



HAL
open science

Thermographie infrarouge de champs ultrasonores en vue de l'évaluation et du contrôle non destructifs de matériaux composites

Thierry Kouadio

► **To cite this version:**

Thierry Kouadio. Thermographie infrarouge de champs ultrasonores en vue de l'évaluation et du contrôle non destructifs de matériaux composites. Autre. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2013. Français. NNT : 2013BOR14824 . tel-00847775

HAL Id: tel-00847775

<https://theses.hal.science/tel-00847775>

Submitted on 24 Jul 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 4824

THÈSE

Présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLÉ DOCTORALÉ D' SCIÉ NCÉ S PHYSIQUÉ S' T D' L'INGÉNIÉ UR

Par **Thierry KOUADIO**

POUR OBTÉ NIR LÉ GRADÉ D'

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUÉ

Thermographie infrarouge de champs ultrasonores en vue de l'évaluation et du contrôle non destructifs de matériaux composites

Soutenue le 08 Juillet 2013

Après avis de :

M. O. FUDYM, Professeur, Ecole des Mines d'Albi
M. A. SALAZAR, Professeur, Ecole d'Ingénierie de Bilbao

Rapporteur
Rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

M. C. BACON, Professeur, Université de Bordeaux
M. J.-P. DUMAS, Professeur, Université de Pau
M. O. FUDYM, Professeur, Ecole des Mines d'Albi
M. M. GREDIAC, Professeur, Université de Clermont-Ferrand
Mme A. MEZIANE, Maître de conférences, Université de Bordeaux
M. C. PRADERE, Chargé de recherche, CNRS, I2M, Bordeaux
M. A. SALAZAR, Professeur, Ecole d'Ingénierie de Bilbao

Directeur de thèse
Examineur
Rapporteur
Président
Examineur
Examineur
Rapporteur

*Université Bordeaux 1
Les Sciences et les Technologies au service de l'Homme et de
l'environnement*

Thermographie infrarouge de champs ultrasonores en vue de l'évaluation et du contrôle non destructifs de matériaux composites

Les matériaux composites sont largement utilisés dans l'industrie en raison de leur bonne tenue mécanique et de leur faible densité. La diversité des domaines d'application des matériaux composites donne lieu à une grande variété de modes de sollicitation et d'endommagement. De ce fait, l'évaluation de leurs propriétés et le contrôle de leur état présentent un grand intérêt industriel. Dans ce travail, une nouvelle méthode d'évaluation et de contrôle non destructif dite par sonothermographie est explorée. Cette méthode est basée sur l'analyse du champ thermique induit par des ondes ultrasonores de puissance dans les matériaux absorbants tels que les composites. Deux applications complémentaires sont étudiées, d'une part l'évaluation des propriétés thermiques du matériau et d'autre part le contrôle non destructif de structures par thermographie infrarouge. Dans ce cadre, le problème direct de la sonothermographie est résolu numériquement à partir d'un modèle par éléments finis. Ce modèle permet de simuler le champ thermique induit par la propagation d'ondes ultrasonores dans un matériau absorbant dont les propriétés sont connues. Les simulations réalisées permettent de montrer l'applicabilité de la sonothermographie à la détection de défauts. Une nouvelle approche de caractérisation thermique est également développée. Cette approche basée sur la formulation faible de l'équation de conduction de la chaleur permet une estimation robuste de la diffusivité thermique du matériau à partir du champ thermique induit par les ondes ultrasonores de puissance. Des résultats expérimentaux sont présentés pour le cas de plaques minces.

Mots-clés: Thermographie infrarouge, Contrôle non destructif, Excitation ultrasonore, Caractérisation thermique, Formulation faible.

Infrared thermography of ultrasonic fields for the evaluation and non-destructive testing of composite materials

The composite materials are widely used in industry because of their high mechanical resistance and low density. The diversity of composite materials application fields gives rise to a large variety of solicitation and damage conditions. For this reason, the evaluation of their properties and their health monitoring are of great industrial interest. In this work, a new method of evaluation and non-destructive testing named sonothermography is explored. This method is based on the analysis of thermal fields induced by ultrasonic waves in absorbent materials such as composites. Two additional applications are studied: the evaluation of the thermal properties of the material and the non-destructive testing of structures by infrared thermography. In this framework, the direct problem of sonothermography is solved numerically using a model based on the finite element method. This model allows to simulate the thermal field induced by the propagation of ultrasonic waves in absorbent material whose properties are known. The simulations carried out show the applicability of the sonothermography for the detection of defects. An innovative approach for thermal characterization is also developed. This approach based on the weak formulation of the heat conduction equation allows a robust estimate of the thermal diffusivity of the material from the thermal field induced by ultrasonic waves. Experimental results are presented for thin plates.

Keywords: Infrared thermography, Non-destructive testing, Ultrasonic excitation, Thermal characterization, Weak formulation.

Table des matières

Introduction générale	9
Chapitre 1 : Contexte de l'étude	11
1.1. Méthodes de Contrôle et ' valuation Non Destructifs (C' ND)	11
1.1.1. Méthodes de C' ND par excitation électromagnétique	11
1.1.1.1. Les méthodes photothermiques	13
1.1.1.2. Les méthodes photoacoustiques	13
1.1.2. Méthodes de C' ND par excitation mécanique	14
1.1.2.1. Les méthodes ultrasonores	14
1.1.2.2. Les méthodes vibratoires	14
1.2. La sonothermographie	14
1.2.1. Notions de viscoélasticité linéaire	14
1.2.2. Principe de la sonothermographie	16
1.3. Synthèse	16
Chapitre 2 : Modélisation du problème direct de la sonothermographie	19
2.1. Description du problème direct de la sonothermographie	19
2.2. Formalisme ' éléments Finis	20
2.3. Mise en équation du problème mécanique	22
2.3.1. Description du problème physique	23
2.3.2. Identification des coefficients du modèle ' F	25
2.4. Calcul du taux de dissipation viscoélastique	26
2.5. Mise en équation du problème thermique	28
2.5.1. Description du problème physique	28
2.5.2. Identification des coefficients du modèle ' F	31
2.6. Conclusion	31
Chapitre 3 : Validation du modèle numérique et application au contrôle non destructif	33
3.1. ' tude de la convergence du modèle ' F	33
3.1.1. Description du modèle ' F	33
3.1.2. Convergence en espace du modèle ' F	35
3.1.2.1. Convergence en espace pour le calcul mécanique	37
3.1.2.2. Convergence en espace pour le calcul thermique	40
3.1.3. Convergence en temps du modèle ' F	42
3.2. Validation expérimentale du modèle ' F	43
3.2.1. Cas d'un matériau homogène isotrope	44
3.2.2. Cas d'un matériau composite anisotrope	48
3.3. Application du modèle ' F aux matériaux composites multicouches	49
3.3.1. Cas de couches de propriétés identiques	50
3.3.2. Cas de couches de propriétés différentes	52

3.3.2.1. 'mpilement symétrique [-45°/45°/45°/-45°]	53
3.3.2.2. 'mpilement non symétrique [-45°/-45°/45°/45°]	55
3.4. Application de la sonothermographie au contrôle non destructif	57
3.4.1. Sensibilité du champ de température à la présence d'un défaut	57
3.4.1.1. Cas de la plaque monocouche	58
3.4.1.2. Cas de la plaque stratifiée [-45°/-45°/45°/45°]	59
3.4.2. Détectabilité d'un défaut par sonothermographie	60
3.5. Conclusion	60

Chapitre 4 : Méthode LOWF de caractérisation thermique par formulation faible	63
4.1. Méthodes de caractérisation thermique (nodale, modale)	63
4.1.1. La méthode nodale	63
4.1.2. Les méthodes modales	64
4.1.3. Synthèse	65
4.2. Formalisme de la méthode LOWF	65
4.2.1. Description du modèle de plaque mince	65
4.2.2. Linéarisation des pertes thermiques	66
4.2.3. Formulation faible de l'équation de conduction de la chaleur 2D	67
4.2.4. Détermination d'une fonction test	70
4.3. Application de la méthode LOWF à un modèle 2D isotrope	73
4.3.1. Validation numérique	73
4.3.1.1. Description du modèle numérique	73
4.3.1.2. Résultats	75
4.3.2. Robustesse de la méthode LOWF par rapport au bruit	78
4.3.3. Comparaison avec la méthode nodale	79
4.4. Application de la méthode LOWF à un modèle 2D anisotrope	81
4.4.1. Découplage du problème 2D en deux problèmes 1D	81
4.4.2. Formalisme 1D de la méthode LOWF	84
4.4.3. Validation numérique	86
4.4.3.1. Description du modèle numérique	86
4.4.3.2. Résultats	87
4.5. Optimisation de la méthode LOWF	90
4.5.1. 'tude de sensibilité de la méthode LOWF	90
4.5.1.1. Sensibilité par rapport à la position du sous-domaine	91
4.5.1.2. Sensibilité par rapport à la taille du sous-domaine	94
4.5.2. Critère d'optimisation de la taille du sous-domaine	101
4.6. Conclusion	105

Chapitre 5 : Application de la méthode LOWF à la caractérisation thermique de plaques minces	109
5.1. Application de la méthode LOWF à un champ de température généré par excitation thermique avec une diode laser	109
5.1.1. Description du dispositif expérimental	109
5.1.2. 'stimation de la diffusivité thermique	110
5.2. Application de la méthode LOWF à un champ de température généré par excitation mécanique : cas de la sonothermographie	114

5.2.1. Application à des données simulées.....	114
5.2.1.1. Description du modèle numérique	115
5.2.1.2. Sensibilité par rapport à la taille du sous-domaine	118
5.2.1.3. Sensibilité par rapport à l'épaisseur de la plaque.....	121
5.2.2. Application à des données expérimentales.....	122
5.2.2.1. Description du dispositif expérimental	122
5.2.2.2. Estimation de la diffusivité thermique	124
5.3. Conclusion.....	126
Conclusion générale.....	129
Références bibliographiques	131
Annexes	135
Annexe A.....	135
Annexe B.....	139
Annexe C.....	143
Annexe D.....	153

Introduction générale

Les propriétés des matériaux naturels ne permettent pas toujours de les utiliser pour des applications particulières. Les progrès scientifiques rendent désormais possible l'élaboration de matériaux composites dont les caractéristiques sont optimisées en fonction de l'application finale visée. Les composites sont obtenus par assemblage d'au moins deux matériaux : l'un appelé renfort constitue l'ossature le plus souvent sous forme fibreuse qui assure la tenue mécanique, l'autre appelé matrice est un liant qui assure la cohésion de la structure et la transmission des efforts vers le renfort. Du fait de leur bonne tenue mécanique et de leur faible masse volumique, les composites sont largement utilisés, notamment dans l'industrie aéronautique et spatiale.

Deux grandes problématiques peuvent être associées à l'utilisation des composites. Premièrement, la diversité de leurs domaines d'application les expose à une grande variété de modes de sollicitation et d'endommagement. L'inspection de leur état constitue de ce fait un enjeu industriel important. Deuxièmement, le choix d'un composite pour une application particulière nécessite d'avoir une bonne connaissance de ses propriétés. Dès lors, l'évaluation de ces propriétés présente un grand intérêt.

Ces deux problématiques se déclinent en des variantes multiples, suivant le type d'endommagement à détecter (délaminage, fissure, etc) ou la nature de la propriété à évaluer (thermique, mécanique, etc). En conséquence, le développement de nouvelles méthodes de Contrôle et Évaluation Non Destructifs (C' ND) s'avère nécessaire pour répondre efficacement à la diversité des situations. Ce travail de thèse s'inscrit dans cette dynamique en explorant une nouvelle méthode de C' ND associant l'acoustique et la thermique : la sonothermographie.

La sonothermographie est basée sur l'excitation par des ondes ultrasonores de puissance de matériaux absorbants tels que les composites. Dans les matériaux absorbants, une partie de l'énergie mécanique injectée par les ondes ultrasonores est dégradée sous forme de chaleur. Le champ thermique généré est analysé par thermographie infrarouge en vue du contrôle non destructif et de l'évaluation des propriétés du matériau.

L'intérêt de la sonothermographie réside dans le fait que les sources de chaleur sont créées à l'intérieur du matériau et réparties dans le volume, à la différence de méthodes thermiques de C' ND plus classiques qui réalisent une excitation thermique en surface à l'aide de sources de chaleur extérieures (lampes, diode laser). Les sources volumiques de chaleur créées en sonothermographie ont l'avantage de générer un signal thermique qui émane de l'intérieur de la structure et favorise de ce fait la détection de défauts situés sous la surface. En outre, la quantité de chaleur produite par les sources et la diffusion de cette chaleur dépendent respectivement des propriétés mécaniques et thermiques du matériau. En conséquence, l'analyse par thermographie infrarouge du champ thermique induit par les sources volumiques de chaleur constitue une approche pertinente pour l'évaluation des propriétés mécaniques et/ou thermiques du matériau.

L'objectif de ce travail est d'étudier l'applicabilité de la sonothermographie, d'une part au contrôle non destructif, d'autre part à l'évaluation des propriétés de matériaux absorbants tels que les composites. Pour atteindre cet objectif, la démarche scientifique adoptée utilise une approche théorique, numérique et expérimentale.

Le premier chapitre situe le contexte de l'étude. Un panorama de méthodes de C' ND existantes est d'abord présenté. Les modes opératoires de ces méthodes sont décrits. Le principe de la sonothermographie est ensuite détaillé afin d'en montrer les spécificités par rapport aux méthodes de C' ND existantes.

Le deuxième chapitre est consacré à une étude théorique visant à appréhender les phénomènes physiques mis en œuvre en sonothermographie. Dans ce cadre, les équations de la mécanique et de la thermique régissant le problème direct de la sonothermographie sont détaillées. Ce problème direct consiste à calculer le champ thermique induit par des ondes acoustiques dans un matériau absorbant dont les propriétés mécaniques et thermiques sont connues.

L'approche théorique ne suffisant pas à résoudre les problèmes complexes, notamment dans le cas de matériaux composites multicouches, un travail complémentaire de modélisation numérique est réalisé.

Ainsi, dans le troisième chapitre, un modèle par éléments finis est développé afin de résoudre numériquement le problème direct de la sonothermographie. Différentes configurations du problème sont prises en compte (matériau isotrope / anisotrope, monocouche / multicouche). Par suite, l'applicabilité de la sonothermographie au contrôle non destructif est étudiée à partir de simulations réalisées pour le cas de matériaux comportant un défaut.

La question de l'applicabilité de la sonothermographie à l'évaluation des propriétés du matériau est également traitée. Ce travail de thèse se focalise sur l'évaluation des propriétés thermiques, plus particulièrement de la diffusivité thermique.

Dans ce cadre, le quatrième chapitre présente une nouvelle méthode de caractérisation thermique par formulation faible de l'équation de conduction de la chaleur : la méthode LOWF (Low Order Weak Formulation). Le développement de cette méthode vise à estimer de manière robuste la diffusivité thermique du matériau à partir d'observations thermiques réalisées par thermographie infrarouge.

Pour finir, dans le cinquième chapitre, la méthode LOWF est appliquée à la caractérisation thermique de plaques minces. Des résultats numériques et expérimentaux sont discutés.

Chapitre 1 :

Contexte de l'étude

La diversité des matériaux et de leurs conditions d'utilisation justifie le développement d'une grande variété de méthodes de C' ND (NDT : Non-Destructive Test and ' valuation). Ces méthodes consistent généralement à exciter une structure puis à recueillir un signal de réponse dont l'interprétation permet d'accéder à l'information recherchée (les propriétés du matériau ou la présence d'un défaut par exemple). Dans ce chapitre, des méthodes de C' ND existantes sont d'abord présentées (section 1.1). ' nsuite, le principe de la sonothermographie est décrit (section 1.2). ' nfin, la spécificité de la sonothermographie par rapport aux méthodes existantes est montrée (section 1.3).

1.1. Méthodes de Contrôle et Evaluation Non Destructifs (CEND)

De nombreuses méthodes de C' ND sont utilisées dans l'industrie pour l'inspection et/ou la caractérisation de pièces. De manière générale, il est possible de distinguer les méthodes passives et les méthodes actives. Les méthodes passives sont basées sur une inspection des pièces par une observation visuelle avec ou sans système optique grossissant (microscope, loupe). La mise en œuvre de ces méthodes est simple, cependant elles permettent de faire des inspections seulement dans les conditions d'utilisation normales de la pièce. Les méthodes actives se différencient par le fait que le système à contrôler est excité afin de générer une réponse exploitable pour l'inspection et/ou la caractérisation.

Du fait de la multitude de méthodes C' ND existantes, il serait difficile de les répertorier de manière exhaustive. Ici, le choix est fait de s'intéresser principalement aux méthodes actives telles que la sonothermographie. Ces méthodes permettent le contrôle et la caractérisation en dehors des conditions d'utilisation normales de la pièce. Un panorama de méthodes actives est présenté à partir d'une recherche bibliographique. Les méthodes actives recensées sont classées en considérant comme critère de classification le mode d'excitation utilisé. Deux modes d'excitation majeurs sont ainsi mis en évidence : l'excitation électromagnétique (par utilisation d'un rayonnement photonique : lampe, laser) et l'excitation mécanique (par utilisation d'ondes acoustiques, de vibrations ou de contraintes mécaniques diverses).

1.1.1. Méthodes de CEND par excitation électromagnétique

Les méthodes de C' ND par excitation électromagnétique sont basées sur une excitation de la pièce (ou échantillon) à l'aide d'une source électromagnétique (lampe, laser). Le flux de photons émis par la source est absorbé et converti en chaleur à la surface de la pièce. La chaleur produite provoque deux effets : une élévation de température et des effets mécaniques (légère déformation de surface). Les méthodes de C' ND dites photothermiques (par radiométrie, photoréflexion ou effet mirage) exploitent le premier effet, tandis que les méthodes de C' ND dites photoacoustiques (microphonique, piézo-électrique, par interférométrie ou photodéformation) exploitent le second effet. Une synthèse des méthodes photothermiques et photoacoustiques est présentée dans le tableau 1.

Les méthodes photothermiques présente une plus grande simplicité d'interprétation car le signal de réponse recueilli fait intervenir une grandeur scalaire (la température).

	Méthode	Équations à résoudre	Inconvénients	Avantages
Photothermiques	Radiométrique	3D Diffusion de la chaleur non couplée	<ul style="list-style-type: none"> • Sensibilité faible pour les métaux • Nécessite parfois un revêtement de la surface 	<ul style="list-style-type: none"> • Surfaces étendues • Large bande passante (GHz)
	Photoréflexion	3D Diffusion de la chaleur non couplée	<ul style="list-style-type: none"> • Bonnes surfaces réfléchissantes • Sensibilité dépendant de l'échantillon 	<ul style="list-style-type: none"> • Grande résolution spatiale • Interprétation simple
	Effet mirage	3D Diffusion de la chaleur non couplée	<ul style="list-style-type: none"> • Surfaces convexes • Nécessite un bon état de surface 	<ul style="list-style-type: none"> • Grande sensibilité • Interprétation simple
Photoacoustiques	Microphonique	1D Scalaire couplée	<ul style="list-style-type: none"> • Cellule fermée • Petits échantillons 	<ul style="list-style-type: none"> • Grande sensibilité
	Piézo-électrique	Vectorielles couplées	<ul style="list-style-type: none"> • Capteur collé sur l'échantillon • Interprétation difficile 	<ul style="list-style-type: none"> • Large bande passante
	Interférométrie	3D Vectorielles couplées	<ul style="list-style-type: none"> • Nécessite de bonnes surfaces réfléchissantes • Interprétation difficile 	<ul style="list-style-type: none"> • Grande sensibilité
	Photodéformation	3D Vectorielles couplées	<ul style="list-style-type: none"> • Nécessite de bonnes surfaces réfléchissantes • Interprétation difficile 	<ul style="list-style-type: none"> • Grande résolution spatiale • Large bande passante (MHz)

Tableau 1 : Les méthodes photothermiques et photoacoustiques

Les méthodes photoacoustiques ont une interprétation plus difficile dans la mesure où le signal de réponse recueilli fait intervenir une grandeur vectorielle (la déformation). De plus, elles nécessitent la résolution d'un problème couplé de type thermomécanique (calcul de la déformation induite par une élévation de température).

1.1.1.1. Les méthodes photothermiques

Un échantillon est exposé à une lumière pulsée ou modulée (diode laser, lampe). L'élévation de température due à l'absorption de photons induit un rayonnement infrarouge de la surface qui est mesuré à l'aide d'un capteur photoélectrique : c'est la méthode radiométrique [1]. Une caméra infrarouge intégrant une matrice de capteurs est généralement utilisée pour cartographier le champ de température. La référence [2] fournit des informations détaillées sur la thermographie infrarouge.

La méthode par photoréflexion consiste à chauffer la surface de l'échantillon à l'aide d'un faisceau pompe, puis à mesurer les variations d'intensité d'un faisceau laser sonde réfléchi par l'échantillon dans la zone chauffée. Les variations observées sont dues au fait que le facteur de réflexion dépend de la température. La mise en œuvre de cette méthode nécessite de bonnes surfaces réfléchissantes.

Dans la méthode par effet mirage, un faisceau laser sonde traverse le gradient de température produit dans un fluide au voisinage immédiat de l'échantillon. À ce gradient est associé un gradient d'indice de réfraction qui induit une déviation du faisceau sonde [3]. La mesure de cette déviation permet d'accéder à la température de surface de l'échantillon. Cette méthode a l'avantage d'être très sensible et d'interprétation simple.

1.1.1.2. Les méthodes photoacoustiques

La méthode microphonique exploite le phénomène selon lequel un solide exposé à un flux lumineux modulé génère des ondes acoustiques. L'échantillon est enfermé dans une cellule remplie d'un gaz puis, à l'aide d'un microphone, les variations de pression du gaz induites par les mouvements dus à l'échauffement [3]. Les variations de pressions permettent ensuite d'estimer les propriétés de l'échantillon. Cette méthode présente une bonne sensibilité en pression (de l'ordre de 10^{-4} Pa). Son application est cependant limitée à de petits échantillons.

La méthode piézo-électrique utilise un capteur piézo-électrique posé sur la surface de l'échantillon pour détecter les déformations induites par échauffement. Le contact échantillon/capteur rend cependant l'interprétation des résultats plus difficile, la rigidité du capteur intervenant dans la déformation globale. Une modélisation numérique du problème est généralement nécessaire pour calculer la déformation intrinsèque de l'échantillon.

La méthode par photodéformation consiste à chauffer la surface de l'échantillon à l'aide d'un faisceau laser pompe, puis à mesurer l'angle de réflexion d'un faisceau sonde dans la zone chauffée pour accéder à la déformation induite par l'échauffement [4]. Cette méthode est d'interprétation difficile.

La méthode interférométrique repose sur un principe similaire d'échauffement de la surface par un faisceau pompe, à la différence que la déformation est mesurée par interférométrie optique [5, 6].

1.1.2. Méthodes de CEND par excitation mécanique

Ces méthodes utilisent en général des ondes acoustiques ou diverses contraintes mécaniques comme mode d'excitation. La recherche bibliographique a permis de les scinder en deux catégories en fonction de la fréquence de l'excitation mécanique : les méthodes ultrasonores (de l'ordre de 10^6 Hz), et les méthodes vibratoires (de l'ordre de 10^1 Hz à 10^3 Hz).

1.1.2.1. Les méthodes ultrasonores

Ces méthodes utilisent le fait que les ondes peuvent être réfléchies, accélérées ou atténuées par des défauts (variations locales des propriétés mécaniques). Une onde ultrasonore est par exemple susceptible d'être réfléchiée par une interface air-solide telle qu'une fissure ou un délaminage. Les méthodes ultrasonores nécessitent la génération d'ondes de hautes fréquences pour obtenir une bonne résolution (détection fine), supérieures au MHz. De telles ondes sont alors très atténuées, l'atténuation étant proportionnelle au carré de la fréquence. L'inspection de la structure excitée est par conséquent limitée aux régions proches de la surface. Un liquide de couplage est généralement nécessaire pour transmettre les ondes ultrasonores dans la structure.

1.1.2.2. Les méthodes vibratoires

Les méthodes vibratoires se différencient des méthodes ultrasonores par des fréquences d'excitation plus faibles et un chargement mécanique sévère. L'échantillon est soumis à des tests de fatigue (solicitations mécaniques périodiques à une fréquence de l'ordre de 10^1 Hz à 10^3 Hz). Des défauts peuvent être révélés par l'apparition de points chauds sur une image thermique acquise au moyen d'une caméra infrarouge classique [7]. La dissipation de chaleur est attribuée à une concentration de contrainte au voisinage de ces défauts. L'inconvénient de ces méthodes réside dans le fait que l'énergie mécanique à injecter est importante. La sévérité du chargement mécanique imposé fait qu'elles se situent à la limite du contrôle non destructif.

1.2. La sonothermographie

Le principe de la sonothermographie s'apparente à celui des méthodes vibratoires (§ 1.1.2.2). Cependant, la sonothermographie se différencie par le fait qu'elle exploite principalement le caractère absorbant du matériau traduit notamment par la propriété de viscoélasticité. Elle consiste à exciter mécaniquement l'échantillon (par exemple à l'aide d'un actionneur piézo-électrique) de manière à générer en son sein des ondes ultrasonores. Un liquide de couplage est généralement nécessaire pour transmettre les ondes ultrasonores dans l'échantillon. Une partie de l'énergie mécanique injectée dans la matière est dégradée sous forme de chaleur par dissipation viscoélastique. Il en résulte un champ de température qui est analysé par thermographie infrarouge. La notion de viscoélasticité est essentielle en sonothermographie. Elle est décrite dans la suite.

1.2.1. Notions de viscoélasticité linéaire

La viscoélasticité d'un matériau traduit un comportement mécanique intermédiaire entre les comportements élastique et visqueux. Du point de vue rhéologique, la plupart des matériaux présentent dans une certaine mesure des propriétés viscoélastiques, en particulier les polymères et par extension les matériaux composites à matrice polymère.

En viscoélasticité linéaire [8,9], la contrainte σ est supposée être une fonction linéaire de l'historique de la déformation ε . Il existe un effet de retard entre la cause et l'effet pouvant se traduire par la relation :

$$\sigma(t) = \int_0^{+\infty} g(t-\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

où $\dot{\varepsilon} = \partial\varepsilon / \partial t$. La fonction $g(t)$ est appelée la fonction de relaxation du matériau. La transformée de Fourier F de l'équation (1.1) s'écrit dans le domaine fréquentiel :

$$F\{\sigma(t)\} = \tilde{\sigma}(\omega) = i\omega \tilde{g}(\omega) \tilde{\varepsilon}(\omega) \quad (1.2)$$

où le terme ω est appelé la pulsation.

Dans le cas d'une sollicitation harmonique en traction compression, l'équation (1.2) s'écrit :

$$\tilde{\sigma}(\omega) = E^*(\omega) \tilde{\varepsilon}(\omega) = [E'(\omega) + iE''(\omega)] \tilde{\varepsilon}(\omega) = E'(\omega) [1 + i\eta(\omega)] \tilde{\varepsilon}(\omega) \quad (1.3)$$

où E^* représente le module d'Young complexe du matériau, $E'(\omega) = \text{Re}(E^*(\omega))$ est le module conservatif qui traduit le comportement élastique conservatif du matériau, $E''(\omega) = \text{Im}(E^*(\omega))$ le module de perte qui caractérise son comportement visqueux et $\eta(\omega) = E''(\omega)/E'(\omega)$ est le facteur de perte.

L'équation (1.3) montre que, pour une sollicitation de fréquence $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ donnée, le comportement mécanique d'un matériau viscoélastique peut être décrit par les quantités E' et E'' dépendant de la fréquence. La figure 1 représente un exemple de courbe contrainte/déformation pour un matériau viscoélastique.

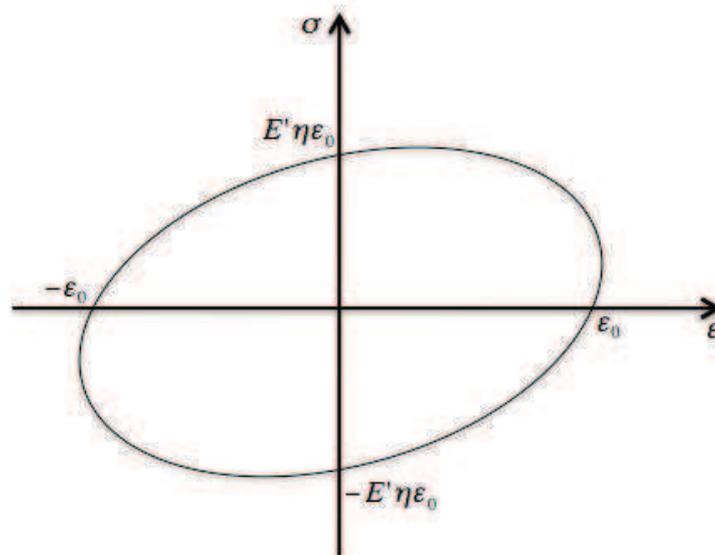


Figure 1 : Cycle contrainte/déformation pour une sollicitation harmonique

La courbe délimite une surface elliptique. Pour un matériau avec un facteur de perte η non nul, l'aire de cette ellipse représente la puissance dissipée par unité de volume sous forme de chaleur sur un cycle de la sollicitation mécanique : c'est la dissipation viscoélastique. Si η est nul ($\eta'' = 0$), l'ellipse se ramène à une droite et l'énergie dissipée est nulle : c'est le cas d'un solide élastique. La viscoélasticité induit donc un phénomène dissipatif.

1.2.2. Principe de la sonothermographie

La sonothermographie est basée sur la génération d'ondes acoustiques à travers un solide viscoélastique à l'aide d'une sollicitation mécanique monochromatique de type déplacement imposé (figure 2).

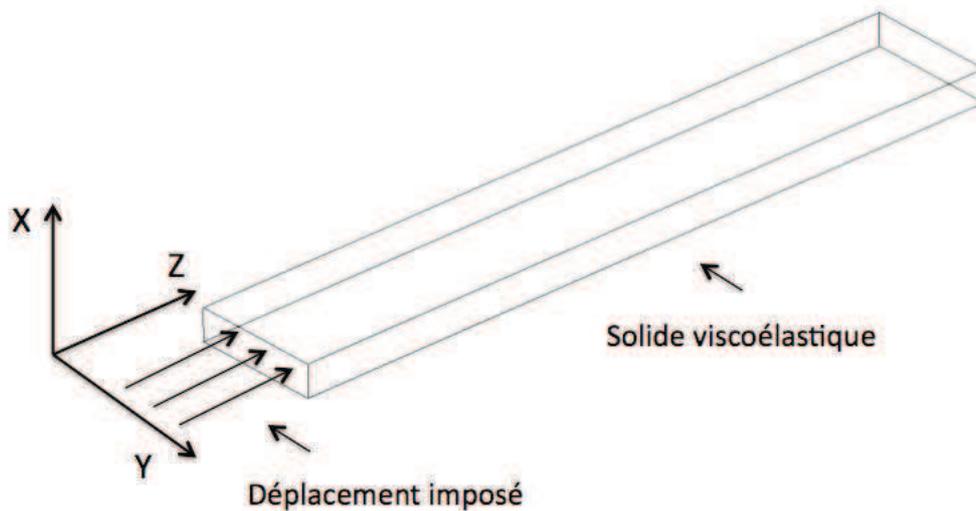


Figure 2 : Schéma de la génération d'ondes acoustiques ultrasonores à travers un solide viscoélastique

À chaque cycle du chargement, la quantité de chaleur produite en un point matériel correspond à l'aire de l'ellipse de contrainte/déformation en ce point (figure 1). La dissipation viscoélastique faisant de chaque point matériel une source de chaleur, le solide est excité thermiquement dans le volume. Ce mode d'excitation thermique par génération de sources de chaleur internes présente un intérêt particulier, notamment dans le cadre d'une application au contrôle non destructif.

1.3. Synthèse

Dans ce travail de thèse, la sonothermographie est mise en œuvre dans les conditions suivantes :

i) La fréquence de l'excitation mécanique, de l'ordre de 10^4 Hz, exploite une plage de fréquences peu utilisée par les méthodes classiques de C' ND par excitation mécanique

(§ 1.1.2). Ainsi, les ondes acoustiques générées sont moins atténuées qu'avec les méthodes ultrasonores classiques et permettent d'exciter (mécaniquement et thermiquement) des zones plus éloignées de la surface.

ii) Le déplacement imposé est de petite amplitude, de l'ordre de 10^{-6} m, afin de générer des perturbations dans le domaine élastique, à la différence des méthodes vibratoires qui nécessitent parfois des sollicitations sévères.

Dans ces conditions, la sonothermographie contribue à pallier les inconvénients des méthodes ultrasonores et vibratoires. En contrepartie, l'énergie mécanique injectée et l'élévation de température induite par la dissipation viscoélastique sont relativement faibles.

Le chapitre suivant détaille le formalisme théorique associé au problème direct de la sonothermographie qui consiste à calculer le champ de température connaissant l'excitation mécanique et les propriétés mécaniques et thermiques du matériau).

Chapitre 2 :

Modélisation du problème direct de la sonothermographie

Le phénomène de dissipation viscoélastique exploité en sonothermographie implique à la fois les champs mécanique et thermique. Le caractère tridimensionnel du problème contraint à le résoudre numériquement. Dans ce chapitre, les équations de la mécanique et de la thermique régissant le problème direct de la sonothermographie sont détaillées (section 2.1). Le formalisme théorique régissant ce problème direct est établi de manière à être implémenté dans un code de calcul par éléments Finis (F). Le formalisme de ce code de calcul est donc présenté (section 2.2). Les paramètres du modèle F sont ensuite déterminés pour le calcul des champs mécaniques (section 2.3), du champ de dissipation viscoélastique (section 2.4) et du champ de température (section 2.5).

2.1. Description du problème direct de la sonothermographie

La résolution d'un problème direct consiste à déterminer les effets d'un phénomène dont les causes sont connues. Dans la plupart des cas, un tel problème est traité à partir d'une représentation du phénomène par un modèle dont les paramètres sont *a priori* connus. Dans cette étude, il s'agit de déterminer le champ de température induit à travers un solide viscoélastique dont les propriétés physiques ainsi que la sollicitation mécanique auquel il est soumis sont connus. La démarche utilisée pour résoudre ce problème direct est décrite par la figure 3.

Les élévations de température observées en sonothermographie s'étant avérées lentes et faibles, de l'ordre de quelques degrés Celsius, il apparaît réaliste de négliger la contribution du champ de température dans le calcul du champ de contraintes. Dans la suite, cette hypothèse d'un couplage faible entre la mécanique et la thermique est admise et permet de découpler le problème direct en deux problèmes distincts.

D'une part, un problème mécanique visant à calculer les champs acoustiques (déplacement, contrainte et déformation) induits par la sollicitation mécanique. La connaissance de ces trois champs permet de calculer, en post-traitement, le taux de dissipation viscoélastique (énergie dissipée par unité de temps) en chaque point du solide. D'autre part, un problème thermique visant à calculer le champ de température transitoire par la résolution de l'équation de conduction de la chaleur en y introduisant le taux de dissipation viscoélastique comme terme source.

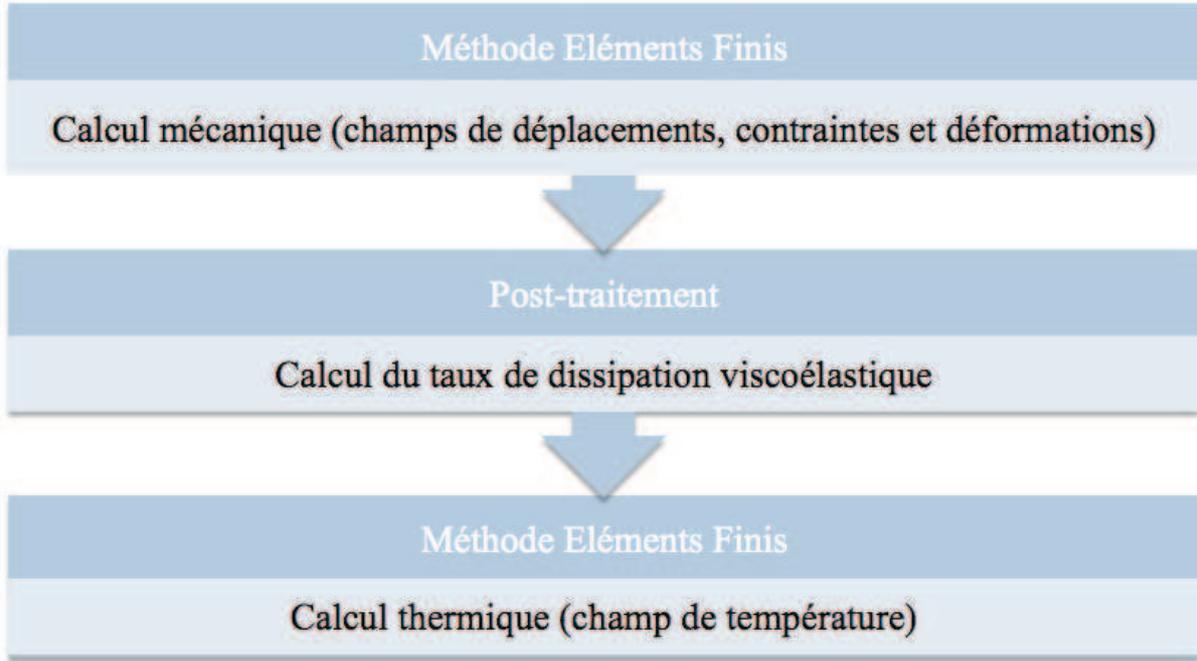


Figure 3: Schéma de résolution du problème direct de la sonothermographie

Dans la suite, le formalisme 'éléments Finis' décrivant le problème direct de la sonothermographie est présenté, conformément à ce découplage.

2.2. Formalisme Eléments Finis

Les équations théoriques de la mécanique et de la thermique associées au problème direct de la sonothermographie sont détaillées. Ces équations sont formulées de manière à être implémentée dans le code de calcul par 'éléments Finis' COMSOL Multiphysics® [10], un logiciel commercial de résolution numérique d'équations aux dérivées partielles.

Le formalisme mathématique utilisé par COMSOL repose sur la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles s'écrivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u + \alpha u - \gamma) + \beta \cdot \nabla u + \alpha u = f & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{n} \cdot (c \nabla u + \alpha u - \gamma) + q u = g & \text{sur } \partial \Omega \\ h u = r & \text{sur } \partial \Omega \end{array} \right. \quad (2.4)$$

où u est la variable à dépendance spatiale et/ou temporelle à déterminer dans le domaine Ω de frontière $\partial \Omega$, t le temps pour les problèmes non stationnaires et \mathbf{n} le vecteur normal unitaire sortant défini en chaque point de $\partial \Omega$.

La première équation du système doit être satisfaite à l'intérieur du domaine Ω . La deuxième et la troisième représentent respectivement la condition de Neumann et la condition de Dirichlet sur la frontière $\partial \Omega$. Le symbole ∇ est l'opérateur différentiel vectoriel défini par :

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_l}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \quad (2.5)$$

où n est le nombre de dimensions d'espace et x_1, \dots, x_n les coordonnées spatiales orthogonales. ' n général n est égal à 1, 2 ou 3 respectivement pour un problème mono, bi ou tridimensionnel. Les autres paramètres sont des coefficients dont l'ordre dépend du problème. La dimension de la variable u est fonction du nombre m de variables scalaires du problème considéré. ' n général, u est un vecteur à m composantes :

$$u = (u_1, \dots, u_j, \dots, u_m) \quad (2.6)$$

Les dimensions des coefficients $e_a, d_a, c, \alpha, g, \beta, a, q, h$ et r dépendent des valeurs du nombre n des dimensions d'espace et du nombre m des variables scalaires dépendantes.

Par exemple, c est une matrice de dimension $(m \times m)$ dont les composantes sont des matrices $(n \times n)$. Les composantes de c sont c_{ijkl} avec $1 \leq i, j \leq m$ et $1 \leq k, l \leq n$.

Pour identifier les coefficients, il est commode d'écrire le système d'équations (2.4) sous forme indicielle. Le calcul de $c\nabla u$, $\nabla \cdot (c\nabla u)$ et $\mathbf{n} \cdot (c\nabla u)$ sera détaillé à titre d'exemple.

Le terme $c\nabla u$ est un vecteur à m composantes et chaque composante de ce vecteur est un vecteur à n composantes :

$$c\nabla u = c \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \vdots \\ \nabla u_j \\ \vdots \\ \nabla u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1j} \nabla u_j \\ \vdots \\ c_{ij} \nabla u_j \\ \vdots \\ c_{mj} \nabla u_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c\nabla u)_1 \\ \vdots \\ (c\nabla u)_i \\ \vdots \\ (c\nabla u)_m \end{pmatrix} \text{ avec } 1 \leq i, j \leq m \quad (2.7)$$

Chaque composante $(c\nabla u)_i$ du vecteur $c\nabla u$ peut être calculée par :

$$(c\nabla u)_i = c_{ij} \nabla u_j = c_{i1} \nabla u_1 + \dots + c_{ij} \nabla u_j + \dots + c_{im} \nabla u_m = \begin{pmatrix} c_{ijl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \\ \vdots \\ c_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \\ \vdots \\ c_{ijnl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} 1 \leq i, j \leq m \\ 1 \leq k, l \leq n \end{cases} \quad (2.8)$$

où il y a une sommation implicite sur les indices j et l .

La première équation aux dérivées partielles du système (2.4) doit comporter autant d'équations scalaires que de nombre de variables. ' n conséquence, le résultat de $\nabla \cdot (c\nabla u)$ doit être un vecteur à m composantes. Si les termes c_{ijkl} sont supposés dépendre des coordonnées, la composante $[\nabla \cdot (c\nabla u)]_i$ devient :

$$[\nabla \cdot (c \nabla u)]_i = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(c_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial c_{ijkl}}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial c_{ijkl}}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (2.9)$$

où il y a une sommation implicite sur les indices j, k et l .

La i -ième composante $[\mathbf{n} \cdot (c \nabla u)]_i$ du vecteur à m composantes $\mathbf{n} \cdot (c \nabla u)$ est donnée par :

$$[\mathbf{n} \cdot (c \nabla u)]_i = c_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} n_k \quad (2.10)$$

où il y a une sommation implicite sur les indices j, k et l et $n = (n_1, \dots, n_k, \dots, n_n)$.

Les autres termes peuvent être calculés de la même manière. Chaque équation du système (2.4) inclut m équations scalaires. Les i -ièmes composantes s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} + \left(\alpha_{ijk} - \beta_{ijk} + \frac{\partial c_{ijkl}}{\partial x_l} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial \alpha_{ijk}}{\partial x_k} - a_{ij} \right) u_j - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_k} & \text{dans } \Omega \\ -e_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - d_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + f_i = 0 & \\ c_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} n_k + \alpha_{ijk} u_j n_k - \gamma_{ik} n_k + q_{ij} u_j = g_i & \text{sur } \partial\Omega \\ h_{ij} u_j = r_i & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2.11)$$

où $1 \leq i \leq m$, avec une sommation implicite sur les indices j, k et l , $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq k, l \leq n$, m étant le nombre de variables u_1, \dots, u_m et n le nombre de dimensions d'espace x_1, \dots, x_n .

Ainsi, les coefficients à identifier sont :

- e_a, d_a, a, q et h , des matrices ($m \times m$) à composantes scalaires e_{ij} , d_{ij} , a_{ij} , q_{ij} et h_{ij} ,
- c , une matrice ($m \times m$) dont les composantes sont des matrices ($n \times n$), c_{ijkl} ,
- α et β des matrices ($m \times m$) dont les composantes sont des vecteurs à n composantes, α_{ijk} et β_{ijk} ,
- γ , un vecteur à m composantes dont les composantes sont des vecteurs à n composantes, γ_{ik} ,
- f , g et r , des vecteurs à m composantes, f_i , g_i et r_i .

L'identification de ces composantes dépend du problème physique considéré. Les équations aux dérivées partielles dans le domaine Ω et les conditions aux limites sur la frontière $\partial\Omega$ doivent être écrites suivant le formalisme du système d'équations (2.11) afin d'identifier les coefficients des problèmes mécanique et thermique.

2.3. Mise en équation du problème mécanique

Dans cette section, le problème mécanique est décrit et les coefficients du formalisme Éléments Finis sont identifiés.

2.3.1. Description du problème physique

Un problème à trois dimensions d'espace ($n = 3$) est considéré. L'inconnue est la variable déplacement u à trois composantes scalaires ($m = 3$). Le domaine Ω étudié est un solide déformable constitué d'un matériau viscoélastique homogène anisotrope dont le tenseur de rigidités de composantes complexes C_{ijkl} est connu (figure 4). Le matériau n'est pas nécessairement orthotrope *a priori*.

La partie $\partial\Omega_U$ de la frontière $\partial\Omega$ est soumise à une excitation mécanique sinusoïdale sous la forme d'un champ de déplacement U_Z imposé parallèlement à l'axe Z . Des conditions aux limites de type Neumann sont appliquées sur $\partial\Omega_N$. De petits déplacements et petites déformations sont considérés. Les équations de la mécanique sont écrites dans le domaine Ω et sur la frontière $\partial\Omega$ pour le calcul des champs de déplacements, contraintes et déformations viscoélastiques.

En vertu du principe de superposition de Boltzmann [11,12], l'état de contrainte ou de déformation d'un corps viscoélastique subissant une combinaison de sollicitations dépend de la contribution de chaque sollicitation considérée indépendamment. Ce principe révèle un intérêt pratique à résoudre le problème mécanique dans le domaine fréquentiel plutôt que dans le domaine temporel.

En effet, pour une sollicitation temporelle donnée, un passage dans le domaine fréquentiel permet de ne considérer que les composantes du spectre de la sollicitation. Pour chaque fréquence du spectre, la viscoélasticité peut être prise en compte par le module complexe introduit par l'équation (1.3). Il est montré dans la référence [13] qu'une telle approche contribue à réduire les temps de calcul par la réduction du nombre de variables.

Un moyen efficace de traiter le problème mécanique décrit consiste donc à le résoudre dans le domaine fréquentiel par utilisation de la transformée de Fourier. Dans la suite, la transformée de Fourier d'une fonction g à variable temporelle est définie par [14] :

$$F\{g(t)\} = \tilde{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{i\omega t} dt \quad (2.12)$$

où le symbole « \sim » désigne la transformée de Fourier.

Pour le problème mécanique considéré, en négligeant l'unique force volumique, ici la force gravitationnelle, devant les contraintes induites par la sollicitation mécanique, l'équation d'équilibre local dans le domaine fréquentiel s'écrit :

$$\nabla \cdot \tilde{\sigma} = -\rho\omega^2 \tilde{u} \quad (2.13)$$

où ρ est la densité du matériau.

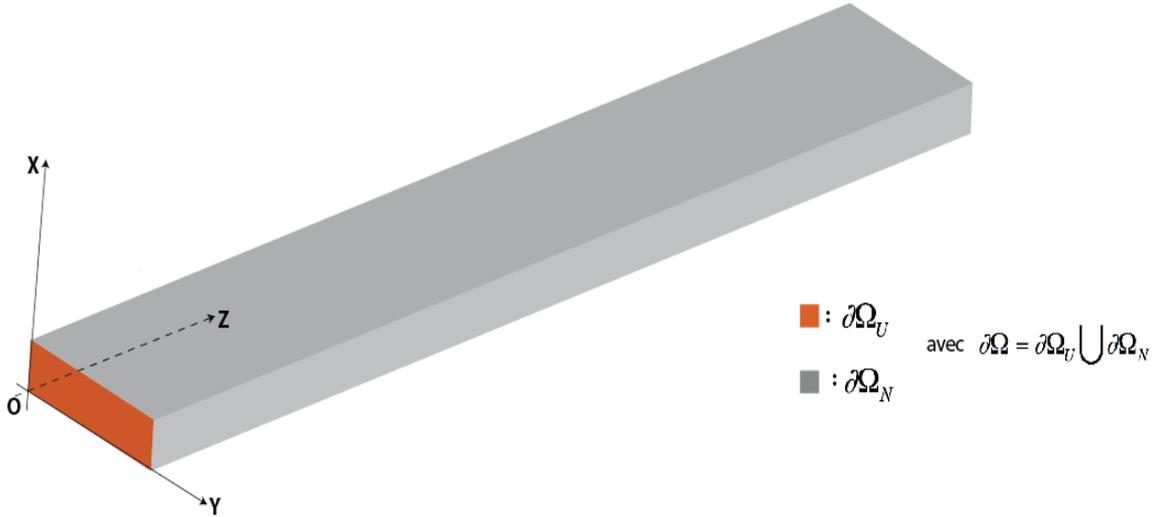


Figure 4: Schéma du domaine d'étude et de la partition de sa frontière

Le champ de contraintes est lié au champ de déplacements par le produit tensoriel contracté :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C : \nabla \tilde{u} \quad (2.14)$$

où le coefficient C de composantes C_{ijkl} est le tenseur de rigidités.

Pour un matériau viscoélastique, les composantes C_{ijkl} sont des nombres complexes dont les parties réelle et imaginaire sont associées respectivement aux comportements élastique et visqueux. L'influence de la dilatation thermique sur le champ de contraintes est négligée ici, conformément à l'hypothèse de couplage thermomécanique faible (§ 2.1).

Les équations (2.13) et (2.14) donnent :

$$\nabla \cdot (C : \nabla \tilde{u}) + \rho \omega^2 \tilde{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.15)$$

Sous forme indicielle, l'équation (2.15) s'écrit :

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 \tilde{u}_k}{\partial x_j \partial x_l} + \rho \omega^2 \tilde{u}_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.16)$$

Les conditions aux limites de Neumann et Dirichlet du problème s'écrivent respectivement :

$$T_i = \tilde{\sigma}_{ij} n_j = C_{ijkl} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_l} n_j \quad \text{sur } \partial\Omega_N \quad (2.17)$$

$$h_{ij} \tilde{u}_j = r_i \quad \text{sur } \partial\Omega_U \quad (2.18)$$

Pour se conformer au formalisme du système d'équations (2.11), il convient de permuter les indices k et j . Ainsi, l'indice k devient j et l'indice j devient k . Les équations (2.16), (2.17) et (2.18) s'écrivent alors respectivement :

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_k \partial x_l} + \rho \omega^2 \tilde{u}_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.19)$$

$$T_i = \tilde{\sigma}_{ik} n_k = C_{ijkl} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_l} n_k \quad \text{sur } \partial\Omega_N \quad (2.20)$$

$$h_{ik} \tilde{u}_k = r_i \quad \text{sur } \partial\Omega_U \quad (2.21)$$

2.3.2. Identification des coefficients du modèle EF

Les coefficients du système d'équations (2.11) permettant de décrire le problème mécanique défini par le système d'équations (2.19), (2.20) et (2.21) sont déterminés par identification.

La comparaison de la deuxième équation du système d'équations (2.11) avec l'équation (2.20) permet de déterminer les coefficients c , α , γ , q , r et g du problème mécanique :

$$c_{ijkl} = C_{ijkl}, \quad \alpha_{ijk} = 0, \quad \gamma_{ik} = 0, \quad q_{ij} = 0, \quad g_i = T_i \quad (2.22)$$

De même, la troisième équation du système d'équations (2.11) identifiée à l'équation (2.21) permet de déterminer les coefficients h et r , soit :

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{U}_D \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Les composantes de la matrice de rigidités C_{ijkl} peuvent être rapportées à des composantes de la forme $C_{\alpha\beta}$ ($1 \leq \alpha, \beta \leq 6$) suivant la convention de notation suivante : $\alpha = i = j$ si $i = j$, sinon $\alpha = 9 - (i + j)$ et $\beta = k = l$ si $k = l$, sinon $\beta = 9 - (k + l)$. Ainsi, il vient par exemple $C_{11} = C_{1111}$, $C_{16} = C_{1112}$ et $C_{44} = C_{2323}$.

Suivant cette convention, l'équation (2.14) s'écrit :

$$\tilde{\sigma}_\alpha = C_{\alpha\beta} \tilde{\epsilon}_\beta \quad (2.24)$$

Pour le problème mécanique considéré, le coefficient c du système d'équations (2.11) est alors de la forme :

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

où la composante c_{11} peut être développée comme suit :

$$c_{11} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} \\ C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} \\ C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{16} & C_{15} \\ C_{61} & C_{66} & C_{65} \\ C_{51} & C_{56} & C_{55} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Les autres composantes de la matrice de rigidités c sont données par :

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{16} & C_{15} \\ C_{61} & C_{66} & C_{65} \\ C_{51} & C_{56} & C_{55} \end{pmatrix} & c_{12} &= \begin{pmatrix} C_{16} & C_{12} & C_{14} \\ C_{66} & C_{62} & C_{64} \\ C_{56} & C_{52} & C_{54} \end{pmatrix} & c_{13} &= \begin{pmatrix} C_{15} & C_{14} & C_{13} \\ C_{65} & C_{64} & C_{63} \\ C_{55} & C_{54} & C_{53} \end{pmatrix} \\
 c_{21} &= \begin{pmatrix} C_{61} & C_{66} & C_{65} \\ C_{21} & C_{26} & C_{25} \\ C_{41} & C_{46} & C_{45} \end{pmatrix} & c_{22} &= \begin{pmatrix} C_{66} & C_{62} & C_{64} \\ C_{26} & C_{22} & C_{24} \\ C_{46} & C_{42} & C_{44} \end{pmatrix} & c_{23} &= \begin{pmatrix} C_{65} & C_{64} & C_{63} \\ C_{25} & C_{24} & C_{23} \\ C_{45} & C_{44} & C_{43} \end{pmatrix} \\
 c_{31} &= \begin{pmatrix} C_{51} & C_{56} & C_{55} \\ C_{41} & C_{46} & C_{45} \\ C_{31} & C_{36} & C_{35} \end{pmatrix} & c_{32} &= \begin{pmatrix} C_{56} & C_{52} & C_{54} \\ C_{46} & C_{42} & C_{44} \\ C_{36} & C_{32} & C_{34} \end{pmatrix} & c_{33} &= \begin{pmatrix} C_{55} & C_{54} & C_{53} \\ C_{45} & C_{44} & C_{43} \\ C_{35} & C_{34} & C_{33} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

L'identification de l'équation (2.19) avec la première équation du système d'équations (2.11) conduit en régime stationnaire à :

$$\beta_{ijk} = 0, \quad e_{ij} = 0, \quad d_{ij} = 0, \quad f_i = 0 \quad \text{et} \quad a = \begin{pmatrix} -\rho\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho\omega^2 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

À ce stade, les coefficients décrivant le problème mécanique conformément au formalisme Γ F sont déterminés. Dès lors, les champs de déplacements, contraintes et déformations viscoélastiques peuvent être calculés numériquement. La connaissance de ces champs permet de calculer le champ de dissipation viscoélastique.

2.4. Calcul du taux de dissipation viscoélastique

Le tenseur de déformation s'écrit sous la forme $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v$ [15], où ε^e est la part élastique ou thermoélastique (réversible) et ε^v la part visqueuse ou viscoélastique (irréversible).

Pour un matériau viscoélastique homogène, il est démontré dans la suite (§ 2.5.1) que le taux de dissipation viscoélastique en un point matériel donné est égal à $\sigma : \partial_t \varepsilon^v$, où ∂_t représente la dérivée par rapport au temps et « : » le double produit tensoriel contracté.

En sonothermographie, le processus de dissipation viscoélastique se répète à la fréquence ν_0 de l'excitation mécanique (de l'ordre de 10^4 Hz). Le phénomène de diffusion de la chaleur apparaît relativement lent, comparé à la période T_0 de la sollicitation mécanique. Cette différence entre les échelles de temps associées aux variations des champs acoustiques et les variations du champ de température justifie l'utilisation pour le calcul thermique d'une valeur du taux de dissipation viscoélastique moyennée sur la période T_0 . Cette valeur moyenne se calcule dans le domaine temporel par :

$$\langle \sigma : \partial_t \varepsilon^v \rangle_{\nu_0} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sigma : \partial_t \varepsilon^v dt \quad (2.29)$$

Pour calculer la composante ε^v de la déformation totale liée à la viscoélasticité, l'équation (2.24) est déclinée sous la forme :

$$\tilde{\varepsilon}_\alpha = \tilde{\varepsilon}_\alpha^e + \tilde{\varepsilon}_\alpha^v = S_{\alpha\beta} \tilde{\sigma}_\beta = (S'_{\alpha\beta} + iS''_{\alpha\beta}) \tilde{\sigma}_\beta \quad (2.30)$$

où les $S_{\alpha\beta}$ sont les composantes du tenseur de souplesses complexe, inverse du tenseur de rigidités complexe de composantes $C_{\alpha\beta}$.

La part visqueuse du tenseur de souplesses étant associée à sa partie imaginaire, il vient :

$$\tilde{\varepsilon}_\alpha^v = iS''_{\alpha\beta} \tilde{\sigma}_\beta \quad (2.31)$$

Dans le domaine fréquentiel, la transformée de Fourier du taux de dissipation viscoélastique s'écrit :

$$F(\sigma : \partial_t \varepsilon^v) = \frac{1}{2\pi} [\tilde{\sigma}_\alpha] * [i\omega \tilde{\varepsilon}_\alpha^v] = \frac{1}{2\pi} [\tilde{\sigma}_\alpha] * [-\omega S''_{\alpha\beta} \tilde{\sigma}_\beta] \quad (2.32)$$

où le symbole « $*$ » représente le produit de convolution et il y a une sommation implicite sur les indices α et β .

Pour un chargement monochromatique imposé de fréquence ν_0 avec $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, il est démontré (cf. annexe A) que la valeur du taux de dissipation viscoélastique instantané, obtenue par une transformée de Fourier inverse de l'équation (2.32) s'écrit :

$$\sigma : \partial_t \varepsilon^v = -\frac{\omega_0 \cdot S''_{\alpha\beta}(\omega_0)}{4\pi^2} \left[\frac{\tilde{\sigma}_\alpha(\omega_0) \cdot \tilde{\sigma}_\beta(\omega_0) \cdot e^{i2\omega_0 t}}{+ \overline{\tilde{\sigma}_\alpha(\omega_0)} \cdot \overline{\tilde{\sigma}_\beta(\omega_0)} \cdot e^{-i2\omega_0 t} + 2\text{Re}\{\tilde{\sigma}_\alpha(\omega_0) \cdot \overline{\tilde{\sigma}_\beta(\omega_0)}\}} \right] \quad (2.33)$$

où le symbole « $\bar{\quad}$ » représente l'expression conjuguée.

