



**HAL**  
open science

## Contribution à l'Analyse de Fourier

Frederic Bernicot

► **To cite this version:**

Frederic Bernicot. Contribution à l'Analyse de Fourier. Analyse classique [math.CA]. Université de Nantes, 2013. tel-00846803

**HAL Id: tel-00846803**

**<https://theses.hal.science/tel-00846803>**

Submitted on 20 Jul 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Nantes  
Faculté des Sciences

## HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques

*par*

Frédéric BERNICOT

---

*Sujet :*

CONTRIBUTION À L'ANALYSE DE FOURIER

---

Soutenu le Jeudi 11 Juillet 2013 devant la Commission d'examen :

M. AUSCHER PASCAL	(Examineur)
Mme. GALLAGHER ISABELLE	(Examinatrice)
M. GÉRARD PATRICK	(Examineur)
M. HÉRAU FRÉDÉRIC	(Examineur)
M. PLANCHON FABRICE	(Rapporteur)
M. THIELE CHRISTOPH	(Rapporteur)

Après avis des rapporteurs : M. HOFMANN STEVE  
M. PLANCHON FABRICE  
M. THIELE CHRISTOPH



## Remerciements

Dans ce mémoire, je décris le fruit de recherches que j'ai menées depuis ma thèse de Doctorat (Novembre 2007). Ces travaux ont été réalisés tout d'abord au laboratoire Paul Painlevé (Université Lille 1) puis au laboratoire Jean Leray (Université de Nantes), qui m'ont accueilli en tant que Chargé de Recherche CNRS. Je tiens à remercier le Comité National du CNRS de m'avoir proposé ce poste ainsi que les conditions de travail privilégiées pour mener à bien mes recherches mathématiques et collaborations scientifiques. Je tiens aussi à remercier ces deux laboratoires pour l'environnement professionnel et humain qu'ils m'ont offert. De plus, les résultats obtenus sont le fruit de collaborations qui ont pu voir le jour, notamment grâce au support financier de l'ANR (projet ANR JcJc AFoMEN) que je remercie de sa confiance.

Je voudrais remercier tout particulièrement Pascal Auscher qui a encadré ma thèse et m'a guidé dans mes premiers pas sur ce sujet passionnant qu'est l'Analyse Harmonique réelle, tout en continuant de me soutenir et m'encourager depuis. Je remercie aussi très vivement Steve Hofmann, Fabrice Planchon et Christoph Thiele d'avoir accepté d'écrire un rapport sur cette habilitation ainsi qu'Isabelle Gallagher, Patrick Gérard et Frédéric Hérau de faire partie du jury. Merci à chacun d'entre vous pour l'intérêt que vous portez à mes travaux ainsi que pour tous les échanges que nous avons pu avoir au cours de ces dernières années.

Je souhaite aussi remercier tous mes collaborateurs (-trices) avec qui j'ai eu le plaisir de travailler et qui m'ont tous beaucoup apporté. Je suis aussi reconnaissant envers tous mes amis et collègues avec qui j'ai eu l'occasion d'échanger des conversations fructueuses ainsi que le personnel administratif, technique et informatique qui m'a bien souvent aidé dans différentes tâches.

Enfin, un très très grand merci à toute ma famille pour tout ce qu'ils m'ont apporté et pour m'avoir soutenu tout au long de ces dernières années.

*Les perfections invisibles de Dieu, sa puissance éternelle et sa divinité,  
se voient comme à l'oeil, depuis la création du monde,  
quand on les considère dans ses ouvrages.  
(La Bible - Romains 1 :20)*



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
---------------------	----------

## Chapitre 1

<b>Analyse de Fourier Euclidienne bilinéaire</b>	<b>9</b>
--	----------

1.1	Le cas d'une singularité ponctuelle $\Gamma := \{0\}$	11
1.1.1	Le cas "standard" de la classe $BS_{1,0}^0$	12
1.1.2	Étude de la classe $BS_{\rho,\delta}^m$	13
1.2	Le cas d'une singularité selon une droite dans le plan ( $d = 1$ )	14
1.2.1	Définition d'un calcul pseudo-différentiel bilinéaire intégrant ces singularités	15
1.2.2	Étude de fonctionnelles carrées bilinéaires	16
1.3	Le cas d'une courbe	18
1.4	Le cas des paraproducts "torsadés", $d = 2$ et $\kappa = 2$	20
1.5	Le cas de la sphère en dimension $d \geq 2$	22
1.6	Intégrales oscillantes bilinéaires	23
1.7	Applications aux estimations de dispersion bilinéaires	25
1.7.1	Le cas facile : $\lambda < 0$	26
1.7.2	Le cas "dispersif"	26
1.8	Perspectives	28

## Chapitre 2

<b>Analyse de Fourier non Euclidienne fonctionnelle</b>	<b>31</b>
---	-----------

2.1	Extrapolation via les "atomes"	33
2.2	Interpolation autour des espaces de Hardy, Sobolev	35
2.2.1	Espaces de Hardy	35
2.2.2	Espaces de Sobolev	37
2.3	Inégalités de type "John-Nirenberg"	38
2.4	Théorème $T(1)$ pour un semi-groupe d'opérateur et applications à de nouveaux paraproducts	42

2.4.1	Un nouveau Théorème $T(1)$ . . . . .	42
2.4.2	De “nouveaux” paraproducts et applications . . . . .	44
2.4.3	La paralinéarisation et la propagation de régularité pour des EDPs non- linéaires . . . . .	45
2.4.4	Opérateurs pseudo-différentiels . . . . .	46
2.5	Un résultat de transport pour les espaces de type BMO . . . . .	48
2.5.1	Le transport d’espaces fonctionnels . . . . .	48
2.5.2	Application à l’équation d’Euler 2D . . . . .	49
2.6	Perspectives . . . . .	51
2.6.1	Des inégalités de dispersion par extrapolation . . . . .	51
2.6.2	Une analyse adaptée à un semi-groupe d’opérateur vectoriel . . . . .	52
2.6.3	Différentes équations de la mécanique des fluides . . . . .	53

<b>Chapitre 3</b> <b>Bibliographie</b>
---

Articles personnels. . . . .	56
Références. . . . .	58

# Introduction

Dans ce mémoire, nous allons détailler des résultats, obtenus depuis ma thèse. Poursuivant dans les directions de celle-ci, mes différents travaux ont porté sur divers problèmes d'analyse harmonique réelle (principalement en lien avec l'analyse de Fourier), des applications pour l'étude des EDPs et l'étude d'inclusions différentielles.

Nous nous consacrerons ici seulement sur l'étude de différents aspects que peut revêtir l'analyse de Fourier, qui sont apparus dans mes recherches ainsi que sur quelques applications tournées vers l'étude d'EDPs.

Le coeur de l'analyse de Fourier réside dans la procédure suivante : afin d'étudier un objet mathématique (une fonction, un opérateur, un espace fonctionnel, ...), on le décompose en objets élémentaires, vérifiant certaines propriétés supplémentaires. Le but et la difficulté de l'analyse est alors d'utiliser des informations sur ces objets élémentaires et de les sommer (le plus finement possible) afin d'obtenir l'information désirée sur l'objet initial. Le qualificatif "de Fourier" fait ici référence au fait que l'opération de décomposition sera toujours associée à une décomposition *temps-fréquence*.

Nous allons nous consacrer à deux cadres différents (mais pas complètement indépendants) d'application de cette "technique" :

- L'analyse de Fourier Euclidienne bilinéaire : plus précisément, l'étude des continuités dans les espaces de Lebesgue d'opérateurs bilinéaires, définis en fréquence par la transformée de Fourier (principalement les multiplicateurs de Fourier bilinéaires). Ici, le caractère "Euclidien" renvoie à l'utilisation de la transformée de Fourier. Nous décrirons aussi une application pour l'analyse d'EDPs présentant une non-linéarité quadratique ainsi que l'obtention d'estimations bilinéaires de dispersion.
- L'analyse de Fourier non Euclidienne fonctionnelle : le but sera de définir un cadre où la notion de "fréquence" n'est plus donnée par la transformée de Fourier mais nous travaillerons sur la notion plus générale "d'oscillations". Ceci permet de nous extraire du cadre Euclidien et de travailler dans un espace de type homogène, ou une variété Riemannienne. Nous essaierons alors d'étudier certaines propriétés d'espaces fonctionnels ainsi que certains opérateurs, définis par l'intermédiaire de ces oscillations. L'utilisation de la notion d'oscillations permet de travailler sur un espace ambiant plus général mais permet aussi d'adapter l'analyse à un opérateur générant un semi-groupe.

Ces deux cadres présentent un aspect commun : une "analyse temps-fréquence". Cette analyse est une situation particulière de l'analyse de Fourier où nous avons besoin de décomposer notre objet mathématique, non pas dans l'espace physique ou dans l'espace fréquentiel, mais simultanément dans les deux espaces, tout en respectant le principe d'incertitude d'Heisenberg. Dans le cadre de l'analyse de Fourier Euclidienne, la transformée de Fourier permet de donner une notion très pratique de "fréquence" et de décomposition "fréquentielle". Dans le cadre de l'analyse fonctionnelle, la notion de "fréquence" sera donnée par des opérateurs, appelés "opérateurs

d’oscillation”. Nous verrons comment on peut alors transposer certaines techniques Euclidiennes à ce cadre et de ce fait étendre “l’analyse temps-fréquence” à des espaces non-Euclidiens très généraux (tels que ensembles fractals, variétés Riemanniennes, ...).

### Analyse de Fourier Euclidienne bilinéaire

Les travaux présentés dans cette partie ont principalement pour but de comprendre la continuité des multiplicateurs de Fourier bilinéaires dans les espaces de Lebesgue. La théorie linéaire est assez bien connue depuis un certains temps mais le cadre bilinéaire apporte des nouveautés et des difficultés supplémentaires. Détaillons tout d’abord une différence essentielle (peut-être la plus importante).

Un multiplicateur de Fourier linéaire sur  $\mathbb{R}^d$  est un opérateur  $T$  linéaire continu de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  tel que  $T$  commute avec toutes les translations. De manière équivalente, on a les caractérisations suivantes :

- Représentation fréquentielle : il existe un symbole  $m \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  tel que pour toutes fonctions  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle T(f), g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} m(\xi) \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi.$$

- Représentation spatiale : il existe un noyau  $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  tel que pour toute fonction  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$T(f)(x) = \langle K, f(x - \cdot) \rangle.$$

Une propriété essentielle et très facile (application directe de l’égalité de Plancherel) est la suivante : un tel opérateur  $T$  est continu sur  $L^2$  si et seulement si son symbole  $m$  est borné et

$$\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \|m\|_{L^\infty}.$$

On a donc une caractérisation très simple de la continuité  $L^2$ .

Examinons maintenant le cadre bilinéaire. Soit  $T$  un opérateur bilinéaire continu de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ . Alors  $T$  est dit un multiplicateur de Fourier bilinéaire s’il vérifie une des trois propriétés suivantes équivalentes :

- Représentation fréquentielle : il existe un symbole  $m \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$  tel que pour toutes fonctions  $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle T(f, g), h \rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} m(\xi, \eta) \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\eta) \overline{\widehat{h}(\xi + \eta)} d\xi d\eta. \quad (1)$$

- Représentation spatiale : il existe un noyau  $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$  tel que pour toutes fonctions  $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$T(f, g)(x) = \langle K, f(x - \cdot) \otimes g(x - \cdot) \rangle.$$

- Commutativité : Pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  et toutes fonctions  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$T(\tau_y(f), \tau_y(g)) = \tau_y(T(f, g))$$

où  $\tau_y$  est l’opérateur de translation  $\tau_y(f)(x) := f(x - y)$ .

Alors dans ce cas, un critère simple pour assurer une continuité  $L^2 \times L^2 \rightarrow L^1$  (ou par dualité  $L^2 \times L^\infty \rightarrow L^2$ ) est loin d’être évident. Une condition nécessaire est que le symbole  $m$  soit borné. Mais nous savons qu’il existe des symboles  $m \in C_b^\infty$  (régulier avec toutes ses dérivées bornées) tels que l’opérateur associé ne soit pas borné de  $L^2 \times L^2$  dans  $L^1$  ([41]).

---

Donc une différence importante est celle-ci : dans le cadre bilinéaire, nous n'avons aucun critère simple sur un multiplicateur de Fourier pour en assurer une première continuité !

En reprenant cette analogie, nous voyons que dans le cadre linéaire la continuité la plus facile à obtenir est la continuité  $L^2$ . Cette continuité n'a pas d'équivalent dans le cadre bilinéaire, néanmoins nous souhaitons faire une observation qui sera illustrée tout au long de ce mémoire : Pour montrer qu'un opérateur bilinéaire est continu de  $L^p \times L^q$  dans  $L^{r'}$ , la situation la plus simple (mais qui reste souvent encore très difficile) est le cas appelé "local- $L^2$ " et qui correspond à  $p, q, r \in [2, \infty]$ . L'appellation provient du fait suivant : par dualité, cette continuité est équivalent à une estimation du type

$$|\langle T(f, g), h \rangle| \lesssim \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \|h\|_{L^{r'}}, \quad (2)$$

et les trois fonctions test  $f, g, h \in L^2_{\text{loc}}$ . De ce fait, nous pouvons profiter localement d'outils  $L^2$  pour l'analyse temps-fréquence.

On remarque que pour une continuité  $L^p$  d'un opérateur linéaire, le cas "local- $L^2$ " correspond alors au cas spécifique  $p = 2$  qui est en effet la situation la plus facile.

Les travaux que nous allons présenter rentrent dans le programme suivant (qui a suscité l'intérêt de nombreux mathématiciens et travaux ces dernières années) :

Trouver des critères de régularité (les plus optimaux) sur un symbole bilinéaire  $m$  qui impliquent des continuités sur les espaces de Lebesgue.

(3)

Dans cette étude, la décomposition qui intervient dans l'analyse de Fourier est une décomposition "temps-fréquence". Certaines théories "linéaires" peuvent être comprises en ne considérant que l'espace physique (décomposition de Calderón-Zygmund, ...) ou que l'espace des fréquences (théorie de Littlewood-Paley, ...). Le cadre bilinéaire et la difficulté des problèmes liés aux singularités éventuelles du symbole vont nous obliger à considérer les deux espaces simultanément, d'où le terme de décomposition "temps-fréquence".

En effet, nous allons chercher à tirer avantage des deux écritures : spatiale avec le noyau (décomposition en espace physique) et fréquentielle avec le symbole (décomposition en fréquence). Pour cela, on partitionne l'espace produit en "feuilles" respectant le principe d'incertitude d'Heisenberg : on privilégie une localisation exacte en fréquence et de ce fait une localisation "presque exacte" en espace. Cette décomposition peut être assimilée à une décomposition en ondelettes.

En décomposant ainsi les fonctions, on est capable d'obtenir des informations au niveau "élémentaire", qu'il nous faut sommer de manière précise.

Nous décrirons aussi quelques critères pour des opérateurs bilinéaires plus généraux :

- lorsque le symbole  $m$  peut dépendre aussi de la variable spatiale pour définir un cadre d'opérateurs pseudo-différentiels bilinéaires ;
- lorsque nous multiplions le symbole par un facteur oscillant et recherchons une version bilinéaire des estimations d'intégrales oscillantes.

Nous motiverons toute cette étude par des applications pour des inégalités de dispersion bilinéaires. En effet, en utilisant une approche "résonances espace-temps", ces opérateurs bilinéaires apparaissent naturellement dans l'étude EDPs présentant une non-linéarité quadratique.

Dans cette analyse les difficultés sont essentiellement dues à des problèmes de géométries dans l'espace fréquentiel  $\mathbb{R}^{2d}$  :

- Pour de grandes dimension  $d \geq 2$ , le symbole  $m$  considéré peut avoir des singularités (des discontinuités) sur un sous-ensemble de dimension  $\kappa \leq 2d - 1$ . Plus cette dimension  $\kappa$  est grande, plus l'opérateur est difficile à étudier. Nous verrons que dès  $\kappa \geq 2$ , l'analyse est très compliquée et peu de résultats sont aujourd'hui connus.
- Dans l'écriture fréquentielle (1), nous voyons que les trois variables importantes et duales sont  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\xi + \eta$ . Par exemple en dimension  $d = 1$ , nous avons donc trois directions données par  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  et  $\xi + \eta = 0$ , appelées directions dégénérées qui vont présenter des difficultés. Comme nous allons le voir, l'étude requiert alors que le symbole présente des singularités sur des directions autres que ces trois directions "interdites". En dimension  $d \geq 2$ , le problème est beaucoup plus délicat et la notion de plan dégénéré est beaucoup plus technique à écrire.

### Analyse de Fourier non-Euclidienne fonctionnelle

Dans cette partie, nous allons présenter des travaux qui ont pour but de généraliser différents résultats connus de l'analyse Euclidienne, à un cadre où la transformée de Fourier ne peut être utilisée pour définir la notion de "fréquence".

En effet, la notion de fréquence est directement associée à celle de transformation de Fourier, qui n'existe que dans un cadre Euclidien (ou plus généralement nécessite une structure de groupe). La motivation est de pouvoir étendre les résultats connus sur l'espace Euclidien à un cadre plus général (variété Riemannienne, espace métrique, ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , ...).

Nous allons voir comment la notion de "fréquence" peut être remplacée par celle (plus générale mais moins maniable) d'"oscillations". Le cadre va donc être le suivant : dans un espace de type homogène  $(X, d, \mu)$  à chaque boule  $Q$ , y sera associé un opérateur d'oscillation  $B_Q$ . L'exemple standard est celui donné par la moyenne,  $B_Q(f) = f - \left( \int_Q f d\mu \right) \mathbf{1}_Q$ . Mais il peut être plus judicieux dans certains cas de considérer l'oscillation donnée par un semi-groupe  $B_Q(f) = f - e^{-r_Q^2 \Delta}(f)$  par exemple. Pour prendre en compte plus de "cancellation" adaptée au semi-groupe, il peut être préférable de prendre  $B_Q(f) = (I - e^{-r_Q^2 \Delta})^M(f)$  avec un entier assez grand ...

Le but des différents travaux présentés va être d'adapter des résultats standards d'analyse harmonique Euclidienne, à un cadre donné par ces opérateurs d'oscillations et de comprendre quelles sont les propriétés essentielles et nécessaires à supposer sur ces opérateurs. Nous allons voir en autre comment adapter :

- La notion d'"atomes" et obtenir des résultats d'extrapolation ;
- La définition d'espace de Hardy atomique (resp. Hardy-Sobolev) et l'interpolation avec les espaces de Lebesgue (resp. Sobolev) ;
- Inégalités de type John-Nirenberg ;
- Un théorème  $T(1)$  pour des paraproducts définis à partir d'un semi-groupe d'opérateur ;
- Étude d'opérateurs pseudo-différentiels ;
- Propriété d'algèbre pour des espaces de Sobolev et paralinéarisation.

Pour motiver cette étude, citons tout d'abord quelques situations où clairement l'analyse fréquentielle, associée à une transformation de Fourier ne peut être adaptée :

- Un espace métrique  $(X, d, \mu)$  muni d'un semi-groupe (par exemple, un ensemble fractal où le semi-groupe est généré par la forme de Dirichlet) ;
- Un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  avec bord ;
- Une variété Riemannienne ...

---

Dans tous ces cas, même localement, on ne peut pas réduire par l'intermédiaire de cartes l'analyse à une analyse Euclidienne. Il est donc très intéressant de pouvoir se soustraire du cadre Euclidien.

Voyons comment nous pouvons conserver ce point de vue d'analyse de Fourier et de décomposition "temps-fréquence", dans un tel contexte. Nous allons donc travailler avec  $\mathbb{B} := (B_Q)_{Q \in \mathcal{Q}}$  une collection d'opérateurs d'oscillations, indexée par l'ensemble des boules. A chaque boule  $Q \subset X$  de rayon  $r(Q)$ , on note  $A_Q := \text{Id} - B_Q$ . Le point de vue va être le suivant :

- Les opérateurs  $A_Q$  vont servir à la décomposition en espace. Nous allons voir que l'on demande principalement à ces opérateurs de vérifier des décroissances hors-diagonales  $L^p - L^q$  à l'échelle de la boule  $Q$  avec  $1 \leq p < q \leq \infty$ . Autrement dit,  $A_Q$  doit faire "gagner" de l'intégrabilité.
- Les opérateurs  $B_Q$  vont servir eux à la décomposition en "fréquence". De manière abstraite,  $B_Q$  peut être considéré comme un projecteur sur les fréquences d'ordre  $r(Q)^{-1}$  et localisé en espace autour de la boule  $Q$ .

On retrouve ainsi cette approche de décomposition simultanée, scalée au principe d'incertitude d'Heisenberg. Il est clair que cette approche est beaucoup moins "pratique" que la décomposition temps-fréquence Euclidienne mais comme nous allons le voir elle est suffisante pour adapter de nombreux raisonnements d'analyse harmonique réelle.

De plus, nous intégrons dans cette partie, des travaux récents sur l'étude du transport d'espaces de type BMO par une application préservant la mesure. En effet, le transport de l'espace BMO par composition avec une application  $\phi$ , préservant la mesure, revient à étudier les oscillations définies par

$$B_Q(f) := f - \left( \int_{\phi(Q)} f d\mu \right).$$

Ainsi le problème se réduit à comprendre comment les ensembles  $\phi(Q)$  peuvent être approchés par des boules, en utilisant la propriété de conservation de la mesure du changement de variable  $\phi$ . Ce type de problème n'est donc pas directement lié au cadre présenté ci-dessus mais rentre dans le même programme : comprendre et adapter l'analyse de Fourier pour différents types d'oscillations. Nous en décrivons une application : comment obtenir un cadre bien adapté pour l'équation d'Euler.

Dans toute cette partie, les difficultés sont les suivantes :

- La structure d'opérateurs d'oscillation  $B_Q$  est beaucoup moins maniable que la structure fréquentielle Euclidienne, mais elle a l'avantage d'être plus générale ;
- Pour chaque propriété d'analyse harmonique que nous souhaitons étendre par un point de vue "oscillations", il faut comprendre et extraire les arguments importants et les adapter à ce nouveau cadre. Le fait de travailler sur un espace de type homogène nous permet néanmoins d'utiliser les outils "de base" d'analyse, tels que les cubes dyadiques, lemmes de recouvrement, fonction maximale, ...

## Articles personnels correspondants aux résultats décrits :

Les articles avec une (\*) sont ceux de ma thèse et nous nous concentrons surtout sur les autres travaux.

### Partie 1 : Analyse de Fourier Euclidienne bilinéaire

- (\*) F. Bernicot, Local estimates and global continuities in Lebesgue spaces for bilinear operators, *Anal. PDE* **1** (2008), 1–27.
- (\*) F. Bernicot, Uniform estimates for multilinear Paraproducts, *Rev. Mat. Iberoamericana* **25** (2009), no.3, 1055–1088.
- (\*) F. Bernicot, Bilinear Pseudo-differential Calculus, *J. Geom. Anal.* **20** (2010), no.1, 39–62.
- F. Bernicot,  $L^p$  boundedness for nonsmooth bilinear Littlewood-Paley square functions, *Math. Ann.* **351** (2011), no. 1, 1–49.
- F. Bernicot & P. Germain, Bilinear oscillatory integrals and boundedness for new bilinear multipliers, *Adv. in Math.* **225** (2010), 1739–1785.
- F. Bernicot & R. Torres, Sobolev space estimates for a class of bilinear pseudodifferential operators lacking symbolic calculus, *Anal. PDE* **4** (2011), no. 4, 551–571.
- F. Bernicot & S. Shrivastava, Boundedness of smooth bilinear square functions and applications to some bilinear pseudo-differential operators, *Indiana Univ. Math.* **60** (2011), no. 1, 233–268.
- F. Bernicot, Fiber-wise Calderón-Zygmund decomposition and application to a bidimensional paraproduct, *Illinois Journ. Maths.* (2012).
- F. Bernicot & P. Germain, Boundedness of bilinear multipliers whose symbols have a narrow support, *J. Anal. Math.* **119** (2013), 165–212.
- F. Bernicot, D. Maldonado, K. Moen & V. Naibo, Bilinear Sobolev-Poincaré inequalities and Leibniz-type rules, *J. Geom. Anal.* (2013).
- F. Bernicot & P. Germain, Bilinear dispersive estimates via space-time resonances. Part I : the one dimensional case. *Anal. PDE* (2013).
- A. Benyi, F. Bernicot, D. Maldonado, V. Naibo & R. Torres, On the Hörmander classes of bilinear pseudodifferential operators II. *Indiana Univ. Math. J.* (2013).
- F. Bernicot, L. Grafakos, L. Song and L.X. Yan, Boundedness of bilinear multipliers and applications to bilinear Bochner-Riesz means, *Soumis arxiv* :1212.4018.

### Partie 2 : Analyse de Fourier non-Euclidienne fonctionnelle

- (\*) F. Bernicot & J. Zhao, New Abstract Hardy Spaces, *J. Funct. Anal.* **255** (2008), 1761–1796.
- F. Bernicot, Real interpolation of abstract Hardy spaces and applications to the bilinear theory, *Math. Z.* **265** (2010), 365–400.
- F. Bernicot, Maximal inequalities for dual Sobolev spaces  $W^{-1,p}$  and applications to interpolation, *Math. Res. Lett.* **16** (2009), no.5, 763–778.
- N. Badr & F. Bernicot, Abstract Hardy-Sobolev spaces and interpolation, *J. Funct. Anal.* **256** (2009), no. 8, 2561–2586.
- F. Bernicot & J. Zhao, Abstract framework for John Nirenberg inequalities and applications to Hardy spaces, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* **11** (2012), no. 3, 475–501.
- F. Bernicot, A  $T(1)$ -Theorem in relation to a semigroup of operators and applications to new paraproducts, *Trans. Amer. Math. Soc.* **364** (2012), 6071–6108.

- 
- F. Bernicot & J.M. Martell, Self-improving properties for abstract Poincaré type inequalities, *Soumis* arxiv :1107.2260.
  - N. Badr, F. Bernicot & E. Russ, Algebra properties for Sobolev spaces - Applications to semilinear PDE's on manifolds, *J. Anal. Math.* **118** (2012), 509–544.
  - F. Bernicot & Y. Sire, Propagation of low regularity for solutions of nonlinear PDEs on a Riemannian manifold with a sub-Laplacian structure, *Ann. I. H. Poincaré - AN* (2013).
  - F. Bernicot & S. Keraani, On the global well-posedness of the 2D Euler equations for a large class of Yudovich type data. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* (2013).
  - F. Bernicot & S. Keraani, Sharp constants for composition with a bi-Lipschitz measure-preserving map, *Soumis* arxiv :1204.6008.
  - F. Bernicot & D. Frey, Pseudo-differential operators on a metric spaces, *Soumis* arxiv :1212.2349.

