HAL open science

Asservissement visuel par projection sphérique

Romeo Tatsambon Fomena

To cite this version:

Romeo Tatsambon Fomena. Asservissement visuel par projection sphérique. Robotique [cs.RO]. Université Rennes 1, 2008. Français. NNT : . tel-00844931

HAL Id: tel-00844931

https://theses.hal.science/tel-00844931

Submitted on 16 Jul 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre: 3789

THESE

présentée

devant l'Université de Rennes 1

pour obtenir

le grade de : DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1
Mention TRAITEMENT DU SIGNAL ET TÉLÉCOMMUNICATIONS

par

TATSAMBON FOMENA Roméo

Equipe d'accueil : IRISA, Equipe-projet Lagadic
Ecole Doctorale : Matisse
Composante universitaire : SPM

Titre de la thèse :

Asservissement visuel par projection sphérique

Soutenue le 28 novembre 2008 devant la commission d'examen

M.	Kadi	BOUATOUCH	Président
MM.	Philippe	MARTINET	Rapporteurs
	Seth	HUTCHINSON	
MM.	Patrick	RIVES	Examinateurs
	El-Mustapha	MOUADDIB	
M.	François	CHAUMETTE	Directeur de thèse

nsié paà pi ka kuetóon à le jung naóon nta ngúu.

Remerciements

Je remercie Kadi Bouatouch qui me fait l'honneur de présider ce jury. Je remercie Philippe Martinet et Seth Hutchinson d'avoir bien voulu accepter la charge de rapporteur. Je remercie Patrick Rives et El-Mustapha Mouaddib d'avoir bien voulu juger ce travail.

Je remercie mon directeur de thèse François Chaumette : c'est la confiance que tu m'as accordée qui m'a donné des ailes.

Maurice Tchuenté, vous êtes mon modèle. Ce travail est le fruit des idées que vous avez initiées depuis l'Université de Ngaoundéré. Pour avoir fait circuler l'aide, je tiens à dire merci à Michel Tchotsoua. Gilles Pokam, tes conseils m'ont guidé, je t'en remercie. Mon devoir est de continuer à faire circuler l'aide et les idées reçues.

Eric Pottier, Shane Cloude et Wolfgang-Martin Boerner, j'apprends toujours de vous : je rêve d'une application de l'asservissement visuel en imagerie radar.

Désiré, Flavien, Odile, Véronique et Anne, mention spéciale à vous tous, vous avez été présents tout le temps de la mise en route de l'oeuvre.

Shaharyar, we understand each other on many points. I have learnt a lot from you. Now we should think about a hopefully bright future... you know what I mean.

Ryuta thanks a lot for the fruitful discussions we have had on the stability. Now I feel stable on that issue.

Céline et Amaury, votre regard, sur les dernières lignes de ce mémoire, a permis d'améliorer celui-ci.

Rafik, Céline, Nicolas, Claire, Albert, Murielle, Fabien, Anthony, Andrea, Xiang, Alexandre, Mohammed, Eric et Christophe, je vous remercie pour votre participation à l'ambiance vivante dans laquelle j'ai baigné.

Didier, Lysiane et Guerric, le livre, sur la recherche, que vous m'avez offert a été une grande source d'inspiration et de motivation.

Papa, maman, Céline, Sylvain, Nadège, Mireille, Harman et Léonie, votre présence, de loin ou de près, compte. Grâce à vous je garde les pieds sur terre.

Table des matières

Introduction **5**

1 Cadre de l'étude **9**
1.1 Formation de l'image 10
1.1.1 Systèmes pour la vision omnidirectionnelle 11
1.1.2 Passage du repère de l'objet au repère de projection 13
1.1.3 Projection sur le plan image 15
1.1.4 Passage du plan image au capteur 19
1.2 Commande 21
1.2.1 Pose du robot relative à l'objet 22
1.2.2 Spécification visuelle d'une tâche 23
1.2.3 Analyse de stabilité 24
1.3 Sélection d'informations visuelles 29
1.3.1 Asservissement visuel 2D 29
1.3.2 Asservissement visuel 3D 31
1.3.3 Asservissement visuel 2 1/2D 33
1.4 Synthèse 34

2 Modélisation **37**
2.1 Image de points 37
2.1.1 Informations visuelles existantes 38
2.1.2 Nouvelles informations visuelles pour un point 39
2.1.3 Nouvelles informations visuelles pour deux points 43
2.2 Image de droites 45
2.2.1 Informations visuelles existantes 46
2.2.2 Nouvelles informations visuelles 48
2.3 Image de sphères 51
2.3.1 Informations visuelles existantes 51
2.3.2 Nouvelles informations visuelles 55
2.4 Moments sphériques 59
2.4.1 Moments sphériques comme informations visuelles 59
2.4.2 Invariants aux mouvements de rotation 65
2.4.3 Invariants aux mouvements de translation 69

2.4.4 Application au cas simple d'une sphère 75
2.5 Image de cercles 3D 76
2.5.1 Informations visuelles existantes 77
2.5.2 Nouvelles informations visuelles 78
2.6 Synthèse 79

3 Application à l'asservissement visuel 83
3.1 Positionnement par rapport à un point 83
3.1.1 Informations visuelles choisies et analyse de la commande 84
3.1.2 Résultats expérimentaux 85
3.2 Positionnement par rapport à un objet défini par un ensemble de points 88
3.2.1 Informations visuelles existantes 88
3.2.2 Informations visuelles choisies 89
3.2.3 Analyse de la commande 90
3.2.4 Résultats 91
3.3 Positionnement par rapport à une sphère 100
3.3.1 Informations visuelles choisies et analyse de la commande 101
3.3.2 Résultats : paramétrisation générale 103
3.3.3 Résultats : paramétrisation spécifique 107
3.4 Positionnement par rapport à une sphère marquée 109
3.4.1 Sphère CC 110
3.4.2 Sphère spéciale 112
3.4.3 Analyse de la commande 113
3.4.4 Résultats : sphère CC 114
3.4.5 Résultats : sphère spéciale 120
3.5 Synthèse 122

Conclusion 125

A Complément pour la modélisation de l'image de points 129
A.1 Calcul des informations visuelles 129
A.2 Matrice d'interaction associée à $\boldsymbol{\zeta}$ 131
A.3 Analyse de la stabilité de la commande pour un point 133

B Complément pour la modélisation de l'image de droites 135
B.1 Projection centrale catadioptrique d'une droite 135
B.2 Calcul des informations visuelles 137

C Complément pour la modélisation de l'image de sphères 141
C.1 Calcul des informations visuelles 141
C.2 Analyse de stabilité de la commande 145

D Calcul des moments sphériques sur le plan image 153
D.1 Calcul des moments sphériques sur un système catadioptrique 153
D.2 Calcul des moments sphériques sur une caméra fish-eye 155

E Moments sphériques et image de la sphère **157**
E.1 Expression des moments sphériques en fonction des paramètres 3D de la sphère 157

F Complément sur la modélisation de l'image de cercles 3D **161**
F.1 Projection sphérique d'un cercle 3D 161
F.2 Projection catadioptrique d'un cercle 3D 162

G Asservissement visuel par rapport aux sphères marquées **165**
G.1 Calcul de la matrice de rotation ${}^{c}\mathbf{R}_{o}$ 165
G.2 Analyse de stabilité aux erreurs de modélisation 167

Bibliographie **176**

Introduction

Voir, ou ne pas voir, telle est la question.
Y a-t-il plus de noblesse d'âme pour un robot à subir
La dépendance extrême à son environnement et à son utilisateur,
Ou bien à se prémunir contre la fragilité de son autonomie
Et à la réduire par une révolte visuelle ?[1]

La réponse à cette question dépend de l'application envisagée. Pour des applications qui nécessitent de répéter les mêmes tâches dans un environnement constant et maîtrisé, un robot peut se passer de vision et de toute perception. C'est le cas des robots manufacturiers utilisés sur la plupart des lignes de montage. En revanche, pour une application telle que le suivi de cible, la vision est fondamentale. En effet, tout comme chez l'homme, la faculté de perception visuelle permet à un robot de s'informer sur l'état de son environnement et de s'adapter aux possibles variations de ce dernier.

Le mouvement d'un robot équipé d'une caméra peut être commandé à partir de sa perception visuelle en utilisant la technique d'asservissement visuel. L'asservissement visuel consiste à utiliser la perception pour l'action dans une boucle fermée, comme le montre la figure 1.

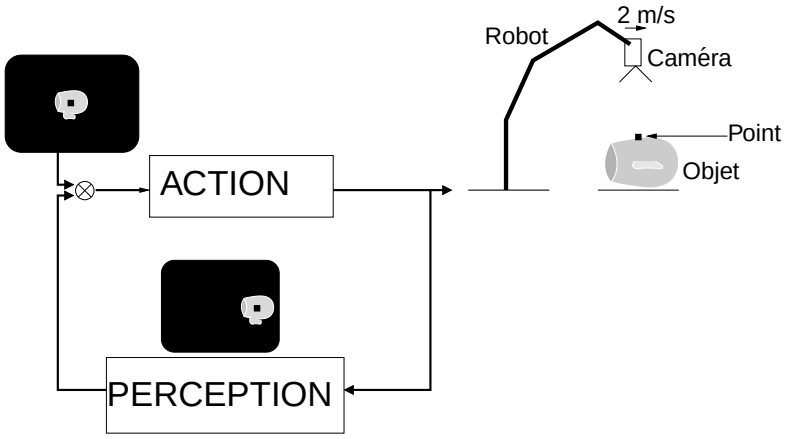


Fig. 1 – Percevoir pour agir.

[1] librement inspiré de Hamlet de W. Shakespeare.

La perception visuelle d'un objet peut être définie comme l'abstraction d'un ensemble de mesures visuelles sur l'objet que voit le robot. Par exemple, sur la figure 1, les coordonnées de l'image du point sur l'objet représentent la perception de position de l'objet par rapport au robot. L'action quant à elle peut être vue comme un mouvement (ou déplacement) du robot pour effectuer une tâche.

L'accroissement de l'autonomie du robot passe non seulement par l'élargissement de son champ de vision mais aussi et surtout par une perception pertinente de son environnement.

Le problème théorique sous-jacent à une perception pertinente de l'environnement est la modélisation d'informations visuelles adéquates, c'est-à-dire permettant au robot de s'approcher d'un comportement idéal pendant une tâche (par exemple au niveau de sa trajectoire). Bien entendu, mieux le robot perçoit son environnement meilleur est son comportement. Ce problème bien qu'ayant été l'objet de nombreuses recherches fructueuses par le passé, est encore d'actualité.

En effet, outre les problèmes ouverts dans la littérature sur la modélisation en vision perspective, peu de travaux ont été menés sur l'aspect modélisation en utilisant les systèmes de vision omnidirectionnelle.

Ces systèmes de vision contrairement aux caméras perspectives conventionnelles, offrent un large champ de vision très utile pour des applications en robotique mobile et aérienne.

Si ces nouveaux systèmes de vision apportent une solution à l'élargissement du champ de vision du robot, il reste encore à savoir comment exploiter judicieusement la grande quantité d'informations qu'ils captent afin d'améliorer le comportement d'un robot commandé par asservissement visuel.

L'objectif de cette étude est de modéliser des informations visuelles idéales pour un objet observé, aussi bien par une caméra perspective conventionnelle que par un système de vision omnidirectionnelle.

Précisément, il s'agit non seulement d'améliorer, à travers le choix d'informations visuelles, les propriétés actuelles des lois de commande, mais aussi de repenser et d'adapter la modélisation, qui à l'origine a été restreinte au champ de vision limité des caméras perspectives classiques, afin de profiter du large champ de vision offert par les systèmes de vision omnidirectionnelle.

L'approche proposée est la modélisation par projection sphérique puisque ce modèle de projection est au centre des modèles de projection perspective et catadioptrique. Partant de la projection sphérique d'un objet, il sera question de déterminer une para-

métrisation qui couvre, si possible, toute la sphère de vue afin de libérer la modélisation de la contrainte du champ de vue limité. Nous verrons que le modèle de projection sphérique à l'avantage de faciliter la modélisation d'informations visuelles en comparaison avec le modèle de projection en vision centrale catadioptrique.

Les solutions que nous proposons sont déclinées au fil des trois chapitres structurant ce mémoire :

Le chapitre 1 présente le principe de l'asservissement visuel. L'accent est mis dans un premier temps sur un type particulier de systèmes de vision omnidirectionnelle appelé système de vision centrale catadioptrique, ensuite sur la commande du robot, et enfin sur les différentes méthodes existantes pour résoudre le problème de choix des informations visuelles idéales pour l'asservissement visuel.

Le chapitre 2 concerne la modélisation. Il décrit de nouvelles informations visuelles pour les primitives usuelles telles que les points, les droites, les sphères et les cercles 3D. Pour chaque primitive, ces nouvelles informations visuelles sont déterminées en exploitant les propriétés géométriques de la projection sphérique la primitive. Cette modélisation s'appuiera sur la simplicité de l'image sphérique de la primitive en comparaison avec son image catadioptrique et permettra ainsi de mettre en évidence le fait que la recherche d'informations visuelles idéales est plus simple et intuitive en utilisant le modèle de projection sphérique.

Le chapitre 3 présente des résultats expérimentaux significatifs obtenus lors de la réalisation de tâches de positionnement en utilisant une caméra perspective classique et différents types de systèmes de vision omnidirectionnelle. Nous considérons des objets simples tels que un point et une sphère. Nous considérons aussi d'autres objets volumétriques et plans représentatifs construits à partir d'une combinaison des objets précédents. Pour chaque objet, en exploitant le travail de modélisation effectué au chapitre 2, nous choisissons un ensemble d'informations visuelles judicieux permettant au robot de s'approcher d'un comportement idéal et donc de mieux se déplacer. Chaque choix d'informations visuelles est justifié théoriquement par l'analyse des propriétés de la commande utilisée.

Les contributions majeures de cette étude sont soulignées en conclusion. Quelques perspectives de recherche y sont également esquissées.

Chapitre 1

Cadre de l'étude

Cette étude s'inscrit dans le cadre de l'asservissement visuel. L'asservissement visuel consiste à utiliser des informations visuelles issues d'un capteur de vision pour contrôler les mouvements d'un robot [Shirai 73, Weiss 87, Feddema 89a, Espiau 92, Hutchinson 96]. Son schéma de principe est décrit plus en détail sur la figure 1.1 où le robot est commandé de façon à centrer l'image de l'objet comme le montre l'image désirée.

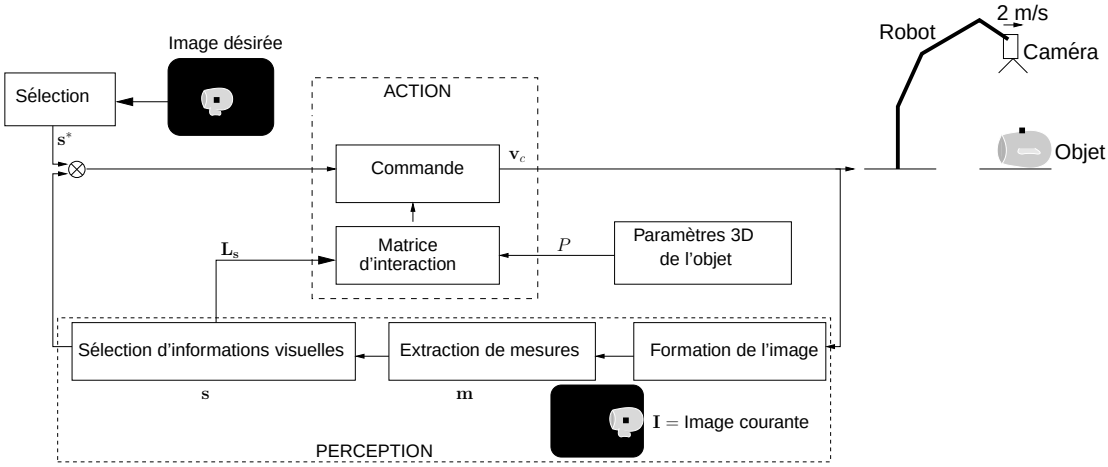


FIG. 1.1 – Asservissement visuel.

Comme on peut le voir sur la figure 1.1, une boucle d'asservissement visuel est composée de plusieurs étapes. On a tout d'abord la partie perception qui peut elle-même se décomposer en plusieurs phases :

- la formation de l'image $\mathbf{I}$ sur le capteur ;
- l'extraction d'un vecteur $\mathbf{m}$ de mesures obtenues à l'issue du traitement de l'image. Dans cette étude, nous ne nous intéressons pas au traitement d'images. Les algorithmes que nous avons utilisés, implémentés au sein de la bibliothèque ViSP [Marchand 99], sont performants pour extraire des mesures utiles à une cadence

proche de la cadence vidéo ; et
- la sélection du vecteur d'informations visuelles $\mathbf{s}$ à partir des mesures $\mathbf{m}$. Cette phase constitue le cœur de cette étude.

La partie action quant à elle peut se décomposer en deux étapes :
- l'estimation de la pseudo-inverse de la matrice d'interaction $\mathbf{L_s}$. Cette matrice est fondamentale en asservissement visuel car elle représente la relation vision-commande [Sanderson 83, Chaumette 90] ; et
- le calcul de la commande (vitesse) $\mathbf{v}_c$ que le robot doit exécuter.

Pour une tâche donnée, lorsque le choix du vecteur $\mathbf{s}$ n'est pas judicieux, la matrice d'interaction $\mathbf{L_s}$ peut présenter des propriétés non désirables conduisant ainsi à un mouvement inadéquat voire irréalisable du robot [Chaumette 98]. Dans la suite, nous décrivons comment la matrice $\mathbf{L_s}$ intervient dans le calcul de la commande $\mathbf{v}_c$, ce qui nous permet de définir les propriétés souhaitables de la matrice $\mathbf{L_s}$ et par conséquent de définir des critères pour choisir le vecteur $\mathbf{s}$ idéal. Ensuite nous présentons des solutions déjà bien établies pour s'approcher au mieux du $\mathbf{s}$ idéal en utilisant le plus souvent une caméra perspective classique. Avant de nous intéresser aux deux points sus-mentionnés, nous présentons d'abord la formation de l'image sur un sytème de vision.

1.1 Formation de l'image

Le système de vision classiquement utilisé dans la littérature et dans les applications de vision industrielle est une caméra perspective. La figure 1.2 montre quelques éléments clés de ce système : la distance focale f détermine le grossissement et le champ de vue observé, le centre de projection $\mathcal{C}$ est le lieu où convergent tous les rayons incidents et le capteur est une matrice d'éléments photosensibles indépendants (*picture element* ou pixel) dont le rôle est de traduire l'information lumineuse en signaux électriques.

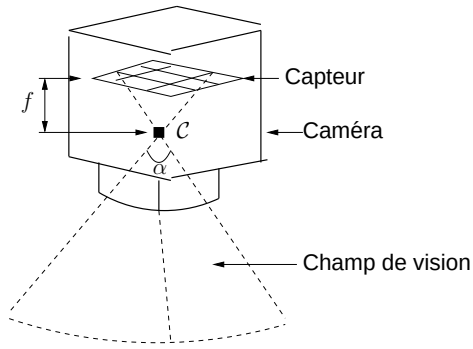


FIG. 1.2 – Caméra perspective classique.

Avant de nous intéresser à la description proprement dite de la formation de l'image sur le capteur, nous présentons tout d'abord quelques systèmes qui ont un champ de vision plus large que celui d'une caméra perspective et qui sont utiles pour la robotique mobile [Gaspar 00].

Soit $\mathcal{S}_{(\mathcal{C},1)}$ une sphère unitaire de centre $\mathcal{C}$. En théorie, la vision omnidirectionnelle consiste à voir dans toutes les directions à partir du point $\mathcal{C}$ comme le montre la figure 1.3. Le point $\mathcal{C}$, lieu physique où tous les rayons incidents convergent, est l'unique centre de projection (voir figure 1.2 pour le cas d'une caméra perspective). L'unicité du centre de projection est nécessaire pour générer des images perspectives correctes (voir figure 1.3) [Baker 98], images faciles à interpréter pour l'œil humain. En pratique, comme nous le décrivons dans la suite, la réalisation d'un système de vision omnidirectionnelle à centre de projection unique n'est pas aisée.

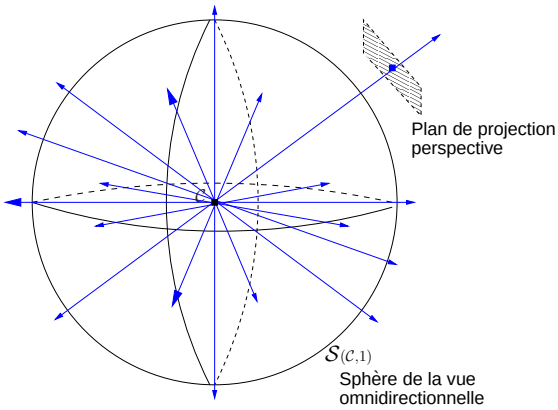


FIG. 1.3 – Vision omnidirectionnelle.

1.1.1 Systèmes pour la vision omnidirectionnelle

Systèmes rotatifs : Pour réaliser un système de vision omnidirectionnelle, une solution immédiate consiste à faire tourner progressivement une caméra perspective autour de son centre de projection $\mathcal{C}$ jusqu'à obtenir une vision entière de la scène [Nayar 97, Mouaddib 05]. Cependant, cette solution demande un temps relativement important pour l'acquisition d'une image omnidirectionnelle [Nayar 97].

Systèmes de vision centrale catadioptrique : Une autre solution, pour s'approcher au mieux d'une vision omnidirectionnelle tout en respectant la contrainte du centre unique de projection, consiste à combiner un miroir de révolution bien choisi et une caméra [Baker 98] : l'image de la scène sur le miroir est captée par la caméra. La combinaison ainsi obtenue est connue sous le nom de système de vision *centrale catadioptrique*. Le terme *catadioptrique* vient du monde de l'optique où le miroir est un élément catoptrique (relatif à la réflexion) et la lentille de la caméra un élément dioptrique (relatif à la réfraction). Quant au terme *centrale*, il fait référence au centre unique de projection (CUP). Par abus de langage et pour la simplicité, nous omettrons parfois le terme "centrale" dans la suite.

Par exemple, un système paracatadioptrique couple l'utilisation d'un miroir paraboloïdal de révolution et d'une caméra orthographique (ou objectif télécentrique). Dans

certains cas, l'objectif télécentrique est remplacé par un miroir sphérique réalisant une projection orthographique comme le montre la figure 1.4 pour un système NetVision.

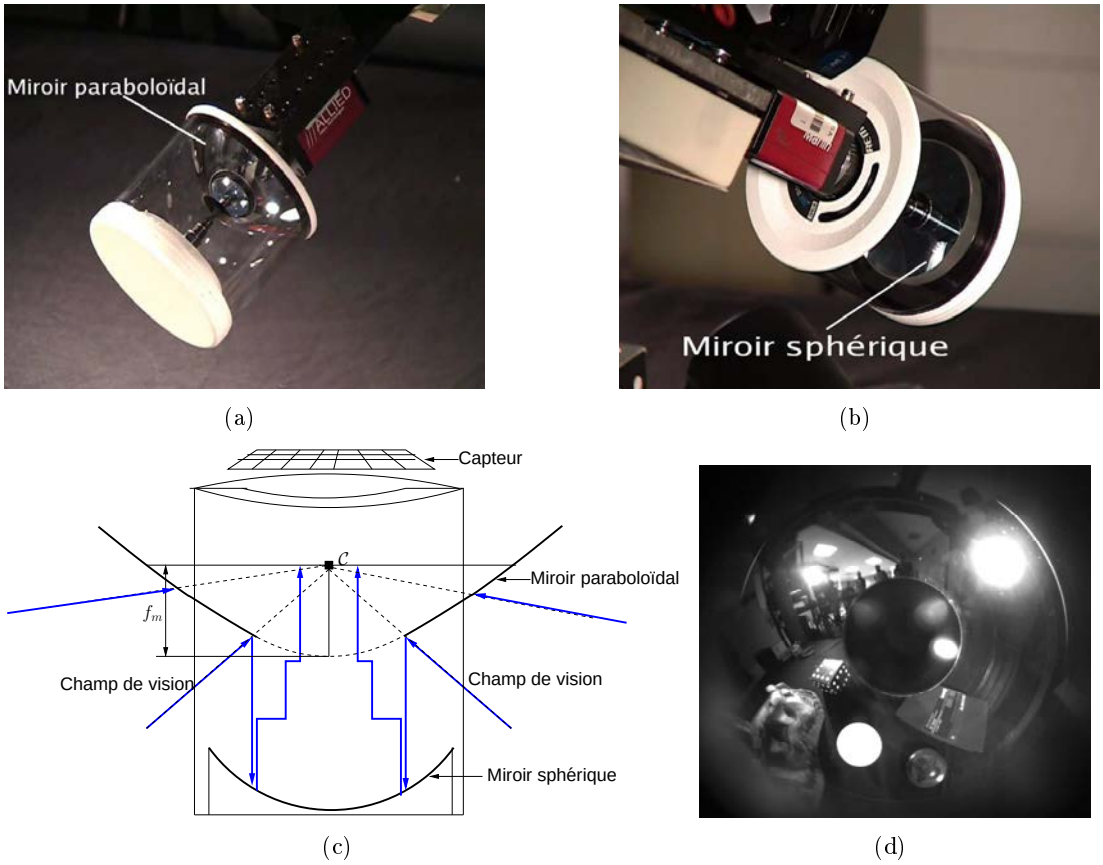


FIG. 1.4 – Système de vision paracatadioptrique : (a) miroir de réflexion de focale f_m, (b) miroir pour la projection orthographique, (c) processus de formation de l'image, (d) image paracatadioptrique.

Il existe d'autres types de systèmes de vision catadioptrique. Entre autres, on peut citer ceux qui combinent un miroir hyperboloïdal ou ellipsoïdal et une caméra perspective [Baker 98]. Ceux-ci sont décrits sur la figure 1.5, qui présente, une fois de plus, le système paracatadioptrique (voir figure 1.5(a)). Pour tous les autres systèmes possibles, le lecteur intéressé pourra se référer à [Baker 98].

Caméras fish-eyes : Il existe d'autres systèmes de vision qui n'ont pas un centre unique de projection, mais qui offrent tout de même un grand champ de vue. C'est le cas par exemple des caméras fish-eye dont le centre de projection est sur une courbe diacaustique (courbe obtenue par réfraction) [Born 65]. Ces caméras ont une distance focale extrêmement petite qui leur permet d'avoir un champ de vision pouvant atteindre 185° (voir figure 1.6). Notons que la non unicité du centre de projection n'est pas illustrée

sur la figure 1.6.

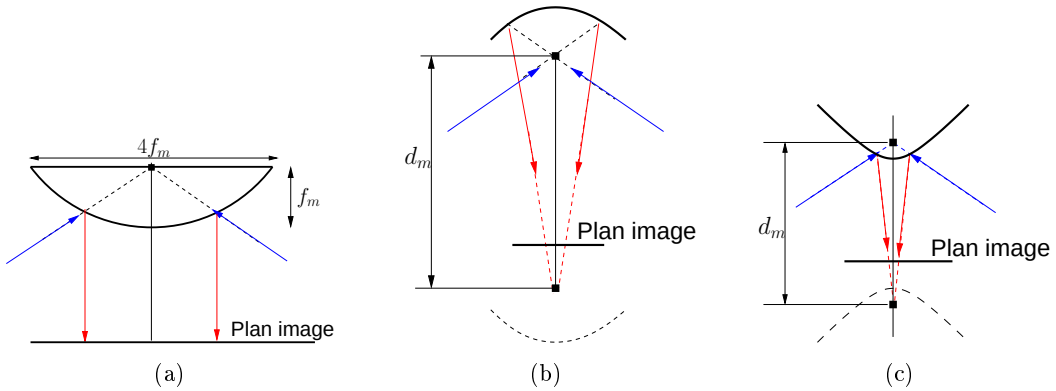


FIG. 1.5 – Couples usuels caméra-miroir : (a) miroir paraboloïdal, (b) miroir ellipsoïdal, (c) miroir hyperboloïdal, d_m est la distance entre les points focaux.

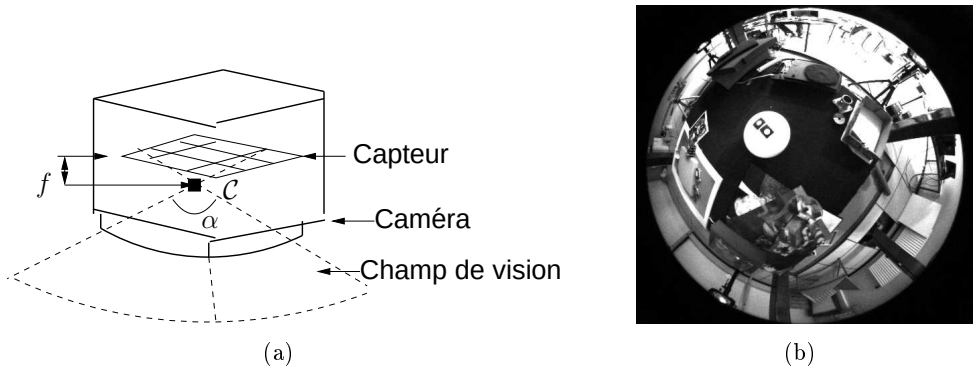


FIG. 1.6 – Caméra fish-eye : (a) champ de vue décrit par l'angle α, (b) image fish-eye.

Dans la suite, nous décrivons le processus de formation de l'image d'un objet sur le capteur d'une caméra perspective, d'un système de vision centrale catadioptrique ou d'une caméra fish-eye. Nous utiliserons les notations décrites dans le tableau 1.1.

1.1.2 Passage du repère de l'objet au repère de projection

Considérons l'exemple simple d'un point $\mathcal{P}$. La figure 1.7 montre le chemin du rayon issu de $\mathcal{P}$ jusqu'à son image ${}^p\mathbf{p}$ sur le capteur. Les trois étapes de la formation de l'image ${}^p\mathbf{p}$ de $\mathcal{P}$ sont présentées dans la suite.

En général $\mathcal{P}$ appartient à un objet qui a son propre repère désigné ici par $\mathcal{F}_o$ (voir figure 1.8). Dans $\mathcal{F}_o$, $\mathcal{P}$ est représenté par ${}^o\mathbf{P}$. La première étape consiste à exprimer ${}^o\mathbf{P}$ dans le repère du CUP $\mathcal{F}_c$; on obtient alors les coordonnées ${}^c\mathbf{P}$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{F}_c$.

L'expression des coordonnées ${}^c\mathbf{P}$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{F}_c$ passe par la détermination de la position relative ${}^c\mathbf{t}_o$ et de l'orientation relative ${}^c\mathbf{R}_o$ de $\mathcal{F}_o$ par rapport à $\mathcal{F}_c$ (voir figure 1.8). On obtient donc

$$ {}^c\mathbf{P} = {}^c\mathbf{R}_o {}^o\mathbf{P} + {}^c\mathbf{t}_o, \text{ avec } {}^c\mathbf{t}_o \in \mathbb{R}^3 \text{ et } {}^c\mathbf{R}_o \in \mathbf{SO(3)}, \tag{1.1} $$

où $\mathbf{SO(3)}$ est le groupe spécial des matrices orthogonales.

Symbole	Définition
$\mathcal{F}_c = (\mathcal{C}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	Repère attaché au centre de projection $\mathcal{C}$ de la caméra
$\mathcal{F}_o = (\mathcal{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	Repère attaché à l'objet
${}^c\mathbf{t}_o = (t_x, t_y, t_z)$	Position relative entre la caméra et l'objet
$\mathbf{SO(3)}$	Groupe spécial des matrices orthogonales
${}^c\mathbf{R}_o \in \mathbf{SO(3)}$	Orientation relative entre la caméra et l'objet
${}^c\mathbf{M}_o$	Matrice 4×4 de passage entre $\mathcal{F}_o$ et $\mathcal{F}_c$
${}^p\mathbf{M}_c$	Matrice 3×3 de passage entre le plan image $\mathcal{P}_\pi$ et le capteur
${}^c\mathbf{X} = (X_x, X_y, X_z)$	Vecteur coordonnées de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{F}_c$
$\mathbf{x}_s = \pi_s({}^c\mathbf{X}) = \frac{{}^c\mathbf{X}}{\lVert {}^c\mathbf{X} \rVert}$	Projection sphérique de $\mathcal{X}$
${}^c\mathbf{x} = \pi_{p\xi}(\mathbf{x}_s)$	Projection sur le plan image
${}^c\mathbf{x} = (x_x, x_y)$	Vecteur coordonnées de l'image métrique de $\mathcal{X}$ sur le plan image
${}^p\mathbf{x} = (x_u, x_v)$	Vecteur coordonnées de l'image de $\mathcal{X}$ sur le capteur

TAB. 1.1 – Notations pour la vision.

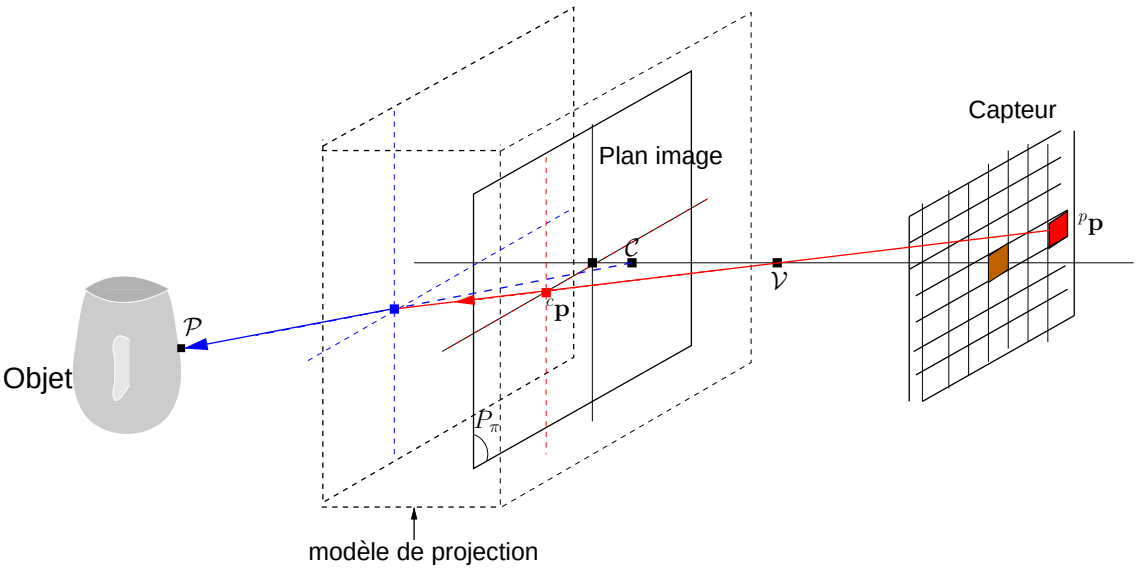


FIG. 1.7 – Du point physique $\mathcal{P}$ à son image ${}^p\mathbf{p}$ sur le capteur.

En vision par ordinateur, la position ${}^c\mathbf{t}_o$ et l'orientation ${}^c\mathbf{R}_o$ sont traditionnellement

rassemblées dans une matrice dite homogène définie par :

$$ {}^{c}\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} {}^{c}\mathbf{R}_o & {}^{c}\mathbf{t}_o \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, $$

ce qui conduit à réécrire (1.1) de manière élégante sous forme matricielle

$$ \begin{bmatrix} {}^{c}\mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{c}\mathbf{M}_o \begin{bmatrix} {}^{o}\mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1.2} $$

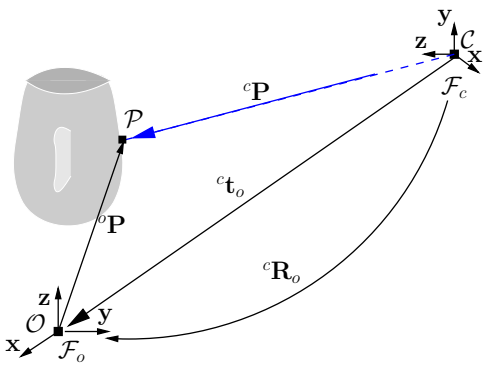


FIG. 1.8 – Lien entre ${}^{o}\mathbf{P}$ et ${}^{c}\mathbf{P}$.

Le vecteur ${}^{c}\mathbf{P}$ représente la direction du rayon incident provenant du point $\mathcal{P}$ vu du centre de projection $\mathcal{C}$.

1.1.3 Projection sur le plan image

La seconde étape consiste à déterminer le lien entre le rayon incident ${}^{c}\mathbf{P}$ et l'image ${}^{c}\mathbf{p}$ de $\mathcal{P}$ sur le plan image virtuel P_π (voir figure 1.9). Ce lien dépend du système utilisé pour la vision omnidirectionnelle à travers les paramètres ξ et φ du miroir (dans le cas général des systèmes catadioptriques).

Systèmes de vision centrale catadioptrique : Pour ceux-ci, il a été établi un modèle de projection unifiée qui consiste en une projection sphérique suivie d'une projection perspective [Geyer 00]. La figure 1.10(a) décrit le modèle général qui est aussi valide pour les caméras perspectives (où $\xi = 0$ et $\varphi = 1$) comme le montre la figure 1.10(b). Notons ici que, pour des raisons de clarté, le plan image $\mathbf{z} = 1$ est positionné légèrement au dessus de $\mathcal{S}_{(C,1)}$. Les paramètres ξ et φ des miroirs des systèmes catadioptriques usuels (voir figure 1.5) sont donnés dans le tableau 1.2 [Barreto 02a].

Soient $\mathcal{F}_v$ le repère de la caméra et $\mathcal{F}_c$ le repère du miroir associé au centre unique de projection $\mathcal{C}$. Le point $\mathcal{P}$ est projeté en $\mathbf{p_s}$ sur $\mathcal{S}_{(C,1)}$ de telle sorte que

$$ \mathbf{p_s} = \pi_s({}^{c}\mathbf{P}) = \frac{1}{\|{}^{c}\mathbf{P}\|}{}^{c}\mathbf{P} = (p_{s_x}, p_{s_y}, p_{s_z}). $$

Ensuite $\mathbf{p_s}$ est exprimé dans $\mathcal{F}_v$; on a alors ${}^v\mathbf{p_s} = (p_{sx}, p_{sy}, p_{sz} + \xi)$. Enfin ${}^v\mathbf{p_s}$ est projeté en ${}^c\mathbf{p}$ sur le plan image $\mathbf{z} = \varphi - 2\xi$ dans $\mathcal{F}_c$ ($\mathbf{z} = \varphi - \xi$ dans $\mathcal{F}_v$) :

$$p_x = \frac{p_{sx}}{p_{sz} + \xi}, p_y = \frac{p_{sy}}{p_{sz} + \xi}. \tag{1.3}$$

Lorsque $\xi = 0$ et $\varphi = 1$, (1.3) devient

$$p_x = \frac{p_{sx}}{p_{sz}}, p_y = \frac{p_{sy}}{p_{sz}}, \tag{1.4}$$

qui correspond aux équations de la projection perspective.

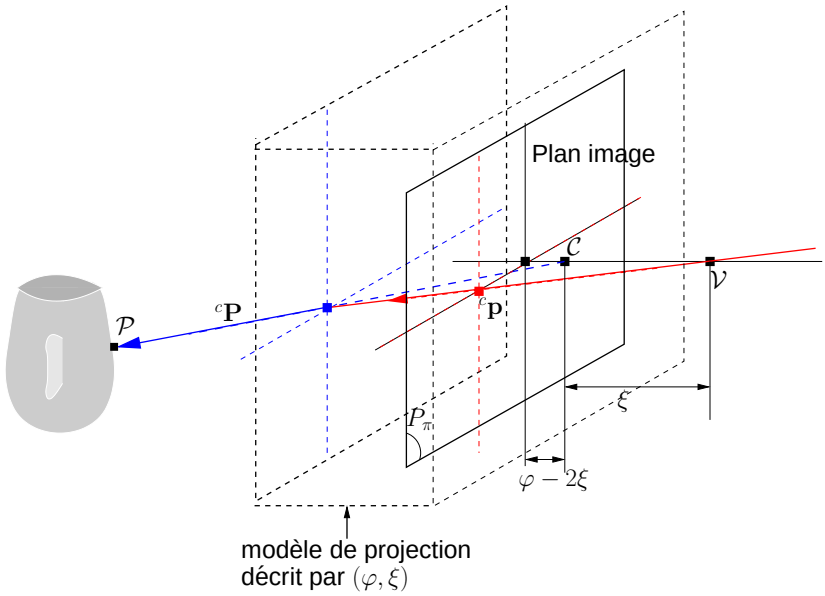


FIG. 1.9 – Lien entre ${}^c\mathbf{P}$ et ${}^c\mathbf{p}$.

Pour les systèmes paracatadioptriques ($\xi = 1$ et $\varphi = 2$), le modèle de projection est décrit par la figure 1.11(a). Il s'agit de la projection stéréographique [Needham 97]. La figure 1.11(b) montre l'équivalence entre la projection stéréographique et la réflexion sur le miroir paraboloïdal suivie de la projection orthographique.

Caméras fish-eye : Pour les caméras fish-eye, le modèle de projection peut être vu comme une projection sphérique suivie d'une distorsion radiale symétrique. La figure 1.12 décrit ce modèle. Le point $\mathcal{P}$ est projeté en $\mathbf{p_s}$ sur $\mathcal{S}_{(C,1)}$. Ensuite le point $\mathbf{p_s}$ est exprimé en coordonnées sphériques (θ, ϕ). Enfin le point $\mathbf{p_s}$ est projeté en ${}^c\mathbf{p}$ par distorsion radiale symétrique sur l'angle ϕ. Plusieurs modèles de distorsion existent pour ces caméras [Ray 94]. L'objectif est d'approximer au mieux la distorsion radiale. Récemment, un polynôme $\rho(\phi)$ d'ordre 9 modélisant cette distorsion radiale a été proposé dans [Kannala 06] :

$$\rho(\phi) = k_1\phi + k_2\phi^3 + k_3\phi^5 + k_4\phi^7 + k_5\phi^9. \tag{1.5}$$

Les coefficients k_i de $\rho(\phi)$ font partie des paramètres qu'il faut prendre en compte lors du passage du plan image au capteur. Une version réduite à l'ordre 3 de $\rho(\phi)$ a déjà été utilisée par le passé en synthèse d'images [Greene 86].

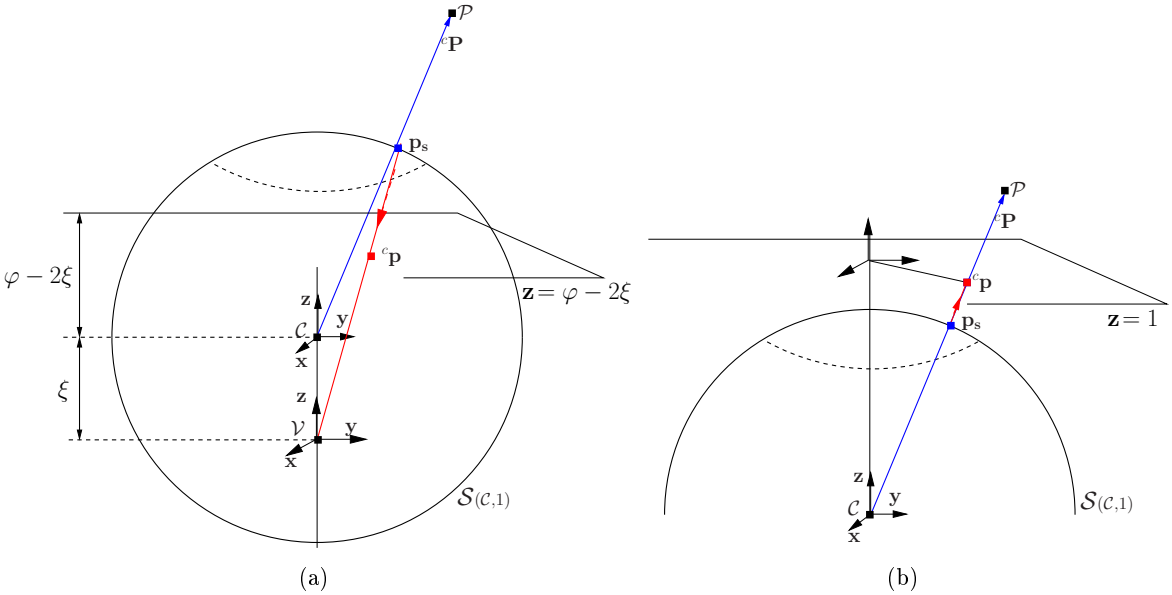


FIG. 1.10 – Modèle de projection des systèmes de vision centrale catadioptrique : (a) cas général, (b) cas des caméras perspectives où $\xi = 0$ et $\varphi = 1$.

Miroir	Equation	ξ	φ
Paraboloïde	$\frac{1}{4f_m}\left(m_x^2 + m_y^2\right) - f_m = m_z$	1	$1+2f_m$
Hyperboloïde	$\left(\frac{m_z-(d_m/2)}{l_z}\right)^2 - \frac{m^2{}_x+m^2{}_y}{l_{xy}^2} = 1$	$\frac{d_m}{\sqrt{d_m^2+4f_m^2}}$	$\frac{d_m+2f_m}{\sqrt{d_m^2+4f_m^2}}$
Ellipsoïde	$\left(\frac{m_z+(d_m/2)}{l_z}\right)^2 + \frac{m^2{}_x+m^2{}_y}{l_{xy}^2} = 1$	$\frac{d_m}{\sqrt{d_m^2+4f_m^2}}$	$\frac{d_m-2f_m}{\sqrt{d_m^2+4f_m^2}}$

prendre '-' pour l'hyperboloïde et '+' pour l'ellipsoïde

$l_z = 1/2\left(\sqrt{d_m^2 + 4f_m^2} \mp 2f_m\right)$

$l_{xy} = \sqrt{f_m\left(\sqrt{d_m^2 + 4f_m^2} \mp 2f_m\right)}$

d_m est la distance entre les points focaux.

$\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)$ est un point qui appartient à la surface du miroir.

TAB. 1.2 – Paramètres des miroirs usuels.

Les équations de projection sur le plan image fish-eye sont données par

$$p_x = \rho(\phi)\cos\theta, p_y = \rho(\phi)\sin\theta, \tag{1.6}$$

avec $\theta = \arctan(p_{sy}/p_{sx})$ et $\phi = \arccos(p_{sz})$ (voir figure 1.12).

Dans le cas où il n'y a pas de distorsion radiale, on a $\rho(\phi) = \tan\phi$ [Ray 94]. Partant de (1.6), on obtient

$$p_x = \tan(\phi)\cos\theta = \frac{p_{sx}}{p_{sz}}, p_y = \tan(\phi)\sin\theta = \frac{p_{sy}}{p_{sz}} \tag{1.7}$$

qui correspondent bien aux équations de projection perspective.

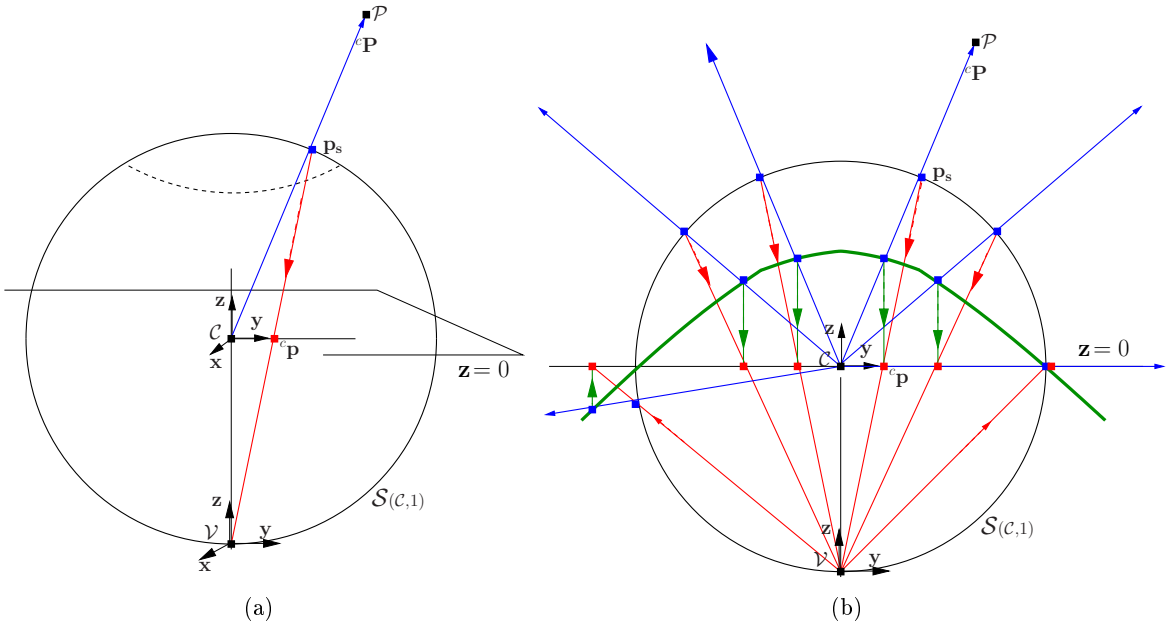


FIG. 1.11 – Cas des sytèmes de vision paracatadioptrique où $\xi = 1$: (a) projection stéréographique, (b) miroir paraboloïdal et projection orthographique.

Pour résumer, quel que soit le système de vision utilisé, on peut écrire de manière générale :

$$\begin{bmatrix} {}^c\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \pi_{p_\xi}\left(\pi_s\left({}^c\mathbf{P}\right)\right), \tag{1.8}$$

où π_s est la projection sphérique et π_{p_ξ} la projection sur le plan image P_π donnée par (1.3) pour les systèmes catadioptriques et les caméras perspectives (avec $(\varphi, \xi) = (1, 0)$) et par (1.6) pour les caméras fish-eye (avec $(\varphi, \xi) = (1, 0)$).

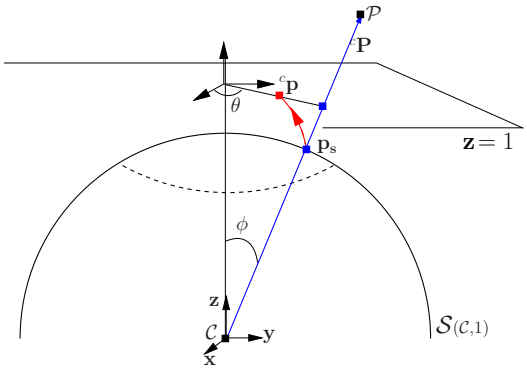


FIG. 1.12 – Modèle de projection des caméras fish-eye.

1.1.4 Passage du plan image au capteur

La troisième et dernière étape consiste à trouver le lien entre ${}^{c}\mathbf{p}$ et l'image ${}^{p}\mathbf{p}$ de $\mathcal{P}$ sur le capteur de vision (voir figure 1.13). Ce lien peut être décrit par une matrice ${}^{p}\mathbf{M}_c$ telle que :

$$\begin{bmatrix} {}^{p}\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{p}\mathbf{M}_c \begin{bmatrix} {}^{c}\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

La matrice ${}^{p}\mathbf{M}_c$ contient les paramètres intrinsèques $\mathbf{a}$ du système de vision (voir figure 1.13) :

- l_u (respectivement l_v) est la longueur en mètre dans la direction $\mathbf{u}$ (respectivement $\mathbf{v}$) d'un pixel ;
- (u_0, v_0) est le vecteur-coordonnées du point dit principal du capteur ;
- f est la distance focale de la caméra associée au miroir de focale $\varphi - \xi$ (voir tableau 1.2 pour les miroirs usuels).

Il existe un modèle complet de ${}^{p}\mathbf{M}_c$ prenant en compte :

- le fait que les directions $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ du capteur peuvent ne pas être orthogonales ; et
- la distorsion radiale sur le capteur ainsi que la distorsion tangentielle induite par le non-alignement entre l'axe optique de la caméra et l'axe du miroir [Weng 92].

Mais nous nous limitons à un modèle simplifié qui est satisfaisant pour cette étude. En effet, l'asservissement visuel est robuste à ce genre de simplification [Espiau 93].

Systèmes de vision centrale catadioptrique : La matrice ${}^{p}\mathbf{M}_c$ est définie dans le cas général par [Barreto 02a] :

$${}^{p}\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} (\varphi-\xi)fl_u & 0 & u_0 \\ 0 & (\varphi-\xi)fl_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En posant $f_u = (\varphi - \xi)fl_u$ (resp. $f_v = (\varphi - \xi)fl_v$), on introduit la distance focale généralisée en $\mathbf{u}$ (resp. $\mathbf{v}$). Par exemple pour les caméras perspectives où $\varphi = 1$ et $\xi = 0$, on a $f_u = fl_u$ et $f_v = fl_v$ et pour les systèmes paracatadioptriques où $\varphi = 1 + 2f_m$ et $\xi = 1$

(voir tableau 1.2), on a $f_u = 2f_m f l_u$ et $f_v = 2f_m f l_v$.

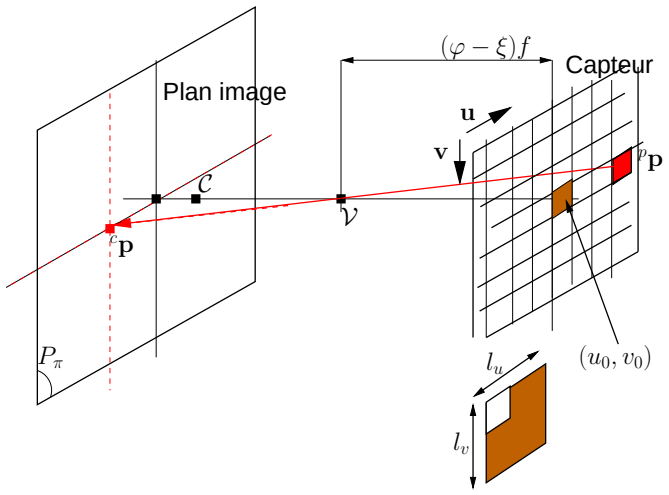


FIG. 1.13 – Lien simplifié entre ${}^c\mathbf{p}$ et ${}^p\mathbf{p}$.

Le vecteur des paramètres intrinsèques est donné par $\mathbf{a} = (f_u, f_v, u_0, v_0)$. Ce vecteur est estimé au cours d'une phase d'étalonnage du système de vision. Plusieurs méthodes existent pour étalonner les systèmes catadioptriques et les caméras perspectives. Une revue de quelques méthodes est disponible dans [Mouaddib 05]. Dans notre étude, le système paracatadioptrique a été étalonné en utilisant deux méthodes différentes qui exploitent respectivement l'image de droites [Vanderportaele 06], et les images d'une grille plane de points [Mei 07].

Caméras fish-eye : Pour les caméras fish-eye la matrice ${}^p\mathbf{M}_c$ est de nouveau définie par :

$$ {}^p\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} f_u & 0 & u_0 \\ 0 & f_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

avec $f_u = f l_u$ et $f_v = f l_v$.

En plus de ces quatres paramètres (f_u, f_v, u_0, v_0), il faut rajouter au vecteur $\mathbf{a}$ les coefficients k_i du polynôme $\rho(\phi)$ modélisant la distorsion (voir (1.5)). En utilisant la modélisation de $\rho(\phi)$ à l'ordre 9 (voir (1.5)), on a $\mathbf{a} = (f_u, f_v, u_0, v_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$ [Kannala 06]. En exploitant les images d'une grille plane, il est possible d'estimer le vecteur $\mathbf{a}$ [Kannala 06]. Cette méthode a été utilisée pour étalonner notre caméra fish-eye. Le lecteur intéressé par l'étalonnage des caméras fish-eye peut aussi se référer à [Tardif 06].

Nous venons de passer en revue les trois étapes principales de la formation de l'image $\mathbf{I}$ sur le capteur. A partir de cette image, nous sélectionnerons un ensemble $\mathbf{s}$ d'informa-

tions visuelles (cette sélection est présentée plus loin). Nous nous intéressons maintenant à la partie action de la boucle d'asservissement visuel.

1.2 Commande

Comme le montre la figure 1.14, le but de la commande est de déplacer le robot suivant une consigne qui peut être fixée dans l'image. Les notations utilisées dans cette partie sont décrites dans le tableau 1.3.

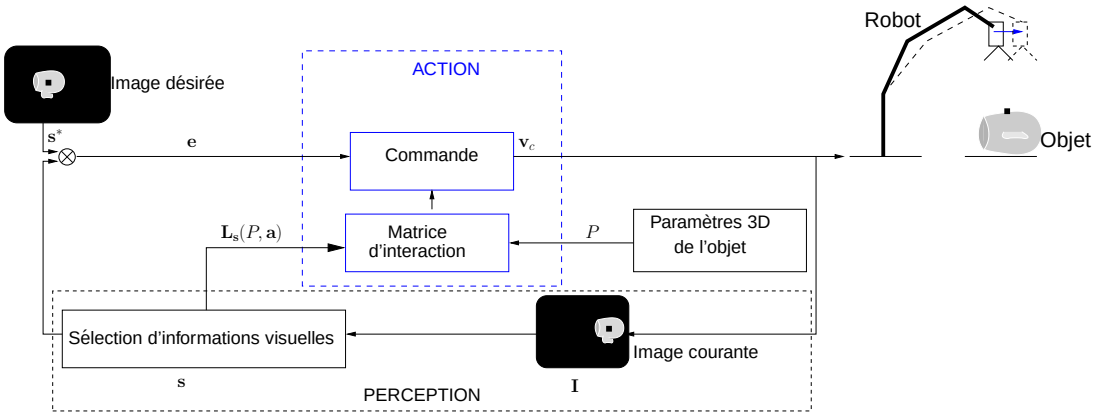


FIG. 1.14 – Commande du robot.

Symbole	Définition
$\mathbf{SE(3)} = \mathbb{R}^3 \times \mathbf{SO(3)}$	Groupe de Lie des déplacements
$\mathfrak{se}(\mathbf{3}) \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$	Espace tangent à $\mathbf{SE(3)}$
$\theta\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$	Représentation minimale de l'orientation relative ${}^c\mathbf{R}_o$
$\mathbf{r} = {}^c\mathbf{r}_o = ({}^c\mathbf{t}_o, \theta\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$	Pose relative entre la caméra et l'objet
$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$	Vitesses ou degrés de liberté de translation de la caméra
$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \in \mathbb{R}^3$	Vitesses ou degrés de liberté de rotation de la caméra
$\mathbf{v}_c = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}) \in \mathfrak{se}(\mathbf{3})$	Vitesses de la caméra
$\mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$	Vecteur d'informations visuelles
$\mathbf{L}_\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{k \times 6}$	Matrice d'interaction associée à $\mathbf{s}$

TAB. 1.3 – Notations pour la robotique.

Nous présentons d'abord (très brièvement) la relation entre le robot et l'objet lors d'une tâche de positionnement, ensuite la spécification visuelle d'une commande et enfin les propriétés qui garantissent que la commande réalise bien la tâche souhaitée.

1.2.1 Pose du robot relative à l'objet

Lors de la tâche de positionnement, c'est l'effecteur du robot qui est déplacé relativement à l'objet. Plus précisément, c'est la caméra (montée sur l'effecteur) qui est déplacée. Celle-ci peut être localisée par sa pose ${}^{c}\mathbf{r}_o$ relative à l'objet que nous notons simplement $\mathbf{r}$ dans toute cette partie (voir figure 1.15). Le vecteur $\mathbf{r}$ est composé de six paramètres indépendants dont trois pour décrire la position relative ${}^{c}\mathbf{t}_o$ de la caméra et trois autres pour décrire l'orientation relative ${}^{c}\mathbf{R}_o$ de la caméra. En effet, d'après la théorie d'Euler sur la paramétrisation d'une matrice de rotation, trois paramètres sont nécessaires et suffisants pour représenter l'orientation relative ${}^{c}\mathbf{R}_o$. Cette théorie est décrite dans plusieurs livres dont [Spong 05]. On peut citer par exemple la représentation $\theta\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ où $\theta \in]-\pi, \pi[$ est l'angle de rotation et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ la direction unitaire de l'axe de rotation (voir figure 1.16). Cette représentation s'obtient, à partir de

$$ {}^{c}\mathbf{R}_o = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, $$

de la façon suivante

$$ \theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \theta\mathbf{u} = \frac{1}{2\text{sinc}\theta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}, \tag{1.10} $$

où $\text{sinc}(x) = \sin x / x$. Par abus de langage, parfois nous appelerons $\mathbf{r}$ la pose de l'effecteur du robot ou du robot. L'ensemble des poses possibles $\mathbf{r}$ que peut atteindre l'effecteur du robot constitue l'espace de travail du robot.

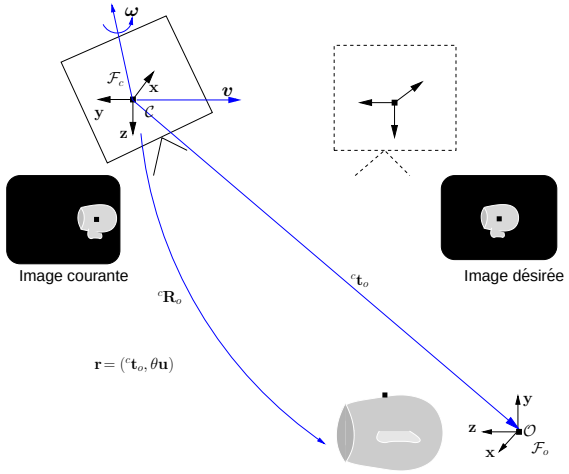


FIG. 1.15 – Déplacement du robot par rapport à l'objet.

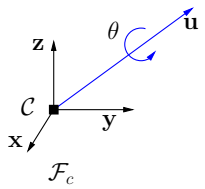


FIG. 1.16 – Rotation d'angle θ autour d'un axe de direction $\mathbf{u}$.

1.2.2 Spécification visuelle d'une tâche

La tâche consiste à amener l'effecteur du robot à une pose qui réalise la consigne fixée (voir par exemple figure 1.15). Il est possible d'exprimer cette tâche robotique comme la régulation d'une fonction $\mathbf{e}(\mathbf{r}(t))$ sur un horizon temporel [Samson 91] ; t étant la variable temps et $\mathbf{r}$ la pose du robot. Dans notre cas, la fonction $\mathbf{e}$ est donnée par

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{s}((\mathbf{r}(t))) - \mathbf{s}^* \tag{1.11}$$

où

$$\begin{array}{rcccc} \mathbf{s} & : & \mathbf{SE}(\mathbf{3}) & \rightarrow & \mathbb{R}^k \\ & & \mathbf{r}(t) & \mapsto & \mathbf{s}((\mathbf{r}(t))) \end{array}$$

est une application différentiable qui définit un ensemble de k informations visuelles sélectionnées à la pose $\mathbf{r}(t)$; $\mathbf{s}^*$ est la consigne (correspondant à la tâche) sur les informations visuelles. Ici on considère que $\mathbf{s}^*$ est constant.

Puisque $\mathbf{s}$ est différentiable, $\mathbf{e}$ est différentiable et on a [Espiau 92] :

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{L_s}\mathbf{v}_c \tag{1.12}$$

où $\mathbf{L_s} \in \mathbb{R}^{k\times 6}$, appelée matrice d'interaction, représente la relation vision-commande [Sanderson 83, Chaumette 90]. Plus précisément, cette matrice décrit la variation temporelle des informations visuelles $\mathbf{s}$ due à un mouvement de la caméra. Le vecteur $\mathbf{v}_c = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}) \in \mathfrak{se}(\mathbf{3})$ où $\boldsymbol{v} = (\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ et $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ sont respectivement les vitesses de translation et de rotation de la caméra (voir figure 1.15), et $\mathfrak{se}(\mathbf{3}) \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ est l'espace tangent à $\mathbf{SE}(\mathbf{3})$.

Par exemple, à partir de l'image perspective ${}^p\mathbf{p}$ du point $\mathcal{P}$ et de l'expression (1.9), il est possible d'obtenir le vecteur de coordonnées métriques ${}^c\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ et de définir un vecteur $\mathbf{s}$ de deux informations visuelles tel que $\mathbf{s} = (p_x, p_y)$. La matrice d'interaction associée, dépendant de la profondeur P_z inconnue dans ce cas, est donnée par [Feddema 89b] :

$$\mathbf{L_s} = \begin{bmatrix} -1/P_z & 0 & p_x/P_z & p_x p_y & -(1+p_x^2) & p_y \\ 0 & -1/P_z & p_y/P_z & 1+p_y^2 & -p_x p_y & -p_x \end{bmatrix}. \tag{1.13}$$

Une méthode générale de calcul des matrices d'interaction pour les primitives usuelles telles que les droites, les segments, les cercles, les sphères et les cylindres a été présentée dans [Chaumette 90].

Pour assurer une régulation exponentielle découplée de la tâche $\mathbf{e}$, on impose

$$\dot{\mathbf{e}} = -\lambda \mathbf{e} \tag{1.14}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$ est le gain de la tâche qui doit être réglé de manière adéquate pour avoir un temps rapide de convergence tout en préservant la stabilité du système.

En injectant (1.12) dans (1.14), on déduit la commande (vitesse) idéale envoyée au robot

$$\mathbf{v}_c = -\lambda \mathbf{L}_{\mathbf{s}}^{+} \mathbf{e}, \tag{1.15}$$

où $\mathbf{L}_{\mathbf{s}}^{+}$ est la pseudo-inverse au sens de Moore-Penrose de la matrice d'interaction.

La matrice d'interaction $\mathbf{L}_{\mathbf{s}}$ dépend des paramètres 3D P de l'objet, ainsi que des paramètres intrinsèques $\mathbf{a}$ du système de vision (voir figure 1.14). Pour éviter d'alourdir les notations, nous n'écrirons pas comme il se devrait $\mathbf{L}_{\mathbf{s}}(P, \mathbf{s}, \mathbf{a})$. Comme on l'a vu dans la partie formation de l'image, on ne dispose que d'une estimation de $\mathbf{a}$. Il en est généralement de même pour les paramètres 3D P du modèle de l'objet et pour le vecteur $\mathbf{s}$ d'informations visuelles. C'est pourquoi en pratique, on travaille avec les estimations $\widehat{P}$, $\widehat{\mathbf{s}}$ et $\widehat{\mathbf{a}}$ des paramètres de la matrice d'interaction. De ce fait, la vitesse envoyée au robot et obtenue de (1.15) s'écrit

$$\mathbf{v}_c = -\lambda \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}}^{+} \widehat{\mathbf{e}}, \tag{1.16}$$

où $\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}}^{+}$ est la pseudo-inverse au sens de Moore-Penrose de l'estimation de la matrice d'interaction.

1.2.3 Analyse de stabilité

La figure 1.17 illustre la notion de stabilité. Une bille placée dans un bol retourne toujours au fond après un certain temps. Au fond du bol, la bille est dite en position d'équilibre stable. En revanche, placée au dessus du bol positionné à l'envers, la bille une fois perturbée n'y revient plus. Le dessus du bol est appelé position d'équilibre instable.

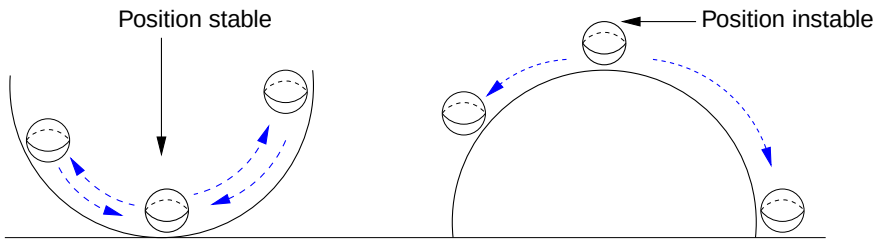


FIG. 1.17 – Positions d'équilibre stable et instable.