La moyenne du taux de dissipation sur une période du cycle de chargement monochromatique de fréquence ν_0 est donnée par (cf. annexe A) :

$$\langle \sigma : \partial_t \varepsilon^v \rangle_{\nu_0} = -\frac{\omega_0}{2\pi^2} S''_{\alpha\beta}(\omega_0) \cdot \text{Re}\{\tilde{\sigma}_\alpha(\omega_0) \cdot \overline{\tilde{\sigma}_\beta(\omega_0)}\} \quad (2.34)$$

Il est démontré que l'équation (2.34) s'écrit aussi :

$$\langle \sigma : \partial_t \varepsilon^v \rangle_{\nu_0} = \frac{\omega_0}{2\pi^2} \cdot C''_{\alpha\beta}(\omega_0) \cdot \text{Re}\{\tilde{\varepsilon}_\alpha(\omega_0) \cdot \overline{\tilde{\varepsilon}_\beta(\omega_0)}\} \quad (2.35)$$

ou encore :

$$\langle \sigma : \partial_t \varepsilon^v \rangle_{\nu_0} = \frac{\omega_0}{2\pi^2} \cdot \text{Im}\{\tilde{\sigma}_\alpha(\omega_0) \cdot \overline{\tilde{\varepsilon}_\alpha(\omega_0)}\} \quad (2.36)$$

L'une des trois équations équivalentes (2.34), (2.35) ou (2.36) pourra être implémenté dans le modèle ' F pour le calcul du taux de dissipation viscoélastique en post-traitement. Dans la suivante, il est montré que cette quantité intervient comme un paramètre d'entrée du modèle ' F pour la résolution du problème thermique.

2.5. Mise en équation du problème thermique

Dans cette section, le problème thermique est décrit et les coefficients du formalisme ' éléments Finis sont identifiés. Les équations sont détaillées pour mettre en évidence les différentes hypothèses simplificatrices.

2.5.1. Description du problème physique

L'équation de conduction de la chaleur régissant les transferts thermiques en milieux solides est obtenue par application du premier principe de la thermodynamique à un volume solide. La variation d'énergie totale d'un système fermé équivaut à la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur sous forme de travail ou de chaleur, soit :

$$\frac{d}{dt}(E + K) = P_e + Q \quad (2.37)$$

où

$E = \int_V \rho e dV$ est l'énergie interne avec e l'énergie interne par unité de masse,

$K = \int_V \frac{1}{2} \rho \vec{V} \cdot \vec{V} dV$ est l'énergie cinétique, \vec{V} étant la vitesse du barycentre de l'élément de volume dV ,

$Q = \int_V r dV - \int_{\partial V} \vec{q} \cdot \vec{n} dS = \int_V (r - \text{div} \vec{q}) dV$ est le taux de chaleur reçu par V , r étant la densité volumique de production interne de chaleur à distance, \vec{q} le flux de chaleur à travers la frontière ∂V ,

$P_e = \int_V \vec{f} \cdot \vec{V} dV + \int_{\partial V} \vec{T} \cdot \vec{V} dS$ est la puissance des efforts extérieurs.

Or le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{dK}{dt} = P_e + P_i \quad (2.38)$$

où $P_i = - \int_V \overline{\overline{\sigma}} : \nabla \vec{V} dV$ est la puissance des efforts intérieurs.

Un développement du produit contracté permet de montrer que $\overline{\overline{\sigma}} : \nabla \vec{V} = \overline{\overline{\sigma}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}$,

où $\dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}$ est le taux de déformation.

La puissance des efforts internes P_i peut alors s'écrire :

$$P_i = - \int_V \overline{\overline{\sigma}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} dV = - \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV \quad (2.39)$$

À ce stade, il est nécessaire de définir les variables observables et les variables internes. Dans cette étude, les variables observables se limitent à :

- la température T ,
- la déformation totale ε représentée par un tenseur.

D'après les équations (2.37) et (2.38), le premier principe s'écrit :

$$\frac{dE}{dt} = -P_i + Q \quad (2.40)$$

Cette équation donne sous sa forme locale :

$$\rho \dot{e} = \overline{\overline{\sigma}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} + r - \text{div} \vec{q} \quad (2.41)$$

avec $e = \psi + TS$, où S est l'entropie caractéristique du « désordre » régnant dans le système considéré et ψ l'énergie libre spécifique (caractéristique de la part réversible de l'énergie interne).

Ce qui donne :

$$\rho \dot{e} = \rho \dot{\psi} + \rho T \dot{S} + \rho \dot{T} S$$

soit

$$\rho \dot{e} = \rho \left[\frac{\partial \psi}{\partial \overline{\overline{\varepsilon}}^e} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}^e + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} \right] + \rho T \dot{S} + \rho \dot{T} S \quad (2.42)$$

car l'énergie libre dépend des variables observables ou internes ne dépendant pas de la partie irréversible de la déformation, ce qui se traduit par $\psi = \psi(\overline{\overline{\varepsilon}}^e, T)$.

Or :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \overline{\overline{\varepsilon}}^e} \quad (2.43)$$

$$S = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (2.44)$$

L'équation (2.42) devient alors :

$$\rho \dot{e} = \rho \left[\frac{1}{\rho} \overline{\overline{\sigma}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}^e - S \dot{T} \right] + \rho T \dot{S} + \rho \dot{T} S$$

soit

$$\rho \dot{e} = \overline{\overline{\sigma}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}^e + \rho T \dot{S} \quad (2.45)$$

L'équivalence des équations (2.41) et (2.45) permet d'écrire :

$$\overline{\overline{\sigma}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}^e + \rho T \dot{S} = \overline{\overline{\sigma}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} + r - \text{div} \vec{q} \quad (2.46)$$

D'après l'équation (2.44),
$$\dot{S} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{\varepsilon}^e \partial T} : \dot{\bar{\varepsilon}}^e - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T}$$

Ce qui s'écrit encore :
$$\dot{S} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} : \dot{\bar{\varepsilon}}^e + \frac{\partial S}{\partial T} \dot{T}$$

Le tenseur taux de déformation peut s'écrire comme la somme de ses composantes, soit

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \dot{\bar{\varepsilon}}^e + \dot{\bar{\varepsilon}}^v$$

L'équation (2.46) devient alors :

$$-T \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} : \dot{\bar{\varepsilon}}^e + \rho T \frac{\partial S}{\partial T} \dot{T} = \bar{\sigma} : \dot{\bar{\varepsilon}}^v + r - \text{div} \vec{q} \quad (2.47)$$

En introduisant les relations définissant :

- la loi de Fourier :
$$\vec{q} = -k \cdot \nabla T$$

où k de composantes k_{ij} est le tenseur de conductivité thermique,

- la chaleur spécifique :
$$C = T \frac{\partial S}{\partial T}$$

l'équation (2.47) s'écrit :

$$\rho C \dot{T} = \bar{\sigma} : \dot{\bar{\varepsilon}}^v + r + \nabla \cdot (k \cdot \nabla T) + T \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} : \dot{\bar{\varepsilon}}^e \quad (2.48)$$

Par la suite, les hypothèses réalistes suivantes sont posées :

- il n'y a pas de production interne de chaleur par des sources externes, soit $r = 0$,
- le couplage thermomécanique est négligeable, soit $\partial_T = 0$ où ∂_T est la dérivée par rapport à la température.

L'équation (2.48) est alors réduite et traduit pour un matériau homogène l'équation de conduction de la chaleur décrivant le problème thermique considéré :

$$\rho c_p \partial_t T - \nabla \cdot (k \cdot \nabla T) = \sigma : \partial_t \varepsilon^v \quad \text{dans } \Omega \quad (2.49)$$

avec ∂_t la dérivée par rapport au temps et « : » le double produit tensoriel contracté.

Pour un problème thermique donné, les conditions aux limites en flux et en température sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine s'écrivent respectivement sous la forme :

$$\mathbf{n} \cdot (k \nabla T) = h(T - T_{ext}) \quad (2.50)$$

$$HT = T_{imp} \quad (2.51)$$

où h est le coefficient d'échange thermique, T_{ext} la température extérieure et T_{imp} la température imposée.

2.5.2. Identification des coefficients du modèle EF

Le problème thermique est à trois dimensions d'espace ($n = 3$) et la variable température considérée est scalaire ($m = 1$).

Dans cette étude, une condition aux limites en flux est considérée sur toute la frontière $\partial\Omega$, soit :

$$H = 0, r = T_{imp} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (2.52)$$

La comparaison de l'équation (2.49) avec la première équation du système d'équations (2.4) donne :

$$d_a = \rho c_p, c = k, f = \langle \sigma : \partial_t \varepsilon^v \rangle_{v_0} \text{ et } e_a = 0, \alpha = 0, \beta = 0, a = 0 \quad (2.53)$$

où k de composantes k_{ij} est le tenseur de conductivité thermique du matériau.

La comparaison de la deuxième équation du système d'équations (2.4) avec l'équation (2.50) donne :

$$\gamma = 0, q = 0, g = h(T - T_{ext}) \quad (2.54)$$

2.6. Conclusion

Les différentes étapes de la résolution numérique du problème direct de la sonothermographie ont été décrites. Les équations régissant le calcul des champs mécaniques (déplacement, contrainte, déformation), du champ de dissipation viscoélastique et du champ de température ont été détaillées. Les coefficients du formalisme Γ ont été identifiés et permettent d'implémenter un modèle numérique dans le code de calcul COMSOL. Dans le chapitre suivant, un modèle Γ est mis en œuvre pour résoudre le problème direct de la sonothermographie pour des structures complexes telles que les composites multicouches. Le problème direct de la sonothermographie est résolu pour des composites comportant un défaut afin d'étudier l'applicabilité de la sonothermographie à la détection de défaut.

Chapitre 3 :

Validation du modèle numérique et application au contrôle non destructif

Un modèle numérique par Éléments Finis (EF) est implémenté à partir du formalisme théorique présenté dans le chapitre précédent. Il permet de calculer le champ de température induit dans un matériau viscoélastique à partir d'une sollicitation mécanique.

Dans ce chapitre, la convergence en temps et en espace du modèle EF est d'abord étudiée afin d'en établir le bon conditionnement numérique (section 3.1). Ensuite, le modèle est validé expérimentalement en comparant les prédictions numériques avec des mesures de température réalisées par thermographie infrarouge (section 3.2). Le problème direct de la sonothermographie est alors résolu pour des modèles de plaques composites multicouches et les résultats numériques sont discutés (section 3.3). Pour finir, la réponse thermique de plaques présentant un défaut est simulée afin d'étudier l'applicabilité de la sonothermographie à la détection de défauts (section 3.4).

3.1. Etude de la convergence du modèle EF

Un modèle EF est implémenté pour la résolution des équations aux dérivées partielles décrivant le problème direct de la sonothermographie. La résolution de ces équations par la méthode des Éléments Finis repose sur une discrétisation de l'espace et du temps. Dans cette section, le modèle est d'abord décrit, ensuite sa convergence en espace et en temps est étudiée. L'objectif est d'analyser l'influence des discrétisations spatiale et temporelle sur la qualité des résultats numériques.

3.1.1. Description du modèle EF

Un solide homogène isotrope en polychlorure de vinyle (PVC) et de forme parallélépipédique ($L_x = 5$ mm, $L_y = 20$ mm, $L_z = 115$ mm) est modélisé (figure 5). Le centre O du référentiel (XYZ) est l'origine des coordonnées d'espace. Un déplacement sinusoïdal de fréquence ν_0 est imposé sur la face d'excitation. La face définie par $x = 5$ mm représente la face supérieure du solide. Cette face est munie d'une ligne témoin représentant son axe médian suivant la direction Z. La ligne témoin est discrétisée en 200 points régulièrement espacés. Dans la suite, la qualité du modèle EF sera analysée en considérant les valeurs calculées le long de cette ligne.

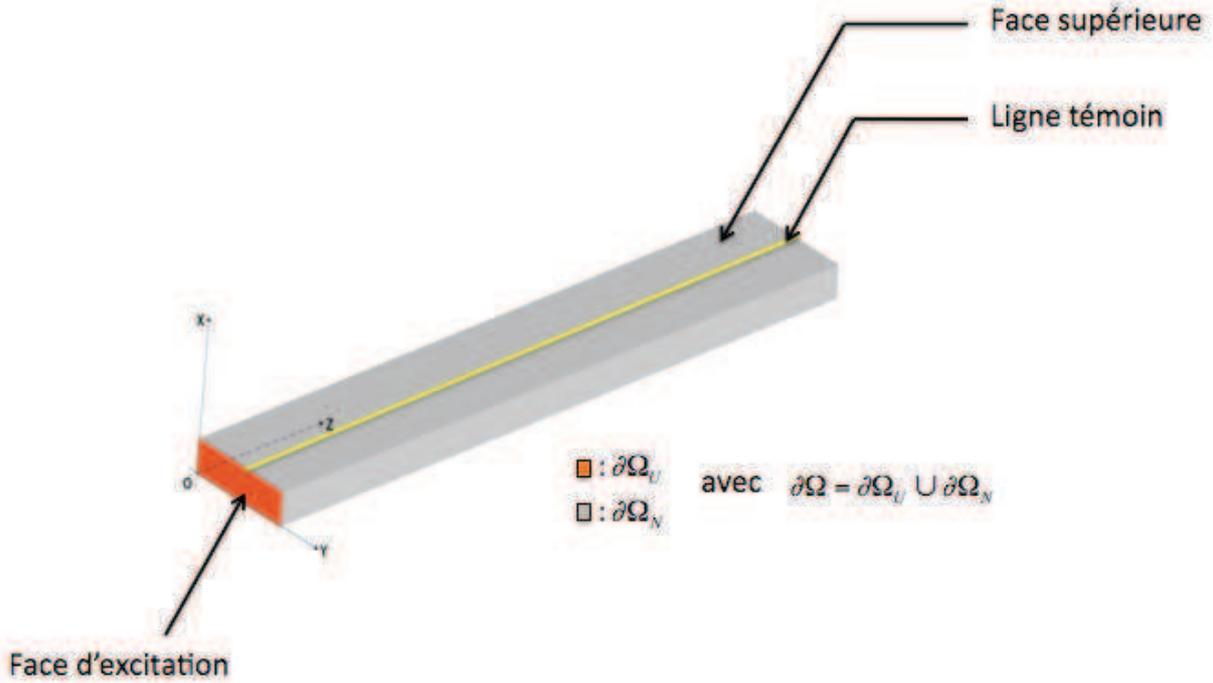


Figure 5: Schéma de la géométrie du modèle EF

Les données d'entrée du modèle sont les suivantes :

i) Pour le calcul mécanique

- fréquence d'excitation : $\nu_0 = 30$ kHz,
- module d'Young : $E = 4,3 (1+0,03i)$ GPa, densité : $\rho = 1170$ kg/m³,
coefficient de Poisson : $\nu = 0,38$
- matrice de rigidités C :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{21} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Les composantes $C_{\alpha\beta}$ de la matrice C pour un matériau isotrope se déduisent de E et ν par les relations suivantes :

$$C_{11} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad C_{12} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.56)$$

Les conditions aux limites mécaniques sont :

- contrainte nulle sur $\partial\Omega_N$,

- déplacement U_z imposé sur $\partial\Omega_U$ suivant l'axe Z (figure 5), avec $U_z = U \sin(2\pi\nu_0 t)$, $U = 300$ nm.

Les coefficients du formalisme ' F correspondant à ces conditions aux limites mécaniques sont :

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } r = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \tilde{U}_z = U \cdot \pi / i \end{cases} \text{ sur } \partial\Omega_U, \text{ où } i^2 = -1 \quad (3.57)$$

$$q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } g = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \text{ sur } \partial\Omega_N \quad (3.58)$$

ii) Pour le calcul thermique

- chaleur spécifique : $C_p = 1000$ J/(kg.K),

- terme source (taux de dissipation viscoélastique moyen) : $\Phi_v = \langle \sigma : \partial_t \varepsilon^v \rangle_{v_0}$ W/m³,

- tenseur de conductivité thermique k :

$$k = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 \end{pmatrix} \text{ dans } \Omega, \text{ avec } k_1 = 0,1 \text{ W/(m.K)} \quad (3.59)$$

Les conditions aux limites thermiques sont :

- coefficient d'échange $h = 0$ W/(m².K) sur $\partial\Omega$,

- température extérieure $T_{ext} = 0$ K.

Il vient :

$$g = hT \text{ sur } \partial\Omega \quad (3.60)$$

La condition initiale est :

$T(t = 0) = 0$ dans Ω et sur $\partial\Omega$.

3.1.2. Convergence en espace du modèle EF

La notion de convergence recouvre des définitions diverses suivant les domaines. Ici, la convergence en espace du modèle pourra se traduire par le fait qu'un maillage de plus en plus fin du domaine induit des variations de plus en plus petites sur les résultats du calcul numérique. Cette section vise à vérifier que le modèle ' F vérifie cette propriété. La convergence en espace est étudiée pour le calcul mécanique et pour le calcul thermique.

Soit M0 le maillage initial généré automatiquement par le code ' éléments Finis. Ce maillage est minimal et contient peu d' éléments Finis. Cinq maillages M_i ($1 \leq i \leq 5$) obtenus par raffinement successifs du maillage initial M0 sont considérés. La figure 6 illustre le maillage initial (M0) et le maillage le plus fin (M5).

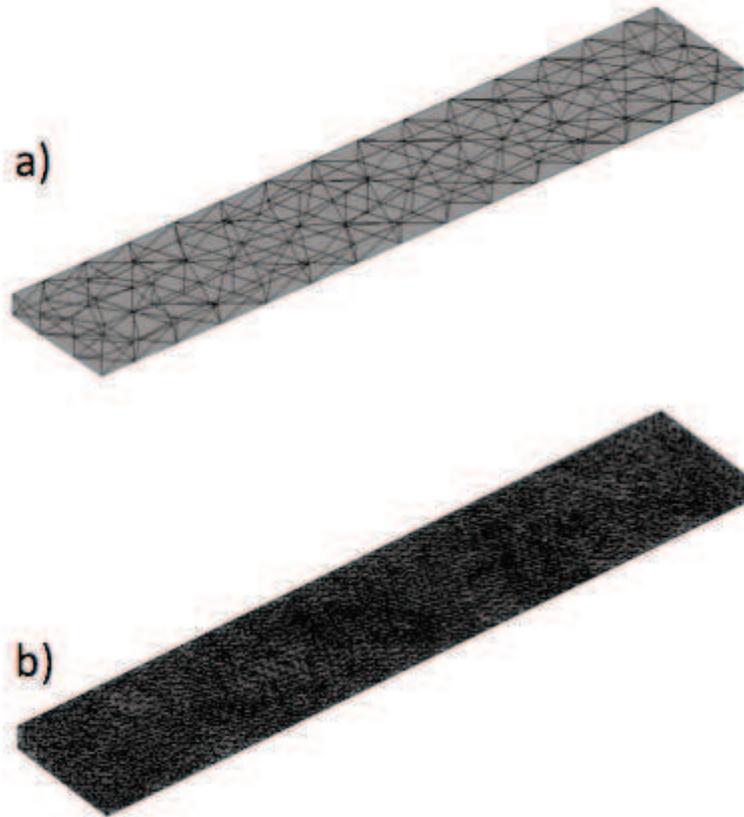


Figure 6: Maillages tridimensionnels M0 (a) et M5 (b)

Le tableau 2 montre l'évolution du nombre d'éléments Finis pour les maillages M0 à M5.

Maillage	Nombre d'Eléments Finis
M0	174
M1	496
M2	1402
M3	4 432
M4	13 963
M5	43 673

Tableau 2 : Nombre d'Eléments Finis du modèle pour différents maillages d'une plaque de dimensions 115 x 20 x 5 mm³

En pratique, le recours à un maillage plus fin tend à accroître le temps de calcul. L'enjeu de l'étude de convergence est d'optimiser le maillage afin d'assurer à la fois la convergence en maillage et un temps de calcul qui ne soit pas excessif.

3.1.2.1. Convergence en espace pour le calcul mécanique

Le calcul mécanique consiste à déterminer les champs acoustiques (contrainte, déformation) et il a été montré que le champ de dissipation viscoélastique s'obtient à partir de ces champs. Pour évaluer la convergence en espace du modèle F pour le calcul mécanique, le champ de dissipation viscoélastique est calculé avec les maillages M0 à M5 et les résultats des six calculs sont comparés. La figure 7 montre la cartographie du taux de dissipation viscoélastique calculé sur la face supérieure avec le maillage M5.

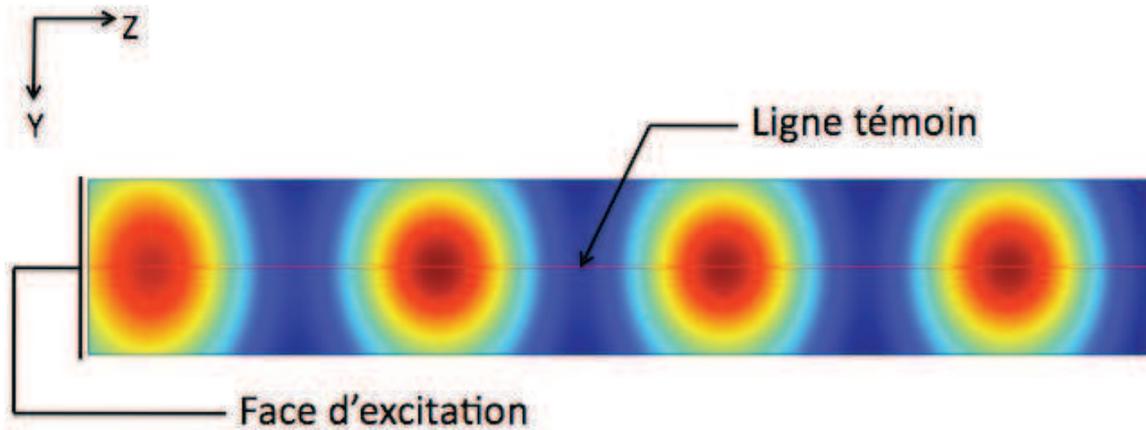


Figure 7: Cartographie du champ de dissipation viscoélastique calculé sur la face supérieure de la plaque avec le maillage M5

La figure 8a montre le profil du taux de dissipation viscoélastique le long de la ligne témoin pour les maillages M0 à M5.

Un lissage des profils est observé au fil des raffinements de maillage. Cela traduit un calcul de plus en plus précis. Pour une meilleure lisibilité, un agrandissement de la zone indiquée par le cercle en pointillé améliore le niveau de détail (figure 8b). La tendance des courbes à se rapprocher, voire à se superposer pour les maillages les plus fins traduit *a priori* une convergence des valeurs calculées.

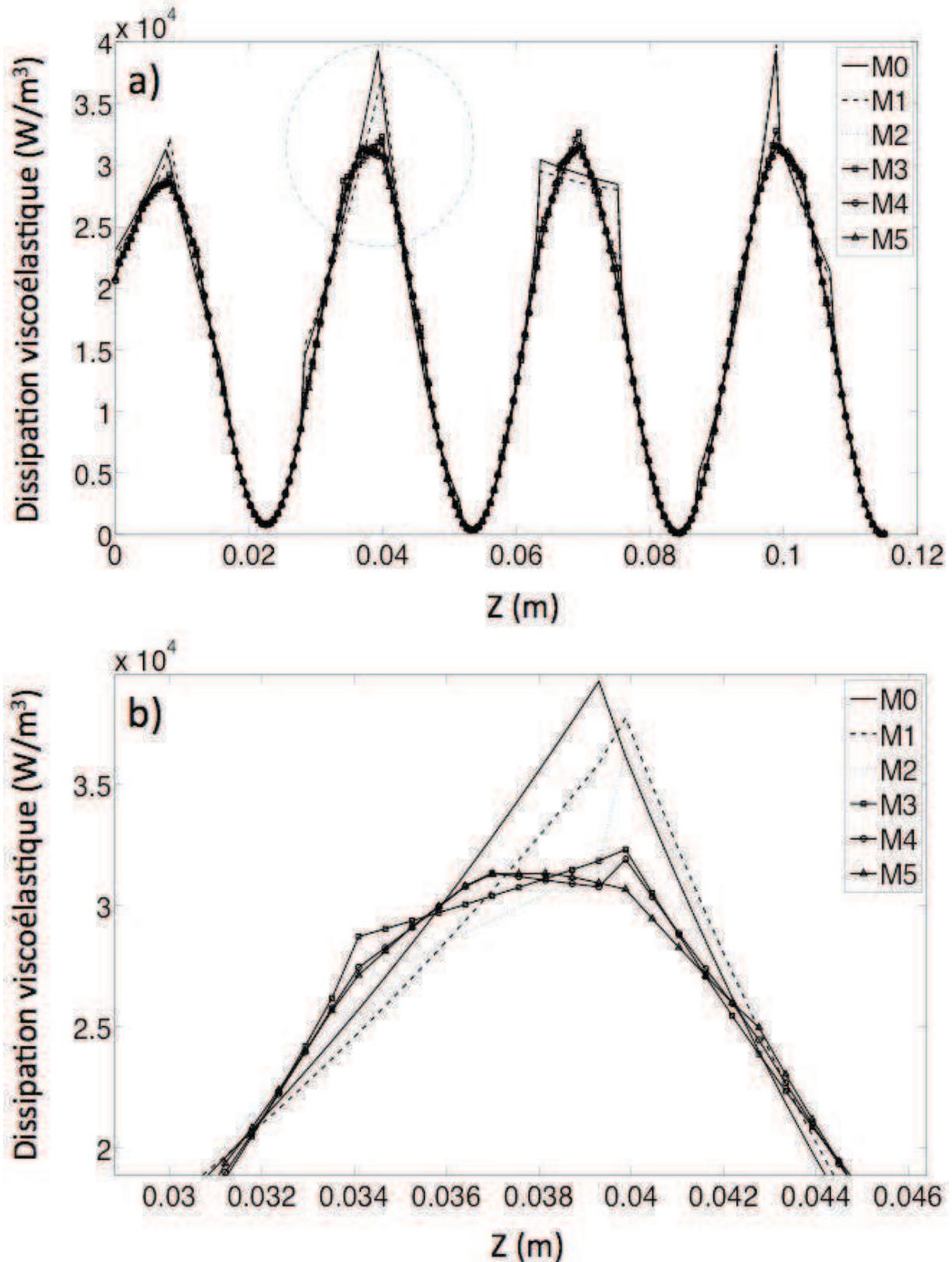


Figure 8 : Profils du taux de dissipation viscoélastique calculé le long de la ligne témoin pour les maillages M0 à M5 (a), agrandissement au voisinage du point de la ligne témoin de coordonnée $Z = 0,038$ m (b)

Pour vérifier la convergence en espace du modèle F, l'erreur de calcul des maillages M_i ($0 \leq i \leq 4$) par rapport au maillage M5 est calculée par :

$$\varepsilon_D^i = \max \left| \frac{D_j^5 - D_j^i}{D_j^5} \right| \text{ avec } \begin{cases} 0 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 200 \end{cases} \quad (3.61)$$

où D_j^5 représente la valeur du taux de dissipation viscoélastique calculée avec le maillage M5 au point d'indice j ($1 \leq j \leq 200$) de la ligne témoin,

D_j^i la valeur du taux de dissipation viscoélastique calculée avec le maillage M_i ($0 \leq i \leq 4$) au point d'indice j ($1 \leq j \leq 200$) de la ligne témoin,

$\left| \frac{D_j^5 - D_j^i}{D_j^5} \right|$ l'erreur relative du maillage M_i ($0 \leq i \leq 4$) par rapport au maillage M5 au point d'indice j ($1 \leq j \leq 200$) de la ligne témoin,

ε_D^i la valeur maximale de l'erreur relative du maillage M_i ($0 \leq i \leq 4$) par rapport au maillage M5 sur l'ensemble des 200 points de la ligne témoin.

La figure 9 montre l'évolution de l'erreur de calcul ε_D^i pour les maillages M_i ($0 \leq i \leq 4$). La décroissance monotone de la courbe traduit une amélioration de la précision de calcul au fil des raffinements successifs du maillage qui permet de conclure à la convergence en espace du modèle ' F pour le calcul mécanique.

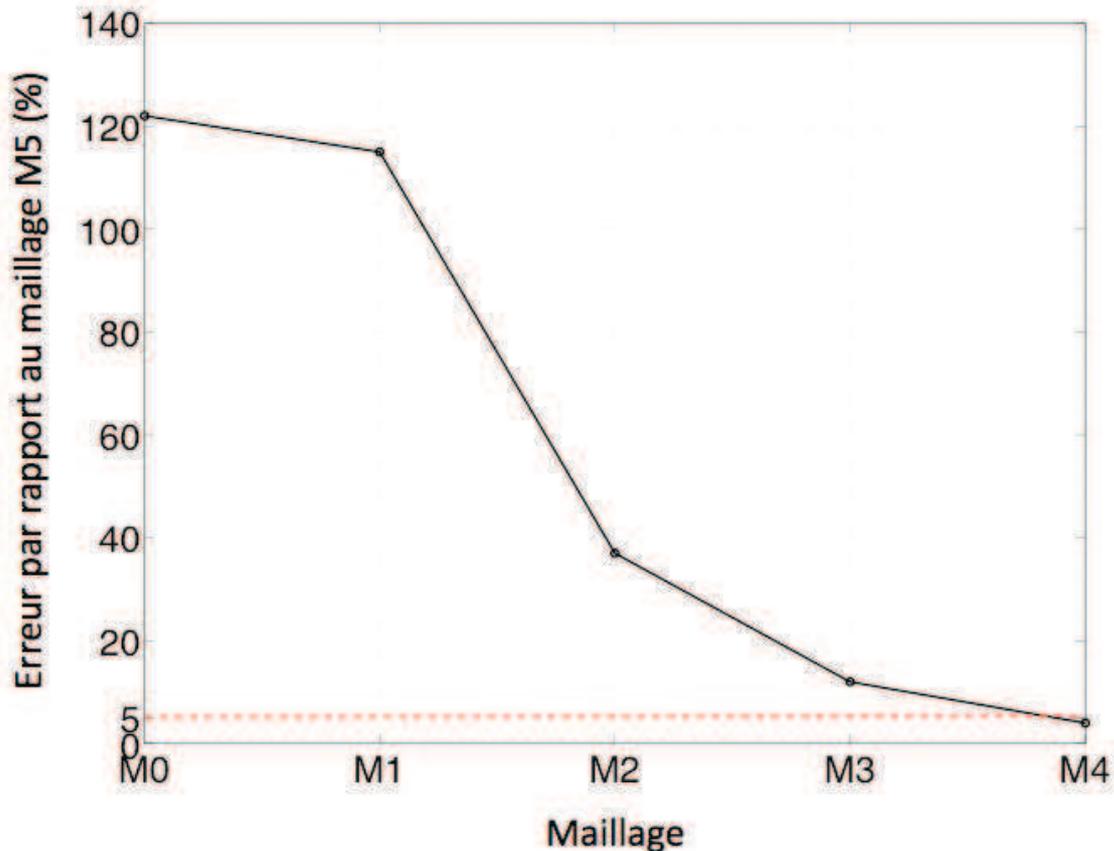


Figure 9: Evolution de l'erreur de calcul des maillages M0 à M4 par rapport au maillage M5 pour le calcul mécanique

Dans la suite, il sera admis qu'un maillage M_i présentant une valeur ε_D^i inférieure à 5% est d'une précision suffisante. En effet, un raffinement supplémentaire de ce maillage entraînerait un gain de précision négligeable (inférieur à 5%), avec le risque d'un accroissement significatif du temps de calcul. Sur la figure 9, ce critère est satisfait à partir du maillage M4 pour le calcul mécanique. Le choix de ce maillage constitue donc un bon compromis entre précision et temps de calcul.

3.1.2.2. Convergence en espace pour le calcul thermique

Le champ de température transitoire est calculé à $t = 120$ s avec un pas de temps $\Delta t = 1$ s. Sur le même principe que précédemment, le calcul est réalisé avec les maillages M0 à M5 et les résultats des six calculs sont comparés. L'erreur de calcul des maillages M_i ($0 \leq i \leq 4$) par rapport au maillage M5 est calculée par :

$$\varepsilon_T^i = \max \left| \frac{T_j^5 - T_j^i}{T_j^5} \right| \text{ avec } \begin{cases} 1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 200 \end{cases} \quad (3.62)$$

où T_j^5 représente la valeur de température calculée avec le maillage M5 au point d'indice j ($1 \leq j \leq 200$) de la ligne témoin,

T_j^i la valeur de température calculée avec le maillage M_i ($0 \leq i \leq 4$) au point d'indice j ($1 \leq j \leq 200$) de la ligne témoin,

$\left| \frac{T_j^5 - T_j^i}{T_j^5} \right|$ l'erreur relative du maillage M_i ($0 \leq i \leq 4$) par rapport au maillage M5 au point d'indice j ($1 \leq j \leq 200$) de la ligne témoin,

ε_T^i la valeur maximale de l'erreur relative du maillage M_i ($0 \leq i \leq 4$) par rapport au maillage M5 sur l'ensemble des 200 points de la ligne témoin.

La figure 10 montre l'évolution de l'erreur de calcul ε_T^i pour les maillages M_i ($0 \leq i \leq 4$).

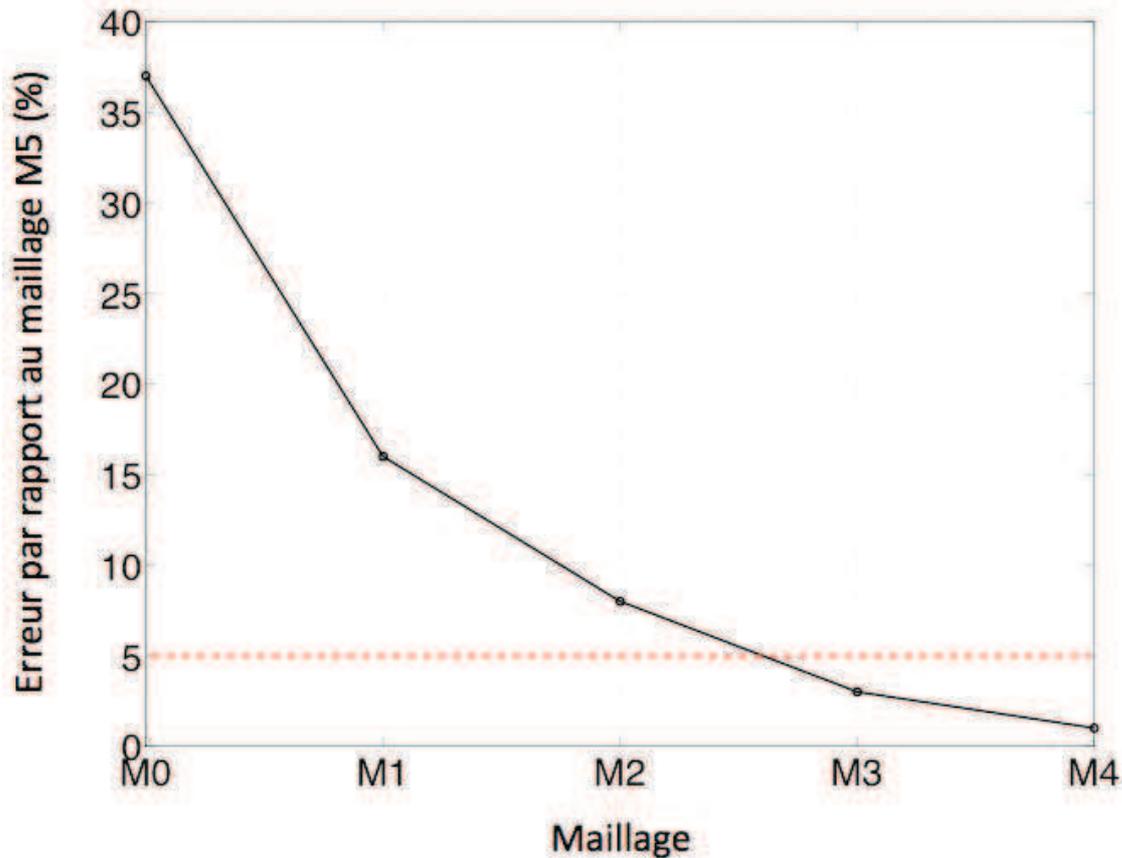


Figure 10: Evolution de l'erreur de calcul des maillages M0 à M4 par rapport au maillage M5 pour le calcul thermique

La décroissance monotone de la courbe permet de conclure à la convergence en espace du modèle F pour le calcul thermique. La valeur de ε_T^i est inférieure à 5% à partir du maillage M3. Le critère de précision de maillage est satisfait par M4 pour les calculs mécanique (figure 9) et thermique (figure 10) simultanément. Il réalise donc le meilleur compromis entre précision et temps de calcul. Pour montrer l'intérêt d'un choix judicieux du maillage, les temps de calcul associés aux différents maillages sont répertoriés dans le tableau 3.

Maillage	Durée du calcul mécanique (s)	Durée du calcul thermique (s)
M0	0,2	0,2
M1	0,5	0,4
M2	1,3	0,9
M3	4,2	2,9
M5	71,7	39,3
M6	5623,1	151,5

Tableau 3: Temps de calcul en secondes en fonction du maillage pour $\Delta t = 1$ s

Il apparaît que, à précision de calcul quasiment semblable, le maillage M4 présente un temps de calcul cumulé 4 fois plus réduit que le maillage M5 et 220 fois plus réduit que le maillage M6.

3.1.3. Convergence en temps du modèle EF

La convergence en temps du modèle est étudiée pour le calcul thermique. Dans ce cadre, l'influence de la discrétisation temporelle sur le calcul du champ de température T et de sa dérivée temporelle $\partial_t T$ est analysée. L'étude porte sur ces deux champs parce qu'ils dépendent du temps et interviennent dans l'équation de conduction de la chaleur (2.49) à résoudre avec le modèle EF.

Le champ de température induit par la sollicitation mécanique est calculé sur l'intervalle de temps [0 s 2400 s]. Le calcul est réalisé en utilisant les valeurs de pas de temps $\Delta t = 1$ s, $\Delta t = 10$ s, $\Delta t = 100$ s et $\Delta t = 300$ s. Des conditions aux limites thermiques sont imposées pour simuler des échanges de chaleur aux frontières du domaine. La figure 11 montre l'évolution de la température au point milieu de la ligne témoin calculée avec chacune des valeurs de Δt .

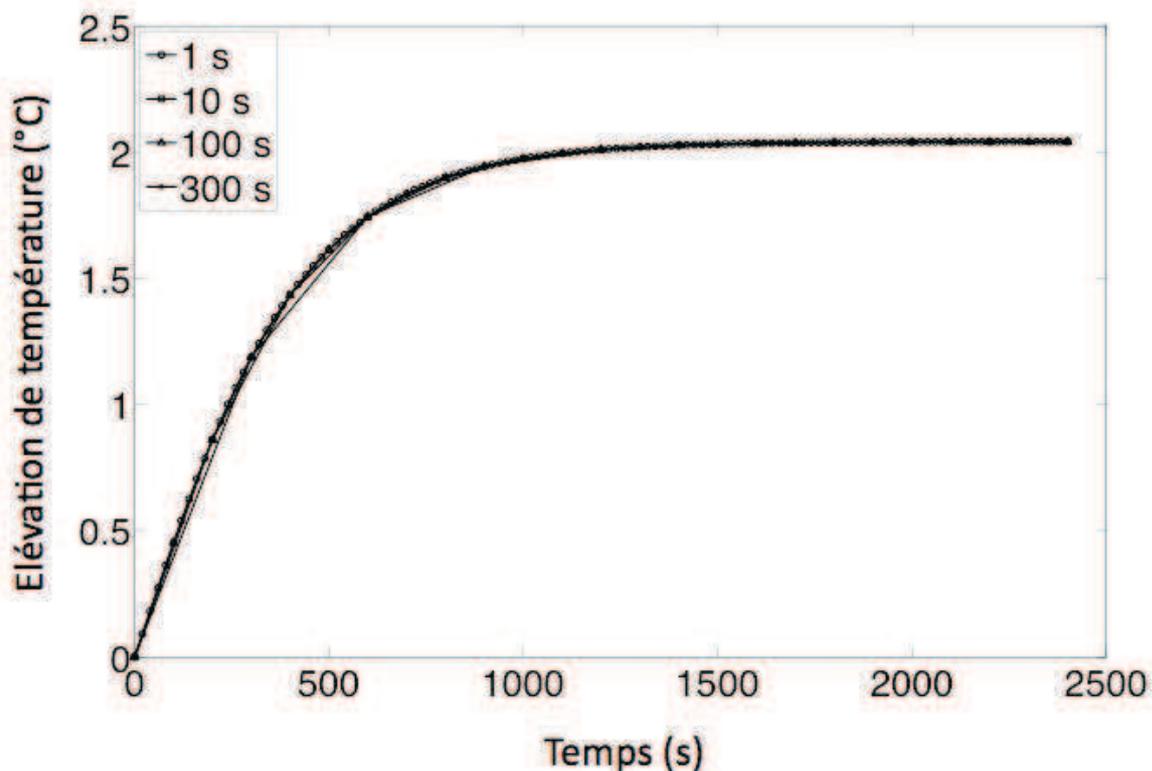


Figure 11 : Evolution de la température calculée au point milieu de la ligne témoin sur l'intervalle [0 s 2400 s] avec différentes valeurs du pas de temps Δt

Aux temps longs, toutes les courbes évoluent asymptotiquement vers une température constante. Ce pallier traduit l'équilibre entre l'élévation de température due à la production de chaleur et les pertes liées aux échanges aux parois. Globalement, les courbes représentées fournissent des valeurs de température quasiment identiques pour toutes les valeurs de Δt testées. Cela indique une faible sensibilité du calcul de la température T par rapport à la discrétisation temporelle.

De même, l'influence de la discrétisation temporelle sur le calcul de la dérivée temporelle du champ de température $\partial_t T$ est analysée. La figure 12 montre l'évolution de la valeur de $\partial_t T$ au point milieu de la ligne témoin calculée avec les valeurs de Δt considérées précédemment.

Aux temps longs, toutes les courbes tendent asymptotiquement vers la valeur $\partial_t T = 0$ traduisant l'équilibre thermique décrit précédemment. Aux temps courts, la courbe associée au pas de temps $\Delta t = 300$ s présente un écart relativement important par rapport aux autres courbes. Cela s'explique par le fait que la discrétisation temporelle n'est pas assez fine pour décrire la variation rapide de température s'opérant aux temps courts (figure 12). Globalement, l'écart entre les courbes se réduit progressivement pour des valeurs de Δt de plus en plus petites. Cette tendance permet de conclure à la convergence en temps du modèle EF pour le calcul de $\partial_t T$. Compte tenu de la faible influence de la valeur de Δt sur le calcul de la température mise en évidence précédemment, la convergence en temps du modèle EF pour le calcul thermique est admise.

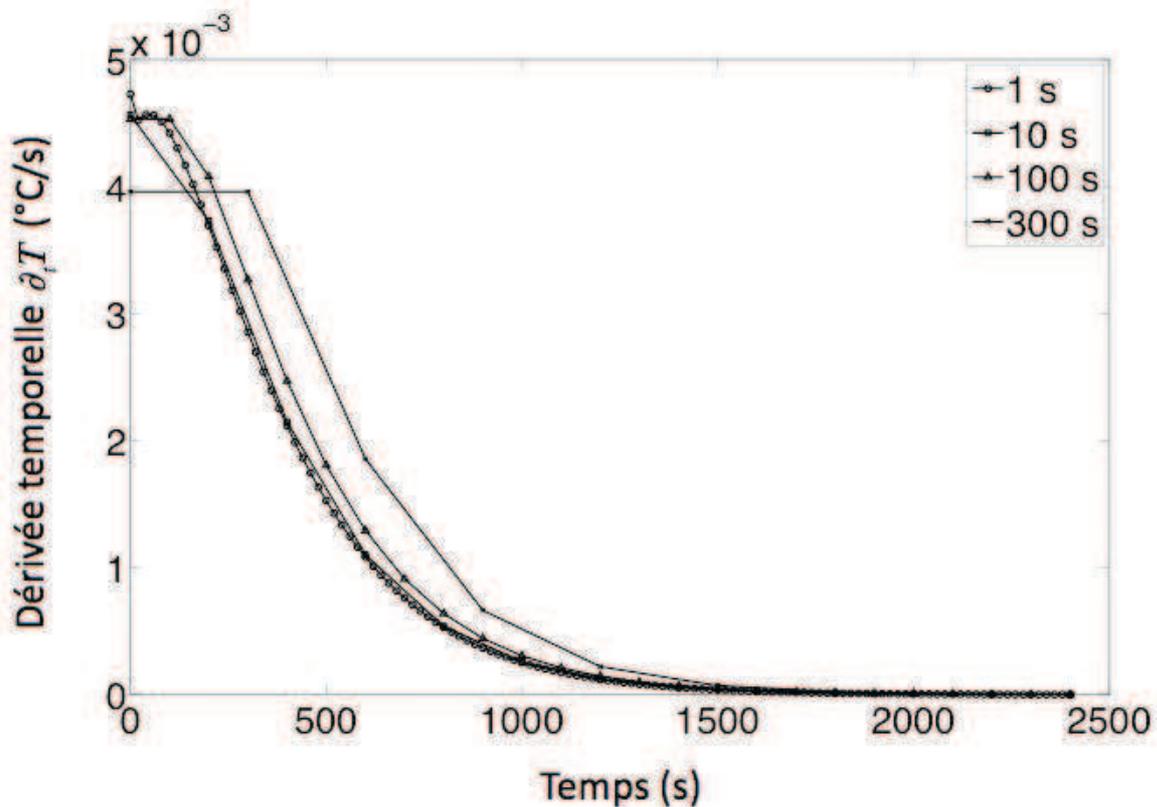


Figure 12 : Evolution de la dérivée temporelle de la température $\partial_t T$ calculée au point milieu de la ligne témoin sur l'intervalle [0 s 2400 s] avec différentes valeurs du pas de temps Δt

En définitive, l'étude de la convergence en espace et en temps a permis de s'assurer du bon conditionnement numérique du modèle EF. Afin de garantir la fiabilité du modèle, une validation expérimentale est réalisée dans la section suivante.

3.2. Validation expérimentale du modèle EF

Dans cette section, des résultats de simulations numériques sont comparés à des mesures expérimentales. Les cas d'un matériau homogène isotrope et d'un matériau composite anisotrope sont discutés.

3.2.1. Cas d'un matériau homogène isotrope

Une plaque de PVC dont les propriétés sont données dans le tableau 4 est utilisée comme éprouvette pour les mesures expérimentales. Le PVC est choisi pour ses propriétés viscoélastiques. Les valeurs de propriétés thermiques sont des estimations obtenues dans la littérature. Ces propriétés dépendent du type de PVC et sont par conséquent entachées d'une dispersion.

Dimensions de l'éprouvette : 115 x 20 x 3 mm ³ , Densité ρ : 1,17 g/cm ³		
$C_{11} = 7,9 (1 + 0,03i)$	$C_{22} = C_{11}$	$C_p = 1000 \text{ J/(kg K)}$
$C_{66} = 1,6 (1 + 0,03i)$	$C_{12} = C_{11} - 2 C_{66}$	$k = 0,1 \text{ W/(m K)}$

Tableau 4 : Modules de viscoélasticité complexes (en GPa) et propriétés thermiques de l'éprouvette en PVC

Un dispositif est réalisé au sein du laboratoire pour exciter mécaniquement l'éprouvette. Il est constitué un actionneur piézoélectrique Cedrat PPA10M couplé à une sonotrode (pièce métallique servant à amplifier les ondes acoustiques générées par l'actionneur piézoélectrique). Les caractéristiques techniques de l'actionneur et de la sonotrode sont détaillées dans l'annexe B. La figure 13a présente l'ensemble actionneur-sonotrode. Ce dispositif est utilisé pour imposer un déplacement sinusoïdal de fréquence 30 kHz sur une face de l'éprouvette (figure 13b). L'éprouvette a une largeur de 20 mm et une épaisseur de 3 mm. Une longueur de 115 mm est choisie de manière à ce que l'excitation mécanique imposée avec la sonotrode génère des ondes stationnaires dans l'éprouvette.

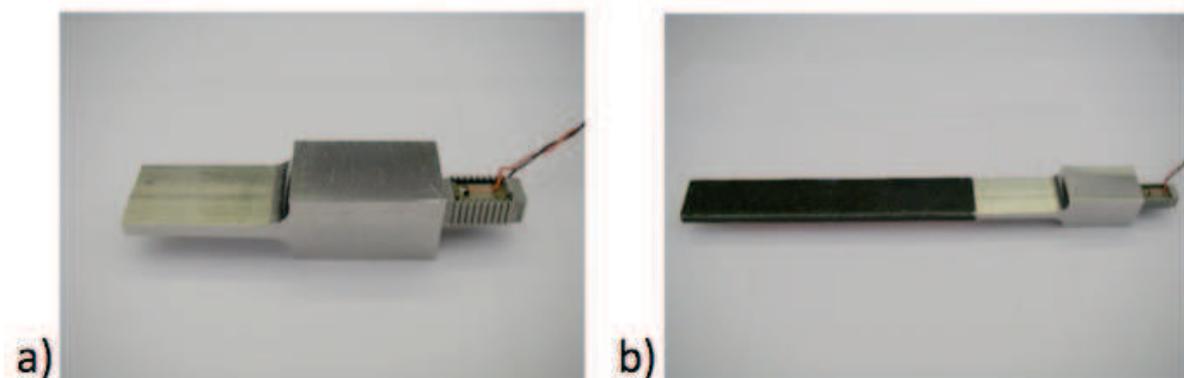


Figure 13 : Ensemble actionneur-sonotrode (a) et couplage avec l'éprouvette en PVC peinte en noir (b)

Le contact sonotrode/éprouvette est imprégné d'un film de gel couplant pour transmettre les ondes acoustiques dans l'éprouvette. Le déplacement imposé étant difficile à mesurer à

l'interface sonotrode/éprouvette, il est mesuré à l'extrémité libre de l'éprouvette avec un vélocimètre laser. L'amplitude du déplacement mesuré à l'extrémité libre est de l'ordre de 300 nm. Le déplacement imposé est ajusté afin d'obtenir la même valeur du déplacement à l'extrémité libre pour le modèle ' F et l'essai. Le champ de température induit par la sollicitation mécanique est mesuré sur la face supérieure de l'éprouvette avec une caméra infrarouge Flir SC-7000 dont les caractéristiques techniques sont détaillées dans l'annexe B.

Les valeurs du tableau 4 sont utilisées comme données d'entrée dans le modèle ' F pour prédire le champ de température induit par l'excitation mécanique de l'éprouvette. Ainsi, la figure 14b montre le champ de température sur la face supérieure, simulé avec le modèle ' F à l'instant $t = 120$ s en utilisant un coefficient d'échange $h = 0$ W/(m² K). Ce coefficient est défini dans l'équation (2.50). Les zones de température maximales et minimales correspondent respectivement aux nœuds et ventres de l'onde acoustique stationnaire.

La figure 14a montre le champ de température mesuré à l'aide de la caméra infrarouge après 120s d'excitation avec la sonotrode. Les champs de température simulé et mesuré présentent des caractéristiques communes : le même nombre de nœuds, la même longueur d'onde. Les isothermes autour des nœuds acoustiques sont elliptiques pour le champ de température simulé avec $h = 0$ W/(m² K) (figure 14b), tandis qu'elles apparaissent plus circulaires pour le champ mesuré (figure 14a). Cette différence est liée à la condition aux limites thermique du modèle. Pour le montrer, la figure 14c représente le champ de température simulé avec un coefficient d'échange $h = 10$ W/(m² K) pour simuler des pertes. Les isothermes apparaissent plus circulaires et sont plus conformes à la mesure de la figure 14a.

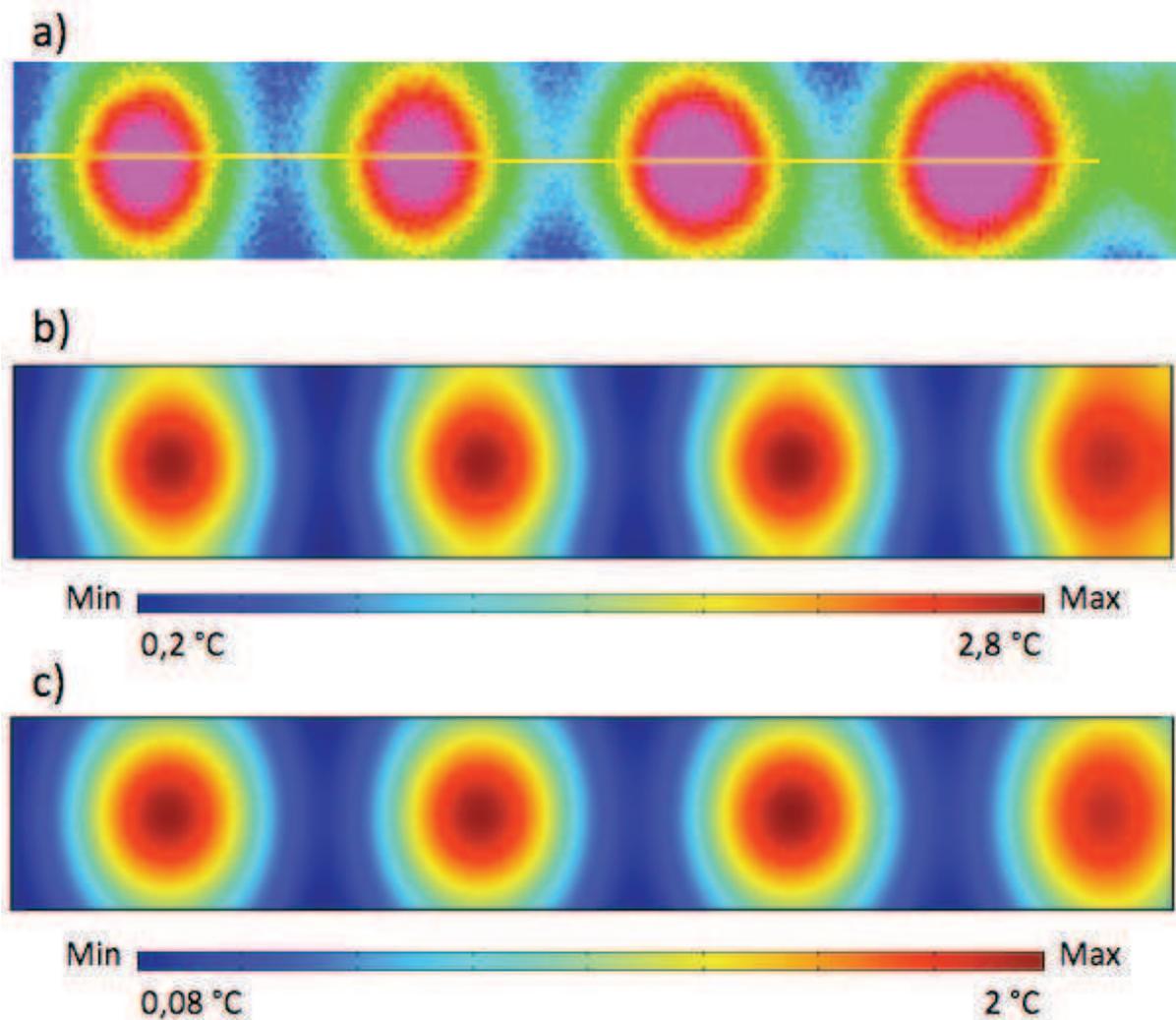


Figure 14 : Face supérieure de l'éprouvette. Cartographie du champ de température après 2 min d'excitation : résultat de la caméra infrarouge (a), résultat du modèle avec $h = 0 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ (b) et résultat du modèle avec $h = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ (c)

Les champs de température mesuré (figure 14a) et calculé (figure 14b et figure 14c) présentent un léger décalage entre les positions des nœuds et de ventres. Cette différence s'explique par le fait que la condition aux limites U_z utilisée dans le modèle ne reproduit pas parfaitement l'excitation mécanique. En effet, la nature du contact entre la sonotrode et l'éprouvette est plus complexe du fait de la nature du contact sonotrode/éprouvette.

La figure 15a et la figure 15b montrent les profils du champ de température le long de la ligne témoin respectivement mesuré avec la caméra infrarouge (figure 14a) et simulé (figure 14c).

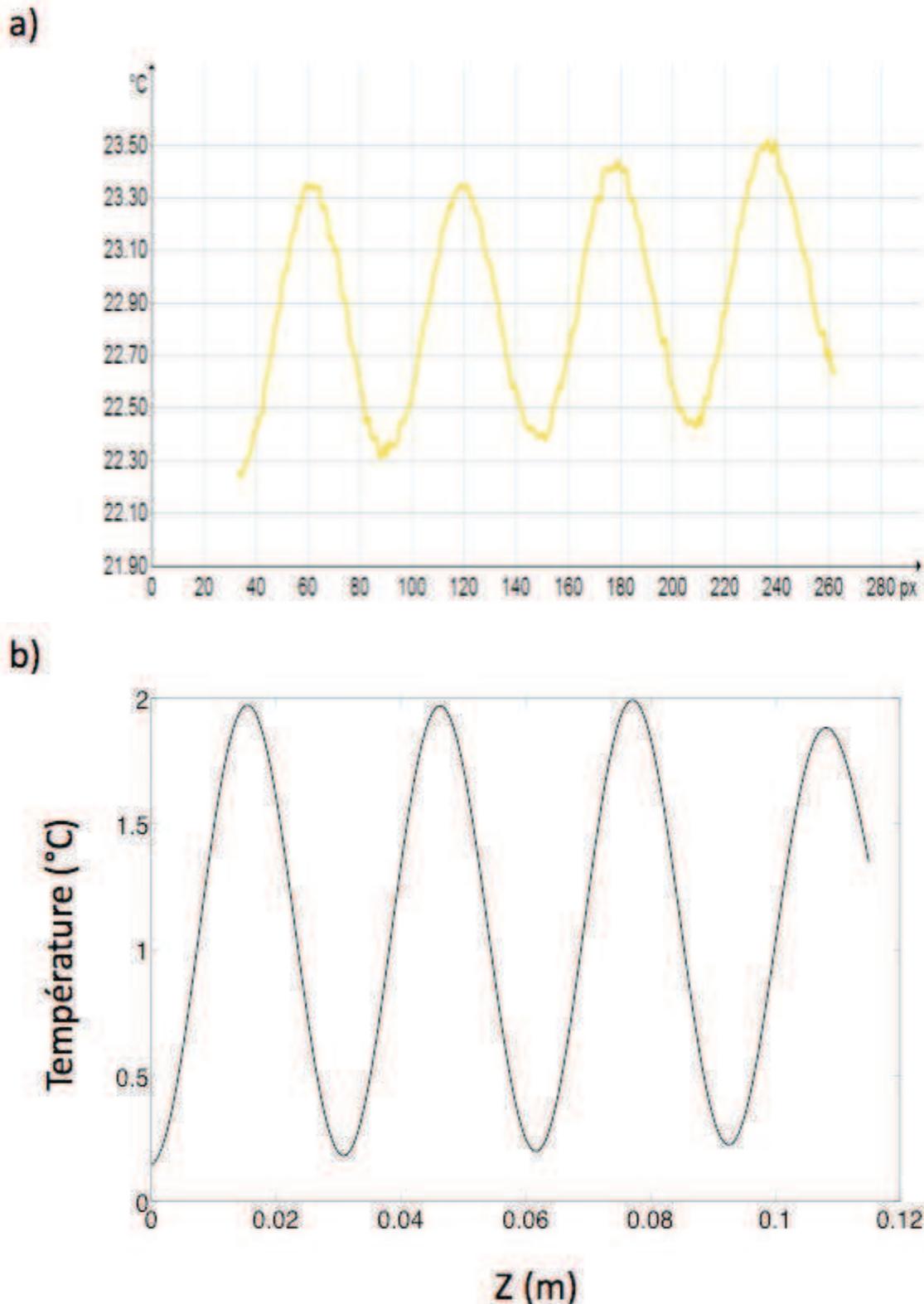


Figure 15 : Profils du champ de température le long de la ligne témoin à $t = 120$ s : résultat de la caméra infrarouge (a), résultat du modèle EF avec $h = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ (b)

L'élévation maximale de température est d'environ $1,2 \text{ }^\circ\text{C}$ pour la mesure (figure 15a) et $1,8 \text{ }^\circ\text{C}$ pour le modèle (figure 15b). L'écart d'environ $0,6 \text{ }^\circ\text{C}$ entre la simulation et la mesure s'explique par le fait que la valeur de h utilisée dans le modèle constitue une approximation des échanges de chaleur entre l'éprouvette et le milieu ambiant pendant l'expérience.