## Notations et Vocabulaire

Commençons par quelques notations classiques :

On note  $x \lesssim y$  pour signifier qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que  $x \leq cy$  et dans ce cas la constante  $c$  est une constante universelle numérique qui ne dépend pas des différents paramètres importants de l'inégalité.

Dans toute la première partie du manuscrit, nous travaillerons sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$ . On considère  $\mathbb{R}^d$  muni de la distance euclidienne, que l'on notera  $|\cdot|$  pour ne pas confondre avec les normes fonctionnelles. Pour  $z \in \mathbb{R}^d$ , on note  $\tau_z$  l'opération de translation de vecteur  $z$ ,  $\tau_z(f)(x) := f(x - z)$ . Pour  $I$  un cube (ou une boule) de  $\mathbb{R}^d$ , une fonction  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  est dite adaptée à  $I$ , si  $f$  est supportée sur  $I$  et  $\|\partial^\alpha f\|_\infty \lesssim |I|^{-\frac{|\alpha|}{d}}$ , où  $|I|$  est la mesure (de Lebesgue) de  $I$ .

Dans la seconde partie, nous travaillerons sur un espace de type homogène  $(X, d, \mu)$ . On note  $B := B(x, r)$  la boule de centre  $x \in X$  et de rayon  $r > 0$  et pour  $\lambda > 0$ ,  $\lambda B := B(x, \lambda r)$ . La mesure  $\mu$  est donc supposée doublante, c'est à dire que

$$\mu(B(x, 2r)) \lesssim \mu(B(x, r)).$$

Nous noterons  $\mathcal{Q} := (B(x, r))_{x \in X, r > 0}$  la collection de toutes les boules de  $X$ .

\* Notations des différents espaces fonctionnels :

Nous notons  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  l'espace de Schwartz sur  $\mathbb{R}^d$  : l'ensemble des fonctions à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées. L'espace dual  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  correspond à l'espace des distributions tempérées. Soit  $(X, d, \mu)$  un espace mesuré pour  $p \in ]0, \infty]$ , on note  $L^p(X, d\mu)$  l'ensemble de Lebesgue des fonctions mesurable sur  $X$ ,  $p$ -intégrable pour la mesure  $\mu$ . On associe la norme :

$$\|f\|_{p, d\mu, X} := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Dans le cadre euclidien, on note  $L^{p,s}$  l'espace à poids associé à la norme

$$\|f\|_{L^{p,s}} := \|(1 + |x|^2)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p}.$$

\* Notations des différents opérateurs :

On définit la transformée de Fourier sur  $\mathbb{R}^d$  par :

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Sur un espace de type homogène  $(X, d, \mu)$ , on note  $\mathcal{M}$  la fonction maximale de Hardy-Littlewood défini par :

$$\forall f \in L^1_{loc}(X) \quad \mathcal{M}(f)(x) := \sup_{x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu.$$

Puis par extension pour  $p \in [1, \infty)$ ,  $\mathcal{M}_p(f) := \mathcal{M}(|f|^p)^{\frac{1}{p}}$ .

\* Vocabulaire :

Dans  $\mathbb{R}^2$ , trois droites (ou directions) sont dites dégénérées (ou interdites) :  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}$ ,  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\}$  et  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$ .

Pour trois exposants  $(p, q, r)$ , dans le contexte d'une continuité d'un opérateur bilinéaire de  $L^p \times L^q$  dans  $L^r$  ; le cas local- $L^2$  réfère à la situation où  $p, q, r' \in [2, \infty]$ .

# Chapitre 1

## Analyse de Fourier Euclidienne bilinéaire

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Le cas d’une singularité ponctuelle <math>\Gamma := \{0\}</math></b> . . . . .	<b>11</b>
1.1.1	Le cas “standard” de la classe $BS_{1,0}^0$ . . . . .	12
1.1.2	Étude de la classe $BS_{\rho,\delta}^m$ . . . . .	13
<b>1.2</b>	<b>Le cas d’une singularité selon une droite dans le plan (<math>d = 1</math>)</b> . . . . .	<b>14</b>
1.2.1	Définition d’un calcul pseudo-différentiel bilinéaire intégrant ces singularités . . . . .	15
1.2.2	Étude de fonctionnelles carrées bilinéaires . . . . .	16
<b>1.3</b>	<b>Le cas d’une courbe</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>1.4</b>	<b>Le cas des paraproduits “torsadés”, <math>d = 2</math> et <math>\kappa = 2</math></b> . . . . .	<b>20</b>
<b>1.5</b>	<b>Le cas de la sphère en dimension <math>d \geq 2</math></b> . . . . .	<b>22</b>
<b>1.6</b>	<b>Intégrales oscillantes bilinéaires</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>1.7</b>	<b>Applications aux estimations de dispersion bilinéaires</b> . . . . .	<b>25</b>
1.7.1	Le cas facile : $\lambda < 0$ . . . . .	26
1.7.2	Le cas “dispersif” . . . . .	26
<b>1.8</b>	<b>Perspectives</b> . . . . .	<b>28</b>

---

L'analyse de Fourier bilinéaire (et multilinéaire) a été l'objet de nombreux travaux de recherche ces dernières années. Celle-ci constitue principalement en l'adaptation de la théorie linéaire pour le cadre bilinéaire et l'introduction de nouveaux outils spécifiques.

L'opérateur bilinéaire le plus simple est le produit ponctuel  $\Pi$ , défini par

$$\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \Pi(f, g)(x) := f(x)g(x).$$

Les inégalités de Hölder correspondent alors aux continuités de cet opérateur dans les espaces de Lebesgue : ainsi pour tout exposant  $p_1, q_2, p \in (0, \infty]$  vérifiant le scaling de Hölder

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}, \quad (1.1)$$

l'opérateur  $\Pi$  est continu de  $L^{p_1}(\mathbb{R}^d) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^p(\mathbb{R}^d)$ . Une question naturelle alors apparaît : Quelles sont les modifications de cet opérateur qui préservent ces continuités ?

De manière similaire au cadre linéaire, un opérateur  $T$  bilinéaire continu de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  admet la formulation "fréquentielle" suivante : il existe un symbole  $\sigma \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{2d})$  tel que

$$\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad T(f, g)(x) = T_\sigma(f, g)(x) := \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{ix \cdot (\xi + \eta)} \sigma(x, \xi, \eta) \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\eta) d\xi d\eta. \quad (1.2)$$

L'opérateur de produit  $\Pi$  correspondant au cas du symbole constant  $\sigma = 1$ .

Une classe d'opérateurs déjà très intéressante est celle des multiplicateurs de Fourier bilinéaires, qui correspondent à un symbole  $\sigma$  indépendant de la variable  $x$ . De manière équivalente, ce sont les opérateurs bilinéaires  $T$  qui vérifient une propriété de commutativité avec les translations simultanées :

$$\tau_a(T(f, g)) = T(\tau_a(f), \tau_a(g))$$

pour tout  $a \in \mathbb{R}^d$  (ici  $\tau_a$  est l'opérateur de translation de paramètre  $a$ ). Un tel opérateur peut être continu de  $L^{p_1} \times L^{p_2}$  dans  $L^p$  à condition que les exposants vérifient un scaling "sous-Hölderien" :

$$\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}. \quad (1.3)$$

Le scaling Hölderien (1.1) apparaissant alors comme un cas limite.

Dans cette partie, je vais détailler mes travaux qui s'inscrivent dans le programme suivant :

Donner des critères de régularité en fréquence sur le symbole  $\sigma$ , afin que  $T_\sigma$  soit continu de  $L^{p_1}(\mathbb{R}^d) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

Cette étude va être faite selon "la dimension" de l'ensemble de singularité (en fréquence) que l'on autorise pour le symbole. Soit  $\Gamma$  un sous-ensemble du plan fréquentiel  $\mathbb{R}^{2d}$  de dimension  $\kappa \leq 2d-1$ . Nous supposons principalement que le symbole  $\sigma$  vérifiera les conditions de régularité suivante :

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\eta^\gamma \sigma(x, \xi, \eta) \right| \lesssim (1 + d((\xi, \eta), \Gamma))^{-|\beta| - |\gamma|} \quad (1.4)$$

ou si on s'intéresse aux multiplicateurs  $\sigma(x, \xi, \eta) = m(\xi, \eta)$ , nous supposons la condition homogène :

$$\left| \partial_\xi^\beta \partial_\eta^\gamma m(\xi, \eta) \right| \lesssim d((\xi, \eta), \Gamma)^{-|\beta| - |\gamma|} \quad (1.5)$$

Le cas le plus facile est celui où  $\Gamma$  est réduit à un point ( $\kappa = 0$ ), il correspond à la version bilinéaire des classes symbolique de Hörmander. Les opérateurs associés peuvent alors être étudiés par des techniques linéaires (Théorie de Calderón-Zygmund, Littlewood-Paley, ...). Nous détaillerons notre contribution dans ce cadre à la section 1.1.

Le situation suivante est celle où  $\Gamma$  est de dimension 1. Nous nous concentrerons dans la Section 1.2 alors au cas uni-dimensionnel  $d = 1$  avec des continuités sous le scaling Hölderien. Ce cadre est beaucoup plus difficile que le précédent et nécessite une analyse temps-fréquence très fine, adaptée au cas uni-dimensionnel. Il permet de traiter des symboles admettant une singularité selon une droite  $\Gamma$  du plan fréquentiel (excepté 3 droites “interdites”  $\{\xi = 0\}$ ,  $\{\eta = 0\}$  et  $\{\xi + \eta = 0\}$ ). Le prototype de ces opérateurs est la transformée de Hilbert bilinéaire.

Motivés par l'application en EDPs, sur des estimations de dispersion bilinéaire (détaillée en Section 1.7), nous nous sommes aussi concentrés au cas où  $\Gamma$  est toujours de dimension 1, mais est une courbe du plan fréquentiel ( $d = 1$ ). Dans ce cas, nous avons examiné comment des propriétés géométriques de cette courbe permettait d'avoir des informations de continuités, dans un scaling sous-Hölderien (1.3).

Une grande difficulté (qui n'est toujours pas comprise) dans l'analyse bilinéaire est l'adaptation de ces résultats dans un cadre multi-dimensionnel. En effet, dès que  $d \geq 2$  alors  $\Gamma$  peut avoir une (trop) grande dimension qui va poser des problèmes de géométrie. De plus, l'interaction de différentes coordonnées entre-elles apporte une nouvelle difficulté, comme expliqué en Section 1.4. Nous détaillerons alors ce que nous avons pu obtenir pour un cas très particulier : les paraproducts “torsadés”, qui correspondent à la situation  $d = 2$  et  $\kappa = 2$ .

Il y a très peu de résultats dans la littérature pour des singularités de dimension  $\kappa \geq 2$  en dimension  $d \geq 2$ . L'exemple précédent est un premier cas, où nous avons réussi à obtenir des continuités. Nous nous sommes aussi intéressés (Section 1.5) au cas spécifique de la sphère :  $\Gamma = \mathbb{S}^{2d-1}$ ,  $d \geq 2$  et  $\kappa = 2d - 1$ . Le cas de la sphère est intéressant car l'invariance par rotation (le caractère radial du symbole) permet “implicitement” de réduire les problèmes liés à la dimension. Nous avons pu alors obtenu des résultats de continuité non-triviaux, étroitement liés à la version bilinéaire des multiplicateurs de Bochner-Riesz.

Motivés par des applications pour le scattering des EDPs (détaillées en Section 1.7), nous avons examiné un problème un peu différent : l'étude d'opérateurs bilinéaires avec un symbole très oscillant. En se plaçant loin du scaling Hölderien, nous avons pu alors obtenir une version bilinéaire d'estimations d'intégrales oscillantes bilinéaires, qui correspondent au cas où le symbole présente un certaine singularité sur un ensemble  $\Gamma$  de dimension maximale  $\kappa = 2d - 1$ . Les singularités étudiées ici sont un peu différentes de celles étudiées dans les autres sections, elles sont dues au caractère oscillant du symbole.

Puis nous finirons, en Section 1.7 par combiner ces différents résultats pour étudier des propriétés de scattering en utilisant l'approche des résonances “espace-temps”.

## 1.1 Le cas d'une singularité ponctuelle $\Gamma := \{0\}$

Dans cette section, nous allons nous concentrer sur l'étude des opérateurs bilinéaires dont le symbole vérifie des hypothèses de type Hörmander (1.7) par rapport à un point. Les modulations (translations en fréquence) préservant les espaces de Lebesgue, on peut considérer que ce point est le point  $0 \in \mathbb{R}^{2d}$ . Les classes de symboles que nous allons considérer sont les versions bilinéaires des classes de symboles linéaires  $S_{\rho,\delta}^m$  introduites par Hörmander [82] et bien connues en calcul pseudo-différentiel.

**Définition 1.1.1.** Soit  $\delta, \rho \geq 0$  et  $m \in \mathbb{R}$ . Un symbole bilinéaire  $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^{3d})$  appartient à la classe  $BS_{\rho,\delta}^m$  si pour tous multi-indices  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ ,

$$\sup_{x,\xi,\eta \in \mathbb{R}^d} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\eta^\gamma \sigma(x, \xi, \eta) \right| (1 + |\xi| + |\eta|)^{-m - \delta|\alpha| + \rho(|\beta| + |\gamma|)} < \infty.$$

L'espace  $BS_{\rho,\delta}^m$  muni de ces normes est un espace de Fréchet.

Nous voyons bien ici que la régularité du symbole  $\sigma$  est contrôlée en terme de puissances de la quantité  $(1 + |\xi| + |\eta|) = 1 + d((\xi, \eta), (0, 0))$ . Dans le cas d'un symbole ne dépendant pas de la variable spatiale  $x$ , il peut être plus pratique de travailler avec la définition homogène où  $(1 + |\xi| + |\eta|)$  est substitué par  $(|\xi| + |\eta|)$ .

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la question suivante :

Pour  $p_1, p_2, p$  fixés vérifiant (1.1) ou (1.3), à quelles conditions sur  $m, \rho, \delta$  les symboles de la classe  $BS_{\rho,\delta}^m$  induisent des opérateurs bornés sur  $L^{p_1} \times L^{p_2}$  dans  $L^p$  ?

(1.6)

Autrement dit, nous désirons comprendre comment peut on compenser des "defaults" de régularités du symbole (mesurés par  $\rho, \delta$ ) par son amplitude (mesurée par  $m$ ).

### 1.1.1 Le cas "standard" de la classe $BS_{1,0}^0$

Les symboles  $\sigma$  de la classe  $BS_{1,0}^0$  vérifient la régularité suivante :

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\eta^\gamma \sigma(x, \xi, \eta) \right| \lesssim (1 + |(\xi, \eta)|)^{-|\beta| - |\gamma|}. \quad (1.7)$$

Ces conditions sont apparues dans les travaux de Coifman et Meyer [51, 50, 52, 53]. En effet le prototype d'opérateurs bilinéaires vérifiant ces conditions est le *paraproduit*, introduit par Bony [43] qui a eu une grande importance dans l'étude des EDPs non linéaires. Le praproduit est un moyen de décomposer le produit ponctuel, en préservant les régularités d'une des deux fonctions : associé a deux troncatures  $\phi_t, \psi_t$  en fréquence ( $\phi_t$  sur  $B(0, t^{-1})$  et  $\psi_t$  sur  $B(0, 2t^{-1}) \setminus B(0, t^{-1})$ ), on note  $\Psi_t$  et  $\Phi_t$  les opérateurs obtenus par convolution, le paraproduit d'une fonction  $f$  par une autre fonction  $g$  est défini par

$$\Pi_g(f) := \int_0^\infty \Psi_t(f) \Phi_t(g) \frac{dt}{t}. \quad (1.8)$$

Un opérateur dont le symbole vérifie (1.7) est plus communément appelé un opérateur "de Coifman-Meyer". Il est bien connu que ces opérateurs sont bornés sur les espaces de Lebesgue  $L^{p_1}(\mathbb{R}^d) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^p(\mathbb{R}^d)$  pour  $p_1, p_2 \in (1, \infty)$  et  $p \in (\frac{1}{2}, \infty)$  donné par (1.1).

Plus généralement, ces opérateurs sont des cas particuliers d'opérateurs de Calderón-Zygmund bilinéaires, qui ont été étudiés plus tard par Grafakos et Torres [79], Christ et Journé [49] et Kenig et Stein [89]. Leur étude repose essentiellement sur des arguments linéaires (tels que la décomposition de Calderón-Zygmund, théorie de Littlewood-Paley, mesure de Carleson ....). De manière semblable à la théorie linéaire, ces opérateurs bilinéaires vérifient aussi des continuités sur les espaces de Hardy, une estimation de type faible  $L^1 \times L^1$ , un théorème T(1) ....

Une spécificité "bilinéaire" est l'étude de ces continuités, uniformément par rapport à un paramètre. Ce paramètre  $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$  nous permet de "tordre" la métrique considérée dans l'espace fréquentiel : plus précisément, dans la condition (1.7), on substitue  $|(\xi, \eta)| = d((\xi, \eta), \Gamma)$  par

une autre norme  $|(\xi, \eta)|_\lambda := \lambda_1|\xi_1| + \lambda_2|\xi_2|$ . Dans ce cas, considérons un symbole  $m$  (indépendant de  $x$ ) vérifiant :

$$\left| \partial_\xi^\beta \partial_\eta^\gamma m(\xi, \eta) \right| \lesssim \lambda_1^{|\alpha|} \lambda_2^{|\beta|} |(\xi, \eta)|_\lambda^{-|\beta| - |\gamma|}. \quad (1.9)$$

La question est la suivante : peut on obtenir des estimations de continuités, uniformes en ce paramètre  $\lambda$ ? Ce problème est apparu dans [103, 99] et est motivé par l'étude d'opérateurs bilinéaires plus singuliers, tels que les transformées de Hilbert bilinéaires le long de courbes [105, 66].

Dans [3], nous avons contribué à répondre à cette question, en étudiant cette dépendance pour les continuités dans les espaces de Lebesgue et les espaces de Hardy. En effet, ces opérateurs peuvent être décomposés à l'aide de paraproducts, associés au paramètres  $\lambda$ . Il a fallu adapter les techniques linéaires (BMO, mesures de Carleson, Décomposition de Calderón-Zygmund, Théorie de Littlewood-Paley, ...) pour obtenir des estimations uniformes en  $\lambda$ .

### 1.1.2 Étude de la classe $BS_{\rho, \delta}^m$

Dans cette sous-section, nous allons décrire les résultats obtenus avec Benyi, Maldonado, Naibo et Torres dans [23], où nous essayons de répondre à la question (1.6).

Les classes  $BS_{\rho, \delta}^m$  ont été définies dans [42], où des règles de calcul symbolique ont été démontrées. L'étude de continuité pour les opérateurs associés a commencé dans [42] puis [101]. Les résultats que nous avons obtenus dans [23] améliorent ces derniers et permettent d'obtenir une réponse assez précise à la question (1.6).

Tout d'abord, comme nous l'avons vu dans la sous-section précédente, la classe  $BS_{1,0}^0$  (qui correspond aux "opérateurs de Coifman-Meyer") a été très étudiée et il est bien connu qu'elle donne lieu à des opérateurs bornés sur les espaces de Lebesgue. De même (comme dans le cas linéaire) un symbole de la classe  $BS_{1,\delta}^0$  produit un opérateur bilinéaire de Calderón-Zygmund. Ainsi les opérateurs associés à ces classes rentrent dans le cadre des opérateurs de Calderón-Zygmund bilinéaires [79].

Par contre, il est intéressant de noter que le célèbre théorème de Calderón-Vaillancourt [47] (i.e. les symboles  $S_{0,0}^0$  produisent des opérateurs linéaires bornés sur  $L^2$ ) n'est pas vrai dans ce cadre bilinéaire (Bényi-Torres [41]). Il y a donc une nouveauté au cadre bilinéaire à comprendre.

Le scaling de Hölder étant le "cas limite", il est souvent plus difficile de montrer des estimations sous ce scaling que dans le cas sous-Hölderien. Notre premier résultat fut sous le scaling "Sobolev" :

**Proposition 1.1.2** ([18]). *Considérons  $p_1, p_2 \in (1, \infty)$  et  $q, s > 0$  tel que*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{s}{d}. \quad (1.10)$$

*Si  $s \in (0, 2d)$ ,  $0 \leq \delta < 1$ , et  $\sigma \in BS_{1,\delta}^{-s}$  alors  $T_\sigma$  est borné de  $L^{p_1} \times L^{p_2}$  dans  $L^q$ .*

Ce résultat provient essentiellement d'une majoration ponctuelle des opérateurs considérés par des opérateurs bilinéaires d'intégration fractionnaire. Sous le scaling de Hölder, nous avons obtenu le résultat suivant :

**Théorème 1.1.3** ([23]). *Soit  $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ ,  $\delta < 1$ ,  $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$ ,  $p$  donné par  $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ ,*

$$m < m(p_1, p_2) := d(\rho - 1) \left( \max\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, 1 - \frac{1}{p} \right\} + \max\left\{ \frac{1}{p} - 1, 0 \right\} \right),$$

*et un symbole  $\sigma \in BS_{\rho, \delta}^m$ .*

1. Si  $p \in [1, \infty)$  alors  $T_\sigma$  est continu de  $L^{p_1} \times L^{p_2}$  dans  $L^p$  ;
2. Si  $0 < \rho, p < 1, p_1, p_2 > 1$  alors  $T_\sigma$  est continu de  $L^{p_1} \times L^{p_2}$  dans  $L^p$  ;
3. Si  $0 < \rho, p < 1$  et  $p_1 = 1$  ou  $p_2 = 1$  alors  $T_\sigma$  est continu de  $L^{p_1} \times L^{p_2}$  dans  $L^{p, \infty}$  ;
4. Si  $m = d(\rho - 1)$  et  $0 \leq \rho < \frac{1}{2}$ , alors  $T_\sigma$  est continu de  $L^\infty \times L^\infty$  dans  $BMO$ .

Le dernier point (4) correspond au “end-point”  $m = d(\rho - 1)$  et  $p_1 = p_2 = \infty$  du premier point (1), il correspond à la version bilinéaire d’un résultat de Fefferman [69] sur les opérateurs linéaires de la classe  $S_{\rho, \delta}^{\frac{d}{2}(\rho-1)}$ .

Ce résultat (améliorant ceux de [101]) donne une description presque complète de l’exposant  $m = m(p_1, p_2, p, \rho, \delta)$  nécessaire (et optimal) pour avoir les continuités sous le scaling Hölder. La preuve repose sur deux principes :

- Par interpolation complexe le long de l’échelle des espaces de Lebesgue et le long de l’échelle des classes de symboles bilinéaires, il est suffisant d’obtenir les continuités pour les points extrêmes ;
- Les symboles de la classe  $BS_{\rho, \delta}^m$  avec  $m < n(\rho - 1)$  (contrairement à  $m < \frac{3}{2}n(\rho - 1)$  qui est utilisé dans [101]) génèrent des opérateurs bornés de  $L^\infty \times L^\infty$  dans  $L^\infty$  ;
- Dans le cas (non Banach)  $p < 1$ , le résultat est obtenu par interpolation entre le cadre banachique  $p > 1$  et celui des opérateurs de Calderón-Zygmund bilinéaires.

## 1.2 Le cas d’une singularité selon une droite dans le plan ( $d = 1$ )

Dans cette section, nous allons nous concentrer sur le cas spécifique où l’ensemble singulier  $\Gamma$  est une droite de dimension 1 ( $\kappa = 1$ ), dans le plan fréquentiel de dimension 2 (donc les variables sont de dimension 1,  $d = 1$ ). Ce cadre fait suite aux travaux de Gilbert, Nahmod [75, 76], Lacey et Thiele [96, 95, 97, 98] sur la transformée de Hilbert bilinéaire.

La transformée de Hilbert bilinéaire est apparue dans [45, 46], où Calderón étudia la bornitude  $L^2$  des commutateurs et opérateurs d’intégrale de Cauchy. Il montra notamment que ces opérateurs peuvent être décomposés comme une “moyenne” d’opérateurs plus singuliers : les transformées de Hilbert bilinéaires. Pour  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , la transformée de Hilbert bilinéaire  $H_{\lambda_1, \lambda_2}$  est définie par

$$\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad H_{\lambda_1, \lambda_2}(f, g)(x) := p.v. \int_{\mathbb{R}} f(x - \lambda_1 y) g(x - \lambda_2 y) \frac{dy}{y}.$$

C’est un exemple de multiplicateur de Fourier bilinéaire qui s’écrit en fréquence sous la forme (1.2) avec le symbole suivant (modulo une constante) :

$$m(\xi, \beta) = i\pi \text{sign}(\lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta).$$

Ce symbole vérifie bien (1.5), vis-à-vis de la droite

$$\Gamma := \{(\xi, \eta), \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta = 0\}.$$

Calderón conjectura que ces opérateurs sont continus sur les espaces de Lebesgue, ce qui fut démontré plus tard par Lacey et Thiele [95, 96, 97, 98]. Ces opérateurs bilinéaires sont beaucoup plus singuliers que les opérateurs de Calderón-Zygmund (Section précédente) et leur analyse requiert des outils plus fins. En effet, ils possèdent une certaine invariance par modulation (étant donné que  $\Gamma$  est invariant par une translation). De ce fait leur complexité rappelle celle de

l'opérateur de Carleson, dont la continuité  $L^p$  fut prouvée par Carleson [48], Fefferman [68] et Hunt [83]. Cette invariance nécessite de décomposer l'espace temps-fréquence à toutes les échelles, donnant lieu à une décomposition en "feuilles". L'idée est alors de sommer cette décomposition selon le principe suivant :

- Rassembler les "feuilles" en "arbres" : collection de "feuilles" qui (a une modulation près) correspond à la projection d'un paraproduit et donc peut-être étudiée par les techniques linéaires ;
- Définir un algorithme de temps-d'arrêt pour séparer l'ensemble des "feuilles" en une collection "d'arbres" vérifiant des propriétés d'orthogonalité dans l'espace temps-fréquence.

Ces techniques ont été ensuite raffinées pour étudier différents problèmes autour de ces opérateurs (uniformité par rapport à la dégénérescence de la droite  $\Gamma$  [105], cas de la dimension plus élevée  $d \geq 2$  et  $\dim(\Gamma) \geq 1$  [104, 58]) ....

