HAL
open science

Modélisations fluides pour les plasmas de fusion : approximation par éléments finis C1 de Bell

Marie Martin

To cite this version:

Marie Martin. Modélisations fluides pour les plasmas de fusion : approximation par éléments finis C1 de Bell. Mathématiques générales [math.GM]. Université Nice Sophia Antipolis, 2013. Français. NNT : 2013NICE4031 . tel-00845922

HAL Id: tel-00845922

https://theses.hal.science/tel-00845922v1

Submitted on 18 Jul 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS — UFR Sciences
École Doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'UNIVERSITÉ de Nice-Sophia Antipolis

Spécialité : Mathématiques

présentée et soutenue par

Marie MARTIN

Modélisations fluides pour les plasmas de fusion : approximation par éléments finis C^1 de Bell

Thèse dirigée par **Boniface NKONGA**

Soutenue le 4 Juin 2013

devant le jury composé de

M. Christophe BERTHON	Professeur des Universités, Nantes	Examinateur
M. Bruno DUBROCA	Expert Sénior CEA/DAM, Professeur, Bordeaux 1	Rapporteur
M. Hervé GUILLARD	INRIA, Sophia-Antipolis	Examinateur
M. Boniface NKONGA	Professeur des Universités, Nice	Directeur de thèse
M. Nicolas SEGUIN	Maître de Conférences, HDR, Université Paris VI	Rapporteur

Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose, 06108 Nice

Table des matières

Table des matières **3**

1 Introduction **7**
1.1 La fusion et les réactions de fusion 8
1.2 Le confinement magnétique 10
1.3 Les tokamaks et les différentes configurations 12
1.3.1 Historique des tokamaks 12
1.3.2 Géométrie et notations 13
1.4 ITER et l'exploitation de l'énergie de fusion nucléaire 15
1.5 Le mode de confinement H 16
1.6 Instabilités 16
1.6.1 Les instabilités en dents de scie 18
1.7 Plan de la thèse 19

2 Modèles fondamentaux des plasmas **21**
2.1 Le modèle cinétique 22
2.1.1 Propriétés sur les opérateurs de collisions 23
2.1.2 Opérateur de collisions de Landau 25
2.2 Le modèle fluide 26
2.2.1 Calcul des moments 26
2.3 Coefficients de transport : type Braginskii 30
2.3.1 Choix du référentiel d'analyse 30
2.3.2 Analyse dimensionnelle 32
2.3.3 Les équations de Boltzmann adimensionnées 36
2.3.4 Calcul des coefficients de transport 38
2.4 Conclusions 50

3 Le modèle MHD : Magnétohydrodynamique **53**
3.1 Système de la MHD complète 54
3.1.1 Le modèle monofluide 54
3.1.2 Loi d'Ohm 57
3.1.3 Equations de Maxwell 58
3.1.4 Système de la MHD complète 60
3.1.5 Régime quasineutre 60
3.1.6 MHD idéale 63

3.1.7 MHD résistive . . . 63
3.1.8 Système conservatif de la MHD idéale . . . 64
3.2 Analyse des propriétés spectrales . . . 66
3.3 MHD réduite résistive . . . 70
3.3.1 MHD réduite résistive étendue . . . 71
3.3.2 Le Current Hole . . . 75
3.3.3 Equilibre de Grad-Shafranov . . . 77
3.4 Conclusions . . . 79

4 Formulation discrète 81
4.1 Méthode des éléments finis . . . 83
4.1.1 Motivations du choix de la méthode de résolution . . . 83
4.1.2 Présentation sur un problème modèle . . . 88
4.1.3 Formulation faible . . . 89
4.1.4 Méthode de Galerkin . . . 89
4.1.5 Discrétisation temporelle . . . 90
4.2 Eléments finis stabilisés . . . 91
4.2.1 Généralités sur les éléments finis stabilisés . . . 91
4.2.2 Nécessité de la stabilisation . . . 92
4.2.3 Stabilisation SUPG . . . 94
4.2.4 Analyse de stabilité L^2 . . . 99
4.2.5 Résultats numériques . . . 104
4.3 Eléments finis C^1 de Bell . . . 108
4.3.1 Définition et propriétés des éléments finis de Bell . . . 108
4.3.2 Mise en œuvre des C^1 de Bell . . . 109
4.4 Problèmes types . . . 111
4.4.1 Conduction thermique . . . 111
4.4.2 Equilibre de Grad-Shafranov . . . 113
4.4.3 Current Hole . . . 116
4.4.4 Current Hole : système à 2 équations . . . 119
4.5 Conclusions . . . 121

5 Validations numériques sur des problèmes types en $2D$ 123
5.1 Conduction thermique . . . 125
5.1.1 Résultats numériques . . . 125
5.2 Equilibre de Grad-Shafranov . . . 127
5.2.1 1er exemple de cas test analytique . . . 127
5.2.2 $2^{\text{ème}}$ exemple de cas test analytique . . . 130
5.2.3 $3^{\text{ème}}$ exemple de cas test analytique . . . 132
5.3 Le Current Hole . . . 134
5.3.1 Simulations numériques . . . 135
5.4 Conclusions . . . 151

Conclusion générale et Perspectives 153

Annexes **157**

Annexes du chapitre 2 : **157**
2.A Obtention du moment d'ordre 2 des équations fluides 157
2.B Adimensionnement des équations de Boltzmann 159
2.C Approximation des opérateurs de collisions 161
2.D Développement des coefficients de transports 167
2.D.1 Coefficient de frottement $\boldsymbol{R}_\sigma$ 167
2.D.2 Chaleur générée par les collisions : $\mathcal{Q}_\sigma$ 169
2.D.3 Flux de chaleur : $\boldsymbol{Q}_\sigma$ 171
2.E Développement de l'équation électronique au 1er ordre 171

Annexe du chapitre 3 : **174**
3.A Obtention du système de MHD réduite résistive 174

Annexe du chapitre 4 : **182**
4.A Matrices nécessaires à la définition des éléments finis C^1 de Bell 182

Bibliographie **187**

Table des figures **197**

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1 La fusion et les réactions de fusion 8
1.2 Le confinement magnétique 10
1.3 Les tokamaks et les différentes configurations 12
1.3.1 Historique des tokamaks 12
1.3.2 Géométrie et notations 13
1.4 ITER et l'exploitation de l'énergie de fusion nucléaire 15
1.5 Le mode de confinement H 16
1.6 Instabilités 16
1.6.1 Les instabilités en dents de scie 18
1.7 Plan de la thèse 19

La consommation d'énergie actuelle et les perspectives futures font de la production énergétique un enjeu majeur de notre société. En effet, la consommation d'énergie pourrait atteindre en 2050, deux à trois fois la consommation actuelle. L'épuisement des combustibles fossiles et l'adaptation difficile des énergies renouvelables à une production d'énergie centralisée capable de subvenir aux besoins des régions ou des pays à fortes densité de population rendent indispensable le développement de nouvelles énergies. Ces nouvelles formes d'énergie devront bien évidemment satisfaire des critères économiques mais aussi prendre en compte des exigences en terme d'environnement, de sûreté de fonctionnement et de disponibilité des ressources. L'énergie de fusion thermonucléaire répond à l'ensemble de ces exigences.

Le contrôle de l'énergie issue de la fusion thermonucléaire est donc un des objectifs scientifiques majeurs de ce début de siècle. Le jeu en vaut la chandelle car une réaction de fusion thermonucléaire a une capacité énergétique telle qu'un seul gramme de combustible serait capable de fournir en électricité une ville de la taille de New-York durant 24h.

La réaction de fusion thermonucléaire est obtenue en faisant fusionner des noyaux d'éléments légers pour former des noyaux d'éléments plus lourds. Contrairement aux réactions qui fournissent l'énergie dans les centrales nucléaires actuelles, la réaction de fusion n'est pas spontanée, mais nécessite un apport d'énergie initial pour avoir lieu (comme l'énergie apportée par une allumette pour allumer la flamme d'une bougie). Cette énergie initiale

est nécessaire pour maintenir les noyaux des réactifs suffisamment proches. Cela nécessite donc de chauffer les réactifs à des températures telles que dans ces conditions, la matière n'est plus sous la forme de molécules, mais sous une forme fortement ionisée, appelée le plasma.

L'une des voies possibles pour atteindre cet objectif consiste à utiliser des champs magnétiques pour confiner le plasma : c'est la fusion par confinement magnétique. Le plasma est alors confiné dans une enceinte en forme de tore, appelée tokamak. La prochaine génération de machines de fusion comme ITER, tokamak international planifié pour avoir un rendement positif est prévu pour fonctionner en 2016. Tout en sachant que les tokamaks « électrogènes » comme DEMO, c'est-à-dire les réacteurs producteurs d'électricité, sont prévus pour fonctionner dans les années 2050.

Les parties suivantes sont une présentation de la fusion nucléaire contrôlée par confinement magnétique. Elles sont tout d'abord introduites par la fusion, les réactions de fusion et les conditions physiques nécessaires à leurs établissements. Ensuite il sera présenté le contrôle par confinement magnétique et notamment les réacteurs nucléaires pour la fusion appelés aussi : les tokamaks. La fin de cette introduction portera sur les instabilités. Il existe de nombreux ouvrages de références sur la physique des plasmas ainsi que de nombreux sites internet, cette partie introductive a été réalisée avec notamment [Bel06, Cal06, Che84, fusa].

1.1 La fusion et les réactions de fusion

La fusion nucléaire constitue le mécanisme à l'origine du rayonnement des étoiles et en particulier du soleil. Une étoile commence à briller quand la matière en son cœur atteint, sous l'effet des forces de gravitation, des densités et des températures suffisantes pour déclencher des réactions thermonucléaires libérant de l'énergie. En effet, au sein des étoiles, les noyaux légers fusionnent et produisent des noyaux plus lourds (cf : Figure 1.1).

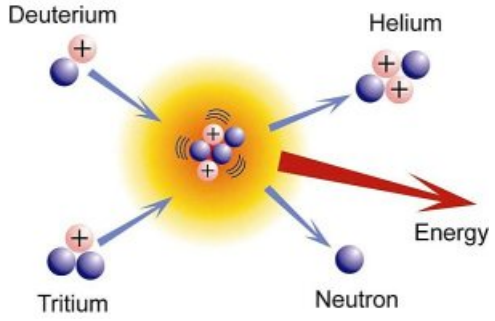


FIGURE 1.1 – La fusion nucléaire [fusb]

Au cours de ces réactions de fusion, la masse du noyau produit est inférieure à la somme des masses des noyaux légers des réactifs. Ces réactions produisent donc une différence de masse, qui en vertu de la relation d'Einstein, produit de l'énergie telle que : $E = mc^2$ avec

m la différence de masse et c la vitesse de la lumière.

Deux noyaux chargés positivement ont une tendance naturelle à se repousser. Afin qu'ils fusionnent il faut qu'ils soient suffisamment proches. Une certaine énergie est donc indispensable pour franchir cette barrière et arriver dans la zone, très proche du noyau où se manifestent les forces nucléaires capables de l'emporter sur la répulsion électrostatique. La probabilité de passage de cette barrière peut être quantifiée par la section efficace. La variation en fonction de l'énergie d'interaction exprimée en KeV des sections efficaces de plusieurs réactions de fusion est indiquée sur la courbe de la figure 1.2.

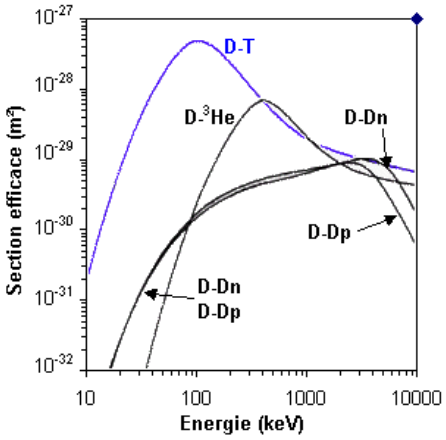


FIGURE 1.2 – Les sections efficaces des réactions de fusion entre isotopes de l'hydrogène. (D : Deutérium et T : Tritium)

Les principales réactions de fusion nucléaire envisagées pour l'exploitation de celle ci sont entre des isotopes de l'hydrogène : le Deutérium (D) et le Tritium (T). Ces réactions sont représentées sur le graphique de la figure 1.3.

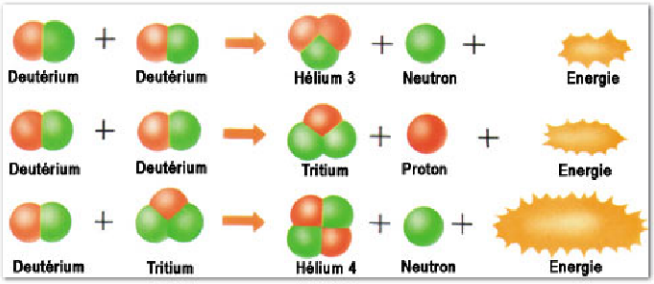


FIGURE 1.3 – Les réactions de fusion nucléaire

Le schéma 1.3 montre brièvement que les différentes réactions de fusion n'ont pas la même capacité énergétique. Les graphiques 1.2 et 1.3 expliquent la préférence et la concentration des recherches sur la fusion contrôlée sur la réaction Deutérium-Tritium. En effet, pour une même température son taux de réaction est plus élevé que la réaction Deutérium-Deutérium. Cependant, le Deutérium est présent en plus grande quantité sur terre et le Tritium est un élément radioactif cher à produire. Ces deux éléments sont des

isotopes de l'hydrogène. La réaction de Deutérium-Tritium peut s'exprimer sous la forme :

$$ {}^{2}_{1}\mathrm{D} + {}^{3}_{1}\mathrm{T} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He}(3,5MeV) + {}^{1}_{0}\mathrm{n}(14,1MeV) \tag{1.1.1} $$

L'énergie cinétique libérée par les particules alpha et le neutron, soit environ $17.6MeV$, est supérieure à l'énergie nécessaire pour passer la barrière de répulsion due aux forces électrostatiques de Coulomb. Cette énergie issue de la fusion nucléaire permettra donc de nouvelles réactions de fusion en chaînes. Bien que cette énergie soit suffisante à la production d'autres réactions, il faut au préalable que les conditions soit réunies pour les premières réactions. En effet, les conditions de températures et de pressions auxquelles nous sommes habitués sont insuffisantes à leur établissement. Ainsi, la probabilité d'observer une réaction de fusion entre deux noyaux d'hydrogène à la surface de la terre est quasiment nulle. Pour fusionner les noyaux qui sont chargés positivement, doivent d'abord vaincre leurs tendances naturelles à se repousser. Ceci est possible lorsque la matière est dans des conditions extrêmes comme au cœur du soleil où la pression est énorme et la température de plusieurs millions de degrés. Ces conditions solaires sont améliorées par le confinement produit par les forces gravitationelles provenant de la densité élevée. Sur terre les conditions de températures et de pression sont moins importantes et la température de fusion est supérieure à celle du soleil.

A de telles températures la matière est entièrement ionisée et se trouve dans l'état de plasma. Le plasma est le quatrième état de la matière après dans l'ordre croissant de la température les états solide, liquide et gazeux. Aussi appelé gaz ionisé, les plasmas constituent 99% de l'univers. Ils sont par exemple présents dans l'ionosphère et la magnétosphère terrestre, dans l'atmosphère des étoiles (dont le soleil), dans le vent solaire et les vents provenant des autres étoiles, les comètes, les milieux interstellaires, etc. Sur terre on ne le rencontre pas à l'état naturel si ce n'est dans les éclairs ou encore les aurores boréales [fusa] mais on peut le produire artificiellement en appliquant des champs électriques suffisamment puissants. Ces milieux partiellement ou totalement ionisés sont souvent soumis à des champs magnétiques tels que celui dominant l'atmosphère solaire. Il existe des plasmas naturels ou artificiels ; on s'intéresse ici plus particulièrement aux plasmas de fusion qui sont donc obtenus à des températures très importantes. Atteindre de telles températures, de l'ordre de 10^8 degrés Celsius, n'est pas aisé. Pour atteindre de telles températures on utilisera par exemple la fusion par confinement magnétique détaillée dans le paragraphe suivant.

1.2 Le confinement magnétique

L'objectif de la fusion contrôlée est de produire de l'énergie à partir de réactions de fusion inspirées de celles réalisées au cœur du soleil ou plus généralement des étoiles. Les conditions du cœur du soleil ne sont pas reproductibles sur terre. En effet, pour les étoiles, telles que le soleil, la tendance du plasma à se disperser et à se refroidir est contrebalancée par la gravitation. Sur terre les forces de gravitation sont insuffisantes et il est impossible d'obtenir une réaction de fusion entre deux atomes dans ces conditions. Pour obtenir ces

réactions, il est nécessaire de chauffer les combustibles à une température supérieure à un million de degrés. A ces températures, le combustible est complètement ionisé et les électrons sont libres. Les réactifs se trouvent à l'état de plasma.

Ces températures, de l'ordre de $10KeV$, soit 10^8K [1], excluent le confinement du plasma dans un récipient matériel. Il faut néanmoins maintenir le plasma dans un espace suffisamment petit pour qu'un nombre important de collisions entre noyaux légers donnent lieu à des réactions de fusion : c'est le confinement. Un confinement classique, par exemple dans une enceinte matérielle, entraînerait des pertes de particules et de chaleur rédhibitoires. Les conditions nécessaires à la fusion seraient perdues aussitôt. Il faut donc réussir à confiner le plasma dans un espace restreint, en minimisant tout contact avec les parois du réacteur pour limiter les pertes. Ces difficultés à maintenir les conditions de fusion sont cependant un avantage de taille pour la sécurité d'un réacteur. En effet, la moindre perturbation du système entraînerait la perte des conditions de fusion et l'arrêt de la réaction, il n'y a donc pas de risques d'emballement.

Ce problème de confinement dans un espace restreint peut être contourné en envisageant un réacteur qui ne fonctionnerait pas en régime stationnaire, mais dans lequel l'énergie proviendrait de réactions successives régulières. C'est la voie du confinement inertiel [DM82, Lav93, Lin98]. Nous nous concentrons sur la démarche opposée, le confinement magnétique, qui consiste à établir les conditions d'une réaction de fusion permanente, idéalement auto-entretenue. L'énergie des particules issues de la fusion doit compenser les pertes et maintenir la température du plasma. Une fois la réaction lancée, le plasma n'a alors plus besoin d'apport d'énergie. Pour quantifier cette condition, Lawson en 1957 [Law57] a introduit la notion de temps de confinement de l'énergie τ_E. Ce paramètre empirique mesure la vitesse de refroidissement du système :

$$\tau_E = \frac{W}{P_{loss}}, \tag{1.2.1}$$

où W est le contenu énergétique du système et P_{loss} est la puissance perdue. Le paramètre τ_E quantifie la qualité du confinement. Le critère de Lawson énonce que la réaction est rentable si le chauffage dû aux noyaux d'hélium issus de la fusion compense au moins les pertes. Les neutrons quittent le milieu et c'est leur énergie qui est récupérée en sortie du réacteur. Finalement, le critère de Lawson s'exprime souvent sous la forme :

$$f(Q) = n_e T \tau_E, \tag{1.2.2}$$

où n_e est la densité électronique, T la température et Q le taux de rentabilité du réacteur tel que :

$$Q = \frac{\text{puissance produite}}{\text{puissance injectée}}. \tag{1.2.3}$$

Ainsi, si Q est égal à 1 alors les réactions de fusion produisent autant d'énergie que la quantité d'énergie nécessaire pour commencer les réactions. Un taux de rentabilité Q d'au moins 1 a été atteint dans le réacteur « Joint European Torus » (JET) durant une courte

1. Par la suite, les températures sont pour des raisons pratiques le plus souvent exprimées en unités d'énergie. Du fait des ordres de grandeurs mis en jeu, l'électron-volt (eV) s'avère particulièrement adapté. On notera $1eV \approx 1,602.10^{-19}J \approx 10^4K$.

période ($\simeq$ 1s). On estime que pour être économiquement exploitable un réacteur doit avoir un facteur Q de l'ordre de 50.

Dans un plasma à l'état libre, la trajectoire des particules est aléatoire et les particules vont s'échapper. La solution retenue consiste à utiliser les propriétés de conductivité de l'électricité du plasma pour maintenir le plasma dans une boîte immatérielle. Les particules ayant la propriété de s'enrouler autour des lignes de champs magnétiques, il faut agencer ces lignes afin que les particules les suivent lorsqu'elles sont en mouvement. En refermant les lignes de champs magnétiques cela revient alors à soumettre le plasma à un champ magnétique intense de géométrie toroïdale. Les particules chargées composant le plasma suivent alors approximativement le champ magnétique. Ceci favorise les collisions entre les noyaux légers tout en limitant le contact entre le plasma et les parois du réacteur. Cette technique est appelée la fusion par confinement magnétique du plasma.

1.3 Les tokamaks et les différentes configurations

1.3.1 Historique des tokamaks

L'engouement pour la fusion thermonucléaire contrôlée apparaît après la seconde guerre mondiale. Pour contrôler ces réactions nucléaires plusieurs configurations magnétiques sont étudiées : décharges toroïdales, stellarators, machines à miroir, Z et theta-pinches mais celle qui supplante les autres par ses résultats obtenus est le tokamak. Inventé en 1950 par les physiciens russes Igor Tamm et Andrei Sakharov, le tokamak est un acronyme de la traduction russe de « chambre toroïdale avec bobines magnétiques ».

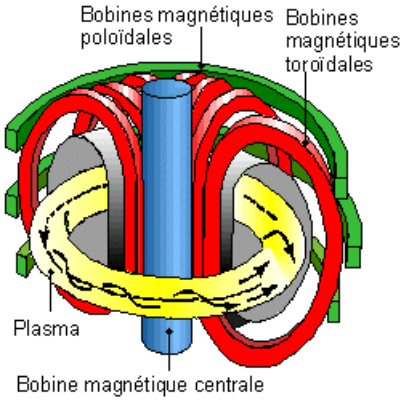


FIGURE 1.4 – Représentation d'un tokamak

Après cette découverte russe, les constructions de tokamaks de plus en plus grands et performants ont suivi. Il y eut notamment TFR en France qui a atteint la température de $2KeV$ et les grands tokamaks modernes JET (Angleterre), Asdex-Upgrade (Allemagne), Tore Supra (France) et DIIID (Etats-Unis) capables d'obtenir un facteur de rentabilité Q égal à 1. Ainsi, bien que les principaux besoins des tokamaks pour produire des réactions de fusions nucléaires ont été connus rapidement, il a fallu une cinquantaine d'années

pour atteindre un rapport Q de 1. Le futur tokamak ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) a pour objectif d'atteindre un facteur Q de 10.

Le principe du tokamak est de minimiser les fuites des particules et donc d'améliorer le confinement, pour cela les lignes de champs doivent être hélicoïdales. Ce type de lignes de champ est réalisé en ajoutant au champ toroïdal un autre champ magnétique qui lui est perpendiculaire : le champ poloïdal (voir la figure 1.4).

1.3.2 Géométrie et notations

La géométrie d'un tokamak est un tore obtenu par rotation d'une section poloïdale autour de l'axe Z. On utilisera les coordonnées toriques (R, θ, ϕ) avec r le rayon mineur, θ l'angle poloïdal et ϕ l'angle toroïdal (cf. figure 1.5). Pour la composante toroïdale on utilise la notation $\nabla\phi$ définie par :

$$\nabla\phi = \frac{1}{R} e_\phi. \tag{1.3.1}$$

Cette composante admet pour propriété :

$$\nabla \cdot \nabla\phi = 0. \tag{1.3.2}$$

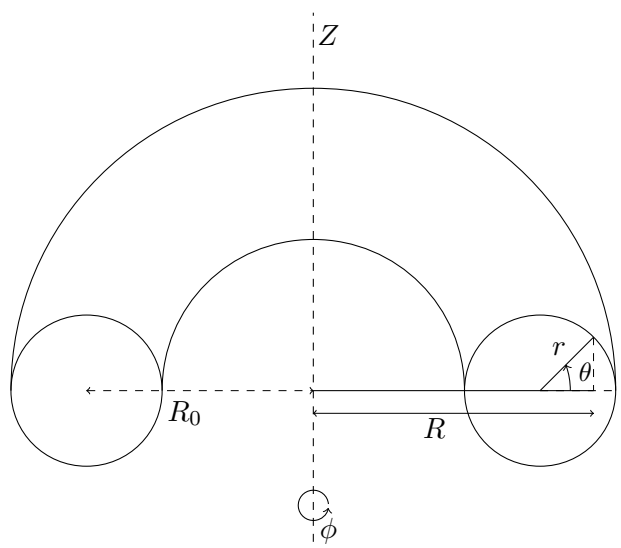


FIGURE 1.5 – Coordonnées toroïdales

Le petit rayon d'un tore est noté r, le grand rayon R_0 et le rapport $\epsilon \equiv \frac{r}{R_0}$ est appelé le rapport d'aspect. Choisir $\epsilon \to 0$ revient à considérer la limite cylindrique du tore. Dans la pratique, les configurations cylindriques sont analytiquement beaucoup plus simples que les toroïdales pour l'étude de la stabilité et du confinement.

Configuration magnétique

Le champ magnétique est décomposé suivant une composante toroïdale $\boldsymbol{B}_\phi$ et $\boldsymbol{B}_\theta$ sa composante poloïdale tel que :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_\phi e_\phi + \boldsymbol{B}_\theta e_\theta. \tag{1.3.3}$$

Il est possible de simplifier cette décomposition du champ magnétique en utilisant un flux magnétique noté ψ et considérant F_0 le paramètre du champ magnétique dans la direction toroïdale comme une constante :

$$\boldsymbol{B} = \frac{F_0}{R} e_\phi + \frac{1}{R} \nabla\psi \times e_\phi. \tag{1.3.4}$$

Cette décomposition sera réutilisée pour simplifier le système des équations dans le chapitre 3. La notion de flux magnétique poloïdal ψ_θ est souvent utilisé au sein des tokamaks. Ce flux est défini à chaque point $P(a, \alpha, \beta)$ dans l'espace (r, θ, ϕ) par :

$$\psi_\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a (\boldsymbol{B} \cdot \nabla\theta)\, R dr d\phi. \tag{1.3.5}$$

Dans le cas d'une axisymmétrie toroïdale le flux poloïdal se simplifie par :

$$\psi_\theta = 2\pi \int_0^a (\boldsymbol{B} \cdot \nabla\theta)\, R dr. \tag{1.3.6}$$

Le flux poloïdal est constant sur chaque surface toroïdale formée par les lignes de champs magnétiques fermées. Ces surfaces sont nommées surface de flux (cf. figure 1.6).

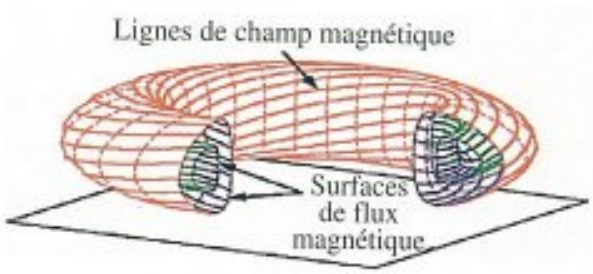


FIGURE 1.6 – Emboîtement des surfaces magnétiques (ou de flux)[Bob11].

Paramètres physiques

Il est intéressant de déterminer si, sur une surface de flux donnée, une ligne de champ magnétique sera fermée ou non. Pour cela, nous introduisons le facteur de sécurité q, qui mesure le pas de l'hélice dessinée par les lignes de champs. En d'autres termes, il représente le nombre de tours toroïdaux qu'effectue une ligne de champ sur la surface magnétique de petit rayon r lorsqu'elle boucle un petit tour donné par

$$q(r) = \frac{r\boldsymbol{B}_\phi(R_0)}{R_0 \boldsymbol{B}_\theta(r)}. \tag{1.3.7}$$

Ce facteur de sécurité tient son nom de son rôle dans l'établissement des instabilités de la MHD, qui seront détaillées dans la partie 1.6.

1.4 ITER et l'exploitation de l'énergie de fusion nucléaire

ITER, le prochain grand tokamak, est en construction à Cadarache en France. Les premiers essais seront faits aux alentours de 2016. Ce réacteur et son implantation a fait l'objet d'une entente internationale. Il est censé prouver la faisabilité de l'exploitation de l'énergie obtenue par les réactions de fusion nucléaire et que la production énergétique avec cette nouvelle énergie est envisageable avant la fin du XXIème siècle.

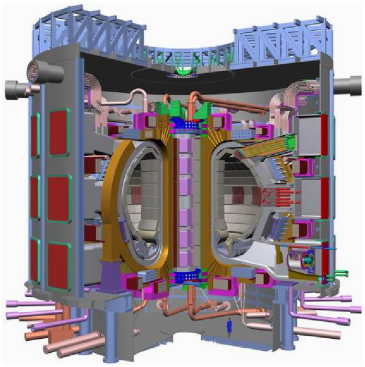


FIGURE 1.7 – Représentation du tokamak ITER [fusc]

En comparaison avec les tokamaks actuellement en service, comme JET, ITER présente un volume plus grand (cf. le schéma 1.8) et pourra donc contenir une quantité de plasma plus importante. ITER est un réacteur expérimental dont on connaît déjà le successeur : DEMO. Ce tokamak, DEMO, sera également un prototype et il aura pour objectif d'être le premier tokamak producteur d'énergie exploitable. DEMO contiendra un volume de plasma beaucoup plus important que ITER (voir figure 1.8). On utilise le rayon principal R pour mesurer les différences entre ces réacteurs. JET qui est le plus grand réacteur actuellement a un rayon principal de $3m$ alors qu'ITER fait $6m$ et DEMO fera $9m$. Ainsi, les réacteurs sont de plus en plus grands. Cela provient d'observations expérimentales qui ont montré que le temps de confinement est proportionnel à $R^{1.97}$.

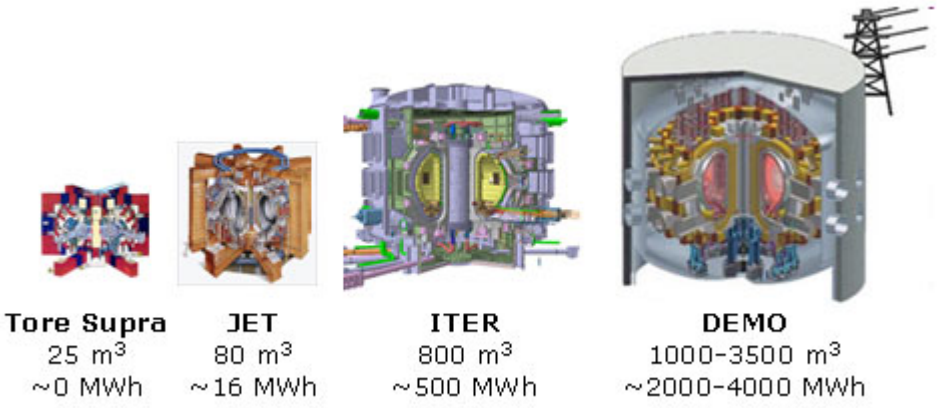


FIGURE 1.8 – Comparaison de différents tokamaks actuels et futurs [fusd]

1.5 Le mode de confinement H

Au début des années 1980, le tokamak allemand ASDEX a permis de découvrir l'existence de deux états différents pour le confinement du plasma. En effet, en augmentant le pouvoir chauffant, au dessus d'un certain seuil une transition abrupte est observée et après cela le confinement est augmenté [Wag82]. En particulier une barrière se forme juste au bord du plasma, à l'intérieur de la « séparatrice ». La séparatrice est une frontière magnétique, elle se caractérise par le fait qu'elle se croise en un point appelé point X. La séparatrice est aussi la dernière surface magnétique fermée (DSMF). La configuration avec séparatrice et divertor (cf. figure 1.9) est apparue également dans les années 1980 dans le but de résoudre la pollution du plasma central en éloignant le point de contact plasma-paroi grâce à une modification de la configuration magnétique. Dans cette configuration, la DSMF délimite la « Scrape Off Layer », zone dans laquelle les lignes de champ magnétique sont ouvertes contrairement au cœur du plasma. On qualifie de bord du plasma la SOL ainsi que les surfaces magnétiques fermées les plus externes du cœur. Le principe est de créer dans le bord du plasma un point de champ magnétique poloïdal nul, appelé point X du fait que les lignes de champ semblent s'y croiser (cf. figure 1.9).

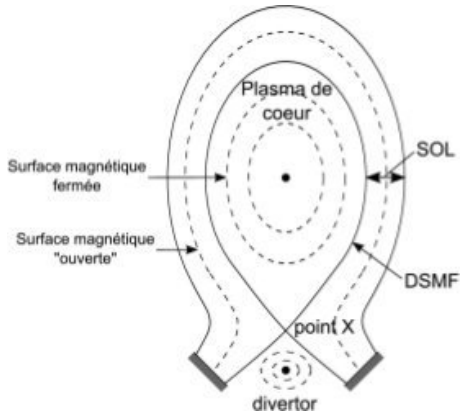


FIGURE 1.9 – Schéma de principe de la configuration divertor axisymétrique (coupe poloïdale) [Tam07]

Sur la séparatrice, le gradient de pression est particulièrement important. Dans ce nouveau régime obtenu, le temps de confinement est multiplié par un facteur deux. Ce régime a été renommé H-mode où le H correspond à « High-confinement » qui est opposé au mode L (L-mode) pour « Low-confinement ». On comprend donc que le mode H est le mode de référence qui est recherché pour ITER. Cependant, il y a des inconvénients à ce mode de confinement, en effet, les forts gradients à l'intérieur de la séparatrice provoquent de violentes instabilités au bord du plasma.

1.6 Instabilités

Une des difficultés du contrôle de la fusion nucléaire par confinement magnétique au sein des tokamaks est l'apparition d'instabilités. Depuis les premières expérimentations, il

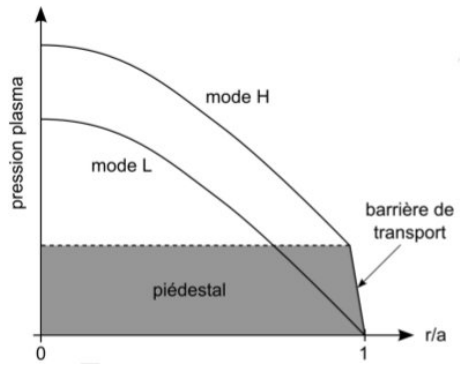


FIGURE 1.10 – Profils de pression typiques en mode L et mode H

est clair que les tokamaks sont sujets à une variété d'instabilités macroscopiques. Dans un tokamak les contributions énergétiques du plasma peuvent avoir des effets stabilisants : par exemple l'énergie nécessaire pour tordre les lignes de champs magnétiques ou encore celle pour compresser le plasma. Ces contributions énergétiques peuvent également déclencher des instabilités.

Partant d'un équilibre donné, les forces responsables des perturbations peuvent conduire soit à une certaine stabilité soit au contraire à une instabilité. Dans le cas de stabilité on peut observer une oscillation permanente autour de l'équilibre ou alors le système peut aussi retourner à l'état d'équilibre, cela se produit si les oscillations sont atténuées. Si au contraire ces perturbations sont la cause d'instabilités, les forces responsables de ces perturbations en causeront d'autres et ainsi l'amplitude de cette perturbation évoluera avec une croissance exponentielle. Ces instabilités peuvent potentiellement causer des difficultés importantes.

Dans un modèle monofluide, les instabilités sont très souvent causées par les gradients de courant $\nabla \boldsymbol{J}$ et/ou de pression $\nabla \boldsymbol{P}$. On parlera de modes de courant ou de modes de pression, suivant la source d'énergie déstabilisant ces modes.

Les instabilités du plasma causées par le gradient de pression sont classées en deux catégories qui sont les modes interchange et ballonnement (ballooning). Les instabilités d'interchange sont rarement appropriées dans les tokamaks. Les modes de ballonnement sont des modes de pression macroscopiques évoluant lentement le long des lignes de champs magnétiques avec des perturbations concentrées dans les zones de courbures défavorables. Dans le cas où le gradient de pression est fort près du bord du plasma, c'est-à-dire près de la séparatrice, les modes de ballonnement peuvent développer des crashs répétitifs et ainsi conduire à une perte de pression. Ces instabilités sont appelées *Edge-Localised Mode* (ELM) [Pam10]. Ce sont des instabilités de bords qui ne seront pas plus détaillées ici.

Les instabilités du plasma causées par le gradient de courant sont des modes de kink, appelés ainsi à cause du déplacement qu'ils entraînent. Il existe des modes de kink interne ou externe. Les kinks externes sont les modes les plus dangereux pour le confinement magnétique. Ils imposent que le facteur de sécurité q soit élevé au bord ($q \sim 3-5$ en pratique) c'est-à-dire que le courant décroisse rapidement au bord. Les kinks internes,

le plus souvent avec un nombre d'onde poloïdal $m = 1$, sont responsables d'instabilités du cœur du plasma et en particulier des instabilités dites en dents de scie, qui sont en réalité la version résistive du kink interne. Ces types d'instabilités ont été observés lors de simulations dont les résultats numériques sont présentés au chapitre 5.

1.6.1 Les instabilités en dents de scie

Les dents de scie [Has97, Leb11, Wes04], aussi nommées « sawtooth instabilities », représentent une instabilité se produisant dans le cœur des tokamaks. Tout d'abord apparues dans les petits tokamaks ohmiques, tel que le tokamak ST à Princetown [vGSS74] en 1974, elles ont, ensuite, été observées sous des formes très diverses et dans des conditions opératoires variées. Depuis elles sont présentes dans toutes les machines, et dépassent largement le cadre théorique de la MHD résistive. Leurs comportements en présence de chauffages auxiliaires et de particules rapides dans ces machines doivent être maîtrisés pour garantir qu'elles ne menaceront pas les paramètres physiques du réacteur.

Expérimentalement, les dents de scie se traduisent par des réorganisations périodiques de la température T_e, de la densité électronique n_e au cœur du plasma sous forme d'oscillations asymétriques (c.f. figure 5.23). Chaque cycle est constitué d'une montée lente de la température T_e et de la densité n_e au centre du plasma suivie par une chute brutale. Le centre du plasma est ici l'intérieur de la surface $q = 1$, où q est le facteur de sécurité (1.3.7). Les dents de scie sont liées à l'existence de cette surface et apparaissent quand q descend en dessous de 1 au centre du plasma. Durant la phase lente, appelée aussi rampe, les profils de densité et de température électronique se piquent au centre du plasma sous l'effet des sources de chauffage. La chaleur et la densité accumulées sont brutalement évacuées vers l'extérieur pendant la phase de chute ou crash. Le facteur de sécurité q oscille inversement : décroissance pendant la rampe et croissance pendant le crash. Cette instabilité se visualise sur les graphiques représentant des variables telles que la densité de courant, par un déplacement du cœur du plasma voir la figure 1.11.

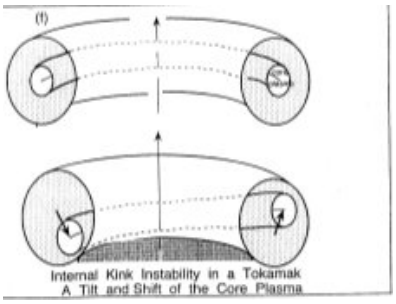


FIGURE 1.11 – Déplacement du cœur du plasma [Has97]

Il existe une grande variété de dents de scie : inversées, saturées, monstres, etc. Les dents de scie n'entraînent généralement pas la perte du confinement sauf dans des cas extrêmes : dents de scie monstres ou couplage avec des autres instabilités comme les ELMs (Edge Localized Modes) ou les NTMs (Neoclassical Tearing Modes). En cela, elles constituent

un phénomène original car la majorité des instabilités macroscopiques sont fatales pour le confinement.

1.7 Plan de la thèse

Après cette partie introductive sur la fusion nucléaire et son exploitation au sein des tokamaks confiné par un champ magnétique, le chapitre 2 présente les modèles fondamentaux des plasmas. Le plasma est composé de particules telles que les ions et les électrons. Bien qu'étant la plus directe, la modélisation particulaire est inenvisageable sur des volumes même modestes car le nombre de particules en présence est trop important. Le plasma est donc traité de manière statistique. Ainsi dans le cadre de l'approche cinétique le plasma est décrit à l'aide de fonctions de distribution. Ce modèle simplifié est encore trop coûteux, pour le réduire on recourt aux modèles fluides. On détaille les principales étapes de dérivation par les calculs des moments de la formulation cinétique dans l'espace des vitesses. Ces modèles fluides possèdent encore des termes de transport dépendants du modèle cinétique dont on développe une approximation basée sur la stratégie de Braginskii.

Le chapitre 3 reprend le modèle fluide par particule obtenu au chapitre précédent afin d'obtenir le modèle de la MagnéthoHydroDynamique (MHD). Dans ce chapitre, on développe les différentes étapes et hypothèses nécessaires pour passer du modèle bi-fluide (électrons - ions) au système de la MHD complète, qui est donc un modèle fluide encore plus simplifié. Ce modèle détaillé sous ces formes idéale ou résistive, suivant les hypothèses faites sur la loi d'Ohm, fait l'objet d'une analyse spectrale. Ce chapitre se termine par la présentation de modèles de la MHD encore simplifiés : les modèles de la MHD réduite. Basés sur l'hypothèse d'un champ magnétique toroïdal dominant par rapport au champ magnétique poloïdal, ce système est détaillé pour obtenir le système d'équilibre instable du Current Hole puis l'équation d'équilibre de Grad-Shafranov.

Le chapitre 4 présente des méthodes numériques de résolution utilisées pour résoudre des systèmes de la MHD complète et de la MHD réduite. La résolution de certains systèmes de MHD nécessite l'utilisation de méthodes suffisamment stables et régulières. Pour résoudre ces systèmes, on utilise une méthode aux éléments finis avec des éléments finis stabilisés ainsi que les éléments finis C^1 de Bell. La première partie de ce chapitre développe la méthode aux éléments finis avec pour introduction la justification de ce choix de méthode par rapport notamment à la méthode des volumes finis, et la nécessité de recourir à des éléments plus réguliers que des éléments C^0 tels que les éléments $P1$ de Lagrange. Ensuite, après une présentation générale de différentes méthodes de stabilisation, on verra qu'il est nécessaire de stabiliser des problèmes comme ceux de la MHD qui sont dominés par l'advection. En effet, ces systèmes résolus sans stabilisation supplémentaire sont instables. Notre intérêt s'est porté sur la méthode de stabilisation SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) qui consiste à rajouter un terme diffusionnel dans le sens de l'advection. Afin d'étudier la stabilité L^2 de cette méthode de stabilisation on utilise la théorie de Von Neumann. La méthode SUPG étant à l'origine créée pour des systèmes stationnaires, pour l'analyse de stabilité L^2, on a considéré les deux cas suivant la prise en compte ou non

du terme temporel dans le résidu. Cette analyse introduit l'idée d'une résolution avec des méthodes implicites ou semi-implicites telles que la méthode de Crank-Nicholson. Cette partie stabilisation s'achève sur les résultats numériques d'un cas test d'advection en une dimension. Ce chapitre 4 se poursuit par la définition des éléments finis C^1 de Bell [Bel69] dont la régularité a été au préalable motivée par notamment le fait d'assurer la condition d'absence de monopôles magnétiques. On donne les propriétés de ces éléments et on développe leurs mises en œuvre. Enfin, ce chapitre 4 se termine par la résolution de trois problèmes types : un basique de conduction thermique et deux issus de la MHD réduite : l'équation de Grad-Shafranov et le système du Current Hole. Ce modèle du Current Hole peut s'écrire avec deux ou quatre équations. On présente les deux versions de résolution de ce modèle.

Pour finir, le chapitre 5 présente un ensemble de résultats de simulations sur des modèles de conduction thermique et de MHD réduite tels que le modèle de l'équation d'équilibre de Grad-Shafranov et celui du système du Current Hole. Après avoir défini les éléments C^1 de Bell au chapitre précédent, le cas test de conduction thermique a pour objectif la validation de leurs implémentations. En vue de cette validation, on a simulé un cas test analytique avec l'obtention de l'ordre optimal de convergence sur l'erreur d'approximation. Ensuite, on résout trois cas tests analytiques pour l'équation d'équilibre de Grad-Shafranov. Pour la comparaison, ces cas tests sont d'abord résolus avec les éléments $P1$ de Lagrange puis les C^1 de Bell. Ces cas tests étant analytiques on s'intéresse à l'ordre de convergence de l'erreur d'approximation. Le domaine de ces cas tests étant courbes on n'obtient pas toujours l'ordre de convergence espéré. Pour finir, ce chapitre 5 expose les résultats obtenus sur la résolution du modèle du Current Hole. Ce modèle est un équilibre instable dont les erreurs d'approximation sur les solutions obtenues à chaque itération suffisent à déclencher une instabilité. Ces instabilités s'observent sur la densité de courant J avec le désaxement de la solution initiale puis un retour à un état proche de l'état initial. L'énergie cinétique de ce système présente une évolution en dents de scie caractérisant cette instabilité. Ce modèle est résolu avec les éléments $P1$ de Lagrange puis avec les C^1 de Bell. Pour les $P1$ de Lagrange, d'abord résolu avec une méthode directe basée sur la factorisation LU, le système est ensuite résolu avec la méthode itérative de GMRes. La méthode directe bien qu'étant précise est très coûteuse en temps de calcul. La méthode itérative GMRes remédie à ce problème de temps de calcul mais perd en précision. Cette perte de précision est visible sur les solutions obtenues avec par exemple la perte de la symétrie, elle est due au critère d'arrêt ici imposé à 10^{-10}. Cette différence dans les critères d'approximation est visible sur les solutions également dans le développement de l'instabilité avec une direction de développement différente et un déclenchement plus tardif pour la méthode GMRes. Bien que les résultats soient différents ces deux méthodes sont validées physiquement par le coefficient de la partie linéaire précédent le déclenchement de l'instabilité sur le graphique de l'énergie cinétique. Enfin ce système du Current Hole a été résolu avec les éléments C^1 de Bell. La régularité de ces éléments a permis d'observer les instabilités en dents de scie, leurs développements et leurs périodicités. Ainsi, sur un temps adimensionné de 20000, on a pu observer six déclenchements d'instabilités.

Chapitre 2

Modèles fondamentaux des plasmas

Sommaire

2.1 Le modèle cinétique 22
2.1.1 Propriétés sur les opérateurs de collisions 23
2.1.2 Opérateur de collisions de Landau 25
2.2 Le modèle fluide 26
2.2.1 Calcul des moments 26
2.3 Coefficients de transport : type Braginskii 30
2.3.1 Choix du référentiel d'analyse 30
2.3.2 Analyse dimensionnelle 32
2.3.3 Les équations de Boltzmann adimensionnées 36
2.3.4 Calcul des coefficients de transport 38
2.4 Conclusions 50

A l'échelle microscopique, le plasma est composé de particules comme des ions et des électrons. En ce sens, la modélisation la plus directe d'un plasma est le modèle particulaire. Il consiste à écrire le principe fondamental de la dynamique pour chacune des particules en considérant qu'elles sont soumises à un champ électromagnétique. Cette description particulaire même pour un volume de taille modeste est inenvisageable car le nombre de particulaire présentes est trop important. Il est donc nécessaire de modéliser le plasma de manière statistique. Dans le cadre de l'approche cinétique le plasma est décrit en termes de fonctions de distribution f_σ, une par espèces σ de particules dans un espace des phases à 7 dimensions suivant la position $\boldsymbol{x}$, la vitesse $\boldsymbol{u}$ et le temps t. Cette présentation des modèles fondamentaux des plasmas magnétisés commence par le rappel de la formulation du modèle cinétique des écoulements ionisés ainsi que par les propriétés du noyau de collision de Landau. Ce modèle très détaillé, caractérise la dynamique des plasmas par le suivi de l'évolution temporelle des fonctions de distribution des vitesses des particules. Il présente l'inconvénient d'être encore trop coûteux. Pour simplifier ce modèle on recourt aux modèles fluides. La deuxième partie de ce chapitre donne les principales étapes de la dérivation d'un modèle fluide par les moments, dans l'espace des vitesses, de la formulation cinétique. Le modèle fluide présentant encore des termes de transport dépendants du modèle cinétique il est nécessaire d'approcher ces coefficients. La dernière

partie de ce chapitre revisite la stratégie d'approximation des moments d'ordres supérieurs proposée par Braginskii [Bra65]. L'objectif étant ici la compréhension de ce qui a été fait et notamment les hypothèses émises afin de redévelopper le système suivant les simplifications utilisées, d'un point de vue mathématique. En ce sens, cette partie débute par une présentation des différents choix de référentiels d'analyse. Puis sur le référentiel choisi, les équations de Boltzmann sont adimensionnées. Pour finir, on s'appuie sur la méthode de Chapman–Enskog dont le principe est d'utiliser le développement d'Enskog de la fonction de distribution afin d'approcher les coefficients de transport.

2.1 Le modèle cinétique

Le modèle cinétique ou modèle de Vlasov s'utilise pour une approche microscopique [Bel06, Bra65, Che84]. Ce modèle étudie le comportement des particules constituant le plasma. A chaque instant, chaque particule a une position et une vitesse particulière. Par conséquent, on peut caractériser la configuration instantanée d'un grand nombre de particules par la densité de particules spécifique à chaque point dans l'espace des phases. L'espace des phases est l'espace des positions, $\boldsymbol{x}$, et des vitesses, $\boldsymbol{u}$, noté $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}$. On introduit alors la fonction de distribution des particules σ notée $f_\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$ qui donne la densité instantanée de ces particules à la position $\boldsymbol{x}$, ayant la vitesse $\boldsymbol{u}$ au temps t. Ainsi, le nombre de particules de l'espèce σ au temps t situées dans l'espace entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ dont la vitesse est entre $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u}$ est définie par $f_\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{u}$, où $d\boldsymbol{x}$ et $d\boldsymbol{u}$ sont les incréments d'espace et de vitesse respectivement. L'évolution temporelle de la fonction de distribution f_σ des particules σ est décrite par l'équation de Boltzmann [Bel06] :

$$\frac{\partial f_\sigma}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{q_\sigma}{m_\sigma}\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{u}}=C_\sigma, \tag{2.1.1}$$

où C_σ représente les changements subis par la fonction de distribution f_σ et notamment les collisions des particules. Le premier terme décrit la variation par rapport au temps de la fonction de distribution f_σ. Ensuite, $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{u}$ étant indépendants le second terme se réécrit

$$\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{x}}=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\left(\boldsymbol{u}f_\sigma\right). \tag{2.1.2}$$

Il représente la convection des particules à la vitesse $\boldsymbol{u}$. Le dernier terme traduit l'accélération des particules sous l'effet d'un champ électromagnétique :

$$\boldsymbol{a}_\sigma=\frac{q_\sigma}{m_\sigma}\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}\right), \tag{2.1.3}$$

où q_σ définit la charge d'une particule σ, m_σ sa masse, $\boldsymbol{u}$ sa vitesse, $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ représentent respectivement le champ électrique et le champ magnétique. Cette équation permet de modéliser des plasmas fortement collisionnels. A l'opposé, certains plasmas, comme le cœur des tokamaks, sont peu collisionnels. Les collisions sont alors négligées et l'étude de l'évolution des positions et des vitesses des particules est faite avec l'équation de Vlasov [Bel06] :

$$\frac{\partial f_\sigma}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{q_\sigma}{m_\sigma}\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{u}}=0. \tag{2.1.4}$$

2.1.1 Propriétés sur les opérateurs de collisions

L'opérateur de collisions C_σ se caractérise par :

$$C_\sigma = \sum_\alpha C_{\sigma\alpha}(f_\sigma, f_\alpha), \tag{2.1.5}$$

où $C_{\sigma\alpha}(f_\sigma, f_\alpha)$, qu'on écrit aussi plus simplement $C_{\sigma\alpha}$, représente les échanges entre les fonctions de distributions f_σ et f_α dus aux collisions entre les particules α et σ. Cet opérateur de collision est défini par exemple sous la forme Landau [Lan81] par :

$$\mathcal{C}_{\sigma\ell} = -\boldsymbol{\partial_u} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}_{\sigma\ell}, \tag{2.1.6}$$

où

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}_{\sigma\ell}(f, g) = \frac{\Gamma_{\sigma\ell}}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{u}' \left(\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}') \left[-g(\boldsymbol{u}') \boldsymbol{\partial_u} f(\boldsymbol{u}) + \frac{m_\sigma}{m_\ell} f(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\partial_{u'}} g(\boldsymbol{u}') \right] \right), \tag{2.1.7}$$

et

$$\Gamma_{\sigma\ell} = \frac{4\pi q_\sigma^2 q_\ell^2 \ln \Lambda}{m_\sigma^2}, \tag{2.1.8}$$

avec $\ln \Lambda$ le logarithme de Coulomb représentant le rapport du paramètre de l'impact maximum sur celui de l'impact minimum détaillé page 238 de l'article de Braginskii [Bra65]. $\underline{\mathbb{B}}$ est le tenseur des collisions défini par :

$$\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \mathbb{I} - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}}{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u})^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.1.9}$$

Il présente les propriétés remarquables suivantes.

- $\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{u})$ est symétrique :

$$\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{u})^T = \underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{u}), \tag{2.1.10}$$

  et impair :

$$\underline{\mathbb{B}}(-\boldsymbol{u}) = -\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{u}). \tag{2.1.11}$$

- Il dérive d'un potentiel :

$$\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\partial_u} \left(\frac{\boldsymbol{u}}{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u})^{1/2}} \right). \tag{2.1.12}$$

- Tous les vecteurs $\boldsymbol{u}$ sont dans le noyau de ce tenseur :

$$\forall \boldsymbol{u}, \quad \underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{u} = 0. \tag{2.1.13}$$

- Dans l'espace des vitesses ce tenseur présente les relations suivantes :

$$\boldsymbol{\partial_u} \cdot \underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\partial_u} \left(\frac{2}{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u})^{1/2}} \right) = -\frac{2}{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u})^{3/2}} \boldsymbol{u}, \tag{2.1.14}$$

$$\mathrm{Tr}\left[\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{u})\right] = \frac{2}{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u})^{1/2}}. \tag{2.1.15}$$

– Dans l'espace des vitesses avec un système de coordonnées sphériques :

$$\boldsymbol{\partial_u} \cdot (\underline{\mathbb{B}}\boldsymbol{\partial_u}) \equiv \frac{2}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})^{3/2}}\mathcal{B}\left(\boldsymbol{\partial}_\theta, \boldsymbol{\partial}_\phi\right), \tag{2.1.16}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\left(\boldsymbol{\partial}_\theta, \boldsymbol{\partial}_\phi\right) =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right),\\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right),\end{aligned}$$

la partie angulaire de $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{u}^2}$ qui s'écrit en fonction de la variable angulaire $\mu = \cos\theta$.

Comme l'opérateur de collision est défini par

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{\sigma\ell}\left(\widetilde{f}_\sigma, \widetilde{f}_\ell\right) =& \frac{\Gamma_{\sigma\ell}}{2}\left[-\boldsymbol{\partial_u}\widetilde{f}_\sigma\left(\boldsymbol{u}\right)\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{u}'\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\right)\widetilde{f}_\ell\left(\boldsymbol{u}'\right)\right.\\ &\left.+\frac{m_\sigma}{m_\ell}\widetilde{f}_\sigma\left(\boldsymbol{u}\right)\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{u}'\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{u}'}\widetilde{f}_\ell\left(\boldsymbol{u}'\right)\right],\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

on peut aussi l'exprimer en fonction d'un tenseur de diffusion $\underline{\mathbb{D}}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{\sigma\ell}\left(\widetilde{f}_\sigma, \widetilde{f}_\ell\right) =& \frac{\Gamma_{\sigma\ell}}{2}\left[-\underline{\mathbb{D}}_\ell\left(\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{\partial_u}\widetilde{f}_\sigma\right]\\ &+\frac{\Gamma_{\sigma\ell}}{2}\left[\frac{m_\sigma}{m_\ell}\widetilde{f}_\sigma\left(\boldsymbol{u}\right)\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{u}'\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{u}'}\widetilde{f}_\ell\left(\boldsymbol{u}'\right)\right],\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

avec

$$\underline{\mathbb{D}}_\ell = \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{u}'\left(\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\right)\widetilde{f}_\ell\left(\boldsymbol{u}'\right)\right). \tag{2.1.19}$$

L'opérateur de collisions $C_{\sigma\alpha}(f_\sigma, f_\alpha)$ doit également satisfaire les contraintes de conservation de la densité des particules, des mouvements et de l'énergie [Bel06, Bra65].

– Les collisions ne peuvent changer le nombre total de particules à un endroit précis, la conservation de la densité des particules s'écrit :

$$\int C_{\sigma\alpha} d\boldsymbol{u} = 0. \tag{2.1.20}$$

– Les collisions entre particules d'une même espèce ne rajoutent pas de moments sur les vitesses :

$$\int m_\sigma \boldsymbol{u} C_{\sigma\sigma} d\boldsymbol{u} = 0. \tag{2.1.21}$$

De même, les collisions entre particules d'espèces différentes ne modifient pas la somme des moments des vitesses de ces espèces :

$$\int m_\sigma \boldsymbol{u} C_{\sigma\alpha} d\boldsymbol{u} + \int m_\alpha \boldsymbol{u} C_{\alpha\sigma} d\boldsymbol{u} = 0. \tag{2.1.22}$$

– Pour l'énergie comme pour les vitesses les collisions entre particules d'une même espèce ne peuvent changer l'énergie totale de cette espèce :

$$\int m_\sigma \boldsymbol{u}^2 C_{\sigma\sigma} d\boldsymbol{u} = 0. \tag{2.1.23}$$

Pour finir, les collisions entre particules d'espèces différentes doivent conserver la somme des énergies de ces espèces :

$$\int m_\sigma \boldsymbol{u}^2 C_{\sigma\alpha} d\boldsymbol{u} + \int m_\alpha \boldsymbol{u}^2 C_{\alpha\sigma} d\boldsymbol{u} = 0. \tag{2.1.24}$$

Remarque 2.1 *Il faut noter que si la fréquence des collisions est petite ou que le libre parcours moyen des particules est grand alors les collisions peuvent être négligées et dans ce cas le plasma est dit : « plasma idéal ».*

En mécanique statistique, dans un équilibre thermique les particules σ de gaz sont caractérisées par une fonction de distribution de type maxwellienne sur la vitesse $\boldsymbol{u}$

$$f_\sigma^0 = \frac{n_\sigma}{\left(2\pi \frac{T_\sigma}{m_\sigma}\right)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{m_\sigma}{2T_\sigma}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_\sigma)^2}, \tag{2.1.25}$$

où n_σ, T_σ et $\boldsymbol{v}_\sigma$ sont des variables macroscopiques représentant respectivement la densité, la température et la vitesse moyenne du gaz σ tout entier.

2.1.2 Opérateur de collisions de Landau

Nous avons fait le choix de la forme Landau pour l'opérateur de collisions, néanmoins il existe d'autres formes d'opérateurs de collisions comme BGK [BGK54, Hub09] ou encore l'opérateur de Lorentz, approximation de Landau pour laquelle on suppose l'immobilité des ions. La forme, que nous étudierons plus particulièrement, est celle de Fokker-Planck-Landau [DLD92]

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}_{\sigma\ell}\left(\widetilde{f}_\sigma, \widetilde{f}_\ell\right) = \frac{\Gamma_{\sigma\ell}}{2}\left[\left(1+\frac{m_\sigma}{m_\ell}\right)\widetilde{f}_\sigma(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{\partial_u}\cdot(\underline{\mathbb{D}}_\ell) - \underline{\mathbb{D}}_\ell(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{\partial_u}\widetilde{f}_\sigma\right]. \tag{2.1.26}$$

où le tenseur de diffusion $\underline{\mathbb{D}}_\ell$ est défini précédemment. Néanmoins il existe d'autres formulations pour cet opérateur de Fokker-Planck-Landaun comme celle qui s'écrit en terme du potentiel de Rosenbluth [RMJ57, RR60] :

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}_{\sigma\ell}\left(\widetilde{f}_\sigma, \widetilde{f}_\ell\right) = \frac{\Gamma_{\sigma\ell}}{2}\left[2\left(1+\frac{m_\sigma}{m_\ell}\right)\widetilde{f}_\sigma(\boldsymbol{u})\frac{\partial H_\ell(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}}\cdot\left(\widetilde{f}_\sigma(\boldsymbol{u})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}}G_\ell(\boldsymbol{u})\right)\right], \tag{2.1.27}$$

avec les potentiels de Rosenbluth $H_\ell(\boldsymbol{u})$ et $G_\ell(\boldsymbol{u})$:

$$H_\ell(\boldsymbol{u}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{u}' \frac{\widetilde{f}_\ell(\boldsymbol{u}')}{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'} \quad \text{et} \quad G_\ell(\boldsymbol{u}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{u}' \widetilde{f}_\ell(\boldsymbol{u}')\,|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'|. \tag{2.1.28}$$

2.2 Le modèle fluide

On se restreint ici au cas d'un plasma simple composé d'ion et d'électrons. Le modèle cinétique représente la seule formulation valide dans un plasma mais elle pose le problème du coût. En effet, sur les tokamaks comme ITER les échelles caractéristiques propres aux échelles plasmas sont très grandes ce qui rend la résolution du modèle cinétique impossible. Il faut donc recourir à un modèle simplifié comme le modèle fluide. Cette simplification permet de diminuer l'espace des vitesses et rend les échelles spatio-temporelles moins petites. Ce modèle est obtenu à partir des différents moments de l'équation cinétique. Ainsi, le plasma est décrit plus simplement par ses variables macroscopiques pour chacunes des particules σ telles que la densité n_σ, la vitesse moyenne $\boldsymbol{v}_\sigma$ ou encore la température T_σ. Les équations fluides d'abord obtenues sous forme conservatives seront ensuite exposées sous forme non-conservatives.

2.2.1 Calcul des moments

Avant de calculer les différents moments de l'équation cinétique qui permettront d'obtenir les équations de conservation fluides, on définit les variables macroscopiques obtenues à partir des différents moments de la fontion de distribution. Ainsi, dans l'espace des phases, la densité $n_\sigma(t,\boldsymbol{x})$ de particules σ au point $\boldsymbol{x}$ au temps t est définie par :

$$n_\sigma(t,\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f_\sigma(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})d\boldsymbol{u}. \tag{2.2.1}$$

Il est également possible de définir une vitesse moyenne $\boldsymbol{v}$ à partir du moment d'ordre 1 de la fonction de distribution tel que :

$$n_\sigma(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}_\sigma(t,\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{u} f_\sigma(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})d\boldsymbol{u}. \tag{2.2.2}$$

De la même façon la température T_σ de l'espèce σ est définie par une fonction de t et $\boldsymbol{x}$ comme une variable locale caractéristique définie par :

$$T_\sigma\left(t,\boldsymbol{x}\right) = \frac{1}{n_\sigma}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma}{3}\left(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_\sigma\right)^2 f_\sigma\left(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\right)d\boldsymbol{u}. \tag{2.2.3}$$

En général, ces paramètres macroscopiques n, $\boldsymbol{v}$ et T sont différents pour chaque espèce lorsque l'on n'est pas dans un état d'équilibre. Avec ces paramètres il est possible de définir la densité de courant $\boldsymbol{J}$:

$$\boldsymbol{J} = \sum_\sigma q_\sigma n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma. \tag{2.2.4}$$

Ce principe de multiplier f par différentes puissances de $\boldsymbol{u}$ pour ensuite les intégrer sur la vitesse permet d'obtenir les différents moments de la fonction de distribution. Dans la même idée, les équations de conservation sont obtenues en intégrant en vitesse l'équation cinétique (2.1.1) telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left[\frac{\partial f_\sigma}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\left(\boldsymbol{u}f_\sigma\right) + \nabla_{\boldsymbol{u}}\cdot\left(\boldsymbol{a}_\sigma f_\sigma\right)\right] g\left(\boldsymbol{u}\right)d\boldsymbol{u} = \int_{\mathbb{R}^3}\sum_\alpha C_{\sigma\alpha} g\left(\boldsymbol{u}\right)d\boldsymbol{u}. \tag{2.2.5}$$

Par conséquent, l'équation de continuité sur chaque espèce est obtenue en prenant le moment d'ordre 0 c'est-à-dire en prenant $g(\boldsymbol{u}) = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\partial f_\sigma}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\boldsymbol{u} f_\sigma) + \nabla_{\boldsymbol{u}} \cdot (\boldsymbol{a}_\sigma f_\sigma) \right] d\boldsymbol{u} = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_\alpha C_{\sigma\alpha} d\boldsymbol{u}. \tag{2.2.6}$$

Dans le cas du modèle fluide les variables $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$ et t étant indépendantes on commute l'intégrale et les termes dérivatifs en temps et en espace. D'après le théorème de Gauss le troisième terme du membre de gauche s'annule. Ainsi, l'équation (2.2.6) combinée avec les équations (2.2.1), (2.2.2) et (2.1.20) donne l'équation de continuité sur les espèces :

$$\frac{\partial n_\sigma}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma) = 0. \tag{2.2.7}$$

Le moment d'ordre 0 sur les équations du modèle cinétique a donc permis d'obtenir les équations de continuité des espèces. De même, le moment d'ordre 1, soit $g(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$, permet d'obtenir l'équation de conservation de la quantité de mouvements de chaque espèce :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{u} \left[\frac{\partial f_\sigma}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\boldsymbol{u} f_\sigma) + \nabla_{\boldsymbol{u}} \cdot (\boldsymbol{a}_\sigma f_\sigma) \right] d\boldsymbol{u} = \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{u} \sum_\alpha C_{\sigma\alpha} d\boldsymbol{u}, \tag{2.2.8}$$

Le deuxième terme du membre de gauche se réécrivant :

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (f\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} = \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot ((\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) f), \tag{2.2.9}$$

en utilisant le moment d'ordre 1 de la fonction de distribution (2.2.2), l'équation (2.2.8) devient :

$$\partial_t (n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma) + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} ((\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) f_\sigma) d\boldsymbol{u} + \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{u} \nabla_{\boldsymbol{u}} \cdot (\boldsymbol{a}_\sigma f_\sigma)\, d\boldsymbol{u} = \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{u} \sum_\alpha C_{\sigma\alpha} d\boldsymbol{u}. \tag{2.2.10}$$

Pour traiter le second terme du membre de gauche de cette équation on pose le changement de variable : $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_\sigma(x,t) + \boldsymbol{\kappa}(x,t)$ où $\boldsymbol{\kappa}$ représente la partie aléatoire d'une vitesse donnée. Notons que $d\boldsymbol{u} = d\boldsymbol{\kappa}$. Ainsi le produit tensoriel étant bilinéaire, le second terme se réécrit :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} ((\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) f_\sigma) d\boldsymbol{u} = & \int_{\mathbb{R}^3} ((\boldsymbol{v}_\sigma \otimes \boldsymbol{v}_\sigma) f_\sigma) d\boldsymbol{\kappa} + \int_{\mathbb{R}^3} ((\boldsymbol{v}_\sigma \otimes \boldsymbol{\kappa}) f_\sigma) d\boldsymbol{\kappa} \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} ((\boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{v}_\sigma) f_\sigma) d\boldsymbol{\kappa} + \int_{\mathbb{R}^3} ((\boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\kappa}) f_\sigma) d\boldsymbol{\kappa}. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Ceci peut aussi se simplifier en utilisant la définition de la vitesse moyenne $\boldsymbol{v}_\sigma$ (2.2.2) et en utilisant la relation qui en découle $\int \boldsymbol{\kappa} f_\sigma d\boldsymbol{\kappa} = 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} ((\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) f_\sigma) d\boldsymbol{u} = n_\sigma (\boldsymbol{v}_\sigma \otimes \boldsymbol{v}_\sigma) + 0 + 0 + \int_{\mathbb{R}^3} ((\boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\kappa}) f_\sigma) d\boldsymbol{\kappa}. \tag{2.2.12}$$

Concernant le troisième terme, après l'avoir intégré par partie sur l'espace des vitesses, il devient :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{u} \nabla_{\boldsymbol{u}} \cdot (\boldsymbol{a}_\sigma f_\sigma)\, d\boldsymbol{u} = -\frac{n_\sigma q_\sigma}{m_\sigma} (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_\sigma \times \boldsymbol{B}). \tag{2.2.13}$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvements de l'espèce σ se réécrit donc :

$$\begin{aligned} m_\sigma \left[\partial_t(n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma) + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma \otimes \boldsymbol{v}_\sigma)\right] - n_\sigma q_\sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_\sigma \times \boldsymbol{B}) = \\ -m_\sigma \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} ((\boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\kappa}) f_\sigma) d\boldsymbol{\kappa} + \int_{\mathbb{R}^3} m_\sigma \boldsymbol{u} \sum_\alpha C_{\sigma\alpha} d\boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Si f_σ est une fonction isotrope de $\boldsymbol{\kappa}$ alors les termes de la diagonale du tenseur suivant :

$$\int_{\mathbb{R}^3} (m_\sigma (\boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\kappa}) f_\sigma) d\boldsymbol{\kappa},$$

sont identiques et dans ce cas définissent la pression scalaire p_σ :

$$p_\sigma = \int_{\mathbb{R}^3} m_\sigma \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{3} f_\sigma d\boldsymbol{\kappa}, \tag{2.2.15}$$

$$= n_\sigma T_\sigma. \tag{2.2.16}$$

Au final, l'équation de conservation de la quantité de mouvements de l'espèce σ s'écrit :

$$\begin{aligned} m_\sigma \left[\partial_t(n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma) + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma \otimes \boldsymbol{v}_\sigma)\right] - n_\sigma q_\sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_\sigma \times \boldsymbol{B}) + \nabla_{\boldsymbol{x}} p_\sigma \\ = -\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma + \boldsymbol{R}_\sigma, \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

avec $\underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma$ le coefficient des tensions ou tenseur de viscosité et $\boldsymbol{R}_\sigma$ le coefficient de friction. Ce sont deux coefficients de transport (page 209 de l'article de Braginskii [Bra65]) définis par :

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma &= \int_{\mathbb{R}^3} m_\sigma (\boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\kappa} - \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{3} \mathbb{I}) f_\sigma d\boldsymbol{\kappa}, \\ \boldsymbol{R}_\sigma &= \int_{\mathbb{R}^3} m_\sigma \boldsymbol{\kappa} \sum_\alpha C_{\sigma\alpha} d\boldsymbol{\kappa}. \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Après l'équation de conservation du mouvement obtenue avec le moment d'ordre 1, le moment d'ordre 2, soit $g(\boldsymbol{u}) = m_\sigma \dfrac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}{2}$, permet d'obtenir l'équation de conservation de l'énergie :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma \boldsymbol{u}^2}{2} \left[\frac{\partial f_\sigma}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\boldsymbol{u} f_\sigma) + \nabla_{\boldsymbol{u}} \cdot (\boldsymbol{a}_\sigma f_\sigma)\right] d\boldsymbol{u} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma \boldsymbol{u}^2}{2} \sum_\alpha C_{\sigma\alpha} d\boldsymbol{u}. \tag{2.2.19}$$

Le développement de cette équation, détaillé en annexe 2.A, permet d'obtenir l'équation de conservation de l'énergie $\rho\mathcal{E}_\sigma$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathcal{E}_\sigma) + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot [\rho\mathcal{E}_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma + \underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma : \boldsymbol{v}_\sigma] - q_\sigma n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma \cdot \boldsymbol{E} = -\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{Q}_\sigma + \boldsymbol{v}_\sigma \cdot \boldsymbol{R}_\sigma + \mathcal{Q}_\sigma, \tag{2.2.20}$$

avec $\rho\mathcal{E}_\sigma$ l'énergie définie par :

$$\rho\mathcal{E}_\sigma = \frac{m_\sigma n_\sigma |\boldsymbol{v}_\sigma|^2}{2} + \frac{p_\sigma}{\gamma - 1}, \tag{2.2.21}$$

et $\gamma = \dfrac{5}{3}$ le taux de chaleur spécifique. $\boldsymbol{Q}_\sigma$, le flux de chaleur, et $\mathcal{Q}_\sigma$, la chaleur générée par les collisions entre particules, sont définis par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_\sigma &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma |\boldsymbol{\kappa}|^2}{2} \boldsymbol{\kappa} f_\sigma d\boldsymbol{\kappa}, \\ \mathcal{Q}_\sigma &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma |\boldsymbol{\kappa}|^2}{2} \sum_{\alpha \neq \sigma} C_{\sigma\alpha} d\boldsymbol{\kappa}. \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Ces trois moments sur l'équation cinétique permettent d'obtenir le système constitué des lois de conservation

$$\begin{cases} \partial_t n_\sigma + \nabla \cdot (n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma) = 0, \\ m_\sigma \left(\partial_t (n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma) + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma \otimes \boldsymbol{v}_\sigma)\right) - n_\sigma q_\sigma (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_\sigma \times \boldsymbol{B}) + \nabla_{\boldsymbol{x}} p_\sigma \\ \qquad = - \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma + \boldsymbol{R}_\sigma, \\ \partial_t (\rho \mathcal{E}_\sigma) + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot [\rho \mathcal{E}_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma + \underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma : \boldsymbol{v}_\sigma] - q_\sigma n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma \cdot \boldsymbol{E} = - \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{Q}_\sigma + \boldsymbol{v}_\sigma \cdot \boldsymbol{R}_\sigma + \mathcal{Q}_\sigma. \end{cases} \tag{2.2.23}$$

Les variables des champs magnétique $\boldsymbol{B}$ et électrique $\boldsymbol{E}$ sont régies par les équations de Maxwell.

A partir de ce système conservatif, on déduit le système des équations de transport sur les variables primitives : n_σ, $\boldsymbol{v}_\sigma$ et p_σ. Le système obtenu, mis sous forme non conservative, sera utilisé dans la suite des calculs des coefficients de transport de type Braginskii (page 210 [Bra65]). Ainsi, l'équation de conservation de la densité se réécrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_\sigma}{\partial t} + \boldsymbol{v}_\sigma \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} n_\sigma + n_\sigma \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}_\sigma &= 0, \\ \frac{dn_\sigma}{dt} + n_\sigma \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}_\sigma &= 0, \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

où l'opérateur $\dfrac{d}{dt}$ définit la dérivée convective ici associée à l'espèce σ :

$$\frac{d}{dt} \cdot = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_\sigma \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot = \boldsymbol{D}_t^{\boldsymbol{v}_\sigma} \cdot . \tag{2.2.25}$$

L'équation de conservation du mouvement (2.2.17) peut se simplifier avec l'équation de conservation de la densité (2.2.7) pour donner une équation sur la vitesse $\boldsymbol{v}_\sigma$:

$$n_\sigma m_\sigma \frac{d\boldsymbol{v}_\sigma}{dt} = n_\sigma q_\sigma (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_\sigma \times \boldsymbol{B}) - \nabla_{\boldsymbol{x}} p_\sigma - \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma + \boldsymbol{R}_\sigma. \tag{2.2.26}$$

L'équation fluide sur l'énergie se simplifie de la même manière que les équations précédentes, et au final elle se réécrit :

$$\frac{d}{dt} p_\sigma + \gamma p_\sigma \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}_\sigma = (\gamma - 1) \left(- \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{Q}_\sigma + \mathcal{Q}_\sigma - \underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma : \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}_\sigma\right). \tag{2.2.27}$$

Ainsi, de ce système (2.2.23), on déduit le système des équations de transport qui sera utilisé dans la suite des calculs des coefficients de transport de type Braginskii [Bra65] :

$$\begin{cases} \dfrac{dn_\sigma}{dt} + n_\sigma \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}_\sigma = 0, \\ n_\sigma m_\sigma \dfrac{d\boldsymbol{v}_\sigma}{dt} - n_\sigma q_\sigma (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_\sigma \times \boldsymbol{B}) = -\nabla_{\boldsymbol{x}} p_\sigma - \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma + \boldsymbol{R}_\sigma, \\ \dfrac{d}{dt} p_\sigma + \gamma p_\sigma \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}_\sigma = (\gamma - 1) \left(-\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{Q}_\sigma + \mathcal{Q}_\sigma - \underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma : \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}_\sigma \right). \end{cases} \tag{2.2.28}$$

A ce stade, le système fluide ne présente pas l'intérêt escompté. En effet, nous avons encore besoin de résoudre l'équation cinétique pour obtenir une formulation des coefficients de transport. Pour avoir un modèle simple par rapport au modèle cinétique, il faut exprimer les coefficients de transport en fonction des données macroscopiques, ce qui est fait dans la suite de ce chapitre.