La comparaison des prédictions numériques avec des données expérimentales montre donc une bonne adéquation entre les résultats simulé et mesuré. Les différences observées entre la simulation et la mesure étant essentiellement liées à la difficulté d'une modélisation fine de facteurs expérimentaux que sont la nature du contact sonotrode/éprouvette et l'intensité des échanges de chaleur entre de l'éprouvette et le milieu ambiant [16].

3.2.2. Cas d'un matériau composite anisotrope

Une éprouvette en composite unidirectionnel Carbone/ epoxy dont les propriétés mécanique et thermique sont données dans le tableau 5 est utilisée pour l'essai. Les modules de viscoélasticité sont mesurés par la méthode d'immersion [17] et les propriétés thermiques sont des estimations retrouvées dans la littérature [18]. Les propriétés thermiques dépendent significativement de la nature de l'époxy, de la fraction volumique des fibres et du processus d'élaboration. Leurs valeurs estimées sont par conséquent entachées d'une incertitude mais seront supposées suffisamment représentatives pour être utilisées dans le modèle ' F.

Dimensions de l'éprouvette : 100 x 10 x 4,1 mm ³ , Densité ρ : 1,17 g/cm ³		
$C_{11} = 14,7 (1 + 0,035i)$	$C_{44} = 5,3 (1 + 0,035i)$	$C_{23} = 4,3 (1 + 0,035i)$
$C_{22} = 12,7 (1 + 0,035i)$	$C_{66} = 3,4 (1 + 0,035i)$	$C_{12} = 6,9 (1 + 0,035i)$
$C_{33} = 140 (1 + 0,035i)$	$C_{55} = 6,2 (1 + 0,035i)$	$C_{13} = 6,1 (1 + 0,035i)$
$k_1 = k_2 = 1,5 \text{ W/(m K)}$	$k_3 = 50 \text{ W/(m K)}$	$C_p = 1000 \text{ J/(kg K)}$

Tableau 5 : Modules de viscoélasticité complexes (en GPa) et propriétés thermiques de l'éprouvette en Carbone/Epoxy

L'éprouvette de dimensions 100 x 10 x 4,1 mm³ est découpée dans la plaque de manière à obtenir une orientation de fibres $\varphi = 45^\circ$ par rapport à son axe longitudinal (figure 16). L'éprouvette est excitée directement avec l'actionneur piézoélectrique. La masse de l'actionneur est négligeable en comparaison avec celle de l'éprouvette. Comme précédemment, le déplacement est mesuré à l'extrémité libre de l'éprouvette avec un vélocimètre laser. Cela permet d'identifier une fréquence de résonance de la tige compatible avec la bande passante fréquentielle de l'actionneur. L'amplitude du déplacement imposé dans le modèle ' F est ajustée afin de correspondre à celle du déplacement imposé avec l'actionneur. La caméra infrarouge utilisée pour l'observation du champ de température est la même que précédemment. Les caractéristiques techniques de l'actionneur piézoélectrique et de la caméra infrarouge sont détaillées dans l'annexe B.

L'éprouvette est excitée mécaniquement avec l'actionneur pendant 30 s à une fréquence de 59 kHz. La figure 16 montre le champ de température mesuré avec la caméra infrarouge et le champ de température simulé avec $h = 10 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$. L'allure du champ de température est différente de celle observée précédemment pour le cas d'un matériau isotrope (figure 14).

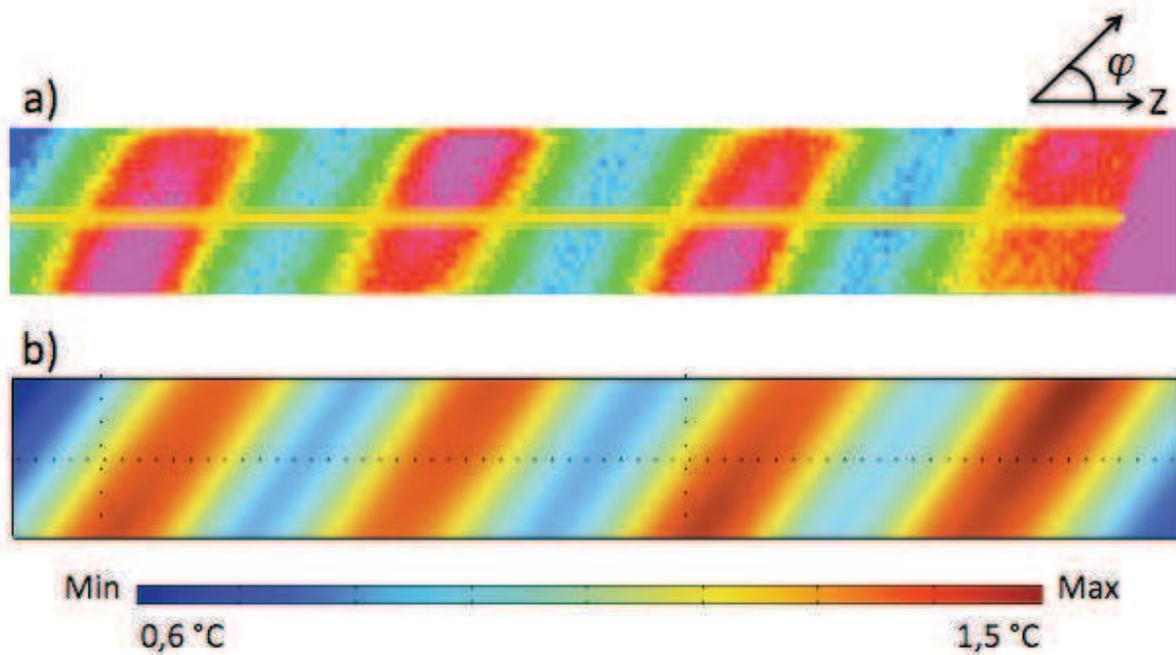


Figure 16 : Champ de température à $t = 30$ s : mesuré avec la caméra infrarouge (a) et simulé avec le modèle EF (b). Les fibres sont orientées à 45° par rapport à l'axe longitudinal. Fréquence d'excitation : 59 kHz.

Les nœuds et ventres présentent une inclinaison par rapport à l'axe longitudinal Z de l'éprouvette (figure 16), principalement due aux propriétés anisotropes du matériau. Ainsi, la propagation d'ondes ultrasonores dans le matériau composite induit un champ de température qui dépend de l'orientation des fibres. Une étude récente met en évidence ce résultat pour des matériaux composites unidirectionnels avec un angle d'orientation des fibres $\varphi = 0^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et $\varphi = 90^\circ$ [19]. Sur la figure 16, les champs de température mesuré (figure 16a) et simulé (figure 16b) présentent des allures semblables.

De même que précédemment, un léger décalage est observé entre les deux champs de température. Sur la figure 16a, la sonotrode est située à droite. L'élévation de température observée au niveau de la face excitée de l'éprouvette traduit une production de chaleur due au contact sonotrode/éprouvette.

En définitive, le modèle ' F a permis de résoudre le problème direct de la sonothermographie pour un matériau homogène isotrope et un matériau composite anisotrope. Pour chaque cas, la bonne adéquation entre la prédiction numérique et la mesure valide la capacité du modèle ' F à simuler correctement les phénomènes physiques mis en œuvre expérimentalement en sonothermographie.

3.3. Application du modèle EF aux matériaux composites multicouches

Dans cette section, le problème direct de la sonothermographie est résolu pour un modèle ' F de plaque stratifiée. Un matériau stratifié ou multicouche est obtenu par empilement de couches de matière. Du point de vue numérique, la modélisation de ce type de matériaux amène à prendre en compte les interfaces entre les couches, d'une part, et la variation des propriétés mécanique et thermique dans l'épaisseur, d'autre part.

Ces deux aspects sont traités dans cette section. D'abord, un modèle de plaque sans variation de propriétés dans l'épaisseur (couches de propriétés identiques) est réalisé. Ce cas permet d'étudier uniquement l'influence des interfaces sur le calcul numérique. Ensuite, un modèle de plaque avec une variation de propriétés dans l'épaisseur (couches de propriétés différentes) est réalisé. Ce second cas vise à étudier la sensibilité de la sonothermographie aux variations des propriétés mécanique et thermique en vue d'une application au contrôle non destructif.

3.3.1. Cas de couches de propriétés identiques

Une plaque stratifiée en PVC est modélisée. Le modèle de plaque est composé de trois couches de 1 mm d'épaisseur chacune et ses dimensions globales sont 115 x 20 x 3 mm³. Les trois couches sont identiques et leurs propriétés mécanique et thermique sont semblables à celles définies dans le tableau 4. Ainsi, le modèle de plaque stratifiée est équivalent au modèle de plaque monocouche en PVC étudié précédemment à la section 3.2.1. Une condition de type continuité des déplacements est imposée aux interfaces entre les couches.

Le maillage des interfaces entre les couches du modèle de plaque stratifiée requiert un nombre relativement important d'éléments Finis. Pour le montrer, le tableau 6 compare le nombre d'éléments Finis utilisés pour le maillage du modèle de plaque stratifiée et pour le maillage du modèle de plaque monocouche de mêmes dimensions.

Maillage	Nombre d'Eléments Finis du modèle	
	Plaque monocouche	Plaque stratifiée
M0	407	9 685
M1	1 394	32 336
M2	4 142	102 316
M3	12 511	322 030

Tableau 6 : Nombre d'Eléments Finis pour des maillages successifs d'un modèle de plaque monocouche et d'un modèle de plaque stratifiée de dimensions 115 x 20 x 3 mm³

Pour le modèle monocouche et le modèle stratifié, un déplacement d'amplitude 300 nm et de fréquence 30 kHz est imposé (solicitation similaire à celle de la section 3.2.1).

La figure 17c et la figure 17d montrent le champ de dissipation viscoélastique calculé avec le modèle de plaque monocouche en PVC. Ce champ représente le terme source utilisé précédemment dans l'équation de conduction de la chaleur pour calculer le champ de température (figure 14).

La figure 17a et la figure 17b représentent le champ de dissipation viscoélastique calculé avec le modèle de la plaque stratifiée équivalente. La figure 17b montre une continuité du champ de température dans l'épaisseur. Aucune discontinuité des champs acoustiques (contrainte, déformation) n'est observée aux interfaces entre les couches.

Les champs de dissipation viscoélastique calculés avec les modèles de plaque monocouche (figure 17c, figure 17d) et stratifiée équivalente (figure 17a, figure 17b) présentent des allures similaires. Les valeurs minimales et maximales de ces champs sont très proches. La faible différence pouvant s'expliquer par la différence du nombre d' éléments Finis des modèles de plaque stratifiée et monocouche (tableau 6).

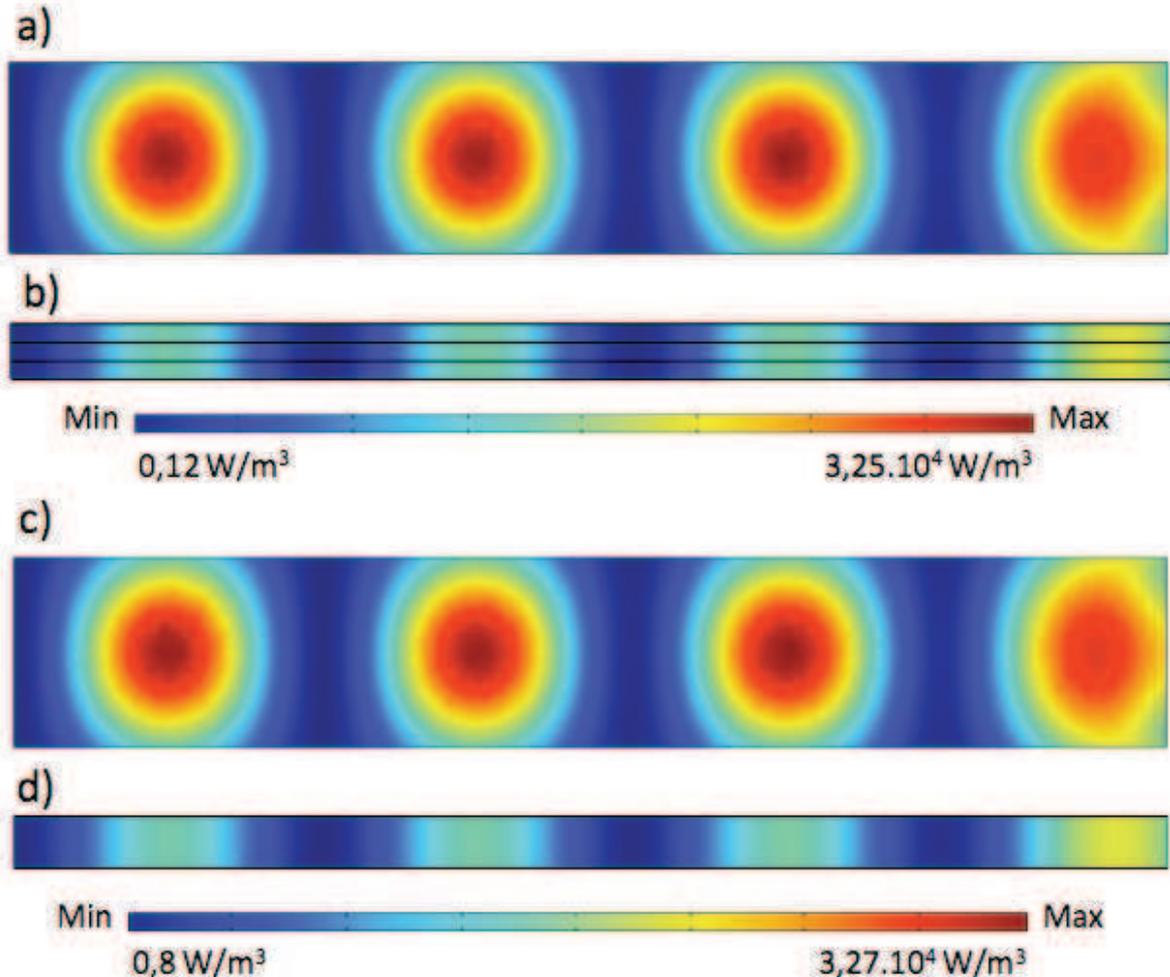


Figure 17 : Modèle de plaque stratifiée à trois couches identiques : (a) et (b). Champ de dissipation viscoélastique : face supérieure (a), face latérale (b) ; Modèle de plaque monocouche : (c) et (d). Champ de dissipation viscoélastique : face supérieure (c), face latérale (d)

Sur la figure 17b, le champ de dissipation viscoélastique apparaît continu dans l'épaisseur du modèle stratifié. L'existence d'interfaces dans le modèle stratifié a donc très peu affecté le calcul numérique. Pour comparer plus finement les valeurs des champs calculés pour le modèle monocouche (figure 17c) et le modèle stratifié (figure 17a), les profils de ces deux champs le long de la ligne témoin sont représentés à la figure 18.

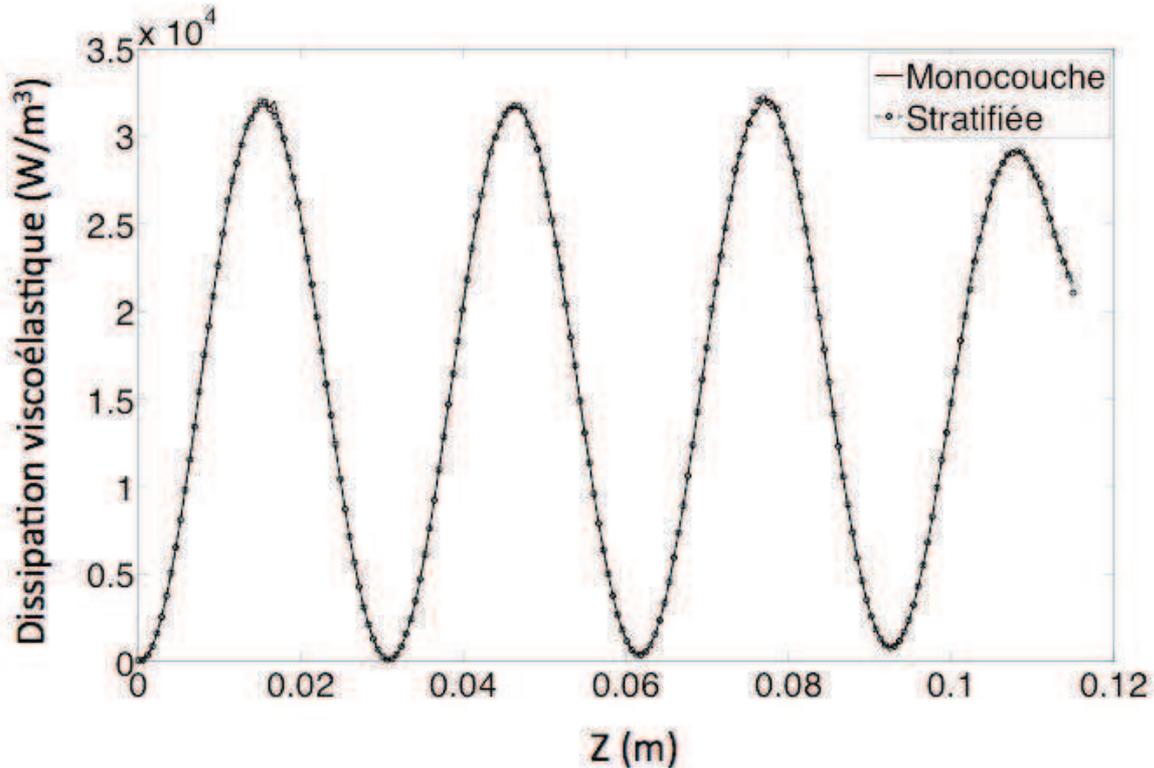


Figure 18 : Profils du champ de dissipation viscoélastique le long de la ligne témoin pour les modèles de plaque monocouche en PVC et stratifiée équivalente

La bonne superposition des deux profils permet de conclure à la quasi équivalence des modèles de plaque monocouche et stratifiée.

3.3.2. Cas de couches de propriétés différentes

Cette section vise à étudier la sensibilité de la sonothermographie aux variations des propriétés mécanique et thermique de la plaque en vue d'une application au contrôle non destructif. Pour cela, une plaque stratifiée anisotrope est modélisée. Elle est constituée de quatre couches en composite unidirectionnel de 1 mm d'épaisseur chacune : deux couches avec une orientation de fibres à 45° et deux couches avec une orientation de fibres à -45° . Les dimensions globales de la plaque sont $100 \times 10 \times 4 \text{ mm}^3$ (proches de celles de la plaque anisotrope en Carbone/ epoxy étudiée précédemment à la section 3.2.2).

À titre indicatif, le tableau 7 compare le nombre d'éléments Finis générés pour le maillage d'un modèle de plaque monocouche et pour un modèle de plaque stratifiée (4 couches) de dimensions $100 \times 10 \times 4 \text{ mm}^3$.

Maillage	Nombre d'Eléments Finis du modèle	
	Plaque monocouche	Plaque stratifiée
M0	139	4 852
M1	357	15 289
M2	966	47 813
M3	2 628	148 262

Tableau 7 : Nombre d'Eléments Finis pour des maillages successifs d'un modèle de plaque monocouche et d'un modèle de plaque stratifiée de dimensions 100 x 10 x 4 mm³

Le problème direct de la sonothermographie est résolu pour des modèles de plaques stratifiées d'ordre d'empilement $[-45^\circ/45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$ et $[-45^\circ/-45^\circ/45^\circ/45^\circ]$. Les résultats numériques sont discutés. Pour chaque cas, l'excitation mécanique est modélisée par un déplacement imposé d'amplitude 300 nm et de fréquence 59 kHz (solicitation similaire à celle de la section 3.2.2). Des résultats sont présentés dans la référence [19] pour le cas $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$.

3.3.2.1. Empilement symétrique $[-45^\circ/45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$

Une plaque stratifiée est modélisée avec l'ordre d'empilement $[-45^\circ/45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$ des quatre couches de Carbone/ epoxy. Pour chaque couche, l'angle φ correspond à l'orientation des fibres par rapport à l'axe longitudinal de la plaque orienté suivant Z (figure 19a). À l'instant initial ($t = 0$), la température de la plaque est uniformément nulle.

La figure 19a présente la cartographie du champ de dissipation viscoélastique sur la face supérieure de la plaque. La vue d'une face latérale de la plaque (figure 19b) permet d'observer les variations dans l'épaisseur. Le champ de dissipation viscoélastique est utilisé comme terme source dans l'équation de conduction de la chaleur pour calculer le champ de température. La figure 19c et la figure 19d présentent la cartographie du champ de température à $t = 30$ s après le début de l'excitation mécanique.

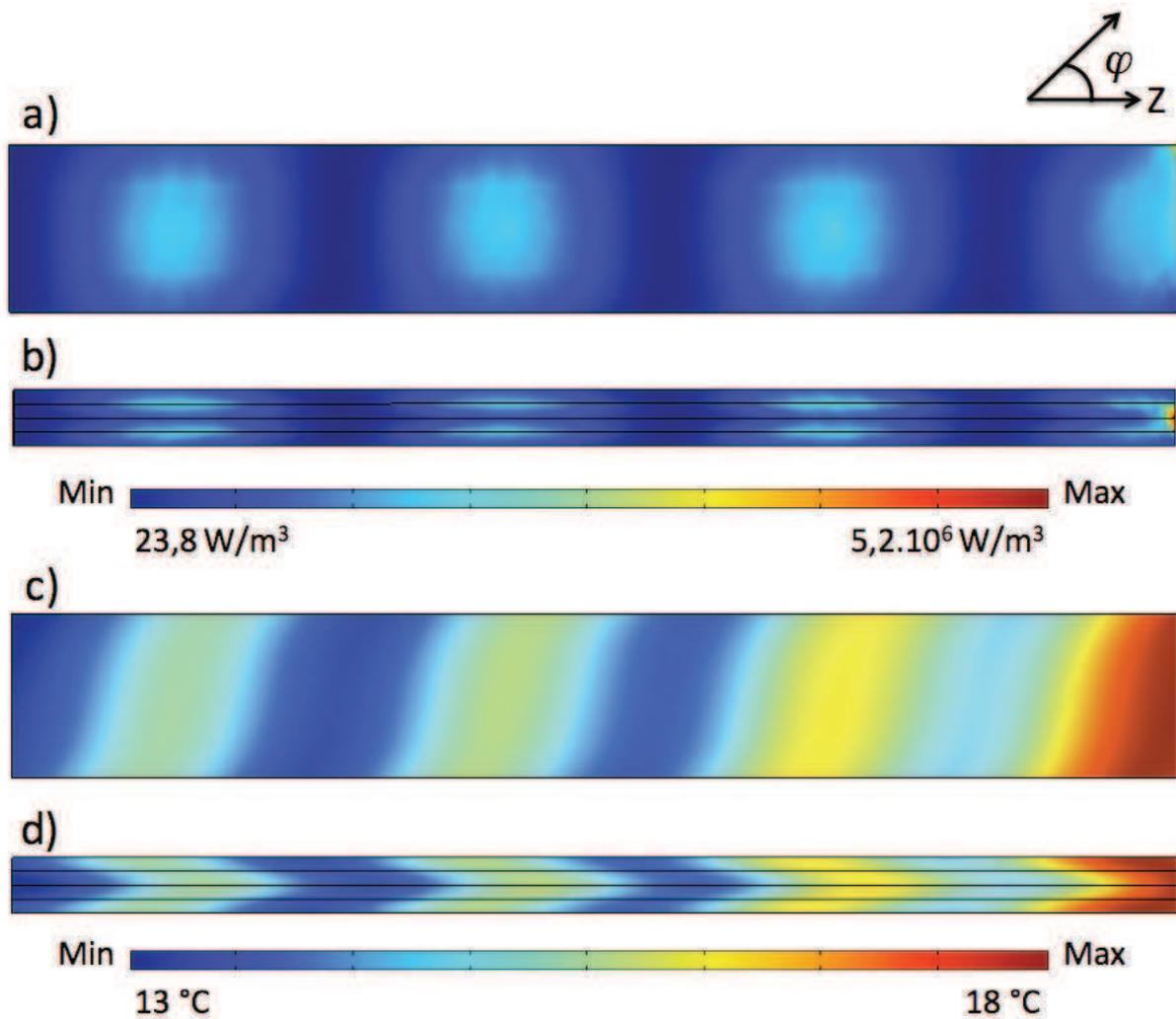


Figure 19 : Modèle de plaque stratifiée $[-45^\circ/45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$. Champ de dissipation viscoélastique : face supérieure (a), face latérale (b) ; Champ de température calculé à $t = 30$ s : face supérieure (c), face latérale (d)

La figure 19b montre des pics de dissipation viscoélastique aux interfaces entre la première et la deuxième couche, et entre la troisième et la quatrième couche. Ces interfaces sont celles où les propriétés mécaniques des couches en contact changent. Une étude de convergence non présentée ici mais similaire à celle de la section 3.1 a été réalisée pour valider la convergence du modèle \dot{F} de plaque stratifiée et montre que les pics de dissipation ne sont pas un effet numérique dû à une non convergence spatiale du modèle aux interfaces entre les couches. Aucun pic de dissipation viscoélastique n'est observé entre la deuxième et la troisième couche qui ont des propriétés mécaniques identiques. La variation brusque des propriétés mécaniques à une interface entraîne donc *a priori* une dissipation d'énergie plus importante. Cependant, il apparaît que les pics de dissipation ne se produisent pas sur toute l'étendue de ces interfaces mais restent localisés.

Pour expliquer cette allure du champ de dissipation, il est nécessaire de s'intéresser au comportement mécanique de la plaque. En effet, comme le montre l'équation (2.36), le champ de dissipation viscoélastique est fonction des champs acoustiques (contrainte, déformation), donc de la réponse mécanique globale de la plaque suite à la sollicitation mécanique. La déformée de la plaque étant une représentation de cette réponse mécanique globale, elle détermine l'allure du champ de dissipation.

Pour le montrer, la déformée du modèle de plaque stratifiée $[-45^\circ/45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$ est représentée à la figure 20. Sur cette figure, les deux vues de la déformée indiquent que les ondes acoustiques générées à travers la plaque par la sollicitation mécanique activent principalement un mode de vibration de type traction-compression. Ainsi, il apparaît que les pics de dissipation se produisent aux nœuds et ventres de vibration, c'est-à-dire dans les zones où les contraintes et déformations sont les plus importantes.

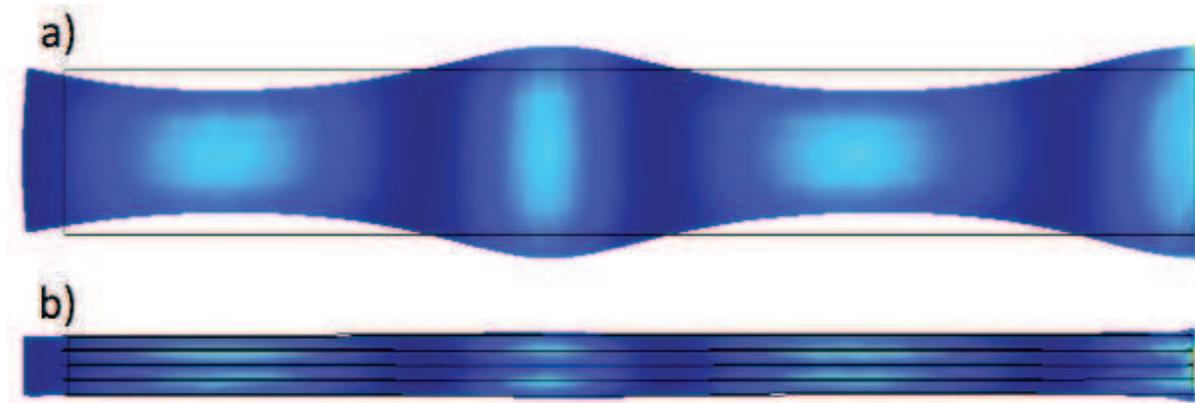


Figure 20 : Déformée du modèle de plaque stratifiée $[-45^\circ/45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$: face supérieure (a), face latérale (b)

La quantité de chaleur produite au niveau des pics de dissipation est significative. En effet, bien que soumises à la même sollicitation mécanique, la plaque stratifiée $[-45^\circ/45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$ présente une élévation maximale de température (figure 19c et figure 19d) 12 fois plus importante que dans le cas de la plaque monocouche de Carbone/poxy de mêmes dimensions à $t = 30$ s (figure 16b).

Dans cette section, les résultats numériques présentés ont permis d'améliorer la compréhension des phénomènes de dissipation viscoélastique et de diffusion thermique se produisant au sein d'une plaque stratifiée de propriétés connues. Un avantage du modèle ' F est de rendre possible l'évaluation de grandeurs physiques dans des zones difficiles à atteindre expérimentalement (mesures de température entre les couches par exemple).

3.3.2.2. Empilement non symétrique $[-45^\circ/-45^\circ/45^\circ/45^\circ]$

L'ordre d'empilement des quatre couches de Carbone/poxy est modifié pour obtenir un modèle ' F de plaque stratifiée $[-45^\circ/-45^\circ/45^\circ/45^\circ]$. La figure 21 présente la cartographie du champ de dissipation viscoélastique et celle du champ de température simulées avec ce modèle de plaque.

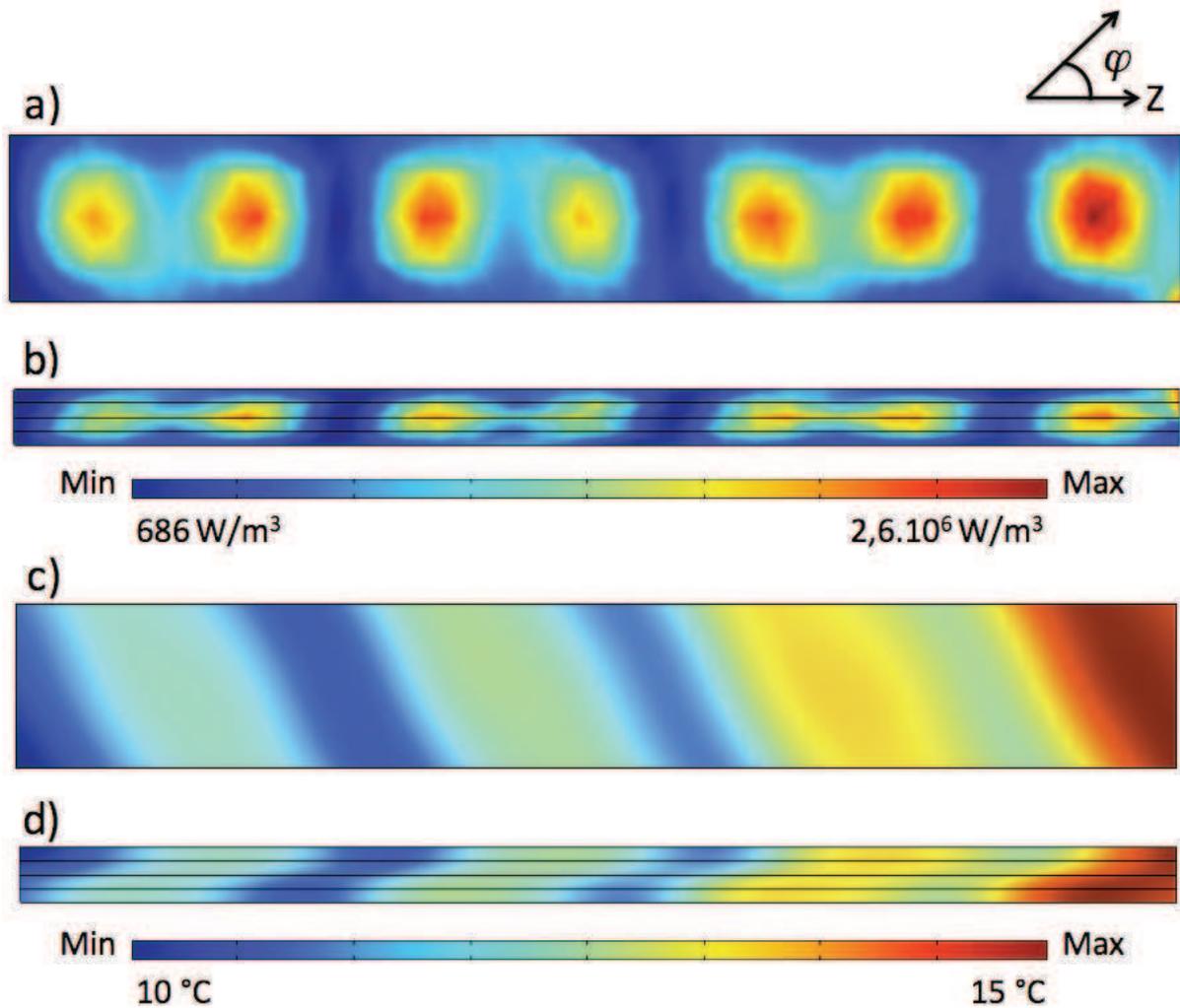


Figure 21 : Modèle de plaque stratifiée [-45°/-45°/45°/45°]. Champ de dissipation viscoélastique : face supérieure (a), face latérale (b) ; Champ de température calculé à $t = 30$ s : face supérieure (c), face latérale (d)

La figure 21b montre des pics de dissipation viscoélastique à l'interface entre la deuxième et la troisième couche. De même que précédemment, ces pics sont localisés au niveau de l'interface marquant un changement des propriétés des couches en contact.

La plaque stratifiée [-45°/-45°/45°/45°] (figure 21) et la plaque stratifiée [-45°/45°/45°/-45°] (figure 19) présentent des champs de dissipation et de température d'allures différentes. Ces champs sont donc sensibles à la variation des propriétés du modèle de plaque stratifiée.

En effet, bien que les deux modèles de plaque stratifiée soient construits à partir du même ensemble de quatre couches (deux couches à 45°, deux couches à -45°), leurs propriétés mécaniques et thermiques sont différentes. Pour le montrer, la déformée du modèle de plaque stratifiée [-45°/-45°/45°/45°] est représentée à la figure 22.

Pour la plaque stratifiée [-45°/-45°/45°/45°], l'excitation mécanique active désormais un mode de vibration couplé, principalement de type torsion (figure 22), contrairement à la plaque stratifiée [-45°/45°/45°/-45°] sollicitée en traction-compression (figure 20).

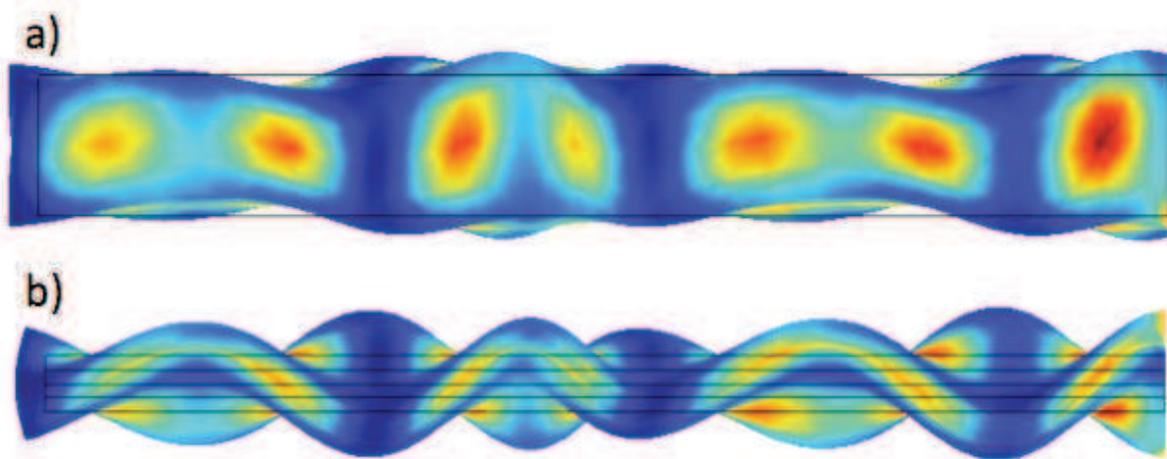


Figure 22 : Déformée du modèle de plaque stratifiée [-45/-45/45/45] : face supérieure (a), face latérale (b)

En définitive, le problème direct de la sonothermographie a été résolu pour un modèle de plaque composite multicouche. Deux ordres d'empilement des couches ont été étudiés. Cela a permis de montrer que le champ de température généré par dissipation viscoélastique est sensible aux variations des propriétés mécanique et thermique de la plaque. Cette double sensibilité du champ de température présente un intérêt pour une application de la sonothermographie à la détection de défauts. En effet, la présence d'un défaut pouvant se traduire par une perturbation locale des propriétés (mécanique et/ou thermique) du matériau, une application de la sonothermographie au contrôle non destructif est pertinente.

3.4. Application de la sonothermographie au contrôle non destructif

Le modèle Γ F est utilisé pour étudier l'applicabilité de la sonothermographie à la détection d'un défaut. Dans ce cadre, le problème direct de la sonothermographie est résolu pour des plaques comportant un défaut. Un avantage du modèle Γ F est de permettre la modélisation d'une diversité de défauts difficiles à réaliser expérimentalement.

Ici, des défauts de type cavité sont considérés. La cavité est une discontinuité de la matière. De ce fait, elle induit une modification locale des propriétés d'un matériau. La sensibilité du champ de température à la présence d'une cavité est analysée. La détectabilité du défaut est discutée par la suite.

3.4.1. Sensibilité du champ de température à la présence d'un défaut

Le problème direct de la sonothermographie est résolu pour des plaques comportant un défaut de type cavité. Ici, l'objectif est d'étudier la possibilité d'une détection du défaut à partir de l'allure du champ de température généré par dissipation viscoélastique. Les tests numériques ont été réalisés pour diverses configurations du problème (plaque monocouche / stratifiée, différentes formes, tailles et positions de la cavité). Les résultats obtenus mettent en évidence deux principaux modes de détection suivant le type de perturbation occasionné par la présence du défaut : la détection directe (perturbation locale du champ de température) et la détection indirecte (perturbation globale du champ de température).

Dans la suite, ces deux modes de détections sont mis en évidence à partir de tests numériques réalisés avec le modèle de plaque monocouche en PVC et le modèle de plaque stratifiée $[-45^\circ/45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$. Ces deux cas sont représentatifs de l'ensemble des résultats obtenus à partir des tests numériques réalisés.

3.4.1.1. Cas de la plaque monocouche

La plaque monocouche en PVC (§ 3.2.1) est modélisée avec une cavité de forme parallélépipédique de dimensions 1 mm x 2 mm x 5 mm (figure 23). Le volume de la cavité correspond à environ 0,14% du volume de la plaque. Le centre de la cavité est situé à 1 mm en dessous de la face supérieure de la plaque. L'excitation mécanique est modélisée par un déplacement d'amplitude 300 nm et de fréquence 30 kHz (excitation identique à celle de la section 3.2.1). La figure 23 montre la cartographie du champ de température calculé après 10 s d'excitation mécanique.

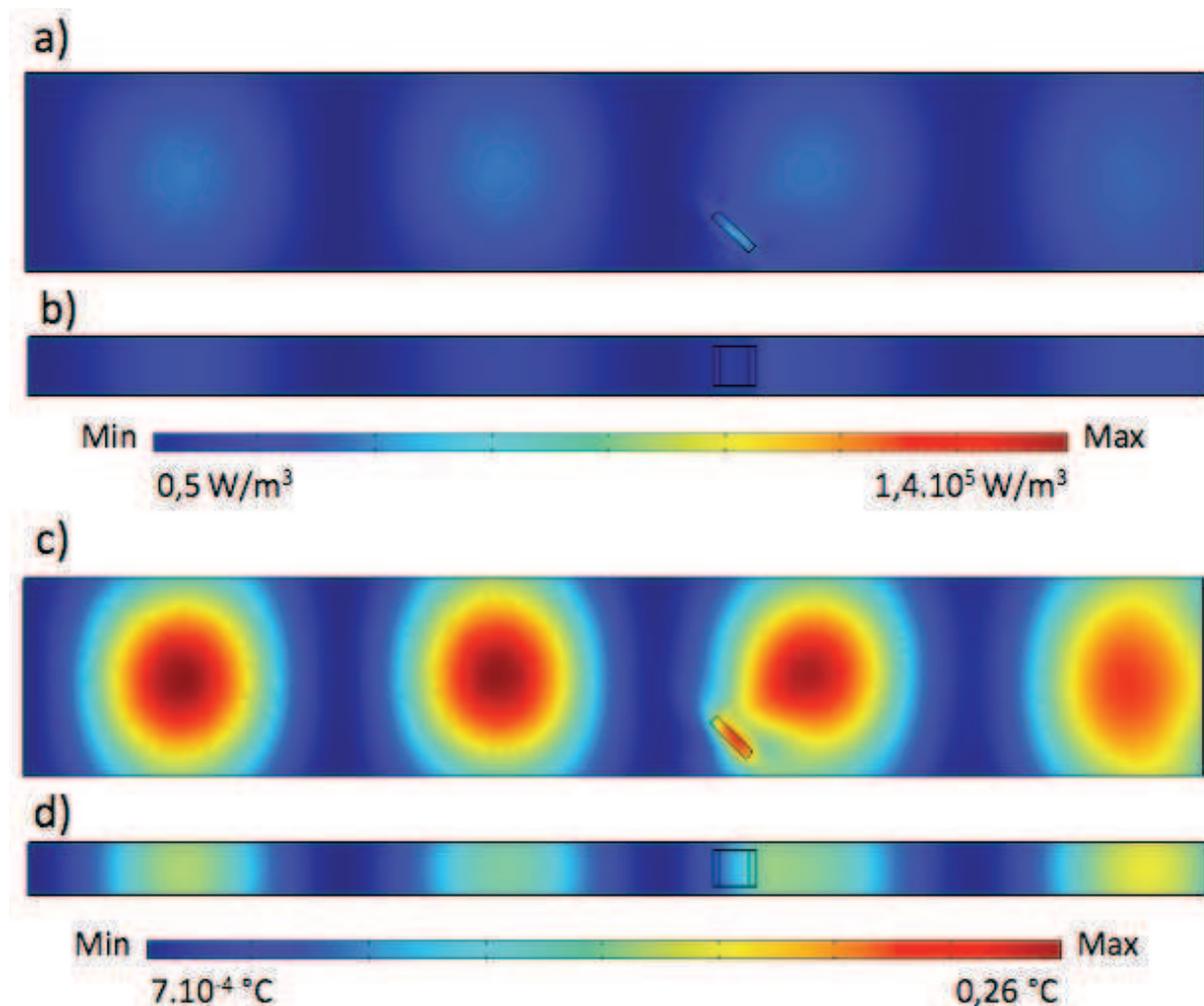


Figure 23 : Modèle de plaque monocouche avec un défaut. Champ de dissipation viscoélastique : face supérieure (a), face latérale (b) ; Champ de température calculé à $t = 10$ s : face supérieure (c), face latérale (d)

L'allure du champ de température de la plaque avec le défaut (figure 23) est différente de celle de la plaque sans défaut (figure 14). Cela s'explique par le fait que la présence du défaut entraîne une perturbation des champs acoustiques de contrainte et déformation de la plaque. Il

en résulte une modification du champ de dissipation viscoélastique (figure 23a) qui se traduit par une élévation locale de température dans la zone où se situe le défaut (figure 23c). Dans ce cas, l'allure du champ de température révèle directement la présence du défaut : c'est la détection directe.

3.4.1.2. Cas de la plaque stratifiée [-45°/-45°/45°/45°]

La plaque stratifiée [-45°/-45°/45°/45°] (§ 3.3.2.2) est modélisée avec une cavité sphérique de diamètre 0,9 mm située à l'intérieur de l'une des quatre couches (figure 24). Le volume de la cavité correspond à environ 0,01% du volume de la plaque. Le centre de la cavité est situé à mi-épaisseur de la couche d'épaisseur 1 mm, de sorte que la frontière de la cavité n'est pas en contact avec les interfaces supérieure et inférieure de la couche. L'excitation mécanique est modélisée par un déplacement d'amplitude 300 nm et de fréquence 59 kHz (excitation identique à celle de la section 3.3.2.2). La figure 24 montre la cartographie du champ de température calculé à $t = 30$ s.

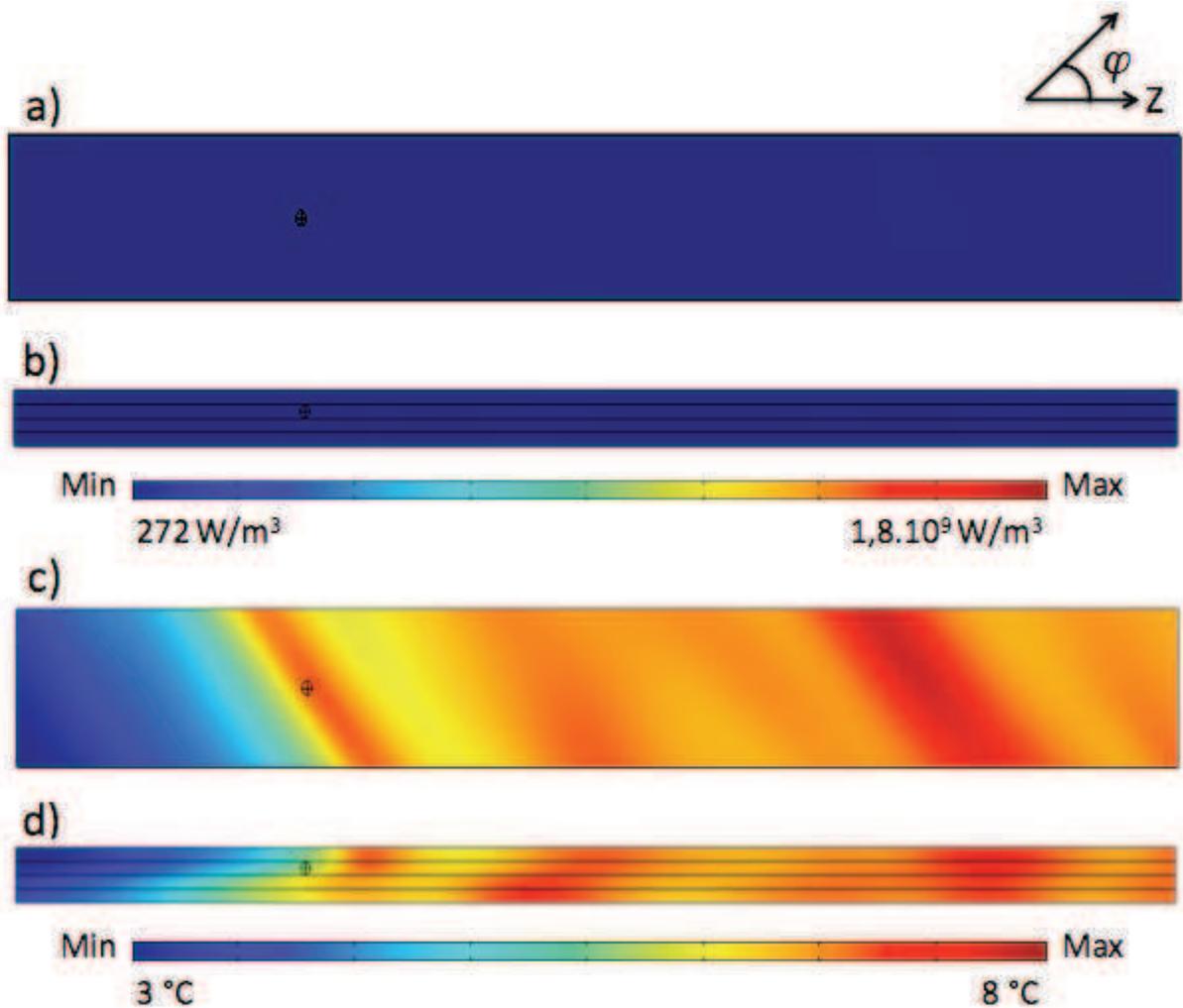


Figure 24 : Modèle de plaque stratifiée [-45°/-45°/45°/45°] avec un défaut. Champ de dissipation viscoélastique : face supérieure (a), face latérale (b) ; Champ de température calculé à $t = 30$ s : face supérieure (c), face latérale (d)

Il apparaît que l'allure du champ de température de la plaque avec le défaut (figure 24) est différente de celle de la plaque sans défaut (figure 21). Cette différence s'explique par le fait

que la présence du défaut (0,01% du volume total) a entraîné une perturbation des champs acoustiques de contrainte et déformation de la plaque. Pour le montrer, la déformée de la plaque défectueuse est présentée à la figure 25. Il ressort que la déformée du modèle de plaque défectueuse (figure 25) est différente de celle du modèle de plaque sans défaut (figure 22).

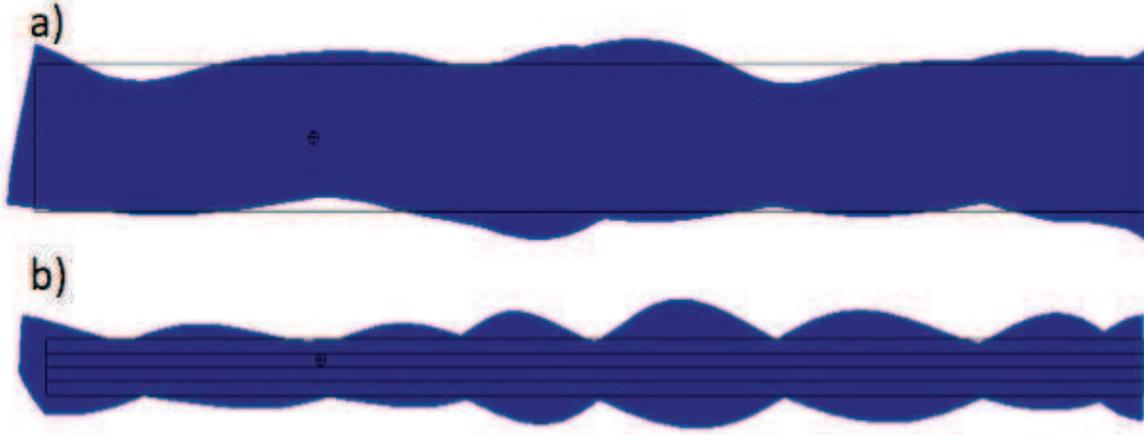


Figure 25 : Déformée du modèle de plaque stratifiée [-45/-45/45/45] avec un défaut : face supérieure (a), face latérale (b)

La figure 24c et la figure 24d montrent que la présence du défaut n'a pas entraîné une élévation locale de température permettant de le localiser distinctement. La perturbation thermique induite par le défaut n'est pas locale mais globale. Dans ce cas, l'allure du champ de température révèle indirectement la présence du défaut : c'est la détection indirecte.

3.4.2. Détectabilité d'un défaut par sonothermographie

Les résultats numériques montrent l'applicabilité de la sonothermographie à la détection de défauts. Les deux modes de détection identifiés mettent en évidence le fait que la localisation précise d'un défaut dépend de sa réflectivité acoustique, c'est-à-dire de l'interaction du défaut avec les ondes acoustiques générées à travers la structure par l'excitation mécanique. Bien que la localisation précise du défaut ne soit pas prévisible *a priori*, la probabilité de détection ou détectabilité de sa présence est appréciable.

En effet, la sonothermographie met en œuvre des phénomènes dissipatif et diffusif qui dépendent respectivement des propriétés mécanique (modules de viscoélasticité) et thermique (diffusivité thermique) du matériau. De ce fait, le champ de température généré en sonothermographie est sensible à la fois aux variations des propriétés mécanique et thermique du matériau induites par la présence d'un défaut. Cette double sensibilité contribue à accroître la probabilité de détection.

3.5. Conclusion

Un modèle par éléments finis a été implémenté pour analyser les phénomènes de dissipation viscoélastique et de transferts de chaleur dans des matériaux absorbants. Ce modèle a été validé numériquement par des tests de convergence en espace et en temps, puis validé

expérimentalement par la confrontation de prédictions numériques avec des mesures effectuées par thermographie infrarouge.

Le modèle a été appliqué aux composites unidirectionnels et multicouches. Des simulations réalisées à partir de modèles σ - T de plaques ont contribué à améliorer la compréhension des phénomènes dissipatifs et diffusifs mis en œuvre en sonothermographie pour des structures complexes telles que les composites stratifiés. En complément des résultats numériques présentés pour le cas des stratifiés, le développement d'un modèle 2D présentant de manière plus fine les variations de propriétés dans l'épaisseur pourrait être un moyen pour valider l'existence des pics de dissipation calculés entre les couches.

L'analyse de la réponse thermique de plaques multicouches comportant un défaut de type cavité a permis d'identifier deux modes de détection. D'une part, la détection directe qui correspond au cas où le défaut entraîne une perturbation locale du champ thermique révélant des caractéristiques du défaut (position, taille) et d'autre part, la détection indirecte qui correspond au cas où le défaut entraîne une perturbation globale du champ thermique révélant la présence du défaut sans permettre sa localisation. La mise en évidence de la détectabilité de défauts a permis de montrer que la sonothermographie est une méthode applicable au contrôle non destructif.

La suite de ce travail traite de l'application de la sonothermographie à l'évaluation des propriétés de matériaux. À ce stade, il est intéressant d'observer que la quantité de chaleur produite par les sources dépend des propriétés mécaniques de viscoélasticité du matériau tandis que la diffusion de la chaleur produite dépend des propriétés thermiques, notamment la diffusivité thermique. Dès lors, une caractérisation mécanique et thermique du matériau peut être envisagée à partir de la réponse thermique du matériau. Deux approches peuvent être envisagées : la première approche consisterait à estimer le champ de sources pour évaluer la viscoélasticité et la seconde approche consisterait à exploiter la variation spatio-temporelle du champ thermique pour évaluer la diffusivité thermique.

La précision sur les champs de sources estimés dépend de nombreux facteurs. Parmi ces derniers se trouve la connaissance des propriétés thermiques du matériau. La caractérisation thermique précède de ce fait la caractérisation mécanique. Pour cette raison, la suite de ce travail se focalise sur l'application de la sonothermographie à l'évaluation des propriétés thermiques du matériau, en particulier la diffusivité thermique.

Chapitre 4 :

Méthode LOWF de caractérisation thermique par formulation faible

Les élévations de température générées en sonothermographie sont relativement faibles, en comparaison avec les élévations de température qu'il est possible d'atteindre en utilisant une source de chaleur classique (diode laser, lampe). C'est une conséquence de la faible amplitude (de l'ordre de 10^{-6} m) du déplacement imposé avec la sonotrode afin de solliciter le matériau dans le domaine élastique. Le signal thermique étant de faible intensité, les mesures de température réalisées par thermographie infrarouge sont bruitées. L'estimation des propriétés de matériaux à partir de données bruitées est une opération délicate et souvent peu robuste.

Dans ce chapitre, une méthode de caractérisation thermique adaptée à la sonothermographie est présentée. La méthode LOWF (Low Order Weak Formulation) développée repose sur une formulation faible de l'équation de conduction de la chaleur. La formulation faible vise à réduire l'influence du bruit sur les dérivées spatiales impliquées dans l'équation de conduction de la chaleur afin de parvenir à une estimation robuste de la diffusivité thermique.

D'abord, un panorama des méthodes de caractérisation thermique par thermographie infrarouge dédiées à l'estimation de la diffusivité thermique est présenté (section 4.1). Les méthodes existantes sont essentiellement de type nodal ou modal. Le formalisme mathématique de la méthode LOWF est détaillé (section 4.2) puis appliqué à un modèle numérique 2D de matériau isotrope (section 4.3) pour une validation numérique. La méthode LOWF et la méthode nodale sont comparées. Par la suite, une variante de la méthode LOWF est développée pour le cas d'un matériau anisotrope (section 4.4). Enfin, des critères d'optimisation de la méthode LOWF sont proposés (section 4.5).

4.1. Méthodes de caractérisation thermique (nodale, modale)

Il existe différentes méthodes permettant d'estimer la diffusivité thermique d'un matériau à partir de données de température acquises par thermographie infrarouge. Ces méthodes sont principalement de type nodal ou modal. Le principe de ces méthodes est décrit.

4.1.1. La méthode nodale

La méthode nodale [20,21] est basée sur une estimation locale de la diffusivité thermique, à l'échelle d'un point matériel. L'équation de conduction de la chaleur est écrite sous la forme discrétisée :

$$Fo_{i,j}\Delta T_{i,j}^k + \Phi_{i,j}^k = \delta T_{i,j}^k \quad (4.63)$$

avec

$$\Delta T_{i,j}^k = (T_{i+1,j}^k + T_{i-1,j}^k + T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k - 4T_{i,j}^k) \text{ le Laplacien,}$$

$$\delta T_{i,j}^k = T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k \text{ la dérivée temporelle,}$$

$\Phi_{i,j}^k = \frac{\varphi_0 \Delta t}{\rho C_p}$ le terme source (°C), avec ρC_p la capacité thermique volumique ($\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$) et φ_0 la source volumique de chaleur (W m^{-3}),

$Fo_{i,j} = \frac{\alpha_{i,j} \Delta t}{\Delta_x^2}$ le nombre de Fourier local, avec $\alpha_{i,j}$ la diffusivité thermique locale ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$), Δ_x le pas de discrétisation spatiale (m) avec $\Delta_x = \Delta_y$ et Δt le pas de discrétisation temporelle (s).