### 1.2.1 Définition d'un calcul pseudo-différentiel bilinéaire intégrant ces singularités

Suite à ces résultats concernant les multiplicateurs de Fourier, une question naturelle apparaissait : qu'en est-il des opérateurs avec un symbole vérifiant cette même singularité en fréquence et dépendant aussi de la variable spatiale  $x$ . Utilisant alors une technique de Coifman-Meyer [51], un argument général consiste à "geler" localement la variable  $x$  et permet d'obtenir les continuités des opérateurs bilinéaires. Ceci est possible dès que l'on a une preuve assez robuste d'estimations pour les multiplicateurs de Fourier associés. En effet, il suffit de savoir démontrer des estimations hors-diagonales pour les multiplicateurs de Fourier afin d'en déduire des continuités pour les opérateurs (associés à un symbole dépendant de la variable  $x$ ), [2]. Ainsi, on obtient des continuités sur les espaces de Lebesgue pour les opérateurs associés aux symboles de la classe

$$BS_{1,0;\theta} := \left\{ \sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^3), |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\eta^\gamma \sigma(x, \xi, \eta)| \leq C_{\alpha\beta\gamma;\theta} (1 + |\eta - \tan(\theta)\xi|)^{-\rho(|\beta|+|\gamma|)} \right\}. \quad (1.11)$$

Après avoir obtenu ces continuités, je me suis intéressé à définir un calcul pseudo-différentiel intégrant cette nouvelle classe d'opérateurs bilinéaires [4] et plus précisément :

- l'action de dualité sur ces opérateurs bilinéaires
- composition (à gauche ou à droite) par un opérateur linéaire pseudo-différentiel.

Par analogie au calcul pseudo-différentiel linéaire, on peut définir les classes de symboles  $BS_{\rho,\delta;\theta}$  pour  $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ . Dans [13], nous nous sommes intéressés au cas particulier des opérateurs pseudo-différentiels issus de symboles  $\sigma \in BS_{1,1;\theta}$ . Par analogie aux résultats linéaires sur la classe  $S_{1,1}^0$ , nous avons obtenu des continuités sur les espaces de Sobolev.

Ce calcul pseudo-différentiel bilinéaire est motivé par le fait suivant, détaillé dans [13]. Dans  $\mathbb{R}$ , le paraproduit  $\Pi_g(f)$  est un multiplicateur de Fourier bilinéaire dont le symbole est supporté dans un cône du plan fréquentiel (un cône du type  $|\eta| \geq 2|\xi|$  autour de l'axe  $\xi = 0$ ) ; l'idée étant que le symbole est supposé être une version "régularisée" de la fonction caractéristique du cône  $|\eta| \geq |\xi|$ .<sup>1</sup>

De cette observation et des résultats précédents, nous avons voulu définir un "meilleur" paraproduit  $\tilde{\Pi}$  en considérant une meilleure approximation du cône. En effet, il est possible de considérer

1. En effet, ainsi la somme des deux paraproduits ( $(f, g) \rightarrow \Pi_g(f) + \Pi_f(g)$ ) doit être le plus proche du produit ponctuel dont le symbole est constant à 1 sur tout le plan. Dans le cas de ces paraproduits, la différence entre le produit ponctuel et la somme des 2 paraproduits  $\Pi(f, g) = fg - \Pi_g(f) - \Pi_f(g)$  est un opérateur bilinéaire dont le symbole est supporté sur un petit cône autour des deux diagonales  $\xi = \eta$  et  $\xi = -\eta$ . Ce reste étant donc "plus régulier" (car les hautes fréquences correspondent aux hautes fréquences simultanées de  $f$  et de  $g$ ).

un symbole régulier constant à 1 sur  $|\eta| \geq |\xi| + 2$  et supporté sur  $|\eta| \geq |\xi| + 1$ . Ce nouveau para-produit obtenu  $\tilde{\Pi}$  s'intègre alors dans ces nouvelles classes d'opérateurs pseudo-différentiels bilinéaires  $BS_{1,0;\theta}$  et vérifie donc des estimations sur les espaces de Lebesgue et espaces de Sobolev. Comme nous le détaillons dans [13], ce nouveau para-produit est intéressant car alors le reste  $\tilde{\Pi}(f, g) = fg - \tilde{\Pi}_g(f) - \tilde{\Pi}_f(g)$  est un opérateur bilinéaire plus régulier que  $\Pi$ . Ceci nous a donc motivés à étudier en détails ces classes d'opérateurs pseudo-différentiels bilinéaires  $BS_{1,0;\theta}$ .

### 1.2.2 Étude de fonctionnelles carrées bilinéaires

Nous souhaitons maintenant détailler les résultats obtenus dans [8, 15]. Un résultat célèbre de Rubio de Francia [109] décrit la bornitude  $L^p$  (pour  $p \in [2, \infty)$ ) de fonctionnelles carrées, associées à un recouvrement de  $\mathbb{R}$  par une collection d'intervalles. Plus précisément, soit  $(I_i)_i$  une collection d'intervalles tels que  $(2I_i)_i$  soit un recouvrement borné de  $\mathbb{R}$ , alors la fonctionnelle

$$f \rightarrow \left( \sum_i |\Theta_{I_i}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est bornée sur  $L^p(\mathbb{R})$  pour  $p \in [2, \infty)$  (ici  $\Theta_{I_i}$  est l'opérateur de convolution par la fonction dont la transformée de Fourier est la fonction indicatrice  $\mathbf{1}_{I_i}$ ). Ce résultat a pour conséquence un critère assez faible de régularité sur un symbole linéaire pour qu'il engendre un multiplicateur de Fourier linéaire borné sur  $L^p$  (voir [54, 94]).

Fort de ce résultat linéaire, on peut se demander ce qu'il en est pour une version bilinéaire (en espérant ainsi pouvoir obtenir un nouveau critère de régularité sur le symbole bilinéaire pour que son opérateur soit borné sur les espaces de Lebesgue). On considère toujours  $I := (I_i)_i$  un recouvrement de  $\mathbb{R}$  par des intervalles, on y associe alors la fonctionnelle bilinéaire suivante :

$$S_I(f, g) := \left( \sum_i |\Theta_{I_i}(f, g)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où  $\Theta_{I_i}$  est l'opérateur bilinéaire associé au symbole  $(\xi, \eta) \rightarrow \mathbf{1}_{I_i}(\xi - \eta)$ . Cette fonctionnelle apparaît ainsi comme la transposition de la fonctionnelle linéaire dans un cadre bilinéaire avec une singularité du type "transformée de Hilbert bilinéaire". Il est important de noter que chaque opérateur  $\Theta_{I_i}$  est de même difficulté que la transformée de Hilbert bilinéaire.

L'étude de ce genre de fonctionnelles quadratiques bilinéaires fut initiée par Lacey [92], où il étudie le cas particulier  $I_i = [i, i + 1]$  et où  $\Theta_{I_i}$  est substituée par une version régularisée de la troncature.

Dans [8], nous avons obtenu la réponse suivante :

**Théorème 1.2.1** ([8]). *Soit  $I_i = [a_i, b_i]$  une suite d'intervalles disjoints de  $\mathbb{R}$  avec*

- même longueur :  $b_i - a_i$  indépendant de  $i$
- equi-distante :  $a_{i+1} - b_i$  indépendant de  $i$ .

*Alors pour des exposants  $p_1, p_2, p' \in (2, \infty)$  vérifiant (1.1), il existe une constante  $C = C(p_1, p_2, p_3)$  telle que pour toutes fonctions  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*

$$\left\| \left( \sum_i |\Theta_{I_i}(f, g)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{R})} \|g\|_{L^{p_2}(\mathbb{R})}.$$

Ce résultat peut être décrit de la manière suivante : on pave le plan fréquentiel par des bandes  $B_i := \{(\xi, \eta), \xi - \eta \in I_i\}$  parallèles, équidistantes et de même largeur. On regarde alors la fonctionnelle carrée bilinéaire construite à partir des restrictions en fréquence sur ces bandes. Ce point de vue permet de mieux voir l'analogie avec les fonctionnelles carrées linéaires de Rubio de Francia (qui étaient associées à un recouvrement de  $\mathbb{R}$  par une collection d'intervalles).

La preuve de ce résultat repose sur les propriétés de symétrie due aux hypothèses géométriques sur les intervalles : celles-ci permettent en effet de combiner l'analyse temps-fréquence (développée pour la transformée de Hilbert bilinéaire : “feuilles”, “arbres” et algorithme de temps d'arrêt ) et des techniques d'analyse vectorielle (opérateurs à valeurs  $\ell^2$ ). Il faut alors définir la notion de “feuilles vectorielles”, “arbres vectoriels” et obtenir une version vectorielle de l'algorithme de temps-d'arrêt.

Un tel résultat pour une collection quelconque d'intervalles disjoints reste encore inconnu aujourd'hui.

Dans [15] avec Shrivastava, nous avons commencé à avancer dans cette direction en essayant de contourner l'utilisation (pas assez souple) des symétries précédentes. Nous avons donc considéré le cas d'une collection d'intervalles disjointes de longueur équivalente (sans faire d'hypothèse sur la séparation entre eux). Pour ce premier essai, où nous nous affranchissons des symétries nous avons étudié la version “régularisée” des fonctionnelles. Plus précisément, nous avons obtenu ce résultat :

**Théorème 1.2.2** ([15]). *Soit  $\mathcal{I} := (I_i)_i$  une collection d'intervalles disjoints de longueur équivalente :*

$$\inf_i |I_i| \simeq \sup_i |I_i|.$$

*Pour des exposants  $p_1, p_2, p' \in [2, \infty)$  vérifiant (1.1), nous avons*

$$\left\| \left( \sum_i |\tilde{\Theta}_{I_i}(f, g)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{p'}} \lesssim \|f\|_{L^{p_1}} \|g\|_{L^{p_2}}.$$

*Ici  $\tilde{\Theta}_{I_i}$  est l'opérateur bilinéaire associé au symbole  $(\xi, \eta) \rightarrow \chi_{I_i}(\xi - \eta)$ , où  $\chi_{I_i}$  est une fonction régulière adaptée à l'intervalle  $I_i$ .*

Ce résultat peut paraître plus faible que le précédent, étant donné que l'on étudie que la version “régularisée”. Néanmoins, il était intéressant même dans ce cas, de voir comment l'on pouvait contourner les arguments de symétrie et d'analyse vectorielle. Il s'avère que la preuve proposée s'adapte presque entièrement à une collection quelconque d'intervalles disjoints : en effet seul l'argument de temps-d'arrêt permettant de gérer l'invariance par modulation nécessite des propriétés géométriques sur la collection de *feuilles* qui pavent le plan fréquentiel.

Il est aussi intéressant d'observer que ce résultat nous a permis d'obtenir un critère de régularité pour qu'un symbole  $\sigma \in BS_{0,0}^0$  définisse un opérateur borné dans le cas local- $L^2$  (lorsque  $p_1, p_2, p' > 2$ ). Plus précisément, un symbole de la classe  $BS_{0,0}^0$  a des propriétés de régularité invariantes par rotation dans le plan fréquentiel. Si on autorise une certaine “intégrabilité” dans une direction, alors nous pouvons démontrer le résultat suivant :

**Théorème 1.2.3** ([15]). *Soit  $\sigma \in BS_{0,0}^0$  un symbole tel qu'il existe un vecteur  $\theta \in \mathbb{S}^1$  de sorte que  $\sigma$  a une régularité  $W^{1,s}$  dans la direction  $\theta$  :*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left\| \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \partial_x^a \sigma(x, \cdot + t\theta^\perp) \right| + \left| \partial_x^a \langle \nabla_{(\xi, \eta)} \sigma(x, \cdot + t\theta^\perp), \theta \rangle \right| \right\|_{L^s(\mathbb{R})} < \infty.$$

Si  $\theta$  n'est pas une des trois directions dégénérées et  $s \in (1, 2]$ , alors l'opérateur  $T_\sigma$  est borné de  $L^{p_1} \times L^{p_2}$  dans  $L^p$  pour  $p_1, p_2, p' \in (2, \infty)$  vérifiant (1.1).

Nous voyons ainsi qu'il suffit à un symbole  $\sigma \in BS_{0,0}^0$  d'avoir une régularité  $W^{1,s}$  dans une direction pour que son opérateur associé soit borné dans le cas local- $L^2$ . La preuve repose sur le fait que la condition de régularité permet de réaliser l'opérateur  $T_\sigma$  à l'aide de fonctionnelles carrées étudiées précédemment.

### 1.3 Le cas d'une courbe

Dans cette partie, nous allons rester dans le cas uni-dimensionnel ( $d = 1$ ) et nous consacrer à l'étude du problème dans le cas où l'ensemble singulier  $\Gamma$  est une courbe (et non plus une droite) ( $\kappa = 1$ ). Le cas limite du scaling Hölderien a fait l'objet de deux travaux :

- Le cas d'une courbe régulière n'ayant aucune tangente dégénérée par Muscalu [102], où l'analyse temps-fréquence précédente a été adaptée pour passer d'une droite à une courbe.
- [78] où Grafakos et Li ont obtenu la bornitude du multiplicateur du disque dans le cas local- $L^2$ . L'approche est basée sur une décomposition très fine autour des points dégénérés du disque (points où la tangente est dirigée selon une des trois directions "interdites"). Ce résultat donne aussi une estimation uniforme de continuité pour la transformée de Hilbert bilinéaire, qui avait été obtenue précédemment dans [77, 105].

Le scaling Hölderien semble difficile à appréhender dans ce contexte, où l'ensemble singulier est une courbe. Avec Germain, nous nous sommes intéressés dans [17] à une étude systématique et complète du scaling "sous-Hölderien".

Plus précisément, nous avons cherché à déterminer comment des propriétés géométriques de la courbe  $\Gamma$  (non dégénérescence, courbure non nulle) pouvaient intervenir.

Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  une courbe régulière et  $m_\epsilon$  un symbole (indépendant de la variable spatiale) régulier à l'échelle  $\epsilon$  et supporté sur  $\Gamma_\epsilon$ , un voisinage de taille  $\epsilon$  autour de la courbe. Plus précisément

$$\Gamma_\epsilon := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, d((\xi, \eta), \Gamma) \leq \epsilon\}$$

et  $m_\epsilon$  est un symbole supporté sur  $\Gamma_\epsilon$  tel que

$$\left| \partial_{(\xi, \eta)}^\alpha m_\epsilon(\xi, \eta) \right| \lesssim \epsilon^{-|\alpha|}.$$

La question que l'on s'est posée est la suivante :

Pour quels exposants  $(p_1, p_2, p) \in [1, \infty]^3$  et pour quelle fonction  $\alpha(\epsilon)$ , peut on obtenir l'estimation suivante :

$$\|T_{m_\epsilon}\|_{L^{p_1} \times L^{p_2} \rightarrow L^p} \lesssim \alpha(\epsilon) \tag{1.12}$$

où de manière plus symétrique

$$|\langle T_{m_\epsilon}(f, g), h \rangle| \lesssim \alpha(\epsilon) \|f\|_{L^{p_1}} \|g\|_{L^{p_2}} \|h\|_{L^{p'}} ?$$

Typiquement, nous recherchons une décroissance  $\alpha(\epsilon) = \epsilon^\rho$ , pour un certain  $\rho \geq 0$  avec une perte logarithmique éventuelle. N'étant plus sous le scaling limite (Hölderien), l'intérêt est d'obtenir le taux de décroissance  $\rho = \rho(p_1, p_2, p)$  le plus élevé.

En effet, l'intérêt réside dans l'observation suivante : un symbole  $m$  vérifiant (1.5) par rapport à une courbe  $\Gamma$  et à support compact peut être décomposé  $m = \sum_{p \geq 0} m_{2^{-p}}$  avec des symboles  $m_{2^{-p}}$  vérifiant les propriétés précédentes pour  $\epsilon = 2^{-p}$ . Donc dès que l'on peut répondre positivement à la question (1.12) avec  $\alpha(\epsilon) = \epsilon^\rho$  pour un certain  $\rho > 0$ , on en déduit des estimations de continuité pour l'opérateur bilinéaire  $T_m$ .

Deux situations sont particulièrement simples :

- Le cas le plus extrême :  $p_1 = p_2 = p' = 1$  ; dans ce cas un argument direct montre le résultat optimal

$$\|T_{m_\epsilon}\|_{L^1 \times L^1 \rightarrow L^\infty} \lesssim \epsilon.$$

- Le cas  $p_1 = p_2 = p = 2$  où l'égalité de Plancherel permet aussi d'avoir le résultat optimal très facilement

$$\|T_{m_\epsilon}\|_{L^2 \times L^2 \rightarrow L^2} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}}.$$

D'ailleurs cette situation ne nécessite pas de régularité du symbole et a été étendue par Tao [113] au cadre de "convolutions bilinéaires" dans  $L^2$ , naturellement adapté à l'étude de non-linéarités dans des espaces de Bourgain  $X^{s,b}$ .

Comme on l'a déjà vu dans les sections précédentes, le cas local- $L^2$  présente bien souvent des facilités. C'est aussi le cas ici, on peut alors montrer le résultat optimal suivant :

**Proposition 1.3.1** ([17]). *Soit  $p_1, p_2, p' \in [2, \infty)$  avec  $1 \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'}$  alors*

$$\|T_{m_\epsilon}\|_{L^{p_1} \times L^{p_2} \rightarrow L^{p'}} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'} - 1}$$

et l'exposant en  $\epsilon$  est optimal.

Ce résultat s'obtient en recouvrant le voisinage  $\Gamma_\epsilon$  par des boules de rayon  $\epsilon$ , on majore alors ponctuellement l'opérateur (associé au symbole  $m_\epsilon$  localisé sur une des boules) par des opérateurs d'intégration fractionnaire. On utilise ensuite un résultat de Rubio de Francia [109] sur les fonctionnelles carrées pour sommer les estimations, sans perdre trop d'informations. L'orthogonalité, implicitement utilisée via les fonctionnelles de Rubio de Francia, nécessite de se restreindre au cas local- $L^2$ .

En dehors du cas local- $L^2$ , nous avons obtenu ce résultat

**Proposition 1.3.2** ([17]). *Si au moins 2 des 3 exposants  $p_1, p_2, p' \in [1, \infty]^3$  sont plus petits que 2, alors*

$$\|T_{m_\epsilon}\|_{L^{p_1} \times L^{p_2} \rightarrow L^{p'}} \lesssim \epsilon^{\inf\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p'}\right)},$$

et la puissance en  $\epsilon$  est optimale.

Ce résultat est obtenu par interpolation en étudiant les différentes situations correspondants aux points extrêmes :  $(p_1, p_2, p') = (1, 2, 2), (1, 1, 2), \dots$  Chaque point extrême nécessite une approche un peu différente, basée soit sur un argument  $TT^*$  ou une estimation du noyau, ...

Après cette situation générale, nous avons cherché à améliorer ces résultats sous deux hypothèses géométriques : la non-dégénérescence (les tangentes ne sont pas dirigées selon les directions "interdites") et la courbure.

**Théorème 1.3.3** ([17]). *Si la courbe  $\Gamma$  est non dégénérée alors*

- La proposition 1.3.1 s'étend au cas où  $p_1, p_2, p \in (1, \infty)$  vérifient
 
$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'} \leq 2 \\ \frac{1}{p'} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{3}{2} \\ \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{3}{2} \\ \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'} \leq \frac{3}{2}; \end{array} \right.$$
- Si  $\left\{ \begin{array}{l} p_1, p_2, p' \leq 2 \\ \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'} \geq 2 \end{array} \right.$ , alors  $\|T_{m_\epsilon}\|_{L^{p_1} \times L^{p_2} \rightarrow L^p} \lesssim \epsilon$  et cette borne est optimale.

Si la courbe  $\Gamma$  a une courbure non nulle et

- Si  $\left\{ \begin{array}{l} p_2 > 2 \\ p_1, p' < 2 \end{array} \right.$ , alors  $\|T_{m_\epsilon}\|_{L^{p_1} \times L^{p_2} \rightarrow L^p} \lesssim \epsilon^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'}\right) - \delta}$  pour tout  $\delta > 0$ . De plus cette borne est optimale (à la perte  $\delta$  près);
- Si  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'} > \frac{5}{2}$ , alors  $\|T_{m_\epsilon}\|_{L^{p_1} \times L^{p_2} \rightarrow L^p} \lesssim \epsilon$  et cette borne est optimale.

Sans décrire tous les résultats de [17] en détails, il est important de souligner que plus  $(p_1, p_2, p)$  s'approche du scaling limite  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'} = 1$  plus il est difficile d'obtenir les résultats optimaux. Néanmoins dans le cas d'une courbe avec courbure non nulle, nous avons réussi à approcher les cas  $(p_1, p_2, p') = (2, 2, 0)$  et  $(p, q, r) = (1, \infty, \infty)$  avec une borne presque optimale. Le cas de la courbure non nulle est beaucoup plus difficile techniquement car il faut alors combiner cette notion géométrique avec l'analyse temps-fréquence. Cela peut se faire de deux manières différentes :

- Utiliser un résultat de phase non-stationnaire pour avoir une décroissance en espace du noyau bilinéaire, et éventuellement interpoler cette approche par une analyse fréquentielle (par exemple un argument à la "Tomas-Stein" pour les inégalités de restriction);
- Un découpage en fréquence non plus en boule de rayon  $\epsilon$ , mais en rectangle de côté  $\epsilon$  et  $\sqrt{\epsilon}$  prenant en compte la courbure. La difficulté provient alors du caractère anisotrope de ces rectangles.

Dans [17], nous avons décrits presque toutes les situations possibles en y trouvant un exposant  $\rho$  (souvent optimal). Cette étude systématique de la question (1.12) nous permet alors d'obtenir des résultats sur des opérateurs de Bochner-Riesz bilinéaires, des opérateurs bilinéaires de restriction-extension associés chacun à des symboles présentant une singularité selon une courbe.

Une des perspectives (voir Section 1.8) est naturellement d'étendre tous ces résultats dans le cas multi-dimensionnel  $d \geq 2$  avec une sous-variété  $\Gamma$  de dimension  $\kappa \leq 2d - 1$ . Dans le cas où  $\kappa \leq d$  et  $\Gamma$  vérifiant une certaine condition de dégénérescence (assez technique à écrire), il est possible d'étendre plusieurs des résultats présentés ici. Mais plus généralement, le cas multi-dimensionnel présente de nouvelles difficultés qu'il nous reste à comprendre.

## 1.4 Le cas des paraproducts "torsadés", $d = 2$ et $\kappa = 2$

Comme nous l'avons signalé avant, l'étude des opérateurs bilinéaires dans un cadre multi-dimensionnel  $d \geq 2$  avec une singularité de dimension  $\kappa \geq 2$  est très difficile. Peu de résultats traitent aujourd'hui de cette situation. Demeter, Pramanik et Thiele [58] ont étudié le cas multi-dimensionnel, sous l'hypothèse que les coordonnées jouent toutes le même rôle. Dans ce cas, l'analyse uni-dimensionnelle peut être étendue.

L'analyse temps-fréquence uni-dimensionnelle mise en place pour la transformée de Hilbert bilinéaire ne se généralise pas au cadre multi-dimensionnel lorsque les coordonnées interagissent entre elles. Dans [57] Demeter et Thiele ont commencé à étudier ce problème, mais l'analyse de Fourier (telle que nous la connaissons aujourd'hui) ne semble pas suffire pour ce problème. L'exemple typique est la transformée de Hilbert bilinéaire en dimension 2, définie par (on note la variable en espace  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ )

$$H(f, g)(x, y) = p.v. \int f(x - t, y)g(x, y + t) \frac{dt}{t} \quad (1.13)$$

qui peut-être réécrite (modulo une constante) en fréquence avec le symbole

$$(\xi, \eta) \rightarrow \text{sign}(\xi_1 - \eta_2).$$

Dans ce contexte, nous voyons que la première coordonnée  $\xi_1$  doit interagir avec la deuxième coordonnée  $\eta_2$ . Cette nouveauté du cadre multi-dimensionnel ne semble pas pouvoir être comprise par les techniques "classiques" d'analyse temps-fréquence.

Avant de s'attaquer à un tel problème qui semble très difficile, il est donc important d'essayer de comprendre ce nouveau phénomène dans un cadre plus simple, par exemple les paraproduits "torsadés" (*twisted paraproducts*). Ces opérateurs sont à la transformée de Hilbert bidimensionnelle, ce que les paraproduits "classiques" sont pour la transformée uni-dimensionnelle. On reproduit donc la construction d'un paraproduit (1.8) mais en faisant jouer ce rôle particulier sur les coordonnées.

Plaçons nous en dimension 2, on choisit alors  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  des troncatures régulières en fréquence (sur  $B(0, 1)$  pour  $\phi$  et  $B(0, 2) \setminus B(0, 1)$  pour  $\psi$ ) et on définit l'opérateur suivant sur  $\mathbb{R}^2$  (on note la variable en espace  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ) :

$$\tilde{\Pi}_g(f) := \int_0^\infty \Psi_{t,x}(f) \Phi_{t,y}(g) \frac{dt}{t},$$

où maintenant l'opérateur  $\Psi_{t,x}$  n'agit que sur la première composante et  $\Phi_{t,y}$  sur la seconde :

$$\Psi_{t,x}(f)(x, y) = \int \psi(z) f(x - tz, y) dz \quad \text{et} \quad \Phi_{t,x}(g)(x, y) = \int \phi(z) g(x, y - tz) dz.$$

En fréquence, cet opérateur bilinéaire s'écrit avec le symbole (indépendant de la variable spatiale) suivant :

$$m(\xi, \eta) = \int_0^\infty \widehat{\psi}(t\xi_1) \widehat{\phi}(t\eta_2) \frac{dt}{t},$$

qui vérifie la régularité suivante :

$$\left| \partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta m(\xi, \eta) \right| \lesssim |(\xi_1, \eta_2)|^{-\alpha_1 - \beta_2},$$

faisant apparaitre  $|(\xi_1, \eta_2)| = d((\xi, \eta), \Gamma)$  où l'ensemble singulier  $\Gamma$  est le plan

$$\Gamma := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^4, \xi_1 = \eta_2 = 0\},$$

de dimension  $\kappa = 2$ .

Il est surprenant de voir que cet opérateur bilinéaire ne puisse pas être étudié par les techniques classiques (Opérateurs de Calderón-Zygmund, théorie de Littlewood-Paley, ...). L'analyse fréquentielle est plus difficile (comparée à celle pour les paraproduits classiques) étant donné que

l'on doit comprendre comment les opérateurs de convolution sur deux coordonnées différentes interagissent entre eux.

Récemment Kovac [91] a prouvé le premier résultat de continuité pour ces opérateurs bilinéaires, en ayant recours à de nouvelles techniques basées sur l'utilisation de "fonctions de Bellman". À l'aide d'une décomposition de Calderón-Zygmund "fibrée", nous avons pu étendre la plage d'exposants pour la bornitude de cet opérateur. On a alors le résultat suivant :

**Théorème 1.4.1** ([91],[16]). *Pour tout exposants  $p_1, p_2 \in [1, \infty)$  et  $p$  donné par (1.1),*

- $\tilde{\Pi}$  est continu de  $L^{p_1}(\mathbb{R}^2) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^2)$  dans  $L^p(\mathbb{R}^2)$  si  $p_1, p_2 > 1$  ;
- $\tilde{\Pi}$  est continu de  $L^{p_1}(\mathbb{R}^2) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^2)$  dans  $L^{p, \infty}(\mathbb{R}^2)$  si  $p_1 = 1$  ou/et  $p_2 = 1$ .

