



**HAL**  
open science

## Gestion du risque climatique par l'utilisation des produits dérivés d'assurance

Mohammed Mraoua

► **To cite this version:**

Mohammed Mraoua. Gestion du risque climatique par l'utilisation des produits dérivés d'assurance. Mathématiques générales [math.GM]. INSA de Rouen; École Mohammadia d'ingénieurs (Rabat, Maroc), 2013. Français. NNT : 2013ISAM0012 . tel-00845895

**HAL Id: tel-00845895**

**<https://theses.hal.science/tel-00845895v1>**

Submitted on 18 Jul 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université Mohammed V - Agdal, Rabat  
École Mohammadia d'Ingénieurs

No d'ordre (Rabat) :



Institut National des Sciences  
Appliquées de Rouen

No d'ordre (Rouen) :

## THÈSE DE DOCTORAT EN COTUTELLE

pour obtenir le grade de

### DOCTEUR EN SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR

Spécialité : Mathématiques Appliquées et Informatique

Option : Optimisation, Analyse Numérique, Statistique

et le grade de

### DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE ROUEN

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Option : Optimisation et Fiabilité des Systèmes

présentée par

**Mohammed Mraoua**

Sujet de la thèse

---

## Gestion du risque climatique par l'utilisation des produits dérivés d'assurance

---

soutenue publiquement le 25 juin 2013

devant la commission d'examen composée de

Mohamed Tkiouat	Professeur, EMI Rabat	Président
Rajae Aboulaich	Professeur, EMI Rabat	Rapporteur
Adrien Blanchet	Professeur, U. Toulouse 1 - Capitole	Rapporteur
Driss Misane	Professeur, Faculté des Sciences Rabat	Rapporteur
Mhamed Itmi	Professeur, INSA Rouen	Examineur
Rachid Ellaia	Professeur, EMI Rabat	Directeur de thèse
Abdelkhalak El Hami	Professeur, INSA Rouen	Directeur de thèse

---

**Gestion du risque climatique  
par l'utilisation des produits dérivés d'assurance**

---

Mohammed Mraoua  
EMI, Rabat – INSA, Rouen

Juin 2013

*À Loubna, pour sa patience et tout le reste.*



# Remerciement

Tout d'abord, je tiens à exprimer toute ma gratitude à Rachid Ellaia, mon directeur de thèse à l'EMI, pour son soutien et la confiance qu'il m'a accordée. Je remercie également Abdelkhalak El Hami, mon co-directeur de thèse de m'avoir accueilli à l'INSA.

Je remercie l'ensemble des membres du jury de thèse : Mohamed Tkiouat qui a bien voulu présider le jury, Rajae Aboulaich, Adrien Blanchet et Driss Misane qui ont accepté d'être rapporteurs, ainsi que Mhamed Itmi.

J'ai été heureux et fier de faire partie de la famille EMI depuis près de dix ans maintenant, d'abord en encadrant des étudiants du cycle Ingénieur, puis en enseignant dans le Master GRF et enfin en tant que doctorant au sein du LERMA.

Mes deux dernières années de thèse, je les ai passés au sein de HEC Montréal et au GERAD. Je remercie Michèle Breton de m'avoir donné l'opportunité de travailler dans un cadre agréable et stimulant et de m'avoir donné accès aux ressources du LACED pour tourner mes simulations. Je la remercie aussi d'avoir financé ma participation dans deux congrès de finance mathématique.

Je remercie Said Akram qui m'a beaucoup apporté. Son amitié, son soutien et sa disponibilité m'ont été d'une grande aide tout au long de la thèse.

Je remercie particulièrement Driss Bari avec qui j'ai travaillé sur la problématique du risque climatique avant même de m'inscrire en thèse et qui m'a fourni gracieusement toutes les données météorologiques marocaines.

Je ne remerciais jamais assez ma famille pour l'encouragement et le soutien constants.

Finalement, je tiens à remercier du fond du cœur Loubna, ma femme, qui a contribué à créer un environnement favorable, sans lequel ce travail n'aurait pu être mené à son terme. Je la remercie pour sa patience, son soutien et d'avoir pris soin de nos enfants Farisse Addine et Maha pendant toutes les nombreuses soirées et fins de semaine passées à l'EMI et à HEC loin d'eux.

# Résumé

Cette thèse s'intéresse à la gestion du risque climatique par l'utilisation des produits dérivés climatiques. Ces derniers sont des contrats financiers dont le paiement dépend d'une certaine manière du climat. Les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse sont une contribution aux aspects statistiques, économétriques et financiers de la modélisation et de l'évaluation des produits dérivés climatiques. Un intérêt particulier a été accordé au contexte marocain aussi bien au niveau du volet qualitatif (description du risque climatique, présentation du marché du climat, mécanismes de gestion, différences par rapport aux produits classiques d'assurance, etc.) qu'au niveau du volet quantitatif. Par rapport à ce dernier volet, en plus des développements théoriques que nous avons apportés (tests statistiques pour vérifier l'impact du climat sur l'économie, amélioration d'un modèle de prévision de la température moyenne quotidienne, confirmation du choix de la température moyenne, au lieu des températures extrêmes, comme sous-jacent pour les contrats basés sur la température, etc.), nous avons proposé des cas de gestion entre opérateurs économiques marocains exerçant des activités sensibles à l'aléa climatique avec des profils de risque différents en leur apportant des solutions de couverture basées sur l'utilisation de produits dérivés climatiques.

**Mots clefs :** Dérivé climatique, Swap, Option, Température, Processus stochastique, Simulations Monte Carlo, Analyse de données, Assurance, Gestion de risque, Marché climatique.

# Abstract

This thesis focuses on the weather risk management by using weather derivatives. Weather derivatives are basically financial contracts whose payoffs depend in a certain way on weather. The work done in this thesis is a contribution to statistics, econometric and financial aspects of the modeling and the evaluation of weather derivatives. Particular attention was paid to the Moroccan context both in a qualitative point of view (description of climate risk, presentation of the weather market, management mechanisms and rules, differences with traditional insurance products, etc.) than in a quantitative point of view. At the quantitative component, in addition to theoretical developments that we have made (statistical tests to verify the impact of weather conditions on the economy, improvement of a model to forecast daily average temperatures, confirming the choice of the average temperature instead of extreme temperatures as the preferred underlying for contracts based on temperature, etc.), we also proposed case studies with Moroccan economic actors carrying out their weather sensitive activities and having different risk profiles and we provide them hedging solutions based on the use of weather derivatives.

**Keywords :** Weather derivative, Swap, Option, Temperature, Stochastic process, Monte Carlo simulations, Data analysis, Insurance, Risk management, Weather market.



# Sommaire

Remerciement	v
Résumé	vi
Abstract	vii
Liste des abréviations	ix
Glossaire des notations	xi
Introduction générale	12
1 Le risque climatique	18
2 Traitement et analyse des données	43
3 Approches d'évaluation et modélisation de la température	63
4 Evaluation des dérivés sur température	89
5 Températures moyennes ou températures extrêmes	110
6 Evaluation d'un swap de volatilité de température	123
Conclusion générale	133
Bibliographie	136
Table des matières	145
Liste des tableaux	147
Table des figures	149

# Liste des abréviations

Ceci n'est pas un compte-rendu exhaustif de toutes les abréviations<sup>1</sup> utilisées dans ce mémoire. Elles ne sont listées ici que les abréviations récurrentes. D'autres sont utilisées ponctuellement et sont explicitées dans leur contexte.

°C	Degré Celsius
ACF	Autocorrelation function
ACP	Analyse en composante principale
ARCH	Autoregressive conditional heteroskedasticity
ARFIMA	Autoregressive fractionally integrated moving average
ARIMA	Autoregressive integrated moving average
ARMA	Autoregressive moving average
BEI	Banque européenne d'investissement
BC	Bourse de Casablanca
BM	Brownian motion
CME	Chicago mercantile exchange
DD	Degree day
DMN	Direction de la météorologie nationale
ECAD	European climate assessment and dataset
FBM	Fractional Brownian motion
GARCH	General autoregressive conditional heteroskedasticity
GIEC	Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat
HBA	Historical Burn Analysis
ISDA	International swaps and derivatives association
J.-B.	Jarque-Bera
LIFFE	London international financial futures and options exchange
MAD	Dirham marocain

---

1. Les abréviations sont explicitées dans leur langue d'origine ou d'usage.

---

MAE	Mean absolute error
MAPE	Mean absolute percentage error
MASI	Moroccan all shares index
MC	Monte Carlo
MLE	Maximum likelihood estimation
NOAA	National oceanic and atmospheric administration
OCDE	Organisation de coopération et de développement économiques
OMM	Organisation mondiale de la météorologie
OTC	Over the counter
O-U	Ornstein-Uhlenbeck
PIB	Produit intérieur brut
PwC	PricewaterhouseCoopers
RMSE	Root mean squared error
RU	Royaume-Uni
SDE	Stochastic differential equation
USA	États-Unis
UTC	Temps universel coordonné
WRMA	Weather risk management association

# Glossaire des notations

Ceci n'est pas un compte-rendu exhaustif de toutes les notations<sup>2</sup> utilisées dans ce mémoire. Elles ne sont listées ici que les notations récurrentes. D'autres sont utilisées ponctuellement et sont explicitées dans leur contexte.

C	Cumul des CDD
CAT	Cumulative average temperature
CDD	Cooling degree day
DAT	Daily average temperature
H	Cumul des HDD
HDD	Heating degree day
iid	Indépendant et identiquement distribué
T	Température
Tavg	Température moyenne
Tmax	Température maximale
Tmin	Température minimale

---

2. Les notations sont explicitées dans leur langue d'origine ou d'usage.

# Introduction générale

*“Les prévisions sont difficiles surtout lorsqu’elles concernent l’avenir.”*

– Pierre Dac –

Presque toutes les activités économiques sont exposées aux conditions climatiques (Alexandridis et Zapranis [1], Dischel [2]), parfois de façon cyclique comme pour le secteur de l’agriculture (Requier-Desjardins [13], Sivakumar et Motha [14]), de l’énergie et du gaz (Eydeland et Wolyniec [4], Troccoli [16]) ou de façon irrégulière, comme dans l’industrie touristique et de loisirs ou dans l’industrie de la construction (Dischel [2]). Aux États-Unis, les estimations montrent qu’entre 25% et 42% du produit intérieur brut (PIB) est sensible au climat (Stern [15]). A titre d’exemple, un hiver plus doux que la normale peut réduire considérablement les revenus des fournisseurs ou distributeurs de gaz de chauffage en raison de la baisse de la demande de chaleur dans les foyers. De même, les ventes de l’électricité baisseraient dans le cas où les températures seraient inférieures à la normale de la saison pendant l’été en raison de la baisse du besoin de conditionnement d’air.

Les opérateurs économiques ont toujours essayé de se protéger contre l’impact des conditions météorologiques défavorables sur leurs activités en agissant selon diverses façons telles que :

- La mise en place d’une gestion anticipative du risque climatique (par exemple, l’aménagement des unités de productions dans des zones moins vulnérables)
- Le recours à des programmes d’assurance publique (par exemple les programmes d’indemnisation mis en place par le gouvernement marocain dans le cadre du Programme Sécheresse)
- La mise en place de programmes d’investissements publics ou privés (par exemple la construction de barrages ou d’installations de stockage d’eau pour faire face aux fluctuations des taux de précipitations)
- Le recours à l’assurance privée auprès de compagnies spécialisées (par exemple le cas de la compagnie MAMDA spécialisée dans l’assurance agricole au Maroc)

Vers la fin des années 90, une nouvelle catégorie d’instruments financiers appelés dérivés climatiques<sup>3</sup> a été introduite pour permettre aux entreprises de gérer leur

---

3. Parfois, les produits dérivés climatiques sont aussi appelés “produits dérivés d’assurance” et dans une moindre mesure “produits climatiques paramétriques”

“risque volumétrique” résultant de conditions météorologiques défavorables (Geman [7]). Comme tout produit dérivé traditionnel, dont le gain potentiel (ou *payoff*) dépend du prix d’un certain actif sous-jacent (par exemple, une action ou un indice boursier, un taux d’intérêt, un taux de change, une matière première, etc.), un dérivé climatique a aussi son “actif” sous-jacent mais sous forme de mesure météorologique<sup>4</sup>. Un sous-jacent climatique peut être la pluie, la température, l’humidité, la vitesse du vent, la neige, etc. Notons toutefois l’existence d’une différence fondamentale entre un dérivé climatique et les produits dérivés traditionnels en ce qui concerne l’objectif de la couverture. En effet, le sous-jacent d’un dérivé climatique est représenté par la mesure d’une certaine variable météorologique influençant le volume des transactions de biens (ou même de services). Ceci, à son tour, signifie que l’objectif principal des dérivés climatiques est de couvrir le risque de volume, plutôt que le risque de prix, qui résulterait lui d’un changement dans la demande de biens en raison d’un changement de climat. Le risque de prix peut être couvert de manière plus efficace par le biais de contrats à terme ou d’options sur le marché classique des produits dérivés relatifs aux matières premières<sup>5</sup> (Geman [5, 6]). Cependant, une couverture parfaite doit couvrir à la fois le risque de prix par le biais de produits dérivés sur matière première et le risque de volume par voie de dérivés climatiques. Cette combinaison est appelée couverture croisée.

La première transaction climatique a été faite en 1997 sur le marché du gré-à-gré (OTC) par Aquila Energy Company. Depuis, le marché des produits dérivés climatiques s’est rapidement développé au cours de la dernière décennie. Il a pris son envol aux USA d’abord et puis un peu partout dans le monde mais à des vitesses différentes (Dischel [2], PwC [12]).

En plus des dérèglements climatiques qu’ont connus les USA durant les hivers 1997-1998 notamment à cause du phénomène d’El Niño, la déréglementation du marché américain de l’énergie avait constitué un important facteur de motivation des compagnies énergétiques pour le recours aux dérivés climatiques. En Septembre 1999, le Chicago Mercantile Exchange (CME) a commencé la commercialisation de contrats de couverture standardisés pour dix grandes villes américaines. Présentement, le CME offre des contrats de couvertures standardisés sur plusieurs indices sous-jacents couvrant 47 villes dans le monde. Sur son système de négociation électronique, le CME attire continuellement de nouveaux participants permettant une augmentation des liquidités sur le marché des dérivés climatiques. L’intérêt porté à ce système est dû à un certain nombre de raisons. Tout d’abord, cette plate-forme de trading élec-

---

4. Dans ce mémoire, nous avons utilisé indifféremment les adjectifs *météorologique* et *climatique*. Dans la littérature anglophone, on parle de “climate risk” et de “weather derivative” tandis que dans la littérature francophone, il est d’usage de parler de “risque climatique” mais aussi de “dérivé climatique”. D’après le dictionnaire *Petit Larousse*, “la météorologie est l’étude des phénomènes atmosphériques et de leurs lois, notamment en vue de la prévision du temps” alors que “le climat est l’ensemble des phénomènes météorologiques qui caractérise l’état moyen de l’atmosphère et son évolution en un lieu donné”.

5. Le terme matière première (ou commodity en anglais) est un terme générique qui désigne l’ensemble des ressources naturelles utilisées par l’industrie dans son processus de production, cela concerne aussi bien les composants que les ressources énergétiques. Sur ce marché sont échangés entre autre du cuivre, de l’or, du blé, du coton et du pétrole mais on peut aussi y inclure le fret, l’électricité. Le principal marché des commodities est le CME Group, qui contient le CBOT (Chicago Board of Trade), le CME (Chicago Mercantile Exchange), le NYMEX (New York Mercantile Exchange) et le COMEX (New York Commodity Exchange) suivi par le LME (London Metal Exchange) et l’ICE (Intercontinental Exchange).

tronique permet de faire des transactions portant sur des petites notionnelles ce qui attire un plus grand nombre d'investisseurs potentiels. Deuxièmement, elle permet de connaître les prix des couvertures car les cours des transactions réelles sont disponibles et accessibles pour le public. Troisièmement, elle réduit les coûts des transactions. Pour terminer, elle élimine le risque de crédit pour les participants via le passage par le système de la chambre de compensation. Cependant, bien que le nombre de participants sur les marchés des dérivés climatiques a fortement augmenté au cours des dernières années, il n'en demeure pas moins que les marchés traditionnels des couvertures financières restent les plus importants, cela est dû au fait que le climat est tributaire de l'emplacement spécifique de chaque opérateur économique et par conséquent les contrats commercialisés ne sont pas aussi standards que ceux transigés sur les marchés classiques.

Sur un autre registre, les dérivés climatiques constituent un outil alternatif au contrat d'assurance classique par lequel les opérateurs économiques peuvent se protéger contre une perte financière due aux conditions météorologiques défavorables imprévues ou inhabituelles (Gurenko [8], Jewson et Brix [9]). De nombreux éléments permettent de différencier les dérivés climatiques des contrats d'assurance. La principale différence est due à la nature même de la couverture offerte par les deux instruments. L'assurance offre une protection à des événements météorologiques extrêmes ayant une faible probabilité de survenance, tels que les séismes, les ouragans, les inondations, etc. Les produits dérivés climatiques, quant à eux, peuvent être utilisés pour protéger leur détenteur contre tout type de risque climatique y compris le risque d'incertitude relative à la réalisation des conditions climatiques normales qui sont par ailleurs beaucoup plus susceptibles de se produire (en termes de probabilités). Cette souplesse est très appréciée par les opérateurs économiques dont l'activité est étroitement liée aux conditions climatiques et pour lesquels des événements moins dramatiques peuvent également générer des pertes financières importantes.

Les dérivés climatiques offrent aussi l'avantage à leur détenteur de ne pas être obligé de passer par un processus d'expertise ou de démonstration de dégâts à chaque fois qu'une perte est subie. Inversement, un contrat d'assurance présente le risque, dans le cas où son détenteur n'est pas en mesure de prouver ses dommages à la compagnie d'assurance, de ne pas être indemnisé par celle-ci. Une autre différence importante entre les deux modes de couverture est due aux caractéristiques plus standardisées et flexibles des dérivés climatiques qui permettent, entre autre, de réduire le coût de la couverture. Une autre spécificité des dérivés climatiques c'est qu'en plus de leur rôle d'instruments de couverture, ils peuvent aussi être utilisés à des fins de spéculation, à l'instar de tous les produits dérivés, ce qui est fondamentalement interdit par le principe de l'assurance.

Les dérivés climatiques sont généralement structurés sous forme de swaps, de futures et d'options basés sur les différents sous-jacents des indices météorologiques (par exemple, HDD, CDD, DAT<sup>6</sup>, etc.) et qu'en plus des contrats transigés sur les marchés organisés (comme le CME), il y a aussi des contrats qui sont conclus sur les marchés du gré-à-gré. L'un de ces contrats les plus utilisés est l'*option*. Il y a deux types d'options, les options d'achat (*calls*) et les options de ventes (*puts*). L'acheteur d'un call sur HDD, par exemple, paye au vendeur une prime au début du contrat.

---

6. HDD : Heating Degree Day (degrés-jours de chauffage), CDD : Cooling Degree Day (degrés-jours de refroidissement), DAT : Daily Average Temperature (température moyenne quotidienne). Nous reviendrons sur les définitions exactes de chaque grandeur dans le premier chapitre.

En retour, si le nombre de HDD au cours de la période du contrat est supérieur au niveau d'exercice convenu entre les deux parties, l'acheteur va recevoir un paiement. Le montant du paiement est déterminé en fonction du niveau d'exercice et du montant du *tick* (valeur monétaire pour chaque HDD en dessus du niveau d'exercice de l'option).

Notons enfin que, dans le cadre de cette thèse, nous ne nous intéresserons qu'aux produits dérivés climatiques ayant pour sous-jacent la température. Ces derniers représentent par ailleurs 70% de la valeur notionnelle totale des dérivés climatiques transigés sur le marché du gré-à-gré (PwC [12]) et seraient les plus adaptés au contexte africain en général (Downing *et al.* [3], Low [10]) et celui du Maroc en particulier (Mraoua et Bari [11]).

La présente thèse s'intéresse aux aspects statistiques, économétriques et financiers de la modélisation et de l'évaluation des produits dérivés climatiques. Elle se compose de six chapitres autonomes ayant chacun sa propre revue de littérature et sa propre liste de références.

Le chapitre 1 traitera de la notion de risque climatique sous deux angles différents mais complémentaires. D'une part, les aspects qualitatifs seront présentés et discutés et d'autre part, une étude économétrique fera la lumière, en utilisant des données marocaines, sur l'effet du climat sur l'économie. On trouvera aussi dans ce chapitre introductif, un aperçu sur le marché des dérivés climatiques ainsi qu'une description des principales différences entre ce marché et le marché de l'assurance traditionnelle.

Dans le chapitre 2, nous nous intéresserons au traitement et à l'analyse des données météorologiques en vue de les utiliser dans l'évaluation des dérivés climatiques. Plus précisément, les différentes méthodes de comblement des lacunes dans les séries de données seront présentées et une méthode en particulier, à savoir la méthode d'analyse en composante principale (ACP), sera utilisée pour reconstituer une série de plus de cinquante années d'observations quotidiennes de la température de la ville de Casablanca. Par la suite, nous décrirons les techniques qui servent à identifier les tendances ainsi que les saisonnalités dans les données afin de pouvoir les éliminer pour disposer de modèles de prévision robustes. A la fin de ce chapitre, nous nous intéresserons à la détermination des saisons chaude et froide au Maroc. Ceci est d'une importance capitale pour pouvoir utiliser de façon efficiente les différents indices sous-jacents dans les contrats de dérivés climatiques.

Au chapitre 3, nous nous concentrerons sur les approches d'évaluation des dérivés climatiques de température. Ce chapitre examinera en détail les modèles les plus importants et les plus souvent cités dans la littérature pour décrire la dynamique de la température. Ainsi, les forces et les faiblesses des études préalables seront analysées afin de proposer un modèle approprié qui décrit le mieux la dynamique de la température et qui peut être utilisé dans la tarification de divers instruments dérivés de température. Plus précisément, les approches suivantes seront analysées : les méthodes actuarielles, la méthode Burn Analysis historique (HBA), la modélisation de l'indice sous-jacent et la modélisation de la dynamique quotidienne de la température. Certaines autres méthodes alternatives proposées dans la littérature seront aussi présentées et discutées. Enfin, nous réaliserons une étude de cas où le modèle que nous aurions adopté sera calibré sur des données marocaines.

Le chapitre 4 est consacré à l'évaluation dans un cadre continu des dérivés clima-



tiques. Dans ce chapitre, nous donnerons surtout les formules fermées pour évaluer le prix d'un swap climatique ainsi que ceux d'un put et d'un call sur température. Pour chaque dérivé, les mesures de sensibilité dites les *lettres grecques* seront décrites et présentées. Nous discuterons aussi le cas d'une évaluation d'un dérivé climatique qui se fait en milieu de la période de la couverture. Ainsi, nous présenterons les approches d'approximation utilisées dans la pratique et nous détaillerons quelques techniques pour trouver les prix précis de dérivés climatiques dont la période de référence aurait déjà commencé. Enfin, nous nous baserons sur le modèle de température qui a été développé et calibré dans le chapitre 3 pour dériver la formule du prix d'un swap climatique sur température. Ce swap sera présenté comme une solution optimale à une situation fictive de gestion de risque climatique impliquant deux entreprises marocaines ayant des succursales installées dans quatre villes différentes et ayant des profils de risque climatique opposés.

Le chapitre 5 aurait pu faire partie du chapitre 3 ou même du chapitre 4 mais finalement, nous avons choisi de le séparer de ces deux chapitres car elle traite une problématique considérée comme intuitive dans le marché des dérivés climatiques sur la température mais qui n'a jamais été analysée rigoureusement. En effet, ce chapitre vise à montrer pourquoi il est plus approprié d'utiliser les températures moyennes plutôt que les températures extrêmes pour la modélisation des températures quotidiennes afin d'évaluer les dérivés climatiques sur la température. Pour réaliser cette étude empirique, nous allons utiliser un modèle stochastique pour prévoir la température. Nous allons ensuite calibrer ce modèle, d'abord en utilisant des températures quotidiennes extrêmes et, après, sur la base des températures moyennes journalières. Enfin, nous allons effectuer deux types de comparaisons. Dans un premier temps, nous allons comparer les températures réalisées aux températures prévisionnelles obtenues en utilisant les deux approches décrites précédemment. Dans un deuxième temps, nous allons comparer les valeurs réelles des prix de dérivés climatiques à celles estimées pour les mêmes contrats de dérivés et ce en utilisant toujours les deux variantes de modélisation de la température quotidienne.

Dans le chapitre 6 nous reviendrons avec plus de profondeur sur la problématique de la volatilité dans les séries de données météorologiques. En effet, les variables climatiques telles que la température, la pluviométrie, la vitesse du vent, etc. sont très volatiles et leur impact sur l'activité économique dépend justement de cette volatilité. Pour se couvrir contre le risque de variation des variables économiques, les agents économiques utiliseraient les produits classiques d'assurance ou les produits dérivés climatiques. Or, ces derniers même s'ils sont sophistiqués et assurent une grande flexibilité, ils ne permettent pas de tout couvrir et en particulier les activités dont la sensibilité au climat est importante. Dans ce chapitre, nous allons présenter des produits exotiques en l'occurrence les swaps de volatilité que nous allons adapter au contexte climatique. Au meilleur de notre connaissance, c'est la première fois que ce genre de produits exotiques serait présenté et évalué.

## Références

- [1] Antonis K. ALEXANDRIDIS et Achilleas D. ZAPRANIS : *Weather derivatives, Modeling and pricing weather-related risk*. Springer, 2013.
- [2] Robert S. DISCHEL, éditeur. *Climate Risk and the weather derivatives : Financial risk management with weather hedges*. Risk Books, 2002.

- 
- [3] Thomas E. DOWNING, Alexander A. OLSTHOORN et Richard S. J. TOL, éditeurs. *Climate, change and risk*. Routledge, 1999.
- [4] Alexander EYDELAND et Krzysztof WOLYNIEC : *Energy and power risk management*. John Wiley and Sons, 2003.
- [5] Helyette GEMAN : *Commodities and commodity derivatives*. John Wiley and Sons, 2005.
- [6] Helyette GEMAN, éditeur. *Risk management in commodity markets*. John Wiley and Sons, 2008.
- [7] Hélyette GEMAN, éditeur. *Insurance and weather derivatives : From exotic options to exotic underlying*. Risk B, 1999.
- [8] Eugene N. GURENKO, éditeur. *Climate change and insurance : Disaster risk financing in developing countries*. Earthscan, 2007.
- [9] Stephen JEWSON et Anders BRIX : *Weather derivative valuation, The meteorological, statistical, financial, and mathematical foundations*. Cambridge Univeristy Press, 2005.
- [10] Pak Sum LOW, éditeur. *Climate change and Africa*. Cambridge Univesity Press, 2005.
- [11] Mohammed MRAOUA et Driss BARI : Temperature stochastic modeling and weather derivatives pricing : Empirical study with morrocan data. *Afrika Statistika*, 2(1):22–43, 2007.
- [12] PwC : 2011 weather risk derivative survey. Rapport technique, Weather Risk Management Association, WRMA, 2011.
- [13] Mélanie REQUIER-DESJARDINS : Impacts des changements climatiques sur l’agriculture au Maroc et en Tunisie et priorités d’adaptation. Rapport technique, International Centre for Advanced Mediterranean Agronomic Studies, 2010.
- [14] Mannava V. K. SIVAKUMAR et Raymond P. MOTHA, éditeurs. *Managing weather and climate risk in agriculture*. Springer, 2007.
- [15] Nicholas STERN : *The Economics of Climate Change : The Stern Review*. Cambridge Univeristy Press, 2007.
- [16] Alberto TROCCOLI, éditeur. *Management of weather and climate risk in the energy industry*. Springer, 2008.

# Chapitre 1

## Le risque climatique

### Sommaire

---

1.1	Introduction . . . . .	18
1.2	Le risque climatique : analyse qualitative . . . . .	19
1.3	Le risque climatique : analyse quantitative . . . . .	22
1.4	Le marché du climat . . . . .	29
1.5	Différence avec l'assurance . . . . .	37
1.6	Conclusion . . . . .	38

---

Ce chapitre traite de la notion de risque climatique sous deux angles différents mais complémentaires. D'une part, les aspects qualitatifs seront présentés et discutés et d'autre part, une étude économétrique fera la lumière, en utilisant des données marocaines, sur l'effet du climat sur l'économie. On trouvera aussi dans ce chapitre introductif, un aperçu sur le marché des dérivés climatiques ainsi qu'une description des principales différences entre ce marché et le marché de l'assurance traditionnelle.

### 1.1 Introduction

Le climat a un impact significatif sur plusieurs sphères de l'activité économique (Downing *et al.* [15], Katz et Murphy [31]). La liste des activités assujetties au risque climatique est longue et comporte entre autres, les producteurs et grands consommateurs d'énergie (Geman [20, 21], Harris [27], Mu [41], Troccoli [60]), les producteurs agricoles (Sivakumar et Motha [51]), les chaînes de supermarchés (Starr [53]), l'industrie de l'hôtellerie et du loisir (Bank et Wiesner [2], Khattabi [33], Tang et Jang [59]).

Avec des phénomènes tels que le réchauffement climatique et le dérèglement climatique, le marché potentiel relié à ce type de risques devient important (Calvello [6], Marteau *et al.* [38], Woerdman [63]). En effet, selon le rapport Stern [54], les coûts accrus des dommages dus à des phénomènes climatiques extrêmes (tempêtes violentes, ouragans, typhons, inondations, sécheresses et vagues de chaleur) contre-

carrent certains des avantages qui aurait pu être attribués du changement climatique et augmenteront rapidement pour des températures plus hautes. En partant de simples extrapolations, les coûts des phénomènes climatiques extrêmes à eux seuls pourraient atteindre 0.5% à 1% du PIB mondial par an d'ici le milieu du siècle et ils continueront à augmenter si le monde continue à se réchauffer (Stern [54]).

## 1.2 Le risque climatique : analyse qualitative

Le risque climatique impacte tous les pays et toutes les activités économiques. Dans ce qui suit, nous détaillons l'impact de ce risque sur les économies de trois grandes catégories de pays (pays industrialisés, pays en développements et Afrique, Sud de la Méditerranée et Maroc).

### 1.2.1 Au niveau des pays industrialisés

A des niveaux de température plus élevés, les économies des pays industrialisés courent un plus grand risque de chocs de grande envergure – par exemple, les coûts accrus des phénomènes climatiques extrêmes pourraient affecter les marchés financiers mondiaux au travers de coûts d'assurance plus élevés et plus volatiles. Selon les prévisions présentées dans le rapport Stern [54], une hausse de 5% ou 10% de la vitesse du vent d'un ouragan, assortie d'une augmentation des températures de la mer, devrait à peu près doubler les coûts annuels des dommages aux États-Unis.

Au Royaume-Uni, les pertes annuelles dues aux inondations seules pourraient augmenter de 0.1% du PIB aujourd'hui pour s'élever à 0.2% ou 0.4% du PIB une fois que la hausse des températures moyennes du globe atteindra 3 °C ou 4 °C (Stern [54]).

Les canicules comme celle qu'a connue l'Europe en 2003, où 35 000 personnes ont trouvé la mort et où les pertes agricoles ont atteint 15 milliards de dollars US, seront chose courante d'ici le milieu du siècle.

En utilisant les résultats de modèles économiques (DeCanio [11]), Nordhaus et Boyer [43] présentent un scénario plus pessimiste que celui décrit par Stern [54] et estiment que si rien n'est fait, l'ensemble de tous les risques dû au changement climatique et de leurs coûts serait équivalent à une perte de 5% du PIB mondial, chaque année, et indéfiniment. Si des risques dont les impacts sont d'une ampleur encore plus importante devaient être pris en compte, les estimations des dommages pourraient s'élever à 20% du PIB mondial ou plus (Nordhaus et Boyer [43]).

Par ailleurs, les entreprises dont l'activité est sensible au climat présentent des risques de pertes financières, industrielles, ou autres beaucoup plus importants que celles qui ne le sont pas ou qui le sont à un degré moindre et les statistiques sont révélatrices. Selon Pollard *et al.* [46], 70% des entreprises anglaises serait affecté par le climat ; aux États-Unis, les estimations montrent qu'entre 25% et 42% du PIB est sensible au climat.

Table 1.1 présente les coûts de l'aléa climatique, en termes de pourcentage du PIB, de quelques pays industrialisés.

**Table 1.1**

Coûts des événements climatiques extrêmes dans les pays industrialisés

Région	Type d'événement	Indicateur*	Coût en % de PIB
Globale	Tous les événements extrêmes	2 °C	0.50 - 1.00% (0.10%)
	Ouragan	3 °C	0.13% (0.06%)
USA	Inondations côtières	1 m	0.01 - 0.03%
	Inondations	3 - 4 °C	0.20 - 0.40% (0.13%)
Europe	Inondations côtières	1 m	0.01 - 0.02%

*Notes* : Les statistiques sont tirées du rapport Stern [54].

Les projections sont faites sur la base de scénarios de changement climatique modéré.

Les chiffres entre parenthèses indiquent les coûts en 2005.

\* L'indicateur d'appréciation est, dépendamment de l'évènement climatique, soit la température (en °C) soit l'augmentation du niveau de la mer (en m).

Notons, toutefois, que le rapport Stern [54] à l'instar d'autres études qui quantifient l'impact du risque climatique (dans un contexte de réchauffement de la planète) sur l'économie, ne fait pas toujours l'unanimité au sein de la communauté scientifique. On peut, à titre d'exemple, consulter le papier de Pielke [45] qui critique justement le rapport Stern [54] et notamment la méthodologie qui y est suivie.

### 1.2.2 En Afrique et dans les pays en développement

Alors qu'un climat sévère impacte tous les pays, il serait plus sévère dans le cas des pays en développement et des économies émergentes. Au niveau de l'Asie, Whalley et Yuan [61] rapportent que le secteur rural contribue à hauteur de 21% du PIB indien et qu'entre 61 à 64% de la population de l'Asie du Sud travaille dans ce secteur.

Au niveau de l'Afrique (Low [36], Williams et Kniveton [62]), prenons l'exemple du seul secteur agricole qui est un pilier essentiel de subsistance de la population locale et du PIB national dans beaucoup de pays africains. Selon le rapport du Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat, GIEC [23], la contribution de l'agriculture au PIB varie selon les pays mais les évaluations suggèrent une contribution moyenne de 21% (allant de 10 à 70%) du PIB. Ce secteur est particulièrement sensible au climat, y compris les périodes de la variabilité climatique. Dans de nombreuses régions d'Afrique, les agriculteurs et les éleveurs doivent également composer avec d'autres défis extrêmes liés aux ressources naturelles et à des contraintes telles que la faible fertilité des sols, les ravageurs, les maladies des cultures et un manque d'accès aux intrants et aux semences améliorées (GIEC [23]). Ces défis sont souvent aggravés par des périodes de sécheresse prolongées et/ou des inondations qui sont souvent particulièrement graves.

### 1.2.3 Au sud de la Méditerranée et au Maroc

Selon le rapport de la Banque européenne d'investissement, BEI [3], les spécialistes dressent un tableau assez sombre pour le climat de la région Méditerranée. En effet,

ils anticipent au cours du 21e siècle :

- Une augmentation de la température de l’air de 2.2 à 5.1 °C pour la région méditerranéenne sur la période 2080 - 2099 par rapport à la période 1980 - 1999 (GIEC [23]).
- Une baisse sensible de la pluviométrie, comprise entre -4 et -27% pour les pays du bassin méditerranéen et de l’Europe du Sud (alors que les pays du Nord de l’Europe connaîtront une hausse comprise entre 0 et 16%) (GIEC [23]).
- Une augmentation des périodes de sécheresse se traduisant par une fréquence élevée des jours au cours desquels la température dépasserait 30 °C (Giannakopoulos *et al.* [22]). Les événements extrêmes de type vagues de chaleur, sécheresses ou inondations pourraient être plus fréquents et violents.

D’après le rapport de la BEI [3] sur le “changement climatique et énergie en Méditerranée”, les impacts du changement climatique sur l’environnement méditerranéen concerneront particulièrement :

- L’eau, via une modification de son cycle du fait de la hausse de l’évaporation et de la diminution des précipitations. Cette question de l’eau sera centrale dans la problématique du développement durable dans la région.
- Les sols, à travers l’accélération des phénomènes de désertification d’ores et déjà existants.
- La biodiversité terrestre et marine (animale et végétale), via un déplacement vers le Nord et en altitude de certaines espèces, l’extinction des espèces moins mobiles ou plus sensibles au climat et l’apparition de nouvelles espèces.
- Les forêts, à travers une hausse du risque d’incendie et des risques parasitaires.

Ces impacts amplifieront les pressions déjà existantes sur l’environnement naturel liées aux activités humaines (BEI [3], Labatt et White [34]).

Selon le rapport de la BEI [3], et au niveau de l’économie, qui est le volet sur lequel nous penchons dans le cadre de cette thèse, le risque climatique (résultat direct du changement climatique) aura notamment des effets sur :

- L’agriculture et la pêche (diminution des rendements).
- L’attractivité touristique (vagues de chaleur, raréfaction de l’eau).
- Les zones côtières et les infrastructures (expositions importantes à l’action des vagues, tempêtes côtières et autres événements météorologiques extrêmes, hausse du niveau de la mer).
- La santé humaine (vagues de chaleur).
- Le secteur énergétique (alimentation en eau des centrales, hydro-électricité et consommation accrue).

En effet, plusieurs publications récentes portant sur la région méditerranéenne en générale et sur le Maroc en particulier confirment les résultats du rapport de la BEI [3] et montrent en plus que des secteurs tels que l’agriculture et l’énergie seront très affectés par les impacts des changements climatiques (Giannakopoulos *et al.* [22], Requier-Desjardins [48]).

Par ailleurs, et au niveau du Maroc, trois secteurs économiques qui sont les plus sensibles directement aux variations climatiques, à savoir “agriculture, sylviculture et pêche”, “énergie et construction”, et “commerce, hôtels et restaurants”, représentent 40% du PIB du pays (Gommes *et al.* [24], Requier-Desjardins [48], Sahay et Dorsey

[49]). Fig. 1.1 donne la ventilation sectorielle du PIB du Maroc en 2006 selon les statistiques de l'OCDE [44].

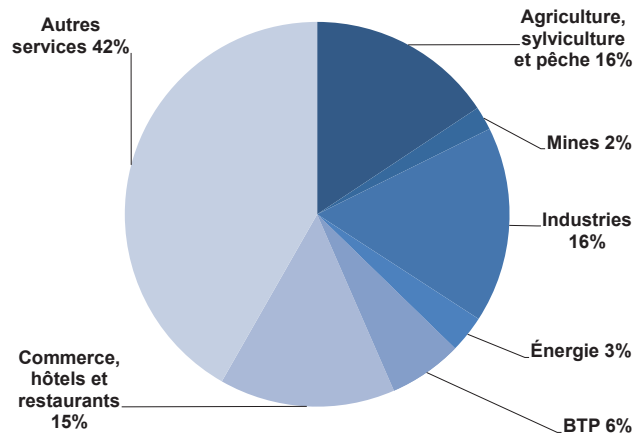


Fig. 1.1 – Ventilation sectorielle du PIB marocain en 2006

Nous reviendrons sur le cas marocain avec plus de détails dans des sections suivantes et notamment dans la section 1.3 pour les aspects quantitatifs de l'effet du climat sur l'économie et dans la section 1.4 pour les stratégies de couvertures qui ont été mises en place pour atténuer le risque climatique.

### 1.3 Le risque climatique : analyse quantitative

Il y a deux motivations principales pour cette étude quantitative. Premièrement, bien que plusieurs études soient consacrées à l'examen de l'impact des conditions climatiques sur les principaux marchés financiers, très peu d'études ont mis l'accent sur les marchés émergents et aucune étude n'a été consacrée au marché marocain, au meilleur de notre connaissance (Cao et Wei [7], Chang *et al.* [8], Goodfellow *et al.* [25], Lee et Wang [35], Lu et Chou [37]).

Deuxièmement, toutes les études antérieures ont étudié l'effet du climat sur l'économie en se basant sur des variables météorologiques directes telles que la température, la pluviométrie, etc., ou par l'intermédiaire de variables muettes (par exemple, si le niveau d'une variable météorologique dépasse un certain seuil, quel serait l'effet sur le rendement et la volatilité d'un indice boursier donné?)<sup>1</sup> (Chang *et al.* [9], Kang *et al.* [30], Symeonidis *et al.* [58], Yoon et Kang [64]). Aucune étude antérieure, à notre connaissance, n'a traité les variables météorologiques comme variables sous-jacentes d'un produit dérivé (climatique) afin de tester l'effet de ces variables sur un indice

1. D'autres études ont traité la question d'un point de vue psychologique. Elles ont ainsi étudié l'effet des conditions météorologiques sur le comportement humain, en particulier sur le processus de prise de décision (Dowling et Lucey [14], Kelly et Meschke [32], Stracca [56]). Le cas d'un investisseur (ou un courtier) qui prend la décision d'acheter ou de vendre des actions en fonction de son humeur (qui est affecté par les conditions météorologiques) est un cas classique d'illustration de ce phénomène (Daniel *et al.* [10]).

boursier. Dans ce contexte, nous avons construit deux variables qui constituent les sous-jacents les plus couramment utilisés dans le marché des dérivés climatiques afin de motiver leur introduction dans le marché marocain.

Dans cette section, nous examinons l'association empirique entre le climat et le rendement et la volatilité du marché boursier de Casablanca. Nous avons choisi les indices boursiers de trois secteurs qui sont directement sensibles à l'aléa climatique et qui comptent pour 40% du PIB marocain afin de tester l'impact du climat sur l'économie marocaine. Nous avons utilisé un modèle de régression linéaire autoregressif pour décrire l'évolution des rendements des indices avec un processus GARCH(1,1) pour capturer la variation dans le temps de la volatilité. En plus de la température, nous avons introduit deux autres variables, à savoir le Cooling Degree Day (CDD) et le Heating Degree Day (HDD), qui constituent les sous-jacents les plus couramment utilisés par les dérivés de climat.

Le reste de la section est organisé comme suit. Tout d'abord, nous explorons les séries de rendements boursiers ainsi que les données météorologiques. Par la suite, nous construisons les variables constituant les sous-jacents de nos dérivés climatiques et nous discutons en détail les différents résultats statistiques obtenus. Après, nous analysons la relation entre le climat et les rendements des indices boursiers d'une part et la volatilité d'autre part tout en discutant les résultats obtenus. Nous terminons la section en présentant les conclusions les plus pertinentes de notre étude.

### 1.3.1 Données et méthodologie d'analyse

#### Données du marché boursier

Nous avons considéré les cours de clôture quotidiens de quatre indices de la bourse de Casablanca (BC). L'indice MASI est un indice pondéré par la valeur de tous les titres cotés à BC. Les trois autres indices à savoir AGRI, PLGZ et LSHT sont des indices sectoriels représentant, respectivement, le secteur de l'agriculture, le secteur de l'énergie et le secteur des loisirs et de l'hôtellerie. Les données couvrent la période allant du 2 janvier 1992 au 30 décembre 2011 pour les indices MASI, AGRI et PLGZ et du 1er juin 2006 au 30 décembre 2011 pour l'indice LSHT.

Fig. 1.2 montre l'évolution quotidienne de nos quatre indices et Fig. 1.3 montre l'évolution de la dynamique de leurs rendements quotidiens où l'on remarque l'effet de concentration de la volatilité (volatility clustering). Pour chaque jour  $t$ , le rendement d'un indice boursier est donné par

$$\ln \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \quad (1.1)$$

où  $S_t$  est le prix de l'indice boursier de la journée courante et  $S_{t-1}$  le prix de l'indice de la journée précédente.

Nous avons calculé les statistiques descriptives et effectué des tests de la racine unitaire des rendements de nos indices boursiers (Table 1.2). Le panel A de la Table 1.2 montre l'aspect non linéaire de la distribution des rendements journaliers pour les quatre échantillons comme cela est confirmé par les valeurs des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement et par la statistique du test de Jarque-Bera.



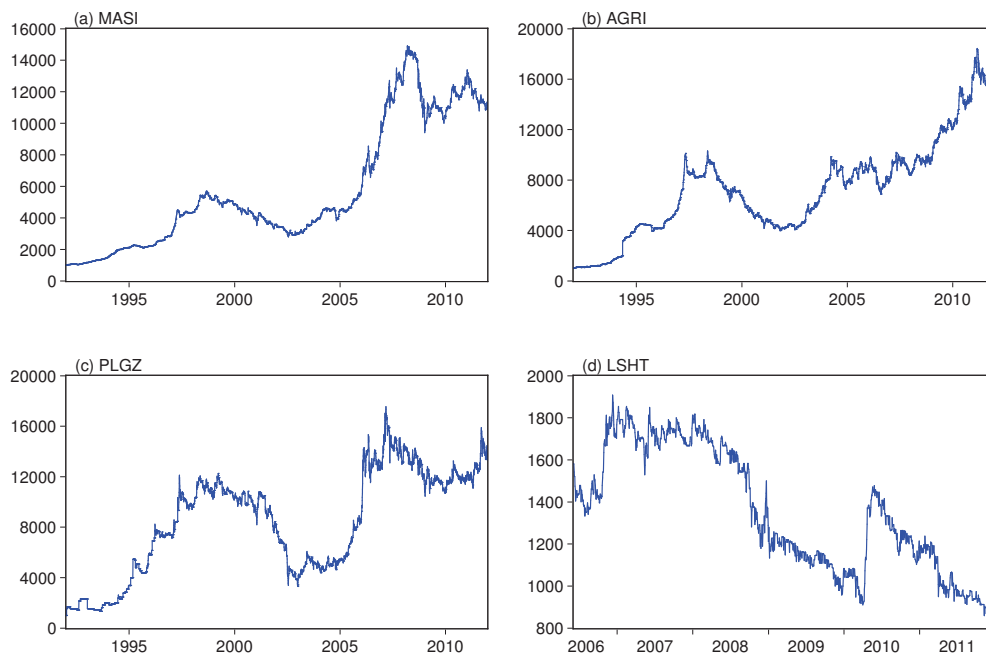


Fig. 1.2 – Evolution des valeurs quotidiennes des indices du marché boursier de Casablanca

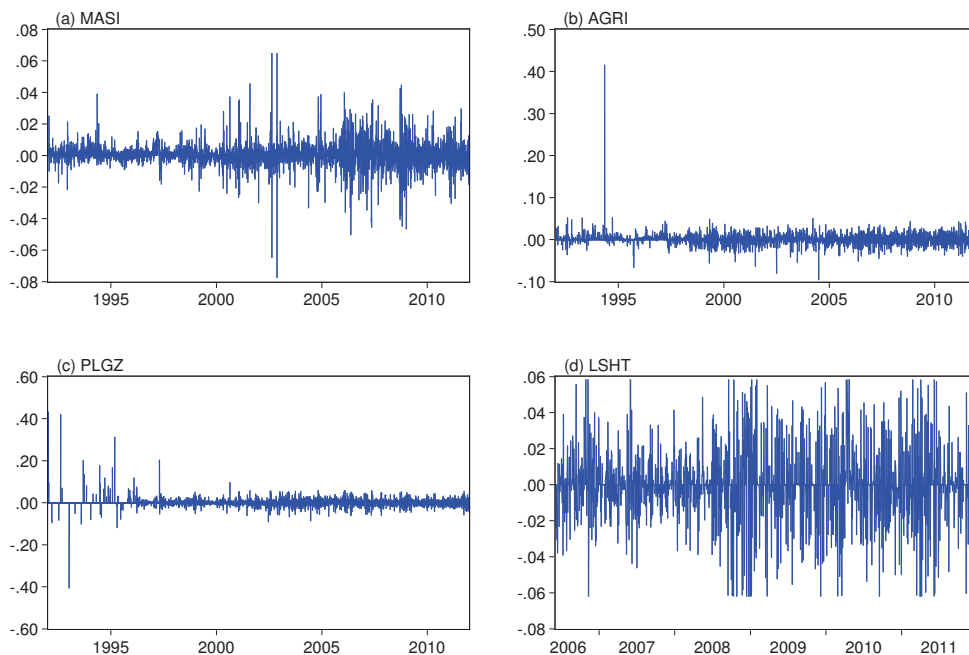


Fig. 1.3 – Evolution des rendements quotidiens des indices du marché boursier de Casablanca

La partie B de Table 1.2 donne les résultats de trois tests de la racine unitaire à savoir : le test de Dickey-Fuller augmenté (ADF), le test de Phillips-Perron (PP), et le test de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt et Shin (KPSS). Les grandes valeurs négatives prises par les statistiques des tests ADF et PP nous permettent de rejeter l'hypothèse nulle de l'existence d'une racine unitaire tandis que la statistique du

test KPSS ne permet pas de rejeter l'hypothèse nulle de stationnarité au niveau de signification de 1 %. En conséquence, toutes les séries de rendements représentent des processus stationnaires.

**Table 1.2**

Statistiques descriptives et tests de la racine unitaire pour les rendements des quatre indices boursiers

	MASI	AGRI	PLGZ	LSHT
Panel A : Statistiques descriptives				
Nombre d'observations	5217	5217	5217	1457
Moyenne (%)	0.046	0.052	0.051	-0.041
Médiane (%)	0.008	0.000	0.000	0.000
Maximum	0.065	0.415	0.431	0.058
Minimum	-0.077	-0.096	-0.405	-0.062
Écart-type (%)	0.697	1.108	1.187	2.070
Skewness	-0.232	9.699	4.269	-0.107
Kurtosis	17.237	380.538	172.414	4.504
Jarque-Bera	44107*	31065340*	6254744*	140.056*
Panel B : Tests de la racine unitaire				
ADF	-56.414*	-47.452*	-67.691*	-32.769*
PP	-57.342*	-68.780*	-67.676*	-46.614*
KPSS	0.3680	0.4789	0.3462	0.0784

Notes : Le test de Jarque-Bera vérifie l'hypothèse nulle de normalité dans la distribution d'un rendement échantillonnaire.