D'un point de vue physique, la bille attirée par le fond du bol perd progressivement de l'énergie, jusqu'à stabilisation au fond. Le fond du bol est donc appelé *point d'attraction*. On parle donc de stabilité locale du point d'équilibre lorsque, placée au fond du bol, la bille y retourne après des petits écarts par rapport à cette position d'équilibre.

On parle de stabilité globale du point d'équilibre lorsque, placée au fond du bol, la bille y retourne après n'importe quel écart.

Pour les systèmes dynamiques, Lyapunov a proposé un cadre formel simple permettant d'analyser la stabilité de la commande : une commande est stable lorsqu'au fil du temps l'énergie du système diminue [Lyapunov 66]. Puisqu'il est difficile de déterminer précisément l'énergie d'un système, Lyapunov a introduit une fonction $\mathcal{L}(x)$ qui peut être interprétée comme l'énergie du système en mouvement. Une telle fonction $\mathcal{L}(x)$, appelée *fonction de Lyapunov*, doit donc être strictement positive i.e. $\mathcal{L}(0) = 0$ et $\mathcal{L}(x) > 0$ pour $x \neq 0$. Le lecteur intéressé par les détails théoriques de l'analyse de la stabilité au sens de Lyapunov peut se référer à l'ouvrage [Spong 05].

Stabilité au sens de Lyapunov : Ici, nous présentons des définitions relatives à la stabilité des systèmes dynamiques.

Soit un système non linéaire ou linéaire défini par l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x). \tag{1.17}$$

L'équation (1.17) décrit l'évolution dans le temps de l'état du système en fonction d'un état initial (voir figure 1.18). Si $f(0) = 0$ alors le point $x_e = 0$ est dit point d'équilibre du système.

Définition 1.1 *Le point d'équilibre $x_e = 0$ est **stable** au sens de Lyapunov si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon)$ tel que*

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta \;\Rightarrow\; \|x(t) - x_e\| < \epsilon \;\forall t \geq t_0.$$

En d'autres termes, comme le montre la figure 1.19(a), le système (1.17) est stable si la solution reste dans une boule $\mathcal{B}_\epsilon$ centrée en x_e et de rayon ϵ losrque l'état initial $x(t_0)$ est dans une boule $\mathcal{B}_\delta$ centrée en x_e. Autrement dit, si le système subit une petite perturbation de sa position d'équilibre x_e, alors il reste proche de x_e tout le temps (à partir du moment où il est perturbé).

Définition 1.2 *Si le système est **stable** et s'il **converge** vers le point d'équilibre x_e, i.e.*

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta \;\Rightarrow\; \lim_{t \to +\infty} x(t) = x_e,$$

*alors on dit que le point d'équilibre x_e est **asymptotiquement stable**.*
Autrement dit, si le système subit une petite perturbation de sa position d'équilibre x_e, alors il y revient au fil du temps (à partir du moment où il est perturbé). Cette notion est illustrée sur la figure 1.19(b).

Ces deux notions de stabilité peuvent aussi se traduire en utilisant la fonction de $\mathcal{L}(x)$ de Lyapunov.

Définition 1.3 *Le point d'équilibre $x_e = 0$ est **stable** si*

$$\dot{\mathcal{L}}(x) \leq 0 \;\forall x \in \Omega(x_e),$$

où $\Omega(x_e)$ est un voisinage du point d'équilibre x_e.

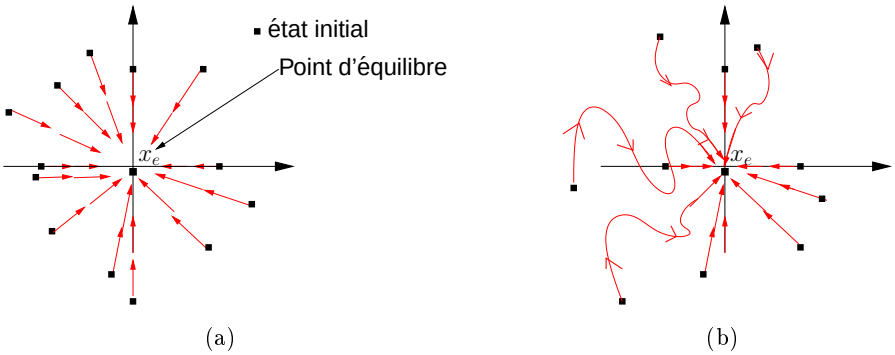


FIG. 1.18 – Systèmes stables : (a) système linéaire, même évolution pour tous les états initiaux, (b) système non linéaire, l'évolution est fonction de l'état initial.

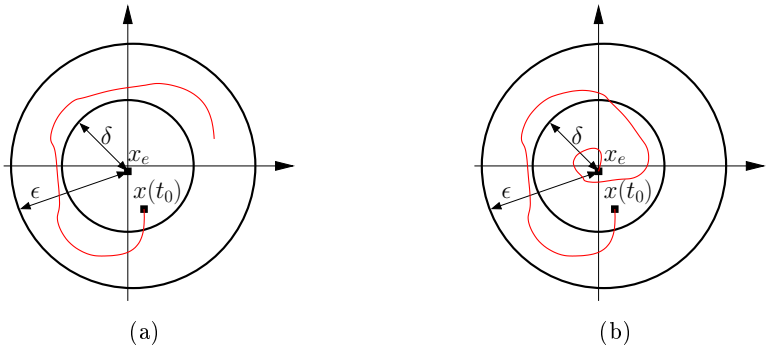


FIG. 1.19 – Stabilité d'un système : (a) au sens de Lyapunov, (b) asymptotique.

Définition 1.4 *Dans le cas où la dérivée de la fonction de Lyapunov est strictement négative, i.e.*

$$\dot{\mathcal{L}}(x) < 0 \ \forall x \in \Omega(x_e),$$

alors le point d'équilibre x_e est ***asymptotiquement stable.***

Définition 1.5 *Pour un système linéaire décrit par (1.17), on a*

$$f(x) = \mathbf{A}x,$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice constante. Dans ce cas, le point d'équilibre x_e est ***globalement asymptotiquement stable*** *si et seulement si $Re(\lambda(\mathbf{A})) < 0$, i.e. toutes les parties réelles des valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ sont strictement négatives.*

Il est parfois difficile d'analyser la stabilité globale d'un système non linéaire. Cependant, on peut s'intéresser à sa stabilité locale en linéairisant au point d'équilibre l'équation (1.17) décrivant l'évolution de son état. On obtient alors la matrice

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_e=0} \tag{1.18}$$

qui est linéaire et invariante dans le temps. Dans ce cas, on dit que :

Définition 1.6 *Le point d'équilibre x_e du système non linéaire (1.17) est* ***localement stable*** *si et seulement si $Re(\lambda(\mathbf{A})) \leq 0$ où la matrice $\mathbf{A}$ est donnée en (1.18). Ce même point est* ***localement asymptotiquement stable*** *si et seulement si $Re(\lambda(\mathbf{A})) < 0$.*

Remarque 1.1 *Si $\mathbf{A} < 0$, i.e les valeurs propres de sa matrice symétrique $\mathbf{A_s} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^\top + \mathbf{A})$ sont strictement négatives, alors le point d'équilibre x_e du système non linéaire (1.17) est* ***localement asymptotiquement stable*** *et $\dot{\mathcal{L}} < 0$. Autrement dit, si le système subit une petite perturbation de sa position d'équilibre x_e alors il y retourne en s'y* ***rapprochant systématiquement****. Cette remarque est plus forte que la définition 1.6 où la façon dont le système retourne à sa position d'équilibre n'est pas spécifiée.*

Application à l'asservissement visuel : Pour un système dont la dynamique est (1.12) et l'erreur donnée par (1.11), une *fonction de Lyapunov* candidate est

$$\mathcal{L}(\mathbf{e}(t)) = \frac{1}{2}\|\mathbf{e}(t)\|^2 = \frac{1}{2}\mathbf{e}^\top\mathbf{e}. \tag{1.19}$$

Le point d'équilibre correspond ici à $\mathbf{e}(t) = 0$ (énergie nulle, en référence à l'exemple ci-dessus du bol). La variation temporelle de cette fonction est

$$\dot{\mathcal{L}} = \mathbf{e}^\top\dot{\mathbf{e}}. \tag{1.20}$$

En injectant (1.12) dans (1.20), on a

$$\dot{\mathcal{L}} = \mathbf{e}^\top\mathbf{L_s}\mathbf{v}_c. \tag{1.21}$$

De (1.21), on obtient l'équation de la boucle fermée en remplaçant $\mathbf{v}_c$ par sa valeur donnée en (1.16)

$$\dot{\mathcal{L}} = -\lambda\mathbf{e}^\top\mathbf{L_s}\widehat{\mathbf{L}}_\mathbf{s}^+\widehat{\mathbf{e}}. \tag{1.22}$$

En pratique, comme $\mathbf{L_s}$ et $\mathbf{s}$ dépendent des paramètres 3D P de l'objet et des paramètres intrinsèques $\mathbf{a}$ du système de vision que l'on ne connait pas précisément, il est possible d'avoir des erreurs dans les estimations de $\widehat{\mathbf{L}}_\mathbf{s}^+$ et de $\widehat{\mathbf{s}}$. D'où l'intérêt de l'analyse de la stabilité aux erreurs de modélisation de l'objet et aux erreurs d'étalonnage du système de vision.

Si on considère uniquement des erreurs de modélisation alors $\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{e}$. Partant de (1.22), l'équation de la boucle fermée s'écrit

$$\dot{\mathcal{L}} = -\lambda\mathbf{e}^\top\mathbf{L_s}\widehat{\mathbf{L}}_\mathbf{s}^+\mathbf{e}. \tag{1.23}$$

Partant de (1.23), d'après la théorie de Lyapunov, si

$$\mathbf{L_s}\widehat{\mathbf{L}}_\mathbf{s}^+ > 0, \tag{1.24}$$

alors $\dot{\mathcal{L}} < 0$ et la commande du système est asymptotiquement stable. En d'autres termes, si le système est perturbé de son point d'équilibre (ou point d'attraction) $\mathbf{e}(t) = 0$, il y retourne après un certain temps car la condition $\dot{\mathcal{L}} < 0$ peut être interprétée comme le fait que l'énergie du système se dissipe. On parle de *stabilité locale* pour des perturbations ou positions initiales très proches du point d'équilibre, et de *stabilité globale* pour des perturbations ou positions initiales dans tout l'espace de travail.

Dans le cas où on linéarise au point d'équilibre l'expression (1.22) de la boucle fermée, on obtient immédiatement le système linéaire

$$\dot{\mathbf{e}} = -\lambda \mathbf{L}_{\mathbf{s}^*} \widehat{\mathbf{L}}^+_{\mathbf{s}^*} \mathbf{E}^* \mathbf{e} \tag{1.25}$$

où $\mathbf{L}_{\mathbf{s}^*}$ est la valeur désirée de $\mathbf{L}_{\mathbf{s}}$ et $\mathbf{E}^*$ est une matrice telle que $\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{E}^* \mathbf{e}$ dont l'expression est en général obtenue par linéarisation de $\widehat{\mathbf{e}}$. Dans ce cas, la **stabilité asymptotique locale** est obtenue si et seulement si les **valeurs propres** de $\mathbf{L}_{\mathbf{s}^*} \widehat{\mathbf{L}}^+_{\mathbf{s}^*} \mathbf{E}^*$ sont strictements positives.

Il existe d'autres sources d'erreurs dont nous ne traitons pas ici, notamment les erreurs liées au bruit sur l'image. Pour ce type d'erreur, il est possible d'effectuer une analyse de stabilité par erreur bornée [Victorino 02].

Le but de cette étude est d'améliorer la commande du système à travers le choix d'informations visuelles $\mathbf{s}$. Mais il est également de l'améliorer à travers le choix du schéma de contrôle. En effet, la matrice d'interaction courante $\mathbf{L}_{\mathbf{s}}$ peut présenter des problèmes de singularité (dans le cas de perte de rang, certaines informations visuelles éléments de $\mathbf{s}$ deviennent linéairement dépendantes) affectant ainsi la stabilité de la commande. De plus le calcul de $\mathbf{L}_{\mathbf{s}}$ exige une estimation des paramètres 3D courants P de l'objet. Une solution consiste à utiliser la matrice d'interaction désirée $\mathbf{L}_{\mathbf{s}^*}(P^*)$ où le paramètre P^* est fixé [Chaumette 90]. La commande dans ce cas est donnée par

$$\mathbf{v}_c = -\lambda \widehat{\mathbf{L}}^+_{\mathbf{s}^*} \mathbf{e}. \tag{1.26}$$

On peut aussi utiliser la moyenne entre les interactions courante et désirée [Tahri 03, Malis 04]

$$\mathbf{v}_c = -\lambda \left(\frac{\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}} + \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}^*}}{2} \right)^+ \mathbf{e}, \tag{1.27}$$

ou mieux encore, une combinaison judicieusement choisie [Marey 08]

$$\mathbf{v}_c = -\lambda \left(k \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}} + (1-k) \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}^*} \right)^+ \mathbf{e}, \tag{1.28}$$

avec $k \in \mathbb{R} \cap]0, 1[$.

D'autres études sur l'amélioration de la commande portent sur l'observabilité des mouvements du robot [Nelson 96, Sharma 97], sur la visibilité de l'objet à travers la planification de trajectoire et la robustesse aux erreurs de modèle [Mezouar 02], les fonctions de navigation [Cowan 02] et l'asservissement visuel *qualitatif* [Remazeilles 06].

La piste que nous suivons dans cette étude consiste à choisir judicieusement $\mathbf{s}$ afin d'améliorer la relation vision-commande $\mathbf{L_s}$ (voir figure 1.20), et donc d'améliorer la commande donnée par (1.16). Cette piste a fait l'objet de nombreuses recherches que nous présentons dans la suite.

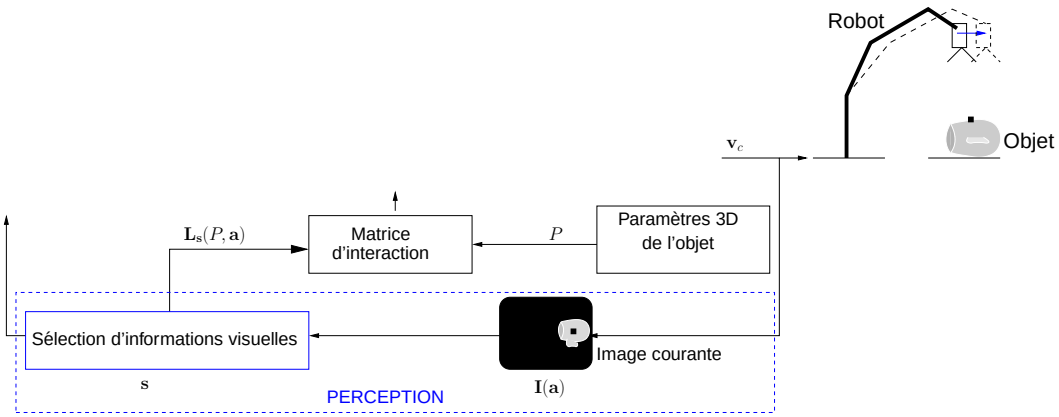


FIG. 1.20 – Quel choix pour $\mathbf{s}$?

1.3 Sélection d'informations visuelles

L'utilisation de certaines informations issues d'un capteur de vision peut potentiellement conduire à des problèmes de stabilité de la commande si le déplacement que le robot doit effectuer est très grand [Chaumette 98]. Il faut donc choisir des informations idéales assurant les propriétés suivantes : stabilité locale voire globale de la commande, robustesse de la commande aux erreurs de modélisation de l'objet et d'étalonnage, absence de singularités et de minima locaux, trajectoire satisfaisante du robot mais aussi des informations dans l'image et enfin découplage maximal et relation linéaire (but ultime) entre les informations visuelles et les degrés de liberté commandés. Cette dernière propriété permet d'avoir une commande linéaire (du système), qui converge dans tout l'espace de travail.

Plusieurs solutions sur le choix de $\mathbf{s}$ existent. Ces solutions peuvent être classées en fonction du type d'informations visuelles utilisées [Sanderson 80] : informations visuelles 2D, 3D ou hybrides (2D et 3D).

1.3.1 Asservissement visuel 2D

Il s'agit ici d'utiliser directement des informations de l'espace 2D image pour contrôler les mouvements du robot (voir figure 1.21), par exemple les coordonnées de l'image perspective du point $\mathcal{P}$ [Feddema 89b] : $\mathbf{s} = (p_x, p_y)$. En utilisant une caméra perspective, les informations visuelles pour des objets géométriques telles que les sphères, les cylindres, les cercles et les droites sont données dans [Chaumette 90]. En utilisant un système de vision centrale catadioptrique, la matrice d'interaction de l'image d'un

point est donnée dans [Barreto 02b], et celle de l'image d'une droite dans [Mezouar 04, Hadj-Abdelkader 08]

L'avantage de ce type d'asservissement visuel réside dans sa robustesse aux erreurs d'étalonnage [Espiau 93], et aux erreurs de traitement d'image. En revanche, ce schéma ne permet pas un contrôle direct de la pose $\mathbf{r}$ du robot, i.e. il n'y a pas de contrôle de la trajectoire du robot dans l'espace cartésien 3D. De ce fait, le robot, au lieu d'atteindre la pose désirée, peut se retrouver soit dans un des quatre minimum globaux lorsque le vecteur $\mathbf{s}$ est constitué des coordonnées de trois points [Chaumette 93, Michel 93], soit dans un minimum local lorsque le vecteur $\mathbf{s}$ est constitué des coordonnées de quatre points [Chaumette 98]. Une autre conséquence du fait qu'on ne contrôle pas la pose $\mathbf{r}$ du robot est que la matrice d'interaction peut présenter des singularités (certaines informations visuelles deviennent linéairement dépendantes), ce qui peut entraîner des problèmes de stabilité de la commande [Chaumette 98]. C'est la raison pour laquelle plusieurs travaux ont été (et sont encore) menés pour améliorer le comportement du système en utilisant des informations visuelles 2D.

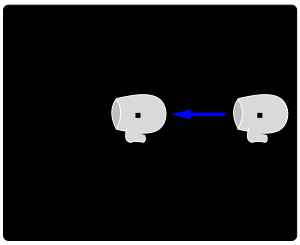


FIG. 1.21 – Contrôle dans l'espace 2D image : coordonnées de l'image d'un point sur l'objet.

Pour un comportement satisfaisant du robot dans l'espace cartésien, une information visuelle proportionnelle à la profondeur de l'objet a été proposée dans [Mahony 02]. Dans le même but, les vitesses de translation et de rotation de l'axe optique $\mathbf{z}$ peuvent être découplées des autres degrés de liberté à travers une approche *partitionnée* [Corke 01]. Une autre solution pour découpler les vitesses υ_z et ω_z de l'axe $\mathbf{z}$ consiste à utiliser les coordonnées cylindriques de l'image ${}^c\mathbf{p}$ de $\mathcal{P}$ [Iwatsuki 05] :

$$\mathbf{s} = (\rho, \theta), \text{ avec } \rho = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \text{ et } \theta = \arctan(p_y/p_x). \tag{1.29}$$

La matrice d'interaction associée, mettant en évidence ce découplage, s'écrit

$$\mathbf{L_s} = \begin{bmatrix} \frac{-\cos\theta}{P_z} & \frac{-\sin\theta}{P_z} & \frac{\rho}{P_z} & (1+\rho^2)\sin\theta & -(1+\rho^2)\cos\theta & 0 \\ \frac{\sin\theta}{\rho P_z} & \frac{-\cos\theta}{\rho P_z} & 0 & \frac{\cos\theta}{\rho} & \frac{\sin\theta}{\rho} & -1 \end{bmatrix}. \tag{1.30}$$

Nous pouvons remarquer que $\mathbf{L_s}$ est singulière lorsque $\rho = 0$ auquel cas la valeur de θ n'est pas définie.

Pour un objet de forme complexe, on peut s'intéresser au contour de son image [Collewet 00]. Une représentation générique et intuitive de l'image de l'objet peut être

obtenue en utilisant les moments 2D [Bien 93]. La forme analytique de la matrice d'interaction associée aux moments 2D de tout ordre a été présentée dans [Chaumette 04] . Récemment la théorie des moments invariants a été utilisée pour déterminer des combinaisons particulières de moments 2D telles que la matrice d'interaction est quasi linéaire et découplée lorsque des objets plans sont considérés [Tahri 05].

Les études sus-mentionnées utilisent le modèle de projection perspective mais d'autres modèles de projection sont aussi adaptés, notamment le modèle de projection sphérique qui offre la propriété de passivité si on considère la projection d'un point [Hamel 02]. Ce modèle de projection a été utilisé pour définir un difféomorphisme global entre les informations visuelles $\mathbf{s}$ et la pose $\mathbf{r}$ du robot en considérant une sphère marquée [Cowan 05]. Ce difféomorphisme peut être interprété comme un changement de coordonnées entre l'espace 2D image et l'espace cartésien 3D permettant de contrôler la pose. Ce travail original sera l'objet d'une attention particulière au troisième chapitre. Récemment, une homographie à partir de deux projections sphériques a été utilisée pour déterminer un ensemble d'informations visuelles isomorphe à la pose d'un robot équipé d'un système de vision catadioptrique [Benhimane 06]. Enfin, une autre représentation générique de l'image de l'objet est possible en utilisant les moments calculés sur la surface d'une sphère [Tahri 04]. Cette dernière méthode a été récemment appliquée à l'image centrale catadioptrique d'un nuage de points [Tahri 08]. Nous reviendrons, au deuxième chapitre, sur cette nouvelle voie prometteuse.

1.3.2 Asservissement visuel 3D

La tableau 1.4 décrit les notations utilisées dans cette partie.

Ce type d'asservissement visuel utilise des informations visuelles exprimées dans l'espace cartésien 3D en entrée de la loi de commande (1.16) [Wilson 96, Martinet 97]. Ces informations sont obtenues à partir de la pose relative ${}^{c}\mathbf{r}_o$ de l'objet par rapport à la caméra (voir figure 1.22). Cette pose peut être calculée à partir du modèle géométrique de l'objet. Plusieurs méthodes existent pour estimer ${}^{c}\mathbf{r}_o$, par exemple celles données dans [Tsai 87, Dementhon 95, Lu 00, Marchand 02]. En boucle ouverte, il est possible d'estimer assez précisément le mouvement 3D à réaliser entre les images initiale et désirée de l'objet en utilisant une caméra sphérique [Fermuller 00].

Symbole	Définition
$[\mathbf{w}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}$	Matrice de préproduit vectoriel associée à $\mathbf{w}$
$\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$	Matrice identité de rang n

TAB. 1.4 – Notations matricielles.

L'avantage principal du schéma d'asservissement visuel 3D est le contrôle direct de la trajectoire du robot dans l'espace cartésien dans le repère mobile $\mathcal{F}_c$ en choisissant par exemple $\mathbf{s} = ({}^c\mathbf{t}_o, \theta\mathbf{u})$ où le vecteur $\theta\mathbf{u}$ est obtenu à partir de ${}^{c*}\mathbf{R}_c$ [Malis 98]. La matrice ${}^{c*}\mathbf{R}_c$ est estimée à partir des poses initiale ${}^c\mathbf{r}_o$ et désirée ${}^{c*}\mathbf{r}_o$ (voir figure 1.22) comme suit : ${}^{c*}\mathbf{R}_c = {}^{c*}\mathbf{R}_o \, {}^c\mathbf{R}_o^{-1}$.

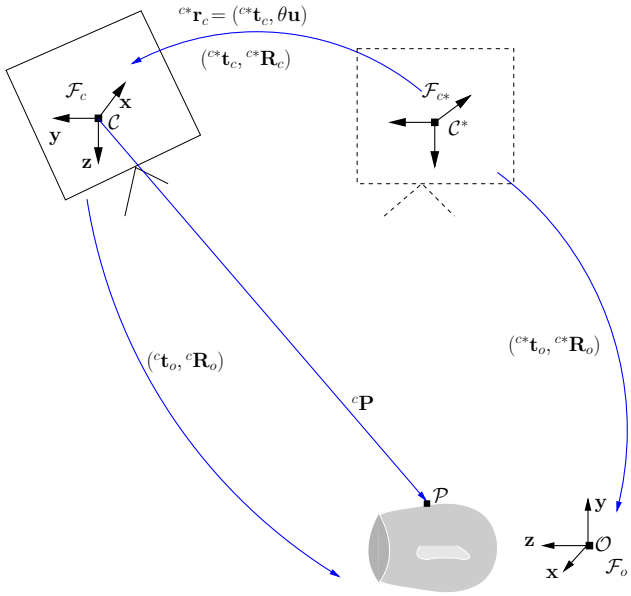


FIG. 1.22 – Contrôle dans l'espace cartésien 3D : différentes poses de la caméra.

La matrice d'interaction associée à $\mathbf{s}$, montrant le découplage entre le vecteur $\theta\mathbf{u}$ contrôlant l'orientation et les degrés de liberté de translation de la caméra, s'écrit

$$\mathbf{L_s} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_3 & [{}^c\mathbf{t}_o]_\times \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_\omega \end{bmatrix}, \tag{1.31}$$

où $\mathbf{I}_3 \in \mathbb{R}^{3\times3}$ est la matrice identité de rang trois, $[{}^c\mathbf{t}_o]_\times$ est la matrice de préproduit vectoriel associée à ${}^c\mathbf{t}_o$ et la matrice $\mathbf{L}_\omega$ est donnée par [Malis 99] :

$$\mathbf{L}_\omega = \mathbf{I}_3 + \frac{\theta}{2}[\mathbf{u}]_\times + \left(1 - \frac{\mathrm{sinc}\theta}{\mathrm{sinc}^2\frac{\theta}{2}}\right)[\mathbf{u}]_\times^2, \tag{1.32}$$

avec $\mathrm{sinc}(x) = \sin x / x$.

Une deuxième façon de faire consiste à contrôler la trajectoire du robot dans le repère fixe $\mathcal{F}_c{}^*$. Dans ce cas, on peut choisir $\mathbf{s} = ({}^{c*}\mathbf{t}_c, \theta\mathbf{u})$ [Deng 03, Chaumette 06]. La matrice d'interaction, montrant le découplage total entre les vitesses de translation $\boldsymbol{v}$ et les vitesses de rotation $\boldsymbol{\omega}$, est donnée par

$$\mathbf{L_s} = \begin{bmatrix} {}^{c*}\mathbf{R}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_\omega \end{bmatrix}. \tag{1.33}$$

La propriété de découplage garantit une trajectoire satisfaisante du robot. Dans le deuxième cas, le robot se déplace de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}^*$ en ligne droite si la pose ${}^{c*}\mathbf{r}_c$ est bien estimée [Deng 03, Chaumette 06]. Par contre, en utilisant la loi de commande (1.16) dans le deuxième cas, il n'y a pas de contrôle sur l'image de l'objet. Cela pourrait causer l'échec de l'asservissement dans le cas où les mesures (extraites de l'image perspective de l'objet) utilisées pour estimer la pose venaient à sortir du champ de vision. Ce problème de visibilité peut advenir dans le premier cas si l'origine du repère de l'objet ${}^c\mathbf{t}_o$ n'est pas bien choisie. L'utilisation des coordonnées 3D ${}^c\mathbf{P}$ (voir figure 1.22) d'un point de l'objet contribue à garder l'objet dans le champ de vision du robot [Martinet 96]. Par exemple pour le choix $\mathbf{s} = ({}^c\mathbf{P}, \theta\mathbf{u})$, on a

$$\mathbf{L_s} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_3 & [{}^c\mathbf{P}]_\times \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_\omega \end{bmatrix}. \tag{1.34}$$

Enfin, l'inconvénient de cette approche réside dans son manque de robustesse aux erreurs d'étalonnage du système de vision [Hager 95]. En effet, de petites erreurs dans l'image peuvent entraîner une large erreur dans l'estimation de la pose. Cette erreur peut entraîner une instabilité de la commande ou un échec dans le positionnement [Chaumette 98].

1.3.3 Asservissement visuel 2 1/2D

Pour profiter des avantages des asservissements 2D (contrôle de l'image de l'objet) et 3D (contrôle de la trajectoire du robot) tout en évitant leurs limites respectives, il est possible d'utiliser une méthode hybride qui combine à la fois des informations visuelles 2D et 3D [Malis 99, Deguchi 98, Morel 99, Chaumette 00, Cervera 03]. La figure 1.23 illustre ce cas où on peut choisir par exemple le vecteur $\mathbf{s} = ({}^c\mathbf{p}, \log(P_z), \theta\mathbf{u})$ où le vecteur $\theta\mathbf{u}$ est obtenu à partir de ${}^{c*}\mathbf{R}_c$ [Malis 99].

Dans ce schéma, l'orientation relative ${}^{c*}\mathbf{R}_c$ est obtenue après estimation de la pose partielle de la caméra en utilisant les images courante et désirée (voir figure 1.23). Contrairement à l'asservissement visuel 3D, cette estimation ne nécessite pas de connaître le modèle géométrique de l'objet. Cependant, comme l'asservissement visuel 3D, ce schéma reste sensible aux bruits dans l'image à cause de cette estimation.

La matrice d'interaction associée à $\mathbf{s}$, présentant le découplage entre le contrôle de l'orientation et les vitesses de translation de la caméra, est donnée par [Malis 99]

$$\mathbf{L_s} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_v & \mathbf{L}_{v,\omega} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_\omega \end{bmatrix}, \tag{1.35}$$

avec

$$\mathbf{L}_v = \frac{1}{\rho_z P_z^*} \begin{bmatrix} -1 & 0 & p_x \\ 0 & -1 & p_y \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{L}_{v,\omega} = \begin{bmatrix} p_x p_y & -(1+p_x^2) & p_y \\ 1+p_y^2 & -p_x p_y & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix},$$

où la valeur de $\rho_z = P_z/P_z^*$ est obtenue au cours du calcul de la pose partielle.

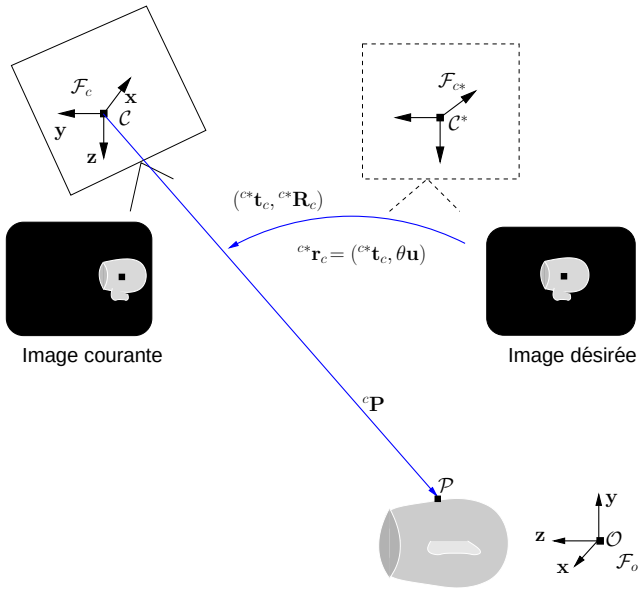


FIG. 1.23 – Contrôle dans les espaces 2D et 3D : coordonnées de l'image d'un point de l'objet et orientation de la caméra.

Cette solution a été exploitée dans l'asservissement visuel 2 1/2D où une commande utilisant une matrice d'interaction découplée, ne présentant aucune singularité dans tout l'espace de travail et tolérant un étalonnage grossier du système de vision, a été proposée [Malis 02]. Pour terminer, cette approche a été récemment appliquée sur des systèmes de vision centrale catadioptrique [Hadj-Abdelkader 05, Hadj-Abdelkader 07].

1.4 Synthèse

Actuellement, il existe de nombreux systèmes de vision qui, contrairement aux caméras perpectives classiques, ont un large champ de vision. Comme nous le verrons au chapitre suivant, ces systèmes de vision omnidirectionnelle, même à centre de projection unique, ont un modèle de projection complexe qui ne facilite pas le choix des informations visuelles adéquates nécessaires pour mieux contrôler le déplacement du robot.

Peu d'études ont été dédiées à la modélisation en asservissement visuel avec des systèmes de vision omnidirectionnelle. En effet, les solutions existantes pour s'approcher d'une commande linéaire et découplée reposent le plus souvent sur l'utilisation des caméras perspectives classiques. Ces solutions, limitées à un champ de vision restreint, doivent être repensées et adaptées afin de profiter du large champ de vue des systèmes de vision omnidirectionnelle (voir illustration sur la figure 1.24).

La question qui vient à l'esprit est de savoir par quel(s) moyen(s) déterminer des informations visuelles idéales sur ces nouveaux systèmes de vision.

Puisque le modèle de projection sphérique est au centre des systèmes de vision centrale catadioptrique et des caméras perspectives, nous nous sommes posés la question suivante : dans le cadre de la modélisation en asservissement visuel, que peut-on faire de mieux en utilisant le modèle de projection sphérique ?

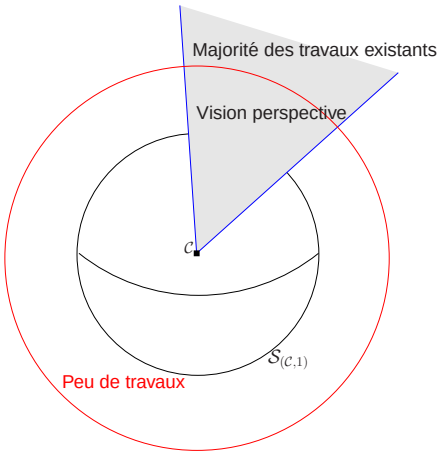


FIG. 1.24 – Objectif de modélisation visé par cette étude.

Pour répondre à cette question, nous considérerons individuellement quelques objets représentatives observées par un système de vision centrale catadioptrique ou par une caméra perspective. Pour chaque objet, il s'agira de s'approcher au mieux d'un ensemble d'informations visuelles qui assurent une bonne trajectoire du robot dans l'espace 3D cartésien tout en garantissant aussi une bonne trajectoire de l'image de l'objet.

Enfin, nous verrons qu'en utilisant le modèle de projection sphérique, la détermination d'un tel ensemble d'informations visuelles est assez simple et intuitive.

Chapitre 2

Modélisation

Notre objectif est d'exploiter directement les propriétés géométriques de la projection sphérique d'un objet, afin de modéliser un ensemble $\mathbf{s}$ d'informations visuelles adéquates pour contrôler l'image de cet objet. Nous souhaitons déterminer une paramétrisation $\mathbf{s}$ qui couvre, si possible, toute la sphère de vue omnidirectionnelle afin de libérer la modélisation de la contrainte du champ de vision limité.

Pour mieux contrôler la trajectoire du robot, il est important de s'approcher au mieux, quand cela est possible, d'un vecteur $\mathbf{s}$ qui est isomorphe (relation biunivoque) à la pose ${}^c\mathbf{r}_o$ de l'objet par rapport au capteur. Mais on veut le faire sans calcul de pose explicite (car bruit, instabilité, ...) et donc en restant au plus proche de l'image. L'idéal est un vecteur $\mathbf{s}$ dont la matrice d'interaction $\mathbf{L_s}$ est linéaire et découplée de manière à favoriser non seulement un contrôle de l'image de l'objet mais aussi une bonne trajectoire cartésienne.

Nous revisitons les primitives géométriques les plus usuelles telles que les points, les droites, les sphères et les cercles. Pour chaque primitive, nous rappelons les informations visuelles existantes. Ensuite un nouvel ensemble $\mathbf{s_n}$ d'informations visuelles est proposé en exploitant l'image sphérique de la primitive. Enfin le calcul de $\mathbf{s_n}$ à partir de l'image centrale catadioptrique ou perspective de la primitive est donné.

2.1 Image de points

Le point est la primitive la plus simple. La plupart des travaux en asservissement visuel utilise l'image de points. Par exemple l'image de points caractéristiques (dans l'environnement) est souvent utilisée dans des applications de robotique mobile en milieu naturel [Remazeilles 04]. L'image de points peut aussi être utilisée pour la stabilisation d'un helicoptère [Hamel 02, Bourquardez 06].

On note ${}^c\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z) \in \mathbb{R}^3$ le vecteur coordonnées cartésiennes du point $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{F}_c$.

2.1.1 Informations visuelles existantes

Cette primitive a été l'objet de nombreux travaux sur la modélisation en asservissement visuel où on distingue deux paramétrisations.

Coordonnées cartésiennes : Cette paramétrisation est définie par les coordonnées cartésiennes $\mathbf{s}_1 = (p_x, p_y)$ de l'image ${}^c\mathbf{p}$ de ${}^c\mathbf{P}$ en vision perspective [Feddema 89b] et en vision centrale catadioptrique [Barreto 02b]. En vision perspective, la matrice d'interaction associée à $\mathbf{s}$ est donnée par

$$\mathbf{L_s} = \begin{bmatrix} -1/P_z & 0 & p_x/P_z & p_x p_y & -(1+p_x^2) & p_y \\ 0 & -1/P_z & p_y/P_z & 1+p_y^2 & -p_x p_y & -p_x \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

En vision catadioptrique, l'expression non linéaire et complexe de la matrice d'interaction est donnée par :

$$\mathbf{L_{s1}} = \begin{bmatrix} -\frac{1+p_y^2+p_x^2\alpha_\xi}{\|{}^c\mathbf{P}\|(\xi+\lambda_\xi)} & \frac{\xi p_x p_y}{\|{}^c\mathbf{P}\|} & \frac{p_x\lambda_\xi}{\|{}^c\mathbf{P}\|} & p_x p_y & -\frac{(1+p_x^2)\lambda_\xi-\xi p_y^2}{\xi+\lambda_\xi} & p_y \\ \frac{\xi p_x p_y}{\|{}^c\mathbf{P}\|} & -\frac{1+p_x^2+p_y^2\alpha_\xi}{\|{}^c\mathbf{P}\|(\xi+\lambda_\xi)} & \frac{p_y\lambda_\xi}{\|{}^c\mathbf{P}\|} & \frac{(1+p_y^2)\lambda_\xi-\xi p_x^2}{\xi+\lambda_\xi} & -p_x p_y & -p_x \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

avec $\alpha_\xi = (1-\xi(\xi+\lambda_\xi))$ où $\lambda_\xi = \sqrt{1+(1-\xi^2)(p_x^2+p_y^2)}$ et ξ est le paramètre du système de vision catadioptrique. Lorsque $\xi = 0$, (2.2) correspond exactement à la matrice d'interaction du point donnée par (2.1) en vision perspective.

Coordonnées cylindriques : Une autre paramétrisation possible de l'image de $\mathcal{P}$ consiste à utiliser les coordonnées cylindriques $\mathbf{s}_2 = (\rho, \theta)$ de ${}^c\mathbf{p}$ [Iwatsuki 05]. Cette dernière approche a l'avantage, par rapport à la première, de découpler les vitesses le long de l'axe optique comme le montre la matrice d'interaction associée

$$\mathbf{L_{s_2}} = \begin{bmatrix} \frac{-\cos\theta}{P_z} & \frac{-\sin\theta}{P_z} & \frac{\rho}{P_z} & (1+\rho^2)\sin\theta & -(1+\rho^2)\cos\theta & 0 \\ \frac{\sin\theta}{\rho P_z} & \frac{-\cos\theta}{\rho P_z} & 0 & \frac{\cos\theta}{\rho} & \frac{\sin\theta}{\rho} & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Cas de deux points : Lorsque deux points $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont considérés, il existe deux vecteurs d'informations visuelles présentés dans [Chaumette 90]. On peut choisir les coordonnées cartésiennes des images perspectives ${}^c\mathbf{p}_1$ et ${}^c\mathbf{p}_2$: on a alors $\mathbf{s}_3 = (p_{1x}, p_{1y}, p_{2x}, p_{2y})$. La matrice d'interaction associée à $\mathbf{s}_3$ se calcule en empilant les matrices d'interactions de ${}^c\mathbf{p}_1$ et ${}^c\mathbf{p}_2$ données en (2.1). On a

$$\mathbf{L_{s_3}} = \begin{bmatrix} -1/P_{1z} & 0 & p_{1x}/P_{1z} & p_{1x}p_{1y} & -(1+p_{1x}^2) & p_{1y} \\ 0 & -1/P_{1z} & p_{1y}/P_{1z} & 1+p_{1y}^2 & -p_{1x}p_{1y} & -p_{1x} \\ -1/P_{2z} & 0 & p_{2x}/P_{2z} & p_{2x}p_{2y} & -(1+p_{2x}^2) & p_{2y} \\ 0 & -1/P_{2z} & p_{2y}/P_{2z} & 1+p_{2y}^2 & -p_{2x}p_{2y} & -p_{2x} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

On peut aussi choisir une représentation qui décrit le segment image des deux points. Cette représentation est définie par : la longueur l, l'orientation α et les coordonnées

${}^c\mathbf{g} = (g_x, g_y)$ du centre de gravité du segment image. On a donc $\mathbf{s}_4 = (g_x, g_y, l, \alpha)$. La relation entre $\mathbf{s}_3$ et les coordonnées cartésiennes de ${}^c\mathbf{p}_1$ et ${}^c\mathbf{p}_2$ est donnée ci-dessous :

$$\begin{cases} g_x = (p_{1x} + p_{2x})/2 \\ g_y = (p_{1y} + p_{2y})/2 \\ l = \sqrt{(p_{1x} - p_{2x})^2 + (p_{1y} - p_{2y})^2} \\ \alpha = \arctan{(p_{1y} - p_{2y})/(p_{1x} - p_{2x})}. \end{cases} \tag{2.5}$$

A partir de (2.5) et (2.1), on déduit la matrice d'interaction associée à $\mathbf{s}_4$:

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s}_4} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{g_x} \\ \mathbf{L}_{g_y} \\ \mathbf{L}_l \\ \mathbf{L}_\alpha \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

où

$$\mathbf{L}_{g_x} = \begin{bmatrix} -\lambda_2 & 0 \\ \lambda_2 g_x - \lambda_1 l \cos\alpha/4 & g_x g_y + l^2 \cos\alpha \sin\alpha/4 \\ -(1 + g_x^2 + l^2 \cos^2\alpha/4) & g_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{g_y} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 g_y - \lambda_1 l \sin\alpha/4 & 1 + g_y^2 + l^2 \sin^2\alpha/4 \\ -g_x g_y - l^2 \cos\alpha \sin\alpha/4 & -g_x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_l = \begin{bmatrix} \lambda_1 \cos\alpha & \lambda_1 \sin\alpha \\ \lambda_2 l - \lambda_1 (g_x \cos\alpha + g_y \sin\alpha) & l(g_x \cos\alpha \sin\alpha + g_y(1 + \sin^2\alpha)) \\ -l(g_x(1 + \cos^2\alpha) + g_y \cos\alpha \sin\alpha) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_\alpha = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \sin\alpha/l & \lambda_1 \cos\alpha/l \\ \lambda_1 (g_x \sin\alpha - g_y \cos\alpha)/l & -g_x \sin^2\alpha + g_y \cos\alpha \sin\alpha \\ g_x \cos\alpha \sin\alpha - g_y \cos^2\alpha & -1 \end{bmatrix}$$

avec $\lambda_1 = (P_{1z} - P_{2z})/P_{1z}P_{2z}$ et $\lambda_2 = (P_{1z} + P_{2z})/P_{1z}P_{2z}$.

On peut faire mieux en normalisant le vecteur $\mathbf{s_4}$ par rapport à la longueur l du segment. On obtient alors le vecteur $\mathbf{s_5} = (g_x/l, g_y/l, 1/l, \alpha)$.

2.1.2 Nouvelles informations visuelles pour un point

Le modèle de projection sphérique se trouve au centre de la vision centrale catadioptrique et perspective. Nous nous intéressons ici à la projection sphérique de $\mathcal{P}$. L'image sphérique $\mathbf{p_s}$ de $\mathcal{P}$ est donnée par $\mathbf{p_s} = \pi_s({}^c\mathbf{P}) = \frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}\|}{}^c\mathbf{P}$. De manière détaillée on a

$$\begin{cases} p_{sx} = P_x/\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \\ p_{sy} = P_y/\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \\ p_{sz} = P_z/\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}. \end{cases} \tag{2.7}$$

En dérivant chaque composante de $\mathbf{p_s}$ par rapport au temps, on obtient

$$\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{s} = \frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}\|}\left(\mathbf{I}_3 - \mathbf{p_s}\mathbf{p_s}^\top\right){}^c\dot{\mathbf{P}}. \tag{2.8}$$

Par conséquent la matrice d'interaction associée à $\mathbf{p_s}$ s'exprime en fonction de la matrice d'interaction de ${}^c\mathbf{P}$ comme suit :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{p_s}} = \frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}\|}\left(\mathbf{I}_3 - \mathbf{p_s}\mathbf{p_s}^\top\right)\mathbf{L}_{{}^c\mathbf{P}}. \tag{2.9}$$

L'expression de la matrice d'interaction du point 3D ${}^c\mathbf{P}$ est donnée par [Chaumette 90] :

$$\mathbf{L}_{{}^c\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_3 & [{}^c\mathbf{P}]_\times \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

En injectant (2.10) dans (2.9) on obtient la matrice d'interaction associée à $\mathbf{p_s}$ [Hamel 02] :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{p_s}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}\|}\left(\mathbf{p_s}\mathbf{p_s}^\top - \mathbf{I}_3\right) & [\mathbf{p_s}]_\times \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Cette matrice présente la propriété de passivité, i.e. la variation temporelle de $\|\mathbf{p_s}\|$ est indépendante des mouvements de rotation $\boldsymbol{\omega}$ de la caméra.

Les trois composantes du vecteur $\mathbf{p_s}$ sont redondantes pour contrôler l'image du point car $\|\mathbf{p_s}\| = 1$. Deux paramètres suffisent pour décrire l'image sphérique d'un point. C'est pourquoi nous proposons l'une des deux paramétrisations décrites sur la figure 2.1.

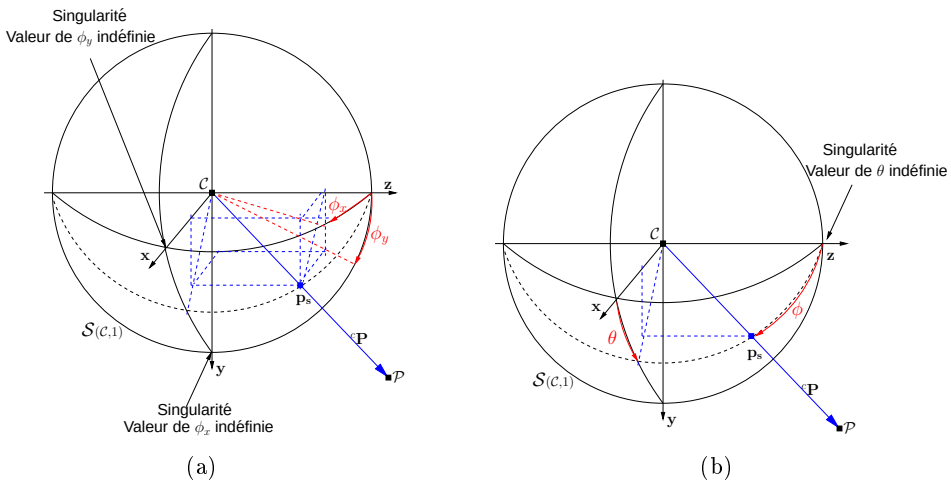


FIG. 2.1 – Projection sphérique d'un point : (a) coordonnées sphériques-cartésiennes, (b) coordonnées sphériques.

La première (voir figure 2.1(a)) représente ce que nous appellerons, par analogie avec les coordonnées cartésiennes, les coordonnées sphériques-cartésiennes :

$$\mathbf{s_{n1}} = (\phi_x, \phi_y), \text{ avec } \phi_x = \arctan(p_{s_x}/p_{s_z}) \text{ et } \phi_y = \arctan(p_{s_y}/p_{s_z}). \tag{2.12}$$

La matrice d'interaction associée à $\mathbf{s_{n1}}$ se calcule à partir de $\mathbf{L_{p_s}}$ comme suit :

$$\mathbf{L_{s_{n1}}} = \frac{\partial \mathbf{s_{n1}}}{\partial \mathbf{p_s}} \mathbf{L_{p_s}}.$$

A partir de (2.11), on obtient après quelques développements :

$$\mathbf{L_{s_{n1}}} = \begin{bmatrix} -\frac{c^2\phi_x}{\|^c\mathbf{P}\|p_{s_z}} & 0 & \frac{c^2\phi_x t\phi_x}{\|^c\mathbf{P}\|p_{s_z}} & c^2\phi_x t\phi_x t\phi_y & -1 & c^2\phi_x t\phi_y \\ 0 & -\frac{c^2\phi_y}{\|^c\mathbf{P}\|p_{s_z}} & \frac{c^2\phi_y t\phi_y}{\|^c\mathbf{P}\|p_{s_z}} & 1 & -c^2\phi_y t\phi_x t\phi_y & -c^2\phi_y t\phi_x \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

avec $c^2\phi_x = \cos^2\phi_x$, $c^2\phi_y = \cos^2\phi_y$, $t\phi_x = \tan\phi_x$ et $t\phi_y = \tan\phi_y$.

La paramétrisation $\mathbf{s_{n1}}$ est singulière lorsque $p_{s_x} = p_{s_z} = 0$ (et donc $p_{s_y} = \pm 1$), ou $p_{s_y} = p_{s_z} = 0$ (et donc $p_{s_x} = \pm 1$) (voir figure 2.1(a)). Dans le premier cas la valeur de ϕ_x est indéfinie et $\phi_y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Dans le deuxième cas la valeur de ϕ_y est indéfinie et $\phi_x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ces deux cas de figure, bien que n'étant pas envisageables en vision perspective, sont possibles en vision centrale catadioptrique. La matrice d'interaction $\mathbf{L_{s_{n1}}}$ est singulière si $p_{s_z} = 0$ ou $\phi_x = \pm\frac{\pi}{2}$ ou $\phi_y = \pm\frac{\pi}{2}$.

La matrice d'interaction $\mathbf{L_{s_{n1}}}$, en comparaison avec $\mathbf{L_{s_1}}$ (cas de la projection perspective en (2.1) et cas de la projection catadioptrique en (2.2)), présente des termes constants sur les vitesses ω_x et ω_y, ce qui est très intéressant pour contrôler ces deux degrés de liberté. La matrice $\mathbf{L_{s_{n1}}}$ présente un découplage sur les vitesses υ_x et υ_y mais des termes complexes sur les autres degrés de liberté.

La seconde paramétrisation possible (voir figure 2.1(b)) représente les coordonnées sphériques classiques :

$$\mathbf{s_{n2}} = (\phi, \theta), \text{ avec } \phi = \arccos(p_{s_z}) \text{ et } \theta = \arctan(p_{s_y}/p_{s_x}). \tag{2.14}$$

La matrice d'interaction associée à $\mathbf{s_{n2}}$ se calcule à partir de $\mathbf{L_{p_s}}$ comme suit :

$$\mathbf{L_{s_{n2}}} = \frac{\partial \mathbf{s_{n2}}}{\partial \mathbf{p_s}} \mathbf{L_{p_s}}.$$

A partir de (2.11), on obtient après quelques développements :

$$\mathbf{L_{s_{n2}}} = \begin{bmatrix} -\frac{\cos\theta\cos\phi}{\|^c\mathbf{P}\|} & -\frac{\sin\theta\cos\phi}{\|^c\mathbf{P}\|} & \frac{\sin\phi}{\|^c\mathbf{P}\|} & \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ \frac{\sin\theta}{\|^c\mathbf{P}\|\sin\phi} & -\frac{\cos\theta}{\|^c\mathbf{P}\|\sin\phi} & 0 & \frac{\cos\theta\cos\phi}{\sin\phi} & \frac{\sin\theta\cos\phi}{\sin\phi} & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

La paramétrisation $\mathbf{s_{n2}}$ tout comme $\mathbf{s_2}$ est singulière lorsque $p_{s_x} = p_{s_y} = 0$ (et donc $p_{s_z} = \pm 1$) (voir figure 2.1(b)). Dans ce cas la valeur de θ est indéfinie et $\phi = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

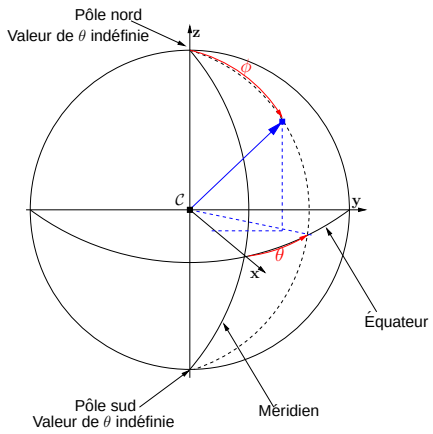


FIG. 2.2 – Singularités de la représentation des positions sur le globe terrestre.

Ces singularités, liées à la modélisation, ne sont pas du tout surprenantes. En effet, même sur le globe terrestre, en considérant par exemple $\mathbf{s_{n2}} = (\phi, \theta)$, les pôles ne sont associés à aucun méridien (voir figure 2.2).

D'un point de vue pratique, l'utilisation du vecteur des coordonnées sphériques $\mathbf{s_{n2}}$ est bien adaptée pour les systèmes de vision catadioptrique à angle mort au centre de l'image (voir figure 1.4). En effet, dans ce cas, il est impossible d'avoir des singularités sur la représentation $\mathbf{s_{n2}}$ de l'image d'un point.

L'avantage des coordonnées cylindriques sur les coordonnées cartésiennes est bien connu : découplage sur les vitesses de l'axe optique qui permet d'effectuer une rotation de π autour de cet axe sans problème de singularité de la matrice d'interaction [Iwatsuki 05]. Il en est de même, d'après les matrices d'interaction (2.13) et (2.15), de l'avantage des coordonnées sphériques $\mathbf{s_{n2}}$ par rapport aux coordonnées sphériques-cartésiennes $\mathbf{s_{n1}}$. En effet, si on considère une rotation de π autour de l'axe optique, le fait que le vecteur $\mathbf{s_{n1}}$ soit lié aux coordonnées perspectives (voir (2.12)) peut conduire à une singularité de la matrice d'interaction quel que soit le nombre de points utilisés, comme cela a été démontré en vision perspective dans [Chaumette 98]. Nous verrons dans le prochain chapitre une application en robotique mobile qui utilise le vecteur $\mathbf{s_{n2}}$.

Calcul des nouvelles informations : Le calcul des vecteurs $\mathbf{s_{n1}}$ et $\mathbf{s_{n2}}$ à partir de l'image perspective ou catadioptrique ${}^c\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ passe par la détermination du vecteur $\mathbf{p_s}$. Celui-ci est donné par

$$\mathbf{p_s} = \pi_{p\xi}^{-1}({}^c\mathbf{p}), \tag{2.16}$$

où la fonction $\pi_{p\xi}^{-1}$ est telle que (voir détails en Annexe A.1) :

$$p_{s_x} = \frac{\xi + \lambda_\xi}{p_x^2 + p_y^2 + 1} p_x, \; p_{s_y} = \frac{\xi + \lambda_\xi}{p_x^2 + p_y^2 + 1} p_y, \text{ et } p_{s_z} = \frac{\xi + \lambda_\xi}{p_x^2 + p_y^2 + 1} - \xi,$$

Pour $\mathbf{s_{n1}}$, on a

$$\begin{cases} \phi_x = \arctan\left(\frac{\xi+\lambda_\xi}{(\xi+\lambda_\xi)-\xi(p_x^2+p_y^2+1)}p_x\right) \\ \phi_y = \arctan\left(\frac{\xi+\lambda_\xi}{(\xi+\lambda_\xi)-\xi(p_x^2+p_y^2+1)}p_y\right). \end{cases}$$

Pour $\xi = 0$, on a

$$\begin{cases} \phi_x = \arctan(p_x) \\ \phi_y = \arctan(p_y) \end{cases}$$

qui correspond bien (à l'arctangente près) à la paramétrisation cartésienne $\mathbf{s}_1 = (p_x, p_y)$ en vision perspective.

Pour $\mathbf{s_{n2}}$, on a

$$\begin{cases} \phi = \arccos\left(\frac{\xi+\lambda_\xi}{p_x^2+p_y^2+1} - \xi\right) \\ \theta = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right). \end{cases}$$

2.1.3 Nouvelles informations visuelles pour deux points

Dans cette partie, nous exploitons les propriétés géométriques de la projection sphérique de deux points pour décrire deux nouveaux types informations visuelles très intéressantes. Le premier type présente la propriété d'invariance aux mouvements de rotation $\boldsymbol{\omega}$ de la caméra. Le second type a pour avantage d'être lié linéairement aux vitesses de rotation $\boldsymbol{\omega}$ de la caméra.

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux points de vecteurs respectifs de coordonnées ${}^c\mathbf{P}_1$ et ${}^c\mathbf{P}_2$. Soient $\mathbf{p_{1_s}}$ et $\mathbf{p_{2_s}}$ les projections sphériques respectives de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

La distance d_{12} entre les projections sphériques $\mathbf{p_{1_s}}$ et $\mathbf{p_{2_s}}$ (voir figure 2.3(a)) est invariante aux mouvements de rotation de la caméra. L'expression de cette distance est donnée par

$$d_{12} = \|\mathbf{p_{1_s}} - \mathbf{p_{2_s}}\| = \left((\mathbf{p_{1_s}} - \mathbf{p_{2_s}})^\top (\mathbf{p_{1_s}} - \mathbf{p_{2_s}})\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.17}$$

En calculant la variation temporelle de d_{12}, on obtient l'expression de la matrice d'interaction de d_{12} en fonction des matrices d'interaction de $\mathbf{p_{1_s}}$ et $\mathbf{p_{2_s}}$

$$\mathbf{L}_{d_{12}} = \frac{1}{d_{12}} (\mathbf{p_{1_s}} - \mathbf{p_{2_s}})^\top \left(\mathbf{L}_{\mathbf{p_{1_s}}} - \mathbf{L}_{\mathbf{p_{2_s}}}\right). \tag{2.18}$$

En injectant $\mathbf{L}_{\mathbf{p_{1_s}}}$ et $\mathbf{L}_{\mathbf{p_{2_s}}}$ déduites de (2.11) dans (2.18) on obtient

$$\mathbf{L}_{d_{12}} = \left[\ -\frac{1}{d_{12}} (\mathbf{p_{1_s}} - \mathbf{p_{2_s}})^\top \left(\frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}_1\|}\Gamma_{\mathbf{p_{1_s}}} - \frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}_2\|}\Gamma_{\mathbf{p_{2_s}}}\right) \qquad \mathbf{0}\ \right], \tag{2.19}$$

où $\Gamma_{\mathbf{p}_{i_\mathbf{s}}} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{p}_{i_\mathbf{s}}\mathbf{p}_{i_\mathbf{s}}^\top$, $i = 1, 2$.

A partir des projections sphériques $\mathbf{p_{1_s}}$ et $\mathbf{p_{2_s}}$, il est possible de déterminer un vecteur $\boldsymbol{\zeta}$ de trois informations visuelles dont la matrice d'interaction est de la forme

$$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\zeta}} = \left[\ \mathbf{L}_{\omega,v} \quad -\mathbf{I}_3\ \right]. \tag{2.20}$$

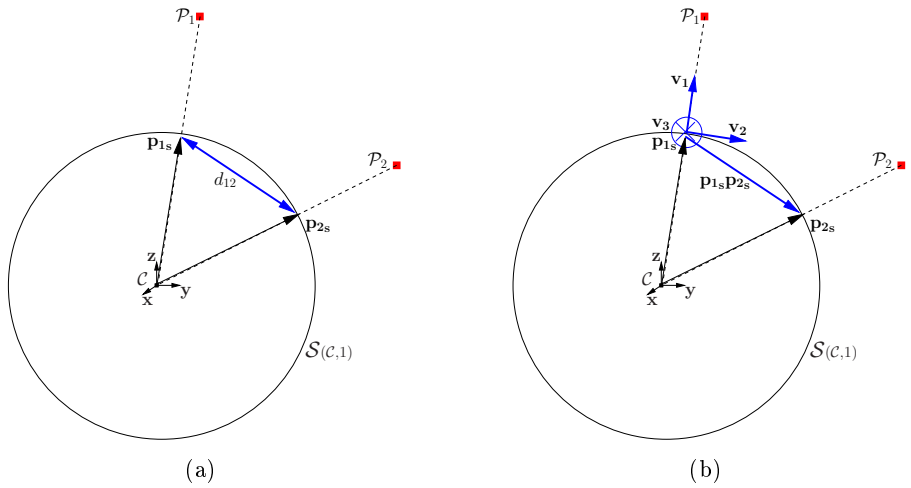


FIG. 2.3 – Projection sphérique de deux points : (a) distance entre les images sphériques des deux points, (b) composantes de la matrice de rotation.

Le vecteur $\boldsymbol{\zeta}$ a été proposé pour l'asservissement visuel d'une sphère marquée dans [Cowan 05]. Ce vecteur est la représentation $\theta\mathbf{u}$ de la matrice de rotation $\mathbf{V}\mathbf{V}^{*-1}$ où $\mathbf{V}^*$ est la valeur désirée de la matrice de rotation $\mathbf{V} = [\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}\ \mathbf{v_3}]$ (voir figure 2.3(b)) définie comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{v_1} = \mathbf{p_{1s}} \\ \mathbf{v_2} = \frac{\Gamma_{\mathbf{p_{1s}}}(\mathbf{p_{2s}}-\mathbf{p_{1s}})}{\|\Gamma_{\mathbf{p_{1s}}}(\mathbf{p_{2s}}-\mathbf{p_{1s}})\|} \\ \mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}, \end{cases} \tag{2.21}$$

où $\Gamma_{\mathbf{p_{1s}}} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{p_{1s}}\mathbf{p_{1s}}^\top$.

L'expression de la matrice d'interaction associée à $\boldsymbol{\zeta}$ (voir les détails du calcul en annexe A.2) est donnée par (2.20) avec

$$\mathbf{L}_{\omega,\upsilon} = \frac{1}{\|\Gamma_{\mathbf{p_{1s}}}(\mathbf{p_{2s}} - \mathbf{p_{1s}})\|}\mathbf{v_1}\mathbf{v_3}^\top\mathbf{M}_{\mathbf{p_{1s}}\mathbf{p_{2s}}} + \frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}_1\|}\left(\mathbf{v_2}\mathbf{v_3}^\top - \mathbf{v_3}\mathbf{v_2}^\top\right), \tag{2.22}$$

où $\mathbf{M}_{\mathbf{p_{1s}}\mathbf{p_{2s}}} = \left(-\frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}_2\|}\Gamma_{\mathbf{p_{1s}}}\Gamma_{\mathbf{p_{2s}}} + \frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}_1\|}\left((\mathbf{p_{1s}}^\top\mathbf{p_{2s}})\mathbf{I}_3 + \mathbf{p_{1s}}\mathbf{p_{2s}}^\top\right)\Gamma_{\mathbf{p_{1s}}}\right)$ et $\Gamma_{\mathbf{p_{2s}}} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{p_{2s}}\mathbf{p_{2s}}^\top$.

Il est important de noter que l'expression (2.22) est la forme générale du cas particulier présenté dans [Cowan 05]. En effet, dans ce cas particulier, le point ${}^c\mathbf{P}_2$ est sélectionné sur la tangente de la surface d'une sphère au point ${}^c\mathbf{P}_1$.

Dans le chapitre suivant, nous verrons comment combiner ces deux types d'informations visuelles pour réaliser une tâche de positionnement par rapport à un nuage de points.

Le tableau 2.1 résume la modélisation pour l'images de points.

Primitives 3D	Informations visuelles existantes	Nouvelles Informations visuelles
point	$\mathbf{s}_1 = (p_x, p_y)$ $\mathbf{s}_2 = (\rho, \theta)$	$\mathbf{s_{n1}} = (\phi_y, \phi_y)$ $\mathbf{s_{n2}} = (\phi, \theta)$
deux points	$\mathbf{s}_3 = (p_{1x}, p_{1y}, p_{2x}, p_{2y})$ $\mathbf{s}_4 = (g_x, g_y, l, \alpha)$ $\mathbf{s}_5 = (g_x/l, g_y/l, 1/l, \alpha)$	d_{12} $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$

TAB. 2.1 – Paramétrisations existantes et nouvelles.

2.2 Image de droites

Les droites constituent des primitives potentiellement intéressantes en robotique mobile en milieu intérieur ou en milieu urbain. En effet, celles-ci peuvent être extraites des bords de routes et de pistes d'atterissage : pour le contrôle d'un robot mobile en utilisant l'image de droites, voir par exemple [Hadj-Abdelkader 08] ; et pour l'attérissage d'un avion, voir par exemple [Bourquardez 07].

Soit $\mathcal{D}$ une droite 3D. Celle-ci peut être définie, dans $\mathcal{F}_c$, par l'intersection de deux plans orthogonaux (voir figure 2.4)

$$\mathcal{D} = \begin{cases} n_{1x}P_x + n_{1y}P_y + n_{1z}P_z = 0 \\ n_{2x}P_x + n_{2y}P_y + n_{2z}P_z + d_2 = 0, \end{cases} \tag{2.23}$$

où ${}^c\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z) \in \mathcal{D}$, $d_2 \neq 0$ et $\mathbf{n_1} = (n_{1x}, n_{1y}, n_{1z})$, $\mathbf{n_2} = (n_{2x}, n_{2y}, n_{2z})$ sont tels que :

$$\begin{cases} n_{1x}^2 + n_{1y}^2 + n_{1z}^2 = 1 \\ n_{2x}^2 + n_{2y}^2 + n_{2z}^2 = 1 \\ n_{1x}n_{2x} + n_{1y}n_{2y} + n_{1z}n_{2z} = 0. \end{cases}$$

Nous choisissons $d_2 \neq 0$ car nous ne considérons pas ici le cas dégénéré où la droite passe par le centre de projection. Il existe d'autres représentations d'une droite 3D telles que les coordonnées de Plücker par exemple [Andreff 02], mais nous n'avons pas vu d'intérêt particulier à utiliser cette paramétrisation pour les droites 3D.

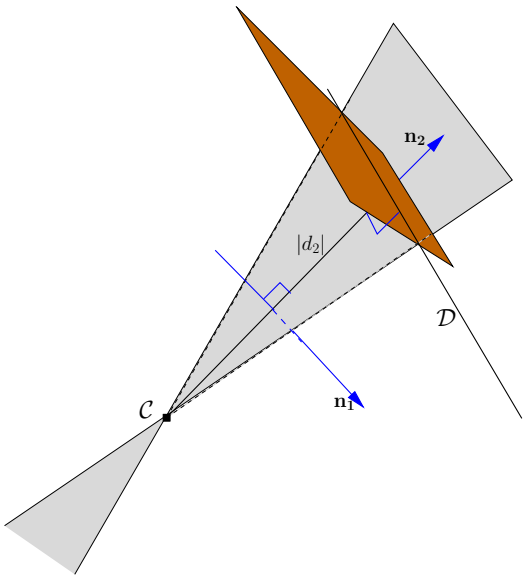


FIG. 2.4 – Représentation d'une droite 3D.