Ce premier résultat dans un cadre multi-dimensionnel nous donne "espoir" de pouvoir mieux comprendre des situations plus compliquées. Malheureusement, nous sommes encore très loin de pouvoir étudier une version 2-dimensionnelle de la transformée de Hilbert bilinéaire (1.13).

## 1.5 Le cas de la sphère en dimension $d \geq 2$

Dans cette section, nous allons décrire des résultats issus de [27] où nous nous sommes concentrés dans le cas multi-dimensionnel  $d \geq 2$  avec  $\Gamma := \mathbb{S}^{2d-1}$ . Le fait que  $\Gamma$  vérifie une certaine invariance par rotation (plus généralement que le symbole soit radial) nous permet de contourner quelques problèmes liés à la grande dimension  $\kappa = 2d - 1$  de l'ensemble de singularité.

Plus précisément, nous allons nous intéresser à la version bilinéaire des opérateurs de Bochner-Riesz : pour  $\delta \geq 0$ , on définit sur  $\mathbb{R}^d$

$$S^\delta(f, g)(x) = \iint_{|\xi|^2 + |\eta|^2 \leq 1} e^{ix \cdot (\xi + \eta)} (1 - (|\xi|^2 + |\eta|^2))_+^\delta \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\eta) d\xi d\eta.$$

qui est donc le multiplicateur de Fourier associé au symbole

$$m(\xi, \eta) = (1 - (|\xi|^2 + |\eta|^2))_+^\delta.$$

L'opérateur associé au symbole  $\mathbf{1}_B(\xi, \eta)$  (où  $B$  est la boule unité  $B := \{(\xi, \eta), |\xi|^2 + |\eta|^2 \leq 1\}$ ) a été démontré comme non-borné en dehors du cas local- $L^2$  par Diestel et Grafakos [59] et son étude dans le cas local- $L^2$  semble hors d'atteinte aujourd'hui. De ce fait, l'idée des opérateurs de Bochner-Riesz (apparue dans sa version linéaire) est d'ajouter de la régularité au symbole et plus précisément de voir quelle régularité (mesurée par  $\delta$ ) est nécessaire pour obtenir la continuité de l'opérateur bilinéaire.

Alors, par une estimation ponctuelle du noyau bilinéaire, il est facile d'obtenir que  $S^\delta$  est borné de  $L^{p_1} \times L^{p_2}$  dans  $L^p$ , pour  $(p_1, p_2, p)$  vérifiant (1.1) avec  $p_1, p_2 \geq 1$  dès que  $\delta > d - \frac{1}{2}$ . L'objectif de [27] est d'améliorer cet exposant critique en fonction des exposants  $p_1, p_2$  et  $p$ .

Dans ce cas multi-dimensionnel, on ne peut pas appliquer l'approche décrite en Section 1.3 (par exemple, en subdivisant les  $\epsilon$ -voisinage de  $\Gamma$  par des boules de rayon  $\epsilon$ ) du fait de la trop grande dimension  $\kappa$ . De ce fait, il nous faut pouvoir obtenir des informations globales provenant de la régularité du symbole.

Dans le cadre Banach, nous avons pu obtenir l'amélioration suivante

**Théorème 1.5.1** ([27]). *Pour  $p_1, p_2, p \in [1, \infty]$  vérifiant (1.1),  $S^\delta$  est borné de  $L^{p_1} \times L^{p_2}$  dans  $L^p$  dès que*

$$\text{Cas local-}L^2 \quad p_1, p_2, p' \in [2, \infty) \text{ et } \delta > \frac{d-1}{p'} ;$$

- $p_1, p_2 \in [2, \infty)$ ,  $p' < 2$  et  $\delta > \frac{d-1}{2} + d(\frac{1}{p'} - \frac{1}{2})$  ;
- $p_2, p' \in [2, \infty)$ ,  $p_1 < 2$  et  $\delta > d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}) - \frac{1}{p'}$  ;
- $p_1, p' \in [2, \infty)$ ,  $p_2 < 2$  et  $\delta > d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}) - \frac{1}{p'}$ .

La preuve réside dans l'interpolation et l'étude précise des différents points extrémaux :

- La continuité qui requiert le moins de régularité est celle de  $L^2 \times L^2 \rightarrow L^1$ , on a alors que  $S^\delta$  est borné de  $L^2 \times L^2$  dans  $L^1$  dès que  $\delta > 0$ .

Ici, la régularité du symbole est utilisée pour décomposer en série de Fourier le symbole. On décompose ainsi le symbole  $m$  en produit tensoriel et on se ramène donc à écrire  $S^\delta$  comme une série convergente de produit de 2 multiplicateurs de Fourier linéaires bornés sur  $L^2$ .

- Une subtilité provient du fait que certaines propriétés essentielles du symbole, telle que son invariance par rotation, ne sont pas stables par dualité. De ce fait, l'approche précédente ne fonctionne pas pour les opérateurs duaux et on ne peut obtenir le même résultat pour les situations duales : la continuité de  $L^2 \times L^\infty$  dans  $L^2$ . Pour celles-ci nous avons seulement que  $S^\delta$  est borné de  $L^2 \times L^\infty$  dans  $L^2$  et de  $L^\infty \times L^2$  dans  $L^2$  dès que  $\delta > \frac{d-1}{2}$ .

La preuve de ce résultat est beaucoup plus technique que la précédente. En effet, on est amené à décomposer le symbole en symboles  $m_\epsilon$  (par analogie avec ce qui était décrit dans la section 1.3). Chacun des opérateurs  $T_{m_\epsilon}$  vérifie alors des “décroissances hors-diagonales”, qui permettent d'estimer  $\|T_{m_\epsilon}\|_{L^2 \times L^\infty \rightarrow L^2}$  par  $\epsilon^{\frac{d}{2}} \|T_{m_\epsilon}\|_{L^2 \times L^2 \rightarrow L^2}$ . Cette dernière quantité est ensuite contrôlée par un argument  $TT^*$ .

- En dehors du cas local- $L^2$ , nous montrons que  $S^\delta$  est borné de  $L^1 \times L^\infty$  dans  $L^1$  et de  $L^\infty \times L^1$  dans  $L^1$  dès que  $\delta > \frac{d}{2}$ .

Cette estimation est une combinaison de l'argument précédent (qui avec l'inégalité de Bernstein nous permet de borner  $\|T_{m_\epsilon}\|_{L^1 \times L^\infty \rightarrow L^1}$  par  $\epsilon^{\frac{d}{2}} \|T_{m_\epsilon}\|_{L^2 \times L^2 \rightarrow L^1}$ ) et du résultat optimal sur la continuité  $L^2 \times L^2 \rightarrow L^1$ .

Encore une fois, les arguments n'étant pas invariants par dualité, nous n'avons pas de telles améliorations pour la continuité de  $L^\infty \times L^\infty$  dans  $L^\infty$ .

Sans détailler, en utilisant de manière très précise la régularité du symbole (qui est plus ou moins équivalente à des décroissances hors-diagonales du noyau bilinéaire) nous avons aussi pu affaiblir l'exposant critique dans le cadre non-Banach, c'est à dire lorsque  $p < 1$  (voir [27]).

Outre l'intérêt en elle-même, cette étude et la précédente (sur les paraproducts torsadés) sont les premières concernant des continuités pour des symboles bilinéaires présentant des singularités sur des ensembles  $\Gamma$  de grande dimension. Dans ces deux situations, il nous faut comprendre comment interagissent entre-elles les différentes coordonnées et combiner cela à l'analyse temps-fréquence. Il serait très intéressant de pouvoir “automatiser” ces approches dans des situations plus générales.

## 1.6 Intégrales oscillantes bilinéaires

Dans cette section, nous souhaitons présenter quelques résultats issus de [11]. Cette étude était motivée par l'analyse des résonances “espace-temps” (pour des EDPs non-linéaires), présentée dans la section suivante (voir [11], [74] pour plus de détails).

L'idée est la suivante : au lieu de considérer des symboles singuliers avec une singularité décrite par discontinuité, nous nous sommes intéressés à des symboles singuliers dont la singularité est

donné par un facteur oscillant très rapidement. Plus précisément, on considère des opérateurs bilinéaires de la forme suivante :

$$T_\lambda(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{ix \cdot (\xi + \eta)} m(\xi, \eta) e^{i\lambda\phi(\xi, \eta)} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\eta) d\xi d\eta. \quad (1.14)$$

Ici  $m$  est un symbole à support compact (il a pour rôle de restreindre l'étude à des fréquences bornées) et  $\phi$  est une fonction phase régulière. Donc  $T_\lambda$  est un multiplicateur de Fourier bilinéaire, associé au symbole  $m(\xi, \eta) e^{i\lambda\phi(\xi, \eta)}$ .

Nous recherchons des continuités sur les espaces de Lebesgue de ces opérateurs du type

$$\|T_\lambda\|_{L^p \times L^q \rightarrow L^r} \lesssim \lambda^{-\rho}$$

pour  $\lambda \rightarrow \infty$  et un certain exposant  $\rho$  le plus grand possible.

Ici le symbole ne présente donc pas les mêmes singularités que celles étudiées précédemment, mais il est hautement oscillant en dehors de la zone  $\{\phi = 0\}$ . De ce fait, le symbole présente un autre type de singularité. Néanmoins, nous voyons que la zone importante est  $\Gamma := \{\phi = 0\}$  où nous ne pouvons pas espérer obtenir de décroissance en  $\lambda^{-1}$ . Donc la problématique ici est similaire à celle étudiée précédemment : nous avons un symbole qui présente un certain type de singularité autour d'une zone  $\Gamma$ , qui ici est de dimension maximale  $\kappa = 2d - 1$  et nous souhaitons obtenir des estimations pour l'opérateur bilinéaire associé.

Nous avons pu obtenir le résultat suivant ("loin du scaling Hölder (1.1)") :

**Théorème 1.6.1** ([11]). *Supposons que  $\phi$  et  $m$  soient réguliers,  $\text{Hess}(\phi)$ ,  $\nabla_\xi(\nabla_\eta - \nabla_\xi)\phi$ ,  $(2\nabla_\eta - \nabla_\xi)(\nabla_\xi - \nabla_\eta)\phi$  et  $(\nabla_\eta - 2\nabla_\xi)\nabla_\xi\phi$  non dégénérées sur  $\text{Supp}(m)$ .*

*Alors pour des exposants  $p, q, r$  vérifiant*

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 2 \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \geq 1 \\ \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \leq 0 \\ \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 0, \end{cases} \quad (1.15)$$

on a

$$\|T_\lambda(f, g)\|_{L^r} \leq C |\lambda|^{-\frac{d}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right)} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Ici nous nous plaçons loin du scaling Hölder, il se trouve en fait que la plage d'exposants décrite par (1.15) est optimale pour les estimations recherchées [11].

La preuve repose sur l'interpolation entre les différents points extrêmes :

- La continuité  $L^1 \times L^1 \rightarrow L^\infty$  qui est obtenue en estimant ponctuellement le noyau bilinéaire par un résultat de phase non-stationnaire ;
- La continuité  $L^1 \times L^2 \rightarrow L^2$  qui est obtenue par un argument "classique"  $TT^*$  sur les intégrales oscillantes ([112]).

Un exemple de non-linéarité apparaissant dans l'étude des EDPs est le paraproduct (qui a déjà été décrit en sous-Section 1.1.1). De ce fait, il est intéressant d'examiner le cas où le symbole

$m$  est toujours à support compact mais vérifie une singularité en 0 (du type Coifman-Meyer, incluant ainsi le cas des paraproducts) :

$$\left| \partial_{(\xi, \eta)}^\alpha m(\xi, \eta) \right| \lesssim (|\xi| + |\eta|)^{-|\alpha|}. \quad (1.16)$$

On a obtenu alors le résultat suivant :

**Théorème 1.6.2** ([11]). *Le théorème 1.6.1 s'étend au cas où  $m$  vérifie (1.16).*

Cette extension est beaucoup plus difficile à montrer. L'approche est la même mais les deux études des points extrêmes sont plus techniques ...

Nous décrivons dans [11] comment ces opérateurs oscillants permettent d'étudier des opérateurs dont le symbole n'est pas borné et est singulier (du type "valeur principale" de  $1/\phi$ ). De plus ces opérateurs oscillants apparaissent dans l'étude du "scattering" de certaines EDPs non-linéaires présentant une non-linéarité bilinéaire. En effet, comme nous allons le décrire brièvement dans la section suivante, le point de vue "résonances espace-temps" permet de réduire l'étude du scattering à l'étude d'opérateurs bilinéaires.

## 1.7 Applications aux estimations de dispersion bilinéaires

Dans cette section, nous allons motiver l'étude des multiplicateurs de Fourier bilinéaires, en montrant comment elle peut être utilisée pour l'étude d'EDPs présentant une non-linéarité quadratique. Nous allons voir comment combiner les résultats précédents (ceux de la Section précédente sur les opérateurs oscillants et ceux des sections précédentes sur la question (1) ) pour décrire des propriétés de scattering.

Par exemple, considérons le système suivant  $u = u(t, x)$ ,  $v = v(t, x)$ , et  $w = w(t, x)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\begin{cases} \partial_t u + a(D)u = vw, & u(0, x) = 0, \\ \partial_t v + b(D)v = 0, & v(0, x) = f(x), \\ \partial_t w + c(D)w = 0, & w(0, x) = g(x). \end{cases} \quad (1.17)$$

où  $a(D)$ ,  $b(D)$  et  $c(D)$  sont des multiplicateurs de Fourier linéaires de symbole  $a(\xi)$ ,  $b(\xi)$  et  $c(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Alors formellement, la solution  $u$  vérifie

$$u(t, x) = (e^{-ta(D)} F(t, \cdot))(x),$$

avec  $F$  donnée par la formule de Duhamel

$$F(t, x) := \int_0^t e^{sa(D)} (v(s, \cdot) w(s, \cdot))(x) ds \quad (1.18)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left( \int_0^t e^{s(a(\xi+\eta) - b(\xi) - c(\eta))} ds \right) \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\eta) e^{ix \cdot (\xi + \eta)} d\xi d\eta. \quad (1.19)$$

De ce fait, il apparait que la fonction "phase" importante est

$$\lambda(\xi, \eta) := a(\xi + \eta) - b(\xi) - c(\eta).$$

On peut alors réécrire  $F$  par

$$F(t, x) = T_{\frac{e^{t\lambda} - 1}{\lambda}}(f, g)(x),$$

qui est donc donnée par le multiplicateur de Fourier bilinéaire associé au symbole  $\frac{e^{t\lambda} - 1}{\lambda}$ .

La notion de "scattering" pour le système considéré revient à savoir si pour  $t \rightarrow \infty$ , la solution  $u$  a le même comportement, qu'une solution de l'équation linéaire  $\partial_t u + a(D)u = 0$ ; c'est à dire est ce que  $F(t)$  converge pour  $t \rightarrow \infty$ .

### 1.7.1 Le cas facile : $\lambda < 0$

Le cas où  $\lambda < 0$  est le plus facile, car alors ponctuellement  $\frac{e^{t\lambda}-1}{\lambda}$  converge vers  $-\lambda^{-1}$ . De ce fait, d'un point de vue formel  $F$  converge "faiblement" vers

$$F(t) \rightarrow T_{-\lambda^{-1}}(f, g). \quad (1.20)$$

Donc une estimation de continuité pour l'opérateur  $T_{-\lambda^{-1}}$  permet d'obtenir un cadre pour les conditions initiales,  $f, g$  où l'on pourra conclure à une propriété de scattering pour (1.17).

En utilisant [23], dont l'idée principale a été décrite en Sous-section 1.1.2, si  $\lambda^{-1} \in BS_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^d)$  (Définition 1.1.1) pour des exposants  $\rho > \delta$  et  $m < 0$  suffisamment négatif, alors l'opérateur  $T_{-\lambda^{-1}}$  est borné sur les espaces de Sobolev et ainsi on peut donner un sens rigoureux à la convergence (1.20).

Ces classes de symboles apparaissent naturellement : par exemple si on considère les symboles  $b(D) = 1 - \Delta^2$ ,  $c(D) = -\Delta$  et  $a(D) = -\Delta$ . Alors  $-\lambda(\xi, \eta)^{-1} = (1 + |\xi + \eta|^2 + |\xi|^4 + |\eta|^2)^{-1}$  et  $\lambda(\xi, \eta)^{-1} \in BS_{\frac{1}{2}, 0}^{-2}$ .

Le cas où la fonction phase  $\lambda \leq 0$  peut s'annuler est beaucoup plus difficile. Dans ce cas, l'asymptotique du symbole  $\frac{e^{t\lambda}-1}{\lambda}$  peut faire apparaître des symboles très singuliers, correspondant à des distributions supportées sur le sous-ensemble  $\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2d}, \lambda(\xi, \eta) = 0\}$ . Nous avons décrit différentes situations dans ce cadre [11], où nous pouvons néanmoins obtenir des informations de continuités pour ces opérateurs obtenus (principalement sous des hypothèses de non-dégénérescence de la hessienne  $D^2\lambda$  qui permet d'utiliser des estimations de phases non-stationnaire).

Le cas  $\lambda \leq 0$  est satisfaisant pour le scattering en  $t \rightarrow +\infty$ . Par contre si on veut considérer le scattering en  $t \rightarrow +\infty$  et  $t \rightarrow -\infty$  alors il est plutôt naturel de considérer le cadre d'une phase  $\lambda \in i\mathbb{R}$ . Nous allons nous intéresser à cette situation dans la sous-section suivante.

### 1.7.2 Le cas "dispersif"

Le cas "dispersif" correspond au cas où la phase  $\lambda \in i\mathbb{R}$  est à valeurs imaginaires pures. Il est alors naturel dans ce cadre d'essayer d'obtenir des estimations de dispersion bilinéaire, qui seraient une version bilinéaire des estimations standard

$$\|e^{it\Delta}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{2}},$$

et des inégalités de Strichartz.

Récemment l'étude d'estimations de dispersion bilinéaires sont apparues sous la forme suivante :

$$\|u\|_{L^p L^q(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} i\partial_t v + \Delta v = 0, & v(t=0) = f \\ i\partial_t w + \Delta w = 0, & w(t=0) = g \\ i\partial_t u + \Delta u = vw, & u(t=0) = 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Cela correspond au cas particulier introduit précédemment avec  $a(D) = b(D) = c(D) = i\Delta$ .

De telles estimations pour  $p = q = 2$  sont étroitement reliées à l'utilisation des espaces de Bourgain  $X^{s,b}$  [44, 113]. Elles ont été introduites simultanément par Bourgain pour NLS et KdV et Klainerman-Machedon [90] pour les ondes, puis ont connu différentes extensions, toujours en considérant des données initiales  $f, g \in L^2$  spectralement séparées (séparation selon l'angle ou l'amplitude des fréquences considérées).

Dans [22], nous nous sommes intéressés à une problématique différente : en étudiant les multiplicateurs de Fourier bilinéaires, nous avons obtenu de nouveaux résultats (en dimension  $d = 1$ ) dans le contexte où  $f, g$  ont des fréquences bornées (à une même échelle) mais  $f, g$  appartenant aux espaces à poids  $L^{2,s}$ . De plus, nous avons cherché à obtenir une décroissance en temps au lieu d'une certaine intégrabilité.

Plus précisément, nous avons obtenu le résultat suivant : Considérons le système sur  $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} i\partial_t u + a(D)u = T_m(v, w) \\ i\partial_t v + b(D)v = 0 \\ i\partial_t w + c(D)w = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(t=0) = 0 \\ v(t=0) = f \\ w(t=0) = g. \end{cases} \quad (1.22)$$

Les symboles  $a, b, c$  vérifient une minoration de leur dérivée seconde (ce qui permet d'utiliser des estimées de dispersion linéaires sur leurs propagateurs) et  $m$  est un symbole régulier à support compact (qui a pour rôle de restreindre l'étude à des fréquences bornées). On a toujours la fonction phase  $\lambda(\xi, \eta) := a(\xi + \eta) - b(\xi) - c(\eta)$ .

**Théorème 1.7.1** ([22]). *On note  $q \in [2, \infty)$*

$$\Gamma := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \lambda(\xi, \eta) = 0\} \quad \text{et} \quad \Delta = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \partial_{\xi-\eta}\lambda(\xi, \eta) = 0\},$$

et  $u$  la solution de (1.22).

(i) *Si  $\Gamma$  est une courbe non-dégénérée et  $\lambda$  s'y annule à l'ordre 1,*

$$\|u(t)\|_{L^q} \lesssim \langle \log t \rangle \|f\|_{L^{2,s}} \|g\|_{L^{2,s}} \quad \text{pour } s > \frac{1}{4}.$$

(ii) *Si  $\Delta = \emptyset$ , alors pour tout  $\delta > 0$ ,*

$$\|u(t)\|_{L^q} \lesssim t^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \delta} \|f\|_{L^{2,s}} \|g\|_{L^{2,s}} \quad \text{pour } s > 1 - \frac{1}{q}.$$

(iii) *Si  $\Gamma$  et  $\Delta$  s'intersectent transversalement en un point, alors pour tout  $\delta > 0$*

$$\|u(t)\|_{L^q} \lesssim t^{-\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2q}\right) + \delta} \|f\|_{L^{2,s}} \|g\|_{L^{2,s}} \quad \text{for } s > 1.$$

*De plus l'exposant de décroissance est optimal dans les deux derniers cas.*

Les ensembles  $\Gamma$  et  $\Delta$  sont respectivement les ensembles de résonances en temps et en espace ; leur intersection correspondent aux résonances espace-temps. En effet, dans l'écriture (1.19), il apparaît la double intégrale

$$\widehat{F}(t, \cdot)(\gamma) = \int_{\xi+\eta=\gamma} \int_0^t e^{s\lambda(\xi,\eta)} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\eta) e^{ix \cdot (\xi+\eta)} m(\xi, \eta) ds d\xi d\eta.$$

On peut voir l'estimation de cette double intégrale comme un problème de phase non-stationnaire dans  $\mathbb{R}^2$ . Alors  $\Gamma$  correspond aux fréquences où la phase sera stationnaire en  $s$  (résonance en temps) et  $\Delta$  où la phase sera stationnaire en  $(\xi - \eta)$ . Dans chacun des cas, on peut espérer obtenir une décroissance, en faisant des intégrations par parties sur l'une des deux variables où la phase ne sera pas stationnaire. L'ensemble important correspond à l'intersection  $\Gamma \cap \Delta$  où aucun gain n'est possible par cette méthode.

L'idée est alors de gagner en utilisant le fait que cet ensemble à une petite mesure (puisque génériquement  $\Gamma \cap \Delta$  est au plus un point de  $\mathbb{R}^2$ ).

L'étude des multiplicateurs de Fourier bilinéaires dont le symbole est supporté autour d'une courbe ou d'un point a été le sujet de [17], dont certains résultats ont été décrits dans la Section 1.3. Le théorème 1.7.1 a donc été obtenu par la méthode suivante :

- On découpe l'espace fréquentiel par des voisinages  $\Gamma_\epsilon$  autour de  $\Gamma$  et  $\Delta_\epsilon$  autour de  $\Delta$  (avec un petit paramètre  $\epsilon$  à choisir).
- Pour des fréquences dans  $\Gamma_\epsilon^c$  ou  $\Delta_\epsilon^c$  on peut faire des intégrations par parties sur l'une des deux variables  $s$  ou  $\xi - \eta$  et ainsi gagner de la décroissance en  $t$ .
- Pour des fréquences dans l'intersection  $\Gamma_\epsilon \cap \Delta_\epsilon$ , nous n'avons aucune décroissance mais une borne en puissance de  $\epsilon$  (du au fait que  $|\Delta_\epsilon \cap \Gamma_\epsilon| \lesssim \epsilon^2$ ).
- On optimise alors en  $\epsilon := \epsilon(t)$  pour égaliser ces différentes estimations et obtenir l'estimation globale.

## 1.8 Perspectives

L'analyse temps-fréquence bilinéaire pose encore de nombreuses questions, réputées très difficiles et encore ouvertes. Citons quelques exemples :

- Continuité de la transformée de Hilbert bilinéaire de  $L^{p_1} \times L^{p_2}$  dans  $L^p$  pour  $\frac{1}{2} < p < \frac{2}{3}$  et  $p_1, p_2 \geq 1$  ?  
L'analyse connue aujourd'hui permet d'obtenir une réponse positive pour  $p > \frac{2}{3}$  mais aucune réponse (positive ou négative) n'est connue si  $p < \frac{2}{3}$ .
- Continuité de la transformée de Hilbert trilinéaire ?  
Pour cet opérateur trilinéaire, aucune continuité n'est connue. Il semble que cette question soit étroitement liée à la question précédente et toutes les deux requiert une nouvelle approche.
- Continuité de la transformée de Hilbert bidimensionnelle.  
Décrivons maintenant quelques perspectives plus réalisables !

### Fonction maximale bilinéaire

La fonction maximale de Hardy-Littlewood est un objet central en analyse de Fourier. En examinant l'écriture spatiale de la transformée de Hilbert, on peut définir une version bilinéaire sur  $\mathbb{R}$  :

$$\mathcal{M}(f, g)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{-r}^r |f(x+t)g(x-t)| dt.$$

Une question naturelle est alors d'étudier les continuités de cet opérateur maximal. Introduit par Lacey [93], cet opérateur vérifie les mêmes continuités que la transformée de Hilbert bilinéaire, i.e. de  $L^{p_1} \times L^{p_2}$  dans  $L^p$  pour  $p > \frac{2}{3}$ .

Dans la situation linéaire, l'étude de la fonction maximale est "plus facile" que celle de la transformée de Hilbert linéaire. On s'attend donc à la même comparaison pour le cas bilinéaire.

Si  $p > 1$ , alors en utilisant simplement l'inégalité de Hölder, on a directement l'estimation

$$\mathcal{M}(f, g) \leq \mathcal{M}_{p_1-\epsilon}(f) \mathcal{M}_{p_2-\epsilon}(g)$$

(pour un  $\epsilon > 0$  assez petit), ce qui permet directement d'en obtenir la continuité. Par contre il est étonnant de voir que pour  $p < 1$ , nous n'avons aujourd'hui aucune approche directe. Dans [93], une réponse positive est donnée pour  $p > \frac{2}{3}$ , en raffinant l'analyse temps-fréquence développée pour la transformée de Hilbert bilinéaire. Cette approche impose alors les mêmes restrictions :  $p > \frac{2}{3}$  et variable uni-dimensionnelle  $d = 1$ .

Ainsi dans le cadre bilinéaire et  $p \leq 1$ , l'opérateur maximal semble techniquement "plus difficile" à estimer que la transformée de Hilbert.

