



Résolution numérique de problèmes à frontière libre par des méthodes de continuation

Véra Treguer-Katossky

► To cite this version:

Véra Treguer-Katossky. Résolution numérique de problèmes à frontière libre par des méthodes de continuation. Modélisation et simulation. Université Jean Monnet - Saint-Etienne, 1984. Français. NNT: . tel-00850170

HAL Id: tel-00850170

<https://theses.hal.science/tel-00850170>

Submitted on 5 Aug 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée devant

L'UNIVERSITE DE SAINT-ETIENNE

pour obtenir

le titre de DOCTEUR 3^{ème} CYCLE

spécialité MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

VERA TREGUER-KATOSKY

RESOLUTION NUMERIQUE DE PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE PAR DES METHODES DE CONTINUATION

Soutenue le 11 Décembre 1984 devant le jury composé de :

MM.	C. CARASSO	Président
	J. BARANGER	
	G.M. BRAUNER	
	F. CONRAD	
	D. SERRE	

THESE

présentée devant

L'UNIVERSITE DE SAINT-ETIENNE

pour obtenir

le titre de **DOCTEUR 3 ème CYCLE**

spécialité MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

VERA TREGUER-KATOSKY

**RESOLUTION NUMERIQUE DE PROBLEMES
A FRONTIERE LIBRE PAR DES METHODES
DE CONTINUATION**

Soutenue le 11 Décembre 1984 devant le jury composé de :

MM. C. CARASSO Président

J. BARANGER

C.M. BRAUNER

F. CONRAD

D. SERRE

T310

JET

Pour Stan,
pour Gaspard,
et aussi pour Ludovic.

« Thy help and precious gaping links
Brought Forth to light these "pass-squale" texts
Tru "einfüllung" and wit, methinks
Thou art given to my (v)cortex
"LUCE MERIDIANA CLARIUS"
For debugging my ant-ed fuss
Thy science and thyself will miss »

Leslie Melcher

Je tiens à remercier Monsieur C. Carasso qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie tout particulièrement Francis Conrad qui a dirigé ce travail. Je lui suis reconnaissante de la disponibilité et de la clairvoyance dont il a toujours fait preuve.

Monsieur D. Serre a eu la gentillesse de s'intéresser à mon travail. Je le remercie pour ses remarques, grace auxquelles j'ai pu améliorer la clarté de certains passages.

Je remercie Messieurs J. Baranger et C.M. Brauner d'avoir bien voulu accepter de faire partie de mon jury.

A tous les membres du Département Informatique de l'Ecole des Mines, je dis qu'il fut très agréable de vivre au milieu d'eux.

Je remercie Françoise Issard-Roch (dont j'enfume consciencieusement le bureau, qu'elle me pardonne) pour nos discussions quotidiennes, Marie Line Barnéoud pour la contribution qu'elle a apportée à la frappe de ma thèse, Paul André Pays et Michel Habib pour des raisons qui sembleront évidentes à tous.

Je remercie Messieurs Brossard, Darles et Loubet pour le grand soin qu'ils ont apporté à la réalisation de ce document.

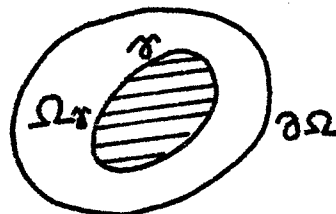
Enfin, comme je ne m'appliquerai plus à remercier aussi bien avant longtemps je veux remercier Stan Katosky de m'avoir épousée.

PRESENTATION

L'objet de ce travail est d'étendre l'utilisation des méthodes de continuation au cas des problèmes à frontière libre du type :

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda f(u) = 0 & \text{dans } \Omega_\gamma \\ u = g_1 \\ \partial u / \partial n = g_2 \end{cases} \text{ sur } \gamma$$

$$u = g_3 \text{ sur } \partial\Omega$$



(on l'écrit formellement $F(\lambda, \gamma, u) = 0$) en présence de bifurcation.

Les méthodes de continuation ont été largement étudiées dans le cadre de la résolution de problèmes aux limites non-linéaires, posés sur un domaine fixe, dépendant d'un paramètre. On se réfère aux travaux initialisés par H.B. Keller : [KEL77] [RHE80] [MIT80]...

Pour adapter ces méthodes à la résolution de problèmes à frontière libre, il a fallu considérer ces derniers comme des problèmes non-linéaires dont l'inconnue est le **couple formé de la solution et d'un paramétrage de la frontière libre**. Nous nous sommes inspirés des travaux de A. Dervieux consacrés à la perturbation de la solution d'un problème aux limites par rapport à son domaine géométrique [DER81], pour lier entre elles, au moins formellement, les variations de la frontière libre et celles de la solution.

Dans le Chapitre I, nous rappelons le principe des méthodes de continuation, puis nous énonçons une **méthode standard de résolution** pour un problème abstrait :

$$G(\lambda, x) = 0 ; \lambda \in \mathbb{R} ; x \in U \text{ (espace de Banach).}$$

Nous décrivons, dans ce même chapitre, la technique du transport sur un domaine fixe qui permet de poser localement le problème à frontière libre sous la forme :

$$G(\lambda, \gamma, u \circ T_\gamma) = F(\lambda, \gamma, u) = 0$$

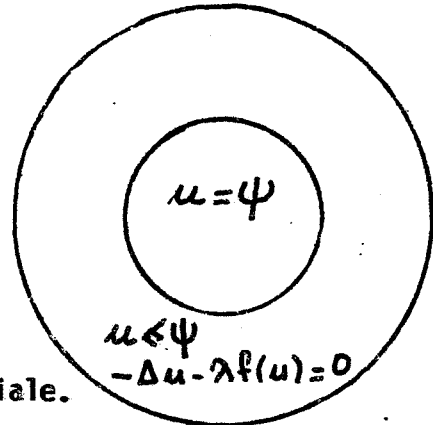
où T_γ est le transport. L'opérateur G étant défini sur un espace fixe, la résolution de ce problème est envisagée comme une application de la méthode standard.

Nous mettrons en évidence les difficultés qu'il y a à justifier, par un théorème des fonctions implicites, dans le cas général, l'existence d'une branche de solutions pour le problème à frontière libre posé sous cette forme.

Les chapitres suivants constituent des applications de l'heuristique que nous venons de décrire à des problèmes à frontière libre particuliers.

