



**HAL**  
open science

# Diagnostic non invasif de piles à combustible par mesure du champ magnétique proche

Mathieu Le Ny

► **To cite this version:**

Mathieu Le Ny. Diagnostic non invasif de piles à combustible par mesure du champ magnétique proche. Energie électrique. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT : . tel-00844407v1

**HAL Id: tel-00844407**

**<https://theses.hal.science/tel-00844407v1>**

Submitted on 15 Jul 2013 (v1), last revised 17 Jan 2018 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : Mécanique des fluides, Procédés, Energétique

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Mathieu LE NY**

Thèse dirigée par **M. Yann BULTEL** et  
codirigée par **M. Olivier CHADEBEC** et **M. Gilles CAUFFET**

préparée au sein du LEPMI et du G2Elab  
dans l'**École Doctorale Ingénierie – Matériaux Mécanique  
Energétique Environnement Procédés Production**

# Diagnostic non invasif de piles à combustible par mesure du champ magnétique proche

Thèse soutenue publiquement le **10 décembre 2012**,  
devant le jury composé de :

**M. Olivier LOTTIN**

Professeur des Universités, Nancy, Examineur

**Mme Marie-Cécile PERA**

Professeur des Universités, Belfort, Rapporteur

**M. Claude MARCHAND**

Professeur des Universités, Paris, Rapporteur

**M. Sébastien ROSINI**

Ingénieur CEA, Grenoble, Examineur

**M. Yann BULTEL**

Professeur des Universités, Grenoble, Examineur

**M. Gilles CAUFFET**

Maître de Conférences, Grenoble, Examineur

**M. Olivier CHADEBEC**

Chargé de recherche CNRS, Grenoble, Invité

**M. Jean-Marc DEDULLE**

Professeur PAST, Grenoble, Invité











# **Remerciements**



Ces trois années de thèse furent les années plus passionnantes et les plus riches que j'ai passées sur le plan scientifique et technique. Mais peu du travail accompli aurait pu l'être sans l'aide et le soutien de très nombreuses personnes. Ces quelques lignes tentent de remercier plus ou moins adroitement les personnes dont j'ai croisé le chemin et à qui je dois beaucoup de choses. La tâche est délicate et il est toujours difficile de savoir où s'arrêter. J'espère que les personnes absentes de ces lignes ne m'en tiendront pas rigueur.

Je commencerais par remercier les personnes ayant accepté de participer à mon jury de thèse. Que soit remerciés ici Olivier Lottin d'avoir accepté la tâche délicate de présider ce jury. Je remercie également Marie-Cécile Péra et Claude Marchand pour avoir accepté d'être les rapporteurs de mon manuscrit et pour avoir étudié celui-ci avec beaucoup de soins et d'attention.

Viennent ensuite les personnes ayant suivi au quotidien l'avancement de ces travaux de thèse. Tout d'abord, je tiens à remercier très chaleureusement mon directeur de thèse Yann Bultel pour ses qualités humaines et son implication sans faille sur ce projet de recherche. Ce fut un réel plaisir de travailler et d'échanger avec toi tout au long de ces trois ans. Ton perpétuel enthousiasme a toujours été une source de motivation et d'inspiration pour ces travaux de recherche.

Je remercie également Olivier Chadebec, tout d'abord pour m'avoir convaincu de réaliser cette thèse. Merci vraiment pour cela, ce fut un choix que je n'ai jamais regretté un seul instant. Je te remercie aussi pour ton professionnalisme et pour avoir parfaitement su anticiper tous les besoins que l'on peut rencontrer pendant une thèse mélangeant modélisation, problèmes inverses et instrumentation. Grâce à cela, j'ai pu bénéficier de moyens humains et financiers qui m'ont libéré de très nombreuses contraintes. Ayant échangé avec beaucoup de doctorants d'ici et d'ailleurs, j'ai conscience d'avoir eu la chance de bénéficier de conditions de travail exceptionnelles pour réaliser sereinement ces travaux de recherche.

Je remercie très vivement Gilles Cauffet pour sa bonne humeur quotidienne et ses conseils avisés. En travaillant à tes côtés, j'ai énormément appris sur l'instrumentation. Je me souviendrais aussi longtemps de ton aide inestimable sur le développement de la pile étalon afin de tenir les jalons du projet OMNISCIENTS.

Je remercie également Jean-Marc Dedulle pour sa bonne humeur et tous les très riches échanges scientifiques que nous avons pu avoir au cours de ces trois années de thèse. L'un de mes regrets fut de ne pas avoir eu le temps de te soutirer toutes les connaissances que tu possèdes dans le domaine de la modélisation multi-physique. Mais ce n'est peut-être que partie remise.

Je tiens à remercier très vivement Sébastien Rosini pour s'être considérablement investi dans le déploiement de notre système de mesures sur la pile à combustible du CEA et de PSA. Sans son aide, l'impact des résultats de cette thèse aurait été bien moindre. Je lui dois énormément et j'espère qu'il trouvera dans ces lignes ma très profonde reconnaissance.

Il me tient aussi à cœur de remercier toutes les personnes du projet OMNISCIENTS avec qui j'ai eu la chance de travailler et d'échanger : Frank Masset, Nicolas Fouquet et Yvan Roche de la société PSA, Olivier Verdu, Florent Beille et Vincent Phlippoteau de la société Hélion, et Benoit Legros de la société EPA.

Durant ces trois années, j'ai eu la chance de travailler dans différents environnements de recherches extrêmement dynamiques. J'ai épisodiquement eu l'occasion d'intervenir au CEA. Que tous les membres du LIGE (Laboratoire d'Intégration des Générateurs Electrochimiques) soit ici remerciés pour leur accueil et leur disponibilité, en particulier Yannick Fourneron pour l'aide sur l'instrumentation du stack GENEPAC.

Je remercie également l'ensemble du personnel du LEPMI (Laboratoire d'Electrochimie et de Physico-Chimie des Matériaux et des interfaces) pour l'ambiance chaleureuse et l'aide qu'ils ont apportées à ces travaux. Je remercie en particulier Pierre-Xavier Thivel et Florence Druart pour leur soutien et disponibilité pour la préparation de mes enseignements. Je remercie Jonathan Deseure pour son investissement dans la création et l'animation d'une salle numérique dotée d'excellents moyens de calculs. Et merci à Sébastien Sailler pour tous les échanges qu'on a pu avoir dans cette même salle. Enfin, je remercie Sandrine Baudin pour avoir toujours tenté de répondre avec dynamisme et motivation à mes demandes concernant le banc d'essai GESI.

De la même manière qu'avec le LEPMI ou le LIGE, je remercie l'ensemble du personnel du G2Elab (Laboratoire de Génie Electrique de Grenoble) qui font de ce lieu l'endroit idéal pour mener une thèse. Je remercie en particulier Laurent Gerbaud, mon voisin

de bureau de la salle numérique pour m'avoir supporté pendant trois ans. Merci également à mon autre voisin, Jean-Michel Guichon, entre autre pour m'avoir mis en contact avec mon employeur actuel. Je remercie Gérard Meunier pour toutes ses qualités humaines et son soutien. Enfin un immense merci à tous les autres membres de l'équipe MAGE (Modèles, Méthodes et Méthodologies Appliquées au Génie Electrique) pour tous les échanges et réunions passionnantes que nous avons eus. Je remercie aussi Jean-Luc Shannen pour m'avoir permis d'enseigner à l'ENSE3 et Delphine Riu pour avoir accepté de m'encadrer. Merci aussi à Eric Gentil et Jean Barbaroux pour l'aide apportée sur la conception des cartes électroniques de la pile étalon. Je remercie également tous les membres de l'équipe CMF (Champs Magnétiques Faibles) pour leur très précieuse aide sur l'instrumentation magnétique. Merci donc à Laure-Line Rouve pour son accueil chaleureux, Philippe Le Thiec pour son aide et ses astuces sur les magnétomètres et Florent Dumas pour la construction du système de positionnement mécanique des capteurs.

Une thèse est une superbe aventure qui possède un début (un avant) et une fin (un après). Je remercie donc les encadrants de mon projet de fin d'études Yann Le Floch, Enrico Vialardi, et Bertrand du Peloux de la société CEDRAT sans qui mes pas ne m'auraient jamais conduit jusqu'au G2Elab et à cette thèse. Pour l'après-thèse, je remercie Lalao-Harijaona Rakotoarison pour la confiance qu'il m'a accordée alors que ma thèse n'était pas encore terminée et de m'avoir ainsi donné ma chance au sein de la société Electricfil Automotive. J'en profite aussi pour remercier Patrick Malaureille et Philippe Chinkirch de Valoridoc pour leurs conseils inestimables et toute l'énergie qu'ils dépensent pour l'insertion professionnelle des doctorants. Je laisse aussi derrière moi un projet de recherche passionnant sur lequel j'aurais été capable de travailler encore de nombreuses années. Je remercie donc Tahar Hamaz de s'être lancé dans la suite de ce projet et d'avoir eu le courage de m'écouter digresser pendant des heures sur l'influence de tel ou tel paramètre. Je te souhaite bonne chance pour la suite.

L'atmosphère et l'ambiance du laboratoire ont beaucoup fait pour rendre ces années si particulières. Parfois, plus que des collègues, ce sont des amis que j'y ai rencontrés. Je commencerais par ceux avec qui j'ai eu la chance de traverser l'ensemble de ces trois années de thèse : arrivé le même jour, parti le même jour (ou presque). Tout d'abord, les deux hurluberlus du bureau D064. Merci à toi Fanny pour ton perpétuel dynamisme et ta

motivation à toujours lancer de nouveaux projets. Merci aussi pour ton soutien dans des moments plus durs. Je pense ne pas avoir été le seul à en profiter et mes remerciements vont donc aussi à ta seconde et indissociable moitié Mickaël sur qui beaucoup de choses retombent sans doute au final. Merci à Christophe, l'autre habitant du D064. Fou furieux de la randonnée et qui, malgré les apparences, cache bien son jeu avec son sens de l'humour plus que corrosif. Merci aussi à toi Ando, pour ta bonne humeur à toute épreuve (à l'épreuve des balles pourrait-on dire, au vu de l'enchaînement des événements, ça force le respect). Merci aussi Ni, à toi et à toute l'énergie dont tu débordes (et que tu nous fais partager). Je pense que les bretons ont eu le temps de se remettre de ton dernier passage en Bretagne et que tu y seras de nouveau la bienvenue. Merci à Mickaël, génie de la cuisine, chercheur incroyable, et enseignant hors pair. Mais par contre peu doué pour choisir convenablement une date de soutenance de thèse... Ce fut néanmoins un honneur de faire ta première partie et de chauffer la salle juste avant ton passage.

Je poursuis les remerciements avec ceux arrivés en cours de route et qui ont apporté du sang frais dans les rangs. Un grand merci à Wahid, l'expert en volley (mais un peu moins en guitare...). Merci Bertrand pour toutes les soirées sympas qu'on a pu partager ensemble. Merci Sylvain pour y avoir mis de l'ambiance. Merci Raha pour ta bonne humeur communicative et pour ton aide précieuse en anglais. Merci Manel pour ton soutien (et tes conseils "avisés") durant la rédaction. Merci à Morgan pour toutes les discussions scientifiques ou sportives passionnantes qu'on a pu avoir ensemble. Merci à Sylvie, "l'invitée" régulière du G2Elab pour nous avoir fait l'honneur de ta présence. Et merci Camille pour tous les échanges sympas qu'on a eu.

Je remercie également Julien, Anthony, Filipa et Florie qui, à l'inverse, sont partis avant ou qui n'étaient que de passage. Merci Mariam, Jose, Julian et Nathalie pour les fantastiques repas très internationaux que vous avez organisés. Merci aussi au gang des tunisiennes Abir, Sana, et Sarra pour tous les moments sympas passés ensemble. Un dernier merci à Didier, Razmig, Thomas, Olivier, Ashour, Ali, Luiz, Gatien, Nesrine, Timothé et à toutes les autres personnes du labo que j'ai eu l'occasion de croiser et partager un café au cours de ces trois années. Je préfère m'arrêter ici afin d'éviter tout "copier-coller" inutile de l'annuaire du laboratoire.

Enfin, il y a tous ceux qui, en dehors des laboratoires, font de Grenoble une ville des plus agréables à vivre. Merci donc à mes amis de Grenoble, mais aussi à ceux de Paris ou de Bretagne pour tous les bons moments passés ensemble. Je terminerais par tous les membres de ma famille, en particulier mes parents et ma sœur, pour m'avoir toujours soutenu. Qu'ils en soient infiniment remerciés. Cette thèse leur est dédiée.





# **Table des matières**



<i>Remerciements</i> .....	<b>5</b>
<i>Table des matières</i> .....	<b>13</b>
<i>Liste des symboles</i> .....	<b>21</b>
<i>Introduction générale</i> .....	<b>27</b>
 <i>Chapitre I : Motivations et objectifs pour le diagnostic des piles à combustible</i> .....	 <b>33</b>
<b>I - Contexte : l'énergie et la filière hydrogène</b> .....	<b>35</b>
A - Les enjeux énergétiques .....	35
B - Le vecteur électrique .....	36
C - Le vecteur hydrogène .....	37
D - La pile à combustible .....	39
<b>II - Le système pile à combustible : principes</b> .....	<b>42</b>
A - Aspects thermodynamiques et cinétiques .....	42
1) Bilans énergétiques .....	42
2) Caractéristique courant-tension.....	44
B - Aspects technologiques .....	46
1) La cellule élémentaire .....	46
2) Le stack .....	48
3) Les auxiliaires .....	50
C - Conclusion : une technologie multi-échelles et multi-physiques.....	52
<b>III - Défaillances d'une pile à combustible</b> .....	<b>54</b>
A - Défaillances réversibles .....	54
B - Défaillances irréversibles .....	55
C - Moyens de rétroactions .....	56
D - Bilan .....	57
<b>IV - Le diagnostic des piles à combustible</b> .....	<b>58</b>
A - Etat de l'art des techniques de diagnostic.....	58
1) Techniques non invasives .....	58

2) Techniques invasives .....	60
B - Le diagnostic par mesure du champ magnétique externe.....	61
1) Principe, justification, et intérêt .....	61
2) Etat de l'art .....	63
C - Conclusion sur les techniques de diagnostic .....	65
<b>Chapitre II : Modèles directs de stack.....</b>	<b>67</b>
<b>I - Le modèle électrocinétique .....</b>	<b>70</b>
A - Etat de l'art .....	71
B - Formulations.....	72
1) L'équation de conduction à l'état stationnaire .....	73
2) Ajout d'un terme source dans l'équation de conduction.....	74
3) Cas de lois de polarisation non linéaires .....	75
C - Description du modèle.....	76
1) Géométrie, maillage et physique.....	76
2) Paramètres du modèle .....	77
3) Comportement électrique d'une pile saine .....	79
D - Comportement électrique d'un stack défectueux .....	81
1) Défaut résistif.....	82
2) Déséquilibre des forces électromotrices .....	85
E - Conclusion sur le modèle électrocinétique.....	89
<b>II - Les modèles directs magnétiques.....</b>	<b>90</b>
A - Modèle magnétique 3D .....	90
1) Formulations .....	91
2) Discrétisation .....	94
3) Effet d'un défaut de fonctionnement sur le champ magnétique.....	96
4) Décomposition mode commun – mode différentiel.....	97
5) Champ magnétique maximal perçu par les magnétomètres.....	100
6) Conclusion sur le modèle magnétique 3D .....	101
B - Modèle magnétique 2D .....	101
1) Approximation 2D : aspects mathématiques .....	102
2) Approximation 2D : application aux piles et limite de l'approche.....	104
3) Intensité du champ magnétique de mode commun et de mode différentiel.....	107
4) Conclusion sur le modèle magnétique 2D .....	109

C - Conclusion sur les modèles magnétiques .....	110
<b>III - Conclusion sur les modèles directs .....</b>	<b>111</b>
<b><i>Chapitre III : Résolution du problème inverse .....</i></b>	<b><i>113</i></b>
<b>I - Problématiques associées à la résolution du problème inverse magnétique .....</b>	<b>116</b>
A - Définitions du problème inverse .....	116
B - Existence et unicité de la solution du problème inverse .....	118
C - Instabilité du problème inverse : illustration avec l'analogie du circuit RC.....	122
1) Modélisation du circuit RC .....	122
2) Première tentative d'inversion .....	123
3) Régularisation du problème inverse .....	125
4) Bilan sur l'analogie.....	127
5) Limites de l'analogie .....	128
D - Conclusion.....	130
<b>II - Outils algébriques pour la résolution du problème inverse .....</b>	<b>131</b>
A - Paramétrisation du problème.....	132
B - Identification des paramètres du modèle direct réduit .....	135
C - Ajouts d'informations sur la densité de courant .....	137
D - Résolution et nécessité de régulariser .....	139
E - Décomposition en valeurs singulières du modèle direct .....	142
F - Régularisation du problème inverse .....	147
1) Principe de la régularisation.....	147
2) La troncature de spectre .....	148
3) Détermination du paramètre de troncature.....	151
G - Conclusion.....	155
<b>III - Amélioration de l'outil de diagnostic .....</b>	<b>157</b>
A - Construction d'une nouvelle base de description de la densité de courant .....	157
1) Modèle électrocinétique simplifié.....	158
2) Construction de la base .....	162
3) Partitionnement de la base et du modèle.....	165
B - Choix des mesures de champs magnétiques.....	168
1) Nombre de mesures.....	168
2) Orientation des mesures .....	171

3) Localisation des mesures .....	175
C - Bilan sur les améliorations apportées à l'outil de diagnostic.....	180
<b>IV - Conclusion sur le problème inverse .....</b>	<b>182</b>
<b><i>Chapitre IV : Validation expérimentale de l'outil de diagnostic .....</i></b>	<b><i>183</i></b>
<b>I - Simulateur de champs magnétiques .....</b>	<b>186</b>
A - Présentation du système expérimental .....	186
B - Comparaison des mesures et des simulations numériques.....	191
C - Résultats d'inversion.....	195
D - Préconisations pour l'étalonnage du système de diagnostic.....	197
E - Conclusion .....	199
<b>II - Mesures magnétiques sur pile à combustible .....</b>	<b>201</b>
A - Présentation du système expérimental .....	201
B - Résultats .....	203
1) Appauvrissement en air.....	204
2) Assèchement .....	207
3) Dégradations .....	209
C - Conclusion sur la méthode de diagnostic .....	211
<b><i>Conclusion générale .....</i></b>	<b><i>213</i></b>
<b><i>Annexes .....</i></b>	<b><i>221</i></b>
<b>Annexe A - Introduction de lois de polarisation non linéaires dans l'équation de conduction .....</b>	<b>223</b>
<b>Annexe B - Ordres de grandeurs du champ magnétique autour de la pile à combustible .....</b>	<b>225</b>
<b>Annexe C - Etude analytique de l'opérateur de Biot et Savart 2D .....</b>	<b>228</b>
A - Introduction et objectifs .....	228
B - Factorisation de l'opérateur de Biot et Savart 2D : décomposition en harmoniques circulaires .....	230
C - Etude de la relation multipôles – champs magnétiques .....	234
1) Illustration des harmoniques circulaires .....	234
2) Changement de base et diagonalisation partielle de l'opérateur .....	235

3) Inversion du modèle : estimation des multipôles.....	238
4) Discrétisation et critère de Shannon.....	240
5) Remarque sur les harmoniques circulaires externes .....	240
<b>D - Etude de la relation courants – multipôles .....</b>	<b>242</b>
1) Changements de bases et diagonalisation partielle de l'opérateur .....	242
2) Densités de courant générant le même champ magnétique .....	243
3) Inversion du modèle.....	245
4) Illustration des densités de courants invisibles .....	246
<b>E - Conclusion sur les propriétés de l'opérateur de Biot et Savart .....</b>	<b>247</b>
<b>Annexe D - Etude du noyau de l'opérateur de Biot et Savart en trois dimensions ....</b>	<b>251</b>
A - Noyau de l'opérateur en trois dimensions .....	251
B - Densités de courants issues d'un modèle électrocinétique : état de l'art.....	254
<b>Annexe E - Imposition forte du courant total et de la conservation du courant .....</b>	<b>256</b>
<b>Annexe F - Liste des modèles inverses.....</b>	<b>260</b>
<b>Annexe G - Calculs d'incertitudes .....</b>	<b>262</b>
 <i>Bibliographie.....</i>	 <i>269</i>
 <i>Bibliographie personnelle.....</i>	 <i>281</i>





## **Liste des symboles**



- $\beta$  : Champ magnétique exprimé dans la base des vecteurs singuliers gauches (T).
- $\Gamma$  : Domaine de l'espace 2D où les courants sont nuls (extérieur de la pile).
- $\Gamma_S$  : Domaine de l'espace 2D où les courants sont non nuls (pile à combustible).
- $\Delta$  : Opérateur Laplacien ( $m^{-2}$ ) ou opérateur différence.
- $\Delta rH$  : Enthalpie d'une réaction chimique ( $J.mol^{-1}$ )
- $\Delta rG$  : Enthalpie libre d'une réaction chimique ( $J.mol^{-1}$ ).
- $\varepsilon_B$  : Erreur d'estimation du champ magnétique (T).
- $\varepsilon_\beta$  : Erreur d'estimation du champ magnétique exprimé dans la base singulière (T).
- $\varepsilon_J$  : Erreur d'estimation de la densité de courant ( $A.m^{-2}$ ).
- $\eta$  : Rendement énergétique.
- $\theta$  : Densité de courant exprimée dans la base des vecteurs singuliers droits ( $A.m^{-2}$ ).
- $A$  : Matrice  $S$  exprimée dans la base des vecteurs singuliers ( $T.A^{-1}.m^2$ ).
- $\mu$  : Perméabilité magnétique ( $H.m^{-1}$ ).
- $\sigma$  : Conductivité ( $S.m^{-1}$ )
- $\sigma_J$  : Ecart-type de la densité de courant ( $A.m^{-2}$ ).
- $\sigma_\varepsilon$  : Ecart-type de l'erreur de mesure (T).
- $\Phi$  : Base de description des courants.
- $\Psi$  : Base de descriptions des mesures.
- $\Omega$  : Domaine de l'espace 3D où les courants sont nuls (extérieur de la pile).
- $\Omega_S$  : Domaine de l'espace 3D où les courants sont non nuls (pile à combustible).
- $\nabla$  : Opérateur gradient ( $m^{-1}$ ).
- $A$  : Potentiel vecteur magnétique (T.m).
- $B$  : Champ magnétique (T).
- $B$  : Champ magnétique paramétrisé (T).

$\hat{B}$  : Champ magnétique estimé (T).

$E$  : Champ électrique (V.m<sup>-1</sup>).

$E_m$  : Champ électromoteur (V.m<sup>-1</sup>).

$F$  : Noyau de la loi de Biot et Savart (T.A<sup>-1</sup>.m<sup>-1</sup> en 3D, T.A<sup>-1</sup> en 2D).

$F_{elec}$  : Modèle électrocinétique simplifié.

$G$  : Fonction de Green de l'opérateur  $-\Delta/\mu_0$  (T.A<sup>-1</sup> en 3D, T.A<sup>-1</sup>.m en 2D).

$Id$  : Matrice identité.

$I_{tot}$  : Courant total traversant la pile (A).

$j$  : Densité de courant (A.m<sup>-2</sup>).

$j_m$  : Densité de courant imposée dans le modèle électrocinétique simplifié (A.m<sup>-2</sup>).

$J$  : Densité de courant paramétrisée (A.m<sup>-2</sup>).

$\hat{J}$  : Densité de courant estimée (A.m<sup>-2</sup>).

$L_{AME}$  : épaisseur d'un AME selon z (m).

$L_x$  : Dimension d'un AME selon x (m).

$L_y$  : Dimension d'un AME selon y (m).

$M$  : Nombre de mesures.

$M_A$  : Nombre de valeurs singulières conservées après troncature.

$N$  : Nombre d'inconnues.

$r$  : position dans l'espace usuellement utilisé dans  $\Omega$  (m).

$r_s$  : position dans l'espace usuellement utilisé dans  $\Omega_s$  (m).

$R_s$  : Résistance surfacique ( $\Omega.m^2$ ).

$R$  : Rapport signal sur bruit.

$S$  : Modèle direct discrétisé (T.A<sup>-1</sup>.m<sup>2</sup>).

$S^\#$  : Modèle inverse (T<sup>-1</sup>.A.m<sup>-2</sup>).

$S_{pile}$  : Section d'un AME (m<sup>2</sup>).

$s$  : Valeurs singulières de la matrice  $S$  ( $T.A^{-1}.m^2$ ).

$u_{max}$  : Fréquence spatiale normalisée délimitant les basses et hautes fréquences selon  $x$ .

$U_m$  : Force électromotrice, tension de boucle ouverte dans le cas linéaire (V).

$U_{m0}$  : Tension de boucle ouverte (V).

$U$  : Vecteurs singuliers gauches de la matrice  $S$ .

$v_{max}$  : Fréquence spatiale normalisée délimitant les basses et hautes fréquences selon  $y$ .

$V$  : Potentiel (V).

$V$  : Vecteurs singuliers droits de la matrice  $S$ .

$Y$  : Orientation des capteurs.



# **Introduction générale**





## **Contexte et enjeux**

Les piles à combustible sont des dispositifs de conversion d'énergie qui produisent de l'électricité à partir d'hydrogène et d'oxygène. Malgré leurs nombreux atouts pour le stockage et la conversion d'énergie, ces systèmes souffrent encore de certaines imperfections qui limitent leurs commercialisations à très grande échelle. Les piles à combustible sont en effet sujettes à des défaillances et à des vieillissements dégradant la fiabilité et les performances du système. Les causes de ces dégradations sont complexes et impliquent de nombreux phénomènes physico-chimiques, ainsi que de nombreuses échelles spatiales et temporelles. Ces mécanismes ne sont pas encore parfaitement maîtrisés et il existe aujourd'hui une réelle demande de la part des acteurs de la filière hydrogène pour le développement de nouveaux outils de diagnostic permettant d'identifier ces défaillances.

C'est dans ce contexte que s'inscrivent les travaux de recherche du projet ANR<sup>a</sup> OMNISCIENTS<sup>b</sup>. Il s'agit d'un projet visant à développer des outils innovants de diagnostic non invasifs pour les piles à combustible de dimensions industrielles (stacks). Ce projet de recherche s'articule autour de six partenaires : le CEA, PSA Peugeot Citroën (applications transports), HELION (applications stationnaires), Euro Physical Acoustics, le LEPMI et le G2Elab. L'objectif est d'obtenir des estimateurs d'état robustes sur l'état de santé d'une pile en phase de fonctionnement ou pendant les phases de maintenance. Ces estimateurs d'état doivent détecter de manière rapide et pertinente les défaillances susceptibles de dégrader les performances de la pile et d'accélérer le vieillissement de celle-ci. A terme, l'objectif est d'être en mesure de corriger de manière préventive ces dégradations et d'améliorer la fiabilité, le coût et la durée de vie de ces systèmes.

Le nouvel outil de diagnostic proposé ici s'appuie sur une approche innovante consistant à mesurer la signature magnétique externe de la pile. L'instrumentation est donc non invasive et ne perturbe pas le fonctionnement du système. Les champs magnétiques possèdent l'intérêt d'être corrélés à l'ensemble des courants circulant à l'intérieur de la pile. Il est alors possible à partir de la signature magnétique externe d'obtenir une cartographie interne de la densité de courant. L'information obtenue est ainsi locale. Cela est un avantage

---

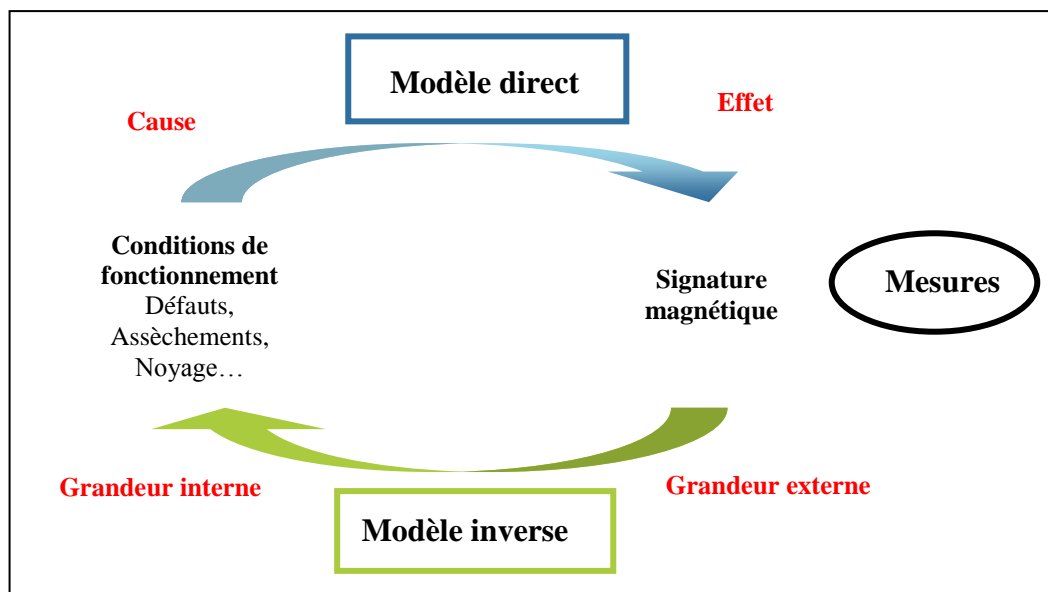
<sup>a</sup> Agence Nationale de la Recherche.

<sup>b</sup> Outils de Maintenance conditionnelle Non Invasifs pour Système pile à Combustible Industriel en ENvironnement Transport et Stationnaire.

vis-à-vis des outils non invasifs existants qui fournissent des informations très moyennées sur l'état interne de la pile. De plus, les densités de courant sont elles-mêmes corrélées à l'état interne de la pile (hygrométrie, température,...). La signature magnétique externe semble donc être un indicateur pertinent de l'état de santé de la pile. Au final, cette technique cumule les avantages des outils invasifs (information locale) et non invasifs (aucune perturbation).

### **Approche proposée**

Pour relier les grandeurs internes de la pile aux champs magnétiques externes, des modèles sont nécessaires. Nous appelons modèle direct la relation qui, à partir des causes (défauts de fonctionnement), détermine les effets (signature magnétique). A l'opposé, le modèle inverse est la relation estimant les causes à l'origine des effets mesurés (Fig. 1).



*Fig. 1 : Modèles direct et inverse.*

Ainsi, cette problématique de diagnostic nécessite à la fois un travail de modélisation, d'inversion et d'instrumentation. Dans un premier temps, il est préférable de commencer par travailler sur le développement d'un modèle direct. En effet, il est en général plus facile de mesurer ou calculer les effets créés par différentes causes que de réaliser l'opération inverse. C'est en s'appuyant sur un modèle direct qu'il devient possible dans un second temps de concevoir un modèle inverse. Les problèmes inverses appartiennent à une classe de problèmes mathématiques qui possède des caractéristiques les rendant plus complexes à résoudre que leurs homologues directs. La solution est rarement unique et est extrêmement sensible aux erreurs de mesures. Des outils mathématiques spécifiques doivent donc être mis en œuvre pour contourner ces difficultés. Enfin, les modèles directs et inverses développés permettent

dans un troisième temps de concevoir et dimensionner le système de mesures permettant d'acquérir la signature magnétique de la pile à combustible.

La relation entre les conditions de fonctionnement (défauts) et la signature magnétique est très complexe. Celle-ci fait intervenir plusieurs physiques ainsi que de nombreuses échelles spatiales et temporelles. La plupart des modèles directs de piles à combustible déjà existants se concentrent sur les couplages multi-physiques (fluidique, électrique, thermique et électrochimique) et ne modélisent qu'un nombre très restreint de cellules. De plus, leurs temps d'exécution sont relativement longs, ce qui les rend difficilement utilisables dans le cadre d'une problématique d'inversion de modèles.

Partant de ce constat, il est évident que la réponse à cette problématique passe par le développement de nouveaux modèles spécifiquement dédiés à notre application de diagnostic. Au vu du nombre de phénomènes physico-chimiques mis en jeu, un découpage du problème en plusieurs sous-problèmes nous semble aussi indispensable. La figure (Fig. 2) propose un découpage possible. Etant donné la complexité des interactions entre les différentes physiques et les différentes échelles, ce découpage amène nécessairement son lot d'approximations. Il s'agit d'une première approche, contestable, mais qui permet d'aborder le problème plus simplement. Sur cette figure, seuls les modèles (représentés par des flèches) disposant d'un nom ont fait l'objet d'une étude approfondie durant cette thèse.

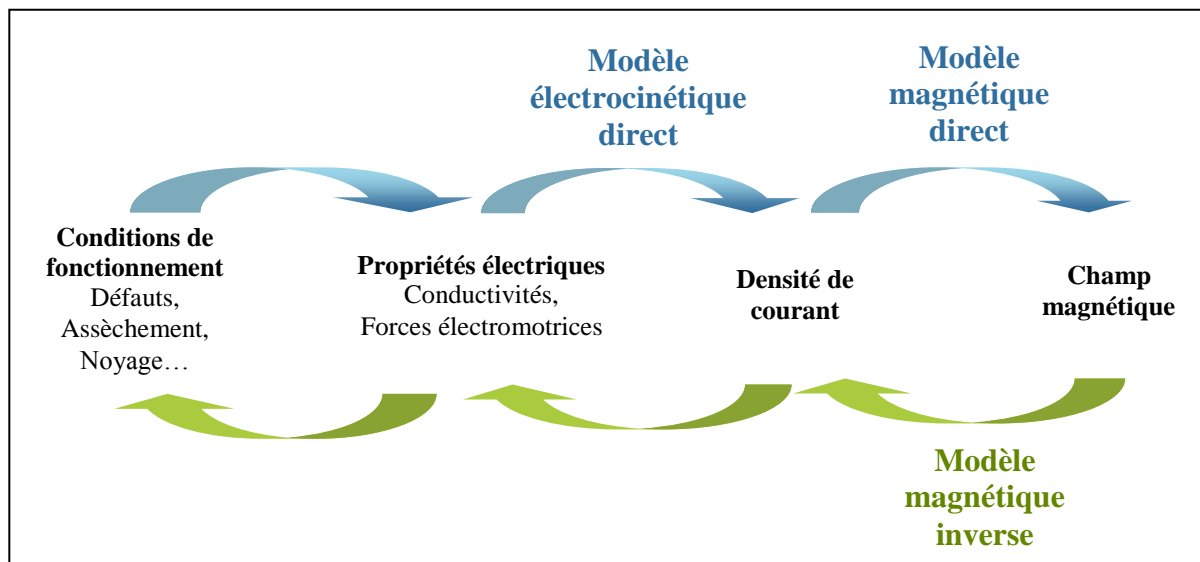


Fig. 2 : Découpage du problème en plusieurs sous-problèmes.

Ce rapport de thèse s'appuie sur ce découpage et s'articule autour des quatre chapitres suivants :

- Le chapitre 1 resitue ces travaux dans le contexte général du diagnostic des piles à combustible de type PEMFC. Les principes, les avantages et les limitations de cette technologie sont rappelés. Nous détaillons ensuite l'intérêt des mesures de champs magnétiques pour la détection des défaillances susceptibles de survenir à l'intérieur de ces systèmes.
- Le chapitre 2 présente les modèles directs ayant été développés durant ces travaux. Nous faisons dans un premier temps certaines hypothèses simplificatrices sur l'impact qu'ont certaines défaillances sur la distribution spatiale des conductivités et des forces électromotrices. Le modèle électrocinétique développé permet alors d'obtenir les distributions de courants macroscopiques à l'intérieur de stacks de grandes dimensions. Le modèle magnétique direct nous permet ensuite de calculer le champ magnétique à partir des densités de courant précédemment obtenues. Ces modèles directs nous permettent ainsi d'évaluer l'influence de différentes défaillances sur la signature magnétique. Un pré-dimensionnement du système de mesures peut alors être réalisé.
- Le chapitre 3 s'appuie sur les précédents modèles pour développer un modèle magnétique inverse estimant les densités de courant à partir des champs magnétiques mesurés à proximité de la pile. Nous présentons alors les problématiques particulières liées à la résolution d'un tel problème inverse. Des outils mathématiques spécifiques sont employés pour contourner les problèmes de non unicité et d'instabilité de la solution. Enfin, des solutions originales sont proposées pour rendre le système de métrologie magnétique plus efficace.
- Le chapitre 4 présente la mise en œuvre expérimentale de cette méthode et les résultats obtenus. Un simulateur de champs magnétiques est construit et permet de valider la démarche proposée. Le système de mesure est ensuite déployé sur une véritable pile à combustible. La sensibilité du système à des assèchements, appauvrissements et dégradations est démontrée.

# **Chapitre I : Motivations et objectifs pour le diagnostic des piles à combustible**



## I - Contexte : l'énergie et la filière hydrogène

### A - Les enjeux énergétiques

Nos sociétés font actuellement face à des défis énergétiques inédits. Le modèle technologique actuel, basé sur l'utilisation massive des combustibles fossiles, est confronté au problème de la quantité limitée d'hydrocarbures présents sur Terre. La croissance de la consommation énergétique (Fig. 3) amènera tôt ou tard à un pic de production qui aura des répercussions à tous les niveaux de la société. De plus, les émissions de gaz à effet de serre liées à l'utilisation de ces hydrocarbures compromettent l'équilibre du climat sur Terre.

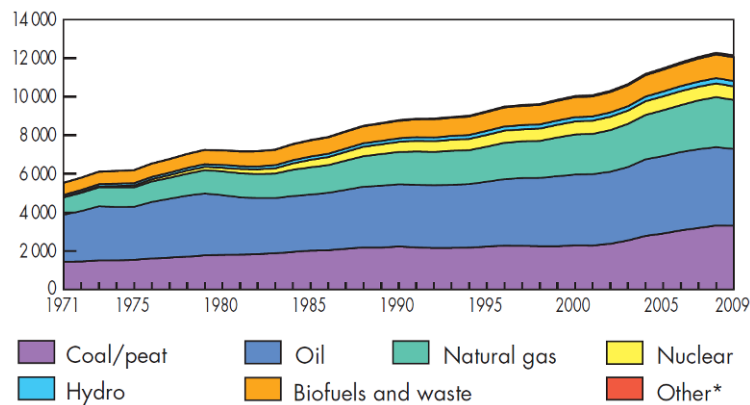


Fig. 3 : Evolution de la consommation d'énergie primaire (en tonne équivalent pétrole) dans le monde [IEA, 2011].

Les problématiques et les enjeux dépassent de très loin le cadre technique et concernent l'ensemble des acteurs des milieux économiques, sociaux et politiques. La réponse à ces problématiques complexes reste encore à définir. La solution passera probablement par des économies d'énergie et par l'utilisation de nouvelles technologies en rupture avec celles déjà existantes. Ces ruptures nécessiteront le développement de nouvelles sources de production d'énergie et le déploiement de nouveaux vecteurs énergétiques plus efficaces.

C'est dans ce contexte que la filière hydrogène trouvera probablement sa place sur le marché de l'énergie. Couplé avec le vecteur électrique, l'hydrogène peut apporter une marge de manœuvre supplémentaire au niveau de la gestion des flux énergétiques et ainsi améliorer l'efficacité des différents systèmes. Les deux paragraphes suivant présentent le vecteur électrique et le vecteur hydrogène. Enfin la pile à combustible, système permettant de coupler en partie ces deux filières, est présentée.



## ***B - Le vecteur électrique***

L'électricité semble être le vecteur énergétique de l'avenir. Relativement facile à produire, transporter et transformer, les technologies composant la majeure partie de la chaîne électrique sont matures depuis déjà de nombreuses années. Les rendements de la plupart des convertisseurs (électrique-mécanique ou électrique-électrique) sont excellents. Néanmoins, la question du stockage de l'électricité se révèle être plus délicate. De nombreuses technologies sont déjà disponibles mais les coûts sont encore parfois prohibitifs. Ainsi la puissance de stockage mondiale n'est actuellement que de 90 GW pour 3400 GW de production électrique installée [Ibrahim et al., 2008].

Le stockage de l'électricité possède pourtant de nombreux intérêts, ne serait-ce que pour les applications transports et portables. Mais de manière plus générale, le stockage peut se révéler intéressant dans toutes les applications où les fluctuations de puissance sont importantes en production ou en consommation. En effet, ces applications sont souvent surdimensionnées en puissance afin d'être en mesure d'absorber des puissances crêtes pouvant être très supérieures à la puissance moyenne de l'installation. Ce surdimensionnement entraîne généralement des mauvais rendements énergétiques ainsi que des coûts d'investissement élevés. Un dispositif de stockage intermédiaire permet de rationaliser au mieux l'utilisation de l'énergie et d'obtenir ainsi de meilleurs rendements.

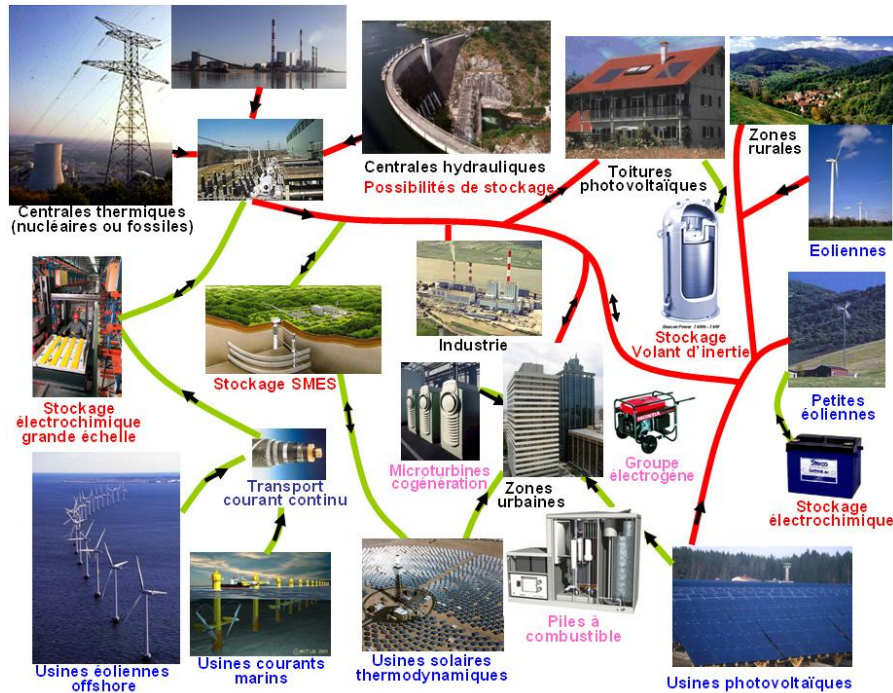


Fig. 4 : Production, stockage, et réseau électrique dans un contexte d'importante utilisation d'énergies renouvelables [Multon & Ahmed, 2007].

Le stockage de l'énergie électrique est particulièrement critique avec les énergies renouvelables telles que le solaire ou l'éolien. Ces nouvelles énergies sont pourtant destinées à prendre une part de plus en plus importante dans le mix énergétique mondial. Les réseaux électriques de transport et de distribution vont donc devoir s'adapter à cette forte augmentation de la production décentralisée et intermittente (Fig. 4). Cette adaptation passera par une augmentation de la flexibilité du réseau et par sa capacité à contrôler les effets de la variabilité des flux d'énergies. Le recours aux technologies de stockage de l'énergie électrique dans les réseaux, ainsi que le couplage de ceux-ci avec les applications transports, est une des voies envisagées pour répondre à ces enjeux.

Parmi toutes les nouvelles technologies de stockage à l'étude, le couplage de la filière électrique avec la filière hydrogène semble être une des voies les plus prometteuses. Cette filière est décrite plus en détail dans la section suivante.

### C - Le vecteur hydrogène

L'industrie de l'hydrogène n'est pas nouvelle et est déjà extrêmement développée dans le secteur de la chimie. L'un des principaux débouchés de l'hydrogène à l'heure actuelle est la production d'ammoniac. L'hydrogène est aussi présent à toutes les étapes des procédés de

raffinage de l'industrie pétrolière, soit comme un produit, soit comme un réactif. Notons aussi son utilisation comme carburant des moteurs de fusée dans l'industrie spatiale. Mais c'est en tant que futur vecteur énergétique que l'hydrogène suscite aujourd'hui le plus d'intérêt. En effet, l'hydrogène possède les avantages suivants :

- Son énergie massique est la plus élevée des combustibles existants, bien que sa faible masse volumique entraîne une énergie volumique relativement faible aux conditions normales de température et de pression.
- Sous sa forme atomique, l'hydrogène est très abondant sur Terre (mais est inexistant sous sa forme moléculaire).
- Il est non toxique (mais néanmoins inflammable et explosif).
- L'hydrogène peut être couplé avec le vecteur électrique et est donc une solution prometteuse pour le stockage de l'électricité. Ce couplage est réalisable à l'aide de convertisseurs électrochimiques tels que les piles à combustible et les électrolyseurs. Ceux-ci permettent la conversion de l'énergie d'une forme à une autre (chimique  $\leftrightarrow$  électrique).
- Pour chaque élément de la chaîne hydrogène (production, stockage, transport, consommation), il existe une grande variété de technologies possibles. Certaines sont déjà matures, d'autres moins. Ainsi le développement technologique d'un élément de la chaîne n'est pas contraint par le développement des autres éléments de la chaîne. Par exemple, pour utiliser les piles à combustible, il n'est pas nécessaire d'attendre le développement des électrolyseurs car des technologies de production par reformage d'hydrocarbures sont déjà disponibles. Ce degré de liberté facilitera le développement économique de chaque nouvelle technologie.
- Sa conversion ne rejette pas de polluants locaux ( $\text{SO}_2$ ,  $\text{CO}$ ,  $\text{NO}_x$ ).
- Il s'agit d'un combustible non carboné. Il n'entraîne par conséquent aucune émission de  $\text{CO}_2$  sur le lieu de sa consommation.
- Si l'hydrogène est produit par électrolyse (avec utilisation d'électricité décarbonée), les émissions de  $\text{CO}_2$  sur l'ensemble de la chaîne sont quasiment nulles.

- S'il est produit directement à l'aide d'hydrocarbures, l'hydrogène permettrait de concentrer les rejets de gaz à effet de serre au niveau des grands sites de production, facilitant par la-même le captage et la séquestration du CO<sub>2</sub>.
- La diversité des technologies (contraintes, coûts, rendements, échelles) offre un vaste champ d'applications allant du Watt (applications portables) au MW (centrales électriques) en passant par le kW (automobile).
- La puissance maximale et la capacité énergétique d'un système hydrogène sont à priori découplées et ne dépendent que de l'application visée (à la différence des batteries par exemple). Le dimensionnement en énergie et en puissance d'une pile à combustible ou d'un électrolyseur est donc facilité.

Ainsi l'hydrogène possède de nombreux atouts qui feront sans doute de celui-ci un des acteurs clés du secteur de l'énergie dans les prochaines décennies. Néanmoins, toutes les technologies n'ont pas encore atteint le même stade de maturité et d'importants efforts de développement doivent encore être fournis afin de rendre chaque élément de la filière compétitif.

### ***D - La pile à combustible***

La pile à combustible est l'un des éléments clés de la filière hydrogène. Il s'agit d'un convertisseur électrochimique qui à partir d'hydrogène et d'oxygène produit de l'électricité, de l'eau et de la chaleur. Bien qu'à l'heure actuelle cette technologie ne soit présente que sur des marchés de niche, d'importants moyens humains et financiers sont consacrés à rendre cette technologie compétitive et facile d'emploi.

Il existe à l'heure actuelle un très grand nombre de technologies de piles à combustible. Celles-ci ont atteint des niveaux de maturité très variés allant du prototype de laboratoire à la centrale commercialisée de 3 MW. La classification la plus commune de ces technologies est réalisée selon le type d'électrolyte utilisé ou selon la gamme de température de fonctionnement. Globalement, la température de fonctionnement dicte les propriétés physico-chimiques et thermomécaniques des matériaux employés pour les composants du système (électrodes, électrolyte, interconnexions, collecteurs de courant, etc.). Par exemple, les électrolytes aqueux sont limités aux températures inférieures à 200°C en raison de leurs dégradations rapides aux températures élevées. La température de fonctionnement joue

également un rôle important en imposant le type de carburant utilisé. Nous ne citons ici que les technologies les plus abouties et faisant l'objet d'une commercialisation.

- AFC (Alkaline Fuel Cell) : il s'agit historiquement de la technologie la plus ancienne et a été sélectionnée par la NASA pour les vols habités du programme Apollo. Elle souffre néanmoins au niveau des applications terrestres d'un rapide empoisonnement de l'électrolyte par le CO<sub>2</sub>.
- PEMFC (Proton Exchange Membrane Fuel Cell) : il s'agit d'une technologie fonctionnant à basse température et utilisant un électrolyte solide. Les puissances possibles vont du Watt à la centaine de kW. Les applications concernent donc aussi bien le transport, le stationnaire ou le portable. Il s'agit de la technologie concentrant la majorité des investissements dans le domaine des applications transports [AFH2, 2011].
- MCFC (Molten Carbonate Fuel Cell) : pile fonctionnant à haute température (600°C). Son usage est surtout réservé aux applications stationnaires. Des modèles allant jusqu'à 3 MW sont actuellement commercialisés.
- SOFC (Solid Oxide Fuel Cell) : piles fonctionnant entre 650°C et 1000°C. Les développements et investissements sont plus récents mais l'intérêt qu'elles suscitent dans le domaine stationnaire est réel. De nombreux industriels se sont positionnés sur cette technologie émergente.
- PAFC (Phosphoric Acid Fuel Cell) : dédiées aux applications stationnaires, des modèles de 400 kW sont actuellement commercialisés.

D'autres technologies moins matures (DMFC, PCFC...) sont aussi en cours de développement. Mais à l'heure actuelle, la technologie semblant présenter la plus large gamme d'application est la PEMFC. Celle-ci a en effet pour vocation d'être présente à la fois sur les marchés portables, transports et stationnaires (Fig. 5). Les travaux de cette thèse se sont focalisés sur cette technologie et nous n'évoquerons plus que celle-ci par la suite.



*Fig. 5 : Démonstrateur FiSyPAC de PSA (gauche). Chargeurs portatifs de Paxitech (droite).  
Groupe de secours 100 kW d'Helion (bas).*

Les piles à combustible possèdent de nombreux atouts qui permettent d'apporter une marge de manœuvre supplémentaire au niveau des problématiques énergétiques évoquées plus haut. Mais malgré leur commercialisation dans des marchés de niche, les piles à combustible présentent encore un certain nombre d'inconvénients qui limitent leur commercialisation à plus grande échelle. Des efforts en recherches et développements doivent encore être consacrés à l'amélioration des durées de vie et des coûts de ces systèmes.

La prochaine section de ce chapitre décrit de manière plus détaillée le principe de fonctionnement d'une pile à combustible de type PEMFC. Une liste des défaillances affectant les performances et la fiabilité de ces systèmes est ensuite dressée. Nous nous intéressons alors aux techniques de diagnostic permettant de détecter ces défauts de fonctionnement. Nous concluons en présentant l'outil de diagnostic ayant fait l'objet des travaux de cette thèse.

## II - Le système pile à combustible : principes

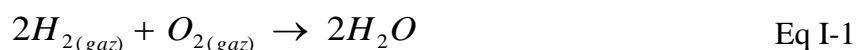
---

Cette section décrit plus en détail les principes décrivant le fonctionnement des systèmes pile à combustible. La première partie décrit les lois thermodynamiques et cinétiques régissant la conversion d'énergie chimique en énergie électrique. La seconde partie présente la structure des composants, de l'échelle microscopique à l'échelle du système.

### A - Aspects thermodynamiques et cinétiques

#### 1) Bilans énergétiques

Dans les moteurs à hydrogène et les piles à combustible, le dihydrogène (combustible) est consommé avec le dioxygène (comburant) selon la réaction suivante :



Cette réaction se déroule spontanément de la gauche vers la droite si une énergie d'activation est fournie. Cette réaction permet de libérer le surplus d'énergie stockée dans les liaisons chimiques des molécules de dihydrogène et de dioxygène. Les énergies mises en jeu sont données par le tableau (Tab. 1).

$\Delta_r H$ avec eau sous forme liquide (PCS <sup>a</sup> )	- 286,0 kJ.mol <sup>-1</sup>
$\Delta_r H$ avec eau sous forme vapeur (PCI <sup>b</sup> )	- 241,8 kJ.mol <sup>-1</sup>

Tab. 1 : Enthalpie de la réaction (Eq I-1) par unité de dihydrogène consommée aux conditions normales de températures et de pression.

Si les réactifs de la réaction (Eq I-1) sont directement mis en présence, il y a en général combustion et toute l'énergie chimique est libérée sous forme de chaleur. C'est ce qui est par exemple réalisé dans les moteurs à hydrogène. Mais il est aussi possible de récupérer une partie de l'énergie chimique directement sous forme d'énergie électrique. En effet la réaction (Eq I-1) est une réaction d'oxydoréduction faisant intervenir des échanges d'électrons entre les

---

<sup>a</sup> PCS : Pouvoir Calorifique Supérieur. Energie libérée par la réaction chimique avec de l'eau produite sous forme liquide.

<sup>b</sup> PCI : Pouvoir Calorifique Inférieur. Energie libérée par la réaction avec de l'eau produite sous forme vapeur.

composés chimiques. Cette réaction peut en effet être décomposée sous la forme des deux demi-réactions suivantes :



D'après la réaction (Eq I-2), on voit que pour chaque molécule de dihydrogène consommée, deux électrons sont échangés. La pile à combustible est le système permettant de valoriser ces échanges d'électrons sous forme de travail électrique exploitable. Pour y parvenir, ces deux demi-réactions sont mises en œuvre dans des compartiments distincts de la pile : l'anode et la cathode. Néanmoins, toute l'énergie chimique libérée par la réaction (Eq I-1) ne peut être entièrement exploitée sous forme d'énergie électrique. La part maximale théorique qu'il est possible d'extraire sous forme de travail électrique est donnée par l'enthalpie libre (Tab. 2).

$\Delta_r G$ avec eau sous forme liquide	- 237 kJ.mol <sup>-1</sup>
$\Delta_r G$ avec eau sous forme vapeur	- 228 kJ.mol <sup>-1</sup>

*Tab. 2 : Enthalpie libre de la réaction (Eq I-1) par unité de dihydrogène consommé aux conditions normales de température et de pression.*

Il devient alors possible de définir un rendement pour la réaction comme le rapport de l'énergie électrique exploitable sur l'énergie totale. Si on considère que l'état de référence de l'eau est sa forme liquide, le rendement est donné par l'équation (Eq I-4).

$$\eta_{rev} = \frac{\Delta_r G(\text{eau liq})}{\Delta_r H(\text{eau liq})} = 83\% \quad \text{Eq I-4}$$

Les 17% restant sont évacués sous forme de chaleur<sup>e</sup>. Les valeurs des différentes enthalpies peuvent aussi varier avec la température et les pressions partielles des composés

<sup>c</sup> Réaction d'oxydation de l'hydrogène (communément appelée HOR pour Hydrogen Oxidation Reaction). Réaction réalisée à l'anode d'une pile à combustible.

<sup>d</sup> Réaction de réduction de l'oxygène (communément appelée ORR pour Oxygen Reduction Reaction). Réaction réalisée à la cathode d'une pile à combustible.

<sup>e</sup> En pratique l'eau est majoritairement produite sous forme de vapeur dans les piles à combustible. Celle-ci entraîne donc avec elle une partie de l'énergie contenue initialement dans le dihydrogène et le dioxygène. Il est peut être par conséquent plus judicieux de définir le rendement comme le rapport de l'enthalpie libre avec eau vapeur sur le PCS. Cela donnerait un rendement de 80%.



chimiques. A des conditions de température et de pression données, le rendement donné ci-dessus est la valeur théorique maximale obtenue avec une réaction réversible, c'est à dire avec une réaction réalisée de manière infiniment lente. Evidemment, n'importe quelle application nécessite des puissances et courants non nuls. Cela entraîne donc l'apparition de processus irréversibles venant dégrader ce rendement. Ces pertes font l'objet du paragraphe suivant.

### **Remarque**

Si la réaction (Eq I-1) est effectuée dans le sens inverse (par électrolyse et/ou thermolyse), elle permet de stocker l'énergie apportée (électrique et/ou thermique) sous forme d'énergie chimique dans les molécules de dihydrogène et de dioxygène. Ainsi, une pile à combustible associée à un électrolyseur et à une unité de stockage d'hydrogène constitue un système permettant de stocker et de restituer l'énergie électrique à la demande.

## **2) Caractéristique courant-tension**

La tension électrique  $U_m$  (en Volt) développée par un système exploitant la réaction d'oxydoréduction est égale au rapport d'énergie électrique (en Joule) par unité de charges échangées (en Coulomb). Un changement d'unité permet d'exprimer simplement cette tension en fonction de l'enthalpie libre (énergie électrique disponible par unité de dihydrogène consommée).

$$U_m = \frac{\Delta_r G}{2F} \quad \text{Eq I-5}$$

Où  $F$  est la constante de Faraday ( $96\,485 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$ ). Le facteur 2 correspond au rapport stœchiométrique entre moles de dihydrogène consommées et moles d'électrons échangées (Eq I-2). Cette tension est égale à 1.23 V si l'eau est entièrement produite sous forme liquide<sup>f</sup>.

Lorsque l'on fait débiter un courant à travers une charge, la tension du système chute. La courbe de polarisation permet aisément d'illustrer et de quantifier ces phénomènes. La figure (Fig. 6) donne la caractéristique courant-tension typique d'une pile à combustible. Bien entendu ces courbes de polarisation dépendent de nombreux paramètres (matériaux utilisés, conditions de fonctionnement, alimentation en air ou oxygène pur).

---

<sup>f</sup> Si l'ensemble de l'énergie chimique pouvait être convertie sous forme de travail électrique, cette tension serait de 1.48 V (avec eau liquide). Cette valeur est utile pour obtenir rapidement le rendement (pertes réversibles et irréversibles) d'une pile à partir de la tension mesurée.

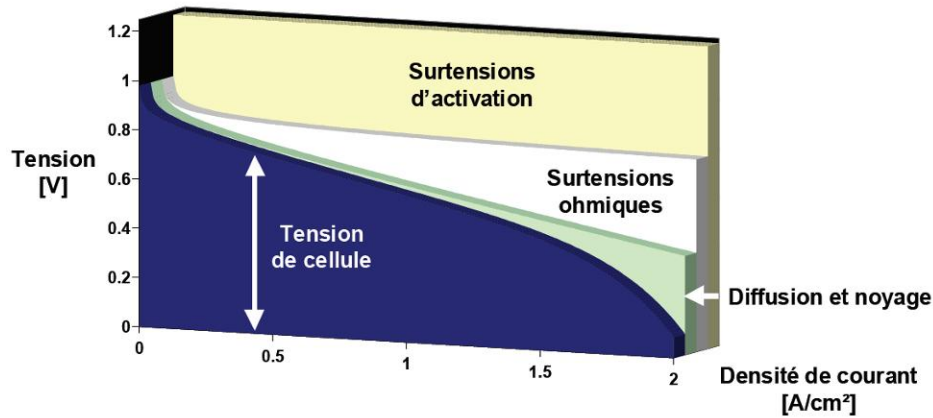


Fig. 6 : Allure générale d'une courbe de polarisation (en bleu) et détails des différentes chutes de tensions [Candusso, 2002].

Dans le paragraphe précédent, nous avons évoqué différents types de pertes irréversibles dégradant le rendement. Elles sont facilement visualisables sur la figure (Fig. 6):

- Pertes par activation. Elles correspondent à l'énergie qu'il faut dépenser pour franchir la barrière énergétique des réactions (Eq I-2) et (Eq I-3). Cette barrière d'activation limite la cinétique de la réaction et donc le courant qu'il est possible de débiter à un niveau de tension donné. Les surtensions d'activation de ces deux demi-réactions sont en réalité beaucoup plus importantes que celles représentées sur la figure (Fig. 6). Mais l'utilisation de catalyseurs tels que le platine permet de réduire grandement ces surtensions.
- Pertes ohmiques. Elles dominent le comportement de la courbe de polarisation sur le milieu de la plage de fonctionnement. Elles sont principalement induites par la résistance interne de la pile au passage des charges électriques.
- Pertes diffusives. La pile est limitée à fort courant par la vitesse de diffusion des espèces réactives vers les sites réactionnels.

Il est par conséquent utile de définir un deuxième rendement prenant en compte les pertes liées aux irréversibilités. Pour des piles ayant leur point de fonctionnement nominal autour de 0.7 V, cela donne par exemple :

$$\eta_{irrev} = \frac{\Delta V}{U_m} = \frac{0.7}{1.23} = 56\% \quad \text{Eq I-6}$$

En combinant pertes réversibles et irréversibles, on obtient alors un rendement de 46 %.

### **Remarque**

Aux pertes de la pile à combustible, il faut encore soustraire les pertes liées à la consommation électrique des auxiliaires du système (compresseurs, humidificateurs, échangeurs de chaleur) et celles liées aux flux de dihydrogène éventuellement non consommés. Le rendement final peut alors s'exprimer de la manière suivante.

$$\eta_{tot} = \eta_{rev} \times \eta_{irrev} \times \eta_{aux} \times \eta_{H_2} \quad \text{Eq I-7}$$

Le rendement total d'un système pile à combustible est au final proche des 40%. Néanmoins pour les systèmes où la chaleur serait valorisée (cogénération), il est possible d'obtenir des rendements proches de 80%.

## ***B - Aspects technologiques***

La partie précédente a présenté les lois thermodynamiques et cinétiques régissant la conversion d'énergie chimique en énergie électrique. La partie qui suit décrit le fonctionnement du système mettant en œuvre les deux demi-réactions d'oxydoréduction présentées précédemment. Pour rappel, seule la technologie PEMFC est considérée dans ce document. De manière simplifiée, nous allons présenter un système pile à combustible en décomposant celui-ci en trois parties :

- La cellule élémentaire où se déroulent les réactions électrochimiques.
- L'empilement (stack) au sein duquel sont intégrées plusieurs cellules afin d'obtenir les niveaux de puissance désirés.
- Les auxiliaires du système comprenant les alimentations en combustible et comburant, la gestion thermique, la gestion électrique et la commande du système.

### **1) La cellule élémentaire**

La structure d'une cellule élémentaire est schématisée sur la figure (Fig. 7). Ce paragraphe décrit les éléments la composant.

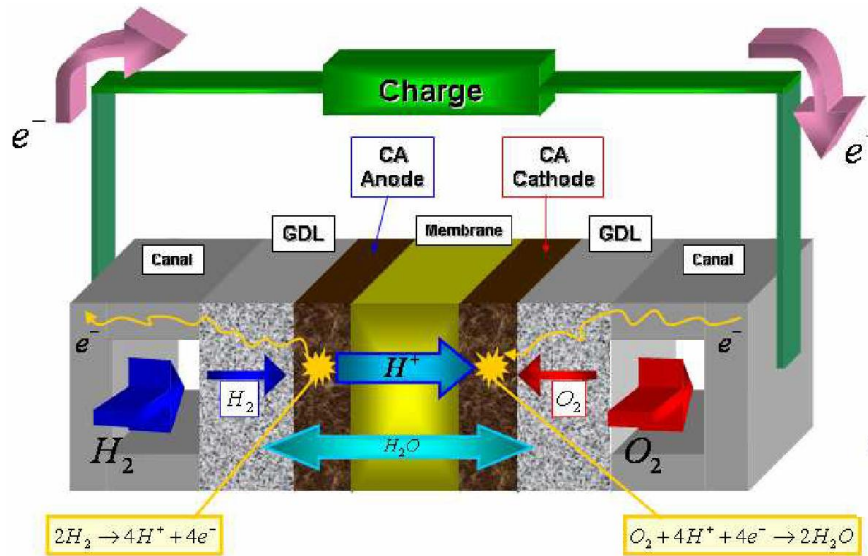


Fig. 7 : Structure et principe de fonctionnement d'une cellule élémentaire [Franco, 2005].  
 Les échelles ne sont pas respectées (quelques  $\mu\text{m}$  pour les électrodes, plusieurs centaines de  $\mu\text{m}$  pour les couches de diffusion, le mm pour les plaques bipolaires).

### La membrane (électrolyte)

Il s'agit d'un polymère perfluoré permettant le passage des protons de l'anode vers la cathode mais pas celui des électrons. Ceux-ci doivent passer par un circuit électrique externe afin d'être en mesure de se recombinaison à la cathode. Afin d'assurer l'étanchéité des deux compartiments (anode et cathode), la membrane doit présenter une très faible perméabilité vis-à-vis des gaz réactifs. Celle-ci laisse néanmoins partiellement passer l'eau par diffusion et par électro-osmose.

### Les électrodes (couches actives)

L'anode et la cathode sont les lieux des demi-réactions décrites par les réactions (Eq I-2) et (Eq I-3) respectivement. Elles sont formées d'un mélange du matériau constituant la membrane, de particules de carbone sur lesquelles sont déposées le catalyseur (platine) et d'un matériau hydrophobe (Téflon) permettant d'évacuer l'eau.

L'ensemble constitué de la membrane, de la cathode et de l'anode sera parfois dénommé AME (Assemblage Membrane Electrodes) dans la suite de ce document.

### **Les couches de diffusion<sup>g</sup>**

Celles-ci permettent d'homogénéiser la distribution des gaz réactifs sur les électrodes et d'évacuer rapidement les produits de la réaction. Elle doit donc posséder d'excellentes propriétés de transport vis-à-vis des gaz réactifs et de l'eau. Elle doit aussi posséder une excellente conductivité électronique afin de permettre le transport des électrons vers les plaques bipolaires. La couche de diffusion est un matériau poreux généralement constitué d'un tissu ou papier de carbone imprégné d'un agent hydrophobe (Téflon).

### **Les plaques bipolaires**

Celles-ci cumulent plusieurs fonctions. Elles permettent d'alimenter continuellement en gaz réactifs toute la surface des couches de diffusion via des canaux gravés ou emboutis dans la plaque. Via ces mêmes canaux, les plaques bipolaires permettent l'évacuation de l'eau produite et des réactifs non consommés. La géométrie des canaux diffère beaucoup selon les fabricants, mais ceux-ci ont en général une forme en serpent. Ces plaques permettent aussi le transfert des électrons vers les cellules voisines ou bien vers le circuit externe pour celles situées aux extrémités de l'empilement.

## **2) Le stack**

Une cellule élémentaire unique ne peut fournir qu'une tension inférieure à 1V. Afin d'atteindre le niveau de puissance et de tension exigé pour une application donnée, plusieurs cellules élémentaires sont généralement mises en série et intégrées au sein d'un empilement couramment appelé stack (Fig. 8). La figure (Fig. 9) schématise dans un plan de coupe la structure d'un stack composé de trois cellules. Nous avons aussi représenté sur ce schéma les plaques terminales. Il s'agit de plaques très conductrices (cuivre) permettant de distribuer et collecter le courant de manière uniforme sur l'ensemble du stack.

---

<sup>g</sup> Aussi appelées GDL pour Gaz Diffusion Layer

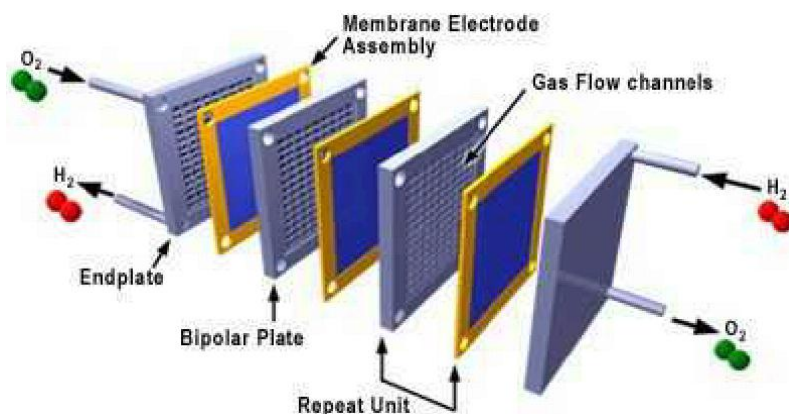


Fig. 8 : Mise en série de plusieurs cellules élémentaires [Exposito, 2004].

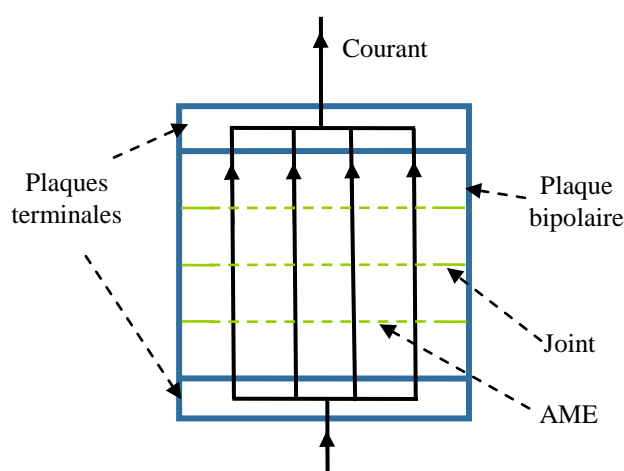


Fig. 9 : Schéma simplifié d'un stack de trois cellules. Par soucis de simplicité, les couches de diffusion ne sont pas représentées.

Les empilements de cellules sous forme de stack offrent une importante compacité et donc une puissance massique et volumique élevée<sup>h</sup>. Néanmoins l'intégration de ces cellules provoque l'apparition de nouveaux phénomènes encore mal maîtrisés. L'évacuation de la chaleur à l'intérieur des stack est évidemment un point essentiel. Mais réussir à distribuer de manière homogène les réactifs tout en maîtrisant le contenu en eau du stack constitue un énorme challenge. La situation idéale serait que les cellules d'un stack fonctionnent de manière homogène, indépendamment des unes des autres et qu'elles aient un comportement similaire à celui qu'elles auraient si elles n'étaient pas intégrées dans un stack. En pratique cela semble être rarement vérifié. Un état de l'art plus complet sur ces problématiques est disponible dans [Miller & Bazylak, 2011].

<sup>h</sup> Par exemple, pour la technologie GENEPAC les valeurs sont de 1.1 kW/kg et 1.5kW/l

Les phénomènes demeurent complexes et les outils théoriques ou expérimentaux sont encore peu nombreux. C'est pourquoi les travaux de cette thèse se sont focalisés sur l'étude des piles à l'échelle du stack. La suite de ce document proposera un modèle électrique spécialement dédié à l'étude du comportement des stacks. De plus, l'outil de diagnostic qui sera présenté par la suite est particulièrement bien dimensionné pour les empilements de grandes dimensions.

### 3) Les auxiliaires

En plus de la pile, les systèmes piles à combustible exigent plusieurs autres sous-ensembles et composants (Fig. 10). Ces différents auxiliaires permettent d'acheminer et d'évacuer les réactifs et produits de la réaction de manière optimale. Ceux-ci peuvent être classés selon les catégories suivantes.

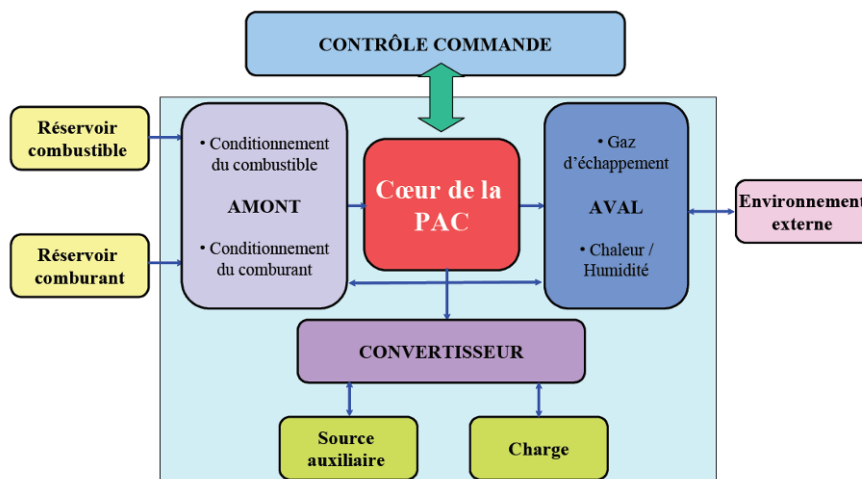


Fig. 10 : Schéma global d'un système pile à combustible [Exposito, 2004].

#### Conditionnement du carburant

Cette catégorie d'auxiliaires comprend le système de stockage de l'hydrogène qui peut être gazeux, liquide ou solide. Elle comprend aussi la régulation du débit et de la pression du flux d'hydrogène à l'anode ainsi que l'évacuation de l'hydrogène non consommé. En raison des problèmes de sécurité liés à l'utilisation de l'hydrogène, les éléments de ce groupe doivent respecter des normes de sécurité spécifiques.

#### Conditionnement de l'air

Ce groupe gère l'alimentation en oxygène de la cathode. Dans certaines technologies, les piles sont directement alimentées avec de l'oxygène pur initialement stocké sous haute

pression. Dans d'autres technologies, la pile est alimentée avec de l'air extérieur. Cette technique nécessite un compresseur et des débits beaucoup plus importants afin de compenser la plus faible concentration en oxygène. Comme avec le groupe hydrogène une régulation en pression est aussi réalisée.

### **Gestion de l'eau**

La gestion de l'eau est le point clé du bon fonctionnement d'un stack. La production d'eau est principalement reliée au courant débité par la pile. L'eau est produite à la cathode mais en raison d'un gradient de concentration, celle-ci diffuse à travers la membrane pour atteindre l'anode. Un flux inverse (électro-osmose) est aussi présent : le courant de protons dans la membrane entraîne avec lui un flux d'eau depuis l'anode vers la cathode. Il est possible de contrôler en partie l'hydratation de la pile via la température du stack, via l'humidification des gaz réactifs en entrée ou si l'application le permet via le courant électrique débité.

### **Gestion thermique**

La réaction (Eq I-1) étant exothermique, un dispositif d'évacuation de la chaleur est indispensable pour des puissances supérieures à 100W. En général un fluide caloporteur est mis en circulation à l'intérieur des plaques bipolaires. Cet échangeur de chaleur doit permettre de maintenir une température constante et homogène dans l'ensemble du stack. La gestion thermique comprend aussi la régulation en température des gaz réactifs en entrée du stack.

### **Gestion électrique**

La pile à combustible délivre une tension et un courant qui dépend de la charge sur laquelle elle est connectée et des conditions de fonctionnement de la pile elle-même. Dans la majorité des applications, un convertisseur (hacheur élévateur) est intercalé afin de garantir une tension stable sur un bus continu.

Beaucoup d'applications nécessitent des temps de réponse rapides de la part du générateur de puissance. La dynamique de la pile est néanmoins limitée par les constantes de temps des auxiliaires, en particulier par celle du compresseur. En pratique on se contente de faire fonctionner la pile au dessous de 1Hz [Davat et al., 2009] et on hybride celle-ci avec d'autres sources telles que les supercapacités [Sailer, 2008] ou les batteries [Liu et al., 2008] afin d'être en mesure de répondre à des consignes variant très rapidement au cours du temps.



**La commande**

L'hybridation de la pile avec d'autres systèmes et la gestion des flux de matières et de chaleur nécessitent des stratégies de commande élaborées. Comme il vient d'être vu, la pile à combustible est un système complexe : de nombreux phénomènes physiques couplés entrent en jeu et font intervenir de nombreuses échelles de temps et d'espace. Des événements discrets (purges de l'hydrogène) ou la présence de retards au niveau des réponses du système (circuit de refroidissement) complique encore la synthèse de la commande. L'obtention de modèles et d'estimateurs d'état robustes est par conséquent une tâche délicate et fait toujours l'objet de recherches.

**C - Conclusion : une technologie multi-échelles et multi-physiques**

La pile à combustible est un système multi-échelles et multi-physiques complexe faisant intervenir de nombreux couplages et de nombreuses échelles de temps (Fig. 11) et d'espace (Fig. 12). La modélisation de ces phénomènes et la conception d'outils de diagnostic permettant d'estimer l'état interne d'une pile est par conséquent une tâche complexe.

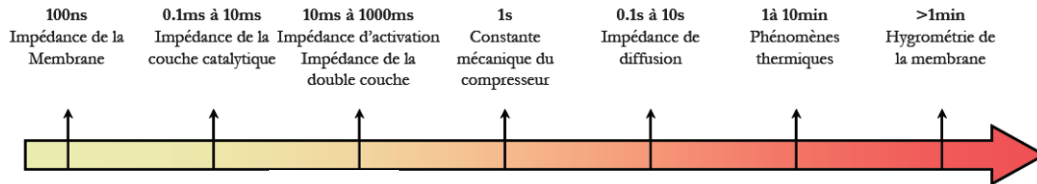


Fig. 11 : Echelles temporelles d'un système pile à combustible [Lefevre, 2004].

