



Étude et modèles effectifs d'écoulements quasi-2D

Alban Potherat

► To cite this version:

Alban Potherat. Étude et modèles effectifs d'écoulements quasi-2D. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2000. Français. NNT: . tel-00848723

HAL Id: tel-00848723

<https://theses.hal.science/tel-00848723>

Submitted on 28 Jul 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Étude et modèles d'écoulements quasi-2d

A. Pothérat

7 septembre 2000

Remerciements

Pour un peu convenue qu'elle puisse paraître, cette page n'en est pas moins essentielle et parfaitement sincère. Car comme son appartenance au cursus universitaire l'indique, une thèse de doctorat s'inscrit dans un cadre de formation. À ce titre, son contenu dépend crucialement des gens qui l'ont initiée et dirigée. Et sur ce point, il me restera l'impression très nette d'avoir bénéficié d'un encadrement exceptionnel.

Je remercie donc chaleureusement René Moreau pour m'avoir proposé non pas un sujet, mais un vaste domaine d'investigations dans lequel il m'a à la fois toujours laissé évoluer très librement, et en même temps suggéré les meilleures directions. Sur ce dernier point, je rend hommage d'une part, à la grande disponibilité dont il fait preuve en dépit des nombreuses tâches qui l'occupent, et d'autre part à la passion juvénile qui l'anime, à la fois dans la traque du phénomène physique et dans sa volonté de transmettre ses nombreuses idées. Cette passion semble ne jamais devoir le quitter, et contribue largement au plaisir que j'ai éprouvé à travailler avec lui.

J'ai eu en outre le grand privilège de travailler presque au quotidien avec Joël Sommeria dont l'immense talent a largement contribué à l'obtention des résultats présentés. Et si je ne suis pas en mesure de décrire l'ensemble de ce qu'il a pu m'apprendre - aussi bien sur la physique elle-même que sur la façon de l'aborder et de la présenter -, c'est parce qu'il me reste probablement pas mal d'années avant d'épuiser le bénéfice à retirer de cette période de travail à son contact par ailleurs très amical. Je le remercie vivement pour tout cela¹.

J'ai également pu profiter de l'expertise d'Yves Delannoy qui a familiarisé le béotien que j'étais à l'utilisation de l'outil numérique FLUENT, et ce avec patience, disponibilité et bonne humeur. Enfin, l'application des modèles 2D au problème de coulée continue est en majeure partie le fait de mon vieux compagnon des pistes, Eric "Ze Perverted Yéti" Favre, ingénieur ROTELEC, dont l'amitié inconditionnelle remonte à l'époque où l'on jettait de l'huile chaude sur les dragons.

Je remercie également les membres du Jury : D. Jault, P.A. Davidson et E. Grenier, qui ont accepté de se pencher sur ce travail - spécialement pendant la période estivale -. Leurs suggestions permettront, je l'espère, de nouveaux développements à la suite de cette thèse.

Enfin, je ne peux clore cette page de remerciements sans mentionner les très bonnes conditions de travail dont j'ai bénéficié au laboratoire MADYLAM, notamment grâce à son directeur, Marcel Garnier, qui a fait preuve d'engagement, et ceci en dépit des efforts de nuisance marqués du rectorat de l'académie de Grenoble et de l'indifférence des partenaires du laboratoire, dont certains sont pourtant censés promouvoir la formation par la recherche. À ces gens qui répriment jusqu'à la plus infirme flatulence de peur de glisser de leur sacro-saint fauteuil, je souhaite plus d'agitation.

¹ Joël, tu as oublié ton sac dans mon bureau...

Table des matières

1	Écoulements soumis à une force plane	13
1.1	Équations Générales.	13
1.1.1	Équations de l'électromagnétisme.	13
1.1.2	Equations de la dynamique des fluides.	16
1.2	Solutions singulières de l'équation de Navier-Stokes.	17
1.2.1	Couche limite.	17
1.2.2	Développements asymptotiques raccordés.	18
1.3	Influence d'une force plane.	19
1.3.1	Tendance à la bidimensionnalité.	19
1.3.2	Couches limites perpendiculaires au voisinage d'une paroi.	20
1.3.3	Couches limites parallèles.	24
2	Cœur et couche limite	26
2.1	Hypothèses et formalisme.	26
2.2	Ecart à la bidimensionnalité de l'écoulement de cœur : l' <i>effet tonneau</i>	27
2.2.1	Mécanisme général hydrodynamique.	27
2.2.2	Mécanisme Magnétohydrodynamique.	29
2.2.3	Écoulement MHD tournant.	31
2.3	Couches de Hartmann.	31
2.3.1	Couche de Hartmann en champ instationnaire non homogène.	32
2.3.2	Couche de Hartmann faiblement inertielle.	35
2.3.3	Loi de paroi pour les couches de Hartmann.	36
2.4	Couche combinée Hartmann-Ekman.	37
2.4.1	Théorie sans inertie.	37
2.4.2	Couche de Hartmann en rotation modérée.	38
2.4.3	Problème non-linéaire et axisymétrique de Bödewadt-MHD	38
2.5	Raccord entre les couches limites et le cœur	41
2.5.1	Équation du mouvement au premier ordre.	41
2.5.2	Équation au premier ordre pour les écoulements MHD plans sous champ uniforme.	42
3	Modèles effectifs 2D d'écoulements confinés	44
3.1	Principe général.	44
3.2	Les classiques.	45
3.2.1	Le modèle SM82 hypothèses, résultats et limites.	45
3.2.2	Le modèle quasi-géostrophique pour les fluides tournants.	47
3.3	Modèles d'écoulements MHD faiblement inertiels sous champ magnétique uniforme.	48
3.3.1	Modèle général.	48
3.3.2	Quelques propriétés du terme non linéaire.	49
3.3.3	Cas axisymétriques stationnaires.	50
3.3.4	Validité du modèle, idées pour un modèle MHD turbulent sous champ uniforme.	53

3.4	Écoulements MHD sous champ instationnaire non uniforme.	53
3.5	Fluides en rotation rapide.	54
3.5.1	Modèle général et propriétés.	54
3.5.2	Couches limites parallèles planes.	55
3.5.3	Écoulements axisymétriques	56
4	Application des modèles 2D	58
4.1	Modèle Numérique pour l'expérience MATUR	58
4.1.1	Dispositif expérimental de référence.	58
4.1.2	Modèle numérique.	59
4.1.3	Structure de l'écoulement.	60
4.1.4	Profils Radiaux	64
4.1.5	Évolution du moment cinétique.	65
4.1.6	Couches limites parallèles.	68
4.1.7	Spectres "turbulents".	72
4.2	Étude numérique des tourbillons Isolés.	72
4.2.1	Dispositif expérimental de référence (Sommeria 1988).	72
4.2.2	Décroissance libre.	76
4.3	Contrôle d'un écoulement d'acier par champ glissant.	78
4.4	Étude du Spin-Up et du Spin-Down d'un bassin en rotation.	79
4.4.1	Description du problème.	79
4.4.2	Étude numérique des couches parallèles.	81
A	Quelques propriétés du modèle PSM2000	86
A.1	Equation du tourbillon.	86
A.2	Effets du terme non linéaire sur une tache de vortacité.	86
A.3	Temps caractéristique d'évolution des phénomènes non-linéaires pour le moment cinétique dans l'expérience MATUR.	87
B	Modèle quasi-géostrophique	89
C	An effective 2D model for MHD flows with transverse magnetic field	91
D	Effective boundary conditions for MHD flows with thin Hartmann layers	92

Préambule

Afin de favoriser la lecture de ce document, l'exposé porte délibérément l'accent sur la phénoménologie des mécanismes physiques, au détriment du détail des développements analytiques qui constituent pourtant les outils privilégiés d'obtention des résultats dans le cadre de cette thèse. Ces derniers sont présentés directement sous leur forme finale, et accompagnés des hypothèses dont ils découlent. Il suivent en général une première approche intuitive et précèdent une éventuelle interprétation. Le lecteur intéressé par le détail de la démarche est invité à consulter les annexes dans lesquelles sont reportées, d'une part, les publications associées à ce travail, et d'autre part, des exposés exhaustifs de travaux qui ne font pas encore l'objet de publications.

Notations générales

Constantes physiques

ε_d	permittivite electrique
μ	permeabilité magnétique.
ν	viscosité cinématique du fluide.
ρ	masse volumique du fluide
σ	conductivité électrique.

quantités physiques

A	potentiel-vecteur électromagnétique.
B	induction magnétique, toujours appelée <i>champ magnétique</i> , par abus de langage.
E	champ électrique.
$\mathcal{F}$	fonction qui au vecteur $\mathbf{u}_\perp$ associe soit le courant électrique (problèmes MHD, soit lui même, soit une combinaison des deux)
g	grandeur physique quelconque.
H	matrice 4×4
j	vecteur densité de courant électrique.
$\mathbf{j}_W$	composante orthogonale à $\mathbf{e}_z$ de la densité de courant électrique à la paroi $z = 0$ dans le chapitre 2. Somme des composantes orthogonales à $\mathbf{e}_z$ de la densité de courant électrique à la paroi $z = 0$ et en $z = 1$ dans les chapitres 3 et 4.
L	matrice 2×2 associée à $\mathcal{F}$ quand celle ci est linéaire
$\mathbf{L}^*$	$= -\mathbf{\Theta} \mathbf{L}$
m	courant électrique ou vitesse ou combinaison des deux selon le problème considéré.
p	pression
r, θ	coordonnée radiale et angle azimutal en coordonnées polaires.
t	temps.
u	vecteur vitesse du fluide.
U	vecteur à 4 composantes composé des deux composantes de la vitesse et des deux composantes de sa dérivée par rapport à la variable ξ .
w	composante verticale de la vitesse du fluide.
x, y	coordonnées horizontales.
z	coordonnée verticale dans les zones de coeur.
z_η	coordonnée verticale normalisée par l'échelle de raccord η .
η	échelle intermédiaire de raccord entre la couche limite et le coeur de l'écoulement.
$(\theta_k(\varepsilon))_{k \in N}$	échelle de comparaison sur laquelle est construite le développement des quantités physiques (toujours choisie égale à $(\varepsilon^k)_{k \in N}$ à l'utilisation).
λ_1, λ_2	valeurs propres de L .
ξ	coordonnée verticale dans couches limites perpendiculaires.
τ_W	somme des frottements aux parois de Harman supérieures et inférieures.
ϕ	potentiel électrique.
ω	= composante verticale de la vorticité.
$\frac{1}{2}(\nabla_\perp \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_z$	

Constantes

a	longueur caractéristique verticale. Hauteur de l'écoulement si celle-ci est constante.
$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$	base orthonormale directe de référence par défaut. La direction de $\mathbf{e}_z$ est dite verticale.
$\mathbf{I}$	matrice 2×2 identité.
n	nombre de couches perpendiculaires dans le problème considéré ($n = 1$ pour une surface libre et $n = 2$ pour une paroi en $z = 1$)
t_H	temps de freinage de Hartmann.
t_E	temps de freinage d'Ekman.
U	valeur caractéristique de la vitesse horizontale.
Θ	matrice quart de tour indirect du plan.
τ	temps Joule.
Ω	vitesse de rotation d'axe Oz du repère tournant.

Opérateurs notations particulières

$\mathcal{O}_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h}_0}(g)$	fonction indéterminée qui vérifie $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h}_0} \frac{\mathcal{O}_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h}_0}(g)}{g} \leq 1$ (fonction au plus de l'ordre de g au voisinage de $\mathbf{h}_0$).
$\mathcal{D}_{\mathbf{v}}$	opérateur de l'espace des fonctions de $\mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$ dans lui-même défini par $\mathbf{F} \mapsto \mathcal{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{F} = (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{F} + (\mathbf{F} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{v} = \nabla_{\perp} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F}) - \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{F}$.

Indices

$()_{\perp}$	indice des composantes horizontales pour un vecteur ou partie 2D associée au plan horizontal d'un opérateur.
$()_{dim}$	indice afférent aux variables dimensionnelles (souvent omis en l'absence d'ambiguïté).
$\check{()}$	valeur prise dans une zone de coeur de l'écoulement
$\hat{()}$	valeur prise dans une couche limite perpendiculaire.
$()_{W-}$	valeur prise à la paroi située en $z = 0$.
$()_{W+}$	valeur prise à la paroi ou la surface située en $z = 1$.
$g^{(i,j)}$	coefficient de $Ro^i \varepsilon^j$ dans le développement de la grandeur g en fonction des petits paramètres Ro et ε .
$\bar{g}$	moyenne verticale de la grandeur physique g entre $z = 0$ et $z = 1$, définie par $\bar{g} = \int_0^1 \check{g} dz + n\varepsilon \int_0^{+\infty} \hat{g}(\frac{z}{\varepsilon}) - \check{g}(z=0) d(\frac{z}{\varepsilon})$.
g'	écart à la moyenne verticale de g définie par : $g' = g - \bar{g}$.

Nombres adimensionnels

E	nombre d'Ekman
Ha	nombre de Hartmann.
N	paramètre d'interaction, également appelé nombre de Stuart.
Rm	nombre de Reynolds magnétique.
Re	nombre de Reynolds.
S	rapport de la force due aux variations temporelles de vitesse de rotation et de la force de Coriolis.
Ro	Nombre de Rossby.
ε	$= E^{\frac{1}{2}}$
λ	élancement (rapport de la longueur caractéristique verticale sur la longueur caractéristique horizontale de l'écoulement).

Notations du chapitre 1

a_0	vitesse d'Alfvén.
b	partie imaginaire (négative) d'une valeur propre de $\mathbf{H}$.
c	partie réelle (négative) d'une valeur propre de $\mathbf{H}$.
$\mathbf{b}$	perturbation du champ magnétique dans la théorie des ondes d'Alfvén.
$\mathbf{f}_r$	partie rotationnelle de la force de Laplace.
$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$	variables d'Elsasser.
p'	perturbation de pression dans la théorie des ondes d'Alfvén.
q	densité de charge électrique.
$\mathbf{u}'$	perturbation de vitesse dans la théorie des ondes d'Alfvén.

Notations du chapitre 2

A	nombre d'Elasser (paragraphe 2-3 uniquement).
f_b	fréquence caractéristique de variation du champ magnétique.
$\mathbf{F}$	force introduite comme perturbation dans l'équilibre des forces qui caractérise les écoulements de coeur (ε petit) (chapitre 2) : par exemple forces d'inertie, ou forces visqueuses ou somme des deux...
$\mathcal{L}_3$	opérateur de l'espace des fonctions de $\mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$ dans lui-même défini par $\tilde{\mathbf{u}}_{\perp} \mapsto \mathcal{L}_3 \tilde{\mathbf{u}}_{\perp} = -\lambda^2 \Delta_{\perp} [\tilde{\mathbf{u}}_{\perp} \times \mathbf{e}_z] + \lambda^2 \nabla_{\perp} [\nabla_{\perp} \times \tilde{\mathbf{u}}_{\perp} \cdot \mathbf{e}_z]$
δ_{Ha-Ek}	épaisseur (dimensionnelle) caractéristique de la couche de Hartmann-Ekman.
λ_{Ha-Ek}	longueur d'onde de la spirale d'Ekman dans la couche de Hartmann-Ekman.

Notations du chapitre 3

b	rayon de l'électrode d'injection du courant électrique dans les problème du tourbillon axisymétrique MHD (paragraphes 3-3.3 uniquement).
T	nombre adimensionnel constitué du rapport des temps caractéristiques inertiels et de variation du champ imposé (modèle 2D pour les écoulements sous champ variable).
$\mathbf{u}_\phi$	champ de vitesse construit sur le forçage électromagnétique dû uniquement aux variations temporelles du champ magnétique.
$\mathbf{u}_0$	champ de vitesse associé au seul forçage électromagnétique défini par (3.4) dans le cas d'un champ uniforme et par (3.30) dans le cas d'un champ non-uniforme.
$\mathbf{v}, \mathbf{v}_0, p'$	champs de vitesse, de vitesse liée au forçage MHD, et de pression égaux à aux valeurs moyennes entre $z = 0$ et $z = 1$ de ces grandeurs respectives à un coefficient proche de 1 près (erreur de l'ordre de Ha^{-1} dans le cadre des modèles 2D MHD et $E^{-\frac{1}{2}}$ dans le cadre du modèle 2D quasigéostrophique modifié).
V	vitesse de transport d'une tâche de vorticité, dans le cadre de l'étude du comportement du terme non-linéaire
v_θ	composante azimutale de la vitesse moyenne $\bar{\mathbf{u}}_\perp$.
$v_{0\theta}$	composante azimutale de $\mathbf{u}_0$.
$\tilde{v}_\theta$	composante azimutale de la vitesse moyenne $\bar{\mathbf{u}}_\perp$.normalisée par le forçage $\frac{n\alpha}{v_{0\theta}}$.
C	paramètre de contrôle pertinent pour le problème de la couche parallèle MHD axisymétrique.
C_t	paramètre de contrôle pertinent pour le problème du tourbillon MHD axisymétrique.
C	$= \beta_\parallel - \alpha_\parallel$.
F	paramètre valant $\frac{4\Omega^2}{ga}$.
N_c	paramètre d'interaction construit avec l'épaisseur typique d'une couche parallèle $aHa^{-\frac{1}{2}}$ pour longueur caractéristique.
R_0	coordonnée radiale de la paroi dans tous les problèmes de couche parallèle axisymétrique.
t_η	temps caractéristique de diffusion associé à η_{nl} .
α	$= 1 + Ha^{-1}$ (paragraphes 3-2 uniquement).
$\alpha_\parallel, \beta_\parallel$	paramètres de contrôle pertinents pour le problème des couches parallèles axisymétriques en fluides tournants.
α_R, β_R	paramètres de contrôle pertinent pour le problème des tourbillons axisymétriques en fluides tournants.
Γ	circulation totale de l'écoulement.(problèmes des tourbillons isolés).
η_b	cote de la paroi du fond pour les écoulements quasi-géostrophiques (cité au paragraphe 3-ref à titre informatif).
η_{nl}	diffusivité associée au comportement non-linéaire du modèle PSM2000 au voisinage d'une tâche de vorticité advectée.
τ_s	frottement à la surface libre (modèle quasi-géostrophique).
τ_0	valeur caractéristique du frottement de surface dans l'écriture adimensionnelle de l'équation quasi-géostrophique.

Notations du chapitre 4

b	rayon de l'électrode d'injection du courant électrique dans les problème du tourbillon axisymétrique MHD.
B_0	maximum du champ magnétique dans le problème de freinage d'un écoulement d'acier par champ glissant
L	intégrale sur le plan moyen du moment cinétique surfacique.
L_0	moment cinétique global associé au champ de vitesse $\mathbf{u}_0$.
r_e	coordonnée radiale de l'électrode circulaire d'injection du courant dans MATUR.
R_0	coordonnée radiale de la paroi dans tous les problèmes de couche parallèle axisymétrique.
– $\mathbf{u}_\phi$	champ de vitesse construit sur le forçage électromagnétique dû uniquement aux variations temporelles du champ magnétique.
$\mathbf{u}_0$	champ de vitesse associé au seul forçage électromagnétique défini par (3.4) dans le cas d'un champ uniforme et par (3.30) dans le cas d'un champ non-uniforme.
t_{nl}	temps typique de réponse de l'écoulement prévu par le modèle PSM2000.
t_η	temps caractéristique de diffusion associé à η_{nl} .
Γ	circulation totale de l'écoulement (problèmes des tourbillons isolés MHD et des parois axisymétriques en fluide tournant).
σ_c	taux de croissance du vecteur d'onde le plus instable pour l'instabilité de Kelvin-Helmoltz.

Introduction

Une grande variété d'écoulements présente un champ de vitesse dont les composantes sont presque incluses dans un plan. Citons pêle-mêle des exemples très familiers comme les écoulement océaniques, le café mis en mouvement par la cuiller, la photo satellite de notre atmosphère, ou de moins quotidiens comme les disques d'accrétion planétaires. Il en est de même de certains procédés industriels qui font intervenir des écoulements de métal liquide dans un fort champ magnétique transverse. Dans tous ces cas, l'écoulement est confiné spatialement et une force particulière contraint fortement la dynamique du système. Les écoulements qui tournent suffisamment vite sont dominés par les effets de la force de Coriolis. L'effet d'un champ magnétique fort et permanent, moins intuitif, n'en est pas moins spectaculaire : si le fluide est conducteur d'électricité, l'écoulement peut être entièrement déterminé par la seule force de Laplace.

L'étude des écoulements dominés par de telles forces, incluses dans un plan (qui sera toujours désigné comme plan "horizontal" par la suite) , a mis en évidence leur structure particulièrement simple dans la direction orthogonale à ce plan. Ainsi, Hunt et Ludford (1968) [19] ont-ils montré la structure très simple des couches limites qui apparaissent dans la direction orthogonale à un fort champ magnétique permanent, découvertes par Hartmann (1937) [21]. Plus tard, les études de Lielausis (1975) [23] , Tsinober & Kolesnikov (1974) [25] et Alemany (1979) [18] ont mis évidence les propriétés particulières des écoulements turbulents sous un tel champ, avant que Sommeria et Moreau (1982) [26] ne quantifient leur forte tendance à la bidimensionnalité. Ekman (1905) [20] puis Kármán (1921) [22] avaient découvert plus tôt la simplicité des couches limites orthogonales à l'axe de rotation de l'écoulement. Taylor (1923) avait, lui, remarqué la tendance des écoulements en rotation à former des colonnes bidimensionnelles.

Le fait que tous ces écoulements ne présentent d'écart à la bidimensionnalité que dans de fines couches limites constitue une propriété très exploitable dans la mesure où cette dépendance selon la verticale peut être éliminée par le calcul analytique. Les géophysiciens utilisent souvent une équation du mouvement bidimensionnelle dans laquelle sont inclus des termes qui découlent de la compréhension des mécanismes qui gouvernent les écarts à la bidimensionnalité (le modèle *quasi-géostrophique*). Sommeria et Moreau (1982) [26] proposent un modèle analogue pour les écoulements de fluides conducteurs soumis à un fort champ transverse permanent (le modèle SM82).

Cependant, ces modèles reposent sur les formes les plus simples des profils de vitesse verticaux, si bien que leurs prévisions peuvent être mises en défaut quand des phénomènes physiques plus complexes interviennent. En particulier le modèle de Sommeria et Moreau (1982) [26] est mal adapté à la description des écoulements où les phénomènes inertiels influent sur le profil de vitesse vertical. C'est ce point de départ que Joël Sommeria et René Moreau m'ont proposé de considérer dans le cadre de la thèse que j'ai effectuée au laboratoire MADYLAM sous leur direction conjointe. Ainsi, après l'étude du comportement des écoulements magnétohydrodynamiques (MHD) sous fort champ transverse en présence de phénomènes tels que l'inertie, le frottement horizontal ou des variations du champ magnétique, la forte analogie avec les écoulements en rotation m'a conduit à tenter de transposer à ces derniers les résultats obtenus en MHD.

Ce travail de thèse est donc présenté en suivant la démarche qui a vise à construire puis à appliquer des modèles à partir d'une étude préalable fine des systèmes physiques. Dans un premier temps, les principales propriétés des écoulements MHD et des écoulements tournants sont exposées à la lumière de leur structure commune. Les principaux prérequis de mathématiques et de physique, en particulier sur les notions de couches limites sont également rappelés dans ce premier chapitre. Le second chapitre contient l'analyse des propriétés physiques des écoulements quasi-bidimensionnels. Les conditions d'un faible écart à la bidimensionnalité sont d'abord examinées, puis les propriétés des couches de Hartmann en présence d'effets inertiels, et d'un champ magnétique variable. Ces dernières sont ensuite utilisées pour construire une loi de paroi destinée à éviter les lourds calculs numériques que requiert le maillage de ces couches. Le troisième chapitre est consacré à l'élaboration de plusieurs modèles 2D pour ces écoulements quasi-2D, à partir d'une moyenne verticale des équations de Navier-Stokes : après un rappel des modèles quasi-géostrophique et SM82, un modèle qui tient compte de possibles effets inertiels dans les couches de Hartmann est construit (modèle PSM2000). Un second modèle intègre la possibilité de variations temporelles et spatiales du champ magnétique. Enfin, un modèle quasi-géostrophique incluant les effets de la force de Coriolis dans les couches d'Ekman est proposé. Finalement, le quatrième et dernier chapitre est dédié à l'application de ces modèles dans des cas concrets. Le modèle PSM2000 est comparé en détail, d'une part aux résultats expérimentaux de l'expérience MATUR, et d'autre part, au modèle SM82. Dans le but de situer les perspectives d'application de ces modèles, une rapide étude sur les procédés de freinage d'un écoulement d'acier par champ glissant est menée et le modèle quasi-géostrophique modifié est appliqué à l'étude du spin-up et du spin-down d'une cuve circulaire en rotation.

Chapitre 1

Écoulements soumis à une force plane intense (Force de Coriolis ou de Laplace)

Résumé

Ce chapitre rappelle les éléments de base, mathématiques et physiques qui serviront dans l'ensemble de cet exposé. Les équations de la mécanique des fluides incompressibles et de l'électromagnétisme sont ainsi données avant une courte explication sur la notion de couche limite et les outils d'analyse qui permettent de la décrire. Un formalisme simple, commun à la fois aux écoulements magnétohydrodynamique à faible nombre de Reynolds magnétique et aux écoulements en rotation rapide, est développé pour retrouver quelques-unes des propriétés les plus connues de ces deux classes de problèmes : couches perpendiculaires de Hartmann et d'Ekman, couches parallèles et tendance à la bidimensionnalité.

1.1 Équations Générales.

1.1.1 Équations de l'électromagnétisme.

Équations de Maxwell et équation de l'induction.

Un fluide conducteur d'électricité est soumis aux lois de l'électromagnétisme. S'il est parcouru par un courant électrique de densité $\mathbf{j}$, il subit une force due à la présence d'un champ magnétique $\mathbf{B}$, soit imposé, soit généré par le mouvement du fluide. Cette densité de force (nous assimilerons abusivement *force* et *densité de force* par la suite), dite de Laplace, s'écrit en toute généralité $\mathbf{f} = q\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ où q est la densité de charges et $\mathbf{E}$ le champ électrique.

Le courant électrique et le champ magnétique sont régis par les équations de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu (\mathbf{j} + \varepsilon_d \partial_t \mathbf{E}), \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon_d}, \quad (1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (1.1d)$$

et la loi d'Ohm

$$\mathbf{j} = q\mathbf{u} + \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (1.2)$$

L'équation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ est satisfaite en introduisant le potentiel-vecteur électromagnétique $\mathbf{A}$, défini à un gradient près par $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. La détermination complète de $\mathbf{A}$ est obtenue par l'adjonction d'une

condition de jauge. Quand les variations de champ électrique sont suffisamment lentes (approximation quasi-statique), la *jauge de Coulomb* est couramment utilisée :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (1.3)$$

Le potentiel électrique ϕ est défini, lui, à une constante près par :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi + \partial_t \mathbf{A}, \quad (1.4)$$

ce qui permet de satisfaire (1.1c).

L'équation de conservation du courant résulte de la divergence de (1.1b) et de (1.1c) :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial_t q = 0. \quad (1.5)$$

Dans un métal liquide, la relaxation de la charge par répulsion électrique peut être considérée comme instantanée (temps caractéristique $\frac{\varepsilon_d}{\sigma}$) devant le temps d'évolution du système, la conservation du courant est simplifiée :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (1.6)$$

De même peuvent être négligés le courant de convection $q\mathbf{u}$ dans la loi d'Ohm et la force électrostatique $q\mathbf{E}$ dans l'expression de la force de Laplace, comme le montre une simple analyse des ordres de grandeurs. Cette approximation quasi-statique, classique dans les bons conducteurs tels que les métaux, est désormais toujours supposée valide. Des conditions aux limites complètent la définition du champ $\mathbf{j}$. Par exemple, le long d'une surface W parfaitement isolante de normale $\mathbf{n}$ et de tangente $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{j}_W \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (1.7)$$

et si W est parfaitement conductrice :

$$\mathbf{j}_W \cdot \mathbf{t} = 0. \quad (1.8)$$

Les rotationnels respectifs des équations (1.1b) et (1.2) ainsi que (1.1d) fournissent l'équation d'évolution du champ magnétique, appelée *équation de l'induction* :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\sigma\mu} \Delta \mathbf{B}. \quad (1.9)$$

Les deux termes du second membre de (1.9) représentent respectivement un transport par le champ de vitesse $\mathbf{u}$ et une diffusion. Le rapport de leurs ordres de grandeur respectifs est mesuré par le Nombre de *Reynolds magnétique* $Rm = \mu\sigma U l$. Si $Rm \gg 1$, le champ magnétique n'a pas le temps de diffuser avant d'être emporté par l'écoulement : on dit que le champ est gelé dans la matière (étoiles). Au contraire, si $Rm \ll 1$, le champ magnétique diffuse rapidement et le champ magnétique induit par les courants électriques générés dans le fluide est négligeable.

Ondes d'Alfven

Les équations de Navier-Stokes et de l'induction présentent une forte similarité mise en évidence par le choix des variables d'*Elsasser* :

$$\mathbf{P} = \mathbf{u} + \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\rho\mu}} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\rho\mu}} \quad (1.11)$$

$$\nu_1 = \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{\mu\sigma} \right) \quad (1.12)$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2} \left(\nu - \frac{1}{\mu\sigma} \right) \quad (1.13)$$

$$p' = \frac{p}{\rho} + \frac{(\mathbf{P} - \mathbf{Q})^2}{8} \quad (1.14)$$

La combinaison de l'équation de Navier-Stokes (voir paragraphe 1-1.2) et de l'équation de l'induction fournit les équations d'évolution pour ces variables :

$$\partial_t \mathbf{P} + (\mathbf{Q} \cdot \nabla) \mathbf{P} = -\nabla p' + \Delta (\nu_1 \mathbf{P} + \nu_2 \mathbf{Q}) \quad (1.15)$$

$$\partial_t \mathbf{Q} + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{Q} = -\nabla p' + \Delta (\nu_1 \mathbf{Q} + \nu_2 \mathbf{P}) \quad (1.16)$$

Si à la fois la diffusion visqueuse et la diffusion mécanique sont faibles devant les termes non linéaires, il existe une solution simple du système qui se présente sous forme d'une onde plane telle que $\mathbf{P}_0$ soit fixe et $\mathbf{Q} = \mathbf{F} \left(\frac{\mathbf{P}_0}{P_0} \cdot \mathbf{x} - P_0 t \right)$. Une perturbation de vitesse quelconque est alors propagée sans déformation selon $\mathbf{P}_0$ si $\mathbf{B} = \sqrt{\mu\rho}$.

Le cas où la vitesse d'Alfvén $\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu\rho}}$ est grande devant la vitesse du fluide, et un champ magnétique est imposé de l'extérieur (c'est à dire qu'il ne subit que de faibles perturbations $\mathbf{b} \ll \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu\rho}}$), correspond à la configuration des ondes d'Alfvén. Ces dernières présentent la particularité de propager une perturbation initiale le long des lignes de champ (dans les deux sens), comme le long d'une corde de guitare.

Plus physiquement, le mécanisme de propagation des ondes d'Alfvén est lié aux boucles de courants qui apparaissent quand une particule fluide est déplacée dans une surface orthogonale au champ magnétique. Ces dernières tendent à ramener la particule dans sa position initiale, tout en déplaçant les surfaces adjacentes. Ce mécanisme est donc très proche de celui qui tend à instaurer la bidimensionnalité sous un champ uniforme. (voir [15] ou [12]).

Couplage faible à $Rm \ll 1$.

Le champ magnétique est alors découplé du champ de vitesse et peut donc être imposé; seule la loi d'Ohm présente encore un couplage entre la vitesse et la densité de courant électrique. Il est alors plus commode de remplacer cette dernière par son rotationnel qui présente l'avantage d'éliminer le champ électrique; soit, si $\mathbf{j}$ est normalisé par $\sigma B U$:

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{j}_{\perp} = \partial_z w, \quad (1.17a)$$

$$\mathbf{e}_z \times \partial_z \mathbf{j}_{\perp} - \lambda^2 (\mathbf{e}_z \times \nabla_{\perp}) j_z = \partial_z \mathbf{u}_{\perp}. \quad (1.17b)$$

En l'absence de charges et quand $\mathbf{B}$ est orienté selon $\mathbf{e}_z$, il est possible d'éliminer complètement le courant [15]. Si $\mathbf{f}_r$ est représenté la partie rotationnelle de $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, le birotationnel de la loi d'Ohm permet d'obtenir :

$$\Delta \mathbf{f}_r = \partial_{zz}^2 \mathbf{u}. \quad (1.18)$$

La partie irrotationnelle de $\mathbf{f}$ pouvant être intégrée à la pression, la force électromagnétique présente donc une dépendance linéaire mais non locale de la vitesse. Dans la limite d'un fort champ magnétique, le champ de vitesse est rapidement uniformisé dans la direction $\mathbf{e}_z$ si bien que $\Delta \mathbf{f} \simeq \Delta_{\perp} \mathbf{f}$. Sommeria et Moreau [31] interprètent l'effet de cette force comme une diffusion de quantité de mouvement le long des lignes de champ. Ce mécanisme, qui uniformise les vitesses dans les plans horizontaux adjacents, est proche de celui qui provoque la propagation des ondes d'Alfvén.

Le phénomène de diffusion de quantité de mouvement est caractérisé par une diffusivité $\frac{\sigma B^2 a^2}{\lambda^2 \rho}$ dépendante de l'échelle de longueur transverse considérée (λ). Cette propriété de diffusion tend à rendre l'écoulement bidimensionnel quand le temps de diffusion associé est petit devant le temps de retournement des structures $\frac{a}{\lambda U}$, soit :

$$\frac{\rho}{\sigma B^2} \lambda^2 \ll \frac{a}{\lambda U} \text{ ou encore } \lambda^3 \ll N, \quad (1.19)$$

où N est la paramètre d'interaction (voir paragraphe 1-1.2).

1.1.2 Equations de la dynamique des fluides.

Les équations du mouvement en mécanique des fluides résultent de l'application du principe fondamental de la dynamique à une particule fluide. Le champ des contraintes qui dérive des efforts intérieurs est relié aux grandeurs dynamiques (pression, vitesse) par une loi de comportement. Ici, le fluide est toujours supposé Newtonien, incompressible et de propriétés physiques (viscosité, masse volumique) constantes. Les efforts intérieurs se décomposent donc en la somme d'un terme de pression et d'un terme de frottement visqueux proportionnel au laplacien du champ de vitesse.

Enfin, tout au long de cette étude, nous étudierons l'influence de la force de Laplace ou de celle de Coriolis qui correspondent, sauf indication, à un champ magnétique ou à une vitesse de rotation parallèles à l'axe $\mathbf{e}_z$ et indépendants de la coordonnée z . Il est donc possible de mettre cette force sous la forme $\mathbf{m} \times \mathbf{e}_z$. En pratique, dans tous les cas abordés, $\mathbf{m}$ est de la forme :

$$\mathbf{m} = \mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}(x, y, t) \mathbf{u}(x, y, z, t) + \mathbf{M}(x, y, t) \quad (1.20)$$

où $\mathbf{L}$ est une application linéaire du plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ dans lui-même¹ et $\mathcal{F}$, une application quelconque du plan dans lui-même.

Nous nous proposons d'écrire l'équation du mouvement forme adimensionnelle de telle sorte que le gradient de pression apparaisse au premier ordre. Nous nous attachons tout d'abord au cas où cette force est celle de Coriolis, très analogue aux problèmes où intervient la force de Laplace, mais qui s'exprime plus directement.

Si le mouvement du fluide est décrit dans un référentiel en rotation autour de $(O, \mathbf{e}_z)$ (vitesse de rotation $\Omega(t) \mathbf{e}_z$) par rapport à un référentiel galiléen, l'accélération comporte trois termes supplémentaires qu'un observateur ressentira comme une force plane. Le premier de ces termes (accélération centrifuge $-\nabla \frac{\Omega^2 |\mathbf{r}|^2}{2}$) peut être absorbé dans le gradient de pression. Les deux autres représentent respectivement l'accélération de Coriolis $(-2\Omega \mathbf{u} \times \mathbf{e}_z)$ et l'accélération due aux variations de la vitesse de rotation $(\partial_t \Omega \mathbf{r} \times \mathbf{e}_z)$. Le gradient de pression résulte donc essentiellement de la rotation, ce qui suggère l'adimensionnement $p_{dim} = \frac{\lambda f U}{\rho a} p$. La fonction $\mathcal{F}$ associée à ce problème présente donc une dépendance affine en fonction du vecteur $\mathbf{u}$:

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \lambda^{-1} S \partial_t \Omega \mathbf{r} \quad (1.21)$$

avec $S = \frac{\delta_t \Omega a}{2\Omega U}$, où $\delta_t \Omega$ représente une valeur caractéristique de la variation de vitesse de rotation $\partial_t \Omega$. Nous distinguerons les échelles caractéristiques a et $\frac{a}{Gl}$ respectivement selon z et selon la direction transverse, ainsi que les échelles de vitesses correspondantes :

$$\begin{aligned} x_{dim} &= \frac{a}{\lambda} x & z_{dim} &= az & w_{dim} &= \lambda U w \\ y_{dim} &= \frac{a}{\lambda} y & t_{dim} &= \frac{a}{\lambda U} t & \mathbf{u}_{dim} &= U \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

L'équation de Navier-Stokes s'écrit finalement :

$$\lambda Ro (\partial_t \mathbf{u}_\perp + \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla \mathbf{u}_\perp + w \partial_z \mathbf{u}_\perp) - E \lambda^2 \Delta_\perp \mathbf{u}_\perp - E \partial_{zz}^2 \mathbf{u}_\perp = -\nabla p + \mathbf{m} \times \mathbf{e}_z \quad (1.23)$$

$$\lambda^3 Ro (\partial_t w + \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla w + w \partial_z w) - E \lambda^4 \Delta_\perp w - E \partial_{zz}^2 w = -\partial_z p, \quad (1.24)$$

Deux nombres adimensionnels apparaissent. Le nombre de *Rossby* ($Ro = \frac{U}{2a\Omega}$) représente l'ordre de grandeur du rapport des forces d'inertie et de la force de Coriolis et le nombre d'*Ekman* E (resp. $\lambda^2 E$) représente celui des forces dues au frottement entre les plans horizontaux (resp. verticaux) et de cette même force. Il est souvent utile de représenter ces groupements adimensionnels en fonction des temps que mettent ces forces respectives pour agir de façon significative ($\frac{a}{\lambda U}$, pour l'inertie, $\frac{a^2}{U}$

¹Attention, il s'agit ici de linéarité dans l'espace euclidien de dimension 2 auquel appartient le vecteur $\mathbf{u}_\perp$ et non dans l'espace des fonctions dans lequel se trouve $(x, y, z, t) \mapsto \mathbf{u}_\perp(x, y, z, t)$.

(resp. $\frac{a^2}{\lambda^2 U}$) pour les effets visqueux, $(2\Omega)^{-1}$ pour la force de Coriolis). Les solutions des équations du mouvement sont très dépendantes des conditions aux limites sur $\mathbf{u}$. Ainsi le fluide est supposé adhérer à une paroi W (condition de *non-glissement*) :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (1.25)$$

et si la paroi est imperméable :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.26)$$

Enfin la conservation de la masse pour un fluide incompressible s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.27)$$

Ecoulement MHD sous fort champ imposé.

Pour $Rm \ll 1$, il est possible d'imposer un champ magnétique constant et vertical. La quantité $\mathbf{m}$ correspond alors à la densité de courant adimensionnel :

$$\mathbf{m} = \mathbf{j}_\perp \quad (1.28)$$

La relation entre $\mathbf{j}_\perp$ et $\mathbf{u}$ est déduite de la loi d'Ohm (1.17b). Dans le cas général, $\mathbf{j}_\perp(x, y, z, t)$ dépend de z et n'est pas une fonction de $\mathbf{u}(x, y, z, t)$. Cependant, dans les conditions où le terme $\lambda^2(\mathbf{e}_z \times \nabla_\perp)j_z$ est indépendant de z , $\mathbf{m} = \mathcal{F}(\mathbf{u})$ s'écrit comme l'image par $\mathcal{F}$ résultat d'une fonction affine du vecteur $\mathbf{u}(x, y, z, t)$. Dans l'approximation d'un fort champ magnétique, la force de Laplace est dominante, les paramètres Ro et $E^{\frac{1}{2}}$ sont alors respectivement remplacés par le *paramètre d'interaction* $N = \frac{\sigma B^2}{\rho} \frac{a}{U}$ et le nombre de *Hartmann* $Ha = aB \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}$. Le temps caractéristique de la force électromagnétique est le temps Joule $\tau = \frac{\rho}{\sigma B^2}$.

En MHD sous champ fort imposé, les forces de pression contrebalancent en partie la composante divergente des forces de Laplace, ce qui suggère de choisir $\frac{\sigma B^2 U a}{\lambda \rho}$ comme pression caractéristique².

1.2 Solutions singulières de l'équation de Navier-Stokes.

1.2.1 Couche limite.

L'évaluation des différents termes de l'équation du mouvement (1.23) montre que les forces visqueuses ne peuvent jouer de rôle dominant qu'à une échelle de longueur de l'ordre de ε ($= E^{\frac{1}{2}}$ ou Ha^{-1} normalisée par les grandeurs caractéristiques de l'écoulement). Deux cas particuliers importants se présentent alors : si $\varepsilon \gg 1$, les effets visqueux sont dominants dans tout l'écoulement et il est alors naturel d'approcher les grandeurs physiques $\mathbf{u}$ et p par leur valeur dans la limite $\varepsilon \rightarrow +\infty$, en tout point où ces fonctions sont continues. L'équation du mouvement s'écrit alors

$$\Delta \mathbf{u} - \nabla p = 0. \quad (1.29)$$

et les écoulement correspondants sont dits *rampants*.

