



HAL
open science

Estimation et contrôle non-linéaire : application à quelques systèmes quantiques et classiques

Mazyar Mirrahimi

► **To cite this version:**

Mazyar Mirrahimi. Estimation et contrôle non-linéaire : application à quelques systèmes quantiques et classiques. Physique mathématique [math-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2011. tel-00844394v1

HAL Id: tel-00844394

<https://theses.hal.science/tel-00844394v1>

Submitted on 15 Jul 2013 (v1), last revised 16 Jul 2013 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Estimation et contrôle non-linéaire :
application à quelques systèmes quantiques et classiques

Habilitation à Diriger des Recherches

Université Paris VI

MAZYAR MIRRAHIMI

Jury composé de :

Enrique Fernandez-Cara (Rapporteur)

Miroslav Krstic (Rapporteur)

Jean-Pierre Raymond (Rapporteur)

Gregoire Allaire (Président du jury)

Ugo Boscain (Examineur)

Jean-Michel Coron (Examineur)

Pierre Rouchon (Examineur)

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Enrique Fernandez-Cara, Miroslav Krstic et Jean-Pierre Raymond pour avoir accepté de rapporter sur mon manuscrit ainsi que pour l'intérêt qu'ils ont porté pour ce travail. Aussi je remercie Grégoire Allaire, Ugo Boscain, Jean-Michel Coron et Pierre Rouchon d'avoir accepté de faire partie du jury.

Une pensée particulière s'adresse à Jean-Michel Coron, Pierre Rouchon et Michel Sorine qui restent mes mentors scientifiques. L'interaction permanente avec eux m'a permis d'avoir un point de vue très large sur des sujets très variés. Aussi leur soutien constant m'a donné l'assurance morale dont j'avais besoin pour l'avancement dans mes travaux.

Je me fais aussi un grand plaisir de remercier mes collègues de l'équipe-projet SISYPHE à l'INRIA, Julien Barral, Pierre-Alexandre Bliman, Frédérique Clément et Claire Médigue pour leurs divers conseils mais plus important encore pour leurs amitiés. Je remercie Martine Verneuille pour son aide permanente pour les tâches administratives qui constituent certainement mon point faible.

Un grand merci à Karine Beauchard, Silvère Bonnabel et Alain Sarlette pour leurs amitiés et les collaborations très fructueuses qui j'ai eu le plaisir d'avoir avec eux.

Je remercie chaleureusement Marianne Chapouly et Ram Somaraju, les deux post-doctorants avec qui j'ai eu la grande joie de partager certains de mes sujets de recherche. Leurs sens du rigueur est une grande qualité que j'ai beaucoup apprécié lors de nos discussions. Aussi, je remercie particulièrement Marianne pour son amitié et pour l'aide qu'elle m'a porté dans la rédaction de ce manuscrit.

C'est avec grand plaisir que j'ai co-encadré les thèses d'Hadis Amini, Zaki Leghtas et Filippo Visco-Comandini. Je les remercie de leur confiance et pour l'interaction fructueuse qui nous a permis d'avancer sur ces divers sujets de recherche.

Je remercie sincèrement Michel Brune, Igor Dotsenko, Serge Haroche et Jean-Michel Raimond pour les interactions d'un très haut niveau qui nous a permis d'aller au delà de nos travaux théoriques et de se rapprocher du monde merveilleux de la physique expérimentale.

Enfin je remercie l'amour de ma vie Dena ainsi que ma famille dont le soutien constant m'a permis de travailler dans des conditions morales idéales.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 7 |
| 1 Systèmes quantiques fermés | 11 |
| 1.1 Particule quantique dans un puits de potentiel infini | 13 |
| 1.1.1 Résultat principal | 13 |
| 1.1.2 Heuristique de la preuve | 15 |
| 1.2 Particule quantique dans un potentiel décroissant | 18 |
| 1.2.1 Heuristique de la preuve | 22 |
| 1.3 Identification d'hamiltonien | 23 |
| 1.3.1 Cas d'un qubit | 23 |
| 1.3.2 Extension | 26 |
| 2 Systèmes quantiques en observation | 29 |
| 2.1 Stabilisation par feedback d'une boîte à photons | 30 |
| 2.1.1 Système physique, dynamiques de sauts | 31 |
| 2.1.2 Schéma de feedback et analyse de convergence | 32 |
| 2.1.3 Filtrage quantique pour estimation d'état | 34 |
| 2.2 Synchronisation par feedback | 35 |
| 2.2.1 Système à 2 niveaux | 37 |
| 2.2.2 Système Λ | 39 |
| 3 Lignes de transmission | 45 |
| 3.1 Approche temporelle | 46 |
| 3.1.1 Une formulation équivalente | 49 |
| 3.1.2 Observateurs asymptotiques | 49 |
| 3.2 Approche fréquentielle | 53 |
| 3.2.1 Problème direct | 55 |
| 3.2.2 Problèmes inverses | 56 |
| Conclusion | 59 |

Introduction

Ce manuscrit se décompose en deux parties principales, associées à deux types d'applications assez différentes. Dans la première partie qui comprend les deux premiers chapitres, je m'intéresse à des systèmes issus de problèmes de contrôle et d'estimation en physique quantique ; dans la deuxième partie (troisième chapitre du manuscrit), j'étudie la propagation d'ondes électriques le long des fils classiques dans un réseau de lignes de transmission et je considère certains problèmes d'estimation de paramètres. Le trait d'union entre ces deux sujets de recherche réside dans le fait que dans les deux cas, nous sommes face aux problèmes de contrôle ou d'estimation d'état ou d'estimation de fréquences d'un ensemble fini ou infini d'oscillateurs couplés.

Systèmes quantiques

Les fondements théoriques de l'automatique à l'échelle quantique ont été mis en place depuis les années 1980 par des travaux importants de chercheurs comme Herschel Rabitz (Méthodes numériques pour le contrôle en boucle ouverte en chimie quantique) ou Viacheslav P. Belavkin (méthodes de filtrage quantique pour les systèmes quantiques observés). Néanmoins, une majeure partie des contributions théoriques du domaine correspond à la décennie en cours, où un grand nombre de chercheurs en analyse numérique et en automatique ont été attirés par ces problèmes. Parallèlement à ces efforts théoriques, de nombreuses contributions sur les différentes implémentations expérimentales allant de la spectroscopie RMN et de la physique atomique à la physique de la matière condensée ont été fournies. Cependant, un regard attentif montre un écart important entre les résultats théoriques et expérimentaux. Cet écart est, en particulier, attribuable à deux raisons :

1. Les difficultés liées au concept de la mesure pour les systèmes quantiques : l'effet de retours (back-action) de la mesure ainsi que la partialité de toutes les observations (principe d'incertitude de Heisenberg) ;
2. Le concept de la décohérence : la décohérence des systèmes quantiques, induite par les couplages non-négligeables du système microscopique (ou mésoscopique) avec son environnement limite l'efficacité et la robustesse des paradigmes classiques de contrôle et d'estimation.

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons au développement des outils de contrôle non-linéaire pour ces systèmes tout en gardant un oeil sur ces obstacles.

Dans les deux premières sections du Chapitre 1, nous considérons le contrôle du système quantique en boucle ouverte. En négligeant la dissipation due à la décohérence (ce qui implique que

le système contrôlé doit atteindre sa cible assez rapidement), le système que l'on considère est tout simplement donné par une équation de Schrödinger où le contrôle intervient de façon bilinéaire. Le problème principal vient du fait que l'on considère le système dans sa configuration de dimension infinie et que pour assurer un résultat de stabilisation, nous devons résoudre certains problèmes d'analyse fonctionnelle qui nous permettront, par la suite, d'appliquer des outils classiques de stabilisation en dimension finie.

La Section 1.3 du Chapitre 1 considère le problème dual d'identification des paramètres pour un système quantique en observation. Ici, le système en vue consiste en un ensemble statistique de systèmes quantiques identiques. De plus, une approximation adiabatique basée sur des perturbations singulières permet de négliger la dynamique dissipative due à l'observation. Nous sommes donc face à une équation de Schrödinger avec la mesure continue de certains observables physiques. Nous proposons alors une méthode, basée sur l'application d'observateurs asymptotiques, afin d'estimer certains paramètres du système. Nous profitons de certaines symétries du système physique pour concevoir l'observateur non-linéaire qui assure la convergence de l'estimateur.

Dans le chapitre 2, nous considérons des systèmes quantiques en interaction avec leur environnement. Afin d'assurer un contrôle robuste, nous considérons le contrôle en boucle fermée de ces systèmes. Ici, l'effet de retours de la mesure (dont le résultat est par nature non-déterministe) implique une modification de la dynamique qui prend en compte les sauts quantiques de nature aléatoire. La dynamique du système est donc stochastique et suit les trajectoires dites de Monte-Carlo quantique. Nous proposons alors des lois de feedback qui nous permettent, en prenant compte de l'historique de la mesure, de stabiliser le système quantique malgré sa décohérence et même, de protéger l'état stabilisé contre la décohérence.

Lignes de transmission

Dans le Chapitre 3 du manuscrit, nous nous intéressons à certains problèmes inverses liés à la détection des pannes le long des fils d'un réseau de câblage électrique. Dans ce but nous allons étudier les équations dites de Télégraphistes qui modélisent la propagation des ondes électriques le long d'une ligne de transmission. Les problèmes inverses qui nous intéressent sont liés à certaines caractéristiques des lignes de transmission ainsi qu'à la géométrie du réseau en question.

Plusieurs résultats sur le contrôle et la stabilisation de l'équation des ondes sur un graphe ont été déjà proposés (voir à titre d'exemple [38, 106]). Aussi, lorsque l'on étudie la propagation des ondes dans le domaine fréquentiel, nous nous retrouvons avec l'étude spectrale d'un opérateur de Zakharov-Shabat (de Schrödinger dans le cas sans perte) sur un graphe. Ici encore, une vaste littérature sur les problèmes de scattering inverse ou les problèmes inverses spectraux existe à ce jour (voir à titre d'exemple [87, 51, 65, 112]).

Malgré ces nombreux résultats théoriques sur la propagation des ondes le long d'un réseau, très peu d'entre eux semblent être adaptés aux applications industrielles de détection de pannes. En effet, les résultats pratiques se restreignent à la détection des défauts francs (coupures des lignes) sur des réseaux très simples (une seule ligne de transmission ou un réseau Y à 3 branches). Le but principal du Chapitre 3 est d'étendre les efforts théoriques en prenant en compte les restrictions pratiques.

La Section 3.1 du Chapitre 3 a pour but d'identifier les petites perturbations dans le paramètre G lié à la conductance de fuite sur un réseau très simple qui est constitué d'une seule ligne de

transmission. Pour cela, nous proposons un algorithme d'estimation dans le domaine temporel qui est basé sur l'application d'observateurs asymptotiques.

La Section 3.2 du Chapitre 3 est consacrée à l'étude du problème de la réflectométrie fréquentielle sur un réseau de la forme étoile. Nous allons donc expliciter l'information minimale dont on a besoin pour résoudre ce problème de la réflectométrie. Dans ce but, nous allons convertir le problème de scattering inverse en un problème inverse spectral que l'on va étudier par des méthodes classiques proposées par Borg [23].

Chapitre 1

Systèmes quantiques fermés

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème du contrôle en boucle ouverte de systèmes quantiques. Nous considérons donc un système quantique isolé de son environnement et sous l'effet d'un champ de contrôle que l'on maîtrise complètement. La dynamique d'un tel système est modélisé par une équation de Schrödinger de la forme

$$i \frac{d}{dt} \Psi = H(t) \Psi,$$

où $i = \sqrt{-1}$, $\Psi(t)$, la fonction d'onde du système quantique, évolue sur un espace de Hilbert \mathcal{H} de dimension finie ou infinie, et enfin $H(t)$, l'hamiltonien du système, est un opérateur Hermitien défini sur \mathcal{H} . Lorsque le champ électromagnétique du contrôle est éteint, l'hamiltonien est indépendant du temps : il est donné par H_0 . En présence du champ électromagnétique dont on contrôle l'intensité $u(t)$, s'ajoute à cet hamiltonien constant des hamiltoniens dépendants du temps. Sous l'hypothèse d'un couplage dipolaire, très souvent, on considère une approximation du premier ordre en $u(t)$ de $H(t)$, ce qui nous amène à une équation de Schrödinger bilinéaire :

$$i \frac{d}{dt} \Psi = (H_0 + u(t)H_1(t)) \Psi, \tag{1.1}$$

où $u(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est un contrôle scalaire et H_0 et H_1 sont respectivement l'hamiltonien libre et l'hamiltonien d'interaction du système.

Lorsque l'espace d'état est de dimension finie, $\Psi(t) \in \mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ et H_0 et H_1 sont des matrices Hermitiennes de $\mathbb{C}^{N \times N}$, la contrôlabilité de (1.1) a été bien explorée [4, 5, 88, 102, 105]. Toutefois, ceci n'implique pas la simplicité de la génération de trajectoires. Très souvent, les chimistes formulent la tâche du contrôle en boucle ouverte comme une fonctionnelle du coût à minimiser. Le contrôle optimal (voir e.g. [96]) et les méthodes itératives stochastiques (e.g. les algorithmes génétiques [69]) sont alors les deux classes de méthodes les plus utilisées pour cette tâche.

Lorsque certaines hypothèses de non-dégénérescence concernant le système du linéarisé tangent sont satisfaites, [78] propose une autre méthode de génération de trajectoires, basée sur des techniques de Lyapunov. L'efficacité de ces méthodes de contrôle pour les modèles chimiques a été étudiée dans [80]. Le cas dégénéré a été plus tard traité par une méthode de Lyapunov implicite [14]. Comme la mesure et le feedback en physique quantique nécessitent l'ouverture du

système physique à son environnement (voir le chapitre suivant), nous suivons ici le paradigme qui consiste à simuler le système en boucle fermée hors-ligne et à appliquer le signal de contrôle, ainsi trouvé, en boucle ouverte sur le vrai système physique. Une telle stratégie a été déjà largement appliquée dans ce contexte [32, 101].

La situation est bien plus délicate lorsque l'on considère une configuration de dimension infinie. Très peu de résultats sont connus concernant la contrôlabilité [104, 13, 16]. En particulier, les articles [13, 16] étudient la contrôlabilité d'une particule dans un puits de potentiel en mouvement. Ils proposent un résultat de contrôlabilité locale basé sur la méthode du retour [34]. Plus récemment Nersesyan [82, 83] a montré la contrôlabilité globale approchée d'un puits de potentiel infini multi-dimensionnel. Ce résultat, conjugué à [13, 16] démontre la contrôlabilité exacte du puits de potentiel infini en 1D. Enfin, un premier résultat générique de contrôlabilité approchée est proposé dans [29] dans le cas où H_0 admet un spectre discret.

Concernant la génération de trajectoires pour les systèmes quantiques de dimension infinie, encore moins de résultats existent à ce jour. Une grande partie de la littérature concerne le contrôle optimal [11, 12]. La simplicité de la loi de feedback proposée par l'approche Lyapunov de [78, 14] suggère l'application de la même approche pour les configurations de dimension infinie. Toutefois, une extension de l'analyse de convergence, basée sur le principe d'invariance de LaSalle, au cas des EDPs n'est pas un problème facile [35]. Une première approche possible pour surmonter cet obstacle consiste à chercher des fonctions de Lyapunov strictes [37]. Une deuxième approche consiste à montrer une propriété additionnelle de pré-compacité des trajectoires du système en boucle fermée, ce qui permet d'appliquer le principe d'invariance de LaSalle et éventuellement d'obtenir une stabilisation forte [36]. Une troisième approche consiste à chercher un résultat de stabilisation faible [10].

Dans les deux sections à venir, je considère le problème de la stabilisation d'une particule dans un puits de potentiel infini ou fini. Dans les deux cas, nous commençons par identifier les divers phénomènes de perte de masse qui peuvent être à l'origine du manque de pré-compacité des trajectoires en boucle fermée. Nous proposons donc une nouvelle approche qui consiste à pénaliser ces phénomènes, tout en stabilisant l'état cible désiré. Nous assurons donc des résultats du type stabilisation approchée (aussi appelée la stabilisation pratique en littérature d'automatique). Ces résultats font l'objet de deux publications parues [19, 73] et deux communications aux conférences parues [18, 72]. En particulier, [73] propose un premier résultat de stabilisation concernant une équation de Schrödinger admettant une partie continue dans son spectre. Plus récemment, Beauchard et al [15, 17] ont proposé un résultat de contrôlabilité et de stabilisation faible pour un autre système quantique admettant un spectre continu.

Un problème dual au problème de contrôle qui est aussi d'une grande importance pour les systèmes issus de la mécanique quantique, est le problème d'estimation de paramètres. La possibilité de générer rapidement une grande quantité de données sur une dynamique quantique peut être utilisée afin d'extraire plus d'informations sur les paramètres inconnus (ou mal-connus) du système. Pour chaque champ de contrôle, nous avons la possibilité d'effectuer plusieurs observations pour déduire de l'information sur le système, et cette procédure est bien plus rapide que la simulation numérique de la dynamique associée. De plus, les avancées récentes dans la technologie des lasers donnent la possibilité de générer une classe très large de champs de contrôle.

La théorie, en développement, de l'estimation de paramètres quantiques est étudiée par de diverses approches. Les méthodes de maximum de vraisemblance fournissent une première classe

de résultats [62, 63, 64, 70, 85]. Les méthodes de “Maximum d’entropie” [26] et de “Maximum d’entropie de Kullback” [84] proposent deux autres classes d’algorithmes d’estimation de paramètres quantiques. Finalement, les techniques d’identification optimale avec des critères des moindres carrés [44, 45, 67] forment une dernière classe d’algorithmes d’estimation de paramètres quantiques.

Les enjeux principaux de ces méthodes d’estimation concernent la présence des minima locaux pour les problèmes d’optimisation, la sensibilité par rapport aux incertitudes expérimentales et les bruits, et finalement le coût important des calculs. L’article [61] propose un observateur pour l’estimation d’état d’un système quantique. Cet observateur est, ensuite, appliqué au coeur d’un algorithme de recherche itératif.

Dans la Section 1.3, et dans la même direction que [61], nous proposons un algorithme d’estimation de paramètres, basé sur l’application d’observateurs asymptotiques et les techniques de contrôle adaptatif. Dans ce but, nous proposons un observateur généralisé qui inclut, à la fois, les estimées de l’état et des paramètres inconnus du système. Les résultats de la Section 1.3 ont fait l’objet d’une publication parue [22] et deux communications aux conférences parues [21, 68].

1.1 Particule quantique dans un puits de potentiel infini

1.1.1 Résultat principal

À la suite des résultats [92, 13, 16], nous considérons, ici, une particule chargée non-relativiste en une dimension d’espace et dans un champ électrique uniforme. Sous l’hypothèse du couplage dipolaire, et après un changement d’échelle approprié, l’évolution de la fonction d’onde de la particule est donnée par l’équation de Schrödinger suivante :

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, x) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(t, x) + (V(x) - u(t)x)\Psi(t, x).$$

Ici, $V(x)$ est le potentiel interne du système et $t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}$ est l’amplitude du champ de contrôle. Dans cette section, nous étudions le cas d’un puits de potentiel infini : $V(x) = 0$ pour $x \in I := (-1/2, 1/2)$ et $V(x) = +\infty$ pour x en dehors de I . Ainsi, le système peut s’écrire sous la forme suivante

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, x) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(t, x) - u(t)x\Psi(t, x), \quad x \in I, \quad (1.2)$$

$$\Psi(0, x) = \Psi_0(x), \quad (1.3)$$

$$\Psi(t, \pm 1/2) = 0. \quad (1.4)$$

Il s’agit d’un système non-linéaire contrôlé, appelé (Σ_1) , dans lequel

- le contrôle est le champ électrique $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,
- l’état est la fonction d’onde $\Psi : \mathbb{R}_+ \times I \rightarrow \mathbb{C}$ avec $\Psi(t) \in \mathbb{S}$ pour tout $t \geq 0$,

où $\mathbb{S} := \{\varphi \in L^2(I; \mathbb{C}); \|\varphi\|_{L^2} = 1\}$.

Considérons l’opérateur A défini par

$$D(A) := (H^2 \cap H_0^1)(I, \mathbb{C}), \quad A\varphi := -\frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2},$$

et pour $s \in \mathbb{R}$, l'espace

$$H_{(0)}^s(I, \mathbb{C}) := D(A^{s/2}).$$

La proposition suivante rappelle les résultats classiques d'existence et d'unicité des solutions de (1.2)-(1.3)-(1.4). Pour une preuve de cette proposition, nous référons à l'appendice de [19].

Proposition 1. *Considérons $\Psi_0 \in \mathbb{S}$, $T > 0$ et $u \in C^0([0, T], \mathbb{R})$. Il existe une unique solution faible à (1.2)-(1.3)-(1.4), i.e. une fonction $\Psi \in C^0([0, T], \mathbb{S}) \cap C^1([0, T], H_{(0)}^{-2}(I, \mathbb{C}))$ telle que*

$$\Psi(t) = e^{-iAt}\Psi_0 + i \int_0^t e^{-iA(t-s)}u(s)x\Psi(s)ds \text{ dans } L^2(I, \mathbb{C}) \text{ pour tout } t \in [0, T], \quad (1.5)$$

et alors (1.2) est vérifiée dans $H_{(0)}^{-2}(I, \mathbb{C})$ et pour tout $t \in [0, T]$.

Si, de plus, $\Psi_0 \in (H^2 \cap H_0^1)(I, \mathbb{C})$, alors Ψ est une solution forte i.e. $\Psi \in C^0([0, T], (H^2 \cap H_0^1)(I, \mathbb{C})) \cap C^1([0, T], L^2(I, \mathbb{C}))$, la relation (1.2) est vérifiée dans $L^2(I, \mathbb{C})$, pour tout $t \in [0, T]$, la condition initiale (1.3) est vérifiée dans $H^2 \cap H_0^1(I, \mathbb{C})$ et les conditions aux bords (1.4) sont vérifiées pour tout $t \in [0, T]$.

Les solutions faibles (resp. fortes) sont continues par rapport aux conditions initiales pour la topologie $C^0([0, T], L^2)$ (resp. pour la topologie $C^0([0, T], H^2 \cap H_0^1)$.)

Le symbole $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit le produit Hermitien usuel de $L^2(I, \mathbb{C})$, i.e.

$$\langle \varphi, \xi \rangle := \int_I \varphi(x) \overline{\xi(x)} dx.$$

Pour $\sigma \in \mathbb{R}$, nous introduisons l'opérateur A_σ défini par

$$D(A_\sigma) := (H^2 \cap H_0^1)(I; \mathbb{C}), \quad A_\sigma \varphi := -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{dx^2} - \sigma x \varphi.$$

Il est bien connu qu'il existe une base orthonormée $(\phi_{k,\sigma})_{k \in \mathbb{N}^*}$ de $L^2(I, \mathbb{C})$ constituée des états propres de A_σ :

$$\phi_{k,\sigma} \in H^2 \cap H_0^1(I, \mathbb{C}), \quad A_\sigma \phi_{k,\sigma} = \lambda_{k,\sigma} \phi_{k,\sigma},$$

où $(\lambda_{k,\sigma})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite non-décroissante de nombres réels. Pour $s > 0$ et $\sigma \in \mathbb{R}$, nous définissons

$$H_{(\sigma)}^s(I, \mathbb{C}) := D(A_\sigma^{s/2}),$$

muni de la norme

$$\|\varphi\|_{H_{(\sigma)}^s} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,\sigma}^s |\langle \varphi, \phi_{k,\sigma} \rangle|^2 \right)^{1/2}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ and $\sigma \in \mathbb{R}$, nous définissons

$$\mathcal{C}_{k,\sigma} := \{\phi_{k,\sigma} e^{i\theta}; \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

Afin de simplifier les notations, nous allons remplacer $\phi_{k,0}$, $\lambda_{k,0}$, $\mathcal{C}_{k,0}$ par ϕ_k , λ_k , \mathcal{C}_k . Nous avons

$$\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{2}, \quad \phi_k = \begin{cases} \sqrt{2} \cos(k\pi x), & \text{si } k \text{ est impair,} \\ \sqrt{2} \sin(k\pi x), & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Le but de cette section (et l'article [19]) est d'étudier la stabilisation du système (Σ_1) autour des états propres $\phi_{k,\sigma}$. Plus précisément, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathbb{R}$ petit, nous proposons des lois de feedback $u = u_{k,\sigma}(\Psi)$ pour lesquelles la solution de (1.2)-(1.3)-(1.4) avec $u(t) = u_{k,\sigma}(\Psi(t))$ est telle que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}_{L^2(I, \mathbb{C})}(\Psi(t), \mathcal{C}_{k,\sigma})$$

est arbitrairement petite. Nous considérons la convergence vers le cercle $\mathcal{C}_{k,\sigma}$ car la fonction d'onde Ψ est définie à un facteur de phase près. Pour la simplicité, nous allons travailler avec l'état fondamental $\phi_{1,\sigma}$. Toutefois, tous les résultats restent valides pour le cas général.