Le problème à frontière libre traité au Chapitre II est issu d'un problème de type obstacle :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \leq \Psi ; \text{ p.p. dans } \Omega \\ -\Delta u - \lambda f(u) \leq 0 \text{ dans } \Omega \\ (-\Delta u - \lambda f(u))(\Psi - u) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$



en dimension $n > 1$ et dans le cas à symétrie radiale.

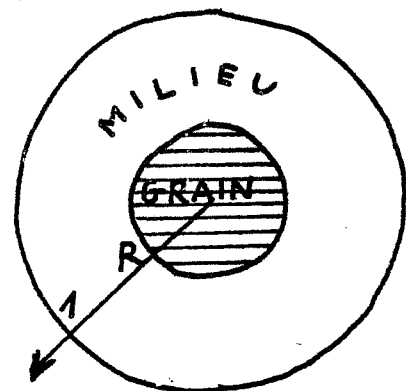
La méthode que nous décrivons ici est justifiée par l'utilisation du théorème des fonctions implicites.

Nous énonçons une seconde méthode de continuation, qui consiste à discrétiser le problème à frontière libre AVANT de lui appliquer la méthode standard.

Les résultats numériques obtenus par ces deux méthodes de continuation sont en accord avec des résultats obtenus, dans des cas particuliers, par des méthodes élémentaires (méthode de tir par exemple).

Au Chapitre III, nous considérons un problème à frontière libre, en dimension 3, de la forme suivante (symétrie radiale) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta c + \lambda f(c) = 0 ; R < r < 1 ; \\ c(R) = g(R) \\ c'(R) = 0 \\ c(1) = 1 \end{array} \right.$$



Ce problème, qui n'est pas de type obstacle, provient de la modélisation d'un phénomène de dissolution-croissance avec diffusion, dans un milieu hétérogène.

Après avoir mis en évidence des cas dans lesquels la branche des solutions présente des points de retournement, on explicite la méthode de calcul numérique de cette branche par continuation.

Le Chapitre IV est une reprise de l'étude, en dimension 2, du problème étudié au Chapitre II, mais avec des données non symétriques. Nous étudions la résolution du problème approché obtenu en discrétisant le problème à frontière libre par éléments finis :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_h \in V_{0h}(\Omega_{\gamma_h}) \\ \int_{\Omega_{\gamma_h}} \nabla u_h \nabla v_h - \lambda F(u_h) v_h = \int_{\gamma_h} \frac{\partial \Psi}{\partial n} v_h ; \quad \forall v_h \in V_{0h}(\Omega_{\gamma_h}) \\ u_h = \Psi \quad \text{sur les noeuds de } \gamma_h \end{array} \right.$$

(V_{0h} espace d'interpolation avec $v_h \in V_{0h} \Rightarrow v_h = 0$ sur $\partial\Omega_h$).

Pour le transport sur un domaine fixe et la dérivation du problème discrétisé, nous avons utilisé les travaux de J.P. Zolésio sur la dérivation par rapport aux noeuds des triangularisations [ZOL84]. La méthode standard est appliquée rigoureusement au problème discret.

La caractéristique principale de la méthode proposée est de **permettre d'approcher en même temps la frontière libre et la solution sur son domaine variable.**

Dans le cas des problèmes de type obstacle, la méthode que nous décrivons est plus adaptée au calcul de la branche inéquation, que la résolution par continuation du problème pénalisé (qui ne permet pas d'approcher correctement la frontière libre). Elle permet, par ailleurs, de traiter des problèmes plus généraux que la méthode de tir.

PLAN DE LA THESE

PRESENTATION

Chapitre I : PROBLEME A FRONTIERE LIBRE ET METHODE DE CONTINUATION

- I.1. Solution régulière. Point de retournement simple d'un problème abstrait**
- I.2. Une méthode de continuation générale**
- I.3. Branche de solutions d'un problème à frontière libre**
 - I.3.1. Enoncé local du problème à frontière libre**
 - I.3.2. Transport en domaine fixe et dérivation**
 - I.3.3. Linéarisation formelle et régularité de la solution**

Chapitre II : PROBLEME A FRONTIERE LIBRE ISSU D'UN PROBLEME D'OBSTACLE (CAS A SYMETRIE RADIALE)

- II.1. Position du problème**
- II.2. Problème à frontière libre continu**
 - II.2.1. Dérivation par rapport à la frontière libre**
 - II.2.2. Solution régulière. Point de retournement simple**
 - II.2.3. Méthode de continuation pour la problème continu**
- II.3. Problème à frontière libre discret**
 - II.3.1. Discrétisation du problème à frontière libre**
 - II.3.2. Résolution locale du problème discret**
- II.4. Résultats numériques**

Chapitre III : PROBLEME DE DISSOLUTION-CROISSANCE AVEC DIFFUSION ET SOURCE DE MATIERE

III.1. Présentation du modèle

III.2. Problème à frontière libre stationnaire

III.2.1. Formulation adimensionnelle

III.2.2. Existence de solutions multiples

III.3. Résolution locale du problème stationnaire

III.3.1. Transport et linéarisation

III.3.2. Choix de la normalisation

III.4. Algorithme et résultats numériques

Chapitre IV : PROBLEME A FRONTIERE LIBRE DISCRET EN DIMENSION 2

IV.1. Approximation du problème à frontière libre par éléments finis

IV.1.1. Approximation du problème variationnel

IV.1.2. Représentation admissible de la frontière libre discrète

IV.1.3. Enoncé local du problème à frontière libre discret

IV.2. Dérivation par rapport à la frontière libre discrète

IV.2.1. Variation du domaine triangularisé

IV.2.2. Dérivations "élémentaires"

IV.2.3. Assemblage de la dérivée partielle

IV.3. Etude locale de la branche des solutions du problème discret

IV.3.1. Introduction et notations

IV.3.2. Linéarisation

IV.3.3. Paramétrage local. Méthode de continuation

ANNEXE 1 : UN PROGRAMME DE RESOLUTION DES PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE DE R^2

A.1. Introduction : structure générale du programme

A.2. Spécifications pour l'écriture des modules de définition

A.3. Algorithme de continuation : modules "point suivant" et "maillage"

ANNEXE 2 : PLANCHES DE RESULTATS NUMERIQUES

CHAPITRE I

PROBLEME A FRONTIERE LIBRE ET METHODE DE CONTINUATION

Plan du chapitre :

I.1. SOLUTION REGULIERE. POINT DE RETOURNEMENT SIMPLE D'UN PROBLEME ABSTRAIT

I.2. UNE METHODE DE CONTINUATION GENERALE

I.3. BRANCHE DE SOLUTIONS D'UN PROBLEME A FRONTIERE LIBRE

I.3.1. Enoncé local du problème à frontière libre

I.3.2. Transport en domaine fixe et dérivation

I.3.3. Linéarisation formelle et régularité de la solution

Résumé :

Ce chapitre constitue une introduction aux méthodes numériques adaptées à la résolution des problèmes à frontière libre avec points de retournement ; on y étudie comment un problème à frontière libre, dépendant d'un paramètre de bifurcation, peut être formulé de façon à être résolu par une méthode de continuation inspirée des travaux de H. B. Keller [KEL77] (voir également [MIT80], [MIT83]).