L'équation (4.63) se présente comme l'équation d'une droite de pente $Fo_{i,j}$. Δ_x et Δt étant connus, le calcul de $Fo_{i,j}$ permet d'évaluer $\alpha_{i,j}$. En chaque point, la pertinence de la relation linéaire entre le Laplacien et la dérivée temporelle est indiquée par la valeur de la corrélation entre ces deux termes donnée par :

$$\rho_{i,j}^{F_i} = \frac{\sum_{F_i} \Delta T_{i,j}^k \delta T_{i,j}^k}{\|\Delta T_{i,j}^k\|_{F_i} \|\delta T_{i,j}^k\|_{F_i}} \quad , \quad \rho_{i,j}^{F_i} \in [-1 \ 1] \quad (4.64)$$

où $F_i = [k, k + lt]$, $k \in [1, N - lt]$ est une fenêtre temporelle, avec k le pas de temps et lt la longueur de la fenêtre temporelle.

La valeur de la corrélation $\rho_{i,j}^{F_i}$ est un bon indicateur de la qualité d'estimation. Ainsi, la précision d'estimation est meilleure lorsque $Fo_{i,j}$ est calculé pour les points présentant une valeur de $\rho_{i,j}^{F_i}$ proche de 1. La méthode nodale a l'avantage de permettre une cartographie de propriétés. Cependant, les estimations réalisées présentent une grande sensibilité au bruit.

4.1.2. Les méthodes modales

La méthode par décomposition de Karhunen-Loève (KLD) [41,42] et la méthode par transformées intégrales [27-29] sont des méthodes modales largement utilisées pour estimer la diffusivité thermique des matériaux à partir d'un champ de température.

La méthode KLD consiste à projeter les données de température sur une base orthogonale de fonctions propres dominantes afin d'en extraire les composantes significatives. Une description approximative en dimension réduite du jeu de données complet est obtenue. Cette approche permet de tronquer les composantes du jeu de données jugées peu pertinentes, en général celles qui sont le plus affectées par le bruit.

La méthode par transformées intégrales consiste à rechercher la solution analytique du problème thermique dans des espaces transformés (Fourier, Laplace). Lorsque la solution est connue, elle peut être décomposée en modes. Le mode le moins bruité est utilisé pour l'estimation de la diffusivité thermique. La solution analytique n'est pas toujours connue, ce qui limite parfois l'application de cette méthode à des problèmes impliquant une excitation thermique en Dirac.

Les méthodes modales ont l'avantage d'être peu sensibles au bruit car elles permettent de tronquer les composantes du signal les plus affectées par le bruit. Le formalisme mathématique des méthodes modales par KLD et par transformées intégrales est détaillé dans

l'annexe C.

4.1.3. Synthèse

La méthode nodale a l'avantage de permettre une cartographie des propriétés dans la mesure où la caractérisation thermique du matériau est réalisée à l'échelle du point. Elle est cependant l'inconvénient d'être sensible au bruit.

Les méthodes modales (KLD, transformées intégrales) ont l'avantage d'être robustes par rapport au bruit. Leur inconvénient réside dans le fait qu'elles exploitent partiellement l'information contenue dans le signal thermique.

En définitive, les méthodes décrites (nodale, modales) apparaissent peu adaptées aux champs de température observés en sonothermographie. En effet, le signal thermique généré par dissipation viscoélastique étant d'une intensité relativement faible, la contribution du bruit y est importante. De ce fait, l'utilisation de la méthode nodale, sensible au bruit, tendrait à fournir un résultat peu robuste tandis qu'une méthode modale serait susceptible de tronquer une part significative de l'information contenue dans le signal thermique.

Dans ce contexte, une nouvelle méthode de caractérisation thermique plus adaptée à la sonothermographie est développée. Le formalisme de la méthode LOWF proposée est détaillé dans la suite.

4.2. Formalisme de la méthode LOWF

La méthode LOWF (Low Order Weak Formulation) est basée sur une formulation faible de l'équation de conduction de la chaleur à partir d'une fonction test analytique [48,49]. L'objectif de cette nouvelle méthode est de permettre une estimation robuste de la diffusivité thermique à partir d'un signal thermique bruité. Le formalisme de la méthode LOWF est développé à partir d'un modèle de plaque mince homogène.

4.2.1. Description du modèle de plaque mince

Soit une plaque homogène de dimensions L_x , L_y et $L_z = e$ suivant les directions X, Y et Z respectivement (figure 26).

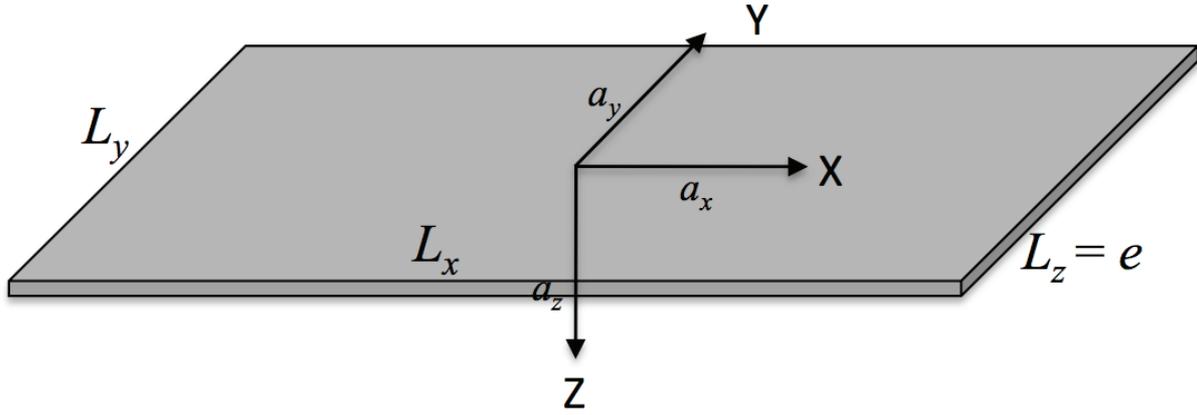


Figure 26 : Schéma d'une plaque mince

L'évolution du champ de température de la plaque est régie par l'équation de conduction de la chaleur sans terme source (4.65) :

$$\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = \alpha_x \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \alpha_z \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial z^2} \quad (4.65)$$

La condition initiale et les conditions aux limites associées à l'équation (4.65) sont :

$$T(x,y,z,t=0) = T_0(x,y,z) \quad ;$$

$$-\lambda_z \left. \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z} \right|_{z=-e/2} = hT(x,y,-e/2,t) \quad ; \quad -\lambda_z \left. \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z} \right|_{z=e/2} = -hT(x,y,e/2,t) \quad (4.66)$$

Dans le système d'équations (4.66), aucune condition aux limites n'est spécifiée suivant les directions X et Y. Il est montré par la suite que le formalisme de la méthode LOWF ne dépend pas directement de ces conditions. Dans le cas d'une plaque suffisamment mince, une linéarisation des pertes thermiques suivant Z permet de simplifier le problème tridimensionnel décrit par les équations (4.65) et (4.66) en un problème quasi bidimensionnel.

4.2.2. Linéarisation des pertes thermiques

Pour une valeur de e petite, les gradients de température dans l'épaisseur de la plaque peuvent être négligés. L'hypothèse de linéarité des pertes thermiques suivant Z est donc réaliste. Cette hypothèse implique que le terme $\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}$ varie linéairement suivant Z, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial z^2} \approx \frac{\left. \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z} \right|_{z=e/2} - \left. \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z} \right|_{z=-e/2}}{e} = -\frac{2h}{\lambda e} T(x,y,z,t) \quad (4.67)$$

La substitution de l'équation (4.67) dans l'équation (4.65) donne :

$$\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = \alpha_x \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial y^2} - \frac{2h}{\rho C_p e} T(x,y,z,t) \quad (4.68)$$

où la dérivée spatiale suivant Z du champ de température n'apparaît plus. Dès lors, les transferts de chaleur dans la plaque mince peuvent être considérés dans le plan XY , soit $T(x,y,z,t) \approx T(x,y,t)$.

L'équation (4.68) s'écrit alors comme une équation d'ailettes :

$$\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \alpha_x \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} - \beta T(x,y,t) \quad (4.69)$$

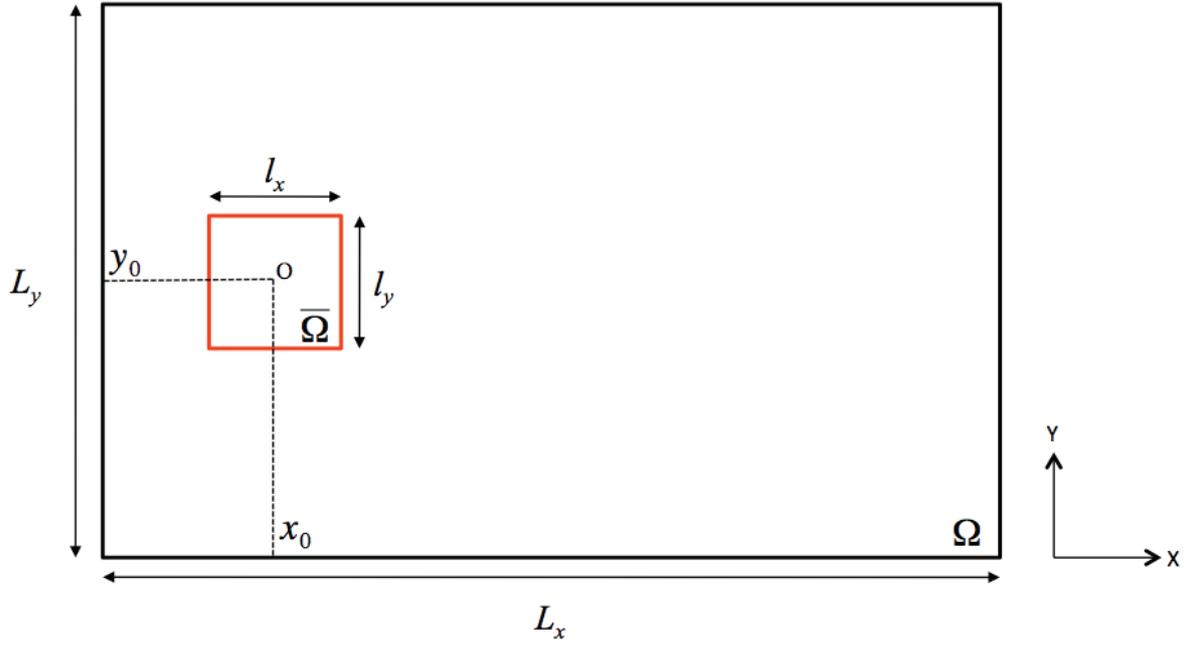
où le paramètre $\beta = 2h / \rho C_p e$ intervient comme une source caractérisant les pertes thermiques suivant Z . La condition initiale associée à l'équation (4.69) s'écrit :

$$T(x,y,t=0) = T_0(x,y) \quad (4.70)$$

La méthode LOWF permet d'estimer α_x et α_y dans l'équation (4.69) dans le cas de données $T(x,y,t)$ bruitées en passant par une formulation faible de cette équation. Cette démarche s'explique par le fait qu'un recours à l'outil numérique est généralement nécessaire pour traiter les données de température $T(x,y,t)$ acquises expérimentalement. Or, il est bien connu que la dérivation de données bruitées entraîne des instabilités numériques qui s'amplifient avec l'augmentation de l'ordre de dérivation. Dès lors, le calcul de dérivées d'ordre élevé constitue une importante source d'erreur dans le processus d'estimation de paramètres à l'aide de méthodes inverses. Afin de réduire l'erreur d'estimation due à ces instabilités numériques, une formulation faible de l'équation (4.69) est réalisée dans le but d'abaisser l'ordre de dérivation des dérivées spatiales.

4.2.3. Formulation faible de l'équation de conduction de la chaleur 2D

La figure 27 représente le domaine 2D de dimensions $L_x \times L_y$ noté Ω_{xy} sur lequel est défini le problème décrit par les équations (4.69) et (4.70). Soit $\bar{\Omega}_{xy}$ un sous-domaine rectangulaire de Ω_{xy} de centre $O(x_0, y_0)$ et de dimensions $l_x \times l_y$.

Figure 27 : Schéma du domaine Ω et du sous-domaine $\bar{\Omega}$

Le sous-domaine $\bar{\Omega}_{xy}$ est défini par :

$$\bar{\Omega}_{xy} : \left\{ x \in [x_0 - l_x/2, x_0 + l_x/2], y \in [y_0 - l_y/2, y_0 + l_y/2] \right\} \quad (4.71)$$

Soit $f(x,y)$ une fonction de classe C^2 définie sur le sous-domaine $\bar{\Omega}_{xy}$. Elle est appelée fonction test dans la suite. Pour α_x et α_y uniformes sur le sous-domaine $\bar{\Omega}_{xy}$, la multiplication de l'équation (4.69) par $f(x,y)$, puis l'intégration du produit sur $\bar{\Omega}_{xy}$ s'écrit :

$$\int_{\bar{\Omega}_{xy}} \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} f(x,y) dx dy = \alpha_x \int_{\bar{\Omega}_{xy}} \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} f(x,y) dx dy + \alpha_y \int_{\bar{\Omega}_{xy}} \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} f(x,y) dx dy - \beta \int_{\bar{\Omega}_{xy}} T(x,y,t) f(x,y) dx dy \quad (4.72)$$

L'intégration par parties des termes $\int_{\bar{\Omega}_{xy}} \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} f(x,y) dx dy$ et $\int_{\bar{\Omega}_{xy}} \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} f(x,y) dx dy$ transforme l'équation (4.72) en :

$$\begin{aligned}
 \int_{\bar{\Omega}_{xy}} \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} f(x,y) dx dy = & \\
 \alpha_x \left(\left[\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} f(x,y) \right]_{x_0-l_x/2}^{x_0+l_x/2} - \int_{\bar{\Omega}_{xy}} \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx dy \right) & \\
 + \alpha_y \left(\left[\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} f(x,y) \right]_{y_0-l_y/2}^{y_0+l_y/2} - \int_{\bar{\Omega}_{xy}} \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx dy \right) & \\
 - \beta \int_{\bar{\Omega}_{xy}} T(x,y,t) f(x,y) dx dy &
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

Une seconde intégration par parties des termes $\int_{\bar{\Omega}_{xy}} \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx dy$ et $\int_{\bar{\Omega}_{xy}} \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx dy$ transforme l'équation (4.73) en :

$$\begin{aligned}
 \int_{\bar{\Omega}_{xy}} \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} f(x,y) dx dy = & \\
 \alpha_x \left(\left[\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} f(x,y) \right]_{x_0-l_x/2}^{x_0+l_x/2} - \left[T(x,y,t) \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right]_{x_0-l_x/2}^{x_0+l_x/2} + \int_{\bar{\Omega}_{xy}} T(x,y,t) \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} dx dy \right) & \\
 + \alpha_y \left(\left[\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} f(x,y) \right]_{y_0-l_y/2}^{y_0+l_y/2} - \left[T(x,y,t) \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right]_{y_0-l_y/2}^{y_0+l_y/2} + \int_{\bar{\Omega}_{xy}} T(x,y,t) \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} dx dy \right) & \\
 - \beta \int_{\bar{\Omega}_{xy}} T(x,y,t) f(x,y) dx dy &
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

Pour une fonction $f(x,y)$ non identiquement nulle vérifiant les conditions aux limites (4.75) et (4.76) suivantes sur $\bar{\Omega}_{xy}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x,y)|_{x=x_0-l_x/2} = 0 \quad , \quad f(x,y)|_{x=x_0+l_x/2} = 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Big|_{x=x_0-l_x/2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Big|_{x=x_0+l_x/2} = 0 \end{array} \right. , \text{ suivant la direction X} \tag{4.75}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x,y)|_{y=y_0-l_y/2} = 0 \quad , \quad f(x,y)|_{y=y_0+l_y/2} = 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=y_0-l_y/2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=y_0+l_y/2} = 0 \end{array} \right. , \text{ suivant la direction Y} \tag{4.76}$$

l'équation (4.74) se simplifie en :

$$\int_{\overline{\Omega}_{xy}} \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} f(x,y) dx dy = \alpha_x \int_{\overline{\Omega}_{xy}} T(x,y,t) \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} dx dy + \alpha_y \int_{\overline{\Omega}_{xy}} T(x,y,t) \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} dx dy - \beta \int_{\overline{\Omega}_{xy}} T(x,y,t) f(x,y) dx dy \quad (4.77)$$

Dans l'équation (4.72), la double intégration par parties a permis d'abaisser de 2 à 0 l'ordre de dérivation spatiale sur $T(x,y,t)$ en le reportant sur la fonction $f(x,y)$ dans l'équation (4.77). En ce sens, l'équation (4.77) constitue une formulation faible de l'équation (4.69) sur $\overline{\Omega}_{xy}$.

L'intérêt de la formulation faible est que, l'estimation de α_x et α_y à partir de l'équation (4.77) ne nécessite plus le calcul des dérivées spatiales d'ordre 2 du champs de température bruité, désormais substituées par les dérivées spatiales d'ordre 2 de la fonction $f(x,y)$. La fonction $f(x,y)$ est purement mathématique et d'expression analytique connue. Elle présente donc l'avantage d'être indépendante du bruit, de même que ses dérivées.

Pour simplifier l'écriture de l'équation (4.77), la notation suivante est introduite :

$$A_t(t) = \int_{\overline{\Omega}_{xy}} \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} f(x,y) dx dy, \quad B_{xx}(t) = \int_{\overline{\Omega}_{xy}} T(x,y,t) \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} dx dy, \quad (4.78)$$

$$B_{yy}(t) = \int_{\overline{\Omega}_{xy}} T(x,y,t) \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} dx dy, \quad C(t) = \int_{\overline{\Omega}_{xy}} T(x,y,t) f(x,y) dx dy$$

où, de manière implicite, les quantités $A_t(t)$, $B_{xx}(t)$, $B_{yy}(t)$ et $C(t)$ dépendent aussi des paramètres de position (x_0, y_0) et de taille (l_x, l_y) du sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$.

L'équation (4.77) s'écrit alors :

$$A_t(t) = \alpha_x B_{xx}(t) + \alpha_y B_{yy}(t) - \beta C(t) \quad (4.79)$$

L'équation (4.79) sera utilisée par la suite pour l'estimation de α_x et α_y pour un cas isotrope ($\alpha_x = \alpha_y = \alpha$) et un cas anisotrope ($\alpha_x \neq \alpha_y$). Au préalable, la définition d'une fonction test $f(x,y)$ est nécessaire pour le calcul des quantités $A_t(t)$, $B_{xx}(t)$, $B_{yy}(t)$ et $C(t)$.

4.2.4. Détermination d'une fonction test

Comme il a été montré précédemment, la formulation faible (4.79) impose que la fonction test $f(x,y)$ définie $\overline{\Omega}_{xy}$ (figure 27) vérifie les conditions aux limites (4.75) et (4.76). Cette section est consacrée à la détermination d'une expression analytique de $f(x,y)$ vérifiant ces conditions.

Les conditions aux limites (4.75) et (4.76) étant exprimées séparément pour chacune des deux dimensions d'espace, il apparaît plus simple de rechercher une expression analytique de $f(x,y)$ sous la forme d'une fonction à variables séparables, soit :

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y) \quad (4.80)$$

où $f_1(x)$ et $f_2(y)$ sont des fonctions à une variable d'espace définies respectivement pour $x \in [x_0 - l_x/2, x_0 + l_x/2]$ et $y \in [y_0 - l_y/2, y_0 + l_y/2]$.

Dans ce qui suit, le processus de détermination de ces fonctions est détaillé pour $f_1(x)$ uniquement, l'expression analytique de $f_2(y)$ étant définie de manière analogue.

La fonction $f_1(x)$ doit vérifier les conditions aux limites (4.75). Cependant, l'expression analytique de f_1 dépend du choix des paramètres de position (x_0) et de taille (l_x) de $\overline{\Omega}_{xy}$. Afin de vérifier les conditions aux limites (4.75) quel que soit le couple (x_0, l_x) , l'expression analytique de f_1 est exprimée en fonction d'une variable d'espace adimensionnée.

Soit Γ la transformation linéaire qui, à la variable d'espace x associe la variable d'espace adimensionnée $\tilde{x} \in [-\alpha, \alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour une valeur $\alpha = 1$ choisie arbitrairement, Γ est définie par :

$$\begin{aligned} \Gamma : [x_0 - l_x/2, x_0 + l_x/2] &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \tilde{x} = \Gamma_1 x + \Gamma_2, \quad (\Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad (4.81)$$

Les inconnues Γ_1 et Γ_2 sont déterminées par la résolution du système d'équations :

$$\begin{cases} \Gamma_1(x_0 - l_x/2) + \Gamma_2 = -1 \\ \Gamma_1(x_0 + l_x/2) + \Gamma_2 = 1 \end{cases} \quad (4.82)$$

La solution étant $(\Gamma_1, \Gamma_2) = (2/l_x, -2x_0/l_x)$, la variable adimensionnée est définie par :

$$\tilde{x} = 2 \frac{x - x_0}{l_x} \quad (4.83)$$

Puisque $x \in [x_0 - l_x/2, x_0 + l_x/2]$, il en découle que : $\forall (x_0, l_x), \tilde{x} \in [-1, 1]$. Les conditions aux limites (4.75) peuvent alors s'écrire :

$$\begin{cases} f_1(\tilde{x} = -1) = 0, & f_1(\tilde{x} = 1) = 0, \\ \frac{\partial f_1(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=-1} = 0, & \frac{\partial f_1(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=1} = 0 \end{cases} \quad (4.84)$$

Par la suite, une fonction f_1 satisfaisant les conditions aux limites (4.84) est recherchée dans l'espace des fonctions polynomiales. Ce choix se justifie par la relative simplicité analytique de cette famille de fonctions. Il est facile de vérifier que le système de quatre équations (4.84) mène à un polynôme de degré 3 identiquement nul. Un polynôme de l'ordre immédiatement supérieur (4) est donc recherché. La détermination des coefficients d'un polynôme d'ordre 4 nécessitant cinq équations indépendantes, la condition arbitraire suivante est ajoutée au système d'équations (4.84) :

$$f_1(\tilde{x} = 0) = 1 \quad (4.85)$$

Le polynôme f_1 de degré 4, solution du système des cinq équations (4.84) et (4.85) est :

$$f_1(\tilde{x}) = (1 - \tilde{x}^2)^2, \quad \tilde{x} \in [-1 \ 1] \quad (4.86)$$

De manière analogue, la fonction f_2 de l'équation (4.80) s'écrit :

$$f_2(\tilde{y}) = (1 - \tilde{y}^2)^2, \quad \tilde{y} \in [-1 \ 1] \quad (4.87)$$

où \tilde{y} est la variable d'espace transformée telle que :

$$\tilde{y} = 2 \frac{y - y_0}{l_y} \quad (4.88)$$

Conformément à l'équation (4.80), la fonction $f(x,y)$ s'écrit finalement :

$$f(x,y) = (1 - \tilde{x}^2)^2 (1 - \tilde{y}^2)^2 \quad (4.89)$$

La figure 28 représente la fonction $f(x,y)$ sur le sous-domaine $\overline{\Omega}$.

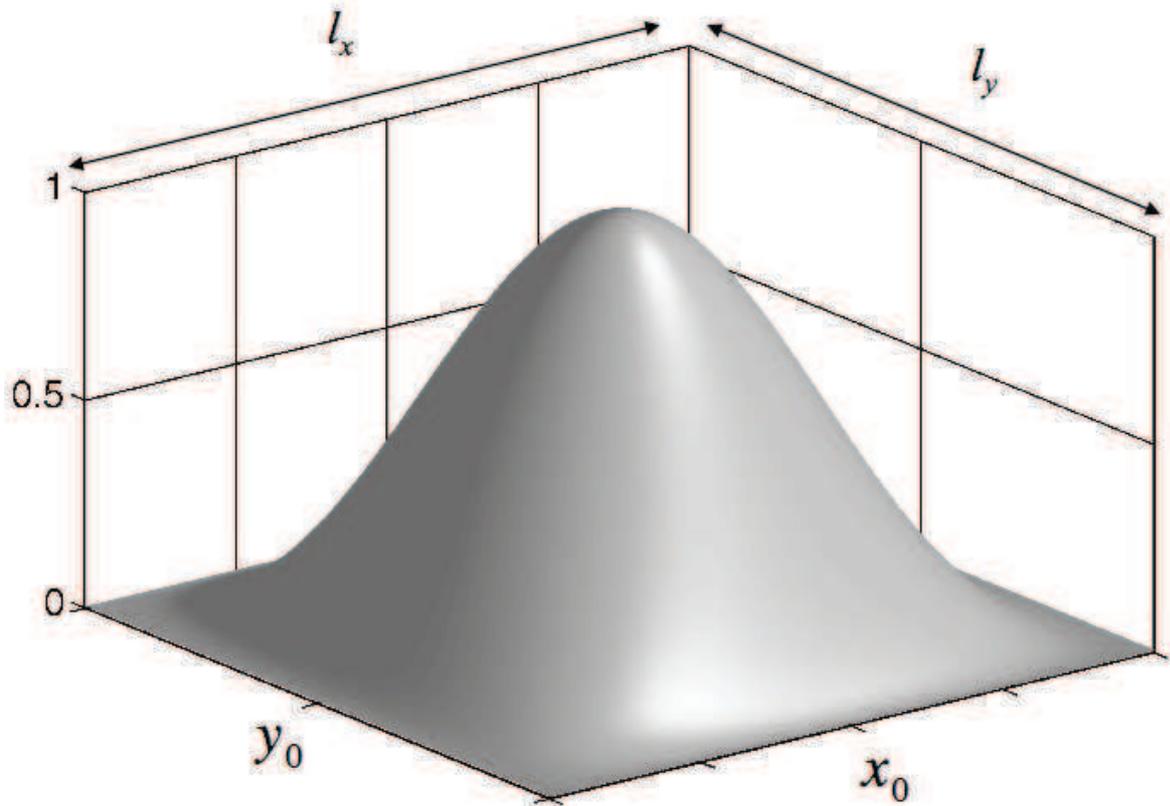


Figure 28 : Allure de la fonction $f(x,y)$ définie sur le sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$

L'équation (4.89) donne une expression analytique de $f(x,y)$ vérifiant les conditions aux limites (4.75) et (4.76) quels que soient les paramètres x_0, y_0, l_x et l_y considérés. Dans la suite, la méthode LOWF est testée sur des modèles numériques 2D. Les résultats sont discutés pour un modèle isotrope et un modèle anisotrope.

4.3. Application de la méthode LOWF à un modèle 2D isotrope

Pour le cas isotrope ($\alpha_x = \alpha_y = \alpha$), l'équation (4.79) s'écrit :

$$A_t(t) = \alpha B_{xy}(t) - \beta C(t) \quad (4.90)$$

avec

$$B_{xy}(t) = B_{xx}(t) + B_{yy}(t) = \int_{\Omega_{xy}} T(x,y,t) \left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (4.91)$$

ou encore sous la forme :

$$\frac{A_t(t)}{C(t)} = \alpha \frac{B_{xy}(t)}{C(t)} - \beta \quad (4.92)$$

où α et β représentent respectivement la pente et l'ordonnée à l'origine d'une droite définie par des points $P(x_p(t), y_p(t))$ de coordonnées définies par :

$$x_p(t) = \frac{B_{xy}(t)}{C(t)} \quad , \quad y_p(t) = \frac{A_t(t)}{C(t)} \quad (4.93)$$

La méthode LOWF vise à estimer le paramètre α de l'équation (4.92) qui correspond à la diffusivité thermique.

4.3.1. Validation numérique

La méthode LOWF est appliquée à des données de température simulées avec un modèle 2D de plaque isotrope décrit ci-dessous (§ 4.3.1.1). Les résultats sont discutés pour des données non bruitées et bruitées.

4.3.1.1. Description du modèle numérique

Une plaque 2D isotrope de diffusivité thermique $\alpha = 4,27 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ est excitée en son centre par une impulsion de chaleur à l'instant $t_0 = 0$. Les dimensions de la plaque $L_x = L_y = 3 \text{ cm}$ sont discrétisées en $N_x = N_y = 300$ nœuds, soit $\Delta_x = \Delta_y = 100 \text{ } \mu\text{m}$. Le champ de température de la plaque est simulé pour l'intervalle de temps [$t_1 = 1 \text{ s}$, $t_{120} = 120 \text{ s}$] discrétisé en $N_t = 120$ instants, soit $\Delta t = 1 \text{ s}$. Avant l'impulsion de chaleur, le champ de température initial de la plaque est uniformément nulle, soit $T_0(x,y) = 0$. Des conditions aux limites de flux nul sont imposées suivant les directions X et Y, soit

$$\left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} \right|_{x=\pm L_x/2} = 0 \text{ et } \left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \right|_{y=\pm L_y/2} = 0$$

Des pertes de chaleur sont modélisées perpendiculairement au plan (XY) avec $h = 5 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$. Le champ de température de la plaque est simulé avec le code de calcul par éléments Finis COMSOL Multiphysics®. Conformément au maillage du modèle, le champ de température simulé s'écrit $T(x_i, y_j, t_k)$, avec $i \in \{1, 2, \dots, 300\}$, $j \in \{1, 2, \dots, 300\}$ et $k \in \{1, 2, \dots, 120\}$. La figure 29 montre la cartographie du champ $T(x_i, y_j, t_k)$ à $t_k = 120 \text{ s}$.

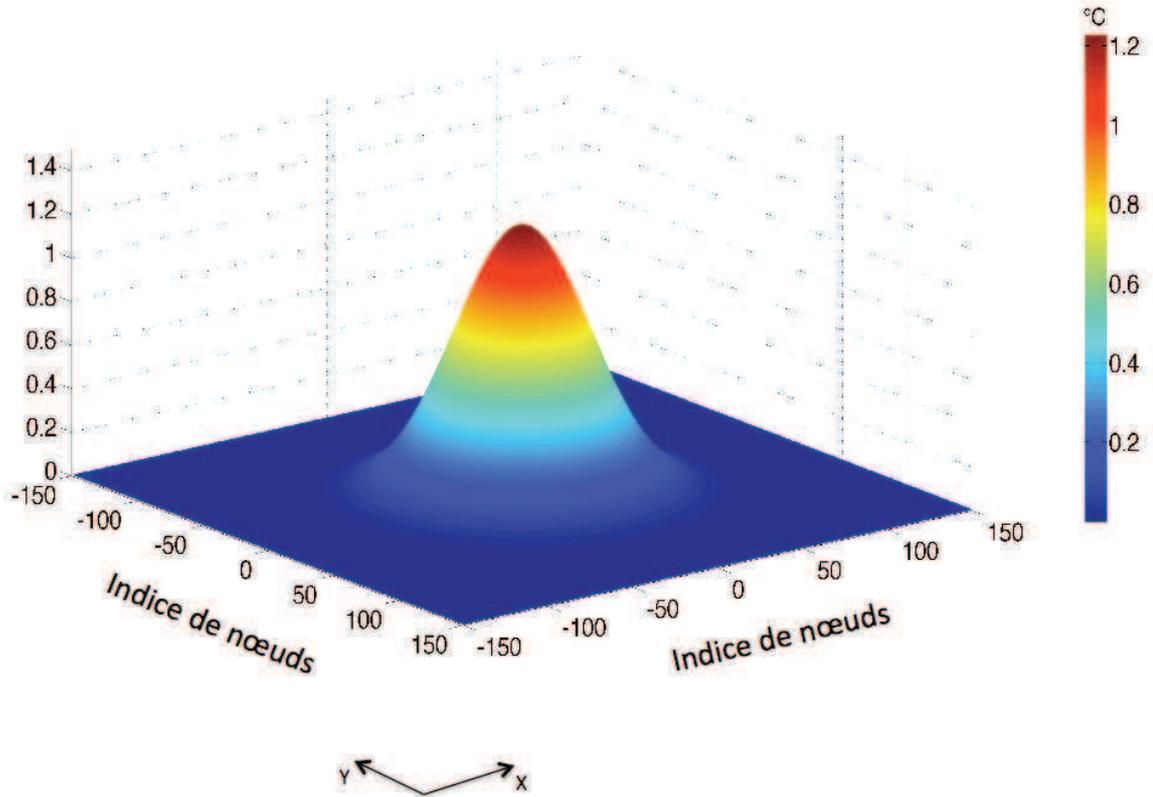


Figure 29: Cartographie du champ de température simulé avec le modèle 2D de plaque isotrope pour $R_{B/S} = 0\%$ à $t_k = 120 \text{ s}$

Le bruit est modélisé par un signal gaussien $\varepsilon(x_i, y_j, t_k)$ non corrélé spatialement et de moyenne nulle. L'intensité du bruit est caractérisée par un ratio bruit/signal noté $R_{B/S}$ et défini par :

$$R_{B/S} = \frac{\max(\varepsilon(x_i, y_j, t_k))}{\bar{T}(x_i, y_j, t_k)} \quad (4.94)$$

où $\bar{T}(x_i, y_j, t_k)$ représente la température moyenne de l'ensemble des données $T(x_i, y_j, t_k)$ obtenue par :

$$\bar{T}(x_i, y_j, t_k) = \frac{1}{N_t \times N_y \times N_x} \sum_{k=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{i=1}^{N_x} T(x_i, y_j, t_k) \quad (4.95)$$

Le champ de température bruité s'écrit $\tilde{T}(x_i, y_j, t_k) = T(x_i, y_j, t_k) + \varepsilon(x_i, y_j, t_k)$. La valeur du ratio $R_{B/S}$ exprimée en pourcentage indique la proportion du bruit $\varepsilon(x_i, y_j, t_k)$ dans le signal $\tilde{T}(x_i, y_j, t_k)$. Plus la valeur $R_{B/S}$ est grande, plus l'intensité du bruit est importante.

4.3.1.2. Résultats

Sur la figure 30, le domaine Ω_{xy} représente la plaque. Le sous-domaine $\bar{\Omega}_{xy}$ est choisi arbitrairement. La méthode LOWF est appliquée aux données de température simulées pour estimer la diffusivité thermique sur le sous-domaine $\bar{\Omega}_{xy}$. Les résultats sont discutés pour des données non bruitées ($R_{B/S} = 0\%$) et bruitées ($R_{B/S} = 10\%$).

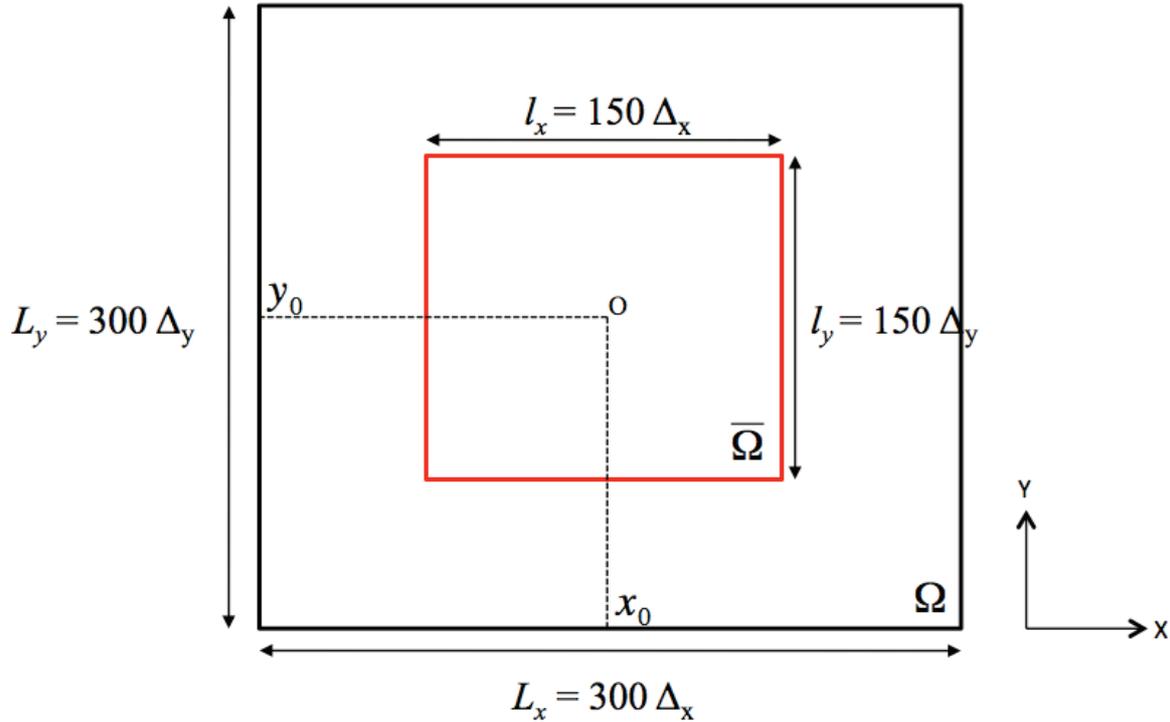


Figure 30 : Schéma de la plaque Ω_{xy} et du sous-domaine $\bar{\Omega}_{xy}$

Conformément à l'équation (4.92), les points $P^k(x_p(t_k), y_p(t_k))$ définissant la droite (D) d'équation $A_t(t)/C(t) = \alpha B_{xy}(t)/C(t) - \beta$ définie par ces points sont représentés pour $R_{B/S} = 0\%$ (figure 31a) et $R_{B/S} = 10\%$ (figure 31b). Sur chaque figure, le nombre de points P^k correspond au nombre de pas de temps t_k considérés. Ici, $k = 1, 2, \dots, 120$.

En l'absence de bruit, les points P^k sont alignés (figure 31a).

En présence de bruit (figure 31b), les points P^k ne sont pas rigoureusement alignés. Les perturbations observées sont dues à l'influence du bruit sur les champs $T(x,y,t)$ et $\partial_t T(x,y,t)$ dans la formulation faible (4.77).

Dans l'équation (4.92), la méthode LOWF exploite la linéarité entre les variables x_p et y_p . Cette linéarité est représentée par la droite (D) qui s'ajuste au nuage de points P^k au sens des moindres carrés. Cette droite possède une propriété remarquable : elle minimise la somme quadratique des écarts entre les quantités $y_p(t_k)$ et $y_p^*(t_k) = \hat{\alpha} x_p(t_k) + \hat{\beta}$, $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \mathbb{R}^2$. Si E_k représente l'écart $(y_p(t_k) - y_p^*(t_k))$, le principe des moindres carrés ordinaires (MCO) permet de calculer les valeurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ qui minimisent la quantité

$$E = \sum_{k=1}^{N_t} E_k^2 = \sum_{k=1}^{N_t} \left(y_p(t_k) - (\hat{\alpha} x_p(t_k) + \hat{\beta}) \right)^2 \quad (4.96)$$

Ces valeurs s'obtiennent par :

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^{N_t} (x_p(t_k) - \bar{x})(y_p(t_k) - \bar{y})}{\sum_{k=1}^{N_t} (x_p(t_k) - \bar{x})^2}, \quad \hat{\beta} = \bar{y} - \hat{\alpha} \bar{x} \quad (4.97)$$

où

$$\bar{x} = \frac{1}{N_t} \sum_{k=1}^{N_t} x_p(t_k), \quad \bar{y} = \frac{1}{N_t} \sum_{k=1}^{N_t} y_p(t_k) \quad (4.98)$$

La pente $\hat{\alpha}$ de la droite des moindres carrés (D) représente la valeur estimée de la diffusivité thermique et l'ordonnée à l'origine $\hat{\beta}$ représente la valeur estimée du coefficient de pertes.

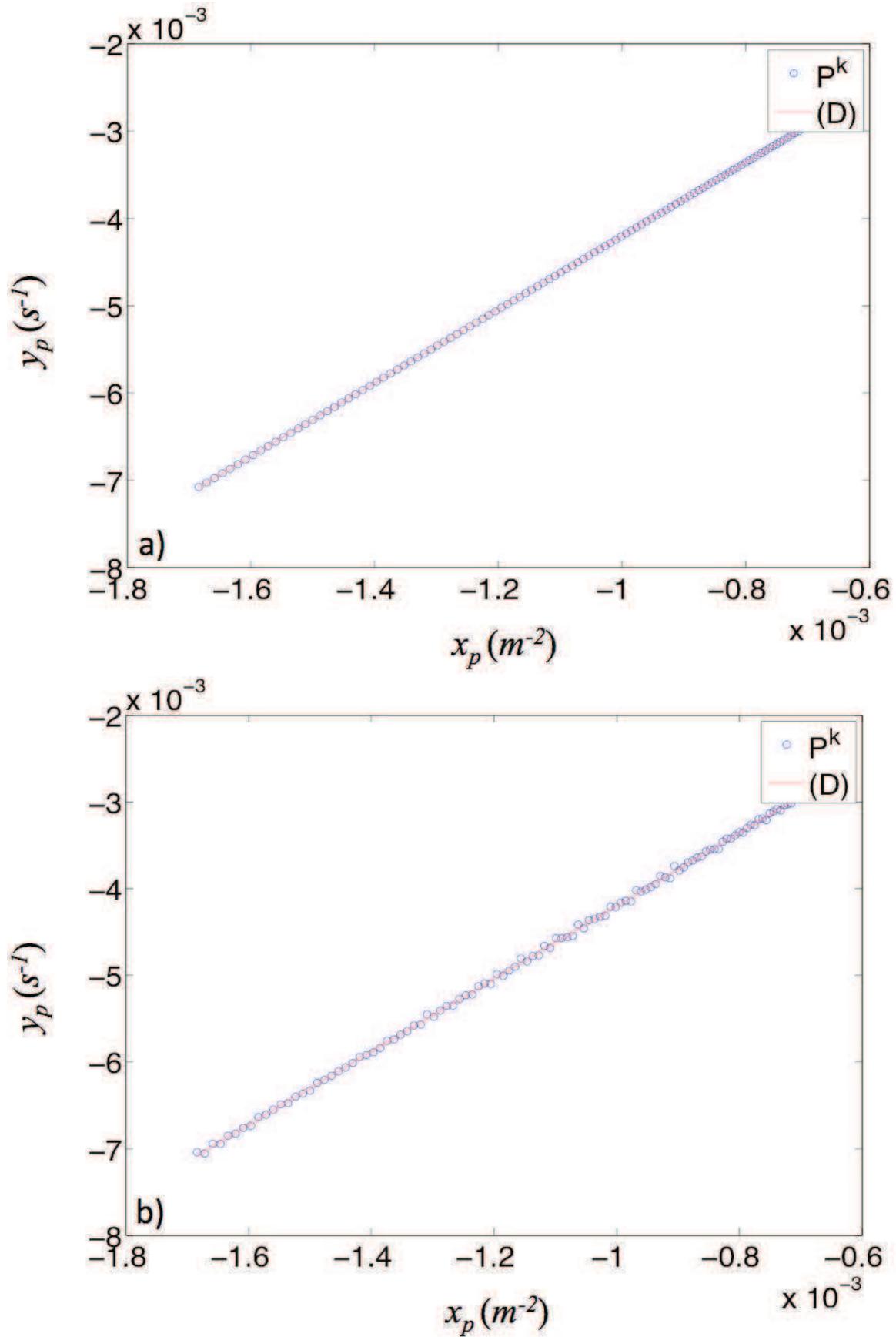


Figure 31 : Nuage de points P^k pour $R_{B/S} = 0\%$ (a) et $R_{B/S} = 10\%$ (b)

Dans l'équation (4.97), il apparaît que le calcul de $\hat{\beta}$ prend en compte la valeur $\hat{\alpha}$. L'estimation $\hat{\beta}$ est de ce fait biaisée par l'erreur sur $\hat{\alpha}$. Pour cette raison, il est proposé d'estimer, si nécessaire, le paramètre β par une méthode autre que la méthode LOWF. Des méthodes proposées dans la littérature [27,32] permettent d'estimer le coefficient d'échange β avec une bonne précision. Dans la suite, la méthode LOWF est appliquée pour l'estimation de la diffusivité thermique. Pour cela, la pente du nuage de points P^k est calculée à partir de l'équation (4.97).

Pour $R_{B/S} = 0\%$ (figure 31a), une diffusivité thermique estimée $\hat{\alpha} = 4,21 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit une erreur d'estimation de **1,47%**. La diffusivité thermique est estimée avec une bonne précision. Le biais observé en l'absence de bruit est purement numérique et s'explique par un calcul approché des quantités x_p et y_p du fait de la discrétisation des données.

Pour $R_{B/S} = 10\%$ (figure 31b), il vient $\hat{\alpha} = 4,21 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit une erreur d'estimation de **1,47%**. L'erreur d'estimation est la même pour les données non bruitées et bruitées, ce qui traduit *a priori* une bonne robustesse de la méthode LOWF par rapport au bruit. La section suivante est consacrée à une étude de la robustesse de la méthode.

4.3.2. Robustesse de la méthode LOWF par rapport au bruit

De même que dans la section précédente, la méthode LOWF est appliquée en considérant le sous-domaine $\bar{\Omega}_{xy}$ illustré à la figure 30. Afin d'évaluer la robustesse de la méthode LOWF par rapport au bruit, 100 estimations $\hat{\alpha}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 100$) de la diffusivité thermique sont réalisées pour chacune des 11 valeurs de $R_{B/S}$ allant de 0% à 10%. Pour chaque valeur de $R_{B/S}$, en faisant l'hypothèse que la variation des 100 estimations $\hat{\alpha}_i$ suit une loi normale, il est possible d'écrire que les $\hat{\alpha}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 100$) vérifient la relation : $\hat{\alpha}_{moy} - 3\sigma \leq \hat{\alpha}_i \leq \hat{\alpha}_{moy} + 3\sigma$, où $\hat{\alpha}_{moy}$ et σ sont respectivement la moyenne et l'écart type des $\hat{\alpha}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 100$).

La figure 32 montre, en pourcentage, l'erreur d'estimation moyenne $100 \times (\alpha - \hat{\alpha}_{moy}) / \alpha$ en fonction du niveau de bruit $R_{B/S}$. Pour traduire la dispersion des résultats, les deux courbes enveloppes correspondant aux erreurs d'estimation minimum et maximum obtenues par $100 \times (\alpha - (\hat{\alpha}_{moy} - 3\sigma)) / \alpha$ et $100 \times (\alpha - (\hat{\alpha}_{moy} + 3\sigma)) / \alpha$.

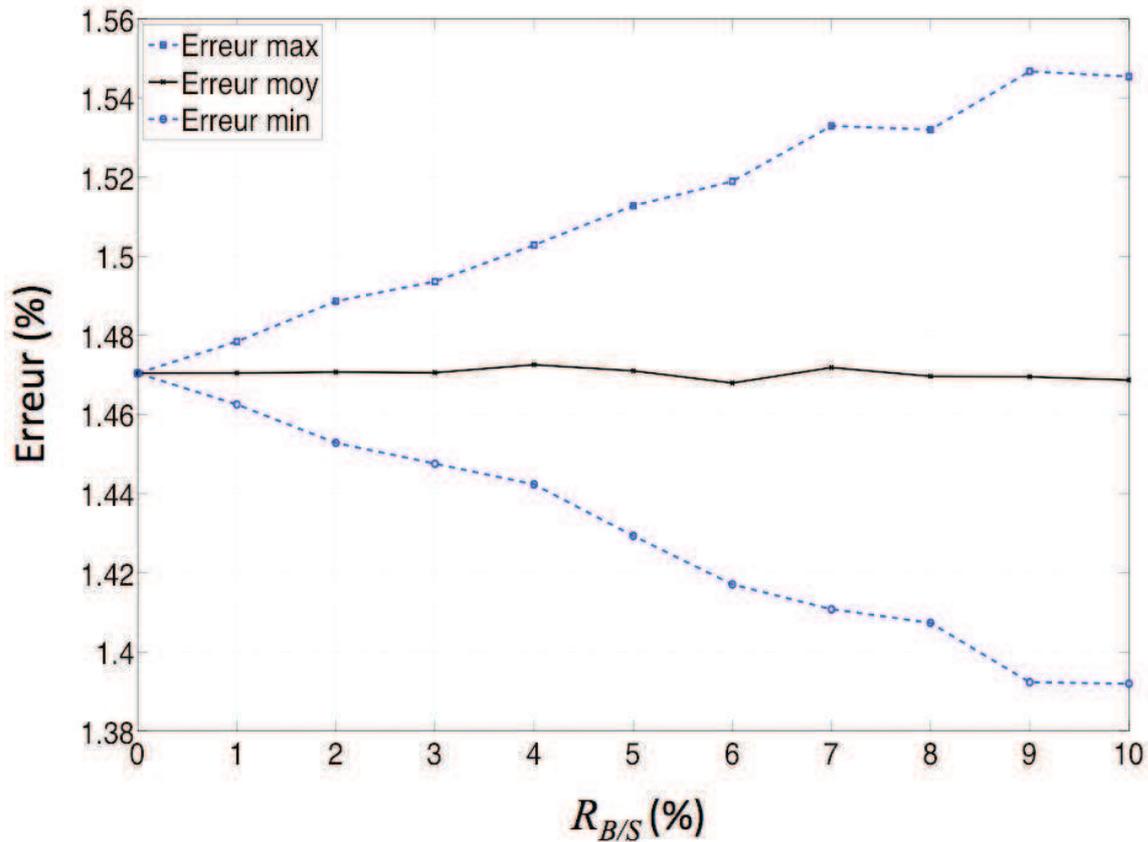


Figure 32 : Erreur d'estimation moyenne et courbes enveloppes en fonction du niveau de bruit $R_{B/S}$ pour la méthode LOWF

La figure 32 montre que la valeur de l'erreur moyenne varie peu en fonction du niveau de bruit $R_{B/S}$. Elle reste quasiment stable à **1,47%** avec une dispersion maximale de $\pm 0,08\%$ pour le niveau de bruit $R_{B/S} = 10\%$. L'augmentation du niveau de bruit engendre un accroissement de la dispersion sur l'erreur moyenne qui s'explique par l'influence du bruit sur le champ de température et sa dérivée temporelle dans la formulation faible (4.77).

Globalement, la stabilité de l'erreur moyenne et la faible dispersion des estimations montrent une bonne robustesse de la méthode LOWF par rapport au bruit. Dans la suite, la robustesse de la méthode LOWF est comparée avec celle de la méthode nodale.

4.3.3. Comparaison avec la méthode nodale

La méthode nodale présentée à la section 1.1.1 permet d'estimer la diffusivité thermique en un point. Dans cette section, elle est utilisée pour estimer la diffusivité thermique au point situé au centre de la plaque isotrope. Le choix de ce point se justifie par le fait qu'il présente la meilleure qualité de signal du champ de température. Pour évaluer la robustesse de la méthode nodale par rapport au bruit, des tests numériques similaires à ceux de la section précédente sont réalisés. Ainsi, pour chacune des 11 valeurs de $R_{B/S}$ allant de 0% à 10%, 100 estimations $\hat{\alpha}_i$ ($i=1,2,\dots,100$) de la diffusivité thermique sont réalisées. La figure 33 représente l'erreur d'estimation moyenne et les courbes d'erreur minimum et maximum en fonction de $R_{B/S}$.

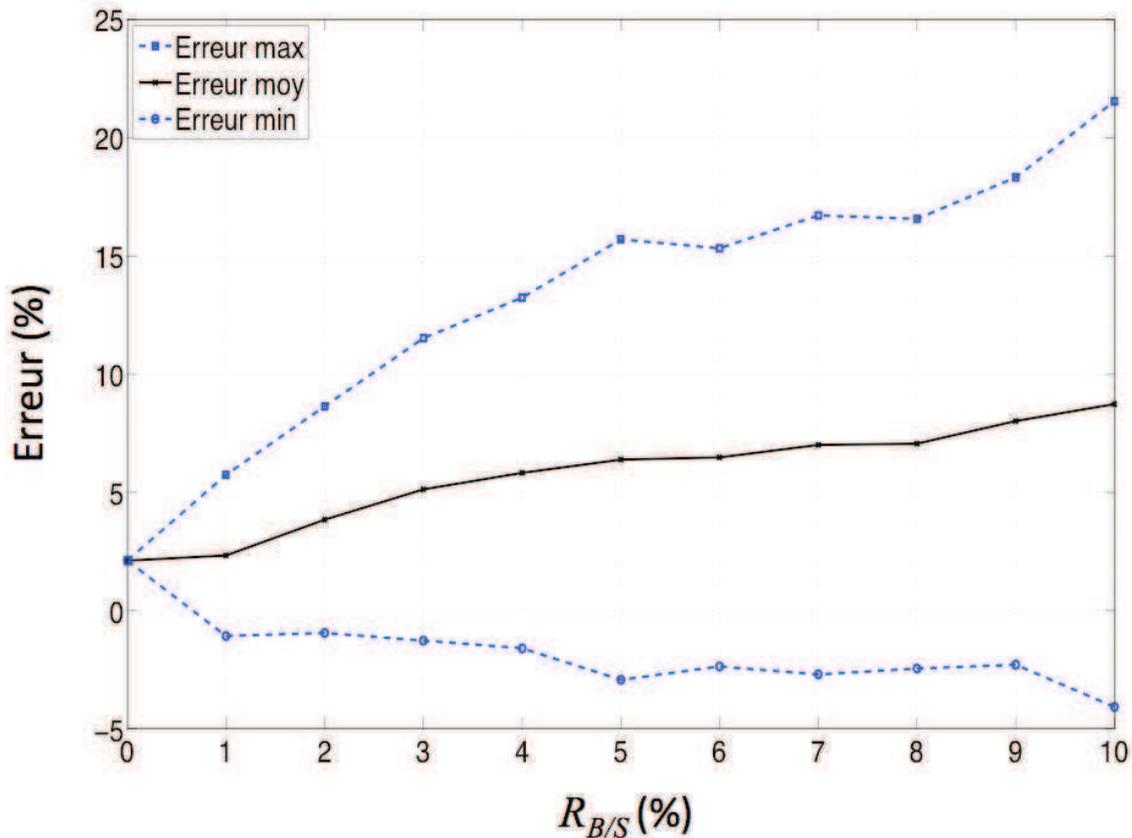


Figure 33 : Erreur d'estimation moyenne et courbes enveloppes en fonction du niveau de bruit $R_{B/S}$ pour la méthode nodale

Sur la figure 33, les valeurs positive et négative de l'erreur correspondent respectivement à une surestimation et une sous-estimation de la diffusivité thermique.

Pour $R_{B/S} = 0\%$, l'erreur d'estimation moyenne pour les $\hat{\alpha}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 100$) est de **2,1%**. Comme expliqué précédemment, la valeur non nulle de l'erreur observée pour des données non bruitées est un effet numérique lié à la discrétisation des données.

La courbe d'erreur moyenne croît en fonction de $R_{B/S}$ pour atteindre **8,7%** avec une dispersion de $\pm 12,8\%$ pour $R_{B/S} = 10\%$.

La figure 34 présente les courbes d'erreur moyenne de la méthode nodale (figure 33) et de la méthode LOWF (figure 32). Il ressort que la méthode nodale présente une sensibilité au bruit plus importante que la méthode LOWF.

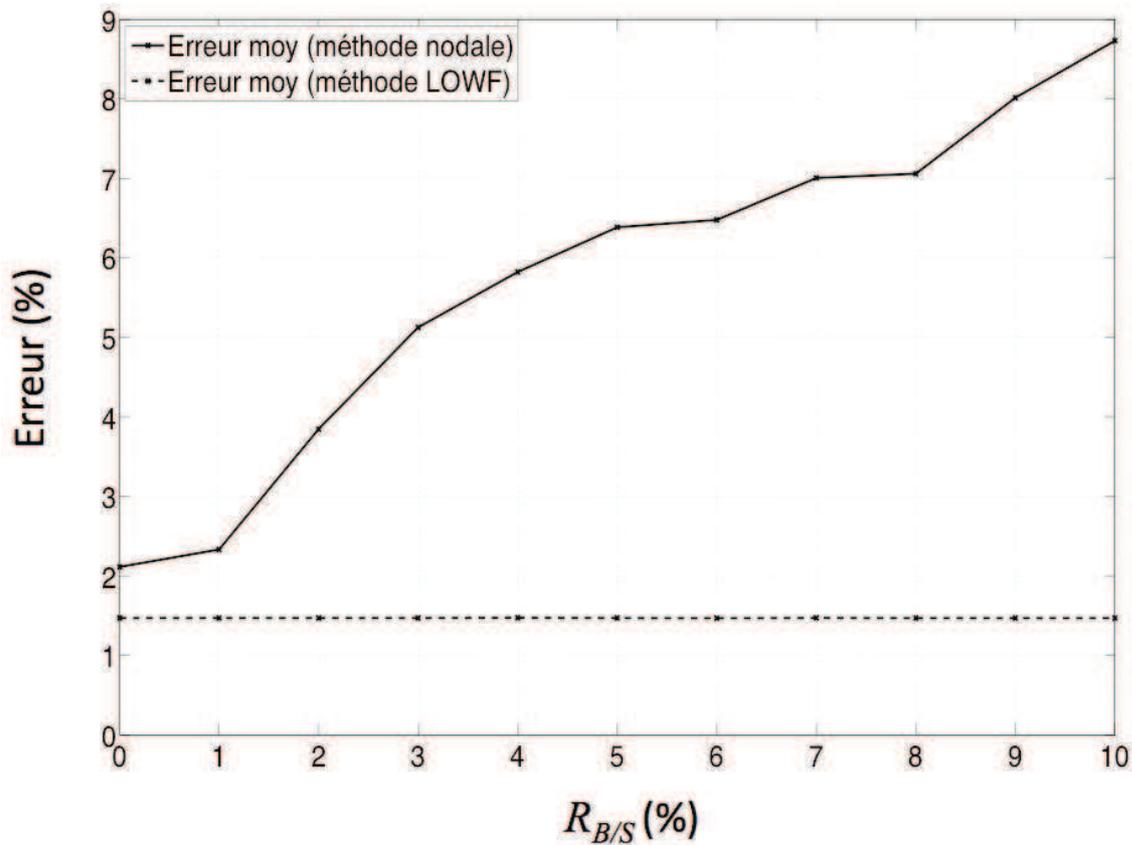


Figure 34 : Courbes d'erreur moyenne des méthodes nodale et LOWF

En définitive, la méthode LOWF (figure 32) présente une robustesse au bruit meilleure que la méthode nodale (figure 33). L'abaissement de l'ordre de dérivation des dérivées spatiales de l'équation de conduction de la chaleur obtenu grâce à la formulation faible contribue à réduire de manière significative la sensibilité au bruit du processus d'estimation.