La valeur critique à 1% de Mackinnons est de -3.435 pour les tests ADF et PP. La valeur critique pour le test KPSS est égale à 0.739 pour un seuil de signification de 1%.

\* indique un rejet de l'hypothèse nulle pour un seuil de signification de 1%.

## Données météorologiques

Nous allons maintenant examiner les données météorologiques quotidiennes pour la température moyenne (TMP), les précipitations (PRP), les précipitations lissées (PRC), les degrés-jours de chauffage (HDD), les degrés-jours de refroidissement (CDD) et le total des degrés-jours (TDD) pour la ville de Casablanca<sup>2</sup> et ce en couvrant la période allant de janvier 1992 à décembre 2011.

La variable TMP a été calculée à partir des températures extrêmes quotidiennes. Les températures quotidiennes maximale et minimales pour le jour en cours  $t$  sont enregistrées, respectivement, entre  $t - 1$  (hier) à 18 heures et  $t$  à 6 heures pour le minimum, et entre  $t$  à 6 heures et  $t + 1$  (le lendemain) à 6 heures pour le maximum. Ainsi, la température moyenne (TMP) pour un jour  $t$  est donnée par

$$T_t = \frac{T_t^{max} + T_t^{min}}{2} \quad (1.2)$$

2. Casablanca est le centre économique et commercial du Maroc. Il a un climat méditerranéen avec des étés secs et chauds et des hivers doux. La zone à 40 km à la ronde de la ville est répartie entre l'océan (45%), les terres cultivées (44%), les prairies (5%) et les forêts (3%). L'identifiant (ID) de l'Organisation météorologique mondiale de la station Casablanca-Anfa est 60155.

où  $T_t^{max}$  et  $T_t^{min}$  sont, respectivement, les températures maximale et minimale (en degrés Celsius).

Pour chaque jour  $t$ , nous définissons HDD (mesure du froid durant l'hiver) et CDD (mesure du réchauffement durant l'été) par

$$HDD_t = \max(T_{ref} - T_t, 0) \quad (1.3)$$

$$CDD_t = \max(T_t - T_{ref}, 0) \quad (1.4)$$

où  $T_{ref}$  est une température de référence. TDD est la somme de HDD et CDD.

La variable RPC quant à elle est calculée à partir de la série PRP en remplaçant chaque valeur extrême<sup>3</sup> par la médiane sur une fenêtre de 11 jours centrée sur cette valeur et calculée sur les 30 dernières années.

**Table 1.3**

Statistiques descriptives des six variables climatiques

	TMP	CDD	HDD	TDD	PRP	PRC
# d'observations	5217	5217	5217	5217	5217	5217
Moyenne	18.55	0.93	1.64	2.57	1.15	1.04
Médiane	18.55	0.00	0.50	2.15	0.00	0.00
Maximum	33.60	12.60	13.00	13.00	177.90	40.40
Minimum	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Écart-type	4.13	1.55	2.10	1.93	5.01	3.82
Skewness	0.03	2.55	1.17	1.11	12.81	5.28
Kurtosis	2.30	12.16	3.49	4.33	334.04	35.47
Jarque-Bera	106*	23895*	1248*	1450*	23964251*	253433*

\* indique un rejet de la l'hypothèse nulle au seuil de signification de 1%.

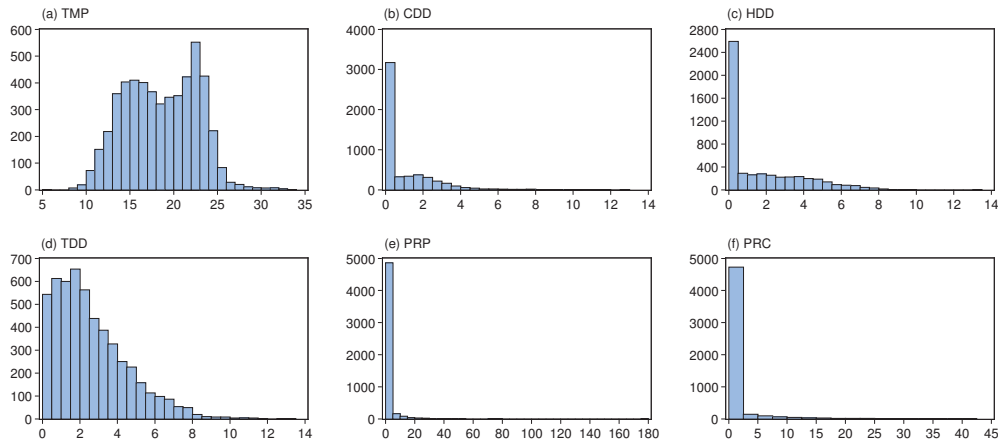
## Méthodologie

Pour motiver l'utilisation des produits dérivés climatiques au niveau du marché marocain, nous examinons l'effet de la température (en termes de degrés-jours) et des précipitations sur le rendement et la volatilité de nos quatre indices boursiers. En effet, le sous-jacent le plus couramment utilisé pour ces produits est la température (en termes de degrés-jours) et, dans une moindre mesure, le niveau de la pluviométrie.

Nous commençons par déterminer les degrés-jours. Selon le rapport sur le zonage climatique au Maroc (DMN [13]), la température de référence dépend de la saison et elle est de 18 °C pour la saison froide et de 21 °C pour la saison chaude. Pour calculer les HDD et CDD, nous devons déterminer les saisons chaude et froide durant l'année. Pour cela, nous utilisons l'approche utilisée par Mraoua et Bari [40] et présentée dans le chapitre 2. Ainsi, les deux saisons de l'année sont définies comme suit

- Saison froide : de novembre à mai
- Saison chaude : de juin à octobre

3. Nous avons identifié une douzaine de valeurs extrêmes (provenant d'un échantillon de 5 217 observations) dont le niveau cumulé de précipitation est supérieur à 40 mm par jour.



**Fig. 1.4** – Histogramme des variables météorologiques TMP, CDD, HDD, TDD, PRP et PRC

Fig. 1.4 dresse les histogrammes pour les six variables météorologiques et Table 1.3 rapporte leurs statistiques descriptives. Afin d'examiner l'effet des conditions météorologiques sur le rendement et la volatilité, tout d'abord, nous utilisons, pour chaque indice boursier, un modèle de régression linéaire avec une composante autorégressive (Fig. 1.5) :

$$R_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^k \phi_i R_{t-i} + \alpha_1 CDD_t + \alpha_2 HDD_t + \alpha_3 PRC_t + \epsilon_t \quad (1.5)$$

où  $R_t$  sont les rendements quotidiens des indices MASI, AGRI, PLGZ et LSHT à la date  $t$  et  $CDD_t$ ,  $HDD_t$  et  $PRC_t$  sont les variables météorologiques sélectionnées<sup>4</sup>. Puis, comme clairement illustré dans Fig. 1.3 nous adoptons un modèle GARCH(1,1) pour capturer la variation dans le temps de la volatilité. Ainsi, nous pouvons écrire :

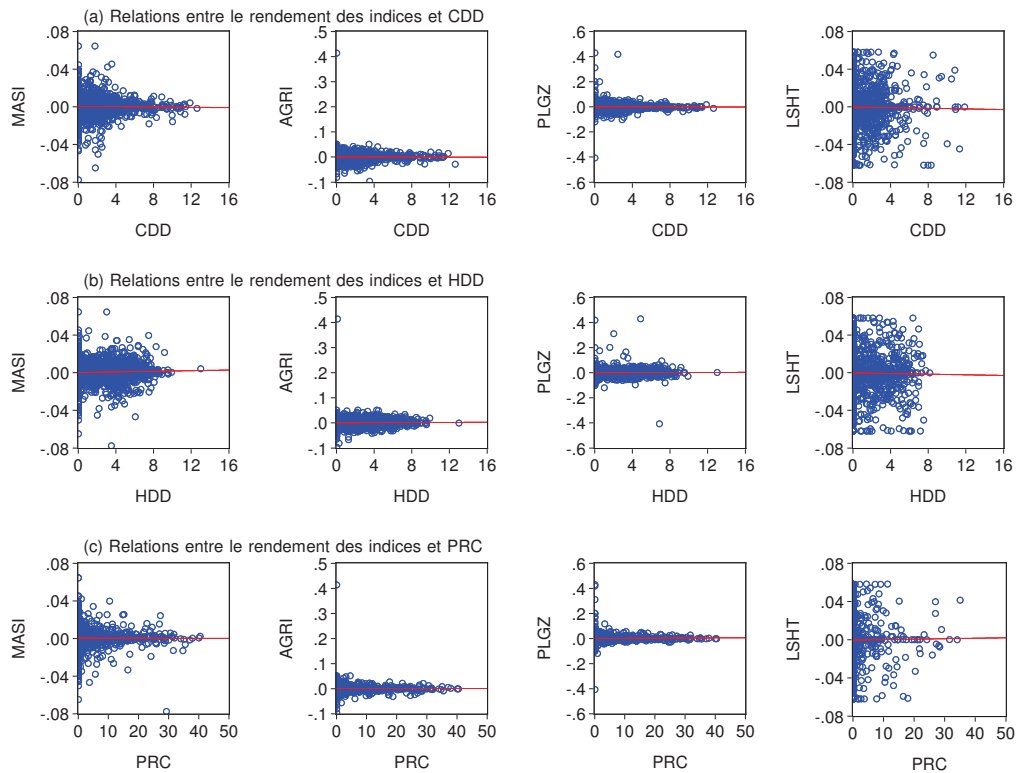
$$h_t = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad (1.6)$$

où  $\epsilon_t$  est une erreur stochastique normalement distribuée,  $h_t$  est la variance conditionnelle.  $\omega$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres positifs et  $\alpha + \beta < 1$  indique la persistance du choc de la volatilité (Francq et Zacoian [18]).

### 1.3.2 Résultats empiriques

Pour examiner l'effet des conditions météorologiques sur le marché boursier marocain, nous avons considéré trois secteurs de l'activité économique des plus sensibles

4. Le choix de ces trois variables météorologiques est dicté par deux considérations. Tout d'abord, nous cherchons dans cette étude à établir l'existence d'une relation entre l'économie (représentée par des indices boursiers) et le climat afin de motiver l'introduction des dérivés climatiques sur le marché marocain. Dans notre cas, et contrairement aux études précédentes, nous avons pris deux variables climatiques à savoir HDD et CDD qui constituent les principales variables sous-jacentes des dérivés climatiques. Deuxièmement, nous avons lissé la variable PRP pour éliminer l'effet des valeurs extrêmes sur notre échantillon de données (dix valeurs extrêmes au total sur un échantillon de 5 217 observations). D'autres techniques existent pour faire face à ces phénomènes singuliers, par exemple, Dupuis [16] a montré comment appliquer la théorie des valeurs extrêmes pour prédire la température et évaluer ainsi le prix des dérivés climatiques sur température.



**Fig. 1.5** – Relations entre les rendements des indices boursiers (MASI, AGRI, PLGZ, LSHT) et les variables météorologiques (CDD, HDD, PRC)

aux conditions météorologiques.

Par ailleurs, le fait que le Maroc soit situé dans une zone géographique qui connaît d'importants changements climatiques (longues périodes de sécheresse, plus de périodes de baisse soudaine de la température durant la saison froide et augmentation de la fréquence des vagues de chaleur durant la saison chaude) augmenterait par conséquent la fréquence de recours aux produits d'assurance par les opérateurs économiques afin de protéger leur marge de résultat contre le risque climatique.

### Effet du climat sur les rendements

Table 1.4 montre les résultats de l'analyse de régression que nous avons effectué pour détecter l'effet du climat sur nos quatre indices boursiers (Eq. 1.5). Les seuils expérimentaux (P-valeurs) des différents paramètres estimés montrent qu'ils sont statistiquement significatifs, ce qui implique que les conditions météorologiques influencent bel et bien les indices boursiers.

En outre, nous avons constaté que, globalement, l'impact des variables météorologiques sur le rendement de nos indices est de modérément à faiblement positivement significatif à l'exception de trois situations où il est négatif (impact des CDD sur PLGZ et LSHT et impact des HDD sur LSHT).

**Table 1.4**  
Effet du climat sur le rendement des indices boursiers

	MASI	AGRI	PLGZ	LSHT
$\alpha_0$	0.0002 (0.0002)	0.0003 (0.0003)	0.0004 (0.0004)	0.0004 (0.0009)
$\phi_1$	0.2403 (0.0135)***	0.0536 (0.0138)***	0.00634 (0.0138)***	-0.1992 (0.0257)***
$\alpha_1$	0.0000 (0.0001)*	0.0000 (0.0001)*	-0.0001 (0.0002)*	-0.0004 (0.0003)**
$\alpha_2$	0.0001 (0.0001)**	0.0001 (0.0001)**	0.0001 (0.0001)*	-0.0004 (0.0003)**
$\alpha_3$	0.0000 (0.0000)**	0.0000 (0.0000)*	0.0001 (0.0001)**	0.0001 (0.0001)*
Statistique F	83.222 [0.0000]***	4.7502 [0.0008]***	6.1709 [0.0001]***	15.369 [0.0000]***

Notes : La statistique F concerne le test conjoint sur les coefficients  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ .

L'hypothèse nulle est  $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ .

Les erreurs standards sont entre parenthèses et les seuils expérimentaux (P-valeurs) sont entre crochets.

\*, \*\* et \*\*\* indiquent des niveaux de signification à 10, 5 et 1%, respectivement.

### Effet du climat sur la volatilité

Après avoir analysé l'effet des conditions météorologiques sur les rendements, nous examinons maintenant l'effet du climat sur la volatilité. Table 1.5 montre les résultats de la régression des rendements des indices boursiers sur les variables météorologiques en utilisant un modèle GARCH(1,1) pour capturer la volatilité (Eq. 1.6). Pour chacun des rendements des quatre indices, nous constatons que les valeurs des paramètres  $\omega$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont positifs et que  $\alpha + \beta < 1$ , ce qui confirme la non-négativité des contraintes du modèle ainsi que la stationnarité de la variance conditionnelle, respectivement (Fig. 1.6).

En outre, les seuils expérimentaux des trois paramètres estimés montrent qu'ils sont statistiquement significatifs, ce qui implique que les conditions météorologiques affectent significativement la volatilité des rendements des indices boursiers étudiés.

## 1.4 Le marché du climat

Pour être couverts contre le risque climatique, les agents économiques recourent traditionnellement à l'assurance. Malheureusement, peu de mécanismes classiques d'assurance gèrent ce risque (Gurenko [26], Sturm et Oh [57]). Singh [50] montre qu'en agriculture, par exemple, la traditionnelle assurance-récolte multirisque n'a pas prouvé son efficacité, en particulier dans le cas des petits exploitants, et exclut souvent des facteurs climatiques tels que les intempéries et les sécheresses.

Pour contourner ces difficultés, les dérivés climatiques sont apparus comme de nouveaux produits de couverture (Muschhoff *et al.* [42], Singh [50], Sturm et Oh [57]).

**Table 1.5**

Effet du climat sur la volatilité des rendements des indices boursiers

	MASI	AGRI	PLGZ	LSHT
$\alpha_0$	0.0000 (0.0001)	0.0004 (0.0003)	0.0004 (0.0005)	-0.0002 (0.0008)
$\phi_1$	0.2557 (0.0142)***	0.0544 (0.0147)***	0.00417 (0.0075)***	-0.2446 (0.0274)***
$\alpha_1$	0.0001 (0.0000)*	0.0000 (0.0001)*	-0.0001 (0.0002)*	-0.0003 (0.0002)**
$\alpha_2$	0.0002 (0.0000)**	0.0002 (0.0001)*	0.0000 (0.0001)*	-0.0002 (0.0003)**
$\alpha_3$	0.0000 (0.0000)*	0.0000 (0.0001)*	0.0001 (0.0001)**	0.0000 (0.0001)*
$\omega$	0.0000 (0.0000)***	0.0000 (0.0000)***	0.0000 (0.0000)***	0.0001 (0.0000)***
$\alpha$	0.1906 (0.0046)***	0.0006 (0.0000)***	0.0015 (0.0001)***	0.1098 (0.0145)***
$\beta$	0.8010 (0.0027)***	0.9954 (0.0002)***	0.9501 (0.0023)***	0.8333 (0.0188)***

*Note* : Les erreurs standards sont entre parenthèses.

\*, \*\* et \*\*\* indiquent des niveaux de signification à 10, 5 et 1%, respectivement.

Ces derniers sont des contrats financiers dont les paiements dépendent d'une certaine manière du climat. Les variables sous-jacentes peuvent être, par exemple, la température, les précipitations, la neige ou la glace, mais c'est la température qui constitue le sous-jacent le plus utilisé pour les dérivés climatiques (Dischel [12], German [19], Mraoua et Bari [40]). Fig. 1.7 montre, d'après un sondage réalisé par la firme de conseil PwC [47] pour le compte de l'Association de gestion du risque climatique (WRMA), l'évolution de la répartition de l'utilisation des dérivés climatiques par secteur d'activité entre 2009 et 2011.

#### 1.4.1 Le marché des dérivés climatiques

Beaucoup de facteurs ont fait que le marché des dérivés climatiques s'est développé très rapidement au cours des quinze dernières années mais c'est surtout la libéralisation du secteur de l'énergie aux USA qui en est le principal catalyseur (Eydeland et Wolyniec [17]). En effet, les producteurs d'énergie ont toujours constaté que les prix de l'énergie sont fortement corrélés avec le climat. Il était donc naturel que les industriels de ce secteur ne puissent accepter que leurs situations financières soient à la merci d'un "mauvais" climat. La commercialisation des dérivés climatiques a permis justement aux compagnies énergétiques de se couvrir contre le risque climatique. Figs. 1.8 et 1.9 donnent une idée sur l'évolution du marché aussi bien en termes de nombre de contrats que de valeur notionnelle des transactions sur le marché organisé du CME et sur un échantillon de clients transigeant de gré-à-gré (OTC). L'échantillon des clients a été sondé par la firme PwC [47] entre 2009/2010

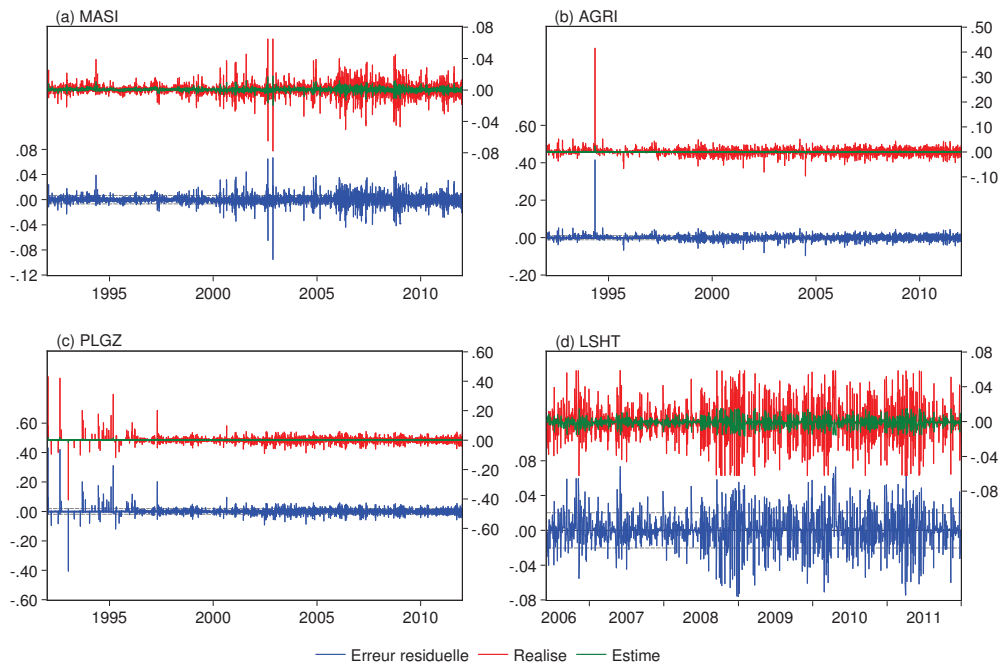


Fig. 1.6 – Rendements réalisés, rendements estimés et valeurs résiduelles des indices boursiers

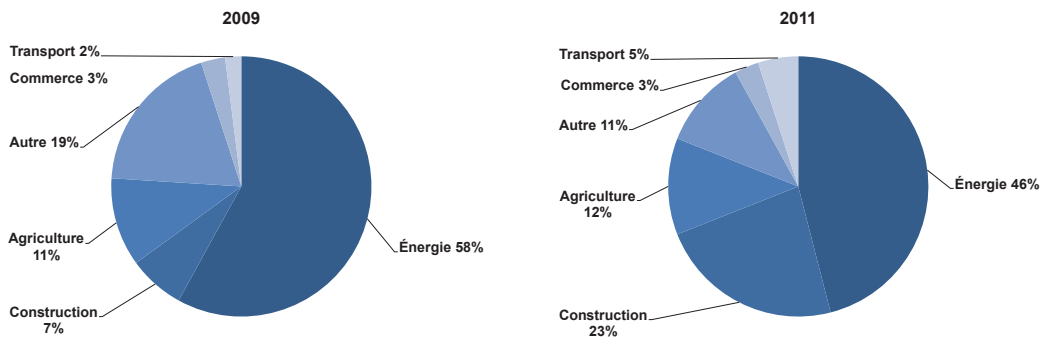


Fig. 1.7 – Evolution de la répartition de l'utilisation des dérivés climatiques par secteur d'activité entre 2009 et 2011

et 2010/2011.

Le marché des produits climatiques est encore un marché très américain<sup>5</sup> et il est organisé comme tous les marchés financiers en deux compartiments. On distingue d'une part le marché primaire sur lequel se retrouvent les compagnies s'assurant contre leur risque climatique (*end users*) au travers de contrats hautement struc-

5. Sur 47 villes pour lesquelles des contrats de couverture de dérivés climatiques sont commercialisés sur le CME, 24 sont américaines (cf. le site web du CME sur <http://www.cmegroup.com/trading/weather/>).



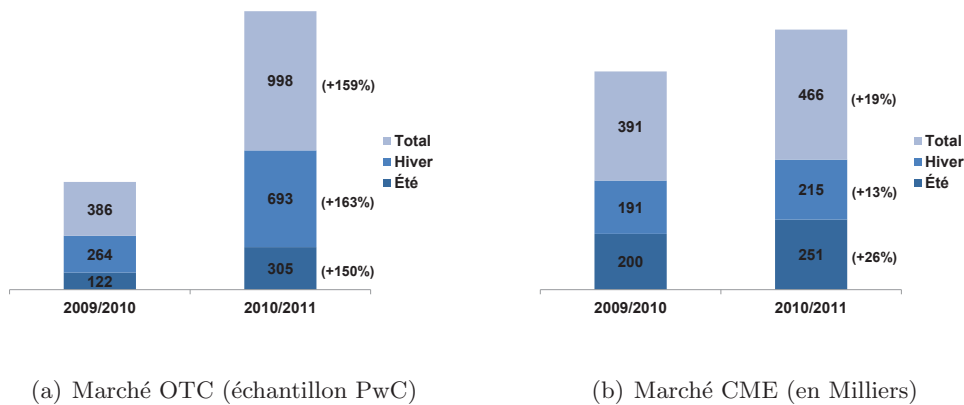


Fig. 1.8 – Evolution du nombre de contrats de dérivés climatiques par saison entre 2009/2010 et 2010/2011 basée sur les données du sondage de PwC

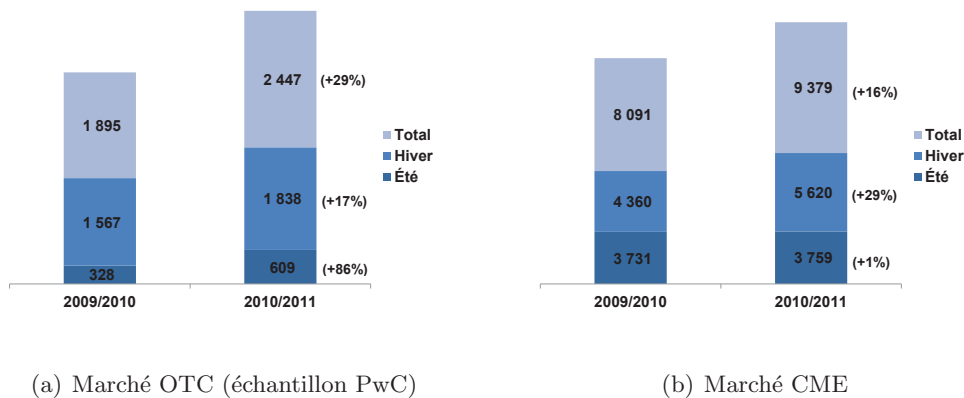


Fig. 1.9 – Evolution de la valeur notionnelle des contrats de dérivés climatiques par saison entre 2009/2010 et 2010/2011 basée sur les données du sondage de PwC (en Millions USD)

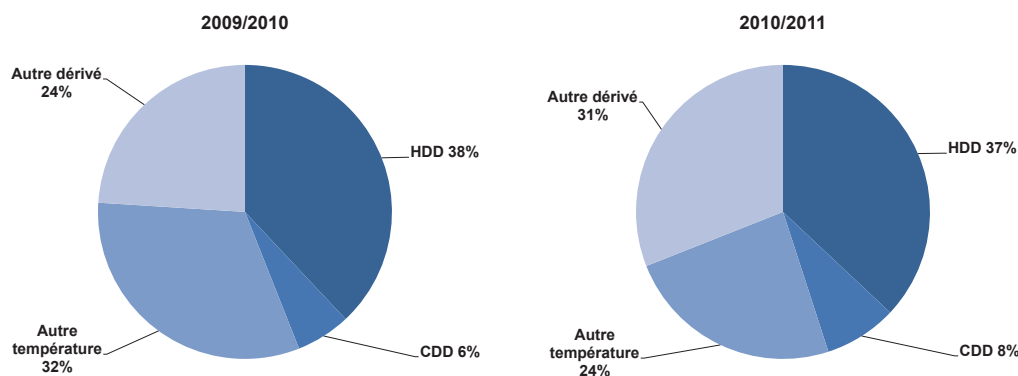
turés et les vendeurs de ces couvertures tels que les assureurs, les réassureurs, les banques et certaines compagnies énergétiques et d'autre part le marché secondaire où les vendeurs des couvertures négocient entre eux des contrats standardisés qui leur permettent de gérer dynamiquement leurs portefeuilles climatiques.

Les contrats traités sur les marchés primaires peuvent couvrir d'une heure à plusieurs années et portent sur différents sous-jacents tels que la température, la pluie, le vent, etc. Sur le marché secondaire, les contrats portent sur la température et ont en général des durées de cinq jours (du lundi au vendredi), un mois ou cinq mois (période de chauffage de novembre à mars et de climatisation de mai à septembre). Les segments visés et les rôles joués par les distributeurs des contrats climatiques, c'est-à-dire les banques, les assureurs, les réassureurs et les compagnies énergétiques sont très différents. En effet, bien qu'en théorie ils soient tous à même de vendre des couvertures dont le paiement final soit identiquement structuré, les régulations internes et externes auxquelles ils sont soumis ainsi que le but recherché par leur participation à ce marché font qu'ils n'occupent pas tous le même segment du marché. Il est ainsi possible que les solutions proposées à une entreprise désireuse de

se protéger des risques climatiques soient différentes selon l'organisme vendeur du contrat (Jewson et Brix [29], Moreno [39]).

Les dérivés climatiques diffèrent des produits dérivés conventionnels (Hull [28]) en ce sens qu'il n'existe pas à la base un sous-jacent négociable ou ayant un prix négociable, ce qui contredit la structure normale d'un produit dérivé. A titre d'exemple, les dérivés financiers sont basés sur les actions, les indices boursiers, les taux d'intérêt, les taux de change ou les devises - sont tous eux-mêmes des actifs négociables, contrairement au climat. Le sous-jacent des dérivés climatiques est basé sur les données relatives aux conditions météorologiques, telles que la température ou le niveau des précipitations, qui influent le volume des transactions de certains biens (ou de services). Les dérivés climatiques ne peuvent pas couvrir le prix du sous-jacent, du moment où il est impossible de fixer un prix au climat. Par conséquent, les dérivés climatiques peuvent couvrir d'autres risques sur lesquels le climat a une grande influence, tels que le risque de la baisse des ventes dans le secteur de la production et la distribution de l'énergie à la suite d'un changement dans les conditions climatiques ainsi que le changement des prix qui pourrait en découler.

L'idée derrière une couverture climatique en volume vient du fait que les résultats financiers des secteurs sensibles aux conditions météorologiques peuvent être soumis à une grande volatilité - même si les prix restent inchangés - en raison d'un changement dans la demande ou dans les volumes demandés. Fig. 1.10 montre l'évolution de la répartition de la valeur notionnelle des couvertures en dérivés climatiques sur le marché OTC par type de contrat entre 2009/2010 et 2010/2011 (PwC [47]).



**Fig. 1.10** – Evolution de la répartition de la valeur notionnelle des couvertures en dérivés climatiques OTC par type de contrat entre 2009/2010 et 2010/2011

Les dérivés climatiques sont généralement structurés sous forme de swaps, de futures et d'options basés sur les différents sous-jacents des indices météorologiques. Nous reviendrons dans les chapitres 3 et 4 sur la définition des différents indices sous-jacents et leurs modes de calcul ainsi que sur la définition de chaque actif contingent.

Par ailleurs, et en plus des contrats transigés sur les marchés organisés (comme le CME), il y a aussi des contrats qui sont conclus directement entre acteurs économiques sur le marché du gré-à-gré. L'un de ces contrats les plus utilisés est l'*option*. Il y a deux types d'options, les options d'achat (*calls*) et les options de ventes (*puts*). L'acheteur d'un call sur HDD, par exemple, paye au vendeur une prime au début du contrat. En retour, si le nombre de HDD au cours de la période du contrat est

supérieur au niveau d'exercice convenu entre les deux parties, l'acheteur va recevoir un paiement. Le montant du paiement est déterminé en fonction du niveau d'exercice et du montant du *tick* (valeur monétaire pour chaque HDD en dessus du niveau d'exercice de l'option). Les paramètres d'un contrat type d'option sont les suivants :

- Le type de contrat (call ou put)
- La période du contrat (par exemple, Décembre 2013)
- L'indice sous-jacent (HDD ou CDD)
- Une station météorologique officielle à partir de laquelle les données de la température sont relevées
- Le niveau d'exercice de l'option
- Le montant du tick (par exemple 5 000 MAD/HDD)
- Un paiement maximum (au cas où il en existe un)

Un autre type de contrats de dérivés climatiques est le swap climatique. Un swap est un contrat dans lequel deux contreparties acceptent d'échanger leurs risques durant une période de temps déterminée. Dans la plupart des contrats de swaps, les paiements sont effectués entre les deux parties, où l'une d'entre elle paye un prix fixe et l'autre un prix variable.

Dans le cas le plus utilisé des swaps climatiques, il y a seulement une date où les cash-flows sont "swappés" contrairement aux swaps de taux d'intérêt, qui possèdent plusieurs dates de paiement (Boyle et Boyle [4]).

Dans le cas d'un swap HDD standard, les deux parties se mettent d'accord sur un niveau d'exercice donné des HDD sur la période du contrat, et le montant à swapper, par exemple 10 000 MAD/HDD au dessus du niveau d'exercice. Il y a, en général, un niveau maximum de paiement fixé à 200 degrés-jour.

Pour comprendre comment les dérivés climatiques peuvent être utilisés en pratique, nous donnons un exemple. Un distributeur de gaz de chauffe peut penser, à juste titre, que si l'hiver est très froid, il va avoir des revenus importants, donc, il peut penser à vendre un call sur HDD. Si l'hiver n'est pas particulièrement froid, le distributeur de gaz garde la prime du call. Si, par contre, l'hiver s'est avéré très froid, il aura assez d'argent pour financer l'option qu'il avait émise parce que ses recettes auraient été importantes. La compagnie de gaz a ainsi réduit son exposition au risque climatique.

Nous présenterons dans le chapitre 4 les produits classiques de couverture climatiques (options futures et swaps) avec leurs différentes méthodes d'évaluation et dans le chapitre 6 un produit de couverture plus exotique combinant un swap climatique avec un swap sur volatilité.

### 1.4.2 Historique des dérivés climatiques

La première transaction portant sur un contrat climatique a été conclue entre deux entreprises américaines en 1997. Depuis, et selon le rapport du cabinet PwC [47], le marché n'a cessé de croître pour atteindre en 2011 les 466 000 contrats négociés rien que sur le marché du CME avec une valeur notionnelle de 9 379 Millions USD (Figs. 1.8 et 1.9).

Le marché OTC des dérivés climatiques en Europe s'est fortement développé. Les

marchés français et anglais sont parmi les plus actifs notamment grâce à l'implication de plusieurs banques et des compagnies d'assurances (Moreno [39]).

En Afrique, le marché des dérivés climatiques n'est pas encore développé à l'exception de quelques tentatives au niveau de l'Afrique du Sud (Stoppa et Hess [55]).

Ci-après une chronologie des principaux événements relatifs aux produits dérivés climatiques durant les quinze dernières années :

- 1997** Première transaction sur dérivé climatique (USA)
- 1998** Première transaction européenne
- 1999** Première transaction asiatique
- 1999** CME lance les premiers contrats climatiques (sur un marché organisé)
- 2000** Première transaction australienne
- 2001** La plus importante transaction encore jamais réalisée - environ 500 Millions d'Euros
- 2002** Démarrage des contrats climatiques à terme sur CME
- 2002** Mise en place par l'ISDA de contrats standardisés (confirmations de transactions) pour la gestion des transactions standards
- 2006** WRMA et ISDA poursuivaient leurs travaux de mise en place de la documentation standard pour une large variété de transactions météorologiques
- 2006** Le Programme alimentaire mondial (PAM) a acheté une couverture sur précipitations pour le pré-financement d'une intervention d'urgence si la sécheresse qui frappait l'Éthiopie continuait
- 2011** LIFFE a lancé six contrats négociés en bourse basés sur des indices de températures moyennes journalières à Londres, Paris et Berlin.

Au Maroc, l'utilisation des dérivés climatiques est encore quasiment inexistante<sup>6</sup>. Il faut signaler toutefois que le Maroc a fait des efforts pour développer des programmes d'assurance liés à des phénomènes météorologiques. La sécheresse est de loin le principal risque pour l'agriculture marocaine. Elle devient parfois la principale cause de mauvaises récoltes. Donc à la fois le secteur public et le secteur de l'assurance, depuis un certain temps, avaient travaillé sur le développement de filets de sécurité appropriés pour protéger les agriculteurs contre les effets de la sécheresse. En 1995, le gouvernement marocain, en partenariat avec l'industrie de l'assurance, a lancé le "Programme Sécheresse". Il n'y a eu aucune référence directe à la sécheresse dans le schéma révisé de 1999 car il s'agissait en fait d'un programme d'assurance de rendement. Le seul lien avec l'événement climatique étant la déclaration ministérielle qui mentionne officiellement l'existence d'une période de sécheresse et permet ainsi à la compagnie d'assurance d'activer la procédure d'indemnisation. Le programme de 1999 a été structuré autour de la couverture des trois niveaux de revenus de 1 000, 2 000 et 3 000 MAD par hectare. Pour le premier seuil de revenu le paiement est basé sur un mécanisme de base de rendement par zone, tandis que pour les 2 000 et 3 000 MAD par hectare, une évaluation du rendement agricole spécifique par hectare

---

6. Seuls quelques produits dérivés climatiques standards pourraient être utilisés (pour fin de spéculation financière) dans le cadre d'acquisition de portefeuilles étrangers de produits structurés gérés par des organismes de placement financiers.

est requis (Stoppa et Hess [55]). Le programme a été un succès en 2002 car la souscription a atteint 80% des 300 000 hectares autorisés, mais était toutefois pénalisé par quelques problèmes notamment de gestion (Skees *et al.* [52]).

En 2001 et afin d'évaluer la possibilité de développer un programme d'assurance directement liée à des phénomènes climatiques, la Banque mondiale a permis au gouvernement marocain de lancer un projet international de recherche sur le terrain. Après une analyse précise de l'environnement productif dans l'agriculture ainsi que la pluviométrie et des rendements agricoles, il a été conclu que l'agriculture marocaine pourrait bénéficier considérablement de la mise en place d'un programme d'assurance relative la pluie. Un projet pilote au niveau de la région de Meknès pour tester le programme d'assurance précipitations a recommandé l'adoption du produit (Skees *et al.* [52]). Le programme recommandé est un programme d'assurance de la pluie pour les cultures, notamment les céréales et le tournesol. Il indemnise les producteurs si les précipitations tombent en dessous d'un seuil spécifié. Les précipitations sont mesurées aux stations officielles de la Direction de la météorologie nationale. Les données sur les précipitations étaient accessibles en temps réel à toutes les parties impliquées dans la transaction. Pour permettre un transfert d'expertise à l'industrie de l'assurance locale et faciliter l'accès aux marchés de gestion des risques climatiques à l'international, la Société financière internationale (SFI) avec l'aide du gouvernement italien, a parrainé un projet visant à aider à structurer les contrats climatiques. Une société a même été créée pour lancer et gérer de tels produits (Bryla *et al.* [5]).

La structure du programme d'assurance des précipitations a été développée en s'inspirant de la structure financière d'une option européenne de vente où le prix de l'option est égal au coût de la couverture et le prix d'exercice est égal au seuil des précipitations en dessous de duquel une indemnité est déclenchée. L'idée sous-jacente à ce type de contrats, c'est que, une fois l'existence d'un degré suffisant de corrélation entre les précipitations et le rendement est établie, un producteur agricole peut couvrir son risque de production en concluant un contrat en vertu duquel les paiements seraient effectués si les précipitations sont inférieures au prix d'exercice convenu. Afin de structurer le contrat, les questions à évaluer sont donc comment déterminer le niveau d'exercice et à quel niveau il faut le définir.

Dans le cas de la production céréalière et la production de tournesol au Maroc, la procédure qui a été adoptée pour l'élaboration de contrats d'assurance des précipitations était la suivante :

- Les données relatives à la production et la pluviométrie ont été collectées et organisées.
- La période des pluies la plus appropriée a été sélectionnée en se basant sur l'estimation des corrélations entre les rendements et les différentes périodes de précipitations.
- Les indices pluviométriques spécifiques ont été construits en attribuant des "poids" à différentes périodes de la saison des pluies afin de maximiser la corrélation entre les rendements et les précipitations.
- Les différents systèmes de paiement ont été analysés et évalués.

La condition ultime pour la réussite de ce programme était le niveau du prix auquel la couverture peut être vendue. Malheureusement ce prix de couverture a été très élevé (Stoppa et Hess [55]). Pour ce qui est des dérivés climatiques sur température,

au meilleur de notre connaissance, aucun produit n'a été encore élaboré ou transigé au Maroc pour des fins de couverture .

## 1.5 Différence avec l'assurance

Depuis des années, les contrats d'assurance et les obligations catastrophes (CAT Bonds) ont été largement utilisés par les entreprises opérant dans les secteurs de l'industrie sensibles aux conditions météorologiques. Comme les contrats d'assurance, l'objectif des dérivés climatiques est de protéger l'acheteur du contrat contre des conditions météorologiques défavorables. En d'autres termes, les dérivés météorologiques fournissent également une assurance contre les fluctuations des conditions météorologiques. Cependant, un examen plus approfondi de ces deux produits révèle de nombreuses différences.

La première différence est relative aux phénomènes météorologiques que chaque outil couvre. Les contrats d'assurance sont écrits sur les événements météorologiques rares comme le froid ou la chaleur extrêmes, les ouragans ou les inondations. Ces événements font le plus souvent des dégâts très importants et leur impact sur les revenus des entreprises est énorme. En revanche, les dérivés climatiques peuvent protéger une entreprise contre des conditions climatiques récurrentes avec une grande probabilité d'occurrence. Contrairement aux instruments d'assurance et de protection contre les catastrophes, qui couvrent un important risque et des événements peu probables, les dérivés climatiques protègent habituellement les revenus contre les événements à faible risque et ayant de forte probabilité d'occurrence (par exemple, des hivers doux ou froids dépendamment du type d'activité et du profil de risque de l'acheteur de la couverture).

Une demande d'indemnisation auprès d'une compagnie d'assurance est généralement une démarche longue et coûteuse. L'assuré doit d'abord prouver que la météorologie a eu des effets catastrophiques sur son entreprise (ou sur son activité de façon plus générale) sachant que le résultat dépend de l'opinion subjective de chaque régulateur. En revanche, dans le cas des dérivés climatiques, l'entreprise (la partie bénéficiaire du contrat de couverture) reçoit le bénéfice du contrat immédiatement. En plus, il n'est pas nécessaire qu'une catastrophe puisse se produire et toucher l'entreprise afin que celle-ci puisse réclamer une indemnité. En effet, les dérivés climatiques sont basés sur des critères objectifs tels que l'indice de la température, les précipitations, ou de tout autre indice sous-jacent qui est mesuré avec précision sur une station météorologique officielle prédéterminée (ou convenue).

Un autre avantage des dérivés climatiques, c'est la liberté supplémentaire qu'ils offrent à l'acheteur à la différence des contrats d'assurance. En effet, grâce aux dérivés climatiques, il est tout à fait possible pour une entreprise donnée de couvrir l'impact du "risque" climatique sur sa compétitivité. Par exemple, une entreprise agricole installée sur une zone A peut se couvrir contre les effets du climat dans une autre zone B où une entreprise concurrente est établie. Des conditions climatiques favorables dans la zone B se traduiront par l'augmentation de la quantité et de la qualité d'un produit agricole particulier dans la zone B. En conséquence, la demande et le prix pour ce produit particulier de l'entreprise dans la zone A vont diminuer (Alexandridis et Zapranis [1]).

Enfin, puisque les dérivés climatiques sont des instruments financiers, un dérivé climatique peut être vendue plus tard à une tierce partie, pour des raisons spéculatives, avant la date d'expiration du contrat.

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons réalisé principalement une étude dans laquelle nous avons tenté d'explorer l'effet des conditions météorologiques sur le rendement et la volatilité de la bourse de Casablanca. Le choix des indices boursiers ainsi que les variables climatiques n'était pas fortuit. En effet, les trois indices boursiers choisis comptaient pour 40% du PIB marocain. En outre, les variables météorologiques retenues sont celles qui sont les plus utilisées pour l'évaluation des dérivés climatiques. En étudiant l'effet du climat (variables de dérivés climatiques) sur l'économie (variables financières), notre motivation était essentiellement de montrer qu'une économie émergente telle que l'économie marocaine devrait bénéficier de l'introduction et de l'utilisation des produits dérivés climatiques.

Notre approche a été structurée en trois étapes. D'abord, nous avons commencé par la construction de nos variables météorologiques. Dans ce contexte, nous avons utilisé deux indices de température avec un seuil dépendant de la saison. Une analyse empirique basée sur des observations quotidiennes sur 30 ans nous a permis de déterminer les saisons chaudes et froides dans la région de Casablanca et donc de calculer les degrés-jours par saison. Après, nous avons fait une régression des rendements de nos indices boursiers sur des variables météorologiques afin de déterminer l'effet des conditions météorologiques sur le rendement. Nous avons constaté que dans l'ensemble, les trois variables météorologiques étudiées affectent les rendements de indices boursiers et ce à différents niveaux de signification. Enfin, l'impact des conditions météorologiques sur la volatilité a été démontré à l'aide d'un modèle GARCH(1,1).

Dans l'ensemble, les résultats empiriques présentés dans cette étude sont en accord avec des études précédentes. Néanmoins, cette étude a présenté des variables utilisées par le marché des dérivés climatiques afin d'étudier leurs impacts sur des indices financiers et donc de motiver leur utilisation sur le marché marocain.

Par ailleurs et au niveau des autres sections, nous avons développé la notion de risque climatique sous un angle plus qualitatif et nous avons aussi donné un aperçu sur le marché des dérivés climatiques ainsi qu'une description des principales différences entre ce marché et le marché de l'assurance traditionnelle.

## Références

- [1] Antonis K. ALEXANDRIDIS et Achilleas D. ZAPRANIS : *Weather derivatives, Modeling and pricing weather-related risk*. Springer, 2013.
- [2] Matthias BANK et Robert WIESNER : Determinants of weather derivatives usage in the Austrian winter tourism industry. *Tourism Management*, 32(1):62-68, 2011.
- [3] BEI : Climate change and energy in the Mediterranean. Rapport technique, European Investment Bank, 2008.

- [4] Phelim BOYLE et Feidhlim BOYLE : *Derivatives the tools that changed finance*. Risk Books, 2004.
- [5] Erin BRYLA, Julie DANA, Ulrich HESS et Panos VARANGIS : The use of price and weather risk management instruments. In *International Conference on Best Practices Risk Management : Pricing, Insurance, Guarantees*. USAID, BASIS-CRSP and WOCCU, 2004.
- [6] Angelo A. CALVELLO : *Environmental alpha, institutional investors and climate change*. John Wiley and Sons, 2009.
- [7] Melanie CAO et Jason WEI : Stock market returns : A note on temperature anomaly. *Journal of Banking & Finance*, 29(6):1559–1573, 2005.
- [8] Shao-Chi CHANG, Sheng-Syan CHEN, Robin K. CHOU et Yueh-Hsiang LIN : Weather and intraday patterns in stock returns and trading activity. *Journal of Banking & Finance*, 32(9):1754–1766, 2008.
- [9] Tsangyao CHANG, Chien-Chung NIEH, Ming Jing YANG et Tse-Yu YANG : Are stock market returns related to the weather effects ? empirical evidence from Taiwan. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 364(0):343–354, 2006.
- [10] Kent DANIEL, David HIRSHLEIFER et Siew Hong TEOH : Investor psychology in capital markets : evidence and policy implications. *Journal of Monetary Economics*, 49(1):139–209, 2002.
- [11] Stephen J. DECANIO : *Economic models of climate change*. Palgrave Macmillan, 2003.
- [12] Robert S. DISCHEL, éditeur. *Climate Risk and the weather derivatives : Financial risk management with weather hedges*. Risk Books, 2002.
- [13] DMN : Zonage climatique du Maroc. Rapport technique, National Weather Office of Morocco, 2010.
- [14] Michael DOWLING et Brian M. LUCEY : Weather, biorhythms, beliefs and stock returns ? some preliminary irish evidence. *International Review of Financial Analysis*, 14(3):337–355, 2005.
- [15] Thomas E. DOWNING, Alexander A. OLSTHOORN et Richard S. J. TOL, éditeurs. *Climate, change and risk*. Routledge, 1999.
- [16] Debbie J. DUPUIS : Forecasting temperature to price CME temperature derivatives. *International Journal of Forecasting*, 27:602–618, 2011.
- [17] Alexander EYDELAND et Krzysztof WOLYNIEC : *Energy and power risk management*. John Wiley and Sons, 2003.
- [18] Christian FRANCO et Jean-Michel ZACOIAN : *GARCH Moels : Structure, statistical inference, and financial applications*. Wiley, 2010.
- [19] Helyette GEMAN, éditeur. *Insurance and weather derivatives : From exotic options to exotic underlying*. Risk B, 1999.
- [20] Helyette GEMAN : *Commodities and commodity derivatives*. John Wiley and Sons, 2005.
- [21] Helyette GEMAN, éditeur. *Risk management in commodity markets*. John Wiley and Sons, 2008.
- [22] Christos GIANNAKOPOULOS, Marco BINDI, Marco MORIONDO, Philippe LESAGER et Tina TIN : Impact of a 2 °C global temperature rise on the Mediterranean region : Agriculture analysis assessment. Rapport technique, WWF, 2005.