On rappelle un résultat classique de M.G. Crandall et P.H. Rabinowitz [CRA73], concernant l'existence d'un développement local, au voisinage d'un point de retournement simple, de la branche des solutions (λ, x) d'un problème abstrait noté :

$$G(\lambda, x) = 0$$

Puis, une méthode de continuation standard est présentée. Elle consiste à calculer localement l'arc des solutions passant par le point (λ_0, x_0) , après avoir augmenté le problème d'une normalisation :

$$N(\lambda, x, s) = 0$$

telles que l'opérateur P du problème augmenté vérifie : $P_x(\lambda_0, x_0)$ est régulier si (λ_0, x_0) est une solution régulière ou un point de retournement simple. On intègre alors numériquement le problème différentiel :

$$P_{\lambda,x}(\lambda, x) \cdot (d\lambda/ds, dx/ds) = -P_s(\lambda, x)$$

Un problème à frontière libre est considéré comme un problème non linéaire dont la frontière libre γ est l'une des inconnues. On étudie localement la branche (λ, γ, u) des solutions d'un tel problème écrit sous la forme :

$$F(\lambda, \gamma, u) = 0$$

On fera appel à la notion de dérivation par rapport au domaine, telle qu'elle est présentée par J.C. Cea dans [CEA81], pour se placer dans le cadre abstrait défini précédemment. Les résultats essentiels de dérivation utilisés sont dûs à Murat et Simon [MSI76].

On verra comment linéariser (au moins formellement) le problème à frontière libre. Cependant on n'obtiendra pas, a priori, l'existence d'un développement local de la branche des solutions par un théorème classique des fonctions implicites à cause de la perte de régularité de la frontière libre, comme l'ont déjà remarqué A. Dervieux [DER81] et C. Guillopé [GUI77].

I.1. SOLUTION REGULIERE, POINT DE RETOURNEMENT D'UN PROBLEME ABSTRAIT

Soient E et F deux espaces de Banach, et $G : \mathbb{R} \times E \rightarrow F$, un opérateur de classe C^1 . On considère les solutions (λ, x) du problème :

$$(1.1) \quad G(\lambda, x) = 0$$

Définition I.1 :

On dit qu'une solution (λ, x) de (1.1) est une **solution régulière** si :

$$(C1) \quad G_x(\lambda, x) : E \rightarrow F \text{ est un isomorphisme.}$$

Si (λ_0, x_0) est une solution régulière, alors par application du théorème des fonctions implicites, le problème (1.1) définit localement une fonction régulière $x(\lambda)$.

Définition I.2 :

On dit qu'une solution (λ, x) de (1.1) est un **point de retournement (simple)** si l'opérateur $G_x(\lambda, x)$ vérifie les conditions :

$$(C2) \quad \dim \operatorname{Ker} G_x(\lambda, x) = 1$$

$$(C3) \quad \operatorname{codim} \operatorname{Im} G_x(\lambda, x) = 1$$

$$(C4) \quad G_\lambda(\lambda, x) \notin \operatorname{Im} G_x(\lambda, x)$$

Si (λ_0, x_0) est un point de retournement simple, et si Φ est un générateur de $\operatorname{Ker} G_x(\lambda_0, x_0)$, alors il existe des fonctions régulières $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $z : \mathbb{R} \rightarrow F$ (où Z est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} G_x(\lambda_0, x_0)$ dans E) telles que, localement, les solutions de (1.1) admettent le développement suivant ([CRA73 Théorème 2.3]) :

$$\lambda = \lambda_0 + \tau(s)$$

$$x = x_0 + s\Phi + z(s).$$

avec, de plus, $\tau(0) = \tau'(0) = 0$ et $z(0) = z'(0) = 0$,
ce qui justifie le terme utilisé de "point de retournement".

On étudiera dans la suite des branches de solutions de (1.1) formées uniquement de solutions régulières et de points de retournement simple.

Proposition I.1 :

Si (λ_0, x_0) est une solution régulière, ou un point de retournement de (1.1), alors l'opérateur $DG(\lambda_0, x_0) : \mathbb{R} \times E \rightarrow F$ est surjectif et $\text{Ker } DG(\lambda_0, x_0)$ est de dimension 1.

Preuve :

a) si (λ_0, x_0) est une solution régulière,
pour tout $a \in F$, il existe une solution unique de $G_X(\lambda_0, x_0) \cdot w = a$.

Soit z l'unique solution de $G_X(\lambda_0, x_0) \cdot z = -G_\lambda$ alors,
pour tout $k \in \mathbb{R}$, $(k, kz+w)$ est solution de $DG(\lambda_0, x_0) = a$.

Si $a = 0$, alors $w = 0$ et $(1, z)$ est un générateur de $\text{Ker } DG(\lambda_0, x_0)$.

b) si (λ_0, x_0) est un point de retournement simple,
soit $a \in F$, on considère le problème : $l \cdot G_\lambda(\lambda_0, x_0) + G_X(\lambda_0, x_0) \cdot z = a$.

De la condition (C4) - $G_\lambda \notin \text{Im } G_X(\lambda_0, x_0)$ - et de la condition (C2) - $\text{codim Im } G_X(\lambda_0, x_0) = 0$ -, on déduit qu'il existe un seul $l \in \mathbb{R}$ tel que :

$$a - l \cdot G_\lambda(\lambda_0, x_0) \in \text{Im } G_X(\lambda_0, x_0).$$

Alors, le problème $G_X(\lambda_0, x_0) \cdot p = a - l \cdot G_\lambda(\lambda_0, x_0)$ admet une solution particulière p , et toute solution de $DG(\lambda_0, x_0) \cdot (1, z) = 0$ est de la forme :

$$(1, p+k\Phi) \text{ où } \Phi \text{ est un générateur de } \text{Ker } G_X(\lambda_0, x_0)$$

donc $G_X(\lambda_0, x_0)$ est surjectif.

