HAL open science

Borne de Cramér-Rao déterministe pour l'analyse des performances asymptotiques en estimation d'un radar actif

Tarek Menni

To cite this version:

Tarek Menni. Borne de Cramér-Rao déterministe pour l'analyse des performances asymptotiques en estimation d'un radar actif. Autre. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2012. Français. NNT : 2012DENS0043 . tel-00846933

HAL Id: tel-00846933

https://theses.hal.science/tel-00846933v1

Submitted on 22 Jul 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Présentée par

Tarek MENNI

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine :

ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE

Borne de Cramér-Rao déterministe pour l'analyse des performances asymptotiques en estimation d'un radar actif

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 17/09/2012 devant le jury composé de :

- M. ABED-MERAIM Karim (rapporteur)
- M. VINCENT François (rapporteur)
- M. LARZABAL Pascal (directeur de thèse)
- M. CHAUMETTE Eric (co-encadrant)
- Mme MARCOS Sylvie

SATIE – Systèmes et Applications des Technologies de l'Information et de l'Energie
61, avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex

CONTENTS

I Abréviations et Notations 4
I-A Abréviations 4
I-B Notations 4

II Introduction 6
II-A Motivation de la recherche 6
II-B Présentation et positionnement des travaux 6
II-C Contributions 8
II-D Publications et communication 8

III Modèles d'observation électromagnétiques pour le radar 9
III-A Introduction 9
III-B Transmission en champs lointain : cas du milieu simple 10
III-C Transmission en champs lointain : approximation bande étroite 12
III-D Transmission en champs lointain : émetteur et récepteur linéaires 13
III-E Transmission en champs lointain : autres approximations usuelles 14
III-E1 Approximation bande étroite d'un réseau de récepteurs 14
III-E2 Sources de signal ponctuelles en champs lointain (ondes planes) 16

IV Modèles d'observation paramétriques pour radar actif en présence de diffracteurs ponctuels 17
IV-A Calcul des retards de propagation pour les mouvements accélérés uniformes (MAU) et rectilignes uniformes (MRU) 18
IV-B Modèle d'observation paramétrique pour les mouvements rectilignes uniformes radials (MRUR) et radar MIMO quasi-monostatique 19
IV-C Modèle d'observation paramétrique pour les mouvements rectilignes uniformes radials (MRUR) et radar SIMO quasi-monostatique 20

V Borne de Cramèr-Rao pour paramètres déterministes mixtes (réels / complexes) 22
V-A Introduction 22
V-B Differentiabilité sur les corps des nombres réels et complexes 23
V-C Borne inférieure de l'EQM et minimisation de la matrice de Gram 24
V-D Conditions de régularité 29
V-D1 Conditions de régularité nécessaires 29
V-D2 Conditions de régularité suffisantes 29

VI Borne de Cramèr-Rao pour radar actif : résultats préliminaires et problèmes associés 32
VI-A Borne de Cramèr-Rao pour un modèle déterministe à 1 observation 32
VI-B Problème n°1 : bornes de Cramèr-Rao pour modèles déterministes à L observations indépendantes 34
VI-C Problème n°2 : quel modèle d'observation pour l'estimation des retards ? 35

VII Reparamétrisation et Borne de Cramèr-Rao contrainte 38
VII-A Introduction 38
VII-B Borne de Cramèr-Rao sous contraintes 38
VII-C L'inégalité de reparamétrisation 40
VII-D De la reparamétrisation à la borne de Cramèr-Rao contrainte 41
VII-E De la borne de Cramèr-Rao contrainte à la reparamétrisation 42
VII-F Equivalence : reparamétrisation et borne de Cramèr-Rao contrainte 43

VIII Reparamétrisation et Borne de Cramèr-Rao contrainte : applications 43
VIII-A Solution du problème n°1 43
VIII-B Solution du problème n°2 46
VIII-C Influence de l'état connu / inconnu des paramètres sur la borne de Cramèr-Rao . . 47
VIII-D Meilleure et pire borne de Cramèr-Rao 48
VIII-D1 Modèle d'observation déterministe 49
VIII-D2 Modèle d'observation stochastique 50

IX Borne de Cramèr-Rao pour radar SIMO quasi-monostatique et mouvements rectilignes uniformes radials 52
IX-A Calcul de $\mathbf{H}_{m_1,m_2}(\Xi)$ 54
IX-A1 Calcul des composantes distance-vitesse 54
IX-A2 Calcul des composantes angulaires (direction d'arrivée) 56
IX-B Simulations 56

X Relation entre la singularité de la MIF et la non-identifiabilité des paramètres 64
X-A Introduction 64
X-B Singularité de la MIF : considérations préliminaires 64
X-C De la non-identifiabilité à la singularité 65
X-D De la singularité à la non-identifiabilité 66
X-E Estimation avec biais : rappel 67
X-F Synthèse 67

XI Performance en estimation des formes d'onde OFDM et Chirp : comparaison préliminaire 69
XI-A Les signaux OFDM pour le radar 69
XI-B Performance en estimation des formes d'onde OFDM et Chirp : comparaison préliminaire 69

XII Conclusion et perspectives 78

References 79

XIII Annexes 81
XIII-A Approximation bande étroite d'un réseau de récepteurs 81
XIII-B BCR pour un modèle déterministe à bande limité 82
XIII-C MIF et BCR pour L observations déterministes indépendantes à bande limitée . . . 87
XIII-C1 Cas des sources fluctuantes 88
XIII-C2 Cas des sources non fluctuantes 90

Résumé

L'émergence des formes d'onde numériques en radar et l'engouement de la communauté scientifique pour leur versatilité éprouvée en télécom, soulèvent naturellement chez les ingénieurs radaristes la question de l'amélioration effective des performances opérationnelles par ces nouvelles formes d'onde, notamment en matière de haute-résolution. Les travaux publiés sur le sujet sont prometteurs, à ceci près qu'ils sont le plus souvent basés sur des modèles théoriques un peu éloignés de la réalité opérationnelle ou sur des scénarios simplistes relativement à la capacité haute résolution envisagée (par exemple le faible nombre de sources pris en compte). En effet la prise en compte d'un modèle d'observation réaliste (large bande, à fréquence d'échantillonnage élevée) et de scénario à grand nombre de contributeurs conduit à des estimateurs dont la complexité d'implémentation n'est pas compatible des puissances de calcul actuelles. Une approche alternative, et compatible des puissances de calcul actuelles, pour la qualification des performances haute résolution est l'utilisation des bornes inférieures d'estimation, principalement la borne de Cramèr-Rao déterministe. L'examen de la littérature courante (notamment les monographies de référence) sur la borne de Cramèr-Rao déterministe a fait apparaître des lacunes relatives à sa formulation dans le contexte radar qui nous intéresse, à savoir MIMO large bande, multisources, multiparamètres à observations multiples. En effet dans la littérature courante, les observations mutliples sont définies comme des réalisations multiples indépendantes d'un même modèle d'observation, alors qu'en radar il s'agit en général de la combinaison de modèles d'observation différents (variation de la forme d'onde). Ce constat a motivé l'essentiel de ce travail, à savoir l'établissement d'une expression analytique générale de la borne de Cramèr-Rao déterministe MIMO large bande, multisources, multiparamètres à modèles d'observations multiples pour la qualification (asymptotique) des performances en estimation d'un radar actif. Ce travail fournit un outil de comparaison des performances haute-résolution des différentes formes d'onde, dont les nouvelles formes d'onde numériques. De façon générale, l'expression analytique générale de la borne de Cramèr-Rao obtenue fournit la base théorique pour le développement des futurs radars à haute résolution.

I. Abréviations et Notations

A. Abréviations

• BCR : Borne de Cramèr-Rao.
• BB : Borne de Barankin.
• CAN : Convertisseur Analogique Numérique (codeur).
• CI : compression d'impulsion (filtrage adapté distance/temps).
• d.d.p. : densité de probabilité.
• EM : ElectroMagnétique.
• EMV : Estimateur au sens du Maximum de Vraisemblance.
• EMVD : EMV pour un modèle d'observation gaussien complexe circulaire déterministe (ou conditionnel).
• EQM : Erreur Quadratique Moyenne.
• LFM : linear frequency modulation (modulation de fréquence linéaire).
• LLP : largeur lobe principal.
• MAU : Mouvement Accéléré Uniforme.
• MIF : Matrice d'Information de Fisher.
• MRU : Mouvement Rectiligne Uniforme.
• MRUR : Mouvement Rectiligne Uniforme Radial.
• MV : Maximum de Vraisemblance.
• MIMO : Multiple-Input Multiple-Output (en radar : émetteurs multiples - récepteurs multiples).
• OFDM : Orthogonal Frequency-Division Multiplexing (multiplexage par division en fréquences orthogonnales).
• PAPR : Peak-to-Average Power Ratio (rapport puissance crête sur puissance moyenne).
• RSB : Rapport Signal à Bruit.
• SIMO : Single-Input Multiple-Output (en radar : émetteur unique - récepteurs multiples).
• SER : Surface Equivalente Radar.
• TEM : Transverse ElectroMagnétique.

B. Notations

• a, les lettres en italiques représentent une quantité scalaire.
• $\mathbf{a}$, les lettres minuscules en gras représentent une quantité vectorielle (vecteur colonne).
• $\mathbf{A}$, les lettre majuscules en gras représentent une quantité matricielle.
• a_n ou $(\mathbf{a})_n$ est l'élément correspondant à la $n^{ème}$ coordonnée du vecteur $\mathbf{a}$.
• $a_{n,m}$ ou $(\mathbf{A})_{n,m}$ est l'élément correspondant à la $n^{ème}$ ligne et la $m^{ème}$ colonne de la matrice $\mathbf{A}$.
• $\mathrm{Re}\{a\}$ est la partie réelle de a.
• $\mathrm{Im}\{a\}$ est la partie imaginaire de a.
• $\mathbf{A}^T$, le symbole ^{T} indique l'opérateur transposé.
• $\mathbf{A}^*$, le symbole * indique l'opérateur de conjugaison.
• $\mathbf{A}^H$, le symbole ^{H} indique l'opérateur Hermitien (transposé conjugué).
• $|\mathbf{A}|$ est le déterminant de la matrice $\mathbf{A}$.
• $tr\,(\mathbf{A})$ est la trace de la matrice carrée $\mathbf{A}$.
• $\mathbf{Diag}\,(\mathbf{a})$ représente la matrice diagonale telle que $(\mathbf{Diag}\,(\mathbf{a}))_{ii} = (\mathbf{a})_i$.

• $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ représente la matrice résultante de la concaténation horizontale des deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.
• $\mathbf{I}_N$ représente la matrice identité de taille $N \times N$.
• $\mathbf{vec}\left(\mathbf{A}\right)$ est l'opérateur de vectorisation de la matrice $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_N]$: $\mathbf{vec}\left(\mathbf{A}\right)^T = \left(\mathbf{a}_1^T, \ldots, \mathbf{a}_N^T\right)$.
• $im\left\{\mathbf{A}\right\}$ est l'image de la matrice $\mathbf{A}$, i.e. le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice $\mathbf{A}$.
• $\ker\left\{\mathbf{A}\right\}$ est le noyau de la matrice $\mathbf{A}$, i.e. le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\mathbf{x}$ verifiant $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
• $S^{\perp}$ est le sous-espace vectoriel orthogonal au sous-espace vectoriel S.
• $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$, signifie que la matrice $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ est non-négative.
• $E\left[\cdot\right]$ représente l'espérance mathématique.
• $\left\langle \ \mid \ \right\rangle$ et $\|.\|$représentent respectivement un produit scalaire et sa norme associée.
• Si $\boldsymbol{\theta} = \left(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_P\right)^T$, alors: $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \theta_P}\right)^T$, $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \theta_P}\right)$.
• $\frac{\partial \mathbf{f}(\theta_0)}{\partial \theta} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0}$, $\frac{\partial f(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left.\frac{\partial f(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}$, $\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}$
• $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}\left(N, P\right)$ représente l'ensemble des matrices réelles à N lignes et P colonnes.
• $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left(N, P\right)$ représente l'ensemble des matrices complexes à N lignes et P colonnes.
• $\odot$ désigne le produit d'Hadamard.
• $\otimes$ désigne le produit de Kronecker.
• $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ désigne le produit vectoriel (géométrique) entre les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.
• $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ et $\|\mathbf{u}\|$ désigne respectivement le produit scalaire (géométrique) entre les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ et sa norme associée.
• $1\left(\mathbf{x}\right)$ représente la fonction du vecteur $\mathbf{x}$ constante et égale à 1.
• $x\left(t\right) \rightleftharpoons x\left(f\right)$ symbolise la transformée de Fourier (directe et inverse).
• $\underline{\mathbf{u}}$ représente un des trois cas suivants :

$$\underline{\mathbf{u}} : \begin{cases} \underline{\mathbf{u}} = \mathbf{u} & \text{si } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^I \\ \underline{\mathbf{u}} = \left(\mathbf{u}^T, \mathbf{u}^H\right)^T & \text{si } \mathbf{u} \in \mathbb{C}^I \text{ et } \mathbf{u} \notin \mathbb{R}^I \\ \underline{\mathbf{u}} = \left(\mathbf{u}_c^T, \mathbf{u}_c^H, \mathbf{u}_r^T\right)^T & \text{si } \mathbf{u} = \left(\mathbf{u}_c^T, \mathbf{u}_r^T\right)^T, \quad \mathbf{u}_c \in \mathbb{C}^I \text{ et } \mathbf{u}_c \notin \mathbb{R}^I, \quad \mathbf{u}_r \in \mathbb{R}^{I'} \end{cases} \tag{1}$$

Nous adoptons la définition du produit hermitien utilisée dans les livres de mathématiques [6][17][26][33] où une forme sesquilinéaire est une fonction de deux variables de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{U}$, qui est linéaire en la première variable et semi-linéaire en la deuxième :

$$\left\langle \ \mid \ \right\rangle : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \to \mathbb{C} \ / \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{c} \in \mathbb{U}, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \left\langle \lambda \mathbf{u} \mid \mathbf{c} \right\rangle = \lambda \left\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{c} \right\rangle, \ \left\langle \mathbf{u} \mid \lambda \mathbf{c} \right\rangle = \lambda^* \left\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{c} \right\rangle \tag{2}$$

Cette notation permet de définir la matrice de Gram associée à deux familles de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{U}$, $\left\{\mathbf{u}\right\}_{[1,Q]} = \left\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_Q\right\}$ et $\left\{\mathbf{c}\right\}_{[1,P]} = \left\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_P\right\}$ [26] :

$$\mathbf{G}\left(\left\{\mathbf{u}\right\}_{[1,Q]}, \left\{\mathbf{c}\right\}_{[1,P]}\right) = \begin{bmatrix} \left\langle \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{c}_1 \right\rangle & \ldots & \left\langle \mathbf{u}_Q \mid \mathbf{c}_1 \right\rangle \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \left\langle \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{c}_P \right\rangle & \ldots & \left\langle \mathbf{u}_Q \mid \mathbf{c}_P \right\rangle \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left(P, Q\right) \tag{3}$$

$$\left(\mathbf{G}\left(\left\{\mathbf{u}\right\}_{[1,Q]}, \left\{\mathbf{c}\right\}_{[1,P]}\right)\right)_{p,q} = \left\langle \mathbf{u}_q \mid \mathbf{c}_p \right\rangle, \qquad \mathbf{G}\left(\left\{\mathbf{c}\right\}_{[1,P]}, \left\{\mathbf{u}\right\}_{[1,Q]}\right) = \mathbf{G}\left(\left\{\mathbf{u}\right\}_{[1,Q]}, \left\{\mathbf{c}\right\}_{[1,P]}\right)^H$$

définition conduisant à :

$$\left\langle \sum_{q=1}^{Q} x_q \mathbf{u}_q \mid \sum_{p=1}^{P} y_p \mathbf{c}_p \right\rangle = \mathbf{y}^H \mathbf{G}\left(\mathbf{u}_{[1,Q]}, \mathbf{c}_{[1,P]}\right) \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \left(x_1, \ldots, x_Q\right)^T, \mathbf{y} = \left(y_1, \ldots, y_P\right)^T. \tag{4}$$

Pour simplifier la notation, nous écrivons :

$$\mathbf{G}\left(\left\{\mathbf{u}\right\}_{[1,Q]}\right) = \mathbf{G}\left(\left\{\mathbf{u}\right\}_{[1,Q]}, \left\{\mathbf{u}\right\}_{[1,Q]}\right) \tag{5}$$

II. Introduction

A. Motivation de la recherche

L'étude et l'optimisation de la fonction d'ambiguïté radar monosource multiparamètres formulée par P. Woodward [66] occupe la communauté radar depuis plusieurs décennies et ont donné lieu à de nombreuses publications [30][31], bien avant que les signaux télécoms ne fassent irruption dans le monde radar depuis une dizaine d'années, grâce à l'avènement des émetteurs numériques. Cette évolution technologique majeure qui permet de convertir un signal en bande de base numérique en signal analogique pour un coût maintenant abordable, semble ouvrir la boite de Pandore des formes d'ondes numériques de type télécoms (OFDM, ...) permettant de satisfaire diverses contraintes opérationnelles (comme le rapport puissance crête sur puissance moyenne, l'étalement spectral et temporel, ...) ou encore d'optimiser la fonction d'ambiguïté monosource multiparamètres (notamment la fonction d'ambiguïté distance-vitesse) [34]. Or l'optimisation de la fonction d'ambiguïté monosource multiparamètres n'est que l'optimisation d'une approximation de l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) multisources multiparamètres, approximation requise pour des contraintes d'implémentation à la fois théoriques et temps réel (hardware).
Ce qui soulève la question de l'amélioration de la performance en estimation d'un système radar grace à l'utilisation d'une forme d'onde numérique : une forme d'onde numérique de type télécoms optimisant la fonction d'ambiguïté monosource multiparamètres (au sens d'un critère à préciser), permet-elle une meilleure estimation (au sens de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne (EQM)) des paramètres de sources multiples, en comparaison avec la forme d'onde la plus commune en radar, à savoir le pulse modulé linéairement en fréquence (chirp) ?

B. Présentation et positionnement des travaux

Nous abordons cette question dans le cadre d'une modélisation des cibles radar basée sur la prise en compte de modèles physiques phénoménologiques (simulés ou mesurés, de la rétrodiffusion, de la cinématique, ...) dont les paramètres sont inconnus mais déterministes. Rappelons qu'une approche alternative consiste à supposer que tout ou partie des paramètres des cibles sont aléatoires (estimation bayésienne), ce qui non seulement requiert la connaissance de leurs densités de probabilité (d.d.p.) *à priori* mais pose également la question de la pertinence de leur choix, puisque les vraies d.d.p. sont en général inconnues dans un contexte radar opérationel.
Pour comparer les performances en estimation des différentes formes d'onde, nous nous appuyons sur la convergence de l'EQM du maximum de vraisemblance déterministe (ou conditionnel, complexe gaussien circulaire) (EMVD) vers la Borne de Cramèr-Rao (BCR) dans la zone de fonctionnement asymptotique de l'EMVD, c'est à dire à fort nombre de réalisations indépendantes et/ou à fort rapport signal à bruit (RSB) [46].
La pertinence des performances asymptotiques fournies par la BCR est directement liée à la représentativité du modèle d'observation probabiliste pour lequel elle est calculée. Une première étape nécessaire est donc la formalisation d'un modèle d'observation à la fois réaliste d'un point de vue de la physique (et donc du matériel qui est ou sera utilisé) mais également exploitable d'un point de vue probabiliste. La physique du radar étant la résultante de la propagation des ondes électromagnétiques (équation de Maxwell) mise en forme par une électronique hyperfréquence, la première partie de ce travail est consacrée à la dérivation d'un tel modèle en articulant (et si possible en quantifiant) l'ensemble des approximations effectuées. Le compromis complexité-généralité envisagé dans ce travail est celui du radar MIMO quasi-monostatique dont les réseaux d'émission et de réception sont bande étroites, dotés d'électroniques linéaires, éclairant des diffracteurs ponctuels en trajectoire rectiligne uniforme radiale en champs lointain. Dans ce contexte, les cibles ponctuelles ont pour paramètres inconnus les paramètres cinématiques réels (distance radiale,

vitesse radiale, direction radiale) et le coefficient de rétrodiffusion complexe. Ce compromis permet une modélisation suffisamment précise des formes d'onde reçues pour permettre une évaluation réaliste des performances en estimation du couple de paramètres (distance, vitesse) radiales d'une cible, couple de paramètres estimés par la quasi totalité des radars (à contrario de la direction radiale qui généralement n'est pas réellement estimée, mais fournie par la direction principale de rayonnement de l'antenne de réception préformée analogiquement ou numériquement). De plus, il soulève un certain nombre de points théoriques parfois partiellement résolus dans la littérature courante.
En premier lieu, il soulève le problème de l'estimation de paramètres mixtes (complexes et réels) et le calcul de la BCR associée, calcul déjà abordé dans la littérature courante mais que nous éclairons sous l'angle de la minimisation d'une norme sous contraintes linéaires [38], généralisant les résultats introduits dans [11, II.B] pour des paramètres réels. Cette approche permet :
• une démonstration simplifiée en évitant les transformations matricielles généralement utilisées quand il s'agit de paramètres complexes [27][68],
• de rectifier certains résultats antérieurs [62],
• de clarifier quelques conditions de régularité qui sont inutilement restrictives [63][58][59][1][4].
En second lieu, il pose le problème du calcul de la BCR pour un modèle d'observation complexe gaussien circulaire à moyenne paramétrée (modèle d'observation déterministe) à bande limité et à énergie finie, pour lequel nous proposons une formulation analytique compacte [39] englobant tous les résultats précédemment établis dans la littérature courante à ce sujet (y compris les modèles bande-étroite) [63][67].
Enfin, l'exploitation de L modèles d'observation déterministes indépendants associés à l'émission-réception de L formes d'onde conduit dans la littérature classique à autant de calculs différents de la BCR qu'il existe de combinaison différentes entre le nombre de modèles MIMO distincts (par exemple 1 ou L) et les possibilités de paramétrisation des cibles ((1 trajectoire radiale, 1 coefficient de rétrodiffusion), (1 trajectoire radiale, L coefficient s de rétrodiffusion), ...). Là encore, nous proposons une méthode originale de calcul unique basé sur la prise en compte de contraintes égalités sur les paramètres inconnus correspondant au calcul d'une BCR contrainte, dont la dérivation est simplifiée sous l'angle de la minimisation d'une norme sous contraintes linéaires. Nous établissons également l'équivalence entre une reparamétrisation (injective) et la prise en compte de contraintes égalités, ainsi que l'inégalité de reparamétrisation associée [38] qui se révèle être un outil précieux pour comparer certaines BCR entre elles [38][40]. Un certain nombre d'exemples (théoriques et pratiques) d'utilisation de la BCR contrainte et de l'inégalité de reparamétrisation est fourni afin d'en illustrer l'intérêt.
Tous ces développements théoriques sont mis en oeuvre dans le cadre d'un modèle simplifié de radar MIMO : le radar SIMO (1 seul émetteur). La mise au point d'un algorithme de calcul fiable de la BCR pour des signaux à bande limitée (pour lesquels un retard n'est pas assimilable à une phase) a fait apparaître de nombreux problèmes d'implémentation non évoqués dans la littérature courante, et dont la non prise en compte peut conduire à des résultats faux en contexte multisources [16].
De plus, certaines paramétrisation (notamment de la direction radiale) peuvent induire une matrice de Fisher singulière pour des valeurs de paramètres d'intérêt, ce qui nous a amené à clarifier la relation entre la singularité de la matrice de Fisher et la non-identifiabilité d'un modèle d'observation paramétrique [38], relation partiellement formulée dans la littérature existante. Une conséquence théorique notable est qu'un modèle paramétrique non-identifiable peut-être régularisé sur un sous ensemble de l'espace des paramètres en ajoutant des contraintes égalités entre certains paramètres.
Ce travail de thèse peut être vu comme une clarification :
• du cadre théorique de calcul de la BCR pour paramètres déterministes mixtes (réels et/ou complexe) éventuellement contraints,
• du calcul de la BCR pour un modèle d'observations multiples gaussiennes complexes circulaires déterministes (conditionnelles),
fournissant les outils nécessaires pour répondre à notre question concernant l'apport des formes d'ondes numériques à la haute résolution en comparaison avec le chirp classique (cf. chapitre XI).

C. Contributions

Nous avons généralisé le calcul de la BCR déterministe au cas des paramètres mixtes (réels et/ou complexes) sous l'angle de la minimisation d'une norme sous contraintes linéaires. Cette approche permet:
• un calcul simplifié de la BCR en évitant les transformations matricielles généralement utilisées quand il s'agit de paramètres complexes [27][68],
• de rectifier certains résultats antérieurs [62],
• de clarifier quelques conditions de régularité qui sont inutilement restrictives [63][58][59][1][4],
• une extension immédiate aux BCR sous contraintes égalités.

Nous avons établi l'équivalence entre reparamétrisation (injective) et contraintes égalités et introduit l'inégalité de reparamétrisation dont nous avons prouvé la pertinence à l'aide d'exemples théoriques et pratiques.

Nous avons explicité la relation entre non-identifiabilité d'un modèle d'observation et singularité de la matrice de Fisher, en démontrant que la matrice de Fisher est toujours singulière sur une variété de l'espace des paramètres définie par un ensemble de contraintes égalités.

Nous avons établi le calcul général de la BCR pour un ensemble de L modèles d'observation indépendants de signaux à bande limitée, gaussiens complexes circulaires à moyennes paramétrées, calcul reposant sur l'utilisation de contraintes égalités sur les paramètres.

D. Publications et communication

Les travaux reportés dans ce document ont donné lieu aux articles et communications suivantes :

Revues internationales

• T. Menni, E. Chaumette, P. Larzabal and J. P. Barbot, "New results on Deterministic Cramér-Rao bounds for real and complex parameters", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 60, no. 3, march 2012

Congrès avec comité de lecture et actes

• T. Menni, E. Chaumette, P. Larzabal and J. P. Barbot, "Crb for Active Radar", EUSIPCO 2011, Barcelona Spain

• T. Menni, E. Chaumette, P. Larzabal, "Reparameterization and Constraints for CRB: duality and a major inequality for system analysis and design in the asymptotic region", ICASSP 2012, Kyoto Japan

Séminaires

• T. Menni, "Borne de Cramer-Rao pour radar actif : analyse de performance en zone asymptotique", Novembre 2011, Telecom ParisTech, Paris, France.

III. Modèles d'observation électromagnétiques pour le radar

A. Introduction

Le mot RADAR est l'acronyme de RAdio Detection And Ranging qui signifie détection et télémétrie radioélectriques [54][30]. Le principe de fonctionnement du radar consiste à illuminer, grâce à une antenne en mode émission, une partie de l'espace - dite zone de surveillance - par des ondes électromagnétiques. Les diffracteurs alors présents dans la scène radar diffusent (diffractent et/ou réfléchissent) une partie de l'energie reçue dans l'espace. Cette émission d'énergie peut être interceptée par une antenne en mode réception, laquelle convertit l'onde électromagnétique en amplitude électrique. Cette amplitude électrique est ensuite traitée par le récepteur radar dont l'objectif principal est l'amélioration du rapport signal à bruit (RSB) jusqu'au convertisseur analogique numérique (CAN, codeur), où le terme signal représente l'ensemble des contributions des diffracteurs, et le terme bruit représente toutes les autres sources de signal (bruits thermiques, brouilleurs, ...). Le rôle du CAN (codeur) est de modifier le modèle d'observation des signaux pour passer d'un modèle continu analogique à un modèle discret numérique par application du théorème d'échantillonnage de Shannon. Cette étape permet alors la mise en oeuvre des algorithmes découlant des théories de la détection puis de l'estimation afin de répondre à la problématique du radar : des cibles (diffracteurs d'intérêt) sont-elles présentes dans les observations ? Et si oui, quels en sont les paramètres (position dans l'espace, vitesse, quantité d'énergie diffusée, ...) ?

Classiquement, de par la propagation sphérique des ondes et la colocalisation des antennes d'émission et de réception (souvent la même utilisée en bi-mode), un radar cherche à estimer la distance radiale et la vitesse radiale des cibles.

La distance radiale d'une cible est estimée en mesurant le temps d'aller et retour parcouru par l'onde électromagnétique entre son émission et sa réception. L'information de vitesse radiale (Doppler) peut être obtenue en émettant un rayonnement électromagnétique sous forme d'un train d'impulsions. En effet, le déphasage du signal rétrodiffusé d'une impulsion à une autre permet de calculer la vitesse radiale de la cible.

La géométrie de l'antenne peut permettre de concentrer la puissance d'émission dans une direction étroite pour fournir une estimation de la direction d'arrivé de la cible.

La mesure de la quantité d'énergie reçue permet d'estimer la capacité d'une cible à diffuser les ondes radar. Cette capacité est mesurée par la définition d'une surface équivalente (de diffusion) radar de la cible, laquelle dépend non seulement de sa géométrie (dimension) mais aussi des matérieaux entrant dans sa composition.

La plupart des radars sont conçus pour fonctionner suivant un mode non-coopératif des cibles, c'est à dire que les cibles diffusent passivement les ondes qui les illuminent. Ces radars "classiques" et historiques sont appelés radar primaires. Il existe également des radars coopératifs, c'est à dire que les cibles sont équipées d'un répondeur (transpondeur) qui transmet un message au radar à chaque fois qu'elles sont interrogées. Ces radars sont dits secondaires car leur utilisation requiert toujours un radar primaire pour détecter et identifier les cibles ne disposant pas de transpondeurs ou réellement non-coopératives. Les radar secondaires sont utilisées majoritairement pour la surveillance du traffic aérien civil (tout avion de ligne doit obligatoirement avoir un transpondeur en état de fonctionnement) mais également dans un contexte militaire où ils servent à l'identification ami-ennemi (IFF : Identification Friend or Foe).

Selon la position relative de l'émetteur et du récepteur, on qualifiera le radar de monostatique lorsque l'antenne d'émission et de réception sont colocalisées (on parlera aussi de rétrodiffusion par la cible), de bistatique (ou multistatique) lorsque les antennes d'émission et de réception ne sont plus colocalisées.

Le contexte radar définit principalement deux missions : la veille (ou surveillance) et la pousuite. La veille consiste à explorer en permanence et de façon périodique une zone de couverture. La poursuite consiste à poursuivre certaines cibles détectées (estimation fine et continue de la position de ces cibles).

Dans nombre de dispositifs militaires, il est fréquent d'avoir deux radars: un radar de veille qui désigne au radar de poursuite les cibles à poursuivre. L'évolution des technologies et l'optimisation du rapport qualité prix tendent à regrouper ces deux fonctionalités dans un seul dispositif radar : le radar multifonction.
La plupart des radars sont des radar "pulsés", c'est à dire qu'ils emettent des pulses (durée émission courte relativement à l'intervalle de temps séparant deux émissions consécutives). Certains radar émettent une onde continue.
Enfin, le radar est historiquement un instrument de mesure actif (radar actif), c'est à dire qu'il emet un signal connu et dont il analyse la rétrodiffusion par la scéne radar. Il existe également des radar dits passifs (comparables aux goniomètres en télécommunication) qui écoutent des signaux d'opportunités émis par d'autres émetteurs (télécoms, Télévision digitale, ...) afin de détecter et de localiser les cibles d'intérêt.

La physique du radar est la résultante de la propagation des ondes électromagnétiques (équation de Maxwell) et de l'électronique hyperfréquence. Pour pouvoir étudier de façon pertinente les performances en estimation d'un dispositif radar en fonction de son architecture, il est important de pouvoir formaliser un modèle d'observation à la fois réaliste d'un point de vue de la physique (et donc du matériel qui est ou sera utilisé) mais également exploitable d'un point de vue probabiliste.
L'objet de ce chapitre est par conséquent la dérivation d'un tel modèle en articulant - et si possible en quantifiant - l'ensemble des approximations effectuées.

B. Transmission en champs lointain : cas du milieu simple

Le modèle théorique restreint introduit ci-après de transmission par onde électromagnétique d'un signal $e_T(t)$ depuis une antenne d'émission vers une antenne de réception peut être obtenu à partir des nombreuses sources de la littérature courante (par exemple [43][15][14][12]). Chaque ensemble d'interactions électromagnétiques (propagation, diffraction, réflexion) aboutissant à l'établissement d'un régime de transmission entre l'antenne d'émission et l'antenne de réception est appelé contributeur (électromagnétique).
Les hypothèses restrictives - au sens de la théorie électromagnétique - prises en compte dans ce travail sont énoncées ci-après.

Tous les objets Electro-Magnétiques (EM) - antenne d'émission, antenne de réception, diffracteur, réflecteur - de la scène électromagnétique sont :
• plongés dans un milieu simple infini de référence (de permitivité (ε) et perméabilité (μ) scalaires et constantes) caractérisé par la célérité des ondes EM dans ce milieu $\left(c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)$,
• génèrent ou interceptent des champs EM $(\mathbf{e}, \mathbf{h})$ vérifiant l'approximation du champs lointain (approximation de Fraunhoffer) :

$$\mathbf{e}(\mathbf{p}) \simeq \frac{e^{-jk\|\mathbf{p}\|}}{\|\mathbf{p}\|}\mathbf{c}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{6a}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}) \simeq \frac{1}{\eta}\mathbf{u} \wedge \mathbf{e}(\mathbf{p}), \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{1}{c\varepsilon} \tag{6b}$$

c'est à dire des ondes sphériques Transverses Electro-Magnétique (ondes TEM), où $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ est une position de l'espace, $\lambda = \frac{c}{f}$ est la longueur d'onde et $\mathbf{c}(\mathbf{u})$ est la caractéristique vectorielle de rayonnement dans la direction portée par le vecteur unitaire $\mathbf{u}$.

La propagation des ondes électromagnétiques de l'émetteur vers le récepteur se fait à travers une scène électromagnétique composée d'objet EM réalisant une interaction électromagnétique (propagation, diffraction, réflexion).

Les différents objets EM sont éventuellement mobiles. Nous supposerons que les variations temporelles des grandeurs électromagnétiques induites par le déplacement des lieux des sources de courants et de charges sont négligeables devant les variations induites par le régime harmonique. Ceci constitue

l'approximation du régime quasi-permanent. Sous cette hypothèse, on peut remplacer les équations de Maxwell exactes par un système d'équations approchées comparable à celui obtenu en régime permanent et vérifié par les champs instantanés. Pour un déplacement donné des lieux de charges et de courants, cette approximation est d'autant mieux vérifiée que la fréquence (monochromatique) est élevée (identification asymptotique). Une conséquence fondamentale de cette approximation est que les champs qui en découlent sont calculables dans n'importe quel repère géométrique, indépendamment de son mouvement relatif par rapport aux sources de courants et de charges. Ceci permet de généraliser l'ensemble des résultats obtenus en régime permanents (antenne en régime d'émission, puissances reçues, théorème de poynting, antenne en régime de réception, ...) en faisant intervenir l'expression des champs instantanés (variables dans le temps).

Les antennes sont assimilables à des dipôles ou à l'une des terminaisons (charge) d'un guide d'onde mono-mode :
• l'antenne de réception d'impédance z_{A_R} alimente une impédance de charge z_R; elle est soumise au rayonnement thermodynamique des corps qui l'environnent, rayonnement caractérisé par une Densité Spectrale de Puissance Moyenne constante dépendant de la température interceptée par l'antenne (T_A),
• l'antenne d'émission est alimentée par un signal complexe analytique $e_T(t)$ à bande limitée de bande $B\ \left[f_c - \frac{B}{2}, f_c + \frac{B}{2}\right]$.

Sous les hypothèses précédentes, le phénomène de transmission d'énergie de l'antenne d'émission de position $\mathbf{p}_T(t)$ à l'antenne de réception de position $\mathbf{p}_R(t)$ par l'intermédiaire de M contributeurs de la scène électromagnétique peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{f_c-\frac{B}{2}}^{f_c+\frac{B}{2}} \sqrt{\rho_R^c(f)} \left[\sum_{m=1}^{M} x_R(m,f,t) + n_R(f)\right] e^{j2\pi f t} df \qquad (7)\\
\rho_R^c(f) &= 1 - \frac{\left|z_R(f) - z_{A_R}(f)^*\right|^2}{\left|z_R(f) + z_{A_R}(f)\right|^2}\\
R_{n_R}(f) &= 2KT_A,\ \ f \in \left[f_c - \frac{B}{2}, f_c + \frac{B}{2}\right] \quad \rightleftharpoons \quad R_{n_R}(\tau)\\
x_R(m,f,t) &= h(\boldsymbol{\varsigma}_m, f, t)\, e^{-j2\pi f \frac{d(\boldsymbol{\varsigma}_m,t)}{c}} e_T(f - f_c)\\
h(\boldsymbol{\varsigma}_m, f, t) &= \frac{c}{4\pi f}\left(\begin{array}{c}\sqrt{G_R(f,\mathbf{u}_R(m,t))}\sqrt{G_T(f,\mathbf{u}_T(m,t))}\times\\ \left[\mathbf{f}_R(f,\mathbf{u}_R(m,t))\cdot\left(\mathbf{T}(\boldsymbol{\varsigma}_m,f,t)\,\mathbf{f}_T(f,\mathbf{u}_T(m,t))\right)\right]\end{array}\right)
\end{aligned}$$

où :

• $\rho_R^c(f)$ représente le facteur de charge de l'antenne de réception; $\rho_R^c(f) = 1$ si la charge est adaptée $(z_R(f) = z_{A_R}(f)^*)$.

• $x(t) \rightleftharpoons x(f)$, $n_R(t) \rightleftharpoons n_R(f)$, $e_T(t) \rightleftharpoons e_T(f)$ représentent des amplitudes équivalentes (unité : $\sqrt{W}$). $x(t)$ est l'amplitude au niveau de la charge de l'antenne de réception, et $n_R(t)$ est l'amplitude résultante des contributions des sources de rayonnement thermique externes en sortie de l'antenne de réception. Elles sont reliées aux intensités électriques par : $i_R(f) = \frac{x(f)}{\sqrt{\mathrm{Re}\{z_R(f)\}}}$, $i_T(f) = \frac{e_T(f)}{\sqrt{\mathrm{Re}\{z_T(f)\}}}$.

• T_A représente la température d'antenne de réception : $T_A = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} G_R(f,\mathbf{u})\,T(\mathbf{u})\,d\omega(\mathbf{u})$. Si la répartition de température thermodynamique est uniforme $(T(\mathbf{u}) = T)$, alors $T_A = \rho_R T$ (ρ_R : rendement de l'antenne de réception; $\rho_R = 1$ si l'antenne est sans perte).

• $\sqrt{G(f,\mathbf{u})}\mathbf{f}(f,\mathbf{u})$ $\left(\sqrt{G_R(f,\mathbf{u})}\mathbf{f}_R(f,\mathbf{u})\ \text{ pour le récepteur et } \sqrt{G_T(f,\mathbf{u})}\mathbf{f}_T(f,\mathbf{u})\ \text{ pour l'émetteur}\right)$ représente

l'information vectorielle (amplitude et direction) associée à la composante électrique du champ TEM se propageant dans la direction portée par le vecteur unitaire $\mathbf{u}$ à la fréquence f :
$\sqrt{G(f,\mathbf{u})}$ désigne la racine du gain (éventuellement complexe) de l'antenne,
$\mathbf{f}(f,\mathbf{u})$ désigne le vecteur de polarisation (angles d'orientation et d'ellipticité), vecteur complexe normé orthogonal à $\mathbf{u}$.

• $\mathbf{u}_T(m,t)$ représente le vecteur unitaire de la direction de propagation antenne d'émission $\rightarrow$ contributeur m.

• $\mathbf{u}_R(m,t)$ représente le vecteur unitaire de la direction de propagation antenne de réception $\rightarrow$ contributeur m.

• $\boldsymbol{\varsigma}_m$ représente le vecteur des paramètres (autre que la fréquence) intervenant dans la transmission de l'onde par le contributeur m.

• $d(\boldsymbol{\varsigma}_m,t)$ représente la longueur du chemin géométrique de propagation associé au contributeur m.

• $\mathbf{T}(\boldsymbol{\varsigma}_m,f,t)$ représente la matrice de transformation, par un contributeur m donné, de la caractéristique vectorielle du champ émis par l'émetteur en champ reçu au niveau du récepteur. Elle décrit une transformation des champs TEM et s'exprime dans des bases transverses aux directions de propagation d'émission et de réception. Par exemple, dans le cas d'une transmission directe :

$$\mathbf{T}(f,t)=\frac{\mathbf{I}}{\|\mathbf{p}_{TR}(t)\|},\ d(t)=\|\mathbf{p}_{TR}(t)\|,\ \mathbf{p}_{TR}(t)=\mathbf{p}_R(t)-\mathbf{p}_T(t)$$

alors que si la transmission se fait via un diffracteur D de position $\mathbf{p}_D(t)$, alors :

$$\mathbf{T}(f,t)=\frac{\mathbf{S}(f,\mathbf{u}_R(t),\mathbf{u}_T(t))}{\|\mathbf{p}_{RD}(t)\|\,\|\mathbf{p}_{TD}(t)\|},d(t)=\|\mathbf{p}_{RD}(t)\|+\|\mathbf{p}_{TD}(t)\|,\quad \begin{array}{c}\mathbf{p}_{RD}(t)=\mathbf{p}_D(t)-\mathbf{p}_R(t)\\ \mathbf{p}_{TD}(t)=\mathbf{p}_D(t)-\mathbf{p}_T(t)\\ \mathbf{u}_T(t)=\frac{\mathbf{p}_{TD}(t)}{\|\mathbf{p}_{TD}(t)\|},\mathbf{u}_R(t)=\frac{\mathbf{p}_{RD}(t)}{\|\mathbf{p}_{RD}(t)\|}\end{array} \tag{8}$$

où $\mathbf{S}(f,\mathbf{u}_R(t),\mathbf{u}_T(t))$ est la matrice de diffraction $\big($non isotrope, $\mathbf{S}^{ISO}(\ )=\sqrt{4\pi}\mathbf{S}(\ )\big)$ du diffracteur D pour la direction incidente $\mathbf{u}_T(t)$ et la direction de diffraction $\mathbf{u}_R(t)$.

On remarquera que le modèle théorique restreint de la transmission pour une scène mobile est équivalent à un filtrage Linéaire Non Invariant dans le Temps.
Dans le cas particulier de la transmission pour une scène fixe, ce modèle devient équivalent à un filtrage Linéaire Invariant dans le Temps car alors :

$$h(\boldsymbol{\varsigma}_m,f,t)=h(\boldsymbol{\varsigma}_m,f),\quad x_R(m,f)=h(\boldsymbol{\varsigma}_m,f)\,e^{-j2\pi f\frac{d(\boldsymbol{\varsigma}_m)}{c}}e_T(f-f_c)$$

C. Transmission en champs lointain : approximation bande étroite

Dans le cas d'un signal "bande étroite" pour lequel $\frac{B}{f_c}\ll 1$, les approximations possibles sont :

$$\left\{f=f_c\left(1+\frac{df}{f_c}\right),\quad \frac{|df|}{f_c}\leq\frac{B}{2f_c}\ll 1\right\}\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{c}f\simeq f_c\\ \sqrt{G(f,\mathbf{u})}\mathbf{f}(f,\mathbf{u})\simeq\sqrt{G(f_c,\mathbf{u})}\mathbf{f}(f_c,\mathbf{u})\\ \mathbf{T}(\boldsymbol{\varsigma}_m,f,t)\simeq\mathbf{T}(\boldsymbol{\varsigma}_m,f_c,t)\end{array}\right. . \tag{9}$$

Elles reviennent à négliger :
• les effets d'intégration ou de dérivation sur l'enveloppe complexe en bande de base en comparaison de ces mêmes effets sur la fréquence de modulation f_c (approximation de même nature que celle du régime quasi-permanent),
• la variation de la caractéristique vectorielle (gain et polarisation) dans la bande,

• la variation de la matrice de transformation des champs dans la bande.

L'équation de transmission (7) pour le contributeur m devient alors :

$$\begin{aligned} x_R(m,f,t) &\simeq h(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t)\, e^{-j2\pi f \frac{d(\boldsymbol{\varsigma}_m,t)}{c}} e_T(f-f_c) \\ h(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) &= \frac{c}{4\pi f_c}\left(\begin{array}{c} \sqrt{G_R(f_c,\mathbf{u}_R(m,t))}\sqrt{G_T(f_c,\mathbf{u}_T(m,t))}\times \\ [\mathbf{f}_R(f_c,\mathbf{u}_R(m,t))\cdot(\mathbf{T}(\boldsymbol{\varsigma}_m,f_c,t)\,\mathbf{f}_T(f_c,\mathbf{u}_T(m,t)))] \end{array} \right) \end{aligned}$$

et conduit à l'équation de réception approchée :

$$\begin{aligned} x(t) &\simeq \sum_{m=1}^{M} h(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) \int_{f_c-\frac{B}{2}}^{f_c+\frac{B}{2}} \left[\sqrt{\rho_R^c(f)} e_T(f-f_c)\right] e^{-j2\pi f \frac{d(\boldsymbol{\varsigma}_m,t)}{c}} e^{j2\pi f t} df + n(t) \qquad (10) \\ h(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) &= \frac{c}{4\pi f_c}\left(\begin{array}{c} \sqrt{G_R(f_c,\mathbf{u}_R(m,t))}\sqrt{G_T(f_c,\mathbf{u}_T(m,t))}\times \\ [\mathbf{f}_R(f_c,\mathbf{u}_R(m,t))\cdot(\mathbf{T}(\boldsymbol{\varsigma}_m,f_c,t)\,\mathbf{f}_T(f_c,\mathbf{u}_T(m,t)))] \end{array} \right) \\ R_n(f) &= (2KT_A)\,\rho_R^c(f),\ f \in \left[f_c - \frac{B}{2}, f_c + \frac{B}{2}\right] \quad \rightleftharpoons \quad R_n(\tau) \end{aligned}$$

L'approximation (10) constitue la base théorique du module de propagation de la bibliothèque de simulation fonctionnelle radar développée par le service TSI du DEMR (département d'électromagnétisme et mesure radar) de l'Onera.

Outre le fait qu'elle simplifie et accélère le calcul informatique de l'amplitude reçue, elle permet de scinder l'équation de transmission associée à chaque contributeur en 3 termes :

• la transformation du champs émis en amplitude équivalente, représentée par le terme $h(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t)$,

• le déphasage associé au retard de propagation d'une onde, représenté par le terme $e^{-j2\pi f \frac{d(\boldsymbol{\varsigma}_m,t)}{c}}$,

• un filtrage linéaire du signal émis, représenté par le terme $\sqrt{\rho_R^c(f)} e_T(f-f_c)$.