Le résultat principal de l'article [19] est résumé par le théorème suivant :

Théorème 1. *Supposons $\Gamma > 0$, $s > 0$, $\epsilon > 0$, $\gamma \in (0, 1)$. Il existe $\sigma^{**} = \sigma^{**}(\Gamma, s) > 0$ tel que, pour tout $\sigma \in (-\sigma^{**}, \sigma^{**})$, il existe une loi de feedback $v_{\sigma, \Gamma, s, \epsilon, \gamma}(\Psi)$ telle que, pour toute $\Psi_0 \in \mathbb{S} \cap (H^2 \cap H_0^1 \cap H_{(\sigma)}^s)(I, \mathbb{C})$ avec*

$$\|\Psi_0\|_{H_{(\sigma)}^s} \leq \Gamma \text{ et } |\langle \Psi_0, \phi_{1,\sigma} \rangle| > \gamma,$$

le problème de Cauchy (1.2)-(1.3)-(1.4) avec $u(t) = \sigma + v_{\sigma, \Gamma, s, \epsilon, \gamma}(\Psi)$ admet une unique solution forte, qui vérifie, de plus,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}_{L^2}(\Psi(t), \mathcal{C}_{1,\sigma}) \leq \epsilon.$$

Remarque 1. *Le Théorème 1 assure un résultat de stabilisation pratique semi-globale. En effet, comme il sera observé plus tard, la loi de feedback de ce théorème peut être trouvée par une analyse de Lyapunov qui assure la stabilité de l'état cible ; i.e. pour tout $\epsilon_1 > 0$, il existe un $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$ tel que, si nous initialisons le système dans un ϵ_2 -voisinage de $\mathcal{C}_{1,\sigma}$, la solution ne sorte pas d'un ϵ_1 -voisinage.*

De plus, en appliquant cette loi de feedback, toute condition initiale $\Psi_0 \in \mathbb{S}$ telle que $\Psi_0 \in H^s(I, \mathbb{C})$ pour un certain $s > 0$ et $\langle \Psi_0, \phi_{1,\sigma} \rangle \neq 0$ peut être amenée, de façon approchée, vers le cercle $\mathcal{C}_{1,\sigma}$.

La stabilité et la convergence approchée assurent la stabilisation pratique.

Pour le cas $\sigma \neq 0$, la loi de feedback sera donnée de façon explicite, tandis que pour $\sigma = 0$, cette loi sera implicite. L'hypothèse " $\Psi_0 \in H^s(I, \mathbb{C})$, pour un certain $s > 0$ " n'est, en fait, pas nécessaire pour le résultat du théorème. En effet, même pour une condition initiale Ψ_0 qui appartient seulement à \mathbb{S} , nous pouvons trouver une loi de feedback appropriée qui sera fonction de l'état initial Ψ_0 .

Finalement, notons que, physiquement, l'hypothèse $\langle \Psi_0, \phi_{1,\sigma} \rangle \neq 0$ n'est pas une hypothèse restrictive. En fait, si $\langle \Psi_0, \phi_{1,\sigma} \rangle = 0$, un champ de contrôle en résonance avec les fréquences naturelles du système (la différence entre les valeurs propres associées à un état propre dont la population dans l'état initial est non-nulle et à l'état propre fondamental) assure, de façon instantanée, une population non-nulle de l'état fondamental dans la fonction d'onde. Nous pouvons, alors, appliquer la loi de feedback du Théorème 1.

1.1.2 Heuristique de la preuve

Une première approche pour stabiliser l'état fondamental $\phi_{1,\sigma}$ est de considérer la fonction de Lyapunov naturelle

$$\tilde{\mathcal{V}}(\Psi) = 1 - |\langle \Psi, \phi_{1,\sigma} \rangle|^2.$$

Exactement comme pour le cas de la dimension finie [14], la loi de feedback (\Im signifie la partie imaginaire d'un nombre complexe)

$$\tilde{u}(\Psi) = \Im(\langle x\Psi, \phi_{1,\sigma} \rangle \langle \phi_{1,\sigma}, \Psi \rangle)$$

assure la décroissance de la fonction de Lyapunov. Toutefois, en essayant d'adapter l'analyse de convergence, basée sur le principe d'invariance de LaSalle, la pré-compacité des trajectoires dans L^2 pose un obstacle majeur. Notons que, pour pouvoir appliquer le principe d'invariance de LaSalle au cas d'un système de dimension infinie, nous avons besoin de montrer un tel résultat de pré-compacité. Pour le cas particulier du puits de potentiel infini, malgré nos grands efforts pour appliquer les outils classiques de l'analyse fonctionnelle, nous n'avons pas réussi à démontrer cette pré-compacité pour le système en boucle fermée. En fait, le système évolue sur la sphère unité de L^2 , et donc la pré-compacité des trajectoires dans un espace plus faible est assurée. Néanmoins, nous n'avons pas été capables de renforcer cette compacité faible par une compacité forte. En effet, il semble même que des phénomènes comme la perte de masse L^2 dans les niveaux hauts d'énergie peuvent empêcher une telle propriété d'être satisfaite.

L'approche de [19], consiste à empêcher la population d'atteindre les niveaux hauts d'énergie, tout en stabilisant le système autour de $\phi_{1,\sigma}$.

Comme dans le Théorème 1, nous considérons $\Gamma > 0, s > 0, \epsilon > 0, \gamma > 0, \sigma \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, nous considérons le cas $\sigma \neq 0$. Supposons $\Psi_0 \in H_{(0)}^s(I, \mathbb{C})$ avec

$$\|\Psi_0\|_{H_{(0)}^s} \leq \Gamma \text{ et } |\langle \Psi_0, \phi_{1,\sigma} \rangle| \geq \gamma.$$

L'idée consiste à appliquer le fait qu'il existe $N = N(\Gamma, s, \epsilon, \gamma) \in \mathbb{N}^*$, suffisamment grand, tel que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |\langle \Psi_0, \phi_{k,\sigma} \rangle|^2 < \frac{\epsilon\gamma^2}{1-\epsilon}. \quad (1.7)$$

Alors, nous pouvons considérer la fonction de Lyapunov

$$\mathcal{V}(\Psi) = 1 - |\langle \Psi, \phi_{1,\sigma} \rangle|^2 - (1-\epsilon) \sum_{k=2}^N |\langle \Psi, \phi_{k,\sigma} \rangle|^2. \quad (1.8)$$

Notons que, cette fonction de Lyapunov dépend des constantes $\Gamma, s, \epsilon, \gamma$ à travers le choix de la dimension N . Cette fonction de Lyapunov encode deux tâches : 1- elle empêche la perte de la masse L^2 à travers le passage aux niveaux d'énergie plus hauts que N ; 2- elle privilégie la croissance de la population dans l'état fondamental.

Lorsque Ψ vérifie le système (Σ_1) avec un contrôle $u = \sigma + v$, nous avons

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = -2v(t)\Im\left(\sum_{k=1}^N a_k \langle x\Psi, \phi_{k,\sigma} \rangle \langle \phi_{k,\sigma}, \Psi \rangle\right),$$

où

$$a_1 := 1 \text{ et } a_k := 1 - \epsilon \text{ pour } k = 2, \dots, N. \quad (1.9)$$

Alors, la loi de feedback

$$v(\Psi) := \varsigma \Im \left(\sum_{k=1}^N a_k \langle x\Psi, \phi_{k,\sigma} \rangle \langle \phi_{k,\sigma}, \Psi \rangle \right), \quad (1.10)$$

où $\varsigma > 0$ est une constante positive, assure la décroissance de la fonction de Lyapunov (1.8). Nous montrons alors que la solution de (1.2)-(1.3)-(1.4) avec la condition initiale Ψ_0 et le contrôle $u = \sigma + v(\Psi)$ satisfait

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}_{L^2}(\Psi(t), \mathcal{C}_{1,\sigma})^2 \leq \epsilon. \quad (1.11)$$

La limite (1.11) est démontrée en étudiant la limite faible $L^2(I, \mathbb{C})$ de $\Psi(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Supposons $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres réels positifs telle que $t_n \rightarrow +\infty$. Comme $\|\Psi(t_n)\|_{L^2(I, \mathbb{C})} \equiv 1$, il existe $\Psi_\infty \in L^2(I, \mathbb{C})$ telle que, quitte à extraire une sous-suite, $\Psi(t_n) \rightarrow \Psi_\infty$ faiblement dans $L^2(I, \mathbb{C})$. En utilisant la contrôlabilité du système linéarisé autour de $\phi_{1,\sigma}$ (condition qui est équivalente à $\langle \phi_{1,\sigma}, x\phi_{k,\sigma} \rangle \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$), nous pouvons démontrer que $\Psi_\infty = \beta\phi_{1,\sigma}$, où $\beta \in \mathbb{C}$ et $|\beta|^2 \geq 1 - \epsilon$. Cela implique (1.11).

Alors, en affaiblissant la propriété de la stabilité (i.e. demander la stabilisation pratique à la place de la stabilisation), nous pouvons échapper au problème de la pré-compacité évoqué plus haut.

Notons que, la contrôlabilité du système linéarisé tangent autour de la trajectoire $\phi_{1,\sigma}$ joue un rôle crucial ici. C'est pourquoi les techniques développées pour le cas $\sigma \neq 0$ ne peuvent pas être appliquées, en tant que telles, au cas $\sigma = 0$.

Étudions maintenant le cas $\sigma = 0$. Comme, cela a été précisé plus haut, la stratégie précédente n'assure pas la stabilisation pratique de ϕ_1 car le système linéarisé tangent autour de ϕ_1 n'est pas contrôlable. L'idée est alors d'appliquer la loi de feedback (1.10) avec un $\sigma = \sigma(t)$ qui varie dans le temps et qui converge vers zéro lorsque $t \rightarrow +\infty$. Formellement, la convergence de Ψ vers $\mathcal{C}_{1,\sigma(t)}$ devrait avoir lieu à un taux plus rapide que celle de σ vers zéro (voir le Figure 1.1).

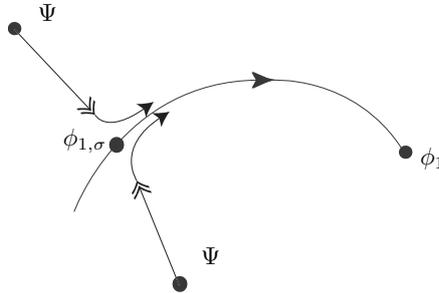


FIGURE 1.1 – Schéma de la méthode Lyapunov implicite

Dans ce but, nous considérons la fonction de Lyapunov

$$\mathcal{V}(\Psi) = 1 - (1 - \epsilon) \sum_{k=1}^N |\langle \Psi, \phi_{k,\sigma(\Psi)} \rangle|^2 - \epsilon |\langle \Psi, \phi_{1,\sigma(\Psi)} \rangle|^2, \quad (1.12)$$

où la fonction $\Psi \mapsto \sigma(\Psi)$ est définie implicitement par

$$\sigma(\Psi) = \theta(\mathcal{V}(\Psi)), \quad (1.13)$$

où θ est une fonction réelle lentement variable. Nous montrons d'abord qu'une telle fonction $\sigma(\Psi)$ existe. Lorsque Ψ résout (Σ_1) , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}}{dt} = & -2v(\Psi) \Im \left(\sum_{k=1}^N a_k \langle x\Psi, \phi_{k,\sigma(\Psi)} \rangle \langle \phi_{k,\sigma(\Psi)}, \Psi \rangle \right) \\ & - \frac{d\sigma(\Psi)}{dt} 2\Re \left(\sum_{k=1}^N a_k \langle \Psi, \phi_{k,\sigma(\Psi)} \rangle \langle \frac{d\phi_{k,\sigma(\Psi)}}{d\sigma}, \Psi \rangle \right) \end{aligned}$$

où \Re désigne la partie réelle d'un nombre complexe, $(a_k)_{1 \leq k \leq N}$ est définie par (1.9) et la notation $\frac{d\phi_{k,\sigma(\Psi)}}{d\sigma}$ désigne la dérivée de l'application $\sigma \mapsto \phi_{k,\sigma}$ prise au point $\sigma = \sigma(\Psi)$. Par définition de $\sigma(\Psi)$, nous avons

$$\frac{d\sigma(\Psi)}{dt} = \theta'(\mathcal{V}(\Psi)) \frac{d\mathcal{V}}{dt}.$$

Alors, la loi de feedback $u(\Psi) := \sigma(\Psi) + v(\Psi)$ où

$$v(\Psi) := \varsigma \Im \left(\sum_{k=1}^N a_k \langle x\Psi, \phi_{k,\sigma(\Psi)} \rangle \langle \phi_{k,\sigma(\Psi)}, \Psi \rangle \right)$$

avec $\varsigma > 0$, assure

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = -2\varsigma\mu v(\Psi)^2,$$

où

$$\frac{1}{\mu} = 1 + 2\theta'(\mathcal{V}(\Psi)) \Re \left(\sum_{k=1}^N a_k \langle \Psi, \phi_{k,\sigma(\Psi)} \rangle \langle \frac{d\phi_{k,\sigma(\Psi)}}{d\sigma}, \Psi \rangle \right)$$

est une constante positive, lorsque $\|\theta'\|_{L^\infty}$ est suffisamment petit. Ainsi $t \mapsto \mathcal{V}(\Psi(t))$ n'est pas croissante.

Nous démontrons que la solution de (1.2)-(1.3)-(1.4) avec la condition initiale Ψ_0 et le contrôle $u = \sigma(\Psi) + v(\Psi)$ satisfait

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}_{L^2}(\Psi(t), \mathcal{C}_1)^2 \leq \epsilon. \quad (1.14)$$

Celle-ci est, encore, démontrée en étudiant la limite faible $L^2(I, \mathbb{C})$ de $\Psi(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Pour les preuves détaillées de tous ces résultats ainsi que des simulations numériques qui montrent l'efficacité de la loi de feedback proposée, nous référons à l'article [19].

1.2 Particule quantique dans un potentiel décroissant

Dans cette section, nous considérons une particule quantique en dimension N d'espace, avec un potentiel $V(x)$ décroissant à l'infini, et couplée à travers son moment dipolaire $\mu(x)$, à un champ de laser dont l'amplitude $t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}$ est le contrôle scalaire. La fonction d'onde du système évolue selon l'équation de Schrödinger

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, x) = -\Delta \Psi(t, x) + (V(x) - u(t)\mu(x))\Psi(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.15)$$

$$\Psi(0, x) = \Psi_0(x). \quad (1.16)$$

Comme dans la section précédente, il s'agit d'un système de contrôle bilinéaire, appelé (Σ_2) , où l'état est la fonction d'onde $\Psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ avec $\Psi(t) \in \mathbb{S}$ pour tout $t \geq 0$, et où $\mathbb{S} = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}) \mid \|\varphi\|_{L^2} = 1\}$.

Nous distinguons les diverses situations possibles : dimension $N \geq 4$; dimension $N = 3$; dimension $N = 2$; et dimension $N = 1$. Pour chacun de ces cas, nous considérons des hypothèses de décroissance appropriées pour le potentiel $V(x)$:

Hypothèse de décroissance (A) Nous supposons pour le potentiel V que zéro n'est pas une valeur propre ni une valeur de résonance pour l'hamiltonien $H_0 = -\Delta + V$. De plus, nous supposons que les hypothèses suivantes (qui dépendent de la dimension de l'espace N) sont satisfaites

- $N = 1$: $(1 + |x|)V \in L^1(\mathbb{R})$ [48];
- $N = 2$: $|V(x)| \leq C(1 + |x|)^{-3-\epsilon}$ [95];
- $N = 3$: $V \in L^{\frac{3}{2}-\epsilon}(\mathbb{R}^3) \cap L^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\mathbb{R}^3)$ [47];
- $N \geq 4$: $\widehat{V} \in L^1$ et $(1 + |x|^2)^{\gamma/2}V(x)$ est un opérateur borné sur l'espace de Sobolev H^ν pour un certain $\nu > 0$ et $\gamma > n + 4$ [56].

Une discussion brève sur l'origine de ces hypothèses peut être trouvée dans l'article [73]. En fait, ces hypothèses assurent une certaine inégalité de dispersion qui sera appliquée pour la preuve des résultats.

De plus, notons que, sous les hypothèses de décroissance **A**, l'hamiltonien libre $H_0 = -\Delta + V(x)$ admet un spectre mixte

$$\sigma(H_0) = \sigma_{\text{disc}}(H_0) \cup \sigma_{\text{ac}}(H_0),$$

où le spectre discret $\sigma_{\text{disc}}(H_0)$ contient un nombre fini de valeurs propres de multiplicités finies et le spectre essentiel est en fait un spectre absolument continu $\sigma_{\text{ac}}(H_0) = [0, \infty)$. Sous les hypothèses de **(A)**, la décomposition du spectre pour le cas 1D est un résultat classique des premiers jours de la mécanique quantique (en fait, nous avons seulement besoin de $V \in L^1(\mathbb{R})$, voir e.g. [90], Sec. XIII.4). Pour le cas 2D, nous référons au [99]. Le cas 3D a été démontré dans [49]. Finalement, la décomposition pour le cas de dimension N , avec $N > 3$, est un résultat classique car il s'agit d'un potentiel de portée courte au sens d'Agmon [2].

Concernant les fonctions propres, $\{\phi_j\}_{j=0}^M$, nous savons que $\phi_j \in H^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. De plus, les hypothèses de décroissance **(A)** impliquent $V \in L^1_{\text{loc}}$ et $V_- \in M_{\text{loc}}$ la classe Stummel locale (voir e.g. [3], page 8, pour une définition). Celle-ci assure la décroissance exponentielle des fonctions propres $\{\phi_j\}_{j=0}^M$ (voir e.g. [3], page 55, Corollary 4.2).

Avant tout, nous annonçons un résultat classique d'existence et d'unicité pour le système en boucle ouverte (1.15)-(1.16) :

Proposition 2. *Considérons un potentiel $V(x)$ vérifiant les hypothèses de décroissance (A) et considérons $\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Supposons $\Psi_0 \in \mathbb{S}$, $T > 0$ et $u \in C^0([0, T], \mathbb{R})$. Il existe une unique solution faible au (1.15)-(1.16), i.e. une fonction $\Psi \in C^0([0, T], \mathbb{S}) \cap C^1([0, T], H^{-2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}))$ telle que*

$$\Psi(t) = e^{-iH_0 t} \Psi(0) + i \int_0^t e^{-iH_0(t-s)} u(s) \mu(x) \Psi(s) ds \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \text{ pour } t \in [0, T], \quad (1.17)$$

et alors (1.15) est vérifiée dans $H^{-2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.

Si, de plus, $\Psi_0 \in H^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ et la multiplication par $\mu(x)$ définit un opérateur borné sur $H^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, alors Ψ est une solution forte, i.e. $\Psi \in C^0([0, T], H^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})) \cap C^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}))$, l'équation (1.15) est satisfaite dans $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ pour $t \in [0, T]$ et la condition initiale (1.16) est satisfaite dans $H^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.

La solution faible (resp. forte) est continue par rapport à la condition initiale pour la topologie $C^0([0, T], L^2)$ (resp. pour la topologie $C^0([0, T], H^2)$).

Nous référons à l'appendice de l'article [73] pour une preuve de cette proposition.

Considérons le potentiel $V(x)$ de sorte que le spectre discret $\sigma_{\text{disc}}(H_0)$ est non-vide. Nous sommes ici intéressés par la stabilisation d'une de ces fonctions propres dans la partie discrète. Fixons $\epsilon > 0$, une petite constante positive, et considérons ϕ , une fonction propre normalisée dans cette partie discrète. Nous cherchons une loi de feedback $u_\epsilon(\Psi)$ telle que la solution $\Psi(t, x)$ de (1.15)-(1.16) satisfait

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} | \langle \Psi(t, x), \phi(x) \rangle |^2 > 1 - \epsilon. \quad (1.18)$$

Ici, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, signifie le produit Hermitien usuel de $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. Notons que, Ψ et ϕ sont définies sur la sphère d'unité \mathbb{S} de $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, et que la limite (1.18) signifie la stabilisation pratique de la fonction propre $\phi(x)$.

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 2. *Considérons l'équation de Schrödinger (1.15)-(1.16). Nous supposons que le potentiel $V(x)$ satisfait les hypothèses de décroissance (A) et nous prenons $\mu \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Nous supposons que le spectre discret σ_{disc} de $H_0 = -\Delta + V(x)$ est non-vide. Nous considérons de plus les hypothèses suivantes :*

- A1** $\Psi_0 = \sum_{j=0}^M \alpha_j \phi_j$ où $\{\phi_j\}_{j=0}^M$ sont des fonctions propres normalisées dans la partie discrète du spectre de H_0 .
- A2** le coefficient α_0 correspondant à la population de la fonction propre ϕ_0 dans la condition initiale Ψ_0 est non-nul : $\alpha_0 \neq 0$.
- A3** l'hamiltonien H_0 admet des transitions non-dégénérées : $\lambda_{j_1} - \lambda_{k_1} \neq \lambda_{j_2} - \lambda_{k_2}$ pour $(j_1, k_1) \neq (j_2, k_2)$ et où $\{\lambda_j\}_{j=0}^M$ sont les différentes valeurs propres de H_0 ;
- A4** l'hamiltonien d'interaction $\mu(x)$ assure des transitions simples entre les fonctions propres de H_0 :

$$\langle \mu \phi_j, \phi_k \rangle \neq 0 \quad \forall j \neq k \in \{0, 1, \dots, M\}.$$

Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une loi de feedback $u(t) = u_\epsilon(\Psi(t))$ (que nous construirons explicitement), telle que le système en boucle fermée admet une unique solution faible dans $C^0([0, T], \mathbb{S}) \cap C^1([0, T], H^{-2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}))$. De plus, nous avons la stabilisation pratique (approchée) :

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |\langle \Psi(t, x), \phi_0(x) \rangle|^2 > 1 - \epsilon.$$

Si, de plus, la multiplication par $\mu(x)$ définit un opérateur borné sur $H^2(\mathbb{R}^N)$, alors Ψ est une solution forte, i.e. $\Psi \in C^0([0, T], H^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})) \cap C^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}))$.

Remarque 2. Dans ce Théorème \mathcal{L} signifie $\bigcup_{p \geq 2} L^p(\mathbb{R}^N)$.

Remarque 3. Notons que, comme la condition initiale est une combinaison linéaire des états propres dans la partie discrète, elle vérifie $\Psi_0 \in H^2$ et décroît exponentiellement.

Remarque 4. Notons qu'ici, une approximation de dimension finie du système en éliminant la partie continue du spectre n'est pas suffisante pour traiter le problème de la stabilisation. En effet, même si le système est initialisé dans la partie discrète du spectre (comme supposé dans **A1**), l'hamiltonien d'interaction μ sort la solution de cette partie discrète. L'état du système sort donc de cet espace de dimension finie instantanément.

Les hypothèses **A1** à **A4** peuvent être relâchées de façon significative. Nous référons à l'article [73] pour une discussion sur ces relaxations.

Avant de donner les heuristiques d'une preuve, nous allons, rapidement, étudier le comportement du système en l'absence du contrôle ($u(t) = 0$). Nous notons par $S(t) = \exp(-itH_0)$ le C_0 -semigroupe défini sur $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ et généré par $(-\Delta + V(x))/i$. Notons, en particulier, que $S(t)$ induit une isométrie sur $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$: $\|S(t)\psi\|_{L^2} = \|\psi\|_{L^2}$.

De plus, nous notons par \mathbb{P}_{disc} l'opérateur de projection sur le sous-espace discret généré par les fonctions propres. Cet opérateur est défini sur $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. Enfin, \mathbb{P}_{ac} signifie la projection sur le sous-espace orthogonal : $\mathbb{P}_{\text{ac}} = 1 - \mathbb{P}_{\text{disc}}$.