Si $a = 0$ alors $l = 0$ et $(0, \Phi)$ est un générateur de $\text{Ker } DG(\lambda_0, x_0)$. ■

I.2. UNE METHODE DE CONTINUATION GENERALE

Soit (λ_0, x_0) une solution régulière ou un point de retournement simple de (1.1) et $\text{lin} : R \times E \rightarrow R$ une application linéaire, continue vérifiant la condition :

(C5) $\text{Lin}(\Delta, Z) \neq 0$, pour (Δ, Z) générateur de $\text{Ker } DG(\lambda_0, x_0)$.

Définition I.3 :

On appelle problème augmenté, le problème :

$$(2.1) \quad P(\lambda, x, s) = 0 \iff \begin{cases} G(\lambda, x) = 0 \\ N(\lambda, x, s) = \text{Lin}(\lambda - \lambda_0, x - x_0) - (s - s_0) = 0 \end{cases}$$

définissant l'opérateur $P : R \times E \times R \rightarrow F \times R$.

Proposition I.2 :

Si (λ_0, x_0) est une solution régulière ou un point de retournement de (1.1) et si l'application linéaire continue lin vérifie la condition (C5) alors l'opérateur P du problème augmenté (2.1) est tel que :

$P_{\lambda, x}(\lambda_0, x_0, s_0) : R \times E \rightarrow F \times R$ est un isomorphisme.

Preuve :

Soit $(a, b) \in F \times R$, on considère le problème $P_{\lambda, x}(\lambda_0, x_0, s_0) = (a, b)$ c'est à dire :

$$\begin{cases} DG(\lambda_0, x_0) \cdot (1, z) = a \\ \text{Lin}(1, z) = b \end{cases}$$

D'après la Proposition I.1, si (Δ, Z) est un générateur de $\text{Ker } DG(\lambda_0, x_0)$, et si $(1_p, z_p)$ est une solution particulière de $DG(\lambda_0, x_0) \cdot (1, z) = a$,

alors, toute solution de $DG(\lambda_0, x_0) \cdot (l, z) = a$ est de la forme :

$$(l, z) = (l_p, z_p) + k(\Delta, Z) ; k \in \mathbb{R}$$

et $\text{Lin}(l_p, z_p) + k \text{Lin}(\Delta, Z) = b$ détermine un unique $k \in \mathbb{R}$, si la condition (C5) est vérifiée.

Donc $P_{\lambda, x}(\lambda_0, x_0)$ est bijectif. Etant de plus linéaire et continu, c'est un isomorphisme par application du théorème de l'application ouverte [BRE83]. ■

On obtient un paramétrage $\lambda(s), x(s)$ de la branche des solutions de (1.1) par le théorème des fonctions implicites, avec les développements à l'ordre 1 suivants :

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \lambda(s) &= \lambda_0 + (s-s_0)\Delta + o(s-s_0) \\ x(s) &= x_0 + (s-s_0)Z + o(s-s_0) \end{aligned}$$

où (Δ, Z) est l'unique solution du problème linéarisé :

$$(2.3) \quad \begin{cases} DG(\lambda_0, x_0) \cdot (\Delta, Z) = 0 \\ \text{Lin}(\Delta, Z) = 1 \end{cases}$$

La méthode de continuation la plus élémentaire consiste à utiliser les développements (2.3) pour calculer la branche des solutions de (1.1) par la méthode d'Euler. On peut aussi utiliser d'autres méthodes numériques d'intégration du problème (2.3), qui diffèrent des méthodes de prédiction-correction préconisée par H. B. Keller (P. Witomski, par exemple, utilise la méthode de Runge-Kutta dans [WIT83] pour la résolution d'équations non linéaires de la forme : $-\Delta u = \lambda f(u)$). La méthode d'Euler donne des résultats corrects à condition de choisir Δs suffisamment petit.

Pour les applications de cette méthode générale le point crucial sera d'étudier le noyau de $DG(\lambda_0, x_0)$ de façon à pouvoir déterminer une application linéaire continue vérifiant la condition (C5).

On donne l'algorithme standard de calcul par continuation de la branche des solutions du problème $G(\lambda, x) = 0$.

ALGORITHME STANDARD

Convention : un indice k placé en haut indique que l'opérateur est pris au point (λ_k, x_k, s_k) .

Initialisation

Calculer une solution (λ_0, x_0) du problème $G(\lambda, x) = 0$ et fixer s_0 .

Répéter les étapes 1, 2, ... Ad Libitum !

Etape 1 : résolution du problème linéarisé

$$P_{\lambda, x}^k(\Lambda, Z) = -P_s^k$$

Si la normalisation nécessite la connaissance des valeurs approchées de $d\lambda/ds$ et dx/ds au point $s = s_k$, on calculera préalablement λ^* et x^* , de la façon suivante :

(a) si $k > 1$,

$$(1, z) = (s_k - s_{k-1})^{-1} (\lambda_k - \lambda_{k-1}, x_k - x_{k-1})$$

$$(\lambda^*, x^*) = (1/\|(1, z)\|, z/\|(1, z)\|).$$

(b) si $k = 0$, en supposant G_x^0 inversible, calculer la solution, z , de $G_x^0 z = -G_\lambda^0$

$$(\lambda^*, x^*) = (1/\|(1, z)\|, z/\|(1, z)\|).$$

Dans ce dernier cas on a immédiatement :

$$\Lambda = \lambda^* \quad \text{et} \quad Z = \lambda^* z = x^*.$$

Etape 2 : un pas de la méthode d'Euler

$$s_{k+1} = s_k + \Delta s$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta s \Lambda$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta s Z$$

Remarques :

1) On peut choisir dans cet algorithme, la normalisation :

$$N(\lambda, x, s) = \lambda^*(\lambda - \lambda_k) + \langle x^*, x - x_k \rangle - (s - s_k)$$

au voisinage du point (λ_k, x_k, s_k) , avec λ^* et x^* valeurs exactes ou approchées, au point $s = s_k$, de $d\lambda/ds$ et dx/ds , respectivement. Ce choix conduit à paramétrer la branche des solutions par une "pseudo-abcisse curviligne". On se réfère à [KEL77], pour affirmer que cette normalisation vérifie en général la condition (C5).