D. Transmission en champs lointain : émetteur et récepteur linéaires

L'équation (10) reste la même quelque soit le nombre de filtrages linéaires ou de transpositions de fréquence introduits, que ce soit au niveau de l'émetteur ou du récepteur. Ainsi, dans le cas d'un émetteur et d'un récepteur idéal, on peut directement écrire (10) sous la forme :

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\sum_{m=1}^{M} x(m,t) + n(t)\right) e^{j2\pi f_c t}, \quad x(m,t) = h(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t)\, e_R(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) \qquad (11) \\ e_R(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) &= e^{-j2\pi f_c \frac{d(\boldsymbol{\varsigma}_m,t)}{c}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} e_T(f)\, e^{-j2\pi f \frac{d(\boldsymbol{\varsigma}_m,t)}{c}} e^{j2\pi f t} df \\ h(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) &= \frac{c}{4\pi f_c}\left(\begin{array}{c} \sqrt{G_R(f_c,\mathbf{u}_R(m,t))}\sqrt{G_T(f_c,\mathbf{u}_T(m,t))}\times \\ [\mathbf{f}_R(f_c,\mathbf{u}_R(m,t))\cdot(\mathbf{T}(\boldsymbol{\varsigma}_m,f_c,t)\,\mathbf{f}_T(f_c,\mathbf{u}_T(m,t)))] \end{array} \right) \\ R_n(f) &= (2KT_A)\,\rho_R^c(f+f_c)\,|h_R^{eq}(f)|^2,\ f \in \left[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}\right] \quad \rightleftharpoons \quad R_n(\tau) \end{aligned}$$

où $e_T(f)$ est le signal émis équivalent défini par :

$$e_T(f) = \left(e_T^{wg}(f)\, h_T^{eq}(f) \sqrt{\rho_T^c(f+f_c)}\right) \sqrt{\rho_R^c(f+f_c)} h_R^{eq}(f),\ f \in \left[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}\right] \qquad (12)$$

avec :

• $\rho_T^c(f)$ facteur de charge de l'antenne d'émission,

• $\rho_R^c(f)$ facteur de charge de l'antenne de réception,
• $h_T^{eq}(f)$ fonction de transfert équivalente dans la bande B de l'émetteur,
• $h_R^{eq}(f)$ fonction de transfert équivalente dans la bande B du récepteur,

• $e_T^{wg}(f)$ spectre du signal de l'émetteur en sortie du générateur de signal en bande de base (waveform generator).

En effet, la principale fonction d'un émetteur idéal est la mise en forme (filtrage linéaire) des signaux à émettre afin de respecter une contrainte d'occupation spectrale dans une des bandes spectrales de propagation de l'atmosphère (modulation).

Pour un récepteur idéal, la principale fonction est d'opérer :
• un filtrage linéaire adapté à $e_T^{wg}(f-f_c)$ afin d'améliorer le RSB avant CAN (codeur),
• suivi d'une transposition de fréquence pour ramener la fréquence centrale des signaux à $\frac{F_{CAN}}{4}$ (où F_{CAN} est la fréquence d'échantillonnage du CAN),
• suivi d'un filtrage de Hilbert afin de reconstituer le signal analytique en bande de base $e_T(t)$.
Ces 3 étapes sont équivalentes mathématiquement à :
• un filtrage linéaire adapté à $e_T^{wg}(f-f_c)$ afin d'améliorer le RSB,
• suivi d'une démodulation complexe par f_c où $x(t) \to x(t)\, e^{-j2\pi f_c t}$.

Finalement, l'approximation bande étroite, dans le cas d'un émetteur et d'un récepteur linéaires, conduit à l'équation de transmission suivante en sortie du filtre de Hilbert:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{m=1}^{M} x(m,t) + n(t), \quad x(m,t) = h(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t)\, e_R(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) \qquad (13)\\
e_R(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) &= e^{-j2\pi f_c \frac{d(\boldsymbol{\varsigma}_m,t)}{c}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} e_T(f)\, e^{-j2\pi f \frac{d(\boldsymbol{\varsigma}_m,t)}{c}} e^{j2\pi f t} df\\
h(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) &= \frac{c}{4\pi f_c} \left(\begin{array}{c} \sqrt{G_R(f_c, \mathbf{u}_R(m,t))}\sqrt{G_T(f_c, \mathbf{u}_T(m,t))}\times \\ [\mathbf{f}_R(f_c, \mathbf{u}_R(m,t)) \cdot (\mathbf{T}(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t)\, \mathbf{f}_T(f_c, \mathbf{u}_T(m,t)))] \end{array} \right)\\
R_n(f),\ f &\in \left[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}\right] \quad \rightleftharpoons \quad R_n(\tau)
\end{aligned}$$

Dans la suite nous nous intéressons uniquement aux signaux complexes observés en sortie du filtre de Hilbert (13).

E. Transmission en champs lointain : autres approximations usuelles

1) Approximation bande étroite d'un réseau de récepteurs:

Dans le cas d'un ensemble de N récepteurs recevant simultanément le signal émis par un émetteur et transmis par l'intermédiaire d'un contributeur m, l'équation de transmission du signal (bande étroite) émis en champs lointain en sortie du filtre de Hilbert (13) s'écrit pour le récepteur n :

$$\begin{aligned}
x_n(m,t) &= h_n(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t)\, e_{R_n}(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) \qquad (14)\\
e_{R_n}(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) &= e^{-j2\pi f_c \frac{d_n(\boldsymbol{\varsigma}_m,t)}{c}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} e_T(f)\, e^{-j2\pi f \frac{d_n(\boldsymbol{\varsigma}_m,t)}{c}} e^{j2\pi f t} df\\
h_n(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) &= \frac{c}{4\pi f_c} \left(\begin{array}{c} \sqrt{G_{R_n}(f_c, \mathbf{u}_{R_n}(m,t))}\sqrt{G_T(f_c, \mathbf{u}_T(m,t))}\times \\ [\mathbf{f}_{R_n}(f_c, \mathbf{u}_{R_n}(m,t)) \cdot (\mathbf{T}(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t)\, \mathbf{f}_T(f_c, \mathbf{u}_T(m,t)))] \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Cette expression (14) peut être simplifiée (sous certaines conditions (15)) en introduisant un point de l'espace O appelé "centre de phase" du réseau de récepteurs. En général ce point de l'espace est, soit la position d'un des récepteurs, soit un point situé à l'intérieur du volume (ou de la surface ou du segment) délimité par les positions des N récepteurs (le barycentre par exemple). Le raisonnement est le suivant : si un récepteur était présent en O, il recevrait par l'intermédiaire du contributeur m un signal retardé par la longueur du chemin géométrique $d_O(\boldsymbol{\varsigma}_m, t)$:

$$e_O(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) = e^{-j2\pi f_c \frac{d_O(\boldsymbol{\varsigma}_m,t)}{c}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} e_T(f)\, e^{-j2\pi f \frac{d_O(\boldsymbol{\varsigma}_m,t)}{c}} e^{j2\pi f t} df.$$

En prenant $e_O(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t)$ comme signal de référence, on peut démontrer (cf. annexe XIII-A) que :

$$e_{R_n}(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) = e^{-j2\pi f_c \frac{d_n(\boldsymbol{\varsigma}_m,t) - d_O(\boldsymbol{\varsigma}_m,t)}{c}} e_O(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) + \varepsilon_{R_n}(t),$$

l'énergie de l'erreur d'approximation linéaire $\varepsilon_{R_n}(t)$ vérifiant :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_{R_n}(t)|^2 dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e_{R_n}(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t)|^2 dt \left(1 - \sin c\left(\pi \frac{B}{c} \max_{t \in \mathcal{D}} \{|d_n(\boldsymbol{\varsigma}_m, t) - d_O(\boldsymbol{\varsigma}_m, t)|\}\right)^2\right)$$

où $\mathcal{D}$ représente le support temporel du signal $e_{R_n}(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t)$. On peut également utiliser l'approximation suivante :

$$10 * \log_{10}\left(\left(1 - \sin c\,(\pi x)^2\right)\right) \simeq 1.5 * (10 * \log_{10}(x)), \quad x < 10^{-2}.$$

Pour fixer un ordre de grandeur, si $x = 10^{-2}$, alors :

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_{R_n}(t)|^2 dt\right)_{dB} \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |e_{R_n}(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t)|^2 dt\right)_{dB} - 30dB,$$

c'est à dire que l'énergie de l'erreur d'approximation linéaire $\varepsilon_{R_n}(t)$ est 1000 fois plus faible que le signal approximé. Par conséquent si :

$$\frac{B}{c} \max_{t \in \mathcal{D}} \{|d_n(\boldsymbol{\varsigma}_m, t) - d_O(\boldsymbol{\varsigma}_m, t)|\} < 10^{-2}, \quad n \in [1, N], \tag{15}$$

alors (14) peut s'écrire pour l'ensemble des N récepteurs de la façon simplifiée suivante :

$$\mathbf{x}(m,t) = \mathbf{a}(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t)\, e_O(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) \left[\frac{\lambda_c}{4\pi} \mathbf{f}_{R_n}(f_c, \mathbf{u}_{R_n}(m,t)) \cdot (\mathbf{T}(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t)\, \mathbf{f}_T(f_c, \mathbf{u}_T(m,t)))\right] \tag{16}$$

$$e_O(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) = e^{-j2\pi f_c \frac{d_O(\boldsymbol{\varsigma}_m,t)}{c}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} e_T(f)\, e^{-j2\pi f \frac{d_O(\boldsymbol{\varsigma}_m,t)}{c}} e^{j2\pi f t} df$$

$$a_n(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) = (\mathbf{a})_n(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) = \left(\sqrt{G_{R_n}(f_c, \mathbf{u}_{R_n}(m,t))} e^{-j2\pi f_c \frac{d_n(\boldsymbol{\varsigma}_m,t) - d_O(\boldsymbol{\varsigma}_m,t)}{c}}\right) \sqrt{G_T(f_c, \mathbf{u}_T(m,t))}$$

2) Sources de signal ponctuelles en champs lointain (ondes planes):

Rappelons que nous appelons contributeur (électromagnétique) tout ensemble d'interactions électromagnétiques (propagation, diffraction, réflexion) aboutissant à l'établissement d'un régime de transmission entre une antenne d'émission et une antenne de réception. Nous choisissons le centre de phase O du réseau de réception comme origine du repère géométrique.
Le signal reçu par le récepteur n localisé en $\mathbf{p}_{R_n}(t)$ par l'intermédiaire d'un contributeur m, provient d'une interaction électromagnétique (la dernière) se comportant comme une source d'onde TEM localisée en $\mathbf{p}_{D_m}(t)$, ce qui conduit, sur l'ensemble du trajet géométrique à :

$$d_n(\boldsymbol{\varsigma}_m, t) - d_O(\boldsymbol{\varsigma}_m, t) = \|\mathbf{p}_{D_m}(t) - \mathbf{p}_{R_n}(t)\| - \|\mathbf{p}_{D_m}(t)\|,$$

avec :

$$\|\mathbf{p}_{D_m}(t) - \mathbf{p}_{R_n}(t)\| = \|\mathbf{p}_{D_m}(t)\| \sqrt{1 - 2\mathbf{u}_{D_m}(t) \cdot \frac{\mathbf{p}_{R_n}(t)}{\|\mathbf{p}_{D_m}(t)\|} + \left(\frac{\|\mathbf{p}_{R_n}(t)\|}{\|\mathbf{p}_{D_m}(t)\|}\right)^2}, \quad \mathbf{u}_{D_m}(t) = \frac{\mathbf{p}_{D_m}(t)}{\|\mathbf{p}_{D_m}(t)\|}.$$

Par conséquent, si $\frac{\|\mathbf{p}_{R_n}(t)\|}{\|\mathbf{p}_{D_m}(t)\|} << 1$ (distance source-réseau de récepteurs grande devant la dimension du réseau de récepteurs), alors l'onde sphérique est assimilable à une onde plane :

$$\|\mathbf{p}_{D_m}(t) - \mathbf{p}_{R_n}(t)\| \simeq \|\mathbf{p}_{D_m}(t)\| - \mathbf{u}_{D_m}(t) \cdot \mathbf{p}_{R_n}(t) \;\Rightarrow\; d_n(\boldsymbol{\varsigma}_m, t) - d_O(\boldsymbol{\varsigma}_m, t) \simeq -\mathbf{u}_{D_m}(t) \cdot \mathbf{p}_{R_n}(t),$$

(16) devenant :

$$\mathbf{x}(m,t) = \mathbf{a}(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t)\, e_O(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) \left[\frac{\lambda_c}{4\pi} \mathbf{f}_{R_n}(f_c, \mathbf{u}_{R_n}(m,t)) \cdot (\mathbf{T}(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t)\, \mathbf{f}_T(f_c, \mathbf{u}_T(m,t)))\right] \quad (17)$$

$$e_O(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) = e^{-j2\pi f_c \frac{d_O(\boldsymbol{\varsigma}_m, t)}{c}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} e_T(f)\, e^{-j2\pi f \frac{d_O(\boldsymbol{\varsigma}_m, t)}{c}} e^{j2\pi f t} df$$

$$a_n(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) = (\mathbf{a})_n(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) = \left(\sqrt{G_{R_n}(f_c, \mathbf{u}_{R_n}(m,t))} e^{j2\pi f_c \frac{\mathbf{u}_{D_m}(t) \cdot \mathbf{p}_{R_n}(t)}{c}}\right) \sqrt{G_T(f_c, \mathbf{u}_T(m,t))}$$

IV. Modèles d'observation paramétriques pour radar actif en présence de diffracteurs ponctuels

Nous nous focalisons plus particulièrement sur les radar actifs, c'est à dire les radars historiques pour lesquels les émetteurs émettent des forme d'ondes $e_T(t)$ (signaux en bande de base) connues des récepteurs radar.
Dans ce contexte, nous nous interessons à la transmission par un système radar MIMO (Multiple Input - Multiple OutPut, par analogie avec la terminologie des télécommunications) :
• de I ondes TEM par un réseau de I émetteurs,
• à destination d'un réseau de N récepteurs,
• par l'intermédiaire de M contributeurs EM de type diffracteur ponctuels (aussi appelés points brillants) en champ lointain D_m localisés à la position $\mathbf{p}_{D_m}(t)$ et caractérisés par une matrice de diffraction (8) $\mathbf{S}_m(f, \mathbf{u}_R(t), \mathbf{u}_T(t))$.

Alors la contribution des M diffracteurs ponctuels au signal reçu par le récepteur n en sortie du filtre de Hilbert, en approximation bande étroite, pour des émetteurs et des récepteur linéaires, s'écrit (13) :

$$\begin{aligned} x_n(m,t) &= \sum_{i=1}^{I} h_n^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right) e_{R_n}^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right) \qquad (18) \\ e_{R_n}^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right) &= e^{-j2\pi f_c^i \frac{d_n^i(\varsigma_m,t)}{c}} \int_{-\frac{B_i}{2}}^{\frac{B_i}{2}} e_{T_i}(f)\, e^{-j2\pi f \frac{d_n^i(\varsigma_m,t)}{c}} e^{j2\pi f t} df \\ h_n^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right) &= \frac{\lambda_c^i}{4\pi}\left(\begin{array}{c} \sqrt{G_{R_n}(f_c^i, \mathbf{u}_{R_n}(m,t))}\sqrt{G_{T_i}(f_c^i, \mathbf{u}_{T_i}(m,t))}\times \\ [\mathbf{f}_{R_n}(f_c^i, \mathbf{u}_{R_n}(m,t)) \cdot (\mathbf{T}_n^i(\varsigma_m, f_c^i, t)\, \mathbf{f}_{T_i}(f_c^i, \mathbf{u}_{T_i}(m,t)))] \end{array}\right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_n^i(\varsigma_m, f, t) = \frac{\mathbf{S}_m(f, \mathbf{u}_{R_n}(m,t), \mathbf{u}_{T_i}(m,t))}{\|\mathbf{p}_{R_nD_m}(t)\|\,\|\mathbf{p}_{T_iD_m}(t)\|}, \quad d_n^i(\varsigma_m, t) = \|\mathbf{p}_{R_nD_m}(t)\| + \|\mathbf{p}_{T_iD_m}(t)\|$$
$$\mathbf{p}_{R_nD_m}(t) = \mathbf{p}_{D_m}(t) - \mathbf{p}_{R_n}(t), \quad \mathbf{p}_{T_iD_m}(t) = \mathbf{p}_{D_m}(t) - \mathbf{p}_{T_i}(t)$$
$$\mathbf{u}_{T_i}(m,t) = \frac{\mathbf{p}_{T_iD_m}(t)}{\|\mathbf{p}_{T_iD_m}(t)\|}, \quad \mathbf{u}_{R_n}(m,t) = \frac{\mathbf{p}_{R_nD_m}(t)}{\|\mathbf{p}_{R_nD_m}(t)\|}$$

En radar actif, les matrices de diffraction $\mathbf{S}_m(f, \mathbf{u}_R(t), \mathbf{u}_T(t))$ des diffracteurs ponctuels sont des grandeurs inconnues qu'un radar ne cherche en général pas à estimer. En effet, $\mathbf{S}_m(f, \mathbf{u}_R(t), \mathbf{u}_T(t))$ dépend non seulement des directions de propagation des ondes incidentes $(\mathbf{u}_{T_i}(m,t))$ et diffractées $(\mathbf{u}_{R_n}(m,t))$ mais également de l'attitude relative (rotations) du diffracteur relativement à l'émetteur (T_i) et au récepteur (R_n), ce qui multiplie les paramètres inconnus à estimer et pose des problèmes d'identifiabilité (cf. paragraphe X-B).
En pratique, on considère qu'il est impossible de déduire une information pertinente caractéristique du diffracteur à partir d'une mesure de $\mathbf{S}_m(f, \mathbf{u}_R(t), \mathbf{u}_T(t))$ et on se restreint à la mesure du coefficient complexe de diffraction:

$$\begin{aligned} \sigma_n^i(\varsigma_m, f, t) &= \mathbf{f}_{R_n}(f, \mathbf{u}_{R_n}(m,t)) \cdot \left(\sqrt{4\pi}\mathbf{S}_m(f, \mathbf{u}_{R_n}(m,t), \mathbf{u}_{T_i}(m,t))\, \mathbf{f}_{T_i}(f, \mathbf{u}_{T_i}(m,t))\right) \\ \sigma_n^i(\varsigma_m, f, t) &= \mathbf{f}_{R_n}(f, \mathbf{u}_{R_n}(m,t)) \cdot \left(\mathbf{S}_m^{ISO}(f, \mathbf{u}_{R_n}(m,t), \mathbf{u}_{T_i}(m,t))\, \mathbf{f}_{T_i}(f, \mathbf{u}_{T_i}(m,t))\right) \qquad (19) \end{aligned}$$

En termes radar, $|\sigma_n^i(\varsigma_m, f, t)|^2$ est la Surface Equivalente Radar (SER) rapportée à l'isotrope. On remarquera que la SER intègre non seulement l'information de diffraction mais également les informations de polarisation de l'onde incidente $(\mathbf{f}_{T_i}(f, \mathbf{u}_{T_i}(m,t)))$ et de l'onde diffractée $(\mathbf{f}_{R_n}(f, \mathbf{u}_{R_n}(m,t)))$.

Sous cette restriction, le modèle d'observation paramétrique pour un radar actif MIMO devient :

$$\begin{aligned} x_n(m,t) &= \sum_{i=1}^{I} h_n^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right) e_{R_n}^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right) \\ e_{R_n}^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right) &= e^{-j2\pi f_c^i \frac{d_n^i(\varsigma_m,t)}{c}} \int_{-\frac{B_i}{2}}^{\frac{B_i}{2}} e_{T_i}(f)\, e^{-j2\pi f \frac{d_n^i(\varsigma_m,t)}{c}} e^{j2\pi f t} df \\ h_n^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right) &= \sqrt{G_{R_n}\left(f_c^i, \mathbf{u}_{R_n}(m,t)\right)}\sqrt{G_{T_i}\left(f_c^i, \mathbf{u}_{T_i}(m,t)\right)} \frac{\lambda_c^i}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sigma_n^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right)}{\left\|\mathbf{p}_{R_n D_m}(t)\right\| \left\|\mathbf{p}_{T_i D_m}(t)\right\|} \end{aligned} \tag{20}$$

où $\lambda_c^i = \frac{c}{f_c^i}$ est la longueur d'onde associée à l'émetteur T_i.

A. Calcul des retards de propagation pour les mouvements accélérés uniformes (MAU) et rectilignes uniformes (MRU)

La propagation du front d'onde EM entre un émetteur de position $\mathbf{p}_T(t)$ et un récepteur de position $\mathbf{p}_R(t)$ satisfait l'équation :

$$\left\|\mathbf{p}_R(t) - \mathbf{p}_T(t - \tau(t))\right\| = d(t) = c\tau(t) \tag{21}$$

où $\tau(t)$ est le retard de propagation à l'instant de réception t.
Dans le cas général, (21) n'admet pas de solution en τ sous forme analytique. Par contre une solution sous forme analytique existe dans le cas particulier des mouvements accélérés uniformes (MAU) :

$$\begin{cases} \mathbf{p}_R(t) = \mathbf{p}_R + \mathbf{v}_R t + \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}_R t^2 \\ \mathbf{v}_R(t) = \boldsymbol{\gamma}_R t + \mathbf{v}_R \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{p}_T(t) = \mathbf{p}_T + \mathbf{v}_T t + \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}_T t^2 \\ \mathbf{v}_T(t) = \boldsymbol{\gamma}_T t + \mathbf{v}_T \end{cases}.$$

pour lesquels l'equation (21) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\left\|\boldsymbol{\gamma}_T\right\|^2}{4}\tau(t)^4 + \left(\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{v}_T(t)\right)\tau(t)^3 + \left(\left\|\mathbf{v}_T(t)\right\|^2 - \boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{p}_{TR}(t) - c^2\right)\tau(t)^2 \\ +2\left(\mathbf{v}_T(t) \cdot \mathbf{p}_{TR}(t)\right)\tau(t) + \left\|\mathbf{p}_{TR}(t)\right\|^2 = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

avec $\mathbf{p}_{TR}(t) = \mathbf{p}_R(t) - \mathbf{p}_T(t)$. La solution de l'équation du 4ème degré (22) est donnée par la méthode de Ferrari.
La forme de la solution se simplifie notablement pour les mouvements à accélération nulle, c'est à dire les mouvements rectilignes uniformes (MRU), pour lesquels (22) devient :

$$-\left(c^2 - \left\|\mathbf{v}_T\right\|^2\right)\tau(t)^2 + 2\left(\mathbf{v}_T \cdot \mathbf{p}_{TR}(t)\right)\tau(t) + \left\|\mathbf{p}_{TR}(t)\right\|^2 = 0, \tag{23}$$

équation du 2nd ordre dont la solution est :

$$\tau(t) = \frac{-\mathbf{p}_{TR}(t) \cdot \mathbf{v}_T + \sqrt{\left(\mathbf{p}_{TR}(t) \cdot \mathbf{v}_T\right)^2 + \left\|\mathbf{p}_{TR}(t)\right\|^2\left(c^2 - \left\|\mathbf{v}_T\right\|^2\right)}}{\left(c^2 - \left\|\mathbf{v}_T\right\|^2\right)} \tag{24}$$

Si $\left\|\mathbf{v}_T\right\| \ll c$ alors :

$$\tau(t) \simeq \frac{\left\|\mathbf{p}_{TR}(t)\right\|}{c} + \frac{\mathbf{p}_{TR}(t)}{c} \cdot \frac{\mathbf{v}_T}{c}\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}_{TR}(t) \cdot \frac{\mathbf{v}_T}{c} - 1\right), \quad \mathbf{u}_{TR}(t) = \frac{\mathbf{p}_{TR}(t)}{\left\|\mathbf{p}_{TR}(t)\right\|}.$$

Or :

$$\left|\frac{\mathbf{p}_{TR}(t)}{c} \cdot \frac{\mathbf{v}_T}{c}\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}_{TR}(t) \cdot \frac{\mathbf{v}_T}{c} - 1\right)\right| \leq \frac{\left\|\mathbf{p}_{TR}(t)\right\|}{c}\frac{\left\|\mathbf{v}_T\right\|}{c}\left|\frac{1}{2}\mathbf{u}_{TR}(t) \cdot \frac{\mathbf{v}_T}{c} - 1\right| \ll \frac{\left\|\mathbf{p}_{TR}(t)\right\|}{c},$$

par conséquent, si $\left\|\mathbf{v}_T\right\| \ll c$:

$$\tau(t) \simeq \frac{\left\|\mathbf{p}_{TR}(t)\right\|}{c} \tag{25}$$

B. Modèle d'observation paramétrique pour les mouvements rectilignes uniformes radials (MRUR) et radar MIMO quasi-monostatique

Un radar MIMO quasi-monostatique est un radar pour lequel :
• les réseaux d'émission (I émetteurs) et de réception (N récepteurs) vérifient tous deux l'approximation réseau bande étroite (cf. paragraphe III-E1),
• relativement à un centre de phase commun O (que nous choisissons comme origine du repère géométrique).
Sous cette hypothèse, le modèle d'observation pratique pour un radar actif MIMO (20) devient :

$$x_n(m,t) = \sum_{i=1}^{I} a_n^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right) e_O^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right) \frac{\lambda_c^i}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sigma_n^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right)}{\left\|\mathbf{p}_{D_m}(t)\right\|^2} \tag{26}$$

$$e_O^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right) = e^{-j2\pi f_c^i \tau_m(t)} \int_{-\frac{B_i}{2}}^{\frac{B_i}{2}} e_{T_i}(f)\, e^{-j2\pi f \tau_m(t)} e^{j2\pi f t} df$$

$$a_n^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right) = \left(\sqrt{G_{R_n}\left(f_c^i, \mathbf{u}_{R_n}(m,t)\right)} e^{j2\pi f_c^i \frac{\mathbf{u}_{D_m}(t)\cdot \mathbf{p}_{R_n}(t)}{c}}\right)\left(\sqrt{G_{T_i}\left(f_c^i, \mathbf{u}_{T_i}(m,t)\right)} e^{j2\pi f_c^i \frac{\mathbf{u}_{D_m}(t)\cdot \mathbf{p}_{T_i}(t)}{c}}\right)$$

où $\tau_m(t)$ est le retard de propagation introduit par le diffracteur ponctuel m à l'instant de réception t. Si la cinématique du diffracteur ponctuel m est un MRUR :

$$\mathbf{p}_{D_m}(t) = \mathbf{u}_{D_m}(r_m + v_m t)$$

où r_m et v_m représentent respectivement la distance radiale (à $t = 0$) et la vitesse radiale, alors (25) :

$$\tau_m(t) \simeq \frac{\left\|\mathbf{p}_{D_m}(t)\right\|}{c} + \frac{\left\|\mathbf{p}_{D_m}(t - \tau_m(t))\right\|}{c} \simeq 2\frac{\left\|\mathbf{p}_{D_m}(t)\right\|}{c} = \frac{2}{c}(r_m + v_m t).$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} e_O^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right) &= e^{-j2\pi f_c^i \tau_m(t)} \int_{-\frac{B_i}{2}}^{\frac{B_i}{2}} e_{T_i}(f)\, e^{-j2\pi f\left(\frac{2}{c} r_m + \frac{2}{c} v_m t\right)} df \\ &= e^{-j4\pi \frac{r_m + v_m t}{\lambda_c^i}} \int_{-\alpha_m \frac{B_i}{2}}^{\alpha_m \frac{B_i}{2}} \frac{e_{T_i}\left(\frac{f}{\alpha_m}\right) e^{-j2\pi \frac{f}{\alpha_m} \frac{2r_m}{c}}}{\alpha_m} e^{j2\pi f t} df \\ e_O^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right) &= e^{-j4\pi \frac{r_m + v_m t}{\lambda_c^i}} e_{T_i}\left(\alpha_m\left(t - \frac{2r_m}{c}\right)\right), \quad \alpha_m = 1 - \frac{2v_m}{c}. \end{aligned}$$

Finalement, le modèle d'observation paramétrique en sortie du filtre de Hilbert d'un radar MIMO quasi-monostatique, à réseaux d'émission et de réception bande étroite, en présence de M diffracteurs ponctuels D_m en champs lointains dont les cinématiques sont MRUR ($\mathbf{p}_{D_m}(t) = \mathbf{u}_{D_m}(r_m + v_m t)$) est donné par :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{x}(m,t) + \mathbf{n}(t) \tag{27a}$$

$$\mathbf{x}(m,t) = \sum_{i=1}^{I} \mathbf{a}^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right) e^{-j4\pi \frac{r_m + v_m t}{\lambda_c^i}} \frac{e_{T_i}\left(\alpha_m\left(t - \frac{2r_m}{c}\right)\right)}{\left(r_m + v_m t\right)^2} \frac{\lambda_c^i \sigma\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right)}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \tag{27b}$$

$$a_n^i\left(\varsigma_m, f_c^i, t\right) = \left(\sqrt{G_{R_n}\left(f_c^i, \mathbf{u}_{D_m}\right)} e^{j2\pi f_c^i \frac{\mathbf{u}_{D_m}\cdot \mathbf{p}_{R_n}(t)}{c}}\right)\left(\sqrt{G_{T_i}\left(f_c^i, \mathbf{u}_{D_m}\right)} e^{j2\pi f_c^i \frac{\mathbf{u}_{D_m}\cdot \mathbf{p}_{T_i}(t)}{c}}\right) \tag{27c}$$

$$\mathbf{R_n}(f),\ f \in \left[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}\right] \quad \rightleftharpoons \quad \mathbf{R_n}(\tau), \qquad \alpha_m = 1 - \frac{2v_m}{c} \tag{27d}$$

C. Modèle d'observation paramétrique pour les mouvements rectilignes uniformes radials (MRUR) et radar SIMO quasi-monostatique

Un radar SIMO quasi-monostatique est un radar pour lequel :
• le réseau de réception (N récepteurs) vérifie l'approximation réseau bande étroite (cf. paragraphe III-E1),
• le réseau d'émission est composé d'un seul émetteur ($I = 1$),
• le centre de phase O du réseau de réception coincide avec la position de l'unique émetteur (que nous choisissons comme origine du repère géométrique).
Dans ce cas, (27a-27d) se simplifie notablement pour devenir :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{a}(\varsigma_m, f_c, t)\, e^{-j4\pi \frac{r_m + v_m t}{\lambda_c^i}} \frac{e_T\left(\alpha_m\left(t - \frac{2r_m}{c}\right)\right)}{(r_m + v_m t)^2} \frac{\lambda_c \sigma(\varsigma_m, f_c, t)}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} + \mathbf{n}(t) \tag{28a}$$

$$a_n(\varsigma_m, f_c, t) = \left(\sqrt{G_{R_n}(f_c, \mathbf{u}_{D_m})} e^{j2\pi f_c \frac{\mathbf{u}_{D_m} \cdot \mathbf{p}_{R_n}(t)}{c}}\right) \sqrt{G_T(f_c, \mathbf{u}_{D_m})} \tag{28b}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n}}(f),\ f \in \left[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}\right] \rightleftharpoons \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\tau), \qquad \alpha_m = 1 - \frac{2v_m}{c} \tag{28c}$$

Les modèles d'observations paramétriques de radars actifs MIMO (27a-27d) ou SIMO (28a-28c) quasi-monostatiques, peuvent encore être simplifiés si nous faisons l'hypothèse que le coefficient de rétrodiffusion de chaque diffracteur ponctuel D_m est constant ($\sigma(\varsigma_m, f_c^i, t) = \sigma_m^i$) durant la durée d'observation. Cette hypothèse est plausible lorsque les durées des signaux en bande de base émis $e_{T_i}(t)$ sont suffisamment petites pour négliger les mouvement de rotation des M diffracteurs ponctuels autour de la direction géométrique portant leur MRUR.

Sous cette hypothèse, (28a-28c) est un cas particulier du modèle général d'observation paramétrique :

$$\mathbf{x}(t; \underline{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{s}(t; \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}) + \mathbf{n}(t; \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}), \quad \underline{\boldsymbol{\theta}}^T = \left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^T, \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^T\right), \quad \mathbf{s}(t; \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}) = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{b}(t; \boldsymbol{\varepsilon}_m)\, \sigma_m = \mathbf{B}(t; \boldsymbol{\Xi})\, \boldsymbol{\sigma} \tag{29}$$
$$\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^T = \left(\boldsymbol{\sigma}^T, \boldsymbol{\sigma}^H, \boldsymbol{\Xi}^T\right), \quad \boldsymbol{\Xi}^T = \left(\boldsymbol{\varepsilon}_1^T, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_M^T\right), \quad \boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_1, \ldots, \sigma_M)$$

où :
• $\mathbf{s}(t; \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}})$ est le signal radar d'intérêt formé par la contribution des échos rétrodiffusés par les M points brillants,
• $\mathbf{b}(t; \boldsymbol{\varepsilon})$ est le modèle de propagation (fonction de transfert spatio-temporelle) de durée finie T dépendant de P paramètres réels $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_P)^T$,
• σ est l'amplitude complexe supposée constante durant la durée T,
• $\mathbf{n}(t; \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})$ est un bruit additif qui englobe toutes les nuisances possibles (bruit thermique, interférence,...) et qui dépend du vecteur de paramètres $\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}$.

Le modèle d'observation (28a-28c) correspond à :

$$P = 4, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (r, v, \theta, \phi), \quad \mathbf{b}(t; \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{a}(\boldsymbol{\varepsilon}, f_c, t)\, e^{-j4\pi \frac{r + vt}{\lambda_c^i}} \frac{e_T\left(\alpha\left(t - \frac{2r}{c}\right)\right)}{(r + vt)^2} \frac{\lambda_c}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}, \quad \alpha = 1 - \frac{2v}{c}$$

où (θ, ϕ) désigne un couple de deux angles directs paramétrant la direction supportant le MRUR ($\mathbf{u}_D(\theta, \phi)$).

Pour résumer, le compromis simplicité mathématique du modèle d'observation (27a-27d) / généralité de l'architecture radar considérée, est celui du radar SIMO/MIMO quasi-monostatique dont les réseaux d'émission et de réception sont bande étroites, dotés d'électroniques linéaires, éclairant des diffracteurs ponctuels en MRUR.
Dans ce contexte, les cibles ponctuelles ont pour paramètres inconnus les paramètres cinématiques réels (r, v, θ, ϕ) et le coefficient de rétrodiffusion complexe σ.

Ce compromis permet une modélisation suffisamment précise des formes d'onde reçues pour permettre une évaluation réaliste des performances en estimation du couple de paramètres (distance, vitesse) radiales d'une cible, couple de paramètres estimés par la quasi totalité des radars (à contrario de la direction radiale qui généralement n'est pas réellement estimée, mais fournie par la direction principale de rayonnement de l'antenne de réception préformée analogiquement ou numériquement).
Il soulève le problème de l'estimation de paramètres mixtes (complexes et réels) et le calcul de la BCR associée, calcul déjà abordé dans la littérature courante [62][68] mais que nous éclairons (dans le chapitre suivant) sous l'angle de la minimisation d'une norme sous contraintes linéaires [38], généralisant les résultats introduits dans [11, II.B] pour des paramètres réels.

V. Borne de Cramèr-Rao pour paramètres déterministes mixtes (réels / complexes)

A. Introduction

Les bornes minimales d'estimation permettent de calculer la meilleur performance au sens de l'erreur quadratique moyenne (EQM) qu'un estimateur sans biais peut espérer atteindre pour un modèle d'observation donné. Nous distinguons deux catégories de bornes minimales : une catégorie concerne le cas où les paramètres à estimer sont supposés déterministes, et une autre concerne le cas où les paramètres sont supposés aléatoires munis d'une densité de probabilité *a priori.* Nous nous intéressons dans notre étude au premier cas. Parmi ces bornes déterministes de l'EQM, c'est la Borne de Cramér-Rao [13][20][44] qui a été dérivée la première. Depuis, elle a été la borne minimale la plus utilisée en raison non seulement de sa simplicité de calcul, mais aussi parce qu'elle fournit des expressions analytiques exploitables. De plus, dans un grand nombre de problèmes d'estimation (notament pour des observations gaussiennes), l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) atteint la BCR asymptotiquement [63][18] (à RSB élevé [46] et/ou grand nombre d'observations [13]). Le fait que la BCR est dérivée sous la condition sans biais la moins exigente, i.e. locale (au voisinage d'une valeur choisie du paramètre), lui confère la propriété d'être la plus petite borne minimale de l'EQM d'un estimateur sans biais [2][8][36]. Cette caractérisation des estimateurs sans biais a été généralisée par le travail de Barankin [2] qui a établi la forme générale de la plus grande borne inférieure d'un moment absolu d'ordre quelconque d'un estimateur sans biais, dont l'EQM est un cas particulier (moment d'ordre deux). Le travail de Barankin permet de dériver la borne la plus grande (borne de Barankin : BB) basée sur l'exigence la plus forte caractérisant un estimateur sans biais, i.e. sans biais sur l'intervalle de définition des paramètres. Malheureusement, la borne de Barankin est la solution d'une équation intégrale [10][19][61] qui est généralement incalculable. Depuis, plusieurs travaux détaillés dans [10][61] ont été consacrés à la dérivation d'approximations calculables de la Borne de Barankin. Ces travaux ont montré que l'ensemble des bornes inférieures de l'EQM locale pour estimateurs sans biais pouvait être divisé en deux classes : la classe des bornes pour "Erreur Faible" (Small Error bounds) et la classe des bornes pour "Erreur Forte" (Large-Error bounds) dont les représentant caractéristiques sont respectivement la BCR et la BB.

Les travaux de [48] ont montré qu'on peut distinguer trois régions de fonctionnement de l'Erreur Quadratique Moyenne de l'EMV:

- La zone de non-information est la zone où le RSB et/ou le nombre d'observation est très faible. L'observation se réduisant au bruit ne fournit plus d'information sur les paramètres du signal utile. L'EQM tend alors vers une valeur asymptotique ne dépendant que du bruit.
- La zone de décrochement est la région où l'EQM s'accroit rapidement quand le RSB et/ou le nombre d'observations décroit. La nature de ce phénomène est dûe généralement à l'exploration des lobes secondaires par l'EMV [36][48].
- La troisième zone est la zone asymptotique où le RSB et/ou le nombre d'observations est élevé. L'EQM de l'EMV atteint généralement la BCR.

Bien que la BCR ne prévoit pas le seuil de décrochement et qu'elle soit excessivement optimiste dans la zone de non-information, elle reste un outil pratique pour l'analyse et la conception des systèmes d'estimation dans la zone asymptotique. En ce sens que si les performances obtenues dans cette zone ne sont pas conformes à celles requises, alors c'est une indication qu'il faut revoir la conception du système.

La plupart des problèmes faisant appel à la BCR a été initialement formulé pour des paramètres réels [28]. Toutefois, certaines applications telles que le radar sont confrontées au problème d'estimation de paramètres mixtes complexes et réels éventuellement sous contraintes. Par conséquent certains développements théorique sur la BCR ont été présentés dans des recherches antérieures, pour prendre en compte des

paramètres complexes [62]. Cependant, les démonstrations associées requièrent une manipulation matricielle plus au moins lourde et manquent de lisibilité. Dans ce chapitre nous allons montrer que l'utilisation de la différentiabilité complexe [7] introduit dans de nombreuses applications de traitement du signal, permet de généraliser aux paramètres mixtes complexes et réels la dérivation de la Borne de Cramer-Rao par la minimisation d'une norme sous contraintes linéaires présentée dans [11, II.B] pour des paramètres réels. Cette approche permet:

• d'éviter les transformations matricielles généralement utilisées quand il s'agit de paramètres complexes [27][68],

• de rectifier et de simplifier des résultats antérieurs [62],

• de clarifier quelques conditions de régularité qui sont inutilement restrictives [63][58][59][1][4].

B. Differentiabilité sur les corps des nombres réels et complexes

Étant donnée que l'ensemble des nombres complexes $(\mathbb{C})$ et l'ensemble des nombres réels $(\mathbb{R})$ sont deux corps (commutatif), la differentiabilité d'un vecteur des fonctions $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) : (\mathbb{k}')^P \to \mathbb{k}^Q$ où $\mathbb{k}' \equiv \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ et $\mathbb{k} \equiv \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ est caractérisée par la propriété suivante [17]:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta} + d\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} d\boldsymbol{\theta} + \mathbf{o}(d\boldsymbol{\theta}), \quad \mathbf{o}(d\boldsymbol{\theta}) = d\boldsymbol{\theta} \odot \boldsymbol{\varepsilon}(d\boldsymbol{\theta}), \quad \lim_{\|d\boldsymbol{\theta}\| \to 0} \|\boldsymbol{\varepsilon}(d\boldsymbol{\theta})\| = 0 \tag{30}$$

où $\| \ \|$ est la norme canonique Hermitienne (ou Euclidienne) sur $(\mathbb{k}')^P$ ou $\mathbb{k}^Q$: $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$. Puisque (30) reste vérifiée si $\boldsymbol{\theta}$ contient des composantes mixtes (complexe et réelles), toutes fonctions de $\boldsymbol{\theta} = \left(\mathrm{Re}\{\boldsymbol{\theta}_c\}^T, \mathrm{Im}\{\boldsymbol{\theta}_c\}^T, \boldsymbol{\theta}_r^T\right)^T \in \mathbb{R}^{2P_c+P_r}, \boldsymbol{\theta}_c \in \mathbb{C}^{P_c}, \boldsymbol{\theta}_r \in \mathbb{R}^{P_r}$, admet une forme duale :

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) : \mathbb{R}^{2P_c+P_r} \to \mathbb{k}^Q \\ \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) = \widetilde{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}), \quad \widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) \\ \frac{1}{2j}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) \\ \mathbf{x}_r \end{pmatrix}\right), \ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{x}_r \end{pmatrix} : \mathbb{C}^{P_c} \times \mathbb{C}^{P_c} \times \mathbb{R}^{P_r} \to \mathbb{k}^Q \end{cases}$$

où $\underline{\boldsymbol{\theta}} = \left(\boldsymbol{\theta}_c^T, (\boldsymbol{\theta}_c^*)^T, \boldsymbol{\theta}_r^T\right)^T \in \mathbb{C}^{2P_c} \times \mathbb{R}^{P_r}$. De plus, si $\mathbf{f}$ et $\widetilde{\mathbf{f}}$ sont différentiables (30), alors :

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} d\boldsymbol{\theta} = \left.\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_1^T} d\mathbf{z}_1 + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_2^T} d\mathbf{z}_2 + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{x}_r^T} d\mathbf{x}_r\right|_{\mathbf{z}=\underline{\boldsymbol{\theta}}}$$

ou sous une autre forme:

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} d\boldsymbol{\theta} = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial (\boldsymbol{\theta}_c)^T} d\boldsymbol{\theta}_c + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial (\boldsymbol{\theta}_c^*)^T} d\boldsymbol{\theta}_c^* + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta}_r^T} d\boldsymbol{\theta}_r, \quad d\boldsymbol{\theta}_c^* = (d\boldsymbol{\theta}_c)^*$$

à condition que les variables $\boldsymbol{\theta}_c$ et $\boldsymbol{\theta}_c^*$ soient considérées indépendantes pour la dérivation. L'utilisation de la notation (1) nous permet d'écrire l'identité ci-dessus sous la forme compacte suivante:

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} d\boldsymbol{\theta} = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T} d\underline{\boldsymbol{\theta}}, \quad d\boldsymbol{\theta}_c^* = (d\boldsymbol{\theta}_c)^*, \tag{31}$$

laquelle reste encore vérifiées si $P_r = 0$ ou $P_c = 0$. D'autres propriétés peuvent être dérivées de (31) telles que:

- si $\mathbf{f}(\ )$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que $\boldsymbol{\theta} = \left(\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{\theta}_c\right\}^T, \mathrm{Im}\left\{\boldsymbol{\theta}_c\right\}^T\right)^T$ $(P_r = 0)$ alors [7] :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mathrm{Re}\{\boldsymbol{\theta}_c\}^T} d\,\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{\theta}_c\right\} = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial (\boldsymbol{\theta}_c)^T} d\,\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{\theta}_c\right\} + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial (\boldsymbol{\theta}_c^*)^T} d\,\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{\theta}_c\right\} \\ \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mathrm{Im}\{\boldsymbol{\theta}_c\}^T} d\,\mathrm{Im}\left\{\boldsymbol{\theta}_c\right\} = j\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial (\boldsymbol{\theta}_c)^T} d\,\mathrm{Im}\left\{\boldsymbol{\theta}_c\right\} - j\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial (\boldsymbol{\theta}_c^*)^T} d\,\mathrm{Im}\left\{\boldsymbol{\theta}_c\right\} \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mathrm{Re}\{\boldsymbol{\theta}_c\}^T} = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial (\boldsymbol{\theta}_c)^T} + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial (\boldsymbol{\theta}_c^*)^T} \\ \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mathrm{Im}\{\boldsymbol{\theta}_c\}^T} = j\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial (\boldsymbol{\theta}_c)^T} - j\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial (\boldsymbol{\theta}_c^*)^T} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial (\boldsymbol{\theta}_c^*)^T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mathrm{Re}\{\boldsymbol{\theta}_c\}^T} + j\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mathrm{Im}\{\boldsymbol{\theta}_c\}^T}\right) \\ \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial (\boldsymbol{\theta}_c)^T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mathrm{Re}\{\boldsymbol{\theta}_c\}^T} - j\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mathrm{Im}\{\boldsymbol{\theta}_c\}^T}\right) \end{array}\right.$$

- et, par conséquent, que $\mathbf{f}(\ )$ soit à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$:

$$\left(\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial \left(\boldsymbol{\theta}_c\right)^T}\right)^* = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}^*\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial \left(\boldsymbol{\theta}_c^*\right)^T}, \quad \left(\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}^*\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial \left(\boldsymbol{\theta}_c\right)^T}\right)^* = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial \left(\boldsymbol{\theta}_c^*\right)^T}$$

Pour des raisons de lisibilité, nous utiliserons la notation $\mathbf{f}(\ )$ pour désigner $\widetilde{\mathbf{f}}(\ )$ quand la variable $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ est mixte (1).

C. Borne inférieure de l'EQM et minimisation de la matrice de Gram

Nous considérons les notations suivantes :
- $\mathbf{x}$ est le vecteur des observations aléatoires de dimension N,
- Ω est l'espace des observations,
- $L^2(\Omega)$ est l'espace d'Hilbert complexe des fonctions de carré sommable sur Ω,
- $p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ est la densité de probabilité de $\mathbf{x}$ paramétrée par le vecteur $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_P) \in \Theta$, où Θ est l'espace des paramètres.

Les conditions de régularité de $p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ sont :
- $\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \forall \mathbf{x} \in \Omega, p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) > 0$ presque partout dans Ω,
- $\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \forall \mathbf{x} \in \Omega, p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ est continue et différentiable par rapport à $\boldsymbol{\theta}$,
- $p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ n'intègre pas de densité de probabilité pour variables aléatoires discrètes.[1].