2.3 Coefficients de transport : type Braginskii

Ce calcul des coefficients de transport basé sur l'évaluation de Braginskii [Bra65] ou Robinson et Bernstein [RB62], a pour objectif de donner une approximation de ces coefficients en fonction des données macroscopiques afin de fermer le modèle fluide. Pour ces approximations, on utilise un développement asymptotique de l'équation cinétique en petits paramètres avec une analyse dimensionnelle. Pour faire cette analyse il est nécessaire de choisir au préalable un référentiel de calcul. Ensuite, les équations de Boltzmann seront adimensionnées afin de pouvoir émettre des hypothèses sur les fonctions de distributions qui permettront de donner une approximation pour ces coefficients.

2.3.1 Choix du référentiel d'analyse

Pour approcher les coefficients de transport il est nécessaire de se placer dans un référentiel approprié. Deux types de référentiels sont communément utilisés dans la littérature : le référentiel inertiel [DLD96a, DLD96b, FK72] et le référentiel non inertiel [GMM07] que nous avons choisi de présenter ici. Dans ce type de référentiel il est nécessaire de définir une vitesse de référence $\boldsymbol{v}$, nous utiliserons le changement de variable associé :

$$\boldsymbol{\kappa}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}). \tag{2.3.1}$$

Cette transformation permet de différencier les fonctions maxwelliennes sur la vitesse suivant que la particule de référence choisie, et notamment sa vitesse, soit l'électron ou l'ion :

- avec les ions :

$$\widetilde{f}_\sigma(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\kappa}) = f_\sigma(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \big|_{\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{v}_i}, \tag{2.3.2}$$

- avec les électrons :

$$\widetilde{g}_\sigma(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\kappa}) = f_\sigma(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \big|_{\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{v}_e}. \tag{2.3.3}$$

Il faut noter que cette transformation modifie également les dérivées :

$$\begin{cases} \partial_{t'} = \partial_t + \partial_t \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial_\kappa}, \\ \boldsymbol{\partial_{x'}} = \boldsymbol{\partial_x} + \boldsymbol{\partial_x} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial_\kappa}, \\ \boldsymbol{\partial_\kappa} = \boldsymbol{\partial_u}. \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Dans le but de simplifier l'écriture on notera dans la suite plus simplement : $\partial_{t'} = \partial_t$ et $\partial_{\boldsymbol{x'}} = \partial_{\boldsymbol{x}}$. L'opérateur de collision est invariant par transformation galiléenne. Avec cette transformation l'équation de Boltzmann sur les électrons dans le référentiel des électrons devient :

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{g}_e + \partial_t \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial_\kappa} \widetilde{g}_e + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\kappa}) \cdot \boldsymbol{\partial_x} \widetilde{g}_e + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\kappa}) \cdot \boldsymbol{\partial_x} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial_\kappa} \widetilde{g}_e \\ + \left[\frac{q_e}{m_e} (\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\kappa}) \times \boldsymbol{B}) \right] \cdot \boldsymbol{\partial_\kappa} \widetilde{g}_e = \mathcal{C}_{ee} (\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_e) + \mathcal{C}_{ei} (\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_i), \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

ce qui se réécrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D_t^v} \widetilde{g}_e + \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial_x} \widetilde{g}_e + \boldsymbol{D_t^v} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial_\kappa} \widetilde{g}_e + \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\partial_x} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial_\kappa} \widetilde{g}_e \\ + \left[\frac{q_e}{m_e} (\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\kappa}) \times \boldsymbol{B}) \right] \cdot \boldsymbol{\partial_\kappa} \widetilde{g}_e = \mathcal{C}_{ee} (\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_e) + \mathcal{C}_{ei} (\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_i). \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Pour finir, les trois variables $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$ et t étant indépendantes

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D_t^v} \boldsymbol{\kappa} &= -\boldsymbol{D_t^v} \boldsymbol{v}, \\ \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\partial_x} \boldsymbol{\kappa} &= -\boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\partial_x} \boldsymbol{v}, \end{aligned}$$

alors cette équation cinétique électronique dans le référentiel électronique donne

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D_t^v} \widetilde{g}_e + \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial_x} \widetilde{g}_e + \left[\frac{q_e}{m_e} (\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\kappa}) \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{D_t^v} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial_x} \boldsymbol{v} \right] \cdot \boldsymbol{\partial_\kappa} \widetilde{g}_e \\ = \mathcal{C}_{ee} (\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_e) + \mathcal{C}_{ei} (\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_i). \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Suivant que le référentiel de référence choisi soit sur la vitesse électronique ou ionique, il est possible d'écrire quatre formulations différentes pour les équations de Boltzmann des ions et des électrons. Ces formulations sont détaillées ici :

- Si les électrons et les ions sont étudiés dans le référentiel de la vitesse électronique, les équations de Boltzmann se réécrivent :

$$\begin{cases} \left[\frac{q_e}{m_e} (\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\kappa}) \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{D_t^v} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial_x} \boldsymbol{v} \right] \cdot \boldsymbol{\partial_\kappa} \widetilde{g}_e + \boldsymbol{D_t^v} \widetilde{g}_e + \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial_x} \widetilde{g}_e \\ \qquad = \mathcal{C}_{ee} (\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_e) + \mathcal{C}_{ei} (\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_i), \\ \left[\frac{q_i}{m_i} (\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\kappa}) \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{D_t^v} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial_x} \boldsymbol{v} \right] \cdot \boldsymbol{\partial_\kappa} \widetilde{g}_i + \boldsymbol{D_t^v} \widetilde{g}_i + \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial_x} \widetilde{g}_i \\ \qquad = \mathcal{C}_{ie} (\widetilde{g}_i, \widetilde{g}_e) + \mathcal{C}_{ii} (\widetilde{g}_i, \widetilde{g}_i). \end{cases} \tag{2.3.8}$$

– Le référentiel le moins naturel où les électrons et les ions sont étudiés dans le référentiel « opposé », i.e., les électrons sont dans le référentiel de la vitesse ionique et les ions sont dans le référentiel de la vitesse électronique :

$$\begin{cases} \left[\frac{q_e}{m_e}\left(\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\kappa})\times\boldsymbol{B}\right)-\boldsymbol{D}_t^{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x v}\right]\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{f}_e+\boldsymbol{D}_t^{\boldsymbol{v}}\widetilde{f}_e+\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\widetilde{f}_e \\ \qquad\qquad =\mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{f}_e,\widetilde{f}_e\right)+\mathcal{C}_{ei}\left(\widetilde{f}_e,\widetilde{f}_i\right), \\ \left[\frac{q_i}{m_i}\left(\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\kappa})\times\boldsymbol{B}\right)-\boldsymbol{D}_t^{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x v}\right]\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{g}_i+\boldsymbol{D}_t^{\boldsymbol{v}}\widetilde{g}_i+\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\widetilde{g}_i \\ \qquad\qquad =\mathcal{C}_{ie}\left(\widetilde{g}_i,\widetilde{g}_e\right)+\mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{g}_i,\widetilde{g}_i\right). \end{cases} \tag{2.3.9}$$

– Le référentiel le plus naturel, celui où les électrons et les ions sont étudiés dans le référentiel de leurs vitesses respectives [Bra65] :

$$\begin{cases} \left[\frac{q_e}{m_e}\left(\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\kappa})\times\boldsymbol{B}\right)-\boldsymbol{D}_t^{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x v}\right]\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{g}_e+\boldsymbol{D}_t^{\boldsymbol{v}}\widetilde{g}_e+\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\widetilde{g}_e \\ \qquad\qquad =\mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{g}_e,\widetilde{g}_e\right)+\mathcal{C}_{ei}\left(\widetilde{g}_e,\widetilde{g}_i\right), \\ \left[\frac{q_i}{m_i}\left(\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\kappa})\times\boldsymbol{B}\right)-\boldsymbol{D}_t^{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x v}\right]\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{f}_i+\boldsymbol{D}_t^{\boldsymbol{v}}\widetilde{f}_i+\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\widetilde{f}_i \\ \qquad\qquad =\mathcal{C}_{ie}\left(\widetilde{f}_i,\widetilde{f}_e\right)+\mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i,\widetilde{f}_i\right). \end{cases} \tag{2.3.10}$$

– Les électrons et les ions sont étudiés dans le référentiel de la vitesse ionique [GMM07] :

$$\begin{cases} \left[\frac{q_e}{m_e}\left(\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\kappa})\times\boldsymbol{B}\right)-\boldsymbol{D}_t^{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x v}\right]\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{f}_e+\boldsymbol{D}_t^{\boldsymbol{v}}\widetilde{f}_e+\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\widetilde{f}_e \\ \qquad\qquad =\mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{f}_e,\widetilde{f}_e\right)+\mathcal{C}_{ei}\left(\widetilde{f}_e,\widetilde{f}_i\right), \\ \left[\frac{q_i}{m_i}\left(\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\kappa})\times\boldsymbol{B}\right)-\boldsymbol{D}_t^{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x v}\right]\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{f}_i+\boldsymbol{D}_t^{\boldsymbol{v}}\widetilde{f}_i+\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\widetilde{f}_i \\ \qquad\qquad =\mathcal{C}_{ie}\left(\widetilde{f}_i,\widetilde{f}_e\right)+\mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i,\widetilde{f}_i\right). \end{cases} \tag{2.3.11}$$

La dérivation des coefficients de transport sera plus aisée grâce à un choix judicieux de référentiel des vitesses.

2.3.2 Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle, inspirée de [PD75], permettra de formuler des hypothèses simples sur les grandeurs qui gouvernent l'état de ce système physique. Ainsi, dans cette section les égalités doivent être comprises en termes d'ordres de grandeurs. Pour cela en vue de faire une analyse asymptotique, il est nécessaire de quantifier les paramètres de référence en commençant par les variables de base communes à chaque espèce :

temps macroscopique :	t_0
longueur macroscopique :	$\boldsymbol{L}_0$
densité :	n_0
température :	T_0
champ électrique :	$\boldsymbol{E}_0$
champ magnétique :	$\boldsymbol{B}_0$
vitesse hydrodynamique :	$\boldsymbol{v}_0$
parcours moyen :	l_0
section efficace :	σ_0

On définit également les variables caractéristiques des masses, des vitesses thermiques, des temps et des vitesses macroscopiques qui caractérisent chaque espèce :

	électrons	ions
masse :	m_0^e	m_0^i
vitesse thermique :	$\boldsymbol{\kappa}_0^e$	$\boldsymbol{\kappa}_0^i$
temps cinétique :	τ_0^e	τ_0^i
vitesse macroscopique :	$\boldsymbol{v}_0^e$	$\boldsymbol{v}_0^i$

Le nombre sans dimension ϵ quantifie le rapport entre la masse d'un électron et la masse d'un ion :

$$\epsilon = \sqrt{\frac{m_0^e}{m_0^i}}, \tag{2.3.12}$$

ce nombre est petit. Par conséquent, la vitesse thermique électronique $\boldsymbol{\kappa}_0^e$ est plus importante que celle des ions $\boldsymbol{\kappa}_0^i$:

$$\boldsymbol{\kappa}_0^e = \sqrt{\frac{k_B T_0}{m_0^e}}, \quad \boldsymbol{\kappa}_0^i = \sqrt{\frac{k_B T_0}{m_0^i}}, \tag{2.3.13}$$

ces vitesses se relient donc par :

$$\boldsymbol{\kappa}_0^i = \epsilon \boldsymbol{\kappa}_0^e. \tag{2.3.14}$$

Les sections efficaces des différentes espèces sont du même ordre σ_0. Par conséquent, le libre parcours moyen : $l_0 = 1/(n_0\sigma_0)$ est le même pour toutes les espèces. Avec la définition du temps cinétique, le temps ionique τ_0^i est plus important que le temps électronique τ_0^e :

$$l_0 = \boldsymbol{\kappa}_0^e \tau_0^e = \boldsymbol{\kappa}_0^i \tau_0^i, \tag{2.3.15}$$

$$\tau_0^e = \epsilon \tau_0^i. \tag{2.3.16}$$

Le temps macroscopique est quant à lui supposé comparable au temps cinétique ionique τ_0^i divisé par ϵ :

$$t_0 = \frac{\tau_0^i}{\epsilon}. \tag{2.3.17}$$

Il est supposé que les vitesses macroscopiques $\boldsymbol{v}_0^e$ et $\boldsymbol{v}_0^i$ sont égales à la vitesse hydrodynamique :

$$\boldsymbol{v}_0^e = \boldsymbol{v}_0^i = \boldsymbol{v}_0. \tag{2.3.18}$$

Il faut noter que ces vitesses sont égales en termes d'ordres de grandeurs, elles ne sont en réalité pas égales : $\boldsymbol{v}^e \neq \boldsymbol{v}^i$. De plus la longueur macroscopique $\boldsymbol{L}_0$ relie le temps macroscopique t_0 à la vitesse $\boldsymbol{v}_0$:

$$\boldsymbol{L}_0 = \boldsymbol{v}_0 t_0. \tag{2.3.19}$$

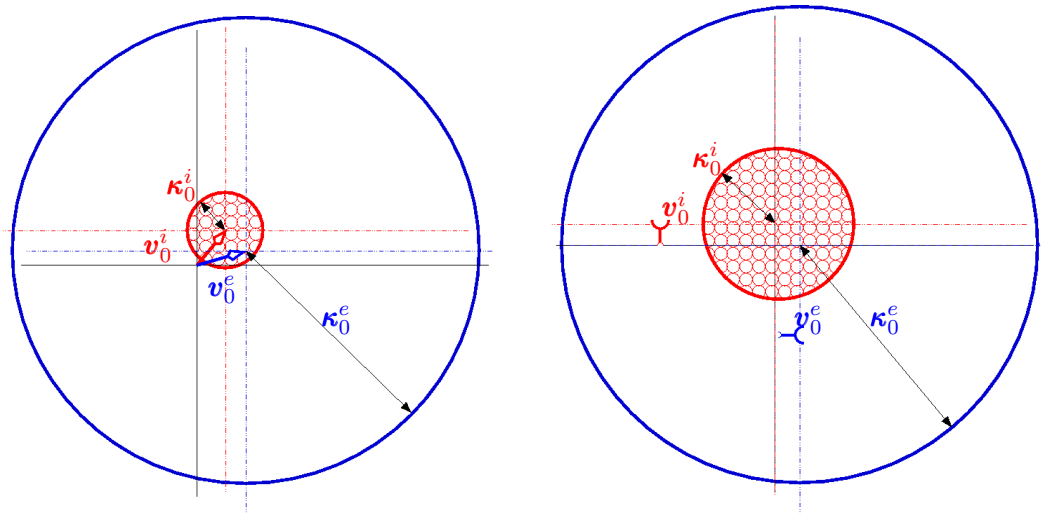
Cette vitesse hydrodynamique $\boldsymbol{v}_0$ est déterminée par le nombre de Mach M_i :

$$\mathrm{M}_i = \frac{\boldsymbol{v}_0}{\boldsymbol{\kappa}_0^i}. \tag{2.3.20}$$

d'où,

$$\mathrm{M}_e = \frac{\boldsymbol{v}_0}{\boldsymbol{\kappa}_0^e} = \epsilon \mathrm{M}_i. \tag{2.3.21}$$

Le nombre de Mach M_i définit le régime plasma étudié c'est-à-dire que pour $\mathrm{M}_i \ll 1$ c'est le régime subsonique [Bra65, Ram07], pour $\mathrm{M}_i \approx 1$ c'est le régime sonique [GMM07]. Nous présentons deux schémas récapitulant les distributions des vitesses suivant le régime sonique choisi, i.e. suivant que le nombre de Mach soit supérieur ou proche de 1. Ces schémas présentent les supports des vitesses électronique et ionique l'un par rapport à l'autre. Suivant le cas sonique ou subsonique choisi, i.e. suivant le nombre de Mach choisi, les figures 2.1a et 2.1b représentent le dimensionnement des vitesses ionique et électronique.



(a) Cas sonique (b) Cas subsonique

FIGURE 2.1 – Dimensionnement des vitesses ioniques et soniques

Ainsi, sur la figure 2.1a dans le cas sonique :

$$\mathrm{M}_i = \frac{\boldsymbol{v}_0^i}{\boldsymbol{\kappa}_0^i} \approx 1. \tag{2.3.22}$$

Les égalités (2.3.14) et (2.3.18) permettent d'exprimer le « Mach électronique » (2.3.21) dans le cas sonique :

$$\mathrm{M}_e = \frac{\boldsymbol{v}_0^e}{\boldsymbol{\kappa}_0^e} = \frac{\boldsymbol{v}_0^i}{\boldsymbol{\kappa}_0^i}\frac{\boldsymbol{\kappa}_0^i}{\boldsymbol{\kappa}_0^e} = \epsilon \mathrm{M}_i \approx \epsilon, \tag{2.3.23}$$

Dans le cas subsonique (c.f. figure 2.1b) le nombre de Mach vaut :

$$\mathrm{M}_i = \frac{\boldsymbol{v}_0^i}{\boldsymbol{\kappa}_0^i} \approx \epsilon \ll 1, \tag{2.3.24}$$

ce qui entraîne un nombre de « Mach électronique » plus faible dans le cas subsonique :

$$\mathrm{M}_e = \frac{\boldsymbol{v}_0^e}{\boldsymbol{\kappa}_0^e} = \frac{\boldsymbol{v}_0^i}{\boldsymbol{\kappa}_0^i}\frac{\boldsymbol{\kappa}_0^i}{\boldsymbol{\kappa}_0^e} \approx \epsilon^2. \tag{2.3.25}$$

Le nombre de Knudsen K_n qui est le rapport entre le libre parcours moyen l_0 et la longueur spatiale macroscopique $\boldsymbol{L}_0$ se réécrit également en fonction du nombre de Mach :

$$\mathrm{K}_n = \frac{l_0}{\boldsymbol{L}_0} = \frac{\epsilon}{\mathrm{M}_i}. \tag{2.3.26}$$

Dans le cas sonique ce nombre de Knudsen est donc petit, il est donc possible d'utiliser une approche fluide.

Les énergies thermiques et électriques sont du même ordre ce qui se traduit par :

$$q_0^e \boldsymbol{L}_0 \boldsymbol{E}_0 = k_B T_0 = m_0^i {\boldsymbol{\kappa}_0^i}^2 = m_0^e {\boldsymbol{\kappa}_0^e}^2, \tag{2.3.27}$$

et le plasma est supposé fortement magnétisé ce qui permet l'adimensionnement suivant :

$$\frac{\boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{v}_0}{\boldsymbol{E}_0} = 1. \tag{2.3.28}$$

Pour finir l'adimensionnement des variables de référence, il reste les opérateurs de collision, qui représentent la fréquence de collision divisée par le temps caractéristique, à adimensionner :

$$C_{ee} \equiv C_{ei} \equiv \frac{f_e}{\tau_0^e}, \tag{2.3.29}$$

$$C_{ie} \equiv \frac{m_0^e}{m_0^i}\frac{f_i}{\tau_0^e} \equiv \epsilon \frac{f_i}{\tau_0^i}, \tag{2.3.30}$$

$$C_{ii} \equiv \frac{f_i}{\tau_0^i}. \tag{2.3.31}$$

Les dimensions de toutes ces variables ont été données en vue de l'adimensionnement dans le paragraphe suivant des équations de Boltzmann.

2.3.3 Les équations de Boltzmann adimensionnées

Dans la suite les équations de Boltzmann ont été étudiées sans dimension dans le référentiel de référence utilisé par Braginskii [Bra65], c'est-à-dire le cas naturel où les électrons et les ions sont étudiés dans le référentiel de leurs vitesses respectives. Les adimensionnements de ces équations de Boltzmann sur les électrons et les ions dans leurs référentiels respectifs sont donnés par :

$$\left\{\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{u}}\widetilde{g}_e + \frac{[t_0]\,[\boldsymbol{\kappa}_0^e]}{[\boldsymbol{L}_0]}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}\widetilde{g}_e - \frac{[\boldsymbol{u}_0^e]}{[\boldsymbol{\kappa}_0^e]}\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} + \frac{[t_0]\,[\boldsymbol{\kappa}_0^e]}{[\boldsymbol{L}_0]}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}\right)\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{g}_e \\
&\quad + \frac{[q_0^e]\,[t_0]\,[\boldsymbol{E}_0]}{[m_0^e]\,[\boldsymbol{\kappa}_0^e]}\frac{q_e}{m_e}\left(\boldsymbol{E} + \frac{[\boldsymbol{B}_0]\,[\boldsymbol{u}_0^e]}{[\boldsymbol{E}_0]}\left(\boldsymbol{u} + \frac{[\boldsymbol{\kappa}_0^e]}{[\boldsymbol{u}_0^e]}\boldsymbol{\kappa}\right)\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{g}_e \\
&\qquad = \frac{[t_0]\,[\mathcal{C}_{ee}]}{[f_e]}\mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{g}_e,\widetilde{g}_e\right) + \frac{[t_0]\,[\mathcal{C}_{ei}]}{[f_e]}\mathcal{C}_{ei}\left(\widetilde{g}_e,\widetilde{g}_i\right), \\
&\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{u}}\widetilde{f}_i + \frac{[t_0]\,[\boldsymbol{\kappa}_0^i]}{[\boldsymbol{L}_0]}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}\widetilde{f}_i - \frac{[\boldsymbol{u}_0^i]}{[\boldsymbol{\kappa}_0^i]}\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} + \frac{[t_0]\,[\boldsymbol{\kappa}_0^i]}{[\boldsymbol{L}_0]}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}\right)\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{f}_i \\
&\quad + \frac{[q_0^i]\,[t_0]\,[\boldsymbol{E}_0]}{[m_0^i]\,[\boldsymbol{\kappa}_0^i]}\frac{q_i}{m_i}\left(\boldsymbol{E} + \frac{[\boldsymbol{B}_0]\,[\boldsymbol{u}_0^i]}{[\boldsymbol{E}_0]}\left(\boldsymbol{u} + \frac{[\boldsymbol{\kappa}_0^i]}{[\boldsymbol{u}_0^i]}\boldsymbol{\kappa}\right)\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{f}_i \\
&\qquad = \frac{[t_0]\,[\mathcal{C}_{ie}]}{[f_i]}\mathcal{C}_{ie}\left(\widetilde{f}_i,\widetilde{f}_e\right) + \frac{[t_0]\,[\mathcal{C}_{ii}]}{[f_i]}\mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i,\widetilde{f}_i\right),
\end{aligned}\right. \tag{2.3.32}$$

Les simplifications de ces adimensionnements sont développés dans l'annexe 2.B. Ainsi, ces équations de Boltzmann adimensionnées sur les électrons et les ions se réécrivent :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon}\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}}\widetilde{g}_e + \frac{1}{\epsilon^2\mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}\widetilde{g}_e + \frac{1}{\epsilon^2\mathrm{M}_i}\frac{q_e}{m_e}\left(\boldsymbol{E} + \left(\boldsymbol{v} + \frac{1}{\epsilon\mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\right)\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{g}_e \\
&\quad -\mathrm{M}_i\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} + \frac{1}{\epsilon\mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{g}_e = \frac{1}{\epsilon^3}\left(\mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{g}_e,\widetilde{g}_e\right) + \mathcal{C}_{ei}\left(\widetilde{g}_e,\widetilde{g}_i\right)\right), \\
&\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}}\widetilde{f}_i + \frac{1}{\mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}\widetilde{f}_i + \frac{Z^i}{\mathrm{M}_i}\frac{q_i}{m_i}\left(\boldsymbol{E} + \left(\boldsymbol{v} + \frac{1}{\mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\right)\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{f}_i \\
&\quad -\mathrm{M}_i\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} + \frac{1}{\mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{f}_i = \mathcal{C}_{ie}\left(\widetilde{f}_i,\widetilde{f}_e\right) + \frac{1}{\epsilon}\mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i,\widetilde{f}_i\right).
\end{aligned}\right. \tag{2.3.33}$$

Ces équations sont ordonnées suivant les puissances de ϵ ou M_i afin de faire une analyse asymptotique :

$$\begin{cases} -\mathrm{M}_i^2 \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e + \dfrac{1}{\epsilon} \mathrm{M}_i \left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \widetilde{g}_e - \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e \right) + \dfrac{1}{\epsilon^2} \dfrac{q_e}{m_e} \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e \\ \quad + \dfrac{1}{\epsilon^2} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{g}_e = -\dfrac{1}{\epsilon^3 \mathrm{M}_i} \left(\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e + \dfrac{\mathrm{M}_i}{\epsilon^3} \left(\mathcal{C}_{ee} \left(\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_e \right) + \mathcal{C}_{ei} \left(\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_i \right) \right), \\ -\mathrm{M}_i^2 \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i + \mathrm{M}_i \left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \widetilde{f}_i - \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i - \mathcal{C}_{ie} \left(\widetilde{f}_i, \widetilde{f}_e \right) \right) + \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{f}_i \\ \quad + Z^i \dfrac{q_i}{m_i} \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i + \dfrac{Z^i}{\mathrm{M}_i} \left(\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i = \dfrac{\mathrm{M}_i}{\epsilon} \mathcal{C}_{ii} \left(\widetilde{f}_i, \widetilde{f}_i \right). \end{cases} \tag{2.3.34}$$

Il est possible d'étudier différents cas suivant les hypothèses faites sur le nombre de Mach M_i. Ainsi, dans le cas sonique [GMM07], aussi nommé « fast dynamics », le nombre de Mach sur les ions est égal à 1, alors les équations de Boltzmann adimensionnées deviennent :

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e + \dfrac{1}{\epsilon} \left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \widetilde{g}_e - \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e \right) + \dfrac{1}{\epsilon^2} \dfrac{q_e}{m_e} \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e \\ \quad + \dfrac{1}{\epsilon^2} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{g}_e = -\dfrac{1}{\epsilon^3} \left(\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e + \dfrac{1}{\epsilon^3} \left(\mathcal{C}_{ee} \left(\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_e \right) + \mathcal{C}_{ei} \left(\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_i \right) \right), \\ -\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i + \left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \widetilde{f}_i - \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i - \mathcal{C}_{ie} \left(\widetilde{f}_i, \widetilde{f}_e \right) \right) + \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{f}_i \\ \quad + Z^i \dfrac{q_i}{m_i} \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i + Z^i \left(\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i = \dfrac{1}{\epsilon} \mathcal{C}_{ii} \left(\widetilde{f}_i, \widetilde{f}_i \right). \end{cases} \tag{2.3.35}$$

Le deuxième cas étudié est celui nommé « slow dynamics », il est aussi nommé « Drift ». Dans ce cas le nombre de Mach sur les ions est pris bien inférieur à 1, par exemple : $\mathrm{M}_i = \epsilon$. De même, les équations de Boltzmann se réécrivent :

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e + \dfrac{1}{\epsilon^2} \left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \widetilde{g}_e - \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e \right) + \dfrac{1}{\epsilon^4} \dfrac{q_e}{m_e} \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e \\ \quad + \dfrac{1}{\epsilon^4} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{g}_e = -\dfrac{1}{\epsilon^6} \left(\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e + \dfrac{1}{\epsilon^4} \left(\mathcal{C}_{ee} \left(\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_e \right) + \mathcal{C}_{ei} \left(\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_i \right) \right), \\ -\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i + \dfrac{1}{\epsilon} \left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \widetilde{f}_i - \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i - \mathcal{C}_{ie} \left(\widetilde{f}_i, \widetilde{f}_e \right) \right) + \dfrac{1}{\epsilon^2} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{f}_i \\ \quad + \dfrac{1}{\epsilon^2} Z^i \dfrac{q_i}{m_i} \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i + \dfrac{Z^i}{\epsilon^3} \left(\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i = \dfrac{1}{\epsilon^2} \mathcal{C}_{ii} \left(\widetilde{f}_i, \widetilde{f}_i \right). \end{cases} \tag{2.3.36}$$

Le dernier cas d'adimensionnement présenté ici s'inspire de celui de Braginskii [Bra65]. On suppose que dans les équations cinétiques les termes importants sont ceux de collisions ainsi que les termes du champ magnétique. Les autres termes dépendants du temps ou de l'espace ainsi que celui du champ électrique seront donc « petits ». Cependant, pour une fonction dont la vitesse présente une symétrie sphérique le terme magnétique $(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e$ sera également nul. Il faut également noter que le terme de collision $\mathcal{C}_{ie} \left(\widetilde{f}_i, \widetilde{f}_e \right)$ qui représente

l'impact des électrons sur les ions sera de faible importance dans l'équation sur les ions. Au final, les équations de Boltzmann avec ces hypothèses deviennent :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \widetilde{g}_e + \dfrac{q_e}{m_e} \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e - \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e - \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e \\ + \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{g}_e = \dfrac{1}{\epsilon} \left(- \dfrac{q_e}{m_e} \left(\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e + \mathcal{C}_{ee} \left(\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_e\right) + \mathcal{C}_{ei} \left(\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_i\right) \right), \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \widetilde{f}_i + \dfrac{q_i}{m_i} \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i - \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i - \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i \\ + \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{f}_i - \mathcal{C}_{ie} \left(\widetilde{f}_i, \widetilde{f}_e\right) = \dfrac{1}{\epsilon} \left(- \dfrac{q_i}{m_i} \left(\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i + \mathcal{C}_{ii} \left(\widetilde{f}_i, \widetilde{f}_i\right) \right). \end{cases} \tag{2.3.37}$$

Dans la suite de l'approximation des coefficients de transport on utilise le dernier adimensionnement présenté, soit celui de Braginskii.

2.3.4 Calcul des coefficients de transport

Plusieurs méthodes de calcul ont été utilisées pour approcher ces coefficients de transport [Bra65, EH86, Gra49, Tho62]. Dans cette analyse on s'appuie sur la méthode de Chapman-Enskog [CC91] dont le principe est d'utiliser un développement d'Enskog [Ens17] des fonctions de distribution sur les espèces pour trouver une approximation des coefficients de transport. Pour cela, les fonctions de distributions sont développées suivant une partie principale $\widetilde{g}_e^0$ ou $\widetilde{f}_i^0$ et une fluctuation $\widetilde{\Phi}_\sigma^1$:

$$\widetilde{g}_e = \widetilde{g}_e^0 \left(1 + \epsilon \widetilde{\Phi}_e^1\right) + O\left(\epsilon^2\right), \tag{2.3.38}$$

$$\widetilde{f}_i = \widetilde{f}_i^0 \left(1 + \epsilon \widetilde{\Phi}_i^1\right) + O\left(\epsilon^2\right). \tag{2.3.39}$$

Pour évaluer les coefficients de transport, il est nécessaire de trouver une formulation pour ces termes $\widetilde{g}_e^0$, $\widetilde{f}_i^0$ et $\widetilde{\Phi}_\sigma^1$ des fonctions de distributions. En sachant que cette correction $\widetilde{\Phi}_\sigma^1$ ne doit pas modifier la valeur des paramètres de densité, vitesse et énergie. Les conditions de solubilité de $\widetilde{\Phi}^1$ sont données par :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \widetilde{f}^0 \widetilde{\Phi}^1 d\boldsymbol{u} &= 0, \\ \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{u} \widetilde{f}^0 \widetilde{\Phi}^1 d\boldsymbol{u} &= 0, \\ \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{u}^2 \widetilde{f}^0 \widetilde{\Phi}^1 d\boldsymbol{u} &= 0. \end{aligned} \tag{2.3.40}$$

Thermalisation : ordre ϵ^{-1}

Il existe un équilibre pour chaque espèce, la thermalisation permet d'atteindre cet état d'équilibre décrit par les fonctions de distribution $\widetilde{g}_e$ et $\widetilde{f}_i$ à l'ordre ϵ^{-1}. Nous résolvons

donc ici les équations de Boltzmann (2.3.37) à l'ordre ϵ^{-1} :

$$\begin{cases} -\dfrac{q_e}{m_e}\left(\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{g}_e^0+\mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{g}_e^0,\widetilde{g}_e^0\right)+\mathcal{C}_{ei}\left(\widetilde{g}_e^0,\widetilde{g}_i^0\right)=0, \\ -\dfrac{q_i}{m_i}\left(\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{f}_i^0+\mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i^0,\widetilde{f}_i^0\right)=0. \end{cases} \tag{2.3.41}$$

Avec les approximations des termes de collisions, le terme de collisions entre les ions et les électrons $\mathcal{C}_{ei}\left(\widetilde{g}_e^0,\widetilde{g}_i^0\right)$ ne présente pas de terme à l'ordre ϵ^{-1} donc ce système se réécrit :

$$\begin{cases} -\dfrac{q_e}{m_e}\left(\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{g}_e^0+\mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{g}_e^0,\widetilde{g}_e^0\right)=0, \\ -\dfrac{q_i}{m_i}\left(\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{f}_i^0+\mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i^0,\widetilde{f}_i^0\right)=0. \end{cases} \tag{2.3.42}$$

Les solutions $\widetilde{g}_e^0$ et $\widetilde{f}_i^0$ qui satisfont ces équations sont des fonctions maxwelliennes sur la vitesse qui peuvent se noter

$$\widetilde{g}_e^0=\mathcal{M}_e\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right) \quad \text{et} \quad \widetilde{f}_i^0=\mathcal{M}_i\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right), \tag{2.3.43}$$

où

$$\mathcal{M}_e\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right)=\mathcal{M}_{e,0}\exp\left(-\frac{m_e|\boldsymbol{\kappa}|^2}{2T_e}\right) \text{ et } \mathcal{M}_i\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right)=\mathcal{M}_{i,0}\exp\left(-\frac{m_i|\boldsymbol{\kappa}|^2}{2T_i}\right), \tag{2.3.44}$$

où $\mathcal{M}_{e,0}$ et $\mathcal{M}_{i,0}$ sont des coefficients dépendants de variables sur, respectivement, les électrons et les ions.

1er ordre de correction dans le cas « slow dynamic »

La thermalisation a permis d'obtenir une formulation pour $\widetilde{g}_e^0$ et $\widetilde{f}_i^0$. A présent, le 1er ordre de correction a pour objectif de définir une forme pour les fluctuations $\widetilde{\Phi}_\sigma^1$. La méthode consiste à subsituer $\widetilde{g}_e$ par $\widetilde{g}_e^0\left(1+\epsilon\widetilde{\Phi}_e^1\right)$ et $\widetilde{f}_i$ par $\widetilde{f}_i^0\left(1+\epsilon\widetilde{\Phi}_i^1\right)$ dans les équations (2.3.37) en négligeant $\widetilde{\Phi}_e^1$ et $\widetilde{\Phi}_i^1$ dans les termes de faible importance, i.e. en ordre plus élevé de ϵ.

Avant tout il est nécessaire de rappeler certaines relations sur les fonctions maxwelliennes :

$$\begin{cases} \widetilde{g}_e\left(\boldsymbol{\kappa}\right)=f_e\left(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{v}_e\right)=f_e\left(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{v}_i+\left(\boldsymbol{v}_e-\boldsymbol{v}_i\right)\right)=\widetilde{f}_e\left(\boldsymbol{\kappa}+\delta\boldsymbol{u}\right), \\ \widetilde{g}_i\left(\boldsymbol{\kappa}\right)=f_i\left(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{v}_e\right)=f_i\left(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{v}_i+\left(\boldsymbol{v}_e-\boldsymbol{v}_i\right)\right)=\widetilde{f}_i\left(\boldsymbol{\kappa}+\delta\boldsymbol{u}\right), \end{cases} \tag{2.3.45}$$

où $\delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}_e-\boldsymbol{v}_i$. Il est possible, avec cette approximation et ces relations, d'obtenir des approximations sur les différents opérateurs de collisions. Le développement des opérateurs de collisions se trouvent en annexe 2.C. L'impact des ions sur les électrons est donné par

$$\mathcal{C}_{ei}\simeq\epsilon\mathcal{M}_e\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right)\left(-\frac{n_i\Gamma_{ei}m_e}{T_e\left|\boldsymbol{\kappa}\right|^3}\boldsymbol{\kappa}\cdot\delta\boldsymbol{u}+\mathcal{C}_{ei}'\left(\widetilde{\Phi}_e^1,\widetilde{f}_i^0\right)\right)+O\left(\epsilon^2\right), \tag{2.3.46}$$

où

$$\mathcal{C}'_{ei}\left(\widetilde{\Phi}_e^1, \widetilde{f}_i^0\right) = \frac{n_i \Gamma_{ei}}{2} \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right) \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{\Phi}_e^1\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\right), \tag{2.3.47}$$

et l'impact des électrons sur les ions s'exprime par :

$$\mathcal{C}_{ie} = -\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}_{ie}, \tag{2.3.48}$$

avec

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}_{ie}\left(\widetilde{g}_i, \widetilde{g}_e\right) = -\frac{2\Gamma_{ie}}{3} n_e \sqrt{\frac{m_e}{2\pi T_e}} \left(\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_i} \widetilde{g}_i\left(\boldsymbol{\kappa}_i\right) + 2\epsilon \boldsymbol{\kappa} \frac{m_i}{T_e} \widetilde{g}_i\left(\boldsymbol{\kappa}_i\right)\right) + O\left(\epsilon^2\right). \tag{2.3.49}$$

Les opérateurs de collisions, $\mathcal{C}_{ii}$ et $\mathcal{C}_{ee}$, peuvent être développés avec les approximations des fonctions maxwelliennes (2.3.39) et (2.3.38) en négligeant les termes d'ordre élevé :

$$\mathcal{C}_{ii} = \mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i^0, \widetilde{f}_i^0\right) + \epsilon \mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i^0 \widetilde{\Phi}_i^1, \widetilde{f}_i^0\right) + \epsilon \mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i^0, \widetilde{f}_i^0 \widetilde{\Phi}_i^1\right) + O\left(\epsilon^2\right), \tag{2.3.50}$$

$$\mathcal{C}_{ee} = \mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{g}_e^0, \widetilde{g}_e^0\right) + \epsilon \mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{g}_e^0 \widetilde{\Phi}_e^1, \widetilde{g}_e^0\right) + \epsilon \mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{g}_e^0, \widetilde{g}_e^0 \widetilde{\Phi}_e^1\right) + O\left(\epsilon^2\right). \tag{2.3.51}$$

Le système des équations de Boltzmann, (2.3.37), ici repris au 1er ordre de correction, c'est-à-dire pour les termes à l'ordre ϵ^0, revient donc à :

$$\left\{\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \widetilde{g}_e^0 - \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e^0 + \frac{q_e}{m_e}\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e^0 \\
&\qquad - \left(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}\right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e^0 + \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{g}_e^0 \\
&= -\frac{q_e}{m_e}\left(\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\left(\widetilde{g}_e^0 \widetilde{\Phi}_e^1\right) + \mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{g}_e^0 \widetilde{\Phi}_e^1, \widetilde{g}_e^0\right) + \mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{g}_e^0, \widetilde{g}_e^0 \widetilde{\Phi}_e^1\right) \\
&\qquad + \mathcal{M}_e\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right)\left(\mathcal{C}'_{ei}\left(\widetilde{\Phi}_e^1, \widetilde{g}_i^0\right) - \frac{n_i \Gamma_{ei} m_e}{T_e |\boldsymbol{\kappa}|^3} \boldsymbol{\kappa} \cdot \delta \boldsymbol{u}\right), \\
&\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \widetilde{f}_i^0 - \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i^0 + \frac{q_i}{m_i}\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i^0 - \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i^0 \\
&\qquad + \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{f}_i^0 \cancel{- \mathcal{C}_{ie}\left(\widetilde{f}_i^0, \widetilde{f}_e^0\right)} \\
&= -\frac{q_i}{m_i}\left(\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{\Phi}_i^1 + \mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i^0 \widetilde{\Phi}_i^1, \widetilde{f}_i^0\right) + \mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i^0, \widetilde{f}_i^0 \widetilde{\Phi}_i^1\right).
\end{aligned}\right. \tag{2.3.52}$$

Le terme $\mathcal{C}_{ie}$ étant à l'ordre ϵ^1, il ne sera pas pris en compte à cet ordre ϵ^0. Ce système peut se réécrire sous la forme de la résolution d'un système linéaire :

$$\mathcal{L}\left(\partial, \widetilde{\Phi}_\sigma^1\right) = \text{RHS}, \tag{2.3.53}$$

avec

$$\text{RHS} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \widetilde{g}_e^0 - \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e^0 + \frac{q_e}{m_e}\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e^0 - \left(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}\right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e^0 + \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{g}_e^0 \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \widetilde{f}_i^0 - \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i^0 + \frac{q_i}{m_i}\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i^0 - \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i^0 + \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{f}_i^0 \end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{L}\left(\partial, \widetilde{\Phi}_e^1\right) = -\frac{q_e}{m_e}(\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \left(\widetilde{g}_e^0 \widetilde{\Phi}_e^1\right) + \mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{g}_e^0 \widetilde{\Phi}_e^1, \widetilde{g}_e^0\right) + \mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{g}_e^0, \widetilde{g}_e^0 \widetilde{\Phi}_e^1\right)$$
$$+ \mathcal{M}_e\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right)\left(\mathcal{C}_{ei}'\left(\widetilde{\Phi}_e^1, \widetilde{g}_i^0\right) - \frac{n_i \Gamma_{ei} m_e}{T_e |\boldsymbol{\kappa}|^3} \boldsymbol{\kappa} \cdot \delta \boldsymbol{u}\right),$$

et

$$\mathcal{L}\left(\partial, \widetilde{\Phi}_i^1\right) = -\frac{q_i}{m_i}(\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{\Phi}_i^1 + \mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i^0 \widetilde{\Phi}_i^1, \widetilde{f}_i^0\right) + \mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i^0, \widetilde{f}_i^0 \widetilde{\Phi}_i^1\right).$$

Les coefficients $\widetilde{f}_i^0$, $\widetilde{g}_i^0$ et $\widetilde{g}_e^0$ sont fixés, les opérateurs de collisions sont donc bien linéaires. Afin de définir $\widetilde{\Phi}_\sigma^1$ il suffit de résoudre le système d'équations (2.3.53). Il faut au préalable évaluer les coefficients de transport à l'ordre ϵ^0 avec pour finalité l'obtention d'une forme plus simple du second membre.

Approximation des coefficients de transport

Le coefficient de friction $\boldsymbol{R}_\sigma$ (2.2.18) représente le frottement sur l'espèce σ. Développé asymptotiquement, ce terme se décompose sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{R}_\sigma = \boldsymbol{R}_\sigma^0 + \epsilon \boldsymbol{R}_\sigma^1 + \epsilon^2 \boldsymbol{R}_\sigma^2 + O(\epsilon^3). \tag{2.3.54}$$

$\boldsymbol{R}_e$ et $\boldsymbol{R}_i$ sont définis respectivement par

$$\boldsymbol{R}_e = \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} m_e \boldsymbol{\kappa} \left(\mathcal{C}_{ee} + \mathcal{C}_{ei}\right), \tag{2.3.55}$$

$$\boldsymbol{R}_i = \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} m_i \boldsymbol{\kappa} \left(\mathcal{C}_{ii} + \mathcal{C}_{ie}\right). \tag{2.3.56}$$

Les contraintes de conservation des particules sur l'opérateur de collision (2.1.21) permettent de simplifier ces coefficients $\boldsymbol{R}_e$ et $\boldsymbol{R}_i$:

$$\boldsymbol{R}_e = \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} m_e \boldsymbol{\kappa} \mathcal{C}_{ei}, \tag{2.3.57}$$

$$\boldsymbol{R}_i = \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} m_i \boldsymbol{\kappa} \mathcal{C}_{ie}, \tag{2.3.58}$$

la relation sur les collisions (2.1.22) permet d'obtenir une relation entre ces termes :

$$\begin{gathered} \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} m_e \boldsymbol{\kappa} \left(\mathcal{C}_{ei}\right) + \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} m_i \boldsymbol{\kappa} \left(\mathcal{C}_{ie}\right) = 0, \\ \text{i.e.,} \quad \boldsymbol{R}_e = -\boldsymbol{R}_i. \end{gathered} \tag{2.3.59}$$

Ce coefficient de frottement $\boldsymbol{R}_e$ s'exprime par les coefficients $\boldsymbol{R}_e^0$, $\boldsymbol{R}_e^1$ et $\boldsymbol{R}_e^2$ dont l'obtention des formulations est détaillée dans l'annexe 2.D.1 tels que :

$$\boldsymbol{R}_e = \boldsymbol{R}_e^0 + \epsilon \boldsymbol{R}_e^1 + \epsilon^2 \boldsymbol{R}_e^2 + O(\epsilon^3), \tag{2.3.60}$$

avec

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_e^0 = -\dfrac{m_e n_e}{\tau_e}\delta\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{R}_e^1 = -\dfrac{n_i \Gamma_{ei}}{2} m_e \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\mathcal{M}_e\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{\Phi}_e^1\left(\boldsymbol{\kappa}\right), \\ \boldsymbol{R}_e^2 = 0. \end{cases} \tag{2.3.61}$$

avec τ_e qui représente le temps caractéristique entre les collisions électrons-ions :

$$\tau_e = \frac{3\sqrt{m_e}T_e^{\frac{3}{2}}}{4n_i\sqrt{2\pi}q_e^2 q_i^2 \ln\Lambda}. \tag{2.3.62}$$

Le coefficient $\mathcal{Q}_\sigma$, exprimant la chaleur générée par les collisions dans un gaz composé de différentes espèces, est défini par la relation

$$\mathcal{Q}_\sigma = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma \boldsymbol{\kappa}^2}{2} \sum_{\alpha\neq\sigma} C_{\sigma\alpha} d\boldsymbol{\kappa}. \tag{2.3.63}$$

De même que pour les coefficients de frottements $\boldsymbol{R}_\sigma$, les contraintes de conservation sur l'opérateur de collisions (2.1.21) permettent de relier $\mathcal{Q}_e$ et $\mathcal{Q}_i$ tels que :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_e + \mathcal{Q}_i &= -\boldsymbol{R}_e\boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{R}_i\boldsymbol{v}_i, \\ &= -\boldsymbol{R}_e\left(\boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_i\right), \\ \mathcal{Q}_e &= -\mathcal{Q}_i + \boldsymbol{R}_e\left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_e\right). \end{aligned} \tag{2.3.64}$$

Ce coefficient de transport, dont l'approximation est développée dans l'annexe 2.D.2, donne un terme d'ordre 2 :

$$\mathcal{Q}_e = -3\frac{m_e n_e}{\tau_e m_i}\delta T - \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}_{ei}^1, \tag{2.3.65}$$

avec $\delta T = T_e - T_i$ et le coefficient de transport $\mathcal{Q}_i$ est donc défini par :

$$\mathcal{Q}_i = 3\frac{m_e n_e}{\tau_e m_i}\delta T. \tag{2.3.66}$$

Le coefficient des tensions $\underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma$ ainsi que le flux de chaleur $\boldsymbol{Q}_\sigma$ à l'ordre ϵ^0 s'annulent. En effet, à cet ordre la fonction de distribution est une fonction maxwellienne, on peut donc utiliser le théorème 1 p 38 de [Bak97] :

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma^0 &= \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} m_\sigma(\boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\kappa} - \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{3}I)f_\sigma^0, \\ &= m_\sigma \int_0^{+\infty} r^2 f_\sigma^0 r^2 \cancel{\int_{\mathbb{S}^2}\left(s\otimes s - \frac{|s|^2}{3}\mathbb{I}\right)dsdr}, \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.3.67}$$

Le flux de chaleur

$$\boldsymbol{Q}_\sigma^0 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma \boldsymbol{\kappa}^3}{2} f_\sigma^0 d\boldsymbol{\kappa}, \tag{2.3.68}$$

étant l'intégration sur $\mathbb{R}^3$ d'un produit de termes de puissances impaires, il s'annule (cf. p41 [Bak97]) :

$$\boldsymbol{Q}_\sigma^0 = 0. \tag{2.3.69}$$

Evaluation du 2nd membre du système d'équations (2.3.53)

Afin de résoudre les équations (2.3.52), il faut tout d'abord reformuler les 2nd membres. En ce sens, les termes principaux des équations fluides sont résumés dans le système suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}_\sigma} n_\sigma = -n_\sigma \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}_\sigma, \\ n_e m_e \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}_e} \boldsymbol{v}_e = -\nabla_{\boldsymbol{x}} p_e + q_e n_e (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{R}_e^0, \\ n_i m_i \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}_i} \boldsymbol{v}_i = -\nabla_{\boldsymbol{x}} p_i + q_i n_i (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}) + \cancel{\boldsymbol{R}_i}, \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}_\sigma} T_\sigma = -\dfrac{2}{3} T_\sigma \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}_\sigma. \end{cases} \tag{2.3.70}$$

Dans ce système le terme représentant la chaleur générée par les collisions $\mathcal{Q}_\sigma$ étant considéré d'ordre 2, il ne sera pas pris en compte. Le terme $\boldsymbol{R}_i$ est négligé car il représente l'impact des électrons sur les ions, considéré comme négligeable [Bra65]. Si on considère que la fonction de distribution électronique est une fonction maxwellienne alors la dérivée en temps et en espace dépend des dérivées des variables n_e et T_e :

$$\begin{aligned} \partial \widetilde{g}_e^0 &= \left[\frac{\partial n_e}{n_e} - \left(\frac{3}{2} - \frac{m_e \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\kappa}}{2T_e} \right) \frac{\partial T_e}{T_e} \right] \widetilde{g}_e^0, \\ \partial_t \widetilde{g}_e^0 &= - \left[\frac{\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (n_e \boldsymbol{v}_e)}{n_e} + \left(\frac{3}{2T_e} - \frac{m_e \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\kappa}}{2T_e^2} \right) \left(\frac{T_e}{3} \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}_e - \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (T_e \boldsymbol{v}_e) \right) \right] \widetilde{g}_e^0, \\ \partial_x \widetilde{g}_e^0 &= \left[\frac{\nabla_{\boldsymbol{x}} n_e}{n_e} - \left(\frac{3}{2T_e} - \frac{m_e \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\kappa}}{2T_e^2} \right) \nabla_{\boldsymbol{x}} T_e \right] \widetilde{g}_e^0. \end{aligned}$$

La partie gauche de l'équation électronique de Boltzmann au 1er ordre de correction (2.3.52) est développée en annexe 2.E et devient :

$$\begin{aligned} &\left[-\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}_e} \boldsymbol{v}_e + \frac{q_e}{m_e} (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}_e) \right] \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e^0 + \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}_e} \widetilde{g}_e^0 + \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{g}_e^0 = \\ &\left[\mathbb{L}_{\boldsymbol{e}}' (|\boldsymbol{\kappa}|) \cdot \boldsymbol{\kappa} + \frac{\boldsymbol{R}_e^0 \cdot \boldsymbol{\kappa}}{n_e T_e} + \underline{\mathbb{L}_{\boldsymbol{e}}} (|\boldsymbol{\kappa}|) : \left(\boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\kappa} - \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{3} \mathbb{I} \right) \right] \widetilde{g}_e^0, \end{aligned} \tag{2.3.71}$$

avec

$$\mathbb{L}_{\boldsymbol{e}}' (|\boldsymbol{\kappa}|) = \left(\frac{m_e \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\kappa}}{2T_e} - \frac{5}{2} \right) \frac{\nabla_{\boldsymbol{x}} T_e}{T_e}, \tag{2.3.72}$$

$$\text{et} \quad \underline{\mathbb{L}_{\boldsymbol{e}}} (|\boldsymbol{\kappa}|) = \frac{m_e}{2T_e} \left([\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}_e] + [\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}_e]^T - \frac{2}{3} \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}_e \mathbb{I} \right). \tag{2.3.73}$$

Avec ce développement, l'équation électronique au premier ordre de correction donne une équation intégro-différentielle linéaire en $\widetilde{\Phi}_e^1$:

$$\begin{aligned} &\left[\mathbb{L}_{\boldsymbol{e}} (|\boldsymbol{\kappa}|) \cdot \boldsymbol{\kappa} + \frac{\boldsymbol{R}_e^0 \cdot \boldsymbol{\kappa}}{n_e T_e} + \underline{\mathbb{L}_{\boldsymbol{e}}} (|\boldsymbol{\kappa}|) : \left(\boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\kappa} - \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{3} \mathbb{I} \right) \right] \widetilde{g}_e^0 = \\ &- \frac{q_e}{m_e} (\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \left(\widetilde{g}_e^0 \widetilde{\Phi}_e^1 \right) + \mathcal{C}_{ee} \left(\widetilde{g}_e^0 \widetilde{\Phi}_e^1, \widetilde{g}_e^0 \right) + \mathcal{C}_{ee} \left(\widetilde{g}_e^0, \widetilde{g}_e^0 \widetilde{\Phi}_e^1 \right) + \mathcal{M}_e (|\boldsymbol{\kappa}|) \mathcal{C}_{ei}' \left(\widetilde{\Phi}_e^1, \widetilde{g}_i^0 \right), \end{aligned} \tag{2.3.74}$$

où

$$\mathbb{L}_{\boldsymbol{e}} (|\boldsymbol{\kappa}|) = \mathbb{L}_{\boldsymbol{e}}' (|\boldsymbol{\kappa}|) + \frac{n_i \Gamma_{ei} m_e}{T_e |\boldsymbol{\kappa}|^3} \delta \boldsymbol{u}. \tag{2.3.75}$$

Il est également possible de réécrire de la même manière les termes de gauche de l'équation ionique au premier ordre de correction (2.3.52) comme une équation différentielle linéaire en $\widetilde{\Phi}_i^1$:

$$\begin{aligned}\left[\mathbb{L}_{\boldsymbol{i}}\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right)\cdot\boldsymbol{\kappa}+\underline{\mathbb{L}_{\boldsymbol{i}}}\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right):\left(\boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\kappa}-\frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{3}\mathbb{I}\right)\right]\widetilde{f}_i^0 = \\ -\frac{q_i}{m_i}\left(\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\left(\widetilde{f}_i^0\widetilde{\Phi}_i^1\right)+\mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i^0\widetilde{\Phi}_i^1,\widetilde{g}_i^0\right)+\mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i^0,\widetilde{f}_i^0\widetilde{\Phi}_i^1\right).\end{aligned} \tag{2.3.76}$$

Résolution du système d'équations (2.3.53)

Ces équations (2.3.74) et (2.3.76) composent le système (2.3.53) et résoudre ce système revient à trouver une solution de $\widetilde{\Phi}_\sigma^1$. Ces équations (2.3.74) et (2.3.76) étant linéaires en $\widetilde{\Phi}_e^1$ et $\widetilde{\Phi}_i^1$ sur les membres de gauche de ces équations alors elles le sont sur la partie droite et par conséquent il existe un opérateur tel que cette correction $\widetilde{\Phi}_\sigma^1$ peut s'écrire sous la forme :

$$\widetilde{\Phi}_\sigma^1\left(\boldsymbol{\kappa}\right)=\mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right)\cdot\boldsymbol{\kappa}+\underline{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}}\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right):\left(\boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\kappa}-\frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{3}\mathbb{I}\right), \tag{2.3.77}$$

avec $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\underline{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}}$ des opérateurs dépendants de $\mathbb{L}_{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\underline{\mathbb{L}_{\boldsymbol{\sigma}}}$. L'opérateur $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}$ correspond aux perturbations dues aux vecteurs δT et $\delta\boldsymbol{u}$ et $\underline{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}}$ est le tenseur des contraintes. Le flux de chaleur $\boldsymbol{Q}_\sigma$ et le coefficient représentant les frottements dus aux collisions $\boldsymbol{R}_\sigma$ sont déterminés par $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}$, tandis que le tenseur de viscosité $\underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma$ est déterminé par le tenseur $\underline{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}}$. Afin de trouver une formule pour ces opérateurs, $\mathbb{L}_{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\underline{\mathbb{L}_{\boldsymbol{\sigma}}}$ sont développés avec les polynômes de Laguerre-Sonine $\mathcal{L}_\ell^m\left(x\right)$. Ce sont des polynômes orthogonaux définis par :

$$\left(1-\xi\right)^{-m-1}\exp\left(-\frac{x\xi}{1-\xi}\right)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\xi^p\mathcal{L}_\ell^m\left(x\right). \tag{2.3.78}$$

Ces polynômes sont orthogonaux sur l'intervalle allant de 0 à $+\infty$ en respectant les facteurs de poids $x^m e^{-x}$ associés :

$$\int_0^{+\infty}x^m e^{-x}\mathcal{L}_p^m\left(x\right)\mathcal{L}_q^m\left(x\right)=\frac{(p+m)!}{p!}\delta_{pq}, \tag{2.3.79}$$

avec pour premiers polynômes : $\mathcal{L}_0^m\left(x\right)=1$ et $\mathcal{L}_1^m\left(x\right)=m+1-x$. Appliqué à notre problème nous posons $x=\dfrac{m_e|\boldsymbol{\kappa}|^2}{2T_e}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{\boldsymbol{e}}\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right)&=\left(\frac{m_e|\boldsymbol{\kappa}|^2}{2T_e}-\frac{5}{2}\right)\frac{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}T_e}{T_e}+\frac{2n_i\Gamma_{ei}m_e}{2T_e|\boldsymbol{\kappa}|^3}\delta\boldsymbol{u},\\&=-\frac{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}T_e}{T_e}\mathcal{Y}_{e,1}^{\delta T}\mathcal{L}_1^{\frac{3}{2}}\left(x\right)+\delta\boldsymbol{u}\left[\sum_{\ell>0}\mathcal{Y}_{e,\ell}^{\delta\boldsymbol{u}}\mathcal{L}_\ell^{\frac{3}{2}}\left(x\right)\right],\end{aligned} \tag{2.3.80}$$

où $\mathcal{L}_1^{\frac{3}{2}}(x)$ est le développement au rang 1 avec $\mathcal{Y}_{e,1}^{\delta T} = 1$.

A présent, nous introduisons des notations supplémentaires pour exprimer la solution des équations de Boltzmann, en nous plaçant tout d'abord dans un plasma fortement magnétisé. Pour cela nous définissons un vecteur unitaire pour le champ magnétique : $\hat{\mathrm{b}} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}$ et trois matrices directionnelles :

$$\underline{\mathbf{M}}^{\parallel} = \hat{\mathrm{b}} \otimes \hat{\mathrm{b}}, \quad \underline{\mathbf{M}}^{\perp} = \mathbb{I} - \hat{\mathrm{b}} \otimes \hat{\mathrm{b}} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{M}}^{\odot} = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\mathrm{b}}_3 & \hat{\mathrm{b}}_2 \\ \hat{\mathrm{b}}_3 & 0 & -\hat{\mathrm{b}}_1 \\ -\hat{\mathrm{b}}_2 & \hat{\mathrm{b}}_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3.81}$$

Ainsi, pour chaque vecteur tridimensionnel nous avons :

$$x^{\parallel} = \underline{\mathbf{M}}^{\parallel} x = x \cdot \hat{\mathrm{b}}\hat{\mathrm{b}}, \quad x^{\perp} = \underline{\mathbf{M}}^{\perp} x = x - x \cdot \hat{\mathrm{b}}\hat{\mathrm{b}}, \quad x^{\odot} = \underline{\mathbf{M}}^{\odot} x = \hat{\mathrm{b}} \times x. \tag{2.3.82}$$

Dans le plan $(x, \hat{\mathrm{b}})$ ces trois composantes sont : la composante parallèle de x au champ magnétique pour $x^{\parallel}$, la composante perpendiculaire à ce champ pour $x^{\perp}$ et $x^{\odot}$ est la composante transverse à ce plan. Ces trois vecteurs sont mutuellement orthogonaux et ces trois matrices $\underline{\mathbf{M}}^{\parallel}$, $\underline{\mathbf{M}}^{\perp}$ et $\underline{\mathbf{M}}^{\odot}$ sont linéairement indépendantes. Dans le cas d'un plasma faiblement magnétisé ou démagnétisé alors les coefficients de transport sont identiques dans les directions perpendiculaire et parallèle et s'annulent dans la direction transverse.

Il est également possible de développer de la même façon une matrice en fonction de matrices directionnelles. Pour un tenseur symétrique on utilise le développement proposé par Braginskii (page 249 [Bra65]) :

$$\underline{\mathbb{L}_{\boldsymbol{\sigma}}} = \sum_{\ell=0}^{4} \underline{\underline{\mathbf{\Pi}_{\boldsymbol{\ell}}}}(\boldsymbol{b}) : \underline{\mathbb{L}_{\boldsymbol{\sigma}}}, \tag{2.3.83}$$

avec pour les premières matrices :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\mathbf{\Pi}_{\mathbf{0}}}} &= -\left(\underline{\mathbf{M}} - \frac{1}{2}\underline{\mathbf{M}}^{\perp}\right) \otimes \left(\frac{2}{3}\underline{\mathbf{M}} - \frac{1}{3}\underline{\mathbf{M}}^{\perp}\right), \\
\underline{\underline{\mathbf{\Pi}_{\mathbf{1}}}} &= -\underline{\mathbf{M}}^{\perp} \oslash \underline{\mathbf{M}}^{\perp} - \frac{1}{2}\underline{\mathbf{M}}^{\perp} \otimes \underline{\mathbf{M}}, \\
\underline{\underline{\mathbf{\Pi}_{\mathbf{2}}}} &= -\underline{\mathbf{M}}^{\perp} \oslash \underline{\mathbf{M}} - \underline{\mathbf{M}} \oslash \underline{\mathbf{M}}^{\perp}, \\
\underline{\underline{\mathbf{\Pi}_{\mathbf{3}}}} &= \frac{1}{2}\underline{\mathbf{M}}^{\perp} \oslash \underline{\mathbf{M}}^{\odot} + \frac{1}{2}\left[\underline{\mathbf{M}}^{\odot}\right]^T \oslash \underline{\mathbf{M}}^{\perp}, \\
\underline{\underline{\mathbf{\Pi}_{\mathbf{4}}}} &= \underline{\mathbf{M}} \oslash \underline{\mathbf{M}}^{\odot} + \left[\underline{\mathbf{M}}^{\odot}\right]^T \oslash \underline{\mathbf{M}},
\end{aligned} \tag{2.3.84}$$

où les opérateurs sont :

$$\begin{aligned}
[(\underline{\boldsymbol{A}} \otimes \underline{\boldsymbol{B}}) : \underline{\boldsymbol{W}}]_{ij} &= \sum_k \sum_l A_{ij} B_{kl} W_{kl}, \\
[(\underline{\boldsymbol{A}} \oslash \underline{\boldsymbol{B}}) : \underline{\boldsymbol{W}}]_{ij} &= \sum_k \sum_l A_{ik} B_{jl} W_{kl}.
\end{aligned}$$

Avec ce développement en polynômes de Sonine-Laguerre l'opérateur $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}(|\boldsymbol{\kappa}|)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}(|\boldsymbol{\kappa}|) = &\left[\sum_{\ell>0}\mathcal{L}_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x)\left(\mathcal{X}_{\sigma,\ell}^{\delta T\parallel}\underline{\mathbb{M}}^{\parallel}+\mathcal{X}_{\sigma,\ell}^{\delta T\perp}\underline{\mathbb{M}}^{\perp}+\mathcal{X}_{\sigma,\ell}^{\delta T\odot}\underline{\mathbb{M}}^{\odot}\right)\right]\frac{\boldsymbol{\partial_x}T_{\sigma}}{T_{\sigma}}\\ &+\left[\sum_{\ell>0}\mathcal{L}_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x)\left(\mathcal{X}_{\sigma,\ell}^{\delta \boldsymbol{u}\parallel}\underline{\mathbb{M}}^{\parallel}+\mathcal{X}_{\sigma,\ell}^{\delta \boldsymbol{u}\perp}\underline{\mathbb{M}}^{\perp}+\mathcal{X}_{\sigma,\ell}^{\delta \boldsymbol{u}\odot}\underline{\mathbb{M}}^{\odot}\right)\right]\delta\boldsymbol{u},\end{aligned} \tag{2.3.85}$$

et de même le tenseur $\underline{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}}(|\boldsymbol{\kappa}|)$ est développé :

$$\underline{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}}(|\boldsymbol{\kappa}|) = \sum_{\ell>0}\mathcal{L}_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x)\left(\sum_{\zeta=0}^{4}\mathcal{X}_{\sigma,\ell}^{\delta\tau\zeta}\underline{\mathbb{\Pi}_{\boldsymbol{\ell}}}(\boldsymbol{v}_{\sigma},\boldsymbol{b})\right):\underline{\mathbb{L}_{\boldsymbol{\sigma}}}. \tag{2.3.86}$$

A présent, détaillons les termes de l'équation de Boltzmann électronique au 1er ordre de correction (2.3.74) dans cette nouvelle base de polynômes, en commençant par le terme $(\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\left(\widetilde{\Phi}_e^1\right)$. Pour cela, nous devons définir les dérivées dans cette nouvelle base :

$$\begin{aligned}\partial_x^{\parallel} &= \hat{\mathrm{b}}\hat{\mathrm{b}}\cdot\partial_x,\\ \partial_x^{\perp} &= \partial_x-\partial_x^{\parallel},\\ \partial_x^{\odot} &= \hat{\mathrm{b}}\times\partial_x.\end{aligned} \tag{2.3.87}$$

Avec le développement de ces dérivées le terme $(\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\left(\widetilde{g}_e^1\right)$ se décompose lui même en trois composantes :

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{B})\cdot\partial_x^{\parallel} &= 0,\\ (\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{B})\cdot\partial_x^{\perp} &= |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{\kappa}\cdot\partial_x^{\odot},\\ (\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{B})\cdot\partial_x^{\odot} &= (\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{B})\cdot\left(\hat{\mathrm{b}}\times\partial_x\right),\\ &= \left(\boldsymbol{\kappa}\cdot\hat{\mathrm{b}}\right)(\boldsymbol{B}\cdot\partial_x)-\left(\boldsymbol{B}\cdot\hat{\mathrm{b}}\right)(\boldsymbol{\kappa}\cdot\partial_x),\\ &= -|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{\kappa}\cdot\partial_x^{\perp}.\end{aligned} \tag{2.3.88}$$

Dans la suite, nous allons procéder par étapes en commençant par les perturbations dues à la température. Par conséquent, l'équation intégro-différentielle linéaire en $\widetilde{\Phi}^1$ (2.3.74), dont nous prenons juste la composante en $\dfrac{\nabla_{\boldsymbol{x}}T_e}{T_e}$, devient :

$$\mathcal{C}-\frac{q_e}{m_e}\widetilde{g}_e^0(\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{\Phi}_e^1 = \left[\left(\frac{m_e\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\kappa}}{2T_e}-\frac{5}{2}\right)\cdot\boldsymbol{\kappa}\frac{\nabla_{\boldsymbol{x}}T_e}{T_e}+\frac{\boldsymbol{R}_e^0\cdot\boldsymbol{\kappa}}{n_eT_e}\right]\widetilde{g}_e^0, \tag{2.3.89}$$

avec $\mathcal{C}$ représentant les collisions ici dues à la température. Le terme sur le champ magnétique $(\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\left(\widetilde{\Phi}_e^1\right)$ devient dans cette base avec le développement en polynômes de Sonine-Laguerre :

$$-(\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\left(\widetilde{\Phi}_e^1\right) = |\boldsymbol{B}|\sum_{\ell>0}\mathcal{L}_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x)\left(\mathcal{X}_{\sigma,\ell}^{\delta T\odot}\boldsymbol{\kappa}\cdot\frac{\boldsymbol{\partial_x^{\perp}}T_e}{T_e}-\mathcal{X}_{\sigma,\ell}^{\delta T\perp}\boldsymbol{\kappa}\cdot\frac{\boldsymbol{\partial_x^{\odot}}T_e}{T_e}\right). \tag{2.3.90}$$

Avec ce développement de la dérivée, le terme $\mathbb{L}_{\boldsymbol{e}}(|\boldsymbol{\kappa}|)\cdot\boldsymbol{\kappa}$ devient :

$$\mathbb{L}_{\boldsymbol{e}}(|\boldsymbol{\kappa}|)\cdot\boldsymbol{\kappa} = -\left(\mathcal{Y}_{e,1}^{\delta T}\mathcal{L}_1^{\frac{3}{2}}(x)\,\boldsymbol{\kappa}\right)\cdot\frac{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}^{\perp}T_e}{T_e} - \left(\mathcal{Y}_{e,1}^{\delta T}\mathcal{L}_1^{\frac{3}{2}}(x)\,\boldsymbol{\kappa}\right)\cdot\frac{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}^{\odot}T_e}{T_e}. \tag{2.3.91}$$

La force de frottement ici due à la température T_e, aussi appelée force thermique $\boldsymbol{R}_{eT}$, se décompose dans la même base, exposée précédemment :

$$\boldsymbol{R}_{eT} = n_e T_e\left(K'\frac{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}^{\perp}T_e}{T_e} + K''\frac{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}^{\odot}T_e}{T_e}\right). \tag{2.3.92}$$

En supposant $\dfrac{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}^{\perp}T_e}{T_e}$ et $\dfrac{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}^{\odot}T_e}{T_e}$ nuls, nous obtenons deux équations. Pour cela, nous introduisons des notations complexes :

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{\sigma,\ell}^{\theta} &= \mathcal{X}_{\sigma,\ell}^{\theta\perp} + \imath\mathcal{X}_{\sigma,\ell}^{\theta\odot},\\ \mathcal{Y}_{k,l}^{\theta} &= \mathcal{Y}_{k,l}^{\theta} + \imath\mathcal{Y}_{k,l}^{\theta}.\end{aligned} \tag{2.3.93}$$

Ces développements polynômiaux permettent de réécrire l'équation électronique au premier ordre de correction (2.3.89) :

$$\sum_{\ell>0} x^{\frac{3}{2}}e^{-x}\mathcal{L}_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x)\,\mathcal{X}_{e,\ell}^{\delta T}\left(\imath|\boldsymbol{B}| + \underline{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})} : [\boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{s}]\right) = \mathcal{Y}_{e,1}^{\delta T}x^{\frac{3}{2}}e^{-x}\mathcal{L}_1^{\frac{3}{2}}(x), \tag{2.3.94}$$

où $\underline{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})}$ est le tenseur de collisions linéarisé. Pour obtenir une relation entre ces coefficients, nous faisons une projection L^2 telle que : $\forall q>0$,

$$\begin{aligned}\sum_{\ell>0}\mathcal{X}_{e,\ell}^{\delta T}\int_0^{+\infty}&\left[x^{\frac{3}{2}}e^{-x}\mathcal{L}_q^{\frac{3}{2}}(x)\,\mathcal{L}_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x)\left(\imath|\boldsymbol{B}| + \underline{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})} : \int_{\mathbb{S}^2}\boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{s}\frac{d\boldsymbol{s}}{4\pi}\right)\right]dx\\ &= \mathcal{Y}_{e,1}^{\delta T}\int_0^{+\infty}\left[x^{\frac{3}{2}}e^{-x}\mathcal{L}_q^{\frac{3}{2}}(x)\,\mathcal{L}_1^{\frac{3}{2}}(x)\right]dx.\end{aligned} \tag{2.3.95}$$

L'équation de définition de l'orthogonalité des polynômes de Sonine-Laguerre (2.3.79) permet de calculer le terme de droite de l'équation précédente :

$$\int_0^{+\infty}\left[x^{\frac{3}{2}}e^{-x}\mathcal{L}_q^{\frac{3}{2}}(x)\,\mathcal{L}_1^{\frac{3}{2}}(x)\right]dx = \left(\frac{3}{2}+1\right)!\quad\delta_{q,1}, \tag{2.3.96}$$

$$= \frac{15\sqrt{\pi}}{8}\quad\delta_{q,1}. \tag{2.3.97}$$

Ainsi, l'équation (2.3.95) devient : $\forall q>0$,

$$\sum_{\ell>0}\mathcal{X}_{e,\ell}^{\delta T}\int_0^{+\infty}\left[x^{\frac{3}{2}}e^{-x}\mathcal{L}_q^{\frac{3}{2}}(x)\,\mathcal{L}_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x)\left(\imath|\boldsymbol{B}| + \frac{2}{3}\mathrm{Tr}\left(\underline{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})}\right)\right)\right]\frac{8dx}{15\sqrt{\pi}} = \mathcal{Y}_{e,1}^{\delta T}\delta_{q,1} \tag{2.3.98}$$

Par conséquent, les $\mathcal{X}_{e,\ell}^{\delta T}$ et $\mathcal{X}_{i,\ell}^{\delta T}$ ainsi que $\mathcal{X}_{e,\ell}^{\delta\boldsymbol{u}}$ et $\mathcal{X}_{i,\ell}^{\delta\boldsymbol{u}}$ sont les coefficients solutions de ces systèmes linéaires qui peuvent se mettre sous la forme :

$$\underline{\mathbb{A}}_e^{\theta}\mathcal{X}_e^{\theta} = \underline{\mathbb{C}}_e^{\theta}\mathcal{Y}_e^{\theta}\quad\text{et}\quad\underline{\mathbb{A}}_i^{\theta}\mathcal{X}_i^{\theta} = \underline{\mathbb{C}}_i^{\theta}\mathcal{Y}_i^{\theta}. \tag{2.3.99}$$

La résolution de ces systèmes linéaires permet d'obtenir une formule analytique pour les opérateurs $\mathbb{P}_{\boldsymbol{e}}(|\boldsymbol{\kappa}|)$ et $\underline{\mathbb{P}_{\boldsymbol{e}}}(|\boldsymbol{\kappa}|)$ et par conséquent pour les fonctions de distributions électronique et ionique :

$$\widetilde{g}_e(\boldsymbol{\kappa}) \simeq \mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|)\left(1+\mathbb{P}_{\boldsymbol{e}}(|\boldsymbol{\kappa}|)\cdot\boldsymbol{\kappa}+\underline{\mathbb{P}_{\boldsymbol{e}}}(|\boldsymbol{\kappa}|):\left(\boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\kappa}-\frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{3}\right)\right), \tag{2.3.100}$$

$$\widetilde{f}_i(\boldsymbol{\kappa}) \simeq \mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|)\left(1+\mathbb{P}_{\boldsymbol{i}}(|\boldsymbol{\kappa}|)\cdot\boldsymbol{\kappa}+\underline{\mathbb{P}_{\boldsymbol{i}}}(|\boldsymbol{\kappa}|):\left(\boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\kappa}-\frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{3}\right)\right). \tag{2.3.101}$$