À l'inverse, si $\varepsilon \ll 1$, les effets visqueux sont négligeables aux échelles caractéristiques de l'écoulement et $\mathbf{u}$ et p peuvent être approchées par leur valeur dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, en tout point où ces fonctions sont continues. Ces ensembles de points forment des régions que nous appellerons *zones de cœur*. L'équation du mouvement (1.23) y est alors réduite à une équation sans viscosité (la notation $(\)$ désigne la valeur des quantités dans ces zones) :

²Il apparaîtra au cours de l'exposé que du fait du caractère incompressible de l'écoulement, seule la partie rotationnelle de la force de Lorentz influence véritablement la dynamique du système. Celle-ci n'est donc pas affectée par les forces de pression. En revanche, dans le cas des fluides tournants, la pression transmet l'information suivant l'axe $\mathbf{e}_z$ et détermine entièrement l'écoulement de base (géostrophique, voir 1-3) : son rôle est donc primordial.

$$\lambda Ro (\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_\perp + \tilde{\mathbf{u}}_\perp \cdot \nabla_\perp \tilde{\mathbf{u}}_\perp + w \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_\perp) = -\nabla_\perp \tilde{p} + \mathcal{F}_\perp(\tilde{\mathbf{u}}_\perp) \times \mathbf{e}_z. \quad (1.30)$$

En général, les solutions de cette équation ne vérifient pas les conditions limites (telles que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ à une paroi) ce qui provoque des discontinuités. En ces points, dits *singuliers*, la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ de (1.23) n'est donc plus (1.30) et il est nécessaire de prendre en compte les effets visqueux. Dans ce type de zone, au moins une des coordonnées, par exemple z (resp. x ou y) est caractérisée par une échelle de longueur réduite ε (resp. $\lambda\varepsilon$) de sorte que la partie du laplacien qui lui est associée devient d'ordre 1. Les variables physiques relatives à cette zone sont alors assimilables à leur valeur dans la limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}(\frac{z}{\varepsilon})$ (resp. $\lim_{\lambda\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}(\frac{x}{\lambda\varepsilon})$). Un nouvel adimensionnement par ces échelles caractéristiques conduit alors aux équations qui régissent le champ de vitesse dans ces zones particulières (la notation $\hat{(\cdot)}$ désigne la valeur des quantités dans ces zones) :

$$\lambda Ro (\partial_t \hat{\mathbf{u}}_\perp + \hat{\mathbf{u}}_\perp \cdot \nabla_\perp \hat{\mathbf{u}}_\perp + \varepsilon^{-1} w \partial_\xi \hat{\mathbf{u}}_\perp) + \nabla_\perp \hat{p} = \mathcal{F}_\perp(\hat{\mathbf{u}}_\perp) \times \mathbf{e}_z + \partial_{\xi\xi}^2 \hat{\mathbf{u}}_\perp, \quad (1.31)$$

$$\nabla_\perp \cdot \hat{\mathbf{u}}_\perp + \varepsilon^{-1} \partial_\xi \hat{w} = 0, \quad (1.32)$$

où $\xi = \varepsilon^{-1}z$ (resp. $\xi = \lambda^{-1}\varepsilon^{-1}x$ ou $\xi = \lambda^{-1}\varepsilon^{-1}y$ la couche limite est supposée localisée à $x = 0$ (resp. $y = 0$ resp. $z = 0$)).

Pratiquement, les zones caractérisées par une seule coordonnée étirée (variétés de dimension 2, appelées couches limites) interviennent souvent comme zone de raccord entre deux secteurs de l'écoulement caractérisés par des valeurs de la vitesse très différentes : à la traversée de cette zone, la vitesse semble discontinue à l'échelle du cœur (si les termes précédés de ε et Ro sont négligés, (1.30) peut admettre des solutions discontinues) mais à l'échelle de la couche limite, le "saut" est décrit par une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ (deux fois dérivables et de dérivée seconde continues). L'exemple le plus courant est celui des couches limites pariétales dans lesquelles la vitesse varie de la vitesse du cœur à la vitesse nulle imposée par les conditions d'imperméabilité et de non glissement à une paroi solide (1.25)-(1.26).

On trouve des zones qui présentent deux ou trois coordonnées étirées au voisinage de points d'arrêt ou encore dans les échelles dissipatives des écoulements turbulents (échelles de Kolmogorov) habituellement schématisées par des petits tourbillons qui dissipent l'énergie de l'écoulement par frottement. Ces tourbillons étant répartis de façon dense dans le domaine d'écoulement, la notion de la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ pour les écoulements turbulents tridimensionnels pose de nombreux problèmes.

1.2.2 Développements asymptotiques raccordés.

La distinction cœur -couche limite pose deux problèmes : d'abord, les solutions respectives de (1.30) et de (1.31) ne satisfont (1.23) ni l'une ni l'autre. En outre, la solution de (1.30) ne satisfait généralement ni aux conditions limites telles que (1.25) ni à (1.31). Inversement, la solution de couche limite ne vérifie pas l'équation de cœur. Il reste donc à construire une solution de (1.23) qui satisfasse aux conditions limites. Ensuite, les solutions de (1.23) doivent être de classe $\mathcal{C}^2$, ce qui impose que les solutions de (1.30) et de (1.31) doivent être raccordées.

Si les termes inertiels de l'équation de Navier-Stokes sont linéarisés et que $\mathbf{m} = \mathcal{F}(\mathbf{u})$ avec $\mathcal{F}$ affine en $\mathbf{u}$, (1.23) devient linéaire et il est possible d'en trouver une solution générale unique satisfaisant aux conditions aux limites (Théorème de *Cauchy-Lipschitz*). Cependant, la compréhension des phénomènes physiques nécessitera toujours de ne s'intéresser qu'à l'une ou l'autre des deux zones et à la façon dont elles sont couplées, ce qui reviendra effectuer une séparation cœur-couche par deux procédés de limite distincts. Il est donc plus simple de séparer les zones avant la résolution.

À signaler que pour des équations différentielles ordinaires non-linéaires d'ordre 2, des outils mathématiques tels que le Théorème d'*Erdelyi* donnent des résultats sur l'existence et l'unicité d'une solution décomposée en la somme d'une solution de cœur et d'une solution de couche limite, sous réserve d'un comportement suffisamment régulier des termes non visqueux [11, 28]. L'application de

ces résultats à l'équation de Navier-Stokes est toutefois difficile dans le cas général, ne serait-ce qu'en raison du couplage entre les différentes composantes de la vitesse par le terme non-linéaire.

Dans le cas présent, l'idée intuitive du raccord de la quantité g est qu'à une distance η (caractérisée par la variable $z_\eta = \frac{z}{\eta}$) petite devant l'échelle du cœur mais grande devant celle de la couche limite, les solutions de (1.30) et de (1.31) doivent tendre l'une vers l'autre. Autrement dit, il existe une fonction η de ε telle que [30] :

$$\varepsilon \ll \eta(\varepsilon) \ll \mathcal{O}(1) \text{ et } \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ z_\eta \text{ fixé}}} \check{g}(\eta z_\eta) - \hat{g}\left(\frac{\eta z_\eta}{\varepsilon}\right) = 0 \quad (1.33)$$

En fait, les solutions de cœur et de couche sont la plupart du temps couplées, soit par l'intermédiaire de la conservation de la masse (débit induit d'une zone vers l'autre), soit par la définition du forçage $\mathbf{m}$ qui peut faire intervenir une dynamique propre (comme le courant électrique dans le cas MHD). Les solutions de l'équation du mouvement sont alors cherchées sous la forme d'un développement asymptotique en fonction du paramètre ε et les solutions de (1.30) et de (1.31) correspondent alors au premier ordre de ce développement suivant une échelle de comparaison $(\theta_k(\varepsilon))_{k=0..N}$ au voisinage de $\varepsilon = 0$:

$$\check{g}(z) = \sum_{k=0}^N \check{g}^k(z) \theta_k(\varepsilon) + \mathcal{O}(\theta_{N+1}(\varepsilon)) \quad (1.34a)$$

$$\hat{g}(\xi) = \sum_{k=0}^N \hat{g}^k(\xi) \theta_k(\varepsilon) + \mathcal{O}(\theta_{N+1}(\varepsilon)) \quad (1.34b)$$

La condition de raccord à l'ordre N est ensuite obtenue par application successive de (1.33) à chaque ordre, soit,

$$\begin{aligned} \exists (\eta_k)_{k=0..N} \text{ et } (P, Q) \in N / \varepsilon \ll \eta_0(\varepsilon) \dots \ll \eta_k(\varepsilon) \dots \ll \eta_N(\varepsilon) \ll \mathcal{O}(1) \\ \text{et } \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ z_\eta \text{ fixé}}} \frac{\sum_{k=0}^P \check{g}^k(\eta z_\eta) \theta_k(\varepsilon) - \sum_{k=0}^Q \hat{g}^k\left(\frac{\eta z_h}{\varepsilon}\right) \theta_k(\varepsilon)}{\theta_N(\varepsilon)} = 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Si chaque terme d'ordre k reste d'ordre k par les deux processus de limite (cœur et couche), la condition (1.35) est considérablement simplifiée :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \check{g}^N(z) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{g}^N(\xi). \quad (1.36)$$

Cette dernière condition, très répandue dans la littérature se trouve toutefois prise en défaut lorsque la solution de couche $\hat{g}^N(\xi)$ contient des termes grands devant $\theta_N(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, qui nécessitent de pouvoir raccorder entre eux des termes d'ordre différents.

1.3 Influence d'une force plane.

1.3.1 Tendances à la bidimensionnalité.

Dans le cas où la force imposée est très grande devant les termes d'inertie ($Ro \ll 1$) l'équation de Navier-Stokes hors couche limite est réduite à

$$\nabla_\perp \check{p} = \mathcal{F}(\check{\mathbf{u}}) \times \mathbf{e}_z \quad (1.37)$$

$$\partial_z \check{p} = 0 \quad (1.38)$$

Si la fonction $\mathcal{F}$ est continue et que $\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}})$ ne dépend pas explicitement de z , alors $\mathbf{u}_\perp$ est indépendante de z . Si, de plus $\mathcal{F}$ est bijective, alors $\tilde{\mathbf{u}}$ prend la valeur ³ :

$$\tilde{\mathbf{u}} = -\mathcal{F}^{-1}(\nabla_\perp \tilde{p} \times \mathbf{e}_z) \quad (1.39)$$

Fluides en rotation rapide.

Pour les fluides en rotation rapide, ce résultat correspond au théorème de *Proudman-Taylor* [24, 13] et si $\partial_t \Omega = 0$, le champ de vitesse est dit *géostrophique* et le champ de pression correspond à l'opposé de la fonction de courant associée à $\mathbf{u}_\perp$:

$$\tilde{\mathbf{u}}_\perp = \mathbf{e}_z \times \nabla_\perp \tilde{p} \quad (1.40)$$

Cas MHD.

Un résultat similaire existe en MHD : la conservation du courant (1.6) impose que

$$\check{j}_z = -z \nabla \cdot \mathbf{j}_\perp + \check{j}_z(z=0). \quad (1.41)$$

Cependant, (1.37) impose que $\nabla \cdot \mathbf{j}_\perp = 0$. Ainsi, si aucun courant vertical n'est injecté dans l'écoulement, (1.17b) est intégrée en :

$$\mathbf{j}_\perp = \mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{u}}_\perp + \mathbf{c}$$

D'où il découle que $\mathbf{m} = \mathcal{F}(\mathbf{u}_\perp)$ avec $\mathcal{F}$ affine en $\mathbf{u}_\perp$. Finalement, $\mathbf{u}_\perp$ est indépendant de z . La propriété $\nabla \cdot \mathbf{j}_\perp = 0$ est fondamentale et caractérise le caractère 2D des écoulement MHD. Elle indique que les courants électriques bouclent dans des plans de cote z constante (ces boucles génèrent la force de Laplace qui équilibre le gradient de pression). Autrement dit, quand les vitesses des plans horizontaux adjacents sont égales, le courant électrique ne boucle plus de l'un à l'autre. Comme l'écoulement est bidimensionnel à tout instant, on peut dire que le phénomène de diffusion de quantité de mouvement le long des lignes de champ est instantané devant les autres phénomènes qui font évoluer le champ de vitesse dans le temps (inertie, viscosité...).

Il est à noter que les écoulements géostrophiques et les écoulements MHD analogues ("magnétostrophiques", et ceci reste valable quand le champ magnétique n'est pas homogène.) présentent une autre caractéristique commune importante : Si toutes les parois sont imperméables, les lignes de courant sont incluses dans une famille de surface dont chacune est définie comme l'ensemble des lignes du champ $\boldsymbol{\Omega}$ (resp. $\mathbf{B}$) $\mathcal{A}$ pour lesquelles la quantité $\int_{\mathcal{A} \cap \mathcal{D}} \frac{1}{\|\boldsymbol{\Omega}\|} ds$ (resp. $\int_{\mathcal{A} \cap \mathcal{D}} \frac{1}{\|\mathbf{B}\|} ds$) est égale à une valeur donnée. Greenspan [14] propose une étude détaillée de ces surfaces, et on trouvera une discussion sur la pertinence des surface équivalentes en MHD (dites *surfaces caractéristiques*) dans [27].

1.3.2 Couches limites perpendiculaires au voisinage d'une paroi.

Profils généraux de couche limites perpendiculaires.

Au voisinage d'une paroi perpendiculaire à $\mathbf{e}_z$ (supposée confondue avec le plan $z = 0$), le frottement visqueux équilibre les forces de pression et la force $\mathbf{m} \times \mathbf{e}_z$ si bien qu'une couche limite pariétale se développe (voir paragraphe 1-2.1).

En premier lieu, l'équation de continuité dans la couche limite s'écrit $\partial_\xi \hat{w} = 0$ au premier ordre si bien que dans le cas où la paroi est imperméable, $\hat{w}(0) = 0$; la vitesse verticale n'est jamais du premier ordre :

$$\hat{w}(\xi) = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (1.42)$$

³Si une force supplémentaire de composante verticale non nulle, indépendante de z , comme la poussée d'Archimède est ajoutée à (1.37), p devient alors affine en z ainsi que $\mathbf{u}_\perp(z)$.

La composante verticale des équations de Navier-Stokes assure que la pression n'est pas dépendante de ξ .

Si les effets inertiels sont négligés ($Ro \rightarrow 0$), (1.31) admet pour solution particulière $\mathbf{u}_1(x, y, t)$ soit $-\mathbf{L}^* \mathbf{u}_1(x, y, t) = -\mathbf{\Theta} \mathbf{M}(x, y, t) + \nabla_{\perp} p$, où $\mathbf{\Theta}$ est la matrice de rotation d'un quart de tour indirect $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. La condition de raccord (1.33) permet de montrer que $\mathbf{u}_1(x, y, t)$ coïncide avec le premier ordre en ε de la solution de cœur $\tilde{\mathbf{u}}_{\perp}(x, y, 0, t)$, soit :

$$-\mathbf{L}^* \tilde{\mathbf{u}}(0) = -\mathbf{\Theta} \mathbf{M} + \nabla_{\perp} p \quad (1.43)$$

La composante horizontale de l'équation de Navier-Stokes dans la couche limite peut donc être réécrite

$$\partial_{\xi\xi}^2 \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \mathbf{L}^* (\tilde{\mathbf{u}}_{\perp}(0) - \hat{\mathbf{u}}_{\perp}). \quad (1.44)$$

La variable $\mathbf{u}_e = \hat{\mathbf{u}}_{\perp} - \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}(0)$ est alors solution du système différentiel :

$$\partial_{\xi} \mathbf{U} = \mathbf{H} \mathbf{U} \quad (1.45)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{L}^* & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{ex} \\ u_{ey} \\ \partial_{\xi} u_{ex} \\ \partial_{\xi} u_{ey} \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{0}$ est la matrice 2×2 nulle et où $\mathbf{L}^* = -\mathbf{\Theta} \mathbf{L}$. Si λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de $\mathbf{L}^*$, alors celles de la matrice par blocs $\mathbf{H}$ valent respectivement $\lambda_1^{\frac{1}{2}}$, $-\lambda_1^{\frac{1}{2}}$, $\lambda_2^{\frac{1}{2}}$ et $-\lambda_2^{\frac{1}{2}}$.

Le profil de vitesse dans la couche limite est alors déterminé par la nature de ces valeurs propres. Nous ne présentons ici que les cas qui correspondent à des cas connus.

Si λ_1 et λ_2 sont réelles et que, plusieurs cas se présentent :

Si $\lambda_1 = -\lambda_2 > 0$, les solutions oscillantes doivent être éliminées. En utilisant la condition de non adhérence ainsi que la condition de raccord à l'écoulement de cœur simplifiée, le profil de vitesse s'écrit :

$$\hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \tilde{\mathbf{u}}_{\perp} \left[1 - e^{-\sqrt{\lambda_1} \xi} \right]. \quad (1.46)$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, les profils des deux composantes de vitesse sont indépendants et $\hat{\mathbf{u}}_{\perp}$ coïncide finalement avec (1.46).

Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, la force $\mathcal{F} \times \mathbf{e}_z$ n'agit localement que sur une seule composante de la vitesse, elle ne peut donc pas créer de couche limite pour l'autre composante. Ce cas correspond, par exemple à un écoulement décrit dans un repère en accélération suivant la direction associée au vecteur propre de λ_1 .

Si $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = |\lambda_1| e^{i\theta}/\theta \in [-\pi, \pi]$, alors les conditions d'adhérence et de raccord à la solution de cœur impliquent que :

$$\hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \tilde{\mathbf{u}}_{\perp} \left[1 - e^{c\xi} \cos(b\xi) \right] + \frac{1}{bc} \left(-\mathbf{L}^* \tilde{\mathbf{u}}_{\perp} + (b^2 - c^2) \tilde{\mathbf{u}}_{\perp} \right) e^{c\xi} \sin(b\xi). \quad (1.47)$$

avec $c = -\left| \sqrt{|\lambda_1|} \cos \frac{\theta}{2} \right|$ et $b = \sqrt{|\lambda_1|} \sin \frac{\theta}{2}$.

À noter que ce résultat est obtenu en remarquant que les deux composantes de la vitesse $\mathbf{u}_{\perp}$ s'annulent simultanément à la paroi située en $\xi = 0$.

Quelques propriétés importantes.

Freinage de l'écoulement de cœur La couche limite perpendiculaire peut être vue comme la zone où l'écoulement "frotte" sur la paroi. L'essentiel du frottement s'exerce à la paroi même⁴ et

⁴Dans les couches turbulentes, au contraire, une part importante du frottement est due aux fluctuations aléatoires de la vitesse qui agissent au delà de la sous-couche pariétale visqueuse.

est transmis à l'écoulement de cœur par la couche limite. Pour l'ensemble de profils trouvés au paragraphe précédent, le frottement de paroi s'exprime sous la forme

$$\partial_z \hat{\mathbf{u}}_{\perp} (\xi = 0) = \varepsilon (a_1 \check{\mathbf{u}}_{\perp} + a_2 \mathbf{L}^* \check{\mathbf{u}}_{\perp}). \quad (1.48)$$

où a_1 et a_2 sont des réels de l'ordre de 1. Le temps caractéristique de ce freinage exprimé en variables physiques, est alors de l'ordre de $\frac{\varepsilon a^2}{\nu}$.

Quantité $\mathcal{F}(\hat{\mathbf{u}}_{\perp})$ dans une tranche de couche limite. Les solutions trouvées au paragraphe précédent sont toutes telles que $\hat{\mathbf{u}}_{\perp}(\xi) - \check{\mathbf{u}}_{\perp}(0)$ soit sommable à l'infini et de dérivée nulle en $+\infty$. Le résultat cherché est donc immédiat par intégration de (1.44) :

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{L}(\hat{\mathbf{u}}_{\perp} - \check{\mathbf{u}}_{\perp}) d\xi' = \partial_{\xi} \Theta \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \big|_{\xi=0}. \quad (1.49)$$

Débit de $\nabla_{\perp} \mathcal{F}(\mathbf{u})$ à l'interface cœur-couche limite. Pour ce paragraphe les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont supposées indépendantes de x et de y , afin de ne pas surcharger le résultat.

Dans les exemples d'application choisis, $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ est de divergence nulle (la densité de courant électrique comme la masse sont conservées). Cette propriété est utile, par exemple pour calculer la composante verticale du courant dans le cas MHD :

$$-\varepsilon \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \mathcal{F}(\mathbf{u}) d\xi'. \quad (1.50)$$

En remarquant que $\nabla_{\perp} \Theta \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \nabla_{\perp} \times \hat{\mathbf{u}}_{\perp}$, la divergence de (1.31) donne :

$$-\int_0^{\xi} \nabla_{\perp} \mathcal{F}(\mathbf{u}) d\xi' = -\varepsilon [\partial_{\xi} \nabla_{\perp} \times \hat{\mathbf{u}}_{\perp}]_0^{\xi}. \quad (1.51)$$

Si $\mathcal{F}$ est affine, $\hat{\mathbf{u}}_{\perp}$ correspond à l'une des solutions fournies au paragraphe précédent pour chacune desquelles $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \partial_{\xi} \nabla_{\perp} \times \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = 0$, soit au premier ordre, quand $\xi \rightarrow +\infty$,

$$-\varepsilon \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \mathcal{F}(\mathbf{u}) d\xi' = 2\varepsilon \partial_{\xi} \omega \big|_{\xi=0}. \quad (1.52)$$

Couches de Hartmann avec paroi isolantes.

En MHD, les couches limites perpendiculaires sont les couches de *Hartmann*, d'épaisseur typique Ha^{-1} . Si la paroi est isolante, la composante normale du courant est nulle en $\xi = 0$. Les équations (1.17a-1.17b) et (1.6) sont réécrites à l'aide la coordonnée $\xi = Ha z$:

$$\frac{1}{Ha} \nabla_{\perp} \times \hat{\mathbf{j}}_{\perp} = \partial_{\xi} \hat{w}, \quad (1.53a)$$

$$\mathbf{e}_z \times \partial_{\xi} \hat{\mathbf{j}}_{\perp} - \frac{\lambda^2}{Ha} (\mathbf{e}_z \times \nabla_{\perp}) \hat{\mathbf{j}}_z = \partial_{\xi} \hat{\mathbf{u}}_{\perp}, \quad (1.53b)$$

$$-\frac{1}{Ha} \nabla_{\perp} \cdot \hat{\mathbf{j}}_{\perp} = \partial_{\xi} \hat{j}_z. \quad (1.53c)$$

Au premier ordre, la conservation du courant électrique dans la couche donne $\hat{j}_z = 0$. La fonction $\mathcal{F}$ est alors déterminée par la relation (1.17b) qui devient :

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_{\perp}) = \hat{\mathbf{j}}_{\perp} = \hat{\mathbf{j}}_{\perp}(\xi = 0) + \Theta \hat{\mathbf{u}}_{\perp}; \quad (1.54)$$

les valeurs propres de $\mathbf{L}^*$ sont donc celles de $-\Theta^2 = \mathbf{I}$. et le profil de vitesse est celui de (1.46), mis en évidence par Hartmann [21] :

$$\hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \check{\mathbf{u}}_{\perp} (1 - e^{-\xi}). \quad (1.55)$$

par ailleurs, la vitesse est liée au courant qui passe dans la paroi par l'intermédiaire de (1.43) :

$$(\tilde{\mathbf{u}}_{\perp} + \nabla_{\perp} \tilde{p}) \times \mathbf{e}_z = \hat{j}_{\perp}(\xi = 0). \quad (1.56)$$

Cette caractéristique originale des couches de Hartmann, découverte par Hunt & Ludford [19], est aussi illustrée par l'application de (1.49) : si $\hat{\mathbf{I}} = \int_0^{+\infty} \hat{j}_{\perp} - \tilde{j}_{\perp}(0) d\xi'$ est le courant électrique total qui transite dans les couches de Hartmann,

$$\hat{\mathbf{I}} = \tilde{\mathbf{u}}_{\perp} \times \mathbf{e}_z. \quad (1.57)$$

Cette relation illustre le rôle crucial des couches de Hartmann : elles peuvent permettre de contrôler l'écoulement de cœur grâce au courant qui y transite. (pompes ou générateurs MHD)

La composante dans le plan (x, y) de la densité de courant électrique découle alors de (1.54) :

$$\hat{j}_{\perp}(\xi) = \mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{u}}_{\perp} e^{-\xi} + \mathbf{e}_z \times \nabla_{\perp} p. \quad (1.58)$$

À noter que puisque $\nabla_{\perp} \cdot [\mathbf{e}_z \times \nabla_{\perp} p] = 0$, le courant induit par la pression boucle dans des plans orthogonaux à $\mathbf{e}_z$: celui-ci ne participe donc pas au couplage entre ces différents plans et influence peu la dynamique de l'écoulement.

La propriété (1.52) démontre que le courant électrique éjecté des couches de Hartmann est d'ordre Ha^{-1} et proportionnel à la vortacité de l'écoulement de cœur :

$$\tilde{j}_z = 2Ha^{-1} \tilde{\omega}. \quad (1.59)$$

Couches d'Ekman.

Dans les fluides en rotation rapide, les couches limites perpendiculaires sont les couches d'*Ekman* d'épaisseur typique $E^{\frac{1}{2}}$. L'application $\mathbf{L}^*$ vaut Θ dont les valeurs propres sont i et $-i$. Le profil de vitesse de telles couches pour une paroi plane et imperméable est obtenu par (1.47) :

$$\hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \tilde{\mathbf{u}}_{\perp} \left[1 - e^{-\xi'} \cos \xi' \right] + \mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{u}}_{\perp} e^{-\xi'} \sin \xi', \quad (1.60)$$

où $\xi = \sqrt{2}\xi'$.

le second terme du membre de droite de (1.60) provoque une rotation du vecteur vitesse autour de l'axe $\mathbf{e}_z$ quand on suit ce dernier au travers de la couche. Le tracé de ce profil dans un diagramme dont les axes représentent les composantes horizontales de la vitesse porte le nom de *Spirale d'Ekman*.

La composante verticale de la vitesse est obtenue par application de la propriété (1.52) :

$$\tilde{w} = 2E^{\frac{1}{2}} \tilde{\omega}. \quad (1.61)$$

À l'échelle d'un tourbillon isolé situé au dessus de la couche d'Ekman, l'apparition de cette vitesse verticale peut être comprise comme suit : dans le cœur d'écoulement, au dessus de la couche, la force de Coriolis est équilibrée par le gradient de pression centripète. Or la pression ne varie pas selon la verticale à l'échelle de la couche d'Ekman. Le gradient de pression est donc le même dans cette dernière et dans le cœur. En revanche, la force de Coriolis (proportionnelle au carré de la vitesse azimutale) s'effondre en raison de la faiblesse des vitesses dans la couche. L'équilibre radial est donc rompu, ce qui donne lieu à un jet de fluide centripète qui doit, par conservation de la masse, s'écouler vers le haut.

À la différence des couches de Hartmann, le débit de la couche d'Ekman vers le cœur apparaît dès l'ordre 1 en ε .

Une autre caractéristique classique des couches d'Ekman résulte de (1.49) : si $\mathbf{M}_E = \int_0^{+\infty} \hat{\mathbf{u}}_{\perp} - \tilde{\mathbf{u}}_{\perp} d\xi'$ est le débit adimensionnel total qui transite dans une tranche verticale de couche limite et τ , le frottement à la paroi, alors

$$\mathbf{M}_E = \tau_W \times \mathbf{e}_z. \quad (1.62)$$

Le débit qui transite dans la couche d'Ekman est donc entièrement déterminé par le frottement à la paroi.

1.3.3 Couches limites parallèles.

La dynamique des couches limites qui apparaissent le long des parois parallèles à $\mathbf{e}_z$ (*couches parallèles*) est très différente de celle des couches perpendiculaires. En effet, la force plane tend à bidimensionnaliser l'écoulement dans le plan de la couche et non dans une direction transverse (comme dans le cas des couches perpendiculaires). Son action ne s'oppose donc plus directement au frottement visqueux. En l'absence d'autres phénomènes, (ce cas est en fait rare dans les problèmes de fluides tournants), c'est donc le frottement exercé par les parois perpendiculaires (situées au fond, par exemple), qui est diffusé dans la couche parallèle par le processus de bidimensionnalisation, qui équilibre le frottement visqueux. L'équilibre des ordres de grandeur respectifs de ces deux termes fournit l'épaisseur typique d'une telle couche parallèle :

$$\lambda_{||} = \sqrt{\varepsilon} \quad (1.63)$$

Couches parallèles MHD

L'ordre de grandeur du courant électrique transverse à la couche varie beaucoup selon que la paroi parallèle (choisie dans le plan $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$) est isolante ou pas. Dans tous les cas, l'échelle de longueur normale à la paroi ($\lambda(\varepsilon)$ avec $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda(\varepsilon) = 0$) devient petite devant les autres échelles de longueur si bien que dans l'approximation de couche limite, (1.31) et (1.17b) deviennent :

$$\mathbf{j}_{\perp} = \lambda^2 \varepsilon^2 \partial_{yy}^2 \mathbf{u}_{\perp} \times \mathbf{e}_z \quad (1.64a)$$

$$\lambda^2 (\mathbf{e}_z \times \nabla_{\perp}) \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{j}_{\perp} = \partial_{zz}^2 \mathbf{u}_{\perp}. \quad (1.64b)$$

dont la combinaison fournit l'équation classique des couches parallèles MHD :

$$\lambda^4 \varepsilon^2 \partial_{yyyy}^4 \mathbf{u}_{\perp} = \partial_{zz}^2 \mathbf{u}_{\perp}. \quad (1.65)$$

L'épaisseur typique de cette couche est conforme à (1.63). Comme expliqué au paragraphe 1-1, la relation (1.64b) traduit la diffusion de quantité de mouvement selon la verticale par le champ magnétique. Or, dans la couche limite parallèle, les variations transversales ne peuvent plus être négligées devant les variations verticales des grandeurs physiques. En d'autres termes, la couche parallèle résulte de l'équilibre entre la diffusion visqueuse de quantité de mouvement, normale à la paroi, et la diffusion verticale de quantité de mouvement par le champ magnétique. Une autre façon de retrouver (1.65) est d'ailleurs d'écrire directement l'équilibre entre la partie horizontale du frottement visqueux et la partie rotationnelle de la force de Laplace exprimée à l'aide de (1.18).

Une conséquence importante de cet équilibre est que le profil de couche limite associé est nécessairement dépendant de z . En effet, comme la diffusion verticale de quantité de mouvement par le champ magnétique n'agit plus instantanément par rapport au temps d'action du frottement visqueux, les parties de l'écoulement les plus éloignées des couches de Hartmann (donc selon $\mathbf{e}_z$) subissent un freinage retardé et leur vitesse est plus élevée que celle des régions voisines des couches de Hartmann.

Couches parallèles en fluide tournant

L'imperméabilité de la paroi, ainsi que la conservation de la masse, impose que la composante normale à la paroi de la vitesse soit faible devant la composante tangentielle. Dans ce cas, l'épaisseur de la couche parallèle donnée par (1.63) vaut $E^{\frac{1}{4}}$. Dans le cas où la paroi parallèle constitue le bord d'un domaine fermé, la couche parallèle est le lieu de rebouclage du débit (1.62) qui transite dans les couches d'Ekman. Or il apparaît que cette couche est trop fine pour satisfaire à la conservation de la masse, qui requiert une sur-couche supplémentaire. Dans l'exemple plus précis des océans (qui satisfont à l'hypothèse de rotation rapide du fait de la rotation de la terre), de nombreux autres types de couches parallèles peuvent apparaître en raison des divers phénomènes qui gouvernent la dynamique des océans : citons les couches de *Münk* et de *Stommel* qui résultent de l'équilibre entre

le frottement latéral et l'effet de la variation de vitesse de rotation avec la latitude (voir par exemple [13] ,chap 4-13).

Conclusion 1 *Ce premier chapitre a permis de rappeler les traits essentiels des écoulements tournants et des écoulements MHD sous fort champ imposé dans les configurations les plus simples. Les caractéristiques communes à ces deux classes d'écoulements soulignent leurs propriétés les plus marquantes . D'abord, une force plane intense tend à rendre l'écoulement de cœur bidimensionnel. Ensuite, deux types de couches limites se distinguent : les couches limites perpendiculaires, fines et de structure très simple peuvent agir très significativement sur l'écoulement. Les couches parallèles présentent une structure plus complexe qui fait intervenir une diffusion à la fois verticale et horizontale de l'écoulement, responsables de leur tridimensionnalité. Les cas où ces couches sont déterminantes ont été laissés de côté.*

Chapitre 2

Structure des écoulements en cœur et couche limite

Résumé

Les propriétés des écoulements de cœur et de couches perpendiculaires sont ici réexaminés en tenant compte d'effets habituellement négligés tel que ceux liés à l'inertie ou la non-uniformité du champ en MHD. Il est montré, par une méthode de double perturbations singulières, que la présence de forces supplémentaires conduit d'une part à des jets dans les couches perpendiculaires, et d'autre part à un retard de diffusion du freinage par ces mêmes couches, responsable au premier ordre d'une dépendance en z quadratique du champ de vitesse dans le cœur. Les résultats concernant les couches de Hartmann sont ensuite rassemblés pour construire, d'une part, des lois de paroi destinées à être utilisées dans des modèles numériques, et d'autre part, une équation au premier ordre pour les écoulements de cœur MHD sous champ magnétique uniforme.

2.1 Hypothèses et formalisme.

La configuration étudiée dans ce chapitre est celle d'un écoulement sur une plaque plane imperméable qui coïncide avec le plan $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. Une couche limite visqueuse perpendiculaire apparaît donc le long de cette plaque. Le plan $z = 1$ est supposé correspondre soit à une surface libre sans frottement et indéformable, soit à une autre paroi plane. Dans ce dernier cas, une seconde couche limite apparaît pour satisfaire la condition de non glissement en $z = 1$ et n , le nombre de couche limites perpendiculaires dans le problème vaut 2.

Dans tout ce chapitre, sauf indication contraire, l'amplitude des phénomènes négligés au chapitre 1, tels que l'inertie par exemple, est supposée faible mais non nulle devant celle des forces mises en jeu au chapitre précédent (pression, force $\mathbf{m} \times \mathbf{e}_z$, et frottement visqueux dans les couches limites). Les nombres adimensionnels qui caractérisent ces forces supplémentaires (Ro pour l'inertie, ε pour la viscosité) dans les équations sont de ce fait petits devant l'unité. L'inertie et la viscosité sont alors traitées *en perturbations*, ce qui conduit à développer toute grandeur physique en fonction de ces petits paramètres :

$$\tilde{g}(z) = \sum_{\substack{i=0..N \\ j=0..M}} \tilde{g}^{(i,j)}(z) Ro^i \varepsilon^j + \mathcal{O}(r^N \varepsilon^M), \quad (2.1a)$$

$$\hat{g}(\xi) = \sum_{\substack{i=0..N \\ j=0..M}} \hat{g}^{(i,j)}(\xi) Ro^i \varepsilon^j + \mathcal{O}(r^N \varepsilon^M). \quad (2.1b)$$

Les conditions de non glissement et d'imperméabilité à la paroi située en $\xi = 0$ imposent respec-

tivement que $\forall (i, j) \in \{0..N\} \times \{0..M\}$.

$$\hat{\mathbf{u}}_{\perp}^{(N,M)}(0) = 0, \quad (2.2)$$

$$\hat{w}^{(N,M)}(0) = 0. \quad (2.3)$$

Sauf indication, l'éventuelle couche limite située en $z = 1$ et celle située en $z = 0$ sont supposées exactement symétriques, de sorte que les deux cas $n = 1$ ou $n = 2$ conduisent à une condition des conditions imposées au plan $z = 1$:

$$\partial_z \check{\mathbf{u}}^k \left(\frac{1}{n} \right) = 0 \quad (2.4)$$

$$\check{w} \left(\frac{1}{n} \right) = 0 \quad (2.5)$$

Les fonctions $\check{g}$ et $\hat{g}$ doivent se raccorder à chaque ordre (N, M) selon (1.35) soit :

$$\begin{aligned} \exists (\eta_k)_{k=0..N} \text{ et } (P, Q, P', Q') \in N / \varepsilon \ll \eta_0(\varepsilon) \dots \ll \eta_k(\varepsilon) \dots \ll \eta_N(\varepsilon) \ll \mathcal{O}(1) \\ \text{et } \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ z_{\eta} \text{ fixé}}} \frac{\sum_{\substack{i=0..P \\ j=0..P'}} \check{g}^{(i,j)}(\eta z_{\eta}) Ro^i \varepsilon^j - \sum_{\substack{i=0..Q \\ j=0..Q'}} \hat{g}^{(i,j)}\left(\frac{\eta z_{\eta}}{\varepsilon}\right) Ro^i \varepsilon^j}{Ro^N \varepsilon^M} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

À noter que la limite $Ro \rightarrow 0$ n'est pas singulière du fait qu'elle n'affecte pas l'ordre de dérivation maximal de l'équation du mouvement. Contrairement à $\varepsilon \rightarrow 0$ la limite $Ro \rightarrow 0$ n'est pas liée à l'existence des couches limites dans l'écoulement. En d'autres termes, puisque l'inertie est traitée comme une correction aux écoulement de cœur et de couches limite visqueuse, elle n'impose pas sa longueur caractéristique propre.

2.2 Ecart à la bidimensionnalité de l'écoulement de cœur : l'effet tonneau.

Comme pour les phénomènes ondulatoires entrevus au chapitre 1, l'écoulement peut devenir tridimensionnel de deux façons : soit par une légère dépendance en z de la pression qui relève d'un mécanisme purement hydrodynamique, soit par l'apparition d'une inhomogénéité de $\mathbf{m}$ suivant $\mathbf{e}_z$ qui met en jeu la dynamique propre de $\mathbf{m}$ (équation de conservation du courant et loi d'Ohm dans le cas MHD).

2.2.1 Mécanisme général hydrodynamique.

Nous cherchons ici à déterminer un mécanisme qui pourrait rompre la bidimensionnalité d'un écoulement géostrophique.

La solution proposée au paragraphe 1-3.1 coïncide avec la solution à l'ordre $(0, 0)$ des équations de Navier-Stokes dans le cœur (1.37-1.38) au sens du développement (2.1a). Il apparaît cependant que la présence d'une couche limite perpendiculaire en $z = 0$ peut donner lieu à un débit de la couche vers le cœur de l'écoulement si ce dernier est tourbillonnaire (relation -(1.52)). Si le plan $z = 1$ comprend une couche limite capable d'absorber intégralement ce débit (couche limite antisymétrique de la couche située en $z = 0$, comme celle induite qu'induit le vent sous la surface des océans en imposant un frottement de surface), alors ce dernier peut traverser le cœur de l'écoulement sans le perturber (figure 2.3). En revanche, si la couche supérieure n'est pas l'exacte symétrique de la couche inférieure, le fluide doit boucler dans le cœur de l'écoulement. Dans ce cas, puisque le cœur est $2D$ au premier ordre, chaque plan d'épaisseur dz recevra la même quantité de matière $\nabla_{\perp} \cdot \check{\mathbf{u}} dz$ (figure 2.1). Une alimentation identique de tous ces plans requiert une variation affine de $w(z)$ pour que la conservation de la masse soit satisfaite. La composante verticale du gradient de pression $\partial_z p$ induite

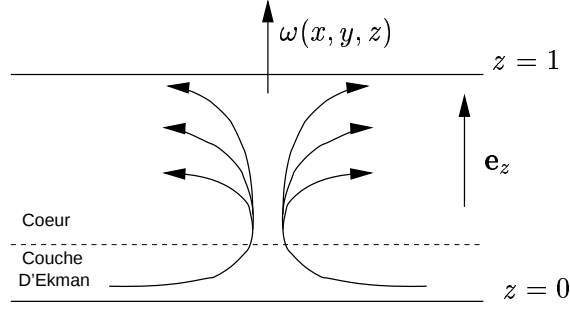
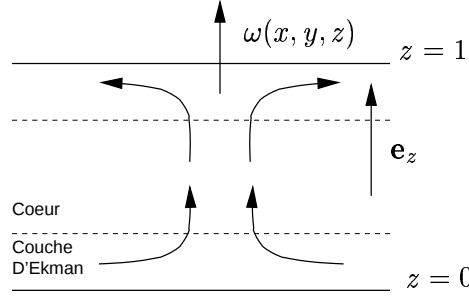
FIG. 2.1 – débit recirculant en l'absence de couche en $z = 1$.FIG. 2.2 – débit recirculant pour des couches limites en $z = 0$ et $z = 1$ exactement antisymétriques.

FIG. 2.3 – recirculation dans les couches d'Ekman

par ce mouvement est donc elle aussi affine. La pression $p(z)$ est alors quadratique, ce qui provoque également une dépendance quadratique de $\mathbf{u}_\perp(z)$: un tourbillon de l'écoulement de cœur ressemblera plutôt à un tonneau (*barrel*) ou à un vase (selon le signe de ω) qu'à une colonne. L'expression analytique du profil de vitesse associé à ce phénomène découle directement de la résolution des équations du mouvement : Soit (i_0, j_0) le premier ordre de la vitesse verticale $\tilde{w}(0)$. La conservation de la masse à l'ordre (i_0, j_0) , intégrée à l'aide des conditions limites (2.4-2.5) fournit $\tilde{w}^{(i_0, j_0)}(z)$:

$$\tilde{w}^{(i_0, j_0)}(z) = \nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp^{(i_0, j_0)} (1 - nz). \quad (2.7)$$

Le gradient vertical de pression associé est obtenu avec la composante verticale des équations de Navier-Stokes (1.24) à l'ordre $(i_0 + 1, j_0)$. En reportant ce résultat dans la composante horizontale des équations de Navier-Stokes (1.23) à l'ordre $(i_0 + 1, j_0)$ et en intégrant ces dernières entre $z = 0$ et z à l'aide des conditions aux limites (2.2), il vient :

$$\mathbf{u}_\perp^{(i_0+1, j_0)}(z) = \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F} \mathbf{u}_\perp^{(i_0+1, j_0)}(0) + \lambda \Theta \nabla_\perp \left[\partial_t \nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp^{(i_0, j_0)} + \left(\mathbf{u}_\perp^{(i, j)} \nabla_\perp \right) \nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp^{(i_0-i, j_0-j)} \right] z \left(1 - \frac{nz}{2} \right) \right) \quad (2.8)$$

Comme $\mathbf{m}$ est indépendant de z , le profil de $\mathbf{u}_\perp^{(i_0+1, j_0)}(z)$ prend bien la forme d'une parabole. Il est également possible de comprendre l'effet *tonneau* hydrodynamique comme la conséquence d'un temps de diffusion non nul du freinage exercé par les couches perpendiculaires : le rapport de ce dernier avec le temps de retournement est donné par Ro . Si ce dernier n'est plus négligeable, le champ de pression n'est plus bidimensionnel et ce défaut est transmis au champ de vitesse, directement dépendant de p au premier ordre. Pour $\mathcal{F}(\mathbf{u}_\perp) = \mathbf{u}_\perp$ (2.8) est simplifiée :

$$\mathbf{u}_\perp(z) = \mathbf{u}_\perp(0) + \lambda \varepsilon Ro \Theta \nabla_\perp \left[\partial_t \nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp + (\mathbf{u}_\perp \nabla_\perp) \nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp \right] z \left(1 - \frac{nz}{2} \right) + \mathcal{O}_{i+j=2}(Ro^i \varepsilon^j) \quad (2.9)$$

Ce phénomène n'est pas pertinent dans les problèmes MHD car la pression n'est pas le média privilégié pour le transport de l'information entre les plans horizontaux, dans la mesure où ce rôle est tenu de façon dominante par les boucles de courant électrique. Ces dernières sont responsables d'un écart à la bidimensionnalité dont la dynamique repose sur les effets électromagnétiques.

