boldsymbol{\phi}_u}\right]\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2 + 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)
\end{aligned}$$

$$\langle|\eta_0|^2\rangle\,\mathbf{h}_d = \left[1-\sigma^2_{\boldsymbol{\phi}_r} - \sigma^2_{\boldsymbol{\phi}_u}\right]\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2 + 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \tag{B.11}$$

B.2.4 Calcul de $-\frac{2}{S}\Re\left\{\mathbf{TF}^{-1}\left[\Psi_{ud}(\boldsymbol{\alpha})\left(e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}} \star \Psi_u^*\right)(\boldsymbol{\alpha})\right]\mathbf{A}_d^*\right\}$

Pour dériver ce dernier terme, je réalise un calcul en trois étapes qui consistent à calculer les termes a, b et c définis comme suit :

$$-\frac{2}{S}\Re\left\{\underbrace{\underbrace{\mathrm{TF}^{-1}\left[\Psi_{ud}(\boldsymbol{\alpha})\right] \star \underbrace{\mathrm{TF}^{-1}\left(e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}} \star \Psi_u^*\right)(\boldsymbol{\alpha})}_{\text{a}}}_{\text{b}}\mathbf{A}_d^*}_{\text{c}}\right\}$$

Calcul du terme a

$$\begin{aligned}
a &= \mathrm{TF}^{-1}\left(e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\phi_r}}\right)\mathrm{TF}^{-1}\left(\Psi_u^*\right)\\
&= \left[(1-\sigma_{\phi_r}^2)\delta(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha})\right]\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u - j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{P}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)\\
&= (1-\sigma_{\phi_r}^2)\delta(\boldsymbol{\alpha})\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u - j(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)\delta - \frac{1}{2}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)\delta(\boldsymbol{\alpha}) + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u\mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha}) + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)
\end{aligned}$$

$$\delta(\boldsymbol{\alpha})\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u(\boldsymbol{\alpha}) = \delta(\boldsymbol{\alpha})\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u(0) = \delta(\boldsymbol{\alpha})S$$

$$a = (1-\sigma_{\phi_r}^2)\delta(\boldsymbol{\alpha})S - j(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0)\delta(\boldsymbol{\alpha}) - \frac{1}{2}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0)\delta(\boldsymbol{\alpha}) + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u\mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha}) + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)$$

Calcul du terme b

$$\begin{aligned}
b &= \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d + j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right]\\
&\star \left[(1-\sigma_{\phi_r}^2)\delta(\boldsymbol{\alpha})S - j(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0)\delta(\boldsymbol{\alpha}) - \frac{1}{2}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0)\delta(\boldsymbol{\alpha}) + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u\mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha})\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)\\
&= \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star (1-\sigma_{\phi_r}^2)\delta(\boldsymbol{\alpha})S - \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star j(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0)\delta(\boldsymbol{\alpha}) - \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \frac{1}{2}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0)\delta(\boldsymbol{\alpha}) + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u\mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha})\\
&+ j(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) \star \delta S - j(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) \star j(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0)\delta(\boldsymbol{\alpha}) - j(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) \star \frac{1}{2}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0)\delta(\boldsymbol{\alpha})\\
&- \frac{1}{2}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) \star \delta(\boldsymbol{\alpha})S + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)\\
&= S\left[(1-\sigma_{\phi_r}^2)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d + j(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) - \frac{1}{2}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right] + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u\mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha})\\
&- j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) + (\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0)\\
&- \frac{1}{2}j(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)
\end{aligned}$$

Calcul du terme c

$$
\begin{aligned}
c = & \left\{ S\left[(1-\sigma_{\phi_r}^2)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d + j(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) - \frac{1}{2}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right]\right\} \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d - j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^* - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*\right] \\
& + \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha})\right] \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d - j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^* - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*\right] \\
& - \left[j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) + (\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) - \frac{1}{2}j(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0)\right] \\
& \cdot \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d - j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^* - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \\
& = S\left[(1-\sigma_{\phi_r}^2)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} + j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right] \\
& + S\left[-j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*) + (\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*)(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^{\,*} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^{\,*})\right] \\
& + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha})\right] \\
& - j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) \\
& + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) - \frac{1}{2}j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})(\boldsymbol{\mathcal{P}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) \\
& - (\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) + \frac{1}{2}j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*)(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) - j(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*)(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) \\
& - \frac{1}{2}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*)(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c = & S\left[(1-\sigma_{\phi_r}^2)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} + j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) - j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*) - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^{\,*} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^{\,*})\right] \\
& + S\left[(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*)(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right] \\
& + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha})\right] \\
& + j(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} + j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) - j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*) + (\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*)(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right) \\
& - \frac{1}{2}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} + j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) - j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*) + (\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*)(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right) + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)
\end{aligned}
$$

Avec $(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) = S\sigma_{\phi_u}^2$ (cf. B.2.6.6) et en ne gardant que les termes d'ordre 2 en $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}$, je trouve :

$$
\begin{aligned}
c = & S\left[(1-\sigma_{\phi_r}^2)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} + j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) - j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*) - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^{\,*} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^{\,*})\right] \\
& + S\left[(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*)(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right] \\
& + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha})) \\
& - j(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} + j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) - j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*)\right) \\
& - \frac{1}{2}S\sigma_{\phi_u}^2\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)
\end{aligned}
$$

Calcul du terme $-\frac{2}{S}\Re\{c\}$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2}{S}\Re\left\{\mathrm{TF}^{-1}\left[\Psi_{ud}(\boldsymbol{\alpha})\left(e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\phi_r}}\star\Psi_u\right)(\boldsymbol{\alpha})\right]\mathbf{A}_d^*\right\}\\
&=-2\Re\left((1-\sigma_{\phi_r}^2)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2+j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})-j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*)-\frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})-\frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}_d}^*\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}_d}^*)\right)\\
&-2\Re\left[(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*)(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right]\\
&-\frac{2}{S}\Re\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_u}\mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha})\right]\right\}\\
&+\Re\left\{\sigma_{\phi_u}^2\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2\right\}\\
&-\frac{2}{S}\Re\left\{j(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_u}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0)\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2+j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}(\widetilde{p}_d\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})-j\widetilde{p}_d(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*)\right]\right\}+o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)
\end{aligned}
$$

Le terme $\frac{1}{S}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_u}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0)$ est nul (cf. B.2.6.7).

$$
\begin{aligned}
-\frac{2}{S}\Re\left\{\mathrm{TF}^{-1}\left[\Psi_{ud}(\boldsymbol{\alpha})\left(e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\phi_r}}\star\Psi_u\right)(\boldsymbol{\alpha})\right]\mathbf{A}_d^*\right\}&=(1-\sigma_{\phi_r}^2)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2\\
&-2\Re\left[j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})-j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*)\right]\\
&+\Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}\right)+\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*\right)\right]\\
&-2\Re\left[(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*)(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud})\right]\\
&-\frac{2}{S}\Re\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}\star\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_u}\mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha})\right]\right\}\\
&+\sigma_{\phi_u}^2\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}_d}^2+o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)
\end{aligned}
\tag{B.12}
$$

B.2.5 Calcul du terme global $\mathbf{h}^c$

Pour calculer $\mathbf{h}^c$, je somme les expressions des équations B.10, B.11 et B.12.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{h}^c &= \mathbf{h}_n + \left\langle |\eta_0|^2 \right\rangle \mathbf{h}_d - 2\Re\left\{ \mathrm{TF}^{-1}\left[\Psi_{ud}(\boldsymbol{\alpha}) \left(e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\phi_r}} \star \Psi_u \right)(\boldsymbol{\alpha}) \right] \mathbf{A}_d^* \right\} \\
&= (1-\sigma_{\phi_r}^2)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} \star \mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha}) \\
&- 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d (\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) \right] + \left| \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \right|^2 - \Re\left\{ \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \right) \right] \right\} \\
&+ (1-\sigma_{\phi_r}^2)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} - \sigma_{\phi_u}^2 \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} + 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d (\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*) \right] + \left| \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \right) \right] \\
&- 2(1-\sigma_{\phi_r}^2)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} + \sigma_{\phi_u}^2 \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} \\
&- 2\Re\left[j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d (\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) - j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d (\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*) \right] \\
&+ \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d (\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d (\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^{\,*} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^{\,*}) \right] \\
&- 2\Re\left[(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d^*)(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{ud}) \right] \\
&- \frac{2}{S}\Re\left\{ \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha}) \right] \right\} \\
&+ o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}} \right)
\end{aligned}
$$

Il reste donc :

$$
\mathbf{h}^c = |\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u|^2 + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} \star \mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha}) - \frac{2}{S}\Re\left\{ \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha}) \right] \right\} + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}} \right)
$$

Le terme $\frac{1}{S}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$ (cf. B.2.6.8). Je peux donc écrire $\mathbf{h}^c$ de la façon suivante :

$$
\mathbf{h}^c = |\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u|^2 + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} \star \mathbf{S}_{\phi_r}(\boldsymbol{\alpha}) + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}} \right) \tag{B.13}
$$

Je retrouve le même résultat avec la deuxième méthode qu'avec la première (cf. Éq. B.9).

B.2.6 Autres démonstrations

B.2.6.1 Hypothèses

On suppose que la surface S de la pupille *upstream* est suffisamment grande pour garantir une estimation correcte des statistiques spatiales sur l'ouverture.

$$
\lim_{S\to\infty} \left[\frac{1}{S} \iint_S \phi_r(\boldsymbol{\rho}, t) \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \right] \simeq \frac{1}{S} \iint_S \phi_r(\boldsymbol{\rho}, t) \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}
$$

On suppose que $\phi_r(\boldsymbol{\rho}, t)$ est ergodique spatialement. Il y a donc équivalence entre intégration spatiale et espérance mathématique :

$$
\frac{1}{S} \iint_S \phi_r(\boldsymbol{\rho}, t) \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} = \langle \phi_r(\boldsymbol{\rho}, t) \rangle
$$

De plus, on fait l'hypothèse que les aberrations résiduelles sont modélisées par une variable aléatoire centrée. Ainsi : $\langle|\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho},t)|\rangle = 0$, et :

$$\frac{1}{S}\iint_S \boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho},t)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} = \langle\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho},t)\rangle = 0 \tag{B.14}$$

De la même façon, on suppose que $\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})$ est une variable alétoire centrée et est ergodique spatialement. Ainsi :

$$\frac{1}{S}\iint_S \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} = \langle\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})\rangle = 0 \tag{B.15}$$

B.2.6.2 Calcul de $\eta_0(t)$

$\eta_0(t)$ est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\eta_0(t) &= \langle\Psi_0(\boldsymbol{\rho})|\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\rangle \\
&= \frac{1}{S}\iint_{\boldsymbol{\rho}} \Psi_0^*(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&= \frac{1}{S}\iint_{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\mathcal{P}}_u^*(\boldsymbol{\rho})e^{-j[\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho},t)+\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})]}\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&= \frac{1}{S}\iint_{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\mathcal{P}}_u^2(\boldsymbol{\rho})e^{-j[\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho},t)+\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})]}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho}) = 1$ sur la surface et $\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho}) = 0$ ailleurs, il en est de même pour $\boldsymbol{\mathcal{P}}_u^2$. Il s'en suit :

$$\eta_0(t) = \frac{1}{S}\iint_S 1.e^{-j[\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho},t)+\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})]}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}$$

J'effectue un développement limité de l'exponentielle à l'ordre 2 en $\boldsymbol{\phi}$:

$$\begin{aligned}
\eta_0(t) &= \frac{1}{S}\iint_S 1.\left\{1 - j\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho},t) - j\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}) - \frac{[\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho},t)+\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})]^2}{2} + o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right)\right\}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&= \frac{1}{S}\iint_S \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&\quad -j\frac{1}{S}\iint_S \boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho},t)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} - j\frac{1}{S}\iint_S \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&\quad -\frac{1}{2S}\iint_S \boldsymbol{\phi}_r^2(\boldsymbol{\rho},t)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} - \frac{1}{2S}\iint_S \boldsymbol{\phi}_u^2(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&\quad -\frac{1}{S}\iint_S \boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho},t)\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&\quad +o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right)
\end{aligned}$$

D'après les équations B.14 et B.15, on peut dire que la deuxième ligne est nulle.

Pour la troisième ligne, on peut écrire, avec l'hypothèse que $\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho},t)$ et $\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})$ sont ergodiques :

$$\frac{1}{2S}\iint_S \boldsymbol{\phi}^2(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2}\left\langle|\boldsymbol{\phi}^2(\boldsymbol{\rho})|\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle|\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\rho})|\right\rangle^2 + \frac{\sigma_{\boldsymbol{\phi}}^2}{2} = \frac{\sigma_{\boldsymbol{\phi}}^2}{2}$$

Et :

$$\eta_0(t) \;=\; 1 - \frac{\sigma^2_{\phi_u} + \sigma^2_{\phi_r}}{2} - \frac{1}{S}\iint_S \phi_r(\boldsymbol{\rho},t)\phi_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} + o\left(\phi^2\right)$$

B.2.6.3 Calcul de $|\eta_0(t)|^2$

$$\begin{aligned}
|\eta_0(t)|^2 &= \langle\Psi_0(\boldsymbol{\rho})|\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\rangle\,\langle\Psi_0(\boldsymbol{\rho})|\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\rangle^* \\
&= \left[\frac{1}{S}\iint_{\boldsymbol{\rho}} \Psi_0^*(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\right]\left[\frac{1}{S}\iint_{\boldsymbol{\rho}} \Psi_0^*(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\right]^* \\
&= \frac{1}{S^2}\iint_{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\mathcal{P}}_u^2(\boldsymbol{\rho})e^{-j[\phi_r(\boldsymbol{\rho},t)+\phi_u(\boldsymbol{\rho})]}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\iint_{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\mathcal{P}}_u^2(\boldsymbol{\rho}')e^{j[\phi_r(\boldsymbol{\rho}',t)+\phi_u(\boldsymbol{\rho}')]}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' \\
&= \frac{1}{S^2}\iint_S 1.\left\{1 - j\phi_r(\boldsymbol{\rho},t) - j\phi_u(\boldsymbol{\rho}) - \frac{[\phi_r(\boldsymbol{\rho},t)+\phi_u(\boldsymbol{\rho})]^2}{2} + o\left(\phi^2\right)\right\}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&\quad .\iint_S 1.\left\{1 - j\phi_r(\boldsymbol{\rho}',t) - j\phi_u(\boldsymbol{\rho}') - \frac{[\phi_r(\boldsymbol{\rho}',t)+\phi_u(\boldsymbol{\rho}')]^2}{2} + o\left(\phi^2\right)\right\}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'
\end{aligned}$$

De la même façon que précédemment, les termes en $\frac{1}{S}\iint_S \phi(\boldsymbol{\rho},t)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}$ sont nuls. Il reste :

$$\begin{aligned}
|\eta_0(t)|^2 &= \frac{1}{S^2}\iint_S 1.\left\{1 - \frac{\phi_r(\boldsymbol{\rho},t)^2}{2} - \frac{\phi_u(\boldsymbol{\rho},t)^2}{2} - [\phi_r(\boldsymbol{\rho},t)\phi_u(\boldsymbol{\rho}))] + o\left(\phi^2\right)\right\}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&\quad .\iint_S 1.\left\{1 - \frac{\phi_r(\boldsymbol{\rho}',t)^2}{2} - \frac{\phi_u(\boldsymbol{\rho}',t)^2}{2} - \left[\phi_r(\boldsymbol{\rho}',t)\phi_u(\boldsymbol{\rho}')\right] + o\left(\phi^2\right)\right\}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' \\
&= \frac{1}{S^2}\left[S - S\frac{\sigma^2_{\phi_u}+\sigma^2_{\phi_r}}{2} - S\iint_S \phi_r(\boldsymbol{\rho},t)\phi_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} + o\left(\phi^2\right)\right] \\
&\quad .\left[S - S\frac{\sigma^2_{\phi_u}+\sigma^2_{\phi_r}}{2} - S\iint_S \phi_r(\boldsymbol{\rho}',t)\phi_u(\boldsymbol{\rho}')\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' + o\left(\phi^2\right)\right] \\
&= 1 - \sigma^2_{\phi_u} + \sigma^2_{\phi_r} - \frac{2}{S}\iint_S \phi_r(\boldsymbol{\rho},t)\phi_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} + o\left(\phi^2\right)
\end{aligned}$$