4.4. Application de la méthode LOWF à un modèle 2D anisotrope

Dans le cas d'un matériau anisotrope ($\alpha_x \neq \alpha_y$), les paramètres α_x et α_y sont à estimer. L'application d'une méthode inverse classique de régression linéaire multiple à l'équation (4.79) constitue un moyen pour estimer α_x et α_y simultanément. Cependant, cette approche a pour inconvénient l'interdépendance des estimations réalisées. Ainsi, la mauvaise estimation d'un paramètre du fait d'un manque de sensibilité des données par rapport à ce paramètre est susceptible de biaiser l'estimation du second paramètre. Du point de vue mathématique, cette interdépendance est liée au nombre de conditionnement des matrices de données à traiter. Dans ce contexte, une approche basée sur le découplage du problème 2D en deux problèmes 1D est mise en œuvre afin d'estimer chaque paramètre séparément.

4.4.1. Découplage du problème 2D en deux problèmes 1D

Sous certaines conditions qui seront définies, le problème 2D décrit par les équations (4.69) et (4.70) peut être découplé en deux problèmes 1D. Ici, chaque problème 1D sera défini en considérant le champ de température moyen calculé suivant une direction d'espace.

Problème 1D suivant X

La moyenne de l'équation de conduction de la chaleur (4.69) suivant la direction X s'écrit :

$$\frac{1}{L_y} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} dy = \frac{1}{L_y} \left(\alpha_x \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} dy + \alpha_y \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} dy - \beta \int_{-L_y/2}^{L_y/2} T(x,y,t) dy \right) \quad (4.99)$$

soit

$$\frac{\partial \bar{T}(x,t)}{\partial t} = \alpha_x \frac{\partial^2 \bar{T}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\alpha_y}{L_y} \left[\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \right]_{y=-L_y/2}^{y=L_y/2} - \beta \bar{T}(x,t) \quad (4.100)$$

où

$$\bar{T}(x,t) = \frac{1}{L_y} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} T(x,y,t) dy \quad (4.101)$$

L'équation (4.100) se simplifie en :

$$\frac{\partial \bar{T}(x,t)}{\partial t} = \alpha_x \frac{\partial^2 \bar{T}(x,t)}{\partial x^2} - \beta \bar{T}(x,t) \quad (4.102)$$

si $\left[\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \right]_{y=-L_y/2}^{y=L_y/2} = 0$. Il est facile de montrer que cette dernière condition est vérifiée dans les trois cas suivants :

i) $T(x,y,t)$ est indépendant de y donc unidimensionnel, soit $T(x,y,t) = T(x,t)$,

ii) $\left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \right|_{y=\pm L_y/2} = 0$,

iii) $\left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \right|_{L_y/2} = \left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \right|_{-L_y/2}$.

La condition initiale associée à l'équation (4.102) s'écrit :

$$\bar{T}(x,t=0) = \frac{1}{L_y} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} T(x,y,t=0) dy \quad (4.103)$$

Le problème décrit par les équations (4.102) et (4.103) est défini sur le domaine 1D de longueur L_x noté Ω_x sur la figure 35.

Problème 1D suivant Y

De manière analogue, si $\bar{T}(y,t)$ est le champ moyen 1D suivant Y tel que :

$$\bar{T}(y,t) = \frac{1}{L_x} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} T(x,y,t) dx \quad (4.104)$$

L'équation de conduction de la chaleur s'écrit suivant Y :

$$\frac{\partial \bar{T}(y,t)}{\partial t} = \alpha_y \frac{\partial^2 \bar{T}(y,t)}{\partial y^2} - \beta \bar{T}(y,t) \quad (4.105)$$

dans chacun des trois cas suivants :

i) $T(x,y,t)$ est indépendant de x donc unidimensionnel, soit $T(x,y,t) = T(y,t)$,

$$\text{ii) } \left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} \right|_{x=\pm L_x/2} = 0,$$

$$\text{iii) } \left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} \right|_{L_x/2} = \left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} \right|_{-L_x/2}.$$

La condition initiale associée à l'équation (4.105) s'écrit :

$$\bar{T}(y,t=0) = \frac{1}{L_x} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} T(x,y,t=0) dy \quad (4.106)$$

Le problème décrit par les équations (4.105) et (4.106) est défini sur le domaine 1D de longueur L_y noté $\bar{\Omega}_y$ sur la figure 35.

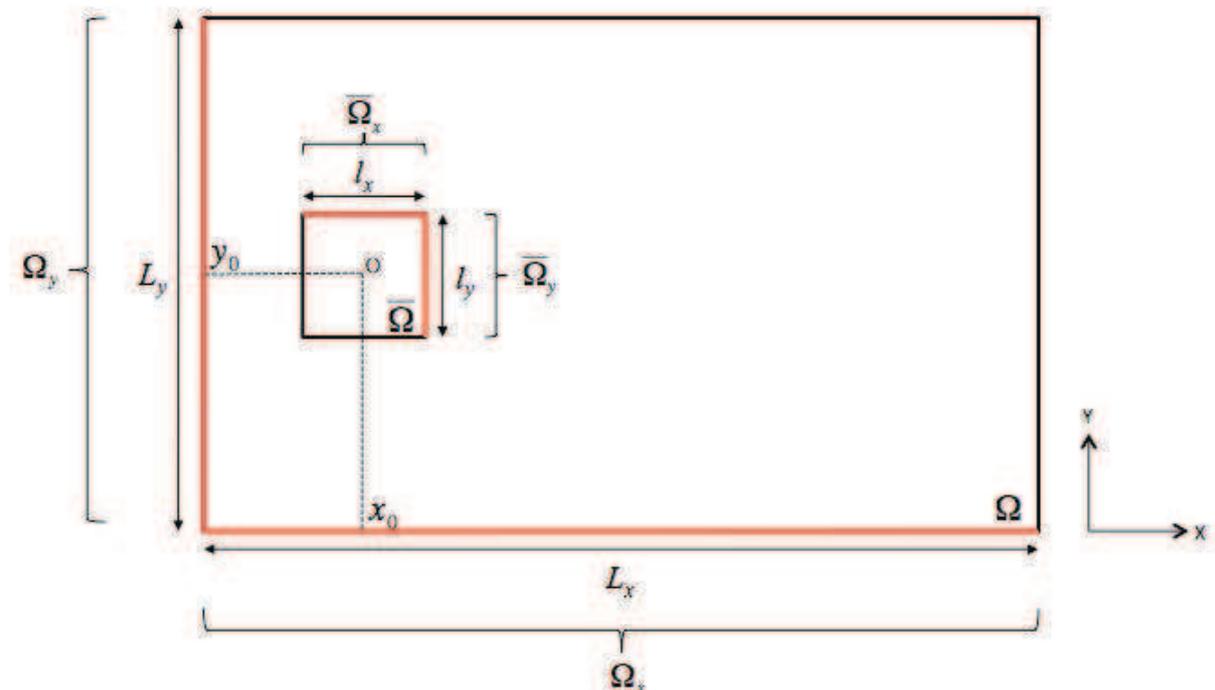


Figure 35 : Schéma des notations associées aux problèmes 1D

Les équations (4.102) et (4.105) font intervenir une seule diffusivité thermique. La moyenne suivant une direction a permis de s'affranchir du terme de diffusion associé à la direction perpendiculaire. Il est alors possible d'estimer séparément α_x et α_y en traitant chacun des deux problèmes 1D. Dans la suite, la méthode LOWF est appliquée à chaque problème 1D et les résultats sont discutés. Les notations utilisées sont illustrées à la figure 35.

4.4.2. Formalisme 1D de la méthode LOWF

Le formalisme de la méthode LOWF est détaillé pour chacun des deux problèmes 1D.

Problème 1D suivant X

Le problème 1D défini par les équations (4.102) et (4.103) est considéré. La fonction f_1 de $C^2(\overline{\Omega}_x)$ définie par l'équation (4.86) est utilisée comme fonction test.

Pour α_x uniforme sur le sous-domaine $\overline{\Omega}_x$ (figure 35), la multiplication de l'équation (4.102) par f_1 , puis l'intégration du produit le long $\overline{\Omega}_x$ s'écrit :

$$\int_{\overline{\Omega}_x} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial t} f_1(x) dx = \alpha_x \int_{\overline{\Omega}_x} \frac{\partial^2 \overline{T}(x,t)}{\partial x^2} f_1(x) dx - \beta \int_{\overline{\Omega}_x} \overline{T}(x,t) f_1(x) dx \quad (4.107)$$

Une double intégration par parties de l'équation (4.107) donne :

$$\int_{\overline{\Omega}_x} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial t} f_1(x) dx = \alpha_x \int_{\overline{\Omega}_x} \overline{T}(x,t) \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x^2} dx - \beta \int_{\overline{\Omega}_x} \overline{T}(x,t) f_1(x) dx \quad (4.108)$$

Pour simplifier l'écriture de l'équation (4.108), la notation suivante est introduite :

$$\begin{aligned} A_{t-1}(t) &= \int_{\overline{\Omega}_x} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial t} f_1(x) dx, & B_{xx-1}(t) &= \int_{\overline{\Omega}_x} \overline{T}(x,t) \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x^2} dx, \\ C_{-1}(t) &= \int_{\overline{\Omega}_x} \overline{T}(x,t) f_1(x) dx \end{aligned} \quad (4.109)$$

où, de manière implicite, les quantités $A_{t-1}(t)$, $B_{xx-1}(t)$ et $C_{-1}(t)$ dépendent des paramètres x_0 et l_x du sous-domaine $\overline{\Omega}_x$.

Par suite, l'équation (4.108) s'écrit :

$$A_{t-1}(t) = \alpha_x B_{xx-1}(t) - \beta C_{-1}(t) \quad (4.110)$$

ou encore

$$\frac{A_{t-1}(t)}{C_{-1}(t)} = \alpha_x \frac{B_{xx-1}(t)}{C_{-1}(t)} - \beta \quad (4.111)$$

où α_x et β représentent respectivement la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite des moindres carrés (D) des points $P(x_p(t), y_p(t))$ de coordonnées :

$$x_p(t) = \frac{B_{xx-1}(t)}{C_{-1}(t)}, \quad y_p(t) = \frac{A_{t-1}(t)}{C_{-1}(t)} \quad (4.112)$$

Problème 1D suivant Y

Un formalisme similaire est écrit pour le problème 1D défini par les équations (4.105) et (4.106). La fonction f_2 de $C^2(\bar{\Omega}_y)$ définie par l'équation (4.87) est utilisée comme fonction test.

Pour α_y uniforme sur le sous-domaine $\bar{\Omega}_y$ (figure 35), la multiplication de l'équation (4.105) par f_2 , puis l'intégration du produit le long $\bar{\Omega}_y$ s'écrit :

$$\int_{\bar{\Omega}_y} \frac{\partial \bar{T}(y,t)}{\partial t} f_2(y) dy = \alpha_y \int_{\bar{\Omega}_y} \frac{\partial^2 \bar{T}(y,t)}{\partial y^2} f_2(y) dy - \beta \int_{\bar{\Omega}_y} \bar{T}(y,t) f_2(y) dy \quad (4.113)$$

Une double intégration par parties de l'équation (4.113) donne :

$$\int_{\bar{\Omega}_y} \frac{\partial \bar{T}(y,t)}{\partial t} f_2(y) dy = \alpha_y \int_{\bar{\Omega}_y} \bar{T}(y,t) \frac{\partial^2 f_2(y)}{\partial y^2} dy - \beta \int_{\bar{\Omega}_y} \bar{T}(y,t) f_2(y) dy \quad (4.114)$$

en posant :

$$\begin{aligned} A_{t-2}(t) &= \int_{\bar{\Omega}_y} \frac{\partial \bar{T}(y,t)}{\partial t} f_2(y) dy, & B_{yy-2}(t) &= \int_{\bar{\Omega}_y} \bar{T}(y,t) \frac{\partial^2 f_2(y)}{\partial y^2} dy, \\ C_{-2}(t) &= \int_{\bar{\Omega}_y} \bar{T}(y,t) f_2(y) dy \end{aligned} \quad (4.115)$$

l'équation (4.114) s'écrit :

$$A_{t-2}(t) = \alpha_y B_{yy-2}(t) - \beta C_{-2}(t) \quad (4.116)$$

ou encore

$$\frac{A_{t-2}(t)}{C_{-2}(t)} = \alpha_y \frac{B_{yy-2}(t)}{C_{-2}(t)} - \beta \quad (4.117)$$

où α_y et β représentent respectivement la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite des moindres carrés (D) des points $P(x_p(t), y_p(t))$ de coordonnées :

$$x_p(t) = \frac{B_{yy-2}(t)}{C_{-2}(t)}, \quad y_p(t) = \frac{A_{t-2}(t)}{C_{-2}(t)} \quad (4.118)$$

Dans la suite, le formalisme 1D de la méthode LOWF est appliqué à un modèle 2D de plaque anisotrope pour une validation numérique.

4.4.3. Validation numérique

Le champ de température d'une plaque anisotrope ($\alpha_x \neq \alpha_y$) est simulé à partir d'un modèle numérique 2D. Les paramètres α_x et α_y du modèle sont estimés en appliquant la méthode LOWF aux problèmes 1D suivant X et Y respectivement. Les résultats sont discutés pour des données non bruitées et bruitées.

4.4.3.1. Description du modèle numérique

Le modèle 2D par éléments Finis décrit précédemment (§ 4.3.1.1) est utilisé pour simuler le champ de température d'une plaque anisotrope. Les données d'entrée du modèle sont $\alpha_x = 4,27 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $\alpha_y = 8,54 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit un rapport d'anisotropie $\alpha_y / \alpha_x = 2$. Tous les autres paramètres du modèle restent inchangés. Des conditions aux limites de flux nul suivant les directions X et Y sont imposées afin de vérifier l'une des conditions de séparabilité du problème 2D (§ 4.4.1). Conformément au maillage, le champ de température simulé s'écrit $T(x_i, y_j, t_k)$, avec $i \in \{1, 2, \dots, 300\}$, $j \in \{1, 2, \dots, 300\}$ et $k \in \{1, 2, \dots, 120\}$. La figure 36 montre la cartographie du champ $T(x_i, y_j, t_k)$ à $t_k = 120 \text{ s}$.

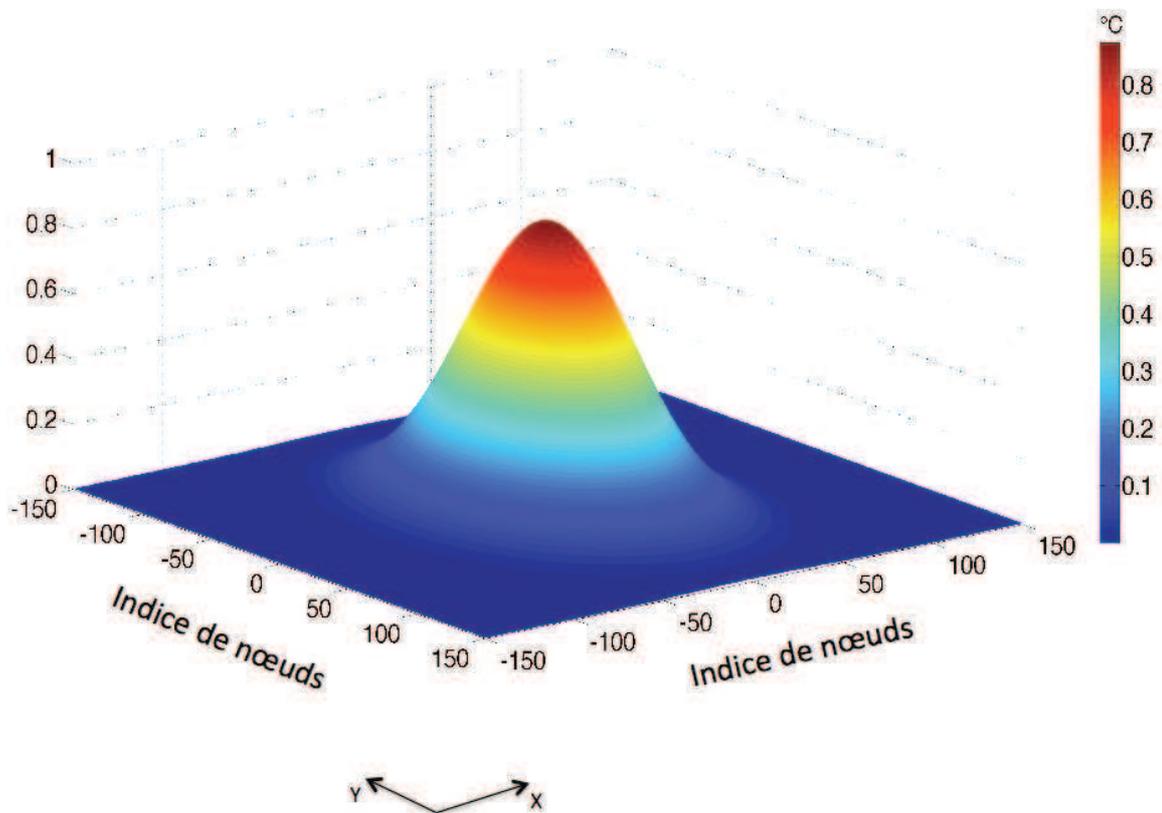


Figure 36: Cartographie du champ de température simulé avec le modèle 2D de plaque anisotrope pour $R_{B/S} = 0\%$ à $t_k = 120 \text{ s}$

Dans la suite, le problème 2D est décomposé en deux problèmes 1D pour l'estimation de α_x et α_y . La figure 37 présente le schéma de la décomposition.

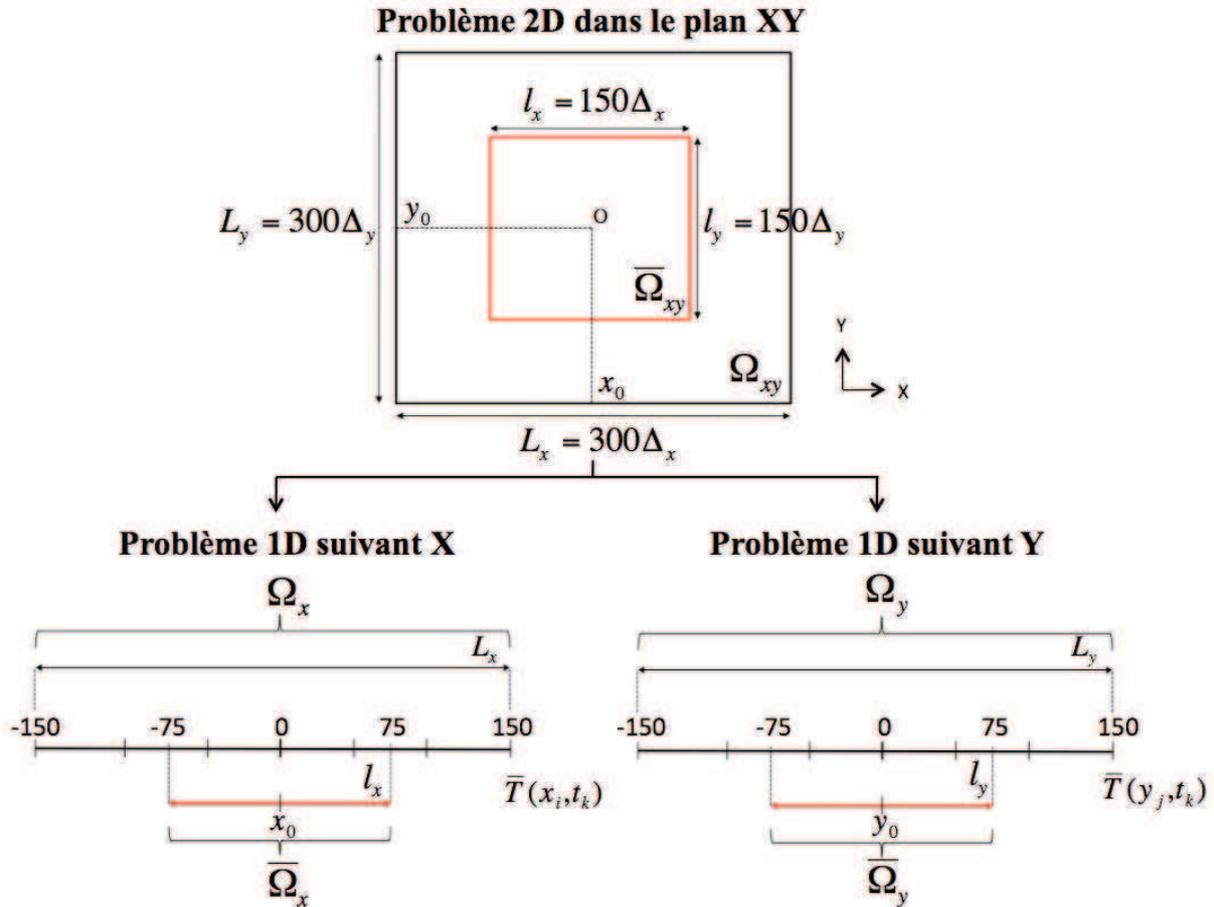


Figure 37 : Schéma du domaine Ω_x et du sous-domaine $\bar{\Omega}_x$

Les diffusivités thermiques α_x et α_y sont estimées en considérant les problèmes 1D suivant X et suivant Y respectivement.

4.4.3.2. Résultats

Les résultats de l'estimation de α_x et α_y sont discutés pour des données de température $T(x_i, y_j, t_k)$ simulées avec $R_{B/S} = 0\%$ et $R_{B/S} = 10\%$.

Estimation de α_x

Le sous-domaine $\bar{\Omega}_x$ de centre $x_0 = 0$ et de longueur $l_x = 150\Delta_x$ (figure 37) est choisi arbitrairement pour l'application de la méthode LOWF.

Les points $P^k(x_p(t_k), y_p(t_k))$, $k = 1, 2, \dots, 120$ et la droite des moindres carrés (D) sont représentés pour $R_{B/S} = 0\%$ (figure 38a) et $R_{B/S} = 10\%$ (figure 38b).

En l'absence de bruit (figure 38a), les points P^k sont alignés le long de la droite (D). La pente de la droite (D) donne $\hat{\alpha}_x = 4,25 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit une erreur d'estimation de **0,51%**.

En présence de bruit (figure 38b), l'alignement des points P^k est perturbé. La diffusivité thermique estimée est $\hat{\alpha}_x = 4,24 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit une erreur d'estimation de **0,83%**.

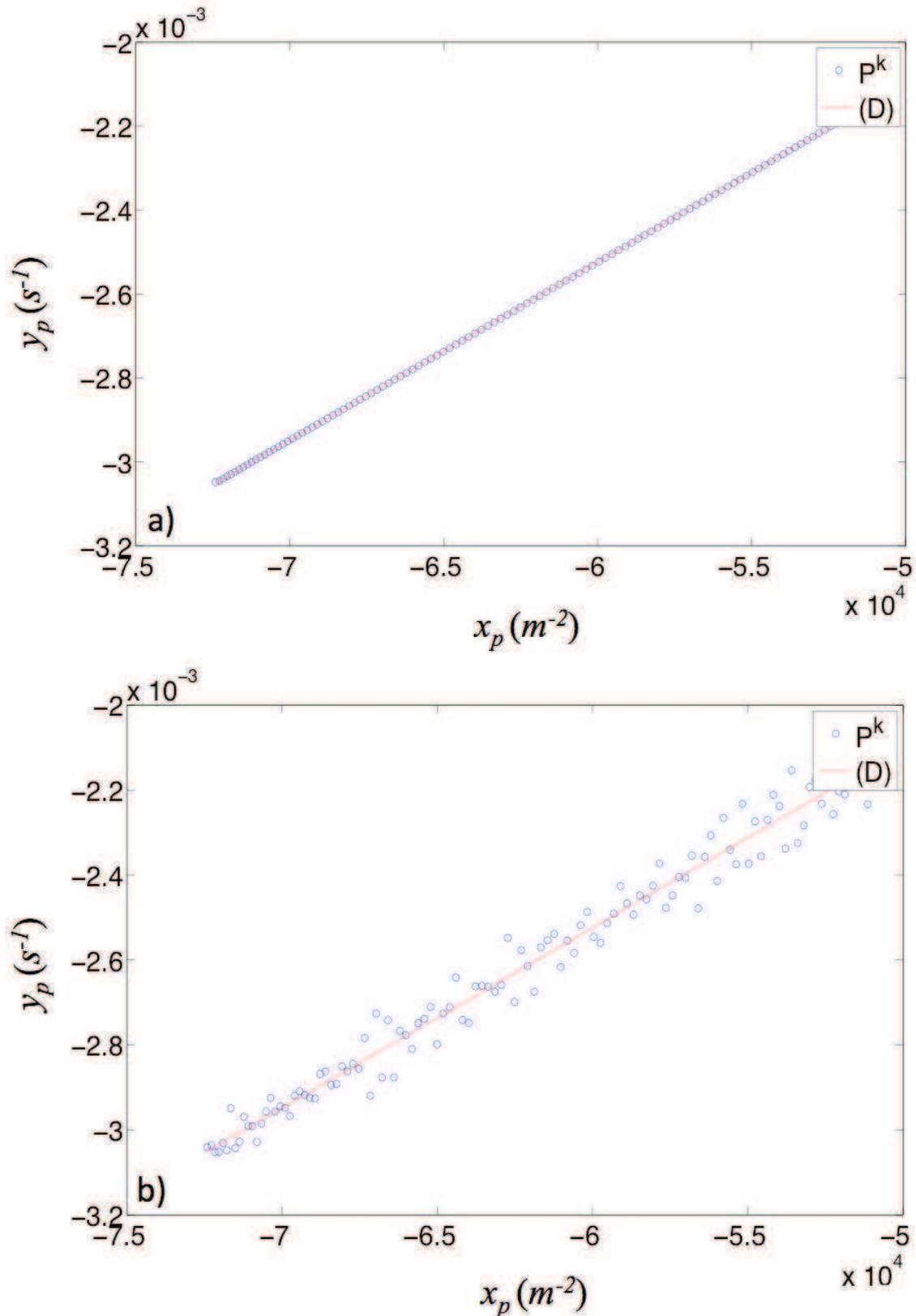


Figure 38 : Nuage de points P^k et droite (D) pour $R_{B/S} = 0\%$ (a) et $R_{B/S} = 10\%$ (b) pour le problème 1D suivant X

En définitive, la méthode LOWF a permis d'estimer la diffusivité suivant X avec une bonne précision à partir des données non bruitées et bruitées.

Estimation de α_y

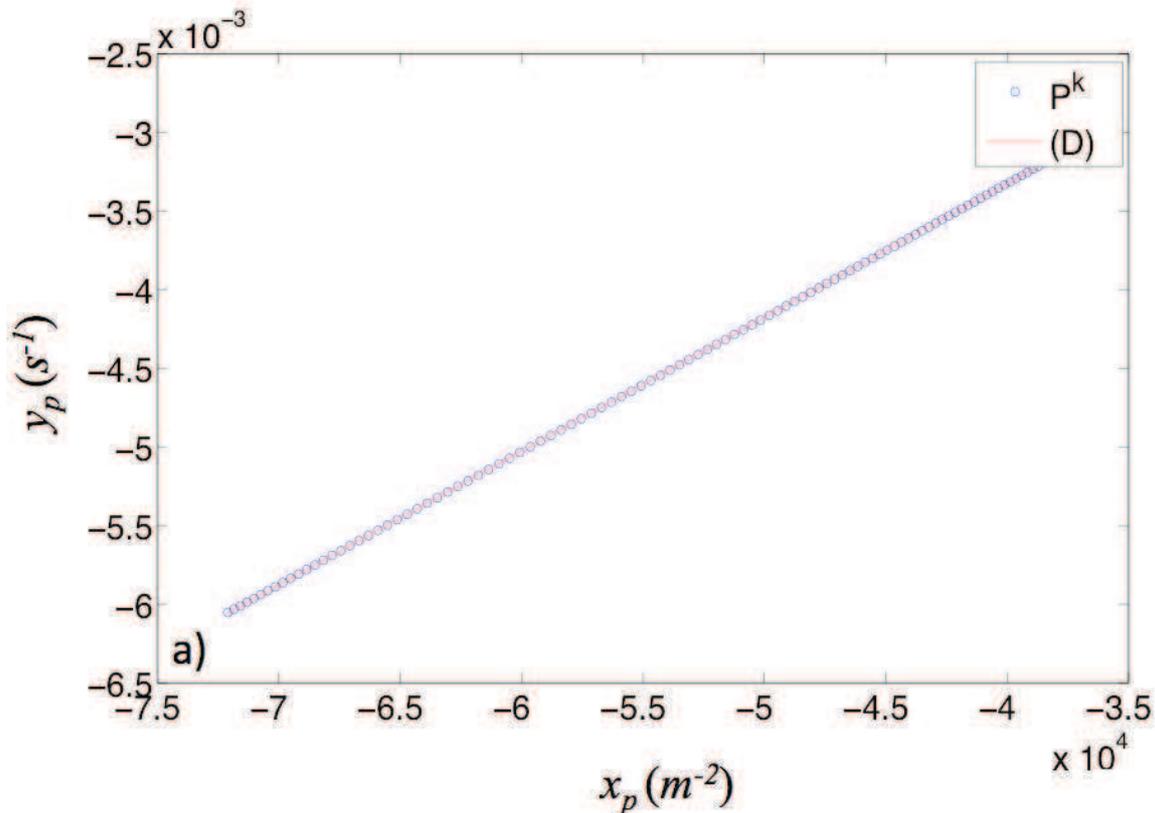
Le sous-domaine $\bar{\Omega}_y$ de centre $y_0 = 0$ et de longueur $l_y = 150\Delta_y$ (figure 37) est choisi arbitrairement pour l'application de la méthode LOWF.

Les points $P^k(x_p(t_k), y_p(t_k))$, $k = 1, 2, \dots, 120$ et la droite des moindres carrés (D) sont représentés pour $R_{B/S} = 0\%$ (figure 39a) et $R_{B/S} = 10\%$ (figure 39b).

En l'absence de bruit (figure 39a), les points P^k sont alignés le long de la droite (D). La pente de la droite (D) donne $\hat{\alpha}_y = 8,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit une erreur d'estimation de **0,5%**.

En présence de bruit, l'alignement des points P^k est perturbé (figure 39b). La diffusivité thermique estimée est $\hat{\alpha}_y = 8,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit une erreur d'estimation de **0,54%**.

Ces résultats montrent que la diffusivité suivant Y est estimée avec une bonne précision à partir des données non bruitées et bruitées.



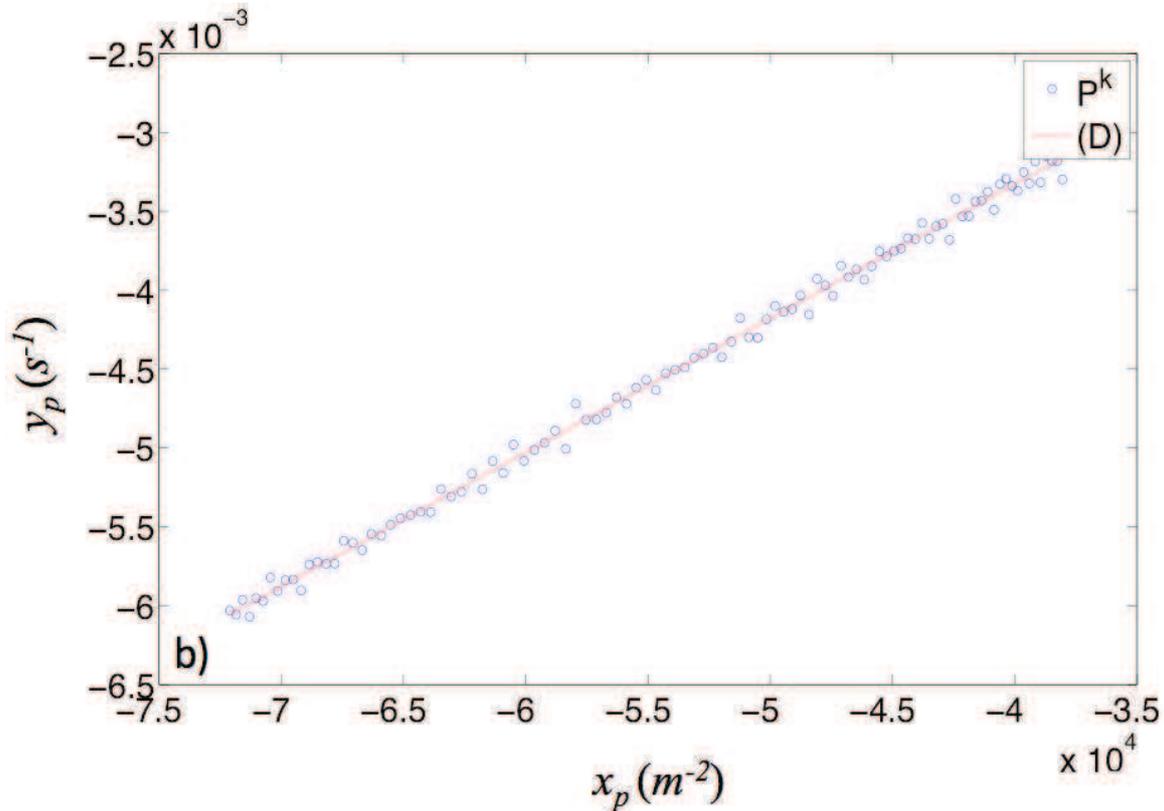


Figure 39 : Nuage de points P^k et droite (D) pour $R_{B/S} = 0\%$ (a) et $R_{B/S} = 10\%$ (b) pour le problème 1D suivant Y

En définitive, malgré une perturbation du nuage de points P^k en présence de bruit, les diffusivités thermiques α_x et α_y du modèle anisotrope ont été estimées avec une bonne précision.

4.5 Optimisation de la méthode LOWF

Les résultats numériques présentés ont été obtenus en considérant un sous-domaine choisi arbitrairement. Dans cette section, l'influence du choix de ce sous-domaine sur la précision d'estimation est étudiée en vue d'une optimisation de la méthode LOWF. Une étude de sensibilité de la méthode est d'abord réalisée. Des critères d'optimisation sont proposés par la suite.

4.5.1. Etude de sensibilité de la méthode LOWF

Dans cette section, la sensibilité de la méthode LOWF par rapport aux caractéristiques (position, taille) du sous-domaine est étudiée. L'étude de sensibilité est réalisée en considérant le problème 1D suivant X défini à partir du modèle de plaque anisotrope (§ 4.4.3.1). Les données sont simulées avec $R_{B/S} = 10\%$. La diffusivité thermique α_x est estimée avec la méthode LOWF en considérant un sous-domaine $\bar{\Omega}_x$ de paramètres x_0 (centre) et l_x (longueur) variables. Ces deux paramètres définissent respectivement la position et la taille du sous-domaine $\bar{\Omega}_x$. Les résultats d'estimation sont discutés en fonction de x_0 et l_x . Des critères d'optimisation de la méthode LOWF sont ensuite proposés.

4.5.1.1. Sensibilité par rapport à la position du sous-domaine

Soit un sous-domaine $\bar{\Omega}_x$ de longueur fixe $l_x = 100\Delta_x$. La diffusivité thermique α_x est estimée en considérant trois positions du sous-domaine $\bar{\Omega}_x$ définies par $x_0 = 0$, $x_0 = 50$ et $x_0 = 100$ (figure 40).

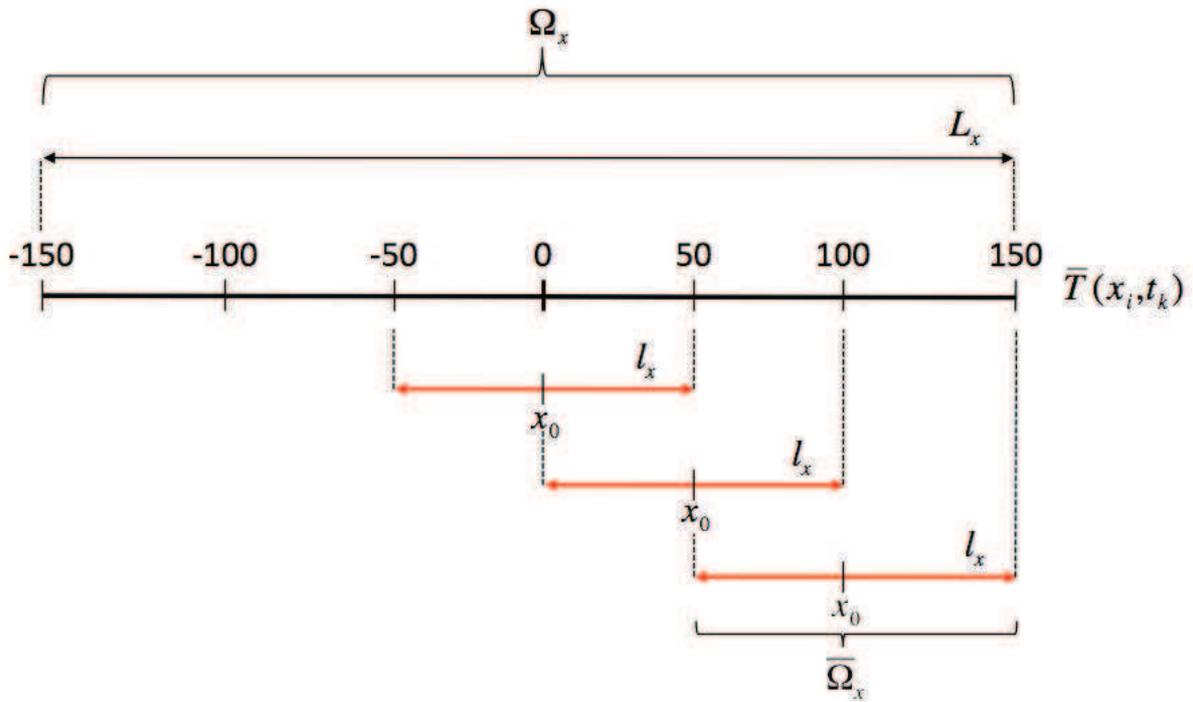
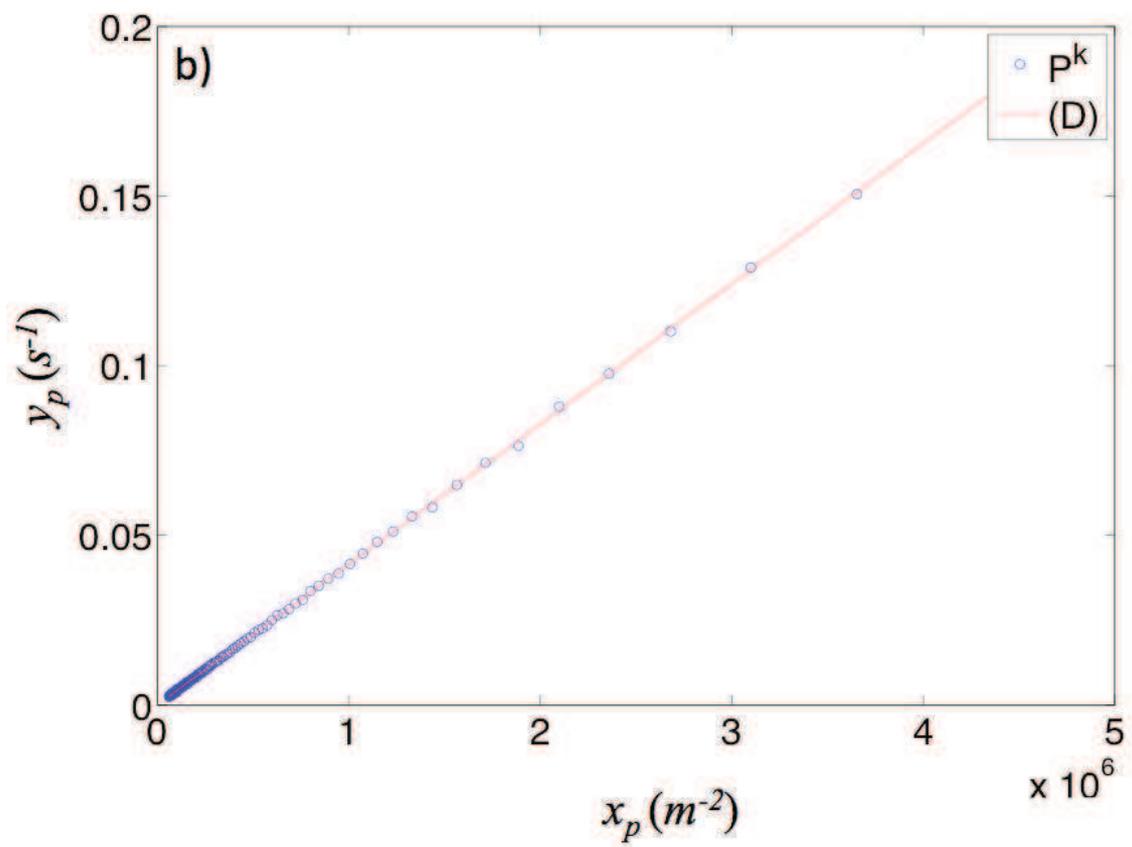
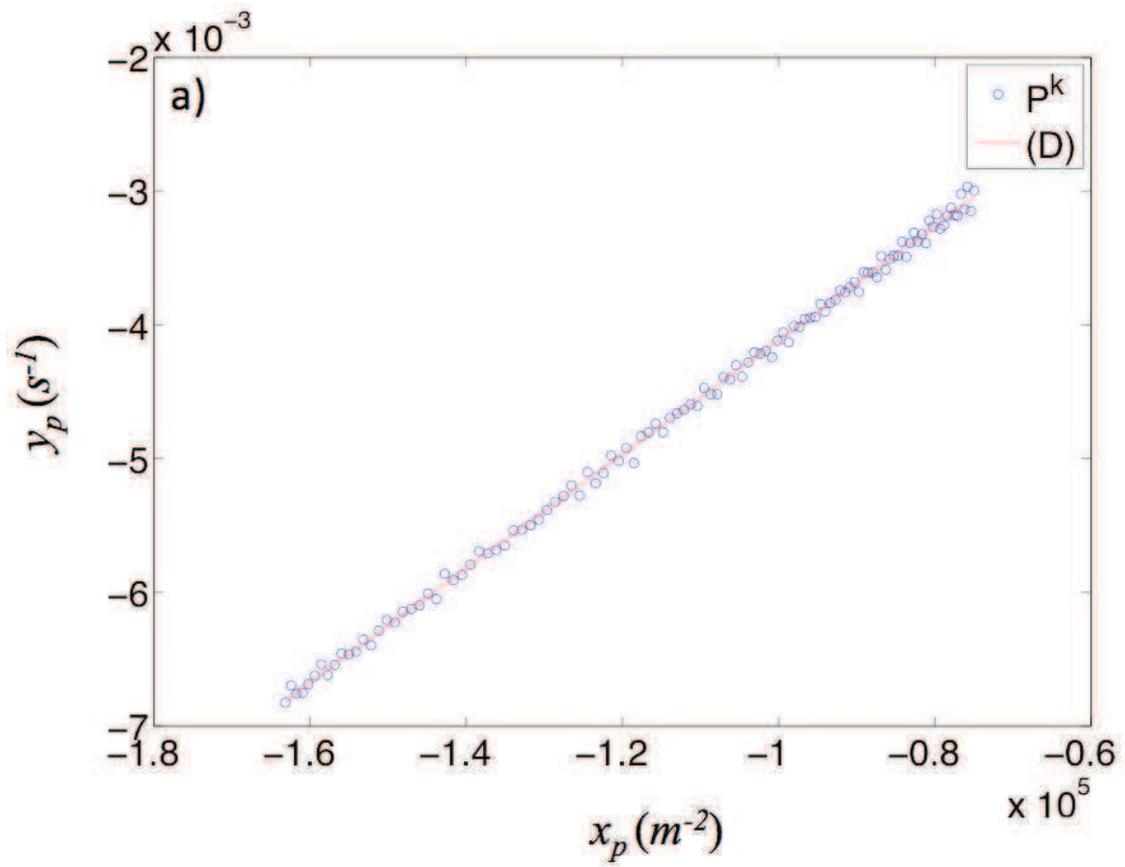


Figure 40 : Sous-domaine $\bar{\Omega}_x$ de longueur $l_x = 100\Delta_x$ avec $x_0 = 0$, $x_0 = 50$ et $x_0 = 100$

La figure 41 représente les points P^k et la droite (D) pour $x_0 = 0$, $x_0 = 50$ et $x_0 = 100$.



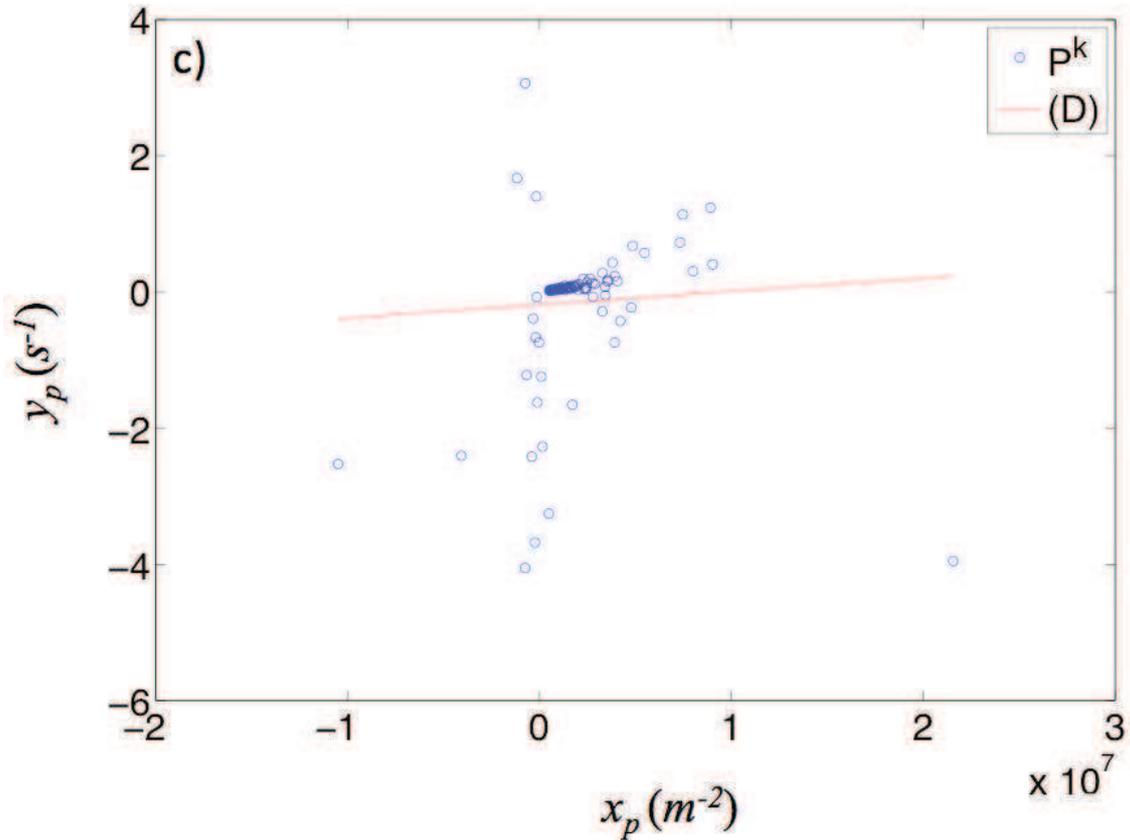


Figure 41 : Nuage de points P^k et droite (D) pour un sous-domaine $\bar{\Omega}_x$ de longueur $l_x = 100\Delta_x$ avec $x_0 = 0$ (a), $x_0 = 50$ (b) et $x_0 = 100$ (c)

Les résultats obtenus pour les positions $x_0 = 0$, $x_0 = 50$ et $x_0 = 100$ du sous-domaine $\bar{\Omega}_x$ sont présentés dans le tableau 8.

x_0	0	50	100
$\hat{\alpha}_x(x_0)$ ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)	$4,26 \cdot 10^{-8}$	$4,14 \cdot 10^{-8}$	$1,95 \cdot 10^{-8}$
Erreur (%)	0,2	3,2	54,3

Tableau 8 : Résultats d'estimation pour différentes positions x_0 de $\bar{\Omega}_x$ avec $R_{B/S} = 10\%$

Pour $x_0 = 0$ (figure 41a), une légère perturbation du nuage due à la présence de bruit est observée. La faible dispersion des points P^k le long de la droite (D) traduit la bonne qualité des données de température sur le sous-domaine $\bar{\Omega}_x$. La diffusivité thermique estimée est $\hat{\alpha}_x(x_0 = 0) = 4,26 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit une erreur d'estimation de **0,2%**.

Pour $x_0 = 50$ (figure 41b), les points P^k présentent *a priori* un meilleur alignement que sur la figure 41a. Cependant, il convient de noter le changement de l'échelle des axes par rapport à la figure 41a et l'allure compacte du nuage de points P^k dans une petite zone qui masquent une dispersion plus importante sur la figure 41b. La diffusivité thermique estimée est $\hat{\alpha}_x(x_0 = 50) = 4,14 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit une erreur d'estimation de **3,2%**.

Pour $x_0 = 100$ (figure 41c), la dispersion des points P^k autour de la droite (D) est importante. Les données de température considérées sont de mauvaise qualité du fait de la position excentrée du sous-domaine $\bar{\Omega}_x$ par rapport au signal thermique. La diffusivité thermique estimée est $\hat{\alpha}_x(x_0 = 100) = 1,95 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit une erreur d'estimation de **54,3%**.

Dans le tableau 8, l'évolution de l'erreur d'estimation en fonction de x_0 montre qu'il est préférable de positionner le centre du sous-domaine dans une zone où la qualité du signal thermique est bonne. Idéalement, il convient de faire coïncider le centre du sous-domaine avec le point de température maximale de la zone à caractériser.

4.5.1.2. Sensibilité par rapport à la taille du sous-domaine

Soit un sous-domaine $\bar{\Omega}_x$ de centre $x_0 = 0$. La diffusivité thermique α_x est estimée en considérant trois tailles de $\bar{\Omega}_x$ correspondant à $l_x = 10\Delta_x$, $l_x = 100\Delta_x$ et $l_x = 200\Delta_x$ (figure 42).

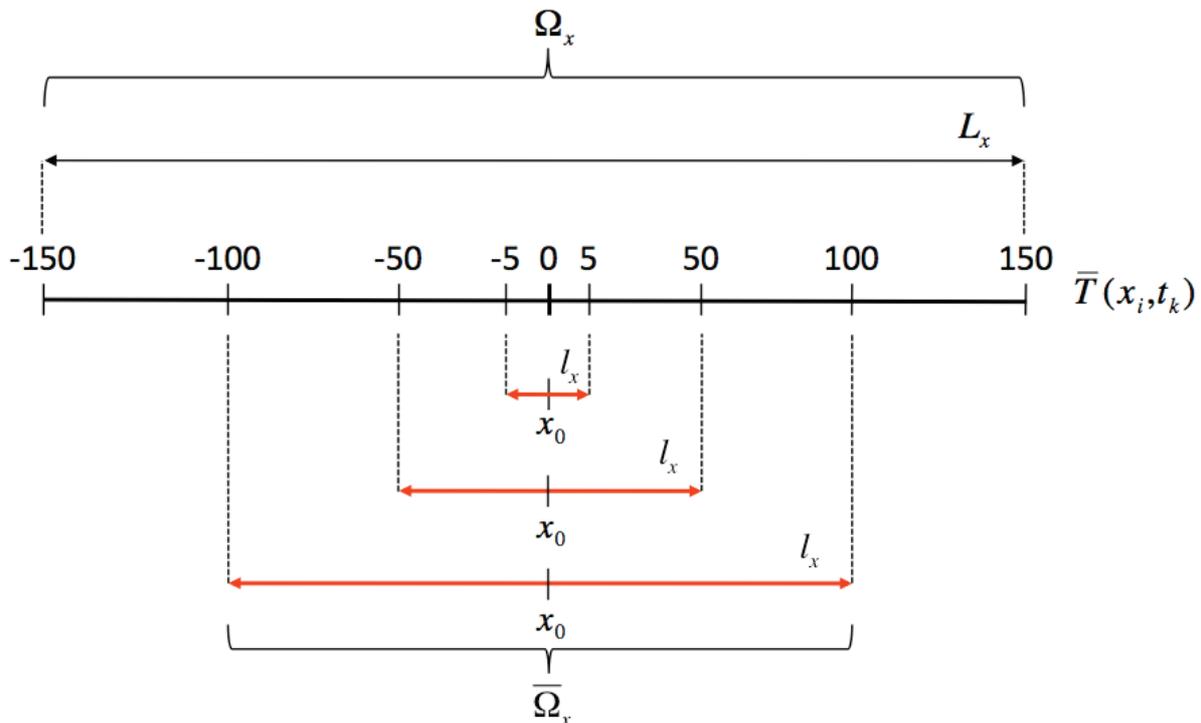
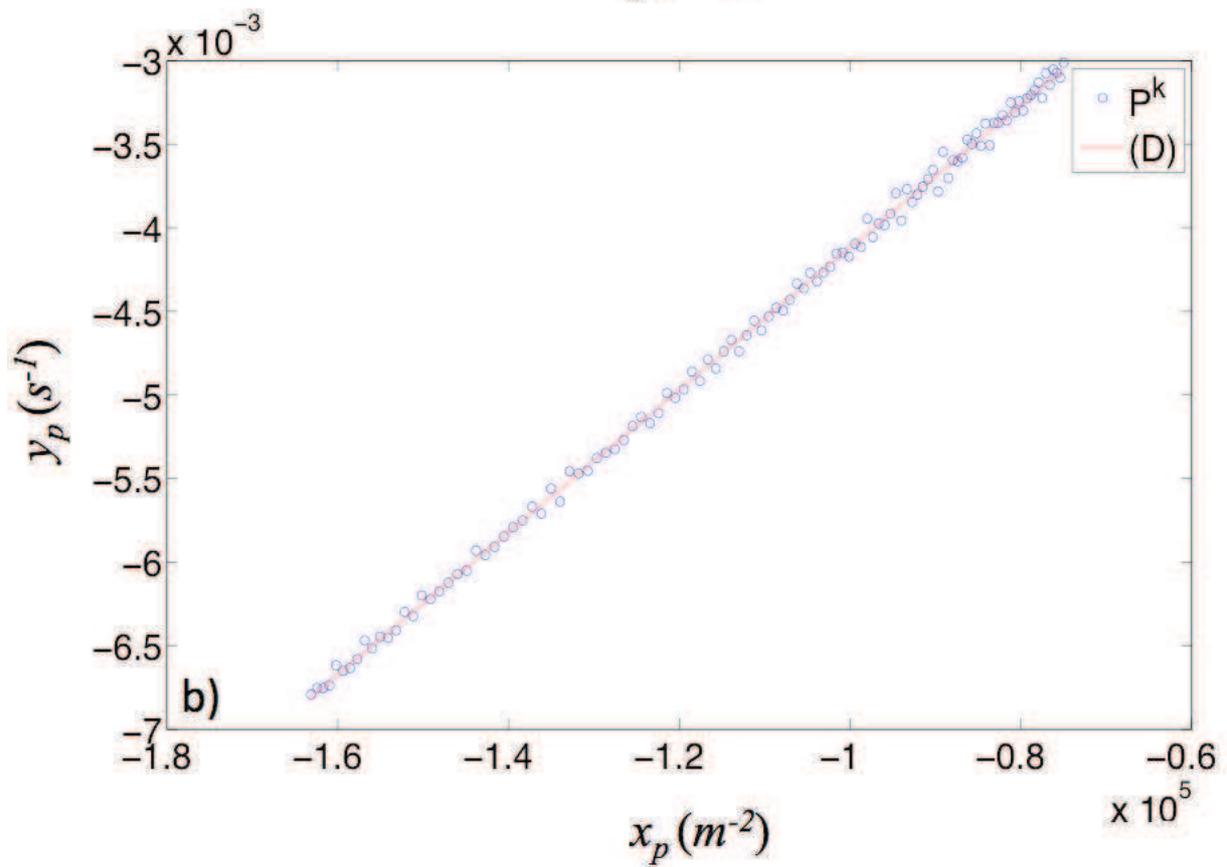
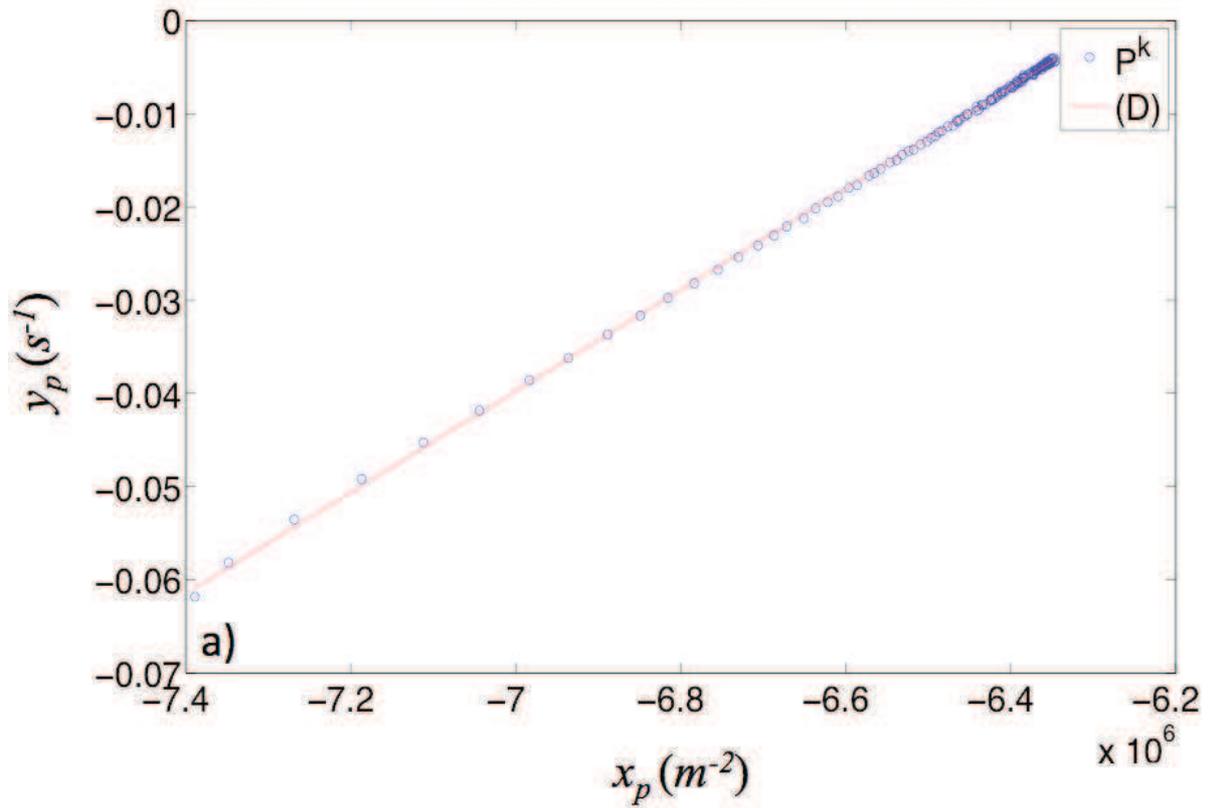


Figure 42 : Sous-domaine $\bar{\Omega}_x$ de centre $x_0 = 0$ avec $l_x = 10\Delta_x$, $l_x = 100\Delta_x$ et $l_x = 200\Delta_x$

La figure 43 présente le nuage des points P^k et la droite (D) pour $l_x = 10\Delta_x$, $l_x = 100\Delta_x$ et $l_x = 200\Delta_x$.