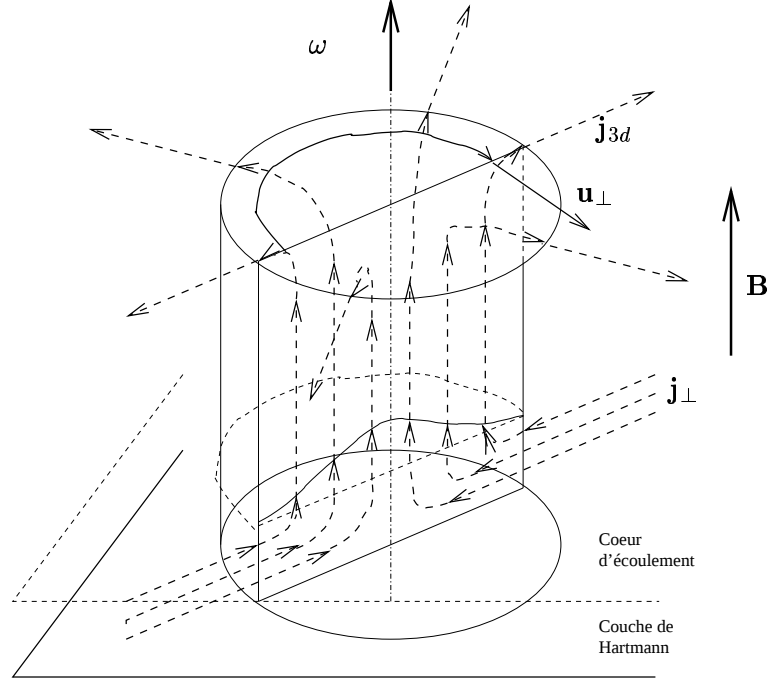


FIG. 2.4 – Schéma de l'effet tonneau MHD dans une structure tourbillonnaire : les flèches en pointillés représentent les lignes de courant électrique. la zone délimitée par les deux plans inférieurs représente la couche de Hartmann. le plan inférieur est une paroi isolante.

2.2.2 Mécanisme Magnétohydrodynamique.

Nous cherchons maintenant un phénomène analogue à celui du paragraphe précédent en dans le cas des problèmes MHD. L'approximation d'un cœur d'écoulement MHD bidimensionnel exposée au paragraphe 1-3.1 est caractérisée par une densité de courant électrique $\mathbf{j}_\perp$ de divergence orthogonale nulle qui de ce fait ne couple pas les champs de vitesse des différents plans horizontaux entre eux. Le fait d'ajouter une autre force, de rotationnel non nul, et indépendante de z en première approximation provoque donc l'apparition d'un courant électrique de même divergence (non nulle) dans chaque plan horizontal afin que la force de Laplace associée puisse équilibrer le nouveau terme. Chaque plan d'épaisseur dz pompe donc la même quantité de courant électrique $\nabla_\perp \cdot \mathbf{j}_\perp dz$ qui doit être alimentée par une densité de courant électrique vertical affine en z . Le potentiel électrique associé est par suite quadratique en z . Cependant, comme la force ajoutée est indépendante de z , il doit en être de même pour la densité de courant électrique $\mathbf{j}_\perp$. Ceci nécessite que la partie quadratique du champ électrique $\tilde{\mathbf{E}}$ soit équilibrée par une partie quadratique de $\tilde{\mathbf{u}}_\perp \times \mathbf{e}_z$. Le profil vertical de vitesse horizontale est donc nécessairement quadratique (figure 2.2.2).

À noter que le courant vertical qui apparaît dans le cœur est alimenté par un mécanisme analogue à celui qui produit une vitesse verticale au centre d'un tourbillon pour un écoulement tournant : l'équilibre dans le cœur, entre le courant issu du potentiel électrique et celui issu de la vitesse azimutale, est rompu dans la couche de Hartmann par la présence des forces visqueuses qui effondrent le terme en $\mathbf{u}_\perp \times \mathbf{e}_z$. Comme le champ électrique est le même dans le cœur et dans la couche, un courant de divergence non nulle apparaît dans la couche du fait du déséquilibre, et donne lieu à du courant vertical. L'analogie entre les *effet tonneaux* hydrodynamique et magnétohydrodynamique est remarquable : $\tilde{\mathbf{E}}$ et $\tilde{\mathbf{j}}_\perp$ jouent le rôle de $\nabla_\perp \tilde{p}$ et $\tilde{\mathbf{u}}_\perp$. En outre dans les deux cas, l'ingrédient clé est l'apparition d'un écoulement tourbillonnaire qui provoque un débit (de w ou de j_z) entre les couches perpendiculaires et le cœur.

Les effets de l'inertie sont bien évidemment des facteurs privilégiés d'apparition de l'effet *tonneau* MHD : si $\mathbf{F}$ est défini par $\mathbf{F} = \frac{\lambda}{N} \left(\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_\perp^{(0)} + \tilde{\mathbf{u}}_\perp^{(0)} \cdot \nabla_\perp \tilde{\mathbf{u}}_\perp^{(0)} \right)$ (où $\tilde{\mathbf{u}}_\perp^{(0)}$ est la solution à l'ordre (0,0) de

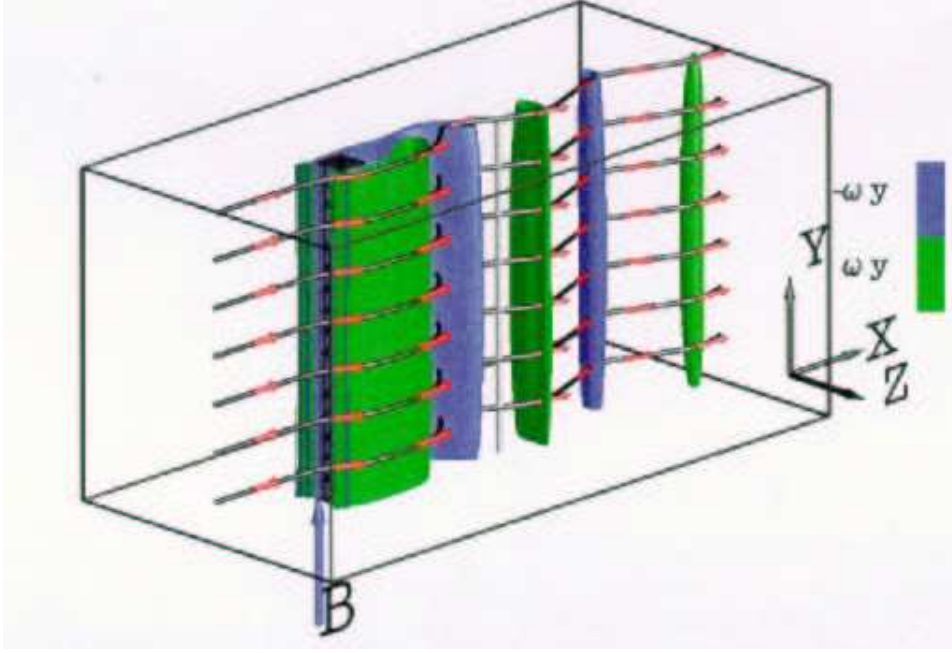


FIG. 2.5 – Surfaces iso-vorticité à $Re = 200$, $Ha = 14.2$ et $N = 1$. L'axe Oy correspond à l'axe Oz de notre étude. D'après [35]

(1.23), indépendante de z) les expressions analytiques respectives des profil de vitesse et du courant électrique sont :

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0,1)}(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{u}}^{(0,1)}(x, y, 0, t) + \frac{1}{2}z \left(z - \frac{2}{n} \right) \lambda^2 \mathcal{L}_2 \mathbf{F}(x, y, 0, t), \quad (2.10)$$

$$\tilde{w}^{(0,1)} = \tilde{w}^{(0,1)}(x, y, 0, t) (1 - nz) \quad (2.11)$$

$$\tilde{j}_z^{(0,1)} = \tilde{j}_z^{(0,1)}(x, y, 0, t) (1 - nz) \quad (2.12)$$

où l'opérateur $\mathcal{L}_2$ est défini par :

$$\mathcal{L}_2 : \mathbf{F} \mapsto \mathcal{L}_2 \mathbf{F} = -\Delta_{\perp} \mathbf{F} + \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{F}) \quad (2.13)$$

La démonstration de ces résultats à partir des équations du mouvement dans le cœur est donnée au paragraphe **3.3.2** de [37]. Parallèlement à ces travaux théoriques, des simulations numériques directes 3D des équations de la MHD ont mis en évidence l'existence de ces formes courbées des tourbillons qui apparaissent dans le sillage d'un cylindre plongé dans un champ magnétique axial uniforme [35]. La différence essentielle avec notre *effet tonneau* réside dans le nom de *cigars* qui leur a été attribuée. Cette dernière appellation a le mérite de souligner que l'importance du phénomène croît avec le cube de l'élanement λ de la structure concernée (figure **2.2.2**). Comme dans le cas des couches parallèles, l'apparition de la tridimensionnalité résulte de la prise en compte d'une force supplémentaire finie. Autrement dit, la force de Laplace n'agit pas instantanément, si bien que d'autres phénomènes (la viscosité, caractérisée par $\frac{\lambda^2}{Ha^2}$ fini dans le cas des couches parallèles, l'inertie, caractérisée par $\frac{\lambda}{N}$ fini dans la présente description de l'effet *tonneau* MHD) entrent en action avant que la diffusion de quantité de mouvement le long des lignes de champ n'ait eu le temps de bidimensionnaliser complètement l'écoulement. Les couches parallèles MHD peuvent ainsi être vues comme un *effet tonneau* MHD dû à la viscosité mais pour lequel ce dernier intervient dès le premier ordre. Il est vraisemblablement possible de retrouver le profil connu des couches parallèles en sommant les *effet tonneau* MHD visqueux de chaque ordre mais la convergence de cette série est très lente. Néanmoins, un profil en z^6 apparaît à l'ordre $(0, 2)$ pour l'effet *tonneau* inertiel ce qui suggère que le profil exact

présente un défaut de bidimensionnalité plus marqué au voisinage des couches de Hartmann. Cette dernière remarque corrobore les simulations de [35] qui constatent une déformation plus marquée des structures au pied des tourbillons (figure 2.2.2)¹.

2.2.3 Écoulement MHD tournant.

Nous étudions à présent la dynamique de l'écoulement de cœur du problème MHD quand les effets inertiels sont réduits à la force de Coriolis. Cette simplification permet de ne pas faire d'hypothèse sur l'ordre de grandeur de cette dernière. Le problème est donc celui d'un fluide tournant soumis à un champ magnétique vertical. La quantité $\mathbf{m}$ est définie par $\mathbf{m} = A^{-1}\mathbf{u}_\perp + \mathbf{j}_\perp$ (A est le rapport des forces de Laplace et de Coriolis, appelé *nombre d'Elsasser*). La grandeur $\mathbf{m}$ n'est cependant pas a priori indépendante de z car un courant supplémentaire apparaît en réponse à la force de Coriolis. Les équations de Navier-Stokes prennent la forme :

$$0 = -\nabla_\perp \check{p} + (\check{\mathbf{j}}_\perp + A^{-1}\check{\mathbf{u}}_\perp) \times \mathbf{e}_z \quad (2.14a)$$

$$0 = -\partial_z \check{p}, \quad (2.14b)$$

si bien que l'élimination de $\check{\mathbf{j}}_\perp$ entre (1.17b) et (2.14a) fournit l'équation d'évolution de $\check{\mathbf{u}}_\perp$:

$$A^{-1}(\mathcal{L}_3 \check{\mathbf{u}}_\perp + \partial_{zz}^2 \check{\mathbf{u}}_\perp \times \mathbf{e}_z) = \partial_{zz}^2 \check{\mathbf{u}}_\perp \quad (2.15)$$

où l'opérateur $\mathcal{L}_3$ est défini par $\mathcal{L}_3 : \check{\mathbf{u}}_\perp \mapsto \mathcal{L}_3 \check{\mathbf{u}}_\perp = -\lambda^2 \Delta_\perp [\check{\mathbf{u}}_\perp \times \mathbf{e}_z] + \lambda^2 \nabla_\perp [\nabla_\perp \times \check{\mathbf{u}}_\perp \cdot \mathbf{e}_z]$. Cette équation n'admet à priori pas de solution qui donnerait simplement la dépendance en z du profil de vitesse. Cette dernière est en effet étroitement couplée à l'écoulement dans les plans horizontaux. Si $A \gg 1$, la force de Coriolis perturbe légèrement la force de Laplace, dominante. L'écoulement est alors un cas particulier de celui du paragraphe précédent avec $\mathbf{F} = -A^{-1}\check{\mathbf{u}}_\perp \times \mathbf{e}_z$. Les équations qui régissent les profils de courant et vertical et de vitesse verticale sont obtenues en combinant les rotationnels de (2.14a) et de (2.15) et la conservation du courant électrique :

$$2\partial_z \check{\omega} = \partial_{zz}^2 \check{j}_z + \lambda^2 \Delta_\perp \check{j}_z \quad (2.16a)$$

$$-A\partial_z \check{j}_z = \partial_z \check{\omega} \quad (2.16b)$$

Le cas $A \ll 1$ correspond à une physique différente puisque la force de Coriolis domine celle de Laplace. La pression résulte alors d'un écoulement proche d'un écoulement géostrophique et doit être normalisée par $\frac{\lambda \Omega U}{a}$:

$$0 = -\nabla_\perp \check{p} + (A\check{\mathbf{j}}_\perp + \check{\mathbf{u}}_\perp) \times \mathbf{e}_z \quad (2.17a)$$

Au premier ordre, la force de Laplace n'intervient pas et l'écoulement correspondant est 2D et géostrophique tel que $\nabla_\perp \cdot \check{\mathbf{u}}_\perp = 0$. Le courant induit est donc irrotationnel d'après (1.17a), si bien que l'action de la force de Laplace, à l'ordre suivant, n'affecte par le champ de vortacité qui reste bidimensionnel d'après (2.17a). En revanche, la diffusion verticale des courants induits est trop lente devant le temps caractéristique de la force de Coriolis pour pouvoir s'effectuer. Ces courants induits résultent donc de l'équilibre entre diffusion latérale et verticale, ce qui produit un profil de courant vertical (partie divergente de $\check{\mathbf{j}}_\perp$) fortement tridimensionnel et piloté par (2.16b).

2.3 Couches de Hartmann.

Le but de ce paragraphe est d'étendre la théorie classique de la couche de Hartmann exposée au paragraphe 1-3.2. à des cas un peu plus généraux (paroi plane non orthogonale au champ,

¹Pour un profil de base affine en z comme en produirait l'adjonction d'une force indépendante de z mais de composante non nulle selon $\mathbf{e}_z$ (telle qu'une poussée d'Archimède) dans les équations du mouvement, les corrections successives se présenteraient sous la forme d'une série de polynômes impairs.

champ magnétique non uniforme et instationnaire) afin d'obtenir un modèle fin du comportement de ces couches, éventuellement utilisable comme loi de paroi dans des modèles numériques. En effet, l'épaisseur des couches de Hartmann, inversement proportionnelle au champ magnétique est très faible dans beaucoup d'expériences et de problèmes industriels. Or le fait que dans certains cas, la dynamique de cette couche puisse totalement contrôler l'écoulement rend sa modélisation précise indispensable. La couche de Hartmann requiert alors un maillage très fin et un calcul très lourd à défaut duquel de grosses erreurs peuvent survenir et contaminer la totalité de l'écoulement. Walker *et al.* [40] ont montré que l'utilisation du modèle analytique fourni par la théorie classique pouvait réduire spectaculairement le temps de calcul. Récemment, [34] ont révélé que le modèle analytique donnait aussi une précision meilleure qu'un calcul numérique fondé sur le maillage de ces couches. Dans cette optique, nous nous proposons de détailler la description de cette couche.

La paroi de Hartmann est supposée orthogonale à l'axe $\mathbf{e}_z$ et le champ est normalisé par une valeur caractéristique de B_z . L'étude est restreinte aux cas où le champ magnétique ne varie pas le long d'une tranche verticale de couche limite soit $\partial_\xi \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \simeq 0$. Cette hypothèse élimine en fait la possibilité de variations à haute fréquence du champ magnétique. En effet si ce dernier varie sur une échelle de temps f_b^{-1} plus courte que son temps caractéristique de diffusion au travers de la couche de Hartmann, $t_{dHa} = a^2 / (Ha^2 \mu \sigma)$, il ne peut s'y étendre entièrement et présente un profil dépendant de ξ : l'épaisseur sur laquelle le champ est non nul s'appelle la *profondeur de peau électromagnétique* (voir par exemple, [12]). Pour éviter ce phénomène il faut donc que

$$f_b \ll \frac{Ha^2}{\mu \sigma a^2}. \quad (2.18)$$

Les équations du mouvement (1.31-1.32), la loi d'Ohm (1.53c) et la conservation du courant (1.53a-1.53b) dans les couches de Hartmann sont alors réécrites :

$$\frac{\lambda}{N} [\partial_t \hat{\mathbf{u}}_\perp + (\hat{\mathbf{u}}_\perp \cdot \nabla_\perp) \hat{\mathbf{u}}_\perp + Ha \hat{w} \partial_\xi \hat{\mathbf{u}}_\perp] - \frac{\lambda^2}{Ha^2} \Delta_\perp \hat{\mathbf{u}}_\perp = -\nabla_\perp \hat{p} + \partial_{\xi\xi}^2 \hat{\mathbf{u}}_\perp + [\hat{j}_\perp B_z - \hat{j}_z \mathbf{B}_\perp] \times \mathbf{e}_z \quad (2.19a)$$

$$\frac{\lambda^2}{HaN} [\partial_t \hat{w} + (\hat{\mathbf{u}}_\perp \cdot \nabla_\perp) \hat{w} + Ha \hat{w} \partial_\xi \hat{w}] - \frac{\lambda^3}{Ha^3} \Delta_\perp \hat{w} = -\partial_\xi \hat{p} + \frac{\lambda}{Ha} \partial_{\xi\xi}^2 \hat{w} + \frac{1}{Ha} \hat{j}_\perp \times \mathbf{B}_\perp \quad (2.19b)$$

$$-\frac{1}{Ha} \nabla_\perp \cdot \hat{\mathbf{u}}_\perp = \partial_\xi \hat{w} \quad (2.20a)$$

$$-\frac{1}{Ha} \left[(\mathbf{e}_z \times \nabla_\perp) j_z - \frac{d}{dt} \mathbf{B}_\perp + (\mathbf{B}_\perp \cdot \nabla_\perp) \hat{\mathbf{u}}_\perp \right] = -\mathbf{e}_z \times \partial_\xi \hat{j}_\perp + B_z \partial_\xi \hat{\mathbf{u}}_\perp. \quad (2.21)$$

$$-\frac{1}{Ha} \nabla_\perp \cdot \hat{\mathbf{j}} = \partial_\xi \hat{j}_z \quad (2.22a)$$

À noter que l'ensemble de ce paragraphe est détaillé dans Pothérat Sommeria & Moreau (2000). Dans ce paragraphe, n'est considérée que la couche Hartmann, sans aucune hypothèse sur l'écoulement de cœur. En particulier les conditions de symétrie (2.4-2.5) ne sont plus supposées vérifiées.

La paroi $\xi = 0$ peut être conductrice, de conductance Σ_W (normalisée par σ). La continuité du champ électrique à la paroi impose alors la condition limite :

$$\nabla_\perp \cdot (\Sigma_W \mathbf{j}_W) + j_z = j_I \quad (2.23)$$

où j_I est une densité de courant injectée artificiellement à la paroi (par exemple au moyen d'électrodes).

2.3.1 Couche de Hartmann en champ instationnaire non homogène.

Profil au premier ordre.

À l'ordre 0, (2.22a) et (2.21) assurent que $\mathcal{F}(\hat{\mathbf{u}}_\perp) = B_z \hat{j}_\perp - \hat{j}_z \mathbf{B}_\perp$ est une fonction affine de $\hat{\mathbf{u}}_\perp$ et (2.20a) (2.19b) impliquent que $\partial_\xi p^{(0)} = 0$. Les résultats du paragraphe **1-3.2** s'appliquent donc avec,

pour matrice associée $\mathbf{L}^{*(0)} = -B_z^2(x, y, t) \mathbf{\Theta}^2$. La solution qui en résulte est très proche des profils de Hartmann classiques :

$$\mathbf{u}_{\perp}^{(0)}(\xi) = \mathbf{u}_{\perp}^{(0)}(0) \left[1 - e^{-B_z \xi} \right] \quad (2.24a)$$

$$\mathbf{j}_{\perp}^{(0)}(\xi) = \mathbf{j}_W^{(0)} + B_z \mathbf{u}_{\perp}^{(0)}(0) \times \mathbf{e}_z \left[1 - e^{-B_z \xi} \right]. \quad (2.24b)$$

$$\hat{w}^{(0)} = 0 = \check{w}^{(0)}(z=0) \quad (2.24c)$$

$$\hat{j}_z^{(0)} = \hat{j}_{zW}^{(0)} \quad (2.24d)$$

où $\mathbf{u}^{(0)}(\xi)$ vérifie :

$$\mathbf{u}_{\perp}^{(0)}(0) = B_z^{-1} \mathbf{j}_W^{(0)} \times \mathbf{e}_z - B_z^{-2} j_{zW}^{(0)} \mathbf{B}_{\perp} \times \mathbf{e}_z - B_z^{-2} \nabla_{\perp} p \quad (2.25)$$

$$\mathbf{j}_{\perp}^{(0)}(0) = \mathbf{j}_W^{(0)} + B_z \mathbf{u}_{\perp}^{(0)}(0) \times \mathbf{e}_z \quad (2.26)$$

Outre le terme supplémentaire dû à la composante parallèle à la paroi du champ magnétique, ce profil de couche de Hartmann présente une différence essentielle celui du paragraphe **1-3.2** : l'épaisseur de la couche de Hartmann varie proportionnellement à la composante verticale du champ magnétique et dépend donc de (x, y) . Une vitesse verticale apparaît en réponse à cette nouvelle topographie, de sorte que l'écoulement "suit" la forme de la couche de Hartmann. La vitesse associée est calculée en injectant (2.24a) dans (2.20a) à l'ordre $(0, 1)$:

$$\hat{w}^{(0,1)}(\xi) = -B_z^{-2} \left[1 - e^{-B_z \xi} - B_z \xi e^{-B_z \xi} \right] \mathbf{u}_{\perp}^{(0)}(0) \cdot \nabla_{\perp} B_z + \left(-\xi + B_z^{-1} - B_z^{-1} e^{-B_z \xi} \right) \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp}^{(0)}. \quad (2.27)$$

La présence du terme polynômial impose d'utiliser la condition de raccord complète (2.6) à l'ordre $(0, 1)$:

$$\lim_{\substack{Ha^{-1} \rightarrow 0 \\ z_h \text{ fixé}}} \frac{\check{w}^{(0)}(\eta z_{\eta}) + \check{w}^{(0,1)}(\eta z_{\eta}) Ha^{-1} - \hat{w}^{(0)}(\eta z_{\eta} Ha) - \hat{w}^{(0,1)}(\eta z_{\eta} Ha) Ha^{-1}}{Ha^{-1}} = 0 \quad (2.28)$$

Au voisinage de $z_{\eta} = 0$, $\check{w}^{(0)}(\eta z_{\eta}) = \check{w}^{(0)}(0) + \eta z_{\eta} \partial_z \check{w}^{(0)}(0) + \mathcal{O}(\eta z_{\eta})^2$. En remplaçant $\check{w}^{(0)}$, $\hat{w}^{(0)}$ et $\hat{w}^{(0,1)}$ par leurs expressions, il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{Ha^{-1} \rightarrow 0 \\ z_h \text{ fixé}}} \left[-\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp}^{(0)}(0) - \partial_z \check{w}^{(0)}(0) \right] \frac{\eta z_{\eta}}{Ha^{-1}} \\ - e^{-B_z \frac{\eta z_{\eta}}{Ha^{-1}}} B_z \left[1 + B_z \frac{\eta z_{\eta}}{Ha^{-1}} \right] \mathbf{u}_{\perp}^{(0)}(0) \cdot \nabla_{\perp} B_z - B_z^{-1} e^{-B_z \frac{\eta z_{\eta}}{Ha^{-1}}} \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp}^{(0)}(0) \\ + \left[\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp}^{(0)}(0) - B_z^{-2} \mathbf{u}_{\perp}^{(0)}(0) \cdot \nabla_{\perp} B_z - \check{w}^{(0)}(\eta z_{\eta}) \right] + \mathcal{O}(Ha \eta^2) = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Choisissons maintenant l'échelle intermédiaire $\eta(Ha^{-1})$ de telle sorte que $\lim_{\substack{Ha^{-1} \rightarrow 0 \\ z_h \text{ fixé}}} Ha \eta (Ha^{-1})^2 = 0$ (pour que le résidu $\mathcal{O}(Ha \eta^2)$ tende vers 0 quand $Ha^{-1} \rightarrow 0$) et $\eta(Ha^{-1}) \gg Ha^{-1}$, ce qui est vérifié pour tout η tel que $Ha^{-1} \ll \eta(Ha^{-1}) \ll Ha^{-1/2}$. L'équation de continuité dans le cœur impose que $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp}^{(0)}(0) + \partial_z \check{w}^{(0)}(0) = 0$. Finalement la condition de raccord se réduit à² :

$$\check{w}^{(0,1)} = \nabla_{\perp} \cdot \left(B_z^{-1} \mathbf{u}_{\perp}^{(0)}(0) \right) \quad (2.30)$$

²Ce résultat peut être obtenu directement en écrivant que la vitesse verticale résulte de la divergence du débit horizontal qui transite sur la hauteur totale de la couche limite. L'expression mathématique de ce résultat requiert cependant quelques précautions détaillées dans [36].

Il faut remarquer que le terme proportionnel à ξ de $\hat{w}^{(0,1)}(\xi)$ se raccorde en fait avec $\partial_z \hat{w}^{(0)}(\xi)$ (la condition de raccord correspondante est ici trivialement vérifiée du fait de la conservation de la masse dans le cœur). D'une manière assez générale, un terme de $\hat{g}^{(i,j)}$ proportionnel à ξ^k se raccorde à $\partial_z^k \hat{g}^{(i,j-k)}$. Ceci correspond à l'effet de "loupe" provoqué par le choix de la variable $\xi = Haz$ dans la couche de Hartmann : $Ha^k \partial_z^k g = \partial_\xi^k g$.

Un phénomène analogue provoque également un échange de courant électrique entre la couche et le cœur (obtenu en remplaçant (2.24b) dans (2.22a)) :

$$j_z^{(0,1)}(\xi) = -\xi \nabla_\perp \cdot \mathbf{j}_\perp^{(0)}(0) + B_z^{-1} \left[1 - e^{-B_z \xi} \right] \mathbf{e}_z \cdot \nabla_\perp \times \left[B_z \mathbf{\tilde{u}}_\perp^{(0)}(0) \right] - B_z^{-1} \left[1 - e^{-B_z \xi} - B_z \xi e^{-B_z \xi} \right] \mathbf{e}_z \cdot \left[\mathbf{e}_z \times \mathbf{\tilde{u}}_\perp^{(0)}(0) \right] \cdot \nabla_\perp B_z \quad (2.31)$$

Le même procédé de raccord que celui déjà utilisé pour la vitesse donne le courant vertical qui passe de la couche au cœur :

$$\check{j}_z^{(0,1)} = j_{zW}^{(0,1)} + \nabla_\perp \times \mathbf{\tilde{u}}_\perp^{(0)}(0) \quad (2.32)$$

L'équation (2.32) correspond au résultat connu (1.59). Ce dernier n'est pas affecté par les variations du champ magnétique.

Jets associés à la topographie de la couche de Hartmann

À l'ordre $(0,1)$, la pression varie à l'échelle de la couche de Hartmann à cause de la composante parallèle du champ magnétique, comme le montre (2.19b) :

$$\partial_\xi \left(p^{(0,1)} - \check{p}^{(0,1)}(0) \right) = \hat{j}_\perp^{(0)} \times \mathbf{B}_\perp \quad (2.33)$$

En outre, le champ de vitesse $\mathbf{\tilde{u}}_\perp^{(0,1)}$ présente une partie linéaire en ξ due au membre de droite de (2.21). La solution des équations de Navier-Stokes à l'ordre $(0,1)$ donne :

$$\mathbf{u}^{(0,1)} = -B_z^{-1} \left[B_z (\mathbf{e}_z \times \nabla_\perp) \check{j}_z^{(0)}(0) - B_z \frac{d^{(0)}}{dt} \mathbf{B}_\perp + B_z (\mathbf{B}_\perp \cdot \nabla) \mathbf{\tilde{u}}_\perp^{(0)}(0) \right] \xi - \nabla_\perp \cdot \mathbf{j}_\perp^{(0)}(0) \mathbf{B}_\perp \times \mathbf{e}_z - \lambda \nabla_\perp \left(\mathbf{j}_\perp^{(0)}(0) \times \mathbf{B}_\perp \cdot \mathbf{e}_z \right) \quad (2.34)$$

$$+ B_z^{-2} \left[\left[(\mathbf{e}_z \times \mathbf{\tilde{u}}_\perp^{(0)}(0)) \cdot \nabla_\perp B_z \right] \cdot \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_\perp) - \lambda \nabla_\perp \left(\mathbf{j}_\perp^{(0)}(0) \times \mathbf{B}_\perp \cdot \mathbf{e}_z \right) \right] \frac{\xi}{4} e^{-B_z \xi} (1 + \xi) \quad (2.35)$$

$$+ B_z^{-2} \left[-j_{zW}^{(0,1)} \mathbf{B}_\perp \times \mathbf{e}_z + B_z \mathbf{j}_W^{(0,1)} \times \mathbf{e}_z - \lambda \nabla_\perp \check{p}^{(0,1)}(0) \right] \left(1 - e^{-B_z \xi} - \frac{B_z \xi}{2} e^{-B_z \xi} \right) \quad (2.36)$$

Le raccord à la zone de cœur n'apporte pas de nouvelle information en soi puisque la condition sur la vitesse à l'ordre $(0,1)$ n'est que la trace de la relation (2.25). Signalons simplement que l'on montre que la condition de raccord (2.6) est satisfaite en utilisant l'équivalent de (2.21) et la dérivée de (2.25), mais écrite en $z = 0$ dans le cœur³ :

$$\partial_z \mathbf{\tilde{u}}_\perp^{(0)}(0) = -B_z^{-1} \left[\begin{array}{c} B_z (\mathbf{e}_z \times \nabla_\perp) \check{j}_z^{(0)}(0) \\ -B_z \frac{d^{(0)}}{dt} \mathbf{B}_\perp + B_z (\mathbf{B}_\perp \cdot \nabla) \mathbf{\tilde{u}}_\perp^{(0)}(0) \\ + \partial_z \mathbf{j}_\perp^{(0)}(0) \times \mathbf{e}_z \end{array} \right] \quad (2.37a)$$

La relation (2.37a) montre qu'une variation spatiale ou temporelle du champ magnétique horizontal, comme un défaut d'homogénéité du courant à la paroi, entraîne une variation de vitesse avec la

³Le calcul de la dérivée de (2.25) ferait en théorie intervenir les dérivées selon z du champ magnétique à l'extérieur de la couche (*a priori* non nulles). Celles-ci sont cependant supposées faibles afin d'assurer la cohérence avec notre hypothèse selon laquelle le champ ne varie pas à l'échelle de la couche. Cette hypothèse rend, en effet, impossible le raccord à la solution de couche limite des termes en $\partial_z \mathbf{B}$ du cœur. En toute rigueur, il aurait fallu également développer les variables B_z et $\mathbf{B}_\perp$, ce qui conduit à des calculs beaucoup plus lourds.

verticale dans le cœur de l'écoulement. Ce dernier présente alors une composante tridimensionnelle, et ceci, au moins au voisinage des couches de Hartmann. Le mécanisme en est le suivant : la composante horizontale du champ transporte de la quantité de mouvement dans le plan horizontal (conformément au mécanisme mis en évidence par [38]). Cet effet, comme dans les couches parallèles, retarde la diffusion de moment cinétique le long de la verticale et induit un profil tridimensionnel de vitesse dans le cœur de l'écoulement.⁴

La relation (2.37a) traduit également que si du courant est injecté à la paroi supposée isolante au moyen d'une électrode de petite dimension, un tourbillon apparaît dans le cœur de l'écoulement dont le centre coïncide avec la position de l'électrode et une zone fortement tridimensionnelle de la taille d'une couche parallèle (où interviennent d'ailleurs de forts effets visqueux). Or, il est connu [39] qu'une électrode affleurante en $z = 0$, provoque un pic de courant à la paroi qui d'après (2.37a), induit précisément une forte tridimensionnalité dans le cœur.

2.3.2 Couche de Hartmann faiblement inertielle.

La prise en compte des effets de l'inertie, comme petite perturbation de la solution au premier ordre est obtenue en résolvant les équations du mouvement à l'ordre $(1, 0)$. L'équation (2.19a) est linéaire et l'inertie apparaît comme un forçage au second membre calculé à partir du profil de base (2.24a). La solution est obtenue en tenant compte des conditions limites à la paroi et par un raccord simplifié selon (1.36) :

$$\hat{\mathbf{u}}_{\perp}^{(1,0)} = \left[\hat{\mathbf{u}}_{\perp}^{(1,0)}(0) - B_z^{-2} \left(\frac{4}{9} B_z^{-1} \mathbf{s}_1 - \frac{1}{3} \mathbf{s}_0 \right) e^{-B_z \xi} \right] \left(1 - e^{-B_z \xi} \right) + B_z^{-2} \left[\frac{1}{3} \mathbf{s}_1 - \mathbf{r}_0 \frac{B_z}{2} - \frac{1}{4} \mathbf{r}_1 (1 + B_z \xi) \right] \xi e^{-B_z \xi} \quad (2.38)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(1,0)}(0) = B_z^{-2} \left[-\lambda \nabla_{\perp} p^{(0,1)} - \lambda \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)}}{dt} + B_z \mathbf{j}_{\perp W}^{(0,1)} \times \mathbf{e}_z - j_W^{(0,1)} \mathbf{B}_{\perp} \times \mathbf{e}_z \right] \quad (2.39a)$$

$$\mathbf{r}_0 = -\lambda \partial_t \mathbf{u} - 2\lambda \left(\tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)} \cdot \nabla \right) \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)}, \quad (2.39b)$$

$$\mathbf{r}_1 = -\lambda \left[\tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)} \cdot \nabla_{\perp} B_z \right] \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)} + \lambda \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)} \partial_t B_z, \quad (2.39c)$$

$$\mathbf{s}_0 = \lambda \left(\tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)} \cdot \nabla \right) \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)}, \quad (2.39d)$$

$$\mathbf{s}_1 = -\lambda \left[\tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)} \cdot \nabla_{\perp} B_z \right] \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)}. \quad (2.39e)$$

La condition sur la vitesse (2.39a) est l'équivalent de (2.25) en, présence d'effets inertiels. La relation entre le courant et la vitesse (2.25) n'est pas affectée par les effets inertiels et garde donc la même expression pour les grandeurs d'ordre $(0, 1)$.

Cas particulier d'un champ vertical homogène.

Les termes de $\hat{\mathbf{u}}_{\perp}^{(1,0)}$ qui ne constituent pas la trace du profil de base correspondent à des jets horizontaux de fluide qui transitent dans les couches de Hartmann. Tous sont induits par les termes inertiels du premier ordre de l'écoulement de cœur. Ils représentent donc la réponse de la couche de Hartmann à des perturbations de ce dernier. Or, celles-ci ne sont pas a priori de divergence nulle. Ces jets provoquent donc un débit vertical entre la couche de Hartmann et le cœur par conservation de la masse. D'après l'équation de continuité, la vitesse verticale associée est d'ordre $Ha^{-1} N^{-1}$ et est donc négligeable devant la vitesse verticale induite par les gradients de champ magnétique vertical (2.27). Le calcul de $\hat{w}_{\perp}^{(1,1)}$ n'a donc d'intérêt que quand le champ magnétique vertical est uniforme

⁴On peut tout aussi bien remarquer que les surfaces caractéristiques contiennent les lignes de courant et de champ. Comme ces dernières ne sont pas perpendiculaires à la paroi, l'écoulement est forcément tridimensionnel.

(dans la mesure où $\nabla_{\perp} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}$ est faible). Dans ce cas, (2.20a) à l'ordre (1, 1) donne le profil de vitesse vertical dans la couche de Hartmann. Celui-ci est raccordé à l'écoulement de cœur via l'application de (2.6) à ce même ordre :

$$\tilde{w}^{(1,1)}(0) = \lambda B_z^{-3} \nabla_{\perp} \cdot \left[\tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)} B_z - \frac{5}{6} \left[\tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)} \cdot \nabla_{\perp} \right] \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)} + \frac{B_z^{-1}}{6} \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)} \partial_t B_z + \frac{1}{2} \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)} \right] \quad (2.40)$$

Si l'écoulement de cœur correspond à celui d'un tourbillon axisymétrique, ce débit est en fait celui qui est associé au pompage d'Ekman en fluide tournant, dont le mécanisme est décrit au paragraphe **1-3.2**. En effet, dans un tel écoulement l'essentiel du terme d'advection $[\tilde{\mathbf{u}}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}] \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}$ est en fait constitué de la force de Coriolis et le second terme de (2.40) correspond à la vorticité de l'écoulement de cœur, comme dans (1.61).

  noter que les débits associés à (2.30) et   (2.40) sont de natures différentes : sur la totalité d'une zone où la vorticité garde un signe constant, (2.40) correspond à une recirculation à l'échelle globale de l'écoulement, contrairement à (2.30).

2.3.3 Loi de paroi pour les couches de Hartmann.

L'utilisation de la condition de raccord (2.6) a permis de préciser la nature du couplage entre cœur et couche de Hartmann grâce à l'expression des grandeurs physiques en $z = 0$ comme limite de ces mêmes grandeurs calculées dans la couche de Hartmann. Ces expressions raccordées peuvent être interprétées comme les valeurs que prendraient les grandeurs de cœur   l'endroit de la paroi si la couche de Hartmann était exactement localisée à cette dernière. Elles remplacent donc avantageusement les conditions à la paroi (2.2-2.3) puisqu'elles intègrent déjà la dynamique des couches de Hartmann qui de ce fait n'ont plus besoin d'être calculées. Du fait de l'équation de continuité, une seule condition par composante de la vitesse suffit pour résoudre l'équation de Navier-Stokes. Ces conditions, appelées *lois de paroi* sont obtenues en rassemblant les solutions aux différents ordres du champ de vitesse calculées au long de ce paragraphe :

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)}(0) = B_z^{-1} \mathbf{j}_W \times \mathbf{e}_z - B_z^{-2} j_{zW} \mathbf{B}_{\perp} \times \mathbf{e}_z - B_z^{-2} \nabla_{\perp} p + \mathcal{O}(N^{-1}, Ha^{-2}) \quad (2.41a)$$

$$\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}(0) = -B_z^{-1} \left[\begin{array}{c} (\mathbf{e}_z \times \nabla_{\perp}) \check{j}_z(0) \\ -\frac{d}{dt} \mathbf{B}_{\perp} + (\mathbf{B}_{\perp} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}(0) \\ + \partial_z \check{\mathbf{j}}_{\perp}(0) \times \mathbf{e}_z \end{array} \right] \quad (2.41b)$$

$$+ \mathcal{O}(N^{-1}, Ha^{-1}) \quad (2.41c)$$

$$\tilde{w}(0) = Ha^{-1} B_z^{-2} \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}(0) \cdot \nabla_{\perp} B_z + \mathcal{O}_{i+j=2}(N^{-i} Ha^{-j}) \quad (2.42)$$

La condition électrique découle de (2.26) et de (2.32) :

$$\check{j}_z(0) = j_{zW} + \nabla_{\perp} \times \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}(0) + \mathcal{O}_{i+j=2}(N^{-i} Ha^{-j}), \quad (2.43)$$

$$\check{\mathbf{j}}_{\perp}(0) = \mathbf{j}_W + B_z \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}(0) \times \mathbf{e}_z + \mathcal{O}(N^{-1}, Ha^{-1}). \quad (2.44)$$

Il est remarquable que l'expression de $\check{j}_z(0)$ ne dépendent pas de l'orientation du champ magnétique. Par ailleurs, la relation (2.44) combinée avec (2.41a) donne :

$$B_z \check{\mathbf{j}}_{\parallel}(0) - \mathbf{B}_{\parallel}(0) \check{j}_z(0) - B_z^{-1} \nabla_{\parallel} p \times \mathbf{e}_z = \mathcal{O}(N^{-1}, Ha^{-2}). \quad (2.45)$$

Cette condition exprime simplement l'équilibre entre la force de Laplace et le gradient de pression dans le cœur. Dans le cas d'un courant injecté donné, les conditions électriques effectives pour le cœur sont (2.43) et (2.45). Dans le cas d'une fine paroi conductrice, (2.23) et la divergence de (2.44) donnent :

$$\nabla_{\parallel} \cdot [\Sigma_W B_z (\tilde{\mathbf{u}}_{\parallel}(0) \times \mathbf{e}_z)] = (\check{j}_z(0) - j_I) + \nabla_{\parallel} \cdot [\Sigma_W \check{\mathbf{j}}_{\parallel}(0)] \quad (2.46)$$

Si la paroi est parfaitement conductrice ($\Sigma_W \rightarrow +\infty$), l'écoulement est bloqué : $\tilde{\mathbf{u}}_{\parallel}(0) = \mathbf{0}$. En revanche, pour une paroi isolante, (2.46) traduit simplement que $\check{j}_z(0) = j_I$.