De plus, nous supposons que le vecteur des paramètres $\boldsymbol{\theta}$ contient $P_r \geq 0$ paramètres réels inconnus (retard, directions d'arrivée, ...) et $P_c \geq 0$ paramètres complexes inconnus (fonction de transfert spatiale, amplitudes complexes, ...) où $2P_c + P_r = P$. Dans ce cas, la densité de probabilité est de la forme:

$$p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_P)^T = \left(\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{\theta}_c^T\right\}, \mathrm{Im}\left\{\boldsymbol{\theta}_c^T\right\}, \boldsymbol{\theta}_r^T\right)^T \in \mathbb{R}^P, \quad \boldsymbol{\theta}_c \in \mathbb{C}^{P_c},\ \boldsymbol{\theta}_r \in \mathbb{R}^{P_r},\ 2P_c + P_r = P$$

D'après le paragraphe précédent, $p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ peut être aussi paramétrée sous sa forme duale :

$$p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} = \left(\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{\theta}_c^T\right\}, \mathrm{Im}\left\{\boldsymbol{\theta}_c^T\right\}, \boldsymbol{\theta}_r^T\right)^T \in \mathbb{R}^P \tag{32}$$

$$p(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}), \quad \underline{\boldsymbol{\theta}} = \left(\boldsymbol{\theta}_c^T, (\boldsymbol{\theta}_c^*)^T, \boldsymbol{\theta}_r^T\right)^T \in \mathbb{C}^{2P_c} \times \mathbb{R}^{P_r}, \quad 2P_c + P_r = P, \quad P_c \geq 0,\ P_r \geq 0 \tag{33}$$

Dans la suite nous ne considérons que la deuxième forme (33) puisque elle prend en compte la forme (32) quand $P_c = 0$.

Soit $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$ la vraie valeur du paramètre $\underline{\boldsymbol{\theta}}$, et $\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}(\mathbf{x})$ un estimateur de $\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)$ en $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$ avec $\mathbf{g}(\underline{\boldsymbol{\theta}}) = \left(g_1(\underline{\boldsymbol{\theta}}), \ldots, g_{Q_c}(\underline{\boldsymbol{\theta}}), g_{Q_c+1}(\underline{\boldsymbol{\theta}}), \ldots, g_Q(\underline{\boldsymbol{\theta}})\right)^T$ un vecteur de Q fonctions de $\underline{\boldsymbol{\theta}}$. Les Q_c premières fonctions sont des fonctions à valeurs complexes , et les dernières $Q_r = Q - Q_c$ fonctions sont à valeurs

[1]La BCR n'a pas été à l'origine dérivée pour traiter le cas des distributions discrètes et nous n'abordons pas cette question dans le présent document. Pour les distributions discrètes, voir [8].

réelles, où $Q_c \in [0, Q]$. On dit que $\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}(\mathbf{x})$ est un estimateur sans biais de $\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)$ à la valeur $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$ si [2][10]:

$$E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}(\mathbf{x})\right] = \mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) = \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}(\mathbf{x})\, p\left(\mathbf{x}; \underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) d\mathbf{x}, \tag{34}$$

ce qui implique que $\left(\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}(\mathbf{x})\right)^*$ est également un estimateur sans biais de $\mathbf{g}^*\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)$ en $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$:

$$E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left(\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}(\mathbf{x})\right)^*\right] = \mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)^* \quad \Leftrightarrow \quad E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x})\right] = \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right). \tag{35}$$

Sachant que la propriété sans biais reste vérifiée par une transformation linéaire ([2][10]), alors :

$$\begin{aligned}
\forall \boldsymbol{\delta} &\in \mathbb{C}^{2Q_c+Q_r},\ E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\boldsymbol{\delta}^T \underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x})\right] = \boldsymbol{\delta}^T \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) \qquad (36)\\
\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) &= \left(g_1\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right), \ldots, g_{Q_c}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right), g_1^*\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right), \ldots, g_{Q_c}^*\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right), g_{Q_c+1}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right), \ldots, g_Q\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right)^T\\
\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x}) &= \left(\widehat{g_1\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}(\mathbf{x}), \ldots, \widehat{g_{Q_c}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}(\mathbf{x}), \left(\widehat{g_1\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}(\mathbf{x})\right)^*, \ldots, \left(\widehat{g_{Q_c}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}(\mathbf{x})\right)^*,\right.\\
&\qquad \left.\widehat{g_{Q_c+1}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}(\mathbf{x}), \ldots, \widehat{g_Q\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}(\mathbf{x})\right)^T
\end{aligned}$$

Pour avoir une caractérisation exhaustive de toutes les composantes réelles et imaginaires de l'estimateur $\widehat{\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\theta}^0\right)}(\mathbf{x})$ qui contient à la fois des fonctions à valeurs réelles et d'autres à valeurs complexes, la construction d'un estimateur sous la forme de $\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x})$ est nécessaire car:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}^T \operatorname{Re}\left\{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}(\mathbf{x})\right\} &= \boldsymbol{\delta}^T \underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\delta} = \left(\tfrac{\lambda_1}{2}, \ldots, \tfrac{\lambda_{Q_c}}{2}, \tfrac{\lambda_1}{2}, \ldots, \tfrac{\lambda_{Q_c}}{2}, \lambda_{Q_c+1}, \ldots, \lambda_Q\right)^T\\
\boldsymbol{\mu}^T \operatorname{Im}\left\{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}(\mathbf{x})\right\} &= \boldsymbol{\delta}^T \underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\delta} = \left(\tfrac{\mu_1}{2j}, \ldots, \tfrac{\mu_{Q_c}}{2j}, \tfrac{-\mu_1}{2j}, \ldots, \tfrac{-\mu_{Q_c}}{2j}, \mu_{Q_c+1}, \ldots, \mu_Q\right)^T
\end{aligned}$$

contrairement à l'approche présentée dans [62], où la caractérisation de $\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}(\mathbf{x})$ est partielle du fait qu'elle ne permet pas d'extraire les composantes réelles et imaginaire séparément. Par conséquent, les performances statistiques de tous estimateur de $\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)$, sans biais en $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$, est complètement caractérisé (au sens de l'EQM) par :

$$EQM_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\boldsymbol{\delta}^T \underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x})\right] = \int_{\Omega} \left|\boldsymbol{\delta}^T\left(\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right)\right|^2 p\left(\mathbf{x}; \underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) d\mathbf{x}, \tag{37}$$

ce qui peut être interprété comme une norme dérivée d'un produit Hermitien $\langle\ |\ \rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ dépendant de $p\left(\mathbf{x}; \underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)$:

$$\begin{aligned}
EQM_{\boldsymbol{\theta}^0}\left[\boldsymbol{\delta}^T \underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x})\right] &= \left\|\boldsymbol{\delta}^T\left(\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right)\right\|_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^2\\
\langle g(\mathbf{x}) \mid h(\mathbf{x})\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} &= E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[g(\mathbf{x})\, h^*(\mathbf{x})\right] = \int_{\Omega} g(\mathbf{x})\, h^*(\mathbf{x})\, p\left(\mathbf{x}; \underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) d\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{38}$$

Finalement, (37) peut s'exprimer par (4) :

$$\forall \boldsymbol{\delta} \in \mathbb{C}^{2Q_c+Q_r},\ EQM_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\boldsymbol{\delta}^T \underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x})\right] = \boldsymbol{\delta}^H \mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}\right)\boldsymbol{\delta} \tag{39}$$

où :

$$\{\mathbf{h}(\mathbf{x})\} = \{h_1(\mathbf{x}), \ldots, h_Q(\mathbf{x})\} \tag{40}$$

est une famille de vecteurs et (3) :

$$\left(\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\{\mathbf{u}(\mathbf{x})\}_{[1,Q]}, \{\mathbf{c}(\mathbf{x})\}_{[1,P]}\right)\right)_{p,q} = \langle \mathbf{u}_q(\mathbf{x}) \mid \mathbf{c}_p(\mathbf{x})\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} = E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\mathbf{u}_q(\mathbf{x})\, \mathbf{c}_p^*(\mathbf{x})\right]. \tag{41}$$

L'expression (39) montre clairement que les performances statistiques de toutes combinaison linéaire des composantes de $\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}(\mathbf{x})$ sont complètement caractérisées par la connaissance de $\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x})-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}\right)$.
D'où l'intérêt de trouver une matrice $\mathbf{B}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ indépendante de $\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}(\mathbf{x})$ et capable de borner l'EQM (39) (au sens de la relation d'ordre définie par Löwner [26, §7.7]) :

$$EQM_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\boldsymbol{\delta}^T\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x})\right]\geq\boldsymbol{\delta}^H\mathbf{B}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\boldsymbol{\delta}\quad\Leftrightarrow\quad\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x})-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}\right)\geq\mathbf{B}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$$

Lors de la recherche d'une borne inférieure de l'EQM, la propriété (38) nous permet d'utiliser deux résultats fondamentaux :
• la généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwartz aux matrices de Gram (généralement connue sous le nom d'inégalité de covariance [3][1]).
• la minimisation d'une norme sous contraintes [2][10][19][23] comme énoncée dans le Lemme 1 [9].

Lemme 1

Soit $\mathbb{U}$ un espace vectoriel hermitien de dimension quelconque (finie ou infinie) sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. Soit $\{\mathbf{c}\}_{[1,K]}$ une famille de K vecteurs de $\mathbb{U}$ telle que $\mathbf{G}\left(\{\mathbf{c}\}_{[1,K]}\right)=\mathbf{MDM}^H$, $\mathbf{M}\in\mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left(K,\widetilde{K}\right)$, $\mathbf{M}^H\mathbf{M}=\mathbf{I}_{\widetilde{K}}$, $\mathbf{D}=\mathbf{Diag}\left(d_1,\ldots,d_{\widetilde{K}}\right)$, $d_1\geq\ldots\geq d_{\widetilde{K}}>0$, $\widetilde{K}\leq K$. Soit $\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}$ une famille de Q vecteurs inconnus de $\mathbb{U}$. Alors la solution de:

$$\min\left\{\mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}\right)\right\}\ \textit{sous}\ \mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]},\{\mathbf{c}\}_{[1,K]}\right)=\mathbf{V}\in\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(K,Q)$$

est:

$$\min\left\{\mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}\right)\right\}=\left(\mathbf{M}^H\mathbf{V}\right)^H\mathbf{D}^{-1}\left(\mathbf{M}^H\mathbf{V}\right),\quad\mathbf{u}_q=\sum_{k=1}^{K}(\mathbf{A})_{k,q}\,\mathbf{c}_k,\ \mathbf{A}=\mathbf{MD}^{-1}\mathbf{M}^H\mathbf{V}\tag{42}$$

si et seulement si $\mathbf{V}$ vérifie $\left(\mathbf{MM}^H\right)\mathbf{V}=\mathbf{V}$, i.e. si et seulement si $\mathbf{V}\in\mathrm{Im}\left\{\mathbf{G}\left(\{\mathbf{c}\}_{[1,K]}\right)\right\}$.
Si $\mathbf{G}\left(\{\mathbf{c}\}_{[1,K]}\right)$ est une matrice de rang plein, alors (42) se réduit à:

$$\min_{\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}}\left\{\mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}\right)\right\}=\mathbf{V}^H\mathbf{G}\left(\{\mathbf{c}\}_{[1,K]}\right)^{-1}\mathbf{V}$$

Nous utiliserons le Lemme 1 en prenant $\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}=\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x})-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}$, car il permet une meilleure compréhension des hypoyhèses associées aux différentes bornes de l'EQM [10][19][23].
Pour des raisons de lisibilité, nous écrivons $\min\left\{\mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}\right)\right\}$ pour désigner $\min\limits_{\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}}\left\{\mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}\right)\right\}$.
La solution triviale du problème de minimisation de $\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x})-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}\right)$ sous les contraintes (34) ou (36), est donnée par :

$$\mathbf{B}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}=\mathbf{0},\quad\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x})=\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)$$

ce qui conduit à la fois à une borne nulle ($\mathbf{0}$) et une solution inacceptable parce que non seulement elle requiert une connaissance *a priori* de la vraie valeur recherchée $\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)$ du paramètre $(\underline{\boldsymbol{\theta}})$ mais aussi

parce qu'elle est indépendante des observations. Pour éviter la solution triviale, il suffit d'imposer des contraintes que la solution triviale $\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)$ ne peut pas vérifier. Dans [2] Barankin propose la contrainte :

$$E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)\right] = \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right), \forall \underline{\boldsymbol{\theta}} \in \Theta \tag{43}$$

qui est une contrainte sans biais uniforme (vérifiée pour toutes les valeurs possible de $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$). L'obtention d'une solution analytique de la minimisation de $\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right) - \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}\right)$ sous (43) est dans la plupart des cas impossible [2][10]. Cependant, si $\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$ est différentiable en $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$, il est possible de trouver une solution analytique du problème de minimisation mais sous une contrainte moins restrictive, en relâchant le critère de qualité sans biais uniforme (43) à un critère localement sans biais :

$$E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0+d\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)\right] = \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0 + d\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) + \mathbf{o}\left(d\underline{\boldsymbol{\theta}}\right). \tag{44}$$

Si $\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$ est différentiable en $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$, le développement de Taylor au voisinage de $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$ des deux termes de l'égalité (44) s'écrit :

$$E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)\right] + \left(\int_{\Omega} \underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right) \frac{\partial p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T} d\mathbf{x}\right) d\underline{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{o}\left(d\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) + \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T} d\underline{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{o}\left(d\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

et l'unicité du développement de Taylor conduit à la contrainte suivante:

$$\int_{\Omega} \underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right) \frac{\partial p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T} d\mathbf{x} = \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T} \quad \Leftrightarrow \quad E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right) \frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right] = \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}$$

laquelle est équivalente à:

$$E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left(\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right) - \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right) \frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right] = \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T} \tag{45}$$

puisque :

$$E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right] = \int_{\Omega} \frac{\partial p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T} d\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{46}$$

Par conséquent, le problème de la recherche d'une borne minimale de l'EQM d'un estimateur localement sans biais revient à un problème de minimisation d'une matrice de Gram $\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right) - \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}\right)$ sous deux contraintes sans biais, l'une d'ordre 0 (35) et l'autre d'ordre 1 (45) :

$$\min\left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\mathbf{u}\right\}_{[1,Q]}\right)\right\} \text{ sous (35) et (45)}$$
$$\Updownarrow$$
$$\min\left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\mathbf{u}\right\}_{[1,Q]}\right)\right\} \text{ sous } \mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\mathbf{u}\right\}_{[1,Q]}, \left\{\mathbf{c}\right\}_{[1,P+1]}\right) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right)^T \\ \mathbf{0}^T \end{pmatrix} \tag{47}$$
$$\left\{\mathbf{u}\right\}_{[1,Q]} = \left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right) - \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}, \quad \left\{\mathbf{c}\right\}_{[1,P+1]} = \left\{\left\{\left(\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^*\right\}, 1\left(\mathbf{x}\right)\right\}$$

L'obtention de la solution de (47) et des principaux résultats théoriques de ce chapitre est facilitée par la connaissance des deux lemmes complémentaires suivants [9] :

Lemme 2

Soit $\mathbb{U}$ un espace vectoriel hermitien de dimension quelconque (finie ou infinie) sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. Soit $\{\mathbf{c}\}_{[1,K+1]}$ une famille de $K+1$ vecteurs indépendants de $\mathbb{U}$ et soit $\mathbf{V}$ une matrice de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(K,Q)$. Alors, le problème de minimisation de $\mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}\right)$, où $\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}$ est une famille de Q vecteurs inconnus de $\mathbb{U}$, vérifie l'équivalence suivante:

$$\begin{array}{c} \min\left\{\mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}\right)\right\} \text{ sous } \left\{\begin{array}{l} \mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]},\{\mathbf{c}\}_{[1,K+1]}\right)=\left[\begin{array}{c}\mathbf{V}\\ \mathbf{0}^T\end{array}\right] \\ \mathbf{G}\left(\{\mathbf{c}\}_{[1,K]},\mathbf{c}_{K+1}\right)=\mathbf{0}^T \end{array}\right. \\ \Updownarrow \\ \min\left\{\mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}\right)\right\} \text{ sous } \mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]},\{\mathbf{c}\}_{[1,K]}\right)=\mathbf{V} \end{array} \tag{48}$$

Lemme 3

Soit $\mathbb{U}$ un espace vectoriel hermitien de dimension quelconque (finie ou infinie) sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. Soit $\{\mathbf{c}\}_{[1,K]}$ une famille de K vecteurs indépendants de $\mathbb{U}$ et soit $\mathbf{V}$ une matrice de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(K,Q)$. Alors, le problème de minimisation de $\mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}\right)$, où $\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}$ est une famille de Q vecteurs inconnus de $\mathbb{U}$, vérifie l'équivalence suivante:

$$\begin{array}{c} \min\left\{\mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}\right)\right\} \text{ sous } \mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]},\{\mathbf{c}\}_{[1,K]}\right)=\mathbf{V}\in\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(K,Q) \\ \Updownarrow \\ \min\left\{\mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}\right)\right\} \text{ sous } \left\{\begin{array}{l} \mathbf{T}^H\mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]},\{\mathbf{c}\}_{[1,K]}\right)=\mathbf{T}^H\mathbf{V}\in\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(K,Q) \\ \mathbf{T}\in\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(K,K), \quad |\mathbf{T}|\neq 0 \end{array}\right. \\ \Updownarrow \\ \min\left\{\mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}\right)\right\} \text{ sous } \left\{\begin{array}{l} \mathbf{G}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]},\{\mathbf{c}'\}_{[1,K]}\right)=\mathbf{T}^H\mathbf{V}\in\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(K,Q) \\ \mathbf{c}'_k=\sum\limits_{l=1}^{K}T_{kl}\mathbf{c}_l, \quad \mathbf{T}\in\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(K,K), \quad |\mathbf{T}|\neq 0 \end{array}\right. \end{array}, \tag{49}$$

i.e. le problème de minimisation est invariant par une transformation bijective des K contraintes linéaires.

La solution de (47) peut être obtenue directement en utilisant le Lemme 1 [9]. Cependant, l'utilisation du Lemme 2 permet de réduire le nombre de contraintes et de simplidier l'expression analytique du minimum associé. En effet, (47) est équivalente à (Lemme 2):

$$\begin{array}{c} \min\left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}\right)\right\} \text{ sous } \mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]},\{\mathbf{c}\}_{[1,P]}\right)=\left(\dfrac{\partial\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right)^T \\ \{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}=\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x})-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}, \quad \{\mathbf{c}\}_{[1,P]}=\left\{\left(\dfrac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^*\right\} \end{array} \tag{50}$$

ce qui conduit à la solution suivante (Lemme 1):

$$\min\left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}\right)\right\}=\left(\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)^T}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^H\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^{-1}\left(\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)^T}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right) \tag{51}$$

$$\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}=\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\left(\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^*\right\}\right)=E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^H\right]$$

$$\left(\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right)_{\text{eff}}^T=\left(\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^H\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^{-1}\left(\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}^T\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right) \tag{52}$$

à condition que $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}=\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\left(\frac{\partial p(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^*\right\}\right)$, Matrice d'Information de Fisher, soit inversible. Nous soulignons ici que (51) est une généralisation de la dérivation de la BCR donnée en [62, (11)(13)], cette dernière ne permettant pas d'avoir une caractérisation exhaustive des parties réelles et imaginaires de toutes les composantes du vecteur $\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}\left(\mathbf{x}\right)$.

D. Conditions de régularité

Certains résultats sur la dérivation de la BCR deviennent plus simples et plus généraux en utilisant l'approche ci-dessus, d'autant plus que dans la plupart des cas de la littérature, ils n'ont été obtenus que pour des paramètres réels. Parmi ces résultats, citons le relachement des conditions de régularité :

1) Conditions de régularité nécessaires:

L'approche actuelle permet de rappeler qu'il est inutile d'exiger une condition de régularité permettant la permutation de l'intégration et de la différenciation [2][8][21], contrairement à ce qui est revendiqué par la plupart des auteurs dans le domaine [63][58][59][1][4]. En effet la seule exigence est :

$$\forall p\in[1,P]\,,\;E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left|\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\theta_p}\right|^2\right]=\int_\Omega\left|\frac{\partial p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\theta_p}\right|^2\frac{1}{p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}d\mathbf{x}<\infty\;\Leftrightarrow\;\frac{1}{\sqrt{p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}}\frac{\partial p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\theta_p}\in L^2\left(\Omega\right)$$

2) Conditions de régularité suffisantes:

Pour des raisons de simplicité, nous considérons dans cette partie que le vecteur $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ ne contient que des paramètres réels: $\underline{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^P$.
Il est assez simple de réaliser avec l'approche proposée, que la condition de régularité habituelle sur la différentiabilité des deux fonctions $p\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}\right)$ et $\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ à $\boldsymbol{\theta}^0$ peut être assouplie à une semi-différentiabilité (différentiabilité à gauche et à droite) sous certaines conditions. Notons par $\frac{\partial f\left(\boldsymbol{\theta}^+\right)}{\partial\boldsymbol{\theta}}$ et $\frac{\partial f\left(\boldsymbol{\theta}^-\right)}{\partial\boldsymbol{\theta}}$ les vecteurs de dérivées à droite et à gauche. La contrainte du premier ordre donnée par (45) dérivée sous l'hypothèse de la différentiabilité, peut aussi être écrite pour la différentiabilité à gauche et à droite:

$$E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left(\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\theta}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\boldsymbol{\theta}^0\right)\right)\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}^{0-}\right)}{\partial\boldsymbol{\theta}^T}\right]=\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}\left(\boldsymbol{\theta}^{0-}\right)}{\partial\boldsymbol{\theta}^T}$$
$$E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left(\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\theta}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\boldsymbol{\theta}^0\right)\right)\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}^{0+}\right)}{\partial\boldsymbol{\theta}^T}\right]=\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}\left(\boldsymbol{\theta}^{0+}\right)}{\partial\boldsymbol{\theta}^T}$$

soit encore, sous la forme d'un ensemble de contraintes:

$$\begin{gathered}\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\mathbf{u}\right\}_{[1,Q]},\left\{\mathbf{c}\right\}_{[1,2P]}\right)=\left[\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}\left(\boldsymbol{\theta}^{0-}\right)}{\partial\boldsymbol{\theta}^T},\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}\left(\boldsymbol{\theta}^{0+}\right)}{\partial\boldsymbol{\theta}^T}\right]^T\\ \left\{\mathbf{u}\right\}_{[1,Q]}=\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\theta}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\boldsymbol{\theta}^0\right)\right\},\quad\left\{\mathbf{c}\right\}_{[1,2P]}=\left\{\left(\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}^{0-}\right)}{\partial\boldsymbol{\theta}^T}\right)^*,\left(\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}^{0+}\right)}{\partial\boldsymbol{\theta}^T}\right)^*\right\}\end{gathered} \tag{53}$$

La recherche de la minimisation de $\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}\right)$ sous (53) suit toujours le même schéma où l'ensemble des vecteurs $\{\mathbf{c}\}_{[1,2P]}$ doit être réduit à un sous-ensemble de vecteurs indépendants, en procédant selon la démarche suivante :
1) Pour tous paramètres θ_p où les deux fonctions $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ et $p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ sont différentiables en $\boldsymbol{\theta}^0$, l'ensemble des deux contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left(\widehat{\underline{\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\theta}^0\right)}}(\mathbf{x})-\underline{\mathbf{g}}\left(\boldsymbol{\theta}^0\right)\right)\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}^{0-}\right)}{\partial\theta_p}\right] &= \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\boldsymbol{\theta}^{0-}\right)}{\partial\theta_p} \\ E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left(\widehat{\underline{\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\theta}^0\right)}}(\mathbf{x})-\underline{\mathbf{g}}\left(\boldsymbol{\theta}^0\right)\right)\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}^{0+}\right)}{\partial\theta_p}\right] &= \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\boldsymbol{\theta}^{0+}\right)}{\partial\theta_p} \end{aligned} \tag{54}$$

doit être remplacé par la contrainte équivalente réduite:

$$E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left(\widehat{\underline{\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\theta}^0\right)}}(\mathbf{x})-\underline{\mathbf{g}}\left(\boldsymbol{\theta}^0\right)\right)\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}^0\right)}{\partial\theta_p}\right] = \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\boldsymbol{\theta}^0\right)}{\partial\theta_p}$$

2) Pour tous paramètres θ_p où $p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ ou $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ sont non différentiables en $\boldsymbol{\theta}^0$, trois cas possibles sont à distinguer :

premier cas : $\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}^{0-}\right)}{\partial\theta_p}$ et $\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}^{0+}\right)}{\partial\theta_p}$ sont des vecteurs indépendants et les deux contraintes associées (54) doivent être conservées.

deuxième cas : $\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}^{0-}\right)}{\partial\theta_p} = \alpha\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}^{0+}\right)}{\partial\theta_p}$ (vecteurs liés, éventuellement égaux) et $\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\boldsymbol{\theta}^{0-}\right)}{\partial\theta_p} = \alpha\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\boldsymbol{\theta}^{0+}\right)}{\partial\theta_p}$, alors l'équation (54) se réduit à une seule équation, et par convention nous prenons celle de la diférentiabilité à gauche.

troisième cas : $\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}^{0-}\right)}{\partial\theta_p} = \alpha\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}^{0+}\right)}{\partial\theta_p}$ (vecteurs liés, éventuellement égaux) et $\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\boldsymbol{\theta}^{0-}\right)}{\partial\theta_p} \neq \alpha\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\boldsymbol{\theta}^{0+}\right)}{\partial\theta_p}$, alors les équations dans (54) sont incompatibles et l'estimateur localement sans biais en $\boldsymbol{\theta}^0$ n'existe pas pour $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$.

3) Enfin, il faut vérifier que l'ensemble des $\widetilde{P}$ vecteurs $\{\mathbf{c}\}_{[1,\widetilde{P}]}$ résultant de l'analyse effectuée à l'étape 1) et 2) conduit à une MIF $\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\{\mathbf{c}\}_{[1,\widetilde{P}]}\right)$ non singulière.

Pour illustrer les différents cas possibles, nous donnerons l'exemple suivant où:

$$p(x;\theta) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x-|\theta|)^2}}{\sqrt{2\pi}} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln p(x;\theta) = -\frac{1}{2}(x-\theta)^2 - \frac{1}{2}\ln(2\pi), \theta \geq 0 \\ \ln p(x;\theta) = -\frac{1}{2}(x+\theta)^2 - \frac{1}{2}\ln(2\pi), \theta \leq 0 \end{cases}, \quad g(\theta) = |\theta|$$

Remarquons que ni la fonction $\ln p(x;\theta)$ ni la fonction $g(\theta)$ ne sont différentiables par rapport à $\theta^0 = 0$. Par conséquent, d'après les ouvrages de référence dans le domaine, la BCR de $|\theta|$ n'existe pas en $\theta^0 = 0$. En fait, comme:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};0^+\right)}{\partial\theta} = 2x \\ \frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};0^-\right)}{\partial\theta} = -2x \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \frac{\partial g\left(0^+\right)}{\partial\theta} = 1 \\ \frac{\partial g\left(0^-\right)}{\partial\theta} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};0^+\right)}{\partial\theta} = -\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};0^-\right)}{\partial\theta} \\ \frac{\partial g\left(0^+\right)}{\partial\theta} = -\frac{\partial g\left(0^-\right)}{\partial\theta} \end{cases},$$

la BCR existe en $\theta^0 = 0$ et elle est égale à :

$$BCR_0 = \left(\frac{\partial g(0^-)}{\partial\theta}\right) E_0\left[\left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};0-)}{\partial\theta}\right)^2\right]^{-1}\left(\frac{\partial g(0^-)}{\partial\theta}\right) = \frac{1}{4E_0\left[x^2\right]} = \frac{1}{4}$$

Par contre la BCR n'existe pas pour $g(\theta) = \theta$ à $\theta^0 = 0$.
Ce relachement sur la différentiabilité peut être étendu à des paramètres complexes, où pour chaque paramètre complexe θ_p, la semi-différentiabilité peut être définie sur un voisinage complexe de θ_p^0. La même analyse que celle faite pour les paramètres réels, s'applique, sauf que pour chaque paramètre complexe θ_p, l'analyse d'un système de 2 équations (54) doit être remplacée par l'analyse d'un système à L équations, où L est le nombre de semi-différentielles différentes au voisinage de θ_p^0.

VI. Borne de Cramèr-Rao pour radar actif : résultats préliminaires et problèmes associés

A. Borne de Cramèr-Rao pour un modèle déterministe à 1 observation

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer la formule générale de la BCR (51) au modèle d'observation radar développé au paragraphe IV-C dont une forme synthétique équivalente est :

$$\mathbf{x}\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)=\mathbf{s}\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)+\mathbf{n}\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right),\quad \underline{\boldsymbol{\theta}}^{T}=\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^{T},\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^{T}\right),\quad \mathbf{s}\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)=\sum_{m=1}^{M}\mathbf{b}\left(t;\boldsymbol{\varepsilon}_{m}\right)\sigma_{m}=\mathbf{B}\left(t;\boldsymbol{\Xi}\right)\boldsymbol{\sigma} \tag{55}$$
$$\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^{T}=\left(\boldsymbol{\sigma}^{T},\boldsymbol{\sigma}^{H},\boldsymbol{\Xi}^{T}\right),\quad \boldsymbol{\Xi}^{T}=\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{1}^{T},\ldots,\boldsymbol{\varepsilon}_{M}^{T}\right),\quad \boldsymbol{\sigma}=\left(\sigma_{1},\ldots,\sigma_{M}\right)^{T}$$

Si le bruit additif est supposé Gaussien, complexe, circulaire et centré alors le modèle (55) est un modèle d'observation dit déterministe (ou conditionnel) [63] avec une d.d.p à l'instant t égale à :

$$p\left(\mathbf{x};t,\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)=\frac{e^{-\left(\mathbf{x}\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)-\mathbf{s}\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)\right)^{H}\mathbf{C}_{\mathbf{n}}^{-1}\left(t,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)\left(\mathbf{x}\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)-\mathbf{s}\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)\right)}}{\pi^{N}\left|\mathbf{C}_{\mathbf{n}}\left(t,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)\right|},$$

où:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{n}}\left(t,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)=E\left[\mathbf{n}\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)\mathbf{n}\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)^{H}\right]=\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)$$

De plus, si le bruit $\mathbf{n}\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)$ est stationnaire au sens large et à bande limitée alors la matrice de densité spectrale $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)$ et la matrice de correlation $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(\tau,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)$ vérifient la relation :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(\tau,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)e^{-j2\pi f\tau}d\tau=\sum_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(\frac{n}{B},\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)\frac{e^{-j2\pi\frac{f}{B}n}}{B},$$

Sous ces hypothèses, nous montrons que la MIF associée au modèle d'observation décrit par (55) pour une durée fini T s'écrit (cf. annexe XIII-B) :

$$\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}=\begin{bmatrix}\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}=\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}=\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)\end{bmatrix} \tag{56}$$

$$\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}\right)_{l,k}=\left\langle\frac{\partial\mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)_{l}}\mid\frac{\partial\mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)_{k}}\right\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}+\left\langle\frac{\partial\mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)_{k}^{*}}\mid\frac{\partial\mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)_{l}^{*}}\right\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}$$
$$\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}\right)_{l,k}=T\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}tr\left(\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)^{-1}\frac{\partial\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)_{k}}\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)^{-1}\frac{\partial\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)_{l}}\right)df$$

où le produit hermitien dans le domaine fréquentiel est défini par :

$$\left\langle\mathbf{x}\left(f\right)\mid\mathbf{y}\left(f\right)\right\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}=\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}\mathbf{y}\left(f\right)^{H}\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)^{-1}\mathbf{x}\left(f\right)df. \tag{57}$$

La structure bloc diagonale de la MIF indique, qu'au sens de la BCR, la connaissance ou non des paramètres $\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}$ des bruits $\mathbf{n}\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)$ ne modifie pas la BCR pour les paramètres $\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}$ du signal d'intérêt

$\mathbf{s}\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)$ (cf. discussion paragraphe VIII-C).

Dans la suite nous ne nous intéressons qu'à $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}$.
La BCR des P paramètres des M signaux d'intérêt se calcule directement par inversion de $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}$:

$$\mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)=\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}\right)^{-1},\quad \left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}\right)_{l,k}=\left\langle\frac{\partial\mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)_{l}}\mid\frac{\partial\mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)_{k}}\right\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}+\left\langle\frac{\partial\mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)_{k}^{*}}\mid\frac{\partial\mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)_{l}^{*}}\right\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}$$

Pour des raisons de lisibilité, la dépendance en fréquence f dans les grandeurs $\mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)$, $\mathbf{b}\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_{m}\right)$, $\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)$ sera omise. Nous montrons (cf. annexe XIII-B) que la MIF $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}$ pour le vecteur des paramètres signal $\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^{T}=\left(\boldsymbol{\sigma}^{T},\boldsymbol{\sigma}^{H},\boldsymbol{\Xi}^{T}\right)$ est donnée par :

$$\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}=\begin{bmatrix}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}^{*}} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\Xi}}\\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^{*},\boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^{*},\boldsymbol{\Xi}}\\ \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}^{*}} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\Xi}}\end{bmatrix}\text{ avec }\begin{cases}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}^{*}}=\mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^{*},\boldsymbol{\sigma}}^{*}=\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}\left(\left\{\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\right\},\left\{\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\right\}\right)\\ \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}^{*}}=\mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\Xi}}^{H}=\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}\left(\left\{\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\right\},\left\{\frac{\partial\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{s}})}{\partial\boldsymbol{\Xi}^{T}}\right\}\right)\\ \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^{*},\boldsymbol{\Xi}}^{H}=\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}^{*}}^{*}\\ \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\Xi}}=2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{s}})}{\partial\boldsymbol{\Xi}^{T}}\right\},\left\{\frac{\partial\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{s}})}{\partial\boldsymbol{\Xi}^{T}}\right\}\right)\right\}\end{cases}$$

En utilisant l'inversion matricielle par block, nous obtenons l'expression de la BCR pour le vecteur des paramètres d'intérêt $\boldsymbol{\Xi}^{T}=\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{1}^{T},\ldots,\boldsymbol{\varepsilon}_{M}^{T}\right)$ des M cibles (cf. annexe XIII-B) :

$$\mathbf{BCR}_{\Xi}^{-1}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)=2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}\left(\Pi_{\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}}^{\perp}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\boldsymbol{\Xi}^{T}}\right\}\right)\right)\right\}\tag{58}$$

soit encore :

$$\mathbf{BCR}_{\Xi}^{-1}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)=2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}_{\Xi}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)\odot\left(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}^{T}\otimes\mathbf{1}_{P\times P}\right)\right\}\tag{59}$$

$$\mathbf{H}_{\Xi}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)=\begin{bmatrix}\mathbf{H}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)_{1,1} & \ldots & \mathbf{H}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)_{1,M}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{H}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)_{M,1} & \ldots & \mathbf{H}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)_{M,M}\end{bmatrix},\quad \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{H}$$

$$\mathbf{H}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)_{m_1,m_2}=\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}\left(\Pi_{\{\mathbf{B}(f,\boldsymbol{\Xi})\}}^{\perp}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{b}\left(f,\boldsymbol{\varepsilon}_{m_2}\right)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{T}}\right\}\right),\Pi_{\{\mathbf{B}(f,\boldsymbol{\Xi})\}}^{\perp}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{b}\left(f,\boldsymbol{\varepsilon}_{m_1}\right)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{T}}\right\}\right)\right)$$

où $\mathbf{1}_{P\times P}$ est la matrice de dimension $P\times P$ dont toutes les composantes sont égales à 1.

Les expressions analytiques synthétiques (58) et (59) sont à notre connaissance nouvelles, puisqu'elles n'apparaissent ni dans les articles publiés ni dans les monographies de réference sur le sujet [16] [68] [31] [63] [67] [51][28].
Elles englobent tous les résultats précedemment publiés sur le sujet, notamment :

• le cas classique des observations bande étroite à une fréquence unique f_0 pour lequel (55) et (59) deviennent [63][68] :

$$\mathbf{x}\left(f_0;\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)=\mathbf{B}\left(f_0;\boldsymbol{\Xi}\right)\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{n}\left(f_0;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right),\quad \mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)=\sigma_{\mathbf{n}}^{2}\mathbf{I}\delta\left(f-f_0\right)$$

$$\left\langle\mathbf{x}\mid\mathbf{y}\right\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}=\frac{1}{\sigma_{\mathbf{n}}^{2}}\mathbf{y}\left(f_0\right)^{H}\mathbf{x}\left(f_0\right)$$

$$\mathbf{H}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)_{m_1,m_2}=\frac{\partial\mathbf{b}\left(f_0;\boldsymbol{\varepsilon}_{m_1}\right)^{H}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{T}}\frac{\Pi_{\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}}^{\perp}}{\sigma_{\mathbf{n}}^{2}}\frac{\partial\mathbf{b}\left(f_0;\boldsymbol{\varepsilon}_{m_2}\right)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{T}},\Pi_{\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}}^{\perp}=\mathbf{I}-\mathbf{B}\left(f_0;\boldsymbol{\Xi}\right)\left(\mathbf{B}\left(f_0;\boldsymbol{\Xi}\right)^{H}\mathbf{B}\left(f_0;\boldsymbol{\Xi}\right)\right)^{-1}\mathbf{B}\left(f_0;\boldsymbol{\Xi}\right)^{H}$$

• le cas des observations à bande limitée en présence de bruits temporellement blancs [16][67] pour lequelles :

$$\left\langle\mathbf{x}\left(f\right)\mid\mathbf{y}\left(f\right)\right\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}=B\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\mathbf{y}\left(t\right)^{H}\mathbf{R}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)^{-1}\mathbf{x}\left(t\right)dt=\sum_{i=-\frac{BT}{2}}^{\frac{BT}{2}}\mathbf{y}\left(\frac{i}{B}\right)^{H}\mathbf{R}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)^{-1}\mathbf{x}\left(\frac{i}{B}\right)$$

B. Problème n°1 : bornes de Cramèr-Rao pour modèles déterministes à L observations indépendantes

Le modèle (55) peut être étendue à L observations indépendantes de bande limitée B^l:

$$\mathbf{x}^l\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}^l\right)=\mathbf{s}^l\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{s}}\right)+\mathbf{n}^l\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}\right),\quad \mathbf{s}^l\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{s}}\right)=\mathbf{B}^l\left(t;\boldsymbol{\Xi}^l\right)\boldsymbol{\sigma}^l \tag{60}$$
$$\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^l\right)^T=\left(\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{s}}\right)^T,\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}\right)^T\right),\quad \left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{s}}\right)^T=\left(\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^T,\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^H,\boldsymbol{\Xi}^T\right)$$

où:
• $\boldsymbol{\sigma}^l=\left(\sigma^l_1,\ldots,\sigma^l_M\right)^T$ est le vecteur des amplitudes complexes des M cibles à la $l^{ème}$ observation,
• $\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)^T=\left(\left(\boldsymbol{\varepsilon}^l_1\right)^T,\ldots,\left(\boldsymbol{\varepsilon}^l_M\right)^T\right)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^l_m$ étant le vecteur des paramètres de dimension P^l à la $l^{ème}$ observation de la $m^{ème}$ cible,
• $\mathbf{B}^l\left(t;\boldsymbol{\Xi}^l\right)=\left[\mathbf{b}^l\left(t;\boldsymbol{\varepsilon}^l_1\right)\ldots\mathbf{b}^l\left(t;\boldsymbol{\varepsilon}^l_M\right)\right]$ et $\mathbf{b}^l\left(t;\boldsymbol{\varepsilon}^l_m\right)$ est le vecteur de N modèles paramétriques de propagation de durée finie T^l dépendant du vecteur de P^l paramètres $\boldsymbol{\varepsilon}^l_m$,
• $\mathbf{n}^l\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}\right)$ est le bruit reçu pour la $l^{ème}$ observation, supposé Gaussien, complexe et circulaire de matrice de densité spectrale $\mathbf{R}^l_{\mathbf{n}}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}\right)$, $f\in\left[-\frac{B^l}{2},\frac{B^l}{2}\right]$.

L'approche courante de la litterature existante [63][67][51][28] est d'effectuer un calcul de la MIF (et donc de la BCR) par paramétrisation possible des cibles pour L observations. Les 4 principales paramétrisations abordées par la littérature sont : $(\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma})$, $\left(\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}^1,\ldots,\boldsymbol{\sigma}^L\right)$, $\left(\boldsymbol{\Xi}^1,\ldots,\boldsymbol{\Xi}^L,\boldsymbol{\sigma}\right)$, $\left(\boldsymbol{\Xi}^1,\ldots,\boldsymbol{\Xi}^L,\boldsymbol{\sigma}^1,\ldots,\boldsymbol{\sigma}^L\right)$. En radar, seules les deux premières $\left((\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma})\right.$ et $\left.\left(\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}^1,\ldots,\boldsymbol{\sigma}^L\right)\right)$ correspondent à un contexte opérationnel décrit ci-après :

Modèle de propagation constant, sources fluctuantes : $\left(\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}^1,\ldots,\boldsymbol{\sigma}^L\right)$.
C'est le cas généralement abordé par les articles et ouvrages de référence [68] [28] [51] [63]. Le modèle à L observations (60) est restreint au cas où :
• les fonctions paramétriques $\mathbf{b}^l\left(t;\boldsymbol{\varepsilon}^l_m\right)$ et la matrice de densité spectrale du bruit $\mathbf{R}^l_{\mathbf{n}}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}\right)$ sont invariants durant les L observations,
• les paramètres (cinématiques) du signal et les paramètres du bruit sont supposés invariants durant les L observations,
• les coefficients de rétrodiffusion $\boldsymbol{\sigma}^l$ fluctuent d'une observation à une autre (changement d'attitude des cibles aucours du MRUR),
soit :

$$\mathbf{b}^l\left(t;\boldsymbol{\varepsilon}^l_m\right)=\mathbf{b}\left(t;\boldsymbol{\varepsilon}_m\right),\quad \mathbf{R}^l_{\mathbf{n}}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}\right)=\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right),\quad \boldsymbol{\Xi}^l=\boldsymbol{\Xi},\quad \underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}=\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}},\quad l\in[1,L]. \tag{61}$$

Modèle de propagation variable, sources fluctuantes : $\left(\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}^1,\ldots,\boldsymbol{\sigma}^L\right)$.
Une variante du cas précédent est obtenue lorsque le modèle de propagation $\mathbf{b}^l\left(t;\boldsymbol{\varepsilon}^l_m\right)$ change également d'une observation à une autre. En pratique, ceci correspond à un radar qui change de forme d'onde en bande de base et de fréquence porteuse, d'une observation à une autre :

$$\mathbf{R}^l_{\mathbf{n}}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}\right)=\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right),\quad \boldsymbol{\Xi}^l=\boldsymbol{\Xi},\quad \underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}=\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}},\quad l\in[1,L]. \tag{62}$$

Modèle de propagation variable, sources non fluctuantes : $(\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma})$.
Un radar peut également changer de forme d'onde en bande de base sans changer de fréquence porteuse. Dans ce cas, il est plausible de supposer que les coefficients de rétrodiffusion $\boldsymbol{\sigma}^l$ ne fluctuent pas d'une observation à une autre (si les cibles ont une attitude fixe au cours du MRUR) :

$$\mathbf{R}^l_{\mathbf{n}}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}\right)=\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right),\quad \boldsymbol{\Xi}^l=\boldsymbol{\Xi},\quad \underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}=\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}},\quad \boldsymbol{\sigma}^l=\boldsymbol{\sigma},\quad l\in[1,L]. \tag{63}$$

En fait, les différents calculs de BCR associés aux différentes paramétrisation peuvent s'exprimer sous la forme d'un calcul unique prenant en compte des contraintes égalités sur les paramètres inconnus, c'est à dire le calcul d'une BCR contrainte dont la dérivation est simplifiée sous l'angle de la minimisation d'une norme sous contraintes linéaires (cf. chapitre VII suivant).
En effet, posons :
• $\underline{\mathbf{O}}^T = \left(\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}^T, \underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{n}}^T\right)$ où $\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}^T = \left(\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^1\right)^T, \ldots, \left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^L\right)^T\right)$ et $\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{n}}^T = \left(\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^1\right)^T, \ldots, \left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^L\right)^T\right)$ sont respectivement les vecteurs des paramètres signal et bruit durant les L observations,
• $\mathbf{X}\left(t;\underline{\mathbf{O}}\right)^T = \left(\mathbf{x}^1\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}^1\right)^T, \ldots, \mathbf{x}^L\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}^L\right)^T\right)$.