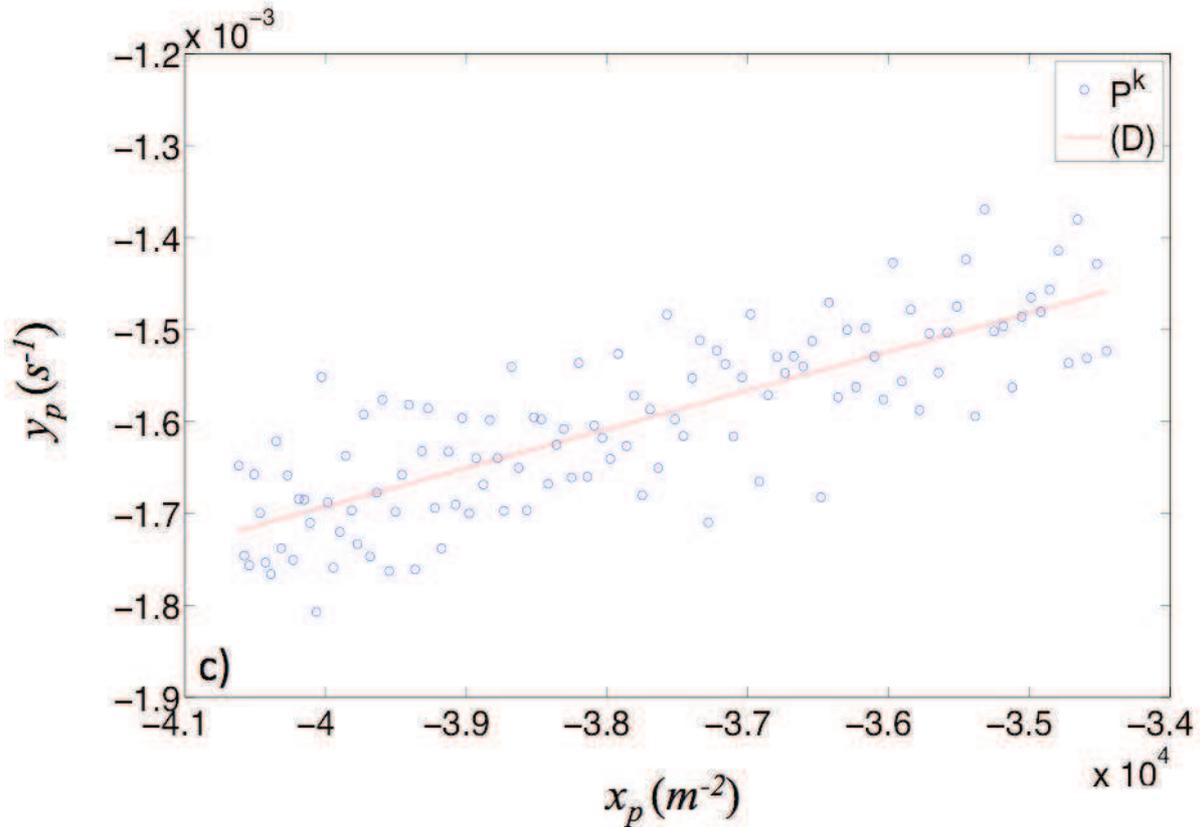


Figure 43 : Nuage de points P^k et droite (D) pour un sous-domaine $\overline{\Omega}_x$ de centre $x_0 = 0$ avec $l_x = 10\Delta_x$ (a), $l_x = 100\Delta_x$ (b) et $l_x = 200\Delta_x$ (c)

Les résultats obtenus pour les tailles $l_x = 10\Delta_x$, $l_x = 100\Delta_x$ et $l_x = 200\Delta_x$ du sous-domaine $\overline{\Omega}_x$ sont présentés dans le tableau 9.

l_x	$10 \Delta_x$	$100 \Delta_x$	$200 \Delta_x$
$\hat{\alpha}_x(l_x) \text{ (m}^2 \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$	$5,4 \cdot 10^{-8}$	$4,3 \cdot 10^{-8}$	$4,2 \cdot 10^{-8}$
Erreur (%)	27,1	0,24	1,3

Tableau 9 : Résultats d'estimation pour différentes tailles l_x de $\overline{\Omega}_x$ avec $R_{B/S} = 10\%$

Pour $l_x = 200\Delta_x$ (figure 43c), la dispersion des points P^k le long de la droite (D) est relativement importante. La grande taille du sous-domaine $\overline{\Omega}_x$ favorise la prise en compte de données de mauvaise qualité loin du centre de la plaque. La diffusivité thermique estimée est $\hat{\alpha}_x(l_x = 200\Delta_x) = 4,2 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit une erreur d'estimation de **1,3%**.

Pour $l_x = 100\Delta_x$ (figure 43b), la dispersion des points P^k autour de la droite (D) est plus faible que sur la figure 43c. La diminution de la taille de $\overline{\Omega}_x$ contribue à favoriser les données de température de meilleure qualité. Il en résulte logiquement une amélioration de la précision d'estimation. La diffusivité thermique estimée est $\hat{\alpha}_x(l_x = 100\Delta_x) = 4,3 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit une erreur d'estimation de **0,24%**.

Pour $l_x = 10\Delta_x$ (figure 43a), le sous-domaine $\overline{\Omega}_x$ couvre une zone de petite taille. Les données prises en compte sont de bonne qualité du fait de l'intensité du signal thermique. Malgré une faible perturbation du nuage due à la présence de bruit, les points P^k sont quasiment alignés le long de la droite (D). Cependant, une importante dégradation de la précision d'estimation est observée (tableau 9). La diffusivité thermique estimée est $\hat{\alpha}_x(l_x = 10\Delta_x) = 5,4 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit une erreur d'estimation de **27,1%**. Une augmentation de l'erreur d'estimation est observée, bien que les données de température considérées soient de bonne qualité. Ce résultat s'explique par le fait que, pour un sous-domaine de taille petite, le nombre réduit de données de température pris en compte affecte la précision du calcul numérique des quantités intégrales x_p et y_p de la méthode LOWF. Cet effet numérique se traduit par un biais lié à la discrétisation des données. Dans ce qui suit, l'influence de la discrétisation des données sur la précision de la méthode LOWF est étudiée.

Soit n le nombre de données de température $\overline{T}(x_i, t_k)$ du sous-domaine $\overline{\Omega}_x$. La taille l_x de $\overline{\Omega}_x$ est obtenue par :

$$l_x = (n - 1)\Delta_x \quad (4.119)$$

Pour la mise en œuvre de la méthode LOWF, la fonction test f_1 est également discrétisée en n nœuds sur le sous-domaine $\overline{\Omega}_x$, chaque valeur $\overline{T}(x_i, t_k)$ étant associée une valeur de f_1 .

Soit f_{1n} la forme discrétisée de f_1 en n nœuds. La figure 44 représente les fonctions f_1 et f_{1n} dans l'espace de la variable adimensionnée $\tilde{x} \in [-1 \ 1]$.

Il apparaît que l'approximation géométrique f_{1n} de f_1 est un segment pour $n = 2$, un triangle pour $n = 3$, un trapèze pour $n = 4$. Un nombre n petit ne permet pas de reconstruire la fonction test f_1 avec précision. Afin de quantifier l'écart entre les courbes de f_1 et f_{1n} , la norme $\|f_1 - f_{1n}\|$ est calculée par :

$$\|f_1 - f_{1n}\| = \sqrt{\int_{-1}^1 (f_1 - f_{1n})^2 d\tilde{x}} \quad (4.120)$$

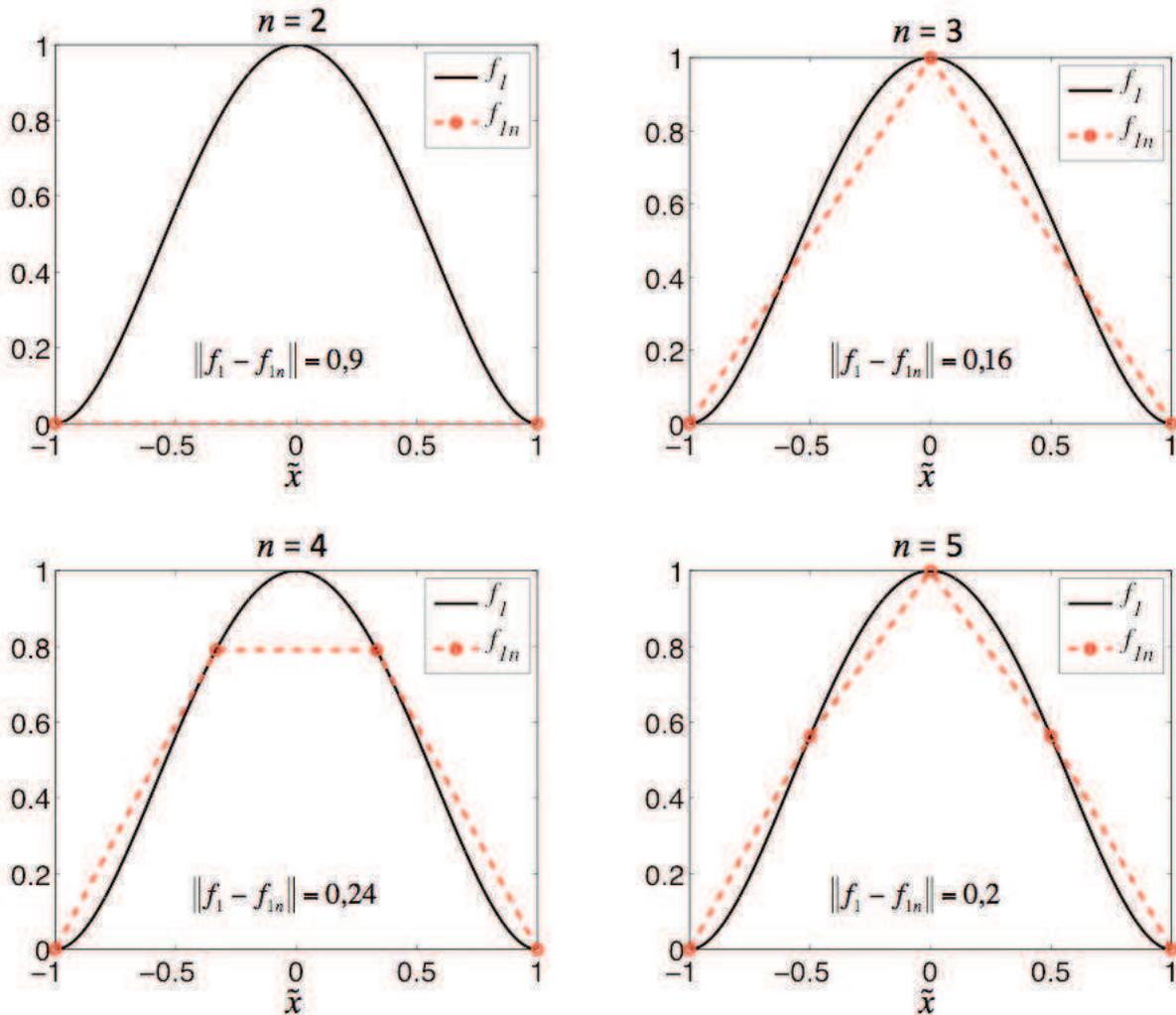


Figure 44 : Fonctions continue f_1 et discrétisée f_{1n} pour différentes valeurs de n

La figure 45 représente la valeur de $\|f_1 - f_{1n}\|$ en fonction de n .

Sur la figure 45, la courbe atteint son maximum en $n=2$: f_{1n} est l'approximation géométrique la moins bonne de f_1 pour cette valeur de n .

Une remontée de la courbe est observée en $n=4$: l'écart entre f_1 et f_{1n} est plus grand en considérant 3 données de température plutôt que 4.

Pour n grand, $\|f_1 - f_{1n}\|$ tend asymptotiquement vers 0 : la précision de l'approximation géométrique de f_1 s'améliore avec l'augmentation du nombre n de données de température du sous-domaine $\overline{\Omega}_x$.

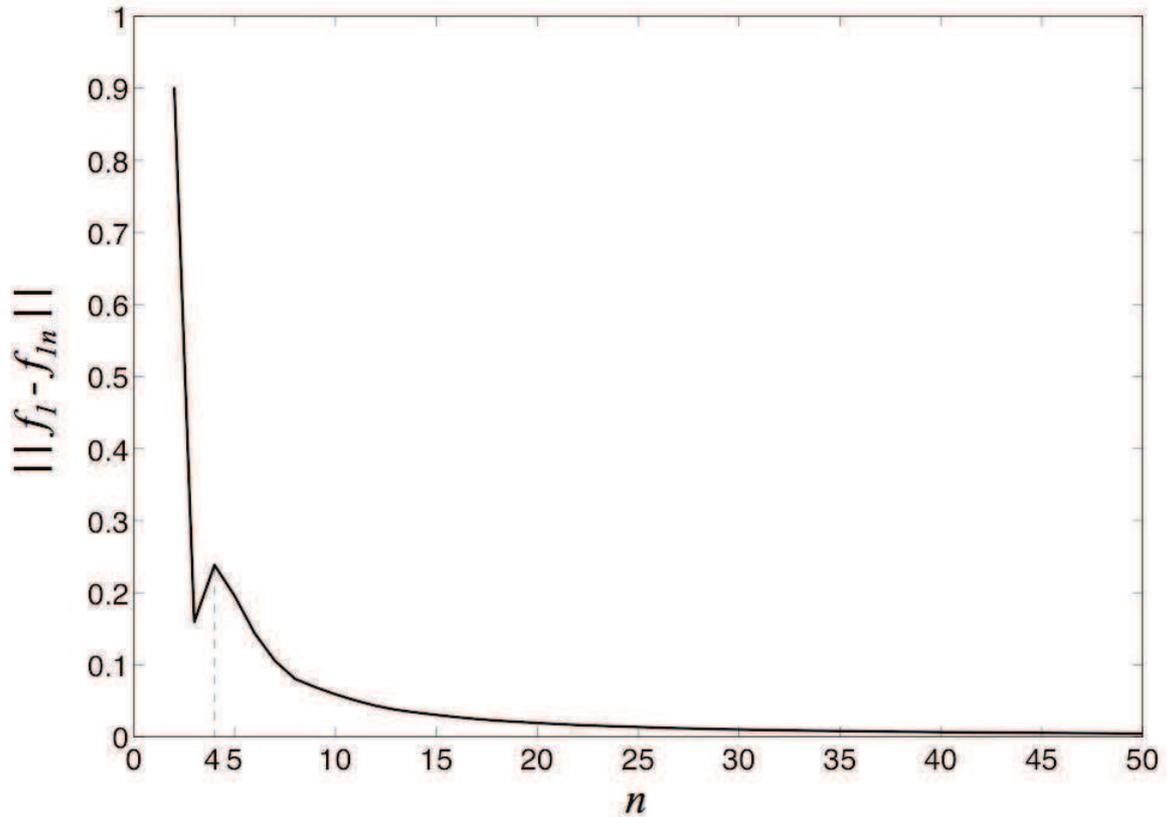


Figure 45 : Norme $\|f_1 - f_{1n}\|$ en fonction de n : erreur d'approximation numérique de la fonction continue f_1 par sa forme discrétisée f_{1n}

La formulation faible fait aussi intervenir la dérivée spatiale d'ordre 2 de f_1 notée $f_1^{(2)}$. Une analyse similaire de l'influence de la discrétisation est réalisée pour cette fonction.

La figure 46 représente la fonction $f_1^{(2)}$ et sa forme discrétisée $f_{1n}^{(2)}$ dans l'espace de la variable adimensionnée $\tilde{x} \in [-1, 1]$. Cette figure montre que la précision de l'approximation géométrique de $f_1^{(2)}$ tend à s'améliorer avec l'augmentation de n .

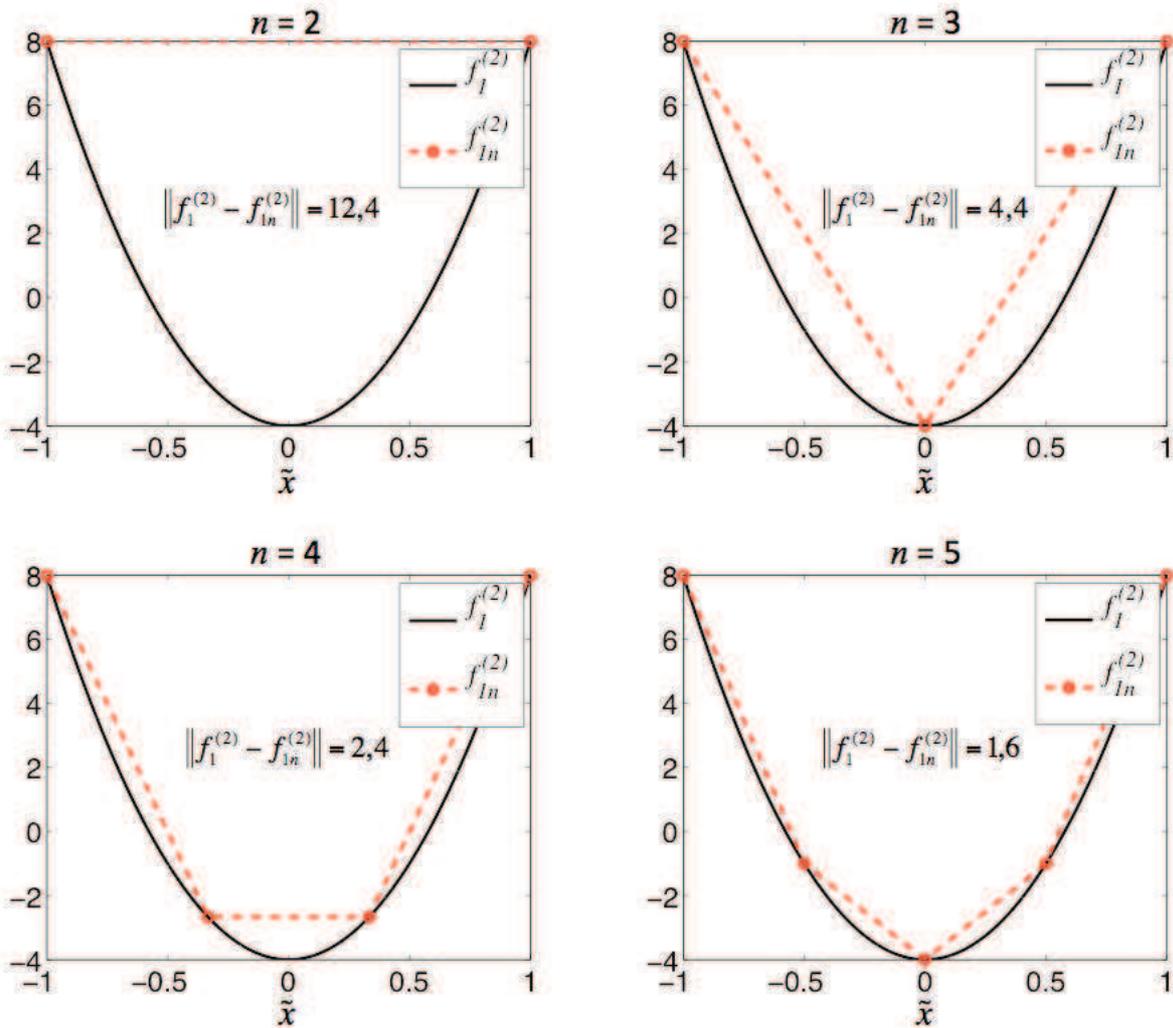


Figure 46 : Fonctions continue $f_1^{(2)}$ et discrétisée $f_{1n}^{(2)}$ pour différentes valeurs de n

La figure 47 représente la valeur de $\|f_1^{(2)} - f_{1n}^{(2)}\|$ en fonction de n . Il apparaît que la valeur $\|f_1^{(2)} - f_{1n}^{(2)}\|$ tend asymptotiquement vers 0 pour n grand.

En définitive, la figure 45 et la figure 47 montrent que :

i) Une valeur de n petite induit une erreur numérique liée à discrétisation, notamment lors du calcul des quantités intégrales intervenant dans la formulation faible. Cela explique l'accroissement de l'erreur d'estimation observée pour $l_x = 10\Delta_x$ malgré la bonne qualité des données de température du sous-domaine $\bar{\Omega}_x$ (tableau 9).

ii) Une valeur de n grande contribue à accroître la précision du calcul numérique. Or, pour une taille de pixel Δ_x donnée, l'équation (4.119) montre que la taille l_x du sous-domaine augmente avec la valeur de n . Le sous-domaine $\bar{\Omega}_x$ tend alors à prendre en compte des données de température éloignées de son centre x_0 et susceptibles de dégrader la précision d'estimation.

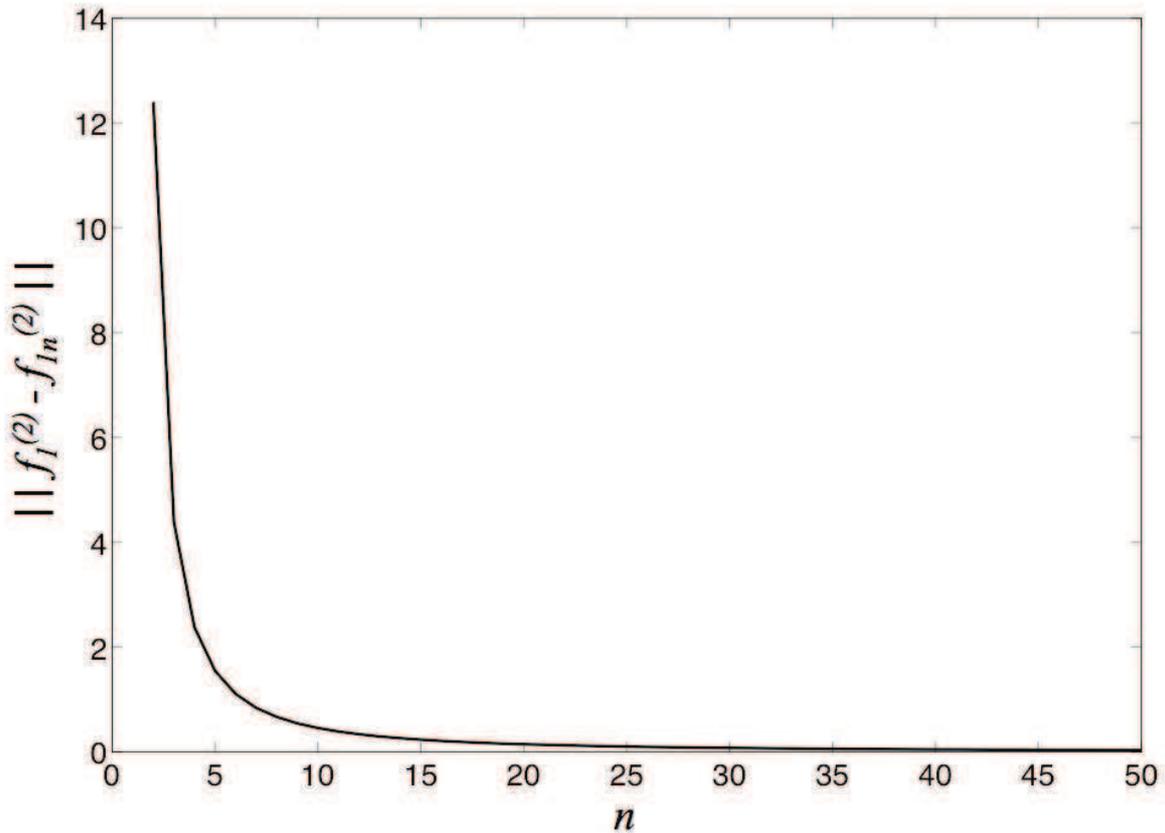


Figure 47 : Norme $\|f_1^{(2)} - f_{1n}^{(2)}\|$ en fonction de n : erreur d'approximation numérique de la dérivée continue $f_1^{(2)}$ par sa forme discrétisée $f_{1n}^{(2)}$

Il est donc nécessaire de trouver un compromis entre l'erreur numérique (l_x petit) et l'erreur due à des données de mauvaise qualité (l_x grand). Un critère est proposé pour optimiser la taille du sous-domaine.

4.5.2. Critère d'optimisation de la taille du sous-domaine

Soit l_{opt} une valeur optimisée de l_x , ni trop petite pour assurer une bonne précision du calcul numérique, ni trop grande pour limiter l'influence du bruit.

L'interprétation des différentes figures a montré que l'allure du nuage de points P^k est représentative de la qualité des données de température du sous-domaine. Ainsi, des données de bonne qualité se caractérisent par un bon alignement des points P^k . L'alignement des points P^k peut être quantifié à l'aide du coefficient de corrélation linéaire Λ défini par :

$$\Lambda = \frac{\sum_{k=1}^{N_t} (x_p(t_k) - \bar{x})(y_p(t_k) - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N_t} (x_p(t_k) - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{N_t} (y_p(t_k) - \bar{y})^2}}, \quad \Lambda \in [-1 \ 1] \quad (4.121)$$

Du point de vue mathématique, Λ mesure l'intensité de la relation affine existant entre les variables $x_p(t_k)$ et $y_p(t_k)$.

Les valeurs extrêmes $\Lambda = \pm 1$ traduisent l'existence d'une relation affine entre $x_p(t_k)$ et $y_p(t_k)$: les points P^k sont parfaitement alignés.

Les valeurs intermédiaires $\Lambda \in]-1, 1[$ renseignent sur le l'intensité de la dépendance linéaire entre les variables $x_p(t_k)$ et $y_p(t_k)$: plus le coefficient Λ est proche des valeurs extrêmes -1 et 1, plus la relation affine entre les variables est forte.

Pour $\Lambda = 0$, les variables $x_p(t_k)$ et $y_p(t_k)$ sont linéairement indépendantes.

L'interprétation du coefficient de corrélation linéaire dépend du contexte et des objectifs. Ainsi, une valeur $\Lambda = 0,9$ peut être considérée comme faible s'il s'agit de vérifier une loi physique en utilisant des données de parfaite qualité, mais peut être considérée comme élevée si les données utilisées sont de mauvaise qualité.

La démarche suivante est proposée pour la détermination d'une taille optimisée l_{opt} :

- i) Tracer la valeur du coefficient de corrélation Λ en fonction de n ,
- ii) Rechercher une valeur optimale n_{opt} de n correspondant à une valeur élevée de Λ ,
- iii) Déduire $l_{opt} = (n_{opt} - 1)\Delta_x$, conformément à l'équation (4.119).

Afin de valider la démarche proposée, elle est appliquée aux deux problèmes 1D déduits du modèle anisotrope (§ 4.4.3.1) avec $R_{B/S} = 10\%$. Dans chaque cas, le sous-domaine est centré sur le point de température maximale.

Problème 1D suivant X

Le champ moyen $\bar{T}(x_i, t_k)$ est considéré. La figure 48 représente les valeurs prises par Λ en fonction de n . L'erreur d'estimation est également représentée pour évaluer la pertinence d'une utilisation du coefficient de corrélation linéaire comme critère d'optimisation.

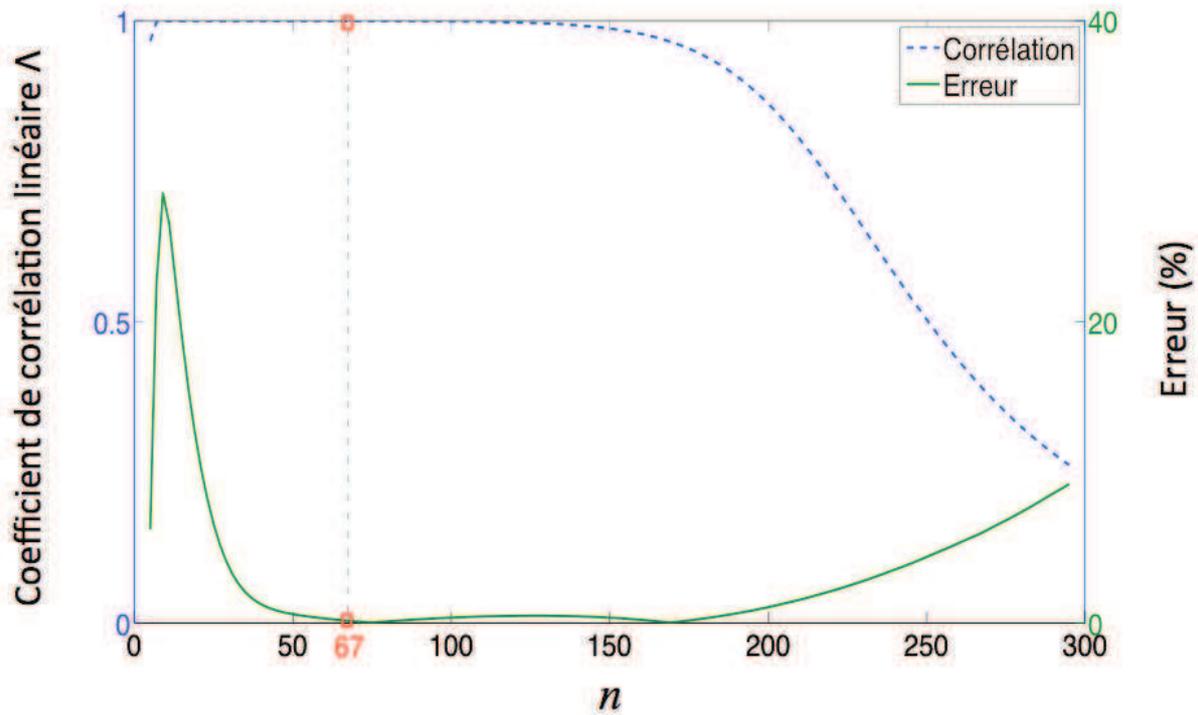


Figure 48 : Coefficient de corrélation linéaire des points P^k et erreur d'estimation en fonction de n pour le champ moyen 1D $\bar{T}(x_i, t_k)$

Pour $3 \leq n \leq 11$, la valeur de Λ croît et est proche de 1. L'erreur d'estimation est relativement importante, malgré le bon alignement des points P^k : c'est l'erreur numérique liée à la discrétisation.

Pour $11 < n \leq 131$, un pallier de valeurs $\Lambda \approx 1$ est observé : les points P^k présentent un bon alignement. Les faibles valeurs de l'erreur d'estimation indiquent une bonne précision d'estimation sur ce pallier.

Pour $n > 131$, la valeur de Λ décroît : l'influence croissante du bruit affecte l'alignement des points P^k . Ce résultat est en cohérence avec l'accroissement de l'erreur d'estimation observée dans le même temps.

La valeur optimale de n est choisie approximativement au milieu du pallier de la courbe de Λ , soit $n_{opt} = 67$. Il vient $l_{opt} = 66\Delta_x$ qui donne $\hat{\alpha}_x = 4,26 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit une erreur d'estimation de **0,14%**.

Problème 1D suivant Y

La même démarche est appliquée au champ moyen $\bar{T}(y_j, t_k)$. La figure 49 représente la valeur de Λ et l'erreur d'estimation en fonction de n .

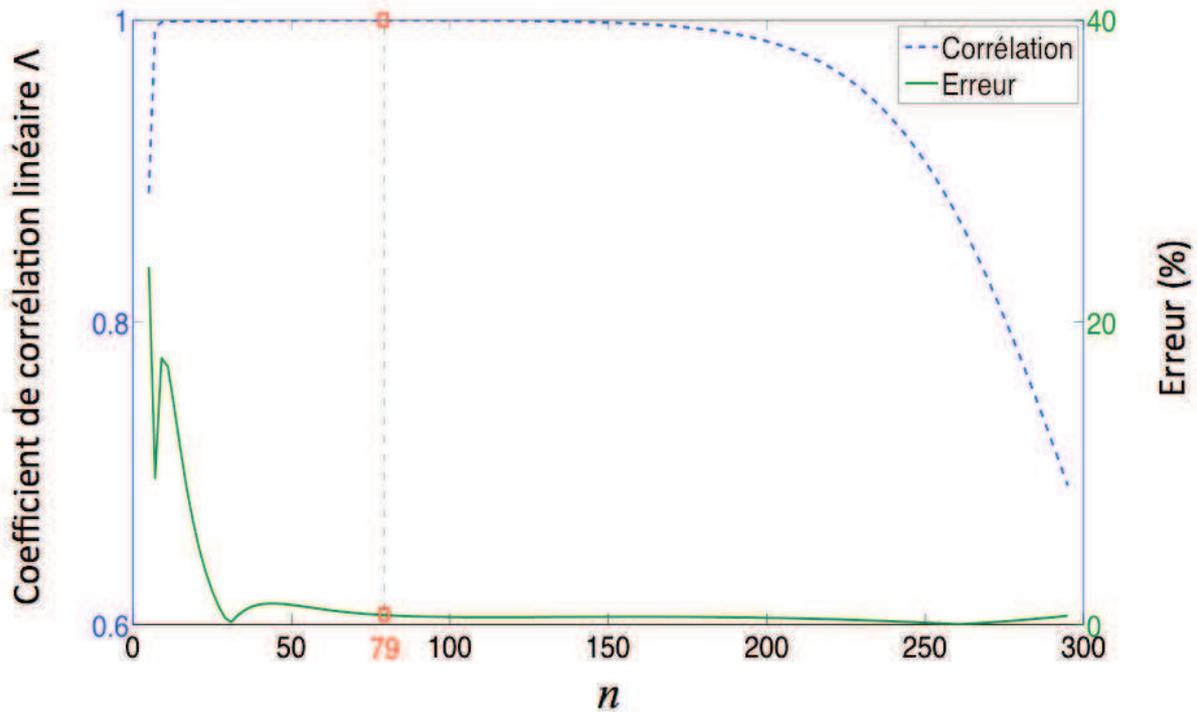


Figure 49 : Coefficient de corrélation linéaire des points P^k et erreur d'estimation en fonction de n pour le champ moyen 1D $\bar{T}(y_j, t_k)$

De même que précédemment, la valeur de Λ croît, se stabilise puis décroît (figure 49). L'évolution de la courbe d'erreur est globalement cohérente avec celle du coefficient de corrélation linéaire. La valeur optimale de n est choisie au milieu du pallier de la courbe des valeurs de Λ , soit $n_{opt} = 79$. Il vient $l_{opt} = 78\Delta_y$ qui donne $\hat{\alpha}_y = 8,49 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit une erreur d'estimation de **0,6%**.

Les valeurs n_{opt} déterminées pour les deux problèmes 1D sont différentes. Cela s'explique par le fait que le champ de température 2D (figure 36) est plus étendu dans la direction Y ($\alpha_y > \alpha_x$). Quand n augmente, les données de température prises en compte pour le calcul du coefficient de corrélation linéaire Λ sont moins bruitées sur le champ moyen 1D $\bar{T}(y_j, t_k)$ que sur le champ moyen 1D $\bar{T}(x_i, t_k)$. Cela se traduit par une valeur de Λ qui décroît à partir de $n \approx 160$ pour le problème 1D suivant Y (figure 49) tandis qu'elle décroît dès $n \approx 130$ pour le problème 1D suivant X (figure 48).

Plus globalement, les valeurs prises par le coefficient Λ sont plus élevées sur la figure 49 (entre 0,7 et 1) que sur la figure figure 48 (entre 0,3 et 1). Les valeurs relativement élevées du coefficient Λ pour le problème 1D suivant Y (figure 49) traduisent une bonne qualité globale des données $\bar{T}(y_j, t_k)$, ce qui explique la faible augmentation de l'erreur d'estimation lorsque n augmente.

En conclusion, il ressort que l'utilisation de la valeur du coefficient de corrélation linéaire des points P^k comme critère d'optimisation de la méthode LOWF a permis d'estimer les diffusivités thermiques α_x et α_y avec une bonne précision.

4.6. Conclusion

Une nouvelle méthode a été développée pour l'estimation de la diffusivité thermique de matériaux homogènes. La méthode LOWF présentée est basée sur l'abaissement de l'ordre de dérivation des termes du Laplacien impliqués dans l'équation de conduction de la chaleur. Cette approche a l'avantage d'améliorer la précision d'estimation par l'atténuation des effets du bruit. Ainsi, des tests numériques ont montré que la méthode LOWF permet une estimation plus robuste au bruit, en comparaison avec la méthode nodale. La méthode LOWF a été validée numériquement pour les cas de matériaux isotrope et anisotrope. Pour le cas anisotrope, son application est soumise à des conditions particulières si le choix est fait d'intégrer le champ de température suivant une dimension pour se ramener à un problème 1D. Ces conditions sont récapitulées dans le tableau 10.

		Conditions d'utilisation de la méthode LOWF	Paramètre estimé
Cas anisotrope	Problème 1D suivant X	<ul style="list-style-type: none"> • Champ unidimensionnel suivant X : $T(x,y,t) = T(x,t)$ • Flux nuls suivant Y : $\left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \right _{y=\pm L_y/2} = 0$ • Flux égaux suivant Y : $\left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \right _{y=L_y/2} = \left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \right _{y=-L_y/2}$ 	α_x
	Problème 1D suivant Y	<ul style="list-style-type: none"> • Champ unidimensionnel suivant Y : $T(x,y,t) = T(y,t)$ • Flux nuls suivant X : $\left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} \right _{x=\pm L_x/2} = 0$ • Flux égaux suivant X : $\left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} \right _{x=L_x/2} = \left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} \right _{x=-L_x/2}$ 	α_y

Tableau 10 : Conditions d'utilisation de la méthode LOWF pour le cas anisotrope

De manière plus générale, le tableau 11 compare les caractéristiques de la méthode LOWF avec celles des méthodes de caractérisation thermique nodale et modale (décrites en annexe C).

		Inconvénients	Avantages
Nodale		<ul style="list-style-type: none"> • Sensible au bruit • Limitée aux milieux peu épais (modèle 2D transitoire) • Utilise une hypothèse de bruit non corrélé spatialement 	<ul style="list-style-type: none"> • Permet une cartographie de propriétés • Conserve la richesse de l'information du fait d'un signal non réduit • Méthode applicable indépendamment du mode d'excitation (Dirac, rampe, créneau, etc)
Modale	Transformées intégrales	<ul style="list-style-type: none"> • Exploite partiellement l'information du fait de la troncature modale du signal • Nécessité de connaître les solutions analytiques des transformées (Fourier, Laplace) • Méthode généralement limitée à une excitation thermique en Dirac 	<ul style="list-style-type: none"> • Peu sensible au bruit car les signaux sont moyennés • Réduit la quantité d'information à traiter
	KLD/SVD	<ul style="list-style-type: none"> • Exploite partiellement l'information du fait de la troncature modale du signal • Limitée aux milieux peu épais (modèle 2D transitoire) • Utilise une hypothèse de bruit non corrélé spatialement 	<ul style="list-style-type: none"> • Peu sensible au bruit car les composantes les plus bruitées du signal sont tronquées • Réduit la quantité d'information à traiter • Méthode applicable indépendamment du mode d'excitation (Dirac, rampe, créneau, etc)
LOWF		<ul style="list-style-type: none"> • Limitée aux milieux peu épais (modèle 2D transitoire) 	<ul style="list-style-type: none"> • Peu sensible au bruit du fait de l'abaissement de l'ordre de dérivation des dérivées spatiales du signal • Conserve la richesse de l'information du fait d'un signal non réduit • Méthode applicable indépendamment du mode d'excitation (Dirac, rampe, créneau, etc)

Tableau 11 : Caractéristiques des méthodes nodale, modale et LOWF

Par rapport aux autres méthodes de caractérisation thermique, la méthode LOWF présente deux avantages majeurs : d'une part, elle est plus robuste que la méthode nodale et d'autre part, elle exploite toute l'information contenue dans le signal thermique, à la différence des méthodes modales qui utilisent une partie de cette information pour l'estimation de la diffusivité thermique.

Dans ce chapitre, la méthode LOWF a été validée à partir de modèles numériques 2D. Les champs de température simulés sont purement bidimensionnels et correspondent au cas idéal pour une application de la méthode LOWF. Dans la suite de ce travail, la méthode LOWF est appliquée à des champs de température de plaques minces afin de prendre en compte une faible diffusion dans l'épaisseur. Les champs de température considérés sont quasi bidimensionnels. Une application de la méthode LOWF à la sonothermographie est présentée.

Chapitre 5 :

Application de la méthode LOWF à la caractérisation thermique de plaques minces

La méthode LOWF a été développée en vue d'une application à la sonothermographie mais reste théoriquement applicable à des problèmes thermiques plus généraux. De ce fait, deux cas de problèmes thermiques sont traités dans ce chapitre. Dans le premier cas, une plaque mince en Titane est excitée thermiquement avec une diode laser (section 5.1). Il s'agit ici d'appliquer la méthode LOWF à un problème thermique classique. Dans le second cas, une plaque mince en PVC est excitée thermiquement par un champ de sources volumiques de chaleur induit par dissipation viscoélastique (section 5.2). Il s'agit ici d'appliquer la méthode LOWF à un problème de sonothermographie. Des résultats expérimentaux sont présentés pour ces deux problèmes thermiques. Ici, le choix de plaques minces permet de se rapprocher de l'hypothèse de transferts thermiques quasi bidimensionnels utilisée dans le formalisme de la méthode LOWF.

5.1. Application de la méthode LOWF à un champ de température généré par excitation thermique avec une diode laser

Cette section présente une application de la méthode LOWF à un problème thermique classique impliquant une plaque mince excitée thermiquement avec une diode laser. La méthode LOWF est appliquée aux données de température enregistrées par thermographie infrarouge et la diffusivité thermique de la plaque est estimée. Le dispositif expérimental est décrit et le processus d'estimation est détaillé.

5.1.1. Description du dispositif expérimental

Une plaque mince homogène en Titane de dimensions $50 \times 5 \times 0,5 \text{ mm}^3$ est utilisée pour l'essai. Une impulsion de chaleur d'une durée de 50 ms est appliquée au centre de la plaque avec une diode laser. L'évolution du champ de température est enregistrée pendant la phase de relaxation thermique avec une caméra infrarouge FLIR SC-7000 sous forme d'images de taille 100 pixel x 35 pixel. Les capteurs infrarouges de la caméra sont régulièrement espacés ($\Delta_x = \Delta_y = \Delta$) et les images couvrent toute la largeur de la plaque, soit $\Delta = 143 \mu\text{m}$. La fréquence d'acquisition des images est de 40 Hz, soit un pas de temps $\Delta t = 25 \text{ ms}$. La figure 50 présente le dispositif expérimental.

La valeur de diffusivité thermique $\alpha = 9,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ fournie dans la littérature pour le Titane [55] est considérée comme la diffusivité thermique nominale de la plaque. La diffusion de la chaleur est relativement rapide dans les matériaux métalliques comme que le Titane. La phase de relaxation est brève et l'équilibre thermique avec le milieu ambiant est rapidement atteint. Pour cette raison, l'acquisition des images est réalisée sur une courte durée de 2 s correspondant à 80 images.

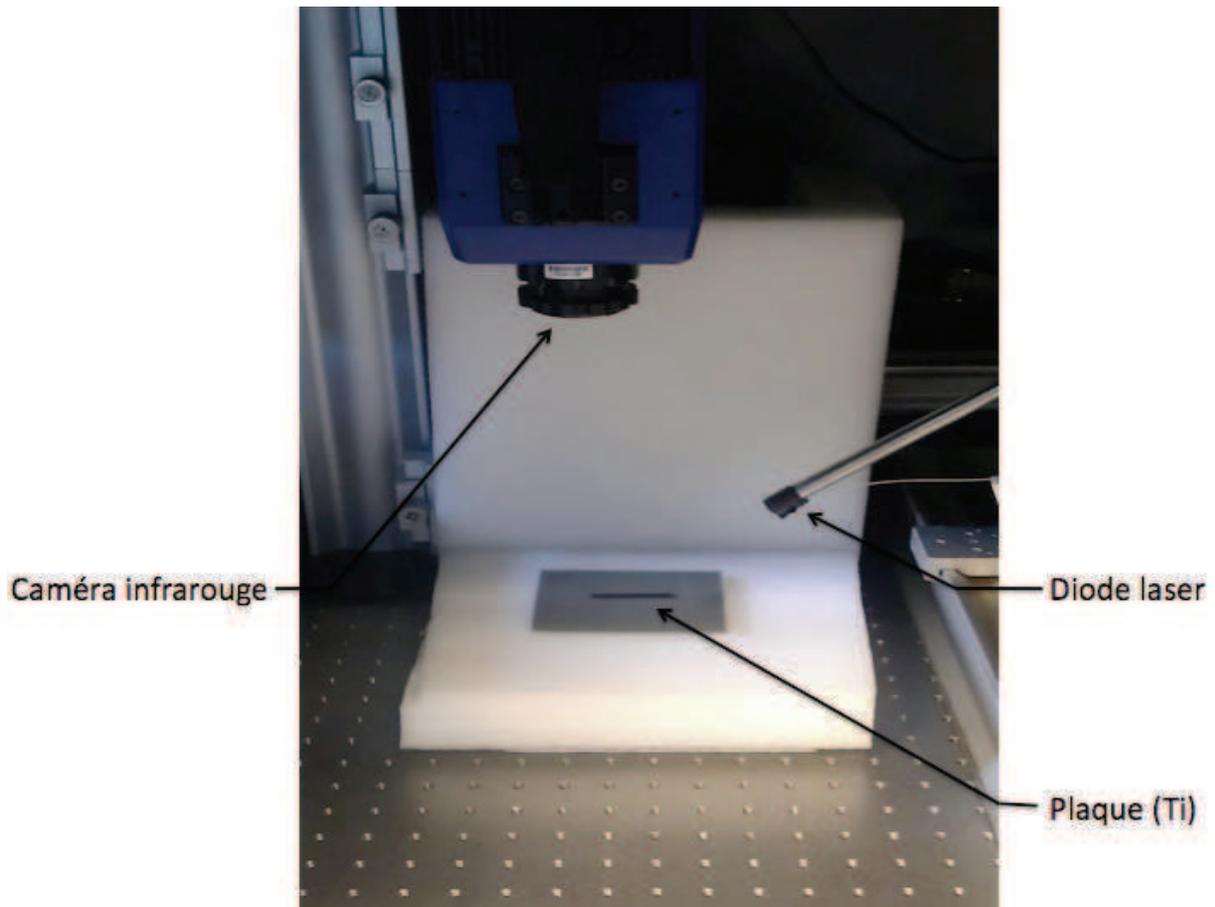


Figure 50 : Dispositif expérimental : excitation thermique d'une plaque en Titane avec une diode laser et enregistrement du champ de température avec une caméra infrarouge

Les données de température enregistrées avec la caméra infrarouge sont entachées d'un bruit de mesure. Conformément à la taille et au nombre des images enregistrées, ces données sont notées $\tilde{T}(x_i, y_j, t_k)$, avec $i \in \{1, 2, \dots, 100\}$, $j \in \{1, 2, \dots, 35\}$ et $k \in \{1, 2, \dots, 80\}$.

5.1.2. Estimation de la diffusivité thermique

Après l'excitation thermique de la plaque avec la diode laser, le champ de température amorce une phase de relaxation thermique. Soit t_0 l'instant marquant le début de la relaxation thermique. La figure 51 montre la cartographie en Digital Level (DL) du champ de température $\tilde{T}(x_i, y_j, t_k)$ aux instants $t_1 = 1\Delta t$, $t_2 = 2\Delta t$ et $t_5 = 5\Delta t$. Le Digital Level est l'unité dans laquelle la caméra enregistre les données. Cette unité mesure la radiation thermique émise par la surface de la plaque. La courbe d'étalonnage de la lentille de la caméra infrarouge permet de considérer le Digital Level comme une unité proportionnelle à la température. Dans la suite, le champ de température est représenté en DL.

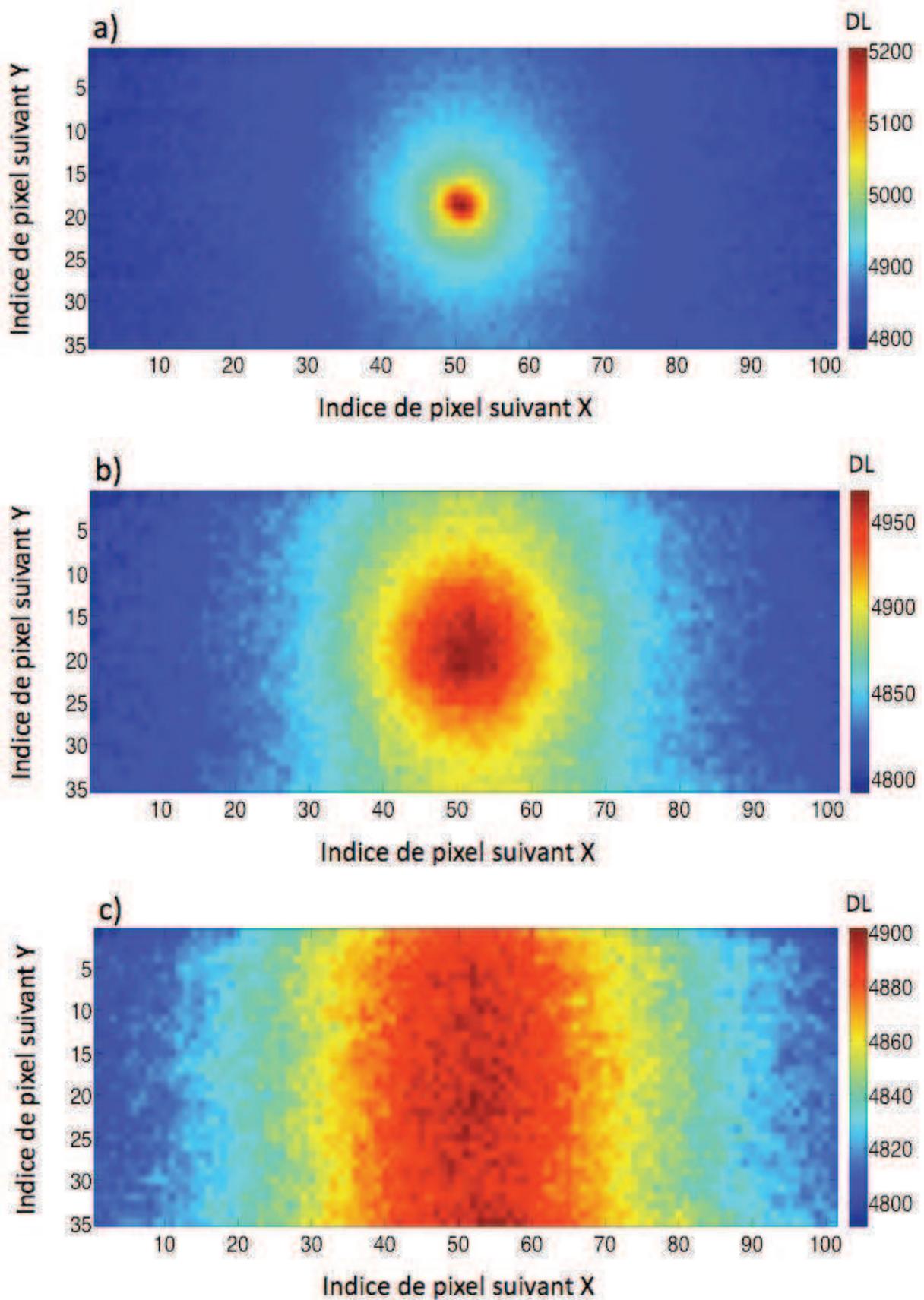


Figure 51 Cartographie du champ de température $\tilde{T}(x_i, y_j, t_k)$ (en DL) de la plaque en Titane réalisée avec la caméra infrarouge à $t_1 = 1\Delta t$ (a), $t_2 = 2\Delta t$ (b) et $t_5 = 5\Delta t$ (c)

À l'instant t_1 (figure 51a), le champ de température présente un comportement 3D : la diffusion de la chaleur s'effectue suivant les trois directions X, Y et Z de la plaque. Du fait de la faible épaisseur de la plaque, le temps de diffusion de la chaleur suivant la direction Z est court. En conséquence, le champ de température présente rapidement un comportement 2D : la diffusion de la chaleur s'effectue dans le plan XY. À l'instant t_2 (figure 51b), le champ de température a atteint les bords de la plaque suivant la direction Y et subit l'influence des conditions aux limites suivant cette direction. Ici, le comportement 2D est très court. En effet, à l'instant t_5 (figure 51c), les isothermes du champ de température sont quasiment perpendiculaires à la direction X. Cela traduit la fin de la diffusion suivant la direction Y. Dès lors, le champ de température présente un comportement 1D sur une longue plage de temps : la diffusion de la chaleur s'effectue suivant la direction X.

Le caractère unidimensionnel du champ de température observé à partir de l'instant t_5 satisfait l'une des conditions d'utilisation de l'approche 1D de la méthode LOWF rappelées dans le tableau 10. Ici, l'approche 1D de la méthode LOWF permet d'estimer la diffusivité thermique de la plaque suivant la direction X uniquement. Cette diffusivité est notée α_x dans la suite. Par application de l'approche 1D de la méthode LOWF, le champ de température $\tilde{T}(x_i, y_j, t_k)$ est intégré suivant la direction Y afin d'obtenir le champ de température 1D moyen orienté suivant X et noté $\bar{T}(x_i, t_k)$. La figure 52 présente le profil du champ de température moyen $\bar{T}(x_i, t_k)$ (en DL) aux instants $t_1 = 1\Delta t$, $t_{10} = 10\Delta t$ et $t_{20} = 20\Delta t$.

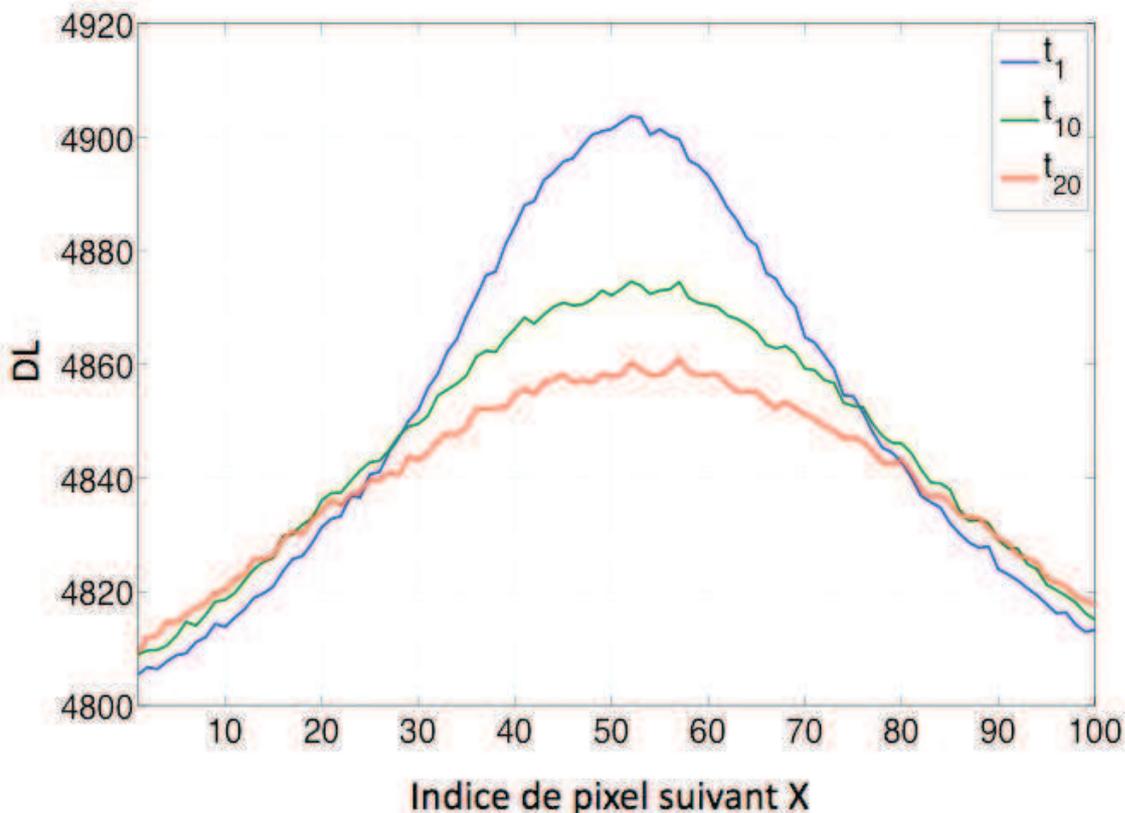


Figure 52 : Profil du champ de température 1D moyen $\bar{T}(x_i, t_k)$ (en DL) aux instants $t_1 = 1\Delta t$, $t_{10} = 10\Delta t$ et $t_{20} = 20\Delta t$

Pour estimer la diffusivité thermique α_x à partir du champ 1D moyen $\bar{T}(x_i, t_k)$, le critère d'optimisation de la méthode LOWF décrit à la section 4.5.2 peut être utilisé.

Conformément à ce critère, un sous-domaine 1D noté $\overline{\Omega}_x$, centré sur le point de température maximale ($x_0 = 50$) du champ $\overline{T}(x_i, t_k)$ (figure 52) et de taille variable $l_x = (n - 1)\Delta_x$ est considéré. Ici, n correspond aux 100 pixels de la caméra suivant la direction X (figure 52). La méthode LOWF est appliquée en considérant différentes tailles du sous-domaine $\overline{\Omega}_x$, avec n allant de 6 à 100. Pour chaque valeur de n , le coefficient de corrélation linéaire Λ des points P^k est calculé. La figure 53 présente la valeur du coefficient de corrélation linéaire Λ en fonction de n .