Si le champ magnétique est uniforme et orthogonal à la paroi, les conditions sur la vitesse deviennent :

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\perp}(0) = B_z^{-2} \left[-\lambda \nabla_{\perp} p + B_z \mathbf{j}_{\perp W} \times \mathbf{e}_z - j_W \mathbf{B}_{\perp} \times \mathbf{e}_z - \frac{\lambda}{N} \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_{\perp}}{dt} \right] + \mathcal{O}_{i+j=2} (N^{-i} H a^{-j}) \quad (2.47a)$$

$$\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}(0) = B_z^{-1} (\mathbf{e}_z \times \nabla_{\perp}) j_{zW}^{(0)} + \mathcal{O}_{i+j=2} (N^{-i} H a^{-j}) \quad (2.47b)$$

$$\check{w}(0) = H a^{-1} B_z^{-1} \nabla_{\perp} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{\perp} \quad (2.48)$$

$$\lambda H a^{-1} N^{-1} B_z^{-3} \nabla_{\perp} \cdot \left[\tilde{\mathbf{u}}_{\perp} B_z - \frac{5}{6} [\tilde{\mathbf{u}}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}] \tilde{\mathbf{u}}_{\perp} + \frac{B_z^{-1}}{6} \tilde{\mathbf{u}}_{\perp} \partial_t B_z + \frac{1}{2} \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_{\perp} \right] \quad (2.49)$$

$$+ \mathcal{O}_{i+j=3} (N^{-i} H a^{-j}) \quad (2.50)$$

2.4 Couche combinée Hartmann-Ekman.

2.4.1 Théorie sans inertie.

Dans certaines configurations de fluides tournants sous un champ magnétique aligné avec l'axe de rotation (et avec l'axe $\mathbf{e}_z$), ni l'une ni l'autre des forces de Coriolis ou de Laplace ne domine. Au voisinage d'une paroi perpendiculaire, se développe alors une couche limite dont la dynamique est gouvernée par l'équilibre de ces deux forces et des contraintes visqueuses. Si les effets inertiels non liés à la rotation sont négligés, l'équation de Navier-Stokes dans la couche limite est réécrite avec $\mathcal{F}_{\perp}(\hat{\mathbf{u}}_{\perp}) = \hat{j}_{\perp} + A^{-1} \hat{\mathbf{u}}_{\perp}$, $A = E H a^2$ et en remplaçant ε par $H a^{-1}$. Les grandeurs caractéristiques des couches de Hartmann ont été reprises pour l'adimensionnement de la pression⁵. Au premier ordre, (1.17a) assure que $\mathcal{F}(\hat{\mathbf{u}}_{\perp})$ est affine. Le problème présent est donc un cas particulier de l'étude du paragraphe 1-3.2, avec $\mathbf{L}^* = \begin{bmatrix} -1 & -A^{-1} \\ A^{-1} & -1 \end{bmatrix}$, de valeurs propres $1 + iA^{-1}$ et $1 - iA^{-1}$. La solution est donc donnée par (1.47) :

$$\hat{\mathbf{u}}_{\perp}(\xi) = \hat{\mathbf{u}}_{\perp}(z=0) (1 - e^{-c\xi} \cos b\xi) - \frac{1}{2cb} [A^{-1} \mathbf{e}_z \times \hat{\mathbf{u}}_{\perp}(z=0) + (1 + c^2 - b^2) \hat{\mathbf{u}}_{\perp}(z=0)] e^{-c\xi} \sin b\xi \quad (2.51a)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{\perp}(z=0) = \frac{1}{1+A^{-2}} [(\hat{j}_{\perp}(0) - A^{-1} \nabla_{\perp} \hat{p}) \times \mathbf{e}_z - \hat{j}_{\perp}(0) - A^{-1} \nabla_{\perp} \hat{p}], \quad (2.51b)$$

avec $c = -(1 + A^{-2})^{\frac{1}{4}} \cos [\frac{1}{2} \arctan A^{-1}]$ et $b = -(1 + A^{-2})^{\frac{1}{4}} \sin [\frac{1}{2} \arctan A^{-1}]$. L'épaisseur typique δ_{Ha-Ek} de cette couche, donnée par les taux de décroissance des termes exponentiels de (2.51a), diminue avec à la fois quand le champ magnétique et la vitesse de rotation augmentent et les limites $H a \rightarrow 0$ et $E \rightarrow +\infty$ correspondent bien aux cas particuliers des couches de d'Ekman et Hartmann :

$$\frac{\delta_{Ha-Ek}}{a} = \frac{a H a^{-1}}{(1 + E^{-2} H a^{-4})^{\frac{1}{4}} \cos [\frac{1}{2} \arctan E^{-1} H a^{-2}]} \quad (2.52)$$

Cette couche mixte exhibe en fait des propriétés hybrides de ces deux dernières. On notera ainsi la présence d'une spirale d'Ekman de longueur d'onde $\lambda_{Ha-Ek} = \frac{2\pi}{H a (1 + E^{-2} H a^{-4})^{\frac{1}{4}} \sin [\frac{1}{2} \arctan E H a^{-2}]}$ allongée mais atténuée par l'effet du champ magnétique. La vitesse et le courant électrique verticaux

⁵Il est tout aussi légitime de poser $\xi = E^{\frac{1}{2}} z$, ce qui revient à choisir les grandeurs caractéristiques de la couche d'Ekman pour l'adimensionnement. En fait, ce choix est purement arbitraire tant que les deux forces dominent les autres effets puisqu'aucune hypothèse n'est faite sur l'importance relative (représentée par le nombre α) de la force des forces de Coriolis et de Lorentz.

sont, comme dans les cas respectifs des couches d'Ekman et de Hartmann, asservis à la vorticité de l'écoulement de cœur :

$$\hat{w}(z=0) = \frac{Ha^{-1}}{(1 + E^{-2}Ha^{-4})^{\frac{1}{2}}} \left[2E\tilde{\omega}(z=0) - \nabla_{\perp} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}(z=0) \left(1 + (1 + E^{-2}Ha^{-4})^{\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (2.53)$$

$$\hat{j}_z(z=0) = \hat{j}_z(\xi=0) + \frac{Ha^{-1}}{(1 + E^{-2}Ha^{-4})^{\frac{1}{2}}} \left[2\tilde{\omega}(z=0) \left(1 + (1 + E^{-2}Ha^{-4})^{\frac{1}{2}} \right) - E\nabla_{\perp} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}(z=0) \right] \quad (2.54)$$

Les expressions (2.53) et (2.54) découlent respectivement de la conservation de la masse et du courant. L'expression de la vitesse verticale résulte en fait de l'action de la force de Coriolis; la composante "couche de Hartmann" du profil, n'intervenant pas. Ceci explique que l'expression de $\hat{w}(z=0)$ soit la même que dans une couche d'Ekman, à l'épaisseur de la couche près. La même remarque s'applique au courant électrique qui résulte de la dynamique de la couche de Hartmann. Dans les cas asymptotiques $Ha \rightarrow +\infty$, E fixé et (resp. $E \rightarrow 0$, Ha fixé), les expressions (2.53) et (2.54) rejoignent la théorie linéaire de la couche de Hartmann (resp. de la couche d'Ekman).

Comme pour les couches de Hartmann, un courant électrique vertical important à la paroi induirait un défaut de bidimensionnalité dans le cœur.

2.4.2 Couche de Hartmann en rotation modérée.

Le profil (2.38) correspond à une couche de Hartmann en présence de faibles effets inertiel. Dans le cas où ceux-ci sont le fait de la force de Coriolis, (2.19a) est donc une approximation de la couche combinée de Hartmann-Ekman.

En régime stationnaire, sous champ vertical uniforme et pour un fluide en rotation, (2.19a) devient :

$$\partial_{\xi\xi}^2 \hat{\mathbf{u}}_{\perp}^{(1,0)} - B_{\xi}^2 \hat{\mathbf{u}}_{\perp}^{(1,0)} = \lambda \nabla_{\perp} p^{(0)} + \mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)} (1 - e^{-\xi}) \quad (2.55)$$

avec $A = \frac{N}{\lambda}$; soit, pour $\hat{\mathbf{u}}_{\perp}$:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\perp}(\xi) = \tilde{\mathbf{u}}_{\perp} (1 - e^{-\xi}) + \frac{A^{-1}}{2} \mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^{(0)} \xi e^{-\xi} + \mathcal{O}(A^{-2}) \quad (2.56)$$

De la même façon, dans la limite des rotations modérées, $c \sim 1 + \mathcal{O}(A^{-2})$ et $b \sim A^{-1} + \mathcal{O}(A^{-3})$, de sorte que $\frac{\sin b\xi}{b} \sim \xi + \mathcal{O}(A^{-2})$. Le profil de couche combinée Hartmann-Ekman (2.51a) rejoint bien le profil (2.56) dans la limite des faibles valeurs de A^{-1} . Les termes en $\xi e^{-\xi}$ de (2.38) correspondent donc à la trace de la spirale d'Ekman quand la longueur d'onde de cette dernière devient grande devant l'épaisseur de la couche limite. L'expression (2.38) est donc une bonne approximation tant que cette dernière hypothèse est satisfaite.

2.4.3 Problème non-linéaire et axisymétrique de Bödewadt-MHD

Enonce

Nous considérons un fluide en rotation solide (vitesse de rotation Ω) autour d'une plaque horizontale immobile et soumis à un champ magnétique vertical permanent. Les équations de Navier-Stokes et la continuité dans la couche limite pariétale (couche de Bödewadt) sont écrites dans le référentiel fixe de la plaque, et les composantes de la vitesses cherchées sous la forme de solutions axisymétriques dites de *K rm n* :

$$\begin{aligned}
u_r &= \Omega r F(\xi) \\
u_\theta &= \Omega r G(\xi) \\
w &= \Omega \delta_{Ek} H(\xi) \\
\xi &= \frac{z}{\delta_{Ek}}
\end{aligned} \tag{2.57a}$$

Contrairement aux paragraphes **2.3** et **2.4.1**, les termes non-linéaires ne font pas l'objet d'une approximation linéaire. La solution de ce problème constitue donc un bon exemple de référence pour la théorie faiblement inertielle de la couche de Hartmann élaborée au paragraphe **2.3.2**. Le potentiel électrique est calculé en supposant l'absence de composante azimutale de la force de Laplace à l'extérieur de la couche limite (cette hypothèse caractérise en fait un cœur d'écoulement bidimensionnel). Sous ces conditions, les profils de vitesse sont obtenus par la résolution du système :

$$F'' = F^2 + HF' + 1 - G^2 + AF \tag{2.58a}$$

$$G'' = 2FG + HG' + \frac{N}{2}(G - 1) \tag{2.58b}$$

$$H' = -2F. \tag{2.58c}$$

Avec pour conditions limites :

$$F(0) = G(0) = H(0), \tag{2.59}$$

$$\lim_{+\infty} F = 0, \tag{2.60}$$

$$\lim_{+\infty} G = 1. \tag{2.61}$$

Résolution numérique

Le problème est en premier lieu ramené à l'intervalle $[0,1]$ par le changement de variable $\xi = \ln(1 - t)$. Le système obtenu est ensuite discrétisé par la méthode des différences finies. Le système non linéaire associé est résolu par la méthode de Newton-Raphson. À noter que la matrice jacobienne du système est inversée par blocs, de sorte que le nombre d'opérations et la mémoire nécessaires à cette inversion soient proportionnels au nombre de points choisis dans la couche et non à carré de ce dernier.

L'algorithme est écrit sous MATLAB 5 et testé sur le problème de Bödewadt sans champ et dans l'approximation d'Ekman (les termes inertiels sont remplacés par la force de Coriolis), pour lequel une solution analytique simple est connue. La comparaison avec 2000 points dans la couche limite fournit un résultat satisfaisant (voir figure **2.4.3**). L'écart entre la solution du problème de Bödewadt et son approximation linéaire, que constitue la solution d'Ekman, montre que les effets non-linéaires induisent une spirale d'Ekman de plus grande amplitude que celle liée aux seuls effets de la force de Coriolis.

Solutions numériques du problème de Bödewadt-MHD.

Le système d'équation est résolu en faisant varier le paramètre d'interaction N de 10^{-3} à 10^3 . Pour $N < 1$, les profils sont proches des profils connus de couche de Bödewadt sans champ magnétique. À signaler que ce dernier atténue les effets de pompage et de spirale d'Ekman. Pour $N > 1$ les oscillations des profils de vitesse sont amorties quand N augmente jusqu'à aboutir un profil exponentiel de couche de Hartmann (figure **2.4.3**).

Sur la figure **2.8**, la vitesse verticale et le courant électrique vertical à l'interface cœur-couche sont comparés, d'une part au modèle analytique approché de couches de Bödewadt-MHD (écrit pour

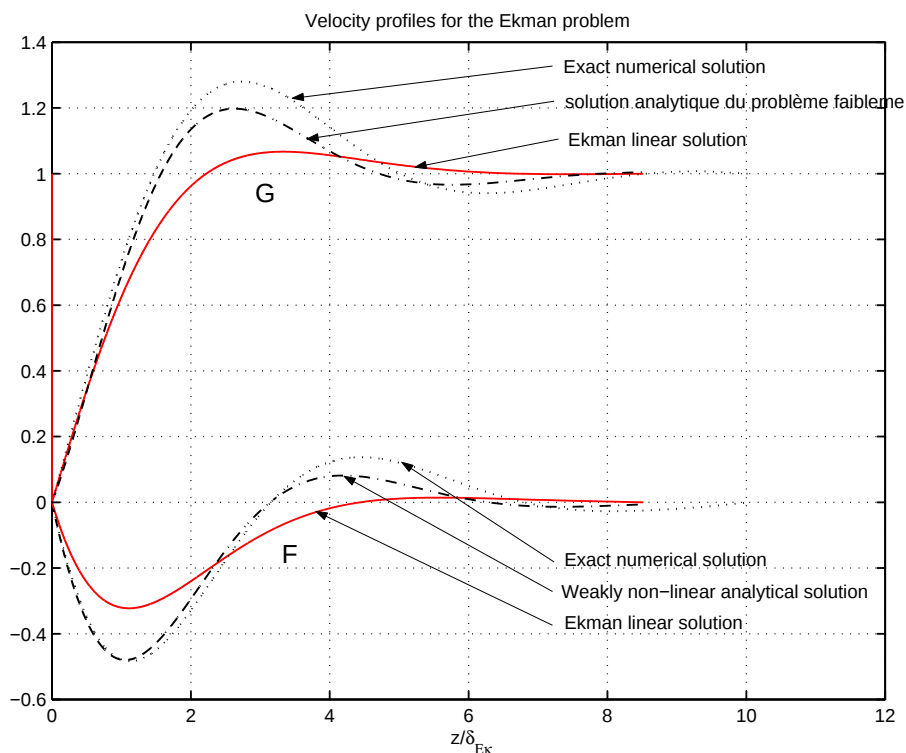


FIG. 2.6 – Comparaison des solutions du problème de Bödewadt sans champ magnétique sous diverses hypothèses : lignes pleines et interrompues : solutions respectivement analytique et numérique du problème d'Ekman, trait mixte : solution faiblement non-linéaire [41]. Pointillés : solution numérique du problème non-linéaire complet.

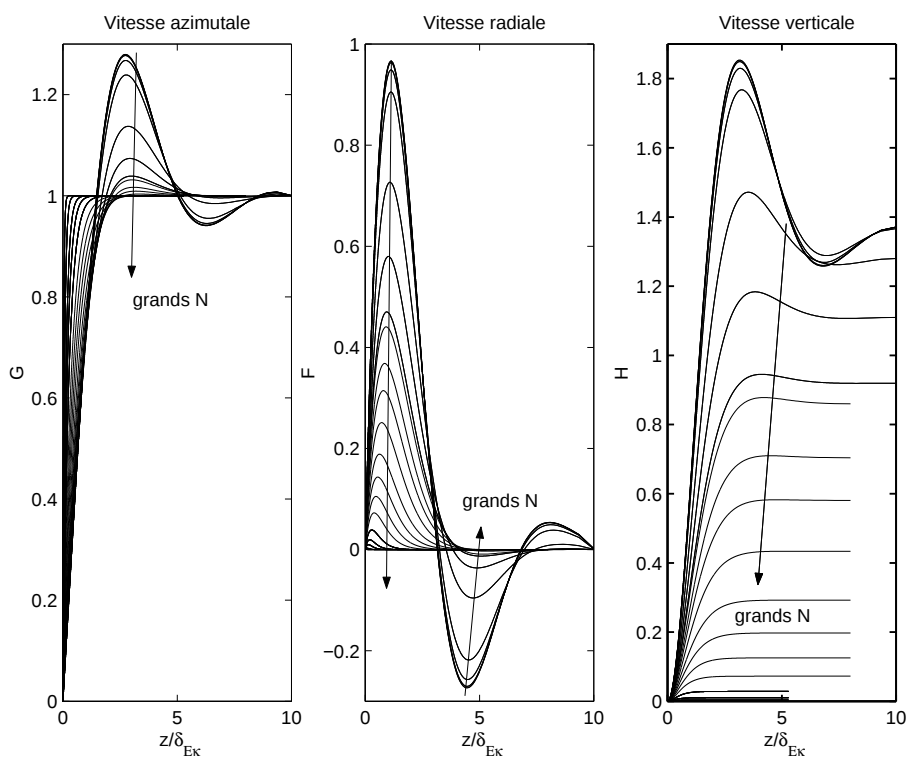


FIG. 2.7 – Profils des fonctions F, G et H dans la couche de Bödewadt. Les profils oscillent de plus en plus quand I augmente.

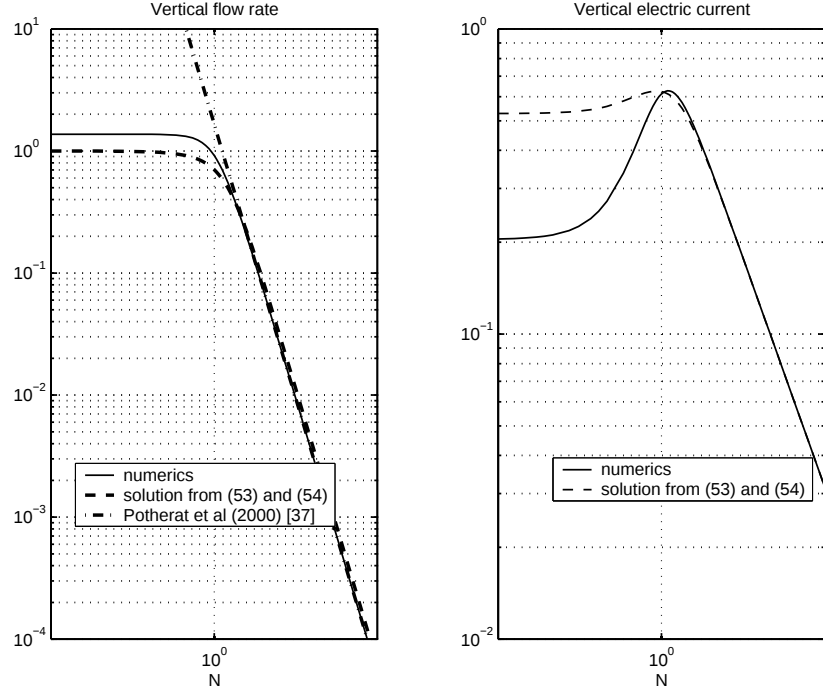


FIG. 2.8 – Valeurs de la vitesse (à droite) et du courant électrique verticaux (à gauche) à l'interface cœur-couche en fonction du paramètre d'interaction N .

$N \gg 1$, mais également satisfaisant pour les faibles valeurs de N de [41] et d'autre part à notre modèle de couches de Hartmann en présence d'inertie (pp.40-41.). Ce dernier se révèle en fait valable dès que N dépasse l'unité (c'est à dire quand les oscillations disparaissent des profils de vitesse)

2.5 Raccord entre les couches limites et le cœur

2.5.1 Équation du mouvement au premier ordre.

Pour obtenir une description du système un peu plus précise que celle fournie par l'équation (1.37), il est naturel d'ajouter des effets supplémentaires (inertiels ou visqueux ou autres) dans l'équation du mouvement, par exemple sous la forme de perturbations que nous noterons $\mathbf{F}_\perp$ (sous forme adimensionnelle). Si cette force est de rotationnel non nul, elle impose alors l'ordre de grandeur de la divergence de $\mathcal{F}(\hat{\mathbf{u}}_\perp)$:

$$\nabla_\perp \cdot \mathcal{F}(\hat{\mathbf{u}}_\perp) = \nabla_\perp \times \mathbf{F}_\perp. \quad (2.62)$$

Dans tous les exemples traités jusqu'ici, $\mathcal{F}(\hat{\mathbf{u}}_\perp)$ était de divergence nulle, si bien que (2.62) contraint finalement l'ordre de grandeur de $\nabla_\perp \cdot \mathcal{F}(\hat{\mathbf{u}}_\perp)$. Or cette dernière valeur est également fixée par le débit de la grandeur $\nabla_\perp \cdot \mathcal{F}(\hat{\mathbf{u}}_\perp)$ que la couche limite perpendiculaire transmet au cœur, déterminé par la relation (1.52). Finalement, une équation du mouvement modifiée par l'ajout d'une quantité $\mathbf{F}_\perp$ n'a de sens que si

$$\|\mathbf{F}_\perp\| \sim \varepsilon, \quad (2.63)$$

soit respectivement, dans les cas de prise en compte respectivement des effets inertiels ou des effets visqueux :

$$\lambda Ro \sim \varepsilon \text{ ou } \lambda^2 \varepsilon^2 \sim \varepsilon. \quad (2.64)$$

Cette dernière condition démontre en particulier que les frottements visqueux n'interviennent dans les plan orthogonaux à $\mathbf{e}_z$ qu'à une échelle de longueur fixée par $\lambda \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, qui est précisément celle des couches parallèles. Deux cas peuvent se présenter si la condition de pertinence de $\mathbf{F}_\perp$ (2.63)

n'est pas vérifiée : si $\|\mathbf{F}_\perp\| \ll \varepsilon$, la force supplémentaire est en fait négligeable et n'induit pas de composante verticale λ de $\mathcal{F}(\hat{\mathbf{u}}_\perp)$. Dans cette configuration, l'écoulement s'adapte instantanément à la sollicitation de $\mathcal{F}(\hat{\mathbf{u}}_\perp) \times \mathbf{e}_z$ si bien qu'une éventuelle force $\mathbf{F}_\perp$ n'a pas le temps d'agir. Si en revanche $\|\mathbf{F}_\perp\| \gg \varepsilon$, la force $\mathcal{F}(\hat{\mathbf{u}}_\perp) \times \mathbf{e}_z$ n'est plus assez dominante pour gouverner l'écoulement, qui sort de la classe de problèmes que nous étudions. C'est le cas des écoulements turbulents (inertie dominante) ou rampants (viscosité dominante).

2.5.2 Équation au premier ordre pour les écoulements MHD plans sous champ uniforme.

Considérons le problème MHD du paragraphe 2-2. D'après (2.63), l'inertie n'intervient que si

$$\frac{N}{\lambda Ha} \sim 1 \quad (2.65)$$

Et l'équation du mouvement s'écrit, au premier ordre :

$$\frac{\lambda}{N} \left(\partial_t + \tilde{\mathbf{u}}_\perp^{(0)} \cdot \nabla_\perp \right) \tilde{\mathbf{u}}_\perp^{(0)} = -\nabla_\perp \cdot p^{(0,1)} + \mathbf{j}_\perp^{(0,1)} \times \mathbf{e}_z \quad (2.66)$$

En effet, le courant électrique vertical induit par la composante rotationnelle de l'inertie dans le cœur de l'écoulement est d'ordre $\frac{\lambda}{N}$. En outre, ce courant est alimenté par la (ou les) couche(s) de Hartmann qui éjecte(nt) un courant vertical d'ordre $\frac{1}{Ha}$, exprimé par (1.59). Le raccord de ces deux valeurs donne la partie divergente du courant dans le cœur :

$$\frac{\lambda}{N} \nabla_\perp \cdot \tilde{\mathbf{j}}_\perp^{(0,1)} = -\frac{n}{Ha} \nabla_\perp \times \tilde{\mathbf{u}}_\perp^{(0)} (z=0) + j_W. \quad (2.67)$$

Par ailleurs, l'étude du paragraphe 2-3.1 a montré que sous un champ uniforme et vertical, la vitesse verticale du fluide éjecté de la couche de Hartmann était d'ordre $\frac{\lambda}{NHa}$. La symétrie des conditions limites implique donc que la vitesse verticale du fluide dans le cœur soit aussi d'ordre $\frac{\lambda}{NHa}$ et de ce fait, l'ordre (0, 1) de (1.53a) implique que $\nabla_\perp \times \tilde{\mathbf{j}}_\perp^{(0,1)} = 0$. Ainsi, si le champ $\mathbf{u}_0$ vérifie $\nabla_\perp \times \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_z = j_W$ (une définition précise et une interprétation de ce champ de vecteurs sont données au paragraphe 3-2.), alors l'équation du mouvement est réécrite :

$$\frac{\lambda}{N} \left(\partial_t + \tilde{\mathbf{u}}_\perp^{(0)} \cdot \nabla_\perp \right) \tilde{\mathbf{u}}_\perp^{(0)} = -\nabla_\perp \cdot p^{(0)} + \frac{1}{Ha} \left(\mathbf{u}_0 - n \tilde{\mathbf{u}}_\perp^{(0)} \right) \quad (2.68)$$

Le même raisonnement s'applique dans le cas où les effets visqueux, plutôt que les effets inertiels sont pris en compte (l'échelle de longueur horizontale est alors fixée $\lambda \sim Ha^{\frac{1}{2}}$, d'après le paragraphe précédent). L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$-\frac{\lambda^2}{Ha} \Delta_\perp \mathbf{u}_\perp^{(0)} = \mathbf{u}_0 - n \mathbf{u}_\perp^{(0)}. \quad (2.69)$$

Finalement, en rassemblant les deux modèles (2.68) et (2.69) et en intégrant $\mathbf{j}_\perp^{(0)} \times \mathbf{e}_z$ dans le gradient de pression :

$$\frac{\lambda}{N} \left(\partial_t + \tilde{\mathbf{u}}_\perp^{(0)} \cdot \nabla_\perp \right) \tilde{\mathbf{u}}_\perp^{(0)} = -\nabla_\perp \cdot p^{(0)} + \frac{1}{Ha} \left(\mathbf{u}_0 - n \tilde{\mathbf{u}}_\perp^{(0)} \right) + \frac{\lambda^2}{Ha^2} \Delta_\perp \mathbf{u}_\perp^{(0)} \quad (2.70)$$

Ainsi, $\tilde{\mathbf{u}}_\perp^{(0)}$ vérifie une équation de Navier-Stokes 2D qui correspond au modèle établi par [38]. Ceci met en valeur un point très important : l'application de (2.70) dans les couches visqueuses est justifiée par construction, alors que le modèle de profil vertical sur lequel cette équation repose s'appuie sur l'hypothèse d'un cœur 2D. Physiquement, cela revient à approcher les couche parallèles par un profil indépendant de z , ce qui correspond à une erreur d'environ 10% (voir 3-2). La démonstration classique de (2.70) se fait par un processus de moyenne, à la fois plus direct et plus robuste qui fait l'objet du

chapitre suivant. Remarquons que l'équation (2.68) permet de ramener l'expression de l'effet *tonneau* MHD (2.10) à une dépendance linéaire de la vitesse :

$$\check{\mathbf{u}}_{\perp}(x, y, z, t) = \check{\mathbf{u}}_{\perp}(x, y, 0, t) + \frac{1}{2} \frac{1}{Ha} z \left(z - \frac{2}{n} \right) \lambda^2 \mathcal{L}_2(\mathbf{u}_0 - \check{\mathbf{u}}_{\perp}(x, y, 0, t)) \quad (2.71)$$

Le même raisonnement s'applique en utilisant (2.69) si la tridimensionnalité est liée à la présence d'effets visqueux dans le cœur. Ainsi, l'effet *tonneau* peut toujours être compris comme un retard dans la transmission à la zone de cœur, du freinage de Hartmann. Ce retard intervient quand une autre force est suffisamment importante pour agir significativement en un temps fini devant le temps de bidimensionnalisation introduit par [38].

Conclusion 2 *De nouveaux mécanismes s'ajoutent désormais à ceux rappelés au premier chapitre : la présence d'une force supplémentaire de rotationnel non nul dans l'équilibre qui régit la zone de cœur fait que la vitesse en chaque point résulte d'un compromis entre les interactions horizontales engendrées par cette dernière et la tendance à la bidimensionnalité des écoulements soumis à une force plane. L'écoulement est alors faiblement 3D. Ce phénomène est couplé au comportement des couches perpendiculaires par l'intermédiaire des courants électriques verticaux (en MHD) ou des vitesses verticales (en fluides tournants) qui lui sont associées. Ces débits correspondent en effet à des jets qui modifient le comportement des couches perpendiculaires. La tridimensionnalité est également affectée en MHD par la présence d'une composante horizontale du champ magnétique, ou d'une variation de densité de courant électrique à la paroi perpendiculaire : ces deux phénomènes provoquent, eux aussi, une diffusion horizontale de courant électrique, donc de quantité de mouvement, qui équilibre la diffusion associée à la composante verticale du champ magnétique. Enfin, la connaissance de ces phénomènes permet de déduire, d'une part, des lois de parois pour la couche de Hartmann, et d'autre part, une équation 2D approchée pour l'écoulement de cœur.*

Chapitre 3

Modèles effectifs 2D d'écoulements confinés

Résumé

Plusieurs exemples de modèles 2D sont construits en effectuant une moyenne dans la direction du champ magnétique ou de la rotation globale selon le cas. Les résultats des deux chapitres précédents permettent ainsi d'éliminer totalement la dépendance en z des grandeurs physiques. Un premier modèle pour les écoulements MHD sous champ uniforme et stationnaire permet de prendre en compte les effets inertiels qui peuvent affecter la couche de Hartmann et fournit quelques lois générales sur des cas d'écoles. L'élaboration d'un modèle pour les champs non-uniformes et instationnaires permet ensuite d'identifier les cas où les couches de Hartmann contrôlent l'écoulement. Enfin un modèle (quasi-géostrophique) pour les écoulements de fluides tournants est construit pour tenir compte des effets inertiels liés à la force de Coriolis dans les couches d'Ekman.

3.1 Principe général.

L'étude menée au chapitre 2 a montré que sous l'effet d'une force plane intense, un écoulement situé entre deux plans présente une organisation simple dans la direction orthogonale à cette force. Cette organisation présente deux traits remarquables : près des plaques se développe une couche limite visqueuse fine facilement décrite par le calcul analytique ; et loin des plaques, l'écoulement est uniforme dans la direction $\mathbf{e}_z$ orthogonale à la force (si ce n'est exactement le cas il présente un faible écart à l'uniformité connu, lui aussi, analytiquement). Autrement dit, le profil selon $\mathbf{e}_z$ est presque entièrement déterminé par la force plane : le calcul complet de tels écoulements se résume alors à celui de sa composante horizontale dans le cœur. En outre, puisque l'écoulement est presque bidimensionnel, cette composante ne peut être très éloignée de sa valeur moyenne entre les deux plans. L'intérêt de la formulation en vitesse moyenne provient du fait que cette moyenne intègre les effets liés aux écarts à la bidimensionnalité (en particulier dans les couches limites, dont le rôle essentiel a été mis en évidence au chapitre précédent), tout en restant de divergence nulle (si les parois perpendiculaires sont imperméables), et tout en ramenant le problème à un écoulement plan. Les équations 2D sont obtenues en prenant la moyenne entre les plans $z = 0$ et $z = 1$ de la composante horizontale des équations de Navier-Stokes (1.23). Le choix d'une variable dilatée dans la couche limite pose à nouveau le problème du raccord pour la définition de l'opérateur de moyenne. Celui-ci se décompose en la somme pondérée d'une moyenne dans la couche et d'une moyenne dans le cœur. La séparation doit intervenir à la côte de raccord $\eta(\varepsilon)$ qui dépend de l'ordre considéré. Ceci implique que chaque ordre devrait en principe faire l'objet d'un processus de moyenne propre. En pratique, l'intérêt des modèles 2D réside avant tout en leur simplicité, et comme les modèles de couches perpendiculaires mis en jeu dans ce chapitre font exclusivement intervenir des profils de

vitesses raccordés au cœur par (1.36), l'opérateur de moyenne peut être simplement défini par :

$$g \mapsto \bar{g} = \int_0^1 \check{g} dz + n\varepsilon \int_0^{+\infty} \hat{g}\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) - \check{g}(z=0) d\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \quad (3.1)$$

Son application à (1.23) et à la composante horizontale de (1.27) donne les équations moyennes :

$$\lambda r \left(\partial_t \bar{\mathbf{u}}_\perp + \bar{\mathbf{u}}_\perp \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_\perp + \overline{\mathbf{u}'_\perp \cdot \nabla \mathbf{u}'_\perp} \right) - \varepsilon^2 \lambda^2 \Delta_\perp \bar{\mathbf{u}}_\perp + \varepsilon [\partial_\xi \bar{\mathbf{u}}_\perp]_{W-}^{W+} = -\nabla \bar{p} + \overline{\mathcal{F}(\mathbf{u})} \times \mathbf{e}_z \quad (3.2)$$

$$\nabla_\perp \cdot \bar{\mathbf{u}}_\perp = 0 \quad (3.3)$$

où la vitesse est décomposée en moyenne et fluctuation $\mathbf{u}_\perp = \bar{\mathbf{u}}_\perp + \mathbf{u}'_\perp$ toutes deux de divergence horizontale nulle. L'effet de la tridimensionnalité sur l'écoulement moyen intervient par l'intermédiaire des trois termes source $\lambda r \overline{\mathbf{u}'_\perp \cdot \nabla \mathbf{u}'_\perp}$, $\varepsilon [\partial_\xi \bar{\mathbf{u}}_\perp]_{W-}^{W+}$ et $\overline{\mathcal{F}(\mathbf{u})} \times \mathbf{e}_z$. Le premier dépend de tout le profil vertical et nous l'appellerons abusivement *tenseur de Reynolds* par analogie au terme qui apparaît dans les équations de Reynolds en turbulence. Le second représente le frottement total en $(x, y, 0)$ et $(x, y, 1)$ aux parois inférieure ($W-$) et supérieure ($W+$). Il ne dépend que des profils de couches limites perpendiculaires. Le choix de deux modèles respectivement pour le cœur et pour la couche limite définit donc un modèle 2D caractérisé par une équation de Navier-Stokes 2D modifiée par deux termes supplémentaires (3.2).

3.2 Les classiques.

Le principe des modèles 2D n'est pas nouveau en lui-même. En fait, au moins deux d'entre eux sont déjà couramment utilisés en MHD et dans les problèmes de fluides tournants. Nous les exposons ici avec leurs principales caractéristiques.

3.2.1 Le modèle SM82 hypothèses, résultats et limites.

Sommeria et Moreau [47] ont proposé un modèle 2D pour les écoulements MHD sous champ magnétique uniforme et normal à la paroi. La couche de Hartmann est modélisée par le profil exponentiel classique (1.55) et le cœur est supposé parfaitement 2D. Les parois perpendiculaires sont supposées isolantes sauf en quelques endroits ponctuels où des électrodes injectent du courant électrique. La tridimensionnalité associée à cette très forte variation spatiale de courant vertical à la paroi est négligée en raison de sa faible extension horizontale et de faible influence sur l'écoulement global.

Le tenseur de Reynolds ne représente alors qu'une correction d'ordre $\lambda Ha^{-1} N^{-1}$ due à la petite différence entre la valeur de la vitesse de cœur et la valeur moyenne. Ce terme est toujours négligeable devant les autres, que les effets visqueux entrent en jeu ($\lambda \sim Ha^{\frac{1}{2}}$, d'après la discussion du paragraphe 2-5.2) ou non ($\lambda \lesssim 1$). Le terme $\varepsilon [\partial_\xi \bar{\mathbf{u}}_\perp]_{W-}^{W+} = n Ha^{-1} \bar{\mathbf{u}}_\perp$ traduit l'effet du freinage linéaire par les couches de Hartmann évoqué au paragraphe 1-3.2.

Le terme $\overline{\mathcal{F}(\mathbf{u})} \times \mathbf{e}_z$ rend en fait exclusivement compte du forçage imposé par l'injection de courant. En effet, les moyennes de (1.27) et de (1.17a) conduisent respectivement à $\nabla_\perp \cdot \bar{\mathbf{j}}_\perp = j_W + j_{W-}$ et à $\nabla_\perp \times \bar{\mathbf{j}}_\perp = 0$, ce qui permet de définir $\bar{\mathbf{j}}_\perp \times \mathbf{e}_z$ par le système :

$$\overline{\mathbf{j}}_\perp = -\frac{1}{Ha} \mathbf{u}_0 \times \mathbf{e}_z, \quad \frac{1}{Ha} \nabla_\perp \times \mathbf{u}_0 = -j_W \quad (3.4)$$

Cette opération a pour effet de réduire la partie électromagnétique du problème MHD au calcul souvent élémentaire de $\mathbf{u}_0$, effectué une fois pour toutes avant la résolution des équations du mouvement. Finalement, le modèle SM82 s'écrit :

$$\frac{\lambda}{N} [(\partial_t + \bar{\mathbf{u}}_\perp \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}_\perp + \nabla \bar{p}] = \frac{\lambda^2}{Ha^2} \Delta_\perp \bar{\mathbf{u}}_\perp + \frac{1}{Ha} (\mathbf{u}_0 - n \bar{\mathbf{u}}_\perp) \quad (3.5)$$

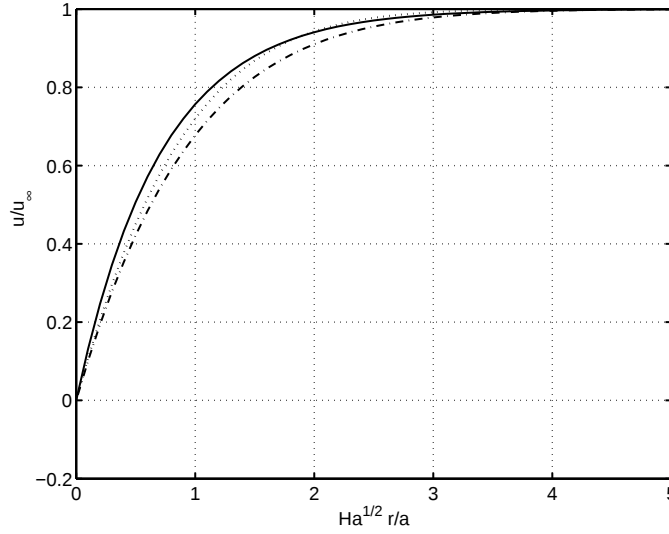


FIG. 3.1 – Comparaison entre le profil 2D (3.6) (ligne pleine) et le profil correspondant déduit des équations 3D [48] 3D moyennées : la ligne en pointillés représente le profil à $z = 1/2$ et la ligne en trait mixte, le profil moyen de la solution de Shercliff [48].

Le champ $\mathbf{u}_0$ correspond physiquement au champ de vitesse dû au seul forçage électrique, en l'absence d'effets visqueux ou inertiels. Il apparaît que selon ce modèle, le champ de vitesse $\bar{\mathbf{u}}_\perp$ vérifie exactement la même équation que celle satisfaite par l'ordre 0 de la vitesse dans le cœur (2.70). L'équation (2.70) s'appuie en fait sur les mêmes hypothèses que le présent modèle. La différence entre la vitesse de cœur à l'ordre 0 et la vitesse moyenne est d'ordre Ha^{-1} , si bien que d'une manière générale, les modèles 2D qui reposent sur des approximations d'ordre 0 pour le cœur et la couche limite peuvent également être obtenus par le raccord des développements de cœur et de couche, comme au paragraphe 2-5.2 (par l'intermédiaire des vitesses verticales par exemple). Cette dernière méthode s'avère toutefois moins robuste pour des modèles plus fins comme celui du paragraphe (3-3).

Le modèle (3.5) fournit d'excellents résultats, compte tenu de son extrême simplicité. En effet dans le cas d'une couche limite parallèle sans inertie située le long d'une paroi correspondant au plan $y = 0$, le profil obtenu d'après (3.5) (un forçage impose une vitesse u_{0x} uniforme à l'infini)

$$\frac{\bar{u}(y)}{u_{0x}} = 1 - \exp\left(-y \frac{\sqrt{2Ha}}{\lambda}\right). \quad (3.6)$$

supporte très bien la comparaison avec les profils issus du calcul 3D complexe comme l'indique la figure 3.1.

De même, le problème d'un tourbillon isolé axisymétrique sans inertie généré par une électrode ponctuelle située en $(r, z) = (0, 0)$ (la surface $z = 1$ est supposée libre) trouve une description simple et satisfaisante par la résolution de (3.5). L'injection de courant provoque un forçage azimuthal $u_{\theta 0} = \frac{\Gamma}{r}$, où $\Gamma = \frac{I}{2\pi\sqrt{\rho\sigma\nu}}$ est la circulation totale de l'écoulement. Hunt et Williams [46] ont effectué une étude complète du problème 3D sans inertie (voir figure 3.2), avec laquelle nous comparons la solution 2D issue de (3.5) :

$$u_\theta = \frac{1}{\tilde{r}} - K_1(\tilde{r}), \quad (3.7)$$

Des compléments sur les calculs liés à ce paragraphe figurent au paragraphe 2.2.3 de [50].