Or cet opérateur maximal  $\mathcal{M}$  est un opérateur positif et une approche purement géométrique (sans utiliser de décomposition en fréquence) semblerait raisonnable.

Une question intéressante serait donc la suivante :

Construire une approche géométrique permettant d'étudier l'opérateur maximal bilinéaire ? (1.23)

Cet objet géométrique fait naturellement appel à des notions de combinatoire additive. En effet, il est très facile de voir que pour un ensemble  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{M}(\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_E)$  est supporté sur  $E + E$ . De ce fait, la structure de  $E + E$  est très importante. Ces questions sont donc étroitement reliées à des questions de combinatoire, autour des progressions arithmétiques ...

### Fonctionnelle carrées

Nous allons présenter des perspectives, suite aux travaux [8, 15] présentés dans la sous-Section 1.2.2.

Prenons une collection  $\mathcal{O} := (O_i)_i$  de sous-ensembles disjoints de  $\mathbb{R}^2$ . Associé à cette collection, on peut définir la fonctionnelle carré bilinéaire suivante :

$$S_{\mathcal{O}}(f, g) := \left( \sum_i |T_{\mathbf{1}_{O_i}}(f, g)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Une question intéressante serait alors :

Sous quelles conditions sur  $\mathcal{O}$  et quels exposants  $p_1, p_2, p$  peut-on prouver la continuité de  $S_{\mathcal{O}}$  de  $L^{p_1} \times L^{p_2}$  dans  $L^p$  ? (1.24)

Comme nous l'avons décrit dans la sous-Section 1.2.2 :

- Dans [8], nous avons donné une première réponse positive dans le cas local- $L^2$  ( $p_1, p_2, p' \geq 2$ ) lorsque  $\mathcal{O}$  est une collection de bandes parallèles, de même largeur et équi-distances ;
- Dans [15], nous nous sommes affranchis de certaines contraintes géométriques (équi-distance et même largeur) en considérant une version “régularisée” des symboles  $\mathbf{1}_{O_i}$ .

Il semblerait raisonnable que l'on puisse obtenir une réponse positive à la question dans le cas où  $\mathcal{O}$  soit une collection quelconque de bandes parallèles disjointes. On peut aussi se poser la question plus générale pour un pavage du plan fréquentiel par une collection de polygones, par exemple ou autres figures géométriques.

### Extension au cas multi-dimensionnel

L'étude des multiplicateurs de Fourier bilinéaires sur  $\mathbb{R}$  associés à des symboles présentant une singularité sur une courbe (Section 1.3), nous a permis d'obtenir de nouvelles estimations de dispersion bilinéaires (Section 1.7). Naturellement cette application pour l'étude des EDPs non-linéaires serait très intéressante dans un contexte multi-dimensionnel. Dans [74], Germain expose ce point de vue “résonances espace-temps” et montre combien il est capital de comprendre comment estimer les opérateurs de Fourier bilinéaires (avec des symboles présentant une singularité du type (1.5) et des symboles oscillants (1.14)). Il serait donc très important de pouvoir prolonger les travaux [17, 22] sur  $\mathbb{R}^d$  :

- Une étude systématique des multiplicateurs dont le symbole est singulier sur un sous-ensemble  $\Gamma$  de dimension  $\kappa \geq 2$  ;
- Application aux estimations de dispersion bilinéaires sur  $\mathbb{R}^d$ .

Une telle généralisation semble faisable mais fait intervenir de nouvelles difficultés. En effet, par définition de l'ensemble des résonances en temps (voir Section 1.7), celui-ci correspond à  $\lambda^{-1}(\{0\})$  pour une certaine fonction phase  $\lambda$ . De ce fait, l'ensemble résonnant en temps est de dimension maximale  $\kappa = 2d - 1$ . Nous savons que cette situation est très délicate, et l'approche utilisée en dimension 1 ne peut s'adapter. Il nous faut donc avoir une nouvelle approche.

En Section 1.5, nous avons décrit des résultats obtenus dans le cas spécifique où  $\Gamma$  est la sphère. Il serait intéressant de voir comment adapter ces nouveaux arguments pour se soustraire des symétries radiales de la sphère et pouvoir ainsi obtenir des résultats plus généraux dans un contexte multi-dimensionnel.

### Analyse de Calderón-Zygmund multi-fréquentielle

Ici, nous souhaitons présenter une perspective qui n'est pas directement liée à l'analyse de Fourier bilinéaire mais qui cependant pourrait y trouver des applications : une analyse de Calderón-Zygmund multi-fréquentielle.

L'analyse de Calderón-Zygmund classique repose sur les oscillations  $f - f_B$  d'une fonction sur une boule  $B$ . Ici l'opérateur de moyenne  $f_B$  représente la meilleure façon d'approcher  $f$  sur la boule  $B$  par une fonction constante. Or ces fonctions constantes sont directement associées à la fréquence 0. Il apparait donc que l'analyse de Calderón-Zygmund est étroitement liée à la fréquence 0. En modulant cette analyse, on peut se concentrer sur n'importe quelle fréquence.

L'idée d'une analyse multi-fréquentielle est alors la suivante :

- Adapter les arguments en considérant non plus une seule fréquence, mais une collection  $\Theta := (\theta_j)_{j=1, \dots, N}$  de  $N$  fréquences ;
- Obtenir des bornes optimales (ou en tous cas non triviales) en fonction de  $N$ .

Cette approche a été initiée par Nazarov, Oberlin et Thiele [108], où une décomposition de Calderón-Zygmund multi-fréquentielle a été obtenue. Nous avons poursuivi cette étude dans [26], en posant un cadre pour un opérateur de Calderón-Zygmund et en considérant des estimations de continuités sur les espaces à poids  $L^p(\omega)$ . Ces travaux reposent sur un résultat "d'orthogonalité" qui permet d'estimer des sommes d'exponentielles complexes, qui naturellement apparaissent lorsque l'on projette une fonction sur l'espace vectoriel engendré par  $(e^{i\theta_j \cdot})_{j=1, \dots, N}$ .

Nous montrons aussi dans [26] comment de tels résultats pourraient aider pour l'étude des multiplicateurs de Bochner-Riesz.

Bien que tout cela se passe dans le cadre linéaire, le cadre bilinéaire offre de nombreuses situations (comme nous l'avons vu dans ce mémoire) où une analyse multi-fréquentielle est nécessaire puisque le symbole peut posséder des singularités sur un ensemble non-réduit à un point. De ce fait, il semblerait raisonnable que cette analyse de Calderón-Zygmund multi-fréquentielle puisse trouver des applications intéressantes dans l'étude des opérateurs bilinéaires.

## Chapitre 2

# Analyse de Fourier non Euclidienne fonctionnelle

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Extrapolation via les “atomes”</b>	<b>33</b>
<b>2.2</b>	<b>Interpolation autour des espaces de Hardy, Sobolev</b>	<b>35</b>
2.2.1	Espaces de Hardy	35
2.2.2	Espaces de Sobolev	37
<b>2.3</b>	<b>Inégalités de type “John-Nirenberg”</b>	<b>38</b>
<b>2.4</b>	<b>Théorème <math>T(1)</math> pour un semi-groupe d’opérateur et applications à de nouveaux paraproducts</b>	<b>42</b>
2.4.1	Un nouveau Théorème $T(1)$	42
2.4.2	De “nouveaux” paraproducts et applications	44
2.4.3	La paralinéarisation et la propagation de régularité pour des EDPs non-linéaires	45
2.4.4	Opérateurs pseudo-différentiels	46
<b>2.5</b>	<b>Un résultat de transport pour les espaces de type BMO</b>	<b>48</b>
2.5.1	Le transport d’espaces fonctionnels	48
2.5.2	Application à l’équation d’Euler 2D	49
<b>2.6</b>	<b>Perspectives</b>	<b>51</b>
2.6.1	Des inégalités de dispersion par extrapolation	51
2.6.2	Une analyse adaptée à un semi-groupe d’opérateur vectoriel	52
2.6.3	Différentes équations de la mécanique des fluides	53

---

Dans cette seconde partie du mémoire, nous quittons le cadre Euclidien et nous allons nous placer dans un espace  $(X, d, \mu)$  de type homogène.

De nombreux résultats d'analyse harmonique, initialement obtenus dans le cadre Euclidien, s'étendent presque automatiquement au cadre d'un espace de type homogène : par exemple les opérateurs de Calderón-Zygmund, théorie de Littlewood-Paley, Mesure de Carleson, espaces de Hardy et BMO, Fonction maximale .... L'idée étant que les principaux arguments reposent sur le doublement de la mesure et sur l'utilisation des oscillations : pour une fonction  $f \in L^1_{loc}(X)$  et  $Q$  une boule de  $X$ , on note  $\text{osc}_{Q,p}(f)$  l'oscillation  $L^p$  de  $f$  sur la boule  $Q$ , définie par

$$\text{osc}_{Q,p}(f) := \left( \int_Q \left| f - \int_Q f \right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme nous l'avons décrit dans l'introduction, l'idée et la motivation communes à tous les travaux présentés dans cette partie sont de remplacer ces oscillations par d'autre type d'oscillation et d'essayer d'étendre les résultats connus dans ce nouveau contexte.

Nous allons donc considérer  $\mathcal{Q} := \{(B(x, r)), x \in X, r > 0\}$  la collection de toutes les boules de  $X$  et  $\mathbb{B} := (B_Q)_{Q \in \mathcal{Q}}$  une collection d'opérateurs indexée par les boules. On notera alors  $A_Q := Id - B_Q$  (ou  $A_Q := \mathbf{1}_Q - B_Q$ ).

L'opérateur  $B_Q$ , appelé opérateur d'oscillation, a pour rôle de quantifier l'oscillation sur la boule  $Q$ . On s'intéressera alors aux oscillations définies par

$$\left( \int_Q |B_Q(f)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_Q |f - A_Q(f)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Les questions que nous avons étudiées sont du type suivant :

Pour une propriété "standard" (comme énoncées ci-dessous), quelles sont les hypothèses à mettre sur ces opérateurs d'oscillation pour obtenir une propriété similaire, adaptée à ce nouveau cadre ? (2.1)

La motivation est la suivante : considérons par exemple un semi-groupe  $(e^{-tH})_{t>0}$  défini sur  $X$ . Une notion naturelle d'oscillation associée est donnée par

$$B_Q(f) := f - e^{-r_Q^2 H} f \quad \text{ou} \quad B_Q(f) := (f - e^{-r_Q^2 H} f)^M.$$

Alors que l'oscillation classique  $\text{osc}_{B,p}$  ne sera peut-être pas adaptée au problème considéré, ces nouvelles oscillations peuvent sembler plus adéquates. Il est donc raisonnable d'essayer d'adapter les arguments classiques à de tels opérateurs d'oscillation.

Désireux d'obtenir un cadre le plus général, nous allons essayer de décrire certains résultats dans le cas donné par une collection abstraite  $\mathbb{B}$ . Pour certains résultats plus spécifiques, nous n'avons pas pu définir de cadre satisfaisant et nous avons considéré l'exemple précédent où l'oscillation sera donnée par un semi-groupe d'opérateur. Nous avons étudié les propriétés suivantes :

- Extrapolation via "les atomes" : Nous allons définir la notion d'atomes associée à la collection d'oscillations  $\mathbb{B}$ . Puis nous verrons comment, on peut décrire un résultat d'extrapolation pour des opérateurs linéaires.

- Interpolation autour des espaces de Hardy, Sobolev : suite à la notion d’atomes, il est naturel de considérer l’espace de Hardy atomique  $H^1 := H_{\mathbb{B}}^1$  associé. En raffinant l’idée d’extrapolation précédente, nous décrivons un résultat d’interpolation entre  $H^1$  et les espaces de Lebesgue. Puis nous expliquerons comment sur une variété Riemannienne, on a pu adapter ce point du vue aux espaces de Sobolev.
- Inégalités de John-Nirenberg : Nous nous intéresserons aux propriétés d’auto-amélioration qui sont bien connues pour les fonctions BMO (Inégalités de John-Nirenberg) et les inégalités de Poincaré. Sous certaines hypothèses, nous verrons comment retrouver ces propriétés dans le cadre de nos nouvelles oscillations.
- Un théorème  $T(1)$  pour un semi-groupe d’opérateur : ici, nous spécifierons notre étude aux oscillations données par un semi-groupe d’opérateurs. Nous expliquerons comment on peut obtenir une version adaptée du théorème  $T(1)$ . Cela nous sera très utile pour définir et étudier de nouveaux paraproducts.
- Transport pour les espaces de type BMO : on s’intéressera alors au transport des oscillations classiques  $\text{osc}_{p,B}$  par une application préservant la mesure. Ceci nous permettra de définir un cadre adapté pour les équations de transport et notamment les équations d’Euler 2D.

## 2.1 Extrapolation via les “atomes”

Dans cette section, nous nous intéressons à la question suivante : dans un cadre général d’un espace de type homogène  $(X, d, \mu)$ , considérons un opérateur linéaire  $T$  borné sur  $L^2(X)$  alors

Quelles “informations  $L^2$ ” sur l’opérateur impliquent une continuité  $L^p$  pour  $p \in (1, 2)$  ?

(2.2)

On demande spécifiquement d’obtenir des estimations  $L^p$  sur un opérateur à partir uniquement “d’informations  $L^2$ ”, celles-ci pouvant être obtenue par diverses théories : calcul fonctionnel, théorie spectrale, ... L’espace  $L^2$  est par nature plus riche que les autres espaces de Lebesgue. Donc dans de nombreux problèmes nous avons accès à des estimations  $L^2$  et nous souhaitons voir comment de manière générale, on peut en déduire d’autres estimations.

Dans la section suivante, nous verrons comment interpoler les espaces de Hardy avec  $L^2$  pour retrouver les espaces de Lebesgue intermédiaires. Ceci est une méthode d’analyse fonctionnelle : si notre opérateur est borné sur  $L^2$ , continu d’un certain espace  $H^1$  dans  $L^1$  alors on peut en déduire des continuités sur les espaces intermédiaires obtenus par interpolation. Nous expliquerons alors (voir Remarque 2.2.3) que ce principe pose une difficulté technique qui en fait n’est pas nécessaire comme nous allons le décrire maintenant.

Dans [1, 5], nous avons apporté une réponse au problème posé ci-dessus, en définissant la fonction maximale suivante : pour un certain exposant  $\sigma \in (2, \infty)$

$$M_{\mathbb{B},\sigma}(f) := x \rightarrow \sup_{Q \ni x} \left( \int_Q |A_Q^*(f)|^\sigma d\mu \right)^{1/\sigma}.$$

Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

**Théorème 2.1.1** ([1, 5]). *Supposons que pour un exposant  $\sigma \in (2, \infty]$ , l’opérateur maximal  $M_{\mathbb{B},\sigma}$  soit borné ponctuellement par l’opérateur maximal de Hardy-Littlewood  $\mathcal{M}_2$ . Soit  $T$  un opérateur borné sur  $L^2$  vérifiant : il existe des coefficients  $(\alpha_j)_{j \geq 0}$   $Q$  tels que*

- pour toute boule  $Q$  et toute fonction  $f \in L^2(Q)$

$$\left( \frac{1}{\mu(2^{j+1}Q)} \int_{2^{j+1}Q \setminus 2^jQ} |T(B_Q(f))|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \alpha_j \left( \int_Q |f|^2 d\mu \right)^{1/2}. \quad (2.3)$$

- et

$$\sup_Q \sum_{j \geq 2} \frac{\mu(2^{j+1}Q)}{\mu(Q)} \alpha_j < \infty. \quad (2.4)$$

Alors l'opérateur  $T$  admet une extension continue sur  $L^p(X)$  pour  $p \in (\sigma', 2)$  :

$$\|T(f)\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}, \quad \forall f \in L^2 \cap L^p.$$

Ce résultat répond bien au problème initial : nous imposons des conditions  $L^p - L^2$  sur nos opérateurs d'oscillation (l'hypothèse sur la fonction maximale peut être obtenue en démontrant des estimations hors-diagonales  $L^{\sigma'} - L^2$  sur les opérateurs  $A_Q$ ). Et les estimations  $L^2$  (2.3), décrivant des estimations hors-diagonales  $L^2 - L^2$  de nos opérateurs  $T(B_Q)$ , permettent d'en déduire des continuités  $L^p$  de l'opérateur initial.

La notion "d'atomes" et son utilisation ont ici été cachées. Nous détaillerons dans la section suivante comment cette notion est apparue dans l'histoire, postérieurement à celle des espaces de Hardy. Nous allons simplement donner une définition ici et voir son importance :

**Définition 2.1.2.** Une fonction  $m \in L^1_{loc}(X)$  est appelé un *atome* pour une boule  $Q$  si :

- $m = B_Q(f_Q)$  avec  $f_Q \in L^2(Q)$  (supportée dans  $Q$ )
- $\|f\|_{L^2(Q)} \lesssim \mu(Q)^{-\frac{1}{2}}$ .

Selon cette définition, il est facile de voir qu'un opérateur borné sur  $L^2$  et vérifiant (2.3) et (2.4) vérifie alors

$$\sup_{\text{atome } m} \|T(m)\|_{L^1} < \infty. \quad (2.5)$$

Nous avons écrit le théorème 2.1.1 de la manière précédente pour bien montrer comment on répondait au problème initialement posé. En fait il s'avère que l'on montre le résultat suivant :

**Théorème 2.1.3** ([1, 5]). *Supposons que pour un exposant  $\sigma \in (2, \infty]$ , l'opérateur maximal  $M_{\mathbb{B}, \sigma}$  soit borné ponctuellement par l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood  $\mathcal{M}_2$ .*

*Soit  $T$  un opérateur borné sur  $L^2$  vérifiant (2.5). Alors l'opérateur  $T$  admet une extension continue sur  $L^p(X)$  pour  $p \in (\sigma', 2)$ .*

On voit alors mieux l'importance des atomes : Le comportement de l'opérateur  $T$  sur les atomes permet à lui seul d'extrapoler, d'obtenir une continuité  $L^p$  à partir d'une continuité  $L^2$ !

Ce résultat d'extrapolation est obtenu par des "inégalités aux bons lambdas" pour comparer les deux opérateurs maximaux (étudiées par Auscher et Martell [34]), on peut donc aussi obtenir des estimations dans les espaces à poids  $L^p(\omega)$  pour des poids  $\omega$  appartenant dans les classes de Muckenhoupt. De plus ce résultat s'applique aussi aux opérateurs linéarisables (et pas seulement linéaires). Dans [7], nous décrivons une application pour des résultats de régularité maximale. Il est intéressant de voir que ce résultat permet de recouvrir différents résultats d'extrapolation existants : les opérateurs de Calderón-Zygmund (avec les opérateurs d'oscillations classiques), les transformées de Riesz (avec les opérateurs d'oscillation construits à l'aide d'un semi-groupe).

## 2.2 Interpolation autour des espaces de Hardy, Sobolev

### 2.2.1 Espaces de Hardy

La théorie des espaces de Hardy “réels” a débuté dans les années 60 puis a connu de nombreuses utilisations et extensions. Dans cette partie, nous souhaitons nous concentrer sur une utilisation précise de ces espaces, plus précisément l’interpolation avec les espaces de Lebesgue. Le résultat d’extrapolation précédent peut-être vu comme une version “faible” d’un résultat d’interpolation. Nous allons voir comment nous pouvons réellement décrire cette interpolation en définissant l’espace de Hardy associé.

Historiquement dans l’espace Euclidien, le premier espace de Hardy (dit de Coifman-Weiss) a été d’abord défini de manière très différente (à la décomposition atomique [112]) :

$$f \in H_{CW}^1(\mathbb{R}^d) \iff f \in \mathcal{H}^1 := \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^d); \nabla(\sqrt{-\Delta})^{-1}(f) \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \right\} \quad (2.6)$$

$$\iff x \mapsto \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^d, t > 0 \\ |x-y| \leq t}} \left| e^{-t\sqrt{-\Delta}}(f)(y) \right| \in L^1(\mathbb{R}^d) \quad (2.7)$$

$$\iff x \mapsto \left( \int_{\substack{y \in \mathbb{R}^d, t > 0 \\ |x-y| \leq t}} \left| t \nabla e^{-t\sqrt{-\Delta}}(f)(y) \right|^2 \frac{dy dt}{t^{d+1}} \right)^{1/2} \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad (2.8)$$

où  $\nabla(\sqrt{-\Delta})^{-1}$  est la transformée de Riesz. L’espace  $\mathcal{H}^1$  défini par (2.6) fut la première définition ([111]) et Stein [112] prouva ensuite ces différentes équivalences. Le lien avec l’espace atomique  $H_{CW}^1(\mathbb{R}^n)$  est dû à Coifman [70]) et correspond à un résultat de Fefferman caractérisant son dual :

$$h \in (\mathcal{H}^1)^* \iff \|h\|_{BMO} := \left( \sup_Q \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \left| f - \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f d\mu \right|^2 d\mu \right)^{1/2} < \infty.$$

Même si cet espace s’est montré comme un bon substitut de  $L^1$  (interpolation, opérateurs de Calderón-Zygmund, ...), il s’avère que cet espace n’est pas bien adapté à certains opérateurs. En effet, il y a eu récemment de nombreux travaux dont le but a été de définir de nouveaux espaces de Hardy [29, 30, 35, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 80], adaptés à certains problèmes. Par exemple, nous savons que la transformée de Riesz sur une variété Riemannienne n’agit pas de manière adéquate sur l’espace  $H_{CW}^1$ , ou pour le problème de régularité maximale [29, 30, 32, 80, 110]. Dans ce cadre, les différents auteurs ont construit de nouveaux espaces, associés à un semi-groupe d’opérateurs. Donc ici, il est naturellement apparu que l’oscillation classique  $\text{osc}_{p,B}$  n’était pas la bonne et qu’il fallait la remplacer par une autre oscillation adaptée au semi-groupe.

Nous allons étendre cette observation à notre cadre général. Revenons à notre espace de type homogène  $(X, d, \mu)$ , supposons qu’il soit non borné ou de manière équivalente de mesure infinie ( $\mu(X) = \infty$ ). Ayant défini la notion d’atome (Définition 2.1.2), on peut définir l’espace de Hardy associé par décomposition atomique :

**Définition 2.2.1.** L’espace de Hardy  $H_{\mathbb{B}}^1(X)$  est alors l’ensemble des fonctions  $f \in L_{loc}^1$  admettant une décomposition atomique

$$f = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i m_i \quad \mu - a.e.,$$

où  $m_i$  sont des atomes et  $\lambda_i$  des coefficients vérifiant

$$\sum_i |\lambda_i| < \infty.$$

La norme est alors obtenue en prenant l'infimum de ces quantités sur toutes les décompositions atomiques.

Si les opérateurs d'oscillations sont donnés par  $B_Q(f) = f - \int_Q f d\mu$ , alors il est bien connu que nous retrouvons l'espace de Hardy de Coifman-Weiss  $H_{CW}^1$ .

Nous ne détaillerons pas le concept de *molécules*, mais il est possible d'avoir une caractérisation équivalente à l'aide de molécules (on affaiblit la propriété de support par des décroissances hors-diagonales de la norme  $L^2$  loin de la boule). Il est intéressant de noter que si les atomes sont bornés dans  $L^1$ , alors l'espace de Hardy ainsi construit est un espace complet, inclus dans  $L^1$ . Les espaces de Hardy ont pour rôle de se substituer à l'espace  $L^1$  et c'est souvent important de savoir quand est-ce que cet espace n'est pas trop petit, par exemple de manière à retrouver les espaces de Lebesgue intermédiaires par interpolation.

Ces espaces de Hardy ont été étudiés dans [1, 6]. Principalement, nous montrons le résultat d'interpolation suivant :

**Théorème 2.2.2** ([1, 6]). *Supposons que l'opérateur maximal  $M_{\mathbb{B},\sigma}$  soit borné par  $\mathcal{M}_2$  et que l'espace de Hardy  $H_{\mathbb{B}}^1$  soit inclus continuellement dans  $L^1$ . Alors pour tout  $\theta \in (0, 1)$ ,  $s \in [1, \infty)$ ,  $p \in (1, 2]$  et  $t \in (1, \infty)$  tel que*

$$\frac{1}{t} = \frac{1-\theta}{p} + \theta < \frac{1}{\sigma'},$$

*nous avons l'équivalence des normes suivantes :*

$$\|\cdot\|_{L^{t,s}} \simeq \|\cdot\|_{(L^p, H^1)_{\theta,s}}$$

*et donc*

$$(L^p, H^1)_{\theta,s} := L^{t,s}.$$

De ce fait, on en déduit que sous l'hypothèse “ $M_{\mathbb{B},\sigma}$  est borné par  $\mathcal{M}_2$ ”, l'espace de Hardy  $H_{\mathbb{B}}^1$  n'est pas si petit puisqu'il permet de recouvrir tous les espaces intermédiaires par interpolation réelle. De plus, nous décrivons des résultats similaires pour les espaces à poids.

*Remarque 2.2.3.* Nous souhaitons attirer l'attention sur la difficulté suivante, lors de l'utilisation d'un tel espace de Hardy. Bien souvent pour montrer qu'un opérateur linéaire  $T$  continu sur  $L^2$  est borné de  $H_{\mathbb{B}}^1$  dans  $L^1$ , nous allons d'abord montrer que

$$\sup_{\text{atome } m} \|T(m)\|_{L^1} < \infty.$$

Malheureusement, il n'est pas clair qu'un tel opérateur admet une extension continue sur l'espace de Hardy. En effet, nous devons alors faire face à une difficulté technique : commuter l'action de l'opérateur  $T$  avec une série infinie d'atomes. Ceci motive les résultats de la section précédente : pour un résultat d'interpolation, nous n'avons pas besoin d'étendre l'opérateur sur tout l'espace de Hardy ; seule son action sur les atomes est importante.

Cette approche pour interpoler est très générale et est basée sur la comparaison des opérateurs maximaux  $M_{\mathbb{B},\sigma}$  et  $\mathcal{M}_2$ . Je me suis alors intéressé à adapter cet argument pour traiter le cas des espaces de Sobolev.

### 2.2.2 Espaces de Sobolev

Considérons maintenant  $(X, d, \mu)$  une variété Riemannienne de type homogène avec un gradient  $\nabla$ . Les espaces de Sobolev  $W^{1,p}$  sont définis ainsi :

**Définition 2.2.4.** Pour  $f \in C_0^\infty(X)$ , on définit  $\|f\|_{W^{1,p}} := \|f\|_{L^p} + \|\nabla f\|_{L^p}$ . Puis  $W^{1,p}$  est obtenu comme l'adhérence de  $C_0^\infty$ , pour cette norme.

Si dans un cadre général, on sait toujours interpoler les espaces de Lebesgue, l'interpolation des espaces de Sobolev est beaucoup plus délicate. Dans plusieurs travaux récents [37, 38], Badr a donné quelques résultats positifs d'interpolation, sous certaines hypothèses (inégalité de Poincaré et estimation sur le gradient du semi-groupe). Cette étude est basée sur une décomposition de Calderón-Zygmund pour les fonctions de  $W^{1,p}$ , obtenue par Auscher dans [30].