2.2.1 Informations visuelles existantes

Coordonnées cylindriques : Il existe quelques travaux sur la modélisation en asservissement visuel à partir des droites. Le plan défini par

$$n_{1x}P_x + n_{1y}P_y + n_{1z}P_z = 0, \tag{2.24}$$

appelé *plan d'interprétation* de $\mathcal{D}$, passe par le centre de projection $\mathcal{C}$ (voir figure 2.4). L'intersection de ce plan avec le plan image perspective constitue la projection perspective de $\mathcal{D}$ (voir figure 2.5(a)). L'équation de celle-ci, obtenue en divisant (2.24) par P_z ($P_z \neq 0$ en vision perspective), est donnée par :

$$n_{1x}p_x + n_{1y}p_y + n_{1z} = 0. \tag{2.25}$$

De cette équation, on peut déduire une paramétrisation minimale :

$$\mathbf{s}_1 = (\rho, \theta) \text{ avec } \rho = -\frac{n_{1z}}{\sqrt{n_{1x}^2 + n_{1y}^2}} \text{ et } \theta = \arctan \frac{n_{1y}}{n_{1x}}. \tag{2.26}$$

La matrice d'interaction associée à la normale $\mathbf{n_1} = (n_{1x}, n_{1y}, n_{1z})$ au *plan d'interprétation* est donnée par [Espiau 87, Andreff 02] :

$$\mathbf{L_{n_1}} = \left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{d_2}\mathbf{n_1}\mathbf{n_2}^\top & [\mathbf{n_1}]_\times \end{array} \right]. \tag{2.27}$$

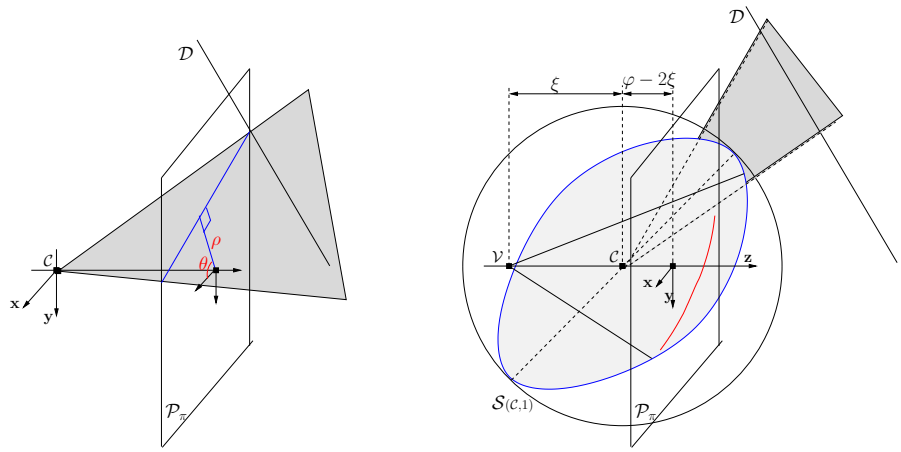
De (2.27), on obtient la matrice d'interaction associée à $\mathbf{s}_1$ [Chaumette 90] :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s}_1} = \left[\begin{array}{cccccc} \lambda_\rho \cos\theta & \lambda_\rho \sin\theta & -\lambda_\rho \rho & (1+\rho^2)\sin\theta & -(1+\rho^2)\cos\theta & 0 \\ \lambda_\theta \cos\theta & \lambda_\theta \sin\theta & -\lambda_\theta \rho & -\rho\cos\theta & -\rho\sin\theta & -1 \end{array} \right], \tag{2.28}$$

avec

$$\begin{cases} \lambda_\rho = (\rho n_{2x}\cos\theta + \rho n_{2y}\sin\theta + n_{2z})/d_2 \\ \lambda_\theta = (n_{2x}\sin\theta - n_{2y}\cos\theta)/d_2. \end{cases}$$

Notons que le vecteur $\mathbf{s}_1$ contrôle seulement l'orientation du *plan d'interprétation* défini par (2.24).



(a) (b)

FIG. 2.5 – Projection catadioptrique d'une droite : (a) projection perspective ($\xi = 0$), (b) cas général, en rouge une partie de l'ellipse vue dans l'image.

En ce qui concerne la vision perspective, il existe d'autres paramétrisations de l'image d'une droite que nous ne présentons pas ici, telles par exemple les coordonnées de Plücker bi-normées [Andreff 02].

La modélisation de l'image des droites en vision centrale catadioptrique est très récente. De manière générale, l'image catadioptrique de $\mathcal{D}$ est une ellipse (voir figure 2.5(b)). L'équation de cette ellipse (voir détails en Annexe B.1) est donnée par [Geyer 00, Barreto 02a, Hadj-Abdelkader 08] :

$$e_o p_x^2 + e_1 p_y^2 + 2e_2 p_x p_y + 2e_3 p_x + 2e_4 p_y + e_5 = 0, \tag{2.29}$$

avec

$$\begin{cases} e_0 = n_{1z}^2\xi^2 + (\xi^2-1)n_{1x}^2, & e_3 = -n_{1x}n_{1z} \\ e_1 = n_{1z}^2\xi^2 + (\xi^2-1)n_{1y}^2, & e_4 = -n_{1y}n_{1z} \\ e_2 = (\xi^2-1)n_{1x}n_{1y}, & e_5 = -n_{1z}^2. \end{cases}$$

En posant $\xi = 0$ dans (2.29), on obtient, après simplifications, l'équation (2.25) de la projection perspective de $\mathcal{D}$.

Pour le cas particulier d'un système paracatadioptrique, l'image de la droite $\mathcal{D}$ est un cercle [Nene 98]. En effet, en posant $\xi = 1$ dans (2.29), on obtient $e_0 = e_1$ et $e_2 = 0$

et donc l'équation d'un cercle donnée par :

$$(n_{1z}p_x - n_{1x})^2 + \left(n_{1z}p_y - n_{1y}\right)^2 = 1. \tag{2.30}$$

Deux paramétrisations minimales ont été proposées pour l'image catadioptrique de $\mathcal{D}$. La première paramétrisation, $\mathbf{s}_1 = (\rho, \theta)$ (voir (2.26)), utilise la droite polaire du centre de l'image par rapport à l'ellipse (2.29) [Hadj-Abdelkader 06b] ; cette droite n'est autre chose que la projection perspective de $\mathcal{D}$ donnée par (2.25). La paramétrisation $\mathbf{s}_1$ est singulière lorsque $n_{1x} = n_{1y} = 0$ soit pour toute droite appartenant à un plan parallèle au plan image. Dans ce cas la valeur de θ n'est pas définie.

Coordonnées cartésiennes : La seconde paramétrisation utilise les coordonnées cartésiennes de la projection perspective de $\mathbf{n_1}$. Cette paramétrisation est définie par $\mathbf{s}_2 = (e_3/e_5, e_4/e_5) = (\frac{n_{1x}}{n_{1z}}, \frac{n_{1y}}{n_{1z}})$ et correspond à deux paramètres indépendants de l'ellipse (2.29) [Mezouar 04, Hadj-Abdelkader 08]. En vision paracatadioptrique, $\mathbf{s}_2$ correspond aux coordonnées du centre du cercle (voir (2.30)). En posant $k_3 = e_3/e_5$ et $k_4 = e_4/e_5$, la matrice d'interaction associée à $\mathbf{s}_2$ est donnée par :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s}_2} = \begin{bmatrix} k_3\lambda_{k_3} & k_4\lambda_{k_3} & \lambda_{k_3} & k_3k_4 & -(1+k_3^2) & k_4 \\ k_3\lambda_{k_4} & k_4\lambda_{k_4} & \lambda_{k_4} & 1+k_4^2 & -k_3k_4 & -k_3 \end{bmatrix}, \tag{2.31}$$

avec

$$\begin{cases} \lambda_{k_3} = (-n_{2x} + k_3 n_{2z})/d_2 \\ \lambda_{k_4} = (-n_{2y} + k_4 n_{2z})/d_2. \end{cases}$$

La paramétrisation $\mathbf{s}_2$ présente une singularité lorsque $n_{1x} = n_{1z} = 0$ ou $n_{1y} = n_{1z} = 0$ soit lorsque le *plan d'interprétation* de la droite est orthogonal au plan image. Dans l'un ou l'autre des cas, une des composantes du vecteur $\mathbf{s}_2$ n'est pas définie.

Dans la suite, nous montrons que les choix minimaux $\mathbf{s}_1$ et $\mathbf{s}_2$ peuvent être retrouvés d'une manière très simple en utilisant le modèle de projection sphérique.

2.2.2 Nouvelles informations visuelles

La projection sphérique de $\mathcal{D}$, illustrée par les figures 2.6(a) et 2.6(b), est l'intersection entre la sphère de projection $\mathcal{S}_{(C,1)}$ et le *plan d'interprétation* défini par (2.24). On obtient le grand cercle défini dans [Geyer 00] :

$$\pi_s(\mathcal{D}) = \begin{cases} n_{1x}p_{s_x} + n_{1y}p_{s_y} + n_{1z}p_{s_z} = 0 \\ p_{s_x}^2 + p_{s_y}^2 + p_{s_z}^2 = 1, \end{cases} \tag{2.32}$$

où $\pi_s(\mathcal{D})$ est un abus de notation pour noter la projection sphérique de $\mathcal{D}$.

Pour contrôler le grand cercle $\pi_s(\mathcal{D})$, on peut utiliser sa normale $\mathbf{n_1} = (n_{1x}, n_{1y}, n_{1z})$. Mais ce choix est redondant puisque $\|\mathbf{n_1}\| = 1$. Le vecteur $\mathbf{n_1}$ peut être représenté par deux paramètres sur la sphère en utilisant simplement, comme pour le cas d'un point, les coordonnées sphériques ou les coordonnées sphériques-cartésiennes.

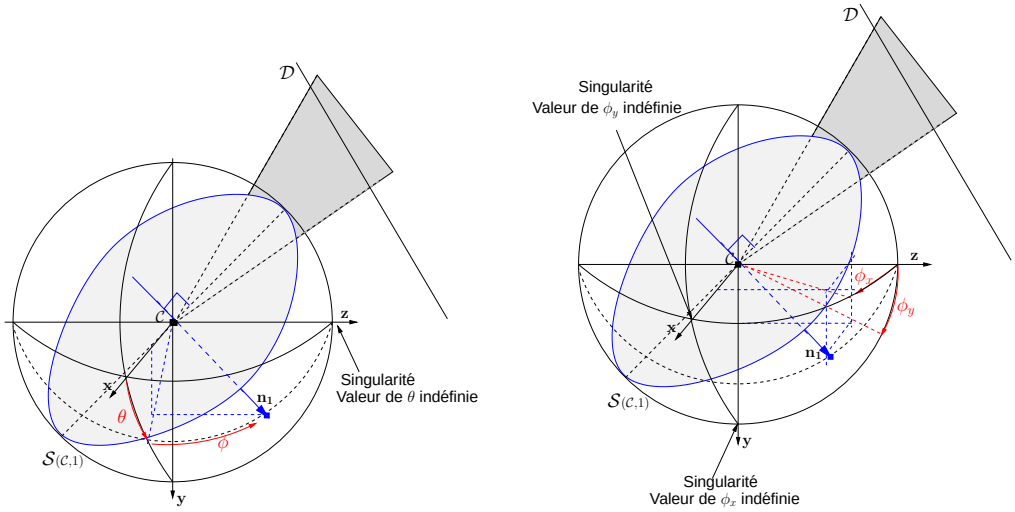
Dans le premier cas (voir figure 2.6(a)) les coordonnées sphériques sont données par

$$\mathbf{s}_{\mathbf{n}1} = (\phi, \theta), \text{ avec } \phi = \arcsin(n_{1z}) \text{ et } \theta = \arctan(n_{1y}/n_{1x}). \tag{2.33}$$

Les vecteurs $\mathbf{s}_1$ et $\mathbf{s_{n1}}$ sont presque identiques puisque $\rho = -\tan\phi$. Partant de (2.33) et en utilisant (2.27), on déduit la matrice d'interaction associée à $\mathbf{s_{n1}}$:

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} = \begin{bmatrix} \lambda_2 \cos\theta & \lambda_2 \sin\theta & \lambda_2 \tan\phi & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \lambda_\theta \cos\theta & \lambda_\theta \sin\theta & \lambda_\theta \tan\phi & \cos\theta \tan\phi & \sin\theta \tan\phi & -1 \end{bmatrix}, \tag{2.34}$$

avec $\lambda_2 = -n_{2z}/d_2$ et $\lambda_\theta = (n_{2x} \sin\theta - n_{2y} \cos\theta)/d_2$.



(a) (b)

FIG. 2.6 – Projection sphérique d'une droite : (a) coordonnées sphériques $\mathbf{s_{n1}}$, (b) coordonnées sphériques-cartésiennes $\mathbf{s_{n2}}$.

La paramétrisation $\mathbf{s_{n1}}$, tout comme $\mathbf{s}_1$ (en vision catadioptrique), est singulière lorsque $n_{1x} = n_{1y} = 0$ soit pour toute droite appartenant à un plan parallèle au plan image. Dans ce cas la valeur de θ n'est pas définie et $\phi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

D'un point de vue pratique, l'utilisation du vecteur des coordonnées sphériques $\mathbf{s_{n1}}$ est bien adaptée pour les systèmes de vision catadioptrique à angle mort au centre de l'image (voir figure 1.4). En effet, dans ce cas, il est impossible d'avoir des singularités sur la représentation $\mathbf{s_{n1}}$ de l'image d'une droite.

Dans le second cas (voir figure 2.6(b)) les coordonnées sphériques-cartésiennes sont données par

$$\mathbf{s_{n2}} = (\phi_x, \phi_y), \text{ avec } \phi_x = \arctan(n_{1x}/n_{1z}) \text{ et } \phi_x = \arctan(n_{1y}/n_{1z}). \tag{2.35}$$

Les vecteurs $\mathbf{s_{n2}}$ et $\mathbf{s}_2$ sont égaux à l'arctangente près. Partant de (2.35) et en utilisant (2.27), on déduit la matrice d'interaction associée à $\mathbf{s_{n2}}$:

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n2}}} = \begin{bmatrix} \lambda_{\phi_x} c^2\phi_x t\phi_x & \lambda_{\phi_x} c^2\phi_x t\phi_y & \lambda_{\phi_x} c^2\phi_x & c^2\phi_x t\phi_x t\phi_y & -1 & c^2\phi_x t\phi_y \\ \lambda_{\phi_y} c^2\phi_y t\phi_x & \lambda_{\phi_y} c^2\phi_y t\phi_y & \lambda_{\phi_y} c^2\phi_y & 1 & -c^2\phi_y t\phi_x t\phi_y & -c^2\phi_y t\phi_x \end{bmatrix}, \tag{2.36}$$

avec $\lambda_{\phi_x} = (n_{2z} \tan\phi_x - n_{2x})/d_2$, $\lambda_{\phi_y} = (n_{2z} \tan\phi_y - n_{2y})/d_2$, $c^2\phi_x = \cos^2\phi_x$, $c^2\phi_y = \cos^2\phi_y$, $t\phi_x = \tan\phi_x$ et $t\phi_y = \tan\phi_y$.

La paramétrisation $\mathbf{s_{n2}}$ présente les deux singularités de $\mathbf{s}_2$ lorsque le *plan d'interprétation* de la droite est orthogonal au plan image. La première correspond à $n_{1x} = n_{1z} = 0$. Dans ce cas la valeur de ϕ_x n'est pas définie et $\phi_y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. La seconde en $n_{1y} = n_{1z} = 0$. Dans ce cas la valeur de ϕ_y n'est pas définie et $\phi_x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Pour contourner ces singularités, une solution consisterait à utiliser la paramétrisation $\mathbf{s_{n1}}$ aux abords des singularités de $\mathbf{s_{n2}}$ et vice-versa. Cette solution peut aussi être utilisée pour le cas des points. Le changement de cartes de paramétrisation entre $\mathbf{s_{n1}}$ (voir (2.33)) et $\mathbf{s_{n2}}$ (voir (2.35)) est obtenu à partir de la relation :

$$\begin{cases} \tan\theta = \tan\phi_x / \tan\phi_y \\ 1/\sin^2\phi = 1 + \tan^2\phi_x + \tan^2\phi_y. \end{cases} \tag{2.37}$$

La matrice d'interaction $\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n2}}}$, en comparaison avec $\mathbf{L}_{\mathbf{s}_2}$ présente des termes constants sur les vitesses ω_x et ω_y, ce qui est intéressant pour contrôler ces deux degrés de liberté. En revanche, les termes sur les autres degrés de libertés sont complexes.

Calcul des nouvelles informations : Le calcul de $\mathbf{s_{n1}}$ et $\mathbf{s_{n2}}$ passe par l'estimation de la normale $\mathbf{n_1}$ au *plan d'interprétation*. Cette normale peut être calculée à un facteur d'échelle près sur l'image catadioptrique de $\mathcal{D}$ à partir de la mesure des moments 2D $\boldsymbol{\mu} = (g_x, g_y, n_{20}, n_{11}, n_{02})$ de l'ellipse (2.29). Plus précisément, (g_x, g_y) est le centre de gravité de l'ellipse, n_{20}, n_{11} et n_{02} sont les moments centrés normalisés d'ordre deux de l'ellipse.

Ici nous présentons directement le résultat, les détails du calcul sont donnés en Annexe B.2.

Pour $\mathbf{s_{n1}}$, on a

$$\begin{cases} \phi = \arcsin\left(\pm\sqrt{\alpha_\xi + 1 - \xi^2}\right) \\ \theta = \arctan\left(\frac{g_y}{g_x}\right), \end{cases} \tag{2.38}$$

où $\alpha_\xi = \frac{g_x^2 + g_y^2}{4n_{20}g_y^2 + 4n_{02}g_x^2 + 8n_{11}g_xg_y}$ et le signe $\pm$ peut être fixé à partir du sens de $\mathbf{n_1}$ choisi suivant l'orientation des gradients dans l'image.

Pour $\mathbf{s_{n2}}$, on a

$$\begin{cases} \phi_x = \arctan\left(\frac{\alpha_\xi}{\alpha_\xi + 1 - \xi^2} g_x\right) \\ \phi_y = \arctan\left(\frac{\alpha_\xi}{\alpha_\xi + 1 - \xi^2} g_y\right). \end{cases} \tag{2.39}$$

Pour $\xi = 1$, qui correspond à un système paracatadioptrique,

$$\mathbf{s_{n2}} = (\arctan(g_x), \arctan(g_y)).$$

Ce résultat est conforme au vecteur existant $\mathbf{s}_2 = (g_x, g_y)$ (voir tableau 2.2) [Mezouar 04], qui est le centre du cercle observé comme image paracatadioptrique de la droite.

En résumé, l'utilisation du modèle de projection sphérique en comparaison avec le modèle de projection catadioptrique est plus simple pour choisir les informations visuelles sur l'image d'une droite. La tableau 2.2 récapitule le travail de modélisation pour l'image de droites.

Primitive 3D	Informations visuelles existantes	Nouvelles Informations visuelles
droite	$\mathbf{s}_1 = (\rho, \theta)$ $\mathbf{s}_2 = (k_3, k_4)$	$\mathbf{s_n}_1 = (\phi, \theta)$ $\mathbf{s_n}_2 = (\phi_x, \phi_y)$ $\phi_x = \arctan k_3$ et $\phi_y = \arctan k_4$

TAB. 2.2 – Paramétrisations existantes et nouvelles.

2.3 Image de sphères

Il s'agit de la première des primitives volumétriques pour lesquelles cette étude a apporté une contribution intéressante. Une sphère peut être utilisée en pratique pour la stabilisation d'un dirigeable par asservissement visuel [Zhang 99].

2.3.1 Informations visuelles existantes

Soit $\mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$ une sphère de rayon R et de centre $\mathcal{O}$. Soit ${}^c\mathbf{O} = (O_x, O_y, O_z) \in \mathbb{R}^3$ le vecteur des coordonnées de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{F}_c$.

L'équation de $\mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$ est donnée par

$$(P_x - O_x)^2 + (P_y - O_y)^2 + (P_z - O_z)^2 - R^2 = 0, \tag{2.40}$$

où ${}^c\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ est le vecteur des coordonnées d'un point $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$.

Projection perspective d'une sphère : La projection perspective de $\mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$ est une ellipse (voir figure 2.7). L'équation de cette ellipse est donnée par [Chaumette 90] :

$$e_0 p_x^2 + e_1 p_y^2 + 2e_2 p_x p_y + 2e_3 p_x + 2e_4 p_y + e_5 = 0 \tag{2.41}$$

où ${}^c\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ est un point de l'ellipse et où :

$$\begin{cases} e_0 = R^2 - O_y^2 - O_z^2 \\ e_1 = R^2 - O_x^2 - O_z^2 \\ e_2 = O_x O_y \\ e_3 = O_x O_z \\ e_4 = O_y O_z \\ e_5 = R^2 - O_x^2 - O_y^2. \end{cases}$$

On peut utiliser le vecteur des moments $\boldsymbol{\mu} = (g_x, g_y, n_{20}, n_{11}, n_{02})$ pour caractériser l'ellipse observée définie par (2.41). C'est ainsi que la paramétrisation minimale

$$\mathbf{s}_1 = (g_x, g_y, 2(n_{20} + n_{02}))$$

a été proposée dans [Chaumette 90]. L'expression du vecteur $\mathbf{s}_1$ en fonction des paramètres 3D, $\mathcal{O}$ et R, de $\mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$ est donnée par [Chaumette 90] :

$$\begin{cases} g_x = -\frac{O_x O_z}{R^2 - O_z^2} \\ g_y = -\frac{O_y O_z}{R^2 - O_z^2} \\ 2(n_{20} + n_{02}) = -\frac{\left(2(R^2 - O_z^2) - O_x^2 - O_y^2\right) R^2}{2(R^2 - O_z^2)^2}. \end{cases} \tag{2.42}$$

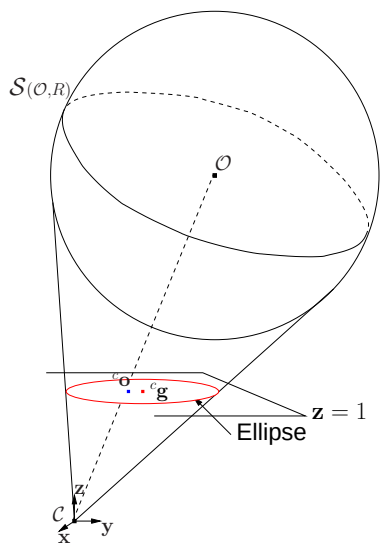


FIG. 2.7 – Projection perspective d'une sphère.

L'expression de la matrice d'interaction associée à $\mathbf{s}_1$ est :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{g_x} \\ \mathbf{L}_{g_y} \\ \left(\mathbf{L}_{4n_{20}} + \mathbf{L}_{4n_{02}}\right)/2 \end{bmatrix}, \tag{2.43}$$

où

$$\mathbf{L}_{g_x} = [\begin{array}{ccc} -1/G_z & 0 & g_x/G_z + 4n_x n_{20} + 4n_y n_{11} \\ g_x g_y + 4n_{11} & -1 - g_x^2 - 4n_{20} & g_y \end{array}]$$

$$\mathbf{L}_{g_y} = [\begin{array}{ccc} 0 & -1/G_z & g_y/G_z + 4n_x n_{11} + 4n_y n_{02} \\ 1 + g_y^2 + 4n_{02} & -g_x g_y - 4n_{11} & -g_x \end{array}]$$

$$\mathbf{L}_{4n_{20}} = [\begin{array}{ccc} -2(4n_x n_{20} + 4n_y n_{11}) & 0 & 2\left((1/G_z + n_x g_x)4n_{02} + 4n_y g_x n_{11}\right) \\ 2(4g_y n_{20} + 4g_x n_{11}) & -16 n_{20} g_x & 8n_{11} \end{array}]$$

$$\mathbf{L}_{4n_{02}} = [\begin{array}{ccc} 0 & -2(4n_x n_{11} + 4n_y n_{02}) & 2\left((1/G_z + n_y g_y)4n_{02} + 4n_x g_y n_{11}\right) \\ 16 g_y n_{02} & -2(4g_y n_{11} + 4g_x n_{02}) & -8n_{11} \end{array}]$$

$$\text{avec } G_z = 1/(n_x g_x + n_y g_y + n_z) \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} n_x = O_x / \left(O_x^2 + O_y^2 + O_z^2 - R^2\right) \\ n_y = O_y / \left(O_x^2 + O_y^2 + O_z^2 - R^2\right) \\ n_z = O_z / \left(O_x^2 + O_y^2 + O_z^2 - R^2\right). \end{array} \right.$$

On peut déjà noter que $\mathbf{L}_{\mathbf{s}1}$ est non-linéaire et assez couplée. Ceci s'explique en partie par le fait que ${}^c\mathbf{g}$ n'est pas aligné avec la projection perspective ${}^c\mathbf{o}$ de $\mathcal{O}$ (voir figure 2.7).

A partir des moments de l'ellipse représentant la projection sphérique de la sphère, il est possible de définir un vecteur d'informations visuelles $\mathbf{s}_1' = (a_n g_x, a_n g_y, a_n)$ [Tahri 05], avec $a_n = \frac{1}{\sqrt{a}}$ et $a = m_{00}$ l'aire de la surface observée. Lorsque le plan image et le plan de la surface des limbes (caractérisant la sphère) sont parallèles, la matrice d'interaction associée à $\mathbf{s}_1'$ est de la forme

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s}_1'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & a_n \epsilon_{11} & -a_n(1+\epsilon_{12}) & y_n \\ 0 & -1 & 0 & a_n(1+\epsilon_{21}) & -a_n \epsilon_{22} & -x_n \\ 0 & 0 & -1 & -a_n \epsilon_{31} & a_n \epsilon_{32} & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.44}$$

avec $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 4n_{11} - g_x g_y/2$, $\epsilon_{12} = 4n_{20} - g_x^2/2$, $\epsilon_{21} = 4n_{02} - g_y^2/2$, $\epsilon_{31} = 3g_y/2$ et $\epsilon_{32} = 3g_x/2$. La matrice d'interaction $\mathbf{L}_{\mathbf{s}_1'}$ présente un découplage total et des termes constants sur les vitesses υ_x, υ_y et υ_z, ce qui est très intéressant pour contrôler ces trois degrés de liberté.

Projection sphérique d'une sphère : Récemment la projection sphérique de $\mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$ a été étudiée dans [Cowan 05], où l'objet qui a été considéré est une sphère marquée d'un vecteur tangent en un point de sa surface. Pour le moment, nous nous intéressons seulement au cas de la sphère.

La projection sphérique de $\mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$ est un dôme [Cowan 05]. Ce dôme peut être caractérisé par le contour δ de sa base. Ce contour est présenté sur la figure 2.8. La forme analytique de δ est déterminée ci-dessous.

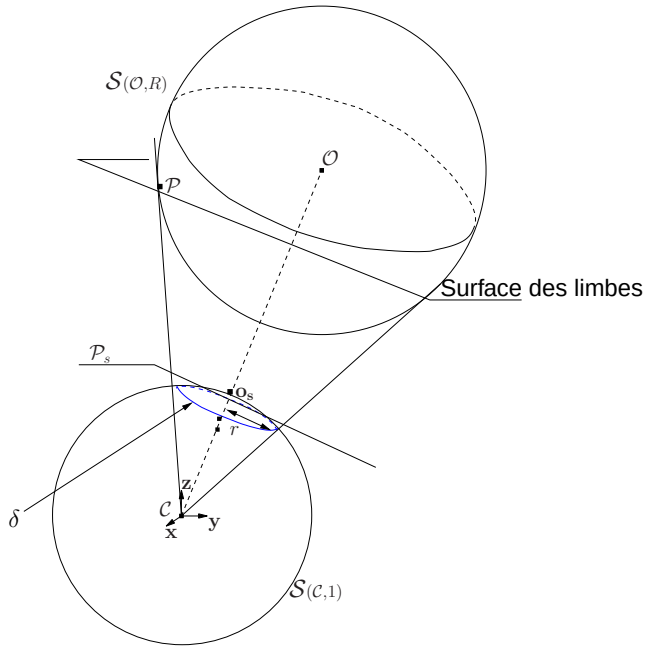


FIG. 2.8 – Projection sphérique d'une sphère.

Un point $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$ est projeté en $\mathbf{p}_s$ sur $\mathcal{S}_{(\mathcal{C},1)}$. On a $\mathbf{p}_s = \frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}\|}{}^c\mathbf{P}$. La multiplication de (2.40) par $1/\|{}^c\mathbf{P}\|^2$ donne

$$\left(p_{s_x} - \frac{O_x}{\|{}^c\mathbf{P}\|}\right)^2 + \left(p_{s_y} - \frac{O_y}{\|{}^c\mathbf{P}\|}\right)^2 + \left(p_{s_z} - \frac{O_z}{\|{}^c\mathbf{P}\|}\right)^2 - \frac{R^2}{\|{}^c\mathbf{P}\|^2} = 0, \tag{2.45}$$

qui peut être réécrite comme une fonction polynôme en $1/\|{}^c\mathbf{P}\|$

$$\frac{K_O^2}{\|{}^c\mathbf{P}\|^2} - \frac{2}{\|{}^c\mathbf{P}\|}(O_x p_{s_x} + O_y p_{s_y} + O_z p_{s_z}) + 1 = 0, \tag{2.46}$$

où $K_O^2 = O_x^2 + O_y^2 + O_z^2 - R^2$. Le contour δ est tel que le discriminant de (2.46) est égal à 0. On obtient l'unique solution de (2.46)

$$\frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}\|} = \frac{O_x p_{s_x} + O_y p_{s_y} + O_z p_{s_z}}{K_O^2}, \tag{2.47}$$

qui est l'équation de la surface des limbes. Un point $\mathcal{P}$ de cette surface, dont l'image ${}^c\mathbf{p}$ est sur le contour de l'image de l'objet, est l'unique intersection entre le rayon incident $\mathcal{CP}$ et la sphère $\mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$ (voir figure 2.8). En injectant (2.47) dans (2.46), on obtient

$$\left(O_x p_{s_x} + O_y p_{s_y} + O_z p_{s_z}\right)^2 - K_O^2 = 0. \tag{2.48}$$

Puisque δ est devant le centre de projection $\mathcal{C}$, on obtient à partir de (2.48) l'équation du plan $\mathcal{P}_s$ support de δ (voir figure 2.8)

$$O_x p_{s_x} + O_y p_{s_y} + O_z p_{s_z} = K_O. \tag{2.49}$$

En résumé, δ est l'intersection de la sphère unité et du plan $\mathcal{P}_s$:

$$\delta = \begin{cases} p_{s_x}^2 + p_{s_y}^2 + p_{s_z}^2 = 1 \\ O_x p_{s_x} + O_y p_{s_y} + O_z p_{s_z} = K_O. \end{cases} \tag{2.50}$$

Le contour δ est donc un cercle. Il est plus simple d'extraire des informations visuelles idéales à partir de ce cercle qu'à partir de l'ellipse observée en vision perspective.

Le vecteur $\mathbf{s}_2 = (r, \mathbf{o}_s)$ a été proposé dans [Cowan 05], où

$$r = \frac{R}{\|{}^c\mathbf{O}\|}$$

est le rayon de δ (voir figure 2.8) et

$$\mathbf{o}_s = \frac{1}{\|{}^c\mathbf{O}\|}{}^c\mathbf{O}$$

est le sommet du dôme (voir figure 2.8).

La matrice d'interaction associée à $\mathbf{s}_2$ est donnée par

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s}_2} = \begin{bmatrix} \frac{r^2}{R}\mathbf{o_s}^\top & \mathbf{0} \\ -\frac{r}{R}(\mathbf{I}_3 - \mathbf{o_s}\mathbf{o_s}^\top) & [\mathbf{o_s}]_\times \end{bmatrix}. \tag{2.51}$$

Le vecteur $\mathbf{s}_2$ n'est pas minimal puisque trois paramètres suffisent pour contrôler l'image de la sphère [Espiau 92]. On peut également noter que la matrice $\mathbf{L}_{\mathbf{s}_2}$ est assez couplée.

2.3.2 Nouvelles informations visuelles

L'objectif est de déterminer une nouvelle paramétrisation $\mathbf{s_{n1}}$ qui présente une matrice d'interaction découplée au maximum.

Coordonnées cartésiennes dans le cas général : Parmi les combinaisons possibles et imaginables à partir des paramètres $\{o_{sx}, o_{sy}, o_{sz}, r\}$ du dôme (voir figure 2.8), le vecteur $\mathbf{s_{n1}} = \frac{1}{r}\mathbf{o_s} = \frac{1}{R}{}^c\mathbf{O}$ a retenu notre attention. Ce vecteur est séduisant puisqu'il est directement lié au centre $\mathcal{O}$ de $\mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$.

La matrice d'interaction associée à $\mathbf{s_{n1}}$ est simple et maximalement découplée en comparaison avec celle de $\mathbf{s}_1$ et de $\mathbf{s}_2$. En effet, on a :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R}\mathbf{I_3} & [\mathbf{s_{n1}}]_\times \end{bmatrix}, \tag{2.52}$$

qui correspond à la matrice d'interaction associée au point $\mathcal{O}$ au facteur d'échelle près R.

La matrice $\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}}$ présente la même dynamique ($\frac{1}{R}$) sur les vitesses de translation du système. Puisque R est constant, il existe une relation linéaire entre la variation de $\mathbf{s_{n1}}$ et les vitesses de translation du système. On peut aussi noter la propriété de passivité (i.e. $\|\dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{n1}}\|$ est invariant aux mouvements de rotation de la caméra) qui est importante pour contrôler certains systèmes sous-actionnés [Hamel 02].

Coordonnées cylindriques dans les cas spécifiques : La fabrication de certains systèmes de vision catadioptrique impose une zone morte au centre de leur champ de vision. C'est le cas par exemple des systèmes catadioptriques présentés au chapitre 1 (voir figure 1.4).

Pour ce genre de systèmes, l'objet ne doit pas se retrouver dans la zone morte au risque de faire échouer l'asservissement. L'utilisation du vecteur de coordonnées cartésiennes $\mathbf{s_{n1}}$ conduit à des trajectoires images de $\mathcal{O}$ en ligne droite [Chaumette 06], ce qui n'est pas toujours souhaitable pour les systèmes de vision à angle mort au centre. En effet, si l'on considère par exemple le cas où les positions initiale et finale de l'image de $\mathcal{O}$ sont miroirs l'une de l'autre, l'utilisation de $\mathbf{s_{n1}}$ conduira à une trajectoire qui passe par la zone morte comme le montre la figure 2.9. Il est donc important de déterminer un autre vecteur spécifique pour ces systèmes de vision.

En utilisant les coordonnées cylindriques de $\mathbf{s_{n1}}$, il est possible de garder l'objet dans le champ de vision en imposant un mouvement circulaire dans l'image autour de la zone morte (voir figure 2.9). C'est ainsi que le vecteur spécifique aux systèmes à angle mort au centre est donné par

$$\mathbf{s_{n2}} = \left(\rho, \theta, \frac{o_{sz}}{r}\right),$$

avec $\rho = \sqrt{(o_{sx}/r)^2 + (o_{sy}/r)^2}$ et $\theta = \arctan(o_{sy}/o_{sx})$. Dans ce cas, puisque les valeurs de o_{sy} et o_{sx} ne sont jamais toutes deux nulles (autrement l'objet est dans la zone morte du champ de vision), la valeur de θ est toujours définie. Par conséquent, il existe une relation biunivoque entre $\dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{n_2}}$ et $\dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{n_1}}$, ne dépendant que des mesures dans l'image, donnée par :

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{n_2}} = {}^{\mathbf{n_2}}\mathbf{M}_{\mathbf{n_1}} \dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{n_1}},$$

avec

$$ {}^{\mathbf{n_2}}\mathbf{M}_{\mathbf{n_1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho}\frac{o_{sx}}{r} & \frac{1}{\rho}\frac{o_{sy}}{r} & 0 \\ -\frac{1}{\rho^2}\frac{o_{sy}}{r} & \frac{1}{\rho^2}\frac{o_{sx}}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En effet, le déterminant de ${}^{\mathbf{n_2}}\mathbf{M}_{\mathbf{n_1}}$ est donné par $|{}^{\mathbf{n_2}}\mathbf{M}_{\mathbf{n_1}}| = 1/\rho$ et $\rho \neq 0$ dans le domaine de visibilité de l'objet.

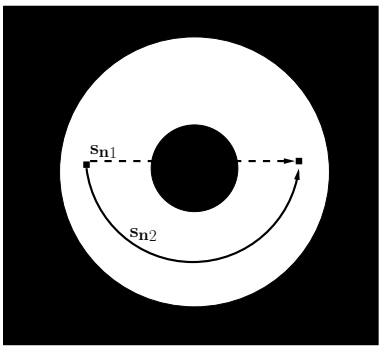


FIG. 2.9 – Trajectoire dans l'image en fonction de la paramétrisation.

On en déduit la matrice $\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n2}}}$:

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n2}}} = {}^{\mathbf{n}_2}\mathbf{M}_{\mathbf{n}_1}\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} = \begin{bmatrix} -\frac{\cos\theta}{R} & -\frac{\sin\theta}{R} & 0 & \sin\theta\frac{o_{sz}}{r} & -\cos\theta\frac{o_{sz}}{r} & 0 \\ \frac{\sin\theta}{\rho R} & \frac{-\cos\theta}{\rho R} & 0 & \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{o_{sz}}{r} & \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{o_{sz}}{r} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R} & -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.53}$$

On peut noter que $\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n2}}}$ présente un découplage des vitesses le long de l'axe optique, comme dans le cas de l'approche *partitionnée* décrite dans [Corke 01, Iwatsuki 05]. Une fois de plus, R est le seul paramètres 3D de l'objet qui intervient dans la matrice d'interaction.

Dans la suite, nous calculons les informations visuelles $\mathbf{s_{n1}}$ et $\mathbf{s_{n2}}$ en fonction de l'image catadioptrique de la sphère ci-dessous présentée.

Projection catadioptrique d'une sphère : L'image catadioptrique de $\mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$ est une ellipse. La formation de cette ellipse peut être décomposée en deux étapes (voir figure 2.10(b)) basées sur le modèle unifié de formation d'une image catadioptrique [Geyer 00]. Ce modèle est aussi valide pour la projection perspective où $\xi = 0$ comme le montre la figure 2.10(a).

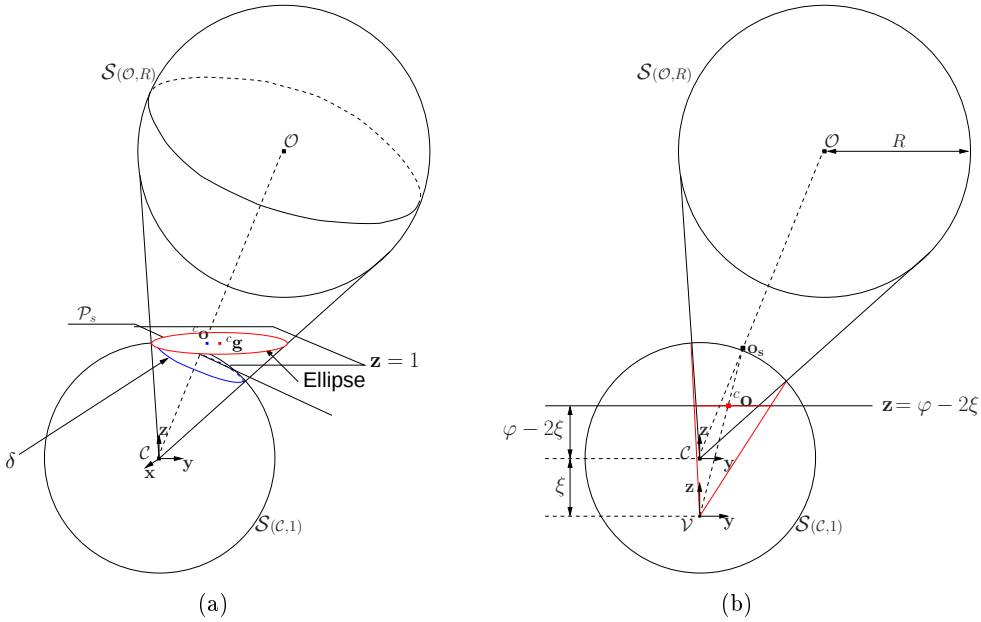


FIG. 2.10 – Projection catadioptrique d'une sphère : (a) projection perspective ($\varphi = 1, \xi = 0$), (b) cas général, vue en coupe.

La première étape est la projection sphérique de $\mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$. On obtient le dôme de contour δ défini par (2.50).

La deuxième étape consiste à projeter δ sur le plan image catadioptrique. On rappelle que les équations de projection d'un point sur le plan image catadioptrique sont données

par

$$p_x = \frac{p_{s_x}}{p_{s_z}+\xi}, \quad p_y = \frac{p_{s_y}}{p_{s_z}+\xi}.$$

En injectant ces équations dans (2.50), on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p_{s_z}+\xi} = \dfrac{O_x p_x + O_y p_y + O_z}{K_O + \xi O_z} & (2.54a) \\ p_x^2 + p_y^2 + 1 - \dfrac{2\xi}{p_{s_z}+\xi} + \dfrac{\xi^2-1}{(p_{s_z}+\xi)^2} = 0. & (2.54b) \end{cases}$$

Enfin en injectant (2.54a) dans (2.54b), on obtient l'équation de l'ellipse :

$$e_0 p_x^2 + e_1 p_y^2 + 2e_2 p_x p_y + 2e_3 p_x + 2e_4 p_y + e_5 = 0 \tag{2.55}$$

$$\text{avec} \begin{cases} e_0 = (K_O + \xi O_z)^2 + \left(\xi^2 - 1\right) O_x^2 \\ e_1 = (K_O + \xi O_z)^2 + \left(\xi^2 - 1\right) O_y^2 \\ e_2 = \left(\xi^2 - 1\right) O_x O_y \\ e_3 = O_x \left(\left(\xi^2 - 1\right) O_z - \xi \left(K_O + \xi O_z\right)\right) \\ e_4 = O_y \left(\left(\xi^2 - 1\right) O_z - \xi \left(K_O + \xi O_z\right)\right) \\ e_5 = (K_O + \xi O_z)^2 + \left(\xi^2 - 1\right) O_z^2 - 2\xi O_z \left(K_O + \xi O_z\right). \end{cases}$$

Cette équation est aussi valable dans le cas de la projection perspective, où en posant $\xi = 0$, on obtient bien (2.41).

Calcul des nouvelles informations : Après une phase de traitement d'images, il est possible de mesurer les moments $\boldsymbol{\mu} = (g_x, g_y, n_{20}, n_{11}, n_{02})$ de l'ellipse définie par (2.55). Le vecteur $\mathbf{s_{n1}}$ peut être calculé à partir des moments $\boldsymbol{\mu}$. Après quelques calculs, dont le détail est donné en Annexe C.1, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{o_{s_x}}{r} = g_x \frac{h_2}{\sqrt{h_2 + (1-\xi^2)}} \\ \frac{o_{s_y}}{r} = g_y \frac{h_2}{\sqrt{h_2 + (1-\xi^2)}} \end{cases} \tag{2.56}$$

avec $h_2 = 1/f(\boldsymbol{\mu})$, où $f(\boldsymbol{\mu}) = \frac{4n_{20}g_y^2 + 4n_{02}g_x^2 - 8n_{11}g_x g_y}{g_x^2 + g_y^2}$. Il est possible de démontrer que $f(\boldsymbol{\mu})$ est continue même lorsque $g_x = g_y = 0$ auquel cas $f(\boldsymbol{\mu}) = 4n_{20}$.

Dans le cas des systèmes paracatadioptriques (où $\xi = 1$), on a

$$\frac{o_{sz}}{r} = \frac{h_2 - \left(\frac{o_{s_x}^2}{r^2} + \frac{o_{s_y}^2}{r^2} - 1\right)}{2\sqrt{h_2}} \tag{2.57}$$

et pour tous les autres systèmes catadioptriques ($\xi \neq 1$)

$$\frac{o_{sz}}{r} = \frac{h_1 - \xi\sqrt{h_1^2 + (1-\xi^2)\left(\frac{o_{s_x}^2}{r^2} + \frac{o_{s_y}^2}{r^2} - 1\right)}}{(1-\xi^2)}, \tag{2.58}$$

où $h_1 = \sqrt{h_2 + (1 - \xi^2)}$.

Le calcul de $\mathbf{s_{n2}}$, coordonnées cylindriques de $\mathbf{s_{n1}}$, est immédiat à partir de (2.56). On obtient :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}\frac{h_2}{\sqrt{h_2+(1-\xi^2)}} \\ \theta = \arctan(g_y/g_x), \end{cases} \tag{2.59}$$

Nous verrons dans la section suivante une autre approche de modélisation et de calcul du vecteur $\mathbf{s_{n1}}$ en utilisant les moments sphériques.

Remarque 2.1 *Il est possible de calculer* $\mathbf{s}_2 = (r, \mathbf{o_s})$ *à partir de l'image catadioptrique de la sphère. Il suffit simplement de noter qu'il existe une relation biunivoque entre* $\mathbf{s_{n1}} = \frac{1}{r}\mathbf{o_s}$ *et* $\mathbf{s}_2 = (r, \mathbf{o_s})$ *car* $\|\mathbf{o_s}\| = 1$.

2.4 Moments sphériques

L'utilisation des moments sphériques peut être une solution de modélisation pour un objet tel que l'image sphérique ne présente pas de propriétés géométriques facilement exploitables. C'est le cas par exemple de l'image des primitives 3D non paramétrables. C'est aussi le cas pour l'image sphérique des cercles 3D que nous verrons dans la section suivante.

En asservissement visuel, la modélisation basée sur les moments est généralement orientée vers la recherche de combinaisons de moments invariantes à certains mouvements de la caméra. Ces combinaisons invariantes impliquent des termes nuls dans la matrice d'interaction pour les mouvements correspondants. Pour une trajectoire adéquate de la caméra dans l'espace cartésien, un des objectifs est de séparer la commande des degrés de liberté de translation de la commande des degrés de liberté de rotation. On distingue ainsi les invariants aux rotations et les invariants aux translations. Dans cette partie, nous nous intéressons à ces deux types d'invariants en utilisant les moments sphériques. Ensuite nous revisitons le cas simple de la sphère pour illustrer le lien entre les moments sphériques et l'approche développée dans la section ci-dessus. Auparavant nous présentons les moments sphériques sous l'angle d'informations visuelles en asservissement visuel. Pour plus de détails sur le sujet, le lecteur intéressé pourra se référer à [Tahri 04].

2.4.1 Moments sphériques comme informations visuelles

Ici nous définissons les moments sphériques tout en faisant le lien avec les moments 2D classiques. Ensuite nous établissons l'expression analytique des moments sphériques sur le plan image d'un système de vision centrale catadioptrique. Enfin nous présentons la matrice d'interaction associée aux moments sphériques.

Moments 2D classiques : Ce sont les moments 2D calculés sur un plan. Celui-ci peut être le plan image d'une caméra perspective ou d'un système de vision catadioptrique.

L'expression analytique d'un moment 2D classique d'ordre $i+j$, noté m_{ij}, est donnée par

$$m_{ij} = \iint_{\mathcal{R}} p_x^i p_y^j \, \mathrm{d}p_x \, \mathrm{d}p_y \tag{2.60}$$

où ${}^c\mathbf{p} = (p_x, p_y) \in \mathcal{R}$ et $\mathcal{R}$ est la surface occupée par l'image de l'objet (voir figure 2.11). Le centre de gravité $(g_x = m_{10}/m_{00}, g_y = m_{01}/m_{00})$ de l'image de l'objet correspond au centre de gravité de l'ellipse caractéristique comme le montre la figure 2.11. Cette ellipse donne une idée sur la forme et l'orientation (angle β sur la figure 2.11) de l'image de l'objet et peut être déterminée complètement à partir des moments d'ordre inférieur ou égal à deux.

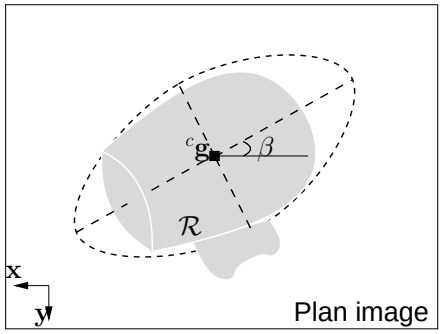


FIG. 2.11 – Ellipse caractéristique de l'image plane d'un objet.

Moments sphériques : Ce sont les moments 2D calculés sur la surface d'une sphère. L'expression analytique du moment sphérique d'ordre $i+j+k$, noté $m_{s_{ijk}}$, est donnée par :

$$m_{s_{ijk}} = \iint_{\mathcal{D}_s} p_{sx}^i p_{sy}^j p_{sz}^k \, \mathrm{d}s \tag{2.61}$$

où $\mathbf{p_s} = (p_{sx}, p_{sy}, p_{sz}) \in \mathcal{D}_s$ et $\mathcal{D}_s$ est la surface occupée par la projection sphérique de l'objet (voir figure 2.12).

Pour une image sphérique de forme complexe (voir figure 2.12), le centre de gravité, noté ${}^c\mathbf{g_d} = (g_{d_x}, g_{d_y}, g_{d_z})$, est donné par

$$\begin{cases} g_{d_x} = m_{s_{100}}/m_{s_{000}} \\ g_{d_y} = m_{s_{010}}/m_{s_{000}} \\ g_{d_z} = m_{s_{001}}/m_{s_{000}} \end{cases} \tag{2.62}$$

qui est aussi le centre de gravité de l'ellipsoïde caractéristique. Cette ellipsoïde donne un aperçu de la forme de l'image de l'objet.

Dans la suite, nous montrons comment mesurer les moments sphériques à partir des plans images catadioptrique et perspective. Tout d'abord nous considérons le cas d'un objet défini par un contour fermé. Ensuite nous considérons le cas d'un objet défini par un ensemble de points, typiquement un nuage de points.

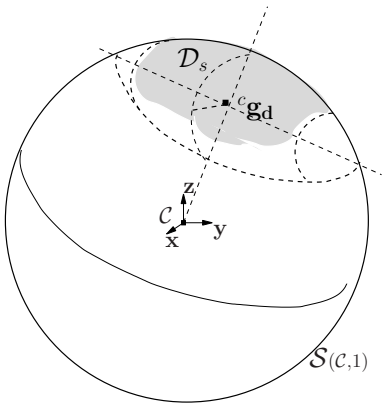


FIG. 2.12 – Ellipsoïde caractéristique de l'image sphérique de l'objet.

Objet défini par un contour fermé et système de vision centrale catadioptrique : Sur le plan image d'un système de vision catadioptrique, il est possible d'exprimer (2.61) comme suit :

$$m_{s_{ijk}} = \iint_{\mathcal{R}} p_{sx}^i p_{sy}^j p_{sz}^k \frac{(\xi + p_{s_z})^3}{\xi p_{s_z} + 1} \, \mathrm{d}p_x \, \mathrm{d}p_y, \tag{2.63}$$

où $\mathcal{R}$ est la surface occupée par l'image de l'objet sur le plan image catadioptrique et

$$p_{s_x} = \frac{\xi + \lambda_\xi}{p_x^2 + p_y^2 + 1} p_x, \; p_{s_y} = \frac{\xi + \lambda_\xi}{p_x^2 + p_y^2 + 1} p_y, \text{ et } p_{s_z} = \frac{\xi + \lambda_\xi}{p_x^2 + p_y^2 + 1} - \xi,$$

avec $\lambda_\xi = \sqrt{1 + (1 - \xi^2)(p_x^2 + p_y^2)}$. Le terme

$$\frac{(\xi + p_{s_z})^3}{\xi p_{s_z} + 1}$$

dans (2.63) décrit le rapport entre les surfaces infinitésimales sphérique $\mathrm{d}s$ et plane $\mathrm{d}p_x \mathrm{d}p_y$ indiquées sur la figure 2.13. Le détail du passage de (2.61) à (2.63) est donné en Annexe D.1.

Lorsque $\xi = 0$, (2.63) correspond exactement, comme prévu, au calcul obtenu pour les caméras perspectives dans [Tahri 04] :

$$m_{s_{ijk}} = \iint_{\mathcal{R}} p_{sx}^i p_{sy}^j p_{s_z}^{k+3} \, \mathrm{d}p_x \, \mathrm{d}p_y. \tag{2.64}$$

Objet défini par un nuage de points : Dans le cas d'un objet défini par un nuage de N points, le calcul des moments sphériques est immédiat à partir de (2.61). On obtient

$$m_{s_{ijk}} = \sum_{n=1}^{N} p_{n_{s_x}}^i p_{n_{s_y}}^j p_{n_{s_z}}^k, \tag{2.65}$$

où il n'y a plus de terme prenant en compte la relation entre les surfaces sphérique et plane.

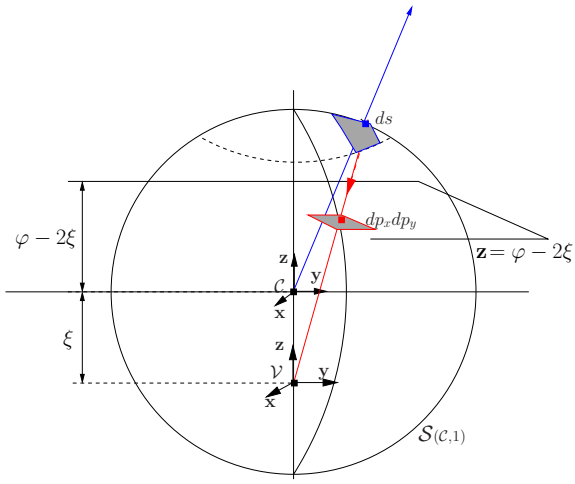


FIG. 2.13 – Relation entre les éléments de surfaces sphérique et plane.

Dans la suite nous présentons l'expression des matrices d'interaction associées aux moments sphériques.

Matrice d'interaction pour un objet défini par un contour fermé : Sur la sphère de projection, il est possible d'exprimer (2.61) comme suit

$$m_{s_{ijk}} = \iint_{\mathcal{C}_2} (\sin\phi\cos\theta)^i (\sin\phi\sin\theta)^j (\cos\phi)^k \sin\phi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi, \tag{2.66}$$

avec $\sin\phi\cos\theta = p_{s_x}$, $\sin\phi\sin\theta = p_{s_y}$, $\cos\phi = p_{s_z}$, et $\mathcal{C}_2 = [\theta_{min}(\phi), \theta_{max}(\phi)] \times [\phi_{min}, \phi_{max}]$ (voir figure 2.14). Le détail du calcul (2.66) est donné en Annexe D.1.

La variation temporelle de $m_{s_{ijk}}$ peut être calculée sur la sphère de projection en utilisant (2.66). D'après le calcul général de la variation temporelle de la mesure d'un moment présentée dans [Chaumette 04], on a :

$$m_{s_{ijk}} = \iint_{\mathcal{C}_2} \left(\frac{\partial h_{ijk}}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial h_{ijk}}{\partial \phi}\dot{\phi} + h_{ijk}\left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \phi} \right) \right) \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi, \tag{2.67}$$

où $h_{ijk} = (\sin\phi\cos\theta)^i (\sin\phi\sin\theta)^j (\cos\phi)^k \sin\phi$ et $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, $\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial\phi}$ s'obtiennent à partir de l'expression (2.15) de la matrice d'interaction associée aux coordonnées sphériques du point. Partant de (2.67), on obtient après quelques développements

$$\mathbf{L}_{m_{s_{ijk}}} = \left[\begin{array}{cccccc} m_{s_{ijk},v_x} & m_{s_{ijk},v_y} & m_{s_{ijk},v_z} & m_{s_{ijk},\omega_x} & m_{s_{ijk},\omega_y} & m_{s_{ijk},\omega_z} \end{array} \right] \tag{2.68}$$

où

$$\begin{cases} m_{s_{ijk},v_x} &= n_x(\lambda_{ijk} m_{s_{i+2jk}} - (i+1) m_{s_{ijk}}) + n_y(\lambda_{ijk} m_{s_{i+1j+1k}} - i m_{s_{i-1j+1k}}) \\ & \quad + n_z(\lambda_{ijk} m_{s_{i+1jk+1}} - i m_{s_{i-1jk+1}}) \\ m_{s_{ijk},v_y} &= n_x(\lambda_{ijk} m_{s_{i+1j+1k}} - j m_{s_{i+1j-1k}}) + n_y(\lambda_{ijk} m_{s_{ij+2k}} - (j+1) m_{s_{ijk}}) \\ & \quad + n_z(\lambda_{ijk} m_{s_{ij+1k+1}} - j m_{s_{ij-1k+1}}) \\ m_{s_{ijk},v_z} &= n_x(\lambda_{ijk} m_{s_{i+1jk+1}} - k m_{s_{i+1jk-1}}) + n_y(\lambda_{ijk} m_{s_{ij+1k+1}} - k m_{s_{ij+1k-1}}) \\ & \quad + n_z(\lambda_{ijk} m_{s_{ijk+2}} - (k+1) m_{s_{ijk}}) \\ m_{s_{ijk},\omega_x} &= j m_{s_{ij-1k+1}} - k m_{s_{ij+1k-1}} \\ m_{s_{ijk},\omega_y} &= k m_{s_{i+1jk-1}} - i m_{s_{i-1jk+1}} \\ m_{s_{ijk},\omega_z} &= i m_{s_{i-1j+1k}} - j m_{s_{i+1j-1k}} \end{cases}$$

où $\lambda_{ijk} = i + j + k + 3$ et $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ est le vecteur des paramètres 3D (inconnus) décrivant la surface des limbes $1/\|{}^c\mathbf{P}\| = n_x p_{s_x} + n_y p_{s_y} + n_z p_{s_z}$ sur l'objet (voir figure 2.14).

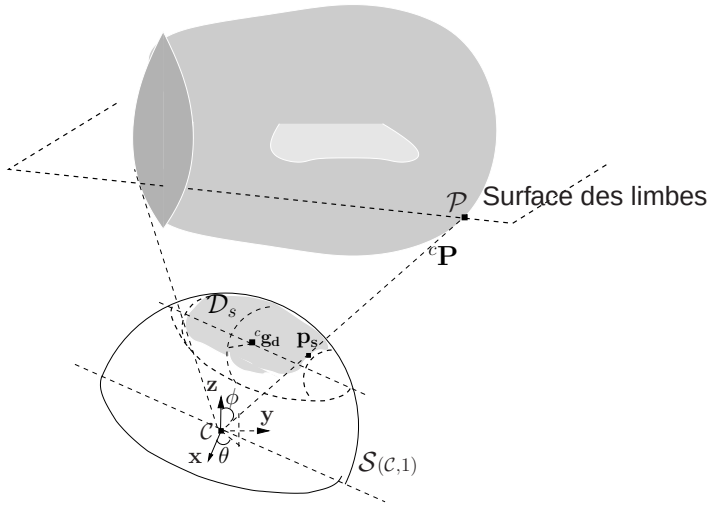


FIG. 2.14 – Projection sphérique d'un objet : paramétrisation (ϕ, θ) d'un point $\mathbf{p_s}$ de $\mathcal{D}_s$ et surface des limbes.

Bien entendu la matrice d'interaction (2.68) obtenue à partir de l'expression (2.66) des moments en coordonnées sphériques correspond exactement à celle obtenue à partir de l'expression (2.64) des moments en coordonnées cartésiennes sur le plan image perspective dans [Tahri 04].

Matrice d'interaction pour un objet défini par un nuage de points : Dans le cas où l'image de l'objet est un nuage de points, la différentielle de (2.65) par rapport

au temps est donnée par

$$m_{s_{ijk}} = \sum_{n=0}^{N} (ip_{n_{s_x}}^{i-1} p_{n_{s_y}}^{j} p_{n_{s_z}}^{k} \dot{p}_{n_{s_x}} + jp_{n_{s_x}}^{i} p_{n_{s_y}}^{j-1} p_{n_{s_z}}^{k} \dot{p}_{n_{s_y}} + kp_{n_{s_x}}^{i} p_{n_{s_y}}^{j} p_{n_{s_z}}^{k-1} \dot{p}_{n_{s_z}}). \tag{2.69}$$

Partant de (2.69), en substituant $\dot{p}_{n_{s_x}}$, $\dot{p}_{n_{s_y}}$ et $\dot{p}_{n_{s_z}}$ par leurs expressions déduites de (2.11), on obtient la matrice d'interaction donnée dans [Tahri 04] :

$$\mathbf{L}_{m_{s_{ijk}}} = \left[\begin{array}{cccccc} m_{s_{ijk},v_x} & m_{s_{ijk},v_y} & m_{s_{ijk},v_z} & m_{s_{ijk},\omega_x} & m_{s_{ijk},\omega_y} & m_{s_{ijk},\omega_z} \end{array} \right] \tag{2.70}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} m_{s_{ijk},v_x} & = & n_x(\lambda_{ijk} m_{s_{i+2jk}} - i m_{s_{ijk}}) + n_y(\lambda_{ijk} m_{s_{i+1j+1k}} - i m_{s_{i-1j+1k}}) \\ & & + n_z(\lambda_{ijk} m_{s_{i+1jk+1}} - i m_{s_{i-1jk+1}}) \\ m_{s_{ijk},v_y} & = & n_x(\lambda_{ijk} m_{s_{i+1j+1k}} - j m_{s_{i+1j-1k}}) + n_y(\lambda_{ijk} m_{s_{ij+2k}} - j m_{s_{ijk}}) \\ & & + n_z(\lambda_{ijk} m_{s_{ij+1k+1}} - j m_{s_{ij-1k+1}}) \\ m_{s_{ijk},v_z} & = & n_x(\lambda_{ijk} m_{s_{i+1jk+1}} - k m_{s_{i+1jk-1}}) + n_y(\lambda_{ijk} m_{s_{ij+1k+1}} - k m_{s_{ij+1k-1}}) \\ & & + n_z(\lambda_{ijk} m_{s_{ijk+2}} - k m_{s_{ijk}}) \\ m_{s_{ijk},\omega_x} & = & j m_{s_{ij-1k+1}} - k m_{s_{ij+1k-1}} \\ m_{s_{ijk},\omega_y} & = & k m_{s_{i+1jk-1}} - i m_{s_{i-1jk+1}} \\ m_{s_{ijk},\omega_z} & = & i m_{s_{i-1j+1k}} - j m_{s_{i+1j-1k}} \end{array} \right.$$

où $\lambda_{ijk} = i + j + k$.

De manière générale, que l'objet soit défini par un contour fermé ou par un nuage de points, la matrice d'interaction associée au moment d'ordre $i + j + k$ est donnée par :

$$\mathbf{L}_{m_{s_{ijk}}} = \left[\begin{array}{cccccc} m_{s_{ijk},v_x} & m_{s_{ijk},v_y} & m_{s_{ijk},v_z} & m_{s_{ijk},\omega_x} & m_{s_{ijk},\omega_y} & m_{s_{ijk},\omega_z} \end{array} \right] \tag{2.71}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} m_{s_{ijk},v_x} & = & n_x(\lambda m_{s_{i+2jk}} - \alpha m_{s_{ijk}}) + n_y(\lambda m_{s_{i+1j+1k}} - i m_{s_{i-1j+1k}}) \\ & & + n_z(\lambda m_{s_{i+1jk+1}} - i m_{s_{i-1jk+1}}) \\ m_{s_{ijk},v_y} & = & n_x(\lambda m_{s_{i+1j+1k}} - j m_{s_{i+1j-1k}}) + n_y(\lambda m_{s_{ij+2k}} - \beta m_{s_{ijk}}) \\ & & + n_z(\lambda m_{s_{ij+1k+1}} - j m_{s_{ij-1k+1}}) \\ m_{s_{ijk},v_z} & = & n_x(\lambda m_{s_{i+1jk+1}} - k m_{s_{i+1jk-1}}) + n_y(\lambda m_{s_{ij+1k+1}} - k m_{s_{ij+1k-1}}) \\ & & + n_z(\lambda m_{s_{ijk+2}} - \gamma m_{s_{ijk}}) \\ m_{s_{ijk},\omega_x} & = & j m_{s_{ij-1k+1}} - k m_{s_{ij+1k-1}} \\ m_{s_{ijk},\omega_y} & = & k m_{s_{i+1jk-1}} - i m_{s_{i-1jk+1}} \\ m_{s_{ijk},\omega_z} & = & i m_{s_{i-1j+1k}} - j m_{s_{i+1j-1k}} \end{array} \right.$$

où $\alpha = i + 1$, $\beta = j + 1$, $\gamma = k + 1$, $\lambda = i + j + k + 3$ pour un objet défini par un contour fermé et $\alpha = i$, $\beta = j$, $\gamma = k$, $\lambda = i + j + k$ pour un nuage de points.

Pour un objet quelconque, l'objectif est d'exploiter les moments de sa projection sphérique pour s'approcher d'une paramétrisation $\mathbf{s}$ reliée de manière biunivoque à la pose du robot. Plus précisément, le vecteur $\mathbf{s}$ idéal, construit sur la base d'une combinaison de moments, devrait si possible ressembler au mieux à ${}^{c}\mathbf{t}_o$, ${}^{c*}\mathbf{t}_c$ ou $\theta\mathbf{u}$ afin de contrôler la trajectoire cartésienne du robot.

Le tableau 2.3 présente les formes souhaitées de matrices d'interaction ainsi que les propriétés recherchées des combinaisons de moments sphériques.

Degrés de liberté contrôlés	Paramétrisation équivalente	Matrice d'interaction souhaitée	Combinaison de moments
Translation	${}^{c*}\mathbf{t}_c$	$\mathbf{L_s} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_v & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	Invariants aux mouvements de rotation
Translation	${}^{c}\mathbf{t}_o$	$\mathbf{L_s} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_3 & [\mathbf{s}]_\times \end{bmatrix}$	Relation linéaire avec les vitesses de translation
Rotation	$\theta\mathbf{u}$	$\mathbf{L_s} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L}_\omega \end{bmatrix}$	Invariants aux mouvements de translation

TAB. 2.3 – Combinaisons recherchées de moments sphériques.

2.4.2 Invariants aux mouvements de rotation

Il s'agit de combinaisons de moments sphériques qui restent constantes après des mouvements de rotation de la caméra et qui permettent de contrôler les degrés de liberté de translation. Ces combinaisons correspondent intuitivement à des distances (ou longueurs) comme nous le montrons dans la suite. Dans cette partie, nous évoquons aussi les combinaisons qui présentent une relation linéaire avec les vitesses de translation comme autre alternative pour contrôler les mouvements de translation.

Interprétation possible des combinaisons de moments 2D invariantes : En utilisant les moments d'ordre deux d'une ellipse, sa matrice d'inertie est donnée par

$$\mathbf{M_c} = \begin{bmatrix} m_{20} & m_{11} \\ m_{11} & m_{02} \end{bmatrix}.$$

La décomposition en valeurs propres de $\mathbf{M_c}$ est donnée par :

$$\mathbf{M_c} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^\top + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^\top, \tag{2.72}$$

où λ_1 (respectivement λ_2) est la valeur propre associée à $\mathbf{v}_1$ (respectivement $\mathbf{v}_2$).

Les valeurs propres de $\mathbf{M_c}$ sont les solutions de l'équation du second degré

$$|\mathbf{M_c} - \lambda \mathbf{I_2}| = \lambda^2 - (m_{20} + m_{02})\lambda + (m_{20}m_{02} - m_{11}^2) = 0. \tag{2.73}$$

Après quelques développements, on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1 = \left(m_{20} + m_{02} + \sqrt{(m_{20} - m_{02})^2 + 4m_{11}^2}\right)/2 \\ \lambda_2 = \left(m_{20} + m_{02} - \sqrt{(m_{20} - m_{02})^2 + 4m_{11}^2}\right)/2. \end{cases} \tag{2.74}$$

Puisque les vecteurs propres vérifient la relation $\mathbf{M_c}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ avec $i = 1, 2$, partant de (2.74), on déduit immédiatement $\mathbf{v}_1 = (-m_{11}\ ,\ \left(m_{20} - m_{02} - \sqrt{(m_{20} - m_{02})^2 + 4m_{11}^2}\right)/2)$ et $\mathbf{v}_2 = (-m_{11}\ ,\ \left(m_{20} - m_{02} + \sqrt{(m_{20} - m_{02})^2 + 4m_{11}^2}\right)/2)$. On vérifie aisément que $\mathbf{v}_1^\top \mathbf{v}_2 = 0$.