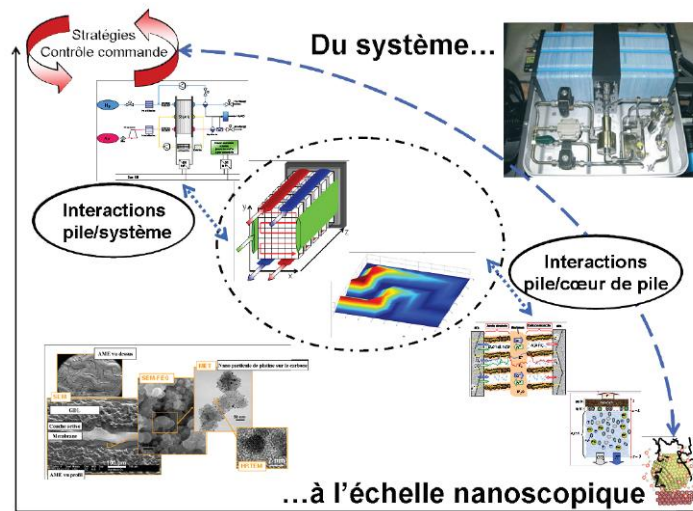


Fig. 12 : Echelles spatiales d'un système pile à combustible [Gerard, 2010].

Les travaux de cette thèse ne concernent pas les aspects dynamiques et nous nous sommes la plupart du temps cantonnés aux phénomènes quasi-stationnaires. L'échelle spatiale à laquelle nous nous sommes intéressés est celle du stack. Cette échelle nous paraît judicieuse vis-à-vis du cahier des charges demandé pour l'outil de diagnostic. Celui-ci doit en effet être non invasif. Par conséquent, il sera difficile d'atteindre des résolutions spatiales élevées et les phénomènes microscopiques devront être moyennés. De plus l'outil a pour vocation d'être utilisé sur des piles industrielles. Mis à part les applications portables, toutes les autres applications utilisent des empilements de grandes dimensions dont il est encore nécessaire de mieux comprendre le comportement. Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue que les couplages entre les différentes échelles sont omniprésents. La prise en compte des interactions avec le cœur de pile et les auxiliaires demeure essentielle.

### **III - Défaillances d'une pile à combustible**

---

De nombreux phénomènes viennent dégrader les performances d'une pile. Outre la perte d'efficacité, ces défaillances peuvent mener à un vieillissement prématuré du cœur de pile ou à une mise à l'arrêt temporaire ou définitive du système. Il est donc indispensable de mieux comprendre et connaître ces mécanismes de dysfonctionnement. Un état de l'art est disponible dans [Fouquet, 2006] et [Yousfi-Steiner et al., 2009]. La section qui suit se propose d'en dresser un bref résumé. Ces phénomènes ont été classés de manière quelque peu arbitraire en deux catégories : les défaillances réversibles et irréversibles.

#### ***A - Défaillances réversibles***

Les défaillances réversibles concernent les conditions de fonctionnement non optimales affectant les performances de la pile et pouvant amener à un arrêt temporaire du système. Bien entendu, ces défaillances peuvent aussi mener à des dégradations irréversibles, d'où l'importance de les détecter et de les corriger rapidement. Ces défaillances comprennent :

- Noyage de la cellule : si les débits de gaz ne sont pas assez importants, ou si de très fortes densités de courants sont localisées à un même endroit, l'eau produite sera alors difficilement évacuée. Dans un premier temps, de l'eau liquide s'accumulera dans les couches de diffusion, compliquant l'accès des réactifs aux électrodes. Les pertes diffusives s'en trouveront accrues. Dans un second temps, ce phénomène peut amener à la création d'un bouchon dans les canaux bloquant la distribution des réactifs dans des secteurs entiers de la cellule.
- Assèchement : la membrane doit être en permanence correctement hydratée afin d'avoir une faible résistance vis-à-vis du passage des protons. Si cette condition n'est pas réalisée, les pertes ohmiques augmentent et les performances de la pile s'en trouvent diminuées. Une température localement trop élevée peut être une source d'assèchement car les gaz emportent avec eux une quantité d'eau plus élevée. Le mécanisme de déshydratation de la membrane demeure néanmoins complexe et possède des dynamiques plus lentes que celles concernant le noyage des zones de diffusion ou la création de bouchons [Fouquet, 2006].

- Appauvrissement en réactifs : la distribution homogène des réactifs sur l'ensemble de la surface des électrodes est délicate à obtenir. Si certaines zones viennent à manquer de réactifs, la tension de la cellule peut alors chuter à 0V voire s'inverser [Knights et al., 2004]. L'appauvrissement en réactifs peut être du aux phénomènes de noyage évoqués précédemment, à une inhomogénéité des densités de courant, ou à l'utilisation d'une faible stœchiométrie visant originellement à maximiser l'utilisation des réactifs et le rendement du système.
- Dans le cas d'un fonctionnement en anode fermé, l'azote de l'air peut diffuser à travers la membrane, se stratifier à l'anode et restreindre l'accès des réactifs aux sites réactionnels [Fouquet, 2006].
- Empoisonnement de l'assemblage membrane électrode : le platine présent dans les couches actives a tendance à absorber de nombreux polluants atmosphériques ( $H_2S$ ,  $CO$ ,  $SO_2$ ,  $NO_x$ ). La surface active du catalyseur s'en trouve diminué, ce qui dégrade la cinétique des réactions (Eq I-2 - Eq I-3). Les électrodes peuvent éventuellement être dépolluées en appliquant des potentiels suffisamment élevés pour consommer ces polluants [Mohtadi et al., 2004].

### ***B - Défaillances irréversibles***

Certaines dégradations irréversibles sont inéluctables et correspondent au vieillissement normal d'une pile. Mais les phénomènes évoqués précédemment, s'ils sont maintenus trop longtemps, peuvent aussi accélérer ce processus ou mener à une dégradation fatale pour la pile. Parmi ces dégradations on trouve :

- Destruction du catalyseur. Au cours du temps le platine a naturellement tendance à s'agglomérer ou à se dissoudre pour se recristalliser dans la membrane. La surface de l'électrode a donc tendance à diminuer. Si la distribution de courant n'est pas suffisamment homogène, certaines régions seront plus sollicitées que d'autres, entraînant un vieillissement prématuré de celles-ci.
- Destruction du support du catalyseur : le potentiel d'oxydation du support en carbone est très proche du potentiel de réduction de l'oxygène. Des excursions en potentiel trop élevées peuvent venir consommer ce carbone. Le platine devient alors inutilisable, ce qui entraîne une perte sévère des performances de la pile.

- Dégradation des propriétés mécaniques de la membrane : des assèchements ou noyages répétés de la membrane provoquent des contraintes mécaniques fragilisant les propriétés chimiques et mécaniques de celle-ci. Des températures anormalement élevées viennent aussi aggraver ces détériorations. Les conséquences sont une baisse de la conductivité mais surtout un risque accru de percement de la membrane rendant celle-ci inutilisable.

### ***C - Moyens de rétroactions***

D'après ce qui précède, la gestion de l'eau joue un rôle primordial dans le bon fonctionnement des piles à combustible. Plusieurs paramètres sont accessibles pour contrôler ces flux d'eau à l'intérieur d'un stack :

- Débit des réactifs : l'augmentation du débit permet de supprimer les bouchons d'eau et de manière plus générale augmente l'évacuation de l'eau. Un fort débit permet aussi d'éviter l'appauvrissement des électrodes en réactifs. Néanmoins, un trop fort débit peut aussi assécher la pile. De plus, des débits trop importants augmentent la quantité de réactifs non consommés, ce qui diminue le rendement du système.
- Hygrométrie des gaz réactifs : il est possible de contrôler la quantité d'eau contenue dans les gaz en entrée et ainsi d'humidifier ou d'assécher la pile.
- Température : il est aussi possible via le circuit de refroidissement de réguler la température du stack. Une forte température augmente la quantité d'eau que les gaz peuvent absorber et emporter avec eux.
- Courant total : la quantité d'eau produite dépend directement du courant débité par la pile. Si l'application le permet, il est possible d'assécher ou de réhydrater la pile en modifiant le courant.
- Courants locaux : des travaux de recherche ont récemment été menés sur des structures d'électronique de puissance permettant de contrôler un stack par groupe de cellules [De Bernardinis et al., 2012]. Si ces structures venaient à voir le jour dans un contexte industriel, elles permettraient de diminuer ou d'augmenter le courant dans les zones du stack uniquement impactées par un noyage ou un assèchement.

### ***D - Bilan***

En raison des défaillances citées plus haut, les durées de vie des systèmes piles à combustible ne sont pas encore satisfaisantes. L'objectif donné par le DOE (Département Américain de l'Energie) est d'obtenir une durée de vie de 7000 heures pour les applications transports et 50 000 heures pour les applications stationnaires à l'horizon 2015. Leurs coûts sont aussi trop élevés. L'objectif en la matière est d'atteindre le prix de 40 \$ par kW. Des efforts doivent aussi être réalisés pour limiter la quantité de catalyseur (platine) utilisé pour leur fabrication. Enfin, leurs tolérances aux polluants atmosphériques doivent encore être accrues.

Ces améliorations nécessitent d'une part de développer de nouveaux matériaux plus fiables, plus performants et moins chers, mais aussi de mieux maîtriser le fonctionnement et les performances des systèmes piles à combustible. Ce deuxième axe de recherche passe nécessairement par le développement de nouveaux outils de diagnostics. De tels outils permettent en effet d'améliorer la compréhension des phénomènes physico-chimiques se déroulant au sein des piles à combustible. Ils peuvent ainsi fournir une aide à la conception et à l'amélioration de ces systèmes. Nous avons aussi vu qu'il existait des moyens de rétroactions permettant de corriger certaines défaillances. L'objectif pour les nouveaux outils de diagnostic est donc de fournir des estimateurs d'état robustes sur l'état de santé d'une pile en fonctionnement afin de détecter et de corriger de manière rapide et pertinente les défaillances dégradant ses performances et sa durée de vie. La partie suivante présente les outils de diagnostic déjà existants puis celui que nous avons choisi de développer durant ces travaux de thèse.

## **IV - Le diagnostic des piles à combustible**

---

La section précédente a montré l'intérêt d'un outil de diagnostic permettant de mieux comprendre les mécanismes de défaillances et éventuellement de les corriger. Des technologies de diagnostic sont déjà disponibles et la première partie de cette section en dresse un bref état de l'art. La deuxième partie se focalise sur la méthode de diagnostic que nous avons développée durant cette thèse, à savoir le diagnostic par mesure du champ magnétique externe.

### ***A - Etat de l'art des techniques de diagnostic***

#### **1) Techniques non invasives**

Les mesures de tensions de cellules sont les plus simples à mettre en œuvre. Elles permettent de détecter les chutes de tensions indiquant les défaillances nécessitant la mise en arrêt immédiate du stack. Afin de détecter plus rapidement ces défaillances, et si possible de discriminer les états de noyage et d'assèchement, de nombreuses recherches ont portées sur la façon d'extraire le plus d'informations possibles de ces mesures. Nous pouvons par exemple citer les travaux suivants :

- Evolution de la tension : les phénomènes de noyage et d'assèchements possédant souvent des dynamiques différentes, les auteurs de l'article [Hissel et al., 2004] proposent un outil de diagnostic basé sur l'observation de la dérivée temporelle de l'écart entre tension mesurée et tension du mode de fonctionnement sain.
- Répartition des tensions sur le stack : des travaux ont mis en évidence que les tensions des cellules aux extrémités du stack avaient un comportement différent selon la situation de noyage ou d'assèchements. Ces variations semblent être toujours détectables lorsque les cellules sont instrumentées par paquet de dix [Fouquet, 2006]. Ce type de mesures a été mis à profit pour du diagnostic en ligne [Frappé et al., 2011].
- Mesure du bruit électrochimique : le bruit électrochimique comprend les fluctuations aléatoires de tension ou de courant générées par la pile. Des travaux ont

montré que leurs amplitudes ou contenus fréquentiels semblait dépendre de l'hydratation de la pile [Legros et al., 2011].

Les techniques précédentes sont passives. Des méthodes actives utilisant des signaux d'excitation ont aussi été développées :

- Spectroscopie d'impédance : il s'agit du moyen de caractérisation le plus répandu. Il consiste à imposer un signal sinusoïdal en courant ou tension autour d'un point de fonctionnement et à observer la réponse en tension ou en courant. Des travaux ont montré l'intérêt de cette technique pour une application embarquée [Fouquet et al., 2006].
- Interruption du courant : l'article [Rubio et al., 2007] a montré que la variation de tension induite par un saut de courant était particulièrement sensible au contenu hydrique d'une pile à combustible.
- Résistance haute fréquences : la référence (Hinaje2009) propose de mesurer la résistance de la membrane à l'aide des ondulations hautes fréquences du convertisseur DC-DC pour détecter les situations d'assèchement.
- Excitation en température : la thèse [Fouquet, 2006] a montré que la réponse en tension à une variation de température dépendait des conditions d'hydratation de la pile.

Outre les méthodes consistant à mesurer les tensions ou courants, des techniques basées sur des signaux de natures physiques différentes ont aussi été développées. Citons par exemple le suivi des pertes de charges [Barbir et al., 2005], l'écoute du bruit acoustique [Legros et al., 2010], ou l'imagerie par neutrons [Park et al., 2008].

La plupart de ces techniques ont l'avantage de nécessiter une instrumentation "relativement" légère. Les méthodes passives utilisent au final le stack comme un capteur et peuvent ainsi être facilement intégrées à l'application finale pour du diagnostic "en ligne". Les techniques nécessitant des excitations en courant ou tension peuvent pour la plupart être réalisées à l'aide du convertisseur connecté à la pile. Mais toutes les applications n'autorisent pas l'utilisation de sauts de courant ou le placement de la pile dans un mode de fonctionnement stationnaire (nécessaire pour la spectroscopie).

Le principal défaut des techniques proposées ci-dessus est qu'elles donnent une information très moyennée sur l'état interne de la pile. Elles permettent donc difficilement de



localiser le défaut à l'intérieur de celle-ci. Au final, les grandeurs fournies par ces procédés fournissent peu d'informations contribuant à l'amélioration des connaissances sur les phénomènes locaux (interactions, couplages) intervenant au sein de la pile.

## **2) Techniques invasives**

Au-delà de ces techniques non invasives, de très nombreuses techniques expérimentales in situ ont été développées. Le domaine d'étude est vaste et nous ne présentons ici que des outils se focalisant sur la mesure directe de la densité de courant à l'intérieur d'une pile. Dans cette famille d'outils nous pouvons par exemple citer les références [Stumper et al., 1998], [Freunberger et al., 2006], [Schulze et al., 2007] et [Maranzana et al., 2010].

La figure (Fig. 13) présente un exemple d'un tel système. Il s'agit d'une plaque invasive de mesure de densité de courant s'insérant entre deux plaques bipolaires d'un stack [S++]. Celle-ci permet d'obtenir une cartographie détaillée de la densité de courant dans une section du stack. Il s'agit de l'outil de référence qui sera utilisé plus loin dans ce mémoire pour évaluer et comparer les performances de notre propre outil de diagnostic. Notons néanmoins que les mesures obtenues avec un tel système sont particulièrement sensibles aux variations de température. De plus, cette plaque invasive induit des contraintes mécaniques sur les éléments du stack. Le serrage de ces différents éléments n'est ainsi plus optimal.



*Fig. 13 : Plaque de mesure invasive de densité de courant [S++].*

Parmi les très nombreuses techniques de mesures internes des densités de courant, notons aussi celle basée sur la mesure directe du champ magnétique interne [Candusso et al., 2004]. Bien que cette technique puisse de prime abord présenter d'importantes ressemblances avec notre méthode (cf. ci-dessous), celle-ci n'en demeure pas moins fondamentalement différente. Alors que nous nous contentons de mesurer les champs magnétiques à l'extérieur de la pile, les auteurs de cet article réalisent les mesures de champs à l'intérieur même de la

pile (Fig. 14). Ils utilisent ensuite la relation de Maxwell-Ampère pour déterminer les courants à partir du champ magnétique.

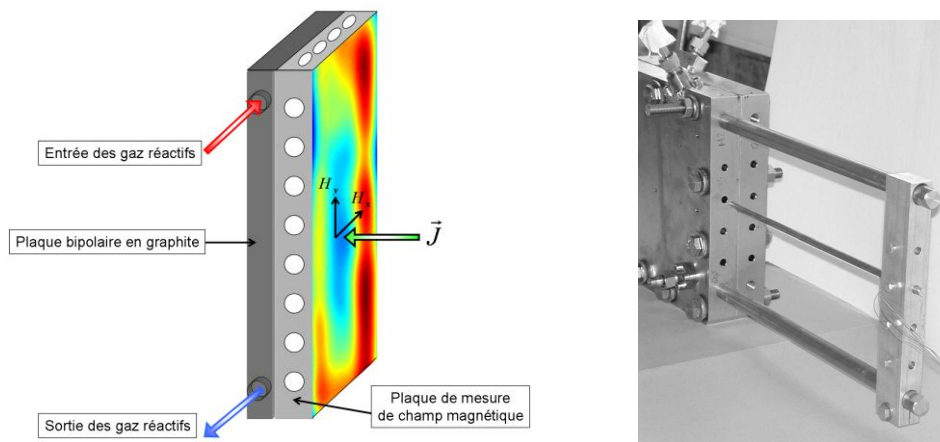


Fig. 14 : Une plaque percée est insérée entre deux cellules d'une pile à combustible. Les conduits permettent de déplacer des capteurs de champs magnétiques à l'intérieur de cette plaque. Le dégradé de couleur correspond à la densité de courant mesurée [Candusso et al., 2004], [Gerard, 2010].

Bien que permettant d'obtenir des informations locales sur l'état de fonctionnement interne de la pile, toutes ces techniques in situ présentent l'inconvénient d'être invasives et de nécessiter une instrumentation relativement complexe (perçement du stack par exemple). Les capteurs placés à l'intérieur de la pile ont souvent une sensibilité importante vis-à-vis de la température qu'il est nécessaire de compenser à l'aide de techniques complexifiant encore plus le système. De plus, l'influence de ces mesures sur le comportement du stack est en général mal maîtrisée. Bien que ces techniques invasives possèdent de nombreux avantages (elles donnent une information locale sur le fonctionnement de la pile), ces précédentes raisons nous ont poussés à développer un nouveau système de diagnostic non invasif.

## ***B - Le diagnostic par mesure du champ magnétique externe***

### **1) Principe, justification, et intérêt**

Un stack en fonctionnement est traversé par de très forts courants électriques générant d'importants champs magnétiques. La relation physique donnant le courant à partir du champ magnétique étant relativement bien connue (loi de Biot et Savart), il doit donc être possible à partir des mesures magnétiques de remonter à la densité de courant l'ayant générée (Fig. 15).

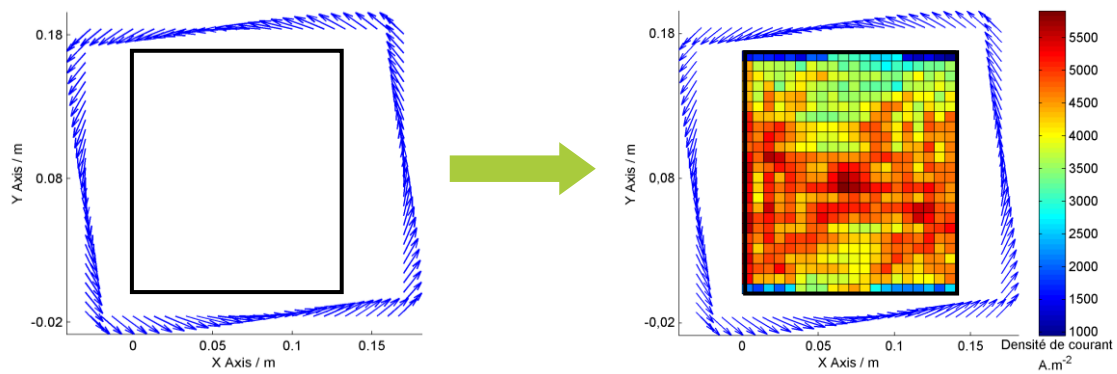


Fig. 15 : Mesure de la signature magnétique externe (gauche) et détermination de la densité de courant interne l'ayant générée (droite).

Comme cela a déjà été évoqué précédemment, les liens entre état interne de la pile et densité de courant sont multiples. De nombreux facteurs vont en effet venir modifier la distribution de courant et rendre celle-ci hétérogène :

- Assèchement local de la membrane.
- Engorgement en eau des couches de diffusion et bouchons dans les canaux.
- Distribution non uniforme des réactifs.
- Température hétérogène favorisant la réaction dans les régions les plus chaudes.
- Stratification de l'azote à l'anode.

La distribution de courant est donc bien un paramètre représentatif des conditions de fonctionnement du stack. Il devrait donc être possible à partir de la connaissance de celle-ci de remonter à l'état d'hydratation du stack. Par conséquent, la signature magnétique d'une pile en fonctionnement est directement corrélée à l'état interne de celle-ci. Par rapports aux autres outils de diagnostics évoqués plus haut, cette méthode cumule aussi les intérêts suivants :

- Le champ magnétique étant mesuré à l'extérieur de la pile, le système est donc non invasif. L'instrumentation en est ainsi facilitée.
- En plus d'être non invasif, le système est passif. Le diagnostic ne nécessite pas l'utilisation de signaux d'excitation comme cela est le cas avec certaines des techniques de diagnostic évoquées précédemment. Ainsi le système ne perturbe aucunement le fonctionnement de la pile.

- Le champ magnétique externe est corrélé à l'ensemble des courants circulant dans le stack. Il est donc possible d'obtenir une cartographie de l'intérieur de la pile. L'information obtenue est alors dite locale, par opposition aux méthodes globales donnant des résultats moyennés sur l'ensemble du stack.
- Il est a priori envisageable d'utiliser un nombre de capteurs relativement restreint. De plus, certaines technologies de capteurs magnétiques offrent aujourd'hui des possibilités de miniaturisation importante [Joisten et al., 2005]. Le système de diagnostic ainsi conçu pourrait se révéler compact et peu onéreux. Si notre étude confirme ces hypothèses, cet outil pourrait être intégré à l'application finale et aider à la détection et à la correction des défaillances en temps réels. Dans une moindre mesure, cet outil pourrait être utilisé "hors ligne" pour diagnostiquer une pile ayant montré des signes de faiblesse. Dans le cas où ces objectifs se révéleraient être trop ambitieux, l'outil développé ici demeurerait néanmoins un puissant moyen de diagnostic pour les laboratoires et faciliterait l'avancée des connaissances sur les stacks de piles à combustible.

## 2) Etat de l'art

L'idée consistant à mesurer des champs magnétiques externes à des fins de diagnostic a déjà été mise en œuvre dans des applications autres que les piles à combustible. Par exemple, l'imagerie médicale par champ magnétique fait l'objet d'intenses recherches. Ainsi, le principe de la magnétoencéphalographie (MEG) possède de nombreuses similitudes avec celui que l'on cherche à appliquer sur les piles [Hamalainen et al., 1993]. Plus récemment, la tomographie par impédance électrique (EIT) a été couplée avec la mesure de champs magnétiques afin de lever certaines indéterminations relatives à cette méthode. Parmi ces techniques on trouve la MD-EIT<sup>i</sup> [Ireland et al., 2004] ou la MR-EIT<sup>j</sup> [Birgul et al., 2003].

Outre les applications médicales, la détection par champ magnétique a été appliquée à d'autres domaines, tels que la localisation des faisceaux dans les accélérateurs de particules [Brandstatter, 2002] ou la reconstruction des densités de courants dans les matériaux supraconducteurs [Feldmann, 2004].

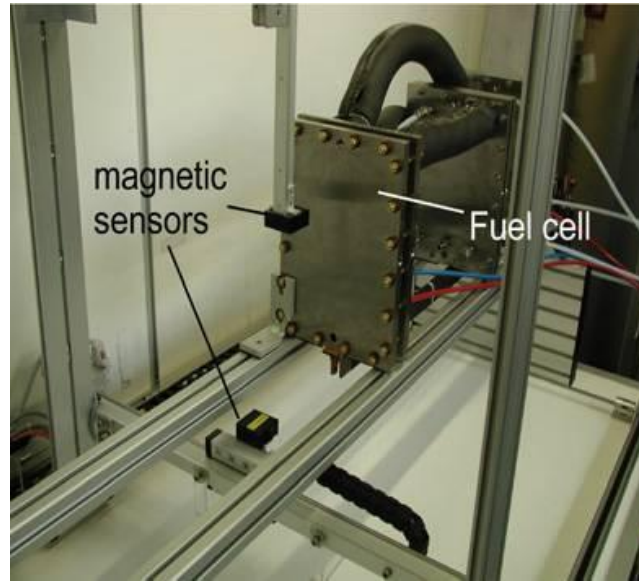
---

<sup>i</sup> Magnetic Detection – Electrical Impedance Tomography

<sup>j</sup> Magnetic Resonance – Electrical Impedance Tomography

Au niveau des piles à combustible, la mesure des champs magnétiques externes a jusqu'à présent été mise en œuvre par quatre équipes de chercheurs dans le monde :

- Une première équipe s'est intéressée au sujet au début des années 2000. Une petite dizaine d'articles ont été publiés et une synthèse est disponible dans la référence [Hauer et al., 2005b]. Leurs recherches semblent être les plus abouties à l'heure actuelle et des résultats expérimentaux sont disponibles. Leur système expérimental consiste à scanner le champ magnétique à l'aide d'un robot déplaçant deux magnétomètres autour de la pile (Fig. 16). Le scan de la signature magnétique dure environ quinze minutes. Leurs travaux ont mené à la création d'une entreprise (xcellvision) et au dépôt d'un brevet [Hauer, 2004]. Le brevet comme les recherches ont été financés en partie par le constructeur automobile Volkswagen.
- Une deuxième équipe a publié sur le sujet à partir de 2009. Aucun dispositif expérimental ne semble avoir été développé jusqu'à présent. Leurs travaux semblent s'être focalisés sur la modélisation [Lustfeld et al., 2009b] et la problématique de l'optimisation du placement des capteurs [Lustfeld et al., 2011].
- Une équipe japonaise a aussi commencé à publier sur le sujet à partir de 2009. Les expériences semblent être limitées à une mono-cellule [Katou et al., 2012].
- Le LEPMI et le G2Elab ont eu l'occasion de montrer leur intérêt pour ce sujet et ont réalisé des travaux préliminaires en 2005 [Sailler et al., 2007] et 2006 [Bourgeois, 2006].



*Fig. 16 : Prototype expérimental de la première équipe allemande [Hauer et al., 2005b]. Deux capteurs magnétiques tri-axes sont déplacés autour de la pile à l'aide d'un robot afin de caractériser la signature magnétique avec plusieurs centaines de mesures.*

### ***C - Conclusion sur les techniques de diagnostic***

Les méthodes de diagnostic pour piles à combustible sont extrêmement variées et font toujours l'objet d'intenses recherches. Parmi toutes les techniques déjà existantes, le diagnostic par champ magnétique nous semble être une voie de recherche prometteuse. Cette méthode cumule en effet les avantages des outils invasifs et non invasifs : elle fournit une information locale sur l'état interne de la pile sans perturber le fonctionnement de celle-ci. Ce mémoire se focalise donc sur cette technique tout en se démarquant des approches similaires proposées par le passé. En effet, l'objectif de notre approche est de rendre notre outil de diagnostic compatible avec un environnement industriel (coût, encombrement, vitesse, robustesse). Pour réaliser cela, nous proposons dans ce mémoire des solutions innovantes consistant à réduire le nombre de mesures, à augmenter la vitesse d'acquisition, et à simplifier l'instrumentation du système métrologique.

Pour atteindre ces objectifs, d'importants travaux de modélisation ont d'abord été nécessaires. Le deuxième chapitre présente ces travaux et les modèles que nous avons développés afin de prédire la réponse magnétique de la pile pour certains défauts de fonctionnement. Une fois ces modèles directs développés, le troisième chapitre présente la façon dont nous les avons inversés. A partir de tous ces développements, il sera montré comment il est possible d'accélérer l'acquisition de la signature magnétique tout en réduisant

le nombre de mesures. Enfin, le quatrième chapitre présentera les résultats expérimentaux qui ont permis de valider cette nouvelle approche.

## **Chapitre II : Modèles directs de stack**





Ce chapitre présente les modèles directs développés dans le cadre de ces travaux (Fig. 17). Comme expliqué dans l'introduction, ces modèles directs faciliteront dans un second temps la création des algorithmes d'inversions. Les modèles directs présentés dans ce chapitre sont au nombre de deux :

- Le modèle électrocinétique : celui-ci permet de calculer les distributions de courants et de potentiels à partir de distributions de paramètres caractérisant le stack (conductivités, forces électromotrices, conditions aux limites). Il est utilisé pour modéliser l'effet de certaines défaillances et observer leurs effets sur la répartition du courant. En plus de son intérêt pour le diagnostic, ce modèle permet d'étudier les interactions électriques intervenant entre les cellules d'un même stack. Des phénomènes comme les courants inverses ou des plaques bipolaires non équipotentielles sont observés.
- Le modèle magnétique : celui-ci permet de calculer le champ magnétique généré par une distribution de courant, en général issue du précédent modèle. Les hypothèses et équations utilisées pour le construire sont présentées. C'est le modèle qui sera inversé dans le chapitre suivant. Il est néanmoins utilisé dès ce chapitre pour mettre en évidence les principales contraintes pesant sur la conception d'un outil de diagnostic basé sur des mesures de champs magnétiques externes.

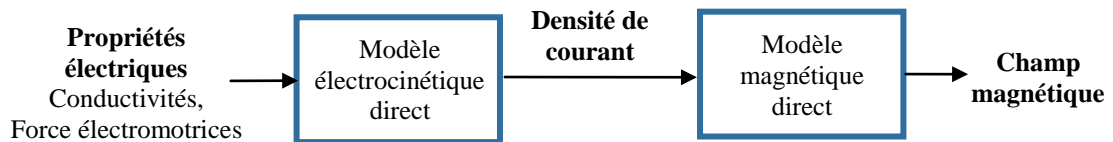


Fig. 17 : Modèles directs présentés dans ce chapitre.

## I - Le modèle électrocinétique

---

Un premier modèle électrique de pile à combustible est présenté dans cette section. Celui-ci se démarque des modèles déjà existant car il permet de modéliser une pile à l'échelle d'un stack de dimension industrielle. Ce choix a été fait au détriment de la modélisation des aspects microscopiques. Néanmoins, ces phénomènes seraient de toute manière très difficilement observables par le système de diagnostic. La compacité et la vitesse de calcul ont donc été privilégiées au détriment d'une résolution spatiale élevée. Les phénomènes se déroulant dans les cœurs de pile sont moyennés sur l'épaisseur de l'AME mais distribués sur la surface de la cellule. Cela permet d'utiliser des maillages plus légers et de modéliser des stacks possédant un nombre très élevé de cellules.

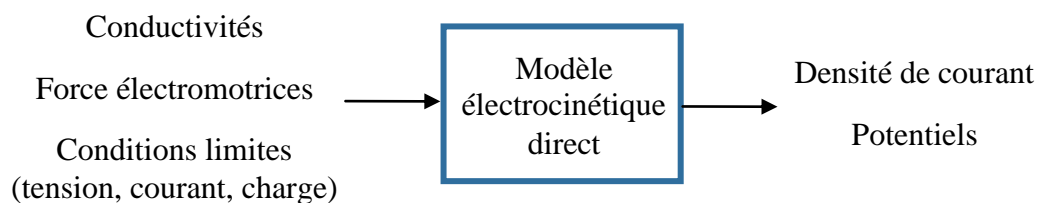


Fig. 18 : Entrées et sorties détaillées du modèle électrocinétique direct.

Ce modèle permet de calculer des distributions de courant et de potentiel 3D à partir d'un certain nombre de paramètres tels que les conductivités des différents éléments du cœur de pile et les forces électromotrices à l'intérieur du stack. En faisant varier ces paramètres, il est possible de simuler des défauts et d'observer leurs impacts sur les courants et potentiels. Ces grandeurs sont intéressantes car elles peuvent par exemple être estimées via des mesures de potentiels à la surface de la pile ou via des mesures de champs magnétiques externes.

Outre l'intérêt de ce modèle pour le diagnostic, celui-ci permet aussi d'étudier certains phénomènes physiques se produisant à l'intérieur d'un stack (couplages électriques entre cellules, plaques bipolaires non équipotentielles, boucles de courant).

La première partie de cette section présente un état de l'art des modèles de stack déjà existants. Dans un second temps, les équations utilisées sont présentées. Ensuite, notre modèle est appliqué à un exemple représentatif d'un stack standard en fonctionnement sain. Enfin la quatrième partie propose une modélisation de quelques défaillances typiques pouvant survenir dans un stack.

## ***A - Etat de l'art***

Il existe un nombre très important de modèles de piles à combustible. Néanmoins la plupart d'entre eux ne modélisent qu'une unique cellule, et ce indépendamment des éléments qui l'entourent. Or dans la totalité des applications industrielles, les cellules sont intégrées au sein d'un stack et interagissent probablement entre elles. Jusqu'à ce jour, bien que beaucoup de travail ait été consacré à la modélisation d'une cellule élémentaire, peu d'attention a été accordée dans la littérature au comportement d'un stack entier. La partie qui suit se propose de faire une rapide synthèse des rares modèles de stack déjà existant.

Afin d'étudier les interactions fluidiques, l'article [Karimi et al., 2005] propose une approche basée sur les réseaux hydrauliques. De leur côté, Burt et al ont développé un pseudo modèle 2D basé sur la méthode des Volumes Finis [Burt et al., 2004]. Il existe également des modèles utilisant partiellement l'approche système [Lee & Lalk, 1998]. Gérard et al proposent quant à eux un modèle multiphysique de stack avec un système complexe de discrétisation 3D [M. Gerard, 2008], [Gerard et al., 2010]. Bien que certains de ces modèles mettent en évidence des couplages entre cellules via la fluide ou la thermique, aucun d'entre eux ne prend en compte les phénomènes électriques dans leur ensemble. Les plaques bipolaires ne sont pas modélisées ou sont considérées comme équipotentielles. Ces approches rendent impossible l'étude des interactions électriques qui peuvent survenir entre les cellules d'un même stack.

Il existe néanmoins des modèles orientés vers l'étude des phénomènes électriques, tel celui qui est proposé dans l'article [Hirschfeld et al., 2010]. Les auteurs ont développé un modèle 3D électrique de stack PEMFC utilisant la méthode des Volumes Finis et dont la formulation est détaillée dans la référence [Lustfeld et al., 2009b]. Cette approche est très utile pour observer les effets de défauts résistifs à l'intérieur d'une pile. Néanmoins, ils ne semblent pas tenir compte du saut de potentiel qui se produit dans les AME. Ce modèle est donc incapable de calculer la véritable distribution de potentiel d'un stack ainsi que d'évaluer les phénomènes associés à une répartition inhomogène des forces électromotrices. Pour finir, Berg et al ont développé un modèle 1+1D électrique et fluide en utilisant leur propre approche numérique [Berg et al., 2006], [Chang et al., 2007]. Actuellement, il s'agit d'un des modèles de stack le plus avancé. Néanmoins, leur méthode numérique s'appuie sur un mélange particulier d'équations aux dérivées partielles, de lois des nœuds et de lois des mailles. Cela rend ce modèle délicat à reproduire et difficile à étendre en 3D.

Le modèle proposé ici est 3D et ne prend en compte que les phénomènes électriques. Les phénomènes macroscopiques sont mis en exergue au dépend des processus électrochimiques microscopiques. Les contributions de l'anode, de la cathode et de la membrane ne sont pas distinguées. Tous les phénomènes physiques qui ont lieu dans ces différentes épaisseurs sont approximés, moyennés et représentés par une seule région. Par contre notre approche prend en compte la distribution des grandeurs électriques sur la surface de l'AME. Cette technique permet ainsi l'étude de stack de grandes dimensions. De plus les plaques bipolaires ne sont plus considérées comme équipotentielles, ce qui permet d'étudier les interactions électriques entre cellules.

L'aspect le plus innovant de ce modèle est la prise en compte du saut de potentiel se produisant dans les AME à l'aide d'un terme source particulier dans l'équation de conduction. Ce terme source peut être discrétisé, intégré et approximé aussi facilement que n'importe quel autre terme de l'équation de conduction. Cette approche permet d'obtenir une distribution de potentiel physiquement plus réaliste par rapport à ce qui est proposé par Hirschfeld et al.

Enfin l'équation de conduction est résolue à l'aide de la méthode des Volumes Finis [Murthy, 2002]. Cette technique numérique très répandue est pertinente car elle admet une certaine modularité dans la définition du problème (géométrie, maillage et physique). Elle permet aussi un couplage relativement aisé avec d'autres modèles ou d'autres physiques. Les Volumes Finis facilitent aussi la prise en compte des discontinuités de potentiel au sein d'un stack. De plus cette méthode impose de manière très forte la divergence nulle de la densité de courant. Cela permettra dans un second temps d'introduire dans le modèle magnétique des densités de courant physiquement réalistes.

Afin de faciliter le couplage de ce modèle avec notre outil de diagnostic, nous avons développé notre propre bibliothèque de fonctions sous Matlab. Celle-ci permet de résoudre des problèmes impliquant des équations de conduction à l'aide de la méthode des Volumes Finis.

## ***B - Formulations***

A l'intérieur d'une pile à combustible, les charges électriques sont mises en mouvement grâce à des processus électrochimiques complexes qui impliquent de nombreux transferts de masses et de charges. La modélisation 3D d'une seule cellule nécessite en général la résolution de nombreuses équations aux dérivées partielles couplées. L'objectif ici est de

modéliser des piles de dimensions industrielles et d'intégrer éventuellement celui-ci dans notre outil de diagnostic. Les temps de calculs, la place mémoire et les problèmes de convergence rendent donc le couplage de toutes ces physiques inenvisageable dans notre application.

Cette section décrit comment une seule équation aux dérivées partielles peut être choisie afin de calculer la distribution 3D macroscopique des courants et potentiels dans la totalité d'un stack. Ce modèle permet d'étudier le comportement électrique de très grands stacks avec des maillages raisonnables. Les temps de calcul sont ainsi très courts et le nombre de degrés de liberté est peu élevé.

### 1) L'équation de conduction à l'état stationnaire

Le comportement électrique d'une pile est régi par les équations de Maxwell. Ici, seul le régime stationnaire est considéré. Généralement, l'équation de conservation de la charge et la loi d'Ohm locale sont utilisées en supposant que le champ électrique dérive d'un potentiel :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0 \\ \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E} \\ \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} V \end{aligned} \quad \text{Eq II-1}$$

Où  $\mathbf{j}$  est la densité de courant,  $\mathbf{E}$  le champ électrique,  $V$  le potentiel et  $\sigma$  la conductivité électrique pouvant varier selon la région de la pile considérée. La combinaison de ces trois équations conduit à l'équation bien connue de l'électrocinétique :

$$\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} V = 0 \quad \text{Eq II-2}$$

A cette équation aux dérivées partielles, il est nécessaire d'ajouter des conditions aux limites. Plusieurs choix sont possibles :

$$\begin{aligned} V &= V_s \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} &= j_s \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} &= h(V - V_s) \end{aligned} \quad \text{Eq II-3}$$

La première équation correspond à une condition de Dirichlet et  $V_s$  au potentiel imposé. La seconde équation correspond à une condition de Neumann et  $j_s$  à la densité de courant imposée. La troisième équation correspond à une condition de Robin et  $h$  à une conductivité surfacique (en  $\text{S.m}^{-2}$ ). Ces trois conditions permettent de commander le comportement du stack respectivement en tension, courant ou en charge.

Dans les modèles de mono-cellule, l'équation (Eq II-2) est généralement utilisée pour différents porteurs de charges dans différentes régions. Ici, l'objectif est de considérer un seul et unique porteur de charge équivalent et d'avoir une seule équation pour l'ensemble du stack. Cela n'est pas possible avec le système d'équations (Eq II-2 - Eq II-3) car celui-ci ne permet pas de modéliser des sources d'énergies à l'intérieur d'un volume. Ces sources ne peuvent être introduites que par les conditions aux limites. Cela est problématique car la pile à combustible est justement un générateur électrique. Les sources sont donc situées à l'intérieur de celle-ci et pas à l'extérieur. Plus précisément, ces sources sont localisées au niveau des AME et produisent un saut de potentiel à leur niveau. Par conséquent, un terme supplémentaire lié au comportement électrochimique de l'AME doit être ajouté afin d'être en mesure d'utiliser une unique équation de conduction pour l'ensemble du stack.

## 2) Ajout d'un terme source dans l'équation de conduction

Dans la section précédente, il a été supposé que le champ électrique dérive d'un potentiel. En réalité cela n'est pas toujours vérifié. Le champ électrique peut en effet s'écrire de manière plus générale sous la forme suivante :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m - \text{grad } V \quad \text{Eq II-4}$$

Le terme  $\mathbf{E}_m$  est appelé champ électromoteur (en  $\text{V.m}^{-1}$ ). Ce terme permet la modélisation d'une force qui peut éventuellement entraîner les charges électriques à travers un milieu. Dans les piles à combustible, ce terme modélise le couplage entre les phénomènes électriques et chimiques survenant au niveau des AME. Au niveau macroscopique, ce champ électromoteur se traduit par l'existence d'une force électromotrice  $U_m$  (en Volt). Ces deux grandeurs sont reliées par les relations suivantes :

$$U_m = \int_0^{L_{AME}} \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} \quad \text{Eq II-5}$$

$$\langle \mathbf{E}_m \rangle = \frac{U_m}{L_{AME}} \mathbf{e}_n \quad \text{Eq II-6}$$

Où  $\langle \mathbf{E}_m \rangle$  est le champ électromoteur moyen,  $L_{AME}$  est l'épaisseur d'un AME et  $\mathbf{e}_n$  est le vecteur normal à un AME. Ces deux grandeurs traduisant le même phénomène physique : l'une est locale, l'autre globale. Par conséquent, elles seront parfois confondues dans la suite

de ce document. Le terme "champ électromoteur" ou "force électromotrice" sera indifféremment employé.

En réutilisant la conservation du courant et la loi d'Ohm, l'équation de l'électrocinétique est donc réécrite avec un terme additionnel :

$$\text{div } \sigma \mathbf{grad} V = \text{div } \sigma \mathbf{E}_m \quad \text{Eq II-7}$$

Les conditions aux limites précédentes (Eq II-3) sont conservées. Le champ électromoteur est égal à zéro dans les milieux passifs comme les plaques bipolaires ou terminales. Dans les AME, sa valeur moyenne est égale à la tension de boucle ouverte d'un AME divisée par l'épaisseur de l'AME.

Grâce à ce terme source supplémentaire dans l'équation de conduction, le comportement électrique d'une pile peut être désormais facilement modélisé avec une seule équation et deux distributions de paramètres (conductivité et champ électromoteur).

### 3) Cas de lois de polarisation non linéaires

Par souci de simplicité, notre approche a jusqu'à présent été développée dans le cas où l'AME est décrit par une loi de comportement linéaire. Au niveau macroscopique, la loi de polarisation obtenue est de la forme suivante :

$$\Delta V(j) = U_m - R_s j \quad \text{Eq II-8}$$

Où  $U_m$  est la force électromotrice de l'AME (en Volt) et  $R_s$  est la résistance surfacique de l'AME (en  $\Omega.m^2$ ). Néanmoins, il est bien connu qu'une pile présente un comportement électrochimique non linéaire. Ce comportement peut être caractérisé par la courbe de polarisation d'un AME provenant d'un modèle théorique ou de mesures expérimentales. Dans ce document, une courbe de polarisation de la forme (Eq II-9) a parfois été utilisée pour certaines simulations :

$$\Delta V(j) = U_{mo} - R_{so} j - A \ln \left( \frac{j}{j_{eq}} + 1 \right) \quad \text{Eq II-9}$$

Où  $U_{mo}$  est la tension de boucle ouverte d'une cellule (en Volt),  $R_{so}$  la résistance surfacique d'un AME (en  $\Omega.m^2$ ) et  $A$  et  $J_{eq}$  sont des paramètres modélisant la surtension d'activation (respectivement en Volt et  $A.m^{-2}$ ). Cette équation non-linéaire du comportement



électrochimique de l'AME peut être couplée à l'équation (Eq II-7) à l'aide d'un algorithme de Newton-Raphson. Plus de détails sont donnés en annexe (cf. p. 223).

### ***C - Description du modèle***

Dans cette section, les équations présentées précédemment sont utilisées pour modéliser un stack de type PEMFC. La géométrie, le maillage et les paramètres physiques sont présentés. Le modèle est illustré sur un cas test où la pile est dans un mode de fonctionnement idéal.

#### **1) Géométrie, maillage et physique**

La figure (Fig. 19) présente un exemple de géométrie et de maillage utilisé pour modéliser un stack PEMFC. Ce modèle est constitué de plusieurs AME et plaques bipolaires empilées les unes sur les autres et prises en sandwich entre deux plaques terminales. Un collecteur de courant placé sur chaque plaque terminale permet de récupérer le courant. Dans cet exemple, le stack est constitué de huit cellules et la collecte du courant est effectuée sur le bord de la pile. Chaque couleur représente une région physique avec des paramètres différents. Il est important de rappeler qu'une seule région est considérée pour toute l'épaisseur d'un AME. La cathode, l'anode et la membrane ne sont pas distinguées. Tous les phénomènes physiques qui ont lieu dans ces différentes épaisseurs sont moyennés et représentés par une seule région physique. Quand aux couches de diffusion, celles-ci sont incluses dans les plaques bipolaires.

Pour les conditions aux limites, un flux nul est imposé sur tous les bords du stack excepté au niveau des collecteurs de courant. Une condition de Dirichlet est utilisée sur le collecteur inférieur (potentiel nul). Pour le collecteur supérieur, selon les situations, des conditions de Dirichlet, Neumann ou Robin (Eq II-3) sont imposées selon le type de commande désirée (en tension, en courant ou avec une charge respectivement).

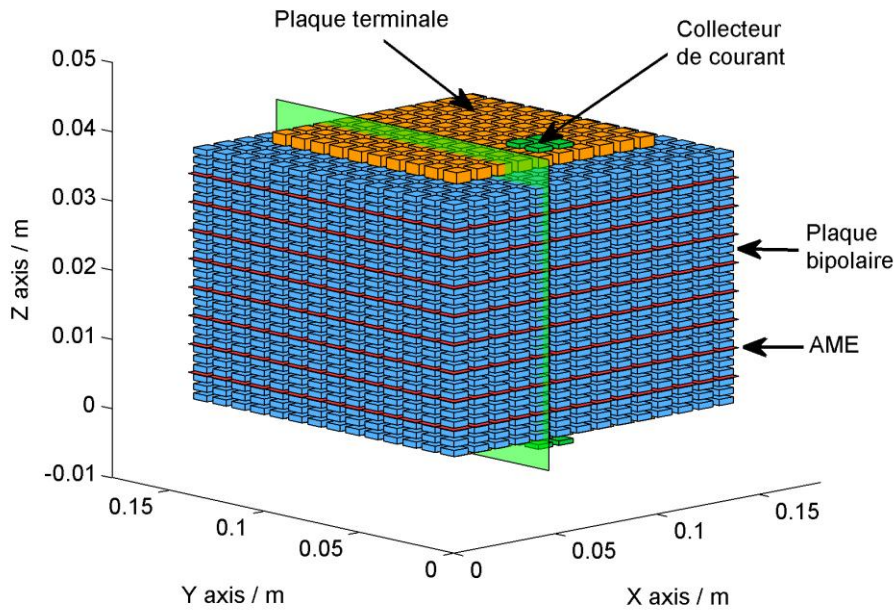


Fig. 19 : Géométrie et maillage d'un stack de huit cellules. Le courant circule du bas vers le haut. Représentation du plan de coupe (en vert) qui est utilisé pour les prochains graphiques.

Les AME sont très fins par rapport aux plaques bipolaires. Cela a pour conséquence que la majeure partie des courants transverse sont concentrés dans les plaques bipolaires. Par conséquent nous nous sommes contentés d'éléments de maillages surfaciques pour les régions AME. A l'intérieur de ces régions, les courants sont supposés normaux et leurs composantes transverse nulles. Cette technique permet d'économiser des degrés de liberté au niveau des AME<sup>a</sup>.

## 2) Paramètres du modèle

Le tableau (Tab. 8) donne les valeurs des paramètres utilisés pour chaque région. Ceux-ci correspondent au stack GESI utilisé sur les bancs de test du LEPMI. Une loi de polarisation linéaire peut d'abord être considérée pour les AME. Pour un AME sain, nous utilisons une

<sup>a</sup> Les résultats de simulations ne montrent quasiment aucune sensibilité avec la densité de maillage selon l'axe Oz. Il est par conséquent éventuellement possible de réduire encore le nombre de maille par plaque bipolaire si on souhaite modéliser des stacks de tailles plus importantes. Dans cet exemple, nous utilisons 14 mailles selon Ox et Oy. L'écart entre les résultats obtenus avec ce maillage et ceux obtenus avec un maillage extrêmement dense est inférieur à 2%. Cela nous semble suffisant dans un premier temps pour étudier les phénomènes qui suivent.

tension apparente de boucle ouverte égale à 0,9 V et une conductivité effective égale à 50000 S.m<sup>-2</sup> (Tab. 4).

La modélisation des AME avec une loi linéaire est une bonne approximation dans un large domaine d'étude. Cette simplification permet d'étudier de façon qualitative et rapide les phénomènes d'interactions entre cellules d'un même stack. Mais si des résultats plus précis sont souhaités, il demeure possible d'utiliser des lois de comportement plus complexes. Par exemple la courbe de polarisation donnée par l'équation (Eq II-9) peut être utilisée. Les paramètres sont donnés dans le tableau (Tab. 5).

Conductivité collecteur courant	$5.10^7 \text{ S.m}^{-1}$
Conductivité plaque terminale	$5.10^7 \text{ S.m}^{-1}$
Conductivité plaques bipolaires	$5.10^3 \text{ S.m}^{-1}$
Epaisseur collecteur courant	1 mm
Epaisseur plaques terminales	2,5 mm
Epaisseur plaques bipolaires	4 mm
Epaisseur AME	0,05 mm
Section collecteur courant	0,02 x 0,02 m <sup>2</sup>
Section plaque terminale	0,1 x 0,1 m <sup>2</sup>
Section plaques bipolaires	0,14 x 0,14 m <sup>2</sup>
Section AME	0,1 x 0,1 m <sup>2</sup>

Tab. 3 Paramètres du stack.

Force électromotrice d'un AME	0,9 V
Résistance surfacique d'un AME	$2 \cdot 10^{-5} \Omega.m^2$

Tab. 4 Paramètres d'un AME dans le cas où une loi de comportement linéaire est utilisée.

$U_{mo}$	1 V
$R_{so}$	$1,79.10^{-5} \Omega.m^2$
A	0,025 V
$j_{eq}$	90 A.m <sup>-2</sup>

Tab. 5 Paramètres d'un AME dans le cas où une loi de comportement non linéaire est utilisée.

### 3) Comportement électrique d'une pile saine

Ce paragraphe illustre le modèle à l'aide de résultats de simulations obtenus avec un mode de fonctionnement considéré comme idéal. Ce cas idéal correspond à une densité de courant homogène dans tous les AME de la pile. Ce mode de fonctionnement est artificiellement créé en utilisant des distributions de paramètres eux aussi homogènes. Ainsi chacun des éléments de maillage de l'AME possède les propriétés données par le tableau (Tab. 4) ou (Tab. 5). La figure (Fig. 20) présente la courbe de polarisation obtenue avec le modèle 3D dans le cas d'un comportement linéaire et dans le cas non linéaire. Les simulations présentées par la suite ont été réalisées avec une loi de comportement linéaire pour les AME. Néanmoins, la plupart des résultats seraient similaires si une loi non-linéaire était utilisée.

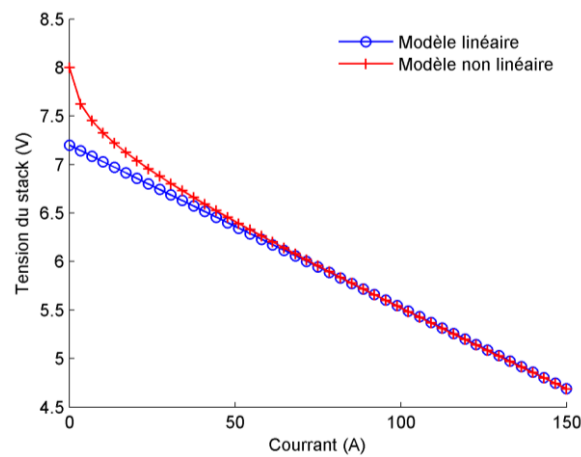


Fig. 20 Courbes de polarisation dans le cas linéaire et non linéaire.

Afin d'illustrer ce modèle électrocinétique, les figures (Fig. 21) présentent les résultats d'une simulation où un courant de 100 A est imposé dans le stack.

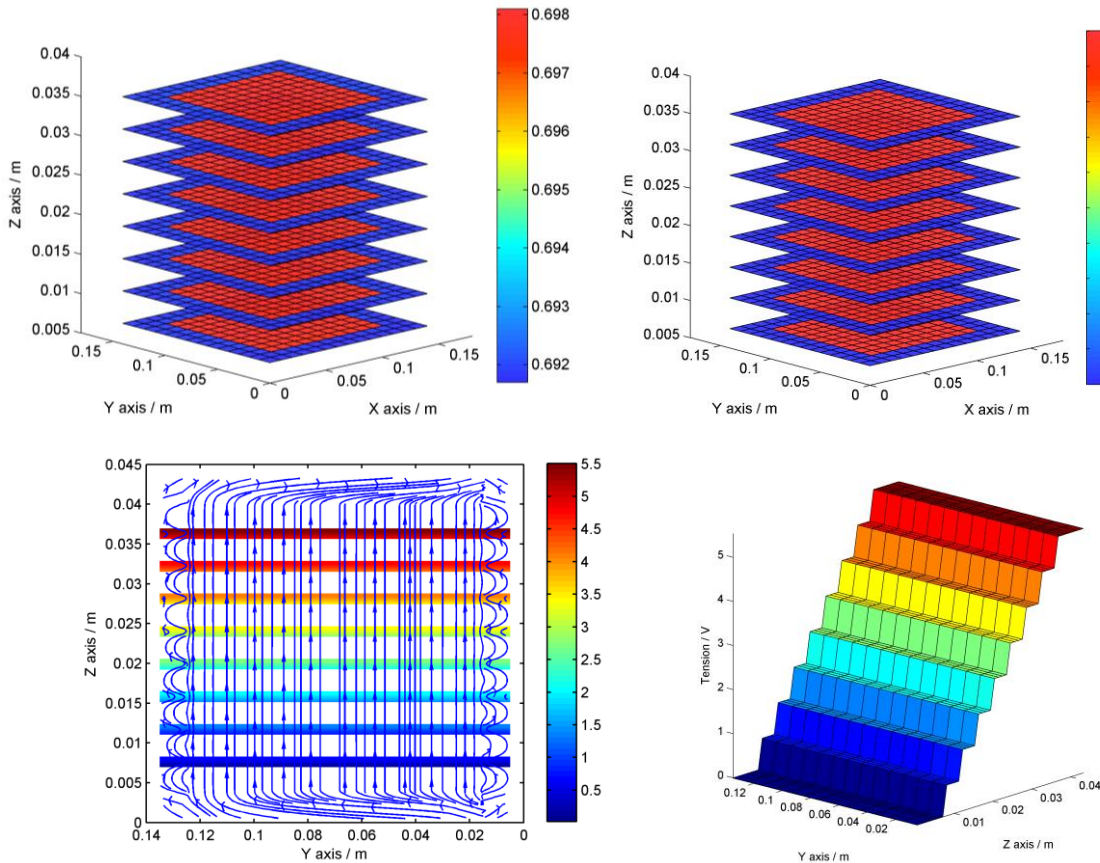


Fig. 21 Tension en Volt (gauche-haut) et densité de courant en A.cm<sup>-2</sup> (droite-haut) sur les huit AME du stack. Equipotentielles et lignes de courant dans un plan de coupe (gauche - bas). Potentiels en Volt dans un plan de coupe (droite-bas).

Le courant circule bien du potentiel le plus faible vers le potentiel le plus élevé et non l'inverse comme dans les milieux passifs. Cela est rendu possible grâce à l'ajout du champ électromoteur dans l'équation de conduction. On observe bien une densité de courant et un potentiel homogène à la surface de l'AME<sup>b</sup>.

Le collectage du courant impacte les lignes de courant uniquement au niveau des plaques terminales. Cela est cohérent avec le fait que la conductivité des plaques terminales est bien supérieure à celle des plaques bipolaires. Les plaques terminales découplent donc bien la zone de collectage du reste du stack. A titre d'illustration, les figures (Fig. 22) montrent les conséquences qu'aurait une faible conductivité des plaques terminales (10<sup>4</sup>

<sup>b</sup> Nous avons aussi modélisé le joint isolant entourant l'AME. Celui-ci se voit clairement sur la figure (Fig. 21-haute-droite). Le courant est bloqué sur les bords et passe uniquement à travers la partie centrale de l'AME. Ce sont ces joints qui provoquent les ondulations de courants dans les plaques bipolaires visibles sur la figure (Fig. 21-bas-gauche).

$S.m^{-1}$ ) sur les courants et potentiels. Le découplage entre les collecteurs et le reste du stack n'est plus réalisé. Ces figures montrent bien que la géométrie des collecteurs impacte les distributions de potentiels et de courants aux extrémités du stack.

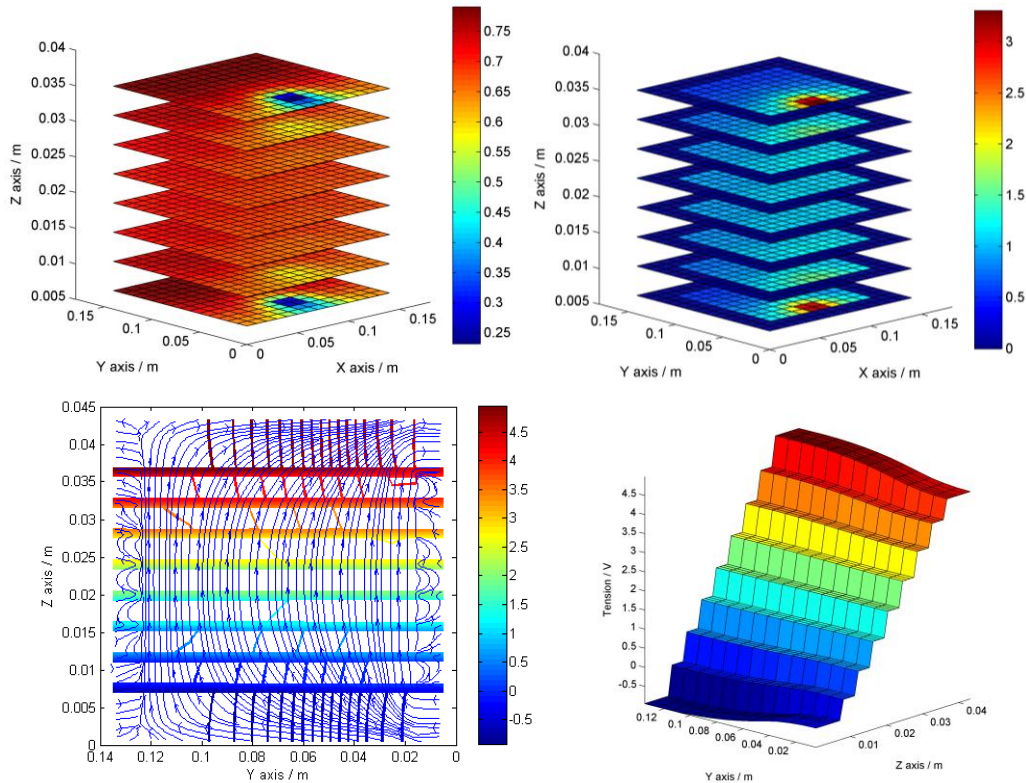


Fig. 22 Cas test avec des plaques terminales possédant une conductivité hypothétique de  $10^4 S.m^{-1}$ .  
Impact sur les courants ( $A.cm^{-2}$ ) et le potentiel (volt).

### D - Comportement électrique d'un stack défectueux

Le paragraphe précédent a présenté le fonctionnement d'un stack dans son mode de fonctionnement idéal où toutes les grandeurs (conductivités, forces électromotrices, courants et potentiels) sont homogènes. En pratique cela est rarement observé. Des inhomogénéités de températures, une distribution non uniforme des réactifs, ou des zones d'accumulations d'eau modifient les paramètres électriques du stack et influent donc sur la répartition des courants et des potentiels.

Avec ce modèle électrocinétique, il est possible de modéliser les conséquences de certaines défaillances en utilisant des distributions de paramètres (conductivités et forces électromotrices) inhomogènes. Par exemple, nous supposons que la déshydratation d'une membrane génère une baisse locale de la conductivité. Inversement, un appauvrissement en gaz est supposé induire une chute locale de la force électromotrice. Ces deux types

défaillances électriques (défaut résistif et déséquilibre des forces électromotrices) sont présentés et illustrés dans les deux paragraphes suivants.

### 1) Défaut résistif

Une mauvaise gestion de l'eau dans les stacks peut amener à une dégradation des performances. L'une des situations les plus fréquentes est l'assèchement partiel d'une membrane. Il est reconnu que ce type de phénomène entraîne une baisse de la conductivité de la zone en question. Cette situation a donc été modélisée en utilisant la distribution de conductivité présentée sur la figure (Fig. 23). Les résultats de ce cas test sont présentés sur la figure (Fig. 24).

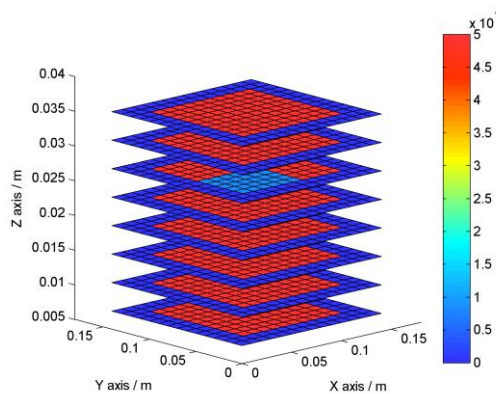


Fig. 23 Conductivité surfacique ( $S.m^{-2}$ ) dans les huit AME du stack. Cas test du défaut résistif.



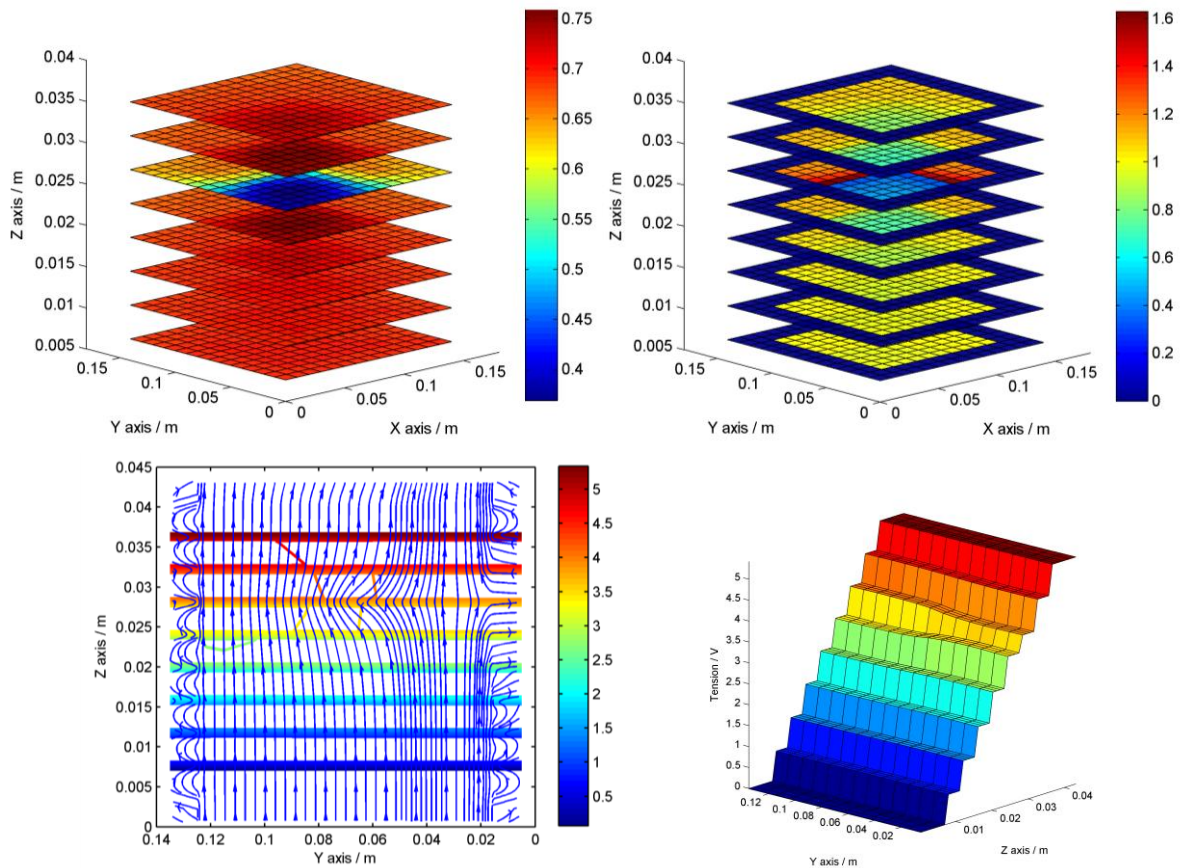


Fig. 24 : Cas test du défaut résistif. Tension en Volt (gauche-haut) et densité de courant en  $A.cm^{-2}$  (droite-haut) sur les huit AME du stack. Equipotentielles et lignes de courant (gauche-bas) dans un plan de coupe. Potentiels en Volt dans un plan de coupe (droite-bas).

On observe une répartition inégale du courant au niveau de l'AME défectueuse. Le défaut bloque le courant et oblige celui-ci à utiliser des chemins transverses. Les zones aux bords du défaut doivent supporter une densité de courant bien supérieure à la moyenne, ce qui peut éventuellement amener à de nouveaux déséquilibres et dysfonctionnements. En raison de la chute ohmique plus importante, la tension de la cellule défectueuse est beaucoup plus faible.

Le phénomène le plus intéressant à observer est le couplage de la cellule défectueuse avec les cellules avoisinantes. Il est très clair ici que les cellules du stack ne fonctionnent pas de manière indépendante. L'inhomogénéité de courant se propage aux cellules voisines et s'estompe avec la distance. La conséquence est que même des cellules à priori saines peuvent voir leurs fonctionnements se dégrader à cause d'une cellule voisine défectueuse. Néanmoins, il convient de mentionner que l'importance de ce couplage entre cellules dépend fortement des deux paramètres suivants :



- L'épaisseur de la plaque bipolaire.
- Le rapport entre la conductivité de la plaque bipolaire et la conductivité moyenne de l'AME.

Lorsque les valeurs de ces deux paramètres augmentent, les cellules tendent à être de plus en plus découplées et à fonctionner de manière indépendante. Par conséquent, l'importance des interactions entre cellules dépendra fortement de la technologie utilisée pour les stacks (plaques bipolaires en graphite ou en inox).

Les équipotentiels mettent en évidence un autre phénomène électrique : les plaques bipolaires ne sont plus totalement équipotentiels (Fig. 24 - bas). En effet, le défaut résistif bloque partiellement le courant dans la direction principale et l'oblige à utiliser des chemins transverses. Ces courants transverses créent des chutes de tension dans une même plaque bipolaire qui n'est donc désormais plus équipotentielle. Ces variations de potentiel sur une même plaque bipolaire peuvent atteindre des dizaines ou des centaines de millivolts selon le courant total traversant la pile. Ce phénomène peut venir perturber la mesure de la tension d'une cellule mais pourrait aussi être mis à profit dans des applications de diagnostic. Enfin et toujours en raison de ces courants transverses, il est important de noter que les cellules voisines présentent des tensions plus élevées que la tension moyenne de fonctionnement.

Ce type de phénomène a déjà été étudié dans la littérature [Santis et al., 2006], [Freunberger et al., 2008], [Kulikovskiy, 2007], [Hirschfeld et al., 2010]. Les résultats présentés ci-dessus sont cohérents avec ceux déjà publiés.

### Remarque sur les tensions de cellule négatives

Sur la figure (Fig. 24), la tension de la cellule défectueuse est très faible mais toujours positive. Si la taille ou la résistance du défaut sont augmentées, cette tension peut même devenir négative. La figure (Fig. 25) illustre ce phénomène. Celui-ci s'explique de la manière suivante. La tension d'une cellule est égale à la force électromotrice de la dite cellule moins le terme de chute ohmique. Si la résistance de la cellule augmente trop, le terme de chute ohmique devient prépondérant devant le terme de force électromotrice. La tension résultante devient alors négative.

Il est à noter que d'autres types de mécanismes (électrochimiques plus précisément) ont été proposés pour expliquer l'apparition d'une tension négative [Fouquet, 2006]. Ceux-ci peuvent donc venir s'ajouter au mécanisme décrit ci-dessus.

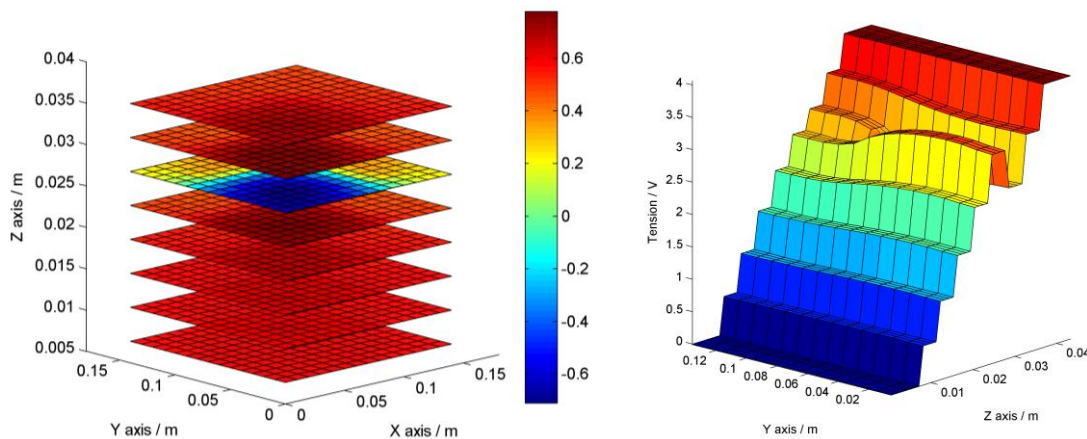


Fig. 25 Situation où l'importance du défaut résistif est augmentée. Tension en Volt aux bornes des huit cellules (gauche). Potentiels en Volt dans un plan de coupe (droite).

## 2) Déséquilibre des forces électromotrices

Une mauvaise évacuation de l'eau peut amener à un noyage localisé de la couche de diffusion provoquant un appauvrissement en gaz réactif au niveau de ces régions. En diminuant localement la force électromotrice (Fig. 26), il est possible de modéliser l'impact de ce type de phénomènes sur le comportement électrique du stack. Les résultats sont représentés sur la figure (Fig. 27).

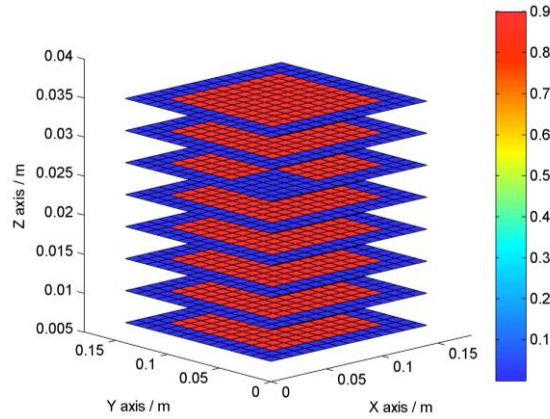


Fig. 26 : Distribution de la force électromotrice (en Volt) dans les huit AME du stack. Cas test du défaut de force électromotrice.

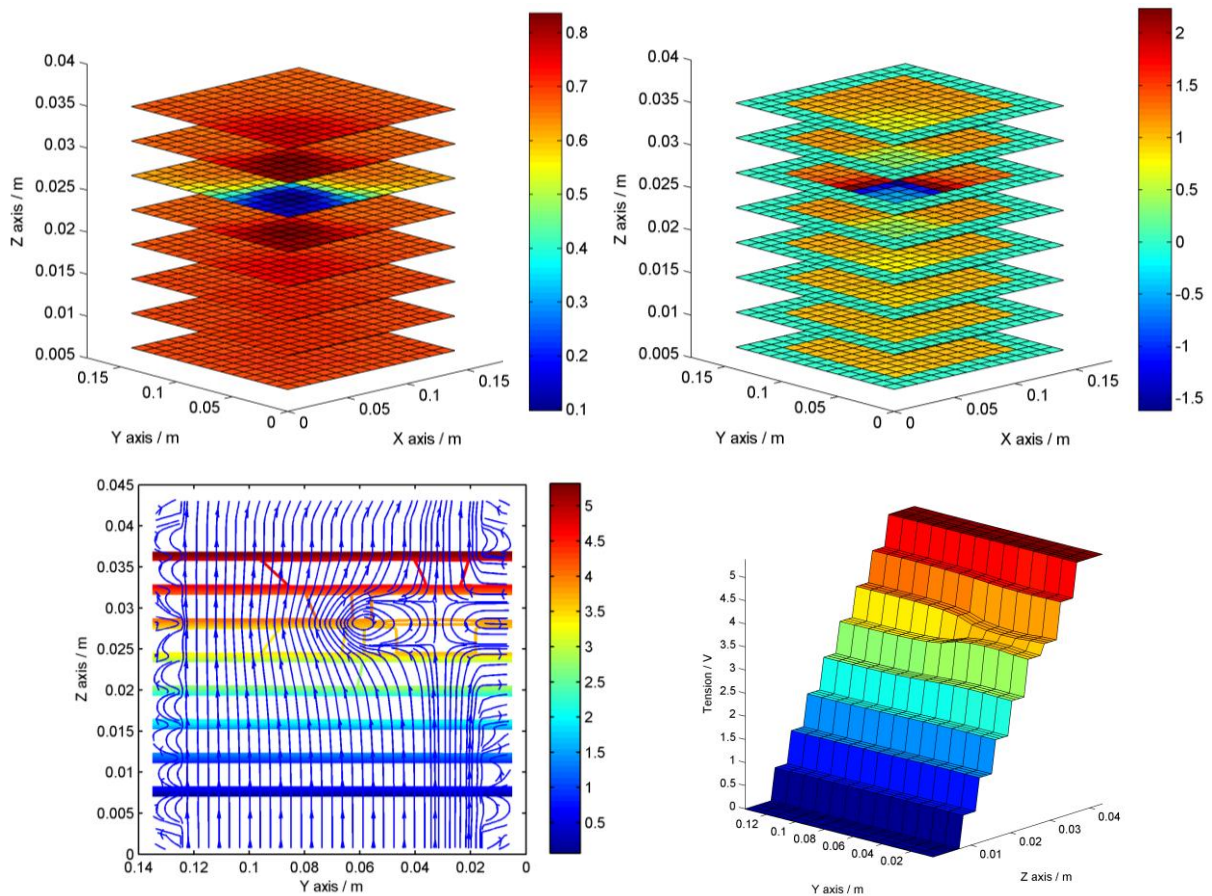


Fig. 27 : Tension en Volt (gauche-haut) et densité de courant en  $A.cm^{-2}$  (droite-haut) sur les huit AME du stack. Equipotentiels et lignes de courant (gauche-bas) dans un plan de coupe. Cas test du défaut de force électromotrice. Potentiels en Volt dans un plan de coupe (droite-bas).

Les résultats font apparaître une boucle de courant au niveau de la cellule défectueuse. Ce phénomène est dû au déséquilibre des forces électromotrices : il y a une force présente à gauche mais absente à droite au niveau du défaut. Au niveau de cette zone défectueuse, les

forces résultantes poussent les charges en sens inverse. On observe aussi que la tension de la cellule défectueuse s'écroule alors que celles des cellules voisines augmentent.

Ces simulations ont été réalisées en utilisant pour les AME une loi de comportement linéaire qui autorise la circulation des courants en sens opposé. Bien entendu, le véritable comportement électrochimique non-linéaire des AME limite en parti ce phénomène. Par conséquent, les courants calculés ici sont totalement surévalués. Une seconde simulation a été réalisée en bloquant cette fois-ci totalement les courants inverses avec une résistance retour infinie. Les résultats montrent qu'il existe toujours un champ électrique orienté en sens inverse au niveau des zones défectueuses. Ce champ électrique inverse développe une force qui tend à pousser les charges dans le sens opposé. Si des processus électrochimiques particuliers permettent des transferts de charges adéquates, ce champ électrique entrainera bien les charges dans le sens opposé. Il est probable que ces processus possèdent des cinétiques très lentes et que les courants engendrés soient très faibles. Néanmoins, mêmes faibles, ces courants peuvent avoir des conséquences désastreuses sur les matériaux du stack (destruction du support du catalyseur).