Cette résolution permet aussi de trouver une formule pour les coefficients de transport. Dans la suite, nous reprenons les formules des coefficients de transport (2.2.18) et (2.2.22) pour obtenir une approximation en commençant par reprendre l'approximation du coefficient de frottement (2.3.61) :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_e &\simeq -\frac{m_e n_e}{\tau_e}\delta\boldsymbol{u}-\frac{n_i\Gamma_{ei}}{2}m_e\epsilon\int_{\mathbb{R}^3}d\boldsymbol{\kappa}\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{\kappa})\,\mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|)\,\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{\Phi}_e^1(\boldsymbol{\kappa}),\\ &\simeq -\frac{m_e n_e}{\tau_e}\delta\boldsymbol{u}-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{n_i\Gamma_{ei}}{2}m_e\epsilon\mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|)\,\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{\kappa})\,\mathbb{P}_{\boldsymbol{e}}(|\boldsymbol{\kappa}|)\,d\boldsymbol{\kappa}.\end{aligned} \tag{2.3.102}$$

Avec l'opérateur $\mathbb{P}_{\boldsymbol{e}}(|\boldsymbol{\kappa}|)$ développé selon (2.3.85) ce coefficient devient :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_e \simeq& -\frac{m_e n_e}{\tau_e}\delta\boldsymbol{u}\\ &-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{n_i\Gamma_{ei}}{2}\mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|)\,\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{\kappa})\left[\sum_{\ell>0}\mathcal{L}_\ell^{\frac{3}{2}}(x)\left(\mathcal{X}_{e,\ell}^{\delta T\parallel}\underline{\mathbb{M}}^{\parallel}+\mathcal{X}_{e,\ell}^{\delta T\perp}\underline{\mathbb{M}}^{\perp}+\mathcal{X}_{e,\ell}^{\delta T\odot}\underline{\mathbb{M}}^{\odot}\right)\right]\frac{\boldsymbol{\partial_x}T_e}{T_e}d\boldsymbol{\kappa}\\ &-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{n_i\Gamma_{ei}}{2}\mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|)\,\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{\kappa})\left[\sum_{\ell>0}\mathcal{L}_\ell^{\frac{3}{2}}(x)\left(\mathcal{X}_{e,\ell}^{\delta\boldsymbol{u}\parallel}\underline{\mathbb{M}}^{\parallel}+\mathcal{X}_{e,\ell}^{\delta\boldsymbol{u}\perp}\underline{\mathbb{M}}^{\perp}+\mathcal{X}_{e,\ell}^{\delta\boldsymbol{u}\odot}\underline{\mathbb{M}}^{\odot}\right)\right]\delta\boldsymbol{u}d\boldsymbol{\kappa}.\end{aligned} \tag{2.3.103}$$

Si $\boldsymbol{R}_e$ est réécrit avec des coefficients α et β^t représentant respectivement les facteurs de perturbations dus à la différence des vitesses $\delta\boldsymbol{u}$ et à la température T_e tel que

$$\boldsymbol{R}_e = -\,\alpha\delta\boldsymbol{u}-\beta^t\boldsymbol{\partial_x}T_e, \tag{2.3.104}$$

alors le facteur $\alpha^{\parallel}$, qui est la composante parallèle au champ magnétique de ce facteur, vaut :

$$\begin{aligned}\alpha^{\parallel} \simeq& \frac{m_e n_e}{\tau_e}+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{n_i\Gamma_{ei}}{2}\mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|)\,\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{\kappa})\sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}_\ell}\mathcal{X}_{e,\ell}^{\delta\boldsymbol{u}\parallel}\mathcal{L}_\ell^{\frac{3}{2}}(x)\,d\boldsymbol{\kappa},\\ \simeq& \frac{m_e n_e}{\tau_e}+\frac{n_i\Gamma_{ei}}{2}\frac{8\pi}{3}\sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}_\ell}\mathcal{X}_{e,\ell}^{\delta\boldsymbol{u}\parallel}\int_0^{+\infty}r\left[\mathcal{M}_e(r)\,\mathcal{L}_\ell^{\frac{3}{2}}\left(\frac{m_e r^2}{2T_e}\right)\right]dr,\\ \simeq& \frac{m_e n_e}{\tau_e}+\frac{n_i\Gamma_{ei}}{2}\frac{8\pi}{3}\frac{T_e\mathcal{M}_e(0)}{m_e}\sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}_\ell}\mathcal{X}_{e,\ell}^{\delta\boldsymbol{u}\parallel}\int_0^{+\infty}\left[\exp(-x)\,\mathcal{L}_\ell^{\frac{3}{2}}(x)\right]dx,\end{aligned}$$

$$\alpha^{\parallel} \simeq \frac{m_e n_e}{\tau_e} + \frac{m_e n_e}{\tau_e} \frac{T_e}{m_e^2} \sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}_\ell} \mathcal{X}_{e,\ell}^{\delta \boldsymbol{u}\parallel} \int_0^{+\infty} \left[\exp(-x) \mathcal{L}_\ell^{\frac{3}{2}}(x) \right] dx. \tag{2.3.105}$$

Le coefficient $\mathcal{X}_{e,\ell}^{\delta \boldsymbol{u}}$ étant solution du système (2.3.99), pour un nombre $\mathcal{N}_\ell$ donné la formule est explicite. La précision de ce terme $\alpha^{\parallel}$ dépend du nombre $\mathcal{N}_\ell$ choisi, mais à partir de $\mathcal{N}_\ell$ supérieur à 2 l'augmentation de la précision n'est plus significative [Bra58]. Les résultats des calculs de ces coefficients ont été obtenus avec $\mathcal{N}_\ell = 6$ [Hub09, Bra65, JH53] :

$$\alpha_\perp = \frac{m_e}{\tau_e n_e e^2}, \qquad \alpha_\parallel = 1.96 \alpha_\perp, \tag{2.3.106}$$

$$\beta_\odot^t = \frac{3 n_e}{2 \omega_e^{coll} \tau_e}, \qquad \beta_\parallel^t = 0.71 n_e \ . \tag{2.3.107}$$

Le coefficient de transport réprésentant les flux de chaleur $\boldsymbol{Q}_\sigma$ sont développés de la même manière dans l'annexe (2.D.3). Ils sont donnés par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_\sigma \simeq - \frac{5 n_\sigma T_\sigma^2}{2 m_\sigma} \Bigg[& \mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta T \parallel} \frac{\boldsymbol{\partial_x}^{\parallel} T_\sigma}{T_\sigma} + \mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta T \perp} \frac{\boldsymbol{\partial_x}^{\perp} T_\sigma}{T_\sigma} + \mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta T \odot} \frac{\boldsymbol{\partial_x}^{\odot} T_\sigma}{T_\sigma} \\ & + \mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta \boldsymbol{u}\parallel} \delta \boldsymbol{u}^{\parallel} + \mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta \boldsymbol{u}\perp} \delta \boldsymbol{u}^{\perp} + \mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta \boldsymbol{u}\odot} \delta \boldsymbol{u}^{\odot} \Bigg]. \end{aligned} \tag{2.3.108}$$

Ces flux de chaleur peuvent donc s'écrire :

$$\boldsymbol{Q}_e = -\underline{\boldsymbol{\kappa}}_e \boldsymbol{\partial_x} T_e - \underline{\boldsymbol{\beta^j}}_e \delta \boldsymbol{u}, \tag{2.3.109}$$

$$\boldsymbol{Q}_i = -\underline{\boldsymbol{\kappa}}_i \boldsymbol{\partial_x} T_i. \tag{2.3.110}$$

dont les coefficients $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_\sigma$ et $\underline{\boldsymbol{\beta^j}}_e$ ont pour valeurs [Hub09, Bra65] :

$$\underline{\boldsymbol{\beta^j}}_e^{\parallel} = 0.71 n_e T_e, \quad \underline{\boldsymbol{\beta^j}}_e^{\odot} = 1.5 \frac{n_e T_e}{\tau_e \omega_{coll_e}}, \tag{2.3.111}$$

$$\underline{\boldsymbol{\kappa}}_e^{\parallel} = 3.2 \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}, \quad \underline{\boldsymbol{\kappa}}_e^{\perp} = 4.7 \frac{n_e T_e}{m_e \tau_e \omega_{coll_e}^2}, \quad \underline{\boldsymbol{\kappa}}_e^{\odot} = 2.5 \frac{n_e T_e}{m_e \omega_{coll_e}}, \tag{2.3.112}$$

$$\underline{\boldsymbol{\kappa}}_i^{\parallel} = 3.9 \frac{n_i T_i \tau_i}{m_i}, \quad \underline{\boldsymbol{\kappa}}_i^{\perp} = 2 \frac{n_i T_i}{m_i \tau_i \omega_{coll_i}^2}, \quad \underline{\boldsymbol{\kappa}}_i^{\odot} = 2.5 \frac{n_i T_i}{m_i \omega_{coll_i}}. \tag{2.3.113}$$

Enfin le coefficient représentant la viscosité $\underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma$ s'exprime en fonction des tenseurs des contraintes $\underline{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}}(|\boldsymbol{\kappa}|)$ selon son développement (2.3.86) :

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\pi}}_e &\equiv \sum_{\ell=0}^{4} \eta_{e\ell} \underline{\boldsymbol{\Pi}}_\ell (\boldsymbol{v}_e, \boldsymbol{b}), \\ \underline{\boldsymbol{\pi}}_i &\equiv \sum_{\ell=0}^{4} \eta_{i\ell} \underline{\boldsymbol{\Pi}}_\ell (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{b}). \end{aligned} \tag{2.3.114}$$

Avant de conclure ce chapitre, nous récapitulons les approximations des coefficients de transport :

– pour les électrons :

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_e = -\underline{\boldsymbol{\alpha}}\delta\boldsymbol{u} - \underline{\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{t}}}\boldsymbol{\partial_x}T_e, \\ \mathcal{Q}_e = -\dfrac{3m_e n_e}{m_i \tau_e}\delta T - \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}_e, \\ \boldsymbol{Q}_e = -\underline{\boldsymbol{\kappa}}_e\boldsymbol{\partial_x}T_e - \underline{\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{j}}}_e\delta\boldsymbol{u}, \\ \underline{\boldsymbol{\pi}}_e \equiv \displaystyle\sum_{\ell=0}^{4}\eta_{e\ell}\underline{\boldsymbol{\Pi}}_\ell\left(\boldsymbol{v}_e,\boldsymbol{b}\right), \end{cases} \tag{2.3.115}$$

– puis pour les ions :

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_i = -\boldsymbol{R}_e, \\ \mathcal{Q}_i = 3\dfrac{m_e n_e}{\tau_e m_i}\delta T, \\ \boldsymbol{Q}_i = -\underline{\boldsymbol{\kappa}}_i\boldsymbol{\partial_x}T_i, \\ \underline{\boldsymbol{\pi}}_i \equiv \displaystyle\sum_{\ell=0}^{4}\eta_{i\ell}\underline{\boldsymbol{\Pi}}_\ell\left(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{b}\right). \end{cases} \tag{2.3.116}$$

2.4 Conclusions

Ce chapitre a permis de mettre en avant les modèles fondamentaux de la modélisation numérique des plasmas en exposant d'abord le modèle cinétique puis le modèle fluide simplification du modèle cinétique. Ce modèle fluide (2.2.23) présente encore l'inconvénient de contenir des termes de transport nécessitant la résolution du modèle cinétique. Pour obtenir une approximation de ces coefficients de transport, Braginskii, dont la stratégie est ici revisitée, revient à résoudre des problèmes variationnels. Pour résumer la stratégie de Braginskii revisitée ici, on a tout d'abord choisi le référentiel naturel pour l'analyse, c'est-à-dire, celui où les ions et les électrons sont étudiés dans le référentiel de leurs vitesses respectives. Ensuite, les équations de Boltzmann ont été adimensionnées. Pour cela on s'est inspiré de l'adimensionnement de Braginskii, soit dans les équations cinétique les termes importants sont ceux de collisions ainsi que les termes du champ magnétique. Pour finir, afin d'approcher les coefficients de transport on a utilisé la méthode de Chapman-Enskog dont le principe est d'utiliser un développement d'Enskog de la fonction de distribution sur les espèces. Ainsi, les fonctions de distributions ont été développées suivant une partie principale et une fluctuation. La thermalisation permit de conclure que ces parties principales des fonctions de distribution sont des fonctions maxwelliennes sur la vitesse. Tandis que le 1er ordre de correction a permis de définir une forme pour les fluctuations. Ces approximations des termes principaux et des fluctuations des fonctions de distributions ont permis d'obtenir une approximation des coefficients de transports.

Bien qu'acceptée et utilisée depuis près de 50 ans la stratégie de Braginskii semble montrer des « failles ». Catto [CS04], Mikhailovskii et Tsypin avant lui [Mik67, MT71, MT84] notent notamment que le choix du libre parcours moyen (noté l_0 dans l'adimensionnement) n'est pas optimal car il est du même ordre que la vitesse thermique électronique (cf.

(2.3.15)). En effet, Mikhailovskii et Tsypin ont réalisé que cette hypothèse n'est pas très réaliste dans les situations où la vitesse de l'écoulement fluide est faible. Malgré les limites que présentent les approximations des coefficients de transports, la méthode de Braginskii et ces approximations restent très utilisées.

Dans le chapitre suivant ce modèle fluide sera simplifié pour donner le modèle de la MagnétoHydroDynamique qui nécessite de faire différentes hypothèses qui seront détaillées.

Chapitre 3

Le modèle MHD : Magnétohydrodynamique

Sommaire

3.1 Système de la MHD complète 54
3.1.1 Le modèle monofluide 54
3.1.2 Loi d'Ohm 57
3.1.3 Equations de Maxwell 58
3.1.3.1 Monopôles magnétiques 59
3.1.4 Système de la MHD complète 60
3.1.5 Régime quasineutre 60
3.1.5.1 La loi d'Ohm dans le régime quasineutre 61
3.1.5.2 MHD complète dans le régime quasineutre 62
3.1.6 MHD idéale 63
3.1.7 MHD résistive 63
3.1.8 Système conservatif de la MHD idéale 64
3.2 Analyse des propriétés spectrales 66
3.3 MHD réduite résistive 70
3.3.1 MHD réduite résistive étendue 71
3.3.2 Le Current Hole 75
3.3.3 Equilibre de Grad-Shafranov 77
3.3.3.1 Equilibre de Soloviev 79
3.4 Conclusions 79

La MagnétoHydroDynamique (MHD) est une théorie monofluide décrivant un fluide chargé. Elle a été développée à partir de la première moitié du XXème siècle. Ses fondements et son nom sont dus à l'astrophysicien suédois Hannes Alfvén. Il a notamment étudié les ondes électromagnétiques se propageant dans un plasma, et énoncé le théorème du gel en MHD idéale. A partir de la fin des années 1940, les recherches se multiplient dans le domaine de la fusion contrôlée ; la MHD, initialement pensée pour l'étude d'objets astrophysiques (comme les champs magnétiques terrestre et solaire), est rapidement appliquée aux plasmas de fusion, qui lui fournissent un cadre expérimental. Elle prouve rapidement son efficacité

et sa richesse, ce qui explique qu'elle soit encore aujourd'hui une théorie incontournable dans l'étude des plasmas de tokamaks. De nombreux codes utilisent à ce jour ces équations de la MHD. Jardin a notamment listé ceux développés en trois dimensions [Jar12] tels que les codes M3D [SPB10, SS10], M3D-C1 qui utilise une méthode aux éléments finis C^1 [BFJ09], JOREK code de calcul développé au CEA Cadarache [CH08, HPvdPR09] ou encore BOUT++ [DUX+09].

Tout d'abord, ce chapitre présente les détails du modèle de la MHD complète, avec la dérivation du système monofluide sur les variables de mélange à partir du système bifluide (2.2.23). Ce modèle est également composé des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm. Pour obtenir ce modèle de la MHD complète à partir du modèle monofluide , on a besoin de différentes hypothèses telles que la quasineutralité ou encore la considération de la masse électronique faible. Ensuite, la partie suivante de ce chapitre consiste en une analyse des propriétés spectrales de ce système de la MHD. La dernière partie de ce chapitre présente différents modèles de MHD réduite. Bien que la MHD soit un modèle simplifié par rapport aux modèles cinétique et fluides, les calculs de la MHD complète restent coûteux. Sachant que ces problèmes sont à résoudre sur des échelles spatio-temporelles importantes, On a recourt à des modèles de MHD encore plus simplifiés tels que le Current Hole ou encore l'équation d'équilibre de Grad-Shafranov.

3.1 Système de la MHD complète

Le système d'équations de la MagnétoHydroDynamique (MHD) représente le modèle consistant le plus simple pour décrire l'équilibre et les propriétés de stabilité. Ce modèle est utilisé pour étudier le comportement macroscopique du plasma. Le plasma, considéré comme un fluide magnétisé, obéit alors aux lois de conservations fluides et de Maxwell. Cette partie présente le développement du système de la MHD complète ou full-MHD en dérivant le système monofluide à partir du système bifluide, les équations de Maxwell et la loi d'Ohm détaillée suivant le cas de MHD choisie. On détaille alors deux modèles successifs avec les hypothèses de la quasineutralité et celle d'une masse électronique m_e faible ($m_e \to 0$). Ensuite, le système obtenu de la MHD complète sera présenté suivant le choix de MHD choisie qu'elle soit idéale ou résistive. pour finir, ce système sera mis sous forme conservative.

3.1.1 Le modèle monofluide

Dans le cadre de la MHD, le plasma est considéré comme un fluide unique de mélange composé d'un premier fluide d'ions et d'un autre fluide constitué d'électrons. Chacun des fluides est décrit par les équations suivantes où σ vaut e pour les électrons et i pour les ions (voir les systèmes fluides (2.2.23) et (2.2.28) présentés dans le chapitre 2) :

$$\begin{cases} \partial_t n_\sigma + \nabla \cdot (n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma) = 0, \\ m_\sigma \left(\partial_t (n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma) + \nabla \cdot (n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma \otimes \boldsymbol{v}_\sigma)\right) - n_\sigma q_\sigma (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_\sigma \times \boldsymbol{B}) \\ \qquad + \nabla p_\sigma = - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma + \boldsymbol{R}_\sigma, \\ \dfrac{1}{\gamma - 1}\left(\dfrac{d}{dt} p_\sigma + \gamma p_\sigma \nabla \cdot \boldsymbol{v}_\sigma\right) = \left(-\nabla \cdot \boldsymbol{Q}_\sigma + \mathcal{Q}_\sigma - \underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma : \nabla \boldsymbol{v}_\sigma\right). \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Dans le modèle monofluide de l'approximation MHD, les variables électromagnétiques sont le champ électrique $\boldsymbol{E}$, le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ et la densité de courant $\boldsymbol{J}$. Les variables fluides sont : la densité de la masse ρ, la vitesse du fluide $\boldsymbol{v}$, la pression p et l'énergie interne $\rho\mathcal{E}$. pour obtenir les équations de conservation de ce fluide de mélange on introduit les variables de mélange :

$$\text{Densité} : \rho \equiv \sum_\sigma m_\sigma n_\sigma = m_e n_e + m_i n_i, \tag{3.1.2}$$

$$= \rho_e + \rho_i, \tag{3.1.3}$$

$$\text{Charge} : \rho_q \equiv \sum_\sigma q_\sigma n_\sigma, \tag{3.1.4}$$

$$\text{Vitesse} : \boldsymbol{v} \equiv \frac{\sum_\sigma m_\sigma n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma}{\sum_\sigma m_\sigma n_\sigma},$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{m_e n_e \boldsymbol{v}_e + m_i n_i \boldsymbol{v}_i}{\rho}, \tag{3.1.5}$$

$$\text{Densité de courant} : \boldsymbol{J} \equiv \sum_\sigma q_\sigma n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma, \tag{3.1.6}$$

$$\text{Pression} : p = p_e + p_i, \tag{3.1.7}$$

$$\text{Tenseur des viscosités} : \underline{\boldsymbol{\pi}} = \underline{\boldsymbol{\pi}}_e + \underline{\boldsymbol{\pi}}_i, \tag{3.1.8}$$

$$\text{Flux de chaleur} : \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_e + \boldsymbol{Q}_i, \tag{3.1.9}$$

$$\text{Chaleur générée par les collisions} : \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_e + \mathcal{Q}_i,$$

$$\mathcal{Q} = \boldsymbol{R}_e \cdot (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_e). \tag{3.1.10}$$

Pour obtenir le système monofluide on reprend les équations fluides une à une en commençant par l'équation de continuité. On additionne les équations de continuité ionique et électronique en les multipliant au préalable par leurs masses respectives pour obtenir l'équation de continuité sur la densité de mélange :

$$\partial_t (\rho_e + \rho_i) + \nabla \cdot (\rho_e \boldsymbol{v}_e + \rho_i \boldsymbol{v}_i) = 0,$$

$$\text{i.e.} \qquad \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{3.1.11}$$

En multipliant les équations de continuité par leurs charges respectives et en les additionnant on obtient une équation de continuité de la charge :

$$\partial_t \rho_q + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0. \tag{3.1.12}$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement monofluide est obtenue en additionnant celles des ions et des électrons :

$$\partial_t \rho \boldsymbol{v} + \nabla \cdot (\rho_e \boldsymbol{v}_e \otimes \boldsymbol{v}_e + \rho_i \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{v}_i) = \rho_q \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} - \nabla p - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}} + \cancel{\boldsymbol{R}_e + \boldsymbol{R}_i}, \tag{3.1.13}$$

avec $\boldsymbol{R}_\sigma$ les termes de friction respectifs qui se compensent. En redéfinissant les vitesses électroniques et ioniques en fonction de la vitesse de mélange

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v} + \frac{\rho_i}{\rho_e}\left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_i\right), \tag{3.1.14}$$

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v} + \frac{\rho_e}{\rho_i}\left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_e\right), \tag{3.1.15}$$

l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho \boldsymbol{v} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{v}_e \otimes \rho_i \left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_i\right) + \boldsymbol{v}_i \otimes \rho_e \left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_e\right)\right) = \rho_q \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \\ -\nabla p - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}.\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

Enfin, on obtient l'équation de conservation de l'énergie hydrodynamique $\rho\mathcal{E}$, cette variable de mélange est définie au préalable par :

$$\rho\mathcal{E} = \frac{\rho|\boldsymbol{v}|^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}. \tag{3.1.17}$$

Pour obtenir cette équation commençons tout d'abord par additionner les équations sur les pressions électronique et ionique (2.2.27)

$$\begin{aligned}&\frac{dp}{dt} + \gamma p \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \frac{\rho_i}{\rho_e}\left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_i\right) \cdot \nabla p_e + \frac{\rho_e}{\rho_i}\left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_e\right) \cdot \nabla p_i + \gamma p_e \nabla \cdot \left(\frac{\rho_i}{\rho_e}\left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_i\right)\right) \\ &+\gamma p_i \nabla \cdot \left(\frac{\rho_e}{\rho_i}\left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_e\right)\right) = (\gamma - 1)\left(\mathcal{Q}_e + \mathcal{Q}_i - \underline{\boldsymbol{\pi}}_e \colon \nabla \boldsymbol{v}_e - \underline{\boldsymbol{\pi}}_i \colon \nabla \boldsymbol{v}_i - \nabla \cdot \boldsymbol{Q}\right),\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

avec $\gamma = \dfrac{5}{3}$ le taux de chaleur spécifique et $\dfrac{d}{dt}$ est la dérivée convective définie avec la vitesse de mélange par :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \tag{3.1.19}$$

Avec la définition de l'énergie hydrodynamique (3.1.17), sa dérivée convective se développe de la façon suivante :

$$\frac{d\rho\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{dp}{dt} + \rho \boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2}\frac{d\rho}{dt}. \tag{3.1.20}$$

Avec les équations de continuité (3.1.11), de pression (3.1.18) et en remplaçant le deuxième terme de l'équation (3.1.20) par l'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.1.16) cette équation sur l'énergie donne :

$$\begin{aligned}&\frac{d\rho\mathcal{E}}{dt} + \frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{\rho_i}{\rho_e}\left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_i\right) \cdot \nabla p_e + \frac{\rho_e}{\rho_i}\left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_e\right) \cdot \nabla p_i + \gamma p_e \nabla \cdot \left(\frac{\rho_i}{\rho_e}\left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_i\right)\right)\right) \\ &+\frac{1}{\gamma - 1}\gamma p_i \nabla \cdot \left(\frac{\rho_e}{\rho_i}\left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_e\right)\right) = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} p \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \mathcal{Q}_e + \mathcal{Q}_i - \boldsymbol{v} \cdot \nabla p + \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) \\ &\qquad - \left(\underline{\boldsymbol{\pi}}_e \colon \nabla \boldsymbol{v}_e + \underline{\boldsymbol{\pi}}_i \colon \nabla \boldsymbol{v}_i + \nabla \cdot \boldsymbol{Q}\right) - \boldsymbol{v} \cdot \left(\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}\right) - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2}\rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} \\ &\qquad -\boldsymbol{v} \cdot \left(\nabla \cdot \left(\boldsymbol{v}_e \otimes \rho_i \left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_i\right) + \boldsymbol{v}_i \otimes \rho_e \left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_e\right)\right)\right) + \boldsymbol{v} \cdot \rho_q \boldsymbol{E}.\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

Cette équation de conservation de l'énergie interne se réécrit :

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho\mathcal{E} + \nabla\cdot(\rho\mathcal{E}\boldsymbol{v} + p\boldsymbol{v}) + \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{\rho_i}{\rho_e}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_i)\cdot\nabla p_e + \frac{\rho_e}{\rho_i}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_e)\cdot\nabla p_i\right)\\
+\frac{1}{\gamma-1}\left(\gamma p_e\nabla\cdot\left(\frac{\rho_i}{\rho_e}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_i)\right) + \gamma p_i\nabla\cdot\left(\frac{\rho_e}{\rho_i}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_e)\right)\right) = (\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}\\
-\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}) + \mathcal{Q}_e + \mathcal{Q}_i - (\underline{\boldsymbol{\pi}}_e\colon\nabla\boldsymbol{v}_e + \underline{\boldsymbol{\pi}}_i\colon\nabla\boldsymbol{v}_i + \nabla\cdot\boldsymbol{Q})\\
-\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\cdot(\boldsymbol{v}_e\otimes\rho_i(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_i) + \boldsymbol{v}_i\otimes\rho_e(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_e))) + \boldsymbol{v}\cdot\rho_q\boldsymbol{E}.
\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

Le système « monofluide » contenant les équations de conservation de la masse (3.1.11), de la quantité de mouvement (3.1.16) et de l'énergie interne du plasma (3.1.22) auxquelles on ajoute l'équation d'évolution de la charge (3.1.12) et l'équation des gaz parfaits (3.1.17) se résume à :

$$\left\{\begin{aligned}
&\partial_t\rho + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0,\\
&\partial_t\rho\boldsymbol{v} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}_e\otimes\rho_i(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_i) + \boldsymbol{v}_i\otimes\rho_e(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_e)) = \rho_q\boldsymbol{E}\\
&\qquad +\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} - \nabla p - \nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}},\\
&\partial_t\rho\mathcal{E} + \nabla\cdot(\rho\mathcal{E}\boldsymbol{v} + p\boldsymbol{v}) + \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{\rho_i}{\rho_e}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_i)\cdot\nabla p_e + \frac{\rho_e}{\rho_i}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_e)\cdot\nabla p_i\right)\\
&+\frac{1}{\gamma-1}\left(\gamma p_e\nabla\cdot\left(\frac{\rho_i}{\rho_e}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_i)\right) + \gamma p_i\nabla\cdot\left(\frac{\rho_e}{\rho_i}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_e)\right)\right) = (\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}\\
&-\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}) + \mathcal{Q}_e + \mathcal{Q}_i - (\underline{\boldsymbol{\pi}}_e\colon\nabla\boldsymbol{v}_e + \underline{\boldsymbol{\pi}}_i\colon\nabla\boldsymbol{v}_i + \nabla\cdot\boldsymbol{Q})\\
&-\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\cdot(\boldsymbol{v}_e\otimes\rho_i(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_i) + \boldsymbol{v}_i\otimes\rho_e(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_e))) + \boldsymbol{v}\cdot\rho_q\boldsymbol{E},\\
&\partial_t\rho_q + \nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0,\\
&\frac{p}{\gamma-1} = \rho\mathcal{E} - \frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2.
\end{aligned}\right. \tag{3.1.23}$$

3.1.2 Loi d'Ohm

La loi d'Ohm est obtenue à partir d'une combinaison linéaire des équations de transport sur les vitesses électronique et ionique :

$$n_e m_e\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt} = n_e q_e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_e\times\boldsymbol{B}) - \nabla p_e - \nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}_e + \boldsymbol{R}_e, \tag{3.1.24}$$

$$n_i m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = n_i q_i(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{B}) - \nabla p_i - \nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}_i + \boldsymbol{R}_i. \tag{3.1.25}$$

On multiplie l'équation (3.1.25) par la masse électronique m_e et on soustrait l'équation (3.1.24) multipliée au préalable par la masse ionique m_i. Ainsi, on obtient l'équation suiv-

ante dite loi d'Ohm :

$$\begin{aligned} m_e n_i m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} - m_i n_e m_e \frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt} &= \boldsymbol{E}\left(m_e n_i q_i - m_i n_e q_e\right) \\ + \left(m_e n_i q_i \boldsymbol{v}_i - m_i n_e q_e \boldsymbol{v}_e\right) \times \boldsymbol{B} - m_e \nabla p_i + m_i \nabla p_e \\ -m_e \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_i + m_i \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_e + m_e \boldsymbol{R}_i - m_i \boldsymbol{R}_e. \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

En MHD, on utilise plutôt une forme simplifiée de l'équation (3.1.26) puisqu'on s'intéresse aux phénomènes basse-fréquence avec des échelles spatiales importantes. Or si le temps caractéristique des phénomènes observés est long comparé aux temps des mouvements électroniques alors les termes d'inerties électronique $m_e \frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}$ et ionique $m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}$ peuvent être négligés. Il est important de noter que cette hypothèse est valable pour les vitesses perpendiculaires mais aussi pour des vitesses parallèles aux lignes de champs magnétiques. Cette approximation est considérée comme « pauvre » car ces vitesses parallèles ne donnent pas de force magnétique. Avec cette hypothèse la loi d'Ohm se réécrit :

$$\begin{aligned} 0 = \boldsymbol{E}\left(m_e n_i q_i - m_i n_e q_e\right) + \left(m_e n_i q_i \boldsymbol{v}_i - m_i n_e q_e \boldsymbol{v}_e\right) \times \boldsymbol{B} \\ -m_e \nabla p_i + m_i \nabla p_e - m_e \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_i + m_i \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_e - \left(m_e + m_i\right) \boldsymbol{R}_e. \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

3.1.3 Equations de Maxwell

Considéré comme un fluide magnétisé, le plasma et plus particulièrement ses champs électromagnétiques $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ sont décrits par les équations de Maxwell. Le système des équations de Maxwell est constitué des équations de Poisson, de la loi de Faraday, de la loi d'Ampère et de l'équation modélisant l'absence de monopôles magnétiques :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0}, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B}, \\ \nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{\boldsymbol{c}^2} \partial_t \boldsymbol{E} = \mu_0 \boldsymbol{J}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \end{cases} \tag{3.1.28}$$

avec $\boldsymbol{c}$ la vitesse de la lumière, μ_0 la perméabilité et ϵ_0 la permittivité définis tels que :

$$\boldsymbol{c}^2 \mu_0 \epsilon_0 = 1. \tag{3.1.29}$$

Dans le cadre de la MHD, la vitesse est telle que : $\boldsymbol{v} << \boldsymbol{c}$ et le courant de déplacement $\frac{1}{\boldsymbol{c}^2} \partial_t \boldsymbol{E}$ est négligé. En effet, on se place dans un contexte non relativiste et on s'intéresse aux phénomènes basse-fréquences de sorte que la loi d'Ampère s'applique :

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{B}. \tag{3.1.30}$$

3.1.3.1 Monopôles magnétiques

L'équation modélisant l'absence de monopôles magnétiques sur le champ magnétique $\boldsymbol{B}$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{3.1.31}$$

surdimensionne le système de la MHD complète. En ce sens, elle joue un rôle particulier et est souvent considérée séparément. Cette équation vient de l'équation de Faraday qui se réécrit :

$$\partial_t \boldsymbol{B} + \nabla \times \boldsymbol{E} = 0. \tag{3.1.32}$$

En appliquant l'opérateur de divergence sur cette équation, on obtient :

$$\partial_t \left(\nabla \cdot \boldsymbol{B} \right) = 0, \tag{3.1.33}$$

puisque

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \boldsymbol{E} \right) = 0. \tag{3.1.34}$$

Cette simplification signifie que l'équation (3.1.31) est constante par rapport au temps. Cette équation sera dans la suite considérée à part notamment lors de la résolution numérique sa prise en considération fait l'objet du paragraphe 4.1.1.2 du chapitre 4.

3.1.4 Système de la MHD complète

Au final avec le système monofluide, la loi d'Ohm, la loi des gazs parfaits et les équations de Maxwell, le système de la MHD complète se résume à :

$$\left\{\begin{aligned}
&\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v}) = 0\\
&\partial_t \rho \boldsymbol{v} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}) + \nabla\cdot\left(\boldsymbol{v}_e\otimes\rho_i\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_i\right)+\boldsymbol{v}_i\otimes\rho_e\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_e\right)\right) = \rho_q\boldsymbol{E}\\
&\qquad +\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} - \nabla p - \nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}\\
&\partial_t \rho\mathcal{E} + \nabla\cdot(\rho\mathcal{E}\boldsymbol{v}+p\boldsymbol{v}) + \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{\rho_i}{\rho_e}\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_i\right)\cdot\nabla p_e + \frac{\rho_e}{\rho_i}\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_e\right)\cdot\nabla p_i\right)\\
&+\frac{1}{\gamma-1}\left(\gamma p_e\nabla\cdot\left(\frac{\rho_i}{\rho_e}\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_i\right)\right)+\gamma p_i\nabla\cdot\left(\frac{\rho_e}{\rho_i}\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_e\right)\right)\right) = (\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}\\
&\qquad -\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}) + \boldsymbol{R}_e\cdot(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_e) - (\underline{\boldsymbol{\pi}}_e\colon\nabla\boldsymbol{v}_e + \underline{\boldsymbol{\pi}}_i\colon\nabla\boldsymbol{v}_i + \nabla\cdot\boldsymbol{Q})\\
&\qquad -\boldsymbol{v}\cdot\left(\nabla\cdot\left(\boldsymbol{v}_e\otimes\rho_i\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_i\right)+\boldsymbol{v}_i\otimes\rho_e\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_e\right)\right)\right) + \boldsymbol{v}\cdot\rho_q\boldsymbol{E},\\
&\partial_t\rho_q + \nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0,\\
&\frac{p}{\gamma-1} = \rho\mathcal{E} - \frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2,\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0},\\
&\nabla\times\boldsymbol{E} = -\partial_t\boldsymbol{B}\\
&\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J},\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0,\\
&\boldsymbol{E}\left(m_e n_i q_i - m_i n_e q_e\right) + \left(m_e n_i q_i \boldsymbol{v}_i - m_i n_e q_e \boldsymbol{v}_e\right)\times\boldsymbol{B} = m_e\nabla p_i - m_i\nabla p_e\\
&\qquad +m_e\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}_i - m_i\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}_e + \left(m_e+m_i\right)\boldsymbol{R}_e.
\end{aligned}\right. \tag{3.1.35}$$

3.1.5 Régime quasineutre

Pour passer des équations de Maxwell complètes au système d'équations de Maxwell basses fréquences, il faut faire tendre ϵ_0 vers 0. Par conséquent, la charge nette $\epsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ peut être négligée ce qui implique

$$\epsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}\approx 0 \Rightarrow \rho_q = 0. \tag{3.1.36}$$

Cette simplification dite de quasineutralité du plasma est souvent utilisée. Dans le cas d'un plasma constitué uniquement d'électrons et d'ions, elle est définie par la relation suivante :

$$q_i n_i + q_e n_e = 0, \tag{3.1.37}$$

où les charges q_i et q_e définies par :

$$q_i = Z_i e, \tag{3.1.38}$$

$$q_e = -e, \tag{3.1.39}$$

sont respectivement les charges des ions et les charges des électrons.

Cette hypothèse revient à supposer que les électrons compensent instantanément les séparations de charges macroscopiques pour maintenir la neutralité du plasma. Autrement dit, les hypothèses spatio-temporelles sur le système d'étude, à savoir des échelles de temps longues comparées à la période propre du plasma et des échelles de longueurs caractéristiques du plasma, permettent en MHD de supposer le plasma quasineutre.

Dans la suite, on prend $Z_i = 1$ car le plasma est supposé composé d'ions de Deutérium et de Tritium isotopes de l'hydrogène. La quasineutralité s'écrit :

$$n_e = n_i = n, \tag{3.1.40}$$

ce qui permet de simplifier les définitions de certaines variables de mélange telles que la densité ρ, la densité de courant $\boldsymbol{J}$, le terme de frottement $\boldsymbol{R}_e$ ou encore le coefficient de transport représentant la chaleur générée par les collisions $\mathcal{Q}$:

$$\rho = (m_e + m_i)\, n, \tag{3.1.41}$$

$$\boldsymbol{J} = en\,(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_e)\,, \tag{3.1.42}$$

$$\frac{\boldsymbol{R}_e}{en} = \eta \boldsymbol{J}, \tag{3.1.43}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} =& \frac{\boldsymbol{R}_e \cdot \boldsymbol{J}}{en},\\ =& \eta \boldsymbol{J}^2,\end{aligned} \tag{3.1.44}$$

avec η représentant la résistivité électrique

$$\eta = \frac{\nu_{ei} m_e}{ne^2}. \tag{3.1.45}$$

En utilisant ces définitions des variables de mélange on trouve :

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v} + \alpha_e \boldsymbol{J}, \tag{3.1.46}$$

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v} + \alpha_i \boldsymbol{J}, \tag{3.1.47}$$

avec

$$\alpha_e = -\frac{m_i}{en\,(m_i + m_e)}, \tag{3.1.48}$$

$$\alpha_i = \frac{m_e}{en\,(m_i + m_e)}. \tag{3.1.49}$$

3.1.5.1 La loi d'Ohm dans le régime quasineutre

Dans le cas général, la loi d'Ohm s'écrit :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\,(m_e n_i q_i - m_i n_e q_e) + (m_e n_i q_i \boldsymbol{v}_i - m_i n_e q_e \boldsymbol{v}_e) \times \boldsymbol{B} = m_e \nabla p_i - m_i \nabla p_e\\ + m_e \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_i - m_i \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_e + (m_e + m_i)\, \boldsymbol{R}_e.\end{aligned}$$

Avec l'hypothèse de quasineutralité elle se simplifie et devient :

$$\rho e \boldsymbol{E} + (\rho \boldsymbol{v} e - (m_i - m_e)\, \boldsymbol{J}) \times \boldsymbol{B} = m_e \nabla p_i - m_i \nabla p_e + m_e \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_i - m_i \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_e + \frac{\rho}{n} \boldsymbol{R}_e, \tag{3.1.50}$$

ce qui se réécrit :

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=\eta\boldsymbol{J}+\frac{m_i-m_e}{\rho e}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}+\frac{1}{\rho e}\left(m_e\nabla p_i-m_i\nabla p_e+m_e\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}_i-m_i\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}_e\right). \tag{3.1.51}$$

Ensuite, suivant les différentes simplifications faites sur cette équation le système de la MHD sera dit idéal, résistif ou encore de Hall :

$$\text{MHD idéale : } \boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=0, \tag{3.1.52}$$

$$\text{MHD résistive : } \boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=\eta\boldsymbol{J}, \tag{3.1.53}$$

$$\text{MHD de Hall : } \boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=\eta\boldsymbol{J}+\frac{m_i-m_e}{\rho e}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}. \tag{3.1.54}$$

3.1.5.2 MHD complète dans le régime quasineutre

Avec cette hypothèse de quasineutralité, le système de la MHD complète devient :

$$\left\{\begin{aligned}
\partial_t\rho+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) =&0,\\
\partial_t\rho\boldsymbol{v}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}) =&\nabla\cdot(\boldsymbol{v}_e\otimes\rho_i\alpha_i\boldsymbol{J}+\boldsymbol{v}_i\otimes\rho_e\alpha_e\boldsymbol{J})\\
&+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}-\nabla p-\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}},\\
\partial_t\rho\mathcal{E}+\nabla\cdot(\rho\mathcal{E}\boldsymbol{v}+p\boldsymbol{v}) =&\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{m_i}{m_e}\alpha_i\boldsymbol{J}\cdot\nabla p_e+\frac{m_e}{m_i}\alpha_e\boldsymbol{J}\cdot\nabla p_i\right)\\
&+\frac{1}{\gamma-1}\left(\gamma p_e\nabla\cdot\left(\frac{m_i}{m_e}\alpha_i\boldsymbol{J}\right)+\gamma p_i\nabla\cdot\left(\frac{m_e}{m_i}\alpha_e\boldsymbol{J}\right)\right)\\
&+(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}})+\eta\boldsymbol{J}^2\\
&-(\underline{\boldsymbol{\pi}}_e\colon\nabla\boldsymbol{v}_e+\underline{\boldsymbol{\pi}}_i\colon\nabla\boldsymbol{v}_i+\nabla\cdot\boldsymbol{Q})\\
&-\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\cdot(\boldsymbol{v}_e\otimes\rho_i(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_i)+\boldsymbol{v}_i\otimes\rho_e(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_e)\,)\,),\\
\nabla\cdot\boldsymbol{J} =&0,\\
\frac{p}{\gamma-1} =&\rho\mathcal{E}-\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2,\\
\nabla\times\boldsymbol{E} =&-\partial_t\boldsymbol{B},\\
\nabla\times\boldsymbol{B} =&\mu_0\boldsymbol{J},\\
\nabla\cdot\boldsymbol{B} =&0,\\
\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} =&\eta\boldsymbol{J}+\frac{m_i-m_e}{\rho e}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}\\
&+\frac{1}{\rho e}\left(m_e\nabla p_i-m_i\nabla p_e+m_e\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}_i-m_i\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}_e\right).
\end{aligned}\right. \tag{3.1.55}$$

Une dernière hypothèse largement utilisée est de supposer la masse électronique m_e faible [Fre87] telle que $m_e\to 0$. Avec cette hypothèse et la définition de la vitesse ionique en fonction de la vitesse de mélange (3.1.15) permet de supposer la vitesse de mélange égale à la vitesse ionique :

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}. \tag{3.1.56}$$

Avec cette dernière hypothèse le système de la MHD complète devient :

$$\left\{\begin{aligned}
\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) =& 0, \\
\partial_t \rho \boldsymbol{v} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) =& \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} - \nabla p - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}, \\
\partial_t \rho \mathcal{E} + \nabla \cdot (\rho \mathcal{E} \boldsymbol{v} + p \boldsymbol{v}) =& (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}) + \eta \boldsymbol{J}^2 \\
& - (\underline{\boldsymbol{\pi}}_e : \nabla \boldsymbol{v}_e + \underline{\boldsymbol{\pi}}_i : \nabla \boldsymbol{v}_i + \nabla \cdot \boldsymbol{Q}), \\
\nabla \cdot \boldsymbol{J} =& 0, \\
\frac{p}{\gamma - 1} =& \rho \mathcal{E} - \frac{1}{2} \rho |\boldsymbol{v}|^2, \\
\nabla \times \boldsymbol{E} =& - \partial_t \boldsymbol{B}, \\
\nabla \times \boldsymbol{B} =& \mu_0 \boldsymbol{J}, \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} =& 0, \\
\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} =& \eta \boldsymbol{J} + \frac{1}{en} (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} - \nabla p_e - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_e).
\end{aligned}\right. \tag{3.1.57}$$

3.1.6 MHD idéale

La MHD idéale [Fre87, Law57] est le modèle monofluide de base qui permet de déterminer les propriétés macroscopiques d'équilibre et de stabilité du plasma. Il représente le cas où le plasma est parfaitement conducteur. Le modèle décrit comment les forces magnétique, inertielle et de pression interagissent dans un plasma idéal, dans une géométrie magnétique arbitraire. La philosophie de la « MHD idéale » est d'obtenir la densité, les moments et les équations d'état qui gouvernent le comportement macroscopique d'un plasma magnétisé sur des pas de temps rapides dans lesquels les processus dissipatifs sont négligeables. Le système de la MHD idéale s'obtient donc en négligeant les effets résistifs du courant dans le système de la MHD complète (3.1.57), en utilisant la relation de la loi d'Ohm dans le cas idéal (3.1.52) et en négligeant les termes de second ordre :

$$\left\{\begin{aligned}
\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) =& 0, \\
\partial_t \rho \boldsymbol{v} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) =& \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} - \nabla p - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}, \\
\partial_t \rho \mathcal{E} + \nabla \cdot (\rho \mathcal{E} \boldsymbol{v} + p \boldsymbol{v}) =& (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v}, \\
\nabla \cdot \boldsymbol{J} =& 0, \\
\frac{p}{\gamma - 1} =& \rho \mathcal{E} - \frac{1}{2} \rho |\boldsymbol{v}|^2, \\
\nabla \times \boldsymbol{E} =& - \partial_t \boldsymbol{B}, \\
\nabla \times \boldsymbol{B} =& \mu_0 \boldsymbol{J}, \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} =& 0, \\
\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} =& 0.
\end{aligned}\right. \tag{3.1.58}$$

3.1.7 MHD résistive

A l'opposé de la MHD idéale, l'objectif de la MHD résistive est d'étendre l'échelle de temps au delà de l'échelle de temps de collision électronique afin de tenir compte des effets

dissipatifs dus à la résistivité électrique dans les plasmas. Plus précisément, dans le cas de la MHD résistive, le terme η représentant la résistivité électrique n'est plus négligeable (3.1.53). Le système complet de la MHD résistive s'écrit donc

$$\left\{\begin{aligned}
\partial_t\rho + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) =& 0,\\
\partial_t\rho\boldsymbol{v} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}) =& \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} - \nabla p - \nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}},\\
\partial_t\rho\mathcal{E} + \nabla\cdot(\rho\mathcal{E}\boldsymbol{v} + p\boldsymbol{v}) =& (\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\cdot(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}) + \eta\boldsymbol{J}^2\\
&- (\underline{\boldsymbol{\pi}}_e\colon\nabla\boldsymbol{v}_e + \underline{\boldsymbol{\pi}}_i\colon\nabla\boldsymbol{v}_i + \nabla\cdot\boldsymbol{Q}),\\
\nabla\cdot\boldsymbol{J} =& 0,\\
\frac{p}{\gamma-1} =& \rho\mathcal{E} - \frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2,\\
\nabla\times\boldsymbol{E} =& -\partial_t\boldsymbol{B},\\
\nabla\times\boldsymbol{B} =& \mu_0\boldsymbol{J},\\
\nabla\cdot\boldsymbol{B} =& 0,\\
\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} =& \eta\boldsymbol{J}.
\end{aligned}\right. \tag{3.1.59}$$

3.1.8 Système conservatif de la MHD idéale

Dans le cas de la MHD idéale, on reprend le système des équations temporelles afin de les mettre sous forme conservative. Commençons d'abord par définir les relations suivantes qui serviront dans la suite :

$$\begin{aligned}
(\nabla\times a)\times a =& a\cdot\nabla a - \nabla\frac{|a|^2}{2},\\
=& \nabla\cdot\left(a\otimes a - \frac{|a|^2}{2}Id\right) - (\nabla\cdot a)a, \qquad (3.1.60)\\
\nabla\times(a\times b) =& \nabla\cdot(a\otimes b - b\otimes a). \qquad (3.1.61)
\end{aligned}$$

L'équation de continuité étant déjà sous forme conservative, nous cherchons à établir l'équation de conservation de la quantité de mouvement mise sous forme conservative. Pour cela, il faut reprendre le terme représentant la force magnétique : $\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$. Avec la relation (3.1.60), la loi d'Ampère simplifiée (3.1.30) multipliée par le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ se réécrit :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} =& \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B},\\
=& \nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{2\mu_0}Id\right) - \cancel{(\nabla\cdot\boldsymbol{B})}\boldsymbol{B}. \qquad (3.1.62)
\end{aligned}$$

Ensuite, nous définissons plusieurs variables et notamment la pression magnétique p_m qui s'exprime en fonction du champ magnétique $\boldsymbol{B}$:

$$p_m = \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{2\mu_0}, \tag{3.1.63}$$

avec μ_0 la perméabilité du vide. De même, nous définissons une nouvelle variable $\boldsymbol{B}^*$ pour définir le champ magnétique :

$$\boldsymbol{B}^* = \frac{\boldsymbol{B}}{\sqrt{\mu_0}}. \tag{3.1.64}$$

Avec ces variables, la force magnétique s'exprime par :

$$\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} = \nabla \cdot (-p_m \mathbb{I} + \boldsymbol{B}^* \otimes \boldsymbol{B}^*). \tag{3.1.65}$$

Cette expression permet de réécrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement de manière conservative :

$$\partial_t(\rho \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} + (p + p_m)\mathbb{I} - \boldsymbol{B}^* \otimes \boldsymbol{B}^*) = 0, \tag{3.1.66}$$

ou

$$\partial_t(\rho \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} + p_T)\mathbb{I} - \boldsymbol{B}^* \otimes \boldsymbol{B}^*) = 0, \tag{3.1.67}$$

avec p_T la pression totale définie par :

$$\begin{aligned} p_T =& p + p_m, \\ =& p + \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{2\mu_0}. \end{aligned} \tag{3.1.68}$$

De même, l'équation de conservation de l'énergie est écrite de manière conservative. Pour cela, commençons tout d'abord par multiplier l'équation de conservation du flux magnétique (loi de Faraday) par $\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}$:

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} \cdot \partial_t \boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E} =& 0, \\ \partial_t(\frac{\boldsymbol{B}^2}{2\mu_0}) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{E} \times \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\right) + \boldsymbol{E} \cdot \left(\nabla \times \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\right) =& 0, \\ \partial_t(\frac{\boldsymbol{B}^2}{2\mu_0}) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{E} \times \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\right) =& -\boldsymbol{E} \cdot J. \end{aligned} \tag{3.1.69}$$

L'énergie totale $\mathbb{E}$ est définie par :

$$\mathbb{E} = \rho \mathcal{E} + \frac{\boldsymbol{B}^2}{2\mu_0}. \tag{3.1.70}$$

L'addition de cette équation et de l'équation de conservation de l'énergie (3.1.22) donne une équation de conservation sur cette énergie totale $\mathbb{E}$:

$$\partial_t \mathbb{E} + \nabla \cdot (\rho \mathcal{E} \boldsymbol{v} + p \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{E} \times \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\right) = (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}, \tag{3.1.71}$$

L'énergie totale représente la somme de l'énergie hydrodynamique et de l'énergie magnétique. En utilisant la loi d'Ohm idéale (3.1.52) cette équation de conservation se réécrit :

$$\partial_t \mathbb{E} + \nabla \cdot \left(\rho \mathcal{E} \boldsymbol{v} + p \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \frac{\boldsymbol{B}^2}{\mu_0} - \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} \cdot \boldsymbol{v}\right) \boldsymbol{B}\right) = 0.$$

En utilisant la définition de $\boldsymbol{B}^*$ (3.1.64) et en négligeant le courant, l'équation ci-dessus se met sous la forme :

$$\partial_t \mathbb{E} + \nabla \cdot \left(\mathbb{E}\boldsymbol{v} + p_T \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{B}^* \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{B}^* + \eta \boldsymbol{J} \times \frac{\boldsymbol{B}^*}{\sqrt{\mu_0}} + \boldsymbol{Q} + \underline{\boldsymbol{\pi}} \cdot \boldsymbol{v} \right) = 0. \tag{3.1.72}$$

La modélisation avec comme variable l'énergie totale, plutôt que les deux énergies, permet de garder l'équilibre entre ces deux énergies. Par conséquent, cette équation de conservation de l'énergie totale remplace la conservation sur l'énergie du système précédent. Pour écrire l'équation de Faraday (3.1.28) sous forme conservative, on remplace $\boldsymbol{E}$ par son expression, donnée par la loi d'Ohm idéale (3.1.52) et le résultat est divisé par $\sqrt{\mu_0}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \left(\partial_t \boldsymbol{B} + \nabla \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v}) \right) =& 0, \\ \text{i.e.} \quad \partial_t \boldsymbol{B}^* + \nabla \cdot (\boldsymbol{B}^* \otimes \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{B}^*) =& 0. \end{aligned} \tag{3.1.73}$$

Pour résumer, la forme conservative de la MHD idéale s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) =& 0, \\ \partial_t (\rho \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} + (p_T) Id - \boldsymbol{B}^* \otimes \boldsymbol{B}^*) =& 0, \\ \partial_t \mathbb{E} + \nabla \cdot (\mathbb{E}\boldsymbol{v} + (p_T)\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{B}^* \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{B}^*) =& 0, \\ \partial_t \boldsymbol{B}^* + \nabla \cdot (\boldsymbol{B}^* \otimes \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{B}^*) =& 0. \end{aligned} \right. \tag{3.1.74}$$

3.2 Analyse des propriétés spectrales

Dans le passé, la résolution du système idéal a été basée sur des schémas de Rusanov ou encore Lax-Wendroff puis sur des schémas de type upwind [BW88, DW94]. Leurs travaux sont basés sur la résolution de ce système conservatif (3.1.74) composé de quatre équations dont deux scalaires et deux vectorielles. Les valeurs propres de ce système 8×8 sont bien connues [JT64]. Elles correspondent à l'entropie et le flux magnétique avec la vitesse v, les deux ondes d'Alfven avec les vitesses $v \pm c_a$ et les quatre ondes magnéto-acoustiques : deux rapides et deux lentes avec les vitesses respectives $v \pm c_f$ et $v \pm c_s$. Elles se représentent en 1D par le diagramme sur la figure 3.1.

Pour gérer le surdimensionnement de ce système, dû à l'équation : $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$, Powell a proposé de rajouter cette équation en terme source [Pow94] :

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) =& 0, \\ \partial_t (\rho \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} + p_T Id - \boldsymbol{B}^* \otimes \boldsymbol{B}^*) =& - \boldsymbol{B}^* \nabla \cdot \boldsymbol{B}^*, \\ \partial_t \mathbb{E} + \nabla \cdot (\mathbb{E}\boldsymbol{v} + p_T \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{B}^* \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{B}^*) =& - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B}^* \nabla \cdot \boldsymbol{B}^*, \\ \partial_t \boldsymbol{B}^* + \nabla \cdot (\boldsymbol{B}^* \otimes \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{B}^*) =& - \boldsymbol{v} \nabla \cdot \boldsymbol{B}^*. \end{aligned} \right. \tag{3.2.1}$$

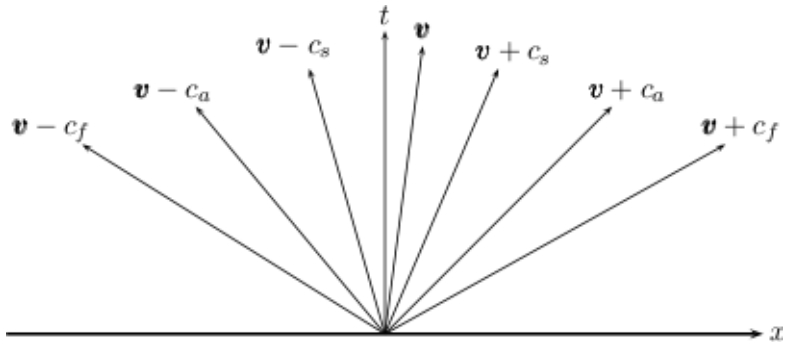


FIGURE 3.1 – Ondes de Riemann dans le problème de MHD 1D

Cette approche a pour intérêt de rendre ce système strictement hyperbolique et donc diagonalisable. Avec les variables conservatives du système MHD, il s'écrit :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot F(W) + S(W) = 0, \tag{3.2.2}$$

avec W le vecteur composé des variables conservatives du système :

$$W = [\rho, \rho\boldsymbol{v}_1, \rho\boldsymbol{v}_2, \rho\boldsymbol{v}_3, \mathbb{E}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3]^T, \tag{3.2.3}$$

et où $S(W)$ représente le second membre

$$S(W) = \nabla \cdot \boldsymbol{B} \left[0, \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}, \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B}}{\mu_0}, \boldsymbol{v}\right]^T. \tag{3.2.4}$$

Ainsi, ce système peut se réécrire sous forme quasi-linéaire :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} A_i \frac{\partial W}{\partial x_i} = 0, \tag{3.2.5}$$

où A_i sont les matrices jacobiennes telles que :

$$A_i = \frac{\partial F_i}{\partial W} + S_i, \tag{3.2.6}$$

où S_i est une matrice définie par :

$$S_i = \left[0, \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}, \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B}}{\mu_0}, \boldsymbol{v}\right]^T a_i^T, \tag{3.2.7}$$

avec

$$\begin{aligned} a_1^T &= [0,0,0,0,0,1,0,0]^T, \\ a_2^T &= [0,0,0,0,0,0,1,0]^T, \\ a_2^T &= [0,0,0,0,0,0,0,1]^T. \end{aligned}$$

Ce terme source $S(W)$ étant proportionnel à $\nabla \cdot \boldsymbol{B}$, il est nul pour le cas d'une solution exacte. Il présente également l'intérêt de ne pas changer les sept valeurs propres ainsi que les vecteurs propres associés. Pour obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres de ces matrices jacobiennes A_i, on a utilisé les 2 changements de variables successifs proposés par Jameson [Jam06]. Tout d'abord, nous utilisons le système de variables primitives $\tilde{W}$:

$$\tilde{W} = [\rho, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, p, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3]^T . \tag{3.2.8}$$

Avec ce changement de variable, l'équation (3.2.5) se réécrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \tilde{W}} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} A_i \frac{\partial W}{\partial \tilde{W}} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \tilde{A}_i \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_i} &= 0, \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

avec

$$\tilde{A}_i = \tilde{M}^{-1} A_i \tilde{M}, \quad \text{où} \quad \tilde{M}^{-1} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial W} \text{ et } \tilde{M} = \frac{\partial W}{\partial \tilde{W}}. \tag{3.2.10}$$

Soit le vecteur normale n :

$$n = (n_1, n_2, n_3)^T . \tag{3.2.11}$$

La matrice jacobienne $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{3} n_i \tilde{A}_i, \tag{3.2.12}$$

des variables primitives s'écrit :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_n & n_1\rho & n_2\rho & n_3\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{v}_n & 0 & 0 & \frac{n_1}{\rho} & \frac{n_1\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_n}{\rho\mu_0} & \frac{n_1\boldsymbol{B}_2}{\rho\mu_0} & \frac{n_1\boldsymbol{B}_3}{\rho\mu_0} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{v}_n & 0 & \frac{n_2}{\rho} & \frac{n_2\boldsymbol{B}_1}{\rho\mu_0} & \frac{n_2\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_n}{\rho\mu_0} & \frac{n_2\boldsymbol{B}_3}{\rho\mu_0} \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{v}_n & \frac{n_3}{\rho} & \frac{n_3\boldsymbol{B}_1}{\rho\mu_0} & \frac{n_3\boldsymbol{B}_2}{\rho\mu_0} & \frac{n_3\boldsymbol{B}_3 - \boldsymbol{B}_n}{\rho\mu_0} \\ 0 & n_1\rho s^2 & n_2\rho s^2 & n_3\rho s^2 & \boldsymbol{v}_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_n & n_2\boldsymbol{B}_1 & n_3\boldsymbol{B}_1 & 0 & \boldsymbol{v}_n & 0 & 0 \\ 0 & n_1\boldsymbol{B}_2 & n_2\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_n & n_3\boldsymbol{B}_2 & 0 & 0 & \boldsymbol{v}_n & 0 \\ 0 & n_1\boldsymbol{B}_3 & n_2\boldsymbol{B}_3 & n_3\boldsymbol{B}_3 - \boldsymbol{B}_n & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$$

où s est la vitesse du son définie telle que :

$$s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \tag{3.2.13}$$

Ensuite, les matrices jacobiennes A_i subissent un second changement de variable afin d'obtenir une matrice $\bar{A}$ symétrique. Ce vecteur formé des variables entropiques a pour forme différentielle :

$$d\bar{W} = \left[\frac{dp}{\rho s}, d\boldsymbol{v}_1, d\boldsymbol{v}_2, d\boldsymbol{v}_3, \frac{dp - s^2 d\rho}{\rho s}, \frac{d\boldsymbol{B}_1}{\sqrt{\rho\mu_0}}, \frac{d\boldsymbol{B}_2}{\sqrt{\rho\mu_0}}, \frac{d\boldsymbol{B}_3}{\sqrt{\rho\mu_0}} \right]^T , \tag{3.2.14}$$

où la cinquième variable correspond à l'entropie. Ainsi, la nouvelle matrice jacobienne symétrique $\bar{A}$ a pour expression :

$$\begin{pmatrix}
\boldsymbol{v}_n & n_1 s & n_2 s & n_3 s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
n_1 s & \boldsymbol{v}_n & 0 & 0 & 0 & \frac{n_1\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_n}{\sqrt{\rho\mu_0}} & \frac{n_1\boldsymbol{B}_2}{\sqrt{\rho\mu_0}} & \frac{n_1\boldsymbol{B}_3}{\sqrt{\rho\mu_0}} \\
n_2 s & 0 & \boldsymbol{v}_n & 0 & 0 & \frac{n_2\boldsymbol{B}_1}{\sqrt{\rho\mu_0}} & \frac{n_2\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_n}{\sqrt{\rho\mu_0}} & \frac{n_2\boldsymbol{B}_3}{\sqrt{\rho\mu_0}} \\
n_3 s & 0 & 0 & \boldsymbol{v}_n & 0 & \frac{n_3\boldsymbol{B}_1}{\sqrt{\rho\mu_0}} & \frac{n_3\boldsymbol{B}_2}{\sqrt{\rho\mu_0}} & \frac{n_3\boldsymbol{B}_3 - \boldsymbol{B}_n}{\sqrt{\rho\mu_0}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{v}_n & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{n_1\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_n}{\sqrt{\rho\mu_0}} & \frac{n_2\boldsymbol{B}_1}{\sqrt{\rho\mu_0}} & \frac{n_3\boldsymbol{B}_1}{\sqrt{\rho\mu_0}} & 0 & \boldsymbol{v}_n & 0 & 0 \\
0 & \frac{n_1\boldsymbol{B}_2}{\sqrt{\rho\mu_0}} & \frac{n_2\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_n}{\sqrt{\rho\mu_0}} & \frac{n_3\boldsymbol{B}_2}{\sqrt{\rho\mu_0}} & 0 & 0 & \boldsymbol{v}_n & 0 \\
0 & \frac{n_1\boldsymbol{B}_3}{\sqrt{\rho\mu_0}} & \frac{n_2\boldsymbol{B}_3}{\sqrt{\rho\mu_0}} & \frac{n_3\boldsymbol{B}_3 - \boldsymbol{B}_n}{\sqrt{\rho\mu_0}} & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{v}_n
\end{pmatrix}$$

Les matrices de transformation $\bar{M}$ et $\bar{M}^{-1}$ permettant de passer de A à $\bar{A}$ sont :

$$\bar{M} = \frac{\partial W}{\partial \tilde{W}}\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \bar{W}} = \begin{pmatrix}
\frac{\rho}{s} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho}{s} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\rho}{s}\boldsymbol{v}_1 & \rho & 0 & 0 & -\frac{\rho}{s}\boldsymbol{v}_1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\rho}{s}\boldsymbol{v}_2 & 0 & \rho & 0 & -\frac{\rho}{s}\boldsymbol{v}_2 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\rho}{s}\boldsymbol{v}_3 & 0 & 0 & \rho & -\frac{\rho}{s}\boldsymbol{v}_3 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\rho}{s}H & \rho\boldsymbol{v}_1 & \rho\boldsymbol{v}_2 & \rho\boldsymbol{v}_3 & -\frac{\rho}{s}\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2} & \sqrt{\frac{\rho}{s}}\boldsymbol{B}_1 & \sqrt{\frac{\rho}{s}}\boldsymbol{B}_2 & \sqrt{\frac{\rho}{s}}\boldsymbol{B}_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\rho s} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\rho s} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\rho s}
\end{pmatrix}$$

et

$$\bar{M}^{-1} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \tilde{W}}\frac{\partial \tilde{W}}{\partial W} = \begin{pmatrix}
\bar{\gamma}\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{s} & -\bar{\gamma}\boldsymbol{v}_1 & -\bar{\gamma}\boldsymbol{v}_2 & -\bar{\gamma}\boldsymbol{v}_3 & \bar{\gamma} & -\bar{\gamma}\frac{\boldsymbol{B}_1}{\mu_0} & -\bar{\gamma}\frac{\boldsymbol{B}_2}{\mu_0} & -\bar{\gamma}\frac{\boldsymbol{B}_3}{\mu_0} \\
-\frac{\boldsymbol{v}_1}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\boldsymbol{v}_2}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\boldsymbol{v}_3}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\bar{\gamma}\left(|\boldsymbol{v}|^2 - H\right) & -\bar{\gamma}\boldsymbol{v}_1 & -\bar{\gamma}\boldsymbol{v}_2 & -\bar{\gamma}\boldsymbol{v}_3 & \bar{\gamma} & -\bar{\gamma}\frac{\boldsymbol{B}_1}{\mu_0} & -\bar{\gamma}\frac{\boldsymbol{B}_2}{\mu_0} & -\bar{\gamma}\frac{\boldsymbol{B}_3}{\mu_0} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\rho\mu_0}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\rho\mu_0}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\rho\mu_0}}
\end{pmatrix}$$

avec H qui représente l'enthalpie totale :

$$H = \frac{s^2}{\gamma - 1} + \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2}, \tag{3.2.15}$$

et $\bar{\gamma} = \dfrac{\gamma - 1}{\rho s}$. Il est possible, à l'aide du logiciel de calcul Maple, de définir les valeurs propres Λ de ces matrices jacobiennes $\bar{A}$:

$$\Lambda = [\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n + c_a, \boldsymbol{v}_n - c_a, \boldsymbol{v}_n + c_f, \boldsymbol{v}_n - c_f, \boldsymbol{v}_n + c_s, \boldsymbol{v}_n - c_s]. \tag{3.2.16}$$

Comme précisé en début de paragraphe, elles représentent respectivement : pour les deux premières l'advection, les deux suivantes les ondes d'Alfven puis les ondes magnéto-acoustiques rapides et pour finir les lentes, avec c_a, c_f et c_s ayant pour expression :

$$c_a = \frac{\boldsymbol{B}_n}{\sqrt{\rho\mu_0}}, \tag{3.2.17}$$

$$c_f^2 = \frac{1}{2}\left[\left(s^2 + \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{\rho\mu_0}\right) + \sqrt{\left(s^2 + \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{\rho\mu_0}\right)^2 - 4s^2\frac{\boldsymbol{B}_n^2}{\rho\mu_0}}\right], \tag{3.2.18}$$

$$c_s^2 = \frac{1}{2}\left[\left(s^2 - \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{\rho\mu_0}\right) + \sqrt{\left(s^2 + \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{\rho\mu_0}\right)^2 - 4s^2\frac{\boldsymbol{B}_n^2}{\rho\mu_0}}\right]. \tag{3.2.19}$$

De même, le logiciel de calcul Maple nous a donné les vecteurs propres associés à chacunes de ces valeurs propres. Si pour la valeur propre $\boldsymbol{v}_n$ les deux vecteurs propres sont assez simples :

$$r1 = [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]^T, \tag{3.2.20}$$

$$\text{et } r2 = [0, 0, 0, 0, 0, n_1, n_2, n_3]^T, \tag{3.2.21}$$

les autres vecteurs propres sont quant à eux plus compliqués (pour plus de détails voir les articles [Jam06, RB96]). Les vecteurs propres associés sont mis dans la matrice R telle que :

$$\bar{A} = R\Lambda R^T, \tag{3.2.22}$$

où Λ est la matrice diagonale composée des valeurs propres. Au final, la matrice jacobienne A se diagonalise avec l'expression suivante :

$$A = \bar{M}R\Lambda R^T\bar{M}^{-1}. \tag{3.2.23}$$

Dans certains cas, deux valeurs propres peuvent être égales. Par conséquent, le système de la MHD n'est pas strictement hyperbolique. Dans [BW88], Brio et Wu montrent que les équations de la MHD ne sont pas convexes en prouvant que dans certains cas les champs caractéristiques peuvent être ni vraiment non linéaire ni linéairement dégénéré.

3.3 MHD réduite résistive

Cette partie a pour objectif de présenter différents systèmes réduits de la MHD en détaillant les différentes hypothèses nécessaires pour obtenir ces modèles. Le premier article introduisant le système d'équations de la MHD réduite, dans une géométrie cylindrique en supposant une pression faible dans le plasma, a été écrit par Strauss en 1976 [Str76].

Ensuite, plusieurs articles ont introduit les effets toroïdaux [BZV98, Izz83] ou une pression dans le plasma plus importante [Str77].

Le système de la MHD réduite représente un modèle dans lequel le nombre de champs scalaires évoluant en temps est réduit. Par conséquent un traitement analytique est plus envisageable et, dans le cas d'une simulation numérique, les conditions de calcul sont plus raisonnables. Ainsi, à partir du système de la MHD complète nous obtiendrons tout d'abord le système de MHD réduite résistive étendue puis celui du Current Hole et pour finir l'équation d'équilibre de Grad-Shafranov.