Une rotation 2D dans le plan image (catadioptrique ou perspective) affecte uniquement les vecteurs propres $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ et laisse invariantes les valeurs propres λ_1 et λ_2. Par conséquent, toute combinaison de λ_1 et λ_2 est invariante aux mouvements de rotation 2D. En particulier la trace

$$\text{Trace}(\mathbf{M_c}) = \lambda_1 + \lambda_2 = m_{20} + m_{20},$$

et le déterminant

$$|\mathbf{M_c}| = \lambda_1 \lambda_2 = m_{20}m_{02} - m_{11}^2.$$

Ces deux invariants correspondent à deux exemples présentés dans [Hu 62], que l'on peut obtenir en utilisant la méthode générale décrite dans [Tahri 04]. L'originalité de cette dernière méthode repose sur le fait que celle-ci permet de déterminer des invariants non redondants sous la forme d'une généralisation des formes quadratiques quel que soit l'ordre $i + j$ donné. De plus cette méthode s'applique aussi aux moments sphériques.

Interprétation possible des combinaisons de moments sphériques invariantes : La matrice d'inertie, obtenue à partir des moments sphériques du second ordre, est donnée par

$$\mathbf{M_s} = \begin{bmatrix} m_{s_{200}} & m_{s_{110}} & m_{s_{101}} \\ m_{s_{110}} & m_{s_{020}} & m_{s_{011}} \\ m_{s_{101}} & m_{s_{011}} & m_{s_{002}} \end{bmatrix}.$$

Celle-ci peut se décomposer en valeurs propres comme suit :

$$\mathbf{M_s} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^\top + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^\top + \lambda_3 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^\top, \tag{2.75}$$

où $\lambda_i,\ i = 1, 2, 3$ est la valeur propre associée à $\mathbf{v}_i$. De manière générale, il est difficile de déterminer les valeurs et vecteurs propres de manière analytique. Nous le montrons dans la suite.

La décomposition en valeurs propres de $\mathbf{M_s}$ est décrite en (2.75). Les valeurs propres de $\mathbf{M_s}$ sont les solutions de l'équation de degré trois ci-dessous :

$$|\mathbf{M_s} - \lambda \mathbf{I_3}| = \lambda^3 - \mathrm{Trace}(\mathbf{M_s})\lambda^2 + (|\mathbf{M_{s,12}}| + |\mathbf{M_{s,23}}| + |\mathbf{M_{s,13}}|)\lambda - |\mathbf{M_s}| = 0, \quad (2.76)$$

où les expressions de $\mathrm{Trace}(\mathbf{M_s})$, $|\mathbf{M_{s,12}}| + |\mathbf{M_{s,23}}| + |\mathbf{M_{s,13}}|$ et $|\mathbf{M_s}|$ sont données respectivement par (2.77), (2.78) et (2.79). Le calcul des solutions analytiques d'une équation générale du troisième degré est assez complexe. C'est la raison pour laquelle il nous est difficile de déterminer analytiquement les vecteurs propres ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$) et les valeurs propres (λ_1, λ_2 et λ_3) de $\mathbf{M_s}$.

Une rotation 3D affecte les vecteurs propres $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$, et laisse inchangées les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3. Ces valeurs propres peuvent être interprétées comme des longueurs (ou distances) en 3D et sont donc invariantes aux mouvements de rotation 3D de la caméra. Nous le vérifierons pour le cas simple d'une sphère en section 2.4.4 où nous donnerons l'expression analytique de λ_1, λ_2 et λ_3. Ainsi toute combinaison obtenue à partir de λ_1, λ_2 et λ_3 est invariante aux rotations de la caméra. C'est le cas par exemple de

$$\mathrm{Trace}(\mathbf{M_s}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = m_{s_{200}} + m_{s_{020}} + m_{s_{002}}, \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{M_s}| &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ &= m_{s_{200}}m_{s_{020}}m_{s_{002}} - m_{s_{200}}m_{s_{011}}^2 - m_{s_{002}}m_{s_{110}}^2 - m_{s_{020}}m_{s_{101}}^2 \\ &\quad + 2m_{s_{110}}m_{s_{101}}m_{s_{011}}, \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{M_{s,12}}| + |\mathbf{M_{s,23}}| + |\mathbf{M_{s,13}}| &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 \\ &= m_{s_{200}}m_{s_{020}} - m_{s_{110}}^2 + m_{s_{020}}m_{s_{002}} - m_{s_{011}}^2 \\ &\quad + m_{s_{200}}m_{s_{002}} - m_{s_{101}}^2. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Dans le dernier cas, $\mathbf{M_{s,ij}}$ correspond à la sous-matrice tirée de l'intersection entre les lignes (i,j) et les colonnes (i,j) de $\mathbf{M_s}$. Par exemple

$$\mathbf{M_{s,12}} = \begin{bmatrix} m_{s_{200}} & m_{s_{110}} \\ m_{s_{110}} & m_{s_{020}} \end{bmatrix}.$$

Notons au passage que $|\mathbf{M_{s,12}}|$ est invariant à une rotation autour de l'axe $\mathbf{z}$, $|\mathbf{M_{s,23}}|$ est invariant à une rotation autour de l'axe $\mathbf{x}$ et $|\mathbf{M_{s,13}}|$ est invariant à une rotation autour de l'axe $\mathbf{y}$.

Dans la suite nous posons $\iota_1 = \mathrm{Trace}(\mathbf{M_s})$, $\iota_2 = |\mathbf{M_s}|$ et $\iota_3 = |\mathbf{M_{s,12}}| + |\mathbf{M_{s,23}}| + |\mathbf{M_{s,13}}|$. Les trois invariants ι_1, ι_2 et ι_3 ont déjà été présentés dans [Tahri 04].

Discussion : En vision perspective, pour un objet plan, des observations numériques ont montré que les moments sphériques invariants aux rotations sont plus sensibles à la vitesse de translation le long de l'axe optique que par rapport aux autres axes [Tahri 04]. Cette remarque peut s'expliquer par le fait qu'en vision perspective le champ de vue est dirigé selon l'axe $\mathbf{z}$. En revanche, en vision omnidirectionnelle (sur la sphère), la sensibilité des invariants aux rotations dépend de la position de l'objet par rapport

à la caméra. De plus, si l'objet est défini par un nuage de points, cette sensibilité dépend aussi de la position des points les uns par rapport aux autres. Par exemple, si le champ de vue est dirigé suivant l'axe $\mathbf{x}$, les invariants auront tendance à être plus sensibles à la translation le long de cet axe. Si on considère que l'objet est un ensemble de quatre points coplanaires et non symétriques de coordonnées ${}^c\mathbf{P}_0 = (0.3, 0.1, 0.1)$, ${}^c\mathbf{P}_1 = (0.3, 0.08, -0.05)$, ${}^c\mathbf{P}_2 = (0.3, -0.45, -0.35)$, ${}^c\mathbf{P}_3 = (0.3, -0.25, 0.01)$ (voir figure 2.15), les matrices d'interaction de ι_2 et ι_3 (la valeur de ι_1 est une constante égale au nombre de points donc la matrice d'interaction associée à ι_1 est nulle), à la pose désirée, sont données par :

$$\mathbf{L}_{i_2} = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.51 & -0.25 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.80}$$

et

$$\mathbf{L}_{i_3} = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.36 & -0.15 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.81}$$

Dans les matrices d'interaction (2.80) et (2.81), les termes en $\boldsymbol{v}_x$ ont une valeur plus grande par rapport aux autres composantes. En effet, à cette pose particulière de l'objet, les paramètres de la surface des limbes sont dans une configuration telle que $n_x \neq 0$, $n_y = 0$ et $n_z = 0$. Cette configuration favorise une grande valeur sur la composante en $\boldsymbol{v}_x$ de la matrice d'interaction.

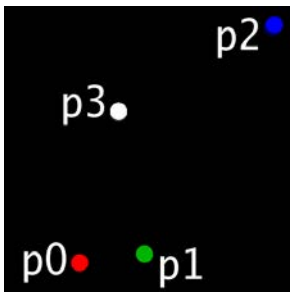


FIG. 2.15 – Nuages de points de forme colanaire symétrique.

Notons qu'il existe d'autres invariants qui ne peuvent pas être obtenus à partir de la méthode basée sur les formes quadratiques qui est utilisée dans [Tahri 04]. Par exemple

$$\|{}^c\mathbf{g_d}\| = \left(\sqrt{m_{s_{100}}^2 + m_{s_{010}}^2 + m_{s_{001}}^2}\right) / m_{s_{000}}$$

est un invariant aux rotations qui ne ressemble pas à une forme quadratique. Cet invariant correspond à la norme d'un vecteur dans l'espace 3D, tout comme la distance entre deux points sur la sphère donnée en (2.17).

D'autres solutions pour contrôler les degrés de liberté de translation existent (voir tableau 2.3). On peut par exemple utiliser le centre de gravité $\mathbf{s} = {}^c\mathbf{g_d}$. La matrice d'interaction associée est telle que

$$\mathbf{L_s} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\upsilon & [{}^c\mathbf{g_d}]_\times \end{bmatrix}.$$

Partant de l'expression des composantes de ${}^c\mathbf{g_d}$ donnée par (2.62), la matrice d'interaction de ${}^c\mathbf{g_d}$, pour un objet défini par un contour fermé, s'obtient en calculant les

matrices d'interaction associées à $m_{s_{000}}$, $m_{s_{100}}$, $m_{s_{010}}$ et $m_{s_{001}}$ déduites de (2.68). On obtient

$$\mathbf{L}_{g_{d_x}} = \begin{bmatrix} n_x(4\eta_{s_{300}} - 3\eta_{s_{200}} g_{d_x} - g_{d_x}) + n_y(4\eta_{s_{210}} - 3\eta_{s_{110}} g_{d_x} - g_{d_y}) + n_z(4\eta_{s_{201}} - 3\eta_{s_{101}} g_{d_x} - g_{d_z}) \\ n_x(4\eta_{s_{210}} - 3\eta_{s_{110}} g_{d_x}) + n_y(4\eta_{s_{120}} - 3\eta_{s_{020}} g_{d_x}) + n_z(4\eta_{s_{111}} - 3\eta_{s_{011}} g_{d_x}) \\ n_x(4\eta_{s_{201}} - 3\eta_{s_{101}} g_{d_x}) + n_y(4\eta_{s_{111}} - 3\eta_{s_{011}} g_{d_x}) + n_z(4\eta_{s_{102}} - 3\eta_{s_{002}} g_{d_x}) \\ 0 \\ -g_{d_z} \\ g_{d_y} \end{bmatrix}^\top, \tag{2.82}$$

$$\mathbf{L}_{g_{d_y}} = \begin{bmatrix} n_x(4\eta_{s_{210}} - 3\eta_{s_{200}} g_{d_y}) + n_y(4\eta_{s_{120}} - 3\eta_{s_{110}} g_{d_y}) + n_z(4\eta_{s_{111}} - 3\eta_{s_{101}} g_{d_y}) \\ n_x(4\eta_{s_{120}} - 3\eta_{s_{110}} g_{d_y} - g_{d_x}) + n_y(4\eta_{s_{030}} - 3\eta_{s_{020}} g_{d_y} - g_{d_y}) + n_z(4\eta_{s_{021}} - 3\eta_{s_{011}} g_{d_y} - g_{d_z}) \\ n_x(4\eta_{s_{111}} - 3\eta_{s_{101}} g_{d_y}) + n_y(4\eta_{s_{021}} - 3\eta_{s_{011}} g_{d_y}) + n_z(4\eta_{s_{012}} - 3\eta_{s_{002}} g_{d_y}) \\ g_{d_z} \\ 0 \\ -g_{d_x} \end{bmatrix}^\top \tag{2.83}$$

et

$$\mathbf{L}_{g_{d_z}} = \begin{bmatrix} n_x(4\eta_{s_{201}} - 3\eta_{s_{200}} g_{d_z}) + n_y(4\eta_{s_{111}} - 3\eta_{s_{110}} g_{d_z}) + n_z(4\eta_{s_{102}} - 3\eta_{s_{101}} g_{d_z}) \\ n_x(4\eta_{s_{111}} - 3\eta_{s_{110}} g_{d_z}) + n_y(4\eta_{s_{021}} - 3\eta_{s_{020}} g_{d_z}) + n_z(4\eta_{s_{012}} - 3\eta_{s_{011}} g_{d_z}) \\ n_x(4\eta_{s_{102}} - 3\eta_{s_{101}} g_{d_z} - g_{d_x}) + n_y(4\eta_{s_{012}} - 3\eta_{s_{011}} g_{d_z} - g_{d_y}) + n_z(4\eta_{s_{003}} - 3\eta_{s_{002}} g_{d_z} - g_{d_z}) \\ -g_{d_y} \\ g_{d_x} \\ 0 \end{bmatrix}^\top, \tag{2.84}$$

où $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ représente les paramètres de la surface des limbes et

$$\eta_{s_{ijk}} = m_{s_{ijk}} / m_{s_{000}}.$$

On peut aussi imaginer un vecteur d'informations visuelles de la forme $\mathbf{s} = \eta\ {}^c\mathbf{g_d}$ où η est un facteur de normalisation judicieusement choisi afin d'avoir

$$\mathbf{L_s} = \begin{bmatrix} \kappa\ \mathbf{I}_3 & [\mathbf{s}]_\times \end{bmatrix},$$

où κ est une constante. Nous verrons un choix de η pour le cas simple de la sphère en section 2.4.4.

2.4.3 Invariants aux mouvements de translation

Il s'agit de combinaisons de moments sphériques qui restent inchangées à la suite de mouvements de translation de la caméra et qui permettent de contrôler les degrés de liberté de rotation. L'objectif est d'obtenir une matrice d'interaction où les termes nuls sont sur les composantes υ_x, υ_y et υ_z. Cet objectif est en général difficile à atteindre comme le révèlent les études que nous présentons ci-dessous et qui ont été ménées dans le cadre de la vision perspective avec les moments 2D classiques.

Moments 2D classiques : En vision perspective, les moments centrés sont invariants aux mouvements de translation en $\mathbf{x}$ et en $\mathbf{y}$ si le plan de l'objet ou sa surface des limbes est parallèle au plan image [Tahri 04, Chaumette 04].

Connaissant ${}^c\mathbf{g} = (g_x, g_y)$, il est possible de calculer les moments centrés d'ordre $i+j$, noté μ_{ij}, dont l'expression est donnée par

$$\mu_{ij} = \iint_R (p_x - g_x)^i (p_y - g_y)^j \, \mathrm{d}p_x \, \mathrm{d}p_y. \tag{2.85}$$

Supposons que le plan de la caméra perspective est parallèle au plan de l'objet (voir figure 2.16). Dans ce cas le plan de l'objet est décrit dans le repère du centre de projection par $P_z = 1/n_z$ (la valeur de n_z est constante) pour tout point ${}^c\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ de l'objet.

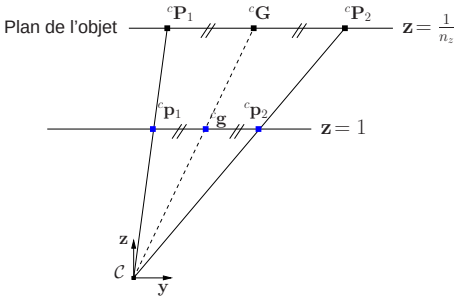


FIG. 2.16 – Homothétie en vision perspective lorsque les plans de l'image et de l'objet sont parallèles.

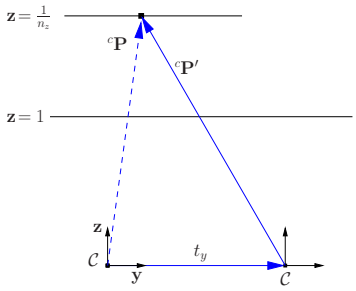


FIG. 2.17 – Mouvement de translation en $\mathbf{y}$.

Si la caméra se déplace de (t_x, t_y) alors, dans le repère $\mathcal{F}_c$, un point ${}^c\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ de l'objet se déplace en ${}^c\mathbf{P}' = (P'_x, P'_y, P'_z)$ tel que : $P'_x = P_x - t_x$, $P'_y = P_y - t_y$ et $P'_z = P_z$ (voir figure 2.17 pour le cas d'un mouvement suivant l'axe $\mathbf{y}$). Sur le plan image perspective, on a

$$p'_x = \frac{P'_x}{P'_z} = \frac{P_x - t_x}{P_z} = p_x - \frac{t_x}{P_z} \tag{2.86}$$

et

$$p'_y = \frac{P'_y}{P'_z} = \frac{P_y - t_y}{P_z} = p_y - \frac{t_y}{P_z}. \tag{2.87}$$

Puisque, indépendamment du mouvement de la caméra, le plan de l'objet reste à une profondeur $\mathbf{z} = 1/n_z$ constante du plan image, partant de (2.86) et (2.87), on a

$$p'_x = p_x - t_x n_z, \; p'_y = p_y - t_y n_z. \tag{2.88}$$

Puisque les plans image et objet sont parallèles, l'image perspective du centre de gravité de l'objet est le centre de gravité de l'image perspective de l'objet (voir figure 2.16). On a donc aussi

$$g'_x = g_x - t_x n_z, \; g'_y = g_y - t_y n_z. \tag{2.89}$$

L'expression des moments centrés après la translation sur le plan $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est donnée par

$$\mu'_{ij} = \iint_R (p'_x - g'_x)^i (p'_y - g'_y)^j \, \mathrm{d}p'_x \, \mathrm{d}p'_y. \tag{2.90}$$

En substituant dans (2.90) p'_x, p'_y, g'_x et g'_y par leurs expressions données par (2.88) et (2.89), on obtient $\mu'_{ij} = \mu_{ij}$ qui prouve ainsi qu'en vision perspective les moments centrés sont invariants aux mouvements de translations en $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$.

Cette propriété d'invariance se vérifie aisément à travers l'expression de la matrice d'interaction. Celle-ci est donnée en vision perspective pour un moment centré d'ordre $i + j$ par [Tahri 04, Chaumette 04]

$$\mathbf{L}_{\mu_{ij}} = \left[\begin{array}{cccccc} \mu_{ij,v_x} & \mu_{ij,v_y} & \mu_{ij,v_z} & \mu_{ij,\omega_x} & \mu_{ij,\omega_y} & \mu_{ij,\omega_z} \end{array} \right], \tag{2.91}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mu_{ij,v_x} & = & -(i+1) n_x \mu_{ij} - i n_y \mu_{i-1j+1} \\ \mu_{ij,v_y} & = & -j n_x \mu_{i+1j-1} - (j+1) n_y \mu_{ij} \\ \mu_{ij,v_z} & = & -n_x \mu_{ij,\omega_y} + n_y \mu_{ij,\omega_x} + (i+j+2) n_z \mu_{ij} \\ \mu_{ij,\omega_x} & = & (i+j+3) \mu_{ij+1} + i g_x \mu_{i-1j+1} \\ & & + (i+2j+3) g_y \mu_{ij} - 4 i n_{11} \mu_{i-1j} - 4 j n_{02} \mu_{ij-1} \\ \mu_{ij,\omega_y} & = & -(i+j+3) \mu_{i+1j} - (2i+j+3) g_x \mu_{ij} \\ & & - j g_y \mu_{i+1j-1} + 4 i n_{20} \mu_{i-1j} + 4 j n_{11} \mu_{ij-1} \\ \mu_{ij,\omega_z} & = & i \mu_{i-1j+1} - j \mu_{i+1j-1}, \end{array} \right.$$

où $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ est le vecteur des paramètres 3D de la surface des limbes. Lorsque le plan de l'image et la surface des limbes sont parallèles, i.e. $n_x = n_y = 0$, les composantes en translation en $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $\mathbf{L}_{\mu_{ij}}$ sont telles que

$$\mu_{ij,v_x} = \mu_{ij,v_y} = 0.$$

En utilisant les invariants aux mouvements de translation dans le plan $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et les invariants aux changements d'échelle (les changements d'échelle sont principalement dus aux translations de la caméra le long de l'axe optique), les combinaisons invariantes aux translations en $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ ont été obtenues pour les objets plans en vision perspective dans [Tahri 04]. Comme exemple, nous pouvons citer

$$\mathbf{s} = \frac{\mu_{20}\mu_{02} - \mu_{11}^2}{(\mu_{20} - \mu_{02})^2 + 4\mu_{11}^2}.$$

Mais, pour chacune des combinaisons invariantes aux translations en $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$, la matrice d'interaction associée présente le découplage recherché (composantes nulles sur les termes de translation de la matrice d'interaction) uniquement dans le cas où le plan de l'objet est parallèle à celui de la caméra, i.e. dans le cas où il existe une homothétie entre les plans de l'objet et de la caméra [Tahri 04]. C'est pourquoi une rotation virtuelle a été introduite dans [Tahri 04].

Une autre solution pour déterminer les invariants aux mouvements de translations en vision perspective consiste à rechercher des invariants aux mouvements affines dans l'image. En effet, ceux-ci correspondent aux mouvements de translation de la caméra, quelle que soit l'orientation du plan de l'objet et au mouvement de rotation de la caméra autour de l'axe optique. Un exemple de ce type d'invariant est donné par [Tahri 04] :

$$\mathbf{s} = \frac{\mu_{20}\mu_{02} - \mu_{11}^2}{m_{00}^4}. \tag{2.92}$$

Quelle que soit l'orientation du plan de l'objet, la matrice d'interaction $\mathbf{L_s}$ est de la forme [Bulteau 07]

$$\mathbf{L_s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s_{v_z} & s_{\omega_x} & s_{\omega_y} & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.93}$$

Ces invariants peuvent être obtenus par la méthode générale présentée dans [Bulteau 07]. Malheureusement ces invariants dépendent de la translation suivant l'axe optique. De plus, ceux-ci ont des valeurs numériques très faibles qui limitent ainsi la robustesse de la commande [Bulteau 07].

En vision centrale catadioptrique, contrairement à la vision perspective, nous n'avons pas trouvé de poses de la caméra telles que le plan de l'image et le plan apparent de l'objet (plan de l'objet projeté sur la direction ${}^c\mathbf{g_d}$ de vue, voir figure 2.18(a)) soient à une distance invariante l'un de l'autre après un mouvement de translation en $\mathbf{x}$ ou en $\mathbf{y}$. C'est pourquoi il nous semble impossible de déterminer des invariants aux mouvements de translations dans le plan $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en utilisant les moments 2D classiques centrés calculés sur un plan image catadioptrique. Nous n'avons pas pu établir une preuve de ce résultat mais nous l'avons vérifié numériquement, comme le montre le tableau 2.4. Ce tableau donne les valeurs de trois moments centrés mesurés sur un système paracatadioptrique lorsque le plan de l'image est parallèle au plan de l'objet (voir figure 2.18(a)). Dans ce tableau, on peut noter par exemple que la valeur de μ_{02} n'est pas constante lorsque la caméra subit un mouvement de translation en $\mathbf{x}$ ou en $\mathbf{y}$.

Moments sphériques : L'expression du moment sphérique centré d'ordre $i+j+k$, noté $\mu_{s_{ijk}}$, est donnée par

$$\mu_{s_{ijk}} = \iint_{D_s} (p_{s_x} - g_{d_x})^i (p_{s_y} - g_{d_y})^j (p_{s_z} - g_{d_z})^k \, \mathrm{d}s, \tag{2.94}$$

avec $g_{d_x} = m_{s_{100}}/m_{s_{000}}$, $g_{d_y} = m_{s_{010}}/m_{s_{000}}$ et $g_{d_z} = m_{s_{001}}/m_{s_{000}}$. Tout comme pour les moments 2D classiques centrés calculés sur un plan image catadioptrique, il nous a

paru impossible de déterminer des invariants aux translations en utilisant les moments sphériques centrés. Une raison est qu'il est impossible de trouver des poses de la caméra par rapport à l'objet telles que la distance entre le centre de projection $\mathcal{C}$ et le plan apparent de l'objet reste invariante après un mouvement de translation de la caméra (voir figure 2.18(b)). Ceci peut s'expliquer par le fait que, sur la sphère de vision omnidirectionnelle, il y a plusieurs directions de vue et non une seule comme en vision perspective. Une fois de plus, nous n'avons pas prouvé théoriquement ce résultat. Nous présentons dans le tableau 2.5 quelques exemples qui montrent que les moments sphériques centrés ne sont pas invariants aux translations dans le plan $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ lorsque le plan image (perspective ou catadioptrique) est parallèle au plan de l'objet (voir figure 2.18(b)).

	${}^c\mathbf{t}_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix}$	${}^c\mathbf{t}_o = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix}$	${}^c\mathbf{t}_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.14 \\ 0.25 \end{pmatrix}$
μ_{02}	0.15	0.108	0.168
μ_{20}	0.325	0.303	0.383
μ_{11}	-0.147	-0.113	-0.181

TAB. 2.4 – Moments 2D classiques centrés calculés sur l'image paracatadioptrique d'un nuage de quatre points coplanaires non symétriques.

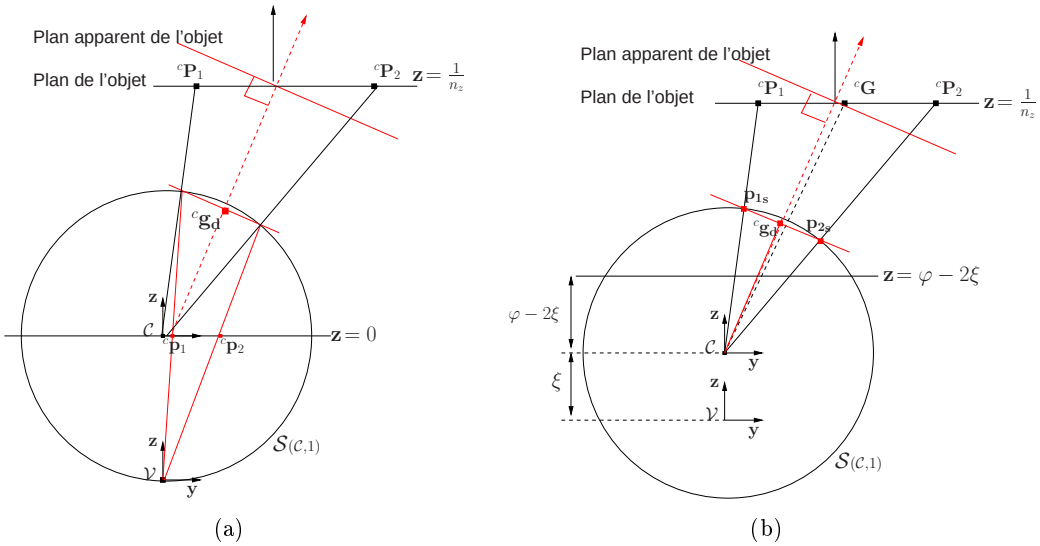


FIG. 2.18 – Plan apparant de l'objet, i.e plan de l'objet projeté sur la direction ${}^c\mathbf{g_d}$ de vue : (a) en projection paracatadioptrique, (b) en projection sphérique.

	${}^c\mathbf{t}_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix}$	${}^c\mathbf{t}_o = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix}$	${}^c\mathbf{t}_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.14 \\ 0.25 \end{pmatrix}$
$\mu_{s_{200}}$	0.206	0.154	0.232
$\mu_{s_{020}}$	0.436	0.407	0.511
$\mu_{s_{002}}$	0.054	0.068	0.026

TAB. 2.5 – Moments sphériques centrés calculés sur l'image sphérique d'un nuage de quatre points coplanaires non symétriques.

Discussion : Pour l'instant, nous n'avons pas de solutions pour d'invariants aux mouvements de translation en utilisant les moments sphériques. Cependant, il est possible d'exploiter les moments sphériques centrés de second ordre pour définir des informations visuelles pour contrôler les degrés de liberté de rotation de la caméra. Ces informations visuelles, données par

$$\phi_x = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\mu_{s_{011}}}{\mu_{s_{020}} - \mu_{s_{002}}}, \tag{2.95}$$

$$\phi_y = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\mu_{s_{101}}}{\mu_{s_{200}} - \mu_{s_{002}}}, \tag{2.96}$$

et

$$\phi_z = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\mu_{s_{110}}}{\mu_{s_{200}} - \mu_{s_{020}}}, \tag{2.97}$$

sont directement liées aux rotations comme le montrent les matrices d'interactions associées :

$$\mathbf{L}_{\phi_x} = \left[\begin{array}{cccccc} \phi_{x_{v_x}} & \phi_{x_{v_y}} & \phi_{x_{v_z}} & -1 & \phi_{x_{\omega_y}} & \phi_{x_{\omega_z}} \end{array} \right], \tag{2.98}$$

$$\mathbf{L}_{\phi_y} = \left[\begin{array}{cccccc} \phi_{y_{v_x}} & \phi_{y_{v_y}} & \phi_{y_{v_z}} & \phi_{y_{\omega_x}} & 1 & \phi_{y_{\omega_z}} \end{array} \right] \tag{2.99}$$

et

$$\mathbf{L}_{\phi_z} = \left[\begin{array}{cccccc} \phi_{z_{v_x}} & \phi_{z_{v_y}} & \phi_{z_{v_z}} & \phi_{z_{\omega_x}} & \phi_{z_{\omega_y}} & -1 \end{array} \right] \tag{2.100}$$

où les autres composantes de chaque matrice d'interaction se calculent en exploitant (2.68) dans le cas d'un objet défini par un contour fermé ou (2.71) dans le cas d'un objet défini par un nuage de points et la relation entre les moments centrés et non centrés ci-dessous

$$\begin{cases} \mu_{s_{200}} = (m_{s_{200}} m_{s_{000}} - m_{s_{100}}^2)/m_{s_{000}} \\ \mu_{s_{020}} = (m_{s_{020}} m_{s_{000}} - m_{s_{010}}^2)/m_{s_{000}} \\ \mu_{s_{002}} = (m_{s_{002}} m_{s_{000}} - m_{s_{001}}^2)/m_{s_{000}} \\ \mu_{s_{110}} = (m_{s_{110}} m_{s_{000}} - m_{s_{100}} m_{s_{010}})/m_{s_{000}} \\ \mu_{s_{101}} = (m_{s_{101}} m_{s_{000}} - m_{s_{100}} m_{s_{001}})/m_{s_{000}} \\ \mu_{s_{011}} = (m_{s_{011}} m_{s_{000}} - m_{s_{010}} m_{s_{001}})/m_{s_{000}}. \end{cases}$$

2.4.4 Application au cas simple d'une sphère

Dans cette partie, nous utilisons les moments sphériques de l'image sphérique d'une sphère pour déterminer un ensemble d'informations visuelles de la forme $\mathbf{s} = \eta\ {}^{c}\mathbf{g_d}$ afin de contrôler les mouvements de translation de la caméra. Pour cela, nous exprimons le vecteur choisi en section 2.3 pour l'asservissement visuel de sphères en utilisant uniquement les moments sphériques d'ordre un au plus, i.e. $m_{s_{ijk}}$ avec $i + j + k \leq 1$. Nous rappellons que la projection sphérique d'une sphère, présentée en section 2.3.1, est un dôme. La figure 2.19 montre une coupe de ce dôme où on peut voir son centre de gravité ${}^{c}\mathbf{g_d}$ dans $\mathcal{F}_c$. Nous rappellons aussi que le vecteur choisi pour caractériser ce dôme est donné par $\mathbf{s} = \frac{1}{r}\mathbf{o_s}$ (voir la section 2.3.2 pour plus de détails).

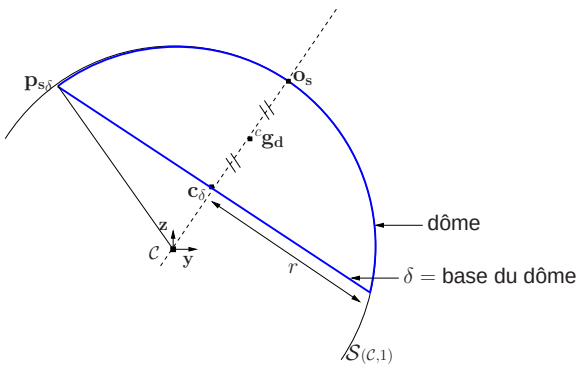


FIG. 2.19 – Vue en coupe du dôme.

Expression des informations visuelles en fonction des moments sphériques : L'expression du vecteur $\mathbf{s}$ en fonction des moments sphériques s'obtient à partir d'une observation sur les propriétés géométriques de la projection sphérique d'une sphère. En effet, d'un point de vue géométrique (voir figure 2.19), on a

$$ {}^{c}\mathbf{g_d} = \frac{1}{2}(\mathbf{o_s} + \mathbf{c}_\delta) \tag{2.101} $$

où $\mathbf{c}_\delta$ est le centre de la base circulaire δ du dôme (voir (2.50)). L'expression de $\mathbf{c}_\delta$ en fonction de $\mathbf{o_s}$ est donnée par

$$ \mathbf{c}_\delta = \|\mathbf{c}_\delta\|\ \mathbf{o_s} = \sqrt{1 - r^2}\ \mathbf{o_s} \tag{2.102} $$

où le facteur $\|\mathbf{c}_\delta\| = \sqrt{1 - r^2}$ est obtenu simplement par l'application du théorème de Pythagore au triangle rectangle $(\mathcal{C}, \mathbf{c}_\delta, \mathbf{p}_{s\delta})$ (voir figure 2.19).

L'expression de ${}^{c}\mathbf{g_d}$ en fonction de $\mathbf{o_s}$, obtenue en injectant (2.102) dans (2.101), est donnée par

$$ {}^{c}\mathbf{g_d} = \frac{1}{2}(\mathbf{o_s} + \sqrt{1 - r^2}\ \mathbf{o_s}). \tag{2.103} $$

De (2.103), on a immédiatement

$$r = \sqrt{1 - (2\|{}^c\mathbf{g_d}\| - 1)^2} \tag{2.104}$$

puisque $\|\mathbf{o_s}\| = 1$.

Enfin, en notant que $\mathbf{o_s} = {}^c\mathbf{g_d}/\|{}^c\mathbf{g_d}\|$ et en utilisant (2.104), on obtient l'expression de $\mathbf{s}$ en fonction de ${}^c\mathbf{g_d}$

$$\mathbf{s} = \frac{1}{r}\mathbf{o_s} = \frac{1}{\|{}^c\mathbf{g_d}\|\sqrt{1 - (2\|{}^c\mathbf{g_d}\| - 1)^2}}{}^c\mathbf{g_d} \tag{2.105}$$

où ${}^c\mathbf{g_d}$ peut être calculé en fonction des moments sphériques du premier ordre comme suit :

$$g_{dx} = m_{s_{100}}/m_{s_{000}},\ g_{dy} = m_{s_{010}}/m_{s_{000}}, \text{et } g_{dz} = m_{s_{001}}/m_{s_{000}}.$$

Dans le chapitre suivant, nous validerons expérimentalement ce résultat.

En se focalisant uniquement sur les moments sphériques, la matrice d'interaction associée au vecteur $\mathbf{s}$ (voir (2.105)) a la forme suivante :

$$\mathbf{L_s} = \frac{1}{\|{}^c\mathbf{g_d}\|\sqrt{1 - (2\|{}^c\mathbf{g_d}\| - 1)^2}}\left(\mathbf{I_3} + 2(4\|{}^c\mathbf{g_d}\| - 3)\|{}^c\mathbf{g_d}\|\mathbf{s}\mathbf{s}^\top\right)\mathbf{L}_{{}^c\mathbf{g_d}} \tag{2.106}$$

où les composantes de la matrice $\mathbf{L}_{{}^c\mathbf{g_d}}$ sont données en (2.82), (2.83) et (2.84).

L'expression (2.106) de $\mathbf{L_s}$ est complexe. Il est préferable, dans la mesure du possible, d'exprimer le vecteur $\mathbf{s}$ en fonction des paramètres 3D de l'objet afin d'avoir une expression plus simple de la matrice d'interaction. Dans le cas de la sphère, l'expression $\mathbf{s} = \mathbf{o_s}/r = {}^c\mathbf{O}/R$ permet d'écrire $\mathbf{L_s}$ simplement sous la forme

$$\mathbf{L_s} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R}\mathbf{I_3} & [\mathbf{s}]_\times \end{bmatrix}. \tag{2.107}$$

Enfin, pour information, les expressions analytiques des moments sphériques du second ordre en fonction des paramètres 3D de la sphère, obtenues à partir des valeurs propres de l'ellipsoïde caractéristique du dôme, ainsi que celle des moments d'ordre zéro et un sont données en Annexe E.1.

2.5 Image de cercles 3D

La dernière primitive usuelle que nous considérons est un cercle 3D. Il s'agit d'une primitive 3D plane dont l'image sphérique ne présente pas de propriétés facilement exploitables. Pour cette primitive, les moments sphériques sont utilisés pour déterminer de nouvelles informations visuelles.

2.5.1 Informations visuelles existantes

Soit $\mathcal{C}(\mathcal{S},\mathcal{P})$ un cercle 3D de centre $\mathcal{O}$ et de rayon R défini dans le repère $\mathcal{F}_c$ tel que

$$\mathcal{C}(\mathcal{S},\mathcal{P}) = \mathcal{S}(\mathcal{O},R) \cap \mathcal{P}(\mathcal{O},\mathbf{n_p}) = \begin{cases} (P_x - O_x)^2 + (P_y - O_y)^2 + (P_z - O_z)^2 - R^2 = 0 \\ n_{p_x}(P_x - O_x) + n_{p_y}(P_y - O_y) + n_{p_z}(P_z - O_z) = 0 \end{cases} \tag{2.108}$$

où ${}^c\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ est un point du cercle, ${}^c\mathbf{O} = (O_x, O_y, O_z)$ est le centre de la sphère $\mathcal{S}(\mathcal{O},R)$ de rayon R et $\mathcal{P}(\mathcal{O},\mathbf{n_p})$ est le plan (du cercle) qui passe par le centre de $\mathcal{S}(\mathcal{O},R)$.

Projection perspective d'un cercle 3D : La projection perspective d'un cercle 3D est une ellipse. L'équation de cette ellipse est donnée dans [Chaumette 90] :

$$e_0 p_x^2 + e_1 p_y^2 + 2e_2 p_x p_y + 2e_3 p_x + 2e_4 p_y + e_5 = 0 \tag{2.109}$$

$$\text{avec} \begin{cases} e_0 = n_x^2(O_x^2 + O_y^2 + O_z^2 - R^2) + 1 - 2n_x O_x \\ e_1 = n_y^2(O_x^2 + O_y^2 + O_z^2 - R^2) + 1 - 2n_y O_y \\ e_2 = n_x n_y(O_x^2 + O_y^2 + O_z^2 - R^2) - n_y O_x - n_x O_y \\ e_3 = n_x n_z(O_x^2 + O_y^2 + O_z^2 - R^2) - n_z O_x - n_x O_z \\ e_4 = n_y n_z(O_x^2 + O_y^2 + O_z^2 - R^2) - n_z O_y - n_y O_z \\ e_5 = n_z^2(O_x^2 + O_y^2 + O_z^2 - R^2) + 1 - 2n_y O_z, \end{cases}$$

où ${}^c\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ est un point de l'ellipse et

$$\begin{cases} n_x = n_{p_x} / \left(n_{p_x} O_x + n_{p_y} O_y + n_{p_z} O_z\right) \\ n_y = n_{p_y} / \left(n_{p_x} O_x + n_{p_y} O_y + n_{p_z} O_z\right) \\ n_z = n_{p_z} / \left(n_{p_x} O_x + n_{p_y} O_y + n_{p_z} O_z\right) \end{cases}$$

sont les paramètres caractérisant le plan du cercle.

Pour caractériser l'ellipse observée, une paramétrisation minimale et non ambiguë basée sur les moments a été proposée dans [Chaumette 90] : $\mathbf{s}_1 = (g_x, g_y, 4n_{20}, 4n_{11}, 4n_{02})$. La matrice d'interaction associée à $\mathbf{s}_1$ est donnée par

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{g_x} \\ \mathbf{L}_{g_y} \\ \mathbf{L}_{4n_{20}} \\ \mathbf{L}_{4n_{11}} \\ \mathbf{L}_{4n_{02}} \end{bmatrix}, \tag{2.110}$$

où les matrices d'interaction $\mathbf{L}_{g_x}$, $\mathbf{L}_{g_y}$, $\mathbf{L}_{4n_{20}}$, $\mathbf{L}_{4n_{02}}$ sont données par (2.43) et

$$\mathbf{L}_{4n_{11}} = \begin{bmatrix} -n_x 4n_{11} - n_y 4n_{02} & -n_x 4n_{20} - n_y 4n_{11} & n_x g_y 4n_{20} + (3/G_z - n_z)\, 4n_{11} + n_y g_x 4n_{02} \\ 3g_y 4n_{11} + g_x 4n_{02} & -g_y 4n_{20} - 3g_x 4n_{11} & 4n_{02} - 4n_{20} \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{L}_{\mathbf{s}_1}$ est toujours de rang cinq sauf dans le cas où la projection du cercle 3D est un cercle centré dans l'image. En effet, dans ce cas particulier, $\mathbf{L}_{\mathbf{s}_1}$ est de rang trois.

Projection catadioptrique d'un cercle 3D : L'image catadioptrique d'un cercle 3D est une quartique plane (courbe plane de degré quatre) dont l'expression analytique est donnée par

$$\begin{aligned}&\Big(\big(p_x^2+p_y^2+1\big)\big(1+e_5\xi^2\big)^2-2\xi^2(1+e_5\xi^2)(e_3p_x+e_4p_y+e_5)+(\xi^2-1)\big(\xi^2(e_3p_x+e_4p_y+e_5)^2+\Delta\big)\Big)^2\\&=\Delta\big(2\xi(1+e_5\xi^2)-\xi(\xi^2-1)(e_3p_x+e_4p_y+e_5)\big)^2,\end{aligned}\tag{2.111}$$

où

$$\Delta=\xi^2\left(e_3p_x+e_4p_y+e_5\right)^2-(1+\xi^2e_5)\left(e_0p_x^2+e_1p_y^2+2e_2p_xp_y+2e_3p_x+2e_4p_y+e_5\right)$$

et

$$\begin{cases}e_0=n_x^2(O_x^2+O_y^2+O_z^2-R^2)-2n_xO_x\\e_1=n_y^2(O_x^2+O_y^2+O_z^2-R^2)-2n_yO_y\\e_2=n_xn_y(O_x^2+O_y^2+O_z^2-R^2)-n_yO_x-n_xO_y\\e_3=n_xn_z(O_x^2+O_y^2+O_z^2-R^2)-n_zO_x-n_xO_z\\e_4=n_yn_z(O_x^2+O_y^2+O_z^2-R^2)-n_zO_y-n_yO_z\\e_5=n_z^2(O_x^2+O_y^2+O_z^2-R^2)-2n_yO_z.\end{cases}$$

Le détail du calcul est donné en Annexe F.2.

En posant $\xi=0$ dans (2.111), on obtient l'expression analytique (2.109) de l'ellipse observée en projection perspective.

On peut aussi utiliser la paramétrisation $\mathbf{s}_1$ pour contrôler l'image catadioptrique du cercle. Mais, à cause de la complexité du modèle de projection catadioptrique, le calcul de la matrice d'interaction associée à $\mathbf{s}_1$ est fastidieux. Il est donc préférable de rester sur la sphère de projection.

2.5.2 Nouvelles informations visuelles

La projection sphérique de $\mathcal{C}(\mathcal{S},\mathcal{P})$ est l'intersection entre la sphère de projection et une ellipsoïde :

$$\begin{cases}{p_{s_x}}^2+{p_{s_y}}^2+{p_{s_z}}^2=1\\1+e_0{p_{s_x}}^2+e_1{p_{s_y}}^2+2e_2p_{s_x}p_{s_y}+2e_3p_{s_x}p_{s_z}+2e_4p_{s_y}p_{s_z}+e_5{p_{s_z}}^2=0,\end{cases}\tag{2.112}$$

où $\mathbf{p_s}=(p_{s_x},p_{s_y},p_{s_z})$ est un point sur la sphère de projection et

$$\begin{cases}e_0=n_x^2(O_x^2+O_y^2+O_z^2-R^2)-2n_xO_x\\e_1=n_y^2(O_x^2+O_y^2+O_z^2-R^2)-2n_yO_y\\e_2=n_xn_y(O_x^2+O_y^2+O_z^2-R^2)-n_yO_x-n_xO_y\\e_3=n_xn_z(O_x^2+O_y^2+O_z^2-R^2)-n_zO_x-n_xO_z\\e_4=n_yn_z(O_x^2+O_y^2+O_z^2-R^2)-n_zO_y-n_yO_z\\e_5=n_z^2(O_x^2+O_y^2+O_z^2-R^2)-2n_yO_z.\end{cases}$$

Le détail du calcul est donné en Annexe F.1.

D'un point de vue géométrique, partant de l'expression de e_i, $i = 0, ..., 5$, il aurait été souhaitable de déterminer le vecteur $\mathbf{s} = (O_x/R, O_y/R, O_z/R)$ en fonction de e_i, $i = 0, .., 5$ pour contrôler les mouvements de translation de la caméra. Mais ce problème est difficile à résoudre. C'est la raison pour laquelle nous proposons d'utiliser les moments sphériques pour l'asservissement visuel des cercles. Il est possible de caractériser l'image sphérique de $\mathcal{C}(\mathcal{S},\mathcal{P})$ en utilisant un vecteur de cinq moments sphériques. On peut par exemple choisir

$$\mathbf{s_{n1}} = \left(\eta\ g_{d_x}, \eta\ g_{d_y}, \eta\ g_{d_z}, \phi_x, \phi_y\right) \tag{2.113}$$

ou

$$\mathbf{s_{n2}} = \left(\eta\ g_{d_x}, \eta\ g_{d_y}, \eta\ g_{d_z}, \phi_y, \phi_z\right) \tag{2.114}$$

avec $\eta = \frac{1}{\|{}^c\mathbf{g_d}\|\sqrt{1-(2\|{}^c\mathbf{g_d}\|-1)^2}}$. Ce choix est justifié par le fait que $\eta\ {}^c\mathbf{g_d}$ permet de contrôler les degrés de liberté de translation comme on l'a vu pour le cas de la sphère en section 2.4.4. De plus ϕ_x, ϕ_y et ϕ_z ont un lien direct avec les vitesses de rotation respectivement sur les axes $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$. Les matrices d'interaction $\mathbf{L_{s_{n1}}}$ et $\mathbf{L_{s_{n2}}}$ se déduisent de (2.106), (2.98), (2.99) et (2.100).

2.6 Synthèse

Le tableau 2.6 résume le travail de modélisation effectué pour les primitives usuelles. Pour l'image des points, des droites et des sphères, le principe de la modélisation a été d'exploiter les propriétés géométriques de la projection sphérique de la primitive afin de concevoir des informations visuelles mesurables à partir des plans images catadioptrique et perspective.

Pour l'image d'une droite, il est important de souligner le fait que la modélisation basée sur la projection sphérique est plus simple et intuitive que celle basée sur l'image catadioptrique de la droite (qui est une ellipse). Il en est de même pour une sphère dont l'image sphérique (qui est un dôme) est plus facile à exploiter que son image catadioptrique (qui est une ellipse).

Pour l'image de deux points, la notion d'invariant aux rotations a été utilisée pour définir la distance entre les projections sphériques des points. Cette distance présente une matrice d'interaction avec des termes nuls sur les composantes en rotation. De plus, une orientation définie à partir de l'image sphérique de deux points a été proposée comme information visuelle. Cette orientation présente une matrice d'interaction avec des termes constants sur les composantes en rotation.

L'angle mort, au centre de l'image de certains systèmes catadioptriques, impose de considérer plutôt l'utilisation des coordonnées sphériques pour l'image d'un point ou d'une droite, et des coordonnées cylindriques pour l'image d'une sphère.

Pour l'image d'une sphère, il est aussi possible d'utiliser une représentation minimale en coordonnées cartésiennes. Celle-ci est liée à la position 3D du centre de la sphère, à un facteur d'échelle près qui est le rayon de la sphère, et présente une matrice d'interaction

avec des termes constants sur les composantes en translation. Cette paramétrisation cartésienne peut être retrouvée en utilisant les moments sphériques de l'image sphérique de la sphère.

Primitives 3D	Image perspective ou catadioptrique	Image sur la sphère	Informations visuelles
point	point	point	(ϕ, θ) ou (ϕ_x, ϕ_y) changement de cartes
deux points	deux points	deux points	d_{12} et $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$
droite	ellipse	grand cercle	(ϕ, θ) ou (ϕ_x, ϕ_y) changement de cartes
sphère	ellipse	cercle	$(\frac{o_{sx}}{r}, \frac{o_{sy}}{r}, \frac{o_{sz}}{r}) = \eta\ {}^c\mathbf{g_d}$ ou $(\rho, \theta, \frac{o_{sz}}{r})$
cercle 3D	ellipse ou quartique plane	partie d'une ellipsoïde	$(\eta\ {}^c\mathbf{g_d}, \phi_x, \phi_y)$ ou $(\eta\ {}^c\mathbf{g_d}, \phi_y, \phi_z)$

TAB. 2.6 – Récapitulatif.

Les moments sphériques sont des moments 2D calculés sur la surface de la sphère de projection. L'avantage de la modélisation avec les moments sphériques est qu'elle est adaptée pour les cercles 3D dont l'image sphérique ne présente pas de propriétés géométriques évidentes ainsi que pour les objets 3D non paramétrables. Le calcul des moments sphériques a été généralisé à tout système de vision centrale catadioptrique.

En utilisant les moments sphériques, la conception d'informations visuelles qui découplent la commande des degrés de liberté du système, passe par la recherche des combinaisons invariantes aux rotations et des combinaisons invariantes aux translations de la caméra. Les moments sphériques invariants aux translations nous ont paru difficiles à obtenir. En revanche, les invariants aux rotations ont été revisités avec une interprétation basée sur les combinaisons des valeurs propres de la matrice d'inertie 3D de l'ellipsoïde caractéristique de l'image sphérique de l'objet. En effet, ces valeurs propres correspondent intuitivement aux distances dans l'espace 3D et sont donc invariantes aux mouvements de rotation. Les valeurs des matrices d'interaction associées aux invariants aux rotations sont sensibles à la position de l'objet et à la position des points définissant l'objet dans le cas d'un objet défini par un nuage de points. Cette sensibilité ne permet pas d'avoir une même dynamique sur les trois degrés de liberté de translation.

Enfin, deux vecteurs basés sur les moments sphériques ont été proposés pour l'image

des cercles 3D. Ces vecteurs utilisent les coordonnées du centre de gravité et deux angles d'orientation définis à partir de l'ellipsoïde caractéristique de l'image sphérique d'un cercle 3D. Pour cette primitive aussi, il est important de souligner une fois de plus que l'image sphérique de la primitive est plus facile à exploiter que l'image sur le plan catadioptrique.

Chapitre 3

Application à l'asservissement visuel

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'application des travaux de modélisation présentés dans le chapitre précédent pour des tâches de positionnement par asservissement visuel. Nous considérons d'une part des objets simples tels que un point et une sphère. Nous considérons aussi des objets volumétriques et plans représentatifs construits à partir d'une combinaison entre les objets simples précédemment mentionnés. Il s'agit en l'occurrence d'un nuage de points volumétrique ou plan, d'une sphère marquée d'un vecteur tangent en un point de sa surface et d'une sphère marquée de deux points sur sa surface.

Pour chaque objet, un vecteur d'informations visuelles est choisi à partir de la modélisation effectuée au chapitre précédent. Ensuite, en utilisant le vecteur sélectionné, la stabilité de la commande est étudiée. Enfin des résultats expérimentaux validant le vecteur choisi sont présentés.

3.1 Positionnement par rapport à un point

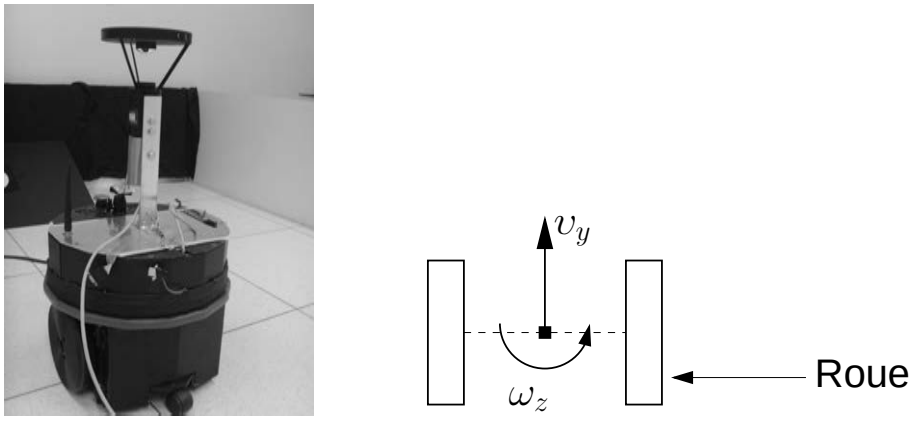
Ici nous considérons un robot mobile non-holonome à deux degrés de liberté de type unicycle (voir figure 3.1(a)). Ce robot est équipé d'un système de vision centrale catadioptrique avec angle mort au centre de l'image. L'objectif est de réaliser une tâche de positionnement par rapport à un point. Dans le cas idéal, l'axe optique du système de vision est aligné avec l'axe vertical d'inertie du robot. L'étalonnage du système d'asservissement visuel (robot et système de vision) que nous avons utilisé à Beckman Institute a montré que les vitesses $\boldsymbol{v}_y$ et $\boldsymbol{\omega}_z$ sont les seules vitesses de la caméra utilisées (voir figure 3.1(b)). Il est donc question de choisir un vecteur adéquat de deux informations visuelles pour contrôler ces deux degrés de liberté.

3.1.1 Informations visuelles choisies et analyse de la commande

Informations visuelles choisies : En exploitant le travail de modélisation effectué au chapitre précédent, nous choisissons immédiatement d'utiliser les coordonnées sphériques $\mathbf{s} = (\phi, \theta)$ de l'image du point donnée en (2.14). En effet, la paramétrisation utilisant les coordonnées sphériques est adaptée pour les systèmes de vision qui ont un angle mort au centre de l'image puisque dans ce cas, cette paramétrisation ne présente pas de singularités. De plus, comme le montre la matrice d'interaction $\mathbf{L_s}$ déduite de (2.15) (en prenant les colonnes associées aux vitesses $\boldsymbol{v}_y$ et $\boldsymbol{\omega}_z$)

$$\mathbf{L_s} = \begin{bmatrix} l_v & 0 \\ l_{\omega,v} & -1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} l_v = -(\sin\theta\cos\phi)/\|{}^c\mathbf{P}\| \\ l_{\omega,v} = -\cos\theta/(\|{}^c\mathbf{P}\|\sin\phi), \end{cases} \tag{3.1}$$

l'angle θ est idéal pour contrôler les mouvements de rotation du robot tandis que l'angle ϕ contrôle des mouvements de translation.



(a)

FIG. 3.1 – Système d'asservisssement visuel (Beckman Institute à Urbana Champaign) : (a) robot mobile super scout équipé d'un système de vision centrale catadioptrique, (b) les deux degrés de liberté contrôlés.

Analyse de la commande : La matrice $\mathbf{L_s}$, de type triangulaire inférieure, montre un découplage entre le contrôle de la vitesse $\boldsymbol{v}_y$ de translation et la vitesse $\boldsymbol{\omega}_z$ de rotation. Partant de (1.15), la commande idéale envoyée au robot est de la forme :

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_y = -\lambda \frac{1}{l_v} (\phi - \phi^*) \\ \boldsymbol{\omega}_z = l_{\omega,v}\boldsymbol{v}_y + \lambda (\theta - \theta^*) . \end{cases} \tag{3.2}$$

Typiquement, si le robot effectue uniquement un mouvement de rotation, alors la valeur de ϕ est constante, i.e. $\phi = \phi^*$, et partant de (3.2), on obtient

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_y = 0 \\ \boldsymbol{\omega}_z = \lambda (\theta - \theta^*) \end{cases} \tag{3.3}$$

qui montre que l'information visuelle θ contrôle bien ce mouvement. De plus, dans ce cas, la commande ne présente aucune singularité dans tout l'espace de visibilité puisque la valeur de θ est toujours définie quand l'objet est visible.

La matrice d'interaction (3.1) dépend de la profondeur $\|^c\mathbf{P}\|$ du point. En pratique, une estimation $\widehat{\|^c\mathbf{P}\|}$ de $\|^c\mathbf{P}\|$ est utilisée. Une question intéressante est de savoir le pourcentage d'erreurs sur l'estimation $\widehat{\|^c\mathbf{P}\|}$ qui maintient la stabilité de la commande. La réponse à cette question est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.1 *La commande (1.16) utilisant* $\mathbf{s}$ *est globalement asymptotiquement stable dans l'espace de la tâche si*

$$0 < 1 + \frac{2 - 2\sqrt{a^2+1}}{a^2} < \frac{\widehat{\|^c\mathbf{P}\|}}{\|^c\mathbf{P}\|} < 1 + \frac{2 + 2\sqrt{a^2+1}}{a^2},$$

où $a = -\cos\theta/(\sin\phi\sin\theta\cos\phi)$.
La preuve est donnée en Annexe A.3.

D'un point de vue pratique, il est donc important d'être prudent sur l'estimation $\widehat{\|^c\mathbf{P}\|}$ qui ne doit pas rester à une valeur constante. En effet, l'estimation de $\widehat{\|^c\mathbf{P}\|}$, fonction du paramètre a, est restreinte car la propriété de stabilité asymptotique globale est extrêmement contraignante. Par exemple si $\theta = \phi = \pi/4$ alors $a = -1/2$ et le domaine de valeurs de $\widehat{\|^c\mathbf{P}\|}/\|^c\mathbf{P}\|$ est $]0.056, 17.94[$.

Dans la suite, nous validons expérimentalement le schéma d'asservissement visuel choisi.

3.1.2 Résultats expérimentaux

Nous avons utilisé un système de vision paracatadioptrique qui couple entre un miroir paraboloïdal et une caméra orthographique. Les expérimentations ont été menées loin du cadre idéal afin de valider la robustesse de l'asservissement visuel aux erreurs de modélisation et aux erreurs d'étalonnage. Typiquement, le robot et le couple (robot, système de vision) ont été grossièrement étalonnés. La caméra a été placée de telle sorte que son axe optique ne soit pas parfaitement aligné avec l'axe d'inertie du robot. La profondeur du point est estimée à partir de l'expression $\widehat{\|^c\mathbf{P}\|} = \widehat{|P_z|}\sqrt{(P_x/P_z)^2 + (P_y/P_z)^2 + 1}$ où les valeurs P_x/P_z et P_y/P_z sont obtenues à partir de mesures images ($P_x/P_z = p_{s_x}/p_{s_z}$ et $P_y/P_z = p_{s_y}/p_{s_z}$ où les expressions de p_{s_x}, p_{s_y} et p_{s_z} sont données en (2.16)) et où la valeur de $\widehat{|P_z|}$ a été fixée arbitrairement à 0.8 m. Sauf indication contraire, la valeur du gain de la loi de commande (3.2) a été fixée à $\lambda = 0.1$.

Dans un premier temps, le vecteur $\mathbf{s}^*$ désiré est appris au robot. Ensuite nous considérons des positionnements à réaliser à partir de poses initiales différentes. Le mouvement que le robot doit réaliser est composé de rotation et de translation. Les résultats donnés par les figures ci-dessous valident la robustesse du schéma d'asservissement visuel utilisé.

Sur les trois premiers cas, il est clair que le robot finit par atteindre une pose qui réalise l'image finale illustrée sur la figure 3.2(b). Bien que l'erreur sur l'information visuelle θ subit de très grandes variations brutales (voir figures 3.2(c), 3.3(b) et 3.4(b)), la commande envoyée au robot ne présente pas d'effets oscillatoires gênants comme le montrent les figures 3.2(d), 3.3(c) et 3.4(c). Cette variation brutale est due au fait que le mouvement en $\boldsymbol{\omega}_z$ est mal compensé car l_v et $l_{\omega,v}$ sont grossièrement estimés. Cette variation brutale peut être gênante pour la commande dans le cas d'un mouvement de rotation de grande envergure. C'est la raison pour laquelle nous avons fixé la valeur du gain à $\lambda = 0.05$ pour le quatrième cas illustré sur la figure 3.5. Cette faible valeur du gain permet d'avoir des erreurs et des vitesses plus lisses.

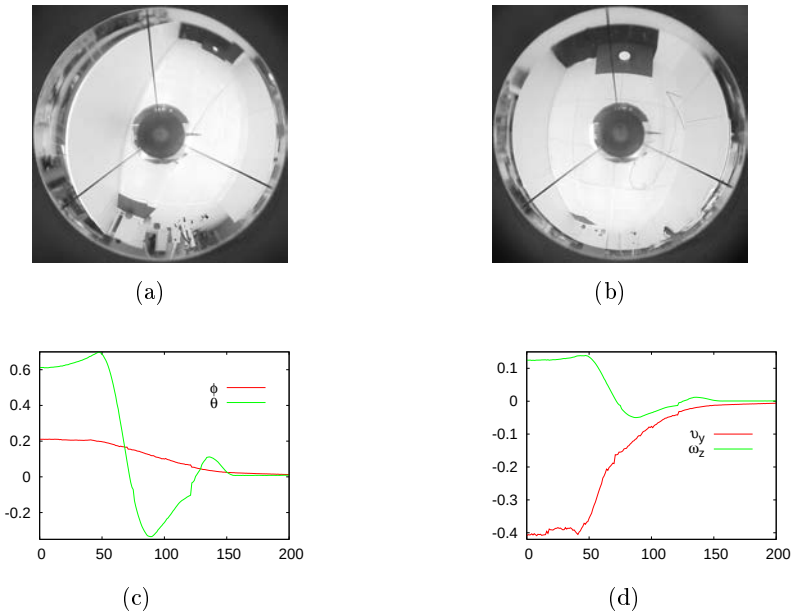
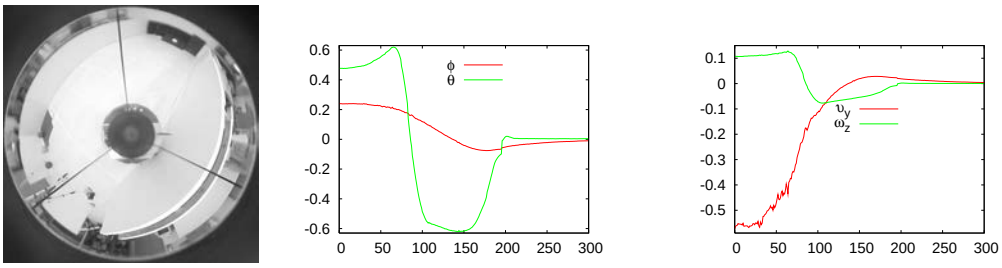


FIG. 3.2 – Premier cas : (a) image initiale, (b) image finale, (c) erreurs sur $\mathbf{s}$ (rad), (d) vitesses de la caméra (m/s et rad/s).

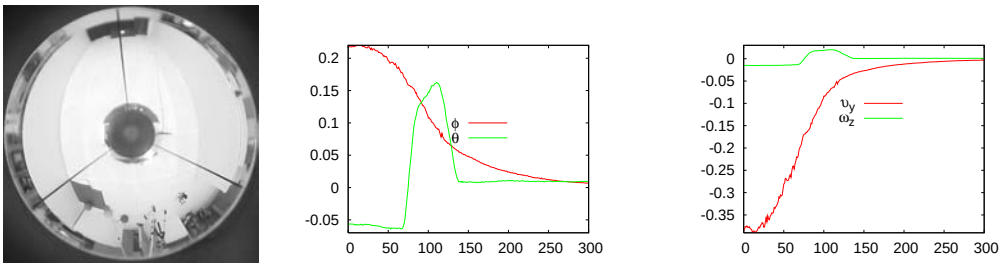
Pour terminer, outre les approximations décrites en début de cette partie, nous rajoutons des erreurs d'étalonnage sur le système de vision : $\widehat{u}_0 = u_0 - 15\% u_0$, $\widehat{v}_0 = v_0 + 17\% v_0$, $\widehat{f}_u = f_u + 10\% f_u$ et $\widehat{f}_v = f_v + 20\% f_v$. Une fois de plus le système converge vers l'image finale, comme le montre la figure 3.6.

Dans la suite nous considérons un objet défini par un ensemble de points.



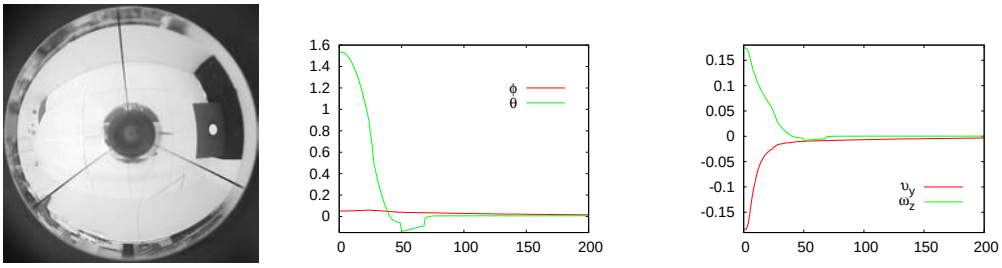
(a) (b) (c)

FIG. 3.3 – Deuxième cas : (a) image initiale, (b) erreurs sur **s** (rad), (c) vitesses de la caméra (m/s et rad/s).



(a) (b) (c)

FIG. 3.4 – Troisième cas : (a) image initiale, (b) erreurs sur **s** (rad), (c) vitesses de la caméra (m/s et rad/s).



(a) (b) (c)

FIG. 3.5 – Quatrième cas : (a) image initiale, (b) erreurs sur **s** (rad), (c) vitesses de la caméra (m/s et rad/s).

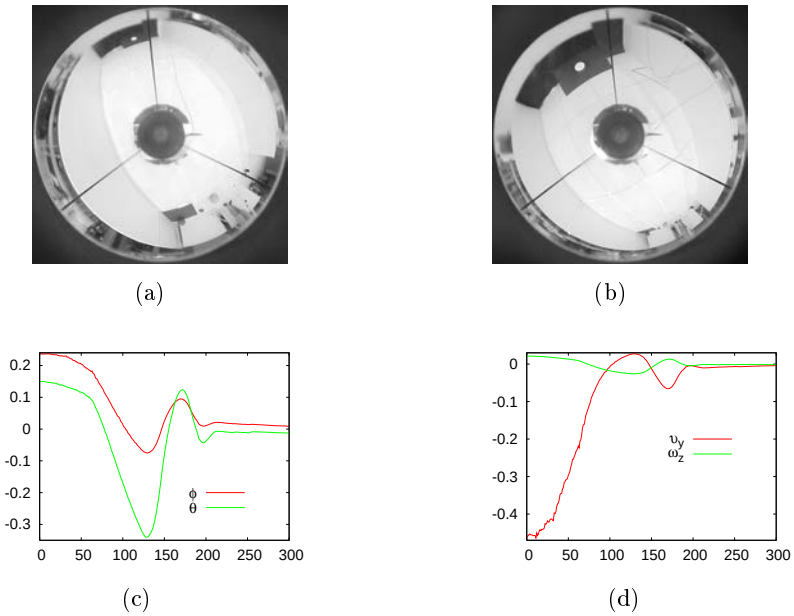


FIG. 3.6 – Cinquième cas : (a) image initiale, (b) image finale, (c) erreurs sur $\mathbf{s}$ (rad), (d) vitesses de la caméra (m/s et rad/s).