- [23] GIEC : *Climate Change 2007 : Impacts, Adaptation and Vulnerability*. Contribution of Working Group II to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC). Cambridge University Press, 2007.
- [24] René GOMMES, Tarik El HAIRECH, Damien ROSILLON, Riad BALAGHI et Hideki KANAMARU : Impact of climate change on agricultural yields in Morocco. Rapport technique, Food and Agriculture Organization, 2009.
- [25] Christiane GOODFELLOW, Dirk SCHIERECK et Tatjana VERRIER : Does screen trading weather the weather ? a note on cloudy skies, liquidity, and computerized stock markets. *International Review of Financial Analysis*, 19(2):77–80, 2010.
- [26] Eugene N. GURENKO, éditeur. *Climate change and insurance : Disaster risk financing in developing countries*. Earthscan, 2007.
- [27] Chris HARRIS : *Electricity Markets*. John Wiley and Sons, 2006.
- [28] John C. HULL : *Option, futures and other derivatives*. Prentice Hall, 8e édition, 2011.
- [29] Stephen JEWSON et Anders BRIX : *Weather derivative valuation, The meteorological, statistical, financial, and mathematical foundations*. Cambridge University Press, 2005.
- [30] Sang Hoon KANG, Zhuhua JIANG, Yeonjeong LEE et Seong-Min YOON : Weather effects on the returns and volatility of the shanghai stock market. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 389(1):91–99, 2010.
- [31] Richard W. KATZ et Allan H. MURPHY, éditeurs. *Economic value of weather and climate forecasts*. Cambridge University Press, 1997.
- [32] Patrick J. KELLY et Felix MESCHKE : Sentiment and stock returns : The sad anomaly revisited. *Journal of Banking & Finance*, 34(6):1308–1326, 2010.
- [33] Abdellatif KHATTABI : Arab environment : Impact of climate change on arab countries. Rapport technique, Arab Forum for Environment and Development, 2009.
- [34] Sonia LABATT et Rodney R. WHITE : *Carbon finance*. John Wiley and Sons, 2007.
- [35] Yuan-Ming LEE et Kuan-Min WANG : The effectiveness of the sunshine effect in Taiwan's stock market before and after the 1997 financial crisis. *Economic Modelling*, 28(12):710–727, 2011.
- [36] Pak Sum LOW, éditeur. *Climate change and Africa*. Cambridge University Press, 2005.
- [37] Jing LU et Robin K. CHOU : Does the weather have impacts on returns and trading activities in order-driven stock markets? evidence from China. *Journal of Empirical Finance*, 19(1):79–93, 2012.
- [38] Didier MARTEAU, Jean CARLE, Stéphane FOURNEAUX, Ralph HOLZ et Michael MORENO : *La gestion du risque climatique*. Economica, 2004.
- [39] Michael MORENO : Riding the temp. *Futures and Options World*, Weather Derivatives Special Supplement, 2000.
- [40] Mohammed MRAOUA et Driss BARI : Temperature stochastic modeling and weather derivatives pricing : Empirical study with morrocan data. *Afrika Statistika*, 2(1):22–43, 2007.
- [41] Xiaoyi MU : Weather, storage, and natural gas price dynamics : Fundamentals and volatility. *Energy Economics*, 29(1):46–63, 2007.

- [42] Oliver MUSSHOF, Martin ODENING et Wei XU : Management of climate risks in agriculture : will weather derivatives permeate? *Applied Economics*, 43(9):1067–1077, 2011.
- [43] William D. NORDHAUS et Joseph BOYER : *Warming the World : Economic Models of Global Warming*. The MIT Press, 2000.
- [44] OCDE : African economic outlook : Morocco. Rapport technique, Organization for Economic Cooperation and Development, 2008.
- [45] Roger Jr. PIELKE : Mistreatment of the economic impacts of extreme events in the Stern review report on the economics of climate change. *Global Environmental Change*, 17:302–310, 2007.
- [46] Jane S. POLLARD, Jonathan OLDFIELD, Samuel RANDALLS et John E. THORNES : Firm finances, weather derivatives and geography. *Geoforum*, 39(2):616–624, 2008.
- [47] PwC : 2011 weather risk derivative survey. Rapport technique, Weather Risk Management Association, WRMA, 2011.
- [48] Mélanie REQUIER-DESJARDINS : Impacts des changements climatiques sur l’agriculture au Maroc et en Tunisie et priorités d’adaptation. Rapport technique, International Centre for Advanced Mediterranean Agronomic Studies, 2010.
- [49] Ratna SAHAY et Thomas DORSEY : IMF country report : Morocco. Rapport technique, International Monetary Fund, 2011.
- [50] Surjeet SINGH : Weather insurance and derivatives in developing countries - an alternative to agricultural insurance. *The journal of insurance institute of India*, 32:13–24, 2006.
- [51] Mannava V. K. SIVAKUMAR et Raymond P. MOTHA, éditeurs. *Managing weather and climate risk in agriculture*. Springer, 2007.
- [52] Jerry R. SKEES, Stephanie GOBER, Panos VARANGIS, Rodney LESTER et Vijay KALAVAKONDA : Developing rainfall based index insurance in Morocco. *World Bank Policy Research Working Paper Series*, 2577, 2001.
- [53] Martha STARR : The effects of weather on retail sales. *Finance and Economics Discussion Series of the Board of Governors of the Federal Reserve System*, 2000-08, 2000.
- [54] Nicholas STERN : *The Economics of Climate Change : The Stern Review*. Cambridge Univeristy Press, 2007.
- [55] Andrea STOPPA et Ulrich HESS : Design and use of weather derivatives in agricultural policies : The case of rainfall index insurance in Morocco. In *International Conference on Agricultural Policy Reform and the WTO : Where are we Heading ?*, 2003.
- [56] Livio STRACCA : Behavioral finance and asset prices : Where do we stand? *Journal of Economic Psychology*, 25(3):373–405, 2004.
- [57] Tristan STURM et Eric OH : Natural disasters as the end of the insurance industry? scalar competitive strategies, alternative risk transfers, and the economic crisis. *Geoforum*, 41(1):154–163, 2010.
- [58] Lazaros SYMEONIDIS, George DASKALAKIS et Raphael N. MARKELLOS : Does the weather affect stock market volatility? *Finance Research Letters*, 7(4):214–223, 2010.
- [59] Chun-Hung (Hugo) TANG et Soo-Cheong (Shawn) JANG : Weather risk management in ski resorts : Financial hedging and geographical diversification. *International Journal of Hospitality Management*, 30(2):301–311, 2011.

- 
- [60] Alberto TROCCOLI, éditeur. *Management of weather and climate risk in the energy industry*. Springer, 2008.
- [61] John WHALLEY et Yufei YUAN : Global financial structure and climate change. *Journal of Financial Transformation*, 25:161–168, 2009.
- [62] Charles J. R. WILLIAMS et Dominic R. KNIVETON, éditeurs. *African climate and climate change*. Springer, 2011.
- [63] Edwin WOERDMAN : *The institutional economics of market-based climate policy*. Elsevier, 2004.
- [64] Seong-Min YOON et Sang Hoon KANG : Weather effects on returns : Evidence from the Korean stock market. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 388 (5):682–690, 2009.

## Chapitre 2

# Traitement et analyse des données

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>43</b>
<b>2.2</b>	<b>Nettoyage et prétraitement des données</b>	<b>44</b>
<b>2.3</b>	<b>Comblement des lacunes dans les séries de données</b>	<b>45</b>
<b>2.4</b>	<b>Identification et suppression des tendances</b>	<b>52</b>
<b>2.5</b>	<b>Identification et suppression des saisonnalités</b>	<b>59</b>
<b>2.6</b>	<b>Détermination des saisons chaude et froide</b>	<b>59</b>
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>60</b>

---

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'analyse et au traitement des données météorologiques. En effet, celles-ci sont essentielles pour la gestion du risque climatique puisque l'évaluation des dérivés climatiques y repose. Nous allons dans un premier temps mettre l'accent sur les insuffisances dont souffrent les séries de données météorologiques. Par la suite, nous allons présenter les différentes techniques de comblement des séries de données météorologiques. Par la suite, nous examinerons les effets de saisonnalité et de tendance dans l'historique de données. A la fin, nous appliquerons une approche statistique utilisée par les météorologistes pour déterminer les saisons chaude et froide. Toute les études et analyses empiriques faites dans le cadre de cette thèse se basent sur les données traitées et préparées en utilisant les techniques présentées dans ce chapitre.

### 2.1 Introduction

Le fait que le sous-jacent des dérivés climatique est une variable météorologique telle que la température, la pluviométrie, la vitesse du vent, etc. donne à l'historique des séries chronologiques des données climatiques une importance capitale pour l'évaluation ce ces produits dérivés. En effet, pour pouvoir réaliser une évaluation qui soit

juste, il faut, d'une part, disposer d'un bon historique de données et d'autre part, il faut que la qualité des données utilisées soit irréprochable (Dunis et Karalis [7]).

Les données météorologiques sont utilisées pour répondre à divers besoins. En effet, elles sont utilisées pour la gestion du risque climatique, l'évaluation des dérivés climatiques, la détermination des prix du marché ainsi que pour le dénouement des contrats climatiques. De ce fait, les données météorologiques doivent être manipulées avec soin et précision. Par ailleurs, le plus souvent, les données d'une bonne qualité ne sont pas tout le temps disponibles et quand elles le sont elles coûtent cher. Cela constitue d'ailleurs une des entraves majeures à l'expansion du marché des dérivés climatique partout dans le monde (Dischel [5]).

Aux USA, la source principale des données météorologiques est la NOAA (Administration nationale des océans et de l'atmosphère). Elle possède l'une des archives actives de données météorologiques les plus importantes dans le monde. En Europe, l'une des sources les plus fiables est l'ECAD (Organisme européen en charge du traitement des bases de données climatiques). ECAD fournit gratuitement des données météorologiques quotidiennes pour 4 641 stations météorologiques réparties sur 62 pays. En Afrique, des bases de données météorologiques fiables et couvrant un long historique sont plutôt rares à quelques exceptions près notamment en Afrique du Sud et dans les pays de l'Afrique du Nord.

Au Maroc, c'est la Direction de la météorologie nationale (appelée aussi Maroc Météo) qui fournit les données quotidiennes relatives à diverses variables météorologiques (température, précipitations, vitesse de vent, etc.) et ce pour l'ensemble des stations météorologiques sur le territoire marocain. Les principales stations météorologiques sont situées dans les aéroports (civils et militaires) ainsi que dans les grandes villes. Malheureusement, la qualité des historiques des données diffère d'une station à une autre. Nous reviendrons sur les raisons qui affectent la qualité des données dans la section suivante.

Un accès facile à des données météorologiques d'excellente qualité et sur de longues périodes couvrant plusieurs stations constituerait un bon levier pour aider le marché du climat à se développer et à devenir plus liquide. Malheureusement, il est encore difficile d'obtenir de telles données et notamment au Maroc.

## 2.2 Nettoyage et prétraitement des données

Pour que le marché des dérivés climatiques se développe, il faut que les opérateurs sur ce marché puissent avoir accès en temps continu à des données climatiques précises. Par conséquent, les systèmes automatisés (via internet) doivent permettre un accès permanent aux flux de données relevées au niveau des stations météorologiques. Les stations doivent également avoir un long historique et ne pas être assujetties à une relocalisation fréquente (Dischel [5]).

Par ailleurs, les bases de données météorologiques de taille importante contiennent fréquemment des valeurs aberrantes (Jewson et Brix [10]). Ces valeurs doivent impérativement être corrigées avant tout travail de modélisation de la dynamique de la variable météorologique. A défaut, les résultats, notamment ceux liés à l'évaluation des dérivés climatiques, seront faussés. A titre d'exemple, un modèle mal calibré

pourrait produire un prix supérieur au juste prix (pas d'acheteurs du fait que la concurrence vendrait le même contrat à un prix plus raisonnable) soit un prix inférieur au juste prix (un manque à gagner ou, au pire, une perte pour le vendeur du contrat).

Sur les marchés organisés tel que le CME de Chicago, les températures considérées sont calculées à partir de la moyenne des températures minimale et maximale quotidiennes. Par conséquent, le nettoyage ou le prétraitement des données doit considérer les aspects suivants :

- Les valeurs manquantes.
- La température minimale doit être plus petite que la température maximale pour une journée donnée.
- L'existence de valeurs qui ne soient pas vraisemblables pour une station en particulier (par exemple, une température maximale de  $-10\text{ °C}$  est pratiquement impossible au niveau de la ville de Casablanca tandis que qu'une température minimale de  $-10\text{ °C}$  est tout à fait possible pour une ville comme Ifrane).
- Des différences très importantes entre des stations météorologiques voisines (dans ce cas, on parle plutôt de sauts ou de discontinuités dans les séries de données).
- Des valeurs marquées comme erronées par le fournisseur de données (le plus souvent, ces données sont marquées comme -99 999).
- Les années bissextiles (problème du 29 février chaque quatre années).

## 2.3 Comblement des lacunes dans les séries de données

Il existe différentes méthodes pour combler le vide laissé par les données manquantes dans l'historique des bases de données en général (Baraldi et Enders [3], Walczak et Massart [17]) et dans les séries météorologiques en particulier (Dunis et Karalis [7], Kim et Pachepsky [11], Nkuna et Odiyo [14]).

Dunis et Karalis [7] recensent plusieurs méthodes pour la reconstitution des données manquantes. Les différentes méthodes présentées ont été *benchmarkées* par rapport à une méthode de reconstitution dite naïve. Ils montrent dans leur étude que la méthode d'analyse en composante principale (ACP) surpasse toutes les autres. C'est cette méthode que nous avons retenue pour reconstituer notre base de données de température.

### 2.3.1 Méthodes de reconstitution des données

#### Méthode naïve

Cette méthode n'a d'intérêt que par ce qu'elle permet de faire le benchmarking des différentes méthodes que nous allons présenter par la suite. En effet, elle est basée sur un modèle simple où chaque variable manquante est remplacée par l'observation de la même journée de l'année précédente. De manière formelle, on peut écrire

$$T_t^n = T_t^{n-1} \quad (2.1)$$

où  $T_t^n$  est la valeur manquante le jour  $t$  de l'année  $n$  et  $T_t^{n-1}$  est la valeur correspondante durant l'année  $n - 1$  (supposée existante).

### Méthode de remplacement (Fallback)

La deuxième partie du document de confirmation de la WRMA (Association de la gestion du risque climatique) établit les règles standards pour l'industrie du climat notamment en matières de détermination et d'ajustement des données météorologiques. Il présente une estimation de la température basée sur un indice météorologique d'une certaine station, qui est habituellement une région désignée et convenue dans le document de confirmation (par exemple, une station située dans un aéroport ou une station possédant un identifiant OMM).

Dans le cas où les données météorologiques ne sont pas disponibles pour la station de l'indice, le document de confirmation de la WRMA énonce les procédures d'interpolation à utiliser pour déterminer les données manquantes en vertu de la disposition intitulée "méthode de remplacement" (Fallback en anglais). La méthode de remplacement fournit un ajustement en fonction de la température enregistrée dans une autre station alternative où l'indice météorologique est calculé. La station alternative est appelée "la station de remplacement" (Dunis et Karalis [7]).

### Algorithme de maximisation de l'espérance

L'algorithme de maximisation de l'espérance (EM) est une technique couramment utilisée pour déterminer les estimations du maximum de vraisemblance pour des modèles paramétriques lorsque les données ne sont pas entièrement disponibles. Développé par Dempster *et al.* [4], l'algorithme EM génère une innovation dans l'analyse des données incomplètes, ce qui permet de faire des estimations efficaces des paramètres pour une grande variété de problèmes statistiques. À noter toutefois que l'algorithme de maximisation de l'espérance fonctionne sous l'hypothèse que les données sont distribuées selon une loi normale.

### Algorithme d'augmentation des données

L'augmentation des données (DA) est un algorithme itératif de simulation. Plus particulièrement, il s'agit d'un cas spécial de simulation Monte Carlo de chaînes de Markov (MCMC). Comme le souligne Schafer [15], l'algorithme DA est très similaire à l'algorithme EM, et peut être considéré comme une édition stochastique de celui-ci. Dans de nombreux cas avec des valeurs manquantes, la distribution des données observées  $P(\theta|T_{obs})$  est difficile à définir.  $T_{obs}$  étant les températures quotidiennes observées et  $\theta$  l'estimateur des paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ , respectivement, la moyenne et l'écart-type issus d'un échantillon aléatoire des températures quotidiennes.

Toutefois, si  $T_{obs}$  est "augmentée" (ou complétée) par une valeur préliminaire de  $T_{man}$  (la température manquante), la distribution des données complètes  $P(\theta|T_{obs}, T_{man})$  peut être traitée.

### Modèles dans l'espace d'état et filtre de Kalman

Harvey [9] et Hamilton [8] ont souligné dans leurs travaux les avantages de l'utilisation de la modélisation dans l'espace d'état pour représenter des systèmes dyna-

miques où les variables non observées (dites variables d'état) peuvent être intégrées au sein d'un modèle "observable".

L'avantage de traiter les problèmes des observations manquantes dans le cadre de la modélisation dans l'espace d'état est que les valeurs manquantes peuvent être estimées par un algorithme de lissage comme le filtre de Kalman. Le filtrage est utilisé pour estimer la valeur espérée du vecteur d'état en fonction des informations disponibles au temps  $t$ , alors que l'objectif du lissage est d'inclure les informations mises à disposition après le temps  $t$ .

Harvey [9] a montré par ailleurs que, si les observations sont distribuées normalement, et que l'estimateur actuel du vecteur d'état est le plus précis, alors le prédicteur et l'estimateur mis à jour seront également les plus précis. En l'absence de l'hypothèse de normalité, un résultat similaire est obtenu, mais seulement pour les classes d'estimateurs et de prédicteurs qui sont linéaires en fonction des observations.

### Régression de réseaux de neurones

Les réseaux de neurones (NNR) sont un outil statistique qui sert à déterminer la signification relative d'un input pour la prédiction d'une sortie donnée. Ils sont basés sur des couches d'unités élémentaires de calcul appelées neurones ou nœuds à partir desquels l'information sur les variables est élaborée par l'intermédiaire d'une fonction de transfert non linéaire. En ce qui nous concerne, disons simplement que le point de départ pour les modèles NNR réside dans les corrélations linéaires qui existent entre le  $T_{max}$  et  $T_{min}$  de l'indice climatique (HDD, CDD ou autre) de la station météorologique considérée et la série des températures considérées comme variable explicative.

Bien que les modèles NNR permettent d'identifier l'aspect de non-linéarité des variables, l'analyse de corrélation linéaire peut donner une indication sur les variables qui devraient être incluses. La sélection des variables pourrait être faite en utilisant une procédure de régression de réseaux de neurones de pas à pas descendante, c'est-à-dire à partir de valeurs historiques retardées de la variable dépendante et des observations des stations météorologiques corrélées, nous pouvons progressivement réduire le nombre d'entrées tout en gardant l'architecture du réseau constante (Nelwamondo *et al.* [13]). Si l'omission d'une variable ne détériore pas le niveau de la variance expliquée par rapport au meilleur modèle précédent testé, alors l'ensemble des variables explicatives doit être mis à jour et ce en se débarrassant de cette variable d'entrée. Le modèle choisi est ensuite utilisé pour d'autres tests et améliorations (Dunis et Jalilov [6]).

#### 2.3.2 Analyse en composante principale

L'analyse en composante principale (ACP) est une méthode standard pour extraire les sources les plus importantes de variation non corrélées dans un système multivarié. L'objectif de l'ACP est de réduire la dimensionnalité, de sorte que seules les sources les plus importantes d'information soient utilisées. Cette approche est très utile dans les systèmes fortement corrélés, comme c'est le cas des températures provenant de stations météorologiques voisines, car il y aura un petit nombre de



sources indépendantes de variation et la plupart d'entre elles peuvent être décrites par quelques composants principaux. La méthode ACP a de nombreuses applications dans la modélisation des marchés financiers. L'une des plus intéressantes concerne la modélisation factorielle dans le cadre du modèle APT (arbitrage pricing theory). On l'applique aussi à l'analyse de régression robuste en présence de multicollinéarité (encore une fois un problème qui affecte souvent la modélisation des facteurs) et la modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt (Alexander [1]). L'ACP peut également être utilisée pour résoudre le problème des données manquantes (Dunis et Jalilov [6], Serneels et Verdonckb [16]), comme nous allons le voir par la suite.

Supposons que les données pour lesquelles l'ACP sera appliquée consistent en  $M$  variables indexées de  $j = 1, 2, \dots, M$  ainsi que  $N$  observations pour chaque variable,  $i = 1, 2, \dots, N$  générant une matrice  $X$  de dimension  $N \times M$ . Les données d'entrée doivent être stationnaires. En outre, ces données stationnaires devraient être normalisées avant l'analyse, sinon la première composante principale sera dominée par la variable d'entrée avec la plus grande volatilité. Ainsi, nous supposons également que chacune des  $M$  colonnes de la matrice de données stationnaire  $X$  a une moyenne  $\mu = 0$  et une variance  $\sigma^2 = 1$ . Ceci peut être facilement obtenu en soustrayant la moyenne échantillonnale et en divisant par l'écart-type échantillonnal chaque élément  $x_{ij}$  de la matrice  $X$ . Par conséquent, nous avons ainsi créé une matrice  $X$  standardisée. Nous allons transformer cette matrice en un nouvel ensemble de variables aléatoires, qui sont deux à deux non corrélées. Soit  $z_1$  la nouvelle variable ayant la variance maximale, puis le premier vecteur colonne  $\alpha_1$  des  $M$  éléments est défini ainsi

$$z_1 = X \times \alpha_1 \quad (2.2)$$

La nouvelle variable  $z_1$  est une combinaison linéaire des éléments du vecteur  $\alpha_1$ . Le produit  $z_1^T \times z_1$  est la somme des carrés des éléments de  $z_1$ <sup>1</sup>.

En substituant  $z_1$  dans Eq. 2.2, nous obtenons

$$z_1^T \times z_1 = (X \times \alpha_1)^T \times (X \times \alpha_1) = \alpha_1^T \times (X^T \times X) \times \alpha_1 \quad (2.3)$$

La matrice de covariance non-biaisée relative aux données qui ont produit la matrice  $X$  est donnée par

$$\frac{1}{N-1} \times X^T \times X \quad (2.4)$$

où  $X^T \times X$  est la  $(N-1)$  fois la matrice de covariance. Par conséquent, la variance maximale est trouvée en choisissant comme vecteur  $\alpha_1$  celui qui maximise  $\alpha_1^T (X^T X) \alpha_1$ . En outre, le vecteur  $\alpha_1$  est normalisé par la condition selon laquelle sa longueur est égale à 1, c'est-à-dire  $\alpha_1^T \times \alpha_1 = 1$ . En résumé, les conditions qui déterminent  $z_1$  sont comme suit

- $\max z_1^T \times z_1$
- $\alpha_1^T \times \alpha_1 = 1$  (vecteur  $\alpha_1$  normalisé)

Ce problème d'optimisation peut être résolu de manière analytique par l'utilisation du multiplicateur de Lagrange ( $\lambda_1$ ) et de la différenciation vecteur.

Le second vecteur  $z_2 = X \times \alpha_2$  est déterminé par les conditions suivantes :

---

1. <sup>T</sup> est la transposée d'une matrice.

- $\max z_2^T \times z_2$
- $\alpha_2^T \times \alpha_2 = 1$  (vecteur  $\alpha_2$  normalisé)
- $\alpha_2^T \times \alpha_1 = 0$  (les deux vecteurs  $z_1$  et  $z_2$  ne sont pas corrélés)

La dernière contrainte vient du fait que  $cov(z_1, z_2) = 0$  implique  $\alpha_1^T \times (X^T \times X) \times \alpha_2 = 0$  soit encore  $(X^T \times X \times \alpha_2)^T \times \alpha_1 = 0$ . D'où l'on peut tirer  $\lambda_2 \times \alpha_2^T \times \alpha_1 = 0$  ce qui nous permet d'écrire enfin  $\alpha_2^T \times \alpha_1 = 0$  car  $\lambda_2 \neq 0$ .

Dans les systèmes fortement corrélés, comme les températures du climat, les deux premières valeurs propres expliquent plus de 90% de la variance totale. Il n'est donc pas nécessaire de conserver plus de composants principaux.

### 2.3.3 Reconstitution des données de Casablanca

Supposons maintenant que les observations manquantes sont observées au niveau de notre station météorologique  $S_{t_1}$ , et admettons en plus que les autres stations  $S_{t_2}, \dots, S_{t_5}$  soient corrélées avec notre station  $S_{t_1}$ . Afin d'utiliser l'ACP pour combler les observations manquantes nous devons suivre les étapes suivantes :

**Étape 1** Effectuer une ACP sur  $S_{t_1}$  et  $S_{t_2}, \dots, S_{t_5}$  en utilisant toutes les données disponibles sur la station  $S_{t_1}$  pour obtenir les composantes principales et leur pondération ( $w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}$ ). La sélection des composantes principales dépendra du niveau de corrélation du système. Toutefois, elles doivent toujours être inférieures au nombre de variables ( $< 5$ ).

**Étape 2** Effectuer une autre ACP sur  $S_{t_2}, \dots, S_{t_5}$  en utilisant toutes les données disponibles sur ces variables et le même nombre de composantes principales ( $P_1, \dots, P_4$ ).

**Étape 3** En utilisant les facteurs de pondération de l'étape 1 et les composantes principales de l'étape 2, on reconstruit un historique de données simulées sur  $S_{t_1}$  selon l'équation

$$S_{t_1}^* = w_{11}P_1 + \dots + w_{14}P_4 \quad (2.5)$$

**Étape 4** La dernière étape est le calibrage de notre modèle. Les données réelles sur  $S_{t_1}$  qui sont disponibles doivent être comparées à celles obtenues à partir de l'étape 3 pour choisir la moyenne et l'écart-type appropriés pour reconstituer les données manquantes de notre station météorologique.

L'exactitude de l'imputation dépendra de la force de la corrélation au sein du système. Comme les données des température météorologiques sont fortement corrélées, l'ACP est intuitivement la méthodologie la plus appropriée pour remplir les observations manquantes (Dunis et Karalis [7]).

Dans ce qui suit, nous allons appliquer la méthode ACP pour reconstituer les données manquantes dans notre base de données. Dans cette étude, nous avons utilisé les données quotidiennes relatives aux températures moyennes de la station météorologique de Casablanca-Anfa (Identifiant OMM : 60155). La température moyenne a été calculée à partir des températures extrêmes. Les températures minimale et maximale du jour  $j$  sont mesurées à 2 mètres du sol sous abri et relevées entre  $j - 1$  (la veille) à 18 heures UTC et  $j$  à 18 heures UTC pour le minimum, et entre  $j$  à 6 heures UTC et  $j + 1$  (le lendemain) à 6 heures UTC pour le maximum.

Ces données météorologiques sont extraites de la base de données de la Direction de la météorologie nationale du Maroc (DMM) et couvrent la période de janvier 1960 à décembre 2011 soit 52 ans d'historique avec 18 980 observations. La série chronologique contient bien évidemment des lacunes (92 valeurs manquantes, soit 0.5% du nombre total d'observations, distribuées aléatoirement dans le temps) qu'il faut combler avant tout traitement.

Les valeurs manquantes dans notre série de données sont distribuées aléatoirement sous forme d'une seule observation, deux observations, trois observations et quatre observations consécutives. Dans le but de tester la performance de la méthode d'ACP, Nous avons pris un échantillon de test, qui ne contient aucune valeur manquante. Cet échantillon est constitué de 573 observations (températures moyennes quotidiennes) pour 4 variables (stations météorologiques). Ensuite, nous avons créé artificiellement des valeurs manquantes en ôtant certaines observations connues à l'avance (Tab. 2.1). Ces valeurs ont été reconstituées à l'aide de la méthode ACP avec un processus itératif. Les différents cas ont été testés séparément.

**Table 2.1**

Reconstitution des données manquantes à l'aide de l'ACP pour les cas d'une, deux, trois, quatre et sept observations manquantes consécutives

Valeur observée	Valeur reconstituée	Écart	RMSE*
1 valeur			
17.8	18.4	0.6	0.6
2 valeurs consécutives			
14.5	14.0	-0.5	0.35
14.9	14.9	0.0	
3 valeurs consécutives			
21.8	21.3	-0.5	0.40
20.5	20.5	0.0	
20.6	21.1	0.5	
4 valeurs consécutives			
16.6	16.7	0.1	0.31
15.4	16.0	0.6	
15.9	16.0	0.1	
16.6	16.7	0.1	
7 valeurs consécutives			
16.6	16.6	0.1	0.41
15.4	16.0	0.6	
15.9	16.0	0.1	
15.9	16.0	0.1	
16.3	15.4	-0.9	
14.8	14.7	-0.1	
16.0	16.0	0.0	

\* Erreur quadratique moyenne.

Les résultats récapitulés dans Tab. 2.1 montrent que la méthode ACP permet une reconstitution adéquate des valeurs manquantes existantes dans la série en terme d'erreur quadratique moyenne (RMSE). Le critère RMSE est défini comme suit

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (T_{obs} - T_{rec})^2} \quad (2.6)$$

où  $T_{obs}$  et  $T_{rec}$  désignent, respectivement, la valeur de la température moyenne observée et celle reconstituée.

Cette erreur ne dépasse pas généralement 0.6 °C. Ceci représente un bon indicateur de la qualité de l'estimation des valeurs manquantes (Mraoua et Bari [12]).

Dans un cadre plus réaliste, nous avons choisi, aléatoirement dans le temps, les positions des valeurs manquantes (Tab. 2.2) où celles-ci peuvent exister sous les différentes formes pré-traitées, ensuite nous avons appliqué la méthode de l'ACP pour combler les différentes lacunes.

**Table 2.2**

Valeurs manquantes artificiellement créées dans le fichier de test et leurs valeurs reconstituées correspondantes, ainsi que l'écart entre les deux valeurs

# Obs.	Date	Température		
		observée	reconstituée	Écart*
1	04/11/1999	17.8	18.0	0.2
2	19/11/1999	14.5	13.9	-0.6
3	20/11/1999	14.9	14.9	0.0
4	21/01/2000	10.6	11.0	0.4
5	16/06/2000	21.8	21.3	-0.5
6	17/06/2000	20.5	20.5	0.0
7	18/06/2000	20.6	21.1	0.5
8	22/12/2000	14.0	14.4	0.4
9	28/02/2001	13.6	12.7	-0.9
10	13/03/2001	16.6	16.7	0.1
11	14/03/2001	15.4	16.1	0.7
12	03/04/2001	17.3	17.3	0.0
13	15/04/2001	19.3	18.2	-1.1
14	16/04/2001	16.3	16.7	0.4

\* Écart entre la température reconstituée et celle réellement observée.

D'après Dunis et Karalis [7], la méthode de l'ACP est de loin la meilleure comparative aux autres méthodes. Dans notre cas, nous avons trouvé que l'écart entre les valeurs reconstituées et celles réellement observées oscille autour d'une moyenne nulle avec un écart type de l'ordre de 0.5 °C. Toutefois, il faut noter que l'ACP reste une méthode assez gourmande en terme de données nécessaires pour son implémentation. En effet, dans notre cas, nous avons eu recours aux données de 4 stations météorologiques entourant la station de Casablanca pour pouvoir faire une reconstitution intéressante (Mraoua et Bari [12]).

## 2.4 Identification et suppression des tendances

Après avoir nettoyé les données météorologiques, on peut procéder maintenant à une première modélisation de la dynamique de notre variable climatique<sup>2</sup>. Pour ce faire, une approche commune est de segmenter les données sur différentes parties. Le premier choix que l'on pouvait faire est de dégager et estimer une possible tendance dans la série des données. Pour bien réussir cette tâche, il faudrait analyser à la fois les valeurs historiques de la variable climatique étudiée ainsi que les méta-données de la station météorologique dont elle est relevée (Alexandridis et Zapranis [2]). Cette analyse fournira des informations précieuses pour comprendre les sources de l'existence de la tendance ainsi que sa structure.

### 2.4.1 Sources des tendances

Ces dernières années, nous avons observé des températures extrêmes aussi bien en été qu'en hiver et ce dans divers endroits à travers le monde. Ces températures extrêmes sont généralement attribuées au réchauffement climatique. En fait, on croit de plus en plus que le réchauffement climatique affecte la température avec une tendance à la hausse alors que dans le même temps les autres variables météorologiques sont affectées de diverses manières. Par exemple, à Casablanca le 29 novembre 2010 la pluviométrie a atteint le niveau record de 178 mm ce qui a causé des dommages considérables pour les résidents et les installations de la ville. Cependant, le réchauffement climatique n'est pas la seule source des tendances dans les données météorologiques. On peut citer au mois les trois sources les plus importantes suivantes :

- L'urbanisation.
- La variabilité aléatoire.
- La variabilité prédite.

#### Urbanisation

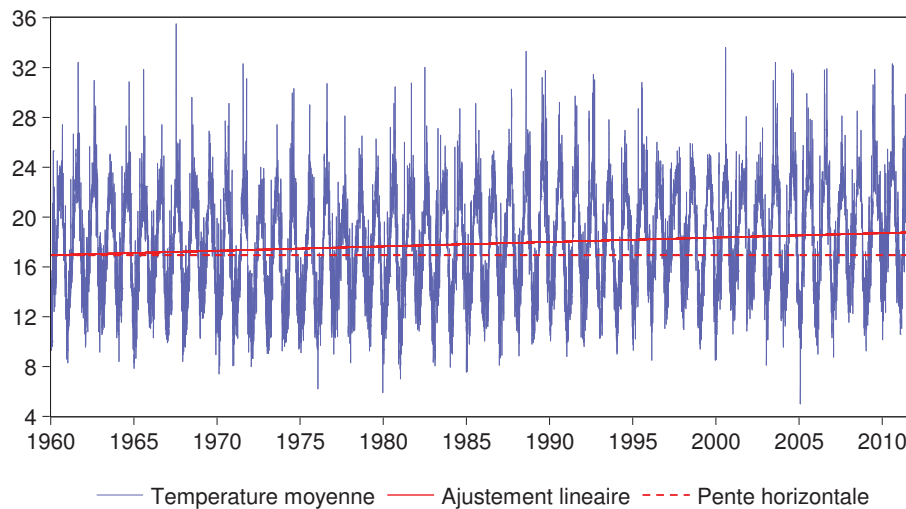
La source la plus communément admise pour justifier l'existence des tendances dans les mesures de température est l'effet de l'urbanisation. En effet, la température est affectée par le réchauffement climatique et ses effets urbains. Dans les régions géographiques en développement, la température de surface augmente à mesure que davantage de personnes et de bâtiments se concentrent. Cela est dû à l'énergie solaire absorbée par les constructions urbaines et les émissions des véhicules, la libération du gaz carbonique CO<sub>2</sub>, les bâtiments industriels et les unités de refroidissement. Par conséquent, une urbanisation importante autour d'une station météorologique induirait une augmentation dans les mesures observées de la température.

Pour illustrer cet effet, nous avons tracé sur Fig. 2.1 l'évolution de la température moyenne sur la ville de Casablanca de janvier 1960 à décembre 2011 ainsi que la tendance linéaire donnée par l'équation

$$T_t = 0.000097t + 14.801 \quad (2.7)$$

---

<sup>2</sup>. Nous traiterons la modélisation de la température quotidienne plus profondément dans les chapitres 3 et 5.



**Fig. 2.1** – Evolution de la température moyenne sur la ville de Casablanca de janvier 1960 à décembre 2011

D'après Eq. 2.7, la pente "quotidienne" de la droite d'ajustement est de 0.000097. Cela nous permet de déduire la hausse de la température enregistrée durant les 52 années de l'historique en multipliant la pente par le nombre de jours, soit  $0.000097 \times 365.25 \times 52 = 1.8$ . Donc, sur Casablanca, la hausse de la température moyenne a été d'environ 1.8 °C.

### Variabilité aléatoire

Identifier une tendance est très important. Cependant, des précautions supplémentaires doivent être prises en compte lorsqu'il s'agit de l'identification des tendances. Avant toute intervention, il faut être sûr que l'augmentation (ou la baisse) des mesures est bien réelle et qu'elle n'est pas juste une partie d'une variabilité aléatoire quelconque.

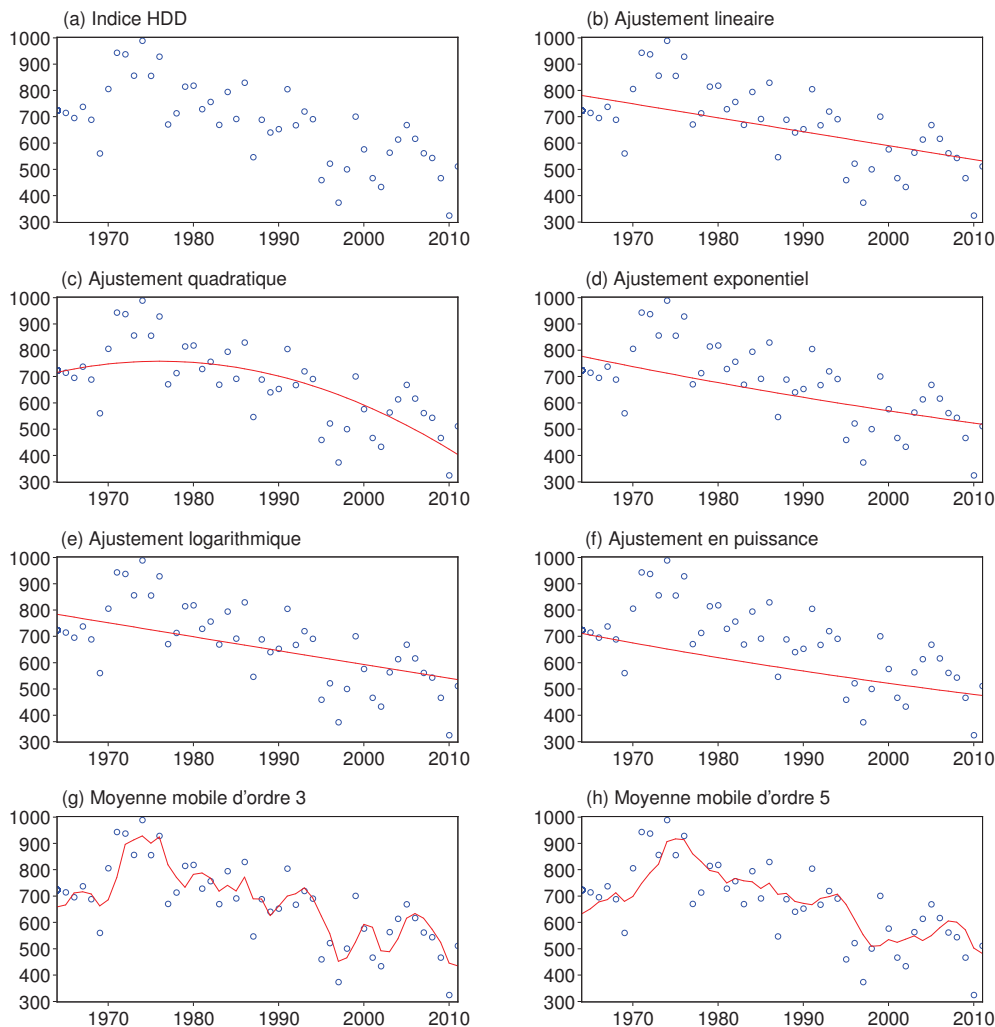
### Variabilité prédite

Une tendance observée peut faire partie d'un grand cycle. En effet, l'étude de 5 ou 10 ans d'historique de données peut entraîner une tendance linéaire, mais un plus grand historique de données sur 50 ans par exemple peut indiquer un plus grand cycle où une légère augmentation de la température se produirait dans les 25 premières années et une légère diminution se produirait au cours des 25 dernières années .

## 2.4.2 Structures des tendances

Comme il a déjà été mentionné, les variables météorologiques dépendent fortement de la localité où elles sont mesurées. En conséquence, il est tout à fait possible

que différentes dynamiques puissent gouverner la même variable météorologique et ce dans des endroits différents. Par exemple, différents types de tendances peuvent caractériser le changement de dynamique de la température dans des villes différentes dépendamment des effets liés au développement industriel et à l'urbanisation dans chaque ville. Par ailleurs, différents types de tendances peuvent être appropriés pour un indice météorologique et une variable météorologique, par exemple, l'indice HDD et la température.



**Fig. 2.2** – Exemples de sept ajustements de l'indice HDD de la ville de Casablanca pour la période de novembre à mai

Figs. 2.2 et 2.3 présentent une illustration de sept ajustements (ou tendances) des indices HDD et CDD de la ville de Casablanca pour les périodes allant, respectivement, de novembre à mai et de juin à octobre entre 1971 et 2010. Il s'agit d'ajustements linéaire, quadratique, exponentiel, logarithmique, en puissance et en moyenne mobile d'ordre 3 et d'ordre 5.

Si on note  $I_t$  la valeur de l'indice météorologique (HDD ou CDD par exemple) à la date  $t$  (dans l'exemple de Figs. 2.2 et 2.3, nous avons considéré un pas annuel) et si

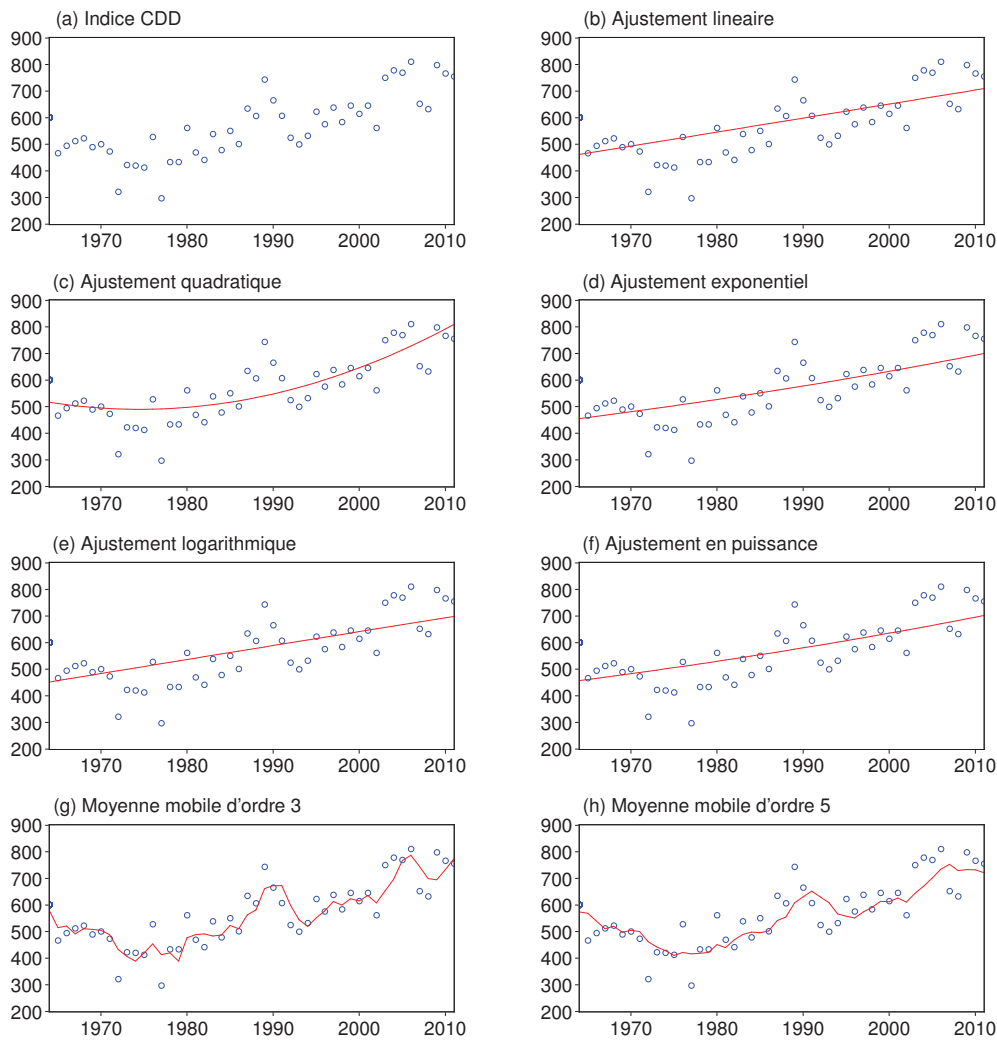


Fig. 2.3 – Exemples de sept ajustements de l'indice CDD de la ville de Casablanca pour la période de juin à octobre

on fait l'hypothèse selon laquelle, notre indice est formé de la somme d'une tendance  $r_t$  et d'une certaine variable (ou variation) aléatoire  $e_t$ , on peut alors écrire

$$I_t = r_t + e_t \quad (2.8)$$

$t = 1, \dots, N$  et  $N$  est le nombre d'observations de l'historique de l'indice (dans notre illustration,  $N = 40$  années).

Les  $e_t$  sont supposées indépendantes et identiquement distribuées avec une espérance nulle,  $E[e_t] = 0$  pour tout  $t = 1, \dots, N$ .

Ci-après, la liste des différents ajustement utilisés pour construire Fig. 2.4.

– Ajustement linéaire

$$r_t = a_1 + a_2 t \quad (2.9)$$



– Ajustement quadratique

$$r_t = b_1 + b_2t + b_3t^2 \quad (2.10)$$

– Ajustement exponentiel

$$r_t = c_1 \exp(c_2t) \quad (2.11)$$

– Ajustement logarithmique

$$r_t = d_1 \ln(t) + d_2 \quad (2.12)$$

– Ajustement en puissance

$$r_t = e_1 t^{e_2} \quad (2.13)$$

– Ajustement en moyenne mobile d'ordre  $\omega$

$$r_t = \frac{1}{2\omega + 1} \sum_{i=-\omega}^{\omega} I_{t+i} \quad (2.14)$$

$a_i, b_i, c_i, d_i$  et  $e_i$  sont des réels et  $\omega$  est un entier naturel.  $2\omega + 1$  est appelée la longueur de la fenêtre de la moyenne mobile.

Tabs. 2.3 et 2.4 présentent la moyenne et l'écart-type estimés pour les indices HDD et CDD de la ville de Casablanca et calculés en utilisant dix, vingt, trente et quarante années de données et huit méthodes différentes : pas de tendance et les sept méthodes décrites précédemment. Nous constatons des différences significatives entre les résultats des différents modèles, mais il est très difficile de savoir qui sont les plus précis. Maintenant, si on considère  $I'_t$  comme étant l'indice corrigé de sa tendance, on peut alors écrire, en tenant compte de Eq. 2.8

$$I'_t = I_t - \hat{r}_t + \hat{r}_N \quad (2.15)$$

Le fait d'ajouter  $\hat{r}_N$  de cette façon garantit que tous les indices resteront maintenus au niveau du dernier indice. Autrement, cela voudrait dire que les indices corrigés doivent être compatibles avec le climat au cours de l'année  $N$ .  $\hat{r}_N$  est parfois appelé le pivot.

Souvent, un contrat de dérivé climatique commencera une année ou plus, avant la fin de l'historique des indices, et en de tels cas, il peut être souhaitable d'extrapoler la tendance à l'année  $N + k$  en utilisant l'équation alternative donnée en Eq. 2.16 dans laquelle nous remplaçons  $\hat{r}_N$  par  $\hat{r}_{N+k}$

$$I'_t = I_t - \hat{r}_t + \hat{r}_{N+k} \quad (2.16)$$

**Table 2.3**

Moyenne et écart-type de la valeur de dénouement de l'indice HDD de la ville de Casablanca pour la période de novembre à mai estimés sur différentes fenêtres de temps (entre 1971 et 2010) et en utilisant différentes méthodes de lissage

Lissage	Fenêtre de 10 ans		Fenêtre de 20 ans		Fenêtre de 30 ans		Fenêtre de 40 ans	
	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type
Aucun	853.13	97.53	776.76	116.61	718.51	146.28	670.42	159.29
linéaire	719.91	15.23	693.40	30.58	666.89	45.90	640.37	61.21
quadratique	755.70	2.30	742.79	17.19	710.53	51.28	658.93	102.79
exponentiel	703.82	17.40	674.79	33.49	647.35	48.22	621.41	61.70
logarithmique	722.37	15.27	695.85	30.57	669.43	45.78	643.10	60.90
en puissance	643.94	15.96	617.38	30.64	592.36	44.01	568.78	56.20
Moyenne mobile d'ordre 3	843.76	71.87	780.49	88.32	722.03	123.34	679.21	133.45
Moyenne mobile d'ordre 5	837.16	56.79	782.34	71.61	726.72	107.53	683.77	120.26

**Table 2.4**  
Moyenne et écart-type de la valeur de dénouement de l'indice CDD de la ville de Casablanca pour la période de juin à octobre estimés sur différentes fenêtres de temps (entre 1971 et 2010) et en utilisant différentes méthodes de lissage

Lissage	Fenêtre de 10 ans		Fenêtre de 20 ans		Fenêtre de 30 ans		Fenêtre de 40 ans	
	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type
Aucun	430.94	76.58	497.27	107.58	526.52	101.00	574.18	126.95
linéaire	522.19	15.14	548.54	30.39	574.89	45.61	601.24	60.83
quadratique	492.35	2.23	506.74	18.06	537.11	48.38	583.44	93.01
exponentiel	505.89	13.31	530.16	27.99	555.97	44.05	583.45	61.62
logarithmique	512.79	15.17	539.13	30.38	565.39	45.49	591.56	60.52
en puissance	508.48	13.39	532.83	28.09	558.65	44.08	586.02	61.48
Moyenne mobile d'ordre 3	428.76	32.62	487.55	79.38	522.24	84.87	567.17	110.47
Moyenne mobile d'ordre 5	437.33	26.22	480.18	61.86	518.69	76.45	562.42	103.53

## 2.5 Identification et suppression des saisonnalités

Il est bien connu que les variables météorologiques et surtout la température présentent de fortes saisonnalités. Alors, nous nous attendons à ce que la température de chaque année évolue autour d'une moyenne saisonnière. Afin de développer un modèle approprié qui capture la dynamique d'un processus de la température, la saisonnalité doit être modélisée avec précision. En retirant le cycle saisonnier, nous pourrions nous attendre à transformer nos données de température en une série stationnaire.

Afin d'éliminer le cycle saisonnier, on peut calculer les valeurs moyennes des températures quotidiennes. En d'autres termes, tout d'abord nous calculons la moyenne de toutes les mesures pour le 1er janvier, puis nous passons au 2 janvier et ainsi de suite. Si le résultat n'est pas assez lisse, une moyenne mobile peut être utilisée pour supprimer le bruit résiduel. Cette approche est très rapide et facile à mettre en œuvre et peut être aussi utilisée sur de grands ensembles de données.