3.3.1 MHD réduite résistive étendue

Dans un tokamak un champ magnétique puissant est utilisé dans la direction toroïdale pour confiner le plasma et ce afin d'atteindre les conditions nécessaires à la fusion thermonucléaire. Cette hypothèse fondamentale permet de décomposer le champ magnétique [HC07] suivant sa direction toroïdale $\boldsymbol{B}_\phi$ et poloïdale $\boldsymbol{B}_\theta$ (1.3.3) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B}_\phi + \boldsymbol{B}_\theta, \\ &= F\nabla\phi + \nabla\psi \times \nabla\phi, \\ &= F\nabla\phi + \nabla \times (\psi\nabla\phi), \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

avec F un scalaire ne dépendant pas du temps mais pouvant dépendre de l'espace et ψ le flux magnétique. On a supposé ici que F est une constante ayant une valeur importante telle que : $|F\nabla\phi| >> |\nabla\psi \times \nabla\phi|$. Sous cette même hypothèse, la vitesse est décomposée selon le champ magnétique $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{v} = v_n\boldsymbol{B} + \boldsymbol{v}_\perp, \tag{3.3.2}$$

où v_n la vitesse parallèle aux lignes de champs magnétiques et $\boldsymbol{v}_\perp$ la vitesse perpendiculaire sont définies par :

$$v_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B}, \tag{3.3.3}$$

$$\boldsymbol{v}_\perp = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B}. \tag{3.3.4}$$

Pour assurer la condition d'absence des monopôles magnétiques F doit satisfaire une hypothèse supplémentaire :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \Rightarrow \nabla F \cdot \nabla\phi = 0. \tag{3.3.5}$$

Pour obtenir, ce système de la MHD réduite résistive on doit encore définir la variable de la vorticité W :

$$W = \frac{\boldsymbol{B}}{F} \cdot \omega, \tag{3.3.6}$$

où

$$\omega = \nabla \times \boldsymbol{v}_\perp. \tag{3.3.7}$$

Le système de la MHD réduite résistive, dont les détails du développement sont développés en annexe 3.A, se résume à :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\partial_t \rho + \nabla\left(\rho v_n\right)\cdot \boldsymbol{B} + \rho \nabla\cdot \boldsymbol{v}_\perp + \boldsymbol{v}_\perp\cdot\nabla\rho = 0,\\
&\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\rho R^2 \partial_t\left(v_n \boldsymbol{B}\right)\right) + \frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\rho R^2\partial_t \boldsymbol{v}_\perp\right)\\
&+\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\frac{1}{2}\nabla\rho R^2\times\nabla|\boldsymbol{v}|^2\right) - \frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\nabla\rho R^2\times\left(\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times v_n\boldsymbol{B}\right)\right)\right)\\
&+W\nabla\rho R^2\cdot\left(v_n\boldsymbol{B}+\boldsymbol{v}_\perp\right) - \rho R^2\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times v_n\boldsymbol{B}\right)\right)\\
&-\nabla\left(\frac{v_n|\boldsymbol{B}|^2}{F}\rho R^2\right)\cdot\omega + \rho R^2\nabla\left(v_n W\right)\cdot\boldsymbol{B} + \rho R^2\nabla W\cdot\boldsymbol{v}_\perp\\
&+\rho R^2 W\nabla\cdot\boldsymbol{v}_\perp - \rho R^2\left(\boldsymbol{v}\times\omega\right)\cdot\nabla\times\frac{\boldsymbol{B}}{F} + \frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\nabla R^2\times\nabla p\right)\\
&= \boldsymbol{B}\cdot\nabla\left(R^2\boldsymbol{J}\cdot\frac{\boldsymbol{B}}{F}\right) - \nabla\left(\frac{R^2|\boldsymbol{B}|^2}{F}\right)\cdot\boldsymbol{J} + R^2(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla\times\frac{\boldsymbol{B}}{F}\\
&-\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(R^2\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}\right),\\
&\rho|\boldsymbol{B}|^2\partial_t v_n + \rho\boldsymbol{B}\cdot\partial_t\boldsymbol{v}_\perp + \rho|\boldsymbol{B}|^2\partial_{\boldsymbol{v}} v_n = \rho|\boldsymbol{B}|^2 v_n\nabla\cdot\boldsymbol{v}_\perp - \partial_{\boldsymbol{B}} p - \rho v_n^2\partial_{\boldsymbol{B}}\frac{|\boldsymbol{B}|^2}{2}\\
&+2\rho v_n\boldsymbol{v}_\perp\cdot\left(\mu_0\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} + \nabla\frac{|\boldsymbol{B}|^2}{2}\right) - \rho\partial_{\boldsymbol{B}}\frac{\boldsymbol{v}_\perp^2}{2} + \rho\boldsymbol{B}\cdot\left(\boldsymbol{v}_\perp\times\omega\right)\\
&-2\rho v_n\partial_{\boldsymbol{B}}\left(\boldsymbol{v}_\perp\cdot\boldsymbol{B}\right) + \rho v_n\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\left(\eta\boldsymbol{J}\right) - \boldsymbol{B}\cdot\left(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}\right),\\
&\partial_t p + \nabla\left(p v_n\right)\cdot\boldsymbol{B} + \nabla\cdot\left(p\boldsymbol{v}_\perp\right) + \left(\gamma-1\right)p\left(\nabla v_n\cdot\boldsymbol{B} + \nabla\cdot\boldsymbol{v}_\perp\right)\\
&= -\left(\gamma-1\right)\left(\underline{\boldsymbol{\pi}}_e\colon\nabla\boldsymbol{v}_e + \underline{\boldsymbol{\pi}}_i\colon\nabla\boldsymbol{v}_i + \nabla\cdot\boldsymbol{Q} - \eta\boldsymbol{J}^2\right),\\
&\partial_t\psi = -R^2\boldsymbol{B}\cdot\nabla U - \frac{R^2}{F}\boldsymbol{B}\cdot\eta\boldsymbol{J},\\
&\mu_0\boldsymbol{J} = \nabla F\times\nabla\phi - \Delta^*\psi\nabla\phi + \frac{1}{R^2}\nabla_\perp\left(\partial_\phi\psi\right),\\
&\boldsymbol{v}_\perp = \frac{F}{|\boldsymbol{B}|^2}\left(\boldsymbol{B}\times\nabla U + \eta\frac{\boldsymbol{B}}{F}\times\boldsymbol{J} - \frac{\boldsymbol{B}}{F}\times\left(R^2\boldsymbol{B}\cdot\nabla U + \frac{R^2}{F}\boldsymbol{B}\cdot\eta\boldsymbol{J}\right)\nabla\phi\right),
\end{aligned}
\right.
\tag{3.3.8}
$$

où $\partial_{\boldsymbol{B}}$ la dérivée suivant le champ magnétique est définie par :

$$\partial_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}\cdot\nabla \quad , \tag{3.3.9}$$

et Δ^* est l'opérateur de Grad-Shafranov dont la définition est donnée par l'équation (3.3.40) :

$$\Delta^*\psi = \Delta\psi - \frac{\partial_R\psi}{R}. \tag{3.3.10}$$

La variable U est le potentiel vitesse défini avec le développement de l'équation de Faraday. En effet, avec l'hypothèse que F est une constante par rapport au temps alors l'équation

de Faraday se réécrit :

$$\nabla \times (\partial_t \psi \nabla \phi + \boldsymbol{E}) = 0. \tag{3.3.11}$$

De cette équation on en déduit qu'il existe un potentiel vitesse U tel que :

$$\partial_t \psi \nabla \phi + \boldsymbol{E} = U_0 \nabla U, \tag{3.3.12}$$

avec U_0 la constante qui pour simplifier les calculs, sera supposée égale à $-F$, sous la condition sur F suivante :

$$\nabla F \times \nabla U = 0. \tag{3.3.13}$$

Ce système (3.3.8) présente encore de nombreux termes, mais il est encore souvent simplifié. En effet, les particules suivent les lignes de champs magnétique du plasma. Mais ces lignes de champ magnétique étant principalement toroïdales, une hypothèse souvent émise est de considérer ce mouvement uniquement toroïdal. Pour cela, cette simplification consiste à ne considérer que la composante toroïdale du champ magnétique :

$$\boldsymbol{B} = F \nabla \phi. \tag{3.3.14}$$

Cette hypothèse simplifie nombre de calculs et permet d'obtenir une approximation pour le terme $|\boldsymbol{B}|^2$, la vitesse perpendiculaire $\boldsymbol{v}_\perp$ et la vorticité W :

$$|\boldsymbol{B}|^2 = \frac{F^2}{R^2}, \tag{3.3.15}$$

$$\boldsymbol{v}_\perp = R^2 \nabla \phi \times \nabla U + \eta \frac{R^2}{F} \nabla \phi \times \boldsymbol{J}, \tag{3.3.16}$$

$$\begin{aligned} W &= \nabla \phi \cdot \omega, \\ &= \nabla \phi \cdot \nabla \times \boldsymbol{v}_\perp, \\ &= \Delta_\perp U + \nabla \cdot \left(\frac{\eta}{F} \boldsymbol{J}_\perp \right), \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

où

$$\boldsymbol{J}_\perp = R^2((\nabla \phi \times \boldsymbol{J}) \times \nabla \phi), \tag{3.3.18}$$

et les opérateurs $\Delta_\perp$ et $\nabla_\perp$ sont défini par :

$$\Delta_\perp U = \nabla \cdot \nabla_\perp U, \tag{3.3.19}$$

$$\nabla_\perp U = R^2 \nabla \phi \times (\nabla U \times \nabla \phi). \tag{3.3.20}$$

Une hypothèse qui est aussi souvent utilisée pour réduire le système de la MHD est de considérer le courant comme principalement toroïdal :

$$\boldsymbol{J} = -\frac{1}{\mu_0} \Delta^* \psi \nabla \phi, \tag{3.3.21}$$

avec cette hypothèse la vitesse perpendiculaire $\boldsymbol{v}_\perp$ se réécrit encore plus simplement :

$$\boldsymbol{v}_\perp = R^2 \nabla \phi \times \nabla U. \tag{3.3.22}$$

Ces hypothèses supplémentaires permettent de recalculer les termes $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{J}$ et $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_\perp$

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{F}{\mu_0 R^2} \Delta^* \psi, \tag{3.3.23}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_\perp = \frac{1}{R} [U, R^2], \tag{3.3.24}$$

où $[.,.]$ sont les crochets de Poisson définis par :

$$[a, b] = (\nabla a \times \nabla b) \cdot e_\phi. \tag{3.3.25}$$

On remarque que cette simplification supposant la prépondérance des effets toroïdaux sur ceux poloïdaux n'est pas vraie dans le cas de la force de Lorentz. En effet, sur ce terme $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$ les effets toroïdaux s'annulent, il faut donc conserver le champ magnétique en intégralité. De même, la simplification de la loi de Faraday ($5^{\text{ème}}$ équation du système (3.3.8)) est une équation sur le flux magnétique ψ, c'est-à-dire sur les variations des effets non dominants du champ magnétique $\boldsymbol{B}$. C'est la raison pour laquelle on n'utilise pas l'hypothèse d'un mouvement principalement toroïdal ni sur le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ ni sur la densité de courant $\boldsymbol{J}$ dans le cas de la loi de Faraday :

$$\partial_t \psi = R[\psi, U] - F \partial_\phi U + \eta \left(j_\phi - j_c \right), \tag{3.3.26}$$

avec j_ϕ la densité de courant toroïdale et j_c considéré comme un courant d'entrée définis par :

$$\begin{aligned} j_\phi &= -R^2 \nabla \phi \cdot \boldsymbol{J}, \\ &= \frac{\Delta^* \psi}{\mu_0}, \end{aligned} \tag{3.3.27}$$

$$j_c = \frac{R^2}{F} \nabla \psi \times \nabla \phi \cdot \boldsymbol{J}. \tag{3.3.28}$$

Avec ces dernières hypothèses le système temporel de la MHD se réduit à :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\partial_t \rho + \frac{F}{R^2}\partial_\phi\left(\rho v_n\right) + \frac{1}{R}[U,\rho R^2] = 0,\\
&\nabla\cdot\left(\rho R^2\left(\partial_t\left(v_n\boldsymbol{B}\right)\right)\times\nabla\phi\right) + \nabla\cdot\left(\rho R^2\nabla_\perp\partial_t U\right) + \frac{1}{2R}[\rho R^2,|\boldsymbol{v}|^2]\\
&-\nabla\phi\cdot\left(\nabla\rho R^2\times\left(\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times v_n\boldsymbol{B}\right)\right)\right) + \frac{F}{R^2}\partial_\phi\left(v_n W\rho R^2\right) + \frac{1}{R}[U,\rho R^4 W]\\
&-\rho R^2\nabla\phi\cdot\nabla\times\left(\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times v_n\boldsymbol{B}\right)\right) - \nabla\left(\frac{v_n|\boldsymbol{B}|^2}{F}\rho R^2\right)\cdot\omega + \frac{1}{R}[R^2,p]\\
&= -\frac{F}{\mu_0 R^2}\partial_\phi\Delta^*\psi + \frac{1}{\mu_0 R}[\psi,\Delta^*\psi] - \nabla\phi\cdot\nabla\times\left(R^2\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}\right),\\
&\rho\frac{F^2}{R^2}\partial_t v_n + \rho\frac{F^2}{R^2}\partial_{\boldsymbol{v}} v_n = -\frac{F}{R^2}\partial_\phi p + \rho v_n\frac{F^2}{R^3}[U,R^3] + \rho F\nabla\phi\cdot\left(\boldsymbol{v}_\perp\times\omega\right)\\
&\qquad -2\rho v_n R^2\left(\nabla\phi\times\nabla U\right)\cdot\left(\mu_0\boldsymbol{J}\times F\nabla\phi + \nabla\left(\frac{F^2}{2R^2}\right)\right)\\
&\qquad +\rho v_n F\nabla\phi\cdot\nabla\times\left(\eta\boldsymbol{J}\right) - F\nabla\phi\cdot\left(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}\right),\\
&\partial_t p + \frac{F}{R^2}\frac{\partial p v_n}{\partial\phi} + \frac{1}{R}[U,pR^2] + \left(\gamma-1\right)p\left(\frac{F}{R^2}\frac{\partial v_n}{\partial\phi} + \frac{1}{R}[U,R^2]\right) =\\
&\qquad -\left(\gamma-1\right)\left(\underline{\boldsymbol{\pi}}_e : \nabla\boldsymbol{v}_e + \underline{\boldsymbol{\pi}}_i : \nabla\boldsymbol{v}_i + \nabla\cdot\boldsymbol{Q} - \eta\boldsymbol{J}^2\right),\\
&\partial_t\psi = R[\psi,U] - F\partial_\phi U + \eta\left(j_\phi - j_c\right),\\
&j_\phi = \frac{\Delta^*\psi}{\mu_0},\\
&\boldsymbol{v}_\perp = R^2\nabla\phi\times\nabla U.
\end{aligned}
\right.
\tag{3.3.29}
$$

3.3.2 Le Current Hole

Le phénomène du Current Hole a été observé tout d'abord dans le tokamak JET [HHHL01] et dans le tokamak JT-60U [Fuj10]. Ce scénario avancé établi dans JET qui avec un courant « Lower Hybrid current drive » (LHCD) désaxé présente une région centrale assez large avec un courant toroïdale faible. Son nom provient du fait qu'au centre du plasma la densité de courant est négative. Lié aux instabilités en dent de scie (voir la partie introductive 1.6.1), la partie centrale négative du courant se désaxe durant la phase de croissance de l'instabilité, « rebondit » et revient à un état quasi-initial. Ces phénomènes ont été observés numériquement et les résultats seront présentés au chapitre 5.

Le Current Hole est modélisé par un système de la MHD réduite résistive obtenu à partir du système (3.3.29) qu'on a encore réduit en émettant des hypothèses supplémentaires. Proposé par Czarny et Huysmans [CH08] pour étudier les instabilités du Current Hole, ce modèle est un équilibre instable [Bis97, BZV98]. Tout d'abord, la première hypothèse

supplémentaire émise est la non prise en compte des effets de la vitesse parallèle : $v_n = 0$. On suppose également une homogénité de la densité du plasma : $\partial_t \rho = 0$ et $\nabla \rho = 0$, et pour finir les termes de pression sont négligés : $p = 0$:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\rho R^2 \nabla_\perp \partial_t U\right) + \frac{1}{R}[U,\rho R^4 W] = \frac{F}{R^2}\partial_\phi j_\phi + \frac{1}{R}[\psi,j_\phi] - \nabla\phi \cdot \nabla \times \left(R^2 \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}\right), \\ \partial_t \psi + R[U,\psi] = \eta\left(j_\phi - j_c\right) - F\partial_\phi U, \\ j_\phi = \frac{\Delta^* \psi}{\mu_0}, \\ W = \Delta_\perp U. \end{cases} \tag{3.3.30}$$

De plus on souhaite obtenir des solutions à symétrie cylindrique : $\partial_\phi = 0$. Le système se réécrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t W = R[W,U] + \frac{1}{\rho R^2}[\psi,j_\phi] - \frac{1}{\rho R^2}\nabla\phi \cdot \nabla \times \left(R^2 \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}\right), \\ \partial_t \psi = R[\psi,U] + \eta\left(j_\phi - j_c\right), \\ j_\phi = \frac{\Delta^* \psi}{\mu_0}, \\ W = \Delta_\perp U. \end{cases} \tag{3.3.31}$$

Pour prendre en compte les effets visqueux dans l'équation de la vorticité, on les redéfinit avec ν le coefficient de viscosité par : $\nu \Delta_\perp W$. Le système du Current Hole est ainsi défini par :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = R[\psi,U] + \eta\left(j_\phi - j_c\right), \\ \partial_t W = R[W,U] + \frac{1}{\rho R^2}[\psi,j_\phi] + \nu \Delta_\perp W, \\ j_\phi = \frac{1}{\mu_0}\Delta^* \psi, \\ W = \Delta_\perp U. \end{cases} \tag{3.3.32}$$

Dans le cas d'une géométrie cylindrique les deux opérateurs Δ^* et $\Delta_\perp$ sont égaux au laplacien Δ. Si au contraire on souhaite prendre en considération les effets toroïdaux on utilise le coefficient ϵ, rapport entre les rayons du tore, tel que :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = (1+\epsilon x)[\psi,U] + \eta(j_\phi - j_c), \\ \partial_t W = (1+\epsilon x)[W,U] + \frac{1}{\rho\left(1+\epsilon x\right)^2}[\psi,j_\phi] + \nu \Delta_\perp W, \\ j_\phi = \frac{1}{\mu_0}\Delta^* \psi, \\ W = \Delta_\perp U, \end{cases} \tag{3.3.33}$$

avec x défini en fonction des coordonnées toroïdales (voir la partie introductive 1.5) :

$$x = \frac{R - R_0}{r}. \tag{3.3.34}$$

Afin de comparer avec [CH08, DDF$^+$11], nous étudierons plus précisément la stabilité de la solution du système du Current Hole dans le cas simplifié du cylindre (i.e. $\epsilon = 0$). Dans ce cas $\Delta^* = \Delta_\perp = \Delta$, le modèle ainsi obtenu est donc :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = [\psi, U] + \eta(j_\phi - j_c), \\ \partial_t W = [W, U] + [\psi, j_\phi] + \nu \Delta W, \\ j_\phi = \dfrac{1}{\mu_0} \Delta \psi, \\ W = \Delta U. \end{cases} \tag{3.3.35}$$

Ce système d'équations différentielles est non linéaire et instationnaire. Il peut être réécrit comme un système de deux équations sur les variables ψ et U :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = [\psi, U] + \eta(\dfrac{\Delta \psi}{\mu_0} - j_c), \\ \partial_t (\Delta U) = [\Delta U, U] + [\psi, \dfrac{\Delta \psi}{\mu_0}] + \nu \Delta^2 U. \end{cases} \tag{3.3.36}$$

Le système (3.3.36), par rapport au système (3.3.32), demande une régularité supplémentaire sur les solutions obtenues. Elle implique un choix adapté pour la résolution numérique. Ainsi, lorsque dans la suite nous avons fait le choix d'une méthode de résolution par éléments finis, il a fallut choisir des éléments de régularité au minimum C^1. Ce choix d'éléments fera l'objet du paragraphe ultérieur 4.3.

3.3.3 Equilibre de Grad-Shafranov

Le plasma est ici toujours décrit comme un modèle monofluide idéal de la MagnétoHydroDynamique sous la condition de l'axisymétrie, auquel on ajoute l'hypothèse de stationnarité. L'équation de Grad-Shafranov [GR58, Sha66] modélise un équilibre du plasma où le gradient de pression s'équilibre avec la force de Lorentz [Bis97, CH08, Fre87, Fre07, Wes04]. Clairement, l'équilibre de Grad-Shafranov est un équilibre statique qui ne présente donc pas d'évolution temporelle ($\partial_t = 0$) et la vitesse du plasma est supposée nulle. Le système de la MHD complète idéale (3.1.58) avec ces hypothèses se résume à :

$$\begin{cases} \nabla p = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}, \\ \mu_0 \boldsymbol{J} = \nabla \times \boldsymbol{B}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \end{cases} \tag{3.3.37}$$

L'équation de Grad-Shafranov est une équation différentielle non linéaire elliptique obtenue en ajoutant la condition de symétrie toroïdale [GR58, Sha60]. Si on applique cette condition alors le champ magnétique est réduit à sa composante poloïdale : $\boldsymbol{B}_\theta = \nabla \times (\psi \nabla \phi)$, et l'équation modélisant l'absence de monopôles magnétiques devient alors :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \frac{1}{R} \partial_R (R \boldsymbol{B}_R) + \partial_z \boldsymbol{B}_z = 0. \tag{3.3.38}$$

avec

$$\boldsymbol{B}_R = -\frac{1}{R}\partial_z\psi,$$
$$\boldsymbol{B}_z = \frac{1}{R}\partial_R\psi.$$

Ceci nous ramène à l'hypothèse de forte magnétisation dans la direction toroïdale utilisée pour la réduction de la MHD (3.3.1). Avec cette hypothèse ainsi que la symétrie toroïdale (i.e. $\partial_\phi = 0$), le courant devient :

$$\mu_0\boldsymbol{J} = \nabla F \times \nabla\phi - \Delta^*\psi\nabla\phi, \tag{3.3.39}$$

où Δ^* est l'opérateur elliptique de second ordre de Grad-Shafranov défini par :

$$\Delta^*\psi = R^2\nabla_c \cdot \left(\frac{1}{R^2}\nabla_c\psi\right), \tag{3.3.40}$$

où $\nabla_c\cdot$ et ∇_c sont respectivement les opérateurs de divergence et gradient de la section poloïdale des coordonnées cylindriques tel que :

$$\nabla_c \cdot A = \frac{1}{R}\partial_r\left(RA_r\right) + \partial_z A_z, \tag{3.3.41}$$
$$\nabla_c = \left(\partial_r A, \partial_z A\right)^T. \tag{3.3.42}$$

L'équation d'équilibre entre le gradient de pression et la force de Lorentz $\nabla p = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$ implique que les projections sur le champ magnétique et sur le courant s'annulent :

$$\boldsymbol{B} \cdot \nabla p = 0 \Rightarrow e_\phi \cdot (\nabla\psi \times \nabla p) = 0. \tag{3.3.43}$$

Cette implication permet d'affirmer que la pression p est une fonction dépendant du flux magnétique ψ. De même on projette l'équation $\nabla p = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$ sur le courant

$$\boldsymbol{J} \cdot \nabla p = 0 \Rightarrow e_\phi \cdot (\nabla\psi \times \nabla F) = 0. \tag{3.3.44}$$

Cette équation implique que F dépend du flux magnétique ψ. L'équation de Grad-Shafranov est obtenue en introduisant les deux fonctions de flux $F(\psi)$ et $p(\psi)$ dans la projection $\nabla\psi$ de l'équation des moments

$$\begin{aligned}\nabla\psi \cdot \nabla p =& \nabla\psi \cdot (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}),\\ =& \boldsymbol{J} \cdot ((F\nabla\phi + \nabla\psi \times \nabla\phi) \times \nabla\psi),\\ =& -(\nabla F \cdot \nabla\psi)\frac{F}{\mu_0 R^2} - \frac{1}{\mu_0 R^2}\Delta^*\psi\,(\nabla\psi \cdot \nabla\psi),\end{aligned}$$

i.e.

$$\Delta^*\psi = -R^2\mu_0\frac{dp}{d\psi} - F\frac{dF}{d\psi}. \tag{3.3.45}$$

Les fonctions de pression p et F sont quelconques. Les choix faits sur ces fonctions et sur les conditions, telles que celles du bord choisies sur ψ, détermineront l'équilibre du plasma à obtenir.

3.3.3.1 Equilibre de Soloviev

Il existe pour cette équation de Grad-Shafranov, résolue généralement numériquement, un nombre limité de solutions analytiques. Ces solutions sont utilisées comme des exemples idéaux qui permettent de démontrer les propriétés typiques de l'axisymétrie de l'équilibre. On a étudié les solutions de Soloviev [Sol68] qui sont des solutions analytiques. Ces solutions sont obtenues avec les hypothèses sur la pression qui doit être linéaire en ψ :

$$p = p_0 + \lambda\psi. \tag{3.3.46}$$

Le courant F est supposé constant dans le plasma d'où : $F' = 0$. L'opérateur de Grad-Shafranov est non linéaire, on n'a pas connaissance d'une solution analytique générale. Néanmoins, pour un second membre donné cette équation peut être résolue numériquement.

Définition 3.3.1 *L'équation de Grad-Shafranov avec les conditions $p'(\psi) = \alpha = cst$ et $F(\psi)F'(\psi) = \beta = cst$ s'appelle l'équilibre de Soloviev.*

Le chapitre 5 présentera les résultats numériques de 2 cas tests analytiques de Soloviev.

3.4 Conclusions

Dans le cas de la MHD, on s'appuie sur la théorie fluide. Pour cela, nous avons implicitement fait l'hypothèse que les fonctions de distribution sont des maxwelliennes, que le plasma est dominé par les collisions et que le tenseur des pressions se réduit à une pression scalaire. Du point de vue de la modélisation des tokamaks, l'avantage de la MHD est qu'elle est plus simple à implémenter et nécessite moins de ressources numériques. Néanmoins, les hypothèses fondamentales telles que la forte collisionalité et la pression scalaire sont fausses au sein du cœur des tokamaks. Bien que ces hypothèses ne soient pas vérifiées, l'efficacité des critères de MHD pour la stabilité des plasmas de tokamaks a été testé pendant plus de 40 ans ; cette théorie est donc bien établie. Pour expliquer le fait de l'établissement de cette théorie bien que certains critères ne soient valides, Freidberg [Fre87] a proposé que dans les directions perpendiculaires au champ le mouvement de gyration des particules jouerait le rôle des collisions et ceci dans le sens où leurs mouvements sont effectivement isotropes.

Le cas de l'utilisation de la MHD dans les tokamaks étant justifiée, ce chapitre a permis d'établir différents modèles de MHD. En partant du modèle de la MHD complète qui est déjà un modèle simplifié du modèle cinétique jusqu'à l'équation d'équilibre de Grad-Shafranov, on a obtenu les systèmes de la MHD idéal, résistif, conservatif de la MHD complète, ainsi que des modèles de la MHD réduite résistifs tels que celui du Current Hole.

Dans la suite on présente des méthodes de résolution utilisée pour résoudre les systèmes de la MHD. En effet, le modèle de la MHD complète est dominé par l'advection (cf. (3.2.5)). Pour la résolution avec la méthode d'éléments finis on utilisera des méthodes stabilisées. Ensuite, les modèles de MHD réduite tel que celui du Current Hole peuvent contenir des opérateurs différentielles d'ordre 3 ou 4 ce qui nécessite l'utilisation d'éléments plus réguliers que des éléments C^0 tel que les $P1$ de Lagrange. Pour finir le dernier chapitre présentera les résultats numériques obtenus sur ces modèles du Current Hole et de Grad-Shafranov.

Chapitre 4

Formulation discrète

Sommaire

4.1 Méthode des éléments finis 83
4.1.1 Motivations du choix de la méthode de résolution 83
4.1.1.1 Géométrie toroïdale 85
4.1.1.2 Divergence cleaning 86
4.1.1.3 Opérateurs différentiels de la MHD réduite 88
4.1.2 Présentation sur un problème modèle 88
4.1.3 Formulation faible 89
4.1.4 Méthode de Galerkin 89
4.1.5 Discrétisation temporelle 90
4.2 Eléments finis stabilisés 91
4.2.1 Généralités sur les éléments finis stabilisés 91
4.2.2 Nécessité de la stabilisation 92
4.2.3 Stabilisation SUPG 94
4.2.3.1 Différents choix de τ : paramètre de stabilisation . . . 98
4.2.3.2 Capture de choc 98
4.2.4 Analyse de stabilité L^2 99
4.2.5 Résultats numériques 104
4.2.5.1 Cas test de MHD $1D$ résolu avec la méthode SUPG . . 104
4.2.5.2 Cas test d'advection $1D$ résolu avec la méthode SUPG 106
4.3 Eléments finis C^1 de Bell 108
4.3.1 Définition et propriétés des éléments finis de Bell 108
4.3.2 Mise en œuvre des C^1 de Bell 109
4.4 Problèmes types 111
4.4.1 Conduction thermique 111
4.4.1.1 Formulation faible 112
4.4.2 Equilibre de Grad-Shafranov 113
4.4.2.1 Formulation faible 114
4.4.3 Current Hole 116
4.4.3.1 Propriétés du système du Current Hole 117
4.4.3.2 Formulation faible 117

4.4.3.3 Résolution du système du Current Hole 118
4.4.4 Current Hole : système à 2 équations 119
4.4.4.1 Formulation faible 120
4.5 Conclusions 121

L'objectif de ce chapitre est de mettre en place les méthodes numériques qui nous serviront à résoudre les systèmes de la MHD et de la MHD réduite. Pour cela, la première partie de ce chapitre développe la méthode des éléments finis et justifie ce choix de méthode par rapport par exemple à la méthode des volumes finis. Cette partie détaille également la nécessité de recourir à des éléments plus réguliers que les $P1$ de Lagrange C^0 et la résolution d'un problème général avec la méthode des éléments finis.

Ensuite, ce chapitre se poursuit par le développement des éléments finis stabilisés. On commence par une introduction générale des méthodes de stabilisation. Puis, on verra qu'il est nécessaire de stabiliser des problèmes comme ceux de la MHD qui sont dominés par l'advection. Notre intérêt s'est porté sur la méthode de stabilisation Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) méthode basée sur l'ajout d'un terme stabilisant dans la direction de l'écoulement. Afin d'étudier la stabilité L^2 de cette méthode de résolution SUPG, on utilise la théorie de Von Neumann. Lors de cette analyse deux cas sont envisagés selon la prise en compte ou non dans le résidu du terme temporel. Cette analyse introduit l'idée d'une résolution avec des méthodes implicite ou semi-implicite telle que la méthode de Crank-Nicholson pour être stable L^2 ou s'affranchir de la restriction sur la condition de CFL. Pour finir, cette partie s'achève par des résultats numériques obtenus pour un cas test d'advection $1D$.

Ensuite, après avoir introduit dans la première partie de ce chapitre la nécessité d'une certaine régularité sur les éléments, notre choix s'est porté sur les éléments C^1 de Bell [Bel69]. Cette régularité est due notamment à la volonté de préserver l'absence de monopôles magnétiques par l'introduction d'un potentiel vecteur. Ces éléments de Bell sont ici définis puis on en donne les propriétés et on développe leur mise en œuvre.

Pour finir, ce chapitre se termine par la présentation des modèles qui ont été résolus sur des cas tests numériques et dont le chapitre 5 présente les résultats. Ces modèles sont la conduction thermique qui permettra de valider l'implémentation des éléments de Bell, et deux modèles de la MHD réduite dont l'obtention a été développée dans le chapitre précédent : l'équation d'équilibre de Grad-Shafranov et le système du Current Hole. Par cette approche hiérarchique on espérerait aboutir à la résolution du problème de la MHD complète dans les tokamaks.

4.1 Méthode des éléments finis

Cette première partie du développement des méthodes numériques de résolution des systèmes de la MHD et la MHD réduite présente la méthode des éléments finis. En effet, la première partie de ce développement sur la méthode des éléments finis expose les motivations de ce choix de méthode et la nécessité d'utiliser des éléments réguliers. Ensuite, on détaille la résolution d'un problème général par la méthode des éléments finis avec l'utilisation de la technique standard d'approximation de Galerkin.

4.1.1 Motivations du choix de la méthode de résolution

Pour résoudre les systèmes de la MHD on aurait pu utiliser la méthode des volumes finis. On l'a notamment utilisée pour la résolution sur des cas tests de tubes à choc suivant les exemples proposés par Brio et Wu [BW88, MK05]. Un tube à choc est un tube contenant un gaz dans lequel est produite une onde de choc plane, susceptible d'élever brutalement la température ou la pression de ce gaz. Après rupture brutale de la membrane séparant les deux compartiments du tube, le gaz moteur se détend rapidement, ce qui a pour effet de porter instantanément le gaz à étudier à de hautes température et pression. Il y a ainsi formation d'une onde de compression qui se propage en s'accélérant dans le gaz à étudier. Pour modéliser ce problème on utilise les équations de la MHD idéale en 1D (3.1.58).

Ainsi, pour ce cas test de tube à choc sur un domaine d'étude $\Omega = [0, 1]$ discrétisé avec un pas de maillage de $\delta h = 0.01$, pour une durée totale de simulation T_f de 0.1, et avec une condition de CFL de 0.8, on impose les conditions initiales de ce cas test sur les variables primitives du systèmes présentées sur la figure 4.1.

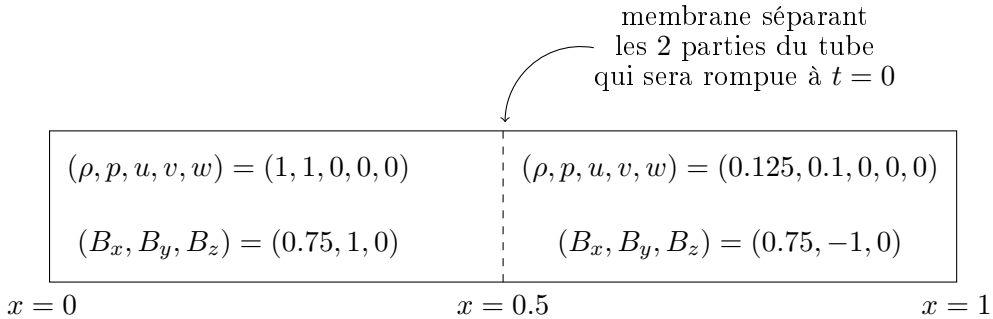


FIGURE 4.1 – Cas test de Tube à chocs

Ce cas test représente un tube à choc dans lequel on a retiré la paroi au temps initial. Ainsi, le graphique obtenu 4.2 permet de visualiser le profil de la densité de particules en fonction de x. Le graphique de la densité a la particularité de représenter toutes les ondes, au contraire des autres variables sur lesquelles on n'en observe qu'une partie.

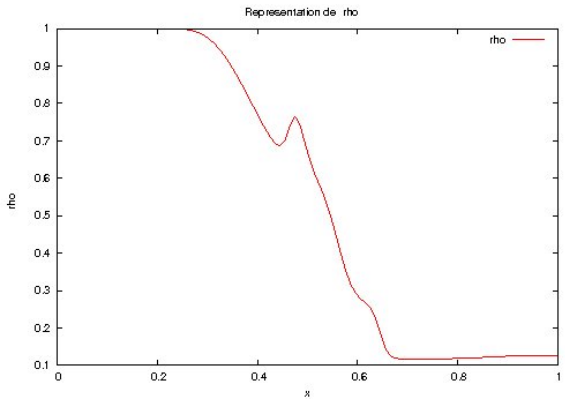
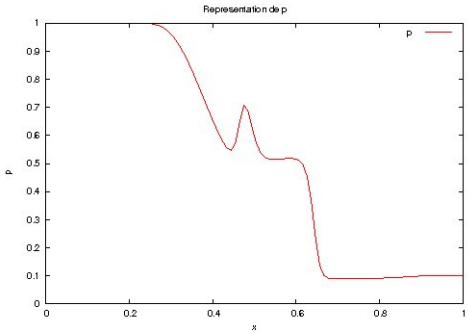
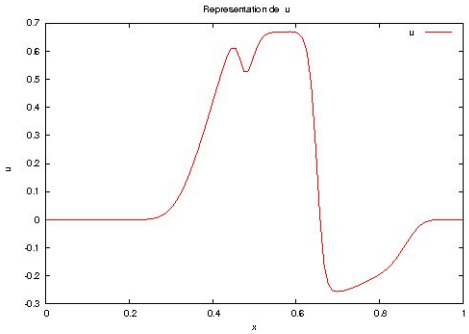


FIGURE 4.2 – Densité ρ du cas test de tube à choc à $t = 0.1s$

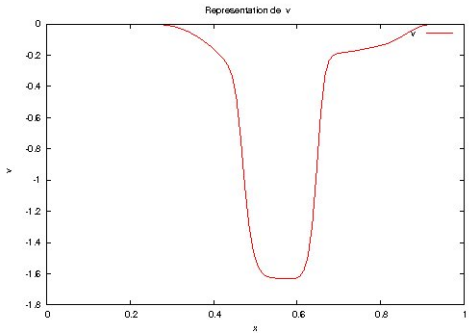


(a) Pression p

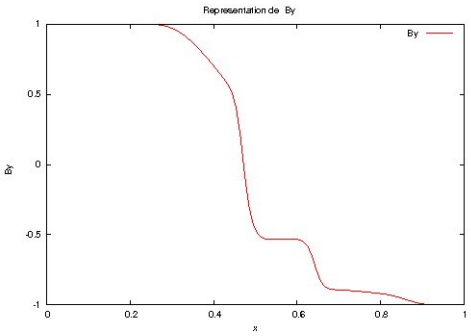


(b) Vitesse u

FIGURE 4.3 – Cas test de tube à choc à $t = 0.1s$



(a) Vitesse v



(b) Champ magnétique $\boldsymbol{B}_y$

FIGURE 4.4 – Cas test de tube à choc à $t = 0.1s$

Sur les quatre graphiques 4.3a, 4.3b, 4.4a, 4.4b on observe les profils de la pression p, des vitesses u et v et du champ magnétique B_y. Après avoir obtenu les résultats à l'ordre 1 en espace comme dans [BW88, MK05], on s'intéresse à l'ordre 2. Le graphique 4.5 présente la densité ρ en rouge à l'ordre 2, en vert à l'ordre 1 et en bleu une solution obtenue avec plus de mailles. La solution d'ordre 2 avec limiteur est légèrement meilleure que celle obtenue avec l'ordre 1.

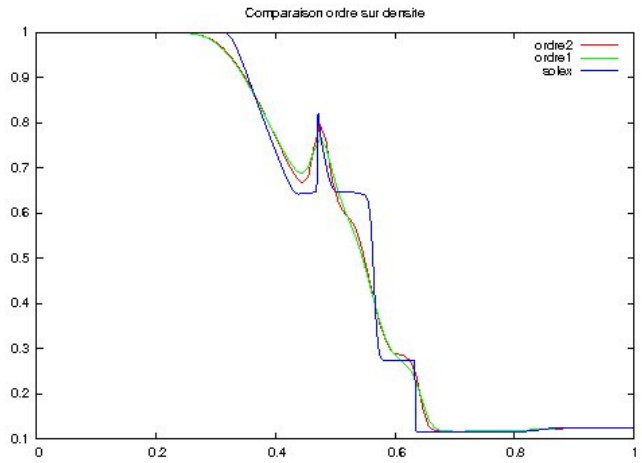


FIGURE 4.5 – Densité ρ dans le tube a choc

La méthode des volumes finis permet la montée en ordre 2 avec l'utilisation de limiteurs tels que minmod ou superbee mais l'étude des instabilités demande de recourir à des ordres élevés. La méthode des différences finies utilise quant, à elle, un maillage structuré. Notre choix s'est porté sur les éléments finis. Pour la résolution d'équations ou de systèmes d'équations, cette méthode [Rao76] est un outil utilisé pour sa précision, son adaptabilité, sa flexibilité géométrique et notamment une montée en ordre plus aisée.

4.1.1.1 Géométrie toroïdale

La fusion nucléaire et l'évolution du plasma au sein des tokamaks se déroulent dans des géométries $3D$. Mais ces géométries présentant des symétries, il est usuel d'utiliser des éléments seulement $2D$ dans le plan poloïdal et d'utiliser une représentation spectrale de Fourier dans la direction toroïdale, ce qui se résume à :

$$\varphi_{3D} \equiv \varphi_{2D}(r,z)\,\varphi_{1D}(\phi)\,. \tag{4.1.1}$$

Cette technique est par exemple utilisée dans le code de calcul JOREK développé au CEA. Elle permet notamment d'isoler les modes résonnants et donc de ne simuler que certains modes choisis.

Les deux parties suivantes présentent l'intérêt d'utiliser des éléments plus réguliers que des $P1$ de Lagrange, continus, pour la résolution des systèmes de la MHD.

4.1.1.2 Divergence cleaning

Le système de la MHD complète (3.1.57), rappelé ici

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) =& 0, \\ \partial_t \rho \boldsymbol{v} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) =& \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} - \nabla p - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}, \\ \partial_t \rho \mathcal{E} + \nabla \cdot (\rho \mathcal{E} \boldsymbol{v} + p \boldsymbol{v}) =& (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}) + \eta \boldsymbol{J}^2 \\ & - (\underline{\boldsymbol{\pi}}_e : \nabla \boldsymbol{v}_e + \underline{\boldsymbol{\pi}}_i : \nabla \boldsymbol{v}_i + \nabla \cdot \boldsymbol{Q}), \\ \nabla \cdot \boldsymbol{J} =& 0, \\ \dfrac{p}{\gamma - 1} =& \rho \mathcal{E} - \dfrac{1}{2} \rho |\boldsymbol{v}|^2, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} =& -\partial_t \boldsymbol{B} \\ \nabla \times \boldsymbol{B} =& \mu_0 \boldsymbol{J}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} =& 0, \\ \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} =& \eta \boldsymbol{J} + \dfrac{1}{en} (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} - \nabla p_e - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_e). \end{cases} \tag{4.1.2}$$

est surdéfini. Il présente 9 équations pour 7 inconnues (sans compter les coefficients de transport qui ont leurs propres définitions qui ne sont pas rappelées ici). En sachant que l'équation de continuité de la charge

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0, \tag{4.1.3}$$

est automatiquement vérifiée avec la définition de la densité de courant en fonction du champ magnétique :

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}, \tag{4.1.4}$$

il reste l'équation modélisant l'absence de monopôles magnétiques :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{4.1.5}$$

Cette équation surdéfinit le système. Elle est physiquement vérifiée mais le problème est de satisfaire cette contrainte au niveau discret. L'équation (4.1.5) vient de l'équation de Faraday à laquelle on applique l'opérateur de divergence :

$$\nabla \cdot \partial_t \boldsymbol{B} + \cancel{\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{E}} = 0. \tag{4.1.6}$$

Numériquement, cette simplification est fausse. En effet, la divergence discrète $\nabla_h \cdot$ du rotationnel discret $\nabla_h \times$ n'est pas exactement nulle :

$$\nabla_h \cdot (\nabla_h \times -) \neq 0, \tag{4.1.7}$$

ce qui provoque l'apparition de monopôles magnétiques ρ_m discrets

$$\nabla_h \cdot (\nabla_h \times \boldsymbol{E}_h) \neq 0 \Rightarrow \partial_t (\nabla_h \cdot \boldsymbol{B}_h) \approx \rho_m. \tag{4.1.8}$$

Ces monopôles s'accroissant au cours du temps, leurs présences peuvent conduire à ce que le système ne soit plus physiquement acceptable [DKK+02]. Par exemple, les effets au niveau

de la topologie du champ magnétique sont évoqués par Brackbill et Barnes [Bra85, BB80], Balsara et Spicer [BS99]. La topologie du champ magnétique est une métrique importante dans la description de l'évolution des plasmas magnétisés.

Pour résoudre ce problème, certains schémas ont été développés en imposant la divergence du rotationnel nulle ce qui revient à construire des opérateurs numériques tel que :

$$\nabla_h \cdot (\nabla_h \times -) = 0. \tag{4.1.9}$$

Ces schémas font souvent référence à des méthodes de transport avec contrainte. Ce type de schéma a été proposé tout d'abord pour les équations de Maxwell par Yee [Yee66] puis il a été généralisé par Holland [Hol83] et par Madsen et Ziolkowski [MZ90]. Cette approche a été adaptée pour les équations de la MHD par Brecht et al [BLFH81], Evans et Hawley [EH88] et De Vore [DeV91]. Pour ce type d'approche avec contrainte l'idée principale est d'utiliser une discrétisation spéciale adaptée pour l'équation du champ magnétique (4.1.5).

Afin de contrôler l'accroissement des monopôles magnétiques des techniques de corrections ont été développées pour ces schémas. Une première méthode connue est la projection du champ magnétique dans l'espace vectoriel à divergence est nulle, aussi connue sour le nom de projection de « Hodge ». Une seconde méthode est celle développée notamment par Powell et al. [Asl93, BB80, PRM+95, Pow94] dans laquelle des termes proportionnels à la divergence du champ magnétique sont ajoutés au terme source :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \\ \partial_t (\rho \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) + \nabla p = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}} - \boldsymbol{B} \nabla \cdot \boldsymbol{B}, \\ \partial_t (\rho \mathcal{E}) + \nabla \cdot (\rho \mathcal{E} \boldsymbol{v} + p \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}) + \eta \boldsymbol{J}^2 \\ \qquad - (\underline{\boldsymbol{\pi}}_e : \nabla \boldsymbol{v}_e + \underline{\boldsymbol{\pi}}_i : \nabla \boldsymbol{v}_i + \nabla \cdot \boldsymbol{Q}) \\ \qquad - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B} \nabla \cdot \boldsymbol{B}, \\ \partial_t \boldsymbol{B} + \nabla \times \boldsymbol{E} = - \boldsymbol{v} \nabla \cdot \boldsymbol{B}, \end{cases} \tag{4.1.10}$$

où μ_0 est la perméabilité du vide. Il a notamment été prouvé que l'ajout de ce terme améliorait la robustesse des schémas pour les volumes finis [TO96].

Pour assurer cette condition de manière forte, il est également possible de réécrire le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ sous la forme d'un potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ tel que :

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}. \tag{4.1.11}$$

Définir le champ magnétique par un potentiel vecteur permet d'assurer par définition la condition d'absences de monopôles magnétiques (4.1.5), mais cette équation impose que le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ soit au minimum de régularité C^1, pour que l'équation suivante soit vérifiée au sens fort :

$$\nabla_h \cdot (\nabla_h \times \boldsymbol{A}_h) = 0. \tag{4.1.12}$$

4.1.1.3 Opérateurs différentiels de la MHD réduite

Lors de la résolution de systèmes de la MHD réduite comme (3.3.36), obtenu à partir de la MHD complète, et réécrit ici :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = [\psi, U] + \eta(\dfrac{\Delta\psi}{\mu_0} - j_c), \\ \partial_t (\Delta U) = [\Delta U, U] + [\psi, \dfrac{\Delta\psi}{\mu_0}] + \nu\Delta^2 U, \end{cases} \tag{4.1.13}$$

des dérivées d'ordre 3 et 4 apparaîssent. Or les éléments C^0 tel que les $P1$ de Lagrange ne sont pas assez riches pour décrire ces opérateurs. En effet, cela revient à intégrer un dirac multiplié avec une fonction discontinue ou avec un autre dirac : ce qui n'a pas de sens. Ainsi, la résolution de ces systèmes de MHD réduite nécessite l'utilisation d'éléments C^1. Pour pallier ces dérivées d'ordres élevés on peut aussi introduire des variables supplémentaires ce qui conduit à augmenter artificiellement la taille du problème discret. L'utilisation de variables supplémentaires revient à résoudre le système du Current Hole à 4 équations (3.3.35) qui peut lui être résolu avec des éléments C^0 comme les $P1$ de Lagrange par exemple.

4.1.2 Présentation sur un problème modèle

Afin d'étudier et d'utiliser d'une façon simple le concept d'éléments finis (EF), nous introduisons dans ce paragraphe la résolution d'un problème modèle général. Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^2$ dont le bord du domaine est noté Γ. On considère l'équation suivante :

$$\partial_t \omega + \mathcal{L}(\partial, \omega) = f, \quad \text{dans } \Omega, \quad \forall t > 0, \tag{4.1.14}$$

avec ω représentant généralement un vecteur contenant les variables du système, qui sont elles mêmes fonction des variables spatiales $x = (x_1, x_2, x_3)^t$, et $\mathcal{L}$ une application linéaire telle que :

$$\mathcal{L}(\partial, \omega) = \sum_{|p| \leq 2} A^p(\omega)\, \partial^p \omega, \tag{4.1.15}$$

où

$$\partial^p \omega = \partial_{x_1}^{p_1} \partial_{x_2}^{p_2} \partial_{x_3}^{p_3} \omega. \tag{4.1.16}$$

On suppose que sur la frontière Γ du domaine, la solution vérifie la condition de Dirichlet :

$$\omega(x,t) = g(x) \quad \forall x \in \Gamma, \quad \forall t > 0 \tag{4.1.17}$$

et que cette équation admet pour condition initiale, nécessaire pour fermer le problème :

$$\forall x \in \Omega, \quad \omega(x,0) = \omega^0(x). \tag{4.1.18}$$

Dans le cas des éléments C^1, les variables ont des degrés de libertés qui induisent des conditions sur les dérivées premières et secondes.

4.1.3 Formulation faible

La formulation faible de ce problème est obtenue en multipliant cette équation par une fonction test $\mathcal{B}$ dans un espace de fonctions suffisamment régulières et nous intégrons sur le domaine Ω

$$\int_{\Omega} \left(\partial_t \omega + \mathcal{L}\left(\partial, \omega\right)\right) \mathcal{B} = \int_{\Omega} f \mathcal{B}. \tag{4.1.19}$$

On déduit la formulation variationnelle de ce problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega \text{ telle que} \\ \partial_t \left(\omega, \mathcal{B}\right) + a\left(\omega, \mathcal{B}\right) = l\left(\mathcal{B}\right), & \forall \mathcal{B}, \\ \omega(0,x) = \omega^0\left(x\right), & \forall x \in \Omega, \\ \omega(t,x) = g(x) \quad , & \forall x \in \Gamma, \end{cases} \tag{4.1.20}$$

où a et l sont les fonctions associées au problème, $(.,.)$ représente le produit scalaire L^2 et f est une fonction de $L^2(]0, T_f[, L^2\left(\Omega\right))$. Enfin, ω^0 est une fonction de $L^2\left(\Omega\right)$ et g de $L^2\left(\Omega\right)$.

4.1.4 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin associée naturellement avec la méthode des éléments finis, peut être décrite comme l'approximation de la formulation variationnelle d'une équation aux dérivées partielles (EDP), ou d'un système d'EDP, sur des espaces fonctionnels approchés de dimensions finies. Le domaine Ω est discrétisé par un partitionnement Ω_h composé de $\mathcal{N}_{el}$ éléments notés Ω_e.

$$\Omega_h = \bigcup_{1}^{\mathcal{N}_{el}} \Omega_e \tag{4.1.21}$$

Ces éléments recouvrent le domaine et ils sont soit disjoints soit reliés par une arête ou un sommet. Ainsi, la méthode de Galerkin consiste à chercher les inconnues dans les mêmes espaces approchés V_h. Le problème discrétisé en espace mais continu en temps s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega_e \in V_h \text{ telle que ,} \\ \partial_t \left(\omega_e, \mathcal{B}_e\right) + a\left(\omega_e, \mathcal{B}_e\right) = l\left(\mathcal{B}_e\right) \quad \forall \mathcal{B}_e \in V_h \subset L^2\left(\Omega\right), \\ \omega_e(0,x) = \omega_e^0\left(x\right), \quad \forall x \in \Omega, \\ \omega_e(t,x) = g_e(x) \quad , \quad \forall x \in \Gamma, \end{cases} \tag{4.1.22}$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle, il se met sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre :

$$M \partial_t W + \sum_p \sum_q K^{p,q} W = F, \tag{4.1.23}$$

où W est le vecteur des inconnues nodales, M est la matrice de masse, F le terme source et K représente les matrices associées aux termes différentiels.

Après discrétisation du domaine Ω, la formulation faible du problème se réécrit :

$$\int_\Omega \left(\partial_t \omega_e + \mathcal{L}\left(\partial, \omega_e\right)\right) \mathcal{B}_e = \int_\Omega f \mathcal{B}_e \tag{4.1.24}$$

où

$$\omega_e = W_e \cdot \mathcal{B}_e \qquad \text{avec } W_e \equiv \underline{\omega}_e. \tag{4.1.25}$$

Les matrices M, K et F sont remplies à partir de l'assemblage des matrices élémentaires M_e, K_e et F_e suivantes :

$$M_e = \int_\Omega \mathcal{B}_e\left(x\right) \otimes \mathcal{B}_e\left(x\right), \tag{4.1.26}$$

$$K_e^{p,q} = \int_\Omega C_e^{p,q}\left(x, \omega_e\right)\left(\partial_x^p \mathcal{B}_e\left(x\right) \otimes \partial_x^q \mathcal{B}_e\left(x\right)\right), \tag{4.1.27}$$

$$F_e = \int_\Omega f_e \mathcal{B}_e\left(x\right). \tag{4.1.28}$$

Ces matrices composées sont calculées avec l'intégration des points de Gauss [Dun85] telles que :

$$M_e = V_e \sum_g^{\mathcal{N}_g} \beta_g \mathcal{B}_e\left(\xi_g\right) \otimes \mathcal{B}_e\left(\xi_g\right), \tag{4.1.29}$$

$$K_e^{p,q} = V_e \sum_g^{\mathcal{N}_g} \beta_g C_e^{p,q}\left(x, \omega_e\right)\left(\partial_x^p \mathcal{B}_e\left(\xi_g\right) \otimes \partial_x^q \mathcal{B}_e\left(\xi_g\right)\right), \tag{4.1.30}$$

$$F_e = V_e \sum_g^{\mathcal{N}_g} \beta_g \mathcal{B}_e\left(\xi_g\right), \tag{4.1.31}$$

où V_e est l'aire de l'élément, ici un triangle, et β_g et ξ_g sont respectivement les poids et la valeur de ces points d'intégration.

4.1.5 Discrétisation temporelle

Pour finir cette présentation de la résolution de ce problème, la discrétisation en temps utilise une approximation de type différences finies. En effet, on discrétise en temps sur $[0, T_f]$ avec un pas de temps Δt :

$$M \frac{W^{n+1} - W^n}{\Delta t} + K\left(\theta W^{n+1} + \left(1-\theta\right) W^n\right) = \theta F^{n+1} + \left(1-\theta\right) F^n, \tag{4.1.32}$$

avec θ le paramètre de la méthode compris dans l'intervalle $[0, 1]$. Le choix $(\theta = 0)$ correspond au schéma d'Euler explicite, $(\theta = 1)$ à celui d'Euler implicite et $(\theta = 1/2)$ au schéma de Crank-Nicholson. On notera que les deux premières méthodes sont d'ordre 1 alors que le schéma de Crank-Nicholson est d'ordre 2.

4.2 Eléments finis stabilisés

Cette partie présente les éléments finis stabilisés en commençant tout d'abord par un récapitulatif des différentes méthodes de stabilisation existantes [Wer10, Bil09] dont la méthode SUPG qui sera plus particulièrement étudiée. Après ces généralités, on détaille l'intérêt de stabiliser les systèmes dominés par l'advection tels que les systèmes de la MHD. Ensuite, on détaille le développement et la mise en œuvre de la méthode de stabilisation SUPG. Cette méthode de stabilisation nécessite l'utilisation d'un paramètre τ dont le choix fait l'objet du paragraphe 4.2.3.1. De même, le paragraphe 4.2.3.2 est consacré au terme de capture de choc qui a pour objectif de diminuer les oscillations apparaîssant sur la solution lorsque les gradients de celle ci sont forts. Cette section sur la stabilisation se poursuit par une analyse de stabilité L^2 de la méthode SUPG sur une équation d'advection $1D$. Cette étude permet de conclure quant à la stabilité L^2 de cette méthode de résolution qu'elle soit résolue de manière explicite, semi-implicite ou implicite. Enfin cette partie se termine par une application numérique sur un cas test analytique s'apparentant à un problème de transport $1D$.

4.2.1 Généralités sur les éléments finis stabilisés

Initialement conçus pour traiter des problèmes symétriques et coercifs comme cela est le cas en mécanique des milieux déformables, les éléments finis ont été rapidement employés en dehors de ce contexte pour résoudre notamment des problèmes de la mécanique des fluides. Cette méthode est inadaptée car instable pour la simulation d'écoulements dominés par l'advection comme les systèmes de la MHD (l'explication sera développée dans la partie suivante « intérêt de stabiliser »). Pour remédier à cette instabilité, il est nécessaire d'ajouter dans la formulation variationnelle discrète un terme supplémentaire qui permet d'assurer la stabilité du schéma numérique obtenu en conservant la consistance et l'ordre de la méthode. Ce type de méthodes dits d'éléments finis stabilisés (EFS), est apparu à la fin des années 1970 pour des équations de type advection-diffusion [BH82, Hug78].

Les méthodes éléments finis stabilisés dont l'origine est rappelée par Hughes [Hug95] sont divisées en deux grandes familles qui sont les méthodes de type Petrov-Galerkin et les méthodes multi-échelles. On classe dans la catégorie des méthodes multi-échelles les éléments finis de type bulles [BBF$^+$92, FF95], les méthodes « algebraic subgrid scale » (ASGS) [Cod00, Hug95], « Variational MultiScale » (VMS) [Hug95] et la méthode de pénalisation intérieure [BE07, BFH06, DD76] ou encore la méthode de projection [Cod08, CB00].

La méthode de stabilisation avec des fonctions bulles est une méthode multi-échelle [Hug95]. Les fonctions bulles sont des polynômes d'ordres élevés qui s'annulent sur les éléments de bords. Elles sont utilisées par les défenseurs de la méthode des éléments finis de Galerkin lorsque celle-ci échoue. En pratique la qualité d'approximation est souvent « pauvre », due au fait que les polynômes bulles ne soient souvent pas une bonne représentation de l'intérêt du phénomène « subgridscale ».

Pour la méthode de stabilisation par pénalité intérieure continue l'idée est d'ajouter une pénalisation par les moindres carrés sur le saut du gradient entre éléments voisins comme si toutes les stabilités étaient traitées uniformément.

La deuxième famille de méthodes d'éléments finis stabilisés sont des éléments de type

Petrov-Galerkin [HM86b]. Elle regroupe les méthodes « Streamline-Upwind Petrov Galerkin » (SUPG) [BH82], « Pressure Stabilization Petrov Galerkin » (PSPG) [FF92, HFB86], « Galerkin Least Square » (GLS) [HFH89] et « Gradient Galerkin Least Square » (GGLS) [FFH92].

Après cette courte introduction sur les différentes méthodes de stabilisation existantes pour les éléments finis, nous allons présenter, sur un problème modèle, les raisons qui incitent à utiliser une stabilisation.

4.2.2 Nécessité de la stabilisation

Cette partie présente la nécessité de stabiliser lorsque l'on étudie numériquement des problèmes dominés par l'advection, comme le système de la MHD. Il sera montré que l'utilisation d'une méthode éléments finis avec des éléments $P1$ de Lagrange pour résoudre ce système correspond à une résolution avec un schéma volumes finis ou différences finis avec un flux centré. Ce schéma aux volumes finis est connu pour être numériquement instable.

Le système conservatif de la MHD idéale se réécrit sous la forme :

$$\partial_t \omega + \nabla \cdot F(\omega) = 0, \tag{4.2.1}$$

ou encore sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \omega + \sum_{i=1}^{3} A_i \partial_{x_i} \omega = 0, \tag{4.2.2}$$

où A_i sont les matrices jacobiennes telles que :

$$A_i = \frac{\partial F_i}{\partial \omega}. \tag{4.2.3}$$

Ainsi, si on considère Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$, le problème aux limites s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \omega(t,x) + \nabla \cdot F(\omega(t,x)) = 0, & \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in [0, T_f] \\ \omega(t,x) = \omega^\Gamma(t,x), & \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T_f] \\ \omega(0,x) = \omega^0(x), & \forall x \in \Omega, \quad \text{à } t = 0, \end{cases} \tag{4.2.4}$$

où $\partial\Omega$ représente le bord du domaine Ω. Pour résoudre ce système avec la méthode des éléments finis, on cherche à obtenir la formulation faible de ce système. En ce sens, commençons tout d'abord par multiplier le système par une fonction test ϕ dans l'espace V de fonctions suffisamment régulières et ensuite on intègre sur le domaine Ω, espace de calcul :

$$\int_\Omega \left(\partial_t \omega + \nabla \cdot F(\omega)\right) \phi d\Omega = 0. \tag{4.2.5}$$

Le problème variationnel est donc :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega \in S \text{ telle que ,} \\ \displaystyle\int_\Omega (\partial_t \omega + \nabla \cdot F(\omega)) \phi d\Omega = 0, \quad \forall \phi \in V, \\ \omega(t,x) = \omega^\Gamma(t,x), \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T_f] \\ \omega(0,x) = \omega^0(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad \text{à } t = 0, \end{cases} \tag{4.2.6}$$

où S est également un espace de fonctions suffisamment régulières. Le problème variationnel sous l'approximation de Galerkin se réécrit alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega_h \in S_h \text{ telle que ,} \\ \quad \displaystyle\int_\Omega (\partial_t \omega_h + \nabla \cdot F(\omega_h))\phi_h d\Omega = 0 \quad \forall \phi_h \in V_h \\ \omega_h(t,x) = \omega_h^\Gamma(t,x), \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T_f] \\ \omega_h(0,x) = \omega_h^0(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad \text{à } t = 0. \end{cases} \tag{4.2.7}$$

On approche la variable ω par :

$$\omega \approx \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{el}} \omega_j(t)\psi_j(x), \quad \text{où } \psi_j \in S_h, \tag{4.2.8}$$

avec ψ les fonctions de bases de l'espace S_h. Pour $F(\omega)$ on utilise la linéarisation suivante :

$$F(\omega) \approx \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{el}} F(\omega_j(t))\psi_j(x), \quad \text{où } \psi_j \in S_h. \tag{4.2.9}$$

Dans le cas de la méthode de Galerkin, les fonctions de bases sont prises dans les mêmes espaces : $S_h = V_h$. La formulation faible devient alors :

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{el}} \frac{\partial \omega_j}{\partial t} \int_\omega \phi_j \phi_i d\Omega + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{el}} F(\omega_j) \int_\omega \nabla \cdot (\phi_j)\phi_i d\Omega = 0. \tag{4.2.10}$$

Pour simplifier, on se place pour la suite dans le cas $1D$. On a donc :

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{el}} \frac{\partial \omega_j}{\partial t} \int_\omega \phi_j \phi_i dx + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{el}} F(\omega_j) \int_\omega \partial_x(\phi_j)\phi_i dx = 0. \tag{4.2.11}$$

En posant les matrices M et C suivantes :

$$M = (M_{ij})_{ij}, \quad M_{ij} = \int_\Omega \phi_j \phi_i dx, \tag{4.2.12}$$

$$C = (C_{ij})_{ij}, \quad C_{ij} = \int_\Omega \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \phi_i dx. \tag{4.2.13}$$

le schéma se réécrit :

$$\sum_{j=1}^{N_s} M_{ij} \frac{dW_j}{dt} + C_{ij} F(W_j) = 0, \tag{4.2.14}$$

$$\text{i.e.} \quad M \frac{dW_h}{dt} + CF(W_h) = 0. \tag{4.2.15}$$

M n'est pas une matrice diagonale. On cherche donc à condenser cette matrice pour résoudre explicitement le problème. Cette technique usuelle [EGM09, EJ97, GLS78, Neu73] consiste à approcher la matrice M par une matrice diagonale dont le coefficient diagonal de la ligne i est la somme des coefficients de cette même ligne i. Ainsi, cette matrice M devient :

$$M \simeq \Delta x \mathbb{I}. \tag{4.2.16}$$

Avec la formulation d'Euler explicite pour la discrétisation temporelle et si on utilise les éléments $P1$ de Lagrange, on retrouve ici un schéma volumes finis ou de différences finies avec un flux centré :

$$\frac{\omega_h^{n+1} - \omega_h^n}{\Delta t} + \frac{F(\omega_{i+1}) - F(\omega_{i-1})}{2\Delta x} = 0. \tag{4.2.17}$$

Cette méthode des volumes finis avec un flux centré est connue pour être instable numériquement.

Ainsi, cette méthode de résolution est instable pour les systèmes de la MHD. On présente donc dans la partie suivante la méthode de stabilisation SUPG.

4.2.3 Stabilisation SUPG

Le système de la MHD est dominé par l'advection. Pour illustrer, la méthode de stabilisation SUPG nous étudions au préalable la résolution de l'équation plus simple d'advection $1D$:

$$\partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0, \tag{4.2.18}$$

avec ρ la quantité transportée et u la vitesse d'advection. Ce problème est défini sur un domaine Ω borné régulier. Sur la frontière $\partial\Omega$ de ce domaine la solution vérifie la condition de Dirichlet :

$$\rho(t,x) = \rho^\Gamma(x), \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T_f], \tag{4.2.19}$$

et admet comme condition initiale nécessaire pour fermer ce problème la fonction ρ^0 :

$$\text{à } t = 0, \quad \rho(0,x) = \rho^0(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{4.2.20}$$

La formulation variationnelle associée à cette équation (4.2.18) est obtenue en multipliant cette équation par une fonction test ϕ pris dans un espace de fonctions adéquat et en intégrant sur le domaine Ω :

$$\int_\Omega (\partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho)\, \phi d\Omega = 0 \tag{4.2.21}$$

Dans le cas d'une approximation de Galerkin standard les quantités ρ et les fonctions de bases ϕ appartiennent au même espace V_h, approximation de V. Le problème variationnel discret s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } \rho_h \in V_h \text{ telle que} \\ \displaystyle\int_\Omega (\partial_t \rho_h + u \cdot \nabla \rho_h)\phi_h d\Omega = 0, \quad \forall \phi_h \in V_h, \\ \rho(t,x) = \rho^\Gamma(x), \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T_f], \\ \rho(0,x) = \rho^0(x), \quad \forall x \in \Omega. \end{array} \right. \tag{4.2.22}$$

La résolution de cette équation nécessite l'utilisation d'une méthode de stabilisation. Notre choix s'est porté sur la méthode de stabilisation SUPG. Quelques méthodes ont précédé le développement de cette méthode SUPG parmi lesquelles les méthodes upwind [Hug78] et streamline upwind [HB79]. Ces méthodes ont permis de résoudre certains problèmes comme le problème de diffusion dans certaines directions (voir [Bil09]). Néanmoins, elles présentent encore quelques inconvénients et notamment au niveau de la consistance. Brook et Hughes [BH82] ont proposé, pour résoudre cette difficulté, d'appliquer un terme complet de stabilisation à l'ensemble des équations. Ainsi, l'idée originelle de la méthode SUPG est de rajouter un terme de diffusion qui agit uniquement dans la direction de l'écoulement sur l'ensemble de l'équation. Cette méthode permet aussi de conserver la consistance du schéma numérique considéré. Elle est de type Petrov-Galerkin car elle suggère la modification des fonctions test ϕ_h en ajoutant une perturbation de type streamline upwind agissant dans la direction de l'écoulement sur les dérivées spatiales uniquement :

$$\tilde{\phi_h} = \phi_h + \tau_h u \cdot \nabla \phi_h, \tag{4.2.23}$$

où τ_h est un coefficient de stabilisation défini sur chacun des éléments du maillage. Ce paramètre permet de contrôler la quantité de diffusion numérique apportée au schéma. Le choix de celui-ci fait l'objet du paragraphe 4.2.3.1.

Avec ces fonctions de bases $\tilde{\phi_h}$, la formulation faible de ce problème d'advection devient :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver} \quad \rho_h \in V_h \quad \text{telle que} \\ \displaystyle\int_\Omega (\partial_t \rho_h + u \cdot \nabla \rho_h)\, \phi_h d\Omega + \sum_{e=1}^{\mathcal{N}_{el}} \int_\Omega \tau_e u \cdot \nabla \phi_h \left(\partial_t \rho_h + u \cdot \nabla \rho_h\right) d\Omega = 0, \forall \phi_h \in V_h, \\ \rho_h(t,x) = \rho_h^\Gamma(x), \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T_f], \\ \rho_h(0,x) = \rho_h^0(x), \quad \forall x \in \Omega. \end{array}\right. \tag{4.2.24}$$

A l'origine, cette stabilisation a été conçue pour des problèmes stationnaires. Pour utiliser cette méthode sur des problèmes instationnaires, tels que ceux de la MHD, Codina [Cod98] propose de considérer le terme temporel du résidu comme un terme source. Le problème s'écrit alors :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver} \quad \rho_h \in V_h \quad \text{telle que} \\ \displaystyle\int_\Omega (\partial_t \rho_h + u \cdot \nabla \rho_h)\, \phi_h d\Omega + \sum_{e=1}^{\mathcal{N}_{el}} \int_\Omega \tau_e u \cdot \nabla \phi_h \left(\frac{\Delta \rho_h^n}{\Delta t} + u \cdot \nabla \rho_h\right) d\Omega = 0, \forall \phi_h \in V_h, \\ \rho_h(t,x) = \rho_h^\Gamma(x), \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T_f], \\ \rho_h(0,x) = \rho_h^0(x), \quad \forall x \in \Omega, \end{array}\right. \tag{4.2.25}$$

avec Δt le pas de temps et $\Delta \rho_h^n$ défini par :

$$\Delta \rho_h^n = \rho_h^{n+1} - \rho_h^n. \tag{4.2.26}$$

Ainsi, si le domaine Ω est divisé en $\mathcal{N}_{el}$ éléments et ces éléments en $\mathcal{N}_s$ sommets, l'équation

se réécrit : $\forall i \in [1;\mathcal{N}_s]$

$$\begin{aligned}\sum_{e=1}^{\mathcal{N}_{el}}\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_s}\partial_t\rho_j\int_{\Omega_e}\phi_i\phi_j d\Omega+\sum_{e=1}^{\mathcal{N}_{el}}\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_s}u\rho_j\int_{\Omega_e}\phi_i\partial_x\phi_j d\Omega\\ +\sum_{e=1}^{\mathcal{N}_{el}}\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_s}\tau_e u\frac{\Delta\rho_j^n}{\Delta t}\int_{\Omega_e}\phi_j\partial_x\phi_i d\Omega+\sum_{e=1}^{\mathcal{N}_{el}}\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_s}\tau_e u^2\rho_j\int_{\Omega_e}\partial_x\phi_j\partial_x\phi_i d\Omega=0.\end{aligned} \tag{4.2.27}$$

Sans condenser la matrice de masse et en utilisant des éléments $P1$ de Lagrange, la formulation discrète de cette équation est :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta x}{6}\partial_t\rho_{j-1}+\frac{2\Delta x}{3}\partial_t\rho_j+\frac{\Delta x}{6}\partial_t\rho_{j+1}+\frac{1}{2}u\tau_j\left(\frac{\Delta\rho_{j-1}^n}{\Delta t}-\frac{\Delta\rho_{j+1}^n}{\Delta t}\right)=\\ -\frac{u}{2}\left(\rho_{j+1}-\rho_{j-1}\right)-\frac{u^2\tau_j}{\Delta x}\left(-\rho_{j+1}+2\rho_j-\rho_{j-1}\right),\end{aligned} \tag{4.2.28}$$

avec

$$\rho_j=\rho_h(x_j). \tag{4.2.29}$$

Le terme temporel du résidu étant défini de manière implicite, on verra dans l'analyse de stabilité L^2, dans le paragraphe 4.2.4, que l'ensemble de l'équation doit être résolue implicitement pour garantir cette stabilité. En effet, les résultats montreront que résolue de manière explicite ce problème est inconditionnellement instable.

Ainsi, pour gagner en stabilité, nous proposerons de faire une résolution semi-implicite ou implicite complète. Pour cela, on pose m et p des coefficients définis en fonction des coefficients β et γ pris dans $[0;1]$ tels que :

$$m=n+\beta, \tag{4.2.30}$$

$$p=n+\gamma, \tag{4.2.31}$$

c'est-à-dire que ρ^m et ρ^p sont définis par :

$$\rho^m=\beta\rho^{n+1}+(1-\beta)\,\rho^n, \tag{4.2.32}$$

$$\rho^p=\gamma\rho^{n+1}+(1-\gamma)\,\rho^n. \tag{4.2.33}$$

Le problème d'advection $1D$ dans le cas d'une résolution implicite ou semi-implicite a pour formulation faible

$$\int_\Omega(\partial_t\rho_h+u\cdot\nabla\rho_h^m)\phi_h d\Omega+\sum_{e=1}^{\mathcal{N}_{el}}\int_{\Omega^e}\tau_e u\nabla\phi_h(\frac{\Delta\rho_h^n}{\Delta t}+u\nabla\rho_h^p)d\Omega=0. \tag{4.2.34}$$

Ainsi, le problème variationnel de cette équation d'advection $1D$ résolu de manière implicite

ou semi-implicite s'écrit alors :

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver} \quad \rho_h \in V_h \quad \text{telle que} \\ \displaystyle\int_\Omega (\partial_t \rho_h + u \cdot \nabla \rho_h^m)\, \phi_h d\Omega + \sum_{e=1}^{\mathcal{N}_{el}} \int_\Omega \tau_e u \cdot \nabla \phi_h \left(\frac{\Delta \rho_h^n}{\Delta t} + u \cdot \nabla \rho_h^p \right) d\Omega = 0, \forall \phi_h \in V_h, \\ \rho_h(t,x) = \rho_h^\Gamma(x), \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T_f], \\ \rho_h(0,x) = \rho_h^0(x), \quad \forall x \in \Omega. \end{array}\right. \tag{4.2.35}$$

Il est possible de faire différents choix sur β et γ, suivant que l'on souhaite une résolution plus ou moins explicite ou implicite. La résolution est dite semi-implicite si les coefficients β et γ sont pris tels que :

$$0 < \beta < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \gamma < 1. \tag{4.2.36}$$

Parallèlement à un développement de la résolution implicite, on a repris le résidu de l'équation stationnaire. On a donc cherché à ne stabiliser que la partie convective de l'équation. Dans ce cas, la formulation faible de ce problème d'advection se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver} \quad \rho_h \in V_h \quad \text{telle que} \\ \displaystyle\int_\Omega (\partial_t \rho_h + u \cdot \nabla \rho_h)\, \phi_h d\Omega + \sum_{e=1}^{\mathcal{N}_{el}} \int_\Omega \tau_e u \cdot \nabla \phi_h \left(u \cdot \nabla \rho_h \right) d\Omega = 0, \forall \phi_h \in V_h, \\ \rho_h(t,x) = \rho_h^\Gamma(x), \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T_f], \\ \rho_h(0,x) = \rho_h^0(x), \quad \forall x \in \Omega, \end{array}\right. \tag{4.2.37}$$

En utilisant les éléments $P1$ de Lagrange et en condensant la matrice, la formulation discrète en espace associée à l'équation (4.2.37) s'écrit alors :

$$\partial_t \rho_i + u \frac{\rho_{i+1} - \rho_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{u^2 \tau_i}{(\Delta x)^2} \left(-\rho_{i+1} + 2\rho_i - \rho_{i-1} \right) = 0. \tag{4.2.38}$$

Le dernier terme de cette équation (4.2.38) est de la forme d'un laplacien, il est donc diffusif.

Plus généralement, sur les systèmes de conservatifs de la MHD (4.2.1) la méthode de stabilisation SUPG s'applique également. Pour cela, on utilise la forme quasi-linéaire (4.2.2). Avec les fonctions de base $\tilde{\phi_h}$ munies de la stabilisation SUPG, la formulation faible de ce système devient si on ne tient pas compte de la partie temporelle du résidu :

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver} \quad \omega_h \in V_h \quad \text{tel que ,} \quad \forall \phi_h \in V_h, \\ \displaystyle\int_\Omega (\partial_t \omega_h + \nabla \cdot F(\omega_h))\, \phi_h d\Omega + \sum_{e=1}^{\mathcal{N}_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_e A \cdot \nabla \phi_h \left(\nabla \cdot F(\omega_h) \right) d\Omega = 0, \\ \rho_h(t,x) = \rho_h^\Gamma(x), \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T_f], \\ \rho_h(0,x) = \rho_h^0(x), \quad \forall x \in \Omega. \end{array}\right. \tag{4.2.39}$$

La version discrète en espace de cette équation revient à un schéma volumes finis de type Lax-Wendroff

$$\partial_t \omega + \frac{F(\omega_{i+1}) - F(\omega_{i-1})}{2\Delta x} + \frac{\tau_i A_i}{(\Delta x)^2}\left(-F(\omega_{i+1}) + 2F(\omega_i) - F(\omega_{i-1})\right) = 0. \tag{4.2.40}$$

4.2.3.1 Différents choix de τ : paramètre de stabilisation

Le choix de ce paramètre de stabilisation τ est délicat. Tout d'abord, τ est une matrice locale sur chacun des éléments du maillage. Il existe une liste exhaustive de définitions existantes pour ce paramètre τ [Tez03]. On en cite ici 3 [Wer10] en commençant par le plus simple :

$$\tau_e^1 = \frac{h}{|u|+c}\mathbb{I}, \tag{4.2.41}$$

où h est une des longueurs caractéristique de l'élément [FV00, JK07], c la vitesse du son, u la vitesse et $\mathbb{I}$ la matrice identité. Il faut noter que cette matrice τ est donc diagonale et que le même coefficient sera appliqué à toutes les équations.

Pour le problème de la MHD les jacobiennes A_i correspondent à la généralisation de la vitesse d'advection, elles peuvent donc être utilisées pour construire le paramètre de stabilisation τ_e^2 défini alors par :

$$\tau_e^2 = \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_s} |A_1\partial_x\phi_i + A_2\partial_y\phi_i + A_3\partial_z\phi_i|\right)^{-1}. \tag{4.2.42}$$

Ce type de paramètre est moins répandu car il nécessite l'inversion d'une matrice ce qui est coûteux. Il existe néanmoins des publications, ayant pour sujet le schéma SUPG, où des termes de stabilisation analogues sont utilisés [AS10].

Le dernier paramètre de stabilisation défini ici a été proposé par Tezduyar et Senga [TS06]. Il s'agit à nouveau d'une matrice diagonale :

$$\tau_e^3 = \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_s} c|j\cdot\nabla\phi_i| + |u\cdot\nabla\phi_i|\right)^{-1}\mathbb{I}, \tag{4.2.43}$$

où j est un vecteur unitaire défini par :

$$j = \frac{\nabla\rho}{\|\rho\|}. \tag{4.2.44}$$

4.2.3.2 Capture de choc

En présence de forts gradients, la méthode SUPG n'empêche pas l'apparition locale d'oscillations, aussi appelées phénomènes de Gibbs. Ces apparitions locales d'oscillations s'expliquent par le fait que le schéma ne soit ni monotone ni TVD (Total Variation Diminishing). Il est cependant nécessaire de contrôler ces oscillations qui peuvent avoir des conséquences nuisibles et notamment leurs amplifications peuvent causer la divergence de la solution. Pour pallier ce problème un terme de diffusion supplémentaire est généralement

introduit : il est appelé « Capture de choc ». Ce sujet a fait l'objet de nombreuses études [BRAT93, HM86a, HMA86, SHJ91]. Ce terme de capture de choc est rajouté directement au modèle tel que :

$$\partial_t \omega + \nabla \cdot F(\omega) = \nabla \cdot (\nu_{choc} \nabla \omega). \tag{4.2.45}$$

Il suffit de rajouter le terme de capture de choc pour obtenir la formulation discrète à partir de l'équation (4.2.40). Ainsi, cette équation en version discrète en espace s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_t \omega_i + \frac{F(\omega_{i+1}) - F(\omega_{i-1})}{2\Delta x} - \frac{\tau_i A_i}{(\Delta x)^2} \left(F(\omega_{i+1}) - 2F(\omega_i) + F(\omega_{i-1})\right) \\ - \frac{(\nu_{choc})_i}{\Delta x} \left(\omega_{i+1} - 2\omega_i + \omega_{i-1}\right) = 0. \end{aligned} \tag{4.2.46}$$

Ce terme de capture de choc est pondéré par un coefficient ν_{choc} qui permet d'agir seulement lors de forts gradients. Ce paramètre ν_{choc} donne donc une indication sur l'amplitude des gradients. Comme pour le paramètre τ il n'existe pas de définition unique et optimale pour ce terme.