Des courants inverses ont déjà été observés expérimentalement et plusieurs mécanismes ont été proposés pour expliquer ce phénomène [Maranzana et al., 2010], [Reiser et al., 2005]. Bien que ce modèle électrocinétique ne soit pas en mesure de quantifier ces courants inverses, il permet néanmoins de montrer qu'à partir de considérations purement électriques, il est possible d'obtenir un mode de fonctionnement favorisant très fortement les courants inverses.

**Remarque : déséquilibre des forces électromotrices au démarrage d'un stack**

Ce type de défaut peut être rencontré dans d'autres circonstances. Par exemple, lors du démarrage d'un stack, un front transitoire air-combustible est créé le long des canaux de gaz. Ainsi, près des entrées des gaz, une force électromotrice est établie. Mais au niveau de la sortie, les canaux sont toujours remplis d'air et aucune force n'est établie. La figure (Fig. 28) illustre comment est modélisée cette situation. Les résultats sont présentés sur les figures (Fig. 29). Pour les mêmes raisons que précédemment, des boucles de courant internes apparaissent dans le stack.

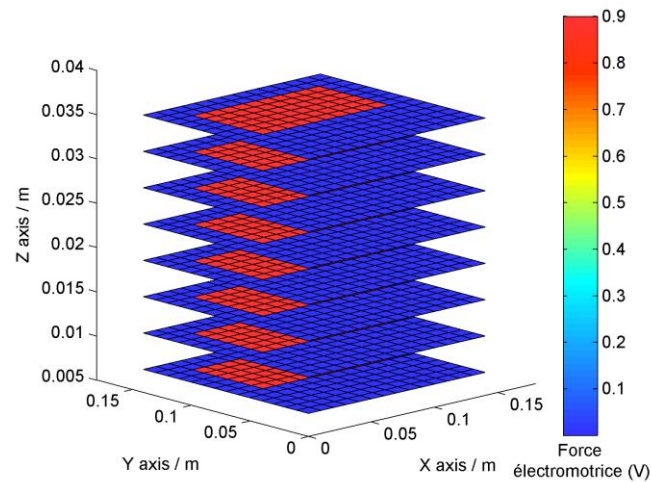


Fig. 28 : Distribution de la force électromotrice (en Volt) dans les huit AME du stack. Cas test du démarrage de stack.

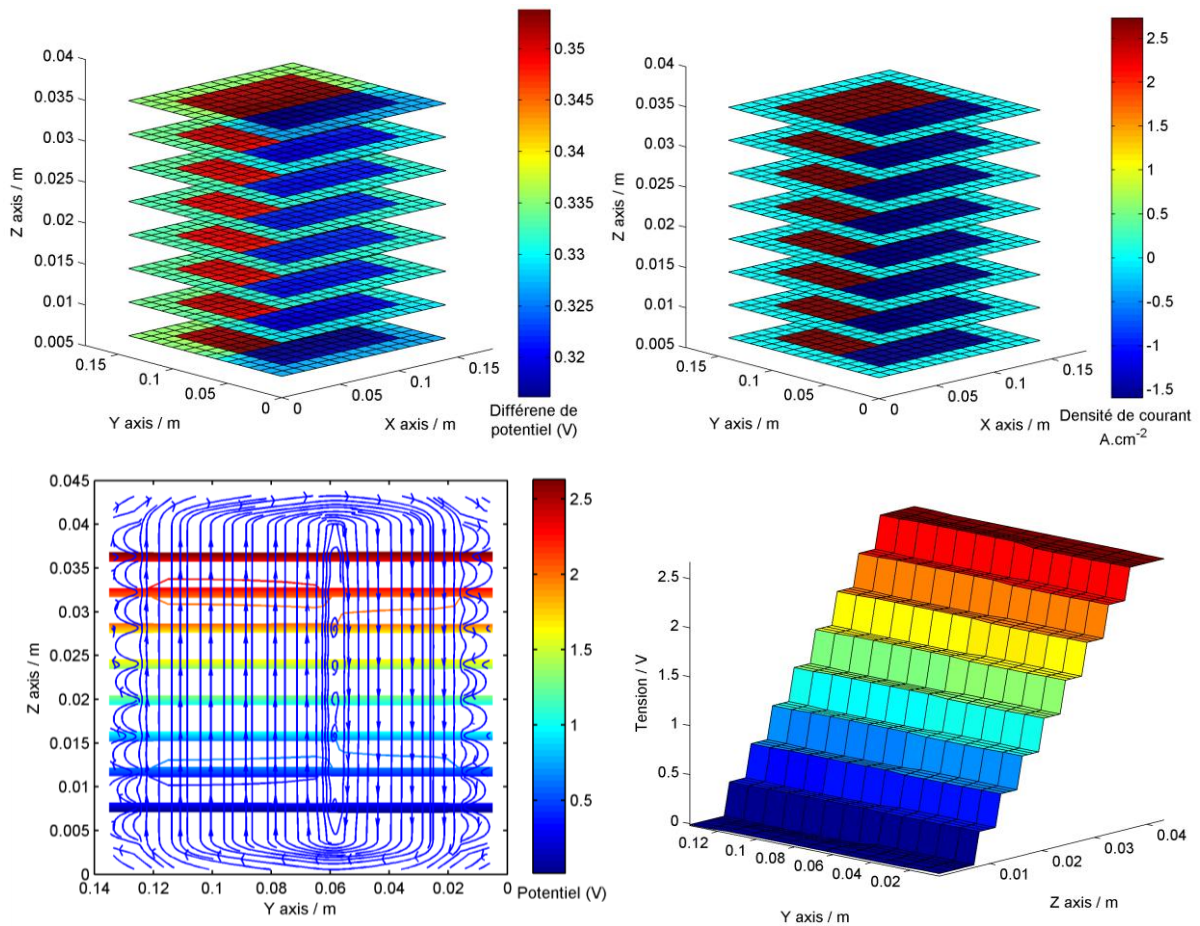


Fig. 29 : Tension en Volt (gauche-haut) et densité de courant en  $A.cm^{-2}$  (droite-haut) sur les huit AME du stack. Equipotentiels et lignes de courant (gauche-bas) dans un plan de coupe. Cas test du défaut de force électromotrice. Potentiels en Volt dans un plan de coupe (droite-bas).



### Remarque sur les tensions de cellule supérieures à la tension de boucle ouverte

On remarque encore une fois que les courants transverses dans les plaques bipolaires créent des chutes ohmiques qui viennent augmenter les tensions des cellules voisines. Si le courant total à travers le stack est nul, ces différences de potentiels viennent s'ajouter à la tension de boucle ouverte. Ainsi ces cellules peuvent atteindre des tensions dépassant la tension de boucle ouverte (Fig. 30), ce qui peut amener à des phénomènes de dégradations prématurées du stack.

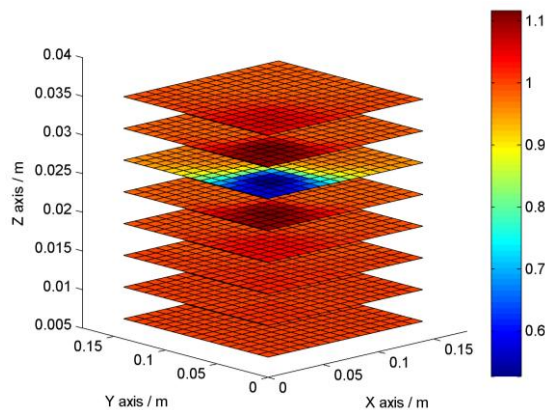


Fig. 30 : Tensions en Volt des huit cellules du stack avec un défaut de force électromotrice et dans le cas où le courant total est nul. Une tension de 1,1 V (supérieure à la tension de boucle ouverte de 1V) apparaît sur les cellules voisines du défaut.

### E - Conclusion sur le modèle électrocinétique

La technique de modélisation présentée ci-dessus permet d'obtenir la répartition macroscopique des courants au sein d'un stack pour différents modes de fonctionnement. Certains phénomènes particuliers ont ainsi pu être observés tel que des couplages entre cellules, des plaques bipolaires non équipotentielles ou des boucles de courant. Cet outil se révélera aussi utile par la suite pour évaluer les signatures magnétiques des différents modes de fonctionnement du stack.

Néanmoins les défauts présentés ici ne représentent qu'une faible partie des défaillances susceptibles de survenir à l'intérieur d'un stack. Tenter de modéliser toutes ces défaillances avec l'approche proposée ici ne semble pas adéquate. L'étape suivante consistera à coupler l'électrocinétique avec la fluide et la thermique. Le couplage avec la fluide a fait l'objet de premiers travaux qui sont encore en cours de développements [Moselle, 2011].

## II - Les modèles directs magnétiques

---

La section précédente a présenté un outil de calcul permettant d'évaluer la répartition des courants dans le stack pour différents modes de fonctionnement. Cette section va décrire comment, à partir de ces courants, il est possible de calculer les champs magnétiques générés par ceux-ci.

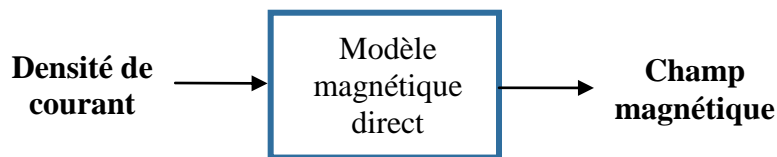


Fig. 31 : Entrées et sorties du modèle magnétique direct.

Dans un premier temps un modèle magnétique 3D est présenté. Les équations de ce modèle sont détaillées et des hypothèses sont proposées afin de faciliter la résolution numérique de ce type de problème. Ce modèle sera couplé avec le modèle électrocinétique précédent afin d'étudier la sensibilité du champ magnétique aux défauts de fonctionnement. De ces simulations il sera possible de mettre en évidence la principale caractéristique des champs magnétiques générés par une pile. Ce modèle magnétique permet alors de réaliser un pré-dimensionnement rapide des magnétomètres.

Bien que les résultats produits par le modèle magnétique 3D soient physiquement réalistes, celui-ci peut néanmoins se révéler encore trop lent ou trop complexe à manipuler pour la création des premiers modèles inverses. Ce constat a mené au développement d'un deuxième modèle magnétique plus léger et plus efficace. Celui-ci fait l'hypothèse que le problème 3D peut se ramener à un problème 2D. Cette approche réduit le nombre de degrés de libertés et facilitera la création prochaine du modèle inverse.

### A - Modèle magnétique 3D

Cette partie présente le modèle magnétique 3D qui a été développé dans le cadre de ces travaux. Les équations sont d'abord présentées puis deux techniques de discrétisation sont proposées. Le modèle magnétique est ensuite couplé au modèle électrocinétique et l'effet d'un défaut de fonctionnement est étudié. Les résultats montreront qu'il est plus judicieux de découper le problème en deux sous problèmes. Enfin l'ordre de grandeur du champ magnétique autour d'une pile à combustible est estimé.

## 1) Formulations

Les courants électriques et les champs magnétiques sont reliés par les équations de Maxwell. Nous supposons le problème statique. Les équations qui nous intéressent sont alors données par le système suivant :

$$\begin{cases} \text{rot} \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{j} \\ \text{div} \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad \text{Eq II-10}$$

Où  $\mathbf{B}$  est le champ magnétique,  $\mathbf{j}$  le courant électrique et  $\mu$  la perméabilité du milieu. Au système d'équation (Eq II-10), il faudrait aussi ajouter des conditions aux limites afin de rendre la solution unique. Connaissant  $\mathbf{j}$ ,  $\mu$ , et les conditions aux limites, il existe de très nombreuses méthodes numériques permettant d'obtenir le champ magnétique  $\mathbf{B}$ . La méthode des éléments finis [Dhatt & Touzot, 1984] est probablement la plus populaire pour ce type de problèmes [Preis et al., 1991]. Nous avons néanmoins fait le choix de ne pas utiliser une telle approche. En effet, le modèle développé ici sera utilisé en premier lieu pour la création de modèles inverses. La création d'un modèle inverse nécessite en général un nombre très important d'appels au modèle direct. Or la méthode des éléments finis possède l'inconvénient d'être généralement coûteuse en temps de calcul. Il s'agit en effet d'une méthode "locale" : les champs et courants d'un élément de maillage sont exprimés en fonction des champs et courants des éléments voisins. La solution du problème (Eq II-10) passe par la résolution d'un système matriciel dont la taille peut se révéler très grande car il est nécessaire de mailler l'extérieur de la pile jusqu'à « l'infini ».

Le modèle direct idéal serait un modèle donnant une relation explicite entre les sources et le champ magnétique. Dans le cadre de cette étude, il est possible d'obtenir une telle relation si l'on suppose l'absence de matériaux magnétiques à l'intérieur et à proximité de la pile (Eq II-11).

$$\mu(x, y, z) = \mu_0 \quad \text{Eq II-11}$$

Il s'agit d'une hypothèse réaliste. Selon les technologies de pile utilisées, les matériaux diffèrent grandement. Si la pile est constituée de graphite cela ne pose aucun problème. La technologie GENEPAC que nous utiliserons par la suite utilise quant à elle des plaques bipolaires en acier inoxydable. Néanmoins, il s'agit de la nuance 316L qui est quasiment amagnétique.



A partir de cette dernière hypothèse, il va donc désormais être possible d'exprimer le champ magnétique directement en fonction des courants. Comme la divergence du champ magnétique est nulle, nous proposons d'exprimer celui-ci en fonction d'un potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \text{Eq II-12}$$

La divergence du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  pouvant être définie de manière arbitraire, la jauge de Coulomb est choisie :

$$\text{div} \mathbf{A} = 0 \quad \text{Eq II-13}$$

En combinant les équations (Eq II-10, Eq II-11, Eq II-12, Eq II-13), on obtient l'équation de Poisson pour le potentiel vecteur magnétique :

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad \text{Eq II-14}$$

La résolution détaillée de cette équation avec des conditions aux limites quelconques est disponible dans la référence [Guibert, 2009]. Nous donnons ici la solution lorsque le potentiel vecteur est choisi nul à l'infini :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \iiint_{\Omega_s} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}_s) d\Omega_s \\ \text{avec } G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|} \end{array} \right. \quad \text{Eq II-15}$$

En théorie, l'intégration est effectuée sur tout l'espace. Mais en pratique, l'intégration est uniquement réalisée dans le domaine  $\Omega_s$  où les courants sont non nuls. L'élément  $d\Omega_s$  correspond à un petit élément de volume autour de  $\mathbf{r}_s$ .

En dérivant l'équation (Eq II-15) avec le rotationnel, la loi de Biot et Savart est finalement obtenue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \iiint_{\Omega_s} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \wedge \mathbf{j}(\mathbf{r}_s) d\Omega_s \\ \text{avec } \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\mathbf{r}_s - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^3} \end{array} \right. \quad \text{Eq II-16}$$

La loi de Biot et Savart est une formule explicite et il n'est désormais plus nécessaire de résoudre un système matriciel pour obtenir la solution comme c'est le cas avec les méthodes locales évoquées plus haut. Le gain en temps de calcul peut ainsi se révéler très important si le

nombre de points où l'on souhaite connaître le champ magnétique n'est pas démesurément grand. La création du modèle inverse s'en trouvera facilitée.

### **Remarque sur les notations**

Les noyaux<sup>cd</sup>  $G$  et  $\mathbf{F}$  des transformations linéaires (Eq II-15) et (Eq II-16) sont écrits une ligne en dessous de l'intégrale. Ce type de notation sera couramment utilisé tout au long de ce document pour écrire les transformations linéaires. Cette notation permet d'alléger certaines écritures.

### **Remarque sur les courants non conservatifs**

La loi de Biot et Savart a été développée en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère. Cette équation impose au terme source (la densité de courant) d'être à divergence nulle en tout point de l'espace. Si ce n'est pas le cas, le système d'équations donné par (Eq II-10) n'admet aucune solution. Or cette contrainte sur la conservation du courant n'est plus explicitement imposée avec la loi de Biot et Savart. Il est tout à fait possible d'obtenir une solution en utilisant cette loi sur un champ de densité de courant à divergence non nulle. Par conséquent ce résultat n'aura pas de réalité physique et le champ obtenu ne respectera pas l'équation de Maxwell-Ampère. Cela se traduira par exemple par le fait que la circulation du champ sur un contour fermé autour de la pile n'est pas égale au courant total.

Malgré cela, nous nous permettrons pourtant d'utiliser cette loi sur des courants non conservatifs. En effet, en raison de la linéarité des équations, il est possible de décomposer un courant à flux conservatif en une combinaison linéaire de courants non conservatifs et de calculer séparément le champ magnétique pour chacune de ces distributions de courant. Les différents champs magnétiques calculés ne respecteront pas nécessairement les équations de Maxwell mais leur combinaison linéaire les respectera. C'est ce qui sera souvent fait dans la suite de ce document. Les fils partant de la pile et se rebouclant au niveau de la charge ne

---

<sup>c</sup> Le terme "noyau" est ici à prendre dans le sens de la fonction (ou distribution) définissant un opérateur linéaire. Mais le "noyau" d'un opérateur linéaire désigne aussi l'espace vectoriel contenant les éléments dont l'image produite par l'opérateur est l'élément nul. Le contexte suffit normalement à lever cette ambiguïté.

<sup>d</sup> Selon les domaines applicatifs, les fonctions  $G$  et  $\mathbf{F}$  peuvent aussi être appelées réponses impulsionnelles ou fonctions de transfert des opérateurs définis par les équations (Eq II-15) et (Eq II-16) respectivement. La fonction  $G$  est aussi la fonction de Green de l'opérateur  $-\Delta/\mu_0$ . Elle est en effet la solution de l'équation fondamentale  $\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = -\mu_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)$ .

seront pas toujours pris en compte. Il sera donc important de se rappeler que le champ calculé à partir des courants internes à la pile n'est pas complet et qu'il faudra toujours en dernier lieu rajouter l'influence des fils de retour pour avoir le champ magnétique réel.

## 2) Discrétisation

Le champ magnétique peut être évalué numériquement à l'aide de la relation (Eq II-16) si celle-ci est discrétisée. L'objectif principal est de coupler ce calcul avec le modèle électrocinétique présenté précédemment. Ce modèle utilise la méthode des Volumes Finis et les densités de courant sont donc portées par les facettes du maillage. Deux techniques sont proposées ici pour réaliser le couplage avec les Volumes Finis.

### Méthode 1

Le maillage Volumes Finis est utilisé pour découper l'intégrale volumique comme indiqué dans l'équation suivante :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_{p=1}^{Nb \text{ Volumes}} \iiint_{\Omega_{Sp}} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \wedge \mathbf{j}(\mathbf{r}_s) d\Omega_s \quad \text{Eq II-17}$$

La densité de courant sur chaque volume peut être interpolée en tout point à partir des valeurs portées par les facettes adjacentes au volume. Enfin, l'intégrale sur chaque volume est approximée de manière classique par discrétisation numérique.

### Méthode 2

La deuxième démarche s'inspire de l'article [Schuhmann & Weiland, 2001] dans lequel la problématique est similaire à la notre<sup>e</sup>. Les auteurs de l'article [Hauer et al., 2008] semblent aussi utiliser la même démarche. L'intégrale est d'abord séparée en trois parties puis chaque partie est découpée de manière différente comme indiqué ci-dessous :

---

<sup>e</sup> Cet article explique comment calculer une énergie avec la Technique de l'Intégration Finie. Le maillage possède des similitudes avec celui des Volumes Finis et le calcul de l'énergie fait intervenir une intégrale volumique sur des grandeurs portées par des facettes.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \sum_{px=1}^{N_x} \iiint_{\Omega_{S_{px}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_S) \wedge \begin{pmatrix} j_x(\mathbf{r}_S) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\Omega_S \\
 & + \sum_{py=1}^{N_y} \iiint_{\Omega_{S_{py}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_S) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ j_y(\mathbf{r}_S) \\ 0 \end{pmatrix} d\Omega_S \\
 & + \sum_{pz=1}^{N_z} \iiint_{\Omega_{S_{pz}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_S) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j_z(\mathbf{r}_S) \end{pmatrix} d\Omega_S
 \end{aligned}
 \tag{Eq II-18}$$

Un maillage différent est donc utilisé pour découper l'intégrale volumique des composantes x, y et z de la densité de courant. Ces trois nouveaux maillages sont néanmoins construits à partir du même maillage original qui est celui utilisé par les Volumes Finis comme illustré sur la figure (Fig. 32). Par exemple le découpage  $\{\Omega_{S_{px}}\}$  est construit à partir des  $N_x$  facettes orientées selon l'axe Ox. L'intérêt de cette méthode est qu'à chacun de ces nouveaux volumes correspond une seule et unique facette du maillage original et donc une seule et unique densité de courant.

Les deux méthodes convergent vers le même résultat lorsque la densité de maillage tend vers l'infini.

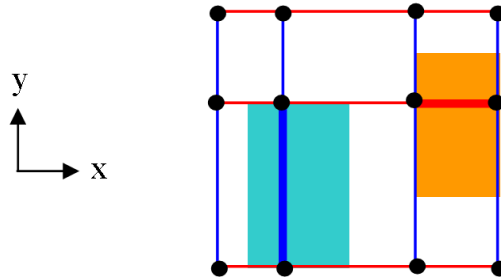


Fig. 32 : Les nœuds et les facettes orientées selon Ox et Oy du maillage Volumes Finis sont représentés respectivement par les points noirs, les traits bleus et les traits rouges. A partir des facettes orientées selon x il est possible de construire de nouveaux volumes dont un exemple est donné par le carré bleu. Un découpage semblable peut être réalisé avec les facettes orientées selon Oy.

### Remarque sur les singularités

La loi de Biot et Savart donnée par l'équation (Eq II-16) est analytiquement convergente même lorsque le champ est calculé en un point  $\mathbf{r}$  où le courant est non nul. Par contre la version discrétisée de la loi de Biot et Savart pose problème dès lors que le champ magnétique est calculé en un point très proche d'un des points d'intégration, c'est-à-dire dès

que l'on cherche à calculer le champ à l'intérieur des sources. Le calcul du champ en ces points nécessite alors l'utilisation de formules analytiques. Cependant, dans notre application les capteurs de champs magnétiques sont toujours placés en dehors des sources. Nous ne nous placerons donc (presque) jamais dans ce cas de figure.

### 3) Effet d'un défaut de fonctionnement sur le champ magnétique

Dans le cadre de notre étude, ce modèle magnétique est utilisé sur des distributions de courant générées par le modèle électrocinétique présenté dans la partie précédente de ce document. L'intérêt de ce modèle électrocinétique est de générer dans un stack des courants représentatifs des conditions réelles. Grâce à la méthode des Volumes Finis, la divergence de la densité de courant est fortement imposée à zéros, à l'exception des bornes de la pile (la boucle de courant retour n'est pas modélisée ici).

Ce modèle électrocinétique permet par exemple d'évaluer l'influence d'un défaut de fonctionnement typique sur le champ magnétique. La figure (Fig. 33) illustre une telle expérience. Deux simulations sont réalisées. Dans la première, le stack (supposé fonctionner de manière idéale) est traversé par un courant homogène dans tous les AME. Dans la seconde simulation, un défaut résistif (similaire à celui étudié précédemment) vient perturber le trajet du courant.

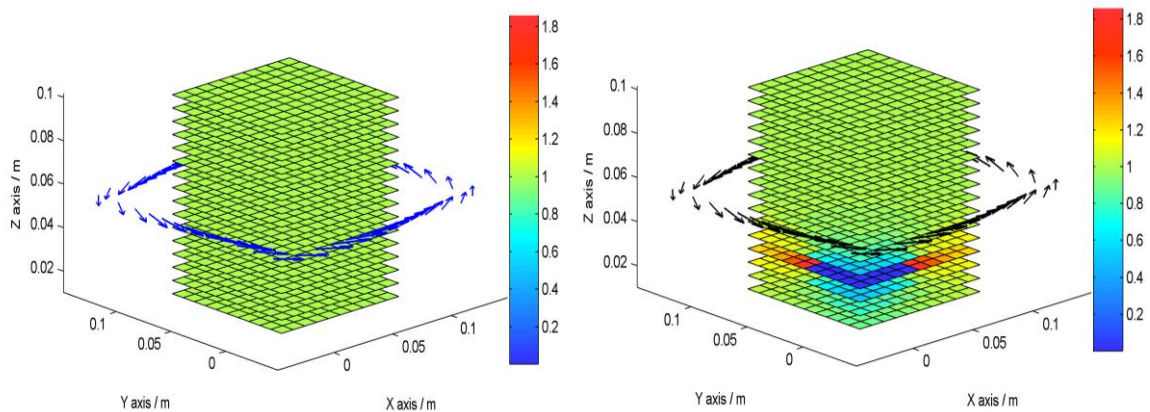


Fig. 33 : Densité de courant en  $A.cm^{-2}$ . Stack de 16 cellules, courant total de 100 A. Les joints ne sont pas représentés. A gauche, stack sain traversé par une densité de courant homogène. A droite, stack avec défaut résistif sur la 4ème cellule. Champ magnétique sur un contour fermé autour du stack.

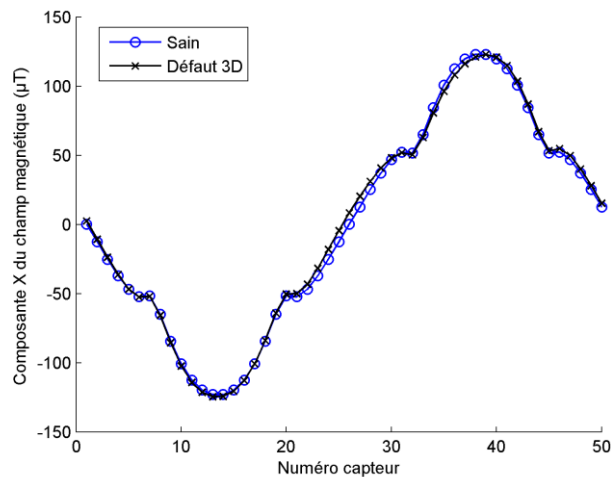


Fig. 34 : Amplitude du champ magnétique pour un fonctionnement idéal (bleu) et défectueux (noir) de la stack

Dans chacune des deux simulations, le champ magnétique est calculé sur quelques points autour de la pile et représenté sur la figure (Fig. 34). Cette figure permet de voir que le champ magnétique est très peu modifié par ce défaut. Le champ magnétique en présence d'un défaut est quasiment égal au champ magnétique généré par une pile saine (environ 125  $\mu\text{T}$ ). C'est l'une des principales constatations que l'on peut faire sur les champs magnétiques générés par les piles à combustibles. En présence d'un défaut de fonctionnement, la variation relative du champ magnétique est très faible : environ 7  $\mu\text{T}$ , soit 5% du champ total. Cet exemple est représentatif et ce résultat peut être généralisé à de très nombreuses situations. Des justifications plus théoriques en lien avec les lois de décroissance des champs seront données plus loin dans ce document (cf. p. 127).

On voit apparaître ici deux contraintes antagonistes pour notre système de diagnostic : les capteurs et la chaîne de mesure devront avoir une gamme suffisamment élevée pour supporter sans saturation l'intense champ magnétique lié au mode de fonctionnement normal de la pile. Dans le même temps, ceux-ci devront avoir une précision suffisamment élevée pour détecter les faibles champs magnétiques générés par les défauts de fonctionnement de la pile.

#### 4) Décomposition mode commun – mode différentiel

Afin de distinguer le champ intense lié au fonctionnement normal de la pile et les faibles variations de champs induites par les défauts de fonctionnement, nous pouvons décomposer le courant (et le champ) en deux parties : le courant de mode commun et les courants de modes différentiels. La figure (Fig. 35) illustre une telle décomposition sur une

distribution de courant quelconque. Ce paragraphe décrit les caractéristiques de ces deux types de courants et de champs.

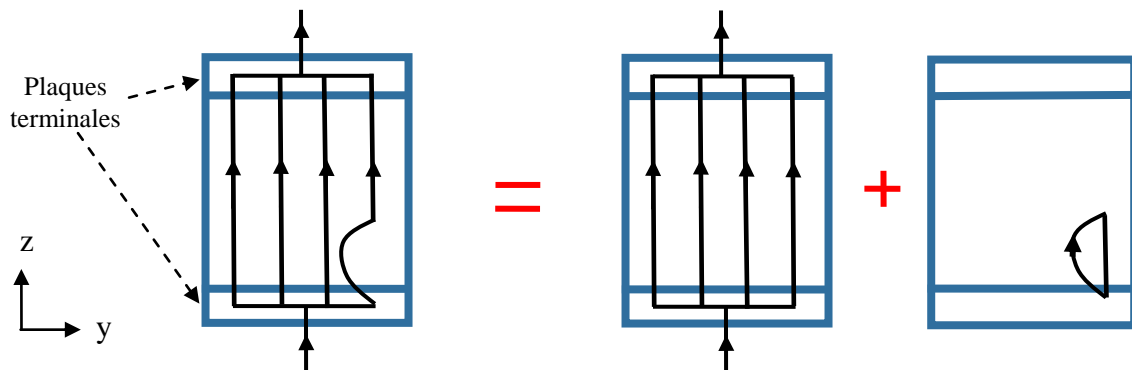


Fig. 35 : Décomposition d'une distribution de courant quelconque (gauche) en un courant de mode commun (milieu) et un courant de mode différentiel (droite). Les rectangles inférieurs et supérieurs représentent les plaques terminales de très hautes conductivités permettant de distribuer le courant de manière homogène dans l'ensemble du stack dans le cas idéal.

### Caractéristiques du mode commun

- Le courant de mode commun est la distribution de courant représentée sur la figure Fig. 35 – milieu). Ce courant sera aussi parfois appelé courant total, courant moyen, courant homogène ou courant uniforme. Cette distribution de courant sera considérée comme le mode de fonctionnement sain ou idéal de la pile à combustible. Cela peut paraître arbitraire, la pile pouvant fonctionner de manière optimale même si les courants ne sont pas répartis de manière parfaitement uniforme à l'intérieur de celle-ci. D'ailleurs, en raison de la géométrie des canaux d'alimentation en gaz réactifs, cette configuration n'est pas toujours rencontrée. Néanmoins, nous considérons que ce courant homogène constitue un cas limite idéal<sup>f</sup>.
- Ce courant de mode commun génère un champ magnétique qui sera lui-même qualifié de champ de mode commun. D'après ce qui précède, ce champ est extrêmement intense (plusieurs centaines de  $\mu\text{T}$ ). Il nécessite donc pour sa mesure

<sup>f</sup> Il est possible de choisir une autre distribution de courant comme mode de fonctionnement sain pour la pile. Nous avons choisi le courant de mode commun car il possède l'avantage d'être très simple à visualiser. De plus, le découpage d'une distribution de courant quelconque est très simple à réaliser avec un tel courant.

l'utilisation de magnétomètres de gammes très élevées afin que ceux-ci ne saturent pas.

- Expérimentalement, ce courant homogène peut être estimé avec une excellente précision à l'aide d'un ampèremètre. Le champ magnétique de mode commun n'apporte donc aucune information supplémentaire au niveau du système de mesure magnétique. Ce champ sera donc parfois aussi qualifié de champ inutile.

### **Caractéristiques des modes différentiels**

- Un courant différentiel est la différence de courant entre le mode de fonctionnement sain et le mode de fonctionnement défectueux de la pile. Un exemple d'un tel courant est donné sur la figure (Fig. 35 - droite). L'existence d'un courant de mode différentiel est donc synonyme de la présence d'un défaut de fonctionnement. Ces courants seront aussi dénommés courants hétérogènes.
- Ces courants possèdent la propriété intéressante d'être cantonnés à l'intérieur de la pile et de ne pas circuler dans le circuit externe et la charge. La connaissance de la géométrie du circuit externe est donc inutile pour calculer les champs magnétiques qu'ils génèrent. Leur modélisation est donc facilitée.
- Ces courants ne circulant pas dans le circuit externe, ils ne peuvent être détectés par un ampèremètre. Par contre il sera possible de les estimer à l'aide du système de mesure magnétique.
- D'après la précédente section, ces courants génèrent des champs magnétiques très faibles (quelques  $\mu\text{T}$ )<sup>§</sup>. Leurs détections nécessitent donc l'utilisation de magnétomètres de précisions élevées.

Ce découpage du problème en deux sous-problèmes sera réalisé tout au long de ce document et facilitera l'étude et la conception du système de diagnostic.

---

<sup>§</sup> Cette faible amplitude s'explique par la faible surface formée par ces "boucles" de courants. Les champs magnétiques (dipôles) générés sont donc de faibles amplitudes par rapport au champ généré par le "fil" traversant la pile.



### 5) Champ magnétique maximal perçu par les magnétomètres

D'après ce qui précède, l'ordre de grandeur du champ magnétique généré par une pile n'est pas significativement impacté par la présence d'un défaut de fonctionnement. Par conséquent, si l'on cherche à dimensionner la gamme des magnétomètres, il suffit de seulement considérer une distribution de courant homogène dans le stack et son champ magnétique associé.

Néanmoins, les valeurs de champs magnétiques indiqués sur la figure (Fig. 34) ne donnent pas une bonne indication sur l'ordre de grandeur du champ magnétique autour de la pile. L'une des principales raisons à cela est que les fils permettant aux courants de reboucler n'ont pas été pris en compte dans cette simulation. Le champ calculé précédemment n'est donc pas complet. De manière plus générale, si l'on souhaite évaluer le champ maximal perçu par des capteurs autour d'une pile, il est nécessaire de prendre en compte les éléments suivants :

- Le courant maximal traversant la pile.
- La forme et les dimensions géométriques de la pile.
- La position des capteurs vis-à-vis de la pile.
- La géométrie de la boucle de courant et la localisation de la charge.

Une annexe décrit plus en détail les importances relatives de chacun de ces facteurs, ainsi que les problématiques liées à l'évaluation de certains d'entre eux (cf. p. 230). Elle fournit aussi une méthode simple pour évaluer rapidement cet ordre de grandeur. Le tableau (Tab. 6) synthétise ces résultats.

Stack	Courant maximal proposé (A)	Distance entre les capteurs et le centre du stack (m)	Champ maximal ( $\mu\text{T}$ )
GESI	100	0,08	250
GENEPAC	170	0,11	300
HELION	260	0,08	650

Tab. 6 : Ordre de grandeur du champ magnétique généré par différentes technologies de piles à combustible

Le tableau (Tab. 6) donne l'ordre de grandeur que l'on peut typiquement obtenir sur les différents stacks du projet OMNISCIENTS. Les courants indiqués sont les courants proposés par les partenaires du projet. Ce ne sont pas nécessairement les courants nominaux ou les

courants maximum admissibles. Aux champs indiqués dans ce tableau, il faut aussi ajouter les 50  $\mu\text{T}$  du champ terrestre et 50  $\mu\text{T}$  de marge de sécurité prenant en compte les erreurs et les champs éventuellement générés par des dispositifs voisins.

D'après ce qui précède, il est donc nécessaire d'avoir une gamme d'au moins 750  $\mu\text{T}$  pour être sur de ne jamais faire saturer aucun capteur. Par la suite, nous proposerons une solution permettant de s'affranchir de cette contrainte (cf. p. 171).

## **6) Conclusion sur le modèle magnétique 3D**

Le modèle magnétique 3D présenté dans cette section est un outil efficace pour évaluer le champ magnétique généré par une pile à combustible, en particulier s'il est couplé avec le modèle électrocinétique présenté dans la section précédente. Son utilisation a permis de montrer que l'ordre de grandeur du champ magnétique dépend surtout du courant total circulant dans le stack. En pratique, celui-ci vaut en général plusieurs centaines de  $\mu\text{T}$ . A l'opposé, les défauts de fonctionnement que l'on cherche à détecter ne contribuent qu'à une très faible part du champ total (quelques  $\mu\text{T}$ ).

### ***B - Modèle magnétique 2D***

Bien que le modèle magnétique 3D présenté plus haut soit efficace pour évaluer le champ magnétique, il est intéressant dans un premier temps de simplifier encore un peu plus le modèle. Nous proposons ici d'utiliser l'approximation 2D dont les avantages sont multiples:

- Les champs magnétiques sont plus faciles à appréhender en deux dimensions et certaines équations perdent de leur complexité. Cette simplification est mise à profit dans une annexe afin d'étudier les caractéristiques détaillées de l'opérateur de Biot et Savart (cf. p. 228).
- La discrétisation d'un problème 2D nécessite l'usage de beaucoup moins de mailles. Les temps de calcul s'en trouvent énormément diminués. Ce critère est important car la création ou éventuellement l'utilisation des modèles inverses nécessite un très grand nombre d'exécutions du modèle direct.
- Le nombre d'inconnues du problème inverse 2D est lui aussi fortement réduit. La création du modèle inverse en est facilitée.

La première partie de cette section explique d'un point de vue purement mathématique ce qu'est l'approximation 2D des champs magnétiques. La seconde partie explique comment il est possible de se servir judicieusement de cette approximation pour calculer les champs générés par une pile à combustible. Les erreurs engendrées par une telle approximation seront détaillées. Enfin la troisième partie montre que l'on observe en deux dimensions des phénomènes similaires à ceux obtenus avec le modèle 3D.

### 1) Approximation 2D : aspects mathématiques

Ce paragraphe décrit d'un point de vue mathématique ce que signifie l'approximation 2D. Pour obtenir la loi de Biot et Savart en deux dimensions, on peut repartir de l'équation de Poisson démontrée dans la section précédente :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad \text{Eq II-19}$$

L'approximation 2D consiste à supposer l'invariance des sources selon la troisième dimension :

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial z} = \mathbf{0} \quad \text{Eq II-20}$$

L'invariance des sources entraîne l'invariance des champs :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = \mathbf{0} \quad \text{Eq II-21}$$

L'équation de Poisson (Eq II-19) se simplifie donc. Cela a pour conséquence de changer la forme de sa solution fondamentale  $G$ . Celle-ci n'est désormais plus la fonction  $1/r$  mais la fonction logarithme népérien. Le potentiel vecteur magnétique s'exprime en fonction du courant et de la solution fondamentale de la même manière que précédemment, à la différence près qu'il n'est désormais plus nécessaire d'intégrer dans tout l'espace mais seulement dans un plan perpendiculaire à l'axe Oz :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \iint_{\Gamma_s} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}_s) d\Gamma_s \\ \text{avec } G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \ln(|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|) \end{array} \right. \quad \text{Eq II-22}$$

De la même manière que dans la section précédente, on applique l'opérateur rotationnel sur le potentiel vecteur pour obtenir le champ magnétique en deux dimensions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \iint_{\Gamma_s} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \wedge \mathbf{j}(\mathbf{r}_s) d\Gamma_s \\ \text{avec } \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(\mathbf{r}_s - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \end{array} \right. \quad \text{Eq II-23}$$

A cette première hypothèse 2D, on inclue une seconde hypothèse : les courants sont purement normaux, c'est-à-dire orientées selon Oz. Les composantes transverses (composantes selon x et y) sont donc supposées nulles :

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j_z \end{pmatrix} \quad \text{Eq II-24}$$

Dans ce document, les deux approximations (Eq II-20) et (Eq II-24) seront dénommées par le terme "d'approximation 2D", bien qu'en toute rigueur ce terme ne concerne que la première de ces deux approximations.

Au final la loi de Biot et Savart gagne encore en simplicité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \iint_{\Gamma_s} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \cdot j_z(\mathbf{r}_s) d\Gamma_s \\ \text{avec } \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \begin{pmatrix} y_s - y \\ x - x_s \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \text{Eq II-25}$$

Cette seconde approximation entraîne que la composante normale (composante selon z) du champ magnétique est nulle. A titre d'illustration, la figure (Fig. 36) représente des courants et des champs magnétiques en deux dimensions.

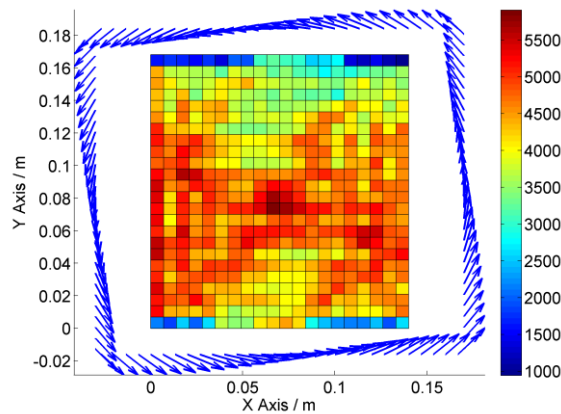


Fig. 36 : Illustration d'un calcul 2D. La densité de courant (en  $A.m^{-2}$ ) est normale au plan. Le champ magnétique est contenu dans le plan. Toutes ces grandeurs sont invariantes selon  $Oz$ .

### Remarque sur la divergence du courant

Il est aisé de montrer que les conditions (Eq II-20) et (Eq II-24) assurent automatiquement la divergence nulle de la densité de courant. Le problème évoqué avec le modèle 3D est donc inexistant en deux dimensions avec des courants purement normaux.

### Remarque sur les problèmes inverses

Au niveau du problème inverse, ce modèle 2D permet de créer un algorithme d'inversion qui n'est lui-même que 2D. Cela implique qu'avec un tel modèle inverse, seule la distribution  $j_z(x, y)$  peut être retrouvée, et pas  $\mathbf{j}(x, y, z)$ . Bien qu'une certaine quantité d'information soit désormais inaccessible avec le modèle 2D, les hypothèses précédentes diminuent de beaucoup le nombre d'inconnues : la distribution inconnue est désormais scalaire et ne dépend plus que deux variables spatiales. Le problème inverse s'en trouve beaucoup simplifié.

## 2) Approximation 2D : application aux piles et limite de l'approche

Dans le cadre de l'étude des piles à combustible, la dimension selon laquelle le courant peut-être considéré comme invariant est l'axe principal selon lequel circule le courant dans la pile. En toute rigueur, cette approximation est évidemment fautive, ne serait-ce que parce que la pile n'est pas de longueur infinie. Par conséquent, quel que soit le mode de fonctionnement considéré, l'invariance selon  $z$  n'est pas respectée au niveau des fils externes et des plaques terminales. Pourtant ces limitations peuvent être contournées de la manière suivante :

- Seul le champ magnétique de mode commun est influencé par les fils externes à la pile. Celui-ci sera fréquemment calculé de manière séparée par la suite (à l'aide du modèle magnétique 3D où à l'aide d'une détermination expérimentale). Les fils externes ne posent donc aucun problème vis-à-vis des courants différentiels 2D.
- Les courants circulant dans les plaques terminales induisent nécessairement des erreurs au niveau du modèle 2D. Une solution consiste à apporter la modification illustrée sur la figure (Fig. 37 - droite). Au lieu de reboucler à l'infini, les courants rebouclent dans les plaques terminales. Pour modéliser de tels courants, il est possible de se servir du modèle électrocinétique présenté précédemment. Il devient alors possible de modéliser de façon physiquement réaliste l'effet des plaques terminales de très hautes conductivités. Cette façon de procéder sera appelée approximation 2D corrigée. Dans ce cas, le champ magnétique doit néanmoins être calculé avec le modèle magnétique 3D. Mais la distribution de courant demeure intrinsèquement 2D. Des détails supplémentaires sur cette technique sont fournis plus loin (cf. p. 158). Notons que les écarts entre les approximations 2D et 2D corrigées sont d'autant plus importants que la longueur du stack est faible.

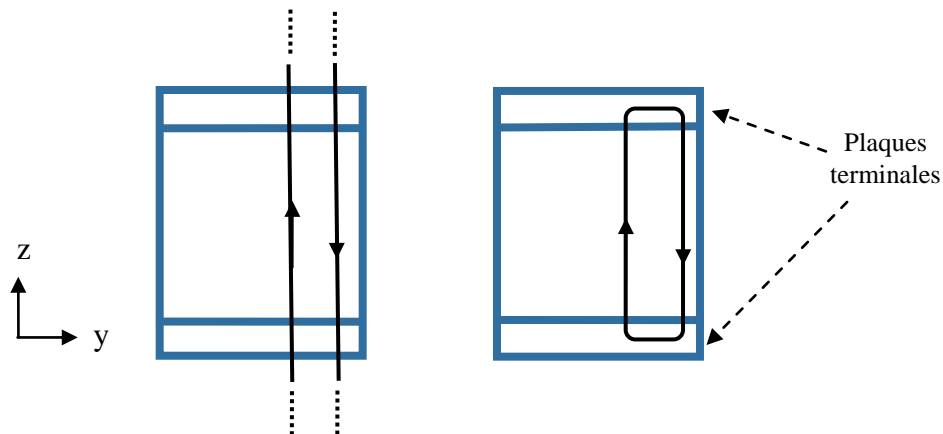


Fig. 37 : Différentes approximations 2D d'un courant différentiel quelconque. A gauche, approximation 2D pure. A droite approximation 2D corrigée.

Ainsi la limitation liée à la non invariance des sources aux extrémités du stack (fils externes et plaques terminales) peut être contournée à l'aide des techniques présentées ci-dessus. Il y a pourtant un autre problème qui vient limiter la validité de l'approximation 2D. Certains types de défauts de fonctionnement vont induire des densités de courant différentes dans les différentes sections du stack. L'invariance selon  $z$  n'est donc pas toujours respectée

même à l'intérieur du stack. Nous allons donc opérer une distinction entre deux types de défauts :

- Les défauts 3D : ils ne respectent pas l'invariance selon  $z$  à l'intérieur du stack. Un exemple typique est donné sur la figure (Fig. 38). Il s'agit d'un défaut étudié dans la section précédente : une cellule du stack est traversée par un courant inhomogène en raison d'une augmentation locale de la résistivité.
- Les défauts 2D : ils respectent l'invariance selon  $z$  à l'intérieur du stack. Un exemple typique est donné sur la figure (Fig. 39). Ici, il s'agit du défaut 3D précédent que nous avons arbitrairement étendu à toutes les cellules du stack. En général, ces défauts 2D sont induits par une distribution non uniforme des gaz réactifs à l'intérieur du stack.

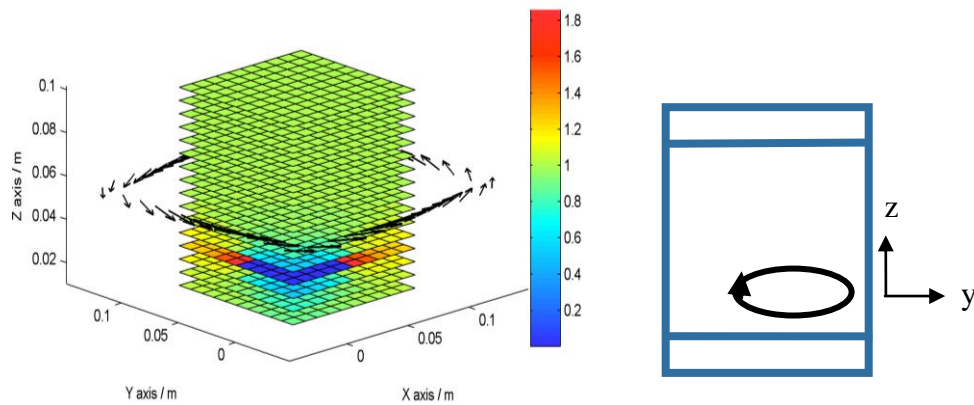


Fig. 38 : A gauche, défaut de fonctionnement 3D où seule une cellule est impactée (densité de courant en  $A.cm^{-2}$ ). A droite, représentation simplifiée du courant différentiel associé à ce défaut.

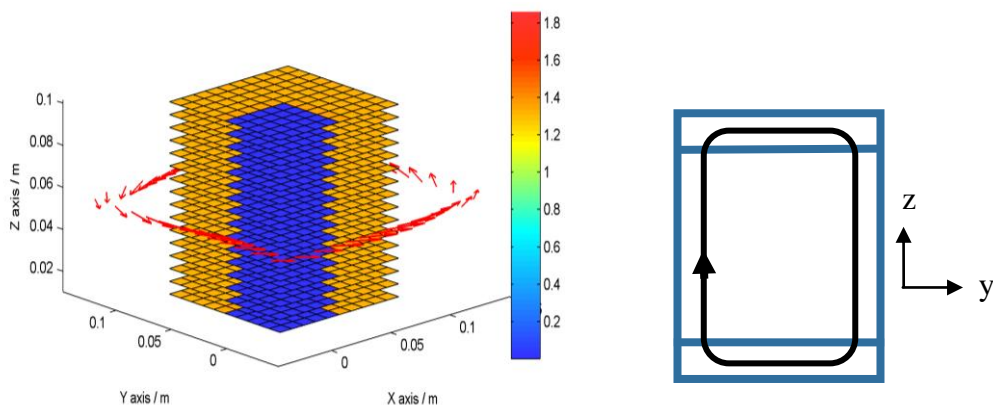


Fig. 39 : A gauche, défaut de fonctionnement 2D où toutes les cellules sont impactées (densité de courant en  $A.cm^{-2}$ ). A droite, représentation simplifiée du courant différentiel associé à ce défaut.

Les valeurs du champ magnétique différentiel de ces deux types de défauts sont données sur le graphique (Fig. 40). Nous observons que le défaut 2D génère un champ magnétique beaucoup plus intense que le défaut 3D. Ce phénomène peut être expliqué en observant la forme des courants différentiels sur les figures (Fig. 38) et (Fig. 39). La surface de la boucle de courant d'un défaut typique 2D est plus grande que celle d'un défaut typique 3D. Sachant que l'intensité d'un dipôle magnétique généré par une boucle de courant tend à être proportionnelle à la surface de la boucle, il est donc normal d'avoir un champ plus important avec un défaut 2D qu'avec un défaut 3D (toutes choses égales par ailleurs). Bien entendu, il est possible d'imaginer des défauts 3D ayant des surfaces de boucle plus grandes que certains défauts 2D. Mais on peut raisonnablement supposer que la tendance générale suit les constatations données ci-dessus.

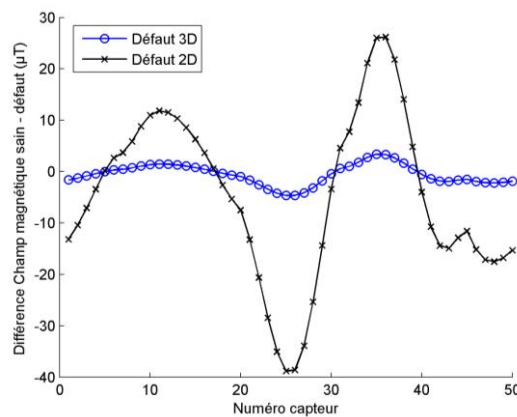


Fig. 40 : Composante selon  $x$  du champ magnétique différentiel des défauts 2D et 3D.

Ainsi, malgré la présence de défauts 3D dans le stack, la modélisation 2D possède l'intérêt de focaliser l'étude du problème inverse sur les distributions de courant les plus faciles à détecter. Les défauts 3D seront alors perçus comme une source de bruit vis-à-vis du modèle inverse. Cette approche n'est bien sûr pas entièrement satisfaisante. L'objectif final est bien entendu de disposer d'un modèle inverse entièrement 3D. Mais l'approche 2D demeure intéressante car elle permet d'accélérer la phase de conception du système de diagnostic et de se concentrer sur les phénomènes prépondérants.

### 3) Intensité du champ magnétique de mode commun et de mode différentiel

Avec ce modèle 2D, il est bien entendu possible de faire la même constatation qu'avec les simulations 3D : le courant homogène crée un champ magnétique beaucoup plus intense que les courants hétérogènes.



Pour illustrer cela, nous avons utilisé la distribution de courant donnée par la figure (Fig. 41). Cette distribution de courant n'est plus issue de notre modèle électrocinétique mais de mesures réelles que nous avons à notre disposition dès le début de ce projet. Ces mesures ont été effectuées par PSA sur sa technologie de stack GENEPAC. La densité de courant a été mesurée dans une section du stack à l'aide d'une plaque de mesure invasive [S++]. En supposant que la densité de courant est invariante selon Oz, nous avons utilisé notre modèle 2D pour évaluer le champ généré (Fig. 41).

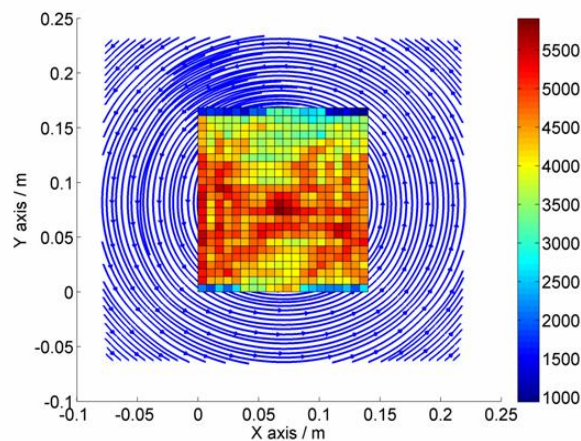


Fig. 41 : Densité de courant en  $A.m^{-2}$  à l'intérieur d'un stack GENEPAC obtenue à l'aide d'une plaque de mesure invasive. Expérience réalisée avec un courant total de 100 A.

Dans la précédente section, nous avons présenté la décomposition d'une densité de courant en un courant de mode commun et un courant de mode différentiel (Fig. 35). Nous faisons la même chose ici avec la distribution de courant de la figure (Fig. 41). Deux distributions de courants sont naturellement obtenues :

- une densité de courant homogène (mode commun correspondant au mode de fonctionnement idéal) dont l'amplitude vaut  $0.43 A.cm^{-2}$  (Fig. 42 - gauche).
- une densité de courant hétérogène (mode différentiel correspondant aux défauts à détecter) dont les variations crêtes à crêtes sont d'environ  $0.45 A.cm^{-2}$  (Fig. 42 - droite).

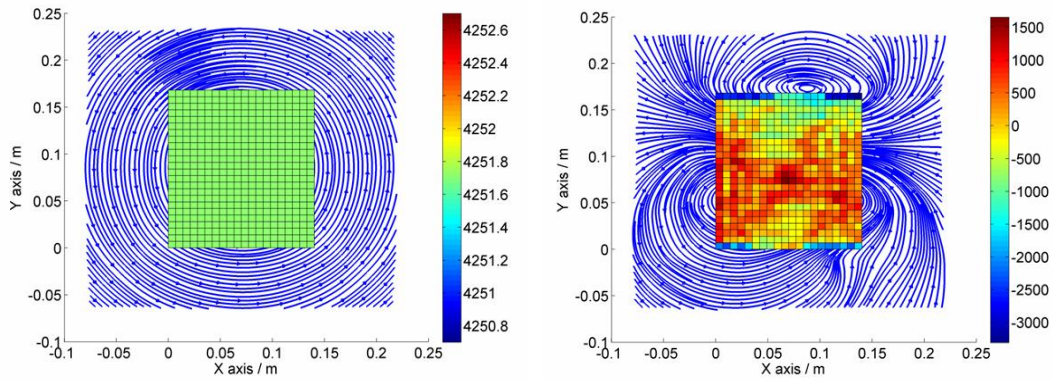


Fig. 42 : Décomposition de la densité de courant ( $A.m^{-2}$ ) en une densité de courant moyenne homogène et une densité de courant hétérogène de moyenne nulle.

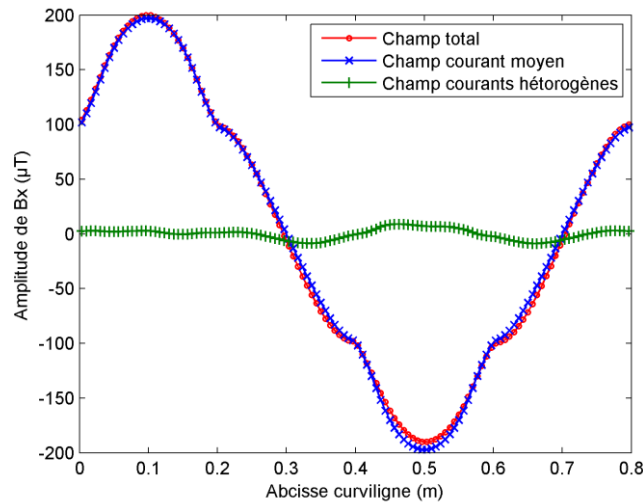


Fig. 43 : Composante x du champ magnétique total, commun et différentiel sur un contour fermé autour de la pile.

La composante selon x du champ magnétique de ces trois distributions est représentée sur la figure (Fig. 43). Bien que les courants de mode commun et différentiel soient à peu près du même ordre de grandeur, le champ magnétique de mode commun est près de 15 fois plus intense que le champ de mode différentiel. Ces résultats sont cohérents avec ceux obtenus à partir du modèle 3D.

#### 4) Conclusion sur le modèle magnétique 2D

Ce modèle magnétique 2D nous a permis de réduire les temps de calcul ainsi que le nombre d'inconnues du problème inverse. Cette approximation permet de focaliser l'étude sur la détection des défauts 2D, ceux-ci générant des champs plus importants que les défauts 3D. L'approximation 2D permet aussi de réaliser des développements théoriques qui aident à

mieux appréhender certaines propriétés fondamentales de l'opérateur de Biot et Savart. Ces développements sont présentés en annexe (cf. p. 228). Enfin, les résultats obtenus avec le modèle 2D sont en accord avec le principal résultat obtenu avec le modèle 3D. Les défauts génèrent un champ magnétique très faible comparé au champ magnétique généré par le courant moyen.

### ***C - Conclusion sur les modèles magnétiques***

Deux modèles magnétiques ont été présentés dans cette section. Le premier (3D) permet d'évaluer de façon réaliste les champs générés par des distributions de courants quelconques. Couplé avec le modèle électrocinétique, il permet d'évaluer l'effet de certaines catégories de défauts de fonctionnement. Le second (2D) permet quant à lui de simplifier le problème inverse et de focaliser l'étude sur les hétérogénéités de courants les plus faciles à détecter.

Ces deux modèles ont permis de faire la même constatation : les inhomogénéités de courant génèrent des champs magnétiques extrêmement faibles comparés au champ généré par un courant homogène. Cela impose au système de mesure deux contraintes antagonistes :

- Une large gamme (750  $\mu\text{T}$ ) pour supporter le champ généré par le courant de mode commun.
- Une résolution très élevée (inférieure au  $\mu\text{T}$ ) afin d'être en mesure de déceler le faible champ généré par les courants différentiels.

### **III - Conclusion sur les modèles directs**

---

Deux modèles ont été présentés dans cette section. Le modèle électrocinétique a permis d'étudier les interactions électriques se produisant à l'intérieur des stacks et d'évaluer les distributions de courants générées par certaines catégories de défaut. Le modèle magnétique permet quant à lui de calculer des champs magnétiques générés par ces distributions de courants. Différentes versions ont été proposées pour ce modèle : une version 3D permettant d'évaluer les courants de manière réaliste et une version 2D permettant de focaliser le problème sur les défauts de fonctionnement les plus faciles à détecter.

Cette étude a permis de mettre en évidence la principale caractéristique des champs magnétiques générés par une pile à combustible : le champ généré par les défauts de fonctionnement est très faible comparé aux champs générés par le mode de fonctionnement sain de la pile. Cette constatation nous a amené à décomposer les courants en deux parties : le mode commun et le mode différentiel. Le courant de mode commun ne nous intéresse pas car il peut être facilement estimé à l'aide d'un ampèremètre. Mais ce courant génère un champ magnétique très intense comparé aux champs différentiels que l'on cherche à mesurer. Cela pose donc deux contraintes antagonistes pour les magnétomètres : être en mesure de ne pas saturer avec le champ de mode commun (750  $\mu\text{T}$ ) et être suffisamment précis pour déceler les champs différentiels (quelques  $\mu\text{T}$ ). Une solution sera proposée pour diminuer l'importance de cette deuxième contrainte (cf. p. 171).

Cette partie a au final permis de développer des outils numériques robustes, rapides et qui se prêtent aisément à la création de modèles inverses. Les approximations réalisées ont consisté pour la plupart à se focaliser sur les phénomènes macroscopiques. Ceux-ci seront en effet les phénomènes les plus faciles à déceler avec le système de diagnostic magnétique. On devine dès à présent que les phénomènes microscopiques de fréquences spatiales élevées seront quasiment indécélables. La résolution spatiale atteignable pour la densité de courant sera limitée par la plus petite variation de champ magnétique décelable par les capteurs magnétiques. Ces considérations seront de première importance lors de la création du modèle inverse.



## **Chapitre III : Résolution du problème inverse**



Le chapitre précédent a présenté un outil permettant de calculer le champ magnétique à partir de la connaissance de la densité de courant. Ce modèle va permettre dans ce chapitre de créer un nouvel outil permettant d'obtenir cette fois-ci la densité de courant à partir du champ magnétique (Fig. 44).

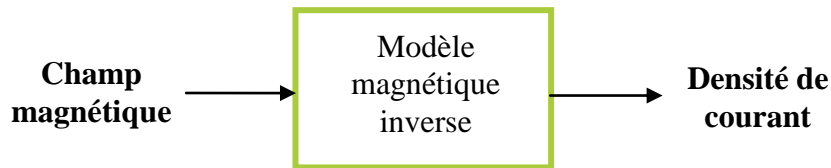


Fig. 44 : Entrées et sorties du modèle inverse magnétique.

Le développement de ce modèle inverse pose des difficultés qui étaient inexistantes lors du développement des précédents modèles directs. Tout d'abord, la solution d'un problème inverse n'est en général pas unique. De plus, les modèles inverses sont extrêmement sensibles au bruit de mesure. La première section de ce chapitre présente et illustre les difficultés inhérentes à ce type de problèmes.

La seconde section de ce chapitre présente les outils algébriques usuels permettant de discrétiser et de résoudre notre problème inverse. Afin de contourner les problèmes précédents, nous introduisons des techniques de régularisation permettant au modèle inverse de filtrer une partie du bruit de mesure, et de choisir une solution physiquement réaliste parmi toutes les solutions possibles.

Enfin, la troisième partie s'intéresse à la façon dont il est possible de tirer parti des connaissances que nous avons sur la technologie des piles à combustible afin de rendre le système de mesure plus efficace. Cela nous amène à décrire les courants dans la pile à combustible à l'aide d'une version simplifiée du modèle électrocinétique précédent. Nous nous intéressons aussi à la structure de capteurs (nombre, orientations, emplacements) permettant d'améliorer la qualité de reconstruction des densités de courants.



## I - Problématiques associées à la résolution du problème inverse magnétique

Cette section introduit les problématiques générales liées à l'inversion de notre modèle direct magnétique. Ces problématiques sont étroitement liées aux caractéristiques du modèle direct. Nous illustrons donc ici les propriétés de l'opérateur de Biot et Savart à l'origine des difficultés posées par l'inversion. La première partie rappelle brièvement la définition d'un problème inverse. La seconde s'intéresse aux propriétés d'existence et d'unicité de la solution de notre problème inverse. Enfin, à l'aide d'une analogie simple, la troisième partie illustre le caractère instable de la solution du problème inverse.

### A - Définitions du problème inverse

Deux modèles sont dits inverses l'un de l'autre si le rôle des entrées et sorties (données et inconnues) est échangé. Cette définition fait donc jouer un rôle symétrique aux deux modèles considérés. Il est néanmoins d'usage en physique et sciences de l'ingénieur de réserver le terme de "modèle inverse" aux modèles permettant de trouver les causes ayant produit les effets mesurés. Le terme de "modèle direct" est quant à lui utilisé pour qualifier les modèles permettant de prédire certains effets à partir de certaines causes (Fig. 45).

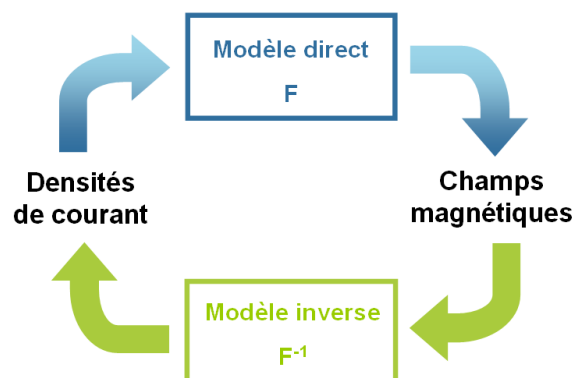


Fig. 45 : Définition du modèle direct et inverse.

D'après cette convention, la loi de Biot et Savart développée dans le précédent chapitre est notre modèle direct. Cette loi est notée de façon abrégée de la manière suivante :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}[\mathbf{j}] \quad \text{Eq III-1}$$

Nous rappelons que lorsque nous travaillons en trois dimensions, ce modèle direct  $\mathbf{F}$  correspond à la transformation linéaire suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega_s} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \wedge \mathbf{j}(\mathbf{r}_s) d\Omega_s \\ \text{avec } \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\mathbf{r}_s - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^3} \end{cases} \quad \text{Eq III-2}$$

Par la suite, nous utiliserons fréquemment l'approximation 2D. Celle-ci consiste à supposer que les courants sont invariants selon  $z$  et normaux au plan  $xOy$ . Le modèle direct  $\mathbf{F}$  correspond alors à la transformation suivante<sup>a</sup> :

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma_s} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \cdot j(\mathbf{r}_s) d\Gamma_s \\ \text{avec } \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \begin{pmatrix} y_s - y \\ x - x_s \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{Eq III-3}$$

L'objectif de ce chapitre est de développer un modèle inverse magnétique  $\mathbf{F}^{-1}$  donnant la solution de l'équation (Eq III-1)<sup>b</sup> :

$$\mathbf{j} = \mathbf{F}^{-1}[\mathbf{B}] \quad \text{Eq III-4}$$

Ces définitions de modèle "direct" et "inverse" sont basées sur la notion de causalité. On devine donc que la résolution d'un problème inverse va se révéler plus complexe que la résolution de son homologue direct. En effet, si de mêmes causes produisent les mêmes effets, il est néanmoins possible qu'un même effet puisse être généré par des causes différentes. La solution d'un problème inverse n'est donc en général pas unique.

Cette difficulté est inhérente à la nature d'un problème inverse. Outre la question d'unicité de la solution, l'étude mathématique de cette classe de problèmes montre aussi que

---

<sup>a</sup> Contrairement au chapitre précédent, les notations en intégrales triples ou doubles ne seront utilisées que lorsque des calculs détaillés seront nécessaires. L'indice  $z$  (indiquant la composante normale des courants) n'est plus utilisé afin d'alléger les notations.

<sup>b</sup> D'un point de vue pratique, ce modèle inverse  $\mathbf{F}^{-1}$ , comme n'importe quel autre modèle, peut à priori se présenter sous la forme d'une relation explicite (comme ce fut le cas avec le modèle direct magnétique) ou bien sous la forme d'un algorithme donnant la solution d'une équation (Eq III-1) sans jamais expliciter  $\mathbf{F}^{-1}$  (comme ce fut le cas avec le modèle électrocinétique).

l'existence ou la stabilité de la solution n'est pas toujours assurée. Les problèmes inverses sont donc qualifiés par les mathématiciens de problèmes mal-posés [Hadamard, 1932].

Le paragraphe suivant présente brièvement les problématiques d'existence et d'unicité de la solution. Suivra ensuite un paragraphe illustrant les problèmes d'instabilité du modèle magnétique à l'aide d'une analogie avec un circuit électrique RC.

### ***B - Existence et unicité de la solution du problème inverse***

Une équation quelconque peut éventuellement admettre une solution, aucune solution, ou plusieurs solutions. L'existence et l'unicité d'une solution pour l'équation (Eq III-1) dépend des propriétés de surjectivité et d'injectivité du modèle  $\mathbf{F}$ . L'opérateur  $\mathbf{F}$  étant linéaire, quatre situations différentes sont possibles<sup>c</sup> :

- $\mathbf{F}$  est injectif et surjectif (bijectif) : l'équation (Eq III-1) admet toujours une unique solution<sup>d</sup>. Il s'agit de la seule situation où il est rigoureusement possible de définir un opérateur inverse  $F^{-1}$ .
- $\mathbf{F}$  n'est pas surjectif (mais injectif) : l'équation (Eq III-1) admet une ou aucune solution selon les données du problème. En raison du bruit de mesure, il est alors possible de mesurer un champ magnétique pour lequel il n'existe aucune densité de courant capable de le générer. Cette absence de solution nécessite un filtrage préalable du champ magnétique afin de projeter celui-ci dans un sous-espace admettant une solution.
- $\mathbf{F}$  n'est pas injectif (mais surjectif) : l'équation (Eq III-1) admet toujours une infinité de solutions. Cela signifie qu'il existe des densités de courants invisibles ne générant aucun champ magnétique. Cette non-unicité de la solution nécessite l'introduction d'informations supplémentaires dans le modèle inverse afin d'aider celui-ci à choisir une solution parmi toutes les solutions possibles.

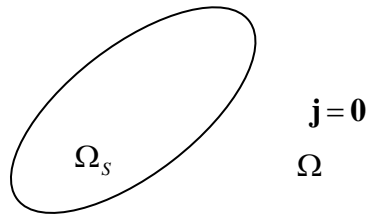
---

<sup>c</sup> Pour certains modèles linéaires particuliers, les propriétés d'injectivité et de surjectivité ne sont pas toujours indépendantes. Ainsi, pour les matrices carrées, lorsque l'injectivité n'est pas assurée, il en va nécessairement de même pour la surjectivité.

<sup>d</sup> Dans le chapitre précédent, nous avons présenté des opérateurs différentiels définissant les problèmes d'électrocinétique et de magnétostatique. Ces opérateurs sont des transformations bijectives (en prenant soin de leur associer des conditions aux limites). C'est l'une des raisons pour laquelle la résolution de ces problèmes directs est plus aisée.

- $\mathbf{F}$  est ni injectif, ni surjectif : l'équation (Eq III-1) admet une infinité de solutions ou aucune solution selon les données du problème. Il est à la fois nécessaire d'ajouter de l'information et de réaliser un filtrage.

Pour connaître les propriétés d'injectivité et de surjectivité de l'opérateur de Biot et Savart, il est avant tout nécessaire de définir les espaces de définitions des données et des inconnues<sup>e</sup>. D'après le cahier des charges, l'outil de diagnostic doit être non invasif. Le champ magnétique ne peut donc être connu que dans les régions de l'espace où les sources sont nécessairement nulles. L'espace a donc été partitionné en deux sous-domaines disjoints : l'intérieur des sources  $\Omega_S$  et l'extérieur des sources  $\Omega$ . Ce partitionnement est représenté sur la figure (Fig. 46). Un partitionnement équivalent peut aussi être réalisé en deux dimensions (domaines  $\Gamma_S$  et  $\Gamma$ ).



*Fig. 46 : Partitionnement de l'espace en deux sous domaines.*

### **Injectivité**

Avec de tels espaces de définitions<sup>f</sup>, la propriété d'injectivité n'est pas assurée pour l'opérateur de Biot et Savart. Il existe en effet des distributions de courants générant un champ magnétique nul. Un exemple d'une telle distribution de courants est donné par le câble coaxial infiniment long. Celui-ci est schématiquement représenté sur la figure (Fig. 47). Nous voyons que ce courant génère un champ magnétique uniquement à l'intérieur du domaine  $\Gamma_S$ . Ce courant sera donc impossible à estimer avec des mesures de champs magnétiques réalisées dans  $\Gamma$ .

---

<sup>e</sup> La surjectivité et l'injectivité dépendent très fortement des espaces de définitions. Par exemple, la transformation  $f : x \rightarrow x^2$  n'est ni injective, ni surjective si les variables appartiennent à l'espace des réels. Mais elle devient bijective si les variables (en entrée et en sortie) appartiennent à l'espace des réels positifs.

<sup>f</sup> Nous proposons de considérer que le champ magnétique mesurable appartient à l'espace fonctionnel  $L^2(\Omega)$ , c'est-à-dire à l'espace des fonctions de carré intégrables sur  $\Omega$ . De la même manière, nous considérons que la densité de courant appartient à l'espace fonctionnel  $L^2(\Omega_S)$ .

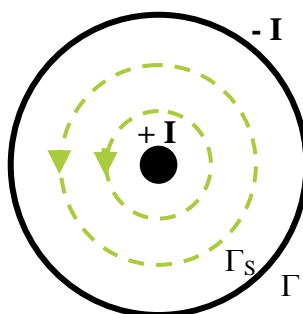


Fig. 47 : Câble coaxial infiniment long. Il s'agit d'un exemple de source de courant ne générant aucun champ magnétique dans  $\Gamma$ .

Les développements analytiques présentés en annexe (cf. p. 228) nous ont permis de trouver de nombreuses autres sources de courants invisibles en deux dimensions. De nombreux exemples sont donnés sur la figure (Fig. 48). Des sources de courants 3D invisibles sont aussi proposées dans une autre annexe (cf. p. 251).

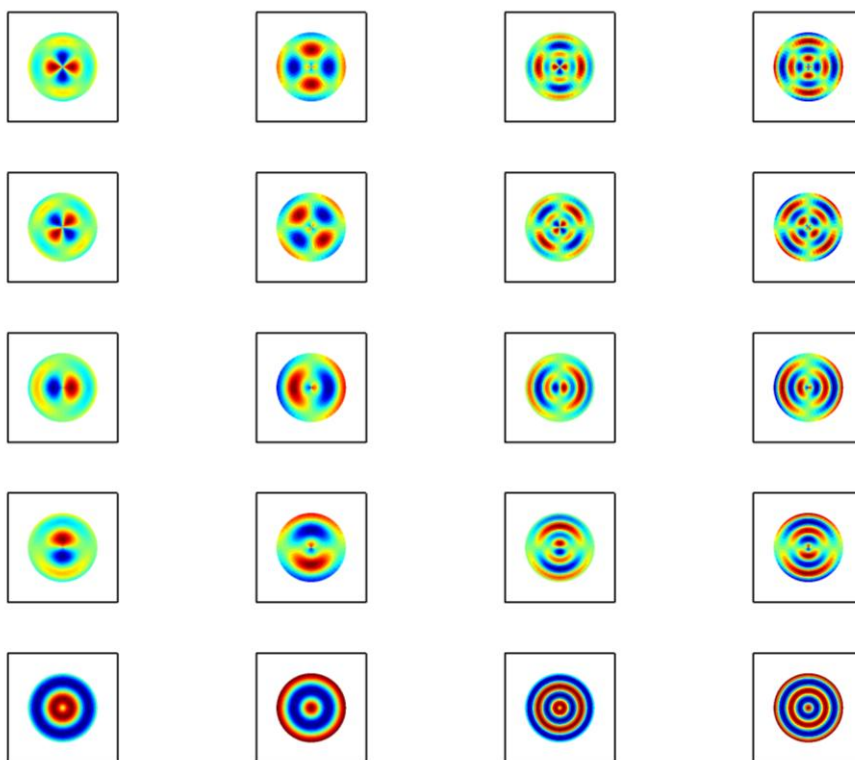


Fig. 48 : Exemples de densités de courants ne générant aucun champ magnétique.

La conséquence de tout ceci est qu'il existe une infinité de solutions à notre problème inverse. Par conséquent, l'opérateur  $F^{-1}$  n'existe pas. Il sera donc nécessaire par la suite d'ajouter une certaine forme d'information *a priori* afin de lever les indéterminations du problème. Cela revient à construire un modèle inverse, noté  $F^\#$ , qui sélectionne une solution

parmi toutes les solutions possibles. En règle générale, si on ne dispose d'aucune autre source d'informations sur les densités de courants, cela consiste à supposer ces courants invisibles égaux à zéro.

### **Surjectivité**

Concernant la surjectivité, on devine facilement que celle-ci a peu de chance d'être respectée. Nous connaissons déjà au moins deux contraintes pesant sur les champs magnétiques : ils doivent être à divergence et rotationnel nuls en dehors des sources. Mais en raison des erreurs de mesure, il est tout à fait possible de mesurer des champs magnétiques ne respectant pas ces contraintes. Le problème inverse n'admettra alors aucune solution.

Ce problème peut être contourné en projetant les mesures dans le sous-espace image de l'opérateur de Biot et Savart. Au final, l'absence de surjectivité n'est pas un problème mais plutôt un avantage. On profite ainsi de la projection des mesures dans ce sous-espace pour filtrer une partie des erreurs de mesure. L'erreur de reconstruction des courants est ainsi diminuée. Les développements en harmoniques circulaires présentés en annexe (cf. p. 228) nous ont permis de caractériser le sous-espace vectoriel auquel appartient le champ magnétique.

Si on souhaite néanmoins éviter toute projection, les développements en harmoniques circulaires ont aussi montré qu'il suffit de connaître le champ magnétique sur un seul cercle et sur une seule composante (radiale ou orthoradiale) pour que celui-ci soit entièrement caractérisé. Ce résultat sera mis à profit pour réduire le nombre de mesures.