Puisque les L observations sont supposées indépendantes :

$$p\left(\mathbf{X};t,\underline{\mathbf{O}}\right) = \prod_{l=1}^{L} p\left(\mathbf{x}^l;t,\underline{\boldsymbol{\theta}}^l\right),$$

et :

$$-\frac{\partial^2}{\partial\underline{\mathbf{O}}\partial\underline{\mathbf{O}}^H}\ln p\left(\mathbf{X};t,\underline{\mathbf{O}}\right) = -\sum_{l=1}^{L}\frac{\partial^2}{\partial\underline{\mathbf{O}}\partial\underline{\mathbf{O}}^H}\ln p\left(\mathbf{x}^l;t,\underline{\boldsymbol{\theta}}^l\right).$$

Par conséquent, la MIF associée aux L observations indépendantes (60) se déduit aisément de la MIF associée à 1 observation (56) :

$$\mathbf{F}_{\underline{\mathbf{O}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}} = \mathbf{F}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{n}}} = \mathbf{F}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{n}}}\left(\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{n}}\right) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^L} \end{bmatrix} \tag{64}$$

où $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^l}$ est la MIF associée à la $l^{ème}$ observation (56) pour le produit hermitien défini par :

$$\left\langle \mathbf{x}\left(f\right) \mid \mathbf{y}\left(f\right)\right\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l} = \int_{-\frac{B^l}{2}}^{\frac{B^l}{2}} \mathbf{y}\left(f\right)^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^l\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l\right)^{-1}\mathbf{x}\left(f\right)df.$$

L'expression (64) contient toutes les informations requises pour calculer toutes les BCR associées aux différents cas de paramétrisation des cibles et/ou des bruits. Chaque BCR peut être obtenue à partir de (64) en prenant en compte un jeu spécifique de contraintes égalités (cf. exemples paragraphe VIII-A) parmi :

$$\boldsymbol{\Xi}^l - \boldsymbol{\Xi}^1 = \mathbf{0}, \quad \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l - \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^1 = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma}^l - \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{0}, \quad l \in [1, L].$$

C. Problème n°2 : quel modèle d'observation pour l'estimation des retards ?

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à un problème classique en radar : l'estimation du retard de chaque cible pour le modèle radar SISO (1 émetteur - 1 récepteur) à L observations indépendantes simplifié suivant :

$$x^l\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = \sum_{m=1}^{M} e_T\left(t - lT_r - \tau_m\right)\sigma_m^l + n^l\left(t\right), \quad 1 \leq l \leq L \tag{65}$$

$$\sigma_m^l = \sigma_m e^{j2\pi\nu_m(l-1)T_r}, \quad \nu_m = \frac{-2v_m}{\lambda_c} \tag{66}$$

où le bruit $n^l\left(t\right)$ est temporellement blanc et de puissance σ_n^2.
Ce modèle correspond à la réception par un récepteur d'un signal émis par un émetteur sous la forme

d'une rafale de L signaux en bande de base $e_T(t)$ de durée T_0 avec un intervalle de répétition T_r, modulée par la fréquence porteuse f_c.
Pour chaque cible, le signal reçu est donc une version atténuée (bilan radar), décalée en temps (retard) et en fréquence (effet Doppler) du signal émis sous les hypothèses simplificatrice suivantes, classiques en radar pour des cibles à vitesse faible [31] :
• $|2v_m(L-1)T_r| << \frac{c}{B}$ (pas de migration de case distance),
• $\frac{2v_m}{\lambda_c}T_0 << 1$ (non prise en compte de l'effet Doppler sur $e_T(t)$).
La matrice de corrélation des amplitudes $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}$ est alors égale à:

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\boldsymbol{\sigma}^l\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^H = \left(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^H\right)\odot\left(\boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{\Psi}^*\right),\ \boldsymbol{\Psi} = [\ldots,\boldsymbol{\psi}(\nu_m),\ldots],\ \boldsymbol{\psi}(\nu) = \left(1,\ldots,e^{j2\pi\nu(L-1)T_r}\right)^T \tag{67}$$

Le modèle d'observation (65) peut être considéré sous une forme duale relativement à l'estimation des retards :
• un modèle d'observation dit "incohérent" où l'effet Doppler n'est pas pris en compte dans le modèle paramétrique. Dans ce cas, l'ensemble des paramètres inconnus est $\underline{\boldsymbol{\theta}}^T = \left(\boldsymbol{\sigma}_1^T,\boldsymbol{\sigma}_1^H,\ldots,\boldsymbol{\sigma}_L^T,\boldsymbol{\sigma}_L^H,\boldsymbol{\tau}^T,\sigma_n^2\right)$ et le vecteur des paramètres d'intérêt est $\boldsymbol{\tau}$ $(\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{\tau}, P = 1)$. En appliquant (98), la BCR s'écrit :

$$\mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\tau}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}) = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}_{\boldsymbol{\tau}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})\odot\left(\boldsymbol{\Psi}^H\boldsymbol{\Psi}\right)\odot\left(\boldsymbol{\sigma}^*\boldsymbol{\sigma}^T\right)\right\}^{-1} \tag{68}$$

• un modèle d'observation dit "cohérent" où l'effet Doppler est pris en compte dans le modèle paramétrique. Dans ce cas, le vecteur des paramètres inconnus devient $\widetilde{\underline{\boldsymbol{\theta}}}^T = \left(\boldsymbol{\sigma}^T,\boldsymbol{\sigma}^H,\boldsymbol{\tau}^T,\boldsymbol{\nu}^T,\sigma_n^2\right)$, la fréquence Doppler $\boldsymbol{\nu}$ étant un paramètre de nuisance des cibles $\left(\boldsymbol{\Xi}^T = \left(\boldsymbol{\tau}^T,\boldsymbol{\nu}^T\right), P = 2\right)$. De même, en appliquant (98), on obtient :

$$\mathbf{BCR}_{(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu})}\left(\widetilde{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}_{(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu})}\left(\widetilde{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)\odot\left(\left(\boldsymbol{\sigma}^*\boldsymbol{\sigma}^T\right)\otimes\mathbf{1}_{2\times 2}\right)\right\}^{-1} \tag{69}$$

Après échantillonnage du signal reçu à une cadence $\frac{1}{B}$, (65) s'écrit :

$$x^l(i;\underline{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{m=1}^{M} e_T\left(\frac{i}{B}-\tau_m\right)\sigma_m^l + n^l\left(\frac{i}{B}\right),\ i = 1\ldots I,\ 1\le l\le L$$

et conduit aux expressions suivantes de $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\tau}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})$ et $\mathbf{H}_{(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu})}\left(\widetilde{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)$:

$$\mathbf{H}_{\boldsymbol{\tau}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{D}_{\mathbf{a}}^H\mathbf{D}_{\mathbf{a}} - \mathbf{D}_{\mathbf{a}}^H\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{D}_{\mathbf{a}} \tag{70}$$

$$\mathbf{H}_{(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu})}\left(\widetilde{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right) = \begin{bmatrix}\mathbf{H}_{\boldsymbol{\tau}}\left(\widetilde{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right) & \mathbf{H}_{(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu})}\left(\widetilde{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)\\ \mathbf{H}_{(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu})}^H\left(\widetilde{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right) & \mathbf{H}_{\boldsymbol{\nu}}\left(\widetilde{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)\end{bmatrix} \tag{71}$$

où :

$$\mathbf{H}_{\boldsymbol{\tau}}\left(\widetilde{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right) = \boldsymbol{\Psi}^H\boldsymbol{\Psi}\odot\mathbf{D}_{\mathbf{a}}^H\mathbf{D}_{\mathbf{a}} - \left(\boldsymbol{\Psi}^H\boldsymbol{\Psi}\odot\mathbf{D}_{\mathbf{a}}^H\mathbf{A}\right)\left(\boldsymbol{\Psi}^H\boldsymbol{\Psi}\odot\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Psi}^H\boldsymbol{\Psi}\odot\mathbf{A}^H\mathbf{D}_{\mathbf{a}}\right)$$

$$\mathbf{H}_{(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu})}\left(\widetilde{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right) = \boldsymbol{\Psi}^H\mathbf{D}_{\boldsymbol{\psi}}\odot\mathbf{D}_{\mathbf{a}}^H\mathbf{A} - \left(\boldsymbol{\Psi}^H\boldsymbol{\Psi}\odot\mathbf{D}_{\mathbf{a}}^H\mathbf{A}\right)\left(\boldsymbol{\Psi}^H\boldsymbol{\Psi}\odot\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Psi}^H\mathbf{D}_{\boldsymbol{\psi}}\odot\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)$$

$$\mathbf{H}_{\boldsymbol{\nu}}\left(\widetilde{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right) = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\psi}}^H\mathbf{D}_{\boldsymbol{\psi}}\odot\mathbf{A}^H\mathbf{A} - \left(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\psi}}^H\boldsymbol{\Psi}\odot\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)\left(\boldsymbol{\Psi}^H\boldsymbol{\Psi}\odot\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Psi}^H\mathbf{D}_{\boldsymbol{\psi}}\odot\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)$$

avec :

$$\mathbf{a}(\tau) = \left[\ldots,e_T\left(\frac{i}{B}-\tau\right),\ldots\right]^T,\quad \mathbf{A} = [\mathbf{a}(\tau_1),\cdots,\mathbf{a}(\tau_M)],$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{a}} = \left[\frac{\partial\mathbf{a}(\tau_1)}{\partial\tau},\cdots,\frac{\partial\mathbf{a}(\tau_M)}{\partial\tau}\right],\quad \mathbf{D}_{\boldsymbol{\psi}} = \left[\frac{\partial\boldsymbol{\psi}(\nu_1)}{\partial\nu},\cdots,\frac{\partial\boldsymbol{\psi}(\nu_M)}{\partial\nu}\right].$$

Notre problématique est la question suivante : quel modèle d'observation (cohérent ou incohérent) fournit la meilleure estimation asymptotique des retards, au sens de la BCR la plus petite ?
La réponse est impossible à fournir à partir des expressions analytiques de deux BCR (68)(69) car il n'existe pas à notre connaissance d'inégalité connue mélant inversion matricielle par bloc, produit d'Hadamard et produit de Kroneker !
Par contre (66) représente clairement un modèle de reparamétrisation injective auquel est associée une inégalité de reparamétrisation (cf. chapitre VII) qui nous permettra de conclure (cf. paragraphe VIII-B).

VII. Reparamétrisation et Borne de Cramèr-Rao contrainte

A. Introduction

Dans certaines applications, l'espace des paramètres peut être restreint à un sous-ensemble défini par un ensemble de contraintes égalités sur les paramètres. La prise en compte de ces contraintes conduit à l'expression de la BCR contrainte [27] [24] [37][59] [4] dont la dérivation est simplifiée sous l'angle de la minimisation d'une norme sous contraintes linéaires.
A bien y regarder, toute contrainte égalité sur un sous-ensemble de paramètres introduit une relation implicite entre ces paramètres qu'on peut formuler sous l'angle d'une reparamétrisation injective, et qui traduit l'équivalence (dualité) des deux formulations : BCR reparamétrée et BCR contrainte.
Par ailleurs, la BCR reparamétrée/contrainte est inférieure ou égale à la BCR (initiale), inégalité [38] qui se révèle être un outil précieux pour comparer certaines BCR entre elles [38][40].
Nous présentons des exemples d'utilisation de la BCR reparamétrée/contrainte et de l'inégalité de reparamétrisation afin d'en illustrer l'intérêt théorique et pratique, notamment pour l'analyse et la conception des systèmes dans la région asymptotique.
En effet, l'inégalité de reparamétrisation démontre qu'il est possible d'améliorer l'estimation d'un sous-ensemble des paramètres inconnus d'un système (les paramètres d'intérêt par exemple) par des choix de conception du système : soit par une reparamétrisation (raffinement du modèle paramétrique), soit par l'introduction de contraintes égalités entre les autres paramètres (paramètres de nuisance, par exemple).

B. Borne de Cramèr-Rao sous contraintes

Soit le sous-ensemble $\mathcal{C}$ de Θ défini par un ensemble de K contraintes égalités :

$$\mathbf{f}\left(\boldsymbol{\theta}\right)=\mathbf{f}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)=\mathbf{0}\in\mathbb{C}^{K_c}\times\mathbb{R}^{K_r},\ 2K_c+K_r=K,\ 1\leq K\leq P-1 \tag{72}$$

où la matrice $\frac{\partial}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{f}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)\right\}\\ \mathrm{Im}\left\{\mathbf{f}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)\right\}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left(K,P\right)$ est de rang plein (K), traduisant la propriété d'indépendance des contraintes [27][4]. Une réécriture de (72) est :

$$\left\{\begin{array}{r}\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\in\mathcal{C}\\ \underline{\boldsymbol{\theta}}^0+d\underline{\boldsymbol{\theta}}\in\mathcal{C}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}\underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)=\mathbf{0}\\ \frac{\partial\underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}^T}d\underline{\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{0}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)=\mathbf{0}\\ d\underline{\boldsymbol{\theta}}\in\ker\left\{\frac{\partial\underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right\}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)=\mathbf{0}\\ d\underline{\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}d\boldsymbol{\lambda},\ d\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^{P-K}\end{array}\right.$$

où la matrice $\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\in\mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left(P,P-K\right)$ est une base de $\ker\left\{\frac{\partial\underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right\}$.
Par conséquent, un estimateur de $\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)$ est localement sans biais sur le sous-ensemble $\mathcal{C}$ de Θ s'il est localement sans biais pour toute valeur de $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\in\mathcal{C}$ et pour tout voisinage de $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\in\mathcal{C}$, c'est à dire pour tout déplacement $d\underline{\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}d\boldsymbol{\lambda}$ au voisinage de $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$. Dans ce contexte, les deux contraintes (35) et (45) deviennent :

$$\left\{\begin{array}{l}E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left(\widehat{\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right)\right]=\mathbf{0}\\ E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left(\widehat{\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right)\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right]d\underline{\boldsymbol{\theta}}=\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}^T}d\underline{\boldsymbol{\theta}}\end{array}\right.,\ \forall\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\in\mathcal{C},\ \forall d\underline{\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}d\boldsymbol{\lambda},\ d\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^{P-K},$$

ce qui est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{l}E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left(\widehat{\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right)\right]=\mathbf{0}\\ E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left(\widehat{\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right)\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\right]=\left(\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\right)\end{array}\right.,\ \forall\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\in\mathcal{C}. \tag{73}$$

Par conséquent, la minimisation $\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}\right)$ sous (72) est localement équivalente à la minimisation de $\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}\right)$ sous (73), ce qui est un problème identique à celui du calcul de la BCR non contrainte (47), une fois les contraintes linéaires mises à jour :

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\mathbf{u}\right\}_{[1,Q]},\left\{\mathbf{c}\right\}_{[1,P]}\right)=\left(\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right)^T\\ \left\{\mathbf{c}\right\}_{[1,P]}=\left\{\left(\frac{\partial\ln p(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^*\right\}\end{array}\right\}\text{ devient }\left\{\begin{array}{l}\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\mathbf{u}\right\}_{[1,Q]},\left\{\mathbf{c}\right\}_{[1,P-K]}\right)=\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^T\left(\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right)^T\\ \left\{\mathbf{c}\right\}_{[1,P-K]}=\left\{\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^H\left(\frac{\partial\ln p(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^*\right\}\end{array}\right. \tag{74}$$

Aussi, si la matrice $\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\mathbf{c}\right\}_{[1,P-K]}\right)$ est non singulière (inversible), alors :

$$\min\left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}\right)\right\}=\left(\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)^T}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^H\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^*\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^c\right)^{-1}\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^T\left(\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}^T\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right) \tag{75}$$

$$\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^c=\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^H\left(\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^*\right\}\right)=\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^T\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^*$$

$$\left(\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right)_{\text{eff}}^T=\left(\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^H\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^*\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^c\right)^{-1}\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^T\left(\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)^T}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)$$

où $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^c$ est la MIF sous contrainte.
Si $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^c$ est singulière, la forme générale de (75) est donnée par le Lemme 1 (42) et conduit à [4, (8)(9)] qui englobe tous les résultats publiés sur le sujet [27][24][37][59].
Il est important de noter que le Lemme 3, combiné à la forme de l'équation (75), permet d'affirmer que la BCR sous contraintes ne dépend pas du choix de $\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$, à condition que les vecteurs colonnes de $\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ forment une base de $\ker\left\{\frac{\partial\underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right\}$.

Par ailleurs, toute matrice $\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ dont les vecteurs colonnes forment une base de $\ker\left\{\frac{\partial\underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right\}$ peut être complétée par une famille de K vecteurs indépendants de $\mathbb{C}^P$ pour former une base $\mathbf{B}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ de l'espace des paramètres $\Theta\equiv\mathbb{C}^P$ [26]. Par conséquent, d'après le Lemme 3, la transformation suivante des contraintes (50) :

$$E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left(\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right)\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\mathbf{B}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\right]=\left(\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\mathbf{B}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\right) \tag{76}$$

ne change pas le minimum de $\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}\right)$ qui reste égal à (51). Or :

$$E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left(\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right)\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\right]=\left(\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\right) \tag{77}$$

ne représente qu'un sous-ensemble des contraintes définies par (76), ce qui nous permet de déduire que :

$$\min\left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}\right)\right\}\text{ sous (76) }\geq\ \min\left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)-\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}\right)\right\}\text{ sous (77)}$$

ou encore que :

$$\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^{-1}\geq\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^*\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^c\right)^{-1}\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^T=\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^*\left(\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^T\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^*\right)^{-1}\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^T, \tag{78}$$

ce qui démontre très simplement que l'ajout de contraintes diminue la BCR [4][24][37].

C. L'inégalité de reparamétrisation

Définissons la notation :

$$\mathbf{BCR}_{\underline{\mathbf{g}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) = \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^H \mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}}\right), \quad \mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) = \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^{-1} \tag{79}$$

dont la signification est : BCR pour la fonction $\underline{\mathbf{g}}$ (implicitement $\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$) sachant que les paramètres déterministes inconnus sont contenus dans le vecteur $\underline{\boldsymbol{\theta}}$; la BCR étant calculée en la valeur particulière $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$.

Nous considérons la reparamétrisation de la d.d.p $p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$ définie par :

$$\underline{\boldsymbol{\theta}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}\right), \quad \dim\left\{\underline{\boldsymbol{\omega}}\right\} = P', \quad \dim\left\{\underline{\boldsymbol{\theta}}\right\} = P.$$

Alors $p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\omega}}\right) = p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}\right)\right)$ et (théorème de dérivation des fonctions composées) :

$$\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T} = \frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T} \Leftrightarrow \frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}} = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}}\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}},$$

ce qui conduit à l'identité suivante (51) :

$$\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\omega}}^0} = E_{\underline{\boldsymbol{\omega}}^0}\left[\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}}\left(\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}}\right)^H\right] = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}}\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)}\left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}}\right)^H, \tag{80}$$

qui est une généralisation triviale de l'identité de changement de variable des paramètres réels [29, p125].

Dans la suite, nous nous intéressons uniquement aux reparamétrisations injectives, ce qui requiert : $P' \leq P$ et $rang\left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T}\right) = P'$. Sous ces hypothèses, $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\omega}}^0}$ est singulière si et seulement si $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)}$ est singulière.

Considérons maintenant, le problème de l'estimation de la fonction $\mathbf{h}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}\right) = \mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}\right)\right)$.
D'après (51), la BCR associée à tout estimateur localement sans biais de $\mathbf{h}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right) = \mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)\right)$ est donnée par :

$$\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\omega}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{h}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right) - \underline{\mathbf{h}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)\right\}\right) \geq \mathbf{BCR}_{\underline{\mathbf{h}}|\underline{\boldsymbol{\omega}}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right) = \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{h}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}}\right)^H \mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\omega}}|\underline{\boldsymbol{\omega}}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{h}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}}\right) \tag{81}$$

Or :

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{h}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}} = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}}\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}},$$

par conséquent, en prenant en compte (80), la BCR ci-dessus peut également s'écrire :

$$\mathbf{BCR}_{\underline{\mathbf{h}}|\underline{\boldsymbol{\omega}}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right) = \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^H \mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\omega}}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}}\right) = \mathbf{BCR}_{\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)|\underline{\boldsymbol{\omega}}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right),$$

$$\mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\omega}}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right) = \left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}}\right)^H \left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}}\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)}\left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}}\right)^H\right)^{-1}\left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}}\right) \tag{82}$$

Alors, en appliquant le Lemme 4 suivant :

Lemme 4 :

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(P,P)$ *une matrice hermitienne définie positive* $\left(\mathbf{A}=\mathbf{A}^H,\ \mathbf{A}>\mathbf{0},\ \mathbf{A}=\mathbf{L}_{\mathbf{A}}^H\mathbf{L}_{\mathbf{A}}\right)$, *soit* $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(P,K)$ *où* $K \leq P$ *une matrice à rang plein* $(rang(\mathbf{B})=K)$ *alors:*

$$\mathbf{\Pi}_{\mathbf{L_A B}}^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{L_A B}\ \left(\mathbf{B}^H\mathbf{A}\mathbf{B}\right)^{-1}\ \mathbf{B}^H\mathbf{L}_{\mathbf{A}}^H\ \geq 0\ \Rightarrow\ \mathbf{A}^{-1}\ \geq \mathbf{B}\ \left(\mathbf{B}^H\mathbf{A}\mathbf{B}\right)^{-1}\ \mathbf{B}^H \tag{83}$$

---

nous pouvons formuler l'inégalité de reparamétrisation - si $\mathbf{g}(\underline{\boldsymbol{\theta}}) = \underline{\boldsymbol{\theta}}$ - :

$$\mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)\right) \geq \mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\omega}}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right) \tag{84}$$

ou plus généralement, $\forall \mathbf{g}(\underline{\boldsymbol{\theta}})$:

$$\mathbf{BCR}_{\underline{\mathbf{g}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)\right) \geq \mathbf{BCR}_{\underline{\mathbf{g}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})|\underline{\boldsymbol{\omega}}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right). \tag{85}$$

À notre connaissance, ce résultat est nouveau, en ce sens qu'il n'est pas mentionné dans les ouvrages de référence dans le domaine [63][28][51][29], ni dans des travaux récents dans le domaine tels que [27][4]. Les inégalités de reparamétrisation (84)(85) expriment analytiquement un principe d'estimation intuitif : si le nombre total des paramètres inconnus dans un modèle d'observation donné décroit ($P' < P$), alors les performances asymptotiques d'estimation augmentent (ou reste inchangés), au sens de la BCR qui diminue (ou reste égale), quelle que soit la fonction $\mathbf{g}(\ )$ des paramètres inconnus considérés.
Si $P' = P$, on retrouve le cas connu du changement de variable bijectif où la reparamétrisation n'a aucun effet sur les performances asymptotiques de l'estimateur :

$$\mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)\right) = \mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\omega}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)\right)$$

D. De la reparamétrisation à la borne de Cramèr-Rao contrainte

Un cas particulier de la reparamétrisation se produit quand le vecteur des paramètres $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ est un sous-ensemble de $\underline{\boldsymbol{\theta}}$. Dans ce cas, nous pouvons réarranger les composantes de $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ de la manière suivante:

$$\underline{\boldsymbol{\theta}}(\underline{\boldsymbol{\omega}})^T = \left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^T, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = \underline{\mathbf{h}}(\underline{\boldsymbol{\omega}})^T\right),\ \dim\{\underline{\boldsymbol{\theta}}\} = P,\ \dim\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = K,\ \dim\{\underline{\boldsymbol{\omega}}\} = P-K,\ 1 \leq K \leq P-1 \tag{86}$$

où $\underline{\boldsymbol{\theta}}(\underline{\boldsymbol{\omega}})$ est supposée être une fonction injective. Ce type de reparamétrisation est équivalent à l'introduction du système de K contraintes suivantes:

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \underline{\mathbf{h}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \mathbf{0} = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}) \in \mathbb{C}^K \tag{87}$$

En effet, puisque :

$$\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{P-K} \\ \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(P, P-K), \tag{88}$$

et que :

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T} = \left[\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T}, \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T}\right] = \left[-\frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T}, \mathbf{I}_K\right] \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(K, P),$$

alors, si nous définissons $\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ par :

$$\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{P-K} \\ \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T} \end{bmatrix}, \tag{89}$$

$\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ vérifie :

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} = \left[-\frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T}, \mathbf{I}_K\right]\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} = -\frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T} + \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T} = \mathbf{0},$$

ce qui traduit le fait que $\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ est une base de $\ker\left\{\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right\}$. Par conséquent, les dérivations :
• de la BCR contrainte (75) avec $\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ donnée par (89),
• de la BCR reparamétrée (80) selon la reparamétrisation exprimée par (88),
fournissent la même BCR.

E. De la borne de Cramèr-Rao contrainte à la reparamétrisation

Soit le sous-ensemble $\mathcal{C}$ de Θ défini par :

$$\underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^K, \quad 1 \leq K \leq P-1,$$

où la matrice $\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left(K, P\right)$ est de rang plein K.
Dans les cas les plus simples, par exemple si $\underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$ est une fonction linéaire de $\underline{\boldsymbol{\theta}}$, $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ peut être exprimée comme une fonction explicite d'un sous-ensemble $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ de $P-K$ composantes :

$$\underline{\boldsymbol{\theta}} = \left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^T, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T\right)^T, \quad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\mathbf{h}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}\right), \quad \dim\left\{\underline{\boldsymbol{\theta}}\right\} = P, \ \dim\left\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}\right\} = K, \ \dim\left\{\underline{\boldsymbol{\omega}}\right\} = P-K,$$

ce qui est un cas particulier de la formule de reparamétrisation (86).
Malheureusement, dans la plus part des cas, il est impossible de trouver une fonction explicite $\underline{\mathbf{h}}\left(\ \right)$, bien que $\underline{\mathbf{h}}\left(\ \right)$ existe sous une forme implicite donnée par le théorème des fonctions implicites pour des variables réelles [50] et complexes [17].

Théorème des fonctions implicites :

Soit $\mathbf{f}\left(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\omega}\right) = \left[f_1\left(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\omega}\right), \cdots, f_K\left(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\omega}\right)\right]^T$ *une fonction de* $\mathbb{C}^K \times \mathbb{C}^{P'} \rightarrow \mathbb{C}^K$. *Nous supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*
hypothèse A1 : $f_k\left(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\omega}\right)$ *pour* $k = 1, \ldots, K$ *est une fonction différentiable sur un voisinage de* $\left(\boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\omega}^0\right)$ *dans* $\mathbb{C}^K \times \mathbb{C}^{P'}$.
hypothèse A2 : $\mathbf{f}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\omega}^0\right) = \mathbf{0}$.
hypothèse A3 : la matrice Jacobienne $\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left(K, K\right)$ *est non-singulière en* $\left(\boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\omega}^0\right)$.
Alors, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ *du point* $\boldsymbol{\omega}^0$ *dans* $\mathbb{C}^{P'}$, *il existe un voisinage* $\mathcal{U}$ *du point* $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ *dans* $\mathbb{C}^K$, *et il existe une unique fonction* $\mathbf{h} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ *telle que* $\mathbf{h}\left(\boldsymbol{\omega}^0\right) = \boldsymbol{\varepsilon}^0$ *et* $\mathbf{f}\left(\mathbf{h}\left(\boldsymbol{\omega}\right), \boldsymbol{\omega}\right) = \mathbf{0}$ *pour tout* $\boldsymbol{\omega}$ *dans* $\mathcal{V}$.
De plus, $\mathbf{h}$ *est différentiable en* $\boldsymbol{\omega}^0$ *et vérifie :*

$$\mathbf{h}\left(\boldsymbol{\omega}\right) - \boldsymbol{\varepsilon}^0 = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\omega}^0\right)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T}\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\omega}^0\right)}{\partial \boldsymbol{\omega}^T}\left(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^0\right) + \mathbf{r}\left(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^0\right), \tag{90}$$

où le reste $\mathbf{r}\left(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^0\right) = \mathbf{o}\left(\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^0\|\right)$.

En effet, puisque $\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}$ est de rang plein K, il existe K vecteurs colonnes indépendants correspondant aux dérivées partielles selon K composantes que nous regroupons dans le sous-ensemble $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ de $\underline{\boldsymbol{\theta}}$. Les composantes de $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ peuvent alors être réarrangées dans l'ordre suivant :

$$\underline{\boldsymbol{\theta}} = \left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^T, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T\right)^T, \quad \underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = \mathbf{0}, \quad \dim\left\{\underline{\boldsymbol{\theta}}\right\} = P, \quad \dim\left\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}\right\} = K, \quad \dim\left\{\underline{\boldsymbol{\omega}}\right\} = P-K,$$

et le théorème des fonctions implicites permet non seulement de prouver l'existence de la fonction implicite $\underline{\mathbf{h}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}\right) = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$, mais fournit également l'expression de ses dérivées :

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{h}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T} = -\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T}\right)^{-1} \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{P-K} \\ \frac{\partial \mathbf{h}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T} \end{bmatrix} \tag{91}$$

ainsi que l'expression de la matrice $\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ formant une base de $\ker\left\{\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right\}$ (89) :

$$\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{P-K} \\ -\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T}\right)^{-1} \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T} \end{bmatrix} = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T} \tag{92}$$

Finalement, les dérivations :
• de la BCR contrainte (75) avec $\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ donnée par (92),
• de la BCR reparamétrée (80) selon la reparamétrisation exprimée par (91),
fournissent la même BCR.

F. Equivalence : reparamétrisation et borne de Cramèr-Rao contrainte

Nous avons montré dans les deux paragraphes précédents que les contraintes égalité sur les paramètres:

$$\underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^K, \quad \underline{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{C}^P, \quad 1 \leq K \leq P,$$

forment un cas particulier de la reparamétrisation des paramètres inconnus $\underline{\boldsymbol{\theta}}$, à condition que les contraintes soient indépendantes. De plus, l'inégalité de reparamétrisation (85) est vérifiée pour la reparamétrisation définie par :

$$\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T} \equiv \mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} \tag{93}$$

où $\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left(P, P-K\right)$ est une base de $\ker\left\{\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right\}$. $\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ peut être calculée après réarrangement de $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ selon :

$$\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{P-K} \\ -\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T}\right)^{-1} \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T} \end{bmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{\omega}} \\ \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{pmatrix} \tag{94}$$

où $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est un sous-ensemble de K composantes de $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ correspondant à K vecteurs colonnes de dérivées partielles indépendants de la matrice $\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}$.
Toutefois, selon la forme de $\underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$, la matrice $\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ peut être calculée de manière plus simple que par (94) [27].

VIII. Reparamétrisation et Borne de Cramèr-Rao contrainte : applications

A. Solution du problème n°1

Rappelons (cf. paragraphe VI-B) que :
• $\underline{\mathbf{O}}^T = \left(\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}^T, \underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{n}}^T\right)$ où $\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}^T = \left(\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^1\right)^T, \ldots, \left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^L\right)^T\right)$ et $\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{n}}^T = \left(\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^1\right)^T, \ldots, \left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^L\right)^T\right)$ sont respectivement les vecteurs des paramètres signal et bruit durant les L observations,
• la MIF associée aux paramètres signal pour L observations indépendantes s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^L} \end{bmatrix} \tag{95}$$

où $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^l}$ est la MIF associée aux paramètres signal à la $l^{ème}$ observation (56) :

$$\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^l} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^l,(\boldsymbol{\sigma}^l)^*} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^l,\boldsymbol{\Xi}^l} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{(\boldsymbol{\sigma}^l)^*,\boldsymbol{\sigma}^l} & \mathbf{F}_{(\boldsymbol{\sigma}^l)^*,\boldsymbol{\Xi}^l} \\ \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^l,(\boldsymbol{\sigma}^l)^*} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^l,\boldsymbol{\sigma}^l} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^l,\boldsymbol{\Xi}^l} \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^l,(\boldsymbol{\sigma}^l)^*} = \mathbf{F}^*_{(\boldsymbol{\sigma}^l)^*,\boldsymbol{\sigma}^l} = \mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l}\left(\left\{\mathbf{B}^l\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)\right\},\left\{\mathbf{B}^l\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)\right\}\right) \\ \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^l,(\boldsymbol{\sigma}^l)^*} = \mathbf{F}^H_{\boldsymbol{\Xi}^l,\boldsymbol{\sigma}^l} = \mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l}\left(\left\{\mathbf{B}^l\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)\right\},\left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{s}}^l\right)}{\partial\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)^T}\right\}\right) \\ \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^l,\boldsymbol{\sigma}^l} = \mathbf{F}^H_{(\boldsymbol{\sigma}^l)^*,\boldsymbol{\Xi}^l} = \mathbf{F}^*_{\boldsymbol{\Xi}^l,(\boldsymbol{\sigma}^l)^*} \\ \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^l,\boldsymbol{\Xi}^l} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{s}}^l\right)}{\partial\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)^T}\right\},\left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{s}}^l\right)}{\partial\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)^T}\right\}\right)\right\} \end{cases}$$

avec un produit hermitien défini par :

$$\left\langle \mathbf{x}(f) \mid \mathbf{y}(f)\right\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l} = \int_{-\frac{B^l}{2}}^{\frac{B^l}{2}} \mathbf{y}(f)^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^l\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l\right)^{-1}\mathbf{x}(f)\,df.$$

L'expression (95) contient toutes les informations requises pour calculer toutes les BCR associées aux différents cas de paramétrisation des cibles et/ou du bruit. En effet, relativement au modèle de paramétrisation le plus général $\underline{\mathbf{O}}$, chaque cas spécifique est l'expression d'un certain nombre de contraintes égalités $(\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{O}}) = \mathbf{0})$ traduisant l'invariance de certains paramètres au cours des L observations et conduisant à une BCR contrainte (75) :

$$\mathbf{BCR}^c_{\underline{\mathbf{O}}|\underline{\mathbf{O}}}(\underline{\mathbf{O}}) = \mathbf{U}^*_{\underline{\mathbf{O}}}\left(\mathbf{U}^T_{\underline{\mathbf{O}}}\mathbf{F}_{\underline{\mathbf{O}}}\mathbf{U}^*_{\underline{\mathbf{O}}}\right)^{-1}\mathbf{U}^T_{\underline{\mathbf{O}}} \text{ où } \mathbf{U}_{\underline{\mathbf{O}}} \text{ est une base de } \ker\left\{\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{O}})}{\partial \underline{\mathbf{O}}^T}\right\}.$$

De plus, du fait de la structure bloc diagonale de $\mathbf{F}(\underline{\mathbf{O}})$ (64), si l'ensemble des contraintes égalités possède la forme ("séparée" en $\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}^T$ et $\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{n}}^T$) suivante :

$$\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{O}}) = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{s}}(\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}) = \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{n}}) = \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

alors, relativement aux paramètres des cibles, la BCR contrainte s'écrit simplement :

$$\mathbf{BCR}^c_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}|\underline{\mathbf{O}}}(\underline{\mathbf{O}}) = \mathbf{U}^*_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}}\left(\mathbf{U}^T_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}}\mathbf{F}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}}\mathbf{U}^*_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}}\right)^{-1}\mathbf{U}^T_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}} \text{ où } \mathbf{U}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}} \text{ est une base de } \ker\left\{\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{s}}(\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}})}{\partial \underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}^T}\right\}. \tag{96}$$

Exemple 1 :
L'application de (96) sous la contrainte :

$$\boldsymbol{\Xi}^l - \boldsymbol{\Xi}^1 = \mathbf{0},\ l \in [2, L],$$

conduit à (cf. annexe XIII-C1) :

$$\mathbf{BCR}^c_{\boldsymbol{\Xi}|\underline{\mathbf{O}}}(\underline{\mathbf{O}}) = \left(\sum_{l=1}^{L} 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}^l_{\Xi}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^l\right) \odot \left(\left(\boldsymbol{\sigma}^l\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^H\right)^T \otimes \mathbf{1}_{P\times P}\right)\right\}\right)^{-1} \tag{97}$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^l_{\Xi}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^l\right)_{m_1,m_2} &= \mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l}\left(\Pi^{\perp}_{\left\{\mathbf{B}^l(\boldsymbol{\Xi})\right\}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{b}^l\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{m_2}\right)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T}\right\}\right), \Pi^{\perp}_{\left\{\mathbf{B}^l(\boldsymbol{\Xi})\right\}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{b}^l\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{m_1}\right)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T}\right\}\right)\right), \\ \left\langle \mathbf{x}(f) \mid \mathbf{y}(f)\right\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l} &= \int_{-\frac{B^l}{2}}^{\frac{B^l}{2}} \mathbf{y}(f)^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^l\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l\right)^{-1}\mathbf{x}(f)\,df. \end{aligned}$$

Ce résultat général inclut les cas suivants :

• le modèle de propagation variable, sources fluctuantes (cf. paragraphe VI-B) pour un modèle de bruit variable ou constant (il suffit alors de poser $\langle \mathbf{x}(f) \mid \mathbf{y}(f) \rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l} = \langle \mathbf{x}(f) \mid \mathbf{y}(f) \rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}$),

• le modèle de propagation constant (y compris le bruit), sources fluctuantes (cf. paragraphe VI-B). Dans ce cas (97) se simplifie pour devenir [68] :

$$\begin{aligned}
\mathbf{BCR}^c_{\Xi|\underline{\mathbf{O}}}(\underline{\mathbf{O}}) &= \left(2L\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}_{\Xi}(\underline{\boldsymbol{\theta}}) \odot (\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{1}_{P\times P})\right\}\right)^{-1}, \quad \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\left(\boldsymbol{\sigma}^l\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^H\right)^T \qquad (98)\\
\mathbf{H}_{\Xi}(\underline{\boldsymbol{\theta}})_{m_1,m_2} &= \mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}\left(\Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(\Xi)\}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{b}(\boldsymbol{\varepsilon}_{m_2})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T}\right\}\right), \Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(\Xi)\}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{b}(\boldsymbol{\varepsilon}_{m_1})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T}\right\}\right)\right)\\
\langle \mathbf{x}(f) \mid \mathbf{y}(f) \rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}} &= \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \mathbf{y}(f)^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(f, \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})^{-1} \mathbf{x}(f)\, df.
\end{aligned}$$

Exemple 2 :
L'application de (96) sous la contrainte :

$$\boldsymbol{\Xi}^l - \boldsymbol{\Xi}^1 = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma}^l - \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{0}\ ,\ l \in [2, L]\,,$$

conduit à (cf. annexe XIII-C2) :

$$\mathbf{BCR}^c_{\Xi|\underline{\mathbf{O}}}(\underline{\mathbf{O}}) = \left(2L\,\mathrm{Re}\left\{\langle \mathbf{C}\rangle - \langle \mathbf{D}\rangle^H \langle \mathbf{G}\rangle^{-1} \langle \mathbf{D}\rangle\right\}\right)^{-1} \qquad (99)$$

$$\langle \mathbf{C}\rangle = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l(t;\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{s}})}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\}, \left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l(t;\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{s}})}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\}\right), \quad \langle \mathbf{D}\rangle = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l(t;\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{s}})}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\}, \left\{\mathbf{B}^l(t;\Xi)\right\}\right)$$

$$\langle \mathbf{E}\rangle = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l}\left(\left\{\mathbf{B}^l(t;\Xi)\right\}, \left\{\mathbf{B}^l(t;\Xi)\right\}\right), \quad \langle \mathbf{x}(f) \mid \mathbf{y}(f) \rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l} = \int_{-\frac{B_l}{2}}^{\frac{B_l}{2}} \mathbf{y}(f)^H \mathbf{R}^l_{\mathbf{n}}\left(f, \underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}\right)^{-1} \mathbf{x}(f)\, df.$$

Ce résultat général inclus les cas suivants :

• le modèle de propagation variable, sources non fluctuantes (cf. paragraphe VI-B) pour un modèle de bruit variable ou constant (il suffit alors de poser $\langle \mathbf{x}(f) \mid \mathbf{y}(f) \rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l} = \langle \mathbf{x}(f) \mid \mathbf{y}(f) \rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}$),

• le modèle de propagation constant (y compris le bruit), sources non fluctuantes. Dans ce cas (99) se simplifie pour retrouver (59) dans le cas L observations indépendantes du même modèle d'observation :

$$\begin{aligned}
\mathbf{BCR}^c_{\Xi|\underline{\mathbf{O}}}(\underline{\mathbf{O}}) &= \left(2L\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}_{\Xi}(\underline{\boldsymbol{\theta}}) \odot \left(\left(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^H\right)^T \otimes \mathbf{1}_{K\times K}\right)\right\}\right)^{-1} \qquad (100)\\
\mathbf{H}_{\Xi}(\underline{\boldsymbol{\theta}}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\underline{\boldsymbol{\theta}})_{1,1} & \dots & \mathbf{H}(\underline{\boldsymbol{\theta}})_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}(\underline{\boldsymbol{\theta}})_{M,1} & \dots & \mathbf{H}(\underline{\boldsymbol{\theta}})_{M,M} \end{bmatrix}\\
\mathbf{H}(\underline{\boldsymbol{\theta}})_{m_1,m_2} &= \mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}\left(\Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(\Xi)\}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{b}(\boldsymbol{\varepsilon}_{m_2})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T}\right\}\right), \Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(\Xi)\}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{b}(\boldsymbol{\varepsilon}_{m_1})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T}\right\}\right)\right)\\
\langle \mathbf{x}(f) \mid \mathbf{y}(f) \rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}} &= \int_{-\frac{B_l}{2}}^{\frac{B_l}{2}} \mathbf{y}(f)^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(f, \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})^{-1} \mathbf{x}(f)\, df.
\end{aligned}$$

B. Solution du problème n°2

Le modèle d'observation cohérent (cf. paragraphe VI-C) peut être obtenu à partir du modèle d'observation incohérent de deux façons duales :

• par l'introduction de $(L-1)\times M$ contraintes d'égalité sur les paramètres $\boldsymbol{\sigma}_l$:

$$\sigma_m^l - \sigma_m e^{j2\pi\nu_m(l-1)T} = 0, \quad 2 \leq l \leq L, \quad 1 \leq m \leq M,$$

• ou par une reparamétrisation injective des paramètres $\boldsymbol{\sigma}_l$:

$$\boldsymbol{\sigma}_l = \boldsymbol{\sigma}_l\left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nu}\right), \quad 1 \leq l \leq L.$$

La réponse à notre problématique découle de l'inégalité de reparamétrisation (85) :

$$\mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}\right)\right) \geq \mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\omega}}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}\right)$$

lorsque $\underline{\boldsymbol{\theta}}^T = \left(\boldsymbol{\sigma}_1^T, \boldsymbol{\sigma}_1^H, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_L^T, \boldsymbol{\sigma}_L^H, \boldsymbol{\tau}^T, \sigma_n^2\right)$ et $\underline{\boldsymbol{\omega}}^T = \underline{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}^T = \left(\boldsymbol{\sigma}_1^T, \boldsymbol{\sigma}_1^H, \boldsymbol{\tau}^T, \boldsymbol{\nu}^T, \sigma_n^2\right)$ (en intoduisant la notation (79)). Par conséquent :

$$\mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\tau}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}\right)\right) \geq \mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\tau}|\underline{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}}\left(\underline{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}\right), \tag{101}$$

ce qui signifie que la meilleure performance asymptotique en estimation des retards est obtenue pour un modèle paramétrique prenant également en compte l'information Doppler (modèle d'observation cohérent). Cette amélioration de performance se fait néanmoins au prix d'un accroissement de la complexité de mise en oeuvre, car l'EMV "cohérent" associé requiert la recherche d'un extrémum sur un espace de paramètres de dimension $2M$:

$$\left(\widehat{\boldsymbol{\tau}},\widehat{\boldsymbol{\nu}}\right)_{\text{cohérent}} = \arg\max_{(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu})}\left\{\left\|\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu})}\mathbf{X}\right\|^2\right\}, \quad \mathbf{A}\left(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu}\right) = \left[\boldsymbol{\psi}\left(\nu_1\right)\otimes\mathbf{a}\left(\tau_1\right), \cdots, \boldsymbol{\psi}\left(\nu_M\right)\otimes\mathbf{a}\left(\tau_M\right)\right] \tag{102}$$

alors que l'EMV "incohérent" requiert la recherche d'un extrémum sur un espace de paramètres de dimension M :

$$\left(\widehat{\boldsymbol{\tau}}\right)_{\text{incohérent}} = \arg\max_{\boldsymbol{\tau}}\left\{\sum_{l=1}^{L}\left\|\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}(\boldsymbol{\tau})}\mathbf{x}^l\right\|^2\right\}, \quad \mathbf{A}\left(\boldsymbol{\tau}\right) = \left[\mathbf{a}\left(\tau_1\right), \cdots, \mathbf{a}\left(\tau_M\right)\right], \tag{103}$$

où :

$$\mathbf{X}^T = \left(\left(\mathbf{x}^1\right)^T, \ldots, \left(\mathbf{x}^L\right)^T\right), \ \mathbf{x}^l = \left(x^l\left(1\right), \ldots, x^l\left(I\right)\right)^T, \ x^l\left(i\right) = \sum_{m=1}^{M} e_T\left(\frac{i}{B} - \tau_m\right)\sigma_m^l + n^l\left(\frac{i}{B}\right)$$

$$\mathbf{a}\left(\tau\right) = \left[\ldots, e_T\left(\frac{i}{B} - \tau\right), \ldots\right]^T, \quad \boldsymbol{\psi}\left(\nu\right) = \left(1, \ldots, e^{j2\pi\nu(L-1)T_r}\right)^T.$$

Dans le cas particulier où tous les points brillants ont la même vitesse : $\upsilon_m = \upsilon, 1 \leq m \leq M$ (par exemple l'ensemble des point brillants associés à la cellule d'un avion), alors $\mathbf{H}_{(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu})}\left(\underline{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}\right) = \mathbf{0}$, ce qui conduit à l'égalité entre la BCR cohérente (69) et la BCR incohérente (68) pour l'estimation des retards :

$$\boldsymbol{\nu} = \nu\mathbf{1}_{M\times 1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\tau}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\left(\underline{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}\right)\right) = \mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\tau}|\underline{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}}\left(\underline{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}\right).$$

Dans ce cas particulier, les 2 EMV (102)(103) ont les mêmes performances asymptotiques. Par contre en terme de complexité de mise en oeuvre, le meilleur choix est l' EMV incohérent (103).

Cet exemple illustre l'utilité potentielle de l'inégalité de reparamétrisation comme outil d'analyse pour la conception des systèmes en zone asymptotique.

C. Influence de l'état connu / inconnu des paramètres sur la borne de Cramèr-Rao

Dans un modèle d'observation paramétrique, un ou plusieurs paramètres peuvent être connus ou inconnus selon les conditions expérimentales. Si la valeur d'un paramètre est connue durant l'observation, alors elle peut être prise en compte, sinon elle doit être estimée.
Pour prendre en compte les deux "états" possibles (connu / inconnu) de chaque paramètre, nous introduisons la notation suivante de la d.d.p. d'un vecteur d'observation $\mathbf{x}$:

$$p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}};\underline{\boldsymbol{\kappa}}\right) \equiv p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}_{inconnu};\underline{\boldsymbol{\kappa}}_{connu}\right)$$

où $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ est le vecteur des paramètres inconnus et $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$ est le vecteur des paramètres connus. Si tous les paramètres sont inconnus alors on convient que : $p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}_{inconnu};\varnothing\right) \equiv p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}_{inconnu}\right) \equiv p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$.
Conformément à cette notation, la forme générale de la BCR (79) devient :

$$\mathbf{BCR}_{\underline{\mathbf{g}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0;\underline{\boldsymbol{\kappa}}^0\right) = \left(\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)^T}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^H \mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0;\underline{\boldsymbol{\kappa}}^0\right)\left(\frac{\partial\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)^T}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right) \tag{104}$$

où :

$$\mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0;\underline{\boldsymbol{\kappa}}^0\right) = \mathbf{F}^{-1}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0;\underline{\boldsymbol{\kappa}}^0}, \quad \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0;\underline{\boldsymbol{\kappa}}^0} = E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0;\underline{\boldsymbol{\kappa}}^0}\left[\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0;\underline{\boldsymbol{\kappa}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0;\underline{\boldsymbol{\kappa}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^H\right] \tag{105}$$

et $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}^0$ sont des valeurs particulières de $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ et $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$.
En fait, un paramètre connu dans un modèle paramétrique déterministe est simplement un paramètre inconnu dont la valeur est connue au moment de l'observation, ce qui peut être formulé sous forme de contraintes égalités :

$$p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}};\underline{\boldsymbol{\kappa}}^0\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\eta}}\right),\ \underline{\boldsymbol{\eta}}^T = \left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^T,\underline{\boldsymbol{\kappa}}^T\right) \\ \underline{\boldsymbol{\kappa}} = \underline{\boldsymbol{\kappa}}^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\eta}}\right),\ \underline{\boldsymbol{\eta}}^T = \left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^T,\underline{\boldsymbol{\kappa}}^T\right) \\ \underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\eta}}\right) = \underline{\boldsymbol{\kappa}} - \underline{\boldsymbol{\kappa}}^0 = \mathbf{0} \end{array}\right.,\ \dim\left\{\underline{\boldsymbol{\theta}}\right\} = P_u,\ \dim\left\{\underline{\boldsymbol{\kappa}}\right\} = P_k$$

Puisque :

$$\frac{\partial\underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\eta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\eta}}^T} = \left[\mathbf{0},\mathbf{I}_{P_k}\right] \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left(P_k,P_u+P_k\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} = \left[\begin{array}{c}\mathbf{I}_{P_u}\\ \mathbf{0}\end{array}\right] \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left(P_u+P_k,P_u\right)$$

alors (75) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0;\underline{\boldsymbol{\kappa}}^0\right) &= \mathbf{BCR}^c_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\eta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\eta}}^0\right) = \mathbf{U}^*_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\mathbf{U}^T_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\eta}}^0}\mathbf{U}^*_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\right)^{-1}\mathbf{U}^T_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} \\
&= E_{\underline{\boldsymbol{\eta}}^0}\left[\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\eta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\eta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^H\right]^{-1} \\
&= E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0;\underline{\boldsymbol{\kappa}}^0}\left[\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0;\underline{\boldsymbol{\kappa}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0;\underline{\boldsymbol{\kappa}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^H\right]^{-1}
\end{aligned}$$

Par conséquent, en appliquant (85) et (93), nous obtenons :

$$\mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0;\underline{\boldsymbol{\kappa}}^0\right) = \mathbf{BCR}^c_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\eta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\eta}}^0\right) \leq \mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\eta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\eta}}^0\right)$$

et nous pouvons en déduire que :

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0;\underline{\boldsymbol{\kappa}}^0\right) = \mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\eta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\eta}}^0\right) \ \text{ ssi } E_{\underline{\boldsymbol{\eta}}^0}\left[\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\eta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\eta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\kappa}}}\right)^H\right] = \mathbf{0} \\
\mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0;\underline{\boldsymbol{\kappa}}^0\right) < \mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\eta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\eta}}^0\right) \ \text{ ssi } E_{\underline{\boldsymbol{\eta}}^0}\left[\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\eta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\frac{\partial\ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\eta}}^0\right)}{\partial\underline{\boldsymbol{\kappa}}}\right)^H\right] \neq \mathbf{0}
\end{array}\right., \underline{\boldsymbol{\eta}}^T = \left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^T,\underline{\boldsymbol{\kappa}}^T\right) \tag{106}$$

Cette dérivation originale de la BCR en tenant compte de l'état (connu / inconnu) des paramètres nous permet de revisiter certains résultats fort bien connus :

• premièrement : quel que soit le modèle d'observation paramétrique, seules les dérivées par rapport aux paramètres inconnus sont prises en compte dans le calcul de la FIM.