La partie discrète de la solution de l'équation en évolution libre, $\mathbb{P}_{\text{disc}}S(t)\Psi_0$, représente un comportement quasi-périodique :

$$\Psi_{0, \text{disc}} = \mathbb{P}_{\text{disc}}\Psi_0 = \sum_{j=0}^M \alpha_j \phi_j(x) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\text{disc}}S(t)\Psi_0 = \sum_{j=0}^M \alpha_j e^{-i\lambda_j t} \phi_j(x).$$

En revanche, la partie continue représente un comportement dispersif. En effet, pour le cas où $V \equiv 0$, nous avons la solution explicite suivante :

$$(e^{it\Delta}\psi)(x) = C_N t^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} \psi(y) dy.$$

Cette dernière implique l'estimation dispersive suivante [100],

$$\sup_{t>0} |t|^{N/2} \|e^{it\Delta}\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \quad \forall \psi \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N).$$

Pour un potentiel générique $V \neq 0$, nous ne disposons pas de solutions explicites et nous devons donc procéder autrement. Considérons l'hamiltonien $H_0 = -\Delta + V$. Nous cherchons à démontrer

une estimée similaire pour l'opérateur d'évolution $S(t)\mathbb{P}_{ac} = e^{-itH_0}\mathbb{P}_{ac}$. En effet, nous avons besoin de considérer la projection sur la partie absolument continue du spectre de H_0 afin d'éliminer les états liés qui ne décroissent pas en temps. Nous avons le résultat suivant [56, 47, 48, 95] :

Théorème 3. *Sous les hypothèses de décroissance de (\mathbf{A}) pour le potentiel V , nous avons*

$$\|S(t)\mathbb{P}_{ac}\|_{1 \rightarrow \infty} \leq |t|^{-\frac{N}{2}}. \quad (1.19)$$

1.2.1 Heuristique de la preuve

Nous considérons un état initial préparé dans la partie discrète du spectre :

$$\Psi_0 = \Psi_{0,\text{disc}} \in \mathcal{E}_{\text{disc}},$$

où $\mathcal{E}_{\text{disc}}$ (resp. \mathcal{E}_{ac}) signifie $\text{Image}(\mathbb{P}_{\text{disc}})$ (resp. $\text{Image}(\mathbb{P}_{ac})$). Le but du contrôle est d'amener l'état du système à l'espace propre correspondant à une fonction propre ϕ_0 de l'hamiltonien libre. Noter que cette fonction propre ϕ_0 peut-être une quelconque fonction propre de la partie discrète et n'a pas besoin d'être l'état fondamental. Durant l'application du contrôle le système va à priori croiser la partie continue \mathcal{E}_{ac} .

Comme dans la section précédente, une tentative de stabilisation avec la fonction de Lyapunov naturelle

$$\tilde{\mathcal{V}}(\Psi) = 1 - |\langle \Psi, \phi_0 \rangle|^2$$

échoue car nous ne pouvons pas assurer la pré-compacité des trajectoires dans L^2 . En effet, dans ce cas particulier de l'équation de Schrödinger avec un potentiel décroissant, nous pouvons rencontrer des phénomènes de perte de masse dus à la dispersion rapide de la population qui croise la partie continue du spectre.

Ici, l'approche consisterait donc à empêcher la population d'atteindre la partie continue du spectre. Nous considérons donc la fonction de Lyapunov $\mathcal{V}_\epsilon(\Psi)$:

$$\mathcal{V}_\epsilon(\Psi) := 1 - (1 - \epsilon) \sum_{j=0}^M |\langle \Psi, \phi_j \rangle|^2 - \epsilon |\langle \Psi, \phi_0 \rangle|^2, \quad (1.20)$$

où $0 < \epsilon \ll 1$ est une petite constante positive. Un choix naturel de la loi de feedback est alors le suivant :

$$u(\Psi) = u_\epsilon(\Psi) := c[(1 - \epsilon) \sum_{j=0}^M \Im(\langle \mu \Psi, \phi_j \rangle \langle \phi_j, \Psi \rangle) + \epsilon \Im(\langle \mu \Psi, \phi_0 \rangle \langle \phi_0, \Psi \rangle)], \quad (1.21)$$

où $c > 0$ est une constante positive. Nous pouvons démontrer le résultat suivant pour cette loi de feedback :

Théorème 4. *Considérons l'équation de Schrödinger (1.15)- (1.16) dans le cas où la dimension d'espace $N \geq 2$. Nous considérons les hypothèses de décroissance de (\mathbf{A}) pour le potentiel $V(x)$ et nous prenons $\mu \in L^{2N-}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Nous supposons que la partie discrète du spectre de*

$H_0 = -\Delta + V(x)$, σ_{disc} , est non-vide. Enfin, nous considérons, aussi, les hypothèses **A1** à **A4** du Théorème 2.

Alors, pour tout $\epsilon > 0$, en appliquant la loi de feedback $u(t) = u_\epsilon(\Psi(t))$ donnée par (1.21), le système en boucle fermée admet une unique solution faible dans $C^0([0, T], \mathbb{S}) \cap C^1([0, T], H^{-2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}))$. De plus nous avons la stabilisation pratique (approchée) de la fonction propre ϕ_0 :

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |\langle \Psi(t, x), \phi_0(x) \rangle|^2 > 1 - \epsilon.$$

Si, de plus, la multiplication par $\mu(x)$ définit un opérateur borné sur $H^2(\mathbb{R}^N)$, alors Ψ est une solution forte, i.e. $\Psi \in C^0([0, T], H^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})) \cap C^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}))$.

Remarque 5. Ce théorème admet des hypothèses plus restrictives que celle du Théorème (2). En effet, nous avons éliminé le cas 1D et nous avons considéré l'hamiltonien d'interaction μ dans un espace plus restreint $L^{2N^-}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, où

$$L^{2N^-}(\mathbb{R}^N) = \bigcup_{2 \leq p < 2N} L^p \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^N).$$

La preuve du Théorème 4 repose sur l'étude de la limite faible L^2 de $\Psi(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de temps telle que $t_n \rightarrow \infty$. Comme $\|\Psi(t_n)\|_{L^2} = 1$, il existe $\Psi_\infty \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ telle que, quitte à l'extraction d'une sous-suite, $\Psi(t_n) \rightharpoonup \Psi_\infty$ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. De plus, à travers les estimations dispersives du Théorème 3, nous pouvons assurer la convergence forte par rapport à la semi-norme $\|\psi\|_{\mathcal{H}} = \max(\|\mathbb{P}_{disc}\psi\|_{L^2}, \|\mu\psi\|_{L^2})$. À travers un tel résultat de convergence forte et grâce aux hypothèses **A3** et **A4** du Théorème 2, nous démontrons que $\Psi_\infty = \beta\phi_0$, où $\beta \in \mathbb{C}$ et $|\beta| \leq 1$. En appliquant l'hypothèse **A1**, nous pouvons démontrer que $|\beta|^2 \geq 1 - \epsilon$ et ceci termine la preuve du Théorème 4. Pour une preuve complète, nous référons à l'article [73]

Une étude plus profonde de la preuve du Théorème 4 montre que les nouvelles restrictions (par rapport au Théorème 2) peuvent être éliminées si nous pouvons assurer que la loi de feedback $u_\epsilon(\Psi(t))$ appartient à l'espace $L_t^{1+\delta}$ pour $\delta \in (0, 1]$. En effet, la loi de feedback (1.21) appartient seulement à l'espace L_t^2 comme $\frac{d\mathcal{V}_\epsilon}{dt} = -\frac{1}{c}u_\epsilon^2$. Nous pouvons améliorer celle-ci en effectuant le changement suivant dans la loi de feedback :

$$u_{\epsilon, \alpha}(\Psi) = cf(\Psi)|f(\Psi)|^\alpha, \quad (1.22)$$

où

$$f(\Psi) := [(1 - \epsilon) \sum_{j=0}^M \Im(\langle \mu\Psi, \phi_j \rangle \langle \phi_j, \Psi \rangle) + \epsilon \Im(\langle \mu\Psi, \phi_0 \rangle \langle \phi_0, \Psi \rangle)],$$

et $\alpha \geq 0$ et $c > 0$. Ce choix de la loi de feedback implique

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V}_\epsilon = -\frac{c^{1+\alpha}}{c^{2+\alpha}} |u_{\epsilon, \alpha}|^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}},$$

et alors $u_{\epsilon, \alpha} \in L_t^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}}$. Comme $\alpha \rightarrow \infty$, ceci assure que la loi de feedback $u_{\epsilon, \alpha}$ appartient à $L_t^{1+\delta}$ pour tout $\delta \in (0, 1]$. Ainsi nous pouvons démontrer le Théorème 2.

1.3 Identification d'hamiltonien

1.3.1 Cas d'un qubit

Nous commençons par considérer le problème d'estimation de paramètres d'un système quantique à 2 niveaux où nous disposons de la mesure continue d'une population. Le système s'écrit :

$$i \frac{d}{dt} \Psi = \left(\frac{\Delta}{2} \sigma_z + \frac{u\mu}{2} \sigma_x \right) \Psi, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad (1.23)$$

où

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

représentent les matrices de Pauli, Δ est la différence entre la fréquence de la transition atomique (entre l'état fondamental et l'état excité $\omega_{eg} = \omega_{a,e} - \omega_{a,g}$) et la fréquence du laser ω , μ est la constante du couplage atome-laser et $u(t) \in \mathbb{R}$ est l'amplitude du laser qui est lentement variable. Nous avons $\sigma_x^2 = 1$; $\sigma_x \sigma_y = i \sigma_z$ (l'identité précédente est satisfaite pour toute permutation circulaire des indices x, y , et z), la sortie est

$$y = \langle \sigma_z \Psi, \Psi \rangle = |\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2 = 2|\Psi_1|^2 - 1$$

car la mesure de l'état fondamental $|\Psi_1|^2$ et la conservation de la probabilité implique $|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 = 1$.

Ici, nous donnons une idée de la configuration expérimentale donnant lieu au modèle ci-dessus à 2 niveaux. Le système physique est constitué d'un ensemble de systèmes identiquement préparés et qui suivent, tous, les mêmes dynamiques : nous pouvons considérer, par exemple, un gaz monoatomique dilué. Il s'agit de systèmes simples, dans le sens où leurs atomes sont parfaitement identiques et interagissent très faiblement entre eux. Dans de tels gaz, les atomes peuvent être considérés comme des systèmes quantiques parfaits, avec une suite d'états d'énergies discrètes $(|i\rangle)_{i \in \mathbb{N}}$ correspondants aux énergies croissantes $E_i = \hbar \omega_{a,i}$. Afin de mesurer la population de l'état fondamental, le système est illuminé par une lumière cohérente (un premier laser) dont la fréquence est proche de la fréquence de la transition entre un état excité très instable (c.à.d. avec une durée de vie très courte), $|e'\rangle$, et l'état fondamental $|g\rangle$: $E_{e'} - E_g = \hbar(\omega_{a,e'} - \omega_{a,g})$. Celle-ci génère la transition $|g\rangle \rightarrow |e'\rangle$ pour la partie de la population qui se trouve dans l'état initial, et cette population retombe de façon spontanée dans l'état fondamental, et cela en émettant un photon. Donc, en comptant les photons émis, nous connaissons directement la population de l'état fondamental $|g\rangle$. Considérons, maintenant, un autre champ laser dont la fréquence est proche à celle de la transition entre $|g\rangle$ et $|e\rangle$. La durée de vie de cette transition est supposée bien plus longue que celle de $|g\rangle \rightarrow |e'\rangle$. Quitte à une approximation du premier ordre pour la dynamique du sous-système à 2 niveaux (généralisé par $|g\rangle$ et $|e\rangle$), nous nous retrouvons avec une équation de Schrödinger. Nous supposons que certains paramètres ne sont pas bien connus : Δ , la différence entre la fréquence du deuxième laser et la fréquence de la transition atomique, μ , constante du couplage atome-laser (celle-ci caractérise la fréquence de Rabi). Le but est d'identifier Δ et μ , en mesurant la population de l'état fondamental grâce au premier champ laser et le photodétecteur. La modélisation habituelle d'un tel système quantique ouvert se fait à travers les termes

du type Lindblad pour la dynamique de la matrice densité (voir, e.g., [53]). Néanmoins, par des techniques de perturbations singulières qui justifient une certaine approximation adiabatique (quasi-statique), nous pouvons nous restreindre au modèle décrit par une équation de Schrödinger et cela malgré une mesure continue de la population. Nous référons à l'article [77] pour les détails de cette réduction de modèle. Enfin, pour la nature bien-posée du problème inverse de dessus, nous référons à l'article [67].

Il convient d'écrire la dynamique dans le langage de la matrice densité $\rho = \Psi\Psi^\dagger$. Le système (1.23) devient

$$\frac{d}{dt}\rho = -i \left[\frac{\Delta}{2}\sigma_z + \frac{u\mu}{2}\sigma_x, \rho \right] \quad (1.24)$$

$$\frac{d}{dt}\mu = 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta = 0 \quad (1.26)$$

$$y = \text{Tr}(\sigma_z\rho) \quad (1.27)$$

où $[\cdot, \cdot]$ est le commutateur. Nous supposons que l'amplitude du champ laser est lentement variable par rapport à la fréquence de Rabi $|u\mu|$, c.à.d. $|\dot{u}| \ll |u\mu||u|$ (la fréquence de Rabi caractérise le cycle de l'absorption-émission de photons pour un atome illuminé). Nous supposons, de plus, que les fréquences du laser et la transition atomique sont proches : $|\Delta| \ll |u|\mu$.

Afin d'estimer les paramètres inconnus, Δ et μ , nous proposons l'observateur adaptatif suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho} = -i \left[\frac{\hat{\Delta}}{2}\sigma_z + \frac{u\hat{\mu}}{2}\sigma_x, \hat{\rho} \right] \\ - K_\rho(\text{Tr}(\sigma_z\hat{\rho}) - y) (\sigma_z\hat{\rho} + \hat{\rho}\sigma_z - 2\text{Tr}(\sigma_z\hat{\rho})\hat{\rho}) \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\mu} = -uK_\mu\text{Tr}(\sigma_y\hat{\rho}) (\text{Tr}(\sigma_z\hat{\rho}) - y) \quad (1.29)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\Delta} = -uK_\Delta\text{Tr}(\sigma_x\hat{\rho}) (\text{Tr}(\sigma_z\hat{\rho}) - y) \quad (1.30)$$

où K_ρ , K_μ et K_Δ sont des scalaires positifs. Nous avons le résultat de convergence suivant :

Théorème 5. *Considérons le système à deux niveaux décrit par (1.24)-(1.25)-(1.26)-(1.27) où l'amplitude du laser u est constante. Supposons $\text{Tr}(\sigma_x\rho_0) \neq -1, 0, 1$, $\mu \neq 0$ et $u \neq 0$. Pour tous paramètres de réglage positifs k_ρ, k_μ, k_Δ , il existe $\bar{\epsilon} > 0$ tel que, pour tout $\epsilon \in]0, \bar{\epsilon}]$, si*

$$\begin{aligned} \Delta \leq \epsilon|u\mu|, \quad K_\rho = 2k_\rho\epsilon|u|\mu, \\ K_\mu = 2k_\mu\epsilon^2\mu^2, \quad K_\Delta = 2k_\Delta\epsilon^2|u|\mu^2, \end{aligned} \quad (1.31)$$

l'observateur non-linéaire (1.28)-(1.29)-(1.30) est localement convergent dans le sens suivant : il existe $\delta > 0$ tel que, si la condition initiale $(\hat{\rho}_0, \hat{\mu}_0, \hat{\Delta}_0)$ satisfait

$$|\hat{\rho}_0 - \rho_0| \leq \delta, \quad |\hat{\mu}_0 - \mu| \leq \delta\epsilon|\mu|, \quad |\hat{\Delta}_0 - \Delta| \leq \delta\epsilon|u\mu|,$$

$(\hat{\rho}, \hat{\mu}, \hat{\Delta})$ converge vers (ρ, μ, Δ) lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Pour une preuve détaillée de ce théorème et des simulations numériques montrant l'efficacité de l'algorithme, nous référons à l'article [22]. Toutefois nous proposons ici, très brièvement, un schéma de la preuve.

Tout d'abord, nous considérons une transformation dépendant du temps afin d'appliquer la méthode de moyennisation [59], ce qui justifie une approximation des champs tournants. Le choix des gains dans le théorème implique une approximation du système à l'ordre ϵ sur un horizon de $O(1/\epsilon)$. En nous ramenant aux coordonnées de la sphère de Bloch, nous proposons une fonction de Lyapunov pour ce système du premier ordre, ce qui implique la convergence locale et exponentielle des erreurs d'état $\hat{\rho} - \rho$ et de paramètre $\hat{\mu} - \mu$ via le principe d'invariance de LaSalle. Cette approximation du premier ordre étant insuffisante pour démontrer la convergence de $\hat{\Delta}$ vers Δ , nous avons besoin d'une approximation du deuxième ordre en ϵ . Ce système admet une structure triangulaire, et les convergences de $\hat{\rho} - \rho$ et de $\hat{\mu} - \mu$ vers 0 impliquent, immédiatement, la convergence de $\hat{\Delta}$. Nous concluons en appliquant les arguments standards de moyennisation qui reposent sur la convergence exponentielle du système du deuxième ordre.

Une première extension de cet algorithme d'identification au cas de systèmes à plusieurs niveaux est proposée dans [22]. Dans cette extension, nous supposons connaître les niveaux d'énergies et donc que l'hamiltonien libre dans le repère tournant admet des désaccords nuls. Le but est alors d'identifier les paramètres de couplages atomes-lasers. Nous supposons, de plus, la mesure continue de la population de tous les états propres de l'hamiltonien libre du système. Nous proposons alors une extension naturelle de l'observateur de dessus qui assure l'identification de ces paramètres de couplage. Toutefois, demander la mesure de tous ces observables physiques est trop restrictif en réalité et semble être hors de la portée expérimentale. Nous avons donc proposé une nouvelle extension de cet algorithme qui ne prend en compte que la mesure continue d'une seule population [68]. Dans la sous-section suivante, nous détaillons, brièvement, l'idée de cette extension.

1.3.2 Extension

Afin de détailler l'algorithme d'estimation, nous considérons un sous système de dimension 3. L'extension des idées au cas multi-dimensionnel est immédiate.

Désignons par $|k\rangle$, $k = 1, 2, 3$ les 3 états d'énergies ω_k tels que $|\omega_2 - \omega_1| \neq |\omega_3 - \omega_2|$. Nous considérons les notations suivantes pour $k, l = 1, 2, 3$: $\sigma^{lk} = |l\rangle \langle k| - |k\rangle \langle l|$, $\sigma_x^{lk} = |l\rangle \langle k| + |k\rangle \langle l|$, $\sigma_z^{lk} = |l\rangle \langle l| - |k\rangle \langle k|$ et $P_k = |k\rangle \langle k|$ (le projecteur sur $|k\rangle$). La dynamique est donnée par l'équation de Schrödinger suivante :

$$i \frac{d}{dt} |\Psi\rangle = (H_0 + u(t)\mu) |\Psi\rangle, \quad y = \langle P_1 \Psi, \Psi \rangle.$$

Ici, $u(t) \in \mathbb{R}$ est le champ électromagnétique, $H_0 = \sum_{k=1}^3 \omega_k P_k$ est l'hamiltonien libre, $\mu = \mu_{12} \sigma_x^{12} + \mu_{23} \sigma_x^{23}$ décrit le couplage avec le champ électromagnétique (moment dipolaire) et y est la sortie. Nous supposons connaître les énergies ω_k , et le but est donc d'estimer les paramètres de couplage μ_{12} et μ_{23} à partir de la sortie y . Enfin, nous supposons le champ électromagnétique en résonance avec les transitions $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ et $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$:

$$u(t) = u_{12} \bar{A}_{12} \sin((\omega_2 - \omega_1)t) + u_{23} \bar{A}_{23} \sin((\omega_3 - \omega_2)t)$$

avec les amplitudes \bar{A}_{12} et \bar{A}_{23} de petite magnitude et les modulations lentes et normalisées $|u_{12}|, |u_{23}| \in [0, 1]$. Nous avons $|\bar{A}_{12}\mu_{12}|, |\bar{A}_{23}\mu_{23}| \ll |\omega_2 - \omega_1|, |\omega_3 - \omega_2|$. Dans le repère d'interaction $|\Phi\rangle = e^{iH_0 t} |\Psi\rangle$ et en négligeant les termes hautement oscillants (approximation des champs tournants) nous avons le modèle suivant ($\sigma^{lk} = |l\rangle\langle k| - |k\rangle\langle l|$)

$$\frac{d}{dt} |\Phi\rangle = (u_{12}\Omega_{12}\sigma^{12} + u_{23}\Omega_{23}\sigma^{23}) |\Phi\rangle,$$

où $\Omega_{12} = \frac{\bar{A}_{12}\mu_{12}}{2}$ et $\Omega_{23} = \frac{\bar{A}_{23}\mu_{23}}{2}$ sont les amplitudes de Rabi lorsque $(u_{12}, u_{23}) = (1, 0)$ et $(u_{12}, u_{23}) = (0, 1)$.

Dans la suite, nous utiliserons la matrice densité $\rho = |\Phi\rangle\langle\Phi|$ à la place de la fonction d'onde $|\Phi\rangle$. L'estimation de paramètres réels μ_{12} et μ_{23} est alors équivalente à l'estimation de paramètres réels Ω_{12} et Ω_{23} dans la dynamique

$$\frac{d}{dt}\rho = u_{12}\Omega_{12} [\sigma^{12}, \rho] + u_{23}\Omega_{23} [\sigma^{23}, \rho], \quad (1.32)$$

à travers la sortie $y = \text{Tr}(P_1\rho)$ pour les entrées réelles u_{12} et u_{23} . Tout d'abord, notons qu'en choisissant $(u_{12}, u_{23}) = (1, 0)$, nous pouvons négliger la transition $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ et la dynamique est donc restreinte à la dynamique d'un qubit engendré par $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Sachant que nous disposons de la mesure continue de la population de l'état $|1\rangle$, nous pouvons nous ramener au problème de la sous-section précédente et l'estimation de l'amplitude Ω_{12} s'effectue ainsi à travers le même observateur.

Nous supposons donc connaître la constante de couplage μ_{12} et nous souhaitons estimer μ_{23} . Dans ce but, nous prenons $u_{12} = 1$ et $u_{23} = \eta \cos \theta$ ($\frac{d}{dt}\theta = \Omega_{12}$ et η une petite constante positive). Nous proposons alors l'estimateur suivant

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho} &= \Omega_{12}[\sigma^{12}, \hat{\rho}] + \eta \cos \theta \hat{\Omega}_{23}[\sigma^{23}, \hat{\rho}] + \epsilon\eta\Gamma_{23}(y - \hat{y})(1 - 2\cos(2\theta)) (\Sigma_z^{23}\hat{\rho} + \hat{\rho}\Sigma_z^{23} - 2\text{Tr}(\Sigma_z^{23}\hat{\rho})\hat{\rho}), \\ \frac{d}{dt}\hat{\Omega}_{23} &= \epsilon^2\eta\gamma_{23}(y - \hat{y})(1 - 2\cos(2\theta))\text{Tr}(\Sigma_z^{23}[\Sigma_z^{23}, \hat{\rho}]), \end{aligned} \quad (1.33)$$

où $\Sigma^{23} = U(t)\sigma^{23}U^\dagger(t)$, $\Sigma_z^{23} = U(t)\sigma_z^{23}U^\dagger(t)$ avec $U(t) = \exp(\theta(t)\sigma^{12})$, et où Γ_{23} et γ_{23} sont des gains positifs (avec $\Gamma_{23}, \gamma_{23} \approx 1$) et ϵ une petite constante positive. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 6. *Considérons le système (1.32) avec les entrées $u_{12} = 1$, $u_{23} = \eta \cos \theta$ où η est constante et $\frac{d}{dt}\theta = \Omega_{12}$. Considérons aussi l'estimation de ρ et Ω_{23} via (1.33). Prenons $\Gamma_{23} > 0$ et $\gamma_{23} > 0$ et ρ_0 un état projecteur réel tel que $\text{Tr}((P_1 + P_2)\rho(0)) > 0$. Alors pour ϵ, η positives et suffisamment petites, il existe $\sigma > 0$ telle que, si $\hat{\rho}(0)$ est un état projecteur réel avec $1 - \text{Tr}(\hat{\rho}(0)\rho(0)) \leq \sigma$ et $|\hat{\Omega}_{23}(0) - \Omega_{23}| \leq \sigma$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{\rho}(t) - \rho(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{\Omega}_{23}(t) = \Omega_{23}$.*

Pour une preuve de ce résultat et des simulations numériques, nous référons à l'article [68].

Chapitre 2

Systèmes quantiques en observation : estimation et contrôle par feedback

Le principe de contrôle par rétroaction en physique quantique a longuement été controversé, et même considéré impossible. La difficulté principale venait, en fait, de l'absence d'une théorie capable de décrire les mesures quantiques continues. En fait, le postulat du collapse du paquet d'onde implique que toute tentative de mesure d'un observable physique entraîne une projection instantanée de l'état du système sur un état propre de l'opérateur de mesure. Les théories concernant la mesure continue d'un système quantique ont été développées depuis les années 1980 (voir à titre d'exemple [71, 28, 110]). Ces théories ont été, le plus souvent, proposées pour les systèmes issus de l'optique quantique. La théorie du feedback en optique quantique a été développée à l'issue de ces avancées depuis 15 ans (voir e.g. [109, 40, 103]) et a donné lieu à certains schémas d'expériences (voir e.g. [98, 41]).