### **Bilan**

Les questions d'existence et d'unicité (surjectivité et injectivité) dépendent très fortement des espaces auxquels appartiennent les entrées et sorties du modèle. Ainsi, lorsque le modèle direct sera discrétisé, il sera possible d'obtenir un modèle réduit bijectif à l'aide d'un choix judicieux d'inconnues et de mesures. On devine donc d'ores et déjà qu'il existe des choix de discrétisation qui peuvent faciliter ou complexifier la résolution du problème inverse. De manière générale, la modification des espaces de définitions est une façon de transformer un problème mal posé (non injectif, non surjectif) en un problème mieux posé (bijectif).

L'existence d'un très grand nombre de courants invisibles doit néanmoins nous rappeler qu'une procédure de discrétisation (et de régularisation) ne permet de reconstruire qu'une

partie seulement de l'information. Quelle que soit la technique de discrétisation et de régularisation employée, une partie importante de l'information originale demeurera toujours inaccessible à l'aide de la seule mesure du champ magnétique.

### ***C - Instabilité du problème inverse : illustration avec l'analogie du circuit RC***

Les notions de surjectivité et d'injectivité ne sont néanmoins pas suffisantes pour garantir de manière fiable la résolution du problème inverse. En effet, même lorsqu'un opérateur est bijectif, l'inversion de celui-ci peut engendrer d'importantes instabilités rendant les résultats inutilisables. Dans certaines circonstances, de très petites erreurs sur les données peuvent engendrer des erreurs gigantesques sur la solution. L'objectif de ce paragraphe est d'illustrer ce phénomène à l'aide d'un modèle bijectif simple mais instable. Pour montrer cela, nous proposons une analogie entre un circuit RC et notre modèle magnétique. Nous profitons aussi de cet exemple pour introduire les principales problématiques que nous rencontrerons dans ce chapitre.

#### **1) Modélisation du circuit RC**

La modélisation du circuit série RC présenté sur la figure (Fig. 49) amène à l'équation différentielle suivante :

$$e(t) = \left( 1 + RC \frac{d}{dt} \right) s(t) \quad \text{Eq III-5}$$

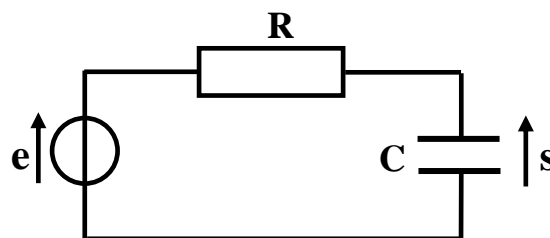


Fig. 49 : Circuit RC

La résolution du problème direct consiste à prédire la sortie de ce filtre passe-bas connaissant l'entrée. Il est possible de résoudre numériquement cette équation ou bien de développer une relation explicite à l'aide de la transformée de Laplace. Nous préférons l'inversion analytique pour conserver l'analogie avec la façon dont nous avons résolu le problème magnétostatique dans le chapitre précédent. La solution est donnée par :

$$s(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} H(t, t_s) e(t_s) dt_s \\ \text{avec } H(t, t_s) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{(t-t_s)}{RC}} \Gamma(t-t_s) \end{cases} \quad \text{Eq III-6}$$

La fonction  $\Gamma$  est ici la fonction signe. Le régime stationnaire est supposé établi et les conditions initiales du problème sont repoussées à l'infini.

La résolution du problème inverse consiste à reconstruire le signal en entrée du filtre connaissant le signal en sortie de celui-ci. Ici l'inversion peut sembler triviale. Nous avons déjà défini l'entrée à partir de la sortie à l'aide de l'équation (Eq III-5). L'opérateur différentiel défini par cette équation est donc notre opérateur inverse. Celui-ci sera noté  $H^{-1}$ . La figure (Fig. 50) résume l'analogie entre le circuit RC et le problème de magnétostatique. Dans les deux cas, le modèle direct est un opérateur intégral alors que le modèle inverse est un opérateur différentiel.

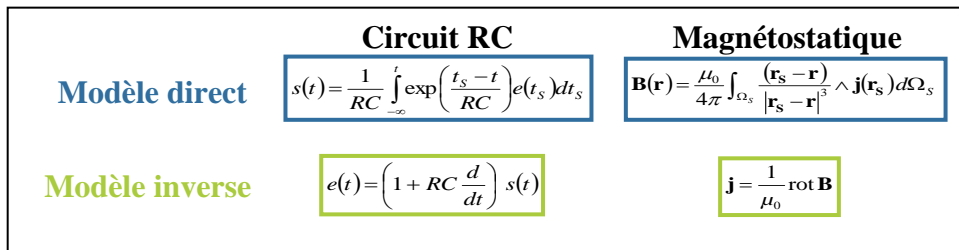


Fig. 50 : Analogie magnétostatique – circuit RC.

## 2) Première tentative d'inversion

Afin de tester le modèle inverse, un signal est appliqué à l'entrée du circuit RC. La figure (Fig. 52) illustre ce signal ainsi que le signal en sortie du circuit obtenu avec le modèle direct. Dans toute application réelle, le signal de mesure est nécessairement bruité. On ajoute ainsi un bruit blanc au signal de sortie (Fig. 52).



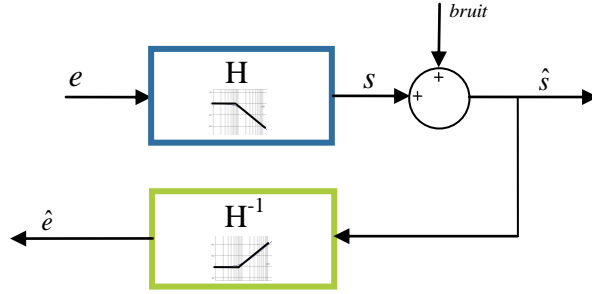


Fig. 51 : Schéma fonctionnel du problème inverse.

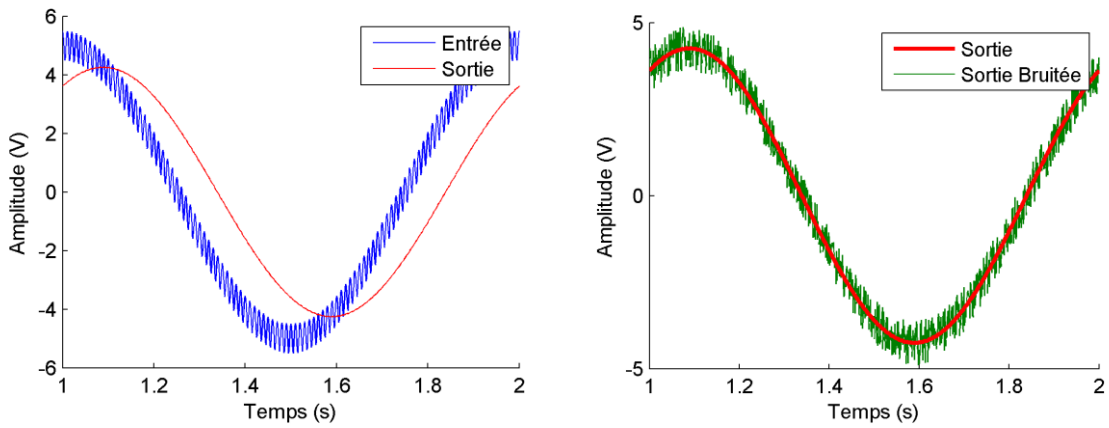


Fig. 52 : Signaux en entrée et sortie du filtre (gauche) et ajout du bruit sur la sortie (droite).

Nous utilisons ensuite le modèle inverse  $H^{-1}$  (Eq III-5) sur ce signal bruité afin de reconstruire le signal d'entrée. La figure (Fig. 53) illustre le résultat obtenu. Nous voyons que les résultats sont totalement incohérents.

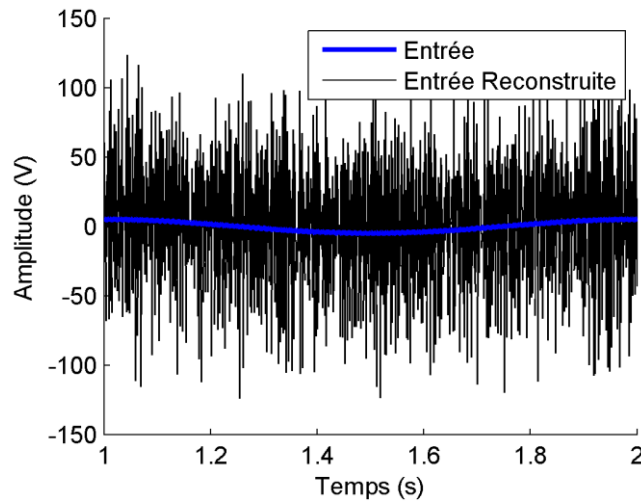


Fig. 53 : Signal reconstruit.

Cet échec de l'inversion peut être expliqué de manière très simple si on décide de travailler dans le domaine fréquentiel. Les fonctions de transfert du modèle direct et inverse dans cette base sont respectivement données ci-dessous :

$$H(w) = \frac{S(w)}{E(w)} = \frac{1}{1 + iwRC} \quad \text{Eq III-7}$$

$$H^{-1}(w) = \frac{E(w)}{S(w)} = 1 + iwRC \quad \text{Eq III-8}$$

Le modèle direct (intégrateur) atténue les hautes fréquences alors que le modèle inverse (dérivateur) les amplifie. Normalement, il ne devrait pas y avoir de composantes fréquentielles élevées à la sortie du filtre. Mais cela n'est pas vérifié en raison de la présence de bruit. Le modèle inverse amplifie alors les composantes fréquentielles élevées de ce bruit, d'où une solution excessivement bruitée.

Le modèle direct est pourtant ici bijectif<sup>g</sup>. Mais la présence de bruit rend indécélable les signaux hautes fréquences qui ont de très faibles amplitudes à la sortie du filtre. Cet exemple illustre le fait que la bijectivité n'est pas suffisante pour garantir l'inversion d'un problème de manière stable. En pratique, on peut considérer que le bruit fait à la fois perdre les propriétés d'injectivité et de surjectivité.

### **3) Régularisation du problème inverse**

Une solution très simple au problème précédent consiste à régulariser le modèle inverse en insérant un filtre passe-bas à l'entrée de celui-ci. Le principe est illustré sur la figure (Fig. 54).

---

<sup>g</sup> Nous employons ici le terme bijectif car, bien qu'une partie du spectre soit atténué, l'ensemble de celui-ci est transmis de manière univoque à travers le filtre.

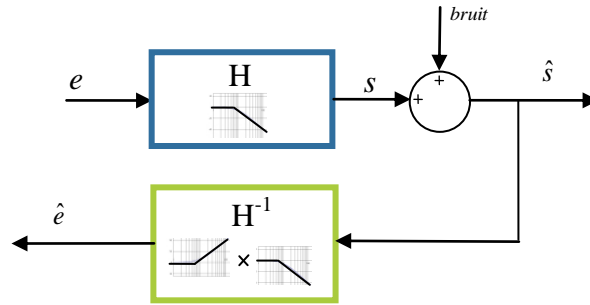


Fig. 54 : Modification du modèle inverse.

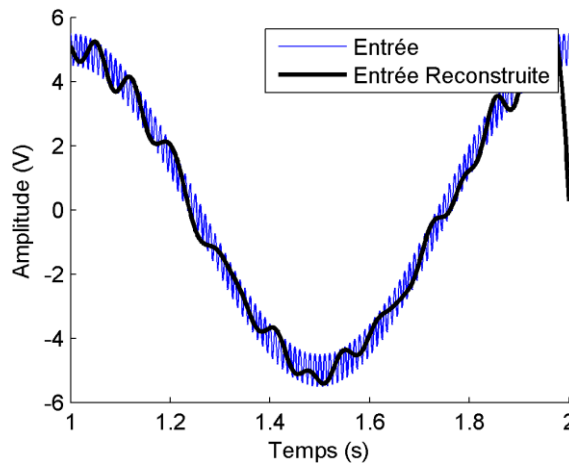


Fig. 55 : Signaux reconstruit après régularisation (utilisation d'un filtre numérique).

Le bruit à haute fréquence est ainsi supprimé et le dérivateur n'amplifie rien. Le résultat est illustré sur la figure (Fig. 55). Deux conclusions s'imposent :

- Cette technique permet de reconstruire avec succès les signaux basses fréquences présents à l'entrée du circuit RC.
- Il est par contre impossible de reconstruire les composantes fréquentielles élevées qui étaient originellement présentes. Le circuit RC et le bruit ont "détruit" cette information. C'est parce que nous avons précédemment essayé de reconstruire cette information perdue que les résultats obtenus étaient incohérents. La régularisation du problème consiste à supposer ces composantes fréquentielles nulles. C'est l'information *a priori* que nous ajoutons. Cette information est certainement fautive, mais elle a le mérite de permettre la reconstruction correcte d'une partie du signal.

#### 4) Bilan sur l'analogie

L'exemple présenté ci-dessus est extrêmement basique. Le circuit RC n'est qu'un filtre passe bas d'ordre 1 atténuant très peu. Des techniques de traitement de signal plus élaborées permettraient de reconstruire beaucoup mieux le signal d'entrée proposé tout en nettoyant le bruit de manière beaucoup plus efficace. Néanmoins, cette analogie a le mérite d'illustrer une partie importante des problèmes que nous allons rencontrer par la suite.

#### Atténuation des densités de courants de fréquences spatiales élevées

Comme le circuit RC, le modèle magnétique direct est aussi un filtre passe bas : les fréquences spatiales élevées de la densité de courant ne sont quasiment pas transmises au champ magnétique. Cette constatation a déjà été faite au chapitre précédent lors de plusieurs simulations numériques : le champ magnétique généré par le courant homogène (mode commun) est bien plus important que le champ généré par les courants hétérogènes (modes différentiels). Ce phénomène est partiellement mis en équation en annexe (cf. p. 228). L'allure générale de ce filtre est donnée sur la figure (Fig. 56). Nous voyons sur cette figure qu'un monopôle (mode commun) génère un champ magnétique plus intense que les dipôles. De la même manière, ces dipôles génèrent un champ plus intense que les quadrupôles et ainsi de suite.

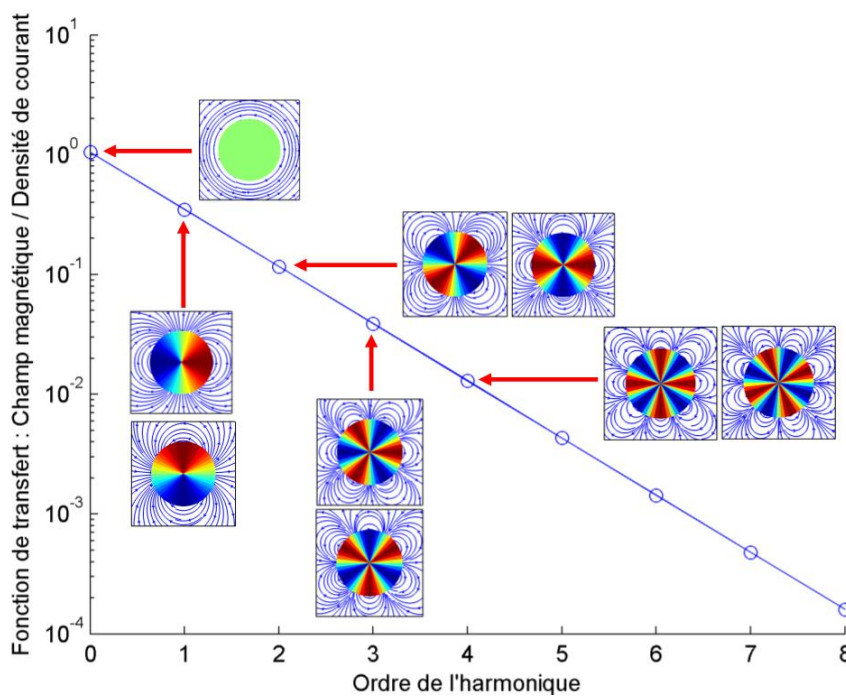


Fig. 56 : Allure générale de la fonction de transfert reliant les courants aux champs magnétiques.

En plus des distributions de courants invisibles évoquées dans le paragraphe précédent, nous voyons ici qu'il existe aussi des distributions de courants qui seront en pratique elles-aussi invisibles en raison de la présence de bruit. Essayer de reconstruire cette information perdue ne mènera qu'à l'amplification du bruit de mesure. Comme avec le circuit RC, il sera nécessaire de régulariser le problème. Se pose alors la question du choix de la technique de régularisation et du dimensionnement de celle-ci (type et ordre du filtre, fréquence de coupure...). Cette question sera étudiée plus loin (cf. p. 147).

### **Numérisation du champ magnétique**

L'analogie avec le circuit RC aurait pu être poussée plus loin avec la problématique de la numérisation. Un signal ne peut en général être connu qu'à l'aide d'un nombre fini de mesures. Si ce nombre est insuffisant, ou si ces mesures sont mal localisées (dans l'espace ou dans le temps), des phénomènes de recouvrement de spectre peuvent survenir. Pour un signal temporel, un critère simple est fourni par le théorème de Shannon<sup>h</sup>. Pour le champ magnétique, bien que ce critère soit plus complexe, la problématique demeure la même. Cette question est traitée en annexe (cf. p. 228).

### **Réduction du bruit de mesures**

Au niveau expérimental, le niveau de bruit doit être le plus faible possible, aussi bien avec le circuit RC qu'avec le système de diagnostic magnétique. Un soin très important doit donc être apporté à l'ensemble de la chaîne de mesures. C'est probablement le cas pour n'importe quelle application. Mais le caractère instable de nos modèles inverses rend cette question particulièrement critique ici.

## **5) Limites de l'analogie**

Il est néanmoins nécessaire ici de préciser que l'analogie avec le circuit RC possède ses limites. En réalité, le problème du circuit RC s'apparente mieux à une autre technique de diagnostic par champ magnétique déjà existante [Candusso et al., 2004]. Les auteurs de cet article ont fait le choix de réaliser un outil invasif et mesurent le champ magnétique à l'intérieur même de la pile. Leur modèle inverse est bien l'équation de Maxwell-Ampère :

---

<sup>h</sup> La fréquence d'échantillonnage doit être au moins deux fois supérieure à la fréquence maximale contenue dans le signal à numériser. Dans le cas contraire, le phénomène de recouvrement de spectre apparaît.

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B}$$

Eq III-9

D'une manière similaire à ce que nous venons de faire, les auteurs prennent soin de filtrer les mesures afin d'éviter l'amplification du bruit lors de l'application de l'opérateur rotationnel. Notre outil de diagnostic devant être non invasif, nous ne pouvons mesurer le champ magnétique qu'à l'extérieur des sources. Par conséquent, la différence majeure entre le circuit RC et notre problème est l'aspect non local de ce dernier. Pour résumer, les principales différences sont :

- Nous ne disposons pas de modèle inverse explicite équivalent à (Eq III-5) ou (Eq III-9). Nous aurons à le développer nous mêmes.
- Contrairement au circuit RC, le modèle magnétique direct n'est pas bijectif. Il n'atténue pas seulement les hautes fréquences, il coupe aussi (sans aucune atténuation) certaines distributions de courants de basses et hautes fréquences<sup>i</sup>.
- Les courants et champs magnétiques n'ont pas les mêmes domaines de définition (intérieur de la pile pour les courants, extérieur de la pile pour les champs). Les signaux d'entrées et de sorties de nos modèles (direct ou inverse) appartiennent donc à deux espaces différents. La transformée de Fourier ou de Laplace n'est donc plus parfaitement adaptée ici à l'étude du spectre des opérateurs et à la conception des filtres de régularisation. Il est nécessaire d'introduire de nouveaux changements de bases pour l'étude de ce problème.
- Le problème est désormais tridimensionnel, et des contraintes géométriques interviennent. La numérisation du champ magnétique est donc plus délicate à réaliser et l'équivalent du critère de Shannon est plus complexe à définir.

---

<sup>i</sup> Comme le modèle magnétique (en plus d'atténuer certaines composantes) coupe certaines composantes, cela nous pousse à considérer qu'il n'est pas injectif. Le circuit RC ne faisant qu'atténuer certaines fréquences, nous considérons qu'il est injectif (même atténuées, les composantes sont transmises).

### ***D - Conclusion***

Cette section introductive aux problèmes inverses a permis d'illustrer les difficultés auxquelles nous sommes confrontés lorsqu'il s'agit d'inverser la loi de Biot et Savart. Les précédentes considérations nous ont permis de montrer que :

- La loi de Biot et Savart n'est pas surjective. Cela est plus un avantage qu'un problème. Le filtrage des mesures suffira à assurer l'existence d'une solution.
- La loi de Biot et Savart n'est pas injective. Le problème inverse admet donc une infinité de solutions. Le modèle inverse que nous construirons devra donc être en mesure de sélectionner judicieusement une solution parmi toutes les solutions possibles.
- La loi de Biot et Savart est un filtre passe-bas : lorsque la fréquence spatiale de l'entrée (courants) augmente, l'amplitude de la sortie (champs magnétiques) diminue. Cette caractéristique a pour conséquence que le modèle inverse amplifie fortement le bruit de mesure. Il sera donc nécessaire de stabiliser le modèle inverse pour éviter d'obtenir une solution physiquement irréaliste.

La prochaine section présente les outils algébriques permettant de discrétiser la loi de Biot et Savart, puis de l'inverser en assurant l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution.

## **II - Outils algébriques pour la résolution du problème inverse**

---

Les résultats de la précédente section nous ont permis de mieux comprendre le comportement du modèle direct magnétique. Nous savons par exemple que la loi de Biot et Savart atténue très fortement l'information portée par la densité de courant au niveau du champ magnétique. A ces difficultés, s'ajoute le fait que la loi de Biot et Savart est un modèle continu difficile à manipuler. Une annexe propose quelques méthodes pour inverser partiellement ce modèle (cf. p. 228). Mais ces développements sont limités à des objets cylindriques. Afin de traiter des géométries plus complexes comme celle de notre pile à combustible, cette section propose de transformer ce modèle continu en un modèle discret. Cela va nous permettre d'utiliser les outils de calculs matriciels pour l'inverser. Cette section est décomposée de la manière suivante :

- Afin de réduire les dimensions de notre problème, nous définissons un nombre fini de mesures et d'inconnues.
- A l'aide de la précédente paramétrisation, le modèle continu (loi de Biot et Savart) est transformé en un modèle discret.
- A notre nouveau modèle direct, nous ajoutons l'information certaine que nous possédons sur la densité de courant (courant total, conservation du flux, flux nul sur les bords).
- A partir du système d'équations obtenu, nous tentons de résoudre celui-ci avec la méthode des moindres carrés. Nous constatons qu'une telle approche produit des solutions extrêmement bruitées.
- Nous proposons ensuite une décomposition en valeurs singulières pour étudier les caractéristiques du modèle direct discrétisé. Nous expliquons alors les raisons de l'échec de l'inversion.
- Nous proposons enfin une technique de régularisation permettant d'inverser avec succès notre modèle direct.



### A - Paramétrisation du problème

La loi de Biot et Savart est un modèle impliquant des fonctions  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{B}$  à variables continues. Pour inverser un tel modèle à l'aide d'outils algébriques, la première étape consiste à paramétriser ces deux fonctions à l'aide de variables discrètes. L'idée consiste à représenter ces deux fonctions à l'aide d'un nombre fini de coefficients.

#### Paramétrisation de la densité de courant

La paramétrisation de la densité de courant consiste à écrire celle-ci comme une combinaison linéaire de  $N$  fonctions  $\Phi_p$ .

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_s) = \sum_{p=1}^N \Phi_p(\mathbf{r}_s) J_p \quad \text{Eq III-10}$$

Par conséquent, nous ne cherchons désormais plus à estimer la fonction  $\mathbf{j}$  mais les  $N$  coefficients  $J_p$ . Mais avant de résoudre un quelconque problème, il faut choisir les  $N$  fonctions de forme  $\Phi_p$ . Les possibilités sont très nombreuses. Ces fonctions  $\Phi_p$  peuvent par exemple s'appuyer sur les éléments d'un maillage (Dirac, triangles, fonctions portes, polynômes de Lagrange...). Un exemple 2D très simple est présenté sur la figure (Fig. 57 - gauche). Les fonctions  $\Phi_p$  étant ici des fonctions portes, les coefficients  $J_p$  peuvent alors être vus comme les valeurs moyennes de la densité de courant sur chaque élément du maillage. Mais les fonctions  $\Phi_p$  peuvent être aussi indépendantes de tout maillage (polynômes, fonctions trigonométriques<sup>j</sup>...). Un exemple est donné sur la figure (Fig. 57 - droite). Sur ce second exemple, des fonctions trigonométriques sont utilisées. Les nombres  $J_p$  peuvent alors être vus comme les coefficients de la décomposition en série de Fourier de la densité de courant.

---

<sup>j</sup> Le maillage dont nous parlons ici est celui permettant de découper le domaine  $\Omega_s$ . D'une certaine manière, toutes les bases reposent sur un maillage sous-jacent. Ainsi, les fonctions trigonométriques reposent sur le maillage de l'espace réciproque du domaine  $\Omega_s$ .

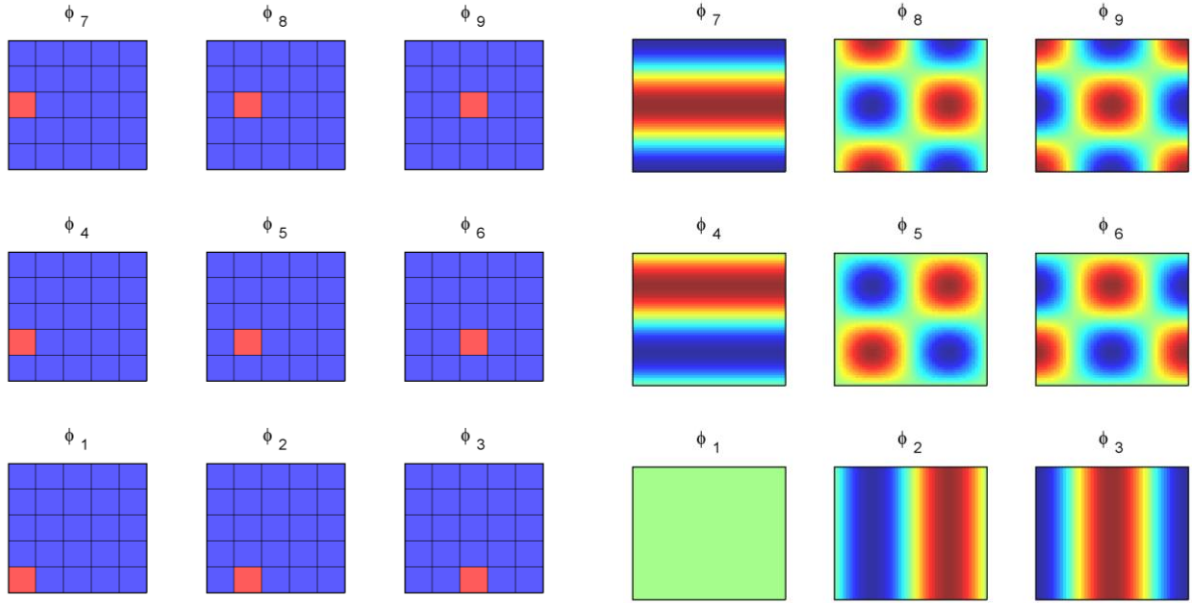


Fig. 57 : Illustration de deux bases  $\Phi$ . Seules les neuf premières fonctions de chaque base sont représentées. A gauche, exemple d'une base portée par un maillage. A droite, exemple d'une base indépendante d'un maillage.

### Paramétrisation du champ magnétique

Le champ magnétique ne peut être connu qu'à l'aide d'un nombre fini  $M$  de mesures. Chaque mesure  $B_k$  peut alors être vue comme la projection du champ magnétique sur une fonction de forme  $\Psi_k$  :

$$B_k = \int_{\Omega} \Psi_k(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) d\Omega \quad \text{pour } k = 1..M \quad \text{Eq III-11}$$

La forme de la fonction  $\Psi_k$  dépend de la technologie de mesure employée. Durant notre étude nous avons employé des capteurs que nous avons considérés comme ponctuels. Par conséquent nous utiliserons par la suite uniquement des Dirac de la forme suivante.

$$\Psi_k(\mathbf{r}) = \mathbf{Y}_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \quad \text{Eq III-12}$$

Où  $\mathbf{Y}_k$  est l'orientation de la mesure et où  $\mathbf{r}_k$  est l'emplacement de la mesure<sup>k</sup>. Il reste donc encore un très grand nombre de choix possibles pour les orientations et emplacements des  $M$  mesures. Un exemple de plusieurs fonctions  $\Psi_k$  est donné sur la figure (Fig. 58). Nous

profitons aussi de cette figure pour expliciter le vocabulaire employé. Nous employons le terme de capteur mono-axe ou bi-axe ou tri-axe pour le composant technologique permettant d'effectuer une ou deux ou trois mesures au même emplacement (ou presque). Sur la figure (Fig. 58), les mesures  $B_3$  et  $B_4$  semblent être réalisées au même emplacement. D'un point de vu pratique, on peut éventuellement les réaliser avec un capteur bi-axe<sup>1</sup>.

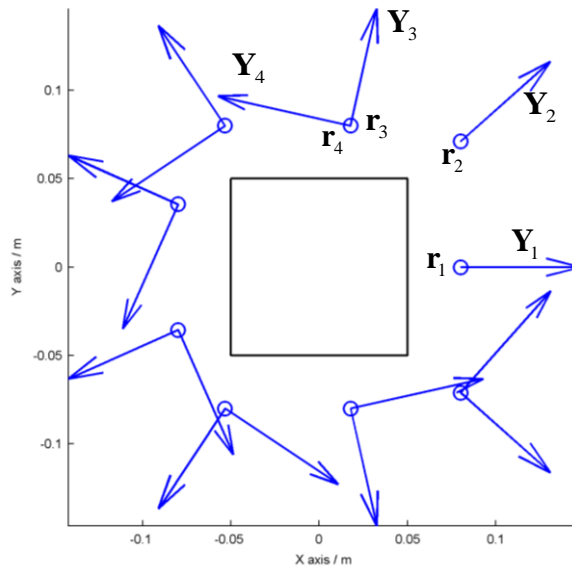


Fig. 58 : Exemple d'une base comportant 16 fonctions de forme  $\Psi_k$ . Chaque fonction  $\Psi_k$  est représentée à l'aide de son orientation  $Y_k$  et de son emplacement  $r_k$ . La pile autour de laquelle sont effectuées ces mesures est représentée par un cadre noir.

## Bilan

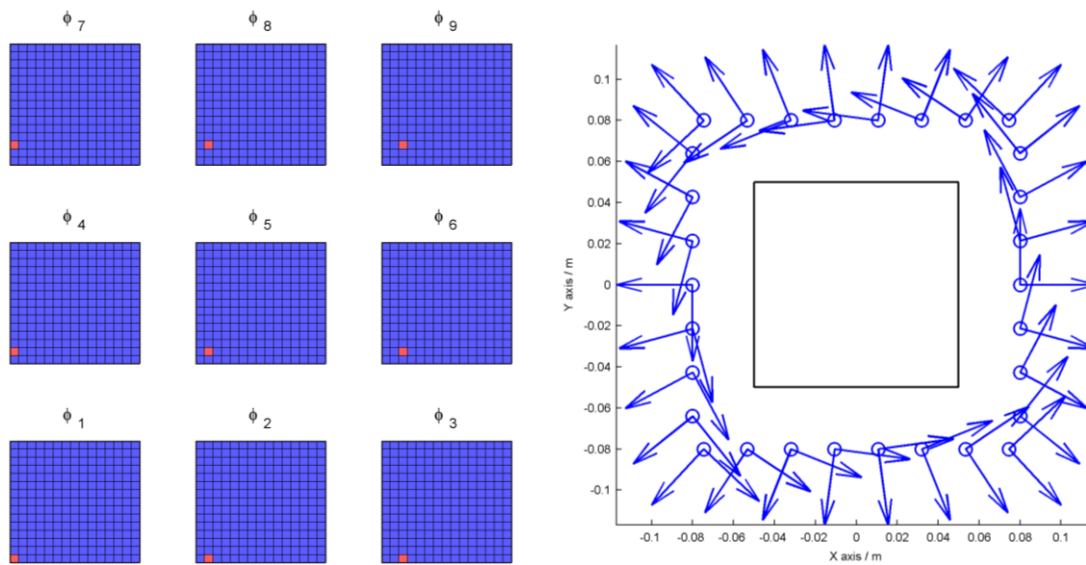
La paramétrisation d'un problème continu nécessite donc le choix d'une base de description  $\Phi$  pour les courants et d'une base  $\Psi$  pour les champs magnétiques. Les possibilités pour ces deux bases sont infinies. Le choix de ces bases est pourtant très important car il modifie les espaces de définitions du problème. Ce choix conditionne donc les propriétés

<sup>k</sup> En réalité, la mesure n'est jamais parfaitement ponctuelle. Dans le cadre de nos travaux, nous avons utilisé des magnétomètres de technologie fluxgate. Ces capteurs intègrent le champ magnétique à l'intérieur d'une bobine longue de 1 cm environ. Par conséquent, si nous souhaitons être plus précis, les fonctions de forme  $\Psi$  doivent plutôt ressembler à une fonction porte de la taille de la bobine du capteur. Les orientations  $Y_k$  de ces fonctions de forme correspondent à l'orientation de la bobine.

<sup>1</sup> En réalité, les capteurs bi-axes ou tri-axes n'existent pas. En effet, les magnétomètres ne permettent pas de mesurer les trois composantes du champ magnétique exactement au même emplacement. Le terme de capteurs bi-axes ou tri-axes est une approximation utilisée pour désigner des composants technologiques permettant de mesurer "quasiment" au même endroit les différentes composantes du champ magnétique.

d'existence, d'unicité et de stabilité de la solution du problème inverse. Nous reviendrons plus longuement sur cette question dans la dernière section de ce chapitre (cf. p. 228).

D'ici là, nous utiliserons les bases de la figure (Fig. 59) pour illustrer la résolution du problème inverse. Plus précisément, la base  $\Phi$  est constituée de fonctions portes 2D s'appuyant sur un maillage découpant le domaine  $\Gamma_S$  en 225 éléments. Les dimensions du domaine  $\Gamma_S$  sont de 0.1 x 0.1 m<sup>2</sup> (dimensions de la surface active de la pile). Pour la base  $\Psi$ , nous utilisons 30 capteurs bi-axes pour un total de 60 mesures. Ces capteurs sont répartis sur un contour rectangulaire autour de la pile. Avec cet exemple, le problème inverse consiste donc à déterminer 225 inconnues à partir de 60 mesures.



*Fig. 59 : Illustration des bases  $\Phi$  (gauche) et  $\Psi$  (droit) utilisées dans cette section.*

### ***B - Identification des paramètres du modèle direct réduit***

Nous disposons désormais d'un choix de paramétrisation pour les courants et les champs magnétiques. Ce paragraphe propose désormais d'identifier les  $N \times M$  coefficients  $S_{kp}$  reliant les  $M$  mesures  $B_k$  aux  $N$  inconnues  $J_p$ . La procédure est relativement simple et consiste à combiner le modèle direct  $\mathbf{F}$  (Eq III-1), la paramétrisation  $\Phi$  du courant (Eq III-10) et la paramétrisation  $\Psi$  du champ magnétique (Eq III-11). Grâce à la linéarité de notre modèle, nous obtenons :

$$\begin{cases} B_k = \sum_{l=1}^N S_{kp} J_p \\ \text{avec } S_{kp} = \int_{\Omega} \Psi_k \cdot \mathbf{F}[\Phi_p] \end{cases} \quad \text{Eq III-13}$$

Si notre modèle direct  $\mathbf{F}$  est la loi de Biot et Savart en trois dimensions (Eq III-2), les coefficients  $S_{kp}$  sont donnés par la relation suivante :

$$S_{kp} = \int_{\Omega} \Psi_k(\mathbf{r}) \cdot \int_{\Omega_S} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_S) \wedge \Phi_p(\mathbf{r}_S) d\Omega_S d\Omega \quad \text{Eq III-14}$$

Si le modèle direct  $\mathbf{F}$  est la loi de Biot et Savart en deux dimensions (Eq III-3), et en adaptant quelques-unes des notations précédentes, les coefficients  $S_{kp}$  sont donnés par la relation suivante :

$$S_{kp} = \int_{\Gamma} \Psi_k(\mathbf{r}) \cdot \int_{\Gamma_S} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_S) \cdot \Phi_p(\mathbf{r}_S) d\Gamma_S d\Gamma \quad \text{Eq III-15}$$

Pour évaluer ces coefficients  $S_{kp}$ , l'intégrale sur  $\Omega$  ne pose pas de problème particulier car les fonctions  $\Psi_k$  sont ici des Dirac. Si les fonctions de forme  $\Phi_p$  choisies le permettent, l'intégrale sur  $\Omega_S$  peut aussi être évaluée analytiquement. Dans le cas contraire, celle-ci est calculée par intégration numérique en suivant éventuellement la méthode présentée dans le chapitre précédent (cf. p. 94).

L'évaluation des  $N \times M$  coefficients  $S_{kp}$  peut s'avérer être coûteuse en temps de calcul. D'où l'intérêt de disposer d'un modèle direct  $\mathbf{F}$  explicite comme la loi de Biot et Savart. L'utilisation d'un modèle direct basé sur la discrétisation et la résolution des équations de Maxwell aurait rendu le calcul de ces coefficients beaucoup plus long (sauf pour des nombres  $M$  extrêmement élevés).

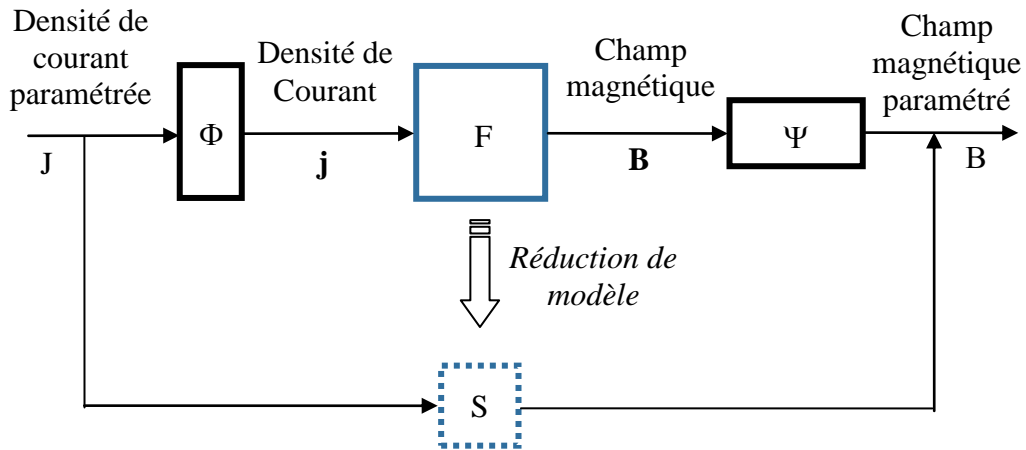


Fig. 60 : Schéma de principe de la discrétisation.

Le schéma de principe de cette réduction de modèle est donné sur la figure (Fig. 60). Nous disposons désormais d'une version algébrique de la loi de Biot et Savart. Il s'agit d'une nouvelle version de notre modèle direct qui possède l'avantage d'être plus simple à manipuler que la version analytique. Cette relation algébrique peut aussi s'écrire de manière plus compacte en utilisant la notation matricielle.

$$B = SJ \quad \text{Eq III-16}$$

### C - Ajouts d'informations sur la densité de courant

Afin de déterminer les  $N$  densités de courant inconnues, nous disposons désormais de  $M$  informations basées sur la mesure du champ magnétique. Mais nos informations sur la densité de courant ne se limitent pas nécessairement au champ magnétique mesuré. Nous disposons éventuellement d'autres sources d'informations sur la densité de courant : autres types de mesures, propriétés physiques, informations *a priori*... Par exemple, dans le cadre de l'approximation 2D, nous connaissons aussi le courant total circulant à travers la pile :

$$I_{tot} = \int_{\Gamma_s} j(\mathbf{r}_s) d\Gamma_s \quad \text{Eq III-17}$$

Où  $I_{tot}$  est le courant total mesuré à l'aide d'un ampèremètre. Si nous travaillons en trois dimensions, les informations supplémentaires dont nous disposons sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0 && \text{dans } \Omega_S \\
 \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sur } \Gamma_S^0 \\
 \int_{\Gamma_+} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_+ &= I_{tot} \\
 \int_{\Gamma_-} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_- &= -I_{tot} \\
 \text{avec } \Gamma_S^0 \cup \Gamma_S^+ \cup \Gamma_S^- &= \partial\Omega_S
 \end{aligned}
 \tag{Eq III-18}$$

Où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante au domaine  $\Omega_S$ . La surface  $\Gamma_S^0$  est le bord de la pile où les courants sont nuls. La surface  $\Gamma_S^+$  (respectivement  $\Gamma_S^-$ ) est le bord de la pile par où entre (respectivement sort) le courant.

Il est possible de discrétiser ces équations selon une méthode identique à celle utilisée pour discrétiser la loi de Biot et Savart. Les contraintes ainsi obtenues sont ensuite insérées dans le modèle direct selon une procédure décrite en annexe (cf. p. 256). Cette procédure assure à la solution du problème inverse de respecter scrupuleusement ces contraintes. Bien que cette procédure modifie le modèle direct, nous continuerons à le noter de la même manière afin de ne pas alourdir les notations :

$$B = SJ \tag{Eq III-19}$$

Il sera néanmoins important de se rappeler qu'il ne s'agit plus exactement des mêmes coefficients  $S_{kp}$  et  $J_p$  que précédemment. L'imposition forte de ces contraintes permet en effet de réduire le nombre d'inconnues. Dans cette section, nous travaillons dans le cadre de l'approximation 2D avec les bases illustrées sur la figure (Fig. 59). La seule information supplémentaire dont nous disposons pour le moment est la connaissance du courant total. L'ajout de cette information permet donc de passer à un système d'équations de taille 60 x 224.

### **Remarque sur l'ajout éventuel d'autres informations**

Pour les densités de courant, il est possible d'ajouter des informations autres que celles concernant la conservation des flux ou les conditions aux limites. Dans ce paragraphe, nous nous sommes cantonnés aux informations physiques les plus évidentes. Lors de la résolution et de la régularisation du problème inverse, nous continuerons à ajouter des informations supplémentaires.

### ***D - Résolution et nécessité de régulariser***

Ce paragraphe présente l'outil classique utilisé pour résoudre le système d'équations (Eq III-19) : la méthode des moindres carrés. Nous montrerons que cette technique n'est pas parfaitement adaptée à notre problème en raison de l'instabilité de notre modèle.

Une difficulté posée par la résolution de ce problème est qu'il est en pratique impossible de connaître le champ magnétique réel. Il est seulement possible d'estimer celui-ci à l'aide de mesures entachées d'incertitudes :

$$\hat{B} = B + \varepsilon_B \quad \text{Eq III-20}$$

Où  $B$  est le champ magnétique réel, où  $\varepsilon_B$  est l'erreur de mesure et où  $\hat{B}$  est le champ mesuré. Le système d'équation (Eq III-19) devient alors :

$$\hat{B} = SJ + \varepsilon_B \quad \text{Eq III-21}$$

A cette première difficulté, s'ajoute le fait que le système d'équation n'est pas nécessairement carré. De plus, les équations ne sont pas toujours linéairement indépendantes. En raison du bruit de mesure, il n'est donc pas toujours possible de les respecter simultanément. Enfin, le nombre d'équations linéairement indépendantes peut se révéler être insuffisant pour déterminer toutes les inconnues.

Pour pallier toutes ces difficultés, on reformule en général le problème (Eq III-21) sous la forme d'un problème d'optimisation. On construit une fonction objectif  $L$  qui pondère les différents résidus et qui ajoute l'information manquante. La densité de courant que l'on cherche à estimer est alors la solution du problème de minimisation suivant :

$$\hat{J} = \arg \min_{d(J)=0} L(J) \quad \text{Eq III-22}$$



Où  $d$  est une fonction permettant d'imposer des contraintes sur la solution du problème. De très nombreux choix sont donc possibles pour la fonctionnelle  $L$  et pour la contrainte  $d$ . L'objectif est que le problème (Eq III-22) admette une solution et qu'elle soit unique. Idéalement, les algorithmes d'optimisation doivent aussi pouvoir converger rapidement vers la solution. Le tableau (Tab. 7) propose les formulations les plus couramment utilisées en fonction du caractère sur ou sous-déterminé du système d'équations et de son rang.

Type système	Matrice $S$ rang plein	Caractéristique matrice $S$	Problème d'optimisation	Modèle inverse $S^\#$	Nom
Carré	Oui	Bijective		$S^{-1}$	Inverse
Sur-déterminé	Oui	Injective	$\min_J \ \hat{B} - SJ\ ^2$	$(S^T S)^{-1} S^T$	Inverse gauche
Sous-déterminé	Oui	Surjective	$\min_{J \text{ tel que } SJ=\hat{B}} \ J\ ^2$	$S^T (SS^T)^{-1}$	Inverse droite <sup>m</sup>
Carré ou sur-déterminé ou sous-déterminé	Non	Rien	$\min_{J \in \arg \min \ \hat{B} - SJ\ ^2} \ J\ ^2$	$S^+$	Pseudo-inverse de Moore-Penrose <sup>n</sup>

Tab. 7 : Liste des principaux modèles inverses au sens des moindres carrés.

Les fonctionnelles données dans le tableau (Tab. 7) minimisent le carré de différents résidus, d'où le nom de solutions au sens des moindres carrés. Les solutions d'un problème de minimisation annulent généralement le gradient de la fonctionnelle<sup>o</sup>. Par conséquent, la solution  $\hat{J}$  du problème (Eq III-22) est une des solutions du système d'équations suivant<sup>p</sup> :

$$\nabla L(\hat{J}) = 0 \quad \text{Eq III-23}$$

<sup>m</sup> Lorsque le système est sous-déterminé, il existe une infinité de matrices inverses droites. Celle qui est proposée ici est celle donnant le résultat de norme minimale. Mais certains solveurs numériques rendent une solution différente de celle proposée ici. Par exemple le solveur "mldivide" de Matlab retourne le vecteur comportant le plus grand nombre d'éléments nuls.

<sup>n</sup> Au sens de Moore-Penrose, l'inverse de zéro est zéro. Ainsi,  $b/0$  est égal à  $0$  quel que soit  $b$ . Pour une matrice  $S$ , sa pseudo-inverse  $S^+$  peut s'obtenir à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières.

<sup>o</sup> La solution peut parfois se trouver sur le bord du domaine si celui-ci est borné. Mais ce n'est pas le cas avec les contraintes que nous proposons ici.

<sup>p</sup> Sauf pour les problèmes avec contraintes. Ces contraintes doivent être préalablement introduites dans la fonctionnelle à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.

Où  $\nabla$  désigne l'opérateur gradient selon  $\hat{J}$ . Les fonctionnelles présentées dans le tableau (Tab. 7) sont des polynômes de degré deux. Celles-ci sont relativement simples à dériver, et le nouveau système d'équations (Eq III-23) obtenu est un système de  $N$  équations linéaires. Ces problèmes de minimisation ont de plus été construits de manière à ce que ces équations soient linéairement indépendantes. La solution de ce nouveau système est alors unique et est égale à :

$$\hat{J} = S^{\#} \hat{B} \quad \text{Eq III-24}$$

Où la matrice inverse  $S^{\#}$  est donnée dans le tableau (Tab. 7) pour les quatre situations possibles<sup>9</sup>.

Le choix d'une fonctionnelle parmi celles proposées dans le tableau (Tab. 7) dépend donc des caractéristiques de notre système (sur ou sous-déterminé, rang...). Ces propriétés dépendent des bases  $\Psi$  et  $\Phi$  choisies pour les champs magnétiques et les courants. Avec les bases présentées précédemment, nous avons 60 mesures et 225 degrés de libertés. Nous travaillons en 2D et avons supprimé un degré de liberté à l'aide de la connaissance du courant total. Par conséquent notre système est au final de taille 60 x 224. Celui-ci est donc fortement sous-déterminé. Enfin, l'expérience a montré que la matrice  $S$  obtenue est de rang plein. D'après le tableau (Tab. 7), cela nous amène à utiliser la matrice inverse droite comme modèle inverse :

$$S^{\#} = S^T (SS^T)^{-1} \quad \text{Eq III-25}$$

La figure (Fig. 61) illustre un exemple basique de reconstruction de courant réalisé avec un tel modèle inverse. Une densité de courant test 2D est construite (Fig. 61 - gauche) et le champ magnétique généré par celle-ci est calculée avec la loi de Biot et Savart 2D. Pour s'approcher de l'application réelle, un bruit gaussien de 1  $\mu$ T est ajouté au champ magnétique calculé. Le courant reconstruit avec ces champs magnétiques bruités est présenté sur la figure (Fig. 61 - droite). On observe immédiatement que les résultats sont totalement faux. L'amplitude de la densité de courant reconstruite est gigantesque et la solution présente de très fortes irrégularités qui rappellent l'amplification du bruit haute fréquence du circuit RC.

---

<sup>9</sup> Ces matrices inverses  $S^{\#}$  peuvent aussi être obtenues en faisant appel à des considérations géométriques [Vuillermet, 2008].

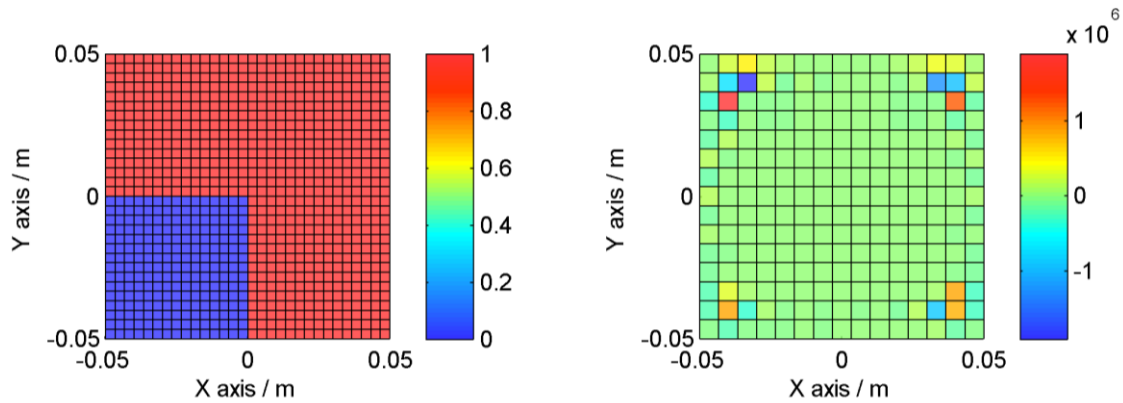


Fig. 61 : Densités de courant en  $A.cm^{-2}$  dans la section de la pile. A gauche, courant test ayant servi à générer un champ magnétique. A droite, courant reconstruit à partir de ce champ magnétique à l'aide de la matrice inverse droite.

Bien que les solutions au sens des moindres carrés soient efficaces dans de très nombreuses applications, celles-ci sont donc totalement inadaptées à l'instabilité de notre problème inverse. En effet, les contraintes et fonctionnelles présentées dans le tableau (Tab. 7) ne permettent d'assurer que l'existence et l'unicité de la solution. Elles ne permettent aucunement d'assurer à la solution un comportement réaliste. Il est donc indispensable de formuler de nouveaux problèmes de minimisation afin de régulariser notre problème inverse. Mais avant cela, le paragraphe suivant présente quelques outils permettant d'analyser et de quantifier le caractère instable de nos modèles.

### Remarque sur les temps de calcul

D'un point de vue numérique, il est parfois judicieux de ne pas calculer explicitement les matrices inverses  $S^\#$ . En effet, la construction de celles-ci nécessite de résoudre  $N$  fois le problème de minimisation (Eq III-22). Par contre, pour un lot de mesure  $\hat{B}$  donné, la connaissance de  $\hat{J}$  peut être obtenue à l'aide d'une seule résolution du même problème. Néanmoins, si on prend le temps de calculer  $S^\#$  une fois pour toute, le calcul de  $\hat{J}$  sera par la suite quasiment instantané pour chaque nouveau lot de mesures  $\hat{B}$ . C'est ce que nous avons généralement fait.

### E - Décomposition en valeurs singulières du modèle direct

La décomposition en valeurs singulières est un outil extrêmement puissant pour l'étude des modèles directs (ou inverses) ainsi que pour leur régularisation. Ce paragraphe propose de réaliser une telle décomposition sur notre modèle direct afin de mieux comprendre les sources

d'instabilités de celui-ci. Cela nous permet aussi d'introduire l'outil qui sera utilisé dans le prochain paragraphe pour régulariser le problème inverse.

Une introduction à la décomposition en valeurs singulières est par exemple disponible dans [Chatterjee, 2000] ou [Chadebec, 2001]. Nous rappelons brièvement que cette décomposition consiste à factoriser la matrice  $S$  de la manière suivante.

$$S = U \Lambda V^T \quad \text{Eq III-26}$$

Où  $U$  et  $V$  sont deux matrices orthogonales de dimensions  $M \times M$  et  $N \times N$  respectivement. Les colonnes  $u_c$  et  $v_c$  de ces deux matrices sont respectivement appelées vecteurs singuliers gauches et droits de  $S$ . La matrice  $\Lambda$  est une matrice diagonale de taille  $M \times N$ . Les coefficients de la diagonale  $s_c$  sont appelés valeurs singulières. Ces coefficients sont supérieurs ou égaux à zéro et ordonnés en ordre décroissant. D'après ce qui précède, nous avons :

$$s_c u_c = S v_c \quad \text{Eq III-27}$$

La décomposition en valeurs singulières (SVD) donne des résultats assez similaires à ceux issus d'une décomposition en valeurs propres<sup>r</sup>. Mais l'avantage de la SVD, c'est que la factorisation dans l'espace des réels est possible pour toutes les matrices réelles, y compris les matrices rectangulaires. Les valeurs singulières étant toutes réelles, il est alors possible de les ordonner et de réduire le modèle original de façon optimale par troncature. Autrement dit, si on décide de ne garder que les  $M_A$  premières valeurs singulières et vecteurs singuliers, il s'agit de la meilleure approximation possible de rang  $M_A$  du modèle [Chatterjee, 2000].

Nous introduisons le changement de base suivant pour le champ magnétique et le courant. Ceux-ci sont respectivement notés  $\beta$  et  $\theta$  dans la base  $U^T$  et  $V^T$  :

$$\begin{aligned} \beta &= U^T B \\ \theta &= V^T J \end{aligned} \quad \text{Eq III-28}$$

---

<sup>r</sup> Les vecteurs singuliers gauches (respectivement droits) de  $S$  sont égaux aux vecteurs propres de  $SS^T$  (respectivement  $S^T S$ ). Les  $\min(M, N)$  premières valeurs propres de  $SS^T$  ou  $S^T S$  sont égales aux carrés des valeurs singulières de  $S$ . Pour les matrices symétriques semi-définies positives, les décompositions en valeurs propres et singulières sont identiques.

La matrice  $A$  étant diagonale, la relation entre les densités de courants et les champs magnétiques dans ces deux nouvelles bases s'exprime désormais très simplement :

$$\beta_c = s_c \theta_c \quad \text{avec } 1 \leq c \leq \min(M, N) \quad \text{Eq III-29}$$

Pour comparer les différents coefficients de transferts  $\beta_c/\theta_c$  du modèle direct, nous traçons le spectre de  $S$ , c'est-à-dire ses valeurs singulières  $s_c$ . Nous utilisons ici la matrice  $S$  non modifiée : le courant total n'est pas imposé. A une différence près, les résultats seraient similaires si on utilisait la version  $S$  modifiée. Le spectre est représenté sur la figure (Fig. 62). On observe sur celui-ci la décroissance exponentielle des valeurs singulières, ce qui rappelle le spectre du filtre passe-bas. Les courants  $\theta_c$  d'indices élevés sont en effet très fortement atténués par un tel opérateur. Le conditionnement, qui correspond au rapport des valeurs singulières extrêmes, est très mauvais (20 000 environ). Ce spectre est caractéristique d'un modèle présentant d'importantes instabilités lors de l'inversion.

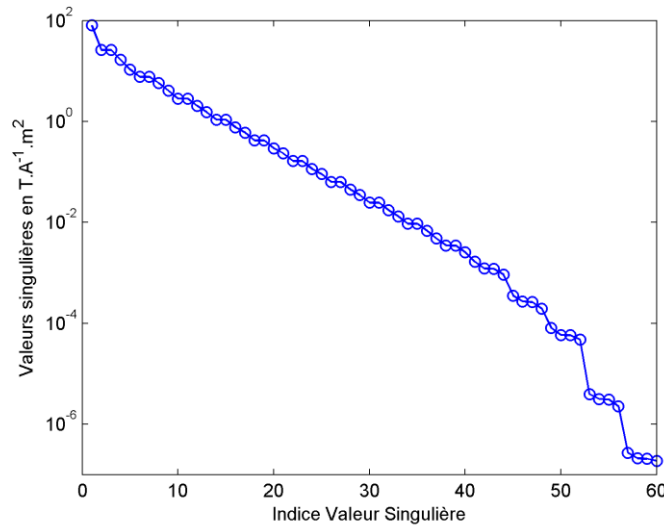
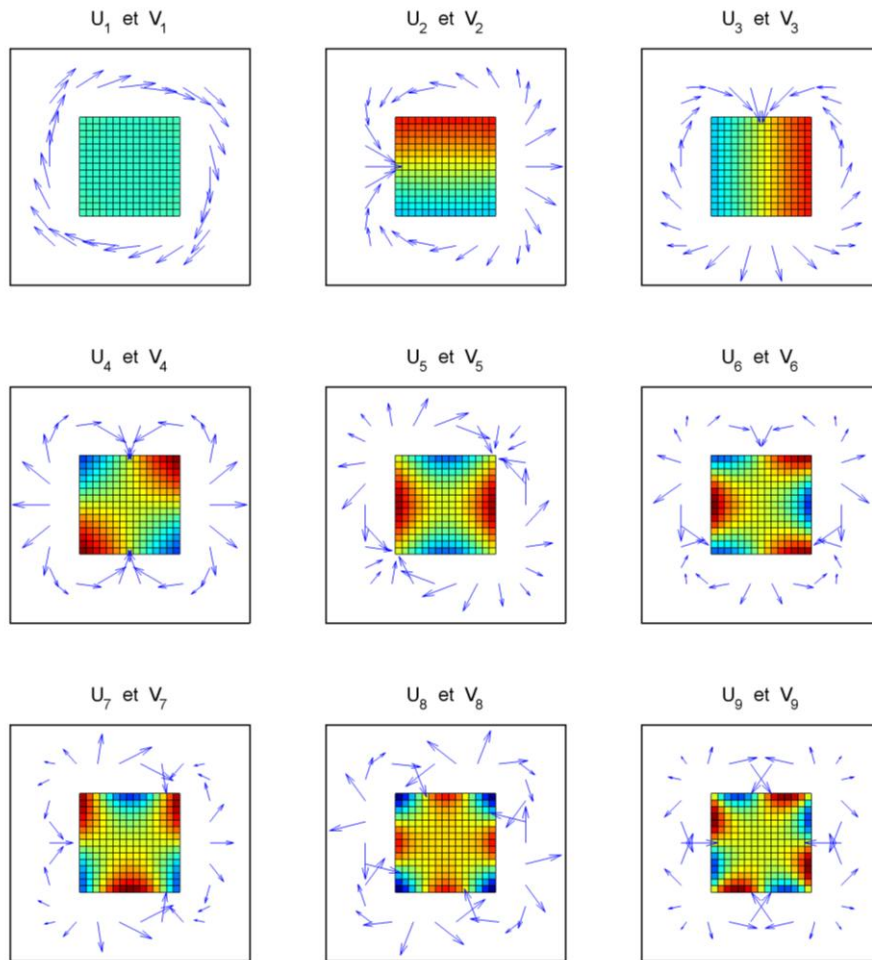


Fig. 62 : Valeurs singulières (spectre) de la matrice  $S$ .

Afin de mieux voir à quoi correspondent les courants  $\theta_c$  et les champs magnétiques  $\beta_c$ , les neuf premiers vecteurs singuliers droits et gauches de la matrice  $S$  sont représentés sur la figure (Fig. 63). Il est intéressant de noter que l'on retrouve sur cette figure des résultats similaires à ceux obtenus lors d'une décomposition du champ magnétique en harmoniques circulaires (cf. p. 127). En effet, les différentes densités de courant  $\theta_c$  ressemblent beaucoup aux courants générant les différents multipôles présentés précédemment. Le courant  $\theta_7$

ressemble au monopôle, les courants  $\theta_2$  et  $\theta_3$  aux dipôles, les courants  $\theta_4$  et  $\theta_5$  aux quadrupôles et ainsi de suite<sup>s</sup>.



*Fig. 63 : Illustrations des neuf premiers vecteurs singuliers gauches  $U_k$  (flèches bleues) et droits  $V_k$  (surfaces) de la matrice  $S$ .*

La figure (Fig. 64) représente les derniers vecteurs singuliers gauches ainsi que les vecteurs singuliers droits permettant de les générer. Le vecteur singulier droit  $v_{60}$  ressemble beaucoup à la solution du problème inverse que nous avons précédemment obtenue. Cela s'explique de la manière suivante. Un courant colinéaire au vecteur  $v_{60}$  fait partie des courants générant les plus faibles champs magnétiques en raison de la très faible valeur singulière  $s_{60}$ . Il n'y a donc presque aucune raison de mesurer une composante  $\beta_{60}$  selon  $u_{60}$ . Mais du fait de la présence de bruits, le champ magnétique possède une composante  $\beta_{60}$ . La seule explication

---

<sup>s</sup> On observe sur cette figure un autre phénomène important : les courants sont principalement localisés au bord de la pile. Nous verrons dans le prochain paragraphe que ce phénomène a une incidence notable sur la reconstruction des courants.

possible pour le modèle inverse est de supposer qu'il y avait à l'origine une densité de courant possédant une composante  $\theta_{60}$  d'amplitude très grande ( $\beta_{60}/\sigma_{60}$ ). D'où, après résolution, une densité de courant principalement orientée selon  $v_{60}$  et dont la composante est gigantesque.

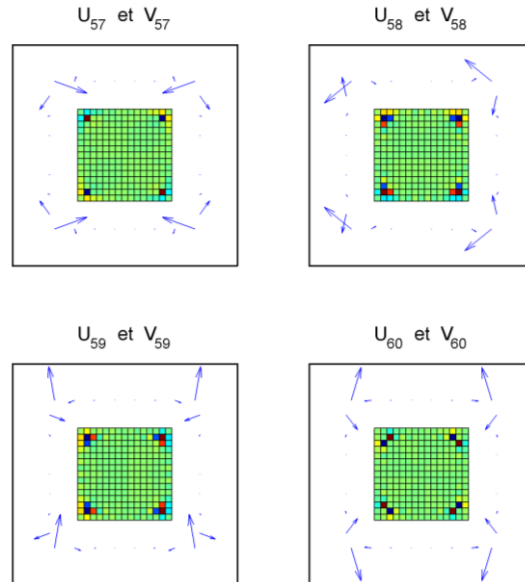
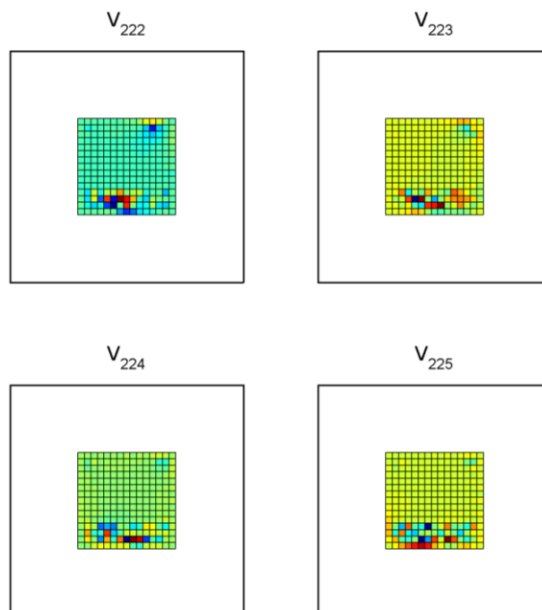


Fig. 64 : Représentation des quatre derniers vecteurs singuliers gauches (et vecteurs droits associés).

A titre d'illustration, nous représentons sur la figure (Fig. 65) les derniers vecteurs singuliers droits. Ces vecteurs présentent de très fortes irrégularités et font partie du noyau de la matrice  $S$ . La solution obtenue précédemment ne possède pas de composante selon ces vecteurs. En effet, la matrice inverse droite que nous avons utilisée impose à la solution de ne pas appartenir à l'espace engendré par de tels vecteurs.



*Fig. 65 : Représentation des quatre derniers vecteurs singuliers droits.*

La décomposition en valeurs singulières est donc un outil intéressant pour étudier les caractéristiques d'un problème inverse linéaire. Celui-ci permet de mieux comprendre les raisons du résultat totalement incohérent que nous avons précédemment obtenu. Cet outil va aussi se révéler être très utile pour la régularisation du problème inverse.

## ***F - Régularisation du problème inverse***

### **1) Principe de la régularisation**

Afin d'obtenir une solution physiquement réaliste, il est nécessaire de régulariser le problème inverse. Une liste non exhaustive des techniques de régularisation est disponible en annexe (cf. p. 260). De manière générale, la régularisation consiste à réduire les espaces de définitions du problème :

- Pour les mesures de champs magnétiques, cela consiste à les filtrer. Malgré la perte d'information, une partie importante du bruit est ainsi supprimée.
- Pour les courants, cela consiste à leur ajouter des contraintes. Cela réduit le nombre de degrés de liberté du problème et permet d'imposer à la solution un comportement physiquement réaliste.



Notre problème étant sous-déterminé, nous n'avons fait jusqu'ici qu'ajouter des contraintes à la solution. Dans un premier temps, nous avons imposé le courant total passant à travers la pile. Avec la matrice inverse droite, nous avons ensuite imposé à zéro les  $N$  moins  $M$  dernières inconnues restantes. Ces contraintes se sont révélées jusqu'à présent totalement inefficaces pour obtenir une solution physiquement réaliste. Il est donc nécessaire d'en ajouter de nouvelles et aussi de filtrer le bruit<sup>t</sup>.

Le choix de ces nouvelles contraintes est une tâche délicate. En plus de ce choix, notons qu'il existe plusieurs façons d'imposer des contraintes sur la solution d'un problème inverse. Il est par exemple possible d'imposer ces contraintes de manière "forte", c'est-à-dire de projeter la solution dans un sous-espace donné. C'est ce que nous avons fait jusqu'ici avec le courant total et la matrice inverse droite. La régularisation par troncature de spectre est une technique entrant dans cette catégorie. Mais il est aussi possible d'imposer des contraintes de manière "faible", c'est à dire d'orienter la solution d'un problème inverse vers un sous-espace sans l'imposer dans celui-ci. Cette orientation est généralement réalisée en construisant une fonctionnelle pondérant les différentes équations selon le degré d'incertitude de chacune. C'est le principe de la régularisation de Tikhonov et, dans un cadre plus large, celui de l'inversion Bayésienne<sup>u</sup>.

Nous avons fait le choix d'utiliser la troncature de spectre comme technique de régularisation. Le paragraphe qui suit montre que cette technique est tout à fait adaptée pour extraire de la signature magnétique des informations tout à fait pertinentes sur la densité de courant. Le dernier paragraphe de cette section s'intéressera plus particulièrement à la problématique du dimensionnement de cette méthode, c'est-à-dire au choix du paramètre de régularisation.

## **2) La troncature de spectre**

A l'aide du spectre de la matrice  $S$  (Fig. 62), nous avons précédemment vu qu'il n'y a aucune raison de mesurer les champs magnétiques  $\beta_c$  d'indices  $c$  élevés. En effet, le courant  $\theta_c$

---

<sup>t</sup> Grâce aux précédentes contraintes, il ne reste plus que  $M$  inconnues à déterminer à l'aide de  $M$  mesures. L'ajout de contraintes supplémentaires sur les inconnues restantes est désormais équivalent à réaliser un filtrage sur les mesures.

<sup>u</sup> Les contraintes imposées avec ces techniques consistent en général à supposer que la solution est de norme minimale ou bien que celle-ci est relativement lisse.

correspondant est filtré par le très faible coefficient de transfert  $s_c$ . Pour que le champ  $\beta_c$  soit présent, il faudrait un courant  $\theta_c$  d'amplitude gigantesque. Sauf circonstances extraordinaires, cela a peu de *chance* de se produire. Si cette composante  $\beta_c$  est pourtant présente dans les mesures, il est donc très *probable* que ce soit du bruit que nous mesurons.

Si nous supposons *a priori* qu'il n'existera jamais de courant  $\theta_c$  d'amplitude gigantesque, on peut donc raisonnablement conclure que nous mesurerons toujours du bruit sur la composante  $\beta_c$  correspondante. Nous pouvons alors filtrer cette composante  $\beta_c$  et le bruit qu'elle contient<sup>v</sup>. La question délicate est de savoir comment dimensionner ce filtre, c'est-à-dire à quel point il est nécessaire de filtrer chacune des composantes  $\beta_c$ .

Pour simplifier les choses, nous fabriquons un filtre qui ne modifie pas les  $M_A$  premières composantes  $\beta_c$  et qui supprime entièrement toutes les composantes restantes. D'où le nom de troncature de spectre employé pour cette technique de régularisation. Le dimensionnement du filtre se ramène donc au choix du paramètre de troncature  $M_A$ . Nous laissons cette question pour le paragraphe suivant. Une fois le paramètre  $M_A$  choisi, notre opérateur inverse ainsi modifié est égal à :

$$S^\# = S^T (SS^T)^{-1} U_A U_A^T \quad \text{Eq III-30}$$

Où les colonnes de la matrice  $U_A$  contiennent les  $M_A$  premières colonnes de la matrice  $U$ . La matrice  $U_A U_A^T$  est donc un filtre qui projette les mesures de champ magnétique dans le sous-espace engendré par les colonnes de  $U_A$ .

Afin de tester notre nouveau modèle inverse, nous reprenons l'exemple de la précédente section. Nous choisissons le paramètre  $M_A$  égal à 15. Le résultat de la reconstruction du courant est donné sur la figure (Fig. 66).

---

<sup>v</sup> Cela est équivalent à contraindre la composante  $\theta_c$  à zéro. Il s'agit d'une information généralement fautive. Mais notre outil de diagnostic est de toute manière incapable de détecter cette composante  $\theta_c$ . C'est parce que l'on cherche à la détecter que nous avons une solution extrêmement bruitée. Néanmoins il demeure tout à fait possible d'associer aux coefficients  $\theta_c$  une valeur autre que zéro. Mais pour cela, il faut disposer d'autres sources d'informations (modèles théoriques, autres mesures expérimentales...).

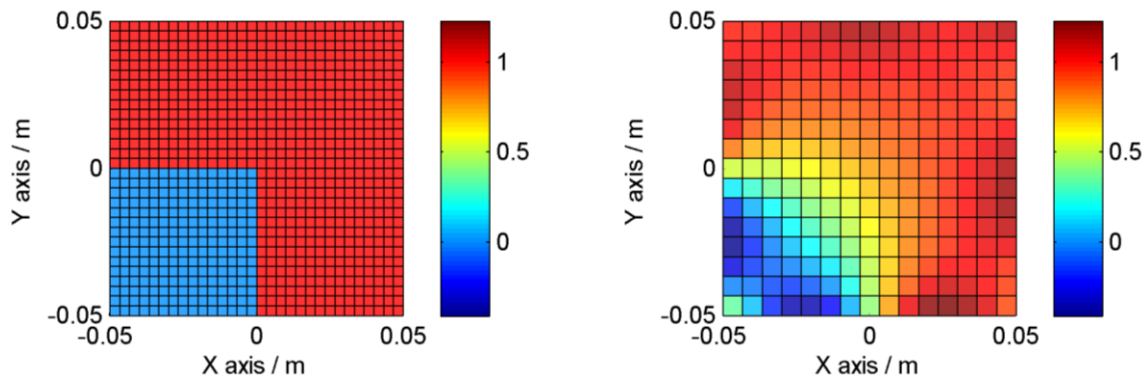


Fig. 66 : Densités de courant en  $A.cm^{-2}$  dans la section de la pile. A gauche, courant test ayant servi à générer un champ magnétique. A droite, courant reconstruit après troncature du spectre.

Nous voyons sur cette figure que les résultats sont désormais de bien meilleure qualité que précédemment. On reconnaît la forme du défaut original sur le courant reconstruit. Nous voyons aussi que la résolution spatiale du système est limitée. Les courants de hautes fréquences spatiales sont en effet inaccessibles à notre système de mesure en raison de leurs atténuations par le champ magnétique et de la présence de bruit. Il est donc impossible de reconstruire les variations abruptes de courant. Le courant reconstruit est ainsi plus lisse que le courant original<sup>w</sup>.

Malgré ces limitations, ces résultats d'inversion sont tout à fait satisfaisants. La régularisation du problème inverse a permis de filtrer partiellement le bruit. Nous sommes désormais en mesure d'extraire des informations très pertinentes sur la répartition des courants à l'intérieur de la pile à combustible à partir de sa signature magnétique. Au final, nous sommes capables d'estimer une quinzaine de paramètres avec une incertitude convenable. Ces incertitudes sont détaillées en annexe (cf. p. 262).

---

<sup>w</sup> Nous voyons aussi que le courant est mieux reconstruit sur les bords de la pile qu'au centre de celle-ci. La forme des vecteurs singuliers droits (Fig. 63) laissait présager ce phénomène. En effet, les courants sur le bord sont plus proches des capteurs que les courants situés au centre de la pile. Les courants sur le bord génèrent donc des champs magnétiques plus intenses. Par conséquent, la décomposition en valeurs singulières sélectionne ces courants pour construire les vecteurs singuliers droits associés aux plus fortes valeurs singulières. D'où des courants principalement reconstruits sur les bords. Ce biais a été partiellement corrigé en annexe (cf. p. 251).

### **3) Détermination du paramètre de troncature**

La question qui s'est précédemment posée à nous était de savoir comment choisir le paramètre de troncature  $M_A$ . Si nous tronquons trop de valeurs singulières, de l'information est perdue. Si nous n'en tronquons pas assez, la solution sera trop bruitée. Pour trouver le meilleur compromis, nous avons procédé le plus souvent par tâtonnement lors de nos expériences numériques ou expérimentales. Nous avons en cela été aidé par le fait que nous connaissions toujours le courant réel. Cela ne sera évidemment pas toujours possible. Le retour sur expérience a néanmoins montré que ce paramètre  $M_A$  variait peu. Un nombre  $M_A$  autour ou légèrement inférieur à 15 nous semble être un choix raisonnable dans beaucoup de situations.

Néanmoins, cette approche empirique basée sur la connaissance du courant réel n'est pas entièrement satisfaisante. Pour choisir ce coefficient  $M_A$ , il existe des procédures automatiques [Hansen, 2008] qu'il serait nécessaire de mettre en place dans le cadre de futurs travaux. A titre de perspective, nous présentons ici une autre approche, très simplifiée, donnant une idée *a priori* sur la localisation du paramètre  $M_A$ . Cette approche est basée sur notre connaissance des incertitudes de mesure et sur des informations *a priori* que nous possédons sur la densité de courant.

#### **Variance du champ magnétique $\beta$**

Admettons que chaque courant  $J_p$  puisse être décrit par une loi de probabilité quelconque, par exemple celle de la figure (Fig. 67). Sur cette figure, nous supposons que chaque composante  $J_p$  varie avec une très forte probabilité à l'intérieur d'un intervalle de taille  $\sigma_J$ . La taille de cet intervalle sera improprement appelé écart-type<sup>x</sup>. Sa valeur élevée au carré sera dénommée variance.

---

<sup>x</sup> En toute rigueur, le véritable écart-type est défini à l'aide d'une formule donnant une valeur plus réduite que celle illustrée sur la figure (Fig. 67). Cela n'a pas d'importance majeure dans les calculs qui suivront ici. Le nombre  $\sigma_J$  sera en effet toujours égal au véritable écart-type à une constante multiplicative près.

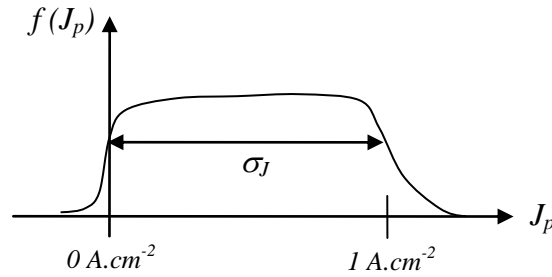


Fig. 67 : Densité de probabilité de la variable aléatoire  $J_p$ .