2) On peut introduire dans l'algorithme standard une adaptation automatique du pas Δs (voir une description détaillée de la méthode d'Euler dans [CMI83]).

3) Si on suppose que G^k_x est un isomorphisme (c'est à dire en tout point régulier), la résolution du problème linéaire $P^k_{\lambda, x}(\Delta, Z) = -P^k_s$ peut s'effectuer "par blocs" :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline G^k_x & G^k_\lambda \\ \hline N^k_x & N^k_\lambda \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline Z \\ \hline \Delta \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

En pratique, il est habituel de considérer tout point calculé comme une solution régulière; ce qui revient à supposer que, si le pas Δs n'est pas trop petit, on ne passe jamais "très près" d'un point de retournement.

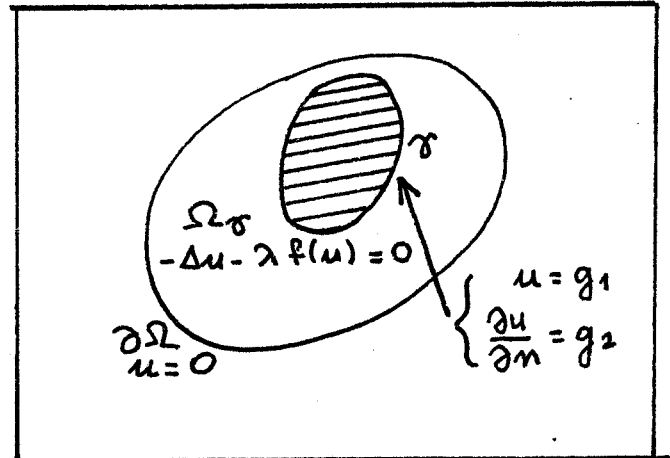
4) On pourrait améliorer les performances de l'algorithme (autoriser en particulier de choisir Δs plus grand) en utilisant la méthode d'Euler comme prédicteur et en intercalant à chaque itération, une étape de correction. On trouve dans [RHE80] l'utilisation de la méthode de Newton comme correcteur, dans des méthodes de continuation adaptées à la résolution d'équations non linéaires, mises sous forme de problème de contrôle optimal.

I.3. BRANCHE DE SOLUTIONS D'UN PROBLEME A FRONTIERE LIBRE

Soit Ω ouvert régulier, borné de $\mathbb{R}^2$. On considère le problème à frontière libre suivant :

Trouver une courbe fermée, régulière dans Ω , et une fonction u régulière telles que (λ étant un réel > 0 donné) :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} -\Delta u - \lambda f(u) &= 0 \text{ dans } \Omega_\gamma \\ u &= g_1 \text{ sur } \gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g_2 \text{ sur } \gamma \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$



-figure I.1-

Ω_γ domaine compris entre les courbes $\partial\Omega$ et γ ,

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une application non linéaire, positive, croissante

$g_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, régulière et positive

$g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, régulière,

où on a choisi une condition homogène sur le bord $\partial\Omega$ pour simplifier.

(On notera $\vec{n}_\gamma$, la normale à γ extérieure à Ω_γ et $\partial/\partial n$ la dérivation dans la direction $\vec{n}_\gamma$).

Le but de ce paragraphe est d'étudier l'existence locale d'une correspondance $\lambda \rightarrow (\gamma, u)$ et éventuellement sa régularité.

I.3.1. Enoncé local du problème à frontière libre

On suppose qu'il existe une solution (γ_0, u_0) du problème (3.1) pour une valeur λ_0 du paramètre λ , qui vérifie :

$$(3.2) \quad u_0 \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega_{\gamma_0}}) ; \quad 1 \in \mathbb{N}, \quad 1 > 2 ; \quad \alpha \in]0,1[,$$

et que γ_0 , courbe de Jordan, admet un paramétrage de classe $C^{1+\alpha}$:

$$(3.3) \quad \gamma_0 = \{\xi = g_0(t) ; t \in I\} ; g_0 \in [C^{1+\alpha}(I)]^2$$

(I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$). On cherche, pour λ voisin de λ_0 , une solution du problème (3.1) dans un voisinage de (γ_0, u_0) défini comme suit :

On dira que γ est voisine de γ_0 si elle admet un paramétrage de la forme :

$$(3.4) \quad \gamma = \{z = g_0(t) + g(t); t \in I\} ; g \in [C^{1+\alpha}(I)]^2$$

avec g voisin de 0 dans $[C^0(I)]^2$

Pour γ voisine de γ_0 , on définit l'ouvert Ω_γ compris entre $\partial\Omega$ et γ et on lui associe l'espace de fonctions :

$$(3.5) \quad V(\Omega_\gamma) = \{v \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega_\gamma}) / v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Avec ces définitions on peut poser le problème (3.1) sous la forme locale :

Trouver γ voisine de γ_0 , trouver $u \in V(\Omega_\gamma)$ telles que :

$$(3.6) \quad \begin{cases} -\Delta u - \lambda f(u) = 0 & \text{dans } \Omega_\gamma \\ u = g_1 & \text{sur } \gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 & \text{sur } \gamma \end{cases}$$

que l'on écrira formellement :

$$(3.6 \text{ bis}) \quad F(\lambda, \gamma, u) = 0$$

On se propose d'étudier la dérivabilité du problème (3.6) par rapport aux variables γ et u . Si, en ce qui concerne γ , on peut se ramener facilement à un espace fixe grâce au paramétrage (3.4), par contre u est dans l'espace $V(\Omega_\gamma)$ qui dépend de γ !

C'est pourquoi on va transporter le problème sur le domaine fixe Ω_{γ_0} , avant de dériver.

I.3.2. Transport en domaine fixe

On se donne un champ de vecteurs $\vec{V} : \gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $C^{1+\alpha}$, normé (c'est à dire : $\|\vec{V}(\xi)\| = 1, \forall \xi \in \gamma_0$) et transverse au sens suivant :

$$(3.7) \quad C > 0 / \min_{\gamma_0} \langle \vec{V}(\xi), \vec{n}_{\gamma_0}(\xi) \rangle > C$$

On se réfère aux travaux de A. Dervieux [DER83] ou C. Guillopé [GUI77] pour les résultats qui suivent :

$$(3.8) \quad \begin{aligned} &\text{Il existe } \tau > 0 \text{ tel que l'application } \pi :]-\tau, \tau[\times \gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ &\pi(d, \xi) = \xi + d \vec{V}(\xi) \\ &\text{soit injective et de classe } C^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

L'application π permet de paramétrer la couronne $\pi(]-\tau, \tau[\times \gamma_0)$ et il existe un voisinage de γ_0 dans $[C^{1+\alpha}(I)]^2$, noté G_{ad} , tel que tout élément de G_{ad} soit inclus dans la couronne $\pi(]-\tau, \tau[\times \gamma_0)$.