3.2 Positionnement par rapport à un objet défini par un ensemble de points

Ici, nous considérons un manipulateur à six degrés de liberté équipé d'un système de vision catadioptrique ou d'une caméra perspective. Nous nous intéressons au positionnement du manipulateur par rapport à un objet défini par un ensemble de points. L'objet peut être de forme plane ou volumétrique. L'objectif est de déterminer un vecteur de six informations visuelles indépendantes en utilisant les images de quatre points de l'objet. La contribution que nous apportons est un nouveau vecteur minimal de six informations visuelles découplées. Auparavant nous présentons les informations visuelles existantes pour contrôler l'image d'un objet défini par un ensemble de points.

3.2.1 Informations visuelles existantes

Soient $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ quatre points de l'objet. Indépendamment de la forme de l'objet, il est possible d'utiliser simplement les coordonnées cartésiennes de quatre points de l'image de l'objet [Chaumette 90]. On a alors le vecteur d'informations visuelles $\mathbf{s}_1 = (p_{1x}, p_{1y}, p_{2x}, p_{2y}, p_{3x}, p_{3y}, p_{4x}, p_{4y})$. La matrice d'interaction associée à $\mathbf{s}_1$ s'obtient de la même façon que celle présentée dans le cas de deux points en (2.4).

Pour des objets plans, l'utilisation des moments 2D classiques en vision perspective a permis de déterminer un vecteur de six informations visuelles

$$\mathbf{s}_2 = (a_n g_x, a_n g_y, a_n, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z).$$

Comme cela a été évoqué dans le chapitre 2, le vecteur $\mathbf{s_2}$ est tel que : α_x et α_y sont donnés dans [Tahri 04], $\alpha_z = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\mu_{11}}{\mu_{20}-\mu_{02}}\right)$, $a_n = P_z^* \sqrt{\frac{a^*}{a}}$, $a = \mu_{20} + \mu_{02}$ et ${}^c\mathbf{g} = (g_x, g_y)$ sont les coordonnées du centre de gravité de l'image de l'objet. La matrice d'interaction $\mathbf{L_{s_2}}$ est quasiment linéaire et découplée lorsque le plan image perspective et le plan de l'objet sont parallèles [Tahri 05]. En vision centrale catadioptrique, un schéma d'asservissement visuel découplé a été décrit dans [Hadj-Abdelkader 06a]. Ce schéma utilise une homographie entre l'image désirée et l'image courante de l'objet.

Récemment, les moments sphériques invariants aux rotations et les moments 2D classiques ont été utilisés pour déterminer un vecteur de six informations visuelles

$$\mathbf{s}_3 = (s_{31}, s_{32}, s_{33}, g_{dx}, g_{dy}, \alpha_z)$$

pour un nuage de points coplanaires ou non coplanaires [Tahri 08]. Les trois premières composantes $s_{3i}, i = 1, 2, 3$ sont des moments invariants aux rotations calculés suivant ι_3 (voir équation (2.79)) en utilisant trois différents triplets de points. Cette dernière approche reste aussi limitée à la vision perspective à cause de la matrice d'interaction $\mathbf{L}_{\alpha_z}$ utilisée pour l'angle α_z. En effet, cette matrice a la forme

$$\mathbf{L}_{\alpha_z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_{z\omega_x} & \alpha_{z\omega_y} & -1 \end{bmatrix}$$

uniquement en vision perspective lorsque le plan de l'image est parallèle au plan de l'objet.

3.2.2 Informations visuelles choisies

Le vecteur minimal d'informations visuelles que nous proposons est obtenu par la projection sphérique des points de l'objet. Ce vecteur est donné par :

$$\mathbf{s_n} = (r, d_{01}, d_{02}, \xi_x, \xi_y, \xi_z)$$

où

- le paramètre r (voir figure 2.19) est donné en (2.104) par

  $$r = \sqrt{1 - (2\|{}^c\mathbf{g_d}\| - 1)^2}.$$

  Notons ici que le calcul de r utilise l'expression ${}^c\mathbf{g_d} = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} \mathbf{p}_{i_\mathbf{s}}$ des coordonnées du centre de gravité donnée dans [Hamel 02] ;
- les paramètres d_{01} et d_{02} (voir figure 2.3(a)), donnés en (2.17) par

  $$d_{0j} = \|\mathbf{p_{0_s}} - \mathbf{p}_{j_\mathbf{s}}\| \text{ avec } j = 1 \text{ ou } 2,$$

  représentent la distance entre les projections sphériques des points $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$ d'une part, et d'autre part $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_2$. Il est bien sûr possible d'utiliser d'autres points de l'image de l'objet pour définir les distances entre les projections sphériques ;

– et le vecteur $\boldsymbol{\zeta}$ est la représentation $\theta\mathbf{u}$ de la matrice de rotation $\mathbf{V}\mathbf{V}^{*-1}$ où $\mathbf{V} = [\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}\ \mathbf{v_3}]$ est la matrice de rotation calculée à partir de la projection sphérique de deux points et donnée en (2.21) (voir figure 2.3(b)) par

$$\begin{cases} \mathbf{v_1} = \mathbf{p_{1_s}} \\ \mathbf{v_2} = \frac{\Gamma_{\mathbf{p_{1_s}}}(\mathbf{p_{2_s}} - \mathbf{p_{1_s}})}{\|\Gamma_{\mathbf{p_{1_s}}}(\mathbf{p_{2_s}} - \mathbf{p_{1_s}})\|} \quad \text{avec } \Gamma_{\mathbf{p_{1_s}}} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{p_{1_s}}\mathbf{p_{1_s}}^\top. \\ \mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}, \end{cases}$$

Posons $\mathbf{s_n}_t = (r, d_{01}, d_{02})$. Les paramètres r, d_{01} et d_{02} sont des invariants aux rotations qui permettent d'avoir un schéma découplé comme le montre la matrice d'interaction associée à $\mathbf{s_n}$:

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s_n}} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{\omega,v} & -\mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

où la matrice $\mathbf{L}_{\omega,v}$ est donnée en (2.22) et

$$\mathbf{L}_v = \begin{bmatrix} \frac{(2\|{}^c\mathbf{g_d}\|-1)}{2r\|{}^c\mathbf{g_d}\|}\ {}^c\mathbf{g_d}^\top \left(\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}_i\|}\Gamma_{\mathbf{p}_{i_s}}\right) \\ -\frac{1}{d_{01}}\left(\mathbf{p_{0_s}} - \mathbf{p_{1_s}}\right)^\top \left(\frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}_0\|}\Gamma_{\mathbf{p_{0_s}}} - \frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}_1\|}\Gamma_{\mathbf{p_{1_s}}}\right) \\ -\frac{1}{d_{02}}\left(\mathbf{p_{0_s}} - \mathbf{p_{2_s}}\right)^\top \left(\frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}_0\|}\Gamma_{\mathbf{p_{0_s}}} - \frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}_2\|}\Gamma_{\mathbf{p_{2_s}}}\right) \end{bmatrix}$$

où $\Gamma_{\mathbf{p}_{i_s}} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{p}_{i_s}\mathbf{p}_{i_s}^\top$, $i = 0, 1, 2, 3$.
Le calcul de $\mathbf{L}_v$ exploite $\mathbf{L}_{dij}$ donnée en (2.19) et

$$\mathbf{L}_r = \frac{\partial r}{\partial {}^c\mathbf{g_d}}\mathbf{L}_{{}^c\mathbf{g_d}} = \begin{bmatrix} \frac{(2\|{}^c\mathbf{g_d}\|-1)}{2r\|{}^c\mathbf{g_d}\|}\ {}^c\mathbf{g_d}^\top \left(\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}_i\|}\Gamma_{\mathbf{p}_{i_s}}\right) & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

La matrice d'interaction $\mathbf{L}_{\mathbf{s_n}}$ (voir (3.4)), de type triangulaire inférieure par blocs, ressemble à la matrice d'interaction donnée en (3.1) pour contrôler les deux degrés de liberté du robot mobile. Dans la suite, nous montrons quelques propriétés intéressantes de la commande utilisant $\mathbf{s_n}$.

3.2.3 Analyse de la commande

Partant de (1.15), la commande idéale envoyée au robot est de la forme :

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = -\lambda \mathbf{L}_v^{-1}\left(\mathbf{s_n}_t - \mathbf{s_n}_t^*\right) \\ \boldsymbol{\omega} = \mathbf{L}_{\omega,v}\boldsymbol{v} + \lambda\boldsymbol{\zeta}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Vue la forme de la matrice $\mathbf{L}_v$ donnée en (3.4), il nous est difficile de déterminer ses singularités potentielles.

Si le robot effectue uniquement un mouvement de rotation, alors la valeur de $\mathbf{s_n}_t$ est constante, i.e. $\mathbf{s_n}_t = \mathbf{s_n}_t^*$, et partant de (3.5), on obtient

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = 0 \\ \boldsymbol{\omega} = \lambda\boldsymbol{\zeta} \end{cases} \tag{3.6}$$

qui montre que l'information visuelle $\boldsymbol{\zeta}$ contrôle bien ce mouvement. De plus, dans ce cas, la commande ne présente aucune singularité.

La matrice d'interaction $\mathbf{L}_{\mathbf{s_n}}$ dépend de la profondeur des points utilisés comme le montrent les matrices d'interaction associées à chaque composante de $\mathbf{s_n}$ (voir (3.4), (2.19) et (2.22)). En pratique, on ne dispose que des approximations des profondeurs des points de l'objet. Dans ce cas, la commande réelle, déduite de (1.16), est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{v} = -\lambda \widehat{\mathbf{L}}_v^{-1} \left(\mathbf{s_n}_t - \mathbf{s_n}_t^* \right) \\ \boldsymbol{\omega} = \widehat{\mathbf{L}}_{\omega,v} \boldsymbol{v} + \lambda \boldsymbol{\zeta}. \end{array} \right. \tag{3.7}$$

Une question intéressante est de déterminer le domaine des valeurs des estimations $\widehat{\|{}^c\mathbf{P}_i\|}$, $i = 0, 1, 2, 3$ tel que la commande (3.7) converge. Malheureusement, nous n'avons pas pu apporter une réponse générale à cette question. Mais nous verrons tout de suite, à travers des exemples de simulation, que la commande (3.7) est robuste aux erreurs sur les estimations $\widehat{\|{}^c\mathbf{P}_i\|}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

3.2.4 Résultats

Ici, nous présentons les résultats validant le choix de $\mathbf{s_n}$ pour l'asservissement visuel par rapport à un objet défini par un ensemble de quatre points. Auparavant nous rappellons les différents cas possibles de la forme des points sélectionnés sur l'objet.

Configurations possibles des points sélectionnés : La configuration des points $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ définissant l'objet peut être dans l'un des cas suivants : coplanaire symétrique, coplanaire assymétrique, non coplanaire symétrique ou non coplanaire assymétrique.

Intuitivement, il ne semble exister aucun risque que le schéma d'asservissement visuel échoue dans le cas des configurations coplanaire assymétrique et non coplanaire assymétrique. En revanche, une configuration symétrique peut être problématique pour une pose particulière du robot : des exemples sur la perte de rang de la matrice d'interaction $\mathbf{L}_{\mathbf{s_n}}$ seront illustrés pour une configuration coplanaire symétrique.

Dans les simulations suivantes, nous tenterons de couvrir toutes les configurations possibles sur la forme des points. Les coordonnées, dans le repère objet, des points pour chaque configuration sont données dans le tableau 3.1, les images correspondantes sont données sur la figure 3.7. La valeur du gain (de la commande) a été fixée à $\lambda = 0.5$.

Mouvements de rotation : Ici nous illustrons le comportement adéquat du robot dans le cas d'une rotation pure. La pose initiale ${}^{c*}\mathbf{r}_c = ({}^{c*}\mathbf{t}_c, \theta\mathbf{u})$ de la caméra relativement à sa pose désirée est donnée par ${}^{c*}\mathbf{t}_c = (0.0,\ 0.0,\ 0.0)$ (en mètres) et $\theta\mathbf{u} = (-0.66,\ 0.82,\ 1.01)$ (en radians). La pose initiale de l'objet par rapport à la caméra est telle que ${}^c\mathbf{r}_o = ({}^c\mathbf{t}_o, \theta\mathbf{u})$ où ${}^c\mathbf{t}_o = (\ -0.21,\ -0.03,\ 0.14)$ et $\theta\mathbf{u} = (0.66,\ -0.82,\ -1.01)$. La pose désirée de l'objet est telle que ${}^{c*}\mathbf{r}_o = ({}^{c*}\mathbf{t}_o, \theta\mathbf{u})$ avec ${}^{c*}\mathbf{t}_o = (0.0,\ 0.0,\ 0.25)$ et $\theta\mathbf{u} = (0.0,\ 0.0,\ 0.0)$.

Il est important de noter que ce premier exemple est un cas typique où la configuration coplanaire symétrique (voir tableau 3.1) conduit à une perte de rang de la matrice d'interaction $\mathbf{L}_{\mathbf{s_n}}$ à la pose initiale en conséquence de la perte de rang de $\mathbf{L}_{\upsilon}$. La raison de cette perte de rang n'a malheureusement pas encore pu être élucidée, contrairement aux cas de simulation suivants.

Nous présentons les résultats pour les configurations coplanaire assymétrique et non coplanaire symétrique (voir tableau 3.1). Nous considérons le cas idéal où les valeurs des profondeurs des points sont exactes. Les résultats sont donnés sur la figure 3.8 où il est clair que les vitesses de rotation décroissent exponentiellement comme l'erreur sur l'information visuelle $\boldsymbol{\zeta}$ (comparer par exemple les figures 3.8(d) et 3.8(f)). On peut aussi noter que les trajectoires en courbe ou en ligne des points dans l'image sont satisfaisantes (voir les figures 3.8(a) et 3.8(b)).

Coordonnées dans le repère objet	Coplanaire symétrique	Coplanaire assymétrique	Non coplanaire symétrique sur coordonnées $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	Non coplanaire assymétrique
${}^c\mathbf{P}_0$	$\begin{pmatrix} -0.10 \\ 0.10 \\ 0.30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.10 \\ 0.10 \\ 0.30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.10 \\ 0.10 \\ 0.15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.10 \\ 0.10 \\ 0.15 \end{pmatrix}$
${}^c\mathbf{P}_1$	$\begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.10 \\ 0.30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.08 \\ 0.30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.10 \\ 0.20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.08 \\ 0.20 \end{pmatrix}$
${}^c\mathbf{P}_2$	$\begin{pmatrix} 0.10 \\ -0.10 \\ 0.30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.35 \\ -0.45 \\ 0.30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.10 \\ -0.10 \\ 0.25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.35 \\ -0.45 \\ 0.25 \end{pmatrix}$
${}^c\mathbf{P}_3$	$\begin{pmatrix} -0.10 \\ -0.10 \\ 0.30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.01 \\ -0.25 \\ 0.30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.10 \\ -0.10 \\ 0.30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.01 \\ -0.25 \\ 0.30 \end{pmatrix}$

TAB. 3.1 – Configurations utilisées en simulation.

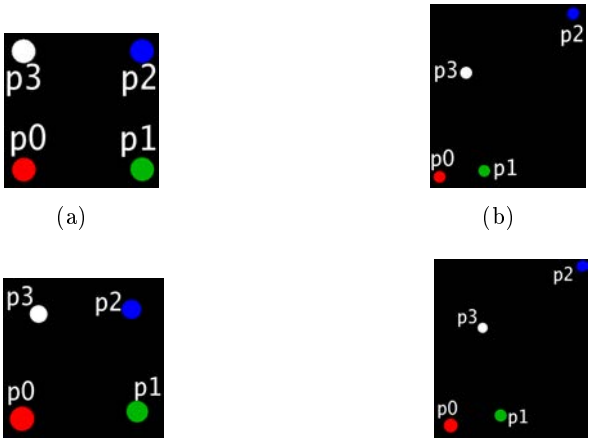


FIG. 3.7 – Images des configurations : (a) coplanaire symétrique, (b) coplanaire assymétrique, (c) non coplanaire symétrique et (d) non coplanaire assymétrique.

Mouvements de rotation et de translation le long de l'axe optique : Le contrôle simultané d'un mouvement combinant une translation et une rotation le long de l'axe $\mathbf{z}$ a été l'objet d'un intérêt particulier en asservissement visuel. En effet pour une rotation de π par exemple, il n'est pas judicieux de choisir la commande classique (1.16) utilisant les coordonnées cartésiennes de l'image perspective de points [Chaumette 98]. C'est pourquoi une première solution utilisant plutôt les coordonnées cylindriques des images des droites définies à partir des images des points a été proposée dans [Chaumette 98]. De manière générale, pour réaliser un mouvement combinant une rotation et une translation le long de l'axe $\mathbf{z}$, la solution de modélisation consiste à déterminer des informations visuelles qui découplent le contrôle des mouvements de translations de celui des mouvements de rotations. C'est ainsi qu'une approche *partionnée* qui sépare le contrôle des mouvements de l'axe $\mathbf{z}$ a été introduite dans [Corke 01]. Cette même approche se retrouve aussi dans l'utilisation des coordonnées cylindriques des images des quatre points [Iwatsuki 05].

Ici nous montrons que la commande classique (1.16) utilisant le nouveau vecteur $\mathbf{s_n}$ est aussi adéquate pour réaliser ce mouvement. Pour cela, nous considérons deux cas extrêmes de mouvements à réaliser :

- un mouvement de recul de 60 cm et un mouvement de rotation de π, la pose initiale ${}^{c*}\mathbf{r}_c = ({}^{c*}\mathbf{t}_c, \theta\mathbf{u})$ de la caméra relativement à sa pose désirée est donnée par ${}^{c*}\mathbf{t}_c = (0.0,\ 0.0,\ 0.60)$ (en mètres) et $\theta\mathbf{u} = (0.0,\ 0.0,\ -3.14)$ (en radians) ;
- un mouvement d'avance de 60 cm et un mouvement de rotation de π, la pose initiale de la caméra relativement à sa pose désirée est donnée par ${}^{c*}\mathbf{t}_c = (0.0,\ 0.0,\ -0.60)$ (en mètres) et $\theta\mathbf{u} = (0.0,\ 0.0,\ -3.14)$ (en radians).

Notons que le cas d'un mouvement constitué uniquement d'une rotation de π autour de l'axe $\mathbf{z}$ a déjà été traité plus haut puisqu'il s'agit tout simplement d'un cas particulier du cas général présenté dans le paragraphe précédent.

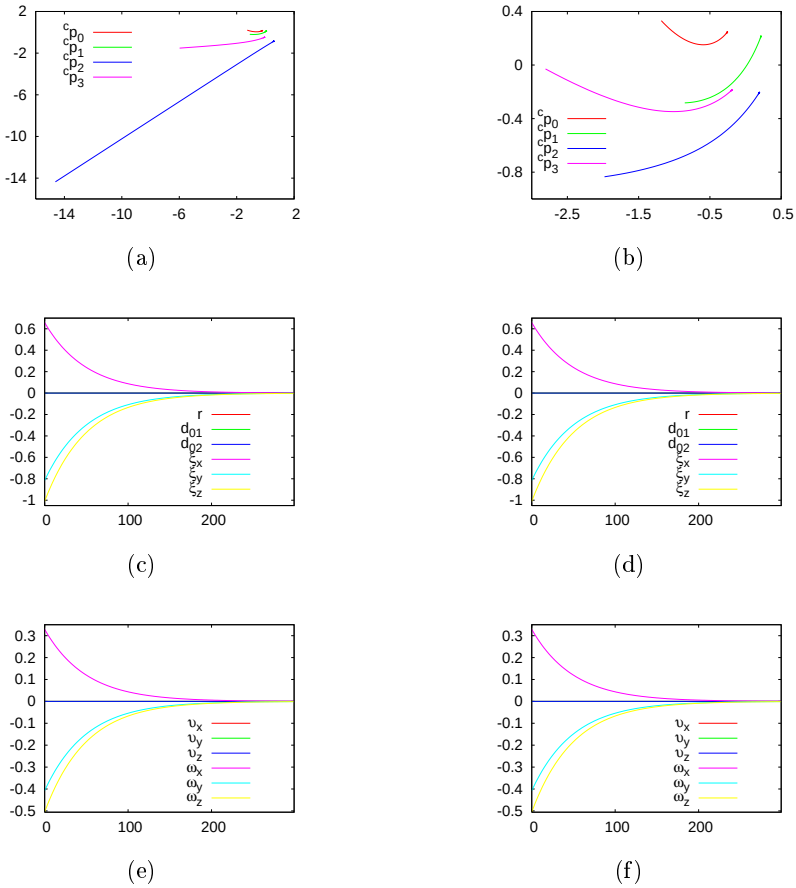


FIG. 3.8 – Cas idéal : (a) et (b) trajectoires (m) des points dans l'image dans les cas coplanaire assymétrique et non coplanaire symétrique, (c) et (d) erreurs sur $\mathbf{s_n}$ dans les cas coplanaire assymétrique et non coplanaire symétrique, (e) et (f) vitesses de la caméra (m/s et rad/s) dans les cas coplanaire assymétrique et non coplanaire symétrique.

Pour le mouvement de recul, la pose initiale de l'objet dans le repère caméra est telle que ${}^c\mathbf{r}_o = ({}^c\mathbf{t}_o, \theta\mathbf{u})$ où ${}^c\mathbf{t}_o = (0.0,\ 0.0,\ 0.25)$ (en mètres) et $\theta\mathbf{u} = (0.0,\ 0.0,\ 3.14)$ (en radians). La pose désirée est telle que ${}^{c*}\mathbf{r}_o = ({}^{c*}\mathbf{t}_o, \theta\mathbf{u})$ où ${}^{c*}\mathbf{t}_o = (0.0,\ 0.0,\ 0.85)$ (en mètres) et $\theta\mathbf{u} = (0.0,\ 0.0,\ 0.0)$ (en radians). Les résultats pour les configurations coplanaire assymétrique et non coplanaire symétrique (voir tableau 3.1) sont donnés sur la figure 3.9.

Pour le mouvement d'avance, la pose initiale de l'objet dans le repère caméra est telle que ${}^c\mathbf{r}_o = ({}^c\mathbf{t}_o, \theta\mathbf{u})$ où ${}^c\mathbf{t}_o = (0.0,\ 0.0,\ 0.85)$ (en mètres) et $\theta\mathbf{u} = (0.0,\ 0.0,\ 3.14)$ (en radians). La pose désirée est telle que ${}^{c*}\mathbf{r}_o = ({}^{c*}\mathbf{t}_o, \theta\mathbf{u})$ où ${}^{c*}\mathbf{t}_o = (0.0,\ 0.0,\ 0.25)$ (en mètres) et $\theta\mathbf{u} = (0.0,\ 0.0,\ 0.0)$ (en radians). Les résultats pour les configurations non coplanaire assymétrique et non coplanaire symétrique sont donnés sur la figure 3.10. Dans tous les cas, le système converge malgré une légère oscillation des vitesses autres

que $\boldsymbol{v}_z$ et $\boldsymbol{\omega}_z$ au démarrage (voir les figures 3.9(e), 3.9(f), 3.10(e) et 3.10(f)). On peut aussi noter que les trajectoires des points dans l'image sont conforment au mouvement réalisé (voir les figures 3.9(a), 3.9(b), 3.10(a) et 3.10(b)).

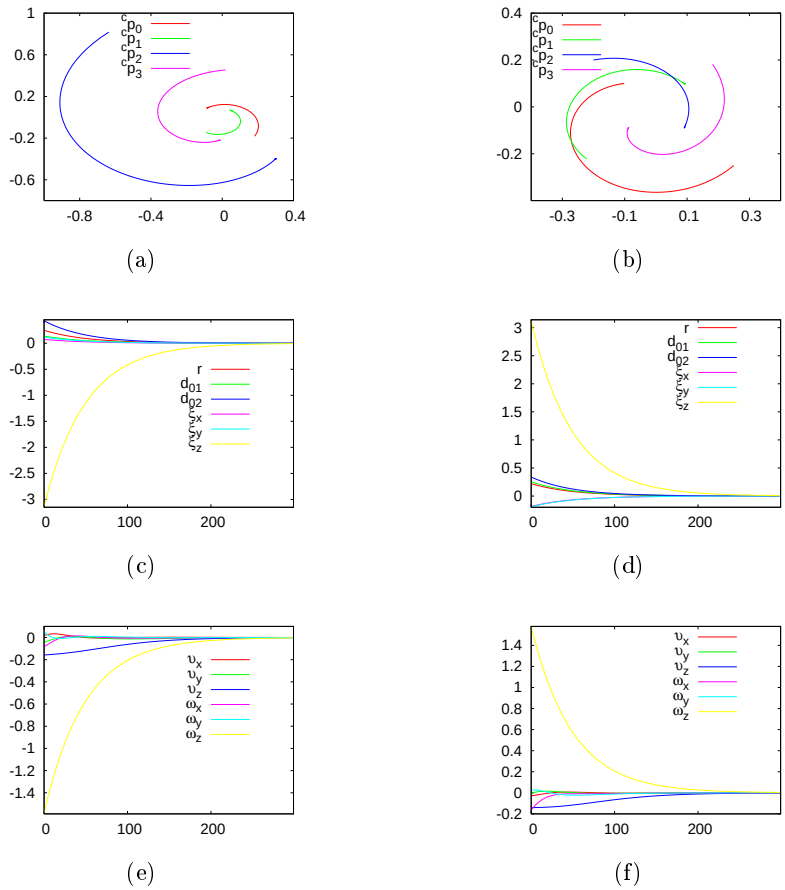


FIG. 3.9 – Mouvement de recul, cas idéal : (a) et (b) trajectoires (m) des points dans l'image, (c) et (d) erreurs sur $\mathbf{s_n}$ dans les cas coplanaire assymétrique et non coplanaire symétrique, (e) et (f) vitesses de la caméra (m/s et rad/s) dans les cas coplanaire assymétrique et non coplanaire symétrique.

Nous validons ensuite la robustesse de la commande aux erreurs de modélisation sur les profondeurs des points en fixant $|\widehat{P_{zi}}| = 0.5|P^*_{z_i}|$ avec $i = 0, 1, 2, 3$. Pour cela nous présentons uniquement le résultat pour le mouvement de recul en utilisant les configurations coplanaire assymétrique et non coplanaire symétrique (voir tableau 3.1). Les résulats donnés sur la figure 3.11 montrent que le système converge avec des trajectoires images satisfaisantes.

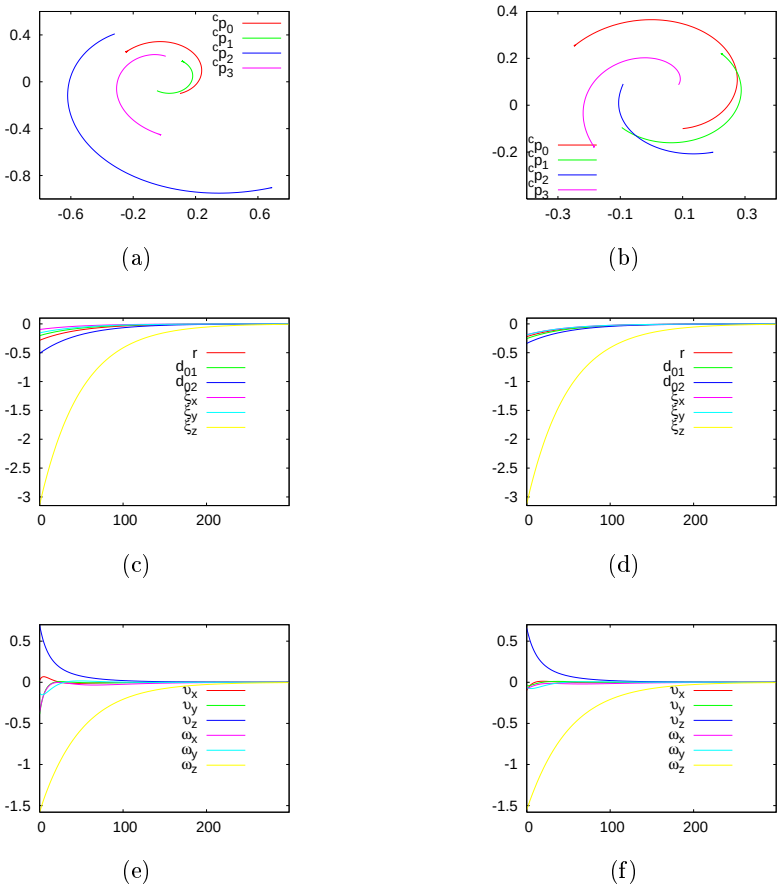


FIG. 3.10 – Mouvement d'avance, cas idéal : (a) et (b) trajectoires (m) des points dans l'image, (c) et (d) erreurs sur $\mathbf{s_n}$ dans les cas non coplanaire assymétrique et non coplanaire symétrique, (e) et (f) vitesses de la caméra (m/s et rad/s) dans les cas non coplanaire assymétrique et non coplanaire symétrique.

Au passage, notons une fois de plus que la configuration coplanaire symétrique conduit à une perte de rang de la matrice d'interaction. Cette perte de rang apparaît à la pose initiale qui correspond au cas où il existe une homothétie entre le plan image perspective et le plan de la surface de l'objet. La raison est qu'à cette pose une symétrie apparaît dans l'image sphérique des quatre points. Il s'en suit une perte de rang de la matrice $\mathbf{L}_\upsilon$ qui entraîne une perte de rang de la matrice $\mathbf{L_{s_n}}$. Nous verrons dans la suite que dans le cas où les poses initiales et finales sont différentes des poses pouvant créer une symétrie dans l'image, la matrice d'interaction ne perd pas son rang plein six et la tâche est bien réalisée.

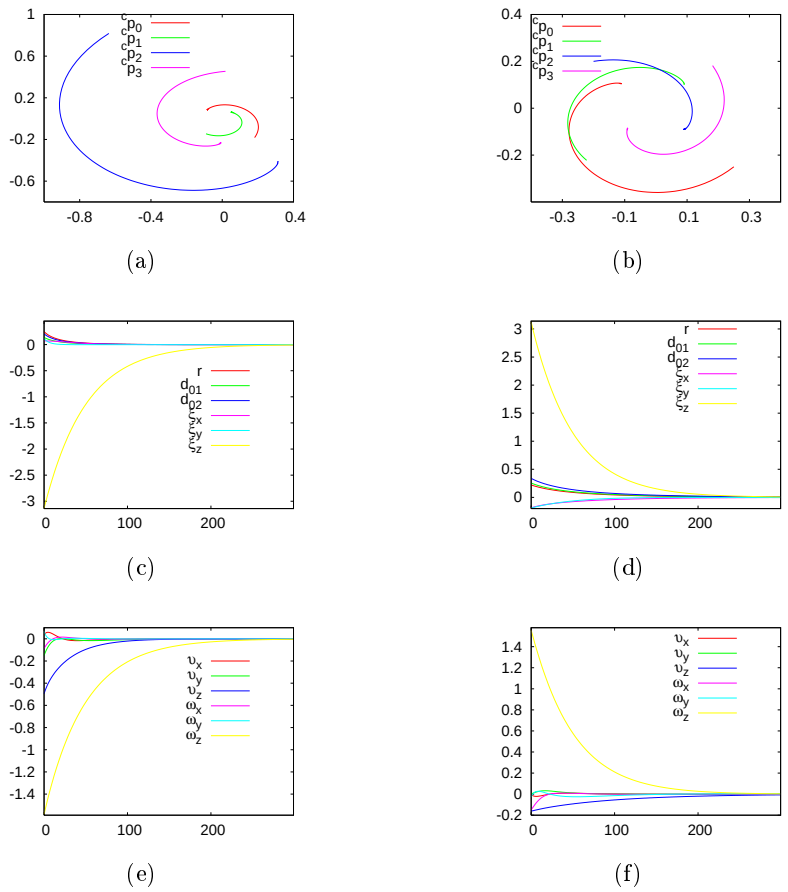


FIG. 3.11 – Mouvement de recul, erreurs de modélisation $|\widehat{P_{zi}}| = 0.5|P^*_{z_i}|$: (a) et (b) trajectoires (m) des points dans l'image, (c) et (d) erreurs sur $\mathbf{s_n}$ dans les cas coplanaire assymétrique et non coplanaire symétrique, (e) et (f) vitesses de la caméra (m/s et rad/s) dans les cas coplanaire assymétrique et non coplanaire symétrique.

Mouvements de rotation et de translation : Dans l'optique d'une validation future du choix de $\mathbf{s_n}$ en pratique, nous présentons ici uniquement les résultats dans des conditions proches de la réalité, i.e. avec des erreurs de modélisation sur les profondeurs des points. Ici nous considérons trois mouvements complexes :

- dans le premier cas la pose initiale ${}^{c*}\mathbf{r}_c = ({}^{c*}\mathbf{t}_c, \theta\mathbf{u})$ de la caméra relative à sa pose désirée est ${}^{c*}\mathbf{t}_c = (-0.34,\ -0.30,\ -0.16)$ (en mètres) et $\theta\mathbf{u} = (0.43,\ -0.43,\ 0.02)$ (en radians),
- dans le deuxième cas la pose initiale de la caméra relative à sa pose désirée est ${}^{c*}\mathbf{t}_c = (-0.28,\ 0.0,\ 0.69)$ (en mètres) et $\theta\mathbf{u} = (-0.44,\ -0.35,\ -0.79)$ (en radians), et
- dans le troisième cas la pose initiale de la caméra relative à sa pose désirée est ${}^{c*}\mathbf{t}_c = (-0.43,\ -0.05,\ -0.37)$ (en mètres) et $\theta\mathbf{u} = (-0.40,\ -0.64,\ 0.62)$ (en

radians).

Les erreurs de modélisation sur les profondeurs des points ont été fixées en fonction des profondeurs des points à la pose désirée : on a $\widehat{|P_{i_z}|} = 2|P^*_{z\,i}|$ ou $\widehat{|P_{i_z}|} = 0.5|P^*_{z\,i}|$ avec $i = 0, 1, 2, 3$.

Dans le premier cas, pour une raison encore inconnue, l'utilisation de la distance d_{02} ne produit pas un comportement adéquat du système pour la configuration coplanaire assymétrique. C'est pourquoi nous l'avons remplacée par la distance d_{23} (entre les projections sphériques des points $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$) : on a donc $\mathbf{s_n}_t = (d_{01}, d_{23}, r)$. La pose initiale de l'objet dans le repère caméra est telle que ${}^c\mathbf{r}_o = ({}^c\mathbf{t}_o, \theta\mathbf{u})$ où ${}^c\mathbf{t}_o = (0.45,\ 0.40,\ 0.07)$ (en mètres) et $\theta\mathbf{u} = (-0.43,\ 0.43,\ 0.02)$ (en radians). La pose désirée est telle que ${}^{c*}\mathbf{r}_o = ({}^{c*}\mathbf{t}_o, \theta\mathbf{u})$ où ${}^{c*}\mathbf{t}_o = (0.0,\ 0.0,\ 0.25)$ (en mètres) et $\theta\mathbf{u} = (0.0,\ 0.0,\ 0.0)$ (en radians). Le résultat, en utilisant la configuration coplanaire assymétrique (voir tableau 3.1), est donné sur la figure 3.12 qui montre que le système converge. Ce résultat montre aussi qu'il est possible d'utiliser un autre point de l'objet dans le calcul des distances entre les projections sphériques.

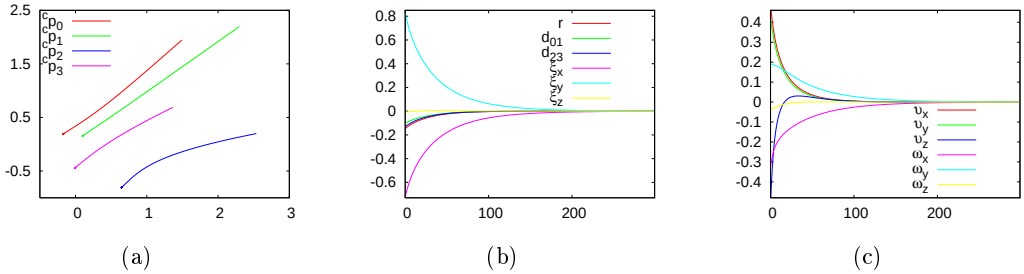


FIG. 3.12 – L'information d_{02} est remplacée par d_{23} et $\widehat{|P_{zi}|} = 2|P^*_{z_i}|$: (a) trajectoires (m) des points dans l'image, (b) erreurs sur $\mathbf{s_n}$ dans le cas coplanaire assymétrique, (c) vitesses de la caméra (m/s et rad/s) dans le cas coplanaire assymétrique.

Dans le deuxième cas, la pose initiale de l'objet dans le repère caméra est telle que ${}^c\mathbf{r}_o = ({}^c\mathbf{t}_o, \theta\mathbf{u})$ où ${}^c\mathbf{t}_o = (0.21,\ 0.19,\ 0.01)$ (en mètres) et $\theta\mathbf{u} = (0.44,\ 0.35,\ 0.79)$ (en radians). La pose désirée est telle que ${}^{c*}\mathbf{r}_o = ({}^{c*}\mathbf{t}_o, \theta\mathbf{u})$ où ${}^{c*}\mathbf{t}_o = (0.0,\ 0.0,\ 0.75)$ (en mètres) et $\theta\mathbf{u} = (0.0,\ 0.0,\ 0.0)$ (en radians). Le résultat, en utilisant les configurations coplanaire symétrique et non coplanaire symétrique (voir tableau 3.1), présenté sur la figure 3.13 montre que le système converge. Ce résultat montre surtout qu'il existe des cas pour lesquels la commande converge (voir les figures 3.13(c) et 3.13(e)) pour une configuration coplanaire symétrique.

Dans le troisième cas, la pose initiale de l'objet dans le repère caméra est telle que ${}^c\mathbf{r}_o = ({}^c\mathbf{t}_o, \theta\mathbf{u})$ où ${}^c\mathbf{t}_o = (0.57,\ -0.46,\ 0.18)$ (en mètres) et $\theta\mathbf{u} = (0.40,\ 0.64,\ -0.62)$ (en radians). La pose désirée est telle que ${}^{c*}\mathbf{r}_o = ({}^{c*}\mathbf{t}_o, \theta\mathbf{u})$ où ${}^{c*}\mathbf{t}_o = (0.0,\ 0.0,\ 0.25)$ (en mètres) et $\theta\mathbf{u} = (0.0,\ 0.0,\ 0.0)$ (en radians). Le résultat pour la configuration non coplanaire non symétrique (voir tableau 3.1) est donné sur la figure 3.14. Ce résultat montre, une fois de plus, que la commande converge de manière satisfaisante (voir par exemple les trajectoires dans l'image sur la figure 3.14(a)) même en présence d'erreurs

de modélisation sur les profondeurs des points.

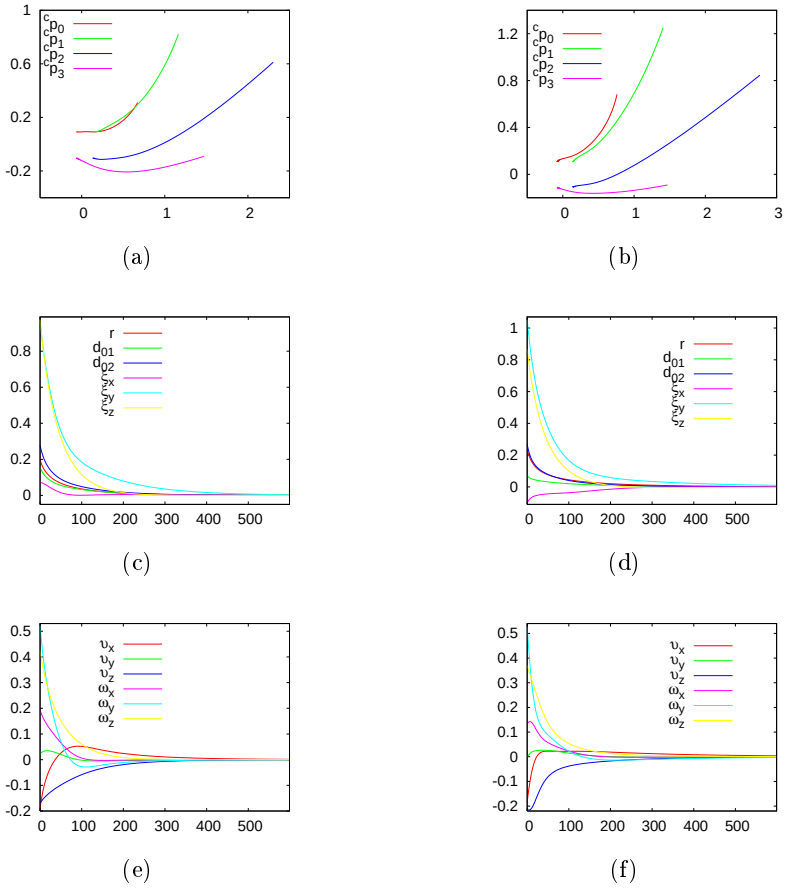


FIG. 3.13 – Cas symétrique, $|\widehat{P_{zi}}| = 0.5|P^*_{z_i}|$: (a) et (b) trajectoires (m) des points dans l'image, (c) et (d) erreurs sur $\mathbf{s_n}$ dans les cas coplanaire symétrique et non coplanaire symétrique, (e) et (f) vitesses de la caméra (m/s et rad/s) dans les cas coplanaire symétrique et non coplanaire symétrique.

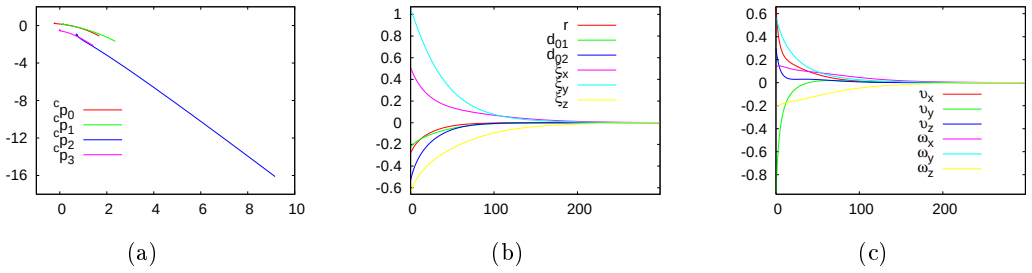


FIG. 3.14 – Cas non coplanaire non symétrique, $|\widehat{P_{zi}}| = 2|P^*_{z_i}|$: (a) trajectoires (m) des points dans l'image, (b) erreurs sur $\mathbf{s_n}$, (c) vitesses de la caméra (m/s et rad/s).

En résumé, la commande utilisant le nouveau vecteur minimal $\mathbf{s_n}$ est assez robuste aux erreurs de modélisation sur les profondeurs des points et présente un domaine de convergence assez large. Cette commande est bien adaptée pour contrôler le déplacement du robot dans le cas des mouvements de rotation uniquement, des mouvements de rotation et translation le long de l'axe $\mathbf{z}$ et des mouvements complexes variés. Cette commande peut être appliquée à toute configuration de la forme des points. Bien qu'une configuration coplanaire symétrique puisse poser un problème de perte de rang de la matrice d'interaction, il existe des cas où la matrice d'interaction reste de rang plein six tout au long de l'exécution de la tâche.

Dans la suite, nous présentons des résultats expérimentaux sur le positionnement par rapport aux objets volumétriques sphériques.

3.3 Positionnement par rapport à une sphère

Dans la suite, nous utilisons un robot manipulateur à six degrés de liberté (voir figure 3.15). Comme son nom l'indique, un robot de type bras manipulateur peut être vu comme un bras humain avec :

- un bras qui a plusieurs articulations ou degrés de liberté (trois pour la translation),
- un poignet qui a trois degrés de liberté pour la rotation,
- une main ou effecteur.

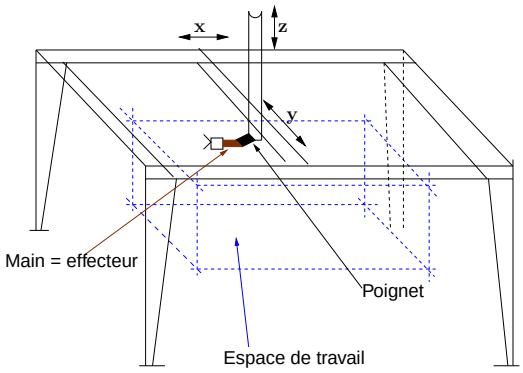


FIG. 3.15 – Espace de travail du robot portique cartésien espace.

Ce robot peut être utilisé pour des tâches de manutention. Dans ce cas l'effecteur porte une pince. Dans cette étude l'effecteur est équipé d'un système de vision, ce qui permet de réaliser des tâches de positionnement par rapport à divers objets.

Le premier objet volumétrique sphérique considéré est une sphère. Les contributions que nous apportons ici sont relatives à la sélection d'un vecteur adéquat et à l'analyse théorique de la stabilité asymptotique globale de la commande aux erreurs de modélisation.

3.3.1 Informations visuelles choisies et analyse de la commande

Nous rappellons que pour une sphère nous avons le choix entre deux paramétrisations décrites dans la section 2.3.2 du chapitre précédent :

- la paramétrisation générale définie par le vecteur

$$\mathbf{s_{n1}} = (o_{sx}/r, o_{sy}/r, o_{sz}/r),$$

  dont la matrice d'interaction $\mathbf{L_{s_{n1}}}$ est donnée en (2.52) ; et
- la paramétrisation spécifique aux systèmes de vision à angle mort au centre. Cette dernière paramétrisation utilise les coordonnées cylindriques de $\mathbf{s_{n1}}$ et est définie par le vecteur

$$\mathbf{s_{n2}} = (\rho, \theta, o_{sz}/r)$$

  où $\rho = \sqrt{(o_{sx}/r)^2 + (o_{sy}/r)^2}$ et $\theta = \arctan(o_{sy}/o_{sx})$. La matrice d'interaction $\mathbf{L_{s_{n2}}}$ est donnée en (2.53).

Minima locaux et singularités : La matrice $\mathbf{L_{s_{n1}}}$ est de rang plein trois quelle que soit la position de $\mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$ dans l'espace si $R \neq 0$ et $R \neq \infty$. Cette propriété indique que $\mathbf{L_{s_{n1}}}$ ne présente aucune singularité et aucun minimum local quelle que soit la valeur de $\mathbf{s_{n1}}$.

Notons au passage que la tâche utilisant $\mathbf{L_{s_{n1}}}$ consiste à réaliser, en mécanique, l'équivalent d'une liaison rotule [Chaumette 93]. En effet, si $\mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$ tourne autour de l'un de ses trois axes avec $\mathcal{O}$ fixe, son image ne change pas (voir figure 3.16). Ceci explique le rang trois de Ker $\mathbf{L_{s_{n1}}}$, puisque l'expression de Ker $\mathbf{L_{s_{n1}}}$ dans un repère centré en $\mathcal{O}$ est

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I_3} \end{bmatrix}.$$

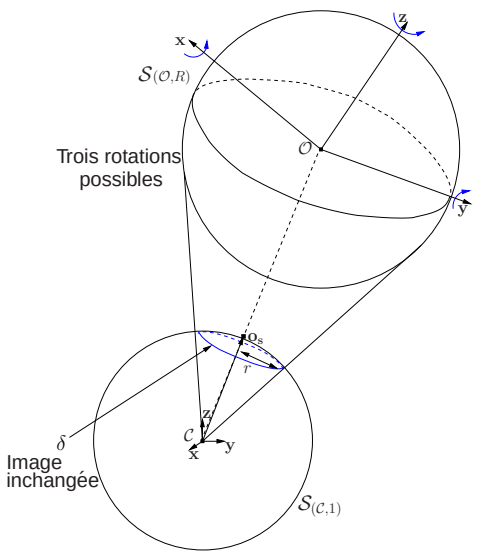


FIG. 3.16 – Interprétation physique du rang trois de Ker $\mathbf{L_{s_{n1}}}$.

La matrice $\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n2}}}$ est ausi de rang plein trois mais dans un domaine limité à l'ensemble des positions de $\mathcal{S}(\mathcal{O},R)$ dans le champ de visibilité du système de vision. En effet, partant de (2.53), on peut noter que $\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n2}}}$ est le produit de deux matrices de rang trois.

En pratique, une estimation $\widehat{R}$ du rayon de $\mathcal{S}(\mathcal{O},R)$ est utilisée dans les matrices $\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}}$ et $\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n2}}}$. Ces deux matrices dépendent aussi, au travers des mesures de $\mathbf{s_{n1}}$ et $\mathbf{s_{n2}}$, d'une estimation $\widehat{\mathbf{a}} = (\widehat{f_u}, \widehat{f_v}, \widehat{u_0}, \widehat{v_0})$ des paramètres intrinsèques du système de vision.

Il s'agit maintenant de déterminer, dans une phase suivante, les domaines de valeurs de $\widehat{R}$ et de $\widehat{\mathbf{a}}$ tels que la commande (1.16) converge en utilisant $\mathbf{s_{n1}}$ ou $\mathbf{s_{n2}}$.

La figure 3.17 décrit la boucle fermée d'asservissement visuel sur la sphère.

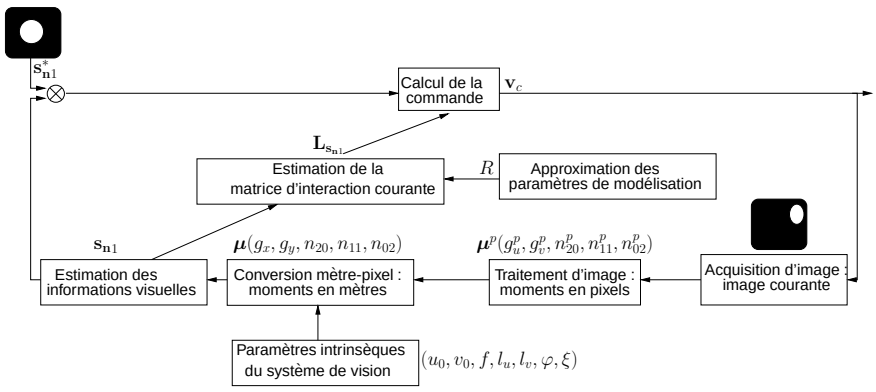


FIG. 3.17 – Boucle fermée de commande pour une sphère.

Pour un système catadioptrique avec φ et ξ comme paramètres du miroir, la conversion mètre-pixel est donnée par [Geyer 00] :

$$\begin{cases} g_x = \frac{g^p_u - u_0}{f_u} & n_{11} = \frac{n^p_{11}}{f_u f_v} \\ g_y = \frac{g^p_u - v_0}{f_v} & n_{02} = \frac{n^p_{02}}{f_v^2} \\ n_{20} = \frac{n^p_{20}}{f_u^2} & \end{cases} \tag{3.8}$$

où u_0, v_0, $f_u = fl_u(\varphi - \xi)$ et $f_v = fl_v(\varphi - \xi)$ sont les paramètres intrinsèques du système de vision.

De la figure 3.17, il ressort trois sources potentielles d'erreurs dans la boucle fermée : les erreurs de modélisation causées par l'approximation de R, les erreurs d'étalonnage affectant la conversion mètre-pixel et les erreurs de traitement d'images.

Stabilité aux erreurs de modélisation : En supposant seulement une erreur sur $\widehat{R}$, on a le théorème suivant :

Théorème 3.2 *La commande (1.16) utilisant* $\mathbf{s_{n1}}$ *est globalement asymptotiquement stable dans l'espace de travail si et seulement si* $\widehat{R} > 0$.

Puisqu'il existe une relation univoque entre $\mathbf{s_{n1}}$ et $\mathbf{s_{n2}}$, il s'en suit le corollaire suivant :

Corollaire 3.1 *La commande (1.16) utilisant* $\mathbf{s_{n2}}$ *est globalement asymptotiquement stable dans l'espace où l'objet est visible si et seulement si* $\widehat{R} > 0$.

Le domaine de robustesse aux erreurs de modélisation est donc extrêmement large : $\widehat{R} \in]0, +\infty[$. D'un point de vue pratique, une estimation approximative de R est donc suffisante.

Les preuves sont détaillées en Annexe C.2.

Stabilité aux erreurs d'étalonnage : Celle-ci a été analysée pour les caméras perspectives et les systèmes de vision paracatadioptrique. Pour les caméras perspectives, l'analyse de la stabilité de la commande a été étudiée dans le cas où l'image finale de la sphère est centrée, i.e. pour $\mathbf{s_{n1}^*} = (0, 0, o_{s_z}^*/r^*)$. Le résultat est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.3 *La commande (1.16) utilisant* $\mathbf{s_{n1}}$ *est localement asymptotiquement stable si et seulement si* $\widehat{f_u} > 0$ *et* $\widehat{f_v} > 0$.
Une approximation grossière de $\mathbf{a}$ est donc suffisante en pratique.

Pour les systèmes paracatadioptriques, l'analyse a été menée au point d'équilibre $\mathbf{s_{n2}^*} = (1, 0, o_{s_z}^*/r^*)$ avec l'hypothèse $(\widehat{u_0}, \widehat{v_0}) = (u_0, v_0)$. Le résultat est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.4 *Pour un système tel que* $f = f_u = f_v$, *la commande (1.16) utilisant* $\mathbf{s_{n2}}$ *est localement asymptotiquement stable si et seulement si* $\widehat{f} > 0$.

Par conséquent, une approximation grossière uniquement sur f_u et f_v est suffisante. Cependant nous verrons en simulation avec un système paracatadioptrique que, même en considérant des erreurs sur u_0 et v_0, la commande (1.16) converge.

Les preuves de ces théorèmes sont détaillées en Annexe C.2.

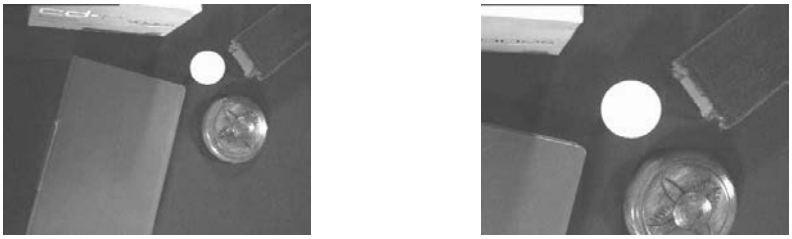
3.3.2 Résultats : paramétrisation générale

Dans cette partie, nous validons le choix de la paramétrisation générale en utilisant une caméra perspective et un système de vision paracatadioptrique ($\xi = 1$). L'objectif est de positionner un robot manipulateur de six degrés de liberté, équipé d'un des systèmes de vision mentionnés ci-dessus, relativement à une balle sphérique de couleur blanche. L'utilisation d'une balle de couleur blanche permet de calculer les moments de l'ellipse (sur le plan image) à la cadence vidéo sans problèmes de traitement d'image.

Les résultats sont présentés dans quatre configurations expérimentales différentes : le cas idéal, le cas où nous introduisons des erreurs de modélisation de l'objet, le cas où nous introduisons des erreurs d'étalonnage sur le système de vision et le cas où nous considérons des erreurs de modélisation du système de vision.

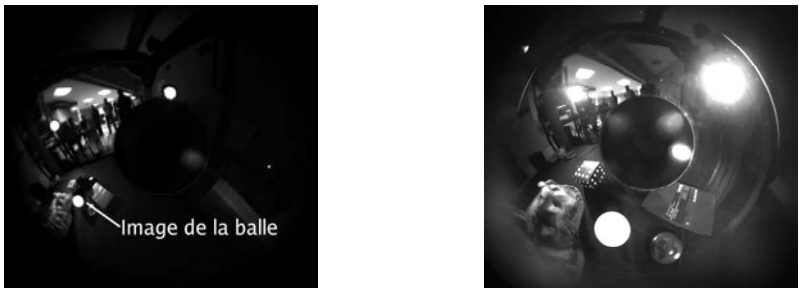
Pour la caméra perspective, la tâche consiste au centrage de l'image de la balle. Nous avons utilisé une balle de ping-pong de 2 cm de rayon. Le vecteur d'informations visuelles désirées est $\mathbf{s_{n1}^*} = (0, 0, \tau^*)$. Le gain de la commande a été fixé à la valeur $\lambda = 0.5$. Les images initiale et finale des trois premières configurations expérimentales

sont présentées sur la figure 3.18. Pour le système de vision paracatadioptrique, nous avons utilisé une balle de polystyrène de rayon 4 cm. Le gain de la commande a été fixé à la valeur $\lambda = 0.1$. Les images initiale et finale des trois premières configurations expérimentales sont présentées sur la figure 3.19.



(a) (b)

FIG. 3.18 – Configuration en vision perspective : (a) image initiale, (b) image finale.



(a) (b)

FIG. 3.19 – Configuration en vision paracatadioptrique : (a) image initiale, (b) image finale.

Cas idéal : Ici, le but est de valider le choix du vecteur général $\mathbf{s_{n1}}$ aussi bien sur une caméra perspective que sur un système de vision catadioptrique. Nous nous plaçons dans le cas idéal où les paramètres intrinsèques du système de vision sont corrects et $\widehat{R} = R$. En effet, lorsque $\widehat{R} = R$ le robot devrait avoir un comportement idéal puisque $\mathbf{L_{s_{n1}}}\widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}} = \mathbf{I}_3$. Les résultats obtenus montrent une belle décroissance exponentielle sur les erreurs (voir les figures 3.20(a) et 3.20(b)) et des vitesses satisfaisantes (voir les figures 3.20(c) et 3.20(d)).

Erreurs de modélisation : Ici, nous validons la robustesse de la commande aux erreurs de modélisation sur l'objet. Pour cela, nous introduisons une erreur sur l'estimation $\widehat{R}$ du rayon de la balle. Pour la commande calculée avec l'image perspective de la balle de ping-pong nous avons choisi $\widehat{R} = 10R$. Dans le cas où la commande est calculée avec l'image paracatadioptrique de la balle de polystyrène nous avons choisi $\widehat{R} = 0.2R$.

Les résultats donnés sur la figure 3.21 montrent que la commande converge dans les deux cas. Nous pouvons noter une convergence rapide sur la figure 3.21(c) correspondant au cas $\widehat{R}= 10R$ et une convergence lente (600 itérations) sur la figure 3.21(d) associée au cas $\widehat{R}= 0.2R$. En effet, l'expression de la commande classique (1.16) utilisant $\mathbf{s_{n_1}}$ est donnée par

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \lambda \frac{\widehat{R}r^2}{r^2+\widehat{R}^2}\left(\widehat{R}^2 \mathbf{s_{n_1}}\mathbf{s_{n_1}}^\top + \mathbf{I}_3\right)\left(\mathbf{s_{n_1}} - \mathbf{s^*_{n_1}}\right) \\ \boldsymbol{\omega} = \lambda \frac{\widehat{R}^2 r^2}{r^2+\widehat{R}^2}[\mathbf{s_{n_1}}]_\times\left(\mathbf{s_{n_1}} - \mathbf{s^*_{n_1}}\right). \end{cases} \tag{3.9}$$

Partant de (3.9), lorsque $\widehat{R}$ tend vers $+\infty$, (3.9) tend vers

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \infty \\ \boldsymbol{\omega} = \lambda r^2 \left[\mathbf{s_{n_1}}\right]_\times \left(\mathbf{s_{n_1}} - \mathbf{s^*_{n_1}}\right) \end{cases}$$

ce qui explique la comvergence rapide observée sur la figure 3.21(c). Lorsque $\widehat{R}$ tend vers 0, de (3.9), on déduit que $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{\omega}$ tendent vers 0, ce qui explique la convergence lente observée sur la figure 3.21(d).

En présence d'erreurs de modélisation sur la balle, l'approximation $\widehat{R}$ joue le rôle d'un gain. Le comportement du système pourrait être amélioré en utilisant un gain λ élevé lorsque la valeur de $\widehat{R}$ est sous approximée et en saturant $\mathbf{v}_c$ lorsque la valeur de $\widehat{R}$ est sur approximée.

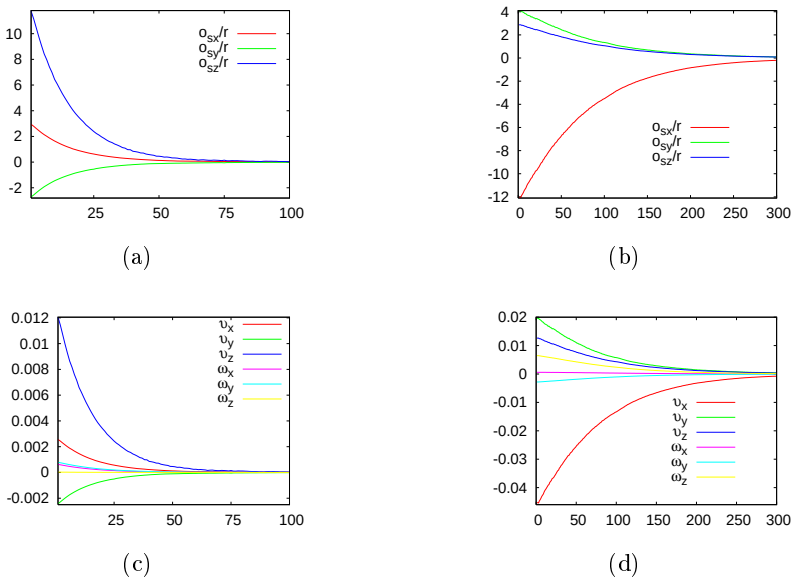
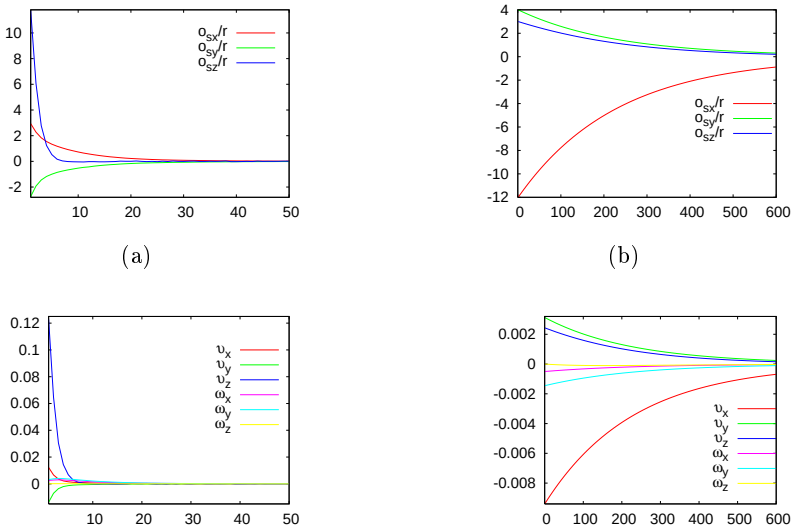


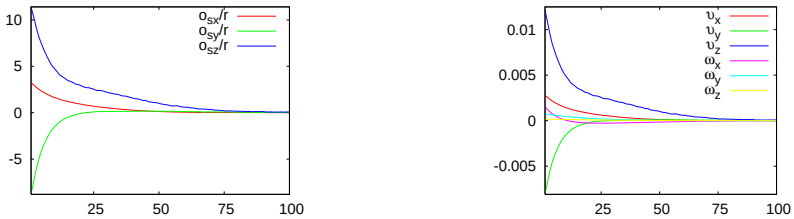
FIG. 3.20 – Cas idéal : (a) et (b) erreurs sur $\mathbf{s_{n1}}$ sur les images perspective et paracatadioptrique, (c) et (d) vitesses de la caméra (m/s et rad/s) calculées sur les images perspective et paracatadiotrique.

Erreurs d'étalonnage sur caméras perspectives : Ici, nous validons la robustesse de la commande aux erreurs d'étalonnage sur une caméra perspective. La condition nécessaire et suffisante $\widehat{f_u} > 0$ et $\widehat{f_v} > 0$ est validée en introduisant des erreurs sur les paramètres intrinsèques de la caméra comme suit : $\widehat{u_0} = u_0 - 25\% u_0$, $\widehat{v_0} = v_0 + 57\% v_0$, $\widehat{f_u} = f_u + 35\% f_u$ et $\widehat{f_v} = f_v - 47\% f_v$. Les résultats obtenus (voir la figure 3.22) montrent que le système converge alors que nous avons seulement prouvé la stabilité locale.



(a) (b) (c) (d)

FIG. 3.21 – Erreurs de modélisation : (a) et (b) erreurs sur $\mathbf{s_{n1}}$ sur les images perspective et paracatadioptrique, (c) et (d) vitesses de la caméra (m/s et rad/s) calculées sur les images perspective et paracatadiotrique.



(a) (b)

FIG. 3.22 – Erreurs d'étalonnage en vision perspective : (a) erreurs sur $\mathbf{s_{n1}}$, (b) vitesses de la caméra (m/s et rad/s).

Erreurs de modélisation du système de vision : Enfin, nous validons la robustesse de la commande aux erreurs sur la modélisation du système de vision. Nous

utilisons ici une caméra fish-eye. Ce système de vision, contrairement aux deux systèmes de vision précédemment utilisés, ne possède pas un unique centre de projection. Ici, l'objet est une balle de football de rayon 9.5 cm. Le gain de la commande a été fixé à $\lambda = 0.1$. Les résultats présentés sur la figure 3.23 montrent une fois de plus que la commande converge en présence d'erreurs. Notons que, pour le calcul du vecteur d'informations visuelles $\mathbf{s_{n1}}$ sur le plan image fish-eye, nous avons utilisé les moments sphériques (voir 2.105) dont la mesure sur le plan image fish-eye est détaillée en Annexe D.2.

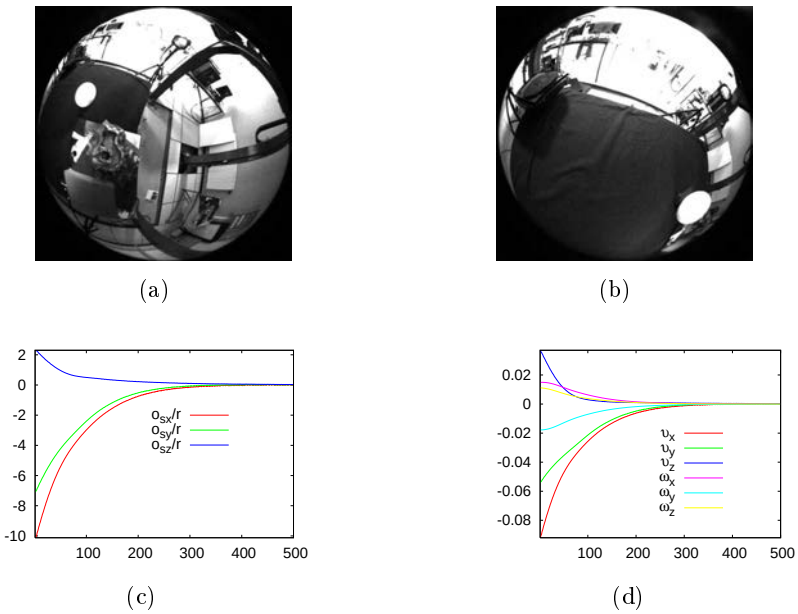
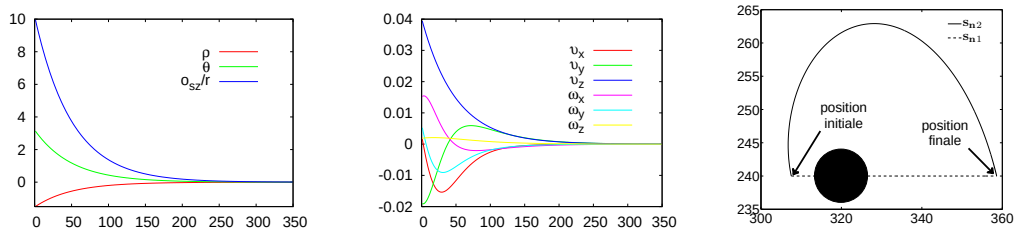


FIG. 3.23 – Utilisation de l'image fish-eye de la sphère : (a) image initiale, (b) image finale, (c) erreurs sur $\mathbf{s_{n1}}$, (d) vitesses de la caméra (m/s et rad/s).