Alternativement à la modélisation de la saisonnalité dans les séries de température, on peut ajuster à notre série de température une fonctionnelle sinusoïde telle que

$$S(t) = a \sin\left(\frac{2\pi(t + \varphi)}{365}\right) \quad (2.17)$$

où  $S(t)$  est la fonction du cycle saisonnier,  $a$  son amplitude et  $\varphi$  sa phase.

L'amplitude indique la différence entre la température la plus élevée et la température moyenne, tandis que la phase précise où, par rapport au cycle saisonnier, l'oscillation démarre.

Une approche plus sophistiquée consiste à modéliser la moyenne saisonnière par une série de Fourier tronquée

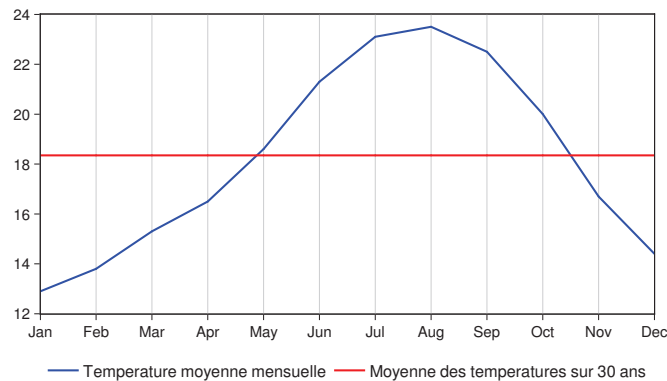
$$S(t) = \sum_{i=1}^I a_i \sin\left(\frac{2i\pi(t - f_i)}{365}\right) + \sum_{j=1}^J b_j \cos\left(\frac{2j\pi(t - g_j)}{365}\right) \quad (2.18)$$

Généralement, seules quelques fonctions harmoniques sont suffisantes pour capturer la moyenne saisonnière. Dans la pratique, le caractère saisonnier ajusté est modélisé par un seul sinus et un seul cosinus, c'est-à-dire avec  $I = J = 1$ . Dans les chapitres 3 et 5, nous reviendrons avec plus de détails sur la modélisation de la température moyenne ainsi que sur la technique de calibration du modèle choisi aux données de nos historiques.

## 2.6 Détermination des saisons chaude et froide

Dans cette section, nous allons déterminer les deux saisons chaude et froide de l'année en se basant sur une approche utilisée par les météorologistes et présentée dans Mraoua et Bari [12]. La détermination des deux saisons de l'année est d'une grande importance pour pouvoir calculer les indices météorologiques en fonction de seuils de référence dépendant saisonnières. Les résultats obtenus seront utilisés dans les chapitres 4 et 5.

Pour choisir les saisons qui représentent le mieux la période froide et celle chaude de l'année, on a tracé la courbe de la normale<sup>3</sup> des moyennes mensuelles de température à Casablanca-Anfa sur la période 1982–2011. Les résultats sont présentés sur Fig. 2.4.



**Fig. 2.4** – Evolution de la moyenne mensuelle des températures à Casablanca entre 1982 et 2011. La moyenne globale est de = 18.3 °C

On remarque que le début de la saison chaude commence vers la fin du mois de mai et se termine entre les mois d'octobre et novembre, et l'autre période répond aux critères du froid à la ville. Pour spécifier exactement le début et la fin de chaque saison, on a effectué sur Fig. 2.5 une classification hiérarchique à deux classes. Par conséquent, on définit les deux saisons de l'année comme suit

- Saison froide : de novembre à mai
- Saison chaude : de juin à octobre

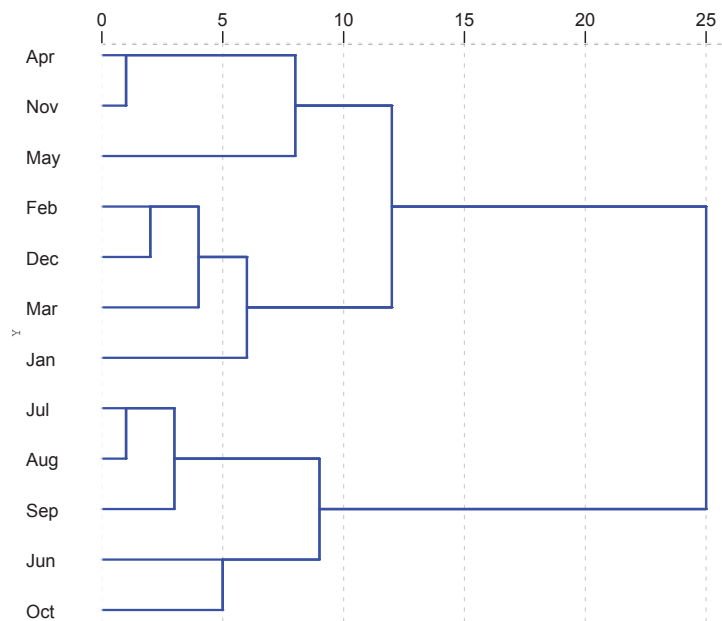
## 2.7 Conclusion

L'utilisation de données météorologiques de haute qualité est nécessaire pour la gestion du risque météorologique et l'évaluation juste des dérivés climatiques. Par conséquent, les données des stations météorologiques doivent être enregistrées et reportées en continu et avec précision. Cependant, malheureusement ce n'est pas toujours le cas car plusieurs données météorologiques souffrent d'inexactitude.

Dans ce chapitre, différentes techniques de nettoyage et de prétraitement des données météorologiques ont été présentées. Tout d'abord, les méthodes de reconstitution des valeurs manquantes ont été présentées. Ensuite, différentes approches pour identifier et corriger les valeurs erronées ont été discutées. Un intérêt particulier a été accordé à la méthode d'analyse en composante principale que nous avons utilisée pour reconstituer les données qui nous manquaient surtout pour la série de température de Casablanca (la plus longue série marocaine de températures quotidiennes dont nous disposons).

Nous avons par la suite présenté différentes méthodes pour identifier et modéliser les

3. Une normale climatologique au sens de l'OMM (Organisation météorologique mondiale) est la moyenne sur 30 années d'un paramètre météorologique donné.



**Fig. 2.5** – Classification hiérarchique de la moyenne mensuelle des températures à Casablanca entre 1982 et 2011

tendances sur les données de température. Nous avons tenté d’ajuster sept exemples de tendances à l’historique des indices HDD et CDD de la ville de Casablanca et nous avons montré comment les données réagissent à chaque tendance notamment en matière de calcul des deux premiers moments sur différents horizons de temps. L’effet de saisonnalité a été aussi examiné (par rapport aux températures quotidiennes). Nous avons essayé de le modéliser et d’en extraire la moyenne saisonnière basée sur les mesures quotidiennes des températures en utilisant la série de Fourier tronquée.

A la fin, nous avons déterminé les deux saisons chaude et froide en se basant sur une approche utilisée par les météorologistes. La détermination des deux saisons de l’année est cruciale pour le calcul des indices météorologiques en fonction de seuils de référence dépendant eux-mêmes de la saison (nous utilisons les résultats obtenus dans les chapitres 4 et 5.

## Références

- [1] Carole ALEXANDER : *Market models : A guide to financial data analysis*. John Wiley, 2001.
- [2] Antonis K. ALEXANDRIDIS et Achilleas D. ZAPRANIS : *Weather derivatives, Modeling and pricing weather-related risk*. Springer, 2013.
- [3] Amanda N. BARALDI et Craig K. ENDERS : An introduction to modern missing data analyses. *Journal of School Psychology*, 48:5–37, 2010.
- [4] Arthur P. DEMPSTER, Nan M. LAIRD et Donald D. RUBIN : Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the royal statistical society*, 39:1–38, 1977.
- [5] Robert S. DISCHEL, éditeur. *Climate Risk and the weather derivatives : Financial risk management with weather hedges*. Risk Books, 2002.

- 
- [6] Christian L. DUNIS et Jamshidbek JALILOV : Neural network regression and alternative forecasting techniques for predicting financial variables. *Neural network world*, 2:113–139, 2002.
- [7] Christian L. DUNIS et Vassilios KARALIS : Weather derivatives pricing and filling analysis for missing temperature data. *Derivative Use Trading Regulation*, 9:61–83, 2003.
- [8] James D. HAMILTON : *Time series analysis*. Princeton University Press, 1994.
- [9] Andrew C. HARVEY : *Forecasting structural time series models and the kalman filter*. Cambri, 1989.
- [10] Stephen JEWSON et Anders BRIX : *Weather derivative valuation, The meteorological, statistical, financial, and mathematical foundations*. Cambridge Univeristy Press, 2005.
- [11] Jung-Woo KIM et Yakov A. PACHEPSKY : Reconstructing missing daily precipitation data using regression trees and artificial neural networks for SWAT streamflow simulation. *Journal of Hydrology*, 394:305–314, 2010.
- [12] Mohammed MRAOUA et Driss BARI : Temperature stochastic modeling and weather derivatives pricing : Empirical study with morrocan data. *Afrika Statistika*, 2(1):22–43, 2007.
- [13] Fulufhelo V. NELWAMONDO, Dan GOLDING et Tshilidzi MARWALA : A dynamic programming approach to missing data estimation using neural networks. *Information Sciences*, 237:49–58, 2013.
- [14] Tinyiko R. NKUNA et John O. ODIYO : Filling of missing rainfall data in luvuvhu river catchment using artificial neural networks. *Physics and Chemistry of the Earth*, 36:830–835, 2011.
- [15] Joseph L. SCHAFER : *Analysis of incomplete multivariate data*. Chapman & Hall, 1997.
- [16] Sven SERNEELSA et Tim VERDONCKB : Principal component analysis for data containing outliers and missing elements. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52:1712–1727, 2008.
- [17] Beata WALCZAK et Désiré L. MASSART : Dealing with missing data : Part II. *Chemo-metrics and Intelligent Laboratory Systems*, 58:29–42, 2001.

## Chapitre 3

# Approches d'évaluation et modélisation de la température

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>63</b>
<b>3.2</b>	<b>Approche actuarielle</b>	<b>65</b>
<b>3.3</b>	<b>Approche Burn Analysis historique</b>	<b>65</b>
<b>3.4</b>	<b>Modélisation des indices climatiques</b>	<b>66</b>
<b>3.5</b>	<b>Modélisation des données quotidiennes</b>	<b>67</b>
<b>3.6</b>	<b>Autres approches</b>	<b>76</b>
<b>3.7</b>	<b>Étude de cas sur données marocaines</b>	<b>77</b>
<b>3.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>84</b>

---

Dans ce chapitre, nous passerons en revue les approches d'évaluation des dérivés climatiques de température. Nous y examinerons en détail les modèles les plus importants et les plus souvent cités dans la littérature pour décrire la dynamique de la température. Ainsi, les forces et les faiblesses des études préalables seront analysées afin de proposer un modèle approprié qui décrit le mieux la dynamique de la température et qui peut être utilisé dans la tarification de divers instruments dérivés de température. Plus précisément, les approches suivantes seront analysées : les méthodes actuarielles, la méthode Burn Analysis historique (HBA), la modélisation de l'indice sous-jacent et la modélisation de la dynamique quotidienne de la température. Certaines autres méthodes alternatives proposées dans la littérature seront aussi présentées et discutées. Enfin, nous réaliserons une étude de cas où le modèle que nous aurions adopté sera calibré sur des données marocaines.

### 3.1 Introduction

Les premières méthodes qui ont été utilisées pour l'évaluation des produits dérivés climatiques ont été inspirées de la théorie de l'assurance (Hinz [26]). On y trouve



notamment les deux méthodes de base qui sont la méthode actuarielle et la méthode dite Burn Analysis historique (HBA). Ces deux méthodes ont été utilisées pour calculer le prix d'un dérivé climatique ayant comme sous-jacent un indice de température sans avoir à modéliser la dynamique de la température. Les deux méthodes mesurent comment un dérivé de température reconstituerait les prix (éventuels) des années précédentes. Autrement dit, le payoff moyen (actualisé) qui a été calculé en se basant sur l'historique des années précédentes est considéré comme le payoff du dérivé transigé présentement. Ces méthodes sont qualifiées parfois de méthodes comptables.

A l'opposé des deux premières méthodes, il y a une autre famille de méthodes d'évaluation des dérivés climatiques traitant de la "modélisation de l'indice sous-jacent". Pour ces méthodes, on peut modéliser directement l'indice sous-jacent comme l'indice HDD, l'indice CDD, etc. Dans la littérature, quelques articles suggèrent que la modélisation de l'indice de température (HDD ou indice CDD) pourrait être plus approprié (Davis [17], Dorfleitner et Wimmer [20], Geman et Leonardi [24], Jewson et Brix [29]).

Une autre approche pour évaluer le processus d'évolution de la température est d'utiliser des modèles basés sur les températures quotidiennes. En règle générale, la modélisation de la température quotidienne fournit des résultats d'évaluation plus précis comparativement à l'approche qui modélise plutôt les indices (Jewson et Brix [29]). En effet, d'une part, la construction des indices fait perdre beaucoup d'informations suite au plafonnement par zéro des températures (cas des HDD et CDD par exemple). D'autre part, l'élaboration d'un modèle précis de la température quotidienne n'est pas un processus simple. Ainsi, les températures observées peuvent renseigner sur des effets tels que la saisonnalité, l'existence de tendances, le niveau des corrélations, l'amplitude de la variance entre autres. Cependant, le risque avec la modélisation quotidienne est que de petites erreurs de spécification dans les modèles peuvent conduire à une importante mauvaise évaluation des contrats de température (Jewson et Brix [29]).

Pour la modélisation de la température quotidienne, on distingue dans la littérature entre deux types de modélisation, les modèles discrets et les modèles continus. Pour le premier type de modèles, les modèles sont globalement basés sur des processus moyenne mobile autoregressifs (ARMA). On peut citer Campbell et Diebold [12], Cao et Wei [13, 14], Dupuis [22], Svec et Stevenson [38], Taylor et Buizza [39].

Les modèles continus de la température quotidienne ressemblent aux modèles avec retour à la moyenne (utilisés aussi bien en finance qu'en physique) et se présentent sous forme d'une équation différentielle stochastique (SDE) de diffusion. Le plus souvent, on ne peut pas trouver une formule fermée comme solution à la SDE. On recourt alors aux méthodes numériques (discrétisation et simulation Monte Carlo). On peut citer les contributions d'Alaton *et al.* [1], Benth [4], Benth et Saltyte-Benth [5, 6], Benth *et al.* [7], Brody *et al.* [10], Dischel [18, 19], Dornier et Queruel [21], Geman et Leonardi [24], Mraoua et Bari [32], Oetomo et Stevenson [34], Richards *et al.* [36], Schiller *et al.* [37], Zapranis et Alexandridis [43, 44].

## 3.2 Approche actuarielle

L'approche actuarielle pour l'évaluation des dérivés climatiques est une méthode empruntée au domaine de l'assurance et utilisant les techniques actuarielles d'évaluation des produits d'assurance. Dans le cadre d'une tarification actuarielle, on se base sur des séries de données (historiques) climatiques appropriées ainsi que sur des prévisions météorologiques afin de dégager la distribution de tous les résultats possibles pour le dénouement (règlement) du contrat de couverture basé sur l'indice sous-jacent (Jewson et Brix [29]). Par la suite, les données historiques sont utilisées pour calculer le payoff espéré du produit dérivé. Le payoff espéré est alors actualisé au taux sans risque pour déterminer le prix du produit dérivé.

Cette méthode est basée sur l'analyse statistique, et elle est moins applicable dans le cadre de contrats avec des variables sous-jacentes suivant des schémas prévisibles récurrents (Alexandridis et Zapranis [2]). Puisque c'est le cas pour la plupart des contrats de dérivés climatiques, l'analyse actuarielle n'est pas considérée comme la méthode de tarification la plus appropriée sauf si le contrat couvre des événements météorologiques rares comme le froid ou la chaleur extrêmes (phénomène du Chirgui au Maroc). En outre, le payoff espéré est estimé dans le monde réel (on n'utilise pas de mesures de probabilités risque-neutres), ce qui signifie que l'approche actuarielle ne peut être acceptée que lorsque le payoff espéré du produit dérivé est le même aussi bien dans le monde réel que dans le monde risque-neutre (Hull [28]).

## 3.3 Approche Burn Analysis historique

L'approche Burn Analysis historique (HBA) est une approche classique d'évaluation des dérivés climatiques permettant de faire des simulations basées sur les données historiques des variables climatiques traitées. Plus précisément, dans l'approche HBA, on considère que le payoff moyen des dérivés climatiques sur les  $n$  dernières années est calculé. Cette approche est souvent considérée comme une approche de benchmarking dont l'intérêt est de pouvoir permettre la comparaison entre les différentes approches d'évaluation des dérivés climatiques.

La principale hypothèse sur laquelle repose la méthode HBA est que l'historique de réalisation des payoffs d'un dérivé climatique permet d'avoir une idée précise sur la distribution des payoffs potentiels (Dischel [19]). Plus prosaïquement, la méthode HBA suppose que l'histoire se répète avec la même vraisemblance. Si le risque climatique est calculé comme l'écart-type des payoffs, alors le prix  $\pi(t)$  du contrat sera donné par

$$\pi(t) = B(t, T) \times (\mu \pm \lambda \cdot \sigma) \quad (3.1)$$

où  $B(t, T)$  est le facteur d'actualisation du payoff entre la maturité  $T$  et le moment  $t$  d'évaluation du contrat climatique,  $\mu$  la moyenne historique du payoff,  $\sigma$  l'écart-type historique du payoff et  $\lambda$  une constante positive de chargement du risque (mesure le niveau de tolérance du risque). Pour utiliser la méthode HBA, on utilise souvent en pratique des séries de données météorologiques de 10 à 30 ans d'historique (Cao et Wei [14]).

L'avantage majeur de cette méthode est sa facilité d'utilisation. En effet, pour calculer le prix d'un dérivé climatique, avec la méthode HBA, il n'est pas nécessaire

de connaître la distribution de la température ou de résoudre les équations différentielles stochastiques décrivant la dynamique de la température. En outre, la méthode HBA est basée sur très peu d'hypothèses. D'une part, la série temporelle de la variable sous-jacente température est supposée stationnaire et d'autre part, les données de différentes années sont supposées indépendantes et identiquement distribués (Alexandridis et Zapranis [2]).

Malheureusement, un examen approfondi des séries de données de la température montre qu'aucune de deux hypothèses citées précédemment n'est applicable. En effet, il est évident que les séries temporelles de température contiennent des saisonnalités, des sauts ainsi que des tendances (Zapranis et Alexandridis [43]). En outre, il est prouvé que la volatilité et la moyenne de la température n'est pas constante pour différentes longueurs d'observations historiques (Dischel [19]).

Tenant compte des inconvénients cités précédemment et sachant que l'approche HBA ne tient pas compte des prévisions, il en résulte que cette méthode est plutôt biaisée et inexacte. En outre, l'hypothèse selon laquelle les données provenant de différentes années sont indépendantes ne fait pas toujours l'unanimité (Moreno [31]). Toutefois, Jewson et Brix [29] suggèrent que ces hypothèses peuvent être admises si les données sont nettoyées et *detrendées* (élimination des tendances), bien que leurs résultats indiquent que l'évaluation reste encore imprécise.

D'autres méthodes, telles que la modélisation de l'indice sous-jacent et la modélisation des températures quotidiennes, sont considérées comme plus précises, mais la méthode HBA demeure généralement comme une première approximation acceptable du prix de l'instrument dérivé et est largement utilisée par les acteurs du marché. Enfin, comme c'était le cas de la méthode actuarielle, le prix de marché du risque lié à la température ne peut pas être estimé dans le cadre de la méthode HBA (Cao et Wei [14]).

### 3.4 Modélisation des indices climatiques

Les premiers travaux sur la modélisation directe de l'indice climatique sous-jacent se sont intéressés à la dynamique des indices HDD et CDD. Geman et Leonardi [24] ont examiné les propriétés statistiques l'indice HDD cumulé. Dans leur papier, elles ont présenté les résultats d'une modélisation des indices HDD et HDD cumulé portant sur 55 années d'observations de température à Paris. Elles ont relevé que, dans le cas de l'indice HDD sur les mois de décembre, l'hypothèse de la distribution normale est rejetée, alors que dans le cas de l'indice HDD cumulé des mêmes mois, l'hypothèse de normalité est acceptée. Elles ont conclut que la modélisation des HDD directement n'est pas appropriée.

Davis [17] a tenté de modéliser l'indice HDD cumulé à l'aide d'une équation différentielle stochastique continue. Plus précisément, l'indice HDD cumulé  $H(t)$  a été supposé régi par un processus stochastique log-normal ce qui permet d'écrire

$$\frac{dH(t)}{H(t)} = \alpha dt + \gamma dW_t \quad (3.2)$$

où  $\alpha$  est le drift du processus,  $\gamma$  sa volatilité et  $W_t$  un processus de Wiener.

À l'échéance  $T$ , Eq. 3.2 admet la solution suivante

$$H(t) = \exp(\zeta_t + \gamma W_t) \quad (3.3)$$

où  $\zeta_t$  est donné par

$$\zeta_t = \ln(H_0) + (\alpha - \frac{1}{2}\gamma^2)T \quad (3.4)$$

À partir d'une série de 11 années de données de température en provenance de la ville de Birmingham, en Royaume-Uni, Davis [17] a conclu que la modélisation de l'indice HDD cumulé  $H(t)$  comme un processus log-normal est commode, mais affecte le prix. En outre, le choix de la valeur initiale  $H_0$  peut affecter de manière significative les prix de l'option par  $\pm 10\%$ .

Par ailleurs, Jewson et Brix [29] ont testé les indices de température HDD, CDD et CAT sur différents sites aux États-Unis. Leurs résultats indiquent que presque toujours le test de normalité est accepté pour les contrats saisonniers. Cependant, pour de courtes périodes, l'hypothèse de normalité est souvent rejetée. En outre, Jewson et Brix [29] ont conclu qu'il y a très peu de littérature sur le choix de la distribution qui devrait être utilisée pour ajuster les indices sous-jacents. En conséquence, il y a une forte probabilité qu'une distribution non appropriée soit utilisée, et dans ce cas, de grandes erreurs seraient induites dans l'estimation des prix des dérivés climatiques.

Toujours selon Jewson et Brix [29], la plupart des praticiens des marchés des dérivés climatiques utilisent la modélisation des indices sous-jacents car elle est plus facile à comprendre. Partant de ce constat, Dorflleitner et Wimmer [20] ont récemment testé l'efficacité de la modélisation des indices sous-jacents dans la prévision des indices de température ainsi que pour l'estimation des prix des contrats à terme sur température. Deux modèles ont été testés, l'un incluant une tendance linéaire et l'autre sans tendance linéaire. Dans les deux modèles, les prévisions météorologiques ont été incluses. Leurs résultats indiquent que le modèle avec la tendance linéaire présente une meilleure capacité de prévision dans le cas des indices HDD et CDD, mais que le modèle sans tendance linéaire est meilleur pour la prévision du prix du contrat à terme sur la température. En d'autres termes, même si une tendance existe au niveau des indices HDD et CDD, les opérateurs du marché préfèrent utiliser un modèle plus simple et sans tendance.

### 3.5 Modélisation des données quotidiennes

Des études plus récentes utilisent des modèles dynamiques qui simulent directement le comportement futur de la température. Les modèles dynamiques estimés peuvent être utilisés pour déterminer la valeur des indices sous-jacents correspondants et ainsi permettre l'évaluation des différents produits dérivés climatiques sur la température.

L'utilisation des modèles pour décrire la dynamique des températures quotidiennes peut, en principe, permettre d'obtenir des prix plus précis que ceux obtenus en modélisant les indices de température directement. Les modèles relatifs aux températures quotidiennes<sup>1</sup> présentent le plus souvent une plus grande précision d'estimation

1. Dorénavant et tout au long de ce chapitre, nous parlerons de "modèles quotidiens" (ou de

comparativement à la méthode HBA (Jewson et Brix [29]). Ce dernier constat est dû au fait que la modélisation quotidienne fait un usage complet de toutes les données historiques disponibles. En revanche, le calcul direct d'un indice de température, tel que l'indice HDD, en le considérant comme un processus normal ou log-normal, fait perdre beaucoup d'information due à la fois aux événements courants qu'à ceux considérés comme extrêmes (à titre d'exemple, l'indice HDD est borné par zéro).

Il est clair que dans le cadre de l'utilisation de la modélisation directe des indices, différents modèles doivent être utilisés et estimés dépendamment de la nature de chaque indice sous-jacent. Or dans le cadre de la modélisation quotidienne, un seul modèle est nécessaire. Il est calibré aux données et peut être utilisé pour tous les contrats disponibles sur le marché couvrant un même site. De plus en utilisant un modèle quotidien, une représentation exacte de tous les indices et leur distribution peut être obtenue. Enfin, et contrairement à la modélisation des indices et à l'approche HBA, il est plus facile d'intégrer les prévisions météorologiques.

Cependant, dériver un modèle précis pour ajuster le comportement de la température quotidienne n'est pas une tâche facile. En effet, le risque avec la modélisation quotidienne est que les petites erreurs de spécification dans les modèles peuvent conduire à de grands écarts dans les prix des contrats de couverture climatiques.

Des études antérieures suggèrent que la modélisation des températures moyennes quotidiennes peut se faire en adoptant soit un processus discret soit un processus continu. Dans les sections suivantes, les modèles quotidiens de la température aussi bien discrets que continus proposés précédemment dans la littérature seront discutés.

### 3.5.1 Processus discrets

Une excellente revue de la littérature traitant des modèles discrets a été faite dans Alexandridis et Zapranis [2]. Nous rappelons dans cette section les modèles qui ont marqué le plus la modélisation des séries de températures quotidiennes. L'un des premiers modèles est un processus général  $AR(p)$  qui a été proposé par Carmona [15] et décrit la dynamique de la température quotidienne par

$$T_{i+1} = S_{i+1} + AR(p) \quad (3.5)$$

où  $T_i$  est la température quotidienne moyenne et  $S_i$  la température moyenne saisonnière.

Une amélioration du modèle donné en Eq. 3.5 a été apportée par Moreno [31] qui a proposé un modèle avec retour à la moyenne donné par

$$T_{i+1} = T_i + (S_{i+1} - S_i) + a(S_i - T_i) + \sigma_i \epsilon_i \quad (3.6)$$

où  $\sigma_i$  représente la volatilité de la variation des températures quotidiennes et les  $\epsilon_i$  sont iid et suivent une distribution normale standard  $N(0, 1)$ .

Moreno [31] a calibré son modèle sur deux sites en France, Paris-Orly et Marseille et a considéré que la volatilité n'est pas constante et qu'elle est saisonnière. Il l'a modélisé par

$$\sigma_i = 1 + \sin^2(\theta i + \beta) \quad (3.7)$$

---

“modélisation quotidienne”) pour désigner les modèles basés sur des observations quotidiennes de la variable sous-jacente température.

où  $\theta$  et  $\beta$  sont, respectivement, la période et la phase du processus  $\sigma$ .

Moreno [31] a comparé les deux modèles donnés en Eqs. 3.5 et 3.6 et a étudié plus spécifiquement la distribution des résidus. Il a trouvé que la distribution des résidus pour différentes périodes n'est pas la même et a conclu que cette distribution n'est pas constante sur l'année. Par conséquent les deux modèles présentés ne peuvent pas être utilisés pour simuler le processus d'évolution de la température moyenne quotidienne.

Cao et Wei [13] se sont également intéressés à l'utilisation des processus de diffusion dans la modélisation de la température. L'utilisation des processus de diffusion à un facteur ne peut pas intégrer l'auto-corrélation de la température, alors même qu'il y ait une possibilité qu'un chemin de température simulée ne ressemblerait pas à un vrai. Cao et Wei [13] suggèrent un processus discret pour capturer les caractéristiques uniques de l'indice DAT. En étudiant des données de température, Cao et Wei [13] et Cao et Wei [14] ont basé leur cadre de modélisation sur les cinq hypothèses suivantes concernant l'indice DAT :

- Il suit un cycle prévu.
- Il se déplace autour d'une moyenne de saison.
- Il est affecté par le réchauffement climatique et les effets urbains.
- Il semble avoir des variations autorégressives.
- Sa volatilité est plus élevée en hiver qu'en été.

Si on note  $T_{a,t}$  la température à la date  $t$  durant l'année  $a$ , alors la variable  $U_{a,t}$  représentant la température quotidienne dont la moyenne et la tendance ont été retirées est donnée par

$$U_{a,t} = T_{a,t} - \widehat{T}_{a,t} \quad (3.8)$$

où  $\widehat{T}_{a,t}$  est la température moyenne ajustée sur la base de l'historique des observations quotidiennes de température et

$$\bar{T}_t = \frac{1}{m} \sum_{a=1}^m T_{a,t} \quad (3.9)$$

est la température moyenne à une date donnée portant sur  $m$  années. Cao et Wei [13] ont utilisé un système d'auto-corrélation à  $k$ -retards pour présenter les résidus de la série de la température quotidienne tels que

$$U_{a,t} = \sum_{i=1}^k \rho_i U_{a,t-i} + \sigma_{a,t} \epsilon_{a,t} \quad (3.10)$$

$$\sigma_{a,t} = \sigma - \sigma_1 \left| \sin \left( \frac{\pi t}{365} + \varphi \right) \right| \quad (3.11)$$

où  $\rho_i$  est le coefficient d'auto-corrélation pour le  $i$ ème décalage,  $\epsilon_{a,t}$  les résidus iid et distribués suivant une loi normale standard et  $\sigma_{a,t}$  la volatilité. Les paramètres peuvent être estimés en utilisant le maximum de vraisemblance (MLE).

Le modèle précédent est facile à estimer et capture les caractéristiques de la température telles que la saisonnalité au niveau de la moyenne et de la volatilité, l'auto-corrélation ainsi que les variations inégales tout au long de l'année (Alexandridis et Zapanis [2]). Par ailleurs, les prévisions météorologiques peuvent aussi être utilisées

pour améliorer la prévisibilité du modèle. Cependant, comme Cao et Wei [13] le précisent, le modèle précédent ne peut probablement pas être utilisé pour couvrir de longues périodes de prévisions tout en assurant une précision quotidienne.

Dans un article plus récent, Cao et Wei [14] ont adapté le cadre proposé par Lucas [30] afin de disposer d'un cadre d'évaluation pour les dérivés de température et pour étudier le prix de marché du risque. Leurs résultats indiquent que le prix de marché du risque associé à la température est important et que ce prix affecte les valeurs des options beaucoup plus que les prix à terme et ce en raison des spécifications du payoff.

En 2005, Campbell et Diebold [12] ont étendu le modèle proposé par Cao et Wei [13]. Ils ont utilisé une série de Fourier d'ordre faible avec des retards autorégressifs pour modéliser la température moyenne saisonnière. En outre, la variance conditionnelle est autorisée à afficher et la saisonnalité de la variance et les effets autorégressifs :

$$T_t = S_t + \sum_{l=1}^L \rho_{t-l} T_{t-l} + \sigma_t \epsilon_t \quad (3.12)$$

où

$$S_t = \alpha + \beta t + \sum_{p=1}^P \left( \delta_{c,p} \cos\left(\frac{2\pi p t}{365}\right) + \delta_{s,p} \sin\left(\frac{2\pi p t}{365}\right) \right) \quad (3.13)$$

$$\sigma_t^2 = \sum_{q=1}^Q \left( \gamma_{c,q} \cos\left(\frac{2\pi q t}{365}\right) + \gamma_{s,q} \sin\left(\frac{2\pi q t}{365}\right) \right) + \sum_{r=1}^R \alpha_r \epsilon_{t-r}^2 \quad (3.14)$$

$$\epsilon_t \text{ sont } iid \text{ et } \sim N(0, 1) \quad (3.15)$$

En utilisant des séries de Fourier en Eqs. 3.13 et 3.14, Campbell et Diebold [12] ont produit un modèle saisonnier lisse tout en réduisant considérablement le nombre de paramètres qui doivent être estimés. Le modèle donné par Eq 3.12 incorpore une tendance linéaire qui reflète des dynamiques comme le réchauffement climatique ou les effets urbains au voisinage d'une station météorologique. Les paramètres  $L$  et  $P$  sont estimés sur la base des critères d'Akaike et de Schwarz. Campbell et Diebold [12] ont utilisé des données de températures quotidiennes entre 1960 et 2001 pour estimer le système donné par Eqs. 3.12, 3.13, 3.14 et 3.15 au niveau de dix localités situées aux USA. L'importante valeur estimée  $L = 25$  révèle une longue mémoire dans la dynamique de la température, et la valeur estimée de  $R = 1$  révèle des effets auto-régressifs dans la variance. Le fait que  $L = 25$  exige l'utilisation de grands ensembles de données pour bien estimer les paramètres du modèle.

Par ailleurs, de nombreuses études empiriques (Benth et Saltyte-Benth [6], Carmona [15]) ont montré qu'une généralisation des modèles précédents à des modèles de type autoregressif avec moyenne mobile (ARMA) n'apporte pas une grande valeur ajoutée par rapport à des modèles de type AR. En effet, ces études montrent que dans le cadre d'observations quotidiennes des températures moyennes, un modèle ARMA se réduit à un simple modèle AR(3). La partie saisonnière  $S_t$  quant à elle a seulement les deux premiers volets de la série de Fourier.

Sur un autre registre, Tol [40] a trouvé des résultats montrant que la volatilité de la température n'est pas constante mais présente une certaine variabilité systématique. Par conséquent, il propose un modèle autorégressif généralisé conditionnellement

hétéroscédastique (GARCH) et l'a utilisé pour capturer cette fonctionnalité dans les données de température des Pays-Bas.

Franses *et al.* [23] proposent quant à eux un modèle GARCH non linéaire pour la dynamique de la température hebdomadaire aux Pays-Bas. Leurs résultats indiquent une forte asymétrie de la volatilité et que le modèle GARCH non linéaire surpasse le modèle GARCH linéaire.

Taylor et Buizza [39] ont étendu les travaux de Franses *et al.* [23] et ceux de Tol [40] en utilisant une série de Fourier d'ordre faible afin de modéliser la saisonnalité  $S_t$ , comme dans les travaux de Campbell et Diebold [12]. Ils ont utilisé seulement 5 ans de DAT du Royaume-Uni pour tester la capacité de prévision d'un modèle AR-GARCH et d'un modèle atmosphérique. Le modèle AR-GARCH est donné par

$$T_t = S_{\mu,t} + \varphi T_{t-l} + \epsilon_t \quad (3.16)$$

$$\epsilon_t = \sigma_t \eta_t \quad (3.17)$$

$$\sigma_t^2 = S_{\omega,t} + \alpha(\epsilon_{t-1} - S_{\gamma,t})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \quad (3.18)$$

$$S_{\lambda,t} = \lambda_0 + \lambda_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + \lambda_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + \lambda_3 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + \lambda_4 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right) \quad (3.19)$$

où  $T_t$  est la température,  $\epsilon_t$  un terme d'erreur,  $\sigma_t$  l'écart-type conditionnel (volatilité),  $\eta_t$  un terme d'erreur *iid*,  $\varphi$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  des paramètres scalaires et  $\mu$ ,  $\omega$  et  $\gamma$  des vecteurs de paramètres.

Plus récemment, Svec et Stevenson [38] ont comparé différents modèles pour la modélisation et la prévision des DAT. Plus particulièrement, ils ont comparé un modèle basé sur les données intra-journalières et deux modèles journaliers en se basant sur une transformation de Fourier de la température ainsi que sur une transformation de Fourier basée sur des ondelettes reconstruites. Ces modèles sont en fait une modification du modèle initialement proposé par Campbell et Diebold [12]. L'ensemble de données qui a été utilisé couvre la période allant de 1997 à 2005, et leurs résultats indiquent que les modèles modifiés surpassent le modèle original. Enfin, Svec et Stevenson [38] ont testé leurs données pour la fractionalité, et leurs estimations indiquent que les séries de données DAT de la ville de Sydney ne présentent pas de mémoire longue.

### 3.5.2 Processus continus

Les processus continus utilisés pour la modélisation de la température moyenne quotidienne prennent généralement la forme d'un processus avec retour à la moyenne, qui doit être discrétisé afin d'estimer ses différents paramètres. Une fois que les paramètres du processus sont estimés, on peut alors évaluer tout produit dérivé en calculant l'espérance actualisée de son payoff futur. Compte tenu de la forme complexe du processus et la nature de la majorité des payoffs qui dépend du chemin suivi, la formule d'évaluation n'a pas généralement une forme *fermée*. Dans ce cas, on recourt à la technique de la simulation Monte Carlo (MC). Cette technique se base, généralement, sur la génération d'un grand nombre de scénarios simulés d'indices météorologiques pour déterminer les payoffs possibles du dérivé climatique. Le juste prix du produit dérivé est alors la moyenne de tous les payoffs simulés, convenablement actualisés pour prendre en compte la valeur temps de l'argent. La précision



de l'approche MC dépend du bon choix du processus de la température et de l'importance de l'historique des données météorologiques disponibles (Alexandridis et Zapranis [2]).

Du fait que les séries de température présentent une saisonnalité forte et claire, la plupart des modèles déjà proposés dans la littérature relative à l'évaluation des dérivés climatiques font usage de processus stochastiques avec retour à la moyenne. La plupart des modèles sont inspirés des modèles de retour à la moyenne de la famille des processus d'Ornstein-Uhlenbeck (O-U) qui se présentent sous la forme suivante :

$$dT(t) = dS(t) - \kappa(T(t) - S(t))dt + \sigma(t)dB(t) \quad (3.20)$$

où  $T$  est la température,  $\kappa$  la vitesse de retour à la moyenne,  $S(t)$  une fonction déterministe modélisant la tendance et la saisonnalité,  $\sigma(t)$  la volatilité quotidienne des variations de température et  $B(t)$  le processus de bruit.

Dischel [18] est le premier à avoir proposé un modèle stochastique continu. Le marché des dérivés climatiques est considéré comme un marché incomplet puisque, sur ce marché, la température ne peut être ni stockée ni négociée. Par ailleurs, les dérivés climatiques sont différents des autres produits dérivés financiers en ce sens que l'indice météorologique sous-jacent (HDD, CDD, CAT, etc) ne peut être négocié. En outre, le marché correspondant est relativement illiquide. Par conséquent, les dérivés climatiques ne peuvent pas être répliqués par d'autres produits dérivés, ainsi, on ne peut pas appliquer à ces produits l'approche d'évaluation par l'arbitrage, tout au moins directement.

Lorsque le marché est incomplet, les prix ne peuvent pas être tirés en appliquant la condition de non-arbitrage, car il n'est pas possible de répliquer le payoff d'un produit dérivé donné en utilisant un portefeuille contrôlé de titres élémentaires. Par conséquent, l'approche classique d'évaluation selon Black-Scholes-Merton, qui est fondée sur des arguments de non-arbitrage, ne peut être directement appliquée. Aussi, l'incomplétude du marché n'est pas la seule raison. En effet, les indices météorologiques sous-jacents ne suivent pas le modèle de la marche aléatoire (comme c'est le cas dans le cadre de l'évaluation selon l'approche de Black-Scholes) et les payoffs des dérivés climatiques sont déterminés par des indices qui sont des quantités moyennes, tandis que le payoff selon Black-Scholes est déterminé par la valeur du sous-jacent et ce exactement à la date d'échéance du contrat (options européennes).

Dischel [18] propose le processus suivant pour décrire la dynamique de la température :

$$dT(t) = (\kappa S(t) + \beta T(t))dt + \gamma\tau(t)dz_1 + \delta\sigma(t)dz_2 \quad (3.21)$$

où  $S(t)$  est à la moyenne arithmétique de la température moyenne saisonnière telle que  $S(t) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m T_{i,t}$ .

$S(t)$  représente la température moyenne à une date donnée et ce en couvrant toutes les années de l'ensemble de données. Selon Dischel [18],  $S(t)$  représente aussi le paramètre de retour à la moyenne, tandis que  $\kappa$  désigne la vitesse du retour à cette même moyenne considérée comme constante. La partie aléatoire du processus est donnée par la seconde partie de Eq. 3.21,  $\gamma\tau(t)dz_1 + \delta\sigma(t)dz_2$  où  $dz_1$  et  $dz_2$  désignent des processus de Wiener correspondant, respectivement, à la distribution de la température  $T(t)$  et à la distribution des variations de température  $\Delta T(t)$ . Dischel [18] ne fait aucune hypothèse sur les distributions  $dz_1$  et  $dz_2$  et tente de les extraire par bootstrapping des données antérieures.

Parce que les modèles à deux paramètres peuvent devenir très instables, la simulation stochastique a été limitée aux changements de température seulement. En utilisant les différences finies, Eq. 3.21 peut être réécrite comme

$$T_{n+1} = \alpha S_{n+1} + \beta T_n + \gamma \Delta T_{n,n+1} \quad (3.22)$$

où  $\Delta T_{n,n+1}$  sont les changements à terme choisis aléatoirement.

Dornier et Queruel [21] ont utilisé un modèle ARMA plus général que le modèle AR(1) proposé par Dischel [18]. Même s'ils sont d'accord avec l'utilisation d'un modèle avec retour à la moyenne, ils émettent des réserves quant à l'utilisation directe du modèle de Hull et White [27]. Ils prouvent que le modèle proposé par Dischel [18] est un modèle de retour à la moyenne mais qu'il revient toutefois à une valeur différente de la moyenne historique. La seule possibilité pour avoir un processus ayant une moyenne  $S(t)$  en utilisant le modèle donné par Eq. 3.22 est de considérer  $S(t)$  comme une constante. Cependant, la saisonnalité de la température quotidienne n'est clairement pas constante. De plus, ils montrent que ceci peut être corrigé par l'addition du terme  $dS(t)$  dans Eq. 3.22 où  $dS(t)$  est le changement dans les variations saisonnières.

Cela signifie que la température d'aujourd'hui ne dépend pas seulement de la veille mais dépend aussi des jours d'avant-hier. En outre, dans leur modèle, Dornier et Queruel [21] permettent à la volatilité de changer entre les saisons, mais dans leur analyse, ils la considère comme une constante.

Alaton *et al.* [1] ont amélioré le modèle de Dischel [18] et ce en se basant sur le modèle présenté dans Eq. 3.20 et qui a été proposé par Dornier et Queruel [21]. En outre, ils intègrent des saisonnalités à la moyenne en utilisant une fonction sinusoïdale. Nous reviendrons dans la section 3.7 sur ce modèle plus en détail. Dans la même section, nous allons apporter une amélioration à ce modèle que nous allons, par la suite, calibrer sur des données marocaines.

Torro *et al.* [41] ont adapté des modèles de taux d'intérêt en élargissant le cadres de modélisation de Bali [3]. leur modèle est basé sur l'indice DAT relatif à la température en Espagne. C'est un modèle général à un seul facteur qui capture la saisonnalité, le retour à la moyenne, les structures GARCH de la volatilité ainsi que les relations entre la volatilité et les niveaux de température. Le modèle se présente sous la forme suivante :

$$dT(t) = (S(t) + \alpha_2 T(t))dt + \sigma(t)dz \quad (3.23)$$

où

$$\sigma(t) = \psi(t)T(t)^\gamma \quad (3.24)$$

la saisonnalité a été modélisée comme selon Alaton *et al.* [1] par une fonction sinusoïdale  $S(t)$  telle que

$$S(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega t + \phi) \quad (3.25)$$

et  $\psi(t) = \psi_t$  représente les changements structurels dans la volatilité capturée par le modèle GARCH lui-même décrit par

$$\psi_{t+1}^2 = \beta_0 + \beta_1 \epsilon_t^2 + \beta_2 \psi_t^2 \quad (3.26)$$

Il est clair que Torro *et al.* [41] n'ont pas inclus une tendance qui représenterait le réchauffement climatique ou urbain. En outre, le modèle donné en Eq. 3.23 ne

revienne pas à la valeur appropriée, selon Dornier et Queruel [21], puisque le terme  $dS(t)$  n'a pas été inclus.

Brody *et al.* [10] quant à eux soutiennent l'utilisation du mouvement brownien standard (BM). Bien que les variations de température sont distribuées normalement, une décroissance lente de l'ACF de la température peut être toutefois observée, ce que le BM ne parvient pas à capturer. Pour surmonter ce problème, un mouvement brownien fractionnaire (FBM) est proposé pour le bruit du modèle. FBM est un processus stochastique qui présente une dépendance à long terme sans impliquer de manière significative les équations de valorisation d'un future ou une d'une option climatiques. Les modèles FBM sont les analogues continus des modèles ARFIMA proposés par Caballero *et al.* [11].

Comme son nom l'indique, FBM est une version modifiée générale d'un BM standard qui dépend de l'exposant de Hurst  $H$ . L'exposant de Hurst  $H$ , détermine le niveau des corrélations des incréments. Lorsque  $H > \frac{1}{2}$ , la corrélation est positive, alors que lorsque  $H < \frac{1}{2}$ , la corrélation est négative. Si  $H = 0$  alors la corrélation est nulle, et on retrouve le BM standard.

Si on remplace le processus de bruit par un FBM, l'équation stochastique pour les DAT peut être écrite comme

$$dT(t) = \kappa(t)(S(t) - T(t))dt + \sigma(t)dB^H(t) \quad (3.27)$$

où  $0 < H < 1$ .

La saisonnalité de la moyenne et de la volatilité est capturée par des fonctions sinusoidales semblables à celles proposées par Alaton *et al.* [1] et Torro *et al.* [41].

Par ailleurs, le paramètre  $\kappa(t)$  n'est pas limité à une valeur constante comme dans les études précédentes, mais il est plutôt représenté par une fonction déterministe bornée. Le fait que  $\kappa(t)$  varie dans le temps implique qu'il y a un effet de saisonnalité dans l'évolution de la vitesse de retour à la moyenne. Toutefois, Brody *et al.* [10] supposent  $\kappa$  constant, et ne procèdent pas à l'examen de sa dynamique temporelle. Enfin, le facteur  $dS(t)$  aurait dû être ajouté au modèle pour que la température revienne à sa moyenne saisonnière.

Dans leurs travaux, Brody *et al.* [10] ont traité des données de température quotidienne du Centre du Royaume-Uni couvrant la période 1772-1999. Contrairement aux études précédentes qui font habituellement usage de 5 à 40 ans de données, Brody *et al.* [10] ont utilisé un échantillon beaucoup plus grand. On s'attend à ce que les mesures effectuées au cours des 200 dernières années ne seraient probablement pas en mesure de décrire la dynamique de la température des prochaines années (Dischel [19]). L'utilisation d'un très large échantillon de données historiques de DAT peut induire le risque selon lequel les paramètres estimés pourraient être touchés par une dynamique de la température qui ne représente pas le comportement futur de la température. Brody *et al.* [10] ont mis en évidence l'existence de fractionalité de la température car leur estimation de l'exposant de Hurst a donné  $H = 0.61$ . Cependant, l'analyse aurait dû être effectuée après que toutes les saisonnalités aient été supprimées de la série des données (Benth [4]).

Benth [4] a utilisé les résultats de Brody *et al.* [10] comme point de départ pour trouver des formules d'évaluation de dérivés climatiques de température basées sur l'approche de non arbitrage. Il a utilisé un modèle FBM avec un exposant de Hurst

compris entre 0.5 et 1 pour modéliser la dynamique de l'indice DAT. Benth [4] a prouvé d'abord que le prix des dérivés de température ne permet pas d'opportunité d'arbitrage si l'on utilise une espérance conditionnelle. Ensuite, il a calculé les prix pour les contrats européens et asiatiques. Ses résultats indiquaient que les formules d'évaluation théorique trouvées en utilisant un modèle FBM ne sont pas fonction de  $T - t$  comme cela aurait été le cas dans le cadre d'une modélisation BM. Plus précisément, le prix du produit dérivé de température ne dépend plus du temps à l'échéance  $T - t$ , mais plutôt du temps courant  $t$  et de la maturité  $T$  pris séparément.

Dans un papier plus récent, Benth et Saltyte-Benth [5] ont ajusté des données norvégiennes en modélisant les variations de l'indice DAT avec un modèle de retour à la moyenne de type O-H tout en décrivant le bruit par un processus de Lévy généralisé hyperbolique. A la place du modèle FBM utilisé dans leurs études précédentes, ils ont étendu dans ce travail le modèle de Dornier et Queruel [21]. En outre, ils étaient en accord avec Brody *et al.* [10] sur le fait de ne pas effectuer d'analyse fractionnaire des résidus de leur modèle de régression. Comme dans les études précédentes, une fonction sinusoïdale a été utilisée pour décrire la saisonnalité. La volatilité saisonnière a pris une forme continue tout en gardant une cyclicité annuelle, et s'écrit comme

$$\sigma(t) = \sigma(t + k \cdot 365) \quad (3.28)$$

où  $t = 1, \dots, 365$  et  $k = 1, 2, 3, \dots$

En définitive, le modèle de Benth et Saltyte-Benth [5] s'écrit comme suit

$$dT(t) = dS(t) + \kappa(T(t) - S(t))dt + \sigma(t)dL(t) \quad (3.29)$$

où  $L(t)$  est un processus de bruit de Lévy.

Les distributions de type Lévy sont des processus flexibles qui prennent en compte la largeur des queues de la distribution ainsi que l'effet skewness. Ces deux effets sont souvent observée dans les séries temporelles de température. Par ailleurs, la nature même de la distribution ne permet pas de déduire une forme fermée de la solution de Eq. 3.29. Benth et Saltyte-Benth [5] confirment l'existence de queues larges et d'effet de skewness dans les données norvégiennes. En outre, ils n'ont pas trouvé de tendance linéaire significative. C'est probablement le résultat de l'utilisation d'un petit ensemble de données de seulement 13 années d'historique. Aussi, Benth et Saltyte-Benth [5] ont examiné si le paramètre  $\kappa$  est une constante ou une fonction variant dans le temps. Plus précisément  $\kappa$  est supposé être une fonction définie par une valeur constante pendant un mois ou un an. Contrairement à Brody *et al.* [10], ils n'ont trouvé aucune dépendance temporelle significative ou variation mensuelle ou annuelle. Encore une fois, ce constat est probablement le résultat de l'utilisation d'un petit ensemble de données ou de la calibration de leur modèle sur une base mensuelle ou annuelle.