N'ayant pas le droit de mesurer des observables physiques qui ne commutent pas entre eux sur une seule réalisation, toute mesure quantique fournit, seulement, une information partielle sur le système. L'approche principale dans la plupart des propositions de feedback quantique, ainsi que dans la Section 2.1 de ce chapitre, est de convertir ce problème de contrôle avec des observations partielles en un problème de feedback d'état, en appliquant un filtre quantique approprié. Le schéma d'expérience proposé dans la Section 2.1 et la référence [41], est l'un des premiers schémas où l'on a le temps de simuler le filtre quantique en temps réel et d'en retirer l'information nécessaire afin de concevoir la loi de feedback appropriée. En effet, le caractère temps-discret de l'opération de la mesure nous laisse suffisamment de temps pour mettre à jour notre estimation de l'état du système. Nous proposons alors une loi de feedback très simple que l'on peut, aussi, calculer en temps réel et qui assure, de façon très efficace, la préparation et la protection des états de Fock. Les résultats de cette section ainsi que les extensions proposées font l'objet de deux publications et d'une communication aux conférences, une première publication [41] et la communication [74] acceptées et une deuxième publication plus récente soumise [6].

Enfin, dans la Section 2.2, nous considérons un autre problème de contrôle par feedback pour les systèmes quantiques. Il s'agit de la synchronisation d'un champ laser avec la fréquence de transition d'un seul atome (e.g. un ion piégé), ayant accès au temps de clics d'un photo-détecteur qui collecte les photons de fluorescence de la transition en question. Le feedback que l'on propose

dans ce but ne nécessite aucun filtrage des résultats de la mesure et n'utilise que le temps de détection du dernier saut quantique pour mettre à jour la fréquence du laser en question. Les résultats de cette section ainsi que les extensions proposées ont fait l'objet d'une publication acceptée [76] et d'une communication aux conférences [79].

2.1 Stabilisation par feedback d'une boîte à photons

Les articles récents [93, 50, 46] ont proposé une étude détaillée de la mesure non-destructive quantique (QND) de l'état de la lumière piégée dans une cavité supraconductrice (voir [53, chapter 5] pour une description de tels systèmes et [25] pour un modèle physique détaillé de la mesure QND de la lumière par des atomes). En plus d'être un outil d'observation de l'évolution du système, la mesure projective quantique peut être utilisée afin de préparer les états quantiques spécifiques. Par exemple, la mesure QND du nombre de photons du champ piégé dans la cavité projette l'état du champ sur un état de Fock [50]. Toutefois, le non-déterminisme intrinsèque à la mesure quantique fait que cette préparation d'états par la mesure n'est pas déterministe. Le contrôle par feedback quantique peut alors être utilisé comme un outil pour surmonter cette limitation et pourrait permettre la préparation sur demande des états quantiques. Il s'agit, en général, de combiner les mesures faibles quantiques et la correction, en temps réel, de l'état du système en fonction de l'information classique extraite des mesures. Au delà de la préparation des états spécifiques, les schémas de feedback peuvent, aussi, être utilisés pour les protéger de la décohérence qui résulte du couplage avec l'environnement.

Dans cette section, nous proposons un schéma de feedback pour la préparation sur demande des états de Fock piégés dans une cavité micro-onde supraconductrice et pour les protéger de la décohérence. Ces états sont fortement non-classiques car leur nombre de photons est parfaitement défini. La structure globale du schéma de feedback proposé est inspirée par [43], en appliquant une adaptation quantique de la structure observateur/contrôleur, largement utilisée pour les systèmes classiques (voir, e.g., [57, chapitre 4]). La partie observateur correspond à un filtre quantique en temps discret, basé sur les clics d'un détecteur, et qui permet l'estimation de l'état quantique du champ de la cavité.

Ce schéma de feedback, étant conçu pour opérer avec une configuration existante de cavité QED [93], est composé de trois étapes. Tout d'abord, nous extrayons de l'information sur la distribution du nombre de photons avec un seul atome de Rydberg circulaire et à travers un processus QND. En effet, cet atome interagit avec le champ de la cavité de façon dispersive : il n'y a donc pas d'échange d'énergie entre l'atome et la cavité, mais le champ de la cavité implique un petit déplacement des niveaux d'énergies de l'atome qui est proportionnel au nombre de photons. La mesure de ce déplacement, à l'aide d'un interféromètre de Ramsey, fournit de l'information sur l'intensité du champ et modifie l'état du champ à travers la projection quantique. Cette information est, en deuxième étape, utilisée pour estimer le nouvel état du champ de la cavité, par le biais d'un processus de filtrage quantique [20, 24]. Dans la troisième étape, nous corrigeons l'état du champ par l'injection d'un pulse cohérent dans la cavité. La loi de feedback utilisée est choisie en adaptant les techniques Lyapunov de l'article [75] au cas des systèmes en temps discret. Ces trois étapes représentent les trois composants de toutes les boucles de rétroaction : un capteur, un contrôleur et un actionneur. Par contraste avec les systèmes en boucle fermée

classique le capteur est ici quantique, tandis que le contrôleur et l'actionneur sont tous les deux classiques. En itérant la boucle de rétroaction, nous dirigeons la cavité vers l'état Fock cible. Aussi, nous pouvons stabiliser l'état de la cavité contre la décohérence.

2.1.1 Système physique, dynamiques de sauts

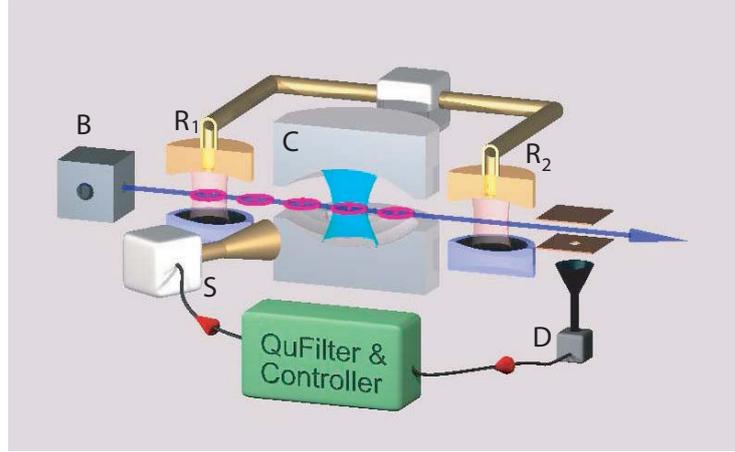


FIGURE 2.1 – La configuration de la cavité QED micro-onde avec le schéma de feedback.

Comme l'illustre la figure 2.1, le système est composé de C , une cavité micro-onde avec un grand facteur de qualité, de B , une boîte de production des atomes de Rydberg, de R_1 et R_2 , deux cavités de Ramsey avec des petits facteurs de qualités, de D , un détecteur d'atome, et de S , une source micro-onde. La dynamique est discrète en temps et se base sur les trajectoires de Monte-Carlo quantiques. En particulier, elle prend en compte l'effet de retours de la mesure. Cette dynamique est adaptée de [50] par rapport auquel nous avons, seulement, ajouté l'effet du contrôle.

Chaque pas de temps est indexé par un entier k qui correspond à l'arrivée de l'atome numéro k préparé dans B , soumis à un premier pulse Ramsey de $\pi/2$ dans R_1 , passant dans la cavité C avec laquelle il s'intrique, soumis à un deuxième pulse Ramsey de $\pi/2$ dans R_2 et enfin mesuré par le détecteur D . L'état de la cavité est décrit par l'opérateur densité ρ_k . Ici le passage de l'étape k à l'étape $k + 1$ correspond à la mesure projective de l'état de la cavité, en détectant l'état de l'atome de Rydberg numéro k . Durant cette même étape, un pulse cohérent approprié (le contrôle) est injecté dans C .

En notant, comme d'habitude, l'opérateur d'annihilation de photons par a et l'opérateur nombre de photons par $N = a^\dagger a$, la matrice densité ρ_{k+1} est calculée à partir de la matrice densité ρ_k par le biais de la dynamique des sauts suivante :

$$\rho_{k+1} = \frac{D(\alpha_k) M_{s_k} \rho_k M_{s_k}^\dagger D(-\alpha_k)}{\text{Tr} \left(M_{s_k} \rho_k M_{s_k}^\dagger \right)}$$

où

- l'opérateur de mesure $M_{s_k} = M_g$ (resp. $M_{s_k} = M_e$), lorsque l'atome k est détecté dans l'état $|g\rangle$ (resp. $|e\rangle$) avec

$$\begin{aligned} M_g &= \cos\left(\frac{\phi_R + \phi}{2} + N\phi\right), \\ M_e &= \sin\left(\frac{\phi_R + \phi}{2} + N\phi\right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Un tel processus de mesure correspond à une interaction hors-résonance entre l'atome k et la cavité où ϕ_R est donné par la direction du deuxième pulse Ramsey de $\pi/2$ (R_2 dans le figure 2.1) et ϕ est le déphasage par photon.

- la probabilité $P_{g,k}$ (resp. $P_{e,k}$) de détecter l'atome k dans $|g\rangle$ (resp. $|e\rangle$) est donnée par $\text{Tr}(M_g \rho_k M_g)$ (resp. $\text{Tr}(M_e \rho_k M_e)$).
- $D(\alpha_k)$ signifie l'opérateur de déplacement qui décrit l'injection du pulse cohérent, $D(\alpha_k) = \exp(\alpha_k(a^\dagger - a))$, et le contrôle scalaire α_k est un paramètre réel qui peut être ajusté à chaque pas de temps k .

En effet, le passage de l'étape k à l'étape $k + 1$ consiste en deux types d'évolutions : une mesure projective et une injection cohérente. Pour des raisons de simplicité, nous utiliserons la notation $\rho_{k+\frac{1}{2}}$, pour illustrer l'étape intermédiaire. Alors,

$$\begin{aligned} \rho_{k+\frac{1}{2}} &= \frac{M_{s_k} \rho_k M_{s_k}^\dagger}{\text{Tr}(M_{s_k} \rho_k M_{s_k}^\dagger)} \\ \rho_{k+1} &= D(\alpha_k) \rho_{k+\frac{1}{2}} D(-\alpha_k). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dans la suite, nous allons considérer une approximation de dimension finie qui consiste à fixer un nombre maximum de photons, n^{\max} . Dans la base de Fock tronquée $(|n\rangle)_{0 \leq n \leq n^{\max}}$, l'opérateur N correspond à la matrice diagonale $(\text{diag}(n))_{0 \leq n \leq n^{\max}}$, ρ est une matrice positive symétrique $(n^{\max} + 1) \times (n^{\max} + 1)$ de trace un, l'opérateur d'annihilation a est une matrice triangulaire avec $(\sqrt{n})_{1 \leq n \leq n^{\max}}$ comme éléments sur-diagonaux, les autres éléments étant nuls.

2.1.2 Schéma de feedback et analyse de convergence

Nous cherchons à stabiliser l'état de Fock avec \bar{n} photons caractérisé par l'opérateur densité $\bar{\rho} = |\bar{n}\rangle \langle \bar{n}|$. Dans ce but, nous considérons le filtre quantique temps-discret présenté dans la sous-section précédente et nous choisissons le feedback cohérent α_k tel que la valeur de la fonction de Lyapunov $V(\rho) = 1 - \text{Tr}(\rho \bar{\rho})$ décroît lors du passage de $\rho_{k+\frac{1}{2}}$ à ρ_{k+1} . Notons que, pour α suffisamment petit, la formule de Baker-Campbell-Hausdorff implique l'approximation suivante

$$D(\alpha)\rho D(-\alpha) \approx \rho - \alpha[\rho, a^\dagger - a] + \frac{\alpha^2}{2}[[\rho, a^\dagger - a], a^\dagger - a], \quad (2.3)$$

où l'on a négligé les termes d'ordres 3 et supérieurs. Alors, pour α_k suffisamment petit, nous avons

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(D(\alpha_k) \rho_{k+\frac{1}{2}} D(-\alpha_k) \bar{\rho} \right) &= \text{Tr} \left(\rho_{k+\frac{1}{2}} \bar{\rho} \right) - \alpha_k \text{Tr} \left([\rho_{k+\frac{1}{2}}, a^\dagger - a] \bar{\rho} \right) \\ &\quad + \frac{\alpha_k^2}{2} \text{Tr} \left([[\rho_{k+\frac{1}{2}}, a^\dagger - a], a^\dagger - a] \bar{\rho} \right). \end{aligned}$$

La loi de feedback

$$\alpha_k = c_1 \text{Tr} \left([\bar{\rho}, a^\dagger - a] \rho_{k+\frac{1}{2}} \right), \quad (2.4)$$

avec le gain $c_1 > 0$ suffisamment petit, assure donc

$$\text{Tr} (\bar{\rho} \rho_{k+1}) - \text{Tr} (\bar{\rho} \rho_{k+\frac{1}{2}}) > \frac{c_1}{2} \left| \text{Tr} \left([\bar{\rho}, a^\dagger - a] \rho_{k+\frac{1}{2}} \right) \right|^2, \quad (2.5)$$

car $\text{Tr} \left([\rho_{k+\frac{1}{2}}, a^\dagger - a] \bar{\rho} \right) = -\text{Tr} \left([\bar{\rho}, a^\dagger - a] \rho_{k+\frac{1}{2}} \right)$. De plus, l'espérance conditionnelle de $\text{Tr} \left(\bar{\rho} \rho_{k+\frac{1}{2}} \right)$ connaissant ρ_k est donnée par

$$\mathbb{E} \left(\text{Tr} \left(\bar{\rho} \rho_{k+\frac{1}{2}} \right) \mid \rho_k \right) = P_{g,k} \text{Tr} \left(\frac{\bar{\rho} M_g \rho_k M_g^\dagger}{P_{g,k}} \right) + P_{e,k} \text{Tr} \left(\frac{\bar{\rho} M_e \rho_k M_e^\dagger}{P_{e,k}} \right) = \text{Tr} (\bar{\rho} \rho_k)$$

car $[\bar{\rho}, M_g] = [\bar{\rho}, M_e] = 0$ et $M_g^\dagger M_g + M_e^\dagger M_e = 1$. Donc

$$\mathbb{E} \left(\text{Tr} (\bar{\rho} \rho_{k+1}) \mid \rho_k \right) \geq \mathbb{E} \left(\text{Tr} \left(\bar{\rho} \rho_{k+\frac{1}{2}} \right) \mid \rho_k \right) = \text{Tr} (\bar{\rho} \rho_k)$$

et en conséquence, l'espérance de $V(\rho_k)$ décroît à chaque pas de temps :

$$\mathbb{E} (V(\rho_{k+1})) \leq \mathbb{E} (V(\rho_k)). \quad (2.6)$$

En considérant le processus de Markov ρ_k , nous avons montré que $V(\rho_k)$ est une surmartingale minorée par 0. Lorsque V atteint son minimum 0, le processus de Markov ρ_k a convergé vers $\bar{\rho}$. Néanmoins, il n'est pas difficile de voir que cette surmartingale peut aussi converger vers d'autres attracteurs, comme, par exemple, les autres états de Fock qui sont tous les points stationnaires du processus de Markov en boucle fermée. En suivant l'approche de [75], nous suggérons de modifier la loi de feedback de la façon suivante :

$$\alpha_k = \begin{cases} c_1 \text{Tr} \left([\bar{\rho}, a^\dagger - a] \rho_{k+\frac{1}{2}} \right) & \text{if } V(\rho_k) \leq 1 - \varepsilon \\ \operatorname{argmax}_{\alpha \in [-\bar{\alpha}, \bar{\alpha}]} \text{Tr} \left(\bar{\rho} D(\alpha) \rho_{k+\frac{1}{2}} D(-\alpha) \right) & \text{if } V(\rho_k) > 1 - \varepsilon \end{cases} \quad (2.7)$$

avec $c_1, \varepsilon, \bar{\alpha} > 0$ des constantes.

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 7. *Considérons le système (2.2) et supposons que pour tout $n \in \{0, \dots, n^{\max}\}$, $\frac{\phi_R + \phi}{2} + n\phi \neq 0 \pmod{(\pi/2)}$, et que*

$$\# \left\{ \cos^2 \left(\frac{\phi_R + \phi}{2} + n\phi \right) \mid n \in \{0, \dots, n^{\max}\} \right\} = n^{\max} + 1.$$

Considérons, de plus, le schéma de feedback (2.7), avec $\bar{\alpha} > 0$. Pour des paramètres $c_1 > 0$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petits, les trajectoires de (2.2) convergent presque sûrement vers l'état Fock cible $\bar{\rho}$.

Remarque 6. La deuxième partie de la loi de feedback (2.7) traite les états proches des mauvais attracteurs. Elle n'est pas explicite et semble difficile à calculer en temps réel. En fait, cette forme de la loi de feedback a été choisie pour des raisons techniques et pour simplifier la preuve du Théorème 7. En pratique, nous pouvons la remplacer par un contrôle constant (non-nul) qui excite le système autour de ces mauvais attracteurs et qui assure un retour rapide des trajectoires dans le bassin d'attraction de l'état cible. Nous référons à l'article [41] pour des simulations numériques qui montrent l'efficacité du schéma après cette simplification.

Remarque 7. Le gain du contrôleur c_1 peut être accordé afin de maximiser, à chaque pas de temps k et lorsque $\rho_{k+\frac{1}{2}}$ est proche de $\bar{\rho}$, la valeur de $\text{Tr}\left(D(\alpha_k)\rho_{k+\frac{1}{2}}D(-\alpha_k)\bar{\rho}\right)$. En négligeant les termes d'ordre 3 et supérieur dans $(\rho_{k+\frac{1}{2}} - \bar{\rho})$, (2.3) implique

$$\begin{aligned} \text{Tr}\left(D(\alpha_k)\rho_{k+\frac{1}{2}}D(-\alpha_k)\bar{\rho}\right) &= \text{Tr}\left(\bar{\rho}\rho_{k+\frac{1}{2}}\right) + \\ &\quad \left(\text{Tr}\left([\bar{\rho}, a^\dagger - a]\rho_{k+\frac{1}{2}}\right)\right)^2 \left(c_1 - \frac{c_1^2}{2} \text{Tr}\left([\bar{\rho}, a^\dagger - a][\bar{\rho}, a^\dagger - a]\right)\right). \end{aligned}$$

Alors $c_1 = 1/\text{Tr}\left([\bar{\rho}, a^\dagger - a][\bar{\rho}, a^\dagger - a]\right) = 1/(4\bar{n} + 2)$ assure le maximum de décroissance à chaque pas de temps.

La preuve du Théorème 7 nécessite l'application de quelques outils classiques de la théorie des processus stochastiques (l'inégalité de Doob et le théorème d'invariance asymptotique de Kushner [66]). Pour une preuve détaillée de ce théorème, nous référons à l'article [6].

2.1.3 Filtrage quantique pour estimation d'état

Le Théorème 7 assure la stabilisation de l'état de Fock cible dans les situations idéales où la cavité et la mesure sont parfaites et où l'on suppose connaître l'état initial du système. En effet, nous pouvons étendre ce schéma de feedback aux cas plus réalistes où nous prenons en compte toutes les imperfections de la configuration expérimentale. Dans ce but, nous avons besoin d'appliquer un filtre quantique qui estime l'état du système à partir des mesures effectuées. En effet, le calcul de la loi de feedback (2.7) nécessite la connaissance de l'état $\rho_{k+\frac{1}{2}}$. Lorsque la mesure et la cavité sont parfaites et que le modèle de sauts de (2.2) n'admet aucune erreur, ce modèle représente, en fait, un choix tout à fait naturel pour le filtre quantique estimant l'état du système ρ . Le filtre est donc donné par

$$\begin{aligned} \rho_{k+\frac{1}{2}}^{\text{est}} &= \frac{M_{s_k}\rho_k^{\text{est}}M_{s_k}^\dagger}{\text{Tr}\left(M_{s_k}\rho_k^{\text{est}}M_{s_k}^\dagger\right)}, \\ \rho_{k+1}^{\text{est}} &= D(\alpha_k)\rho_{k+\frac{1}{2}}^{\text{est}}D(-\alpha_k). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nous avons pour ce filtre, le théorème suivant qui assure une sorte de principe de séparation :

Théorème 8. *Considérons le système en boucle fermée (2.2), où la loi de feedback α_k est choisie en fonction de l'état du filtre quantique : $\alpha_k = g(\rho_{k+\frac{1}{2}}^{est})$. Supposons de plus que, lorsque $\rho_0^{est} = \rho_0$ (et donc lorsque le filtre quantique coïncide avec le système physique (2.2)), le système en boucle fermée converge de façon presque sûre vers un état pur $\bar{\rho}$. Alors, pour tout choix de l'état initial ρ_0^{est} , tel que $\ker \rho_0^{est} \subset \ker \rho_0$, les trajectoires du système convergent de façon presque sûre vers ce même état pur : $\rho_k \rightarrow \bar{\rho}$.*

Pour une preuve assez simple de ce théorème nous référons à l'article [6].

En plus de cette imprécision dans l'état initial du système, plusieurs imperfections dans les paramètres de l'expérience doivent être pris en compte. Une première imperfection, assez importante, concerne le retard du feedback. En effet, nous avons en permanence d atomes qui volent entre la cavité C et le détecteur D (typiquement $d = 5$). Donc, lors de l'injection cohérente à l'étape k , nous n'avons pas encore mesuré l'état de ces d atomes qui sont passés à travers la cavité mais qui n'ont pas encore atteint le détecteur. Nous pouvons prendre en compte ce retard par le biais d'une modification dans le filtre qui consiste à prédire l'état du système après le passage de ces d atomes. Il s'agit d'adapter une version stochastique du prédicteur de Smith [97]. Pour une exposition claire de cette méthode ainsi que pour une preuve de convergence du système en boucle fermée, en présence de ce retard, nous référons à l'article récent [6].

Outre ce retard dans le feedback, les autres imperfections liées au processus de la mesure peuvent être résumées par les trois aspects suivants : 1- le détecteur d'atomes n'est pas parfait et peut rater certains atomes (autour de 20% des atomes) ; 2- le détecteur d'atomes n'est pas sans fautes et le résultat de la mesure (atomes en g ou e) peut être inter-changé (un taux d'erreur de 10%) ; 3- le processus de préparation des atomes est, en soi, un processus stochastique qui suit une loi de Poisson et alors les pulses de la mesure peuvent être vide d'atomes (un taux d'occupation de 40%). La connaissance de tous ces taux peut nous aider à adapter le filtre quantique afin de prendre en compte toutes ces imperfections. Cela a été fait dans l'article [41] où l'on applique la loi de Bayes pour modifier les dynamiques. En effet, dans [41] nous montrons, à travers les simulations numériques, que l'algorithme de feedback de cette section reste efficace même en prenant compte toutes ces imperfections.

2.2 Synchronisation par feedback : application aux standards de fréquence

La seconde SI est définie comme "la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de caesium 133" [1]. Un standard de fréquence est l'outil qui réalise cette définition. Les techniques d'"extremum-seeking" (voir e.g, [8]) sont souvent utilisées dans le spectroscope de haute précision afin d'assurer un verrouillage de fréquence avec une transition atomique [91, 86]. Pour les micro-horloges atomiques [60], la synchronisation est obtenue lorsque le signal de sortie d'un photo-détecteur est maximum (ou minimum). Cette dernière représente une résonance parfaite entre le laser sonde et la transition atomique. Comme présentée dans le figure 2.2, une telle boucle de feedback est basée sur la modulation de la fréquence de la sonde, l'entrée u , avec une variation sinusoïdale $a \sin(\omega t)$ de petite amplitude a et de fréquence (basse) fixée ω , sur un filtrage passe-

haut (fonction de transfert $\frac{s}{s+h}$) du signal du photo-détecteur (la sortie y), sur un multiplicateur et enfin un intégrateur qui fournit la moyenne de la valeur de l'entrée.

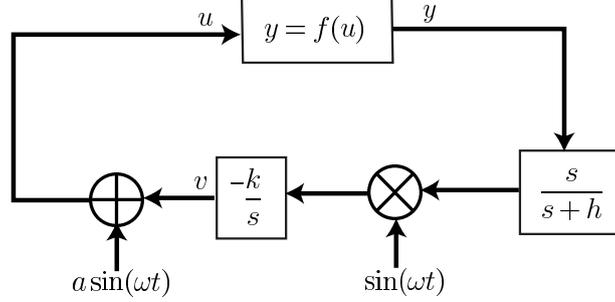


FIGURE 2.2 – La boucle d'extremum-seeking pour un système statique non-linéaire $y = f(u)$ ($s = \frac{d}{dt}$ est la variable de Laplace et (h, k, a, ω) sont des paramètres constants).