3.3.3 Résultats : paramétrisation spécifique

Dans cette partie, nous montrons une limitation de la paramétrisation générale $\mathbf{s_{n1}}$ et validons la paramétrisation cylindrique $\mathbf{s_{n2}}$ spécifique aux systèmes de vision catadioptrique à angle mort au centre. La configuration de la simulation est telle que les images initiale et finale (qui ne sont pas illustrées ici) sont à des positions miroirs l'une de l'autre. Plus précisément, le mouvement à réaliser par le manipulateur consiste en une rotation de π autour de l'axe $\mathbf{z}$ et un zoom. Les résultats sont présentés dans trois configurations différentes : le cas idéal, le cas où nous introduisons des erreurs de modélisation de l'objet et le cas où nous introduisons des erreurs d'étalonnage sur le système de vision.

Cas idéal : Nous considérons tout d'abord le cas idéal où $\widehat{R} = R$ et les paramètres intrinsèques du système de vision sont corrects. Dans ce cas, on devrait avoir $\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n2}}}\widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n2}}} = \mathbf{I}_3$. La figure 3.24(a) montre une belle décroissance exponentielle de l'erreur tandis que la figure 3.24(b) montre les vitesses. La figure 3.24(c) montre la trajectoire du centre de gravité de l'image catadioptrique de l'objet. Sur cette dernière figure, on peut voir que l'utilisation de $\mathbf{s_{n1}}$ induit une trajectoire rectiligne qui passe par le centre de l'image et donc par l'angle mort. Dans un cas réel, l'objet disparaîtrait du champ de vue et l'asservissement se solderait par un échec. C'est pourquoi nous préférons le vecteur $\mathbf{s_{n2}}$ qui permet de contourner l'angle mort comme le montre la figure 3.24(c). Dans un cas réel, il est possible de contraindre le paramètre ρ de $\mathbf{s_{n2}}$ à éviter l'angle mort.



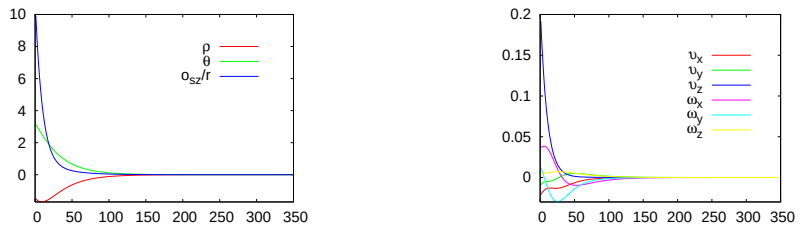
(a) (b) (c)

FIG. 3.24 – Cas idéal : (a) erreurs sur $\mathbf{s_{n2}}$, (b) vitesses de la caméra (m/s et rad/s), (c) trajectoire du centre de gravité de l'ellipse observée.

Erreurs de modélisation : Ici, nous validons la robustesse de la commande utilisant $\mathbf{s_{n2}}$ aux erreurs de modélisation sur la balle. Dans le cas où $\widehat{R} = 5R$, la figure 3.25 montre le résultat où on peut voir que la commande converge rapidement comme prévu.

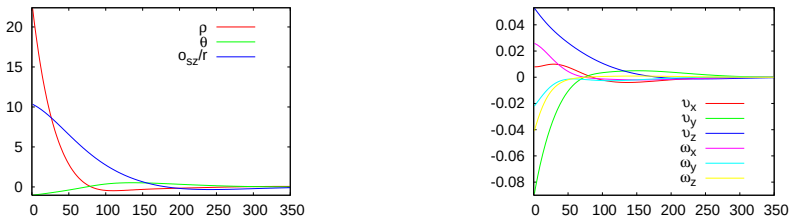
Erreurs d'étalonnage : Pour terminer, nous validons la stabilité aux erreurs d'étalonnage sur un système paracatadioptrique dont les paramètres intrinsèques sont tels que $f = f_u = f_v$. Nous avons introduit les erreurs suivantes sur ces paramètres intrinsèques : $\widehat{f} = f + 17\% f_u$, $\widehat{u}_0 = u_0 - 13\% u_0$ et $\widehat{v}_0 = v_0 + 12\% v_0$. Les résultats, donnés sur la figure 3.26, montrent que la commande (1.16) converge alors que nous avons uniquement prouvé la stabilité locale.

En résumé, nous avons validé deux paramétrisations possibles pour l'image d'une sphère : une paramétrisation générale et une paramétrisation spéficique aux systèmes de vision à angle mort au centre de l'image. Dans les deux cas, nous avons prouvé théoriquement et validé la stabilité de la commande classique en présence d'erreurs de modélisation de l'objet et en présence d'erreurs d'étalonnage du système de vision. En utilisant une caméra fish-eye, qui n'a pas un centre unique de projection, nous avons montré que la commande utilisant la paramétrisation générale est aussi robuste aux erreurs de modélisation du système de vision.



(a) (b)

FIG. 3.25 – Erreurs de modélisation $\widehat{R} = 5R$: (a) erreurs sur $\mathbf{s_{n2}}$, (b) vitesses de la caméra (m/s et rad/s).



(a) (b)

FIG. 3.26 – Erreurs d'étalonnage en vision paracatadioptrique : (a) erreurs sur $\mathbf{s_{n2}}$, (b) vitesses de la caméra (m/s et rad/s) .

3.4 Positionnement par rapport à une sphère marquée

Nous nous intéressons ici à deux objets particuliers, combinaison entre une sphère et des points, dont l'image permet de contrôler les six degrés de liberté du robot.

Le premier, que nous appellerons sphère CC, est obtenu en marquant $\mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$ d'un vecteur tangent à un point $\mathcal{P}_1$ de sa surface tel que $\mathcal{O}\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_1\mathcal{P}_3$ (voir figure 3.27(a)). Cet objet a été introduit dans [Cowan 05].

Le second, plus naturel que le premier, est obtenu en marquant $\mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$ de deux points $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sur sa surface (voir figure 3.27(b)). Ce second objet sera appelé sphère spéciale.

Une sphère marquée, en particulier la sphère spéciale, peut être une alternative d'objet passif utilisé pour l'amarrage automatique des robots volants, notamment des engins spatiaux de services de maintenance. En effet, un objet constitué de trois sphères a été utilisé pour le cas du robot de service volant Ranger [Miller 95, Miller 97].

Pour chacun des objets, la modélisation d'informations visuelles idéales peut être séparée en deux parties distinctes : le choix des informations visuelles pour contrôler les trois degrés de liberté de translation, et le choix des informations visuelles pour contrôler les trois degrés de liberté de rotation. Le premier choix est effectué à partir de l'image de la sphère et repose sur la modélisation qui a été présentée dans la section

2.3 tandis que le second choix exploite l'image des points.

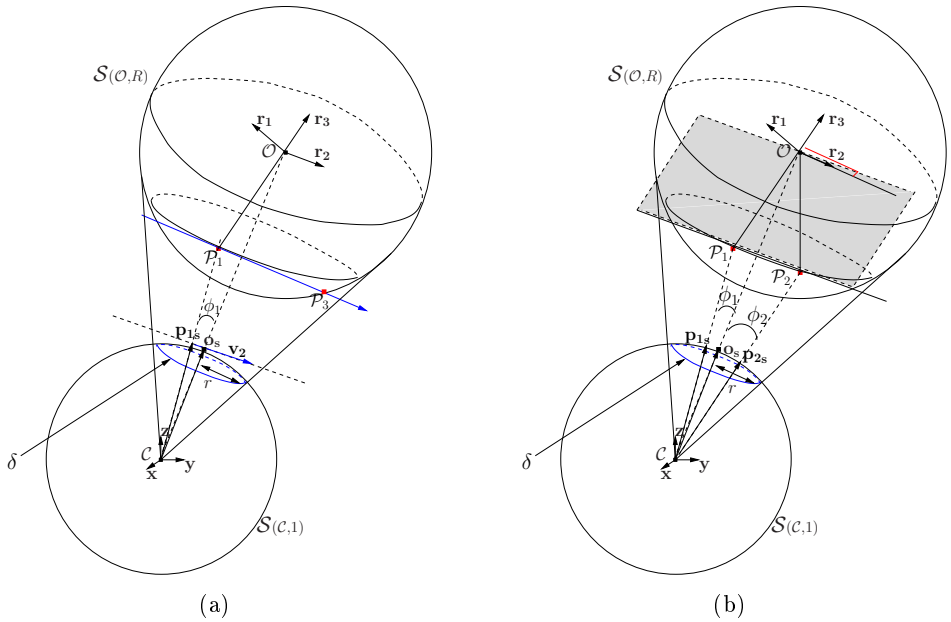


FIG. 3.27 – Projection sphérique des objets : (a) sphère CC, (b) sphère spéciale.

Deux contributions sont apportées : l'amélioration en terme de découplage du vecteur d'informations visuelles précédemment proposé pour la sphère CC dans [Cowan 05], et la proposition d'un vecteur d'informations visuelles découplées pour la sphère spéciale.

3.4.1 Sphère CC

Informations visuelles existantes : En utilisant le modèle de projection sphérique (voir figure 3.27(a)), un vecteur de sept informations visuelles pour contrôler l'image d'une sphère CC a été proposé dans [Cowan 05] : $\mathbf{s_{cc}} = (r, \mathbf{o_s}, \boldsymbol{\zeta})$ où $\boldsymbol{\zeta}$ est équivalent à la représentation $\theta\mathbf{u}$ de la matrice de rotation $\mathbf{V}\mathbf{V}^{*-1}$. On rappelle que la matrice $\mathbf{V}$ est donnée par [Cowan 05] :

$$\begin{cases} \mathbf{v_1} = \mathbf{p_{1s}} = \pi_s({}^c\mathbf{P}_1) \\ \mathbf{v_2} = \frac{\Phi_{\mathbf{v_1}}\mathbf{a_{13}}}{\|\Phi_{\mathbf{v_1}}\mathbf{a_{13}}\|} = \frac{\Phi_{\mathbf{v_1}}(\pi_s({}^c\mathbf{P}_3)-\pi_s({}^c\mathbf{P}_1))}{\|\Phi_{\mathbf{v_1}}(\pi_s({}^c\mathbf{P}_3)-\pi_s({}^c\mathbf{P}_1))\|} \\ \mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}, \end{cases} \tag{3.10}$$

avec $\Phi_{\mathbf{v_1}} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{v_1}\mathbf{v_1}^\top$ et $\mathbf{a_{13}} = {}^c\mathbf{P}_1{}^c\mathbf{P}_3$. Plus précisément, $\mathbf{v_2}$ est un vecteur tangent à $\mathcal{S}(\mathcal{C},1)$ au point de coordonnées $\mathbf{v_1}$. La matrice d'interaction associée à $\mathbf{s_{cc}}$ est donnée par :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s_{cc}}} = \begin{bmatrix} \frac{r^2}{R}\mathbf{o_s}^\top & \mathbf{0} \\ -\frac{r}{R}(\mathbf{I}_3 - \mathbf{o_s}\mathbf{o_s}^\top) & [\mathbf{o_s}]_\times \\ -\frac{1}{R\beta}(\alpha\mathbf{v_1}\mathbf{v_3}^\top - \mathbf{v_2}\mathbf{v_3}^\top + \mathbf{v_3}\mathbf{v_2}^\top) & -\mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

où $\alpha = (\mathbf{o_s}^\top\mathbf{v_2})/\sqrt{r^2 - \sin^2\phi}$, $\beta = (\cos\phi - \sqrt{r^2 - \sin^2\phi})/r$, $\cos\phi = \mathbf{o_s}^\top\mathbf{v_1}$ et $\sin\phi = \sqrt{1 - (\mathbf{o_s}^\top\mathbf{v_1})^2}$.

Le point clé de cette approche originale est l'utilisation d'une commande à base de fonctions de navigation qui gère la visibilité de l'objet, et par conséquent permet de définir un difféomorphisme entre la pose de l'objet et le vecteur $\mathbf{s_{cc}}$.

Cependant le vecteur $\mathbf{s_{cc}}$ n'est pas minimal. De plus la matrice d'interaction associée $\mathbf{L}_{\mathbf{s_{cc}}}$ présente un couplage entre le contrôle de l'orientation et les vitesses de translation de la caméra (voir le premier terme de la troisième ligne de $\mathbf{L}_{\mathbf{s_{cc}}}$). En utilisant la commande simple (1.16), ce couplage a une mauvaise incidence sur la trajectoire du robot et sur la visibilité de l'objet comme nous allons le voir plus loin en simulation (puis en expérimentation). Pour remédier à ce couplage, nous proposons dans la suite un nouveau vecteur minimal et découplé pour les sphères CC.

Informations visuelles choisies : Il s'agit du vecteur minimal de six informations visuelles $\mathbf{s_n} = (\mathbf{s_{n1}}, \theta\mathbf{u})$ où $\mathbf{s_{n1}}$ a été proposé pour les sphères en section 2.3.2

$$\mathbf{s_{n1}} = \frac{1}{r}\mathbf{o_s} = \frac{1}{R}{}^c\mathbf{t}_o, \tag{3.12}$$

avec ${}^c\mathbf{t}_o = {}^c\mathbf{O}$ la position de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{F}_c$. Le vecteur $\theta\mathbf{u}$ est calculé à partir de l'orientation relative ${}^{c*}\mathbf{R}_c$ du repère courant $\mathcal{F}_c$ par rapport au repère désiré $\mathcal{F}_c^*$: ${}^{c*}\mathbf{R}_c = {}^{c*}\mathbf{R}_o{}^c\mathbf{R}_o^{-1}$. En effet, l'orientation ${}^c\mathbf{R}_o = [\mathbf{r_1}\ \mathbf{r_2}\ \mathbf{r_3}]$ de la sphère CC dans $\mathcal{F}_c$ peut être obtenue en utilisant le difféomorphisme proposé dans [Cowan 05]. On obtient (voir détails de calcul en Annexe G.1)

$$\begin{cases} \mathbf{r_3} = \mathbf{s_{n1}} - \frac{1}{r}\left(\cos\phi_1 - \sqrt{r^2 - \sin^2\phi_1}\right)\mathbf{v_1} \\ \mathbf{r_2} = \left(\mathbf{v_2} - \frac{\mathbf{r_3}^\top\mathbf{v_2}}{\mathbf{r_3}^\top\mathbf{v_1}}\mathbf{v_1}\right)/\|\mathbf{v_2} - \frac{\mathbf{r_3}^\top\mathbf{v_2}}{\mathbf{r_3}^\top\mathbf{v_1}}\mathbf{v_1}\| \\ \mathbf{r_1} = \mathbf{r_2} \times \mathbf{r_3}, \end{cases} \tag{3.13}$$

où $\phi_1 = \mathbf{o_s}^\top\mathbf{p_{1s}} = \mathbf{o_s}^\top\mathbf{v_1}$. Il est possible de calculer ${}^{c*}\mathbf{R}_o$ de la même manière à la pose désirée. Notons que, lorsque ${}^c\mathbf{P}_1$ ou ${}^c\mathbf{P}_3$ est occulté ou bien hors du champ de vision de la caméra, le vecteur $\theta\mathbf{u}$ ne peut pas être calculé. Ce problème de visibilité peut se traduire dans l'image en $\mathbf{p_{1s}} = \mathbf{p_{3s}}$ qui, d'après (3.10), conduit à $\mathbf{v_2} = 0$.

La matrice d'interaction associée à $\mathbf{s_n}$ est donnée par

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s_n}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R}\mathbf{I}_3 & [\mathbf{s_{n1}}]_\times \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_\omega \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

où $\mathbf{L}_\omega$ est donnée par [Malis 99] :

$$\mathbf{L}_\omega = \mathbf{I}_3 + \frac{\theta}{2}[\mathbf{u}]_\times + \left(1 - \frac{\mathrm{sinc}\theta}{\mathrm{sinc}^2\frac{\theta}{2}}\right)[\mathbf{u}]_\times^2, \tag{3.15}$$

où $\mathrm{sinc}(x) = \sin x / x$. Le contrôle de l'orientation en utilisant $\theta\mathbf{u}$ est complètement découplé des vitesses de translation, ce qui n'était pas le cas en utilisant $\boldsymbol{\zeta}$. De plus, $\mathbf{L}_{\mathbf{s_n}}$ est une matrice triangulaire supérieure, ce qui simplifiera l'analyse de stabilité de la commande qui est donnée en section 3.4.3. Enfin, notons que les vecteurs $\mathbf{s_{cc}}$ et $\mathbf{s_n}$ sont mesurables sur le plan image catadioptrique à partir des mesures obtenues pour les points (voir section 2.1.2) et pour les sphères (voir section 2.3.2).

3.4.2 Sphère spéciale

Pour une sphère spéciale aussi, le vecteur $\mathbf{s_{n1}}$ (voir (3.12)) qui caractérise l'image de $\mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$ peut être utilisé pour contrôler la position de la caméra.

Le contrôle de l'orientation peut être effectué en utilisant le vecteur $\theta\mathbf{u}$ obtenu à partir de ${}^{c*}\mathbf{R}_c$ qui est donné par ${}^{c*}\mathbf{R}_c = {}^{c*}\mathbf{R}_o {}^{c}\mathbf{R}_o^{-1}$. Le détail du calcul de ${}^{c}\mathbf{R}_o = [\mathbf{r_1}\ \mathbf{r_2}\ \mathbf{r_3}]$ est donné en Annexe G.1. On obtient un résultat différent pour $\mathbf{r_2}$, et donc $\mathbf{r_1}$, par rapport à la sphère CC :

$$\begin{cases} \mathbf{r_3} = \mathbf{s_{n1}} - \frac{1}{r}\left(\cos\phi_1 - \sqrt{r^2 - \sin^2\phi_1}\right)\mathbf{p_{1s}} \\ \mathbf{r_2} = \left(\frac{1}{R}\mathbf{a_{12}} - ((\frac{1}{R}\mathbf{a_{12}})^\top\mathbf{r_3})\mathbf{r_3}\right)/\|\left(\frac{1}{R}\mathbf{a_{12}} - ((\frac{1}{R}\mathbf{a_{12}})^\top\mathbf{r_3})\mathbf{r_3}\right)\| \\ \mathbf{r_1} = \mathbf{r_2} \times \mathbf{r_3}, \end{cases} \tag{3.16}$$

avec

$$\frac{1}{R}\mathbf{a_{12}} = \frac{\left(\cos\phi_1 - \sqrt{r^2 - \sin^2\phi_1}\right)}{r}\mathbf{p_{1s}} - \frac{\left(\cos\phi_2 - \sqrt{r^2 - \sin^2\phi_2}\right)}{r}\mathbf{p_{2s}},$$

où $\phi_1 = \mathbf{o_s}^\top\mathbf{p_{1s}}$ et $\phi_2 = \mathbf{o_s}^\top\mathbf{p_{2s}}$. Il est possible de calculer ${}^{c*}\mathbf{R}_o$ de la même manière à la pose désirée. Notons que, lorsque ${}^{c}\mathbf{P}_1$ ou ${}^{c}\mathbf{P}_2$ est occulté ou bien hors du champ de vision de la caméra, le vecteur $\theta\mathbf{u}$ ne peut pas être calculé. Ce problème de visibilité peut se traduire dans l'image en $\mathbf{p_{1s}} = \mathbf{p_{2s}}$ qui, d'après (3.16) conduit à $\mathbf{a_{12}} = 0$.

En résumé, pour une sphère spéciale, il est possible de déterminer sa pose partielle $({}^{c}\mathbf{t}_o/R, \theta\mathbf{u})$ à partir de laquelle on peut sélectionner un vecteur de six informations visuelles $\mathbf{s_n} = (\mathbf{s_{n1}}, \theta\mathbf{u})$.

Discussion : Partant du vecteur $\mathbf{s_n} = (\mathbf{s_{n1}}, \theta\mathbf{u})$, il est possible d'obtenir un autre vecteur minimal $\mathbf{s} = (\mathbf{s_t}, \theta\mathbf{u})$ qui découple totalement le contrôle de la translation et le contrôle de l'orientation. En effet, si on utilise

$$\mathbf{s_t} = (\mathbf{s}^*_{\mathbf{n1}} - {}^{c*}\mathbf{R}_c\mathbf{s_{n1}}), \tag{3.17}$$

on obtient :

$$\mathbf{L_s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R}{}^{c*}\mathbf{R}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_\omega \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

Soit ${}^{\mathbf{c}*}\mathbf{t_c}$ la position relative du repère courant $\mathcal{F}_c$ dans le repère désiré $\mathcal{F}_c^*$. On peut noter que $\mathbf{s_t} = \frac{1}{R}\ {}^{\mathbf{c}*}\mathbf{t_c}$ correspond, à un facteur d'échelle près, à un schéma d'asservissement 3D où il n'y a pas de contrôle de l'objet dans l'image [Deng 03, Chaumette 06]. De plus, il n'existe plus de relation linéaire entre les informations visuelles pour la translation $\mathbf{s_t}$ et les vitesses de translation $\boldsymbol{v}$ de la caméra. Pour ces raisons, nous préférons le vecteur $\mathbf{s_n} = (\mathbf{s_{n1}}, \theta\mathbf{u})$ qui est quasi-linéairement lié aux vitesses $\mathbf{v}_c$ de la caméra (voir (3.14)) tout en permettant le contrôle de l'objet dans l'image. La comparaison entre $\mathbf{s_{n1}}$ et $\mathbf{s}$ sera illustrée en simulation.

3.4.3 Analyse de la commande

Ici, nous supposons que toutes les marques spéciales de chaque objet sont visibles c'est-à-dire qu'elles sont dans le champ de vision et ne sont pas occultées.

Minima locaux et singularités : Sous l'hypothèse ci-dessus mentionnée, le vecteur $\mathbf{s_n}$ peut être calculé et $\mathbf{L_{s_n}}$ est toujours de rang plein six. En effet, sous l'hypothèse de visibilité de l'objet, $\mathbf{L}_\omega$ est de rang trois [Malis 99], et $\mathbf{L_{s_{n1}}}$ est de rang trois (voir section 3.3.1). Par conséquent, il n'existe pas de minima locaux.

Stabilité aux erreurs de modélisation : La matrice $\mathbf{L_{s_n}}$ dépend explicitement du rayon R de la sphère marquée. Cela n'est pas le cas de la mesure $\mathbf{s_n}$. En effet, le vecteur $\mathbf{s_n}$ est calculé à partir de $\mathbf{o_s}$, r, $\mathbf{p_{1_s}}$ et $\mathbf{p_{2_s}}$ comme le montrent (2.56), (2.57), (2.58), (3.13) et (3.16). Par conséquent, une erreur sur l'estimation $\widehat{R}$ n'affecte pas la mesure du vecteur $\mathbf{s_n}$ mais affecte la commande (1.16) à travers la matrice d'interaction $\mathbf{L_{s_n}}$.

Pour la sphère spéciale, R est l'unique source d'erreur de modélisation. En revanche pour la sphère CC, une autre erreur de modélisation intervient si la condition $\mathcal{OP}_1 \perp \mathcal{P}_1\mathcal{P}_3$ n'est pas vérifiée. Cette deuxième source d'erreur, qui affecte le calcul de $\theta\mathbf{u}$, n'est pas considérée dans l'analyse de la stabilité qui suit.

Théorème 3.5 *La commande (1.16) utilisant* $\mathbf{s_n}$ *est localement asymptotiquement stable dans l'espace de visibilité de la sphère marquée si et seulement si* $\widehat{R} > 0$. *L'erreur sur la tâche décroît systématiquement si*

$$0 < \frac{a-1}{a+1} < \frac{\widehat{R}}{R} < \frac{a+1}{a-1}, \ \textit{avec}\ a = \sqrt{1 + \frac{1}{r^{*2}}}.$$

La preuve est donnée en Annexe G.2.

Le domaine de valeurs de $\widehat{R}$ tel que la commande converge localement est donc très large : $\widehat{R} \in]0, +\infty[$. Encore une fois, une approximation grossière de R est suffisante. Le domaine des valeurs de $\widehat{R}$ tel que l'erreur sur la tâche décroît systématiquement est limité et dépend de la valeur r^* du rayon du contour du dôme à la pose désirée (voir figure 3.27(a)).

Stabilité aux erreurs d'étalonnage : L'effet sur la commande (1.16) des paramètres intrinsèques estimés $\widehat{\mathbf{a}}$ n'a pas été formellement analysé à cause de la complexité des calculs. Cependant, nous verrons dans un cas pratique que la commande (1.16) est robuste aux erreurs d'étalonnage du système de vision.

3.4.4 Résultats : sphère CC

Dans cette partie, nous validons le choix du vecteur $\mathbf{s_n}$ à travers des tâches de positionnement d'un manipulateur par rapport à une sphère CC. Le manipulateur est équipé d'une caméra perspective. Auparavant, nous présentons une étude empirique qui compare les trois vecteurs $\mathbf{s_n}$, $\mathbf{s_{cc}}$ et $\mathbf{s}$ (voir tableau 3.2) pouvant être utilisés pour caractériser l'image d'une sphère CC.

Comparaison des vecteurs $\mathbf{s_n}$, $\mathbf{s_{cc}}$ et $\mathbf{s}$: Le but ici est de montrer que, en utilisant la commande simple (1.16), le vecteur $\mathbf{s_n}$ est un choix judicieux. Nous considérons la sphère CC et nous comparons tout d'abord les vecteurs $\mathbf{s_n}$ et $\mathbf{s_{cc}}$ (voir tableau 3.2) en utilisant une méthode empirique. Cette méthode consiste à analyser le comportement du robot entre une pose désirée fixe et 100 poses initiales aléatoirement choisies. Dans certains cas, la pose initiale se trouve à la limite de la visibilité de l'objet. Le tableau 3.3 montre les résultats. Le vecteur $\mathbf{s_{cc}}$ converge seulement pour la moitié des cas. Ce grand pourcentage d'échecs est dû au couplage entre le contrôle de l'orientation et les vitesses de translation (voir le premier terme de la troisième ligne de $\mathbf{L_{s_{cc}}}$ donnée en (3.11)). Ce couplage conduit à un large mouvement sur le côté (voir par exemple figure 3.28(a)) causant ainsi la sortie du point $\mathcal{P}_1$ du champ de vision. Sur ces 51 succès, avec $\mathbf{s_{cc}}$, la caméra parcourt une distance moyenne qui est 88% fois plus grande qu'avec $\mathbf{s_n}$. Ce résultat montre aussi qu'en utilisant $\mathbf{s_n}$, bien que la stabilité globale de la commande (1.16) n'ait pas été formellement prouvée, le domaine de convergence est empiriquement très large et la visibilité de l'objet est conservée.

Nous comparons ensuite $\mathbf{s_{cc}}$, $\mathbf{s_n}$ et $\mathbf{s}$ (voir tableau 3.2). La pose initiale de la caméra est constituée de mouvements de translation et de rotation. La figure 3.28 montre les différentes trajectoires dans l'espace cartésien et dans l'espace image. Comme prévu, l'utilisation de $\mathbf{s}$ produit un déplacement de la caméra en ligne droite dans l'espace cartésien (voir figure 3.28(a)). Par ailleurs, $\mathbf{s_n}$ produit une trajectoire cartésienne plus courte que celle avec $\mathbf{s_{cc}}$ et des trajectoires en ligne droite des images de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$, ce qui n'est pas le cas avec $\mathbf{s_{cc}}$ (voir figures 3.28(c) et 3.28(d)). Enfin, on peut noter que la trajectoire de l'image de $\mathcal{O}$ peut sortir de l'image si on utilise $\mathbf{s}$, comme le montre la figure 3.28(b). C'est pourquoi l'utilisation de $\mathbf{s}$ n'est pas recommandée et le vecteur $\mathbf{s_n}$ est préféré car ce dernier permet de conserver la visibilité de l'objet.

Dans la suite, nous présentons des résultats expérimentaux dans trois configurations différentes : le cas idéal, le cas où on introduit des erreurs de modélisation et le cas où on introduit des erreurs d'étalonnage. La figure 3.29 présente les images initiale et désirée dans ces trois configurations. La sphère CC est une balle de football de rayon 9.5 cm sur laquelle est marquée un vecteur tangent en un point de sa surface. La valeur du gain est fixée à $\lambda = 0.1$.

Informations visuelles existantes [Cowan 05] : $\mathbf{s_{cc}} = (r, \mathbf{o_s}, \boldsymbol{\zeta})$
Informations visuelles choisies : $\mathbf{s_n} = \left(\frac{1}{r}\mathbf{o_s}, \theta\mathbf{u}\right)$
Autre choix possible : $\mathbf{s} = \left(\frac{1}{R}{}^{\mathbf{c}*}\mathbf{t_c}, \theta\mathbf{u}\right)$

TAB. 3.2 – Informations visuelles à comparer.

Critères	$\mathbf{s_{cc}}$	$\mathbf{s_n}$
Nombre de succès	51	100
Distance moyenne parcourue par la caméra sur les 51 succès	1.05 m	0.56 m

TAB. 3.3 – Comparaison empirique pour la sphère CC.

Cas idéal : Ici, nous considérons la valeur exacte du rayon de la sphère. Les trajectoires de la caméra et des mesures sont données sur la figure 3.30 . Comme prévu, que ce soit dans l'espace image ou dans l'espace cartésien, en utilisant $\mathbf{s_n}$ les trajectoires sont plus courtes qu'en utilisant $\mathbf{s_{cc}}$. Ce résultat confirme les observations ci-dessus obtenues en simulations.

De plus, comme prévu, la commande utilisant $\mathbf{s_n}$ affiche une décroissance exponentielle des vitesses de rotation de la caméra avec moins d'oscillations sur les vitesses de translation (comparer les figures 3.31(c) et 3.31(d)).

Erreurs de modélisation sur le rayon de l'objet : Nous validons la robustesse de la commande utilisant $\mathbf{s_n}$ par rapport aux erreurs de modélisation sur le rayon de la sphère. Pour cela nous avons fixé $\widehat{R} = 0.5R$. Comme le montre la figure 3.32, la commande converge bien que nous ayons uniquement prouvé la stabilité asymptotique locale pour $\mathbf{s_n}$. En comparaison avec la commande utilisant $\mathbf{s_{cc}}$, il est clair que la commande utilisant le nouveau vecteur $\mathbf{s_n}$ est plus robuste aux erreurs avec moins d'oscillations sur les vitesses (comparer les figures 3.32(c) et 3.32(d)).

Erreurs d'étalonnage : Ici, nous validons la robustesse de la commande aux erreurs d'étalonnage. Nous avons fixé les paramètres intrinsèques de la caméra comme suit :

$\widehat{u}_0 = u_0 - 25\% u_0$, $\widehat{v}_0 = v_0 + 27\% v_0$, $\widehat{f_u} = f_u + 35\% f_u$ et $\widehat{f_v} = f_v + 30\% f_v$. La figure 3.33 montre le résultat, où là encore la commande utilisant $\mathbf{s_n}$ est plus robuste (comparer les figures 3.33(c) et 3.33(d)).

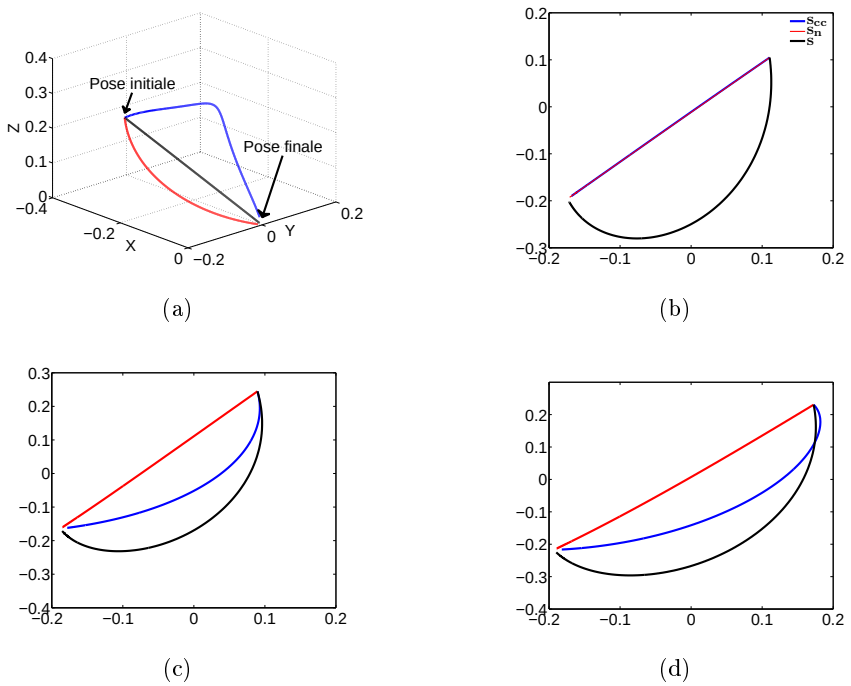


FIG. 3.28 – Comportement du robot en simulation : (a) trajectoire (m) de la caméra exprimée dans le repère désiré $\mathcal{F}_c^*$, (b) trajectoire (m) de l'image de $\mathcal{O}$ (les trajectoires avec $\mathbf{s_{cc}}$ et $\mathbf{s_n}$ sont superposées), (c) trajectoire (m) de l'image de $\mathcal{P}_1$, (d) trajectoire (m) de l'image de $\mathcal{P}_3$.

FIG. 3.29 – Configuration pour la sphère CC : (a) image initiale, (b) image désirée.

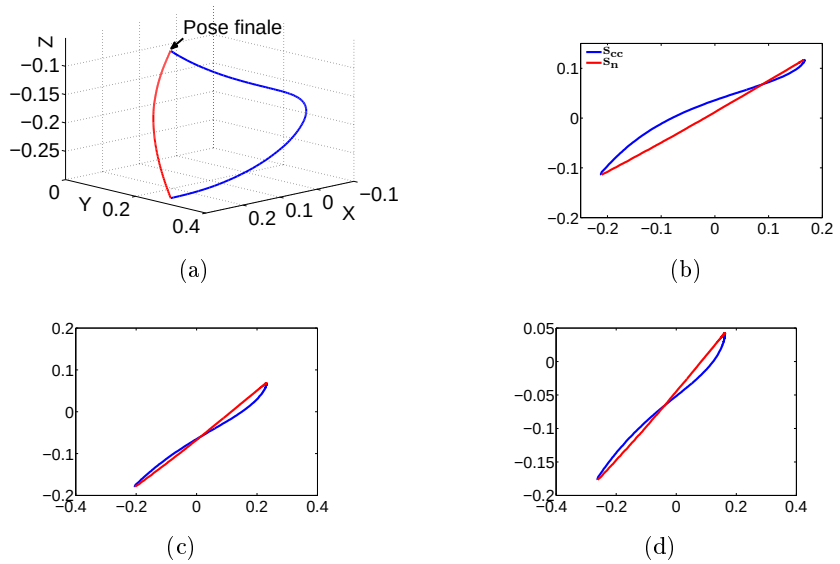


FIG. 3.30 – Comportement du manipulateur : (a) trajectoire (m) de la caméra exprimée dans le repère désiré $\mathcal{F}_c^*$, (b) trajectoire (m) de l'image de $\mathcal{O}$, (c) trajectoire (m) de l'image de $\mathcal{P}_1$, (d) trajectoire (m) de l'image de $\mathcal{P}_3$.

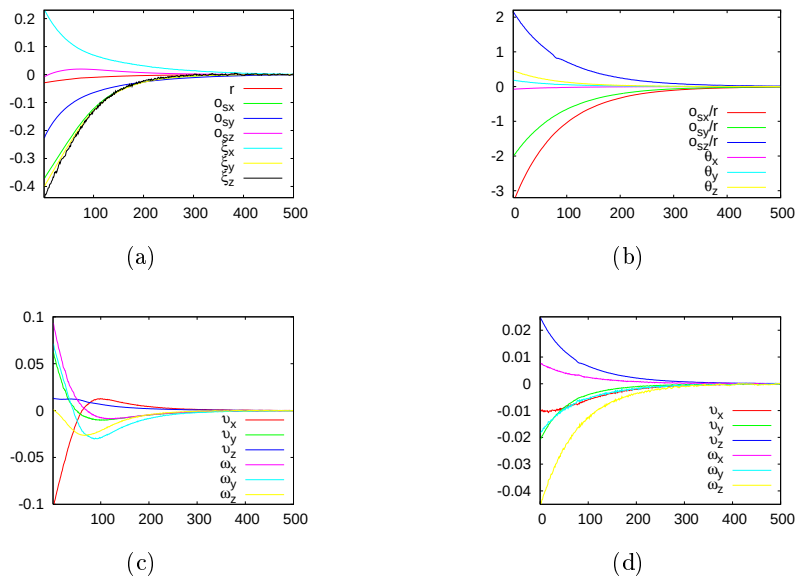


FIG. 3.31 – Cas idéal : (a) erreurs sur $\mathbf{s_{cc}}$, (b) erreurs sur $\mathbf{s_n}$, (c) et (d) vitesses de la caméra (m/s et rad/s) en utilisant $\mathbf{s_{cc}}$ et $\mathbf{s_n}$.

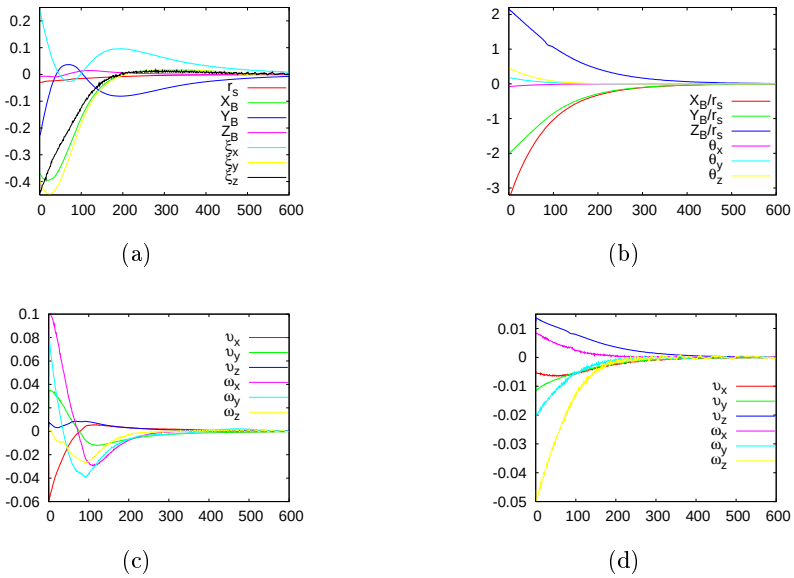


FIG. 3.32 – Erreurs de modélisation $\widehat{R} = 0.5R$: (a) erreurs sur $\mathbf{s_{cc}}$, (b) erreurs sur $\mathbf{s_n}$, (c) et (d) vitesses de la caméra (m/s et rad/s) en utilisant $\mathbf{s_{cc}}$ et$\mathbf{s_n}$.

Erreurs de modélisation sur la forme de l'objet : Ici, nous nous intéressons à la robustesse de la commande utilisant $\mathbf{s_n}$ par rapport aux erreurs de modélisation sur la forme de l'objet. Pour cela, nous utilisons un ballon de décoration de forme non sphérique et de couleur blanche. Ce ballon est marqué en noir du dessin d'une fleur. Les figures 3.34(a) et 3.34(b) montrent respectivement les images initiale et désirée. En nous appuyant sur le théorème 3.5, nous avons approximativement fixé la valeur du rayon de l'objet à $\widehat{R}$= 6.5 cm. Les marques spéciales ${}^c\mathbf{P}_1$ et ${}^c\mathbf{P}_3$ ont été sélectionnées comme deux feuilles sur le dessin de la fleur. Le résultat présenté sur les figures 3.34(c) et 3.34(d) montre bien que la commande converge.

Pour la sphère CC, nous pouvons conclure que la commande utilisant $\mathbf{s_n}$ est assez robuste aux erreurs de modélisation et d'étalonnage et présente un large domaine de convergence. Dans la suite, nous nous intéressons à la sphère spéciale, objet plus naturel que la sphère CC.

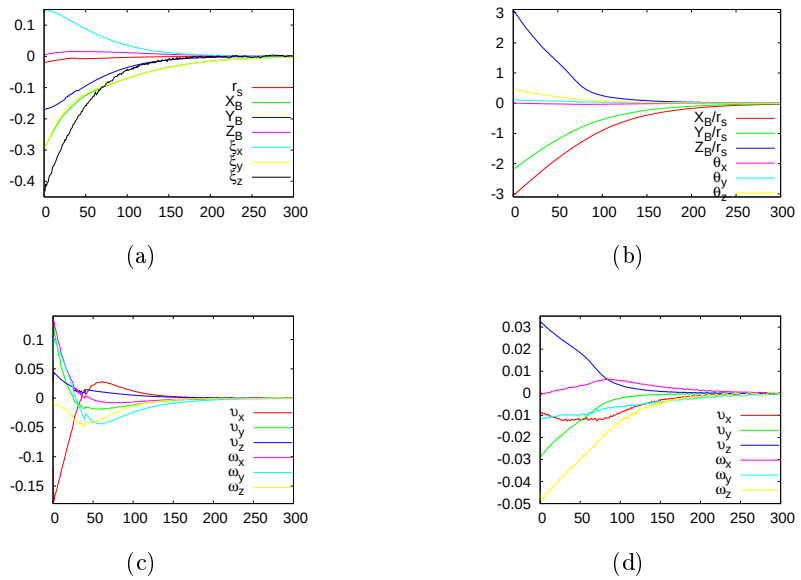


FIG. 3.33 – Erreurs d'étalonnage : (a) erreurs sur $\mathbf{s_{cc}}$, (b) erreurs $\mathbf{s_n}$, (c) et (d) vitesses de la caméra (m/s et rad/s) en utilisant $\mathbf{s_{cc}}$ et $\mathbf{s_n}$.

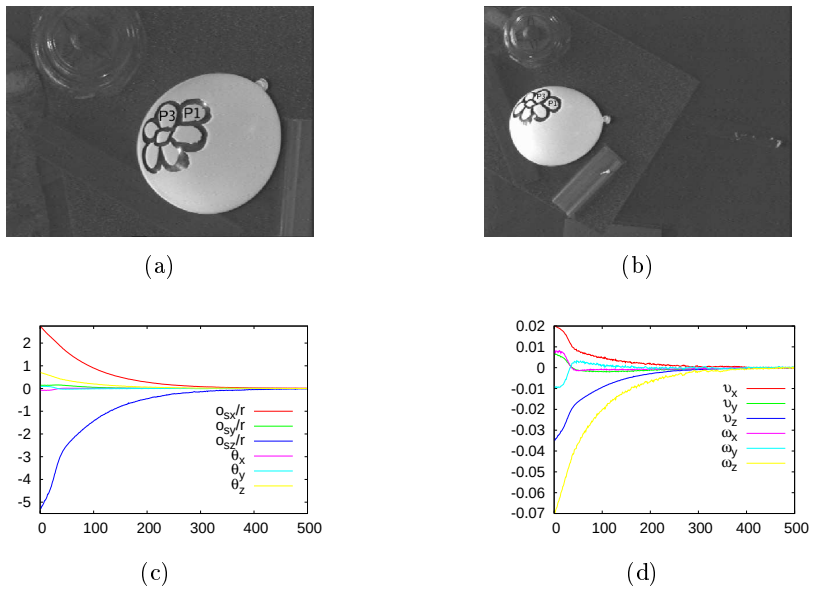
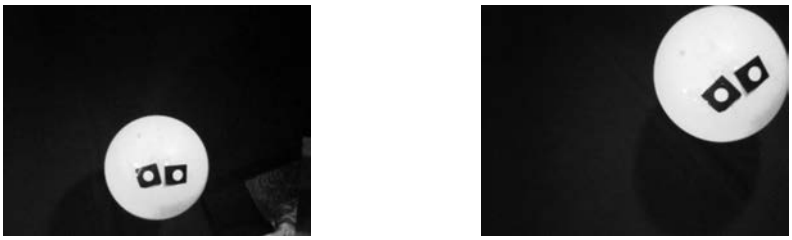


FIG. 3.34 – Application à un ballon de décoration : (a) image initiale, (b) image désirée, (c) erreurs sur $\mathbf{s_n}$, (d) vitesses de la caméra (m/s et rad/s).

3.4.5 Résultats : sphère spéciale

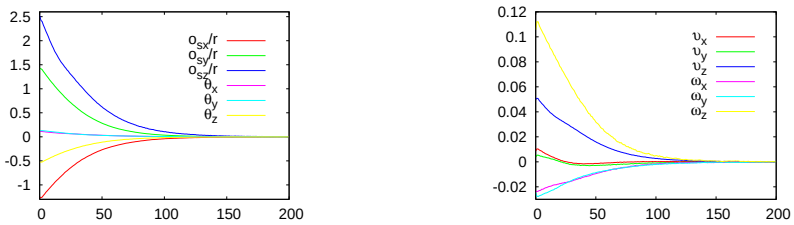
Dans cette partie, nous validons le choix du vecteur $\mathbf{s_n}$ pour la sphère spéciale. Pour cela, nous réalisons le positionnement d'un manipulateur par rapport à un ballon de football de couleur blanche et marqué de deux points sur sa surface. La valeur du rayon du ballon est 9.5 cm. La figure 3.35 montre les images initiale et finale utilisées dans les trois configurations expérimentales présentées dans la suite.



(a) (b)

FIG. 3.35 – Configuration pour la sphère spéciale : (a) image initiale, (b) image désirée.

Cas idéal : Dans le cas idéal où la valeur du rayon de la balle est connue (i.e. $\widehat{R}= R$), le comportement du manipulateur devrait être idéal puisque $\mathbf{L_{s_n}}\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s_n}}^{-1} = \mathbf{I}_6$. Les résultats sont donnés sur la figure 3.36 où, comme prévu, on observe une belle décroissance exponentielle de l'erreur (voir figure 3.36(a)).



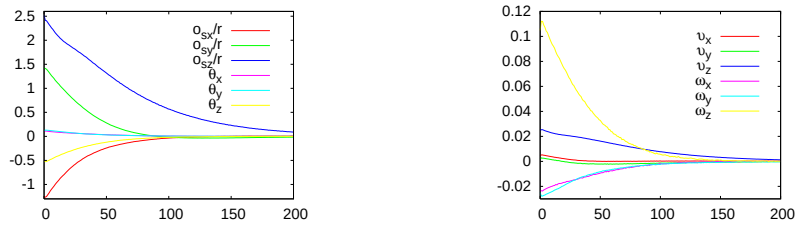
(a) (b)

FIG. 3.36 – Cas idéal : (a) erreurs sur $\mathbf{s_n}$, (b) vitesses de la caméra (m/s et rad/s).

Erreurs de modélisation de l'objet : Pour une sphère spéciale, la seule erreur de modélisation de l'objet apparaît dans l'estimation $\widehat{R}$ de la valeur de son rayon. La robustesse de la commande a été validée en fixant $\widehat{R}= 0.5R$. La figure 3.37 montre le résultat où nous pouvons voir que la commande converge, bien que nous ayons seulement démontré la stabilité asymptotique locale.

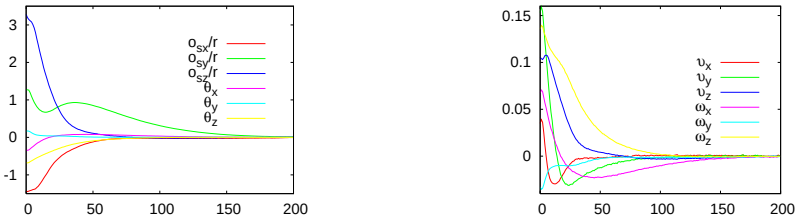
Erreurs d'étalonnage et de modélisation : La robustesse aux erreurs combinées d'étalonnage et de modélisation a été validée en fixant : $\widehat{R} = 2R$, $\widehat{u}_0 = u_0 - 47\% u_0$,

$\widehat{v}_0 = v_0 + 20\% v_0$, $\widehat{f_u} = f_u - 25\% f_u$ et $\widehat{f_v} = f_v + 25\% f_v$. Une fois de plus, la commande converge comme le montre la figure 3.38.



(a) (b)

FIG. 3.37 – Erreurs de modélisation $\widehat{R} = 0.5R$: (a) erreurs sur $\mathbf{s_n}$, (b) vitesses de la caméra (m/s et rad/s).



(a) (b)

FIG. 3.38 – Erreurs de modélisation et d'étalonnage : (a) erreurs sur $\mathbf{s_n}$, (b) vitesses de la caméra (m/s et rad/s).

Erreurs de modélisation du système de vision : Enfin, nous avons validé la robustesse aux erreurs de modélisation du système de vision. Nous avons utilisé une caméra fish-eye. Celle-ci n'a pas un centre unique de projection. Les images initiale et désirée sont présentées respectivement sur les figures 3.39(a) et 3.39(b).

Le sous-vecteur $\mathbf{s_{n1}}$ de $\mathbf{s_n}$, pouvant s'exprimer en utilisant les moments sphériques (voir 2.105), il a été mesuré en utilisant ces moments dont l'expression sur le plan image d'une caméra fish-eye est donnée en Annexe D.2.

Le résultat, présenté sur les figures 3.39(c) et 3.39(d), montre une fois de plus que la commande utilisant $\mathbf{s_n}$ converge.

À travers les résultats expérimentaux ci-dessus présentés, nous pouvons conclure que pour les sphères spéciales la commande utilisant le nouveau vecteur $\mathbf{s_n}$ est robuste aux erreurs.

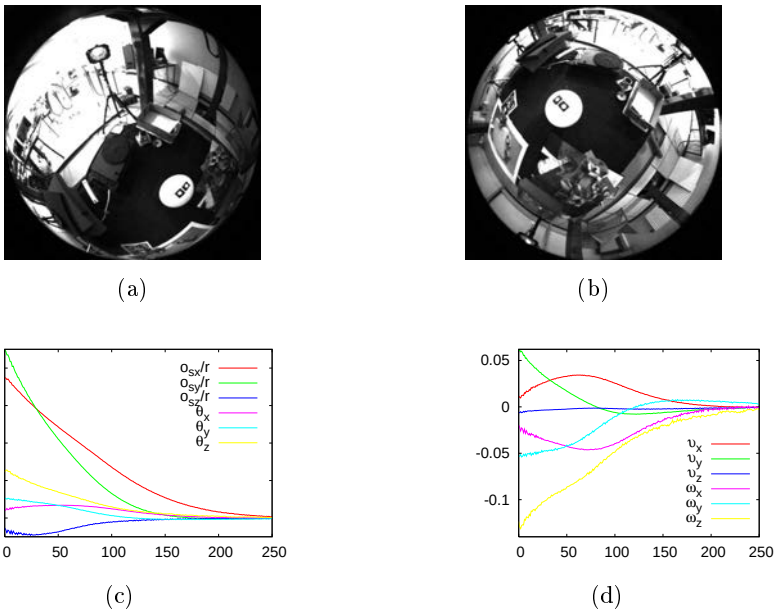


FIG. 3.39 – Utilisation de l'image fish-eye du ballon marqué : (a) image initiale, (b) image désirée, (c) erreurs sur $\mathbf{s_n}$, (d) vitesses de la caméra (m/s et rad/s).

3.5 Synthèse

Dans cette partie, nous avons réalisé des tâches de positionnement relativement à un point, un objet défini par un nuage de points de forme plane ou volumétrique, une sphère et une sphère marquée (sphère CC ou sphère spéciale). Pour chaque objet, nous avons choisi un vecteur minimal d'informations visuelles adéquat pour réaliser la tâche, i.e. un vecteur tel que la commande l'utilisant soit stable et tel que les trajectoires du système (dans l'espace 3D) et des mesures (dans l'espace image) soient satisfaisantes. La tableau 3.4 récapitule pour chaque objet le choix du vecteur d'informations et les propriétés de la commande classique utilisant ce choix.

Pour le positionnement du robot mobile par rapport à un point, nous avons choisi d'utiliser les coordonnées sphériques de l'image du point à cause de l'angle mort au centre de l'image de certains systèmes catadioptriques. Ce vecteur a permis de dégager un schéma de contrôle de forme triangulaire inférieur dont nous avons présenté les conditions suffisantes pour la stabilité. En pratique, nous avons montré la robustesse de ce schéma par rapport aux erreurs de modélisations et aux erreurs d'étalonnage du robot et du système de vision.

Pour un objet défini par un nuage de points nous avons établi un vecteur découplé d'informations visuelles applicable sur la plupart des configurations possibles de l'ensemble des points définissant l'objet : coplanaire symétrique, coplanaire assymétrique, non coplanaire symétrique et non coplanaire assymétrique. Ce nouveau vecteur est défini à partir des invariants aux rotations et d'une matrice d'orientation. Le schéma de

commande utilisant ce nouveau vecteur est aussi de type triangulaire inférieur, ce qui induit de bonnes propriétés de la commande. Même si nous n'avons pas pu apporter une preuve de la stabilité du schéma de contrôle, nous avons présenté des résultats de simulations qui montrent la robustesse de la commande utilisant le nouveau vecteur. On peut donc être rassuré sur l'utilisation de ce nouveau schéma en pratique où les valeurs des profondeurs des points de l'objet ne sont pas disponibles. Cependant, des configurations singulières ont pu être mises en évidence dans le cas de quatre points coplanaires symétriques. Il serait réconfortant de déterminer analytiquement l'ensemble des singularités de ce nouveau schéma. Dans le cas des mouvements complexes, les vitesses de translations peuvent avoir des effets gênants sur les vitesses de rotation. Pour supprimer totalement ces effets, on pourrait imaginer de chercher des invariants aux translations afin d'obtenir un schéma de commande totalement découplé. Pour le cas d'une configuration coplanaire symétrique, la matrice d'interaction peut perdre son rang plein six, perturbant ainsi la bonne réalisation de la tâche. En pratique, ce problème peut être résolu simplement en choisissant plutôt un ensemble de points de forme asymétrique pour définir un objet plan.

Objet 3D	Vecteur choisi	Propriétés du schéma de commande classique
point	(ϕ, θ)	Découplage : schéma triangulaire inférieur SAG aux erreurs de modélisation Vérifications expérimentales de la robustesse aux erreurs de modélisation et d'étalonnage
objet défini par un ensemble de points de forme plane ou volumétrique	$(r, d_{01}, d_{02}, \zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$	Découplage : schéma triangulaire inférieur Vérifications en simulations de la robustesse aux erreurs de modélisations Domaine de convergence large
sphère	$(\frac{o_{sx}}{r}, \frac{o_{sy}}{r}, \frac{o_{sz}}{r}) = \eta\ {}^c\mathbf{g_d}$ ou $(\rho, \theta, \frac{o_{sz}}{r})$	SAG aux erreurs de modélisation et SAL aux erreurs d'étalonnage Vérifications expérimentales et en simulations de la robustesse aux erreurs de modélisation et aux erreurs d'étalonnage
sphère marquée : sphère CC ou sphère spéciale	$(\frac{o_{sx}}{r}, \frac{o_{sy}}{r}, \frac{o_{sz}}{r}, \theta u_x, \theta u_y, \theta u_z)$ ou $(\rho, \theta, \frac{o_{sz}}{r}, \theta u_x, \theta u_y, \theta u_z)$	Découplage : schéma triangulaire supérieur SAL aux erreurs de modélisation Domaine de convergence très large Vérifications expérimentales de la robustesse aux erreurs de modélisation et aux erreurs d'étalonnage

TAB. 3.4 – Récapitulatif, SAG signifie Stabilité Asymptotique Globale et SAL signifie Stabilité Asymtotique Locale.

Pour les objets volumétriques sphériques, nous nous sommes approchés au mieux d'un ensemble d'informations visuelles qui assurent une bonne trajectoire dans l'espace cartésien, tout en garantissant aussi une bonne trajectoire dans l'image. En particulier, pour la sphère et la sphère CC, nous avons montré que le vecteur proposé est plus judicieux que le vecteur existant en terme de découplage pour la commande classique. L'angle mort, au centre de l'image de certains systèmes de vision catadioptrique, impose de considérer plutôt l'utilisation des coordonnées cylindriques comme paramétrisation pour l'image des sphères.

L'analyse théorique de la stabilité d'une commande simple utilisant ces informations visuelles a révélé un large domaine de robustesse de la commande aux erreurs de modélisation. Bien que pour la sphère CC et la sphère spéciale la matrice d'interaction ne puisse être définie que dans certaines conditions de visibilité des marques, le domaine de convergence de la commande semble empiriquement très grand. En ce qui concerne les erreurs d'étalonnage sur une caméra perspective et un système paracatadioptrique, bien qu'une analyse locale ait été considérée uniquement pour la sphère, le domaine de convergence de la commande est grand.

La prise en compte de la visibilité de l'objet, que ce soit sur un système de vision à angle mort au centre ou bien pour les marques des sphères CC et spéciale, pourrait faire l'objet de travaux futurs où on utiliserait, par exemple, une stratégie de commande de haut niveau telle que la planification de trajectoire.

Conclusion

Dans ce mémoire, il a été question de sélectionner des informations visuelles judicieuses pour s'approcher du comportement idéal d'un robot commandé par asservissement visuel (par exemple au niveau de la trajectoire). En asservissement visuel, plus la sélection est pertinente meilleur est le comportement du robot. De plus ce comportement est d'autant plus adéquat que le champ de vision du robot est large.

Nous avons vu, au premier chapitre, des systèmes de vision centrale catadioptrique (couplage miroir et caméra), qui donnent au robot une vision omnidirectionnelle de la scène. Cette vision omnidirectionnelle est très utile pour des applications en robotique mobile et aérienne. Nous avons aussi vu que le modèle de projection sphérique est au centre des modèles de projections catadioptrique et perspective.

En utilisant le modèle de projection sphérique nous avons proposé, dans le deuxième chapitre, des informations visuelles nouvelles, mesurables aussi bien sur une caméra perspective que sur un système de vision catadioptrique, pour les primitives usuelles telles que les points, les droites, les sphères et les cercles 3D. Pour chaque primitive, la modélisation a été réalisée en exploitant les propriétés évidentes de sa projection sphérique afin de déterminer des informations visuelles adéquates. A ce niveau, cette étude a révélé un point essentiel sur l'approche proposée, à savoir que la sélection d'informations visuelles pertinentes est plus simple et intuitive en utilisant le modèle de projection sphérique.

Toujours dans le deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés aux moments sphériques, i.e. les moments 2D calculés sur la surface de la sphère. Ces moments sont particulièrement bien adaptés pour décrire l'image sphérique des primitives 3D non paramétrables et celle des cercles 3D. Dans cette étude, le calcul des moments sphériques a été généralisé à tout système de vision centrale catadioptrique. Les combinaisons de moments sphériques invariantes aux translations et aux rotations permettent, quand elles existent, de définir un schéma totalement découplé d'asservissement visuel. Il nous a paru difficile de déterminer des invariants aux translations. En revanche, nous avons revisité les invariants aux rotations en faisant le lien avec les valeurs propres de la matrice d'inertie 3D décrivant l'image sphérique de l'objet.

La modélisation effectuée au deuxième chapitre nous a permis, au troisième chapitre, de nous intéresser à la sélection d'informations visuelles adéquates pour des primitives

planes et volumétriques représentatives. Dans ce dernier chapitre nous avons présenté en détail les contributions majeures de cette étude à savoir :

- pour les systèmes de vision catadioptrique à angle mort au centre, il est préférable d'utiliser les coordonnées cylindriques ou sphériques pour paramétriser l'image de l'objet. Dans le cas du positionnement par rapport à un point d'un robot mobile équipé d'un tel système de vision, nous avons utilisé la paramétrisation en coordonnées sphériques. Cette paramétrisation, à travers son schéma de commande découplé, a permis de contrôler de manière extrêmement robuste les deux degrés de liberté du robot.

- pour une sphère, nous avons proposé un vecteur d'informations visuelles liées à la position 3D de la sphère dans l'espace. Nous avons prouvé que, même en présence d'erreurs de modélisation sur l'objet, une commande simple utilisant ce vecteur a un très large domaine de convergence.

- pour une sphère marquée (sphère CC ou sphère spéciale), nous avons montré qu'il est possible d'obtenir sa pose partielle à partir d'une seule image. À partir de cette pose partielle nous avons proposé un nouveau schéma de commande découplé. Pour la sphère CC, l'utilisation de ce nouveau schéma a montré un domaine de convergence plus large que celui obtenu avec le schéma existant en utilisant une commande simple.

- enfin, pour tout objet plan ou volumétrique défini par un ensemble de points, nous avons aussi présenté un nouveau schéma de commande découplé. Le découplage a été obtenu en utilisant des informations visuelles invariantes aux rotations de la caméra. Les autres informations visuelles, choisies à partir d'une matrice de rotation particulière, ont l'avantage d'avoir une variation identique aux rotations de la caméra. Nous avons montré que la commande utilisant le nouveau vecteur minimal est assez robuste aux erreurs de modélisation. En prenant des cas extrêmes de simulation, nous avons montré que le nouveau schéma de commande a un domaine de convergence assez large.

Cette étude ouvre quelques perspectives de recherche que nous listons ci-dessous :

- que ce soit dans le cas d'utilisation d'un système de vision catadioptrique à angle mort au centre ou dans le cas de l'asservissement visuel d'une sphère marquée (sphère CC ou sphère spéciale), la commande classique devrait être dotée d'un peu plus d'intelligence afin de prendre en compte la visibilité de l'objet. C'est ainsi qu'on pourrait imaginer faire de la planification de trajectoire dans l'image.

- dans le cas d'un objet défini par un ensemble de points, il serait réconfortant de déterminer l'ensemble des singularités, d'y remédier et par ailleurs d'analyser la

stabilité du schéma de commande proposé.

- il nous a paru difficile de déterminer une combinaison de moments sphériques invariante aux mouvements de translation. Nous n'avons cependant pas prouvé la non existence de telles combinaisons. Une étude approfondie sur l'existence de telles combinaisons semble donc nécessaire, quand on sait que celles-ci peuvent participer au découplage total d'un schéma de commande.

- enfin, il serait intéressant d'étendre le champ d'applications de ce travail à la commande d'autres robots que les manipulateurs et les robots mobiles de type unicycle. Pour les robots mobiles non-holonomes et les robots aériens par exemple, il s'agira entre autres d'adapter la sélection d'informations visuelles respectivement à la contrainte de non holonomie et la dynamique du système.

Pour terminer, au delà de leurs impacts pratiques, les résultats obtenus montrent aussi qu'en restant dans un cadre simple de l'asservissement visuel, i.e. modélisation par projection sphérique et utilisation de la commande classique, il est possible d'améliorer significativement le comportement d'un robot.

Annexe A

Complément pour la modélisation de l'image de points

Le tableau A.1 décrit le domaine de définition des fonctions π_s et $\pi_{p\xi}$.

Symbole	Définition
$\pi_s : \mathbb{R}^{*3} \rightarrow \mathcal{S}_{(C,1)}$	Projection sphérique
$\pi_{p\xi} : \mathcal{S}_{(C,1)} \rightarrow \mathcal{P}_\pi$	Projection de la sphère vers le plan image

TAB. A.1 – Notations pour les projections.

A.1 Calcul des informations visuelles

Dans cette partie, nous montrons le calcul de la projection sphérique d'un point à partir de son image catadioptrique en détaillant la fonction $\pi_{p\xi}^{-1}$ donnée en (2.16).

La fonction $\begin{array}{rccc} \pi_{p\xi}^{-1} : & \mathcal{P}_\pi & \rightarrow & \mathcal{S}_{(C,1)} \\ & {}^c\mathbf{p} & \mapsto & \mathbf{p_s} \end{array}$ représente le passage de l'image catadioptrique ou perspective ${}^c\mathbf{p}$ vers la projection $\mathbf{p_s}$ sur la sphère $\mathcal{S}_{(C,1)}$ du rayon incident ${}^c\mathbf{P}$. L'expression analytique de cette fonction est donnée par :

$$\begin{cases} p_{sx} = \frac{\xi+\lambda_\xi}{p_x^2+p_y^2+1} p_x \\ p_{sy} = \frac{\xi+\lambda_\xi}{p_x^2+p_y^2+1} p_y \\ p_{sz} = \frac{\xi+\lambda_\xi}{p_x^2+p_y^2+1} - \xi, \end{cases} \tag{A.1}$$

avec $\lambda_\xi = \sqrt{1 + (1-\xi^2)(p_x^2 + p_y^2)}$.

Nous montrons, dans ce qui suit, comment l'expression donnée par (A.1) est obtenue. Partant de (1.3) où $\mathbf{p_s}$ est l'inconnue et le vecteur ${}^c\mathbf{p}$ est donné, on a le système suivant :

$$\begin{cases} p_x = \dfrac{p_{s_x}}{p_{s_z} + \xi} & \text{(A.2a)} \\ p_y = \dfrac{p_{s_y}}{p_{s_z} + \xi} & \text{(A.2b)} \\ {p_{s_x}}^2 + {p_{s_y}}^2 + {p_{s_z}}^2 = 1. & \text{(A.2c)} \end{cases}$$

A partir de (A.2a) et (A.2b), on obtient aussitôt le système

$$\begin{cases} p_{s_x} = p_x(p_{s_z} + \xi) & \text{(A.3a)} \\ p_{s_y} = p_y(p_{s_z} + \xi), & \text{(A.3b)} \end{cases}$$

qui, injecté dans (A.2c), donne l'équation du second degré en p_{s_z}

$$\left(1 + p_x^2 + p_y^2\right) {p_{s_z}}^2 + 2\xi \left(p_x^2 + p_y^2\right) p_{s_z} + \xi^2 \left(p_x^2 + p_y^2\right) - 1 = 0. \tag{A.4}$$

Le discriminant réduit de (A.4) est

$$\lambda_\xi^2 = 1 + (1 - \xi^2) \left(p_x^2 + p_x^2\right).$$

Les deux valeurs possible de p_{s_z} sont données par

$$p_{s_z} = \frac{-\xi \left(p_x^2 + p_y^2\right) \pm \lambda_\xi}{p_x^2 + p_y^2 + 1}, \tag{A.5}$$

où on choisit immédiatement la solution en $+\lambda_\xi$, sinon la valeur de p_{s_z} est toujours négative. Cette solution peut se réécrire comme

$$p_{s_z} = \frac{\xi + \lambda_\xi}{p_x^2 + p_y^2 + 1} - \xi. \tag{A.6}$$

En injectant (A.6) dans (A.3), on obtient finalement

$$\begin{cases} p_{s_x} = \frac{\xi + \lambda_\xi}{p_x^2 + p_y^2 + 1} p_x \\ p_{s_y} = \frac{\xi + \lambda_\xi}{p_x^2 + p_y^2 + 1} p_y. \end{cases}$$

Pour $\xi = 0$, on a $\lambda_\xi = \sqrt{1 + p_x^2 + p_y^2}$ et le résultat

$$p_{s_x} = p_x/\lambda_\xi,\ p_{s_y} = p_y/\lambda_\xi,\ p_{s_z} = 1/\lambda_\xi,$$

qui correspond bel et bien aux équations de la projection sphérique $\mathbf{p}_s$ du point $\mathcal{P}$ à partir de son image perspective ${}^c\mathbf{p}$.