Deux points méritent d'être soulignés. En premier lieu, la couche parallèle exposée ici résulte de l'équilibre entre le freinage par la couche de Hartmann et les effets visqueux horizontaux, comme exposé au paragraphe 1-3.2. En outre, le profil obtenu par SM82 ne tient pas compte de la tridimensionnalité bien connue des couches parallèles (ce qui équivaut à négliger le retard à la diffusion du

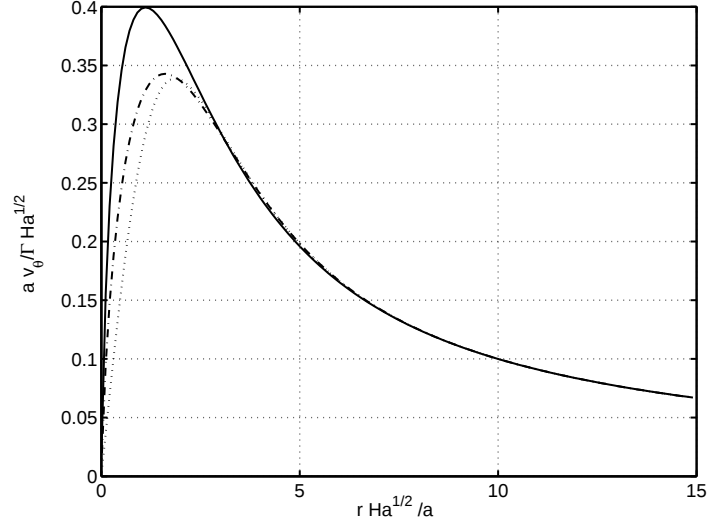


FIG. 3.2 – Comparaison entre le profil de vitesse 2D (ligne pleine) et la solution 3D de [49] pour des tourbillons isolés issus du forçage électromagnétique par une électrode. La ligne en pointillés représente le profil à $z = 1/2$ et la ligne en trait mixte, le profil 3D moyenné.

freinage par les couches de Hartmann et donc à supposer qu'il équilibre instantanément la diffusion visqueuse latérale). Toutefois, le tracé des profils 3D des couches parallèles montre que celle-ci est de l'ordre de 10% (voir [50]). En d'autres termes l'application du modèle 2D dans les zones visqueuses ne résulte en rien de plus qu'une légère erreur locale sur le profil de vitesse, sans conséquence sur le reste de l'écoulement puisque d'une part les ordres de grandeurs sont respectés (épaisseur de couche, valeur de la vitesse) et d'autre part, le raisonnement exposé au paragraphe 2-5.2 pour $\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{j}$ montre que le raccord des courants verticaux entre le cœur et la couche justifie l'écriture 2D d'un équilibre entre laplacien horizontal et frottement de Hartmann.

Le modèle SM82 possède cependant une limitation importante pour la description des couches parallèles : si la couche de Hartmann est conductrice, elle injecte un fort courant dans la couche parallèle située juste au dessus, responsable d'un écart à la bidimensionnalité très important (d'après l'étude menée au paragraphe 2-3.1, un fort courant provoque une valeur élevée de $\partial_z \tilde{w}(0)$). Ce cas bien connu provoque l'apparition de jets violents dans les couches parallèles que le présent modèle n'est pas en mesure de décrire : il s'agit du fameux profil en "M" qui apparaît dans des conduites [12]. À noter que le modèle ne différencie pas non plus les cas où les parois parallèles sont conductrices ou non. En fait ; cette dernière condition modifie très peu le profil et serait de toutes façons superflue compte tenu de l'erreur déjà introduite par l'hypothèse d'un cœur strictement 2D.

Une autre limitation importante du modèle SM82 provient également du fait qu'il interdit une variation de vitesse verticale dans le cœur de l'écoulement, et par là même tout phénomène tel que le pompage d'Ekman. De récentes expériences ont montré que ce dernier pouvait conduire à une réorganisation de l'écoulement de sorte que les résultats prévus par le modèle SM82 sont très éloignés de certains résultats expérimentaux. Ceci met en évidence la nécessité de prendre en compte de possibles effets de l'inertie dans les couches de Hartmann, tel que cela est proposé au paragraphe 3-3.

3.2.2 Le modèle quasi-géostrophique pour les fluides tournants.

Le modèle quasi-géostrophique est un peu l'équivalent en fluides tournants du modèle SM82 en ce sens qu'il suppose que les couches d'Ekman décrites par leur profil de base (1.60) et que les vitesses horizontales dans le cœur sont supposées bidimensionnelles. Cependant, son application fréquente à la description des océans requiert quelques raffinements supplémentaires qui relèvent de la théorie des

eaux peu profondes. En premier lieu, le fond des océans n'étant pas plan, il est nécessaire de prendre en compte de faibles variations de la côte de la paroi inférieure située en $z = \eta_b(x, y)$ et de la surface libre dont on montre qu'elle se trouve à $z = 1 - RFp$ (avec $F = \frac{af^2}{\lambda^2 g}$). Enfin, le vent provoque une contrainte de cisaillement en surface responsable de l'apparition d'une couche d'Ekman à la surface libre.

Traditionnellement, la vorticité $\omega = -\Delta_\perp p$ est préférée au champ de vitesse pour décrire le système. Les couches d'Ekman se comportent alors comme une source pour la vorticité de cœur, comme le met en évidence la relation (1.61). Par ailleurs, l'effet de la topographie du fond se traduit par une vitesse verticale supplémentaire, analogue à celle induite par une variation spatiale de champ magnétique sur une couche de Hartmann (d'ailleurs, en coordonnées curvilignes, le long d'une paroi courbe, le terme à l'intérieur de la divergence dans (2.30) est affecté d'un coefficient qui tient compte du rayon de courbure de la paroi¹).

$$w(z=0) = R(\tilde{\mathbf{u}}_\perp \cdot \nabla_\perp \eta_b + \frac{a}{2\lambda U} t_E \omega) \quad (3.8)$$

La couche d'Ekman de surface provoque une vitesse verticale dans le cœur dont une partie provient des variations de hauteur de la surface et l'autre, du frottement imposé (comme c'était déjà le cas pour la couche pariétale perpendiculaire au paragraphe 1-3.2)

$$w(z=0) = R\left(-F \frac{dp}{dt} + \left[\frac{\tau_0}{\rho f U a R}\right] \mathbf{e}_z \cdot \nabla_\perp \times \tau\right) \quad (3.9)$$

Le modèle est obtenu en gardant les termes dominants dans l'équation qui régit l'ordre 0 de ω .

$$\frac{d}{dt}(\omega - Fp + \eta_b) = \left[\frac{\tau_0}{\rho f U a R}\right] \mathbf{e}_z \cdot \nabla_\perp \times \tau - \frac{R}{2} \omega + \frac{1}{Re} \Delta_\perp \omega \quad (3.10)$$

où τ_0 est une valeur caractéristique du frottement en surface et $F = \frac{4\Omega^2}{ga}$.

On trouvera un exposé précis de cette théorie dans Pedloski (1987).

3.3 Modèles d'écoulements MHD faiblement inertiels sous champ magnétique uniforme.

3.3.1 Modèle général.

Les hypothèses sont ici les mêmes que pour le modèle SM82 à ceci près que le modèle de couche de Hartmann est poussé à l'ordre suivant (en N) pour tenir compte des effets de l'inertie. Les expressions (2.34) et (2.38) sont simplifiées du fait de l'uniformité, de la stationnarité du champ et de son alignement avec l'axe $\mathbf{e}_z$. En outre $\tilde{w}(0) = \tilde{w}(1) = 0$ est imposée par les couches de Hartmann et dans le cas présent, et par conséquent ; $\partial_z \tilde{w}^{(0,0)} = 0$ ce qui simplifie aussi l'expression de la vitesse verticale (2.40) à l'interface entre le cœur et la couche de Hartmann :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_\perp = \tilde{\mathbf{u}}_\perp(0) \left(1 - e^{-\xi}\right) + \frac{\lambda}{N} \left(\frac{1}{3} e^{-2\xi} - \frac{1}{3} e^{-\xi} + \xi e^{-\xi}\right) \tilde{\mathbf{u}}_\perp(0) \cdot \nabla_\perp \tilde{\mathbf{u}}_\perp(0) + \\ + \frac{\lambda \xi}{N 2} e^{-\xi} \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_\perp(0) + \mathcal{O}_{i+j=2} \left(\frac{\lambda^2}{N^2 Ha^j}\right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\tilde{w}(0) = -\frac{5}{6} \frac{\lambda}{Ha N} \nabla_\perp \cdot [(\tilde{\mathbf{u}}_\perp(0) \cdot \nabla_\perp) \tilde{\mathbf{u}}_\perp(0)] + \mathcal{O}_{i+j=3} \left(\frac{\lambda^2}{N^3 Ha^j}\right) \quad (3.12)$$

En toute rigueur et pour garder la cohérence du développement, il faudrait modéliser le profil de vitesse dans le cœur à l'ordre 2 et donc faire intervenir l'effet *tonneau* MHD. Cependant, le modèle

¹[42] a montré que la non-homogénéité du champ ainsi que la courbure de la paroi pouvaient être traités en même temps par le choix d'un repère approprié en coordonnées curvilignes.

obtenu s'avère d'une complexité extrême (termes non linéaires incluant des dérivées septièmes) ce qui lui enlève toute utilité. Cela dit, dans le cas présent, aucune recirculation n'est induite par l'effet *tonneau* MHD du fait de la symétrie des conditions de raccord induites par les couches de Hartmann (ou la surface libre). Négliger cette tridimensionnalité introduit donc simplement une petite erreur systématique sur la valeur de la vitesse de cœur. En outre, l'équation à l'ordre 0 pour le cas MHD (2.70) montre que l'effet *tonneau* intervient pour des valeurs modérées de Ha (donc du champ magnétique) alors que les effets dus aux recirculations dans les couches de Hartmann sont le fait de valeurs peu élevées de N (liées à des vitesses élevées par exemple), ce qui est fréquent dans les procédés industriels ou dans les expériences de laboratoires.

Après un long calcul et quelques changements de variables, l'introduction de (3.11) et du modèle de cœur 2D dans (3.2) conduit au système d'équations final :

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\lambda}{N} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt'} + \nabla_{\perp} \bar{p}' \right) = \frac{\lambda^2}{Ha^2} \Delta_{\perp} \mathbf{v} + \frac{1}{Ha} (\mathbf{v}_0 - n\alpha \mathbf{v}) + \frac{n\lambda^2}{HaN^2} \left(\frac{7}{36} \mathcal{D}_{\mathbf{v}} + \frac{1}{8} \partial_{t'} \right) \mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v} \quad (3.14)$$

où l'opérateur $\mathcal{D}_{\mathbf{v}}$ est défini par² :

$$\mathcal{D}_{\mathbf{v}} : \mathbf{F} \longmapsto \mathcal{D}_{\mathbf{v}} \mathbf{F} = (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{F} + (\mathbf{F} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{v} = \nabla_{\perp} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F}) - \nabla_{\perp} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (3.15)$$

et,

$$\mathbf{v} = \left(1 + \frac{7}{6Ha} + \frac{11}{6Ha^2} \right) \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{v}_0 = \left(1 + \frac{7}{6Ha} + \frac{11}{6Ha^2} \right) \mathbf{u}_0 \quad (3.16a)$$

$$p' = \left(1 + \frac{7}{6Ha} + \frac{11}{6Ha^2} \right) \bar{p}, \quad t' = \left(1 + \frac{n}{Ha} + \frac{n^2}{Ha^2} \right)^{-1} t \quad (3.16b)$$

$$\alpha = 1 + \frac{n}{Ha}. \quad (3.16c)$$

En variables dimensionnelles, (3.14) s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt'} + \nabla_{\perp} \bar{p}' = \nu \Delta_{\perp} \mathbf{v} + \frac{1}{t_H} (\mathbf{v}_0 - n\alpha \mathbf{v}) + \frac{nt_H}{Ha^2} \left(\frac{7}{36} \mathcal{D}_{\mathbf{v}} + \frac{1}{8} \partial_{t'} \right) \mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v} \quad (3.17)$$

3.3.2 Quelques propriétés du terme non linéaire.

Le modèle permet de déduire assez facilement une équation d'évolution pour la composante verticale de la vorticité moyenne entre les plans $z = 0$ et $z = 1$. Le rotationnel de (3.17) donne, après quelques simplifications (voir paragraphe 1 de l'Annexe A) :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{N} \frac{d\omega}{dt'} &= \frac{\lambda^2}{Ha^2} \Delta_{\perp} \omega + \frac{1}{Ha} (\omega_0 - n\alpha \omega) \\ &\quad + \frac{7}{36} \frac{n\lambda^2}{HaN^2} (-2 [\mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}] \cdot \nabla_{\perp} \omega + \omega \nabla_{\perp} \cdot [\mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}]) + \frac{1}{8} \frac{n\lambda^2}{HaN^2} \partial_{t'} \mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \omega \end{aligned} \quad (3.18)$$

Les termes sources qui apparaissent dans le second membre de (3.18) découlent directement de l'expression du pompage d'Ekman généralisé dans les couches de Hartmann (3.11). En effet, ce dernier induit des jets dans la couche qui se traduisent par des termes supplémentaires en $\mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}$ et en $\partial_{t'} \mathbf{v}$. Les termes $-2 [\mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}] \cdot \nabla_{\perp} \omega$ et $\frac{1}{8} \frac{n\lambda^2}{HaN^2} \partial_{t'} \mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \omega$ traduisent donc le transport de la vorticité de cœur par les écoulements secondaires. En outre $\nabla_{\perp} \cdot [\mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}]$ est proportionnel à la vitesse induite dans le cœur par la couche de Hartmann, le terme $\omega \nabla_{\perp} \cdot [\mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}]$ désigne donc la production de vorticité dans le cœur associée à cette vitesse.

²Par la suite on fera souvent implicitement l'approximation $\mathbf{v} \simeq \bar{\mathbf{u}}$, $\mathbf{v}_0 \simeq \mathbf{u}_0$, $p' \simeq \bar{p}$ et $t' = t$.

Au voisinage d'une tache de vorticité représentée par un extremum de $\bar{\omega}(x, y)$ localisé en (x_0, y_0) , seul le terme de production subsiste. Si cette petite tache de vorticité est par ailleurs transportée par un écoulement moyen $V\mathbf{e}_x$ de vitesse élevée par rapport aux fluctuations de vitesse qui interviennent à l'échelle de la tache, le terme non-linéaire peut être approché par (voir annexe **A-2**)

$$\omega \nabla_{\perp} \cdot [\mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}](x_0, y_0) \simeq 2V^2 \partial_{xx}^2 \omega. \quad (3.19)$$

Cette dernier résultat signifie que le terme non linéaire supplémentaire agit comme une diffusion visqueuse dans le sens de la vitesse de transport. La diffusivité et le temps caractéristique associés s'expriment en fonction des nombres adimensionnels :

$$\eta_{nl} = \frac{7n}{18} \frac{Ha}{N^2} \nu \quad (3.20a)$$

$$t_{\eta} = \frac{18}{7n} \frac{N^2}{\lambda^2} t_H \quad (3.20b)$$

La diffusion est d'autant plus rapide que la tache est petite et que la vitesse V est élevée. Diverses conséquences de ces propriétés sont mises en évidence au chapitre 4.

3.3.3 Cas axisymétriques stationnaires.

Dans le cas d'écoulements axisymétriques stationnaires, la vitesse radiale moyenne est nulle si bien que (3.14) est réduite à une équation différentielle ordinaire qui porte sur la composante azimutale de la vitesse :

$$\frac{7}{36} \frac{n\lambda}{Ha N^2} \frac{1}{r^2} \partial_r (r \tilde{v}_{\theta}^3) = \frac{\lambda}{Ha^2} \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^3 \partial_r \frac{v_{\theta}}{r} \right) + \frac{1}{\lambda Ha} (v_{0\theta} - n\alpha v_{\theta}). \quad (3.21)$$

Couches limites parallèles

Dans ce paragraphe, le fluide est supposé en rotation dans un cylindre immobile de rayon R_0 . Une couche parallèle visqueuse apparaît alors le long de la paroi circulaire. Son épaisseur est supposée négligeable devant le rayon du bassin, si bien que $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{R_0} \ll \partial_r$. Par ailleurs, la rotation est supposée r  sult  r d'un forçage qui impose $v_{0\theta}$ comme vitesse de cœur près de la paroi. L'utilisation des variables déduites du forçage et de la couche parallèle linéaire,

$$y = (R_0 - r) \sqrt{n\alpha Ha} \quad (3.22a)$$

$$v_{\theta} = \frac{v_{0\theta}}{n\alpha} \tilde{v}_{\theta}; \quad (3.22b)$$

permet de mettre en évidence le nombre sans dimension pertinent qui gouverne le phénomène :

$$C = \frac{7}{36} \frac{n^{-3/2}}{\alpha^{5/2}} \frac{\sqrt{Ha}}{N} \frac{a}{R_0} \quad (3.23)$$

et de formuler le système pour une couche parallèle qui résulte de l'équilibre du frottement visqueux horizontal et du frottement par la (où les) couche(s) de Hartmann inertielle(s)³ :

$$\begin{aligned} -C \partial_y \tilde{v}_{\theta}^3 &= \partial_{yy}^2 \tilde{v}_{\theta} + 1 - \tilde{v}_{\theta}, \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{v}_{\theta} &= 1, \\ \tilde{v}_{\theta}(y=0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

   noter que les valeurs négatives de C correspondent à une couche convexe (  galement de rayon de courbure R_0 comme il peut en survenir autour d'un obstacle cylindrique placé dans un écoulement)

³Il ne faut pas confondre le présent type couche avec les couches parallèles particulières qui résultent de l'équilibre entre frottement visqueux latéral et inertie dans le cœur dont l'épaisseur typique est en $N^{-\frac{1}{3}}$.

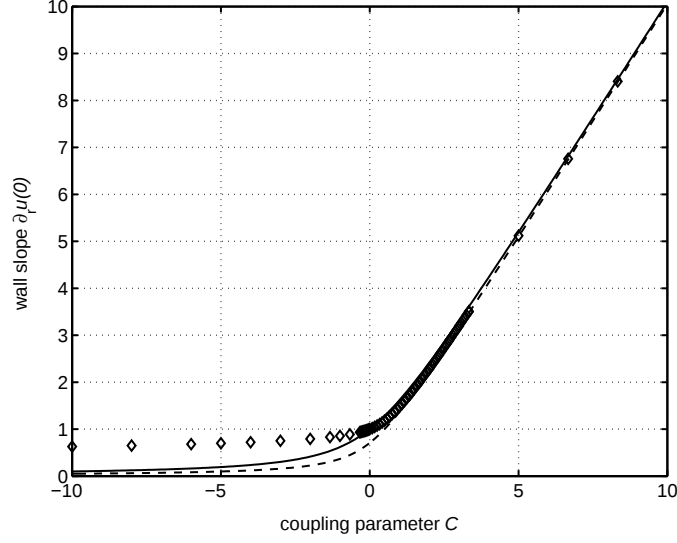


FIG. 3.3 – Pente du profil de vitesse à la paroi en fonction du paramètre C : carrés : simulation numérique de (3.24), ligne pleine : modèle analytique dans lequel le profil de couche limite est assimilé à une exponentielle, pointillés : variante du modèle analytique pour lequel le profil de vitesse dans la couche est remplacé par une droite.

Un raisonnement analytique simple donne une idée du comportement asymptotique de la pente du profil de vitesse à la paroi et donc à la fois de l'épaisseur de la couche limite et du frottement (donc de la dissipation) que celle-ci exerce sur l'écoulement de cœur (voir paragraphe 4.3 de [50]) :

$$\partial_y \tilde{v}_\theta(0) \underset{C \rightarrow +\infty}{\sim} C + O\left(\frac{1}{C}\right) \text{ pour une paroi concave,} \quad (3.25)$$

$$\partial_y \tilde{v}_\theta(0) \underset{C \rightarrow -\infty}{\sim} -\frac{1}{C} + O\left(\frac{1}{C^2}\right) \text{ pour une paroi convexe.} \quad (3.26)$$

La résolution de (3.24) par une méthode de tir donne un résultat très proche de (3.25) (figure 3.3). La variation d'épaisseur de la couche prévue par notre modèle s'explique par la présence d'une recirculation d'Ekman (voir paragraphe 1-3.2) induite par le mouvement de rotation le mouvement centrifuge induit dans le cœur de l'écoulement ce dernier transporte le moment cinétique du fluide vers la paroi concave si bien du fluide de vitesse azimutale élevée est décalé vers la paroi et occupe la partie externe de la couche parallèle. La chute de vitesse due aux effets visqueux est alors confinée dans une région plus proche de la paroi. La conséquence immédiate du rétrécissement de la couche parallèle est donc une forte augmentation de la dissipation à la paroi. Les simulation numériques "directes" de l'équation (3.14) (voir paragraphe 4-1) établissent l'importance de l'hypothèse d'axisymétrie pour ce phénomène et montrent les conséquences des effets non-linéaires sur son possible décollement.

Si la paroi est convexe, le pompage d'Ekman se produit dans le sens opposé et expulse du fluide de la couche parallèle, provoquant ainsi son étalement ainsi qu'une réduction de la dissipation à la paroi.

Tourbillons Isolés

L'application du modèle (3.14) au problème du tourbillon isolé du paragraphe 3-2.1 montre une autre conséquence des circulations méridiennes. Le courant électrique est injecté par une petite électrode de diamètre $2b$, affleurante à la plaque située en $z = 0$. La normalisation de la vitesse et de la coordonnée radiale par les valeurs caractéristiques de la zone visqueuse qui se développe au cœur du tourbillon ($\lambda = \sqrt{Ha}$ et $U = \frac{\Gamma}{a}\sqrt{Ha}$) (et dans laquelle est concentrée la plus forte variation de

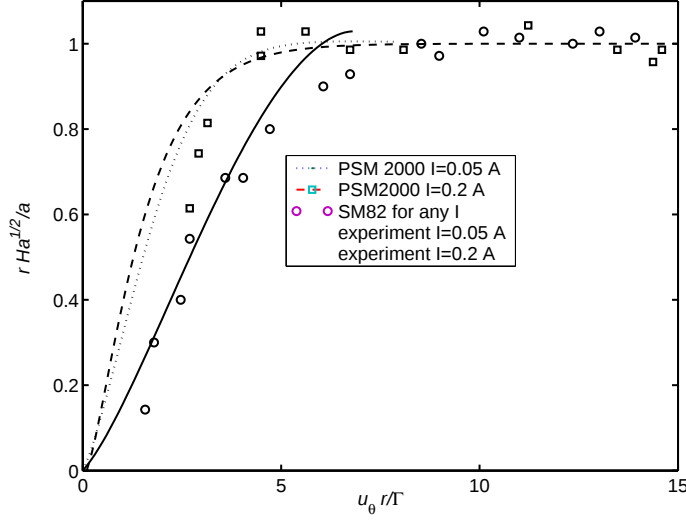


FIG. 3.4 – Profil radial de moment cinétique des tourbillons isolés. Un champ magnétique vertical $B = 0.5T$ est appliqué sur un cylindre de 6cm de rayon rempli de 1.92 mm de mercure (expérience décrite au paragraphe 4.2).

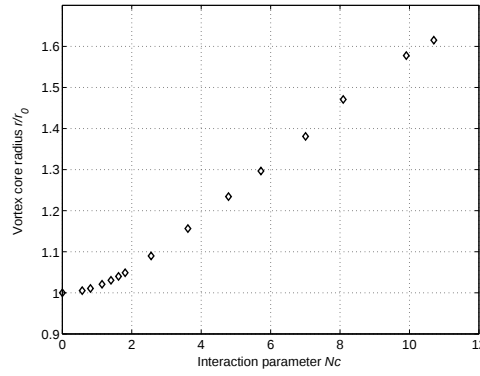


FIG. 3.5 – rayon des cœurs de tourbillons normalisé par sa valeur pour la théorie analytique linéaire (correspondant à une très faible courant d'injection) en fonction de N_c (simulations de (3.27a)).

vitesse) met en évidence le paramètre pertinent pour ce problème :

$$C_t \frac{1}{r^2} \partial_r (r v_\theta^3) = \frac{1}{r^2} \partial_r \left[r^3 \partial_r \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right] - v_\theta + \frac{1}{r} \quad (3.27a)$$

$$v_\theta(b) = 0 \quad (3.27b)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} v_\theta = 0, \quad (3.27c)$$

$$N_c = \frac{\sigma B^2}{\rho} \frac{a^2}{\Gamma H a}, \quad C_t = \frac{7}{36} \frac{1}{N_c^2}. \quad (3.28)$$

où N_c représente le paramètre d'interaction calculé à l'échelle du cœur de tourbillon dont Sommeria (1988) a montré expérimentalement qu'il régressait les effets non-linéaires. La résolution de (3.27a) par une méthode de tir confirme la constatation expérimentale selon laquelle le terme non linéaire, c'est à dire la recirculation d'Ekman, conduit à un étalement de la structure tourbillonnaire, en déplaçant du moment cinétique vers les plus grands rayons (figure 3.4). En outre la présente théorie, comme l'expérience de Sommeria, suggère une augmentation linéaire du rayon des tourbillons en fonction de N_c^{-1} (figure 3.5).

L'étude numérique, plus complète, du paragraphe 4-1 montre l'effet de la circulation d'Ekman sur le temps caractéristique d'amortissement de ces structures.

3.3.4 Validité du modèle, idées pour un modèle MHD turbulent sous champ uniforme.

Le paramètre qui régit la stabilité et la transition à la turbulence des couches de Hartmann est le nombre de Reynolds calculé à l'échelle de cette couche $\frac{Re}{Ha}$ proportionnel à $\frac{U}{B}$. Des estimations expérimentales [45] et théoriques [43] s'accordent pour fixer la valeur de transition à la turbulence autour de 250 pour des écoulements en conduite. Or l'apparition d'effets inertiels dans la couche laminaire dépend du paramètre d'interaction $\lambda^{-1}N \sim \frac{B^2}{U}$. Autrement dit, si le champ magnétique est augmenté, la vitesse de l'écoulement doit croître comme $U \sim B^2$ pour observer des effets de même ampleur. Dans ce cas $\frac{Re}{Ha}$ croît comme B . En d'autres termes, pour un écoulement soumis à un champ suffisamment élevé et dont la vitesse typique est progressivement augmentée, la couche de Hartmann sera devenue turbulente avant que les effets dus aux recirculations d'Ekman laminares n'interviennent. Dans ce cas, le modèle étudié dans ce paragraphe n'est plus valide. Il faut avoir recours à un modèle fondé sur une description turbulente de la couche de Hartmann.

Alboussière et Lingwood [44] ont construit un tel profil de couche de Hartmann en s'appuyant sur un modèle de couche logarithmique analogue à celui qui est utilisé dans les couches limites hydrodynamiques turbulentes. Il en déduisent une loi qui permet de calculer numériquement le frottement exercé par la couche sur l'écoulement de cœur. L'implantation de ce modèle, couplé à la résolution de (3.2), dans un code de calcul permettrait de fournir un modèle 2D numérique pour les couches turbulentes.

3.4 Écoulements MHD sous champ instationnaire non uniforme.

D'après l'étude menée au chapitre 2, l'application d'un champ magnétique non uniforme et variable dans le temps provoque une modification du profil de la couche de Hartmann dès le premier ordre. En outre, si le champ reste constant sur une tranche verticale d'écoulement, normal aux parois de Hartmann et que l'éventuel courant injecté dans celles-ci reste faible (devant σBU), alors le cœur de l'écoulement reste bidimensionnel. En première approximation, l'extension du modèle SM82 aux cas d'écoulement sous champ magnétique vertical dépendant de (x, y, t) ne nécessite donc pas de modèle d'ordre élevé pour les profils verticaux. Il suffit simplement de remplacer le profil de Hartmann (1.55) par le profil de Hartmann à l'ordre 0 sous champ non uniforme (2.24a). À noter que la condition $\partial_z \mathbf{B}$ impose que l'épaisseur de peau soit grande devant la taille typique verticale de l'écoulement, ce qui impose une fréquence caractéristique de variation du champ modérée :

$$f_b \ll \frac{1}{\mu \sigma a^2} \quad (3.29)$$

Cette condition, analogue à (2.18), est cependant plus restrictive, car le champ doit rester uniforme sur une longueur Ha fois plus grande que la couche de Hartmann.

En revanche, le déplacement horizontal d'un fluide conducteur dans un champ vertical non uniforme crée des courants horizontaux, et donc une force horizontale qui agit sur le champ de vitesse. Les champs $\mathbf{j}_\perp$ et $\mathbf{u}_\perp$ ne sont donc plus découplés, comme dans le modèle SM82. Le couplage apparaît dans la loi de conservation du courant électrique (1.6). En injectant la loi d'Ohm adimensionnelle ($\mathbf{j}_\perp = -\nabla_\perp \phi + \lambda T \partial_t \mathbf{A} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ où $T = \frac{U}{af_b}$ et où le temps est normalisé par f_b^{-1}) dans la moyenne verticale de (1.6), et en utilisant la jauge de Coulomb (2.24a) et (1.3), il vient :

$$\Delta_\perp \phi = \nabla_\perp \cdot (\bar{\mathbf{u}}_\perp \times \mathbf{B}) + j_z W = \nabla_\perp \cdot (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}) \quad (3.30)$$

où $\mathbf{u}_0 = \mathbf{B} \times \nabla_\perp \phi$. Cette équation de Poisson pour le potentiel est à résoudre conjointement avec l'équation du mouvement moyennée. En normalisant le temps par f_b^{-1} et en définissant la *vitesse de glissement* $\mathbf{u}_\phi = \partial_t \mathbf{A} \times \mathbf{B}$:

$$\frac{\lambda T}{N} \partial_t \bar{\mathbf{u}}_\perp + \frac{\lambda}{N} (\bar{\mathbf{u}}_\perp \cdot \nabla_\perp) \bar{\mathbf{u}}_\perp + \nabla_\perp \cdot \bar{\mathbf{p}} = -\frac{B_z}{Ha} \bar{\mathbf{u}}_\perp + \mathbf{u}_0 + \lambda T \mathbf{u}_\phi - \bar{\mathbf{u}}_\perp + \frac{\lambda^2}{Ha^2} \Delta_\perp \bar{\mathbf{u}}_\perp \quad (3.31)$$

soit dimensionnellement :

$$(\partial_t + \bar{\mathbf{u}}_\perp \cdot \nabla_\perp) \bar{\mathbf{u}}_\perp + \nabla_\perp \cdot \bar{\mathbf{p}} = -\frac{1}{t_H(x,y,t)} \bar{\mathbf{u}}_\perp + \frac{1}{\tau} (\mathbf{u}_{0\text{dim}} + \mathbf{u}_{\phi\text{dim}} - \bar{\mathbf{u}}_\perp) + \nu \Delta_\perp \bar{\mathbf{u}}_\perp \quad (3.32)$$

où $\mathbf{u}_{\phi\text{dim}} = \frac{\rho}{B^2} \partial_t \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ et $\mathbf{u}_{0\text{dim}} = \frac{\rho}{B^2} \mathbf{B} \times \nabla_\perp \phi$. Le temps de freinage de Hartmann dépend de x, y , et t :

$$t_H(x, y, t) = \frac{a}{B(x, y, t)} \sqrt{\frac{\rho \nu}{\sigma}} = H a \tau \quad (3.33)$$

Ainsi, le temps de freinage de Hartmann est très long devant le temps Joule. Le freinage par les couches de Hartmann exerce donc une influence négligeable sur l'écoulement. La différence essentielle avec le modèle SM82 réside dans le rôle du champ électrique. Ici la force $\frac{\mathbf{u}_{\phi d}}{\tau}$ induit des boucles de courants forts entre les plan horizontaux du cœur de l'écoulement (le courant horizontal associé est de divergence horizontale non-nulle à cause de (3.30)), alors qu'en l'absence de variation (temporelle et spatiale) de $\mathbf{B}$, le champ électrique s'adapte instantanément de façon à annuler le courant dû à $\sigma \bar{\mathbf{u}}_\perp \times \mathbf{B}$ (cet énoncé correspond à la loi de Lenz), de sorte que la somme $\mathbf{u}_{0\text{dim}} - \bar{\mathbf{u}}_\perp + \mathbf{u}_{\phi\text{dim}}$ est nulle d'après (3.30) (ce qui correspond à l'absence de courant constatée au premier ordre dans le cœur 2D sous champ uniforme). Le freinage par les couches de Hartmann exerce alors une influence dominante sur l'écoulement.

Un exemple d'application à l'étude du freinage électromagnétique d'un écoulement d'acier est donné au paragraphe 4-3.

3.5 Fluides en rotation rapide.

3.5.1 Modèle général et propriétés.

Le modèle quasi-géostrophique (3.10) ne tient compte que des termes d'ordre le plus élevé et de ce fait, laisse de côté les termes qui rendent compte du transport par les recirculations d'Ekman. Ce phénomène est en effet souvent négligeable devant les autres phénomènes modélisés par (3.10) qui interviennent dans l'approximation des eaux peu profondes. Cependant, il s'agit ici de décrire des écoulements plus simples : le fond de l'écoulement est supposé plan et les effets du vent négligeables si bien que la surface supérieure est libre et sans couche limite d'Ekman. En revanche, la vitesse de rotation n'est plus supposée constante dans le temps. Dans ce cas, il est utile de chercher des effets d'ordre plus élevés. Le modèle d'écoulement de cœur géostrophique et de couche d'Ekman (1.60) sont conservés mais cette fois-ci, le modèle 2D est obtenu par le processus de moyenne et les termes d'ordre $R^i E^{\frac{j}{2}} / i + j = 2$ sont conservés. Après calcul et utilisation des variables

$$\mathbf{v} = \left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{8} E^{\frac{1}{2}}\right) \bar{\mathbf{u}}_\perp \quad (3.34a)$$

$$p' = \left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{8} E^{\frac{1}{2}}\right) \bar{p} \quad (3.34b)$$

$$S' = \left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{8} E^{\frac{1}{2}}\right) S \quad (3.34c)$$

(Calculs détaillés en Annexe B), le nouveau modèle 2D pour les fluides en rotation rapide s'écrit :

$$\lambda R o (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_\perp) \mathbf{v} + \nabla_\perp p' - E \lambda^2 \Delta_\perp \mathbf{v} = \left(1 + \sqrt{2} E^{\frac{1}{2}}\right) \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z - S' \partial_t \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} - E^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2\sqrt{2} E^{-\frac{1}{2}}\right) \mathbf{v} - \frac{\sqrt{2}}{4} E^{\frac{1}{2}} R \bar{\omega} \mathbf{v} + \mathcal{O}_{i+j=3} \left(E^{\frac{i}{2}} R^j\right) \quad (3.35)$$

soit en variables dimensionnelles :

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_\perp) \mathbf{v} + \nabla_\perp p' - \nu \Delta_\perp \mathbf{v} = 2 \left(1 + \sqrt{2} E^{\frac{1}{2}}\right) \mathbf{v} \times \Omega - \left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{8} E^{\frac{1}{2}}\right) \partial_t \Omega \times \mathbf{r} - \left(1 + 2\sqrt{2} E^{-\frac{1}{2}}\right) \frac{\mathbf{v}}{t_E} - \frac{\sqrt{2}}{4} E^{\frac{1}{2}} \bar{\omega} \mathbf{v} + \mathcal{O}_{i+j=3} \left(E^{\frac{i}{2}} R^j\right) \quad (3.36)$$

Le terme source en $\bar{\omega}\mathbf{v}$ est en fait le tenseur de Reynolds associé à la composante tournante (proportionnelle à $\mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{u}}_\perp$) du profil d'Ekman et rend compte des effets liés au transport de quantité de mouvement (ou de moment cinétique). Il joue un rôle similaire au terme non linéaire supplémentaire de (3.14), à ceci près qu'il n'intègre que les effets inertiels induits par la rotation globale, à l'exclusion de tout autre.

3.5.2 Couches limites parallèles planes.

Nous cherchons ici à mettre en évidence la conséquence des effets inertiels sur une couche parallèle plane en rotation, de façon un peu analogue au paragraphe **3-3.3**. Une paroi poreuse verticale plane est placée en $x = x_0$. Le débit aspiré à la paroi ($u_x(x_0, y) / \partial_y u_x(x_0, y) = 0$) est dévié par la force de Coriolis, ce qui induit une vitesse parallèle à la paroi et force un écoulement. Une couche limite parallèle (supposée stationnaire et uniforme dans la direction $\mathbf{e}_y$ se développe alors le long de la paroi. Sous ces hypothèses, la coordonnée x et la vitesse sont respectivement normalisées par les échelles du forçage et de la couche parallèle

$$x - x_0 = \frac{\lambda E^{\frac{1}{4}}}{(1 + 2\sqrt{2}E^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} \tilde{x} \quad (3.37a)$$

$$\text{et } u_y = -\frac{1 + \sqrt{2}E^{\frac{1}{2}}}{1 + 2\sqrt{2}E^{\frac{1}{2}}} E^{-\frac{1}{2}} u_x \tilde{u}, \quad (3.37b)$$

et (3.35) est réécrite :

$$\alpha_{\parallel} \tilde{u}' - \beta (\tilde{u}^2)' = 1 - \tilde{u} + \tilde{u}'' \quad (3.38)$$

où

$$\alpha_{\parallel} = Ro E^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{(1 + 2\sqrt{2}E^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} \quad (3.39)$$

$$\beta_{\parallel} = Ro E^{-\frac{3}{4}} \frac{1 + \sqrt{2}E^{\frac{1}{2}}}{(1 + 2\sqrt{2}E^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{2}}{8} u_x \quad (3.40)$$

Les conditions aux limites découlent respectivement de la condition de non glissement à la paroi et de raccord à l'infini :

$$\tilde{u}(0) = 0 \quad (3.41)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{u}(x) = 1 \quad (3.42)$$

En posant $C_{\parallel} = \beta_{\parallel} - \alpha_{\parallel}$ (positif pour des valeurs suffisamment élevées de la vitesse de forçage u_x), un calcul analytique simple, analogue à celui du paragraphe **3-3.3** donne le même comportement asymptotique que (3.25) :

$$\tilde{u}'(0) \underset{C \rightarrow +\infty}{\sim} C + O\left(\frac{1}{C}\right) \quad (3.43)$$

$$\tilde{u}'(0) \underset{C \rightarrow -\infty}{\sim} -\frac{2}{C} + O\left(\frac{1}{C^2}\right) \quad (3.44)$$

Cette fois, changer le signe de C revient à effectuer une symétrie $\tilde{x} \rightarrow -\tilde{x}$, c'est à dire à changer le sens de l'écoulement par rapport au sens de rotation. Les couches limites dont la vorticité est anticyclonique (resp. cycloniques) sont écrasées (resp.  largies) par le transport de quantité de mouvement, par le même mécanisme que celui décrit au paragraphe **3-3.3**.

3.5.3 Écoulements axisymétriques

Dans un écoulement axisymétrique, La présence d'une paroi courbe induit une rotation propre. Le but de ce paragraphe est de trouver comment celle-ci se conjugue avec la rotation globale. L'écoulement est supposé axisymétrique, et le forçage résulte toujours d'une injection de fluide supposée localisée au centre de rotation en $z = 0$, la vitesse radiale est alors fixée par la conservation de la masse (3.3) :

$$\bar{u}_r = \frac{\Gamma}{r} \quad (3.45)$$

et (3.35) devient :

$$\lambda Ro \frac{\gamma}{r^2} \partial_r u_\theta - \frac{2\sqrt{2}}{5} \lambda E^{\frac{1}{2}} Ro \frac{u_\theta}{r} \partial_r (r u_\theta) = \lambda^2 E^{\frac{1}{2}} \partial_r (r^3 \partial_r \frac{u_\theta}{r}) - u_\theta \left(E^{\frac{1}{2}} + \lambda Ro \frac{\Gamma}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{r} \quad (3.46)$$

La long d'une paroi axisymétrique poreuse (nécessaire pour absorber le débit injecté) localisée en $r = R_0$, se développe une couche limite similaire à celle étudiée au paragraphe précédent à l'effet de la courbure près. Si celle ci est suffisamment grande (devant l'épaisseur de la couche), l'approximation $\frac{1}{r} \simeq \frac{1}{R_0}$ est légitime. Les variables

$$r - R_0 = \frac{\lambda E^{\frac{1}{2}}}{\left(\left(1 + 2\sqrt{2} E^{\frac{1}{2}} \right) E^{\frac{1}{2}} + \lambda Ro \frac{\Gamma}{R_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \tilde{r} \quad (3.47)$$

$$u_\theta = -\frac{\Gamma}{R_0^2} \frac{1 + \sqrt{2} E^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + 2\sqrt{2} E^{\frac{1}{2}} \right) E^{\frac{1}{2}} + \lambda Ro \frac{\Gamma}{R_0^2}} \tilde{u}_\theta, \quad (3.48)$$

satisfont alors à nouveau à l'équation (3.38) à condition de remplacer α et β respectivement par

$$\alpha_R = Ro E^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma}{R_0^2} \left[\left(1 + \sqrt{2} E^{\frac{1}{2}} \right) E^{\frac{1}{2}} + \frac{\lambda Ro \Gamma}{R_0^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.49)$$

$$\beta_R = Ro \left(1 - \sqrt{2} E^{\frac{1}{2}} \right) \frac{\Gamma}{R_0} \frac{\sqrt{2}}{16} \left[\left(1 + \sqrt{2} E^{\frac{1}{2}} \right) E^{\frac{1}{2}} + \frac{\lambda Ro \Gamma}{R_0^2} \right]^{-\frac{3}{2}} \quad (3.50)$$

En d'autres termes, la présence d'une courbure à la paroi augmente l'efficacité du freinage d'Ekman d'un facteur $1 + \frac{\lambda Ro \gamma}{(1 + \sqrt{2} E^{\frac{1}{2}}) R_0^2 E^{\frac{1}{2}}}$. En outre, un changement de concavité de la paroi peut conduire, pour des valeurs modérées de R_0 , à changer le signe de $\alpha_R - \beta_R$ et donc à inverser le sens de la recirculation. Ceci illustre que dans le cas présent, deux phénomènes différents induisent le pompage : la rotation globale elle même, mais aussi la rotation à l'échelle de la couche parallèle, induite par la courbure de la paroi. Si celles ci sont opposées, elles peuvent annuler la recirculation et l'épaisseur de la couche parallèle est alors celle de la couche linéaire étudiée au premier chapitre.