4.2.4 Analyse de stabilité L^2

Dans cette partie, on étudie la stabilité L^2 de la méthode de résolution. Dans un premier temps, on étudie le cas où dans le résidu le terme temporel est conservé et considéré comme un terme source. Dans un second temps, on a étudié la stabilité L^2 dans le cas où on ne stabilise que la partie convective de l'équation.

Afin d'étudier la stabilité L^2, on utilise une approche naturelle d'amplification des erreurs : la théorie de Von Neumann. Cette méthode est basée sur l'utilisation de la transformée de Fourier. Cette technique consiste à distinguer un par un les modes d'oscillations de la solution. Pour mettre en avant l'amplification des erreurs, on pose :

$$\rho_j^n = A^n e^{ij\theta}, \quad \forall j, \quad \forall n. \tag{4.2.47}$$

La solution obtenue sera stable L^2 si :

$$\forall \theta, \quad |g(\theta)|^2 \leq 1, \tag{4.2.48}$$

avec

$$g(\theta) = \frac{A^{n+1}}{A^n}. \tag{4.2.49}$$

Résidu avec terme temporel

Dans un premier temps, cette analyse de stabilité est effectuée sur le problème variationnel (4.2.25), soit avec le terme temporel dans le résidu pris comme un terme source. Ainsi, dans le cas explicite, les équations (4.2.28) et (4.2.47) permettent d'obtenir la fonction $g(\theta)$ sous la forme suivante :

$$g(\theta) = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{iu \sin\theta + \dfrac{2u^2 \tau}{\Delta x}(1 - \cos\theta)}{\dfrac{(\cos\theta + 2)}{3} - iu \dfrac{\tau}{\Delta x} \sin\theta} \tag{4.2.50}$$

En imposant les conditions suivantes :

$$u = 1, \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} = \sigma, \quad \tau = \frac{\Delta t}{2}, \tag{4.2.51}$$

alors cette fonction $g(\theta)$ ne dépend plus que de σ, coefficient lié à la condition de CFL, et de θ :

$$g(\theta) = 1 - \sigma \frac{i \sin\theta + \sigma(1 - \cos\theta)}{\dfrac{(\cos\theta + 2)}{3} - i\dfrac{\sigma}{2}\sin\theta}. \tag{4.2.52}$$

La stabilité L^2 dépendant de σ, sur la figure 4.6 on a tracé plusieurs courbes de $|g(\theta)|^2$ en fonction de θ suivant plusieurs coefficients σ choisis.

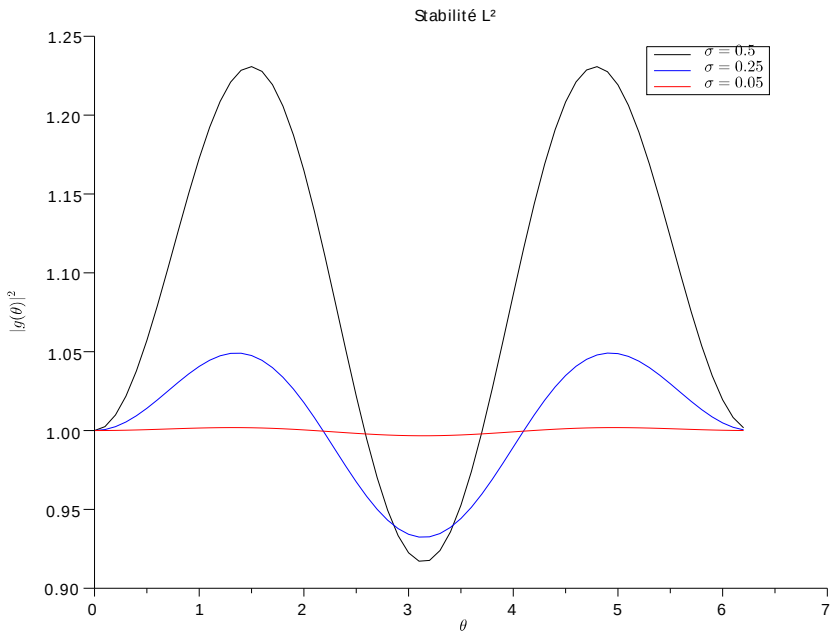


FIGURE 4.6 – Stabilite L^2 suivant σ avec résidu temporel.

Les courbes obtenues sur la figure 4.6 montrent que lors d'une résolution explicite quelque soit le coefficient σ choisi il n'est pas possible d'obtenir la stabilité L^2. En effet, σ ne change pas le sens de variation de la courbe $|g(\theta)|^2$ et donc même si le coefficient σ est pris très petit la condition (4.2.48) ne sera pas assurée et donc la stabilité non plus.

Dans cette résolution explicite on a conservé dans le résidu la partie temporelle. Ce terme temporel du résidu est pris comme un terme source et résolu implicitement. Ce double schéma explicite-implicite rend la résolution inconsistante. Pour préserver la consistance, on utilise une résolution implicite ou semi-implicite. Dans la suite, on a étudié la stabilité L^2 avec ce type de résolution.

Toujours dans le cas où on considère le résidu temporel comme un terme source, on étudie la stabilité du problème variationnel (4.2.35) où l'équation d'advection $1D$ est résolue de manière implicite. Reprenons les définitions (4.2.47) pour calculer la fonction $g(\theta)$ dans les cas implicite ou semi-implicite dans les mêmes conditions (4.2.51) :

$$g(\theta) = 1 - \sigma \frac{i \sin\theta - \sigma(\cos\theta - 1)}{\dfrac{\cos\theta + 2}{3} - \gamma\sigma^2(\cos\theta - 1) - i\left(\dfrac{\sigma \sin\theta}{2} - \beta\sigma\sin\theta\right)}. \tag{4.2.53}$$

Les graphiques des figures 4.7 et 4.8 montrent en polaire les résultats obtenus pour $|g(\theta)|^2$. Pour vérifier la stabilité L^2 il faut que la courbe obtenue soit à l'intérieur du cercle unité (représenté en noir si le cercle représenté n'est pas le cercle unité).

Avec cette visualisation si le coefficient σ est trop petit la courbe obtenue ne se distingue plus du cercle unité sans pour autant qu'on sache si effectivement la courbe est à l'intérieur ou non. On a imposé une condition σ égale à 0.5.

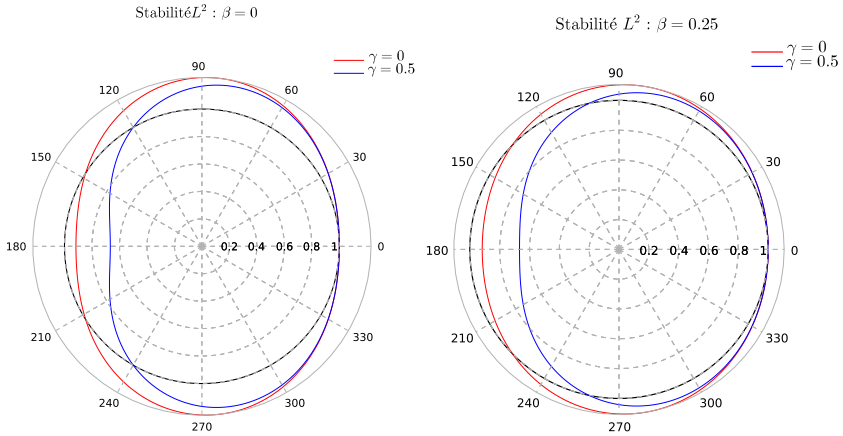


FIGURE 4.7 – Stabilite L^2 pour $\beta = 0$ et $\beta = 0.25$

Ces deux graphiques de la figure 4.7 montrent que pour $\beta = 0$ et $\beta = 0.25$ la solution obtenue sera instable. Ces graphiques permettent donc de conclure l'existence d'une condition de stabilité sur β.

Les graphiques de la figure 4.8 montrent que pour un β pris dans l'intervalle $[0.5; 1]$ les solutions obtenues seront L^2-stable. Ces graphiques montrent également les résultats attendus que s'il est fait le choix de l'implicite total alors la solution obtenue sera plus stable. Mais même si l'implicite total semble la meilleure solution en terme de stabilité, le semi-implicite avec

$$\beta = 0.5 \quad \text{et} \quad \gamma = 0.5, \tag{4.2.54}$$

est un bon compromis. Ces conditions de résolution semi-implicite (4.2.54) correspondent à un schéma de Crank-Nicholson.

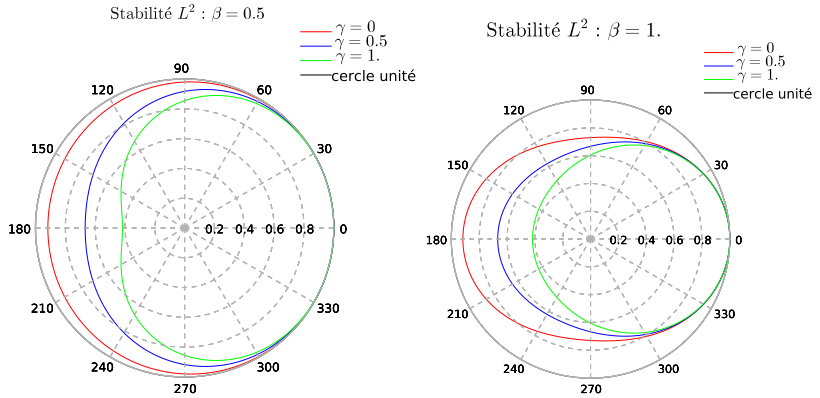


FIGURE 4.8 – Stabilite L^2 pour $\beta = 0.5$ et $\beta = 1$

Stabilisation de la partie convective uniquement

A present, on étudie la stabilité L^2 dans le cas où on a cherché à stabiliser que la partie convective de l'équation. Reprenons le cas explicite pour lequel la résolution avec la considération du terme temporel dans le résidu est inconditionnellement instable. Dans la suite, on étudie donc la stabilité du problème (4.2.37). Dans ces conditions, la fonction $g(\theta)$ est :

$$g(\theta) = 1 - \sigma \frac{i \sin\theta + \sigma(1 - \cos\theta)}{\dfrac{(\cos\theta + 2)}{3}}. \tag{4.2.55}$$

La figure 4.9 représente plusieurs courbes de $|g(\theta)|^2$ en fonction de θ suivant plusieurs coefficients σ choisis. Ce graphique 4.9 montre que sans la partie temporelle du résidu la

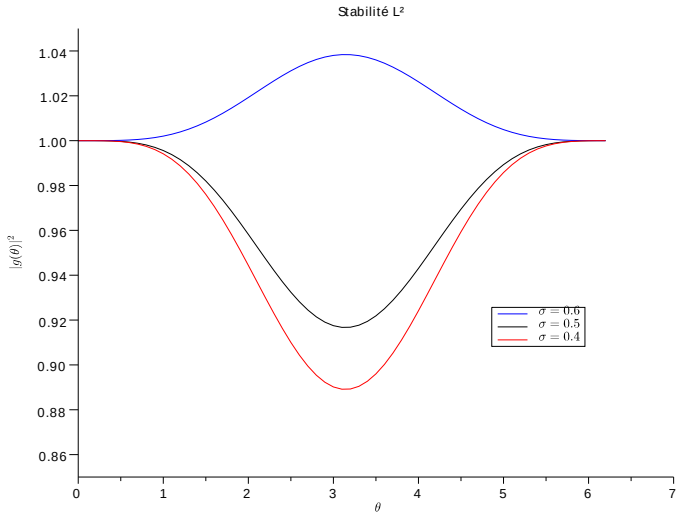


FIGURE 4.9 – Stabilite L^2 suivant σ sans stabilisation temporelle

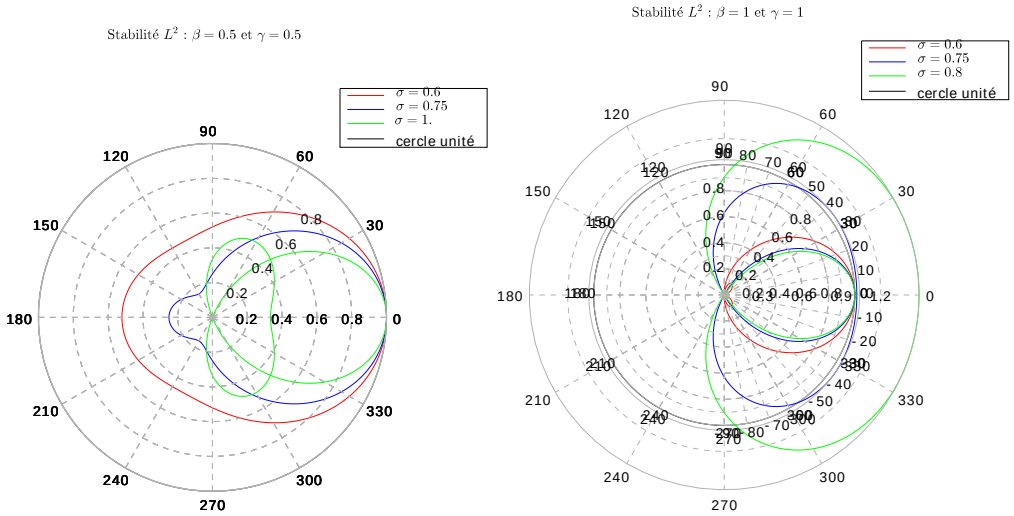
stabilité est assurée sous une condition sur le coefficient σ. En passant à une résolution semi-implicite ou implicite, on espère que la résolution sera inconditionnellement stable.

Dans le cas d'une résolution implicite ou semi-implicite, la fonction $g(\theta)$ devient :

$$g(\theta) = 1 - \sigma \frac{i \sin\theta - \sigma(\cos\theta - 1)}{\dfrac{\cos\theta + 2}{3} - \gamma\sigma^2(\cos\theta - 1) + i\beta\sigma\sin\theta}. \tag{4.2.56}$$

Dans le cas de la résolution explicite sans le terme temporel dans le résidu, la stabilité était assurée sous une condition sur le coefficient σ lié à la condition de CFL. En effet, pour un coefficient σ supérieur à $0,6$, le problème n'était plus L^2 stable.

Pour la résolution implicite on a étudié les cas semi-implicite de Crank-nicholson sur la figure 4.10a et le cas implicite total sur la figure 4.10b.



(a) Stabilite L^2 pour résolution avec Crank-Nicholson

(b) Stabilite L^2 pour résolution implicite

FIGURE 4.10 – Stabilite L^2 suivant σ sans stabilisation temporelle pour des cas implicites

La figure 4.10a illustre que pour un schéma de Crank-Nicholson qui est un schéma d'ordre 2 il n'y a plus de condition de stabilité sur le coefficient σ. Au contraire, le graphique 4.10b présente un schéma implicite complet et montre qu'avec ce schéma d'ordre 1 le problème reste L^2-stable sous une condition sur σ.

Pour conclure sur cette étude de la stabilité L^2, pour résoudre les modèles de la MHD dominés par l'advection, on peut utiliser la méthode SUPG sous condition. Cette analyse montre que la méthode de Crank-Nicholson représente un bon compromis dans le cas où le terme temporel est conservé dans le résidu et une méthode assurant la stabilité sans condition sur σ dans le cas où la stabilisation n'est que sur la partie convective de l'équation.

4.2.5 Résultats numériques

Dans cette partie on présente deux cas tests analytiques. Un basique sur le système de la MHD idéal en $1D$ et un sur l'équation d'advection $1D$. Ces cas tests ont pour objectif l'utilisation de la méthode SUPG et l'obtention de résultats numériques sur des premiers cas $1D$.

4.2.5.1 Cas test de MHD $1D$ résolu avec la méthode SUPG

On présente ici un cas test analytique du système conservatif fluide de la MHD dans le cas idéal (3.1.74) en dimension 1 qui s'apparente à un problème basique de transport $1D$. Ce cas test est résolu avec la méthode des éléments finis stabilisés avec des éléments $P1$ de Lagrange et une méthode de stabilisation SUPG. Ce cas test est défini sur le domaine $\Omega = [0; 2]$, discrétisé avec un pas de maillage $\delta h = 0.02$ et ce cas test a pour durée totale de simulation $T_f = 1$. On pose pour conditions initiales :

$$\begin{aligned} \rho =& 1 + \exp(\frac{-(x-0.25)^2}{0.0095}), \\ \boldsymbol{B}_x =& 1, \\ p =& 1, \\ \boldsymbol{v}_x =& 1. \end{aligned} \tag{4.2.57}$$

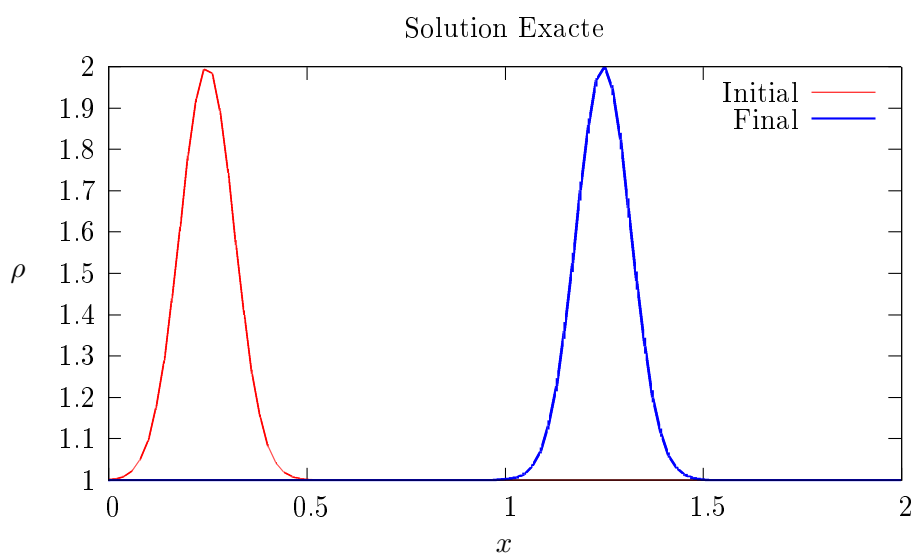


FIGURE 4.11 – Solution analytique de la densité

La figure 4.11 présente le graphique de la solution exacte. En réalité, la simulation obtenue avec la méthode des éléments finis stabilisés (cf : figure 4.12) présente des oscillations appelées phénomène de Gibbs. Ces oscillations doivent être atténuées avec l'ajout du terme de capture de choc.

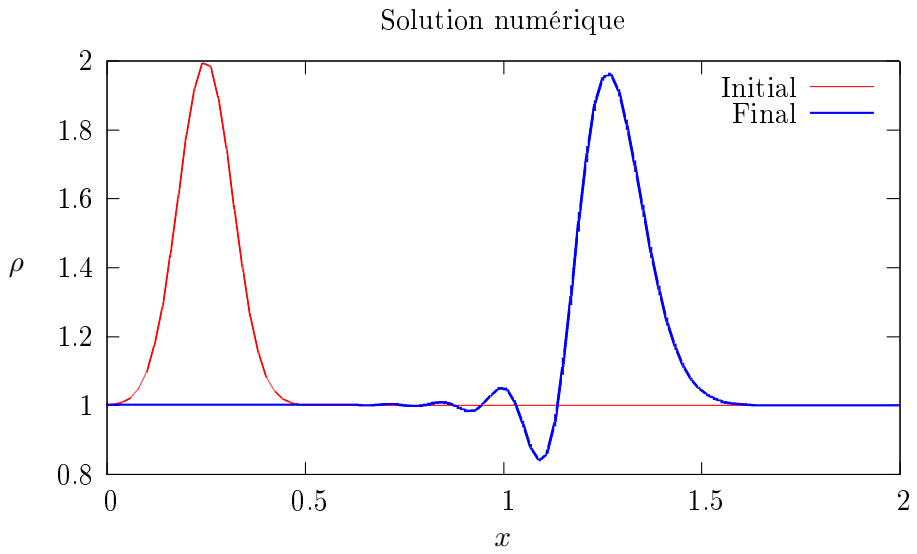


FIGURE 4.12 – Solution obtenue avec la méthode des éléments finis stabilisés

L'ajout du terme de capture de choc dans cette équation dégrade fortement la solution obtenue sur le graphique 4.13. En effet, les gradients des oscillations ne sont pas plus forts que ceux de la solution.

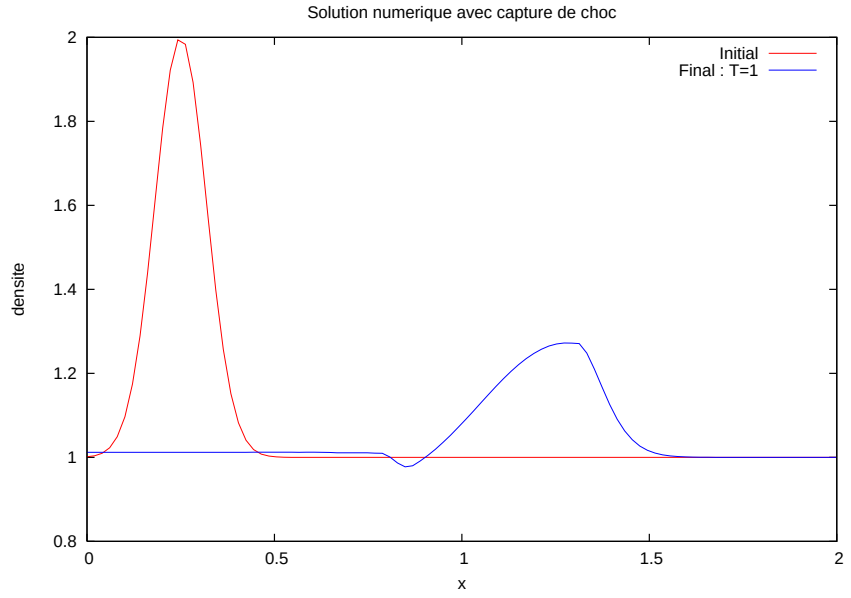


FIGURE 4.13 – Solution fortement dégradée obtenue avec la méthode des éléments finis stabilisés et le terme de capture de choc

Ce cas test étant analytique, il permet de vérifier sur la figure 4.14 que l'ordre de convergence de la méthode des éléments finis stabilisés est bien d'ordre 2 .

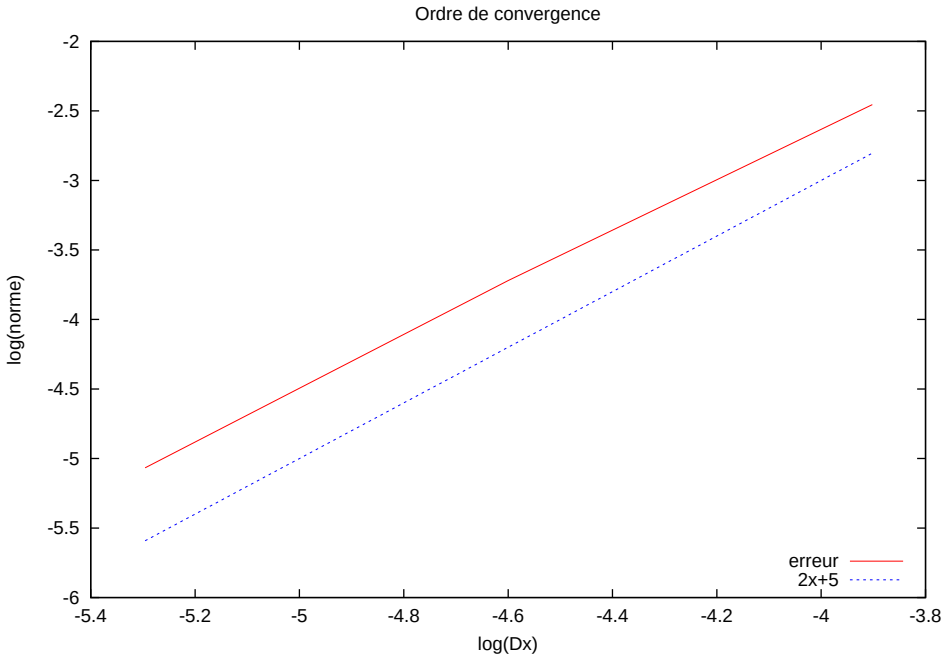


FIGURE 4.14 – Vérification de l'ordre de convergence.

4.2.5.2 Cas test d'advection $1D$ résolu avec la méthode SUPG

Dans la suite de cette étude on prend un cas test de transport sur l'équation d'advection $1D$ et on pose plus simplement : $\forall x \in [0;2]$

$$\begin{aligned} \rho =& 1 + \exp\left(\frac{-(x-0.25)^2}{0.0095}\right) \\ u =& 1. \end{aligned} \tag{4.2.58}$$

Ce cas test analytique est résolu avec la méthode des éléments finis stabilisés et plus particulièrement avec la méthode SUPG. Pour cette méthode de résolution on a choisi pour paramètre de stabilisation : $\tau = \dfrac{\Delta x}{2}$. Pour ce cas test la condition de CFL est imposée à 0.15. Le graphique de la figure 4.15 représente la solution obtenue au temps T_f de 1 dans le cas d'une résolution explicite.

En utilisant la méthode de résolution semi-implicite de Crank-Nicholson : $\beta = \gamma = 0.5$ la figure 4.16 montre que la solution obtenue ne présente plus ni oscillations ni augmentations de l'amplitude.

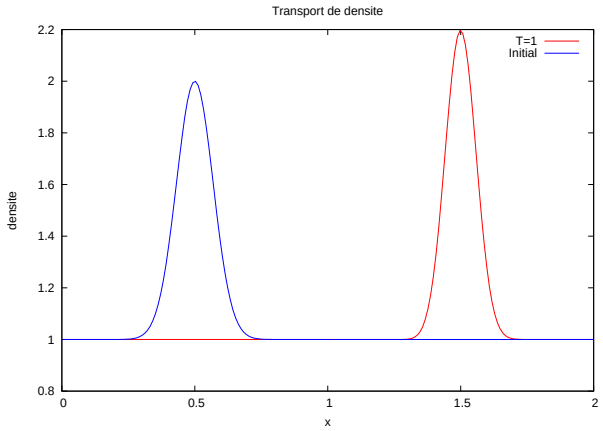


FIGURE 4.15 – Solution d'une équation de transport avec la méthode des EFS

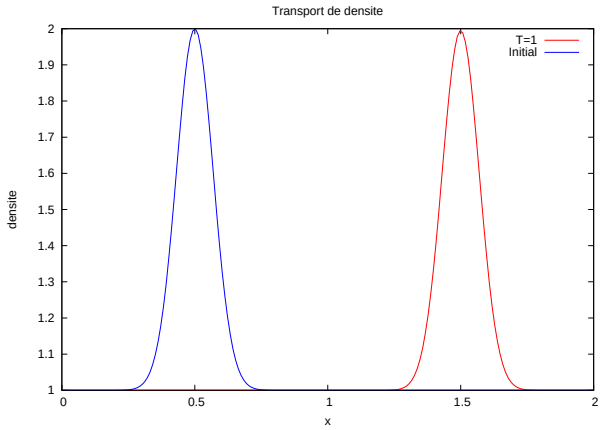


FIGURE 4.16 – Résolution d'une équation de transport avec les méthodes des EFS et semi-implicite de Crank-Nicholson

4.3 Eléments finis C^1 de Bell

La résolution du système de la MHD complète (3.1.57) nécessite une certaine régularité sur les éléments utilisés dans la méthode de résolution par éléments finis, notamment lors de l'introduction du potentiel vecteur. Cette présentation des éléments finis de Bell commence par la motivation de ce choix et l'exposition de leurs intérêts particuliers. La partie suivante donne les définitions et les propriétés de ces éléments. Pour finir, on développe la mise en application et l'utilisation des ces éléments en vue de leur utilisation sur des cas-tests numériques présentés dans le chapitre suivant.

Les éléments finis de Bell, aussi nommés « Reduced quintic element » [Jar04, SF73] (ou encore TUBA 3 element [AFS68]) ont pour intérêts d'être C^1, triangulaires et connectés uniquement aux nœuds du maillage. Les éléments triangulaires sont préférés car ils sont plus flexibles pour représenter les géométries complexes et pour ensuite raffiner le maillage. L'intérêt d'une connection exclusivement nodale est que même sur un maillage non structuré, les variables ne sont définies qu'aux noeuds du maillage et ne nécessite donc pas d'interpolation sur d'autres points de l'élément.

4.3.1 Définition et propriétés des éléments finis de Bell

Les éléments de Bell [Bel68, Bel69, Bra02, Jar04] sont connus pour être bien adaptés pour des problèmes de type elliptique, la diffusion anisotropique, l'équation de Grad-Shafranov et les systèmes temporels de la MHD. Plus particulièrement, ces éléments définis en $2D$ sont bien adaptés pour des problèmes $3D$ dont la troisième dimension est représentée par des séries de Fourier [Jar04]. Bien que ce type d'éléments ait été développé dans les années 1960 [CKLO57], principalement pour des applications en mécanique des structures, ils sont considérés avec intérêt pour les systèmes de la MHD dans les plasmas magnétisés.

Les éléments finis de Bell s'utilisent donc sur un domaine Ω $2D$ discrétisé par un maillage triangulaire régulier Ω_h. Chacun des éléments $e \in \Omega_h$ est défini par ses 3 sommets (x_i, x_{i-1}, x_{i+1}). Chaque noeud du maillage admet six degrés de libertés qui représentent

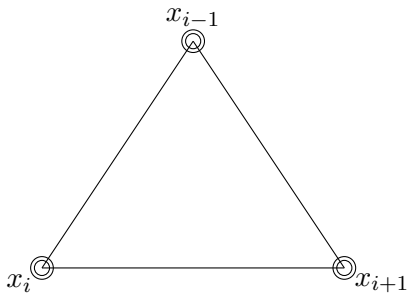


FIGURE 4.17 – Triangle $e \in \Omega_h$

la valeur de la variable, ses deux dérivées premières et ses trois dérivés secondes en ce point. Chacun des éléments du maillage contient donc 18 fonctions de bases constituées de polynômes d'ordre 5. Ces fonctions de bases forment une base réduite. On peut donc espérer un ordre de convergence de l'erreur d'approximation de 5, si cet ordre est optimal.

Pour définir cette base nous utilisons les coordonnées barycentriques λ_i :

$$\lambda_i(x) = \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{i+1}) \times (\boldsymbol{x}_{i-1} - \boldsymbol{x}_{i+1}) \cdot \hat{z}}{(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i+1}) \times (\boldsymbol{x}_{i-1} - \boldsymbol{x}_{i+1}) \cdot \hat{z}}. \tag{4.3.1}$$

Chaque point $\boldsymbol{x}$ de l'élément e peut donc être défini par

$$\boldsymbol{x}(\xi) = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{x}_i \lambda_i(\xi) = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{x}_i \lambda_i(\boldsymbol{x}), \tag{4.3.2}$$

avec $\boldsymbol{x}_i$ les coordonnées barycentriques et ξ les coordonnées cartésiennes locales. Dans chaque élément triangulaire les fonctions de base $\check{\mathcal{B}}^i_{j,k}(\xi)$ au point $\boldsymbol{x}_j$ correspondant à la dérivé i dans la direction du point $\boldsymbol{x}_k$ sont donc définies par des polynômes d'ordre 5 avec des coordonnées barycentriques

$$\begin{cases} \check{\mathcal{B}}^0_i(\xi) = & \lambda_i^5 + 5\lambda_i^4\lambda_{i-1} + 5\lambda_i^4\lambda_{i+1} + 10\lambda_i^3\lambda_{i-1}^2 + 10\lambda_i^3\lambda_{i+1}^2 + 20\lambda_i^3\lambda_{i-1}\lambda_{i+1} \\ & + 15(1+\eta_{i+1})\lambda_i^2\lambda_{i-1}^2\lambda_{i+1} + 15(1-\eta_{i-1})\lambda_i^2\lambda_{i+1}^2\lambda_{i-1} \\ \check{\mathcal{B}}^1_{i,i-1}(\xi) = & \lambda_i^4\lambda_{i-1} + 4\lambda_i^3\lambda_{i-1}^2 + 4\lambda_i^3\lambda_{i-1}\lambda_{i+1} + 3\lambda_i^2\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}^2 \\ & + \dfrac{9+15\eta_{i+1}}{2}\lambda_{i-1}^2\lambda_i^2\lambda_{i+1} \\ \check{\mathcal{B}}^1_{i,i+1}(\xi) = & \lambda_i^4\lambda_{i+1} + 4\lambda_i^3\lambda_{i+1}^2 + 4\lambda_i^3\lambda_{i-1}\lambda_{i+1} + 3\lambda_i^2\lambda_{i-1}^2\lambda_{i+1} \\ & + \dfrac{9-15\eta_{i-1}}{2}\lambda_i^2\lambda_{i+1}^2\lambda_{i-1} \\ \check{\mathcal{B}}^2_{i,i-1}(\xi) = & \dfrac{1}{2}\left(\lambda_i^3\lambda_{i+1}^2 + \lambda_i^3\lambda_{i-1}\lambda_{i+1} + \lambda_i^2\lambda_{i-1}^2\lambda_{i+1} + \dfrac{3-5\eta_{i-1}}{2}\lambda_i^2\lambda_{i+1}^2\lambda_{i-1}\right) \\ \check{\mathcal{B}}^2_{i,i+1}(\xi) = & \dfrac{1}{2}\left(\lambda_i^3\lambda_{i-1}^2 + \lambda_i^3\lambda_{i-1}\lambda_{i+1} + \lambda_i^2\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}^2 + \dfrac{3+5\eta_{i+1}}{2}\lambda_i^2\lambda_{i-1}^2\lambda_{i+1}\right) \\ \check{\mathcal{B}}^2_{i,i}(\xi) = & -\dfrac{1}{2}\left(\lambda_i^3\lambda_{i-1}\lambda_{i+1} + \lambda_i^2\lambda_{i-1}^2\lambda_{i+1} + \lambda_i^2\lambda_{i+1}^2\lambda_{i-1}\right) \end{cases} \tag{4.3.3}$$

où η_i est l'exenctricité au point $\boldsymbol{x}_i$ définie par

$$\eta_i = \frac{\|\boldsymbol{x}_{i+1} - \boldsymbol{x}_i\|^2 - \|\boldsymbol{x}_{i-1} - \boldsymbol{x}_i\|^2}{\|\boldsymbol{x}_{i-1} - \boldsymbol{x}_{i+1}\|^2}. \tag{4.3.4}$$

4.3.2 Mise en œuvre des C^1 de Bell

Dans cette partie nous allons détailler la mise en œuvre des éléments C^1 de Bell. Tout d'abord, sur chacun des éléments e du maillage Ω_h, la discrétisation des variables $\boldsymbol{\omega}$

nécessite l'utilisation d'une projection $\mathcal{P}_e$ telle que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_e\boldsymbol{\omega}(\xi) = &\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\omega}_i\check{\mathcal{B}}_i^0(\xi)\\ &+\sum_{i=1}^{3}\Big(\mathcal{D}_i\cdot(\boldsymbol{x}_{i-1}-\boldsymbol{x}_i)\Big)\check{\mathcal{B}}_{i,i-1}^1(\xi)+\sum_{i=1}^{3}\Big(\mathcal{D}_i\cdot(\boldsymbol{x}_{i+1}-\boldsymbol{x}_i)\Big)\check{\mathcal{B}}_{i,i+1}^1(\xi)\\ &+\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\Big(\mathcal{H}_i:(\boldsymbol{x}_{j+1}-\boldsymbol{x}_{j-1})\otimes(\boldsymbol{x}_{j+1}-\boldsymbol{x}_{j-1})\Big)\check{\mathcal{B}}_{i,j}^2(\xi)\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

où les inconnues sont $\boldsymbol{\omega}_i$ la valeur de la variable, $\mathcal{D}_i$ le vecteur des dérivées premières et $\mathcal{H}_i$ celui des dérivées secondes au point i définis :

$$\mathcal{D}_i = \nabla\boldsymbol{\omega}_i \simeq \begin{pmatrix}\partial_r\boldsymbol{\omega}_i\\ \partial_z\boldsymbol{\omega}_i\end{pmatrix},\quad \mathcal{H}_i \simeq \begin{pmatrix}\partial_{rr}^2\boldsymbol{\omega}_i & \partial_{rz}^2\boldsymbol{\omega}_i\\ \partial_{rz}^2\boldsymbol{\omega}_i & \partial_{zz}^2\boldsymbol{\omega}\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}\partial_{rr}^2\boldsymbol{\omega}_i\\ \partial_{rz}^2\boldsymbol{\omega}_i\\ \partial_{zz}^2\boldsymbol{\omega}_i\end{pmatrix}. \tag{4.3.6}$$

A partir de l'équation (4.3.5), on définit $\mathcal{E}_e$ tel que :

$$\mathcal{E}_e = \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}_e^T\underline{\boldsymbol{\omega}_e}, \tag{4.3.7}$$

où sur un maillage régulier, $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}_e$ sera une matrice non singulière, et $\underline{\boldsymbol{\omega}_e}$ représente ici le vecteur contenant toutes les composantes de la variable $\boldsymbol{\omega}$. Avec $\mathcal{E}_e$, cette projection (4.3.5) se réécrit donc :

$$\mathcal{P}_e\boldsymbol{\omega}(\xi) = \mathcal{E}_e\cdot\check{\mathcal{B}}_e(\xi). \tag{4.3.8}$$

Pour une utilisation plus directe, les fonctions de bases sont redéfinies sous la forme suivante :

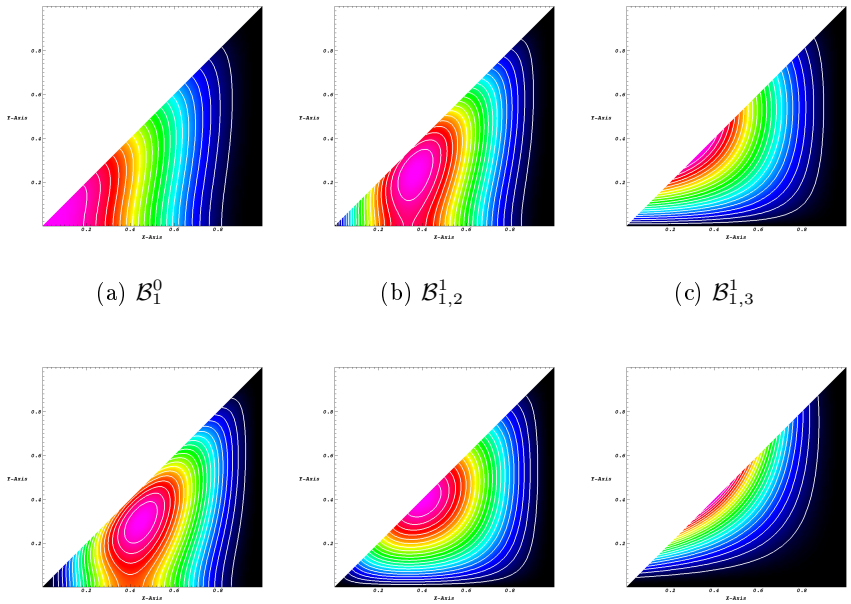
$$\mathcal{B}_e = \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}_e\check{\mathcal{B}}_e. \tag{4.3.9}$$

Ces matrices $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}_e^T$ et $\check{\mathcal{B}}_e$ sont détaillées dans l'annexe 4.A. Cette forme est utilisée pour obtenir la projection de l'équation (4.3.5) directement en fonction du vecteur $\underline{\boldsymbol{\omega}_e}$ contenant les composantes de la variable $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathcal{P}_e\boldsymbol{\omega}(\xi) = \underline{\boldsymbol{\omega}_e}\cdot\mathcal{B}_e(\boldsymbol{x}) \tag{4.3.10}$$

La figure 4.18 illustre les six fonctions de bases associées à un point, ici le point en bas à gauche, d'un élément triangle particulier.

Contrairement aux fonctions de bases de Lagrange, les fonctions de bases individuelles ne changent pas le signe dans le triangle : ceci présente l'avantage de préserver la positivité des quantités physiques telles que la densité ou la pression.



(a) $\mathcal{B}_1^0$ (b) $\mathcal{B}_{1,2}^1$ (c) $\mathcal{B}_{1,3}^1$

(d) $\mathcal{B}_{1,2}^2$ (e) $\mathcal{B}_{1,1}^2$ (f) $\mathcal{B}_{1,3}^2$

FIGURE 4.18 – Six fonctions de bases associées au point dans le coin en bas à gauche. Rose=1, Noir=0,

4.4 Problèmes types

On présente ici trois modèles types qui font l'objet de résolution sur des cas tests numériques dans le chapitre suivant. Tout d'abord on développe la résolution du modèle de conduction thermique dont l'objectif sera la validation de l'implémentation des éléments de Bell. Ensuite on détaille la résolution des problèmes de l'équation d'équilibre de Grad-Shafranov et du système du Current Hole. Cette approche hiérarchique des modèles de MHD, on espère conduirait à la résolution du problème de la MHD complète.

4.4.1 Conduction thermique

Le cas test de conduction thermique est un problème stationnaire du problème de diffusion isotrope [Fis05, SH11]. Il a permis d'obtenir les premiers résultats avec des éléments finis C^1 de Bell. Il avait pour but de valider l'implémentation de ces éléments. Le problème général de la conduction thermique s'écrit :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{\kappa}} \nabla \omega) = f, & \text{sur } \Omega \\ \omega = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.4.1}$$

où ω représente en général la température et $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$ la conductivité telle que :

$$\underline{\boldsymbol{\kappa}} = \kappa \mathbb{I}. \tag{4.4.2}$$

Ω et $\partial\Omega$ sont respectivement le domaine et son bord définis avec des coordonnées poloïdales (r, z).

Avec des éléments finis C^1, ce problème stationnaire nécessite des conditions de bords sur chacuns des degrés de libertés des variables. Nous avons utilisé deux types de conditions aux bords. Les premières sont basées sur la solution exacte de ce problème :

$$\begin{cases} \omega(x) = \omega_{ex}(x), \\ \partial_r\omega(x) = \partial_r\omega_{ex}(x), \\ \partial_z\omega(x) = \partial_z\omega_{ex}(x), \\ \partial^2_{rr}\omega(x) = \partial^2_{rr}\omega_{ex}(x), \\ \partial^2_{rz}\omega(x) = \partial^2_{rz}\omega_{ex}(x), \\ \partial^2_{zz}\omega(x) = \partial^2_{zz}\omega_{ex}(x), \end{cases} \qquad \forall x = (r, z) \in \partial\Omega. \tag{4.4.3}$$

Nous pouvons également utiliser des conditions aux bords basées sur les dérivées normales telles que :

$$\begin{cases} \omega(x) = 0, \\ \partial_{n^\perp}\omega(x) = 0, \\ \partial^2_{n^\perp n^\perp}\omega(x) = 0, \end{cases} \qquad \forall x = (r, z) \in \partial\Omega. \tag{4.4.4}$$

4.4.1.1 Formulation faible

Résolu avec la méthode des éléments finis avec les éléments de Bell, on a besoin d'obtenir la formulation faible de ce problème. Pour cela, on multiplie l'équation par une fonction test $\mathcal{B}_e$ pris dans un espace discret V_e contenant les fonctions de base de Bell, puis on l'intègre sur le domaine Ω :

$$-\int_\Omega \nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{\kappa}} \nabla \omega_e)\, \mathcal{B}_e d\Omega = \int_\Omega f \mathcal{B}_e d\Omega.$$

On utilise la formule de Green :

$$\text{i.e} \int_\Omega (\underline{\boldsymbol{\kappa}} \nabla \omega_e) \cdot \nabla \mathcal{B}_e d\Omega - \int_{\partial\Omega} \cancelto{0}{\underline{\boldsymbol{\kappa}} \nabla \omega_e \cdot \boldsymbol{n}} \mathcal{B}_e d\sigma = \int_\Omega f \mathcal{B}_e d\Omega. \tag{4.4.5}$$

La variable ω_e est approchée par :

$$\omega_e = \underline{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{e}} \cdot \mathcal{B}_e. \tag{4.4.6}$$

Cette formulation faible s'écrit sur chaque élément e sous la forme suivante :

$$\int_e (\underline{\boldsymbol{\kappa}} \nabla \omega_e) \cdot \nabla \mathcal{B}_e dx = -\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}_e^{\boldsymbol{\kappa}} \underline{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{e}}, \tag{4.4.7}$$

où

$$\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}_e^{\boldsymbol{\kappa}} = -\int_e \left(\underline{\boldsymbol{\kappa}}_{rr} \frac{\partial \mathcal{B}_e}{\partial r} \otimes \frac{\partial \mathcal{B}_e}{\partial r} + \underline{\boldsymbol{\kappa}}_{zz} \frac{\partial \mathcal{B}_e}{\partial z} \otimes \frac{\partial \mathcal{B}_e}{\partial z} \right) dx \tag{4.4.8}$$

4.4.2 Equilibre de Grad-Shafranov

L'équilibre de Grad-Shafranov [CH08, Bis97, Fre07] est une équation stationnaire issue de la MHD réduite dont les détails de l'obtention à partir de la MHD complète ont été développés dans le paragraphe 3.3.3 du chapitre 3. Cette équation est définie sur un domaine Ω sous la forme suivante :

$$-\Delta^* \psi = j_c, \tag{4.4.9}$$

avec Δ^* l'opérateur de Grad-Shafranov (3.3.40). Les variables ψ et j_c représentent respectivement le flux magnétique et la densité de courant du plasma. L'opérateur de Grad-Shafranov est un opérateur elliptique du second ordre défini par :

$$\Delta^* \psi := R^2 \nabla_c \cdot \left(\frac{1}{R^2} \nabla_c \psi \right), \tag{4.4.10}$$

avec $\nabla_c \cdot$ et ∇_c la divergence et le gradient dans la section poloïdale définis respectivement par :

$$\nabla_c \cdot A = \frac{1}{R} \partial_R \left(R A_R \right) + \partial_Z A_Z, \tag{4.4.11}$$

$$\nabla_c A = \left(\partial_R A, \partial_Z A \right)^T. \tag{4.4.12}$$

La densité de courant est définie par :

$$j_c = R^2 p' \left(\psi \right) + F \left(\psi \right) F' \left(\psi \right) \tag{4.4.13}$$

où p est la pression et $F = R B_\phi$ avec B_ϕ la composante toroïdale du champ magnétique. Par conséquent, l'équation (4.4.9) se réécrit :

$$-R \partial_R \left(\frac{1}{R} \partial_R \psi \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = R^2 \frac{dp}{d\psi} + F \frac{dF}{d\psi}. \tag{4.4.14}$$

L'opérateur de Grad-Shafranov est non linéaire, on ne connaît donc pas de solution analytique générale pour ce problème. Néanmoins dans les cas particulier de Soloviev (voir le paragraphe 3.3.3.1) des solutions analytiques sont connues. Malgré ce manque de solution analytique générale, pour un second membre donné cette équation peut être résolue numériquement.

Les conditions sur le bord du domaine $\partial\Omega$ diffèrent selon le choix des éléments :

- avec des éléments $P1$:

$$\psi(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega, \tag{4.4.15}$$

- avec des éléments C^1 nous avons le choix pour les conditions de bord. Dans le cas où le problème a une solution analytique, telle que les solutions de Soloviev, on peut utiliser cette solution :

$$\begin{cases} \psi(x) = \psi_{ex}(x), \\ \partial_r \psi(x) = \partial_r \psi_{ex}(x), \\ \partial_z \psi(x) = \partial_z \psi_{ex}(x), \\ \partial^2_{rr} \psi(x) = \partial^2_{rr} \psi_{ex}(x), \\ \partial^2_{rz} \psi(x) = \partial^2_{rz} \psi_{ex}(x), \\ \partial^2_{zz} \psi(x) = \partial^2_{zz} \psi_{ex}(x), \end{cases} \quad \forall x = (r, z) \in \partial\Omega. \tag{4.4.16}$$

On peut aussi, de même que dans le problème précédent, imposer les conditions de bord directement sur les dérivées normales tangentielles telles que :

$$\begin{cases} \psi(x) = 0, \\ \partial_{n^\perp}\psi(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega, \\ \partial^2_{n^\perp n^\perp}\psi(x) = 0, \end{cases} \tag{4.4.17}$$

où $n^\perp$ est la normale perpendiculaire à la normale sortante n.
Les résultats numériques qui suivent montrent que ce choix de conditions limites est important. En effet, avec les conditions de bord exactes on retrouvera un ordre de convergence optimal alors qu'avec celles basées sur les dérivées normales on ne l'obtient pas.

Bien qu'en général, l'équation de Grad-Shafranov soit résolue numériquement, il existe un nombre limité de solutions analytiques dont celle de Soloviev [Sol68] dont les définitions sont rappelées dans le chapitre 3. Ces solutions de Soloviev sont obtenues avec l'hypothèse de la linéarité sur la pression en ψ telle que :

$$p = p_0 + \lambda\psi, \tag{4.4.18}$$

et le courant F est supposé constante dans le plasma d'où : $F' = 0$.

Pour décrire le plan poloïdal d'un tore, nous avons défini les coordonées cartésiennes correspondantes sans dimensions avec les relations

$$R = R_0 + rx = R_0(1 + \epsilon x) \tag{4.4.19}$$

$$Z = ry \tag{4.4.20}$$

où ϵ représente le rapport d'aspect (pour plus de détails voir le paragraphe 1.5). Ainsi, l'équation (4.4.14) dans le cadre de l'équilibre de Soloviev s'exprime avec les coordonnées cartésiennes de la façon suivante :

$$-\frac{1+\epsilon x}{a^2}\nabla\cdot\left(\frac{\nabla\psi}{1+\epsilon x}\right) = \alpha R_0^2\left(1+\epsilon x\right)^2 + \beta, \tag{4.4.21}$$

où $\nabla\cdot$ et ∇ sont les opérateurs de divergence et gradient dans le système cartésien et où α et β sont les coefficients de Soloviev (voir la définition 3.3.3.1).

4.4.2.1 Formulation faible

Nous multiplions l'équation (4.4.21) par $\dfrac{a^2\phi}{1+\epsilon x}$ avec ϕ la fonction test prise dans un espace adéquat V et nous intégrons sur le domaine Ω :

$$-\int_\Omega \nabla\cdot\left(\frac{\nabla\psi}{1+\epsilon x}\right)\phi d\Omega = \int_\Omega \left(\alpha R_0^2\left(1+\epsilon x\right)^2 + \beta\right)\phi d\Omega \tag{4.4.22}$$

Après avoir intégré par parties en utilisant les conditions homogènes, nous obtenons la formulation faible du problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \psi \in V \text{ tel que,} \\ a(\psi,\phi) = l(\phi), \quad \forall\phi \in V, \end{cases} \tag{4.4.23}$$

avec

$$a(\psi,\phi)=\int_{\Omega}\left(\frac{\nabla\psi\cdot\nabla\phi}{1+\epsilon x}\right)d\Omega, \tag{4.4.24}$$

$$l(\phi)=\int_{\Omega}\left(\alpha R_0^2\left(1+\epsilon x\right)^2+\beta\right)\phi d\Omega, \tag{4.4.25}$$

ici l'espace adéquat est $V=H_0^1(\Omega)$. Les propriétés de a (la bilinéarité, la symétrie, la continuité et la coercivité) ainsi que celle sur l (la linéarité et la continuité) [DDF+11] assurent les conditions du théorème de Lax-Milgram qui prouve l'existence et l'unicité de la solution ψ .

Dans le cas des éléments finis C^1 de Bell on écrit la formulation faible avec les fonctions de bases $\mathcal{B}$ de Bell. Tout d'abord cette équation de Grad-Shafranov (4.4.14) se développe aussi sous la forme suivante :

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial r}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}=j_c\left(\psi,r,z\right). \tag{4.4.26}$$

La formulation faible avec ces éléments finis C^1 est obtenue en multipliant cette équation (4.4.26) par une fonction test $\mathcal{B}$ prie dans un espace adéquat V sur le domaine Ω :

$$\int_{\Omega}\left(\nabla\psi\cdot\nabla\mathcal{B}+\frac{\mathcal{B}}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)d\Omega-\cancelto{0}{\int_{\partial\Omega}\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n}\mathcal{B}d\sigma}=\int_{\Omega}\mathcal{B}j_c\left(\psi,r,z\right)d\Omega. \tag{4.4.27}$$

Après discrétisation du maillage, cette équation se réécrit :

$$\sum_e\int_e\left(\frac{\partial\psi_e}{\partial r}\frac{\partial\mathcal{B}_e}{\partial r}+\frac{\partial\psi_e}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{B}_e}{\partial z}+\frac{\mathcal{B}_e}{r}\frac{\partial\psi_e}{\partial r}\right)dx=\sum_e\int_e\mathcal{B}_e j_c\left(\psi_e,r,z\right), \tag{4.4.28}$$

où $\mathcal{B}_e$ est un vecteur de 18 composantes. Considérant ψ_e dans le même espace d'approximation V_h, alors ces contributions sont mises dans une matrice en utilisant les définitions suivantes :

$$\begin{cases}\psi_e=\underline{\psi_e}\cdot\mathcal{B}_e,\\ \dfrac{\partial\psi_e}{\partial n}=\underline{\psi_e}\cdot\dfrac{\partial\mathcal{B}_e}{\partial n},\\ \left(\underline{\psi_e}\cdot\dfrac{\partial\mathcal{B}_e}{\partial n}\right)\dfrac{\partial\mathcal{B}_e}{\partial m}=\left(\dfrac{\partial\mathcal{B}_e}{\partial m}\otimes\dfrac{\partial\mathcal{B}_e}{\partial n}\right)\underline{\psi_e},\end{cases} \tag{4.4.29}$$

où n et m sont ici des directions de dérivations.

Ainsi, la matrice contenant toutes les contributions se résume donc à :

$$\int_e\left(\frac{\partial\psi_e}{\partial r}\frac{\partial\mathcal{B}_e}{\partial r}+\frac{\partial\psi_e}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{B}_e}{\partial z}+\frac{\mathcal{B}_e}{\partial r}\frac{\partial\psi_e}{\partial r}\right)dx=\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}_e\underline{\psi_e}, \tag{4.4.30}$$

où $\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}_e$ vaut :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}_e=\int_e\left(\frac{\partial\mathcal{B}_e}{\partial r}\otimes\frac{\partial\mathcal{B}_e}{\partial r}+\frac{\partial\mathcal{B}_e}{\partial z}\otimes\frac{\partial\mathcal{B}_e}{\partial z}+\frac{\mathcal{B}_e}{r}\otimes\frac{\partial\mathcal{B}_e}{\partial r}\right)dx. \tag{4.4.31}$$

Cette équation va être testée sur 3 cas tests analytiques dont les 2 premiers suivent la définition de Soloviev. D'abord résolus avec des élément $P1$ de Lagrange ces cas tests seront ensuite résolus avec des éléments C^1 de Bell. Ces résultats seront présentés dans le chapitre suivant.

4.4.3 Current Hole

Le système du Current Hole donné par :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = [\psi,\varphi] + \eta(j_\phi - j_c), \\ \partial_t \omega = [\omega,\varphi] + [\psi,j_\phi] + \nu\Delta\omega, \\ j_\phi = \dfrac{1}{\mu_0}\Delta\psi, \\ \omega = \Delta\varphi, \end{cases} \tag{4.4.32}$$

est résolu avec la méthode des éléments finis avec tout d'abord des éléments $P1$ de Lagrange puis des C^1 de Bell. Dans ce système les variables sont : ψ le flux magnétique, ω la vorticité, φ le potentiel vitesse et j_ϕ la densité de courant toroïdale qu'on notera plus simplement dans la suite par J. $[.,.]$ caractérise les crochets de Poisson définis par :

$$[a,b] = \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial b}{\partial r} = -[b,a]. \tag{4.4.33}$$

j_c représente le courant d'entrée. Les conditions du problème dépendent du type d'éléments choisis.

- Dans le cas des $P1$ de Lagrange on utilise les conditions initiales :

$$\begin{cases} \varphi(0,x) = \omega(0,x) = 0, \\ \Delta^*\psi(0,x) = J(0,x) = j_c(x), \end{cases} \quad \forall x \in \Omega. \tag{4.4.34}$$

  Comme condition initiale pour le flux magnétique on utilise donc la solution de l'équation d'équilibre de Grad-Shafranov. Pour fermer le système, nous imposons les conditions de Dirichlet :

$$\begin{cases} \varphi(t,x) = 0, \\ \omega(t,x) = 0, \\ J(t,x) = 0, \\ \psi(t,x) = 0, \end{cases} \quad \forall x \in \partial\Omega, \forall t \in [0,T_f] \tag{4.4.35}$$

  où $\partial\Omega$ est le bord du domaine Ω et T_f est le temps final de simulation.

- Dans le cas des C^1 de Bell, il faut également imposer des conditions sur chacune des dérivées premières et secondes. Ainsi, on utilise comme conditions initiales : $\forall x \in \Omega$,

$$\begin{cases} \varphi(0,x) = \partial_r\varphi(0,x) = \partial_z\varphi(0,x) = \partial^2_{rr}\varphi(0,x) = \partial^2_{rz}\varphi(0,x) = \partial^2_{zz}\varphi(0,x) = 0, \\ \omega(0,x) = \partial_r\omega(0,x) = \partial_z\omega(0,x) = \partial^2_{rr}\omega(0,x) = \partial^2_{rz}\omega(0,x) = \partial^2_{zz}\omega(0,x) = 0, \\ \Delta^*\psi(0,x) = J(0,x) = j_c(x), \\ \partial_r\Delta^*\psi(0,x) = \partial_r J(0,x) = \partial_r j_c(x), \\ \partial_z\Delta^*\psi(0,x) = \partial_z J(0,x) = \partial_z j_c(x), \\ \partial^2_{rr}\Delta^*\psi(0,x) = \partial^2_{rr} J(0,x) = \partial^2_{rr} j_c(x), \\ \partial^2_{rz}\Delta^*\psi(0,x) = \partial^2_{rz} J(0,x) = \partial^2_{rz} j_c(x), \\ \partial^2_{zz}\Delta^*\psi(0,x) = \partial^2_{zz} J(0,x) = \partial^2_{zz} j_c(x), \end{cases} \tag{4.4.36}$$

et comme conditions aux bord du domaine Ω sur chacunes des variables :

$$\begin{cases} \psi(t,x) = \partial_{n^\perp}\psi(t,x) = \partial^2_{n^\perp n^\perp}\psi(t,x) = 0, \\ \varphi(t,x) = \partial_{n^\perp}\varphi(t,x) = \partial^2_{n^\perp n^\perp}\varphi(t,x) = 0, \\ \omega(t,x) = \partial_{n^\perp}\omega(t,x) = \partial^2_{n^\perp n^\perp}\omega(t,x) = 0, \\ J(t,x) = \partial_{n^\perp}J(t,x) = \partial^2_{n^\perp n^\perp}J(t,x) = 0, \end{cases} \quad \forall x \in \partial\Omega, \forall t \in [0, T_f], \tag{4.4.37}$$

où $n^\perp$ est la normale tangentielle au bord du domaine.

4.4.3.1 Propriétés du système du Current Hole

Avant de passer à la résolution numérique, nous rappelons ici les propriétés de conservation du problème du Current Hole dont les preuves sont à consulter dans [DDF+11, DS12].

Proposition 4.4.1 (Conservation) *Si $\nu = \eta = 0$, alors les solutions régulières du système* (4.4.32) *vérifient :*

– *la conservation de l'énergie :*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\psi|^2 + |\nabla\varphi|^2 d\Omega = 0, \tag{4.4.38}$$

– *la conservation de l'hélicité magnétique :*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \psi d\Omega = 0, \tag{4.4.39}$$

– *la conservation de l'hélicité transversale :*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \nabla\psi\cdot\nabla\varphi d\Omega = -\frac{d}{dt}\int_\Omega \psi\varphi d\Omega = 0, \tag{4.4.40}$$

Ce système du Current Hole, résolu avec la méthode des éléments finis et plus particulièrement les éléments $P1$, présente selon l'analyse de Von Neumann réalisée par Faccanoni et al [DDF+11] des propriétés de stabilité suivant la méthode de résolution temporelle choisie. Ce système possédant suffisamment de propriétés de stabilité, sa résolution ne nécessite pas l'usage de stabilisation supplémentaire de type SUPG.

4.4.3.2 Formulation faible

Afin d'obtenir la formulation variationnelle de ce système on multiplie chacune de ces équations le composant par une fonction test $\mathcal{B}$ prise dans un espace adéquat V, choisi suivant le type d'éléments utilisés pour la résolution, et on intègre ensuite sur le domaine Ω. Ainsi, la formulation faible des équations de ce système s'écrit :

– pour la première équation :

$$\int_\Omega \partial_t\psi\mathcal{B}d\Omega = \int_\Omega [\psi,\varphi]\mathcal{B} + \eta\,(J - j_c)\,\mathcal{B}d\Omega, \tag{4.4.41}$$

– pour la deuxième équation :

$$\int_\Omega \partial_t \omega \mathcal{B} d\Omega = \int_\Omega [\omega,\varphi]\mathcal{B} + [\psi,J]\mathcal{B} + \nu \Delta\omega \mathcal{B} d\Omega. \tag{4.4.42}$$

Cette deuxième équation se réécrit aussi avec la formule de Green dont on veut garder les termes de bords :

$$\int_\Omega \partial_t \omega \mathcal{B} d\Omega = \int_\Omega [\omega,\varphi]\mathcal{B} + [\psi,J]\mathcal{B} - \nu \nabla\omega \cdot \nabla\mathcal{B} d\Omega + \nu \int_{\partial\Omega} \cancelto{0}{\nabla\omega \cdot \boldsymbol{n}} \mathcal{B} d\sigma. \tag{4.4.43}$$

– La troisième équation a pour formulation faible :

$$\int_\Omega J\mathcal{B} d\Omega = \int_\Omega \Delta\psi \mathcal{B} d\Omega. \tag{4.4.44}$$

Cette troisième équation se réécrit aussi avec la formule de Green :

$$\int_\Omega J\mathcal{B} d\Omega = -\int_\Omega \nabla\psi \nabla\mathcal{B} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \cancelto{0}{\nabla\psi \cdot \boldsymbol{n}} \mathcal{B} d\sigma. \tag{4.4.45}$$

– La quatrième équation a pour formulation faible :

$$\int_\Omega \omega \mathcal{B} d\Omega = \int_\Omega \Delta\varphi \mathcal{B} d\Omega. \tag{4.4.46}$$

Cette équation se réécrit aussi avec la formule de Green :

$$\int_\Omega \omega \mathcal{B} d\Omega = -\int_\Omega \nabla\varphi \nabla\mathcal{B} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \cancelto{0}{\nabla\varphi \cdot \boldsymbol{n}} \mathcal{B} d\sigma. \tag{4.4.47}$$

Ainsi, en plus des conditions de bords précédemment citées (4.4.15) ou (4.4.17), la formulation faible et l'utilisation de la formule de Green fait apparaître trois termes de bords que nous ne gardons pas. Ainsi, on impose comme conditions supplémentaires :

$$\begin{cases} \nabla\psi \cdot \boldsymbol{n} = 0, \\ \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{n} = 0, \qquad \forall x \in \partial\Omega \\ \nabla\omega \cdot \boldsymbol{n} = 0, \end{cases} \tag{4.4.48}$$

4.4.3.3 Résolution du système du Current Hole

Pour la résolution du système du Current Hole pour éviter autant que possible les restrictions dues à une condition CFL nous considérons un schéma implicite : le schéma de Crank-Nicholson qui est directement inspiré de [CH08]. Le schéma de Crank-Nicholson et l'intégration en temps nécessitent la résolution d'un système linéaire.

Pour cette résolution, nous posons $W^n = (\psi^n, \varphi^n, J^n, \omega^n)$ le vecteur contenant les variables physiques et par extension $W^{n+1} - W^n = (\delta\psi, \delta\varphi, \delta J, \delta\omega)$. Pour alléger la lercture

on garde ici la forme forte du système du Current Hole :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\psi}{\delta t} = [\psi^n + \alpha\delta\psi, \varphi^n + \beta\delta\varphi] + \eta(J^n + \gamma\delta J - j_c), \\ \dfrac{\delta\omega}{\delta t} = [\omega^n + \lambda\delta\omega, \varphi^n + \beta\delta\varphi] + [\psi^n + \alpha\delta\psi, J^n + \gamma\delta J] + \nu\Delta(\omega^n + \lambda\delta\omega), \\ \delta J = \Delta(\delta\psi), \\ \delta\omega = \Delta(\delta\varphi), \end{cases} \tag{4.4.49}$$

avec δt le pas de temps. Nous avons supposé sur les deux dernières équations de ce système qu'au pas de temps précédent les solutions étaient exactes soit :

$$J^n = \Delta\psi^n, \tag{4.4.50}$$

$$\omega^n = \Delta\varphi^n. \tag{4.4.51}$$

En négligeant les termes d'ordres élevés, la formulation matricielle du système s'écrit :

$$\mathbb{M}\begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\varphi \\ \delta J \\ \delta\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\psi^n, \varphi^n] + \eta(J^n - j_c) \\ [\omega^n, \varphi^n] + [\psi^n, J^n] + \nu\Delta\omega^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.4.52}$$

où

$$\mathbb{M} := \begin{pmatrix} \dfrac{\mathbb{I}}{\delta t} + \alpha[\varphi^n, \cdot] & -\beta[\psi^n, \cdot] & -\gamma\eta\mathbb{I} & 0 \\ \alpha[J^n, \cdot] & -\beta[\omega^n, \cdot] & -\gamma[\psi^n, \cdot] & \dfrac{\mathbb{I}}{\delta t} + \lambda[\varphi^n, \cdot] - \lambda\nu\Delta(\cdot) \\ -\Delta(\cdot) & 0 & \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\Delta(\cdot) & 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}. \tag{4.4.53}$$

Pour le schéma de Crank-Nicholson il faut prendre : $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = \dfrac{1}{2}$.

4.4.4 Current Hole : système à 2 équations

D'abord résolu avec un système à quatre équations, ce modèle peut être réduit à deux équations (3.3.36)

$$\begin{cases} \partial_t\psi = [\psi, \varphi] + \eta(\Delta\psi - j_c), \\ \partial_t(\Delta\varphi) = [\Delta\varphi, \varphi] + [\psi, \Delta\psi] + \nu\Delta^2\varphi. \end{cases} \tag{4.4.54}$$

Pour cela, il est nécessaire d'avoir une approximation régulière comme celle des éléments C^1 de Bell. En effet, ce modèle contient des opérateurs différentiels d'ordre 3 et 4. Pour la résolution numérique, les éléments de type $P1$ de Lagrange seulement C^0 sont insuffisants car ils introduiraient la résolution de produits de dirac notamment sur le dernier terme $\Delta^2\varphi$.

4.4.4.1 Formulation faible

De même que pour le système du Current Hole à 4 équations on obtient la formulation faible de ce système. La première équation de ce système se réécrit

$$\int_\Omega \partial_t \psi \mathcal{B} d\Omega = \int_\Omega [\psi,\varphi]\mathcal{B} + \eta\left(\Delta\psi - j_c\right)\mathcal{B} d\Omega. \tag{4.4.55}$$

Cette équation se réécrit aussi avec la formule de Green :

$$\int_\Omega \partial_t \psi \mathcal{B} d\Omega = \int_\Omega [\psi,\varphi]\mathcal{B} - \eta j_c \mathcal{B} - \eta \nabla\psi\cdot\nabla\mathcal{B} d\Omega + \eta \int_{\partial\Omega} \cancelto{0}{\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n}}\mathcal{B} d\sigma. \tag{4.4.56}$$

La deuxième équation est plus compliquée :

$$\int_\Omega \partial_t \Delta\varphi \mathcal{B} d\Omega = \int_\Omega [\Delta\varphi,\varphi]\mathcal{B} + [\psi,\Delta\psi]\mathcal{B} + \nu\Delta^2\varphi\mathcal{B} d\Omega. \tag{4.4.57}$$

Cette deuxième équation avec la formule de Green, utilisée une ou deux fois, se réécrit :

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \partial_t \nabla\varphi\cdot\nabla\mathcal{B} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \cancelto{0}{\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{n}}\mathcal{B} d\sigma = &-\int_\Omega \Delta\varphi[\mathcal{B},\varphi] d\Omega + \int_{\partial\Omega} \cancelto{0}{\Delta\varphi\nabla^\perp\varphi\cdot\boldsymbol{n}}\mathcal{B} d\sigma \\
&+\int_\Omega \Delta\psi[\mathcal{B},\psi] d\Omega - \int_{\partial\Omega} \cancelto{0}{\Delta\psi\nabla^\perp\psi\cdot\boldsymbol{n}}\mathcal{B} d\sigma \\
&+\nu\int_\Omega \Delta\varphi\Delta\mathcal{B} d\Omega - \nu\int_{\partial\Omega} \cancelto{0}{\Delta\varphi}\nabla\mathcal{B}\cdot\boldsymbol{n} d\sigma \\
&+\nu\int_{\partial\Omega} \cancelto{0}{\nabla\left(\Delta\varphi\right)\cdot\boldsymbol{n}}\mathcal{B} d\sigma,
\end{aligned} \tag{4.4.58}$$

avec $\nabla^\perp$ défini par :

$$\nabla^\perp . = \begin{pmatrix} \partial_y . \\ -\partial_x . \end{pmatrix}. \tag{4.4.59}$$

Sur les deuxième et quatrième termes de la partie droite de l'équation (4.4.58), il semblerait qu'il y ait un choix à faire sur les conditions mais on veut résoudre le même problème que le Current Hole à quatre équations. Ainsi, pour obtenir les mêmes conditions sur les bords pour les modèles du Current Hole à deux ou quatre équations il faut imposer :

$$\begin{cases} \nabla\psi\cdot\boldsymbol{n} = 0, \\ \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{n} = 0, \\ \Delta\psi = 0, \qquad \forall x\in\partial\Omega. \\ \Delta\varphi = 0, \\ \nabla\left(\Delta\varphi\right)\cdot\boldsymbol{n} = 0, \end{cases} \tag{4.4.60}$$

La résolution de ce modèle du Current Hole à deux équations pose problème. En effet, malgré la régularité suffisante des éléments de Bell, ce système semble montrer un défaut de convergence empêchant l'obtention de résultats. Ce défaut vient d'un mauvais conditionnement de la matrice due aux conditions limites. Mais ce problème de conditions limites n'est pas que sur le problème discret. En effet, le problème continu avec les deux équations est bien posé uniquement pour certaines conditions aux limites. En particulier, les conditions aux limites de Dirichlet sur le système à quatre équations revient à imposer sur le système à deux équations des conditions aux limites de Dirichlet sur les variables et sur le laplacien des variables. Cette dernière condition n'est pas simple à mettre en œuvre et peut poser problème.

4.5 Conclusions

Ce chapitre a permis de mettre en place les méthodes de résolution suffisamment régulières qui permettent de résoudre les systèmes de la MHD et de la MHD réduite. Tout d'abord on a justifié l'intérêt, par rapport aux autres méthodes de résolution numériques, de l'utilisation de la méthode des éléments finis et la nécessité d'utiliser des éléments suffisamment réguliers. Ce chapitre a également permis de détailler l'intérêt tout particulier des éléments finis C^1 de Bell. La mise en place de ces éléments a pour finalité leur utilisation, plus particulièrement lors de cas tests de la MHD réduite présentés dans le chapitre suivant.

Quant à l'utilisation de stabilisation de type SUPG dans la résolution par la méthode aux éléments finis, elle ne suffit pas. Il est nécessaire de recourir à une formulation implicite ou semi-implicite comme celle de Crank-Nicholson. En effet, l'analyse de stabilité L^2 a mis en avant l'existence d'une condition de stabilité de type CFL.

Pour finir, ces trois modèles types de conduction thermique, de Grad-Shafranov et du système du Current Hole dont la résolution a été présent'ées ici seront étudiés sur des cas tests numériques dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Validations numériques sur des problèmes types en $2D$

Sommaire

5.1 Conduction thermique 125
5.1.1 Résultats numériques 125
5.2 Equilibre de Grad-Shafranov 127
5.2.1 1er exemple de cas test analytique 127
5.2.1.1 1er exemple avec des éléments finis $P1$ de Lagrange . . 127
5.2.1.2 1er exemple avec des éléments finis C^1 de Bell 129
5.2.2 2ème exemple de cas test analytique 130
5.2.2.1 2ème exemple avec $P1$ de Lagrange 130
5.2.2.2 2ème exemple avec C^1 de Bell 131
5.2.3 3ème exemple de cas test analytique 132
5.2.3.1 3ème exemple avec $P1$ de Lagrange 132
5.2.3.2 3ème exemple avec C^1 de Bell 133
5.3 Le Current Hole 134
5.3.1 Simulations numériques 135
5.3.1.1 Simulations avec les éléments $P1$ de Lagrange 136
5.3.1.2 Méthode de résolution directe : UMFPack 136
5.3.1.3 Méthode de résolution itérative : GMRes 140
5.3.1.4 Simulations numériques du Current Hole avec les C^1 de Bell 146
5.4 Conclusions 151

Ce chapitre présente les différents résultats numériques obtenus sur des cas tests de conduction thermique anisotrope, sur l'équation d'équilibre de Grad-Shafranov (GS) et sur le problème du Current Hole (CH). Tout d'abord, la première partie de ce chapitre présente un cas test sur le problème de conduction thermique anisotrope dont l'objectif est de valider l'implémentation de la méthode de résolution avec des éléments finis C^1 de Bell. Ensuite, on présente des cas test sur deux modèles de la MHD réduite GS et CH dont le développement à partir de la MHD complète a fait l'objet du paragraphe 3.3.

Pour le problème de Grad-Shafranov on s'intéresse à 3 cas tests analytiques dont les 2 premiers suivent les définitions de Soloviev 3.3.3.1. Ces 3 cas tests analytiques sont résolus successivement, pour la comparaison, avec des éléments usuels $P1$ de Lagrange puis avec des éléments C^1 de Bell. Ces cas tests étant analytiques, on s'intéressera aux ordres de convergence.

La dernière partie de ce chapitre expose les résultats obtenus sur la résolution du modèle du Current Hole. Ce modèle du Current Hole est un équilibre instable dont les erreurs d'approximation sur les solutions obtenues suffisent à déclencher l'instabilité. Cette instabilité s'observe sur la densité de courant avec le désaxement de la solution initiale puis un retour à un état quasi-initial. Le graphique de l'énergie cinétique présente une courbe en dents de scie. Ce problème est ici résolu avec des éléments $P1$ de Lagrange et des éléments C^1 de Bell. Pour les $P1$ de Lagrange, pour assurer la comparaison avec Faccanoni [DDF$^+$11] pour résoudre le système linéaire, on a utilisé la librairie UMFPack. Cette librairie utilise une méthode directe de résolution basée sur la factorisation LU. Cette méthode bien qu'étant précise a l'inconvénient d'être coûteuse en terme de temps de calcul. Malgré l'utilisation d'un préconditionnement diagonal, les temps de calculs pour le Current Hole sont relativement longs quelque soit la méthode de résolution choisie. Il est donc difficile d'observer ces instabilités sur un temps suffisamment long pour observer la périodicité de l'instabilité. Ensuite pour résoudre ce système du Current Hole, on a utilisé la méthode de résolution itérative GMRes. Ce changement de méthode permet de remédier au problème de temps de calcul trop coûteux de la simulation notamment en choisissant le critère d'arrêt moins précis ici pris à 10^{-10} mais donc la méthode est moins précise. Ces deux méthodes n'ayant pas les mêmes critères d'approximation des solutions, les erreurs ne seront pas les mêmes ce qui entraîne des différences dans l'obtention des instabilités. Ainsi, le désaxement de la solution ne se produit pas dans la même direction au même instant. Bien que les résultats obtenus pour ces méthodes soient différents, lorsque l'instabilité se déclenche on observe sur les graphiques de l'énergie cinétique une partie linéaire dont le coefficient est $\eta^{1/3}$, avec η le coefficient de résistivité du courant. L'obtention de ce coefficient est liée à la physique et ne dépend pas de la méthode de résolution choisie et cette obtention sur les graphiques de l'énergie cinétique valide la résolution de ce système. Pour finir, ce modèle a été résolu avec des éléments C^1 de Bell. Résolu avec la méthode de GMRes sur un temps de simulation de 20000, ce cas test a permis d'observer les instabilités en dents de scie leurs développements et leurs périodicité notamment sur le graphique de l'énergie cinétique.