Benth et Saltyte-Benth [5] ont retiré la saisonnalité de la volatilité, mais ils ont constaté que les premiers retards des résidus restants sont encore significativement corrélés. Ils ont suggéré qu'une série chronologique de moyenne mobile ou un modèle GARCH pourrait supprimer cet effet mais ils n'ont pas procédé à l'estimation d'un tel modèle.

Benth *et al.* [7] dans un travail plus récent ont utilisé 40 années de données pour modéliser l'indice DAT au niveau de la ville de Stockholm en Suède. Afin de se

concentrer sur l'évaluation des dérivés climatiques par l'utilisation d'une formule fermée, Benth *et al.* [7] ont utilisé un BM comme processus pour le bruit de leur modèle. Plus précisément, ils ont utilisé un processus avec retour à la moyenne de type O-U où le bruit est représenté par un simple BM comme en Eq. 3.20. Dans leur étude, le paramètre vitesse de retour à la moyenne,  $\kappa$ , a été considéré comme constant et aussi bien la moyenne saisonnière que la volatilité quotidienne des variations de température ont été modélisées par des séries de Fourier tronquées.

### 3.6 Autres approches

Étant donné que le marché des dérivés climatiques est un exemple classique de marché incomplet, les méthodes standards de valorisation ne peuvent pas être appliquées. En conséquence, de nombreuses méthodes alternatives ont été proposées dans la littérature.

Zeng [45] a discuté les limites des méthodes actuarielles qui proviennent des propriétés statistiques des indices météorologiques. Comme alternative, il a proposé une méthode MC modifiée, appelée méthode MC d'échantillonnage biaisé. L'idée de Zeng [45] est de prendre avantage des prévisions saisonnières pour une variable climatique sous-jacente (température, précipitations, etc.). En notant  $p_A$ ,  $p_N$  et  $p_B$  les probabilités que la variable climatique sous-jacente soit au-dessus, près ou au-dessous de la norme climatique, il est admis d'approximer les probabilités que l'indice correspondant (par exemple, CDD ou HDD) sera au-dessus, près ou en dessous de la norme de climat, respectivement. Les résultats obtenus de plus de 250 stations météorologiques indiquaient que cette hypothèse est justifiée (Zeng [45]). Dans la démarche qu'il avait proposé, Zeng [45] commence par ajuster une distribution normale à l'indice climatique historique. Ensuite, les observations historiques sont triées et divisées en trois groupes : les 33% les plus élevées, les 34% du milieu et les 33% les plus faibles. Ensuite, des échantillons sont prélevés à partir des trois groupes avec remplacement proportionnellement aux probabilités  $p_A$ ,  $p_N$  et  $p_B$ . Toutefois, l'hypothèse selon laquelle les indices CDD ou HDD suivent la distribution normale est en contradiction avec les résultats de Geman et Leonardi [24].

Platen et West [35] ont utilisé un cadre de valorisation équitable (*fair pricing framework*) dans le cadre de l'approche de benchmark pour évaluer les dérivés climatiques. Plus précisément, le portefeuille optimal de croissance qui est interprété comme un indice boursier mondial est utilisé comme un indice de référence (benchmark). Le cadre de Platen et West [35] est basé sur l'hypothèse selon laquelle le marché climatique est liquide. Or, le marché des dérivés climatiques est encore un marché émergent et il est définitivement illiquide (Platen et West [35] et Brockett *et al.* [9]).

En raison de l'absence d'un marché secondaire liquide pour les dérivés climatiques, Brockett *et al.* [9] ont utilisé la méthode de valorisation par indifférence pour évaluer les dérivés climatiques tout en tenant compte des effets de portefeuille. Dans ce cadre, une limite supérieure du prix d'un dérivé climatique est considérée comme le prix auquel un acheteur est indifférent, en termes d'utilité espérée, entre acheter et ne pas acheter le contrat de couverture. Brockett *et al.* [9] ont utilisé une fonction d'utilité moyenne-variance  $u(\cdot)$  telle que

$$u(x) = E(x) - \lambda\sigma^2(x) \quad (3.30)$$

où  $\lambda$  est une constante positive représentant le paramètre d'aversion au risque. Il est clair que le choix de la fonction d'utilité  $u(\cdot)$  ainsi que la valeur du paramètre d'aversion au risque  $\lambda$  affecte considérablement les prix.

Xu *et al.* [42] ont étendu le cadre proposé par Brockett *et al.* [9]. Ils n'approuvent pas l'utilisation de la méthode HBA car elle ne repose pas vraiment sur une base théorique solide et sont en désaccord avec l'introduction des modèles d'équilibre car ils se basent sur des hypothèses simplificatrices. Dans le cadre moyenne-variance, une fonction d'utilité exponentielle a été utilisée ayant la forme suivante :

$$u(x) = -e^{-\lambda x} \quad (3.31)$$

où  $\lambda$  est le paramètre d'aversion au risque considéré comme positif.

Il faut noter toutefois que les hypothèses simplificatrices faites par Xu *et al.* [42] réduisent le modèle à une simple interprétation actuarielle.

Il est clair que la maximisation dans le cadre de l'utilité espérée est souvent proposée dans la littérature. Toutefois, les fonctions d'utilité sont beaucoup dépendantes de la préférence et sensibles au choix du paramètre de l'aversion au risque (Carr *et al.* [16]). En outre, l'utilisation des prévisions de température avec une fonction d'utilité pour estimer la courbe de la demande pour le dérivé réduit la méthodologie proposée à une simple utilisation des prévisions (Campbell et Diebold [12] et Oetomo et Stevenson [34]).

## 3.7 Étude de cas sur données marocaines

Dans cette section, nous allons réexaminer le modèle proposé par Alaton *et al.* [1] (cf. section 3.5). Il s'agit d'un modèle stochastique qui décrit la dynamique de la température selon un processus de type Ornstein-Uhlenbeck. Nous allons améliorer ce modèle en y incorporant une volatilité stochastique. Par la suite, nous allons calibrer notre nouveau modèle sur les données de quatre villes marocaines. Le modèle va être discrétisé et des simulations vont être réalisées en se basant sur la méthode de Monte Carlo.

### 3.7.1 Données

Nous avons considéré la température moyenne quotidienne,  $T_t$ , pour quatre villes marocaines (Casablanca, Essaouira, Marrakech, Safi) de janvier 1971 à décembre 2007.  $T_t$  a été calculée à partir des données quotidiennes extrêmes (Table 3.1). Les températures quotidiennes maximale  $T_t^{max}$  et minimale  $T_t^{min}$  (en degrés Celsius) de la journée en cours  $t$  sont, respectivement, mesurées entre  $t-1$  (hier) à 18 heures et  $t$  à 18 heures pour la température minimale et, entre  $t$  à 6 heures et  $t+1$  (lendemain) à 6 heures pour la température maximale. La température moyenne de la journée  $t$  est alors donnée par  $T_t = (T_t^{max} + T_t^{min})/2$ .

Nous rappelons les des indices de température. On définit  $HDD(t) = \max(T_r - T_t, 0)$  et  $CDD(t) = \max(T_t - T_r, 0)$  pour chaque jour  $t$ , respectivement, comme une mesure du froid durant l'hiver et du chauffage durant l'été.  $T_r$  est une température de référence.

En se basant sur le rapport relatif au zonage climatique au Maroc [33], nous constatons que la température de référence dépend de la saison et elle est de 18 °C pour la saison froide et de 21 °C pour la saison chaude. Pour calculer les HDD et CDD, nous devons déterminer les saisons chaude et froide durant l'année. Pour cela, nous utilisons l'approche présentée par Mraoua et Bari [32] (cf. section 2.6). Ainsi, nous considérons que la période chaude commence en juin et se termine en octobre et la période froide quant à elle, débute en novembre et se termine en mai.

**Table 3.1**

Statistiques descriptives de la température quotidienne moyenne de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (1971–2007)

	Casablanca	Essaouira	Marrakech	Safi
Identifiant OMM <sup>a</sup>	60155	60220	60230	60185
Nombre d'observations	13514	13514	13514	13514
Moyenne	17.56	17.51	19.73	18.19
Maximum	35.50	31.70	38.20	36.40
Minimum	5.90	8.80	2.20	5.60
Écart-type	4.14	2.55	6.38	4.54
Skewness	0.09	0.21	0.30	0.38
Kurtosis	2.25	3.74	2.26	2.77
Jarque-Bera	338*	413*	514*	354*

Le test de Jarque-Bera vérifie l'hypothèse nulle de normalité dans la distribution échantillonnale des températures.

\* indique un rejet de l'hypothèse nulle pour un seuil de signification de 1%.

<sup>a</sup> Organisation météorologique mondiale.

La façon la plus conventionnelle pour quantifier la variable sous-jacente température est de considérer le cumul des degrés-jour. Par conséquent, la valeur du sous-jacent d'un contrat sur cumul de HDD (respectivement, un contrat sur cumul de CDD) à tout instant  $t$  est donnée, respectivement, par  $H_t = \sum_{i=0}^t HDD(i)$  et  $C_t = \sum_{i=0}^t CDD(i)$  où  $t = 0, \dots, T$ .

### 3.7.2 Modélisation de la température

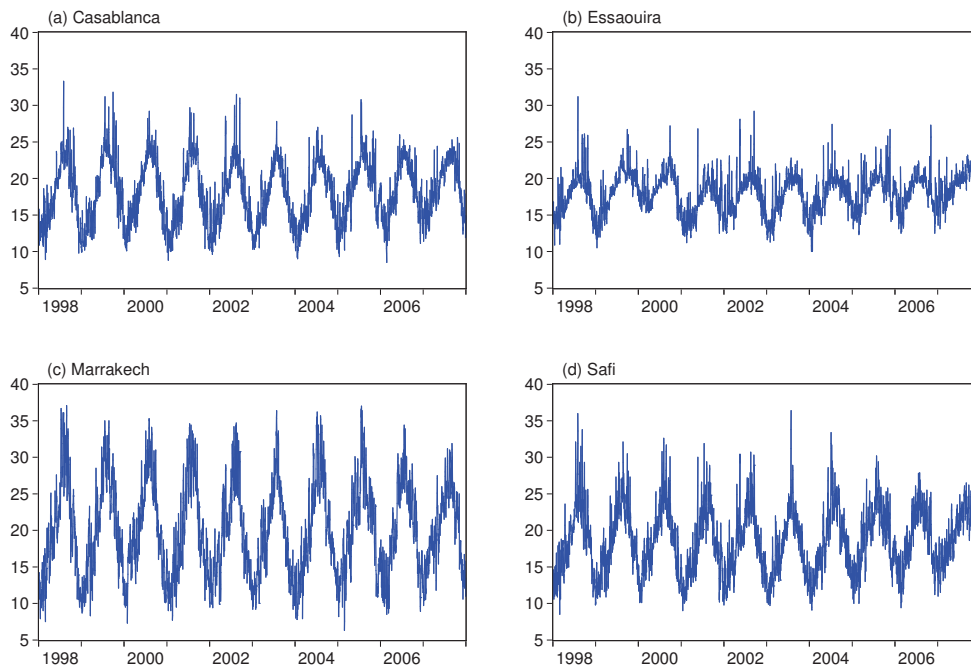
#### Modèles de moyenne et de retour à la moyenne

La température en tant que variable sous-jacente de notre dérivé climatique n'est pas négociable. Cela exclut la possibilité de chercher une approche d'équivalent martingale pour évaluer ce dérivé en raison du fait qu'il est impossible de construire une stratégie auto-finançante qui peut répliquer le sous-jacent.

L'idéal, serait alors de construire un modèle de non arbitrage comme c'est le cas pour les produits dérivés classiques (taux, actions, indices, etc.) mais malheureusement, ils n'existent pas de mécanismes qui permettent de l'offrir vu justement la spécificité de ces produits (pas de prix pour les variables climatiques). Toutefois, nous pouvons utiliser les mécanismes basés sur l'équilibre afin d'évaluer ces contrats financiers en prenant en compte l'important effet des données historiques. Les modèles les plus utilisés sont ceux avec retour à la moyenne de la famille des processus d'Ornstein-

Uhlenbeck Alaton *et al.* [1], Benth et Saltyte-Benth [6], Schiller *et al.* [37]

Le modèle proposé initialement par Alaton *et al.* [1] pour simuler la dynamique de la température de la ville de Stockholm (et que nous avons amélioré dans le cadre de ce travail) est un processus stochastique de retour à la moyenne avec une volatilité mensuelle constante par morceaux. Ce modèle présente certains avantages, dont le plus intéressant est sa capacité à s'adapter à différents types de structures de payoffs (Goncu [25]). Dans le cadre de ce modèle, nous pouvons évaluer le prix de plusieurs types de dérivés climatiques en utilisant la méthode des simulations Monte Carlo.



**Fig. 3.1** – Capture de dix ans d'observations quotidiennes de la température moyenne de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (1998-2007)

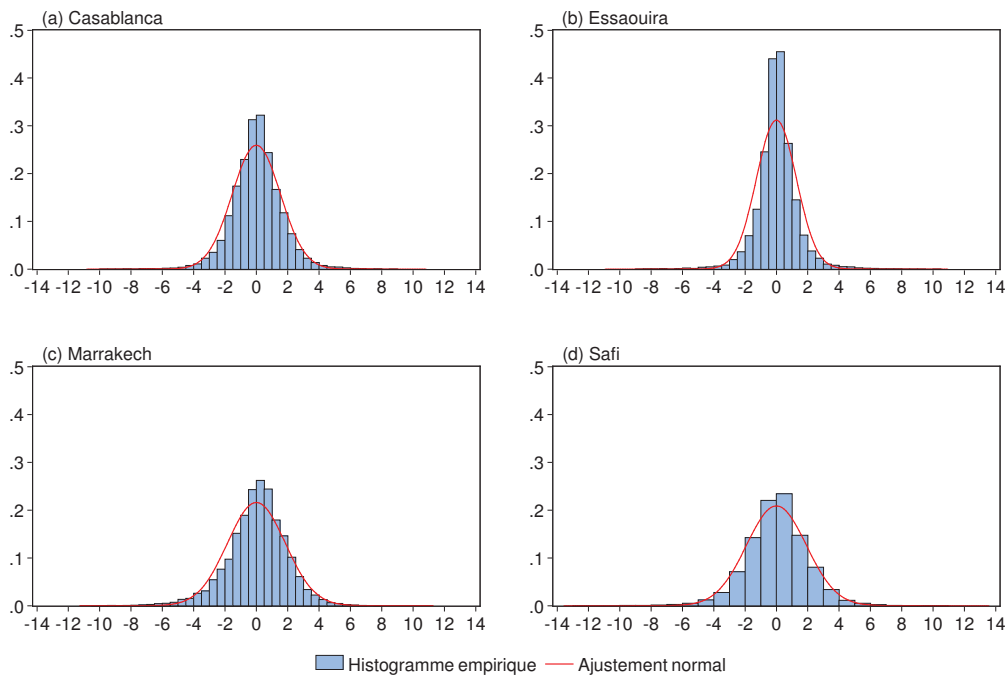
D'après Fig. 3.1, il est clair que le processus de la température devrait être un processus avec retour à la moyenne. La moyenne devrait avoir une fonction de forme cyclique. L'histogramme des variations des températures journalières du Fig. 3.2 suggère une certaine forme de distribution normale pour les variations de la température quotidienne. Par conséquent, le processus de la température doit suivre un mouvement brownien.

On peut utiliser un processus de Vasicek avec retour à la moyenne pour modéliser le comportement de la température (c'est un processus couramment utilisé pour modéliser la dynamique des taux d'intérêt)

$$dT_t = a(\theta - T_t)dt + \gamma dW_t \quad (3.32)$$

où  $T_t$  est le processus modélisé,  $a$  la vitesse de retour à la moyenne,  $\theta$  la moyenne vers laquelle le processus retourne (constante dans le cas d'un processus de Vasicek) et  $\gamma$  la volatilité du processus (constante aussi dans le cas d'un processus de Vasicek).  $W_t$  étant un processus de Wiener.





**Fig. 3.2** – Variations des températures journalières moyennes de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (1971–2007)

Maintenant, pour notre processus de température, nous avons besoin d'un  $\theta = \theta(t)$  et d'un  $\gamma = \gamma(t)$  (deux fonctions qui varient dans le temps).

Notre processus devient, alors

$$dT_t = a(\theta_t - T_t)dt + \gamma_t dW_t \quad (3.33)$$

Une forme fonctionnelle de  $\theta$  doit être déterminée et des estimations pour  $\gamma$  et  $a$  doivent être faites sur la base de l'historique des températures quotidiennes moyennes. Par ailleurs et pour que le processus Eq. 3.33 retourne à sa moyenne, il faudrait que l'on ait

$$\mathbb{E}[T_t] \approx \theta_t \quad (3.34)$$

On peut montrer que le processus trouvé en Eq. 3.33 ne vérifie pas Eq. 3.34. Dornier et Queruel [21] ont proposé d'ajouter le terme  $\theta'_t = \frac{d\theta_t}{dt}$  au processus décrit en Eq. 3.33. En effet, avec ce terme supplémentaire, nous allons avoir un processus qui permet de décrire la dynamique de température tout en ne s'éloignant pas de la température moyenne.

**Propriété 3.1.** Si  $\theta = \theta(t)$ , alors le processus

$$dT_t = \left[ a(\theta_t - T_t) + \frac{d\theta}{dt} \right] dt + \gamma_t dW_t \quad (3.35)$$

retourne à sa moyenne  $\theta$ .

**Preuve.** Soit  $Z_t = e^{\int_0^t a ds} (\theta_t - T_t)$

D'après le lemme d'Itô, on peut écrire

$$\begin{aligned} dZ_t &= e^{\int_0^t ad_s} \theta'_t dt + ae^t(\theta_t - T_t)dt - e^{\int_0^t ad_s} dT \\ &= e^{\int_0^t ad_s} [\theta'_t + a(\theta_t - T_t)dt - (a(\theta_t - T_t) + \theta'_t) dt - \gamma_t dW_t] \end{aligned}$$

D'où l'on tire

$$Z_t = Z_0 - \int_0^t e^{\int_0^s ad_s} \gamma_s dW_s \quad (3.36)$$

Maintenant, si l'on pose  $\theta_0 = T_0 = C$ , alors on aura

$$T_t = \theta_t + e^{-\int_0^t ads} \int_0^t e^{\int_0^s ads} \gamma_s dW_s \quad (3.37)$$

D'où  $\mathbb{E}[T_t] \approx \theta_t$  (car l'espérance d'une intégrale d'Itô est nulle).  $\square$

Ainsi notre modèle qui décrit la dynamique d'évolution de la température moyenne quotidienne devient

$$dT_t = \left[ \frac{d\theta(t)}{dt} + a(\theta_t - T_t) \right] dt + \gamma_t dW_t \quad (3.38)$$

où  $T_t$  est le processus modélisé,  $a$  la vitesse de retour à la moyenne,  $\theta_t$  la moyenne vers laquelle le processus retourne et  $\gamma$  la volatilité du processus.  $W_t$  est un processus de Wiener.

Selon Fig. 3.1, nous pouvons ajuster au processus de la température moyenne  $\theta_t$ , le modèle donné par la fonctionnelle

$$\theta_t = A + Bt + C \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.39)$$

où  $\omega = \frac{2\pi}{365}$  (nous n'avons pas considéré les années bissextiles).

Il est tout à fait possible d'estimer les paramètres de Eq. 3.39 en la regardant comme une équation linéaire et ce en faisant un changement de variables et en renommant les constantes. Nous pouvons alors écrire

$$\theta(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \sin(\omega t) + \beta_4 \cos(\omega t) \quad (3.40)$$

où

$$\begin{cases} A = \beta_1 \\ B = \beta_2 \\ \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\beta_4}{\beta_3} \right) \\ C = \frac{\beta_3}{\cos(\varphi)} \end{cases} \quad (3.41)$$

Ainsi, pour estimer les quatre paramètres de Eq. 3.39, nous utiliserons la méthode des moindres carrés ordinaires. Le résultat de notre estimation des paramètres  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $\varphi$  sur les données des villes de csablanca, Essaouira, Marrakech et Safi est présenté dans Table 3.2.

### Estimation de la vitesse de retour à la moyenne

D'après Bibby et Sørensen [8], si

$$dX_t = b(X_t; \xi)dt + \sigma(X_t; \xi)dW_t \quad (3.42)$$

alors, un estimateur sans biais de  $\xi$  est la racine de l'estimation de la fonction martingale donnée par

$$G_n(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\dot{b}(X_{(i-1)\Delta}; \xi)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta}; \xi)} [X_{i\Delta} - \mathbb{E}[X_i | X_{i-1}]] \quad (3.43)$$

avec  $\dot{b} = \frac{\partial b}{\partial \xi}$

Donc, si on reprend le processus développé dans Eq. 3.38, et on fait l'intégration entre  $i$  et  $i - 1$ , on trouve

$$T_i = \theta_i + e^{-a}(T_{i-1} - \theta_{i-1}) + e^{-\int_0^i ads} \int_{i-1}^i e^{\int_0^s ads} \gamma_s dW_s \quad (3.44)$$

Et comme

$$\mathbb{E}[T_i | T_{i-1}] = \theta_i + e^{-a}(T_{i-1} - \theta_{i-1}) \quad (3.45)$$

En remplaçant dans Eq. 3.43, on trouve

$$G_n(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{(\theta_{i-1} - T_{i-1})}{\gamma_{i-1}^2} [T_i - \theta_i - e^{-a}(T_{i-1} - \theta_{i-1})] \quad (3.46)$$

La résolution de Eq. 3.46 donne alors

$$a = -\log \left( \frac{\sum_{i=1}^n \frac{(T_{i-1} - \theta_{i-1})}{\gamma_{i-1}^2} (T_i - \theta_i)}{\sum_{i=1}^n \frac{(T_{i-1} - \theta_{i-1})}{\gamma_{i-1}^2} (T_{i-1} - \theta_{i-1})} \right) \quad (3.47)$$

Or, il est tout à fait aisé de remplacer chaque terme par sa valeur dans Eq. 3.47. Idéalement, l'utilisateur d'un chiffrier tel que Excel permettrait de réaliser ce calcul d'estimation. Le résultat de notre estimation de la vitesse de retour à la moyenne  $a$  sur les données des quatre villes est présenté dans Table 3.2.

**Table 3.2**

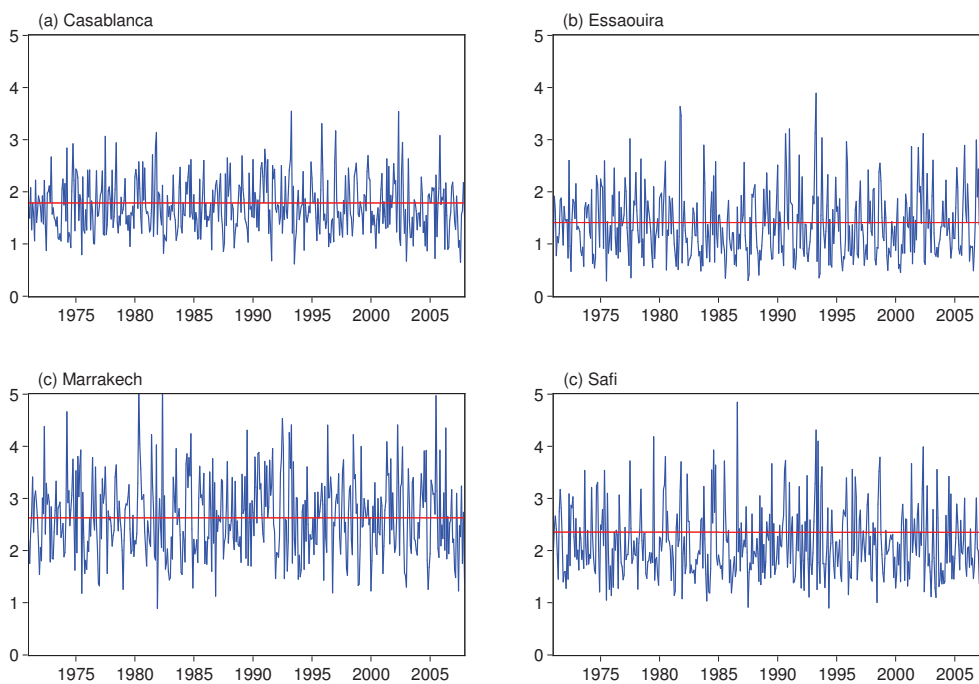
Estimation des paramètres du modèle ajusté pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi

	Casablanca	Essaouira	Marrakech	Safi
$A$	17.197627	17.016044	19.431236	17.814951
$B$	0.000054	0.000074	0.000044	0.000055
$C$	-5.026287	-2.502966	-7.784186	-5.300882
$\varphi$	0.892545	0.744646	1.032915	0.904951
$a$	0.269922	0.239760	0.158888	0.299401

### Modèle de volatilité

Alaton *et al.* [1] supposent que la volatilité du processus de température donné par Eq. 3.38 varie au cours des différents mois, mais reste à peu près constante durant chaque mois. Par conséquent,  $\gamma_t$  est considérée comme une fonction constante qui varie mensuellement. Dans le cadre de l'amélioration que nous allons apporter à ce modèle, nous considérons la volatilité comme un processus stochastique avec retour à la moyenne. D'après Fig. 3.3, nous pouvons voir que la courbe de tendance de l'évolution de la volatilité reste horizontale pour les quatre villes. Alors l'équation différentielle stochastique du processus de volatilité a la forme suivante

$$d\gamma_t = a_\gamma(\gamma_{trend} - \gamma_t)dt + \sigma_\gamma dW_t \quad (3.48)$$



**Fig. 3.3** – Volatilité des températures mensuelles moyennes observées avec tendance linéaire (trait horizontal) pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (1971–2007)

Comme  $\gamma_{trend}$  est constante (voir Fig. 3.3), on peut alors réécrire le processus de volatilité décrit par Eq.3.48 selon la forme suivante

$$d\gamma_t = \left[ \frac{d\gamma_{trend}}{dt} + a_\gamma(\gamma_{trend} - \gamma_t) \right] dt + \sigma_\gamma dW_t \quad (3.49)$$

où  $\sigma_\gamma^2$  est un estimateur de la variance du processus de volatilité.

$$\sigma_\gamma^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\gamma_{j+1} - \gamma_j)^2 \quad (3.50)$$

$n$  étant le nombre d'observations.

On peut alors utiliser, comme précédemment, l'estimateur de Bibby et Sørensen [8] donné en Eq.3.43.

Et comme

$$\mathbb{E}[\gamma_i | \gamma_{i-1}] = \gamma_{trend} + e^{-a}(\gamma_{i-1} - \gamma_{trend}) \quad (3.51)$$

Alors, un estimateur de  $a_\gamma$  est donné par

$$a_\gamma = -\log \left( \frac{\sum_{i=1}^n \frac{(\gamma_{trend} - \gamma_{i-1})}{\sigma_\gamma^2} (\gamma_i - \gamma_{trend})}{\sum_{i=1}^n \frac{(\gamma_{trend} - \gamma_{i-1})}{\sigma_\gamma^2} (\gamma_{i-1} - \gamma_{trend})} \right) \quad (3.52)$$

Table 3.3 donne l'estimation des paramètres du modèle de volatilité pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi.

**Table 3.3**

Estimation des paramètres du modèle de volatilité de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi

	Casablanca	Essaouira	Marrakech	Safi
$\gamma_{trend}$	1.788000	1.412100	2.626800	2.352800
$\sigma_\gamma$	0.679827	0.787365	0.973588	0.869743
$a_\gamma$	1.965134	1.498217	1.770863	1.489373

### Simulation du processus

Afin de simuler des trajectoires échantillonales de température, Eqs. 3.38 et 3.48 doivent être discrétisées. En utilisant respectivement les schémas d'approximation d'Euler et de Milstein, nous obtenons

$$\begin{cases} T_{t+1} = T_t + a(\theta_t - T_t) + \theta'_t + \gamma_n Z_1 & (3.53a) \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + a_\gamma(\gamma_{trend} - \gamma_{n-1}) + \sigma_\gamma Z_2 & (3.53b) \end{cases}$$

et

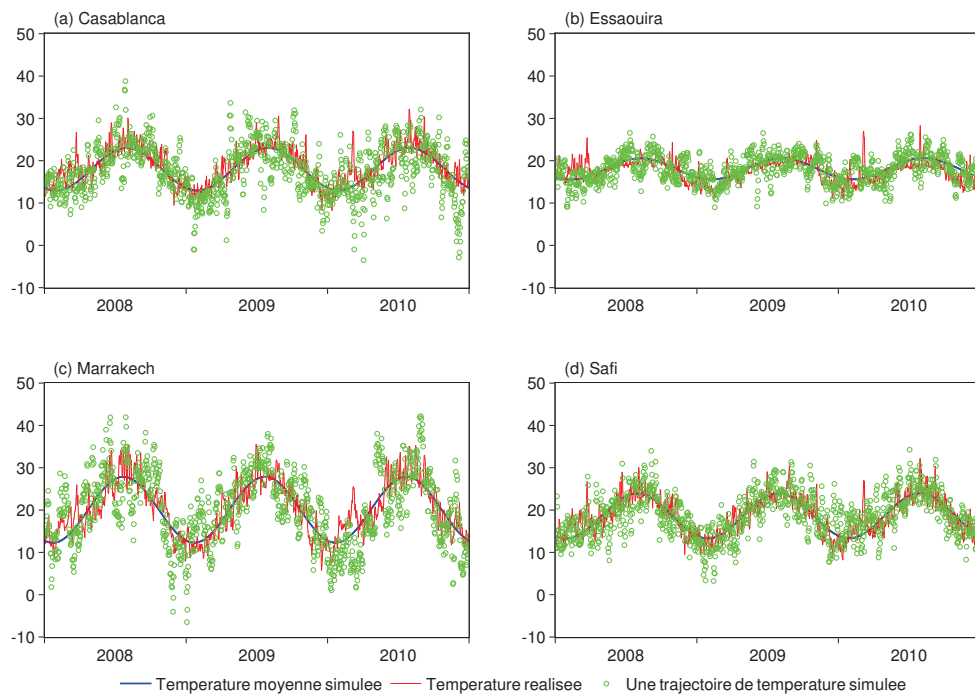
$$\begin{cases} T_{t+1} = T_t + \gamma_n Z_1 + a(\theta_t - T_t) + \theta'_t - \frac{1}{2}a\gamma_n Z_1 - \\ \quad \frac{1}{2}a^2(\theta_t - T_t) - \frac{1}{2}a\theta'_t & (3.54a) \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \sigma_\gamma Z_2 + a_\gamma(\gamma_{trend} - \gamma_{n-1}) - \frac{1}{2}a_\gamma\sigma_\gamma Z_2 - \\ \quad \frac{1}{2}a_\gamma^2(\gamma_{trend} - \gamma_{n-1}) & (3.54b) \end{cases}$$

où  $Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$ .

Pour chaque mois,  $\gamma_n$  est simulée en utilisant Eq. 3.53b (respectivement, 3.54b).  $\gamma_n$  simulée est alors utilisée dans Eq. 3.53a (respectivement, 3.54a) pour un mois entier de simulations. Fig. 3.4 présente sur un même graphique l'évolution d'une trajectoire simulée de température, la trajectoire de la température moyenne prévisionnelle  $\theta(t)$  ainsi que la trajectoire des températures réalisées au niveau des quatre villes entre 2008 et 2010.

## 3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, les principales méthodes proposées dans la littérature pour la modélisation de la température (et ainsi pour l'évaluation des dérivés climatiques)



**Fig. 3.4** – Températures moyennes simulées et une trajectoire simulée des températures prévisionnelles vs. températures réalisées pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (2008–2010)

ont été présentées et examinées en détaillant les avantages et les inconvénients de chacune d'entre elles.

Le marché des dérivés climatiques est encore à ses débuts et toujours en développement. De même, la littérature est en pleine évolution. Cependant, un modèle général qui soit accepté n'existe pas encore. En outre, les praticiens et les sociétés de gestion des risques conservent jalousement leurs données relatives au marché du climat en privé et ne publient pas leurs modèles. Les variables sous-jacentes des dérivés climatiques suivent des schémas récurrents et prévisibles, ce qui explique pourquoi la méthode actuarielle n'est pas considérée comme une approche de tarification bien appropriée. HBA est en fait considérée comme une bonne première approximation de la valeur d'un dérivé climatique. Elle est par ailleurs la méthode de tarification la plus simple en termes de mise en œuvre mais reste de loin la plus sujette à des erreurs de tarification.

Alternativement, la modélisation des indices climatiques et/ou la modélisation quotidienne peuvent être utilisées. Dans la modélisation des indices, les divers indices de température peuvent être directement modélisés. D'autre part, dans le cadre de la modélisation quotidienne, le DAT est modélisé et ainsi tout indice de température peut en être dérivé. Le développement d'un modèle quotidien peut être fait en utilisant soit une modélisation discrète soit une modélisation continue.

Enfin, nous avons examiné et amélioré un modèle stochastique qui décrit la dynamique de la température selon un processus de type Ornstein-Uhlenbeck en y incorporant une volatilité stochastique. Nous avons calibré notre modèle sur les données de quatre villes marocaines. Nous pouvons à présent utiliser notre modèle

pour évaluer des dérivés climatiques de température dans un contexte marocain (cf. chapitre 4).

## Références

- [1] Peter ALATON, Boualem DJEHICHE et David STILLBERGER : On modelling and pricing weather derivatives. *Applied Mathematical Finance*, 9:1–20, 2002.
- [2] Antonis K. ALEXANDRIDIS et Achilleas D. ZAPRANIS : *Weather derivatives, Modeling and pricing weather-related risk*. Springer, 2013.
- [3] Turan G. BALI : An empirical comparison of continuous time models of the short term interest rate. *Journal of Futures Market*, 19:777–798, 1999.
- [4] Fred Espen BENTH : On arbitrage free pricing of weather derivatives based on fractional brownian motion. *Applied Mathematical Finance*, 10:303–324, 2003.
- [5] Fred Espen BENTH et Jurate SALTYTE-BENTH : Stochastic modelling of temperature variations with a view towards weather derivatives. *Applied Mathematical Finance*, 12:53–85, 2005.
- [6] Fred Espen BENTH et Jurate SALTYTE-BENTH : The volatility of temperature and pricing of weather derivatives. *Quantitative Finance*, 7:553–561, 2007.
- [7] Fred Espen BENTH, Jurate SALTYTE-BENTH et Steen KOEKEBAKKER : Putting a price on temperature. *Scandinavian Journal of Statistics*, 34:746–767, 2007.
- [8] Bo Martin BIBBY et Michael SØRENSEN : Martingale estimation functions for discretely observed diffusion processes. *Bernoulli*, 1:17–39, 1995.
- [9] Patrick L. BROCKETT, Mulong WANG, Chuanhou YANG et Hong ZOU : Portfolio effects and valuation of weather derivatives. *Financial Review*, 41:55–76, 2006.
- [10] Dorje C BRODY, Joanna SYROKA et Mihail ZERVOS : Dynamical pricing of weather derivatives. *Quantitative Finance*, 2(3):189–198, 2002.
- [11] Rodrigo CABALLERO, Stephen JEWSON et Anders BRIX : Long memory in surface air temperature : Detection, modelling and application to weather derivative valuation. *Climate Research*, 21:127–140, 2002.
- [12] Sean D. CAMPBELL et Francis X. DIEBOLD : Weather forecasting for deather derivatives. *Journal of the American Statistical Association*, 100:6–16, 2005.
- [13] Melanie CAO et Jason WEI : Pricing the weather. *Energy Power Risk Management*, Risk weather special report:67–70, 2000.
- [14] Melanie CAO et Jason WEI : Weather derivatives valuation and market price of weather risk. *Journal of Future Markets*, 24:1065–1089, 2004.
- [15] René CARMONA : Calibrating degree day options. *In 3rd seminar on stochastic analysis, random field and applications*. Ecole Polytechnique de Lausanne, Switzerland, 1999.
- [16] Peter CARR, Helyette GEMAN et Dilip B. MADAN : Pricing and hedging in incomplete markets. *Journal of Financial Economics*, 62:131–167, 2001.
- [17] Mark DAVIS : Pricing weather derivatives by marginal value. *Quantitative Finance*, 1:1–4, 2001.
- [18] Bob DISCHEL : Black-scholes won't do. *Energy Power Risk Management*, Risk weather special report:8–9, 1998.

- [19] Bob DISCHEL : Shaping history for weather risk management. *Energy Power Risk Management*, 12:13–15, 1999.
- [20] Gregor DORFLEITNER et Maximilian WIMMER : The pricing of temperature futures at the chicago mercantile exchange. *Journal of Banking & Finance*, 34:1360–1370, 2010.
- [21] Fabien DORNIER et Michel QUERUEL : Caution to the wind. *Energy Power Risk Management*, Weather risk special report:30–32, 2000.
- [22] Debbie J. DUPUIS : Forecasting temperature to price CME temperature derivatives. *International Journal of Forecasting*, 27:602–618, 2011.
- [23] Philip Hans FRANSES, Jack NEELE et Dick van DIJK : Modeling asymmetric volatility in weekly Dutch temperature data. *Environmental Modelling & Software*, 16:37–46, 2001.
- [24] Helyette GEMAN et Marie-Pascale LEONARDI : Alternative approaches to weather derivatives pricing. *Managerial Finance*, 31:46–72, 2005.
- [25] Ahmet GONCU : Pricing temperature-based weather contracts : an application to China. *Applied Economics Letters*, 18(14):1349–1354, 2011.
- [26] Juri HINZ : Weather derivative valuation : The meteorological, statistical, financial and mathematical foundations. *Journal of the American Statistical Association*, 102 (477):380–380, 2007.
- [27] John HULL et Alan WHITE : Pricing interest-rate derivative securities. *The Review of Financial Studies*, 3:573–592, 1990.
- [28] John C. HULL : *Option, futures and other derivatives*. Prentice Hall, 8e édition, 2011.
- [29] Stephen JEWSON et Anders BRIX : *Weather derivative valuation, The meteorological, statistical, financial, and mathematical foundations*. Cambridge University Press, 2005.
- [30] Robert E. LUCAS : Asset prices in an exchange economy. *Econometrica*, 46:1429–1445, 1978.
- [31] Michael MORENO : Riding the temp. *Futures and Options World*, Weather Derivatives Special Supplement, 2000.
- [32] Mohammed MRAOUA et Driss BARI : Temperature stochastic modeling and weather derivatives pricing : empirical study with Moroccan data. *Afrika Statistika*, 2(1):22–43, 2007.
- [33] NWOM : Zonage climatique du Maroc. Rapport technique, National Weather Office of Morocco, 2010.
- [34] Teddy OETOMO et Max STEVENSON : Hot or cold ? a comparison of different approaches to the pricing of weather derivatives. *Journal of Emerging Market Finance*, 4:101–133, 2005.
- [35] Eckhard PLATEN et Jason WEST : A fair pricing approach to weather derivatives. *Asia-Pacific Financial Markets*, 11:23–53, 2005.
- [36] Timothy J. RICHARDS, Marc R. MANFREDO et Dwight R. SANDERS : Pricing weather derivatives. *American Journal of Agricultural Economics*, 4:1005–1017, 2004.
- [37] Frank SCHILLER, Gerold SEIDLER et Maximilian WIMMER : Temperature models for pricing weather derivatives. *Quantitative Finance*, 12:489–500, 2012.
- [38] Jiri SVEC et Maxwell STEVENSON : Modelling and forecasting temperature based weather derivatives. *Global Finance*, 18:185–204, 2007.



- 
- [39] James W. TAYLOR et Roberto BUIZZA : Density forecasting for weather derivative pricing. *International Journal of Forecasting*, 22:29–42, 2006.
- [40] Richard S. J. TOL : Autoregressive conditional heteroscedasticity in daily temperature measurements. *Environmetrics*, 7:67–75, 1996.
- [41] Hipolit TORRO, Vicente MENEU et Enric VALOR : Single factor stochastic models with seasonality applied to underlying weather derivatives variables. *Journal of Risk Finance*, 4:6–17, 2003.
- [42] Wei XU, Martin ODENING et Oliver MUSSHOF : Indifference pricing of weather derivatives. *American Journal of Agricultural Economics*, 90:979–993, 2008.
- [43] Achilleas D. ZAPRANIS et Antonis K. ALEXANDRIDIS : Modelling temperature time dependent speed of mean reversion in the context of weather derivative pricing. *Applied Mathematical Finance*, 15:355–386, 2008.
- [44] Achilleas D. ZAPRANIS et Antonis K. ALEXANDRIDIS : Weather derivatives pricing : modelling the seasonal residuals variance of an ornstein-uhlenbeck temperature process with neural networks. *Neurocomputing*, 73:37–48, 2009.
- [45] Lixin ZENG : Weather derivatives and weather insurance : concept, application and analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 81:2075–2082, 2000.

## Chapitre 4

# Evaluation des dérivés sur température

### Sommaire

---

4.1	Cadre d'évaluation . . . . .	89
4.2	Évaluation d'un swap climatique . . . . .	90
4.3	Évaluation d'une option climatique . . . . .	93
4.4	Évaluation intra-périodes . . . . .	98
4.5	Étude de cas sur données marocaines . . . . .	101
4.6	Conclusion . . . . .	107

---

Ce chapitre est consacré à l'évaluation des dérivés climatiques dans un cadre continu. Dans ce chapitre, nous donnerons surtout les formules fermées pour évaluer le prix d'un swap climatique ainsi que ceux d'un put et d'un call sur température. Pour chaque dérivé, les mesures de sensibilité dites les *lettres grecques* seront décrites et calculées. Nous discuterons aussi le cas d'une évaluation d'un dérivé climatique qui se fait en milieu de la période de la couverture. Ainsi, nous présenterons les approches d'approximation utilisées dans la pratique et nous détaillerons quelques techniques pour trouver les prix précis de dérivés climatiques dont la période de référence aurait déjà commencé. Enfin, nous nous baserons sur le modèle de température qui a été développé et calibré dans le chapitre 3 pour dériver la formule du prix d'un swap climatique sur température. Ce swap sera présenté comme une solution optimale à une situation *fictive* de gestion de risque climatique impliquant deux entreprises marocaines ayant des succursales installées dans quatre villes différentes et ayant des profils de risque climatique opposés.

### 4.1 Cadre d'évaluation

En utilisant la valeur espérée, la juste valeur d'un dérivé climatique sur un indice de température  $\Omega$  ayant la valeur  $\omega$  à la maturité est donnée par la valeur actualisée de

son espérance de payoff  $E(\omega)$  (Alexandridis et Zapranis [2], Jewson et Brix [8]). Le taux d'escompte  $r$  avec lequel on actualise la valeur espérée peut être le taux d'intérêt sans risque du marché (Hull [7]). Il faut toutefois, prendre le taux d'intérêt journalier puisqu'il s'agit, dans notre contexte, de séries quotidiennes de la température.

La formule de base pour l'évaluation d'un dérivé climatique dont la valeur est égale à  $V$  est donnée par

$$V = e^{-r(T-t)}E(\omega) \quad (4.1)$$

où  $r$  est le taux d'actualisation quotidien,  $t$  le jour d'évaluation du dérivé climatique et  $T$  la date de maturité du contrat du dérivé.

Nous pouvons réécrire la valeur espérée du payoff comme un produit de probabilité et du payoff. Ainsi, la valeur de  $V$  devient

$$V = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\omega)f(\omega)d\omega \quad (4.2)$$

où  $p(\cdot)$  est la fonction du payoff qui doit être spécifiée dépendamment de la nature de chaque produit et  $f(\cdot)$  la fonction de densité de probabilité de l'indice climatique  $\omega$ . Dans le cas d'une distribution normale<sup>1</sup>, la fonction de distribution est donnée par

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (4.3)$$

où  $\mu$  et  $\sigma$  sont, respectivement, l'espérance et l'écart-type de la distribution  $f(\cdot)$ .

Le fait de considérer que l'indice de température, variable sous-jacente de notre dérivé climatique, suit une loi normale simplifie relativement le calcul comparative-ment à d'autres sous-jacents tels que les actions ou les taux d'intérêt (Alaton *et al.* [1], Goncu [5]). En effet, la difficulté majeure dans les problèmes d'évaluation des dérivés climatiques réside dans la détermination des valeurs inconnues dans l'équation d'évaluation. Autrement dit, la détermination des paramètres de la fonction de distribution de l'indice sous-jacent (Alexandridis et Zapranis [2], Hinz [6], Hull [7], Jewson et Brix [8]).

Nous allons voir dans ce qui suit, qu'aussi bien le prix d'un swap que celui d'une option dépendent de la valeur du premier moment (espérance) de la fonction de distribution. Par ailleurs, le prix d'une option est affecté par la valeur du second moment de la distribution (variance), c'est-à-dire, qu'il est affecté par l'incertitude liée à la valeur de l'indice à la maturité.

## 4.2 Évaluation d'un swap climatique

Étant donné que les deux premiers moments de la distribution de probabilité d'un certain indice de température  $\Omega$  peuvent être estimés sur la base des données de l'historique de la variable météorologique<sup>2</sup>, alors on peut utiliser l'approche de base

1. Pour plus de détails sur l'hypothèse de normalité des indices climatiques, cf. chapitres 1–3.
2. Les estimateurs du premier et du second moments sont donnés, respectivement, par

$$\mu := \bar{\omega} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_i \text{ et } \sigma := s_{\omega} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \omega_i - \bar{\omega}}$$

présentée au début de la section 4.1 pour évaluer la première famille des produits dérivés climatiques, à savoir les swaps. Les options, nécessitant un traitement plus élaboré, sont quant à elles traitées dans la section suivante.

### 4.2.1 Élaboration d'une formule analytique

Soit un contrat de swap climatique (sur température) ayant un niveau d'exercice  $K$ , alors le payoff est donné par

$$p(\omega) = \omega - K \quad (4.4)$$

En utilisant la formule d'évaluation présentée en Eq. 4.2, l'expression de la valeur d'un swap est alors donnée par

$$V_{swap} = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - K) f(\omega) d\omega \quad (4.5)$$

En scindant Eq. 4.5 en deux parties, l'expression de la valeur de notre swap devient

$$V_{swap} = e^{-r(T-t)} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \omega f(\omega) d\omega - K \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) d\omega \right) \quad (4.6)$$

Puisque la première intégrale est égale par définition à l'espérance de la valeur de  $f(\cdot)$  et la deuxième intégrale quant à elle est égale à  $K$ , nous obtenons

$$V_{swap} = (\mu - K) e^{-r(T-t)} \quad (4.7)$$

Dans le cas où le contrat de swap climatique est plafonné, la formule d'évaluation devient plus difficile à obtenir. Toutefois, on peut adopter les conventions des marchés financiers où il est admis que le payoff d'un dérivé est plafonné symétriquement autour du niveau d'exercice. Ainsi, si on note  $c$  le plafond (niveau de plafonnement de la valeur du swap) exprimé en degrés Celsius, la valeur du swap devient

$$V_{swap} = e^{-r(T-t)} \int_{K-c}^{K+c} (\omega - K) f(\omega) d\omega \quad (4.8)$$

Eq. 4.8 ne va pas être développée davantage car elle peut être vue comme la somme de deux options avec des niveaux d'exercice, respectivement, de  $K - c$  et  $K + c$ . Nous détaillerons l'évaluation des options climatiques dans la section 4.2.

### 4.2.2 Mesures de sensibilité

Afin de quantifier le risque généré par une position qu'a un vendeur de dérivés climatiques, on recourt usuellement aux mesures des sensibilités dites les "*lettres grecques*" (Hull [7], Jewson et Brix [8]). Ces mesures sont calculées à partir de l'expression du prix du dérivé climatique qui est fonction de variables influençant sa valeur.

**Delta ( $\Delta$ )**

$\Delta$  mesure le taux de variation du prix d'un dérivé en fonction de la variation du "prix" du sous-jacent. Comme dans le cas des options de type asiatique, la valeur de l'indice de température, considéré comme le sous-jacent d'un dérivé climatique, au moment  $t$  est évaluée seulement comme faisant partie l'espérance du payoff à la maturité du contrat. Par conséquent,  $\Delta$  est défini en fonction de l'espérance de la valeur de la réalisation de l'indice de température, et on peut écrire

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial \mu} \quad (4.9)$$

En utilisant Eq. 4.7, l'expression de Eq. 4.9 devient

$$\begin{aligned} \Delta_{swap} &= \frac{\partial V_{swap}}{\partial \mu} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (\mu - K)e^{-r(T-t)} \right) \\ &= e^{-r(T-t)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

**Gamma ( $\Gamma$ )**

$\Gamma$  mesure le taux de variation du *delta* d'un produit dérivé en fonction de la variation du "prix" du sous-jacent, cela revient à calculer la dérivée partielle seconde par rapport au "prix" de la variable sous-jacente. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\partial \Delta}{\partial \mu} \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial^2 \mu} \end{aligned} \quad (4.11)$$

La dérivée partielle par rapport à  $\mu$  de l'expression du delta de notre swap climatique donnée par Eq. 4.10 est nulle. En effet

$$\begin{aligned} \Gamma_{swap} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left( e^{-r(T-t)} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

**Kappa ( $\kappa$ )**

$\kappa$  mesure le taux de variation du prix d'un produit dérivé en fonction de la variation de la volatilité du sous-jacent. Ainsi, on peut écrire

$$\kappa = \frac{\partial V}{\partial \sigma} \quad (4.13)$$

Comme cela était le cas pour  $\Gamma_{swap}$ , celle mesure est égale à zéro car  $\sigma$  n'apparaît pas dans l'expression de  $V_{swap}$

$$\begin{aligned} \kappa_{swap} &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( (\mu - k)e^{-r(T-t)} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Par conséquent, la valeur d'un swap climatique doit être insensible à la variation de la volatilité de son indice sous-jacent (Benth et Saltyte-Benth [3]).