Conclusion 3 *L'utilisation d'un processus de moyenne selon la verticale a permis de construire trois modèles 2D d'écoulements quasi-2D qui tiennent compte de quelques-uns des phénomènes décrits dans les deux premiers chapitres. Le modèle PSM2000 montre que les recirculations d'Ekman dans les écoulements MHD sous champ fort et permanent agissent approximativement sur l'écoulement moyen en diffusant le champ de vorticité le long des lignes de courant. Les propriétés de transport de ces écoulements secondaires expliquent les phénomènes d'écrasement et d'étalement des couches limites parallèles et des tourbillons. Le modèle pour les écoulements sous champ variable non-homogène indique que les couches de Hartmann ne jouent de rôle prépondérant que quand le courant qui y*

transite est très fort devant celui associé aux boucles de courant entre les plans horizontaux de la zone de cœur. Enfin le modèle quasi-géostrophique avec effet Coriolis dans les couches d'Ekman prévoit un amortissement (resp. une amplification) de la vortacité cyclonique (resp. anticyclonique). Ce dernier est responsable d'un comportement de couches parallèles proche de celui prévu par le modèle PSM2000 pour les couches parallèles MHD.

Chapitre 4

Application des modèles 2D à l'étude de quelques cas concrets

Résumé

Ce chapitre rassemble quatre exemples de simulations numériques fondées sur les modèles 2D développés au chapitre précédent. L'expérience MATUR est utilisée pour comparer les résultats des modèles SM82 et PSM2000 sur plusieurs aspects : étude des couches cisailées libres et parallèles, champ de vortacité et temps de réponse du système. Le modèle PSM2000 s'avère réaliste. Ce dernier est ensuite utilisé pour retrouver les résultats expérimentaux de Sommeria [56] sur la décroissance libre de tourbillons isolés. Ensuite, le modèle 2D pour les champs non uniformes et instationnaires est appliqué à une étude qualitative d'un procédé de freinage d'un écoulement d'acier liquide. Enfin le modèle quasigéostrophique modifié permet de proposer une explication pour les jets inertiels dans les couches parallèles lors de l'accélération ou de la décélération d'un bassin en rotation.

4.1 Modèle Numérique pour l'expérience MATUR

4.1.1 Dispositif expérimental de référence.

Dans ce paragraphe, le modèle (3.14) est appliqué à la simulation de l'expérience MATUR dont les résultats mettent en défaut les prévisions du modèle SM82 pour des valeurs modérées de N . Le dispositif MATUR (pour MAgnetic TURbulence) est constitué d'un réservoir cylindrique (rayon $R = 0.11m$) au fond isolant et aux parois latérales conductrices (voir figure 4.1). Du courant électrique est injecté par le fond au moyen d'un grand nombre de fines électrodes affleurantes réparties le long d'un cercle (rayon $r_e = 0.093m$) dont le centre est sur l'axe du cylindre. Ce réservoir est rempli de mercure (hauteur $a = 1\text{ cm}$) et plongé dans un champ magnétique vertical et uniforme sur l'ensemble du dispositif. Le courant électrique injecté quitte le fluide par les parois latérales, de sorte que l'anneau de fluide compris entre le cercle d'injection et les parois parallèles est mis en rotation par la force de Laplace (azimutale), ce qui provoque l'apparition d'une couche parallèle cisailée libre au droit des électrodes et d'une couche parallèle pariétale le long de la paroi latérale. La surface du fluide peut être libre ou non. Cependant, l'oxydation du mercure rigidifie l'éventuelle surface libre si bien qu'il faut toujours considérer deux couches de Hartmann ($n = 2$: une au fond et une à la surface supérieure). Une description exhaustive de cette expérience et des méthodes de mesure employées figure dans [58]. Ce sont aussi ces mêmes résultats qui nous serviront de référence pour évaluer l'intérêt du modèle 2D. Le courant injecté est modélisé par un Dirac localisé en r_e d'intégrale I : $j_{Wz} = \frac{I}{2\pi r_e} \delta(r - r_e)$,

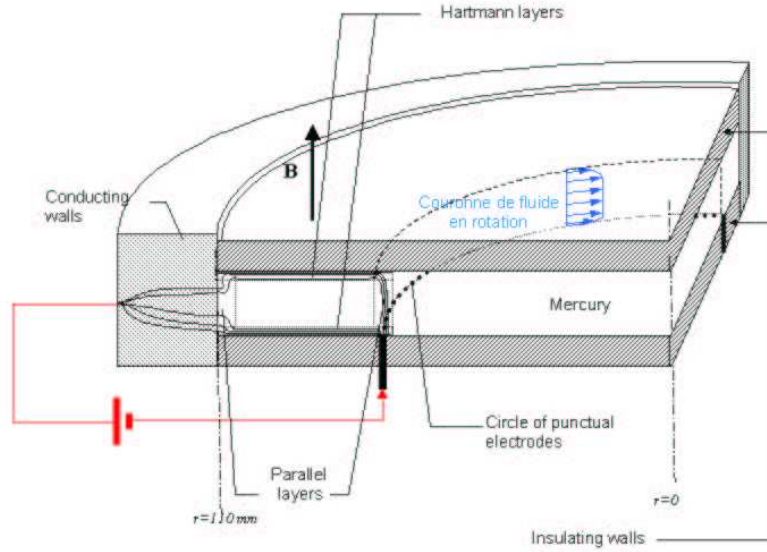


FIG. 4.1 – Schéma du dispositif MATUR (un quart du container cylindrique est représenté ici).

de sorte que la résolution de (3.4) fournit :

$$\forall r \geq r_e, \mathbf{v}_{0dim} \simeq \bar{\mathbf{u}}_{0dim} = -\frac{B}{\rho a} \frac{I}{2\pi r} t_H \cdot \mathbf{e}_\theta \quad (4.1)$$

$$\forall r \leq r_e, \mathbf{v}_{0dim} = 0 \quad (4.2)$$

4.1.2 Modèle numérique.

Le modèle 2D est simulé à l'aide du code commercial FLUENT/UNS v5.2. Ce dernier utilise une formulation classique en pression et vitesse sur maillage déstructuré pour l'équation de Navier-Stokes couplée à l'équation de continuité. La résolution est effectuée en instationnaire sans hypothèse quant à l'éventuel caractère turbulent de l'écoulement. L'algorithme PIZO mis en jeu est une méthode de correction de pression implicite qui traite les équations pour chaque scalaire les unes après les autres (mode *ségréatif*). La discrétisation spatiale fait intervenir une formulation en volumes finis, avec un schéma du second ordre décentré amont pour les termes convectifs et central pour les termes diffusifs (le gradient sur une face est calculé par différences centrales). Le schéma temporel est du second ordre implicite. Les termes propres au modèle PSM2000 ($\frac{nt_H}{Ha^2} \left(\frac{7}{36} \mathcal{D}_v + \frac{1}{8} \partial_v \right) \mathbf{v} \cdot \nabla_\perp \mathbf{v}$) sont exprimés comme termes sources en fonction de leur valeur au pas de temps précédent (formulation *explicite*) et leur discrétisation temporelle est du second ordre explicite. Le terme de freinage de Hartmann ($\frac{1}{t_H} (\mathbf{v}_0 - n\alpha \mathbf{v})$) est calculé en mode implicite.

Le maillage utilisé (figure 4.2) comporte 16350 quadrilatères pour une résolution radiale moyenne de $0.9mm$ loin de la paroi et une résolution azimutale qui varie de $4.6mm$ au mur extérieur à $0.9mm$ au centre du disque. Le maillage radial est fin et progressif à proximité de la paroi extérieure si bien que qu'en dépit du fort phénomène d'écrasement subit par la couche limite, celle-ci est toujours

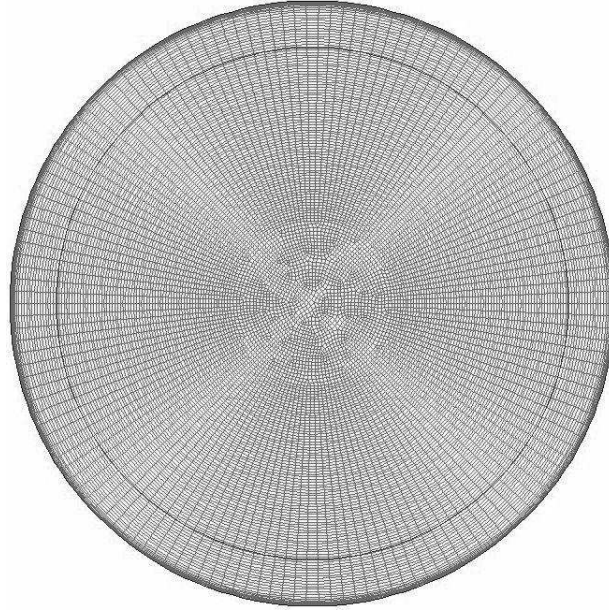


FIG. 4.2 – Maillage utilisé pour les simulations numériques de l'expérience MATUR.

décrite par une dizaine de points au moins.

Le pas de temps est choisi de sorte qu'il impose la même fréquence de coupure spatiale que le maillage, elle-même supérieure à celle des plus petites échelles de l'écoulement (couches parallèles). Toutes les valeurs moyennes et RMS présentées sont calculées alors que les grandeurs intégrales (moment cinétique, énergie) ne varient plus de façon significative sur une durée de l'ordre de t_H .

Sauf indication, les simulations sont effectuées pour un champ magnétique de $0.17T$ et le courant total injecté varie de 0 à $50A$. À l'instant $t = 0$, l'écoulement est au repos et le courant électrique est injecté à sa valeur I . La couronne de fluide $\{r_e < \|\mathbf{r}\| < R\}$ est donc mise en mouvement et accélère jusqu'à atteindre une vitesse de rotation à peu près constante.

4.1.3 Structure de l'écoulement.

À l'état quasi-stationnaire, l'écoulement présente un nombre limité de tourbillons cycloniques assez gros obtenus par agrégats des petites structures générées par la déstabilisation de la couche cisailée libre au cours des premières secondes de l'expérience (voir paragraphe 4-1.6 figure 4.3). La théorie du *maximum d'entropie* prévoit que les tourbillons issus de l'instabilité (de *Kelvin-Helmoltz*) d'une couche cisailée rectiligne sans parois latérale s'agrègent jusqu'à n'en former plus qu'un seul (Sommeria *et al.* 1990). Ici, le phénomène est gêné par la présence des parois latérales qui limitent l'extension radiale des structures à une taille typique de $R - r_e$.

Pour $I = 30A$, la prise en compte ou non des effets inertiels dans le modèle de couche de Hartmann introduit de fortes différences dans la physiologie de l'écoulement. La forte vitesse de rotation globale justifie l'approximation (3.19) si bien que le terme non linéaire provoque une forte diffusion azimuthale des tâches de vorticité (figure 4.5) négligée dans le cadre du modèle SM82. Ce phénomène a tendance à éliminer les petites structures pour conduire à un écoulement plus ordonné, constitué de grosses structures allongées en rotation solide.   l'inverse, l'organisation obtenue par le modèle SM82 est plus complexe avec des structures plus nombreuses, moins allongées et de taille plus diverses (figure 4.4). La durée de vie de ces dernières est typiquement de quelques secondes alors que le modèle non-linéaire prévoit que les tourbillons n'interagissent ni entre eux ni avec la paroi :   partir de $t \simeq 10s$, ils sont transportés indéfiniment par la rotation globale. Il est important de remarquer que la diffusion du champ de vorticité par les effets non-linéaires n'affecte pas le champ de pression : si la surface supérieure était libre la présence d'une grosse structure se traduirait par un creux à peu

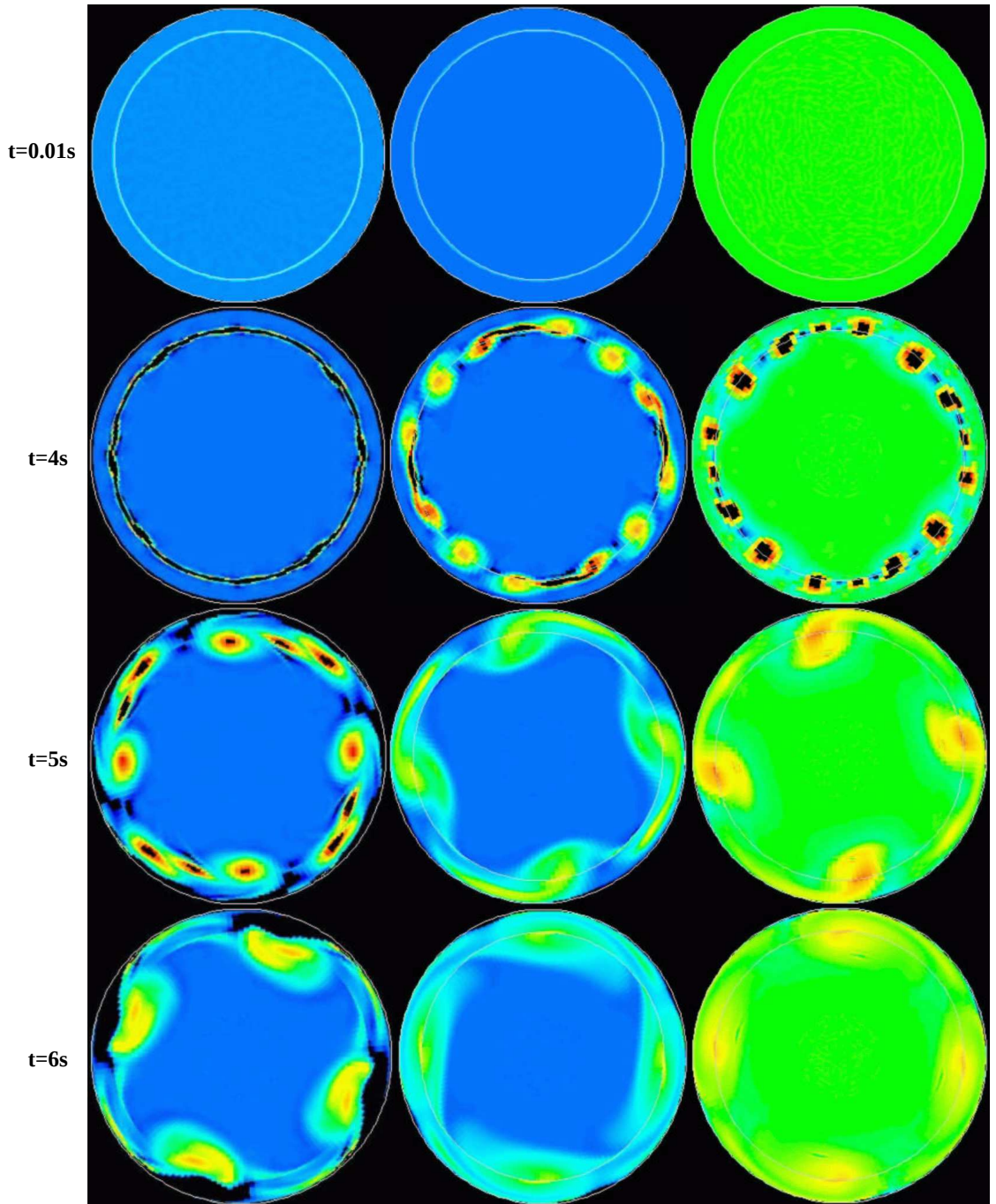


FIG. 4.3 – simulations numériques pour $I = 30A$ et $B = 0.17T$: Colonne de gauche : contours de vorticité prévus par le modèle SM82 , colonne centrale : contours de vorticité prévus par le modèle PSM2000. Colonne de droite : contours de vitesse verticale à l'interface entre les couches de Hartmann et le coeur de l'écoulement, recalculées par (3.12)    partir du champ de vitesse local issu de la simulation de PSM2000.

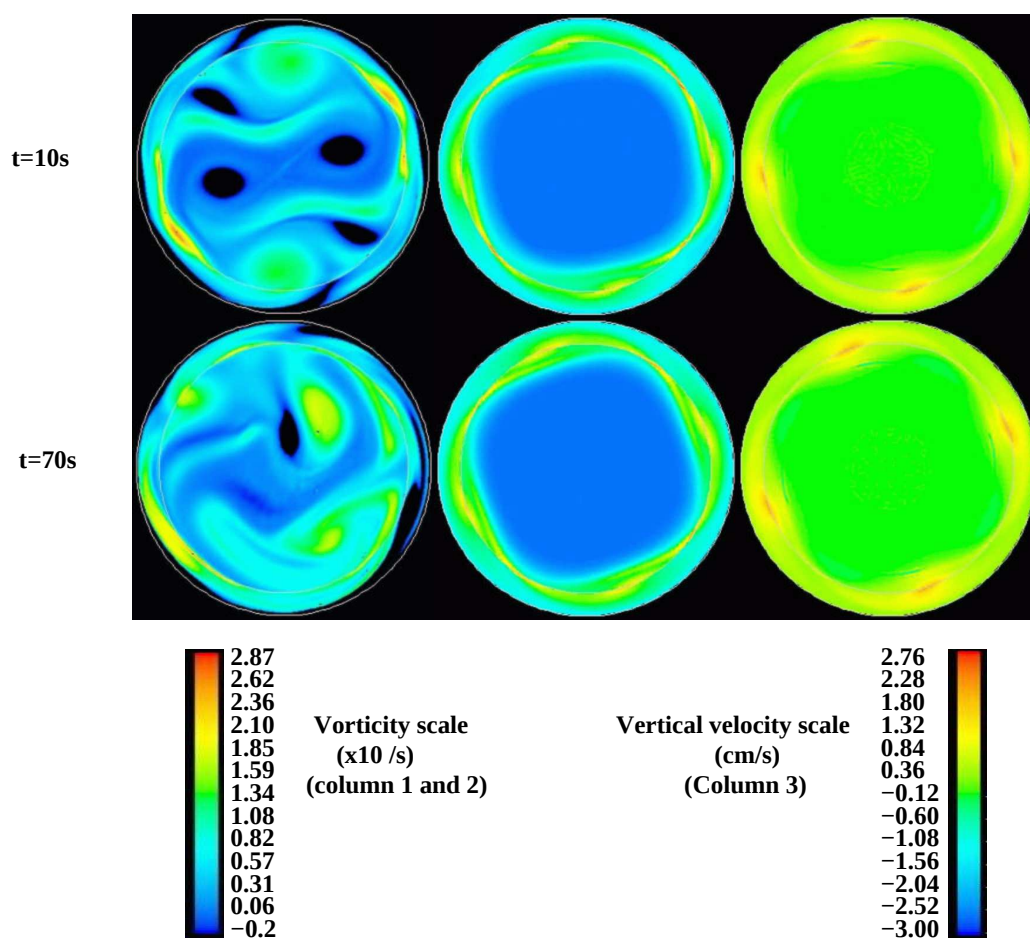


FIG. 4.4 – simulations numériques pour
 $I = 30A$ et $B = 0.17T$ (suite)

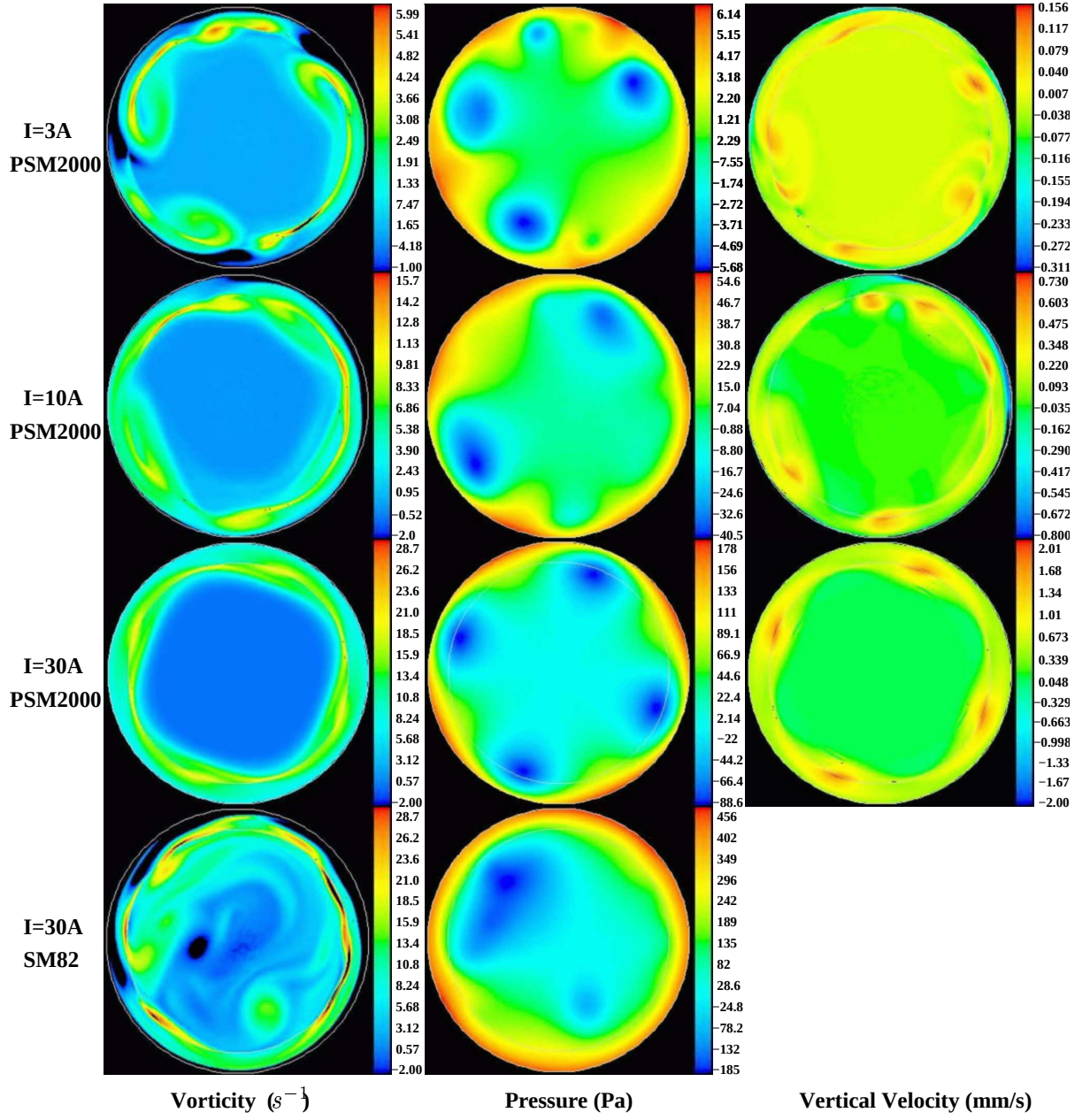


FIG. 4.5 – États quasi-stationnaires de l'écoulement à $B = 0.17T$ pour différentes valeurs du courant injecté. Première colonne : champ de vorticité, colonne du centre : champs de pression. Colonne de droite : valeurs de la vitesse verticale à l'interface entre la couche de Hartmann située en $z = 0$ et le coeur (Champ recalculé à partir de la solution numérique en utilisant (3.12)).

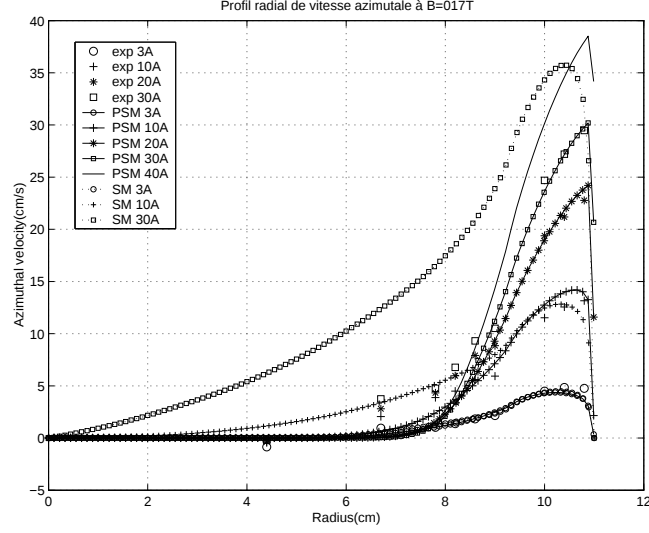


FIG. 4.6 – Profils radiaux de vitesse azimutale.

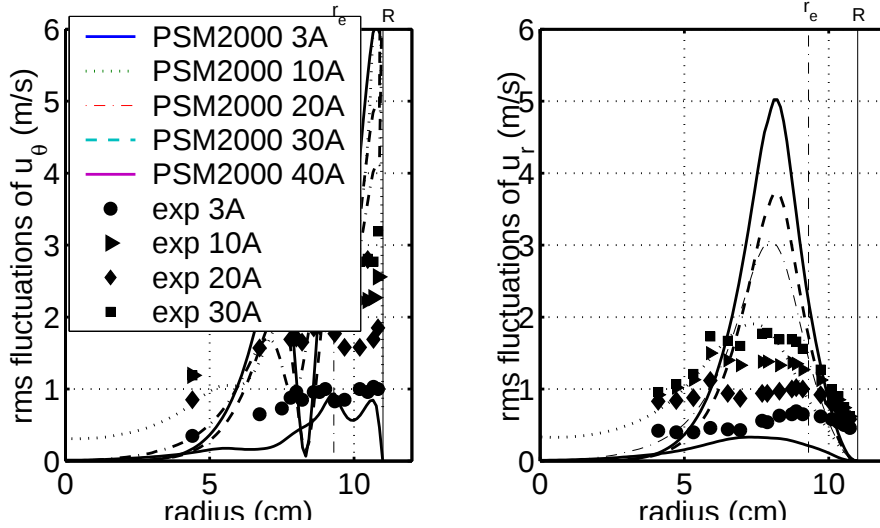


FIG. 4.7 – Moyenne RMS des fluctuations de vitesse azimutale (à gauche) et radiale (à droite) calculées à partir des simulations du modèle PSM2000. Les Points correspondent aux valeurs expérimentales.

près rond alors que le champ de vorticité est très allongé azimutalement.

4.1.4 Profils Radiaux

La figure 4.6 montre les profils radiaux de vitesse azimutale obtenus par simulation des modèles SM82 (pointillés) PSM2000 (lignes pleines) et par mesures expérimentales. Le modèle SM82 ne tenant pas compte des effets inertiels surévalue nettement les vitesses dès que le courant injecté atteint environ 20A, alors que l'accord entre l'expérience et le modèle PSM2000 est excellent sur toute la couronne extérieure de fluide. Le modèle PSM2000 prévoit cependant une diffusion de quantité de mouvement vers l'intérieur du cercle électrode un peu inférieure à celle constatée expérimentalement. Celle-ci est vraisemblablement limitée par le transport radial associé aux écoulements secondaires. Cette légère sous-évaluation des vitesses participe certainement au petit écart avec l'expérience constaté sur les moments cinétiques globaux à fort courant (figure 4.8). Les fluctuations de vitesse azimutales obtenues à partir du modèle PSM2000 (figure 4.7) offrent un accord satisfaisant avec les mesures expérimentales : dans les deux cas, les courbes présentent deux extrema à environ $r = 7\text{cm}$ et à

l'endroit des électrodes. Les valeurs expérimentales et numériques de ces pics sont en bon accord. En revanche, le modèle numérique sous-estime les vitesses à l'intérieur du cercle d'électrodes, ce qui est plus marquant sur les fluctuations de vitesse radiale (figure 4.7).

4.1.5 Évolution du moment cinétique.

Moment cinétique à l'équilibre.

La forte intensité de la rotation suggère que la couche parallèle pariétale subit un écrasement important du fait de la recirculation d'Ekman. L'augmentation du frottement à la paroi provoque donc une dissipation qui ralentit l'écoulement. Ce phénomène est quantifié par l'évolution du moment cinétique total de l'écoulement ($L = \int r \bar{u}_\theta d^2 \mathbf{r}$) en fonction du courant total I injecté. En supposant l'écoulement stationnaire et axisymétrique, et en admettant, comme le suggèrent les résultats expérimentaux, que la forme du profil radial de vitesse reste celle de l'écoulement sans effets non-linéaires, un bilan de moment cinétique global conduit à la relation :

$$I = 4 \frac{\sqrt{\sigma \rho \nu}}{R^2 - r_e^2} L + \frac{7}{18} \frac{\sqrt{\nu \rho^5 \sigma^{-3}} L^3}{(R^2 - r_e^2)^3 \pi^2 R^2 B^4 \alpha^3}. \quad (4.3)$$

(Le calcul complet figure au paragraphe 4.2 de Pothérat *et. Al.* (2000)). Le premier terme de (4.3) constitue en fait la prévision du modèle SM82 alors que le terme proportionnel à L^3 provoque une saturation de L aux forts courants due à la dissipation aux parois latérales. Cette saturation correspond aux mesures à environ 15% près (figure 4.8) pour un champ de $0.17T$. Les valeurs calculées à partir de la simulation numérique de l'écoulement ne s'écartent plus que de quelques pour cent des valeurs expérimentales. La différence essentielle qui réside entre le calcul numérique issu de Fluent et la relation (4.3) est l'hypothèse d'axisymétrie sur laquelle repose cette dernière : dans le résultat numérique, la couche cisailée libre est instable dès les faibles courants (quelques mA), ce qui provoque très tôt l'apparition de petits tourbillons cycloniques le long du cercle d'injection du courant. Or, dans les écoulements turbulents 2D, les tourbillons ont tendance à s'agglomérer pour former de plus grosses structures. Ici pour quelques dizaines d'Ampères ($I = 30A$ typiquement), l'écoulement tend vers un état dans lequel un faible nombre de structures (4 à 30A) est en rotation solide avec l'anneau extérieur. Chacune de ces structures subit un important pompage d'Ekman qui ajoute un débit radial à celui provoqué par la rotation globale (figure 4.5) La couche parallèle pariétale subit donc un débit transverse bien plus important que dans la configuration axisymétrique, ce qui explique qu'elle soit aussi beaucoup plus fine et qu'elle provoque une dissipation globale plus importante. Les calculs de L issus de la simulation numérique du modèle PSM2000 sont très proches des valeurs expérimentales. Un léger écart apparaît cependant à partir de $30A$ et croît progressivement.

Pour des champs plus élevés ($B = 0.5T$, $B = 0.8T$ à $r_e = 0.054m$ figure 4.9), le modèle numérique prévoit un phénomène de saturation très en deçà des mesures expérimentales. La raison en est vraisemblablement le mécanisme évoqué au paragraphe 3-3.4 : l'application du critère de Hua et Lykoudis (1974) indique qu'à $0.5T$, les couches de Hartmann deviennent turbulentes pour un courant total injecté supérieur à une dizaine d'ampères. À $B = 0.5T$ Le frottement augmente brutalement à la transition, ce qui correspond à la saturation qui apparaît en ce point sur la figure 4.9 (alors que le pompage d'Ekman sur une couche de Hartmann laminaire provoque une saturation progressive quand le courant augmente). Le modèle (3.14) n'est donc plus valide dans cette configuration, ce qui explique les écarts importants avec l'expérience. Il faudrait avoir recours à un modèle fondé sur une description turbulente des couches de Hartmann. Enfin, La courbe de moment cinétique (figure 4.8) suggère que les effets non-linéaires provoquent une dissipation globale à partir d'environ $15A$. Cependant, le champ de vorticité exhibe des signes d'allongement des structures dès $10A$. L'écoulement est donc sensiblement modifié par les recirculations locales bien avant que le pompage d'Ekman associé à la rotation globale ne provoque une dissipation supplémentaire par l'écrasement de la couche parallèle. En particulier, la diffusion de vorticité le long des lignes de courant est très sensible dès $10A$.

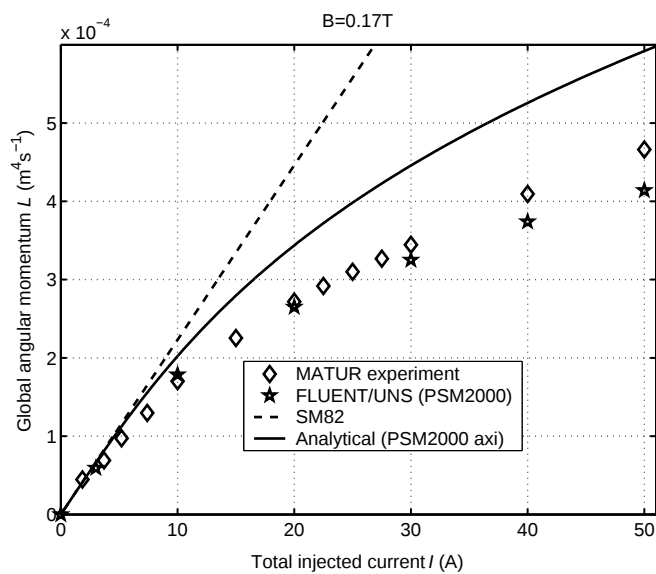
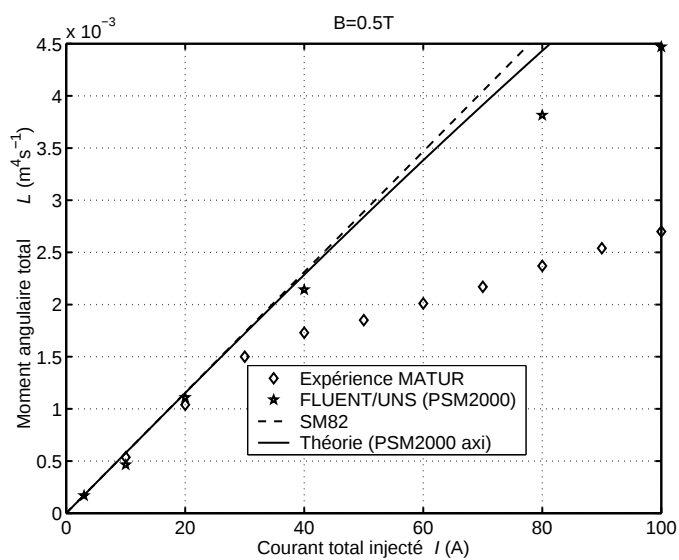


FIG. 4.8 – Moment cinétique global à l'état quasi-stationnaire en fonction du courant total injecté.

FIG. 4.9 – Moment cinétique global dans MATUR pour $B = 0.5T$.

Transitoires

L'étude de l'évolution du moment cinétique global en fonction du temps procure un moyen de savoir si le système évolue de façon significative ou non. En effet, à partir d'une certaine vitesse de rotation, le moment cinétique fourni par le système est égal à celui qui est dissipé par freinage de Hartmann et par le frottement des parois parallèles si bien que l'écoulement atteint un état de quasi équilibre où les grandeurs intégrales n'évoluent presque plus en fonction du temps. Les modèles SM82 et PSM2000 prévoient des temps de transition vers cet état différents. En effet, un bilan de moment cinétique donne l'équation d'évolution du moment cinétique sous la forme :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{L_0 - 2L}{t_H} - vL^3 \quad (4.4a)$$

$$v = \frac{7}{36} \frac{\sqrt{\nu \rho^3 \sigma^{-3}}}{(R^2 - r_e^2) \pi^2 R^2} \frac{1}{B^3} \quad (4.4b)$$

$$L_0 = \frac{aI (R^2 - r_e^2)}{4\sqrt{\sigma \rho \nu}} \quad (4.4c)$$

Dans le modèle SM82, le terme non-linéaire est négligé si bien que le temps caractéristique d'évolution du système est $\frac{t_H}{2}$ et ne dépend pas de la quantité de courant injecté. L'état quasi-stationnaire du système résulte alors de l'équilibre entre le forçage imposé par le courant injecté et la dissipation dans les couches de Hartmann. Dans le modèle PSM2000, pour de suffisamment grandes valeurs du courant (donc de la vitesse azimutale), c'est le frottement aux parois latérales qui impose l'équilibre si bien que le terme de freinage de Hartmann peut être négligé en première approximation. L'équation (4.4a) (voir paragraphe 3 de l'Annexe A) fournit alors un autre temps caractéristique qui correspond, à un coefficient multiplicatif près, à la durée des transitoires constatée sur les simulations numériques fondées sur PSM2000 (figure 4.10) :

$$t_{nl} = t_H \left[\frac{7}{36} \frac{\rho a^2}{\sigma^3} \frac{1}{16\pi^2 R^2} \frac{I^2}{B^4} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (4.5)$$

À noter que l'approximation analytique de la durée du transitoire de L (4.5) repose à nouveau sur l'hypothèse d'axisymétrie et ne tient donc pas compte des écoulements secondaires induits par les tourbillons issus de la déstabilisation de la couche cisailée libre centrale. En outre, les temps de transitoires tirés des simulations sont ceux pour lesquels L atteint 99% de sa valeur à l'état quasi-stationnaire. Pour ces raisons, un coefficient de l'ordre de 0.15 est à appliquer à t_{nl} pour obtenir une comparaison satisfaisante avec les simulations numériques.

Oscillations à l'état quasi-stationnaire.

À l'état quasi-stationnaire le moment cinétique global n'est pas tout à fait constant et présente de très faibles oscillations (de l'ordre de 0.5% à 10A). Cette oscillation est corrélée avec celle des autres grandeurs intégrales (énergie cinétique et enstrophie totales) mais ces dernières subissent des fluctuations plus importantes (respectivement 10% et 30%). La période est environ t_H . Les films issus des simulations numériques montrent que deux états proches dominant alternativement : l'un où un fort pic de vorticité, très allongé azimutalement apparaît à l'électrode et une autre au cours duquel cette ligne de vorticité est ramassée sur elle-même pour former des structures plus axisymétriques, séparées azimutalement par des zones de plus faible vorticité, même au droit de l'électrode. Le premier état correspond plutôt au profil du forçage alors que le second résulte de la tendance de l'écoulement à s'organiser en grosses structures. (cette organisation s'effectue en un temps t_H à cause du terme $\frac{\mathbf{u}_0 - \bar{\mathbf{u}}_\perp}{t_H}$ du second membre de (3.14)). La compétition entre ces deux mécanismes explique les oscillations de période t_H .   des courants plus forts ($I = 30A$) ce phénomène est gommé par les effets non linéaires qui étalent la vorticité en un temps un peu plus court que le temps caractéristique du forçage t_H .

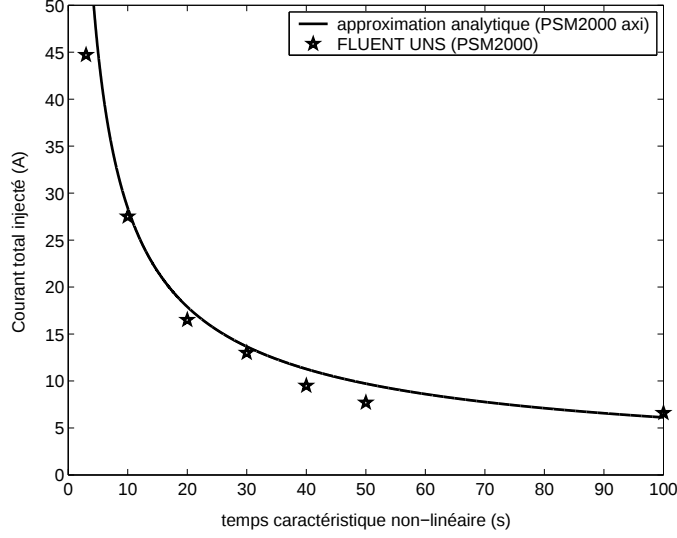


FIG. 4.10 – Durée des transitoires du moment cinétique global de l'expérience MATUR : Ligne pleine approximation (4.5) assortie d'un coefficient empirique de 0.15, carrés : résultat des simulations numériques du modèle PSM2000 le temps est celui pour lequel la valeur du moment cinétique atteint 99% de sa valeur à l'état quasi-stationnaire.

En revanche, les grandeurs intégrales varient très légèrement et continûment sur toute la durée des simulations. (figure 4.11)

4.1.6 Couches limites parallèles.

Couches cisailées libres

La couche cisailée libre qui apparaît à l'électrode d'injection du courant située en $r = 0.093m$ présente une instabilité de *Kelvin-Helmholtz* qui se traduit par l'apparition de tourbillons cycloniques le long de la couche. Une étude complète figure dans le livre de Chandrasekhar (1961). Afin d'obtenir une estimation simple des conditions de stabilité, le profil radial de vitesse azimutale est supposé linéaire et la couche est d'épaisseur $aHa^{-\frac{1}{2}}$. En l'absence de viscosité, la couche d'épaisseur δ (ici, en régime laminaire $\delta = aHa^{-\frac{1}{2}}$) est toujours instable. Le vecteur d'onde le plus instable et son taux de croissance sont donnés respectivement par :

$$k\delta = 0.8 \quad (4.6a)$$

$$\sigma_c = 0.4 \frac{U}{\delta} \quad (4.6b)$$

Liou (1994) a montré que la courbure de la couche ne modifiait pas la stabilité. En revanche, la présence du freinage de Hartmann retarde le seuil de déclenchement de l'instabilité si bien que pour de faibles vitesses azimutales (expérimentalement : $I < 0.2A$ pour $B = 0.17T$), la couche parallèle laminaire peut être stable si t_H^{-1} est plus grand que le taux de croissance sans friction :

$$0.4 \frac{U}{a} Ha^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{t_H} \quad (4.7)$$

soit encore :

$$0.4Re < Ha^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

la taille des vortex qui apparaissent à la déstabilisation, donnée par (4.6a), est d'environ $2.6mm$.