• deuxièment : si $E_{\underline{\boldsymbol{\eta}}^0}\left[\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\eta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\eta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\kappa}}}\right)^H\right] = \mathbf{0}$, alors les performances asymptotiques en estimation de $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ et $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$ à partir de l'observation $\mathbf{x}$ de d.d.p. $p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\eta}}\right)$, $\underline{\boldsymbol{\eta}}^T = \left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^T, \underline{\boldsymbol{\kappa}}^T\right)$, sont décorrélées : les performances asymptotiques en estimation de $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ sont indépendantes de l'état connu ou inconnu des paramètres $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$, et vice versa.

• troisièment : si $E_{\underline{\boldsymbol{\eta}}^0}\left[\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\eta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\eta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\kappa}}}\right)^H\right] \neq \mathbf{0}$ et si $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ regroupe les paramètres inconnus d'intérêt que nous cherchons prioritairement à estimer et $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$ des paramètres également inconnus mais que nous ne cherchons pas à estimer, alors selon (106) le changement d'état des paramètres $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$ de connus à inconnus dégrade la BCR des paramètres d'intérêt $\underline{\boldsymbol{\theta}}$. D'où la dénomination de paramètres "de nuisance " adoptée dans les travaux sur le sujet [63][28][51][29].

D. Meilleure et pire borne de Cramèr-Rao

L'objectif de ce paragraphe est d'illustrer de nouveau l'intérêt de l'inégalité de reparamétrisation (85) comme outil de comparaison entre BCR. Il s'agit de donner une démonstration simple et compacte du résultat publié dans [69] pour le cas du modèle d'observation gaussien déterministe, et de l'étendre au modèle d'observation gaussien stochastique.

Le modèle d'observation considéré dans [69] est la version "instantannée" de (60) (1 seul instant d'observation t) correspondant à une hypothèse monochromatique des signaux émis (cisoïdes). Il s'écrit :

$$\mathbf{x}^l = \mathbf{B}^l\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)\boldsymbol{\sigma}^l + \mathbf{n}^l, \quad l \in [1, L], \tag{107}$$

où L est le nombre des observations, M est le nombre des signaux sources, et :

• $\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)^T = \left(\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1^l\right)^T, \ldots, \left(\boldsymbol{\varepsilon}_M^l\right)^T\right)$ où $\boldsymbol{\varepsilon}_m^l$ est le vecteur des paramètres de dimension P^l de la $m^{ème}$ source à la $l^{ème}$ observation,

• $\boldsymbol{\sigma}^l = \left(\sigma_1^l, \ldots, \sigma_M^l\right)^T$ est le vecteur des amplitudes complexes des M sources à la $l^{ème}$ observation,

• $\mathbf{B}^l\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right) = \left[\mathbf{b}^l\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1^l\right), \ldots, \mathbf{b}^l\left(\boldsymbol{\varepsilon}_M^l\right)\right]$ où $\mathbf{b}^l(\ )$ est le vecteur des N fonctions paramétriques dépendantes de P^l paramètres de $\boldsymbol{\varepsilon}_m^l$,

• $\mathbf{n}^l$ est un bruit gaussien complexe, centré et circulaire de matrice de covariance spatiale $\mathbf{C}_{\mathbf{n}^l} = \sigma_{\mathbf{n}^l}^2\mathbf{I}$, indépendant d'observation à observation et indépendant des M signaux sources.

De plus :

• si $\left\{\boldsymbol{\sigma}^1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}^L\right\}$ sont des vecteurs déterministes, alors (107) est un modèle d'observation (gaussien) déterministe de d.d.p. :

$$p\left(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^L\right) = \prod_{l=1}^{L} p\left(\mathbf{x}^l\right), \quad p\left(\mathbf{x}^l\right) = \frac{e^{-\frac{1}{\sigma_{\mathbf{n}^l}^2}\left\|\mathbf{x}^l - \mathbf{B}^l\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)\boldsymbol{\sigma}^l\right\|^2}}{\pi^N\left(\sigma_{\mathbf{n}^l}^2\right)^N} \tag{108}$$

• si $\left\{\boldsymbol{\sigma}^1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}^L\right\}$ sont gaussiens, centrés, complexes, circulaires de matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}^l}$ et indépendants d'observation à observation, alors (107) est un modèle d'observation (gaussien) stochastique de d.d.p. :

$$p\left(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^L\right) = \prod_{l=1}^{L} p\left(\mathbf{x}^l\right), \quad p\left(\mathbf{x}^l\right) = \frac{e^{-\left(\mathbf{x}^l\right)^H\mathbf{C}_{\mathbf{x}^l}^{-1}\mathbf{x}^l}}{\pi^N\left|\mathbf{C}_{\mathbf{x}^l}\right|}, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{x}^l} = \mathbf{B}^l\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)\mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}^l}\mathbf{B}^l\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)^H + \sigma_{\mathbf{n}^l}^2\mathbf{I} \tag{109}$$

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}^l} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}^l}, \quad \mathbf{R}_{\mathbf{x}^l} = \mathbf{C}_{\mathbf{x}^l} = \mathbf{B}^l\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}^l}\mathbf{B}^l\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)^H + \sigma_{\mathbf{n}^l}^2\mathbf{I}$$

Généralement, les articles [68][56][57] et les ouvrages de référence [63][28][51][42] prennent en compte le modèle restreint pour lequel les N fonctions paramétriques $\mathbf{b}^{\,l}\left(\varepsilon_m^l\right)$, la variance du bruit $\sigma_{\mathbf{n}^l}^2$ et la matrice de covariance des sources $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}^l}$ sont invariants durant les L observations :

$$\mathbf{b}^l\left(\varepsilon_m^l\right) = \mathbf{b}\left(\varepsilon_m\right),\ P^l = P,\ \sigma_{\mathbf{n}^l}^2 = \sigma_{\mathbf{n}}^2,\ \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}^l} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}},\ \mathbf{R}_{\mathbf{x}^l} = \mathbf{R}_{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)^H + \sigma_{\mathbf{n}}^2\mathbf{I}. \tag{110}$$

Dans ce cas (110), la BCR des paramètres d'intérêts $\boldsymbol{\Xi}$ est donnée pour les 2 modèles d'observation par [63][68][56] :

$$\mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\Xi}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}^{-1}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = \frac{2L}{\sigma_{\mathbf{n}}^2}\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\odot\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\sigma}}^T\otimes\mathbf{1}_{P\times P}\right)\right\} \tag{111}$$

où :

$$\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\Xi}\right) = \mathbf{D}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)^H\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})}^{\perp}\mathbf{D}\left(\boldsymbol{\Xi}\right),\quad \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})}^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{B}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\left(\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)^H\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\right)^{-1}\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)^H,$$

$$\mathbf{D}\left(\boldsymbol{\Xi}\right) = \left[\mathbf{D}_1\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1\right),\ldots,\mathbf{D}_M\left(\boldsymbol{\varepsilon}_M\right)\right],\quad \mathbf{D}_m\left(\boldsymbol{\varepsilon}_m\right) = \frac{\partial\mathbf{b}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_m\right)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^T},$$

et le vecteur des paramètres inconnus $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ et la matrice de corrélation $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}$ dépendent du modèle d'observation considéré :

• si le modèle d'observation est déterministe (108), alors [63][68][56]:

$$\underline{\boldsymbol{\theta}}^T = \left(\left(\boldsymbol{\sigma}^1\right)^T,\ldots,\left(\boldsymbol{\sigma}^L\right)^T,\left(\boldsymbol{\sigma}^{*1}\right)^T,\ldots,\left(\boldsymbol{\sigma}^{*L}\right)^T,\boldsymbol{\Xi}^T,\sigma_{\mathbf{n}}^2\right),\quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\boldsymbol{\sigma}^l\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^H.$$

• si le modèle d'observation est stochastique (109), alors [63][56][57]:

$$\underline{\boldsymbol{\theta}}^T = \left(\mathbf{vec}\left(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}\right),\boldsymbol{\Xi}^T,\sigma_{\mathbf{n}}^2\right),\quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}\left(\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)^H\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\right)\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}},\quad \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}^H.$$

Étant donnée l'expression (111) de la BCR, il est tout à fait naturel d'explorer la dépendance de la borne de Cramèr-Rao pour les paramètres d'intérêt $\boldsymbol{\Xi}$ par rapport aux paramètres d'amplitude des signaux $(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}})$, lesquels sont généralement considérés comme des paramètres de nuisance.
Par conséquent, une question pertinente est : quelle est la matrice de corrélation $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}$ qui conduit à la meilleure (plus petite) ou à la pire (plus grande) BCR (111) ?

1) Modèle d'observation déterministe:

Pour le modèle d'observation déterministe, la réponse a été donnée par les auteurs de [69] au prix d'une démonstration complexe, alors qu'elle peut être déduite en quelques lignes par l'utilisation de l'inégalité de reparamétrisation (85) comme nous le montrons ci-après.
Supposons que tous les paramètres $\boldsymbol{\varepsilon}_l$ soient connus à l'exception de $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ correspondant à la $m^{ème}$ source, alors la BCR de cette dernière est donnée par (111) :

$$\mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\varepsilon}_m|\underline{\boldsymbol{\theta}_m}}^{-1}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}_m};\underline{\boldsymbol{\kappa}_m}\right) = \frac{2L}{\sigma_{\mathbf{n}}^2}\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_m\right)\right\}\left(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}\right)_{m,m},\quad \mathbf{H}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_m\right) = \mathbf{D}_m\left(\boldsymbol{\varepsilon}_m\right)^H\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})}^{\perp}\mathbf{D}_m\left(\boldsymbol{\varepsilon}_m\right)$$

$$\underline{\boldsymbol{\theta}_m}^T = \left(\left(\boldsymbol{\sigma}^1\right)^T,\ldots,\left(\boldsymbol{\sigma}^L\right)^T,\left(\boldsymbol{\sigma}^{*1}\right)^T,\ldots,\left(\boldsymbol{\sigma}^{*L}\right)^T,\boldsymbol{\varepsilon}_m,\sigma_{\mathbf{n}}^2\right),\quad \underline{\boldsymbol{\kappa}_m} = \boldsymbol{\Xi}\setminus\left\{\boldsymbol{\varepsilon}_m\right\}$$

et selon (106) :

$$\mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\varepsilon}_m|\underline{\boldsymbol{\theta}_m}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}_m};\underline{\boldsymbol{\kappa}_m}\right) \le \mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\varepsilon}_m|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)\quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\varepsilon}_m|\underline{\boldsymbol{\theta}}}^{-1}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) \le \mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\varepsilon}_m|\underline{\boldsymbol{\theta}_m}}^{-1}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}_m};\underline{\boldsymbol{\kappa}_m}\right)$$

Si la matrice $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}$ est diagonale, alors $\mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\Xi}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}^{-1}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$ (111) est bloc-diagonale et l'inégalité ci-dessus devient une égalité : pour chaque source, la meilleure BCR est atteinte quand les amplitudes des sources sont décorrélées.
Maintenant supposons que les N fonctions paramétriques $\mathbf{b}^l\left(\ \right)$ de (107) soient invariantes durant les L

observations ($\mathbf{b}^l\left(\boldsymbol{\varepsilon}_m^l\right) = \mathbf{b}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_m^l\right)$, $P^l = P$) et notons $\overline{\boldsymbol{\Xi}} = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\boldsymbol{\Xi}^l$.
En tenant compte de l'indépendance des L observations, on peut aisément établir que :

$$\mathbf{BCR}_{\overline{\boldsymbol{\Xi}}|\underline{\boldsymbol{\eta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\eta}}\right) = \frac{1}{L^2}\left(\sum_{l=1}^{L}\mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\Xi}^l|\underline{\boldsymbol{\theta}}^l}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^l\right)\right), \quad \mathbf{BCR}^{-1}_{\boldsymbol{\Xi}^l|\underline{\boldsymbol{\theta}}^l}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^l\right) = \frac{2}{\sigma^2_{\mathbf{n}^l}}\operatorname{Re}\left\{\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)\odot\left(\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^*\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^T\otimes\mathbf{1}_{P\times P}\right)\right\}$$
$$\underline{\boldsymbol{\eta}}^T = \left(\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^1\right)^T,\ldots,\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^L\right)^T\right), \quad \left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^l\right)^T = \left(\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^T,\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^H,\boldsymbol{\Xi}^l,\sigma^2_{\mathbf{n}^l}\right).$$

En fait, les hypothèses d'invariance usuelles (110) se traduisent par un ensemble de contraintes égalité sur les paramètres :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^l - \boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{0}, \quad \sigma^2_{\mathbf{n}^l} - \sigma^2_{\mathbf{n}} = 0, \quad l\in[1,L].$$

Sous l'ensemble de ces contraintes, $\overline{\boldsymbol{\Xi}} = \boldsymbol{\Xi}$ et l'expression de $\mathbf{BCR}_{\overline{\boldsymbol{\Xi}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$ est donnée par (111) qui vérifie donc (85) :

$$\mathbf{BCR}_{\overline{\boldsymbol{\Xi}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) \leq \mathbf{BCR}_{\overline{\boldsymbol{\Xi}}|\underline{\boldsymbol{\eta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\eta}}\right).$$

Pour le cas particulier où $\underline{\boldsymbol{\eta}}$ satisfait $\boldsymbol{\varepsilon}_m^l = \boldsymbol{\varepsilon}_m^1 = \boldsymbol{\varepsilon}_m$, $P^l = P^1 = P$, $\sigma^2_{\mathbf{n}^l} = \sigma^2_{\mathbf{n}^1} = \sigma^2_{\mathbf{n}}$, $l\in[1,L]$, nous obtenons :

$$\frac{\sigma^2_{\mathbf{n}}}{2L}\operatorname{Re}\left\{\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\odot\left(\mathbf{R}^T_{\boldsymbol{\sigma}}\otimes\mathbf{1}_{P\times P}\right)\right\}^{-1} \leq \frac{1}{L^2}\left(\sum_{l=1}^{L}\frac{\sigma^2_{\mathbf{n}}}{2}\operatorname{Re}\left\{\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\odot\left(\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^*\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^T\otimes\mathbf{1}_{P\times P}\right)\right\}^{-1}\right)$$

ou plus simplement:

$$\operatorname{Re}\left\{\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\odot\left(\mathbf{R}^T_{\boldsymbol{\sigma}}\otimes\mathbf{1}_{P\times P}\right)\right\}^{-1} \leq \frac{1}{L}\left(\sum_{l=1}^{L}\operatorname{Re}\left\{\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\odot\left(\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^*\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^T\otimes\mathbf{1}_{P\times P}\right)\right\}^{-1}\right)$$

Or $\operatorname{Re}\left\{\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\odot\left(\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^*\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^T\otimes\mathbf{1}_{P\times P}\right)\right\}^{-1} \geq 0$, $\forall l\in[1,L]$, par conséquent :

$$\operatorname{Re}\left\{\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\odot\left(\mathbf{R}^T_{\boldsymbol{\sigma}}\otimes\mathbf{1}_{P\times P}\right)\right\}^{-1} \leq \operatorname{Re}\left\{\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\odot\left(\left(\boldsymbol{\sigma}^{l_{\max}}\right)^*\left(\boldsymbol{\sigma}^{l_{\max}}\right)^T\otimes\mathbf{1}_{P\times P}\right)\right\}^{-1}$$
$$l_{\max} = \arg\left(\max_{l\in[1,L]}\left\{\operatorname{Re}\left\{\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\odot\left(\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^*\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^T\otimes\mathbf{1}_{P\times P}\right)\right\}^{-1}\right\}\right).$$

Il y a égalité si et seulement si $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\boldsymbol{\sigma}^{l_{\max}}\right)^*\left(\boldsymbol{\sigma}^{l_{\max}}\right)^T$, c'est à dire si $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}$ est de rang 1.

Finalement, pour chaque source [69]:
• la pire BCR (la plus grande) est obtenue lorsque les amplitudes des sources sont parfaitement corrélées,
• la meilleure BCR (la plus petite) est obtenue lorsque les amplitudes des sources sont décorrélées.

2) Modèle d'observation stochastique:
Puisque la BCR des paramètres d'intérêt possède une expression identique (111) pour les modèles d'observation déterministe et stochastique, les résultats précédents sont valables pour $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\sigma}}$ s'exprimant par :

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}\left(\mathbf{B}^H\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{B}\right)\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}},\ \mathbf{R}_{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{B}^H + \sigma^2_{\mathbf{n}}\mathbf{I},\ \mathbf{B}\equiv\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\Xi}\right),\ \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^H_{\boldsymbol{\sigma}}.$$

Par conséquent :

• Premièrement, puisque $rang\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\sigma}}\right) = rang\left(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}\right)$ sous l'hypothèse usuelle que les vecteurs de $\mathbf{B}$ sont indépendants [63][42], la pire BCR est obtenue lorsque $rang\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\sigma}}\right) = 1 = rang\left(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}\right)$, c'est à dire quand les amplitudes des sources sont complètement corrélées.

• Deuxièment, la meilleure BCR pour chaque source est obtenue lorsque $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\sigma}}$ est diagonale : $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\lambda}$, $\left(\boldsymbol{\lambda}\right)_{m,l} = \left(\boldsymbol{\lambda}\right)_{m,m}\delta^l_m$. Alors, nécessairement $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}$ est une matrice hermitienne inversible vérifiant $\boldsymbol{\lambda} =$

$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}\left(\mathbf{B}^H\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{B}\right)\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}^H$, c'est à dire que la matrice $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}$ diagonalise $\left(\mathbf{B}^H\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{B}\right)$, matrice hermitienne définie positive. Par conséquent, $\frac{\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}}{\alpha}$, $\alpha > 0$, doit être définie, positive, unitaire et hermitienne :

$$\frac{\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}}{\alpha} = \mathbf{U} > \mathbf{0} \ / \ \mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{I} \text{ et } \mathbf{U} = \mathbf{U}^H \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} > 0 \text{ et } \mathbf{U}^2 = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha\mathbf{I}$$

Réciproquement, si $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha\mathbf{I}$ alors :

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}\left(\mathbf{B}^H\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{B}\right)\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}^H \ \Leftrightarrow \ \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\alpha^2} = \mathbf{B}^H\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{B},$$

ce qui signifie que la matrice $\mathbf{B}$ diagonalise $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}$. Par conséquent, les colonnes de la matrice $\mathbf{B}$ doivent être orthogonales.
L'énoncé de cette condition nécessaire à l'obtention de la meilleure BCR stochastique est nouvelle à notre connaissance (elle n'apparait pas dans [63, p 950], par exemple), alors que la condition qui conduit à la pire BCR $(rang\left(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}\right) = 1)$ est mentionnée dans [63, p 954] avec comme référence [69].

Finalement, pour chaque source :
• la pire BCR (la plus grande) est obtenue lorsque les amplitudes des sources sont parfaitement corrélés $(rang\left(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}\right) = 1)$,
• la meilleur BCR (la plus petite) est obtenue lorsque $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha\mathbf{I}$ et que les vecteurs colonnes de $\mathbf{B}$ $(\boldsymbol{\Xi})$ sont orthogonales.

IX. Borne de Cramèr-Rao pour radar SIMO quasi-monostatique et mouvements rectilignes uniformes radials

Rappelons qu'un radar SIMO quasi-monostatique est un radar pour lequel (cf. paragraphe IV-C) :
• le réseau de réception (N récepteurs) vérifie l'approximation réseau bande étroite,
• le réseau d'émission est composé d'un seul émetteur ($I = 1$),
• le centre de phase O du réseau de réception coincide avec la position de l'unique émetteur (que nous choisissons comme origine du repère géométrique).
Le modèle d'observation paramétrique en sortie du filtre de Hilbert en présence de M cibles (diffracteurs) ponctuels D_m en champs lointains dont les cinématiques sont MRUR ($\mathbf{p}_{D_m}(t) = \mathbf{u}_{D_m}(r_m + v_m t)$) est donné par :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{a}(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t)\, e^{-j4\pi\left(\frac{r_m + v_m t}{\lambda_c}\right)} \frac{e_T\left(\alpha_m\left(t - \frac{2r_m}{c}\right)\right)}{(r_m + v_m t)^2} \frac{\lambda_c \sigma_m}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} + \mathbf{n}(t), \quad \alpha_m = 1 - \frac{2v_m}{c} \tag{112}$$

$$a_n(\boldsymbol{\varsigma}_m, f_c, t) = e^{j2\pi f_c \frac{\mathbf{u}_{D_m} \cdot \mathbf{p}_{R_n}(t)}{c}} \sqrt{G_{R_n}(f_c, \mathbf{u}_{D_m})} \sqrt{G_T(f_c, \mathbf{u}_{D_m})}$$

$$\mathbf{R_n}(f), \ f \in \left[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}\right] \quad \rightleftharpoons \quad \mathbf{R_n}(\tau)$$

Le choix de l'architecture SIMO est une étape préliminaire à l'implémentation de la BCR pour une architecture MIMO quasi-monostatique. En effet, elle permet :
• de formuler pour chaque émetteur (ici l'émetteur 1) l'ensemble des grandeurs nécessaires au calcul de la BCR,
• de mettre en évidence les problèmes de calcul de ces grandeurs et l'influence des erreurs de calcul.

Afin de simplifier l'implémentation de la BCR, nous nous sommes restreints à la situation suivante :

• l'émetteur et les récepteurs occupent une position fixe dans le repère géométrique des cinématiques,

• les gains d'antenne sont isotropes,

• $e_T\left(\alpha\left(t - \frac{2r}{c}\right)\right) \simeq e_T\left(\alpha t - \frac{2r}{c}\right) = e_T\left(t - \frac{2(r+vt)}{c}\right)$, $\alpha = 1 - \frac{2v}{c}$. Cette approximation est licite si le biais distance introduit $\delta r = r(\alpha - 1)$ est négligeable par rapport à r, c'est à dire si :

$$|\alpha - 1| = \frac{2|v|}{c} \ll 1.$$

En radar, si $|v| = 1500 ms^{-1}$ (mach 4.5!) alors $\frac{2|v|}{c} = 10^{-5}$ et $|\delta r| \leq 10^{-5} r$, ce qui est *à priori* négligeable dans la plupart des applications.

• pendant les L observations indépendantes, le modèle de propagation est invariant, les trajectoires MRUR des sources sont invariantes, les sources sont fluctuantes et le bruit est blanc temporellement

et spatialement:

$$\mathbf{X}\left(t;\underline{\mathbf{O}}\right)^T = \mathbf{X}\left(t;\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}\right)^T = \left(\mathbf{x}^1\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^1\right)^T,\ldots,\mathbf{x}^L\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^L\right)^T\right)$$

$$\mathbf{x}^l\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^l\right) = \mathbf{s}^l\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^l\right) + \mathbf{n}^l\left(t\right), \quad \mathbf{s}^l\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^l\right) = \sum_{m=1}^{M}\mathbf{b}\left(t;\boldsymbol{\varepsilon}_m\right)\sigma_m^l = \mathbf{B}\left(t;\boldsymbol{\Xi}\right)\boldsymbol{\sigma}^l$$

$$\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}} = \left(\left(\boldsymbol{\sigma}^1\right)^T,\left(\boldsymbol{\sigma}^1\right)^H,\ldots,\left(\boldsymbol{\sigma}^L\right)^T,\left(\boldsymbol{\sigma}^L\right)^H,\boldsymbol{\Xi}^T\right), \quad \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^l = \left(\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^T,\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^H,\boldsymbol{\Xi}^T\right),$$

$$\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^T = \left(\sigma_1^l,\ldots,\sigma_M^l\right), \quad \boldsymbol{\Xi}^T = \left(\boldsymbol{\varepsilon}_1^T,\ldots,\boldsymbol{\varepsilon}_M^T\right), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_m^T = \left(r_m,v_m,\theta_m,\phi_m\right),$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n}^l}\left(f\right) = \mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f\right) = KT_A\mathbf{I},\ f\in\left[-\frac{B}{2},\frac{B}{2}\right]$$

où (θ,ϕ) désigne un couple de deux paramètres (deux angles directs, deux coordonnées catésiennes) paramétrant la direction $\mathbf{u}_D$ supportant le MRUR.

Sous ces hypothèses additionnelles (112) se simplifie et devient :

$$\mathbf{x}^l\left(t\right) = \sum_{m=1}^{M}\mathbf{b}\left(t;\boldsymbol{\varepsilon}_m\right)\sigma_m^l + \mathbf{n}^l\left(t\right), \quad \mathbf{b}\left(t;\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \frac{\lambda_c\sqrt{P_T}}{\left(4\pi\right)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{a}\left(\theta,\phi,f_c\right)x\left(t,r,v\right) \tag{113}$$

$$x\left(t,r,v\right) = \frac{e_T\left(t-\frac{2(r+vt)}{c}\right)e^{-j2\pi f_c\frac{2(r+vt)}{c}}}{\left(r+vt\right)^2}, \quad a_n\left(\theta,\phi,f_c\right) = \sqrt{G_T}\sqrt{G_{R_n}}e^{j2\pi f_c\frac{\mathbf{u}_D(\theta,\phi)\cdot\mathbf{p}_{R_n}}{c}}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n}^l}\left(f\right) = \mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f\right) = KT_A\mathbf{I},\ f\in\left[-\frac{B}{2},\frac{B}{2}\right]$$

Le signal transmis $e_T(t)$ est un train (rafale) de N_R impulsions élémentaires $e_0(t)$ de durée T_0 et de bande B émises à des instants t_0^i :

$$e_T\left(t\right) = \sum_{i=1}^{N_R}e_0\left(t-t_0^i\right), \quad \int_0^{T_0}\left|e_0\left(t\right)\right|^2dt = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}\left|e_0\left(f\right)\right|^2df = T_0.$$

L'enveloppe complexe $e_0(t)$ peut être un pulse standard modulé linéairement en fréquence (pulse LFM - Chirp) [16] ou un signal de type OFDM [67] (par exemple, avec un code optimisant la fonction d'ambiguïté monosource [52]).

La BCR est alors donnée par (98) :

$$\mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\Xi}|\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}}\left(\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}\right) = \left(\frac{2L}{KT_A}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}\left(\Xi\right)\odot\left(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}^T\otimes\mathbf{1}_{K\times K}\right)\right\}\right)^{-1}, \quad \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\left(\boldsymbol{\sigma}^l\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^H\right)^T \tag{114}$$

$$\mathbf{H}\left(\Xi\right) = \begin{bmatrix}\mathbf{H}_{1,1}\left(\Xi\right) & \ldots & \mathbf{H}_{1,M}\left(\Xi\right)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{H}_{M,1}\left(\Xi\right) & \ldots & \mathbf{H}_{M,M}\left(\Xi\right)\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{m_1,m_2}\left(\Xi\right) = \mathbf{G}\left(\Pi_{\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}}^{\perp}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{b}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{m_2}\right)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^T}\right\}\right),\Pi_{\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}}^{\perp}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{b}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{m_1}\right)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^T}\right\}\right)\right)$$

$$\left\langle\mathbf{x}\left(f\right)\mid\mathbf{y}\left(f\right)\right\rangle = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}\mathbf{y}\left(f\right)^H\mathbf{x}\left(f\right)df = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{y}\left(t\right)^H\mathbf{x}\left(t\right)dt = \left\langle\mathbf{x}\left(t\right)\mid\mathbf{y}\left(t\right)\right\rangle$$

A. Calcul de $\mathbf{H}_{m_1,m_2}(\Xi)$

Nous adoptons les notations simplifiées suivantes :

$$\mathbf{H}_{m_1,m_2} = \mathbf{H}_{m_1,m_2}(\Xi), \quad \mathbf{a}_m = \mathbf{a}(\theta_m, \phi_m, f_c), \quad x_m(t) = x(t, r_m, v_m), \quad \mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_M] \tag{115}$$

Alors :

$$\mathbf{H}_{m_1,m_2} = \mathbf{G}\left(\Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(\Xi)\}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{b}(\boldsymbol{\varepsilon}_{m_2})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T}\right\}\right), \Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(\Xi)\}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{b}(\boldsymbol{\varepsilon}_{m_1})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T}\right\}\right)\right) = \mathbf{C}_{m_1,m_2} - \mathbf{D}^H_{m_1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}_{m_2} \tag{116}$$

$$\mathbf{C}_{m_1,m_2} = \mathbf{G}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{b}(t;\boldsymbol{\varepsilon}_{m_2})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T}\right\}, \left\{\frac{\partial \mathbf{b}(t;\boldsymbol{\varepsilon}_{m_1})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T}\right\}\right), \quad \mathbf{D}_m = \mathbf{G}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{b}(t;\boldsymbol{\varepsilon}_m)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T}\right\}, \{\mathbf{B}(t;\boldsymbol{\Xi})\}\right)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{G}(\{\mathbf{B}(t;\boldsymbol{\Xi})\}, \{\mathbf{B}(t;\boldsymbol{\Xi})\})$$

où :

$$\mathbf{C}_{m_1,m_2} = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{m_1} \\ \mathbf{a}_{m_1} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_{m_1}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_{m_1}}{\partial \phi_1} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{m_2} & \mathbf{a}_{m_2} & \frac{\partial \mathbf{a}_{m_2}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \mathbf{a}_{m_2}}{\partial \phi_2} \end{pmatrix}\right) \tag{117}$$

$$\odot\, \mathbf{G}\left(\left\{\frac{\partial x_{m_2}(t)}{\partial r}, \frac{\partial x_{m_2}(t)}{\partial v}, x_{m_2}(t), x_{m_2}(t)\right\}, \left\{\frac{\partial x_{m_1}(t)}{\partial r}, \frac{\partial x_{m_1}(t)}{\partial v}, x_{m_1}(t), x_{m_1}(t)\right\}\right)$$

$$\mathbf{D}_m = \mathbf{A}^H \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m & \mathbf{a}_m & \frac{\partial \mathbf{a}_m}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathbf{a}_m}{\partial \phi} \end{bmatrix} \odot \mathbf{G}\left(\left\{\frac{\partial x_m(t)}{\partial r}, \frac{\partial x_m(t)}{\partial v}, x_m(t), x_m(t)\right\}, \{x_m(t)\}_{[1,M]}\right) \tag{118}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}^H\mathbf{A} \odot \mathbf{E}_x, \quad (\mathbf{E}_x)_{m_1,m_2} = \mathbf{G}(x_{m_2}(t), x_{m_1}(t)) = \langle x_{m_2}(t) \mid x_{m_1}(t)\rangle \tag{119}$$

et :

$$\frac{\partial x_m(t)}{\partial r} = \frac{-2}{\lambda_c}\frac{e^{-j\frac{4\pi}{\lambda_c}(r_m+v_m t)}}{(r_m+v_m t)^2}\begin{pmatrix} \left(\frac{\alpha_m t - \frac{2r_m}{c}}{f_c}\right)\frac{\partial e_T\left(\alpha_m t - \frac{2r_m}{c}\right)}{\partial t} + \\ j2\pi\left(1 - \frac{j\lambda_c}{2\pi(r_m+v_m t)}\right)e_T\left(\alpha_m t - \frac{2r_m}{c}\right) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial x_m(t)}{\partial v} = t\frac{\partial x_m(t)}{\partial r} \tag{120}$$

1) Calcul des composantes distance-vitesse:

La principale difficulté associée au calcul de $\mathbf{H}_{m_1,m_2}(\Xi)$ est le calcul des différents produits scalaires :

$$\langle x_{m_2}(t) \mid x_{m_1}(t)\rangle, \left\langle x_{m_2}(t) \mid \frac{\partial x_{m_1}(t)}{\partial r}\right\rangle, \left\langle x_{m_2}(t) \mid \frac{\partial x_{m_1}(t)}{\partial v}\right\rangle, \left\langle \frac{\partial x_{m_2}(t)}{\partial r} \mid \frac{\partial x_{m_1}(t)}{\partial r}\right\rangle,$$
$$\left\langle \frac{\partial x_{m_2}(t)}{\partial r} \mid \frac{\partial x_{m_1}(t)}{\partial v}\right\rangle, \left\langle \frac{\partial x_{m_2}(t)}{\partial v} \mid \frac{\partial x_{m_1}(t)}{\partial v}\right\rangle$$

lesquels sont fonction de :

$$\left\langle e_T(\alpha t - \tau) \mid t^i e_T(\alpha t - \tau)\right\rangle, \left\langle e_T(\alpha t - \tau) \mid t^i\frac{\partial e_T(\alpha t - \tau)}{\partial t}\right\rangle, \left\langle \frac{\partial e_T(\alpha t - \tau)}{\partial t} \mid t^i\frac{\partial e_T(\alpha t - \tau)}{\partial t}\right\rangle, i \in \{0,1,2\}. \tag{121}$$

Les produits scalaires (121) peuvent être calculés par intégration numérique par la méthode des rectangles en application du théorème de Shannon dans sa version temporelle (signaux à bande limitée B)

$$\langle \mathbf{x}(t) \mid \mathbf{y}(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y}(t)^H \mathbf{x}(t)\, dt = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathbf{y}(i\Delta t)^H \mathbf{x}(i\Delta t)\,\Delta t, \quad B = \frac{1}{\Delta t}, \tag{122}$$

ou dans sa forme fréquentielle duale (signaux à durée limitée T)

$$\langle \mathbf{x}(f) \mid \mathbf{y}(f) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y}(f)^H \mathbf{x}(f)\, dt = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathbf{y}(i\Delta f)^H \mathbf{x}(i\Delta f)\, \Delta f, \quad T = \frac{1}{\Delta f}. \tag{123}$$

L'avantage de la forme fréquentielle (123) est que la dérivée par rapport au temps et la dérivée par rapport à la fréquence s'expriment aisément :

$$e_T(t) \leftrightharpoons e_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e_T(t)\, e^{-j2\pi f t} df = \sum_{i\in\mathbb{Z}} e_T(i\Delta t)\, \frac{e^{-j2\pi f i\Delta t}}{B} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{\partial e_T(t)}{\partial t} \leftrightharpoons j2\pi f e_T(f) \\ t e_T(t) \leftrightharpoons \frac{j}{2\pi} \frac{\partial e_T(f)}{\partial f} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} i e_T(i\Delta t)\, e^{-j2\pi f i\Delta t} \end{array} \right.$$

Par contre, le pas fréquentiel Δf de la version échantillonnée (123) doit vérifier :

$$\frac{1}{\Delta f} \geq T_{raf} \quad \Leftrightarrow \quad nechF = \frac{B}{\Delta f} \geq BT_{raf}$$

où $nechF$ est le nombre d'échantillons fréquentiels et T_{raf} est la durée totale de la rafale de N_R impulsions élémentaires.

L'avantage de la forme temporelle (122) est qu'elle permet de tenir compte du support temporel du produit scalaire qui est limité par la durée du pulse élémentaire T_0. Par conséquent le nombre d'échantillons nécessaire $nechT$ est a priori :

$$nechT = N_R B T_0$$

à condition de pouvoir faire l'approximation :

$$\frac{\partial e_T(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_0^{BT_0} e_T\left(\frac{n}{B}\right) \sin c\left(\pi\left(Bt - n\right)\right) \right) \approx \sum_0^{BT_0} \frac{\partial e_T}{\partial t}\left(\frac{n}{B}\right) \sin c\left(\pi\left(Bt - n\right)\right) \tag{124}$$

$$\Updownarrow$$

$$j2\pi f e_T(f) \approx TF\left(\sum_0^{BT_0} \frac{\partial e_T}{\partial t}\left(\frac{n}{B}\right) \sin c\left(\pi\left(Bt - n\right)\right) \right). \tag{125}$$

Cette approximation, lorsqu'elle est vérifiée, est particulièrement intéressante pour la simulation des formes d'onde radar "pulsée" car alors :

$$\frac{nechF}{nechT} = \frac{T_{raf}}{N_R T_0} \gg 1,$$

ce qui permet de réduire notablement le temps de calcul et la mémoire nécessaire. Typiquement :

$$10 \leq \frac{T_{raf}}{N_R T_0} \leq 100.$$

Nous avons donc retenu l'approche temporelle approchée (124) dont nous contrôlons la validité dans le domaine fréquentiel par (125).
Sa contre-partie est qu'elle requiert la prise en compte d'une modulation en amplitude pour vérifier (124) avec suffisament de précision :

$$e_T(t) = \sum_{i=1}^{N_R} e_0\left(t - t_0^i\right) m_e\left(t - t_0^i\right), \qquad \int_0^{T_0} \left| e_0(t)\, m_e(t) \right|^2 dt = T_0$$

La modulation d'amplitude que nous prenons en compte est le modèle suivant classique en simulation radar :

$$m_e(t) = \left| \begin{array}{r} t \in [0, T_e] : \frac{1}{2}\left(1 + \sin\left(\pi\left(\frac{t}{T_e} - \frac{1}{2}\right)\right)\right) \\ t \in [T_e, T_0 - T_e] : 1 \\ t \in [T_0 - T_e, T_0] : \frac{1}{2}\left(1 - \sin\left(\pi\left(\frac{t}{T_e} - \frac{1}{2}\right)\right)\right) \end{array} \right.$$

où T_e est la durée des fronts montant et descendant (valeur typique : $200\ \eta s$).

La prise en compte d'une modulation d'amplitude, même introduite pour satisfaire (124), n'en reste pas moins une réalité de la physique du radar : elle rend compte non seulement du comportement des amplificateurs des émetteurs, qui ont un temps de montée et de descente fini, mais elle rend également compte de l'ensemble des réponses impulsionnelles des filtres des chaines d'émission et de réception de durées finies non nulles.

2) Calcul des composantes angulaires (direction d'arrivée):

Le calcul des composantes angulaires ne présente aucune difficulté calculatoire, quelle que soit la paramétrisation choisie. Par contre il soulève un problème d'une toute autre nature exposé ci-dessous.

Dans la plupart des livres de réference en électromagnétisme [12], en radar [54], en estimation [63], la direction $\mathbf{u}_D$ supportant le MRUR (aussi nommée direction d'arrivée) est paramétrée par deux angles sphériques :
• directs (θ, ϕ) en électromagnétisme :

$$\mathbf{u}_D^T(\theta, \phi) = (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta)), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi], \tag{126}$$

• non directs (θ, ϕ) (azimut, élévation) pour un radar sol :

$$\mathbf{u}_D^T(\theta, \phi) = (\sin(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\cos(\phi), \sin(\phi)), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{127}$$

Si nous considérons la paramétrisation EM (126), alors la simulation de la BCR selon (114) en positionnant une cible en $(\theta, \phi) = (0, 0)$, qui est la direction principale de rayonnement d'un réseau de réception défini dans le plan xOy, conduit à une matrice $\mathbf{H}(\Xi)$ singulière !
Ce phénomène surprenant au premier abord est pourtant fondé théoriquement en remarquant que :

$$\mathbf{u}_D^T(0, \phi) = (0, 0, 1), \quad \forall \phi \in [0, 2\pi]$$

ce qui exprime que, toute chose étant égale par ailleurs, le modèle d'observation et la p.d.f. associée sont identiques pour tous les $\mathbf{u}_D^T(0, \phi)$, ce qui traduit une non-identifiabilité du paramètre ϕ dans cette configuration.

Le même problème se produit avec la paramétrisation radar (127) pour $(\theta, \phi) = \left(\theta, \frac{\pi}{2}\right)$ ou $(\theta, \phi) = \left(\theta, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Ce problème récurrent pour les paramétrisations bi-angles des directions d'arrivée nous a amené à étudier la relation entre la singularité de la MIF et la non-identifiabilité des paramètres, étude dont les résultats généraux sont présentés dans la chapitre X.

B. Simulations

Pour illustrer l'importance de la validité de l'approximation (124) lorsque la version temporelle (122) du théorème de Shannon est utilisée pour calculer la BCR, nous prenons comme référence l'article [16] qui propose un calcul de la BCR (r, v, θ, ϕ) dans le cas d'une seule source et d'un train de pulses LFM. Nous adaptons les caractéristiques initiales de ce train de pulse pour se placer dans un contexte radar plus actuel en terme de résolution distance attendue :

ambiguïté distance	100 km (667 us)
distance aveugle	1155 m (7.7 us)
résolution distance	15 $\pm$ 2 m (10 Mhz)
ambiguïté vitesse	100 m/s
fréquence d'émission	2.25 Ghz

Dans [16], le pulse LFM (3.15) et sa dérivée temporelle sont modélisés par (124) sans prise en compte d'une modulation d'amplitude comme le montre le calcul en annexe (C.2b) :

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0} \left|\frac{\partial e_0(t)}{\partial t}\right|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |j2\pi f e_0(f)|^2 df \\
\int_{-\infty}^{+\infty} |j2\pi f e_0(f)|^2 df &\simeq 4\pi^2 \int_{\frac{-B}{2}}^{\frac{B}{2}} f^2 \left(\frac{T_0}{B_0}\right) \Pi_{\left[-\frac{B_0}{2},\frac{B_0}{2}\right]}(f)\, df = 4\pi^2 \frac{T_0}{B_0}\frac{B_0^3}{3} = 4\pi^2 \frac{B_0^2 T_0}{3} \\
\int_0^{T_0} \left|\frac{\partial e_0(t)}{\partial t}\right|^2 dt &\simeq \int_0^{T_0} \left|j2\pi \frac{B_0}{T_0} t e^{j\pi \frac{B_0}{T_0} t^2}\right|^2 dt = \left(2\pi \frac{B_0}{T_0}\right)^2 \int_0^{T_0} t^2 dt = \left(2\pi \frac{B_0}{T_0}\right)^2 \frac{T_0^3}{3} = 4\pi^2 \frac{B_0^2 T_0}{3}
\end{aligned}$$

La qualité de l'approximation (124) mesurée par (125) est présentée figures (1)(2). Ces 2 figures montrent:

- en noir : $e_T(f)$,
- en rouge : $j2\pi f e_T(f)$,
- en vert : $TF\left(\sum_0^{BT_0} \frac{\partial e_T}{\partial t}\left(\frac{n}{B}\right) \sin c\left(\pi\left(Bt-n\right)\right)\right)$,

pour un pulse LFM non modulé (courbes du haut) et un pulse modulé (courbes du bas; la durée des fronts montant et descendant est la valeur typique de 0.2 us (30 m)).
Outre les courbes, la qualité (125) est mesurée par une erreur relative moyenne définie par :

$$\xi(x_{dB}) = \frac{\int_{\mathcal{D}(f,x_{dB})} \left| j2\pi f e_T(f) - TF\left(\sum_0^{BT_0} \frac{\partial e_T}{\partial t}\left(\frac{n}{B}\right) \sin c\left(\pi\left(Bt-n\right)\right)\right)\right|^2 df}{\int_{\mathcal{D}(f,x_{dB})} |j2\pi f e_T(f)|^2 df} \tag{128}$$

$$\mathcal{D}(f, x_{dB}) = \left\{ f \ / \ 10 * \log 10 \left(\frac{|f e_T(f)|^2}{\max_f \left\{|f e_T(f)|^2\right\}}\right) \geq x_{dB}, \quad x_{dB} \leq 0 \right\}$$

Sur les deux figures (1)(2) nous fournissons :
- $\xi(-\infty)$: erreur relative moyenne sur tout le spectre de Shannon,
- $\xi(-50)$: erreur relative moyenne sur la partie principale du spectre à "$-50dB$",

qu'on peut lire dans le titre des figures : Derivative Errors : $(\xi(-\infty) \ // \ \xi(-50))$.

Les figures (1)(2) sont à prendre en compte avec les figures (3)(4) qui montrent la modification de la figure de compression d'impulsion (CI, filtre adapté distance/temps monosource) apportée par l'introduction de la modulation d'amplitude (courbe noire : sans modulation, courbe rouge : avec modulation).
En effet, on remarque que la modulation d'amplitude modifie de façon marginale la figure de CI sur la zone centrale incluant le lobe principal et les 10 premiers lobes secondaires mais de façon très significative

(50 dB d'amélioration sur $\xi(-\infty)$ et $\xi(-50)$) la validité de l'approximation (124).

Afin de mesurer l'impact de la validité de l'approximation (124) sur le calcul de la BCR pour les 4 paramètres (r, v, θ, ϕ), nous avons adjoint le réseau de réception suivant :

Réseau de réception rectangulaire 8×8 capteurs equirépartis à	$\lambda/2$
résolution azimut/élévation	$20°$

et adapté la puissance crête afin d'obtenir pour chaque source un RSB de 30 dB en sortie du filtre adapté (4 paramètres).
Le repère géométrique est de type ENU (x : East, y : North, z : Up), l'émetteur étant au point O, point origine du repère. Le réseau de réception est dans le plan xOz et son centre (barycentre) est le point origine O. Le paramétrage angulaire des directions d'arrivée est celui d'un radar sol (azimut - θ, élévation - ϕ) :

$$\mathbf{u}_D^T(\theta, \phi) = (\sin(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\cos(\phi), \sin(\phi)), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Les résultats sont présentés figures (5)(6)(7) par la mesure du rapport $\frac{BCR}{(LLP)^2} = \frac{BCR}{(\text{Largeur Lobe Principal})^2}$:

• figure (5) : scénario monosource, variation du nombre de réccurences émises à RSB constant (30 dB) en sortie de filtre adapté. Nous comparons la formule de la BCR parue dans [16] et notre calcul de la BCR avec et sans fronts montant et descendant (EdgeOn - EdgeOff).