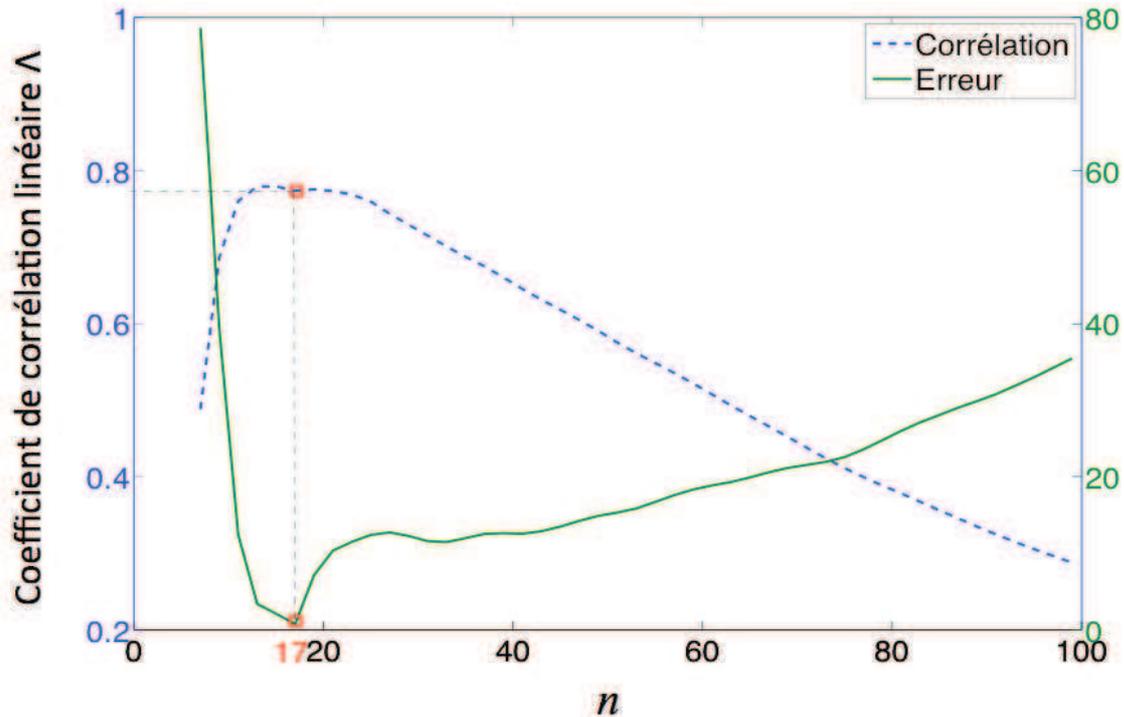


Figure 53 : Coefficient de corrélation linéaire Λ du nuage de points P^k en fonction de n

La figure 53 permet de définir une taille optimale de $\overline{\Omega}_x$ par $n_{opt} = 17$, soit $l_{opt} = 16\Delta_x$ correspondant à la valeur $\Lambda = 0,77$. Par suite, le sous-domaine $\overline{\Omega}_x$ étant centré en $x_0 = 50$, la méthode LOWF est appliquée aux données $\overline{T}(x_i, t_k)$ avec $i \in \{42, \dots, 50, \dots, 58\}$ pour estimer la diffusivité thermique α_x de la plaque mince en Titane. Pour rappel, la fonction test utilisée est définie par $f(x) = (1 - \tilde{x}^2)^2$, avec $\tilde{x} = 2(x - x_0)/l_x$. La figure 54 représente le nuage de points P^k et la droite des moindres carrés (D) calculés.

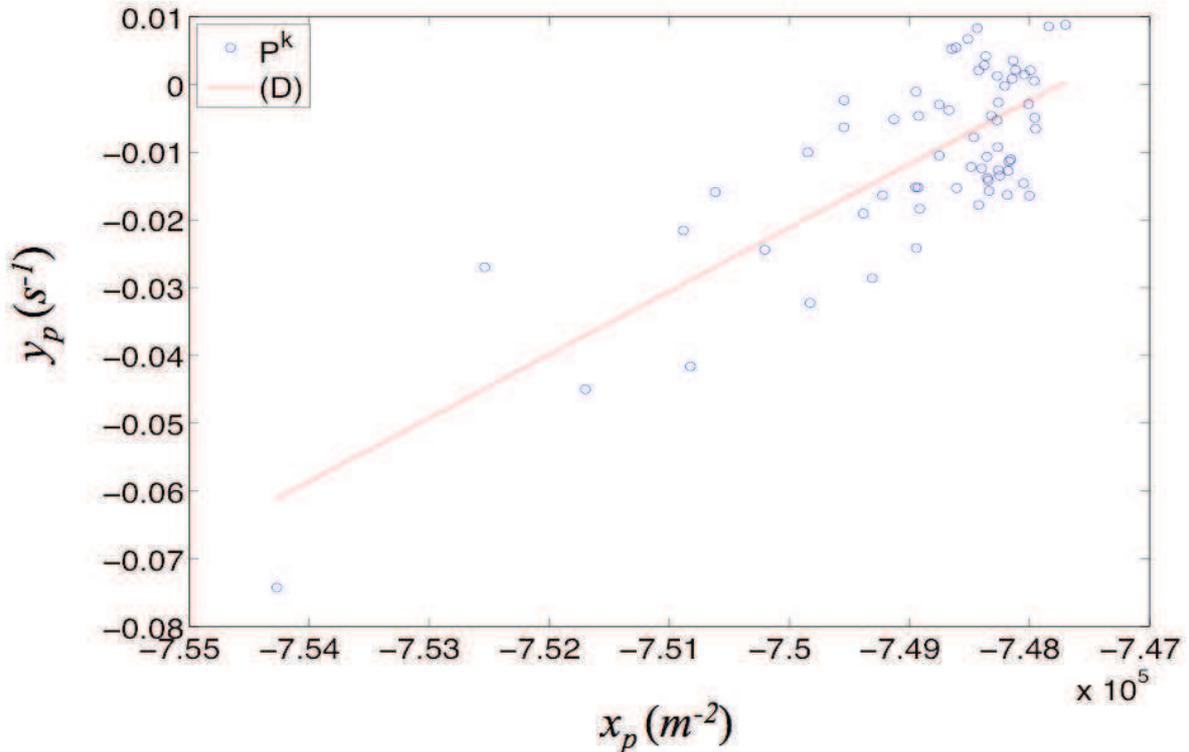


Figure 54: Nuage de points P^k et droite (D) pour le sous-domaine $\bar{\Omega}_x$ de centre $x_0 = 50$ et de taille $l_{opt} = 16\Delta_x$

La pente de la droite (D) fournit la valeur estimée $\hat{\alpha}_x = 9,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit une erreur d'estimation de **0,8%**. La diffusivité thermique de la plaque en Titane est donc estimée avec une bonne précision suivant la direction X. Ce résultat permet de valider l'efficacité de la méthode LOWF pour un problème de thermique général. Dans la suite, la méthode LOWF est appliquée à la sonothermographie.

5.2. Application de la méthode LOWF à un champ de température généré par excitation mécanique : cas de la sonothermographie

Cette section présente une application de la méthode LOWF à la sonothermographie. D'abord, le problème direct de la sonothermographie est résolu pour un modèle Γ de plaque mince. Une application de la méthode LOWF aux données de température simulées permet d'analyser la sensibilité de la méthode par rapport à la taille du sous-domaine et à l'épaisseur de la plaque. Par la suite, la méthode LOWF est appliquée à des données de température mesurées par thermographie infrarouge.

5.2.1. Application à des données simulées

Le problème direct de la sonothermographie est résolu numériquement pour une plaque mince à partir du modèle par éléments finis validé précédemment dans le chapitre 3. La méthode

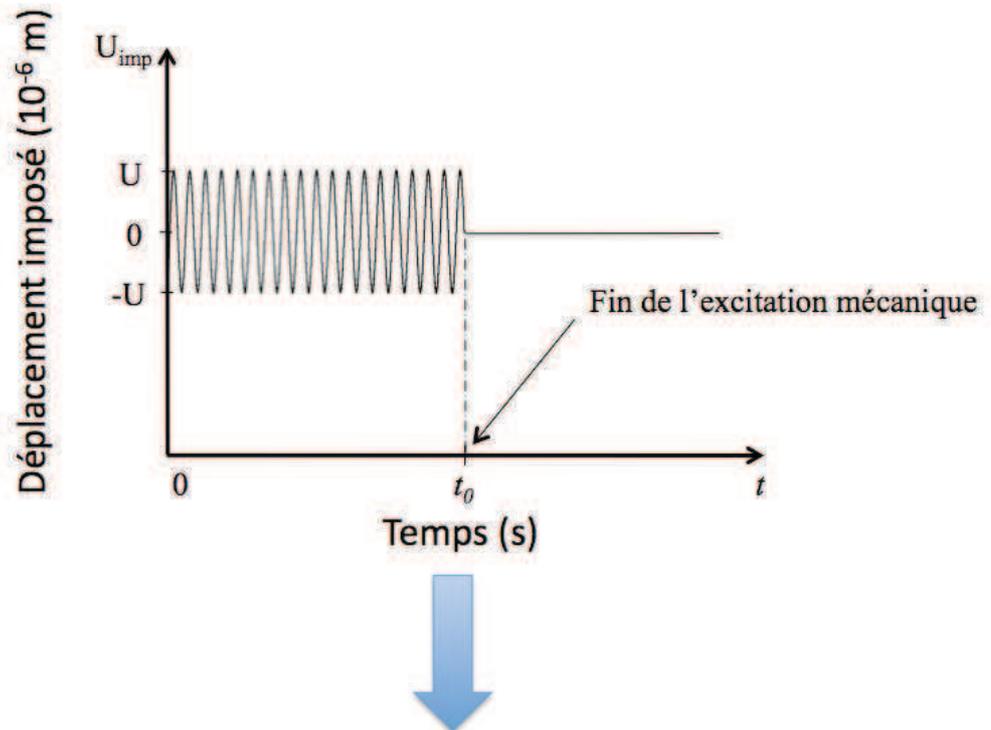
LOWF est appliquée au champ de température simulé et la diffusivité thermique du modèle est estimée. Le modèle numérique est décrit et les résultats numériques sont discutés.

5.2.1.1. Description du modèle numérique

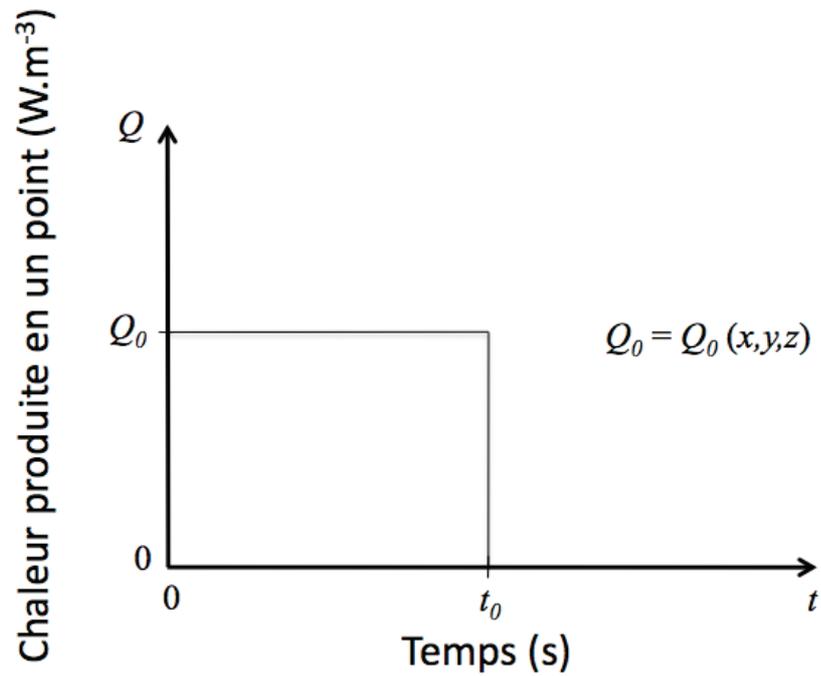
Une plaque homogène isotrope ($\alpha_x = \alpha_y = \alpha$) de dimensions $115 \times 20 \times 1 \text{ mm}^3$ et de diffusivité thermique $\alpha = 8,55 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ est modélisée. Les propriétés viscoélastiques utilisées comme données d'entrée du modèle sont celles du PVC fournies dans le tableau 4. Une condition aux limites mécanique de type déplacement sinusoïdal est imposée sur une face de la plaque conformément à la figure 2 pour simuler une excitation mécanique. Le déplacement imposé est de fréquence 30 kHz et d'amplitude 300 nm. Une condition aux limites mécanique de type contrainte nulle est imposée sur les autres faces de la plaque. Le déplacement sinusoïdal est imposé de l'instant initial $t = 0 \text{ s}$ à l'instant $t_0 = 10 \text{ s}$ (figure 55a). Dans cet intervalle de temps, les champs de contrainte et de déformation induits dans la plaque génèrent un champ de sources de chaleur par dissipation viscoélastique. La figure 55b et la figure 55c montrent la forme de la réponse thermique induite en un point source par l'excitation mécanique.

L'excitation thermique induite en chaque point source présente une forme en créneau (figure 55b). La quantité de chaleur produite en un point source dépend de sa position. La production de chaleur cesse lorsque l'excitation mécanique s'arrête. Ainsi, une phase de relaxation thermique est amorcée à t_0 (figure 55c).

a) Excitation mécanique



b) Dissipation viscoélastique



c) Elévation de température

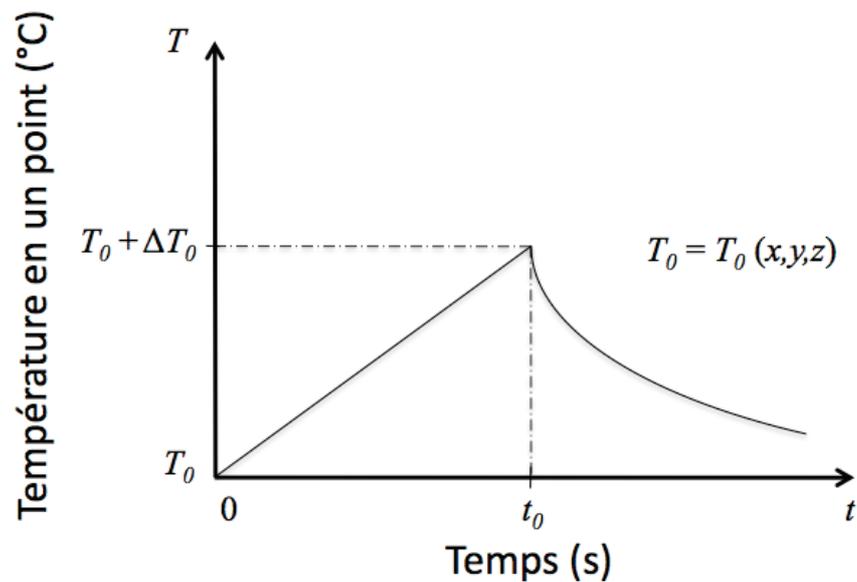


Figure 55 : Représentations schématiques : déplacement imposé sur la face de la plaque (a), production de chaleur (b) et variation de température induites en un point source (c)

La figure 56 présente la cartographie du champ de dissipation viscoélastique induit dans la plaque par le déplacement sinusoïdal imposé.

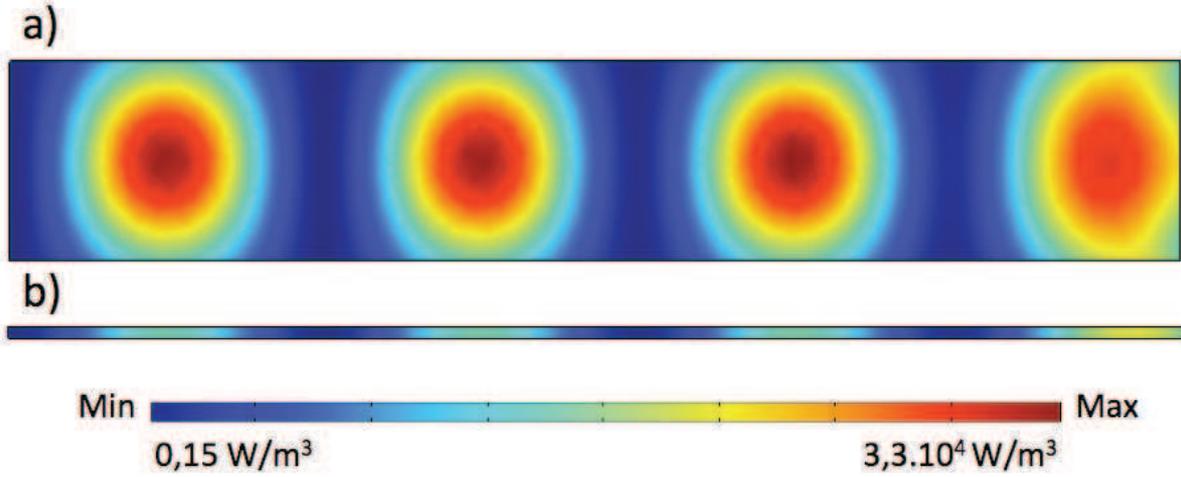


Figure 56 : Cartographie du champ de dissipation viscoélastique : face supérieure (a), face latérale (b),

Le champ de dissipation viscoélastique de la figure 56 est utilisé comme terme source dans l'équation de conduction de la chaleur pour calculer le champ de température transitoire de la plaque. La condition initiale et les conditions aux limites thermiques du modèle sont définies par :

$$T(x, y, z, t = 0) = T_0(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} -\lambda_x \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow -L_x/2} &= hT(-L_x/2, y, z, t) ; & -\lambda_x \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow L_x/2} &= -hT(L_x/2, y, z, t) \\ -\lambda_y \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow -L_y/2} &= hT(x, -L_y/2, z, t) ; & -\lambda_y \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow L_y/2} &= -hT(x, L_y/2, z, t) \\ -\lambda_z \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow -e/2} &= hT(x, y, -e/2, t) ; & -\lambda_z \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow e/2} &= -hT(x, y, e/2, t) \end{aligned}$$

La température de la plaque est uniformément nulle à l'instant initial, soit $T_0(x, y, z) = 0$. Des pertes thermiques sont simulées sur chaque face avec un coefficient d'échange $h = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$. Le champ de température de la plaque est calculé sur l'intervalle $[0 \text{ s}, 70 \text{ s}]$, avec un pas de temps $\Delta t = 1 \text{ s}$.

Le formalisme, la méthode LOWF a été développée dans le chapitre 4 en se basant sur l'équation de conduction de la chaleur sans terme source. Conformément à ce formalisme, la méthode LOWF est appliquée aux données de température simulées dans la phase de relaxation thermique, soit à partir de l'instant $t_0 = 10 \text{ s}$. La figure 57 présente la cartographie du champ de température calculée à t_0 .

Le sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$ choisi pour l'estimation locale de la diffusivité thermique de la plaque par la méthode LOWF est également représenté. Il est de forme carrée et centré sur un spot thermique.

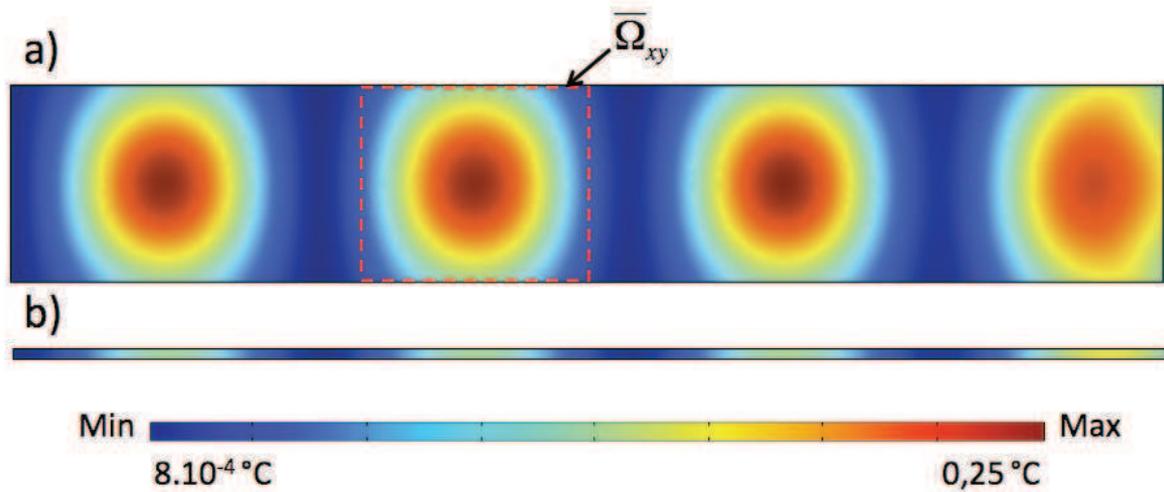


Figure 57 : Cartographie du champ de température simulé à l'instant $t_0 = 10$ s : face supérieure (a), face latérale (b) et sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$ centré sur un spot thermique et de taille $100 \Delta_x \times 100 \Delta_y$

Dans la suite, la méthode LOWF est appliquée au champ de température simulé et la diffusivité thermique du modèle est estimée. La sensibilité de la méthode LOWF est étudiée par rapport à la taille du sous-domaine centré $\overline{\Omega}_{xy}$ et à l'épaisseur de la plaque.

5.2.1.2. Sensibilité par rapport à la taille du sous-domaine

L'influence de la taille du sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$ sur la précision d'estimation est étudiée. Dans ce cadre, la méthode LOWF est appliquée au champ de température simulé et la diffusivité thermique de la plaque est estimée en considérant différentes tailles du sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$. L'épaisseur de la plaque est 1 mm. Les données ne sont pas bruitées, soit $R_{B/S} = 0\%$. La figure 58 montre le nuage de points P^k et la droite des moindres carrés (D) calculés pour le sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$ centré sur le spot thermique et de taille $100 \Delta_x \times 100 \Delta_y$ (figure 57a).

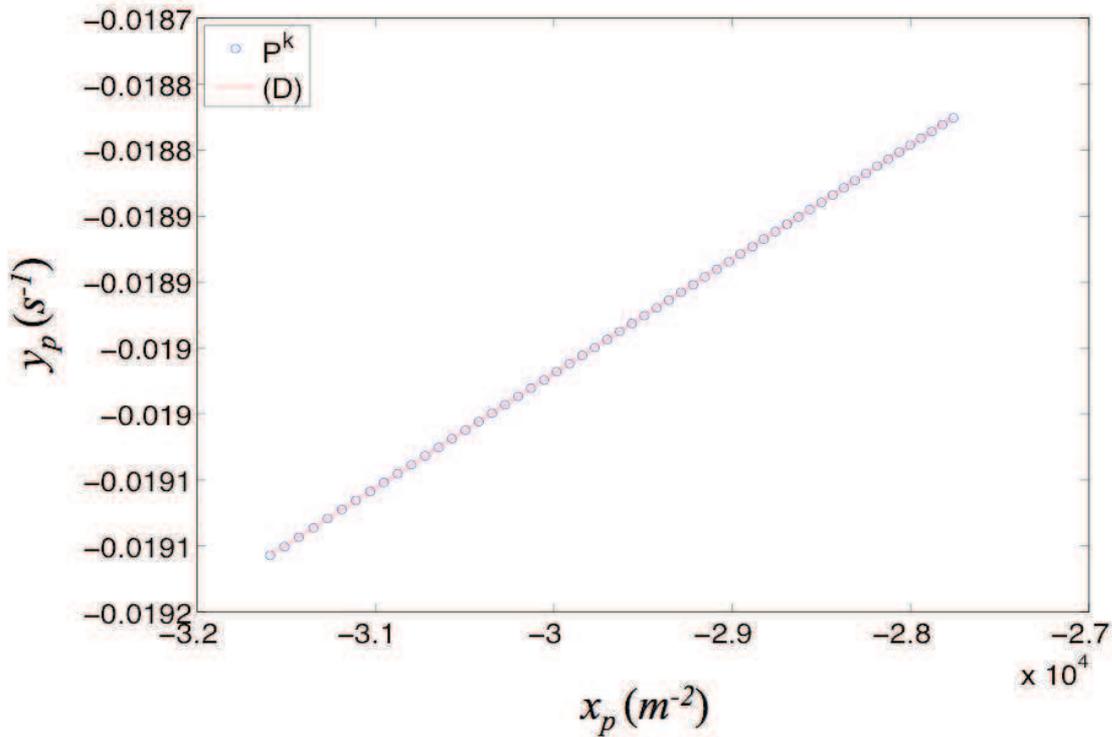


Figure 58 : Nuage de points P^k et droite (D) calculés pour le sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$ centré sur le spot thermique et de taille $100 \Delta_x \times 100 \Delta_y$

En l'absence de bruit, les points P^k apparaissent parfaitement alignés. Cet alignement est confirmé par un calcul du coefficient de corrélation linéaire des points P^k qui donne $\Lambda = 1$. La pente de la droite (D) donne $\hat{\alpha} = 8,66 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit une erreur d'estimation de **1,3%**. Par suite, la diffusivité thermique est estimée en considérant différentes tailles du sous-domaine centré $\overline{\Omega}_{xy}$. La figure 59 montre l'évolution de l'erreur d'estimation en fonction de la taille du sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$.

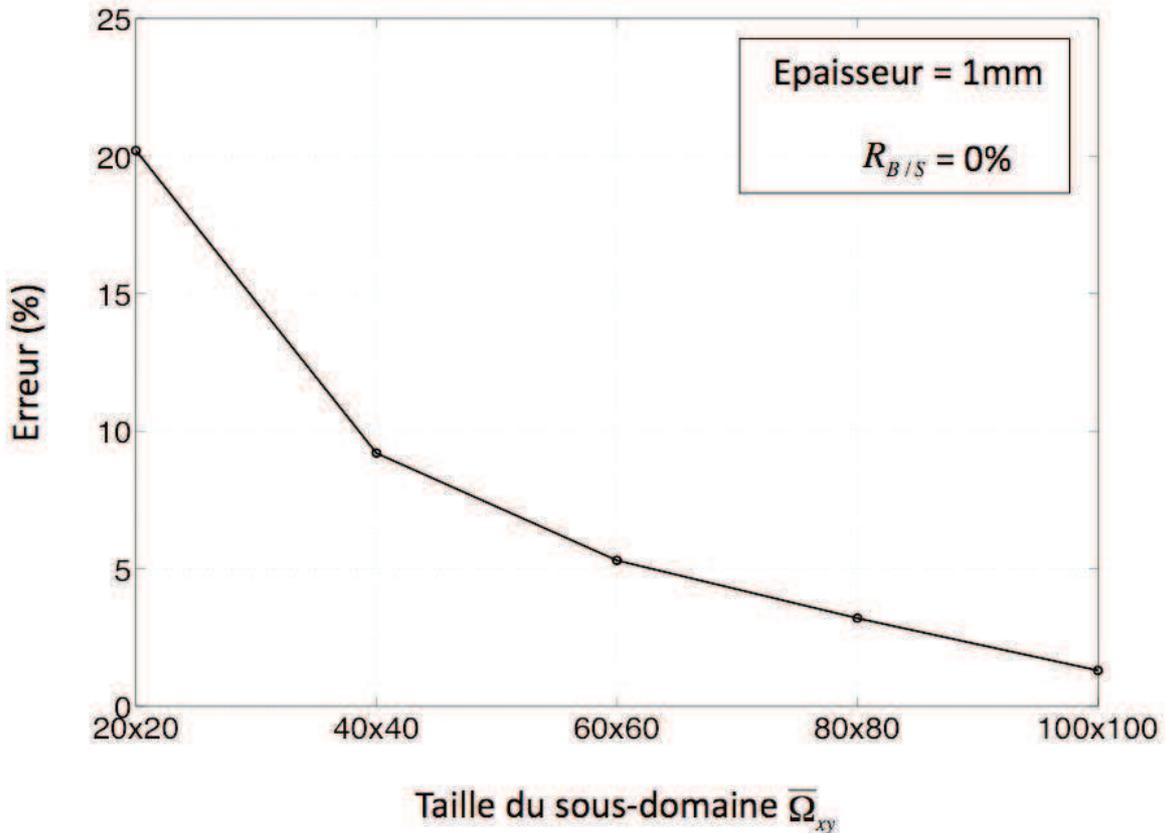


Figure 59 : Erreur d'estimation pour différentes tailles du sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$ centré sur le spot thermique

Le tableau 12 présente les valeurs de diffusivité thermique estimées, l'erreur d'estimation et le coefficient de corrélation linéaire des points P^k calculés pour les différentes tailles du sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$ considérées.

Taille du sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$	Diffusivité thermique estimée $\hat{\alpha}$ ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)	Erreur d'estimation (%)	Coefficient de corrélation linéaire Λ
100 Δ_x x 100 Δ_y	$8,66 \cdot 10^{-8}$	1,3	1
80 Δ_x x 80 Δ_y	$8,82 \cdot 10^{-8}$	3,2	1
60 Δ_x x 60 Δ_y	$9 \cdot 10^{-8}$	5,3	1
40 Δ_x x 40 Δ_y	$9,33 \cdot 10^{-8}$	9,2	1
20 Δ_x x 20 Δ_y	$1,03 \cdot 10^{-7}$	20,2	1

Tableau 12 : Résultats obtenus pour différentes tailles du sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$ centré sur le spot thermique en considérant une plaque d'épaisseur 1 mm et un niveau de bruit $R_{B/S} = 0\%$

Les résultats du

tableau 12 montrent qu'en l'absence de bruit, les points P^k sont parfaitement alignés quelle que soit la taille du sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$ centré sur le spot thermique. Cependant, l'erreur d'estimation croît avec la diminution de la taille du sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$. Cela s'explique par les

faibles variations spatiales et temporelles du champ de température près du centre du spot thermique. L'estimation de la diffusivité thermique est de ce fait moins précise pour les petites tailles du sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$. Il convient donc de choisir une taille du sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$ suffisamment grande pour être sensible aux variations spatiales et temporelles du champ de température.

5.2.1.3. Sensibilité par rapport à l'épaisseur de la plaque

Dans cette section, l'influence de l'épaisseur de la plaque sur la précision d'estimation est étudiée. Dans ce cadre, le champ de température est simulé pour différentes épaisseurs de plaque et la méthode LOWF est appliquée pour l'estimation de la diffusivité thermique. Le sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$ considéré est de taille fixe $100 \Delta_x \times 100 \Delta_y$. Les données ne sont pas bruitées, soit $R_{B/S} = 0\%$. La figure 60 présente l'erreur d'estimation en fonction de l'épaisseur de la plaque.

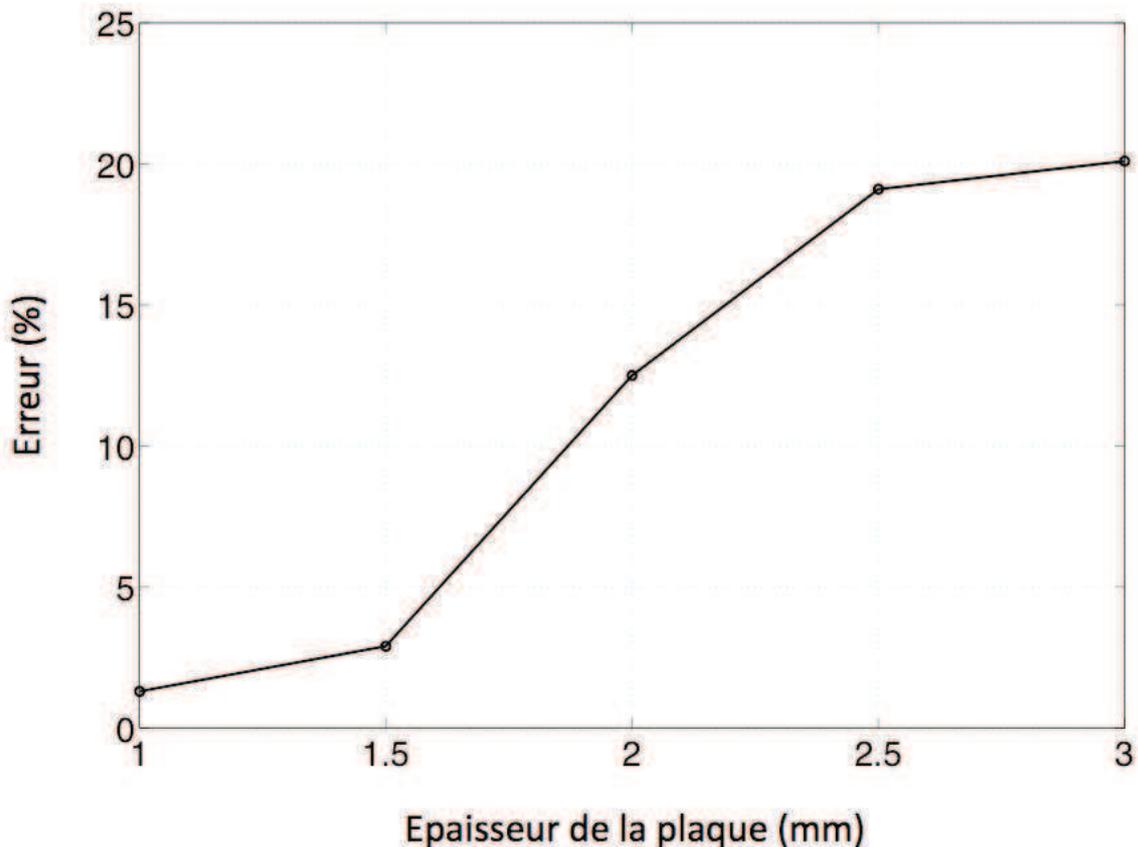


Figure 60 : Erreur d'estimation pour différentes épaisseurs de la plaque

Le tableau 13 présente les valeurs de diffusivité thermique estimées et l'erreur d'estimation pour les différentes épaisseurs de plaques considérées. En l'absence de bruit, l'erreur d'estimation croît avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque. Cela s'explique par le fait que l'hypothèse de transferts thermiques quasi bidimensionnels utilisée dans le formalisme de la méthode LOWF se vérifie de moins en moins lorsque l'épaisseur de la plaque augmente.

Épaisseur de la plaque (mm)	Diffusivité thermique estimée $\hat{\alpha}$ (m ² ·s ⁻¹)	Erreur d'estimation (%)
1	$8,66 \cdot 10^{-8}$	1,3
1,5	$8,8 \cdot 10^{-8}$	2,9
2	$9,62 \cdot 10^{-8}$	12,5
2,5	$6,91 \cdot 10^{-8}$	19,1
3	$6,83 \cdot 10^{-8}$	20,1

Tableau 13 : Résultats obtenus pour différentes épaisseurs de la plaque en considérant un sous-domaine Ω_{xy} de taille fixe $100 \Delta_x \times 100 \Delta_y$ et un niveau de bruit $R_{B/S} = 0\%$

Pour le cas de plaques relativement épaisses, une durée d'excitation t_0 (figure 55) plus longue apparaît comme un moyen de réduire le gradient de température dans l'épaisseur afin d'améliorer la précision de la méthode LOWF.

5.2.1.4. Synthèse

La méthode LOWF a été appliquée à des données de température simulées à partir d'un modèle \hat{F} de plaque mince isotrope résolvant le problème direct de la sonothermographie. Le champ de température a été simulé en prenant en compte les pertes thermiques avec un coefficient d'échange h non nul. Les résultats numériques présentés montrent l'efficacité de la méthode LOWF pour la caractérisation thermique de matériaux homogènes à partir d'un champ de température généré par des sources volumiques de chaleur. La méthode LOWF apparaît de ce fait adaptée à la caractérisation thermique de matériaux par sonothermographie. Il convient cependant de limiter son application aux corps minces afin de vérifier l'hypothèse de transferts thermiques quasi bidimensionnels.

5.2.2. Application à des données expérimentales

Dans cette section, la méthode LOWF est appliquée en conditions expérimentales à des données de température mesurées par thermographie infrarouge.

5.2.2.1. Description du dispositif expérimental

Une plaque mince homogène isotrope en PVC de dimensions $115 \times 20 \times 1 \text{ mm}^3$ est utilisée pour l'essai. La valeur de diffusivité thermique $\alpha = 1,07 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ retrouvée dans la littérature pour le PVC [55] est considérée comme la diffusivité thermique nominale de la plaque. La plaque est excitée mécaniquement avec une sonotrode qui impose un déplacement de 500 nm à une fréquence de 34 kHz. Le déplacement sinusoïdal est imposé avec la sonotrode de l'instant initial $t = 0 \text{ s}$ à l'instant $t_0 = 10 \text{ s}$ (figure 55a). La figure 61 présente le dispositif expérimental.

À l'instant t_0 , le champ de température de la plaque amorce une phase de relaxation thermique. L'évolution du champ de température est enregistrée à partir de t_0 avec une caméra infrarouge FLIR SC-7000 sous la forme d'images de taille 320 pixel x 145 pixel. La fréquence d'acquisition des images est de 10 Hz, soit un pas de temps $\Delta t = 100 \text{ ms}$. Les 120

premières images sont prises en compte. Les capteurs infrarouges de la caméra sont régulièrement espacés ($\Delta_x = \Delta_y = \Delta$) et les images couvrent toute la largeur de la plaque, soit $\Delta = 138 \mu\text{m}$. Les caractéristiques techniques de la sonotrode et de la caméra sont détaillées dans l'annexe B.

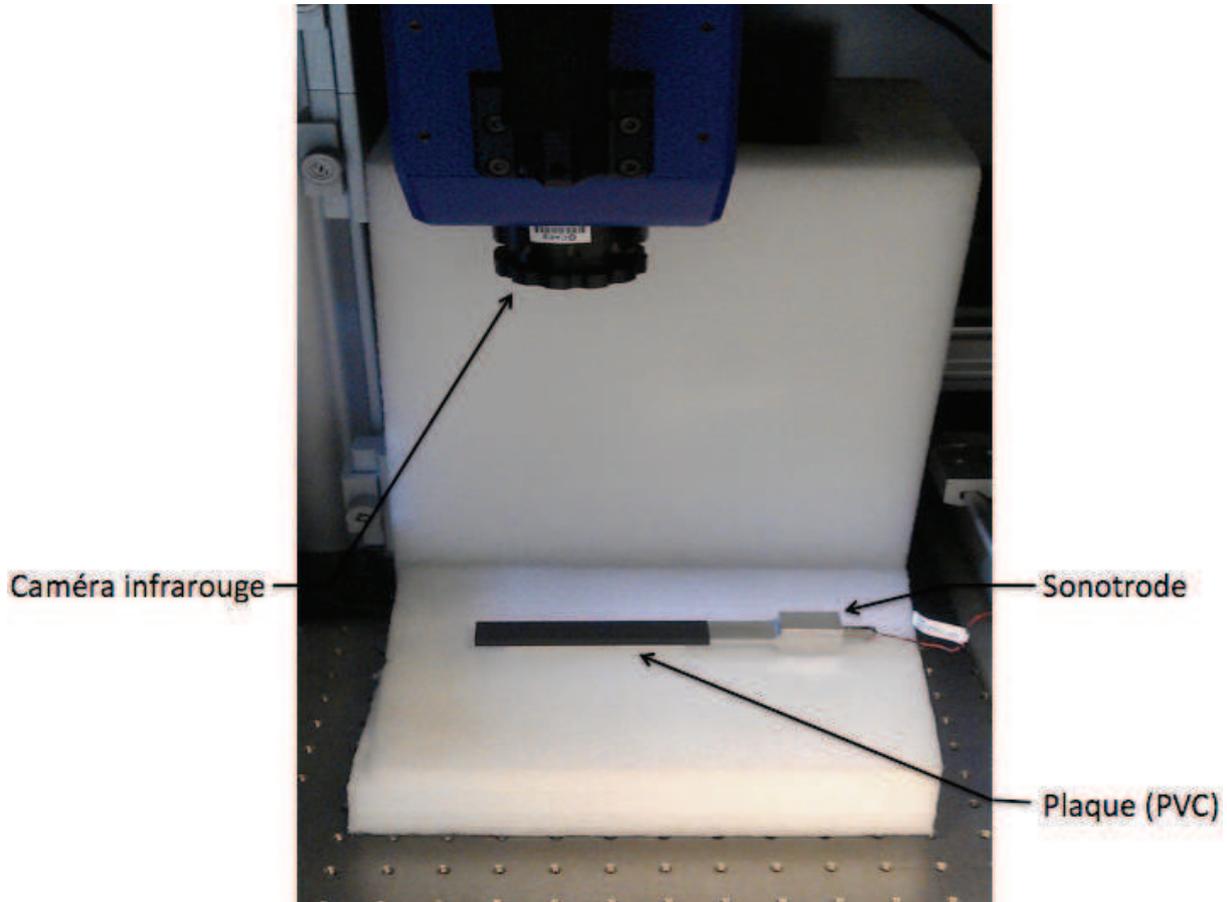


Figure 61 : Dispositif expérimental : excitation mécanique d'une plaque en PVC avec une sonotrode et enregistrement du champ de température induit par dissipation viscoélastique avec une caméra infrarouge

Les données brutes enregistrées sont stockées sous la forme d'une matrice notée $\tilde{T}(x_i, y_j, t_k)$, avec $i \in \{1, 2, \dots, 320\}$, $j \in \{1, 2, \dots, 145\}$ et $k \in \{1, 2, \dots, 120\}$. Cette matrice peut s'écrire sous la forme $\tilde{T}(\Omega_{xy}, t_k)$, avec Ω_{xy} le domaine spatial de taille 320 pixel x 145 pixel. La figure 62 présente la cartographie en Digital Level (DL) du champ de température $\tilde{T}(\Omega_{xy}, t_k)$ à l'instant $t_1 = 1\Delta t$.

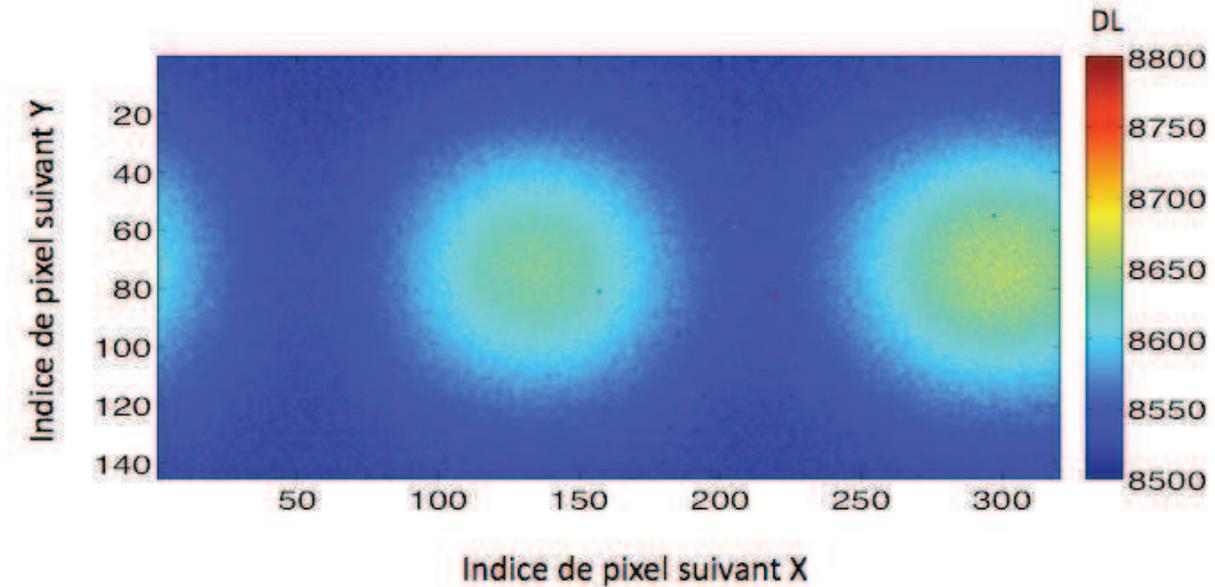


Figure 62 : Cartographie du champ de température $\tilde{T}(\Omega_{xy}, t_k)$ de la plaque mince en PVC réalisée avec la caméra infrarouge à l'instant $t_1 = 1\Delta t$ après le début de la relaxation thermique

Les données brutes $\tilde{T}(\Omega_{xy}, t_k)$ enregistrées avec la caméra infrarouge sont entachées par le bruit de mesure. Pour limiter l'influence du bruit sur la précision de la méthode LOWF, il convient de déterminer un sous-domaine optimisé de Ω_{xy} noté $\bar{\Omega}_{xy}$.

5.2.2.2. Estimation de la diffusivité thermique

Pour le cas d'un matériau isotrope, le formalisme de la méthode LOWF n'impose pas de contraintes particulières pour le choix de $\bar{\Omega}_{xy}$. Cependant, deux précautions contribuent à limiter l'erreur d'estimation. La première consiste à choisir une taille de $\bar{\Omega}_{xy}$ suffisamment grande pour prendre en compte des pixels sensibles aux variations spatiales et temporelles du champ de température, conformément aux résultats de la section 5.2.1.2. La seconde consiste à choisir une taille du sous-domaine $\bar{\Omega}_{xy}$ suffisamment petite pour limiter la quantité de pixels les plus bruités. Un sous-domaine $\bar{\Omega}_{xy}$ est défini en observant ces deux précautions : il est choisi centré sur un spot thermique ($x_0 = 140, y_0 = 72$) et de dimensions $l_x = l_y = 100 \Delta$ (figure 63).

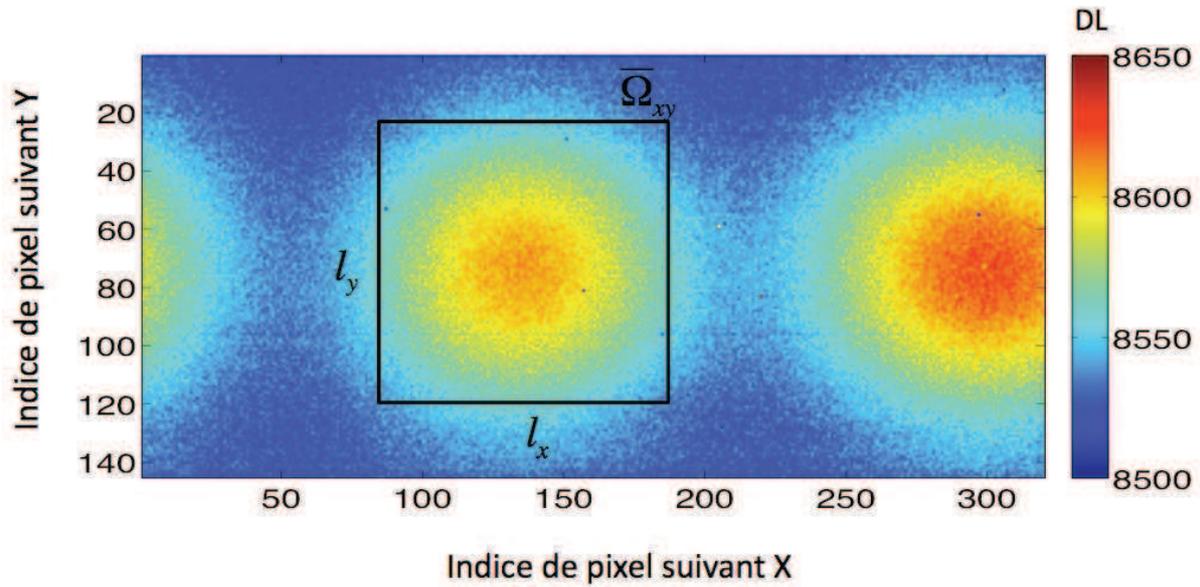


Figure 63 : Schéma du sous-domaine $\overline{\Omega}_{xy}$ sur la cartographie du champ de température $\tilde{T}(\Omega_{xy}, t_k)$ (en DL) de la plaque mince en PVC réalisée avec la caméra infrarouge à l'instant $t_{120} = 120\Delta t$ après le début de la relaxation thermique

La figure 64 présente la cartographie du champ de température $\tilde{T}(\overline{\Omega}_{xy}, t_{120})$ (en DL) à l'instant $t_{120} = 120\Delta t$.

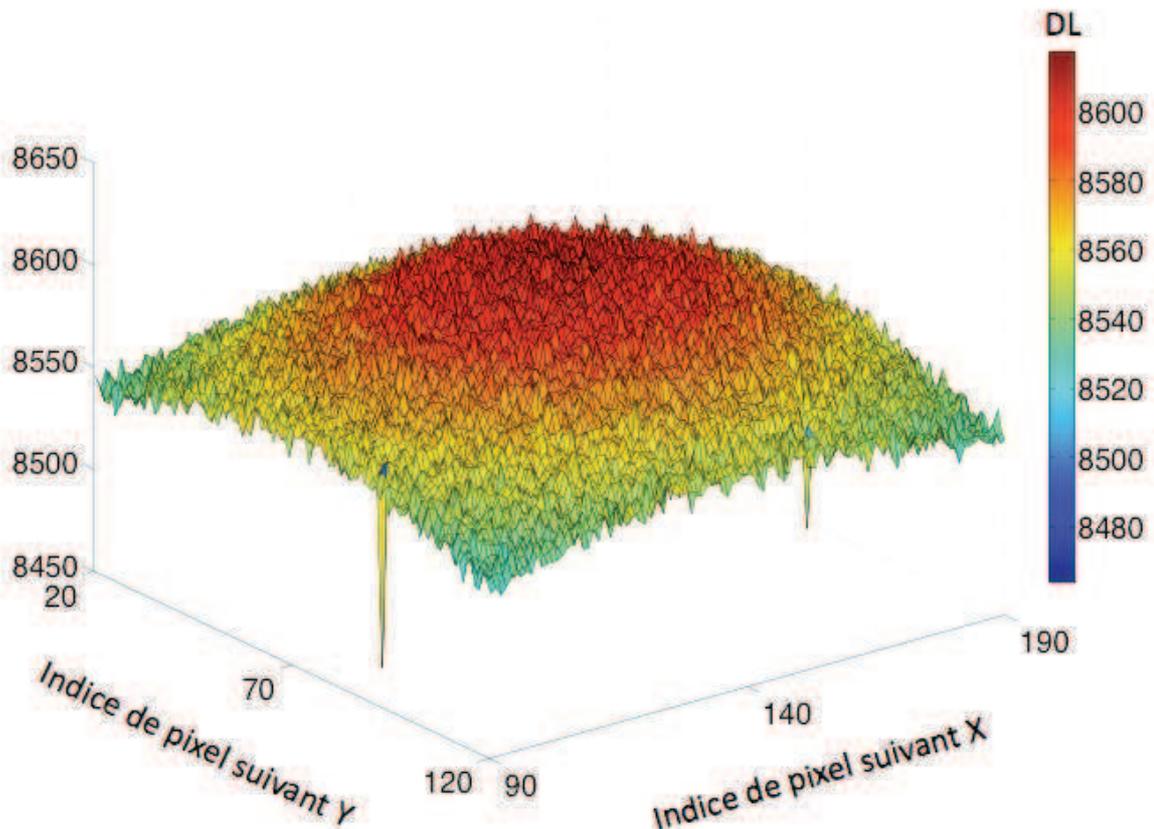


Figure 64 : Cartographie du champ de température $\tilde{T}(\overline{\Omega}_{xy}, t_{120})$ (en DL) à l'instant $t_{120} = 120\Delta t$

in définitive, conformément au choix du sous-domaine optimisé $\bar{\Omega}_{xy}$ (figure 63), la méthode LOWF est appliquée aux données $\tilde{T}(\bar{\Omega}_{xy}, t_k)$ avec $k \in \{1, 2, \dots, 120\}$ pour estimer la diffusivité α de la plaque en PVC. Pour rappel, la fonction test utilisée est définie par $f(x, y) = (1 - \tilde{x}^2)^2 (1 - \tilde{y}^2)^2$, avec $\tilde{x} = 2(x - x_0)/l_x$ et $\tilde{y} = 2(y - y_0)/l_y$. La figure 65 présente le nuage de points P^k et la droite des moindres carrés (D) calculés à partir de l'équation (4.97).

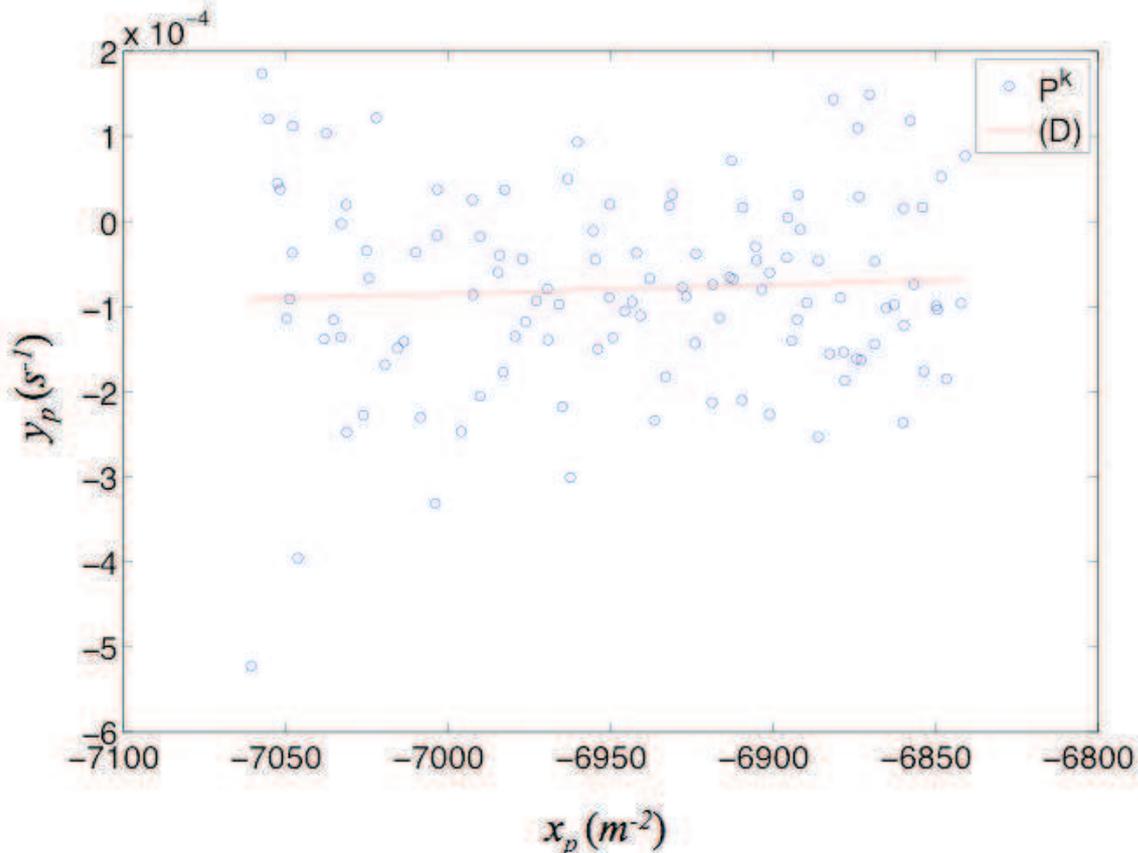


Figure 65 : Nuage de points P^k et droite (D) calculés à partir de l'équation (4.97)

La perturbation des points P^k traduit le caractère fortement bruité des données de température du sous-domaine $\bar{\Omega}_{xy}$. Le calcul de la pente de la droite (D) donne $\hat{\alpha} = 1,02 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit une erreur d'estimation de **4,8%**. La diffusivité thermique de la plaque en PVC est donc estimée avec une bonne précision avec la méthode LOWF.

5.3. Conclusion

La méthode LOWF a été appliquée à la caractérisation thermique de plaques minces homogènes en Titane et en PVC. Deux modes de génération du champ de température ont été considérés : une excitation thermique par diode laser et une excitation thermique par dissipation viscoélastique. Les approches 1D et 2D de la méthode LOWF ont été appliquées avec succès, respectivement sur la plaque en Titane et la plaque en PVC. Pour l'approche 1D adaptée aux matériaux anisotropes, un critère efficace basé sur le coefficient de corrélation linéaire des points P^k a permis de déterminer un sous-domaine de taille optimale. Concernant l'approche 2D adaptée aux matériaux isotropes, il apparaît que la détermination d'un sous-

domaine de taille optimisée peut constituer une opération délicate, notamment en sonothermographie du fait du caractère parfois très bruité des données de température à traiter.

Conclusion générale

1. Conclusion

Dans ce travail, la sonothermographie a été étudiée afin de montrer son applicabilité au contrôle non destructif et à l'évaluation des propriétés de matériaux.

L'utilisation d'un modèle par éléments finis couplant l'acoustique et la thermique a permis d'analyser finement les phénomènes de dissipation viscoélastique et de transfert de chaleur au sein de structures complexes. Ainsi, la modélisation du comportement thermomécanique de matériaux composites unidirectionnels et multicouches a permis d'appréhender les mécanismes de formation des sources volumiques de chaleur dans ces matériaux. Des prédictions du modèle ont été validées expérimentalement par comparaison avec des mesures réalisées par thermographie infrarouge.

Par suite, la sonothermographie a été appliquée au contrôle non destructif. La simulation de la réponse thermique de matériaux présentant un défaut de type cavité a permis d'identifier deux modes de détection : la détection directe lorsque la position du défaut est clairement identifiée et la détection indirecte lorsque le défaut est détecté sans être localisé distinctement.

Une méthode innovante basée sur la formulation faible a été mise en place dans le cadre de l'application de la sonothermographie à l'évaluation des propriétés thermiques de matériaux. La méthode LOWF développée a été comparée avec une méthode de caractérisation thermique existante. Cette comparaison a montré une plus grande robustesse de la méthode LOWF par rapport au bruit. Les variantes 2D et 1D de la méthode LOWF adaptées respectivement aux matériaux isotrope et anisotrope ont été validées numériquement, puis expérimentalement sur des plaques minces.

En définitive, les résultats numériques et expérimentaux présentés montrent l'efficacité de la sonothermographie comme méthode de contrôle non destructif et d'évaluation des propriétés thermiques de matériaux absorbants.

2. Perspectives

À la suite de ce travail, les perspectives suivantes peuvent être envisagées de manière réaliste.

i) Il a été montré que la sonothermographie présente deux aspects : l'un dissipatif et l'autre diffusif. Le premier aspect concerne la dissipation d'énergie mécanique en chaleur. La quantité de chaleur produite par les sources volumiques dépend de la viscoélasticité du matériau. Le second aspect est relatif à la diffusion de la chaleur produite. L'évolution spatio-temporelle du champ thermique dépend de la diffusivité thermique du matériau. La réponse thermique du matériau renseigne donc sur ses propriétés mécaniques (modules de viscoélasticité) et thermiques (diffusivité thermique).