B.2.6.4 Calcul de $\langle|\eta_0|^2\rangle$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \eta_0(t)^2 \right\rangle &= \left\langle \langle \Psi_0(\boldsymbol{\rho})|\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\rangle \langle \Psi_0(\boldsymbol{\rho})|\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\rangle^* \right\rangle \\
&= \left\langle \left[\frac{1}{S}\iint_{\boldsymbol{\rho}} \Psi_0^*(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\right]\left[\frac{1}{S}\iint_{\boldsymbol{\rho}} \Psi_0^*(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\right]^* \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{S^2}\iint_{\boldsymbol{\rho}}\iint_{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\mathcal{P}}_u^2(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\mathcal{P}}_u^{2\,*}(\boldsymbol{\rho}')e^{-j[\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho},t)+\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})]}e^{j[\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}',t)+\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}')]}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' \right\rangle \\
&= \frac{1}{S^2}\iint_S\iint_S \left\langle e^{-j[\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho},t)-\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}',t)]}\right\rangle e^{j[\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}')-\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})]}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' \\
&= \frac{1}{S^2}\iint_S\iint_S e^{-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')}e^{j[\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}')-\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})]}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' \\
&= \frac{1}{S^2}\iint_S\iint_S \left(1-\frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')+o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right)\right)e^{j[\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}')-\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})]}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' \\
&= \frac{1}{S^2}\iint_S\iint_S e^{j[\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}')-\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})]}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' \\
&\quad -\frac{1}{S^2}\iint_S\iint_S \frac{1}{2}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')e^{j[\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}')-\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})]}+o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' \\
&= \frac{1}{S^2}\iint_S\iint_S \left(1+j\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}')-j\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})-\frac{\left[\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}')-\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})\right]^2}{2}+o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right)\right)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' \\
&\quad -\frac{1}{2S^2}\iint_S\iint_S \mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\left(1+o\left(\boldsymbol{\phi}\right)\right)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' \\
&= 1+j\frac{1}{S^2}\iint_S\iint_S \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}')\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'-j\frac{1}{S^2}\iint_S\iint_S \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' \\
&\quad -\frac{1}{S^2}\iint_S\iint_S \frac{\boldsymbol{\phi}_u^2(\boldsymbol{\rho}')}{2}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'-\frac{1}{S^2}\iint_S\iint_S \frac{\boldsymbol{\phi}_u^2(\boldsymbol{\rho})}{2}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' \\
&\quad +\frac{1}{S^2}\iint_S\iint_S \left(\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho}')\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})+o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right)\right)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' \\
&\quad -\frac{1}{2S^2}\iint_S\iint_S \left(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')+o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right)\right)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'
\end{aligned}
$$

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, on trouve :

$$
\begin{aligned}
\left\langle \eta_0(t)^2 \right\rangle &= 1-\sigma_{\boldsymbol{\phi}_u}^2-\frac{1}{2S^2}\iint_S\iint_S \mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'+o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right) \\
&= 1-\sigma_{\boldsymbol{\phi}_u}^2-\frac{1}{S^2}\iint_S\iint_S \sigma_{\boldsymbol{\phi}_r}^2\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'+\frac{1}{S^2}\iint_S\iint_S A_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'+o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right) \\
&= 1-\sigma_{\boldsymbol{\phi}_u}^2-\frac{\sigma_{\boldsymbol{\phi}_r}^2}{S^2}\iint_S \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\iint_S \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'+\frac{1}{S^2}\iint_S\iint_S A_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'+o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right) \\
&= 1-\sigma_{\boldsymbol{\phi}_u}^2-\sigma_{\boldsymbol{\phi}_r}^2+\frac{1}{S^2}\iint_S\iint_S A_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'+o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \eta_0(t)^2 \right\rangle &= 1 - \sigma^2_{\phi_u} - \sigma^2_{\phi_r} + \frac{1}{S^2} \iint_S \iint_S \delta(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}) A_{\phi_r}(\boldsymbol{\rho}') \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' + o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right) \\
&= 1 - \sigma^2_{\phi_u} - \sigma^2_{\phi_r} + \frac{1}{S^2} \iint_S \left(\delta \star A_{\phi_r}\right)(\boldsymbol{\rho}) \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} + o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right) \\
&= 1 - \sigma^2_{\phi_u} - \sigma^2_{\phi_r} + \frac{1}{S^2} \mathrm{TF}^{-1}\left[\delta \star A_{\phi_r}\right](0) + o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right) \\
&= 1 - \sigma^2_{\phi_u} - \sigma^2_{\phi_r} + \frac{1}{S^2} \mathbf{S}_{\phi_r}(0) + o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right)
\end{aligned}$$

On peut prouver que le dernier terme est nul de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{S^2} \iint_S \iint_S A_{\phi_r}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' &= \frac{1}{2S^2} \iint_S \iint_S \left\langle \boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}') \right\rangle \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' \\
&= \left\langle \frac{1}{S^2} \iint_S \iint_S \boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}') \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}' \right\rangle \\
&= \left\langle \left[\frac{1}{S} \iint_S \boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}) \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\right] \left[\frac{1}{S} \iint_S \boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}') \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\right] \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où :

$$\left\langle |\eta_0(t)|^2 \right\rangle = 1 - \sigma^2_{\phi_u} - \sigma^2_{\phi_r} + o\left(\boldsymbol{\phi}^2\right)$$

B.2.6.5 Démonstration de $\Re(jz) = -\Im(z)$

$$\begin{aligned}
z &= x + jy \\
jz &= jx - y \\
\Re(jz) &= -y \\
\Im(z) &= y
\end{aligned}$$

Donc :

$$\Re(jz) = -\Im(z)$$

B.2.6.6 Démonstration de $(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) = S\sigma^2_{\phi_u}$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\mathcal{P}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) &= \int \boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\phi}_u^2(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} \\
&= \int_S \boldsymbol{\phi}_u^2(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} \\
&= S\sigma^2_{\phi_u}
\end{aligned}$$

B.2.6.7 Démonstration de $\frac{1}{S}(\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \tilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{S}(\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u \star \tilde{\boldsymbol{\phi}}_u)(0) &= \frac{1}{S}\iint \boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&= \frac{1}{S}\iint_S \boldsymbol{\phi}_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&= 0
\end{aligned}$$

B.2.6.8 Démonstration de $\frac{1}{S}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u\mathbf{S}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{S}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_u\mathbf{S}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{S}\iint_{\boldsymbol{\rho}} \left[\boldsymbol{\mathcal{P}}_u \star \mathbf{A}_{\boldsymbol{\phi}_r}\right](\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&= \frac{1}{S}\iint_{\boldsymbol{\rho}}\iint_{\boldsymbol{\rho}'} \boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho}')\mathbf{A}_{\boldsymbol{\phi}_r}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&= \frac{1}{S}\iint_{\boldsymbol{\rho}}\iint_{\boldsymbol{\rho}'} \boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho}')\left\langle\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}')\right\rangle\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} \\
&= \left\langle\frac{1}{S}\iint_{\boldsymbol{\rho}}\iint_{\boldsymbol{\rho}'} \boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}')\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\right\rangle \\
&= \left\langle\frac{1}{S}\iint_{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\mathcal{P}}_u(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\iint_{\boldsymbol{\rho}'}\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}')\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\right\rangle \\
&= \left\langle\left[\frac{1}{S}\iint_S \boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\right]\iint_{\boldsymbol{\rho}'}\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}')\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\right\rangle \\
&= \left\langle 0.\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{\rho}')\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}'\right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Annexe C

Expression analytique approchée d'une image coronographique courte pose corrigée par OA : cas d'un coronographe non parfait

C.1 Rappels des résultats du coronographe parfait

J'ai montré en Annexe B, qu'à partir de l'expression de la FEP instantanée de Sauvage et al. [62] :

$$[\mathbf{h}^c]_{\text{CP}} = \mathbf{h}_n + |\eta_0|^2 \mathbf{h}_d - 2\Re\left(\eta_0 \mathbf{A}_n^* \mathbf{A}_d\right), \tag{C.1}$$

les calculs successifs des trois termes $\mathbf{h}_n$, $|\eta_0|^2 \mathbf{h}_d$ et $-2\Re\left(\eta_0 \mathbf{A}_n^* \mathbf{A}_d\right)$ de l'expression courte pose de l'équation C.1 donnent les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_n &= \mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^* \\ &= \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} + 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^* \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right),\end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}|\eta_0|^2 \mathbf{h}_d &= |\eta_0|^2 \mathbf{A}_d \mathbf{A}_d^* \\ &= |\eta_0|^2 \left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2} - 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)\right\}\end{aligned} \tag{C.3}$$

et

$$\begin{aligned}-2\Re\left(\eta_0\mathbf{A}_n^*\mathbf{A}_d\right) &= -2\Re\left(\eta_0\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^{\,2}\right) - 2\Re\left\{j\eta_0\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right) - \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right]\right\}\\ &\quad - 2\Re\left[\eta_0\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right]\\ &\quad + \Re\left\{\eta_0\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\star\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right]\right\} + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right). \end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\left\langle\left|\eta_0(t)\right|^2\right\rangle_t = 1 - \sigma_{\phi_u}^2 - \sigma_{\phi_r}^2 - \frac{2}{S}\iint_S \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\left(\boldsymbol{\rho},t\right)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u\left(\boldsymbol{\rho}\right)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)$$

$$\eta_0 = 1 - \frac{\left(\sigma_{\phi_r}^2 + \sigma_{\phi_u}^2\right)}{2} - \frac{1}{S}\iint_S \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\left(\boldsymbol{\rho},t\right)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u\left(\boldsymbol{\rho}\right)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)$$

C.2 Résultats du coronographe non parfait

Afin de modéliser le coronographe non parfait, j'effectue le remplacement suivant :

$$\eta_0 \to \left(1-\epsilon\right)\eta_0.$$

Si $\epsilon \simeq 0$ alors $[\mathbf{h}^c]_{\mathrm{CP}}^{\mathrm{NP}}$ tend vers l'expression pour un coronographe parfait. Si $\epsilon \simeq 1$, l'action du coronographe est quasi-inexistante. Cela équivaut à poser $\eta_0 = 0$ dans l'expression exacte, ce qui mène à :

$$[\mathbf{h}^c]_{\mathrm{CP}} = \mathbf{A}_n\mathbf{A}_n^* = \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\star\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right|^2 = \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}\right|^2.$$

C.2.1 Calcul du terme C.2

Le premier terme reste identique car η_0 n'intervient pas :

$$\mathbf{h}_n = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2 + 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}\star\widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right). \tag{C.5}$$

C.2.2 Calcul du terme C.4

Le deuxième terme devient :

$$
\begin{aligned}
|\eta_0|^2\,\mathbf{h}_d &= (1-\epsilon)^2\,|\eta_0|^2 \left\{ \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2 - 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \right\} \\
&= \left(1-2\epsilon+\epsilon^2\right)\left[1 - \sigma_{\boldsymbol{\phi}_u}^2 - \sigma_{\boldsymbol{\phi}_r}^2 - \frac{2}{S}\iint_S \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\left(\boldsymbol{\rho},t\right)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u\left(\boldsymbol{\rho}\right)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)\right] \\
&\times \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2 - 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)\right] \\
&= \left(1-2\epsilon+\epsilon^2\right)\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2 - 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)\right] \\
&+ \left(1-2\epsilon+\epsilon^2\right)\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2\left[-\sigma_{\boldsymbol{\phi}_u}^2 - \sigma_{\boldsymbol{\phi}_r}^2 - \frac{2}{S}\iint_S \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r(\boldsymbol{\rho},t)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho} + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)\right]\right\} \\
&= \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2\left[1 - \sigma_{\boldsymbol{\phi}_u}^2 - \sigma_{\boldsymbol{\phi}_r}^2 - \frac{2}{S}\iint_S \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\left(\boldsymbol{\rho},t\right)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u\left(\boldsymbol{\rho}\right)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\right] - 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 \\
&- \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] \\
&+ \left(-2\epsilon+\epsilon^2\right)\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2\left[1 - \sigma_{\boldsymbol{\phi}_u}^2 - \sigma_{\boldsymbol{\phi}_r}^2 - \frac{2}{S}\iint_S \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r(\boldsymbol{\rho},t)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u(\boldsymbol{\rho})\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\right]\right\} \\
&+ \left(-2\epsilon+\epsilon^2\right)\left\{-2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right]\right\} \\
&+ o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right). \qquad \text{(C.6)}
\end{aligned}
$$

C.2.3 Calcul du terme C.3

Le troisième terme devient :

$$
\begin{aligned}
-2\Re\left(|\eta_0|\mathbf{A}_n^*\mathbf{A}_d\right) &= -2\Re\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2\left[1 - \frac{\sigma_{\boldsymbol{\phi}_u}^2 + \sigma_{\boldsymbol{\phi}_r}^2}{2} - \frac{1}{S}\iint_S \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\left(\boldsymbol{\rho},t\right)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u\left(\boldsymbol{\rho}\right)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\right]\right\} \\
&- 2\Re\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2\left(-2\epsilon+\epsilon^2\right)\left[1 - \frac{\sigma_{\boldsymbol{\phi}_u}^2 + \sigma_{\boldsymbol{\phi}_r}^2}{2} - \frac{2}{S}\iint_S \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\left(\boldsymbol{\rho},t\right)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u\left(\boldsymbol{\rho}\right)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\right]\right\} \\
&- 2\Re\left\{j\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] - \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right\} - 2\Re\left[\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] \\
&+ \Re\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^* \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right]\right\} \\
&- 2\left(-2\epsilon+\epsilon^2\right)\Re\left(j\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] - \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right) \\
&- 2\left(-2\epsilon+\epsilon^2\right)\Re\left[\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] \\
&+ \left(-2\epsilon+\epsilon^2\right)\Re\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^* \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right]\right\} \\
&+ o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \qquad \text{(C.7)}
\end{aligned}
$$

En additionnant les termes C.5, C.6 et C.7, j'obtiens l'expression de l'image pour un coronographe non parfait (NP) :

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{h}^c]_{\mathrm{CP}}^{\mathrm{NP}} = {} & \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2 + 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^* \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right] \\
& + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2\left[1 - \sigma_{\boldsymbol{\phi}_u}^2 - \sigma_{\boldsymbol{\phi}_r}^2 - \frac{2}{S}\iint_S \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r(\boldsymbol{\rho}, t)\,\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u(\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\right] - 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 \\
& - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] \\
& + \left(-2\epsilon + \epsilon^2\right)\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2\left[1 - \sigma_{\boldsymbol{\phi}_u}^2 - \sigma_{\boldsymbol{\phi}_r}^2 - \frac{2}{S}\iint_S \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r(\boldsymbol{\rho}, t)\,\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u(\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\right]\right\} \\
& + \left(-2\epsilon + \epsilon^2\right)\left\{-2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right]\right\} \\
& - 2\Re\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2\left[1 - \frac{\sigma_{\boldsymbol{\phi}_u}^2 + \sigma_{\boldsymbol{\phi}_r}^2}{2} - \frac{1}{S}\iint_S \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r(\boldsymbol{\rho}, t)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u(\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\right]\right\} \\
& - 2\Re\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2\left(-2\epsilon + \epsilon^2\right)\left[1 - \frac{\sigma_{\boldsymbol{\phi}_u}^2 + \sigma_{\boldsymbol{\phi}_r}^2}{2} - \frac{1}{S}\iint_S \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r(\boldsymbol{\rho}, t)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u(\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\right]\right\} \\
& - 2\Re\left\{j\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] - \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right\} - 2\Re\left[\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] \\
& + \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^* \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right)\right] \\
& - 2\left(-2\epsilon + \epsilon^2\right)\Re\left\{j\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] - \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right\} \\
& - 2\left(-2\epsilon + \epsilon^2\right)\Re\left[\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] \\
& + \left(-2\epsilon + \epsilon^2\right)\Re\left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^* \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right]\right\} \\
& + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right).
\end{aligned}
$$

La simplification de cette expression donne :

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{h}^c]_{\mathrm{CP}}^{\mathrm{NP}} = {} & \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}\right|^2 + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 - 2\Re\left[\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] \\
& - \left(-2\epsilon + \epsilon^2\right)\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2 \\
& + \left(-2\epsilon + \epsilon^2\right)\left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 \\
& + 2\left(-2\epsilon + \epsilon^2\right)\Re\left[j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right] \\
& - 2\left(-2\epsilon + \epsilon^2\right)\Re\left[\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right)\right] \\
& + \left(-2\epsilon + \epsilon^2\right)\Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^* \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right] \\
& + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right).
\end{aligned}
$$

En écrivant $\left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d\right|^2 = \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u\right)\right|^2 - \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}\right|^2 + 2\Re\left[\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}_d}\right)\right]$

je peux simplifier l'expression obtenue :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{h}^c]_{\text{CP}}^{\text{NP}} &= \left|1-2\epsilon+\epsilon^2\right| \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right)\right|^2 \\
&+ \left(2\epsilon-\epsilon^2\right) \left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2 + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}\right|^2 - 2\Re\left[j\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right] - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^* \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right]\right\} \\
&+ o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \\
&= \left(1-2\epsilon+\epsilon^2\right) \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right)\right|^2 \\
&+ \left(2\epsilon-\epsilon^2\right) \left\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2 + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}\right|^2 + 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right] - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^* \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right]\right\} \\
&+ o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right).
\end{aligned}$$

C.2.4 Conditions aux limites

Cas sans coronographe. Vérification pour $\epsilon = 1$, cas où il n'y a pas de coronographe :

$$\begin{aligned}
\left[[\mathbf{h}^c]_{\text{CP}}^{\text{NP}}\right]_{\epsilon=1} &= \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2 + \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}\right|^2 + 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right] - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^* \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right] + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \\
&= \mathbf{h}_n.
\end{aligned}$$

Dans le cas où $\epsilon = 1$, on retrouve l'expression de la FEP sans coronographe.