• figure (6) : scénario multisources, 10 récurrences émises à RSB constant (30 dB) en sortie de filtre adapté, variation du nombre de sources. Les sources sont séparées de $\frac{LLP}{2}$ sur chaque axe relativement à la position centrale $(r, v, \theta, \phi) = (10^4, 350, 0, 0)$. Les sources ont une même SER. Nous comparons notre calcul de la BCR avec et sans fronts montant et descendant (EdgeOn - EdgeOff).

• figure (7) : scénario multisources, 10 récurrences émises à RSB constant (30 dB) en sortie de filtre adapté, variation du nombre de sources. Les sources sont séparées de $\frac{LLP}{2}$ sur l'axe distance mais sont à la même position pour les 3 autres axes (vitesse et angles), relativement à la position centrale $(r, v, \theta, \phi) = (10^4, 350, 0, 0)$. Les sources ont une même SER. Nous comparons notre calcul de la BCR avec et sans fronts montant et descendant (EdgeOn - EdgeOff).

Pour les scénarios multisources, afin de tenir compte de l'impact de la corrélation des amplitudes des sources sur la valeur de la BCR (cf. paragraphe VIII-D) nous présentons la plus petite valeur de la BCR (courbe BCRmin), la plus grande valeur de la BCR (courbe BCRmax) et la BCR moyenne (courbe BCRmean) obtenues pour des amplitudes des sources corrélées $(rang(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}) = 1)$ à partir de 10^5 tirages aléatoires des phases (puisque les SER sont identiques).

Ces 3 figures (5)(6)(7) montrent clairement que l'impact de la validité de l'approximation (124) sur le calcul de la BCR n'est significatif que pour les scénarios "très haute" résolution comme dans le cas de la figure (7) et principalement pour le paramètre distance.
Or c'est précisément ce type de scénario qui relève d'un intérêt opérationnel en radar (mesure d'un profil distance d'une cible étendue).
Par ailleurs, la non validation de la qualité de (124)/(125) par un critère quantitatif tel que (128) peut conduire au calcul approché d'une BCR [16] fournissant des résultats quasiment exacts dans nombre de scénarios, à l'exception des scénarios "très haute" résolution ... sans que l'utilisateur puisse en avoir conscience.

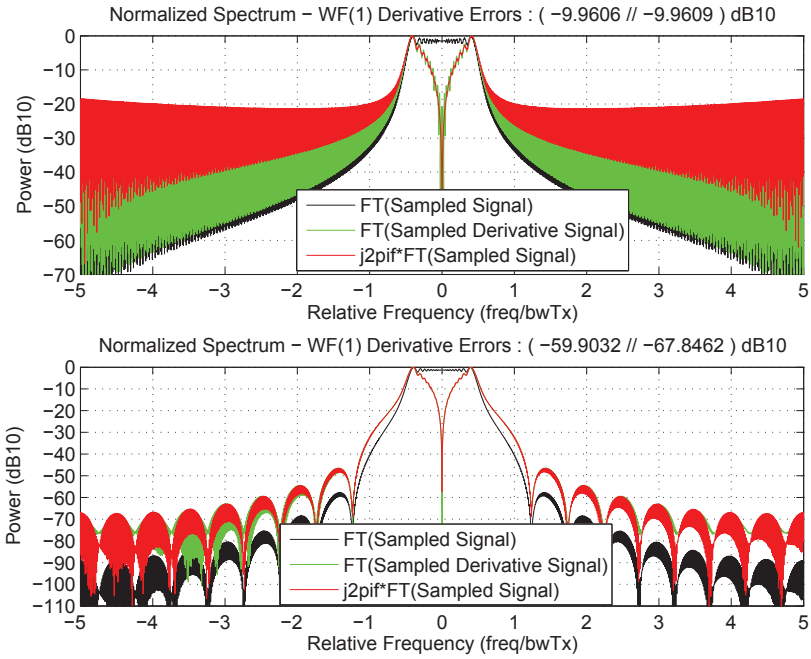

Fig. 1. Spectres pulses LFM : mesure de la validité de l'implémentation temporelle du calcul de la BCR (124)

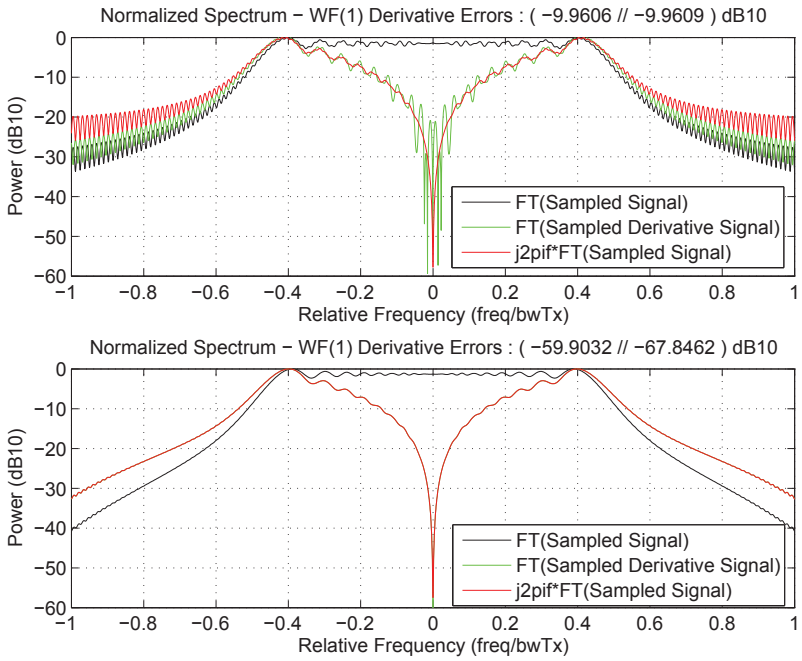

Fig. 2. Spectres pulses LFM (zoom) : mesure de la validité de l'implémentation temporelle du calcul de la BCR (124)

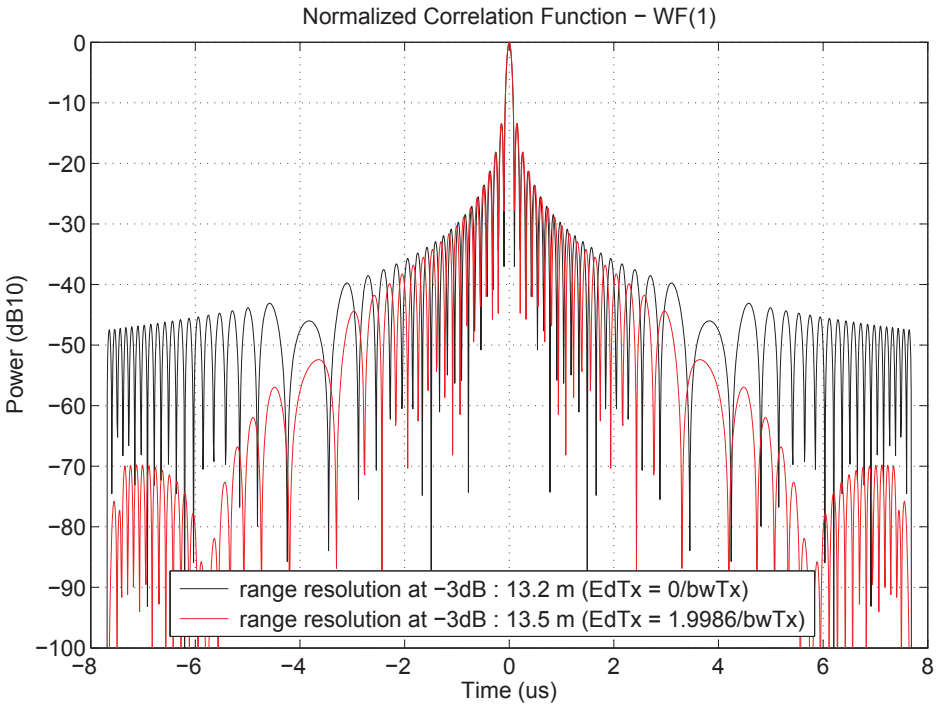

Fig. 3. Pulses LFM : figure de compression d'impulsion (filtre adapté distance/temps)

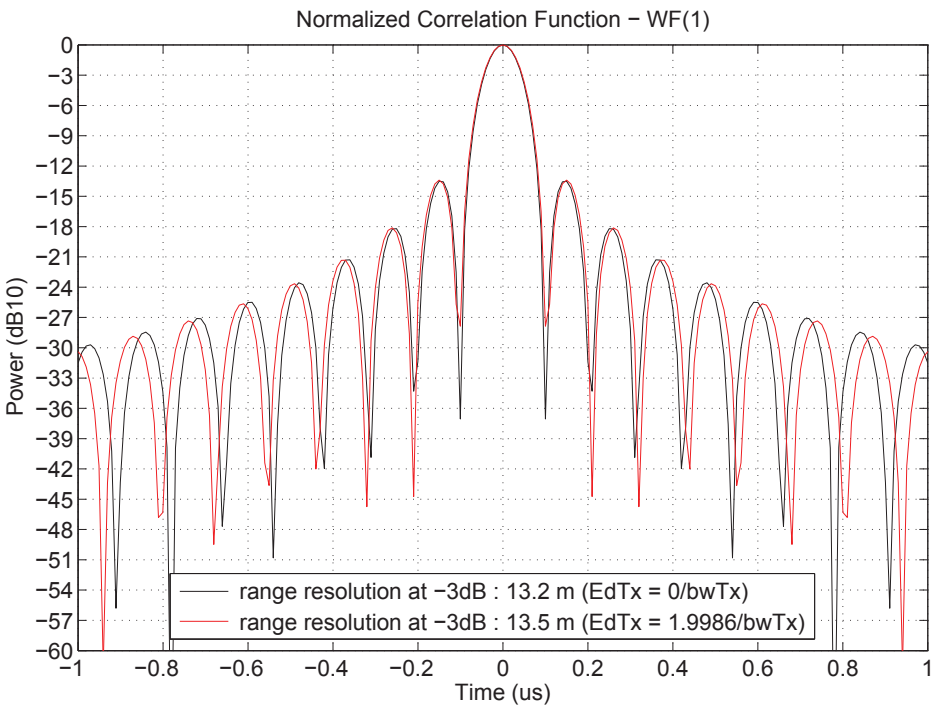

Fig. 4. Pulses LFM (zoom) : figure de compression d'impulsion (filtre adapté distance/temps)

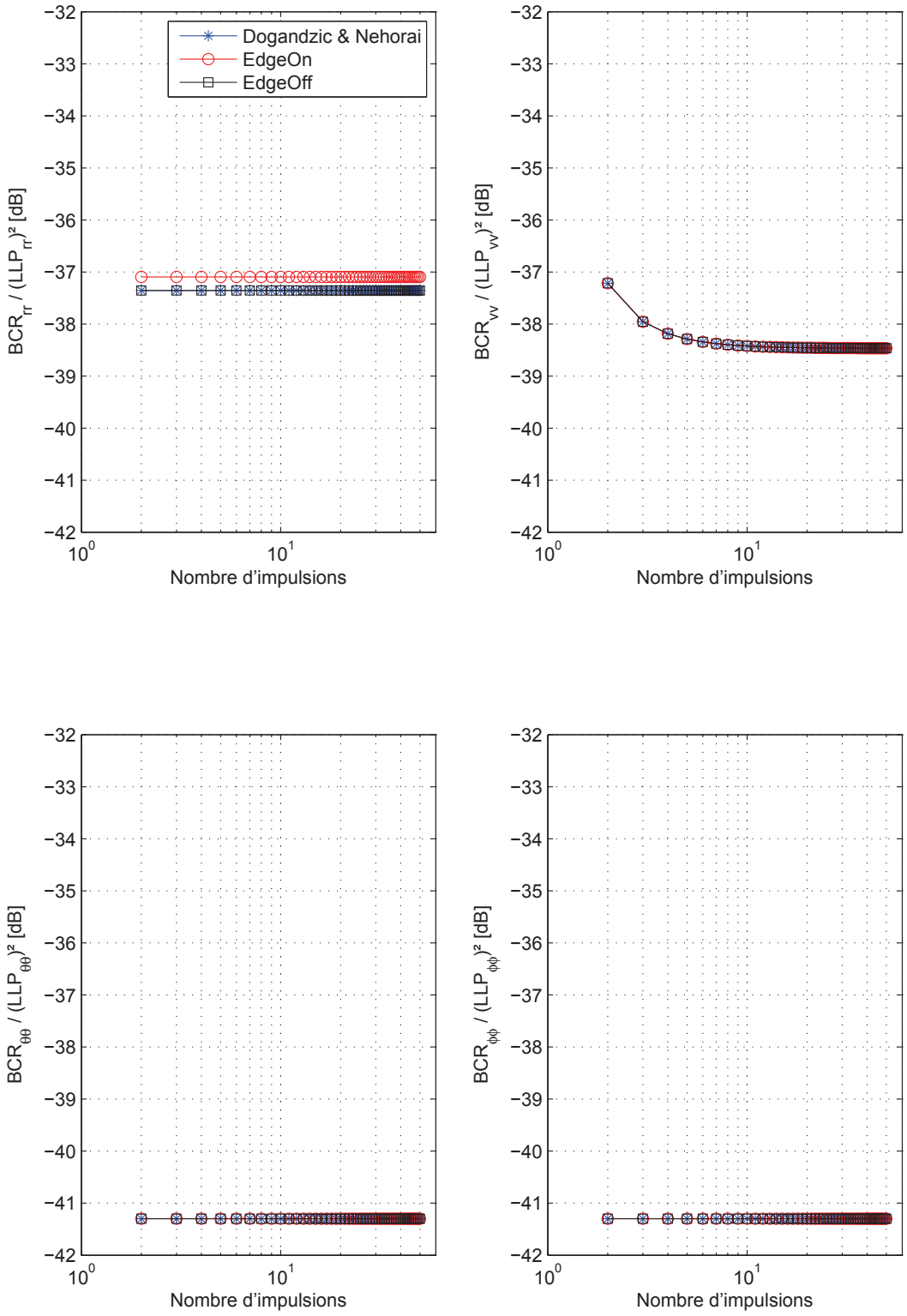

Fig. 5. Pulses LFM : comparaison performance en estimation, cas monosource, nombre de récurrences variable

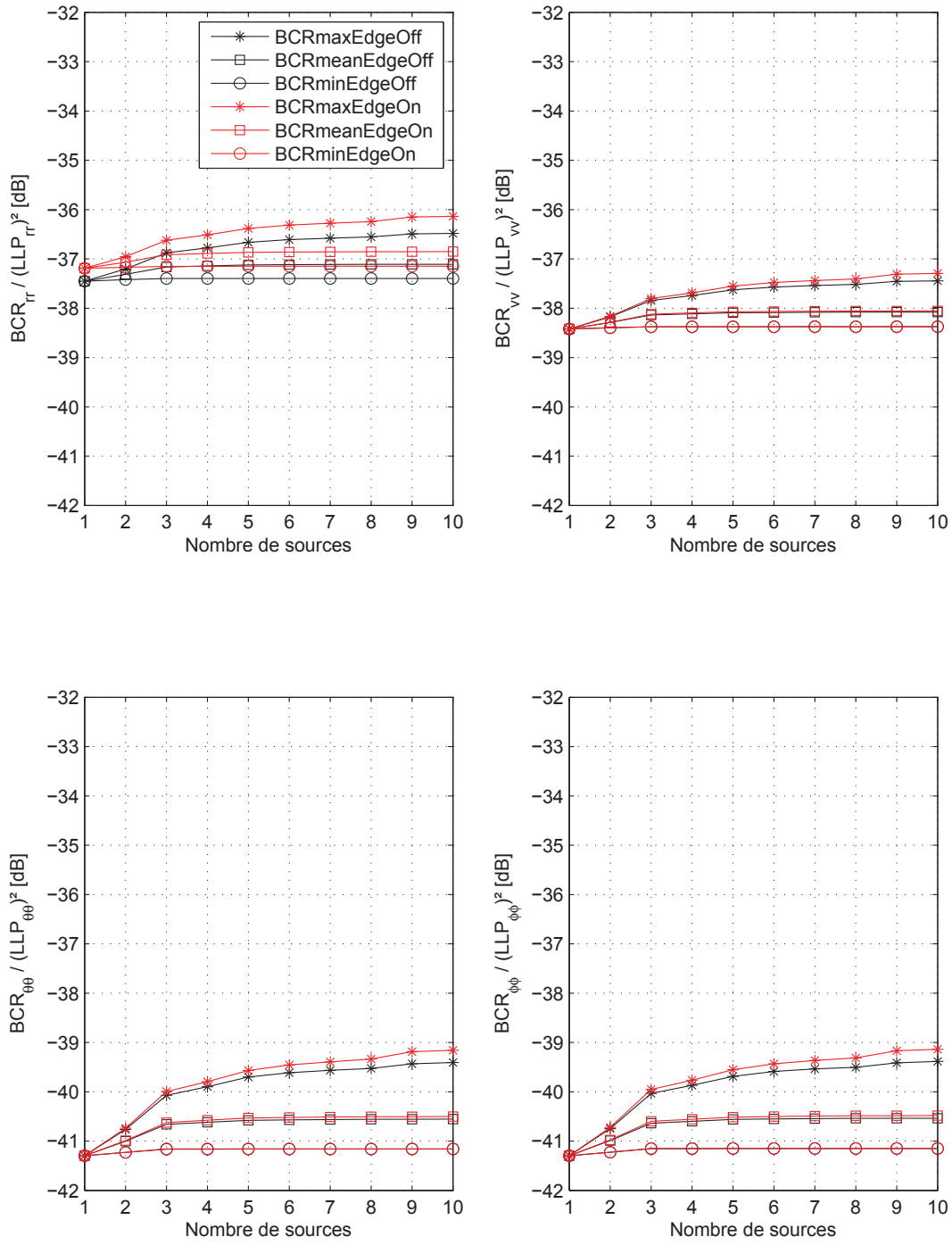

Fig. 6. Pulses LFM : comparaison performance en estimation, cas multisources, nombre de sources variable

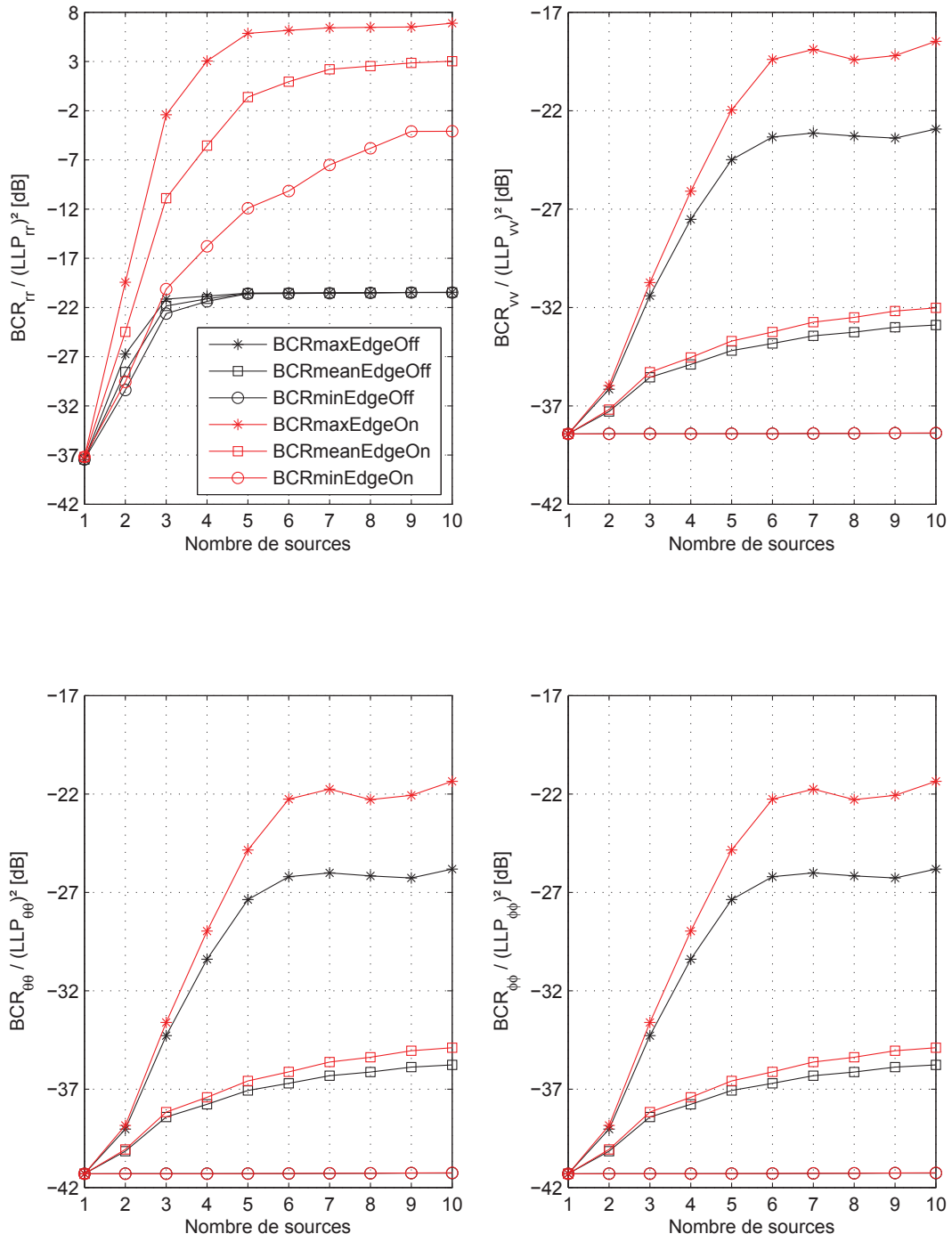

Fig. 7. Pulses LFM : comparaison performance en estimation, cas multisources, nombre de sources variable

X. Relation entre la singularité de la MIF et la non-identifiabilité des paramètres

A. Introduction

Pour la conception des systèmes, il est vraiment indispensable de savoir si les paramètres d'intérêt que nous cherchons à estimer avec la meilleure performance possible sont identifiables, c'est à dire s'ils peuvent être estimées (avec ou sans biais) quelles que soient leurs valeurs. Et si certains paramètres ne sont pas identifiables, nous aimerions savoir sur quel sous-ensemble de l'espace des paramètres ce problème se produit.
D'autre part, certaines applications telles que l'identification des systèmes [55], l'estimation aveugle du canal [5], les réseaux neurones [53], ... sont confrontées à des matrices d'information de Fisher singulières. Différentes contributions passées [25][45][35][58][4][58] ont décrit ces problèmes et apporté des solutions de contournement partiel (comme la la BCR modifiée avec recours à la pseudo-inverse de la MIF).
Nous proposons d'éclairer ces deux problèmes sous l'angle de la minimisation d'une norme sous contrainte linéaire, approche qui permet une formulation rigoureuse de la relation entre la singularité de la MIF et la non-identifiabilité des paramètres.

B. Singularité de la MIF : considérations préliminaires

Une des caractéristiques clé de l'approche utilisée dans la dérivation de la BCR est que toutes les informations nécessaires pour résoudre le problème sont contenues dans l'ensemble des contraintes (cf. Lemme 1) :

$$\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}, \{\mathbf{c}\}_{[1,P]}\right) = \mathbf{V} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(P,Q) \tag{129}$$

où :

$$\mathbf{V} = \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right)^T, \quad \{\mathbf{u}\}_{[1,Q]} = \left\{\widehat{\underline{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}, \quad \{\mathbf{c}\}_{[1,P]} = \left\{\left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^*\right\}.$$

Comme la solution de la minimisation de la norme $\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\{\mathbf{u}\}_{[1,Q]}\right)$ doit satisfaire les contraintes linéaires (129), la première question posée est la condition d'existence d'une telle solution.
Un résultat classique en algèbre (utilisé dans le Lemme 1) est que le système d'équations (129) admet une solution :
• $\forall \mathbf{V}$ si $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} = \mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\{\mathbf{c}\}_{[1,P]}\right)$ est inversible, i.e. si $\{\mathbf{c}\}_{[1,P]}$ est une famille de vecteurs indépendants,
• pour un sous-espace de $im\{\mathbf{V}\}$ si $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ est singulière, i.e. si $\{\mathbf{c}\}_{[1,P]}$ est une famille de vecteurs liés.

Par conséquent, une MIF $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ singulière décrit tout simplement le cas où les vecteurs de la famille $\left\{\frac{\partial p(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}}\right\}$ sont dépendants. Dans ce cas, seul un sous-espace vectoriel de $Im\{\mathbf{V}\}$ est compatible avec les relations linéaires existant entre les vecteurs $\left\{\frac{\partial p(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}}\right\}$. La nature de la restriction est d'ailleurs donnée par le Lemme 1 :
si $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} = \mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\{\mathbf{c}\}_{[1,P]}\right) = \mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\mathbf{D}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^H$, $\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left(P, \widetilde{P}\right)$, $\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^H\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} = \mathbf{I}_{\widetilde{P}}$,
$\mathbf{D}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} = \mathbf{Diag}\left(d_1\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right), \ldots, d_{\widetilde{P}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right)$, $d_1\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) \geq \ldots \geq d_{\widetilde{P}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) > 0$, $\widetilde{P} < P$,
alors $\mathbf{V}$ doit vérifier $\left(\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}{}^H\right)\mathbf{V} = \mathbf{V}$, c'est à dire $\mathbf{V} \in Im\left\{\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\right\}$.
Dans le cas le plus simple, si $\underline{\mathbf{g}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}) = \underline{\boldsymbol{\theta}}$, alors $\mathbf{V} = \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right)^T = \mathbf{I}_P$ et la contrainte sans-biais local définie par :

$$\left(\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}{}^H\right)\mathbf{V} = \left(\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}{}^H\right)\mathbf{I}_P = \mathbf{I}_P \Leftrightarrow \mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}{}^H = \mathbf{I}_P$$

ne peut pas être vérifiée. Par conséquent, aucun estimateur sans biais de $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ en $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$ ne peut exister si la MIF est singulière.

Une compréhension supplémentaire du phénomène est obtenue en considérant la fonction suivante :

$$h_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left(\frac{p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)}{p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)} - 1\right)^2\right] \geq 0$$

Alors, au voisinage de $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$:

$$h_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0 + d\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = d\underline{\boldsymbol{\theta}}^H \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} d\underline{\boldsymbol{\theta}} + o\left(\|d\underline{\boldsymbol{\theta}}\|^2\right),$$

et la fonction $h_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$ atteint la valeur minimale 0 à $\underline{\boldsymbol{\theta}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}^0$.
Par conséquent, si $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ est non singulière, $h_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$ admet un extremum strict au voisinage de $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$.
Par contre, si $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ est singulière, alors l'extremum n'est pas strict au voisinage de $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$:

$$\exists d\underline{\boldsymbol{\theta}} \ / \ h_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0 + d\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = 0 \ \Leftrightarrow \ \exists d\underline{\boldsymbol{\theta}} \ / \ p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0 + d\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) \ \text{(presque partout)}$$

ce qui implique que :

$$\forall \widehat{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\mathbf{x}\right), \quad \exists d\underline{\boldsymbol{\theta}} \ / \ E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\widehat{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\mathbf{x}\right)\right] = E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0 + d\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\widehat{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\mathbf{x}\right)\right]$$

ce qui est impossible pour un estimateur sans biais au voisinage de $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$.
Néanmoins, selon le Lemme 1, il peut exister une fonction $\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$ localement sans biais en $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$ même si la MIF est singulière, à condition que $\left(\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^H\right)\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}}$, ce qui nécessite que $\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$ a au plus $\widetilde{P}$ composantes.
Par conséquent, une MIF singulière en $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$ induit une singularité pour la BCR en $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$ dans le sens où la BCR est non bornée au voisinage de $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$. En effet, si la MIF est non singulière, alors la BCR est bornée par :

$$\forall g\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right), \ \frac{\partial g\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}}^H \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^{-1} \frac{\partial g\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}} \leq \frac{1}{d_P\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)} \left\| \frac{\partial g\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}} \right\|^2$$

où $d_P\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) > 0$ est la plus petite valeur propre de la MIF $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$.
Ainsi il n'est pas exact de dire qu'une matrice MIF singulière en $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$ conduit à des estimés localement sans biais avec une variance infinie tel que mentionné dans [58][4]. Une affirmation préliminaire plus correcte est de dire qu'une matrice MIF singulière en $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$ conduit à une BCR singulière en $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$, ce qui entraîne une BCR non bornée au voisinage de $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0$ et la non-existence d'estimateur localement sans biais pour un sous-espace vectoriel de fonctions $g\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$ incluant $g\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = \underline{\boldsymbol{\theta}}$.
Une approche plus générale et plus précise est développée dans les paragraphes suivants.

C. De la non-identifiabilité à la singularité

Une définition de la non-identifiabilité au sens large est [29, p24] :
si $\mathbf{x}$ est une variable aléatoire paramétrée par $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ et distribuée selon la loi $p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$, alors $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ est dit non-identifiable s'il existe $\underline{\boldsymbol{\theta}}^1 \neq \underline{\boldsymbol{\theta}}^2$ pour lesquels $p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^1\right) = p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^2\right)$.

Toutefois, d'un point de vue à la fois théorique et pratique (voir ci-après), il est nécessaire de limiter la portée de cette définition à un sous ensemble $\mathcal{C}$ de l'espace des paramètres Θ, ce qui conduit à la définition suivante :
si $\mathbf{x}$ est distribuée selon $p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$, alors $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ est dit non-identifiable sur un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de l'espace des paramètres Θ si $\forall \underline{\boldsymbol{\theta}}^1, \underline{\boldsymbol{\theta}}^2 \in \mathcal{C}, \ p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^1\right) = p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^2\right)$.

Considérons maintenant un sous ensemble $\mathcal{C}$ de l'espace des paramètres Θ défini par les K $(1 \leq K \leq P-1)$

contraintes non redondantes $\mathcal{C} = \left\{\underline{\boldsymbol{\theta}} \in \Theta \ / \ \underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^K\right\}$, et supposons que $p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$ soit non-identifiable sur $\mathcal{C}$. Alors :

$$\forall \underline{\boldsymbol{\theta}}^0, \underline{\boldsymbol{\theta}}^0 + d\underline{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{C} : \frac{\partial p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T} d\underline{\boldsymbol{\theta}} = 0 \text{ et } d\underline{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} d\boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left(P, P-K\right), \ d\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{P-K},$$

où $\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}$ est une base de $\ker\left\{\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right\}$. Par conséquent, si $p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$ est non-identifiable sur $\mathcal{C}$:

$$\forall \underline{\boldsymbol{\theta}}^0 \in \mathcal{C}, \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{P-K}, \ \frac{\partial p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T} \mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow \ \forall \underline{\boldsymbol{\theta}}^0 \in \mathcal{C}, \ \frac{\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^T}{p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)} \frac{\partial p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{0}.$$

soit encore :

$$\forall \underline{\boldsymbol{\theta}}^0 \in \mathcal{C}, \ E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left(\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^T \frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)\left(\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^T \frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^H\right] = \mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^T \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) \mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^* = \mathbf{0}$$

ce qui signifie que, $\forall \underline{\boldsymbol{\theta}}^0 \in \mathcal{C}$, la MIF $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)$ est singulière et de rang : $rang\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right) \leq K$.

D. De la singularité à la non-identifiabilité

Supposons maintenant que la matrice $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)$ soit singulière de rang K $(1 \leq K \leq P-1)$ pour $\underline{\boldsymbol{\theta}}^0 \in \mathcal{D} \subset \Theta$.
Dans ce cas $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) = \mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\mathbf{D}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^H$, $\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left(P,K\right)$, $\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^H\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} = \mathbf{I}_K$, $\mathbf{D}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} = \mathbf{Diag}\left(d_1\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right), \ldots, d_K\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right)$, $d_1\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) \geq \ldots \geq d_K\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) > 0$.
Soit $\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^{\perp} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left(P, P-K\right)$ une matrice orthonormale telle que ses colonnes engendrent l'espace $im\left\{\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\right\}^{\perp}$.
Alors :

$$\left(\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^{\perp}\right)^H \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) \mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^{\perp} = E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left(\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^{\perp}\right)^H \frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\left(\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^{\perp}\right)^H \frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}}\right)^H\right] = \mathbf{0}$$

$$\Downarrow$$

$$E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left[\left\|\left(\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^{\perp}\right)^H \frac{\partial \ln p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}}\right\|^2\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^{\perp}\right)^H \frac{\partial p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{0}$$

Par conséquent :

$$\forall d\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}^{P-K}, \ \frac{\partial p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\left(\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^{\perp}\right)^* d\boldsymbol{\lambda} = 0 \tag{130}$$

Soit $\mathcal{C} = \left\{\underline{\boldsymbol{\theta}} \in \Theta \ / \ \underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^K\right\}$ tel que $\ker\left\{\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right\} = im\left\{\left(\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^{\perp}\right)^*\right\}, \forall \underline{\boldsymbol{\theta}}^0 \in \mathcal{D}$. Alors (130) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T} d\underline{\boldsymbol{\theta}} = 0 \text{ et } d\underline{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^{\perp}\right)^* d\boldsymbol{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0 + d\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) \text{ et } \underline{\boldsymbol{\theta}}^0, \underline{\boldsymbol{\theta}}^0 + d\underline{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{C}$$

ce qui signifie que $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ est non-identifiable sur $\mathcal{C}$ et que $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$:

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{C} = \left\{\underline{\boldsymbol{\theta}} \in \Theta \ / \ \underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^K, \ \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T} = \mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^T, \ \forall \underline{\boldsymbol{\theta}}^0 \in \mathcal{D}\right\}.$$

E. Estimation avec biais : rappel

Les estimateurs avec biais représentent le cas général des estimateurs puisqu'ils satisfont simplement :

$$E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)\right] = \underline{\mathbf{h}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) + \underline{\mathbf{b}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right),\ \forall \underline{\boldsymbol{\theta}} \in \Theta \tag{131}$$

où $\underline{\mathbf{b}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$ est appelé biais. Lorsque $\underline{\mathbf{b}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = \mathbf{0}$, alors les estimateurs sont dits sans biais et (131) se réduit à (43). Si $\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)$ vérifie (131) alors :

$$\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right) - \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}\right) = \mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right) - \underline{\mathbf{h}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}\right) + \underline{\mathbf{b}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)^* \underline{\mathbf{b}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)^T$$

Par conséquent, puisque $\underline{\mathbf{b}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)^* \underline{\mathbf{b}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)^T \geq \mathbf{0}$:

$$\begin{array}{c}
\min\limits_{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)} \left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right) - \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}\right)\right\} \text{ sous } E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)\right] = \underline{\mathbf{h}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right),\ \forall \underline{\boldsymbol{\theta}} \in \Theta \\
\Updownarrow \\
\left\{\begin{array}{c}
\min\limits_{\underline{\widehat{\mathbf{h}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)} \left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\left(\left\{\underline{\widehat{\mathbf{h}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right) - \underline{\mathbf{h}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right\}\right)\right\} \text{ sous } E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\underline{\widehat{\mathbf{h}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)\right] = \underline{\mathbf{h}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right),\ \forall \underline{\boldsymbol{\theta}} \in \Theta \\
\underline{\widehat{\mathbf{g}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)_{\text{eff}} = \underline{\widehat{\mathbf{h}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}}\left(\mathbf{x}\right)_{\text{eff}}
\end{array}\right.
\end{array}, \tag{132}$$

c'est-à-dire que la minimisation de l'EQM des estimateurs avec biais se déduit simplement de la minimisation de l'EQM des estimateurs sans biais, à condition que le vecteur des fonctions à estimer incorpore le biais [63].

F. Synthèse

Finalement, nous avons montré l'équivalence (nouvelle à notre connaissance) entre une MIF singulière et la non-identifiabilité sur un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de l'espace des paramètres Θ :

$$\begin{array}{c}
\left\{\begin{array}{l}
\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) = \mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\mathbf{D}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^H,\ \mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left(P,K\right),\ \mathbf{D}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} = \mathbf{Diag}\left(d_1\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right),\ldots,d_K\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)\right) \\
\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^H\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} = \mathbf{I}_K,\ d_1\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) \geq \ldots \geq d_K\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) > 0,\ \underline{\boldsymbol{\theta}}^0 \in \mathcal{D} \subset \Theta
\end{array}\right. \\
\Updownarrow \\
\left\{\begin{array}{l}
\mathcal{D} \subset \mathcal{C} = \left\{\underline{\boldsymbol{\theta}} \in \Theta\ /\ \underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^K,\ 1 \leq K \leq P-1,\ \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T} = \mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^T,\ \forall \underline{\boldsymbol{\theta}}^0 \in \mathcal{D}\right\} \\
p\left(\mathbf{x};\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) \text{ est non-identifiable sur } \mathcal{C}
\end{array}\right.
\end{array} \tag{133}$$

De plus, d'après le Lemme 1, la BCR existe pour toute fonction $\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$ telle que $\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}} \in im\left\{\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\right\}$. Dans ce cas, $\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)^T}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\mathbf{B}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left(K,K\right)$, et vérifie :

$$\forall \underline{\boldsymbol{\theta}}^0, \underline{\boldsymbol{\theta}}^0 + d\underline{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{C},\ \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T} d\underline{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{B}^T\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^T\left(\mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}^{\perp}\right)^* d\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0},$$

ce qui signifie que $\underline{\mathbf{g}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$ est constante sur $\mathcal{C}$. Par conséquent le résultat général est le suivant :

Proposition :

Lorsque la MIF est singulière, elle l'est nécessairement sur un sous-ensemble C de l'espace des paramètres engendré par un système de contraintes égalité. La singularité de la MIF sur $\mathcal{C}$ est équivalente à la non-identifiabilité de $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ sur $\mathcal{C}$ et traduit la non-existence de la BCR sur $\mathcal{C}$ conduisant à :

• *la non existence d'un estimateur sans biais de* $\underline{\mathbf{g}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})$ *quand* $\underline{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{C}$, *sauf si* $\underline{\mathbf{g}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})$ *est constante sur* $\mathcal{C}$,
• *une BCR non bornée au voisinage de* $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ *pour tout* $\underline{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{C}$.

Ce résultat englobe et clarifie les travaux antérieurs dans le domaine [58][4] qui ont partiellement étudié la relation entre la non-identifiabilité et la singularité de la MIF.

Enfin, considérons le sous ensemble $\mathcal{R} \subset \Theta$ défini par les $P-K$ contraintes suivantes :

$$\underline{\mathbf{r}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0} \ / \ \mathbf{M}^*_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} \text{ est une base de } \ker\left\{\frac{\partial \underline{\mathbf{r}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}^T}\right\}. \tag{134}$$

Les équations (134) constituent des équations de régularisation dans le sens où elles définissent le plus grand sous ensemble de l'espace des paramètres Θ où un estimateur sans biais existe pour toute fonction des paramètres inconnus [4]. En effet, la BCR sous contraintes s'écrit alors (cf. paragraphe VII-B) :

$$\forall \underline{\boldsymbol{\theta}}^0 \in \mathcal{R},\ \mathbf{BCR}^c_{\underline{\boldsymbol{\theta}}|\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^0\right) = \mathbf{M}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\mathbf{D}^{-1}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\mathbf{M}^H_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} > 0$$

Ces équations de régularisation (134) sont des résultats plutôt théoriques que pratiques, car il est peu probable que l'expression analytique des vecteurs propres de la MIF existe dans la plupart des cas. Quoi qu'il en soit, son existence suggère que, lorsque la MIF est singulière avec un rang $K < P$, il est intéressant de chercher un sous-ensemble du modèle d'observation initiale pour lequel une relation inter-paramètres de la forme :

$$\underline{\boldsymbol{\theta}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^T, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = \underline{\mathbf{r}}'(\underline{\boldsymbol{\omega}})^T\right),\ \dim\{\underline{\boldsymbol{\theta}}\} = P,\ \dim\{\underline{\boldsymbol{\omega}}\} = K,\ \dim\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = P-K, \tag{135}$$

existe et vérifie :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{P-K} \\ \frac{\partial \underline{\mathbf{r}}'\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^0\right)}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}^T} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^*_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\boldsymbol{\Gamma}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0},\ \forall \underline{\boldsymbol{\theta}}^0 \in \mathcal{D},\ \boldsymbol{\Gamma}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(P-K, P-K),\ \left|\boldsymbol{\Gamma}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^0}\right| \neq 0,$$

et d'exploiter ce sous-ensemble de modèles d'observation, à chaque fois que c'est possible et pertinent (cf. [4, §IV] à titre d'exemple).