A.2 Matrice d'interaction associée à $\boldsymbol{\zeta}$

Dans cette partie, nous détaillons le calcul de la matrice d'interaction associée à $\boldsymbol{\zeta}$ donnée en (2.20) et (2.22). Rappellons que le vecteur $\boldsymbol{\zeta}$ est la représentation $\boldsymbol{\theta}\mathbf{u}$ de la matrice de rotation $\mathbf{V}\mathbf{V}^{*-1}$ où $\mathbf{V}^*$ est la valeur désirée de la matrice de rotation $\mathbf{V} = [\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}\ \mathbf{v_3}]$ définie comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{v_1} = \mathbf{p_{1_s}} \\ \mathbf{v_2} = \frac{\Gamma_{\mathbf{p_{1_s}}}(\mathbf{p_{2_s}} - \mathbf{p_{1_s}})}{\|\Gamma_{\mathbf{p_{1_s}}}(\mathbf{p_{2_s}} - \mathbf{p_{1_s}})\|} \\ \mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}, \end{cases} \tag{A.7}$$

où $\Gamma_{\mathbf{p_{1_s}}} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{p_{1_s}}\mathbf{p_{1_s}}^\top$.

La variation temporelle de $\boldsymbol{\zeta}$ est donnée par [Cowan 05] :

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \left[\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^\top\right]^\times \tag{A.8}$$

où $[\mathbf{M}]^\times$ désigne le vecteur associé à la matrice du préproduit vectoriel $\mathbf{M}$. En utilisant la propriété

$$\mathbf{S}\mathbf{w} = \left[\mathbf{S}[\mathbf{w}]_\times \mathbf{S}^\top\right]^\times \quad \forall \mathbf{S} \in \mathbf{SO(3)} \text{ et } \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3, \tag{A.9}$$

partant de (A.8), on obtient

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{V}\left[\mathbf{V}^\top\dot{\mathbf{V}}\right]^\times. \tag{A.10}$$

On a

$$\mathbf{V}^\top\dot{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{v_1}^\top\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{2} & \mathbf{v_1}^\top\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{3} \\ \mathbf{v_2}^\top\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{1} & 0 & \mathbf{v_2}^\top\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{3} \\ \mathbf{v_3}^\top\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{1} & \mathbf{v_3}^\top\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{2} & 0 \end{bmatrix},$$

qui entraîne

$$\left[\mathbf{V}^\top\dot{\mathbf{V}}\right]^\times = \left[-\mathbf{v_2}^\top\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{3} \quad -\mathbf{v_3}^\top\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{1} \quad \mathbf{v_2}^\top\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{1}\right]^\top. \tag{A.11}$$

Notons que les composantes du vecteur $\left[\mathbf{V}^\top\dot{\mathbf{V}}\right]^\times$ ont été choisies de manière à simplifier les calculs. En injectant (A.11) dans (A.10), on obtient :

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = [\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}\ \mathbf{v_3}] \begin{bmatrix} -\mathbf{v_2}^\top\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{3} \\ -\mathbf{v_3}^\top\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{1} \\ \mathbf{v_2}^\top\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{1} \end{bmatrix}. \tag{A.12}$$

Puisque le vecteur $\mathbf{v_1}$ est la projection sphérique du point $\mathcal{P}_1$, partant de (2.11), on déduit la variation temporelle de $\mathbf{v_1}$:

$$\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{1} = -\frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}_1\|}\left(\mathbf{I}_3 - \mathbf{v_1}\mathbf{v_1}^\top\right)\boldsymbol{v} + \mathbf{v_1} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{A.13}$$

Partant de (A.13), après quelques développements, on obtient :

$$\mathbf{v_3}^\top \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{1} = -\frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}_1\|}\mathbf{v_3}^\top \boldsymbol{v} + \mathbf{v_2}^\top \boldsymbol{\omega} \tag{A.14}$$

et

$$\mathbf{v_2}^\top \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{1} = -\frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}_1\|}\mathbf{v_2}^\top \boldsymbol{v} - \mathbf{v_3}^\top \boldsymbol{\omega}. \tag{A.15}$$

Dans la suite, nous détaillons l'expression de $\mathbf{v_2}^\top \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{3}$. Partant de l'expression de $\mathbf{v_3}$ donnée en (A.7), on a

$$\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{3} = \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{1} \times \mathbf{v_2} + \mathbf{v_1} \times \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{2}. \tag{A.16}$$

Partant de (A.16), on a immédiatement

$$\mathbf{v_2}^\top \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{3} = \mathbf{v_2}^\top (\mathbf{v_1} \times \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{2}), \tag{A.17}$$

puisque $\mathbf{v_2}^\top(\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{1} \times \mathbf{v_2}) = \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{1}^\top(\mathbf{v_2} \times \mathbf{v_2}) = 0$.

Partant de l'expression de $\mathbf{v_2}$ donnée en (A.7), après quelques développements, on obtient

$$\mathbf{v_1} \times \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{2} = \frac{1}{\|\mathbf{u}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}}\|}(\mathbf{v_1} \times \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}}) - \frac{\dot{(\|\mathbf{u}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}}\|)}}{\|\mathbf{u}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}}\|}\mathbf{v_3}, \tag{A.18}$$

où $\mathbf{u}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}} = \Gamma_{\mathbf{p_{1_s}}}(\mathbf{p_{2_s}} - \mathbf{p_{1_s}})$. En injectant (A.18) dans (A.17), on obtient après quelques développements

$$\mathbf{v_2}^\top \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{3} = -\frac{1}{\|\mathbf{u}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}}\|}\mathbf{v_3}^\top \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}}. \tag{A.19}$$

L'expression détaillée de $\mathbf{u}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}}$ est donnée par

$$\mathbf{u}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}} = \Gamma_{\mathbf{p_{1_s}}}(\mathbf{p_{2_s}} - \mathbf{p_{1_s}}) = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{p_{1_s}}\mathbf{p_{1_s}}^\top)(\mathbf{p_{2_s}} - \mathbf{p_{1_s}}) = \mathbf{p_{2_s}} - \mathbf{p_{1_s}}(\mathbf{p_{1_s}}^\top \mathbf{p_{2_s}}). \tag{A.20}$$

Partant de (A.20), on a immédiatement

$$\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}} = \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{2_s}} - \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{1_s}} - \mathbf{p_{1_s}}\left(\mathbf{p_{2_s}}^\top \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{1_s}} + \mathbf{p_{1_s}}^\top \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{2_s}}\right). \tag{A.21}$$

Partant de (A.21), après quelques développements, on obtient

$$\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}} = \mathbf{M}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}}\boldsymbol{v} + \mathbf{u}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{A.22}$$

avec $\mathbf{M}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}} = \left(-\frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}_2\|}\Gamma_{\mathbf{p_{1_s}}}\Gamma_{\mathbf{p_{2_s}}} + \frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}_1\|}\left((\mathbf{p_{1_s}}^\top \mathbf{p_{2_s}})\mathbf{I}_3 + \mathbf{p_{1_s}}\mathbf{p_{2_s}}^\top\right)\Gamma_{\mathbf{p_{1_s}}}\right)$ et $\Gamma_{\mathbf{p_{2_s}}} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{p_{2_s}}\mathbf{p_{2_s}}^\top$. Finalement, en injectant (A.22) dans (A.19), on obtient après quelques développements

$$\mathbf{v_2}^\top \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{3} = -\frac{1}{\|\mathbf{u}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}}\|}\mathbf{v_3}^\top \mathbf{M}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}}\boldsymbol{v} + \mathbf{v_1}^\top \boldsymbol{\omega}. \tag{A.23}$$

Pour terminer, en injectant (A.14), (A.15) et (A.23) dans (A.12), on obtient

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{L}_{\upsilon,\omega}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega}, \tag{A.24}$$

avec

$$\mathbf{L}_{\upsilon,\omega} = \frac{1}{\|\mathbf{u}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}}\|}\mathbf{v_1}\mathbf{v_3}^\top \mathbf{M}_{\mathbf{p_{1_s}p_{2_s}}} + \frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}_1\|}\left(\mathbf{v_2}\mathbf{v_3}^\top - \mathbf{v_3}\mathbf{v_2}^\top\right).$$

Partant de (A.24), on a le résultat donné en (2.20)

$$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\zeta}} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{L}_{\upsilon,\omega} & -\mathbf{I}_3 \end{array}\right]. \tag{A.25}$$

A.3 Analyse de la stabilité de la commande pour un point

Ici, nous donnons la preuve du théorème 3.1 décrit en Section 3.1.1.

Théorème 3.1 *La commande (1.16) utilisant* $\mathbf{s}$ *est globalement asymptotiquement stable dans l'espace de la tâche si*

$$0 < 1 + \frac{2 - 2\sqrt{a^2+1}}{a^2} < \frac{\widehat{\|{}^c\mathbf{P}\|}}{\|{}^c\mathbf{P}\|} < 1 + \frac{2 + 2\sqrt{a^2+1}}{a^2},$$

où $a = -\cos\theta/(\sin\phi\sin\theta\cos\phi)$.

Preuve : Dans le cas où on considère uniquement une erreur sur l'estimation $\widehat{\|{}^c\mathbf{P}\|}$ de $\|{}^c\mathbf{P}\|$, l'équation de la boucle fermée est donnée par

$$\dot{\mathbf{e}} = -\lambda \mathbf{L}_{\mathbf{s}}\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}}^{-1}\mathbf{e}, \tag{A.26}$$

avec $\mathbf{e} = \mathbf{s} - \mathbf{s}^*$ et

$$\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 1/\widehat{l}_\upsilon & 0 \\ \widehat{l}_{\omega,\upsilon}/\widehat{l}_\upsilon & -1 \end{array}\right] \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{l} \widehat{l}_\upsilon = -(\sin\theta\cos\phi)/\widehat{\|{}^c\mathbf{P}\|} \\ \widehat{l}_{\omega,\upsilon} = -\cos\theta/(\widehat{\|{}^c\mathbf{P}\|}\sin\phi). \end{array}\right.$$

En utilisant (3.1), on déduit

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s}}\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} l_\upsilon/\widehat{l}_\upsilon & 0 \\ \left(l_{\omega,\upsilon} - \widehat{l}_{\omega,\upsilon}\right)/\widehat{l}_\upsilon & 1 \end{array}\right], \tag{A.27}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} l_\upsilon/\widehat{l}_\upsilon = \widehat{\|{}^c\mathbf{P}\|}/\|{}^c\mathbf{P}\| \\ \left(l_{\omega,\upsilon} - \widehat{l}_{\omega,\upsilon}\right)/\widehat{l}_\upsilon = a\left(1 - \widehat{\|{}^c\mathbf{P}\|}/\|{}^c\mathbf{P}\|\right) \\ a = -\cos\theta/(\sin\phi\sin\theta\cos\phi). \end{array}\right.$$

La commande (1.16) est globalement asymptotiquement stable si $\mathbf{L}_{\mathbf{s}}\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}}^{-1} > 0$. Dans la suite, nous montrons que $\mathbf{L}_{\mathbf{s}}\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}}^{-1} > 0$ si et seulement si

$$0 < 1 + \frac{2 - 2\sqrt{a^2+1}}{a^2} < \frac{\widehat{\|{}^c\mathbf{P}\|}}{\|{}^c\mathbf{P}\|} < 1 + \frac{2 + 2\sqrt{a^2+1}}{a^2}.$$

La matrice symétrique associée à $\mathbf{L_s}\widehat{\mathbf{L}}_\mathbf{s}^{-1}$ est donnée par

$$\mathbf{M_s} = \left(\mathbf{L_s}\widehat{\mathbf{L}}_\mathbf{s}^{-1} + (\mathbf{L_s}\widehat{\mathbf{L}}_\mathbf{s}^{-1})^\top\right)/2 = \begin{bmatrix} \widehat{\|{}^c\mathbf{P}\|}/\|{}^c\mathbf{P}\| & a/2\left(1 - \widehat{\|{}^c\mathbf{P}\|}/\|{}^c\mathbf{P}\|\right) \\ a/2\left(1 - \widehat{\|{}^c\mathbf{P}\|}/\|{}^c\mathbf{P}\|\right) & 1 \end{bmatrix}.$$

On a $\mathbf{L_s}\widehat{\mathbf{L}}_\mathbf{s}^{-1} > 0$ si et seulement si $\mathbf{M_s} > 0$. La matrice $\mathbf{M_s}$ est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives. Puisque $\mathbf{M_s}$ est une matrice 2×2, ses valeurs propres sont positives si et seulement si $\mathrm{Trace}(\mathbf{M_s}) > 0$ et $|\mathbf{M_s}| > 0$. On a $\mathrm{Trace}(\mathbf{M_s}) = (\widehat{\|{}^c\mathbf{P}\|}/\|{}^c\mathbf{P}\| + 1) > 0$ car $\widehat{\|{}^c\mathbf{P}\|}/\|{}^c\mathbf{P}\| > 0$. Le déterminant de $\mathbf{M_s}$ est un polynôme du second degré en $\widehat{\|{}^c\mathbf{P}\|}/\|{}^c\mathbf{P}$ donné par :

$$|\mathbf{M_s}| = -\frac{a^2}{4}\left(\frac{\widehat{\|{}^c\mathbf{P}\|}}{\|{}^c\mathbf{P}\|}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{2} + 1\right)\frac{\widehat{\|{}^c\mathbf{P}\|}}{\|{}^c\mathbf{P}\|} - \frac{a^2}{4}. \tag{A.28}$$

Le discriminant de $|\mathbf{M_s}|$ est positif. Partant de (A.28), on déduit que $|\mathbf{M_s}| > 0$ pour les valeurs de $\widehat{\|{}^c\mathbf{P}\|}/\|{}^c\mathbf{P}$ comprises entre les racines $r_{inf} = 1 + \frac{2-2\sqrt{a^2+1}}{a^2}$ et $r_{sup} = 1 + \frac{2+2\sqrt{a^2+1}}{a^2}$. Puisque $r_{inf} > 0$, on obtient finalement $\mathbf{L_s}\widehat{\mathbf{L}}_\mathbf{s}^{-1} > 0$ si et seulement si

$$0 < r_{inf} < \frac{\widehat{\|{}^c\mathbf{P}\|}}{\|{}^c\mathbf{P}\|} < r_{sup}.$$

Annexe B

Complément pour la modélisation de l'image de droites

B.1 Projection centrale catadioptrique d'une droite

Dans cette partie, nous déroulons les étapes de la projection catadioptrique d'une droite et nous montrons que, dans le cas général, il s'agit d'une ellipse dont l'équation est donnée en (2.29).

Soit $\mathcal{D}$ une droite 3D. Celle-ci peut être définie, dans $\mathcal{F}_c$, par l'intersection de deux plans orthogonaux (voir figure 2.4)

$$\mathcal{D} = \begin{cases} n_{1x}P_x + n_{1y}P_y + n_{1z}P_z = 0 \\ n_{2x}P_x + n_{2y}P_y + n_{2z}P_z + d_2 = 0, \end{cases} \tag{B.1}$$

où ${}^c\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z) \in \mathcal{D}$, $d_2 \neq 0$ et

$$\begin{cases} {n_{1x}}^2 + {n_{1y}}^2 + {n_{1z}}^2 = 1 \\ {n_{2x}}^2 + {n_{2y}}^2 + {n_{2z}}^2 = 1 \\ n_{1x}n_{2x} + n_{1y}n_{2y} + n_{1z}n_{2z} = 0. \end{cases}$$

La droite $\mathcal{D}$ est projetée sur le plan image en une ellipse. Cette ellipse est obtenue en suivant le modèle unifié de projection centrale catadioptrique proposé dans [Geyer 00]. La première étape est la projection sphérique. On obtient le grand cercle d'équation [Geyer 00] :

$$\begin{cases} n_{1x}p_{sx} + n_{1y}p_{sy} + n_{1z}p_{sz} = 0 & \text{(B.2a)} \\ {p_{sx}}^2 + {p_{sy}}^2 + {p_{sz}}^2 = 1. & \text{(B.2b)} \end{cases}$$

La deuxième étape est la projection sur le plan image catadioptrique. Les équations de projection sont données par

$$p_x = \frac{p_{s_x}}{p_{s_z}+\xi}, \quad p_y = \frac{p_{s_y}}{p_{s_z}+\xi}.$$

En injectant ces équations dans (B.2) et après quelques simplications, on aboutit à

$$\begin{cases} \dfrac{\xi n_{1z}}{p_{s_z}+\xi} = n_{1x}p_x + n_{1y}p_y + n_{1z} & \text{(B.3a)} \\ p_x^2 + p_y^2 + 1 - \dfrac{2\xi}{p_{s_z}+\xi} + \dfrac{\xi^2-1}{(p_{s_z}+\xi)^2} = 0. & \text{(B.3b)} \end{cases}$$

A noter que si $n_{1z} = 0$, partant de (B.3a), l'image catadioptrique de $\mathcal{D}$ est la droite d'équation (voir figure B.1(a)) :

$$n_{1x}p_x + n_{1y}p_y = 0. \tag{B.4}$$

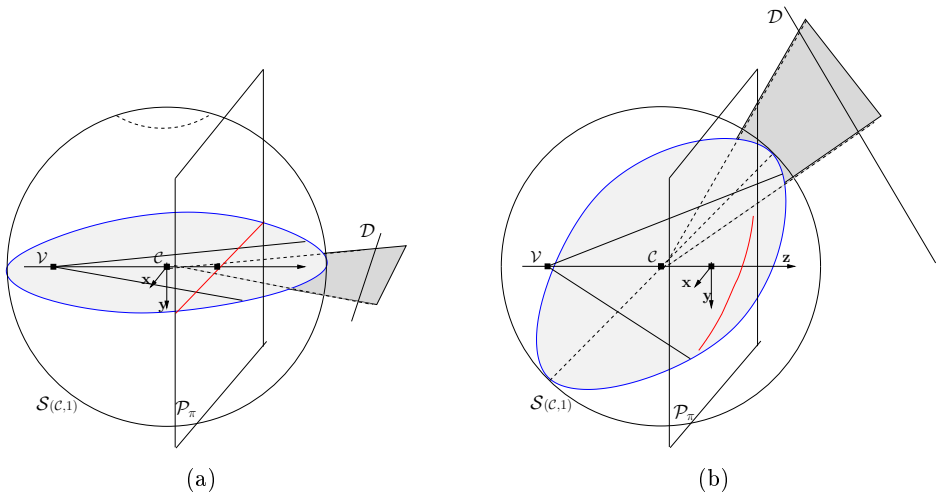


FIG. B.1 – Projection catadioptrique d'une droite : (a) cas $n_{1z} = 0$, ici $\mathbf{n_1} = \mathbf{y}$, (b) cas $n_{1z} \neq 0$, en rouge une partie de l'ellipse vue dans l'image.

De même, si $\xi = 0$, on obtient immédiatement de (B.3a) la projection perspective de $\mathcal{D}$ donnée par

$$n_{1x}p_x + n_{1y}p_y + n_{1z} = 0. \tag{B.5}$$

Dans la suite, on suppose $n_{1z} \neq 0$ et $\xi \neq 0$. On peut donc écrire (B.3a) sous la forme

$$\frac{1}{p_{s_z}+\xi} = \frac{n_{1x}p_x + n_{1y}p_y + n_{1z}}{\xi n_{1z}}. \tag{B.6}$$

En injectant (B.6) dans (B.3b), après simplifications, on obtient finalement l'ellipse d'équation (voir figure B.1(b)) :

$$e_o p_x^2 + e_1 p_y^2 + 2e_2 p_x p_y + 2e_3 p_x + 2e_4 p_y + e_5 = 0, \tag{B.7}$$

avec

$$\begin{cases} e_0 = n_{1z}^2\xi^2 + (\xi^2-1)n_{1x}^2, & e_3 = -n_{1x}n_{1z} \\ e_1 = n_{1z}^2\xi^2 + (\xi^2-1)n_{1y}^2, & e_4 = -n_{1y}n_{1z} \\ e_2 = (\xi^2-1)n_{1x}n_{1y}, & e_5 = -n_{1z}^2. \end{cases}$$

De manière surprenante (car par hypothèse $\xi \neq 0$ dans (B.6)), l'équation (B.7) de l'ellipse est aussi valable pour $\xi = 0$ qui correspond à une caméra perspective. En effet, dans ce cas (B.7) se simplifie en

$$n_{1x}p_x + n_{1y}p_y + n_{1z} = 0. \tag{B.8}$$

Pour $\xi = 1$, qui correspond à un système de vision paracatadioptrique, on a $e_2 = 0$. De (B.7) on obtient, après simplifications, l'équation d'un cercle :

$$(n_{1z}p_x - n_{1x})^2 + \left(n_{1z}p_y - n_{1y}\right)^2 = 1. \tag{B.9}$$

Ceci confirme bien le fait que l'image paracatadioptrique d'une droite est un cercle dans ce cas là [Nene 98].

B.2 Calcul des informations visuelles

Soit $\boldsymbol{\mu} = (g_x, g_y, n_{20}, n_{11}, n_{02})$ le vecteur qui contient les moments 2D de l'ellipse observée (B.7). Plus précisément, $\mathbf{g} = (g_x, g_y)$ est le centre de gravité, n_{20}, n_{11} et n_{02} sont les moments centrés normalisés d'ordre deux.

Dans cette partie, on détaille les expressions, données en (2.38) et (2.39), de $\mathbf{s_{n1}}$ et $\mathbf{s_{n2}}$ en fonction de $\boldsymbol{\mu}$. On rappelle que

$$\mathbf{s_{n1}} = (\phi, \theta), \text{ avec } \phi = \arcsin(n_{1z}) \text{ et } \theta = \arctan(n_{1y}/n_{1x}) \tag{B.10}$$

et

$$\mathbf{s_{n2}} = (\phi_x, \phi_y), \text{ avec } \phi_x = \arctan(n_{1x}/n_{1z}) \text{ et } \phi_x = \arctan(n_{1y}/n_{1z}). \tag{B.11}$$

La relation entre les paramètres e_i, $i = 0..5$, de l'ellipse (B.7) et le vecteur $\boldsymbol{\mu}$ est donnée par [Chaumette 90] :

$$\begin{cases} g_x = (e_1e_3 - e_2e_4)/(e_2^2 - e_0e_1) \\ g_y = (e_0e_4 - e_2e_3)/(e_2^2 - e_0e_1) \\ 4n_{20} = (a_1^2 + a_2^2t^2)/(1+t^2) \\ 4n_{11} = t(a_1^2 - a_2^2)/(1+t^2)) \\ 4n_{02} = (a_1^2t^2 + a_2^2)/(1+t^2), \end{cases} \tag{B.12}$$

où t et (a_1, a_2) sont respectivement l'orientation et les longueurs des demi-axes de l'ellipse (voir figure B.2 pour un exemple où on observe toute l'ellipse) données par

$$\begin{cases} t = (e_1 - e_0 \pm \sqrt{(e_1-e_0)^2 + 4e_2^2})/2e_2 \\ a_1^2 = 2(e_0g_x^2 + 2e_2g_xg_y + e_1g_y^2 - e_5)/(e_0 + e_1 \pm \sqrt{(e_1-e_0)^2 + 4e_2^2}) \\ a_2^2 = 2(e_0g_x^2 + 2e_2g_xg_y + e_1g_y^2 - e_5)/(e_0 + e_1 \mp \sqrt{(e_1-e_0)^2 + 4e_2^2}). \end{cases}$$

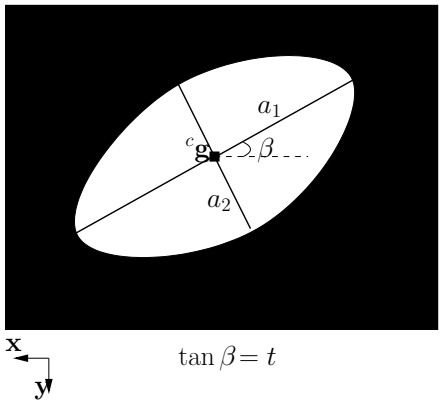


FIG. B.2 – Représentation d'une ellipse dans l'image.

Après quelques simplifications faites avec Maple, on obtient la relation entre la normale $\mathbf{n_1}$ au *plan d'interprétation* de $\mathcal{D}$ et le vecteur $\boldsymbol{\mu}$ des moments 2D :

$$\begin{cases} g_x = (n_{1x} n_{1z})/\alpha_\xi \\ g_y = (n_{1y} n_{1z})/\alpha_\xi \\ 4n_{20} = \big((\xi^2 - (n_{1x}^2 + n_{1y}^2)) - (\xi^2 - 1) n_{1x}^2\big)/\alpha_\xi^2 \\ 4n_{11} = \big(n_{1x} n_{1y} (\xi^2 - 1)\big)/\alpha_\xi^2 \\ 4n_{02} = \big((\xi^2 - (n_{1x}^2 + n_{1y}^2)) - (\xi^2 - 1) n_{1y}^2\big)/\alpha_\xi^2, \end{cases} \tag{B.13}$$

avec $\alpha_\xi = \xi^2 - \big(n_{1x}^2 + n_{1y}^2\big)$.

A partir de (B.13), il est facile d'obtenir

$$\begin{cases} g_x = \alpha_x \alpha_z & \text{(B.14a)} \\ g_y = \alpha_y \alpha_z & \text{(B.14b)} \\ 4n_{20} = \left(\dfrac{1}{\alpha_\xi} - (\xi^2 - 1)\dfrac{g_x^2}{\alpha_z^2 \alpha_\xi}\right) & \text{(B.14c)} \\ 4n_{11} = (\xi^2 - 1)\dfrac{g_x g_y}{\alpha_z^2 \alpha_\xi} & \text{(B.14d)} \\ 4n_{02} = \left(\dfrac{1}{\alpha_\xi} - (\xi^2 - 1)\dfrac{g_y^2}{\alpha_z^2 \alpha_\xi}\right), & \text{(B.14e)} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_x = n_{1x}/\sqrt{|\alpha_\xi|} \\ \alpha_y = n_{1y}/\sqrt{|\alpha_\xi|} \\ \alpha_z = n_{1z}/\sqrt{|\alpha_\xi|}. \end{cases}$$

En multipliant (B.14c) par g_y^2 et (B.14e) par g_x^2, on obtient

$$\begin{cases} 4n_{20}g_y^2 = \left(\dfrac{g_y^2}{\alpha_\xi} - (\xi^2-1)\dfrac{g_x^2 g_y^2}{\alpha_z^2 \alpha_\xi}\right) & \text{(B.15a)} \\ 4n_{02}g_x^2 = \left(\dfrac{g_x^2}{\alpha_\xi} - (\xi^2-1)\dfrac{g_y^2 g_x^2}{\alpha_z^2 \alpha_\xi}\right). & \text{(B.15b)} \end{cases}$$

En injectant (B.14d) dans la somme de (B.15a) et (B.15b), on obtient

$$4n_{20}g_y^2 + 4n_{02}g_x^2 = \frac{g_x^2 + g_y^2}{\alpha_\xi} - 8n_{11}g_x g_y, \tag{B.16}$$

d'où on tire

$$\alpha_\xi = \frac{g_x^2 + g_y^2}{4n_{20}g_y^2 + 4n_{02}g_x^2 + 8n_{11}g_x g_y}. \tag{B.17}$$

Notons que α_ξ est continue même pour $g_x = g_y = 0$, auquel cas

$$\alpha_\xi = 1/4n_{20} = 1/4n_{02}.$$

Maintenant, il s'agit d'exprimer $\mathbf{s_{n1}} = (\phi, \theta)$ et $\mathbf{s_{n2}} = (\phi_x, \phi_y)$ en fonction de $\boldsymbol{\mu}$. De l'expression $\alpha_\xi = \xi^2 - \left(n_{1x}^2 + n_{1y}^2\right)$ (voir (B.13)) on déduit facilement

$$n_{1z} = \pm\sqrt{\alpha_\xi + 1 - \xi^2}. \tag{B.18}$$

Le signe de n_{1z} peut être fixé sans ambiguïté à partir du sens de $\mathbf{n_1}$ choisi suivant l'orientation du gradient dans l'image. On en déduit donc

$$\phi = \arcsin(n_z) = \arcsin(\pm\sqrt{\alpha_\xi + 1 - \xi^2}).$$

Partant de (B.13), on déduit immédiatement

$$n_{1y}/n_{1x} = g_y/g_x. \tag{B.19}$$

On a donc

$$\theta = \arctan(n_{1y}/n_{1x}) = \arctan(g_y/g_x).$$

Pour la seconde paramétrisation $\mathbf{s_{n2}}$, l'expression de ϕ_x en fonction de $\boldsymbol{\mu}$ s'obtient aisément de (B.13) et (B.18) en notant que

$$\frac{n_{1x}}{n_{1z}} = \frac{g_x}{\alpha_z^2} = \frac{g_x \alpha_\xi}{\alpha_\xi + 1 - \xi^2}.$$

On obtient donc

$$\phi_x = \arctan\left(\frac{n_x}{n_z}\right) = \arctan\left(\frac{g_x \alpha_\xi}{\alpha_\xi + 1 - \xi^2}\right).$$

De même, on obtient

$$\phi_y = \arctan\left(\frac{n_y}{nz}\right) = \arctan\left(\frac{g_y \alpha_\xi}{\alpha_\xi + 1 - \xi^2}\right).$$

En vision paracatadioptrique, lorsque $\xi = 1$, on obtient

$$\frac{n_{1x}}{n_{1z}} = g_x \text{ et } \frac{n_{1y}}{n_{1z}} = g_y.$$

Ce dernier résultat est conforme à celui proposé pour l'asservissement visuel de droites avec un système paracatadioptrique, i.e. le choix des coordonnées du centre du cercle observé dans [Mezouar 04, Hadj-Abdelkader 08].

Annexe C

Complément pour la modélisation de l'image de sphères

C.1 Calcul des informations visuelles

Nous rappellons que l'image perspective ou catadioptrique de $\mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$ est une ellipse dont on sait mesurer les moments $\boldsymbol{\mu} = (g_x, g_y, n_{20}, n_{11}, n_{02})$.

Ici, nous détaillons l'expression, donnée par (2.56), (2.57) et (2.58), du vecteur $\mathbf{s_{n1}}$ en fonction de $\boldsymbol{\mu}$. Ce calcul est d'abord présenté en vision perspective avant d'être généralisé à tous les systèmes de vision catadioptrique.

Partant de l'équation de l'ellipse sur le plan image perspective donnée par (2.41), en utilisant (B.12), il est possible d'exprimer le vecteur $\boldsymbol{\mu}$ en fonction des paramètres 3D O_x, O_y, O_z et R [Chaumette 93] :

$$\begin{cases} g_x = -\frac{O_x O_z}{R^2 - O_z^2} \\ g_y = -\frac{O_y O_z}{R^2 - O_z^2} \\ 4n_{20} = -\frac{\left(R^2 - O_x^2 - O_z^2\right) R^2}{\left(R^2 - O_z^2\right)^2} \\ 4n_{11} = \frac{O_x O_z R^2}{\left(R^2 - O_z^2\right)^2} \\ 4n_{02} = -\frac{\left(R^2 - O_y^2 - O_z^2\right) R^2}{\left(R^2 - O_z^2\right)^2}. \end{cases} \tag{C.1}$$

Soit ${}^c\mathbf{o} = (o_x, o_y)$ les coordonnées de l'image perspective de $\mathcal{O}$ (voir figure 2.7). On

a $o_x = O_x/O_z$ et $o_y = O_y/O_z$. Posons $o_r = R/O_z$. De (C.1), il est facile d'obtenir

$$\begin{cases} g_x = -\dfrac{o_x}{o_r^2 - 1} & \text{(C.2a)} \\ g_y = -\dfrac{o_y}{o_r^2 - 1} & \text{(C.2b)} \\ 4n_{20} = -\dfrac{\left(o_r^2 - o_x^2 - 1\right) o_r^2}{\left(o_r^2 - 1\right)^2} & \text{(C.2c)} \\ 4n_{11} = \dfrac{o_x o_y o_r^2}{\left(o_r^2 - 1\right)^2} & \text{(C.2d)} \\ 4n_{02} = -\dfrac{\left(o_r^2 - o_y^2 - 1\right) o_r^2}{\left(o_r^2 - 1\right)^2}. & \text{(C.2e)} \end{cases}$$

(C.2c) et (C.2e) peuvent se réécrire comme

$$\begin{cases} 4n_{20} = \left(\frac{1-o_r^2}{(1-o_r^2)^2} + \frac{o_x^2}{(1-o_r^2)^2}\right) o_r^2 \\ 4n_{02} = \left(\frac{1-o_r^2}{(1-o_r^2)^2} + \frac{o_y^2}{(1-o_r^2)^2}\right) o_r^2. \end{cases} \tag{C.3}$$

En élevant (C.2a) et (C.2b) au carré, on obtient

$$\begin{cases} g_y^2 = \frac{o_x^2}{(o_r^2-1)^2} \\ g_y^2 = \frac{o_y^2}{(o_r^2-1)^2}. \end{cases} \tag{C.4}$$

En injectant (C.4) dans (C.3), on obtient

$$\begin{cases} 4n_{20} = \left(\dfrac{1}{1 - o_r^2} + g_x^2\right) o_r^2 & \text{(C.5a)} \\ 4n_{02} = \left(\dfrac{1}{1 - o_r^2} + g_y^2\right) o_r^2. & \text{(C.5b)} \end{cases}$$

En injectant (C.2a) et (C.2b) dans (C.2d), on a

$$4n_{11} = g_x g_y o_r^2. \tag{C.6}$$

Le produit de (C.5a) par g_y^2 et de (C.5b) par g_x^2 donne

$$\begin{cases} 4n_{20} g_y^2 = \frac{o_r^2}{1-o_r^2} g_y^2 + g_x^2 g_y^2 o_r^2 \\ 4n_{02} g_x^2 = \frac{o_r^2}{1-o_r^2} g_x^2 + g_x^2 g_y^2 o_r^2. \end{cases} \tag{C.7}$$

En injectant (C.6) dans (C.7), on a

$$\begin{cases} 4n_{20} g_y^2 = \dfrac{o_r^2}{1 - o_r^2} g_y^2 + 4 g_x g_y n_{11} & \text{(C.8a)} \\ 4n_{02} g_x^2 = \dfrac{o_r^2}{1 - o_r^2} g_x^2 + 4 g_x g_y n_{11}. & \text{(C.8b)} \end{cases}$$

La somme de (C.8a) et (C.8b) donne

$$4n_{20}g_y^2 + 4n_{02}g_x^2 = \frac{o_r^2}{1-o_r^2}\left(g_x^2+g_y^2\right) + 8n_{11}g_xg_y, \tag{C.9}$$

d'où on déduit

$$\frac{o_r^2}{1-o_r^2} = \frac{4n_{20}g_y^2 + 4n_{02}g_x^2 - 8n_{11}g_xg_y}{g_x^2+g_y^2}. \tag{C.10}$$

Soit $f(\boldsymbol{\mu}) = \frac{4n_{20}g_y^2+4n_{02}g_x^2-8n_{11}g_xg_y}{g_x^2+g_y^2}$. De (C.10), on obtient

$$o_r = \sqrt{\frac{f(\boldsymbol{\mu})}{1+f(\boldsymbol{\mu})}}, \tag{C.11}$$

d'où on déduit en utilisant (C.2a) et (C.2b)

$$\begin{cases} o_x = \frac{g_x}{1+f(\boldsymbol{\mu})} \\ o_y = \frac{g_y}{1+f(\boldsymbol{\mu})}. \end{cases} \tag{C.12}$$

On peut noter que la fonction f est continue dans tous les cas. Cela est clair lorsque $g_x \neq 0$ ou $g_y \neq 0$, mais est aussi vrai lorsque $g_x = g_y = 0$. En effet, en utilisant les coordonnées polaires ($g_x = \rho_g \cos\theta_g, g_y = \rho_g \sin\theta_g$) avec $\rho_g = \sqrt{g_x^2+g_y^2}$ et $\theta_g = \arctan(g_y/g_x)$, $f(\boldsymbol{\mu})$ se simplifie en

$$f(\boldsymbol{\mu}) = 4n_{20}\sin^2\theta_g + 4n_{02}\cos^2\theta_g - 8n_{11}\cos\theta_g\sin\theta_g.$$

Puisque $n_{11} = g_xg_yo_r^2 = 0$ et $n_{02} = n_{20}$ lorsque $g_x = g_y = 0$, on a

$$\lim_{\boldsymbol{\mu}\to(0,0,c,0,c)} f(\boldsymbol{\mu}) = 4c = f(0,0,c,0,c),$$

et donc $f(\boldsymbol{\mu}) = 4n_{20} = 4n_{02}$ lorsque $g_x = g_y = 0$.

Enfin, en notant que $\mathbf{s_{n1}}$ est lié à (o_x, o_y, o_r) par

$$\begin{cases} \frac{o_{sx}}{r} = \frac{O_x}{R} = \frac{O_x}{O_z}\frac{O_z}{R} = \frac{o_x}{o_r} \\ \frac{o_{sy}}{r} = \frac{O_y}{R} = \frac{O_y}{O_z}\frac{O_z}{R} = \frac{o_y}{o_r} \\ \frac{o_{sz}}{r} = \frac{O_z}{R} = \frac{1}{o_r}, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{o_{sx}}{r} = \frac{g_x}{\sqrt{1+f(\boldsymbol{\mu})}\sqrt{f(\boldsymbol{\mu})}} \\ \frac{o_{sy}}{r} = \frac{g_y}{\sqrt{1+f(\boldsymbol{\mu})}\sqrt{f(\boldsymbol{\mu})}} \\ \frac{o_{sz}}{r} = \sqrt{\frac{1+f(\boldsymbol{\mu})}{f(\boldsymbol{\mu})}}. \end{cases} \tag{C.13}$$

Nous généralisons maintenant le calcul de $\mathbf{s_{n1}}$ à tous les systèmes de vision catadioptrique. Partant de l'équation (2.55) de l'ellipse sur le plan image catadioptrique et en utilisant (B.12), il est possible d'exprimer les moments $\boldsymbol{\mu}$ de l'ellipse en fonction du paramètre ξ du système de vision et des paramètres 3D de $\mathcal{S}_{(\mathcal{O},R)}$. On a

$$\begin{cases} g_x = \frac{O_x H_1}{H_2} \\ g_y = \frac{O_y H_1}{H_2} \\ 4n_{20} = \frac{\left(H_2^2 - \left(\xi^2 - 1\right) O_x^2\right) R^2}{H_2^2} \\ 4n_{11} = -\frac{O_x O_y \left(\xi^2 - 1\right) R^2}{H_2^2} \\ 4n_{02} = \frac{\left(H_2^2 - \left(\xi^2 - 1\right) O_y^2\right) R^2}{H_2^2}, \end{cases} \tag{C.14}$$

avec

$$\begin{cases} K_O = \sqrt{O_x^2 + O_y^2 + O_z^2 - R^2} \\ H_1 = O_z + \xi K_O \\ H_2 = H_1^2 + \left(\xi^2 - 1\right) R^2. \end{cases} \tag{C.15}$$

Sachant que $(\frac{O_x}{R}, \frac{O_y}{R}, \frac{O_z}{R}) = (\frac{o_{sx}}{r}, \frac{o_{sy}}{r}, \frac{o_{sz}}{r})$, à partir de (C.14), il est facile d'obtenir

$$\begin{cases} g_x = \dfrac{o_{sx}}{r} \dfrac{h_1}{h_2} & \text{(C.16a)} \\ g_y = \dfrac{o_{sy}}{r} \dfrac{h_1}{h_2} & \text{(C.16b)} \\ 4n_{20} = \left(\dfrac{1}{h_2} - \dfrac{\left(\xi^2 - 1\right)}{h_2^2} \dfrac{{o_{sx}}^2}{r^2} \right) & \text{(C.16c)} \\ 4n_{11} = -\dfrac{\left(\xi^2 - 1\right)}{h_2^2} \dfrac{o_{sx}}{r} \dfrac{o_{sy}}{r} & \text{(C.16d)} \\ 4n_{02} = \left(\dfrac{1}{h_2} - \dfrac{\left(\xi^2 - 1\right)}{h_2^2} \dfrac{{o_{sy}}^2}{r^2} \right), & \text{(C.16e)} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} h_1 = H_1/R = \dfrac{o_{sz}}{r} + \xi \sqrt{\dfrac{{o_{sx}}^2}{r^2} + \dfrac{{o_{sy}}^2}{r^2} + \dfrac{{o_{sz}}^2}{r^2} - 1} & \text{(C.17a)} \\ h_2 = H_2/R = h_1^2 + \left(\xi^2 - 1\right). & \text{(C.17b)} \end{cases}$$

En exploitant le schéma de résolution utilisé ci-dessus pour (C.2), on obtient

$$h_2 = \frac{1}{f(\boldsymbol{\mu})}, \tag{C.18}$$

avec $f(\boldsymbol{\mu}) = \frac{4n_{20}g_y^2 + 4n_{02}g_x^2 - 8n_{11}g_x g_y}{g_x^2 + g_y^2}$ comme précédemment. Pour assurer la visibilité de la cible, partant de (C.15) et (C.17), on a

$$h_1 \geq 0 \Longleftrightarrow H_1 \geq 0 \Longleftrightarrow O_z \geq -\xi K_O. \tag{C.19}$$

Donc la valeur de h_1 est positive même pour des valeurs de O_z négative, notamment $O_z \in [-\xi K_O, 0]$ pour un système de vision catadioptrique. La condition de visibilité (C.19) est aussi vérifiée en projection perspective où on a $h_1 \geq 0 \Longleftrightarrow O_z \geq 0$. De (C.19) et (C.17b), on déduit

$$h_1 = \sqrt{h_2 + (1 - \xi^2)}. \tag{C.20}$$

Partant de (C.20), les expressions de o_{sx}/r et de o_{sy}/r sont immédiates en utilisant (C.16a) et (C.16b). On obtient

$$\begin{cases} \frac{o_{sx}}{r} = \frac{h_2}{\sqrt{h_2+(1-\xi^2)}} g_x \\ \frac{o_{sy}}{r} = \frac{h_2}{\sqrt{h_2+(1-\xi^2)}} g_y. \end{cases} \tag{C.21}$$

Enfin, connaissant les valeurs de h_1, o_{sx}/r et o_{sy}/r, il est possible de déterminer o_{sz}/r en résolvant l'équation du second degré tirée de (C.17a) et donnée par :

$$\left(1 - \xi^2\right) \left(\frac{o_{sz}}{r}\right)^2 - 2h_1 \left(\frac{o_{sz}}{r}\right) + h_1^2 - \xi^2 \left(\frac{o_{sx}^2}{r^2} + \frac{o_{sy}^2}{r^2} - 1\right) = 0. \tag{C.22}$$

Dans le cas des systèmes paracatadioptriques ($\xi = 1$), on a

$$\frac{o_{sz}}{r} = \frac{h_1^2 - \left(\frac{o_{sx}^2}{r^2} + \frac{o_{sy}^2}{r^2} - 1\right)}{2h_1}. \tag{C.23}$$

Pour tous les autres systèmes catadioptriques, on a deux solutions distinctes dont nous retenons

$$\frac{o_{sz}}{r} = \frac{h_1 - \xi\sqrt{h_1^2 + (1 - \xi^2)\left(\frac{o_{sx}^2}{r^2} + \frac{o_{sy}^2}{r^2} - 1\right)}}{(1 - \xi^2)}, \tag{C.24}$$

car l'autre solution, de signe constant positif, ne correspond pas avec le fait que, en vision centrale catadioptrique, la valeur de $\frac{o_{sz}}{r} = \frac{O_z}{R}$ peut être négative.

Lorsque $\xi = 0$, (C.21) et (C.24) se réécrivent en

$$\begin{cases} \frac{o_{sx}}{r} = \frac{g_x}{\sqrt{f(\boldsymbol{\mu})}\sqrt{1+f(\boldsymbol{\mu})}} \\ \frac{o_{sy}}{r} = \frac{g_y}{\sqrt{f(\boldsymbol{\mu})}\sqrt{1+f(\boldsymbol{\mu})}} \\ \frac{o_{sz}}{r} = \sqrt{\frac{1+f(\boldsymbol{\mu})}{f(\boldsymbol{\mu})}}, \end{cases} \tag{C.25}$$

ce qui correspond au résultat obtenu pour les caméras perspectives en (C.13).

C.2 Analyse de stabilité de la commande

Ici, nous démontrons les théorèmes donnés en section 3.3.1 sur l'analyse de la stabilité de la commande lors de l'asservissement visuel de sphères. Nous nous intéressons dans un premier temps à l'analyse de la commande en présence d'erreurs de modélisation. Ensuite, nous considérons l'effet des erreurs d'étalonnage en visions perspective et paracatadioptrique sur la commande.

Analyse de stabilité aux erreurs de modélisation : Ici, nous démontrons le théorème 3.2, donné en section 3.3.1.

Théorème 3.2 *La commande (1.16) utilisant* $\mathbf{s_{n1}}$ *est globalement asymptotiquement stable dans l'espace de travail si et seulement si* $\widehat{R} > 0$.

Preuve : L'équation de la boucle fermée, en l'absence d'erreurs d'étalonnage et de traitement d'images, est donnée par :

$$\dot{\mathbf{e}} = -\lambda \mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} \widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}} \mathbf{e}, \tag{C.26}$$

avec $\mathbf{e} = \mathbf{s_{n1}} - \mathbf{s^*_{n1}}$ et

$$\widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}} = \mathbf{L}^{\top}_{\mathbf{s_{n1}}} \left(\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} \mathbf{L}^{\top}_{\mathbf{s_{n1}}} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\widehat{R} r^2}{r^2+\widehat{R}^2} \left(\widehat{R}^2 \mathbf{s_{n1}} \mathbf{s}^{\top}_{\mathbf{n}1} + \mathbf{I}_3 \right) \\ -\frac{\widehat{R}^2 r^2}{r^2+\widehat{R}^2} \left[\mathbf{s_{n1}} \right]_{\times} \end{bmatrix},$$

où $r = 1/\|\mathbf{s_{n1}}\|$.

Une condition suffisante pour la stabilité asymptotique globale est

$$\frac{1}{2} \left((\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} \widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}})^{\top} + \mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} \widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}} \right) > 0. \tag{C.27}$$

L'expression de la matrice $\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} \widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}}$ est donnée par :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} \widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}} = \frac{\widehat{R} r^2}{R(r^2+R^2)} \left(\widehat{R}^2 \mathbf{s_{n1}} \mathbf{s}^{\top}_{\mathbf{n}1} + \mathbf{I}_3 \right) - \frac{\widehat{R}^2 r^2}{r^2+\widehat{R}^2} \left([\mathbf{s_{n1}}]^2_{\times} \right). \tag{C.28}$$

Puisque $[\mathbf{s_{n1}}]^2_{\times} = \mathbf{s_{n1}} \mathbf{s}^{\top}_{\mathbf{n}1} - \|\mathbf{s_{n1}}\|^2 \, \mathbf{I}_3$, partant de (C.28), on a

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} \widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}} = \frac{\widehat{R} r^2}{R(r^2+R^2)} \left(\widehat{R}^2 \mathbf{s_{n1}} \mathbf{s}^{\top}_{\mathbf{n}1} + \mathbf{I}_3 \right) - \frac{\widehat{R}^2 r^2}{r^2+\widehat{R}^2} \left(\mathbf{s_{n1}} \mathbf{s}^{\top}_{\mathbf{n}1} - \|\mathbf{s_{n1}}\|^2 \, \mathbf{I}_3 \right). \tag{C.29}$$

A partir de l'expression de $\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} \widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}}$ donnée en (C.29), il est facile de montrer que

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} \widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}} = (\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} \widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}})^{\top}.$$

La matrice $\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} \widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}}$ est donc une matrice symétrique. Par conséquent, la condition suffisante donnée en (C.27) pour la stabilité asymptotique globale se réécrit

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} \widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}} > 0. \tag{C.30}$$

Les valeurs propres de la matrice symétrique $\mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} \widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}}$ peuvent être calculées. Elles sont données par $\frac{\widehat{R}}{R}$ et $\frac{\widehat{R}(r^2+R\widehat{R})}{R(r^2+\widehat{R}^2)}$ (qui est une valeur propre double). Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} \widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}} > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\widehat{R}(r^2+R\widehat{R})}{R(r^2+\widehat{R}^2)} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\widehat{R}}{R} > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \widehat{R} > 0. \end{aligned}$$

Finalement, si $\widehat{R} > 0$, alors la commande (1.16) est globalement asymptotiquement stable. Cette condition est également nécessaire. En effet, $\widehat{R}$ joue le rôle d'un gain. Donc si $\widehat{R} \leq 0$, alors le système diverge.

Corollaire 3.1 *La commande (1.16) utilisant* $\mathbf{s_{n2}}$ *est globalement asymptotiquement stable dans l'espace où la cible est visible si et seulement si* $\widehat{R} > 0$.

Preuve :

On rappelle que

$$\mathbf{L_{s_{n2}}} = {}^{\mathbf{n}_2}\mathbf{M_{n_1}}\mathbf{L_{s_{n1}}}. \tag{C.31}$$

On a

$$\mathbf{L}^{+}_{\mathbf{s_{n2}}} = \mathbf{L}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}}\,{}^{\mathbf{n}_2}\mathbf{M}^{-1}_{\mathbf{n_1}}.$$

En effet, puisque la matrice $\mathbf{L_{s_{n2}}}$ est de rang plein trois, sa pseudo inverse au sens de Moore-Penrose est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^{+}_{\mathbf{s_{n2}}} &= \mathbf{L}^{\top}_{\mathbf{s_{n2}}}\left(\mathbf{L_{s_{n2}}}\mathbf{L}^{\top}_{\mathbf{s_{n2}}}\right)^{-1} \\
&= \mathbf{L}^{\top}_{\mathbf{s_{n1}}}\,{}^{\mathbf{n}_2}\mathbf{M}^{\top}_{\mathbf{n_1}}\left({}^{\mathbf{n}_2}\mathbf{M_{n_1}}\mathbf{L_{s_{n1}}}\mathbf{L}^{\top}_{\mathbf{s_{n1}}}\,{}^{\mathbf{n}_2}\mathbf{M}^{\top}_{\mathbf{n_1}}\right)^{-1} \\
&= \mathbf{L}^{\top}_{\mathbf{s_{n1}}}\,{}^{\mathbf{n}_2}\mathbf{M}^{\top}_{\mathbf{n_1}}\left({}^{\mathbf{n}_2}\mathbf{M}^{\top}_{\mathbf{n_1}}\right)^{-1}\left(\mathbf{L_{s_{n1}}}\mathbf{L}^{\top}_{\mathbf{s_{n1}}}\right)^{-1}{}^{\mathbf{n}_2}\mathbf{M}^{-1}_{\mathbf{n_1}} \\
&= \mathbf{L}^{\top}_{\mathbf{s_{n1}}}\left(\mathbf{L_{s_{n1}}}\mathbf{L}^{\top}_{\mathbf{s_{n1}}}\right)^{-1}{}^{\mathbf{n}_2}\mathbf{M}^{-1}_{\mathbf{n_1}} \\
&= \mathbf{L}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}}\,{}^{\mathbf{n}_2}\mathbf{M}^{-1}_{\mathbf{n_1}}.
\end{aligned} \tag{C.32}$$

Dans la suite, nous montrons que $\mathbf{L_{s_{n2}}}\mathbf{L}^{+}_{\mathbf{s_{n2}}}$ est une matrice symétrique. Partant de (C.31) et (C.32), on obtient

$$\mathbf{L_{s_{n2}}}\mathbf{L}^{+}_{\mathbf{s_{n2}}} = {}^{\mathbf{n}_2}\mathbf{M_{n_1}}\mathbf{L_{s_{n1}}}\mathbf{L}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}}\,{}^{\mathbf{n}_2}\mathbf{M}^{-1}_{\mathbf{n_1}}. \tag{C.33}$$

En injectant (C.29) dans (C.33), on a

$$\mathbf{L_{s_{n2}}}\mathbf{L}^{+}_{\mathbf{s_{n2}}} = \frac{\widehat{R}r^2}{R(r^2+R^2)}\left(\widehat{R}^2\mathbf{v_{n2}}\mathbf{v}^{\top}_{\mathbf{n}\,2} + \mathbf{I}_3\right) - \frac{\widehat{R}^2r^2}{r^2+\widehat{R}^2}\left(\mathbf{v_{n2}}\mathbf{v}^{\top}_{\mathbf{n}\,2} - \|\mathbf{s_{n1}}\|^2\,\mathbf{I}_3\right), \tag{C.34}$$

avec $\mathbf{v_{n2}} = {}^{\mathbf{n}_2}\mathbf{M_{n_1}}\mathbf{s_{n1}} = (\rho,\ 0,\ o_{sx}/r)^{\top}$ et $\mathbf{v}^{\top}_{\mathbf{n}\,2} = \mathbf{s}^{\top}_{\mathbf{n}\,1}\,{}^{\mathbf{n}_2}\mathbf{M}^{-1}_{\mathbf{n_1}}$.
Partant de (C.34), il est facile de montrer que

$$\mathbf{L_{s_{n2}}}\mathbf{L}^{+}_{\mathbf{s_{n2}}} = (\mathbf{L_{s_{n2}}}\mathbf{L}^{+}_{\mathbf{s_{n2}}})^{\top},$$

donc $\mathbf{L_{s_{n2}}}\mathbf{L}^{+}_{\mathbf{s_{n2}}}$ est une matrice symétrique. La condition de stabilité du système

$$\frac{1}{2}\left((\mathbf{L_{s_{n2}}}\mathbf{L}^{+}_{\mathbf{s_{n2}}})^{\top} + \mathbf{L_{s_{n2}}}\mathbf{L}^{+}_{\mathbf{s_{n2}}}\right) > 0$$

se réécrit donc

$$\mathbf{L_{s_{n2}}}\mathbf{L}^{+}_{\mathbf{s_{n2}}} > 0.$$

Partant de (C.33), on déduit que les valeurs propres de $\mathbf{L_{s_{n2}}}\widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n2}}}$ sont égales aux valeurs propres de $\mathbf{L_{s_{n1}}}\widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}}$. On a donc

$$\mathbf{L_{s_{n2}}}\widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n2}}} > 0 \iff \mathbf{L_{s_{n1}}}\widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}} > 0.$$

On déduit du théorème 3.2 que, en utilisant $\mathbf{s_{n2}}$, la commande est asymptotiquement stable si et seulement si $\widehat{R} > 0$.

Analyse de stabilité aux erreurs d'étalonnage sur caméras perspectives : Ici, nous démontrons le théorème 3.3, donné en section 3.3.1, qui résume le résultat de l'analyse de la stabilité de la commande aux erreurs d'étalonnage sur une caméra perspective.

Théorème 3.3 *La commande (1.16) utilisant* $\mathbf{s_{n1}}$ *est localement asymptotiquement stable si et seulement si* $\widehat{f}_u > 0$ *et* $\widehat{f}_v > 0$.

Preuve : En considérant uniquement des erreurs d'étalonnage, l'équation de la boucle fermée devient

$$\dot{\mathbf{e}} = -\lambda \mathbf{L}_{\mathbf{s_{n1}}} \widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}} \mathbf{E}(\mathbf{s_{n1}})\mathbf{e}, \tag{C.35}$$

avec $\mathbf{e} = \mathbf{s_{n1}} - \mathbf{s^*_{n1}}$, la matrice $\mathbf{E}$ telle que $\widehat{\mathbf{s}}_{\mathbf{n}_1} = \mathbf{E}(\mathbf{s_{n1}})\mathbf{s_{n1}}$ et

$$\widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s_{n1}}} = \begin{bmatrix} -\frac{R\widehat{r}^2}{\widehat{r}^2+R^2}\left(R^2\widehat{\mathbf{s}}_{\mathbf{n_1}}\widehat{\mathbf{s}}^{\top}_{\mathbf{n_1}} + \mathbf{I_3}\right) \\ -\frac{R^2\widehat{r}^2}{\widehat{r}^2+R^2}\left[\widehat{\mathbf{s}}_{\mathbf{n_1}}\right]_{\times} \end{bmatrix}, \quad \text{où} \quad \widehat{r} = \frac{1}{\|\widehat{\mathbf{s}}_{\mathbf{n_1}}\|}.$$

La non-linéarité de (C.35) rend complexe l'analyse de la stabilité globale aux erreurs d'étalonnage. Cette analyse peut être simplifiée en considérant la stabilité locale (c'est-à-dire pour $\mathbf{s_{n1}} = \mathbf{s^*_{n1}}$) et en linéarisant $\mathbf{E}$ au voisinage d'un point d'équilibre. On choisit ici $\mathbf{s^*_{n1}} = (0, 0, o^*_{s_z}/r^*)$.

A partir de (C.25) et (3.8) (avec $\xi = 0$ et $\varphi = 1$, i.e. pour les caméras perspectives), on obtient après quelques développements

$$\begin{cases} \dot{\left(\frac{o_{s_x}}{r}\right)} = -\frac{\dot{u}_0\left(f_u^2+f_v^2\right)}{f_u\left(f_u^2+f_v^2+4n_{20}^{p*}+4n_{02}^{p*}\right)}\frac{o_{s_z}}{r} \\ \dot{\left(\frac{o_{s_y}}{r}\right)} = -\frac{\dot{v}_0\left(f_u^2+f_v^2\right)}{f_v\left(f_u^2+f_v^2+4n_{20}^{p*}+4n_{02}^{p*}\right)}\frac{o_{s_z}}{r} \\ \dot{\left(\frac{o_{s_z}}{r}\right)} = \frac{f_u\dot{f}_u+f_v\dot{f}_0}{f_u^2+f_v^2+4n_{20}^{p*}+4n_{02}^{p*}}\frac{o_{s_z}}{r}, \end{cases}$$

d'où on déduit l'expression $\mathbf{E}^*$ de la linéarisation de $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_{u_0} \\ 0 & 1 & \alpha_{v_0} \\ 0 & 0 & 1+\alpha_{f_u f_v} \end{bmatrix},$$

$$\text{avec} \begin{cases} \alpha_{u_0} = -\frac{\Delta u_0\left(f_u^2+f_v^2\right)}{f_u\left(f_u^2+f_v^2+4n_{20}^{p*}+4n_{02}^{p*}\right)} \\ \alpha_{v_0} = -\frac{\Delta v_0\left(f_u^2+f_v^2\right)}{f_v\left(f_u^2+f_v^2+4n_{20}^{p*}+4n_{02}^{p*}\right)} \\ \alpha_{f_u f_v} = \frac{f_u\Delta f_u+f_v\Delta f_v}{f_u^2+f_v^2+4n_{20}^{p*}+4n_{02}^{p*}}, \end{cases} \qquad \text{où} \begin{cases} \Delta u_0 = \widehat{u}_0 - u_0 \\ \Delta v_0 = \widehat{v}_0 - v_0 \\ \Delta f_u = \widehat{f}_u - f_u \\ \Delta f_v = \widehat{f}_v - f_v. \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathbf{s^*_{n1}}}\widehat{\mathbf{L}}^{+}_{\mathbf{s^*_{n1}}}\mathbf{E}^* &= \frac{\widehat{r^*}^2}{\widehat{r^*}^2+R^2}\left(R^2\mathbf{E}^*\mathbf{s^*_{n1}}\mathbf{s^*_{n1}}^{\top}\mathbf{E}^{*\top} + \mathbf{I}_3\right)\mathbf{E}^* \\ &\quad - \frac{R^2\widehat{r^*}^2}{\widehat{r^*}^2+R^2}\left(\mathbf{E}^*\mathbf{s^*_{n1}}\mathbf{s^*_{n1}}^{\top} - \mathbf{s^*_{n1}}^{\top}\mathbf{E}^*\mathbf{s^*_{n1}}\mathbf{I}_3\right)\mathbf{E}^*. \end{aligned} \tag{C.36}$$

Les valeurs propres γ_i de $\mathbf{L}_{\mathbf{s}^*_{\mathbf{n}1}}\widehat{\mathbf{L}}^+_{\mathbf{s}^*_{\mathbf{n}1}}\mathbf{E}^*$ peuvent être obtenues après des calculs avec Maple. Elles sont données par

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\widehat{r^*}^2}{\widehat{r^*}^2+R^2}\frac{r^{*2}+R^2(1+\alpha_{f_uf_v})}{r^{*2}} \\ \gamma_2 = \frac{\widehat{r^*}^2}{\widehat{r^*}^2+R^2}(a+b^{\frac{1}{2}}) \\ \gamma_3 = \frac{\widehat{r^*}^2}{\widehat{r^*}^2+R^2}(a-b^{\frac{1}{2}}), \end{cases} \tag{C.37}$$

où a et b sont des valeurs réelles données par

$$\begin{aligned} a \;=\; & [((R^2(1+\alpha_{f_uf_v})^3)+(R^2(1+\alpha_{f_uf_v}))+((1+\alpha_{f_uf_v})R^2\alpha_{v_0}^2)+((1+\alpha_{f_uf_v})R^2\alpha_{u_0}^2) \\ & +((1+\alpha_{f_uf_v})r^{*2})+(R^2\alpha_{u_0}^2)+(R^2\alpha_{v_0}^2)+r^{*2}]/(2r^{*2}) \end{aligned} \tag{C.38}$$

et

$$\begin{aligned} b \;=\; & [(2R^4(1+\alpha_{f_uf_v})\alpha_{u_0}^2)+(2R^4(1+\alpha_{f_uf_v})\alpha_{v_0}^2)+(2R^2\alpha_{v_0}^2r^{*2}) \\ & +(2R^2\alpha_{u_0}^2r^{*2})-(2r^{*2}R^2(1+\alpha_{f_uf_v})^3)+(R^4(1+\alpha_{f_uf_v})^2) \\ & -(2R^2r^{*2}(1+\alpha_{f_uf_v})^2)+(2R^4\alpha_{v_0}^2(1+\alpha_{f_uf_v})^4)-(2R^4\alpha_{v_0}^2(1+\alpha_{f_uf_v})^2) \\ & +(2R^2r^{*2}(1+\alpha_{f_uf_v}))+(2R^4\alpha_{u_0}^2\alpha_{v_0}^2(1+\alpha_{f_uf_v})^2)+(2R^2r^{*2}\alpha_{v_0}^2(1+\alpha_{f_uf_v})^2) \\ & +(4R^4\alpha_{u_0}^2\alpha_{v_0}^2(1+\alpha_{f_uf_v}))+(2R^2r^{*2}\alpha_{u_0}^2(1+\alpha_{f_uf_v})^2)+(2R^4\alpha_{u_0}^2\alpha_{v_0}^2) \\ & +(r^{*4}(1+\alpha_{f_uf_v})^2)+(R^4(1+\alpha_{f_uf_v})^6)+(R^4\alpha_{u_0}^4)+(R^4\alpha_{v_0}^4) \\ & +(2R^4\alpha_{u_0}^2(1+\alpha_{f_uf_v})^4)+(2R^2r^{*2}(1+\alpha_{f_uf_v})^4)+(2R^4\alpha_{u_0}^2(1+\alpha_{f_uf_v})^3) \\ & +(2R^4\alpha_{v_0}^2(1+\alpha_{f_uf_v})^3)+(R^4\alpha_{v_0}^4(1+\alpha_{f_uf_v})^2)+(2R^4\alpha_{v_0}^4(1+\alpha_{f_uf_v})) \\ & +(R^4\alpha_{u_0}^4(1+\alpha_{f_uf_v})^2)+(2R^4\alpha_{u_0}^4(1+\alpha_{f_uf_v}))+(r^{*4}) \\ & -(2R^4\alpha_{u_0}^2(1+\alpha_{f_uf_v})^2)-(2r^{*4}(1+\alpha_{f_uf_v}))-(2R^4(1+\alpha_{f_uf_v})^4)]/(4r^{*4}). \end{aligned} \tag{C.39}$$

Remarque C.1 *Une façon simple de vérifier le calcul des valeurs propres est de considérer le cas où il n'y a pas d'erreur d'étalonnage. Dans ce cas, on a* $\mathbf{L}_{\mathbf{s}^*_{\mathbf{n}1}}\widehat{\mathbf{L}}^+_{\mathbf{s}^*_{\mathbf{n}1}}\mathbf{E}^* = \mathbf{I}_3$. *Partant de (C.37), on obtient aisément* $a = \frac{r^{*2}}{r^{*2}+R^2}$, $b = 0$ *et* $\forall\ i = 1,2,3\ \ \gamma_i = 1$.

Soit $Re(\gamma_i)$, $i = 1..3$, la partie réelle de γ_i. Dans la suite, nous montrons qu'une condition suffisante pour assurer $\gamma_i > 0$ est $\Delta f_u > -f_u$ et $\Delta f_v > -f_v$, c'est-à-dire $\widehat{f_u} > 0$ et $\widehat{f_v} > 0$.

En effet, si $\widehat{f_u} > 0$ et $\widehat{f_v} > 0$ alors $1+\alpha_{f_uf_v} > 0$. Dans cas, partant de (C.37), on obtient immédiatement $\gamma_1 > 0$. Nous montrons ci-dessous que $Re(\gamma_2) > 0$ et $Re(\gamma_3) > 0$.

En effet, si $b \leq 0$ alors $Re(\gamma_2) = Re(\gamma_3) = a > 0$, sinon il est possible de montrer que $a^2 > b$; par conséquent, on a $Re(a+b^{\frac{1}{2}}) > 0$ et $Re(a-b^{\frac{1}{2}}) > 0$. Donc, partant de (C.37), on a finalement $Re(\gamma_2) > 0$ et $Re(\gamma_3) > 0$.

En résumé, $\widehat{f_u} > 0$ et $\widehat{f_v} > 0$ est donc une condition suffisante pour assurer la stabilité asymptotique locale de la commande. Cette condition est aussi nécessaire car, si $\widehat{f_u} \leq 0$ ou $\widehat{f_v} \leq 0$, le système diverge.

Analyse de stabilité aux erreurs d'étalonnage sur systèmes paracatadioptriques : Ici, nous démontrons le théorème 3.4, donné en section 3.3.1, qui résume le résultat de l'analyse de la stabilité de la commande aux erreurs d'étalonnage sur ce système de vision.