Cas avec coronographe parfait. Vérification pour $\epsilon = 0$, cas où le coronographe est parfait :

$$\left[[\mathbf{h}^c]_{\text{CP}}^{\text{NP}}\right]_{\epsilon=0} = \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right)\right|^2 + o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right).$$

Dans le cas où $\epsilon = 0$, on retrouve l'expression de la FEP avec coronographe parfait.

C.3 Conclusion

Dans le cas d'un coronographe non parfait, les aberrations *downstream* interviennent au deuxième ordre en $\boldsymbol{\phi}$ (via le terme $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot} = \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_d$) :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{h}^c]_{\text{CP}}^{\text{NP}} &= \left(1-2\epsilon+\epsilon^2\right) \left|\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right)\right|^2 \\
&+ \left(2\epsilon-\epsilon^2\right) \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d^2 + \left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}\right)^2 + 2\Im\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right] - \Re\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d\left(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^* \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{tot}^*\right)\right]\right] \\
&+ o\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \star \widetilde{\boldsymbol{\phi}}\right)
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Ce résultat est la somme de deux termes :

- $(1 - 2\epsilon + \epsilon^2) \left| \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_d \star \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_u + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r \right) \right|^2$, terme dominant dans le cas d'un coronographe quasi-parfait.
- $(2\epsilon - \epsilon^2)\, \mathbf{h}_n$, terme dominant dans le cas d'un coronographe présentant des imperfections non négligeables.

Annexe D

Réglage des hyperparamètres de la régularisation sur l'objet à aberrations connues

Afin d'étudier le comportement de l'inversion par rapport au bruit pour différents jeux d'hyperparamètres, je fixe les aberrations à leur valeur vraie et j'estime l'objet avec 2 (D.1), 3 (D.2), 4 (D.3), 5 (D.4) et 6 (D.5) bandes spectrales en faisant varier les hyperparamètres s et d. J'ai ainsi testé 81 jeux d'hyperparamètres pour des valeurs de s et d variant entre 10^{-4} et 10^{4}. Pour chaque jeu d'hyperparamètres, je représente l'image de l'objet estimé.
Les aberrations étant supposées connues, cette étude permet de comprendre l'effet de la régularisation sur l'échange d'énergie entre l'objet et le bruit. Le niveau de bruit résiduel dans l'objet dépend de la force de la régularisation. On observe trois régimes de régularisation bien séparés en trois régions distinctes (cf. Figures 5.13, et 5.15 du chapitre 5) : sous-régularisé, correctement régularisé et sur-régularisé.

Il est intéressant de remarquer une évolution de ces régions avec le nombre de bandes spectrales utilisées pour la déconvolution :

- La région correctement régularisée se décale progressivement vers la droite de la figure, i.e. vers les plus petites valeurs de l'hyperparamètre s ;
- La région correctement régularisée s'étend sensiblement.

D.1 Deux bandes spectrales

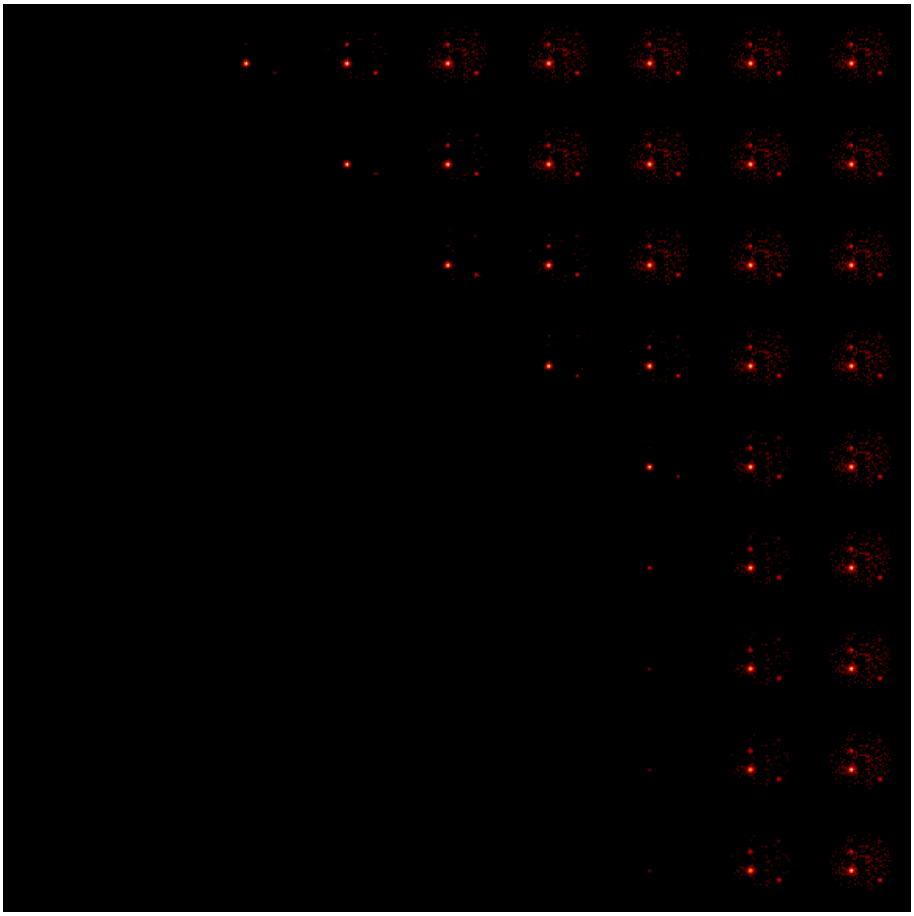


FIGURE D.1 – **Réglage des hyperparamètres dans une inversion à deux bandes spectrales.** Images des objets estimés à aberrations supposées connues et fixées à leur vraie valeur pour une inversion à 2 bandes spectrales. De gauche à droite, l'hyperparamètre s augmente de 10^{-4} à 10^{4}. De haut en bas, l'hyperparamètre d croît de 10^{-4} à 10^{4}. En abscisse de gauche à droite : s = [0.0001,0.001,0.01,0.1,1.,10,100,1000,10000]. En ordonnée de haut en bas : d = [0.0001,0.001,0.01,0.1,1.,10,100,1000,10000].

D.2 Trois bandes spectrales

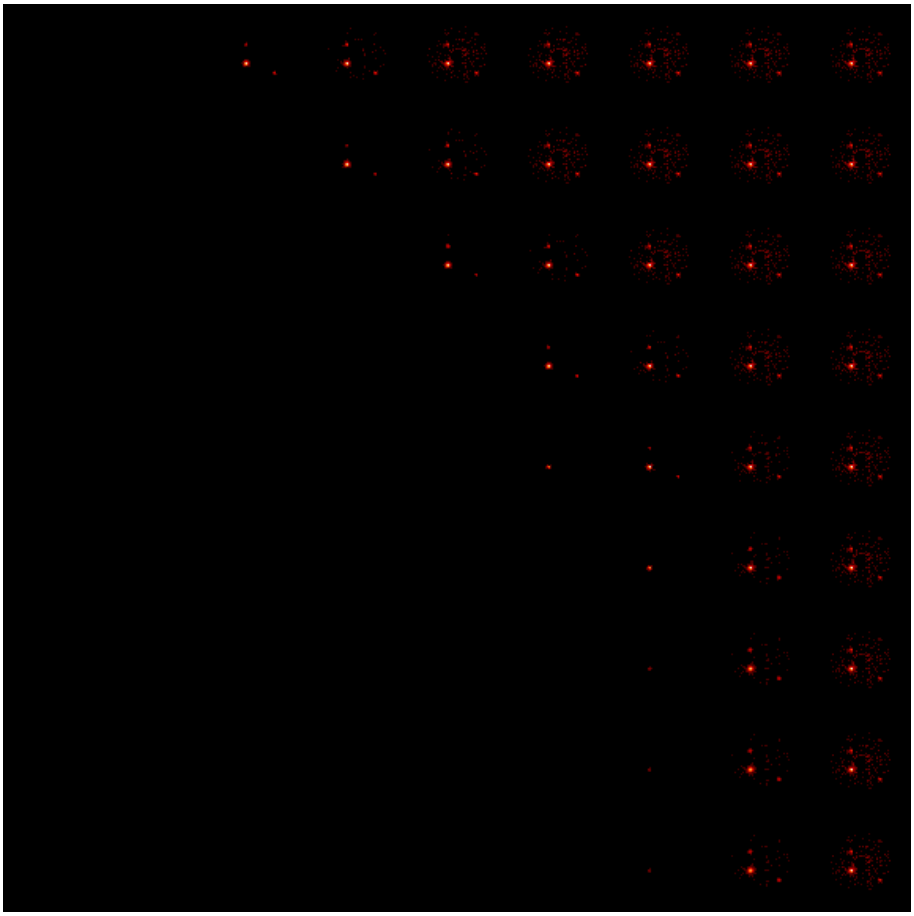


FIGURE D.2 – **Réglage des hyperparamètres dans une inversion à trois bandes spectrales.** Images des objets estimés à aberrations supposées connues et fixées à leur vraie valeur pour une inversion à 3 bandes spectrales. De gauche à droite, l'hyperparamètre s augmente de 10^{-4} à 10^{4}. De haut en bas, l'hyperparamètre d croît de 10^{-4} à 10^{4}. En abscisse de gauche à droite : s = [0.0001,0.001,0.01,0.1,1.,10,100,1000,10000]. En ordonnée de haut en bas : d = [0.0001,0.001,0.01,0.1,1.,10,100,1000,10000].

D.3 Quatre bandes spectrales

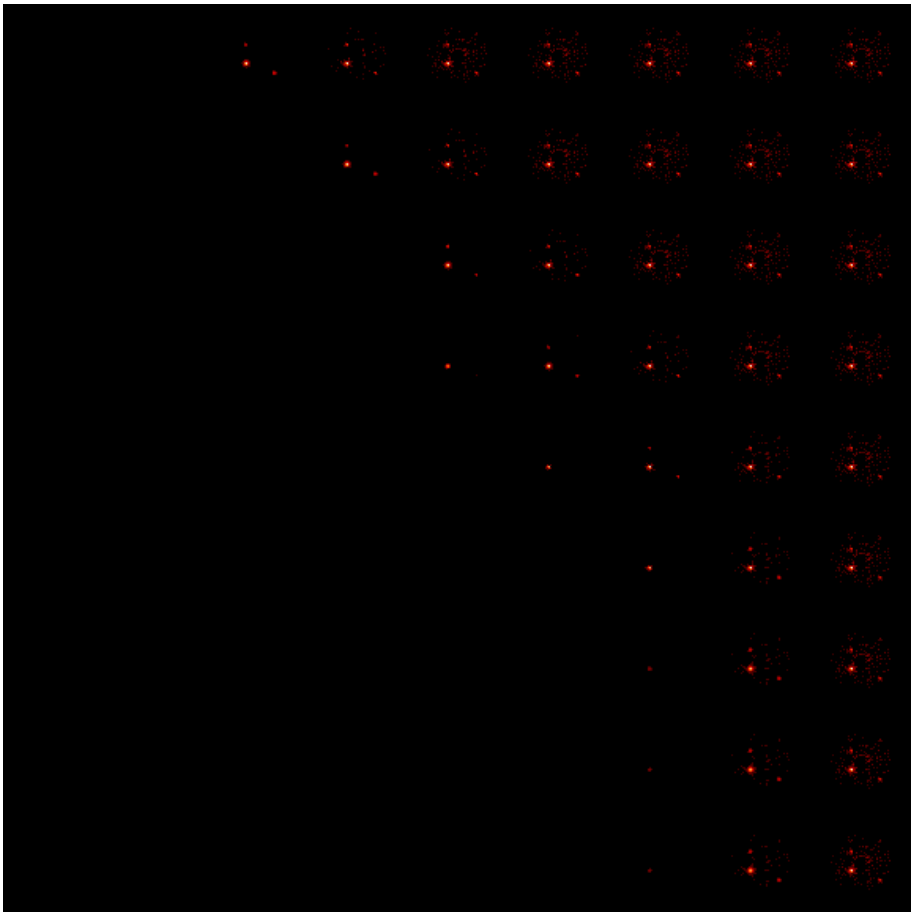


FIGURE D.3 – **Réglage des hyperparamètres dans une inversion à quatre bandes spectrales.** Images des objets estimés à aberrations supposées connues et fixées à leur vraie valeur pour une inversion à 4 bandes spectrales. De gauche à droite, l'hyperparamètre s augmente de 10^{-4} à 10^{4}. De haut en bas, l'hyperparamètre d croît de 10^{-4} à 10^{4}. En abscisse de gauche à droite : s = [0.0001,0.001,0.01,0.1,1.,10,100,1000,10000]. En ordonnée de haut en bas : d = [0.0001,0.001,0.01,0.1,1.,10,100,1000,10000].

D.4 Cinq bandes spectrales

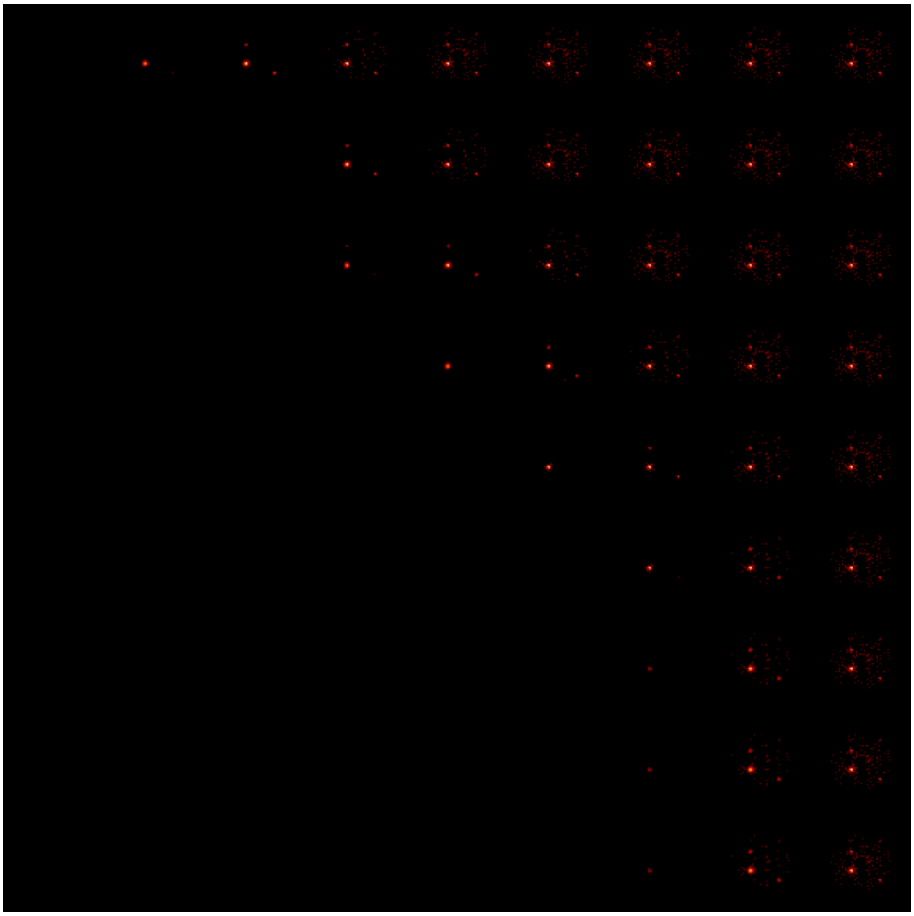


FIGURE D.4 – **Réglage des hyperparamètres dans une inversion à cinq bandes spectrales.** Images des objets estimés à aberrations supposées connues et fixées à leur vraie valeur pour une inversion à 5 bandes spectrales. De gauche à droite, l'hyperparamètre s augmente de 10^{-4} à 10^{4}. De haut en bas, l'hyperparamètre d croît de 10^{-4} à 10^{4}. En abscisse de gauche à droite : s = [0.0001,0.001,0.01,0.1,1.,10,100,1000,10000]. En ordonnée de haut en bas : d = [0.0001,0.001,0.01,0.1,1.,10,100,1000,10000].