Ce travail s'est focalisé sur l'aspect diffusif pour parvenir à une caractérisation thermique du matériau. En perspective, l'aspect dissipatif pourrait être exploité en vue d'une caractérisation mécanique du matériau. L'approche proposée consisterait à estimer les sources volumiques de chaleur générées en sonothermographie en vue d'une évaluation de la viscoélasticité du matériau. Comme il a été montré précédemment, la viscoélasticité du matériau varie en fonction de la fréquence de la sollicitation mécanique (§1.2.1). L'approche proposée permettrait donc une évaluation de la viscoélasticité du matériau dans un domaine de

fréquence de l'ordre de 10^4 Hz. L'évaluation des propriétés viscoélastiques dans cette plage de fréquence présente un grand intérêt dans la mesure où la plupart des méthodes de caractérisation mécanique permettent une évaluation des propriétés viscoélastiques pour des fréquences de l'ordre de 10^1 Hz à 10^3 Hz (méthodes vibratoires) ou de l'ordre de 10^6 Hz (méthodes ultrasonores). Il est à noter que l'estimation de sources de chaleur est une thématique souvent abordée, mais généralement pour des problèmes bidimensionnels [51-54]. En sonothermographie, le caractère volumique des sources de chaleur constitue une particularité à prendre en compte.

ii) Le dispositif expérimental mis en place dans le cadre de ce travail de thèse a utilisé une seule sonotrode pour l'excitation mécanique. Ce dispositif réduit a limité l'application de la sonothermographie à des éprouvettes de dimensions relativement petites. En perspective, l'utilisation simultanée de plusieurs sonotrodes permettrait d'étendre l'étude de la sonothermographie au cas de structures de dimensions plus grandes. Il serait alors intéressant d'étudier l'influence de la superposition des ondes acoustiques générées par les sonotrodes sur la réponse thermique de la structure et la détectabilité de défauts.

iii) Les composites stratifiés sont composés de nombreuses couches minces. Du point de vue numérique, la modélisation de ces matériaux pose un problème de discrétisation. De ce fait, il serait intéressant de compléter les résultats des simulations numériques réalisées dans ce travail par des observations expérimentales afin de valider les variations de température calculées dans l'épaisseur.

Références bibliographiques

- [1] D. Wu, C. Busse, Lock-in thermography for nondestructive évaluation of materials, *Révue Générale de thermique*, vol.37, pp. 693-703, 1998.
- [2] G. Gaussorgues, *La thermographie infrarouge*, Technique et Documentation (Lavoisier), 1984.
- [3] G. Rousset, F. Lepoutre, Mesures de diffusivités thermiques par la méthode photoacoustique et par l'effet mirage, *Revue Phys. Appl.*, vol.17, pp. 201-207, 1982.
- [4] G. Rousset, F. Lepoutre, L. Bertrand, Quantitative analysis of the thermoelastic effects photoacoustic experiments, *Journal of Applied Physics*, vol.54, pp. 2383, 1983.
- [5] B.R. Pouet, R. Ing, S. Krishnaswamy, D. Royer, Heterodyne interferometer with two-wave mixing in photorefractive crystals for ultrasound detection on rough surfaces, *Appl. Phys. Lett.* vol.69, pp. 3782–3784, 1996.
- [6] Jan D. Achenbach, Modeling for quantitative non-destructive évaluation, *Ultrasonics*, vol.40, pp. 1-10, 2002.
- [7] G. Henneke, Imaging of mechanically induced thermal heat patterns, *Review of Progress in Quantitative Non-Destructive Evaluation*, vol.5A, pp. 447-454, 1986.
- [8] C. Bacon, J. Pouyet, ‘‘Mécanique des solides déformables’’, Éditions Hermes, 2000.
- [9] J. Salençon. *Viscoélasticité*. Presse des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.
- [10] COMSOL Multiphysics User’s Guide, Version 3.3, <http://www.comsol.com>
- [11] J. D. Ferry, *Viscoelastic Properties of Polymers*, Wiley, 1980.
- [12] R. M. Christensen, *Theory of Viscoelasticity : An Introduction*, Academic, 1971.
- [13] M. Castaings, C. Bacon, B. Hosten, and M. V. Predoi, ‘‘Finite element predictions for the dynamic response of thermo-viscoelastic material structures,’’ *J. Acoust. Soc. Am*, vol.115, pp. 1125–1133, 2004.
- [14] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw- 12Hill, 1965.
- [15] J. Lemaître and J. L. Chaboche, *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, 1990.
- [16] Hosten B, Bacon C, Biateau C. Finite element modeling of the temperature rise due to the propagation of ultrasonic waves in viscoelastic materials and experimental validation. *J Acoust Soc Am*, vol.124 (6), pp. 3491-3496, 2008.
- [17] Castaings M, Hosten B, Kundu T. Inversion of ultrasonic, plane-wave transmission data in composite plates to infer viscoelastic material properties. *NDT and Int*, vol.33 (6), pp. 377-392, 2000.

- [18] Conductivité thermiques des solides. Techniques de l'Ingénieur; [Ref. K420], 1993.
- [19] Hosten B, Biateau C, Bacon C, Pradère C, Batsale J.-C., Anissa Meziane A. Sonothermography in composite materials: Finite element modeling and experimental validation. *NDT and Int*, vol.33(6), pp. 120-126, 2012.
- [20] C. Pradère, J. Morikawa, J. Toutain, J.-C. Batsale, S. Hayakawa, T. Hashimoto, Microscale thermography of freezing biological cells in view of cryopreservation, 9th International Conference on Quantitative InfraRed Thermography, *QIRT Journal*, vol.6, No1, pp. 37-61.
- [21] M. Bamford, J.C. Batsale, O. Fudym, Nodal and modal strategies for longitudinal thermal diffusivity profile estimation. Application to the non destructive evaluation of SiC/SiC composites under uniaxial tensile tests, *Infrared Phys. Technol.*, vol.52, pp. 1-13, 2009.
- [22] K. Pearson, On lines of closes fit to system of points in space, London, *Philos. Mag. J. Sci.* vol.2, pp. 559-572, 1901.
- [23] H. Hotteling, Analysis of complex statistical variables into principal components, *J. Educ. Psychol.* vol.24, pp. 417-441, 1933.
- [24] M.M. Loève, *Probability Theory*, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1988.
- [25] F. Deprettere, *SVD and Signal Processing : Algorithms, Analysis and Applications*, Elsevier Science, Amsterdam, 1988.
- [26] G. Berkoz, P. Holmes and J. Lumley, The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows, *Annu. Rev. Fluids Mech.* vol.25, pp. 539-575, 1993.
- [27] P. Holmes, J. Lumley and G. Berkoz, *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*, Cambridge Monographs on Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [28] A. Ait-Yahia, S. Palomo Del Barrio, Thermal Systems modelling via singular value decomposition: direct and modular approach, *Applied Mathematical Modelling*, vol.23, pp. 447-468, 1999.
- [29] A. Ait-Yahia and S. Palomo del Barrio, Numerical simplification method for state-space models of thermal systems, *Numer. Heat Transf. Part B* vol.37, pp. 201-225, 2000.
- [30] S. Palomo del Barrio, An efficient computational method for solving large-scale sensitivity problems, *Numer. Heat Transf. Part B* vol.43, pp. 353-372, 2003.
- [31] J.L. Dauvergne and S. Palomo del Barrio, A spectral method for low-dimensional description of melting/solidification within shape-stabilized phase change materials, *Numer. Heat Transf. Part B* vol.56, pp. 142-166, 2009.
- [32] J.L. Dauvergne and S. Palomo del Barrio, Toward a simulation-free P.O.D. approach for low-dimensional description of phase change problems, *Int. J. Thermal Sci.* vol.49, pp. 1369-1382, 2010.

- [33] H.M. Park and W.S. Jung, On the solution of inverse heat transfer using the Karhunen-Loève Galerkin method, *Int. J. Heat Mass Transf.* vol.42, pp. 127-142, 1999.
- [34] H.M. Park and W.S. Jung, The Karhunen-Loève Galerkin method for the inverse natural convection problems, *Int. J. Heat Mass Transf.* vol.44, pp. 155-167, 2001.
- [35] J. Palomo del Barrio, Multidimensional inverse heat conduction problems solution via Lagrange theory and model size reduction techniques, *Inverse Problems in Engineering*, vol.11, pp. 515-539, 2003.
- [36] I.T. Jolliffe, *Principal Components Analysis*, Springer, New York, 1986.
- [37] G. Golub and C. Van Loan, *Matrix Computation*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.
- [38] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley Cambridge Press, Wellesley, 1998.
- [39] M.W. Berry, Large-scale sparse singular value computation, *Int. J. Supercomputer Appl.* vol.6, pp. 13-49, 1992.
- [40] J.R. Jessup and D.C. Sorensen, A parallel algorithm for computing singular-value decomposition of a matrix, *SIAM J Matrix Anal. Appl.* vol.15, pp. 530-548, 1994.
- [41] J. Palomo Del Barrio, J.-L. Dauvergne, C. Pradere, Thermal characterization of materials using Karhunen-Loève decomposition techniques – Part I. Orthotropic materials, *Inverse Problems Sci. Engineering*, vol.20 (8), pp. 1115-1143, 2012.
- [42] J. Palomo Del Barrio, J.-L. Dauvergne, C. Pradere, Thermal characterization of materials using Karhunen-Loève decomposition techniques – Part II. Heterogeneous materials, *Inverse Problems Sci. Engineering*, vol.20 (8), pp. 1145-1174, 2012.
- [43] A. Intissar, *Analyse fonctionnelle et théorie spectrale pour les opérateurs compacts non autoadjoints*, Cépaduès-Éditions, Toulouse, 1997.
- [44] J.R. Shenfelt, R. Luck, R.P. Taylor, J.T. Berry, Solution to inverse heat conduction problems employing SVD and model reduction, *IJHMT*, vol.45, pp. 67-74, 2002.
- [45] I. Philippi, J.-C. Batsale, D. Maillet, A. Degiovanni, Measurement of thermal diffusivities through processing of infrared images, *Rev. Sci. Instrum.*, vol.66, p. 182, 1995.
- [46] J.-C. Batsale, D. Maillet, A. Degiovanni, Extension de la méthode des quadripôles thermiques à l'aide de transformations intégrales—calcul du transfert thermique au travers d'un défaut plan bidimensionnel, *International Journal of heat and mass transfert*, vol.37, No1, pp. 111-127, 1994.
- [47] D. Maillet, J.-C. Batsale, A. Bendada, A. Degiovanni, Méthodes intégrales et contrôle non destructif par thermographie infrarouge stimulée, *Rev Gén Therm*, vol.35, pp. 14-27, 1996.
- [48] A.J. Romano, J.A. Bucaro, S. Dey, Defect detection and localization in orthotropic wood slabs by inversion of dynamic surface displacements, *JASA*, 2008.

- [49] J.A. Bucaro, A.J. Romano, P. Abraham, S. Dey, Detection and localization of inclusions in plates using inversion of point actuated surface displacements, *JASA*, 2004.
- [50] J.V. Beck, K.J. Arnold, Parameter estimation in engineering and Science, Wiley Interscience, New York, 1977.
- [51] N. Renault, S. Andre, D. Maillet and C. Cunat, A two-step regularized inverse solution for 2-D heat source reconstruction, *Int. J. Of Thermal Sc.*, vol.47, pp. 834-847, 2008.
- [52] J. Guo, P. Le Masson, S. Artioukhine, T. Loulou, P. Rogeon, M. Carin, M. Dumons, J. Costa, estimation of a source term in a two-dimensional heat transfer problem: application to an electron beam welding, *Inverse Problems Sci. Engng.*, vol.14 (1), pp. 21–38, 2006.
- [53] C. Coles, D.A. Murio, Simultaneous Space Diffusivity and Source Term Reconstruction in 2D IHCP, *Comput. Math. Appl.*, vol.42, pp. 1549–1564, 2001.
- [54] R. Abou Khachfhe, Y. Jarny, Determination of heat sources and heat transfer coefficient for two-dimensional heat flow—numerical and experimental study, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.44, pp. 1309–1322, 2001.
- [55] Catalogue Goodfellow : Matériaux pour la Recherche, l'Industrie et la Production, <http://www.goodfellow.com/fr/>
- [56] Caractéristiques de l'actionneur Cedrat PPA10M, <http://www.cedrat-technologies.com/fr/>
- [57] Caractéristiques techniques de la caméra infrarouge FLIR SC-7000, <http://www.flir.com/FR/>

Annexes

Annexe A

Produit de deux fonctions sinusoïdales réelles

Soient $u(t)$ une fonction réelle. Dans le domaine fréquentiel, il s'écrit :

$$\tilde{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [u(t) \cos \omega t - i u(t) \sin \omega t] dt = u' + i u''$$

$$\tilde{u}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [u(t) \cos \omega t + i u(t) \sin \omega t] dt = u' - i u''$$

$\text{Re}\{\tilde{u}(\omega)\}$ est paire et $\text{Im}\{\tilde{u}(\omega)\}$ est impaire, soit $\tilde{u}(-\omega) = \overline{\tilde{u}(\omega)}$ (expression conjuguée)

La transformée de Fourier du produit de deux fonctions réelles $u(t)$ et $v(t)$ s'écrit :

$$F\{u(t)v(t)\} = \frac{1}{2\pi} [\tilde{u}(\omega) * \tilde{v}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\omega - \Omega) * \tilde{v}(\omega - \Omega) d\Omega$$

où « * » représente le produit de convolution.

Dans le cas de fonctions sinusoïdales de fréquence ν_0 avec $\omega_0 = 2\pi\nu_0$:

$$\tilde{u}(\omega) = \tilde{u}(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) + \tilde{u}(-\omega_0) \delta(\omega + \omega_0)$$

$$\tilde{v}(\omega) = \tilde{v}(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) + \tilde{v}(-\omega_0) \delta(\omega + \omega_0)$$

où $\delta(\omega)$ représente la distribution de Dirac.

Par suite,

$$F\{u(t)v(t)\} = \frac{1}{2\pi} [\tilde{u}(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) + \tilde{u}(-\omega_0) \delta(\omega + \omega_0)] * [\tilde{v}(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) + \tilde{v}(-\omega_0) \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$F\{u(t)v(t)\} = \frac{1}{2\pi} [\tilde{u}(\omega_0) \tilde{v}(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) * \delta(\omega - \omega_0) + \tilde{u}(-\omega_0) \tilde{v}(-\omega_0) \delta(\omega + \omega_0) * \delta(\omega + \omega_0) + (\tilde{u}(\omega_0) \tilde{v}(-\omega_0) + \tilde{u}(-\omega_0) \tilde{v}(\omega_0)) \delta(\omega)]$$

$$F\{u(t)v(t)\} = \frac{1}{2\pi} [\tilde{u}(\omega_0) \tilde{v}(\omega_0) \delta(\omega - 2\omega_0) + \tilde{u}(-\omega_0) \tilde{v}(-\omega_0) \delta(\omega + 2\omega_0) + (\tilde{u}(\omega_0) \tilde{v}(-\omega_0) + \tilde{u}(-\omega_0) \tilde{v}(\omega_0)) \delta(\omega)]$$

Remarques :

a) $\tilde{u}(-\omega_0) \tilde{v}(-\omega_0) = \overline{\tilde{u}(\omega_0) \tilde{v}(\omega_0)}$

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}(-\omega_0)\tilde{v}(\omega_0) &= \overline{\tilde{u}(\omega_0)}\tilde{v}(\omega_0) \\
 \text{b)} \quad &= (u' - iu'')(v' - iv'') \\
 &= (u'v' + u''v'') + i(u'v'' - u''v')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}(\omega_0)\tilde{v}(-\omega_0) &= \tilde{u}(\omega_0)\overline{\tilde{v}(\omega_0)} \\
 \text{c)} \quad &= (u' + iu'')(v' + iv'') \\
 &= (u'v' + u''v'') - i(u'v'' - u''v')
 \end{aligned}$$

Ainsi, b) + c) donne

$$\tilde{u}(-\omega_0)\tilde{v}(\omega_0) + \tilde{u}(\omega_0)\tilde{v}(-\omega_0) = 2\text{Re}\{\tilde{u}(\omega_0)\overline{\tilde{v}(\omega_0)}\}$$

Soit

$$\begin{aligned}
 F\{u(t)v(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \left[\tilde{u}(\omega_0)\tilde{v}(\omega_0)\delta(\omega - 2\omega_0) + \overline{\tilde{u}(\omega_0)\tilde{v}(\omega_0)}\delta(\omega + 2\omega_0) \right. \\
 &\quad \left. + 2\text{Re}\{\tilde{u}(\omega_0)\overline{\tilde{v}(\omega_0)}\}\delta(\omega) \right]
 \end{aligned}$$

En considérant les propriétés suivantes de la transformée de Fourier inverse :

$$F^{-1}\{\delta(\omega - 2\omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} e^{i\omega_0 t}$$

$$F^{-1}\{\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}$$

Il vient :

$$u(t)v(t) = \frac{1}{4\pi^2} \left[\tilde{u}(\omega_0)\tilde{v}(\omega_0)e^{i\omega_0 t} + \overline{\tilde{u}(\omega_0)\tilde{v}(\omega_0)}e^{-i\omega_0 t} + 2\text{Re}\{\tilde{u}(\omega_0)\overline{\tilde{v}(\omega_0)}\} \right] \quad (\text{A.1})$$

La moyenne du produit $u(t)v(t)$ sur une période $T_0 = 2\pi/\omega_0$ donne :

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u(t)v(t) dt = \frac{1}{2\pi^2} \text{Re}\{\tilde{u}(\omega_0)\overline{\tilde{v}(\omega_0)}\} \quad (\text{A.2})$$

En posant

$$\begin{cases} \tilde{u}(\omega_0) = \tilde{\sigma}_\alpha(\omega_0) \\ \tilde{v}(\omega_0) = -\omega_0 S_{\alpha\beta}''(\omega_0)\tilde{\sigma}_\beta(\omega_0) \end{cases}$$

Il est possible de démontrer que $S_{\alpha\beta}''(-\omega) = -S_{\alpha\beta}''(\omega)$ puisque $\sigma_\alpha(t)$ et $\varepsilon_\beta(t)$ sont réels. De plus, $S_{\alpha\beta}(\omega)$ est la transformée de Fourier d'une fonction de fluage réelle. Ainsi,

$$\overline{\tilde{u}(\omega_0)} = \tilde{u}(-\omega_0) = \tilde{\sigma}_\alpha(-\omega_0) = \overline{\tilde{\sigma}_\alpha(\omega_0)}$$

$$\overline{\tilde{v}(\omega_0)} = \tilde{v}(-\omega_0) = -(-\omega_0) S''_{\alpha\beta}(-\omega_0) \tilde{\sigma}_\beta(-\omega_0) = -\omega_0 S''_{\alpha\beta}(\omega_0) \overline{\tilde{\sigma}_\beta(\omega_0)}$$

Les relations (A1) et (A2) s'écrivent alors respectivement :

$$\sigma : \partial_t \varepsilon^v = -\frac{\omega_0 S''_{\alpha\beta}(\omega_0)}{4\pi^2} \left[\begin{aligned} &\tilde{\sigma}_\alpha(\omega_0) \cdot \tilde{\sigma}_\beta(\omega_0) \cdot e^{i2\omega_0 t} \\ &+ \overline{\tilde{\sigma}_\alpha(\omega_0)} \cdot \overline{\tilde{\sigma}_\beta(\omega_0)} \cdot e^{-i2\omega_0 t} + 2\text{Re}\left\{ \tilde{\sigma}_\alpha(\omega_0) \cdot \overline{\tilde{\sigma}_\beta(\omega_0)} \right\} \end{aligned} \right] \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sigma : \partial_t \varepsilon^v dt = -\frac{\omega_0}{2\pi^2} S''_{\alpha\beta}(\omega_0) \cdot \text{Re}\left\{ \tilde{\sigma}_\alpha(\omega_0) \cdot \overline{\tilde{\sigma}_\beta(\omega_0)} \right\} \quad (\text{A.4})$$

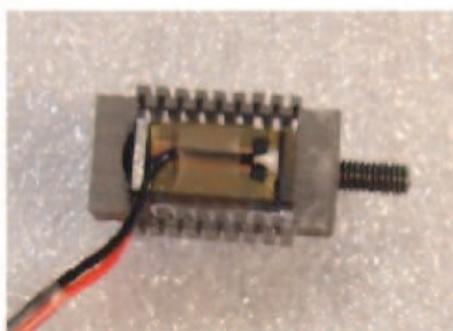
Annexe B

Caractéristiques techniques des moyens expérimentaux

Cette annexe présente les caractéristiques de l'actionneur piézoélectrique, de la sonotrode et de la caméra infrarouge.

1. Ensemble actionneur + sonotrode

L'ensemble actionneur/sonotrode est réalisé par couplage (assemblage fileté) d'un actionneur piézoélectrique Cedrat PPA10M et d'une sonotrode réalisée au sein du laboratoire.



Actionneur Cedrat PPA10M

+



Sonotrode

La fréquence et l'amplitude de déplacement de l'actionneur piézoélectrique sont pilotées à partir d'un signal électrique. Le rôle de la sonotrode est d'amplifier le déplacement de l'actionneur piézoélectrique par un effet de résonance de l'ensemble actionneur/sonotrode.

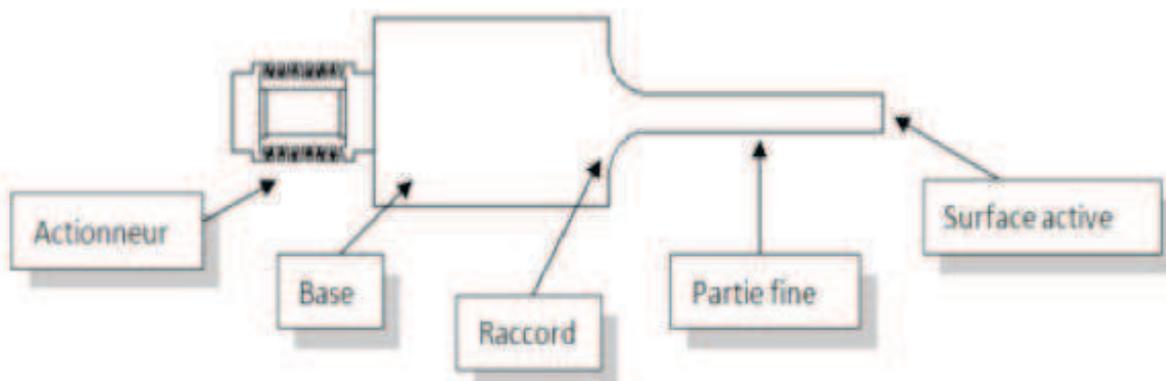


Schéma de l'ensemble Actionneur + Sonotrode

La géométrie de la sonotrode a été optimisée suivant la forme de l'application. Ainsi, la longueur de la surface active de la sonotrode (voir schéma ci-dessus) correspond à la longueur de la face excitée de l'éprouvette en PVC. Les caractéristiques de l'actionneur et de la sonotrode sont présentées dans la suite.

1.1. Caractéristiques de l'actionneur Cedrat PPA10M

Les caractéristiques de l'actionneur Cedrat PPA10M sont détaillées dans le tableau suivant. Des informations complémentaires sont fournies par la référence [56].

Propriétés PPA10M	Standard technical conditions	Unit	Nominal values	Min. values	Max. values
Notes		-	-	-	-
Max. no load displacement	Quasistatic excitation, blocked-free	μm	8	7	12
Blocked force	Quasistatic excitation, blocked-free	N	800	640	960
Stiffness	Quasistatic excitation, blocked-free	$\text{N}/\mu\text{m}$	100,00	80,00	110,00
Resonance frequency (free-free)	Harmonic excitation, free-free, on the admittance curve	Hz	65000	55250	71500
Response time (free-free)	Harmonic excitation, free-free, on the admittance curve	ms	0,01	0,01	0,01
Capacitance	Quasistatic excitation, free-free, on the admittance curve	μF	0,70	0,63	0,91
Max. tensile force	Static effort, blocked-free	N	400	300	400
Resolution	Quasistatic excitation	nm	0,08	-	-
Height (in actuation direction)		mm	18,00	17,80	18,20
Depth (base)		mm	10,00	9,90	10,10
Width (base excl. wedge & wires)		mm	6,50	5,50	7,50
Width (base incl. wedge & wires)		mm	9,00	8,00	10,00
Mass		g	6,0	-	-
Standard mechanical interface (top)	1 centered M2.5 threaded hole 2.5 mm deep	-	-	-	-
Standard mechanical interface (base)	1 centered M2.5 threaded hole 2.5 mm deep	-	-	-	-
Standard electrical interface	2 PTFE insulated AWG30 wires 100 mm long with \varnothing 1 banana plug	-	-	-	-

Les caractéristiques de la caméra infrarouge FLIR SC-7000 sont détaillées dans le tableau suivant. Des informations complémentaires sont fournies par la référence [57].

Imaging performance

Waveband	MW	LW	MW	LW
Sensor type	InSb / MCT	MCT	InSb (FLIR detector for SC7650) / MCT	MCT
Pixel Resolution	320x256	320x256	640x512	640x512
Pixel Pitch	30µm	30µm	15µm	16µm
Spectral ranges	1.5 - 5.1 µm for InSb (BB) 3.7 - 4.8 µm for MCT	7.7 - 9.3 µm for SC7300L 7.7 - 11.5 µm for SC7900VL	1.5 - 5.1 µm for InSb (BB) 3.7 - 4.8 µm for MCT	8.0 - 9.4 µm

Measurement

NETD	<20mk for InSb / <25mk for MCT	<20mK / <25mK	<20mK / <25mK	<30mK
Standard Camera Calibration Range	5°C to 300°C for InSb 5°C to 150°C for MCT	5°C to 300°C for InSb 5°C to 150°C for MCT	5°C to 300°C for InSb 5°C to 150°C for MCT	5°C to 150°C for MCT
Optional Camera Calibration Range	-20°C to 300°C / -20°C to 150°C 5°C to 1500°C / 5°C to 500°C up to 2500°C / up to 1500°C up to 3000°C (for InSb only)	-20°C to 150°C 5°C to 150°C up to 1500°C	-20°C to 300°C / -20°C to 150°C 5°C to 1500°C / 5°C to 150°C up to 2500°C / up to 1500°C up to 3000°C (for InSb only)	-20°C to 150°C 5°C to 150°C up to 1500°C
Digital Full Frame rate	InSb: 170 Hz - 380 Hz full frame up to 11 kHz - 31.8 KHz with windowing	230 Hz full frame up to 25 kHz with windowing	InSb: 100 Hz full frame up to 3.425 kHz with windowing	115 Hz full frame up to 62 kHz with windowing
	MCT: 230 Hz full frame up to 25 kHz with windowing		MCT: 120 Hz full frame up 3.0 kHz with windowing	

Annexe C

Formalisme des méthodes modales (KLD et transformées intégrales)

1. La méthode de caractérisation thermique par décomposition de Karhunen-Loève (KLD)

Les techniques de décomposition orthogonale sont largement utilisées dans divers domaines d'application pour la réduction de données. La réduction commence généralement par le choix d'une base orthogonale constituée d'un petit nombre de composantes dominantes (directions principales, fonctions propres ou modes par exemple). Une description approximative en dimension réduite du jeu de données complet est obtenue par projection sur la base orthogonale de fonctions propres dominantes. Cette méthode a été développée par Pearson [22] comme un outil pour l'analyse de données graphiques. Elle a l'avantage de permettre à la fois une compression de la quantité de données et une réduction du bruit [25]. Des variantes de cette méthode sont utilisées dans divers domaines d'application [23,24] sous des appellations telles que l'Analyse en Composantes Principales (PCA), la Décomposition de Karhunen-Loève (KLD), la décomposition en Valeurs Singulière (SVD), etc. Le choix de la base constitue l'une des principales différences entre ces variantes. De puissantes techniques par PCA/KLD/SVD sont proposées pour la description en dimension réduite de problèmes décrits par des équations aux dérivées partielles, notamment dans le domaine des écoulements turbulents [26,27]. En analyse thermique, des méthodes basées sur la SVD ont été développées pour la réduction de problèmes linéaire et non-linéaire de transfert de chaleur [28-32], aussi bien que pour la résolution de problèmes inverses de transfert de chaleur avec des sources de chaleur inconnues [33-35]. Pour une introduction aux méthodes PCA/KLD/SVD, les références [25] et [36] sont recommandées. Les références [37-40] fournissent plus de détails sur le formalisme mathématique et le calcul. Dans l'annexe C1, la méthode par Décomposition de Karhunen-Loève (KLD) [41,42] est décrite puis appliquée à un problème simple.

1.1. La décomposition de Karhunen-Loève (KLD)

Soit une fonction $T(x,t)$ à dépendance spatiale et temporelle définie sur un domaine borné Ω de l'espace, avec $x = (x_1, x_2, x_3)$ et t représentant les coordonnées du point et le temps respectivement. Elle est supposée vérifier la condition :

$$\forall t, \int_{\Omega} T^2(x,t) dx < \infty,$$

de sorte qu'elle appartient à l'espace de Hilbert H de dimension infinie associé à Ω . La discrétisation de $T(x,t)$ sur Ω donne le vecteur continu en temps de dimension n $\mathbf{T}(t) = \{T_i(t)\}_{i=1\dots n}$ ($n \times 1$) dont les composantes représentent les valeurs de température aux n différents points de discrétisation. La fonction énergie associée à $T(x,t)$ est définie par :

$$W(x,x') \equiv \int_t T(x,t)T(x',t)dt \quad (C.1)$$

Il est facile de montrer la symétrie de la fonction énergie traduite par $W(x,x') = W(x',x)$. En effet, $W(x,x')$ est un opérateur compact et positif sur H . Le théorème spectral stipule que si $W(x,x')$ est compacte et auto-adjoint, alors il existe dans l'espace de Hilbert une base orthonormale complète constituée des fonctions propres de $W(x,x')$, notée $\{V_m(x)\}_{m=1\dots\infty}$ dans la suite. De plus, $W(x,x')$ étant définie positive, son spectre est constitué de valeurs propres réelles positives : $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq 0$.

Les vecteurs propres et valeurs propres de $W(x, x')$ sont définis par la relation :

$$\int_{\Omega} W(x, x') V_m(x') dx' = \sigma_m^2 V_m(x) \quad (C.2)$$

avec la condition d'orthogonalité :

$$\langle V_k, V_m \rangle \equiv \int_{\Omega} V_k(x) V_m(x) dx = \delta_{km} \quad (C.3)$$

Le théorème de Hilbert-Schmidt [43] permet d'écrire :

$$W(x, x') = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m^2 V_m(x) V_m(x') \quad (C.4)$$

Toute fonction appartenant à l'espace de Hilbert H peut être projetée de manière unique sur les fonctions propres de $W(x, x')$ dans la mesure où $\{V_m(x)\}_{m=1 \dots \infty}$ constitue une base complète dans H . Ainsi, pour $T(x, t) \in H$, il vient :

$$\forall t, T(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} V_m(x) z_m(t) \quad (C.5)$$

où les coefficients de projection $\{z_m(t)\}_{m=1 \dots \infty}$ appelés états dans la suite s'obtiennent par :

$$z_m(t) = \langle T(x, t), V_m(x) \rangle \equiv \int_{\Omega} T(x, t) V_m(x) dx \quad (C.6)$$

A partir des équations (C.4) et (C.5), il est facile de montrer que les états sont orthogonaux et vérifient :

$$\langle z_m(t), z_k(t) \rangle \equiv \int_t z_m(t) z_k(t) dt = \delta_{mk} \sigma_m^2 \quad (C.7)$$

L'équation (C.5) fournit la décomposition de Karhunen-Loève (KLD) de $T(x, t)$, aussi appelée décomposition en valeurs singulières (SVD) [28,44]. La racine carrée des valeurs propres de $W(x, x')$ sont les valeurs singulières de $T(x, t)$. Le terme $V_m(x) z_m(t)$ dans l'équation (C.5) est considéré comme la m -ième composantes principales de $T(x, t)$.

La KLD constitue un moyen efficace pour saisir les composantes dominantes d'un signal avec un nombre fini de modes. Une approximation linéaire de dimension r de $T(x, t)$ est réalisée lorsque la série donnée par l'équation (C.5) est tronquée à ses r premiers termes :

$$\forall t, T_r(x, t) = \sum_{m=1}^r V_m(x) z_m(t) \quad (C.8)$$

L'erreur d'approximation est :

$$\forall t, e_r(x, t) \equiv T(x, t) - T_r(x, t) = \sum_{m=r+1}^{\infty} V_m(x) z_m(t) \quad (C.9)$$

en prenant en compte les propriétés d'orthogonalité des fonctions propres $\{V_m(x)\}_{m=1 \dots \infty}$ et états $\{z_m(t)\}_{m=1 \dots \infty}$, il est facile de montrer que :

$$\|e_r\|^2 \equiv \int_t \int_{\Omega} e_r(x,t) dx dt = \sum_{m=r+1}^{\infty} \sigma_m^2 \quad (\text{C.10})$$

Puisque $\|T(x,t)\|^2 < +\infty$, l'erreur d'approximation tend vers zéro : $\lim_{r \rightarrow \infty} \|e_r\|^2 = 0$. En effet, le théorème d'Allahverdiev [43] pour les opérateurs compacts, ici $W(x,x')$, stipule que toute approximation de dimension r de $W(x,x')$ notée $W_r(x,x')$ dans la suite vérifie :

$$\|W - W_r\| \geq \|\sigma_{r+1} \quad \sigma_{r+2} \quad \dots\|,$$

où σ_{r+i} est la $(r+i)$ -ième valeur singulière de W et $\|\cdot\|$ représente la norme unitaire invariante de l'erreur d'approximation.

Le même théorème stipule que la valeur minimum de $\|W - W_r\| = \|\sigma_{r+1} \quad \sigma_{r+2} \quad \dots\|$ est obtenue par troncature du développement de Schmidt de W (C.7) à ses r premiers termes (ceux associés aux plus grandes valeurs singulières). Il en découle que l'équation (C.8) fournit la meilleure approximation linéaire de dimension r de $T(x,t)$ en regard de la norme unitaire invariante de l'erreur d'approximation.

Une propriété intéressante de la KLD démontrée dans la référence [41] est que, pour des observations bruitées $\tilde{T}(x,t) = T(x,t) + \varepsilon(x,t)$ où $\varepsilon(x,t)$ est un bruit indépendant de $T(x,t)$ et non corrélé spatialement, le bruit est reporté sur les états uniquement. Ainsi, il est possible d'écrire :

$$\tilde{T}(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} V_m(x) \tilde{z}_m(t) \quad (\text{C.11})$$

L'influence du bruit sur les termes de cette série évolue de manière croissante avec l'augmentation de m . La troncature de la KLD aux r premiers termes contribue de ce fait à amplifier le ratio signal/bruit. Plus r est petit, plus cet effet est important. Cette propriété intéressante de la KLD est utilisée pour une caractérisation thermique robuste de matériaux homogène [41] et hétérogène [42]. Le cas homogène est abordé.

1.2. Caractérisation thermique de matériaux homogènes par la KLD/SVD

Le formalisme de la méthode de caractérisation thermique par KLD/SVD est présenté pour un problème 2D transitoire.

1.2.1. Description du problème

Soit une plaque rectangulaire de dimensions $L_x \times L_y$. L'équation de conduction de la chaleur pour les points intérieurs (Ω : $0 < x < L_x$, $0 < y < L_y$) s'écrit :

$$\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \alpha_x \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} - \beta T(x,y,t) \quad (\text{C.12})$$

Les conditions initiale et aux limites considérées sont :

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0, & \left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} \right|_{x=L_x} &= 0 \\
\left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \right|_{y=0} &= 0, & \left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \right|_{y=L_y} &= 0
\end{aligned} \tag{C.13}$$

La condition initiale est $T(x,y,t=0) = T_0(x,y)$. $T(x,y,t)$ représente l'élévation de température de la plaque par rapport au milieu ambiant qui est supposé rester à température constante durant l'expérience. Les paramètres α_x et α_y représentent la diffusivité thermique dans les directions X et Y. Le paramètre β est un coefficient caractérisant les transferts de chaleur entre la plaque et le milieu ambiant. L'épaisseur de la plaque est supposée suffisamment petite pour que le gradient thermique dans l'épaisseur soit négligeable et que le modèle 2D décrit par les équations (C.12) et (C.13) soit valide.

Pour être en conformité avec ce modèle, les expériences doivent être réalisées sur une plaque mince placée dans un milieu à température constante et uniforme. À partir de l'équilibre thermique entre la plaque et le milieu ambiant, la condition initiale $T_0(x,y)$ peut être établie en utilisant un faisceau laser. La relaxation thermique de la plaque est alors observée avec une caméra infrarouge. À chaque pas de temps, une cartographie du champ de température de la plaque est enregistrée : $\tilde{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{T}(t) + \varepsilon(t)$. La dimension du vecteur $\tilde{\mathbf{T}}(t)$ est égale au nombre de pixels de la caméra infrarouge. La résolution spatiale de la caméra est supposée suffisamment élevée pour que $\mathbf{T}(t)$ soit une bonne approximation de $T(x,y,t)$. Le bruit de mesure $\varepsilon(t)$ est supposé non corrélé spatialement. La caractérisation thermique par KLD/SVD consiste à déterminer les valeurs α_x et α_y à partir des données de température enregistrées.

1.2.2. Formalisme théorique

Soit la KLD du champ de température théorique :

$$T(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} V_m(x,y) z_m(t) \tag{C.14}$$

Les propriétés d'orthogonalité des fonctions propres et états sont rappelées :

$$\langle V_k, V_m \rangle \equiv \int_{\Omega} V_k(x) V_m(x) dx = \delta_{km}, \quad \langle z_m(t), z_k(t) \rangle \equiv \int_t z_m(t) z_k(t) dt = \delta_{mk} \sigma_m^2 \tag{C.15}$$

L'introduction de l'équation (C.14) dans l'équation (C.12) donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} V_m(x,y) \frac{dz_m(t)}{dt} &= \alpha_x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2 V_m(x,y)}{\partial x^2} z_m(t) \\
&+ \alpha_y \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2 V_m(x,y)}{\partial y^2} z_m(t) - \beta \sum_{m=1}^{\infty} V_m(x,y) z_m(t)
\end{aligned} \tag{C.16}$$

La multiplication de cette équation par $V_i(x,y)$, puis une intégration sur Ω en prenant en compte la propriété d'orthogonalité des fonctions propres donne :

$$\begin{aligned} \frac{dz_i(t)}{dt} &= \alpha_x \sum_{m=1}^{\infty} \left\langle \frac{\partial^2 V_m(x,y)}{\partial x^2}, V_i(x,y) \right\rangle_{\Omega} z_m(t) \\ &+ \alpha_y \sum_{m=1}^{\infty} \left\langle \frac{\partial^2 V_m(x,y)}{\partial y^2}, V_i(x,y) \right\rangle_{\Omega} z_m(t) - \beta z_i(t) \end{aligned} \quad (C.17)$$

L'équation ainsi obtenue est multipliée par $z_k(t)$ et intégrée sur le temps. ' n prenant en compte la propriété d'orthogonalité des états, il vient :

$$\frac{1}{\sigma_k^2} \left\langle \frac{dz_i(t)}{dt}, z_k(t) \right\rangle_t = \alpha_x \left\langle \frac{\partial^2 V_k(x,y)}{\partial x^2}, V_i(x,y) \right\rangle_{\Omega} + \alpha_y \left\langle \frac{\partial^2 V_k(x,y)}{\partial y^2}, V_i(x,y) \right\rangle_{\Omega} - \beta \delta_{ik} \quad (C.18)$$

De manière similaire, il peut être montré facilement à partir des équations (C.13) et (C.15) que :

$$\forall m, \quad \left. \frac{\partial V_m(x,y)}{\partial x} \right|_{y=0,L_y} = 0, \quad \left. \frac{\partial V_m(x,y)}{\partial y} \right|_{x=0,L_x} = 0 \quad (C.19)$$

Il est démontré dans l'annexe D1 que l'identité suivante est vérifiée pour tout (i,k) :

$$\frac{1}{\sigma_k^2} \left\langle \frac{dz_i(t)}{dt}, z_k(t) \right\rangle_t = \frac{1}{\sigma_i^2} \left\langle \frac{dz_k(t)}{dt}, z_i(t) \right\rangle_t \quad (C.20)$$

' n prenant en compte les équations (C.18) et (C.20), il vient :

$$\left\langle \frac{\partial^2 V_k(x,y)}{\partial \xi^2}, V_i(x,y) \right\rangle_{\Omega} = \left\langle \frac{\partial^2 V_i(x,y)}{\partial \xi^2}, V_k(x,y) \right\rangle_{\Omega}, \quad \xi = x, y \quad (C.21)$$

Ainsi, l'équation (C.18) pour les indexes (i,k) et l'équation (C.18) pour (k,i) sont des équations identiques. ' n effet, il est possible d'écrire indifféremment :

$$\frac{1}{\sigma_k^2} \left\langle \frac{dz_i(t)}{dt}, z_k(t) \right\rangle_t = \alpha_x \left\langle \frac{\partial^2 V_i(x,y)}{\partial x^2}, V_k(x,y) \right\rangle_{\Omega} + \alpha_y \left\langle \frac{\partial^2 V_i(x,y)}{\partial y^2}, V_k(x,y) \right\rangle_{\Omega} - \beta \delta_{ik} \quad (C.22)$$

$$\frac{1}{\sigma_i^2} \left\langle \frac{dz_k(t)}{dt}, z_i(t) \right\rangle_t = \alpha_x \left\langle \frac{\partial^2 V_i(x,y)}{\partial x^2}, V_k(x,y) \right\rangle_{\Omega} + \alpha_y \left\langle \frac{\partial^2 V_i(x,y)}{\partial y^2}, V_k(x,y) \right\rangle_{\Omega} - \beta \delta_{ik} \quad (C.23)$$

La somme des équations équivalentes (C.22) et (C.23) donne :

$$\frac{1}{\sigma_i^2 + \sigma_k^2} \left\langle \frac{dz_i(t)z_k(t)}{dt} \right\rangle_t = \alpha_x \left\langle \frac{\partial^2 V_i(x,y)}{\partial x^2}, V_k(x,y) \right\rangle_{\Omega} + \alpha_y \left\langle \frac{\partial^2 V_i(x,y)}{\partial y^2}, V_k(x,y) \right\rangle_{\Omega} - \beta \delta_{ik} \quad (C.24)$$

Par suite, il vient :

$$\frac{z_i(t_f)z_k(t_f) - z_i(0)z_k(0)}{\sigma_i^2 + \sigma_k^2} = \alpha_x \left\langle \frac{\partial^2 V_i(x,y)}{\partial x^2}, V_k(x,y) \right\rangle_{\Omega} + \alpha_y \left\langle \frac{\partial^2 V_i(x,y)}{\partial y^2}, V_k(x,y) \right\rangle_{\Omega} - \beta \delta_{ik} \quad (C.25)$$

où t_f est l'instant de fin d'expérience.

Une autre équation intéressante est obtenue par intégration de l'équation (C.22) sur Ω . Pour des conditions aux limites adiabatiques, il vient :

$$\frac{d\langle T(x,y,t) \rangle_{\Omega}}{dt} = -\beta \langle T(x,y,t) \rangle_{\Omega} \quad (\text{C.26})$$

Ce qui donne :

$$\langle T(x,y,t) \rangle_{\Omega} = \langle T_0(x,y) \rangle_{\Omega} \exp(-\beta t) \quad (\text{C.27})$$

1.3. Méthode d'estimation

Pour des observations non bruitées, les paramètres α_x , α_y et β peuvent être calculés à partir de trois équations choisies arbitrairement parmi les équations (C.25). Cependant, pour des données entachées de bruit, il convient de traiter le problème d'estimation de α_x , α_y et β comme un problème aux moindres carrés.

Compte tenu de l'efficacité de l'opérateur de moyenne spatiale $\langle \circ \rangle_{\Omega}$ pour la réduction du bruit, la meilleure estimation de β est réalisée en appliquant la méthode des moindres carrés linéaires à l'équation (C.27). La solution s'écrit alors :

$$\hat{\beta} = \langle t^2 \rangle_t^{-1} \langle -t \ln(\bar{T}(t)/\bar{T}_0) \rangle_t \quad (\text{C.28})$$

avec $\bar{T}(t) = \langle \tilde{T}(x,y,t) \rangle_{\Omega}$ et $\bar{T}_0 = \langle T_0(x,y) \rangle_{\Omega}$.

L'estimation de α_x et α_y est réalisée par la suite à partir des équations (C.25). Au moins deux de ces équations sont nécessaires dans la mesure où le problème implique deux paramètres inconnus. Pour le cas où $\tilde{T}(x,y,t)$ est décrit avec une bonne précision par son approximation KLD de dimension 2 $\left(\left\{ V_m(x) \right\}_{m=1,2}, \left\{ \tilde{z}_m(t) \right\}_{m=1,2} \right)$, les équations (C.25) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} \quad (\text{C.29})$$

avec

$$\tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{11} \\ \tilde{y}_{12} \\ \tilde{y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\tilde{z}_1\tilde{z}_1 / (\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_1^2) + \hat{\beta} \\ \Delta\tilde{z}_1\tilde{z}_2 / (\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2) \\ \Delta\tilde{z}_2\tilde{z}_2 / (\tilde{\sigma}_2^2 + \tilde{\sigma}_2^2) + \hat{\beta} \end{bmatrix}, \quad (C.30)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \langle \partial_x^2 V_1(x,y), V_1(x,y) \rangle_{\Omega} & \langle \partial_y^2 V_1(x,y), V_1(x,y) \rangle_{\Omega} \\ \langle \partial_x^2 V_1(x,y), V_2(x,y) \rangle_{\Omega} & \langle \partial_y^2 V_1(x,y), V_2(x,y) \rangle_{\Omega} \\ \langle \partial_x^2 V_2(x,y), V_2(x,y) \rangle_{\Omega} & \langle \partial_y^2 V_2(x,y), V_2(x,y) \rangle_{\Omega} \end{bmatrix}$$

et $\Delta\tilde{z}_i\tilde{z}_k = \tilde{z}_i(t_f)\tilde{z}_k(t_f) - \tilde{z}_i(0)\tilde{z}_k(0)$, $\partial_{\xi}^2 V_i(x,y) = \partial^2 V_i(x,y) / \partial \xi^2$.

La solution de l'équation (C.29) au sens des moindres carrés est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_x \\ \hat{\alpha}_y \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{\#} \tilde{\mathbf{y}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{M}^{\#} = (\mathbf{M}'\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}' \quad (C.31)$$

2. La méthode de caractérisation thermique par transformées intégrales

La méthode par transformées intégrales [45-47] consiste à exprimer la solution analytique du problème dans un espace transformé (Fourier, Laplace). Un avantage de l'espace transformé est qu'il permet d'écrire plus simplement l'expression analytique de la solution. A partir de cette expression analytique, une analyse modale du champ de température est réalisée afin d'estimer les propriétés du matériau. Cette méthode nécessite donc de connaître la solution analytique du problème, ce qui limite son utilisation. Le principe de la méthode de caractérisation thermique par transformée de Fourier est présenté à partir d'un problème simple.

2.1. Caractérisation thermique de matériaux homogènes par la transformée de Fourier

Le formalisme de la méthode de caractérisation thermique par transformées intégrales est présenté pour un problème 3D transitoire.

2.1.1. Description du problème

Soit une plaque de dimensions $L_x \times L_y \times L_z$. L'équation de conduction de la chaleur pour les points intérieurs (Ω : $-L_x/2 < x < L_x/2$, $-L_y/2 < y < L_y/2$, $0 < z < L_z$) s'écrit :

$$\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = \alpha_x \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \alpha_z \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial z^2} \quad (C.32)$$

Les conditions aux limites associées sont :

$$\begin{aligned}
-\lambda_x \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x} \Big|_{x=-L_x/2} &= 0 ; -\lambda_x \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x} \Big|_{x=L_x/2} &= 0 \\
-\lambda_y \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y} \Big|_{y=-L_y/2} &= 0 ; -\lambda_y \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y} \Big|_{y=L_y/2} &= 0 \\
-\lambda_z \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \varphi_0 \delta(x,y,z=0,t) ; -\lambda_z \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z} \Big|_{z=L_z} &= 0
\end{aligned} \tag{C.33}$$

où φ_0 est la densité de puissance exprimée en W.m^{-2} et δ la fonction Dirac.
La condition initiale est $T(x,y,z,t=0) = 0$.

2.1.2. Formalisme théorique

L'application d'une transformée de Laplace et deux transformées de Fourier-cosinus au champ de température donne :

$$\theta(a_n, b_m, z, p) = \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \int_{t=0}^{+\infty} T(x,y,z,t) \cos(a_n x) \cos(b_m x) \exp(-pt) dx dy dt \tag{C.34}$$

avec $a_n = n\pi/L_x, n \in \mathbb{N}$ et $b_m = m\pi/L_y, m \in \mathbb{N}$ représentent les fréquences spatiales de Fourier dont les expressions dépendent des conditions aux limites du problème.

À partir de cette transformée intégrale, le système des équations (C.32) et (C.33) est réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \theta(a_n, b_m, z, p)}{dz^2} - \left(\frac{\alpha_x}{\alpha_z} a_n^2 + \frac{\alpha_y}{\alpha_z} b_m^2 + \frac{p}{\alpha_z} \right) \theta(a_n, b_m, z, p) &= 0 \\
-\lambda_z \frac{d\theta(a_n, b_m, z, p)}{dz} \Big|_{z=0} &= Q_0 ; -\lambda_z \frac{d\theta(a_n, b_m, z, p)}{dz} \Big|_{z \rightarrow +\infty} &= 0
\end{aligned} \tag{C.35}$$

avec $Q_0 = \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{+\infty} \int_{t=0}^{+\infty} \varphi_0 \delta(x) \delta(y) \delta(t) dx dy dt$ la densité d'énergie exprimée en J.m^{-2} .

En prenant en compte les conditions aux limites, la solution générale associée à l'équation (C.35) est donnée par :

$$\theta(a_n, b_m, z, p) = \frac{Q_0}{\lambda_z \sqrt{\frac{\alpha_x}{\alpha_z} a_n^2 + \frac{\alpha_y}{\alpha_z} b_m^2 + \frac{p}{\alpha_z}}} \exp\left(-z \sqrt{\frac{\alpha_x}{\alpha_z} a_n^2 + \frac{\alpha_y}{\alpha_z} b_m^2 + \frac{p}{\alpha_z}}\right) \tag{C.36}$$

Il est montré dans l'annexe D2 que la transformée de Laplace inverse de l'équation (C.36) permet d'obtenir l'expression de la température dans le domaine de Fourier

$$\tau(a_n, b_m, z, t) = \frac{Q_0}{\rho C_p \sqrt{\pi \alpha_z t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4\alpha_z t}\right) \exp(-\alpha_x a_n^2 t) \exp(-\alpha_y b_m^2 t) \tag{C.37}$$

Par suite, la double transformée de Fourier inverse de l'équation (C.37) donne l'expression de la température sous la forme d'une fonction de x, y, z et t (annexe 3) :

$$T(x,y,z,t) = \frac{Q_0}{\rho C_p} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha_x t}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha_y t}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{4\alpha_z t}\right)}{\sqrt{\pi\alpha_x t} \sqrt{\pi\alpha_y t} \sqrt{\pi\alpha_z t}} \quad (\text{C.38})$$

Comme la solution est calculée en $z = 0$, la solution générale pour un milieu homogène durant la phase du comportement semi-infini (la variation de température n'atteint pas les limites du domaine) s'écrit :

$$T(x,y,z=0,t) = \frac{Q_0}{\rho C_p \sqrt{\pi\alpha_z t}} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha_x t}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha_y t}\right)}{\sqrt{\pi\alpha_x t} \sqrt{\pi\alpha_y t}} \quad (\text{C.39})$$

2.2. Méthode d'estimation

Connaissant la solution analytique du problème donnée par l'équation (C.39), il est possible de calculer la transformée de Fourier du champ de température mesuré durant la phase du comportement semi-infini traduite par la relation (C.37). À partir de cette relation, la température dans l'espace de Fourier est calculée suivant les directions X (C.40) et Y (C.41) avec :

$$\tau(a_n, b_m = 0, z = 0, t) = \frac{Q_0}{\rho C_p \sqrt{\pi\alpha_z t}} \exp(-\alpha_x a_n^2 t) \quad (\text{C.40})$$

$$\tau(a_n = 0, b_m, z = 0, t) = \frac{Q_0}{\rho C_p \sqrt{\pi\alpha_z t}} \exp(-\alpha_y b_m^2 t) \quad (\text{C.41})$$

Ces relations peuvent être divisées par le champ de température moyenné obtenu en fixant $a_n = 0$ et $b_m = 0$ dans l'espace de Fourier. Le ratio permet d'obtenir de nouvelles relations exprimées sous forme logarithmique par :

$$\log(\bar{\tau}(a_n, t)) = -\alpha_x a_n^2 t \quad (\text{C.42})$$

$$\text{avec } \bar{\tau}(a_n, t) = \frac{\tau(a_n, b_m = 0, z = 0, t)}{\tau(a_n = 0, b_m = 0, z = 0, t)},$$

$$\log(\bar{\tau}(b_m, t)) = -\alpha_y b_m^2 t \quad (\text{C.43})$$

$$\text{avec } \bar{\tau}(b_m, t) = \frac{\tau(a_n = 0, b_m, z = 0, t)}{\tau(a_n = 0, b_m = 0, z = 0, t)}.$$

Conformément à la relation (C.42), le logarithme de la température normalisée est tracé en fonction du temps pour les premières fréquences spatiales de Fourier a_n . Le tracé correspondant à chaque valeur a_n est une représentation de la composante modale du champ de température associée à cette fréquence spatiale. La valeur estimée de la diffusivité α_x correspond à la pente du tracé présentant la meilleure évolution linéaire. Dans la plupart des cas, une analyse des tracés associés aux premières fréquences spatiales ($n = 1, 2, \dots, 5$) suffit à

obtenir une bonne précision d'estimation. La diffusivité α_y est estimée de manière similaire à partir de la relation (C.43).

Annexe D

1. Démonstration d'une relation d'égalité

Soit l'équation (C.18) pour $i \neq j$. Pour en simplifier l'écriture sans perdre en généralité, il est supposé que $\alpha = \alpha_x = \alpha_y$. Ainsi, il est possible d'écrire :

$$\frac{1}{\sigma_k^2} \left\langle \frac{dz_i(t)}{dt}, z_k(t) \right\rangle_t = \alpha \langle \nabla^2 V_k(x,y), V_i(x,y) \rangle_\Omega$$

$$\frac{1}{\sigma_i^2} \left\langle \frac{dz_k(t)}{dt}, z_i(t) \right\rangle_t = \alpha \langle \nabla^2 V_i(x,y), V_k(x,y) \rangle_\Omega$$

En considérant le second théorème de Green, la différence de ces équations peut s'écrire comme :

$$\frac{1}{\sigma_k^2} \left\langle \frac{dz_i(t)}{dt}, z_k(t) \right\rangle_t - \frac{1}{\sigma_i^2} \left\langle \frac{dz_k(t)}{dt}, z_i(t) \right\rangle_t = \int_{\Omega} [V_i(x,y) \nabla^2 V_k(x,y) - V_k(x,y) \nabla^2 V_i(x,y)] dx dy$$

Puisque les fonctions propres vérifient l'équation (C.19), il vient :

$$\frac{1}{\sigma_k^2} \left\langle \frac{dz_i(t)}{dt}, z_k(t) \right\rangle_t - \frac{1}{\sigma_i^2} \left\langle \frac{dz_k(t)}{dt}, z_i(t) \right\rangle_t = 0$$

2. Calcul de transformées inverses de Laplace et Fourier

Soit l'équation (C.36) :

$$\theta(a_n, b_m, z, p) = \frac{Q_0}{\lambda_z \sqrt{\frac{\alpha_x}{\alpha_z} a_n^2 + \frac{\alpha_y}{\alpha_z} b_m^2 + \frac{p}{\alpha_z}}} \exp \left(-z \sqrt{\frac{\alpha_x}{\alpha_z} a_n^2 + \frac{\alpha_y}{\alpha_z} b_m^2 + \frac{p}{\alpha_z}} \right)$$

La transformée de Laplace inverse de l'équation (C.36) est obtenue en utilisant successivement les propriétés suivantes de la transformée de Laplace :

i) La propriété de translation

$$\mathbf{L} \left[\exp(-kt) f(t) \right] = F(p+k) \text{ avec } k = \alpha_x a_n^2 + \alpha_y b_m^2$$

$$\theta(a_n, b_m, z, p) = \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{Q_0}{\lambda_z \sqrt{\frac{p}{\alpha_z}}} \exp \left(-z \sqrt{\frac{p}{\alpha_z}} \right) \exp(-\alpha_x a_n^2 t) \exp(-\alpha_y b_m^2 t) \right]$$

ii) La propriété d'échelle

$$\mathbf{L} [f(kt)] = \frac{F(p/k)}{k} \text{ avec } k = \alpha_z$$

$$\theta(a_n, b_m, z, p) = \frac{\alpha_z Q_0}{\lambda_z} \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{p}} \exp(-z\sqrt{p}) \right] \exp(-\alpha_x a_n^2 t) \exp(-\alpha_y b_m^2 t)$$

iii) La transformée de Laplace inverse

$$\mathbf{L}^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{p}} \exp(-z\sqrt{p}) \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right)$$

L'utilisation de ces propriétés permet d'obtenir l'expression de la température dans le domaine de Fourier :

$$\mathbf{L} [f(kt)] = \frac{F(p/k)}{k} \text{ avec } k = \alpha_z$$

$$\tau(a_n, b_m, z, t) = \frac{Q_0}{\rho C_p \sqrt{\pi \alpha_z t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4\alpha_z t}\right) \exp(-\alpha_x a_n^2 t) \exp(-\alpha_y b_m^2 t)$$

Deux transformées de Fourier inverses successives permettent d'obtenir l'expression de la température sous la forme d'une fonction de x , y , z et t :

$$\mathbf{F}^{-1} \left[\exp(-ka_n^2) \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \exp\left(-\frac{x^2}{4k}\right) \text{ avec } k = \alpha_x t$$

$$\mathbf{F}^{-1} \left[\exp(-kb_m^2) \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \exp\left(-\frac{y^2}{4k}\right) \text{ avec } k = \alpha_y t$$

$$T(x, y, z, t) = \frac{Q_0}{\rho C_p} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha_x t}\right)}{\sqrt{\pi \alpha_x t}} \frac{\exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha_y t}\right)}{\sqrt{\pi \alpha_y t}} \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{4\alpha_z t}\right)}{\sqrt{\pi \alpha_z t}}$$