(cf. [DER83 chap.3, prop.1.7] ou [GUI77 chap.2, prop.1.1]).

Pour $\gamma \in G_{ad}$, on écrira :

$$(3.9) \quad \gamma = \{z \in \mathbb{R}^2 / z = \xi + \gamma(\xi) \vec{V}(\xi)\}$$

identifiant ainsi γ à un élément de $C^{1+\alpha}(\gamma_0)$ voisin de 0 dans $C^0(\gamma_0)$.

A tout $\gamma \in G_{ad}$, on peut faire correspondre un difféomorphisme T_γ appartenant à $[C^{1+\alpha}(\Omega)]^2$ ainsi que son inverse, vérifiant $T_\gamma(\gamma_0) = \gamma$, $T_\gamma(\partial\Omega) = \partial\Omega$ et $T_\gamma(\Omega_{\gamma_0}) = \Omega_\gamma$, de telle façon que l'application :

$$(3.10) \quad \gamma \mapsto (T_\gamma, T_\gamma^{-1})$$

soit analytique de G_{ad} dans $[C^{1+\alpha}(\Omega)]^2 \times [C^{1+\alpha}(\Omega)]^2$.
(cf. [DER83 chap.3, prop.1.10]).

On ne donne pas une construction explicite du transport T_γ et de son inverse, qui serait de peu d'intérêt dans le cadre général, (on trouvera des

exemples de telles constructions dans [DER83 p. III.17-III.18] ou dans [GUI77 p. 30-39]), on retiendra simplement que le transport peut être mis sous la forme suivante :

$$(3.11) \quad \begin{cases} T_\gamma = I + h(\gamma) \\ T_\gamma^{-1} = I - k(\gamma) \end{cases}$$

où $\gamma \rightarrow (h(\gamma), k(\gamma))$ est une application linéaire et analytique de G_{ad} dans $[C^{1+\alpha}(\Omega)]^2 \times [C^{1+\alpha}(\Omega)]^2$.

Compte tenu de la régularité de T_γ , le résultat suivant est évident :

Pour tout $\gamma \in G_{ad}$, les espaces $V(\Omega_\gamma)$ et $V(\Omega_{\gamma_0})$ sont liés par la relation :

$$(3.12) \quad u \in V(\Omega_\gamma) \Leftrightarrow u \circ T_\gamma \in V(\Omega_{\gamma_0})$$

On peut maintenant transporter le problème (3.6) après l'avoir écrit sous la forme **variationnelle** :

Trouver $\gamma \in G_{ad}$, trouver $u \in \{v \in V(\Omega_\gamma) / v = g_1 \text{ sur } \gamma\}$,
tels que, pour tout $\theta \in V(\Omega_\gamma)$,

$$(3.13) \quad \int_{\Omega_\gamma} \nabla u \nabla \theta - \lambda f(u) \theta = \int_\gamma g_2 \theta$$

On pose le changement de variable :

$$(3.14) \quad z = T_\gamma(\xi) ; z \in \Omega_\gamma ; \xi \in \Omega_{\gamma_0};$$

et le changement de fonction inconnue :

$$(3.15) \quad u = v \circ T_\gamma^{-1}$$

Le calcul du gradient de u conduit à :

$$(3.16) \quad \nabla u(z) = {}^t[DT_\gamma]^{-1}(\xi) \cdot \nabla v(\xi)$$

Puis on écrit le problème transporté sous forme variationnelle :

Trouver $\gamma \in G_{ad}$, trouver $v \in \{v \in V(\Omega_{\gamma_0}) / v = g_1 \text{ sur } \gamma_0\}$
tels que, pour tout $\theta_0 \in V(\Omega_{\gamma_0})$,

$$(3.17) \quad \int_{\Omega_{\gamma_0}} \{ \langle [DT\gamma]^{-1t} [DT\gamma]^{-1} \cdot \nabla v, \nabla \theta_0 \rangle - \lambda f(v) \theta_0 \} |\det[DT\gamma]| \\ = \int_{\gamma_0} g_2 \circ T\gamma \theta_0 |\det[DT\gamma]|$$

On a toute la régularité nécessaire pour utiliser la formule de Green :

$$\int_{\Omega_{\gamma_0}} \langle |\det[DT\gamma]| [DT\gamma]^{-1t} [DT\gamma]^{-1} \cdot \nabla v, \nabla \theta_0 \rangle \\ = - \int_{\Omega_{\gamma_0}} \operatorname{div} \{ |\det[DT\gamma]| [DT\gamma]^{-1t} [DT\gamma]^{-1} \cdot \nabla v \} \theta_0 \\ + \int_{\gamma_0} |\det[DT\gamma]| \langle [DT\gamma]^{-1t} [DT\gamma]^{-1} \cdot \nabla v, \vec{n}_{\gamma_0} \rangle \theta_0$$

On note alors $A_\gamma : V(\Omega_{\gamma_0}) \rightarrow C^{1-2+\alpha}(\Omega_{\gamma_0})$ l'opérateur suivant :

$$(3.18) \quad A_\gamma \cdot v = \operatorname{div} \{ |\det[DT\gamma]| [DT\gamma]^{-1t} [DT\gamma]^{-1} \cdot \nabla v \}$$

et le problème transporté admet la **formulation forte** :

Trouver $\gamma \in G_{ad}$ et $v \in V(\Omega_{\gamma_0})$ tels que :

$$(3.19) \quad \begin{aligned} -A_\gamma \cdot v - \lambda f(v) |\det[DT\gamma]| &= 0 \quad \text{dans } \Omega_{\gamma_0} \\ v - g_1 \circ T\gamma &= 0 \quad \text{sur } \gamma_0 \\ \langle [DT\gamma]^{-1t} [DT\gamma]^{-1} \cdot \nabla v, \vec{n}_{\gamma_0} \rangle - g_2 \circ T\gamma &= 0 \quad \text{sur } \gamma_0 \end{aligned}$$

que l'on écrit :

$$(3.19bis) \quad G(\lambda, \gamma, v) = 0$$

où l'opérateur G est défini par (3.19) sur un espace fixe.