### Theta ( $\Theta$ )

$\Theta$  mesure le taux de variation de la valeur d'un produit dérivé en fonction de la variation du temps, cela revient à calculer la dérivée de la fonction du payoff par rapport à  $T - t$ . On peut alors écrire

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial(T-t)} \quad (4.15)$$

Par rapport à notre swap climatique sur indice de température, Eq. 4.15 devient

$$\begin{aligned} \Theta_{swap} &= \frac{\partial}{\partial(T-t)} \left( (\mu - K)e^{-r(T-t)} \right) \\ &= -r(\mu - K)e^{-r(T-t)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

### Rho ( $\rho$ )

$\rho$  mesure le taux de variation de la valeur d'un produit dérivé en fonction de la variation du taux d'intérêt. On peut alors écrire

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r} \quad (4.17)$$

Sur la formule d'évaluation de notre swap climatique donnée en Eq. 4.7, le taux d'intérêt est présent uniquement comme taux d'actualisation. Par conséquent, l'expression de rho est donné par

$$\rho_{swap} = -(T-t)(\mu - K)e^{-r(T-t)} \quad (4.18)$$

## 4.3 Évaluation d'une option climatique

Dans la première partie de cette section, nous allons établir une formule analytique pour l'évaluation d'une option climatique ayant pour sous-jacent un indice de température. Contrairement au cas du swap climatique dont l'évaluation analytique a été relativement aisée, celle d'une option climatique est relativement plus élaborée. Dans la seconde partie, nous allons établir les différentes mesures de sensibilité de notre option climatique sur température.

### 4.3.1 Élaboration d'une formule analytique

La valeur  $V$  d'une option (ou tout produit dérivé en général) peut être calculée en utilisant la formule générale donnée par Eq. 4.2. Temporairement et afin de simplifier les calculs, nous allons omettre le facteur d'actualisation. Ainsi, la valeur (non actualisée) de notre option climatique est donnée par

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\omega)f(\omega)d\omega \quad (4.19)$$

où  $p(\cdot)$  est la fonction du payoff et  $f(\cdot)$  la fonction de densité de probabilité de l'indice climatique  $\omega$  que nous allons supposer normale comme dans le cas du swap.

La fonction du payoff de l'option  $p(\cdot)$  est différente selon qu'il s'agit d'une *option d'achat* (call) ou d'une *option de vente* (put) mais reste parfaitement symétrique (Hull [7]). Par conséquent, nous allons commencer par développer les calculs pour un call climatique et transposer par la suite les résultats obtenus à un put climatique. Rappelons que la fonction payoff d'un call est donnée par

$$p(\omega) = \max\{0, \omega - K\} \quad (4.20)$$

$K$  étant le niveau d'exercice du call.

Substituons Eq. 4.20 dans Eq. 4.19, la valeur du call est alors donnée par

$$V_{call} = \int_K^{+\infty} (\omega - K) f(\omega) d\omega \quad (4.21)$$

Si l'on suppose maintenant que  $\omega_T \sim N(\mu, \sigma^2)$ , c'est-à-dire que la valeur réalisée à la maturité du contrat de notre call est normalement distribuée, alors Eq. 4.21 devient

$$V_{call} = \int_K^{+\infty} (\omega - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\mu}{\sigma}\right)^2} d\omega \quad (4.22)$$

Comparativement à la formule de Black-Scholes (Hull [7]), Eq. 4.22 est relativement plus aisée à résoudre. En effet, notre formule est basée sur une dynamique normale pour le sous-jacent tandis que la dynamique dans un contexte de Black-Scholes est plutôt lognormale (Hull [7]).

Faisons maintenant une transformation centrée réduite de la variable  $\omega_T$  en posant  $z = \frac{\omega - \mu}{\sigma}$ . Du moment où  $\omega_T \sim N(\mu, \sigma^2)$  alors  $z \sim N(0, 1)$ . Ainsi, en utilisant la variable  $z$ , Eq. 4.22 devient

$$\begin{aligned} V_{call} &= \int_{\frac{K-\mu}{\sigma}}^{+\infty} (\sigma z + \mu - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \int_{\frac{K-\mu}{\sigma}}^{+\infty} \sigma z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \int_{\frac{K-\mu}{\sigma}}^{+\infty} (\mu - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{aligned} \quad (4.23)$$

Si on pose  $S_1$  et  $S_2$ , respectivement, le premier terme et le second terme de l'intégrale développée en Eq. 4.23, alors la valeur du call peut s'écrire comme  $V_{call} = S_1 + S_2$ . Ainsi, en faisant le changement de variable  $u = \frac{z^2}{2}$ ,  $S_1$  devient

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\frac{(K-\mu)^2}{2\sigma^2}}^{+\infty} \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u} du \\ &= -\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u} \Big|_{\frac{(K-\mu)^2}{2\sigma^2}}^{+\infty} \\ &= \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(K-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned} \quad (4.24)$$

$S_1$  peut aussi être exprimée en fonction de  $\varphi$ , la fonction de densité de la loi normale standard, et on a

$$S_1 = \sigma \varphi\left(\frac{K - \mu}{\sigma}\right) \quad (4.25)$$

Nous allons maintenant calculer l'intégrale de  $S_2$ . En introduisant la fonction de densité de la loi normale standard  $\varphi$  sous le signe de l'intégrale,  $S_2$  devient

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\frac{K-\mu}{\sigma}}^{+\infty} (\mu - K)\varphi(z)dz \\ &= (\mu - K)\phi(z) \Big|_{\frac{K-\mu}{\sigma}}^{+\infty} \\ &= (\mu - K)\phi\left(\frac{\mu - K}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

où  $\phi(\cdot)$  est la fonction de répartition cumulative d'une distribution normale standard.

En utilisant Eqs. 4.25 et 4.26, la valeur non actualisée du call,  $V_{call}$ , donnée par Eq. 4.23 devient alors

$$V_{call} = \sigma\varphi\left(\frac{K - \mu}{\sigma}\right) + (\mu - K)\phi\left(\frac{\mu - K}{\sigma}\right) \quad (4.27)$$

Sachant que la la fonction payoff d'une option de vente (put) est donnée par

$$p(\omega) = \max\{0, K - \omega\} \quad (4.28)$$

$K$  étant le niveau d'exercice du put, nous pouvons déduire par analogie, la valeur d'un put climatique sur indice de température. Ainsi

$$V_{put} = \sigma\varphi\left(\frac{K - \mu}{\sigma}\right) + (K - \mu)\phi\left(\frac{K - \mu}{\sigma}\right) \quad (4.29)$$

Finalement, en actualisant les valeurs "non actualisées" du call et du put climatiques, nous obtenons

$$V_{call} = e^{-r(T-t)} \left( \sigma\varphi\left(\frac{K - \mu}{\sigma}\right) + (\mu - K)\phi\left(\frac{\mu - K}{\sigma}\right) \right) \quad (4.30)$$

$$V_{put} = e^{-r(T-t)} \left( \sigma\varphi\left(\frac{K - \mu}{\sigma}\right) + (K - \mu)\phi\left(\frac{K - \mu}{\sigma}\right) \right) \quad (4.31)$$

### 4.3.2 Mesures de sensibilité

Après avoir trouvé les formules analytiques d'un call et d'un put climatiques sur indice de température, nous allons présenté dans cette section les différentes mesures de risques données par les "lettres grecques". Les différentes mesures ont été expliquées dans la section 4.2.2. Dans cette section, nous développerons directement leurs valeurs analytiques respectives.

#### Delta ( $\Delta$ )

Le delta d'une option est donné par Eq. 4.9. Si on substitue dans cette equation la valeur du call donnée par Eq. 4.21 en y intégrant le facteur d'actualisation  $e^{-r(T-t)}$ , on obtient alors

$$\Delta_{call} = e^{-r(T-t)} \left[ -\sigma\varphi\left(\frac{K - \mu}{\sigma}\right) + (\mu - K)\phi\left(\frac{\mu - K}{\sigma}\right) \right] \quad (4.32)$$



En faisant une dérivation partielle de chaque terme de Eq. 4.32 par rapport à  $\mu$ , on trouve le delta d'un call

$$\begin{aligned}\Delta_{call} &= e^{-r(T-t)} \left[ -\varphi\left(\frac{K-\mu}{\sigma}\right) \left(\frac{\mu-K}{\sigma}\right) + \right. \\ &\quad \left. \phi\left(\frac{\mu-K}{\sigma}\right) + (\mu-K)\varphi\left(\frac{\mu-K}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \phi\left(\frac{\mu-K}{\sigma}\right)\end{aligned}\quad (4.33)$$

De la même façon, le delta d'un put est donné par

$$\Delta_{put} = e^{-r(T-t)} \left[ \phi\left(\frac{\mu-K}{\sigma}\right) - 1 \right] \quad (4.34)$$

Nous remarquons, par ailleurs, l'égalité

$$\Delta_{call} - \Delta_{put} = e^{-r(T-t)} \quad (4.35)$$

qui est toujours vraie pour un call et un put ayant un même sous-jacent d'indice de température. Elle est le résultat de ce que l'on appelle la *parité call-put* que nous allons présenter dans la section suivante.

### Gamma ( $\Gamma$ )

Le gamma d'un produit dérivé en général est donné par Eq. 4.11. Si on substitue dans cette equation, respectivement, la valeur du call donnée par Eq. 4.33 et celle du put donnée par Eq. 4.34, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma_{call} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left( e^{-r(T-t)} \phi\left(\frac{\mu-K}{\sigma}\right) \right) \\ &= e^{-r(T-t)} \varphi\left(\frac{\mu-K}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma}\end{aligned}\quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{put} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left( e^{-r(T-t)} \phi\left(\frac{\mu-K}{\sigma}\right) - 1 \right) \\ &= e^{-r(T-t)} \varphi\left(\frac{\mu-K}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma}\end{aligned}\quad (4.37)$$

### Kappa ( $\kappa$ )

$\kappa$  d'un dérivé en général est donné par Eq. 4.13. Si on substitue dans cette equation, respectivement, la valeur du call donnée par Eq. 4.33 et celle du put donnée par Eq. 4.34, on obtient

$$\begin{aligned}\kappa_{call} &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( e^{-r(T-t)} \phi\left(\frac{\mu-K}{\sigma}\right) \right) \\ &= e^{-r(T-t)} \left\{ (K-\mu) \left(\frac{\mu-K}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{\mu-K}{\sigma}\right) + \varphi\left(\frac{\mu-K}{\sigma}\right) + \right. \\ &\quad \left. (K-\mu) \left(\frac{\mu-K}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \varphi\left(\frac{\mu-K}{\sigma}\right) \right\}\end{aligned}$$

A partir de ce qui précède, on trouve

$$\kappa_{call} = e^{-r(T-t)} \varphi \left( \frac{\mu - K}{\sigma} \right) \quad (4.38)$$

De même, le kappa d'un put est donné par

$$\kappa_{put} = e^{-r(T-t)} \varphi \left( \frac{\mu - K}{\sigma} \right) \quad (4.39)$$

### Theta ( $\Theta$ )

$\Theta$  d'un dérivé en général est donné par Eq. 4.15. Pour pouvoir calculer cette mesure de sensibilité, il faudrait connaître la dynamique de la volatilité (en fonction du temps),  $\sigma = \sigma(t)$ . En effet,

$$\Theta_{call} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ e^{-r(T-t)} \left( \sigma \varphi \left( \frac{K - \mu}{\sigma} \right) + (\mu - K) \phi \left( \frac{\mu - K}{\sigma} \right) \right) \right\} \quad (4.40)$$

Définissons  $\sigma'(t)$  comme la dérivée de la volatilité  $\sigma(t)$  par rapport à la variable temps  $t$ , soit

$$\sigma'(t) = \frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} \quad (4.41)$$

Ainsi, l'expression analytique de  $\Theta_{call}$  est donnée par

$$\begin{aligned} \Theta_{call} = & e^{-r(T-t)} \left( \sigma'(t) \varphi \left( \frac{\mu - K}{\sigma} \right) + \varphi' \left( \frac{K - \mu}{\sigma} \right) \frac{(K - \mu) \sigma'(t)}{\sigma(t)} \right) + \\ & e^{-r(T-t)} \left( (\mu - K) \varphi \left( \frac{\mu - K}{\sigma} \right) \frac{(K - \mu) \sigma'(t)}{\sigma^2(t)} \right) - rV_{call} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Soit encore

$$\Theta_{call} = e^{-r(T-t)} \left( \sigma'(t) \varphi \left( \frac{\mu - K}{\sigma} \right) - 2(\mu - K) \varphi \left( \frac{\mu - K}{\sigma} \right) \frac{(K - \mu) \sigma'(t)}{\sigma^2(t)} \right) - rV_{call} \quad (4.43)$$

On ne peut pas aller plus loin dans le développement de la formule donnée en Eq. 4.43 tant que l'on ne connaît pas le processus de  $\sigma(t)$ .

### Rho ( $\rho$ )

$\rho$  d'un contrat de produit dérivé est donné par Eq. 4.17. Il est aisé de déterminer le rho d'un call et d'un put car le taux d'intérêt n'intervient que comme taux d'actualisation au niveau du facteur d'actualisation  $e^{-r(T-t)}$ . Ainsi, en dérivant par rapport à  $r$ , respectivement, Eq. 4.33 et Eq. 4.34, on obtient

$$\rho_{call} = -(T-t) e^{-r(T-t)} \left( \sigma \varphi \left( \frac{K - \mu}{\sigma} \right) + (\mu - K) \phi \left( \frac{\mu - K}{\sigma} \right) \right) \quad (4.44)$$

$$\rho_{put} = -(T-t) e^{-r(T-t)} \left( \sigma \varphi \left( \frac{K - \mu}{\sigma} \right) + (K - \mu) \phi \left( \frac{K - \mu}{\sigma} \right) \right) \quad (4.45)$$

### 4.3.3 Parité call-put

La parité call-put est une propriété générale relative aux prix d'options en liant entre eux le prix du call, le prix du put et le prix du sous-jacent. Elle utilise le fait qu'une position *longue* en call (vente d'un call) et une position *courte* en put (achat d'un put) avec le même niveau d'exercice et le même montant notionnel (facteur de conversion des degrés Celsius en unités monétaires) est le résultat d'un profil payoff linéaire (équivalent au payoff du sous-jacent). La propriété de parité est donnée par

$$V_{call} - V_{put} = S_t - e^{-r(T-t)}K \quad (4.46)$$

où  $S_t$  est défini comme étant le prix actuel (à la date  $t$ ) du sous-jacent de l'option (par exemple, le cours d'une action). Si on remplace  $S_t$  par  $e^{-r(T-t)}S_T$ , Eq. 4.46 devient

$$V_{call} - V_{put} = e^{-r(T-t)}(S_T - K) \quad (4.47)$$

On peut remarquer que le terme à droite de l'égalité précédente est similaire à la valeur d'un swap ayant pour niveau d'exercice  $K$ . On peut alors aisément étendre Eq. 4.47 au contexte des dérivés climatiques comme suit

$$V_{call} - V_{put} = e^{-r(T-t)}(\mu - K) \quad (4.48)$$

en regardant  $\mu$ , la valeur espérée de l'indice de température, comme l'équivalent adéquat de  $S_0$ .

## 4.4 Évaluation intra-périodes

En règle générale, les produits dérivés climatiques sont commercialisés des semaines voir des mois avant la date du début de la période de couverture (Jewson et Brix [8]). Par conséquent, l'évaluation de ces produits se fait naturellement avant la date du début du contrat. Or, il se peut que l'on ait besoin de faire l'évaluation de ces dérivés climatiques bien après la date de *démarrage* (prise d'effet) du contrat. C'est le cas notamment des banques, institutions financières et compagnies d'assurance<sup>3</sup>. En effet, ces institutions financières ont besoin de connaître précisément la valeur de leurs produits dérivés au jour le jour. Ainsi, elles peuvent gérer leurs risques d'exposition et évaluer leurs positions quotidiennement afin de connaître les profits et pertes réalisés ou encourus.

Dans cette section, nous allons présenter quelques techniques pour trouver les prix précis de dérivés climatiques dont la période de référence aurait déjà commencé. Nous utiliserons, comme cela a été le cas dans les sections précédentes, un indice climatique basé sur la moyenne quotidienne des températures<sup>4</sup>.

3. Les utilisateurs finaux (compagnies industrielles, fermiers, opérateurs économiques, etc.) sont moins sensibles à l'évaluation des dérivés climatiques après la date de début du contrat car leur logique est basée plutôt sur la couverture et non sur la spéculation. Toutefois, ils peuvent avoir besoin de connaître la valeur de leur produits de couverture pour les besoins de leur comptabilité dans le cas notamment de produits qui couvrent plusieurs exercices fiscaux.

4. Nous reviendrons au niveau du chapitre 5 sur la raison de choix des températures moyennes quotidiennes pour la modélisation de la dynamique d'évolution de la température.

### 4.4.1 Problème de base

Bien que l'approche de base de l'évaluation des dérivés reste la même à tous les niveaux, il est important de comprendre comment les paramètres du modèle (d'évolution du sous-jacent) et par conséquent le prix du produit dérivé changent dans le temps. Par ailleurs, un intérêt particulier doit être consacré à comprendre comment différents modèles de la variable sous-jacente température conduisent à des estimations à court terme différentes de la valeur du dérivé.

On distingue quatre phases différentes dans le comportement des prix des dérivés climatiques :

- Suffisamment de temps avant la date de début du contrat de couverture, seules les données historiques de la température sont à la base de la constitution du prix du marché du dérivé climatique. Comme aucune information additionnelle n'est disponible (au moment de l'évaluation du contrat dérivé), les prix du marché restent relativement constants.
- Juste avant le début de la date d'entrée en vigueur du contrat de couverture, les informations relatives aux températures prévisionnelles (relatives à la date de couverture contractuelle) deviennent plus disponibles et plus précises, cela pourrait pousser quelques acteurs du marché à revoir leurs estimations (des paramètres du modèle de température). Dans le cas où une telle possibilité est offerte aux contractants, cela impliquerait un changement dans les prix du dérivé.
- Durant la période du contrat de couverture, chaque jour supplémentaire contribue à la formation de la valeur finale du dénouement ce celui-ci. Par conséquent, la valeur d'un contrat de dérivé climatique affiche une forte dépendance aux données observées des températures.
- A la fin de la période de couverture (juste après la date de maturité du dérivé), toutes les données relatives à l'historique de la température sont disponibles et la valeur de dénouement du contrat peut être calculée. Naturellement, après cette date, il n'y a plus de possibilité de révision des prix.

### 4.4.2 Ajustements aux valeurs moyennes

Supposons que l'on cherche à déterminer la valeur précise du prix d'un dérivé climatique à une certaine date  $\tau$  située entre la date de début du contrat  $t$  et la date de sa fin  $T$ . Soit

$$t < \tau < T$$

On peut alors considérer que  $\tau - 1$  est le dernier jour où la valeur (réelle) de la température est observée. En utilisant les deux dates  $\tau$  et  $\tau - 1$ , on peut scinder la période de couverture du contrat du dérivé climatique en deux intervalles comme suit

$$[t, T] = [t, \dots, \tau - 1] \cup [\tau, \dots, T] \quad (4.49)$$

La valeur espérée  $\mu$  sur toute la période du contrat peut être considérée comme une moyenne pondérée de deux valeurs espérées partielles, et on peut écrire

$$\mu = \frac{\mu_{t, \tau-1} \cdot (\tau - 1 - t) + \mu_{\tau, T} \cdot (T - \tau)}{T - t} \quad (4.50)$$

A n'importe quel jour donné  $\tau - 1$  situé après la date de démarrage du contrat de couverture, on peut calculer aisément la moyenne des températures des jours qui précèdent cette date et ce depuis la date du départ. Ainsi, si on note cette moyenne  $T_{t,\tau-1}$ , on peut alors écrire

$$\bar{T}_{t,\tau-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \quad (4.51)$$

où  $n$ , le nombre d'observations connues (réalisées) de la température est égal à  $\tau - t$ . Connaissant maintenant cet ensemble de données récentes, on peut alors substituer  $\mu_{t,\tau-1}$  par la valeur réelle de la moyenne des températures quotidiennes observées. Cela nous permet d'ajuster (et ainsi d'actualiser) la valeur de  $\mu$  en la remplaçant par  $\mu^*$  dont la valeur est donnée par

$$\mu^* = \frac{\bar{T}_{t,\tau-1} \cdot (\tau - 1 - t) + \mu_{\tau,T} \cdot (T - \tau)}{T - t} \quad (4.52)$$

Si on note par  $\delta\mu$ , la différence entre la valeur originale et celle ajustée de la valeur espérée de notre dérivé climatique, on peut montrer facilement qu'elle vaut

$$\delta\mu = \mu^* - \mu = \frac{\tau - 1 - t}{T - t} \cdot (\bar{T}_{t,\tau-1} - \mu_{t,\tau-1}) \quad (4.53)$$

### 4.4.3 Ajustements aux mesures de volatilité

La volatilité de l'indice de la variable climatique sous-jacente, mesurée par l'écart-type  $\sigma$ , quantifie l'incertitude liée à la valeur du dénouement final du contrat de couverture. A travers le temps, la valeur de la volatilité "restante" décroît à mesure que l'on s'approche de la date de maturité du contrat. Pour examiner exactement comment la volatilité de l'indice climatique se comporte dans le temps, nous devons regarder du côté des mesures statistiques de la volatilité. Jusque-là, nous avons calculé la variance (ou la volatilité) à partir des valeurs historiques  $\omega_j$  de notre indice climatique, soit

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \omega_j - \bar{\omega} \quad (4.54)$$

où  $\bar{\omega}$  représente la moyenne échantillonnale de l'indice  $\omega$ .

Si l'on s'intéresse maintenant à la variation des  $n$  premiers jours à partir de la date de début du contrat, on peut écrire

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{T_i}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^n cov(T_i, T_j) \quad (4.55)$$

où  $T_i$  représente la température de la journée  $i$ ,  $\sigma_{T_i}^2$ , la variance de température durant la même journée et  $cov(T_i, T_j)$ , la covariance entre les températures des journées  $i$  et  $j$ .

D'après Eq. 4.55, la variance d'une certaine période est constituée de deux composantes : la variance quotidienne et la covariance entre les valeurs quotidiennes de l'indice. L'influence de la première composante (variance) est facilement mise en évidence. La deuxième composante (covariance) quant à elle peut aussi être calculée

à partir des données historiques mais sa dynamique d'évolution est plus difficile à cerner.

Un cas particulier (est par ailleurs le plus intéressant) pour déterminer la dynamique d'évolution de la volatilité est de considérer cette dernière comme étant dépendante du temps, autrement dit  $\sigma = \sigma(t)$ . En posant le problème de cette sorte, on peut trouver un cadre mathématique plus approprié pour décrire la dynamique de la volatilité (modèles stochastiques, modèles ARCH-GARCH, etc.)<sup>5</sup>.

## 4.5 Étude de cas sur données marocaines

Dans cette section, nous utiliserons le modèle décrivant la dynamique quotidienne de la température qui a été développé et calibré dans la section 3.7 pour dériver une formule *fermée* pour le prix d'un swap climatique sur température. Ce swap sera présenté comme une solution optimale à une situation *fictive* de gestion de risque climatique impliquant deux entreprises marocaines ayant des succursales installées dans quatre villes différentes et présentant des profils de risque climatique opposés (Mraoua et Bari [10]). Par la suite, nous allons effectuer des tests de *back-testing* sur différentes maturités d'un portefeuille de swaps afin d'apprécier la qualité des résultats d'évaluation obtenus.

### 4.5.1 Données

Les données utilisées dans cette section sont les mêmes que celles qui ont été utilisées dans la section 3.7.

### 4.5.2 Evaluation d'un swap climatique

Considérons deux contreparties A et B. A est une compagnie de production (et/ou de distribution) d'énergie (électricité par exemple) qui a des succursales installées dans quatre villes marocaines à savoir Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi et B une entreprise de production de boissons gazeuses avec des succursales présentes dans les mêmes villes que A. Naturellement, A profiterait d'un climat froid (hausse de la demande d'électricité pour le chauffage) tandis que B bénéficierait plutôt d'un climat chaud (augmentation de la consommation de boissons gazeuses). Les deux parties chercheraient à stabiliser leurs flux de revenus.

Considérons les trois contrats suivants :

- Période du contract : début le 01/01/2008 pour 1, 2 ou 3 années à la maturité.
- Température de référence ( $T_r$ ) : 18 °C.
- Montant Nominal ( $\pi$ ) : 1 MAD (pour simplifier).

Comme A tire profit du climat froid, ses revenus sont maximaux durant la période de novembre à mai. De même, les revenus de B sont maximaux pour la période allant de

---

<sup>5</sup> Nous avons présenté précédemment au niveau du chapitre 3 une modélisation de la dynamique de la volatilité moyenne quotidienne dans un cadre stochastique.

juin à octobre<sup>6</sup>. Table 4.1 donne les indices degrés-jour et les niveaux d'exercice par mois. Ces derniers ont été dimensionnés en fonction des caractéristiques moyennes des quatre villes étudiées (DMN [4]).

**Table 4.1**

Indices degré-jour sous-jacents et leurs valeurs d'exercice mensuelles pour 2008, 2009 et 2010 (périodes des contrats)

Mois	Indice	Valeur d'exercice		
		2008	2009	2010
Janvier	HDD	125	125	125
Février	HDD	115	115	115
Mars	HDD	85	85	85
Avril	HDD	20	20	20
Mai	HDD	0	0	0
Juin	CDD	135	135	135
Juillet	CDD	175	175	175
Août	CDD	175	175	175
Septembre	CDD	125	125	125
Octobre	CDD	55	55	55
Novembre	HDD	25	25	25
Décembre	HDD	95	95	95

Les modalités de paiement sont telles que, à la fin de chaque mois, si l'indice degré-jour est CDD, B paie A. Dans le cas où la mesure est HDD, alors c'est A qui verse des paiements à B. Dans les deux cas, nous pouvons considérer la valeur de notre swap climatique  $V_B$  au 01/01/2008 comme une séquence de collars et ainsi écrire

$$V_B = \pi \left\{ \sum_{i \in CS} E \left[ (H_i - K_i)^+ - (K_i - H_i)^+ \right] B(0, i) + \sum_{j \in WS} E \left[ (K_j - C_j)^+ - (C_j - K_j)^+ \right] B(0, j) \right\} \quad (4.56)$$

où  $K_i$  est le niveau d'exercice durant le mois  $i$ ,  $CS$  l'ensemble des mois de la saison froide,  $WS$  l'ensemble des mois de la saison chaude,  $B(0, i)$  un facteur d'actualisation pour le mois  $i$  et  $(H - K)^+ = \max(H - K, 0)$ .

Afin d'évaluer  $V_B$ , nous simulons des chemins de température durant la période du swap comme cela a été décrit précédemment au niveau de la section 3.7. Puis, nous calculons la moyenne des valeurs qui sont générées par les différents chemins de simulation selon la méthode Monte Carlo (Kloeden et Platen [9]). Avec un taux d'actualisation annuel de 4% et en générant une simulation de 2 000 000 chemins, Table 4.2 nous donne la valeur de  $V_B$  pour chaque échéance et en utilisant différentes combinaisons de schémas d'approximation pour notre modèle (aussi bien pour le processus  $T_t$  que pour le processus  $\gamma_t$ ). Dans Table 4.2, "Total" représente la valeur du portefeuille des quatre de swaps détenus par la contrepartie B au 01/01/2008.

6. Nous avons utilisé la répartition des saisons chaude et froide de l'année selon les résultats trouvés au niveau de la section 2.6.

**Table 4.2**  
Valeurs du swap de la contrepartie B au 01/01/2008 pour différentes maturités (1, 2 et 3 ans) en utilisant différentes combinaisons de schémas d'approximation aussi bien pour  $T_t$  que pour  $\gamma_t$  pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi avec leur valeur total

Maturité du swap	Schéma d'approximation		Valeur du swap					Total
	pour $T_t$	pour $\gamma_t$	Casablanca	Essaouira	Marrakech	Safi		
1 an	Euler	Euler	292.11	236.47	-203.54	121.71	446.75	
	Euler	Milstein	286.80	232.23	-214.20	111.80	416.63	
	Milstein	Euler	268.34	235.56	-265.28	113.09	351.71	
	Milstein	Milstein	265.11	231.35	-272.76	104.16	327.86	
2 ans	Euler	Euler	581.61	460.93	-406.70	234.97	870.81	
	Euler	Milstein	570.59	453.28	-426.43	215.88	813.32	
	Milstein	Euler	526.79	457.16	-483.75	224.01	724.21	
	Milstein	Milstein	520.26	449.22	-500.55	205.85	674.78	
3 ans	Euler	Euler	858.49	669.95	-606.09	338.24	1260.59	
	Euler	Milstein	840.99	658.72	-634.21	310.91	1176.41	
	Milstein	Euler	772.25	663.36	-695.28	325.26	1065.59	
	Milstein	Milstein	762.22	652.08	-720.69	298.07	991.68	



### 4.5.3 Comparaison des méthodes d'approximation

Pour comparer les résultats de l'évaluation de notre swap climatique, nous avons commencé d'abord par calculer les valeurs du swap pour B au 01/01/2008 en se basant sur les températures observées (réalisées) pour les villes de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi entre 2008 et 2010 (Table 4.3). Après cela, nous avons calculé les taux de variation (erreur relative) entre les valeurs de swap estimées et celles réelles pour la contrepartie B au 01/01/2008 et ce pour les trois maturités et en utilisant les différents combinaisons de schémas d'approximation pour les deux processus  $T_t$  et  $\gamma_t$  (Table 4.4).

**Table 4.3**

Valeurs réelles du swap de la contrepartie B au 01/01/2008 basées sur les températures observées au niveau de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (2008–2010)

Maturité du swap	Valeur du swap				
	Casablanca	Essaouira	Marrakech	Safi	Total
1 an	218.40	267.84	-240.85	120.54	365.94
2 ans	460.53	532.72	-485.70	223.23	730.78
3 ans	609.08	893.63	-780.56	319.93	1042.08

D'après Table 4.4, l'erreur relative de l'estimation des valeurs du portefeuille des swaps climatiques sur température par rapport aux valeurs réelles de la contrepartie B au 01/01/2008 pour les différentes échéances est plus faible pour les trois échéances dans le cas d'un schéma d'approximation de Milstein pour  $T_t$  et pour un schéma d'approximation d'Euler pour  $\gamma_t$ . Cela nous permet d'adopter pour notre modèle, au moins empiriquement, le schéma d'approximation mixte suivant :

$$\begin{cases} T_{t+1} = T_t + \gamma_n Z_1 + a(\theta_t - T_t) + \theta'_t - \frac{1}{2}a\gamma_n Z_1 - \\ \quad \frac{1}{2}a^2(\theta_t - T_t) - \frac{1}{2}a\theta'_t & (4.57a) \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + a_\gamma(\gamma_{trend} - \gamma_{n-1}) + \sigma_\gamma Z_2 & (4.57b) \end{cases}$$

où  $Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$ .

### 4.5.4 Résultats de la comparaison des méthodes d'approximation

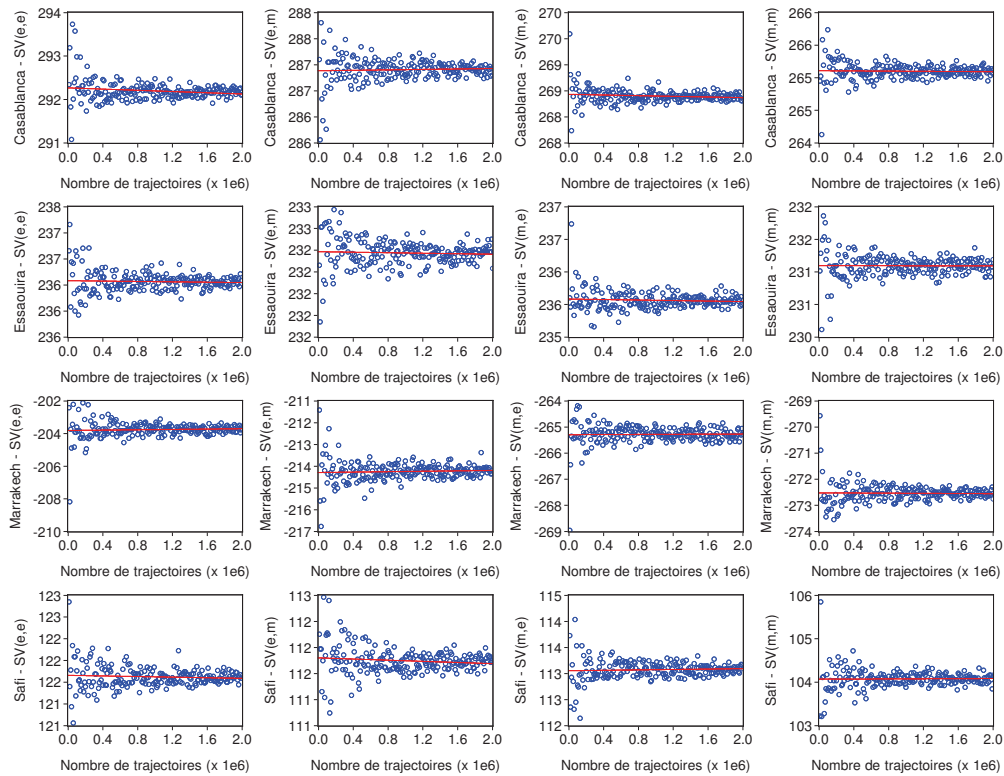
Les résultats les plus importants de cette étude empirique relative à l'évaluation des swaps climatiques de température se résument comme suit : D'une part, l'erreur relative des valeurs estimées de notre portefeuille de swaps climatiques sur température par rapport aux valeurs réelles est plus faible dans le cas d'un schéma d'approximation de Milstein pour le processus  $T_t$  et d'un schéma d'approximation d'Euler pour le processus de  $\gamma_t$ . Ce résultat est contraire à ce qu'on pourrait penser quant à l'avantage qu'aurait un schéma d'approximation de Milstein (par rapport à un schéma d'Euler) à la fois pour les deux processus  $T_t$  et  $\gamma_t$ .

D'autre part, d'un point de vue empirique, nous avons trouvé qu'un swap climatique sur température de maturité de 2 ans donne lieu à de plus faibles erreurs relatives par rapport à d'autres échéances. Une explication à cela pourrait être que, pour une durée d'un an, le modèle n'est pas encore très stable. Ceci est également confirmé

par la lenteur de la convergence de la simulation Monte Carlo (Figs. 4.1–4.3), en particulier pour Casablanca et Essaouira. Par ailleurs, pour une maturité de 3 ans, le modèle perd de son efficacité et ne prendrait plus en considération des changements inattendus dans la température telles que les vagues de chaleur, par exemple.

Par ailleurs, nous avons décidé de prendre les mêmes niveaux d'exercice pour les trois ans et pour les quatre villes afin que nous puissions éliminer l'effet de la variation de ce paramètre sur la valeur du swap. Il est tout à fait possible, par ailleurs, d'étudier la sensibilité de la valeur du swap climatique sur température par rapport aux variations du prix d'exercice.

Enfin, le fait de considérer un portefeuille de swaps climatiques nous a permis de trouver des résultats très intéressants. En effet, la diversification géographique a eu un impact positif sur notre portefeuille et a permis de réduire la valeur de l'erreur relative (le risque).



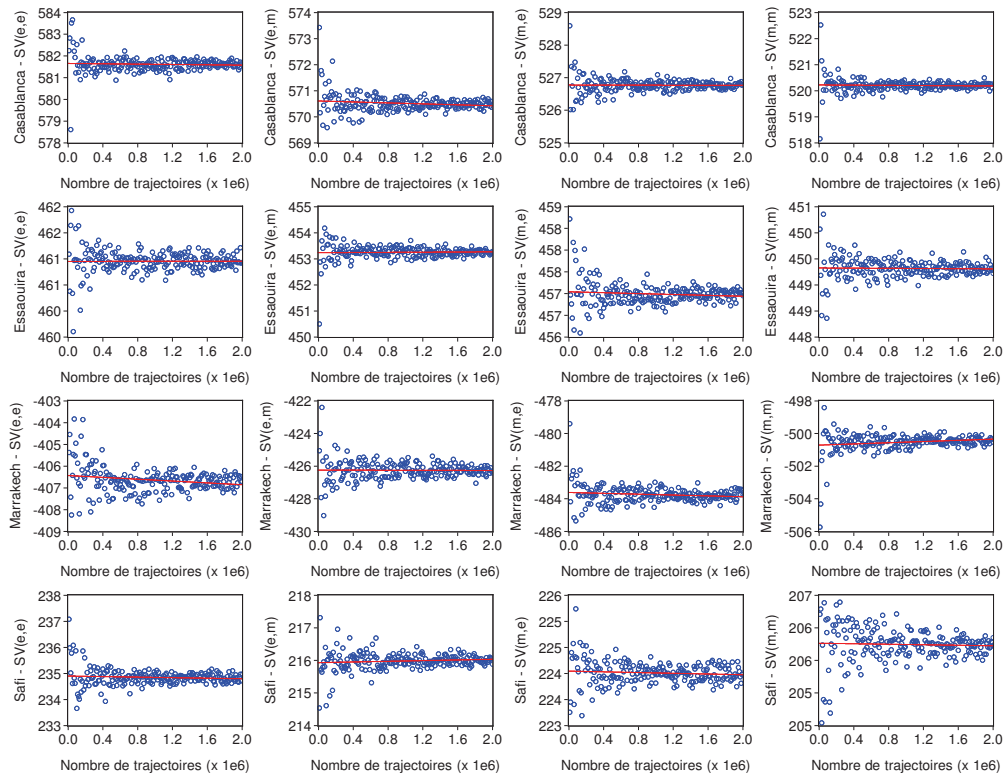
**Fig. 4.1** – Convergence de la simulation Monte Carlo du prix du swap en utilisant différentes combinaisons de schémas d'approximation à la fois pour  $T_t$  et  $\gamma_t$  pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (Maturité d'un an)

*Note* :  $SV(i, j)$  est la valeur du swap en utilisant, respectivement, les schémas d'approximation  $i$  pour  $T_t$  et  $j$  pour  $\gamma_t$ .  $i, j \in \{e, m\}$  où  $e :=$  Euler,  $m :=$  Milstein.

**Table 4.4**

Comparaison des températures prévisionnelles et celles observées pour la contrepartie B au 01/01/2008 pour différentes maturités (1, 2 et 3 ans) et en utilisant différents schémas d'approximation aussi bien pour  $T_t$  que pour  $\gamma_t$  pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi

Maturité du swap	Schéma d'approximation pour $T_t$		Taux de variation (%)					Total
	pour $\gamma_t$		Casablanca	Essaouira	Marrakech	Safi		
1 an	Euler	Euler	33.75	-11.71	-15.49	0.97	22.08	
	Euler	Milstein	31.32	-13.30	-11.06	-7.25	13.85	
	Milstein	Euler	22.86	-12.05	10.14	-6.18	-3.89	
	Milstein	Milstein	21.38	-13.62	13.25	-13.59	-10.40	
2 ans	Euler	Euler	26.29	-13.48	-16.27	5.26	19.16	
	Euler	Milstein	23.90	-14.91	-12.20	-3.29	11.29	
	Milstein	Euler	14.39	-14.18	-0.40	0.35	-0.90	
	Milstein	Milstein	12.97	-15.67	3.06	-7.79	-7.66	
3 ans	Euler	Euler	40.95	-25.03	-22.35	5.72	20.97	
	Euler	Milstein	38.08	-26.29	-18.75	-2.82	12.89	
	Milstein	Euler	26.79	-25.77	-10.93	1.67	2.26	
	Milstein	Milstein	25.14	-27.03	-7.67	-6.83	-4.84	



**Fig. 4.2** – Convergence de la simulation Monte Carlo du prix du swap en utilisant différentes combinaisons de schémas d’approximation à la fois pour  $T_t$  et  $\gamma_t$  pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (Maturité de 2 ans)

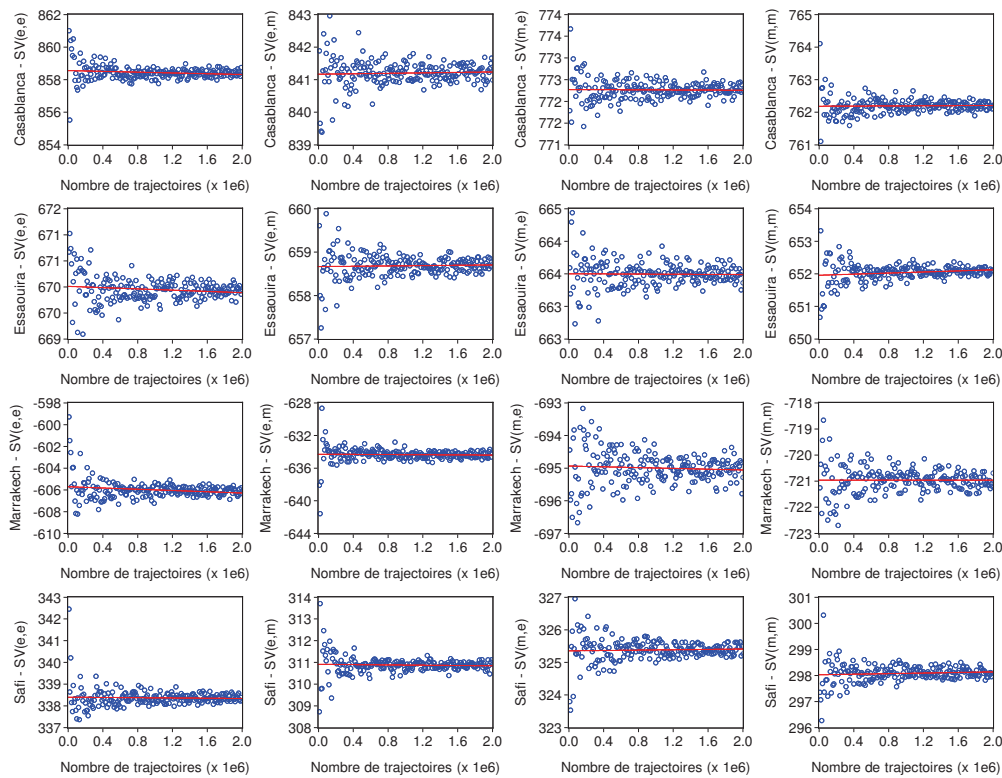
## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait le focus sur l’évaluation des dérivés climatiques dans un cadre continu. Dans ce cadre, nous avons présenté et développé des formules fermées pour l’évaluation des deux principaux dérivés climatiques à savoir le swap et l’option sur température. Pour chaque dérivé, nous avons calculé les mesures de sensibilité (*lettres grecques*).

Nous avons aussi discuté le cas de l’évaluation d’un dérivé climatique qui se fait en milieu de la période de la couverture en présentant les approches d’approximation utilisées dans la pratique et en développant quelques techniques pour trouver les prix précis de ces dérivés climatiques dont la période de référence aurait déjà commencé.

Par la suite, nous nous sommes basés sur le modèle de température qui a été développé et calibré dans la section 3.7 pour dériver une formule fermée du prix d’un swap climatique sur température. Ce swap a été présenté comme une solution optimale à une situation fictive de gestion de risque climatique impliquant deux entreprises marocaines ayant chacune des succursales installées dans quatre villes différentes et ayant avec des profils de risque climatique opposés.

Au final, des tests de *back-testing* portant sur différentes maturités d’un portefeuille de swaps climatiques ont été effectués afin d’apprécier la qualité des résultats d’éva-



**Fig. 4.3** – Convergence de la simulation Monte Carlo du prix du swap en utilisant différentes combinaisons de schémas d’approximation à la fois pour  $T_t$  et  $\gamma_t$  pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (Maturité de 3 ans)

luation obtenus et ont permis de mettre en évidence, empiriquement, un schéma hybride d’approximation des deux processus formant notre modèle de la température quotidienne.

## Références

- [1] Peter ALATON, Boualem DJEHICHE et David STILLBERGER : On modelling and pricing weather derivatives. *Applied Mathematical Finance*, 9(1):1–20, 2002.
- [2] Antonis K. ALEXANDRIDIS et Achilleas D. ZAPRANIS : *Weather derivatives, Modeling and pricing weather-related risk*. Springer, 2013.
- [3] Fred Espen BENTH et Jurate SALTYTE-BENTH : The volatility of temperature and pricing of weather derivatives. *Quantitative Finance*, 7(5):553–561, 2007.
- [4] DMN : Zonage climatique du Maroc. Rapport technique, National Weather Office of Morocco, 2010.
- [5] Ahmet GONCU : Pricing temperature-based weather contracts : an application to China. *Applied Economics Letters*, 18(14):1349–1354, 2011.
- [6] Juri HINZ : Weather derivative valuation : The meteorological, statistical, financial and mathematical foundations. *Journal of the American Statistical Association*, 102 (477):380–380, 2007.
- [7] John C. HULL : *Option, futures and other derivatives*. Prentice Hall, 8e édition, 2011.

- 
- [8] Stephen JEWSON et Anders BRIX : *Weather derivative valuation, The meteorological, statistical, financial, and mathematical foundations*. Cambridge Univeristy Press, 2005.
- [9] Peter E. KLOEDEN et Eckhard PLATEN : *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer, 1999.
- [10] Mohammed MRAOUA et Driss BARI : Temperature stochastic modeling and weather derivatives pricing : empirical study with Moroccan data. *Afrika Statistika*, 2(1):22–43, 2007.

## Chapitre 5

# Températures moyennes ou températures extrêmes

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>110</b>
<b>5.2</b>	<b>Données</b>	<b>111</b>
<b>5.3</b>	<b>Modélisation de la température</b>	<b>113</b>
<b>5.4</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>116</b>
<b>5.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>119</b>

---

Ce chapitre vise à montrer pourquoi il est plus approprié d'utiliser les températures moyennes plutôt que les températures extrêmes pour la modélisation des températures quotidiennes afin d'évaluer les dérivés climatiques sur la température. Pour réaliser cette étude empirique, nous avons utilisé un modèle stochastique pour prévoir la température. Nous avons calibré ce modèle, d'abord en utilisant des températures quotidiennes extrêmes et, deuxièmement, sur la base des températures moyennes journalières. Ensuite, nous avons effectué deux types de comparaisons. Dans un premier temps, nous avons comparé les températures réalisées aux températures prévisionnelles obtenues en utilisant les deux approches décrites précédemment. Et dans un deuxième temps, nous avons comparé les valeurs réelles de prix de dérivés climatiques à celles estimées pour les mêmes contrats de dérivés et ce en utilisant toujours les deux variantes de modélisation de la température quotidienne.

### 5.1 Introduction

Depuis leur création en 1996, les dérivés climatiques ont connu une croissance importante et le marché lié aux dérivés climatiques sur température en particulier est, aujourd'hui, l'un des marchés émergents qui connaissent un développement important (Alexandridis et Zapranis [2]). Pour évaluer ces contrats financiers, différentes approches ont été développées pour modéliser la température (le sous-jacent du

produit dérivé) et définissent toutes la température moyenne d'une journée  $t$  par

$$T_t^{avg} = \frac{T_t^{max} + T_t^{min}}{2} \quad (5.1)$$

où  $T_t^{max}$  et  $T_t^{min}$  sont, respectivement, les températures quotidiennes maximale et minimale pour la journée courante  $t$ .

Dans l'étude présentée dans ce chapitre, nous cherchons à montrer l'avantage d'utiliser des températures moyennes au lieu des températures extrêmes pour la modélisation des températures quotidiennes afin d'évaluer les dérivés climatiques sur la température. En fait, tous les contrats de produits dérivés climatiques transigés sur les marchés organisés (OTC) notamment le CME de Chicago définissent la température moyenne quotidienne comme la moyenne des températures maximale et minimale quotidiennes et tous les modèles de tarification utilisés dans la littérature utilisent directement cette température moyenne (Dupuis [5]).

Pour réaliser cette étude empirique, nous avons utilisé le modèle stochastique étudié dans la section 3.7 pour prédire la température. Dans un premier temps, nous avons calibré ce modèle sur les températures quotidiennes extrêmes ( $M^{min,max}$ ) dans le but de prédire  $T_{max}$  et  $T_{min}$ , puis nous avons calculé  $T_{avg}^{calc}$  en utilisant Eq. 5.1. Dans un deuxième temps, nous avons calibré notre modèle directement sur les températures quotidiennes moyennes ( $M^{avg}$ ) pour obtenir  $T_{avg}^{pred}$ . Ensuite, nous avons effectué deux types de comparaisons. Dans la première, nous avons comparé les températures réalisées à celles prédites à l'aide des deux approches d'estimation des paramètres de notre modèle de base. Dans la seconde, nous avons comparé les prix réels d'un dérivé climatique à ceux calculés sur la base des deux variantes d'estimation des paramètres du modèle utilisé.