La caractérisation de la loi de probabilité du courant et de son écart-type  $\sigma_J$  nécessite une bonne connaissance du comportement des piles à combustibles. Admettons que la densité de courant à l'intérieur des piles soit en général égale à  $1 \text{ A.cm}^{-2}$ . Cette valeur varie selon les technologies et les conditions de fonctionnement utilisées<sup>y</sup> mais elle a le mérite de donner un ordre de grandeur. Si une défaillance survient, le courant peut éventuellement devenir localement nul. On peut donc raisonnablement supposer que les composantes  $J_p$  se situent à l'intérieur d'un intervalle compris entre 0 et  $1 \text{ A.cm}^{-2}$ . Cela correspond à une variation éventuelle  $\sigma_J$  égale à  $1 \text{ A.cm}^{-2}$ . Ce sont ces variations que l'on souhaite détecter. En supposant que les différents coefficients  $J_p$  ne sont pas corrélés, la matrice de variance-covariance du vecteur  $J$  s'écrit donc de la manière suivante :

$$\text{var}(J) = \sigma_J^2 \cdot Id_N \quad \text{Eq III-31}$$

Où  $Id_N$  est la matrice identité de taille  $N \times N$ . La matrice de variance-covariance du champ magnétique  $\beta$  dans la base singulière gauche se calcule alors simplement de la manière suivante :

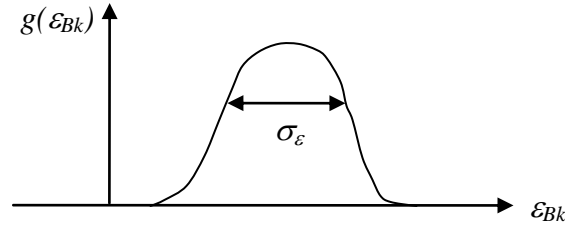
$$\begin{aligned} \text{var}(\beta) &= \text{var}(\Lambda V^T J) \\ \text{var}(\beta) &= \sigma_J^2 \Lambda \Lambda^T \\ \sqrt{\text{var}(\beta)_{cc}} &= \sigma_J \cdot s_c \end{aligned} \quad \text{Eq III-32}$$

Ce dernier résultat nous donne la taille des intervalles à l'intérieur desquels les composantes  $\beta_c$  du champ magnétique sont susceptibles de varier. Nous voyons que la taille de chaque intervalle est égale à sa valeur singulière que multiplie un même coefficient de proportionnalité. De plus, les différentes composantes  $\beta_c$  ne sont pas corrélées.

<sup>y</sup> La valeur utilisée ici correspond au fonctionnement nominal des piles alimentées en oxygène pur.

### Variance de l'erreur de mesure $\varepsilon_\beta$

Pour savoir si notre système de mesure est capable de détecter ces différentes variations de champ magnétique, il est intéressant de les comparer avec l'incertitude de mesure. Nous supposons ici que le bruit  $\varepsilon_B$  est non corrélé et identique pour chaque mesure  $B_k$ . Son amplitude est notée  $\sigma_\varepsilon$  et nous la prenons ici égale à 1  $\mu\text{T}$  (Fig. 68).



*Fig. 68 : Densité de probabilité de la variable aléatoire  $\varepsilon_{Bk}$ .*

La matrice de variance-covariance du bruit  $\varepsilon_B$  peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$\text{var}(\varepsilon_B) = \sigma_\varepsilon^2 \cdot Id_M \quad \text{Eq III-33}$$

Nous définissons ensuite les erreurs de mesure  $\varepsilon_\beta$  dans la base des vecteurs singuliers gauches à l'aide de la relation suivante :

$$\varepsilon_\beta = \hat{\beta} - \beta \quad \text{Eq III-34}$$

Où  $\beta$  est le champ magnétique réel, et où  $\hat{\beta}$  est le champ magnétique estimé dans la base des vecteurs singuliers gauches. Nous calculons alors la matrice de variance - covariance de l'erreur  $\varepsilon_\beta$ .

$$\begin{aligned} \text{var}(\varepsilon_\beta) &= \text{var}(U^T \varepsilon_B) \\ \text{var}(\varepsilon_\beta) &= \sigma_\varepsilon^2 \cdot Id_M \\ \sqrt{\text{var}(\varepsilon_\beta)_{cc}} &= \sigma_\varepsilon \end{aligned} \quad \text{Eq III-35}$$

Les écarts-types des erreurs  $\varepsilon_\beta$  sont identiques à ceux des erreurs  $\varepsilon_B$ .

### Comparaison

Nous traçons les écarts-types du champ magnétique  $\beta$  et de l'erreur  $\varepsilon_\beta$  sur la figure (Fig. 69). Nous voyons sur ce graphique qu'il y a certaines composantes  $\beta_c$  qui varient suffisamment pour qu'il soit intéressant de les mesurer. Mais beaucoup d'autres composantes

$\beta_c$  sont en dessous du niveau de bruit. Ces composantes  $\beta_c$  sont donc indécélables. Il est donc inutile de les mesurer, et ce sont ces composantes qui doivent être tronquées.

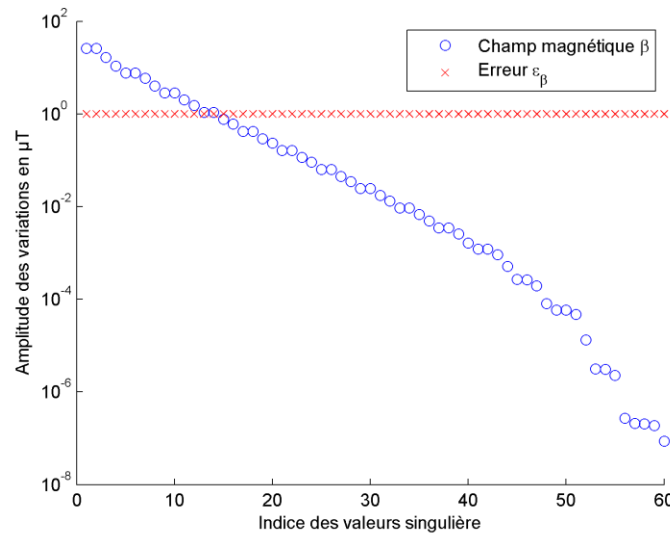


Fig. 69 : Variation des composantes  $\beta_c$  du champ magnétique et de l'erreur de mesure  $\varepsilon_\beta$ .

Nous voyons aussi qu'il est possible de définir un ratio signal sur bruit pour chaque mesure virtuelle  $\hat{\beta}_c$ . Ce ratio  $R_c$  peut être défini comme le rapport de l'écart-type du champ magnétique  $\beta_c$  généré par les courants sur l'écart-type du bruit  $\varepsilon_{\beta c}$  :

$$R_c = \frac{\sqrt{\text{var}(\beta)_{cc}}}{\sqrt{\text{var}(\varepsilon_\beta)_{cc}}} = s_c \frac{\sigma_J}{\sigma_\varepsilon} \quad \text{Eq III-36}$$

A une constante multiplicative près, le ratio signal sur bruit de chaque mesure virtuelle  $\hat{\beta}_c$  est donc égal à sa valeur singulière associée.

La frontière entre les composantes  $\beta_c$  à mesurer et à tronquer est floue et entachée d'incertitudes. Nous supposons qu'il faut tronquer les composantes  $\beta_c$  qui sont en dessous du niveau de bruit (ratio signal sur bruit inférieur à 1). On devine alors que le nombre  $M_A$  se situe aux alentours de 15, valeur que nous avons souvent utilisée comme critère de troncature. Notons enfin que l'échelle des ordonnées est logarithmique et que la pente est constante sur la majeure partie du spectre. Au final, la réduction du bruit par un facteur 10 permet de gagner une dizaine de valeurs singulières supplémentaires.

Au vu de ces résultats, nous sommes en droit de nous demander si réaliser 60 mesures de champ magnétique est très utile, puisque nous n'en gardons au final qu'une quinzaine. Mais

supprimer des capteurs n'est pas un choix aisé puisque chaque mesure virtuelle  $\beta_c$  est une combinaison linéaire de l'ensemble des mesures réelles  $B_k$ . De plus, ce nombre apparemment surdimensionné de mesures a néanmoins un avantage. Nous profitons ici de la redondance de nos mesures pour filtrer le bruit. Nous reviendrons plus en détail sur cette question dans une prochaine section (cf. p. 168).

### ***G - Conclusion***

Dans la première partie du chapitre, nous avons mis en évidence l'existence de distributions de courants très fortement filtrées au niveau du champ magnétique. Ce phénomène s'est traduit lors la discrétisation du problème par un conditionnement désastreux de la matrice  $S$ . L'inversion immédiate du problème a alors mené à une solution totalement bruitée. Mais à l'aide d'une troncature de spectre, nous sommes parvenus à extraire de la signature magnétique une information qui, bien que partielle, soit tout à fait pertinente pour le diagnostic des piles à combustible. Au final, nous sommes capables d'estimer une quinzaine de paramètres avec une incertitude convenable.

Bien que notre modèle inverse fournisse des résultats très satisfaisants, celui-ci demeure perfectible. Plusieurs pistes sont en effet possibles pour améliorer la qualité de reconstruction des courants :

- Il est possible d'améliorer les algorithmes d'inversions en utilisant des techniques de régularisation plus avancées.
- Il est aussi important de veiller à réduire au maximum l'importance du bruit au niveau expérimental. Un soin important doit être apporté à l'ensemble de la chaîne de mesures. Toute diminution du niveau bruit entraînera automatiquement des erreurs réduites au niveau des courants reconstruits. Cela permet aussi d'utiliser plus de valeurs singulières et donc d'estimer plus de paramètres.
- Nous avons jusqu'à présent uniquement travaillé avec le modèle magnétique 2D lors de l'inversion. Cela entraîne donc une erreur de modélisation qu'il serait intéressant de réduire à l'aide d'une approche 3D.
- Nous avons vu que le modèle direct réduit  $S$  est obtenu à partir de la loi de Biot et Savart  $\mathbf{F}$ , d'une base de description  $\Phi$  pour les courants et d'une base  $\Psi$  pour les champs magnétiques. Les caractéristiques (surjectivité, injectivité, stabilité) de la



matrice  $S$  dépendent donc très fortement du choix de ces deux bases. En choisissant judicieusement ces bases, il est possible d'améliorer les propriétés de la matrice  $S$ , et ainsi de réduire les erreurs de reconstruction.

La prochaine partie de ce chapitre s'intéresse plus particulièrement aux deux dernières pistes d'améliorations proposées ci-dessus.

### III - Amélioration de l'outil de diagnostic

Dans la précédente section, nous avons présenté les méthodes algébriques permettant de stabiliser la résolution d'un problème inverse. Ces méthodes de régularisation ont été appliquées en aval de la discrétisation du problème. C'est-à-dire qu'elles sont utilisées une fois que le modèle direct continu (loi de Biot et Savart) ait été réduit à l'aide d'un choix de paramétrisation  $\Phi$  pour les courants et  $\Psi$  pour les mesures de champs magnétiques. Ce choix de paramétrisation est très important car il conditionne les caractéristiques de la matrice  $S$ . C'est la raison pour laquelle nous proposons ici d'intervenir en amont de la discrétisation du problème. A l'aide d'un choix judicieux de bases  $\Psi$  et  $\Phi$ , il est en effet possible d'améliorer les caractéristiques de la matrice  $S$ , et donc de diminuer l'erreur de reconstruction.

La première partie de cette section présente le choix de base  $\Phi$  que nous avons réalisé pour les courants. Ce choix s'inspire des constatations que nous avons réalisées dans le précédent chapitre sur les caractéristiques des courants et des champs magnétiques générés par les piles à combustible. Nous avons en effet vu que les défauts 2D génèrent des champs plus intenses que les défauts 3D. Nous proposons ici une approche particulière utilisant une base  $\Phi$  3D qui ne prend pourtant en compte que les défauts 2D. Une telle approche permet de diminuer les erreurs de modélisation.

La deuxième partie s'intéresse au choix de la base  $\Psi$ , c'est-à-dire au nombre de capteurs qu'il est utile d'utiliser ainsi qu'à leurs emplacements et orientations. Cette base est choisie de manière à améliorer les caractéristiques de la matrice  $S$  et à simplifier au maximum la conception et l'instrumentation du système de mesures magnétiques.

#### ***A - Construction d'une nouvelle base de description de la densité de courant***

Dans cette partie, nous définissons plus précisément les inconnues du problème inverse. Nous nous sommes jusqu'à présent cantonnés à la reconstruction 2D des courants. Nous avons en effet vu dans le précédent chapitre qu'en première approche cette approximation est pertinente, car un défaut 2D typique génère un champ magnétique plus intense qu'un défaut typique 3D. Pourtant, une approche entièrement 2D ne peut être entièrement satisfaisante, ne

serait-ce que parce que la pile à combustible n'est pas de longueur infinie. Nous explicitons ici le compromis que nous avons retenu entre la 2D et la 3D pour le choix de notre base  $\Phi$ .

Le premier paragraphe de cette section présente tout d'abord un nouveau modèle électrocinétique. Ce modèle est une version simplifiée du modèle électrocinétique présenté dans le chapitre précédent. Ce nouveau modèle permet de générer facilement des distributions de courant respectant l'invariance selon  $z$  dans les plaques bipolaires et les AME, mais pas au niveau des extrémités du stack. Dans le second paragraphe, ce modèle électrocinétique simplifié est utilisé pour générer la base  $\Phi$ . Enfin, le troisième paragraphe tire parti des propriétés de cette nouvelle base afin de découper le modèle direct en plusieurs sous-modèles. Une telle approche facilitera les futurs développements.

### **1) Modèle électrocinétique simplifié**

Nous présentons dans ce paragraphe un outil qui va nous permettre par la suite de générer des distributions de courants  $\Phi_p$  prenant en compte la longueur finie d'un stack. Pour construire cet outil, nous nous sommes appuyés sur le modèle électrocinétique 3D du chapitre précédent.

Afin de rester proche de l'approximation 2D, nous avons simplifié au maximum le modèle électrocinétique 3D initial. Afin de conserver l'invariance par translation dans le cœur du stack, l'ensemble des AME et des plaques bipolaires d'un stack ont été fondus en une seule et unique région  $\Omega_s^{Centre}$ . Les plaques terminales de conductivité élevée aux extrémités du stack sont conservées (région  $\Omega_s^{PT}$ ). Ces régions sont illustrées sur la figure (Fig. 70).

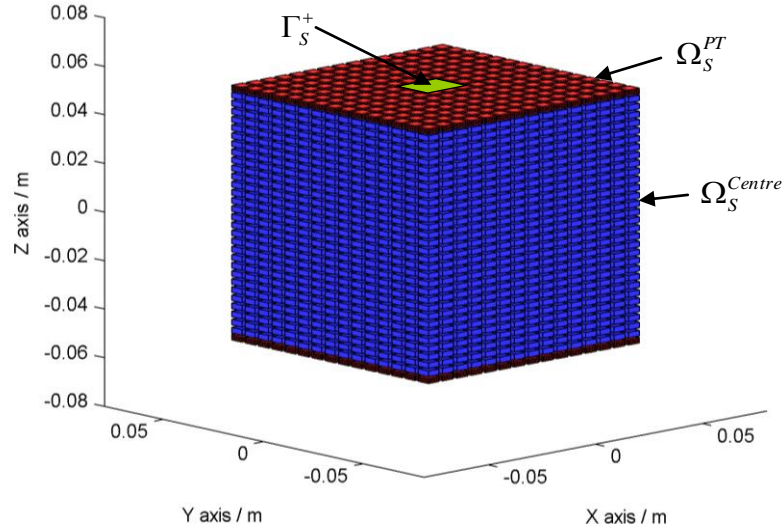


Fig. 70 : Régions physiques du modèle électrocinétique modifié.

Afin d'avoir plus de souplesse dans le pilotage des courants à l'intérieur du stack, nous avons aussi apporté de légères modifications aux équations du problème d'électrocinétique :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} V &= \operatorname{div} \mathbf{j}_m && \text{sur } \Omega_S \\
 V &= 0 && \text{sur } \Gamma_S^- \\
 \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} &= hV && \text{sur } \Gamma_S^+ \\
 \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sur } \Gamma_S^0 \\
 \text{avec } \Gamma_S^- \cup \Gamma_S^0 \cup \Gamma_S^+ &= \partial\Omega_S
 \end{aligned}
 \tag{Eq III-37}$$

Où  $\mathbf{j}_m$  est une densité de courant source permettant de piloter le courant dans toutes les sections du stack<sup>z</sup>. La variable  $h$  est une conductivité surfacique (en  $\text{S} \cdot \text{m}^{-2}$ ). Cette condition aux limites revient à connecter une charge aux bornes du stack (condition de Robin). Pour contrôler les courants à l'intérieur du stack, d'autres formulations existent. Par exemple, il eut été aussi possible d'imposer une tension aux bornes du stack, et de faire varier spatialement la conductivité pour contrôler la répartition spatiale de la densité de courant. L'intérêt de la

<sup>z</sup> Après résolution de l'équation (Eq III-37), la densité de courant totale est obtenue à l'aide de la relation  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_m - \sigma \operatorname{grad} V$ .

formulation (Eq III-37) est qu'elle permet d'imposer aisément des courants négatifs, et donc de créer des boucles de courant<sup>aa</sup>.

Les valeurs des différents paramètres du modèle sont données dans le tableau (Tab. 8).

Charge connectée ( $h \times Surface$ ) sur $\Gamma_+$	$10^{10}$ S
Conductivité $\sigma$ dans plaques terminales $\Omega_S^{PT}$	$5.10^7$ S.m <sup>-1</sup>
Conductivité $\sigma$ au centre du stack $\Omega_S^{Centre}$	1 S.m <sup>-1</sup>
Courant imposé $\mathbf{j}_m$ dans plaques terminales $\Omega_S^{PT}$	0 A.cm <sup>-2</sup>
Courant imposé $\mathbf{j}_m$ au centre de pile $\Omega_S^{Centre}$	Entrées du modèle

Tab. 8 Paramètres du modèle électrocinétique simplifié.

L'entrée  $j_m$  permettant de piloter ce modèle est d'abord définie sur un maillage 2D indépendant du maillage 3D. Ce courant est ensuite projeté sur le maillage 3D de la manière suivante :

$$\mathbf{j}_m(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j_m(x, y) \end{pmatrix} \quad \forall z \in \Omega_S^{Centre} \quad \text{Eq III-38}$$

Nous noterons ce modèle électrocinétique simplifié de la manière suivante :

$$\mathbf{j} = F_{elec} [j_m] \quad \text{Eq III-39}$$

Un exemple de calcul est illustré sur la figure (Fig. 71). La densité de courant 2D passée en entrée du modèle est représentée sur la figure de gauche. La densité de courant 3D obtenue après résolution de l'équation (Eq III-37) est représentée sur la figure de droite. Cette approche est intéressante car elle permet de prendre en compte l'influence de la très forte conductivité des plaques terminales sur les courants.

<sup>aa</sup> Il est néanmoins nécessaire de prendre quelques précautions avec une telle formulation. Pour comprendre les problèmes pouvant survenir, il suffit de considérer les équations discrétisés avec la méthode des Volumes Finis. Cela conduit à représenter le stack par un circuit électrique équivalent. Chaque facette est donc représentée par une source de courant non idéale (générateur de Norton). Si les conductivités du cœur de stack, des plaques terminales et de la charge sont mal choisies, les sources de courant ne parviendront pas à imposer le courant demandé en raison de leurs résistances internes trop faibles. Les conductivités données dans le tableau (Tab. 8) permettent d'éviter ces problèmes, et de pouvoir considérer les sources de courant comme idéales.

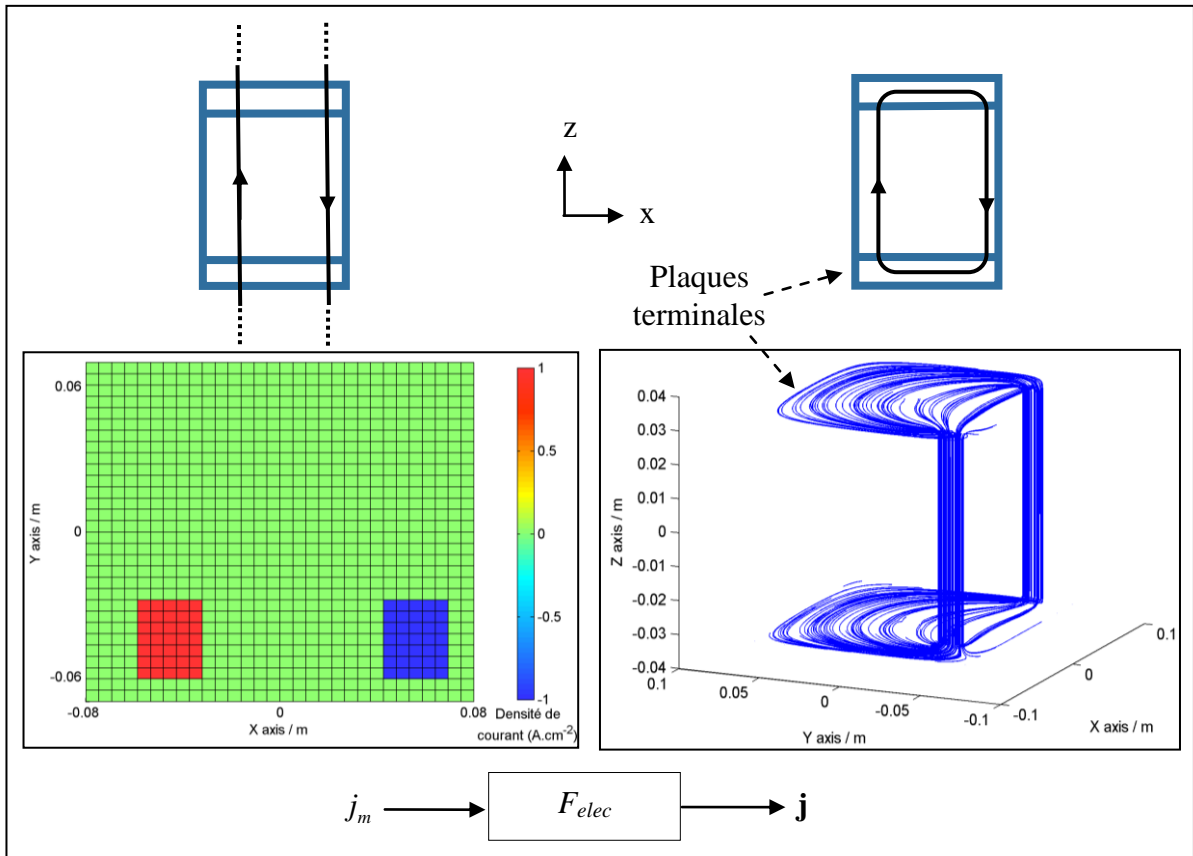


Fig. 71 : A gauche, densité de courant 2D imposée. A droite, densité de courant 3D obtenue après résolution du problème d'électrocinétique.

Pour vérifier l'intérêt de travailler avec des courants 3D plutôt que 2D, nous avons calculé le champ magnétique généré par les deux distributions de courant de la figure (Fig. 71). Les résultats sont donnés par la figure (Fig. 72). Nous observons un net écart entre le modèle 2D et le modèle 3D. Par conséquent, il est bien nécessaire de prendre en compte l'effet des plaques terminales aux extrémités de la pile<sup>bb</sup>.

<sup>bb</sup> Les calculs illustrés sur la figure (Fig. 72) ont été réalisés avec les paramètres du stack GENEPAC que nous avons utilisé pour notre validation expérimentale (cf. p. 192). Celui-ci a une longueur de 62 mm. Les écarts entre la 2D et la 3D tendent à se réduire très rapidement lorsque la longueur du stack augmente.

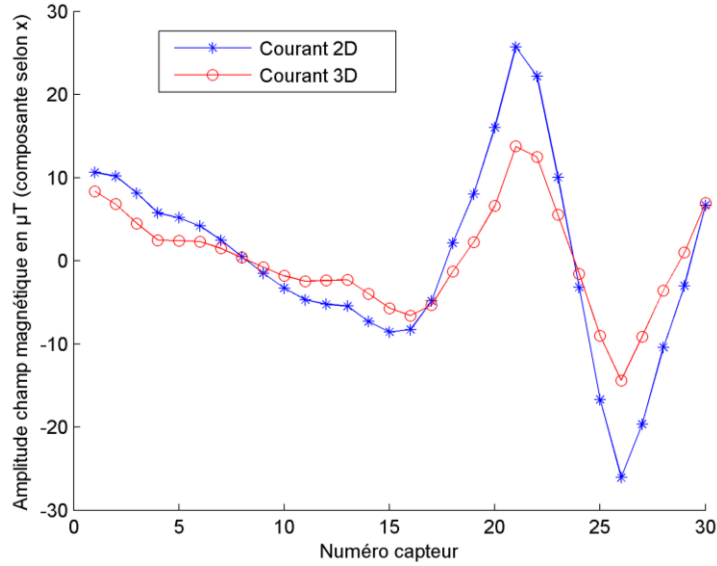


Fig. 72 : Champ magnétique généré par une densité de courant 2D et par sa densité de courant 3D équivalente.

Dans ce paragraphe, nous avons donc présenté un outil transformant une densité de courant 2D en une densité de courant 3D qui prend en compte les plaques terminales de très haute conductivité. Comme nous utilisons la méthode des Volumes Finis pour générer ces courants, nous sommes automatiquement assurés que les courants obtenus sont à flux conservatifs. Grâce à cet outil, nous sommes en mesure dans un second temps d'évaluer le champ magnétique de manière plus précise avec la loi de Biot et Savart 3D.

## 2) Construction de la base

Dans ce paragraphe, nous construisons une nouvelle base  $\Phi$  à l'aide du modèle électrocinétique simplifié présenté précédemment. Dans un premier temps, nous définissons d'abord une première base  $\Phi^{2D}$  en deux dimensions. Nous choisissons pour cette base les fonctions trigonométriques suivantes :

$$\Phi_{uvw}^{2D}(x_s, y_s) = \begin{cases} \cos(uk_x x_s) \cdot \cos(vk_y y_s) & \text{si } w = 1 \\ \cos(uk_x x_s) \cdot \sin(vk_y y_s) & \text{si } w = 2 \\ \sin(uk_x x_s) \cdot \cos(vk_y y_s) & \text{si } w = 3 \\ \sin(uk_x x_s) \cdot \sin(vk_y y_s) & \text{si } w = 4 \end{cases} \quad \text{Eq III-40}$$

$$\text{avec } k_x = \frac{2\pi}{L_x} \text{ et } k_y = \frac{2\pi}{L_y}$$

Où  $L_x$  et  $L_y$  sont les dimensions de la section du stack. Les premières fonctions de cette base sont représentées sur la figure (Fig. 73). Avec cette nouvelle base  $\Phi^{2D}$ , les coefficients

$J_{uvw}$  ne peuvent plus être assimilés aux valeurs moyennes de la densité de courant sur chaque élément du maillage. Il s'agit désormais des coefficients de la décomposition en série de Fourier 2D de la densité de courant dans la section de la pile.

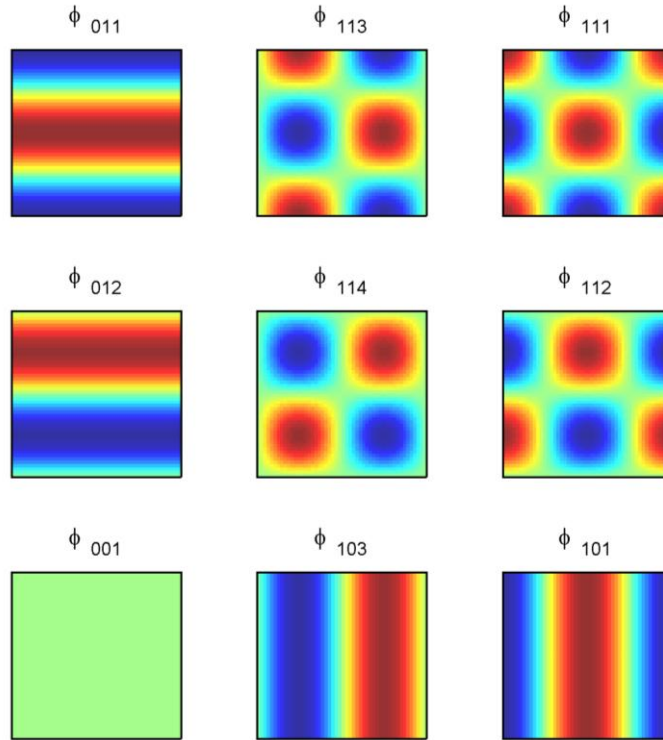


Fig. 73 : Premières fonctions de la base  $\Phi^{2D}$ .

A l'aide du modèle électrocinétique simplifié du paragraphe précédent, la base  $\Phi$  est aisément construite :

$$\Phi_{uvw} = F_{elec} [\Phi_{uvw}^{2D}] \quad \text{Eq III-41}$$



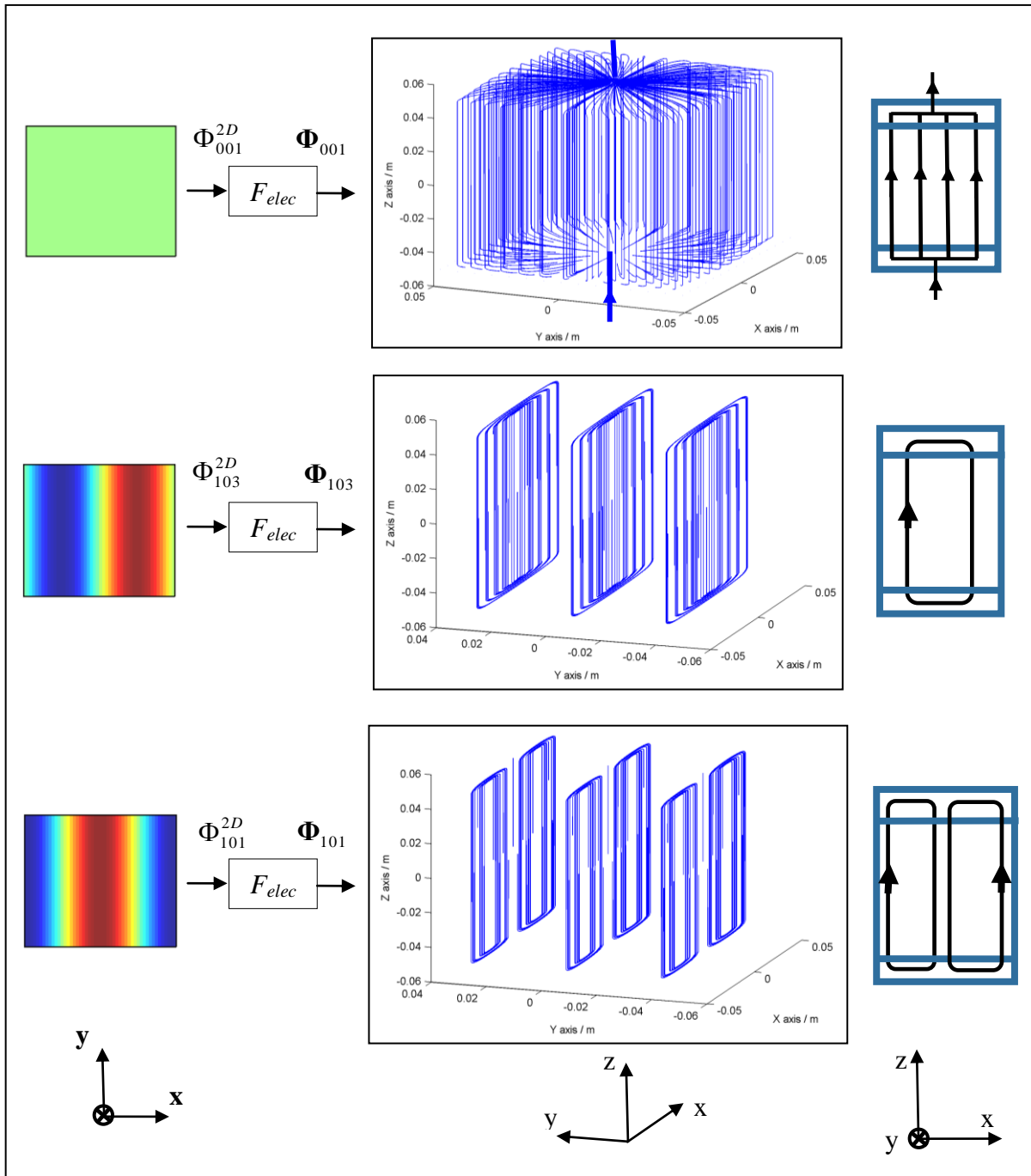


Fig. 74 : Construction des premières fonctions de la base  $\Phi$  à partir des premières fonctions de la base  $\Phi^{2D}$ .

La procédure de construction des premières fonctions de la base  $\Phi$  est illustrée sur la figure (Fig. 74). C'est cette base  $\Phi$  que nous utilisons désormais pour paramétriser la densité de courant et pour imposer notre solution à l'intérieur du sous-espace engendré par  $\Phi$  :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_s) = \sum_{(u,v,w)} \Phi_{uvw}(\mathbf{r}_s) J_{uvw} \quad \text{Eq III-42}$$

Le modèle direct réduit  $S$  est obtenu de la même manière que précédemment en utilisant la loi de Biot et Savart 3D :

$$B = SJ \quad \text{Eq III-43}$$

Nous avons donc développé une base  $\Phi$  de meilleure qualité que la base 2D présentée dans la section précédente. Bien que l'approximation 2D soit toujours sous-jacente, les erreurs de calculs liées à la longueur finie de la pile sont désormais inexistantes. De plus, les courants reconstruits sont tous à flux conservatifs, et ils prennent en compte les effets induits par les plaques terminales de hautes conductivités aux extrémités du stack.

### 3) Partitionnement de la base et du modèle

Afin de faciliter les prochains développements, nous proposons ici de découper la densité de courant en trois parties. En effet, notre nouvelle base de représentation des courants nous permet de discriminer aisément plusieurs types de courants. Pour commencer, à l'exception de la fonction  $\Phi_{001}$ , toutes les autres fonctions  $\Phi_{uvw}$  forment des boucles de courant cantonnées à l'intérieur du stack. L'intérêt de travailler avec des fonctions trigonométriques pour la base  $\Phi^{2D}$  apparaît ici. La séparation du mode commun et des modes différentiels est ici immédiate. Le mode commun correspond à la fonction  $\Phi_{001}$ , et tous les modes différentiels correspondent aux autres fonctions  $\Phi_{uvw}$ . L'autre intérêt de cette base est qu'il est possible de séparer arbitrairement les courants de faibles fréquences spatiales des courants de hautes fréquences spatiales. Cela est intéressant car les courants de hautes fréquences ne nous intéressent pas, ceux-ci générant des champs magnétiques très faibles. La séparation entre basses fréquences et hautes fréquences est néanmoins toute relative. Nous définissons  $u_{max}$  et  $v_{max}$  comme les fréquences spatiales maximales (selon  $x$  et  $y$ ) des courants de basses fréquences. Au vu de toutes ces considérations, la densité de courant est décomposée de la manière suivante :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_s) = \underbrace{\sum_{(u,v,w) \in X_{MC}} \Phi_{uvw}(\mathbf{r}_s) J_{uvw}}_{\text{Courant de mode commun}} + \underbrace{\sum_{(u,v,w) \in X_{MD}} \Phi_{uvw}(\mathbf{r}_s) J_{uvw}}_{\text{Courants différentiels (basses fréquences)}} + \underbrace{\sum_{(u,v,w) \in X_{HF}} \Phi_{uvw}(\mathbf{r}_s) J_{uvw}}_{\text{Courants différentiels (hautes fréquences)}} \quad \text{Eq III-44}$$

Où les ensembles  $X_{MC}$ ,  $X_{MD}$  et  $X_{HF}$  permettent de sélectionner respectivement les fonctions  $\Phi_{uvw}$  de mode commun, de modes différentiels basses fréquences, et de modes différentiels hautes fréquences. Avec cette base  $\Phi$  partitionnée, il est alors possible d'obtenir un modèle direct partitionné :

$$B = S_{MC} J_{MC} + S_{MD} J_{MD} + S_{HF} J_{HF} \quad \text{Eq III-45}$$

Nous n'avons pas vraiment optimisé le choix des fréquences spatiales  $u_{max}$  et  $v_{max}$  séparant les courants de basses fréquences et de hautes fréquences. Dans la section expérimentale, ceux-ci seront souvent choisis égaux à trois. Cela fait alors un total de 48 fonctions  $\Phi_{uvw}$  de basses de fréquences et de modes différentiels. Nous avons bien entendu une seule fonction  $\Phi_{uvw}$  de mode commun. Pour les fonctions de modes différentiels de hautes fréquences, il en existe potentiellement un nombre infini. Les dimensions des vecteurs et matrices de l'équation (Eq III-45) sont donc données par :

$$\begin{aligned} \dim(S_{MC}) &= M \times 1 & \text{et} & \dim(J_{MC}) = 1 \\ \dim(S_{MD}) &= M \times 48 & \text{et} & \dim(J_{MD}) = 48 \\ \dim(S_{HF}) &= M \times \infty & \text{et} & \dim(J_{HF}) = \infty \end{aligned} \quad \text{Eq III-46}$$

En règle générale, nous n'évaluons aucune colonne de  $S_{HF}$ . En effet, nous supposons que les coefficients de cette matrice sont très faibles car les courants de hautes fréquences génèrent des champs magnétiques relativement faibles comparés aux courants de basses fréquences spatiales<sup>cc</sup>. Nous omettrons donc ces champs magnétiques dans les équations suivantes. Il s'agit bien entendu d'une approximation. Bien que ces champs soient très faibles, ils existent et seront désormais considérés comme une source de bruit.

---

<sup>cc</sup> Les choses sont en réalité légèrement plus complexes. L'algorithme d'inversion a tendance à reconstruire les courants sur le bord de la pile. Lorsque l'on se déplace vers l'intérieur de la pile, ces courants chutent rapidement vers zéro. La solution subit donc une "discontinuité" et possède donc des fréquences spatiales élevées. Ne pas prendre en compte les courants de hautes fréquences permet de limiter ce phénomène et de mieux répartir les courants sur l'ensemble de la pile. Ce phénomène est illustré en annexe (cf. p. 251).

Il est aisé de montrer (Eq III-17 et Eq III-40 et Eq III-44) que le courant total est donné par la relation suivante :

$$J_{MC} = \frac{I_{tot}}{S_{pile}} \quad \text{Eq III-47}$$

Où  $S_{pile}$  est la section de la pile. Le coefficient  $J_{MC}$  est donc connu avec une très bonne précision à l'aide de l'ampèremètre. Le modèle direct (Eq III-45) peut donc être réécrit de manière à faire apparaître clairement le système d'équation à résoudre :

$$B - S_{MC}J_{MC} = S_{MD}J_{MD} \quad \text{Eq III-48}$$

L'inconnue de notre problème inverse est donc le vecteur  $J_{MD}$ . Les entrées sont regroupées à gauche de l'équation et comprennent les mesures du champ magnétique et la mesure du courant total réalisée à l'aide de l'ampèremètre.

L'intérêt de décomposer notre modèle en plusieurs sous-modèles est avant tout d'ordre pratique. Il est en effet désormais possible de développer chaque sous-modèle de manière totalement indépendante, ce qui offre un certain confort au niveau de la conception du système de mesure. Par exemple, le calcul des coefficients de la matrice  $S$ , tel que décrit par l'équation (Eq III-13), peut être réalisé à l'aide d'un modèle théorique (loi de Biot et Savart par exemple), mais peut aussi être réalisé expérimentalement. Il est en effet possible d'imaginer un dispositif expérimental à l'intérieur duquel il serait possible de générer plusieurs densités de courant  $\Phi_{uvw}$  parfaitement connues. Ce dispositif expérimental nous permettrait d'étalonner notre système de mesure, c'est-à-dire de calculer les coefficients de la matrice  $S$ . Un tel système sera présenté dans le prochain chapitre (cf. p. 186). Et c'est ici que le découpage du modèle  $S$  en plusieurs sous-modèles trouve son intérêt. Selon les moyens expérimentaux à disposition, il est possible de caractériser certains sous-modèles expérimentalement et d'autres théoriquement. Ces considérations seront détaillées plus loin dans la section (cf. p. 197).

## **B - Choix des mesures de champs magnétiques**

Dans cette partie, nous nous intéressons aux choix des différentes mesures (nombre, emplacements, orientations) permettant de caractériser au mieux les champs magnétiques générés par les courants. Nous rappelons que nous utilisons uniquement des capteurs considérés comme ponctuels. Cela signifie que les fonctions  $\Psi_k$  définissant chaque mesure  $B_k$  sont de la forme :

$$\Psi_k(\mathbf{r}) = \mathbf{Y}_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \quad \text{pour } k = 1..M \quad \text{Eq III-49}$$

Où  $\mathbf{Y}_k$  est l'orientation de la mesure  $B_k$ , où  $\mathbf{r}_k$  est la localisation de la mesure  $B_k$ , et où  $M$  est le nombre de mesures. Nous rappelons aussi que le champ magnétique perçu par les capteurs est la somme des champs magnétiques générés par les courants différentiels et par le courant de mode commun :

$$\mathbf{B} = S_{MC} \mathbf{J}_{MC} + S_{MD} \mathbf{J}_{MD} \quad \text{Eq III-50}$$

Les précédents résultats nous ont montré que les coefficients  $S_{MC}$  sont extrêmement élevés et qu'ils imposent l'utilisation de capteurs ayant une large gamme de mesures afin d'éviter leurs saturations. A l'inverse, les coefficients  $S_{MD}$  sont beaucoup plus faibles et nécessitent l'utilisation de magnétomètres de haute précision pour détecter les faibles champs magnétiques différentiels. Nous proposons donc de construire le réseau de capteurs  $\Psi$  de manière à diminuer le gain  $S_{MC}$  de mode commun et à augmenter le gain  $S_{MD}$  des modes différentiels. En plus de ces critères, le réseau de capteurs est aussi construit de manière à faciliter la réalisation pratique du système de mesures (faible nombre de capteurs et rapidité de l'acquisition).

La première section s'intéresse au nombre optimal  $M$  de capteurs qu'il est judicieux de placer autour de la pile à combustible. La seconde section étudie les orientations  $\mathbf{Y}_k$  les plus appropriées pour les mesures. Enfin, la troisième section optimise le positionnement  $\mathbf{r}_k$  de chaque mesure.

### **1) Nombre de mesures**

Nous avons évoqué dans le premier chapitre une équipe de recherche ayant déjà travaillé sur le diagnostic de piles à combustible par champs magnétiques [Hauer et al., 2005b]. Leur dispositif expérimental est de nouveau illustré sur la figure (Fig. 75). Deux

capteurs magnétiques tri-axes sont déplacés autour de la pile à l'aide d'un robot afin de caractériser la signature de celle-ci avec plusieurs centaines de mesures. Le temps d'acquisition est d'environ quinze minutes. Nous avons fait le choix de nous démarquer de cette approche et d'essayer de caractériser la signature magnétique en utilisant un nombre de mesures beaucoup plus faible. Malgré la perte d'information induite par ce choix, les avantages vont se révéler être nombreux grâce à la simplification apportée à l'instrumentation du système magnétique.

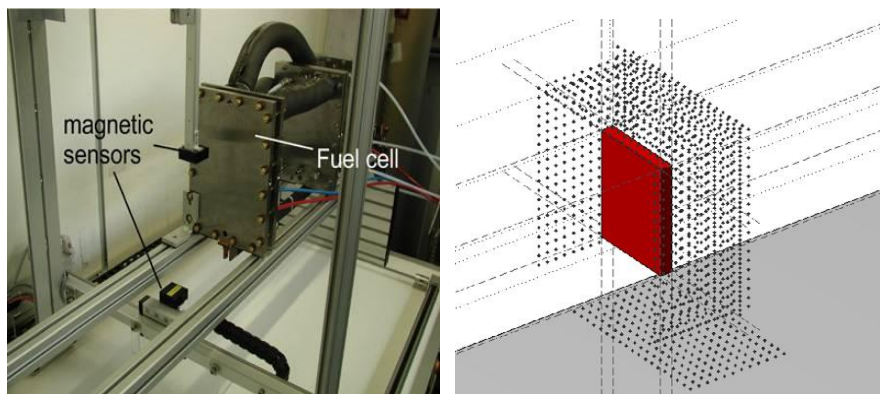


Fig. 75 : Dispositif expérimental de Hauer et al.

Afin de limiter le nombre de mesures, nous avons dans un premier temps tiré parti du fait que les inconnues du problème inverse sont toujours 2D. Nous nous sommes donc contentés de réaliser les mesures sur un seul contour autour de la pile, ce qui limite beaucoup le nombre de mesures par rapport à une approche 3D. La question qui se pose maintenant est de savoir s'il existe un nombre optimal de mesures sur ce contour.

A priori, il semblerait intéressant de réaliser le plus grand nombre de mesures possible sur ce contour. En effet, plus les mesures sont nombreuses, plus grande devrait être la quantité d'informations recueillies. La résolution spatiale du système devrait alors augmenter avec le nombre de mesures. Mais ce raisonnement est limité par la présence du bruit. En effet, lors des précédents développements, nous avons vu que les champs magnétiques sont d'autant plus filtrés que leurs fréquences spatiales sont élevées. Par conséquent, au fur et à mesure que l'on monte en fréquence spatiale, il devient de plus en plus difficile d'extraire le signal utile du bruit.

Pour essayer d'observer l'impact du nombre de capteurs sur le nombre d'informations qu'il est possible d'extraire du bruit, nous proposons de réutiliser en partie la méthodologie employée pour déterminer le critère de troncature  $M_A$  (cf. p. 151). Cette méthodologie consiste à comparer les fluctuations du bruit aux variations du champ magnétique. Cette

approche est répétée ici pour différents nombres de mesures. La figure (Fig. 76) illustre le spectre de la matrice  $S_{MD}$  obtenue avec 25, 50 et 100 capteurs bi-axes disposés sur un contour rectangulaire autour de la pile<sup>dd</sup>.

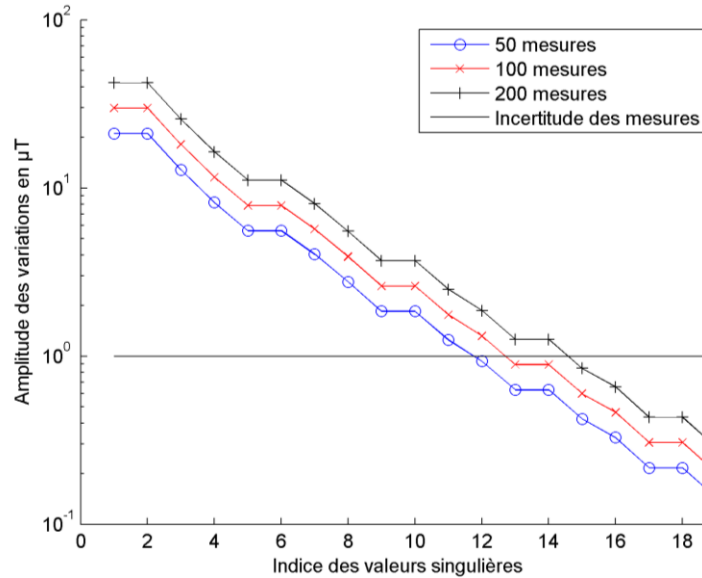


Fig. 76 : Niveau de bruit et variations attendues des champs magnétiques (pour  $1 \text{ A.cm}^{-2}$  de variations de densités de courant).

Sur la figure (Fig. 76), nous voyons que l'augmentation du nombre de mesures permet de gagner quelques valeurs singulières lors de la troncature de spectre et d'accroître la sensibilité du système. Le gain est néanmoins limité. Ainsi, la multiplication par  $n$  du nombre de mesures permet :

- De multiplier par environ  $\sqrt{n}$  les premières valeurs singulières<sup>ee</sup>.
- De gagner environ  $\log_2(n)$  valeurs singulières lors de la troncature de spectre.

<sup>dd</sup> Les matrices  $S_{MD}$  étudiées ici sont calculées en prenant  $u_{max}$  et  $v_{max}$  égaux à 7.

<sup>ee</sup> Plus exactement, c'est le ratio signal sur bruit qui augmente d'un facteur  $\sqrt{n}$ . Avec le système de normalisation utilisé ici lors du passage dans la base des vecteurs singuliers gauches, la multiplication par  $n$  du nombre de mesures a effectivement pour effet de multiplier par  $\sqrt{n}$  la variance du champ magnétique tout en maintenant constant le niveau de bruit. Mais avec d'autres systèmes de normalisation pour les vecteurs singuliers (matrice de passage non orthogonale), la variance du bruit ou du champ magnétique pourrait varier différemment en fonction de  $n$ . Mais quel que soit le système de normalisation choisi, le ratio signal sur bruit augmente toujours d'un facteur  $\sqrt{n}$ . Ce phénomène est intéressant car il permet de se servir de la redondance des informations pour filtrer le bruit. Il s'agit d'un phénomène parfaitement analogue à celui que l'on rencontre en traitement du signal lorsque l'on répète et moyenne des mesures dans le temps afin de filtrer une partie du bruit. Pour rappel cela n'est vrai que si le bruit est non corrélé (cf. Eq III-33).

D'après ces résultats, il n'existe pas de nombre optimal de mesures. La figure (Fig. 76) montre qu'il n'est pas forcément utile d'augmenter indéfiniment le nombre  $M$  de mesures. Le ratio signal sur bruit étant proportionnel à  $\sqrt{M}$ , l'augmentation relative de ce ratio devient faible lorsque  $M$  est grand. Le choix du nombre  $M$  de mesures est donc un compromis à faire entre la qualité des mesures (ratio signal sur bruit) et des critères autres, tel que le coût des capteurs par exemple.

Pour faire ce choix, nous sommes parti du constat qu'il n'était pas envisageable que l'acquisition de la signature magnétique d'un stack puisse prendre quinze minutes comme c'est le cas avec le système présenté sur la figure (Fig. 75). En effet, la pile à combustible peut voir son état varier entre le début et la fin de l'acquisition. Pour éviter cela, nous avons fait le choix de fixer les capteurs autour de la pile afin de pouvoir acquérir simultanément les signaux de chaque capteur. Cela permet d'obtenir de manière quasi-instantanée la signature magnétique de la pile. La seule limitation en vitesse provient de la fréquence de coupure des capteurs (800 Hz avec la technologie fluxgate employée) et de la moyenne temporelle des mesures pour filtrer le bruit. Le nombre de capteurs a été choisi de manière quelque peu arbitraire en fonction de la place disponible autour de la pile, de l'encombrement des capteurs, et du nombre de voies d'acquisitions disponibles sur la centrale d'acquisition. Ce nombre est égal à 24 pour le stack GESI (cf. p. 186) et 30 pour le stack GENEPAC (cf. p. 201).

## **2) Orientation des mesures**

Les précédents résultats ont montré que les champs magnétiques générés par les courants différentiels sont très faibles, et que leurs détections nécessitent des capteurs relativement précis (inférieur au  $\mu\text{T}$ ). Mais nous avons aussi rencontré une autre contrainte : le courant de mode commun génère un champ magnétique très intense pouvant aller jusqu'à 750  $\mu\text{T}$ . Afin que les magnétomètres ne saturent pas, il est donc nécessaire d'utiliser des capteurs possédant des gammes très élevées.



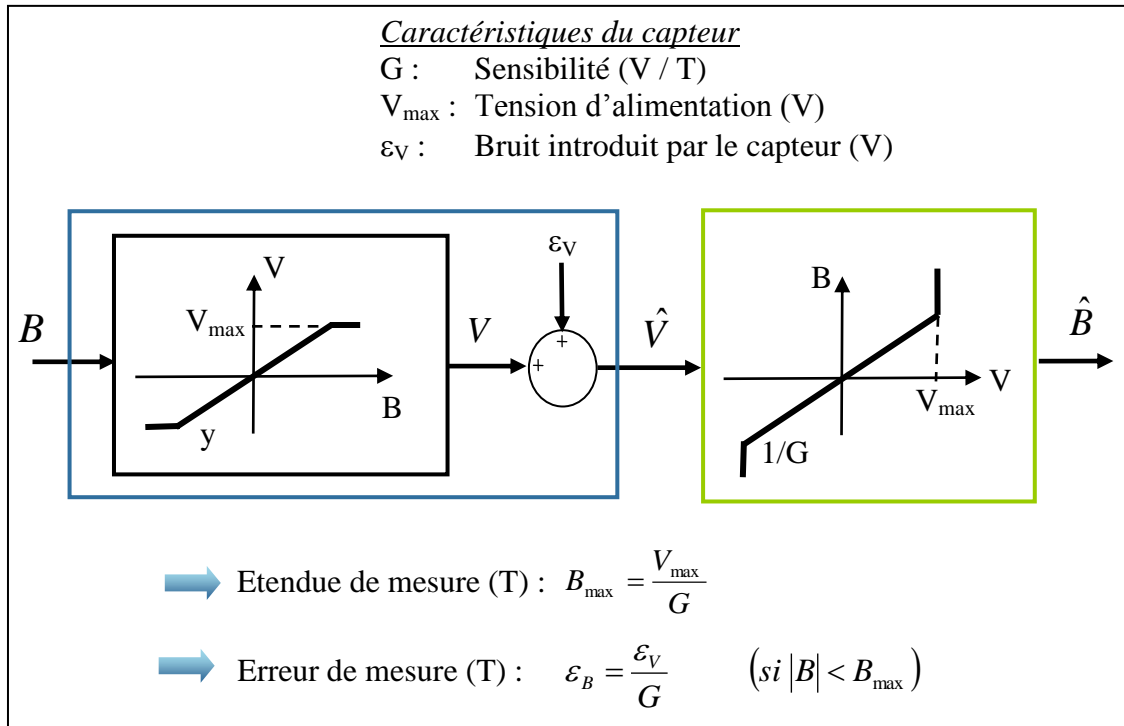


Fig. 77 : Représentation simplifiée d'un capteur. La transformation physique du signal magnétique en signal électrique est représentée par le cadre bleu. Le traitement de l'information (inversion) est représenté par le cadre vert. Ce modèle simplifié suppose que la sensibilité  $G$  du capteur est parfaitement connue (étalonnage parfait).

La difficulté rencontrée ici est qu'une précision et une gamme élevée sont deux contraintes antagonistes pour un capteur. La figure (Fig. 77) illustre ce phénomène à l'aide d'une représentation simplifiée d'un capteur. Toutes choses étant égales par ailleurs (bruit et tension d'alimentation du capteur constants), nous voyons que l'étendue de mesure et l'erreur de mesure ne peuvent être améliorées simultanément en modifiant la sensibilité du capteur. Un capteur de très forte sensibilité améliorera la précision mais diminuera d'autant l'étendue de mesure. Inversement, un capteur de plus faible sensibilité permet d'avoir une étendue plus élevée mais une incertitude de mesure plus grande.

Nous proposons ici une solution originale permettant de contourner ce problème. Dans le cadre de l'approximation 2D, des développements analytiques présentés en annexe ont montré que le champ magnétique peut être entièrement caractérisé en ne mesurant qu'une seule composante du champ sur un seul cercle (cf. p. 228). Bien que la validité de ce résultat soit soumise à quelques conditions restrictives<sup>ff</sup>, il est raisonnable de penser que la perte

<sup>ff</sup> Les mesures (en nombre infini) doivent être réalisées en dehors d'un disque circonscrit aux sources.

d'information est limitée si on ne mesure qu'une seule composante au lieu de deux. Nous pouvons alors utiliser des capteurs mono-axes à la place des capteurs bi-axes. Cela nous donne alors accès à un degré de liberté supplémentaire pour l'orientation des capteurs. Au vu des précédentes considérations, nous avons choisi d'orienter les capteurs mono-axes de manière à ce qu'ils soient insensibles au champ magnétique de mode commun. La contrainte sur la gamme minimale de  $750 \mu\text{T}$  disparaît, et il devient alors possible d'utiliser des capteurs de précisions accrues.

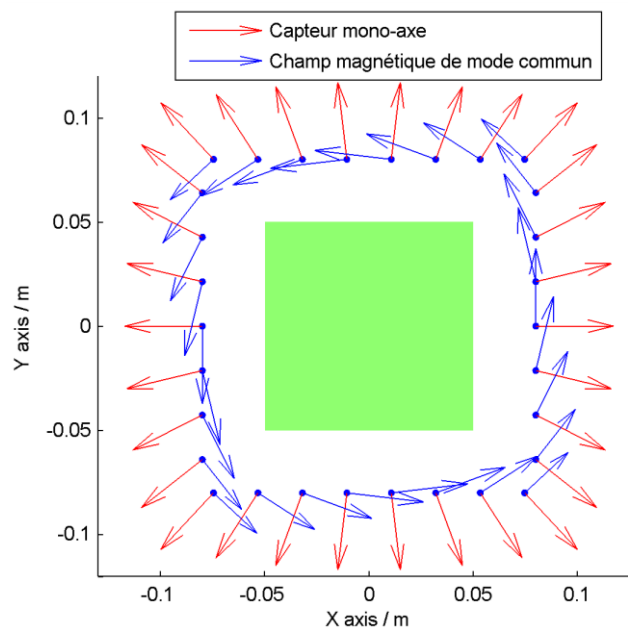


Fig. 78 : Champ magnétique de mode commun (bleu) et orientation des capteurs mono-axes (rouge).

Pour rendre le système insensible au courant de mode commun, il faut choisir les orientations  $\mathbf{Y}_k$  des capteurs mono-axes de manière à ce que le sous-modèle  $S_{MC}$  soit égal à zéro. Le principe est simple et est illustré sur la figure (Fig. 78). Pour cela, on calcule d'abord le champ magnétique de mode commun numériquement. Les orientations  $\mathbf{Y}_k$  sont ensuite choisies de manière à ce que celles-ci soient perpendiculaires au champ magnétique calculé. En raison de la géométrie complexe de la boucle de courant externe à la pile, il n'est en réalité pas si simple de calculer de manière précise le champ magnétique de mode commun (cf. p. 225). Ces aspects pratiques seront considérés plus en détail lors de la présentation des résultats expérimentaux (cf. p. 191).

Nous avons ici conçu en quelque sorte un "capteur de défauts". Notre réseau de capteurs est insensible au courant de mode commun (fonctionnement sain) mais est sensible

aux modes différentiels (défauts). Cette façon de procéder nous a permis d'utiliser des capteurs de technologie fluxgate ayant une gamme de 200  $\mu\text{T}$  au lieu de 800  $\mu\text{T}$ . Nous avons ainsi multiplié la précision du système par quatre.

### Remarque sur la perte d'informations liée à la mesure d'une seule composante

Les développements analytiques présentés en annexe (cf. p. 228) nous ont montré que l'information portée par les deux composantes du champ magnétique est redondante (à quelques conditions restrictives près). Partant de ce constat, nous avons supposé ci-dessus qu'il suffit de ne mesurer qu'une seule de ces deux composantes. Ce raisonnement est rigoureusement juste en l'absence de bruit. Néanmoins, en présence de bruit, il est souvent judicieux de réaliser des mesures redondantes afin de filtrer une partie du bruit de mesure. Par conséquent, les choses sont en réalité plus complexes. Dans certaines circonstances, il peut en effet être plus intéressant de mesurer les deux composantes afin d'augmenter le ratio signal sur bruit.

Afin de quantifier la perte de sensibilité occasionnée par la mesure d'une seule composante du champ, nous traçons les mêmes spectres que précédemment dans le cas où 30 capteurs mono-axes sont utilisés et dans le cas où 30 capteurs bi-axes (60 mesures) sont utilisés. Les résultats sont illustrés sur la figure (Fig. 79).

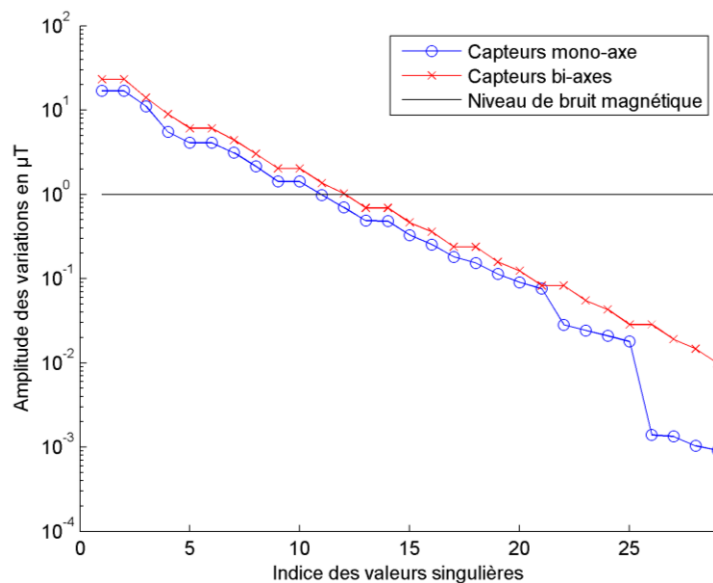


Fig. 79 : Niveau de bruit et variations attendues des champs magnétiques (pour  $1 \text{ A.cm}^{-2}$  de variations de densités de courant). Comparaison entre capteurs bi-axes et mono-axes.

Cette figure montre que l'utilisation de capteurs mono-axes introduit une diminution de la sensibilité du système de mesure vis-à-vis du bruit magnétique ambiant. Le ratio signal sur

bruit est dégradé d'environ un facteur  $\sqrt{2}$  pour les premières valeurs singulières. Cette diminution est à peu près similaire aux résultats obtenus dans le paragraphe précédent lorsque l'on divise le nombre de mesures par deux.

Mais cette dégradation du signal vis-à-vis des champs magnétiques perturbateurs est à mettre en regard de la diminution du niveau de bruit apportée par l'utilisation de capteurs de meilleures précisions. La figure (Fig. 80) résume les avantages et inconvénients liés à l'utilisation d'un réseau mono-axe à la place d'un réseau bi-axe. L'utilisation de capteurs mono-axes permet d'utiliser des capteurs de sensibilité quatre fois supérieure. Le rapport signal sur *bruit électronique* est donc amélioré d'un facteur 4. Par contre, l'utilisation de capteurs mono-axes divise par deux le nombre de mesures. Le ratio signal sur *bruit magnétique* est donc diminué d'un facteur  $\sqrt{2}$ .

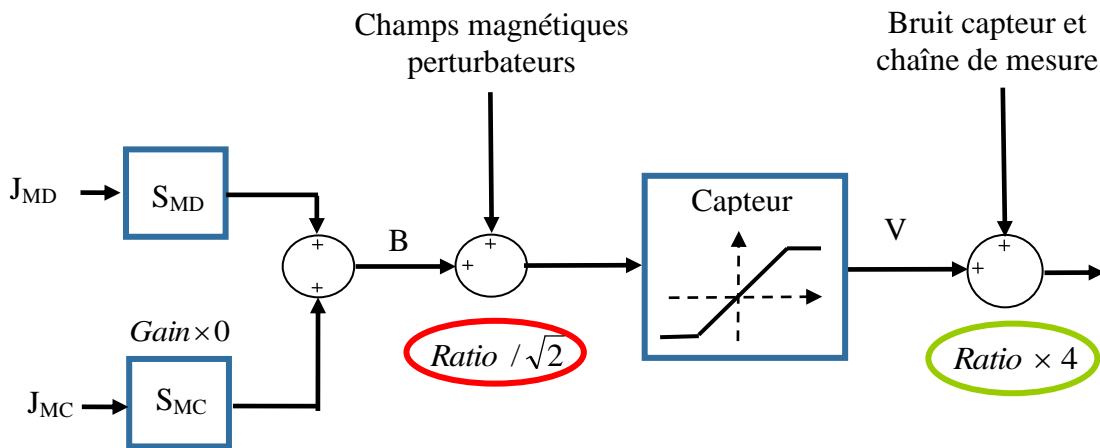


Fig. 80 : Bilan des modifications apportées par l'utilisation d'un réseau de capteurs mono-axe à la place d'un réseau de capteurs bi-axes.

L'utilisation d'un réseau de capteurs mono-axes rend donc le système de mesure légèrement plus sensible aux champs magnétiques perturbateurs (pièce aimantées, machines électriques...). Par contre le système est beaucoup plus robuste vis-à-vis des bruits et des incertitudes introduits par le capteur lui-même et par l'ensemble de la chaîne de mesure.

### 3) Localisation des mesures

La conception du système de mesures nécessite encore de choisir les emplacements  $\mathbf{r}_k$  des  $M$  capteurs mono-axes. En raison des décroissances très rapides des champs magnétiques avec l'éloignement des sources, nous avons fait en sorte de placer les capteurs le plus près

possible des bords de la pile. Ce paragraphe s'intéresse à la localisation des mesures sur ce contour.

Pour commencer, il est intéressant d'observer les emplacements où les capteurs sont les plus sensibles aux variations de courant. Pour réaliser cela, on utilise un réseau de capteurs quelconque et on regarde quels sont les capteurs dont la variance est la plus grande. Nous supposons que la variance du courant est de la forme suivante :

$$\text{var}(J_{MD}) = \sigma_J^2 \cdot Id \quad \text{Eq III-51}$$

Où  $Id$  est la matrice identité. Alors, la matrice de variance-covariance des champs magnétiques différentiels est de la forme suivante :

$$\text{var}(B_{MD}) = \sigma_J^2 \cdot S_{MD} S_{MD}^T \quad \text{Eq III-52}$$

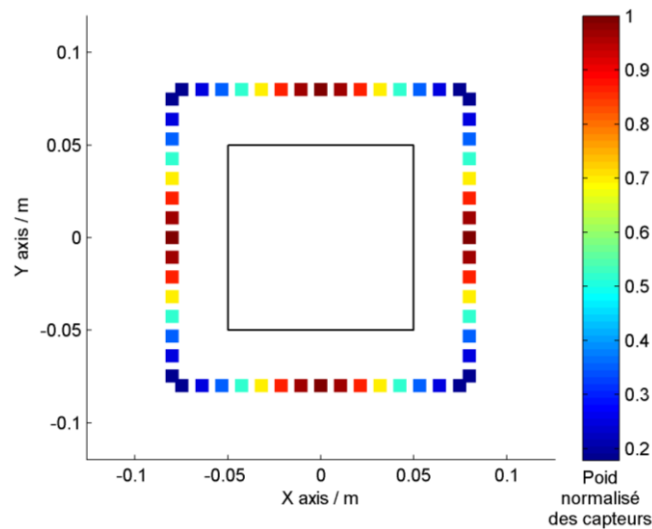


Fig. 81 : Contour de la zone active de la pile et variance normalisée des différents capteurs. La variance est normalisée par la variance maximale obtenue.

La figure (Fig. 81) illustre la variance de chaque capteur. Nous voyons que les capteurs situés au milieu de chaque rangée sont beaucoup plus sensibles que les capteurs situés sur les coins de la pile. Cela s'explique par le fait que les capteurs sur les coins sont en moyenne plus éloignés des sources que les autres capteurs. Ce résultat nous pousse donc à placer en priorité les capteurs au milieu des rangées afin d'augmenter la sensibilité du système, c'est-à-dire l'amplitude des premières valeurs singulières de la matrice  $S_{MD}$ . Néanmoins, si nous plaçons tous les capteurs aux mêmes endroits, les lignes de la matrice  $S_{MD}$  tendent à devenir parallèles. Ce phénomène diminue l'amplitude des dernières valeurs singulières. Afin d'illustrer ces deux tendances, la figure (Fig. 82) présente deux réseaux particuliers de 24 capteurs. Sur le premier

réseau, les capteurs sont espacés régulièrement de manière à éviter le parallélisme des équations du système matriciel. Sur le deuxième réseau, tous les capteurs ont été concentrés aux endroits où l'information sur les sources est la plus riche.

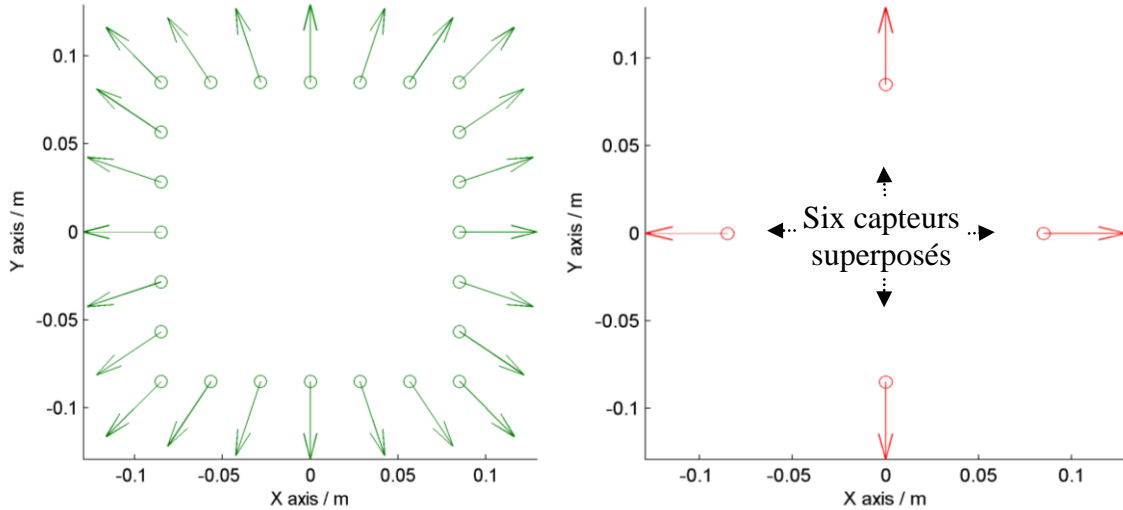


Fig. 82 : Illustration de deux réseaux particuliers de 24 capteurs. A gauche, les capteurs sont espacés régulièrement. A droite, les capteurs sont concentrés sur les zones les plus proches des sources.

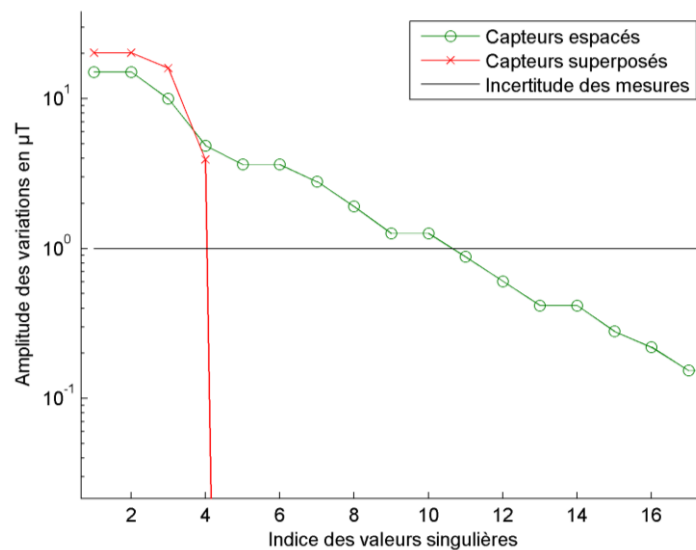


Fig. 83 : Comparaison des spectres des réseaux de capteurs présentés sur la figure (Fig. 82).

La figure (Fig. 83) illustre le spectre de ces deux réseaux de capteurs. Lorsque les capteurs sont concentrés au plus près des sources, la sensibilité du système est accrue pour les premières valeurs singulières. Avec un tel réseau, nous pouvons caractériser avec une très bonne précision la densité de courant à l'aide de quatre paramètres. Avec le réseau de capteurs espacés régulièrement, la précision est inférieure pour les premiers paramètres. Néanmoins, le

nombre de paramètres estimés est beaucoup plus grand. Cet exemple illustre le fait qu'il est difficile de relever simultanément l'ensemble des valeurs singulières d'un spectre. Le choix d'un réseau de capteurs est un compromis à faire entre la qualité (gain) et la quantité (bande passante) d'informations reconstruites.

Au final, nous avons définis l'emplacement de nos capteurs de manière quelque peu arbitraire et avons privilégié la quantité d'information reconstruite (bande passante). Le réseau de capteurs ainsi conçu est illustré sur la figure (Fig. 84). En raison des précédents développements, les capteurs ont été légèrement resserrés au niveau des emplacements les plus sensibles aux courants.

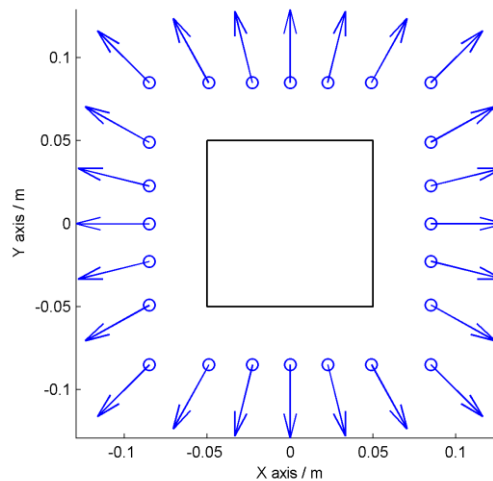


Fig. 84 : Contour de la zone active de la pile (en noir) et réseau de capteur utilisé pour le stack GESI.

### Remarque sur l'optimisation du réseau de capteurs

Nous venons de voir qu'il est difficile de relever simultanément toutes les valeurs singulières d'un spectre. L'optimisation d'un réseau de capteurs est donc un problème d'optimisation multi-objectifs. Un tel problème peut éventuellement être transformé en un problème mono-objectif en pondérant ces différents objectifs. Le choix des coefficients de pondération définit le compromis que l'on fait entre la qualité et la quantité d'informations reconstruites.

Les choix les plus simples consistent probablement à maximiser la somme ou le produit<sup>gg</sup> des valeurs singulières. Nous avons ici utilisé comme critère la somme des dix-neuf premières valeurs singulières. Bien qu'une étude plus approfondie eue été nécessaire, nous présentons sur la figure (Fig. 85) un réseau de capteur vers lequel un algorithme génétique a convergé à plusieurs reprises. Nous voyons que celui-ci tend à resserrer les mesures au centre des rangées.

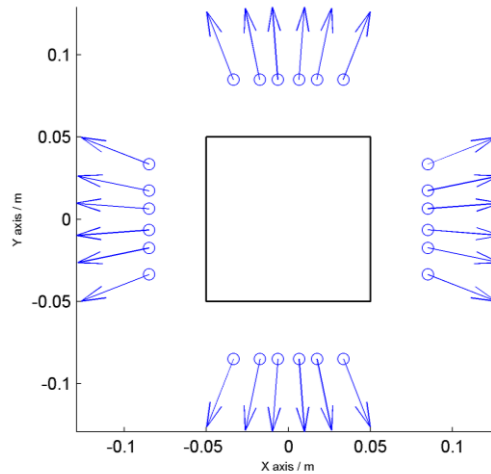


Fig. 85 : Réseau de capteurs optimisé en maximisant la somme des dix-neuf premières valeurs singulières.

### Perspectives sur le rejet des perturbations magnétiques extérieures

L'un des inconvénients de notre système de diagnostic est sa sensibilité aux perturbations extérieures (objets aimantés, dispositifs électriques...). Par perturbations, nous entendons les sources de champs que nous n'essayons pas d'estimer. Pour le moment, ces sources n'ont pas été prises en compte dans nos modèles. Il serait pourtant judicieux de les y insérer de la manière suivante :

$$B = S_{MC}J_{MC} + S_{MD}J_{MD} + S_{Ext}J_{Ext} \quad \text{Eq III-53}$$

---

<sup>gg</sup> Utiliser le produit des valeurs singulières revient à utiliser le critère de D-optimalité. Le nom de ce critère provient du fait qu'il consiste à maximiser le déterminant de la matrice de variance-covariance des mesures. Ce critère est très populaire pour la construction de plans d'expériences optimaux. Il a aussi été employé pour optimiser le positionnement de capteurs dans différentes applications [Begot et al., 2002], [Di Rienzo & Zhang, 2010].



Où  $J_{ext}$  est le vecteur contenant les paramètres caractérisant ces sources de perturbations, et où  $S_{ext}$  est le sous-modèle traduisant leurs impacts sur le réseau de capteurs. Un tel sous-modèle nécessite de disposer d'une base de description de ces sources de perturbations. Des modèles de sources compactes telles que les harmoniques circulaires ont déjà été utilisées pour modéliser ces perturbations [Di Rienzo & Zhang, 2010]. Les résultats montrent un rejet efficace de celles-ci et des erreurs de reconstruction beaucoup plus faibles. Afin d'améliorer notre outil de diagnostic, il serait intéressant dans le cadre de futurs travaux de reproduire cette approche<sup>hh</sup>. Il devrait aussi être possible d'aller plus loin et d'utiliser des harmoniques sphériques (3D) plutôt que circulaires (2D). Il serait aussi intéressant de prendre en compte ces perturbations dès la conception du réseau de capteur. Pour orienter et placer les magnétomètres, nous avons précédemment utilisé deux types de critères : minimiser la sensibilité  $S_{MC}$  de mode commun et maximiser la sensibilité  $S_{MD}$  des modes différentiels. Il serait donc nécessaire de définir un troisième critère pour rejeter au maximum les perturbations extérieures.