En utilisant les résultats classiques de régularité des applications trace, on obtient la continuité pour G de :

$R \times G_{ad} \times V(\Omega_{\gamma_0})$ équipé de la norme de $R \times C^{1+\alpha}(\gamma_0) \times C^{1+\alpha}(\Omega_{\gamma_0})$, dans : $C^{1-2+\alpha}(\Omega_{\gamma_0}) \times C^{1+\alpha}(\gamma_0) \times C^{1-1+\alpha}(\gamma_0)$ équipé de la norme de $C^{1-2+\alpha}(\Omega_{\gamma_0}) \times C^{1-1+\alpha}(\gamma_0) \times C^{1-2+\alpha}(\gamma_0)$.

Les dérivées partielles (formelles) de G, au point $(\lambda_0, \gamma_0, u_0)$ sont données dans la proposition suivante :

Proposition 1.3 :

On note $W\delta$ l'élément de $C^{1-1+\alpha}(\Omega_{\gamma_0})$ défini par :

$$(3.20) \quad W\delta = \langle \nabla u_0, h(\delta) \rangle; \quad \delta \in C^{1+\alpha}(\gamma_0)$$

où $h(\gamma)$ définit le transport $T_\gamma = I + h(\gamma)$.

On note $[M\delta]$ la matrice symétrique :

$$(3.21) \quad [M\delta] = [D(h(\delta))] + {}^t[D(h(\delta))].$$

On définit l'opérateur formel :

$$(3.22) \quad L_0 \cdot w = \Delta w + \lambda_0 f'(u_0)w.$$

Alors, les dérivées partielles de G au point $(\lambda_0, \gamma_0, u_0)$ sont les suivantes :

$$(3.23) \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda}(\lambda_0, \gamma_0, u_0) = \begin{cases} -f(u_0)|_{\Omega_{\gamma_0}} \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$(3.24) \quad \frac{\partial G}{\partial \gamma}(\lambda_0, \gamma_0, u_0) \cdot \delta = \begin{cases} L_0 \cdot W\delta \\ -\langle \nabla g_1, h(\delta) \rangle|_{\gamma_0} \\ -\langle [M\delta] \cdot \nabla u_0, n_{\gamma_0} \rangle - \langle \nabla g_2, h(\delta) \rangle|_{\gamma_0} \end{cases}$$

$$(3.25) \quad \frac{\partial G}{\partial v}(\lambda_0, \gamma_0, u_0) \cdot w = \begin{cases} -L_0 \cdot w \\ w|_{\gamma_0} \\ \frac{\partial w}{\partial n}|_{\gamma_0} \end{cases}$$

Preuve :

Les résultats essentiels que l'on utilise sont déduits de [MSI76 Lemmes 4.2 et 4.3] :

Les applications $\tau \rightarrow |\det[D(I + \tau)]|$ et $\tau \rightarrow [D(I + \tau)]^{-1}$ sont différentiables de $[C^2(\Omega)]^2$ dans $C^1(\Omega)$ et $[C^1(\Omega)]^4$, respectivement ; leurs dérivées au point $\tau = 0$ valent :

$$(3.26) \quad \frac{d}{d\tau} (|\det[D(I + \tau)]|)_{\tau=0} \cdot d\tau = \operatorname{div}(d\tau)$$

$$(3.27) \quad \frac{d}{d\tau} ([D(I + \tau)]^{-1})_{\tau=0} \cdot d\tau = -[D(d\tau)]$$

On utilisera aussi la relation suivante, pour $\Phi \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ et $H \in [C^2(\Omega)]^2$

$$(3.28) \quad \operatorname{div}\{(\operatorname{div}(H) - [DH] - {}^t[DH]) \cdot \nabla \Phi\} = \operatorname{div}\{(\Delta \Phi)H\} - \Delta(\langle \nabla \Phi, H \rangle)$$

(cf. [MSI76 Lemme 5.2]).

De la relation $T_{\gamma_0} = I$ on déduit que A_{γ_0} est l'opérateur Laplacien, alors :

$$\frac{d}{d\lambda} (-\Delta u_0 - \lambda f(u_0))_{\lambda=\lambda_0} = -f(u_0)$$

$$\frac{d}{dv} (-\Delta v - \lambda_0 f(v))_{v=u_0} \cdot w = -L_0 \cdot w$$

puis, avec $[DT_{\gamma_0}]^{-1} = I$ et $\det[DT_{\gamma_0}] = 1$, on obtient les dérivées partielles (3.23) et (3.25).

On utilise $T_\gamma = I + h(\gamma)$ où $h : C^{1+\alpha}(\gamma_0) \rightarrow [C^{1+\alpha}(\Omega_{\gamma_0})]^2$ est analytique et les résultats (3.26) et (3.27) pour écrire successivement :

$$\frac{d}{d\gamma} (|\det[DT_\gamma]|)_{\gamma=\gamma_0} \cdot \delta = \operatorname{div}\{h(\delta)\}$$

$$\frac{d}{d\gamma} ([DT_\gamma]^{-1})_{\gamma=\gamma_0} \cdot \delta = -[D(h(\delta))]$$

$$(3.29) \quad \frac{d}{d\gamma} ([DT_\gamma]^{-1t} [DT_\gamma]^{-1})_{\gamma=\gamma_0} \cdot \delta = -[M\delta]$$

$$\frac{d}{d\gamma} (A_\gamma \cdot u_0)_{\gamma=\gamma_0} \cdot \delta = \operatorname{div}\{ (\operatorname{div}\{h(\delta)\}) - [M_\gamma] \cdot \nabla u_0 \}$$

$$\frac{d}{d\gamma} (\lambda_0 f(u_0) |\det[DT_\gamma]|)_{\gamma=\gamma_0} \cdot \delta = \lambda_0 f(u_0) \operatorname{div}\{h(\delta)\}$$

avec la relation (3.28), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\gamma} (-A_\gamma \cdot u_0 - \lambda_0 f(u_0) |\det[DT_\gamma]|)_{\gamma=\gamma_0} \cdot \delta &= \operatorname{div}\{(-\Delta u_0)h(\delta)\} \\ &+ \Delta(\langle \nabla u_0, h(\delta) \rangle) - \lambda_0 f(u_0) \operatorname{div}\{h(\delta)\} \end{aligned}$$