Dans de tels schémas de synchronisation, le système correspond à un ensemble de systèmes quantiques identiques, avec peu d'interactions entre eux, ayant atteint son régime statistique asymptotique décrit par une matrice densité, solution d'une équation maîtresse statique de Lindblad-Kossakovski. Dans cette section (et l'article [76]), nous proposons d'adapter cette stratégie de feedback à un seul système quantique. Un tel système ne peut pas être décrit par une application statique non-linéaire entrée/sortie mais obéit à une dynamique de sauts aléatoires [39, 53]. Le signal de la sortie n'est plus continu car il correspond à un compteur qui fournit les temps (aléatoires) des sauts. Comme montré dans [33], toutes les informations spectroscopiques, et en particulier la valeur de la fréquence de la transition atomique en question, sont contenues dans les statistiques de ces suites de temps de sauts. Cela n'est, donc, pas surprenant que de telles boucles de feedback soient possibles. La contribution de l'article [76] est de proposer, pour la première fois (à notre connaissance), un schéma de synchronisation par feedback en temps réel qui peut être implémenté sur un circuit électronique de complexité similaire à celle d'une boucle d'extremum-seeking. Dans cette boucle de feedback, nous évitons, donc, les filtres quantiques [52] et la sauvegarde de la suite de temps de sauts, nécessaires pour les traitements statistiques usuels.

Ici, nous considérons deux types de systèmes quantiques. Le premier système est le plus simple que l'on peut considérer : il est constitué d'un état fondamental stable et d'un état excité instable. Ces deux états sont en interaction avec un champ électromagnétique quasi-résonnant caractérisé par une amplitude complexe $u + v$ et la fréquence Ω proche de la fréquence de transition entre l'état fondamental et l'état excité. La mesure correspond, alors, aux photons émis par l'état excité lorsqu'il dissipe vers l'état fondamental par l'émission spontanée. L'amplitude complexe est modulée selon $\bar{u} + \bar{v} \cos(\omega t)$ ((\bar{u}, \bar{v}) paramètres positifs et la fréquence de modulation $\omega \ll \Omega$). Le feedback de la synchronisation (qui joue le rôle de l'intégrateur de la figure 2.2) correspond, essentiellement, à une récurrence $\Omega_{N+1} = \Omega_N - \delta \sin(\omega t_N)$ où N est l'index du saut, t_N est le temps du saut, et Ω_N est la fréquence du laser sonde entre t_{N-1} et t_N (δ paramètre positif). Le deuxième système correspond à un système Λ typique des expériences du piégeage cohérent de population et du pompage optique [7]. Une telle configuration à trois niveaux est aussi présente dans les microhorloges atomiques. La boucle de synchronisation est très similaire au cas précédent. Les deux schémas de feedback reposent sur l'étude des trajectoires de Monte-Carlo quantiques associées et

assurent la convergence de la valeur moyenne du désaccord vers 0 tout en gardant la déviation standard arbitrairement petite.

Comme évoqué plus haut, le modèle considéré dans cette section correspond à des trajectoires de Monte-Carlo quantiques. Notons que, même si ces trajectoires quantiques représentent une méthode efficace de simulation pour l'équation maîtresse quantique, elles sont intéressantes en soi, car elles modélisent le processus de mesure et la dynamique conditionnelle associée. En effet, quelques uns des travaux originaux ayant motivé l'étude des trajectoires quantiques [33, 114] avaient été proposés pour comprendre les expériences sur les sauts quantiques (pour les atomes dans une configuration V) [81, 94]. Ainsi, tout au long de cette section, nous référons aux trajectoires de Monte-Carlo quantiques comme à un modèle et non une méthode numérique. Nous référons à [53] pour plus de détails.

2.2.1 Système à 2 niveaux

Le système à 2 niveaux est défini sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \text{span}\{|g\rangle, |e\rangle\}$: l'état fondamental $|g\rangle$ est stable tandis que l'état excité $|e\rangle$ est instable avec la durée de vie $1/\Gamma$ et relaxe vers $|g\rangle$. Le système est soumis à un champ de laser en quasi-résonance par rapport à la fréquence de la transition. Sa dynamique est stochastique : elle est donnée par les trajectoires de Monte-Carlo quantiques [53] décrites ci-dessous.

En l'absence de sauts quantiques, la matrice densité ρ évolue selon la dynamique

$$\frac{d}{dt}\rho = -i\left[\frac{H}{\hbar}, \rho\right] - \frac{1}{2}\{L^\dagger L, \rho\} + \text{Tr}(L^\dagger L\rho)\rho,$$

où $\{L^\dagger L, \rho\} = L^\dagger L\rho + \rho L^\dagger L$ désigne l'anti-commutateur. Notons que le terme non-linéaire de cette dynamique est ajouté afin d'assurer la normalisation de la matrice densité pour la garder de trace 1. En effet, la formulation habituelle pour les trajectoires de Monte-Carlo quantiques utilise le langage de la fonction d'onde et normalise la fonction d'onde à chaque étape. Ici, sans perte de généralité et pour la simplicité, nous avons traduit la dynamique dans le langage de la matrice densité. L'hamiltonien $\frac{H}{\hbar} = \frac{\Delta}{2}\sigma_z + u\sigma_x + v\sigma_y$ définit la partie conservative de la dynamique : $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ sont les matrices de Pauli ; Δ signifie le désaccord entre le laser et l'atome ; u et v sont des coefficients de l'amplitude complexe du laser. L'opérateur de saut, $L = \sqrt{\Gamma}|g\rangle\langle e|$, est associé à la dynamique dissipative avec $\Gamma > 0$ qui représente le taux de décohérence. Notons que, l'hamiltonien ci-dessus est le résultat d'une approximation de champs tournants habituelle, où le désaccord et les taux de décohérence sont supposés plus petits que la fréquence de la transition atomique [53].

À chaque pas de temps dt le système peut sauter vers l'état fondamental $|g\rangle\langle g|$ avec la probabilité donnée par

$$p_{\text{saut}}(\rho \rightarrow |g\rangle\langle g|) = \text{Tr}(L^\dagger L\rho) dt = \Gamma \text{Tr}(|e\rangle\langle e|\rho) dt = \Gamma \langle e|\rho|e\rangle dt.$$

Chaque saut est associé à l'émission spontanée d'un photon qui peut être détecté par un photo-détecteur : la mesure est simplement un clic et nous savons, après le clic, que le système se trouve à l'état fondamental, c.à.d. $\rho = |g\rangle\langle g|$.

Dans la suite, nous écrivons la dynamique à l'échelle de Γ . Il s'agit de remplacer u par $u\Gamma$, v par $v\Gamma$, Δ par $\Delta\Gamma$, et t par t/Γ dans les équations. Dans cette échelle de taux de décohérence, la matrice densité ρ évolue selon la dynamique

$$\frac{d}{dt}\rho = -i \left[\frac{\Delta}{2}\sigma_z + u\sigma_x + v\sigma_y, \rho \right] - \frac{1}{2} \{ |e\rangle \langle e|, \rho \} + \langle e| \rho |e\rangle \rho, \quad (2.9)$$

et la probabilité de saut entre t et $t + dt$ est donnée par

$$p_{\text{jump}}(\rho \rightarrow |g\rangle \langle g|) = \langle e| \rho |e\rangle dt. \quad (2.10)$$

Après chaque saut, ρ coïncide avec $|g\rangle \langle g|$. Le désaccord atome/laser est Δ et l'amplitude complexe du laser est $u + v$. Le but est de proposer un algorithme temps-réel qui utiliserait l'information obtenue par les photons détectés afin de synchroniser le laser avec la fréquence atomique et donc de faire converger Δ vers zéro.

Notons qu'en pratique, nous avons une certaine connaissance de la fréquence de transition et nous pouvons alors toujours régler le laser pour que le désaccord $|\Delta|$ ne dépasse pas une valeur constante C .

Dans le but de proposer un algorithme de synchronisation inspiré par l'extremum-seeking, nous considérons une amplitude du champ laser de la forme

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} \cos(\omega t),$$

où la fréquence de la modulation ω est de l'ordre 1 et où \bar{u} et \bar{v} sont petites : $\bar{u}, \bar{v} \ll 1$.

La stratégie principale pour la correction du désaccord est d'attendre des sauts quantiques suffisamment matures. En effet, nous choisissons une constante de temps $T \gg 1$ et si la distance entre deux sauts est plus grande que T , nous corrigeons le désaccord selon le temps du deuxième clic. Nous pouvons, assez facilement, démontrer que ces sauts quantiques matures ont lieu, presque sûrement, dans un horizon fini. Ici, nous détaillons l'algorithme de l'asservissement :

1. Démarrer avec un certain désaccord Δ_0 avec $|\Delta_0| \leq C$ et choisir un paramètre de *switch* $S = 0$ et mettre le compteur $N = 0$.
2. Attendre un premier clic et entre-temps faire évoluer le paramètre de *switch* via $\frac{d}{dt}S = 1$.
3. Si le clic a lieu lorsque $S \leq T$ alors ré-initialiser le paramètre S à zéro et retourner à l'étape 2.
4. Si le clic a lieu lorsque $S > T$ alors ré-initialiser le paramètre S à zéro, changer la valeur du compteur à $N + 1$, corriger le désaccord Δ_N par :

$$\begin{cases} \Delta_{N+1} = \Delta_N - \delta \sin(\omega t) & \text{si } |\Delta_N - \delta \sin(\omega t)| \leq C, \\ \Delta_{N+1} = C, & \text{sinon} \end{cases}$$

et retourner à l'étape 2.

Nous avons alors le résultat de convergence suivant :

Théorème 9. *Considérons les trajectoires de Monte-Carlo décrites par (2.9)-(2.10). Considérons l'algorithme de synchronisation présenté ci-dessus, avec*

$$\bar{u}, \bar{v} \sim \epsilon \ll 1. \quad (2.11)$$

Supposons

$$\delta \sim \epsilon^2, \quad 4C^2 + 1 < 4\omega^2. \quad (2.12)$$

Nous pouvons fixer la constante du temps T dans l'algorithme, suffisamment grande pour que :

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\Delta_N^2) \leq O(\epsilon^2). \quad (2.13)$$

Corollaire 1. *Sous les hypothèses du Théorème 9, nous avons*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} P(|\Delta_N| > \sqrt{\epsilon}) \leq O(\epsilon). \quad (2.14)$$

Ce corollaire résulte d'une inégalité de Markov :

$$P(|\Delta_N| > \sqrt{\epsilon}) = P(\Delta_N^2 > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(\Delta_N^2)}{\epsilon}.$$

Alors (2.13) implique (2.14).

Pour une preuve détaillée du Théorème 9 ainsi que des simulations numériques qui montrent l'efficacité de l'algorithme, nous référons à l'article [76]. Dans ce théorème, le temps mort T entre deux sauts est plutôt considéré pour des raisons techniques. Il est lié au temps de convergence de la dynamique sans saut (2.9), démarrant de l'état $|g\rangle \langle g|$ vers un ϵ^4 -voisinage de son régime asymptotique. Vu que la convergence est exponentielle, T est linéaire par rapport à $-\log \epsilon$, ce qui explique qu'en pratique, on peut le choisir aux alentours de 1 même pour un ϵ assez petit. Toutefois, en simulation, nous n'avons pas vu de différence entre $T > 0$ grand (autour de 10) et $T = 0$. En effet, ce temps mort T ne semble pas essentiel en pratique et nous devrions pouvoir le prendre simplement égale à 0.

Enfin, notons que cet algorithme est très simple et peut être implémenté via un circuit électronique standard. En effet, la boucle de feedback adapte, seulement, le désaccord Δ qui est plusieurs ordres de grandeurs plus petit que la fréquence de la transition optique impliquant les échelles temporaires du femto-second. Pour le système à deux niveaux, la fréquence de mise à jour est, directement, liée à l'intervalle de temps entre les clics du détecteur et est plus petite que Γ , l'inverse de la durée de vie de l'état excité instable. Comme, pour plusieurs situations physiques [86, 91], Γ tombe dans le domaine de radio-fréquence, l'algorithme de l'adaptation peut être réalisé via un simple circuit analogique de la gamme GHz.

2.2.2 Système Λ

Ici, nous considérons un système à trois niveaux dans une configuration Λ comme un candidat pour le standard de fréquence. Le système est constitué de 2 états fondamentaux métastables $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$, et un état excité $|e\rangle$ couplé aux états fondamentaux. Les temps de relaxation pour les transitions $|e\rangle \rightarrow |g_j\rangle$ sont supposés bien plus courts que celui de la transition entre les états

fondamentaux (ici supposé métastable). Nous notons les taux de relaxation Γ_1 et Γ_2 . Notons qu'ici, les états fondamentaux peuvent avoir leur séparation d'énergie dans le régime micro-onde, comme pour les micro-horloges atomiques, mais aussi dans le régime optique ce qui permettrait une meilleure précision de l'horloge.

Nous considérons des champs de laser près de la résonance avec les amplitudes lentement variables que l'on désigne par $\tilde{\Omega}_1$ et $\tilde{\Omega}_2$ et les désaccords associés Δ_e et $\Delta_e + \Delta$ (Δ est appelé le désaccord de Raman). Ici, nous extrayons les trajectoires de Monte-Carlo quantiques de l'équation maîtresse de Lindblad qui décrit la dynamique moyenne d'un ensemble statistique de systèmes. Une approximation des champs tournants classique nous amène à l'équation maîtresse

$$\frac{d}{dt}\rho = -\frac{i}{\hbar}[\tilde{H}, \rho] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (2Q_j\rho Q_j^\dagger - Q_j^\dagger Q_j\rho - \rho Q_j^\dagger Q_j), \quad (2.15)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{H}}{\hbar} = & \frac{\Delta}{2} (|g_2\rangle\langle g_2| - |g_1\rangle\langle g_1|) + (\Delta_e + \frac{\Delta}{2}) (|g_1\rangle\langle g_1| + |g_2\rangle\langle g_2|) \\ & + \tilde{\Omega}_1 |g_1\rangle\langle e| + \tilde{\Omega}_1^* |e\rangle\langle g_1| + \tilde{\Omega}_2 |g_2\rangle\langle e| + \tilde{\Omega}_2^* |e\rangle\langle g_2| \end{aligned}$$

et $Q_j = \sqrt{\Gamma_j} |g_j\rangle\langle e|$.

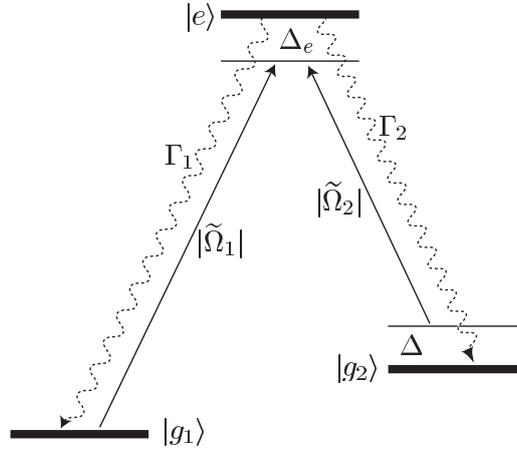


FIGURE 2.3 – Le système Λ : deux états fondamentaux métastables $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$ sont couplés à un état excité instable.

En supposant les taux de décohérence Γ_1 et Γ_2 beaucoup plus grands que les fréquences de Rabi $|\tilde{\Omega}_1|$, $|\tilde{\Omega}_2|$ et les désaccords de fréquences Δ et Δ_e , le système passe très peu de temps dans l'état excité et transite, essentiellement, entre les états $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$. Nous pouvons appliquer la théorie de la perturbation singulière pour éliminer la dynamique rapide et stable de $|e\rangle$ afin d'obtenir un système qui évolue dans le sous-espace $\text{span}\{|g_1\rangle, |g_2\rangle\}$.

L'équation maîtresse réduite est toujours de la forme Lindblad et s'écrit (voir [77] pour une preuve détaillée)

$$\frac{d}{dt}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (2L_j \rho L_j^\dagger - L_j^\dagger L_j \rho - \rho L_j^\dagger L_j), \quad (2.16)$$

où l'hamiltonien lent réduit H est donné, quitte à un changement de phase globale, par

$$\frac{H}{\hbar} = \frac{\Delta}{2} (|g_2\rangle \langle g_2| - |g_1\rangle \langle g_1|) = \frac{\Delta}{2} \sigma_z, \quad (2.17)$$

et

$$L_j = \sqrt{\tilde{\gamma}_j} |g_j\rangle \langle b_{\tilde{\Omega}}| \quad \text{avec} \quad \tilde{\gamma}_j = 4 \frac{|\tilde{\Omega}_1|^2 + |\tilde{\Omega}_2|^2}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2} \Gamma_j. \quad (2.18)$$

L'état

$$|b_{\tilde{\Omega}}\rangle = \frac{\tilde{\Omega}_1}{\sqrt{|\tilde{\Omega}_1|^2 + |\tilde{\Omega}_2|^2}} |g_1\rangle + \frac{\tilde{\Omega}_2}{\sqrt{|\tilde{\Omega}_1|^2 + |\tilde{\Omega}_2|^2}} |g_2\rangle$$

est appelé l'état brillant dans la littérature physique (piégeage cohérent de la population). À partir de maintenant, nous travaillons avec ce système à 2 niveaux (2.16) à la place de (2.15).

L'équation maîtresse (2.16) caractérise la dynamique moyenne d'un ensemble statistique de ces systèmes à 3 niveaux. Ici, nous en déduisons les trajectoires de Monte-Carlo quantiques. En l'absence de sauts quantiques, le système évolue selon la dynamique :

$$\frac{d}{dt}\rho = -i\frac{\Delta}{2}[\sigma_z, \rho] - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \{L_j^\dagger L_j, \rho\} + \sum_{j=1}^2 \text{Tr}(L_j^\dagger L_j \rho) \rho,$$

où les opérateurs de Lindblad L_j sont donnés par (2.18). Comme $L_j^\dagger L_j = \tilde{\gamma}_j |b_{\tilde{\Omega}}\rangle \langle b_{\tilde{\Omega}}|$, nous avons ($\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2$)

$$\frac{1}{\tilde{\gamma}} \frac{d}{dt}\rho = -i\frac{\Delta}{2\tilde{\gamma}}[\sigma_z, \rho] - \frac{1}{2} \{ |b_{\tilde{\Omega}}\rangle \langle b_{\tilde{\Omega}}|, \rho \} + \langle b_{\tilde{\Omega}}| \rho |b_{\tilde{\Omega}}\rangle \rho. \quad (2.19)$$

En plus, durant chaque pas de temps dt le système peut sauter vers l'état $|g_j\rangle \langle g_j|$ avec la probabilité

$$P_{\text{saut}}(\rho \rightarrow |g_j\rangle \langle g_j|) = \text{Tr}(L_j^\dagger L_j \rho) dt = \tilde{\gamma}_j \langle b_{\tilde{\Omega}}| \rho |b_{\tilde{\Omega}}\rangle dt, \quad j = 1, 2. \quad (2.20)$$

Cette probabilité est proportionnelle à la population de l'état brillant $|b_{\tilde{\Omega}}\rangle$ (ce qui justifie le nom d'état brillant).

Dans le but de synchroniser les lasers et de faire converger le désaccord de Raman, Δ , vers 0, nous modulons les amplitudes des lasers $\tilde{\Omega}_1$ et $\tilde{\Omega}_2$. Nous considérons deux constantes positives Ω_1 , Ω_2 et nous prenons les modulations suivantes

$$\tilde{\Omega}_1 = \Omega_1 + \epsilon \Omega_2 \cos(\omega t), \quad \tilde{\Omega}_2 = \Omega_2 - \epsilon \Omega_1 \cos(\omega t), \quad (2.21)$$

avec $\epsilon \ll 1$ et, pour satisfaire les hypothèses de l'approximation par les perturbations singulières, $\omega, \Omega_1, \Omega_2 \ll \Gamma_1, \Gamma_2$. Nous considérons la base orthogonale

$$|b\rangle = \frac{\Omega_1 |g_1\rangle + \Omega_2 |g_2\rangle}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}, \quad |d\rangle = \frac{\Omega_2 |g_1\rangle - \Omega_1 |g_2\rangle}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}, \quad (2.22)$$

constituée des états brillant et noir du système sans oscillations (c.à.d. avec $\varepsilon = 0$). Prenons, en plus,

$$\gamma_j = 4 \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2} \Gamma_j \quad \text{pour } j = 1, 2 \quad \text{et } \gamma = \gamma_1 + \gamma_2.$$

En remplaçant Δ/γ par Δ , ω/γ par ω , et γt par t dans (2.19),(2.20), nous obtenons les trajectoires de Monte-Carlo quantiques dans l'échelle $1/\gamma$, l'échelle du pompage optique. Le système s'écrit (avec quelques abus de notations) :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{d}{dt} \rho = & -i \left[\frac{\Delta}{2} \sigma_z, \rho \right] - \frac{1}{2} \{ |b + i\varepsilon \cos(\omega t)d\rangle \langle b + i\varepsilon \cos(\omega t)d|, \rho \} \\ & + \langle b + i\varepsilon \cos(\omega t)d | \rho | b + i\varepsilon \cos(\omega t)d \rangle \rho \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\text{avec } |b\rangle = \cos \alpha |g_1\rangle + \sin \alpha |g_2\rangle, \quad |d\rangle = -\sin \alpha |g_1\rangle + \cos \alpha |g_2\rangle$$

$$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \text{ l'argument de } \Omega_1 + i\Omega_2$$

$$\bullet \text{ et saute vers } \rho = |g_j\rangle \langle g_j| \text{ avec probabilité } \frac{\gamma_j}{\gamma} \langle b + i\varepsilon \cos(\omega t)d | \rho | b + i\varepsilon \cos(\omega t)d \rangle dt$$

Tout saut quantique entraîne une émission de photon. La probabilité totale de détection de photon est donnée par

$$P_{\text{saut}} = \langle b + i\varepsilon \cos(\omega t)d | \rho | b + i\varepsilon \cos(\omega t)d \rangle dt. \quad (2.24)$$

Nous considérons une détection à large bande, où la seule information accessible est le temps d'un saut (sans savoir vers quel état). Donc, au contraire du cas de la sous-section précédente, nous ne connaissons pas l'état du système après le saut. Comme Δ_e n'intervient pas dans les équations réduites, nous allons faire converger Δ vers 0; nous synchronisons alors sur la différence entre les fréquences des états fondamentaux.

Nous proposons l'algorithme de synchronisation suivant, où l'on suppose $\delta, \varepsilon \ll 1 \ll \omega$ ($\ll \Gamma_1, \Gamma_2$) :

$$\begin{cases} \Delta_{N+1} = \Delta_N - \delta \sin(2\alpha) \cos(\omega t) & \text{si } |\Delta_N - \delta \sin(2\alpha) \cos(\omega t)| \leq C, \\ \Delta_{N+1} = C & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.25)$$

aux temps t_N de détection de photons pour lesquels nous n'avons pas détecté d'émission de photons durant l'intervalle de temps $[t_N - T, t_N)$. Comme pour le cas de la sous-section précédente, nous supposons que le désaccord $|\Delta|$ ne dépasse pas un certain seuil C . Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 10. *Considérons les trajectoires de Monte-Carlo quantiques décrites par (2.23) avec l'algorithme de synchronisation (2.25). Supposons $\varepsilon \ll 1$, $\frac{1}{\omega} \sim \varepsilon^2$, $\delta \sim \varepsilon^3$ et un seuil de désaccord $C < 1/2$. Alors, nous pouvons choisir le temps mort T suffisamment long pour que*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\Delta_N^2) \leq O(\varepsilon^2).$$

Pour une preuve détaillée de ce théorème ainsi que des simulations numériques montrant l'efficacité de l'algorithme, nous référons à l'article [76]. Enfin, pour une extension de ces méthodes de synchronisation à un système à 3 niveaux en configuration V (configuration plus habituelle pour les horloges atomiques basés sur un seul ion), nous référons à l'article récent [79].

Chapitre 3

Lignes de transmission : détection de pannes

Le nombre d'équipements électroniques croît rapidement dans l'industrie automobile, avio-nique ou dans d'autres systèmes critiques. En conséquence, la fiabilité des réseaux de câblage et des connecteurs électriques devient de plus en plus importante. Par exemple, dans l'industrie de l'automobile, un enjeu important est de développer des appareils compacts et simples à utiliser pour le diagnostic des défauts de connexion au garage ou en sortie de la chaîne de production. Ces appareils doivent être capables de détecter et localiser les pannes dans les câbles ou les connecteurs. Un autre enjeu est le diagnostic embarqué : un appareil de diagnostic pourrait être intégré à bord pour détecter les pannes dans les conditions d'utilisation normale. Pour retrouver les défauts de câblage, il n'est pas toujours possible de mesurer l'impédance bout-à-bout des fils séparés, car le nombre de prises de diagnostic dans le réseau est limité. De plus, nous voudrions localiser exactement les défauts et aussi comprendre leur nature. Dans ces situations, la réflectométrie en domaine temporel (TDR) ou fréquentiel (FDR) sont les méthodes les plus utilisées : un signal haute fréquence (une impulsion courte pour la TDR, une onde stationnaire pour la FDR) est imposé à un bout du fil et le signal réfléchi est mesuré au même point pour obtenir de l'information sur les défauts du réseau. Ce problème inverse est en général étudié en simulation et expérimentalement. Néanmoins, la théorie disponible pour ce problème se résume à l'identification des défauts francs (coupures de lignes par exemple) et pour le cas de réseaux très simples (segments, réseau Y à 3 fils). Ici, nous proposons des études dans les deux domaines temporel et fréquentiel qui devraient nous permettre d'aller au delà des résultats existants, en considérant les défauts plus génériques (défauts non francs) et les réseaux plus compliqués (réseaux étoiles).