D.5 Six bandes spectrales

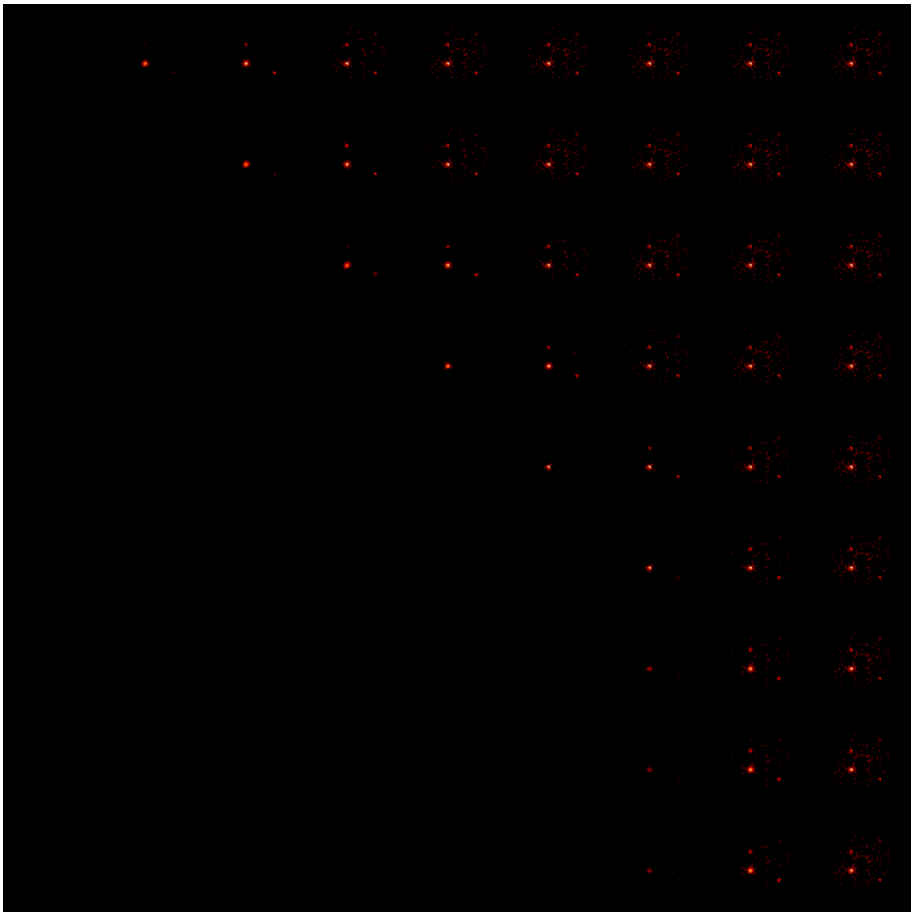


FIGURE D.5 – **Réglage des hyperparamètres dans une inversion à six bandes spectrales.** Images des objets estimés à aberrations supposées connues et fixées à leur vraie valeur pour une inversion à 6 bandes spectrales. De gauche à droite, l'hyperparamètre s augmente de 10^{-4} à 10^{4}. De haut en bas, l'hyperparamètre d croît de 10^{-4} à 10^{4}. En abscisse de gauche à droite : s = [0.0001,0.001,0.01,0.1,1.,10,100,1000,10000]. En ordonnée de haut en bas : d = [0.0001,0.001,0.01,0.1,1.,10,100,1000,10000].

Annexe E

Le Nouveau Chapitre de la Thèse, NCT® : Valorisation des compétences des docteurs

Dans le cadre de ma formation post-Master, j'ai suivi une formation proposée par l'IntelliAgence (anciennement Association Bernard Gregory). Cette formation, intitulée « Nouveau Chapitre de la Thèse », m'a permis de valoriser mes trois ans de thèse en tant qu'expérience de gestion de projet via un bilan de compétences. Cette annexe présente le fruit de cette réflexion, menée de mars à juin 2012.

E.1 Cadre général, enjeux et présentation du projet de recherche

E.1.1 Présentation succincte

Par une claire nuit d'été, vous vous promenez sur la rade de Brest. L'atmosphère de cette soirée est propice à votre imagination débordante. Vous admirez le phare du Minou et la petite tour située juste à côté, sur laquelle une luciole se repose. La lumière émise par le phare, beaucoup plus puissante que la lumière émise par la luciole, vous aveugle complètement au point qu'il vous est impossible de distinguer cette dernière. Un réflexe instinctif est alors de cacher la lumière du phare avec votre main pour tenter de voir l'animal. Manque de chance, l'oeil humain n'est pas un instrument suffisamment perfectionné pour réaliser cet exploit. À la distance où vous êtes du phare, la luciole brille si faiblement que seul un appareil photo en mode longue pose permettrait de lui tirer le portrait.

Vous quittez à présent la mer pour la montagne, sans oubliez d'emmener avec vous une bonne dose de votre imagination. Vous êtes à Grenoble et vous essayez de viser la même scène, tout en supposant que la Terre est plate et qu'il n'y a aucun obstacle qui vous sépare de Brest. À cause de l'importante distance qui vous sépare du phare et de la petite luciole, votre appareil photo en mode longue pose ne suffit plus à imager la scène car ses optiques sont trop petites pour pouvoir

recueillir suffisamment de lumière. Pour cette même raison, le phare et la luciole se confondent en un seul et même point. L'appareil photo doit donc être nécessairement placé derrière un instrument capable de recueillir suffisamment de lumière et de séparer angulairement le phare et la luciole pour pouvoir bien les distinguer : un télescope avec un miroir suffisamment grand (typiquement 8 m de diamètre) [1] rempli ce double rôle. Enfin, une difficulté supplémentaire s'ajoute : la scène est floutée par la turbulence atmosphérique. La petite luciole est alors emprisonnée dans le halo lumineux du phare sans possibilité de la distinguer de son ravisseur. Vous devez donc utiliser un instrument supplémentaire, capable de corriger cet effet de flou. De plus, votre main qui cachait la lumière émise par le phare n'est alors plus d'un grand secours et vous devez inventer un composant optique, un coronographe, qui joue le même rôle. Dans ces conditions, essayez de faire à nouveau une photo de la luciole.

"Impossible !", me direz-vous, votre imagination se bridant quelque peu. Je vous répondrai que cette prouesse est comparable au travail de certains astrophysiciens. Ils utilisent des télescopes au sol, situés dans des endroits du monde où le ciel est très pur, pour faire des images de planètes extrasolaires, ou exoplanètes. L'étude de ces objets très lointains [2] est un enjeu considérable de l'astrophysique d'aujourd'hui. Dans ce domaine vieux d'une quinzaine d'années, la détection a joué un grand rôle en permettant la découverte de plus de 700 exoplanètes [3], essentiellement par des méthodes indirectes [4]. Cela permet aux astrophysiciens d'accroître leur connaissance des systèmes planétaires tout en approfondissant leur compréhension de notre propre système solaire. L'imagerie directe, qui consiste à prendre des photos d'exoplanètes ouvre la voie à encore plus de découvertes. En effet, imager une exoplanète, c'est être en mesure de l'analyser pour connaître sa composition chimique et y détecter d'éventuelles traces de vie.

*
* *

Pour la plupart, les exoplanètes découvertes tournent autour d'étoiles qui ressemblent plus ou moins à notre soleil. Tout comme le phare nous empêchait de voir la luciole, l'étoile, extrêmement brillante, nous éblouit au point que les planètes restent invisibles sur les photos et ce malgré l'utilisation d'instruments très perfectionnés. C'est justement en aval du développement d'un tel instrument que j'interviens. Le projet SPHERE [5], instrument de seconde génération pour le Very Large Telescope (VLT) européen de l'ESO [6] au Chili, a pour double objectif de détecter et de caractériser des exoplanètes. Mon travail de thèse, à l'intersection entre les besoins astrophysiques, l'instrumentation et le traitement d'images, consiste à extraire le signal de la planète de la lumière parasite de l'étoile. Pour cela, je développe une nouvelle méthode de traitement d'images. L'originalité de ce travail repose sur l'utilisation des informations disponibles sur les instruments actuellement en développement, et en particulier sur la physique de la formation d'image. L'enjeu

1. Malheureusement, on ne dispose pas de ce type d'instrument à Grenoble !
2. Les planètes extrasolaires, comme leur nom l'indique, se situent bien au-delà des limites de notre système solaire
3. On en dénombre 770 à la date du 15 mai 2012. Source : `http://exoplanet.eu/`
4. Une méthode indirecte permet de mesurer la présence d'une exoplanète, sans pour autant en obtenir d'image.
5. Spectro Polarimetric High-contrast Exoplanet REsearch
6. European Southern Observatory : organisation intergouvernementale pour l'astronomie en Europe

principal est de démontrer la pertinence d'une nouvelle méthode évolutive, pouvant se combiner avec d'autres types de méthodes pour accroître nos capacités de détection sur la nouvelle génération d'instruments. Les résultats obtenus au cours de cette thèse permettront tout particulièrement de tirer des enseignements pour le développement des futurs instruments et des algorithmes de traitement d'image associés pour la détection d'exoplanètes.

E.1.2 Ma thèse dans son contexte

Inscrite à l'Université Joseph Fourier (UJF) et titulaire d'une Bourse de Doctorat pour Ingénieur(e) (BDI), j'ai été amenée au cours de ma thèse à travailler dans deux laboratoires différents : le Département d'Optique Théorique et Appliquée (DOTA) à Châtillon et l'Institut de Planétologie et d'Astrophysique de Grenoble (IPAG) à Grenoble.

J'ai ainsi passé les deux premières années à me former auprès de spécialistes en traitement du signal et en instrumentation au DOTA. Ce laboratoire fait partie de la branche physique de l'Office National d'Etudes et Recherches Aérospatiales (ONERA), centre français de recherche aérospatiale. Les travaux de recherche finalisée de cet Etablissement Public à Caractère Industriel et Commercial (EPIC) servent l'innovation et la compétitivité dans les secteurs de l'aéronautique, de l'espace et de la défense [7]. L'ONERA compte 2 000 salariés, dont 1 500 chercheurs, ingénieurs et techniciens, et plus de 200 doctorants, répartis dans quatre branches scientifiques : Physique, Mécanique des fluides et énergétique, Matériaux et structure, Traitement de l'information et Systèmes. Ces quatre branches sont elles-mêmes divisées en 16 départements scientifiques, le tout réparti sur huit sites en France.

J'ai ensuite déménagé pour la dernière année de thèse afin de me rapprocher des astronomes et instrumentalistes en charge de développer et d'intégrer l'instrument SPHERE au sein de l'IPAG à Grenoble. L'IPAG a été créé en 2011 lors de la fusion de deux laboratoires : le LAOG [8] et le LPG [9]. Membre de l'OSUG [10], c'est un établissement public de recherche sous la tutelle du CNRS [11] et de l'UJF. L'OSUG est un Observatoire des Sciences de l'Univers (OSU) et une école interne de l'Université Joseph Fourier. Structure fédérative, l'Observatoire de Grenoble regroupe 6 laboratoires sous multi-tutelles (CNRS ; UJF ; IRD, UdS, IFSSTTAR, MétéoFrance, G-INP) :

- **ISTerre** : Institut des Sciences de la Terre
- **IPAG** : Institut de Planétologie et d'Astrophysique de Grenoble
- **LTHE** : Laboratoire d'études des Transferts en Hydrologie et Environnement
- **LGGE** : Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement
- **LEGI** : Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels
- **LECA** : Laboratoire d'Ecologie Alpine

840 personnels y travaillent dont plus d'un quart d'étudiants en thèse [12].

7. Source : `http://www.onera.fr`
8. Laboratoire d'AstrOphysique de Grenoble
9. Laboratoire de Planétologie de Grenoble
10. Observatoire des Sciences de l'Univers de Grenoble.
11. Centre National pour la Recherche Scientifique
12. Source : `http://www.osug.fr`

Les organigrammes de la figure E.1 décrivent les contextes des deux laboratoires.

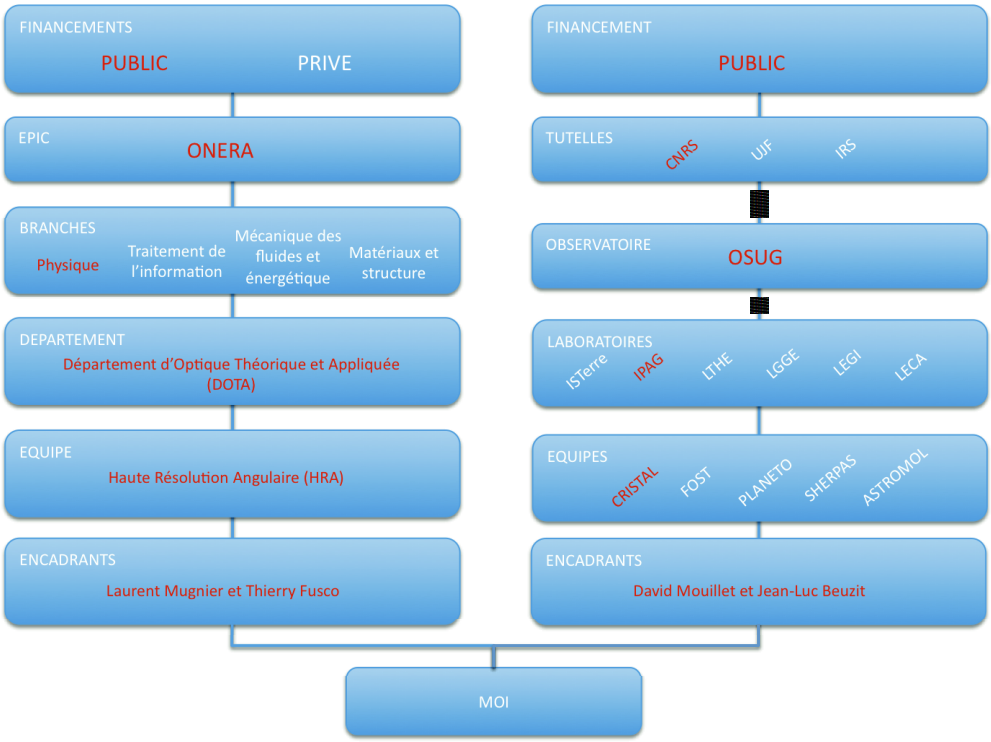


FIGURE E.1 – **Organigrammes des laboratoires d'accueil.**

L'IPAG et le DOTA font tous deux partie du Groupement d'Intérêt Scientifique du Partenariat Haute résolution Angulaire Sol-Espace (GIS-PHASE). Ce pôle d'excellence en Haute Résolution Angulaire, une branche de l'optique, permet de répondre de manière coordonnée et compétitive aux appels d'offres nationaux et internationaux dans un domaine de compétence où la France s'est illustrée par des avancées scientifiques de tout premier plan [13].

*

* *

Le projet SPHERE est constitué de trois instruments différents, dont l'un m'intéresse plus particulièrement. L'IFS, pour *Integral Field Spectrograph*, fournira en effet des cubes d'images

13. Source : `http://www.gis-phase.fr/accueil.html`

multispectrales, utiles pour réaliser des spectres d'exoplanètes. Cependant, avant de pouvoir réaliser des spectres, il faut pouvoir détecter ces exoplanètes. Bien avant le début de ma thèse, il a été prévu d'utiliser ces images multispectrales pour la détection en se basant sur une méthode existante.

En effet, l'enjeu est tel que depuis plus de dix ans, et ce bien avant la première image d'exoplanète, de nombreux travaux sur les techniques de traitement d'image pour la détection directe d'exoplanètes ont été entrepris. Dans ce domaine, les équipes nord-américaines ont notamment pris une avance certaine dans le traitement des images multispectrales. Une équipe canadienne a notamment développé un algorithme dénommé LOCI, qui fait aujourd'hui référence outre-atlantique. En ce moment-même, cet algorithme est utilisé massivement sur des images existantes dans l'espoir d'imager un maximum d'exoplanètes.

L'algorithme qui sera utilisé sur SPHERE repose sur les travaux, plus anciens, d'une équipe américaine. Cette méthode est cependant peu évolutive et risque d'avoir une efficacité modérée sur la nouvelle génération d'instrument dont SPHERE fait partie.

Dans ce contexte, ma mission est de développer une nouvelle méthode afin d'exploiter au maximum l'instrument pour la détection des objets les plus faibles. Elle sera utilisée pour traiter les données de l'IFS de SPHERE seulement si elle démontre son efficacité à traiter des images de l'instrument sur le ciel et sa robustesse par rapport aux différents types de données. La mise sur le ciel n'étant pas prévue avant la fin de l'année, ceci dépasse le cadre de ma thèse. Je dois donc démontrer que cette méthode est prometteuse sur des images simulées afin de poursuivre son développement en vue du traitement d'images réelles.

Pour ce faire je me suis appuyée sur les compétences scientifiques de mes encadrants et co-directeurs de thèse : Laurent Mugnier, David Mouillet, Jean-Luc Beuzit et Thierry Fusco. Leurs compétences scientifiques couvrent les domaines du traitement du signal, de l'instrumentation pour le haut contraste et de la physique des exoplanètes, assurant l'interdisciplinarité de l'équipe.