## 5.2 Données

Nous avons considéré les températures quotidiennes  $T_t$ , pour quatre ville marocaines (Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi) de janvier 1978 à décembre 2007.  $T_t$  peut être  $T_t^{max}$ ,  $T_t^{min}$  ou  $T_t^{avg}$  (Table 5.1).

Nous avons repris les définitions présentées dans les chapitres précédents pour calculer les indices sous-jacents. Ainsi, pour chaque journée  $t$ , nous pouvons écrire  $HDD(t) = \max(T_r - T_t, 0)$  et  $CDD(t) = \max(T_t - T_r, 0)$ .  $T_r$  étant la température de référence.

Nous allons considérer le cumul des degrés-jour (HDD et CDD) comme sous-jacents pour nos dérivés climatiques. Ainsi, la valeur du sous-jacent d'un contrat sur cumul de HDD (respectivement, un contrat sur cumul de CDD) à tout instant  $t$  est donnée, respectivement, par  $H_t = \sum_{i=0}^t HDD(i)$  et  $C_t = \sum_{i=0}^t CDD(i)$  où  $t = 0, \dots, T$ .



**Table 5.1**  
Statistiques descriptives de la température quotidienne de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (1978–2007)

	Moyenne	Médiane	Maximum	Minimum	Écart-Type	Skewness	Kurtosis	J.-B. <sup>a</sup>
<i>T<sub>max</sub></i>	21.5	21.4	44.4	8.0	4.0	0.4	3.4	413*
<i>T<sub>min</sub></i>	13.5	13.4	26.9	-0.9	4.8	-0.1	2.1	390*
<i>T<sub>avg</sub></i>	17.5	17.4	33.3	5.9	4.2	0.1	2.2	283*
<i>T<sub>max</sub></i>	20.1	20.0	42.0	11.2	2.6	1.3	8.5	851*
<i>T<sub>min</sub></i>	14.9	15.3	25.9	5.3	3.0	-0.3	2.6	307*
<i>T<sub>avg</sub></i>	17.6	17.7	31.7	9.5	2.6	0.2	3.7	276*
<i>T<sub>max</sub></i>	26.5	25.8	46.6	7.7	7.5	0.3	2.3	385*
<i>T<sub>min</sub></i>	12.9	12.8	31.0	-1.6	5.6	0.1	2.4	207*
<i>T<sub>avg</sub></i>	19.7	19.1	38.2	4.2	6.3	0.3	2.3	423*
<i>T<sub>max</sub></i>	23.2	22.5	46.4	10.0	5.0	0.9	4.1	2121*
<i>T<sub>min</sub></i>	13.2	13.3	26.6	-1.5	4.8	-0.1	2.1	363*
<i>T<sub>avg</sub></i>	18.2	17.9	36.4	5.6	4.5	0.4	2.8	295*

<sup>a</sup> Le test de Jarque-Bera vérifie l'hypothèse nulle de normalité dans la distribution échantillonnale des températures.

<sup>b</sup>, <sup>c</sup>, <sup>d</sup> et <sup>e</sup> sont les codes identifiants (ID) de l'Organisation météorologique mondiale : 60155, 60220, 60230 et 60185, respectivement.

\* indique un rejet de l'hypothèse nulle pour un seuil de signification de 1%.

### 5.3 Modélisation de la température

Nous allons utiliser le modèle que nous avons développé au niveau de la section 3.7. La version de base de ce modèle a été proposée initialement par Alaton *et al.* [1] pour simuler la dynamique de la température moyenne quotidienne de la ville de Stockholm. Il s'agit d'un processus stochastique avec retour à la moyenne. Ce modèle présente certains avantages, dont le plus intéressant est sa capacité à s'adapter à différents types de structures de payoffs (Goncu [6]). Dans le cadre de ce modèle, nous pouvons évaluer le prix de plusieurs types de dérivés climatiques en utilisant la méthode de simulations de Monte Carlo.

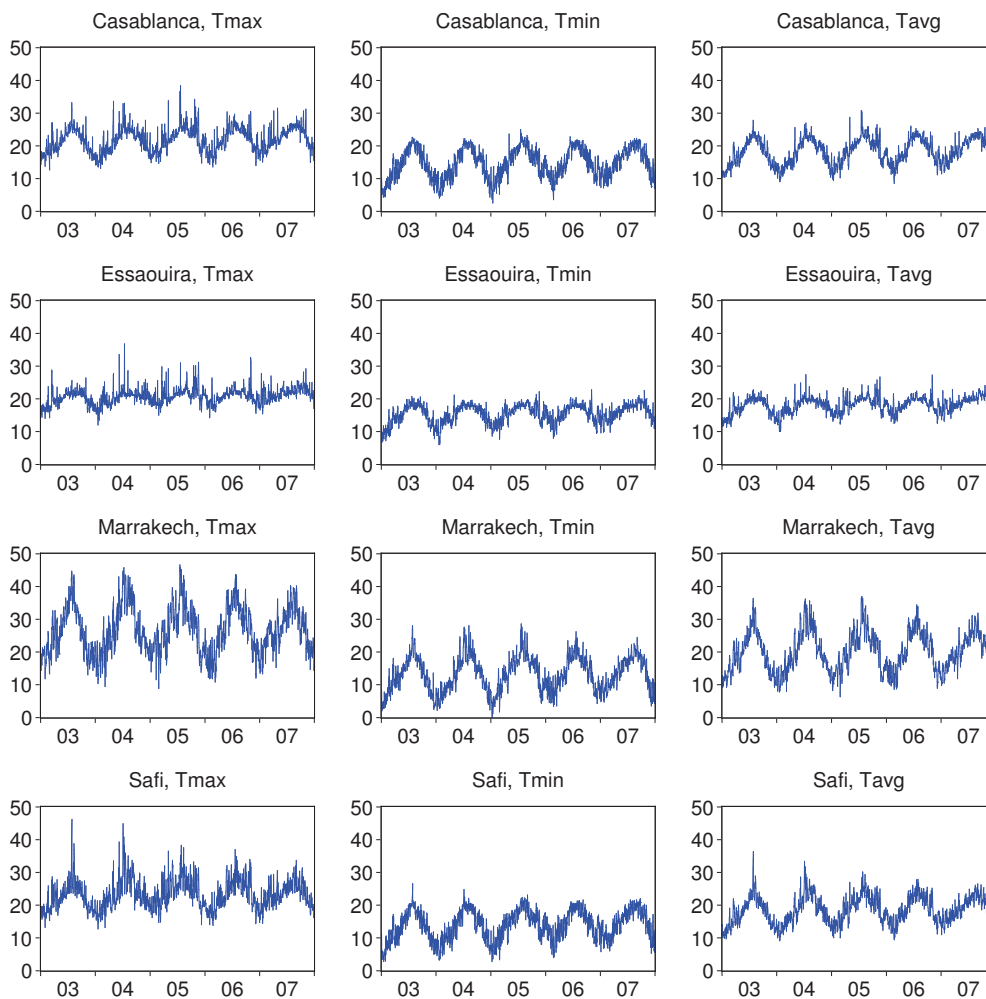
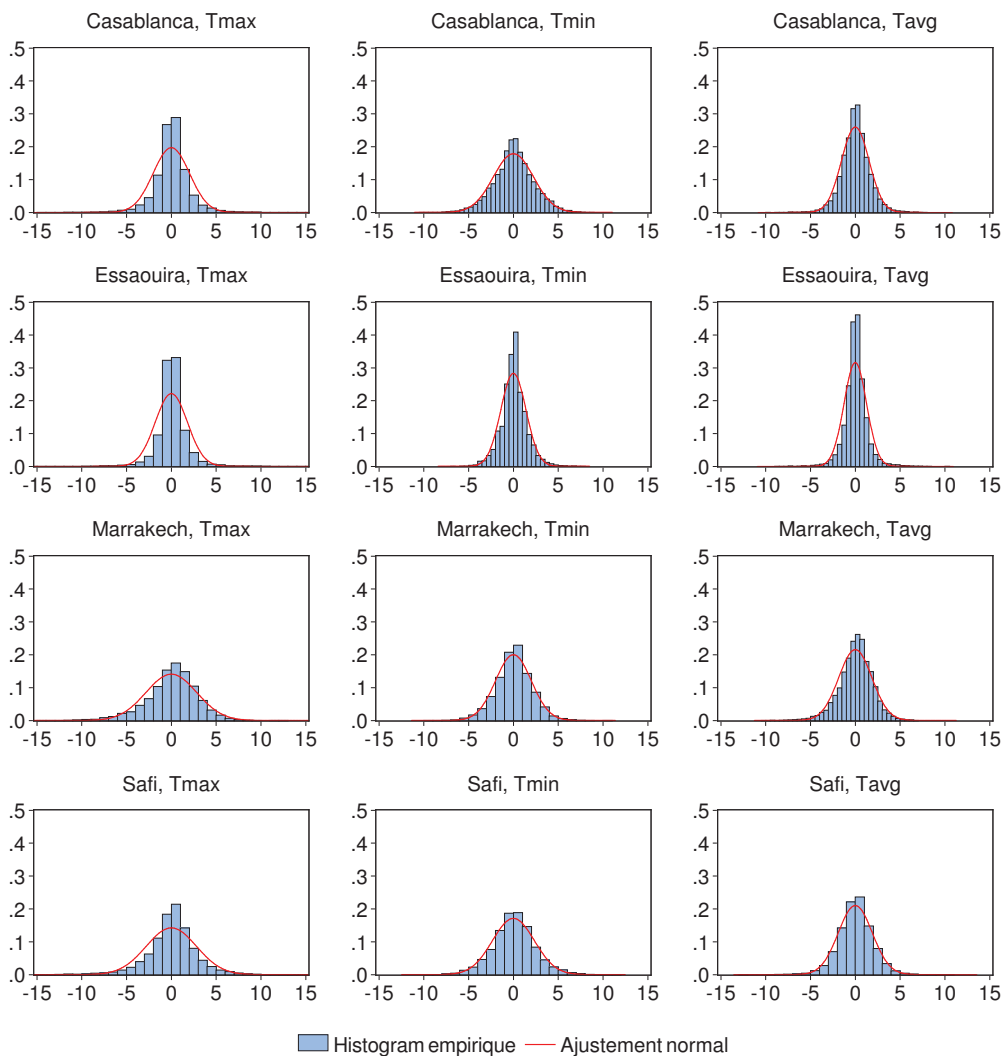


Fig. 5.1 – Capture de cinq années de températures journalières ( $T_{max}$ ,  $T_{min}$ ,  $T_{avg}$ ) pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (2003–2007)

D'après Fig. 5.1, il est clair que le processus de la température devrait être un processus retour à la moyenne pour les trois types de température ( $T_{max}$ ,  $T_{min}$ ,  $T_{avg}$ ). La moyenne devrait avoir une fonction de forme cyclique (Alaton *et al.* [1], Mraoua et Bari [8]).

Par ailleurs, les histogrammes représentant les variations de température journalière



**Fig. 5.2** – Variations des températures journalières de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (1978–2007)

donnés en Fig. 5.2 suggèrent une certaine forme de distribution normale pour les variations de température quotidienne pour les trois types de température ( $T_{max}$ ,  $T_{min}$ ,  $T_{avg}$ ).

Par conséquent, le processus de la température doit suivre un mouvement brownien

$$dT_t = \left[ \frac{d\theta(t)}{dt} + a(\theta_t - T_t) \right] dt + \gamma_t dW_t \quad (5.2)$$

où  $T_t$  est le processus modélisé,  $a$  la vitesse de retour à la moyenne,  $\theta_t$  la moyenne vers laquelle le processus retourne et  $\gamma$  la volatilité du processus.  $dW_t$  est un processus de Wiener.

Selon Fig. 5.1, nous pouvons ajuster au processus de la température moyenne  $\theta_t$ , le modèle donné par la fonctionnelle  $\theta_t = A + Bt + C \sin(\omega t + \varphi)$  où  $\omega = \frac{2\pi}{365}$  (nous n'avons pas considéré les années bissextiles). Table 5.2 donne l'estimation des paramètres du modèle ajusté pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi.

**Table 5.2**

Estimation des paramètres du modèle ajusté pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi

		$A$	$B$	$C$	$\varphi$	$a$
Casablanca	$T_{max}$	21.126166	0.000068	-4.366332	0.827179	0.346829
	$T_{min}$	12.254249	0.000223	-5.709349	0.953154	0.441145
	$T_{avg}$	16.690208	0.000145	-5.028028	0.898573	0.282502
Essaouira	$T_{max}$	19.490441	0.000119	-1.963406	0.546312	0.345844
	$T_{min}$	14.287198	0.000118	-3.151931	0.861308	0.281475
	$T_{avg}$	16.888819	0.000118	-2.527731	0.740693	0.242309
Marrakech	$T_{max}$	25.888513	0.000109	-8.719467	1.051239	0.210467
	$T_{min}$	12.285464	0.000107	-6.781079	1.014071	0.273667
	$T_{avg}$	19.086988	0.000108	-7.748956	1.034980	0.162515
Safi	$T_{max}$	22.953435	0.000044	-4.979774	0.887519	0.333161
	$T_{min}$	12.260139	0.000164	-5.557275	0.921657	0.445028
	$T_{avg}$	17.606787	0.000104	-5.267759	0.905523	0.303180

D'après Fig. 5.3, nous pourrions considérer la volatilité elle aussi comme un processus stochastique avec retour à la moyenne (Benth et Saltyte-Benth [3]). Ainsi, une equation différentielle stochastique du processus de la volatilité a la forme suivante

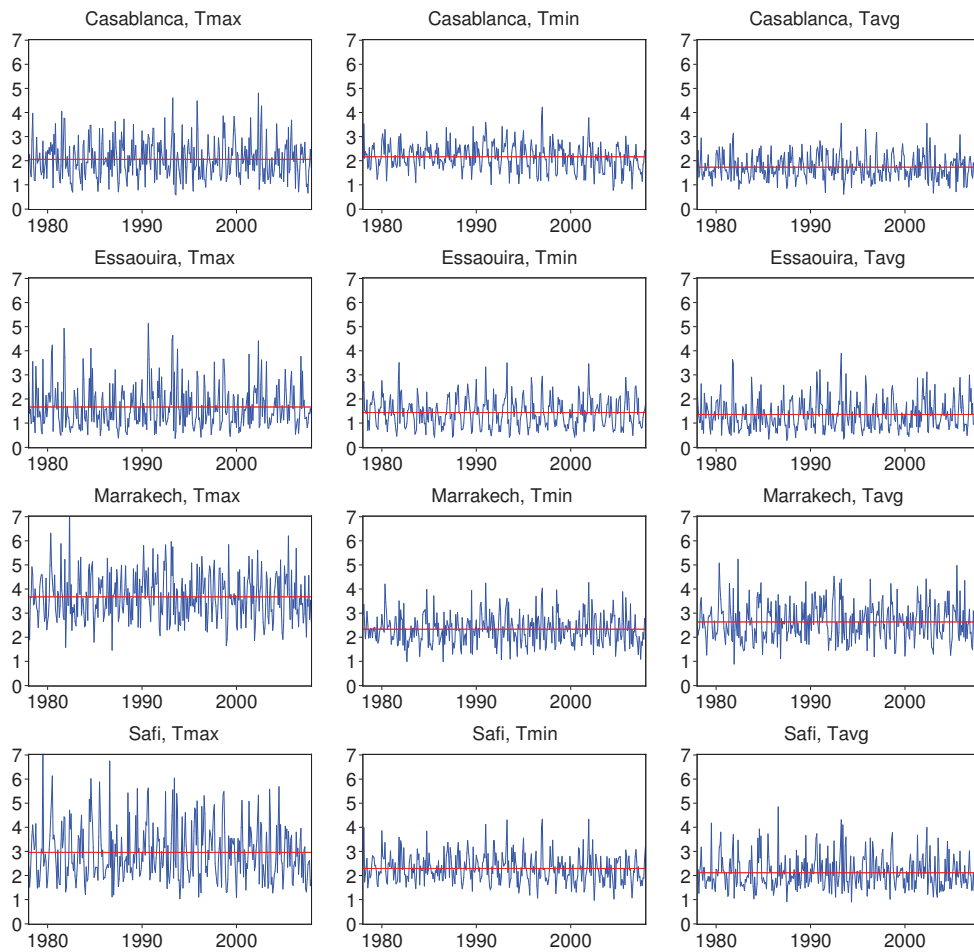
$$d\gamma_t = a_\gamma(\gamma_{trend} - \gamma_t)dt + \sigma_\gamma dW_t \quad (5.3)$$

En utilisant la technique d'estimation décrite Bibby et Sørensen [4], nous avons dressé dans la Table 5.3 l'estimation des paramètres du processus de la volatilité pour nos quatre villes Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi.

**Table 5.3**

Estimation des paramètres du modèle de volatilité de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi

		$\gamma_{trend}$	$\sigma_\gamma$	$a_\gamma$
Casablanca	$T_{max}$	2.080070	0.941980	2.105343
	$T_{min}$	2.308552	0.582081	0.978828
	$T_{avg}$	1.766435	0.609368	1.780849
Essaouira	$T_{max}$	1.658772	1.021610	1.648592
	$T_{min}$	1.461008	0.556916	0.727879
	$T_{avg}$	1.343922	0.706357	1.327838
Marrakech	$T_{max}$	3.726506	1.120504	1.819274
	$T_{min}$	2.352649	0.742707	2.039982
	$T_{avg}$	2.642919	0.890126	1.650928
Safi	$T_{max}$	3.019286	1.209864	1.132635
	$T_{min}$	2.402278	0.664978	1.334378
	$T_{avg}$	2.164545	0.798643	1.914609



**Fig. 5.3** – Volatilité des températures mensuelles moyennes observées avec tendance linéaire (trait horizontal) pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (1971–2007)

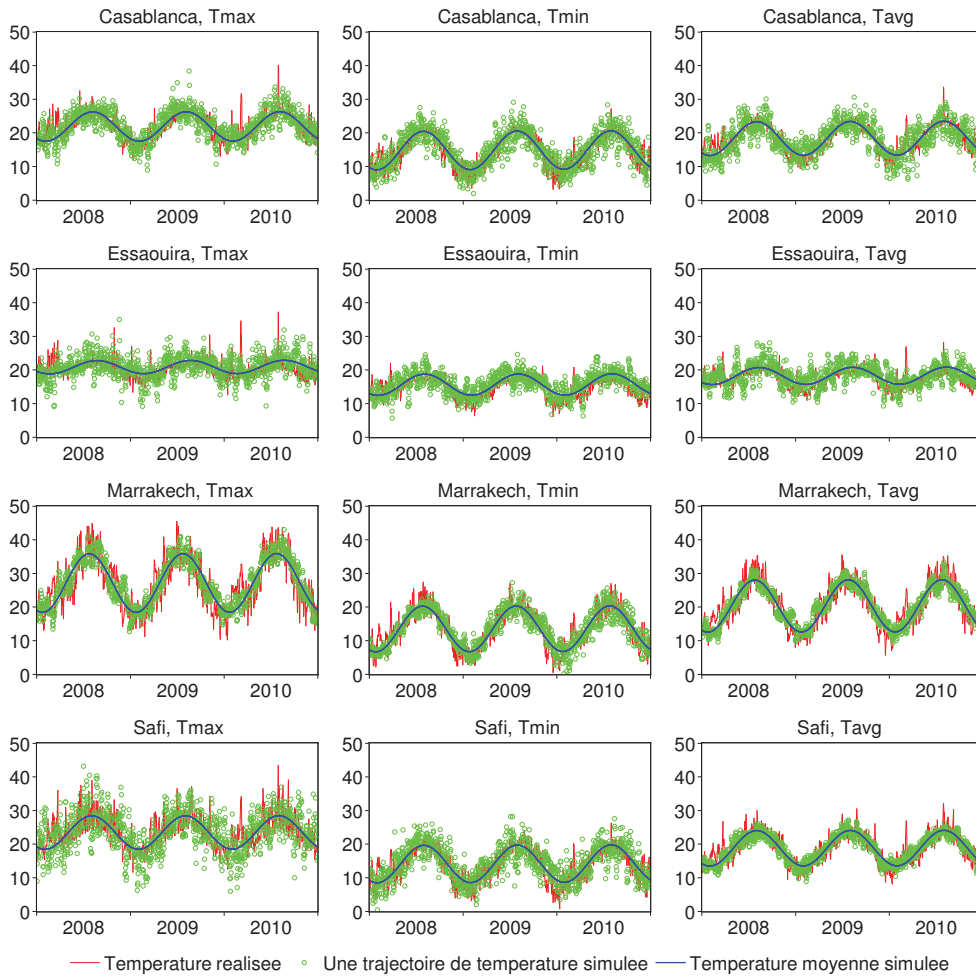
## 5.4 Résultats numériques

Nous reprenons le même contrat général que celui présenté dans la section 4.5. Notons toutefois que les prix d'exercice sont différents.

Considérons deux contreparties A et B. A est une compagnie de production (et/ou de distribution) d'énergie (électricité par exemple) qui a des succursales dans quatre villes (Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi) et B une entreprise de production de boissons gazeuses avec des branches dans les mêmes villes que A. A profite d'un climat froid (hausse de la demande d'électricité pour le chauffage) tandis que B bénéficie du climat chaud (augmentation de la consommation de boissons gazeuses). Les deux parties cherchent à stabiliser leurs flux de revenus.

Considérons les trois contrats suivants :

- Période du contrat : début le 01/01/2008 pour 1, 2 ou 3 années à la maturité.
- Température de référence ( $T_r$ ) : 18 °C.
- Montant Nominal ( $\pi$ ) : 1 MAD (pour simplifier).



**Fig. 5.4** – Températures moyennes simulées et une trajectoire simulée des températures prévisionnelles vs. températures réalisées pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (2008–2010)

Comme A tire profit du climat froid, ses revenus sont maximaux durant la période de novembre à mai. De même, les revenus de B sont maximaux pour la période allant de juin à octobre. Table 5.4 donne les indices degrés-jour et les niveaux d'exercice par mois.

Les modalités de paiement sont telles que, à la fin de chaque mois, si l'indice degré-jour est CDD, B paie A. Dans le cas où la mesure est HDD, alors c'est A qui verse des paiements à B. Dans les deux cas, nous pouvons voir la valeur de notre swap climatique  $V_B$  au 01/01/2008 comme une séquence de collars et ainsi écrire :

$$V_B = \pi \left\{ \sum_{i \in CS} E \left[ (H_i - K_i)^+ - (K_i - H_i)^+ \right] B(0, i) + \sum_{j \in WS} E \left[ (K_j - C_j)^+ - (C_j - K_j)^+ \right] B(0, j) \right\} \quad (5.4)$$

où  $K_i$  est le niveau d'exercice durant le mois  $i$ ,  $CS$  l'ensemble des mois de la saison

**Table 5.4**

Indices degré-jour sous-jacents et leurs valeurs d'exercice mensuels pour 2008, 2009 et 2010 (périodes des contrats)

Mois	Indice	Valeur d'exercice		
		2008	2009	2010
Janvier	HDD	145	145	145
Février	HDD	90	90	90
Mars	HDD	55	55	55
Avril	HDD	45	45	45
Mai	HDD	10	10	10
Juin	CDD	130	130	130
Juillet	CDD	180	180	180
Août	CDD	195	195	195
Septembre	CDD	135	135	135
Octobre	CDD	60	60	60
Novembre	HDD	70	70	70
Décembre	HDD	125	125	125

froide,  $WS$  l'ensemble des mois de la saison chaude,  $B(0, i)$  un facteur d'actualisation pour le mois  $i$  et  $(H - K)^+ = \max(H - K, 0)$ .

Afin d'évaluer  $V_B$ , nous avons appliqué la méthode de simulations de Monte Carlo pour les deux équations 5.2 and 5.3 de notre modèle. En considérant un taux d'actualisation annuel de 4% et en générant une simulation de 2 000 000 chemins, Table 5.5 nous donne la valeur de  $V_B$  pour chaque échéance et en utilisant les deux approches de modélisation des températures quotidiennes à savoir  $M^{min,max}$  et  $M^{avg}$ . Sur la dernière colonne de Table 5.5, "Totale" représente la valeur d'un portefeuille composé des quatre contrats de swaps détenus par la contrepartie B au 01/01/2008.

**Table 5.5**

Valeurs du swap de la contrepartie B au 01/01/2008 pour différentes maturités (1, 2 et 3 ans) en utilisant les estimations des paramètres des deux modèles de température  $M^{min,max}$  et  $M^{avg}$  pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi ainsi que leur valeur totale

Maturité du swap	Mesure de $T_t$	Valeur du swap				
		Casablanca	Essaouira	Marrakech	Safi	Total
1 an	$M^{min,max}$	137.87	135.63	-367.29	6.16	-87.63
	$M^{avg}$	138.00	147.74	-318.30	24.35	-8.21
2 ans	$M^{min,max}$	315.08	256.05	-702.30	1.66	-129.51
	$M^{avg}$	257.52	280.25	-634.96	49.70	-47.49
3 ans	$M^{min,max}$	635.94	361.03	-993.84	-12.50	-9.37
	$M^{avg}$	358.27	396.32	-950.99	65.14	-131.26

Pour comparer les résultats, nous avons commencé par calculer les valeurs du swap pour la contrepartie B au 01/01/2008 en se basant sur les températures réalisées

de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi entre 2008 et 2010 (Table 5.6). Par la suite, nous avons présenté sur Tables 5.7 et 5.8 les différences entre les variables réelles et prévisionnelles en fonction de différents critères statistiques.

**Table 5.6**

Valeurs réelles du swap de la contrepartie B au 01/01/2008 basées sur les températures observées de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (2008–2010)

Maturité du swap	Valeur du swap				
	Casablanca	Essaouira	Marrakech	Safi	Total
1 an	180.30	200.78	-278.95	22.13	124.25
2 ans	385.81	400.42	-560.42	60.33	286.14
3 ans	499.18	600.06	-890.46	103.81	312.60

## 5.5 Conclusion

Les principaux résultats de notre étude portant sur la comparaison empirique de la modélisation des températures moyennes et les températures extrêmes pour l'évaluation des dérivés climatiques se résument en trois points.

D'une part, selon le critère RMSE (Table 5.7), les températures prévisionnelles basées sur l'estimation des paramètres du modèle  $T(M^{avg})$  sont meilleures que celles basées sur l'estimation des paramètres du modèle  $T(M^{min,max})$ , sauf dans cinq cas (les chiffres encadrés par les rectangles).

D'autre part, selon les critères RMSE, MAE et MAPE (Table 5.8), les valeurs du swap de température calculées en se basant sur l'estimation des paramètres du modèle  $T(M^{avg})$  sont meilleures que celles basées sur l'estimation des paramètres du modèle  $T(M^{min,max})$ , sauf dans six cas (les chiffres entre les rectangles).

Enfin, sur la base des deux comparaisons, le modèle qui ajuste le mieux les données est celui basé sur les températures moyennes journalières. Une explication possible de ce résultat est que le modèle moyen permet de réduire l'effet des variations quotidiennes extrêmes dues à d'éventuels grands écarts qui pourraient exister entre  $T_{min}$  et  $T_{max}$  (Hinz [7], Schiller *et al.* [9]).



**Table 5.7**

Comparaison des températures prévisionnelles et celles observées sur la base du critère de l'erreur quadratique moyenne (RMSE\*), pour différents horizons (1, 2 et 3 ans) et en utilisant les estimations des paramètres des deux modèles de température  $M^{min,max}$  et  $M^{avg}$  pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi

Horizon temps	Mesure de $T_t$	Casablanca			Essaouira			Marrakech			Safi						
		$T_d^a$	$T_m^b$	$DD_d^c$	$DD_m^d$	$T_d$	$T_m$	$DD_d$	$DD_m$	$T_d$	$T_m$	$DD_d$	$DD_m$				
1 an	$T(act)^e$ vs. $T(M^{min,max})^f$	2.0	39.4	1.7	23.5	1.9	41.5	1.4	38.2	3.2	57.0	2.7	66.1	2.5	42.8	2.1	53.4
	$T(act)$ vs. $T(M^{avg})^g$	2.0	39.5	1.7	23.4	1.9	41.5	1.4	38.2	3.2	56.8	2.7	66.2	2.5	42.8	2.1	53.3
2 ans	$T(act)$ vs. $T(M^{min,max})$	1.8	33.5	1.6	24.3	1.8	39.6	1.5	35.8	3.0	47.5	2.5	67.8	2.3	36.7	2.0	54.8
	$T(act)$ vs. $T(M^{avg})$	1.8	33.5	1.6	24.3	1.8	39.6	1.5	35.8	3.0	47.4	2.5	67.9	2.3	36.8	2.0	54.8
3 ans	$T(act)$ vs. $T(M^{min,max})$	1.9	32.1	1.7	24.9	2.0	43.3	1.7	34.7	3.1	51.5	2.6	74.8	2.4	36.9	2.1	55.8
	$T(act)$ vs. $T(M^{avg})$	1.9	32.1	1.7	24.9	2.0	43.3	1.7	34.7	3.1	51.5	2.6	74.8	2.4	36.9	2.1	55.7

$a, b, c$  et  $d$  sont respectivement, les températures quotidiennes, les températures mensuelles, les degrés-jour quotidiens et les degrés-jour cumulatifs mensuels.

$e, f$  et  $g$  sont respectivement, la température réalisée, la température prévisionnelle basée sur l'estimation des paramètres des modèles  $T_{min}$  et  $T_{max}$  et la température prévisionnelle basée sur l'estimation des paramètres du modèle  $T_{avg}$ .

$$* RMSE(\hat{T}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{T}_i - T_i)^2}$$

où  $T_i$  est la température observée durant la journée  $i$ ,  $\hat{T}_i$  la température prévisionnelle et  $n$  le nombre de jours de la période examinée.

**Table 5.8**

Comparaison des valeurs prévisionnelles et réelles du swap de la contrepartie B au 01/01/2008 pour les différentes maturités (1, 2 et 3 ans) et en utilisant les estimations des paramètres des deux modèles de température  $M^{min,max}$  et  $M^{avg}$  pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi

Maturité du swap	Mesure de $T_t$	Casablanca			Essaouira			Marrakech			Safi			Portfolio		
		RMSE <sup>a</sup>	MAE <sup>b</sup>	MAPE <sup>c</sup>	RMSE	MAE	MAPE	RMSE	MAE	MAPE	RMSE	MAE	MAPE	RMSE	MAE	MAPE
1 an	$M^{min,max}$ *	1800	42	24	4245	65	32	7803	88	32	255	16	72	59	53	40
	$M^{avg}$ **	1789	42	23	2814	53	26	1548	39	14	5	2	10	39	34	19
2 ans	$M^{min,max}$ *	5003	71	18	20843	144	36	20128	142	25	3442	59	97	111	104	44
	$M^{avg}$ **	16459	128	33	14439	120	30	5556	75	13	113	11	18	96	83	24
3 ans	$M^{min,max}$ *	18702	137	27	57134	239	40	10688	103	12	13529	116	112	158	149	48
	$M^{avg}$ **	19856	141	28	41511	204	34	3664	61	7	1495	39	37	129	111	27

<sup>a</sup>, <sup>b</sup> et <sup>c</sup> sont respectivement, l'erreur quadratique moyenne, l'erreur absolue moyenne et l'erreur absolue moyenne en pourcentage :

$$RMSE(\hat{V}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{V}_i - V_i)^2}$$

$$MAE(\hat{V}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\hat{V}_i - V_i|}$$

$$MAPE(\hat{V}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\hat{V}_i - V_i}{V_i} \right|}$$

où  $V_i$  est la valeur réelle du swap au mois  $i$ ,  $\hat{V}_i$  la valeur prévisionnelle du swap et  $n$  le nombre de mois durant la période examinée.

\* et \*\* représentent, respectivement, la température prévisionnelle basée sur l'estimation des paramètres des modèles  $T^{min}$  et  $T^{max}$  et la température prévisionnelle basée sur l'estimation des paramètres du modèle  $T^{avg}$ .

## Références

- [1] Peter ALATON, Boualem DJEHICHE et David STILLBERGER : On modelling and pricing weather derivatives. *Applied Mathematical Finance*, 9(1):1–20, 2002.
- [2] Antonis K. ALEXANDRIDIS et Achilleas D. ZAPRANIS : *Weather derivatives, Modeling and pricing weather-related risk*. Springer, 2013.
- [3] Fred Espen BENTH et Jurate SALTYTE-BENTH : The volatility of temperature and pricing of weather derivatives. *Quantitative Finance*, 7(5):553–561, 2007.
- [4] Bo Martin BIBBY et Michael SØRENSEN : Martingale estimation functions for discretely observed diffusion processes. *Bernoulli*, 1:17–39, 1995.
- [5] Debbie J. DUPUIS : Forecasting temperature to price CME temperature derivatives. *International journal of forecasting*, 27:602–618, 2011.
- [6] Ahmet GONCU : Pricing temperature-based weather contracts : an application to China. *Applied Economics Letters*, 18(14):1349–1354, 2011.
- [7] Juri HINZ : Weather derivative valuation : The meteorological, statistical, financial and mathematical foundations. *Journal of the American Statistical Association*, 102 (477):380–380, 2007.
- [8] Mohammed MRAOUA et Driss BARI : Temperature stochastic modeling and weather derivatives pricing : empirical study with Moroccan data. *Afrika Statistika*, 2(1):22–43, 2007.
- [9] Frank SCHILLER, Gerold SEIDLER et Maximilian WIMMER : Temperature models for pricing weather derivatives. *Quantitative Finance*, 12(3):489–500, 2012.

## Chapitre 6

# Evaluation d'un swap de volatilité de température

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>123</b>
<b>6.2</b>	<b>Définitions</b>	<b>124</b>
<b>6.3</b>	<b>Méthode d'évaluation</b>	<b>125</b>
<b>6.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>131</b>

---

Les variables climatiques telles que la température, la pluviométrie, la vitesse du vent, etc. sont très volatiles et leur impact sur l'activité économique dépend justement de cette volatilité. Pour se couvrir contre le risque de variation des variables économiques, les agents économiques utilisent les produits classiques d'assurance ou comme nous l'avons montré dans les précédents chapitres, les produits dérivés climatiques. Or, ces derniers même s'ils sont sophistiqués et assurent une grande flexibilité de gestion ne permettent pas de tout couvrir et en particulier les activités dont la sensibilité aux conditions climatiques est très élevée. Dans ce chapitre, nous allons présenter des produits exotiques en l'occurrence les swaps de volatilité que nous allons adapter au contexte climatique. Au meilleur de notre connaissance, c'est la première fois que ce genre de produits exotiques serait présenté et évalué.

### 6.1 Introduction

Il est bien connu que la volatilité de la majorité des prix des actifs financiers évolue de façon imprévisible une fois que les niveaux des actifs sous-jacents changent (Heston et Nandi [5]). C'est aussi le cas des variables météorologiques pour le cas des dérivés climatiques (Benth et Benth [1]).

C'est au niveau des marchés financiers du gré-à-gré (OTC) que le trading des swaps de volatilité a été développé. Les swaps de volatilité sont des produits financiers qui

offrent un moyen simple pour traiter les opérations de trading relatives à la volatilité (Mraoua [8]).

Les swaps de volatilité n'ont commencé à être utilisés qu'à partir de l'année 1998 suite à l'effondrement de la société LTCM (Long Term Capital Management) quand les niveaux des indices dépendant de la volatilité ont flambé de façon spectaculaire et inattendue. Les fonds de couverture ont tiré avantage de cette situation en payant la variance sur les swaps et en achetant la volatilité implicite réalisée à des niveaux élevés.

L'objectif de ce chapitre est de présenter une méthode d'évaluation des swaps de volatilité en se basant sur un modèle GARCH(1,1). Dans ce cadre, nous présentons la solution analytique proposée par Javaheri *et al.* [7] que nous allons adapter pour évaluer un swap de volatilité sur température. Les équations obtenues à partir de la solution analytique sont programmées et implémentées au niveau d'une application conviviale (sur Excel) afin de construire un pricer de swaps de volatilité de température permettant ainsi d'automatiser l'évaluation de ces produits.

## 6.2 Définitions

Le swap de variance (ou de volatilité) est un contrat à terme sur la variance annualisée dans lequel un investisseur qui paye un montant fixe  $K_{var}/1$  MAD comme nominal à l'échéance, reçoit le montant variable  $\sigma_R^2/1$  MAD comme nominal.  $K_{var}$  est le prix d'exercice (variance annualisée) et  $\sigma_R^2$  est la variance réalisée annualisée.

La mesure de la variance réalisée qui va être adoptée est définie au début du contrat. Dans Hull [6], on trouve une formule typique de cette mesure. Ainsi

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{T_i - T_{i-1}}{T_{i-1}} \right)^2 \quad (6.1)$$

où  $n$  est égale au nombre total de jours jusqu'à l'échéance du contrat et  $T_i$  représente la température moyenne du jour  $i$  (le sous-jacent).

En temps continu, l'équation 6.1 s'écrit de la façon suivante

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t) dt \quad (6.2)$$

Le payoff à l'échéance est égale à  $(\sigma_R^2 - K_{var})$ . Donc à l'échéance, le détenteur du swap de variance reçoit  $N$  dirhams pour chaque point par lequel la variance réalisée  $\sigma_R^2$  du sous-jacent excède le prix fixe  $K_{var}$

$$\left( \sigma_R^2 - K_{var} \right) \times N \quad (6.3)$$

Le détenteur swappe<sup>1</sup> ainsi une volatilité fixe  $K_{var}$  en une volatilité future réelle ou variable  $\sigma_R^2$ . Le prix fixe  $K_{var}$  (ou  $K_{vol}$ ) est coté comme une volatilité, par exemple 15%. Le montant notionnel est typiquement coté en dirhams par point de volatilité, par exemple  $N = 100\,000$  MAD/(point de volatilité).

1. C'est-à-dire qu'il y a échange de la volatilité fixe contre la volatilité variable, d'où l'origine du mot swap qui veut dire échange en anglais.

## 6.3 Méthode d'évaluation

### 6.3.1 Introduction

Nous allons maintenant présenter une solution analytique pour évaluer les swaps de volatilité, cette solution est basée sur un processus GARCH(1,1) et a été développée par Javaheri *et al.* [7]. Dans cette section, nous présentons dans un premier temps, l'approche générale de construction de la solution que nous détaillons dans le cas particulier d'un processus GARCH(1,1), et dans un deuxième temps, nous traitons un cas pratique en évaluant un contrat exotique de swap de volatilité sur température moyenne pour la ville de Casablanca.

Notons que les swaps de volatilité peuvent avoir comme sous-jacent une multitude de produits financiers (des taux d'intérêt, des taux de change, des indices boursiers, etc.). Au meilleur de notre connaissance, il s'agit ici de la première expérimentation (théorique) visant à proposer et à évaluer un produit hybride couvrant la volatilité d'une variable climatique.

### 6.3.2 Approche générale

Avant de commencer les aspects quantitatifs, Demeterfi *et al.* [3] nous rappellent que pour le calcul de la volatilité réalisée il y a quelques aspects qui doivent être pris en considération :

- La fréquence de la source et des observations des actions ou des indices de prix. Par exemple, dans notre cas, nous avons utilisé les températures moyennes quotidiennes de Casablanca.
- Le facteur d'annualisation pour passer des observations quotidiennes à la volatilité annualisée. Dans notre cas, nous avons utilisé 365 jours par an comme facteur multiplicatif pour calculer la variance annualisée à partir des températures moyennes quotidiennes (nous n'avons pas considéré les années bissextiles).

Dans un swap de variance, la variable inconnue est l'espérance de la volatilité réalisée. Donc afin de l'évaluer, nous utilisons dans un premier temps, une approche basée sur les équations aux dérivées partielles pour la détermination du premier et du second moment de la variance réalisée et ce dans les deux contextes discret et continu et dans un deuxième temps, nous approximons la volatilité réalisée.

La variable inconnue est  $E[\sigma^2] = E[V]$  avec  $\sigma^2$  la volatilité au carré. Elle peut être retrouvée en utilisant les modèles stochastiques standards de volatilité. Le prix délivré du swap de variance est  $E[\sigma^2] = E[V]$  car le prix de tout swap est égal à zéro à l'émission.

Pour le swap de volatilité, l'espérance de la volatilité réalisée est  $E[\sqrt{V}] = E[\sigma]$ . Cette mesure n'est pas disponible directement à partir du processus stochastique des modèles standards. Dans ce cas, nous devons utiliser une approximation comme celle proposée par Brockhaus et Long [2] pour la trouver, mais avant, nous devons calculer tout d'abord le swap de variance.

Comme il a été mentionné précédemment, la volatilité réalisée est la racine carrée de la variance et nous savons que l'espérance de la racine carrée d'une variable

aléatoire est plus petite que la racine carrée de son espérance (inégalité de Jensen). La différence entre le swap de volatilité et le swap de variance réside dans l'ajustement convexe qui lie les deux grandeurs, ce qui donne le résultat suivant

$$E[\sqrt{V}] \approx \sqrt{E[V]} - \frac{\text{var}(V)}{8E[V]^{3/2}} \quad (6.4)$$

avec  $\frac{\text{var}(V)}{8E[V]^{3/2}}$  est l'ajustement convexe.

**Preuve.** Cette approximation est un développement de Taylor d'ordre 2 de la fonction racine carrée appliquée à la variable  $V$  au voisinage du point  $E[V_0]$ . En effet, nous voulons approximer la fonction  $F(x) = x^{1/2}$  qui a la forme prise par la volatilité.

Le développement de Taylor d'ordre 2 appliqué à la fonction  $F(x)$  au voisinage du point  $x_0$  donne

$$F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)(x - x_0)^2$$

Et sachant que

$$F'(x) = \frac{1}{2x^{1/2}}$$

et

$$F''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}$$

Nous obtenons alors par substitution

$$F(x) \approx \frac{x + x_0}{2x_0^{1/2}} - \frac{(x - x_0)^2}{8x_0^{3/2}}$$

En remplaçant maintenant  $x$  par  $v$  et  $x_0$  par  $E[v]$ , nous obtenons

$$v^{1/2} \approx \frac{v + E[v]}{2E[v]^{1/2}} - \frac{(v - E[v])^2}{8E[v]^{3/2}}$$

En appliquant l'opérateur espérance  $E[.]$  des deux côtés de la formule précédente, nous obtenons notre formule, soit

$$E[\sqrt{v}] \approx \sqrt{E[v]} - \frac{\text{var}(v)}{8E[v]^{3/2}}$$

□

### 6.3.3 Modèle de volatilité, cas particulier : GARCH(1,1)

Le modèle stochastique de la dynamique de la variance dans un contexte temporel continu est donné par

$$dv = \kappa(\theta - v)dt + \gamma v dX \quad (6.5)$$

avec  $\kappa$  la vitesse d'ajustement au tour de la valeur centrale  $\theta$ ,  $\gamma$  la volatilité du carré de la volatilité et  $dX$  un processus de Wiener.

Dans le cadre de la modélisation GARCH(1,1), nous pouvons écrire<sup>2</sup>

$$\theta = \frac{V}{dt} \quad (6.6)$$

$$\kappa = \frac{1 - \alpha - \beta}{dt} \quad (6.7)$$

$$\gamma = \alpha \sqrt{\frac{\xi - 1}{dt}} \quad (6.8)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les paramètres de notre modèle GARCH(1,1) et  $\xi$  la kurtosis de Pearson.

Soit à présent

$$I = \int_0^T v(t) dt \quad (6.9)$$

Pour calculer l'ajustement convexe, nous avons besoin de  $E[I]$  et de  $var[I]$ .  $I$  est la variance durant toute la vie du contrat et  $v$  est la variance instantanée en chaque point de l'axe temps. Plus exactement, nous devrions écrire

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt \quad (6.10)$$

En faisant cela, nous nous rendons compte que la volatilité va coïncider avec la volatilité instantanée et nous pouvons ainsi évaluer le swap tout au long de sa durée de vie. Toutefois et pour des raisons de simplicité, nous n'allons pas en tenir compte.

La formule de Feynman-Kac nous permet d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}g(v)^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} + f(v) \frac{\partial}{\partial v} + v \frac{\partial}{\partial I} = 0 \quad (6.11)$$

Notons  $F(v, I, T) = E[I]$  et  $G(v, I, T) = E[I^2]$ .

La variance de  $I$  est donnée par  $var(I) = G - F^2$ . Dans le cas d'un processus GARCH(1,1), nous pouvons utiliser la formule de Feynman-Kac pour trouver  $F$ , et nous pouvons écrire

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\gamma^2 v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial F}{\partial v} + v \frac{\partial F}{\partial I} = 0 \quad (6.12)$$

En résolvant Eq. 6.12, la solution pour  $F(v, I, T)$  est donnée par

$$F(v, I, T) = \theta \left( T - t + \frac{e^{-\kappa(T-t)} - 1}{\kappa} \right) + \frac{1}{\kappa} \left( 1 - e^{-\kappa(T-t)} \right) v + I \quad (6.13)$$

$G(v, I, T)$  satisfait Eq. 6.12 avec  $G(v, I, T) = I^2$  et nous obtenons

$$G(v, I, T) = f(t) + g(t)v + h(t)v^2 + l(t)I + n(t)vI + I^2 \quad (6.14)$$

---

2. Pour la relation entre un processus GARCH(1,1) et un processus stochastique, nous nous sommes basés sur Javaheri *et al.* [7].



avec

$$\begin{aligned}
f(t) = & \theta^2(T-t)^2 - \frac{4\theta^2(\gamma^2 - \kappa)}{\kappa(\gamma^2 - 2\kappa)} \left( T - t + \frac{e^{-\kappa(T-t)} - 1}{\kappa} \right) \\
& - \frac{4\theta^2\kappa^2}{(\gamma^2 - \kappa)^2(\gamma^2 - 2\kappa)} \left( \frac{1 - e^{(\gamma^2 - 2\kappa)(T-t)}}{(\gamma^2 - 2\kappa)} + \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) \\
& - \frac{2\theta^2(\gamma^2 + \kappa)}{(\gamma^2 - \kappa)} \left( e^{-\kappa(T-t)} \frac{T-t}{\kappa} + \frac{1}{\kappa^2} (e^{-\kappa(T-t)} - 1) \right)
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
g(t) = & \frac{2\theta}{\kappa}(T-t) - \frac{4\theta(\gamma^2 - \kappa)}{\kappa^2(\gamma^2 - 2\kappa)} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \\
& + \frac{4\theta\kappa}{(\gamma^2 - \kappa)^2(\gamma^2 - 2\kappa)} (e^{(\gamma^2 - 2\kappa)(T-t)} - e^{-\kappa(T-t)}) \\
& + \frac{1}{(\gamma^2 - 2\kappa)} + \frac{4\theta(\gamma^2 + \kappa)}{\kappa(\gamma^2 - \kappa)} (T-t)e^{-\kappa(T-t)}
\end{aligned} \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}
h(t) = & \frac{2}{\kappa(\gamma^2 - 2\kappa)} (e^{(\gamma^2 - 2\kappa)(T-t)} - 1) \\
& - \frac{2}{\kappa(\gamma^2 - \kappa)} (e^{(\gamma^2 - 2\kappa)(T-t)} - e^{-\kappa(T-t)})
\end{aligned} \tag{6.17}$$

$$l(t) = 2\theta \left( T - t + \frac{e^{-\kappa(T-t)} - 1}{\kappa} \right) \tag{6.18}$$

$$n(t) = \frac{2}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \tag{6.19}$$

### 6.3.4 Application numérique

Nous examinons ici un cas pratique où un trader voudrait évaluer la jambe fixe d'un swap de volatilité ayant comme sous-jacent la volatilité de la température moyenne quotidienne de la ville de Casablanca.

Nous avons travaillé sur une série de onze années et demie de températures moyennes quotidiennes de la ville de Casablanca (du 1<sup>er</sup> janvier 2000 jusqu'au 30 juin 2011), soit un total de 4 199 observations.

Les statistiques descriptives de la série des températures moyennes quotidiennes ainsi que celles relatives à la variation de ces mêmes températures sont présentées dans Table. 6.1.

L'examen de l'histogramme donné en Fig. 6.1 montre que la distribution des variations logarithmiques de la température moyenne quotidienne de Casablanca est leptokurtique (Mraoua et Bari [9]).

Fig. 6.2 montre une grande volatilité de la série des variations logarithmiques des températures moyennes quotidiennes de Casablanca ce qui nous fait penser à un effet d'hétéroscédasticité conditionnelle. Une analyse économétrique approfondie (cf. par

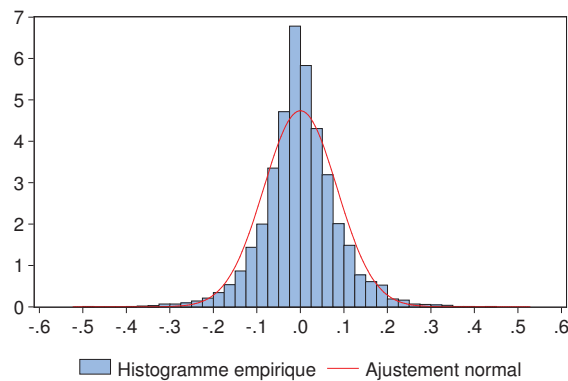
**Table 6.1**

Statistiques descriptives de la température moyenne quotidienne et de sa variation quotidienne à Casablanca

	Température	Variation de la température
Nombre d'observations	4199	4199
Moyenne	18.0754	0.000102
Médiane	18	0
Maximum	33.6	0.432546
Minimum	8.5	-0.47733
Écart-type	4.054145	0.084203
Skewness	0.044935	-0.018399
Kurtosis	2.188777	5.145075
Jarque-Bera	116.5501*	805.281*

Notes : Le test de Jarque-Bera vérifie l'hypothèse nulle de normalité dans la distribution échantillonnale des températures moyennes quotidiennes.