Dans [9, 10], nous avons essayé d'adapter l'approche précédente au cadre des espaces de Sobolev. D'un point de vue technique, nous contourignons donc l'utilisation de cette décomposition de Calderón-Zygmund pour les fonctions Sobolev par des inégalités aux bons lambdas sur un opérateur maximal adéquat. En effet, pour obtenir une version du théorème 2.2.2 aux espaces de Sobolev, il nous faut tout d'abord définir le bon substitut à l'opérateur  $M_{\mathbb{B},\sigma}$ .

**Définition 2.2.5.** Pour  $p \in [1, \infty]$  et  $O$  un ouvert de  $X$ , on définit  $W^{1,p}(O)$  de la manière suivante :

$$W^{1,p}(O) := \overline{C_0^\infty(O)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(O)}} \quad \text{avec} \quad \|f\|_{W^{1,p}(O)} := \| |f| + |\nabla f| \|_{L^p(O)}.$$

On note alors  $W^{-1,p'}(O)$  l'espace dual de  $W^{1,p}(O)$ , défini au sens des distributions. On définit alors deux opérateurs maximaux

$$M_{Sob,s}(f)(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)^{1/s}} \|f\|_{W^{-1,s}(Q)}$$

et

$$M_{Sob,*,s}(f)(x) := \inf_{f=\phi-\text{div}(\psi)} \mathcal{M}_s(|\phi| + |\psi|)(x).$$

Une caractérisation des espaces de Sobolev par l'opérateur de divergence [36], implique directement

$$M_{Sob,s}(f) \leq M_{Sob,*,s}(f).$$

L'article [9] a pour objet l'étude de ces deux opérateurs maximaux. De manière similaire à l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood, nous avons

–  $M_{Sob,s}$  et  $M_{Sob,*,s}$  sont de type faible  $(p, p)$  :

$$\|M_{S,p}(f)\|_{L^{p,\infty}} \leq \|M_{S,*,p}(f)\|_{L^{p,\infty}} \lesssim \|f\|_{W^{-1,p}}. \quad (2.9)$$

–  $M_{Sob,s}$  et  $M_{Sob,*,s}$  sont de type fort  $(q, q)$ , pour tout  $q > p$  :

$$\|M_{S,p}(f)\|_{L^q} \leq \|M_{S,*,p}(f)\|_{L^q} \lesssim \|f\|_{W^{-1,q}}. \quad (2.10)$$

Désireux d'obtenir un résultat d'interpolation sur les espaces de Sobolev, ce qui par dualité est équivalent à un résultat d'interpolation sur les espaces  $W^{-1,p}$ , nous aimerions avoir une caractérisation "exacte" de ces espaces par l'intermédiaire de nos nouveaux opérateurs maximaux. La partie difficile est donc d'obtenir les inégalités inverses de (2.9) et (2.10).

On obtient alors le résultat suivant :

**Théorème 2.2.6** ([9]). On définit  $\mathcal{I}_X$  l'ensemble des exposants :

$$\mathcal{I}_X := \{(p_0, p_1) \in (1, \infty)^2, p_0 \leq p_1, \|f\|_{W^{-1, p_1}} \lesssim \|M_{S, *, p_0}(f)\|_{L^{p_1}}\}.$$

L'échelle des espaces de Sobolev  $W^{1, p}$  est une échelle d'interpolation, pour  $p \in \mathcal{I}_X$ . Pour tout  $p_0, p_1 \in (1, \infty]$  (avec  $p_0 \leq p_1$ ) et  $\theta \in (0, 1)$  tels que

$$\frac{1}{p_\theta} := \frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

et vérifiant  $(p'_1, p'_\theta) \in \mathcal{I}_X$ , on a

$$(W^{1, p_0}, W^{1, p_1})_{\theta, p_\theta} = W^{1, p_\theta}.$$

Nous donnons différents critères pour savoir si un couple d'exposants appartient à  $\mathcal{I}_X$ , ces critères sont reliés aux inégalités  $(R_p)$ ,  $(RR_p)$  sur la transformée de Riesz et à des estimations sur le noyau de la chaleur. Notamment, nous avons le résultat suivant :

**Théorème 2.2.7** ([9]). Si pour  $r \in (1, 2)$ , on a l'inégalité  $(RR_r)$  :

$$\left\| (1 + \Delta)^{1/2}(f) \right\|_{L^r} \lesssim \|f\|_{W^{1, r}},$$

alors pour tout  $p_0 \in (1, 2)$  et  $\theta \in (0, 1)$  tel que

$$\frac{1}{p_\theta} := \frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{2} < \frac{1}{r},$$

on a

$$(W^{1, p_0}, W^{1, 2})_{\theta, p_\theta} = W^{1, p_\theta}.$$

C'est intéressant de voir que dans ce cas, le critère pour pouvoir interpoler est exactement conditionné par l'inégalité  $(RR_r)$  (qui traduit l'injectivité de la transformée de Riesz dans  $L^r$ ) et n'utilise pas d'inégalité de Poincaré. Ce résultat améliore ceux de Badr, où l'inégalité de Poincaré était utilisé ainsi que des estimations sur le gradient du semi-groupe de la chaleur (qui sont plus fortes que l'inégalité  $(RR_r)$ ).

Dans [10], nous avons ensuite étendu cette approche en combinant le point de vue "atome" pour les espaces de Sobolev, en définissant des espaces de Hardy-Sobolev (comme substitut de  $W^{1, 1}$ ) et étudiant l'interpolation avec les espaces de Sobolev.

## 2.3 Inégalités de type "John-Nirenberg"

Le premier espace BMO (pour *Bounded Mean Oscillation*) a été introduit par John et Nirenberg [88]. Cet espace contient strictement  $L^\infty$  et est un bon substitut à l'échelle des espaces de Lebesgue  $(L^p)_{1 < p < \infty}$  pour  $p \rightarrow \infty$  d'un point de vue de l'analyse harmonique. Par exemple, il a joué un rôle important pour la continuité des opérateurs de Calderón-Zygmund, Mesures de Carleson, étude des paraproducts, ... De plus BMO peut être réalisé comme l'espace dual de l'espace de Hardy de Coifman-Weiss  $H_{CW}^1$  (Fefferman [67, 70]).

Dans cette section, je vais particulièrement m'intéresser à une propriété spécifique des fonctions BMO : communément appelée l'inégalité de John-Nirenberg [88]. Alors qu'une fonction BMO, a par définition des oscillations bornées dans  $L^2$ , il s'avère qu'en fait ces oscillations sont

exponentiellement intégrables. Plus précisément, sur un espace de type homogène  $(X, d, \mu)$ , pour  $Q$  une boule une fonction  $f \in BMO$  vérifie

$$\left| \left\{ x \in Q, \left| f(x) - \int_Q f \right| > \lambda \right\} \right| \leq c_1 |Q| e^{-c_2 \lambda / \|f\|_{BMO}}$$

où les constantes  $c_1, c_2$  ne dépendent que de l'espace considéré  $X$ .

Cette propriété bien connue aujourd'hui a une conséquence importante (qui peut être décrite par deux points de vue différents) :

- équivalence des espaces  $BMO_q$  pour  $q \in (1, \infty)$  (où  $BMO_q$  est construit sur un contrôle  $L^q$  des oscillations) ;
- étant donné le résultat de dualité entre les espaces BMO et les espaces de Hardy, il vient que les espaces de Hardy  $H_p^1$  (définis par des  $L^p$ -atomes) ne dépendent pas de  $p \in (1, \infty)$  [55].

Toujours dans la même optique de généraliser à un cadre “d'oscillations” générales, dans [12] nous avons essayé d'étendre ces résultats à des espaces BMO généraux, construits sur nos opérateurs d'oscillations  $B_Q$ .

On suppose donc que nos opérateurs  $B_Q$  sont uniformément bornés sur certains espaces de Lebesgue : il existe des exposants  $p_1 < p_0$  de  $(1, \infty]$  tels que pour  $p \in [p_0, q_0]$

$$\forall f \in L^p, \forall Q \text{ boule}, \quad \|B_Q(f)\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}. \quad (2.11)$$

On définit les espaces BMO associés de la manière suivante :

**Définition 2.3.1.** Pour  $q \in [p_0, q_0]$ , une fonction  $f \in L^q$  appartient à l'espace  $Bmo_q$  si

$$\|f\|_{BMO_q} := \sup_Q \left( \int_Q |B_Q(f)|^q d\mu \right)^{1/q} < \infty.$$

L'espace  $BMO_q$  est obtenu par complétion.

Nous allons étudier la question suivante :

Sous quelles conditions sur  $\mathbb{B}$ , les espaces  $BMO_q$  ne dépendent pas de  $q \in [p_1, p_0]$  ?

(2.12)

Plus généralement d'autres inégalités vérifie une telle propriété “d'auto-amélioration”, par exemple les inégalités de Poincaré. Ces inégalités permettent de contrôler les oscillations en terme de gradient : si notre espace ambiant  $(X, d, \mu)$  est une variété Riemannienne munie d'un gradient, une fonction  $f$  qui vérifie

$$\left( \int_Q \left| f - \int_Q f \right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq C r_Q \left( \int_Q |\nabla f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

pour toutes les boules  $Q \subset X$  vérifie pour  $1 \leq p < d$  (où  $d$  est la dimension homogène de  $X$ )

$$\left( \int_Q \left| f - \int_Q f \right|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} \leq C r_Q \left( \int_Q |\nabla f|^p dx \right)^{1/p},$$

où  $p^* = \frac{pd}{d-p} > p$  est l'exposant de Sobolev. Ici le même phénomène apparaît : le fait que l'inégalité de contrôle sur les oscillations soit vérifiée à toutes les échelles (sur toutes les boules) permet d'en déduire une amélioration.

Dans [12, 19] nous avons essayé d'avoir une approche générale et abstraite de ces propriétés d'auto-amélioration (le but étant d'avoir une approche unifiée), en répondant à la question suivante :

Quelles sont les conditions sur la collection $\mathbb{B}$ qui impliquent de telles propriétés d'auto-amélioration ?	(2.13)
--	--------

Ces travaux font suite à différents articles, initiés par Franchi, Pérez et Wheeden [71] qui ont donné une première approche unifiée de ce principe. Ils ont étudié ces propriétés d'auto-amélioration pour des inégalités du type

$$\left( \int_Q \left| f - \int_Q f \right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim a(Q),$$

données par une fonctionnelle  $a$ .

**Définition 2.3.2** ([71]). Soit  $a$  une fonctionnelle

$$a : \mathcal{Q} \longrightarrow [0, \infty).$$

Pour  $r \in (1, \infty)$ , on dit que  $a$  vérifie la propriété  $D_r(\mu)$  ou  $a \in D_r(\mu)$  si il existe une constante  $C$  telle que pour tout cube  $Q$  et toute famille de sous-cubes disjoints  $\{Q_i\}_i \subset Q$ , on a

$$\left( \sum_i a(Q_i)^r \mu(Q_i) \right)^{\frac{1}{r}} \leq C a(Q) \mu(Q)^{\frac{1}{r}}.$$

Par exemple,

- les fonctions BMO sont associées à la fonctionnelle constante  $a = 1$  qui vérifie  $D_r(\mu)$  pour tout  $r \in (1, \infty)$  ;
- les fonctions Lipschitz sont associées à la fonctionnelle  $a(Q) = r(Q)^\alpha$  qui vérifie  $D_r(\mu)$  pour tout  $r \in (1, \infty)$  ;
- les inégalités de Poincaré sont associées à la fonctionnelle  $a(Q) := r(Q) \left( \int_Q |\nabla f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$  qui vérifie  $D_r(\mu)$  pour tout  $r \in (1, p^*)$ .

Le cadre des oscillations a ensuite été généralisé en remplaçant les opérateurs de moyenne par un semi-groupe et des inégalités de John-Nirenberg (cas d'une fonctionnelle constante  $a = 1$ ) ont été prouvées par Duong et Yan [60, 61] et Hofmann et Mayboroda [80]. Plus récemment, ces propriétés d'auto-amélioration ont été obtenues pour des fonctionnelles plus générales et des oscillations construites à partir d'un semi-groupe par Badr, Martell et Jimenez [86, 87, 39].

Les deux travaux [12, 19] s'inscrivent dans cette direction et ont pour but de combiner ces différentes approches : décrire un cadre général (à la fois pour les oscillations et pour les fonctionnelles  $a$ ) dans lequel des propriétés d'auto-amélioration sont démontrées. L'approche décrite dans [19] permet d'unifier tous les résultats précédents.

Nous avons obtenu le résultat suivant (sur  $\mathbb{R}^d$ ) :

**Théorème 2.3.3** ([19]). Soit  $1 \leq p_0 < q_0 \leq \infty$  et  $\mathbb{B} := (B_Q)_{Q \in \mathcal{Q}}$  des opérateurs d’oscillations qui vérifient (2.11) et

- Commutativité :  $B_Q B_R = B_R B_Q$  pour toute boule  $Q, R \in \mathcal{Q}$
- Estimation hors-diagonales  $L^{p_0} - L^{q_0}$  : pour des coefficients à décroissance rapide  $\alpha_k, k \geq 2$ ,

$$\left( \int_{2^j Q} |A_Q(f \chi_{4^j Q})|^{q_0} dx \right)^{1/q_0} \leq \alpha_2 \left( \int_{4^j Q} |f|^{p_0} dx \right)^{1/p_0}$$

et pour  $j \geq 1$ ,

$$\left( \int_{2^j Q} |A_Q(f \chi_{X \setminus 2^{j+1} Q})|^{q_0} d\mu \right)^{1/q_0} \leq \sum_{k \geq 2} \alpha_{k+j} \left( \int_{2^{k+j} Q} |f|^{p_0} dx \right)^{1/p_0}. \quad (2.14)$$

- Décroissance hors-diagonale  $L^{p_0} - L^{q_0}$  pour la composition : pour des coefficients à décroissance rapide  $\beta_k, k \geq 2$ , et des boules  $R \subset Q$ ,

$$\left( \int_{2R} |B_R A_Q f|^{q_0} dx \right)^{1/q_0} \leq \sum_{k \geq 1} \beta_{k+1} \left( \int_{2^{k+1} Q} |f|^{p_0} dx \right)^{1/p_0}. \quad (2.15)$$

Soit  $f$  une fonction et  $a$  une fonctionnelle vérifiant pour tout  $k \geq 0$  et toute boule  $Q$ ,

$$\left( \int_{2^k Q} |B_Q f|^{p_0} \right)^{1/p_0} \leq a(2^k Q). \quad (2.16)$$

Si  $a$  est une fonctionnelle “doublante” et vérifiant  $D_q(\mu)$  pour  $q \in (p_0, q_0)$  alors pour toute boule  $Q$

$$\|B_Q f\|_{L^{q, \infty, Q}} \lesssim a(Q). \quad (2.17)$$

Dans [19] nous décrivons différentes améliorations possibles et différents cadres d’application (notamment comment on peut contourner l’hypothèse de commutativité par une hypothèse de localisation). Le résultat est un peu “technique” car nous avons cherché à avoir l’expression la plus générale possible. La première hypothèse (2.14) traduit des décroissances hors-diagonales  $L^{p_0} - L^{q_0}$  qui sont standard et qui sont déjà apparues dans les sections précédentes. La nouveauté ici est la deuxième hypothèse (2.15) qui décrit pour la composition  $B_R A_Q$  des décroissances hors-diagonales à la plus petite échelle ( $R \subset Q$ ). Très brièvement, la preuve repose alors sur le principe suivant :

- Si  $f$  vérifie (2.16) pour toutes les boules, alors on montre que  $f$  vérifie la même propriétés pour les oscillations  $B_Q^2 = B_Q B_Q$  (où l’on compose deux fois les opérateurs d’oscillations) ;
- On vérifie qu’il suffit alors de montrer la propriété d’auto-amélioration pour ces opérateurs  $B_Q^2$ .
- On applique un argument de temps-d’arrêt sur une décomposition “à la Calderón-Zygmund” pour obtenir cette propriété d’auto-amélioration via des inégalités aux bons lambdas.

“L’astuce” a été ici d’utiliser ces opérateurs  $B_Q^2$  pour prendre en compte l’information essentielle de l’hypothèse (2.15). L’intérêt de celle-ci est d’avoir un cadre unifié, en effet les différentes hypothèses sont satisfaites à la fois par les opérateurs d’oscillation classiques et ceux construits à l’aide d’un semi-groupe. Ce résultat permet donc de retrouver les propriétés d’auto-amélioration connues (inégalités de John-Nirenberg pour les fonctions  $BMO$  ou  $BMO_{\mathbb{B}}$ , inégalité de (pseudo)-Poincaré, ...) . Par exemple, on peut l’appliquer dans le cadre d’un opérateur elliptique sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $L = -\operatorname{div} A \nabla$ . En définissant les opérateurs d’oscillations

$$B_Q = (1 - e^{-\tau_Q^2 L})^M$$

pour un certain entier  $M$  assez grand, on retrouve alors les résultats de [80, 81] sur les espaces de Hardy, BMO et Lipschitz associés à  $L$ .

## 2.4 Théorème $T(1)$ pour un semi-groupe d'opérateur et applications à de nouveaux paraproducts

Le premier “théorème  $T(1)$ ” est du à David et Journé [56], il permet d'obtenir une caractérisation de la bornitude  $L^2$  pour un opérateur associé à un noyau “standard” (noyau qui vérifie les estimations ponctuelles dites “standard”). Dans ce cas, la décomposition de Calderón-Zygmund et l'interpolation réelle permet d'en déduire que ces opérateurs sont alors bornés sur tous les  $L^p$  pour  $p \in (1, \infty)$ .

Ce célèbre résultat d'analyse nous montre qu'un tel opérateur (vérifiant une propriété de continuité faible) est continu sur  $L^2$  si et seulement si  $T(1)$  et  $T^*(1)$  peuvent être définis comme des fonctions de l'espace  $BMO$ . Ce résultat a connu diverses extensions que nous ne détaillons pas. La preuve repose essentiellement sur la notion de mesure de Carleson, associée à une fonction  $BMO$ . Par exemple, un tel résultat permet d'obtenir la bornitude  $L^2$  des commutateurs de Calderón et d'obtenir un critère de continuité  $L^2$  pour des opérateurs pseudo-différentiels (associés par exemple à des symboles de la classe  $S_{1,1}^0$  [51]) ainsi qu'à l'étude des paraproducts.

Nous allons décrire comment nous pouvons obtenir de nouvelles versions de ce résultat. Ayant besoin de plus de structure que seulement une collection d'opérateurs d'oscillation  $\mathbb{B}$ , nous allons travailler dans le cadre donné par un semi-groupe d'opérateur  $(e^{-tL})_{t>0}$ , généré par un opérateur  $L$  “d'ordre  $m$ ”. Les opérateurs d'oscillations qui seront alors considérés sont de la forme  $B_Q(f) = f - e^{-r^m Q} f$  ou  $B_Q(f) = (1 - e^{-r^m Q})^M f$  pour un entier  $M$  assez grand. Nous allons tout d'abord décrire un théorème  $T(1)$  associé à un tel semi-groupe et l'appliquer pour l'étude de nouveaux paraproducts. Tout cela va être basé uniquement sur un calcul fonctionnel holomorphe de  $L$ , ce qui permet une certaine souplesse du cadre considéré (par exemple  $L$  n'est pas supposé auto-adjoint). Par contre ensuite, nous expliquerons brièvement comment on peut définir un calcul pseudo-différentiel associé (dont certains opérateurs seront montrés bornés sur  $L^2$  grâce au théorème  $T(1)$ ), là nous aurons besoin d'un calcul fonctionnel  $C^\infty$  et  $L$  sera donc supposé auto-adjoint.

### 2.4.1 Un nouveau Théorème $T(1)$

Dans la Section 2.1, nous avons vu de manière générale comment obtenir des continuités  $L^p$  pour  $p < 2$  à partir d'une continuité  $L^2$ , pour un opérateur linéaire. Naturellement, il est maintenant intéressant d'avoir des critères pour démontrer cette première continuité  $L^2$ . Il s'agit donc d'étendre le théorème  $T(1)$  dans un cadre où les “oscillations” ne sont pas nécessairement celles données par les moyennes.

Nous avons pu finaliser cette approche dans le cas où les oscillations sont données par un semi-groupe d'opérateurs, vérifiant certaines propriétés.

Considérons donc un opérateur  $L$  d'ordre  $m > 0$  défini sur une variété Riemannienne double  $(M, d, \mu)$  et admettant un calcul fonctionnel holomorphe. Son semi-groupe  $(e^{-tL})_{t>0}$  est donc bien défini sur  $L^2 = L^2(M)$  et on définit l'espace  $BMO_L$  comme l'ensemble des fonctions  $f \in L^1_{loc}$  telle que

$$\|f\|_{BMO_L} := \sup_{t>0} \sup_{\substack{Q \text{ boule} \\ r^m = t}} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f - e^{-tL} f| d\mu < \infty.$$

Cet espace est donc un cas particulier des espaces BMO, que nous avons étudiés dans la Section 2.3 pour obtenir des inégalités de John-Nirenberg.

Sans détailler de manière trop précise les hypothèses, nous allons supposer que la variété admet une inégalité de Poincaré ( $P_2$ ) et que l'opérateur  $L$  vérifie :

- un calcul  $H_\infty$  borné sur  $L^2$  et vérifie  $L(1) = 0$  ;
- Pour tout  $z$  appartenant à un secteur conique  $|\text{Arg}(z)| < \omega$ , le semi-groupe  $e^{-zL}$  est donné par un noyau vérifiant des décroissances ponctuelles ;
- La transformée de Riesz  $\mathcal{R} := \nabla L^{-1/m}$  est bornée sur  $L^2$ .

Sous ces hypothèses alors Duong et Yan ont démontré que l'espace  $BMO_L$  peut être caractérisé par des mesures de Carleson [60], de manière similaire à ce qui se passe dans la situation Euclidienne. Utilisant ce fait, nous avons pu adapter et construire un nouveau cadre pour un théorème  $T(1)$  associé à un tel semi-groupe :

**Théorème 2.4.1** ([14]). *Soit  $T$  opérateur linéaire vérifiant*

- une continuité faible  $L^2$  ;
- des décroissances hors-diagonales relativement aux oscillations définies par le semi-groupe (similaires à (2.3) avec  $B_Q = (Id - e^{-r_Q^m L})^M$ ).

*Alors  $T$  admet une extension bornée sur  $L^2$  si et seulement si  $T(1) \in BMO_L$  et  $T^*(1) \in BMO_{L^*}$ .*

Il est intéressant de voir que les hypothèses faites sur l'opérateur peuvent être considérées comme une “généralisation” du fait que  $T$  soit un opérateur de Calderón-Zygmund. En effet, dans le cas où  $L = -\Delta$  sur l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^d$  nos hypothèses sont vérifiées si  $T$  est associé à un noyau “standard”. Dans ce cas, nous avons identification des espaces BMO ( $BMO = BMO_{-\Delta}$ ) et donc nous retrouvons le théorème original.

Il est aussi important de voir que les hypothèses faites sur l'opérateur permettent d'appliquer les résultats d'extrapolation de la Section 2.1. De ce fait, nous en déduisons que de tels opérateurs sont alors bornés sur tous les  $L^p$  pour  $p \in (1, \infty)$ .

La preuve repose sur quatre faits principaux :

- On cherche à évaluer  $\langle T(f), g \rangle$  pour  $f, g \in L^2$ , on utilise une formule de reproduction de Calderón pour décomposer  $f$  et  $g$  à l'aide du semi-groupe ( $f = \int (tL)e^{-tL}(f) \frac{dt}{t}$ ) ;
- La décomposition précédente permet de décomposer l'opérateur  $T$  en des opérateurs élémentaires “agissant à une échelle fixée”. A cette échelle fixée, la propriété de cancellation  $L(1) = 0$  nous permet alors de “remplacer” les fonctions  $f$  et  $g$  par leurs moyennes sur des boules adaptées à cette échelle ;
- La quantité ainsi apparue est estimée à l'aide des mesures de Carleson, construite à partir des fonctions  $T(1)$  et  $T^*(1)$  ;
- La différence obtenue par ce remplacement est contrôlée par l'inégalité de Poincaré et la bornitude de la transformée de Riesz.

Récemment, ce théorème  $T(1)$  a été étendu par Frey et Kuntsmann [72], où le semi-groupe n'est plus supposé avoir des décroissances hors-diagonales  $L^1 - L^\infty$  (correspondant à une estimation ponctuelle du noyau) mais seulement  $L^{p_-} - L^{p_+}$  pour des exposants  $p_- < 2 < p_+$ .

De manière équivalente à l'utilisation du théorème  $T(1)$  dans le cadre Euclidien, ces théorèmes nous permettent d'étudier des “nouveaux” paraproducts ainsi que des opérateurs pseudo-différentiels définis à l'aide du semi-groupe. Nous allons détailler cela dans les deux prochaines sous-sections.

## 2.4.2 De “nouveaux” paraproduits et applications

Dans le même cadre que précédemment, nous allons définir de “nouveaux” paraproduits. Nous avons rappelé la notion Euclidienne des paraproduits dans la sous-Section 2.4.2, Chapitre 1.

Par analogie aux opérateurs  $\Psi_t$  et  $\Phi_t$  (sous-Section 2.4.2), nous définissons  $\psi(x) = x^N e^{-x}(1 - e^{-x})$ ,  $\phi(x) := -\int_x^\infty \psi(y)dy/y$  pour un entier  $N$  assez grand et

$$\Psi_t(L) := \psi(tL) = (tL)^N e^{-tL}(1 - e^{-tL}) \quad \text{and} \quad \Phi_t(L) := \phi(tL).$$

Ainsi l’opérateur  $\Psi_t(L)$  peut être considéré comme une troncation sur “ $\{L \simeq t^{-1}\}$ ” et  $\Phi_t(L)$  sur “ $\{L \lesssim t^{-1}\}$ ”.

On définit alors les paraproduits suivants ([14]) :

$$\Pi(f, g) := \int_0^\infty \psi(tL) [\phi(tL)f \phi(tL)g] \frac{dt}{t}$$

et

$$\Pi_g(f) := \int_0^\infty \phi(tL) [\psi(tL)f \phi(tL)g] \frac{dt}{t}.$$

Une simple analyse spectrale, nous donne la décomposition suivante (à une constante près) :

$$fg = \Pi(f, g) + \Pi_g(f) + \Pi_f(g).$$

Le précédent théorème  $T(1)$  s’applique et on peut montrer le résultat suivant :

**Théorème 2.4.2** ([14]). *Pour  $p, q \in (1, \infty)$  et  $r \in (1/2, \infty)$  vérifiant*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r},$$

*les opérateurs  $(f, g) \rightarrow \Pi(f, g)$  et  $(f, g) \rightarrow \Pi_g(f)$  sont bornés de  $L^p \times L^q$  dans  $L^r$ .*

Il est même possible d’avoir des estimations à poids de  $L^p(\omega) \times L^q(\omega)$  dans  $L^r(\omega)$  pour tout poids  $\omega \in \mathbb{A}_p \cap \mathbb{A}_q$ .