Les compétences humaines également mobilisées pour le projet sont les secrétaires à l'ONERA et à l'IPAG qui se sont occupées de mon contrat de travail et qui ont géré les ordres de mission lorsque je suis partie en déplacement.

Enfin, j'ai utilisé les moyens techniques mis à ma disposition par l'ONERA et l'IPAG : réseaux informatiques, bureaux et ordinateurs (fixe et portable).

E.1.3 Pourquoi une thèse et pourquoi sur ce sujet

Attirée par les sciences, je me passionne très jeune pour l'astrophysique et décide d'orienter mes études afin de réaliser une thèse dans ce domaine. Suite à l'obtention de mon Baccalauréat scientifique, je me dirige vers un DEUG en Sciences de la matière avec la certitude que je pourrais, et ce dès la deuxième année, assister à un cours d'astrophysique. Je choisis ensuite le parcours Licence de Physique fondamentale avant d'opter pour une première année de Master de Physique et applications. J'ai d'ailleurs l'occasion d'effectuer mon stage au LESIA [14] à l'Observatoire de Meudon qui m'a permis de découvrir le travail dans un laboratoire de recherche

14. Laboratoire d'Etudes Spatiales et d'Instrumentation en Astrophysique

sur le thème de la détection directe d'exoplanètes. Désireuse d'acquérir une première expérience professionnelle avant de réaliser ma thèse, j'intègre l'Institut d'Optique qui me permet de concilier études et mission de longue durée en entreprise au sein du département REOSC [15] de Sagem Défense Sécurité, connu pour avoir poli les miroirs du VLT, et ce tout en validant un Master recherche. L'entreprise me propose alors une mission tout à fait passionnante : participer à la conception d'un banc de mesures interférométriques destiné à contrôler les segments du miroir primaire de ce qui sera bientôt le plus grand télescope du monde : l'E-ELT [16]. À la fin de mon cursus émerge l'envie de développer des compétences en traitement d'image. Le choix de faire une thèse en traitement d'image pour l'instrumentation appliquée à l'astronomie est alors une opportunité de consolider mes acquis tout en développant de nouvelles compétences et de nouveaux savoirs. Cette thèse est en parfaite continuité avec mon parcours que je me suis appliquée à diversifier autant que possible. Il s'agit pour moi à la fois d'une solide formation et d'une réelle expérience professionnelle, indispensables pour l'avenir que j'envisage, tant dans le milieu de la recherche publique que celui de la recherche et développement dans des organismes scientifiques ou dans l'industrie.

E.2 Déroulement, gestion et estimation du coût du projet

E.2.1 Préparation et cadrage du projet

E.2.1.1 Facteurs de succès et de risques

Facteurs de succès. Les facteurs de succès identifiés en début de thèse étaient : ma forte motivation au début de la thèse et ma détermination à l'entretenir, un cadre financier serein et la qualité scientifique de mes encadrants.

Facteurs de risques. La décision de faire cette thèse était pour moi une entreprise peu risquée. Sur le plan professionnel, le plus gros risque était de se lancer pendant une période de trois ans dans le développement d'une méthode qui ne permet pas d'obtenir de bons résultats. Ce risque, intrinsèquement lié à la nature de la recherche, était cependant maîtrisé dans le sens où l'important dans une thèse repose dans les compétences effectivement développées et l'acquisition d'une démarche scientifique, essentielle pour la suite de ma carrière.

Un facteur de risque plus important était le risque de divergence entre les différents membres de l'équipe. Tout d'abord parce qu'il s'agit d'une collaboration entre deux laboratoires différents, ce qui peut entraîner des points de vue divergents sur la façon de gérer le projet. Ensuite parce que les « incompatibilités d'humeur » sont fréquentes au sein d'une équipe. Afin de maîtriser ce risque, un effort a été réalisé dans le domaine de la communication par tous les acteurs de ce projet en mettant en place par exemple un outil de partage de documents en ligne, une liste de diffusion et en planifiant très régulièrement des visioconférences afin de faire des points réguliers sur l'avancement du projet.

15. Recherche et Étude en Optique et Sciences Connexes
16. *European Extremely Large Telescope*

E.2.1.2 Financements externes

J'ai reçu des financements de la part de laboratoires américains (STScI [17] à Baltimore et JPL [18] à Los Angeles) qui m'ont accueillie pendant quelques jours et qui m'ont invitée à faire des séminaires.

E.2.1.3 Gestion des aspects contractuels

Dans mon contrat de travail qui me lie avec le CNRS, un article stipule l'« obligation de réserve et la propriété intellectuelle » des inventions faites par le bénéficiaire du contrat, ainsi que les résultats obtenus. Ceux-ci sont la propriété du CNRS. Je n'ai pas eu à déposer de brevets pendant ma thèse.

Dans mon contrat, il existe également une clause de confidentialité. Dans la pratique, un doctorant, tout comme un chercheur, est amené à diffuser ses travaux en conférence, dans des revues à comité de lecture et dans son manuscrit de thèse. Il est également stipulé que le bénéficiaire du « contrat doit solliciter de manière expresse de l'autorité hiérarchique, l'autorisation de publier ».

E.2.2 Conduite du projet

Pour la conduite du projet en collaboration avec mes deux laboratoires d'accueil nous avons mis en place, mes encadrants et moi, des réunions d'avancement par visioconférence avec une périodicité mensuelle. À chacune de ces réunions étaient présents au moins un intervenant de l'IPAG, un intervenant de l'ONERA et moi-même. Les processus de décisions et réorientations se s'ont fait principalement lors de ces rencontres. Il m'arrivait également de faire des points réguliers avec un encadrant en particulier.

Les différentes étapes de ma thèse sont regroupées dans le tableau de la figure E.2. Le code couleur se réfère aux quatre ensembles d'activités qui seront développées en section E.3.

E.2.3 Estimation et prise en charge du coût du projet

Dépenses. Les dépenses liées au financement de ma thèse se sont principalement réparties entre les ressources humaines (89%), les déplacements (9%) et la formation (2%), pour un montant total estimé d'environ 138500 euros (cf. Figure E.3, graphique de droite).

Les dépenses associées au projet telles que les matériels et prestations internes et externes mis à disposition ou achetés (amortissement), les consommables et coûts d'infrastructures (services communs, loyers des locaux, frais de fonctionnement) représentent moins de 2% du coût total de ma thèse.

Financements. Ma thèse a été principalement financée par 3 organismes : l'ONERA (51%), le CNRS (41%) et le CNAP (7%) (cf. Figure E.3, graphique de gauche). Mon contrat de thèse a été co-financé à parts égales entre le CNRS et l'ONERA. En pratique, j'ai signé un contrat

17. Space Telescope Science Institute
18. Jet Propulsion Laboratory

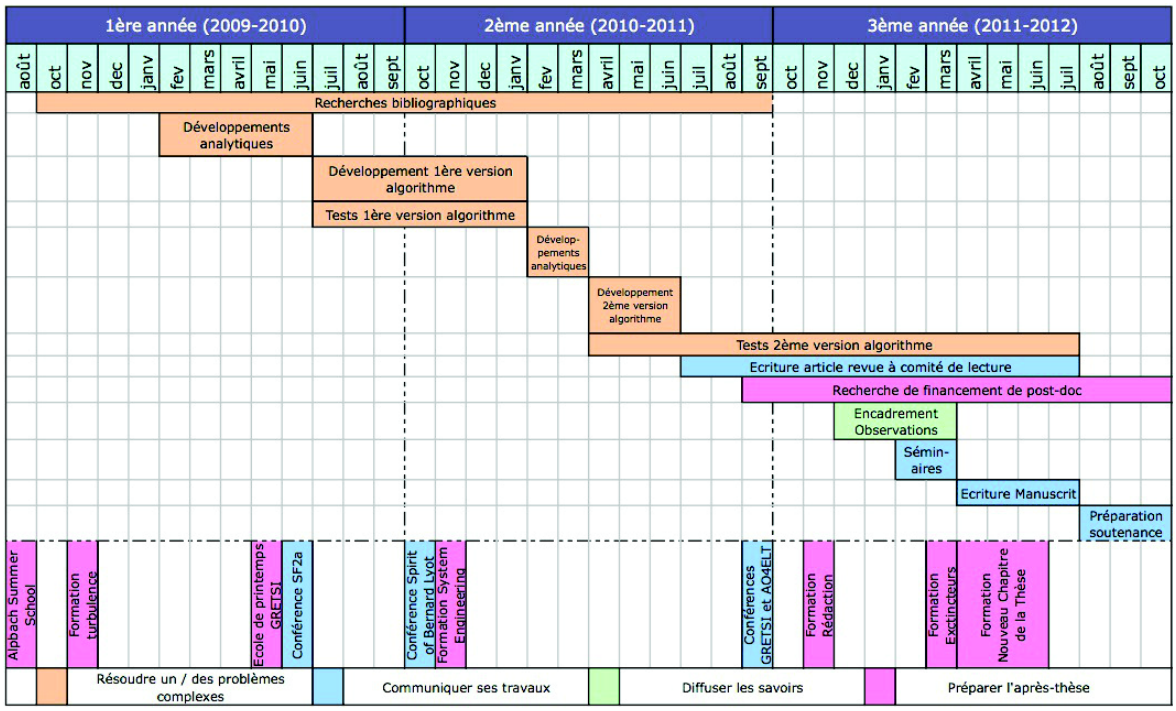


FIGURE E.2 – **Déroulement de la thèse : principales étapes.**

avec le CNRS et l'ONERA reverse 50% des dépenses liées à mon salaire au CNRS. Parmi mes encadrants et co-directeurs de thèse, 2 sont salariés de l'ONERA, 1 travaille au CNRS et 1 au CNAP [19].

Les déplacements ont été financés à parts égales par le CNRS et l'ONERA. Un faible pourcentage des frais de déplacements (> 1%) a été financé par des laboratoires étrangers.

Durant ma thèse, j'ai suivi plusieurs formations dans le cadre des cours post-Master (la formation NCT® en fait partie). J'ai estimé le coût de l'ensemble de ces formations ainsi que celui des inscriptions à l'Université à environ 2100 euros.

E.3 Identification, hiérarchisation et illustration des compétences mises en œuvre

E.3.1 Compétences développées pendant la thèse

Afin de décrire les différentes compétences développées pendant la thèse, j'ai choisi de les synthétiser sur l'organigramme de la figure E.4 et de les regrouper en trois catégories :

– **Savoirs.** Cette catégorie regroupe les connaissances acquises dans le champ de la discipline et dans d'autres domaines ;

19. Conseil National des Astronomes et des Physiciens

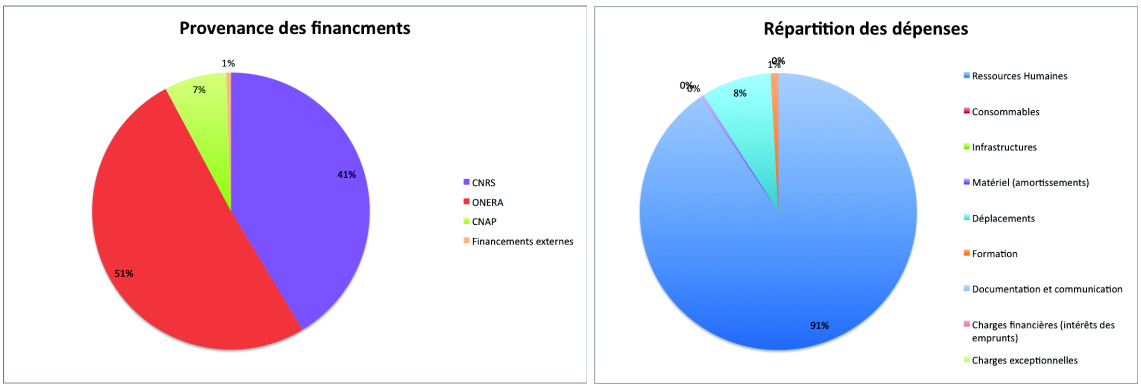


FIGURE E.3 – **Provenance des financements [gauche] et répartition des dépenses [droite].**

- **Savoir-faire.** Cette catégorie regroupe les connaissances méthodologiques, savoir-faire administratifs, organisationnels, linguistiques, etc ;
- **Savoir-être.** Cette catégorie regroupe les qualités personnelles nécessaires pour entreprendre une thèse mais aussi indispensables pour la mener à bout.

Avant tout chose, se lancer dans une thèse nécessite des qualités personnelles de base que sont la **motivation**, la **persévérance**, la **combativité** et l'**optimisme**. Par essence, entreprendre, mener une thèse et la soutenir nécessite obligatoirement d'être motivé. Cette motivation doit être initiale, sinon, on ne se lance pas dans l'aventure. Elle doit ensuite être constante tout le long de la thèse se transformant peu à peu en persévérance. Cela nécessite également d'être combatif et tout aussi important d'être optimiste et confiant en l'avenir. Si avant de commencer ma thèse, j'avais déjà une bonne dose de ces ingrédients (et cela s'illustre par les études que j'ai faites), je crois que la thèse n'a fait que les amplifier.

Une thèse est un ensemble d'activités qui se répartissent en plusieurs catégories :

1. **Résoudre un / des problèmes complexes** ;
2. **Communiquer ses travaux** ;
3. **Diffuser les savoirs** ;
4. **Préparer l'après-thèse**.

L'activité principale est bien sûr la résolution de **problèmes complexes**. C'est cette activité qui m'a pris le plus de temps pendant ma thèse. Il est également essentiel de savoir **communiquer ses travaux** en parallèle. La diffusion des savoirs, activité indissociable du chercheur à mon avis débute dès la thèse. Enfin, selon moi, la **préparation de l'après-thèse**, via notamment les formations post-Master, fait partie intégrante des trois années de thèse.

Jongler entre ces différentes catégories nécessite de savoir **gérer le temps et les ressources**. Cela s'est traduit notamment par la planification de mon travail personnel (mise en place d'objectifs à moyen et long terme). S'y additionne un **savoir-faire administratif**, qui s'est perfec-

tionné lors de la préparation des dossiers de réinscription à l'Université. Enfin, l'ensemble des activités de la thèse m'a permis de développer des capacités d'**anticipation**, d'**autonomie** et d'**organisation**. Ces compétences se sont traduites chez moi par le souci permanent de prendre du recul (premières réflexions sur plan du manuscrit dès la première année et tout au long de la thèse), une recherche précoce, dès le début de troisième année, d'un contrat de post-doctorat en Amérique du Nord mais également l'organisation de mon déménagement à Grenoble.

E.3.1.1 Résoudre un / des problèmes complexes

L'intitulé de ma thèse est en lui-même un problème complexe que j'ai dû résoudre pendant le temps qui m'était attribué. Le problème complexe principal se découpe en plusieurs sous-problèmes que j'ai du résoudre un par un. Les qualités requises pour un tel travail sont la **capacité à trouver, extraire et synthétiser rapidement des connaissances**, la **capacité à élaborer des solutions innovantes** et la **capacité à gérer l'échec et rebondir**.

J'ai réalisé ce travail au sein d'un groupe de cinq personnes concernées par le sujet. Dans ce contexte, il m'a été indispensable de **savoir travailler en équipe**, c'est à dire :

- organiser des réunions (réservation de salles, trouver la date, définir un ordre de jour, prendre en compte les contraintes techniques telles que l'appareil de visioconférence, réaliser des compte-rendus de réunions...),
- mettre en place des méthodes de travail communes (partage de données en ligne, versionnage et mise à disposition de l'équipe des programmes développés...).

Trouver, extraire et synthétiser rapidement des connaissances. J'ai acquis de nouvelles connaissances par le biais d'une recherche bibliographique, de discussions avec d'autres experts du domaine ou encore en assistant à des cours, séminaires et conférences. J'ai ainsi eu l'occasion pendant ma thèse d'acquérir une expertise scientifique dans les domaines que couvre ma thèse à savoir :

- le **Traitement d'image** (Problèmes inverses, Approche Bayésienne, Reconstruction d'image, Restauration d'images multispectrales) ;
- l'**Instrumentation** (Imagerie, Optique adaptative, Coronographie, Imagerie multispectrale) ;
- l'**Astrophysique** (Détection et caractérisation d'exoplanètes).

Au cours de ma thèse, j'ai également été amenée à développer des compétences techniques qui sont annexes au sujet de ma thèse mais dont j'avais besoin pour la mettre en œuvre : c'est par exemple le cas du **logiciel LaTex**, qui permet de rédiger des documents complexes comme le manuscrit de thèse, ou du **logiciel de programmation IDL** que j'ai utilisé pour mes programmes, mais aussi des différents **systèmes d'exploitation** utilisés (Unix en particulier).

Élaborer des solutions innovantes. Au cours de ma thèse, j'ai été amenée à combiner différentes stratégies originales afin d'**élaborer une solution innovante** au problème qui m'était posé. Le processus de recherche de solutions est pour moi indissociable d'une certaine **créativité**.