XI. Performance en estimation des formes d'onde OFDM et Chirp : comparaison préliminaire

A. Les signaux OFDM pour le radar

Rappelons qu'une des motivations initiales de ce travail était de comparer les performances en estimation multisources multiparamètres d'un radar actif utilisant une nouvelle forme d'onde de type OFDM, par rapport à un radar actif utilisant la forme d'onde usuelle de type Chirp (de durée T_0 et de bande B_0) :

$$e_0^{LFM}(t) = e^{j2\pi \frac{B_0}{2T_0}\left(t-\frac{T_0}{2}\right)^2} \Pi_{[0,T_0]}(t) \tag{136}$$

Les signaux OFDM considérés sont donc des impulsions en bande de base de la forme :

$$e_0^{OFDM}(t) = \sum_{q=1}^{Q}\left(\sum_{p=1}^{P} C_{p,q} e^{j2\pi f_p t}\right)\Pi_{[0,T_s]}(t-(q-1)T_s) \tag{137}$$

$$f_p = \frac{B_e}{P}\left(p-1-\frac{P-1}{2}\right), \quad T_s = \frac{T_0}{Q}, \quad C_{p,q} \in \mathbb{C}, \quad \frac{B_0 T_0}{PQ} \in \mathbb{N}^*$$

L'impulsion $e_0^{OFDM}(t)$ de durée T_0 et de bande B_0 contient P fréquences équiréparties dans la bande $\left[-\frac{B_0}{2}, \frac{B_0}{2}\right]$ (cf. figure (8)). Q symboles $C_{p,q}$ de durée $T_s = \frac{T_0}{Q}$ sont transmis pour chaque fréquence et les P fréquences sont orthogonales durant la durée T_s de chaque symbole $\left(\frac{B_0 T_0}{PQ} \in \mathbb{N}^*\right)$.
Ce type de signal a une résolution en distance de $\frac{T_s}{P}$ et une résolution en vitesse de $\frac{1}{QT_s}$ [32] (cf. figure (9)).
Les principaux avantages de l'impulsion OFDM revendiqués dans la littérature courante sont la discrétion de l'émission radar (l'impulsion est dissimulable dans le spectre utilisé par les signaux de télécommunication) et un degré de liberté élevé (le code des PQ symboles $C_{p,q}$) pour optimiser une ou plusieurs caractéristiques du signal radar d'une durée d'impulsion T_0 et de largeur de bande B_0 déterminés.
Nous nous intéressons dans notre comparaison au code proposé par [52] qui est le résultat de la méthode des moindres carrées [60] modifiée qui permet à la fois de synthétiser une fonction d'ambiguité monosource optimale(cf. figures (10)(11)) pour le radar et de réduire le PAPR (Peak-to-Average Power Ratio) à 1.7 :

$$PAPR = \frac{\max\limits_{0<t<QT_s}\left\{|e_0(t)|^2\right\}}{\frac{1}{QT_s}\int\limits_0^{QT_s} |e_0(t)|^2\, dt}$$

B. Performance en estimation des formes d'onde OFDM et Chirp : comparaison préliminaire

La démarche et le scénario de simulation sont identiques à ceux adoptés au paragraphe IX-B :

ambiguïté distance	100 km (667 us)
distance aveugle	1155 m (7.7 us)
résolution distance	15 $\pm$ 2 m (10 Mhz)
ambiguïté vitesse	100 m/s
fréquence d'émission	2.25 Ghz
fronts montant et descendant	30 m (0.2 us)
Réseau de réception rectangulaire 8×8 capteurs equirépartis à	$\lambda/2$
résolution azimut/élévation	20°
RSB par source en sortie du filtre adapté (4 paramètres)	30 dB

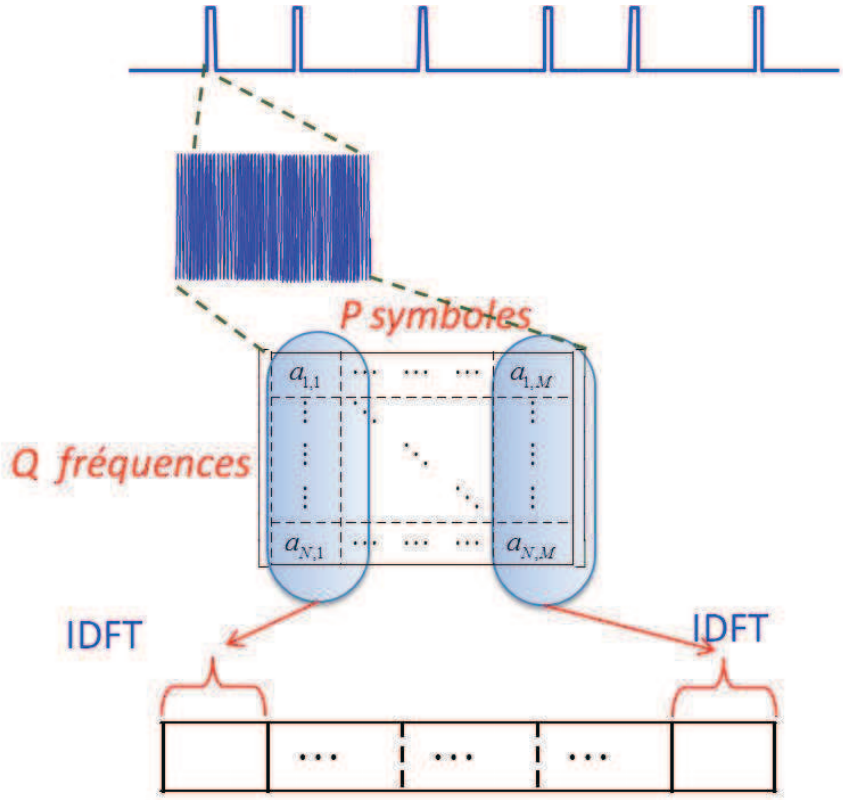

Fig. 8. Construction d'un signal OFDM

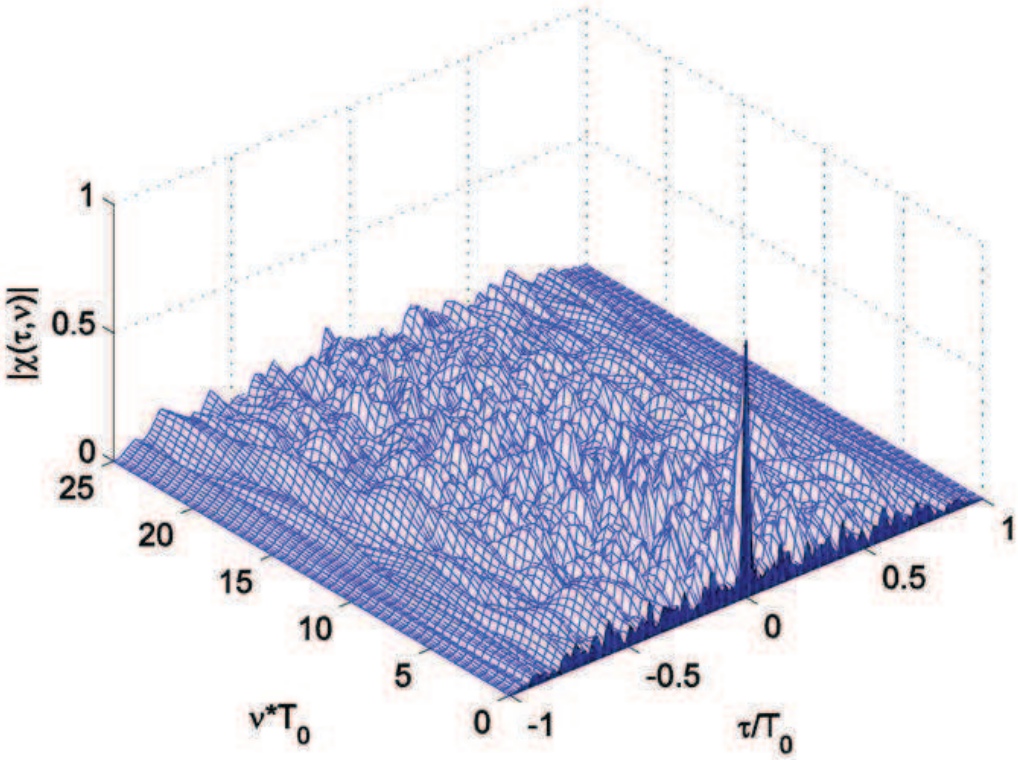

Fig. 9. Exemple de fonction d'ambiguité (distance - vitesse) monosource OFDM

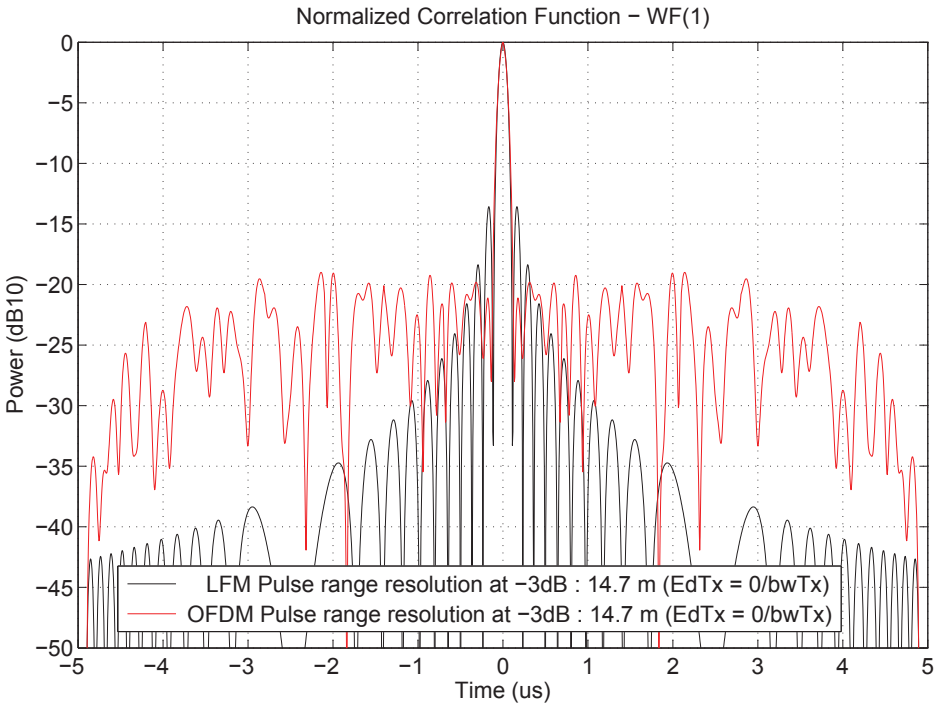

Fig. 10. Figure de compression d'impulsion : pulses LFM et OFDM [52]

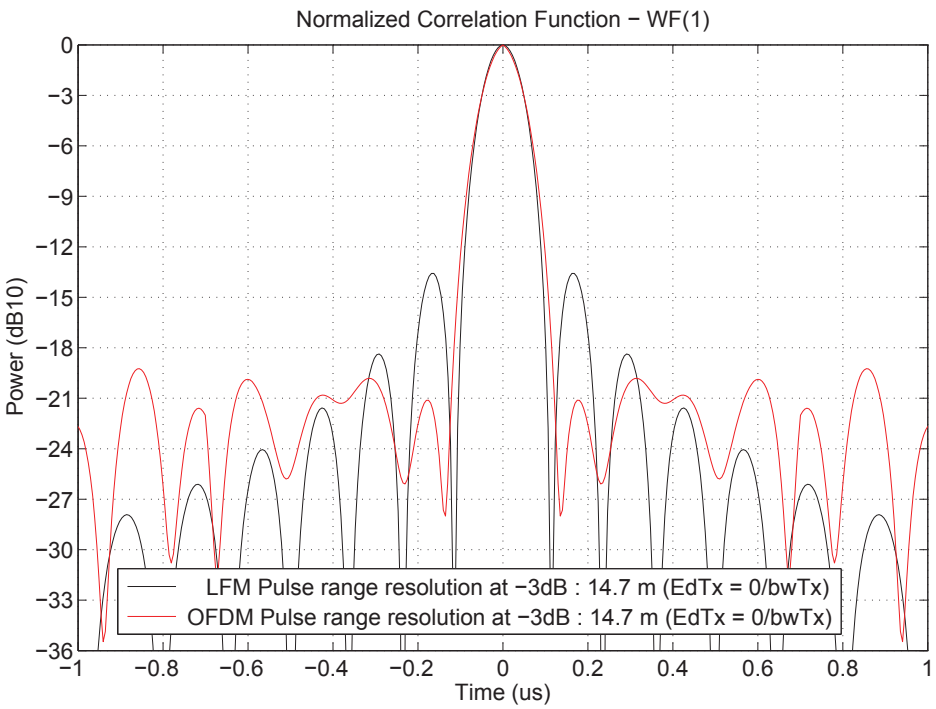

Fig. 11. Figure de compression d'impulsion (zoom) : pulses LFM et OFDM [52]

La qualité de l'approximation (124) mesurée par (125) pour un pulse LFM (courbes du haut) et un pulse OFDM [52] (courbes du bas) modulés en amplitude est présentée figures (12)(13). Rappelons que ces 2 figures montrent:

• en noir : $e_T(f)$,

• en rouge : $j2\pi f e_T(f)$,

• en vert : $TF\left(\sum_0^{BT_0} \frac{\partial e_T}{\partial t}\left(\frac{n}{B}\right) \sin c\left(\pi\left(Bt-n\right)\right)\right)$.

On remarquera que la prise en compte d'une modulation d'amplitude provoque une dégradation sensible de la figure de CI pour le code OFDM [52] comme le montre les figures (14)(15).
Le repère géométrique est de type ENU (x : East, y : North, z : Up), l'émetteur étant au point O, point origine du repère. Le réseau de réception est dans le plan xOz et son centre (barycentre) est le point origine O. Le paramétrage angulaire des directions d'arrivée est celui d'un radar sol (azimut - θ, élévation - ϕ) :

$$\mathbf{u}_D^T(\theta,\phi) = \left(\sin(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\cos(\phi), \sin(\phi)\right), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Les résultats sont présentés figures (16)(17)(18) où nous comparons le calcul de la BCR pour un pulse LFM et un pulse OFDM [52] (avec fronts montant et descendant) par la mesure du rapport $\frac{BCR}{(LLP)^2} = \frac{BCR}{(\text{Largeur Lobe Principal})^2}$:

• figure (16) : scénario monosource, variation du nombre de réccurences émises à RSB constant (30 dB) en sortie de filtre adapté.

• figure (17) : scénario multisources, 10 récurrences émises à RSB constant (30 dB) en sortie de filtre adapté, variation du nombre de sources. Les sources sont séparées de $\frac{LLP}{2}$ sur chaque axe relativement à la position centrale $(r, v, \theta, \phi) = (10^4, 350, 0, 0)$. Les sources ont une même SER.

• figure (18) : scénario multisources, 10 récurrences émises à RSB constant (30 dB) en sortie de filtre adapté, variation du nombre de sources. Les sources sont séparées de $\frac{LLP}{2}$ sur l'axe distance mais sont à la même position pour les 3 autres axes (vitesse et angles), relativement à la position centrale $(r, v, \theta, \phi) = (10^4, 350, 0, 0)$. Les sources ont une même SER.

Pour les scénarios multisources, afin de tenir compte de l'impact de la corrélation des amplitudes des sources sur la valeur de la BCR (cf. paragraphe VIII-D) nous présentons la plus petite valeur de la BCR (courbe BCRmin), la plus grande valeur de la BCR (courbe BCRmax) et la BCR moyenne (courbe BCRmean) obtenues pour des amplitudes des sources corrélées $(rang(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}) = 1)$ à partir de 10^5 tirages aléatoires des phases (puisque les SER sont identiques).

Les 3 figures (16)(17)(18) montrent (de façon préliminaire) que la nature du pulse influe de façon significative sur la valeur de la BCR (5 dB d'amélioration pour l'estimation du paramètre distance) pour les scénarios "très haute" résolution comme dans le cas de la figure (18).
Et c'est précisément ce type de scénario qui relève d'un intérêt opérationnel en radar (mesure d'un profil distance d'une cible étendue).
Ces premiers résultats plaident donc pour un approfondissement de l'analyse des performances d'un code OFDM [52] optimisé, approfondissement qui nécessitera la prise en compte d'un signal OFDM plus réaliste (sans modulation d'amplitude et/ou avec intervalle de garde) requerrant le passage en représentation fréquentielle (124) lors de travaux ultérieurs.

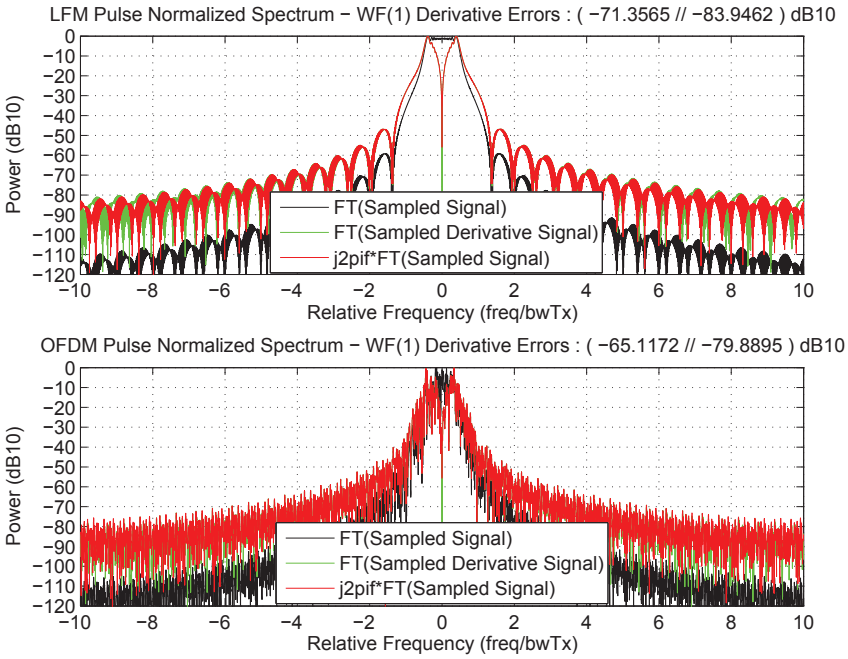

Fig. 12. Spectres pulses LFM et OFDM [52] : mesure de la validité de l'implémentation temporelle du calcul de la BCR (124)

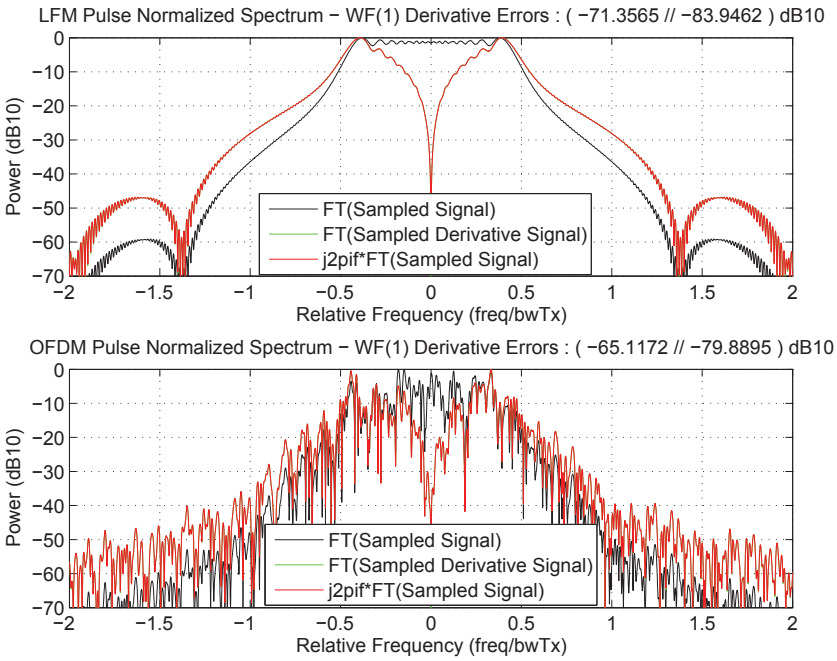

Fig. 13. Spectres pulses LFM et OFDM [52] (zoom) : mesure de la validité de l'implémentation temporelle du calcul de la BCR (124)

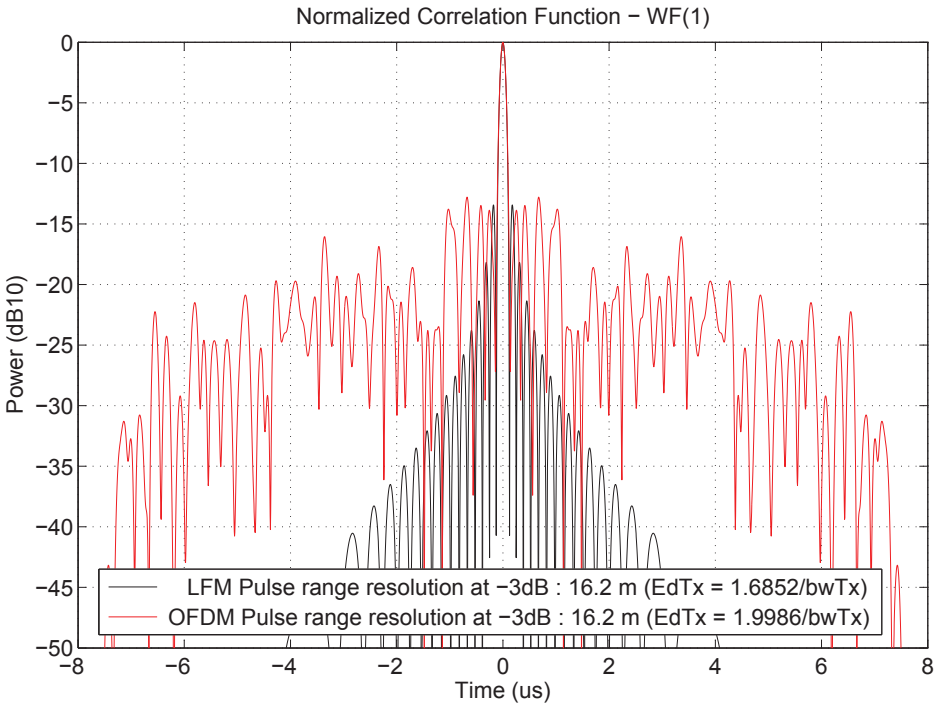

Fig. 14. Figure de compression d'impulsion : pulses LFM et OFDM [52] avec modulation d'amplitude

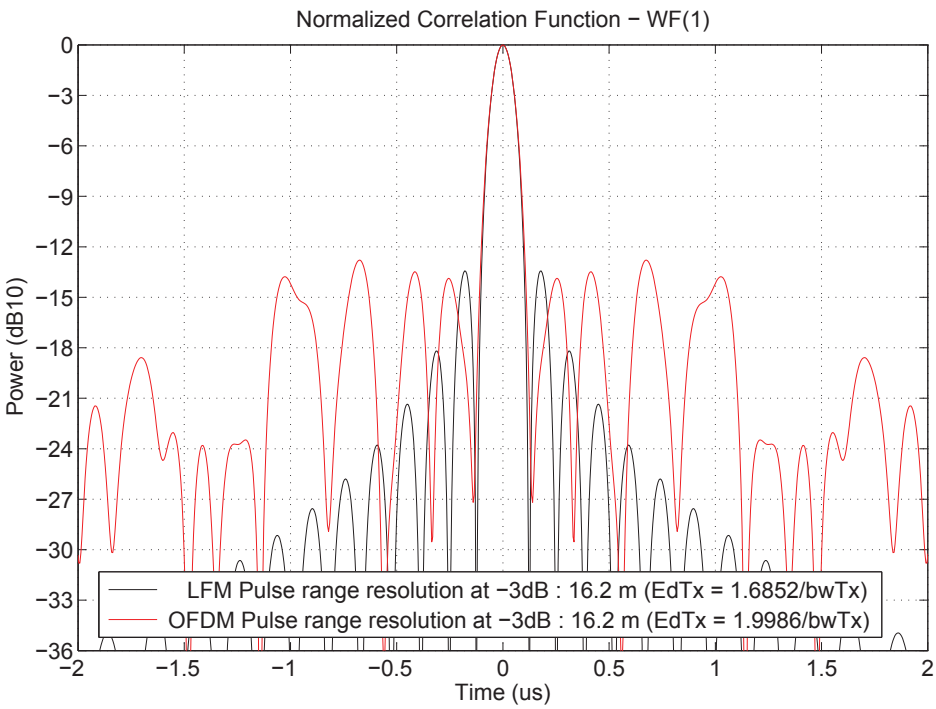

Fig. 15. Figure de compression d'impulsion (zoom) : pulses LFM et OFDM [52] avec modulation d'amplitude

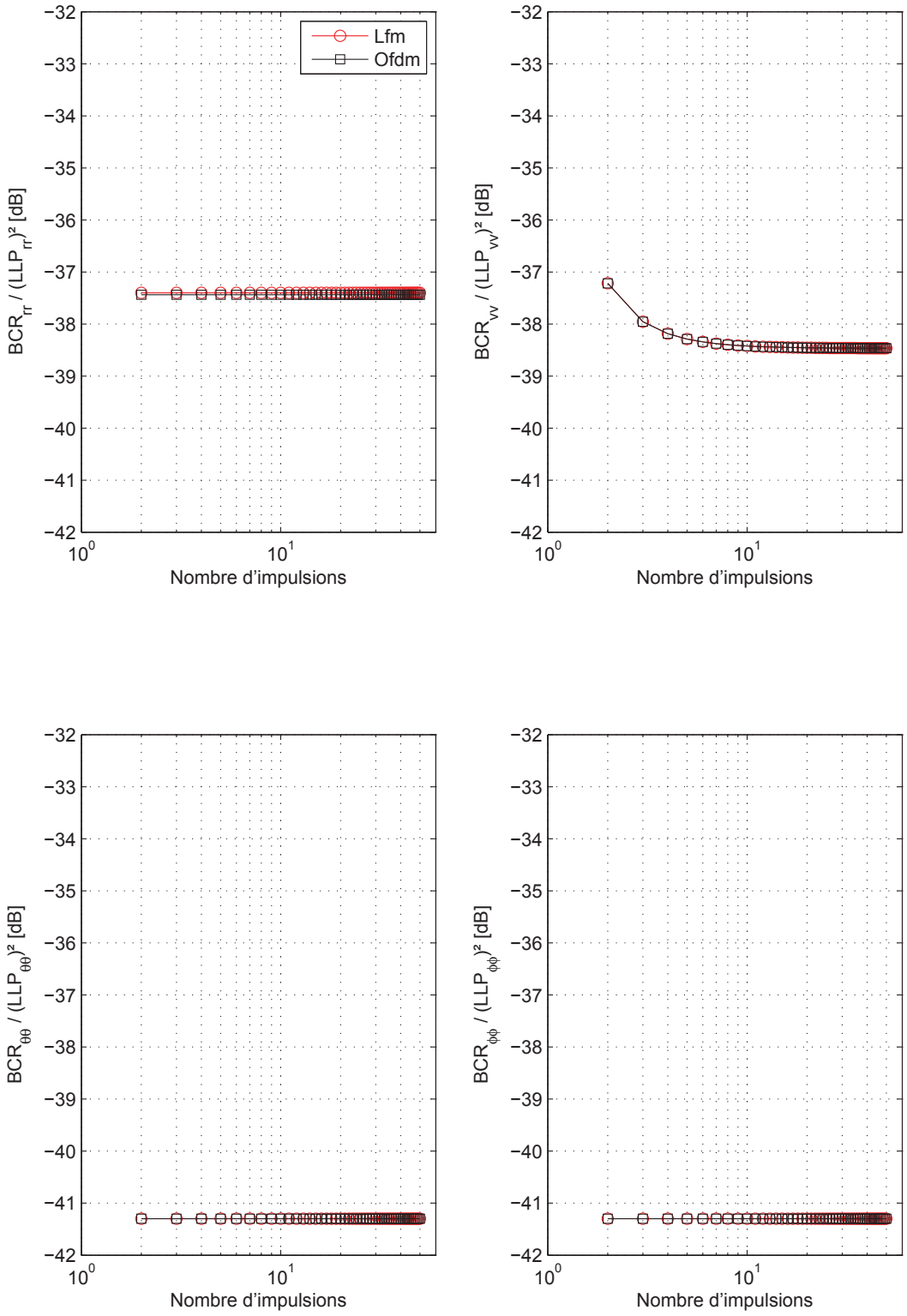

Fig. 16. Pulses LFM et OFDM [52] : comparaison performance en estimation, cas monosource, nombre de récurrences variable

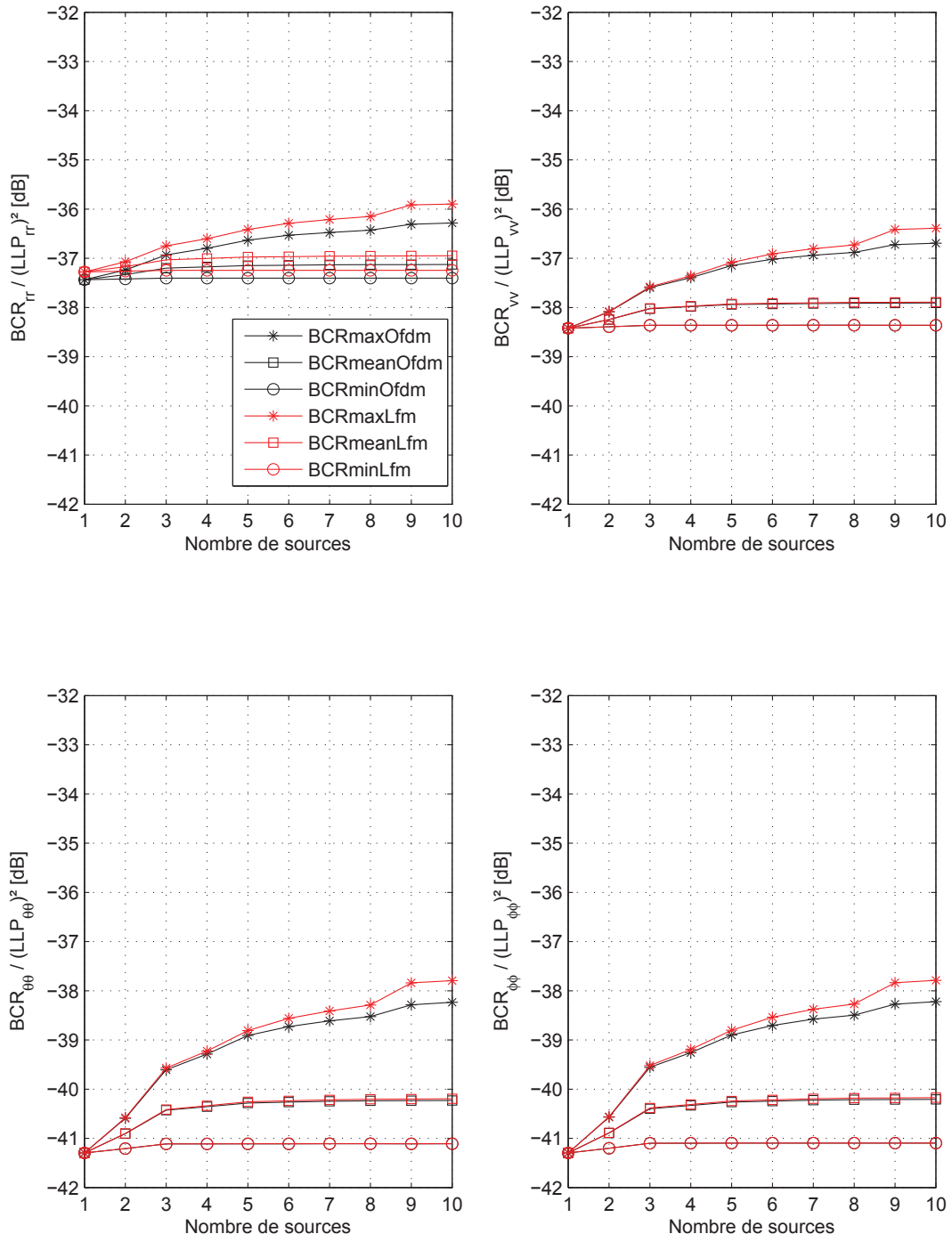

Fig. 17. Pulses LFM et OFDM [52] : comparaison performance en estimation, cas multisources, nombre de sources variable

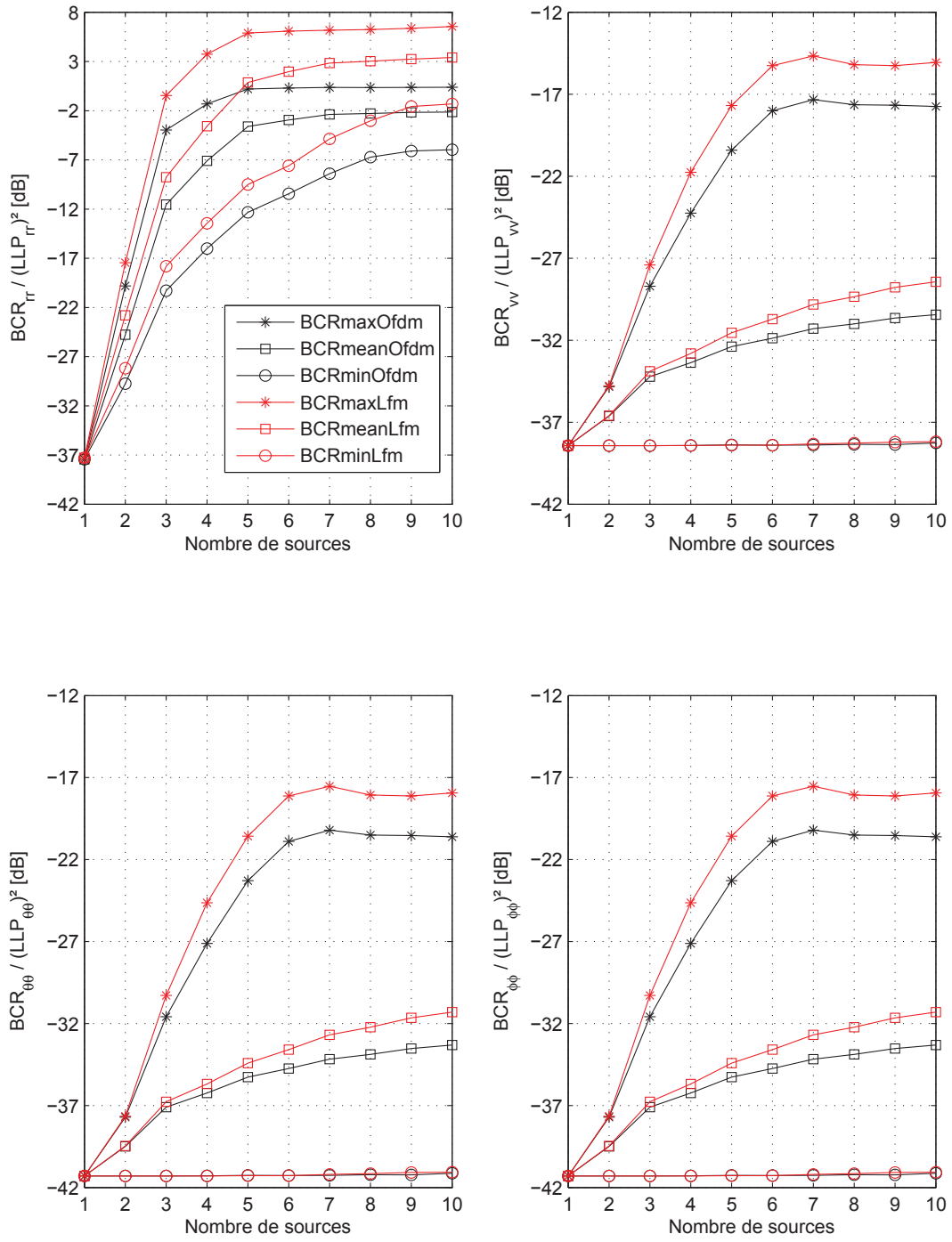

Fig. 18. Pulses LFM et OFDM [52] : comparaison performance en estimation, cas multisources, nombre de sources variable

XII. Conclusion et perspectives

Ce travail de thèse peut être vu comme une clarification :
• du cadre théorique de calcul de la BCR pour paramètres déterministes mixtes (réels et/ou complexe) éventuellement contraints,
• du calcul de la BCR pour un modèle d'observations multiples gaussiennes complexes circulaires déterministes (conditionnelles) à bande limitée,
fournissant les outils nécessaires pour évaluer l'influence de la forme d'onde sur les performances en estimation multisources d'un radar actif.

Si nous n'avons malheureusement pas eu le temps d'exploiter intensivement ces outils afin de répondre catégoriquement à notre question initiale (une forme d'onde numérique de type télécoms permet-elle une meilleure estimation des paramètres de sources multiples que le Chirp ?), les premiers résultats obtenus (cf. paragraphe XI-B) plaident pour un approfondissement de l'analyse des performances d'un code OFDM optimisé.

Les travaux complémentaires (perspectives) potentiels sont donc nombreux.

D'un point de vue pratique, il s'agirait :
• de lancer le calcul de la BCR pour radar SIMO (114) pour les différents codes OFDM optimisés de la litterature courante sur des scénarios radar opérationnels de référence (distribution de points brillants associés à des cibles de référence, formes d'onde de référence, antennes de référence) pour évaluer l'amélioration ou la dégradation en performance d'estimation multisources apportée par ces codes en comparaison avec le chirp usuel.
• de lancer le calcul de la BCR pour radar SIMO (114) pour les différents codes OFDM optimisant la fonction d'ambiguité monosource et de valider ou d'invalider la relation entre ce type d'optimisation et les performances en estimation multisources.
• d'implémenter la prise en compte de l'accélération pour les MAU nécessaire à l'évaluation des performances asymptotiques en estimation des algorithmes Track Before Detect [54] ou de filtrage particulaire [49].
• d'implémenter la prise en compte de plusieurs émetteurs pour pouvoir traiter les radar MIMO [34].
• de prendre en compte dans le calcul de la BCR de paramètres de nuisances rendant compte d'une incertitude de mesure de certains éléments d'un radar (position des antennes, gains des antennes, ...).
• de prendre en compte des signaux $e_0(t)$ mesurés ou synthétisés (ce qui requerra le passage en représentation fréquentielle (124)).

D'un point de vue théorique, il s'agirait :
• pour une forme d'onde de poursuite (après désignation de la cible à poursuivre par une forme d'onde veille), d'étudier la possibilité d'optimiser une forme d'onde OFDM à partir de performances asympotiques en estimation (BCR) pour une distribution donnée de points brillants (caractérisée par leur nombre, leur résolution, ...).
• pour une forme d'onde de poursuite, d'intégrer la prise en compte de la fenêtre d'association du filtre de poursuite (Kalman, ...) [49] sous la forme d'une d.d.p. a priori des paramètres radar $(r, v, \theta, \phi, \ldots)$ pour aboutir à une BCR pour paramètres hybrides déterministes/bayésiens [47].

REFERENCES

[1] J.S. Abel, ”A bound on mean-square-estimate error”, IEEE Trans. on IT, vol. 39, no. 5, pp. 1675-1680, Sep. 1993.
[2] E.W. Barankin, ”Locally best unbiased estimates”, Ann. Math. Stat., vol. 20, no. 4, pp. 477-501, 1949.
[3] C. R. Blyth, ”Necessary and sufficient conditions for inequalities of Cramér-Rao type,” Ann. Math. Stat., vol. 2, no. 3, pp. 464-473, 1974.
[4] Z. Ben-Haim, Y. C. Eldar, ”On the Constrained Cramér–Rao Bound With a Singular Fisher Information Matrix”, IEEE SP Letters, vol. 16, no. 6, Jun. 2009
[5] ”Special issue on: Blind system identification and estimation”, *Proc. IEEE*, vol. 86, Oct. 1998.
[6] N. Bourbaki, *Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1*, Addison-Wesley (1974)
[7] D. H. Brandwood, “A complex gradient operator and its application in adaptive array theory” ,Proc. IEE, vol. 130, no. 1, pp. 11–16, Feb. 1983.
[8] D.G. Chapman and H. Robbins, ”Minimum variance estimation without regularity assumptions”, Ann. Math. Stat., vol. 22, no. 4, pp. 581-586, 1951.
[9] E. Chaumette and P. Larzabal, ”Three useful algebraic lemmas”, Technical Note, ENS-CACHAN, France.
[10] E. Chaumette, J. Galy, A. Quinlan, P. Larzabal, ”A New Barankin Bound Approximation for the Prediction of the Threshold Region Performance of Maximum-Likelihood Estimators”, IEEE Trans. on SP, vol. 56, no. 11, pp. 5319-5333, Nov. 2008
[11] E. Chaumette, P. Larzabal, P. Forster, ”On the Influence of a Detection Step on Lower Bounds for Deterministic Parameters Estimation”, IEEE Trans. on SP, vol 53, pp. 4080-4090, Nov. 2005
[12] P. F. Combes, *Micro-ondes 2*, Dunod 1997
[13] H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics. Princeton*. NJ: Princeton Univ. Press, 1946.
[14] J. Darricau, *Physique et Théorie du Radar (tome 1)* , Sodipe 1973
[15] S. Drabowitch et C. Anconna, *Antennes (tome 2) : applications*, Masson 1978
[16] A. Dogandzic and A. Nehorai,”Cramér–Rao Bounds for Estimating Range, Velocity, and Direction with an Active Array”, IEEE Trans. on SP, vol. 49, pp. 1122-1137 , Jun. 2001
[17] M. Hazewinkel, *Encyclopaedia of Mathematics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002
[18] R.A. Fisher, ”On an absolute criterion for fitting frequency curves”, Mess. of Math., vol 41, p. 155-160, 1912
[19] P. Forster, P. Larzabal, ”On lower bounds for deterministic parameter estimation”, in Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process., pp.1137-1140, 2002.
[20] M. Fréchet, ”Sur l’extension de certaines évaluations statistiques au cas de petits échantillons”, Rev. Int. Stat, vol. 11, pp. 182-205, 1943
[21] D.A.S. Fraser and I. Guttman, ”Bhattacharyya bounds without regularity assumptions,” Ann. Math. Stat., vol. 23, no. 4., pp. 629-632, 1952
[22] B. Friedlander, ”On the Cramer-Rao Bound for Time Delay and Doppler Estimation”, IEEE Trans. on IT, vol. 30, no. 3, pp. 575-580, May 1984.
[23] F.E. Glave, ”A new look at the Barankin lower bound”, IEEE Trans. on IT, vol. 18, no. 3, pp. 349-356, May 1972
[24] J. D. Gorman and A. O. Hero, “Lower bounds for parametric estimation with constraints,” IEEE Trans. on IT, vol. 26, no. 6, pp.1285–1301, Nov. 1990
[25] A. O. Hero, III, J. A. Fessler, and M. Usman, ”Exploring estimator bias - variance tradeoffs using the uniform CR bound”, On the Cramer-Rao Bound for Time Delay and Doppler Estimation”, IEEE Trans. on SP, vol. 44, pp. 2026-2041, Aug. 1996.
[26] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1999
[27] A.K. Jagannatham, B.D. Rao, ”Cramér–Rao Lower Bound for Constrained Complex Parameters”, IEEE SP letters, vol. 11, no. 11, Nov. 2004
[28] S.M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993.
[29] E. L. Lehmann and G. Casella, *Theory of Point Estimation (2nd ed.)*. Springer 1998
[30] N. Levanon, ”Radar Principles”, Wiley-Interscience, Wiley 1988
[31] N Levanon, E. Mozeson, *Radar Signals*, Wiley-Interscience 2004
[32] N. Levanon, ”Multifrequency complementary phase-coded radar signal”, IEE Proc.-Radar, Sonar Navig., Vol. 147, No. 6, December 2000
[33] Eric W. Weisstein, *MathWorld–A Wolfram Web Resource*, http://mathworld.wolfram.com/HermitianInnerProduct.html
[34] Jian Li, Petre Stoica, *MIMO Radar Signal Processing, Wiley 2009*
[35] R. C. Liu and L. D. Brown, ”Nonexistance of informative unbiased estimators in singular problems”, *Ann. Stat*, vol. 21, no. 1, 1993.
[36] R. McAulay and L.P. Seidman, ”A useful form of the Barankin lower bound and its application to PPM threshold analysis”, IEEE Trans. on IT, vol. 15, no. 2, pp. 273-279, Mar. 1969.
[37] T.L. Marzetta, ”A simple derivation of the constrained multiple parameter Cramér–Rao bound”, IEEE Trans. on SP, vol. 41, no. 6, pp. 2247–2249, Jun. 1993.
[38] T. Menni, E. Chaumette, P. Larzabal and J. P. Barbot, ”New results on Deterministic Cramér-Rao bounds for real and complex parameters”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 60, no. 3, march 2012
[39] T. Menni, E. Chaumette, P. Larzabal and J. P. Barbot, ”Crb for Active Radar”, EUSIPCO 2011, Barcelona Spain
[40] T. Menni, E. Chaumette and P. Larzabal, ”Reparameterization and Constraints for CRB: duality and a major inequality for system analysis and design in the asymptotic region”, ICASSP 2012, Kyoto Japan
[41] T. Menni, E. Chaumette, P. Larzabal, ”CRB for Radar Signals: application to waveform design”, in preparation for submission to IEEE Trans. on AES
[42] Ottersten and M. Viberg and P. Stoica and A. Nehorai, ”Exact and Large Sample Maximum Likelihood Techniques for Parameter Estimation and Detection in Array Processing”, *Radar Array Processing*, §4, 1993, Springer-Verlag
[43] E. Roubine et J. Ch. Bolomey, *Antennes (tome 1) : introduction générale*, Masson 1978

[44] C.R. Rao, ”Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters,” Bull. Calcutta Math. Soc., vol. 37, pp. 81-91, 1945.

[45] C. R. Rao, *Linear Statistical Inference and Its Applications*, 2nd ed. New York: Wiley, 1973.

[46] A. Renaux, P. Forster, E. Chaumette, P. Larzabal, ”On the High RSB CML Estimator Full Statistical Characterization”, IEEE Trans. on SP, vol 54, no. 12, Dec. 2006

[47] I.Reuven, H. Messer, ”A Barankin-Type Lower Bound on the Estimation Error of a Hybrid Parameter Vector”, IEEE Trans., IT vol. 43, pp. 1084-1093, 1997

[48] D.C. Rife and R.R. Boorstyn, ”Single tone parameter estimation from discrete-time observations”, IEEE Trans. on IT, vol. 20, no.5, pp. 591-598, Sep. 1974.

[49] Ristic, B.; Arulampalam, S.; Gordon, N. (2004). *Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications*. Artech House.

[50] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1976

[51] L. Scharf, *Statistical Signal Processing*, Addison-Wiley, 1991

[52] M.A. Sebt, A. Cheikhi, M.M. Nayebi, ”Orthogonal frequency-division multiplexing radar signal design with optimised ambiguity function and low peak-to-average power ratio”, IET Radar, Sonar and Navigation, 2009, vol. 3. No. 2, pp 122-132.

[53] J. Sjöberg, Q. Zhang, L. Ljung, A. Benveniste, B. Delyon, P.-Y. Glorennec, H. Hjalmarsson, and A. Judisky, ”Nonlinear black-box medeling in system identification: Aunified averview”, *Automatica*, vol. 31, pp. 1691-1724, Dec. 1995.

[54] M. Skolnik, *Radar Handbook, Third Edition,* MacGraw-Hill, 2008

[55] P. Stoica and T. Söderström, ”On nonsingular information matrices and local identifiability”, *Int. J. Contr.*, vol. 36, pp. 323-329, 1982.

[56] P. Stoica and A. Nehorai, ”Performances study of conditional and unconditional direction of arrival estimation”, IEEE Trans. on SP, vol. 38, no. 10, pp. 1783-1795, Oct. 1990.

[57] P. Stoica, E. G. Larson, and A. B. Gershman, ”The stochastic CRB for array processing: A textbook derivation”, IEEE SP Letters, vol.8, pp. 148-150, May 2001

[58] P. Stoica and T. L. Marzetta, “Parameter estimation problems with singular information matrices”, IEEE Trans. on SP, vol. 49, no1, pp. 87-90, Jan. 2001

[59] P. Stoica and B. C. Ng, “On the Cramér–Rao bound under parametric constraints”, IEEE SP Letters, vol. 5, no. 7, pp. 177-179, Jul. 1998

[60] S.M. Sussman, ”Least-square synthesis of radar ambiguity functions”, IRE Trans. Inf. Theory, 1962, 8, pp. 246-254

[61] K. Todros and J. Tabrikian, ”General Classes of Performance Lower Bounds for Parameter Estimation-Part I: Non-Bayesian Bounds for Unbiased Estimators”, IEEE Trans. on IT, vol. 56, no. 10, Oct. 2010

[62] A. Van Den Bos, ”A Cramér-Rao Lower Bound for Complex Parameters”, IEEE Trans. on SP, vol. 42, no. 10, Oct. 1994

[63] H.L. Van Trees, *Optimum Array Processing*, New-York, Wiley-Interscience, 2002

[64] M. Wax, “The joint estimation of differential delay, Doppler, and phase.” IEEE Trans. on IT, vol. 28, no. 5, pp. 817-820, Sept. 1982.

[65] P. Whittle, “The analysis of multiple stationary time series,” J. Royal Statist. Sot., vol. 15, pp. 125-139, 1953

[66] Woodward, P., ”Theory of radar information”, IRE Professional Group on Information Theory, vol. 1. No. 1, pp 108 - 113,1953

[67] M.C. Wicks, E.L. Mokole, S.D. Blunt, R.S. Schneible, V.J. Amuso , *Principles of Waveform Diversity and Design*, SciTech Publishing 2010

[68] S. F. Yau and Y. Bresler, ”A Compact Cram&-Rao Bound Expression for Parametric Estimation of Superimposed Signals”, IEEE Trans. on SP, vol. 40, no. 5, pp 1226-1230, May 1992.