Ce résultat ne peut pas être démontré de manière simple : en effet si dans la définition des paraproduits, nous avons 2 opérateurs  $\psi(tL)$  alors par dualité et calcul fonctionnel holomorphe sur les fonctionnelles carrées, nous aurions pu directement conclure. Mais dans ce cas, où seul 1 opérateur  $\psi(tL)$  apparaît une telle approche ne peut aboutir.

Ce fut une de nos motivations pour démontrer le précédent théorème  $T(1)$ . En effet, on vérifie que pour  $g \in L^\infty$  fixée, les opérateurs  $f \rightarrow \Pi(f, g)$  et  $f \rightarrow \Pi_g(f)$  vérifient les hypothèses de notre nouveau Théorème  $T(1)$ . De ce fait, nous en déduisons les continuités  $L^2$  et  $L^p$  pour  $p \in (1, \infty)$ . Les autres continuités sont obtenus par combinaison de l’interpolation bilinéaire et un résultat d’extrapolation (car nous avons aussi des continuités sur les espaces à poids).

L’appellation “paraproduit” conserve tout son sens lorsque l’on étudie les continuités dans les espaces de Sobolev ([20]). Associé à notre opérateur  $L$ , nous définissons les espaces de Sobolev

$$W_L^{s,p} := \left\{ f \in L^p, L^{s/m}(f) \in L^p \right\}.$$

Alors nous avons obtenu

**Proposition 2.4.3** ([20]). *Pour tout  $s > 0$  et  $p, q, r \in (1, \infty)$  avec  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ , on a*

$$\|\Pi_g(f)\|_{W_L^{s,r}} \lesssim \|f\|_{W^{s,p}} \|g\|_{L^q}.$$

En un certain sens, cette proposition montre que  $\Pi_g(f)$  capture dans le produit  $fg$ , la partie dont la régularité est donnée par celle de  $f$ . En modifiant légèrement la définition du paraproduct ([21]), on peut alors montrer que  $\Pi_g(f)$  est en fait même optimal pour cette propriété dans le sens où le terme restant  $\Pi(f, g)$  est plus régularisant.

L'étude du terme diagonal  $\Pi(f, g)$  est beaucoup plus compliquée, en effet nous avons besoin de comprendre comment l'opérateur  $\psi(tL)$  appliqué au produit  $\phi(tL)(f)\phi(tL)(g)$  transmet la "cancellation" sur chacun des deux termes. Ceci peut être obtenu de la manière suivante : en utilisant la cancellation  $L(1) = 0$  et une inégalité de Poincaré, on "convertit" partiellement l'opérateur  $\Psi(tL)$  à l'aide du gradient. Celui-ci agit alors sur le produit par la règle de différentiation classique. La continuité de la transformée de Riesz nous permet alors de re-transformer le gradient par l'opérateur  $L$ , tout en conservant les normes  $L^p$ . Cette méthode permet de contourner le problème mais ne peut être utilisée que pour des exposants de régularité  $s < 1$ , due à l'utilisation des inégalités de Poincaré. Cette limitation  $s < 1$  semble donc inhérente à la méthode utilisée. Elle peut être affaiblie comme dans [85] où Ivanovici et Planchon ont travaillé avec le laplacien de Dirichlet associé à certains domaines, opérateur auto-adjoint admettant un calcul fonctionnel  $C^\infty$ .

On obtient alors le résultat suivant :

**Proposition 2.4.4** ([20]). *Soit  $s < 1$  et  $p, q, r \in (1, \infty)$  avec  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ . Supposons que*

- *La variété  $M$  vérifie une inégalité de Poincaré ( $P_r$ );*
- *La transformée de Riesz  $\mathcal{R} := \nabla L^{-\frac{1}{m}}$  est bornée sur  $L^p$ .*

*Alors*

$$\|\Pi(f, g)\|_{W^{s,r}} \lesssim \|f\|_{W^{s,p}} \|g\|_{L^q} + \|f\|_{L^q} \|g\|_{W^{s,p}}.$$

Comme conséquence, pour  $q = \infty$  nous obtenons ainsi que l'espace  $W^{s,p} \cap L^\infty$  est une algèbre. Si  $sp > d$  (où  $d$  est la dimension homogène de la variété) alors  $W_L^{s,p} \subset L^\infty$  et de ce fait, nous obtenons que  $W^{s,p}$  est une algèbre. C'est un résultat bien connu pour les espaces de Sobolev Euclidiens, que nous étendons ainsi à un cadre plus général. D'ailleurs, en utilisant une caractérisation des espaces de Sobolev  $W_L^{s,p}$  par des fonctionnelles, nous avons démontré que l'espace de Sobolev  $W_L^{s,p}$  ne dépend pas de l'opérateur  $L$ , tant que  $s < 1$  ([20]).

### 2.4.3 La paralinéarisation et la propagation de régularité pour des EDPs non-linéaires

Dans le cadre Euclidien, le paraproduct a montré tout son intérêt dans la "paralinéarisation", qui permet de linéariser des EDPs non linéaires et ainsi montrer la propagation de la régularité pour les solutions d'EDPs non linéaires. Ce fut la motivation de Bony, pour l'introduction des paraproducts [43]. De manière naturelle, nous avons cherché à étendre cet outils dans ce nouveau cadre, avec ces paraproducts construits sur un semi-groupe. Ce fut l'objet du travail [21].

Sans trop détailler cette application un peu technique. Nous nous restreignons au cadre d'un sous-Laplacien où  $L = -\sum_{i=1}^k X_i^2$  est donné par la somme de carrés de certains champs de vecteurs. En modifiant légèrement la définition du paraproduct, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 2.4.5** ([21]). Pour  $p \in (1, \infty)$  et  $s \in (d/p, 1)$ , soit  $f \in W_L^{s+\epsilon, p}$  pour  $\epsilon > 0$ . Alors pour toute fonction régulière  $F \in C^\infty(\mathbb{R})$  avec  $F(0) = 0$ ,

$$F(f) - \Pi_{F'(f)}(f) \in W^{2s-d/p, p}.$$

Le célèbre résultat de Bony et Meyer [43, 100] dans le cadre Euclidien, montre que la paralinéarisation permet d’avoir un gain de régularité d’ordre  $s - \frac{d}{p}$ . Due à un manque de “localisation parfaite en fréquence” dans cette adaptation, nous avons une petite perte : le gain est de  $s - d/p - \epsilon$  pour tout  $\epsilon > 0$ . Comme précédemment, les techniques utilisées ici requiert une faible régularité  $s < 1$ . Cette forte contrainte peut être affaiblie, en modifiant le paraproduit (et en faisant intervenir des dérivées d’ordre supérieur en  $F$ ).

On peut alors décrire un résultat de propagation de régularité pour des solutions d’EDPs non-linéaires

**Théorème 2.4.6** ([21]). Pour  $p \in (1, \infty)$ ,  $s \in (d/p, 1)$ ,  $\rho < \min\{1, s - d/p\}$ ,  $f \in W_L^{s+1, p}$  et une fonction régulière  $F(x, u_1, \dots, u_N) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^N)$  avec  $F(x, 0, \dots, 0) = 0$ . Supposons que  $f$  soit solution de

$$F(x, f(x), X_1 f(x), \dots, X_\kappa f(x)) = 0.$$

Alors en tout point  $x_0 \in M$ ,  $f$  est régulière d’ordre  $(s + 1 + \rho)$  selon le champ vecteur  $\Gamma$

$$\Gamma(x) := \sum_{i=2}^{\kappa+1} [\partial_{u_i} F](x, f(x), X_1 f(x), \dots, X_\kappa f(x)) X_i.$$

Plus précisément

$$\sum_{i=2}^{\kappa+1} [\partial_{u_i} F](x, f(x), X_1 f(x), \dots, X_\kappa f(x)) L^{(s+\rho)/2} X_i(f) \in L^p.$$

Ce résultat technique montre que la solution  $f$  propage la régularité (on a un gain de régularité  $\rho < \min\{1, s - d/p\}$ ) le long des champs de vecteurs donnés par l’équation linéarisée. La structure utilisée ici (semi-groupe de la chaleur) est beaucoup moins souple que l’analyse fréquentielle qui peut être faite dans l’espace Euclidien. De ce fait, le résultat de propagation de régularité présenté ici est naturellement moins complet que celui de Bony [43]. Par contre il a la particularité de ne pas utiliser la structure Euclidienne et donc peut être utilisé dans un cadre plus général.

#### 2.4.4 Opérateurs pseudo-différentiels

Dans le cas Euclidien, le calcul pseudo-différentiel est basé sur une représentation fréquentielle et l’utilisation de la transformée de Fourier est essentielle. Il a pu être étendu à certains groupes géométriques, où une certaine transformation de Fourier existe ([40] pour les groupes de Heisenberg, [73] pour certains groupes de Carnot, ...). Nous voulons expliquer ici, comment on peut construire et étudier des opérateurs pseudo-différentiels dans un cadre très général (cadre d’un espace métrique mesuré) à l’aide d’un semi-groupe auto-adjoint [28].

Soit  $L$  un opérateur auto-adjoint d’ordre  $m$ , générant un semi-groupe  $(e^{-tL})_{t>0}$  sur  $X$ , un espace métrique doublant. Supposons aussi que  $X$  soit muni d’un opérateur auto-adjoint  $\Delta$ , définissant une notion de régularité sur  $X$ .

**Définition 2.4.7** ([28]). Pour  $\rho, \delta \in [0, 1]$  et  $s \geq 0$ , une fonction régulière  $\sigma \in C^\infty(X \times \mathbb{R})$  est un symbole de la classe  $S_{\rho, \delta}^s := S_{\rho, \delta}^s(L)$  si

$$\forall \alpha, \beta \geq 0, \quad \left| \partial_\xi^\beta \Delta^\alpha \sigma(\cdot, \xi)[x] \right| \lesssim (1 + |\xi|)^{\frac{s}{m} - \rho\beta + \frac{2}{m}\delta\alpha}.$$

À une telle fonction, on associe l'opérateur pseudo-différentiel  $\sigma(x, L)$ .

Ici  $L$  est supposé auto-adjoint donc admet un calcul fonctionnel Borélien et donc  $C^\infty$ . Pour tout  $x$  fixé,  $\xi \rightarrow \sigma(x, \xi)$  est une fonction bornée et donc  $\sigma(x, L)$  peut être défini. On définit alors

$$\sigma(x, L)[f] := x \rightarrow \sigma(x, L)[f](x).$$

De manière analogue à ce qui est fait dans le cas Euclidien, nous avons obtenu les continuités  $L^p$  suivantes :

**Théorème 2.4.8** ([28]). *Supposons que  $X$  admet des injections de Sobolev relativement à l'opérateur  $\Delta$  et que  $(e^{-tL})_{t>0}$  admet des estimations hors-diagonales de  $L^{p_0}$  dans  $L^{p'_0}$  pour un certain  $p_0 \in [1, 2)$ . Alors pour tout  $p \in (p_0, p'_0)$  et  $\sigma \in S_{1,0}^0$ , l'opérateur  $\sigma(x, L)$  est borné sur  $L^p$ . Si on suppose de plus une inégalité "faible" de type Poincaré généralisée pour  $\Delta$ , le résultat s'étend aux classes  $S_{1,\delta}^0$ , avec  $\delta \in [0, 1)$ .*

La preuve repose sur 2 étapes :

- On établit d'abord la continuité  $L^2$ , par du calcul fonctionnel sur le semi-groupe et une décomposition des symboles en symbole élémentaires (semblable à celle de Bony et Meyer [43, 100]).
- On extrapole la continuité  $L^2$  en continuité  $L^p$ , en utilisant les résultats décrits en Section 2.1.

Ce résultat permet d'étudier les opérateurs pseudo-différentiels dans un cadre assez large. Notamment dans le cas d'un ensemble fractal  $X$ , on retrouve et on étend des résultats récents de Ionescu, Rogers et Strichartz [84].

Le cas plus exotique des symboles de la classe  $S_{1,1}^0$  peut être étudié, en appliquant le précédent théorème  $T(1)$  (par analogie aux résultats Euclidiens pour cette classe symbolique). On a pu l'appliquer dans le cadre plus restreint d'un sous-Laplacien  $L$  sur une variété Riemannienne :

**Théorème 2.4.9** ([28]). *Supposons que  $X$  soit une variété Riemannienne avec un sous-Laplacien  $\Delta = L = -\sum_i X_i^2$ . Alors sous les mêmes hypothèses que précédemment et des estimations sur  $\nabla e^{-tL}$ , on a pour un symbole  $\sigma \in S_{1,1}^0$ ,  $\sigma(x, L)$  est borné sur  $L^2$  si et seulement si  $[\sigma(x, L)]^*(1) \in BMO_L$ . Dans ce cas,  $\sigma(x, L)$  est borné sur  $L^p$  pour  $p \in (p_0, p'_0)$ .*

Ce résultat est une application du Théorème  $T(1)$ , présenté en Section 2.4 : puisque  $\sigma(x, L)(1) = \sigma(x, 0) \in L^\infty \subset BMO_L$ , il suffit de vérifier que l'opérateur  $\sigma(x, L)$  vérifie les hypothèses du théorème  $T(1)$ .

Ayant des continuités  $L^p$  pour des opérateurs pseudo-différentiels, nous pouvons définir de nouveaux paraproducts :

$$\Pi_g(f) := \int_0^\infty [\psi(tL)f \phi(tL)g] \frac{dt}{t}, \quad (2.18)$$

un peu différents que ceux étudiés en sous-Section 2.4.2. Ces paraproducts (2.18) sont ainsi continus sur le produit d'espaces de Lebesgue. L'étude de tels paraproducts est à son début et

il n'est pas clair aujourd'hui quelle est la meilleure définition à considérer (2.18) ou celle de la sous-Section 2.4.2 ...

Quelle que soit la définition, l'un des intérêts du paraproduit est de pouvoir s'inverser par calcul symbolique : on veut comprendre comment peut-on inverser l'opérateur  $\Pi_g$  au moins localement autour des points où  $g$  est non-nulle ... Dans l'analyse Euclidienne proposée par Bony [43], une telle étude repose sur un calcul pseudo-différentiel dans la classe  $S_{1,1}^0$ , classe limite où le calcul fonctionnel n'est pas facile. Les travaux présentés ici et dans la sous-section 2.4.2 sont un début pour répondre à cette question dans le cadre non Euclidien.

## 2.5 Un résultat de transport pour les espaces de type BMO

Dans cette section, nous allons présenter les travaux [24, 25].

### 2.5.1 Le transport d'espaces fonctionnels

La motivation est venue de l'étude des équations d'Euler et plus généralement des équations de transport avec champ de vecteur à divergence nulle (en effet, en dimension 2, l'équation d'Euler se transforme en une équation de transport sur la vorticité), que nous allons détailler plus loin. La question générale qui en est sortie est la suivante :

Soit  $\phi$  un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^d$ , préservant la mesure. Alors par définition la composition  $T_\phi := f \rightarrow f \circ \phi$  est une isométrie sur tous les espaces  $L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $p \in [1, \infty]$ .

Quelles sont les hypothèses sur  $\phi$ , de sorte que  $T_\phi$  soit continu sur des espaces de type BMO? (2.19)

Cette section peut sembler indépendante des autres sections. Mais en fait, la philosophie est très similaire. En effet, pour estimer par exemple  $\|f \circ \phi\|_{BMO}$  il faut pour toute boule  $Q$  contrôler la quantité

$$\int_{\phi(Q)} \left| f - \int_{\phi(Q)} f \right|.$$

Autrement dit, en considérant les opérateurs  $B_Q(f) := f - \int_{\phi(Q)} f$ , nous avons

$$\|f \circ \phi\|_{BMO} = \sup_Q \int_{\phi(Q)} |B_Q(f)|.$$

De ce fait, il nous faut comprendre comment  $B_Q$  peut être "décomposé" par des opérateurs d'oscillations classique. Donc la question, à laquelle nous nous sommes intéressés rentre bien dans le cadre d'adapter une certaine analyse de Fourier à un système d'opérateurs d'oscillation.

Examinons le cas de l'espace BMO sur  $\mathbb{R}^d$ . Celui-ci est défini à partir des oscillations sur des boules. Or si nous supposons que  $\phi$  est bi-Lipschitz, il est facile de voir que pour une boule  $B$  de rayon  $r > 0$ ,  $\phi(B)$  est inclus dans une boule de rayon  $\|\phi^\pm\|_{Lip} r$ . Ainsi et en utilisant l'inégalité de John-Nirenberg "faible", on obtient que pour tout  $\epsilon > 0$

$$\|f \circ \phi\|_{BMO} \lesssim_\epsilon \|\phi^\pm\|_{Lip}^\epsilon \|f\|_{BMO}.$$

Nous avons montré que cette croissance polynomiale en  $\|\phi^\pm\|_{Lip}$  peut-être rendu logarithmique, en utilisant de manière précise que  $\phi$  préserve la mesure :

**Théorème 2.5.1** ([25]). Soit  $c(\phi) := \|\phi^\pm\|_{Lip}$ , alors

$$\|f \circ \phi\|_{BMO} \lesssim \log(c(\phi)) \|f\|_{BMO}.$$

De plus la croissance logarithmique est optimale.

La preuve consiste à étudier de manière précise comment une oscillation est “transportée” par la composition avec  $\phi$ . Pour une boule  $B$ , on utilise un recouvrement de Whitney de l’ensemble  $\phi(B) = \cup_i O_i$  et on utilise deux propriétés :

– Si  $B_1 \subset B_2$  alors

$$\left| \int_{B_1} f - \int_{B_2} f \right| \lesssim \log\left(2 + \frac{r_{B_2}}{r_{B_1}}\right) \|f\|_{BMO} \quad (2.20)$$

– Comme  $\phi$  préserve la mesure, on a “pas trop” de petites boules :

$$\sum_{\substack{i \\ r_i \simeq 2^{-l}r}} |O_i| \lesssim |B| 2^{-l} c(\phi).$$

La croissance logarithmique obtenue provient du facteur logarithmique dans l’estimation classique (2.20).

L’approche est très géométrique et assez souple. Elle peut être adaptée à différents espaces fonctionnels, dont la norme est construite à partir des oscillations sur les boules (nous en donnerons d’autres exemples dans la sous-section suivante). Par exemple, on a des résultats similaires pour la composition de mesures de Carleson ou des fonctions Hölderiennes ([25]).

Par dualité, cette estimation est aussi valable pour l’espace de Hardy  $H^1$ . Celle-ci signifie “implicitement” que la composition transporte un atome en au plus  $\log(c(\phi))$  atomes.

Naturellement, les équations de transport par un champ de vitesse à divergence nulle font intervenir ce genre de composition  $T_\phi$  où le flot  $\phi$  préserve la mesure. Ce résultat permet ainsi d’avoir une amélioration sur la croissance en temps des normes BMO pour les équations de transport ([25]). Des équations plus “subtiles” faisant apparaître un tel transport sont les équations d’Euler 2D. Nous allons détailler comment cette analyse a pu nous être utile pour obtenir de nouveaux résultats sur cette équation.

### 2.5.2 Application à l’équation d’Euler 2D

L’équation d’Euler incompressible en dimension  $d = 2$  est la suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla P = 0, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (2.21)$$

où  $u = (u_1, u_2)$  est une fonction de  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$  représentant la vitesse du fluide et  $P$  une fonction scalaire modélisant la pression. La seconde équation du système  $\nabla \cdot u = 0$  est la condition d’incompressibilité. On définit la vorticité  $\omega = \text{curl } u$ , qui joue un rôle essentiel. Il est important de noter que  $u$  peut être retrouvée à l’aide de la vorticité par la Loi de Biot-Savart :

$$u = K * \omega, \quad \text{avec} \quad K(x) = \frac{x^\perp}{2\pi|x|^2}. \quad (2.22)$$

La spécificité de la dimension 2 est la suivante : l'équation d'Euler s'écrit de manière très simple sur la vortacité :  $u$  est solution de (2.21) si et seulement si  $\omega$  est solution de

$$\partial_t \omega + (u \cdot \nabla) \omega = 0. \quad (2.23)$$

Ainsi l'équation d'Euler n'est autre qu'une équation de transport sur la vortacité, transport par un champ de vitesse à divergence nulle. Formellement, en écrivant  $\Psi_t$  le flot donné par  $u$ , c'est à dire tel que  $\partial_t \Psi_t(u) = u(t, \Psi_t)$  ( $\Psi_t$  décrit les courbes caractéristiques sur lesquelles  $u$  est constante), on a alors

$$\omega(t) = \omega_0(\Psi_t^{-1}).$$

Le flot  $\Psi_t$  préserve la mesure, puisqu'il provient d'un champ à divergence nulle, on en déduit donc directement que les normes  $L^p$  sont préservées :

$$\|\omega(t)\|_{L^p} = \|\omega_0\|_{L^p}$$

pour tout  $p \in [1, \infty]$ .

La question naturelle est donc d'essayer d'étendre ces inégalités pour des espaces, plus grands que  $L^\infty$ .

L'unicité des solutions pour une équation de transport est connue pour un champ de vitesse  $u$  log-Lipschitz. Par la Loi de Biot-Savart (2.22), nous savons que si  $\omega(t) \in BMO$  alors  $u(t)$  est log-Lipschitz. Donc nous cherchons des espaces intermédiaire entre  $L^\infty$  et  $BMO$  qui serait propagé par le système d'Euler. Différents travaux (par exemple ceux de Vishik [115, 116]) portent sur le cadre de l'espace  $BMO$ ,  $B_{\infty, \infty}^0$ , ... mais il n'existe pas de résultat sur la propagation de tels espaces.

Le champ de vitesse  $u$  doit donc être log-Lipschitz pour assurer l'unicité. Dans ce cas, le flot  $\Psi_t$  obtenu n'est pas Lipschitz mais vérifie seulement que

$$|x - y|^a \lesssim |\Psi_t(x) - \Psi_t(y)| \lesssim |x - y|^b$$

pour certains exposants  $b < 1 < a$  et tout  $x, y$  avec  $|x - y| \leq 1$ . Par contre, si nous arrivons à assurer que  $u$  est  $\log^\alpha$ -Lipschitz (avec  $\alpha \in (0, 1)$ ) alors on peut choisir  $a$  et  $b$  aussi proche de 1 que l'on veut.

De ce fait, il nous a fallu adapter les arguments de la section précédente (sur le transport d'espaces de type  $BMO$  par une application bi-Lipschitz) où l'application de changement de variable n'est plus Lipschitz mais où son module de continuité dépend de la vitesse  $u$  (au cours du temps). On a donc du introduire de nouveaux espaces.

**Définition 2.5.2** ([24]). Pour une fonction  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ ,  $f \in \text{bmo}$  si

$$\|f\|_{\text{bmo}} := \sup_{0 < r(B) \leq \frac{1}{2}} \int_B |f - \int_B f| + \left( \sup_{\substack{\text{Boule } B \\ |B|=1}} \int_B |f(x)| dx \right) < \infty.$$

Cet espace correspond à la version locale de  $BMO$ . Puis, on définit l'espace  $\log(BMO)$  par

$$\|f\|_{\log(BMO)} := \|f\|_{\text{bmo}} + \sup_{B_1, B_2} \frac{|\int_{B_2} f - \int_{B_1} f|}{1 + \ln \left( 1 + \frac{|\ln(r_2)|}{|\ln(r_1)|} \right)} < +\infty,$$

où le supremum est pris sur toutes les boules  $B_1, B_2$  avec  $0 < r_1 \leq \frac{1}{2}$  et  $2B_2 \subset B_1$ .

L'espace  $\log(BMO)$  est donc intermédiaire à  $L^\infty$  et  $BMO$ . De manière "formelle", on sait que  $BMO$  autorise des singularités ponctuelles en  $\log(|x|)$ , ici l'espace  $\log(BMO)$  autorise des singularités locales en  $\log(|\log(x)|)$ . Réciproquement, la fonction  $\log(1 - \log(|x|))\mathbf{1}_{|x|\leq 1}$  est un exemple de fonction non bornée qui appartient à cet espace  $\log(BMO)$ .

On a alors démontré le résultat suivant :

**Théorème 2.5.3** ([24]). *Soit  $\omega_0 \in L^p \cap \log(BMO)$  pour  $p \in ]1, 2[$ . Alors il existe une unique solution globale en temps  $(u, \omega)$  de l'équation d'Euler. De plus la norme  $\log(BMO)$  est propagée : pour tout  $t > 0$ ,  $\omega(t) \in L^p \cap \log(BMO)$ . En fait il existe une constante  $C_0$  (dépendant seulement de  $\|\omega_0\|_{L^p \cap \log(BMO)}$ ) telle que :*

$$\|\omega(t)\|_{L^p \cap \log(BMO)} \leq C_0 \exp(C_0 t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Ces résultats sont les premiers où nous avons à la fois, existence, unicité et propagation de la norme, pour un espace strictement plus grand que  $L^\infty$ . Dans la littérature, ([115, 116] par exemple) l'équation d'Euler a surtout été étudiée dans des espaces de Besov, définis par les blocs dyadiques en fréquence. Ici ce nouveau type d'espace, défini en terme d'oscillations semble plus adapté pour résoudre ces équations. Ces premiers résultats positifs ouvrent des perspectives pour d'autres équations ...

## 2.6 Perspectives

### 2.6.1 Des inégalités de dispersion par extrapolation

De manière bien connue, les inégalités de dispersion existent sous deux formes : considérons  $\Delta$  un opérateur auto-adjoint sur  $(X, d, \mu)$ ,

- une estimation décrivant un effet régularisant du propagateur  $e^{it\Delta}$  ;
- une estimation du type  $L^1 - L^\infty$  de ce même propagateur, qui implique alors une inégalité de Strichartz.

Intéressons nous à la deuxième forme, de ce phénomène. Dans le cas Euclidien, pour établir

$$\|e^{it\Delta}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{2}} \tag{2.24}$$

il n'y a essentiellement qu'un seul argument connu qui peut être exprimé selon deux points de vue : formulation exacte du noyau du propagateur, estimation ponctuelle du noyau par un argument de phase stationnaire. Cette (unique) approche nécessite de manière essentielle d'avoir recours à la structure Euclidienne (phase non-stationnaire ou transformée de Fourier). De ce fait, bien malheureusement une inégalité du type (2.24) semble bien difficile à obtenir en-dehors du cadre Euclidien.