Gérer l'échec et rebondir. La **capacité à gérer l'échec et rebondir** est indispensable à la conduite d'une thèse. C'est la compétence qui permet de trouver les ressources nécessaires suite à un échec de chercher de nouvelles solutions au problème. Cela m'est arrivé maintes fois pendant ma thèse, à la fois sur des aspects techniques que sur des aspects recherche de financement. Un bon exemple est la recherche d'un financement pour un contrat de post-doctorat.

E.3.1.2 Communiquer ses travaux et Diffuser les savoirs

Je réunis les catégories communication des travaux et diffusion des savoirs car ces savoir-faire reposent essentiellement sur la **faculté à communiquer**. La différence réside alors dans la nature de l'auditoire.

Communiquer ses travaux. Dans le premier cas, il s'agit de diffuser le travail de thèse dans le milieu académique, vers les autres chercheurs du domaine, tout en constituant un réseau (ce dernier point sera discuté plus bas). J'ai ainsi eu l'occasion de présenter mon travail dans plusieurs conférences françaises et internationales et dans plusieurs laboratoires américains à l'occasion de séminaires. Ces expériences m'ont énormément apporté en terme de **capacité à communiquer oralement**. Elles n'auraient par ailleurs pas pu prendre forme sans un **savoir-faire organisationnel**.

La communication autour du travail de thèse peut se faire également via la rédaction d'articles pour des revues à comité de lecture. La qualité essentielle à mon sens pour cet exercice est la **rigueur scientifique**. Au cours de ma thèse, j'ai eu l'occasion d'écrire un tel article, même s'il n'est pas encore publié à l'heure actuelle. Ces **capacités rédactionnelles** sont également développées lors de la rédaction du mémoire de thèse.

Que ce soit en communication orale ou écrite, les **savoir-faire linguistiques** (savoir présenter, lire, écrire et argumenter en anglais) sont hautement développés car l'anglais est aujourd'hui indispensable pour communiquer ses travaux en recherche.

Diffuser les savoirs. Dans le second cas, l'auditoire est constitué de personnes issues du grand public, passionnées ou simplement curieuses d'Astronomie. Dans ce contexte, j'ai animé des soirées d'observation à l'IPAG. Mon rôle était d'accueillir les visiteurs, de leur présenter le télescope utilisé pour les observations, de pointer des objets célestes et de répondre à leurs questions diverses et variées. Cela m'a notamment permis de développer une **faculté à vulgariser**.

E.3.1.3 Préparer l'après-thèse

Pour préparer l'après-thèse et diversifier mon parcours, j'ai suivi plusieurs cours post-Master et formation dans des domaines variés, scientifiques ou non. L'ensemble de ces formations m'a permis de développer autant de savoirs, savoir-faire et savoir-être :

- **Formations scientifiques** : Alpbach Summer School (**Détection et caractérisation d'exoplanètes**), Imagerie à travers la turbulence (**Imagerie**), École de printemps du GRETSI (**Traitement d'image**) ;
- **Formation techniques** : Rédaction mémoire de thèse (**capacités rédactionnelles**) ;

- **Formation à la sécurité** : Formation **Maniement extincteurs** ;
- **Formations d'ouverture** : Formation *System Engineering Astronomy Projects*, Gestion des conflits (**adaptabilité, contrôle de soi**...), NCT®.

La préparation de l'après-thèse, via la recherche d'un financement de post-doctorat, m'a également permis de développer des compétences. J'ai dû apprendre à constituer des réseaux, tout comme me l'a permis l'activité « Communiquer ses travaux » décrite en sous-section E.3.1.2. Cela m'a également appris à gérer l'échec et rebondir tout comme je l'explique en sous-section E.3.1.1. Les toutes nouvelles compétences développées dans le cadre de la préparation à l'après-thèse sont des savoir-faire : la **capacité à définir un projet de recherche** et à le **défendre dans le cadre d'une demande de financement**.

E.3.2 Construction d'un réseau professionnel / personnel

Au cours de ma thèse, j'ai fortement amélioré mes capacités à développer un réseau à la fois professionnel et personnel.

J'ai commencé à construire un réseau professionnel par le biais de conférences auxquelles j'ai participé à la fois en France [20] et à l'international [21]. J'ai eu notamment la volonté de multiplier les conférences dans les différentes disciplines que couvre mon sujet de thèse (astrophysique, traitement d'image et du signal, instrumentation) afin de rencontrer les différents acteurs et également pour confirmer le côté interdisciplinaire de ma thèse.

J'ai également construit mon réseau professionnel (et amical) par l'intermédiaire de deux écoles d'été. La première s'est déroulée à Alpbach en Autriche [22] et était axée sur le développement des projets spatiaux pour la détection et la caractérisation d'exoplanètes. La seconde s'est déroulée en France sur le thème du traitement du signal et des images [23].

Enfin, j'ai rempli mon carnet d'adresses professionnelles en me rendant directement dans des laboratoires américains [24] afin de faire connaître mes travaux par le biais de discussions et de séminaires. Ce déplacement m'a permis de multiplier les rencontres et de prendre des contacts pour faire des demandes de financement de post-doctorat.

Par ailleurs, la perspective de nombreuses rencontres professionnelles et amicales a fortement motivé mon choix de faire cette thèse en collaboration entre deux laboratoires différents espacés géographiquement.

20. Conférence SF2a 2010 à Marseille (Astronomie et Astrophysique), Conférence GRETSI 2011 à Bordeaux (Traitement du signal et des images).
21. Conférence Spirit of Bernard Lyot 2010 à Paris (Instrumentation pour le haut contraste), Conférence AO4ELT 2011 à Victoria (Instrumentation pour les futurs télescopes géants).
22. Alpbach Summer School 2009.
23. Ecole de printemps du GRETSI 2010 à Porquerolles.
24. Space Telescope Science Institute à Baltimore, California Institute of Technology, University of California Los Angeles et Jet Propulsion Laboratory à Los Angeles

E.3.3 Compétences transférables en dehors de mon domaine de recherche

Les compétences que j'ai développées pendant ma thèse peuvent être utiles pour de nombreux autres métiers. Parmi eux, j'ai sélectionné l'exemple du métier de Formatrice junior. Pour exercer cette fonction, les compétences que je pourrais valoriser sont :

- la **curiosité intellectuelle** et la **créativité** afin de concevoir et de trouver les méthodes et les outils pédagogiques les mieux adaptés aux publics et aux objectifs de formation, qualités que j'ai développées au cours de mon travail de recherche ;
- l'**écoute** et la **faculté d'adaptation à des publics différents**, afin de comprendre ses interlocuteurs et les amener à acquérir de nouvelles connaissances, capacités que j'ai développées à la fois en discutant de mon travail avec d'autres chercheurs mais aussi avec des non-scientifiques ;
- la **capacité à gérer des conflits et à prendre du recul** pour obtenir une neutralité nécessaire à toute action de formation, capacités que j'ai développées entre autres lors d'une formation post-Master intitulée « Gestion des relations difficiles » ;
- la **capacité d'animation et dynamisme** inhérents à la gestion d'un groupe de personnes, que j'ai développé lors de l'animation de soirées d'observation à destination du grand public ;
- l'**aisance orale et relationnelle** pour s'exprimer en public, que j'ai développée en présentant mon travail lors de plusieurs conférences ;
- la **disponibilité** car les déplacements peuvent être nombreux, tout comme pour un doctorant.

E.4 Résultats, impact de mes recherches

L'impact de mes résultats, qui s'inscrivent dans le contexte d'une recherche fondamentale, se situe au niveau académique. Pour mon équipe, il s'agit d'apporter de nouvelles solutions de traitement d'image pour le haut contraste et de rester concurrentiel vis-à-vis des équipes qui travaillent sur la même thématique.

La stratégie des équipes concurrentes nord-américaines est d'exploiter au maximum un nombre massif de données réelles auxquelles ils peuvent avoir accès dans un but de découvertes rapides et de publications en nombre. Cette logique de court terme est étroitement liée à la course aux financements, qui est extrêmement concurrentielle outre-atlantique. Ces équipes s'appuient sur leur importante avance en développant par le passé des techniques ayant démontré leur efficacité.

Malgré tout, lors de mes discussions avec les membres de ces équipes lors de conférences et séminaires, j'ai reçu à chaque fois un accueil enthousiaste et critique de la part de mes interlocuteurs. L'idée d'une méthode reposant sur les connaissances que l'on a sur la formation d'image et pouvant évoluer selon le type d'instrument utilisé laisse effectivement rêveur. Il s'agit de préparer l'avenir et le traitement des données des futurs instruments et de tirer des conclusions quand au développement des futurs instruments. Les résultats de mes recherches ne sont donc pas immédiats, ils ouvrent de nombreuses perspectives. Il reste du travail avant de posséder une

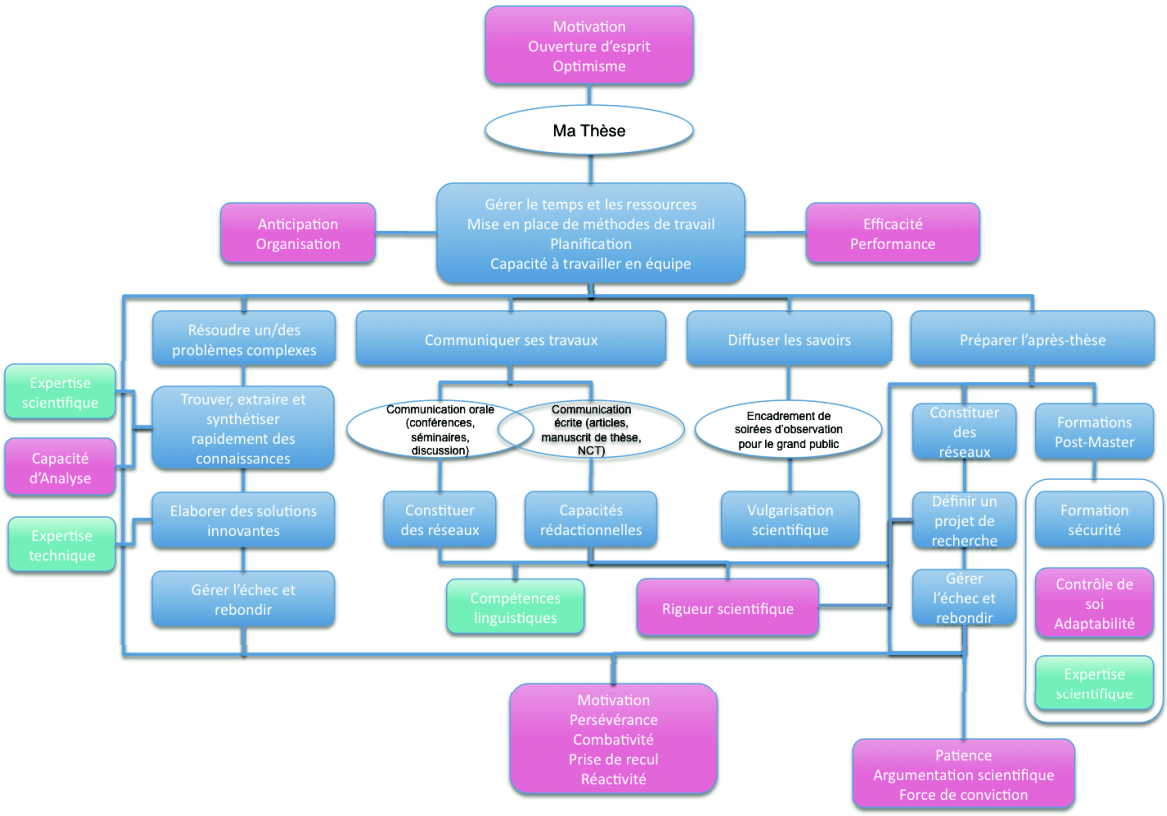


FIGURE E.4 – **Savoirs, savoir-faire et savoir-être développés pendant la thèse.**

méthode évolutive et, peut-être, une avance dans ce domaine dans les prochaines années.

Dans tous les cas, les résultats obtenus en recherche fondamentale contribuent à faire progresser notre niveau de connaissances, ce qui est à mon avis capital pour l'avenir de notre société.

*
* *

Le bilan de ma thèse est très positif à la fois d'un point de vue professionnel et d'un point de vue personnel.

Elle m'a en effet permis de travailler au sein de deux structures de recherche différentes (EPIC et laboratoire de recherche sous tutelle du CNRS et de l'UJF). Une première conséquence de cette collaboration a été la multiplication des rencontres professionnelles et amicales. Si avoir pris la parole en public de nombreuses fois m'a apporté un savoir-faire et m'a permis d'effectuer des progrès sensibles en communication, il s'agit pour moi d'un investissement personnel relativement important qui, j'en suis sûre, portera ses fruits.

Lors de cette collaboration, j'ai également eu l'occasion de développer des compétences scientifiques et techniques venant renforcer mon parcours universitaire tout en construisant un profil interdisciplinaire (traitement d'images, instrumentation, astrophysique).

Je suis intimement persuadée que la rigueur scientifique acquise lors de cette formation par la recherche sera un atout non négligeable pour ma future carrière quelle qu'elle soit.

E.5 Identification de pistes professionnelles

Je me suis posée la question de mes atouts pour un poste dans la recherche publique ou privée et une étude, intitulée : « Les besoins en compétences dans les métiers de la recherche à l'horizon 2020 » [25], a retenu mon attention. Selon cette étude, les 20 compétences clés attendues d'un chercheur expérimenté se répartissent en trois catégories : compétences scientifiques, compétences en gestion de projet et d'équipe et aptitudes personnelles. Dans le tableau E.1, j'ai listé ces compétences et mesuré pour chacune d'entre elles mon degré d'acquisition selon le barème suivant : en cours d'acquisition (+), acquis (++), acquis et maîtrisé (+++). J'y ai également représenté les compétences développées pendant la thèse en rouge (+), et les compétences acquises par ailleurs en bleu (+).

On peut remarquer en observant ce tableau la présence des croix rouges qui indiquent que la thèse ma ainsi permis d'acquérir de nouvelles compétences mais aussi de m'améliorer sur la plupart des compétences attendues d'un chercheur expérimenté. Le bilan est donc très positif de ce côté et m'encourage dans la poursuite d'une carrière de chercheuse que ce soit dans le secteur académique ou dans le secteur privé.

25. Source : `http://www.educpros.fr/uploads/media/Synthese_Apec_et_Deloitte_9nov2010.pdf` Apec/Deloitte Conseil, Les besoins en compétences dans les métiers de la recherche à l'horizon 2020, novembre 2010

TABLE E.1 – **Compétences personnelles en regard des compétences attendues d'un chercheur expérimenté.**

Compétences attendues d'un chercheur expérimenté	Compétences acquises sur une échelle de + à +++.
Compétences scientifiques	
Connaissances scientifiques	++
Capacités à apprendre et à se renouveler	+++
Capacité à formuler une problématique de recherche	+
Capacité d'analyse et maîtrise des outils informatiques à haut niveau de technicité	++
Capacité à travailler en interdisciplinarité	++
Capacité à intégrer les connaissances déjà existantes	++
Compétences en gestion de projet et d'équipe	
Capacité à travailler en équipe	+++
Capacité à développer un réseau	+
Compétences en communication	+
Capacité à évaluer	
Compétences linguistiques	++
Culture d'entreprise et compétence en gestion	++
Compétences en gestion de projet	+
Capacité à gérer et piloter des équipes	
Capacité à prendre en compte la pertinence de la recherche et son impact sur l'environnement	+
Aptitudes personnelles / savoir être	
Créativité	+
Ouverture d'esprit	++
Motivation / implication	++
Adaptabilité	+++
Capacité à s'auto-évaluer	+
+ : en cours d'acquisition, ++ : acquis, +++ : acquis et maîtrisé.	
+ : compétence acquise pendant la thèse, + : compétence acquise par ailleurs.	

E.5.1 Secteur académique

Après la thèse, j'envisage une carrière dans la recherche, de préférence dans un organisme public français (CNRS, CNAP, ONERA, CNES, CEA) ou européen (ESO, ESA). L'idéal serait de travailler dans un laboratoire d'instrumentation, en tant que chargée de recherche ou ingénieure de recherche spécialiste du haut contraste pour la détection d'exoplanètes.

C'est dans cette optique que j'envisage de réaliser un post-doctorat à l'étranger. Dans ce but, j'ai identifié un secteur géographique et un domaine précis de recherche qui m'intéressent plus particulièrement. J'ai ensuite effectué, dès la fin de l'année 2011, plusieurs candidatures pour des bourses de financement ou pour des postes plus précis. Ces candidatures n'ont rien donné mais le temps passé à les construire et à y réfléchir m'ont permis de mettre en marche le processus de remise en question inéluctable, mais aussi indispensable de la fin de thèse.