5.1 Conduction thermique

Ce cas test de conduction thermique est un problème stationnaire du problème de diffusion [Fis05, SH11]. Il a permis d'obtenir les premiers résultats avec des éléments finis C^1 de Bell. Il a pour but de valider l'implémentation de ces éléments. On présente ici les résultats numériques obtenus sur un cas test de la conduction thermique. Ce modèle, dont l'équation et la résolution a été présenté dans le paragraphe 4.4.1, est résolu sur le domaine $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ avec une conductivité $\underline{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbb{I}$ et une fonction f telle que :

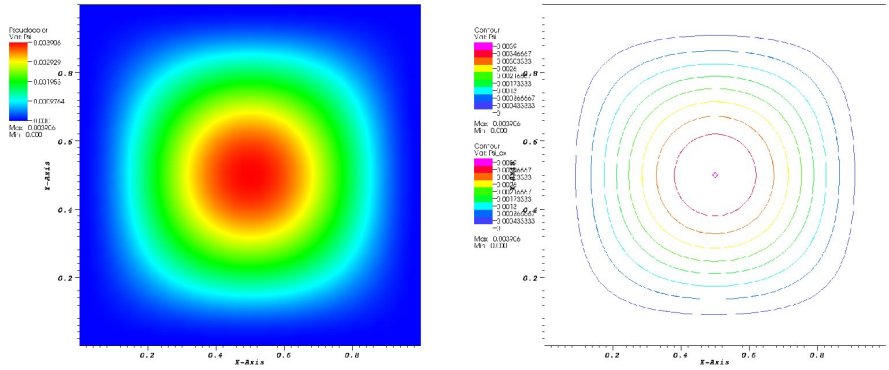
$$f(\omega, r, z) = -2(1 - 6r + 6r^2)z^2(1-z)^2 - 2(1 - 6z + 6z^2)r^2(1-r)^2, \tag{5.1.1}$$

dont nous connaissons la solution exacte :

$$\omega_{ex}(r, z) = r^2(1-r)^2 z^2 (1-z)^2. \tag{5.1.2}$$

5.1.1 Résultats numériques

Dans cette partie on présente les résultats numériques obtenus sur ce cas test de conduction thermique résolu avec la méthode des éléments finis et plus particulièrement les éléments C^1 de Bell. Le graphique 5.1a de la figure 5.1 montre la solution obtenue numériquement avec comme condition de bord la solution exacte. Pour valider l'implémentation de ces éléments, sur le graphique 5.1b on a superposé la solution numérique avec la solution exacte.



(a) Solution numérique

(b) Superposition des solutions numérique et exacte

FIGURE 5.1 – Conductivité thermique anisotrope

Ce cas test étant analytique on peut faire une étude pour vérifier l'ordre de convergence de la solution obtenue. Pour cela, la solution approchée converge vers la solution exacte à l'ordre $k \geq 1$ en norme L^p si :

$$\|\psi - \psi_{ex}\|_{L^p} \leq Ch^k, \tag{5.1.3}$$

avec C une constante. Il est nécessaire de définir h qui représente la taille du pas d'espace :

$$h = \sqrt{\frac{Vol\,(\Omega)}{\mathcal{N}_e}}, \tag{5.1.4}$$

où $Vol\,(\Omega)$ représente l'aire du domaine et $\mathcal{N}_e$ le nombre d'éléments du maillage. le tableau 5.1 reprend les erreurs d'approximation sur la solution obtenue en norme L^1, L^2 et L^∞ et donne pour chacune un ordre de convergence de 5. Avec une base réduite de polynômes de degrés 5 cet ordre est optimal.

$\mathcal{N}_e$	h	$\|\omega - \omega_{ex}\|_1$	Ordre	$\|\omega - \omega_{ex}\|_2$	Ordre	$\|\omega - \omega_{ex}\|_\infty$	Ordre
18	$2.357.10^{-01}$	$0.295.10^{-05}$	–	$0.374.10^{-05}$	–	$0.147.10^{-04}$	–
200	$0.707.10^{-01}$	$0.679.10^{-08}$	5.04	$0.100.10^{-07}$	4.92	$0.515.10^{-07}$	4.70
800	$0.353.10^{-01}$	$0.230.10^{-09}$	4.89	$0.359.10^{-09}$	4.81	$0.210.10^{-08}$	4.62
3200	$0.176.10^{-01}$	$0.752.10^{-11}$	4.93	$0.121.10^{-10}$	4.88	$0.788.10^{-10}$	4.73
12800	$0.884.10^{-02}$	$0.241.10^{-12}$	4.96	$0.396.10^{-12}$	4.94	$0.269.10^{-11}$	4.87

Tableau 5.1 – Obtention de l'ordre de Convergence

A présent, nous reprenons dans le tableau 5.2 les résultats obtenus avec comme conditions de bord celles basées sur les dérivées normales tangentielles (4.4.4).

$\mathcal{N}_e$	h	$\|\omega - \omega_{ex}\|_1$	Ordre	$\|\omega - \omega_{ex}\|_2$	Ordre	$\|\omega - \omega_{ex}\|_\infty$	Ordre
441	0.035	$0.2299E-09$	-	$0.3584E-09$	-	$0.2102E-08$	-
961	0.024	$0.3120E-10$	4.926	$0.4976E-10$	4.869	$0.3136E-09$	4.693
1681	0.018	$0.7534E-11$	4.939	$0.1214E-10$	4.903	$0.7904E-10$	4.790
2601	0.014	$0.2550E-11$	4.855	$0.4066E-11$	4.903	$0.2682E-10$	4.843
3136	0.013	$0.1658E-11$	4.513	$0.2568E-11$	4.822	$0.1687E-10$	4.869
3721	0.012	$0.1145E-11$	4.253	$0.1704E-11$	4.717	$0.1103E-10$	4.881

Tableau 5.2 – Ordre de Convergence avec conditions de bords basées sur les normales tangentielles

Avec de telles conditions, la solution converge moins rapidement par rapport aux conditions de bords avec la solution exacte. Malgré cela, nous obtenons un un ordre de convergence de 5.

Ces éléments finis de Bell permettent bien d'obtenir une solution avec comme précision un ordre de convergence de 5 quelques soient les conditions de bords avec les normales ou avec la solution exacte imposées. Ces résultats valident l'implémentation des éléments C^1 de Bell. Dans la suite, on présente des cas tests analytiques d'équilibre de Grad–Shafranov qui seront étudiés pour comparaison successivement avec des éléments $P1$ de Lagrange puis des C^1 de Bell.

5.2 Equilibre de Grad-Shafranov

L'équilibre de Grad-Shafranov [CH08, Bis97, Fre07] est une équation stationnaire développée dans le paragraphe 3.3.3 du chapitre 3. Ce modèle est défini sur un domaine Ω par l'équation suivante :

$$-\Delta^* \psi = j_c, \tag{5.2.1}$$

avec Δ^* l'opérateur de Grad-Shafranov. Les variables ψ et j_c représentent respectivement le flux magnétique et la densité de courant du plasma. La résolution de ce problème avec la méthode aux éléments finis est détaillée dans la partie 4.4.2. On présente ici trois cas tests résolus pour la comparaison avec des $P1$ de Lagrange et des C^1 de Bell. Parmi ces trois cas tests les deux premiers sont des solutions de Soloviev (proposition 3.3.3.1). Ces cas tests de Soloviev étant des polynômes de degré inférieur à 5, avec les éléments C^1 ils seront résolus exactement à l'erreur machine près dès les maillages grossiers. Le troisième exemple présente l'intérêt de ne pas être un polynôme. Il permet de vérifier l'ordre de convergence de la solution avec les C^1. Cet ordre dépend du choix des conditions de bord. Lorsque les conditions de bords sont basées sur la solution exacte on obtient bien l'ordre optimal de 5. Au contraire, lorsque les conditions de bords sont basées sur les normales tangentielles et donc sur la forme du bord du domaine $\partial\Omega$, cet ordre 5 ne sera pas atteint.

5.2.1 1er exemple de cas test analytique

La solution analytique pour ce premier exemple est donnée par :

$$\psi_{ex}(r,z) = \frac{F_0 R_0^2}{2}\left(a^2 - z^2 - \frac{(r^2 - R_0^2)^2}{4R_0^2}\right). \tag{5.2.2}$$

Sur le domaine Ω défini par sa frontière :

$$\partial\Omega = \{(r,z) | r = R_0\sqrt{1 + \frac{2a\cos\alpha}{R_0}}, z = aR_0 \sin\alpha, \alpha \in [0 : 2\pi]\}, \tag{5.2.3}$$

on considère donc une condition de Dirichlet nulle sur le bord du domaine :

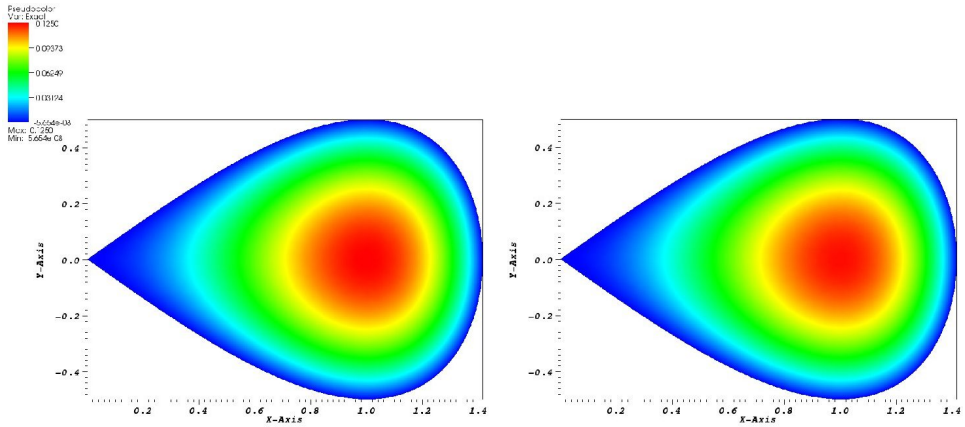
$$\forall (r,z) \in \partial\Omega, \quad \psi(r,z) = 0, \tag{5.2.4}$$

Avec cette solution exacte on calcule la densité de courant j_c pour obtenir l'équation de Grad-Shafranov sous la forme suivante :

$$-r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = r^2 F_0 + F_0 R_0^2. \tag{5.2.5}$$

5.2.1.1 1er exemple avec des éléments finis $P1$ de Lagrange

Pour le choix de paramètres : $a = 0.5$, $F_0 = 1$ et $R_0 = 1$, la figure 5.2 présente la solution exacte 5.2a et les résultats obtenus numériquement 5.2b avec des éléments finis de $P1$ Lagrange.



(a) ψ_{ex} (b) ψ_{num}

FIGURE 5.2 – Cas test analytique 1

Pour ces graphiques, nous avons utilisé la même échelle de repésentation. Ils montrent la proximité de la solution obtenue numériquement avec la solution exacte. Afin de comparer ces deux solutions visuellement proches, la figure 5.3 montre la superposition de ces deux solutions pour confirmer que la solution obtenue numériquement est proche de la solution exacte.

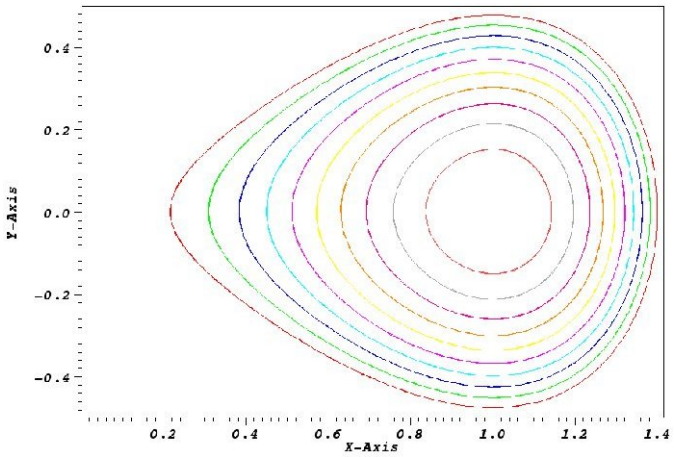


FIGURE 5.3 – lignes de niveaux de ψ_{ex} et ψ_{num}

Ensuite, aux vues des résultats et ayant la solution exacte, il est intéressant d'étudier et d'estimer l'ordre de convergence de l'erreur numérique. Nous calculons les erreurs en norme L^1, L^2 et L^∞, ainsi que l'ordre de convergence associé calculé avec le pas d'espace défini précédemment (cf. (5.1.4)).

Le tableau 5.3 présente les résultats des calculs des erreurs et ceux des ordres de convergence associés, avec $\mathcal{N}_{\partial\Omega}$ le nombre d'éléments sur le bords du domaine Ω. Ce tableau

$\mathcal{N}_{\partial\Omega}$	h	$\|\psi - \psi_{ex}\|_{L^1}$	ordre	$\|\psi - \psi_{ex}\|_{L^2}$	ordre	$\|\psi - \psi_{ex}\|_{L^\infty}$	ordre
22	0.116	$0.7278.10^{-03}$	-	$0.5384.10^{-03}$	-	$0.2620.10^{-02}$	-
40	0.064	$0.1668.10^{-03}$	2.488	$0.1335.10^{-03}$	2.355	$0.6249.10^{-03}$	2.420
80	0.031	$0.4386.10^{-04}$	2.155	$0.3694.10^{-04}$	2.055	$0.2614.10^{-03}$	1.768
160	0.016	$0.1255.10^{-04}$	2.028	$0.1077.10^{-04}$	1.954	$0.6351.10^{-04}$	1.858

Tableau 5.3 – Erreurs sur le 1er cas test analytique de Soloviev obtenues avec des éléments $P1$ de Lagrange

montre que la méthode de résolution utilisée est suffisamment précise pour que les solutions obtenues soit régulières et que la convergence vers la solution exacte soit d'ordre 2.

5.2.1.2 1er exemple avec des éléments finis C^1 de Bell

Ce même cas test a été résolu avec des éléments finis C^1 de Bell. Les résultats obtenus avec les éléments de Lagrange étaient déjà très proches de la solution exacte, visuellement les graphiques obtenus sont les mêmes. On s'est donc intéressé au calcul des erreurs en norme L^1, L^2 et L^∞. Le tableau 5.4 présente ces erreurs.

$\mathcal{N}_{\partial\Omega}$	h	$\|\psi - \psi_{ex}\|_{L^1}$	$\|\psi - \psi_{ex}\|_{L^2}$	$\|\psi - \psi_{ex}\|_{L^\infty}$
39	0.129	$0.4169.10^{-16}$	$0.5556.10^{-16}$	$0.2272.10^{-15}$
136	0.064	$0.4427.10^{-16}$	$0.6514.10^{-16}$	$0.3886.10^{-15}$
519	0.031	$0.3764.10^{-15}$	$0.5235.10^{-15}$	$0.1402.10^{-14}$
2015	0.016	$0.1114.10^{-14}$	$0.1455.10^{-14}$	$0.3608.10^{-14}$

Tableau 5.4 – Erreurs obtenues sur le 1er cas test de Soloviev avec des éléments de Bell

En terme d'erreurs, on est ici proche de l'erreur machine et ce même sur la solution obtenue avec un maillage relativement grossier. La solution analytique étant un polynôme de degré maximal 4 il est normal que l'approximation de cette solution par un polynôme de degré 5 soit exacte à l'erreur machine près. Il semblerait aux vues des résultats sur le tableau que lorsqu'on raffine le maillage, la solution obtenue est moins précise. En réalité, cette impression est due à la méthode de résolution et plus particulièrement au conditionnement de la matrice inversé qui est lié au pas du maillage.

5.2.2 $2^{\text{ème}}$ exemple de cas test analytique

De même nous étudions un second exemple qui vérifie les conditions de l'équilibre de Soloviev avec ici un paramètre de triangularité. Cet exemple est étudié en coordonnées cartésiennes, il admet pour solution analytique :

$$\psi_{ex}(x,y)=1-\left(x-\frac{\epsilon}{2}(1-x^2)\right)^2-\left(\left(1-\frac{\epsilon^2}{4}\right)(1+\epsilon x)^2+\lambda x\left(1+\frac{\epsilon}{2}x\right)\right)\left(\frac{a}{b}y\right)^2, \tag{5.2.6}$$

avec ϵ l'ellipticité et λ le paramètre de triangularité. Avec cette solution l'équation de Grad-Shafranov se réécrit :

$$-\Delta^*\psi = \alpha(R_0(1+\epsilon x))^2+\beta, \tag{5.2.7}$$

avec

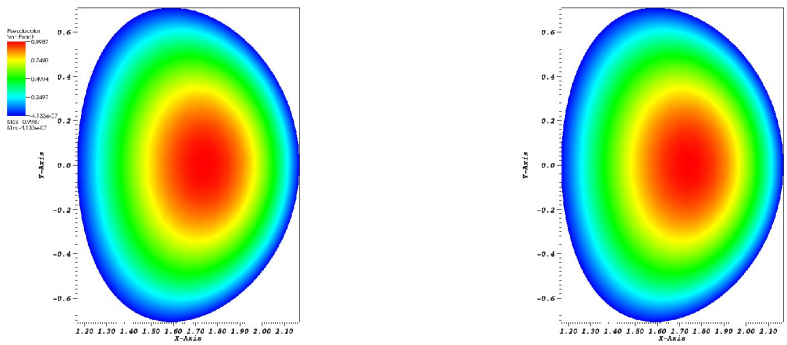
$$\alpha = \frac{4(a^2+b^2)\epsilon + a^2(2\lambda-\epsilon^3)}{2R_0^2\epsilon a^2 b^2} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\lambda}{b^2\epsilon}. \tag{5.2.8}$$

Pour la comparaison avec [DDF+11], nous utilisons pour le test : $a = 0.5$, $b = 0.7$, $\epsilon = 0.3$ et $\lambda = 0$. Le bord du domaine est défini par sa frontière :

$$\partial\Omega = \{(x,y)|\psi(x,y)=0\}, \tag{5.2.9}$$

5.2.2.1 $2^{\text{ème}}$ exemple avec $P1$ de Lagrange

De même que pour le premier cas test, les résultats obtenus numériquement 5.4b sont analogues à la solution exacte de ce problème 5.4a.



(a) ψ_{ex} (b) ψ_{num}

FIGURE 5.4 – Cas test analytique 2

Une étude sur l'ordre de convergence est également menée sur ce cas test analytique de Soloviev (cf. tableau 5.5), ainsi que sur l'ordre de convergence des gradients (cf. tableau 5.6) de la solution ψ. Le pas d'espace h est le même que dans les cas tests précédent (cf. (5.1.4)).

$\mathcal{N}_{\partial\Omega}$	h	$\|\psi - \psi_{ex}\|_{L^1}$	ordre	$\|\psi - \psi_{ex}\|_{L^2}$	ordre	$\|\psi - \psi_{ex}\|_{L^\infty}$	ordre
20	0.135	$0.6749.10^{-02}$	-	$0.6726.10^{-02}$	-	$0.2029.10^{-01}$	-
40	0.068	$0.2092.10^{-02}$	1.716	$0.1746.10^{-02}$	1.976	$0.6470.10^{-02}$	1.675
80	0.035	$0.5673.10^{-03}$	1.820	$0.5249.10^{-03}$	1.875	$0.2046.10^{-02}$	1.687
160	0.017	$0.1476.10^{-03}$	1.863	$0.1326.10^{-03}$	1.913	$0.7005.10^{-03}$	1.640
320	0.009	$0.3615.10^{-04}$	1.903	$0.3390.10^{-04}$	1.925	$0.2035.10^{-03}$	1.675

Tableau 5.5 – Erreurs sur ψ obtenues avec les éléments $P1$ de Lagrange

$\mathcal{N}_{\partial\Omega}$	h	$\|\nabla\psi - \nabla\psi_{ex}\|_{L^2}$	ordre
20	0.135	$0.6681.10^{-01}$	-
40	0.068	$0.3048.10^{-01}$	1.150
80	0.035	$0.1556.10^{-01}$	1.071
160	0.017	$0.7957.10^{-02}$	1.037
320	0.009	$0.3758.10^{-02}$	1.047

Tableau 5.6 – Erreurs sur $\nabla\psi$ obtenues avec les éléments $P1$ de Lagrange

Les résultats numériques observés sur ce deuxième cas test de Soloviev correspondent aux attentes théoriques dûes à ces éléments $P1$ à savoir un ordre de convergence de 2 pour le flux magnétique ψ alors qu'il est de 1 pour les gradients de ψ.

5.2.2.2 2ème exemple avec C^1 de Bell

Ce deuxième exemple de cas test analytique de Soloviev a été résolu avec des éléments finis C^1 de Bell. Il n'est pas nécessaire de remettre les graphiques obtenus avec ces éléments car ils ne diffèrent pas de ceux obtenus avec les éléments $P1$ sur la figure 5.4. De la même manière que pour le cas test précédent la solution à approcher étant un polynôme de degré 4, il est normal que l'approximation de cette solution avec les éléments de Bell, constitués de fonctions de bases polynômiales de degré 5, soit exacte à l'erreur machine près. Ces résultats sont présentés dans le tableau 5.7 suivant.

$\mathcal{N}_{\partial\Omega}$	h	$\|\psi - \psi_{ex}\|_{L^1}$	$\|\psi - \psi_{ex}\|_{L^2}$	$\|\psi - \psi_{ex}\|_{L^\infty}$
41	0.135	$0.3950.10^{-15}$	$0.4965.10^{-15}$	$0.2151.10^{-14}$
140	0.068	$0.1133.10^{-14}$	$0.1432.10^{-14}$	$0.4108.10^{-14}$
504	0.035	$0.2010.10^{-14}$	$0.2661.10^{-14}$	$0.8327.10^{-14}$
1930	0.017	$0.1296.10^{-13}$	$0.1542.10^{-13}$	$0.3197.10^{-13}$
7596	0.009	$0.3247.10^{-13}$	$0.3715.10^{-13}$	$0.8349.10^{-13}$

Tableau 5.7 – Erreurs obtenues sur le 2ème exemple de Soloviev avec C^1 de Bell

5.2.3 $3^{\text{ème}}$ exemple de cas test analytique

Ce 3ème exemple de cas test analytique ne fait pas partie des solutions suivant l'équilibre de Soloviev. En effet, la densité de courant j_c est ici un terme affine en ψ :

$$-r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=(r^2+1)\left(\psi+\frac{1}{2}\right). \tag{5.2.10}$$

Cette équation admet comme solution analytique :

$$\psi_{ex}(r,z)=\cos\left(\frac{r^2}{2}\right)\cos(z)-\frac{1}{2}. \tag{5.2.11}$$

sur le domaine Ω dont le bord $\partial\Omega$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\partial\Omega=\left\{(r,z)|r\in\left[\frac{2}{3}\sqrt{3\pi},\frac{2}{3}\sqrt{6\pi}\right],z=\arccos\left(\frac{1}{2\cos(\frac{r^2}{2})}\right)\cup z=2\pi-\arccos\left(\frac{1}{2\cos(\frac{r^2}{2})}\right)\right\}. \tag{5.2.12}$$

Les conditions de bord sont toujours de types Dirichlet nulles sur le bord du domaine (cf : (4.4.15) ou (4.4.17)). Le terme de courant dépendant de ψ, on choisit de le résoudre de manière itérative avec une condition initiale nulle. Ainsi, on peut choisir de le résoudre

- explicitement :

$$-\Delta^*\psi^{n+1}=(r^2+1)\left(\psi^n+\frac{1}{2}\right), \tag{5.2.13}$$

- ou implicitement :

$$-\Delta^*\psi^{n+1}=(r^2+1)\left(\psi^{n+1}+\frac{1}{2}\right). \tag{5.2.14}$$

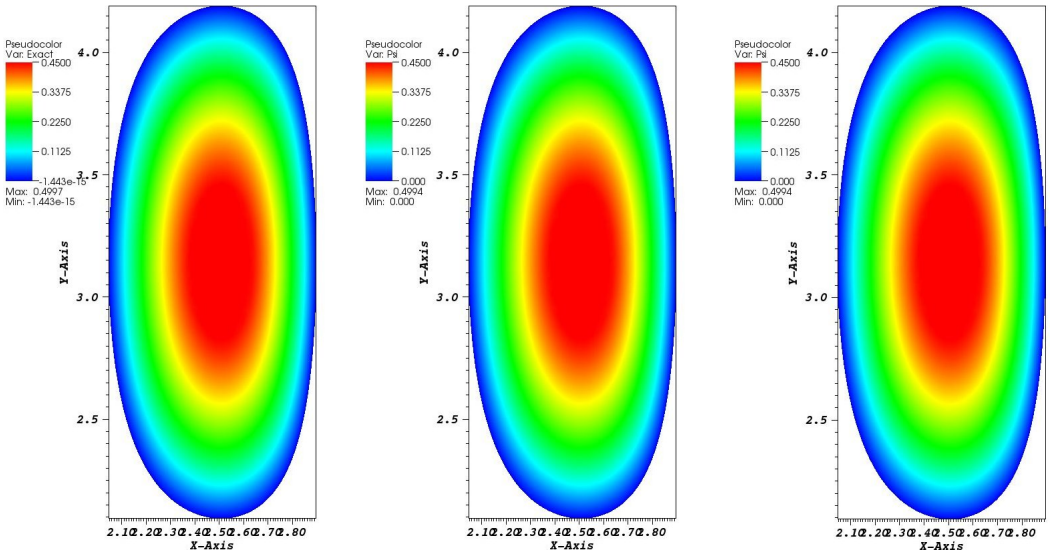
5.2.3.1 $3^{\text{ème}}$ exemple avec $P1$ de Lagrange

La figure 5.5 montre que quelque soit la méthode de résolution choisie explicite 5.5b ou implicite 5.5c la résolution avec les éléments $P1$ de Lagrange converge vers la solution exacte 5.5a.

De même que précédemment, on s'intéresse à l'ordre de convergence de la méthode de résolution. Ainsi quelque soit la méthode de résolution explicite ou implicite le tableau 5.8 présente les erreurs en norme L^1, L^2 et L^∞ où h est le pas d'espace (cf. (5.1.4).

$\mathcal{N}_{\partial\Omega}$	h	$\|\psi-\psi_{ex}\|_{L^1}$	ordre	$\|\psi-\psi_{ex}\|_{L^2}$	ordre	$\|\psi-\psi_{ex}\|_{L^\infty}$	ordre
20	0.206	$0.2910.10^{-01}$	-	$0.3414.10^{-01}$	-	$0.8151.10^{-01}$	-
40	0.102	$0.9982.10^{-02}$	1.524	$0.1039.10^{-01}$	1.695	$0.2271.10^{-01}$	1.821
80	0.049	$0.3076.10^{-02}$	1.572	$0.3102.10^{-02}$	1.678	$0.8852.10^{-02}$	1.553
160	0.024	$0.7517.10^{-03}$	1.709	$0.7610.10^{-03}$	1.778	$0.1884.10^{-02}$	1.761
320	0.012	$0.1930.10^{-03}$	1.770	$0.1980.10^{-03}$	1.818	$0.6002.10^{-03}$	1.733

Tableau 5.8 – Erreurs obtenues sur le $3^{\text{ème}}$ exemple avec les $P1$ de Lagrange



(a) ψ_{ex} (b) ψ_{num} explicite (c) ψ_{num} implicite

FIGURE 5.5 – Solutions exacte et numérique du 3ème exemple avec les méthodes explicite et implicite

5.2.3.2 3ème exemple avec C^1 de Bell

A présent ce cas test analytique est résolu avec des éléments de Bell. Ce cas test par rapport aux deux précédents a l'intérêt d'avoir une solution exacte qui ne soit pas polynômiale de degré inférieur à 5. Il permet donc de vérifier, à partir du calcul d'erreur en norme l'ordre de convergence de la méthode de résolution. Ce cas test a été résolu avec les deux choix de conditions de bords (4.4.15) et (4.4.17). En effet, dans ces cas tests nous avons la solution exacte du probleme il est donc aisé de la choisir comme condition de bord. Le tableau 5.9 récapitule ces calculs d'erreurs avec comme conditions de bord la solution exacte sur la variable ainsi que chacunes de ses dérivées premières et secondes.

$\mathcal{N}_{\partial\Omega}$	h	$\|\psi-\psi_{ex}\|_{L^1}$	ordre	$\|\psi-\psi_{ex}\|_{L^2}$	ordre	$\|\psi-\psi_{ex}\|_{L^\infty}$	ordre
91	0.102	$0.1069.10^{-05}$	-	$0.1508.10^{-05}$	-	$0.8485.10^{-05}$	-
342	0.049	$0.2803.10^{-07}$	5.003	$0.3984.10^{-07}$	4.993	$0.2419.10^{-06}$	4.888
1327	0.024	$0.8269.10^{-09}$	4.963	$0.1260.10^{-08}$	4.865	$0.7822.10^{-08}$	4.834
5151	0.012	$0.2819.10^{-10}$	4.871	$0.4209.10^{-10}$	4.900	$0.3344.10^{-09}$	4.544
20701	0.006	$0.8444.10^{-12}$	4.987	$0.1275.10^{-11}$	4.970	$0.1143.10^{-10}$	4.799

Tableau 5.9 – Erreurs obtenues sur le 3ème exemple avec les C^1 de Bell

Avec la solution exacte comme condition aux limites sur le bord du domaine l'ordre de convergence est bien l'ordre 5, i. e. l'ordre de convergence optimal pour une base réduite de polynômes de degrés 5.

Il est également intéressant d'observer les résultats obtenus avec les conditions de bords basées sur les normales. La visualisation et les graphiques obtenus sont les mêmes mais

l'ordre de convergence diffère. Le tableau 5.10 présente les résultats de l'étude sur les erreurs et l'ordre de convergence.

$\mathcal{N}_{\partial\Omega}$	h	$\|\psi-\psi_{ex}\|_{L^1}$	ordre	$\|\psi-\psi_{ex}\|_{L^2}$	ordre	$\|\psi-\psi_{ex}\|_{L^\infty}$	ordre
28	0.206	$0.3178E-02$	-	$0.2790E-02$	-	$0.3969E-02$	-
91	0.102	$0.80458E-03$	1.958	$0.69204E-03$	1.987	$0.89233E-03$	2.128
218	0.063	$0.35912E-03$	1.646	$0.30700E-03$	1.658	$0.40405E-03$	1.616
342	0.049	$0.20237E-03$	2.414	$0.17265E-03$	2.422	$0.23234E-03$	2.329
1327	0.024	$0.50714E-04$	1.949	$0.43134E-04$	1.954	$0.58308E-04$	1.947
5151	0.012	$0.12693E-04$	1.997	$0.10778E-04$	1.999	$0.14514E-04$	2.005

Tableau 5.10 – Erreurs obtenues sur le 3ème exemple avec les C^1 de Bell avec les conditions de bord sur les normales

Sur ce dernier exemple de cas test analytique pour l'équation d'équilibre de Grad-Shafranov, on a pu vérifier que l'ordre de convergence obtenu est bien l'ordre 5 dans le cas où les conditions de bords sont prises exactes ce qui pour une base réduite de polynômes de degré 5 est optimal. Dans le cas où nous prenons des conditions de bords basées sur les normales cet ordre n'est pas obtenu. Cela vient du fait que le bord du domaine est courbe et pour réobtenir cet ordre de convergence il faudrait utiliser des éléments C^1 courbes [Ber92] sur le bord du domaine.

5.3 Le Current Hole

Ce chapitre se poursuit avec l'étude d'un cas test du Current Hole. Le Current Hole est un modèle de la MHD réduite dont l'obtention à partir de la MHD complète est détaillée dans le paragraphe 3.3.2 du chapitre 3. Le cas test considéré tient son nom de la forme particulière du courant d'entré j_c qui est imposé (cf. figure 5.6). Dans ce modèle il est intéressant d'observer les instabilités en dents de scie sur l'énergie cinétique. Le système du Current Hole donné par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial t} = [\psi,\varphi] + \eta(j_\phi - j_c), \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial t} = [\omega,\varphi] + [\psi,j_\phi] + \nu\Delta\omega, \\ j_\phi = \Delta\psi, \\ \omega = \Delta\varphi, \end{cases} \tag{5.3.1}$$

est résolu avec la méthode aux éléments finis avec tout d'abord des éléments $P1$ de Lagrange puis des C^1 de Bell. Dans ce système les variables sont : ψ le flux magnétique, ω la vorticité, φ le potentiel vitesse et j_ϕ la densité de courant toroïdale qu'on notera plus simplement dans la suite par J. $[.,.]$ caractérise les crochets de Poisson définis par :

$$[a,b] = \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial b}{\partial r} = -[b,a]. \tag{5.3.2}$$

Avec les $P1$ de Lagrange, on a utilisé deux méthodes de résolution du système linéaire : une directe, basée sur la décomposition LU et une itérative : GMRes. Les résultats pour ces deux méthodes sont présentés car les résultats diffèrent tant au niveau précision qu'au niveau du coût et ils se différencient notamment sur l'évolution de l'énergie cinétique sur laquelle on est censé observer les instabilités en dents de scies. Malgré ces différences, ces deux méthodes seront validées avec l'étude du taux de croissance de l'énergie cinétique dans la phase linéaire suivant la résistivité du courant η dont nous connaissons la valeur théorique.

5.3.1 Simulations numériques

A présent, cette partie présente les résultats numériques obtenus sur le cas test présentés par Czarny et Huysmans [CH08, DDF+11]. Pour ces simulations on a pris la viscosité $\nu = 10^{-6}$ et la résistivité $\eta = 10^{-5}$. Le courant d'entrée j_c est tel que :

$$j_c = j_1(1 - r^4) - j_2(1 - r^2)^8 \quad \text{avec } j_1 = 0.2 \text{ et } j_2 = 0.2666. \tag{5.3.3}$$

Cette fonction se représente sur la figure 5.6 de laquelle on comprend la dénomination du cas test « Current Hole ».

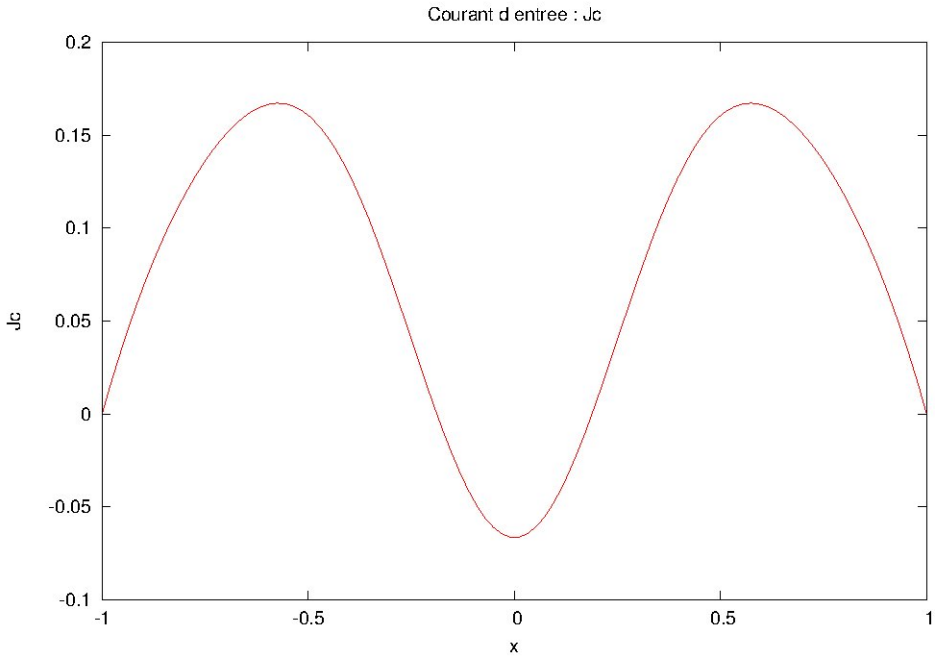


FIGURE 5.6 – Courant d'entrée : j_c

Le domaine considéré Ω est un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 dont le courant est négatif au centre du domaine. Dans la suite, on présente tout d'abord les résultats obtenus avec les éléments $P1$ de Lagrange puis ensuite ceux obtenus avec les C^1 de Bell.

5.3.1.1 Simulations avec les éléments $P1$ de Lagrange

Nous présentons ici les résultats obtenus sur le cas test du Current Hole avec des éléments $P1$ de Lagrange. Le pas de temps est de $\delta t = 0.1$ et le pas d'espace est relativement fin $h = 0.01$ (cf. figure 5.7).

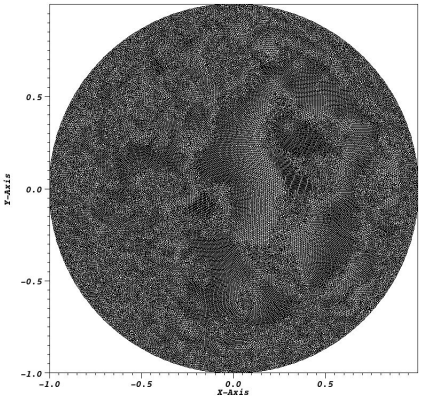


FIGURE 5.7 – Maillage de calcul pour les éléments $P1$

Ayant choisi une méthode implicite pour résoudre le système, il serait normal de ne pas avoir de restriction sur le pas de temps. Cependant, la simulation a tendance à ne pas converger correctement et à présenter de fortes perturbations dans le cas d'un pas de temps plus grand. Il semble rester une contrainte de type CFL.

Les résultats ont d'abord été obtenus avec une méthode de résolution directe avec une bibliothèque nommée UMFPack qui se base sur une factorisation de type LU. Ensuite, les résultats présentés sont obtenus avec la méthode itérative GMRes. Cette méthode étant plus rapide, la durée de simulation sera étendue afin d'observer d'éventuelles instabilités qui surviennent de manière cyclique.

Avant le déclenchement de l'instabilité sur une période relativement longue, la simulation ne semble pas évoluer mais l'énergie cinétique s'accroît. Durant cette phase de croissance linéaire on peut calculer le taux de croissance dont on connait une valeur théorique de $\eta^{1/3}$ [CH08, Rat11]. Pour valider l'implémentation, on fera varier la résistivité η et on tracera la courbe de ce taux de croissance en fonction de cette variable η.

5.3.1.2 Méthode de résolution directe : UMFPack

Le système obtenu est tout d'abord résolu avec une méthode directe [DDF$^+$11]. Pour cela nous utilisons la librairie UMFPack qui est basée sur une factorisation de type LU. Nous obtenons les graphiques de la figure 5.8 au temps T de 1000, ceux de la figure 5.9 au temps T de 2000 et les derniers pour cette méthode à 3000.
Au temps T de 1000, le système est mis en place. Le courant ne présente pas de perturbations par rapport à la condition initiale. Le flux magnétique ψ n'a pas évolué.

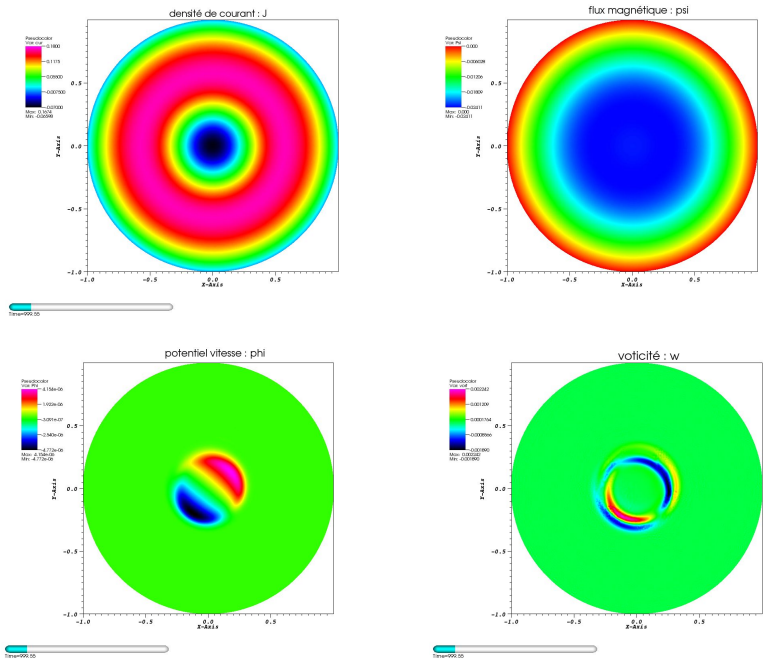


FIGURE 5.8 – Cas test du Current Hole à $t = 1000$

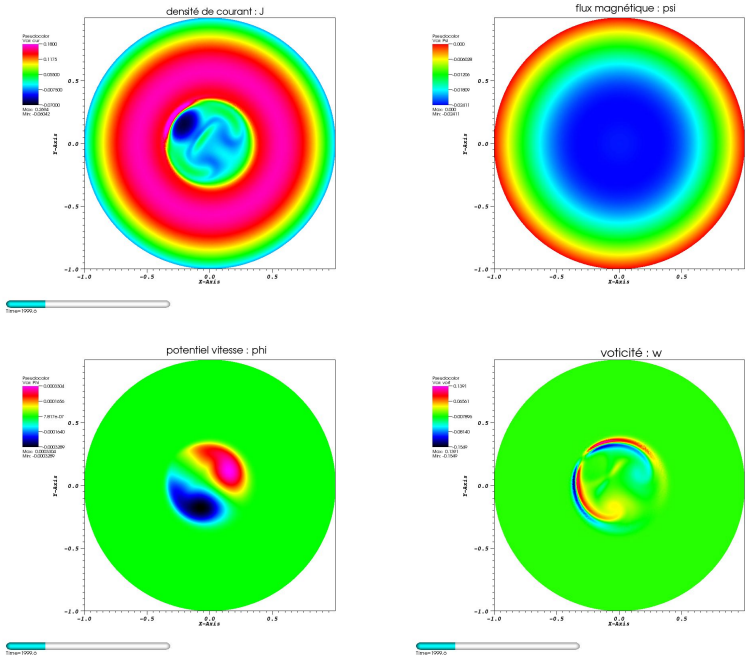


FIGURE 5.9 – Cas test du current hole à $t = 2000$

Entre 1000 et 2000, la densité de courant qui présentait une parfaite symétrie, a vu progressivement la partie centrale négative se désaxer pour venir perturber la partie maximale du courant. Au cours du temps cette onde observée sur la densité de courant continuera de rebondir sur la « barrière » formée par la densité de courant maximale. Ces désaxements et rebondissements successifs représentent les instabilités en dents de scie caractéristiques du Current Hole. Avec ce type de méthode qui nécessite un nombre important de calculs,

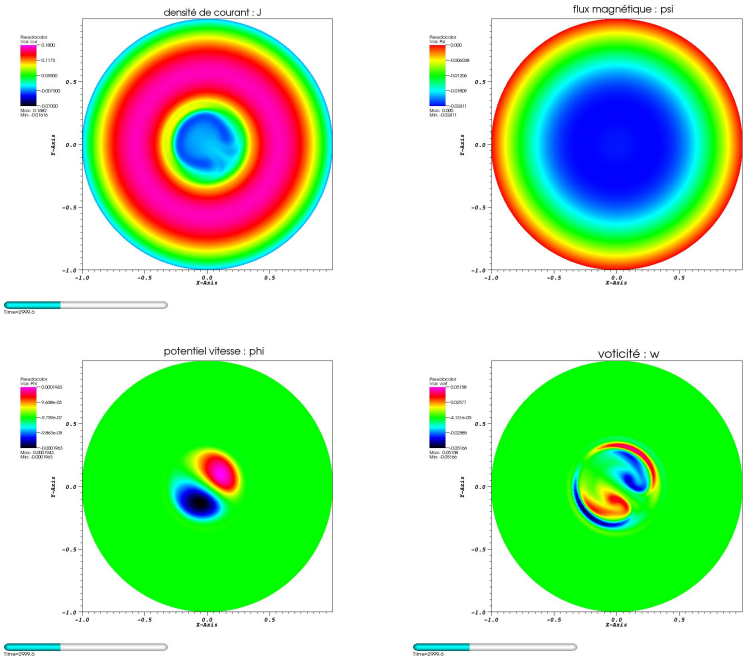


FIGURE 5.10 – Cas test du current hole à $t = 3000$

il faut compter environ $8,8.10^6$ secondes soit un peu plus de 10 jours pour résoudre le système sur un temps de simulation $Tmax$ de 6000.

Sur la figure 5.11 on s'intéresse à l'évolution de l'énergie cinétique [Rat11, CH08] au cours du temps. Pour cela on trace l'énergie cinétique en fonction du temps. Cette énergie a pour définition :

$$E_{cin}(t) = \int_\Omega |\varphi(t)|^2 d\Omega. \tag{5.3.4}$$

Les graphiques 5.12 montrent l'énergie magnétique, ainsi que l'énergie totale comme des fonctions temporelles avec pour l'énergie magnétique :

$$E_{magn}(t) = \int_\Omega |\psi(t)|^2 d\Omega, \tag{5.3.5}$$

et l'énergie totale est la somme de ces deux énergies :

$$E_{tot}(t) = E_{cin}(t) + E_{magn}(t). \tag{5.3.6}$$

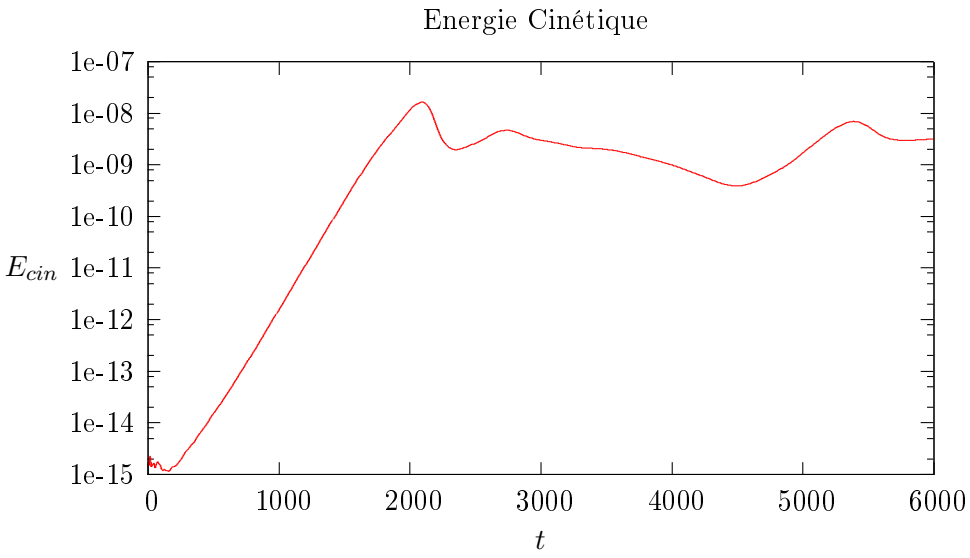


FIGURE 5.11 – Energie cinétique en fonction du temps

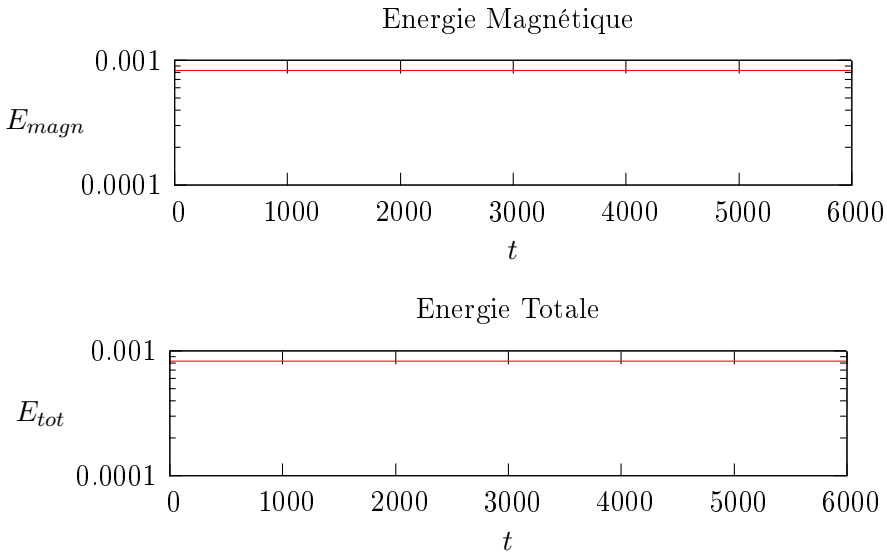


FIGURE 5.12 – Energie magnétique et totale en fonction du temps

Pour finir avec cette méthode de résolution, on représente le taux de croissance γ durant la partie linéaire de l'énergie cinétique, c'est-à-dire entre les temps $t \approx 200$ et 2000 sur le graphique 5.11, en fonction du paramètre de résistivité η. L'observation de ce taux de croissance, en comparaison de la courbe rouge de la figure 5.13 indiquant l'asymptote $\eta^{1/3}$ comme justifié dans [CH08, Bis97], permet de valider nos simulations.

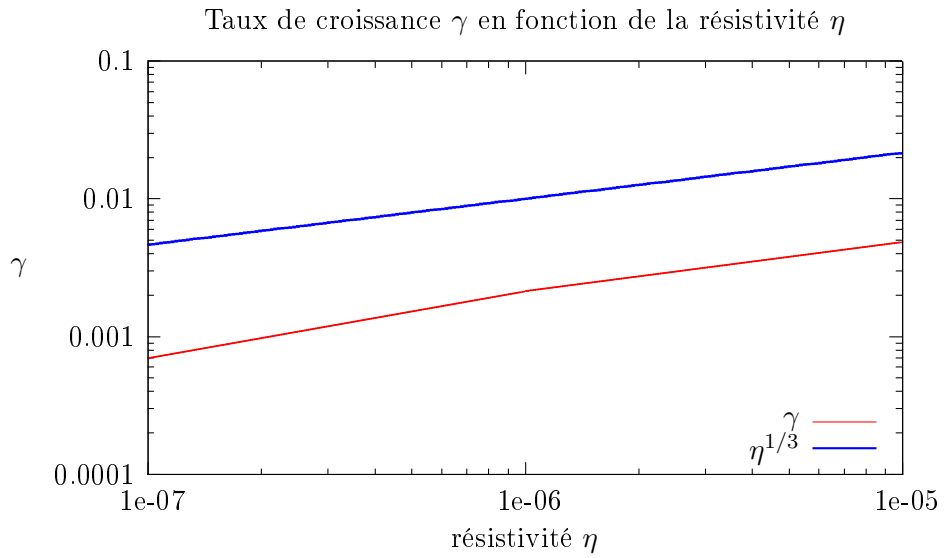


FIGURE 5.13 – Taux de croissance

5.3.1.3 Méthode de résolution itérative : GMRes

Pour pallier le coût important en terme de temps de calcul que coûte une méthode directe, nous utilisons une méthode itérative GMRes, pour résoudre ce système du « Current hole » . L'utilisation de cette méthode de résolution est sujette à discussion et notamment sur la convergence [DDF+11]. Le système à résoudre étant mal conditionné la méthode itérative de GMRes, plus sensible au conditionnement, peut nécessiter un préconditionnement pour une utilisation efficace mais ce problème ne sera pas plus abordé dans cette thèse. On montre dans la suite les résultats obtenus avec cette méthode sur les temps de 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 5600, 6000, 6400, 7000, 8000 et 8800. En montrant tout d'abord les résultats de l'évolution sur la densité de courant J sur la figure 5.14, puis le potentiel vitesse φ sur la figure 5.15 et enfin la vorticité ω sur la figure 5.16.

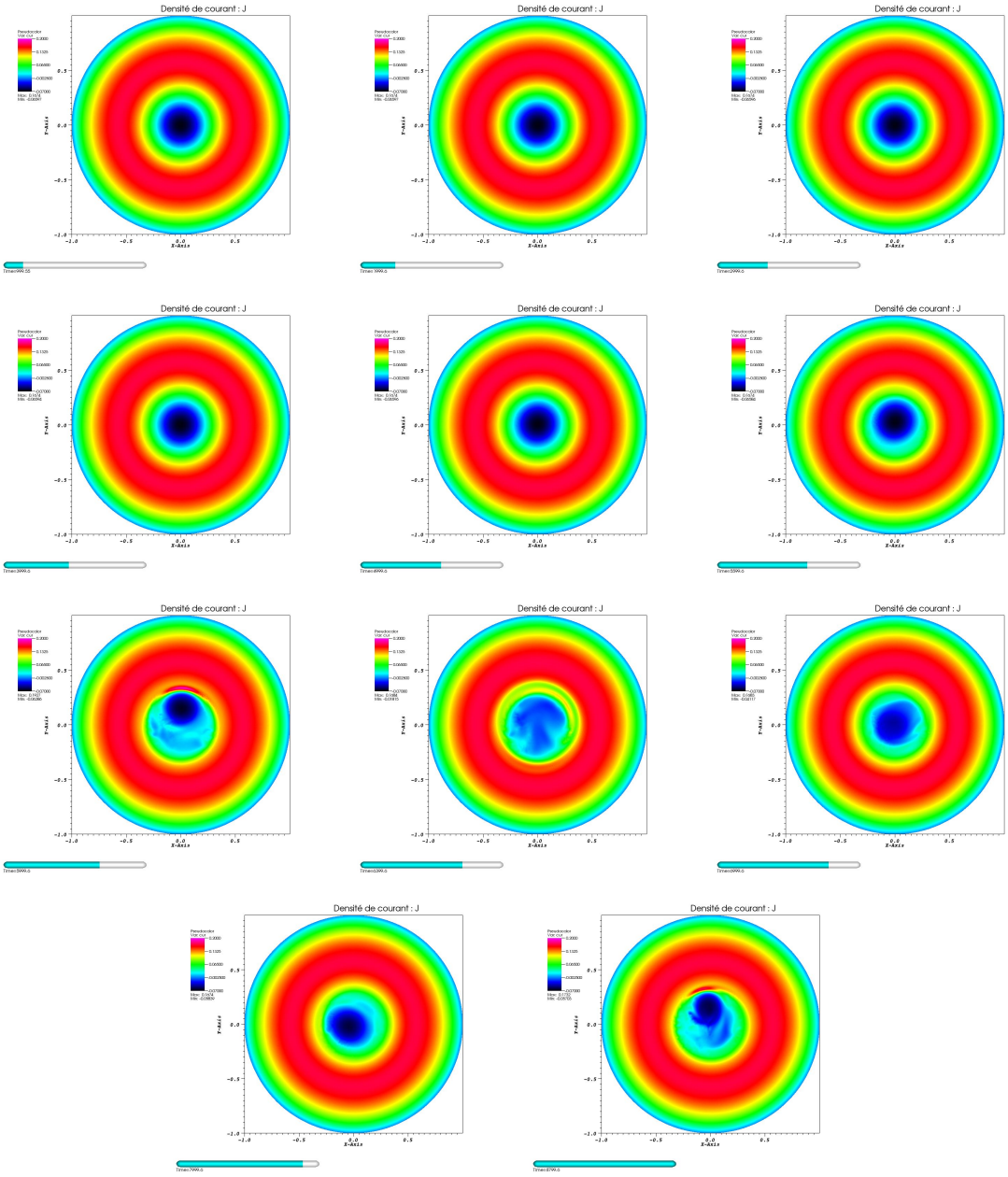


FIGURE 5.14 – Densité de courant J du cas test du Current Hole aux temps 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 5600, 6000, 6400, 7000, 8000 et 8800

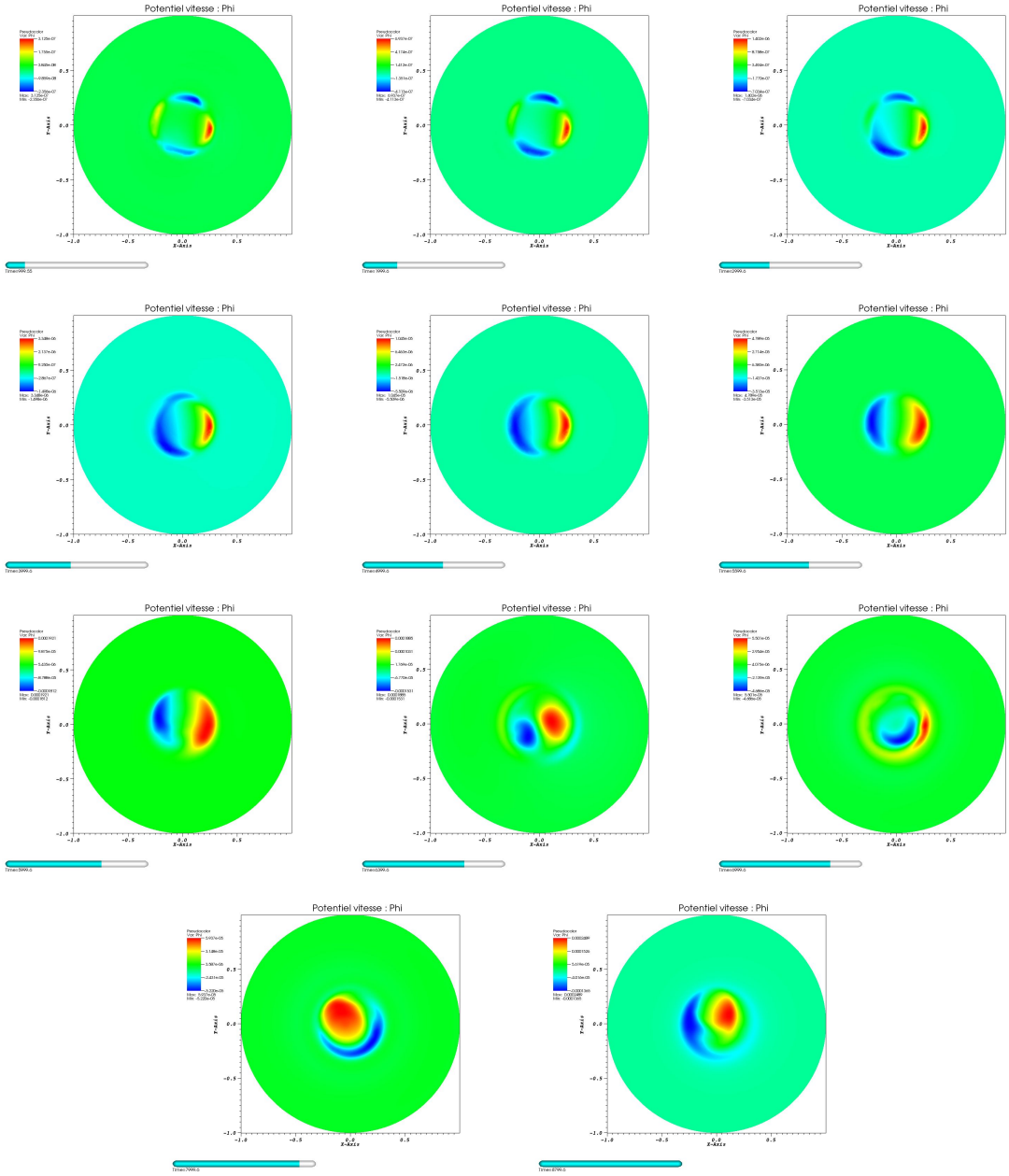


FIGURE 5.15 – Potentiel vitesse φ du cas test du Current Hole aux temps 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 5600, 6000, 6400, 7000, 8000 et 8800

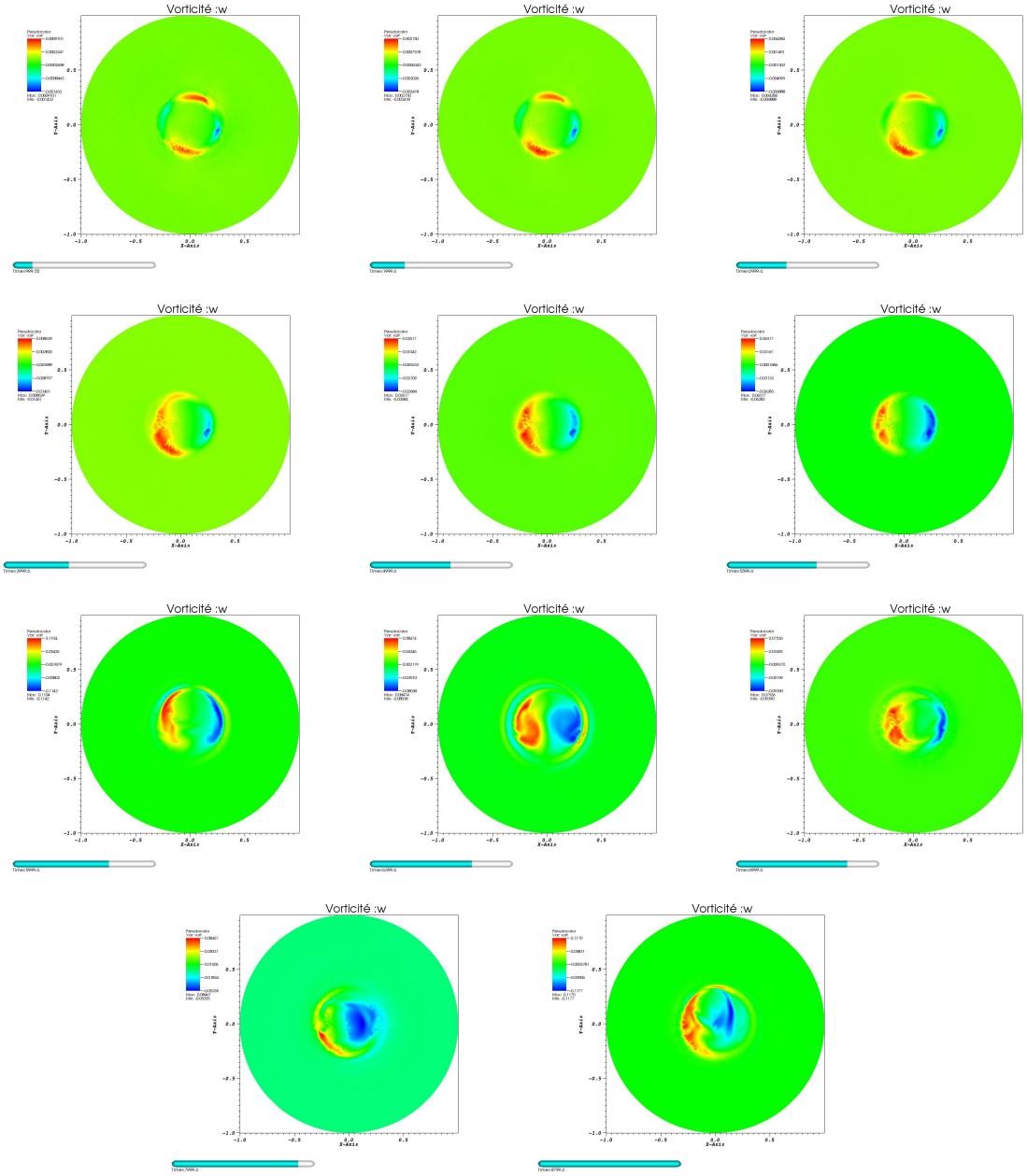


FIGURE 5.16 – Vorticité ω du cas test du Current Hole aux temps 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 5600, 6000, 6400, 7000, 8000 et 8800

Pour obtenir ces résultats avec un temps de simulation T_f de 9000, il faut un temps de simulation de $1,4.10^6$ secondes (environ 1.5 jour). De même que pour la méthode directe nous nous intéressons à l'énergie cinétique en fonction du temps, avec les mêmes paramètres de viscosité et résistivité énoncés précédemment.

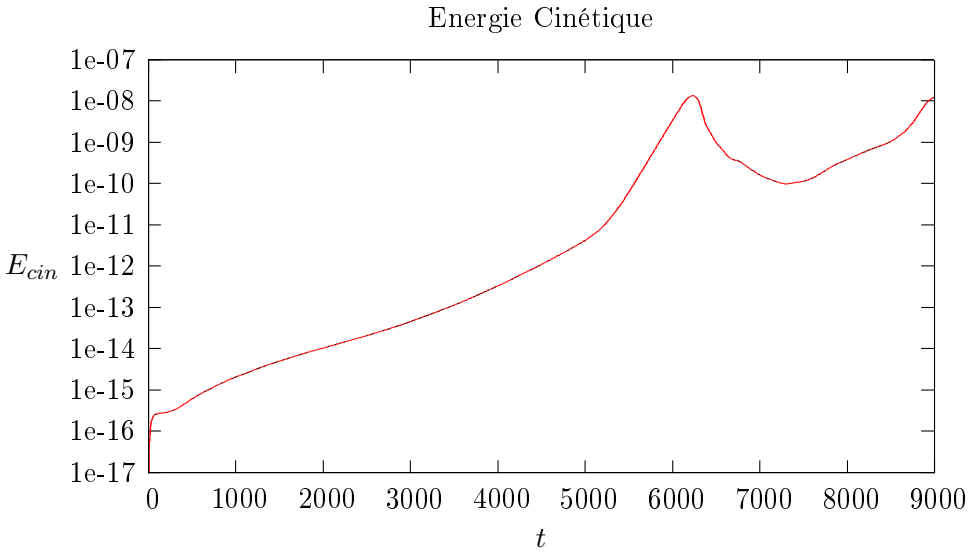


FIGURE 5.17 – Energie cinétique en fonction du temps

Pour finir avec cette méthode de résolution nous représentons le taux de croissance durant la partie linéaire de l'énergie cinétique précédant l'instabilité, c'est-à-dire entre les temps T de 5000 et 6000, en fonction du paramètre de résistivité η. Cette partie linéaire, comparée à celle de la méthode de résolution directe, met plus de temps à arriver en terme de temps de simulation avec la méthode itérative, c'est-à-dire que pour GMRes l'instabilité s'est déclenchée plus tard. Ces instabilités étant dûes à des erreurs d'approximation sur la solution, il est possible qu'avant le déclenchement de l'instabilité certaines erreurs se compensent.

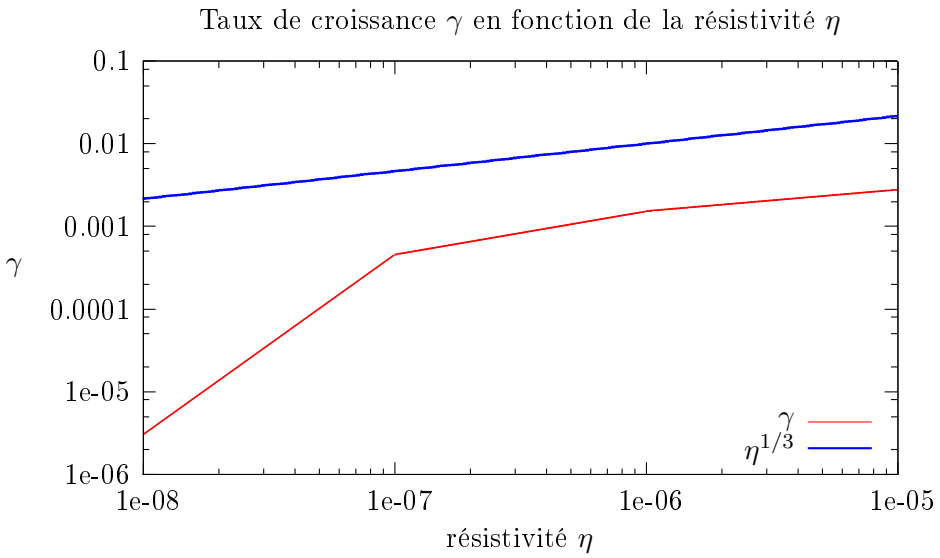


FIGURE 5.18 – Taux de croissance

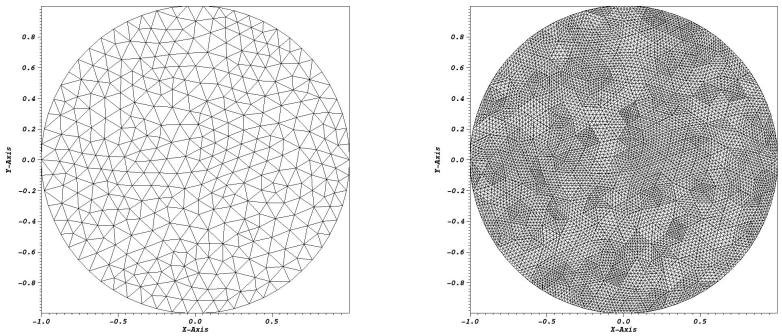
La pente observée sur les graphiques de l'énergie cinétique de $\eta^{1/3}$ vient de la physique et se retrouve sur les deux méthodes utilisées. Ce critère permet de valider l'implémentation. Les différences entre les résultats obtenus viennent de l'état d'excitation et de la méthode de résolution. En effet, avec la méthode de résolution GMRes les résultats sont « lissés », il y a plus de diffusion par rapport à la perturbation créée, la saturation est mal décrite. La différence de précision entre la résolution avec la librairie UMFPack et celle avec GMRes s'explique par le choix du critère d'arrêt de GMRes : fixé dans ce cas test à 1.10^{-10} atteint après une dizaine d'itérations. Ainsi, l'onde observée avec UMFPack est plus nette que celle obtenue avec GMRes, la solution obtenue avec GMRes perd la symétrie et les résultats obtenus sur la vorticité ω et le potentiel vitesse φ sont moins nettes. Les résultats étant physiquement acceptables pour ces deux méthodes de résolution il faut remarquer que la solution obtenue avec GMRes a une bonne dynamique dans un temps dix fois plus faible que ceux obtenus avec la librairie UMFPack. En résumé, la méthode de GMRes est suffisante pour obtenir l'allure générale d'un cas test dans un temps acceptable.

Ce cas test présente les premiers résultats obtenus sur le système du Current Hole. Dans la suite on change d'éléments finis pour utiliser les éléments C^1 de Bell.

5.3.1.4 Simulations numériques du Current Hole avec les C^1 de Bell

On présente ici les résultats du cas test présenté précédemment résolu avec les éléments C^1 de Bell. Pour les conditions spatio-temporelle on a pris pour le pas de temps : $\delta t = 1$ et pour le pas d'espace $\delta h = 0.1$ (cf figure 5.19a).

Avec les éléments $P1$ de Lagrange il semblait rester une contrainte de type CFL, pour obtenir des résultats avec les éléments C^1 de Bell on a pu prendre un maillage de calcul (voir la figure 5.19a) moins fin et un pas de temps plus grand. La régularité des éléments C^1 de Bell permet l'obtention de résultats sur de nouveaux « points de visualisation ». Ainsi, le maillage sur la figure 5.19b utilisé pour visualiser les résultats est plus fin que le maillage de calcul.



(a) Maillage de calcul (b) Maillage utilisé pour la visualisation

FIGURE 5.19 – Maillages utilisés pour la résolution avec les éléments de Bell.

Nous présentons dans la suite les résultats obtenus avec la méthode de résolution de GMRes dont le critère d'arret est fixé à 1.10^{-15}. Ainsi, les graphiques de la figure 5.14 montrent les variations de la densité de courant J aux temps T de 0, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000 et 10000. Ensuite, on visualise sur ces mêmes temps les évolutions du potentiel vitesse φ sur la figure 5.15 et enfin de la vorticité ω sur la figure 5.16.

Sur les graphiques 5.14 représentant la densité de courant on visualise le déclenchement de l'instabilité en dents de scie avec le désaxement du centre c'est-à-dire du « trou de courant » pour revenir ensuite quasiment à sa position initiale et à nouveau se désaxer. Sur les graphiques de la figure 5.15, le potentiel vitesse φ permet également de visualiser cette instabilité. Ce potentiel est nul au temps initial évolue lors du développement de l'instabilité pour revenir nul soit à sont état initial.