Théorème 3.4 *Pour un système tel que $f = f_u = f_v$, la commande (1.16) utilisant $\mathbf{s_{n2}}$ est localement asymptotiquement stable si et seulement si $\widehat{f} > 0$.*

Preuve : Le vecteur $\mathbf{s_{n2}}$, pour le cas d'un système paracatadioptrique, est donné par :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}\frac{h_2}{\sqrt{h_2+(1-\xi^2)}} \\ \theta = \arctan(g_y/g_x) \\ \frac{o_{s_z}}{r} = \frac{h_2 - \left(\frac{o_{s_x}^2}{r^2} + \frac{o_{s_y}^2}{r^2} - 1\right)}{2\sqrt{h_2}}. \end{cases} \tag{C.40}$$

En considérant des erreurs d'étalonnage dans $\mathbf{L_{s_{n2}}}$, l'équation de la boucle fermée est

$$\dot{\mathbf{e}} = -\lambda \mathbf{L_{s_{n2}}} \widehat{\mathbf{L}}^+_{\mathbf{s_{n2}}} \mathbf{E}\mathbf{e}, \tag{C.41}$$

avec $\mathbf{e} = \mathbf{s_{n2}} - \mathbf{s^*_{n2}}$, la matrice $\mathbf{E}$ telle que $\widehat{\mathbf{s}}_{\mathbf{n_2}} = \mathbf{E}(\mathbf{s_{n2}})\mathbf{s_{n2}}$, et

$$\widehat{\mathbf{L}}^+_{\mathbf{s_{n2}}} = \begin{bmatrix} \frac{-\hat{c}R\left(\hat{\rho}^2R^2+1\right)}{\hat{d}} & \frac{\hat{\rho}\hat{s}R}{\widehat{d}} & \frac{-\widehat{\rho}\hat{c}\widehat{o_{s_z}}R^3}{\hat{d}\hat{r}} \\ \frac{-\hat{s}R\left(\hat{\rho}^2R^2+1\right)}{\hat{d}} & \frac{-\hat{\rho}\hat{c}R}{\hat{d}} & \frac{-\hat{\rho}\hat{s}\widehat{o_{s_z}}R^3}{\hat{d}\hat{r}} \\ \frac{-\hat{\rho}\widehat{o_{s_z}}R^3}{\hat{d}\hat{r}} & 0 & \frac{-R\left(1+\left(\widehat{\frac{o_{s_z}}{r}}\right)^2 r^2\right)}{\hat{d}} \\ \frac{\hat{s}\widehat{o_{s_z}}R^2}{\hat{d}\hat{r}} & \frac{\hat{\rho}\hat{c}\widehat{o_{s_z}}R^2}{\hat{d}\hat{r}} & -\frac{\hat{\rho}\hat{s}R^2}{\hat{d}} \\ \frac{-\hat{c}\widehat{o_{s_z}}R^2}{\hat{d}\hat{r}} & \frac{\hat{\rho}\hat{s}\widehat{o_{s_z}}R^2}{\hat{d}\hat{r}} & \frac{\hat{\rho}\hat{c}R^2}{\hat{d}} \\ 0 & -\frac{\hat{\rho}^2R^2}{\hat{d}} & 0 \end{bmatrix},$$

où $\widehat{d} = 1 + \left(\left(\widehat{\frac{o_{s_z}}{r}}\right)^2 + \widehat{\rho}^2\right)R^2$, $\widehat{c} = \cos\widehat{\theta}$ et $\widehat{s} = \sin\widehat{\theta}$.

A cause de la non linéarité de (C.41), nous étudions uniquement la stabilité locale au voisinage d'un point d'équilibre, ici choisi tel que $\mathbf{s_{n2}} = \mathbf{s^*_{n2}} = (1, 0, o_{s_z}^*/r^*)$. En utilisant (C.40) et (3.8), on obtient après quelques développements

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\frac{\dot{u}_0}{f}\frac{o_{s_z}}{r}, \dot{\theta} = -\frac{\dot{v}_0}{f}\frac{o_{s_z}}{r} \\ \left(\dot{\frac{o_{s_z}}{r}}\right) = \frac{\dot{u}_0}{2f}\rho + \frac{\dot{f}}{f}\frac{o_{s_z}}{r}, \end{cases}$$

d'où on déduit

$$\mathbf{E}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_{u_0} \\ 0 & 1 & \alpha_{v_0} \\ -\frac{1}{2}\alpha_{u_0} & 0 & 1+\alpha_f \end{bmatrix},$$

avec $\alpha_{u_0} = -\frac{\Delta u_0}{f}$, $\alpha_{v_0} = -\frac{\Delta v_0}{f}$ et $\alpha_f = \frac{\Delta f}{f}$.

Puisque $\mathbf{E}^*$ n'est pas une matrice triangulaire, l'analyse reste complexe. C'est la raison pour laquelle, nous considérons uniquement une erreur sur la distance focale f. Dans ce cas, $\Delta_{u_0} = 0$ et $\Delta_{v_0} = 0$ et $\mathbf{E}^*$ est triangulaire. La linéarisation de $\widehat{\mathbf{L}}^+_{\mathbf{s}^*_{\mathbf{n}2}}$ est obtenue en prenant $\widehat{c^*} = \cos\widehat{\theta}^* = 1$ et $\widehat{s^*} = \sin\widehat{\theta}^* = \widehat{\theta}^*$. Les valeurs propres γ_i de $\mathbf{L}_{\mathbf{s}^*_{\mathbf{n}2}}\widehat{\mathbf{L}}^+_{\mathbf{s}^*_{\mathbf{n}2}}\mathbf{E}^*$ peuvent être calculées avec Maple. On obtient $\gamma_1 = \frac{fr^2(f+\Delta f)+4n_{20}^{p*2}\left(1+r^2\right)}{fr^2(f+\Delta f)^2+4n_{20}^{p*2}(1+r^2)}$ (valeur propre double) et $\gamma_2 = \frac{f+\Delta f}{f}$. Sans aucune surprise, une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité locale est $\widehat{f} > 0$.

Annexe D

Calcul des moments sphériques sur le plan image

Ici, nous donnons l'expression analytique de la mesure du moment sphérique d'ordre $i+j+k$, noté $m_{s_{ijk}}$, sur les plans images d'un système catadioptrique et d'une caméra fish-eye.

D.1 Calcul des moments sphériques sur un système catadioptrique

Dans cette partie, nous détaillons le calcul des moments sphériques sur le plan image catadioptrique donné en (2.63). Au passage, nous présentons aussi l'expression des moments sphériques en coordonnées sphériques donnée en (2.66).

En coordonnées cartésiennes, l'expression des moments sphériques sur la sphère est

$$m_{s_{ijk}} = \iint_{\mathcal{D}_s} p_{sx}^i p_{sy}^j p_{sz}^k \, \mathrm{d}s, \tag{D.1}$$

où $\mathbf{p_s} = (p_{sx}, p_{sy}, p_{sz})$ est un point de la projection sphérique de la cible et $\mathcal{D}_s$ est la surface occupée par la projection sphérique de la cible.

Nous utilisons un double changement de variable pour démontrer que la mesure des moments sphériques sur le plan image catadioptrique est

$$m_{s_{ijk}} = \iint_{\mathcal{R}} p_{sx}^i p_{sy}^j p_{sz}^k \frac{(\xi + p_{sz})^3}{\xi p_{sz} + 1} \, \mathrm{d}p_x \, \mathrm{d}p_y, \tag{D.2}$$

où $\mathcal{R}$ est la surface occupée par l'image de la cible.

Posons $f(p_{sx}, p_{sy}, p_{sz}) = p_{s_x}^i p_{s_y}^j p_{s_z}^k$. Le passage de (D.1) à (D.2) est un changement de variable que nous notons $\psi = \pi_{p\xi}^{-1}$ où la fonction $\pi_{p\xi}^{-1}$ a été donnée en Annexe A.1. En effet, ψ permet de calculer (D.1) sur le plan image comme suit :

$$\iint_{\mathcal{D}_s} f(p_{sx}, p_{sy}, p_{sz}) \, \mathrm{d}s = \iint_{\mathcal{R}} f(\psi(p_x, p_y)) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial p_x} \times \frac{\partial \psi}{\partial p_y} \right\| \mathrm{d}p_x \, \mathrm{d}p_y. \tag{D.3}$$

Posons $f_s(p_x,p_y)=\left\|\frac{\partial\psi}{\partial p_x}\times\frac{\partial\psi}{\partial p_y}\right\|$ et montrons que $f_s(p_x,p_y)=\frac{(\xi+p_{s_z})^3}{\xi p_{s_z}+1}$ où l'expression de p_{s_z} est donnée en (A.1).

En faisant un second changement de variable en coordonnées sphériques sur (D.3), on obtient

$$\iint_{\mathcal{C}_2} f(\psi(\psi_g(\theta,\phi)))f_s(\psi_g(\theta,\phi))|\mathbf{J}_{\psi_g}|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\iint_{\mathcal{C}_2} f(\psi_d(\theta,\phi))\left\|\frac{\partial\psi_d}{\partial\theta}\times\frac{\partial\psi_d}{\partial\phi}\right\|\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi, \tag{D.4}$$

avec $\mathcal{C}_2=[\theta_{min}(\phi),\theta_{max}(\phi)]\times[\phi_{min},\phi_{max}]$ (voir figure D.1),

$$\begin{array}{rccc}\psi_d\ :\ & \mathcal{C}_2 & \rightarrow & \mathcal{D}_s\\ & (\theta,\phi) & \mapsto & (p_{s_x},p_{s_y},p_{s_z})\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} p_{s_x}=\sin\phi\cos\theta\\ p_{s_y}=\sin\phi\sin\theta\\ p_{s_z}=\cos\phi.\end{array}\right.$$

On en déduit

$$\left\|\frac{\partial\psi_d}{\partial\theta}\times\frac{\partial\psi_d}{\partial\phi}\right\|=\sin\phi,$$

à partir de $\frac{\partial\psi_d}{\partial\theta}=(-\sin\phi\sin\theta,\ \sin\phi\cos\theta,\ 0)^\top$, $\frac{\partial\psi_d}{\partial\phi}=(cos\phi\cos\theta,\ \cos\phi\sin\theta,\ -\sin\phi)^\top$ et $\frac{\partial\psi_d}{\partial\theta}\times\frac{\partial\psi_d}{\partial\phi}=(-\sin^2\phi\cos\theta,\ -\sin^2\phi\sin\theta,-\cos\phi\sin\theta)^\top$.
De plus, la fonction ψ_g, obtenue à partir de ψ_d et ψ, est telle que

$$\begin{array}{rccc}\psi_g\ :\ & \mathcal{C}_2 & \rightarrow & \mathcal{R}\\ & (\theta,\phi) & \mapsto & (p_x,p_y)\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} p_x=(\sin\phi\cos\theta)/(\xi+\cos\phi)\\ p_y=(\sin\phi\sin\theta)/(\xi+\cos\phi),\end{array}\right.$$

d'où on en déduit :

$$|\mathbf{J}_{\psi_g}|=\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial p_x}{\partial\theta} & \frac{\partial p_x}{\partial\phi}\\ \frac{\partial p_y}{\partial\theta} & \frac{\partial p_y}{\partial\phi}\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cc}-\frac{\sin\phi\sin\theta}{\xi+\cos\theta} & \frac{\cos\theta(1+\xi\cos\phi)}{(\xi+\cos\phi)^2}\\ \frac{\sin\phi\cos\theta}{\xi+\cos\phi} & \frac{\sin\theta(1+\xi\cos\phi)}{(\xi+\cos\phi)^2}\end{array}\right|=\sin\phi\frac{\xi\cos\phi+1}{(\xi+\cos\phi)^3}.$$

A cette étape du calcul, en utilisant l'expression à droite de l'égalité (D.4), on peut conclure que l'expression, sur la sphère de projection, du moment sphérique d'ordre $i+j+k$ est donnée par

$$m_{s_{ijk}}=\iint_{\mathcal{C}_2}(\sin\phi\cos\theta)^i(\sin\phi\sin\theta)^j(\cos\phi)^k\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi. \tag{D.5}$$

L'expression (D.5) correspond bien au résultat donné en (2.66).

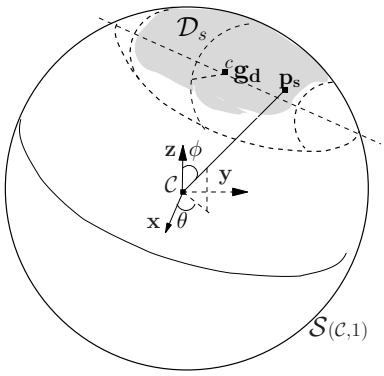


FIG. D.1 – Paramétrisation (ϕ, θ) d'un point $\mathbf{p_s}$ de $\mathcal{D}_s$.

Enfin, partant de (D.4), l'aire de l'image de la cible est

$$m_{s_{000}} = \iint_{\mathcal{C}_2} f_s(\psi_g(\theta,\phi)) \frac{\xi\cos\phi + 1}{(\xi+\cos\phi)^3} \sin\phi \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \iint_{\mathcal{C}_2} \sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi, \tag{D.6}$$

d'où on déduit $f_s(\psi_g(\theta,\phi)) = \frac{(\xi+\cos\phi)^3}{\xi\cos\phi+1}$ et donc

$$f_s(p_x, p_y) = \left\| \frac{\partial\psi}{\partial p_x} \times \frac{\partial\psi}{\partial p_y} \right\| = \frac{(\xi + p_{s_z})^3}{\xi p_{s_z} + 1}.$$

D.2 Calcul des moments sphériques sur une caméra fish-eye

Ici, nous donnons l'expression des moments sphériques sur le plan image d'une caméra fish-eye utilisée pour les expérimentations données dans les sections 3.3.2 et 3.4.5.

Dans le cas d'une cible continue, l'expression du moment sphérique d'ordre $i+j+k$ sur une caméra fish-eye est donnée par

$$m_{s_{ijk}} = \iint_{\mathcal{R}} p_{sx}^i p_{sy}^j p_{sz}^k \, \frac{\sin(\phi(\rho))}{\rho(\phi)\frac{d\rho}{d\phi}} \,\mathrm{d}p_x\,\mathrm{d}p_y, \tag{D.7}$$

avec

$$\begin{cases} \theta = \arctan(p_{sy}/p_{sx}) \\ \rho = \sqrt{p_{s_x}^2 + p_{s_y}^2} \\ \phi(\rho) = k_{1\phi}\rho + k_{2\phi}\rho^3 + k_{3\phi}\rho^5 k_{4\phi}\rho^7 + k_{5\phi}\rho^9 \\ \rho(\phi) = k_1\phi + k_2\phi^3 + k_3\phi^5 + k_4\phi^7 + k_5\phi^9 \\ \frac{d\rho}{d\phi} = k_1 + 3k_2\phi^2 + 5k_3\phi^4 + 7k_4\phi^6 + 9k_5\phi^8, \end{cases}$$

où la fonction $\phi(\rho)$ est la réciproque de la fonction $\rho(\phi)$ (donnée en (1.5)) qui modélise la distorsion sur le plan image et les paramètres $k_{i\phi}$, $i = 1, .., 5$ sont obtenus après étalonnage de la caméra [Kannala 06].

Comme dans le cas des systèmes catadioptriques, le terme

$$\frac{\sin(\phi(\rho))}{\rho(\phi)\frac{d\rho}{d\phi}},$$

dans (D.7) décrit la relation entre les surfaces infinitésimales sphérique $\mathrm{d}s$ et plane $\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y$.

Partant de (D.3), nous montrons dans la suite que

$$f_s(p_x,p_y)=\left\|\frac{\partial\psi}{\partial p_x}\times\frac{\partial\psi}{\partial p_y}\right\|=\frac{\sin(\phi(\rho))}{\rho(\phi)\frac{d\rho}{d\phi}}.$$

Pour ce type de caméra, en exploitant le modèle de distorsion donné dans [Kannala 06], on a

$$\begin{array}{rccc}\psi_d & : & \mathcal{C}_2 & \rightarrow & \mathcal{D}_s\\ & & (\theta,\phi(\rho)) & \mapsto & (p_{sx},p_{sy},p_{sz})\end{array}$$

$$\begin{cases} p_{sx}=\sin(\phi(\rho))\cos\theta\\ p_{sy}=\sin(\phi(\rho))\sin\theta\\ p_{sz}=\cos(\phi(\rho)),\end{cases}$$

d'où on en déduit

$$\left\|\frac{\partial\psi_d}{\partial\theta}\times\frac{\partial\psi_d}{\partial\phi(\rho)}\right\|=\sin(\phi(\rho)).$$

De plus, on a

$$\begin{array}{rccc}\psi_g & : & \mathcal{C}_2 & \rightarrow & \mathcal{R}\\ & & (\theta,\phi) & \mapsto & (p_x,p_y)\end{array}$$

$$\begin{cases} p_x=\rho(\phi)\cos\theta\\ p_y=\rho(\phi)\sin\theta,\end{cases}$$

d'où on en déduit

$$|\mathbf{J}_{\psi_g}|=\begin{vmatrix}\frac{\partial p_x}{\partial\theta} & \frac{\partial p_x}{\partial\phi}\\ \frac{\partial p_y}{\partial\theta} & \frac{\partial p_y}{\partial\phi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\rho(\phi)\sin\theta & \cos\theta\frac{d\rho}{d\phi}\\ \rho(\phi)\cos\theta & \sin\theta\frac{d\rho}{d\phi}\end{vmatrix}=\rho(\phi)\frac{d\rho}{d\phi}.$$

Tout comme pour les systèmes catadioptriques, partant de l'expression de l'aire $m_{s_{000}}$, on déduit finalement

$$f_s(p_x,p_y)=\left\|\frac{\partial\psi}{\partial p_x}\times\frac{\partial\psi}{\partial p_y}\right\|=\frac{\sin\phi(\rho)}{|\mathbf{J}_{\psi_g}|}=\frac{\sin(\phi(\rho))}{\rho(\phi)\frac{d\rho}{d\phi}}.$$

A noter que dans le cas de la projection perspective, il n'y a pas de distorsion radiale sur le plan image, c'est-à-dire $\rho(\phi)=\tan\phi$ (voir (1.6) et (1.7)). Dans ce cas, la relation entre les surfaces infinitésimales sphérique et plane est donnée par

$$\frac{\sin(\phi(\rho))}{\rho(\phi)\frac{d\rho}{d\phi}}=\cos^3(\phi(\rho))=p_{sz}^3. \tag{D.8}$$

En injectant (D.8) dans (D.7), on obtient bien, comme prévu, l'expression des moments sphériques (2.64) sur le plan image perspective.

Annexe E

Moments sphériques et image de la sphère

E.1 Expression des moments sphériques en fonction des paramètres 3D de la sphère

Ici, nous donnons l'expression analytique des moments sphériques en fonction des paramètres 3D de la sphère. Pour cela nous utilisons l'expression des moments sphériques en fonction des coordonnées sphériques donnée par (2.66).

Soit $(\mathcal{C}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ le repère tel que $\mathbf{v}_3 = \frac{{}^c\mathbf{g_d}}{\|{}^c\mathbf{g_d}\|} = \frac{{}^c\mathbf{O}}{\|{}^c\mathbf{O}\|}$. Nous notons $m'_{s_{ijk}}$ le moment sphérique d'ordre $i+j+k$ calculé dans le repère $(\mathcal{C}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

$$m'_{s_{000}} = \iint_{\mathcal{C}_2} \sin\phi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi,$$

avec $\mathcal{C}_2 = [-\pi, \pi] \times [0, \phi_{max}]$ où $\cos(\phi_{max}) = \sqrt{1-r^2}$ et $\sin(\phi_{max}) = r$ (voir figure E.1).

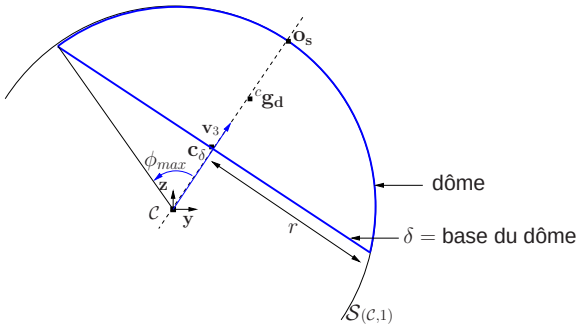


FIG. E.1 – Vue en coupe du dôme : angle ϕ_{max} dans le repère $(\mathcal{C}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

Après quelques développements, on obtient

$$m'_{s_{000}} = 2\pi(1 - \sqrt{1-r^2})$$

où $r = \frac{R}{\|^c\mathbf{O}\|}$. Puisque $m\prime_{s000}$ est invariant aux rotations, sa valeur reste la même dans $(\mathcal{C}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. On a donc l'expression du moment d'ordre zéro en fonction des paramètres 3D de la sphère

$$m_{s000} = m'_{s000} = 2\pi \left(1 - \sqrt{1 - (R/\|^c\mathbf{O}\|)^2}\right). \tag{E.1}$$

Les moments sphériques du premier ordre calculés dans $(\mathcal{C}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ sont donnés par

$$m'_{s100} = \iint_{\mathcal{C}_2} (\sin\phi\cos\theta)\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = 0,$$

$$m'_{s010} = \iint_{\mathcal{C}_2} (\sin\phi\sin\theta)\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = 0$$

et

$$m'_{s001} = \iint_{\mathcal{C}_2} (\cos\phi)\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \pi r^2.$$

Le passage de $(\mathcal{C}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ à $(\mathcal{C}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ est donné par la matrice de rotation

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{O_z}{\alpha_1} & -\frac{O_x O_y}{\alpha_1\|^c\mathbf{O}\|} & \frac{O_x}{\|^c\mathbf{O}\|} \\ 0 & \frac{O_x^2+O_z^2}{\alpha_1\|^c\mathbf{O}\|} & \frac{O_y}{\|^c\mathbf{O}\|} \\ -\frac{O_x}{\alpha_1} & -\frac{O_x O_z}{\alpha_1\|^c\mathbf{O}\|} & \frac{O_z}{\|^c\mathbf{O}\|} \end{bmatrix},$$

avec $\alpha_1 = \sqrt{O_x^2 + O_z^2}$.

On a

$$\begin{pmatrix} m_{s100} \\ m_{s010} \\ m_{s001} \end{pmatrix} = \mathbf{V} \begin{pmatrix} m'_{s100} \\ m'_{s010} \\ m'_{s001} \end{pmatrix}. \tag{E.2}$$

Partant de (E.2) et sachant que $r = \frac{R}{\|^c\mathbf{O}\|}$, on obtient le lien entre les moments du premier ordre et les paramètres 3D de la sphère

$$\begin{cases} m_{s100} = \pi R^2 O_x/\|^c\mathbf{O}\|^3 \\ m_{s010} = \pi R^2 O_y/\|^c\mathbf{O}\|^3 \\ m_{s001} = \pi R^2 O_z/\|^c\mathbf{O}\|^3. \end{cases} \tag{E.3}$$

Les moments sphériques du second ordre calculés dans $(\mathcal{C}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ sont donnés par

$$m'_{s200} = \iint_{\mathcal{C}_2} (\sin\phi\cos\theta)^2 \sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi,$$

$$m'_{s020} = \iint_{\mathcal{C}_2} (\sin\phi\sin\theta)^2 \sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi,$$

$$m'_{s002} = \iint_{\mathcal{C}_2} (\cos\phi)^2 \sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi,$$

$$m'_{s110} = \iint_{\mathcal{C}_2} (\sin\phi\cos\theta)(\sin\phi\sin\theta)\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = 0,$$

$$m'_{s_{101}} = \iint_{\mathcal{C}_2} (\sin\phi\cos\theta)(\cos\phi)\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = 0$$

et

$$m'_{s_{011}} = \iint_{\mathcal{C}_2} (\sin\phi\sin\theta)(\cos\phi)\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = 0.$$

Les calculs de $m'_{s_{200}}$, $m'_{s_{020}}$ et $m'_{s_{002}}$ s'effectuent en linéarisant les puissances des fonctions cos et sin. Par exemple, pour $m'_{s_{200}}$, on a

$$m'_{s_{200}} = \iint_{\mathcal{C}_2} (\cos\theta)^2(\sin\phi)^2\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi. \tag{E.4}$$

La linéarisation des fonctions cos et sin est donnée par

$$(\cos\theta)^2 = \frac{(1+\cos(2\theta))}{2} \text{ et } (\sin\phi)^3 = -\frac{1}{4}\sin(3\phi) + \frac{3}{4}\sin\phi. \tag{E.5}$$

En injectant (E.5) dans (E.4), et après quelques développements, on obtient

$$m'_{s_{200}} = \pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\left(3\cos(\phi_{max}) - \frac{1}{3}\cos(3\phi_{max})\right)\right). \tag{E.6}$$

De la même manière que pour le calcul de $m'_{s_{200}}$, on montre que

$$m'_{s_{020}} = \pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\left(3\cos(\phi_{max}) - \frac{1}{3}\cos(3\phi_{max})\right)\right) \tag{E.7}$$

et

$$m'_{s_{002}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{3} - \left(\cos(\phi_{max}) + \frac{1}{3}\cos(3\phi_{max})\right)\right). \tag{E.8}$$

Puisque $\phi_{max} = \arccos(\sqrt{1-r^2})$ est invariant aux rotations 3D, $\cos(\phi_{max})$ et $\cos(3\phi_{max})$ sont aussi invariants aux rotations 3D. Par conséquent, $m'_{s_{200}}$ (voir (E.6)), $m'_{s_{020}}$ (voir (E.7)) et $m'_{s_{002}}$ (voir (E.8)) sont invariants aux rotations 3D. Soit Λ la matrice d'inertie formée par les moments sphériques du second ordre calculés dans le repère $(\mathcal{C}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. On a

$$\Lambda = \begin{bmatrix} m'_{s_{200}} & 0 & 0 \\ 0 & m'_{s_{020}} & 0 \\ 0 & 0 & m'_{s_{002}} \end{bmatrix}.$$

Les moments $m'_{s_{200}}$, $m'_{s_{020}}$ et $m'_{s_{002}}$ s'expriment simplement en fonction des paramètres 3D de la sphère en notant que

$$\phi_{max} = \arccos\left(\sqrt{1-r^2}\right) = \arccos\left(\sqrt{1-(R/\|{}^c\mathbf{O}\|)^2}\right).$$

La matrice Λ contient les valeurs propres de l'ellipsoïde caractéristique de la projection sphérique d'une sphère.

Soit

$$\mathbf{M_s} = \begin{bmatrix} m_{s_{200}} & m_{s_{110}} & m_{s_{101}} \\ m_{s_{110}} & m_{s_{020}} & m_{s_{011}} \\ m_{s_{101}} & m_{s_{011}} & m_{s_{002}} \end{bmatrix}$$

la matrice d'inertie de l'ellipsoïde caractéristique de l'image sphérique de la sphère dans le repère $(\mathcal{C}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. La décomposition en valeurs propres de $\mathbf{M_s}$ est donnée par

$$\mathbf{M_s} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^\top. \tag{E.9}$$

De (E.9), on déduit simplement les expressions des moments sphériques du second ordre en fonction des paramètres 3D de la sphère. Par exemple

$$m_{s_{200}} = m'_{s_{200}} v_{1_x}^2 + m'_{s_{020}} v_{2_x}^2 + m'_{s_{002}} v_{3_x}^2,$$

avec $v_{1_x} = O_z/\sqrt{O_x^2 + O_z^2}$, $v_{2_x} = -(O_x O_y)/\left(\|^c\mathbf{O}\|\sqrt{O_x^2 + O_z^2}\right)$, $v_{3_x} = O_z/\|^c\mathbf{O}\|$,
$m'_{s_{200}} = m'_{s_{020}} = \pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\left(3\sqrt{1-(R/\|^c\mathbf{O}\|)^2} - \frac{1}{3}\cos\left(3\arccos\left(\sqrt{1-(R/\|^c\mathbf{O}\|)^2}\right)\right)\right)\right)$ et
$m'_{s_{002}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{3} - \left(\sqrt{1-(R/\|^c\mathbf{O}\|)^2} + \frac{1}{3}\cos\left(3\arccos\left(\sqrt{1-(R/\|^c\mathbf{O}\|)^2}\right)\right)\right)\right)$.

En conclusion, il est possible d'exprimer les moments sphériques d'ordre zéro, un et deux en fonction des paramètres 3D de la sphère.

Annexe F

Complément sur la modélisation de l'image de cercles 3D

Dans cette partie, nous détaillons le calcul de la projection sphérique d'un cercle 3D donné par (2.112). Ensuite, nous donnons l'expression de la quartique plane (2.111) qui représente la projection catadioptrique d'un cercle 3D.

F.1 Projection sphérique d'un cercle 3D

Soit $\mathcal{C}(\mathcal{S},\mathcal{P})$ un cercle 3D de centre $\mathcal{O}$ et de rayon R défini dans le repère $\mathcal{F}_c$ tel que

$$\mathcal{C}(\mathcal{S},\mathcal{P}) = \mathcal{S}(\mathcal{O},R) \cap \mathcal{P}(\mathcal{O},\mathbf{n_p}) = \begin{cases} (P_x - O_x)^2 + (P_y - O_y)^2 + (P_z - O_z)^2 - R^2 = 0 \\ n_{p_x}(P_x - O_x) + n_{p_y}(P_y - O_y) + n_{p_z}(P_z - O_z) = 0, \end{cases} \tag{F.1}$$

où ${}^c\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ est un point du cercle, ${}^c\mathbf{O} = (O_x, O_y, O_z)$ est le centre de la sphère $\mathcal{S}(\mathcal{O},R)$ de rayon R et $\mathcal{P}(\mathcal{O},\mathbf{n_p})$ est le plan (du cercle) qui passe par le centre de $\mathcal{S}(\mathcal{O},R)$.

Partant de l'équation du plan $\mathcal{P}(\mathcal{O},\mathbf{n_p})$, on déduit l'expression suivante

$$\frac{1}{\|{}^c\mathbf{P}\|} = n_x p_{s_x} + n_y p_{s_y} + n_z p_{s_z}, \tag{F.2}$$

où $\mathbf{p_s} = (p_{s_x}, p_{s_y}, p_{s_z})$ est la projection sphérique de ${}^c\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ et

$$\begin{cases} n_x = n_{p_x} / \left(n_{p_x} O_x + n_{p_y} O_y + n_{p_z} O_z\right) \\ n_y = n_{p_y} / \left(n_{p_x} O_x + n_{p_y} O_y + n_{p_z} O_z\right) \\ n_z = n_{p_z} / \left(n_{p_x} O_x + n_{p_y} O_y + n_{p_z} O_z\right). \end{cases}$$

La projection sphérique des points de $\mathcal{S}(\mathcal{O},R)$ est donnée par

$$\left(p_{s_x} - \frac{O_x}{\|{}^c\mathbf{P}\|}\right)^2 + \left(p_{s_y} - \frac{O_y}{\|{}^c\mathbf{P}\|}\right)^2 + \left(p_{s_z} - \frac{O_z}{\|{}^c\mathbf{P}\|^2}\right)^2 - \frac{R^2}{\|{}^c\mathbf{P}\|^2} = 0. \tag{F.3}$$

En injectant (F.2) dans (F.3), on obtient la projection sphérique de $\mathcal{C}(\mathcal{S},\mathcal{P})$:

$$\begin{cases} p_{s_x}^2 + p_{s_y}^2 + p_{s_z}^2 = 1 \\ 1 + e_0 p_{s_x}^2 + e_1 p_{s_y}^2 + 2e_2 p_{s_x} p_{s_y} + 2e_3 p_{s_x} p_{s_z} + 2e_4 p_{s_y} p_{s_z} + e_5 p_{s_z}^2 = 0, \end{cases} \tag{F.4}$$

$$\text{avec} \begin{cases} e_0 = n_x^2(O_x^2 + O_y^2 + O_z^2 - R^2) - 2n_xO_x \\ e_1 = n_y^2(O_x^2 + O_y^2 + O_z^2 - R^2) - 2n_yO_y \\ e_2 = n_xn_y(O_x^2 + O_y^2 + O_z^2 - R^2) - n_yO_x - n_xO_y \\ e_3 = n_xn_z(O_x^2 + O_y^2 + O_z^2 - R^2) - n_zO_x - n_xO_z \\ e_4 = n_yn_z(O_x^2 + O_y^2 + O_z^2 - R^2) - n_zO_y - n_yO_z \\ e_5 = n_z^2(O_x^2 + O_y^2 + O_z^2 - R^2) - 2n_yO_z. \end{cases}$$

Dans la suite, nous donnons l'expression de la quartique plane (2.111) qui représente la projection catadioptrique du cercle.

F.2 Projection catadioptrique d'un cercle 3D

Les équations de projection sur le plan image catadioptrique sont données par

$$p_x = \frac{p_{sx}}{p_{sz} + \xi} \quad \text{et} \quad p_y = \frac{p_{sy}}{p_{sz} + \xi}.$$

En injectant les expressions ci-dessus dans (F.4), on obtient après quelques développements

$$p_x^2 + p_y^2 + 1 - \frac{2\xi}{p_{sz} + \xi} + \frac{\xi^2 - 1}{(p_{sz} + \xi)^2} = 0 \tag{F.5}$$

et

$$e_0p_x^2 + e_1p_y^2 + 2e_2p_xp_y + 2e_3p_x + 2e_4p_y + e_5 - \frac{2\xi}{p_{sz} + \xi}(e_3p_x + e_4p_y + e_5) + \frac{1 + e_5\xi^2}{(p_{sz} + \xi)^2} = 0. \tag{F.6}$$

Dans le cas d'un système de vision paracatadioptrique, où $\xi = 1$, (F.5) et (F.6) deviennent

$$\begin{cases} p_x^2 + p_y^2 + 1 - \frac{2}{p_{sz}+1} = 0 \\ e_0p_x^2 + e_1p_y^2 + 2e_2p_xp_y + 2e_3p_x + 2e_4p_y + e_5 - \frac{2}{p_{sz}+1}(e_3p_x + e_4p_y + e_5) + \frac{1+e_5}{(p_{sz}+1)^2} = 0, \end{cases} \tag{F.7}$$

d'où on déduit l'expression analytique de la quartique plane

$$\begin{aligned} &e_0p_x^2 + e_1p_y^2 + 2e_2p_xp_y + 2e_3p_x + 2e_4p_y + e_5 - \left(p_x^2 + p_y^2 + 1\right)(e_3p_x + e_4p_y + e_5) \\ &+ (1 + e_5)\left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + 1}{2}\right)^2 = 0. \end{aligned} \tag{F.8}$$

Pour tous les systèmes de vision catadioptrique, il est possible d'exprimer $\frac{1}{p_{sz}+\xi}$ en fonction de p_x et p_y en résolvant (F.6). On a

$$\frac{1}{p_{sz} + \xi} = \frac{\xi(e_3p_x + e_4p_y + e_5) \pm \sqrt{\Delta}}{1 + e_5\xi^2}, \tag{F.9}$$

où

$$\Delta = \xi^2 \left(e_3 p_x + e_4 p_y + e_5\right)^2 - \left(1 + \xi^2 e_5\right) \left(e_0 p_x^2 + e_1 p_y^2 + 2 e_2 p_x p_y + 2 e_3 p_x + 2 e_4 p_y + e_5\right)$$

est le discriminant de (F.6).

En injectant (F.9) dans (F.5) et après quelques développements, on obtient l'expression de la quartique observée sur le plan image catadioptrique :

$$\begin{aligned}&\Big(\big(p_x^2+p_y^2+1\big)\big(1+e_5\xi^2\big)^2-2\xi^2(1+e_5\xi^2)(e_3p_x+e_4p_y+e_5)+(\xi^2-1)\big(\xi^2(e_3p_x+e_4p_y+e_5)^2+\Delta\big)\Big)^2\\&=\Delta\big(2\xi(1+e_5\xi^2)-\xi(\xi^2-1)(e_3p_x+e_4p_y+e_5)\big)^2.\end{aligned} \tag{F.10}$$

En posant $\xi = 0$ dans (F.10), on obtient l'expression analytique (2.109) de l'ellipse observée en projection perspective. En posant $\xi = 1$ dans (F.10), on obtient après quelques développements l'expression (F.8) de la quartique plane observée en vision paracatadioptrique.

Annexe G

Asservissement visuel par rapport aux sphères marquées

G.1 Calcul de la matrice de rotation ${}^c\mathbf{R}_o$

Ici, nous détaillons les expressions de ${}^c\mathbf{R}_o = [\mathbf{r_1}\ \mathbf{r_2}\ \mathbf{r_3}]$ données en (3.13) et (3.16) respectivement pour la sphère CC (figure G.1(a)) et la sphère spéciale (figure G.1(b)).

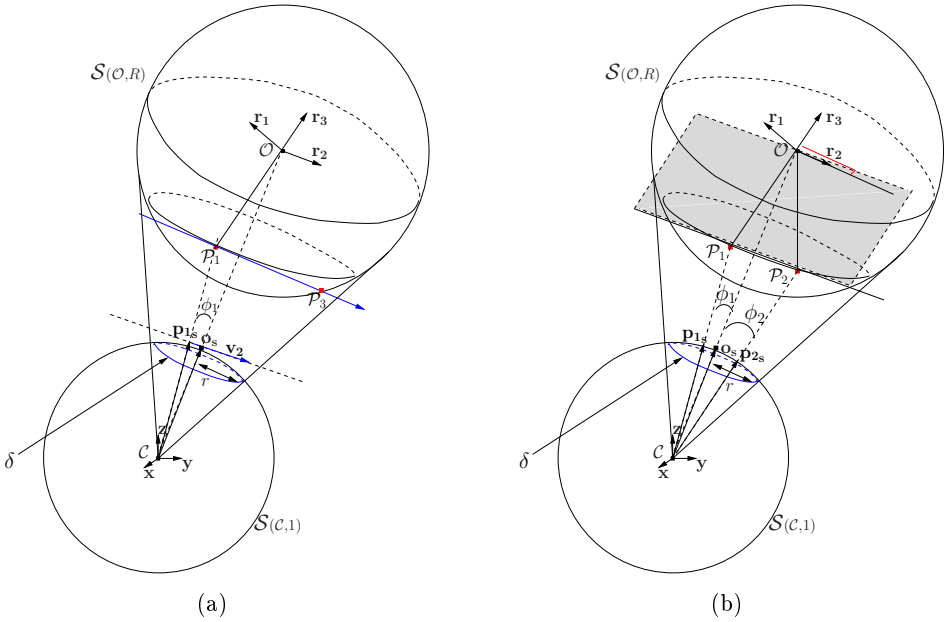


FIG. G.1 – Projection sphérique des cibles : (a) sphère CC, (b) sphère spéciale.

Le calcul de $\mathbf{r_3}$ est identique pour les deux cibles. En effet, comme le montrent les figures G.1(a) et G.1(b), le point $\mathcal{P}_1$ est tel que [Cowan 05] :

$$\mathbf{r_3} = \frac{1}{R}({}^c\mathbf{t}_o - {}^c\mathbf{P}_1), \tag{G.1}$$

où $\frac{1}{R}{}^c\mathbf{P}_1 = \frac{\|{}^c\mathbf{P}_1\|}{R}\mathbf{p_{1_s}}$. Il est possible de calculer $\|{}^c\mathbf{P}_1\|/R$ en appliquant la loi des cosinus au triangle $(\mathcal{C}, \mathcal{P}_1, \mathcal{O})$ (voir figures G.1(a) et G.1(b)) dans $\mathcal{F}_c$ [Cowan 05]. On obtient une équation du second degré en $\|{}^c\mathbf{P}_1\|$:

$$\|{}^c\mathbf{P}_1\|^2 + \|{}^c\mathbf{O}\|^2 - 2\|{}^c\mathbf{P}_1\|\|{}^c\mathbf{O}\|\cos\phi_1 = R^2, \tag{G.2}$$

où $\phi_1 = \mathbf{o_s}^\top \mathbf{p_{1_s}}$. Les deux solutions dépendant de $\sigma = \pm 1$ sont données par

$$\|{}^c\mathbf{P}_1\| = \frac{R}{r}\left(\cos\phi_1 + \sigma\sqrt{r^2 - \sin^2\phi_1}\right), \tag{G.3}$$

d'où on déduit facilement $\|{}^c\mathbf{P}_1\|/R$ et

$$\frac{1}{R}{}^c\mathbf{P}_1 = \frac{1}{r}\left(\cos\phi_1 - \sqrt{r^2 - \sin^2\phi_1}\right)\mathbf{p_{1_s}}. \tag{G.4}$$

Le choix de $\sigma = -1$ correspond à la condition de visibilité définie dans [Cowan 05]. A ce niveau, nous pouvons conclure que le vecteur $\mathbf{r_3}$ peut être calculé à partir de l'image de la sphère CC ou de la sphère spéciale. En effet, puisque ${}^c\mathbf{t}_o/R$ n'est autre chose que $\mathbf{s_{n1}}$, on obtient de (G.1) et (G.4)

$$\mathbf{r_3} = \mathbf{s_{n1}} - \frac{1}{r}\left(\cos\phi_1 - \sqrt{r^2 - \sin^2\phi_1}\right)\mathbf{p_{1_s}}. \tag{G.5}$$

Le calcul de $\mathbf{r_2}$ dépend de la cible considérée. Pour la sphère CC, l'expression de $\mathbf{r_2}$, obtenue sous l'hypothèse $\mathcal{O}\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_1\mathcal{P}_3$, est donnée par [Cowan 05] :

$$\mathbf{r_2} = \frac{\left(\mathbf{v_2} - \frac{\mathbf{r_3}^\top\mathbf{v_2}}{\mathbf{r_3}^\top\mathbf{v_1}}\mathbf{v_1}\right)}{\|\mathbf{v_2} - \frac{\mathbf{r_3}^\top\mathbf{v_2}}{\mathbf{r_3}^\top\mathbf{v_1}}\mathbf{v_1}\|}, \tag{G.6}$$

où $\mathbf{r_3}$ est donnée par (G.5), $\mathbf{v_1} = \mathbf{p_{s1}}$ est la projection sphérique de $\mathcal{P}_1$ et $\mathbf{v_2}$ est un vecteur tangent à $\mathcal{S}_{(\mathcal{C},1)}$ au point de coordonnées $\mathbf{v_1}$ (voir figure G.1(a)).

Nous présentons dans ce qui suit le calcul de $\mathbf{r_2}$ dans le cas de la sphère spéciale. Le vecteur $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ sur la sphère spéciale peut être modélisé par (voir figure G.1(b)) :

$$\mathbf{a_{12}} = {}^c\mathbf{P}_1{}^c\mathbf{P}_2 = \lambda_1\mathbf{r_3} + \lambda_2\mathbf{r_2}, \tag{G.7}$$

où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. De même que pour le calcul de $\frac{1}{R}{}^c\mathbf{P}_1$, nous obtenons

$$\frac{1}{R}{}^c\mathbf{P}_2 = \frac{1}{r}\left(\cos\phi_2 - \sqrt{r^2 - \sin^2\phi_2}\right)\mathbf{p_{2_s}}, \tag{G.8}$$

où $\phi_2 = \mathbf{o_s}^\top\mathbf{p_{2_s}}$. Il est donc possible de calculer

$$\frac{1}{R}\mathbf{a_{12}} = \frac{1}{R}({}^c\mathbf{P}_2 - {}^c\mathbf{P}_1), \tag{G.9}$$

qui peut se réécrire en utilisant (G.4) et (G.8) comme

$$\frac{1}{R}\mathbf{a_{12}} = \frac{\left(\cos\phi_1 - \sqrt{r^2 - \sin^2\phi_1}\right)}{r}\mathbf{p_{1_s}} - \frac{\left(\cos\phi_2 - \sqrt{r^2 - \sin^2\phi_2}\right)}{r}\mathbf{p_{2_s}}. \tag{G.10}$$

A partir de (G.10), (G.7) et (G.5), on obtient :

$$\frac{\lambda_2}{R}\mathbf{r_2} = \left(\frac{1}{R}\mathbf{a_{12}} - \left((\frac{1}{R}\mathbf{a_{12}})^\top \mathbf{r_3}\right)\mathbf{r_3}\right), \tag{G.11}$$

d'où on déduit aisément la valeur de $\mathbf{r_2}$.

Enfin, pour la sphère CC et la sphère spéciale, on a $\mathbf{r_1} = \mathbf{r_2} \times \mathbf{r_3}$ qui donne ${}^c\mathbf{R}_o$.

G.2 Analyse de stabilité aux erreurs de modélisation

Ici, on démontre le théorème 3.5 donné en section 3.4.3 sur l'analyse de la commande à une erreur sur l'estimation de la valeur du rayon R de la sphère marquée.

Théorème 3.5 *La commande (1.16) utilisant* $\mathbf{s_n}$ *est localement asymptotiquement stable dans l'espace de visibilité de la sphère marquée si et seulement si* $\widehat{R} > 0$. *L'erreur sur la tâche décroît systématiquement si*

$$0 < \frac{a-1}{a+1} < \frac{\widehat{R}}{R} < \frac{a+1}{a-1}, \text{ avec } a = \sqrt{1 + \frac{1}{r^{*2}}}.$$

Preuve : Dans le cas où on considère uniquement une erreur sur l'estimation $\widehat{R}$ de R, l'équation de la boucle fermée est :

$$\dot{\mathbf{e}} = -\lambda \mathbf{L}_{\mathbf{s_n}} \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s_n}}^{-1} \mathbf{e}, \tag{G.12}$$

avec $\mathbf{e} = (\mathbf{s_n}_1 - \mathbf{s}^*_{\mathbf{n}1}, \theta\mathbf{u})$ et

$$\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s_n}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\widehat{R}}\mathbf{I}_3 & [\mathbf{s}]_\times \\ 0 & \mathbf{L}_\omega \end{bmatrix}.$$

On a :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s_n}} \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s_n}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\widehat{R}}{R}\mathbf{I}_3 & \left(1 - \frac{\widehat{R}}{R}\right)[\mathbf{s_n}_1]_\times \mathbf{L}_\omega^{-1} \\ 0 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}. \tag{G.13}$$

La linéarisation de (G.13) au point d'équilibre $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$ est donnée par :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s}^*_\mathbf{n}} \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}^*_\mathbf{n}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\widehat{R}}{R}\mathbf{I}_3 & \left(1 - \frac{\widehat{R}}{R}\right)[\mathbf{s_n}^*_1]_\times \\ 0 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}. \tag{G.14}$$

Puisque la matrice $\mathbf{L}_{\mathbf{s}^*_\mathbf{n}} \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}^*_\mathbf{n}}^{-1}$ est carré, son déterminant peut être calculé :

$$|\mathbf{L}_{\mathbf{s}^*_\mathbf{n}} \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}^*_\mathbf{n}}^{-1}| = \left(\widehat{R}/R\right)^3.$$

Puisque $|\mathbf{L}_{\mathbf{s}_\mathbf{n}^*}\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}_\mathbf{n}^*}^{-1}| \neq 0$, le point $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$ est l'unique point d'équilibre de la commande. Si la commande converge, alors elle converge vers $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$.

La commande est localement asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice $\mathbf{L}_{\mathbf{s}_\mathbf{n}^*}\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}_\mathbf{n}^*}^{-1}$ ont leurs parties réelles strictement positves. Ces valeurs propres sont données par $\widehat{R}/R$ (valeur propre triple) et 1 (valeur propre triple). Ici, la valeur propre triple $\widehat{R}/R$ est strictement positive si et seulement si $\widehat{R} > 0$. Nous venons de montrer la première partie du théorème.

Dans la suite, nous déterminons le domaine de valeurs de $\widehat{R}/R$ pour lequel l'erreur sur la tâche décroît systématiquement. Une condition suffisante qui garantit que l'erreur décroît systématiquement est donnée par :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{s}_\mathbf{n}^*}\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}_\mathbf{n}^*}^{-1} > 0 \iff \frac{1}{2}\left((\mathbf{L}_{\mathbf{s}_\mathbf{n}^*}\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}_\mathbf{n}^*}^{-1})^\top + \mathbf{L}_{\mathbf{s}_\mathbf{n}^*}\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}_\mathbf{n}^*}^{-1}\right) > 0.$$

Les valeurs propres de la matrice $\frac{1}{2}\left((\mathbf{L}_{\mathbf{s}_\mathbf{n}^*}\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}_\mathbf{n}^*}^{-1})^\top + \mathbf{L}_{\mathbf{s}_\mathbf{n}^*}\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}_\mathbf{n}^*}^{-1}\right)$ peuvent être calculées avec Maple. Celles-ci sont données par $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \widehat{R}/R$, $\gamma_3 = \left(\widehat{R} + R + |\widehat{R} - R|a\right)/2R$ (valeur propre double) et $\gamma_4 = \left(\widehat{R} + R - |\widehat{R} - R|a\right)/2R$ (valeur propre double) avec $a = \sqrt{1 + 1/r^{*2}}$.

En supposant $\frac{\widehat{R}}{R} > 0$, on montre facilement que $\gamma_4 > 0$ si et seulement si

$$\frac{a-1}{a+1} < \frac{\widehat{R}}{R} < \frac{a+1}{a-1}.$$

Par conséquent, $\gamma_i > 0,\ i = 1, 2, 3, 4$ si et seulement si

$$\frac{\widehat{R}}{R} > 0 \text{ et } \frac{a-1}{a+1} < \frac{\widehat{R}}{R} < \frac{a+1}{a-1}.$$

Puisque $0 < \frac{a-1}{a+1}$, l'erreur de la tâche décroît systématiquement si

$$0 < \frac{a-1}{a+1} < \frac{\widehat{R}}{R} < \frac{a+1}{a-1}.$$

Bibliographie

[Andreff 02] N. Andreff, Bernard Espiau, Radu Horaud. *Visual servoing from lines.* International Journal of Robotics Research, vol. 21, no. 8, pages 679–699, Août 2002.

[Baker 98] S. Baker, S.K. Nayar. *A Theory of Catadioptric Image Formation.* IEEE Int. Conf. on Computer Vision, pages 35–42, Janvier 1998.

[Barreto 02a] J. Barreto, H. Araujo. *Geometric properties of central catadioptric line images.* ECCV, Copenhagen, Denmark, Mai 2002.

[Barreto 02b] J. Barreto, F. Martin, R. Horaud. *Visual servoing/tracking using central catadioptric images.* Int. Symposium on Experimental Robotics, Ischia, Italy, Juillet 2002.

[Benhimane 06] S. Benhimane, E. Malis. *A new approach to vision-based robot control with omni-directional cameras.* IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Orlando, Florida, Mai 2006.

[Bien 93] Z. Bien, W. Janvierg, J. Park. *Characterization and use of feature-jacobian matrix for visual servoing.* Ed par K. Hashimoto, Visual Servoing, pages 317–363, World Scientific, Singapore, 1993.

[Born 65] M. Born, E. Wolf. *Principles of optics.* Pergamon Press, 1965.

[Bourquardez 06] O. Bourquardez, R. Mahony, T. Hamel, F. Chaumette. *Stability and performance of image based visual servo control using first order spherical image moments.* IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, IROS'06, pages 4304–4309, Beijing, China, Octobre 2006.

[Bourquardez 07] O. Bourquardez, F. Chaumette. *Visual servoing of an airplane for auto-Landing.* IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, IROS'07, pages 1314–1319, San Diego, CA, Octobre 2007.

[Bulteau 07] L. Bulteau. *Détermination de moments invariants aux mouvements affines pour l'asservissement visuel.* Rapport de stage ENS, Lagadic-IRISA, Septembre 2007.

[Cervera 03] E. Cervera, A. D. Pobil, F. Berry, P. Martinet. *Improving image-based visual servoing with 3D features.* Int. Journal of Robotics Research, vol. 22, no. 10-11, pages 821–839, Octobre 2003.

[Chaumette 90] F. Chaumette. *La relation vision-commande : théorie et applications à des tâches robotiques.* Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, Rennes, Juillet 1990.

[Chaumette 93] F. Chaumette, P. Rives, B. Espiau. *Classification and realization of the different vision-based tasks.* Ed par K. Hashimoto, Visual Servoing, vol. 7, pages 199–228, World Scientific Series in Robotics and Automated Systems, Singapore, 1993.

[Chaumette 98] F. Chaumette. *Potential problems of stability and convergence in image-based and position-based visual servoing.* Ed par D. Kriegman, G. Hager, A. S. Morse, The Confluence of Vision and Control, pages 66–78, LNCIS Series, no 237, Springer-Verlag, 1998.

[Chaumette 00] F. Chaumette, E. Malis. *2 1/2 D visual servoing : a possible solution to improve image-based and position-based visual servoings.* IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA'00, vol. 1, pages 630–635, San Francisco, USA, Avril 2000.

[Chaumette 04] F. Chaumette. *Image moments : a general and useful set of features for visual servoing.* IEEE Trans. on Robotics, vol. 20, no. 4, pages 713–723, Août 2004.

[Chaumette 06] F. Chaumette, S. Hutchinson. *Visual Servo Control, Part I : Basic Approaches.* IEEE Robotics and Automation Magazine, vol. 13, no. 4, pages 82–90, Décembre 2006.

[Collewet 00] C. Collewet, F. Chaumette. *A contour approach for image-based control of objects with complex shape.* IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, IROS'00, vol. 1, pages 751–756, Takamatsu, Japan, Novembre 2000.

[Corke 01] P. Corke, S. Hutchinson. *A new partitioned approach to image-based visual visual servo control.* IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 17, no. 4, pages 507–515, Août 2001.

[Cowan 02] N. Cowan, J. Weingarten, D. Koditschek. *Visual servoing via navigation functions.* IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 18, no. 4, pages 521–533, Août 2002.

[Cowan 05] N. Cowan, D. Chang. *Geometric visual servoing.* IEEE Trans. on Robotics, vol. 21, no. 6, pages 1128–1138, Décembre 2005.

[Deguchi 98] K. Deguchi. *Optimal motion control for image-based visual servoing by decoupling translation and rotation.* IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, IROS'98, vol. 2, pages 705–711, Victoria, BC, Canada, Octobre 1998.

[Dementhon 95] D. Dementhon, L. Davis. *Model-based object pose in 25 lines of code.* Int. Journal of Computer Vision, vol. 15, no. 1/2, pages 123–141, Juin 1995.

[Deng 03] L. Deng, W. Wilson, F. Janabi-Sharifi. *Dynamic perfomance of the position-based visual servoing method in the cartesian and image spaces.* IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, vol. 1, pages 510–515, Las Vegas, Nevada, Octobre 2003.

[Espiau 87] B. Espiau, P. Rives. *Closed-loop recursive estimation of 3D features for a mobile vision system.* IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA'87, vol. 4, pages 1436–1443, Raleigh, NC, Mars 1987.

[Espiau 92] B. Espiau, F. Chaumette, P. Rives. *A new approach to visual servoing in robotics.* IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 8, no. 3, pages 313–326, Juin 1992.

[Espiau 93] B. Espiau. *Effect of camera calibration errors on visual servoing in robotics.* 3rd Int. Symposium on Experimental Robotics, Kyoto, Japan, Octobre 1993.

[Feddema 89a] J. Feddema, O. Michel. *Vision-guided servoing with feature-based trajectory generation.* IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 5, no. 5, pages 691–700, Octobre 1989.

[Feddema 89b] J. T. Feddema, C. S. G. Lee, O. R. Mitchell. *Automatic selection of image features for visual servoing of a robot manipulator.* IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pages 832–837, Scottsdale, Arizona, Mai 1989.

[Fermuller 00] C. Fermuller, Y. Aloimonos. *Observability of 3d motion.* Int. Journal of Computer Vision, vol. 37, no. 1, pages 43–64, Juin 2000.

[Gaspar 00] J. Gaspar, N. Winters, J. Santos-Victor. *Vision-based navigation and environmental representations with an omni-directional camera.* IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 16, no. 6, pages 890–898, Décembre 2000.

[Geyer 00] C. Geyer, K. Daniilidis. *A unifying theory for central panoramic systems and practical implications.* European Conf. on Computer Vision, vol. 29, pages 159–179, Mai 2000.

[Greene 86] N. Greene, P. S. Heckbert. *Creating raster omnimax images from multiple perspective views using the elliptical weighted average filter.* IEEE Computer Graphics and Applications, vol. 6, no. 6, pages 21–27, Juin 1986.

[Hadj-Abdelkader 05] H. Hadj-Abdelkader, Y. Mezouar, N. Andreff, P. Martinet. *2 1/2D Visual servoing with central catadioptric cameras.*

IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, IROS'05, 2005.

[Hadj-Abdelkader 06a] H. Hadj-Abdelkader. *Asservissement visuel en vision omnidirectionnelle.* Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 2006.

[Hadj-Abdelkader 06b] H. Hadj-Abdelkader, Y. Mezouar, N. Andreff, P. Martinet. *Omnidirectional visual servoing from polar lines.* IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Orlando, Florida, Mai 2006.

[Hadj-Abdelkader 07] H. Hadj-Abdelkader, Y. Mezouar, P. Martinet. *Decoupled visual servoing from set of points imaged by an omnidirectional camera.* IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Rome, Italy, Avril 2007.

[Hadj-Abdelkader 08] H. Hadj-Abdelkader, Y. Mezouar, P. Martinet, F. Chaumette. *Catadioptric Visual Servoing From 3D Straight Lines.* IEEE Trans. on Robotics, 2008.

[Hager 95] G. Hager. *Calibration-free visual control using projective invariant.* IEEE Int. Conf. on Computer Vision, pages 1009–1015, 1995.

[Hamel 02] T. Hamel, R. Mahony. *Visual servoing of an under-actuated dynamic rigid-body system : an image-based approach.* IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 18, no. 2, pages 187–198, Avril 2002.

[Hu 62] M. K. Hu. *Visual pattern recognition by moment invariants.* IRE Trans. on Information Theory, vol. 8, pages 179–187, Février 1962.

[Hutchinson 96] S. Hutchinson, G. Hager, P. Corke. *A tutorial on visual servo control.* IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 12, no. 3, pages 651–670, Octobre 1996.

[Iwatsuki 05] M. Iwatsuki, N. Okiyama. *A new formulation for visual servoing based on cylindrical coordinate system.* IEEE Trans. on Robotics, vol. 21, no. 2, pages 266–273, Avril 2005.

[Kannala 06] J. Kannala, S. Brandt. *A generic camera model and calibration method for conventional, wide-angle and fish-eye lenses.* IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intell., vol. 28, no. 8, pages 1335–1340, 2006.

[Lu 00] C-P. Lu, G. Hager, E. Mjolsness. *Fast and globally convergent pose estimation from video images.* IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intell., vol. 22, no. 6, pages 610–622, Novembre 2000.

[Lyapunov 66] A. M. Lyapunov. *Stability of motion.* Academic Press, New-York and London, 1966.

[Mahony 02] R. Mahony, P. Corke, F. Chaumette. *Choice of image features for depth-axis control in image-based visual servo control.* IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, vol. 1, pages 390–395, Lausanne, Switzerland, Octobre 2002.

[Malis 98] E. Malis. *Contributions à la modélisation et la commande en asservissement visuel.* Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, Rennes, Novembre 1998.

[Malis 99] E. Malis, F. Chaumette, S. Boudet. *2 1/2 D visual vervoing.* IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 15, no. 2, pages 238–250, Avril 1999.

[Malis 02] E. Malis, F. Chaumette. *Theoretical improvements in the stability analysis of a new class of model-free visual servoing methods.* IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 18, no. 2, pages 176–186, Avril 2002.

[Malis 04] E. Malis. *Improving vision-based control using efficient second order minimization techniques.* IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA'04, New Orleans, USA, Avril 2004.

[Marchand 99] E. Marchand. *ViSP : A Software Environment for Eye-in-Hand Visual Servoing.* IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA'99, vol. 4, pages 3224–3229, Detroit, Michigan, Mai 1999.

[Marchand 02] E. Marchand, F. Chaumette. *Virtual Visual Servoing : a framework for real-time augmented reality.* Ed par G. Drettakis, H.-P. Seidel, EUROGRAPHICS 2002 Conference Proceeding, vol. 21(3) of *Computer Graphics Forum*, pages 289–298, Saarebrücken, Germany, Septembre 2002.

[Marey 08] M. Marey, F. Chaumette. *Analysis of Classical and New Visual Servoing Control Laws.* IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA'08, Pasadena, CA, Mai 2008.

[Martinet 96] P. Martinet, J. Gallice, D. Khadraoui. *Vision based control law using 3D visual features.* World Automation Congress, WAC, Robotics and manufactoring systems, vol. 3, pages 497–502, Montpellier, France, Mai 1996.

[Martinet 97] P. Martinet, N. Daucher, J. Gallice, M. Dhome. *Robot control using monocular pose estimation.* Workshop on New Trends in Image-Based Robot Servoing (IROS'97), pages 1–12, Grenoble, France, Septembre 1997.

[Mei 07] C. Mei, P. Rives. *Single View Point Omnidirectional Camera Calibration from Planar Grids.* IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Rome, Italy, Avril 2007.

[Mezouar 02] Y. Mezouar, F. Chaumette. *Path planning for robust image-based control.* IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 18, no. 4, pages 534–549, Août 2002.

[Mezouar 04] Y. Mezouar, H. Hadj-Abdelkader, P. Martinet, F. Chaumette. *Central catadioptric visual servoing from 3D straight lines.* IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, IROS'04, vol. 1, pages 343–349, Sendai, Japan, Septembre 2004.

[Michel 93] H. Michel, P. Rives. *Singularities in the determination of the situation of a robot.* Technical Report, INRIA, Février 1993.

[Miller 95] D. Miller, A. Wright. *Autonomous Spacecraft Docking Using Multi-Color Targets.* Proceedings of the 6th Topical Meeting on Robotics, Monterey, CA, Février 1995.

[Miller 97] D. Miller, A. Wright, R. Sargent, R.Cohen, T. Hunt. *Attitude and position control using real-time color tracking.* Proceedings of the American Association for Artificial Intelligence, AAAI'97, pages 1026–1031, Providence, RI, Juillet 1997.

[Morel 99] G. Morel, T. Leibezeit, J. Szewczyk, S. Boudet, J. Pot. *Explicit incorporation of 2D constraints in vision-based control of robot manipulators.* Ed par P. Corke, J. Trevelyan, Int. Symposium on Experimental Robotics, pages 99–108, LNCIS Series, no 250, Springer-Verlag, 1999.

[Mouaddib 05] E. Mouaddib. *La Vision omnidirectionnelle.* Journées nationales de la recherche en robotique, JNRR'05, Guidel, France, Octobre 2005.

[Nayar 97] S. Nayar. *Omnidirectional Vision.* Symposium on Robotics Research, Octobre 1997.

[Needham 97] T. Needham. *Visual complex analysis.* Oxford, Clarendon Press, 1997.

[Nelson 96] B. Nelson, P. Khosla. *Force and vision resolvability for assimilating disparate sensory feedback.* IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 12, no. 5, pages 714–731, Octobre 1996.

[Nene 98] S. Nene, S.K. Nayar. *Stereo with Mirrors.* IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV), pages 1087–1094, Janvier 1998.

[Ray 94] F. S. Ray. *Applied photographic optics.* Oxford, Focal Press, 1994.

[Remazeilles 04] A. Remazeilles, F. Chaumette, P. Gros. *Robot motion control from a visual memory.* IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA'04, vol. 4, pages 4695–4700, New Orleans, LA, Avril 2004.

[Remazeilles 06] A. Remazeilles, N. Mansard, F. Chaumette. *Qualitative Visual Servoing : application to the visibility constraint.* IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, IROS'06, pages 4297–4303, Beijing, China, Octobre 2006.

[Samson 91] C. Samson, M. Le Borgne, B. Espiau. *Robot control : the task function approach.* Oxford, Clarendon Press, 1991.

[Sanderson 80] A. Sanderson, L. Weiss. *Image based visual servo control using relational graph error signal.* Int. Conf. on Cybernetics and Society, Cambridge, MA, Octobre 1980.

[Sanderson 83] A. Sanderson, L. Weiss. *Adaptive visual servo control of robots.* Ed par A. Pugh, Reprinted in Robot vision, pages 107–116, Bedford, UK, 1983.

[Sharma 97] R. Sharma, S. Hutchinson. *Motion perceptibility and its application to active vision-based servo control.* IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 13, no. 4, pages 607–617, Août 1997.

[Shirai 73] Y. Shirai, H. Inoue. *Guiding a robot by visual feedback in assembling tasks.* Pattern Recognit., vol. 5, pages 99–108, 1973.

[Spong 05] M. W. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar. *Robot modeling and control.* John Wiley and Sons, Inc., 2005.

[Tahri 03] O. Tahri, F. Chaumette. *Application of moment invariants to visual servoing.* IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, vol. 3, pages 4276–4281, Taipeh, Taiwan, Mai 2003.

[Tahri 04] O. Tahri. *Utilisation des moments en asservissement visuel et calcul de pose.* Thèse de doctorat, IRISA, Rennes, Mars 2004.

[Tahri 05] O. Tahri, F. Chaumette. *Point-Based and Region-Based Image Moments for Visual Servoing of Planar Objects.* IEEE Trans. on Robotics, vol. 21, no. 6, pages 1116–1127, Décembre 2005.

[Tahri 08] O. Tahri, F. Chaumette, Y. Mezouar. *New Decoupled Visual Servoing Scheme based on Invariants Projection onto a Sphere.* IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA'08, Pasadena, CA, Mai 2008.

[Tardif 06] J-P Tardif, P. Sturm, S. Roy. *Self-Calibration of a General Radially Symmetric Distortion Model.* ECCV, Graz, Austria, mai 2006.

[Tsai 87] R. Tsai. *A versatile camera calibration technique for high accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf tv cameras and lenses.* IEEE Journal of Robotics and Automation, vol. 3, no. 4, pages 323–344, Août 1987.

[Vanderportaele 06] B. Vanderportaele, M. Cattoen, P. Marthon, P. Gurdjos. *A new linear calibration method for paracatadioptric cameras.* ICPR, Août 2006.

[Victorino 02] A. Victorino, P. Rives, J.-J Borrelly. *A relative motion estimation using a bounded error method.* IEEE/RSJ Int. Conf.

on Intelligent Robots and Systems, Lausanne, Switzerland, Octobre 2002.

[Weiss 87] L. Weiss, A. Sanderson, C. Neuman. *Dynamic sensor-based control of robots using visual feedback.* IEEE Journal of Robotics and Automation, vol. 3, no. 5, pages 404–417, Octobre 1987.

[Weng 92] J. Weng, P. Cohen, M. Herniou. *Camera calibration with distorsion models and accuracy evaluation.* IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intell., vol. 14, no. 10, pages 965–980, Octobre 1992.

[Wilson 96] W. Wilson, C. Hulls, G. Bell. *Relative end-effector control using cartesian position-based visual servoing.* IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 12, no. 5, pages 684–696, Octobre 1996.

[Zhang 99] H. Zhang, J. Ostrowski. *Visual servoing with dynamics : control of an unmanned blimp.* IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA'99, pages 618–623, Detroit, Michigan, Mai 1999.

Résumé

Cette étude s'inscrit dans le cadre de l'asservissement visuel. La technique d'asservissement visuel consiste à utiliser les informations visuelles fournies par un capteur de vision pour commander les mouvements d'un système dynamique.

Un des défis de cette technique est de s'approcher d'un comportement idéal du robot commandé, par exemple une trajectoire satisfaisante. Aujourd'hui, il est bien établi que l'élargissement du champ de vision et surtout le choix d'informations visuelles adéquates ont une incidence positive sur le comportement du robot.

Si l'élargissement du champ de vision d'un robot est possible aujourd'hui par l'utilisation des systèmes de vision catadioptrique (couplage caméra et miroir), la sélection d'informations visuelles adéquates reste encore un problème ouvert puisque peu de travaux de modélisation ont été menés sur des systèmes à large champ de vision.

Cette étude vise à modéliser des informations visuelles idéales. L'approche proposée est la modélisation par projection sphérique puisque ce modèle de projection est au centre des modèles de projection perspective et catadioptrique.

Des résultats significatifs sont présentés pour un objet plan ou volumétrique défini par un ensemble de points et pour des objets volumétriques sphériques tels qu'une sphère et une sphère marquée. Pour chaque objet, un nouveau vecteur minimal d'informations visuelles idéales est proposé. La validation expérimentale de chaque nouveau vecteur montre un comportement adéquat du robot.
Mots clefs : Robotique, asservissement visuel, projection sphérique.

Abstract

This study is concerned with visual servoing. Visual servoing consists in using data provided by a vision sensor to control the motion of a dynamic system.

One of the issues in visual servoing is to approach an ideal system behaviour, for instance a satisfactory trajectory. Now, it is well established that enlarging the sensor field of view and choosing adequate features have a positive impact on the system behaviour.

If enlarging the sensor field of view is now possible with catadioptric vision systems (coupling of a camera and a mirror), the selection of adequate visual features is still an open problem since there has not been enough research on modeling features using large field of view systems.

The purpose of this study is to design ideal features for visual servoing. The proposed approach uses a spherical projection model since this projection model is shared both by the perspective and catadioptric projection models.

Significant results are presented for a volumetric or planar target described by a cloud of points and for spherical volumetric targets such as a sphere and compound targets made up of a sphere and points. For each target, a new minimal set of features is proposed. The experimental validation of each new set shows an adequate robot behaviour.
Keywords : Robotics, visual servoing, spherical projection.