E.5.2 Secteur privé

Au cours de mes études en apprentissage, j'ai eu l'occasion de découvrir l'univers du secteur privé en travaillant pour le programme REOSC de l'entreprise Sagem Défense Sécurité. Cette expérience très enrichissante m'a notamment permis de me familiariser avec la recherche et développement au travers de la fonction d'ingénieur opticien dans un service d'instrumentation. Le métier de chercheur, relativement mal défini dans le secteur privé présente malgré tout de nombreuses similitudes avec le métier de chercheur dans une institution publique. La veille technologique et les recherches bibliographiques y sont très présentes, tout comme la compréhension de phénomènes physiques dans la perspective de recherche de solutions innovantes. Un exemple concret de poste illustre très bien ce constat. J'ai en effet reçu par diffusion interne au sein de l'ONERA, une offre de CDI chez *** [26], dans le Service de Recherche Avancée (cf. Table E.2). Même si, pour des raisons à la fois professionnelles et personnelles, je n'ai pas répondu à cette offre, j'ai trouvé intéressant d'identifier mes atouts afin de me préparer à postuler pour un poste de ce type.

Cette mission, qui cible les titulaires d'un doctorat, vise à « développer et utiliser des outils numériques pour identifier les structures de matériaux optiques d'intérêt pour » le métier de ***. Concernant les compétences scientifiques, mon interprétation personnelle est que mon expérience de développement d'un algorithme et l'utilisation d'outils numériques tel que le langage de programmation IDL [27] pendant ma thèse sont des atouts pour ce poste. Parmi les compétences que je possède et requises pour le poste figurent : la maîtrise de l'optique physique et géométrique, le goût pour l'expérimentation, le dynamisme et la recherche du travail en groupe. D'autres compétences me correspondent moins. C'est le cas de : « connaître et savoir utiliser les outils numériques traduisant les structures de Matériaux Optiques en propriétés optiques locales et macroscopiques ». J'ai en effet utilisé au cours des mes études certains outils numériques mais pas spécifiquement ceux-ci. Je ne pense cependant pas que ce soit rédhibitoire. Chaque métier possède ses propres outils numériques et avec de bonnes facultés d'adaptation, renforcées par une expérience de thèse, il est relativement aisé de passer d'un outil à un autre. Il est également

26. Par souci de confidentialité, je ne nomme pas l'entreprise en question.
27. *Interactive Data Language.*

demandé de connaître les outils de caractérisation des propriétés optiques et structurelles des matériaux. Je ne prétends pas connaître l'ensemble de ce outils, mais j'ai expérimenté une technique de mesure de l'indice de composants optiques. Comme précédemment, j'imagine qu'une formation aux techniques utilisées par l'entreprise suffirait à acquérir rapidement la compétence requise. Dans le cas de cette offre, je pourrais donc trouver, en faisant référence à mes expériences, les arguments nécessaires pour justifier de mon intérêt et de mes compétences pour le poste.

Si je suis amenée à postuler pour un poste dans une entreprise privée, je serais particulièrement intéressée par des entreprises qui travaillent pour le secteur académique, dans le spatial notamment comme c'est le cas de Thales Aliena Space. Un poste d'ingénieure en instrumentation optique et/ou en traitement d'image me conviendrait tout à fait.

TABLE E.2 – **Offre de CDI en Recherche Avancée pour l'entreprise ***.**

Laboratoire d'Optique Recherche Avancée Entreprise *** Profil Poste CDI Recherche Avancée **Mission** : Développer et utiliser des outils numériques pour identifier les structures de matériaux optiques d'intérêt pour notre métier **Responsabilités Clés** : Être reconnu comme expert dans son domaine technique. Être force de proposition et mettre son expertise au service de l'innovation produit. Assurer le bon développement et la réalisation de l'activité par l'encadrement technique, la prise en charge de collaborations internes comme externes. Assurer une veille scientifique et technique et alerter sa hiérarchie sur les grands enjeux. **Objectif** : Traduire les besoins [...] en cahier des charges [...]. Positionner ces cahiers des charges [...] Assister à la traduction de ces propositions [...] **Compétences requises** : Maîtrise de l'optique physique et géométrique. Connaître et savoir utiliser les outils numériques traduisant les structures de Matériaux Optiques en propriétés optiques locales et macroscopiques. Goût pour l'expérimentation et connaissance des outils de caractérisation des propriétés optiques et structurelles des matériaux. Être dynamique, entreprenant et rechercher le travail en groupe. **Formation** : Doctorat

E.6 Conclusion

Pour conclure ce Nouveau Chapitre de la Thèse®, j'ai envie de dire qu'une thèse est un véritable défi et qu'à ce jour, il me reste encore quelques mois pour finir de le relever. Ces trois dernières années, j'ai vécu une formidable expérience qui m'a beaucoup appris, tant sur le point de vue professionnel que sur le point de vue personnel. Si la sérénité n'a pas toujours été au rendez-vous, je crois que le plus grand mérite de cette expérience a été de contribuer à me faire prendre du recul sur ma vie en général et mes aspirations.

Cette thèse m'a également permis de goûter aux joies de la recherches mais aussi d'appréhender les difficultés qui m'attendent si je veux poursuivre dans ce domaine. Néanmoins, j'ai pu, en partie grâce au NCT®, identifier les qualités que je peux mettre en valeur pour réussir. Cette formation m'a permis de cristalliser la réflexion que j'avais entamée sur mon avenir professionnel. Je me suis engagée à faire le NCT® en grande partie pour faire un bilan de ces trois années

et pour apprendre à mieux identifier les compétences qui me seront utiles pour la suite de ma carrière : objectif atteint.

Liste des publications

Revue internationale à comité de lecture

- **M. Ygouf**, L. M. Mugnier, D. Mouillet, T. Fusco, and J.-L. Beuzit, "Simultaneous exoplanet detection and instrument aberration retrieval in multispectral coronagraphic imaging," in "Astronomy and Astrophysics," (2013).

Congrès avec actes

- **M. Ygouf**, L. M. Mugnier, D. Mouillet, T. Fusco, and J.-L. Beuzit, "Myopic exoplanet detection algorithm based on an analytical model of AO-corrected coronagraphic multispectral imaging," in "Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes (AO4ELT)," (2011). Sep.25-30, Victoria (Canada).

- **M. Ygouf**, L. M. Mugnier, D. Mouillet, T. Fusco, and J.-L. Beuzit, "Restauration myope d'images coronographiques pour la détection d'exoplanètes," in "23ème Colloque sur le Traitement du Signal et des Images," (2011). Sep.5-8, Bordeaux (France).

- **M. Ygouf**, L. Mugnier, J. Sauvage, T. Fusco, D. Mouillet, and J.-L. Beuzit, "Approximate analytical expression for AO-corrected coronagraphic imaging in preparation of exoplanet signal extraction," in "SF2A-2010," (2010), pp. 97–+.

- **M. Ygouf**, L. Mugnier, J.-F. Sauvage, T. Fusco, D. Mouillet, and J.-L. Beuzit, "Approximate analytical model of AO-corrected coronagraphic imaging, with a view to exoplanet detection and characterisation," in "In the Spirit of Lyot 2010," (2010).

- D. Rouan, D. Pelat, **M. Ygouf**, J.-M. Reess, F. Chemla, and P. Riaud, "A new concept of achromatic phase shifter for nulling interferometry," in "Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series," , vol. 6693 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series* (2007).

Bibliographie

[1] M. Mayor et D. Queloz, *A Jupiter-mass companion to a solar-type star*, Nature (London), 378, pp. 355–359 (novembre 1995).

[2] A. Cumming, R. P. Butler, G. W. Marcy, S. S. Vogt, J. T. Wright et D. A. Fischer, *The Keck Planet Search : Detectability and the Minimum Mass and Orbital Period Distribution of Extrasolar Planets*, Pub. Astron. Soc. Pacific, 120, pp. 531–554 (mai 2008).

[3] M. Mayor, S. Udry, C. Lovis, F. Pepe, D. Queloz, W. Benz, J.-L. Bertaux, F. Bouchy, C. Mordasini et D. Segransan, *The HARPS search for southern extra-solar planets. XIII. A planetary system with 3 super-Earths (4.2, 6.9, and 9.2 $M_\oplus$)*, Astron. Astrophys., 493, pp. 639–644 (janvier 2009).

[4] A. W. Howard, G. W. Marcy, J. A. Johnson, D. A. Fischer, J. T. Wright, H. Isaacson, J. A. Valenti, J. Anderson, D. N. C. Lin et S. Ida, *The Occurrence and Mass Distribution of Close-in Super-Earths, Neptunes, and Jupiters*, Science, 330, pp. 653– (octobre 2010).

[5] A. W. Howard, G. W. Marcy, S. T. Bryson, J. M. Jenkins, J. F. Rowe, N. M. Batalha, W. J. Borucki, D. G. Koch, E. W. Dunham, T. N. Gautier III, J. Van Cleve, W. D. Cochran, D. W. Latham, J. J. Lissauer, G. Torres, T. M. Brown, R. L. Gilliland, L. A. Buchhave, D. A. Caldwell, J. Christensen-Dalsgaard, D. Ciardi, F. Fressin, M. R. Haas, S. B. Howell, H. Kjeldsen, S. Seager, L. Rogers, D. D. Sasselov, J. H. Steffen, G. S. Basri, D. Charbonneau, J. Christiansen, B. Clarke, A. Dupree, D. C. Fabrycky, D. A. Fischer, E. B. Ford, J. J. Fortney, J. Tarter, F. R. Girouard, M. J. Holman, J. A. Johnson, T. C. Klaus, P. Machalek, A. V. Moorhead, R. C. Morehead, D. Ragozzine, P. Tenenbaum, J. D. Twicken, S. N. Quinn, H. Isaacson, A. Shporer, P. W. Lucas, L. M. Walkowicz, W. F. Welsh, A. Boss, E. Devore, A. Gould, J. C. Smith, R. L. Morris, A. Prsa, T. D. Morton, M. Still, S. E. Thompson, F. Mullally, M. Endl et P. J. MacQueen, *Planet Occurrence within 0.25 AU of Solar-type Stars from Kepler*, Astrophys. J. . Suppl., 201, p. 15 (août 2012).

[6] D. Charbonneau, T. M. Brown, R. W. Noyes et R. L. Gilliland, *Detection of an Extrasolar Planet Atmosphere*, Astrophys. J., 568, pp. 377–384 (mars 2002).

[7] A. Vidal-Madjar, A. Lecavelier des Etangs, J.-M. Désert, G. E. Ballester, R. Ferlet, G. Hébrard et M. Mayor, *An extended upper atmosphere around the extrasolar planet HD209458b*, Nature (London), 422, pp. 143–146 (mars 2003).

[8] M. R. Swain, G. Vasisht et G. Tinetti, *The presence of methane in the atmosphere of an extrasolar planet*, Nature (London), 452, pp. 329–331 (mars 2008).

[9] S. Seager et D. Deming, *Exoplanet Atmospheres*, 48, pp. 631–672 (septembre 2010).

[10] N. P. Gibson, S. Aigrain, S. Roberts, T. M. Evans, M. Osborne et F. Pont, *A Gaussian process framework for modelling instrumental systematics : application to transmission spectroscopy*, Mon. Not. R. Astron. Soc., 419, pp. 2683–2694 (janvier 2012).

[11] J. L. Bean, J.-M. Désert, P. Kabath, B. Stalder, S. Seager, E. Miller-Ricci Kempton, Z. K. Berta, D. Homeier, S. Walsh et A. Seifahrt, *The Optical and Near-infrared Transmission Spectrum of the Super-Earth GJ 1214b : Further Evidence for a Metal-rich Atmosphere*, Astrophys. J., 743, p. 92 (décembre 2011).

[12] G. Chauvin, A.-M. Lagrange, C. Dumas, B. Zuckerman, D. Mouillet, I. Song, J.-L. Beuzit et P. Lowrance, *A giant planet candidate near a young brown dwarf. Direct VLT/NACO observations using IR wavefront sensing*, Astron. Astrophys., 425, pp. L29–L32 (octobre 2004).

[13] G. Chauvin, A.-M. Lagrange, C. Dumas, B. Zuckerman, D. Mouillet, I. Song, J.-L. Beuzit et P. Lowrance, *Giant planet companion to 2MASSW J1207334-393254*, Astron. Astrophys., 438, pp. L25–L28 (août 2005).

[14] A.-M. Lagrange, D. Gratadour, G. Chauvin, T. Fusco, D. Ehrenreich, D. Mouillet, G. Rousset, D. Rouan, F. Allard, É. Gendron, J. Charton, L. Mugnier, P. Rabou, J. Montri et F. Lacombe, *A probable giant planet imaged in the β Pictoris disk. VLT/NaCo deep L'-band imaging*, Astron. Astrophys., 493, pp. L21–L25 (janvier 2009).

[15] A.-M. Lagrange, M. Bonnefoy, G. Chauvin, D. Apai, D. Ehrenreich, A. Boccaletti, D. Gratadour, D. Rouan, D. Mouillet, S. Lacour et M. Kasper, *A Giant Planet Imaged in the Disk of the Young Star β Pictoris*, Science, 329, pp. 57– (juillet 2010).

[16] C. Marois, B. Macintosh, T. Barman, B. Zuckerman, I. Song, J. Patience, D. Lafrenière et R. Doyon, *Direct Imaging of Multiple Planets Orbiting the Star HR 8799*, Science, 322, pp. 1348– (novembre 2008).

[17] C. Marois, B. Zuckerman, Q. M. Konopacky, B. Macintosh et T. Barman, *Images of a fourth planet orbiting HR 8799*, Nature (London), 468, pp. 1080–1083 (décembre 2010).

[18] P. Kalas, J. R. Graham, E. Chiang, M. P. Fitzgerald, M. Clampin, E. S. Kite, K. Stapelfeldt, C. Marois et J. Krist, *Optical Images of an Exosolar Planet 25 Light-Years from Earth*, Science, 322, pp. 1345– (novembre 2008).

[19] F. Roddier, *The effects of atmospherical turbulence in optical astronomy*, Dans *Progress in Optics*, sous la direction de E. Wolf, vol. XIX, pp. 281–376. North Holland, Amsterdam (1981).

[20] J.-M. Conan, G. Rousset et P.-Y. Madec, *Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence*, J. Opt. Soc. Am. A, 12 (12), pp. 1559–1570 (juillet 1995).

[21] F. Roddier, rédacteur en chef, *Adaptive Optics in Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge (1999).

[22] R. A. Gonsalves, *Phase retrieval and diversity in adaptive optics*, Optical Engineering, 21, pp. 829–832 (octobre 1982).

[23] A. Blanc, *Identification de réponse impulsionnelle et restauration d'images : apports de la diversité de phase*, Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay (juillet 2002).

[24] B. Lyot, *The study of the solar corona and prominences without eclipses*, Mon. Not. R. Astron. Soc., 99, pp. 580–594 (1939).

[25] F. Roddier et C. Roddier, *Stellar coronograph with phase mask*, Pub. Astron. Soc. Pacific, 109, pp. 815–820 (1997).

[26] D. Rouan, P. Riaud, A. Boccaletti, Y. Clenet et A. Labeyrie, *The four-quadrant phase-mask coronagraph. I. Principle*, Pub. Astron. Soc. Pacific, 112, pp. 1479–1486 (2000).

[27] M. N'diaye, K. Dohlen, S. Cuevas, P. Lanzoni, F. Chemla, C. Chaumont, R. Soummer et E. T. Griffiths, *Experimental results with a second-generation Roddier & Roddier phase mask coronagraph*, Astron. Astrophys., 509, p. A8 (janvier 2010).

[28] G. Foo, D. M. Palacios et G. A. Swartzlander, *Optical vortex coronagraph*, Opt. Lett., 30, pp. 3308–3310 (2005).

[29] D. Mawet, P. Riaud, O. Absil et J. Surdej, *Annular groove phase mask coronagraph*, Astrophys. J., 633, pp. 1191–1200 (2005).

[30] E. Serabyn, D. Mawet, J. K. Wallace, K. Liewer, J. Trauger, D. Moody et B. Kern, *Recent progress in vector vortex coronagraphy*, Dans *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, vol. 8146 de *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series* (septembre 2011).

[31] O. Guyon, *Coronagraphic Techniques for Direct Imaging of Exoplanets and Disks*, Dans *American Institute of Physics Conference Series*, sous la direction de T. Usuda, M. Tamura et M. Ishii, vol. 1158 de *American Institute of Physics Conference Series*, pp. 285–292 (août 2009).

[32] D. Mawet, L. Pueyo, P. Lawson, L. Mugnier, W. Traub, A. Boccaletti, J. Trauger, S. Gladysz, E. Serabyn, J. Milli, R. Belikov, M. Kasper, P. Baudoz, B. Macintosh, C. Marois, B. Oppenheimer, H. Barrett, J.-L. Beuzit, N. Devaney, J. Girard, O. Guyon, J. Krist, B. Mennesson, D. Mouillet, N. Murakami, L. Poyneer, D. Savransky, C. Vérinaud et J. K. Wallace, *Review of small-angle coronagraphic techniques in the wake of ground-based second-generation adaptive optics systems*, ArXiv e-prints (juillet 2012).