### ***C - Bilan sur les améliorations apportées à l'outil de diagnostic***

Nous avons définis dans cette section une nouvelle base de description  $\Phi$  des défauts à l'intérieur de la pile. Cette base ne prend en compte que les défauts les plus faciles à détecter, à savoir les défauts 2D. L'approche proposée ici permet de modéliser leurs champs magnétiques à l'aide de la loi de Biot et Savart 3D. Cela limite les erreurs de modélisation par rapport aux approches entièrement 2D. Notons néanmoins que la loi de Biot et Savart 2D demeure extrêmement utile pour réaliser des pré-dimensionnements rapides du réseau de capteurs. Le modèle 3D intervient uniquement pour le calcul précis du modèle direct réduit servant à l'inversion des mesures.

Les inconnues du problème d'inversion demeurent 2D. Cela limite grandement le nombre d'inconnues et donc le nombre de mesures magnétiques nécessaires. Nous avons aussi

---

<sup>hh</sup> Pour discriminer les perturbations extérieures, le nombre de mesures doit être supérieur au nombre des coefficients à estimer. Dans le cadre de notre application, cela peut sembler problématique car nous avons jusqu'à présent toujours travaillé avec des problèmes sous-déterminés. Mais les précédents résultats ont montré que seule une quinzaine de paramètres étaient réellement accessibles. Or nous avons à notre disposition une trentaine de mesures. Nous avons donc probablement de la marge pour diminuer le nombre d'inconnues lors de la construction du problème et pour insérer à la place les inconnues caractérisant les perturbations magnétiques.

montré que l'erreur de reconstruction diminue relativement peu avec le nombre de mesures. Nous avons alors conçu notre système de manière à privilégier la vitesse d'acquisition de la signature magnétique. Les capteurs sont fixés autour du stack (Fig. 86) et la vitesse du système est désormais limitée par la fréquence de coupure des capteurs (800 Hz). Pour comparaison, le système développé par Hauer et al prend plus de quinze minutes à scanner le champ magnétique. Cette rapidité d'acquisition offre une plus grande marge de manœuvre pour l'étude des piles à combustible. De plus, la pile à combustible n'a ainsi plus le temps de voir son état de fonctionnement changer entre le début du scan et la fin de celui-ci.

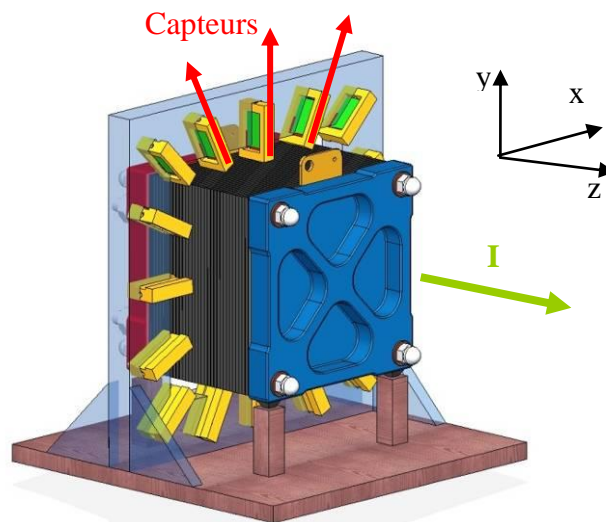


Fig. 86 : Pile à combustible et capteurs fixés autour de celle-ci.

Nous avons aussi proposé une solution innovante pour éviter aux magnétomètres d'avoir à supporter le champ magnétique de mode commun de plusieurs centaines de  $\mu\text{T}$ . Pour réaliser cela, nous avons utilisé des capteurs mono-axes orientés perpendiculairement au champ magnétique de mode commun. Le réseau de capteur ainsi conçu est donc insensible à ce champ magnétique. Il n'est sensible qu'aux modes différentiels, c'est-à-dire aux défauts de fonctionnement survenant dans la pile. La sensibilité du système est largement accrue malgré la perte d'information induite par la mesure d'une seule composante.

Enfin et à titre de perspective, nous avons montré qu'en choisissant judicieusement les emplacements des capteurs autour de la pile, il est possible d'améliorer encore la sensibilité du système.

## **IV - Conclusion sur le problème inverse**

---

Ce chapitre nous aura permis de concevoir un modèle inverse qui estime les courants circulant dans une pile à combustible à l'aide de sa signature magnétique. Les problématiques liées à ce type de modèle inverse sont nombreuses. Nous avons vu qu'une partie de l'information portée par les courants est au mieux filtrée, au pire tronquée. Malgré cela, nous avons montré l'intérêt d'un système de diagnostic basé sur la mesure des champs magnétiques. Bien que toute l'information ne soit pas accessible via le champ magnétique, il est possible d'obtenir à partir de celui-ci une information qui demeure tout à fait pertinente sur le fonctionnement interne de la pile. En raison de la présence de bruit, l'extraction de cette information nécessite néanmoins l'emploi d'une technique de régularisation stabilisant le système.

La qualité et la quantité de l'information recueillie dépendent de la sensibilité du système (amplitude des valeurs singulières) et du niveau de bruit. Nous avons alors proposé quelques solutions permettant d'améliorer le rapport signal sur bruit du système. Nous avons conçu notre réseau de capteurs de telle sorte que celui-ci soit insensible au champ magnétique très intense du mode commun. Le système de mesure n'est alors sensible qu'aux défauts de fonctionnement, ce qui permet d'utiliser des capteurs de gamme réduite et plus précis. Enfin, le nombre réduit d'inconnues a permis de limiter le nombre de mesures. Chaque mesure est réalisée par un capteur dédié qui est fixé sur la pile à combustible. L'acquisition de la signature est instantanée, ce qui devrait permettre l'étude de nombreux phénomènes transitoires à l'intérieur du stack.

## **Chapitre IV : Validation expérimentale de l'outil de diagnostic**



Ce chapitre présente les résultats expérimentaux d'inversions réalisés à partir de mesures magnétiques réelles. Ce chapitre est divisé en deux parties :

- Dans la première section de ce chapitre, nous présentons la "pile étalon" que nous avons construite. Cette pile étalon simule le comportement magnétique du stack GESI du LEPMI. Il est en effet possible d'imposer à l'intérieur de cet objet un très grand nombre de distributions de courants 2D connues. Cette approche nous permet de tester nos algorithmes d'inversions et de valider notre méthodologie.
- Dans la seconde section, nous présentons les résultats obtenus en installant notre système de mesure magnétique autour d'une véritable pile à combustible, à savoir le stack GENEPAC du CEA/PSA. Différents défauts de fonctionnement sont artificiellement créés, et la capacité de notre système à les détecter est discutée.

## I - Simulateur de champs magnétiques

Afin de valider les modèles magnétiques directs et inverses présentés dans le chapitre précédent, nous avons construit un simulateur de pile à combustible à l'intérieur duquel la distribution de courant est parfaitement contrôlée. Ce simulateur nous permet ainsi de générer des champs magnétiques similaires à ceux d'une véritable pile à combustible. La première partie décrit le système expérimental. La seconde partie compare les résultats de mesures aux résultats obtenus à l'aide de notre modèle direct. La troisième section présente les résultats d'inversion. Enfin, la dernière partie discute de l'intérêt pratique d'un tel simulateur pour l'étalonnage de notre système de diagnostic.

### A - Présentation du système expérimental

Le système expérimental est schématisé sur la figure (Fig. 87). Celui-ci est principalement constitué de deux parties : la pile étalon (et sa commande) et la chaîne de mesure magnétique. Une brève description de chacun de ces éléments est donnée ci-dessous.

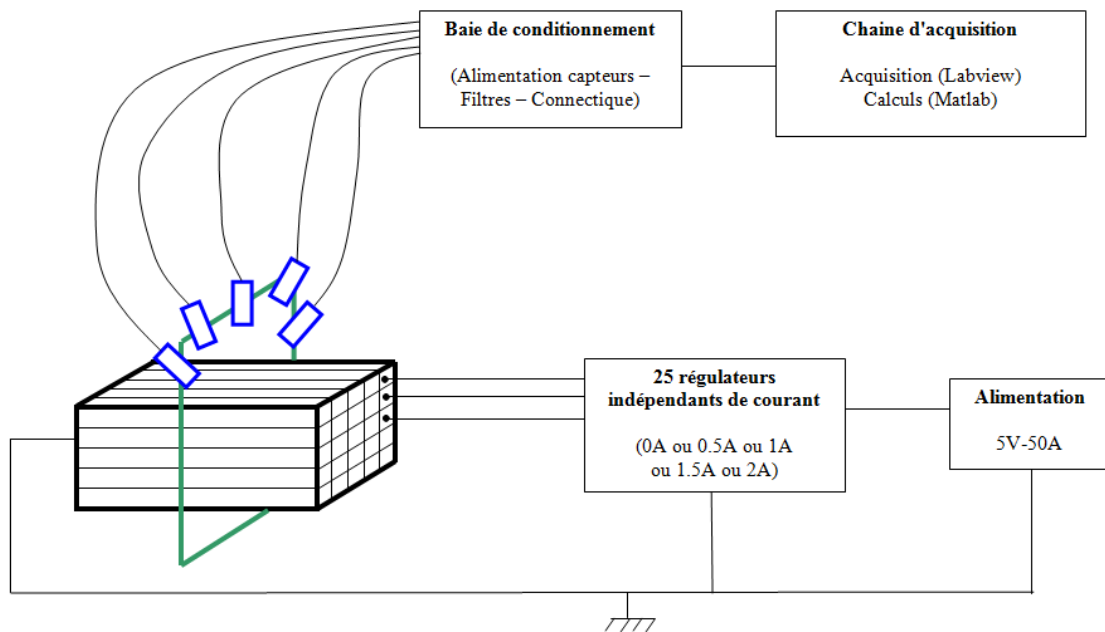
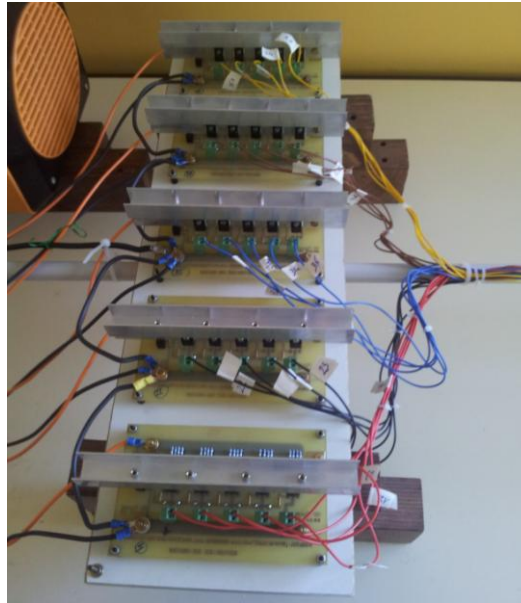


Fig. 87 Schéma de principe du système de validation expérimental.

#### Alimentation et régulateurs de courant

L'alimentation est constituée d'amplificateurs de puissance régulés à 5V. Le courant maximal est de 50 A. Ce sont les 25 régulateurs de courant en aval qui absorbent le courant

désiré. Chacun de ces 25 régulateurs est associé à un des 25 barreaux en graphite de la fausse pile (Fig. 88). Un régulateur est constitué d'un système d'interrupteurs permettant de choisir 5 valeurs de courants différentes (0 ou 0,5 ou 1 ou 1.5 ou 2A). Ces régulateurs sont sujets à des dérives thermiques entraînant une variation du courant avec le temps. Des ventilateurs ont été ajoutés afin de diminuer les variations de température et d'accélérer l'établissement du régime stationnaire (qui s'obtient en moins de 5 minutes).



*Fig. 88 : Vingt-cinq régulateurs de courant répartis sur cinq cartes électroniques.*

### **Pile à combustible étalon**

Cette pile à combustible étalon est constituée de 25 barreaux de graphite, de dimension  $2 \times 2 \times 10 \text{ cm}^3$ , isolés électriquement et maintenus par deux plaques de serrage (Fig. 89). Le courant est collecté à l'aide de circuits imprimés insérés entre le graphite et les plaques de serrage. Ces circuits imprimés tentent de reproduire le trajet du courant dans les plaques terminales et dans les amenées de la pile. Le circuit imprimé inséré à la borne positive est illustré sur la photo (Fig. 90). A la borne négative, tous les barreaux sont reliés à la masse du système. La géométrie de la pile étalon est identique à celle du stack GESI qui est une pile à combustible utilisée au LEPMI. Les courants empruntent donc dans ce simulateur un chemin similaire à celui emprunté par les courants du stack GESI. Cette fausse pile permet donc de simuler le comportement magnétique du stack GESI et du circuit électrique extérieur. Nous précisons dès maintenant que les mesures sur pile à combustible réelle présentées dans la prochaine section ont été réalisées sur un stack de géométrie différente (stack PSA/GEA de technologie GENEPAC). Les résultats obtenus ici ne peuvent donc pas servir à étalonner le



système de mesure de ce stack. Il est néanmoins prévu dans le cadre de futurs travaux de réutiliser les résultats obtenus ici pour réaliser des diagnostics sur le stack GESI.

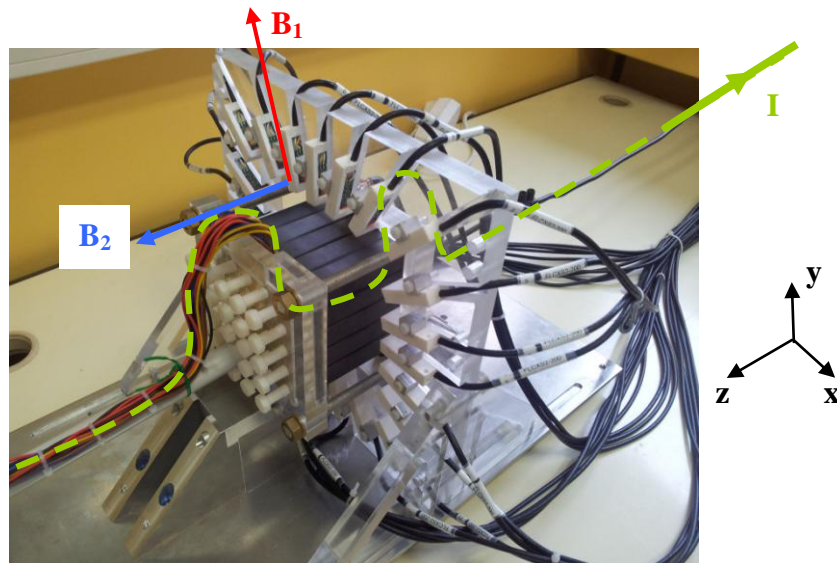


Fig. 89 : Pile étalon, magnétomètres et leurs supports. Le trajet du courant principal est représenté en vert. Des capteurs bi-axes (composante rouge et bleu) sont fixés sur le support transparent. Seule la composante rouge est utilisée.

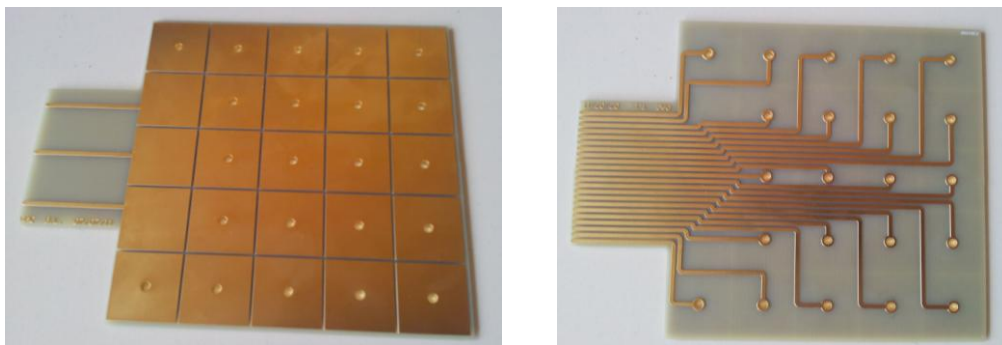


Fig. 90 : Collecteur de courants (faces avant et arrière) de la borne positive. Les courants passent de la face avant à la face arrière par des vias métallisés.

## Capteurs

Le système comporte 24 capteurs bi-axes de technologie fluxgate possédant une gamme de plus ou moins  $200 \mu\text{T}$ . En pratique, le signal d'un seul des deux axes est utilisé par les algorithmes d'inversion (Fig. 89). Cela revient donc à utiliser des capteurs mono-axes. Néanmoins, le deuxième axe pourrait être utilisé dans le cadre de futurs travaux pour faire de l'inversion 3D sur une pile réelle.

### **Système mécanique de positionnement des capteurs**

Le système de positionnement permet de fixer jusqu'à 24 capteurs autour du stack (Fig. 89). Celui-ci a été conçu de manière à ce que le courant de mode commun signe le moins possible sur les deux axes des capteurs. Le cadre peut aussi coulisser selon l'axe  $z$ . Cette possibilité n'a néanmoins pas été mise à profit lors de nos expériences.

### **Baie de conditionnement**

Le boîtier de conditionnement intègre des cartes filtres permettant d'atténuer les glitch provoqués par l'électronique des capteurs fluxgate. La baie comporte aussi une alimentation 5V permettant d'alimenter l'ensemble des capteurs. Enfin, la baie assure la connectique et le routage entre les 24 capteurs et les connecteurs des cartes d'acquisition.

### **Système d'acquisition**

Le système d'acquisition est un châssis de type PXI contenant plusieurs cartes d'acquisition. Chaque carte possède 32 entrées analogiques (avec masse commune) et est dotée d'un convertisseur analogique numérique multiplexé 18 bits pouvant échantillonner jusqu'à 500 kHz. Au final, nous avons arbitrairement fait le choix d'échantillonner chaque voie aux alentours de 10 kHz.

### **Interfaces**

Un environnement d'acquisition et de traitement des données a été développé sous Labview (Fig. 91). Un module Labview permet de piloter Matlab, d'inverser les mesures et d'afficher les résultats en temps réel (Fig. 92).

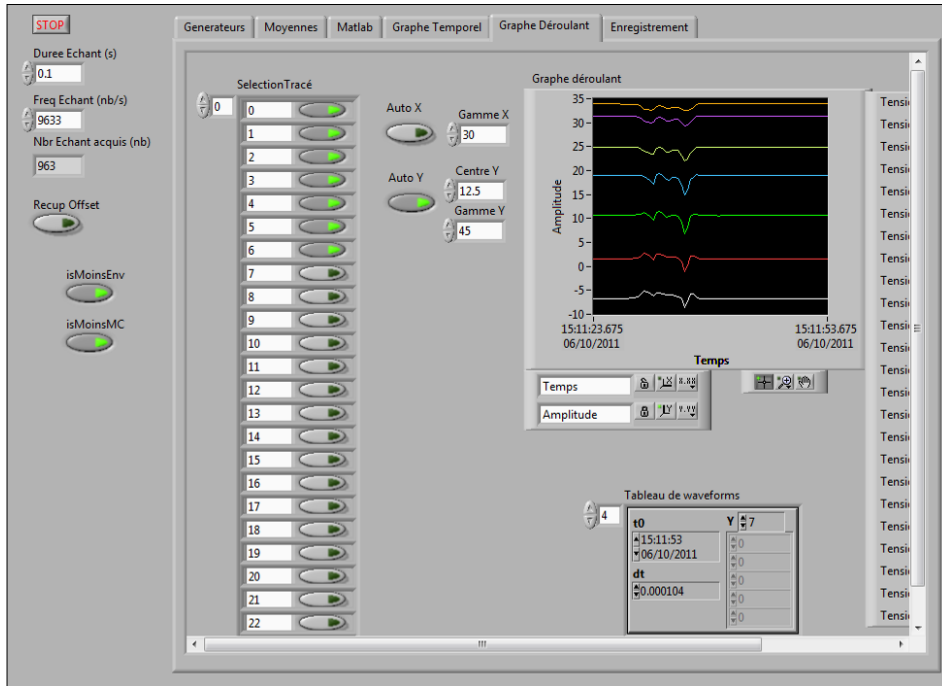


Fig. 91 : Interface Labview (choix du critère de troncature, paramètres d'affichage et d'enregistrements).

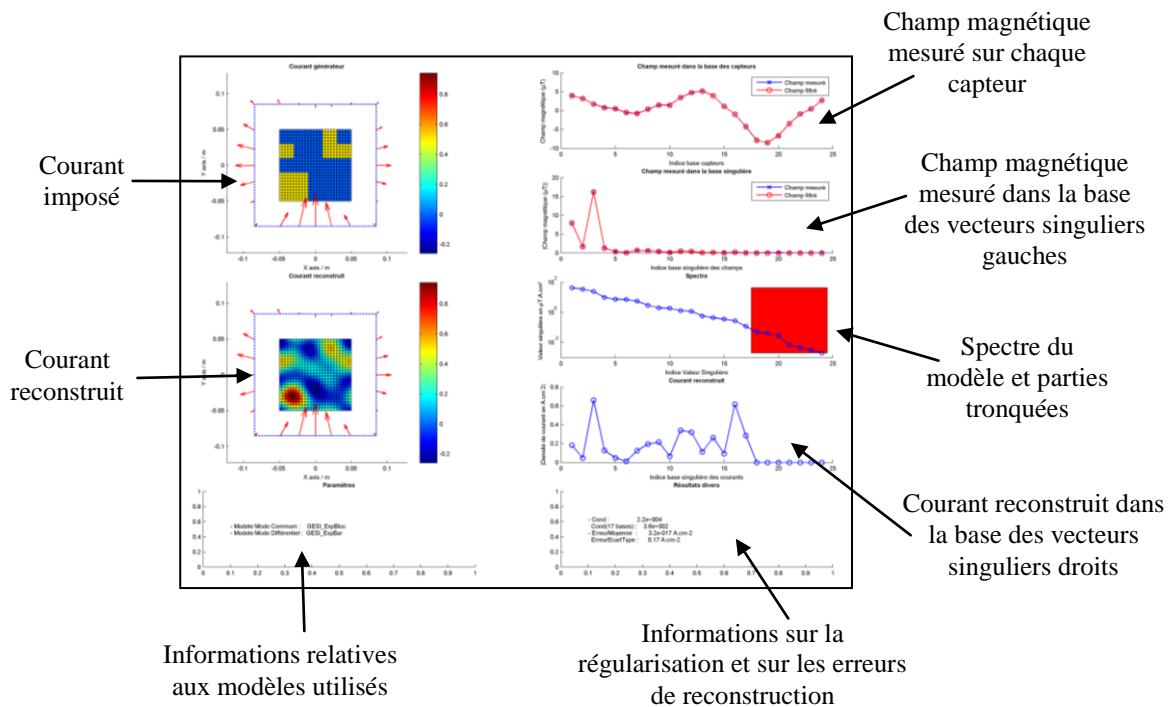


Fig. 92 : Interface Matlab.

## ***B - Comparaison des mesures et des simulations numériques***

Ce paragraphe compare les résultats numériques prédits par le modèle direct aux résultats expérimentaux obtenus avec la pile étalon. Afin de généraliser cette comparaison, nous construisons dans un premier temps un modèle expérimental  $S$  en suivant une procédure similaire à celle que nous avons réalisée numériquement dans le précédent chapitre (Eq II-13). La méthode consiste à faire passer un courant dans chaque barreau de façon séquentielle, à collecter les champs de chaque expérience et à les ranger dans une matrice<sup>a</sup>. Les 25 entrées de notre modèle expérimental correspondent alors aux courants circulant dans chacun des 25 barreaux. A l'aide d'un changement de base (transformée de Fourier discrète), il est possible de faire en sorte que les 25 entrées correspondent aux coefficients de Fourier 2D du courant dans la section de la pile. Notre modèle expérimental a alors presque<sup>b</sup> les mêmes entrées que le modèle théorique.

Le modèle expérimental  $S$  est ensuite découpé en un sous-modèle de mode commun  $S_{MC}$  et un sous-modèle de modes différentiels  $S_{MD}$  de la même manière que dans le chapitre précédent. Ces deux sous-modèles sont ensuite comparés de manière indépendante.

### **Comparaison des modèles de mode commun**

La figure (Fig. 93) représente les coefficients du modèle de mode commun théorique et expérimental. Le modèle théorique en rouge indique un champ nul quel que soit le courant total circulant à travers la pile. Ceci est normal puisque nous avons justement orienté nos capteurs de manière à ce que le champ de mode commun théorique ne soit pas perçu par ceux-ci. Par contre, le champ magnétique réel signe sur l'ensemble des capteurs. D'après cette figure, le capteur numéro cinq perçoit un champ magnétique de 40  $\mu\text{T}$  pour un courant total de 100 A. Nous sommes donc très loin du champ magnétique nul prédit par le modèle numérique.

---

<sup>a</sup> Les coefficients de chaque colonne de la matrice doivent aussi être divisés par la valeur du courant circulant dans le barreau lors de chaque expérience. Ainsi la dimension des coefficients de la matrice est en Tesla par unité de densité de courant.

<sup>b</sup> En réalité, la base  $\Phi$  expérimentale n'est pas exactement identique à la base  $\Phi$  théorique présentée dans le chapitre précédent. Voir la remarque en fin de section.

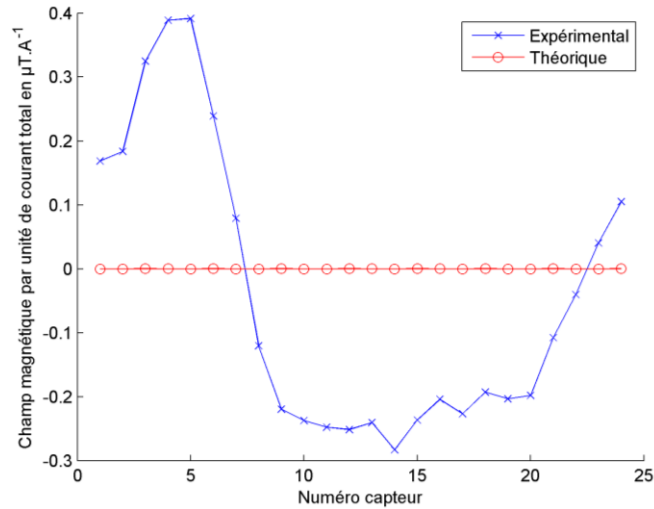


Fig. 93 : Sous-modèle de mode commun  $S_{MC}$  (divisé par la section de la pile) théorique et expérimental.

La raison de cet écart est que la boucle de courant externe à la pile étalon n'est pas prise en compte par notre modèle théorique. Cette boucle externe est illustrée sur la figure (Fig. 94). Sa modélisation est en effet assez délicate. Les géométries possibles sont très variées et dépendent du banc de mesure, de la localisation de la charge sur celui-ci et de la forme des collecteurs de courant sur la pile. Si les câbles ne sont pas fixés, la géométrie peut varier avec le temps suite, par exemple, à une intervention sur le banc. Nous ne connaissons donc pas exactement la géométrie de cette boucle lorsque nous avons conçu le support permettant d'orienter les capteurs. De plus, le champ magnétique de mode commun ayant une très forte amplitude, il peut interagir avec les pièces ferromagnétiques voisines.

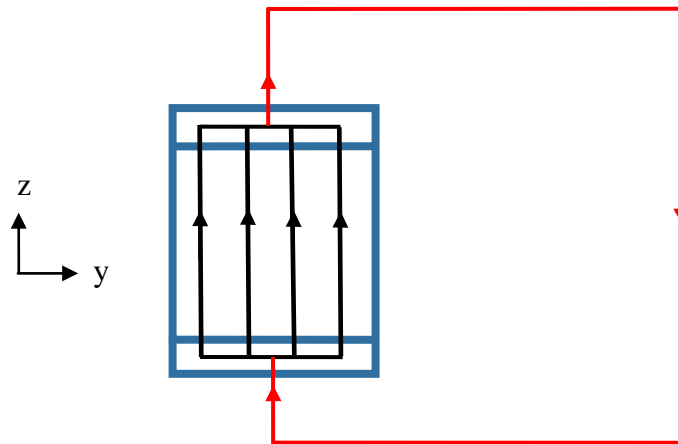


Fig. 94 : Courant de mode commun. En rouge, la boucle de courant externe qui n'est pas prise en compte par le modèle théorique.

L'orientation des capteurs avait été choisie de telle sorte que les magnétomètres ne perçoivent pas le champ magnétique de mode commun d'environ  $250 \mu T$  (pour  $100 A$ ). Nous

voyons que malgré les erreurs de modélisation, le champ magnétique de mode commun perçu par les capteurs n'est désormais plus que de  $40 \mu\text{T}$  au maximum (pour  $100 \text{ A}$ ). Par conséquent, bien que notre modèle théorique de mode commun soit peu précis, celui-ci nous a permis d'atteindre notre objectif qui était d'utiliser des capteurs de gamme réduite et de précision accrue.

### Comparaison des modèles de modes différentiels

La figure (Fig. 95) compare les premiers coefficients de la matrice  $S_{MD}$  expérimentale et théorique. La théorie et la pratique s'accordent ici beaucoup mieux qu'avec le modèle de mode commun. En effet, aucun courant différentiel ne circule à travers la boucle de courant externe très mal caractérisée (Fig. 96). Les champs magnétiques différentiels étant d'amplitudes faibles, ceux-ci ont moins de chance d'interagir avec les objets magnétiques alentours. Ces courants différentiels sont donc beaucoup plus simples à modéliser, d'où de bien meilleurs résultats.

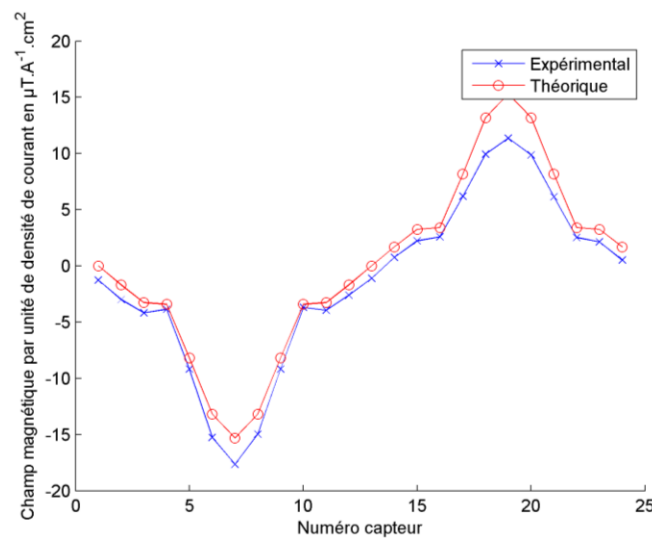


Fig. 95 : Sous-modèle de modes différentiels  $S_{MD}$  théorique et expérimental (seuls les coefficients  $S_{kp}$  de la première colonne sont représentés).

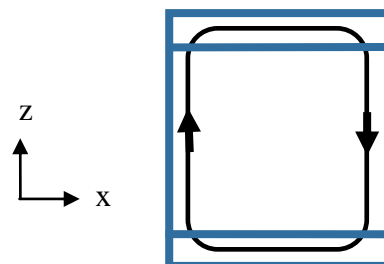


Fig. 96 : Exemple de courant différentiel. Aucun courant ne circule dans la boucle externe.

Mais bien que les résultats soient meilleurs qu'avec le mode commun, on observe toujours des écarts entre la théorie et l'expérience. Ces écarts s'expliquent en grande partie par des erreurs de positionnements mécaniques. Il aurait été plus rigoureux de réévaluer avec précision le positionnement et l'orientation des capteurs afin de corriger ces erreurs de modélisation. Mais malgré ces erreurs, nous allons voir par la suite que ce modèle théorique donne des résultats d'inversion très satisfaisants. Notons que nous n'avons illustré ici que la première colonne de la matrice  $S_{MD}$ . Il s'agit de la rangée de coefficients pour laquelle les écarts sont les plus importants.

**Remarque sur les bases de description des courants**

Pour que la comparaison entre le modèle expérimental et le modèle théorique ait un sens, il est nécessaire que la base de description des courants soit identique. Afin de respecter cette contrainte, nous avons apporté ici une légère modification à la base de description théorique. La base  $\Phi^{2D}$  des courants n'est plus celle présentée dans le chapitre précédent mais celle qui est illustrée sur le figure (Fig. 97 - droite). A titre de comparaison, la base présentée dans le chapitre précédent est illustrée sur la figure (Fig. 97 - gauche). Cette modification est nécessaire car les courants dans la fausse pile sont homogènes à l'intérieur de chaque barreau en graphite. Cette nouvelle base n'est utilisée que pour la comparaison des mesures et des simulations. L'inversion avec les modèles théoriques est toujours réalisée avec la base originale.

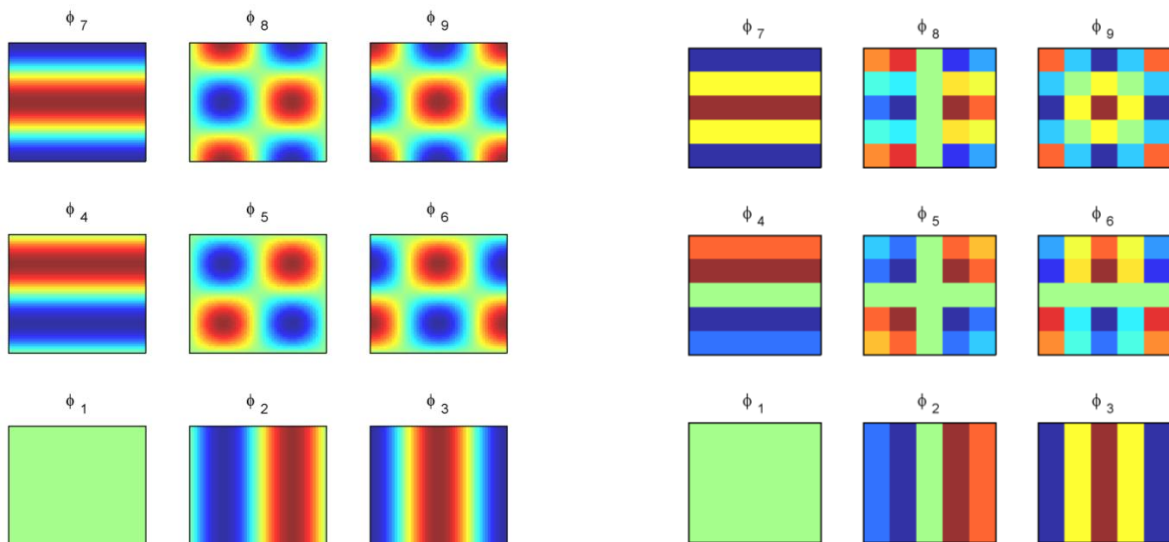


Fig. 97 : Base de description des courants. A gauche, base utilisée pour l'inversion. A droite, base utilisée pour comparer le modèle numérique au modèle expérimental.

### C - Résultats d'inversion

Ce paragraphe présente les résultats d'inversion réalisés en utilisant le modèle théorique ou le modèle expérimental. Le précédent chapitre a montré que le système d'équation à inverser se présentait de la manière suivante :

$$S_{MD}J_{MD} = B - S_{MC} \frac{I_{tot}}{S_{pile}} \quad \text{Eq IV-1}$$

Où  $B$  est le champ magnétique mesuré avec les magnétomètres,  $I_{tot}$  le courant mesuré avec l'ampèremètre et  $S_{pile}$  la section de la pile. Les inconnues du problème inverse sont les densités de courant différentielles  $J_{MD}$ . Ce système d'équations contient deux sous-modèles ( $S_{MC}$  et  $S_{MD}$ ) qui peuvent avoir été déterminés par calcul ou expérimentalement à l'aide de la pile étalon. Nous avons vu dans la précédente section que le modèle théorique de mode commun est totalement faux. Par conséquent, nous utilisons par la suite uniquement le modèle expérimental pour évaluer le champ magnétique de mode commun. Par contre, nous présentons et comparons les résultats d'inversion obtenus avec le modèle théorique et le modèle expérimental pour les modes différentiels. Les résultats obtenus avec le modèle expérimental sont donnés sur la figure (Fig. 98). Ceux obtenus avec le modèle théorique différentiel sont donnés sur la figure (Fig. 99). Les courants reconstruits sont interpolés sur un même maillage.

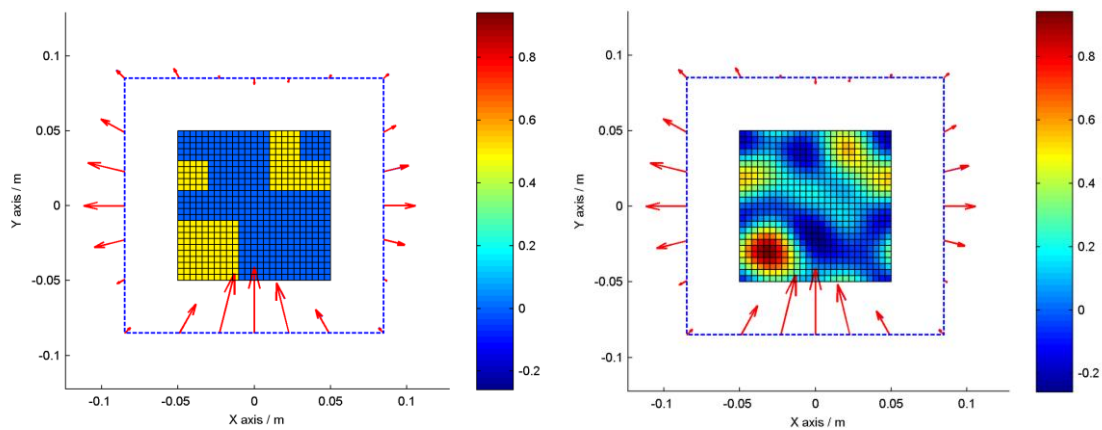


Fig. 98 : Résultats d'inversion avec le modèle expérimental. A gauche, densité de courant (en A.cm-2) imposée dans la fausse pile. A droite, densité de courant reconstruite.



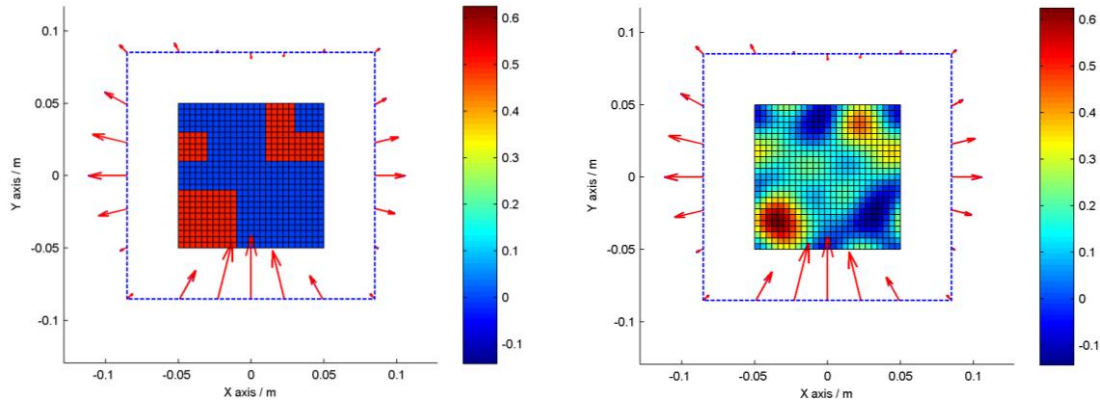


Fig. 99 : Résultats d'inversion avec le modèle expérimental pour le mode commun et le modèle théorique pour les modes différentiels. A gauche, densité de courant (en A.cm-2) imposée dans la fausse pile. A droite, densité de courant reconstruite.

Ces résultats démontrent l'intérêt des mesures de champs magnétiques pour la cartographie des densités de courant. La forme globale de la distribution de courant imposée dans la fausse pile apparaît bien dans la solution du problème inverse. Les résultats sont néanmoins moins précis au centre de la pile. Enfin, la résolution spatiale est aussi limitée : la solution est plus lisse que le courant réel et les variations abruptes de courant ne sont pas retrouvées. Cela est logique puisque nous n'essayons pas de reconstruire les courants de fréquences spatiales élevées, ceux-ci étant quasiment indétectables au niveau du champ magnétique.

L'erreur de reconstruction  $\varepsilon_J$  est définie par :

$$\varepsilon_J = J - \hat{J} \quad \text{Eq IV-2}$$

Où  $J$  est le courant imposé dans la fausse pile et  $\hat{J}$  le courant reconstruit. Pour que la comparaison soit possible, ces deux densités de courants doivent être interpolées sur le même maillage. Il est alors possible de définir une erreur globale  $Err$  de la manière suivante :

$$Err = \|\varepsilon_J\|^2 \quad \text{Eq IV-3}$$

Il se trouve que dans l'exemple précédent, l'erreur de reconstruction  $Err$  est légèrement plus faible avec le modèle théorique qu'avec le modèle expérimental. D'autres expériences ont donné des résultats de meilleures qualités avec le modèle expérimental. Dans tous les cas de figures, les écarts entre le modèle théorique et le modèle expérimental ne nous semble pas vraiment significatifs. Le modèle théorique différentiel est au final quasiment aussi efficace pour l'inversion que le modèle expérimental. Notons aussi que la dérive en température des

régulateurs de courant a pu introduire des incertitudes supplémentaires au niveau du modèle expérimental.

### ***D - Préconisations pour l'étalonnage du système de diagnostic***

Nous avons vu que les différents sous-modèles peuvent être obtenus de manière indépendante via des techniques différentes : par calcul ou par expérimentation. D'après ce qui précède, le modèle différentiel théorique donne des résultats convenables. Dans le cadre d'une étude démontrant la faisabilité du système, il ne nous semble donc pas indispensable de développer un simulateur de pile pour étalonner notre système de mesure magnétique. Plutôt que de construire un tel simulateur, il serait probablement plus intéressant d'évaluer précisément les positions et orientations des capteurs dans leurs supports mécaniques afin de corriger notre modèle théorique et de réduire les erreurs de modélisation.

Par contre, il n'en va pas de même pour le modèle de mode commun. Pour les raisons évoquées plus haut, la modélisation de celui-ci est délicate. Bien que cela soit possible, il peut être plus judicieux de l'évaluer expérimentalement dans certaines circonstances. La caractérisation de la signature magnétique du mode commun ne nécessite pas nécessairement un système aussi complexe que le simulateur précédent. Les 25 barreaux peuvent être remplacés par un bloc conducteur homogène.

Le tableau (Tab. 9) résume ces différents résultats et préconise quelle méthode de caractérisation est à employer pour chaque sous-modèle.

Sous-modèle	Caractérisation théorique	Caractérisation expérimentale	Bilan
$S_{MC}$ (mode commun)	Délicate (géométrie de la boucle externe, interaction avec les objets magnétiques...)	Nécessite d'utiliser une pile étalon constituée d'un seul bloc conducteur homogène.	- Privilégier le modèle expérimental - Si on ne dispose d'aucun modèle, il est possible d'utiliser le mode de fonctionnement différentiel (cf. ci-dessous)
$S_{MD}$ (modes différentiels basses fréquences)	Simple	Nécessite d'utiliser une pile étalon divisée en un nombre relativement faible de barreaux	Le modèle théorique suffit
$S_{HF}$ (modes différentiels hautes fréquences)	Simple	Très complexe : nécessite d'utiliser une pile étalon divisée en un nombre très élevé de barreaux.	Peu utile (coefficients presque négligeables)

Tab. 9 : Bilan sur les techniques de caractérisation des différents sous-modèles.

### Mode de fonctionnement différentiel

Si, pour des raisons diverses, il est impossible d'obtenir expérimentalement ou par calcul un sous-modèle  $S_{MC}$  de qualité, il est possible de contourner ce problème en fonctionnant par soustraction. Ainsi, si l'équation (Eq IV-1) est différenciée, nous obtenons :

$$S_{MD} \Delta J_{MD} = \Delta B - S_{MC} \frac{\Delta I_{tot}}{S_{pile}} \quad \text{Eq IV-4}$$

Si au cours d'une expérience le courant total est maintenu constant, cette équation devient :

$$S_{MD} \Delta J_{MD} = \Delta B \quad \text{Eq IV-5}$$

Il devient alors possible d'évaluer les variations temporelles des courants différentiels sans connaître le sous-modèle  $S_{MC}$ . On qualifiera de fonctionnement différentiel ce mode de fonctionnement du système de diagnostic.

Nous insistons sur le fait que l'identification de ces courants différentiels doit être réalisée à courant total constant. Il est donc possible d'observer l'influence d'une variation des

débits de gaz ou de leur hygrométrie sur la pile à combustible. Mais il est par contre impossible d'étudier les effets d'un saut de courant sur la pile, ou bien de faire de la spectroscopie d'impédance en même temps que les mesures magnétiques. Pour réaliser ce type d'études, un modèle  $S_{MC}$  demeure indispensable.

### Géométrie de la boucle externe

A plus long terme, il serait intéressant d'anticiper le problème du mode commun lors de la phase de conception de la pile à combustible et de son système de diagnostic. On pourrait par exemple fixer à la pile le "fil retour" de la boucle externe comme indiqué sur la figure (Fig. 100). Celui-ci longerait d'ailleurs le coin de la pile, zone où il est peu intéressant de placer les capteurs. La géométrie de cette partie de la boucle ne serait plus sujette à modification et on pourrait la modéliser une fois pour toute. Pour les fils reliant la pile à la charge, ceux-ci seraient rapprochés (éventuellement torsadés si leurs rigidités le permettent) afin de limiter le champ magnétique rayonné et les erreurs de modélisation associées. On peut espérer ainsi obtenir un modèle théorique de mode commun plus performant. Les magnétomètres seraient toujours orientés en suivant la procédure décrite dans le chapitre précédent.

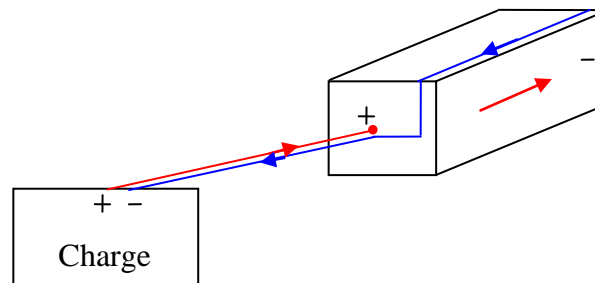


Fig. 100 : Géométrie adéquate pour la boucle de courant externe. "Fil aller" en rouge et "fil retour" en bleu.

### E - Conclusion

La pile étalon a permis de démontrer la faisabilité d'un système de diagnostic basé sur la mesure de champ magnétique. Le système de mesure est capable de détecter et de reconstruire les composantes de basses fréquences spatiales du courant. Nous avons aussi vu qu'un tel simulateur de pile à combustible n'est pas indispensable pour étalonner notre système de diagnostic. Pour les courants différentiels, le sous-modèle théorique s'est révélé être amplement suffisant. En définitive, le point le plus délicat de notre système de diagnostic concerne le champ magnétique de mode commun. Celui-ci génère sur notre réseau de

capteurs un bruit ( $40 \mu\text{T}$ ) qu'il est indispensable de caractériser pour être en mesure d'inverser nos mesures. Pour l'étude des prochaines piles à combustible, il nous semble préférable de caractériser ce sous-modèle expérimentalement à l'aide d'une pile étalon simplifiée constituée d'un seul bloc conducteur.

## **II - Mesures magnétiques sur pile à combustible**

Dans cette section, nous présentons les mesures magnétiques réalisées sur une pile à combustible réelle. La capacité de notre outil de diagnostic à déceler des défaillances est étudiée. Le premier paragraphe présente le système expérimental mis en place. Le second présente les différentes défaillances que nous avons provoquées sur la pile à combustible. Les cartographies de courant obtenues pour chacune de ces expériences sont présentées.

### ***A - Présentation du système expérimental***

Les mesures magnétiques présentées dans cette section ont été réalisées sur un stack de technologie GENEPAC co-développé par le CEA et PSA. Il s'agit d'un stack de 40 cellules dont les dimensions sont données dans le tableau (Tab. 10).

Section	160 x 140 mm <sup>2</sup>
Epaisseur des AME et des plaques bipolaires du stack	62 mm
Epaisseur d'une plaque terminale	2 mm
Nombre de cellules	40

*Tab. 10 : Dimensions géométriques du stack étudié*

Un système de métrologie magnétique similaire à celui du précédent paragraphe a été développé par le CEA et installé sur le stack GENEPAC. Ce système est illustré sur les figures (Fig. 101) et (Fig. 102). Les capteurs sont ici au nombre de 30. La même technologie est utilisée (fluxgate 200  $\mu$ T).

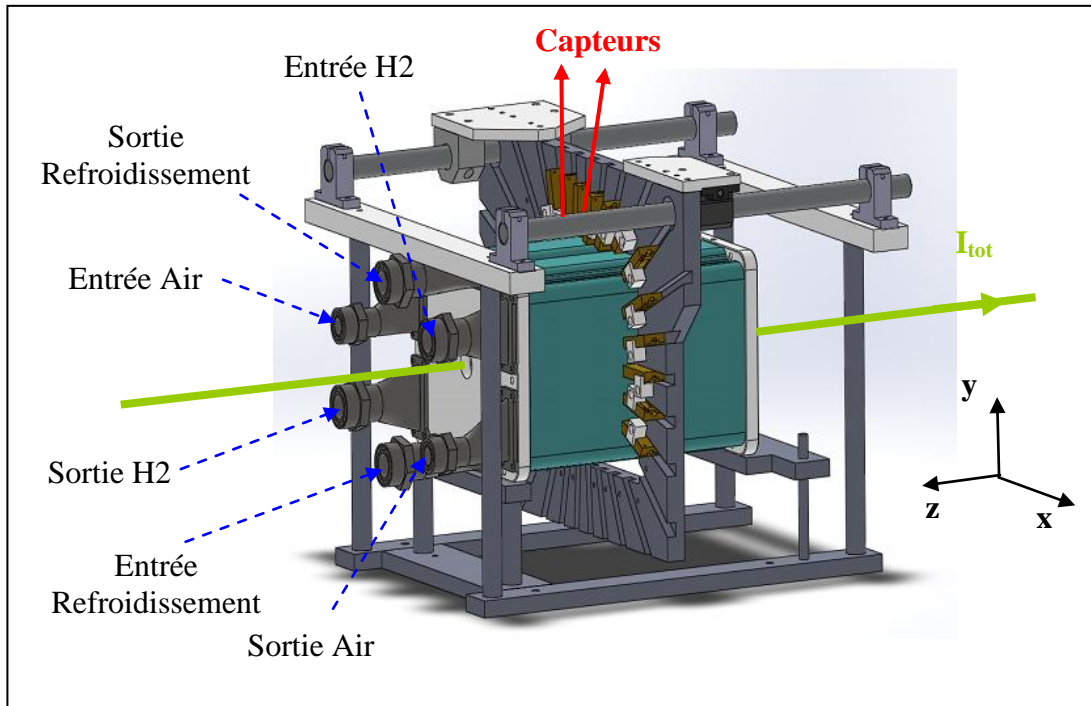


Fig. 101 : Stack GENEPAC et système de positionnement mécanique des capteurs réalisé par le CEA.

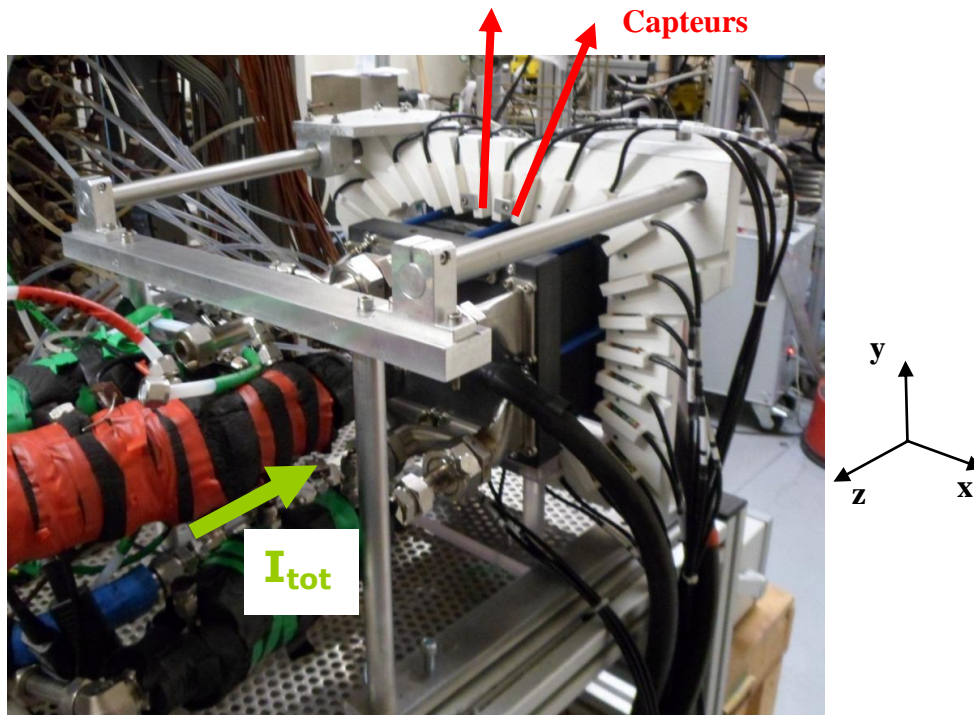


Fig. 102 : Photo du stack GENEPAC et du système de positionnement mécanique réalisé par le CEA.

Afin de vérifier la validité des courants reconstruits à l'aide du système magnétique, le stack GENEPAC a été instrumenté à l'aide d'un autre dispositif de mesure de courant (Fig.

103). Il s'agit d'une plaque de mesure de densité de courant de la société S++ qui s'insère entre deux plaques bipolaires à la place d'un assemblage membrane électrode [S++]. Il s'agit donc d'un dispositif invasif qui possède cependant l'avantage de disposer d'une bonne résolution spatiale. Cet outil est néanmoins très sensible aux variations de températures et est moins rapide que notre système (2 Hz). De plus, cette plaque de mesure induit des perturbations sur le fonctionnement du stack qui sont mal maîtrisées.



*Fig. 103 : Plaque invasive de mesure de densité de courant [S++].*

Les résultats sur le simulateur de pile GESI ont montré que le modèle théorique différentiel donnait des résultats tout à fait convenables. Nous n'avons donc pas jugé utile de construire pour le stack GENEPAC un simulateur de champ magnétique aussi complexe que celui présenté dans la section précédente. Nous avons par contre essayé de caractériser le courant de mode commun en remplaçant le stack GENEPAC par un bloc en graphite. Des problèmes de repositionnement mécanique ont malheureusement rendu cette caractérisation inefficace. Tous les résultats de reconstruction suivants concernent donc des variations temporelles de courants obtenues en résolvant l'équation (Eq IV-5). Les mesures ont ainsi toujours été réalisées à courant total constant.

## ***B - Résultats***

Afin de tester la capacité de l'outil de diagnostic à détecter des défauts de fonctionnement, trois expériences ont été réalisées : un appauvrissement en oxygène, un assèchement du stack et un suivi des dégradations. Les conditions de fonctionnement nominal du stack sont présentées dans le tableau (Tab. 11). Pour les deux premières expériences, un seul de ces paramètres est modifié à la fois.



Courant	110 A
Densité de courant moyenne	0,5 A/cm <sup>2</sup>
Pression (anode et cathode)	1,5 bar
Humidité relative (air)	50 %
Humidité relative (H <sub>2</sub> )	50 %
Stœchiométrie (air)	2
Stœchiométrie (H <sub>2</sub> )	1,5
Température (entrée du circuit de refroidissement)	80 °C

*Tab. 11 : Conditions de fonctionnement du stack.*

### **1) Appauvrissement en air**

Durant cette expérience, nous avons fait varier la stœchiométrie du flux d'air à travers le stack comme indiqué sur la figure (Fig. 104). La pile a progressivement été appauvrie en oxygène puis ramenée au niveau initial. Nous voyons que le champ magnétique est particulièrement sensible à ce type de variations. Cela signifie que la répartition des courants est significativement modifiée, ce qui entraîne une variation de champ magnétique de 15  $\mu$ T. Cela démontre la sensibilité du système à ce type de défaut de fonctionnement.

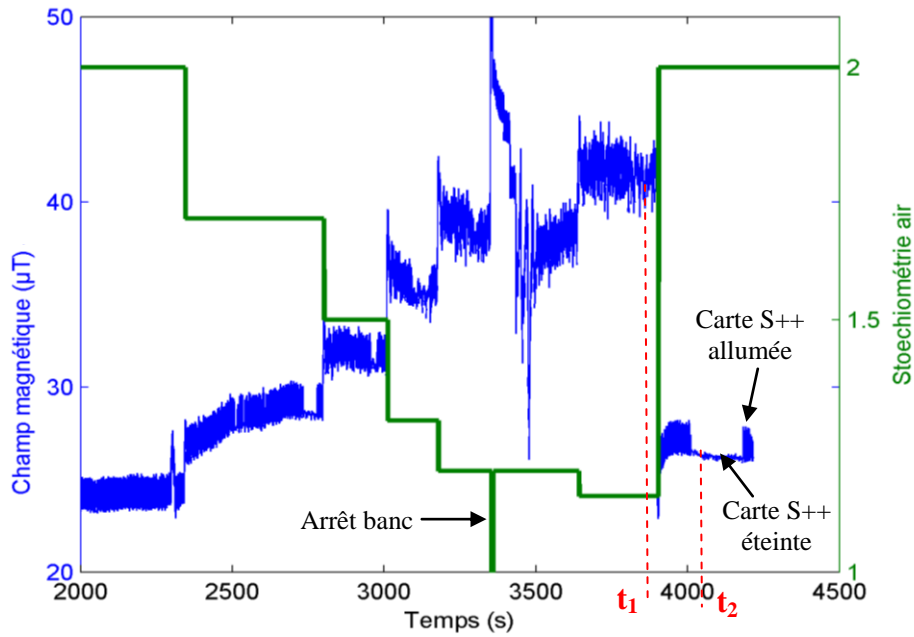


Fig. 104 : Variations de la stœchiométrie en air et réponse du champ magnétique sur un capteur<sup>c</sup>.

Nous récupérons les résultats des mesures magnétiques réalisées aux temps  $t_1$  et  $t_2$  indiqués sur la figure (Fig. 104). Les valeurs récupérées sont moyennées sur environ 160000 points pour un temps d'intégration d'environ 20 secondes. Cette valeur moyenne permet de diminuer le niveau de bruit des mesures. Nous faisons ensuite la soustraction de ces mesures afin d'obtenir la variation temporelle du champ magnétique entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ .

$$\begin{aligned} \Delta \hat{B} &= \hat{B}(t_1) - \hat{B}(t_2) \\ &= \hat{B}_{appauvri} - \hat{B}_{nominal} \end{aligned} \quad \text{Eq IV-6}$$

Nous inversons ensuite ce résultat pour obtenir la variation temporelle de la densité de courant entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ . Le résultat obtenu est illustré sur la figure (Fig. 105). A titre de comparaison, le résultat obtenu avec la méthode invasive est aussi donné sur la même figure.

<sup>c</sup> Cette courbe contient environ un point toutes les 0,25 secondes. Chacun de ces points est le résultat d'un moyennage d'environ 2000 points réalisé à 10 kHz. Cela fait un temps d'intégration de 0,2 secondes. Les 0,05 secondes restantes sont dues au temps de latence introduit par la chaîne d'acquisition entre chaque salve. Cela donne une fréquence d'échantillonnage apparente d'environ 8 kHz.

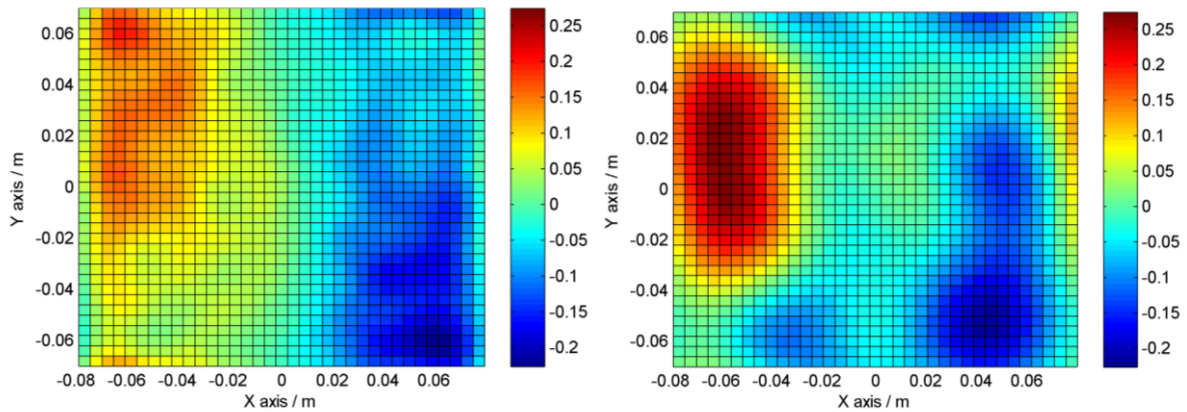


Fig. 105 : Variation temporelle (entre  $t_1$  et  $t_2$ ) des densités de courants en  $A.cm^{-2}$ . A gauche, courants obtenus avec la carte S++. A droite, courants obtenus avec le système magnétique non invasif (carte S++ éteinte).

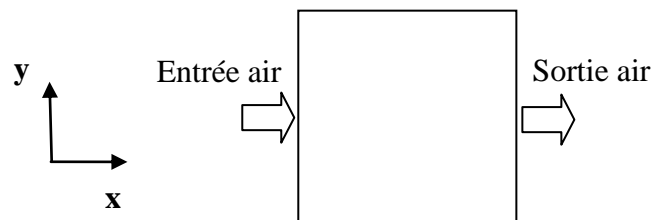


Fig. 106 : Orientation principale des flux d'air à travers le stack

La figure (Fig. 105) montre une bonne concordance entre les mesures invasives et les mesures magnétiques. Les deux outils permettent d'observer le même phénomène : lorsque le stack est appauvri en air, les densités de courant se concentrent près des entrées des canaux d'air (Fig. 106). Au niveau des sorties des canaux, la faible concentration en oxygène induit une plus faible densité de courant.

Il existe néanmoins quelques écarts entre les résultats fournis par les deux outils. Ceux-ci s'expliquent en parti par les incertitudes inhérentes aux deux méthodes. Une autre raison est que ces outils ne mesurent pas exactement les mêmes courants. La carte S++ mesure la densité de courant au niveau des deux plaques bipolaires entre lesquelles elle est insérée. Par contre, notre outil magnétique mesure une moyenne pondérée<sup>d</sup> des densités de courants sur l'ensemble des AME du stack. Mais malgré ces écarts, les résultats sont néanmoins satisfaisants et s'accordent sur la forme globale de la distribution de courant.

<sup>d</sup> Les densités de courant des AME proches du réseau de capteurs (centre du stack) ont un poids plus important sur la mesure que les densités de courant des AME éloignées des capteurs (extrémités du stack).

### **Remarque sur le filtrage des images**

Toutes les images de densités de courant présentées ici ont préalablement été filtrées numériquement à l'aide d'un filtre passe-bas. Cela permet de nettoyer une partie du bruit présent sur les mesures invasives et de faire disparaître de celles-ci des niveaux de détail totalement inaccessibles au système de diagnostic magnétique. Au final, ce filtrage permet de faire apparaître clairement la répartition globale du courant à l'intérieur de la pile.

### **Remarque sur le bruit**

Lorsque la carte S++ est allumée, celle-ci génère un bruit magnétique de 2  $\mu\text{T}$ . Cela apparaît clairement sur la figure (Fig. 104). L'épaisseur du trait varie entre les moments où la carte S++ est allumée et les moments où celle-ci est éteinte. Par conséquent, les mesures invasives et magnétiques ne sont pas réalisées exactement aux mêmes moments. En général, les mesures invasives sont réalisées en premier, la carte est éteinte et les mesures magnétiques sont ensuite réalisées. On remarque aussi sur la figure (Fig. 104) que le signal magnétique est plus bruité lorsque la pile est appauvrie en oxygène. Contrairement à ce que laisse penser le graphique, la carte S++ a bien été éteinte au temps  $t_1$ . Il s'agit probablement d'un bruit inhérent au comportement de la pile lorsque celle-ci est appauvrie en oxygène.

## **2) Assèchement**

L'expérience qui suit illustre l'effet de la variation d'humidité relative des gaz en entrée du stack (air et hydrogène). Le déroulement de l'expérience est illustré sur la figure (Fig. 107). La pile est tout d'abord asséchée et nous observons une variation de 7  $\mu\text{T}$  du champ magnétique. Notons que le temps de réponse de la pile est plus long que précédemment. Nous avons ensuite augmenté l'hygrométrie des gaz à 80 % d'humidité relative. La réponse du champ magnétique est beaucoup moins nette. Il se trouve qu'il est peu aisé de noyer cette pile. Par conséquent, les densités de courant sont peu modifiées. Les résultats d'inversions qui suivent s'intéressent donc plus particulièrement à la phase d'assèchement qui est mieux mise en évidence par la mesure du champ magnétique.

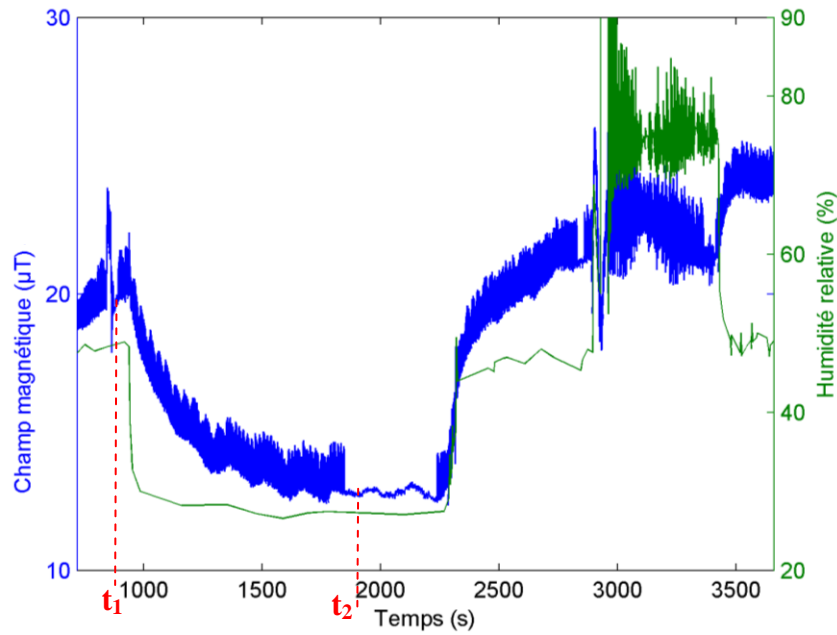


Fig. 107 : Variations de l'humidité relative et réponse du champ magnétique sur un capteur.

Nous calculons la variation temporelle du champ magnétique entre les temps  $t_2$  et  $t_1$  :

$$\begin{aligned} \Delta \hat{B} &= \hat{B}(t_2) - \hat{B}(t_1) \\ &= \hat{B}_{asséché} - \hat{B}_{nominal} \end{aligned} \quad \text{Eq IV-7}$$

La variation temporelle de la densité de courant obtenue avec les deux outils de mesures est illustrée sur la figure (Fig. 108). Nous voyons que les résultats s'accordent moins bien que précédemment. Néanmoins, les deux outils permettent d'observer le même phénomène. Lorsque les gaz sont secs, l'hydratation du stack est réalisée uniquement par l'eau produite par la réaction électrochimique. Les flux de gaz secs ont tendance à déplacer cette eau vers la sortie des canaux. Les membranes sont ainsi mieux hydratées au niveau des sorties des canaux. Les membranes sont alors moins résistives et la densité de courant est donc plus importante au niveau de cette zone.

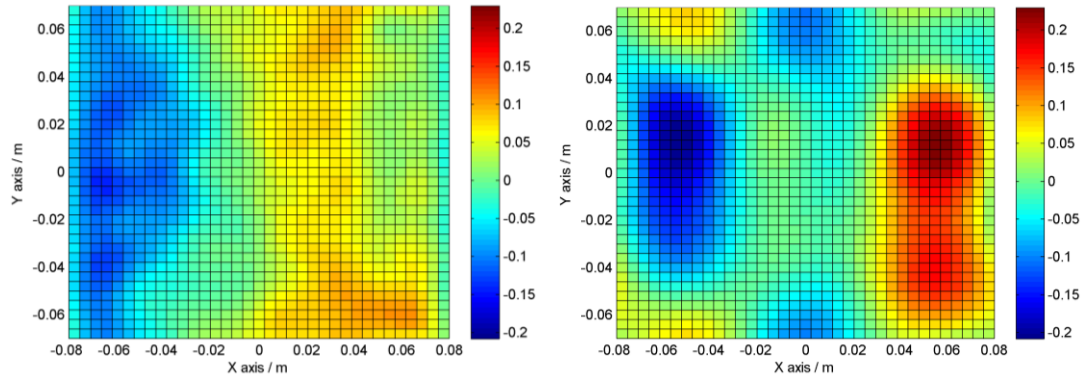


Fig. 108 : Variation temporelle (entre  $t_1$  et  $t_2$ ) des densités de courants en  $A.cm^{-2}$ . A gauche, courants obtenus avec la carte S++. A droite, courants obtenus avec le système magnétique non invasif.

### 3) Dégradations

L'expérience qui suit illustre le suivi de la dégradation du stack sur une période de soixante heures. La figure (Fig. 109) donne la variation de la tension d'une cellule et la variation du champ magnétique perçu par un capteur pendant une soixantaine d'heures de fonctionnement. Nous observons à la fois une dérive de la tension et du champ magnétique. Les pertes de performances de la pile sont ici bien supérieures à la normale. Ce résultat n'est pas encore très bien expliqué. Nous pensons que la présence de la carte S++ induit des contraintes mécaniques sur l'ensemble des éléments de la pile. Le serrage de ces éléments n'est ainsi plus optimal.

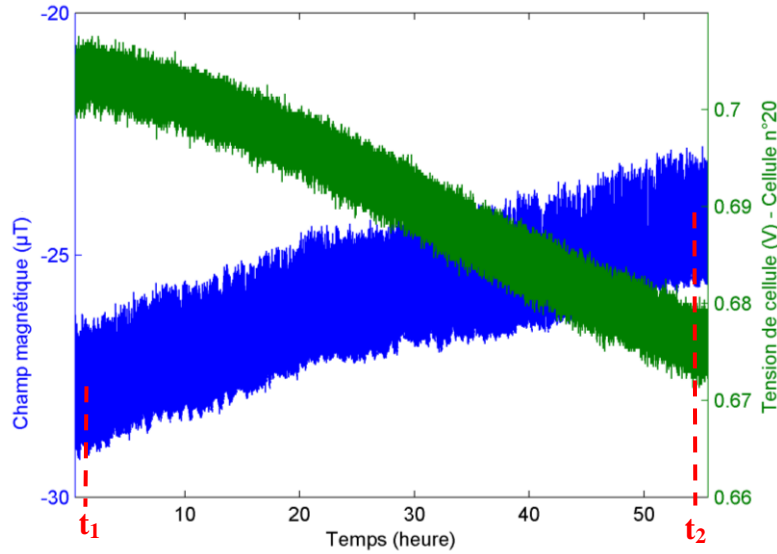


Fig. 109 : Dérive de la tension de cellule et du champ magnétique au cours du temps.

Il est intéressant de noter que les variations de champs magnétiques sont elles aussi significatives. Au bout de 60 heures, nous mesurons une variation de  $3,5 \mu\text{T}$ . Cette variation est probablement due à une dérive de la répartition des courants à l'intérieur de la pile. Ces variations de courant sont illustrées sur la figure (Fig. 110). Une fois encore les deux outils montrent le même type de résultat. Nous observons qu'au cours du temps, la densité de courant tend à se concentrer vers la zone d'alimentation en oxygène de la pile à combustible. Ce phénomène doit encore être expliqué.

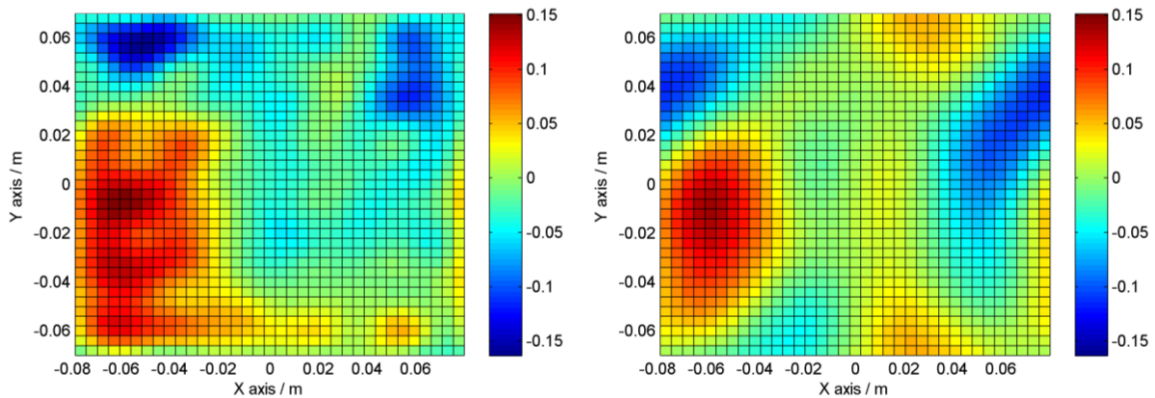


Fig. 110 : Variation temporelle (entre  $t_1$  et  $t_2$ ) des densités de courants en  $\text{A.cm}^{-2}$ . A gauche, courants obtenus avec la carte S++. A droite, courants obtenus avec le système magnétique non invasif.

### ***C - Conclusion sur la méthode de diagnostic***

Les résultats expérimentaux réalisés sur le stack de technologie GENEPAC ont mis en évidence la capacité de notre outil de diagnostic à reconstruire les variations temporelles des densités de courants. Nous avons démontré la sensibilité du système magnétique à des variations d'hygrométrie, de stœchiométrie et à des dégradations. Les résultats d'inversion se sont révélés être entièrement satisfaisants pour un premier essai. Les cartographies de courant obtenues avec notre outil montrent en effet une bonne concordance avec celles issues de la plaque de mesure invasive.

Les résultats présentés valident donc l'intérêt de notre outil pour le diagnostic des piles à combustible. Mais des travaux sont encore nécessaires pour démontrer la robustesse de cet outil. Pour commencer, il serait nécessaire de vérifier la répétabilité de ces expériences. Il serait ensuite intéressant d'étudier la capacité de l'outil à prédire l'apparition de certaines défaillances afin d'être en mesure de les corriger le plus vite possible. La vitesse d'acquisition de notre système nous semble être compatible avec cet objectif.

Les expériences présentées ici ont été réalisées dans un environnement laboratoire. Les contraintes sont pourtant beaucoup plus importantes dans les environnements où travaillent les partenaires du projet OMNISCIENTS (transport et stationnaire). Le nombre de capteurs a peut être été surdimensionné pour ce type d'applications. Selon les objectifs fixés, il nous semble tout à fait envisageable d'en réduire le nombre. Jusqu'à présent, nous avons éloigné à notre convenance la charge et les fils externes du stack afin de ne pas être gêné par le champ magnétique de mode commun. Mais il est envisageable de rapprocher ces fils du stack et d'orienter les magnétomètres en fonction (cf. p. 197). Pour les applications stationnaires, et surtout transports, le point le plus contraignant concerne probablement les perturbations magnétiques extérieures. Nous avons brièvement évoqué dans le précédent chapitre des techniques permettant de s'affranchir de ces perturbations. Dans le cadre de futurs travaux, il sera nécessaire de les mettre en œuvre.





## **Conclusion générale**



## **Synthèse des travaux effectués**

L'objectif de ces travaux était de développer un outil de diagnostic innovant pour les piles à combustible. Nous avons alors choisi de nous intéresser à la signature magnétique générée par ces systèmes. Afin de démontrer la faisabilité et l'intérêt d'une telle démarche, nous avons développé une série d'outils numériques et expérimentaux.

Dans un premier temps, nous nous sommes attachés à modéliser le comportement de stacks de piles à combustible. Deux modèles directs ont été développés. Le premier simule certains défauts de fonctionnement et leurs impacts sur la distribution macroscopique du courant et du potentiel électrique. Le second modèle développé (loi de Biot et Savart) évalue la signature magnétique de ces défauts. Ces modèles directs nous ont alors permis d'évaluer les contraintes antagonistes pesant sur les magnétomètres : larges gammes et précisions importantes. Nous nous sommes ensuite intéressés à l'inversion du modèle magnétique. Ce problème inverse est néanmoins mal posé (solution non unique et importante sensibilité au bruit). La mise en place de techniques de régularisation nous a permis de contourner ces difficultés. Au final, nous sommes en mesure de caractériser la densité de courant à l'aide d'une quinzaine de paramètres ayant une incertitude convenable.