L'état déstabilisé, constitué d'une file de tourbillons alignés le long de l'électrode est lui-même très instable si bien que dès le départ de l'instabilité, les tourbillons naissants s'apparient (voir figure

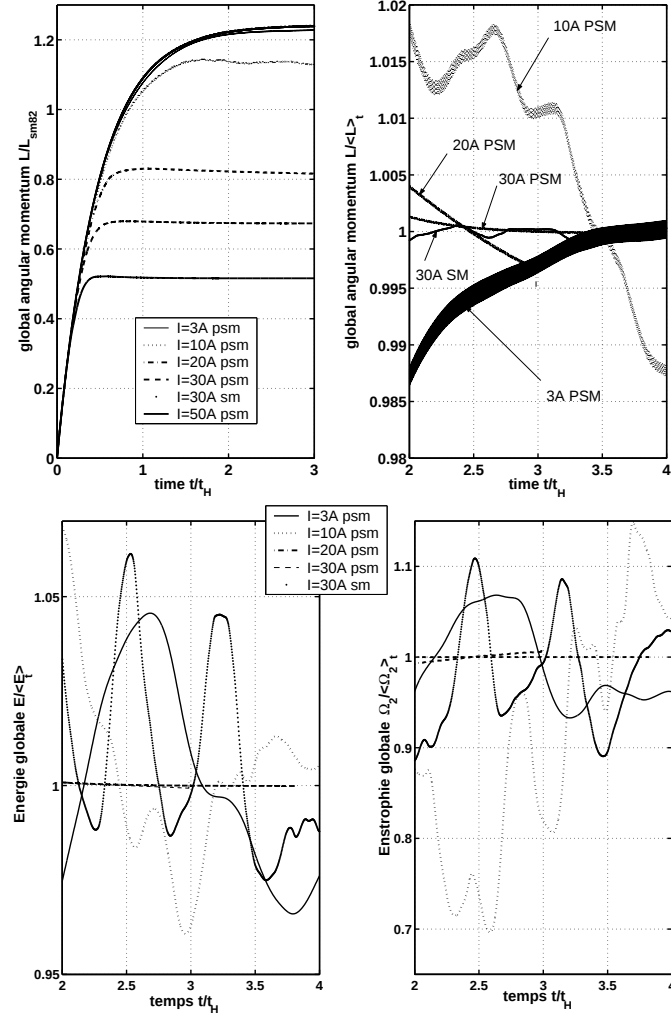


FIG. 4.11 – Évolution des grandeurs intégrales en fonction du temps. Moment angulaire global pendant la mise en mouvement du fluide (normalisé par la valeur théorique à l'équilibre prévue par la théorie SM82 sous hypothèse d'axisymétrie, en haut à gauche). Oscillations du moment angulaire global à l'état quasi-stationnaire (normalisée par sa moyenne sur une durée de t_H , en haut à droite), Oscillations de l'énergie globale à l'état quasi-stationnaire (normalisée par sa moyenne sur une durée de t_H , en bas à gauche), Oscillations de l'en/strophie à l'état quasi-stationnaire (normalisée par sa moyenne sur une durée de t_H , en bas à droite),

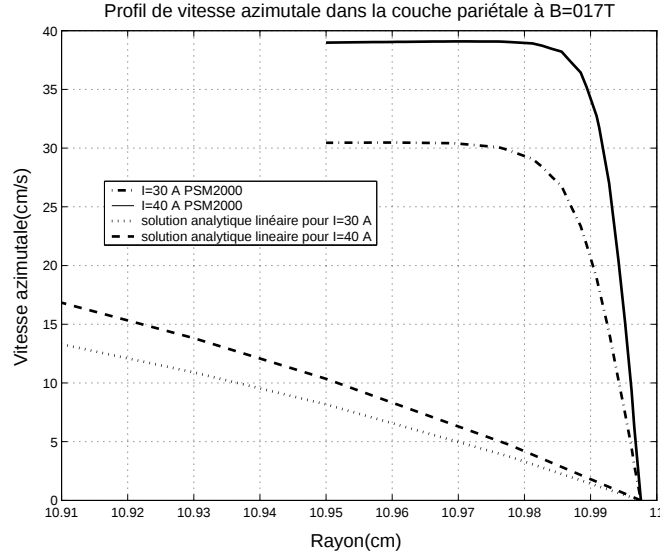


FIG. 4.12 – Profils de vitesse azimutale dans la couche limite pariétale. L'effet d'écrasement est spectaculaire.

4.3 à $t = 5s$). Ce mécanisme se reproduit jusqu'à ce qu'un faible nombre de tourbillons soit atteint (4 à 30A). Le confinement entre le cercle-électrode et la paroi empêche alors l'apparition de plus grosses structures. Le choix de l'un des modèles SM82 ou PSM2000 ne semble pas affecter significativement les mécanismes d'instabilité décrits. Si la première instabilité apparaît plus tôt dans les simulations issues du modèle PSM2000, c'est simplement parce que les effets non linéaires tendent à réduire le temps de réponse de l'écoulement (voir figure 4.3 et 4.4 : ce phénomène provient sans doute du fait que les transports secondaires améliorent la transmission de l'information) de sorte que les vitesses azimutales qui déstabilisent la couche sont plus vite atteintes.

Dans les simulations numériques, la couche cisailée libre ne fait pas l'objet d'un maillage spécifique et le forçage est discontinu : le profil de vitesse avant la déstabilisation est donc plutôt un échelon dont les courbes de stabilité marginale et énergétique ont la même allure que (4.8). Les seuils de stabilité sont simplement plus bas (pour une étude théorique et expérimentale de ce problème, voir [60]). À noter que l'absence d'un maillage spécifique de la couche cisailée libre introduit une erreur sur le profil de base laminaire qui rapproche le profil simulé d'un échelon de vitesse, alors que le profil expérimental est plus proche d'un profil exponentiel avec une discontinuité de la dérivée seconde à l'électrode [60].

Couche limite pariétale.

La figure 4.12 montre l'évolution de l'épaisseur de la couche limite pariétale pour de forts courants. La comparaison avec la théorie linéaire montre un écrasement très fort de la couche parallèle (plus fort que les couches axisymétriques du paragraphe 3-3.3 en raison des recirculations associées à chaque structure qui créent un débit radial supplémentaire). L'effet d'écrasement apparaît également sur la figure 4.6.

Par ailleurs, dans le modèle SM82, la couche parallèle pariétale, d'épaisseur proportionnelle à $Ha^{-\frac{1}{2}}$ subit d'importants décollements sous l'action des grosses structures cyclonique qui transitent dans son voisinage. Ces décollements se traduisent par l'apparition d'un jet de vorticité orthogonale à la paroi (dans le référentiel lié à la grosse structure) qui se déstabilise pour provoquer le lâcher d'un tourbillon anticyclonique dans le cœur de l'écoulement. Ce tourbillon est approximativement de circulation opposée à celle du tourbillon qui a provoqué le décollement, ce qui corrobore le mécanisme de décollement décrit par Doligalski *et Al* [52].

Dans les simulations issues de PSM2000, ce phénomène est inhibé dès que les non-linéarités

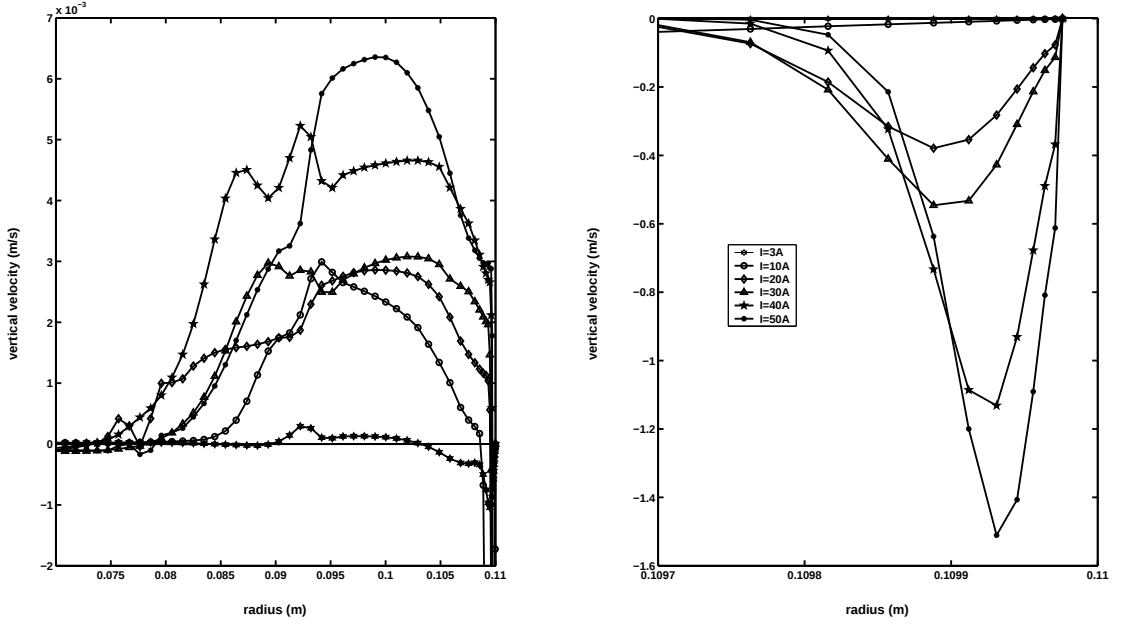


FIG. 4.13 – Profils de vitesse verticale à l’interface de la couche de Hartmann située au fond et du cœur sur la droite $x = 0$, en fonction de l’ordonnée. Hexagammes : $I = 3A$ à $t = 125s$, ronds : $I = 10A$ à $t = 70s$, carrés $I = 20A$ à $t = 60s$, triangles : $I = 30$ à $t = 77s$, pentaèdres : $I = 40A$ à $t = 75s$, croix : $I = 50A$ à $t = 84s$. les courbes à 3, 10 et 30A correspondent aux images de la figure .Une forte éjection de fluide apparaît sur la couronne en mouvement du fait de la rotation globale. Celle-ci est perturbée par la présence de tourbillons qui ajoutent leur circulation d’Ekman propre. Les couches parallèles étant le lieu presque exclusif où le fluide replonge dans les couches, les vitesses verticales y sont extrêmement fortes, et ce, d’autant plus que la couche est fine à fort courant. L’amplitude des vitesses verticales montre également que les effets non linéaires sont intervenient de façon significative dès $10A$.

agissent significativement : celles-ci ont pour effet de comprimer la couche parallèle et donc d’augmenter considérablement la valeur de la vorticité anticyclonique qui y réside. L’influence d’un tourbillon de circulation donnée situé près de la couche est donc considérablement réduite si bien que la couche parallèle décolle d’autant moins facilement qu’elle est écrasée. Pour $I = 3A$, les vitesses azimutales sont faibles si bien que les effets inertiels liés au pompage d’Ekman sont négligeables. Dans ce cas les modèles SM82 et PSM2000 fournissent des résultats assez proches : l’écoulement est complexe et présente de nombreux décollements de couche limite (figure 4.5). Ceux-ci ne conduisent cependant qu’à l’injection de structures anticycloniques de petites dimension (moins de $1cm$) dans l’écoulement. Les faibles vitesses verticales associées à ces structures (typiquement de l’ordre de $1mm s^{-1}$) sont alors inversées par rapport à celles des tourbillons cycloniques : le fluide est injecté dans la couche de Hartmann au centre du vortex et refoulé dans le cœur à l’extérieur.

Par ailleurs, l’utilisation du modèle PSM2000 permet de calculer les vitesses verticales à l’interface entre la couche de Hartmann et le cœur de l’écoulement à partir du champ $\bar{\mathbf{u}}_{\perp}$, en utilisant (3.12). La figure 4.5 montre qu’un écoulement d’Ekman est associé à chaque tourbillon : dans les premières secondes, le fluide aspiré dans le cœur est réinjecté dans les couches de Hartmann à la périphérie du vortex (tâches bleues) ; puis, au fur et à mesure que l’écoulement s’organise, les tourbillons sont étirés azimutalement par effet non-linéaire si bien qu’aucun espace ne subsiste entre deux tourbillons consécutifs. La réinjection de fluide dans les couches de Hartmann est alors transférée dans la couche parallèle pariétale où elle s’ajoute au débit déjà induit par la rotation globale de l’écoulement, comme le montrent les profils radiaux de vitesse verticale. Plus la rotation est rapide, plus le débit recirculant est important, et plus la surface dont il dispose pour reboucler dans les couches de Hartmann est réduite (la surface couverte par la couche parallèle pariétale s’amenuise aux forts courants). Ceci explique les très fortes valeurs de la vitesse verticale dans ces couches (figure 4.13).

4.1.7 Spectres "turbulents".

L'action du terme non-linéaire n'affecte pas directement le terme d'advection horizontale, qui contrôle les interactions entre tourbillons et les transports spectraux d'énergie. En fait, une interprétation en termes de vecteurs d'onde impliquerait l'interaction de trois structures, fortement improbable, et ce d'autant plus que les écoulements étudiés dans ce paragraphe se distinguent justement par leur faible nombre de structures. En revanche, des écarts émergent du fait des différences macroscopiques entre les résultats prévus par les deux modèles à I et B donnés.

Les densités spectrales d'énergie (spectres spatiaux de la figure 4.14, spectres temporels de la figure 4.16) à $I = 30A$ issus des modèles SM82 et PSM2000 exhibent une pente en $-\frac{5}{3}$ pour les plus petites échelles (structures d'une taille de l'ordre du centimètre), un fort pic qui correspond à la taille du réservoir ainsi que d'autres un peu plus petits pour les structures de quelques centimètres, qui correspondent aux grosses structures observées. Quand le courant augmente, ce pic correspond à des structures de plus en plus petites, ce qui corrobore les observations expérimentales de [58]. La raison en est que pour de plus faibles courants, les effets inertiels agissent sur un temps plus long (par rapport au temps t_H) l'écoulement a donc le temps de se rapprocher de son état asymptotique constitué de structures toujours plus grosses. Les spectres à issus du modèle PSM2000 présentent des énergies plus basses en raison de la forte dissipation globale due au freinage par les couches parallèles écrasées par les effets non-linéaires. En outre, les spectres issus de SM82 sont également un peu plus bruités en raison de la plus grande complexité de l'écoulement (durée de vie des structures plus faible, phénomènes de décollement de la couche limite pariétale, éliminés par les effets non-linéaires dans le modèle PSM2000).

Ces mécanismes induisent également des variations des spectres en fonction du rayon : pour les très forts courants ($I = 50A$, figure 4.16), les pentes sont plus fortes à l'intérieur du cercle électrodes (-3) qu'à l'extérieur ($-\frac{5}{3}$) où les vitesses sont beaucoup plus élevées et les effets inertiels plus importants. Ce phénomène est plus sensible dans les résultats des simulations du modèle PSM2000 en raison du fait que le modèle SM82 prévoit une vitesse (et donc une inertie) excessive à l'intérieur du cercle électrodes (voir paragraphe suivant et figure 4.6). En outre, les spectres à l'intérieur des électrodes correspondent à des vitesses très faibles et ne présentent plus de pics caractéristiques du passage des tourbillons.

À plus faible courant, ($I = 3A$, $I = 10A$), de plus fortes pentes font leur apparition (-3), comme constaté expérimentalement par [58] (figure 4.15). L'explication proposée pour ces deux types de pentes est la suivante : à l'état quasi-stationnaire, il y a équilibre pour chaque nombre d'onde k entre transfert inertiel local (d'échelle de temps $(kU)^{-1}$) et dissipation par freinage de Hartmann d'échelle de temps t_H . Si t_H est petit devant $(kU)^{-1}$, chaque structure subit un important freinage de Hartmann et dissipe beaucoup d'énergie, ce qui conduit aux spectres en $-\frac{5}{3}$. Si au contraire, t_H est grand devant un temps de retournement, l'énergie est conservée, tandis que l'enstrophie est dissipée, ce qui conduit à un spectre en -3 [53].

4.2 Étude numérique des tourbillons Isolés.

4.2.1 Dispositif expérimental de référence (Sommeria 1988).

L'expérience de Sommeria [56] est très similaire au dispositif MATUR décrit au paragraphe précédent, à ceci près que la surface de mercure est libre et propre (il n'y a donc qu'une seule couche de Hartmann, au fond de l'écoulement $n = 1$) et que la totalité du courant électrique est injectée par une électrode centrale de diamètre $2b = 2.5mm$ située au fond du réservoir. Le diamètre de ce dernier est de $12cm$ et la hauteur de fluide, de $19.2mm$. (voir figure 4.17). Les simulations numériques sont effectuées sur un maillage homothétique de celui de la figure 4.2. et le forçage correspond à l'expression (4.1) avec $r_e = b$. Celui-ci est appliqué à $t = 0$ sur l'écoulement au repos si bien qu'un tourbillon de la taille du réservoir apparaît et donne lieu à une couche parallèle visqueuse sur la

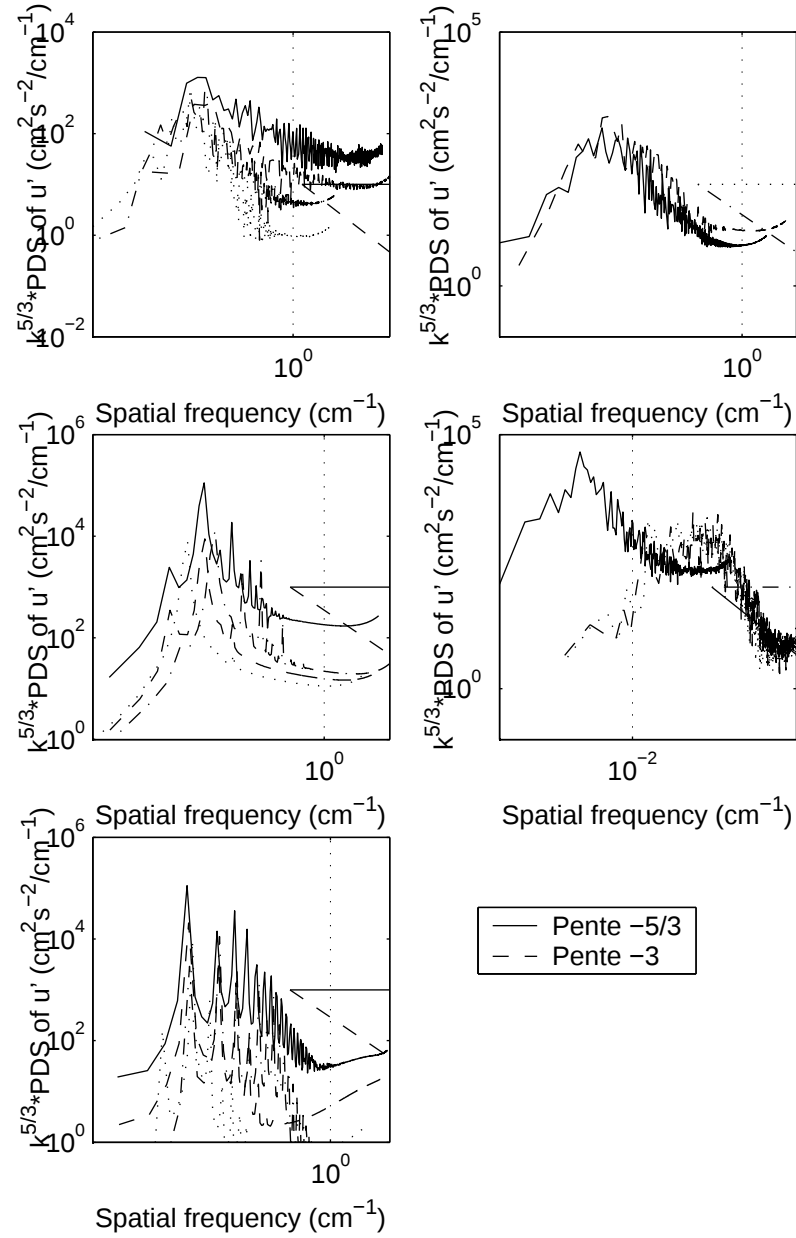


FIG. 4.14 – Densité spatiale de puissance des fluctuations de vitesse azimutale à l'état quasi-stationnaire à $B = 0.17T$ et $r = 93mm$ de haut en bas de gauche à droite : $I = 3A$ (PSM), $I = 10A$ (PSM), $I = 20A$ (PSM), $I = 30A$ (PSM), $I = 30A$ (SM).

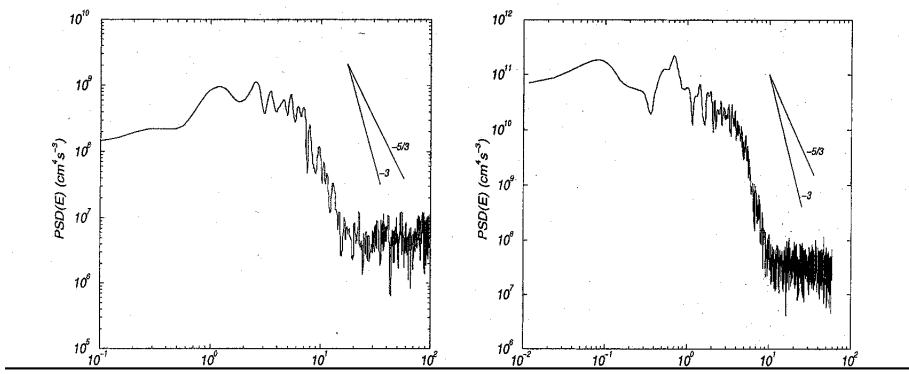


FIG. 4.15 – Densité spatiale de puissance obtenues à partir des mesures expérimentales à $r = 96mm$ et $B = 0.17T$ pour $I = 3A$ (à gauche), $I = 20A$ (à droite).

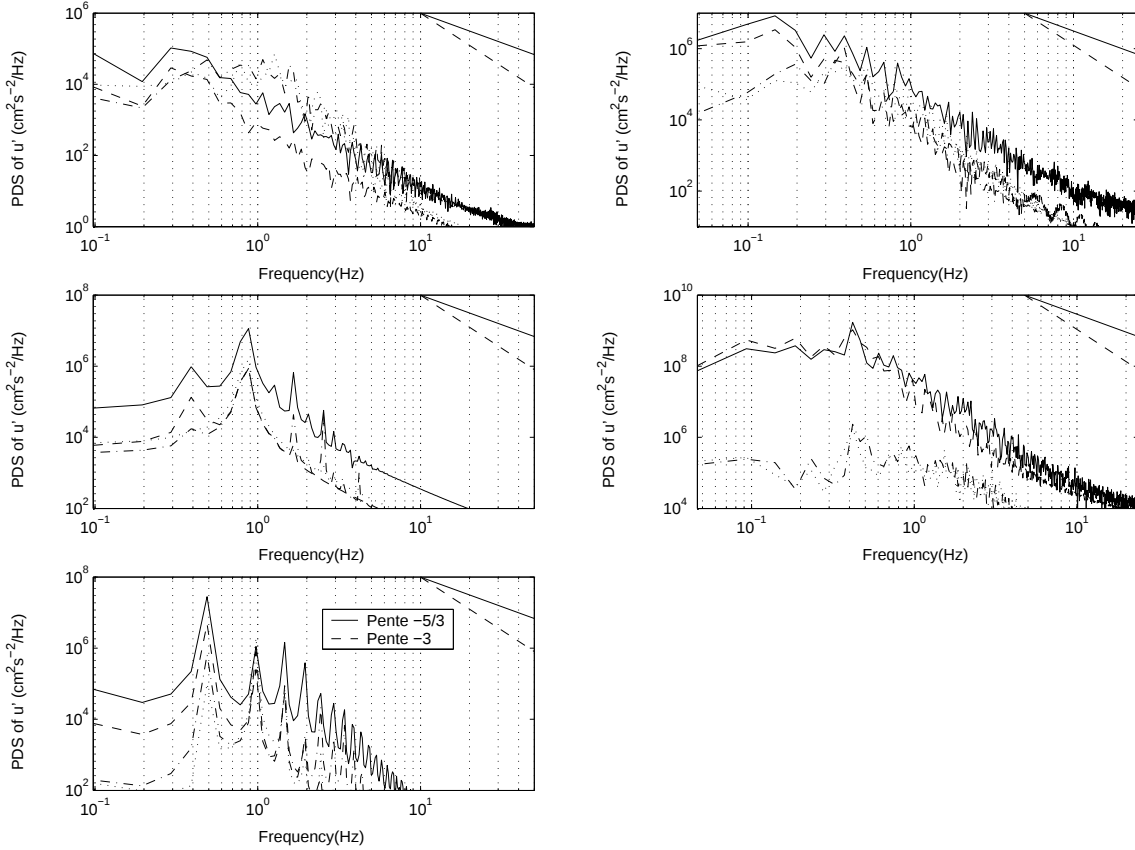


FIG. 4.16 – Densité spatiale de puissance des fluctuations de vitesse azimutale à l'état quasi-stationnaire à $B = 0.17T$. de haut en bas de gauche à droite : $I = 3A$ (PSM), $I = 10A$ (PSM), $I = 20A$ (PSM), $I = 30A$ (PSM), $I = 30A$ (SM), $I = 50A$ (PSM2000). Par ordre croissant des valeurs, les différents spectres d'une même figure correspondent à $r = 108mm$, $r = 93mm$, $r = 79mm$, $r = 6.4mm$.

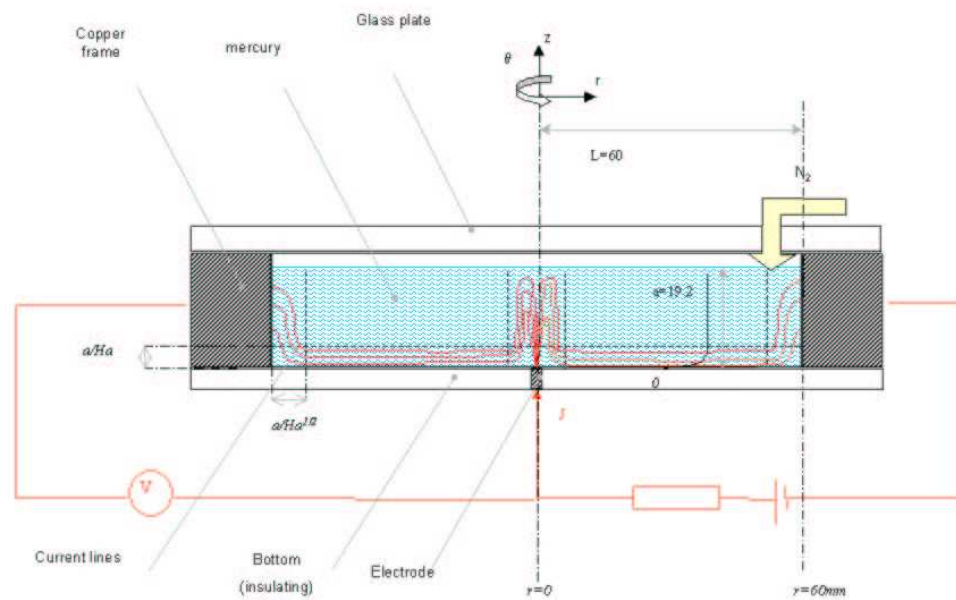


FIG. 4.17 – Coupe radiale du dispositif expérimental de Sommeria (1988) pour l'étude des tourbillons isolés : Coupe radiale du réservoir cylindrique et représentation des dispositifs d'alimentation en courant électrique et de mesure du potentiel électrique. Les longueurs sont indiquées en *mm*.

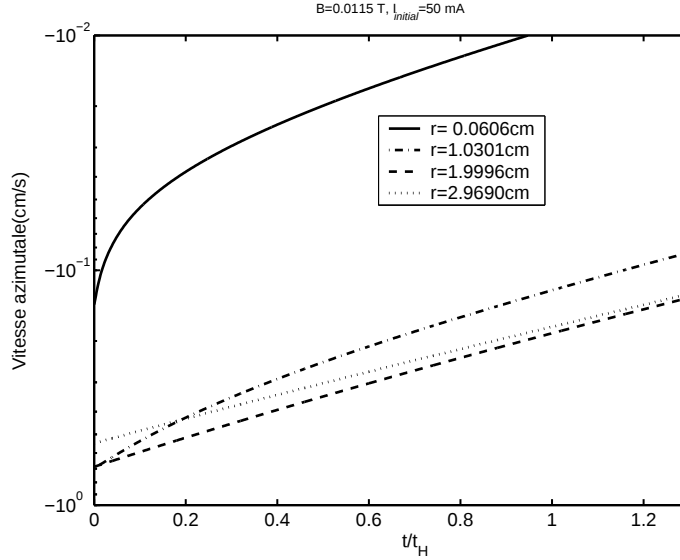


FIG. 4.18 – Évolution des vitesses azimutales après coupure du forçage pour différents rayons à $B = 0.115T$ et $I_{initial} = 0.05A$.

paroi latérale. Dans les gammes de champ magnétique (de $B = 0.005T$ à $B = 0.5T$) et de courant considérée ($I = 0.05A$ à $I = 0.2A$), l'écoulement est laminaire. Les profils de vitesse et de moment cinétiques moyens sont mesurés après la phase transitoire. Après une longue phase stationnaire, le forçage est coupé et l'écoulement s'amortit progressivement par frottement sur le fond (freinage de Hartmann) et sur la paroi latérale.

4.2.2 Décroissance libre.

La figure 4.19 montre dans les premiers instants ($t < \frac{t_H}{2}$), que la vitesse azimutale près du centre du vortex décroît rapidement. puis le temps caractéristique de décroissance se stabilise autour de t_H (à environ 3% près). Dans le même temps, le frottement total à la paroi axisymétrique décroît rapidement sur une période de t_H pour finalement se stabiliser autour de $0.9t_H$. La décroissance rapide aux premiers instants, moins sensible pour les faibles courants et forts champs magnétiques s'explique aisément par la présence de recirculations d'Ekman induites par la rotation : celles-ci évacuent le moment cinétique vers l'extérieur du vortex, jusqu'à la couche limite pariétale où il est dissipé, comme expliqué au paragraphe 3-3.3. Alors que la vitesse diminue, ce phénomène de recirculation est rapidement amorti, et la décroissance se rapproche du taux de décroissance de $\frac{1}{t_H}$ prévu par le modèle SM82. Dans les premiers instants, le frottement à la paroi est important du fait de l'écrasement de la couche limite pariétale provoqué par le flux radial associé au pompage d'Ekman. Alors que celui-ci décroît, la couche retrouve une épaisseur de couche parallèle classique de $aHa^{-\frac{1}{2}}$ et le frottement associé devient négligeable devant le freinage de Hartmann.

La décroissance de l'enstrophie totale de l'écoulement présente la même allure que celle du frottement à la paroi : la raison en est qu'une importante quantité de vorticité négative est concentrée dans la couche limite et au centre du vortex, et que cette quantité est réduite avec l'étalement de cette la couche.

Les temps de décroissance de l'énergie et de l'enstrophie se stabilisent autour de $\frac{t_H}{2}$.

Les vitesses situées à grande distance (plus de $2cm$) du centre de rotation sont beaucoup moins affectées par la présence ou non de la recirculation, plus forte au centre. ceci explique que leur taux de décroissance ne varie quasiment pas dans le temps et reste proche des valeurs prévues par la théorie linéaire.

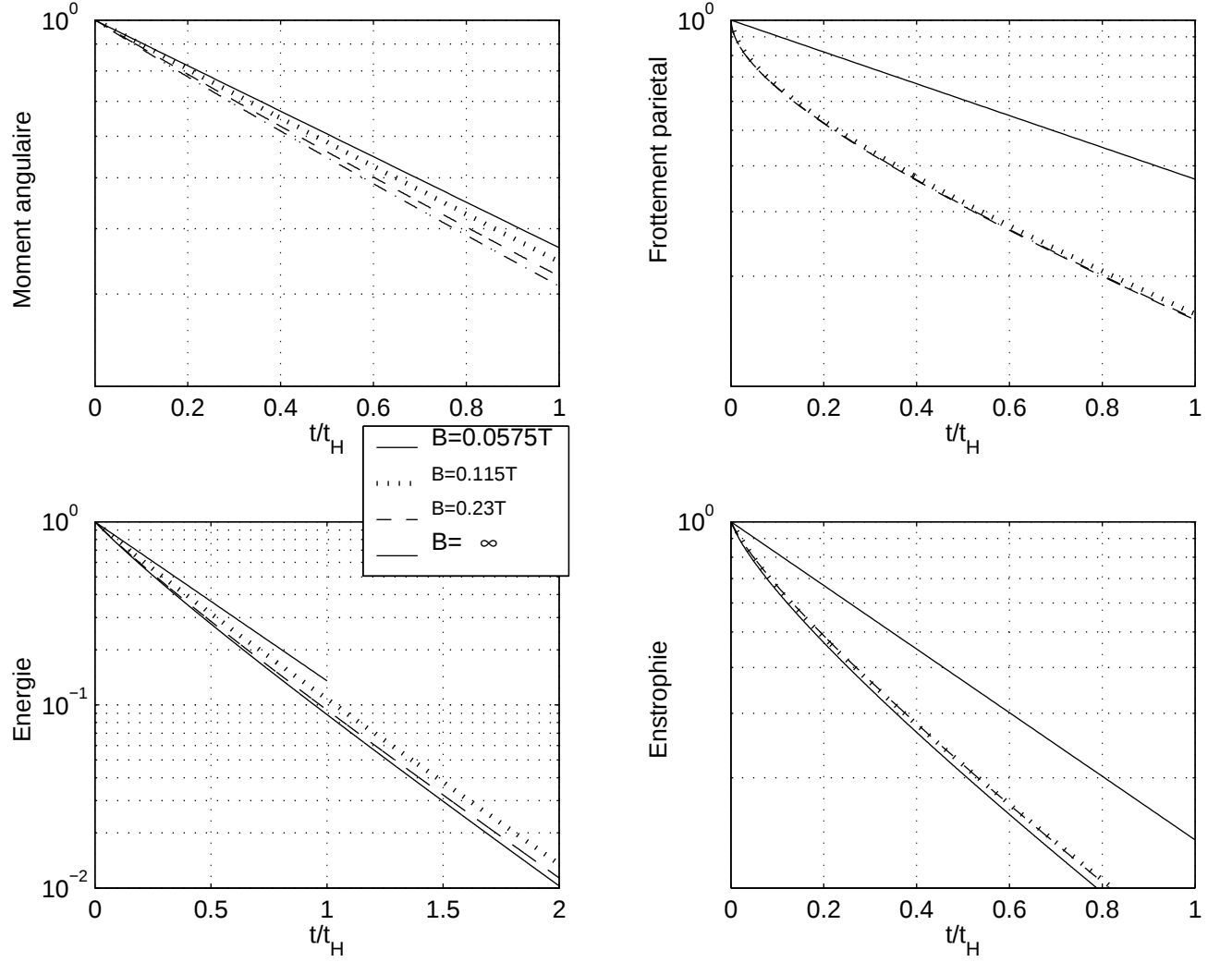


FIG. 4.19 – Évolution des grandeurs intégrales à partir de la coupure du forçage. Chaque grandeur est normalisée par sa valeur à l'état de quasi-équilibre avant la coupure du forçage. Le temps est normalisé par le temps de freinage de Hartmann associé à chaque cas.

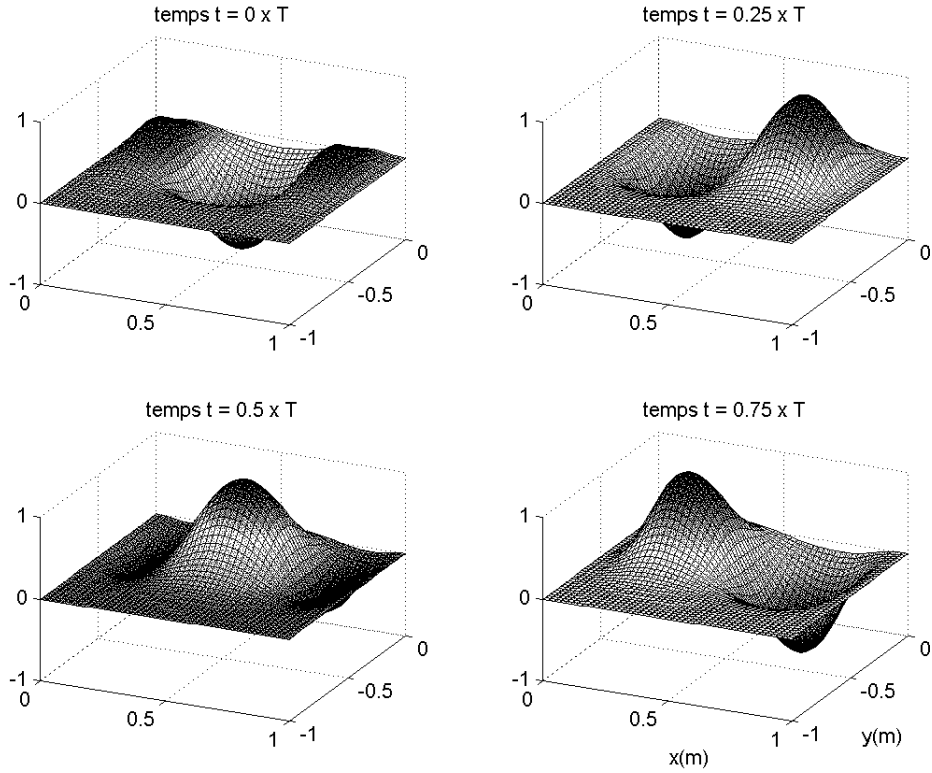


FIG. 4.20 – Valeur du champ magnétique appliqué sur l'écoulement en fonction du temps.

4.3 Contrôle d'un écoulement d'acier par champ glissant.

Dans ce paragraphe, le modèle 2D linéaire pour les écoulements plans sous champ magnétique et instationnaire est utilisé pour modéliser un écoulement de brame d'acier. Lors de l'élaboration de l'acier par un procédé de coulée continue [61], l'acier liquide est injecté dans le moule au moyen d'une busette, ce qui provoque des recirculations qui, en arrachant des impuretés à la surface libre, peuvent conduire à la présence de défauts dans le produit fini. Pour contrôler ce phénomène, les sociétés N.K.K. et ROTELC commercialisent un dispositif qui génère un champ magnétique transverse au plan de l'écoulement et qui oscille dans l'espace et dans le temps (à des fréquences de l'ordre du Hz), de sorte qu'une vague de champ magnétique se déplace suivant la direction du jet par lequel est injecté le fluide. Le but de la présente simulation est de savoir dans quelle mesure ce procédé permet d'accélérer ou de réduire la vitesse de ce jet. Le modèle présenté ici est un cas d'école qui repose sur un écoulement simplifié (en particulier l'influence de la géométrie de la busette est laissée de côté). La géométrie choisie est celle d'un rectangle dont les cotés gauche et droit sont des parois isolantes, le côté supérieur correspond à une surface libre indéformable. Une condition de conservation du débit global est appliquée à la paroi $y = -1$ par lequel le fluide est évacué. Le fluide est injecté par la busette située en haut à gauche sur la figure 4.21. Le champ magnétique est appliqué dans la direction Oz et oscille dans le temps et l'espace comme indiqué sur la figure 4.20 :

Le maillage (figure 4.21) est déstructuré et constitué d'éléments triangulaires de $5mm$ de côté en moyenne. Les équations sont résolues en utilisant un code très simple développé par ROTELC qui présente l'avantage de fonctionner sous l'environnement de MATLAB. La formulation de base est du type $\omega - \psi$: L'équation du tourbillon est résolue par le solveur non-linéaire de MATLAB 5.3 en utilisant la vitesse déduite des valeurs de ψ calculées au pas de temps précédent. Les conditions aux limites pour ω sont elles aussi déduites de ψ calculées au pas de temps précédent par un schéma

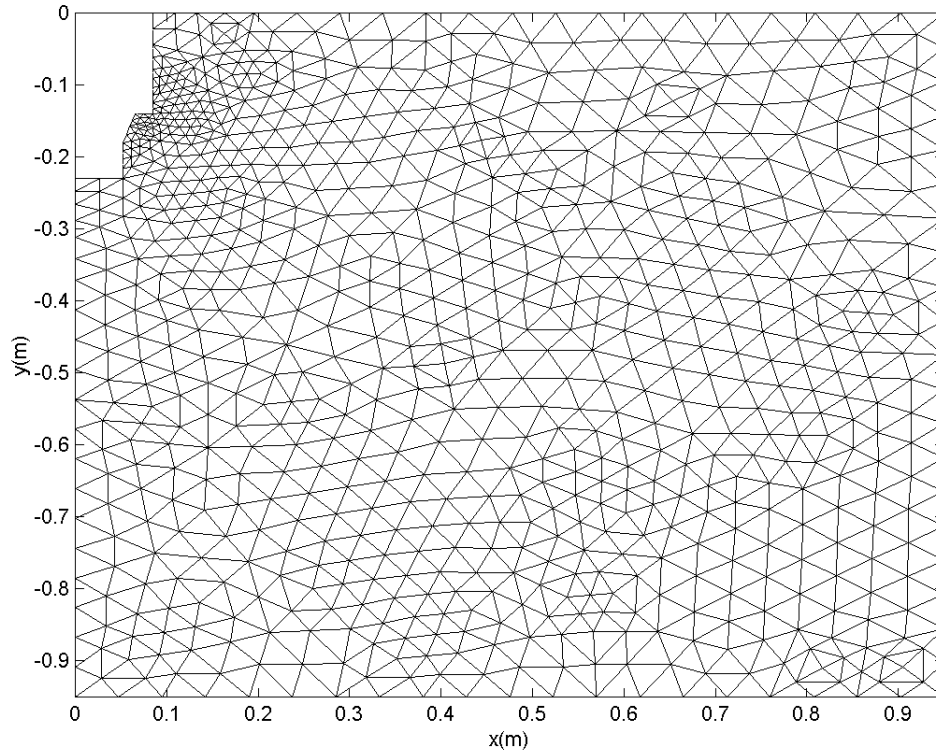


FIG. 4.21 – Maillage de la lingotière.

de Thom. La discrétisation temporelle est du premier ordre, ce qui oblige à choisir un pas de temps correspondant à des valeurs du nombre de Courant inférieures à 1. À noter que cette méthode numérique a fait l'objet d'une validation satisfaisante sur le cas classique de la cavité entraînée sans champ magnétique.