Dans la Section 3.1, nous considérons l'identification d'un paramètre distribué (la conductance de fuite G) le long d'une seule ligne de transmission. Nous proposons une approche temporelle basée sur l'application des observateurs asymptotiques. En effet, en utilisant le fait que le terme G à identifier est petit devant les autres paramètres du système, et à travers un développement en série, nous convertissons le problème non-linéaire d'identification de G en deux problèmes linéaires : un premier problème linéaire de stabilisation rapide autour d'une trajectoire de référence où l'on contrôle le système au bord ; et un deuxième problème linéaire d'estimation d'un terme source pour une équation des ondes. Ici, nous ne considérons que le deuxième problème d'esti-

mation d'un terme source ; le premier problème fait l'objet d'un travail en cours. Les résultats de cette section ont fait l'objet d'une publication récente soumise [30] et d'une communication de conférence parue [31].

Dans la Section 3.2, nous considérons quelques problèmes d'identification (de la géométrie du graphe ainsi que des paramètres distribués le long des branches) pour un réseau du type étoile. En considérant une approche fréquentielle, nous transformons le problème en un problème de scattering inverse puis en un problème inverse spectral sur un réseau. Nous proposons, alors, quelques résultats sur la nature bien-posée des problèmes inverses considérés. Les preuves de ces résultats sont parfois constructives et nous permettent une résolution approchée du problème inverse en question. Les résultats de cette section font l'objet d'une publication soumise [108] et une communication aux conférences parue [107].

3.1 Problème inverse sur une ligne : approche temporelle

La transmission d'un signal électrique le long d'un réseau filaire est, en général, modélisée par les "Équations des Télégraphistes" caractérisées par les paramètres L, C, R, G (fonctions de la position spatiale x le long des lignes de transmission) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} V(x, t) + L(x) \frac{\partial}{\partial t} I(x, t) + R(x) I(x, t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} I(x, t) + C(x) \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) + G(x) V(x, t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ici, $L(x)$ représente l'inductance, $C(x)$ la capacité, $R(x)$ la résistance, $G(x)$ la conductance de fuite, $V(x, t)$ la tension et $I(x, t)$ l'intensité du courant. Ces paramètres permettent une description plutôt complète et compréhensible des lignes de transmission dans les gammes de fréquence qui nous intéressent pour les expériences de réflectométrie. Toutefois il est, en général, impossible d'estimer tous ces paramètres à travers les expériences, seules, de réflectométrie (voir e.g. [55]).

En effet, pour certains problèmes industriels qui nous intéressent, les paramètres L, C, R sont homogènes (constants) le long des fils et la conductance de fuite G est identiquement nulle. Les pannes que nous voulons identifier se manifestent par des petites hétérogénéités dans la valeur de G . Nous sommes donc intéressés par l'estimation d'un paramètre distribué $G \equiv \epsilon \tilde{G}(x)$ petit devant les autres paramètres. Dans cette section, nous considérons le réseau le plus simple consistant en une seule ligne de transmission de longueur 1. L'expérience de réflectométrie peut être présentée à travers le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} V(x, t) + L \frac{\partial}{\partial t} I(x, t) + RI(x, t) &= 0 & (t, x) \in (0, \infty) \times (0, 1) \\ \frac{\partial}{\partial x} I(x, t) + C \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) + \epsilon \tilde{G}(x) V(x, t) &= 0 & (t, x) \in (0, \infty) \times (0, 1) \\ V(x, 0) = 0 & \quad I(x, 0) = 0 & x \in [0, 1] \\ V(0, t) = u(t) & \quad V(1, t) = 0 & t \in [0, \infty) \\ Y(t) = I(0, t) & \quad t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ici $u(t)$ représente la modulation contrôlée de la tension à un bout de ligne, et $Y(t)$ représente la mesure de l'intensité du courant au même bout (signal réfléchi) et nous souhaitons, en appliquant

un contrôle approprié $u(t)$, estimer le paramètre distribué $\tilde{G}(x)$ via la mesure continue de $Y(t)$. Dans le but de simplifier ce modèle, nous développons le système jusqu'au deuxième ordre par rapport à ϵ . En écrivant, formellement, $I(x, t) = I_0(x, t) + \epsilon I_1(x, t) + O(\epsilon^2)$ et $V(x, t) = V_0(x, t) + \epsilon V_1(x, t) + O(\epsilon^2)$, le système (3.2) peut être approché par les deux systèmes en cascade

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} V_0(x, t) + L \frac{\partial}{\partial t} I_0(x, t) + R I_0(x, t) &= 0 & (t, x) \in (0, \infty) \times (0, 1) \\ \frac{\partial}{\partial x} I_0(x, t) + C \frac{\partial}{\partial t} V_0(x, t) &= 0 & (t, x) \in (0, \infty) \times (0, 1) \\ V_0(x, 0) = 0 \quad I_0(x, 0) = 0 & \quad x \in [0, 1] \\ V_0(0, t) = u(t) \quad V_0(1, t) = 0 & \quad t \in [0, \infty) \end{aligned} \quad (3.3)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} V_1(x, t) + L \frac{\partial}{\partial t} I_1(x, t) + R I_1(x, t) &= 0 & (t, x) \in (0, \infty) \times (0, 1) \\ \frac{\partial}{\partial x} I_1(x, t) + C \frac{\partial}{\partial t} V_1(x, t) + \tilde{G}(x) V_0(x, t) &= 0 & (t, x) \in (0, \infty) \times (0, 1) \\ V_0(x, 0) = 0 \quad I_0(x, 0) = 0 & \quad x \in [0, 1] \\ V_0(0, t) = 0 \quad V_0(1, t) = 0 & \quad t \in [0, \infty) \\ Y_1(t) = I_1(0, t) & \quad t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nous remarquons que le problème d'estimation non-linéaire (3.2) (non-linéaire car le paramètre inconnu $\tilde{G}(x)$ est multiplié par l'état inconnu $V(x, t)$) se transforme en un problème de contrôle au bord linéaire et un problème d'estimation d'un terme source linéaire. En effet, nous pouvons contrôler le système (3.3) afin d'atteindre un signal $V_0(x, t)$ qui assure une excitation suffisante du système (3.4) qui permet, ensuite, d'estimer le paramètre $\tilde{G}(x)$. Dans cette section, nous nous intéressons au problème d'estimation du terme source pour le système (3.4) en supposant que nous avons réussi à stabiliser le système (3.3) autour d'un régime mono-fréquence de la forme $V_0(x, t) = f(x) \cos(\omega t)$. De plus, nous considérons le cas plus simple du système sans amortissement : $R \equiv 0$. Le problème de contrôle du système (3.3) ainsi que l'extension de la méthode d'estimation de cette section font l'objet d'un travail en cours.

Le problème d'identification de $\tilde{G}(x)$ devient, alors, équivalent à l'estimation d'un terme source $q(x)$ pour l'équation des ondes :

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = q(x) \cos(\omega t), & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ v(t, 0) = v(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ v(0, x) = v_t(0, x) = 0, & x \in (0, 1), \\ y(t) = v_x(t, 0), & t \in (0, T), \end{cases} \quad (3.5)$$

où f_t signifie $\partial f / \partial t$ et f_x signifie $\partial f / \partial x$.

Dans un travail récent [9], Auroux et Blum ont proposé un nouvel algorithme d'inversion pour l'identification de l'état initial d'un système observable. Cette méthode est basée sur une application itérative des observateurs asymptotiques dans les deux sens du temps. En notant que nous avons, seulement, accès à la mesure de la sortie sur un horizon fixé du temps $(0, T)$, l'idée

consiste à proposer un premier observateur asymptotique qui sera appliqué sur cet intervalle de temps puis un deuxième observateur qui sera appliqué au système lorsque la direction du temps est renversée. Ces observateurs sont alors employés de façon itérative afin d'obtenir une meilleure estimation de l'état initial après chaque aller-retour. Si les gains des observateurs sont bien choisis pour que la procédure d'aller-retour induise une dynamique d'erreur contractante, nous pouvons assurer la convergence de l'estimateur vers l'état initial (ce choix des gains n'est, en général, pas trivial).

Plus récemment, Ramdani-et-al [54, 89] ont considéré l'étude théorique de ce problème pour le cas de l'équation des ondes, où ils ont, essentiellement, appliqué des approches basées sur la théorie des semi-groupes. Ici, nous proposons une méthode similaire pour estimer le terme source $q(x)$ connaissant l'état initial du système. Il est bien connu, par le travail de Yamamoto [111], que ce problème inverse est bien-posé : nous pouvons retrouver le terme source $q(x)$ de façon unique en mesurant y sur un intervalle $(0, T)$ pour T suffisamment long. Notre but, ici, est de proposer des observateurs bien choisis qui permettent, en suivant la procédure itérative, de retrouver q à partir de la mesure de y sur un temps minimal. Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant

Proposition 3. *Nous pouvons construire des observateurs efficaces pour lesquels l'algorithme itératif converge et permet de reconstruire le terme source inconnu $q(x)$ à partir du résultat de la mesure sur l'intervalle $(0, 2)$.*

Remarque 8. *Vu que le domaine spatial est donné par $(0, 1)$, le temps minimal d'observabilité est donné par $T = 2$.*

Notons que, lorsque l'état initial $(v(0, \cdot), v_t(0, \cdot), q(\cdot))$ est inconnu, le système (3.5) n'est pas observable. Afin de voir cela, nous pouvons considérer le cas simple où le terme source q est donné par les deux premiers modes de l'équation des ondes, $q(x) = q_1 \sin(\pi x) + q_2 \sin(2\pi x)$, où q_1 et q_2 sont des scalaires inconnus. Dans ce cas, (3.5) devient équivalent à deux oscillateurs indépendants avec des fréquences différentes et avec deux termes de source inconnus $q_1 \cos(\omega t)$ et $q_2 \cos(\omega t)$. De plus, la sortie est donnée par une combinaison linéaire de la position des oscillateurs. Ce système de dimension six avec une sortie n'est pas observable. Néanmoins, si nous connaissons l'état initial des oscillateurs, les deux paramètres q_1 et q_2 sont identifiables.

L'estimateur itératif nous permet de prendre en compte cette connaissance de l'état initial $(v(0, \cdot), v_t(0, \cdot)) = (0, 0)$. En effet, l'application d'un observateur standard, seulement dans le sens positif du temps, entraîne une perte de l'information sur cet état initial du système et donc, il n'y a aucune raison pour que l'observateur converge vers les paramètres réels.

Avant d'explicitier l'estimateur, nous proposons une formulation équivalente du problème dans la Sous-section 3.1.1. Ensuite nous construisons les observateurs asymptotiques dans la Sous-section 3.1.2 et nous exprimons le résultat principal de la convergence à la même occasion. Pour une preuve détaillée des résultats, nous référons à l'article récent [30]. Une extension de ces résultats au cas de l'équation des ondes multi-dimensionnelle est possible et fait l'objet d'un travail en cours.

3.1.1 Une formulation équivalente

Nous introduisons le système suivant

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0, t \in (0, T), \\ w(0, x) = q(x), w_t(0, x) = 0, x \in (0, 1), \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t), t \in (0, T), \\ \dot{z}_2(t) = -\omega^2 z_1(t) + w_x(t, 0), t \in (0, T), \\ z_1(0) = y(0), z_2(0) = \dot{y}(0), \\ Y(t) = z_1(t), t \in (0, T), \end{cases} \quad (3.7)$$

où (w, w_t, z_1, z_2) représente l'état du système et Y la sortie. Le système (3.6)-(3.7) est constitué d'une équation des ondes homogène couplée à un oscillateur. L'inconnue q est maintenant dans l'état initial du système. Nous avons les résultats suivants,

Proposition 4. *Il existe une solution unique (w, w_t, z_1, z_2) à (3.6)-(3.7) admettant les régularités suivantes*

$$w \in C([0, T]; H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)), \quad w_t \in C([0, T]; H_0^1(0, 1)), \quad (z_1, z_2) \in H^2(0, T) \times H^1(0, T).$$

De plus, w satisfait la propriété cachée suivante

$$w_x(t, 0) \in L^2(0, T). \quad (3.8)$$

Proposition 5. *Pour tout $T > 0$, pour tout $q \in H^2(0, 1)$,*

$$y = Y \text{ dans } H^2(0, T),$$

où y représente la sortie du système (3.5) et Y la sortie du système (3.6)-(3.7).

Comme conséquence de la Proposition 5, nous nous concentrons sur le système (3.6)-(3.7) et nous proposons des observateurs pour estimer l'état initial de ce système.

3.1.2 Observateurs asymptotiques

Nous commençons par rendre le système (3.6)-(3.7) périodique, en considérant les deux sens (positif et négatif) du temps. Plus précisément, nous définissons l'état (W^1, W^2, Z^1, Z^2) sur $((0, +\infty) \times (0, 1))^2 \times (0, T)^2$ comme la solution du système périodique

$$\begin{cases} W_t^1 = W^2, (t, x) \in (2kT, (2k+1)T) \times (0, 1), \\ W_t^2 = W_{xx}^1, (t, x) \in (2kT, (2k+1)T) \times (0, 1), \\ W_t^1 = -W^2, (t, x) \in ((2k+1)T, (2k+2)T) \times (0, 1), \\ W_t^2 = -W_{xx}^1, (t, x) \in ((2k+1)T, (2k+2)T) \times (0, 1), \\ W^1(t, 0) = W^1(t, 1) = 0, t \in (0, +\infty), \\ W^1(0, x) = q(x), W^2(0, x) = 0, x \in (0, 1), \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} \dot{Z}_1(t) = Z_2(t), & t \in (2kT, (2k+1)T), \\ \dot{Z}_2(t) = -\omega^2 Z_1(t) + W_x^1(t, 0), & t \in (2kT, (2k+1)T), \\ \dot{Z}_1(t) = -Z_2(t), & t \in ((2k+1)T, (2k+2)T), \\ \dot{Z}_2(t) = \omega^2 Z_1(t) - W_x^1(t, 0), & t \in ((2k+1)T, (2k+2)T), \\ Z_1(0) = y(0), Z_2(0) = \dot{y}(0), \\ Y(t) = Z_1(t). \end{cases} \quad (3.10)$$

pour $k \in \mathbb{N}$. En utilisant les résultats précédents, nous avons

$$W^1 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)), \quad W^2 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; H_0^1(0, 1)), \quad (Z^1, Z^2) \in H_{loc}^2(\mathbb{R}_+) \times H_{loc}^1(\mathbb{R}_+).$$

En effet, ce système périodique représente le système (3.6)-(3.7) sur les intervalles $(2kT, (2k+1)T)$, et le même système lorsque la direction du temps est renversée sur les intervalles $((2k+1)T, (2k+2)T)$. En particulier, nous avons

$$\begin{cases} Y(t) = Y(t - 2kT), & t \in (2kT, (2k+1)T), \\ Y(t) = Y((2k+2)T - t), & t \in ((2k+1)T, (2k+2)T). \end{cases}$$

L'observateur asymptotique que l'on propose est le suivant

$$\begin{cases} \hat{W}_t^1 = \hat{W}^2, & (t, x) \in (2kT, (2k+1)T) \times (0, 1), \\ \hat{W}_t^2 = \hat{W}_{xx}^1, & (t, x) \in (2kT, (2k+1)T) \times (0, 1), \\ \hat{W}_t^1 = -\hat{W}^2, & (t, x) \in ((2k+1)T, (2k+2)T) \times (0, 1), \\ \hat{W}_t^2 = -\hat{W}_{xx}^1, & (t, x) \in ((2k+1)T, (2k+2)T) \times (0, 1), \\ \hat{W}^1(t, 0) = \gamma_1(\hat{Z}_1(t) - Y(t)) + \gamma_1\gamma_2(\hat{Z}_3(t) - \int_0^t Y(s) ds), & t \in (0, \infty), \\ \hat{W}^1(t, 1) = 0, & t \in (0, +\infty), \\ \hat{W}^1(0, x) = \hat{W}^2(0, x) = 0, & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{Z}}_1(t) = \hat{Z}_2(t) - \gamma_2(\hat{Z}_1(t) - Y(t)), & t \in (2kT, (2k+1)T), \\ \dot{\hat{Z}}_2(t) = -\omega^2 \hat{Z}_1(t) + \hat{W}_x^1(t, 0), & t \in (2kT, (2k+1)T), \\ \dot{\hat{Z}}_1(t) = -\hat{Z}_2(t) - \gamma_2(\hat{Z}_1(t) - Y(t)), & t \in ((2k+1)T, (2k+2)T), \\ \dot{\hat{Z}}_2(t) = \omega^2 \hat{Z}_1(t) - \hat{W}_x^1(t, 0), & t \in ((2k+1)T, (2k+2)T), \\ \dot{\hat{Z}}_3(t) = \hat{Z}_1(t), & t \in (0, \infty), \\ \hat{Z}_1(0) = \hat{Z}_2(0) = \hat{Z}_3(0) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Ici, γ_1 et γ_2 , les gains de l'observateur, sont des constantes strictement positives. Nous pouvons aussi introduire la dynamique de l'erreur, l'erreur étant définie comme la différence entre

l'observateur et le système observé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{W}_t^1 = \tilde{W}^2, \quad (t, x) \in (2kT, (2k+1)T) \times (0, 1), \\ \tilde{W}_t^2 = \tilde{W}_{xx}^1, \quad (t, x) \in (2kT, (2k+1)T) \times (0, 1), \\ \tilde{W}_t^1 = -\tilde{W}^2, \quad (t, x) \in ((2k+1)T, (2k+2)T) \times (0, 1), \\ \tilde{W}_t^2 = -\tilde{W}_{xx}^1, \quad (t, x) \in ((2k+1)T, (2k+2)T) \times (0, 1), \\ \tilde{W}^1(t, 0) = \gamma_1 \tilde{Z}_1(t) + \gamma_1 \gamma_2 \tilde{Z}_3(t), \quad t \in (0, \infty), \\ \tilde{W}^1(t, 1) = 0, \quad t \in (0, +\infty), \\ \tilde{W}^1(0, x) = -q(x), \quad \tilde{W}^2(0, x) = 0, \quad x \in (0, 1), \end{array} \right. \quad (3.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{Z}}_1(t) = \tilde{Z}_2(t) - \gamma_2 \tilde{Z}_1(t), \quad t \in (2kT, (2k+1)T), \\ \dot{\tilde{Z}}_2(t) = -\omega^2 \tilde{Z}_1(t) + \tilde{W}_x^1(t, 0), \quad t \in (2kT, (2k+1)T), \\ \dot{\tilde{Z}}_1(t) = -\tilde{Z}_2(t) - \gamma_2 \tilde{Z}_1(t), \quad t \in ((2k+1)T, (2k+2)T), \\ \dot{\tilde{Z}}_2(t) = \omega^2 \tilde{Z}_1(t) - \tilde{W}_x^1(t, 0), \quad t \in ((2k+1)T, (2k+2)T), \\ \dot{\tilde{Z}}_3(t) = \tilde{Z}_1(t), \quad t \in (0, \infty), \\ \tilde{Z}_1(0) = -y(0), \quad \tilde{Z}_2(0) = -\dot{y}(0), \quad \tilde{Z}_3(0) = 0. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Nous considérons l'espace fonctionnel

$$H_r^1(0, 1) := \{v \in H^1(0, 1) \text{ t.q. } v(1) = 0\}.$$

Nous avons alors la proposition suivante (assurant la nature bien-posée de (3.13)-(3.14))

Proposition 6. *Pour tout $T > 0$, pour tout $(q^0, q^1) \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$ et tout $(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0) \in \mathbb{R}^3$, il existe une solution unique $(w_1, w_2, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ au problème de Cauchy périodique*

$$\left\{ \begin{array}{l} w_t^1 = w^2, \quad (t, x) \in (2kT, (2k+1)T) \times (0, 1), \\ w_t^2 = w_{xx}^1, \quad (t, x) \in (2kT, (2k+1)T) \times (0, 1), \\ w_t^1 = -w^2, \quad (t, x) \in ((2k+1)T, (2k+2)T) \times (0, 1), \\ w_t^2 = -w_{xx}^1, \quad (t, x) \in ((2k+1)T, (2k+2)T) \times (0, 1), \\ w^1(t, 1) = 0, \quad w^1(t, 0) = \gamma_1 \xi_1(t) + \gamma_1 \gamma_2 \xi_3(t), \quad t \in (0, \infty), \\ w^1(0, x) = q^0(x), \quad w^2(0, x) = q^1(x), \quad x \in (0, 1), \end{array} \right. \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1(t) = \xi_2(t) - \gamma_2 \xi_1(t), \quad t \in (2kT, (2k+1)T), \\ \dot{\xi}_2(t) = -\omega^2 \xi_1(t) + w_x^1(t, 0), \quad t \in (2kT, (2k+1)T), \\ \dot{\xi}_1(t) = -\xi_2(t) - \gamma_2 \xi_1(t), \quad t \in ((2k+1)T, (2k+2)T), \\ \dot{\xi}_2(t) = \omega^2 \xi_1(t) - w_x^1(t, 0), \quad t \in ((2k+1)T, (2k+2)T), \\ \dot{\xi}_3(t) = \xi_1(t), \quad t \in (0, \infty), \\ \xi_1(0) = \xi_1^0, \quad \xi_2(0) = \xi_2^0, \quad \xi_3(0) = \xi_3^0, \end{array} \right. \quad (3.16)$$

où $k \in \mathbb{N}$, avec les régularités suivantes

$$\begin{aligned} w^1 &\in C([0, +\infty); H^2(0, 1) \cap H_r^1(0, 1)), \quad w^2 \in C([0, +\infty); H_r^1(0, 1)), \\ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &\in H^1([0, +\infty)) \times L^2([0, +\infty)) \times H^2([0, +\infty)). \end{aligned}$$

De plus $(w^1, w^2, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ satisfait les identités d'énergie suivantes : pour tout $t \in (0, +\infty)$,

$$\begin{aligned} |w_x^1(t, \cdot)|_{L^2(0,1)}^2 + |w^2(t, \cdot)|_{L^2(0,1)}^2 + \gamma_1 |\xi_2(t)|^2 + \gamma_1 \omega^2 |\xi_1(t)|^2 + 2\gamma_1 \gamma_2 \omega^2 |\xi_1|_{L^2(0,t)}^2 \\ = |q_x^0|_{L^2(0,1)}^2 + |q^1|_{L^2(0,1)}^2 + \gamma_1 |\xi_2^0|^2 + \gamma_1 \omega^2 |\xi_1^0|^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|w_t^2(t, \cdot)|_{L^2(0,1)}^2 + |w_x^2(t, \cdot)|_{L^2(0,1)}^2 + \gamma_1 \omega^4 |\xi_1(t)|^2) + \frac{1}{4} \gamma_1 |w_x^1(t, 0)|^2 \\ + \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 \omega^2 \int_0^t |\xi_2(s)|^2 ds + \gamma_1 \omega^2 |\xi_2(t)|^2 \leq C (|q^0|_{H^2(0,1)}^2 + |q^1|_{H^1(0,1)}^2 + |\xi_1^0|^2 + |\xi_2^0|^2), \end{aligned} \quad (3.18)$$

où C est une constante positive qui dépend seulement de $\omega, \gamma_1, \gamma_2$.

Nous voyons, très facilement, que la nature bien-posée du système (3.13)-(3.14) dans

$$C([0, +\infty); H^2(0, 1) \cap H_r^1(0, 1)) \times C([0, +\infty); H_r^1(0, 1)) \times H^1([0, +\infty)) \times L^2([0, +\infty)) \times H^2([0, +\infty))$$

est une conséquence directe de la Proposition 6. La nature bien-posée du système (3.11)-(3.12) dans

$$L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(0, 1) \cap H_r^1(0, 1)) \times L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; H_r^1(0, 1)) \times H_{loc}^1(\mathbb{R}_+) \times L_{loc}^2(\mathbb{R}_+) \times H_{loc}^2(\mathbb{R}_+)$$

suit donc de la nature bien-posée du système (3.9)-(3.10) dans ce même espace.