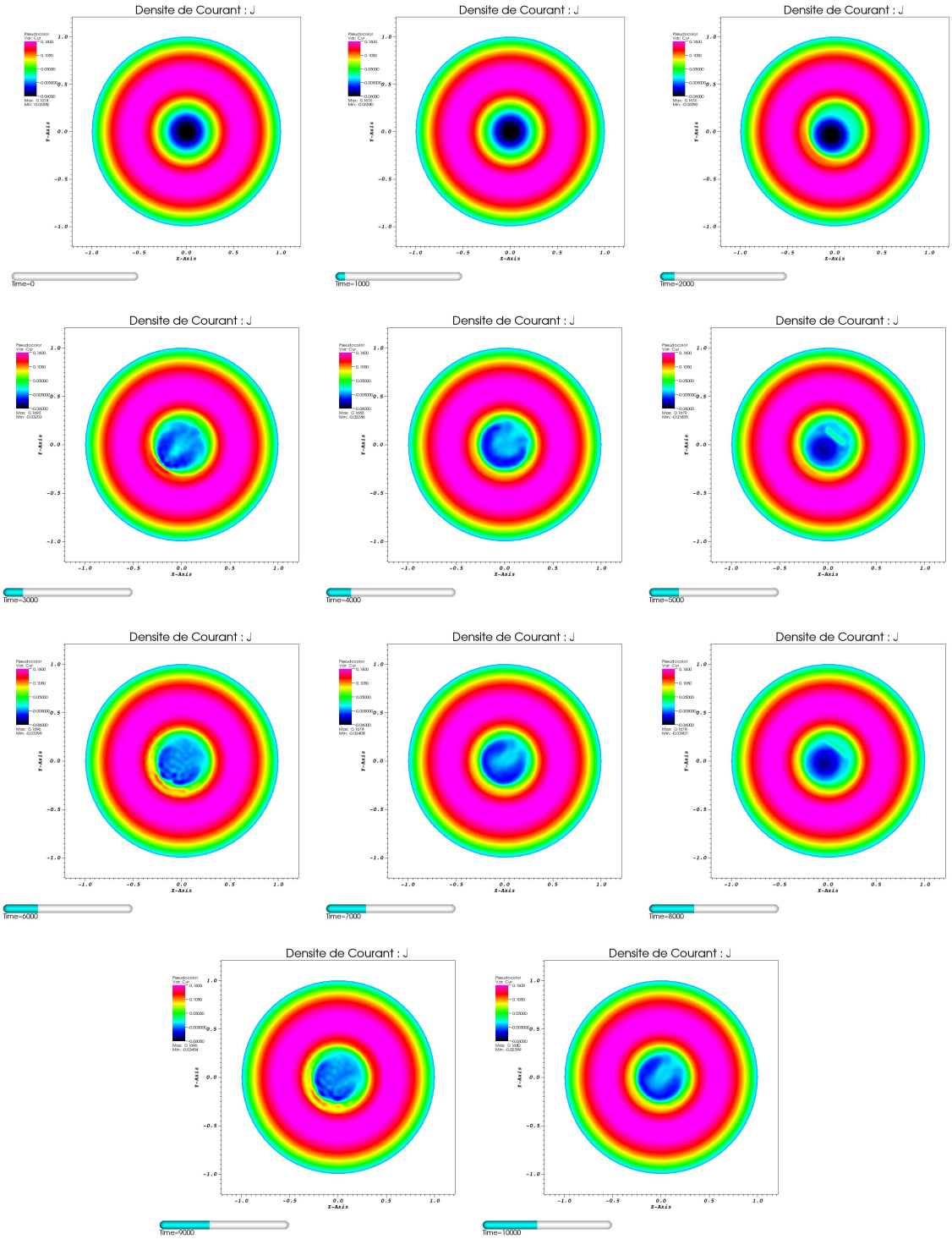


FIGURE 5.20 – Densité de courant J du cas test du Current Hole aux temps : 0, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000 et 10000

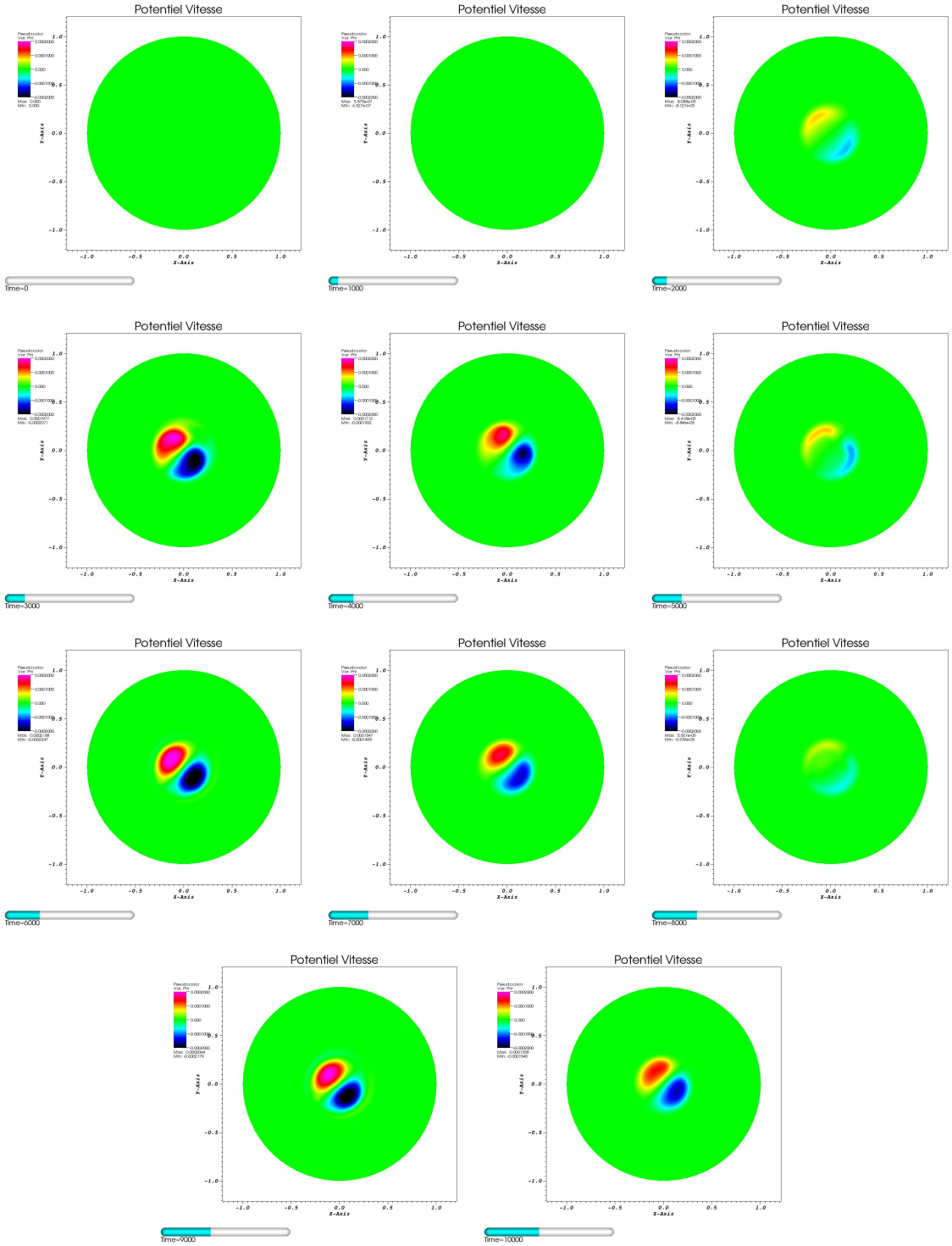


FIGURE 5.21 – Potentiel vitesse φ du cas test du Current Hole aux temps : 0, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000 et 10000

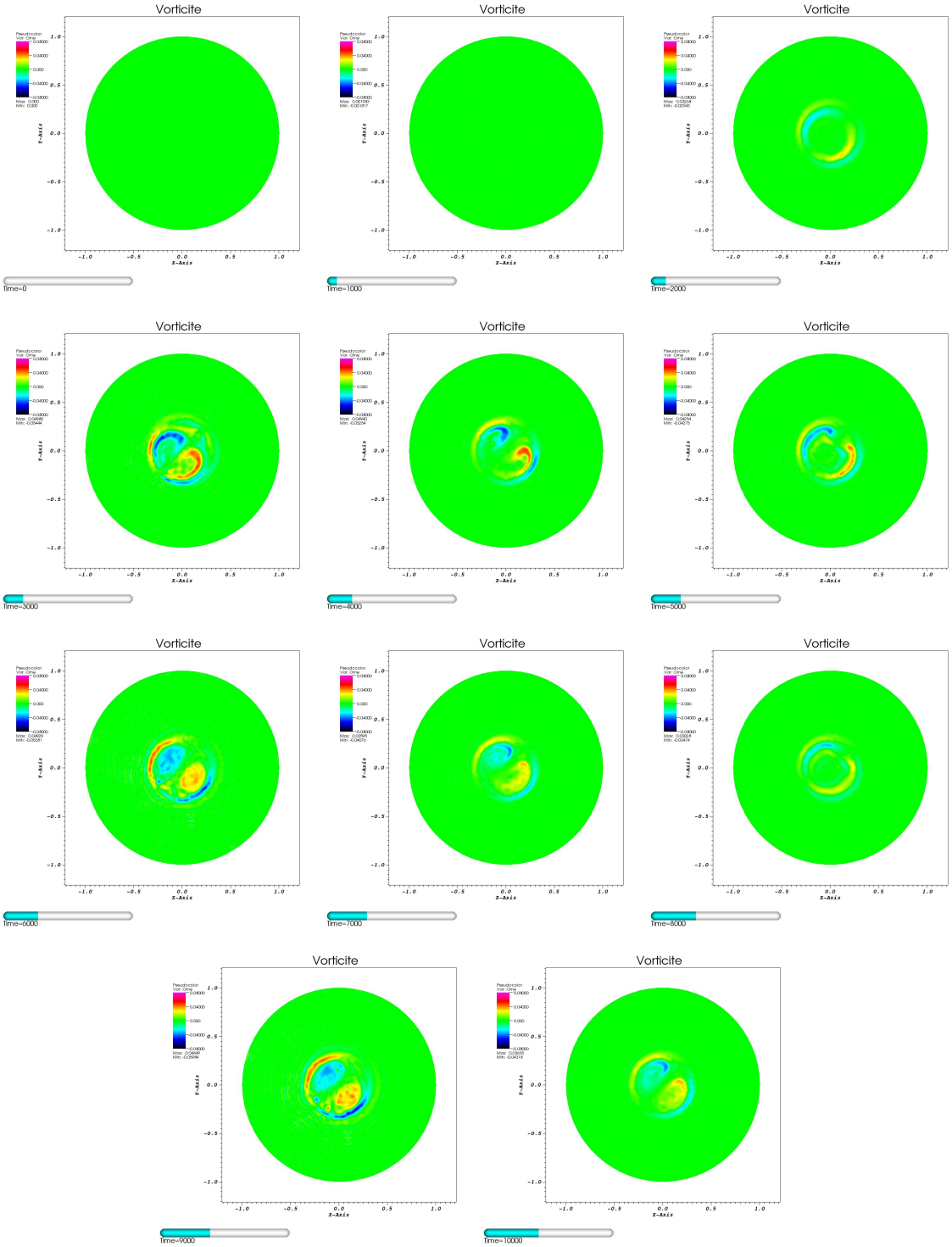


FIGURE 5.22 – Vorticité ω du cas test du Current Hole aux temps : 0, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000 et 10000

Avec ce type d'éléments il est intéressant de visualiser l'énergie cinétique (5.3.4). En effet, sur un temps de simulation total de 20000 on observe sur la figure 5.23 la périodicité de l'instabilité en dents de scie. Les maxima correspondent au moment où la densité de courant J est la plus désaxée c'est-à-dire au moment où la partie négative du courant « rebondit ». A ce moment le potentiel vitesse φ est maximal. Ce graphique montre que chacun des déclenchements de l'instabilité est précédé par une phase linéaire dont le coefficient est $\eta^{1/3}$.

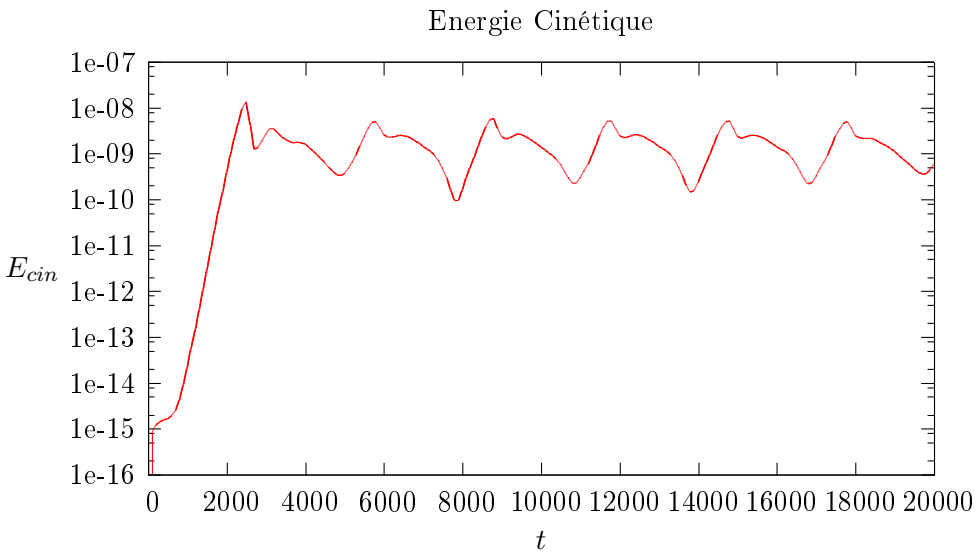


FIGURE 5.23 – Energie cinétique en fonction du temps avec les éléments de Bell

En termes de temps de calcul, pour obtenir cette simulation sur 20000 il a fallut $2.2.10^6$ secondes soit un peu plus de 25 jours.

5.4 Conclusions

Ce chapitre a permis de présenter les résultats numériques obtenus sur des systèmes de MHD réduite ainsi que sur un cas test de conduction thermique avec des éléments C^1 de Bell. Tout d'abord, le cas test de conduction thermique a permis de valider l'implémentation. L'obtention d'un ordre de convergence de 5 sur l'erreur d'approximation, soit l'ordre optimal pour une base réduite de polynômes de degré 5 et ce avec des conditions de bord exactes ou basées sur les normales tangentielles liées aux conditions du bord du domaine et non à la solution analytique, valide l'utilisation de ces éléments.

Après avoir validé l'implémentation de ces éléments, on a modélisé plusieurs cas tests d'équilibre de Grad-Shafranov. Ces cas tests étant analytiques, ils ont permis une étude en ordre de convergence de l'erreur d'approximation. Tout d'abord résolu avec des éléments $P1$ de Lagrange, ces cas test ont ensuite été résolus avec des éléments C^1 de Bell. Les résultats numériques observés sur les deux premiers cas tests correspondent aux attentes théoriques dûes aux éléments choisis. Pour les $P1$ on a obtenu un ordre de convergence de l'erreur d'approximation de 2 pour le flux magnétique et de 1 pour le gradient de ce flux magnétique du deuxième cas test. La base des éléments de Bell est constituée de polynômes de degré 5. Ces deux cas tests étant des polynômes de degré 4, on a donc obtenu avec des maillages encore grossiers une approximation de la solution avec une erreur de l'ordre de l'erreur machine. Le dernier cas test de Grad-Shafranov présenté dans ce chapitre a pour intérêt de n'être pas polynômiale. Avec des éléments $P1$, l'ordre de convergence obtenu est celui optimal de 2. Par contre pour les éléments C^1 de Bell l'ordre 5 attendu est obtenu lorsque les conditions de bords sont basées sur la solution exacte. Si les conditions de bords sont prises par rapport aux normales tangentielles au bord du domaine $\partial\Omega$, on n'atteint plus cet ordre optimal de 5. Ce défaut d'ordre est dû au choix des conditions de bord et à la forme courbe du domaine car pour un bord droit tel que le cas test de conduction thermique l'ordre 5 est obtenu. Pour prendre en considération la courbure du bord du domaine il faudrait utiliser des éléments C^1 courbes [Ber92].

La dernière partie de ce chapitre a porté sur la résolution d'un cas test du système du Current Hole. D'abord résolu avec les éléments $P1$ de Lagrange, ce système a ensuite été résolu avec les C^1 de Bell. Avec les éléments $P1$, pour résoudre le système on a utilisé une méthode directe basée sur la factorisation LU et une méthode itérative : GMRes. Ces deux méthodes ont été validées avec l'obtention de l'asymptote $\eta^{1/3}$ pour le coefficient de la phase linéaire sur l'énergie cinétique précédant le déclenchement de l'instabilité. Avec ces deux méthodes, on a pu visualiser l'évolution de la densité de courant J sur laquelle on peut voir le désaxement du « trou de courant » ensuite le rebond et le retour à un état quasi-initial. Ces deux méthodes de résolution n'ayant pas le même critère d'approximation l'instabilité, son déclenchement et son évolution, ne se déroule pas de la même manière. En effet, le temps de déclenchement et la direction du désaxement diffèrent. En terme de temps de simulation, la méthode itérative est bien plus rapide. Ainsi, on a noté que les résultats de la méthode de GMRes sont physiquement acceptables et que la solution a une bonne dynamique dans un temps de calcul dix fois plus court que pour la méthode directe.

Résolu avec des éléments C^1 de Bell, le système du Current Hole a permis d'observer sur un temps de simulation plus long de 20000 la nature cyclique de cette instabilité avec

six déclenchements d'instabilités visibles notamment sur le graphique de l'énergie cinétique 5.23. Avec ce type d'éléments un maillage dix fois moins fin que pour les $P1$ est suffisant pour faire le calcul. Ensuite, la régularité des éléments permet de définir de nouveaux points pour la visualisation. Ainsi, bien que résolu avec l'algorithme itératif GMRes, on obtient une meilleure visualisation en conservant par exemple la symétrie. Sur les graphiques de la densité de courant, on retrouve le développement de l'instabilité avec le désaxement du « trou de courant » puis son rebond et le retour à un état proche de l'état initial. Avec une périodicité d'environ 3000, on visualise sur le graphique de l'énergie cinétique cette phase linéaire de préparation à l'instabilité dont le coefficient est toujours $\eta^{1/3}$.

Il faut remarquer que pour résoudre ce système sur un temps de 20000, il a fallut environ 25 jours. Cette simulation étant passé en séquentiel, il faudrait utiliser le calcul parallèle pour diminuer ce temps de calcul.

Enfin, la résolution hierarchique de ces systèmes de MHD réduite avec la méthode des éléments finis et les éléments de Bell a comme perspective générale la résolution du système de la MHD complète avec cette méthode de résolution.

Conclusion générale et Perspectives

L'évolution du plasma au sein des tokamaks est complexe. Il présente de nombreux paramètres physiques et est sujet à de nombreuses instabilités. Qu'elles soient déstabilisantes ou non, la modélisation doit prendre en considération ces instabilités.

Dans les chapitres 2 et 3, on a exposé les modèles, du plus complet, le modèle particulaire, jusqu'au modèle plus réduit de l'équation d'équilibre de Grad-Shafranov. En ce sens, on a explicité les détails de la dérivation des modèles cinétiques aux modèles fluides, et on a bien retrouvé les fermetures des coefficients de transport tels qu'ils ont été établis dans l'article original de Braginskii. Au sein des modèles fluides, on a détaillé le modèle de la MagnétoHydroDynamique sous différentes formes : complète, idéale, résistive ou encore réduite en explicitant pour chaque étape de réduction les hypothèses utilisées. Le modèle de la MHD réduite a été encore simplifié pour donner les modèles du Current Hole et celui d'équilibre de Grad-Shafranov. Ces deux modèles permettent d'étudier respectivement une instabilité macroscopique du cœur du plasma (l'instabilité dite en « dents de scie ») et un équilibre du plasma.

Après avoir développé ces systèmes de MHD, on a cherché à les résoudre avec une méthode aux éléments finis. La résolution numérique de ces systèmes de la MHD avec les hypothèses énoncées, notamment sur la définition du champ magnétique avec un potentiel vecteur, nécessite des schémas stables et une certaine régularité de l'approximation. Ces systèmes étant dominés par l'advection, leurs résolutions par la méthode des éléments finis classique conduisent à un schéma instable. Pour pallier cette instabilité, on a utilisé une méthode de stabilisation SUPG dont on a étudié la stabilité L^2. Cette étude de la stabilité L^2, a montré que le choix de la méthode implicite de Crank-Nicholson permet que la résolution, avec ou sans le terme temporel dans le résidu, soit inconditionnellement stable.

Ensuite, la résolution de la MHD complète nécessite l'utilisation de méthodes de stabilisation mais également l'utilisation d'éléments suffisamment réguliers. En effet, l'introduction d'un potentiel vecteur pour le champ magnétique conduit à des systèmes d'ordre supérieur à 2 pour lesquel les éléments $P1$ de Lagrange ne sont plus adaptés. On a donc mis en place une méthode de résolution basée sur des éléments C^1 qu'on a testée sur des systèmes de MHD réduite. Les propriétés de stabilité de ces systèmes suffisent et leurs résolutions ne nécessitent donc pas de stabilisation supplémentaires. Parmi les éléments C^1, on a choisi les éléments triangulaires de Bell dont les degrés de libertés ne sont portés que par les noeuds du maillage. Chaque noeud possède 6 degrés de libertés et les 18 fonctions de bases polynômiales forment une base réduite de l'espace des polynômes de degré

5. Après avoir motivé et présenté ces éléments C^1 de Bell, on a développé la résolution de l'équation de conduction thermique et de systèmes de la MHD réduite du Current Hole et de Grad-Shafranov.

Le dernier chapitre présente les différentes simulations qui ont été menées. Des cas tests de conduction thermique et de MHD réduite tels que l'équation d'équilibre de Grad-Shafranov et le Current Hole ont été résolus avec la méthode des éléments finis et plus particulièrement les éléments C^1 de Bell. Pour la comparaison les cas tests de MHD réduite ont également été résolus avec des éléments $P1$ de Lagrange. Ces cas tests, dont on connaît pour certains une solution analytique, ont permis de valider l'implémentation de ces éléments de Bell avec l'obtention de l'ordre de convergence maximal de 5 pour ces éléments. Pour obtenir cet ordre une attention particulière est apportée sur la définition des conditions de bord. En effet, si on impose comme condition de bords la solution exacte, on obtient bien l'ordre maximal. Si au contraire, on impose des conditions de bords sur la normale tangentielle, c'est-à-dire liées à la définition des bords du domaine, alors cet ordre maximal n'est obtenu que dans le cas où les bords du domaine sont droits. En effet, le domaine courbe est approché par des triangles, on perd donc de la précision sur l'erreur d'approximation et l'ordre de convergence maximal n'est pas atteint. Pour obtenir cet ordre maximal de 5 pour des domaines courbes, il faudrait recourir a des éléments C^1 courbes [Ber92] qui prennent en considération la courbure du domaine.

Enfin, la dernière partie du chapitre sur les résultats numériques montre l'étude menée sur le système du Current Hole à quatre équations. Ce système de la MHD réduite résistive, dont l'obtention et les hypothèses faites sont présentées dans le chapitre sur la MHD, est résolu avec les deux types d'éléments déjà utilisés à savoir les $P1$ de Lagrange et les C^1 de Bell. Ces résolutions ont été validées par l'obtention de l'asymptote de $\eta^{1/3}$ pour le coefficient linéaire sur la courbe précédant le déclenchement d'une instabilité, avec η le coefficient de résistivité du courant. Le déclenchement et l'orientation de l'instabilité dépendent de la méthode de résolution choisie. Ainsi, la régularité des éléments de Bell permet d'obtenir une meilleure précision du développement de l'instabilité sur des maillages moins fins. En séquentiel, le temps de simulation avec les éléments C^1 de Bell est relativement long, soit 25 jours pour un temps de calcul de 20000. Il suffirait de paralléliser le programme pour diminuer ce temps de simulation. Les degrés de libertés des éléments de Bell n'étant défini qu'aux noeuds du maillage, les éléments C^1 de Bell ne changent pas la structure du graphe numérique. Ainsi, la parallélisation ne devrait pas poser de problème particulier.

Ces résultats ont donc permis de valider la résolution de systèmes de la MHD réduite avec des éléments finis C^1 triangles. Comme perspective on pourrait continuer cette approche hiérarchique des modèles de MHD jusqu'au modèle de la MHD complète (3.1.57) en passant par le modèles de la MHD réduite étendue (3.3.8) dont on a des équations sur la densité, la pression, la vitesse parallèle et l'énergie.

Annexes du chapitre 2 :

2.A Obtention du moment d'ordre 2 des équations fluides

Ceci est le développement du moment d'ordre 2 de l'équation de Boltzmann afin d'obtenir l'équation de conservation de l'énergie :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma \boldsymbol{u}^2}{2} \left[\frac{\partial f_\sigma}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\boldsymbol{u} f_\sigma) + \nabla_{\boldsymbol{u}} \cdot (\boldsymbol{a}_\sigma f_\sigma) \right] d\boldsymbol{u} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma \boldsymbol{u}^2}{2} \sum_\alpha C_{\sigma\alpha} d\boldsymbol{u}. \tag{2.A.1}$$

Elle se simplifie de la même manière que les moments précédents, c'est-à-dire si on considère successivement chacun des termes

- le premier terme : il faut reprendre l'hypothèse sur la vitesse $\boldsymbol{u}_\sigma = \boldsymbol{v}_\sigma + \boldsymbol{\kappa}$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma \boldsymbol{u}^2}{2} \frac{\partial f_\sigma}{\partial t} d\boldsymbol{u} &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma (\boldsymbol{v}_\sigma + \boldsymbol{\kappa})^2}{2} \frac{\partial f_\sigma}{\partial t} d\boldsymbol{\kappa}, \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_\sigma n_\sigma |\boldsymbol{v}_\sigma|^2}{2} + \frac{3P_\sigma}{2} \right).\end{aligned}$$

- Pour le second terme on utilise la même hypothèse sur $\boldsymbol{u}_\sigma$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma \boldsymbol{u}^2}{2} \nabla_x \cdot (\boldsymbol{u} f_\sigma)\, d\boldsymbol{u} =& \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma (\boldsymbol{v}_\sigma + \boldsymbol{\kappa})^2}{2} \boldsymbol{u} f_\sigma d\boldsymbol{\kappa}, \\ =& \nabla_x \cdot \left[\int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma |\boldsymbol{v}_\sigma|^2}{2} \boldsymbol{u} f_\sigma d\boldsymbol{\kappa} + \int_{\mathbb{R}^3} m_\sigma (\boldsymbol{v}_\sigma \cdot \boldsymbol{\kappa}) \boldsymbol{u} f_\sigma d\boldsymbol{\kappa} \right] \\ &+ \nabla_x \cdot \left[\int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma |\boldsymbol{\kappa}|^2}{2} \boldsymbol{u} f_\sigma d\boldsymbol{\kappa} \right], \\ =& \nabla_x \cdot \left[\int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma^3}{2} f_\sigma d\boldsymbol{\kappa} + \cancel{\int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma |\boldsymbol{v}_\sigma|^2}{2} \boldsymbol{\kappa} f_\sigma d\boldsymbol{\kappa}} \right] \\ &+ \nabla_x \cdot \left[\cancel{\int_{\mathbb{R}^3} m_\sigma (\boldsymbol{v}_\sigma \cdot \boldsymbol{\kappa}) \boldsymbol{v}_\sigma f_\sigma d\boldsymbol{\kappa}} + \int_{\mathbb{R}^3} m_\sigma (\boldsymbol{v}_\sigma \cdot \boldsymbol{\kappa}) \boldsymbol{\kappa} f_\sigma d\boldsymbol{\kappa} \right] \\ &+ \nabla_x \cdot \left[\int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma |\boldsymbol{\kappa}|^2}{2} \boldsymbol{v}_\sigma f_\sigma d\boldsymbol{\kappa} + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma |\boldsymbol{\kappa}|^2}{2} \boldsymbol{\kappa} f_\sigma d\boldsymbol{\kappa} \right], \\ =& \nabla_x \cdot \left[\frac{m_\sigma n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma^3}{2} + \int_{\mathbb{R}^3} m_\sigma (\boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\kappa}) \boldsymbol{v}_\sigma f_\sigma d\boldsymbol{\kappa} + \frac{3\boldsymbol{v}_\sigma P_\sigma}{2} \right] + \nabla_x \cdot \boldsymbol{Q}_\sigma, \\ =& \nabla_x \cdot \left[\frac{m_\sigma n_\sigma |\boldsymbol{v}_\sigma|^2}{2} \boldsymbol{v}_\sigma + \underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma : \boldsymbol{v}_\sigma + \frac{5P_\sigma}{2} \boldsymbol{v}_\sigma \right] + \nabla_x \cdot \boldsymbol{Q}_\sigma,\end{aligned}$$

où $\boldsymbol{Q}_\sigma$ est le flux de chaleur.

– Le troisième terme sur l'accélération utilise une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma \boldsymbol{u}^2}{2} \nabla_{\boldsymbol{u}} \cdot (\boldsymbol{a}_\sigma f_\sigma)\, d\boldsymbol{u} &= q_\sigma \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{u}^2}{2} \nabla_{\boldsymbol{u}} \cdot (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}_\sigma \times \boldsymbol{B}) f_\sigma d\boldsymbol{u}, \\ &= -q_\sigma \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}_\sigma \times \boldsymbol{B}) f_\sigma d\boldsymbol{u}, \\ &= -q_\sigma n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma \cdot \boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

– Pour le terme de collision, il se réécrit :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma \boldsymbol{u}^2}{2} \sum_\alpha C_{\sigma\alpha} d\boldsymbol{u} =& \int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma |\boldsymbol{v}_\sigma|^2}{2} \sum_{\alpha \neq \sigma} C_{\sigma\alpha} d\boldsymbol{u} + \int_{\mathbb{R}^3} m_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma \boldsymbol{\kappa} \sum_{\alpha \neq \sigma} C_{\sigma\alpha} d\boldsymbol{u}, \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_\sigma \boldsymbol{\kappa}^2}{2} \sum_{\alpha \neq \sigma} C_{\sigma\alpha} d\boldsymbol{u} \\ =& \boldsymbol{v}_\sigma \cdot \boldsymbol{R}_\sigma + \mathcal{Q}_\sigma,\end{aligned}$$

où $\mathcal{Q}_\sigma$ est un coefficient de transport représentant la chaleur générée par les collisions entre particules.

L'équation sur le moment d'ordre 2 qui représente la conservation de l'énergie $\rho\mathcal{E}_\sigma$ se réécrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathcal{E}_\sigma) + \nabla_x \cdot [\rho\mathcal{E}_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma + \underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma : \boldsymbol{v}_\sigma] - q_\sigma n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma \cdot \boldsymbol{E} = -\nabla_x \cdot \boldsymbol{Q}_\sigma + \boldsymbol{v}_\sigma \cdot \boldsymbol{R}_\sigma + \mathcal{Q}_\sigma, \tag{2.A.2}$$

avec $\rho\mathcal{E}_\sigma$ l'énergie définie par :

$$\rho\mathcal{E}_\sigma = \frac{m_\sigma n_\sigma |\boldsymbol{v}_\sigma|^2}{2} + \frac{3P_\sigma}{2}. \tag{2.A.3}$$

En utilisant l'équation de continuité (2.2.7) et l'équation de conservation des mouvements (2.2.26) multipliée par $\boldsymbol{v}_\sigma$, la conservation de l'énergie devient :

$$\begin{aligned}\cancel{q_\sigma n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma \cdot \boldsymbol{E}} - \cancel{\boldsymbol{v}_\sigma \cdot \nabla_x P_\sigma} - \boldsymbol{v}_\sigma \cdot (\nabla_x \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma) + \cancel{\boldsymbol{v}_\sigma \cdot \boldsymbol{R}_\sigma} + \frac{d}{dt}\left(\frac{3P_\sigma}{2}\right) \\ + \frac{5}{2} P_\sigma \nabla_x \cdot \boldsymbol{v}_\sigma + \cancel{\boldsymbol{v}_\sigma \cdot \nabla_x P_\sigma} + \nabla_x \cdot (\underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma) \cancel{- q_\sigma n_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma \cdot \boldsymbol{E}} \\ = -\nabla_x \cdot \boldsymbol{Q}_\sigma + \cancel{\boldsymbol{v}_\sigma \cdot \boldsymbol{R}_\sigma} + \mathcal{Q}_\sigma,\end{aligned}$$

i.e.,

$$-\boldsymbol{v}_\sigma \cdot (\nabla_x \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma) + \frac{d}{dt}\left(\frac{3P_\sigma}{2}\right) + \frac{5}{2} P_\sigma \nabla_x \cdot \boldsymbol{v}_\sigma + \nabla_x \cdot (\underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma) = -\nabla_x \cdot \boldsymbol{Q}_\sigma + \mathcal{Q}_\sigma.$$

Au final, l'équation de moment d'ordre 2 sur la pression se réécrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3P_\sigma}{2}\right) + \frac{5}{2} P_\sigma \nabla_x \cdot \boldsymbol{v}_\sigma = -\nabla_x \cdot \boldsymbol{Q}_\sigma + \mathcal{Q}_\sigma - \underline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma : \nabla_x \boldsymbol{v}_\sigma. \tag{2.A.4}$$

2.B Adimensionnement des équations de Boltzmann

Nous développons dans cette annexe l'adimensionnement des équations de Boltzmann électronique puis ionique. Rappelons tout d'abord l'équation électronique :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_t^{\boldsymbol{v}}\widetilde{g}_e + \boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\widetilde{g}_e + \left[\frac{q_e}{m_e}\left(\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\kappa})\times\boldsymbol{B}\right) - \boldsymbol{D}_t^{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\boldsymbol{v}\right]\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{g}_e \\ = \mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{g}_e,\widetilde{g}_e\right) + \mathcal{C}_{ei}\left(\widetilde{g}_e,\widetilde{g}_i\right).\end{aligned} \tag{2.B.1}$$

Cette équation adimensionnée devient :

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}}\widetilde{g}_e + \frac{[t_0]\,[\boldsymbol{\kappa}_0^e]}{[\boldsymbol{L}_0]}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\widetilde{g}_e - \frac{[\boldsymbol{v}_0^e]}{[\boldsymbol{\kappa}_0^e]}\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} + \frac{[t_0]\,[\boldsymbol{\kappa}_0^e]}{[\boldsymbol{L}_0]}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{g}_e \\ &+\frac{[q_0^e]\,[t_0]\,[\boldsymbol{E}_0]}{[m_0^e]\,[\boldsymbol{\kappa}_0^e]}\frac{q_e}{m_e}\left(\boldsymbol{E} + \frac{[\boldsymbol{B}_0]\,[\boldsymbol{v}_0^e]}{[\boldsymbol{E}_0]}\left(\boldsymbol{v} + \frac{[\boldsymbol{\kappa}_0^e]}{[\boldsymbol{v}_0^e]}\boldsymbol{\kappa}\right)\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{g}_e \\ &= \frac{[t_0]\,[\mathcal{C}_{ee}]}{[f_e]}\mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{g}_e,\widetilde{g}_e\right) + \frac{[t_0]\,[\mathcal{C}_{ei}]}{[f_e]}\mathcal{C}_{ei}\left(\widetilde{g}_e,\widetilde{g}_i\right),\end{aligned} \tag{2.B.2}$$

où la dérivée convective sans dimension est : $\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} = \partial_t + \frac{[t_0]\,[\boldsymbol{v}_0^e]}{[\boldsymbol{L}_0]}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial_x}$. Avec les relations (2.3.21) et (2.3.19) cette équation se réécrit :

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}}\widetilde{g}_e + \frac{1}{\epsilon\mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\widetilde{g}_e - \epsilon\mathrm{M}_i\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} + \frac{1}{\epsilon\mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{g}_e \\ &+\frac{[q_0^e]\,[t_0]\,[\boldsymbol{E}_0]}{[m_0^e]\,[\boldsymbol{\kappa}_0^e]}\frac{q_e}{m_e}\left(\boldsymbol{E} + \frac{[\boldsymbol{B}_0]\,[\boldsymbol{v}_0^e]}{[\boldsymbol{E}_0]}\left(\boldsymbol{v} + \frac{1}{\epsilon\mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\right)\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{g}_e \\ &= \frac{[t_0]\,[\mathcal{C}_{ee}]}{[f_e]}\mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{g}_e,\widetilde{g}_e\right) + \frac{[t_0]\,[\mathcal{C}_{ei}]}{[f_e]}\mathcal{C}_{ei}\left(\widetilde{g}_e,\widetilde{g}_i\right).\end{aligned} \tag{2.B.3}$$

Les hypothèses sur les énergies thermiques et électriques (2.3.27) ainsi que sur le fait que le plasma soit fortement magnétisé (2.3.28) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}}\widetilde{g}_e + \frac{1}{\epsilon\mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\widetilde{g}_e - \epsilon\mathrm{M}_i\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} + \frac{1}{\epsilon\mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{g}_e \\ &+\frac{[t_0]\,[\boldsymbol{\kappa}_0^e]}{[\boldsymbol{L}_0]}\frac{q_e}{m_e}\left(\boldsymbol{E} + \left(\boldsymbol{v} + \frac{1}{\epsilon\mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\right)\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{g}_e \\ &= \frac{[t_0]\,[\mathcal{C}_{ee}]}{[f_e]}\mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{g}_e,\widetilde{g}_e\right) + \frac{[t_0]\,[\mathcal{C}_{ei}]}{[f_e]}\mathcal{C}_{ei}\left(\widetilde{g}_e,\widetilde{g}_i\right).\end{aligned} \tag{2.B.4}$$

Pour finir l'adimensionnement de cette équation de Boltzmann sur les électrons, il faut utiliser les relations sur les opérateurs de collision (2.3.29) ainsi que les relations sur les

temps (2.3.16) et (2.3.17). On utilise également les relations (2.3.19) et (2.3.21) :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}}\widetilde{g}_e + \frac{1}{\epsilon \mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\widetilde{g}_e - \epsilon\mathrm{M}_i\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} + \frac{1}{\epsilon\mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{g}_e \\
&\qquad + \frac{1}{\epsilon\mathrm{M}_i}\frac{q_e}{m_e}\left(\boldsymbol{E} + \left(\boldsymbol{v} + \frac{1}{\epsilon\mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\right)\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{g}_e \\
&\qquad = \frac{1}{\epsilon^2}\mathcal{C}_{ee}\left(\widetilde{g}_e,\widetilde{g}_e\right) + \frac{1}{\epsilon^2}\mathcal{C}_{ei}\left(\widetilde{g}_e,\widetilde{g}_i\right).
\end{aligned} \tag{2.B.5}$$

De même, il faut obtenir l'équation de Boltzmann adimensionnée sur les ions. La manière de procéder est similaire à l'équation sur les électrons. En effet, pour rappel l'équation de Boltzmann sur les ions dans le référentiel de référence des ions [Bra65] s'écrit :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_t^{\boldsymbol{v}}\widetilde{f}_i + \boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\widetilde{f}_i + \left[\frac{q_i}{m_i}\left(\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\kappa})\times\boldsymbol{B}\right) - \boldsymbol{D}_t^{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\boldsymbol{v}\right]\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{f}_i \\
= \mathcal{C}_{ie}\left(\widetilde{f}_i,\widetilde{f}_e\right) + \mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i,\widetilde{f}_i\right).
\end{aligned} \tag{2.B.6}$$

L'adimensionnement de cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}}\widetilde{f}_i + \frac{[t_0]\,[\boldsymbol{\kappa}_0^i]}{[\boldsymbol{L}_0]}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\widetilde{f}_i - \frac{[\boldsymbol{v}_0^i]}{[\boldsymbol{\kappa}_0^i]}\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} + \frac{[t_0]\,[\boldsymbol{\kappa}_0^i]}{[\boldsymbol{L}_0]}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{f}_i \\
&\quad + \frac{[q_0^i]\,[t_0]\,[\boldsymbol{E}_0]}{[m_0^i]\,[\boldsymbol{\kappa}_0^i]}\frac{q_i}{m_i}\left(\boldsymbol{E} + \frac{[\boldsymbol{B}_0]\,[\boldsymbol{v}_0^i]}{[\boldsymbol{E}_0]}\left(\boldsymbol{v} + \frac{[\boldsymbol{\kappa}_0^i]}{[\boldsymbol{v}_0^i]}\boldsymbol{\kappa}\right)\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{f}_i \\
&\qquad = \frac{[t_0]\,[\mathcal{C}_{ie}]}{[f_i]}\mathcal{C}_{ie}\left(\widetilde{f}_i,\widetilde{f}_e\right) + \frac{[t_0]\,[\mathcal{C}_{ii}]}{[f_i]}\mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i,\widetilde{f}_i\right),
\end{aligned} \tag{2.B.7}$$

où la dérivée convective sans dimension est : $\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} = \partial_t + \frac{[t_0]\,[\boldsymbol{v}_0^i]}{[\boldsymbol{L}_0]}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial_x}$. De même, il faut reprendre les relations (2.3.21) et (2.3.19) :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}}\widetilde{f}_i + \frac{1}{\mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\widetilde{f}_i - \mathrm{M}_i\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} + \frac{1}{\mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{f}_i \\
&\quad + \frac{[q_0^i]\,[t_0]\,[\boldsymbol{E}_0]}{[m_0^i]\,[\boldsymbol{\kappa}_0^i]}\frac{q_i}{m_i}\left(\boldsymbol{E} + \frac{[\boldsymbol{B}_0]\,[\boldsymbol{v}_0^i]}{[\boldsymbol{E}_0]}\left(\boldsymbol{v} + \frac{1}{\mathrm{M}_i}\boldsymbol{\kappa}\right)\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{f}_i \\
&\qquad = \frac{[t_0]\,[\mathcal{C}_{ie}]}{[f_i]}\mathcal{C}_{ie}\left(\widetilde{f}_i,\widetilde{f}_e\right) + \frac{[t_0]\,[\mathcal{C}_{ii}]}{[f_i]}\mathcal{C}_{ii}\left(\widetilde{f}_i,\widetilde{f}_i\right).
\end{aligned} \tag{2.B.8}$$

Les hypothèses sur les énergies thermiques et électriques (2.3.27) ainsi que sur le fait que le plasma soit fortement magnétisé (2.3.28) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \widetilde{f}_i + \frac{1}{\mathrm{M}_i} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{f}_i - \mathrm{M}_i \left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} + \frac{1}{\mathrm{M}_i} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i \\
&+ Z^i \frac{[t_0]\,[\boldsymbol{\kappa}_0^i]}{[\boldsymbol{L}_0]} \frac{q_i}{m_i} \left(\boldsymbol{E} + \left(\boldsymbol{v} + \frac{1}{\mathrm{M}_i} \boldsymbol{\kappa} \right) \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i \\
&= \frac{[t_0]\,[\mathcal{C}_{ie}]}{[f_i]} \mathcal{C}_{ie} \left(\widetilde{f}_i, \widetilde{f}_e \right) + \frac{[t_0]\,[\mathcal{C}_{ii}]}{[f_i]} \mathcal{C}_{ii} \left(\widetilde{f}_i, \widetilde{g}_i \right),
\end{aligned} \tag{2.B.9}$$

où Z^i est la charge des ions tel que : $\left[q_0^i\right] = Z^i \left[q_0^e\right]$. L'utilisation des relations sur les opérateurs de collision (2.3.29) ainsi que les relations sur les temps (2.3.16), (2.3.17) et les relations (2.3.19) et (2.3.21) permettent finalement d'obtenir l'équation de Boltzmann adimensionnée sur les ions :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \widetilde{f}_i + \frac{1}{\mathrm{M}_i} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{f}_i - \mathrm{M}_i \left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} + \frac{1}{\mathrm{M}_i} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i \\
&+ \frac{Z^i}{\mathrm{M}_i} \frac{q_i}{m_i} \left(\boldsymbol{E} + \left(\boldsymbol{v} + \frac{1}{\mathrm{M}_i} \boldsymbol{\kappa} \right) \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i \\
&= \mathcal{C}_{ie} \left(\widetilde{f}_i, \widetilde{f}_e \right) + \frac{1}{\epsilon} \mathcal{C}_{ii} \left(\widetilde{f}_i, \widetilde{f}_i \right).
\end{aligned} \tag{2.B.10}$$

Les équations de Boltzmann adimensionnées dans leurs référentiels de référence respectifs sont donc données par :

$$\left\{ \begin{aligned}
&\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \widetilde{g}_e + \frac{1}{\epsilon \mathrm{M}_i} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{g}_e + \frac{1}{\epsilon \mathrm{M}_i} \frac{q_e}{m_e} \left(\boldsymbol{E} + \left(\boldsymbol{v} + \frac{1}{\epsilon \mathrm{M}_i} \boldsymbol{\kappa} \right) \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e \\
&- \epsilon \mathrm{M}_i \left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} + \frac{1}{\epsilon \mathrm{M}_i} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e = \frac{1}{\epsilon^2} \left(\mathcal{C}_{ee} \left(\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_e \right) \mathcal{C}_{ei} \left(\widetilde{g}_e, \widetilde{g}_i \right) \right), \\
&\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \widetilde{f}_i + \frac{1}{\mathrm{M}_i} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{f}_i + \frac{Z^i}{\mathrm{M}_i} \frac{q_i}{m_i} \left(\boldsymbol{E} + \left(\boldsymbol{v} + \frac{1}{\mathrm{M}_i} \boldsymbol{\kappa} \right) \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i \\
&- \mathrm{M}_i \left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} + \frac{1}{\mathrm{M}_i} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} \right) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_i = \mathcal{C}_{ie} \left(\widetilde{f}_i, \widetilde{f}_e \right) + \frac{1}{\epsilon} \mathcal{C}_{ii} \left(\widetilde{f}_i, \widetilde{f}_i \right).
\end{aligned} \right. \tag{2.B.11}$$

2.C Approximation des opérateurs de collisions

Tout d'abord pour rappel l'opérateur de collision de Coulomb entre les électrons et les ions est défini par :

$$\mathcal{C}_{ei} = -\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}, \tag{2.C.1}$$

avec

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}\left(\widetilde{f}_e,\widetilde{f}_i\right)=\frac{\Gamma_{ei}}{2}\int_{\mathbb{R}^3}d\boldsymbol{u}_i\left(\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{u}_e-\boldsymbol{u}_i\right)\left[-\widetilde{f}_i\left(\boldsymbol{u}_i\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{u}_e}\widetilde{f}_e\left(\boldsymbol{u}_e\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{m_e}{m_i}\widetilde{f}_e\left(\boldsymbol{u}_e\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{u}_i}\widetilde{f}_i\left(\boldsymbol{u}_i\right)\right]\right). \tag{2.C.2}$$

Nous changeons de référentiel de référence en passant à un référentiel ionique. Pour cela, il faut effectuer une translation de l'espace des phases :

$$\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{v}_i(x,t)+\boldsymbol{\kappa}(x,t).$$

Par cette transformation galiléenne l'opérateur de collision de Coulomb ainsi que les fonctions maxwelliennes sont invariants i.e.

$$\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{u}_e-\boldsymbol{u}_i\right)=\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{\kappa}-\epsilon\boldsymbol{\kappa}_i\right). \tag{2.C.3}$$

Avec cette transformation il est possible d'effectuer un développement de Taylor de cet opérateur de collision car $\epsilon\boldsymbol{\kappa}_i$ est supposé petit :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{\kappa}-\epsilon\boldsymbol{\kappa}_i\right)=&\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right)-\epsilon\boldsymbol{\kappa}_i\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\\&+\frac{\epsilon^2}{2}\left(\boldsymbol{\kappa}_i\otimes\boldsymbol{\kappa}_i\right):\left(\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\otimes\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\right)\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right)+O\left(\epsilon^3\right).\end{aligned} \tag{2.C.4}$$

Cette approximation, ainsi que cette transformation, permettent de réécrire l'équation (2.C.2) à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}\left(\widetilde{f}_e,\widetilde{f}_i\right)=&\frac{\Gamma_{ei}}{2}\int_{\mathbb{R}^3}d\boldsymbol{\kappa}_i\left(\left(\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right)-\epsilon\boldsymbol{\kappa}_i\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right)+\frac{\epsilon^2}{2}\left(\boldsymbol{\kappa}_i\otimes\boldsymbol{\kappa}_i\right):\left(\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\otimes\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\right)\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\right)\right.\\&\left.\left[-\widetilde{f}_i\left(\boldsymbol{\kappa}_i\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{f}_e\left(\boldsymbol{\kappa}\right)+\frac{m_e}{m_i}\widetilde{f}_e\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_i}\widetilde{f}_i\left(\boldsymbol{\kappa}_i\right)\right]\right),\\=&-\frac{\Gamma_{ei}}{2}\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{f}_e\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\left[n_i\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right)-\cancel{\epsilon\int_{\mathbb{R}^3}d\boldsymbol{\kappa}_i\boldsymbol{\kappa}_i\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\widetilde{f}_i\left(\boldsymbol{\kappa}_i\right)}\right.\\&\left.+\frac{\epsilon^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}d\boldsymbol{\kappa}_i\left(\boldsymbol{\kappa}_i\otimes\boldsymbol{\kappa}_i\right):\left(\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\otimes\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\right)\widetilde{f}_i\left(\boldsymbol{\kappa}_i\right)\right]\\&+\frac{\Gamma_{ei}}{2}\frac{m_e}{m_i}\widetilde{f}_e\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\left[\cancel{\int_{\mathbb{R}^3}d\boldsymbol{\kappa}_i\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_i}\widetilde{f}_i\left(\boldsymbol{\kappa}_i\right)}-\epsilon\boldsymbol{\kappa}_i\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_i}\widetilde{f}_i\left(\boldsymbol{\kappa}_i\right)\right.\\&\left.+\cancel{\int_{\mathbb{R}^3}d\boldsymbol{\kappa}_i\frac{\epsilon^2}{2}\left(\boldsymbol{\kappa}_i\otimes\boldsymbol{\kappa}_i\right):\left(\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\otimes\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\right)\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_i}\widetilde{f}_i\left(\boldsymbol{\kappa}_i\right)}\right]+O\left(\epsilon^3\right),\\=&-\frac{\Gamma_{ei}}{2}\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{f}_e\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\left[n_i\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right)+\epsilon^2n_i\frac{T_i}{m_i}\left(\frac{3\boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\kappa}-|\boldsymbol{\kappa}|^2\mathbb{I}}{|\boldsymbol{\kappa}|^5}\right)\right]\\&-\epsilon\frac{\Gamma_{ei}}{2}\frac{m_e}{m_i}\widetilde{f}_e\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\frac{2\boldsymbol{\kappa}}{|\boldsymbol{\kappa}|^3}n_i+O\left(\epsilon^3\right),\\=&-\frac{\Gamma_{ei}}{2}n_i\left[\underline{\underline{\mathbb{B}}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{f}_e\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\right.\\&\left.+\frac{m_e}{m_i}\left(\epsilon^2\frac{T_i}{m_e}\left(\frac{3\boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\kappa}-|\boldsymbol{\kappa}|^2\mathbb{I}}{|\boldsymbol{\kappa}|^5}\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{f}_e\left(\boldsymbol{\kappa}\right)+\epsilon\widetilde{f}_e\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\frac{2\boldsymbol{\kappa}}{|\boldsymbol{\kappa}|^3}\right)\right]+O\left(\epsilon^3\right).\end{aligned}$$

Ainsi, l'opérateur de collision de Coulomb devient :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{ei} =& \frac{n_i \Gamma_{ei}}{2} \boldsymbol{\partial_\kappa} \cdot \Big[\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{\kappa}) \boldsymbol{\partial_\kappa} \widetilde{f}_e(\boldsymbol{\kappa}) \\ &+ \frac{m_e}{m_i} \left(\epsilon^2 \frac{T_i}{m_e} \left(\frac{3\boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\kappa} - |\boldsymbol{\kappa}|^2 \mathbb{I}}{|\boldsymbol{\kappa}|^5} \right) \boldsymbol{\partial_\kappa} \widetilde{f}_e(\boldsymbol{\kappa}) + \epsilon \widetilde{f}_e(\boldsymbol{\kappa}) \frac{2\boldsymbol{\kappa}}{|\boldsymbol{\kappa}|^3} \right) \Big] + O\left(\epsilon^3\right).\end{aligned} \tag{2.C.5}$$

Dans la suite le terme de m_e/m_i sera négligé. Pour définir cet opérateur, il est nécessaire de préciser ce que vaut la maxwellienne électronique dans le référentiel ionique $\widetilde{f}_e$ en fonction de l'approximation connue de la maxwellienne $\widetilde{g}_e$:

$$\widetilde{f}_e(\boldsymbol{\kappa}) = f_e(\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{v}_i) = f_e(\boldsymbol{\kappa} - \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_e) = \widetilde{g}_e(\boldsymbol{\kappa} - \delta\boldsymbol{u}),$$

i.e.

$$\widetilde{f}_e(\boldsymbol{\kappa}) = \mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|) \left(1 + \frac{m_e}{T_e} \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\kappa} + \epsilon \widetilde{\Phi}_e^1(\boldsymbol{\kappa}) \right) + O\left(\epsilon^2\right).$$

L'approximation sur la fonction maxwellienne pour les électrons, $\widetilde{f}_e^0$ (2.3.38), permet de reprendre cet opérateur de collision (2.C.5) :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{ei} = \frac{n_i \Gamma_{ei}}{2} \boldsymbol{\partial_\kappa} \cdot \Bigg(\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{\kappa}) \Bigg(\boldsymbol{\partial_\kappa} \mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|) \left(1 + \frac{m_e}{T_e} \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\kappa} + \epsilon \widetilde{\Phi}_e^1(\boldsymbol{\kappa}) \right) \\ + \mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|) \left(\frac{m_e}{T_e} \delta\boldsymbol{u} + \epsilon \boldsymbol{\partial_\kappa} \widetilde{\Phi}_e^1(\boldsymbol{\kappa}) \right) \Bigg) \Bigg) + O\left(\epsilon^2\right).\end{aligned} \tag{2.C.6}$$

Sachant que la dérivée d'une fonction maxwellienne reste une fonction maxwellienne :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\partial_\kappa} \mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|) &= \boldsymbol{\partial_\kappa} \mathcal{M}_{e,0} \exp\left(-\frac{m_e |\boldsymbol{\kappa}|^2}{2T_e} \right), \\ &= -\frac{m_e}{T_e} \boldsymbol{\kappa} \mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|).\end{aligned}$$

et que le noyau du tenseur de collision est lui-même, i.e., $\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{\kappa})\boldsymbol{\kappa} = 0$ (cf. (2.1.13)), alors :

$$\mathcal{C}_{ei} = \frac{n_i \Gamma_{ei}}{2} \boldsymbol{\partial_\kappa} \cdot \left(\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{\kappa}) \mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|) \left(\frac{m_e}{T_e} \delta\boldsymbol{u} + \epsilon \boldsymbol{\partial_\kappa} \widetilde{\Phi}_e^1(\boldsymbol{\kappa}) \right) \right) + O\left(\epsilon^2\right).$$

De la même manière, le terme de maxwellienne peut être sorti de la dérivée :

$$\mathcal{C}_{ei} = \frac{n_i \Gamma_{ei}}{2} \mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|) \boldsymbol{\partial_\kappa} \cdot \left(\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{\kappa}) \left(\frac{m_e}{T_e} \delta\boldsymbol{u} + \epsilon \boldsymbol{\partial_\kappa} \widetilde{\Phi}_e^1(\boldsymbol{\kappa}) \right) \right) + O\left(\epsilon^2\right).$$

Cette équation se réécrit :

$$\mathcal{C}_{ei} = \mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|) \left(\frac{n_i \Gamma_{ei}}{2} \frac{m_e}{T_e} \boldsymbol{\partial_\kappa} \cdot (\underline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{\kappa})) \cdot \delta\boldsymbol{u} + \mathcal{C}'_{ei}\left(\widetilde{\Phi}_e^1, \widetilde{f}_i^0 \right) \right) + O\left(\epsilon^2\right), \tag{2.C.7}$$

$$= \mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|) \left(-\frac{n_i \Gamma_{ei} m_e}{T_e |\boldsymbol{\kappa}|^3} \boldsymbol{\kappa} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \mathcal{C}'_{ei}\left(\widetilde{\Phi}_e^1, \widetilde{f}_i^0 \right) \right) + O\left(\epsilon^2\right), \tag{2.C.8}$$

avec

$$\mathcal{C}'_{ei}\left(\widetilde{\Phi}^1_e, \widetilde{f}^0_i\right) = \epsilon\frac{n_i\Gamma_{ei}}{2}\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\cdot\left(\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}}\widetilde{\Phi}^1_e\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\right). \tag{2.C.9}$$

De même, on cherche une approximation de l'opérateur de collision de Coulomb entre les ions et les électrons. On a $\mathcal{C}_{ie}$.

$$\mathcal{C}_{ie} = -\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}}_{ie}, \tag{2.C.10}$$

avec

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{ie}\left(\widetilde{g}_i, \widetilde{g}_e\right) = \frac{\Gamma_{ie}}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}_e \Big(&\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e - \epsilon\boldsymbol{\kappa}\right)\Big[-\widetilde{g}_e\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_i}\widetilde{g}_i\left(\boldsymbol{\kappa}_i\right)\\ &+\frac{m_i}{m_e}\widetilde{g}_i\left(\boldsymbol{u}_i\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_e}\widetilde{g}_e\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\Big]\Big),\end{aligned} \tag{2.C.11}$$

$$\begin{aligned}= \frac{\Gamma_{ie}}{2}\Big[&-\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_i}\widetilde{g}_i\left(\boldsymbol{\kappa}_i\right)\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}_e\left(\widetilde{g}_e\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e - \epsilon\boldsymbol{\kappa}\right)\right)\\ &+\frac{m_i}{m_e}\widetilde{g}_i\left(\boldsymbol{u}_i\right)\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}_e\left(\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e - \epsilon\boldsymbol{\kappa}\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_e}\widetilde{g}_e\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\right)\Big].\end{aligned} \tag{2.C.12}$$

Nous sommes ici dans un référentiel électronique et, de même que précédemment, il faut un développement de Taylor à l'ordre 2 de $\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e - \epsilon\boldsymbol{\kappa}\right)$ avec $\epsilon\boldsymbol{\kappa}$ supposé petit :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e - \epsilon\boldsymbol{\kappa}\right) =& \underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right) - \epsilon\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_e}\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\\ &+\frac{\epsilon^2}{2}\left(\boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\kappa}\right):\left(\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_e}\otimes\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_e}\right)\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right) + O\left(\epsilon^3\right),\end{aligned} \tag{2.C.13}$$

avec

$$\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_e}\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right) = -\frac{\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\kappa}_e}{\left|\boldsymbol{\kappa}_e\right|^5}\left(\left|\boldsymbol{\kappa}_e\right|^2\mathbb{I} - 3\boldsymbol{\kappa}_e\otimes\boldsymbol{\kappa}_e\right) - \frac{\boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\kappa}_e + \boldsymbol{\kappa}_e\otimes\boldsymbol{\kappa}}{\left|\boldsymbol{\kappa}_e\right|^3}.$$

L'opérateur de collision dans le référentiel des électrons se reformule avec le tenseur de diffusion $\underline{\mathbb{D}}_e$:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbb{D}}_e\left(\epsilon\boldsymbol{\kappa}\right) &= \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}_e\left[\widetilde{g}_e\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e - \epsilon\boldsymbol{\kappa}\right)\right],\\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}_e\left[\widetilde{g}_e\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\right] - \cancel{\epsilon\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}_e\left[\widetilde{g}_e\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_e}\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\right]} + O\left(\epsilon^2\right).\end{aligned} \tag{2.C.14}$$

Le deuxième terme étant l'intégration d'un produit de termes ayant des puissances impaires, il s'annule (c.f. p41 de [Bak97]).

$$\underline{\mathbb{D}}_e\left(\epsilon\boldsymbol{\kappa}\right) = \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}_e\left[\widetilde{g}_e\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\right] + O\left(\epsilon^2\right). \tag{2.C.15}$$

Pour calculer une approximation de ce tenseur de diffusion il faut faire des hypothèses sur la forme de $\widetilde{g}_e\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)$. Dans le cas où la fonction de distribution électronique soit principalement une fonction maxwellienne, $\widetilde{g}_e\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right) = \mathcal{M}_e\left(\left|\boldsymbol{\kappa}_e\right|\right)$, alors il faut utiliser le théorème 1 p 38 dans [Bak97] :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_0^{+\infty} r^2\int_{\mathbb{S}^2} f(rs)dsdr.$$

avec $\mathbb{S}^2$ qui représente la sphère unité. Pour notre cas, nous posons :

$$\begin{aligned} f(x) =& \widetilde{g}_e^0(x)\underline{\mathbb{B}}(x-\epsilon x_0), \\ =& \widetilde{g}_e^0(x)\underline{\mathbb{B}}(x) + O(\epsilon), \end{aligned}$$

$$\text{i.e.} \quad f(rs) = \widetilde{g}_e^0(rs)\underline{\mathbb{B}}(rs) + O(\epsilon),$$

avec s sur la sphère unité donc $|s| = 1$. Ainsi, on a les relations suivantes :

$$\widetilde{g}_e^0(rs) = \widetilde{g}_e^0(r),$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \underline{\mathbb{B}}(rs) &= \frac{|rs|^2\mathbb{I} - r^2 s\otimes s}{|rs|^3}, \\ &= \frac{1}{r}\left(\mathbb{I} - s\otimes s\right), \\ &= \frac{1}{r}\underline{\mathbb{B}}(s), \end{aligned}$$

$$\text{i.e.} \quad f(rs) = \widetilde{g}_e^0(r)\frac{1}{r}\underline{\mathbb{B}}(s) + O(\epsilon).$$

Avec cette approximation, le tenseur de diffusion $\underline{\mathbb{D}}_e$ se réécrit dans le cas où $\widetilde{g}_e$ est une maxwellienne :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{D}}_e\left(\epsilon\boldsymbol{\kappa}\right) &= \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}_e\left[\widetilde{g}_e\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\right] + O\left(\epsilon^2\right), \\ &= \int_0^{+\infty} r^{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{r}}\widetilde{g}_e^0(r)\int_{\mathbb{S}^2} B(s)dsdr + O\left(\epsilon^2\right). \end{aligned}$$

Par suite nous intégrons le tenseur de collision $\underline{\mathbb{B}}(s)$ sur la surface de la sphère unité $\mathbb{S}^2$, pour cela nous utilisons le corollaire 1 p 39 dans [Bak97] :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} s_k^2 ds &= (3+2)\int_{-1}^{1} x_k^2 dx_k \int\int dx_l dx_p, \\ &= 10\int_0^1 x_k^2\pi\left(1-x_k^2\right)dx_k, \\ &= 10\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right), \\ &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned} \tag{2.C.16}$$

Par conséquent, l'intégrale sur $\mathbb{S}^2$ de $\underline{\mathbb{B}}(s)$ vaut :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2}\underline{\mathbb{B}}(s)ds &= \int_{\mathbb{S}^2}\left(\mathbb{I} - s\otimes s\right)ds, \\ &= \left(4\pi - \frac{4\pi}{3}\right)\mathbb{I}, \\ &= \frac{8\pi}{3}\mathbb{I}. \end{aligned} \tag{2.C.17}$$

Ainsi, pour le tenseur de diffusion $\underline{\mathbb{D}}_e$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbb{D}}_e &= \frac{8\pi}{3}\int_0^{+\infty} r\widetilde{g}_e^0(r) + O\left(\epsilon^2\right), \\
&= \frac{8\pi}{3}\left[-\frac{T_e}{m_e}\widetilde{g}_e^0(r)\right]_0^{+\infty} + O\left(\epsilon^2\right), \\
&= \frac{8\pi}{3}\frac{T_e}{m_e}\frac{n_e}{\left(2\pi\frac{T_e}{m_e}\right)^{\frac{3}{2}}} + O\left(\epsilon^2\right), \\
&= \frac{4}{3}n_e\sqrt{\frac{m_e}{2\pi T_e}} + O\left(\epsilon^2\right).
\end{aligned} \tag{2.C.18}$$

Avec ces calculs, l'équation (2.C.12) se réécrit :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{O}}_{ie}\left(\widetilde{g}_i, \widetilde{g}_e\right) =& \frac{\Gamma_{ie}}{2}\left[-\frac{4}{3}n_e\sqrt{\frac{m_e}{2\pi T_e}}\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_i}\widetilde{g}_i\left(\boldsymbol{\kappa}_i\right)\right. \\
&\left.+\frac{m_i}{m_e}\widetilde{g}_i\left(\boldsymbol{u}_i\right)\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}_e\left(\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e - \epsilon\boldsymbol{\kappa}\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_e}\widetilde{g}_e\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\right)\right] + O\left(\epsilon^2\right).
\end{aligned} \tag{2.C.19}$$

De même, nous faisons les calculs pour obtenir une approximation de l'intégrale du second terme en étant toujours avec le cas où la fonction de distribution électronique est une maxwellienne :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}_e\left(\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e - \epsilon\boldsymbol{\kappa}\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_e}\widetilde{g}_e\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\right) \approx& -\frac{m_e}{T_e}\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}_e\left(\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e - \epsilon\boldsymbol{\kappa}\right)\boldsymbol{\kappa}_e\widetilde{g}_e^0\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\right), \\
\approx& -\frac{m_e}{T_e}\left[\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}_e\cancel{\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\boldsymbol{\kappa}_e\widetilde{g}_e^0}\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\right. \\
&\left.-\epsilon\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}_e\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_e}\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\boldsymbol{\kappa}_e\widetilde{g}_e^0\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\right], \\
\approx& \epsilon\frac{m_e}{T_e}\left[\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}_e\frac{\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\kappa}_e}{\left|\boldsymbol{\kappa}_e\right|^5}\left(\left|\boldsymbol{\kappa}_e\right|^2\mathbb{I} - 3\boldsymbol{\kappa}_e\otimes\boldsymbol{\kappa}_e\right)\boldsymbol{\kappa}_e\widetilde{g}_e^0\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right),\right. \\
&\left.-\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}_e\frac{\boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\kappa}_e + \boldsymbol{\kappa}_e\otimes\boldsymbol{\kappa}}{\left|\boldsymbol{\kappa}_e\right|^3}\boldsymbol{\kappa}_e\widetilde{g}_e^0\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\right].
\end{aligned}$$

De même que précédemment, nous utilisons le théorème 1 [Bak97] :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}_e\left(\underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}_e - \epsilon\boldsymbol{\kappa}\right)\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_e}\widetilde{g}_e\left(\boldsymbol{\kappa}_e\right)\right) \approx& \epsilon\frac{m_e}{T_e}\int_0^{+\infty} r^2\left[\int_{\mathbb{S}^2} ds\frac{\boldsymbol{\kappa}\cdot rs}{\left|rs\right|^5}\left(\left|rs\right|^2\mathbb{I} - 3r^2 s\otimes s\right)rs\widetilde{g}_e^0\left(r\right)\right. \\
&\left.-\int_{\mathbb{S}^2} dsr\frac{\boldsymbol{\kappa}\otimes s + s\otimes\boldsymbol{\kappa}}{\left|rs\right|^3}rs\widetilde{g}_e^0\left(r\right)\right], \\
\approx& \epsilon\frac{m_e}{T_e}\int_0^{+\infty} r\widetilde{g}_e^0\left(r\right)\left[\int_{\mathbb{S}^2} ds\left(\boldsymbol{\kappa}\cdot s\right)\left(\left|s\right|^2\mathbb{I} - 3s\otimes s\right)s\right. \\
&\left.-\int_{\mathbb{S}^2} ds\left(\boldsymbol{\kappa}\otimes s + s\otimes\boldsymbol{\kappa}\right)s\right].
\end{aligned}$$

Or le premier terme de droite s'annule car :

$$\int_{\mathbb{S}^2} \left(s \otimes s - \frac{s \cdot s}{3} \mathbb{I} \right) = 0, \tag{2.C.20}$$

et le second terme peut se réécrire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} ds \left(\boldsymbol{\kappa} \otimes s + s \otimes \boldsymbol{\kappa} \right) s =& \boldsymbol{\kappa} \int_{\mathbb{S}^2} ds \left(s \cdot s \mathbb{I} + s \otimes s \right), \\ =& \boldsymbol{\kappa} \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, le second terme de l'opérateur de collision se réécrit :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}_e \left(\underline{\underline{\mathbb{B}}} \left(\boldsymbol{\kappa}_e - \epsilon \boldsymbol{\kappa} \right) \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_e} \widetilde{g}_e \left(\boldsymbol{\kappa}_e \right) \right) =& - \epsilon \frac{m_e}{T_e} \boldsymbol{\kappa} \frac{16\pi}{3} \int_0^{+\infty} r \widetilde{g}_e^0 \left(r \right) + O\left(\epsilon^2 \right), \\ =& - \epsilon \frac{m_e}{T_e} \boldsymbol{\kappa} \frac{16\pi}{3} \frac{T_e}{m_e} \frac{n_e}{\left(2\pi \frac{T_e}{m_e} \right)^{\frac{3}{2}}} + O\left(\epsilon^2 \right), \\ =& - \epsilon \boldsymbol{\kappa} \frac{4 n_e}{3} \sqrt{\frac{m_e}{2\pi T_e}} \left(2 \frac{m_e}{T_e} \right) + O\left(\epsilon^2 \right). \end{aligned} \tag{2.C.21}$$

Au final, l'opérateur de collision $\boldsymbol{\mathcal{O}}_{ie}$ se réécrit :

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}_{ie} \left(\widetilde{g}_i, \widetilde{g}_e \right) = - \frac{2\Gamma_{ie}}{3} n_e \sqrt{\frac{m_e}{2\pi T_e}} \left(\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}_i} \widetilde{g}_i \left(\boldsymbol{\kappa}_i \right) + 2\epsilon \boldsymbol{\kappa} \frac{m_i}{T_e} \widetilde{g}_i \left(\boldsymbol{\kappa}_i \right) \right) + O\left(\epsilon^2 \right) \tag{2.C.22}$$

2.D Développement des coefficients de transports

2.D.1 Coefficient de frottement $\boldsymbol{R}_\sigma$

Cette section présente les calculs pour obtenir les approximations des coefficients de transports en commençant tout d'abord par le coefficient de frottement. Ce coefficient se développe asymptotiquement par les termes :

$$\boldsymbol{R}_\sigma = \boldsymbol{R}_\sigma^0 + \epsilon \boldsymbol{R}_\sigma^1 + \epsilon^2 \boldsymbol{R}_\sigma^2 + O(\epsilon^3) \tag{2.D.1}$$

Pour obtenir ce coefficient à l'ordre ϵ^0 nous avons besoin de l'opérateur de collision (2.C.5) à cet ordre :

$$\mathcal{C}_{ei}^0 \simeq - \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}^0,$$

avec

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}^0 \simeq& - \frac{n_i \Gamma_{ei}}{2} \underline{\underline{\mathbb{B}}} \left(\boldsymbol{\kappa} \right) \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_e^0 \left(\boldsymbol{\kappa} \right), \\ \simeq& - \frac{n_i \Gamma_{ei}}{2} \underline{\underline{\mathbb{B}}} \left(\boldsymbol{\kappa} \right) \mathcal{M}_e \left(|\boldsymbol{\kappa}| \right) \frac{m_e}{T_e} \delta \boldsymbol{u}. \end{aligned}$$

Ce calcul du coefficient de frottement ne peut être effectué que dans un système de coordonnées convenables dans lequel la vitesse électronique moyenne $\boldsymbol{v}_e$ est nulle. Pour ensuite

le convertir dans un système où la vitesse ionique moyenne $\boldsymbol{v}_i$ est nulle également. Par conséquent, $\boldsymbol{\kappa}$ est remplacé par $\boldsymbol{\kappa} - \delta\boldsymbol{u}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_e^0 &= -\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} m_e \left(\boldsymbol{\kappa} - \delta\boldsymbol{u}\right) \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}^0 \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} m_e \boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}^0 \\
&= -\frac{n_i \Gamma_{ei}}{2} m_e \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} \underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right) \mathcal{M}_e\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right) \frac{m_e}{T_e} \delta\boldsymbol{u}.
\end{aligned} \tag{2.D.2}$$

Les formules d'intégration de fonctions polynômiales sur les boules [Bak97] permettent d'obtenir une approximation de cette intégrale :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_e^0 &\simeq -\frac{n_i \Gamma_{ei}}{2} m_e \frac{m_e}{T_e} \delta\boldsymbol{u} \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} \underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right) \mathcal{M}_e\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right) \\
&\simeq -\frac{n_i \Gamma_{ei}}{2} m_e \frac{m_e}{T_e} \delta\boldsymbol{u} \frac{8\pi}{3} \frac{T_e}{m_e} \frac{n_e}{\left(2\pi \frac{T_e}{m_e}\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&\simeq -\frac{m_e n_e}{\tau_e} \delta\boldsymbol{u}
\end{aligned} \tag{2.D.3}$$

avec τ_e qui représente le temps caractéristique entre les collisions électrons-ions. Ce dernier est défini par :

$$\tau_e = \frac{3\sqrt{m_e} T_e^{\frac{3}{2}}}{4 n_i \sqrt{2\pi} q_e^2 q_i^2 \ln \Lambda}. \tag{2.D.4}$$

De la même manière on obtient une formulation de ce coefficient à l'ordre ϵ^1 qui s'écrit avec la fonction $\widetilde{\Phi}_e^1$

$$\mathcal{C}_{ei}^1 \simeq -\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}^1,$$

avec

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}^1\left(\boldsymbol{\kappa}\right) \simeq -\frac{n_i \Gamma_{ei}}{2} \underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right) \mathcal{M}_e\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right) \left(\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{\Phi}_e^1\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\right).$$

Ainsi ce coefficient se réécrit à l'ordre ϵ^1 :

$$\boldsymbol{R}_e^1 = -\frac{n_i \Gamma_{ei}}{2} m_e \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} \underline{\mathbb{B}}\left(\boldsymbol{\kappa}\right) \mathcal{M}_e\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right) \left(\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{\Phi}_e^1\left(\boldsymbol{\kappa}\right)\right). \tag{2.D.5}$$

Il est possible de calculer l'ordre 2 de ce coefficient de frottement $\boldsymbol{R}_e^2$ en prenant l'ordre 2 de l'opérateur de collision $\boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}^2$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_e^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} m_e \boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}^2 \\
&= -\frac{\Gamma_{ei}}{2} n_i \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} \epsilon \frac{m_e^2}{m_i} \cancel{\widetilde{f}_e\left(\boldsymbol{\kappa}\right) \frac{2\boldsymbol{\kappa}}{|\boldsymbol{\kappa}|^3}},
\end{aligned}$$

i.e.

$$\boldsymbol{R}_e^2 = 0. \tag{2.D.6}$$

En résumé le coefficient de frottement électronique se développe sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{R}_e = \boldsymbol{R}_e^0 + \epsilon \boldsymbol{R}_e^1 + \epsilon^2 \boldsymbol{R}_e^2 + O(\epsilon^3) \tag{2.D.7}$$

avec

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_\sigma^0 = -\dfrac{m_e n_e}{\tau_e} \delta \boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{R}_e^1 = -\dfrac{n_i \Gamma_{ei}}{2} m_e \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} \underline{\underline{\mathbb{B}}}(\boldsymbol{\kappa}) \mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|) \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{\Phi}_e^1(\boldsymbol{\kappa}), \\ \boldsymbol{R}_e^2 = 0. \end{cases} \tag{2.D.8}$$

2.D.2 Chaleur générée par les collisions : $\mathcal{Q}_\sigma$

Pour approcher ces coefficients de transports, nous utilisons l'approximation de l'opérateur de collisions. A l'ordre ϵ^0 la chaleur générée par les collisions des ions sur les électrons se développe comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{ei}^0 &= -\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} m_e \frac{|\boldsymbol{\kappa} - \delta \boldsymbol{u}|^2}{2} \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}^0, \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} m_e (\boldsymbol{\kappa} - \delta \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}^0, \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} m_e \cancel{\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}^1} - \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{R}_e^0. \end{aligned} \tag{2.D.9}$$

Le premier terme de l'équation précédente s'annule car l'opérateur de collision $\boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}^1$ contient le tenseur des collisions $\underline{\underline{\mathbb{B}}}$ et le noyau de ce tenseur est lui même (2.1.13). De la même manière, ce coefficient de transport $\mathcal{Q}_{ei}$ s'exprime à l'ordre ϵ^1 :

$$\mathcal{Q}_{ei}^1 = -\delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{R}_e^1. \tag{2.D.10}$$

$\boldsymbol{R}_e^0$, $\boldsymbol{R}_e^1$ et $\delta \boldsymbol{u}$ étant d'ordre 1, ces coefficients sont en réalité d'ordre 2. Si nous prenons l'opérateur de collision $\boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}$ à l'ordre 2 contrairement au coefficient de frottement $\boldsymbol{R}_e$ il ne s'annule pas. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{ei}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} m_e (\boldsymbol{\kappa} - \delta \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}^2, \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} m_e \left(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}^2 - \cancel{\delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}^2} \right). \end{aligned}$$

Pour le second terme en $\delta \boldsymbol{u}$, les polynômes sont de puissances impaires donc ce terme est nul [Bak97]. Ce coefficient est donc réduit à :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{ei}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} m_e \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}_{ei}^2, \\ &= -\frac{\Gamma_{ei}}{2} n_i \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} m_e \frac{T_i}{m_i} \boldsymbol{\kappa} \cdot \left(\frac{3\boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\kappa} - |\boldsymbol{\kappa}|^2 \mathbb{I}}{|\boldsymbol{\kappa}|^5} \right) \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{f}_e(\boldsymbol{\kappa}), \\ &\quad - \frac{\Gamma_{ei}}{2} n_i \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} \frac{m_e^2}{m_i} \boldsymbol{\kappa} \cdot \frac{2\boldsymbol{\kappa}}{|\boldsymbol{\kappa}|^3} \widetilde{f}_e(\boldsymbol{\kappa}). \end{aligned}$$

Dans la suite de ce calcul la fonction de distribution électronique $\widetilde{f}_e(\boldsymbol{\kappa})$ est considérée comme une maxwellienne :

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{ei}^2 =& \Gamma_{ei} n_i m_e \frac{T_i}{m_i}\frac{m_e}{T_e}\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}\frac{\widetilde{f}_e^0(\boldsymbol{\kappa})}{|\boldsymbol{\kappa}|} - \Gamma_{ei} n_i \frac{m_e^2}{m_i}\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}\frac{\widetilde{f}_e^0(\boldsymbol{\kappa})}{|\boldsymbol{\kappa}|},\\ =& \Gamma_{ei} n_i \frac{m_e^2}{m_i}\left(\frac{T_i}{T_e}-1\right)\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}\frac{\widetilde{f}_e^0(\boldsymbol{\kappa})}{|\boldsymbol{\kappa}|}.\end{aligned}$$

Cette intégrale est calculée à l'aide des formules d'intégration sur les boules [Bak97] :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa}\frac{\widetilde{f}_e^0(\boldsymbol{\kappa})}{|\boldsymbol{\kappa}|} =& \int_0^{+\infty} r^2 \int_{\mathbb{S}^2}\frac{\widetilde{f}_e^0(r)}{|r|} ds dr,\\ =& 4\pi\left[-\frac{T_e}{m_e}\widetilde{f}_e^0(r)\right]_0^{+\infty},\\ =& 2n_e\sqrt{\frac{m_e}{2\pi T_e}}.\end{aligned} \tag{2.D.11}$$

Ainsi, ce coefficient de transport représentant la chaleur générée vaut à l'ordre ϵ^2 :

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{ei} \approx& -3\frac{m_e n_e}{\tau_e m_i}\delta T - \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}_{ei}^0 - \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}_{ei}^1 + O\left(\epsilon^3\right),\\ \mathcal{Q}_{ei} \approx& -3\frac{m_e n_e}{\tau_e m_i}\delta T - \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}_e + O\left(\epsilon^3\right),\end{aligned} \tag{2.D.12}$$

avec $\delta T = T_e - T_i$.