À l'état initial, l'écoulement correspond à la solution plane hydrodynamique sans force supplémentaire. Puis le champ magnétique est appliqué jusqu'à atteindre un état quasi stationnaire. La figure 4.22 montre les lignes de courants au quasi-équilibre dans le cas où l'écoulement est freiné (resp. accéléré). Tout en conservant un allure semblable à celle du cas sans force (figure 4.22), les vitesses sont significativement réduites et le jet est dévié. En particulier, les vitesses de surface chutent (resp. augmentent), ce qui est le but recherché. Il est donc possible de contrôler l'écoulement dans les lingotières par application d'un champ magnétique glissant.

4.4 Étude du Spin-Up et du Spin-Down d'un bassin en rotation.

4.4.1 Description du problème.

Dans ce paragraphe nous étudions les effets de transport liés au transport radial de moment cinétique lors d'une accélération (resp. décélération) de la vitesse de rotation d'un fluide en rotation rapide (spin up (resp. spin down.)). Nous reproduisons la configuration la plate-forme CORIOLIS à Grenoble afin d'établir la comparaison avec de futures mesures. Cette dernière est constituée d'un bassin circulaire horizontal de 13m de diamètre qui peut être rempli d'une hauteur d'eau variable (ici de 0.4m à 1m) et entraîné en rotation autour d'un axe perpendiculaire au fond plan du bassin et passant par son centre.

À l'état initial, le fluide est au repos dans le référentiel du bassin en rotation à la vitesse constante

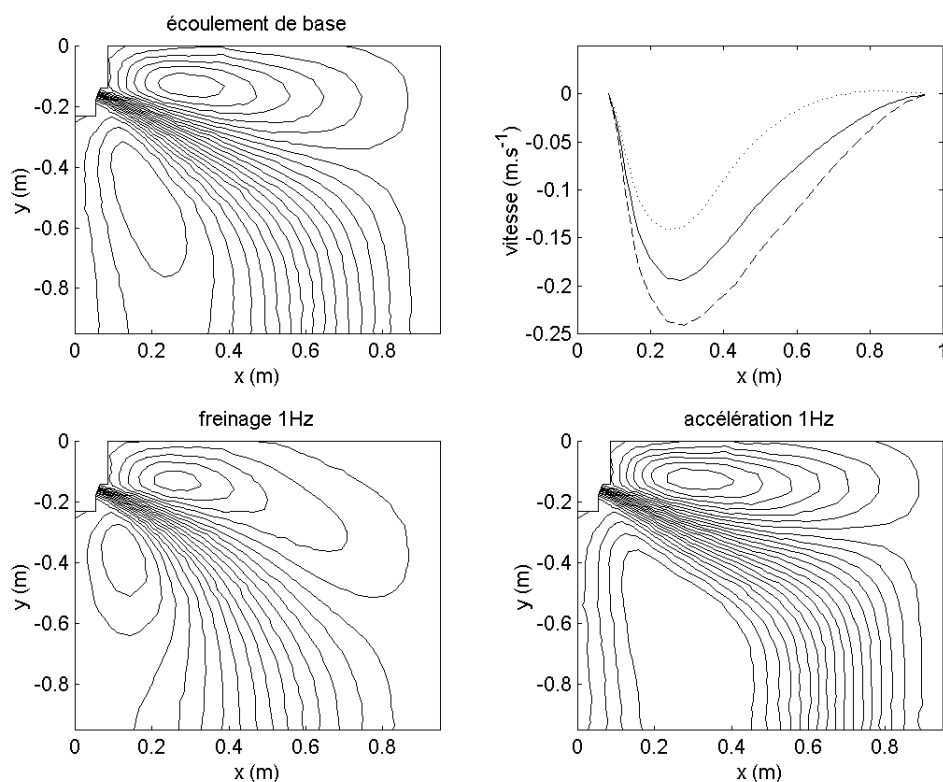


FIG. 4.22 – Lignes de courant de l'écoulement initial sans force (en haut à gauche), avec une force électromagnétique qui tend à freiner l'écoulement (en bas à gauche), et à l'accélérer (en bas à droite). Profils de vitesse à la surface libre pour ces trois cas (en haut à droite) : pointillés : champ glissant dans le sens du jet, ligne interrompue : dans le sens opposé, ligne pleine : sans force.

Ω_i . Cette dernière est alors portée à une valeur Ω_f en un temps Δt très court (quelques dizaines de secondes) devant le temps d'Ekman (de l'ordre de $1h$ dans les cas considérés) puis à nouveau stabilisée à Ω_f jusqu'à la fin de l'expérience. Le fluide subit donc une accélération azimutale pendant Δt qui le met en mouvement, ce qui provoque l'apparition d'une couche d'Ekman au fond du bassin et d'une couche parallèle sur le bord circulaire. Quand la vitesse est stabilisée l'écoulement est amorti par frottement d'Ekman sur le fond.

4.4.2 Étude numérique des couches parallèles.

La modélisation numérique du problème est faite sous FLUENT à partir de l'équation (3.36). Le maillage de la figure 4.2 est agrandi pour reproduire les dimensions du bassin. Le terme non linéaire $\omega \mathbf{v}$ est traité de façon semi-explicite (ω est évalué au pas de temps précédent).

La figure 4.23 des profils obtenus par la simulation du modèle (3.36) et des simulations du modèle (3.36) dont le terme non linéaire a été négligé. Les simulations du modèle non-linéaire montrent que la couche parallèle est plus épaisse dans le cas d'un spin-down que dans le cas d'un spin-up, alors que le modèle linéaire prévoit des couches symétriques. En outre le profil radial de vitesse azimutale est une fonction linéaire du rayon dans ce dernier cas alors que la théorie non-linéaire prévoit un profil creusé (resp. bombé) pour le spin up (resp. spin-down) avec une légère bosse à sur la partie externe du profil de couche limite. Ces phénomènes d'écrasement et de d'élargissement de la couche limite sont le fait du transport radial de moment cinétique : en effet, pour un spin up, la vitesse tourne dans le sens opposé à la rotation globale. Le terme $\mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{u}}_\perp$ du profil d'Ekman (1.60) provoque donc un jet centrifuge dans la couche d'Ekman (par un mécanisme de pompage d'Ekman). Celui-ci induit donc par continuité un jet centripète $E^{\frac{1}{2}}$ moins fort dans le cœur de l'écoulement. Les vitesses azimutales étant plus fortes dans le cœur que dans la couche d'Ekman, le transport de moment cinétique associé à la somme de ces deux jets est centripète. Il tend à déplacer les vitesses faibles de la couche parallèle vers le cœur de l'écoulement, ce qui provoque l'étalement de cette dernière. À l'extérieur de la couche parallèle, la vitesse augmente avec le rayon : ce même transport explique donc la légère convexité du profil de vitesse à cet endroit. Le mécanisme qui provoque la déformation du profil radial de vitesse pour un spin down est le même.

Dans ce problème précis, les vortex anticycloniques sont amplifiés et concentrés alors que les vortex cycloniques sont amortis par étalement par le mécanisme décrit ci-dessus. Signalons simplement que la couche associée à un spin-up (resp. spin down) correspond à une forte quantité de vorticité cyclonique (resp. anticyclonique) : son écrasement (resp. étalement) par effet inertiel amplifie (amortit) cette vorticité. Dans les deux cas, la vorticité qui apparaît à l'extérieur la couche limite du fait du transport radial est cyclonique¹.

Ces phénomène reste cependant d'amplitude modérée par rapport à ceux observé dans l'étude numérique du cas MATUR où les vitesses de rotation atteignent 5 rad.s^{-1} . En effet, l'écrasement de la couche parallèle provoqué par les recirculations secondaires n'est pas suffisant pour que le freinage induit par cette dernière devienne comparable au freinage d'Ekman. La figure 4.24 montre en effet que les temps de décroissance du moment cinétique global restent de l'ordre de t_E . dans tous les cas étudiés. Ceci confirme aussi la constatation faite au paragraphe 4-2 selon laquelle les écoulement secondaires provoquent des effets locaux bien avant d'altérer les grandeurs intégrales.

¹A noter que d'autres phénomènes peuvent inverser ce résultat dans des configurations différentes : par exemple, dans le cas d'un écoulement compressible (comme dans les disques d'accrétion planétaires), les jets $\mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{u}}_\perp$ de la couche d'Ekman ne sont pas forcément compensés par un jet opposé dans le coeur et peuvent piloter l'étalement ou l'écrasement du centre du vortex.

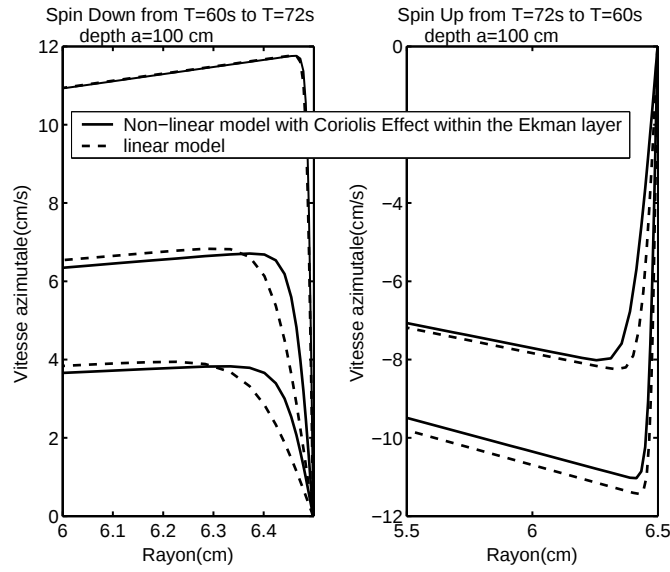


FIG. 4.23 – Simulations numériques d'un problème de spin-down (à gauche, pour à $t = 1$ min, $t = 30$ min, et $t = 30$ min) et de spin-up (à droite pour $t = 4$ min $t = 20$ min).

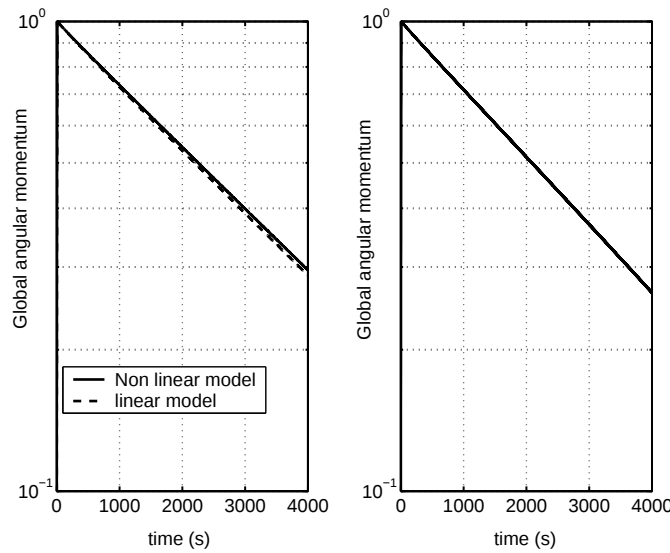


FIG. 4.24 – Évolution du moment cinétique global au cours d'un Spin-down (à gauche) et d'un Spin-up (à droite). Chaque grandeur est normalisée par sa valeur maximum au cours du changement de vitesse de rotation.

Conclusion 4 *La comparaison détaillée des résultats numériques du modèle PSM2000 avec, d'une part les résultats de l'expérience MATUR, et d'autre part les simulations du modèle SM82, montrent que le nouveau modèle est très réaliste tant que la couche de Hartmann reste laminaire, cas dans lequel il fournit des données quantitativement fiables. L'effet "régularisant" du terme non-linéaire intervient dès les faibles vitesses en allongeant les tourbillons. Cependant les grandeurs intégrales ne sont affectées que quand la couche parallèle pariétale est très écrasée et provoque une forte dissipation. Il en va de même des expériences de Spin-Up et Spin-Down : la largeur des couches parallèle est modifiée, mais l'effet n'est pas suffisamment important devant le freinage d'Ekman pour altérer le temps caractéristique de décroissance. Il apparaît également que les recirculations d'Ekman constituent un mécanisme par lequel la vorticité cyclonique est amortie tandis que la vorticité anticyclonique est amplifiée. Finalement, l'utilisation du modèle d'écoulements MHD sous champ variable met en évidence la possibilité de contrôler un écoulement d'acier liquide par l'application d'un champ glissant.*

Conclusion

Les travaux entrepris au cours de ces trois années de thèse s'organisent en trois étapes : étude physique, modèle et application. En premier lieu, la réflexion menée à la fois sur les phénomènes physiques qui interviennent en MHD sous champ imposé et dans les écoulements tournants a permis de recenser les mécanismes de base généraux de la dynamique de ces couches, et en particulier d'insister sur le rôle primordial des couches perpendiculaires et la forte tendance à la bidimensionnalité de zones de coeur. En complément de ces points déjà bien connus, l'étude de phénomènes supplémentaires a permis de clarifier quelques idées générales. Ainsi, le mécanisme de l'*effet tonneau*, qui introduit une faible tridimensionnalité dans les zones de coeur des écoulements quasi-2D illustre-t-il le fait que la bidimensionnalité n'intervient que quand le couplage entre les vitesses d'un même plan horizontal est négligeable devant celui qui intervient entre les plans horizontaux eux-mêmes. En conséquence, si une force (respectivement de Laplace ou de Coriolis) contraint fortement les écoulements dans ces plans, elle leur impose une dynamique commune qui uniformise la dépendance verticale du potentiel électrique ou de la pression selon le cas. Les courants électriques verticaux (resp. les vitesses verticales) sont donc bloqués et l'écoulement est 2D. Si en revanche, chaque point subit l'influence de son voisinage dans le plan horizontal (par inertie ou frottement visqueux) le potentiel électrique (resp. la pression) peut dépendre de la verticale et induire des bouclages (resp. des débits) entre les plans horizontaux. La somme de ces boucles de courant provoque un courant (une vitesse) vertical(e) global(e) qui ne peut être alimenté(e) que par les couches perpendiculaires, lesquelles sont alors le lieu de jets qui altèrent leur profil de base. Une fois ce mécanisme général compris, beaucoup de ses implications restent à éclaircir : dans quelle mesure l'effet tonneau MHD peut-il décrire la dynamique des couches parallèles ? Dans quel mesure correspond-t-il aux mécanismes de bidimensionnalisation sous fort champ magnétique proposé par Davidson [62] ? D'une manière générale, quel est son rôle au cours des écoulements de transition : retour à la tridimensionnalité, extinction du champ, entrée d'une zone de champ ? Une étude systématique est également envisageable.

L'Etude de la dynamique des couches de Hartmann a également permis de proposer quelques outils pour appréhender ces dernières dans des situations diverses. Par exemple, sous l'influence d'un champ incliné, ou à proximité d'une paroi conductrice, elles subissent le mécanisme général cité précédemment et imposent une tridimensionnalité à l'écoulement de coeur dès le voisinage de la paroi. Dans tous les cas, la faible épaisseur et le caractère déterminant de ces types de couches montre clairement l'intérêt de substituer un modèle analytique à leur très lourde et imprécise simulation directe. Les lois de parois déduites de leur analyse (au chapitre 2) restent à implanter dans des codes de calculs existants, afin de s'assurer de leur efficacité. En outre, cette méthode de modélisation des couches limites est clairement extensible aux cas des couches combinées où interviennent à la fois rotation et champ magnétique. De tels résultats pourraient d'ailleurs s'avérer utiles à la modélisation des écoulements géophysiques, par exemple.

Les modèles 2D effectifs constituent l'autre bénéfice majeur de l'étude de ces mécanismes généraux. Par rapport aux équations complètes, il présentent l'avantage de leur grande simplicité, à la fois par leur expression (les modèles MHD réduisent, voire éliminent le problème électromagnétique), et par

leur facilité de mise en oeuvre. En outre, par construction, ce type de modèle repose exclusivement sur des hypothèses physiques, à l'exclusion de tout paramètre arbitraire. La validité de chaque modèle est déterminée par les valeurs des nombres adimensionnels qui caractérisent l'écoulement décrit. Dans les trois cas testés, ces modèles se sont révélés probants : le modèle PSM2000 offre une comparaison quantitative très satisfaisante avec les mesures effectuées sur le dispositif MATUR. Il faudrait désormais l'appliquer à d'autres cas, afin d'évaluer ses prévisions pour le transport d'un scalaire passif tel que la température. Là encore, l'expérience MATUR fournit de nombreux éléments de comparaison. Une question fondamentale reste cependant ouverte quand à la nouvelle équation du mouvement introduite par ce modèle : le terme de transport supplémentaire est-il globalement dissipatif, sachant qu'il peut localement produire de l'énergie, comme au centre d'un tourbillon ? Quant à la phénoménologie de l'expérience MATUR elle présente encore quelques secteurs inexplorés : une étude précise de la déstabilisation de la couche cisailée libre reste également à entreprendre. Cependant, quand la couche de Hartmann devient turbulente, le modèle devient impropre. La construction d'un modèle reposant sur le profil de couche de Hartmann d'Alboussière & Lingwood [63] est alors nécessaire.

Les simulations du modèle quasi-géostrophique avec effet Coriolis dans les couches d'Ekman ont permis de dégager une tendance générale du comportement des couches parallèles axisymétriques. Cette tendance reste à confirmer par des mesures expérimentales. Enfin, les résultats encourageants obtenus par l'application du modèle MHD au contrôle électromagnétique d'écoulements d'acier liquide insistent sur le côté pratique de ces modèles effectifs 2D, qui permettent d'obtenir facilement des résultats exploitables. Leur extension à d'autres cas reste ainsi à développer : ainsi, le cas des écoulements convectifs est-il encore intact de ce point de vue.

Annexe A

Quelques propriétés du modèle PSM2000

A.1 Équation du tourbillon.

Dans ce paragraphe, nous établissons l'équation satisfaite par la vorticité moyennée selon la verticale $\bar{\omega}$ pour le modèle (3.14). Cette équation est obtenue en prenant le rotationnel de (3.14), ce qui nécessite l'expression de $\nabla_{\perp} \times \mathcal{D}_{\mathbf{v}} \mathbf{F}$ avec $\mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}$.

Le terme non linéaire s'écrit :

$$\mathcal{D}_{\mathbf{v}} \mathbf{F} = \nabla_{\perp} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) - \mathbf{v} \times \nabla_{\perp} \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla_{\perp} \times \mathbf{v} \quad (\text{A.1})$$

en utilisant $\nabla_{\perp} \cdot \omega \mathbf{e}_z = 0$, il vient :

$$\nabla_{\perp} \times \mathcal{D}_{\mathbf{v}} \mathbf{F} = -2\mathbf{F} \cdot \nabla_{\perp} \omega + \omega \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{F}. \quad (\text{A.2})$$

si bien que finalement le modèle 2d effectif pour la vorticité moyenne s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{N} \frac{d\omega}{dt'} = & \frac{\lambda^2}{Ha^2} \Delta_{\perp} \omega + \frac{1}{Ha} (\omega_0 - n\alpha\omega) \\ & + \frac{7}{36} \frac{n\lambda^2}{HaN^2} (-2[\mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}] \cdot \nabla_{\perp} \omega + \omega \nabla_{\perp} \cdot [\mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}]) + \frac{1}{8} \frac{n\lambda^2}{HaN^2} \partial_{t'} \mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \omega \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Les termes supplémentaires traduisent la présence des écoulements secondaires : les termes dus au pompage d'Ekman dans les couches de Hartmann étant respectivement proportionnels à $\mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}$ et $\partial_{t'} \mathbf{v}$, les termes en $[\mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}] \cdot \nabla_{\perp} \omega$ et $\partial_{t'} \mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \omega$ de (A.3) représentent la vorticité totale transportée au point (x, y) par ces recirculations. La théorie inertielle de la couche de Hartmann prévoit également une vitesse verticale à l'interface coeur-couche proportionnelle à $\nabla_{\perp} \cdot [\mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}]$. Le terme en $\omega \nabla_{\perp} \cdot [\mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}]$ représente la source de vorticité associée à cette vitesse.

A.2 Effets du terme non linéaire sur une tache de vorticité.

Dans ce paragraphe, nous cherchons les effets du terme non linéaire de (A.3) sur une tache de vorticité représentée par un extremum localisé en (x_0, y_0) du champ de vorticité :

$$\partial_x \omega(x_0, y_0) = \partial_y \omega(x_0, y_0) = 0 \quad (\text{A.4a})$$

$$\partial_{xx}^2 \omega(x_0, y_0) < 0, \partial_{xy}^2 \omega(x_0, y_0) < 0, \partial_{yy}^2 \omega(x_0, y_0) < 0. \quad (\text{A.4b})$$

La tache de vorticité est de plus supposée transportée par un écoulement moyen de vitesse $V\mathbf{e}_x$ supposée grande devant les variations de vitesse à l'échelle de la tache, soit :

$$\mathbf{v} = V\mathbf{e}_x + \mathbf{v}'(x, y) \quad (\text{A.5a})$$

$$\partial_x V(x, y) = \partial_y V(x, y) = 0 \quad (\text{A.5b})$$

$$\|\mathbf{v}'(x, y)\| \ll V \quad (\text{A.5c})$$

la vitesse $\mathbf{v}'(x, y)$ vérifie donc la conservation de la masse :

$$\nabla_\perp \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (\text{A.6})$$

A l'extremum (A.4a), les effets de transport par les recirculations d'Ekman sont annulées :

$$-2[\mathbf{v} \cdot \nabla_\perp \mathbf{v}] \cdot \nabla_\perp \omega(x_0, y_0) = 0 \quad (\text{A.7a})$$

$$\partial_{t'} \mathbf{v} \cdot \nabla_\perp \omega(x_0, y_0) = 0, \quad (\text{A.7b})$$

de sorte que seul le terme $\omega \nabla_\perp \cdot [\mathbf{v} \cdot \nabla_\perp \mathbf{v}](x_0, y_0)$ agit. En développant ce dernier en fonction des dérivées de ω et de $\mathbf{v}'$ et en utilisant (A.4a), (A.5b) et (A.6) il vient :

$$\omega \nabla_\perp \cdot [\mathbf{v} \cdot \nabla_\perp \mathbf{v}](x_0, y_0) = 2V^2 \partial_{xx}^2 \omega + \omega \left[2(\partial_x u'_x)^2 + (\partial_x u'_y)^2 + (\partial_y u'_x)^2 - \omega^2 \right]. \quad (\text{A.8})$$

La condition (A.5c) montre que le premier terme du membre de droite de (A.8) est grand devant le second pour des valeurs de V suffisamment élevées, ce qui permet l'approximation $\omega \nabla_\perp \cdot [\mathbf{v} \cdot \nabla_\perp \mathbf{v}](x_0, y_0) \simeq 2V^2 \partial_{xx}^2 \omega$. Il apparaît donc que le terme non linéaire agit sur le champ de vorticité comme une diffusion anisotrope qui privilégie la vitesse de transport globale. Les diffusivité et temps caractéristique de diffusion associés s'expriment par :

$$\eta = \frac{7n}{18} \frac{Ha}{N^2} \nu \quad (\text{A.9a})$$

$$t_d = \frac{18}{7n} \frac{N^2}{\lambda^2} t_H. \quad (\text{A.9b})$$

A.3 Temps caractéristique d'évolution des phénomènes non-linéaires pour le moment cinétique dans l'expérience MATUR.

Sous l'hypothèse d'axisymétrie, le moment cinétique global dans l'expérience MATUR est régit par l'équation (4.4a). La valeur asymptotique de L , notée L_∞ , est solution de :

$$0 = \frac{L_0}{t_H} - \frac{L}{t_H} - vL^3 \quad (\text{A.10})$$

Pour des effets linéaires suffisamment forts L_∞ peut être approché par :

$$L_\infty \simeq \left(\frac{L_0}{vt_H} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{A.11})$$

Sous cette même hypothèse, (A.10) est simplifiée en :

$$\frac{1}{\frac{L_0}{t_H} - vL^3} = \frac{dt}{dL} \quad (\text{A.12})$$

Le membre de gauche de cette expression peut être décomposée en parties polaires sous la forme :

$$\frac{t_{nl}}{L - L_\infty} + \frac{cte}{1 + \frac{L}{L_\infty} + \left(\frac{L}{L_\infty} \right)^2} = \frac{dt}{dL}. \quad (\text{A.13})$$

La valeur de t_{nl} est obtenue par :

$$t_{nl} = \lim_{L \rightarrow L_\infty} \frac{L - L_\infty}{\frac{L_0}{t_H} - vL^3} \quad (\text{A.14})$$

soit , en développant les expressions de L_0 et de v :

$$t_{nl} = t_H \left[\frac{7}{36} \frac{\rho a^2}{\sigma^3} \frac{1}{16\pi^2 R^2} \frac{I^2}{B^4} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (\text{A.15})$$

Comme $L > 0$, $\frac{cte}{1 + \frac{L}{L_\infty} + \left(\frac{L}{L_\infty}\right)^2}$ ne prend jamais de valeur singulière. Quand L se rapproche de sa valeur asymptotique, (A.13) s'écrit donc de façon approchée :

$$\frac{t_{nl}}{L_\infty - L} = \frac{dt}{dL}, \quad (\text{A.16})$$

ce qui justifie notre appellation un peu abusive de "temps caractéristique des effets non-linéaires" pour t_{nl} . Ce raisonnement est toutefois à prendre avec précautions en raison, d'une part, du grand nombre d'approximations qu'il comporte, et d'autre part, parce qu'il ne décrit pas le comportement du système aux premiers instants. Pour L faible, le problème est en effet presque linéaire et le temps caractéristique est donc $t_H/2$. Le fait que t_{nl} n'intervienne pas aux premiers instants nous a également poussé à comparer cette valeur théorique au temps mis par le système pour atteindre des valeurs très proches de la valeur asymptotique, afin de réduire l'influence de la partie linéaire.

Annexe B

Modèle quasi-géostrophique pour un écoulement compris entre deux plans

Nous établissons ici un modèle 2D pour un fluide en rotation rapide entre une plaque plane et une surface libre sans frottements. L'approximation d'un coeur d'écoulement géostrophique ainsi que le modèle linéaire de la couche d'Ekman donnent la dépendance en z du profil de vitesse sur tout le domaine, si bien qu'il est possible de calculer les termes de frottement $E [\partial_z \bar{\mathbf{u}}_\perp]_{W_-}^{W_+}$ et le tenseur de Reynolds $\overline{(\mathbf{u}'_\perp \cdot \nabla_\perp) \mathbf{u}'_\perp}$ de (3.2) en fonction de $\bar{\mathbf{u}}_\perp$. L'opérateur de moyenne pour la quantité g (3.1) s'exprime donc dans le cas présent par :

$$g \mapsto \bar{g} = \int_0^1 \check{g} dz + E^{\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \hat{g} \left(\frac{z}{E^{\frac{1}{2}}} \right) - \check{g}(z=0) d \left(\frac{z}{E^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (\text{B.1})$$

La vitesse horizontale moyennée s'écrit :

$$\bar{\mathbf{u}}_\perp = \check{\mathbf{u}}_\perp \left(1 - E^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \right) + E^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \mathbf{e}_z \times \check{\mathbf{u}}_\perp + \mathcal{O}(E) \quad (\text{B.2})$$

soit :

$$\check{\mathbf{u}}_\perp = \bar{\mathbf{u}}_\perp \left(1 + E^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \right) - E^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \mathbf{e}_z \times \bar{\mathbf{u}}_\perp + \mathcal{O}(E) \quad (\text{B.3})$$

Etant donnée l'absence de frottement à la surface libre située en $z = 1$, le profil d'Ekman (1.60) permet de calculer le frottement total :

$$\begin{aligned} [\partial_z \mathbf{u}_\perp]_{W_-}^{W_+} &= -E^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2} \partial_\xi \hat{\mathbf{u}}_\perp = -E^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2} [\check{\mathbf{u}}_\perp(z=0) + \mathbf{e}_z \times \check{\mathbf{u}}_\perp(z=0)] + \mathcal{O}(1) \\ &= -E^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2} \left[\bar{\mathbf{u}}_\perp(z=0) \left(1 + 2\sqrt{2} E^{-\frac{1}{2}} \right) + \mathbf{e}_z \times \bar{\mathbf{u}}_\perp(z=0) \right] + \mathcal{O}(1) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Un calcul long mais, sans difficulté, fournit l'expression du tenseur de Reynolds :

$$\overline{(\mathbf{u}'_\perp \cdot \nabla_\perp) \mathbf{u}'_\perp} = \frac{\sqrt{2}}{8} E^{\frac{1}{2}} \left[-(\mathbf{e}_z \times \bar{\mathbf{u}}_\perp \cdot \nabla_\perp) \cdot \bar{\mathbf{u}}_\perp - (\bar{\mathbf{u}}_\perp \cdot \nabla_\perp) \mathbf{e}_z \times \bar{\mathbf{u}}_\perp \right] + \mathcal{O}(E^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{B.5})$$

qui peut être simplifiée en utilisant les identités usuelles ainsi que la conservation de la masse $\nabla_\perp \cdot \bar{\mathbf{u}}_\perp = 0$:

$$\overline{(\mathbf{u}'_\perp \cdot \nabla_\perp) \mathbf{u}'_\perp} = \frac{\sqrt{2}}{8} E^{\frac{1}{2}} \left[2\bar{\omega} \bar{\mathbf{u}}_\perp + 3(\bar{\mathbf{u}}_\perp \cdot \nabla_\perp) \bar{\mathbf{u}}_\perp + \frac{1}{2} \nabla_\perp (\bar{\mathbf{u}}_\perp^2) \right] + \mathcal{O}(E^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{B.6})$$

où $\bar{\omega} = \frac{1}{2} \nabla_\perp \times \bar{\mathbf{u}}_\perp$.

En introduisant (B.4) et (B.6) dans (3.2), et en utilisant les variables :

$$\mathbf{v} = \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{8} E^{\frac{1}{2}} \right) \bar{\mathbf{u}}_\perp, \quad (\text{B.7a})$$

$$p' = \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{8} E^{\frac{1}{2}} \right) \bar{p} + \frac{\sqrt{2}}{16} Ro E^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{u}}_\perp^2, \quad (\text{B.7b})$$

$$S' = \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{8} \sqrt{2} E^{\frac{1}{2}} \right) S, \quad (\text{B.7c})$$

le modèle quasi-géostrophique modifié s'écrit, sous forme adimensionnelle :

$$\lambda Ro (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{v} + \nabla_{\perp} p' - E \lambda^2 \mathbf{\Delta}_{\perp} \mathbf{v} = \\ \left(1 + \sqrt{2} E^{\frac{1}{2}}\right) \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z - S' \partial_t \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} - E^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2\sqrt{2} E^{\frac{1}{2}}\right) \mathbf{v} - \frac{\sqrt{2}}{4} \lambda E^{\frac{1}{2}} R \bar{\omega} \mathbf{v} + \mathcal{O}_{i+j=3} \left(E^{\frac{i}{2}} R^j\right), \quad (\text{B.8})$$

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (\text{B.9})$$

Dans la forme dimensionnelle de (B.8), le temps caractéristique de freinage d'Ekman t_E , fait son apparition :

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{v} + \nabla_{\perp} p' - \nu \mathbf{\Delta}_{\perp} \mathbf{v} = \\ 2 \left(1 + \sqrt{2} E^{\frac{1}{2}}\right) \mathbf{v} \times \mathbf{\Omega} - \partial_t \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} - \left(1 + 2\sqrt{2} E^{\frac{1}{2}}\right) \frac{\mathbf{v}}{t_E} - \frac{\sqrt{2}}{4} E^{\frac{1}{2}} \bar{\omega} \mathbf{v} \quad (\text{B.10})$$

Annexe C

An effective 2D model for MHD flows with transverse magnetic field

Article paru dans *Journal of Fluid Mechanics* **424**, 75-100(2000).

Annexe D

Effective boundary conditions for MHD flows with thin Hartmann layers

Article soumis à *Physics of Fluids*.(2000).

Bibliographie

- [1] Pothérat A. , Sommeria J. & Moreau, R.(2000) An effective 2D Model for quasi-2D MHD flows with transverse magnetic field. *J. Fluid. Mech.* **424** (75-100)
- [2] Pothérat A. , Sommeria & Moreau, R.(2000) Effective Boundary conditions for MHD flows with Hartmann layers. *soumis à Phys. Fluid.*(2000)
- [3] Pothérat A. , Sommeria J. & Moreau R.(2000) 2D Models for quasi-2D MHD flows *CR Acad. Sci.Paris, t328, série II, pp129-134*
- [4] Pothérat A. , Sommeria J. & Moreau R.(1999) Inertial and 3D effects in plane Hartmann layer driven flows. *ICIAM 1999 Edinburg.*
- [5] Pothérat A. , Sommeria J. & Moreau R.(2000) Analytical and numerical model for quasi-2D MHD flows with transverse magnetic field. *PAMIR 2000 Giens.*
- [6] Davidson, P.A. ,Pothérat A.,Sommeria, J. , Moreau R. . (2000) A note on Bodewadt-Hartmann layers, soumis à *European Journal of Mechanics.*
- [7] Moreau R. , Pothérat A. , Messadek, K & Sommeria J. (2000) Quasi-2D MHD turbulent flows : modelling versus experiment. *IUTAM 2000 Chicago.*

Ouvrages Généraux

- [8] P. G. Drazin, P. G. and Reid, W. H (1995) Hydrodynamic stability, *Cambridge university press.*
- [9] Joseph, D. D. (1976) Stability of fluid motions, *Spinger-Verlag*, Berlin Heildelberg New-York.
- [10] Chandrasekhar (1961) Hydrodynamic and hydromagnetic stability, *Clarendon.*
- [11] Cole, J.D. & Kervorkian, J. (1981) Perturbation methods in applied mathematics, *Springer-Verlag.*
- [12] Moreau, R. (1990) Magnetohydrodynamics *Kluwer Academic Publishers.*
- [13] Pedlosky, J. (1987) Geophysical Fluid Dynamics, *Springer Verlag..*

- [14] Greenspan, H.P. (1969) The theory of rotating fluids, *Cambridge University Press*.
- [15] Roberts, P.H. (1967) Introduction to Magnetohydrodynamics *Longmans*.
- [16] Batchelor, G.K.(1953) The theory of homogenous turbulence. *Cambridge University Press*.
- [17] Shlichting, H. (1968) Boundary lalyer theory, *McGraw Hill series in mechanical Engineering*.

Introduction

- [18] Alemany, A. Moreau, R. Sulem, P. & Frish, U. Influence of an External Magnetic Field on Homogeneous MHD Turbulence *Journal de Mécanique* **18(2)** pp 277-313
- [19] Hunt, J.C.R. & Ludford, G.S.S. (1968) Three-dimensional MHD duct flows with strong transverse magnetic field. Part 1. Obstacles ina a constant area duct. *J. Ffluid. Mech.*, **33**, 693.
- [20] Ekman,V. W. (1905) On the influence of earth's rotation on ocean currents. *Arkiv. Mattem., Astr. Fysik, Stokholm* **2** (11).
- [21] Hartmann, J. (1937) Mat. Fys. Meddel, D. Kgl. Danske Vid. Selsk. **15** (1937)
- [22] Kàrmàn, Th. V. (1921). Über laminare und Turbulente Reibung. *Z. Angew.Math. Mech.* **I**, 233-51.
- [23] O.Lielausis (1975) Liquid Metal Magnetohydrodynamics *Atomic Energy Review* **13** 527.
- [24] Taylor (1923) Experiments on the motion of solid bodies in rotating fluids. *Proc. Roy. Soc. A* **104**, 213-218.
- [25] A.B.Tsinober & Y.B.Kolesnikov (1974) Experimental Investigation of Two-Dimensional Turbulence Behind a Grid *Isv. Akad. Nauk. SSSR Mech. Zhod. i Gaza* **4** 146.
- [26] J. Sommeria & R.Moreau (1982) Why, How and When MHD Turbulence Becomes Two-Dimensional *J. Fluid. Mech.* **118** 507-518.

Chapitre 1

- [27] Alboussière, T (1995). Magnétohydrodynamique et ségrégation solutale en croissance bridgman horizontale, Thèse I.N.P.Grenoble.
- [28] Erdelyi, A. (1962) On a non-linear boundary value problem involving a small parameter, *J. Aust. Math. Soc. II*, part **4**, 425-439.

- [29] Erdelyi, A. (1962) Singular perturbation, Bull Amer, *Math. Soc* **68**, 420-424.
- [30] Kaplun, S. (1954) The role of coordinate systems in boundary-layer theory
- [31] J. Sommeria & R. Moreau (1982) Why, How and When MHD Turbulence Becomes Two-Dimensional *J. Fluid. Mech.* **118** 507-518.

Chapitre 2

- [32] Acheson, D.J. & Hide, R. (1973) Hydromagnetics in rotating fluids, *Rep. Prog. phys*, **36**, 159-221.
- [33] Alboussière, T (1995). Magnétohydrodynamique et ségrégation solutale en croissance bridgman horizontale, Thèse I.N.P.Grenoble.
- [34] Moreau, R. Tagawa, T & Authie, G. (2000) Buoyant flow in long vertical enclosures in the presence of a strong horizontal magnetic field. *submitted to European Journal of Mechanics*.
- [35] B.Mück, C.Günther, U.Müller & L.Bühler (2000) Three-Dimensional MHD Flows in Rectangular Ducts with Internal Obstacles.. *J. Fluid. Mech.* **418**, 265-395.
- [36] Pothérat, A., Sommeria, J & Moreau, R.. (2000) Effective Boundary conditions for MHD flows with Hartmann layers. *soumis à Phys. Fluid.*
- [37] Pothérat A. , Sommeria J. & Moreau R. (2000) An effective 2D Model for quasi-2D MHD flows with transverse magnetic field. *J. Fluid. Mech.* **424**, 75-100
- [38] J. Sommeria & R. Moreau (1982) Why, How and When MHD Turbulence Becomes Two-Dimensional *J. Fluid. Mech.* **118** 507-518.
- [39] J. Sommeria (1988) Electrically Driven Vortices in a Strong Magnetic Field *J. Fluid. Mech* **189** 553-569.
- [40] Walker, J.S., Ludford, G.S.S. & Hunt, J.C.R. (1972) Three dimensional MHD duct flows with strong transverse magnetic fields. Part 3 Variable area rectangular ducts with insulating walls. *J. Fluid Mech.* **56**, 121.
- [41] Davidson, P.A. , Pothérat A., Sommeria, J. , Moreau R. . (2000) A note on Bodewadt-Hartmann layers, soumis à *European Journal of Mechanics*.

Chapitre 3

- [42] Alboussière, T (1995). Magnétohydrodynamique et ségrégation solutale en croissance bridgman horizontale, Thèse I.N.P.Grenoble.

- [43] Alboussière & Lingwood (1999) On the stability of the Hartmann layer. *Phys. Fluid.* **11**, pp2058-2068.
- [44] T. Alboussière and R. J. Lingwood (2000) A model for the turbulent Hartmann layer. *Physics of Fluids* **12**, 6 june 2000 pp1535-1543.
- [45] H.M.Hua & P.H.Lykoudis (1974) Turbulent Measurements in Magneto-Fluid Mechanics Channel *Nucl. Sci. Eng.* **45** 445.
- [46] J.C.R. Hunt & W.E. Williams (1968) Some Electrically Driven Flows in Magnetohydrodynamics. Part 1. Theory. *J. Fluid. Mech.* **31**(4) 705-722.
- [47] J. Sommeria & R. Moreau (1982) Why, How and When MHD Turbulence Becomes Two-Dimensional *J. Fluid. Mech.* **118** 507-518.
- [48] Shercliff (1953) *Proc. Camb. Phil. Soc.* **49** 136.
- [49] J. Sommeria (1988) Electrically Driven Vortices in a Strong Magnetic Field *J. Fluid. Mech* **189** 553-569.
- [50] Pothérat A. , Sommeria J. & Moreau R. (2000) An effective 2D Model for quasi-2D MHD flows with transverse magnetic field. *J. Fluid. Mech.* **424**, 75-100

Chapitre 4

- [51] T. Alboussière, V. Uspenski & R. Moreau (1999) Quasi-2D MHD Turbulent Shear Layers. *Experimental thermal and Fluid Science* **20** pp19-24.
- [52] Doligalski *et Al* (1994) Vortex interaction with walls. *Annu. Rev. Fluid. Mech.* 1994. 26 : 573-616
- [53] Kraichnan, R.H. (1967) Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids.* **10**(7) July 1967.
- [54] Kraichnan, R.H. (1971) Inertial ranges transfert in two- and three-dimensional turbulence. *J. Fluid. Mech.* **47**, 525-535.
- [55] W. W. Liou (1994) Linear instability of curved free shear layers, *Phys. Fluid* **6** (2), February 1994.
- [56] Sommeria, J (1988) Electrically Driven Vortices in a Strong Magnetic Field *J. Fluid. Mech* **189** 553-569.
- [57] Sommeria, J (1986) **Chapitre 4**
- [58] T. Alboussière, V. Uspenski & R. Moreau (1999) Quasi-2D MHD Turbulent Shear Layers. *Experimental thermal and Fluid Science* **20** pp19-24.

- [59] Sommeria, C. Staquet & R. Robert (1990). Final equilibrium state of two-dimensional shear layer. *J. Fluid. Mech.* (1991), vol 233, pp661-689.
- [60] Pothérat (1996) Etude théorique et expérimentale de la déstabilisation et de l'état déstabilisé d'une couche cisailée libre D.E.A. Energétique physique, Institut National Polytechnique de .Grenoble.
- [61] Wolf (1994) L'histoire de la coulée continue première partie. *La revue de la metallurgie* janvier 1994.

Conclusion

- [62] PA Davidson (1997) The role of angular momentum in the magnetic damping of Turbulence. *J. Fluid. Mech.* (1997), vol. **336**, pp 123-150.
- [63] T. Alboussière and R. J. Lingwood (2000) A model for the turbulent Hartmann layer. *Physics of Fluids* **12**, 6 june 2000 pp1535-1543.