Le résultat principal de cette section, assurant la convergence de l'algorithme d'estimation (3.11)-(3.12) est le suivant :

Théorème 11. *Pour tout $T \geq 2$,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{W}^1(2nT, \cdot) = 0 \text{ dans } H_r^1(0, 1), \quad (3.19)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{W}^2(2nT, \cdot) = 0 \text{ dans } L^2(0, 1), \quad (3.20)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\tilde{Z}_1(2nT), \tilde{Z}_2(2nT), \tilde{Z}_3(2nT)) = (0, 0, 0). \quad (3.21)$$

Pour une preuve détaillée ainsi que des simulations numériques, montrant l'efficacité de l'algorithme d'estimation, nous référons à l'article [30]. La preuve de la convergence est basée sur des techniques Lyapunov et le principe d'invariance de LaSalle. La difficulté principale réside dans la démonstration de la pré-compacité des trajectoires nécessaire pour appliquer le principe d'invariance de LaSalle.

3.2 Problème inverse sur un réseau : approche fréquentielle

Dans cette section, nous nous intéressons au problème inverse pour le cas d'un réseau de la forme étoile. Nous considérons le cas plus simple où la résistance et la conductance de fuite sont identiquement nulles ($R, G \equiv 0$). De plus, nous allons suivre une approche fréquentielle pour l'identification de pannes. La linéarité du modèle (les équations des Télégraphistes) permet le remplacement de toute analyse par une analyse équivalente sous le régime harmonique. Nous pouvons, donc, commencer par écrire les équations des Télégraphistes sous le régime harmonique, c.à.d. la tension et l'intensité du courant prennent respectivement les formes $e^{-i\omega t}V(\omega, x)$ et $e^{-i\omega t}I(\omega, x)$, où ω est la fréquence temporelle et x la position. Sur chaque ligne, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}V(\omega, x) - i\omega L(x)I(\omega, x) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}I(\omega, x) - i\omega C(x)V(\omega, x) &= 0.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Durant cette section, nous considérons les hypothèses suivantes :

- A1** les paramètres distribués $C(x)$ et $L(x)$ sont deux fois différentiables sur les lignes de transmission ;
- A2** ils sont strictement positifs, $C(x) > 0, L(x) > 0$;
- A3** l'impédance caractéristique $Z_c(x) := \sqrt{L(x)/C(x)}$ est continue au noeud central du réseau étoile ;
- A4** les lignes de transmission sont uniformes dans un voisinage des extrémités des branches.

Notons qu'une expérience de réflectométrie implique l'observation des tensions et des courants dans la durée mais en un seul point du réseau : seuls les temps de parcours (et les amplitudes) des ondes sont accessibles par une telle expérience. Un défaut ne peut être localisé qu'en terme du temps de parcours d'une onde réfléchi. Cela implique un changement de coordonnées, appelé la transformation de Liouville, qui consiste à travailler avec les temps de parcours plutôt qu'avec les coordonnées spatiales. Ce changement de coordonnées s'écrit sous la forme

$$\tau(x) = \int_0^x \sqrt{L(s)C(s)} ds,$$

ce qui correspond au temps de parcours de l'onde de la position 0 à la position x . Remarquons, de plus, qu'après cette transformation, ω se transforme aussi en nombre d'onde sur chaque branche. La transformation inverse étant bien définie, nous considérons, par un abus de notations, $C(\tau) \equiv C(x(\tau)), L(\tau) \equiv L(x(\tau)), V(\omega, \tau) \equiv V(\omega, x(\tau))$ et $I(\omega, \tau) \equiv I(\omega, x(\tau))$. Les équations des Télégraphistes deviennent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau}V(\omega, \tau) - i\omega Z_c(\tau)I(\omega, \tau) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau}I(\omega, \tau) - i\omega Z_c(\tau)^{-1}V(\omega, \tau) &= 0.\end{aligned}\tag{3.23}$$

En prenant,

$$y(\omega, \tau) = \sqrt{Y_c(\tau)}V(\omega, \tau),$$

où $Y_c(\tau) = Z_c^{-1}(\tau)$ est l'admittance caractéristique, les équations des Télégraphistes s'écrivent

$$-\frac{d^2 y}{d\tau^2}(\omega, \tau) + q(\tau)y(\omega, \tau) = \omega^2 y(\omega, \tau),$$

où, le potentiel de l'équation de Schrödinger $q(\tau)$ est défini par

$$q(\tau) = \sqrt{Z_c(\tau)} \frac{d^2}{d\tau^2} \sqrt{Y_c(\tau)}.$$

Cela montre que le potentiel $q(\tau)$ (ou de façon équivalente l'impédance $Z_c(\tau)$) est le seul paramètre permettant de calculer la tension V et le courant I le long des lignes. Il est donc le paramètre agrégé à identifier par une expérience de réflectométrie.

L'expérience de réflectométrie consiste à ajouter une ligne de transmission homogène au noeud central de l'étoile. L'impédance caractéristique Z_c est donc constante sur cette ligne et le potentiel $q(\tau)$ est uniformément nul. Les équations des Télégraphistes sur cette branche deviennent alors $-\frac{d^2}{d\tau^2}y(\omega, \tau) = \omega^2 y(\omega, \tau)$. En notant $Z(\omega, \tau) = V(\omega, \tau)/I(\omega, \tau)$ l'impédance apparente, le coefficient de réflexion mesuré à un point arbitraire $\bar{\tau}$ de la branche d'analyse est donné par (voir [108] pour plus de détails)

$$R(\omega, \bar{\tau}) = \frac{e^{2i\omega\bar{\tau}} Z(\omega, \bar{\tau}) - Z_c(\bar{\tau})}{2 Z(\omega, \bar{\tau}) + Z_c(\bar{\tau})}.$$

En effet, pour analyser le réseau nous procédons de la façon suivante : en considérant un réseau étoile avec une configuration de circuit ouvert ou de court-circuit aux extrémités des branches, nous ajoutons une ligne de transmission homogène e_0 , d'impédance caractéristique connue, au noeud central. À $\bar{\tau}$, l'extrémité de cette branche d'analyse, nous branchons un générateur d'impédance interne $Z_c(\bar{\tau})$ et de force électromotrice $2V_g e^{i\omega\bar{\tau}}$. Nous avons $V(\omega, \bar{\tau}) + Z_c(\bar{\tau})I(\omega, \bar{\tau}) = 2V_g e^{i\omega\bar{\tau}}$ et $V(\omega, \tau) = V_g(e^{i\omega\tau} + R(\omega, \tau)e^{-i\omega\tau})$ pour tout $\tau \in e_0$. Comme $R(\omega, \tau) = R(\omega, \bar{\tau})$ pour tout $\tau \in e_0$, ce coefficient de réflexion peut être déterminé en mesurant la tension en un point quelconque de e_0 . Ce coefficient de réflexion mesuré sera, tout simplement, appelé $R(\omega)$. Comme nous allons travailler avec $y(\omega, \tau)$, nous prenons $V_g = \sqrt{Z_c}$, tel que $y(\omega, \tau) = e^{i\omega\tau} + R(\omega)e^{-i\omega\tau}$. Enfin, il convient, pour simplifier les notations, de prendre comme direction positive de chaque ligne la direction partant du noeud central à $\tau = 0$ vers les τ croissants. Notre onde de référence sur e_0 se propage alors dans la direction des τ décroissants. Ainsi, en changeant τ en $-\tau$, en supposant e_0 infiniment longue, la condition au bord pour ce réflectomètre est donnée par

$$y(\omega, \tau) \sim e^{-i\omega\tau} + R(\omega)e^{i\omega\tau} \quad \text{lorsque } \tau \rightarrow \infty \quad \text{sur } e_0. \quad (3.24)$$

En revenant au réseau, nous avons $N + 1$ équations de la forme

$$-\frac{d^2 y_j}{d\tau^2} + q_j(\tau)y_j = \omega^2 y_j \quad \tau \in (0, \tau_j),$$

où τ_j est le temps de parcours associé à la branche numéro j ($\tau_0 = \infty$ car la branche d'analyse e_0 est supposée être une ligne infinie). En particulier, notons que, comme la branche e_0 est supposée homogène, nous avons $q_0(\tau) = 0$ pour $\tau \in (0, \infty)$. Partout dans cette section, Γ représente le réseau étoile compact qui est constitué des branches $(e_j)_{j=1}^N$ qui se joignent au noeud central et Γ^+ est le graphe étendu où la branche d'analyse e_0 est ajouté au noeud central.

Une adaptation des lois de Kirchhoff permet d'écrire les conditions au bord suivantes pour le noeud central

$$\begin{aligned} y_i(\omega, 0) = y_j(\omega, 0) &=: \bar{y}(\omega) & i, j = 0, \dots, N, \\ \sum_{j=1}^N y'_j(\omega, 0) - y'_0(\omega, 0) &= -\frac{1}{2} \frac{\left(\sum_{j=1}^N (Z_c^j)'(0)\right)}{Z_c^0} \bar{y}(\omega), \end{aligned} \quad (3.25)$$

où $y'_j(\omega, 0)$ et $(Z_c^j)'(0)$ signifient les dérivées spatiales au point $\tau = 0$ et Z_c^j est l'impédance caractéristique de la branche numéro j . Notons, en particulier, que nous avons appliqué ici l'hypothèse de la continuité de Z_c^j au noeud central (l'hypothèse **A3**) : $Z_c^j(0) = Z_c^0$.

Nous considérons deux configurations expérimentales. Dans une première configuration, nous considérons des conditions de circuit ouvert aux extrémités des branches finies $((e_j)_{j=1}^N)$. Cette configuration conjuguée à l'hypothèse **A4** de l'homogénéité des lignes autour des points τ_j , implique des conditions aux bords de la forme

$$y'_j(\tau_j) = 0 \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.26)$$

Nous appelons cette configuration la configuration de Neumann. La deuxième configuration consiste à considérer des courts circuits aux extrémités des branches finies. Nous avons, alors, des conditions aux bords de la forme

$$y_j(\tau_j) = 0 \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.27)$$

Cette configuration est appelée la configuration de Dirichlet.

En conclusion, afin de modéliser les lignes de transmission LC sur le graphe Γ^+ , nous pouvons considérer les opérateurs de Schrödinger

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{N}, \mathcal{D}}^+ &= \otimes_{j=0}^N \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q_j(x)\right), \\ D(\mathcal{L}_{\mathcal{N}, \mathcal{D}}^+) &= \text{l'adhérence de } C_{\mathcal{N}, \mathcal{D}}^\infty \text{ dans } H^2(\Gamma^+), \end{aligned} \quad (3.28)$$

où $C_{\mathcal{N}}^\infty(\Gamma^+)$ (resp. $C_{\mathcal{D}}^\infty(\Gamma^+)$) représente l'espace des fonctions infiniment différentiables $f = \otimes_{j=0}^N f_j$, définies sur Γ^+ et vérifiant les conditions aux bords

$$\begin{aligned} f_j(0) &= f_{j'}(0) & j, j' = 0, \dots, N, \\ \sum_{j=1}^N f'_j(0) - f'_0(0) &= H f_0(0), & H = -\frac{1}{2} \frac{\left(\sum_{j=1}^N (Z_c^j)'(0)\right)}{\bar{Z}_c}, \\ f'_j(\tau_j) &= 0 \quad (f_j(\tau_j) = 0 \text{ pour } C_{\mathcal{D}}^\infty(\Gamma^+)), & j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.2.1 Problème direct

Les opérateurs $(\mathcal{L}_{\mathcal{N}, \mathcal{D}}^+, D(\mathcal{L}_{\mathcal{N}, \mathcal{D}}^+))$ sont essentiellement auto-adjoints. Afin de voir cela, nous observons, tout d'abord, que ces opérateurs sont des perturbations compactes des opérateurs

$\otimes_{j=0}^n \left(-\frac{d^2}{d\tau^2}\right)$ avec les mêmes conditions aux bords. Nous appliquons, maintenant, un résultat général de Carlson [27]. En effet, suivant le Théorème 3.4 de [27], nous avons seulement besoin de montrer que sur un noeud qui connecte m branches, nous avons m conditions au bord linéairement indépendantes. Aux noeuds terminaux de $\{e_j\}_{j=1}^N$, cette condition est clairement vérifiée car il n'y a qu'une seule branche et une condition au bord (Dirichlet ou Neumann).

Au noeud central, il n'est pas difficile de vérifier que (3.25) définit $N + 1$ conditions linéairement indépendantes. Les opérateurs $(\mathcal{L}_{\mathcal{N},\mathcal{D}}^+, D(\mathcal{L}_{\mathcal{N},\mathcal{D}}^+))$ sont donc essentiellement auto-adjoints et admettent des extensions uniques sur $L^2(\Gamma^+)$. Nous sommes intéressés par les solutions du problème de *scattering* où un signal de la fréquence ω est appliqué à l'extrémité infinie de la branche e_0 . Nous cherchons donc des solutions qui satisfont le comportement asymptotique (3.24).

Proposition 7. *Sous les hypothèses A1 à A4, il existe une unique solution, continue par rapport à ω ,*

$$\Psi(\omega, \tau) = \otimes_{j=0}^N y_j(\omega, \tau),$$

du problème de *scattering* :

- $-\frac{d^2}{d\tau^2}y_j(\omega, \tau) + q_j(\tau)y_j(\omega, \tau) = \omega^2 y_j(\omega, \tau)$ pour $j = 0, \dots, N$;
- $(y_j(\omega, \tau))_{j=0}^N$ satisfait les conditions aux bords (3.25) et (3.26) ou (3.27) ;
- Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, il existe $R(\omega)$ tel que

$$y_0(\omega, \tau) \sim e^{-i\omega\tau} + R(\omega)e^{i\omega\tau}, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (3.30)$$

Nous notons le coefficient de réflexion $R(\omega)$ défini par (3.30) dans le cas Neumann (resp. Dirichlet) par $R_{\mathcal{N}}(\omega)$ (resp. $R_{\mathcal{D}}(\omega)$). Ce coefficient est, de plus, unique.

Pour une preuve de cette proposition, nous référons à l'article [108].

3.2.2 Problèmes inverses

Comme premier problème inverse, nous considérons l'inversion de la géométrie du réseau. En effet, nous pouvons démontrer (voir le Théorème 12) la nature bien-posée du problème inverse consistant à trouver le nombre de branches N et les longueurs $(\tau_j)_{j=1}^N$ de l'étoile, à partir de la mesure d'un coefficient de réflexion $R_{\mathcal{N}}(\omega)$ (le cas de Dirichlet peut être traité de façon similaire). De plus, la méthode que l'on peut proposer pour la preuve du Théorème 12 est constructive et nous pouvons donc proposer un algorithme pour identifier les longueurs, au moins de façon approchée (voir l'article [108]). Nous avons donc le théorème suivant

Théorème 12. *Considérons un réseau étoile Γ composé de n_j branches de longueurs τ_j ($j = 1, \dots, m$) qui se joignent toutes à un noeud central. Le nombre total des branches, N , est donc donné par $\sum_{j=1}^m n_j$. Supposons que le potentiel q sur le réseau est, simplement, C^0 . Alors la connaissance du coefficient de réflexion $R_{\mathcal{N}}(\omega)$ détermine, de façon unique, les paramètres $(n_j)_{j=1}^m$ et $(\tau_j)_{j=1}^m$.*

La preuve de ce théorème repose sur une analyse asymptotique à hautes-fréquences du coefficient de réflexion et sur quelques résultats classiques de la théorie des fonctions presque périodiques (au sens de Bohr). Pour une preuve détaillée, nous référons à l'article [108].

Un deuxième problème inverse, lié à la détection des défauts non francs, peut être formulé par l'identification des potentiels sur les branches. Ici, nous supposons que les lignes sans défaut sont des lignes homogènes. Alors, nous allons montrer que la mesure de deux coefficients de réflexion $R_{\mathcal{D}}(\omega)$ et $R_{\mathcal{N}}(\omega)$ est suffisante pour identifier, de façon unique, les petits changements dans le potentiel qui restent dans une certaine classe de régularité. En effet, nous allons démontrer que le problème inverse de trouver des potentiels $H^1(\Gamma)$ dans un $\epsilon L^\infty(\Gamma)$ -voisinage du potentiel nul (cas homogène) est bien posé, pour ϵ suffisamment petit. Dans ce but, nous allons avoir besoin d'une hypothèse additionnelle sur les longueurs électriques $(\tau_j)_{j=1}^N$, afin de casser les symétries qui poseraient des problèmes de dégénérescence.

Dans un premier résultat (Théorème 13), nous montrons que sous une certaine hypothèse, assez naturelle, sur les longueurs électriques, la connaissance d'un seul coefficient de réflexion (ici $R_{\mathcal{N}}(\omega)$) est suffisante pour identifier, de façon unique, les valeurs :

$$\bar{q}_j = \int_0^{\tau_j} q_j(s) ds \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Si l'une, quelconque, de ces quantités est différente de zéro, nous savons qu'il y a eu un changement de paramètres dans la branche associée. Alors, nous pouvons identifier ces défauts non francs sur cette ligne, en appliquant les méthodes classiques de l'inverse scattering [58, 55]. La question suivante serait, alors, d'identifier les défauts non francs qui n'entraîneraient pas de changements dans les quantités $(\bar{q}_j)_{j=1}^N$. Celle-ci est traitée à travers les deux Théorèmes 14 et 15. Pour ces deux théorèmes, nous allons avoir besoin d'hypothèses plus restrictives sur les longueurs électriques $(\tau_j)_{j=1}^N$. Dans le Théorème 14, nous allons voir que la connaissance d'un seul coefficient de réflexion (ici $R_{\mathcal{N}}(\omega)$) est suffisante pour identifier les potentiels lorsque l'on sait qu'ils ne sont pas changés sur la première moitié des branches. Par contre, le Théorème 15 implique la nature bien-posée du problème d'inversion du potentiel sur le graphe entier mais nécessite la connaissance des deux coefficients de réflexion $R_{\mathcal{D}}(\omega)$ et $R_{\mathcal{N}}(\omega)$.

Le théorème suivant propose un résultat d'inversion globale concernant les quantités \bar{q}_j .

Théorème 13. *Considérons un graphe en étoile Γ et supposons que*

B1 *les rapports entre les longueurs électriques $\{\tau_j\}_{j=1}^N$ ne sont pas des entiers,*

$$\frac{\tau_j}{\tau_i} \notin \mathbb{N} \quad \text{pour } i \neq j.$$

S'il existe deux jeux de potentiels $q = \otimes_{j=1}^N q_j$ et $\tilde{q} = \otimes_{j=1}^N \tilde{q}_j$ dans $H^1(\Gamma)$ qui donnent lieu aux mêmes coefficients de réflexion, $R_{\mathcal{N}}(\omega) \equiv \tilde{R}_{\mathcal{N}}(\omega)$, nous avons, nécessairement :

$$\int_0^{\tau_j} q_j(s) ds = \int_0^{\tau_j} \tilde{q}_j(s) ds \quad j = 1, \dots, N.$$

Remarque 9. *Le résultat de ce théorème reste valide si nous avons $R_{\mathcal{D}}(\omega) \equiv \tilde{R}_{\mathcal{D}}(\omega)$.*

Ce théorème nous permet d'identifier les situations où les défauts non francs causent un changement dans les quantités \bar{q}_j . Le problème inverse peut, alors, être considéré sur les branches séparées à travers des techniques classiques de scattering inverse. Dans les deux théorèmes suivants, nous supposons que les défauts du réseau laissent les quantités \bar{q}_j inchangées et comme pour le cas sans défauts les lignes sont homogènes, nous allons supposer que

B2 $\bar{q}_j = \int_0^{\tau_j} q_j(s) ds = 0$ pour $j = 1, \dots, N$.

Théorème 14. *Considérons un graphe en étoile Γ et supposons que*

B1' *pour tout $j, j' \in \{1, \dots, N\}$ tels que $j \neq j'$, $\tau_j/\tau_{j'}$ est un nombre algébrique irrationnel.*

*Alors, il existe $\epsilon > 0$ suffisamment petit tel que, si les potentiels q et \tilde{q} , qui appartiennent à $H^1(\Gamma)$ et satisfont **B2**, $\|q\|_{L^\infty(\Gamma)}, \|\tilde{q}\|_{L^\infty(\Gamma)} < \epsilon$ et $q_j(s) = \tilde{q}_j(s)$ pour $s \in [0, \tau_j/2]$, $j = 1, \dots, N$, donnent lieu aux mêmes coefficients de réflexion, $R_{\mathcal{N}}(\omega) \equiv \tilde{R}_{\mathcal{N}}(\omega)$, alors $q \equiv \tilde{q}$.*

Remarque 10. *L'hypothèse **B1'** semble très restrictive. Toutefois, pour démontrer ce théorème on a simplement besoin que pour toutes les fractions $\tau_j/\tau_{j'}$, il existe seulement un nombre fini de couples de nombres premiers entre eux, $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tels que l'approximation Diophantienne*

$$\left| \frac{\tau_j}{\tau_{j'}} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^3},$$

est satisfaite. Par ailleurs, une conséquence directe du Lemme de Borel-Cantelli implique que pour presque tout réel positif α (par rapport à la mesure de Lebesgue) cette approximation Diophantienne admet un nombre fini de solutions.

Théorème 15. *Considérons un graphe en étoile Γ satisfaisant l'hypothèse **B1'**. Il existe $\epsilon > 0$ suffisamment petit tel que, si les potentiels q et \tilde{q} , qui appartiennent à $H^1(\Gamma)$ et qui satisfont **B2** et $\|q\|_{L^\infty(\Gamma)}, \|\tilde{q}\|_{L^\infty(\Gamma)} < \epsilon$, donnent lieu aux mêmes coefficients de réflexion Neumann et Dirichlet,*

$$R_{\mathcal{N}}(\omega) \equiv \tilde{R}_{\mathcal{N}}(\omega) \quad \text{et} \quad R_{\mathcal{D}}(\omega) \equiv \tilde{R}_{\mathcal{D}}(\omega),$$

alors $q \equiv \tilde{q}$.

Remarque 11. *Le Théorème 15 est une généralisation naturelle du résultat de Borg [23] (voir, par exemple, le Théorème 1.4.4, Page 24, [42]) au cas d'un graphe. En effet, dans [23], Borg a démontré que la connaissance de deux spectres correspondants à deux jeux de conditions aux bords, détermine, de façon unique, le potentiel sur un intervalle.*

Les preuves de ces théorèmes sont basées sur la transformation du problème de scattering inverse en un problème spectral inverse sur la partie compacte du graphe, Γ . Pour les preuves détaillées, nous référons à l'article [108].

Conclusion

Plusieurs problèmes ont été abordés dans ce manuscrit. Certains n'ont été que partiellement résolus et des améliorations ou des extensions importantes sont envisageables. Nous en rappelons quelques uns en guise de conclusion en espérant qu'ils puissent servir de guide pour des recherches à venir :

- Dans la Section 1.2, nous avons étudié la stabilisation d'une particule quantique dans un potentiel décroissant. Dans ce but nous avons supposé que le système est initialisé dans la partie discrète du spectre de l'Hamiltonien libre $-\Delta + V(x)$. Le potentiel étant décroissant, il ne s'agit que d'un espace de dimension finie. La question serait alors de savoir ce que l'on peut faire pour d'autres types d'états initiaux. Quels sont les états initiaux que l'on peut stabiliser vers un état quelconque dans la partie discrète du spectre ? Une idée pour étendre le résultat de la Section 1.2 est d'appliquer le Théorème adiabatique quantique. Il s'agit d'ajouter un multiple de l'Hamiltonien d'interaction à l'Hamiltonien libre. Nous pouvons donc considérer $-\Delta + V(x) + c\mu(x)$ comme l'Hamiltonien libre. Sous certaines hypothèses de plus pour l'Hamiltonien d'interaction $\mu(x)$, nous pouvons donc essayer de stabiliser un état lié de ce nouvel Hamiltonien libre. Il suffit, maintenant, que le système soit initialisé dans la partie discrète du spectre de l'opérateur $-\Delta + V(x) + c\mu(x)$. Notons que lorsque l'état du système converge vers un état lié de cet opérateur, le contrôle converge vers la constante c . Nous pouvons, maintenant, faire converger la constante c lentement vers 0. Le système va donc suivre adiabatiquement un état lié de l'opérateur $-\Delta + V(x) + c(t)\mu(x)$ et si nous avons bien choisi, comme état cible, l'état lié de $-\Delta + V(x) + c\mu(x)$ associé à la branche analytique qui passe par l'état fondamental de $-\Delta + V(x)$, nous pourrions préparer, de façon approchée, cet état fondamental.

Nous avons donc réussi à stabiliser les états initiaux qui sont générés par la partie discrète du spectre de $-\Delta + V(x) + c\mu(x)$. L'étude de ces états dans la limite où $c \rightarrow \infty$ relève du domaine de la limite semi-classique des opérateurs de Schrödinger. Il serait donc intéressant de caractériser l'espace des états dans L^2 qui peuvent être générés par la partie discrète du spectre de $-\Delta + V(x) + c\mu(x)$ pour un $c \in \mathbb{R}$ bien choisi.