2.D.3 Flux de chaleur : $\boldsymbol{Q}_\sigma$

De même, on obtient une approximation pour le flux de chaleur $\boldsymbol{Q}_\sigma$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_\sigma &= \int_{\mathbb{R}^3} \left[m_\sigma \frac{|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_\sigma|^2}{2} \boldsymbol{u} \right] f_\sigma(\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{u}, \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \left[m_\sigma \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{2} \boldsymbol{\kappa} \right] \widetilde{f}_\sigma(\boldsymbol{\kappa})\, d\boldsymbol{\kappa}, \\
&\approx 0 + \int_{\mathbb{R}^3} \left[m_\sigma \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{2} \mathcal{M}_\sigma(|\boldsymbol{\kappa}|) [\boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\kappa}] \mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}(|\boldsymbol{\kappa}|) \right] d\boldsymbol{\kappa}, \\
&\approx \int_0^{+\infty} r^2 \left[m_\sigma \frac{r^2}{2} \mathcal{M}_\sigma(r) \left(\int_{\mathbb{S}^2} \left[r^2 \boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{s} \right] d\boldsymbol{s} \right) \mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}(r) \right] dr, \\
&\approx \int_0^{+\infty} m_\sigma \frac{r^6}{2} \left[\mathcal{M}_\sigma(r) \frac{4\pi}{3} \mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}(r) \right] dr, \\
&\approx \frac{4\pi m_\sigma n_\sigma}{6} \int_0^{+\infty} \left[\left(x \frac{2T_\sigma}{m_\sigma} \right)^{\frac{5}{2}} \left(\pi \frac{2T_\sigma}{m_\sigma} \right)^{-\frac{3}{2}} e^{-x}\, \mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}(x) \right] \frac{T_\sigma}{m_\sigma} dx, \\
&\approx \frac{4n_\sigma}{3\sqrt{\pi}} \frac{T_\sigma^2}{m_\sigma} \int_0^{+\infty} \left[x^{\frac{3}{2}} x e^{-x}\, \mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}(x) \right] dx, \\
&\approx -\frac{4n_\sigma}{3\sqrt{\pi}} \frac{T_\sigma^2}{m_\sigma} \int_0^{+\infty} \left[x^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{5}{2} \mathcal{L}_0^{\frac{3}{2}} + \mathcal{L}_1^{\frac{3}{2}}(x) \right) e^{-x}\, \mathbb{P}_{\boldsymbol{\sigma}}(x) \right] dx, \\
&\approx -\frac{4n_\sigma}{3\sqrt{\pi}} \frac{T_\sigma^2}{m_\sigma} \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \left(\mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta T\parallel} \frac{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}^{\parallel} T_\sigma}{T_\sigma} + \mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta T\perp} \frac{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}^{\perp} T_\sigma}{T_\sigma} + \mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta T\odot} \frac{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}^{\odot} T_\sigma}{T_\sigma} \right) \\
&\quad - \frac{4n_\sigma}{3\sqrt{\pi}} \frac{T_\sigma^2}{m_\sigma} \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \left(\mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta \boldsymbol{u}\parallel} \delta\boldsymbol{u}^{\parallel} + \mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta \boldsymbol{u}\perp} \delta\boldsymbol{u}^{\perp} + \mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta \boldsymbol{u}\odot} \delta\boldsymbol{u}^{\odot} \right), \\
&\approx -\frac{5n_\sigma T_\sigma^2}{2m_\sigma} \left[\mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta T\parallel} \frac{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}^{\parallel} T_\sigma}{T_\sigma} + \mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta T\perp} \frac{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}^{\perp} T_\sigma}{T_\sigma} + \mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta T\odot} \frac{\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}^{\odot} T_\sigma}{T_\sigma} \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta \boldsymbol{u}\parallel} \delta\boldsymbol{u}^{\parallel} + \mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta \boldsymbol{u}\perp} \delta\boldsymbol{u}^{\perp} + \mathcal{X}_{\sigma,1}^{\delta \boldsymbol{u}\odot} \delta\boldsymbol{u}^{\odot} \right].
\end{aligned}
\tag{2.D.13}
$$

2.E Développement de l'équation électronique au 1er ordre

L'équation de Boltzmann électronique au 1er ordre de correction est :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \widetilde{g}_e^0 - \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e^0 + \frac{q_e}{m_e} (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e^0 - (\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \widetilde{g}_e^0 + \boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \widetilde{g}_e^0 \\
= -\frac{q_e}{m_e} (\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\kappa}} \left(\widetilde{g}_e^0 \widetilde{\Phi}_e^1 \right) + \mathcal{C}_{ee} \left(\widetilde{g}_e^0 \widetilde{\Phi}_e^1, \widetilde{g}_e^0 \right) + \mathcal{C}_{ee} \left(\widetilde{g}_e^0, \widetilde{g}_e^0 \widetilde{\Phi}_e^1 \right) \\
+ \mathcal{M}_e(|\boldsymbol{\kappa}|) \left(\mathcal{C}_{ei}' \left(\widetilde{\Phi}_e^1, \widetilde{g}_i^0 \right) - \frac{n_i \Gamma_{ei} m_e}{T_e |\boldsymbol{\kappa}|^3} \boldsymbol{\kappa}\cdot\delta\boldsymbol{u} \right).
\end{aligned}
\tag{2.E.1}
$$

Le système fluide

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}_\sigma} n_\sigma = -n_\sigma \nabla_x \cdot \boldsymbol{v}_\sigma, \\ n_e m_e \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}_e} \boldsymbol{v}_e = -\nabla_x P_e + q_e n_e (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{R}_e^0, \\ n_i m_i \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}_i} \boldsymbol{v}_i = -\nabla_x P_i + q_i n_i (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}) + \cancel{\boldsymbol{R}_i}, \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}_\sigma} T_\sigma = -\dfrac{2}{3} T_\sigma \nabla_x \cdot \boldsymbol{v}_\sigma, \end{cases} \tag{2.E.2}$$

et les approximations sur les dérivées temporelles et spatiales

$$\begin{aligned} \partial \widetilde{g}_e^0 &= \left[\frac{\partial n_e}{n_e} - \left(\frac{3}{2} - \frac{m_e \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\kappa}}{2T_e} \right) \frac{\partial T_e}{T_e} \right] \widetilde{g}_e^0, \\ \partial_t \widetilde{g}_e^0 &= - \left[\frac{\nabla_x \cdot (n_e \boldsymbol{v}_e)}{n_e} + \left(\frac{3}{2T_e} - \frac{m_e \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\kappa}}{2T_e^2} \right) \left(\frac{T_e}{3} \nabla_x \cdot \boldsymbol{v}_e - \nabla_x \cdot (T_e \boldsymbol{v}_e) \right) \right] \widetilde{g}_e^0, \\ \partial_x \widetilde{g}_e^0 &= \left[\frac{\nabla_x n_e}{n_e} - \left(\frac{3}{2T_e} - \frac{m_e \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\kappa}}{2T_e^2} \right) \nabla_x T_e \right] \widetilde{g}_e^0, \end{aligned}$$

permettent de développer la partie gauche de cette équation électronique au 1er ordre pour obtenir une approximation :

$$\begin{aligned} & \left[-\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}_e} \boldsymbol{v}_e + \frac{q_e}{m_e} (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial_x} \boldsymbol{v}_e) \right] \cdot \boldsymbol{\partial_\kappa} \widetilde{g}_e^0 + \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}_e} \widetilde{g}_e^0 + \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial_x} \widetilde{g}_e^0 \\ = & \left[\frac{\nabla_x (n_e T_e)}{n_e m_e} - \cancel{\frac{q_e}{m_e} (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{B})} - \frac{\boldsymbol{R}_e^0}{n_e m_e} \right] \cdot \left(-\frac{m_e}{T_e} \boldsymbol{\kappa} \right) \widetilde{g}_e^0 \\ & + \left[\cancel{\frac{q_e}{m_e} (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{B})} - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\partial_x} \boldsymbol{v}_e) \right] \cdot \left(-\frac{m_e}{T_e} \boldsymbol{\kappa} \right) \widetilde{g}_e^0 \\ & - \left[\frac{\nabla_x \cdot (n_e \boldsymbol{v}_e)}{n_e} + \left(\frac{3}{2T_e} - \cancel{\frac{m_e \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\kappa}}{2T_e^2}} \right) \left(\frac{T_e}{3} \nabla_x \cdot \boldsymbol{v}_e - \nabla_x \cdot (T_e \boldsymbol{v}_e) \right) \right] \widetilde{g}_e^0 \\ & + \boldsymbol{v}_e \cdot \left[\frac{\nabla_x n_e}{n_e} - \left(\frac{3}{2T_e} - \cancel{\frac{m_e \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\kappa}}{2T_e^2}} \right) \nabla_x T_e \right] \widetilde{g}_e^0 \\ & + \boldsymbol{\kappa} \cdot \left[\frac{\nabla_x n_e}{n_e} - \left(\frac{3}{2T_e} - \frac{m_e \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\kappa}}{2T_e^2} \right) \nabla_x T_e \right] \widetilde{g}_e^0, \\ = & - \left[\cancel{\frac{\nabla_x n_e \cdot \boldsymbol{\kappa}}{n_e}} + \frac{\nabla_x T_e}{T_e} \cdot \boldsymbol{\kappa} - \frac{\boldsymbol{R}_e^0}{n_e T_e} \cdot \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa} \cdot [\boldsymbol{\partial_x} \boldsymbol{v}_e]^T \left(\frac{m_e}{T_e} \boldsymbol{\kappa} \right) \right] \widetilde{g}_e^0 \\ & - \left[\cancel{\frac{\boldsymbol{v}_e \cdot \nabla_x (n_e)}{n_e}} + \cancel{\frac{3}{2} \nabla_x \cdot \boldsymbol{v}_e - \frac{3}{2} \nabla_x \cdot (\boldsymbol{v}_e)} - \cancel{\frac{3}{2T_e} \boldsymbol{v}_e \cdot \nabla_x T_e} - \frac{m_e |\boldsymbol{\kappa}|^2}{3T_e} \nabla_x \cdot \boldsymbol{v}_e \right] \widetilde{g}_e^0 \\ & + \left[\cancel{\boldsymbol{v}_e \cdot \frac{\nabla_x n_e}{n_e}} - \cancel{\frac{3}{2T_e} \boldsymbol{v}_e \cdot \nabla_x T_e} + \boldsymbol{\kappa} \cdot \left(\cancel{\frac{\nabla_x n_e}{n_e}} - \left(\frac{3}{2T_e} - \frac{m_e \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\kappa}}{2T_e^2} \right) \nabla_x T_e \right) \right] \widetilde{g}_e^0. \end{aligned}$$

Au final, la partie gauche de cette équation électronique au 1er ordre se réécrit :

$$\begin{aligned}
&\left[-\boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}_e}\boldsymbol{v}_e + \frac{q_e}{m_e}\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{B}\right) - \left(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\boldsymbol{v}_e\right)\right]\cdot\boldsymbol{\partial_\kappa}\widetilde{g}_e^0 + \boldsymbol{\mathcal{D}}_t^{\boldsymbol{v}_e}\widetilde{g}_e^0 + \boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\partial_x}\widetilde{g}_e^0 \\
&= \left[\left(\frac{m_e\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\kappa}}{2T_e} - \frac{5}{2}\right)\frac{\boldsymbol{\kappa}\cdot\nabla_x T_e}{T_e} + \frac{\boldsymbol{R}_e^0\cdot\boldsymbol{\kappa}}{n_e T_e}\right]\widetilde{g}_e^0 \\
&\quad + \left[\frac{m_e}{2T_e}\left([\nabla_x\boldsymbol{v}_e] + [\nabla_x\boldsymbol{v}_e]^T - \frac{2}{3}\nabla_x\cdot\boldsymbol{v}_e\mathbb{I}\right) : \left(\boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\kappa} - \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{3}\mathbb{I}\right)\right]\widetilde{g}_e^0 \\
&= \left[\mathbb{L}_{\boldsymbol{e}}'\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right)\cdot\boldsymbol{\kappa} + \frac{\boldsymbol{R}_e^0\cdot\boldsymbol{\kappa}}{n_e T_e} + \underline{\mathbb{L}_{\boldsymbol{e}}}\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right) : \left(\boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\kappa} - \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{3}\mathbb{I}\right)\right]\widetilde{g}_e^0,
\end{aligned} \tag{2.E.3}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_{\boldsymbol{e}}'\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right) &= \left(\frac{m_e\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\kappa}}{2T_e} - \frac{5}{2}\right)\frac{\nabla_x T_e}{T_e} \\
\text{et} \quad \underline{\mathbb{L}_{\boldsymbol{e}}}\left(|\boldsymbol{\kappa}|\right) &= \frac{m_e}{2T_e}\left([\nabla_x\boldsymbol{v}_e] + [\nabla_x\boldsymbol{v}_e]^T - \frac{2}{3}\nabla_x\cdot\boldsymbol{v}_e\mathbb{I}\right)
\end{aligned}$$

Annexes du chapitre 3 :

3.A Obtention du système de MHD réduite résistive

Cette annexe a pour objectif de détailler le développement du passage de la MHD complète à la MHD réduite résistive. Commençons tout d'abord par rappeler le système de la MHD complète auquel on rajoute l'équation modélisant l'absence de monopôles magnétiques :

$$\left\{\begin{aligned}
\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) =& 0, \\
\partial_t (\rho \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) + \nabla p =& \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}, \\
\partial_t (\rho \mathcal{E}) + \nabla \cdot (\rho \mathcal{E} \boldsymbol{v} + p \boldsymbol{v}) =& (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\pi}}) + \eta \boldsymbol{J}^2 \\
& - (\underline{\boldsymbol{\pi}}_e : \nabla \boldsymbol{v}_e + \underline{\boldsymbol{\pi}}_i : \nabla \boldsymbol{v}_i + \nabla \cdot \boldsymbol{Q}), \\
\partial_t \boldsymbol{B} + \nabla \times \boldsymbol{E} =& 0, \\
\frac{p}{\gamma - 1} =& \rho \mathcal{E} - \frac{1}{2} \rho \boldsymbol{v}^2, \\
\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{B} =& \boldsymbol{J}, \\
\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} =& \eta \boldsymbol{J}, \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} =& 0.
\end{aligned}\right. \tag{3.A.1}$$

Avant tout développement on rappelle quelques définitions et propriétés sur les coordonnées nécessaires pour la suite :

$$\nabla \phi = \frac{1}{R} e_\phi, \tag{3.A.2}$$

$$\nabla \cdot \nabla \phi = 0, \tag{3.A.3}$$

$$\nabla \phi \cdot \nabla \phi = \frac{1}{R^2}, \tag{3.A.4}$$

$$\nabla_\perp A = R^2 \nabla \phi \times (\nabla A \times \nabla \phi), \tag{3.A.5}$$

$$\nabla_\parallel A = R^2 \nabla \phi (\nabla A \cdot \nabla \phi) \tag{3.A.6}$$

$$\nabla A \cdot \nabla \phi = \frac{1}{R^2} \partial_\phi A. \tag{3.A.7}$$

Pour passer à la MHD réduite résistive nous devons émettre des hypothèses, la première vient du confinement. En effet, les particules constituant le plasma sont confinées au sein du

tokamak grâce à un champ magnétique puissant principalement toroïdal. Ainsi, l'hypothèse de forte magnétisation dans la direction toroïdale permet de réécrire le champ magnétique en fonction de sa composante toroïdale $\boldsymbol{B}_\phi$ et celle poloïdale $\boldsymbol{B}_p$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B}_\phi + \boldsymbol{B}_p,\\ &= F\nabla\phi + \nabla\psi \times \nabla\phi,\end{aligned} \tag{3.A.8}$$

avec ψ représentant le flux magnétique, F une constante donnée pouvant parfois dépendre de l'espace ou du temps [DS12], mais qui sera prise ici constante par rapport au temps. Cette définition doit assurer la condition sur l'absence de monopôles magnétique, on doit donc émettre une hypothèse supplémentaire sur F :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0,\\ \nabla \cdot (F\nabla\phi) + \cancel{\nabla \cdot (\nabla \times (\psi\nabla\phi))} &= 0,\\ \nabla F \cdot \nabla\phi &= 0.\end{aligned} \tag{3.A.9}$$

Avec ces hypothèses l'équation modélisant l'absence de monopôles magnétiques est automatiquement vérifiée. Dans la suite, les équations de conservation, la loi d'induction ainsi que la loi d'Ampère seront développées avec ces hypothèses afin d'obtenir les équations composant le système de la MHD réduite résistive.

Tout d'abord, la réduction de la loi d'Ampère permet d'obtenir une nouvelle définition pour la densité de courant

$$\begin{aligned}\mu_0\boldsymbol{J} =& \nabla \times \boldsymbol{B},\\ =& \nabla \times (F\nabla\phi) + \nabla \times (\nabla \times (\psi\nabla\phi)),\\ =& \nabla F \times \nabla\phi - \Delta(\psi\nabla\phi) + \nabla\left(\frac{1}{R^2}\partial_\phi\psi\right),\end{aligned}$$

qui se développe termes à termes par :

$$\begin{aligned}\Delta(\psi\nabla\phi) =& \Delta\left(\frac{\psi}{R}e_\phi\right),\\ =& -\frac{2}{R^3}\partial_\phi\psi e_r + \left(R\Delta\left(\frac{\psi}{R}\right) - \frac{\psi}{R^2}\right)\nabla\phi,\\ =& -\frac{2}{R^3}\partial_\phi\psi e_r + \left(\Delta^*\psi + \frac{1}{R^2}\partial^2_{\phi^2}\psi\right)\nabla\phi,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{1}{R^2}\partial_\phi\psi\right) =& -\frac{2}{R^3}\partial_\phi\psi e_r + \frac{1}{R^2}\nabla_\perp(\partial_\phi\psi) + \frac{1}{R^2}\nabla_\parallel(\partial_\phi\psi),\\ =& -\frac{2}{R^3}\partial_\phi\psi e_r + \frac{1}{R^2}\nabla_\perp(\partial_\phi\psi) + \frac{1}{R^2}\nabla\phi\partial^2_{\phi^2}\psi.\end{aligned}$$

Ainsi, la densité de courant $\boldsymbol{J}$ se réécrit :

$$\mu_0\boldsymbol{J} = \nabla F \times \nabla\phi - \Delta^*\psi\nabla\phi + \frac{1}{R^2}\nabla_\perp(\partial_\phi\psi), \tag{3.A.10}$$

où Δ^* est l'opérateur de Grad-Shafranov défini par (3.3.40) tel que :

$$\Delta^*\psi = \Delta\psi - \frac{\partial_R\psi}{R}. \tag{3.A.11}$$

Sous cette même hypothèse de forte magnétisation il est supposé que la vitesse suit également principalement les lignes de champ magnétique et ainsi la vitesse est décomposée suivant le champ magnétique $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{v} = v_n\boldsymbol{B} + \boldsymbol{v}_\perp, \tag{3.A.12}$$

où $\boldsymbol{v}_\perp$ est la composante perpendiculaire au champ magnétique de la vitesse. Avec cette définition on peut définir $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}$ dont nous aurons besoin dans la suite des calculs :

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \nabla v_n\cdot\boldsymbol{B} + \nabla\cdot\boldsymbol{v}_\perp, \tag{3.A.13}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B} = v_n\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}. \tag{3.A.14}$$

La suite de ce développement se poursuit par la réduction des équations temporelles en commençant par l'équation de conservation de la masse

$$\begin{aligned}\partial_t\rho + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho = 0,\\ \partial_t\rho + \nabla\left(\rho v_n\right)\cdot\boldsymbol{B} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}_\perp + \boldsymbol{v}_\perp\cdot\nabla\rho = 0.\end{aligned} \tag{3.A.15}$$

Ce développement se poursuit par la réduction de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\partial_t\left(\rho\boldsymbol{v}\right) + \nabla\cdot\left(\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}\right) + \nabla p = \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} - \nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}},$$

mise sous la forme d'une équation de transport de la vitesse :

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} - \nabla p - \nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}.$$

Cette équation, après réduction, permettra d'obtenir deux équations sur la vitesse parallèle v_n ainsi que sur la vorticité W définie par :

$$\begin{aligned}\omega &= \nabla\times\boldsymbol{v}_\perp,\\ W &= \frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\omega.\end{aligned} \tag{3.A.16}$$

Par conséquent, pour obtenir ces équations, on applique successivement les opérateurs $\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(R^2...\right)$ et $\boldsymbol{B}\cdot$ à l'équation de transport sur la vitesse. Lors du premier de ces deux développements successifs, l'expression est détaillée terme après terme en commençant par le terme temporel

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\rho R^2\partial_t\boldsymbol{v}\right) &= \frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\rho R^2\partial_t\left(v_n\boldsymbol{B} + \boldsymbol{v}_\perp\right)\right),\\ &= \frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\rho R^2\partial_t\left(v_n\boldsymbol{B}\right)\right) + \frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\rho R^2\partial_t\boldsymbol{v}_\perp\right).\end{aligned}$$

Ensuite, on reprend le terme de convection qui est le terme le plus compliqué

$$\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\rho R^2\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}\right) =& \frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\nabla\rho R^2\times\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}+\rho R^2\nabla\times\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}\right),\\
=& \frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\frac{1}{2}\nabla\left(\rho R^2\right)\times\nabla\boldsymbol{v}^2-\nabla\rho R^2\times\left(\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times\boldsymbol{v}\right)\right)\right)\\
&+\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\frac{1}{2}\cancel{\nabla\times\nabla\boldsymbol{v}^2}-\rho R^2\nabla\times\left(\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times\boldsymbol{v}\right)\right)\right),\\
=& \frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\frac{1}{2}\nabla\left(\rho R^2\right)\times\nabla\boldsymbol{v}^2\right)\\
&-\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\nabla\rho R^2\times\left(\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times\boldsymbol{v}\right)\right)\right)\\
&-\rho R^2\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times\boldsymbol{v}\right)\right).
\end{aligned}$$

Pour une meilleure lisibilité dans la suite des calculs on développe le 2ème et le 3ème termes séparément : le 2ème se réécrit

$$\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\nabla\rho R^2\times\left(\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times\boldsymbol{v}\right)\right)\right) =& \frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\nabla\rho R^2\times\left(\boldsymbol{v}\times\omega\right)\right)\\
&+\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\nabla\rho R^2\times\left(\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times v_n\boldsymbol{B}\right)\right)\right),
\end{aligned}$$

dont on ne développe que le premier terme de ce développement

$$\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\nabla\rho R^2\times\left(\boldsymbol{v}\times\omega\right)\right) =& \nabla\rho R^2\cdot\left(\left(\boldsymbol{v}\times\omega\right)\times\frac{\boldsymbol{B}}{F}\right),\\
=& \nabla\left(\rho R^2\right)\cdot\left(\omega\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\boldsymbol{B}}{F}\right)-\boldsymbol{v}W\right),\\
=& \frac{v_n|\boldsymbol{B}|^2}{F}\nabla\left(\rho R^2\right)\cdot\omega-W\nabla\left(\rho R^2\right)\cdot\left(v_n\boldsymbol{B}+\boldsymbol{v}_\perp\right),
\end{aligned}$$

et le 3ème terme du développement du terme de convection

$$\begin{aligned}
\rho R^2\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times\boldsymbol{v}\right)\right) =& \rho R^2\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times v_n\boldsymbol{B}\right)\right)\\
&+\rho R^2\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\boldsymbol{v}\times\omega\right),
\end{aligned}$$

dont on ne développe que le dernier terme

$$\begin{aligned}
\rho R^2\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\boldsymbol{v}\times\omega\right) =& \rho R^2\nabla\cdot\left(\left(\boldsymbol{v}\times\omega\right)\times\frac{\boldsymbol{B}}{F}\right)+\rho R^2\left(\boldsymbol{v}\times\omega\right)\cdot\nabla\times\frac{\boldsymbol{B}}{F},\\
=& \rho R^2\nabla\cdot\left(\omega\left(v_n\boldsymbol{B}\cdot\frac{\boldsymbol{B}}{F}\right)-\boldsymbol{v}W\right)+\rho R^2\left(\boldsymbol{v}\times\omega\right)\cdot\nabla\times\frac{\boldsymbol{B}}{F},\\
=& \rho R^2\nabla\frac{v_n|\boldsymbol{B}|^2}{F}\cdot\omega-\rho R^2\nabla\left(v_nW\right)\cdot\boldsymbol{B}-\rho R^2\nabla W\cdot\boldsymbol{v}_\perp\\
&-\rho R^2W\nabla\cdot\boldsymbol{v}_\perp+\rho R^2\left(\boldsymbol{v}\times\omega\right)\cdot\nabla\times\frac{\boldsymbol{B}}{F}.
\end{aligned}$$

Au final, le terme convectif se réécrit :

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\rho R^2\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}\right)=&\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\frac{1}{2}\nabla\left(\rho R^2\right)\times\nabla\boldsymbol{v}^2\right)-\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\nabla\rho R^2\times\left(\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times v_n\boldsymbol{B}\right)\right)\right)\\&-\frac{v_n|\boldsymbol{B}|^2}{F}\nabla\left(\rho R^2\right)\cdot\omega+W\nabla\left(\rho R^2\right)\cdot\left(v_n\boldsymbol{B}+\boldsymbol{v}_\perp\right)\\&-\rho R^2\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times v_n\boldsymbol{B}\right)\right)\\&-\rho R^2\nabla\frac{v_n|\boldsymbol{B}|^2}{F}\cdot\omega+\rho R^2\nabla\left(v_nW\right)\cdot\boldsymbol{B}+\rho R^2\nabla W\cdot\boldsymbol{v}_\perp\\&+\rho R^2W\nabla\cdot\boldsymbol{v}_\perp-\rho R^2\left(\boldsymbol{v}\times\omega\right)\cdot\nabla\times\frac{\boldsymbol{B}}{F}.\end{aligned}$$

On développe le terme de pression de l'équation de transport de la vitesse :

$$\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(R^2\nabla p\right)=\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\nabla R^2\times\nabla p\right),$$

et le terme du courant :

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(R^2\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}\right)=&\nabla\cdot\left(R^2\left(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}\right)\times\frac{\boldsymbol{B}}{F}\right)+R^2(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla\times\frac{\boldsymbol{B}}{F},\\=&\nabla\cdot\left(R^2\left(\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{J}\cdot\frac{\boldsymbol{B}}{F}\right)-\boldsymbol{J}\frac{|\boldsymbol{B}|^2}{F}\right)\right)+R^2(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla\times\frac{\boldsymbol{B}}{F},\\=&\boldsymbol{B}\cdot\nabla\left(R^2\boldsymbol{J}\cdot\frac{\boldsymbol{B}}{F}\right)-\nabla\left(\frac{R^2|\boldsymbol{B}|^2}{F}\right)\cdot\boldsymbol{J}\\&+R^2(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla\times\frac{\boldsymbol{B}}{F}.\end{aligned}$$

L'équation de transport sur la vitesse obtenue avec l'opérateur $\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(R^2...\right)$ donne

$$\begin{aligned}&\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\rho R^2\partial_t\left(v_n\boldsymbol{B}\right)\right)+\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\rho R^2\partial_t\boldsymbol{v}_\perp\right)\\&+\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\frac{1}{2}\nabla\left(\rho R^2\right)\times\nabla\boldsymbol{v}^2\right)-\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\nabla\rho R^2\times\left(\boldsymbol{v}\times\nabla\times v_n\boldsymbol{B}\right)\right)\\&-\frac{v_n|\boldsymbol{B}|^2}{F}\nabla\left(\rho R^2\right)\cdot\omega+W\nabla\left(\rho R^2\right)\cdot\left(v_n\boldsymbol{B}+\boldsymbol{v}_\perp\right)\\&-\rho R^2\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times v_n\boldsymbol{B}\right)\right)-\rho R^2\nabla\frac{v_n|\boldsymbol{B}|^2}{F}\cdot\omega\\&+\rho R^2\nabla\left(v_nW\right)\cdot\boldsymbol{B}+\rho R^2\nabla W\cdot\boldsymbol{v}_\perp+\rho R^2W\nabla\cdot\boldsymbol{v}_\perp\\&-\rho R^2\left(\boldsymbol{v}\times\omega\right)\cdot\nabla\times\frac{\boldsymbol{B}}{F}+\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\nabla R^2\times\nabla p\right),\\=&\boldsymbol{B}\cdot\nabla\left(R^2\boldsymbol{J}\cdot\frac{\boldsymbol{B}}{F}\right)-\nabla\left(\frac{R^2|\boldsymbol{B}|^2}{F}\right)\cdot\boldsymbol{J}+R^2(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla\times\frac{\boldsymbol{B}}{F}\\&-\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(R^2\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}\right).\end{aligned}\tag{3.A.17}$$

A présent, l'équation de transport de la vitesse est reprise avec l'opérateur $\boldsymbol{B}\cdot$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\cdot\left(\rho\partial_t\boldsymbol{v}+\rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}\right)=&\boldsymbol{B}\cdot\left(\cancel{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}}-\nabla p-\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}\right)\\ \rho|\boldsymbol{B}|^2\partial_t v_n+\rho\boldsymbol{B}\cdot\partial_t\boldsymbol{v}_\perp,=&\rho v_n\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}-\rho|\boldsymbol{B}|^2\partial_{\boldsymbol{v}}v_n-\rho v_n\boldsymbol{B}\cdot\partial_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{B}-\rho\boldsymbol{B}\cdot\partial_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}_\perp\\ &-\partial_{\boldsymbol{B}}p-\boldsymbol{B}\cdot\left(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}\right).\end{aligned}$$

Au final, l'équation de transport sur la vitesse avec cet opérateur $\boldsymbol{B}\cdot$ permet d'obtenir l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\rho|\boldsymbol{B}|^2\partial_t v_n+\rho\boldsymbol{B}\cdot\partial_t\boldsymbol{v}_\perp+\rho|\boldsymbol{B}|^2\partial_{\boldsymbol{v}}v_n=&\rho|\boldsymbol{B}|^2v_n\nabla\cdot\boldsymbol{v}_\perp-\partial_{\boldsymbol{B}}p-\rho v_n^2\partial_{\boldsymbol{B}}\frac{|\boldsymbol{B}|^2}{2}\\ &+2\rho v_n\boldsymbol{v}_\perp\cdot\left(\mu_0\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}+\nabla\frac{|\boldsymbol{B}|^2}{2}\right)-\rho\partial_{\boldsymbol{B}}\frac{\boldsymbol{v}_\perp^2}{2}+\rho\boldsymbol{B}\cdot\left(\boldsymbol{v}_\perp\times\omega\right)\\ &-2\rho v_n\partial_{\boldsymbol{B}}\left(\boldsymbol{v}_\perp\cdot\boldsymbol{B}\right)+\rho v_n\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\left(\eta\boldsymbol{J}\right)-\boldsymbol{B}\cdot\left(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}\right).\end{aligned}\tag{3.A.18}$$

Ce développement des équations de conservation se poursuit avec celle sur l'énergie :

$$\begin{aligned}\partial_t\rho\mathcal{E}+\nabla\cdot\left(\rho\mathcal{E}\boldsymbol{v}+p\boldsymbol{v}\right)=&\left(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\cdot\left(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}\right)+\eta\boldsymbol{J}^2\\ &-\left(\underline{\boldsymbol{\pi}}_e\colon\nabla\boldsymbol{v}_e+\underline{\boldsymbol{\pi}}_i\colon\nabla\boldsymbol{v}_i+\nabla\cdot\boldsymbol{Q}\right).\end{aligned}$$

Elle est reprise avec la loi des gaz parfaits sous la forme d'une équation de pression :

$$\partial_t p+\nabla p\cdot\boldsymbol{v}+\gamma p\nabla\cdot\boldsymbol{v}=-\left(\gamma-1\right)\left(\underline{\boldsymbol{\pi}}_e\colon\nabla\boldsymbol{v}_e+\underline{\boldsymbol{\pi}}_i\colon\nabla\boldsymbol{v}_i+\nabla\cdot\boldsymbol{Q}-\eta\boldsymbol{J}^2\right),$$

où $\gamma=5/3$. Après réduction, l'équation sur la pression se développe par :

$$\begin{aligned}\partial_t p+\nabla\left(pv_n\right)\cdot\boldsymbol{B}+\nabla\cdot\left(p\boldsymbol{v}_\perp\right)+\left(\gamma-1\right)p\left(\nabla v_n\cdot\boldsymbol{B}+\nabla\cdot\boldsymbol{v}_\perp\right)\\ =-\left(\gamma-1\right)\left(\underline{\boldsymbol{\pi}}_e\colon\nabla\boldsymbol{v}_e+\underline{\boldsymbol{\pi}}_i\colon\nabla\boldsymbol{v}_i+\nabla\cdot\boldsymbol{Q}-\eta\boldsymbol{J}^2\right).\end{aligned}\tag{3.A.19}$$

Pour finir ce développement on reprend l'équation de Faraday :

$$\partial_t\boldsymbol{B}+\nabla\times\boldsymbol{E}=0.$$

En supposant que la variable F du champ magnétique est constante par rapport au temps, cette équation devient alors

$$\nabla\times\left(\partial_t\psi\nabla\phi+\boldsymbol{E}\right)=0.\tag{3.A.20}$$

Alors il existe un potentiel vitesse U tel que :

$$\partial_t\psi\nabla\phi+\boldsymbol{E}=U_0\nabla U,\tag{3.A.21}$$

avec U_0 une constante qui pour simplifier les calculs, sera supposée égale à la constante $-F$ du champ magnétique, sous la condition sur F :

$$\nabla F\times\nabla U=0.\tag{3.A.22}$$

On applique successivement les opérateurs $\frac{\boldsymbol{B}}{F}\times$ et $\frac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot$ à cette équation (3.A.21) :

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{B}}{F}\times\left(\partial_t\psi\nabla\phi+\boldsymbol{E}\right)&=-\boldsymbol{B}\times\nabla U,\\ \frac{\boldsymbol{B}}{F}\times\left(\partial_t\psi\right)\nabla\phi+\frac{\boldsymbol{B}}{F}\times\boldsymbol{E}&=-\boldsymbol{B}\times\nabla U,\end{aligned}\tag{3.A.23}$$

et

$$\partial_t\psi+\frac{R^2}{F}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}=-R^2\boldsymbol{B}\cdot\nabla U.\tag{3.A.24}$$

Pour développer ces deux équations on utilise la loi d'Ohm résistive. Pour cela, on développe au préalable les termes $\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ et $\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})=&|\boldsymbol{B}|^2\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{B},\\ =&|\boldsymbol{B}|^2\boldsymbol{v}-(v_n\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{B},\\ =&|\boldsymbol{B}|^2\boldsymbol{v}_\perp,\end{aligned}\tag{3.A.25}$$

et

$$\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})=0.\tag{3.A.26}$$

La loi d'Ohm résistive permet d'obtenir une équation sur le flux magnétique à partir de l'équation (3.A.24) :

$$\partial_t\psi=-R^2\boldsymbol{B}\cdot\nabla U-\frac{R^2}{F}\boldsymbol{B}\cdot\eta\boldsymbol{J}.\tag{3.A.27}$$

L'équation (3.A.23) avec la loi d'Ohm résistive ainsi que cette dernière équation (3.A.27) permettent d'obtenir une définition de la vitesse perpendiculaire $\boldsymbol{v}_\perp$:

$$\boldsymbol{v}_\perp=\frac{F}{|\boldsymbol{B}|^2}\left(\boldsymbol{B}\times\nabla U+\eta\frac{\boldsymbol{B}}{F}\times\boldsymbol{J}-\frac{B}{F}\times\left(R^2\boldsymbol{B}\cdot\nabla U+\frac{R^2}{F}\boldsymbol{B}\cdot\eta\boldsymbol{J}\right)\nabla\phi\right).\tag{3.A.28}$$

Au final, le système de la MHD réduite résistive se résume à :

$$
\begin{cases}
\partial_t \rho + \nabla\left(\rho v_n\right)\cdot \boldsymbol{B} + \rho \nabla\cdot \boldsymbol{v}_\perp + \boldsymbol{v}_\perp \cdot \nabla \rho = 0, \\
\dfrac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\rho R^2 \partial_t\left(v_n \boldsymbol{B}\right)\right) + \dfrac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\rho R^2 \partial_t \boldsymbol{v}_\perp\right) \\
+\dfrac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\nabla\left(\rho R^2\right)\times\nabla \boldsymbol{v}^2\right) - \dfrac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\nabla\rho R^2 \times\left(\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times v_n \boldsymbol{B}\right)\right)\right) \\
+W\nabla\left(\rho R^2\right)\cdot\left(v_n \boldsymbol{B} + \boldsymbol{v}_\perp\right) - \rho R^2 \dfrac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times v_n \boldsymbol{B}\right)\right) \\
-\nabla\left(\dfrac{v_n|\boldsymbol{B}|^2}{F}\rho R^2\right)\cdot\omega + \rho R^2 \nabla\left(v_n W\right)\cdot \boldsymbol{B} + \rho R^2 \nabla W\cdot \boldsymbol{v}_\perp \\
+\rho R^2 W \nabla\cdot \boldsymbol{v}_\perp - \rho R^2\left(\boldsymbol{v}\times\omega\right)\cdot\nabla\times\dfrac{\boldsymbol{B}}{F} + \dfrac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\left(\nabla R^2\times\nabla p\right) \\
= \boldsymbol{B}\cdot\nabla\left(R^2 \boldsymbol{J}\cdot\dfrac{\boldsymbol{B}}{F}\right) - \nabla\left(\dfrac{R^2|\boldsymbol{B}|^2}{F}\right)\cdot \boldsymbol{J} + R^2(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla\times\dfrac{\boldsymbol{B}}{F} \\
-\dfrac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\left(R^2\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}\right), \\
\rho|\boldsymbol{B}|^2\partial_t v_n + \rho\boldsymbol{B}\cdot\partial_t\boldsymbol{v}_\perp + \rho|\boldsymbol{B}|^2\partial_{\boldsymbol{v}} v_n = \rho|\boldsymbol{B}|^2 v_n\nabla\cdot\boldsymbol{v}_\perp - \partial_{\boldsymbol{B}} p - \rho v_n^2\partial_{\boldsymbol{B}}\dfrac{|\boldsymbol{B}|^2}{2} \\
+2\rho v_n\boldsymbol{v}_\perp\cdot\left(\mu_0\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} + \nabla\dfrac{|\boldsymbol{B}|^2}{2}\right) - \rho\partial_{\boldsymbol{B}}\dfrac{\boldsymbol{v}_\perp^2}{2} + \rho\boldsymbol{B}\cdot\left(\boldsymbol{v}_\perp\times\omega\right) \\
-2\rho v_n\partial_{\boldsymbol{B}}\left(\boldsymbol{v}_\perp\cdot\boldsymbol{B}\right) + \rho v_n\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\left(\eta\boldsymbol{J}\right) - \boldsymbol{B}\cdot\left(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\pi}}\right), \\
\partial_t p + \nabla\left(p v_n\right)\cdot\boldsymbol{B} + \nabla\cdot\left(p\boldsymbol{v}_\perp\right) + \left(\gamma-1\right)p\left(\nabla v_n\cdot\boldsymbol{B} + \nabla\cdot\boldsymbol{v}_\perp\right) \\
= -\left(\gamma-1\right)\left(\underline{\boldsymbol{\pi}}_e : \nabla\boldsymbol{v}_e + \underline{\boldsymbol{\pi}}_i : \nabla\boldsymbol{v}_i + \nabla\cdot\boldsymbol{Q} - \eta\boldsymbol{J}^2\right), \\
\partial_t\psi = -R^2\boldsymbol{B}\cdot\nabla U - \dfrac{R^2}{F}\boldsymbol{B}\cdot\eta\boldsymbol{J}.
\end{cases}
\tag{3.A.29}
$$

Ce système est obtenu avec les définitions des variables du champ magnétique $\boldsymbol{B}$, de la densité de courant $\boldsymbol{J}$, de la vorticité W et de la vitesse perpendiculaire $\boldsymbol{v}_\perp$ suivante :

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{B} = F\nabla\phi + \nabla\psi\times\nabla\phi, \\
\mu_0\boldsymbol{J} = \nabla F\times\nabla\phi - \Delta^*\psi\nabla\phi + \dfrac{1}{R^2}\nabla_\perp\left(\partial_\phi\psi\right), \\
W = \dfrac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\omega = \dfrac{\boldsymbol{B}}{F}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}_\perp, \\
\boldsymbol{v}_\perp = \dfrac{F}{|\boldsymbol{B}|^2}\left(\boldsymbol{B}\times\nabla U + \eta\dfrac{\boldsymbol{B}}{F}\times\boldsymbol{J} - \dfrac{B}{F}\times\left(R^2\boldsymbol{B}\cdot\nabla U + \dfrac{R^2}{F}\boldsymbol{B}\cdot\eta\boldsymbol{J}\right)\nabla\phi\right).
\end{cases}
\tag{3.A.30}
$$

Annexes du chapitre 4 :

4.A Matrices nécessaires à la définition des éléments finis C^1 de Bell

Dans cette annexe on définit les matrices $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}_e^T$ et $\check{\mathcal{B}}_e$ nécessaires pour l'utilisation des éléments de Bell dont les fonctions de bases $\mathcal{B}_e$ sont reliées à ces deux matrices :

$$\mathcal{B}_e = \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}_e \check{\mathcal{B}}_e.$$

Tout d'abord, on définit la matrice $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}_e^T$:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}_e^T = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & x_{12} & y_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_{13} & y_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{12} & -y_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{23} & y_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{13} & -y_{13} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{23} & -y_{23} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & x_{12}^2 & 2x_{12}y_{12} & y_{12}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_{13}^2 & 2x_{13}y_{13} & y_{13}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12}^2 & 2x_{12}y_{12} & y_{12}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{23}^2 & 2x_{23}y_{23} & y_{23}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{13}^2 & 2x_{13}y_{13} & y_{13}^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{23}^2 & 2x_{23}y_{23} & y_{23}^2 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & x_{23}^2 & 2x_{23}y_{23} & y_{23}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{13}^2 & 2x_{13}y_{13} & y_{13}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12}^2 & 2x_{12}y_{12} & y_{12}^2
\end{pmatrix}$$

avec $x_{12} = x_1 - x_2$. Ensuite, la matrice $\check{\mathcal{B}}_e$ contenant les fonctions de bases est définies à partir des coordonnées barycentriques (4.3.3) et se réécrit :

$$\check{\mathcal{B}}_e(\xi) = \underline{\boldsymbol{A}}_e \Lambda \tag{4.A.1}$$

avec Λ un vecteur tel que :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1^5 \\ \lambda_2^5 \\ \lambda_3^5 \\ \\ \lambda_1^4\lambda_2 \\ \lambda_1^4\lambda_3 \\ \lambda_2^4\lambda_1 \\ \lambda_2^4\lambda_3 \\ \lambda_3^4\lambda_1 \\ \lambda_3^4\lambda_2 \\ \\ \lambda_1^3\lambda_2^2 \\ \lambda_1^3\lambda_3^2 \\ \lambda_2^3\lambda_1^2 \\ \lambda_2^3\lambda_3^2 \\ \lambda_3^3\lambda_1^2 \\ \lambda_3^3\lambda_2^2 \\ \\ \lambda_1^3\lambda_2\lambda_3 \\ \lambda_2^3\lambda_1\lambda_3 \\ \lambda_3^3\lambda_1\lambda_2 \\ \\ \lambda_1\lambda_2^2\lambda_3^2 \\ \lambda_2\lambda_1^2\lambda_3^2 \\ \lambda_3\lambda_1^2\lambda_2^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\underline{\boldsymbol{A}}_e$ se décompose elle même suivant deux matrices telle que :

$$\underline{\boldsymbol{A}}_e = \underline{\boldsymbol{A}} + \underline{\boldsymbol{S}}_e \tag{4.A.2}$$

avec

$$\underline{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}
4 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 & 0 & 0 & 0 & 60 & 60 \\
0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 40 & 0 & 0 & 0 & 80 & 0 & 60 & 0 & 60 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 40 & 0 & 0 & 80 & 60 & 60 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 12 & 18 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 18 & 12 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 12 & 0 & 18 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 18 & 0 & 12 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 16 & 12 & 18 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 16 & 18 & 12 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0
\end{pmatrix}$$

et $\underline{\boldsymbol{S}}_e$ dont les seuls coefficients non nuls de cette matrice sont :

$$\underline{\boldsymbol{S}}_e\,[1:15,18:21] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 60\eta_2 & -60\eta_3 \\ -60\eta_1 & 0 & 60\eta_3 \\ 60\eta_1 & -60\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -30\eta_3 \\ 0 & 30\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 30\eta_3 \\ -30\eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -30\eta_2 & 0 \\ 30\eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5\eta_3 \\ 0 & 5\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 5\eta_3 \\ -5\eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -5\eta_2 & 0 \\ 5\eta_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 60 & -60 \\ -60 & 0 & 60 \\ 60 & -60 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \\ -30 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 \\ 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_3 \end{pmatrix}$$

Bibliographie

[AFS68] J.H. Argyris, J. Fried, and D.W. Sharpf, *The tuba family of plate elements for the matrix displacement method*, The Aeronautical Journal (1968).

[AS10] A.B.H. Ali and A. Soulaimani, *An unstructured finite elements method for solving the compressible rans and the spalart allmaras turbulence model*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (2010).

[Asl93] N. Aslan, *Computational investigations of ideal MHD plasmas with discontinuities*, Nuclear Engineering Department, University of Michigan (1993).

[Bak97] J.A. Baker, *Integration Over Spheres and the Divergence Theorem for Balls*, The American Mathematical Monthly **104** (1997), no. 1, pp. 36–47 (English).

[BB80] J. Brackbill and D. Barnes, *The effect of nonzero product of magnetic gradient and B on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations*, Journal of Computational Physics **35** (1980), 426–430.

[BBF+92] F. Brezzi, M.-O. Bristeau, L.P. Franca, M. Mallet, and G. Rogé, *A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **96** (1992), no. 1, 117–129.

[BE07] E. Burman and A. Ern, *Continuous interior penalty hp-finite element methods for advection and advection-diffusion equations*, Mathemtics of computation **76** (2007), no. 259, 1119–1140.

[Bel68] K. Bell, *Analysis of thin plates in bending using triangular finite elements*, Institutt for Statikk, Norges Tekniske Hogskole,Tronkheim (1968).

[Bel69] ———, *A refined triangular plate bending finite element*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **1** (1969), no. 1, 101–122.

[Bel06] P. Bellan, *Fundamentals of plasma physics*, Cambridge University Press, 2006.

[Ber92] M. Bernadou, *Curved finite elements with numerical integration for thin plate and thin shell problems* c^1, Tech. Report 1626, INRIA, 1992.

[BFH06] E. Burman, M. Fernandez, and P. Hansbo, *Continuous interior penalty finite element method for oseen's equations*, SIAM Journal on Numerical Analysis **44** (2006), 1248–1274.

[BFJ09] J. Breslau, N. Ferraro, and S. Jardin, *Some properties of the m3d-c1 form of the three-dimensional magnetohydrodynamics equations*, Phys Plasmas (2009).

[BGK54] P.L. Bhatnagar, E.P. Gross, and M. Krook, *A model for collision processes in gases. i. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems*, Phys. Rev. **94** (1954), 511–525.

[BH82] A.N. Brooks and T.J.R. Hughes, *Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **32** (1982), no. 1-3, 199–259.

[Bil09] M. Billaud, *Eléments finis stabilisés pour des écoulements diphasiques compressible-incompressible*, Ph.D. thesis, Université Bordeaux I, 2009.

[Bis97] D. Biskamp, *Nonlinear Magnetohydrodynamic*, Cambridge University Press, 1997.

[BLFH81] S.H. Brecht, J. Lyon, J.A. Fedder, and K. Hain, *A simulation study of east-west IMF effects on the magnetosphere*, Geophysical Research Letters **8** (1981), no. 4, 397–400.

[Bob11] J.-L. Bobin, *Une introduction à : la fusion thermonucléaire contrôlée*, EDP Sciences, 2011.

[Bra58] S. I. Braginskii, 1958, p. 358.

[Bra65] S.I. Braginskii, *Reviews of plasma physics*, 1965.

[Bra85] J. Brackbill, *Fluid modeling of magnetized plasmas*, Space Science Reviews **42** (1985), 153–167, 10.1007/BF00218230.

[Bra02] D. Braess, *Finite elements*, Cambridge University Press, 2002.

[BRAT93] G.J. Le Beau, S.E. Ray, S.K. Aliabadi, and T.E. Tezduyar, *Supg finite element computation fo compressible flows with the entropy and conservation variables formulations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **104** (1993), 397–422.

[BS99] D.S. Balsara and D.S. Spicer, *A Staggered Mesh Algorithm Using High Order Godunov Fluxes to Ensure Solenoidal Magnetic Fields in Magnetohydrodynamic Simulations*, Journal of Computational Physics **149** (1999), no. 2, 270–292.

[BW88] M. Brio and C.C. Wu, *An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics*, Journal of Computational Physics **75** (1988).

[BZV98] S. Briguglio, F. Zonca, and G. Vlad, *Hybrid magnetohydrodynamic-particle simulation of linear and nonlinear evolution of Alfven modes in tokamaks*, Physics of Plasmas **5** (1998), no. 9, 3287–3301.

[Cal06] J. Callen, *Fundamentals of plasmas physics*, 2006.

[CB00] R. Codina and J. Blasco, *Analysis of a pressure-stabilized finite element approximation of the stationary Navier-Stokes equations*, Numerische Mathematik **87** (2000), 59–81, 10.1007/s002110000174.

[CC91] S. Chapman and T. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases*, January 1991.

[CH08] O. Czarny and G. Huysmans, *Bézier surfaces and finite elements for MHD simulations*, Journal of Computational Physics **227** (2008), no. 16, 7423–7445.

[Che84] F. Chen, *Introduction to plasma physics and controlled fusion*, Plenum Press, 1984.

[CKLO57] G.R. Cowper, E. Kosko, G.M. Lindberg, and M.D. Olson, 1957.

[Cod98] R. Codina, *Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **156** (1998), no. 1–4, 185–210.

[Cod00] ———, *On stabilized finite element methods for linear systems of convection-diffusion-reaction equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **188** (2000), no. 1-3, 61–82.

[Cod08] ———, *Analysis of a stabilized finite element approximation of the Oseen equations using orthogonal subscales*, Applied Numerical Mathematics **58** (2008), no. 3, 264–283.

[CS04] P.J. Catto and A.N. Simakov, *A drift ordered short mean free path description for magnetized plasma allowing strong spatial anisotropy*, Physics of Plasmas **11** (2004), no. 1, 90–102.

[DD76] J. Douglas and T. Dupont, *Interior Penalty Procedures for Elliptic and Parabolic Galerkin Methods*, Computing Methods in Applied Sciences (R. Glowinski and J. Lions, eds.), Lecture Notes in Physics, vol. 58, Springer Berlin / Heidelberg, 1976, 10.1007/BFb0120591, pp. 207–216.

[DDF+11] E. Deriaz, B. Després, G. Faccanoni, K.P. Gostaf, L.M. Imbert-Gérard, G. Sadaka, and R. Sart, *Magnetic Equations with FreeFem++ : the Grad-Shafranov Equation and the Current Hole*, ESAIM Proceedings (2011).

[DeV91] C.R. DeVore, *Flux-corrected transport techniques for multidimensional compressible magnetohydrodynamics*, Journal of Computational Physics **92** (1991), no. 1, 142–160.

[DKK+02] A. Dedner, F. Kemm, D. Kröner, C.-D. Munz, T. Schnitzer, and M. Wesenberg, *Hyperbolic Divergence Cleaning for the MHD Equations*, Journal of Computational Physics **175** (2002), no. 2, 645–673.

[DLD92] P. Degond and B. Lucquin-Desreux, *The fokker-planck asymptotics of the boltzmann collision operator in the coulomb case*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences **02** (1992), no. 02, 167–182.

[DLD96a] ———, *The asymptotics of collision operators for two species of particles of disparate masses*, Math. Mod. Meth. Appl. Sci **6** (1996), no. 405.

[DLD96b] ———, *Transport coefficients of plasmas and disparate mass binary gases*, Transport Theory and Statistical Physics **25** (1996), no. 6, 595–633.

[DM82] J.J. Duderstadt and G.A. Moses, *Inertial confinement fusion*, Wiley-Interscience Publication, 1982.

[DS12] B. Després and R. Sart, *Reduced resistive MHD in Tokamaks with general density*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis **46** (2012), no. 05, 1081–1106.

[Dun85] D.A. Dunavant, *High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **21** (1985), no. 6, 1129–1148.

[DUX+09] B.D. Dudson, M.V. Umansky, X.Q. Xu, P.B. Snyder, and H.R. Wilson, *Bout++ : A framework for parallel plasma fluid simulations*, Computer Physics Communications **180** (2009), no. 9, 1467–1480.

[DW94] W. Dai and P.R. Woodward, *An approximate Riemann Solver for ideal magnetohydrodynamics*, Journal of Computational Physics **11** (1994).

[EGM09] T. Elguedj, A. Gravouil, and H. Maigre, *An explicit dynamics extended finite element method. Part 1 : Mass lumping for arbitrary enrichment functions*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **198** (2009), 2297–2317 (Anglais).

[EH86] E.M. Epperlein and M.G. Haines, *Plasma transport coefficients in a magnetic field by direct numerical solution of the Fokker–Planck equation*, Physics of Fluids **29** (1986), no. 4, 1029–1041.

[EH88] C.R. Evans and J.F. Hawley, *Simulation of magnetohydrodynamic flows - A constrained transport method*, Astrophysical Journal, Part 1 **332** (1988), 659–677.

[EJ97] A. Elmkies and P. Joly, *Finite elements and mass lumping for maxwell's equations : the 2d case*, Compte Rendus de l'académie des Sciences, Series I, vol. 384, 1997, pp. 1287–1293.

[Ens17] D. Enskog, *Kinetische theorie der vorgänge in maássig verdünnten gasen*, Ph.D. thesis, Upsala, 1917.

[FF92] L.P. Franca and S.L. Frey, *Stabilized finite element methods : II. The incompressible Navier-Stokes equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **99** (1992), no. 2-3, 209–233.

[FF95] L.P. Franca and C. Farhat, *Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **123** (1995), no. 1-4, 299–308.

[FFH92] L.P. Franca, S.L. Frey, and T.J.R. Hughes, *Stabilized finite element methods : I. Application to the advective-diffusive model*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **95** (1992), no. 2, 253–276.

[Fis05] P. F. Fischer, *Anisotropic diffusion in a toroidal geometry*, Journal of Physics : Conference Series **16** (2005), no. 1, 446.

[FK72] J.H. Ferziger and H.G. Kaper, *Mathematical theory of transport processes in gases*, North-Holland Pub. Co., 1972.

[Fre87] J.P. Freidberg, *Ideal magnetohydrodynamics*.

[Fre07] _____, *Plasma physics and fusion energy*, Cambridge University Press, 2007.

[Fuj10] T. Fujita, *Tokamak equilibria with nearly zero central current : the current hole*, Nuclear Fusion **50** (2010), no. 11, 113001.

[fusa] `http://www-fusion-magnetique.cea.fr`.

[fusb] `http://fusionforenergy/.europa.eu/`.

[fusc] `http://www.iter.org`.

[fusd] `http://ec.europa.eu/research/energy/euratom`.

[FV00] L.P. Franca and F. Valentin, *On an improved unusual stabilized finite element method for the advective–reactive–diffusive equation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **190** (2000), no. 13–14, 1785–1800.

[GLS78] P.M. Gresho, R.L. Lee, and R.L. Sani, *Advection-dominated flows, with emphasis on the consequences of mass lumping*, Finite Elements in Fluids (R. H. Gallagher, O. C. Zienkiewicz, J. T. Oden, M. Morandi Cecchi, and C. Taylor, eds.), 1978, pp. 335–350.

[GMM07] B. Graille, T. Magin, and M. Massot, *Kinetic Theory of Plasmas : Translational Energy*, ArXiv e-prints (2007).

[GR58] H. Grad and H. Rubin, *Hydromagnetic Equilibria and Force-Free Fields*, 2nd UN Conf. On the Peaceful Uses of Atomic Energy, vol. 31, 1958.

[Gra49] H. Grad, 1949.

[Has97] R. J. Hastie, *Sawtooth instability in tokamak plasmas*, Astrophysics and Space Science **256** (1997), 177–204 (English).

[HB79] T.J.R. Hughes and A. Brooks, *A multi–dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion*, AMD **21** (1979).

[HC07] G.T.A. Huysmans and O. Czarny, *MHD stability in X-point geometry : simulation of ELMs*, Nuclear Fusion **47** (2007), no. 7, 659.

[HFB86] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and M. Balestra, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics : V. Circumventing the babuska-brezzi condition : a stable Petrov-Galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **59** (1986), no. 1, 85–99.

[HFH89] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and G.M. Hulbert, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VIII. The galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **73** (1989), no. 2, 173–189.

[HHHL01] G.T.A. Huysmans, T.C. Hender, N.C. Hawkes, and X. Litaudon, *MHD Stability of Advanced Tokamak Scenarios with Reversed Central Current : An Explanation of the "Current Hole"*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001), 245002.

[HM86a] T. J.R. Hughes and M. Mallet, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics : Iv. a discontinuity-capturing operator for multidimensional advective-diffusive systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **58** (1986), no. 3, 329–336.

[HM86b] T.J.R. Hughes and M. Mallet, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics : III. The generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **58** (1986), no. 3, 305–328.

[HMA86] T.J.R. Hughes, M. Mallet, and M. Akira, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics : Ii. beyond supg*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **54** (1986), no. 3, 341–355.

[Hol83] R. Holland, *Finite-difference solution of Maxwell's equations in generalized nonorthogonal coordinates*, Nuclear Science, IEEE Transactions on **30** (1983), no. 6, 4589–4591.

[HPvdPR09] G.T.A. Huysmans, S. Pamela, E. van der Plas, and P. Ramet, *Non-linear mhd simulations of edge localized modes (elms)*, Plasma Physics and Controlled Fusion **51** (2009), no. 12, 124012.

[Hub09] J.D. Huba, *N.r.l. plasma formulary*, The office of Naval Research, Washington DC 20375, 2009.

[Hug78] T.J.R. Hughes, *A simple scheme for developing 'upwind' finite elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **12** (1978), no. 9, 1359–1365.

[Hug95] ———, *Multiscale phenomena : Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **127** (1995), no. 1-4, 387–401.

[Izz83] R. Izzo, *Effects of toroidicity on resistive tearing modes*, Physics of Fluids **19** (1983), no. 1, 134–140.

[Jam06] A. Jameson, *Eigenvalues, Eigenvectors and Symmetrization of the Magneto-Hydrodynamic (MHD) Equations*, AFOSR Grantees and Contractors Meeting, Juin 2006.

[Jar04] S.C. Jardin, *A triangular finite element with first-derivative continuity applied to fusion mhd applications*, Journal of Computational Physics **200** (2004), no. 1, 133–152.

[Jar12] ———, *Review of implicit methods for the magntohydrodynamic description of magnetically confined plasmas*, Journal of Computational Physics **231** (2012), 822–838.

[JH53] L. Spitzer Jr and R. Harm, 1953, p. 977.

[JK07] V. John and P. Knobloch, *On spurious oscillations at layers diminishing (sold) methods for convection–diffusion equations : Part i – a review*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **196** (2007), no. 17–20, 2197–2215.

[JT64] A. Jeffrey and A. Taniuti, *Nonlinear wave propagation*, 1964.

[Lan81] L.D. Landau, *The transport equation in the case of the Coulomb interaction*, Pergamon Press, 1981.

[Lav93] G. Laval, *La fusion thermonucléaire inertielle par laser, partie 1 : L'interaction laser-matière*, Eyrolles editions, 1993.

[Law57] J.D. Lawson, *Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor*, Proceedings of the Physical Society. Section B **70** (1957), no. 1, 6.

[Leb11] D. Leblond, *Simmulation des plasmas de tokamak avec xtor : Régimes des dents de scie et évolution vers une modélisation cinétique des ions*, Ph.D. thesis, Ecole polytechnique, 2011.

[Lin98] J.D. Lindl, *Inertial confinement fusion*, Springer-Verlag, 1998.

[Mik67] A.B. Mikhailovskii, Sov. Phys., 1967.

[MK05] T. Miyoshi and K. Kusano, *A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics*, Journal of Computational Physics **208** (2005), no. 1, 315–344.

[MT71] A.B. Mikhailovskii and V.S. Tsypin, Plasma Physics, 1971.

[MT84] ———, Beitr Plasmaphys, 1984.

[MZ90] N.K. Madsen and R.W. Ziolkowski, *A three-dimensional modified finite volume technique for Maxwell's equations*, Electromagnetics **10** (1990), no. 1-2, 147–161.

[Neu73] S.P. Neumann, *Saturated-unsaturated seepage by finite elements*, J. Hydraul. Div. Am. Soc. Eng. **99** (1973), 2233–2250.

[Pam10] S. Pamela, *Simulation Magnéto-Hydro-Dynamiques des Edge-Localised-Modes dans un tokamak*, Ph.D. thesis, Université de Provence, 2010.

[PD75] J.-P. Petit and J.-S. Darrozes, *New formulation of the equations of motion of an ionized gas in collision dominated regime*, Journal de Mecanique **14** (1975), 745–759.

[Pow94] K.G. Powell, *An approximate Riemann Solver for Magnetohydrodynamics (That Works in More than One Dimension)*, ICASE Report 94-24, NASA, facultatif, Avril 1994, facultatif.

[PRM+95] K.G. Powell, P.L. Roe, R.S. Myong, T. Gombosi, and D. De Zeeuw, *An upwind scheme for magnetohydrodynamics*, AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, 12 th, San Diego, CA, 1995, pp. 661–674.

[Ram07] J.J. Ramos, *Fluid theory of magnetized plasma dynamics at low collisionality*, no. 5, 052506.

[Rao76] S.S. Rao, *The finite element method in engineering*, Pergamon Press, New York, 1976.

[Rat11] A. Ratnani, *Isogeometric Analysis in Plasma Physics and Electromagnetism*, Ph.D. thesis, Université de Strasbourg, 2011.

[RB62] B. B. Robinson and I. B. Bernstein, *A variational description of transport phenomena in a plasma*, Annals of Physics **18** (1962), no. 1, 110–169.

[RB96] P.L. Roe and D.S. Balsara, *Notes on the EigenSystem of Magnetohydrodynamics*, SIAM Journal of Applied Mathematics **56** (1996), no. 1, 57–67.

[RMJ57] M. Rosenbluth, W. MacDonald, and D. Judd, Phys. Rev., 1957, 1.

[RR60] M. Rosenbluth and N. Rostoker, Phys. Fluids., 1960, 1.

[SF73] G. Strang and G. Fix, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall Inc., 1973.

[SH11] P. Sharma and G.W. Hammett, *A fast semi-implicit method for anisotropic diffusion*, Journal of Computational Physics **230** (2011), no. 12, 4899–4909.

[Sha60] V.D. Shafranov, 1960.

[Sha66] ———, *Plasma equilibrium in a magnetic field*, Reviews of Plasma Physics **2103** (1966).

[SHJ91] F. Shakib, T. J.R. Hughes, and Z. Johan, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics : X. the compressible euler and navier-stokes equations.*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **89** (1991), 141–219.

[Sol68] L.S. Soloviev, 1968, 400.

[SPB10] H.R. Strauss, R. Paccagnella, and J. Breslau, *Wall forces produced during iter disruptions*, Physics of Plasmas **17** (2010), no. 8, 082505.

[SS10] L.E. Sugiyama and H.R. Strauss, *Magnetic x-points, edge localized modes, and stochasticity*, Physics of Plasmas **17** (2010), no. 6, 062505.

[Str76] H.R. Strauss, *Nonlinear three-dimensional magnetohydrodynamics of noncircular tokamaks*, Physics of Fluids **19** (1976), no. 1, 134–140.

[Str77] ———, *Dynamics of high beta tokamaks*, Physics of Fluids **20** (1977), no. 8, 1354–1360.

[Tam07] P. Tamain, *Etude des flux de matière dans le plasma de bord des tokamaks : Alimentation, transport et turbulence*, Ph.D. thesis, Université de Provence (Aix-Marseille I), 2007.

[Tez03] T.E. Tezduyar, *Computation of moving boundaries and interfaces and stabilization parameters*, International Journal for Numerical Methods in Fluids **43** (2003), no. 5, 555–575.

[Tho62] W.B. Thompson, *An introduction to plasma physics*, Pergamon London, 1962.

[TO96] G. Tóth and D. Odstrčil, *Comparison of some flux corrected transport and total variation diminishing numerical schemes for hydrodynamic and magnetohydrodynamic problems*, Journal of Computational Physics **128** (1996), no. 1, 82–100.

[TS06] T.E. Tezduyar and M. Senga, *Stabilization and shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **195** (2006), no. 13-16, 1621–1632, A Tribute to Thomas J.R. Hughes on the Occasion of his 60th Birthday.

[vGSS74] S. von Goeler, W. Stodiek, and N. Sauthoff, *Studies of Internal Disruptions and $m = 1$ Oscillations in Tokamak Discharges with Soft—X-Ray Tecniques*, Phys. Rev. Lett. **33** (1974), 1201–1203.

[Wag82] F. Wagner, Physic Review Letter, 1982, p. 1408.

[Wer10] C. Wervaecke, *Simulation d'écoulements turbulents compressibles par une méthode d'éléments finis stabilisés*, Ph.D. thesis, Université de Bordeaux I, 2010.

[Wes04] J. Wesson, *Tokamaks*, Oxford University Press, 2004.

[Yee66] K. Yee, *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation **14** (1966), 302–307.

Table des figures

1.1 La fusion nucléaire [fusb] 8
1.2 Les sections efficaces des réactions de fusion entre isotopes de l'hydrogène. (D : Deutérium et T : Tritium) 9
1.3 Les réactions de fusion nucléaire 9
1.4 Représentation d'un tokamak 12
1.5 Coordonnées toroïdales 13
1.6 Emboîtement des surfaces magnétiques (ou de flux)[Bob11]. 14
1.7 Représentation du tokamak ITER [fusc] 15
1.8 Comparaison de différents tokamaks actuels et futurs [fusd] 15
1.9 Schéma de principe de la configuration divertor axisymétrique (coupe poloïdale) [Tam07] 16
1.10 Profils de pression typiques en mode L et mode H 17
1.11 Déplacement du cœur du plasma [Has97] 18

2.1 Dimensionnement des vitesses ioniques et soniques 34

3.1 Ondes de Riemann dans le problème de MHD 1D 67

4.1 Cas test de Tube à chocs 83
4.2 Densité ρ du cas test de tube à choc à $t = 0.1s$ 84
4.3 Cas test de tube à choc à $t = 0.1s$ 84
4.4 Cas test de tube à choc à $t = 0.1s$ 84
4.5 Densité ρ dans le tube a choc 85
4.6 Stabilite L^2 suivant σ avec résidu temporel. 100
4.7 Stabilite L^2 pour $\beta = 0$ et $\beta = 0.25$ 101
4.8 Stabilite L^2 pour $\beta = 0.5$ et $\beta = 1$ 102
4.9 Stabilite L^2 suivant σ sans stabilisation temporelle 102
4.10 Stabilite L^2 suivant σ sans stabilisation temporelle pour des cas implicites . 103
4.11 Solution analytique de la densité 104
4.12 Solution obtenue avec la méthode des éléments finis stabilisés 105
4.13 Solution fortement dégradée obtenue avec la méthode des éléments finis stabilisés et le terme de capture de choc 105
4.14 Vérification de l'ordre de convergence. 106
4.15 Solution d'une équation de transport avec la méthode des EFS 107

4.16 Résolution d'une équation de transport avec les méthodes des EFS et semi-implicite de Crank-Nicholson . . . 107
4.17 Triangle $e \in \Omega_h$ . . . 108
4.18 Six fonctions de bases associées au point dans le coin en bas à gauche. Rose=1, Noir=0, . . . 111

5.1 Conductivité thermique anisotrope . . . 125
5.2 Cas test analytique 1 . . . 128
5.3 lignes de niveaux de ψ_{ex} et ψ_{num} . . . 128
5.4 Cas test analytique 2 . . . 130
5.5 Solutions exacte et numérique du $3^{\text{ème}}$ exemple avec les méthodes explicite et implicite . . . 133
5.6 Courant d'entrée : j_c . . . 135
5.7 Maillage de calcul pour les éléments $P1$ . . . 136
5.8 Cas test du Current Hole à $t = 1000$ . . . 137
5.9 Cas test du current hole à $t = 2000$ . . . 137
5.10 Cas test du current hole à $t = 3000$ . . . 138
5.11 Energie cinétique en fonction du temps . . . 139
5.12 Energie magnétique et totale en fonction du temps . . . 139
5.13 Taux de croissance . . . 140
5.14 Densité de courant J du cas test du Current Hole aux temps 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 5600, 6000, 6400, 7000, 8000 et 8800 . . . 141
5.15 Potentiel vitesse φ du cas test du Current Hole aux temps 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 5600, 6000, 6400, 7000, 8000 et 8800 . . . 142
5.16 Vorticité ω du cas test du Current Hole aux temps 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 5600, 6000, 6400, 7000, 8000 et 8800 . . . 143
5.17 Energie cinétique en fonction du temps . . . 144
5.18 Taux de croissance . . . 145
5.19 Maillages utilisés pour la résolution avec les éléments de Bell. . . . 146
5.20 Densité de courant J du cas test du Current Hole aux temps : 0, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000 et 10000 . . . 147
5.21 Potentiel vitesse φ du cas test du Current Hole aux temps : 0, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000 et 10000 . . . 148
5.22 Vorticité ω du cas test du Current Hole aux temps : 0, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000 et 10000 . . . 149
5.23 Energie cinétique en fonction du temps avec les éléments de Bell . . . 150

Modélisations fluides pour les plasmas de fusion : approximation par éléments finis C^1 de Bell

Résumé

Les instabilités fluides peuvent dégrader le confinement du plasma au sein des tokamaks. Etant données les échelles spatio-temporelles rencontrés dans ce contexte, on choisit les modèles fluides obtenus à partir de la dérivation des modèles cinétiques. On dérive plusieurs modèles hiérarchiques de la MagnétoHydro-Dynamique (MHD) et en particulier les modèles de la MHD réduite du « Current Hole » et de l'équilibre de Grad-Shafranov. Une des difficulté de l'ensemble de ces modèles est de respecter l'équation modélisant l'absence de monopôles magnétiques $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$. Pour assurer cette condition en tout point du domaine, le champ magnétique est réécrit avec un potentiel vecteur : $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$. L'utilisation de potentiels fait apparaître des équations faisant intervenir des dérivées d'ordre supérieurs. La stratégie numérique développée est l'utilisation de la méthode des éléments finis avec des éléments C^1 de Bell. Sur un maillage non structuré, ces éléments ont l'intérêt de présenter une base réduite définie exclusivement avec des variables aux noeuds du maillage. Les modèles de MHD réduite du Current Hole et de Grad-Shafranov ont été résolus avec ces éléments. La résolution du cas test de Grad-Shafranov avec les conditions de bords exactes a permis d'obtenir l'ordre optimal de 5. La résolution du système du Current Hole avec ces éléments, validée par l'obtention du paramètre physique $\eta^{1/3}$, a permis l'observation du développement d'instabilités en dents de scies.

Mots Clés : Simulation de plasmas, Modèles fluides, MagnétoHydroDynamique (MHD), Méthode des éléments finis, Eléments C^1 de Bell, MHD réduite.

- -

Fluids modeling of fusion plasmas : approximation with C^1 finite element of Bell

Abstract

Fluid instabilities can degrade plasma confinement in tokamaks. Given the spatial and temporal scales, we choose the fluid models obtained from the derivation of kinetic models. We derived several hierarchical models of MagnetoHydroDynamic (MHD) and in particular models of reduced MHD like the Current Hole and the Grad-Shafranov equilibrium. One of the difficulty of all these models is to respect the absence of magnetic monopoles equation $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$. To ensure this condition at any point, the magnetic field is rewritten with a vector potential $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$. The use of vector potential implies that higher order derivatives appear in the equation. The numerical strategy is developed using the finite elements method with C^1 Bell's elements. On a unstructured mesh, these have the advantage to present a reduced basis with degrees of freedom defined exclusively on the nodes of the mesh. The reduced MHD models of the Current Hole and Grad-Shafranov have thus been resolved with these elements. The resolution of a Grad-Shafranov test case with exact boundary conditions yields the optimal order of 5. The resolution of the Current Hole system with these elements has been validated by obtaining the physical parameter $\eta^{1/3}$ and allowed the observation of the development of sawtooth instabilities.

Keywords : Plasma simulation, Fluid models, MagnetoHydroDynamic (MHD), Finite element method, C^1 Bell's element, Reduced MHD.