[69] S. F. Yau and Y. Bresler, ”Worst Case Cramér-Rao Bounds for Parametric Estimation of Superimposed Signals”, IEEE Trans. on SP, vol. 40. no. 12, pp 2973-2986, Dec. 1992

XIII. Annexes

A. Approximation bande étroite d'un réseau de récepteurs

Rappellons que le résultat général:

$$\min_{\lambda}\left\{\|\mathbf{u}-\lambda\mathbf{v}\|^2\right\}=\left(1-|\rho|^2\right)\langle\mathbf{u}\mid\mathbf{u}\rangle,\quad \rho=\frac{\langle\mathbf{u}\mid\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|},\quad \lambda_{\min}=\frac{\langle\mathbf{u}\mid\mathbf{v}\rangle}{\langle\mathbf{v}\mid\mathbf{v}\rangle}$$

que nous appliquons à :

$$\mathbf{u}=g(t)=e\left(t-\frac{d}{c}\right),\quad \mathbf{v}=e(t)=\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}e(f)\,e^{j2\pi ft}df$$

$$\langle\mathbf{u}\mid\mathbf{v}\rangle=\langle g(t)\mid e(t)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,e(t)^*\,dt=\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}g(f)\,e(f)^*\,df$$

Par conséquent :

$$\min\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)-\lambda e(t)|^2\,dt\right\}=\min\left\{\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}|g(f)-\lambda e(f)|^2\,df\right\}=\left(1-|\rho|^2\right)\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}|e(f)|^2\,df$$

$$\rho=\frac{\displaystyle\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}|e_T(f)|^2\,e^{-j2\pi f\frac{d}{c}}df}{\displaystyle\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}|e_T(f)|^2\,df},\quad \lambda_{\min}=\rho$$

Si on suppose $|e_T(f)|^2=1,\forall f\in\left[-\frac{B}{2},\frac{B}{2}\right]$ alors :

$$\rho=\frac{1}{B}\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}e^{-j2\pi f\frac{d(t)}{c}}df=\sin c\left(\pi B\frac{d}{c}\right)=\lambda_{\min}$$

$$\min\left\{\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|e\left(t-\tfrac{d}{c}\right)-\lambda e(t)\right|^2dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e\left(t-\tfrac{d}{c}\right)^2d}\right\}=1-\sin c\left(\pi\frac{Bd}{c}\right)^2$$

avec :

$$10*\log_{10}\left(\left(1-\sin c\left(\pi\frac{Bd}{c}\right)^2\right)\right)\simeq 1.5*\left(10*\log_{10}\left(\frac{Bd}{c}\right)\right),\quad \frac{Bd}{c}<10^{-2}$$

B. BCR pour un modèle déterministe à bande limité

Dans cette annexe nous détaillons l'obtention de la MIF (56) et de la BCR (59) pour le modèle d'observation déterministe à bande limité (55).
Tout d'abord, nous généralisons la notation (40) pour définir les projecteurs orthogonaux associés au produit scalaire (57). La dépendance des grandeurs considérées en fonction de la fréquence est omise si la lisibilité l'exige, et nous désignons indifféremment par $\{\mathbf{A}\}$ ou $\{\mathbf{A}(f)\}$ la famille des vecteurs colonnes de la matrice $\mathbf{A}(f)$:

$$\{\mathbf{A}\} = \{\mathbf{A}(f)\} = \{[\mathbf{a}_1(f)\dots\mathbf{a}_Q(f)]\} = \{\mathbf{a}_1(f),\dots,\mathbf{a}_Q(f)\} \tag{138}$$

Par conséquent, si $\mathbf{A}(f) = [\mathbf{a}_1(f)\dots\mathbf{a}_Q(f)]$ et $\mathbf{C}(f) = [\mathbf{c}_1(f)\dots\mathbf{c}_P(f)]$, alors $\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}(\{\mathbf{A}\},\{\mathbf{C}\}) \equiv \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}(\{\mathbf{A}(f)\},\{\mathbf{C}(f)\})$ est la matrice complexe de dimension $P\times Q$ définie par :

$$\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}(\{\mathbf{A}\},\{\mathbf{C}\})_{p,q} = \langle \mathbf{a}_q \mid \mathbf{c}_p\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{n}} \equiv \langle \mathbf{a}_q(f) \mid \mathbf{c}_p(f)\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{n}} = \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}(\{\mathbf{A}(f)\},\{\mathbf{C}(f)\})_{p,q} \tag{139}$$

De même $\Pi_{\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}}(\mathbf{a}) \equiv \Pi_{\{\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\}}(\mathbf{a}(f))$ désigne le projecteur orthogonal sur $im\{\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\}$ (sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de la matrice $\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})$) qui s'écrit :

$$\begin{aligned}\Pi_{\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}}(\mathbf{a}) &= \mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\,\mathbf{G}^{-1}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}(\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\})\,\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}(\mathbf{a},\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}) \\ &\equiv \Pi_{\{\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\}}(\mathbf{a}(f)) = \mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\,\mathbf{G}^{-1}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}(\{\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\})\,\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}(\mathbf{a}(f),\{\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\}),\end{aligned} \tag{140}$$

et $\Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}}$ désigne le projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel orthogonal à $im\{\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\}$ vérifiant :

$$\Pi_{\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}}(\mathbf{a}) + \Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \equiv \mathbf{a}(f) = \Pi_{\{\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\}}(\mathbf{a}(f)) + \Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\}}(\mathbf{a}(f)) \tag{141}$$

Par extension :

$$\Pi_{\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}}(\{\mathbf{A}\}) = \left\{\Pi_{\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}}(\mathbf{a}_1),\dots,\Pi_{\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}}(\mathbf{a}_Q)\right\} \equiv \left\{\Pi_{\{\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\}}(\mathbf{a}_1(f)),\dots,\Pi_{\{\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\}}(\mathbf{a}_Q(f))\right\} \tag{142}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}}(\{\mathbf{A}\}),\Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}}(\{\mathbf{C}\})\right)_{p,q} &= \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}}(\mathbf{a}_q),\Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\}}(\mathbf{c}_p)\right) \\ &= \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}(\mathbf{a}_q,\mathbf{c}_p) - \mathbf{G}^{H}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}(\mathbf{c}_p,\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\})\,\mathbf{G}^{-1}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}(\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\})\,\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}(\mathbf{a}_q,\{\mathbf{B}(\boldsymbol{\Xi})\})\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse d'un bruit $\mathbf{n}(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{n})$ à bande limitée B et blanc temporellement :

$$\begin{gathered}\mathbf{R}_\mathbf{n}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{n}) = \mathbf{R}_\mathbf{n}(0,\underline{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{n})\,\Pi_{\left[-\frac{B}{2},\frac{B}{2}\right]}(f) \rightleftharpoons \mathbf{R}_\mathbf{n}(\tau;\underline{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{n}) = \mathbf{R}_\mathbf{n}(0,\underline{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{n})\sin c(\pi B\tau) = \mathbf{R}_\mathbf{n}(\underline{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{n})\sin c(\pi B\tau), \\ \mathbf{R}_\mathbf{n}(\underline{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{n}) = \mathbf{R}_\mathbf{n}(\tau=0,\underline{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{n}) = B\mathbf{R}_\mathbf{n}(f=0,\underline{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{n}),\end{gathered}$$

la d.d.p du vecteur d'observation $\mathbf{x}(t;\underline{\boldsymbol{\theta}})$ à bande limitée B, après échantillonnage à la cadence $\Delta t = \frac{1}{B}$ sur une durée finie T $\left(T = N_e \frac{1}{B}\right)$ englobant le support temporel de $\mathbf{s}(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}})$, s'écrit :

$$\begin{aligned}
p\left(\mathbf{x}(0),...,\mathbf{x}(N_e-1);\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}},\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right) &= \frac{e^{-\sum_{i=0}^{N_e-1}(\mathbf{x}(i)-\mathbf{s}(i;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}))^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})^{-1}(\mathbf{x}(i)-\mathbf{s}(i;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}))}}{\pi^{N_e N}\left|\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)\right|^{N_e}} \\
&= \frac{e^{-B\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathbf{x}(t)-\mathbf{s}(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}))^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(0;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})^{-1}(\mathbf{x}(t)-\mathbf{s}(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}))dt}}{\pi^{N_e N}\left|\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(\tau=0;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)\right|^{N_e}} \\
p\left(\mathbf{x}(0),...,\mathbf{x}(N_e-1);\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}},\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right) &= \frac{e^{-\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}(\mathbf{x}(f)-\mathbf{s}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}))^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})^{-1}(\mathbf{x}(f)-\mathbf{s}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}))df}}{(\pi B)^{N_e N}\left|\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f=0;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)\right|^{N_e}} \qquad (143)
\end{aligned}$$

et conduit à la MIF (51) suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}} &= \begin{bmatrix} E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}\frac{\partial \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^H}\right] & E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}\frac{\partial \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^H}\right] \\ E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}\frac{\partial \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^H}\right] & E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}\frac{\partial \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^H}\right] \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^H}\right] & E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^H}\right] \\ E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^H}\right] & E_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^H}\right] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}} & \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}},\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}} \\ \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}},\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}} & \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

avec (après quelques lignes de calcul sans difficulté) :

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}\right)_{l,k} &= \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}\left(\frac{\partial \mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)_k}\right)^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)\left(^{-1}\frac{\partial \mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)_l}\right)df + \\
&\qquad \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}\left(\frac{\partial \mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)_l^*}\right)^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)_k^*}\right)df \\
\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}\right)_{l,k} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)_l} \mid \frac{\partial \mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)_k}\right\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}} + \left\langle \frac{\partial \mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)_k^*} \mid \frac{\partial \mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}\right)_l^*}\right\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}} \qquad (144)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}\right)_{l,k} &= N_e tr\left(\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(0;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)^{-1}\frac{\partial \mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(0;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)_k^*}\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(0;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)^{-1}\frac{\partial \mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(0;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)_l}\right) \\
\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}}\right)_{l,k} &= \frac{N_e}{B}\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} tr\left(\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)^{-1}\frac{\partial \mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)_k}\mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)^{-1}\frac{\partial \mathbf{R}_{\mathbf{n}}\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)}{\partial\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}\right)_l}\right)df \qquad (145) \\
\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}},\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}\right)_{l,k} &= 0
\end{aligned}$$

La structure bloc diagonale de la MIF $\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}},\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}} = \mathbf{0}\right)$ indique, qu'au sens de la BCR, la connaissance ou non des paramètres $\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}$ des bruits $\mathbf{n}(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})$ ne modifie pas la BCR pour les paramètres $\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}$ du signal d'intérêt $\mathbf{s}(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}})$.

La validité de (145) dans le cas d'un bruit $\mathbf{n}(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})$ coloré temporellement $(\mathbf{R}_{\mathbf{n}}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}) \rightleftharpoons \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(\tau;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}))$ a été démontrée par Whittle [22, (5)(10)][65, th. 9].
La validité de (144) dans le cas d'un bruit $\mathbf{n}(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})$ coloré temporellement s'obtient en supposant les paramètres du bruit connus. Dans ce cas $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}} = \mathbf{0}$ et, sachant que la MIF est invariante par transformation bijective sur les signaux reçus [64], l'opération de blanchiement $\mathbf{x}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}) \rightarrow \mathbf{L}^{-1}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})\,\mathbf{x}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}})$ par la transformation spatio-fréquentielle bijective $\mathbf{L}^{-1}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})$ telle que $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}) = \mathbf{L}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})\,\mathbf{L}^{H}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})$ conduit à un modèle d'observation de MIF identique mais obtenue pour un bruit blanc spatiallement et temporellement pour lequel :

$$\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}\right)_{l,k} = \begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \left(\frac{\partial \mathbf{L}^{-1}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})\,\mathbf{s}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}})}{\partial(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}})_k}\right)^{H} \left(\frac{\partial \mathbf{L}^{-1}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})\,\mathbf{s}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}})}{\partial(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}})_l}\right) df + \\ \displaystyle\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \left(\frac{\partial \mathbf{L}^{-1}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})\,\mathbf{s}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}})}{\partial(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}})_l^*}\right)^{H} \left(\frac{\partial \mathbf{L}^{-1}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})\,\mathbf{s}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}})}{\partial(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}})_k^*}\right) df \end{array} = (144)$$

La BCR pour les paramètres du signal $\mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})$ s'obtient en inversant la MIF $\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}}$. Dans le cas du modèle d'observation radar (55) où le vecteur des paramètres du signal est $\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}} = \left(\boldsymbol{\sigma}^T, \boldsymbol{\sigma}^H, \boldsymbol{\Xi}^T\right)^T$:

$$\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}} = -E_{\boldsymbol{\theta}} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\boldsymbol{\sigma}\partial\boldsymbol{\sigma}^H} & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\boldsymbol{\sigma}^*\partial\boldsymbol{\sigma}^H} & \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\boldsymbol{\sigma}^*\partial\boldsymbol{\sigma}^T} & \cdots \\ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\boldsymbol{\Xi}\partial\boldsymbol{\sigma}^H} & \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\boldsymbol{\Xi}\partial\boldsymbol{\sigma}^T} & \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x},\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\boldsymbol{\Xi}\partial\boldsymbol{\Xi}^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}^*} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\Xi}} \\ \mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^*,\boldsymbol{\sigma}^*} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^*,\boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^*,\boldsymbol{\Xi}} \\ \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}^*} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\Xi}} \end{bmatrix}$$

Si nous désignons par l'indice (n,m) la co-information entre la $n^{ème}$ et la $m^{ème}$ source, quelque lignes de calcul sans difficulté conduisent à :

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}^*}\right)_{n,m} &= \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \mathbf{b}(f;\boldsymbol{\varepsilon}_n)^H\,\mathbf{R}_{\mathbf{n}}(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})^{-1}\,\mathbf{b}(f;\boldsymbol{\varepsilon}_m)\,df \\
\left(\mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^*,\boldsymbol{\sigma}^*}\right)_{n,m} &= 0 \\
\left(\mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^*,\boldsymbol{\sigma}}\right)_{n,m} &= \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \left(\mathbf{b}(f;\boldsymbol{\varepsilon}_m)\right)^H\,\mathbf{R}_{\mathbf{n}}(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})^{-1}\,\mathbf{b}(f;\boldsymbol{\varepsilon}_n)\,df \\
\left(\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}^*}\right)_{n,m} &= \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \left(\frac{\partial \mathbf{s}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}})}{\partial\Xi_n}\right)^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})^{-1}\,\mathbf{b}(f;\boldsymbol{\varepsilon}_m)\,df \\
\left(\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}}\right)_{n,m} &= \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \mathbf{b}(f;\boldsymbol{\varepsilon}_m)^H\,\mathbf{R}_{\mathbf{n}}(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})^{-1}\,\frac{\partial \mathbf{s}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}})}{\partial\Xi_n}df \\
\left(\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\Xi}}\right)_{n,m} &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \left(\frac{\partial \mathbf{s}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}})}{\partial\Xi_n}\right)^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}})^{-1}\,\frac{\partial \mathbf{s}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}})}{\partial\Xi_m}df\right\}
\end{aligned}$$

ce qui, en utilisant la notation introduite précédement (138-142), permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}^*} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\Xi}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^*,\boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^*,\boldsymbol{\Xi}} \\ \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}^*} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\Xi}} \end{bmatrix} \\
\mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}^*} &= \mathbf{F}^*_{\boldsymbol{\sigma}^*,\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n}}}\left(\{\mathbf{B}\left(f,\boldsymbol{\Xi}\right)\},\{\mathbf{B}\left(f,\boldsymbol{\Xi}\right)\}\right) \\
\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}^*} &= \mathbf{F}^H_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\Xi}} = \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n}}}\left(\{\mathbf{B}\left(f,\boldsymbol{\Xi}\right)\},\left\{\frac{\partial \mathbf{s}\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}}\right)}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\}\right) \\
\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{F}^H_{\boldsymbol{\sigma}^*,\boldsymbol{\Xi}} = \mathbf{F}^*_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\sigma}^*} \\
\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\Xi}} &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n}}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}}\right)}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\},\left\{\frac{\partial \mathbf{s}\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}}\right)}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\}\right)\right\}
\end{aligned}$$

et conduit à la forme suivante de $\mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$:

$$\mathbf{BCR}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\sigma}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\sigma}^*}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) & \dots \\ \dots & \dots & \mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\Xi}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) \end{bmatrix} = \mathbf{F}^{-1}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

Puisque nous nous intéressons principalement aux performances en estimation des paramètres d'intérêt $\boldsymbol{\Xi}$, l'utilisation du lemme d'inversion matriciel par bloc permet d'exprimer $\mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\Xi}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)$ sous la forme :

$$\mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\Xi}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)^{-1} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$$

où :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{22} &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n}}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}}\right)}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\},\left\{\frac{\partial \mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}}\right)}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\}\right)\right\} \\
\mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n}}}\left(\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\},\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\}\right) & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n}}}\left(\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\},\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\}\right)^* \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n}}}\left(\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\},\left\{\frac{\partial \mathbf{s}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}})}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\}\right)^H \\ \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n}}}\left(\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\},\left\{\frac{\partial \mathbf{s}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}})}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\}\right)^T \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{21} &= \mathbf{A}_{12}^H
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\Xi}}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)^{-1} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\begin{array}{l} \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n}}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}})}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\},\left\{\frac{\partial \mathbf{s}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}})}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\}\right) \\ -\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n}}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}})}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\},\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\}\right)^H \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n}}}\left(\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\},\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\}\right)^{-1} \\ \times\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n}}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}})}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\},\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\}\right) \end{array}\right\} \quad (146)$$

$$\mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\Xi}}^{-1}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{n}}}\left(\Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}}\right)}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\}\right),\Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}}\right)}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\}\right)\right)\right\} \quad (147)$$

$$\mathbf{BCR}_{\boldsymbol{\Xi}}^{-1}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{n}}}\left(\Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}}\right)}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\}\right)\right)\right\} \quad (148)$$

Le calcul de $\left(\mathbf{BCR}_{\Xi}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)^{-1}\right)_{n,l}$ correspondant aux $n^{ème}$ et $l^{ème}$ composantes de Ξ :

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{BCR}_{\Xi}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)^{-1}\right)_{n,l} &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\begin{array}{l}\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\left\{\frac{\partial(\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\boldsymbol{\sigma})}{\partial\Xi_l}\right\},\left\{\frac{\partial(\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\boldsymbol{\sigma})}{\partial\Xi_n}\right\}\right)\\ -\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\left\{\frac{\partial(\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\boldsymbol{\sigma})}{\partial\Xi_n}\right\},\left\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\right\}\right)^H\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\left\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\right\},\left\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\right\}\right)^{-1}\\ \times\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\left\{\frac{\partial(\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\boldsymbol{\sigma})}{\partial\Xi_l}\right\},\left\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\right\}\right)\end{array}\right\}\\
&= 2\,\mathrm{Re}\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{\sigma}^H\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})}{\partial\Xi_l}\right\},\left\{\frac{\partial\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})}{\partial\Xi_n}\right\}\right)\boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma}^H\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})}{\partial\Xi_n}\right\},\left\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\right\}\right)^H\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\left\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\right\},\left\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\right\}\right)^{-1}\\ \times\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})}{\partial\Xi_l}\right\},\left\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\right\}\right)\boldsymbol{\sigma}\end{array}\right\}\\
&= 2\,\mathrm{Re}\left\{\begin{array}{l}tr\left(\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{n}}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})}{\partial\Xi_l}\right\},\left\{\frac{\partial\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})}{\partial\Xi_n}\right\}\right)\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^H\right)\\ -tr\left(\begin{array}{l}\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})}{\partial\Xi_n}\right\},\left\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\right\}\right)^H\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\left\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\right\},\left\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\right\}\right)^{-1}\\ \times\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})}{\partial\Xi_l}\right\},\left\{\mathbf{B}\left(f;\boldsymbol{\Xi}\right)\right\}\right)\end{array}\right)\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^H\end{array}\right.
\end{aligned}$$

conduit à :

$$\left(\mathbf{BCR}_{\Xi}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)^{-1}\right)_{n,l} = 2\,\mathrm{Re}\left\{tr\left(\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\left\{\Pi^{\perp}_{\mathbf{A}}\left(\mathbf{D}_l\right)\right\},\left\{\Pi^{\perp}_{\mathbf{A}}\left(\mathbf{D}_n\right)\right\}\right)\left(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^H\right)\right)\right\} \tag{149}$$

$$\mathbf{D}_n = \frac{\partial\mathbf{B}\left(t,\boldsymbol{\Xi}\right)}{\partial\Xi_n},\quad \mathbf{D}_l = \frac{\partial\mathbf{B}\left(t,\boldsymbol{\Xi}\right)}{\partial\Xi_l},\quad \mathbf{A} = \left\{\mathbf{B}\left(t;\boldsymbol{\Xi}\right)\right\}$$

Si nous supposons maintenant que les composantes n et l de Ξ correspondent respectivement au $p^{ème}$ et $p'^{ème}$ paramètre de la $m_1^{ème}$et de la $m_2^{ème}$ source, c'est à dire que $n = P\left(m_1-1\right)+p$ et $l = P\left(m_2-1\right)+p'$, où P est le nombre de paramètres par source, alors:

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{BCR}_{\Xi}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)^{-1}\right)_{n,l} &= 2\,\mathrm{Re}\left\{tr\left(\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\left\{\Pi^{\perp}_{\mathbf{A}}\left(\mathbf{D}_{P(m_2-1)+p'}\right)\right\},\left\{\Pi^{\perp}_{\mathbf{A}}\left(\mathbf{D}_{P(m_1-1)+p}\right)\right\}\right)\left(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^H\right)\right)\right\}\\
\mathbf{D}_{P(m_1-1)+p} &= \frac{\partial\mathbf{B}\left(f,\boldsymbol{\Xi}\right)}{\partial\Xi_{P(m_1-1)+p}} = \left[\mathbf{0}\ \mathbf{0}\ldots\mathbf{0}\ \frac{\partial\mathbf{b}\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_{m_1}\right)}{\partial\varepsilon_p}\ \mathbf{0}\ \ldots\mathbf{0}\right]\in\mathcal{M}\left(N,M\right)\\
\mathbf{D}_{P(m_2-1)+p'} &= \frac{\partial\mathbf{B}\left(f,\boldsymbol{\Xi}\right)}{\partial\Xi_{P(m_2-1)+p'}} = \left[\mathbf{0}\ \mathbf{0}\ldots\mathbf{0}\ \frac{\partial\mathbf{b}\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_{m_2}\right)}{\partial\varepsilon_{p'}}\ \mathbf{0}\ \ldots\mathbf{0}\right]\in\mathcal{M}\left(N,M\right)
\end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{BCR}_{\Xi}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)^{-1}\right)_{n,l} &= 2\,\mathrm{Re}\left\{tr\left(\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\Pi^{\perp}_{\mathbf{A}}\left(\frac{\partial\mathbf{b}\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_{m_2}\right)}{\partial\varepsilon_{p'}}\right),\Pi^{\perp}_{\mathbf{A}}\left(\frac{\partial\mathbf{b}\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_{m_1}\right)}{\partial\varepsilon_p}\right)\right)\mathbf{e}_{m_1}\mathbf{e}_{m_2}^H\left(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^H\right)\right)\right\}\\
&= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\Pi^{\perp}_{\mathbf{A}}\left(\frac{\partial\mathbf{b}\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_{m_2}\right)}{\partial\varepsilon_{p'}}\right),\Pi^{\perp}_{\mathbf{A}}\left(\frac{\partial\mathbf{b}\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_{m_1}\right)}{\partial\varepsilon_p}\right)\right)\mathbf{e}_{m_2}^H\left(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^H\right)\mathbf{e}_{m_1}\right\}\\
&= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\Pi^{\perp}_{\mathbf{A}}\left(\frac{\partial\mathbf{b}\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_{m_2}\right)}{\partial\varepsilon_{p'}}\right),\Pi^{\perp}_{\mathbf{A}}\left(\frac{\partial\mathbf{b}\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_{m_1}\right)}{\partial\varepsilon_p}\right)\right)\left(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^H\right)_{m_2,m_1}\right\}
\end{aligned}$$

avec :

$$\left(\mathbf{e}_m\right)_{m'} = \delta_m^{m'},\quad p,p'\in\left[1,P\right]$$

Par conséquent, si nous notons $\left(\mathbf{BCR}_{\Xi}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)^{-1}\right)^{m_1,m_2}\in\mathcal{M}\left(P,P\right)$ la co-information entre la $m_1^{ème}$ source et la $m_2^{ème}$ source, et $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \left(\varepsilon_1,...,\varepsilon_p,...,\varepsilon_P\right)$ le vecteur des P paramètres de chaque source, alors :

$$\left(\mathbf{BCR}_{\Xi}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)^{-1}\right)^{m_1,m_2} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{n}}\left(\Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\}}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{b}\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_{m_2}\right)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^T}\right\}\right),\Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(f;\boldsymbol{\Xi})\}}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{b}\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_{m_1}\right)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^T}\right\}\right)\right)\left(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^H\right)_{m_2,m_1}\right\}$$

ce qui conduit à l'expression suivante de la BCR associée au vecteur des paramètres d'intérêt d'un modèle déterministe à bande limité à une seule observation :

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{BCR}_{\Xi}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)^{-1}\right) &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)\odot\left(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}^{T}\otimes\mathbf{1}_{P\times P}\right)\right\} \qquad (150)\\
\mathbf{H}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)_{1,1} & \mathbf{H}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)_{1,2} & \mathbf{H}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)_{1,M} \\ \mathbf{H}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)_{2,1} & \mathbf{H}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)_{2,2} & \\ & & \\ \mathbf{H}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)_{M,1} & & \mathbf{H}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)_{M,M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{H}\\
\mathbf{H}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}\right)_{m_1,m_2} &= \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{n}}}\left(\Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(f;\Xi)\}}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{b}\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_{m_2}\right)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{T}}\right\}\right),\Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(f;\Xi)\}}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{b}\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_{m_1}\right)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{T}}\right\}\right)\right)
\end{aligned}$$

C. MIF et BCR pour L observations déterministes indépendantes à bande limitée

Nous reprenons le modèle (60) :

$$\mathbf{x}^{l}\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}^{l}\right)=\mathbf{s}^{l}\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^{l}\right)+\mathbf{n}^{l}\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^{l}\right),\quad \mathbf{s}^{l}\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^{l}\right)=\mathbf{B}^{l}\left(t;\boldsymbol{\Xi}^{l}\right)\boldsymbol{\sigma}^{l}$$

Pour exploiter le résultat obtenu lors du calcul de la MIF (56) pour le modèle à 1 seule observation (55) nous procédons au réarrangement suivant du vecteur des paramètres inconnus :

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}^{T} &= \left(\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{T},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{H},\underline{\boldsymbol{\Xi}}^{T}\right),\quad \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{T}=\left(\left(\boldsymbol{\sigma}^{1}\right)^{T},...,\left(\boldsymbol{\sigma}^{L}\right)^{T}\right),\quad \underline{\boldsymbol{\Xi}}^{T}=\left(\left(\boldsymbol{\Xi}^{1}\right)^{T},...,\left(\boldsymbol{\Xi}^{L}\right)^{T}\right)\\
\left(\boldsymbol{\sigma}^{l}\right)^{T} &= \left(\sigma_{1}^{l},\ldots,\sigma_{M}^{l}\right),\quad \left(\boldsymbol{\Xi}^{l}\right)^{T}=\left(\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{1}^{l}\right)^{T},\ldots,\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{M}^{l}\right)^{T}\right),\quad \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{m}^{l}\right)^{T}=\left(\varepsilon_{m,1}^{l},\ldots,\varepsilon_{m,P}^{l}\right),
\end{aligned}$$

ce qui conduit à l'expression suivante de la MIF des paramètres signal (95) :

$$\mathbf{F}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}}=\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{*}} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{*},\underline{\boldsymbol{\sigma}}} & \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{*},\underline{\boldsymbol{\Xi}}} \\ \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{*}} & \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}} & \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}} \end{bmatrix},\quad \left|\begin{array}{l} \mathbf{F}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}}\in\mathcal{M}\left(2LM+LMP,2LM+LMP\right)\\ \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{*}}\in\mathcal{M}\left(LM,LM\right)\\ \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}}\in\mathcal{M}\left(LMP,LMP\right)\end{array}\right. \qquad (151)$$

où M est le nombre de sources, P est le nombre de paramètre pour chaque source et L est le nombre d'observations.

Dans la suite, les indices (l,l') et (n,m) désignent respectivement le couple d'observations l et l' et le couple de sources n et m.

L'indépendance entre les L observations implique que toutes les matrices de (151) sont bloc digonales et

vérifient :

$$
\begin{aligned}
\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*}\right)_{l,l'} &= \boldsymbol{\delta}_{l,l'}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^l,\boldsymbol{\sigma}^{l'*}}, \quad \left(\mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^l,\boldsymbol{\sigma}^{l*}}\right)_{n,m} = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \mathbf{b}^l\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_n^l\right)^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^l\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l\right)^{-1}\mathbf{b}^l\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_m^l\right)df \\
\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*,\underline{\boldsymbol{\sigma}}}\right)_{l,l'} &= \boldsymbol{\delta}_{l,l'}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^{l*},\boldsymbol{\sigma}^{l'}}, \quad \left(\mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^{l*},\boldsymbol{\sigma}^{l}}\right)_{n,m} = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \left(\mathbf{b}^l\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_m^l\right)\right)^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^l\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l\right)^{-1}\mathbf{b}^l\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_n^l\right)df \\
\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*}\right)_{l,l'} &= \boldsymbol{\delta}_{l,l'}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^l,\boldsymbol{\sigma}^{l'*}}, \quad \left(\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^l,\boldsymbol{\sigma}^{l*}}\right)_{n,m} = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \left(\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^l\right)}{\partial \Xi_n^l}\right)^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^l\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l\right)^{-1}\mathbf{b}^l\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_m^l\right)df \\
\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}}\right)_{l,l'} &= \boldsymbol{\delta}_{l,l'}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^l,\boldsymbol{\sigma}^{l'}}, \quad \left(\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^l,\boldsymbol{\sigma}^{l}}\right)_{n,m} = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \mathbf{b}^l\left(f;\boldsymbol{\varepsilon}_m\right)^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^l\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l\right)^{-1}\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^l\right)}{\partial \Xi_n^l}df \\
\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}}\right)_{l,l'} &= \boldsymbol{\delta}_{l,l'}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^l,\boldsymbol{\Xi}^{l'}}, \quad \left(\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^l,\boldsymbol{\Xi}^{l}}\right)_{n,m} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \left(\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^l\right)}{\partial \Xi_n^l}\right)^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^l\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l\right)^{-1}\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(f;\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^l\right)}{\partial \Xi_m^l}df\right\}
\end{aligned}
$$

où $\boldsymbol{\delta}_{l,l'} = \begin{cases} 1 \text{ si } l = l' \\ 0 \text{ si } l \neq l' \end{cases}$. Par conséquent, la MIF pour les paramètres signal associée au modèle à L observations indépendantes (60) s'écrit :

$$
\mathbf{F}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*} & \mathbf{0} & \left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*}\right)^H \\ \mathbf{0} & \left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*}\right)^* & \left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*}\right)^T \\ \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*} & \left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*}\right)^* & \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}} \end{bmatrix}, \quad \left|\begin{array}{l}
\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*} = \left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*,\underline{\boldsymbol{\sigma}}}\right)^* = diag\left[\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l}\left(\left\{\mathbf{B}^l\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)\right\},\left\{\mathbf{B}^l\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)\right\}\right)\right]_{l=1,\ldots,L} \\
\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*} = \left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}}\right)^H = diag\left[\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l}\left(\left\{\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)\right\},\left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^l\right)}{\partial\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)^T}\right\}\right)\right]_{l=1,\ldots,L} \\
\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*,\underline{\boldsymbol{\Xi}}}\right)^H = \left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*}\right)^* \\
\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}} = diag\left[2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}^l}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^l\right)}{\partial\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)^T}\right\},\left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{s}}^l\right)}{\partial\left(\boldsymbol{\Xi}^l\right)^T}\right\}\right)\right\}\right]_{l=1,\ldots,L}
\end{array}\right. \tag{152}
$$

où :

$$
diag\left[\mathbf{f}^l(\mathbf{x}^l)\right]_{l=1,\ldots,L} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^1(\mathbf{x}^1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{f}^L(\mathbf{x}^L) \end{bmatrix}
$$

1) Cas des sources fluctuantes :

Sous les contraintes :

$$
\boldsymbol{\Xi}^l - \boldsymbol{\Xi}^1 = \mathbf{0},\ l \in [2, L],
$$

la MIF (152) devient :

$$\mathbf{F}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathrm{s}}} = \left| \begin{array}{l} \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*} = \left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*,\underline{\boldsymbol{\sigma}}}\right)^* = \mathbf{I}_{(L\times L)} \otimes \mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathrm{n}}}\left(\left\{\mathbf{B}^l\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\right\}, \left\{\mathbf{B}^l\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\right\}\right) \\ \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*} = \left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}}\right)^H = diag\left[\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathrm{n}}}\left(\left\{\mathbf{B}^l\left(\boldsymbol{\Xi}\right)\right\}, \left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathrm{s}}\right)}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\}\right)\right]_{l=1,\ldots,L} \\ \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*,\underline{\boldsymbol{\Xi}}}\right)^H = \left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*}\right)^* \\ \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}} = diag\left[2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathrm{n}}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathrm{s}}\right)}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\}, \left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathrm{s}}\right)}{\partial \boldsymbol{\Xi}^T}\right\}\right)\right\}\right]_{l=1,\ldots,L} \end{array} \right. \tag{153}$$

et $\mathbf{BCR}^c_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathrm{s}}|\underline{\mathbf{O}}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right)$ (75) s'obtient en injectant (153) dans (96) :

$$\mathbf{BCR}^c_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathrm{s}}|\underline{\mathbf{O}}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right) = \mathbf{U}^*_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathrm{s}}}\left(\mathbf{U}^T_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathrm{s}}}\mathbf{F}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathrm{s}}}\mathbf{U}^*_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathrm{s}}}\right)^{-1}\mathbf{U}^T_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathrm{s}}} \quad \text{où } \mathbf{U}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathrm{s}}} \text{ est une base de } \ker\left\{\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{s}}\left(\underline{\mathbf{O}}_{\mathrm{s}}\right)}{\partial \underline{\mathbf{O}}^T_{\mathrm{s}}}\right\} \tag{154}$$

avec :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{s}}\left(\underline{\mathbf{O}}_{\mathrm{s}}\right)}{\partial \underline{\mathbf{O}}^T_{\mathrm{s}}}\right) &= \left.\frac{\partial\left(\boldsymbol{\Xi}^l - \boldsymbol{\Xi}^1\right)}{\partial \underline{\mathbf{O}}^T_{\mathrm{s}}}\right|_{l\in[2,L]} \in \mathcal{M}\left(\left(L-1\right)MP, 2LM + LMP\right) \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{0}_{(L-1,L)} \otimes \mathbf{1}_{(MP,M)} & \mathbf{0}_{(L-1,L)} \otimes \mathbf{1}_{(MP,M)} & \mathbf{V}_{(L-1,L)} \otimes \mathbf{I}_{(MP,MP)} \end{array}\right] \end{aligned}$$

où :

$$\mathbf{V}_{(L',L)} = \left[\begin{array}{cc} -\mathbf{1}_{(L',L-L')} & \mathbf{I}_{(L',L')} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc} -1 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -1 & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ -1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{array}\right], \quad L > L'$$

Finalement $\mathbf{U}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathrm{s}}}$ (154) est de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathrm{s}}} &= im\left\{\ker\left\{\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_{\mathrm{s}}\left(\underline{\mathbf{O}}_{\mathrm{s}}\right)}{\partial \underline{\mathbf{O}}^T}\right\}\right\} \in \mathcal{M}\left(2LM + LMP, 2LM + MP\right) \\ &= \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}} \end{array}\right], \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{I}_{(LM,LM)} \\ \mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}} = \mathbf{1}_{(L,1)} \otimes \mathbf{I}_{(MP,MP)} \end{array}\right. \end{aligned} \tag{155}$$

ce qui conduit, en injectant (155) et (153) dans (154), à :

$$\mathbf{BCR}^c_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathrm{s}}|\underline{\mathbf{O}}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right) = \mathbf{U}^*_{\underline{\mathbf{O}}}\left(\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*} & \mathbf{0} & \left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*}\right)^H\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}} \\ \mathbf{0} & \left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*}\right)^* & \left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*}\right)^T\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}} \\ \left(\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}}\right)^T\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*} & \left(\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}}\right)^T\left(\mathbf{F}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*}\right)^* & \sum_{l=1}^L \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^l,\boldsymbol{\Xi}^l} \end{array}\right]\right)^{-1}\mathbf{U}^T_{\underline{\mathbf{O}}}$$

En utilisant le théorème d'inversion par bloc, nous pouvons extraire la BCR sous contrainte associée au vecteur de paramètres d'intérêt $\underline{\Xi}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{BCR}^c_{\underline{\Xi},\underline{\Xi}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right) &= \mathbf{U}_{\underline{\Xi},\underline{\Xi}}\left(\sum_{l=1}^{L}\mathbf{F}_{\Xi^l,\Xi^l} - 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{l=1}^{L}\mathbf{F}_{\Xi^l,\boldsymbol{\sigma}^{l*}}\mathbf{F}^{-1}_{\boldsymbol{\sigma}^l,\boldsymbol{\sigma}^{l*}}\mathbf{F}^{H}_{\Xi^l,\boldsymbol{\sigma}^{l*}}\right\}\right)^{-1}\left(\mathbf{U}_{\underline{\Xi},\underline{\Xi}}\right)^T \\
&= \mathbf{U}_{\underline{\Xi},\underline{\Xi}}\left(\sum_{l=1}^{L}2\,\mathrm{Re}\left\{\begin{array}{l}
\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{s}}\right)}{\partial \Xi^T}\right\},\left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{s}}\right)}{\partial \Xi^T}\right\}\right) \\
-\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{s}}\right)}{\partial \Xi^T}\right\},\left\{\mathbf{B}^l\left(t;\Xi\right)\right\}\right)^H \\
\times\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}}\left(\left\{\mathbf{B}^l\left(t;\Xi\right)\right\},\left\{\mathbf{B}^l\left(t;\Xi^l\right)\right\}\right)^{-1} \\
\times\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{s}}\right)}{\partial \Xi^T}\right\},\left\{\mathbf{B}^l\left(t;\Xi\right)\right\}\right)
\end{array}\right\}\right)^{-1}\left(\mathbf{U}_{\underline{\Xi},\underline{\Xi}}\right)^T \\
&= \mathbf{U}_{\underline{\Xi},\underline{\Xi}}\left(\sum_{l=1}^{L}2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}}\left(\Pi^{\perp}_{\left\{\mathbf{B}^l(\Xi)\right\}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{s}}\right)}{\partial \Xi^T}\right\}\right)\right)\right\}\right)^{-1}\left(\mathbf{U}_{\underline{\Xi},\underline{\Xi}}\right)^T
\end{aligned}$$

Si nous désignons par $\mathbf{BCR}^c_{\Xi^l,\Xi^{l'}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right)$ la matrice pour le couple d'observations (l,l'), alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{BCR}^c_{\Xi^l,\Xi^{l'}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right) &= \left(\mathbf{BCR}^c_{\underline{\Xi},\underline{\Xi}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right)\right)_{l,l'} \in \mathcal{M}\left(MP,MP\right), \quad \forall l,l' \in [1,...,L] \\
&= \left(\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{I}_{(MP,MP)}\right)^T \mathbf{BCR}^c_{\underline{\Xi},\underline{\Xi}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right)\left(\mathbf{e}_{l'} \otimes \mathbf{I}_{(MP,MP)}\right), \quad \mathbf{e}_l \in \mathcal{M}\left(L,1\right), \quad \left(\mathbf{e}_l\right)_{l'} = \delta^{l'}_l
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbf{BCR}^c_{\Xi|\underline{\mathbf{O}}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right) &= \mathbf{BCR}^c_{\Xi^l,\Xi^l}\left(\underline{\mathbf{O}}\right) \\
&= \left(\sum_{l=1}^{L}2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}}\left(\Pi^{\perp}_{\left\{\mathbf{B}^l(\Xi)\right\}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{s}^l\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{s}}\right)}{\partial \Xi^T}\right\}\right)\right)\right\}\right)^{-1}, \quad \mathbf{s}^l\left(t;\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{s}}\right) = \mathbf{B}^l\left(t;\Xi\right)\boldsymbol{\sigma}^l
\end{aligned}$$

soit encore, en utilisant (59) :

$$\mathbf{BCR}^c_{\Xi|\underline{\mathbf{O}}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right) = \left(\sum_{l=1}^{L}2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}^l_{\Xi}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^l\right) \odot \left(\left(\boldsymbol{\sigma}^l\left(\boldsymbol{\sigma}^l\right)^H\right)^T \otimes \mathbf{1}_{P\times P}\right)\right\}\right)^{-1} \tag{156}$$

où :

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}^l_{\Xi}\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}^l\right)_{m_1,m_2} &= \mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}}\left(\Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(\Xi)\}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{b}^l\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{m_2}\right)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T}\right\}\right), \Pi^{\perp}_{\{\mathbf{B}(\Xi)\}}\left(\left\{\frac{\partial \mathbf{b}^l\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{m_1}\right)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T}\right\}\right)\right), \quad \forall l \in [1,...,L] \\
\left\langle \mathbf{x}\left(f\right) \mid \mathbf{y}\left(f\right)\right\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}} &= \int_{-\frac{B^l}{2}}^{\frac{B^l}{2}} \mathbf{y}\left(f\right)^H \mathbf{R}^l_{\mathbf{n}}\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}^l_{\mathbf{n}}\right)^{-1}\mathbf{x}\left(f\right)df.
\end{aligned}$$

2) Cas des sources non fluctuantes:

Sous les contraintes :

$$\Xi^l - \Xi^1 = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma}^l - \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{0}\ ,\ l \in [2,L]\,,$$

$\mathbf{BCR}^c_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}|\underline{\mathbf{O}}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right)$ (75) s'obtient en injectant (152) dans (96) :

$$\mathbf{BCR}^c_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}|\underline{\mathbf{O}}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right) = \mathbf{U}^*_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}}\left(\mathbf{U}^T_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}}\mathbf{F}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}}\mathbf{U}^*_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}}\right)^{-1}\mathbf{U}^T_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}} \quad \text{où } \mathbf{U}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}} \text{ est une base de } \ker\left\{\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{s}}\left(\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial \underline{\mathbf{O}}^T_{\mathbf{s}}}\right\} \tag{157}$$

avec :

$$\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{s}}\left(\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial \underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}^{T}}\right) = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial\left(\boldsymbol{\sigma}^{l}-\boldsymbol{\sigma}^{1}\right)}{\partial \underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}^{T}}\right|_{l\in[2,L]} \\ \left.\frac{\partial\left((\boldsymbol{\sigma}^{*})^{l}-\boldsymbol{\sigma}^{1}\right)}{\partial \underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}^{T}}\right|_{l\in[2,L]} \\ \left.\frac{\partial\left(\boldsymbol{\Xi}^{l}-\boldsymbol{\Xi}^{1}\right)}{\partial \underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}^{T}}\right|_{l\in[2,L]} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}\left(2\left(L-1\right)M+\left(L-1\right)MP, 2LM+LMP\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{(L-1,L)}\otimes\mathbf{I}_{(M,M)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{(L-1,L)}\otimes\mathbf{I}_{(M,M)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{V}_{(L-1,L)}\otimes\mathbf{I}_{(MP,MP)} \end{bmatrix}$$

Finalement $\mathbf{U}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}}$ (157) est de la forme :

$$\mathbf{U}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}} = im\left\{\ker\left\{\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{s}}\left(\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial \underline{\mathbf{O}}^{T}}\right\}\right\} \in \mathcal{M}\left(2LM+LMP, 2M+MP\right) \tag{158}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}} \end{bmatrix}, \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}},\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{1}_{(L,1)}\otimes\mathbf{I}_{(M,M)} \\ \mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}} = \mathbf{1}_{(L,1)}\otimes\mathbf{I}_{(MP,MP)} \end{array}\right.$$

ce qui conduit, en injectant (152) et (158) dans (157), à :

$$\mathbf{BCR}^{c}_{\underline{\mathbf{O}}_{\mathbf{s}}|\underline{\mathbf{O}}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right) = \mathbf{U}^{*}_{\underline{\mathbf{O}}}\left(\begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{L}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^{l},\boldsymbol{\sigma}^{l*}} & \mathbf{0} & \left(\sum_{l=1}^{L}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^{l},\boldsymbol{\sigma}^{l*}}\right)^{H} \\ \mathbf{0} & \left(\sum_{l=1}^{L}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^{l},\boldsymbol{\sigma}^{l*}}\right)^{*} & \left(\sum_{l=1}^{L}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^{l},\boldsymbol{\sigma}^{l*}}\right)^{T} \\ \sum_{l=1}^{L}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^{l},\boldsymbol{\sigma}^{l*}} & \left(\sum_{l=1}^{L}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^{l},\boldsymbol{\sigma}^{l*}}\right)^{*} & \sum_{l=1}^{L}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^{l},\boldsymbol{\Xi}^{l}} \end{bmatrix}\right)^{-1}\mathbf{U}^{T}_{\underline{\mathbf{O}}}$$

En utilisant le théorème d'inversion par bloc, nous pouvons extraire la BCR sous contrainte associée au vecteur de paramètres d'intérêt $\underline{\boldsymbol{\Xi}}$:

$$\mathbf{BCR}^{c}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right) = \left(\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}}\right)^{T}\left(\sum_{l=1}^{L}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^{l},\boldsymbol{\Xi}^{l}} - 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\sum_{l=1}^{L}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^{l},\boldsymbol{\sigma}^{l*}}\right)\left(\sum_{l=1}^{L}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^{l},\boldsymbol{\sigma}^{l*}}\right)^{-1}\left(\sum_{l=1}^{L}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^{l},\boldsymbol{\sigma}^{l*}}\right)^{H}\right\}\right)^{-1}\left(\mathbf{U}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}}\right)^{T}$$

et plus particulièrement nous pouvons déduire $\mathbf{BCR}^{c}_{\boldsymbol{\Xi}^{l},\boldsymbol{\Xi}^{l'}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right)$ pour le couple d'observation (l,l') :

$$\begin{aligned} \mathbf{BCR}^{c}_{\boldsymbol{\Xi}^{l},\boldsymbol{\Xi}^{l'}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right) &= \left(\mathbf{BCR}^{c}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right)\right)_{l,l'} \in \mathcal{M}\left(MP, MP\right), \quad \forall l,l' \in [1,...,L] \\ &= \left(\mathbf{e}_{l}\otimes\mathbf{I}_{(MP,MP)}\right)^{T}\mathbf{BCR}^{c}_{\underline{\boldsymbol{\Xi}},\underline{\boldsymbol{\Xi}}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right)\left(\mathbf{e}_{l'}\otimes\mathbf{I}_{(MP,MP)}\right), \quad \mathbf{e}_{l}\in\mathcal{M}\left(L,1\right), \quad \left(\mathbf{e}_{l}\right)_{l'} = \delta_{l}^{l'} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbf{BCR}^{c}_{\boldsymbol{\Xi}|\underline{\mathbf{O}}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right) &= \mathbf{BCR}^{c}_{\boldsymbol{\Xi}^{l},\boldsymbol{\Xi}^{l}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right) \\ &= \left(\sum_{l=1}^{L}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^{l},\boldsymbol{\Xi}^{l}} - 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\sum_{l=1}^{L}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^{l},\boldsymbol{\sigma}^{l*}}\right)\left(\sum_{l=1}^{L}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\sigma}^{l},\boldsymbol{\sigma}^{l*}}\right)^{-1}\left(\sum_{l=1}^{L}\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Xi}^{l},\boldsymbol{\sigma}^{l*}}\right)^{H}\right\}\right)^{-1} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\mathbf{BCR}^{c}_{\boldsymbol{\Xi}|\underline{\mathbf{O}}}\left(\underline{\mathbf{O}}\right) = \left(2L\,\mathrm{Re}\left\{\left\langle\mathbf{C}\right\rangle - \left\langle\mathbf{D}\right\rangle\left\langle\mathbf{E}\right\rangle^{-1}\left\langle\mathbf{D}\right\rangle^{H}\right\}\right)^{-1}$$

$$\left\langle\mathbf{C}\right\rangle = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^{l}_{\mathbf{n}}}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{s}^{l}\left(t;\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\boldsymbol{\Xi}^{T}}\right\},\left\{\frac{\partial\mathbf{s}^{l}\left(t;\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\boldsymbol{\Xi}^{T}}\right\}\right),\quad \left\langle\mathbf{D}\right\rangle = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^{l}_{\mathbf{n}}}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{s}^{l}\left(t;\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{s}}\right)}{\partial\boldsymbol{\Xi}^{T}}\right\},\left\{\mathbf{B}^{l}\left(t;\boldsymbol{\Xi}\right)\right\}\right)$$

$$\left\langle\mathbf{E}\right\rangle = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\mathbf{G}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^{l}_{\mathbf{n}}}\left(\left\{\mathbf{B}^{l}\left(t;\boldsymbol{\Xi}\right)\right\},\left\{\mathbf{B}^{l}\left(t;\boldsymbol{\Xi}\right)\right\}\right),\quad \left\langle\mathbf{x}\left(f\right)\mid\mathbf{y}\left(f\right)\right\rangle_{\underline{\boldsymbol{\theta}}^{l}_{\mathbf{n}}} = \int_{-\frac{B_l}{2}}^{\frac{B_l}{2}}\mathbf{y}\left(f\right)^{H}\mathbf{R}^{l}_{\mathbf{n}}\left(f,\underline{\boldsymbol{\theta}}^{l}_{\mathbf{n}}\right)^{-1}\mathbf{x}\left(f\right)df.$$