- Dans la Section 1.3, nous avons considéré le problème d'identification de paramètres pour un ensemble statistique de systèmes quantiques dont l'évolution moyenne est modélisée par une équation de Schrödinger. Toutefois, nous savons que la mesure d'un ensemble quantique induit de la décohérence dans l'évolution moyenne. En effet, une approximation adiabatique du premier ordre nous permet de négliger cette décohérence au moins sur un horizon fini. La question serait alors la suivante : que peut-on faire dans le cas où cette dissipation est plus importante ou bien si notre algorithme d'estimation ne converge pas suffisamment vite

pour que cette approximation du premier ordre reste valide ? Nous sommes alors amenés à étudier l'estimation de paramètres pour un système du type Lindblad plutôt qu'une équation de Schrödinger. Une méthode possible pour étudier un tel problème pourrait être d'appliquer les observateurs aller-retours (BFN) comme dans la Section 3.1.

- Dans la Section 2.1, nous avons étudié le problème de la stabilisation des états de Fock dans une cavité micro-onde. Dans ce but, nous avons appliqué une mesure QND de l'état de la cavité à travers le couplage dispersif avec des atomes hors résonances. Cette mesure QND est en elle-même suffisante pour préparer de façon non-déterministe un état de Fock. Néanmoins, pour rendre cette préparation déterministe et aussi pour protéger l'état de Fock contre la décohérence, nous avons proposé une boucle de feedback qui consiste à injecter un pulse cohérent d'amplitude appropriée afin de corriger l'état de la cavité. Nous avons alors démontré la convergence du système en boucle fermée lorsque l'on a tronqué l'espace d'états, initialement de dimension infinie, en supposant un nombre maximal de photons admis. Comme l'amplitude des champs cohérents injectés est supposée petite et comme la procédure de mesure se fait sans échange d'énergie avec le système (atomes hors résonances), il semble justifié de supposer que la probabilité d'atteindre les niveaux très hauts d'énergie est assez petite. Toutefois, nous pouvons nous demander comment améliorer cela en réduisant encore cette probabilité. Aussi, nous pouvons chercher à démontrer un résultat de stabilisation en considérant le système de dimension infinie et non une approximation modale. Dans ce but, nous aurons besoin d'étendre le Théorème d'invariance de Kushner au cas de systèmes stochastiques de dimension infinie. En analogie avec les systèmes déterministes, nous devons avoir besoin d'un type de compacité probabiliste (à définir) pour des trajectoires aléatoires.

- Dans la Section 3.1, nous avons abordé le problème d'estimation d'un terme de source pour une équation des ondes 1D. Plusieurs extensions sont envisageables. Ici, nous présentons deux extensions qui nous semblent plus importantes que les autres.

Une première extension concerne la dépendance temporelle du terme de source. En effet, pour l'observateur proposé, il est essentiel de considérer une dépendance temporelle mono-fréquentielle (cela nous permet de transformer l'estimation du terme de source à l'estimation d'un état initial). Toutefois, avoir la possibilité d'exciter le système avec un signal multi-fréquentiel impliquera, très probablement, plus d'observabilité pour le système. Un estimateur aurait donc la possibilité de converger en moins d'itérations. Une idée pour concevoir des observateurs qui assurent l'estimation d'un terme de source dont la dépendance temporelle est multi-fréquentielle, serait d'adapter au cas de la dimension infinie, la méthode proposée dans [113].

La deuxième extension concerne le passage au cas d'un graphe. Nous devrions pouvoir étendre, sans trop de difficulté, l'observateur proposé dans la Section 3.1 au cas d'un graphe quelconque. La question que l'on peut alors se poser concerne la convergence asymptotique de l'observateur. Quelles sont les conditions sur la forme du graphe métrique (sa topologie et sa géométrie) afin d'assurer la convergence de l'estimateur ?

Bibliographie

- [1] 13^{ème} Conférence Générale des Poids et Mesures. Resolution 1. *Metrologia*, 4 :41–45, 1968.
- [2] S. Agmon. Spectral properties of schrödinger operators and scattering theory. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 4(2) :151–218, 1975.
- [3] S. Agmon. *Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations : bounds on eigenfunctions of N-body Schrödinger operators*, volume 29 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, 1982.
- [4] F. Albertini and D. D’Alessandro. Notions of controllability for bilinear multilevel quantum systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(8) :1399 – 1403, 2003.
- [5] C. Altafini. Controllability of quantum mechanical systems by root space decomposition of $su(n)$. *Journal of Mathematical Physics*, 43(5) :2051–2062, 2002.
- [6] H. Amini, M. Mirrahimi, and P. Rouchon. Stabilization of a delayed quantum system : the Photon Box case-study. 2010. Submitted, preprint at arXiv :1007.3584v1.
- [7] E. Arimondo. Coherent population trapping in laser spectroscopy. *Progr. Optics*, 35 :257, 1996.
- [8] K.B. Ariyur and M. Krstic. *Real-Time Optimization by Extremum-Seeking Control*. Wiley-Interscience, 2003.
- [9] D. Auroux and J. Blum. A nudging-based data assimilation method for oceanographic problems : the Back and Forth Nudging (BFN) algorithm. *Nonlin. Proc. Geophys.*, 15 :305–319, 2008.
- [10] J.M. Ball and M. Slemrod. Feedback stabilization of distributed semi-linear control systems. *Appl. Math. Optim.*, 5 :169–179, 1979.
- [11] L. Baudouin, O. Kavian, and J.P. Puel. Regularity for a schrödinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control. *J. Differential Equations*, 216 :188–222, 2005.
- [12] L. Baudouin and J. Salomon. Constructive solutions of a bilinear control problem. *Syst. Cont. Lett.*, 57 :453–464, 2008.
- [13] K. Beauchard. Local controllability of a 1-D schrödinger equation. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 84 :851–956, 2005.
- [14] K. Beauchard, J.-M. Coron, M. Mirrahimi, and P. Rouchon. Implicit lyapunov control of finite dimensional schrödinger equations. *Systems Control Letters*, 56 :388–395, 2007.

- [15] K. Beauchard, J.-M. Coron, and P. Rouchon. Controllability issues for continuous-spectrum systems and ensemble controllability of Bloch equations. *Comm. Math. Phys.*, 2007. to appear.
- [16] K. Beauchard and J.M. Coron. Controllability of a quantum particle in a moving potential well. *J. of Functional Analysis*, 232 :328–389, 2006.
- [17] K. Beauchard, P.S. Pereira da Silva, and P. Rouchon. Time-periodic feedback stabilization for an ensemble of half-spin systems. In *NOLCOS, Bologna*, 2010.
- [18] K. Beauchard and M. Mirrahimi. Approximate stabilization of a quantum particle in a 1D infinite potential well. In *IFAC World Congress, Seoul*, 2008.
- [19] K. Beauchard and M. Mirrahimi. Practical stabilization of a quantum particle in a 1D infinite square potential well. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(2) :1179–1205, 2009.
- [20] V.P. Belavkin. Quantum stochastic calculus and quantum nonlinear filtering. *Journal of Multivariate Analysis*, 42(2) :171–201, 1992.
- [21] S. Bonnabel, M. Mirrahimi, and P. Rouchon. Qubit hamiltonian identification : A symmetry-preserving observer-based approach. In *IFAC World Congress, Seoul*, 2008.
- [22] S. Bonnabel, M. Mirrahimi, and P. Rouchon. Observer-based hamiltonian identification for quantum systems. *Automatica*, 45 :1144–1155, 2009.
- [23] G. Borg. Eine Umkehrung des Sturm-Liouvilleschen Eigenweraufgabe. *Acta Mathematica*, 78 :1–96, 1946.
- [24] L. Bouten, R. van Handel, and M.R. James. A discrete invitation to quantum filtering and feedback control. *SIAM Review*, 51 :239–316, 2009.
- [25] M. Brune, S. Haroche, J.-M. Raimond, L. Davidovich, and N. Zagury. Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling : Quantum-nondemolition measurements and génération of "Schrödinger cat" states. *Physical Review A*, 45(7) :5193–5214, 1992.
- [26] V. Buzek. Quantum tomography from incomplete data via MaxEnt principle. In *Lecture Notes in Physics*, volume 649, pages 180–234. Springer-Verlag Berlin, 2004.
- [27] R. Carlson. Adjoint and self-adjoint differential operators on graphs. *Electronic Journal of Differential Equations*, 6 :1–10, 1998.
- [28] C.M. Caves. Quantum mechanics of measurements distributed in time. A path-integral formulation. *Phys. Rev. D*, 33 :1643–1665, 1986.
- [29] T. Chambrion, P. Mason, M. Sigalotti, and U. Boscain. Controllability of the discrete-spectrum schrödinger equation driven by an external field. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Nonlinear Analysis*, 26 :329–349, 2009.
- [30] M. Chapouly and M. Mirrahimi. Distributed source identification for wave equations : an observer-based approach. 2010. Submitted, preprint at arXiv :1005.5638.
- [31] M. Chapouly and M. Mirrahimi. Distributed source identification for wave equations : an observer-based approach. In *Mathematical Theory of Networks and Systems, Budapest*, 2010.

- [32] Y. Chen, P. Gross, V. Ramakrishna, H. Rabitz, and K. Mease. Competitive tracking of molecular objectives described by quantum mechanics. *J. Chem. Phys.*, 102 :8001–8010, 1995.
- [33] C. Cohen-Tannoudji and J. Dalibard. Single-atom laser spectroscopy. looking for dark periods in fluorescence light. *Europhysics Letters*, 1(9) :441–448, 1986.
- [34] J.M. Coron. Global stabilization for controllable systems without drift. *Math. Control Signals Systems*, 5 :295–312, 1992.
- [35] J.M. Coron. *Control and Nonlinearity*. American Mathematical Society, 2007.
- [36] J.M. Coron and B. D’Andréa-Novel. Stabilization of a rotating body-beam without damping. *IEEE Trans. Automat. Control*, 43 :608–618, 1998.
- [37] J.M. Coron, B. D’Andréa-Novel, and G. Bastin. A strict Lyapunov function for boundary control of hyperbolic systems of conservation laws. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(1) :2–11, 2007.
- [38] R. Dáger and E. Zuazua. *Wave propagation and control in 1-d vibrating multi-structures*, volume 50 of *Mathématiques et Applications*. Springer Verlag, 2006.
- [39] J. Dalibard, Y. Castin, and K. Mølmer. Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics. *Phys. Rev. Lett.*, 68(5) :580–583, 1992.
- [40] A.C. Doherty and K. Jacobs. Feedback control of quantum systems using continuous state estimation. *Phys. Rev. A*, 6 :2700–2711, 1999.
- [41] I. Dotsenko, M. Mirrahimi, M. Brune, S. Haroche, J.-M. Raimond, and P. Rouchon. Quantum feedback by discrete quantum non-demolition measurements : towards on-demand generation of photon-number states. *Physical Review A*, 80 :013805–013813, 2009.
- [42] G. Freiling and V. Yurko. *Inverse Sturm-Liouville problems and their applications*. NOVA Science Publishers, 2008.
- [43] J.M. Geremia. Deterministic and nondestructively verifiable preparation of photon number states. *Physical Review Letters*, 97(073601), 2006.
- [44] J.M. Geremia and H. Rabitz. Optimal identification of hamiltonian information by closed-loop laser control of quantum systems. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :263902–1–4, 2002.
- [45] J.M. Geremia and H. Rabitz. Optimal hamiltonian identification : The synthesis of quantum optimal control and quantum inversion. *J. Chem. Phys.*, 118(12), 2003.
- [46] S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, U. Busk Hoff, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche. Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity. *Nature*, 446 :297–300, 2007.
- [47] M. Goldberg. Dispersive bounds for the three-dimensional schrödinger equation with almost critical potentials. *Geom. and Funct. Anal.*, 16(3) :517–536, 2006.
- [48] M. Goldberg and W. Schlag. Dispersive estimates for schrödinger operators in dimensions one and three. *Comm. Math. Phys.*, 251 :157–178, 2004.
- [49] M. Goldberg and W. Schlag. A limiting absorption principle for the three-dimensional Schrödinger equation with l^p potentials. *Intl. Math. Res. Not.*, 75 :4049–4071, 2004.

- [50] C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche. Progressive field-state collapse and quantum non-demolition photon counting. *Nature*, 448 :889–893, 2007.
- [51] B. Gutkin and U. Smillansky. Can one hear the shape of a graph? *J. Phys. A*, 34 :6061, 2001.
- [52] R. Van Handel, J. K. Stockton, and H. Mabuchi. Feedback control of quantum state reduction. *IEEE Trans. Automat. Control*, 50 :768–780, 2005.
- [53] S. Haroche and J.M. Raimond. *Exploring the Quantum : Atoms, Cavities and Photons*. Oxford University Press, 2006.
- [54] K. Ito, K. Ramdani, and M. Tucsnak. A time reversal based algorithm for solving initial data inverse problems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2010. to appear.
- [55] M. Jaulent. The inverse scattering problem for LCRG transmission lines. *J. Math. Phys.*, 23(12) :2286–2290, 1982.
- [56] J.-L. Journé, A. Soffer, and C.D. Sogge. Decay estimates for Schrödinger operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 44 :573–604, 1991.
- [57] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [58] I. Kay. The inverse scattering problems for transmission lines. In L. Collin, editor, *Mathematics for Profile inversion-NASA Tech. Mem. TM X-62*, volume 150, pages 6–2–6–17, 1972.
- [59] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. MacMillan, 1992.
- [60] J. Kitching, S. Knappe, N. Vukicevic, L. Hollberg, R. Wynands, and W. Weidemann. A microwave frequency reference based on vcsel-driven dark line resonance in cs vapor. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 49 :1313–1317, 2000.
- [61] R.L. Kosut and H. Rabitz. Identification of quantum systems. In *Proceedings of the 15th IFAC World Congress*, 2002.
- [62] R.L. Kosut, H. Rabitz, and I. Walmsley. Maximum likelihood identification of quantum systems for control design. In *13th IFAC Symposium on System Identification*, 2003.
- [63] R.L. Kosut, I. Walmsley, Y. Eldar, and H. Rabitz. Quantum state detector design : Optimal worst-case a posteriori performance, 2004. preprint, arXiv :quant-ph/0403150.
- [64] R.L. Kosut, I. Walmsley, and H. Rabitz. Optimal experiment design for quantum state and process tomography and Hamiltonian parameter estimation, 2004. preprint, arXiv :quant-ph/0411093.
- [65] P. Kurasov and F. Stenberg. On the inverse scattering problem on branching graphs. *J. Phys. A*, 35(1), 2002.
- [66] H.J. Kushner. *Introduction to stochastic control*. Holt, Rinehart and Wilson, INC., 1971.
- [67] C. Le Bris, M. Mirrahimi, H. Rabitz, and G. Turinici. Hamiltonian identification for quantum systems : well-posedness and numerical approaches. *ESAIM : COCV*, 13 :378–395, 2007.

- [68] Z. Leghtas, M. Mirrahimi, and P. Rouchon. Parameter estimation of a 3-level quantum system with a single population measurement. In *IEEE Conf. On Decision and Control, Shanghai*, 2009.
- [69] B. Li, G. Turinici, V. Ramakrishna, and H. Rabitz. Optimal dynamic discrimination of similar molecules through quantum learning control. *J. Phys. Chem. B*, 106 :8125–8131, 2002.
- [70] H. Mabuchi. Dynamical identification of open quantum systems. *Quantum and Semiclassical Optics*, 8 :1103–1108, 1996.
- [71] M.B. Mensky. Quantum restrictions for continuous observation of an oscillator. *Phys. Rev. D*, 20 :384–387, 1979.
- [72] M. Mirrahimi. Lyapunov control of a particle in a finite quantum potential well. In *IEEE Conf. On Decision and Control, San Diego*, 2006.
- [73] M. Mirrahimi. Lyapunov control of a quantum particle in a decaying potential. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (c) Nonlinear Analysis*, 26 :1743–1765, 2009.
- [74] M. Mirrahimi, I. Dotsenko, and P. Rouchon. Feedback generation of quantum fock states by discrete QND measures. In *IEEE Conf. On Decision and Control, Shanghai*, 2009.
- [75] M. Mirrahimi and R. Van Handel. Stabilizing feedback controls for quantum systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46(2) :445–467, 2007.
- [76] M. Mirrahimi and P. Rouchon. Real-time synchronization feedbacks for single-atom frequency standards. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(4) :2820–2839, 2009.
- [77] M. Mirrahimi and P. Rouchon. Singular perturbations and Lindblad-Kossakowski differential equations. *IEEE Trans. Automatic Control*, 54(6) :1325–1329, 2009.
- [78] M. Mirrahimi, P. Rouchon, and G. Turinici. Lyapunov control of bilinear schrödinger equations. *Automatica*, 41(11) :1987–1994, 2005.
- [79] M. Mirrahimi, A. Sarlette, and P. Rouchon. Real-time synchronization feedbacks for single-atom frequency standards : V- and Λ -structure systems. In *IEEE Control and Decision Conference*, 2010. to appear.
- [80] M. Mirrahimi, G. Turinici, and P. Rouchon. Reference trajectory tracking for locally designed coherent quantum controls. *J. of Physical Chemistry A*, 109 :2631–2637, 2005.
- [81] W. Nagourney, J. Sandberg, and H. Dehmelt. Shelved optical electron amplifier : Observation of quantum jumps. *Physical Review Letters*, 56 :2797, 1986.
- [82] V. Nersesyan. Growth of sobolev norms and controllability of the schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.*, 290(1) :371–387, 2009.
- [83] V. Nersesyan. Global approximate controllability for schrodinger equation in higher sobolev norms and applications. *Ann. IHP Nonlinear Analysis*, 27(3) :901–915, 2010.
- [84] S. Oliveras and M.G.A. Paris. Quantum estimation via the minimum kullback entropy principle. *Physical Review A*, 76 :042120, 2007.
- [85] M.G.A. Paris, G.M. D'Ariano, and M.G. Sacchi. Maximum likelihood method in quantum estimation, 2001. Preprint, arXiv :quant-ph/0101071 v1.

- [86] E. Peik, T. Schneider, and Ch. Tamm. Laser frequency stabilisation to a single ion. *J. Phys. At. Mol. Opt. Phys.*, 39 :145–158, 2006.
- [87] V. Pivovarchik. Inverse problem for the Sturm-Liouville equation on a simple graph. *SIAM J. Math. Anal.*, 32 :801–819, 2000.
- [88] V. Ramakrishna, M. Salapaka, M. Dahleh, and H. Rabitz. Controllability of molecular systems. *Phys. Rev. A*, 51(2) :960–966, 1995.
- [89] K. Ramdani, M. Tucsnak, and G. Weiss. Recovering the initial state of an infinite-dimensional system using observers. *Automatica*, 2010. to appear.
- [90] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol IV : Analysis of Operators*. Academic Press New York, San Francisco, London, 1978.
- [91] E. Riis and A.G. Sinclair. Optimum measurement strategies for trapped ion optical frequency standards. *J. Phys. At. Mol. Opt. Phys.*, 37 :4719–4732, 2004.
- [92] P. Rouchon. Control of a quantum particle in a moving box. Technical Report A/325, École des Mines de Paris, Centre Automatique et Systèmes, October 2002.
- [93] Deléglise S., I. Dotsenko, C. Sayrin, J. Bernu, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche. Reconstruction of non-classical cavity field states with snapshots of their decoherence. *Nature*, 455 :510–514, 2008.
- [94] Th. Sauter, W. Neuhauser, R. Blatt, and P.E. Toschek. Observation of quantum jumps. *Physical Review Letters*, 57 :1969, 1986.
- [95] W. Schlag. Dispersive estimates for Schrödinger operators in two dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 257(1) :87–117, 2005.
- [96] S. Shi, A. Woody, and H. Rabitz. Optimal control of selective vibrational excitation in harmonic linear chain molecules. *J. Chem. Phys.*, 88(11) :6870–6883, 1988.
- [97] O.J.M. Smith. Closer control of loops with dead time. *Chemical Engineering Progress*, 53(5) :217–219, 1958.
- [98] J.K. Stockton, R. Van Handel, and H. Mabuchi. Deterministic dicke state preparation with continuous measurement and control. *Phys. Rev. A*, 70 :022106, 2004.
- [99] M. Stoiciu. An estimate for the number of bound states of the Schrödinger operator in two dimensions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(4) :1143–1151, 2004.
- [100] R. Strichartz. Restrictions of fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.*, 44(3) :705–714, 1977.
- [101] M. Sugawara. General formulation of locally designed coherent control theory for quantum systems. *J. Chem. Phys.*, 118(15) :6784–6800, 2003.
- [102] H.J. Sussmann and V. Jurdjevic. Controllability of nonlinear systems. *J. Differential Equations*, 12 :95–116, 1972.
- [103] P. Tombesi and D. Vitali. Macroscopic coherence via quantum feedback. *Phys. Rev. A*, 51 :4913–4917, 1995.
- [104] G. Turinici. Controllable quantities for bilinear quantum systems. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1364–1369, 2000.

- [105] G. Turinici and H. Rabitz. Wavefunction controllability in quantum systems. *J. Phys. A*, 36 :2565–2576, 2003.
- [106] J. Valein and E. Zuazua. Stabilization of the wave equation on 1-d networks. *SIAM J. Contr. Optim.*, 48(4) :2771–2797, 2009.
- [107] F. Visco Comandini, M. Mirrahimi, and M. Sorine. On the inverse scattering of star-shape LC-networks. In *IEEE Conf. On Decision and Control, Cancun*, 2008.
- [108] F. Visco-Comandini, M. Mirrahimi, and M. Sorine. Some inverse scattering problems on star-shaped graphs. 2010. submitted, preliminary version at ArXiv :0907.1561.
- [109] H.M. Wiseman. Quantum theory of continuous feedback. *Physical Review A*, 49 :2133–50, 1994.
- [110] H.M. Wiseman and G.J. Milburn. Interpretation of quantum jump and diffusion processes illustrated on the bloch sphere. *Physical Review A*, 47 :1652–66, 1993.
- [111] M. Yamamoto. Stability, reconstruction formula and regularization for an inverse source hyperbolic problem by a control method. *Inverse Problems*, 11 :481–496, 1995.
- [112] V. Yurko. Inverse spectral problems for sturm-liouville operators on graphs. *Inverse problems*, 21(3) :1075–1086, 2005.
- [113] Q. Zhang. Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (MIMO) linear time-varying systems. *IEEE transactions on automatic control*, 47(3) :525–529, 2002.
- [114] P. Zoller, M. Marte, and D.F. Walls. Quantum jumps in atomic system. *Physical Review A*, 35 :198, 1987.

URLs pour les articles sur lesquels ce manuscrit est basé :

- (K. Beauchard and M. Mirrahimi) Practical stabilization of a quantum particle in a 1D infinite square potential well, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48 (2) : 1179-1205, 2009 (http://www-rocq.inria.fr/who/Mazyar.Mirrahimi/HDR/SICON_BM.pdf).
- (M. Mirrahimi) Lyapunov control of a quantum particle in a decaying potential : *Annales de l'Institut Henri Poincaré (c) Nonlinear Analysis*, 26 : 1743-1765, 2009 (http://www-rocq.inria.fr/who/Mazyar.Mirrahimi/HDR/ANIHP_M.pdf).
- (S. Bonnabel, M. Mirrahimi and P. Rouchon) Observer-based Hamiltonian identification for quantum systems, *Automatica*, 45 : 1144-1155, 2009 (http://www-rocq.inria.fr/who/Mazyar.Mirrahimi/HDR/Automatica_BMR.pdf).
- (H. Amini, M. Mirrahimi and P. Rouchon) Stabilization of a delayed quantum system : the Photon Box case-study, preprint, 2010 (http://www-rocq.inria.fr/who/Mazyar.Mirrahimi/HDR/Arxiv_AMR.pdf).
- (I. Dotsenko, M. Mirrahimi, M. Brune, S. Haroche, J.-M. Raimond and P. Rouchon) Quantum feedback by discrete quantum non-demolition measurements : towards on-demand generation of photon-number states, *Physical Review A*, 80 : 013805-013813, 2009 (http://www-rocq.inria.fr/who/Mazyar.Mirrahimi/HDR/PRA_DMBHRR.pdf).
- (M. Mirrahimi and P. Rouchon) Real-time synchronization feedbacks for single-atom frequency standards, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48 (4) : 2820–2839, 2009 (http://www-rocq.inria.fr/who/Mazyar.Mirrahimi/HDR/SICON_MR.pdf).
- (M. Chapouly and M. Mirrahimi) Distributed source identification for wave equations : an observer-based approach, preprint, 2010, (http://www-rocq.inria.fr/who/Mazyar.Mirrahimi/HDR/Arxiv_CM.pdf).
- (F. Visco Comandini, M. Mirrahimi and M. Sorine) Some inverse scattering problems on star-shaped graphs, preprint, 2010 (http://www-rocq.inria.fr/who/Mazyar.Mirrahimi/HDR/Arxiv_VMS.pdf).