Nous avons ensuite conçu un système métrologique particulier facilitant l'instrumentation de la pile et diminuant l'erreur de reconstruction des courants. Notre réseau de capteurs se démarque des approches déjà réalisées par le passé principalement par deux aspects :

- Nous réalisons un nombre extrêmement restreint de mesures : une trentaine contre plusieurs centaines avec les techniques déjà existantes. Cela a été rendu possible par un travail d'approximations et de réductions du nombre d'inconnues. Les trente capteurs sont ainsi fixés sur le stack et il n'est plus nécessaire d'utiliser un robot déplaçant un capteur. L'instrumentation est grandement simplifiée et les incertitudes sont réduites. Le scan de la signature magnétique est désormais instantané alors que celui-ci nécessite habituellement une quinzaine de minutes. La pile à combustible ne voit ainsi plus son état de fonctionnement changer entre le début et la fin du scan.

- Nous avons aussi construit notre réseau de capteurs de manière à ce qu'il détecte uniquement les défauts de fonctionnement de la pile (capteur de défauts). Il est par conséquent très peu sensible aux forts champs magnétiques associés au mode de fonctionnement normal de la pile. Cela nous autorise à utiliser des magnétomètres de gamme réduite et de précision accrue. La détection des très faibles champs générés par les défaillances de la pile est ainsi facilitée.

Ce système a ensuite été construit et installé autour d'une pile étalon simulant les champs magnétiques d'une pile à combustible. Nous avons démontré la capacité de cet outil à extraire du bruit ambiant des informations sur la répartition globale des densités de courant. Un autre réseau de capteurs a ensuite été déployé sur un stack de technologie GENEPAC au CEA. Nous avons alors démontré la sensibilité du système à des assèchements, à des appauvrissements en réactifs et à des dégradations. Nous avons aussi comparé nos résultats à ceux issus d'un outil invasif. Nous avons observé une très bonne concordance entre les deux techniques de diagnostic.

L'outil de diagnostic développé ici est intéressant à plus d'un titre. Tout d'abord, les mesures de champs magnétiques sont non invasives. L'instrumentation de la pile à combustible est donc facilitée et les capteurs ne perturbent aucunement le fonctionnement du stack. La légèreté de l'instrumentation est un critère particulièrement important. Nous rappelons que les travaux de cette thèse se sont inscrits dans le cadre du projet OMNISCIENTS dans lequel interviennent des acteurs du secteur des applications transports (PSA) et des applications stationnaires (HELION). L'objectif affiché de ces partenaires est d'implanter à l'intérieur de leurs systèmes un outil permettant de détecter de manière rapide et pertinente les défaillances susceptibles de dégrader les performances et les durées de vie de leurs systèmes. Par conséquent, les contraintes de coûts, d'intégration et de compatibilité avec l'environnement sont prépondérantes, en particulier pour les applications transports où les contraintes sont les plus sévères. Bien que nous n'ayons validé notre outil que dans un environnement laboratoire, cette technologie de diagnostic possède de fortes potentialités pour répondre aux exigences citées ci-dessus. Nous avons probablement surdimensionné certains éléments du système de métrologie (nombre de capteurs, filtrage, positionnement mécanique...). Le champ d'étude demeure immense et les pistes d'amélioration très nombreuses. La prochaine section propose une liste de quelques axes de recherche pour des futurs travaux visant à l'amélioration de cet outil de diagnostic.

### **Perspectives pour l'amélioration du système de métrologie magnétique**

Nous n'avons fait qu'étudier la signature magnétique spatiale de la pile à combustible. Il est aussi envisageable de se servir de la signature magnétique temporelle (et fréquentielle) pour discriminer les défaillances ayant la même signature spatiale. La fréquence de coupure de la technologie de capteurs employée ici est de 800Hz. Cette bande de fréquence laisse ouvert un vaste champ d'investigations. Notons néanmoins que les techniques de spectroscopie d'impédance jugent utile d'étudier le comportement des piles à combustible jusqu'à quelques kHz. Il pourrait donc être judicieux d'utiliser des technologies de magnétomètres montant jusqu'à ces fréquences.

Le système de diagnostic proposé ici est relativement sensible aux perturbations extérieures (objets magnétiques, dispositifs électriques...), ce qui peut poser problème dans le cadre d'une application embarquée. Nous avons brièvement évoqué quelques techniques permettant de discriminer ces sources de perturbations des signaux que l'on cherche à détecter. Dans le cadre de futurs travaux, il serait nécessaire de mettre ces techniques en œuvre afin de rendre le système plus robuste vis-à-vis de l'environnement extérieur. Pour filtrer les champs magnétiques extérieurs, il est aussi possible de travailler dans le domaine temporel ou fréquentiel. Les outils expérimentaux usuellement utilisés pour la spectroscopie d'impédance permettent de moduler le courant de la pile et donc de translater le signal utile sur une bande de fréquence moins bruitée (détection synchrone). Cela permettrait d'augmenter le ratio signal sur bruit et de diminuer encore l'erreur de reconstruction des courants.

Les modèles inverses développés sont extrêmement rapides : les courants reconstruits sont obtenus par une simple multiplication matricielle des mesures par le modèle inverse. Cela ouvre la voie à des applications en temps réel. Actuellement, le temps de réponse de l'outil de diagnostic est limité par la moyenne temporelle des mesures mise en place afin de filtrer le bruit. Ce filtre passe-bas temporel est totalement surdimensionné et diminue les erreurs aléatoires bien en deçà des autres erreurs de mesures (perturbations magnétiques statiques, erreurs de positionnement et d'étalonnage des capteurs, erreurs de régularisation...). Il serait donc intéressant d'évaluer jusqu'à quel point il est possible de réduire l'importance de ce filtrage temporel.

La conception d'un réseau de capteurs doit aussi prendre en compte les contraintes de l'application finale. Dans le cadre d'une application embarquée, les critères de coût, d'encombrement, de consommation énergétiques et d'intégration interviennent de façon

critique. L'encombrement des capteurs ne semble pas être le point limitant de notre outil. Nous savons aussi que l'augmentation du nombre de capteurs n'augmente que très peu la sensibilité du système. Il serait judicieux d'étudier jusqu'à quel point il est possible de diminuer le nombre de capteurs tout en respectant les spécifications de l'outil de diagnostic. Enfin, un système de diagnostic est lui-même sujet à des défaillances. Dans le cadre de futurs travaux, il sera nécessaire de vérifier la robustesse de l'outil de détection vis à vis de la défaillance d'un ou de plusieurs capteurs.

Au niveau de la conception du réseau de capteurs, nous n'avons fait qu'effleurer d'immenses possibilités. Nous avons par exemple montré que le placement des capteurs est un problème d'optimisation multi-objectifs. Parmi tous ces objectifs contradictoires, nous sommes parvenus à dégager deux principaux critères : la sensibilité (gain) et la quantité de paramètres reconstruits (bande passante). Il faudrait pousser plus loin cette étude et calculer des fronts de Pareto fournissant une aide au choix d'un compromis. Notons aussi que nous avons utilisé des capteurs que nous avons considérés comme ponctuels. Mais il existe aussi des magnétomètres en forme de boucle intégrant le champ magnétique sur de larges surfaces. La forme de ces boucles offre un large choix de nouvelles structures de capteurs. L'utilisation de gradiomètres ouvre aussi de nouveaux champs d'investigation pour le diagnostic des piles à combustible.

Pour inverser correctement les mesures et juger de la qualité des résultats obtenus, il est essentiel d'être en mesure de propager les différentes erreurs à travers nos différents modèles. Les calculs d'incertitudes proposés en annexe laissent néanmoins de côté les incertitudes liées aux erreurs de modélisation (approximations, erreurs de positionnement mécaniques, magnétomètres mal étalonnés...). Celles-ci sont pourtant loin d'être négligeables et il serait intéressant de mieux comprendre leurs effets sur les résultats de reconstruction des courants. Le simulateur de champ magnétique que nous avons construit constitue un puissant outil pour la caractérisation et la réduction de ces erreurs.

### **Perspectives pour l'inversion et le diagnostic des piles à combustibles**

Un important travail de modélisation sur les stacks est encore nécessaire. Les modèles directs ont en effet de très nombreuses utilités pour les applications de diagnostic. En général, les modèles légers permettent de créer le modèle inverse lui-même. Les modèles directs plus complexes peuvent servir de sources d'informations a priori pour l'outil de régularisation. Enfin, tous les modèles directs servent à réaliser des analyses de sensibilité permettant de

dimensionner le système de métrologie magnétique. Certaines des perspectives proposées ci-dessus sont donc difficilement envisageables sans des modèles de sources (courants, défaillances, bruits) appropriés. Nous avons déjà réalisé quelques travaux préliminaires visant à coupler notre modèle électrocinétique avec les phénomènes fluidiques et éventuellement thermiques. L'objectif est de disposer d'une base de description des défaillances physiquement plus réalistes que celles utilisées jusqu'à présent. Cela devrait faciliter l'inversion des mesures.

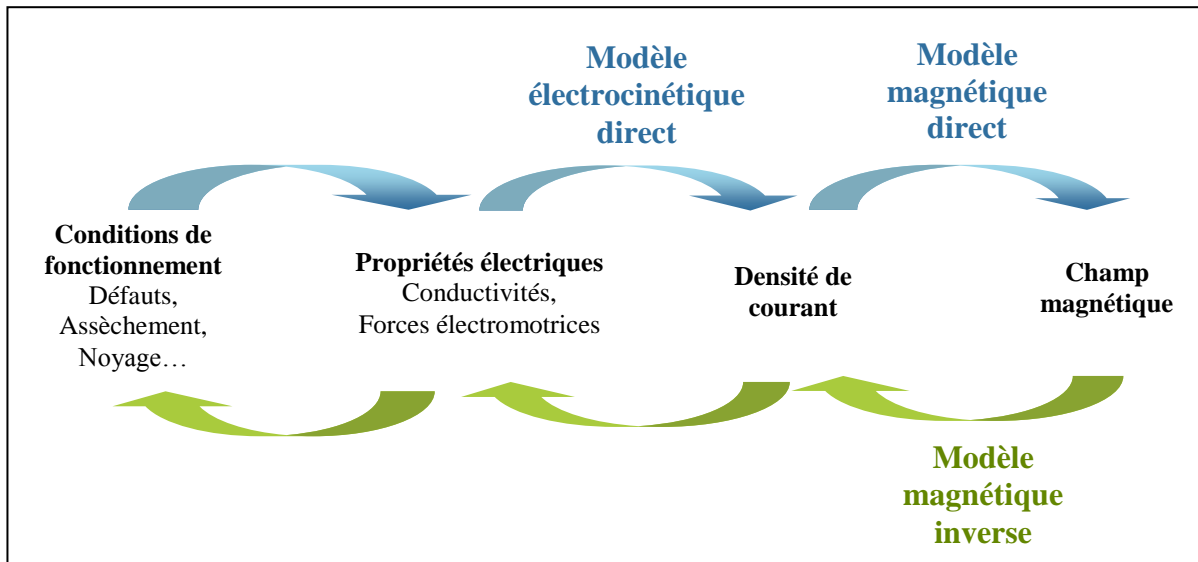


Fig. 111 : Découpage du problème en plusieurs sous problèmes.

La figure (Fig. 111) rappelle le découpage du problème en plusieurs sous-problèmes proposé dans l'introduction du document. Sur cette figure, seuls les modèles disposant d'un nom ont fait l'objet d'une étude approfondie durant cette thèse. Nous n'avons réalisé l'inversion que d'un seul modèle, à savoir le modèle magnétique. Plus précisément, nous n'avons présenté dans ce document que les résultats de reconstruction des courants 2D. Quelques travaux préliminaires de reconstruction 3D nous ont permis d'obtenir des premiers résultats encourageants. A terme, l'objectif serait de corrélérer les champs magnétiques aux défauts survenant dans la pile. Il est donc nécessaire de développer les autres modèles de la figure (Fig. 111). Pour commencer, il serait intéressant d'inverser le modèle électrocinétique, c'est-à-dire de remonter aux distributions spatiales de conductivités et de forces électromotrices. Ce modèle est néanmoins plus complexe à inverser que le modèle magnétique. Bien que le courant dépende linéairement des forces électromotrices, il n'en va pas de même avec la conductivité (problème inverse non linéaire).

Le schéma de la figure (Fig. 111) simplifie peut être excessivement le problème et fait abstraction de certaines interactions. Les phénomènes sont en effet très complexes et font



intervenir de nombreuses physiques et de nombreuses échelles de temps et d'espace. Avant de pousser plus loin le développement de ces modèles, il serait intéressant de se demander s'il ne serait pas préférable de se baser sur des approches empiriques. Jusqu'à présent, nous avons uniquement travaillé avec des modèles directs théoriques (à l'exception du modèle expérimental construit avec la pile étalon). Avec une approche empirique, certains modèles directs pourraient être constitués d'une base de données expérimentale sur les défauts et leurs champs magnétiques. Si cette base de données est bien construite, l'inversion serait plus simple à réaliser qu'avec des modèles théoriques multi-physiques et multi-échelles très complexes.

Pour conclure, bien que la mesure du champ magnétique possède de très nombreux avantages, cette méthode n'est peut-être pas au final la "meilleure" technique de diagnostic possible pour les piles à combustible. En effet, nous avons vu que la signature magnétique ne permet pas de discriminer toutes les distributions de courants possibles. Pour lever ces indéterminations, il serait tout à fait envisageable de coupler notre outil à d'autres outils déjà existants. Ainsi, notre outil magnétique nous semble être bien adapté à la localisation des défauts sur la surface d'un AME. Par contre, la mesure des tensions des AME (éventuellement par groupes) restera probablement une méthode incontournable pour la localisation des défaillances le long d'un stack. Il ne s'agit que d'une piste de réflexion. L'outil de diagnostic "idéal" sera probablement un système couplant plusieurs méthodes et tirant parti des avantages de chacune d'entre elles.

# **Annexes**



## **Annexe A - Introduction de lois de polarisation non linéaires dans l'équation de conduction**

---

Dans le chapitre II, nous avons présenté un modèle électrocinétique permettant de calculer le potentiel et le courant pour différentes distributions de conductivités et de forces électromotrices. Nous avons détaillé les équations lorsque le comportement des AME est décrit par une loi de polarisation linéaire. Il est pourtant relativement aisé d'introduire un comportement non linéaire à l'aide d'un algorithme de Newton-Raphson. Cette annexe décrit la procédure, c'est-à-dire comment coupler une loi de polarisation non linéaire avec l'équation suivante :

$$\text{div } \sigma \mathbf{grad} V = \text{div } \sigma \mathbf{E}_m \quad \text{Eq IV-8}$$

La procédure est illustrée ici avec la loi de polarisation suivante pour un AME :

$$\Delta V(j) = U_{mo} - R_{so} j - A \ln \left( \frac{j}{j_{eq}} + 1 \right) \quad \text{Eq IV-9}$$

Où  $U_{mo}$  est la tension de boucle ouverte d'une cellule (en Volt),  $R_{so}$  la résistance surfacique d'un AME (en  $\Omega.m^2$ ) et  $A$  et  $J_{eq}$  sont des paramètres modélisant la surtension d'activation (respectivement en Volt et  $A.m^{-2}$ ). L'approche proposée ici est basée sur l'algorithme de Newton-Raphson qui consiste à linéariser une équation autour d'un point de fonctionnement et à itérer jusqu'à la convergence du résultat. La procédure donnée ici fonctionne pour des lois autres que celle donnée par l'équation (Eq IV-9) tant que la dérivation et la convergence sont possibles.

L'équation (Eq IV-8) a été précédemment obtenue en utilisant la loi d'Ohm locale :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}_m - \sigma \mathbf{grad} V \quad \text{Eq IV-10}$$

Cette équation peut être réécrite en utilisant des variables globales pour le champ et potentiel électrique.

$$\Delta V = U_m - R_s j \quad \text{Eq IV-11}$$

Il est possible de relier les variables locales et globales des relations (Eq IV-11) et (Eq IV-12) à l'aide des équations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma \approx \sigma_{moy} = \frac{L_{AME}}{R_s} \\ E_{mz} \approx E_{mz moy} = \frac{U_m}{L_{AME}} \end{cases} \quad \text{Eq IV-12}$$

Où  $L_{AME}$  est l'épaisseur d'un AME.

Bien que la relation (Eq IV-9) soit non linéaire, il est possible de la linéariser autour d'un point de fonctionnement  $j_n$  à l'aide d'un développement de Taylor du premier ordre.

$$\Delta V(j) \approx \Delta V(j_n) + (j - j_n) \frac{\partial \Delta V}{\partial j}(j_n) \quad \text{Eq IV-13}$$

Par identification de (Eq IV-11) avec (Eq IV-13), la conductivité et la force électromotrice apparentes sont données par :

$$\begin{cases} R_s(j_n) = -\frac{\partial \Delta V}{\partial j}(j_n) \\ U_m(j_n) = \Delta V(j_n) - j_n \frac{\partial \Delta V}{\partial j}(j_n) \end{cases} \quad \text{Eq IV-14}$$

En utilisant les relations (Eq IV-14) avec (Eq IV-9), il est possible d'obtenir une relation analytique de la conductivité et force électromotrice apparente pour cette loi de polarisation particulière :

$$\begin{cases} R_s(j_n) = R_{so} + A \frac{1}{j_n + j_{ex}} \\ U_m(j_n) = U_{mo} - A \ln\left(\frac{j_n}{j_{ex}} + 1\right) + j_n A \frac{1}{j_n + j_{ex}} \end{cases} \quad \text{Eq IV-15}$$

En utilisant les relations (Eq IV-12), les conductivités et champs électromoteurs apparents sont eux aussi facilement obtenus. Ces valeurs sont ensuite intégrées dans l'équation de conduction (Eq IV-8) pour chaque itération de l'algorithme. La solution finale est obtenue après convergence.

## **Annexe B - Ordres de grandeurs du champ magnétique autour de la pile à combustible**

---

Dans le chapitre II (cf. p. 96), nous avons vu que l'ordre de grandeur du champ magnétique généré par une pile n'est pas significativement impacté par la présence d'un défaut de fonctionnement. Par conséquent, si l'on cherche à dimensionner la gamme des magnétomètres, il suffit de considérer une distribution de courant homogène dans le stack et d'évaluer le champ généré. Mais pour réaliser cela, d'autres facteurs sont à prendre à compte. Cette annexe décrit ces facteurs et explique comment nous avons estimé cet ordre de grandeur.

Le champ magnétique maximal perçu par des magnétomètres placés autour d'une pile dépend des paramètres suivants :

- Du courant maximal traversant la pile. Le milieu étant linéaire, le champ maximal est directement proportionnel au courant maximal traversant la pile.
- De la forme et des dimensions géométriques de la pile. Des simulations numériques ont montré que ces facteurs (section et longueur de la pile) n'ont pas d'influence sur l'ordre de grandeur du champ magnétique. L'ordre de grandeur peut être obtenu en remplaçant la pile par un simple fil.
- De la position des capteurs vis-à-vis de la pile. Le capteur devant supporter le plus grand champ est localisé au centre de la boucle de courant formée par la pile et la charge. Il suffit de ne considérer que celui-ci pour connaître le champ maximal.
- de la géométrie de la boucle de courant (non prise en compte dans la plupart des simulations). Il s'agit du point le plus délicat sur lequel se concentre cette annexe.

La prise en compte de la géométrie de la boucle de courant est assez délicate. Les géométries possibles sont très variées et dépendent du banc de mesure, de la localisation de la charge sur celui-ci et de la forme des collecteurs de courant sur la pile. Si les câbles ne sont pas fixés, la géométrie peut varier avec le temps suite par exemple à une intervention sur le banc.

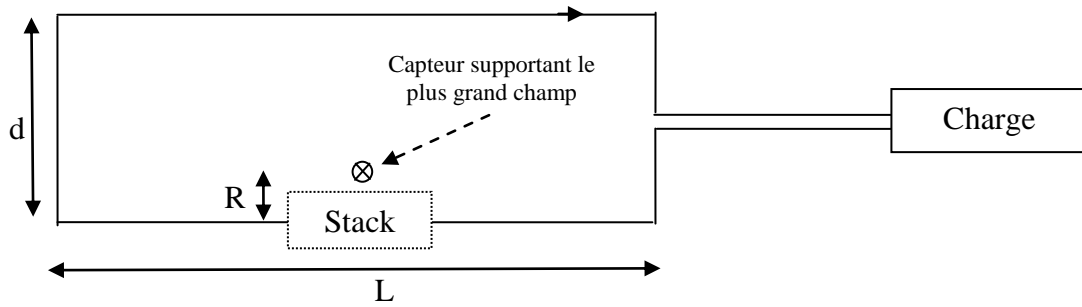


Fig. 112 : Représentation d'une boucle de courant quelconque

Le problème a donc été simplifié et modélisé de la façon suivante. La figure (Fig. 112) représente ce à quoi peut ressembler une boucle de courant basique. C'est d'ailleurs d'une manière simplifiée la géométrie que l'on a essayé de reproduire sur les bancs expérimentaux. Si la longueur " $L$ " est suffisamment grande (typiquement 2 mètres) on peut approximer les deux fils horizontaux par des fils infinis. De plus si on veut limiter l'intensité du champ dans cette configuration, il faut choisir une longueur " $d$ " la plus grande possible afin que le champ généré par le fil de retour devienne négligeable. Avec une distance de " $d$ " de 1 m et " $R$ " de 10 cm, on décide de négliger le fil de retour devant le fil principal. Quant à la charge et les fils associés, ceux-ci peuvent être représentés par des boucles équivalentes générant des dipôles. D'après les lois de décroissances des champs, le champ généré par un dipôle peut être négligé devant le champ généré par un fil infini. Le schéma équivalent est donné sur la figure (Fig. 113).

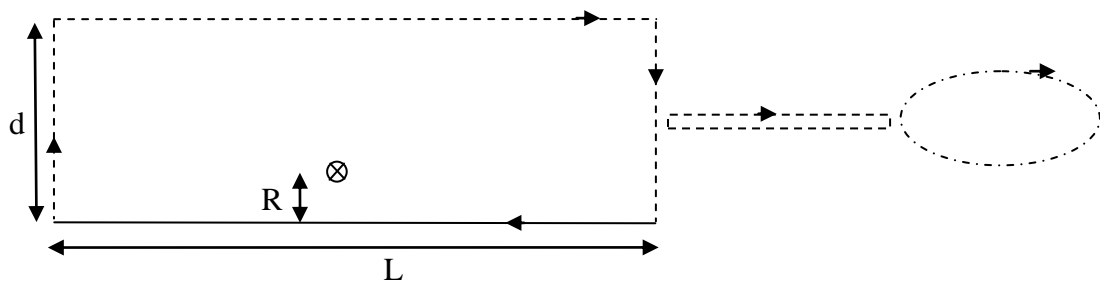


Fig. 113 Schéma équivalent à la figure (Fig. 112)

On peut donc en première approximation modéliser le problème par un fil infini. Le champ généré par un fil infini est donné par la formule (Eq IV-16)<sup>a</sup>.

$$B_{\theta}(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = 0.2 \frac{I}{R} \mu T \quad \text{Eq IV-16}$$

Le tableau (Eq II-25) donne l'ordre de grandeur que l'on peut typiquement s'attendre à obtenir sur les différents stacks du projet OMNISCIENTS. Les courants indiqués sont les courants maximaux proposés par les partenaires du projet. Ce ne sont pas nécessairement les courants nominaux ou les courants maximum admissibles. Les distances des capteurs par rapport au centre de la pile ont été choisies en fonction des dimensions de chaque stack et en prenant un écart de 3 cm entre le capteur et la zone active de la pile.

Stack	Courant proposé (A)	Distance entre capteurs et centre du stack (m)	Champ maximal (μT)
GESI	100	0,08	250
GENEPAC	170	0,11	300
HELION	260	0,08	650

*Tab. 12 : Ordre de grandeur du champ magnétique généré par différentes technologies de piles à combustible*

Cette façon de procéder a été validée en calculant le champ magnétique généré par une boucle de courant rectangulaire avec le modèle magnétique 3D. L'erreur est de 15% et peut être diminuée à 4 % en prenant en compte le fil de retour. Aux champs indiqués dans le tableau (Tab. 12) il faut aussi ajouter les 50 μT du champ terrestre et 50 μT de marge de sécurité prenant en compte les erreurs et les champs éventuellement générés par des dispositifs voisins. D'après ce qui précède il est donc nécessaire d'avoir une gamme d'au moins 750 μT pour être en mesure d'effectuer des mesures de champ en toute circonstance.

---

<sup>a</sup> Cette formule peut être obtenue en appliquant le théorème d'Ampère sur un fil infini.



## Annexe C - Etude analytique de l'opérateur de Biot et Savart 2D

### A - Introduction et objectifs

L'objectif de cette annexe est d'étudier les caractéristiques de l'opérateur de Biot et Savart, et éventuellement d'obtenir une relation analytique inverse. Les résultats qui vont suivre concernent uniquement l'opérateur en deux dimensions (invariance des sources selon z et composantes transverses nulles). Le cas tridimensionnel est traité dans une autre annexe (cf. p. 251). Nous rappelons ci-dessous les équations reliant les courants aux potentiels magnétiques et champs magnétiques en deux dimensions.

$$\begin{cases} A(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma_s} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \cdot j(\mathbf{r}_s) d\Gamma_s \\ \text{avec } G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \ln(|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|) \end{cases} \quad \text{Eq IV-17}$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma_s} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \cdot j(\mathbf{r}_s) d\Gamma_s \\ \text{avec } \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \begin{pmatrix} y_s - y \\ x - x_s \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{Eq IV-18}$$

Nous rappelons aussi que le champ magnétique dérive du potentiel magnétique via le rotationnel. Le schéma (Fig. 114) résume les relations entre courants, potentiels et champs magnétiques.

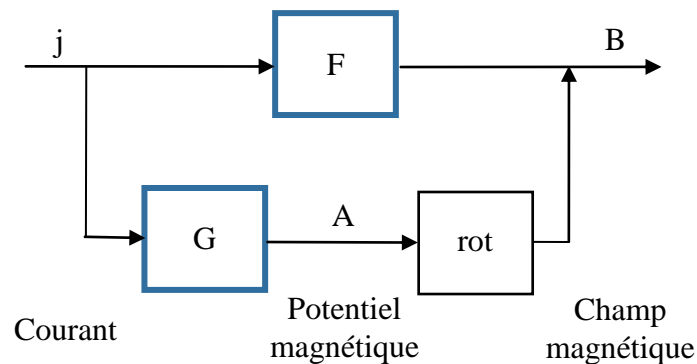
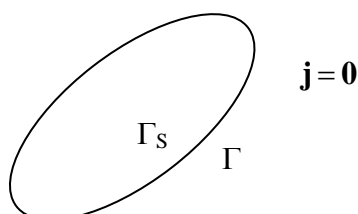


Fig. 114 : Loi de Biot et Savart (Modèle direct)

La possibilité d'inverser un modèle dépend très fortement des espaces de définitions des entrées et sorties de celui-ci. Notre outil de diagnostic devant être non invasif, le champ magnétique ne peut être connu (mesuré) qu'en dehors des sources. La figure (Fig. 115) rappelle le partitionnement de l'espace utilisé. Le champ magnétique est défini sur  $\Gamma$  et le courant sur  $\Gamma_S$ .



*Fig. 115 : Partitionnement de l'espace en deux sous domaines.*

L'obtention par calcul analytique du courant à partir de l'équation intégrale (Eq IV-18) peut se révéler être une tâche très délicate, en particulier lorsque l'on n'a aucune certitude sur l'existence d'une relation inverse  $F^{-1}$ . En général, on essaie d'introduire de nouvelles bases de représentation des courants et des champs de façon à simplifier la forme de l'opérateur direct  $F$ . L'idéal serait d'être en mesure par changement de base de "diagonaliser" cet opérateur. Car sous une forme "diagonalisée" l'obtention de  $F^{-1}$  deviendrait plus simple.

Un changement de base en apparence intéressant serait la transformée de Fourier. En effet, l'intégrale (Eq IV-18) peut s'écrire sous la forme d'un produit de convolution. Il est bien connu que ce type d'opérateur possède la propriété remarquable d'être diagonalisable par transformée de Fourier. Néanmoins cette approche ne nous semble pas adéquate pour notre application. Les transformées de Fourier sont définies sur tout l'espace et font donc abstraction du fait que nous ne pouvons mesurer le champ magnétique à l'intérieur des sources (domaine  $\Gamma_S$ )<sup>b</sup>.

Cette section va néanmoins montrer qu'il demeure possible de simplifier grandement la forme de cet opérateur en factorisant celui-ci et en modifiant la base de représentation des courants et des champs. Nous ne parviendrons pas à obtenir une forme parfaitement diagonale, mais la nouvelle forme de  $F$  nous permettra de mettre en avant certaines propriétés

---

<sup>b</sup> Si  $B$  est connu dans  $\Gamma_S$ , le modèle inverse est tout simplement l'équation de Maxwell-Ampère :  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B} / \mu_0$ .

fondamentales de l'opérateur de Biot et Savart. Sous certaines conditions (quelque peu restrictives parfois), il sera alors possible de :

- Montrer que l'opérateur n'est pas injectif : un champ magnétique peut être créé par différentes sources de courants. L'espace des sources ne générant aucun champ sera alors caractérisé.
- Montrer que l'opérateur n'est pas surjectif. L'espace auquel le champ magnétique est restreint sera caractérisé. Nous montrerons alors qu'en mesurant une seule composant du champ magnétique sur un seul cercle, il est possible d'extrapoler le champ magnétique dans une grande partie de l'espace.
- Montrer le caractère passe-bas de l'opérateur.

Pour démontrer ces propriétés, les développements qui vont suivre se décomposent de la manière suivante :

- Dans un premier temps, l'opérateur de Biot et Savart est factorisé en deux sous-modèles. Cela permet d'introduire les multipôles comme grandeurs intermédiaires.
- Dans un second temps, nous étudions les caractéristiques de la relation multipôles-champ magnétique. Nous démontrons alors que l'opérateur n'est pas surjectif.
- Dans un troisième temps, nous étudions les caractéristiques de la relation courants-multipôles. Nous démontrons alors que l'opérateur n'est pas injectif.

### ***B - Factorisation de l'opérateur de Biot et Savart 2D : décomposition en harmoniques circulaires***

Afin de faciliter l'étude de l'opérateur de Biot et Savart, ce paragraphe propose de le diviser en deux parties à l'aide d'une décomposition en harmoniques circulaires.

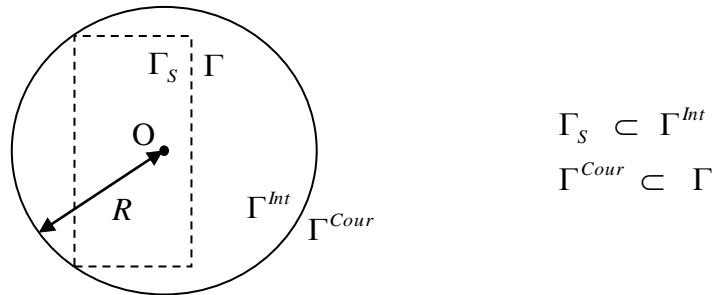
Afin de réaliser cette décomposition, il est plus simple dans un premier temps de travailler avec le potentiel magnétique et avec le système de coordonnées polaires. L'équation suivante rappelle la relation courants-potentiels avec ce système de coordonnées.

$$\left\{ \begin{array}{l} A(r, \theta) = \int_{r_s=0}^R \int_{\theta_s=0}^{2\pi} G(r, \theta, r_s, \theta_s) \cdot j(r_s, \theta_s) dS \\ \text{avec } G(r, \theta, r_s, \theta_s) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\sqrt{r^2 + r_s^2 + 2rr_s \cos(\theta - \theta_s)}\right) \end{array} \right. \quad \text{Eq IV-19}$$

Il est possible de démontrer à l'aide des polynômes de Tchebychev que le noyau  $G$  de l'intégrale peut être décomposé de la manière suivante [Keradec, 2005] :

$$G(r, \theta, r_s, \theta_s) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( -\ln(r) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{r_s^m}{r^m} (\cos(m\theta_s)\cos(m\theta) + \sin(m\theta_s)\sin(m\theta)) \right) \quad \text{Eq IV-20}$$

Cette série<sup>cd</sup> est convergente à la condition que  $r > r_s$ . Cela nous pousse donc à introduire un nouveau partitionnement de l'espace  $\{\Gamma^{\text{Int}}, \Gamma^{\text{Cour}}\}$  qui est schématisé sur la figure (Fig. 116).



*Fig. 116 : Ancien partitionnement de l'espace (traits pointillés) et nouveau partitionnement (traits pleins).*

La série (Eq IV-20) n'est donc convergente que si le champ magnétique est évalué en un point de  $\Gamma^{\text{Cour}}$ . Cette condition est quelque peu restrictive. En effet, la pile à combustible ayant une forme rectangulaire, nous avons la possibilité de mesurer le champ magnétique à l'intérieur du domaine  $\Gamma^{\text{Int}}$ . Nous reviendrons sur ce point en conclusion.

Grâce au développement en série du noyau  $G$  (Eq IV-20), nous réécrivons la relation courants-potentiels (Eq IV-19) en deux parties distinctes. La première partie s'écrit :

<sup>c</sup> Les termes de cette série peuvent être aussi obtenus en réalisant un développement limité de  $G(r, \theta, r_s, \theta_s)$  autour de  $r_s = 0$ .

<sup>d</sup> La série montre aussi que l'origine du système de coordonnées polaires a une grande importance. La série convergera plus vite si le repère est pris au barycentre des sources.

$$\left\{ \begin{array}{l} A(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^2 P_{mn}(r, \theta) a_{mn} \\ \text{avec } P_{mn}(r, \theta) = \begin{cases} -\ln(r) & \text{si } m = 0 \text{ et } n = 1 \\ 0 & \text{si } m = 0 \text{ et } n = 2 \\ \frac{1}{m} \frac{\cos(m\theta)}{r^m} & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n = 1 \\ \frac{1}{m} \frac{\sin(m\theta)}{r^m} & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n = 2 \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{Eq IV-21}$$

Les coefficients  $a_{mn}$  sont appelés moments de la décomposition multipolaire, où plus simplement multipôles. Les fonctions  $P_{mn}$  sont appelées harmoniques circulaires vectorielles. La seconde partie de la relation courants – potentiels s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{mn} = \int_{r_s=0}^R \int_{\theta_s=0}^{2\pi} g_{mn}(r_s, \theta_s) j(r_s, \theta_s) dS \\ \text{avec } g_{mn}(r_s, \theta_s) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\pi} r_s^m \cos(m\theta_s) & \text{si } n = 1 \\ \frac{\mu_0}{2\pi} r_s^m \sin(m\theta_s) & \text{si } n = 2 \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{Eq IV-22}$$

Nous venons donc d'introduire une nouvelle grandeur  $a$  et deux nouvelles transformations linéaires  $g$  et  $P$  qui sont schématisées sur la figure (Fig. 117).

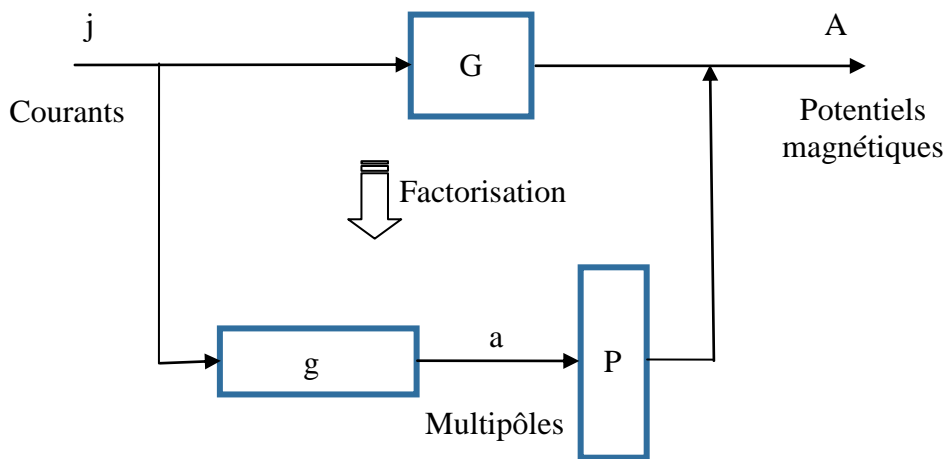


Fig. 117 : Schéma de principe de la décomposition en harmoniques circulaires pour le potentiel magnétique.

Les développements présentés jusqu'ici pour le potentiel magnétique peuvent être facilement étendus au champ magnétique en appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation (Eq IV-21). Le résultat est donné par l'équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^2 \mathbf{T}_{mn}(r, \theta) a_{mn} \\ \\ \text{avec } \mathbf{T}_{mn}(r, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } m = 0 \text{ et } n = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } m = 0 \text{ et } n = 2 \\ \frac{1}{r^{m+1}} \begin{pmatrix} -\sin(m\theta) \\ \cos(m\theta) \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n = 1 \\ \frac{1}{r^{m+1}} \begin{pmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n = 2 \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{Eq IV-23}$$

On remarque que les moments  $a_{mn}$  permettent de caractériser aussi bien le potentiel que le champ magnétique. Seules les fonctions de la base de description sont différentes (fonctions  $\mathbf{T}_{mn}$  à la place de  $P_{mn}$ ). Les relations entre ces nouvelles grandeurs sont schématisées sur la figure (Fig. 118).

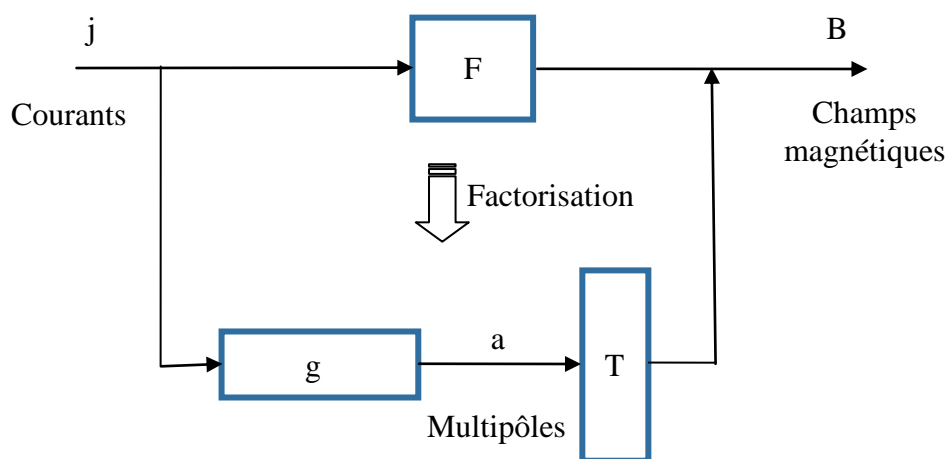
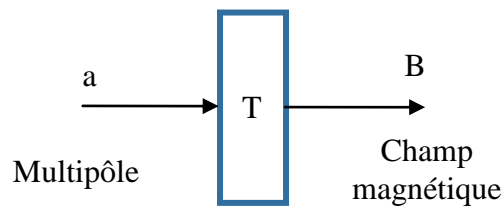


Fig. 118 : Schéma de principe de la décomposition en harmoniques circulaires pour le champ magnétique.

Cette factorisation de la loi de Biot et Savart simplifie grandement l'étude de cet opérateur. L'introduction d'une grandeur intermédiaire  $a$  permet d'étudier indépendamment les deux sous-modèles  $g$  et  $T$ .

### ***C - Etude de la relation multipôles – champs magnétiques***

Cette section étudie les caractéristiques du modèle (Eq IV-23) permettant de calculer le champ magnétique en fonction des multipôles. Ce modèle est schématiquement représenté sur la figure (Fig. 119). L'intérêt de ce modèle est qu'il permet d'optimiser les mesures de champs magnétiques en se concentrant sur l'estimation des différents multipôles  $a_{mn}$ , et non plus sur celle des différents courants  $j(x, y)$ . Cette question a déjà fait l'objet de précédents travaux, plus particulièrement en trois dimensions avec la thèse de Benjamin Vincent [Vincent, 2008]. Nous traitons ici brièvement le cas 2D et démontrons que ce modèle n'est pas surjectif. Nous montrons alors qu'il est possible d'inverser cette relation et d'estimer les moments  $a_{mn}$  à l'aide d'un nombre de mesures très restreint.



*Fig. 119 : Modèle direct multipôles – champs magnétiques.*

#### **1) Illustration des harmoniques circulaires**

L'équation (Eq IV-23) montre que le champ magnétique possède la propriété intéressante de s'écrire comme une combinaison linéaire d'harmoniques circulaires  $\mathbf{T}_{mn}$ . A titre d'illustrations, celles-ci sont représentées sur la figure (Fig. 120). On reconnaît sur cette figure la forme d'un monopôle ou les formes de dipôles, quadripôles... On observe aussi la décroissance très rapide de ces harmoniques lorsqu'on s'éloigne de l'origine du repère.

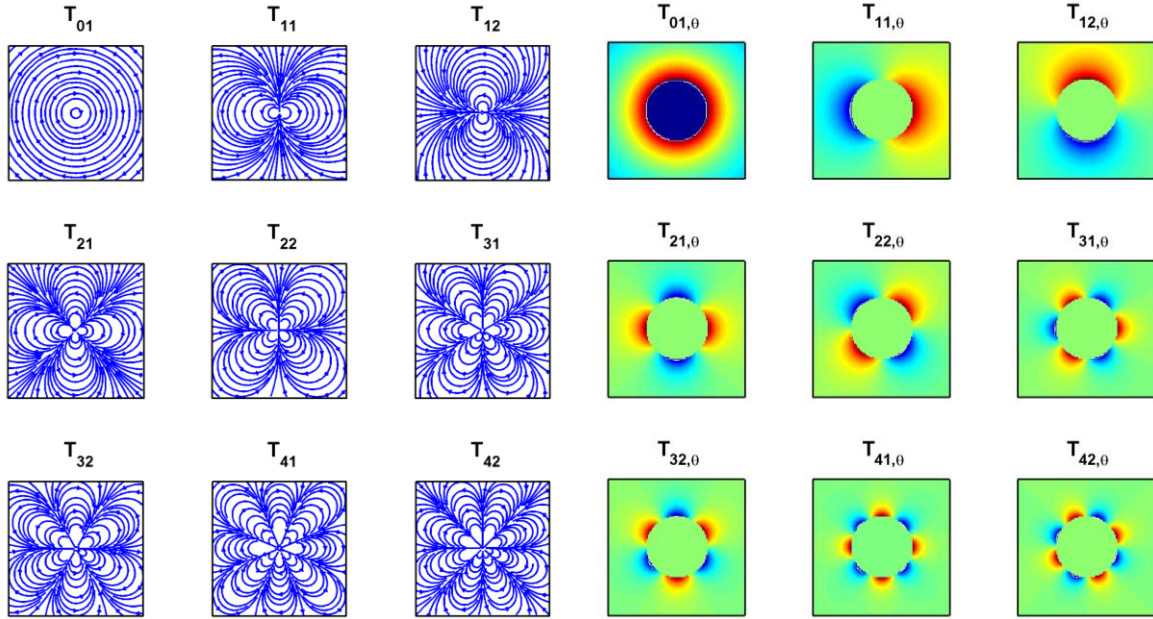


Fig. 120 : Premières harmoniques circulaires  $T_{mn}$ . A gauche, lignes de champs. A droite amplitude de la composante orthoradiale. Afin de faciliter la visualisation de l'amplitude des harmoniques, les singularités à l'origine du repère ont été artificiellement effacées en imposant zéro sur un disque central.

## 2) Changement de base et diagonalisation partielle de l'opérateur

Afin de faciliter les développements qui vont suivre, nous proposons de ne considérer que la composante orthoradiale  $B_\theta$  du champ magnétique. A quelques exceptions près, les développements analytiques qui suivront seront aussi valables pour la composante radiale  $B_r$  du champ. D'après l'équation (Eq IV-23), nous pouvons exprimer la composante orthoradiale  $B_\theta$  du champ en fonction des multipôles de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_\theta(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^2 T_{mn,\theta}(r, \theta) a_{mn} \\ \text{avec } T_{mn,\theta}(r, \theta) = \begin{cases} \frac{\cos(m\theta)}{r^{m+1}} & \text{si } n = 1 \\ \frac{\sin(m\theta)}{r^{m+1}} & \text{si } n = 2 \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{Eq IV-24}$$

Où  $T_{mn,\theta}$  est la composante orthoradiale de l'harmonique  $T_{mn}$ . Nous proposons maintenant de projeter le champ magnétique sur des fonctions trigonométriques  $q_{uv}$  :



$$\left\{ \begin{array}{l} b_{uv,\theta}(r) = \int_{\theta=0}^{2\pi} q_{uv}(\theta) \cdot B_{\theta}(r, \theta) d\theta \\ \text{avec } q_{uv}(\theta) = \begin{cases} \cos(u\theta) & \text{si } v = 1 \\ \sin(u\theta) & \text{si } v = 2 \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{Eq IV-25}$$

Les fonctions  $q_{uv}$  sont les fonctions trigonométriques usuelles. Les nombres  $b_{mn,\theta}(r)$  sont donc les coefficients de Fourier de la composante orthoradiale du champ magnétique pour chaque coordonnée radiale  $r$ . Ce changement de base de représentation du champ magnétique trouve son intérêt en combinant les équations (Eq IV-24) et (Eq IV-25). En effet, les harmoniques circulaires  $T_{mn,\theta}$  sont, à un facteur près, des fonctions trigonométriques. Celles-ci sont donc orthogonales aux fonctions  $q_{uv}$ . Il est par conséquent possible de faire tomber l'ensemble des signes de sommation et d'obtenir :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{mn,\theta}(r) = t_{mn,\theta}(r) \cdot a_{mn} \\ \text{avec } t_{mn,\theta}(r) = \frac{\pi}{r^{m+1}} \end{array} \right. \quad \text{Eq IV-26}$$

A quelques détails près, il est possible d'obtenir une formule similaire pour la composante  $b_{mn,r}(r)$  du champ magnétique<sup>e</sup>. Le schéma de principe de ce changement de base est illustré sur la figure (Fig. 121).

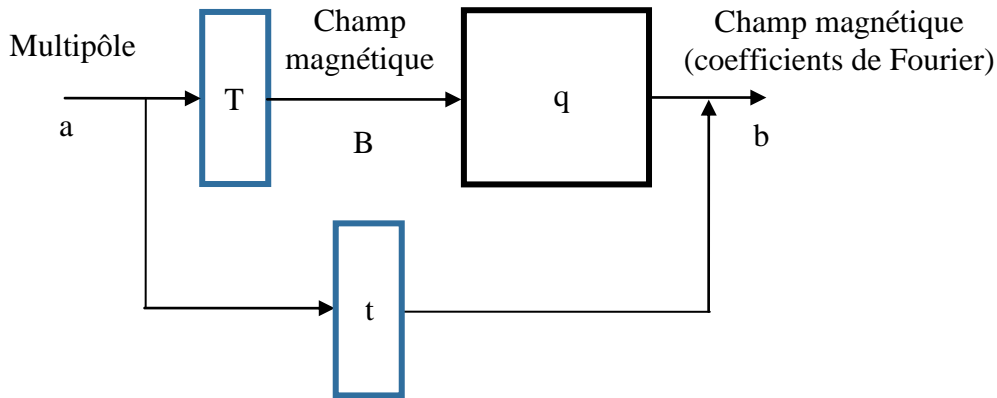


Fig. 121 : Modèle direct multipôles – champs magnétiques avec les sorties exprimées dans la base de Fourier.

<sup>e</sup> Le moment  $a_{01}$  ne peut pas être estimé à partir de la composante radiale  $B_r$ . De plus, les coefficients  $b_{m1,r}(r)$  correspondent aux moments  $a_{m2}$ . Inversement, les coefficients  $b_{m2,r}(r)$  correspondent aux moments  $a_{m1}$ .

L'équation (Eq IV-26) montre que nous sommes en quelque sorte parvenus à diagonaliser par bloc la relation multipôles – champs magnétiques. La figure (Fig. 122) permet de mieux illustrer ce résultat. Nous voyons clairement ici que le modèle n'est pas surjectif.

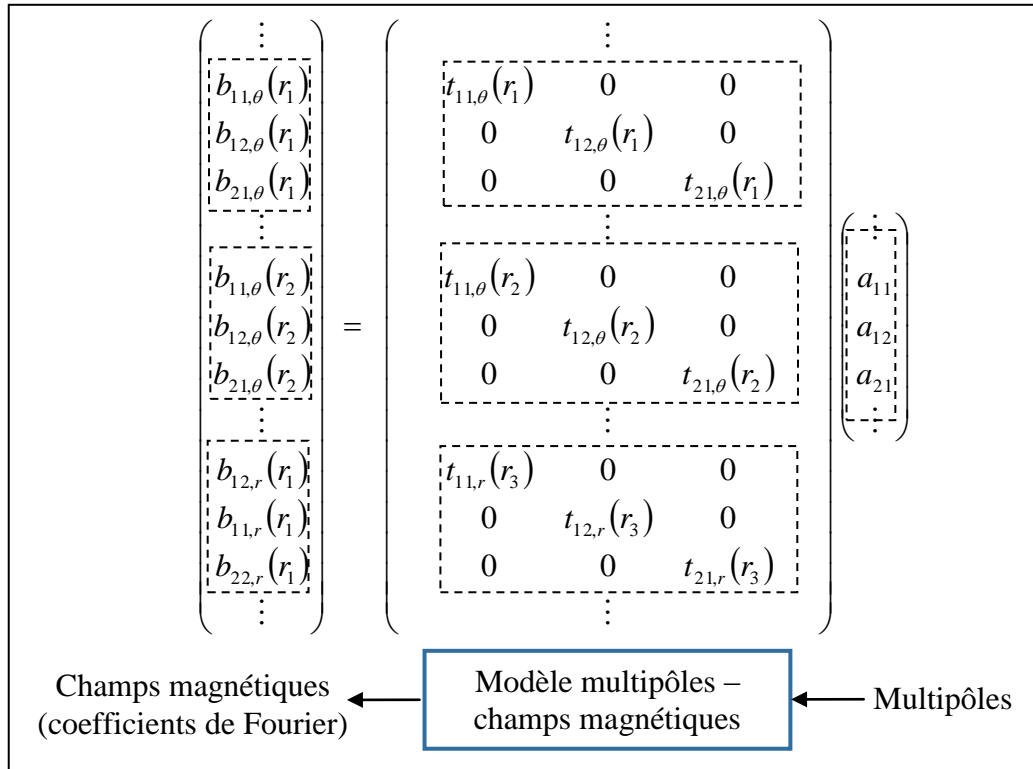


Fig. 122 : Relation multipôles – champs magnétique sous forme matricielle.

Avec ce changement de base, nous voyons que le champ magnétique s'écrit de manière très simple en fonction des moments multipolaires. Les harmoniques  $\mathbf{t}_{mn}(r)$  jouent alors le rôle de fonction de transfert entre chaque moment  $a_{mn}$  et chaque coefficient de Fourier  $\mathbf{b}_{mn}(r)$  du champ magnétique. En raison des contributions en  $1/r^{m+1}$ , la fonction de transfert  $\mathbf{t}_{mn}(r)$  décroît lorsque  $r$  et  $m$  augmentent. Nous avons donc ici un filtre passe-bas<sup>f</sup> paramétré par la coordonnée radiale  $r$ . A titre d'illustration, la fonction de transfert  $t_{m2,\theta}(r)$  de ce filtre est représentée sur la figure (Fig. 123).

<sup>f</sup> En réalité les choses sont légèrement plus complexes, et la fonction de transfert  $\mathbf{t}_{mn}(r)$  n'est pas toujours un filtre passe-bas. Si le paramètre  $r$  est inférieur à 1, les moments d'ordre élevé sont amplifiés à la place d'être atténués. Malgré cela, l'opérateur de Biot et Savart est au final toujours un filtre passe-bas. Lorsque  $r$  est inférieur à 1, c'est le modèle courants – multipôles (Eq IV-22) qui se charge d'atténuer les multipôles.

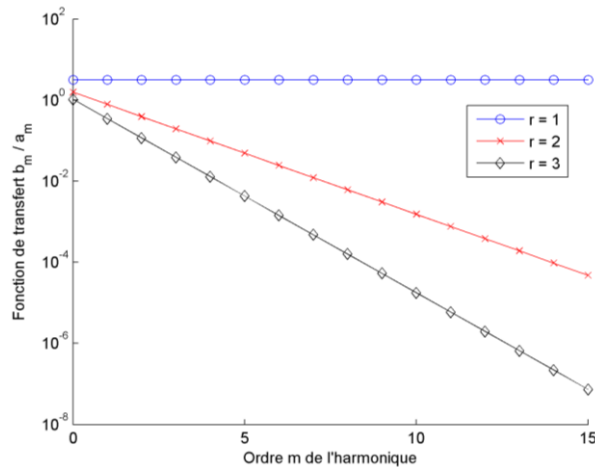


Fig. 123 : Fonction de transfert  $t_{m2, \theta}(r)$  entre les moments multipolaires et les coefficients de Fourier du champ magnétique.

### 3) Inversion du modèle : estimation des multipôles

Nous sommes parvenus à diagonaliser par bloc le modèle multipôles – champs magnétiques. La nouvelle forme de ce modèle est donnée par l'équation (Eq IV-26). Ce paragraphe s'intéresse à l'inversion de cette relation.

L'équation (Eq IV-26) met en évidence le fait que le modèle n'est pas surjectif. Si la connaissance du champ  $b$  est entachée d'erreur, la résolution du système d'équations (Eq IV-26) risque de n'admettre aucune solution. Ce problème peut se contourner de deux façons différentes. La première façon consiste à résoudre le système au sens des moindres carrés surdéterminés. Cette méthode a l'avantage de filtrer de manière très efficace le bruit de mesures. La seconde méthode consiste à ne pas mesurer le champ magnétique  $\mathbf{B}$  partout mais seulement dans un sous-domaine de l'espace. Cela permet de ne conserver que les équations linéairement indépendantes. En effet, l'équation (Eq IV-26) est valable :

- pour toute coordonnée radiale  $r$ .
- pour la composante orthoradiale  $\theta$  et pour la composante radiale  $r$ .

Pour estimer l'ensemble des moments  $a_{mn}$ , nous avons seulement besoin de réaliser les mesures sur un seul cercle et sur une seule composante<sup>g</sup>. Une fois un cercle de rayon  $R_0$  choisi, et une composante vectorielle choisie (orthoradiale par exemple), le modèle réduit devient bijectif. En pratique, il suffit donc de mesurer le champ magnétique  $B_\theta(R_0, \theta)$  pour chaque coordonnée angulaire  $\theta$ . Les coefficients  $b_{mn,\theta}(R_0)$  s'obtiennent ensuite par une décomposition en série de Fourier (Eq IV-25). L'inversion de la relation (Eq IV-26) est alors immédiate et nous obtenons :

$$\begin{cases} a_{mn} = t_{mn,\theta}^{-1}(R_0) \cdot b_{mn,\theta}(R_0) \\ \text{avec } t_{mn,\theta}^{-1}(R_0) = \frac{R_0^{m+1}}{\pi} \end{cases} \quad \text{Eq IV-27}$$

Cette méthode d'inversion est résumée sur la figure (Fig. 124). Il est important de noter que les coefficients  $\mathbf{b}_{mn}$  d'ordre élevé sont probablement quasiment nuls, ceux-ci ayant été fortement atténués par le filtre  $\mathbf{t}_{mn}$ . Néanmoins, en raison du bruit de mesure, il est possible que ces coefficients  $\mathbf{b}_{mn}$  ne soient pas nuls. Par conséquent la fonction de transfert inverse  $t_{mn}^{-1}$  risque d'amplifier le bruit porté par ces coefficients. L'erreur de reconstruction de ces moments  $a_{mn}$  est ainsi gigantesque. La régularisation du problème inverse consiste ici à ne pas calculer ces coefficients  $a_{mn}$  d'ordre élevé. Cela consiste à les supposer nuls sauf si l'on dispose d'autres sources d'informations les concernant.

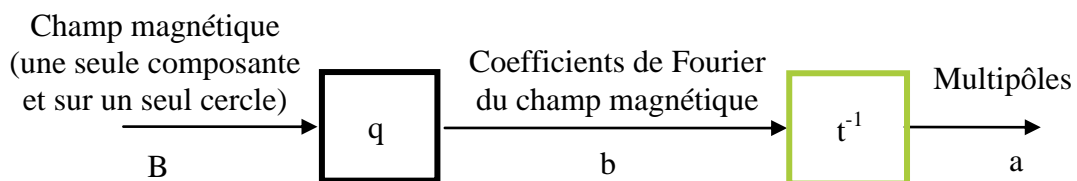


Fig. 124 : Inversion de la relation multipôles – champs magnétiques.

<sup>g</sup> Le fait que le champ magnétique puisse entièrement être caractérisé sur un seul cercle et sur une seule composante peut sembler être une propriété remarquable. Cela s'explique par le fait que le champ magnétique respecte les équations de Maxwell (divergence et rotationnel nuls en dehors des sources). Ces équations restreignent la dimension du sous-espace vectoriel auquel appartient le champ magnétique. Par conséquent, la caractérisation du champ magnétique à l'intérieur de ce sous-espace nécessite la connaissance d'un nombre réduit de coefficients  $a_{mn}$  appelés moments multipolaires. A partir de la connaissance de tous ces moments, il est possible d'extrapoler le champ magnétique dans tout  $I^{eour}$ .

#### 4) Discrétisation et critère de Shannon

Grâce aux développements précédents, on peut aussi définir un critère de Shannon pour la discrétisation du champ magnétique. D'après ce qui précède, le champ magnétique est entièrement caractérisable si celui-ci est mesuré sur un cercle fermé et sur une seule composante. Le champ magnétique sur un contour 1D peut donc être considéré comme un signal 1D. Nous pouvons donc appliquer le critère de Shannon sur un tel signal : la fréquence d'échantillonnage doit être au moins deux fois supérieure à la fréquence maximale contenue dans le signal. Pour connaître le nombre optimal de mesures, il "suffit" de savoir à partir de quelle fréquence angulaire  $m$  les coefficients  $\mathbf{b}_{mn}(r)$  sont négligeables. Par exemple, si  $m$  est égal à cinq, alors nous n'avons besoin de réaliser qu'une dizaine de mesures.

En raison du filtre passe-bas  $\mathbf{t}_{mn}(r)$ , les coefficients  $\mathbf{b}_{mn}(r)$  décroissent très vite lorsque  $m$  augmente ou lorsque  $r$  augmente. Ainsi, il est rarement utile de réaliser un grand nombre de mesures car les coefficients  $\mathbf{b}_{mn}(r)$  sont très rapidement filtrés. Si malgré tout le phénomène de recouvrement de spectre survient, deux solutions sont possibles. Soit on augmente le nombre de mesures, soit on augmente  $r$  en éloignant les mesures des sources afin d'augmenter le filtrage.

#### 5) Remarque sur les harmoniques circulaires externes

La base de description  $\mathbf{T}_{mn}$  du champ magnétique présentée jusqu'ici permet de décrire uniquement le champ généré par des sources incluses dans  $\Gamma^{\text{Int}}$  (sources internes). Cette base n'est donc pas complète car elle ne permet pas de porter les champs magnétiques provenant de sources situées à l'infini (sources externes assimilées à du bruit dans notre application). En réalité, le développement en série du noyau  $G$  proposé par l'équation (Eq IV-20) n'est pas le seul possible. Il est aussi possible de faire un développement similaire selon  $r/r_S$  (et non plus selon  $r_S/r$ ). C'est le développement le plus adéquat pour les sources situées loin de l'origine du repère. Les fonctions ainsi obtenues ont alors des lois de décroissances inversées : elles tendent vers zéro à l'origine du repère<sup>h</sup>. A titre d'illustration, les premières fonctions permettant de compléter la base de description du champ magnétique sont représentées sur la figure (Fig. 125).

---

<sup>h</sup> A l'exception des harmoniques d'ordre 1 qui permettent de représenter des champs magnétiques constants comme le champ magnétique terrestre par exemple.

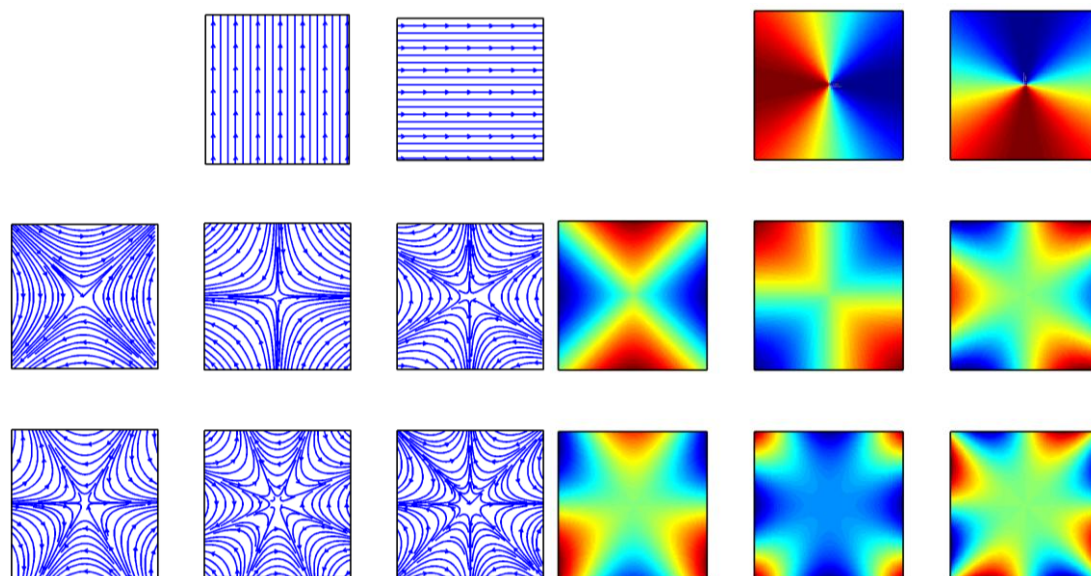


Fig. 125 Harmoniques circulaires externes. A gauche, lignes de champ. A droite, amplitude de la composante orthoradiale<sup>i</sup>.

En raison de leurs lois de décroissances inversées, il est possible de discriminer les harmoniques externes des harmoniques internes en réalisant des mesures sur un deuxième cercle. On pourrait ainsi s'affranchir du bruit extérieur (champ terrestre, machines, objets aimantés...). La discrimination des champs magnétiques perturbateurs à l'aide de ces harmoniques circulaires est proposée dans la référence [Di Rienzo & Zhang, 2010]. Le réseau de capteurs ainsi créé se trouve être beaucoup plus robuste vis-à-vis du bruit extérieur. Néanmoins cette approche est limitée par le fait que les champs magnétiques extérieurs ne respectent pas toujours l'approximation 2D. La réjection de ce bruit nécessiterait l'utilisation des harmoniques sphériques 3D.

<sup>i</sup> Pour les champs externes, l'harmonique d'ordre 0 n'existe pas. Plus précisément, il s'agit pour le potentiel magnétique d'une fonction constante qui devient nul après application du rotationnel.

### D - Etude de la relation courants – multipôles

Cette section s'intéresse à la deuxième partie de l'opérateur de Biot et Savart, à savoir l'équation (Eq IV-22). Les entrées et sorties de ce modèle sont rappelées sur la figure (Fig. 126). Il s'agit du modèle permettant d'obtenir les multipôles à partir de la connaissance de la densité de courant. Nous montrons dans cette section que ce modèle n'est pas injectif : il existe des courants qu'il est possible de détecter à l'aide de mesures magnétiques externes.

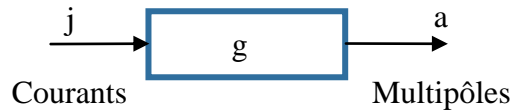


Fig. 126 : Modèle direct courants – multipôles.

#### 1) Changements de bases et diagonalisation partielle de l'opérateur

Afin de diagonaliser le modèle  $g$  (Eq IV-22), nous introduisons dans ce paragraphe deux nouveaux changements de bases.

##### Introduction des coefficients complexes

Il s'agit ici d'un changement de base mineur qui introduit les nombres complexes et qui permet d'alléger les notations et de simplifier les prochains calculs.

$$\alpha_m = a_{m1} + ia_{m2} \quad \text{Eq IV-28}$$

Les nombres  $\alpha_m$  seront appelés multipôles complexes. En combinant l'équation (Eq IV-22) avec l'équation (Eq IV-28), la relation courants-multipôles s'exprime de manière encore plus simple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_m = \int_{r_s=0}^R \int_{\theta_s=0}^{2\pi} \gamma_m(r_s, \theta_s) j(r_s, \theta_s) dS \\ \text{avec } \gamma_m(r_s, \theta_s) = \frac{\mu_0}{2\pi} r_s^m \exp(im\theta_s) \end{array} \right. \quad \text{Eq IV-29}$$

### Introduction des coefficients de Fourier

Comme nous avons précédemment supposé que la densité de courant est bornée à l'intérieur d'un disque de rayon R (domaine  $\Gamma^{\text{Int}}$ ), il est par conséquent possible de décomposer celle-ci en série de Fourier.

$$\begin{cases} j(r_s, \theta_s) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} Q_{uv}(r_s, \theta_s) L_{uv} \\ \text{avec } Q_{uv}(r_s, \theta_s) = \exp(-i(uk_r r_s + v\theta_s)) \quad \text{et } k_r = \frac{2\pi}{R} \end{cases} \quad \text{Eq IV-30}$$

Les nombres  $L_{uv}$  (en  $A.m^{-2}$ ) seront appelés coefficients de Fourier de la densité de courant. Les fonctions  $Q_{uv}$  sont les fonctions trigonométriques 2D usuelles et forment une base orthogonale permettant de décrire un grand nombre de fonctions sur le domaine  $\Gamma^{\text{Int}}$ . En combinant les équations (Eq IV-29) et (Eq IV-30), la relation courants-multipôles prend encore une forme plus simple :

$$\begin{cases} \alpha_m = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} c_{mu} L_{um} \\ \text{avec } c_{mu} = \mu_0 \int_{r_s=0}^R r_s^{m+1} \exp(iuk_r r_s) dr_s \end{cases} \quad \text{Eq IV-31}$$

Les précédents changements de base sont résumés sur la figure (Fig. 127).

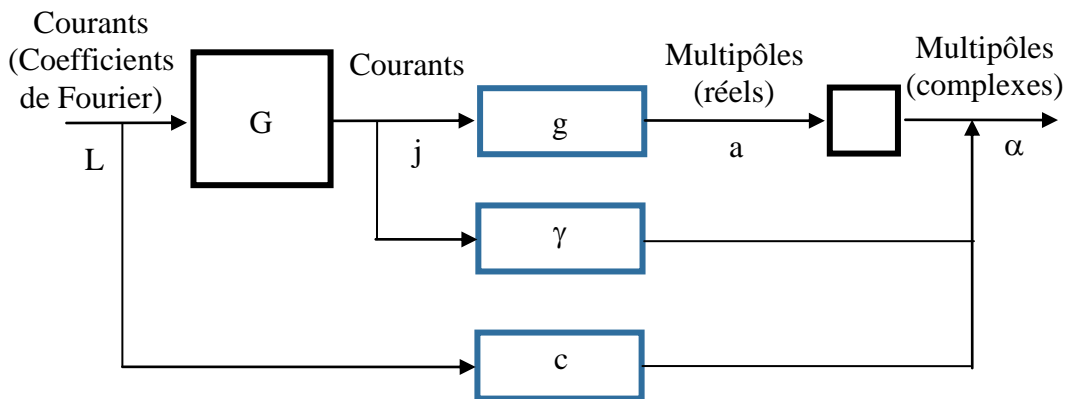


Fig. 127 : Schéma de principe des changements de bases.

### 2) Densités de courant générant le même champ magnétique

Grâce aux deux nouvelles bases que nous venons d'introduire, nous sommes parvenus à diagonaliser partiellement la relation courants – multipôles. Afin de mieux illustrer cela, nous pouvons représenter l'équation (Eq IV-31) sous une forme matricielle sur la figure (Fig. 128).



Il apparaît clairement sur cette figure que l'opérateur  $c$  est diagonal seulement par bloc. Mais à l'intérieur de chaque bloc, le système d'équation est très fortement sous déterminé. Nous prouvons donc ici que notre modèle direct n'est pas injectif.

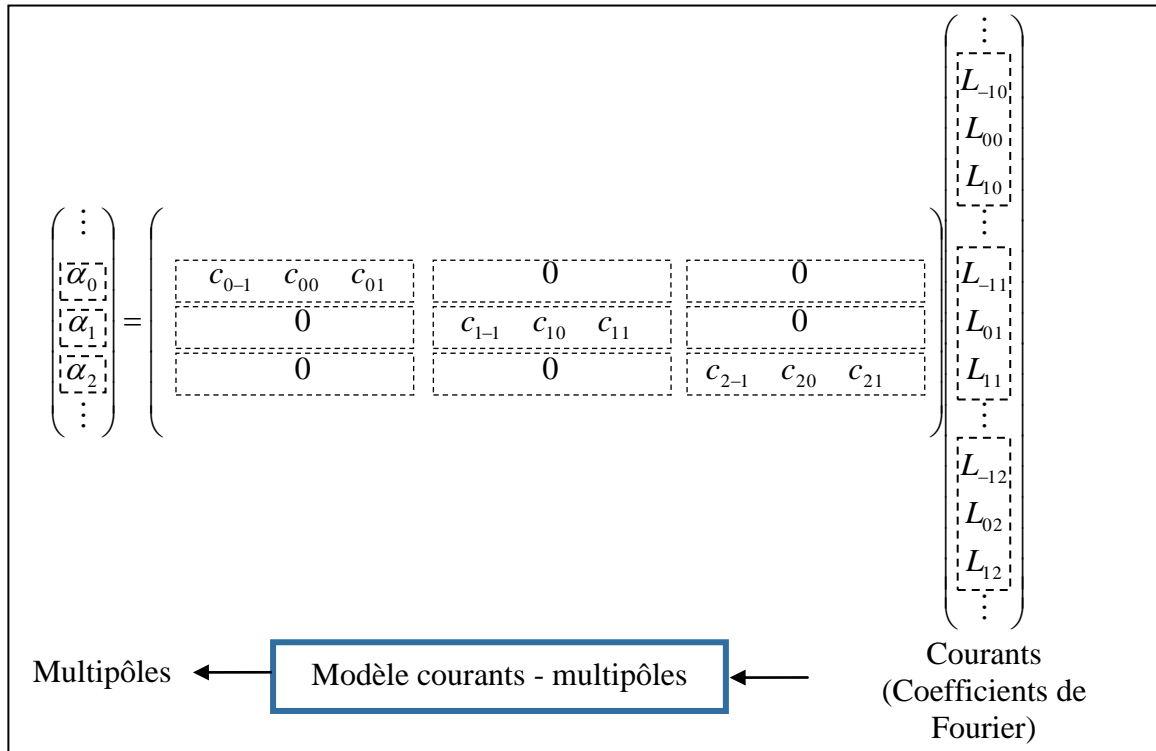


Fig. 128 : Représentation de la relation courants - multipôles sous forme matricielle.

Une autre façon de vérifier cela est de calculer les champs magnétiques générés par chaque fonction  $Q_{uv}$ . Les résultats sont présentés sur la figure (Fig. 129). Dans chaque cadre rouge sont représentées des fonctions  $Q_{uv}$  générant exactement la même harmonique circulaire  $T_{mn}$ . Par conséquent, à partir de mesures magnétiques externes, il est impossible de discriminer les fonctions  $Q_{uv}$  appartenant à un même cadre rouge<sup>j</sup>.

<sup>j</sup> Certaines fonctions du cadre inférieur ne génèrent en fait aucun champ. Il s'agit de différentes variantes du câble coaxial présenté sur la figure (Fig. 47).

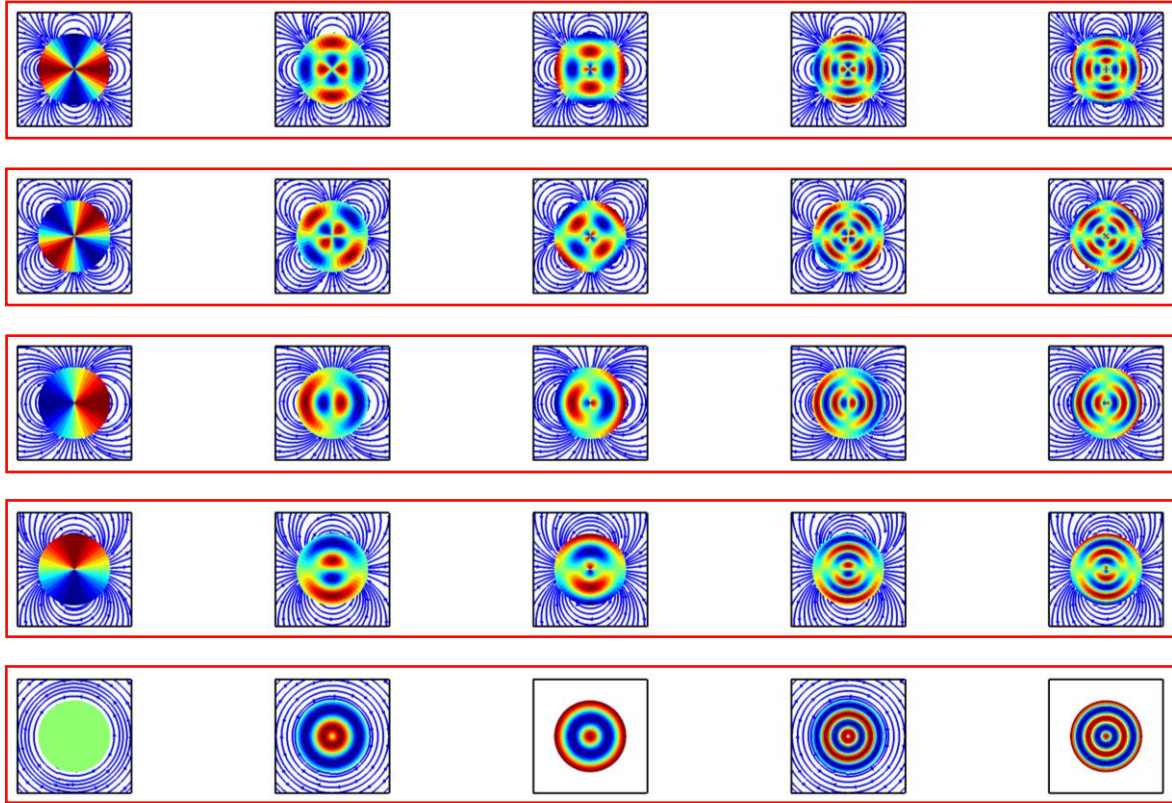


Fig. 129 : Fonctions trigonométriques<sup>k</sup>  $Q_{uv}$  pour les courants et champs magnétiques associés.

Sur la figure (Fig. 129), les fonctions  $Q_{uv}$  (ou plus précisément leurs parties réelles et imaginaires) ont été rangées dans un ordre particulier. Selon l'axe horizontal, c'est l'indice  $u$  (représentant la fréquence radiale) qui varie. Selon l'axe vertical, c'est l'indice  $v$  (représentant la fréquence angulaire) qui varie. On observe que la forme du champ magnétique est seulement modifiée lorsque la fréquence angulaire des courants varie mais pas lorsque la fréquence radiale varie.

### 3) Inversion du modèle

Nous sommes parvenus à diagonaliser par bloc le modèle courants - multipôles. Ce paragraphe s'intéresse maintenant à l'inversion de cette relation. Le modèle  $g$  n'étant pas injectif, il est impossible de définir un opérateur inverse  $g^{-1}$ . Il demeure néanmoins possible de l'inverser en un sens plus faible. Nous employons alors la notation  $g^\#$  pour un tel modèle. La solution la plus simple pour créer un tel modèle inverse consiste à supposer les densités de

<sup>k</sup> Sur la figure (Fig. 129) ce ne sont pas exactement les fonctions  $Q_{uv}$  qui sont représentées mais les fonctions  $\text{Re}(Q_{uv} + Q_{u-v})$ ,  $\text{Re}(Q_{uv} - Q_{u-v})$ ,  $\text{Im}(Q_{uv} + Q_{u-v})$ ,  $\text{Im}(Q_{uv} - Q_{u-v})$ .

courants invisibles égales à zéro. Cela est généralement faux mais cette supposition permet de construire des opérateurs inverses ayant le mérite de permettre l'estimation des courants qui sont détectables. Si jamais l'on dispose d'une autre source d'informations (relations de dépendance entre courants, informations théoriques supplémentaires, outils expérimentaux autres...), il est éventuellement possible d'associer une valeur autre que zéro à ces sources invisibles.