[33] R. Lenzen, L. Close, W. Brandner, M. Hartung et B. Biller, *NACO-SDI : A Novel Simultaneous Differential Imager for the Direct Imaging of Giant Extra-Solar Planets*, Dans *Science with Adaptive Optics*, sous la direction de W. Brandner et M. E. Kasper, p. 46 (2005).

[34] C. Marois, R. Doyon, D. Nadeau, R. Racine, M. Riopel, P. Vallée et D. Lafrenière, *TRIDENT : An Infrared Differential Imaging Camera Optimized for the Detection of Methanated Substellar Companions*, Pub. Astron. Soc. Pacific, 117, pp. 745–756 (juillet 2005).

[35] R. Bacon, G. Adam, A. Baranne, G. Courtes, D. Dubet, J. P. Dubois, E. Emsellem, P. Ferruit, Y. Georgelin, G. Monnet, E. Pecontal, A. Rousset et F. Say, *3D spectrography at high spatial resolution. I. Concept and realization of the integral field spectrograph TIGER.*, Astron. Astrophys. Suppl. Ser., 113, p. 347 (octobre 1995).

[36] J. Antichi, K. Dohlen, R. G. Gratton, D. Mesa, R. U. Claudi, E. Giro, A. Boccaletti, D. Mouillet, P. Puget et J.-L. Beuzit, *BIGRE : A Low Cross-Talk Integral Field Unit Tailored for Extrasolar Planets Imaging Spectroscopy*, Astrophys. J., 695, pp. 1042–1057 (avril 2009).

[37] D. Mouillet, *Systèmes planétaires extra-solaires. Observation et instrumentation en imagerie directe.*, Habilitation à diriger des recherches, Université Joseph Fourier (mars 2010).

[38] J.-L. Beuzit, M. Feldt, K. Dohlen, D. Mouillet, P. Puget, F. Wildi, L. Abe, J. Antichi, A. Baruffolo, P. Baudoz, A. Boccaletti, M. Carbillet, J. Charton, R. Claudi, M. Downing, C. Fabron, P. Feautrier, E. Fedrigo, T. Fusco, J.-L. Gach, R. Gratton, T. Henning, N. Hubin, F. Joos, M. Kasper, M. Langlois, R. Lenzen, C. Moutou, A. Pavlov, C. Petit, J. Pragt, P. Rabou, F. Rigal, R. Roelfsema, G. Rousset, M. Saisse, H.-M. Schmid, E. Stadler, C. Thalmann, M. Turatto, S. Udry, F. Vakili et R. Waters, *SPHERE : a planet finder instrument for the VLT*, Dans *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, vol. 7014 de *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series* (août 2008).

[39] D. Mouillet, J.-L. Beuzit, G. Chauvin et A.-M. Lagrange, *Very Accurate Imaging of the Close Environment of Bright Objects in Visible and Near-Infrared*, Dans *Scientific Drivers for ESO Future VLT/VLTI Instrumentation*, sous la direction de J. Bergeron et G. Monnet, p. 258 (2002).

[40] J.-F. Sauvage, T. Fusco, C. Petit, S. Meimon, E. Fedrigo, M. S. Valles, M. Kasper, N. Hubin, J.-L. Beuzit, J. Charton, A. Costille, P, . Rabou, D. Mouillet, P. Baudoz, T. Buey, A. Sevin, F. Wildi et K. Dohlen, *SAXO, the eXtreme Adaptive Optics System of SPHERE. Overview and calibration procedure*, Vol. 7736, p. 77360F. SPIE (2010).

[41] R. Racine, G. A. Walker, D. Nadeau et C. Marois, *Speckle Noise and the Detection of Faint Companions*, Pub. Astron. Soc. Pacific, 112, pp. 587–594 (1999).

[42] R. Galicher, P. Baudoz, G. Rousset, J. Totems et M. Mas, *Self-coherent camera as a focal plane wavefront sensor : simulations*, Astron. Astrophys., 509, p. A31 (janvier 2010).

[43] F. Malbet, J. W. Yu et M. Shao, *High-Dynamic-Range Imaging Using a Deformable Mirror for Space Coronography*, Pub. Astron. Soc. Pacific, 107, p. 386 (avril 1995).

[44] J. Antichi, C. Vérinaud, O. Preis, A. Delboulbé, G. Zins, P. Rabou, J.-L. Beuzit, S. Dandy, J.-F. Sauvage, T. Fusco, E. Aller-Carpentier, M. Kasper et N. Hubin, *FFREE : a Fresnel-FRee Experiment for EPICS, the EELT planets imager*, Dans *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, vol. 7736 de *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series* (juillet 2010).

[45] D. Lafrenière, C. Marois, R. Doyon, D. Nadeau et É. Artigau, *A New Algorithm for Point-Spread Function Subtraction in High-Contrast Imaging : A Demonstration with Angular Differential Imaging*, Astrophys. J., 660, pp. 770–780 (mai 2007).

[46] A. Cornia, L. M. Mugnier, D. Mouillet, A. Vigan, A. Eggenberger, G. Rousset, A. Boccaletti, M. Carbillet, K. Dohlen, T. Fusco, J. Carson et G. Montagnier, *Optimal*

method for exoplanet detection by spectral and angular differential imaging, Dans *Adaptive Optics Systems II*, sous la direction de B. L. Ellerbroek, M. Hart, N. Hubin et P. L. Wizinowich, vol. 7736, p. 7736 1E. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. (2010).

[47] J. R. Crepp, L. Pueyo, D. Brenner, B. R. Oppenheimer, N. Zimmerman, S. Hinkley, I. Parry, D. King, G. Vasisht, C. Beichman, L. Hillenbrand, R. Dekany, M. Shao, R. Burruss, L. C. Roberts, A. Bouchez, J. Roberts et R. Soummer, *Speckle Suppression with the Project 1640 Integral Field Spectrograph*, Astrophys. J., 729, pp. 132–+ (mars 2011).

[48] C. Marois, R. Doyon, R. Racine et D. Nadeau, *Efficient Speckle Noise Attenuation in Faint Companion Imaging*, Pub. Astron. Soc. Pacific, 112, pp. 91–96 (janvier 2000).

[49] W. B. Sparks et H. C. Ford, *Imaging Spectroscopy for Extrasolar Planet Detection*, Astrophys. J., 578, pp. 543–564 (octobre 2002).

[50] N. Thatte, R. Abuter, M. Tecza, E. L. Nielsen, F. J. Clarke et L. M. Close, *Very high contrast integral field spectroscopy of AB Doradus C : 9-mag contrast at 0.2arcsec without a coronagraph using spectral deconvolution*, Mon. Not. R. Astron. Soc., 378, pp. 1229–1236 (juillet 2007).

[51] L. Pueyo, J. R. Crepp, G. Vasisht, D. Brenner, B. R. Oppenheimer, N. Zimmerman, S. Hinkley, I. Parry, C. Beichman, L. Hillenbrand, L. C. Roberts, R. Dekany, M. Shao, R. Burruss, A. Bouchez, J. Roberts et R. Soummer, *Application of a Damped Locally Optimized Combination of Images Method to the Spectral Characterization of Faint Companions Using an Integral Field Spectrograph*, Astrophys. J. . Suppl., 199, p. 6 (mars 2012).

[52] R. Soummer, J. B. Hagan, L. Pueyo, A. Thormann, A. Rajan et C. Marois, *Orbital Motion Of HR 8799 b, c, d Using Hubble Space Telescope Data From 1998 : Constraints On Inclination, Eccentricity And Stability*, Dans *American Astronomical Society Meeting Abstracts #219*, vol. 219 de *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, p. #110.07 (janvier 2012).

[53] R. Soummer, L. Pueyo et J. Larkin, *Detection and Characterization of Exoplanets and Disks Using Projections on Karhunen-Loève Eigenimages*, Astrophys. J. Lett., 755, p. L28 (août 2012).

[54] D. Burke et N. Devaney, *Enhanced faint companion photometry and astrometry using wavelength diversity*, Journal of the Optical Society of America A, 27 (26), p. A260000 (septembre 2010).

[55] C. E. Dionne et R. A. Gonsalves, *Imaging through an optical waveguide with wavelength diversity*, Optical Engineering, 43, pp. 445–449 (février 2004).

[56] R. G. Paxman et J. H. Seldin, *Fine-resolution astronomical imaging with phase-diverse speckle*, Dans *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, sous la direction de P. S. Idell, vol. 2029 de *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, pp. 287–298 (novembre 1993).

[57] S. Desidera, R. Gratton, R. Claudi, J. Antichi, D. Mesa, M. Turatto, P. Bruno, E. Cascone, V. De Caprio, E. Giro, S. Scuderi, M. Feldt, A. Pavlov, O. Moeller-Nilsson, K. Dohlen, J. L.

Beuzit, D. Mouillet, P. Puget et F. Wildi, *Calibration and data reduction for planet detection with SPHERE-IFS*, Dans *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, vol. 7014 de *Presented at the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference* (août 2008).

[58] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill (1968).

[59] J.-M. Conan, *Étude de la correction partielle en optique adaptative*, Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay (octobre 1994).

[60] A. Cornia, *High-contrast differential image processing for extrasolar planet detection*, Thèse de doctorat, École Doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique d'Île de France (décembre 2010).

[61] J.-F. Sauvage, *Calibration et méthodes d'inversion en imagerie haute dynamique pour la détection directe d'exoplanétes.*, Thèse de doctorat, Université Paris VII (décembre 2007).

[62] J.-F. Sauvage, L. Mugnier, G. Rousset et T. Fusco, *Analytical expression of long-exposure AO-corrected coronagraphic image. First application to exoplanet detection*, J. Opt. Soc. Am. A (2010).

[63] L. M. Mugnier, T. Fusco et J.-M. Conan, *MISTRAL : a myopic edge-preserving image restoration method, with application to astronomical adaptive-optics-corrected long-exposure images*, Journal of the Optical Society of America A, 21, pp. 1841–1854 (octobre 2004).

[64] M. D. Perrin, A. Sivaramakrishnan, R. B. Makidon, B. R. Oppenheimer et J. R. Graham, *The Structure of High Strehl Ratio Point-Spread Functions*, Astrophys. J., 596, pp. 702–712 (octobre 2003).

[65] C. Cavarroc, A. Boccaletti, P. Baudoz, T. Fusco et D. Rouan, *Fundamental limitations on Earth-like planet detection with extremely large telescopes*, Astron. Astrophys., 447, pp. 397–403 (février 2006).

[66] R. Soummer, A. Ferrari, C. Aime et L. Jolissaint, *Speckle Noise and Dynamic Range in Coronagraphic Images*, Astrophys. J., 669, pp. 642–656 (novembre 2007).

[67] M. Born et E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Sixth (corrected) édition (1993).

[68] P. Léna et coll., *L'observation en astrophysique*, EDP Sciences / CNRS Éditions (Décembre 2008).

[69] J. Idier, *Bayesian Approach to Inverse Problems*, ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc (Apr. 2008).

[70] P. Comon et C. Jutten, *Handbook of Blind Source Separation*, Elsevier Ltd. (2010).

[71] E. Thiébaut et J.-M. Conan, *Strict a priori constraints for maximum-likelihood blind deconvolution*, Journal of the Optical Society of America A, 12, pp. 485–492 (mars 1995).

[72] E. Thiébaut, *Optimization issues in blind deconvolution algorithms*, Dans *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, sous la direction de J.-L. Starck et F. D. Murtagh, vol. 4847 de *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, pp. 174–183 (décembre 2002).

[73] F. Soulez, *Une approche "problèmes inverses" pour la reconstruction de données multi-dimensionnelles par méthodes d'optimisation*, Thèse de doctorat, Université de Saint-Etienne (décembre 2008).

[74] F. Orieux, *Inversion bayésienne myope et non-supervisée pour l'imagerie sur-résolue. Application Ã l'instrument SPIRE de l'observatoire spatial Herschel*, Thèse de doctorat, Université Paris-Sud 11 (novembre 2009).

[75] E. Thiébaut et L. Mugnier, *Maximum a posteriori planet detection and characterization with a nulling interferometer*, Dans *IAU Colloq. 200 : Direct Imaging of Exoplanets : Science & Techniques*, sous la direction de C. Aime & F. Vakili, pp. 547–552 (2006).

[76] E. Walter et L. Pronzato, *Identification de Modèles Paramétriques à Partir de Données Expérimentales*, Dunod (Mars 1994).

[77] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling et B. P. Flannery, *Numerical Recipes 3rd Edition : The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, New York, NY, USA, 3 édition (2007).

[78] S. Meimon, L. M. Mugnier et G. Le Besnerais, *Self-calibration approach for optical long-baseline interferometry imaging*, J. Opt. Soc. Am. A, 26, pp. 108–+ (décembre 2009).

[79] D. Gratadour, L. M. Mugnier et D. Rouan, *Sub-pixel image registration with a maximum likelihood estimator*, Astron. Astrophys., 443, pp. 357–365 (novembre 2005).

[80] L. M. Mugnier, C. Robert, J.-M. Conan, V. Michau et S. Salem, *Regularized multiframe myopic deconvolution from wavefront sensing*, Dans *Propagation through the Atmosphere III*, sous la direction de M. C. Roggemann et L. R. Bissonnette, vol. 3763, pp. 134–144, Bellingham, Washington, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., SPIE (1999).

[81] G. Le Besnerais, S. Lacour, L. M. Mugnier, E. Thiébaut, G. Perrin et S. Meimon, *Advanced Imaging Methods for Long-Baseline Optical Interferometry*, IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2 (5), pp. 767–780 (octobre 2008).

[82] R. W. Gerchberg et W. O. Saxton, *A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures*, Optik, 35, p. 237 (1974).

[83] J. R. Fienup, *Phase retrieval algorithms : a comparison*, Appl. Opt., 21, pp. 2758–2769 (août 1982).

[84] L. M. Mugnier, A. Blanc et J. Idier, *Phase Diversity : a Technique for Wave-Front Sensing and for Diffraction-Limited Imaging*, Dans *Advances in Imaging and Electron Physics*, sous la direction de P. Hawkes, vol. 141, chap. 1, pp. 1–76. Elsevier (2006).

[85] X. Rondeau, *Imagerie à travers la turbulence : mesure inverse du front d'onde et centrage optimal*, Thèse de doctorat, Université Lyon 1 (novembre 2007).

[86] L. Mugnier, *Problèmes inverses en Haute Résolution Angulaire*, Habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot – Paris 7 (octobre 2011).

[87] B. Paul, J.-F. Sauvage, L. Mugnier, M. N'Diaye, K. Dohlen, M. Ferrari et T. Fusco, *Coronagraphic focal-plane wave-front estimation for exoplanet detection : application to the Roddier & Roddier coronagraph*, Dans *Proc. SPIE* (July 2012).

[88] C. Cavarroc, *Caractérisation d'un coronographe pour la détection d'exoplanètes avec MIRI/JWST*, Thèse de doctorat, École Doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique d'Île de France (novembre 2007).

[89] A. Sivaramakrishnan, J. P. Lloyd, P. E. Hodge et B. A. Macintosh, *Speckle Decorrelation and Dynamic Range in Speckle Noise-limited Imaging*, Astrophys. J. Lett., 581, pp. L59–L62 (décembre 2002).

[90] M. Ygouf, L. Mugnier, J.-F. Sauvage, T. Fusco, D. Mouillet et J.-L. Beuzit, *Approximate analytical model of AO-corrected coronagraphic imaging, with a view to exoplanet detection and characterisation*, Dans *In the Spirit of Lyot 2010* (octobre 2010).

[91] T. Fusco, G. Rousset, J.-F. Sauvage, C. Petit, J.-L. Beuzit, K. Dohlen, D. Mouillet, J. Charton, M. Nicolle, M. Kasper et P. Puget, *High order Adaptive Optics requirements for direct detection of Extra-solar planets. Application to the SPHERE instrument.*, Opt. Express, 14 (17), pp. 7515–7534 (2006).

[92] J.-P. Véran, F. Rigaut, H. Maître et D. Rouan, *Estimation of the adaptive optics long exposure point spread function using control loop data*, J. Opt. Soc. Am. A, 14 (11), pp. 3057–3069 (1997).

[93] M. Ygouf, L. M. Mugnier, D. Mouillet, T. Fusco et J.-L. Beuzit, *Simultaneous exoplanet detection and instrument aberration retrieval in multispectral coronagraphic imaging*, Astron. Astrophys. (2013).

[94] L. Meynadier, V. Michau, M.-T. Velluet, J.-M. Conan, L. M. Mugnier et G. Rousset, *Noise propagation in wave-front sensing with phase diversity*, Appl. Opt., 38 (23), pp. 4967–4979 (août 1999).

[95] J.-F. Giovannelli, *Unsupervised Bayesian convex deconvolution based on a field with an explicit partition function*, IEEE Trans. Image Processing, 17 (1), pp. 16–23 (janvier 2008).