\* indique un rejet de l'hypothèse nulle à un niveau de signification de 1%.



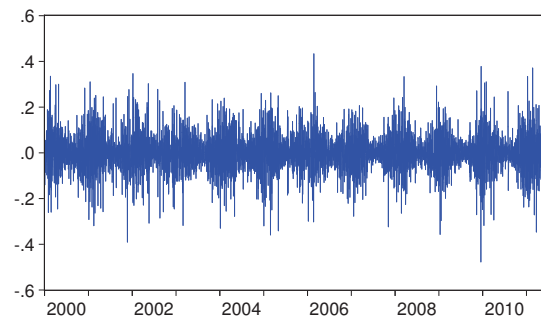
**Fig. 6.1** – Histogramme de la variation logarithmique de la température moyenne quotidienne de Casablanca

exemple Francq et Zacoian [4]), qui ne fait pas l'objet de ce chapitre, prouve cette affirmation et suggère une régression de type GARCH(1,1).

Les résultats de la régression GARCH(1,1) ainsi que l'ensemble des inputs dont nous avons besoin pour évaluer notre swap de volatilité sont regroupés dans Table. 6.2.

$I$  est égal à 0 à la date d'émission du swap. Eqs. 6.4 et 6.13–6.19 nous permettent de dresser Table. 6.2 qui affiche les résultats de l'évaluation d'un swap de volatilité sur température moyenne quotidienne pour une maturité d'un an.

Fig. 6.4 montre que l'ajustement convexe du swap de volatilité décroît avec sa maturité, cela s'explique par le fait que la volatilité de la volatilité sur une longue période est faible.



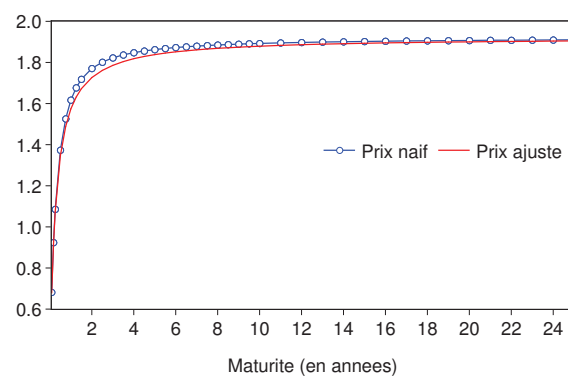
**Fig. 6.2** – Evolution de la variation logarithmique de la température moyenne quotidienne au niveau de Casablanca

**Table 6.2**

Paramètres inputs pour l'évaluation du swap de volatilité sur la température moyenne quotidienne de Casablanca

Paramètre	Définition	Estimation
$c^*$		0.000092
$\alpha$		0.088424
$\beta$		0.902531
$\zeta$	Kurtosis	5.145075
$V$	$\frac{c}{(1-\alpha-\beta)}$	0.010115
$dt$	$\frac{1}{365}$	0.003968
$\theta$	$\frac{V}{dt}$	3.691838
$\kappa$	$\frac{(1-\alpha-\beta)}{dt}$	3.301454
$\gamma$	$\alpha \sqrt{\frac{(\xi-1)}{dt}}$	1.807738
$v$	Dernière variance observée	0.000001

Note : \* $c$  est l'estimation de la constante dans le modèle de régression GARCH(1,1).

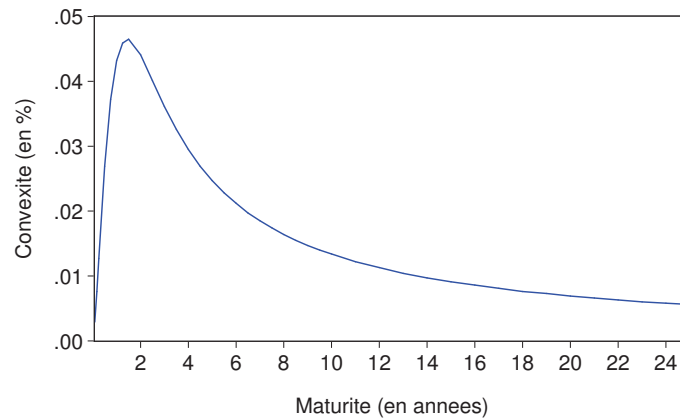


**Fig. 6.3** – Niveau d'exercice du swap de volatilité sur température en fonction de la maturité

**Table 6.3**

Résultat de l'évaluation du swap de volatilité sur la température moyenne quotidienne de Casablanca

Paramètre	Estimation
$F(v, I, t) = E[I]$	2.614777
$f(t)$	8.297335
$g(t)$	1.876438
$h(t)$	0.153237
$l(t)$	5.229553
$n(t)$	0.583483
$G(v, I, t) = E[I^2]$	8.297337
$var(I) = G - F^2$	1.460278
Ajustement convexe	4.31712%
Prix non ajusté	161.703%
Prix ajusté	157.386%



**Fig. 6.4** – Ajustement convexe du swap de volatilité sur température en fonction de la maturité

## 6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un nouveau produit financier à savoir les swaps de volatilité. Nous avons utilisé, pour son évaluation, la solution analytique proposée par Javaheri *et al.* [7]. Nous avons utilisé cette solution pour évaluer un swap de volatilité sur température. Au meilleur de notre connaissance, c'est la première fois que ce genre de produits exotiques est présenté et évalué afin de permettre une meilleure couverture de la volatilité de la température moyenne quotidienne.

Les résultats obtenus sont intéressants même si les niveaux de volatilité restent très élevés ce qui est, par ailleurs, une caractéristique des changements climatiques que connaît la région de l'Afrique du Nord en général et le Maroc en particulier (Pollard *et al.* [10], Singh [11]).

## Références

- [1] Fred Espen BENTH et Jurate Saltyte BENTH : The volatility of temperature and pricing of weather derivatives. *Quantitative Finance*, 7(5):553–561, 2007.
- [2] Olivier BROCKHAUS et Douglas LONG : Volatility swaps made simple. *Risk Magazine*, Janvier, 1999.
- [3] Kresimir DEMETERFI, Emanuel DERMAN, Michael KAMAL et Joseph ZOU : More than you ever wanted to know about volatility swaps. *Goldman Sachs Quantitative Strategies Reports*, Mars, 1999.
- [4] Christian FRANCO et Jean-Michel ZACOIAN : *GARCH Moels : Structure, statistical inference, and financial applications*. Wiley, 2010.
- [5] Steven L. HESTON et Saikat NANDI : Derivatives on volatility : Some simple solutions based on observables. *Federal Reserve Bank of Atlanta Report*, 2000.
- [6] John C. HULL : *Option, futures and other derivatives*. Prentice Hall, 8e édition, 2011.
- [7] Alireza JAVAHERI, Paul WILMOTT et Espen Gaarder HAUG : Garch and volatility swaps. *Quantitative Finance*, 4 :5:589–595, 2002.
- [8] Mohammed MRAOUA : Les swaps de volatilité : valorisation et application au marché financier marocain. *Revue de l'Institut National de Statistique et d'Economie Appliquées*, 21, Septembre 2003.
- [9] Mohammed MRAOUA et Driss BARI : Temperature stochastic modeling and weather derivatives pricing : empirical study with Moroccan data. *Afrika Statistika*, 2(1):22–43, 2007.
- [10] Jane S. POLLARD, Jonathan OLDFIELD, Samuel RANDALLS et John E. THORNES : Firm finances, weather derivatives and geography. *Geoforum*, 39(2):616–624, 2008.
- [11] Surjeet SINGH : Weather insurance and derivatives in developing countries - an alternative to agricultural insurance. *The journal of insurance institue of India*, 32:13–24, 2006.

# Conclusion générale

Les produits dérivés climatiques gagnent de plus en plus en popularité dans les marchés financiers comme un outil de couverture et de gestion du risque climatique à la fois flexible et efficient. Le marché le plus mature pour ces instruments de couverture est de loin le Chicago Mercantile Exchange (CME). Toutefois, les marchés de gré-à-gré connaissent une croissance soutenue aussi bien au niveau du nombre de contrats conclus qu'au niveau de la valeur notionnelle de ces contrats.

Au niveau de leur évaluation, les produits dérivés d'assurance constituent un exemple classique de dérivés exotiques dont le marché d'échange est incomplet et relativement peu liquide. Par conséquent, tous les modèles standards d'évaluation des actifs contingents tels que le modèle de Black-Scholes sont inutilisables. Aussi, et excepté sur le CME, les données relatives aux prix du marché ne sont pas toujours aisément disponibles. En outre, les données météorologiques sur de longs historiques avec une excellente qualité demeurent très chères. Ces particularités font que les approches d'évaluation des dérivés climatiques puisent leur bagage théorique plus au niveau de l'actuariat de l'assurance qu'au niveau de la théorie financière d'évaluation des actifs contingents.

Cette thèse a tenté d'aborder aussi bien les aspects statistiques, économétriques et actuariels que ceux financiers relatifs à l'évaluation des dérivés climatiques. Tout en essayant de ne pas négliger les développements théoriques et fondamentaux, les aspects empiriques en eu la part belle de nos travaux.

En effet, nos travaux, tout en restant généraux, s'intéressaient particulièrement au Maroc considéré comme notre cas de gestion. Un indicateur pour convaincre de ce choix ; si on se restreint juste à la part de l'économie marocaine représentée par la bourse de Casablanca, alors trois secteurs économiques qui sont les plus sensibles aux variations climatiques, à savoir "agriculture, sylviculture et pêche", "énergie et construction", et "commerce, hôtels et restaurants", représenteraient 40% du PIB du pays.

Nos contributions peuvent être organisées selon trois volets : économétrique, statistique et financier.

Au niveau du volet économétrique, nous avons réalisé une étude où nous avons tenté d'explorer l'effet des conditions météorologiques sur le rendement et la volatilité de l'économie marocaine représentée par la bourse de Casablanca. Le choix des indices boursiers ainsi que les variables climatiques n'était pas fortuit. En effet, les trois indices boursiers que nous avons choisis comptaient pour 40% du PIB marocain. En outre, les variables météorologiques retenues sont celles qui sont les plus utilisées pour l'évaluation des dérivés climatiques. En étudiant l'effet du climat (va-

riables sous-jacentes de dérivés climatiques) sur l'économie (variables financières), notre motivation était essentiellement de montrer qu'une économie émergente telle que l'économie marocaine, de surcroît sensible à l'aléa climatique, ne pourrait que bénéficier de l'introduction et de l'utilisation des produits dérivés climatiques. Deux raisons motivaient ce travail. Premièrement, bien que plusieurs études soient consacrées à l'examen de l'impact des conditions climatiques sur les principaux marchés financiers internationaux, très peu d'études ont mis l'accent sur les marchés émergents et aucune étude n'a été consacrée au marché marocain, au meilleur de notre connaissance. Deuxièmement, toutes les études antérieures ont étudié l'effet du climat sur l'économie en se basant sur des variables météorologiques directes telles que la température, la pluviométrie, etc., ou par l'intermédiaire de variables muettes (par exemple, si le niveau d'une variable météorologique dépasse un certain seuil, quel serait l'effet sur le rendement et la volatilité d'un indice boursier donné?). Aucune étude antérieure, à notre connaissance, n'a traité les variables météorologiques comme variables sous-jacentes d'un produit dérivé (climatique) afin de tester l'effet de ces variables sur un indice boursier.

Au niveau du volet statistique, nous nous sommes intéressés au traitement des données des séries météorologiques. En effet, l'utilisation de données météorologiques de haute qualité est nécessaire pour la gestion du risque météorologique, l'évaluation des dérivés climatique, la détermination de la valeur de marché de ces produits ainsi que pour le dénouement et le règlement des contrats climatiques. Par conséquent, les données des stations météorologiques doivent être enregistrées et reportées en continu et avec précision. Cependant, malheureusement ce n'est pas toujours le cas. Dans ce cadre, nous avons passé en revue différentes techniques de nettoyage et de prétraitement des données. Pour combler les lacunes dans les séries de températures, notre choix s'est arrêté sur la méthode d'analyse en composante principale (ACP) que nous avons utilisé pour reconstituer les données qui manquaient à notre série de température de Casablanca (la plus longue série marocaine de températures quotidiennes dont nous disposons). Nous avons aussi présenté différentes méthodes pour identifier et modéliser les tendances dans les données de température. Nous avons tenté d'ajuster sept exemples de tendances à l'historique des indices HDD et CDD de la ville de Casablanca et nous avons montré comment les données réagissent à chaque tendance notamment en matière de calcul des premiers moments sur différents horizons de temps. L'effet saisonnalité a été aussi examiné (par rapport aux températures quotidiennes). Nous avons essayé de le modéliser et d'en extraire la moyenne saisonnière basée sur les mesures quotidiennes des températures en utilisant la série de Fourier tronquée. A la fin, nous avons déterminé les deux saisons chaude et froide en se basant sur une approche utilisée par les météorologistes. La détermination des deux saisons de l'année est cruciale pour le calcul des indices météorologiques en fonction de seuils de référence dépendant de la saison. Dans ce cadre, nous avons trouvé que la saison froide couvre la période allant de novembre à mai et la saison chaude de juin à octobre.

Le volet financier quant à lui regroupe quatre contributions qui concernent directement l'évaluation des dérivés climatiques. En premier lieu, nous avons repris un modèle stochastique qui décrit la dynamique de la température selon un processus de type Ornstein-Uhlenbeck (avec une volatilité supposée constante mensuellement) que nous avons amélioré en y incorporant une volatilité stochastique. Nous avons calibré notre modèle sur les données de quatre villes marocaines et les études de

back-testing avaient donné des résultats satisfaisants et ce malgré des horizons de prévisions longs (jusqu'à trois ans). Nous avons aussi utilisé notre modèle de l'évolution quotidienne de la température pour évaluer un portefeuille de swaps climatiques permettant de stabiliser les revenus futurs de deux entreprises ayant des profils de risque opposés leur permettant ainsi de gérer leur risque climatique. Par la suite et afin d'implémenter notre processus stochastique, nous avons dû le discrétiser pour pouvoir simuler des trajectoires selon la méthode de Monte Carlo. Des tests empiriques nous ont permis d'opter pour un schéma d'approximation hybride où le processus de la température a été discrétisé selon un schéma de Milstein tandis que celui de la volatilité a été discrétisé selon un schéma d'Euler. Le fait d'avoir considéré un portefeuille de swaps climatiques nous a permis de trouver des résultats très intéressants. En effet, la diversification géographique a eu un impact positif sur notre portefeuille et a permis de réduire la valeur de l'erreur relative (le risque) au niveau des tests de back-testing.

Dans un troisième travail, nous avons montré pourquoi il est plus approprié d'utiliser les températures moyennes plutôt que les températures extrêmes pour la modélisation des températures quotidiennes dans le cadre de l'évaluer des dérivés climatiques sur la température. Nous avons effectué deux types de comparaisons. Dans un premier temps, nous avons comparé les températures réalisées aux températures prévisionnelles obtenues en s'appuyant sur une batterie de tests statistiques. Dans un deuxième temps, nous avons comparé les valeurs réelles de prix de dérivés climatiques à valeurs estimées en utilisant les deux approches de modélisations (températures moyennes vs. températures extrêmes).

La quatrième contribution au niveau du volet financier concernait la mise en place d'une solution en formule fermée pour évaluer un produit dérivé climatique exotique à savoir un swap de volatilité de température. Il s'agit d'un produit hybride combinant à la fois un swap de volatilité et un swap de température. Au meilleur de notre connaissance, c'est la première fois que ce genre de produits exotiques serait présenté et évalué afin de permettre une meilleure couverture de la volatilité de la température moyenne quotidienne. Nous avons appliqué la solution présentée à un cas pratique (hypothétique) où un trader voudrait évaluer la jambe fixe d'un swap de volatilité ayant comme sous-jacent la volatilité de la température moyenne quotidienne de la ville de Casablanca. Les résultats obtenus sont intéressants même si les niveaux de volatilité restent très élevés ce qui est une caractéristique des changements climatiques que connaît la région de l'Afrique du Nord en général et le Maroc en particulier.

Pour conclure, rappelons que malgré les efforts qu'avait entrepris le Maroc pour développer des programmes d'assurance liés à des phénomènes météorologiques, la sécheresse reste de loin le principal risque pour l'agriculture marocaine qui devient parfois la principale cause de mauvaises récoltes. Le secteur du tourisme lui aussi souffre des caprices du climat. Malgré cela, l'utilisation des dérivés climatiques est encore quasiment inexistante au Maroc. Ces produits de couverture pourraient toutefois constituer un excellent instrument pour se protéger contre le risque climatique.



# Bibliographie

- [1] Peter ALATON, Boualem DJEHICHE et David STILLBERGER : On modelling and pricing weather derivatives. *Applied Mathematical Finance*, 9:1–20, 2002.
- [2] Carole ALEXANDER : *Market models : A guide to financial data analysis*. John Wiley, 2001.
- [3] Antonis K. ALEXANDRIDIS et Achilleas D. ZAPRANIS : *Weather derivatives, Modeling and pricing weather-related risk*. Springer, 2013.
- [4] Turan G. BALI : An empirical comparison of continuous time models of the short term interest rate. *Journal of Futures Market*, 19:777–798, 1999.
- [5] Matthias BANK et Robert WIESNER : Determinants of weather derivatives usage in the Austrian winter tourism industry. *Tourism Management*, 32(1):62–68, 2011.
- [6] Amanda N. BARALDI et Craig K. ENDERS : An introduction to modern missing data analyses. *Journal of School Psychology*, 48:5–37, 2010.
- [7] BEI : Climate change and energy in the Mediterranean. Rapport technique, European Investment Bank, 2008.
- [8] Fred Espen BENTH : On arbitrage free pricing of weather derivatives based on fractional brownian motion. *Applied Mathematical Finance*, 10:303–324, 2003.
- [9] Fred Espen BENTH et Jurate SALTYTE-BENTH : Stochastic modelling of temperature variations with a view towards weather derivatives. *Applied Mathematical Finance*, 12:53–85, 2005.
- [10] Fred Espen BENTH et Jurate SALTYTE-BENTH : The volatility of temperature and pricing of weather derivatives. *Quantitative Finance*, 7:553–561, 2007.
- [11] Fred Espen BENTH, Jurate SALTYTE-BENTH et Steen KOEKEBAKKER : Putting a price on temperature. *Scandinavian Journal of Statistics*, 34:746–767, 2007.
- [12] Bo Martin BIBBY et Michael SØRENSEN : Martingale estimation functions for discretely observed diffusion processes. *Bernoulli*, 1:17–39, 1995.
- [13] Phelim BOYLE et Feidhlim BOYLE : *Derivatives the tools that changed finance*. Risk Books, 2004.
- [14] Patrick L. BROCKETT, Mulong WANG, Chuanhou YANG et Hong ZOU : Portfolio effects and valuation of weather derivatives. *Financial Review*, 41:55–76, 2006.
- [15] Olivier BROCKHAUS et Douglas LONG : Volatility swaps made simple. *Risk Magazine*, Janvier, 1999.

- [16] Dorje C BRODY, Joanna SYROKA et Mihail ZERVOS : Dynamical pricing of weather derivatives. *Quantitative Finance*, 2(3):189–198, 2002.
- [17] Erin BRYLA, Julie DANA, Ulrich HESS et Panos VARANGIS : The use of price and weather risk management instruments. In *International Conference on Best Practices Risk Management : Pricing, Insurance, Guarantees*. USAID, BASIS-CRSP and WOCCU, 2004.
- [18] Rodrigo CABALLERO, Stephen JEWSON et Anders BRIX : Long memory in surface air temperature : Detection, modelling and application to weather derivative valuation. *Climate Research*, 21:127–140, 2002.
- [19] Angelo A. CALVELLO : *Environmental alpha, institutional investors and climate change*. John Wiley and Sons, 2009.
- [20] Sean D. CAMPBELL et Francis X. DIEBOLD : Weather forecasting for deather derivatives. *Journal of the American Statistical Association*, 100:6–16, 2005.
- [21] Melanie CAO et Jason WEI : Pricing the weather. *Energy Power Risk Management*, Risk weather special report:67–70, 2000.
- [22] Melanie CAO et Jason WEI : Weather derivatives valuation and market price of weather risk. *Journal of Future Markets*, 24:1065–1089, 2004.
- [23] Melanie CAO et Jason WEI : Stock market returns : A note on temperature anomaly. *Journal of Banking & Finance*, 29(6):1559–1573, 2005.
- [24] René CARMONA : Calibrating degree day options. In *3rd seminar on stochastic analysis, random field and applications*. Ecole Polytechnique de Lausanne, Switzerland, 1999.
- [25] Peter CARR, Helyette GEMAN et Dilip B. MADAN : Pricing and hedging in incomplete markets. *Journal of Financial Economics*, 62:131–167, 2001.
- [26] Shao-Chi CHANG, Sheng-Syan CHEN, Robin K. CHOU et Yueh-Hsiang LIN : Weather and intraday patterns in stock returns and trading activity. *Journal of Banking & Finance*, 32(9):1754–1766, 2008.
- [27] Tsangyao CHANG, Chien-Chung NIEH, Ming Jing YANG et Tse-Yu YANG : Are stock market returns related to the weather effects? empirical evidence from Taiwan. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 364(0):343–354, 2006.
- [28] Kent DANIEL, David HIRSHLEIFER et Siew Hong TEOH : Investor psychology in capital markets : evidence and policy implications. *Journal of Monetary Economics*, 49(1):139–209, 2002.
- [29] Mark DAVIS : Pricing weather derivatives by marginal value. *Quantitative Finance*, 1:1–4, 2001.
- [30] Stephen J. DECANIO : *Economic models of climate change*. Palgrave Macmillan, 2003.
- [31] Kresimir DEMETERFI, Emanuel DERMAN, Michael KAMAL et Joseph ZOU : More than you ever wanted to know about volatility swaps. *Goldman Sachs Quantitative Strategies Reports*, Mars, 1999.
- [32] Arthur P. DEMPSTER, Nan M. LAIRD et Donald D. RUBIN : Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the royal statistical society*, 39:1–38, 1977.
- [33] Bob DISCHEL : Black-scholes won't do. *Energy Power Risk Management*, Risk weather special report:8–9, 1998.

- [34] Bob DISCHEL : Shaping history for weather risk management. *Energy Power Risk Management*, 12:13–15, 1999.
- [35] Robert S. DISCHEL, éditeur. *Climate Risk and the weather derivatives : Financial risk management with weather hedges*. Risk Books, 2002.
- [36] DMN : Zonage climatique du Maroc. Rapport technique, National Weather Office of Morocco, 2010.
- [37] Gregor DORFLEITNER et Maximilian WIMMER : The pricing of temperature futures at the chicago mercantile exchange. *Journal of Banking & Finance*, 34:1360–1370, 2010.
- [38] Fabien DORNIER et Michel QUERUEL : Caution to the wind. *Energy Power Risk Management*, Weather risk special report:30–32, 2000.
- [39] Michael DOWLING et Brian M. LUCEY : Weather, biorhythms, beliefs and stock returns? some preliminary irish evidence. *International Review of Financial Analysis*, 14(3):337–355, 2005.
- [40] Thomas E. DOWNING, Alexander A. OLSTHOORN et Richard S. J. TOL, éditeurs. *Climate, change and risk*. Routledge, 1999.
- [41] Christian L. DUNIS et Jamshidbek JALILOV : Neural network regression and alternative forecasting techniques for predicting financial variables. *Neural network world*, 2:113–139, 2002.
- [42] Christian L. DUNIS et Vassilios KARALIS : Weather derivatives pricing and filling analysis for missing temperature data. *Derivative Use Trading Regulation*, 9:61–83, 2003.
- [43] Debbie J. DUPUIS : Forecasting temperature to price CME temperature derivatives. *International Journal of Forecasting*, 27:602–618, 2011.
- [44] Alexander EYDELAND et Krzysztof WOLYNIEC : *Energy and power risk management*. John Wiley and Sons, 2003.
- [45] Christian FRANCO et Jean-Michel ZACCOIAN : *GARCH Moels : Structure, statistical inference, and financial applications*. Wiley, 2010.
- [46] Philip Hans FRANCES, Jack NEELE et Dick van DIJK : Modeling asymmetric volatility in weekly Dutch temperature data. *Environmental Modelling & Software*, 16:37–46, 2001.
- [47] Helyette GEMAN : *Commodities and commodity derivatives*. John Wiley and Sons, 2005.
- [48] Helyette GEMAN, éditeur. *Risk management in commodity markets*. John Wiley and Sons, 2008.
- [49] Hélyette GEMAN, éditeur. *Insurance and weather derivatives : From exotic options to exotic underlying*. Risk B, 1999.
- [50] Christos GIANNAKOPOULOS, Marco BINDI, Marco MORIONDO, Philippe LESAGER et Tina TIN : Impact of a 2 °C global temperature rise on the Mediterranean region : Agriculture analysis assessment. Rapport technique, WWF, 2005.
- [51] GIEC : *Climate Change 2007 : Impacts, Adaptation and Vulnerability*. Contribution of Working Group II to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC). Cambridge University Press, 2007.

- [52] René GOMMES, Tarik El HAIRECH, Damien ROSILLON, Riad BALAGHI et Hideki KANAMARU : Impact of climate change on agricultural yields in Morocco. Rapport technique, Food and Agriculture Organization, 2009.
- [53] Ahmet GONCU : Pricing temperature-based weather contracts : an application to China. *Applied Economics Letters*, 18(14):1349–1354, 2011.
- [54] Christiane GOODFELLOW, Dirk SCHIERECK et Tatjana VERRIER : Does screen trading weather the weather? a note on cloudy skies, liquidity, and computerized stock markets. *International Review of Financial Analysis*, 19(2):77–80, 2010.
- [55] Eugene N. GURENKO, éditeur. *Climate change and insurance : Disaster risk financing in developing countries*. Earthscan, 2007.
- [56] James D. HAMILTON : *Time series analysis*. Princeton University Press, 1994.
- [57] Chris HARRIS : *Electricity Markets*. John Wiley and Sons, 2006.
- [58] Andrew C. HARVEY : *Forecasting structural time series models and the kalman filter*. Cambri, 1989.
- [59] Steven L. HESTON et Saikat NANDI : Derivatives on volatility : Some simple solutions based on observables. *Federal Reserve Bank of Atlanta Report*, 2000.
- [60] Juri HINZ : Weather derivative valuation : The meteorological, statistical, financial and mathematical foundations. *Journal of the American Statistical Association*, 102 (477):380–380, 2007.
- [61] John HULL et Alan WHITE : Pricing interest-rate derivative securities. *The Review of Financial Studies*, 3:573–592, 1990.
- [62] John C. HULL : *Option, futures and other derivatives*. Prentice Hall, 8e édition, 2011.
- [63] Alireza JAVAHERI, Paul WILMOTT et Espen Gaarder HAUG : Garch and volatility swaps. *Quantitative Finance*, 4 :5:589–595, 2002.
- [64] Stephen JEWSON et Anders BRIX : *Weather derivative valuation, The meteorological, statistical, financial, and mathematical foundations*. Cambridge Univeristy Press, 2005.
- [65] Sang Hoon KANG, Zhuhua JIANG, Yeonjeong LEE et Seong-Min YOON : Weather effects on the returns and volatility of the shanghai stock market. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 389(1):91–99, 2010.
- [66] Richard W. KATZ et Allan H. MURPHY, éditeurs. *Economic value of weather and climate forecasts*. Cambridge Univesity Press, 1997.
- [67] Patrick J. KELLY et Felix MESCHKE : Sentiment and stock returns : The sad anomaly revisited. *Journal of Banking & Finance*, 34(6):1308–1326, 2010.
- [68] Abdellatif KHATTABI : Arab environment : Impact of climate change on arab countries. Rapport technique, Arab Forum for Environment and Developpement, 2009.
- [69] Jung-Woo KIM et Yakov A. PACHEPSKY : Reconstructing missing daily precipitation data using regression trees and artificial neural networks for SWAT streamflow simulation. *Journal of Hydrology*, 394:305–314, 2010.
- [70] Peter E. KLOEDEN et Eckhard PLATEN : *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer, 1999.
- [71] Sonia LABATT et Rodney R. WHITE : *Carbon finance*. John Wiley and Sons, 2007.

- [72] Yuan-Ming LEE et Kuan-Min WANG : The effectiveness of the sunshine effect in Taiwan's stock market before and after the 1997 financial crisis. *Economic Modelling*, 28(12):710–727, 2011.
- [73] Pak Sum LOW, éditeur. *Climate change and Africa*. Cambridge University Press, 2005.
- [74] Jing LU et Robin K. CHOU : Does the weather have impacts on returns and trading activities in order-driven stock markets? evidence from China. *Journal of Empirical Finance*, 19(1):79–93, 2012.
- [75] Robert E. LUCAS : Asset prices in an exchange economy. *Econometrica*, 46:1429–1445, 1978.
- [76] Didier MARTEAU, Jean CARLE, Stéphane FOURNEAUX, Ralph HOLZ et Michael MORENO : *La gestion du risque climatique*. Economica, 2004.
- [77] Michael MORENO : Riding the temp. *Futures and Options World*, Weather Derivatives Special Supplement, 2000.
- [78] Mohammed MRAOUA : Les swaps de volatilité : valorisation et application au marché financier marocain. *Revue de l'Institut National de Statistique et d'Economie Appliquées*, 21, Septembre 2003.
- [79] Mohammed MRAOUA et Driss BARI : Temperature stochastic modeling and weather derivatives pricing : Empirical study with morrocan data. *Afrika Statistika*, 2(1):22–43, 2007.
- [80] Xiaoyi MU : Weather, storage, and natural gas price dynamics : Fundamentals and volatility. *Energy Economics*, 29(1):46–63, 2007.
- [81] Oliver MUSSHOF, Martin ODENING et Wei XU : Management of climate risks in agriculture : will weather derivatives permeate? *Applied Economics*, 43(9):1067–1077, 2011.
- [82] Fulufhelo V. NELWAMONDO, Dan GOLDING et Tshilidzi MARWALA : A dynamic programming approach to missing data estimation using neural networks. *Information Sciences*, 237:49–58, 2013.
- [83] Tinyiko R. NKUNA et John O. ODIYO : Filling of missing rainfall data in luvuvhu river catchment using artificial neural networks. *Physics and Chemistry of the Earth*, 36:830–835, 2011.
- [84] William D. NORDHAUS et Joseph BOYER : *Warming the World : Economic Models of Global Warming*. The MIT Press, 2000.
- [85] OCDE : African economic outlook : Morocco. Rapport technique, Organization for Economic Cooperation and Development, 2008.
- [86] Teddy OETOMO et Max STEVENSON : Hot or cold? a comparison of different approaches to the pricing of weather derivatives. *Journal of Emerging Market Finance*, 4:101–133, 2005.
- [87] Roger Jr. PIELKE : Mistreatment of the economic impacts of extreme events in the Stern review report on the economics of climate change. *Global Environmental Change*, 17:302–310, 2007.
- [88] Eckhard PLATEN et Jason WEST : A fair pricing approach to weather derivatives. *Asia-Pacific Financial Markets*, 11:23–53, 2005.
- [89] Jane S. POLLARD, Jonathan OLDFIELD, Samuel RANDALLS et John E. THORNES : Firm finances, weather derivatives and geography. *Geoforum*, 39(2):616–624, 2008.

- [90] PwC : 2011 weather risk derivative survey. Rapport technique, Weather Risk Management Association, WRMA, 2011.
- [91] Mélanie REQUIER-DESJARDINS : Impacts des changements climatiques sur l'agriculture au Maroc et en Tunisie et priorités d'adaptation. Rapport technique, International Centre for Advanced Mediterranean Agronomic Studies, 2010.
- [92] Timothy J. RICHARDS, Marc R. MANFREDO et Dwight R. SANDERS : Pricing weather derivatives. *American Journal of Agricultural Economics*, 4:1005–1017, 2004.
- [93] Ratna SAHAY et Thomas DORSEY : IMF country report : Morocco. Rapport technique, International Monetary Fund, 2011.
- [94] Joseph L. SCHAFER : *Analysis of incomplete multivariate data*. Chapman & Hall, 1997.
- [95] Frank SCHILLER, Gerold SEIDLER et Maximilian WIMMER : Temperature models for pricing weather derivatives. *Quantitative Finance*, 12:489–500, 2012.
- [96] Sven SERNEELSA et Tim VERDONCKB : Principal component analysis for data containing outliers and missing elements. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52:1712–1727, 2008.
- [97] Surjeet SINGH : Weather insurance and derivatives in developing countries - an alternative to agricultural insurance. *The journal of insurance institue of India*, 32:13–24, 2006.
- [98] Mannava V. K. SIVAKUMAR et Raymond P. MOTHA, éditeurs. *Managing weather and climate risk in agriculture*. Springer, 2007.
- [99] Jerry R. SKEES, Stephanie GOBER, Panos VARANGIS, Rodney LESTER et Vijay KALAVAKONDA : Developing rainfall based index insurance in Morocco. *World Bank Policy Research Working Paper Series*, 2577, 2001.
- [100] Martha STARR : The effects of weather on retail sales. *Finance and Economics Discussion Series of the Board of Governors of the Federal Reserve System*, 2000-08, 2000.
- [101] Nicholas STERN : *The Economics of Climate Change : The Stern Review*. Cambridge Univeristy Press, 2007.
- [102] Andrea STOPPA et Ulrich HESS : Design and use of weather derivatives in agricultural policies : The case of rainfall index insurance in Morocco. *In International Conference on Agricultural Policy Reform and the WTO : Where are we Heading ?*, 2003.
- [103] Livio STRACCA : Behavioral finance and asset prices : Where do we stand? *Journal of Economic Psychology*, 25(3):373–405, 2004.
- [104] Tristan STURM et Eric OH : Natural disasters as the end of the insurance industry? scalar competitive strategies, alternative risk transfers, and the economic crisis. *Geoforum*, 41(1):154–163, 2010.
- [105] Jiri SVEC et Maxwell STEVENSON : Modelling and forecasting temperature based weather derivatives. *Global Finance*, 18:185–204, 2007.
- [106] Lazaros SYMEONIDIS, George DASKALAKIS et Raphael N. MARKELLOS : Does the weather affect stock market volatility? *Finance Research Letters*, 7(4):214–223, 2010.
- [107] Chun-Hung (Hugo) TANG et Soo-Cheong (Shawn) JANG : Weather risk management in ski resorts : Financial hedging and geographical diversification. *International Journal of Hospitality Management*, 30(2):301–311, 2011.

- [108] James W. TAYLOR et Roberto BUIZZA : Density forecasting for weather derivative pricing. *International Journal of Forecasting*, 22:29–42, 2006.
- [109] Richard S. J. TOL : Autoregressive conditional heteroscedasticity in daily temperature measurements. *Environmetrics*, 7:67–75, 1996.
- [110] Hipolit TORRO, Vicente MENEU et Enric VALOR : Single factor stochastic models with seasonality applied to underlying weather derivatives variables. *Journal of Risk Finance*, 4:6–17, 2003.
- [111] Alberto TROCCOLI, éditeur. *Management of weather and climate risk in the energy industry*. Springer, 2008.
- [112] Beata WALCZAK et Désiré L. MASSART : Dealing with missing data : Part II. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 58:29–42, 2001.
- [113] John WHALLEY et Yufei YUAN : Global financial structure and climate change. *Journal of Financial Transformation*, 25:161–168, 2009.
- [114] Charles J. R. WILLIAMS et Dominic R. KNIVETON, éditeurs. *African climate and climate change*. Springer, 2011.
- [115] Edwin WOERDMAN : *The institutional economics of market-based climate policy*. Elsevier, 2004.
- [116] Wei XU, Martin ODENING et Oliver MUSSHOF : Indifference pricing of weather derivatives. *American Journal of Agricultural Economics*, 90:979–993, 2008.
- [117] Seong-Min YOON et Sang Hoon KANG : Weather effects on returns : Evidence from the Korean stock market. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 388 (5):682–690, 2009.
- [118] Achilleas D. ZAPRANIS et Antonis K. ALEXANDRIDIS : Modelling temperature time dependent speed of mean reversion in the context of weather derivative pricing. *Applied Mathematical Finance*, 15:355–386, 2008.
- [119] Achilleas D. ZAPRANIS et Antonis K. ALEXANDRIDIS : Weather derivatives pricing : modelling the seasonal residuals variance of an ornstein-uhlenbeck temperature process with neural networks. *Neurocomputing*, 73:37–48, 2009.
- [120] Lixin ZENG : Weather derivatives and weather insurance : concept, application and analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 81:2075–2082, 2000.

# Table des matières

<b>Remerciement</b>	<b>v</b>
<b>Résumé</b>	<b>vi</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des abréviations</b>	<b>ix</b>
<b>Glossaire des notations</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>12</b>
<b>1 Le risque climatique</b>	<b>18</b>
1.1 Introduction . . . . .	18
1.2 Le risque climatique : analyse qualitative . . . . .	19
1.2.1 Au niveau des pays industrialisés . . . . .	19
1.2.2 En Afrique et dans les pays en développement . . . . .	20
1.2.3 Au sud de la Méditerranée et au Maroc . . . . .	20
1.3 Le risque climatique : analyse quantitative . . . . .	22
1.3.1 Données et méthodologie d'analyse . . . . .	23
1.3.2 Résultats empiriques . . . . .	27
1.4 Le marché du climat . . . . .	29
1.4.1 Le marché des dérivés climatiques . . . . .	30
1.4.2 Historique des dérivés climatiques . . . . .	34
1.5 Différence avec l'assurance . . . . .	37
1.6 Conclusion . . . . .	38
<b>2 Traitement et analyse des données</b>	<b>43</b>
2.1 Introduction . . . . .	43
2.2 Nettoyage et prétraitement des données . . . . .	44



2.3	Comblement des lacunes dans les séries de données . . . . .	45
2.3.1	Méthodes de reconstitution des données . . . . .	45
2.3.2	Analyse en composante principale . . . . .	47
2.3.3	Reconstitution des données de Casablanca . . . . .	49
2.4	Identification et suppression des tendances . . . . .	52
2.4.1	Sources des tendances . . . . .	52
2.4.2	Structures des tendances . . . . .	53
2.5	Identification et suppression des saisonnalités . . . . .	59
2.6	Détermination des saisons chaude et froide . . . . .	59
2.7	Conclusion . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Approches d'évaluation et modélisation de la température</b>	<b>63</b>
3.1	Introduction . . . . .	63
3.2	Approche actuarielle . . . . .	65
3.3	Approche Burn Analysis historique . . . . .	65
3.4	Modélisation des indices climatiques . . . . .	66
3.5	Modélisation des données quotidiennes . . . . .	67
3.5.1	Processus discrets . . . . .	68
3.5.2	Processus continus . . . . .	71
3.6	Autres approches . . . . .	76
3.7	Étude de cas sur données marocaines . . . . .	77
3.7.1	Données . . . . .	77
3.7.2	Modélisation de la température . . . . .	78
3.8	Conclusion . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Evaluation des dérivés sur température</b>	<b>89</b>
4.1	Cadre d'évaluation . . . . .	89
4.2	Évaluation d'un swap climatique . . . . .	90
4.2.1	Élaboration d'une formule analytique . . . . .	91
4.2.2	Mesures de sensibilité . . . . .	91
4.3	Évaluation d'une option climatique . . . . .	93
4.3.1	Élaboration d'une formule analytique . . . . .	93
4.3.2	Mesures de sensibilité . . . . .	95
4.3.3	Parité call-put . . . . .	98
4.4	Évaluation intra-périodes . . . . .	98
4.4.1	Problème de base . . . . .	99

---

4.4.2	Ajustements aux valeurs moyennes . . . . .	99
4.4.3	Ajustements aux mesures de volatilité . . . . .	100
4.5	Étude de cas sur données marocaines . . . . .	101
4.5.1	Données . . . . .	101
4.5.2	Evaluation d'un swap climatique . . . . .	101
4.5.3	Comparaison des méthodes d'approximation . . . . .	104
4.5.4	Résultats de la comparaison des méthodes d'approximation . . . . .	104
4.6	Conclusion . . . . .	107
<b>5</b>	<b>Températures moyennes ou températures extrêmes</b>	<b>110</b>
5.1	Introduction . . . . .	110
5.2	Données . . . . .	111
5.3	Modélisation de la température . . . . .	113
5.4	Résultats numériques . . . . .	116
5.5	Conclusion . . . . .	119
<b>6</b>	<b>Evaluation d'un swap de volatilité de température</b>	<b>123</b>
6.1	Introduction . . . . .	123
6.2	Définitions . . . . .	124
6.3	Méthode d'évaluation . . . . .	125
6.3.1	Introduction . . . . .	125
6.3.2	Approche générale . . . . .	125
6.3.3	Modèle de volatilité, cas particulier : GARCH(1,1) . . . . .	126
6.3.4	Application numérique . . . . .	128
6.4	Conclusion . . . . .	131
	<b>Conclusion générale</b>	<b>133</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>136</b>
	<b>Table des matières</b>	<b>145</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>147</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>149</b>

# Liste des tableaux

1.1	Coûts des événements climatiques extrêmes dans les pays industrialisés . . . .	20
1.2	Statistiques descriptives et tests de la racine unitaire pour les rendements des quatre indices boursiers . . . . .	25
1.3	Statistiques descriptives des six variables climatiques . . . . .	26
1.4	Effet du climat sur le rendement des indices boursiers . . . . .	29
1.5	Effet du climat sur la volatilité des rendements des indices boursiers . . . . .	30
2.1	Reconstitution des données manquantes à l'aide de l'ACP pour les cas d'une, deux, trois, quatre et sept observations manquantes consécutives . . . . .	50
2.2	Valeurs manquantes artificiellement créées dans le fichier de test et leurs valeurs reconstituées correspondantes, ainsi que l'écart entre les deux valeurs . . . . .	51
2.3	Moyenne et écart-type de la valeur de dénouement de l'indice HDD de la ville de Casablanca pour la période de novembre à mai estimés sur différentes fenêtres de temps (entre 1971 et 2010) et en utilisant différentes méthodes de lissage . . . . .	57
2.4	Moyenne et écart-type de la valeur de dénouement de l'indice CDD de la ville de Casablanca pour la période de juin à octobre estimés sur différentes fenêtres de temps (entre 1971 et 2010) et en utilisant différentes méthodes de lissage . . . . .	58
3.1	Statistiques descriptives de la température quotidienne moyenne de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (1971–2007) . . . . .	78
3.2	Estimation des paramètres du modèle ajusté pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi . . . . .	82
3.3	Estimation des paramètres du modèle de volatilité de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi . . . . .	84
4.1	Indices degré-jour sous-jacents et leurs valeurs d'exercice mensuelles pour 2008, 2009 et 2010 (périodes des contrats) . . . . .	102
4.2	Valeurs du swap de la contrepartie B au 01/01/2008 pour différentes maturités (1, 2 et 3 ans) en utilisant différentes combinaisons de schémas d'approximation aussi bien pour $T_t$ que pour $\gamma_t$ pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi avec leur valeur total . . . . .	103

4.3	Valeurs réelles du swap de la contrepartie B au 01/01/2008 basées sur les températures observées au niveau de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (2008–2010) . . . . .	104
4.4	Comparaison des températures prévisionnelles et celles observées pour la contrepartie B au 01/01/2008 pour différentes maturités (1, 2 et 3 ans) et en utilisant différents schémas d'approximation aussi bien pour $T_t$ que pour $\gamma_t$ pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi . . . . .	106
5.1	Statistiques descriptives de la température quotidienne de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (1978–2007) . . . . .	112
5.2	Estimation des paramètres du modèle ajusté pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi . . . . .	115
5.3	Estimation des paramètres du modèle de volatilité de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi . . . . .	115
5.4	Indices degré-jour sous-jacents et leurs valeurs d'exercice mensuels pour 2008, 2009 et 2010 (périodes des contrats . . . . .	118
5.5	Valeurs du swap de la contrepartie B au 01/01/2008 pour différentes maturités (1, 2 et 3 ans) en utilisant les estimations des paramètres des deux modèles de température $M^{min,max}$ et $M^{avg}$ pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi ainsi que leur valeur totale . . . . .	118
5.6	Valeurs réelles du swap de la contrepartie B au 01/01/2008 basées sur les températures observées de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (2008–2010) . . . . .	119
5.7	Comparaison des températures prévisionnelles et celles observées sur la base du critère de l'erreur quadratique moyenne (RMSE*), pour différents horizons (1, 2 et 3 ans) et en utilisant les estimations des paramètres des deux modèles de température $M^{min,max}$ et $M^{avg}$ pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi . . . . .	120
5.8	Comparaison des valeurs prévisionnelles et réelles du swap de la contrepartie B au 01/01/2008 pour les différentes maturités (1, 2 et 3 ans) et en utilisant les estimations des paramètres des deux modèles de température $M^{min,max}$ et $M^{avg}$ pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi . . . . .	121
6.1	Statistiques descriptives de la température moyenne quotidienne et de sa variation quotidienne à Casablanca . . . . .	129
6.2	Paramètres inputs pour l'évaluation du swap de volatilité sur la température moyenne quotidienne de Casablanca . . . . .	130
6.3	Résultat de l'évaluation du swap de volatilité sur la température moyenne quotidienne de Casablanca . . . . .	131

# Table des figures

1.1	Ventilation sectorielle du PIB marocain en 2006 . . . . .	22
1.2	Evolution des valeurs quotidiennes des indices du marché boursier de Casablanca 24	
1.3	Evolution des rendements quotidiens des indices du marché boursier de Casablanca . . . . .	24
1.4	Histogramme des variables météorologiques TMP, CDD, HDD, TDD, PRP et PRC . . . . .	27
1.5	Relations entre les rendements des indices boursiers (MASI, AGRI, PLGZ, LSHT) et les variables météorologiques (CDD, HDD, PRC) . . . . .	28
1.6	Rendements réalisés, rendements estimés et valeurs résiduelles des indices boursiers . . . . .	31
1.7	Evolution de la répartition de l'utilisation des dérivés climatiques par secteur d'activité entre 2009 et 2011 . . . . .	31
1.8	Evolution du nombre de contrats de dérivés climatiques par saison entre 2009/2010 et 2010/2011 basée sur les données du sondage de PwC . . . . .	32
1.9	Evolution de la valeur notionnelle des contrats de dérivés climatiques par saison entre 2009/2010 et 2010/2011 basée sur les données du sondage de PwC (en Millions USD) . . . . .	32
1.10	Evolution de la répartition de la valeur notionnelle des couvertures en dérivés climatiques OTC par type de contrat entre 2009/2010 et 2010/2011 . . . . .	33
2.1	Evolution de la température moyenne sur la ville de Casablanca de janvier 1960 à décembre 2011 . . . . .	53
2.2	Exemples de sept ajustements de l'indice HDD de la ville de Casablanca pour la période de novembre à mai . . . . .	54
2.3	Exemples de sept ajustements de l'indice CDD de la ville de Casablanca pour la période de juin à octobre . . . . .	55
2.4	Evolution de la moyenne mensuelle des températures à Casablanca entre 1982 et 2011. La moyenne globale est de = 18.3 °C . . . . .	60
2.5	Classification hiérarchique de la moyenne mensuelle des températures à Casablanca entre 1982 et 2011 . . . . .	61
3.1	Capture de dix ans d'observations quotidiennes de la température moyenne de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (1998–2007) . . . . .	79

3.2	Variations des températures journalières moyennes de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (1971–2007) . . . . .	80
3.3	Volatilité des températures mensuelles moyennes observées avec tendance linéaire (trait horizontal) pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (1971–2007) . . . . .	83
3.4	Températures moyennes simulées et une trajectoire simulée des températures prévisionnelles vs. températures réalisées pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (2008–2010) . . . . .	85
4.1	Convergence de la simulation Monte Carlo du prix du swap en utilisant différentes combinaisons de schémas d’approximation à la fois pour $T_t$ et $\gamma_t$ pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (Maturité d’un an) . . . . .	105
4.2	Convergence de la simulation Monte Carlo du prix du swap en utilisant différentes combinaisons de schémas d’approximation à la fois pour $T_t$ et $\gamma_t$ pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (Maturité de 2 ans) . . . . .	107
4.3	Convergence de la simulation Monte Carlo du prix du swap en utilisant différentes combinaisons de schémas d’approximation à la fois pour $T_t$ et $\gamma_t$ pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (Maturité de 3 ans) . . . . .	108
5.1	Capture de cinq années de températures journalières ( $T_{max}$ , $T_{min}$ , $T_{avg}$ ) pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (2003–2007) . . . . .	113
5.2	Variations des températures journalières de Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (1978–2007) . . . . .	114
5.3	Volatilité des températures mensuelles moyennes observées avec tendance linéaire (trait horizontal) pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (1971–2007) . . . . .	116
5.4	Températures moyennes simulées et une trajectoire simulée des températures prévisionnelles vs. températures réalisées pour Casablanca, Essaouira, Marrakech et Safi (2008–2010) . . . . .	117
6.1	Histogramme de la variation logarithmique de la température moyenne quotidienne de Casablanca . . . . .	129
6.2	Evolution de la variation logarithmique de la température moyenne quotidienne au niveau de Casablanca . . . . .	130
6.3	Niveau d’exercice du swap de volatilité sur température en fonction de la maturité . . . . .	130
6.4	Ajustement convexe du swap de volatilité sur température en fonction de la maturité . . . . .	131