Sans faire un état de l'art, de nombreux travaux ont contribué à étendre ces inégalités dans différentes situations :

- L'espace  $X$  est une variété compacte,  $X$  est un ouvert sans bord, ... ;
- $\Delta$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété, l'opérateur de Dirichlet ou Neumann sur un ouvert à bord, des perturbations de ces derniers ...

Il serait donc très intéressant de pouvoir décrire une approche "générale" pour ces inégalités de dispersion. Dans tous les cas ci-dessus, l'opérateur de la chaleur  $(e^{-t\Delta})_{t>0}$  est lui très bien connu.

La question naturelle est donc la suivante :

Comment démontrer des inégalités de dispersion (2.24) à partir du semi-groupe de la chaleur ? (2.25)

Nous savons que le propagateur  $e^{it\Delta}$ , nécessite bien souvent de comprendre des “informations à l’infini”, il faut donc comprendre comment on peut les transcrire via le semi-groupe de la chaleur.

L’argument d’extrapolation, décrit en Section 2.1 ne peut pas permettre à lui seul de répondre à cette question, mais peut donner un premier élément. En effet, un tel argument peut réduire des inégalités de dispersion (2.24) à des inégalités de dispersion locale  $L^2 - L^2$ . De ce fait, il devient intéressant de se concentrer sur comment établir de telles inégalités locales, en évitant d’avoir trop recours à la structure Euclidienne.

De manière similaire, la question peut revenir à celle-ci : dans l’espace Euclidien, comment démontrer directement une inégalité de dispersion  $H^1 - BMO$  (qui est plus faible que (2.24)) ? ou comment obtenir des inégalités de dispersion locales  $L^2 - L^2$  ?

Ensuite il faudrait comprendre comment adapter de telles estimations aux espaces  $H^1$  et  $BMO$  associés au semi-groupe de la chaleur (comme ceux décrits en sous-Section 2.2.1) et recourir à l’interpolation, expliquée en Section 2.2.

### 2.6.2 Une analyse adaptée à un semi-groupe d’opérateur vectoriel

Tous les résultats de cette partie sont consacrés à l’étude d’opérateurs d’oscillations. Nous avons déjà expliqué que les opérateurs du type  $B_Q(f) := f - e^{-r_Q^2 L}(f)$ , associés à un semi-groupe d’opérateur sont très importants.

D’autres configurations pourraient nous amener à étudier des semi-groupes  $(e^{-t\vec{L}})_{t>0}$ , associés à un opérateur vectoriel. C’est à dire que  $\vec{L}$  n’agit plus sur un ensemble dense de  $L^2(X)$  mais agit sur des formes différentielles, par exemple le Laplacien de Hodge sur une variété différentielle.

Auscher, McIntosh et Russ [33] ont initié l’étude de ce genre de questions, en étudiant des espaces de Hardy, dans des espaces de formes différentielles. En effet, sur une variété Riemannienne, la transformée de Riesz  $\mathcal{R} := \nabla \Delta^{-\frac{1}{2}}$  n’a de sens que si on l’étudie en tant qu’opérateur à valeur dans l’espace des champs de gradients.

La bornitude  $L^p$  pour  $p \in (1, \infty)$  de  $\mathcal{R}$  peut se ramener à la bornitude de  $|\mathcal{R}|$ , vue comme une fonction à valeur réelle positive et donc ne pose pas de problèmes structurels. Par contre pour  $p = 1$ , la continuité  $L^1$  ne peut être démontrée et on souhaite étudier des continuités sur un espace de Hardy, adapté. Dans ce cas, l’espace de Hardy doit être défini sur les formes différentielles (et non sur les fonctions).

Il serait donc intéressant de voir comment adapter l’étude des résultats (décrits dans toute cette partie du mémoire) dans le contexte des formes différentielles. Comme nous l’avons vu, les résultats que nous avons obtenus sont surtout basés sur des estimations hors-diagonales  $L^{p_0} - L^{q_0}$  du semi-groupe, pour des exposants  $p_0 < 2 < q_0$ .

Or autant de telles informations sont assez bien connues pour des semi-groupes sur des fonctions (0-formes) autant pour des semi-groupe vectoriels de telles informations sont beaucoup moins connues, voir fausses. Par exemple, si on considère la variété constituée de 2 copies de  $\mathbb{R}^d$  connectées en un point ( $d \geq 3$ ) : le noyau de la chaleur (sur des fonctions) vérifie des estimations ponctuelles gaussiennes ; alors que la noyau de la chaleur vectoriel (en considérant le Laplacien de Hodge) sur les 1-formes ne peut vérifier de telles estimations.

Il existe quelques résultats positifs (notamment pour une variété Riemannienne à courbure positive), mais essentiellement des estimations sur le semi-groupe vectoriel (avec le Laplacien de Hodge) sont étroitement reliées à des estimations sur le gradient du semi-groupe de la chaleur (avec le Laplacien de Beltrami), qui sont difficiles à obtenir.

Par contre, si des informations ponctuelles sur le noyau de la chaleur vectoriel semblent difficiles (ou fausses) des décroissances hors-diagonales  $L^2 - L^2$  sont vraies dans un cadre assez général.

Il y a donc un certain “espoir” de pouvoir adapter les résultats de cette partie pour des semi-groupes vectoriels, mais il est important de pouvoir comprendre comment contourner l’utilisation des estimations ponctuelles de leurs noyaux ....

### 2.6.3 Différentes équations de la mécanique des fluides

Nous avons vu dans la Section 2.5 comment nous avons pu obtenir des estimations précises sur le transport des oscillations par des applications préservant la mesure. De telles applications apparaissent naturellement pour des équations de “type transport” par un champ de vitesse à divergence nulle.

Des espaces, construits en termes d’oscillation et non en termes de fréquence (comme les espaces de Besov) semblent en un certain sens mieux adaptés, au moins pour s’extraire du cadre  $L^\infty$ , comme nous l’avons vu pour l’équation d’Euler 2D.

Il serait donc intéressant de s’intéresser à d’autres problèmes du même type et voir comment adapter cette approche. Par exemple :

- Equation d’Euler 2D avec viscosité : on considère (2.21) où l’on ajoute un terme  $\nu \Delta u$  lié à la viscosité  $\nu$ . L’ajout d’un tel terme nous demande de comprendre comment combiner les arguments de transport avec l’étude de ce nouveau terme (lié à une équation de la chaleur). Dans ce cadre, peut-être serait-il intéressant alors de considérer des espaces basés sur des oscillations construites à l’aide du semi-groupe de la chaleur ? Il serait intéressant d’obtenir des informations uniformes en  $\nu > 0$  (assez petit) et d’étudier la limite pour  $\nu \rightarrow 0$ .
- Equation d’Euler en dimension  $d \geq 3$  : en dimension  $d \geq 3$ , l’équation d’Euler ne peut se réduire à une équation de transport sur la vorticité. Dans ce cas là, une méthode “ nerg tique” (basée sur une décomposition en fréquence) serait plus adaptée. Pour cela, il nous faut comprendre comment transcrire les arguments, utilisés sur les oscillations.
- Equation d’Euler en géométrie : Le système (2.21) peut être directement transposé dans un cadre d’une variété Riemannienne. Il serait intéressant de regarder comment l’approche que nous avons proposée pourrait d’adapter au cas d’une variété de dimension 2. La notion de vorticité est primordiale car permet la réduction de (2.21)   une équation de transport. Dans le cas Euclidien, la vorticité est juste obtenue en prenant le rotationnel de la vitesse, sur une variété la vorticité doit être vue en tant que forme différentielle. Il apparait donc qu’il nous faudra travailler sur les espaces de formes, ce qui rejoint et motive la sous-section précédente.
- Equation de Navier-Stokes : Pour l’équation de Navier-Stokes ou l’équation d’Euler en dimension  $d \geq 3$ , il n’y a pas de réduction facile en une équation de transport. Cependant on pourrait essayer de gérer la non-linéarité (quadratique)  $u \cdot \nabla u$  en utilisant les parapro-

duits. Nous avons décrit comment nous pouvions définir des paraproducts associés à un semi-groupe et comment une “paralinéarisation” pouvait être obtenue. Il serait intéressant d’essayer de voir si on ne pourrait pas linéariser ces équations pour les étudier. Sur une variété, l’équation de Navier-Stokes fait appel au laplacien de Hodge, on retrouve ainsi l’intérêt de pouvoir adapter l’analyse de Fourier dans le cas d’un semi-groupe vectoriel.

# Chapitre 3

## Bibliographie

**Articles personnels.**

- [1] F. Bernicot & J. Zhao, New Abstract Hardy Spaces, *J. Funct. Anal.* **255** (2008), 1761–1796.
- [2] F. Bernicot, Local estimates and global continuities in Lebesgue spaces for bilinear operators, *Anal. PDE* **1** (2008), 1–27.
- [3] F. Bernicot, Uniform estimates for multilinear Paraproducts, *Rev. Mat. Iberoamericana* **25** (2009), no.3, 1055–1088.
- [4] F. Bernicot, Bilinear Pseudo-differential Calculus, *J. Geom. Anal.* **20** (2010), no.1, 39–62.
- [5] F. Bernicot, Use of Hardy spaces and interpolation, *C.R. Acad. Sci. Paris* **346** (2008), 745–748.
- [6] F. Bernicot, Real interpolation of abstract Hardy spaces and applications to the bilinear theory, *Math. Z.* **265** (2010), 365–400.
- [7] F. Bernicot & J. Zhao, On maximal  $L^p$ -regularity, *J. Funct. Anal.* **256** (2009), no.8, 2561–2586.
- [8] F. Bernicot,  $L^p$  boundedness for nonsmooth bilinear Littlewood-Paley square functions, *Math. Ann.* **351** (2011), no. 1, 1–49.
- [9] F. Bernicot, Maximal inequalities for dual Sobolev spaces  $W^{-1,p}$  and applications to interpolation, *Math. Res. Lett.* **16** (2009), no.5, 763–778.
- [10] N. Badr & F. Bernicot, Abstract Hardy-Sobolev spaces and interpolation, *J. Funct. Anal.* **256** (2009), no. 8, 2561–2586.
- [11] F. Bernicot & P. Germain, Bilinear oscillatory integrals and boundedness for new bilinear multipliers, *Adv. in Math.* **225** (2010), 1739–1785.
- [12] F. Bernicot & J. Zhao, Abstract framework for John Nirenberg inequalities and applications to Hardy spaces, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* **11** (2012), no. 3, 475–501.
- [13] F. Bernicot & R. Torres, Sobolev space estimates for a class of bilinear pseudodifferential operators lacking symbolic calculus, *Anal. PDE* **4** (2011), no. 4, 551–571.
- [14] F. Bernicot, A  $T(1)$ -Theorem in relation to a semigroup of operators and applications to new paraproducts, *Trans. Amer. Math. Soc.* **364** (2012), 6071–6108.
- [15] F. Bernicot & S. Shrivastava, Boundedness of smooth bilinear square functions and applications to some bilinear pseudo-differential operators, *Indiana Univ. Math. J.* **60** (2011), no. 1, 233–268.
- [16] F. Bernicot, Fiber-wise Calderón-Zygmund decomposition and application to a bidimensional paraproduct, *Illinois Journ. Maths.* (2012).
- [17] F. Bernicot & P. Germain, Boundedness of bilinear multipliers whose symbols have a narrow support, *J. Anal. Math.* **119** (2013), 165–212.
- [18] F. Bernicot, D. Maldonado, K. Moen & V. Naibo, Bilinear Sobolev-Poincaré inequalities and Leibniz-type rules, *J. Geom. Anal.* (2013).
- [19] F. Bernicot & J.M. Martell, Self-improving properties for abstract Poincaré type inequalities, *Soumis* (2012), arXiv :1107.2260.
- [20] N. Badr, F. Bernicot & E. Russ, Algebra properties for Sobolev spaces - Applications to semilinear PDE's on manifolds, *J. Anal. Math.* **118** (2012), 509–544.
- [21] F. Bernicot & Y. Sire, Propagation of low regularity for solutions of nonlinear PDEs on a Riemannian manifold with a sub-Laplacian structure, *Ann. I. H. Poincaré - AN* (2013).

- 
- [22] F. Bernicot & P. Germain, Bilinear dispersive estimates via space-time resonances. Part I : the one dimensional case. *Anal. PDE* (2013).
- [23] A. Benyi, F. Bernicot, D. Maldonado, V. Naibo & R. Torres, On the Hörmander classes of bilinear pseudodifferential operators II. *Indiana Univ. Mat. J.* (2013).
- [24] F. Bernicot & S. Keraani, On the global well-posedness of the 2D Euler equations for a large class of Yudovich type data. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* (2013).
- [25] F. Bernicot & S. Keraani, Sharp constants for composition with a bi-Lipschitz measure-preserving map, *Soumis* (2012), arXiv :1204.6008.
- [26] F. Bernicot, Multi-frequency Calderón-Zygmund analysis and connexion to Bochner-Riesz multipliers, *Soumis* (2012), arXiv :1211.5218.
- [27] F. Bernicot, L. Grafakos, L. Song & L.X. Yan, Boundedness of bilinear multipliers and applications to bilinear Bochner-Riesz means, *Soumis* (2012), arxiv :1212.4018.
- [28] F. Bernicot & D. Frey, Pseudo-differential operators on a metric spaces, *Soumis* (2012), arxiv :1212.2349.

**Références.**

- [29] P. Auscher, On  $L^p$  estimates for square roots of second order elliptic operators on  $\mathbb{R}^n$ , *Publ. Mat.* **48** (2004), 159–186.
- [30] P. Auscher, On necessary and sufficient conditions for  $L^p$  estimates of Riesz transforms associated to elliptic operators on  $\mathbb{R}^n$  and related estimates, *Memoirs of Amer. Math. Soc.* **186** (2007), no. 871.
- [31] P. Auscher and T. Coulhon, Riesz transform on manifolds and Poincaré inequalities, *Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa* **5** (2005), no. 3, 531–555.
- [32] P. Auscher, T. Coulhon, X.T. Duong, and S. Hofmann, Riesz transform on manifolds and heat kernel regularity, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **37** (2004), 911–957.
- [33] P. Auscher, A. McIntosh and E. Russ, Hardy spaces of differential forms on Riemannian manifolds, *J. Geom. Anal.* **18** (2008), no. 1, 192–248.
- [34] P. Auscher and J.M. Martell, Weighted norm inequalities, off-diagonal estimates and elliptic operators. Part I : General operator theory and weights, *Adv. in Math.* **212** (2007), 225–276.
- [35] P. Auscher and E. Russ, Hardy spaces and divergence operators on strongly Lipschitz domains of  $\mathbb{R}^n$ , *J. Func. Anal.* **201** (2003), 148–184.
- [36] P. Auscher, E. Russ, and Ph. Tchamitchian, Hardy-sobolev spaces on strongly lipschitz domains of  $\mathbb{R}^n$ , *J. Func. Anal.* **218** (2005), 54–109.
- [37] N. Badr, Real interpolation of sobolev spaces, *Math. Scand.* **105** (2009), 235–264.
- [38] N. Badr, Real interpolation of sobolev spaces associated to a weight, *Pot. Anal.* **31** 2009, no.4, 345–374.
- [39] N. Badr, A. Jiménez-del-Toro and J.M. Martell,  $L^p$  self-improvement of generalized Poincaré inequalities in spaces of homogeneous type, *J. Funct. Anal.* **260** (2011), no. 11, 3147–3188.
- [40] H. Bahouri, C. Fermanian-Kammerer and I. Gallagher, *Phase space analysis and pseudodifferential calculus on the Heisenberg group*. Astérisque **342** (2012).
- [41] Á. Bényi and R. H. Torres, Almost orthogonality and a class of bounded bilinear pseudodifferential operators, *Math. Res. Lett.* **11.1** (2004), 1–12.
- [42] Á. Bényi, D. Maldonado, V. Naibo and R. H. Torres, On the Hörmander classes of bilinear pseudodifferential operators, *Int. Eq. Op. Th.* **67** (2010), 341–364.
- [43] J.M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Ann. Sci. Eco. Norm. Sup.* **14**, 209-246, (1981).
- [44] J. Bourgain ; Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to nonlinear evolution equations I. Schrödinger equations. *Geom. and Funct. Ana.* **3** (1993), 107–156.
- [45] A. Calderón. Commutators of singular integral operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **53** (1965), 1092–1099.
- [46] A. Calderón. Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **74** (1977), 1324–1327.
- [47] A. Calderón and R. Vaillancourt, A class of bounded pseudo-differential operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **69** (1972), 1185–1187.
- [48] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, *Acta Math.* **116** (1966), 135–157.

- 
- [49] M. Christ and J-L. Journé, Polynomial growth estimates for multilinear singular integral operators, *Acta Math.* **159** (1987), 51–80.
- [50] R. Coifman and Y. Meyer, On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **212**, 315–331, (1975).
- [51] R. Coifman and Y. Meyer, *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*, SMF Astérisque **57**, (1978).
- [52] R. Coifman and Y. Meyer. Commutateurs d'intégrales singulières et opérateurs multilinéaires, *Ann. Inst. Grenoble* **28**, 177–202, (1978).
- [53] R. Coifman and Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs III, Opérateurs multilinéaires*, Actualités Mathématiques, Hermann, (1991).
- [54] R. Coifman, J.L. Rubio de Francia and S. Semmes, Multiplicateurs de Fourier de  $L^p(\mathbb{R})$  et estimations quadratiques, *C. R. Acad. Sci. Paris Math.* **306** (1988), no. 8, 351–354.
- [55] R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), 569–645.
- [56] G. David and J.L. Journé, A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators, *Ann. of Maths* **120** (1984), 371–397.
- [57] C. Demeter and C. Thiele, On the two dimensional Bilinear Hilbert Transform. *Amer. J. Math.* **132** (2010), no. 1, 201–256.
- [58] C. Demeter, M. Pramanik and C. Thiele, Multilinear singular operators with fractional rank, *Pacific J. of Math.* **246** (2010) no. 2, 293–324.
- [59] G. Diestel and L. Grafakos, Unboundedness of the ball bilinear multiplier multiplier operator, *Nagoya Math. Jour.* **185** (2007), 151–159.
- [60] X.T. Duong and L. Yan, Duality of Hardy and BMO spaces associated with operators with heat kernel bounds, *Journ. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), no. 4, 943–973.
- [61] X.T. Duong and L. Yan, New function spaces of BMO type, the John-Nirenberg inequality, interpolation, and applications, *Comm. Pure Appl. Math.* **58** (2005), no. 10, 1375–1420.
- [62] J. Dziubański, Atomic decomposition of  $H^p$  spaces associated with some Schrödinger operators, *Indiana Univ. Math. J.* **47** (1998), 75–98.
- [63] J. Dziubański, Spectral multipliers for Hardy spaces associated with Schrödinger operators with polynomial potentials, *Bull. Lon. Math. Soc.* **32** (2000), 571–581.
- [64] J. Dziubański, Note on  $H^1$  spaces related to degenerate Schrödinger operators, *Ill. J. Math.* **49** (2005), no.4.
- [65] J. Dziubański and J. Zienkiewicz, Hardy spaces  $H^1$  for Schrödinger operators with compactly supported potentials, *Annali di Math.* **184** (2005), 315–326.
- [66] D. Fan and X. Li A bilinear oscillatory integrals along parabolas, *Positivity* **13** (2009), 339–366.
- [67] C. Fefferman, Characterizations of bounded mean oscillation, *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971), 587–588.
- [68] C. Fefferman, Pointwise convergence of Fourier series, *Ann. of Math.* **98** (1973), 551–571.
- [69] C. Fefferman,  $L^p$  bounds for pseudo-differential operators, *Israel J. Math.* **14** (1973), 413–417.
- [70] C. Fefferman and E.M. Stein,  $H^p$  spaces of several variables, *Acta Math.* **129** (1997), 137–193.

- [71] B. Franchi, C. Pérez and R.L. Wheeden, Self-improving properties of John-Nirenberg and Poincaré inequalities on space of homogeneous type, *J. Funct. Anal.* **153** (1998), no. 1, 108–146.
- [72] D. Frey, P. C. Kunstmann, A  $T(1)$ -Theorem for non-integral operators, *Math. Ann.* (to appear), arXiv :1107 :4347
- [73] I. Gallagher and Y. Sire, *Besov algebras on Lie groups of polynomial growth*. To appear in *Studia Math.*
- [74] P. Germain, Space-time resonances, Exp. No 8, *Proceedings of the Journées EDP 2010*.
- [75] J. Gilbert and A. Nahmod, Bilinear operators with non smooth symbols : part 1. *J. of Four. Anal. and Appl.* **6** (2000), no.5, 437–469.
- [76] J. Gilbert and A. Nahmod,  $L^p$ -boundedness for time-frequency Paraproducts : part 2. *J. of Four. Anal. and Appl.* **8** (2002), no.2, 109–172.
- [77] L. Grafakos and X. Li, Uniform bounds for the bilinear Hilbert transform I. *Ann. of Math.* **159** (2004), no. 3, 889–933.
- [78] L. Grafakos and X. Li, The disc as a bilinear multiplier. *Journ. Amer. Math.* **128** (2006), no. 1, 91–119.
- [79] L. Grafakos and R. H. Torres, Multilinear Calderón-Zygmund theory. *Adv. in Math.* **165** (2002), 124-164.
- [80] S. Hofmann and S. Mayboroda, Hardy and BMO spaces associated to divergence form elliptic operators, *Math. Ann.* **344** (2009), no. 1, 37–116.
- [81] S. Hofmann, S. Mayboroda and A. McIntosh, Second order elliptic operators with complex bounded measurable coefficients in  $L^p$ , Sobolev and Hardy spaces, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*
- [82] L. Hörmander, Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, *Proc. Symp. Pure. Math.*, American Mathematical Society, **X** (1967), 138–183.
- [83] R. Hunt, On the convergence of Fourier series, *Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues Proc. Conf.*, Edwardsville, Ill., (1967), Carbondale, Ill. : Southern Illinois Univ. Press, pp. 235–255.
- [84] M. Ionescu, L. G. Rogers and R. S. Strichartz, Pseudo-differential Operators on Fractals, *submitted*, <http://arxiv.org/abs/1108.2246>.
- [85] O. Ivanovici and F. Planchon, On the energy critical Schrödinger equation in 3D non-trapping domains, *Ann. I. H.Poincaré - A.N.* **27** (2010), 1153–1177.
- [86] A. Jiménez-del-Toro, Exponential self-improvement of generalized Poincaré inequalities associated with approximations of the identity and semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [87] A. Jiménez-del-Toro and J.M. Martell, Self-improvement of Poincaré type inequalities associated with approximations of the identity and semigroups, preprint.
- [88] F. John and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961), 785–799.
- [89] C. Kenig and E. M. Stein, Multilinear estimates and fractional integration. *Math. Res. Lett.* **6** (1999), 1–15.
- [90] S. Klainerman and M. Machedon, Space-time estimates for null forms and the local existence theorem. *Comm. Pure Appl. Math* **XLVI** (1993), 1221–1268.
- [91] V. Kovac, Boundedness of the twisted paraproduct, To appear in *Rev. Mat. Iberoamericana*.

- 
- [92] M. Lacey, On bilinear Littlewood-Paley square functions. *Publ. Mat.* **40** (1996), no. 2, 387–396.
- [93] M. Lacey, The bilinear maximal functions map into  $L^p$  for  $2/3 < p \leq 1$ . *Ann. of Math.* **151** (2000), 35–57.
- [94] M. Lacey, Issues related to Rubio de Francia’s Littlewood-Paley inequality, NYJM Monographs **2**. Albany, NY, 2007. 36 pp.
- [95] M. Lacey and C. Thiele,  $L^p$  estimates on the bilinear Hilbert transform. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **94** (1997), 33–35.
- [96] M. Lacey and C. Thiele,  $L^p$  estimates on the bilinear Hilbert transform for  $2 < p < \infty$ . *Ann. of Math.* **146** (1997), 693–724.
- [97] M. Lacey and C. Thiele, On the Calderón conjectures for the bilinear Hilbert transform. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **95** (1998), 4828–4830.
- [98] M. Lacey and C. Thiele, On Calderón’s conjecture. *Ann. of Math.* **149** (1999), 475–496.
- [99] X. Li, Uniform estimates for some paraproducts, *New York J. Math.* **14** (2008), 145–192.
- [100] Y. Meyer, Remarques sur un théorème de J.M. Bony, *Suppl. Rendiconti del Circ. Mate. di Palermo* **1** (1980), 8–17.
- [101] N. Michalowski, D. Rule and W. Staubach, Multilinear pseudodifferential operators beyond Calderón-Zygmund theory, *preprint*.
- [102] C. Muscalu,  $L^p$  estimates for multilinear operators given by singular multipliers, *PhD thesis*, Brown University, (2002).
- [103] C. Muscalu, T. Tao and C. Thiele, Uniform estimates on paraproducts, *Journ. Anal. Math* **87** (2002), 369–384.
- [104] C. Muscalu, T. Tao, and C. Thiele, Multi-linear operators given by singular multipliers. *Journ. Amer. Math. Soc* **15** (2002), 469–496.
- [105] C. Muscalu, T. Tao, and C. Thiele, Uniforms estimates on multi-linear operators with modulation symmetry. *Journ. Anal. Math* **88** (2002), 255–309.
- [106] C. Muscalu, T. Tao, and C. Thiele,  $L^p$  estimates for the biest I : The Walsh case. *Math. Ann.* **329** (2004), 401–426.
- [107] C. Muscalu, T. Tao, and C. Thiele,  $L^p$  estimates for the biest II : The Fourier case. *Math. Ann.* **329** (2004), 427–461.
- [108] F. Nazarov and R. Oberlin and C. Thiele, A Calderón Zygmund decomposition for multiple frequencies and an application to an extension of a lemma of Bourgain, *Math. Res. Lett.* **17** (2010), no. 3, 529–545.
- [109] J.L. Rubio de Francia, A Littlewood-Paley inequality for arbitrary intervals. *Rev. Mat. Iber.* **1** (1985), no. 2, 1–14.
- [110] E. Russ,  $H^1-L^1$  boundedness of Riesz transforms on Riemannian manifolds and on graphs, *Pot. Anal.* **14** (2001), 301–330.
- [111] E.M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, 1970.
- [112] E.M. Stein, Harmonic analysis : Real variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals, Princeton Univ. Press, 1993.
- [113] T. Tao, Multilinear weighted convolution of  $L^2$  functions, and applications to non-linear dispersive equations, *Amer. J. Math.* **123** (2001), 839–908

- [114] AP. Tomas, A restriction theorem for the Fourier transform, *Bull. Amer. Math. Soc.* **81** (1975), 477–478.
- [115] M. Vishik, Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline spaces of Besov type, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **32** (1999), no. 6, 769–812.
- [116] M. Vishik, Hydrodynamics in Besov Spaces, *Arch. Rational Mech. Anal.* **145** (1998), 197–214.