Enfin, pour obtenir les courants, il est aussi nécessaire d'inverser le changement de base (Eq IV-30). La base de description  $Q$  étant orthogonale, l'inversion de la relation est immédiate, et les coefficients  $L_{uv}$  sont égaux à :

$$L_{uv} = \frac{1}{\|Q_{uv}\|^2} \int_{r_s=0}^R \int_{\theta_s=0}^{2\pi} Q_{uv}^*(r_s, \theta_s) \cdot j(r_s, \theta_s) dr_s d\theta_s \quad \text{Eq IV-32}^1$$

Le principe de cette inversion est résumé sur la figure (Fig. 130).

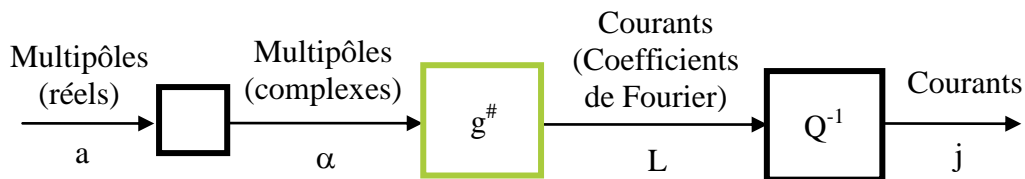


Fig. 130 : Inversion de la relation multipôles – champs magnétiques.

#### 4) Illustration des densités de courants invisibles

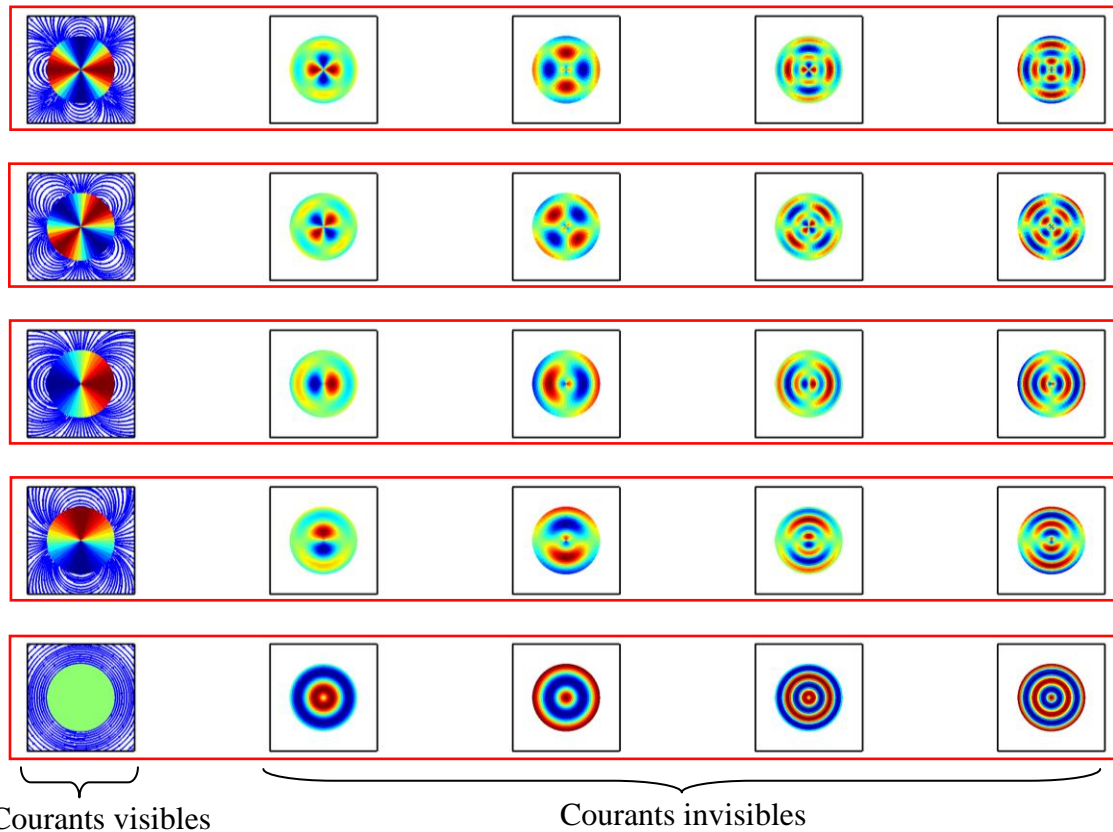
Pour un opérateur linéaire, le fait que plusieurs distributions de courant génèrent le même champ magnétique est synonyme du fait qu'il existe des distributions de courant ne générant aucun champ magnétique. A l'aide d'une procédure relativement simple<sup>m</sup>, il est possible de discriminer l'espace des sources générant un champ et l'espace des sources n'en

<sup>1</sup> La fonction  $j$  étant réelle, la suite  $L_{uv}$  est hermitienne : elle respecte la propriété  $L_{uv}^* = L_{-u-v}$ .

<sup>m</sup> La procédure consiste à réaliser des combinaisons linéaires des fonctions  $Q_{uv}$ . Les coefficients de la combinaison linéaire sont choisis de manière à ce que les fonctions ainsi créées ne génèrent aucun champ.

généralisant aucun. Les résultats sont représentés sur la figure (Fig. 131). Nous voyons apparaître explicitement les vecteurs engendrant le noyau<sup>n</sup> de l'opérateur de Biot et Savart.

Il est donc impossible de détecter les distributions de courants invisibles de la figure (Fig. 131) à partir de mesures externes. Il est bien entendu possible de les mesurer en réalisant des mesures à l'intérieur des sources. Mais cela va à l'encontre de notre cahier des charges, et cette question sort du cadre de notre étude.



*Fig. 131 : Différentes combinaisons linéaires des fonctions  $Q_{uv}$  faisant apparaître explicitement les distributions de courant ne générant aucun champ magnétique.*

### ***E - Conclusion sur les propriétés de l'opérateur de Biot et Savart***

Cette section nous aura permis de mieux comprendre les relations entre champs magnétiques et courants. Le schéma de la figure (Fig. 132) dresse le bilan simplifié des développements précédemment effectués sur l'opérateur de Biot et Savart.

<sup>n</sup> Le terme noyau est ici à comprendre comme le sous-espace vectoriel contenant l'ensemble des sources invisibles.

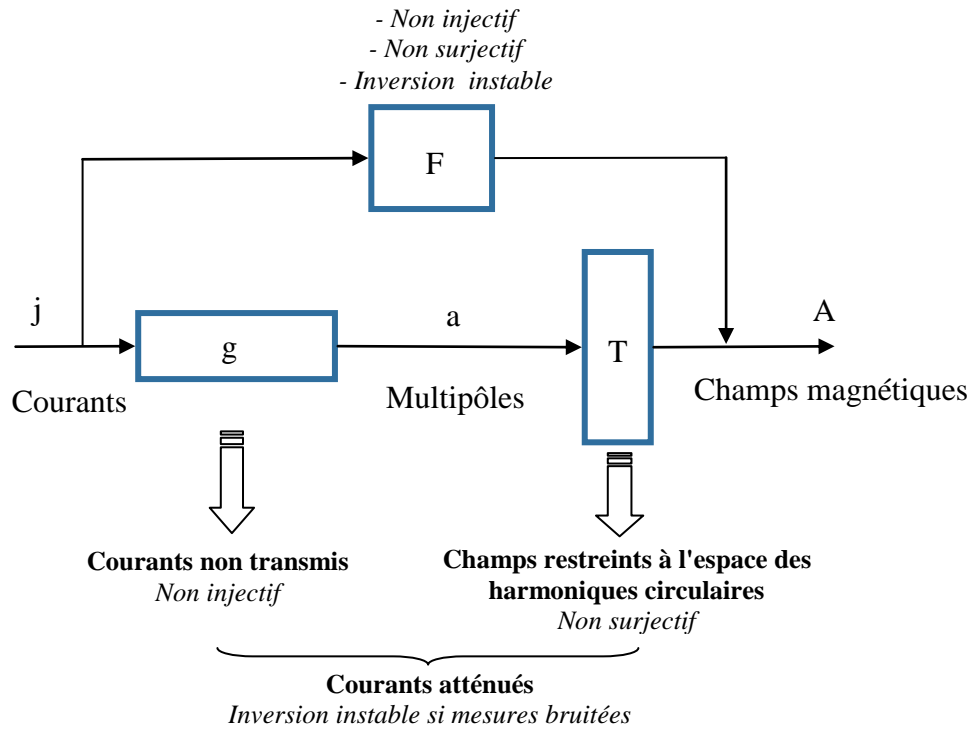


Fig. 132 : Bilan sur les caractéristiques de l'opérateur de Biot et Savart 2D

Nous avons ainsi pu voir qu'une énorme partie de l'information portée par les courants n'est pas transmise aux moments multipolaires  $a_{mn}$ . La solution de notre problème inverse ne sera donc pas unique. De plus, les courants sont fortement atténués lorsque l'information est transmise au champ magnétique. L'allure générale de la fonction de transfert de ce filtre est donnée sur la figure (Fig. 133). Ce phénomène est source d'importantes instabilités lors de l'inversion du modèle.

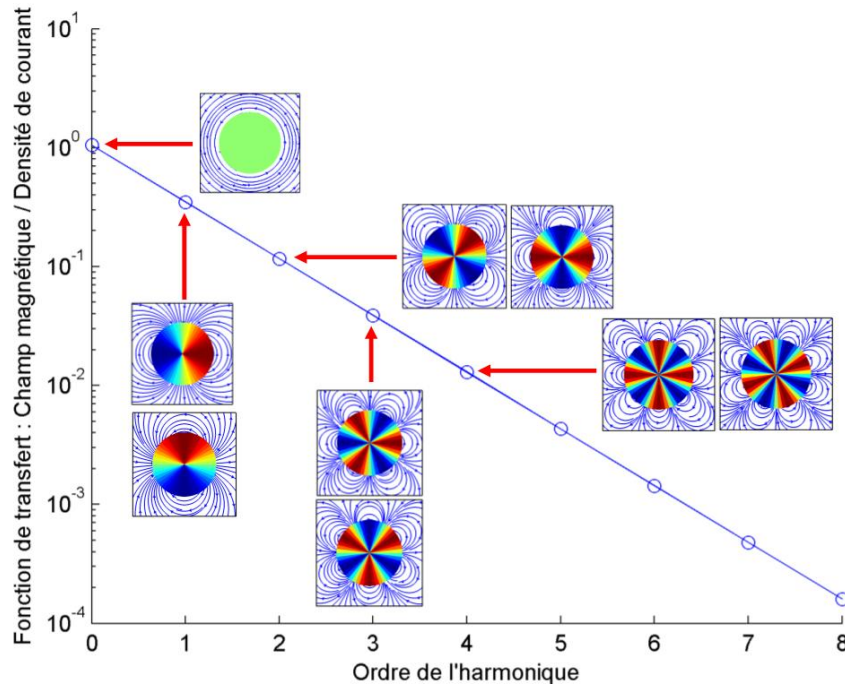


Fig. 133 : Allure générale de la fonction de transfert reliant les courants aux champs magnétiques.

Notons enfin que nous avons été en mesure de caractériser le sous-espace auquel appartient le champ magnétique. Celui-ci s'exprime comme une combinaison linéaire d'harmoniques circulaires  $T_{mm}$ . L'opérateur de Biot et Savart n'est donc pas surjectif mais cela est plutôt un avantage. Grâce à cela, nous savons qu'il suffit de connaître un nombre de coefficients réduit pour caractériser entièrement le champ magnétique. Nous avons montré que la connaissance d'une seule composante (radiale ou orthoradiale) sur un seul cercle est suffisante pour extrapoler le champ en dehors des sources. Il est aussi possible de tirer parti de cette propriété en réalisant des mesures redondantes pour filtrer le bruit extérieur.

Tous ces développements ne sont rigoureusement valides que si le champ magnétique est mesuré dans le domaine  $\Gamma^{\text{cour}}$ . Une pile à combustible est en général rectangulaire et non circulaire (Fig. 134). En raison des lois de décroissances rapides des champs magnétiques, il nous a semblé plus judicieux de mesurer les champs magnétiques au plus près de la pile. Cela a pour conséquence que certaines mesures seront réalisées dans  $\Gamma^{\text{int}}$ . Les développements précédents restent néanmoins valides pour une partie des courants situés à l'intérieur de la pile. En effet, on peut imaginer un sous domaine circulaire  $\Gamma_0^{\text{int}}$  circonscrit à l'intérieur de la pile. Pour les courants situés à l'intérieur de ce domaine, tous les développements demeurent valides, en particulier ce qui concerne les courants invisibles.

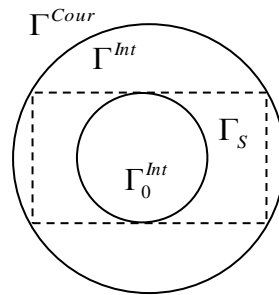


Fig. 134 : Illustration du domaine  $\Gamma_0^{Int}$  d'une pile à combustible comportant des courants invisibles.

Les questions d'existence et d'unicité (surjectivité et injectivité) dépendent très fortement des espaces auxquels appartiennent les entrées et sorties des modèles. Ainsi, lorsque le problème est discrétisé, il est possible d'obtenir des modèles bijectifs à l'aide d'un choix judicieux d'inconnues et de mesures. Les développements que nous venons de réaliser doivent néanmoins nous rappeler qu'une procédure de discrétisation (et de régularisation) stabilisant un problème inverse ne permet de reconstruire qu'une partie seulement de l'information. Quelle que soit la technique de discrétisation et de régularisation employée, une grande partie de l'information originale demeurera toujours inaccessible à l'aide de la seule mesure des champs magnétiques.

## Annexe D - Etude du noyau de l'opérateur de Biot et Savart en trois dimensions

Cette annexe s'intéresse à la détermination des courants invisibles en trois dimensions, c'est-à-dire aux courants ne générant aucun champ magnétique dans le domaine  $\Omega$ . La première partie de cette annexe propose une méthode permettant de construire les éléments du noyau de Biot et Savart. La seconde partie réalise un bref état de l'art sur l'appartenance des courants issus du modèle électrocinétique au noyau de Biot et Savart

### A - Noyau de l'opérateur en trois dimensions

Ce paragraphe propose une méthode relativement simple permettant de construire en trois dimensions des éléments du noyau de Biot et Savart. Il suffit dans un premier temps de construire un champ magnétique ayant la propriété d'être égal à zéro dans tout le domaine  $\Omega$ . Un exemple est donné sur la figure (Fig. 135). Il s'agit d'un tube de champ magnétique plein refermé sur lui-même. La conservation du flux magnétique est bien respectée.

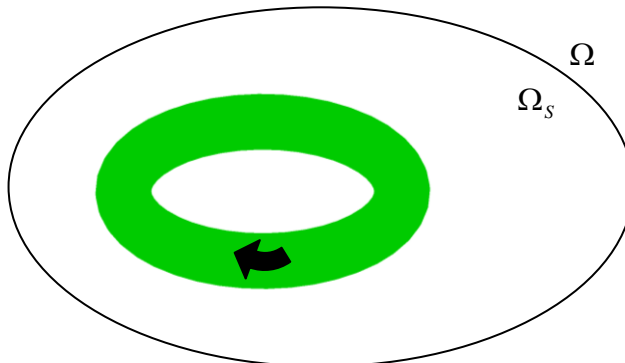


Fig. 135 : Tube (plein) de champ magnétique refermé sur lui-même.

On sait d'après l'équation de Maxwell-Ampère que le courant dérive du champ magnétique. Nous appliquons donc le rotationnel sur le champ magnétique ci-dessus et nous obtenons la densité de courant à l'origine de ce champ magnétique (Fig. 136).



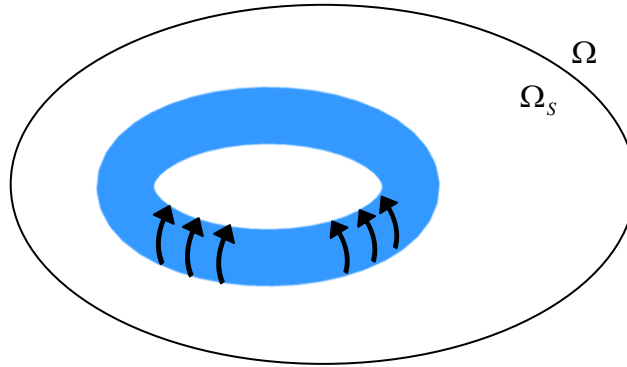


Fig. 136 : Bobine (creuse) de courant refermée sur elle-même.

La distribution de courant obtenue forme un tore creux et est évidemment à divergence nulle. En pratique cette distribution de courant peut être réalisée en refermant une bobine sur elle-même. Le champ magnétique généré par cette distribution de courant est évidemment le champ précédent de la figure (Fig. 135). Par construction, ce champ magnétique est nul en tout point du domaine  $\Omega$ . Par conséquent cette distribution de courant est bien un élément du noyau de Biot de Savart.

D'autres éléments du noyau de Biot et Savart peuvent être construits en utilisant la méthode précédente sur des champs magnétiques de formes autres que celle proposée précédemment. La principale contrainte à respecter est que le champ magnétique soit à divergence nulle. Cette contrainte impose au champ magnétique d'être une combinaison linéaire de boucles de champ magnétique. Par conséquent, on peut raisonnablement supposer que tout courant appartenant au noyau de Biot et Savart est une combinaison linéaire de tores creux comme celui représenté sur la figure (Fig. 136).

D'après ce qui précède, on en déduit que l'ensemble des courants générant un champ magnétique nul en tout point du domaine  $\Omega$  peut être construit de la manière suivante.

$$\text{Ker}(F) = \left\{ \mathbf{rot} \mathbf{v} \quad \text{avec } \mathbf{v} \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega \end{array} \right. \right\} \quad \text{Eq IV-33}$$

### Remarque : démonstration simplifiée

La démonstration mathématique rigoureuse de l'équation (Eq IV-33) est disponible dans l'article [Hauer et al., 2005a]. Une démonstration simplifiée reprenant la démarche proposée précédemment est proposée ici. Soit  $\mathbf{j}_0$  un élément de  $\text{Ker}(F)$ . En utilisant les équations de

Maxwell (et non plus la loi de Biot et Savart), nous allons démontrer que le champ magnétique généré par un tel courant est bien nul dans tout le domaine  $\Omega$ .

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{div} \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad \text{Eq IV-34}$$

D'après l'équation (Eq IV-33), l'élément  $\mathbf{j}_0$  dérive d'un rotationnel. Il est donc possible d'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{v}) = 0 \\ \mathbf{div} \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad \text{Eq IV-35}$$

Le rotationnel de  $\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{v}$  étant nul, cette grandeur dérive donc d'un potentiel magnétique scalaire  $\varphi$ .

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{v} + \mathbf{grad} \varphi \\ \mathbf{div} \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad \text{Eq IV-36}$$

En combinant les deux équations de l'accolade, et en utilisant le fait que la divergence de  $\mathbf{v}$  soit nulle, nous obtenons l'équation de Laplace pour le potentiel scalaire magnétique.

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{Eq IV-37}$$

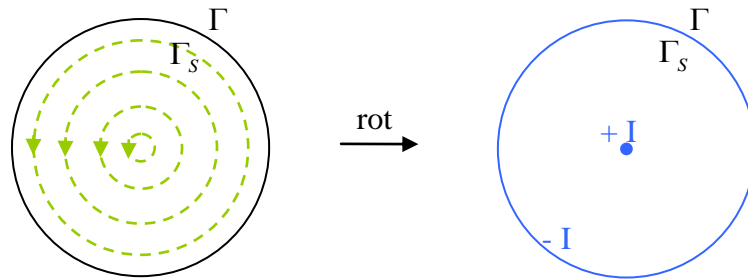
Avec des conditions aux limites nulles, la solution de cette équation est égale à zéro, et le champ magnétique s'exprime donc de la manière suivante.

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{v} \quad \text{Eq IV-38}$$

D'après l'équation (Eq IV-33),  $\mathbf{v}$  est égal à zéro dans le domaine  $\Omega$ . Par conséquent le champ magnétique généré par  $\mathbf{j}_0$  est aussi égal à zéro dans le domaine  $\Omega$ .

**Remarque : application en deux dimensions**

Les résultats précédents demeurent valides en deux dimensions. On peut ainsi construire le courant du câble coaxial précédemment évoqué en utilisant un champ magnétique s'enroulant dans un cylindre rectiligne infiniment long (Fig. 137). De manière similaire, on peut construire toutes les autres sources invisibles 2D en utilisant plusieurs enroulements de champs magnétiques dans un cylindre.



*Fig. 137 : Champ magnétique (vert) permettant de construire la distribution de courant du câble coaxial (courant ne générant aucun champ dans  $\Gamma$ ).*

***B - Densités de courants issues d'un modèle électrocinétique : état de l'art***

Dans le premier chapitre, nous avons évoqué deux équipes de recherches ayant déjà travaillé sur le diagnostic de piles à combustible [Hauer & Potthast, 2007], [Lustfeld et al., 2009b]. Ces deux équipes utilisent généralement des distributions de courant issues de la résolution de l'équation électrocinétique suivante.

$$\text{div } \sigma \text{ grad} V = 0 \tag{Eq IV-39}$$

Où  $\mathbf{j}$  est ensuite obtenu avec la loi d'Ohm locale. Ces deux équipes de recherche se sont toutes deux posées la question de savoir si les courants issus de cette équation peuvent partiellement appartenir au noyau de Biot et Savart.

L'équipe de recherche de Hauer et al. fournit quelques éléments de réponse dans quelques cas particuliers [Hauer & Potthast, 2007]. Ces résultats sont très intéressants mais les auteurs nient l'existence d'un quelconque terme source dans l'équation (Eq IV-39). D'après ce que nous avons présenté dans le chapitre II (cf. p. 85), un terme source est pourtant nécessaire pour étudier les distributions de courants induites par un déséquilibre interne des forces électromotrices.

A la différence de la première équipe, l'équipe de Lustfeld et al. a conscience du fait que l'équation (Eq IV-39) n'est pas entièrement satisfaisante pour étudier les phénomènes électriques survenant au niveau des électrodes d'une pile à combustible. Mais contrairement à nous, ils n'ont pas ajouté de terme source. Ils proposent à la place de découper la pile à combustible en sous-domaines à l'intérieur desquels l'équation (Eq IV-39) est vérifiée. Au niveau du passage des AME, ils admettent que cette équation n'est plus vérifiée. Ils considèrent alors que les AME sont suffisamment fins, considèrent ceux-ci comme des interfaces et imposent une condition de continuité des courants au passage de celles-ci [Lustfeld et al., 2009b]. Bien que cette approche soit plus satisfaisante que la précédente, nous ne pouvons affirmer avec certitude qu'elle permette de générer toutes les distributions de courant possibles. Il est d'ailleurs certain qu'il est impossible avec un tel modèle d'obtenir une distribution du potentiel physiquement réaliste. Mais il est intéressant de noter qu'ils ont démontré que les distributions de courants issues d'un tel modèle n'appartiennent pas au noyau de Biot et Savart [Lustfeld et al., 2009a].

## **Annexe E - Imposition forte du courant total et de la conservation du courant**

---

Dans le chapitre III (cf. p. 137), nous avons présenté les informations physiques certaines dont nous disposons sur la densité de courant. Nous rappelons que dans le cadre de l'approximation 2D, la seule information dont nous disposons est la connaissance du courant total :

$$I_{tot} = \int_{\Gamma_S} j(\mathbf{r}_S) d\Gamma_S \quad \text{Eq IV-40}$$

Lorsque nous travaillons en 3D, nous avons des informations sur les conditions aux limites du problème (courant total, flux nul sur les bords). Nous savons aussi que la densité de courant est à divergence nulle :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0 && \text{dans } \Omega_S \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sur } \Gamma_S^0 \\ \int_{\Gamma_+} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_+ &= I_{tot} \\ \int_{\Gamma_-} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_- &= -I_{tot} \\ \text{avec } \Gamma_S^0 \cup \Gamma_S^+ \cup \Gamma_S^- &= \partial\Omega_S \end{aligned} \quad \text{Eq IV-41}$$

La première partie de cette annexe présente la méthode permettant de discrétiser ces équations. La seconde partie présente la méthode permettant d'insérer cette contrainte dans le modèle direct.

### **Discrétisation des équations**

Nous souhaitons désormais écrire la contrainte précédente sous la forme d'une relation matricielle :

$$W = DJ \quad \text{Eq IV-42}$$

Où la matrice  $D$  est de taille  $M_{sup} \times N$  et le vecteur  $W$  de taille  $M_{sup}$ . Le nombre  $M_{sup}$  correspond au nombre d'équations supplémentaires que nous ajoutons. Nous ne présentons ici que le cas 2D mais le cas 3D se traite de manière similaire. Dans le cadre de l'approximation 2D, nous ne disposons que d'une seule équation.  $M_{sup}$  est alors égal à 1. Nous rappelons que nous avons paramétrisé la densité de courant de la manière suivante :

$$j(\mathbf{r}_s) = \sum_{p=1}^N \Phi_p(\mathbf{r}_s) J_p \quad \text{Eq IV-43}$$

En combinant cette paramétrisation du courant avec l'équation (Eq IV-40), il est aisé d'identifier les coefficients de la matrice  $D$  et du vecteur  $W$  :

$$D = \left( \int_{\Gamma_s} \Phi_1(\mathbf{r}_s) d\Gamma_s \quad \int_{\Gamma_s} \Phi_2(\mathbf{r}_s) d\Gamma_s \quad \dots \quad \int_{\Gamma_s} \Phi_N(\mathbf{r}_s) d\Gamma_s \right) \quad \text{Eq IV-44}$$

$$W = (I_{tot})$$

Si nous utilisons un maillage régulier et des fonctions portes  $\Phi_k$  comme celles de la figure (Fig. 59), la matrice  $D$  prend une forme très simple :

$$D = \frac{\int_{\Gamma_s} d\Gamma_s}{N} (1 \quad 1 \quad \dots \quad \dots \quad 1) \quad \text{Eq IV-45}$$

### **Imposition forte des contraintes dans le modèle direct**

Une fois que les contraintes ont été discrétisées, il reste à insérer ces informations supplémentaires dans le modèle direct :

$$B = SJ \quad \text{Eq IV-46}$$

Le système d'équations (Eq IV-42) est évidemment toujours sous-déterminé (les mesures magnétiques n'auraient pas lieu d'être sinon). Par conséquent, la solution générale de ce système d'équations s'écrit :

$$J = J_m + R\bar{J} \quad \text{Eq IV-47}$$

Où le vecteur  $J_m$ , de taille  $N$ , est une solution particulière<sup>o</sup> de l'équation (Eq IV-42). La matrice  $R$  est de taille  $N \times \bar{N}$  où le nombre  $\bar{N}$  est égal à  $N - M_{sup}$ . Les colonnes de  $R$  forment une base engendrant le noyau<sup>p</sup> de la matrice  $D$ . Le vecteur  $\bar{J}$ , de taille  $\bar{N}$ , contient les

---

<sup>o</sup> Pour un système sous-déterminé, les solveurs numériques proposent en général deux types de solutions particulières : la solution de norme minimale (moindres carrés) ou bien la solution contenant le plus grand nombre d'éléments nuls.

<sup>p</sup> Une base engendrant le noyau d'une matrice peut être obtenue à l'aide de différents algorithmes. La façon la plus simple consiste probablement à utiliser une décomposition en valeurs singulières.

nouvelles inconnues de notre problème inverse<sup>q</sup>. Nous venons donc de réduire le nombre de degrés de liberté de notre problème. En combinant les équations (Eq IV-46) et (Eq IV-47), nous obtenons le nouveau système d'équations :

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \bar{S} \bar{J} & \text{avec } \bar{B} &= B - SJ_m \\ \bar{S} &= SR \end{aligned} \qquad \text{Eq IV-48}$$

Ce système d'équation est notre nouveau problème inverse. Celui-ci possédant moins d'inconnues que le précédent système (Eq IV-46), il est en général plus facile à résoudre. La densité de courant obtenue après résolution du système (Eq IV-48) puis application de la formule (Eq IV-47) respectera parfaitement les contraintes (Eq IV-42).

### **Notations**

Nous disposons désormais du système d'équation linéaire (Eq IV-48) reliant les données aux véritables inconnues du problème. Afin d'alléger les notations, nous omettons systématiquement les barres au dessus des vecteurs et matrices indiquant que nous avons introduit des contraintes dans le système d'équations original (Eq IV-46). De la même manière, le nombre original  $N$  et le nombre réduit  $\bar{N}$  d'inconnues ne sont pas distingués. Le contexte précise quelles contraintes ont été introduites dans le système.

### **Remarque sur la façon d'imposer des contraintes**

Le terme "imposition forte" du titre de l'annexe fait référence à la technique permettant d'imposer (projeter) la solution dans un sous-espace donné. Cette technique est à opposer aux méthodes consistant à "orienter" la solution d'un problème inverse vers un sous-espace. Cette orientation est en général réalisée en construisant une fonctionnelle pondérant les différentes contraintes selon le degré d'incertitude de chacune (cf. p. 260). En règle générale, on utilise la première technique ("imposition forte") pour les informations certaines et la seconde technique ("imposition faible") pour les informations entachées d'incertitudes.

---

<sup>q</sup> La notation utilisée pour désigner les matrices  $D$  et  $R$  n'est pas totalement anodine. En 3D, la majeure partie des équations définies par  $D$  correspond à la forme algébrique de l'opérateur divergence. Les colonnes de  $R$  définissent donc des distributions de courant à flux conservatifs. Les courants définis par les colonnes de  $R$  dépendent généralement du solveur utilisé pour générer  $R$ . Mais quel que soit l'algorithme employé pour obtenir  $R$ , il est toujours possible par changement de base de se ramener à une matrice  $R'$  dont les colonnes sont des petites boucles élémentaires de courant s'appuyant sur le maillage. Nous retrouvons alors la forme algébrique de l'opérateur rotationnel (sans équations linéairement dépendantes).

Il se trouve que la connaissance du courant total est obtenue à l'aide de mesures réalisées avec un ampèremètre. Cette information est donc elle aussi entachée d'erreurs de mesures. Il serait donc plus rigoureux d'insérer cette information de manière "faible", quitte à utiliser un coefficient de pondération d'autant plus fort que l'ampèremètre est précis. Néanmoins, l'usage d'un très fort coefficient de pondération dégrade le conditionnement des matrices et se révèle inefficace en pratique. La différence d'incertitude entre les mesures magnétiques et les mesures à l'ampèremètre étant suffisamment grande, nous avons donc toujours imposé le courant total de manière forte.

### **Remarque sur les informations concernant les champs magnétiques**

Nous n'avons ici évoqué que l'ajout d'informations portant sur les densités de courant. Il serait aussi possible de prendre en compte des informations portant sur le champ magnétique selon une procédure algébrique relativement similaire. On pense immédiatement aux conditions de divergence et de rotationnel nuls du champ magnétique en dehors des sources. Cela permettrait de projeter le champ magnétique mesuré dans un sous-espace respectant les équations de Maxwell. Une partie du bruit serait ainsi filtré durant la projection. Malheureusement, les Dirac utilisés pour la base  $\Psi$  (mesures ponctuelles) ne sont pas vraiment adaptés à l'écriture des bilans et des circulations de flux. Ces informations sur la structure physique du champ magnétique peuvent néanmoins être introduites d'une manière différente à l'aide d'une décomposition en harmoniques circulaires (cf. p. 234).



## Annexe F - Liste des modèles inverses

Le tableau (Tab. 13) dresse la liste non exhaustive de modèles inverses. Ceux-ci sont définis à l'aide d'une matrice  $S^\#$  et d'un vecteur  $J^\#$  de manière à ce que la solution d'un problème de minimisation d'une forme quadratique s'écrive de la manière suivante :

$$\hat{J} = S^\# \hat{B} + J^\# \quad \text{Eq IV-49}$$

Problème d'optimisation	$S^\#$	$J^\#$	Nom
	$S^{-1}$	0	Inverse
$\min_J \ \hat{B} - SJ\ ^2$	$(S^T S)^{-1} S^T$	0	Inverse gauche
$\min_J (\hat{B} - SJ)^T \Omega_m (\hat{B} - SJ)$	$(S^T \Omega_m S)^{-1} S^T \Omega_m$	0	Inverse gauche – lignes pondérées
$\min_{J \text{ tel que } SJ = \hat{B}} \ J\ ^2$	$S^T (SS^T)^{-1}$	0	Inverse droite
$\min_{J \text{ tel que } SJ = \hat{B}} J^T \Omega_0 J$	$\Omega_0 S^T (S \Omega_0 S^T)^{-1}$	0	Inverse droite – colonnes pondérées
$\min_J (\hat{B} - SJ)^T \Omega_m (\hat{B} - SJ) + (J_0 - J)^T \Omega_0 (J_0 - J)$	$(S^T \Omega_m S + \Omega_0)^{-1} S^T \Omega_m$	$(S^T \Omega_m S + \Omega_0)^{-1} \Omega_0 J_0$	Inverse Tikhonov
$\min_{J \in \arg \min_{\hat{B}-SJ} F_0(\hat{B}-SJ)} \ J\ ^2$	$S^+$	0	Pseudo-inverse de Moore-Penrose <sup>r</sup>
$\min_{J \in \arg \min_{\hat{B}-SJ} F_A(\hat{B}-SJ)} \ J\ ^2$	$S^+ F_A$	0	Troncature de spectre <sup>s</sup>

Tab. 13 : Liste des principaux modèles inverses

### Remarque sur les pondérations :

Il est inutile de pondérer les lignes d'une matrice carrée ou sous-déterminée. La matrice inverse droite serait inchangée. De la même manière, il est inutile de pondérer les colonnes

<sup>r</sup> Où la matrice  $F_0$  est un filtre. Celle-ci est égal à  $U_0 U_0^T$  où la matrice  $U_0$  contient les  $M_0$  premiers vecteurs singuliers gauches de  $S$ . Et où  $M_0$  correspond au rang de  $S$ .

<sup>s</sup> Où la matrice  $F_A$  est un filtre. Celle-ci est égale à  $U_A U_A^T$  où la matrice  $U_A$  contient les  $M_A$  premiers vecteurs singuliers gauches de  $S$  non tronqués. Et où  $M_A$  est inférieur au rang de  $S$ .

d'une matrice carrée ou surdéterminée. La matrice inverse gauche serait inchangée. Cela n'est vrai que pour les formules analytiques exactes. D'un point de vue numérique, la pondération des lignes ou des colonnes peut éventuellement stabiliser l'inversion d'un système quelconque en raison de la présence d'erreurs machines.

**Remarque : autre façon d'écrire la régularisation de Tikhonov**

La régularisation de Tikhonov est présentée comme la technique consistant à minimiser la fonctionnelle présentée dans le tableau (Tab. 13). Une manière tout à fait équivalente de présenter les choses est d'écrire toutes les équations à respecter de manière faible les unes en dessous des autres à l'intérieur d'un même système, et de résoudre ce système au sens des moindres carrés.

$$\begin{pmatrix} P_m \hat{B} \\ P_0 J_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_m S \\ P_0 \end{pmatrix} \hat{J} \quad \text{avec } \Omega_m = P_m^T P_m \quad \text{et } \Omega_0 = P_0^T P_0 \quad \text{Eq IV-50}$$

Dans le cas où  $P_m$  et  $P_0$  sont des matrices diagonales, les matrices  $\Omega_m$  et  $\Omega_0$  correspondent donc aux carrés des coefficients de pondération de chaque équation.

**Remarque : lien avec l'inversion Bayésienne**

D'après le théorème de Bayes, dans le cas où les densités de probabilité du courant et des erreurs de mesures sont des lois normales, les paramètres de la régularisation de Tikhonov correspondent aux paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \text{var}(\varepsilon_B)^{-1} \\ \Omega_0 &= \text{var}(J)^{-1} \\ J_0 &= E(J) \end{aligned} \quad \text{Eq IV-51}$$

Où  $\text{var}(J)$  et  $E(J)$  représentent la connaissance *a priori* que nous avons sur la densité de courant (variance et espérance). Et où  $\text{var}(\varepsilon_B)$  correspond à la variance des incertitudes de mesures [Vuillermet, 2008].

## Annexe G - Calculs d'incertitudes

Cette annexe détaille les différentes sources d'erreur que nous rencontrons lorsque nous inversons un modèle. La figure (Fig. 138) présente les notations employées dans cette annexe.

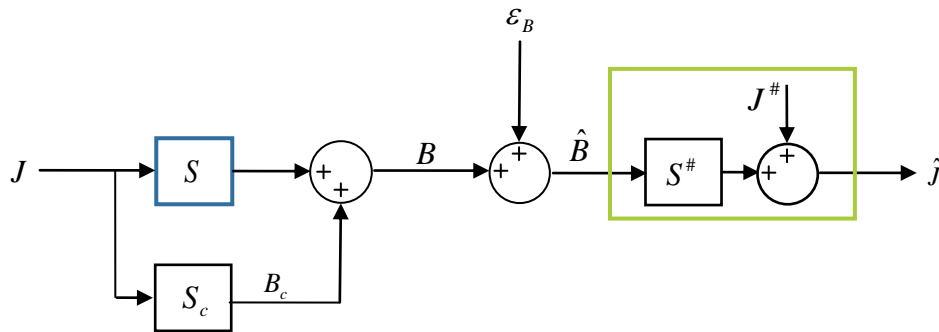


Fig. 138 : Définitions des variables.

Le vecteur  $J$  représente ici le courant réel circulant dans la pile à combustible<sup>1</sup>. L'opérateur  $S$  correspond à notre modèle essayant d'approcher la réalité. L'opérateur  $S_c$  correspond à notre erreur de modélisation et  $B_c$  au terme correctif qu'il est nécessaire d'ajouter pour obtenir le champ magnétique réel  $B$ . Bien entendu, l'erreur de modélisation  $B_c$  est inconnue.

Le terme  $\varepsilon_B$  correspond à l'erreur de mesure, c'est-à-dire à la différence entre le champ magnétique réel  $B$  et le champ  $\hat{B}$  estimé à l'aide des capteurs. Pour le moment, aucune hypothèse particulière n'est faite sur cette erreur  $\varepsilon_B$ . Si les capteurs sont mal étalonnés, cette erreur peut éventuellement dépendre de  $B$  de façon linéaire, ou même non-linéaire. La matrice  $S^\#$  et le vecteur  $J^\#$  constituent le modèle inverse (cf. p. 260). Enfin,  $\hat{J}$  est le courant estimé à partir du modèle inverse et des mesures. L'erreur de reconstruction  $\varepsilon_J$  sur les courants est alors définie de la manière suivante :

$$\varepsilon_J = \hat{J} - J \quad \text{Eq IV-52}$$

<sup>1</sup> Si on souhaite détailler encore plus les différentes erreurs, il est possible de travailler avec le modèle continu  $\mathbf{F}$  et les bases de description  $\Phi$  et  $\Psi$  des courants et des champs (Fig. 60).

D'après ce qui précède, cette erreur de reconstruction s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\varepsilon_J &= \varepsilon_J^{mod} + \varepsilon_J^{reg} + \varepsilon_J^{mes} \\ \text{avec } \varepsilon_J^{mod} &= S^\# S_c J \\ \varepsilon_J^{reg} &= (S^\# S - Id_N) J + J^\# \\ \varepsilon_J^{mes} &= S^\# \varepsilon_B\end{aligned}\quad \text{Eq IV-53}$$

Nous distinguons donc trois types d'erreurs :

- L'erreur de modélisation. Celle-ci comprend toutes les approximations (hypothèses 2D, discrétisation, intégration numérique...), la mauvaise connaissance des paramètres du problème (géométrie, positionnement des capteurs), les couplages entre les courants de la pile et les objets magnétiques alentours...
- L'erreur de régularisation. Il s'agit de l'erreur introduite dans notre modèle inverse lors de la régularisation de celui-ci. Plus précisément, seule la matrice inverse ou inverse gauche n'introduit pas d'erreur de régularisation. La matrice inverse droite ou la matrice pseudo-inverse introduisent déjà une erreur notable (phénomène similaire au recouvrement de spectre). Tous les modèles inverses régularisés augmentent cette erreur.
- L'erreur de mesure. Celle-ci prend en compte les champs magnétiques indépendants des courants de la pile (sources externes non couplées, appareils électriques...), le mauvais étalonnage des capteurs (offset, erreur de pente, erreur de linéarité, dérive avec la température...) et le bruit introduit par l'électronique de la chaîne de mesure.

La régularisation d'un problème inverse consiste à introduire volontairement une erreur de régularisation dans le but de réduire les erreurs de modélisation et de mesures.

### Illustration avec un exemple

Pour illustrer l'influence de la régularisation sur ces différents types d'erreurs, nous reprenons l'exemple introduit dans le chapitre III (cf. p. 139). Nous faisons ici abstraction de l'erreur de modélisation. Le courant test que nous utilisons est rappelé sur la figure (Fig. 139 - gauche). Le champ magnétique est calculé avec la loi de Biot et Savart 2D. On superpose à celui-ci un bruit  $\varepsilon_B$  généré aléatoirement et d'amplitude  $1 \mu\text{T}$  (Fig. 139 - droite).

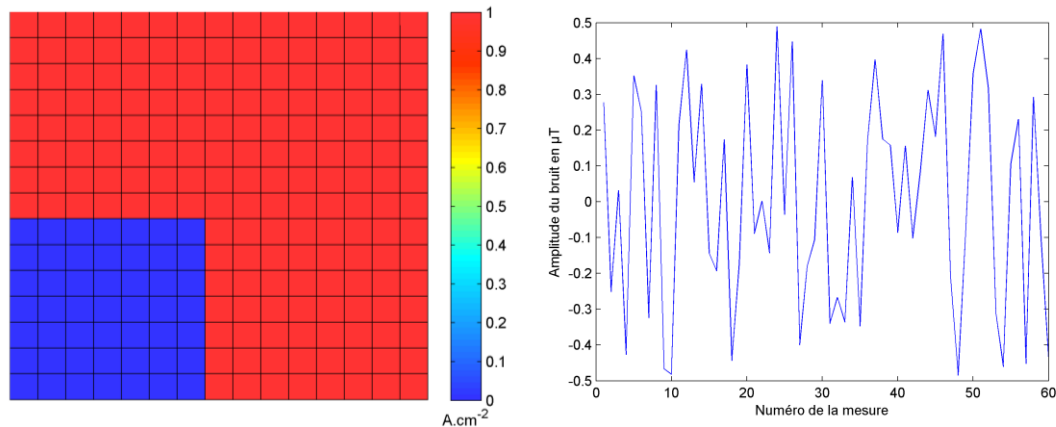
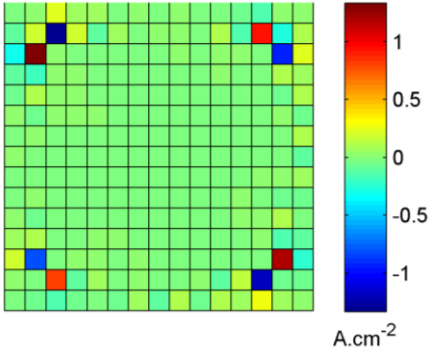
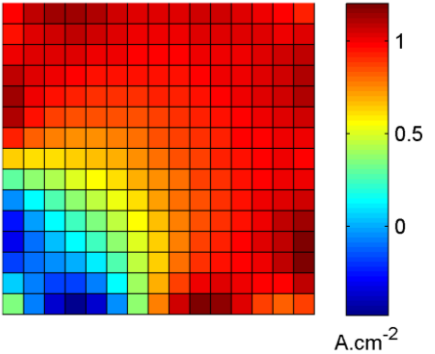
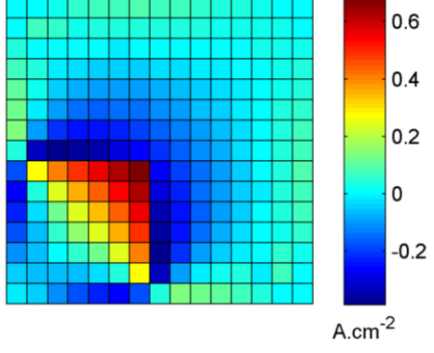
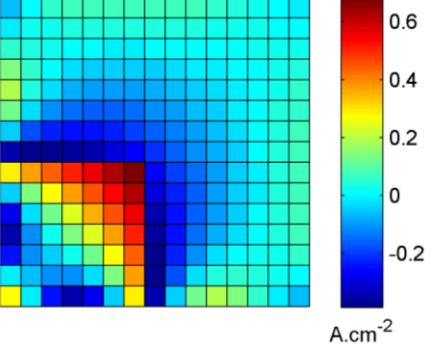
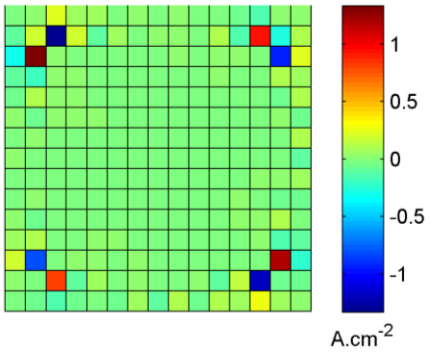
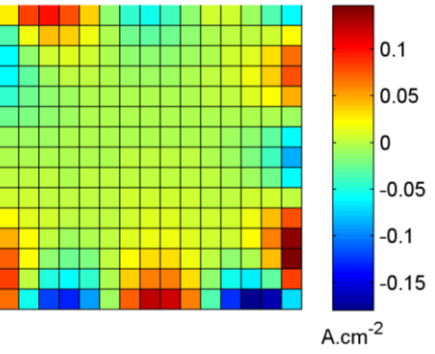


Fig. 139 : A gauche, densité de courant test (en  $\text{A.cm}^{-2}$ ). A droite, bruit ajouté au champ magnétique (en  $\mu\text{T}$ ).

Les résultats et erreurs de reconstruction sont donnés sur le tableau (Tab. 14). Nous voyons sur ce tableau que la troncature de spectre augmente très légèrement l'erreur de régularisation. Par contre, elle permet de diminuer de plusieurs ordres de grandeur l'erreur de mesure.

Modèle inverse $S^\#$	Matrice inverse droite $(S^T S)^{-1} S^T$	Matrice inverse tronquée $(S^T S)^{-1} S^T U_A U_A^T$
Courants reconstruits $\hat{j}$	 A.cm <sup>-2</sup>	 A.cm <sup>-2</sup>
Erreur de régularisation $\varepsilon_J^{reg} = (S^\# S - Id_N) J$	 A.cm <sup>-2</sup> $\ e_J^{reg}\  = 2.7 \text{ A.cm}^{-2}$	 A.cm <sup>-2</sup> $\ e_J^{reg}\  = 2.9 \text{ A.cm}^{-2}$
Erreur de mesure $\varepsilon_J^{mes} = S^\# \varepsilon_B$	 A.cm <sup>-2</sup> $\ e_J^{mes}\  = 3.10^6 \text{ A.cm}^{-2}$	 A.cm <sup>-2</sup> $\ e_J^{mes}\  = 0.6 \text{ A.cm}^{-2}$

Tab. 14 : Comparaison des erreurs de reconstructions avec le cas test de la figure (Fig. 139).

### Généralisation

Lorsque nous ne connaissons ni l'erreur de mesure, ni le courant réel, il est possible de caractériser les incertitudes à l'aide d'une approche probabiliste. Nous supposons que les matrices de variance-covariance du courant réel et de l'erreur de mesure sont données par :

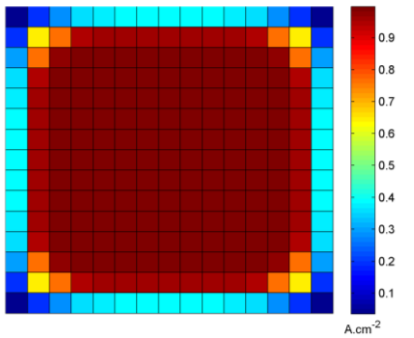
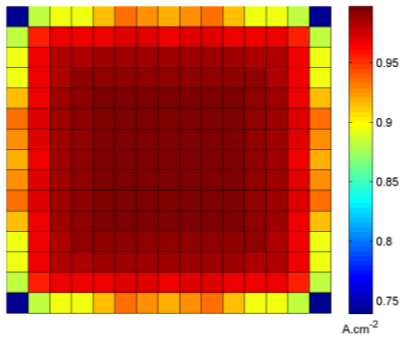
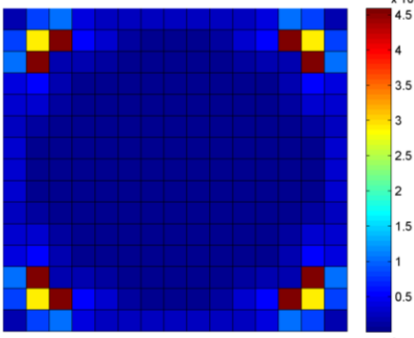
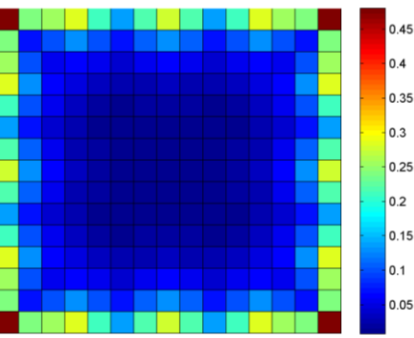
$$\begin{aligned} \text{var}(J) &= \sigma_J^2 \cdot Id_N \\ \text{var}(\varepsilon_B) &= \sigma_\varepsilon^2 \cdot Id_M \end{aligned} \quad \text{Eq IV-54}$$

Nous supposons donc ici que les erreurs de mesures  $\varepsilon_B$  sont non corrélées et indépendantes de  $B$ . L'écart-type du bruit  $\sigma_\varepsilon$  est considéré égal à 1  $\mu\text{T}$ . Nous supposons aussi que le courant est susceptible de varier à l'intérieur d'un intervalle de taille  $\sigma_J$  égal à 1  $\text{A}\cdot\text{cm}^{-2}$ . Les matrices de variance-covariance des erreurs de régularisation et de mesure sont alors données par :

$$\begin{aligned} \text{var}(e_J^{reg}) &= \sigma_J^2 (S^\# S - Id_N) (S^\# S - Id_N)^T \\ \text{var}(e_J^{mes}) &= \sigma_\varepsilon^2 S^\# \cdot S^{\#T} \end{aligned} \quad \text{Eq IV-55}$$

Les écarts-types de ces erreurs sont donnés dans le tableau (Tab. 15). Comme précédemment, l'erreur de régularisation est à peu près similaire pour les deux modèles inverses, alors que l'erreur de mesure est beaucoup plus faible avec le modèle inverse tronqué. Pour ce dernier modèle, nous voyons que pour 1  $\mu\text{T}$  de bruit, l'erreur de reconstruction est en général de 0,3  $\text{A}\cdot\text{cm}^{-2}$  sur les bords de la pile.

Il est possible d'observer d'autres phénomènes. L'erreur de mesure  $\varepsilon_B$  n'est quasiment pas transmise au centre de la pile. De manière identique, il est très simple de montrer que le champ magnétique  $B$  ne produit aucun courant reconstruit au centre de la pile avec le modèle inverse. S'il n'y a aucune erreur de mesure au centre de la pile, c'est donc tout simplement parce qu'aucun courant (différentiel) n'est reconstruit au centre de la pile à partir des mesures. Par contre, l'erreur de régularisation est nécessairement élevée au centre de la pile.

Modèle inverse $S^\#$	Matrice inverse droite $(S^T S)S^T$	Matrice inverse tronquée $(S^T S)S^T U_A U_A^T$
Ecarts-types des erreurs de régularisation $\sqrt{\text{var}(\varepsilon_J^{reg})_{cc}}$ Avec $\sigma_J = 1 \text{ A.cm}^{-2}$		
Ecarts-types des erreurs de mesure $\sqrt{\text{var}(\varepsilon_J^{mes})_{cc}}$ Avec $\sigma_\varepsilon = 1 \mu\text{T}$		

Tab. 15 : Comparaison des incertitudes de reconstructions.

### Remarque : troncature des courants de hautes fréquences spatiales

Au cours du chapitre III (cf. p. 165), le modèle direct  $S$  a été quelque peu modifié. Les courants de hautes fréquences spatiales ne sont plus pris en compte lors de la construction du sous-modèle différentiel  $S_{MD}$ . Comme les hautes fréquences spatiales sont nécessairement absentes de la solution, le modèle inverse ne peut plus concentrer les courants sur le bord de la pile. La solution est nécessairement plus lisse et les courants s'étalent vers l'intérieur de la pile. Pour illustrer cela, les écarts types des erreurs de régularisation du modèle  $S_{MD}$  sont illustrés sur la figure (Fig. 140). Nous voyons que l'erreur de régularisation est très fortement réduite. Les courants sont donc beaucoup mieux reconstruits au centre de la pile. Les écarts-types des erreurs de mesures sont illustrés sur la figure (Fig. 141). Nous voyons que les erreurs de mesures sont mieux réparties sur l'ensemble de la pile.



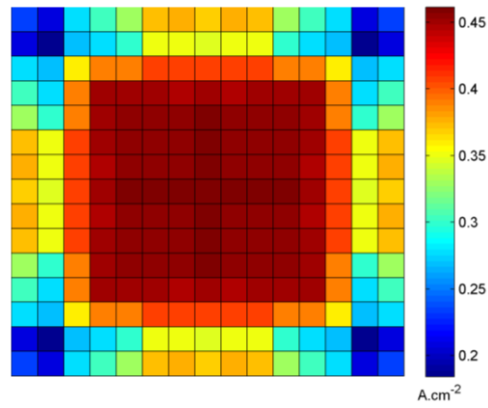


Fig. 140 : Ecart-types en  $A.cm^{-2}$  des erreurs de régularisation (avec  $\sigma_J$  égal à  $1 A.cm^{-2}$ ) avec les hautes fréquences spatiales tronquées.

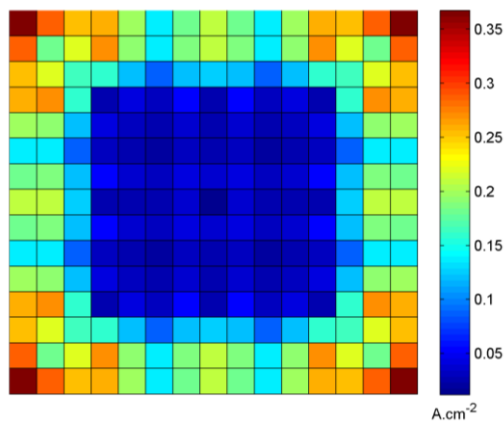


Fig. 141 : Ecart-types en  $A.cm^{-2}$  des erreurs de mesures (avec  $\sigma_\epsilon$  égal à  $1 \mu T$ ) avec les hautes fréquences spatiales tronquées..

# **Bibliographie**



[S++] *S++ simulation services*, <http://www.splusplus.com/>

[AFH2, 2011] AFH2 (2011). *Les piles à combustible*. Technical report, Association Française de l'Hydrogène.

[Barbir et al., 2005] Barbir, F., Gorgun, H., & Wang, X. (2005). Relationship between pressure drop and cell resistance as a diagnostic tool for pem fuel cells. *Journal of Power Sources*, 141(1), 96 – 101.

[Begot et al., 2002] Begot, S., Voisin, E., Hiebel, P., Artioukhine, E., & Kauffmann, J. (2002). D-optimal experimental design applied to a linear magnetostatic inverse problem. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 38(2), 1065 – 1068.

[Berg et al., 2006] Berg, P., Caglar, A., Promislow, K., St-Pierre, J., & Wetton, B. (2006). Electrical coupling in proton exchange membrane fuel cell stacks: mathematical and computational modelling. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 71(2), 241 – 261.

[Birgul et al., 2003] Birgul, O., Eyuboglu, B. M., & Ider, Y. Z. (2003). Experimental results for 2d magnetic resonance electrical impedance tomography (mr-eit) using magnetic flux density in one direction. *Physics in Medicine and Biology*, 48(21), 3485.

[Bourgeois, 2006] Bourgeois, O. (2006). Caractérisation électrique de la pile à combustible par mesure du champ magnétique rayonné. Master's thesis, INPG/UJF.

[Brandstatter, 2002] Brandstatter, B. (2002). Fast reconstruction of beams in intense proton accelerators. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 38(2), 1113 – 1116.

[Burt et al., 2004] Burt, A., Celik, I., Gemmen, R., & Smirnov, A. (2004). A numerical study of cell-to-cell variations in a sofc stack. *Journal of Power Sources*, 126, 76 – 87.

[Candusso, 2002] Candusso, D. (2002). *Hybridation du groupe électrogène à pile à combustible pour l'alimentation d'un véhicule électrique*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.

[Candusso et al., 2004] Candusso, D., Poirot-Crouvezier, J. P., Bador, B., Rullière, E., Soulier, R., & Voyant, J. Y. (2004). Determination of current density distribution in proton exchange membrane fuel cells. *The European Physical Journal - Applied Physics*, 25(1), 67 – 74.

[Chadebec, 2001] Chadebec, O. (2001). *Modélisation du champ magnétique induit par des tôles. Identification de l'aimantation. Application à l'immunisation en boucle fermée d'une coque ferromagnétique*. PhD thesis, Institut National polytechnique de Grenoble.

[Chang et al., 2007] Chang, P., Kim, G.-S., Promislow, K., & Wetton, B. (2007). Reduced dimensional computational models of polymer electrolyte membrane fuel cell stacks. *Journal of Computational Physics*, 223(2), 797 – 821.

[Chatterjee, 2000] Chatterjee, A. (2000). An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current Science*, 78(7), 808 – 817.

[Davat et al., 2009] Davat, B., Astier, S., Azib, T., Bethoux, O., Candusso, D., Coquery, G., De Bernardinis, A., Druart, F., Francois, B., Arregui, M., Harel, F., Hissel, D., Martin, J.-P., Pera, M.-C., Pierfederici, S., Rael, S., Riu, D., Sailler, S., Bultel, Y., Creuzet, T., Turpin, C., & Zhou, T. (2009). Fuel cell-based hybrid systems. In *Advanced Electromechanical Motion Systems Electric Drives Joint Symposium, 2009. ELECTROMOTION 2009. 8th International Symposium on* (pp. 1 –11).

[De Bernardinis et al., 2012] De Bernardinis, A., Frappe, E., Bethoux, O., Marchand, C., & Coquery, G. (2012). Electrical architecture for high power segmented pem fuel cell in vehicle application. In *Renewable Energies and Vehicular Technology (REVET), 2012 First International Conference on* (pp. 15 –22).

[Dhatt & Touzot, 1984] Dhatt, G. & Touzot, G. (1984). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A. Editeur, 2ème édition.

[Di Rienzo & Zhang, 2010] Di Rienzo, L. & Zhang, Z. (2010). Spatial harmonic expansion for use with magnetic sensor arrays. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 46, 53 – 58.

[Exposito, 2004] Exposito, I. V. (2004). *Interfaçage et contrôle commandé de piles à combustible pour applications stationnaires et transports*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.

[Feldmann, 2004] Feldmann, D. M. (2004). Resolution of two-dimensional currents in superconductors from a two-dimensional magnetic field measurement by the method of regularization. *Phys. Rev. B*, 69, 144515.

[Fouquet, 2006] Fouquet, N. (2006). *Caractérisation de l'état de fonctionnement d'une pile PEM par spectroscopie d'impédance électrochimique. Application à la surveillance en temps réel du contenu en eau de l'assemblage membrane électrode*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille.

[Fouquet et al., 2006] Fouquet, N., Doulet, C., Nouillant, C., Dauphin-Tanguy, G., & Ould-Bouamama, B. (2006). Model based pem fuel cell state-of-health monitoring via ac impedance measurements. *Journal of Power Sources*, 159(2), 905 – 913.

[Franco, 2005] Franco, A. (2005). *Un modèle multiéchelle de la dynamique électrochimique dans une pile à combustible à électrolyte polymère*. PhD thesis, Université Claude Bernard - Lyon 1.

[Frappé et al., 2011] Frappé, E., De Bernardinis, A., Bethoux, O., Candusso, D., Harel, F., Marchand, C., & Coquery, G. (2011). Pem fuel cell fault detection and identification using differential method: simulation and experimental validation. *The European Physical Journal - Applied Physics*, 54(02), null–null.

[Freunberger et al., 2006] Freunberger, S. A., Reum, M., Evertz, J., Wokaun, A., & Buchi, F. N. (2006). Measuring the current distribution in pefcs with sub-millimeter resolution. *Journal of The Electrochemical Society*, 153(11), A2158 – A2165.

[Freunberger et al., 2008] Freunberger, S. A., Schneider, I. A., Sui, P.-C., Wokaun, A., Djilali, N., & Buchi, F. N. (2008). Cell interaction phenomena in polymer electrolyte fuel cell stacks. *Journal of The Electrochemical Society*, 155(7), B704 – B714.

[Gerard, 2010] Gerard, M. (2010). *Étude des interactions pile/système en vue de l'optimisation d'un générateur pile à combustible*. PhD thesis, Université de Franche-Comté.

[Gerard et al., 2010] Gerard, M., Poirot-Crouvezier, J.-P., Hissel, D., & Pera, M.-C. (2010). Oxygen starvation analysis during air feeding faults in pemfc. *International Journal of Hydrogen Energy*, 35(22), 12295 – 12307.

[Guibert, 2009] Guibert, A. (2009). *Diagnostic de corrosion et prédiction de signature électromagnétique de structures sous-marines sous protection cathodique*. PhD thesis, INPG.

[Hadamard, 1932] Hadamard, J. (1932). *Le problème de Cauchy*. Hermann.

[Hamalainen et al., 1993] Hamalainen, M., Hari, R., Ilmoniemi, R. J., Knuutila, J., & Lounasmaa, O. V. (1993). Magnetoencephalography - theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain. *Rev. Mod. Phys.*, 65, 413 – 497.

[Hansen, 2008] Hansen, C. (2008). Regularization tools. a matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems.

[Hauer, 2004] Hauer, K. (2004). Method for determining a current density distribution in a fuel cell stack.

[Hauer et al., 2005a] Hauer, K.-H., Kuhn, L., & Potthast, R. (2005a). On uniqueness and non-uniqueness for current reconstruction from magnetic fields. *Inverse Problems*, 21(3), 955.

[Hauer & Potthast, 2007] Hauer, K.-H. & Potthast, R. (2007). Magnetic tomography for fuel cells : current status and problems. *Journal of Physics: Conference Series*, 73(1), 012008.

[Hauer et al., 2008] Hauer, K.-H., Potthast, R., & Wannert, M. (2008). Algorithms for magnetic tomography on the role of a priori knowledge and constraints. *Inverse Problems*, 24(4), 045008.

[Hauer et al., 2005b] Hauer, K.-H., Potthast, R., Wuster, T., & Stolten, D. (2005b). Magnetotomography - a new method for analysing fuel cell performance and quality. *Journal of Power Sources*, 143, 67 – 74.

[Hirschfeld et al., 2010] Hirschfeld, J. A., Lustfeld, H., Reibel, M., & Steffen, B. (2010). A novel scheme for precise diagnostics and effective stabilization of currents in a fuel cell stack. *International Journal of Energy Research*, 34(3), 293 – 302.

[Hissel et al., 2004] Hissel, D., Péra, M., & Kauffmann, J. (2004). Diagnosis of automotive fuel cell power generators. *Journal of Power Sources*, 128(2), 239 – 246.

[Ibrahim et al., 2008] Ibrahim, H., Ilinca, A., & Perron, J. (2008). Energy storage systems - characteristics and comparisons. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 12(5), 1221 – 1250.

[IEA, 2011] IEA (2011). *Key World Energy Statistics*. Technical report, International Energy Agency.

[Ireland et al., 2004] Ireland, R. H., Tozer, J. C., Barker, A. T., & Barber, D. C. (2004). Towards magnetic detection electrical impedance tomography: data acquisition and image reconstruction of current density in phantoms and in vivo. *Physiological Measurement*, 25(3), 775.



- [Joisten et al., 2005] Joisten, H., Guilhamat, B., Audoin, M., Leger, J.-M., Cuchet, R., Barrois, G., Albertini, J.-B., Gaud, P., Renaux, P., Bloch, D., & Viala, B. (2005). Microfluxgate performance improvement in microtechnology. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 41(11), 4356 – 4358.
- [Karimi et al., 2005] Karimi, G., Baschuk, J., & Li, X. (2005). Performance analysis and optimization of pem fuel cell stacks using flow network approach. *Journal of Power Sources*, 147, 162 – 177.
- [Katou et al., 2012] Katou, T., Gotoh, Y., Takahashi, N., & Izumi, M. (2012). Measurement technique of distribution of power generation current using static magnetic field around polymer electrolyte fuel cell by 3d inverse problem fem. *Materials Transactions*, 53(02), 279 – 284.
- [Keradec, 2005] Keradec, J. (2005). Etude 2d de champs magnétiques de fils et de transformateurs. Document interne G2Elab.
- [Knights et al., 2004] Knights, S. D., Colbow, K. M., St-Pierre, J., & Wilkinson, D. P. (2004). Aging mechanisms and lifetime of pefc and dmfc. *Journal of Power Sources*, 127, 127 – 134.
- [Kulikovsky, 2007] Kulikovsky, A. A. (2007). Mirroring of current-free spots in a fuel cell stack. *Journal of The Electrochemical Society*, 154(8), B817 – B822.
- [Lee & Lalk, 1998] Lee, J. & Lalk, T. (1998). Modeling fuel cell stack systems. *Journal of Power Sources*, 73(2), 229 – 241.
- [Lefevre, 2004] Lefevre, G. (2004). *Conception de convertisseurs statiques pour l'utilisation de la pile à combustible*. PhD thesis, Université Joseph Fourier.

- [Legros et al., 2010] Legros, B., Thivel, P.-X., Bultel, Y., Boinet, M., & Nogueira, R. (2010). Acoustic emission: Towards a real-time diagnosis technique for proton exchange membrane fuel cell operation. *Journal of Power Sources*, 195(24), 8124 – 8133.
- [Legros et al., 2011] Legros, B., Thivel, P.-X., Bultel, Y., & Nogueira, R. (2011). First results on pemfc diagnosis by electrochemical noise. *Electrochemistry Communications*, 13(12), 1514 – 1516.
- [Liu et al., 2008] Liu, X., Diallo, D., & Marchand, C. (2008). Design methodology of fuel cell electric vehicle power system. In *Electrical Machines, 2008. ICEM 2008. 18th International Conference on* (pp. 1 –6).
- [Lustfeld et al., 2009a] Lustfeld, H., Hirschfeld, J., Reibel, M., & Steffen, B. (2009a). Uniqueness of magnetotomography for fuel cells and fuel cell stacks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(49), 495205.
- [Lustfeld et al., 2011] Lustfeld, H., Hirschfeld, J., Reibel, M., & Steffen, B. (2011). Enhancement of precision and reduction of measuring points in tomographic reconstructions. *Physics Letters A*, 375(8), 1167 – 1171.
- [Lustfeld et al., 2009b] Lustfeld, H., Reibel, M., & Steffen, B. (2009b). Magnetotomography and electric currents in a fuel cell. *Fuel Cells*, 9(4), 474 – 481.
- [M. Gerard, 2008] M. Gerard, J.-P. Poirot-Crouvezier, P. S. D. H. M.-C. P. (2008). Multi-physic pemfc stack 3d model: a new discretization to understand the effect of the system parameters to the local conditions. In *Proceeding of FDFC Conference Nancy*.
- [Maranzana et al., 2010] Maranzana, G., Moyne, C., Dillet, J., Didierjean, S., & Lottin, O. (2010). About internal currents during start-up in proton exchange membrane fuel cell. *Journal of Power Sources*, 195(18), 5990 – 5995.

[Miller & Bazylak, 2011] Miller, M. & Bazylak, A. (2011). A review of polymer electrolyte membrane fuel cell stack testing. *Journal of Power Sources*, 196(2), 601 – 613.

[Mohtadi et al., 2004] Mohtadi, R., k. Lee, W., & Zee, J. V. (2004). Assessing durability of cathodes exposed to common air impurities. *Journal of Power Sources*, 138, 216 – 225.

[Moselle, 2011] Moselle, B. (2011). Modélisation 3d d'un stack de pile à combustible. Master's thesis, Université Joseph Fourier.

[Multon & Ahmed, 2007] Multon, B. & Ahmed, H. B. (2007). Le stockage stationnaire d'énergie électrique : pourquoi et comment ? *La revue 3E.I*, 48, 18 – 29.

[Murthy, 2002] Murthy, J. Y. (2002). Numerical methods in heat, mass, and momentum transfer. School of Mechanical Engineering, Purdue University.

[Park et al., 2008] Park, J., Li, X., Tran, D., Abdel-Baset, T., Hussey, D., Jacobson, D., & Arif, M. (2008). Neutron imaging investigation of liquid water distribution in and the performance of a pem fuel cell. *International Journal of Hydrogen Energy*, 33(13), 3373 – 3384.

[Preis et al., 1991] Preis, K., Bardi, I., Biro, O., Magele, C., Renhart, W., Richter, K., & Vrisk, G. (1991). Numerical analysis of 3d magnetostatic fields. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 27(5), 3798 – 3803.

[Reiser et al., 2005] Reiser, C. A., Bregoli, L., Patterson, T. W., Yi, J. S., Yang, J. D., Perry, M. L., & Jarvi, T. D. (2005). A reverse-current decay mechanism for fuel cells. *Electrochemical and Solid-State Letters*, 8(6), A273 – A276.

[Rubio et al., 2007] Rubio, M., Urquia, A., & Dormido, S. (2007). Diagnosis of pem fuel cells through current interruption. *Journal of Power Sources*, 171(2), 670 – 677.

- [Sailler, 2008] Sailler, S. (2008). *Générateurs Electrochimique et Stockage Ilôtés (GESI)*. PhD thesis, Institut polytechnique de Grenoble.
- [Sailler et al., 2007] Sailler, S., Rosini, S., Chaib, M., Voyant, J.-Y., Bultel, Y., Druart, F., & Ozil, P. (2007). Electrical and thermal investigation of a self-breathing fuel cell. *Journal of Applied Electrochemistry*, 37, 161 – 171.
- [Santis et al., 2006] Santis, M., Freunberger, S. A., Papra, M., Wokaun, A., & Buchi, F. N. (2006). Experimental investigation of coupling phenomena in polymer electrolyte fuel cell stacks. *Journal of Power Sources*, 161(2), 1076 – 1083.
- [Schuhmann & Weiland, 2001] Schuhmann, R. & Weiland, T. (2001). Conservation of discrete energy and related laws in the finite integration technique. *Progress In Electromagnetics Research*, 32, 317 – 356.
- [Schulze et al., 2007] Schulze, M., Gulzow, E., Schonbauer, S., Knori, T., & Reissner, R. (2007). Segmented cells as tool for development of fuel cells and error prevention/prediagnostic in fuel cell stacks. *Journal of Power Sources*, 173(1), 19 – 27.
- [Stumper et al., 1998] Stumper, J., Campbell, S. A., Wilkinson, D. P., Johnson, M. C., & Davis, M. (1998). In-situ methods for the determination of current distributions in pem fuel cells. *Electrochimica Acta*, 43(24), 3773 – 3783.
- [Vincent, 2008] Vincent, B. (2008). *Identification de sources électromagnétiques multipolaires équivalentes par filtrage spatial : Application à la CEM rayonnée pour les convertisseurs d'électronique de puissance*. PhD thesis, Institut polytechnique de Grenoble.
- [Vuillemermet, 2008] Vuillemermet, Y. (2008). *Immunitisation en boucle fermée - Application au sous-marin double coque. Identification de l'aimantation à partir de mesures du champ magnétique proche*. PhD thesis, Institut polytechnique de Grenoble.

[Yousfi-Steiner et al., 2009] Yousfi-Steiner, N., Monçotéguy, P., Candusso, D., & Hissel, D. (2009). A review on polymer electrolyte membrane fuel cell catalyst degradation and starvation issues: Causes, consequences and diagnostic for mitigation. *Journal of Power Sources*, 194(1), 130 – 145.

## **Bibliographie personnelle**



**Article de journal**

Le Ny, M., Chadebec, O., Cauffet, G., Dedulle, J. M., & Bultel, Y. (2012). A three dimensional electrical model of PEMFC stack. *Fuel Cells*, 12(2), 225 – 238.

Le Ny, M., Chadebec, O., Cauffet, G., Dedulle, J.-M., Bultel, Y., Rosini, S., Fourneron, Y., & Kuo-Peng, P. (2013). Current distribution identification in fuel cell stacks from external magnetic field measurements. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 49(5), 1925–1928.

**Article de conférence**

Le Ny, M., Bultel, Y., Chadebec, O., Cauffet, G., & Dedulle, J.-M. (2010). 3d model of pemfc stack. In *61st Annual Meeting of the International Society of Electrochemistry (ISE)*, Nice.

Le Ny, M., Bultel, Y., Chadebec, O., Cauffet, G., & Dedulle, J.-M. (2011). A three dimensional electrical model of pemfc stack. In *Fundamentals and Developments of Fuel Cells (FDFC)*, Grenoble.

Le Ny, M., Bultel, Y., Chadebec, O., Cauffet, G., & Dedulle, J.-M. (2011). A three dimensional electrical model of SOFC stack. In *219th ECS Meeting*, Montreal.

Le Ny, M., O.Chadebec, G.Cauffet, Dedulle, J., & Bultel, Y. (2012). A new fuel cell diagnosis system based on external magnetic field measurements. In *Fuel Cells 2012 Science & Technology*, Berlin.



Le Ny, M., Chadebec, O., Cauffet, G., Dedulle, J.-M., Bultel, Y., Rosini, S., & Fourneron, Y. (2012). Diagnostic de piles à combustible par mesure du champ magnétique proche. In *7ème Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme (NUMELEEC)*, Marseille.

Le Ny, M., Chadebec, O., Cauffet, G., Y.Bultel, Dedulle, J.-M., & Rosini., S. (2012). Fuel cell diagnosis with near magnetic field measurement. In *XIIth International Workshop on Optimization and Inverse Problems in Electromagnetism (OIPE)*, Ghent.

Le Ny, M., Chadebec, O., Cauffet, G., Dedulle, J.-M., Y.Bultel, Rosini, S., & Fourneron, Y. (2012). Current distribution identification in fuel cell stacks from external magnetic field measurements. In *15th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, Oita.



# **Diagnostic non invasif de piles à combustible par mesure du champ magnétique proche**

*Résumé* : Cette thèse propose une technique innovante de diagnostic non invasive pour les systèmes piles à combustible. Cette technique s'appuie sur la mesure de la signature magnétique générée par ces systèmes. A l'aide de ces champs magnétiques externes, il est possible d'obtenir une cartographie de la densité de courant interne par résolution d'un problème inverse. Ce problème est néanmoins mal posé : la solution est non unique et est extrêmement sensible au bruit. Des techniques de régularisation ont ainsi été mises en place pour filtrer les erreurs de mesures et obtenir une solution physiquement acceptable.

Afin d'augmenter la qualité de reconstruction des courants, nous avons conçu notre outil de diagnostic de manière à ce qu'il soit uniquement sensible aux défaillances de la pile (capteur de défauts). De plus, cette reconstruction se base sur un nombre extrêmement faible de mesures. Une telle approche facilite l'instrumentation du système et augmente la précision et la rapidité de celui-ci. La sensibilité de notre outil à certaines défaillances (assèchements, appauvrissement en réactifs, dégradations) est démontrée.

*Mot clés* : Diagnostic, piles à combustible, problèmes inverses, modélisation, mesures, champs magnétiques faibles, réseau de capteurs, stack, électrocinétique, estimateurs, bruit, incertitudes, décomposition en valeurs singulières, régularisation, filtrage, optimisation.

## **Non-invasive fuel cell diagnosis from near magnetic field measurements**

*Abstract*: This thesis proposes a new non invasive technique for fuel cell diagnosis. This technique relies on the measurements of the magnetic field signature created by these systems. By solving an inverse problem, it is possible to get an internal current density map. However, the inverse problem is ill-posed: the solution is not unique and it is extremely sensitive to noise. Regularization techniques were used in order to filter out measurement errors and to obtain physical realistic solutions.

In order to improve the quality of the current density estimators, a diagnostic tool was built which is only sensitive to faults occurring inside the fuel cell (fault sensor). More over, our approach is based on a very low number of measurements. Such technique simplifies the experimental setup and improves the accuracy and the speed of the diagnostic tool. The sensitivity of our tool to some faults (drying out, oxygen starvation and ageing) is demonstrated.

*Keywords*: Diagnosis, fuel cells, inverse problems, modeling, measurements, low magnetic fields, sensor array, stack, estimators, noise, uncertainty, singular value decomposition, regularization, filtering, optimization.