Comme $(\lambda_0, \gamma_0, u_0)$ est solution de (3.6), on a : $-\Delta u_0 - \lambda_0 f(u_0) = 0$, puis :

$$\operatorname{div}\{\lambda_0 f(u_0) h(\delta)\} = \lambda_0 f'(u_0) \langle \nabla u_0, h(\delta) \rangle + \lambda_0 f(u_0) \operatorname{div}\{h(\delta)\}$$

d'où finalement, avec la notation (3.20) :

$$\frac{d}{d\gamma} (-A_\gamma \cdot u_0 - \lambda_0 f(u_0) |\det[DT_\gamma]|)_{\gamma=\gamma_0} = L_0 \cdot W\delta$$

De la forme du transport (3.11), on déduit le résultat de dérivation :

$$\frac{d}{d\gamma} (\Phi \circ T_\gamma)_{\gamma=\gamma_0} \cdot \delta = \langle \nabla \Phi, h(\delta) \rangle$$

qu'on appliquera à $\Phi = g_1$ ou $\Phi = g_2$ pour obtenir (3.24). ■

Remarques :

1) Pour justifier la notation $L_0 \cdot W\delta$, on pourra supposer que $l > 3$, ainsi, $W\delta \in C^{l-1+\alpha}(\Omega_{\gamma_0}) \Rightarrow L_0 \cdot W\delta \in C^{l-3+\alpha}(\Omega_{\gamma_0})$.

Si $l = 2$, $W\delta \in C^{1+\alpha}(\Omega_{\gamma_0})$ et $L_0 \cdot W\delta$ sera compris au sens des distributions.

2) Il serait nécessaire d'avoir plus de régularité sur u_0 , pour que (3.24) définisse une dérivée partielle continue de $C^{1+\alpha}(\Omega_{\gamma_0})$ dans $C^{l-2+\alpha}(\Omega_{\gamma_0}) \times C^{l-1+\alpha}(\gamma_0) \times C^{l-2+\alpha}(\gamma_0)$. On pourra conclure dans ce sens en particulier dans le cas où $l = +\infty$.

I.3.3 Linéarisation formelle et régularité de la solution

On a montré que l'opérateur du problème transporté G est (au moins formellement) dérivable au point $(\lambda_0, \gamma_0, u_0)$. Dans le cas général, on ne peut pas conclure à l'existence ou à la non-existence d'un arc de solutions $(\gamma(\lambda), v(\lambda))$ passant par $(\lambda_0, \gamma_0, u_0)$ par le théorème classique des fonctions implicites car on ne sait pas montrer que $G_{\gamma, u}$ est un isomorphisme.

Cependant, par analogie avec le problème abstrait traité au début de ce chapitre, on peut considérer le cas où l'opérateur $G_{\gamma, v}(\lambda_0, \gamma_0, u_0)$ est (au moins formellement) inversible. On va montrer comment la linéarisation du problème (3.19) permet d'obtenir l'expression formelle des développements de la solution $(\gamma(\lambda), u(\lambda))$ du problème à frontière libre (3.4) (en supposant qu'il existe localement, au voisinage de $(\lambda_0, \gamma_0, u_0)$ une branche de solutions).

Soit (Γ, W) l'unique solution du problème linéarisé :

$$G_{\gamma, v}(\lambda_0, \gamma_0, u_0) \cdot (\Gamma, W) = -G_{\lambda}(\lambda_0, \gamma_0, u_0)$$

c'est à dire :

$$(3.31) \quad \begin{cases} L_0 \cdot W\Gamma - L_0 \cdot W = f(u_0) & \text{dans } \Omega_{\gamma_0} \\ -\langle \nabla g_1, h(\Gamma) \rangle + W = 0 & \text{sur } \gamma_0 \\ -\langle [M\Gamma] \cdot \nabla u_0, n \rangle - \langle \nabla g_2, h(\Gamma) \rangle + \partial W / \partial n = 0 & \text{sur } \gamma_0 \end{cases}$$

avec $W\Gamma = \langle \nabla u_0, h(\Gamma) \rangle$.

(on ne se préoccupe pas pour l'instant de la régularité de W , on y reviendra par la suite)

On suppose qu'il existe des fonctions de λ régulières, $\gamma : R \rightarrow G_{ad}$ et $v : R \rightarrow V(\Omega_{\gamma_0})$ telles que $G(\lambda, \gamma(\lambda), v(\lambda)) = 0$; alors, Γ et W sont respectivement les valeurs de $d\gamma/d\lambda$ et $dv/d\lambda$. On obtient ainsi, pour la solution du problème transporté, les développements à l'ordre 1 suivants :

$$(3.32) \quad \gamma(\lambda) = \gamma_0 + (\lambda - \lambda_0)\Gamma + o(\lambda - \lambda_0)$$

$$(3.33) \quad v(\lambda) = u_0 + (\lambda - \lambda_0)W + o(\lambda - \lambda_0)$$

Avec ce résultat, le transport $T_\gamma = I + h(\gamma)$ est une fonction de λ (on donnera pour chacune des applications que l'on traite dans les chapitres suivants une forme explicite de l'application $h(\gamma)$) :

$$(3.34) \quad T_\gamma(\lambda) = I + (\lambda - \lambda_0) h(\Gamma) + o(\lambda - \lambda_0)$$

$$(3.35) \quad T_\gamma^{-1}(\lambda) = I - (\lambda - \lambda_0) k(\Gamma) + o(\lambda - \lambda_0)$$

et la relation $u = v_0 T_\gamma^{-1}$ achève de décrire l'application $\lambda \rightarrow (\gamma, u)$. On obtient finalement pour la solution du problème à frontière libre (3.6) le développement à l'ordre 1 suivant :

$$(3.36) \quad \begin{aligned} u(\lambda)(r) &= u_0(\rho) + (\lambda - \lambda_0) W(\rho) \\ \text{pour } \rho \in \Omega_{\gamma_0} \text{ et } r &= \rho + (\lambda - \lambda_0) h(\Gamma)(\rho) \in \Omega_\gamma \end{aligned}$$

On verra dans les chapitres suivants des problèmes à frontière libre particuliers pour lesquels on peut montrer effectivement l'existence locale d'une branche de solutions par le théorème des fonctions implicites. Dans ce cas, on justifiera les développements formels précédents pour des solutions régulières. On saura aussi définir les points de retournements simples de ces problèmes en appliquant la Définition I.2 au problème transporté. On pourra alors adapter la méthode standard de continuation donnée dans la première partie de ce chapitre.

Les développements locaux de la branche des solutions du problème à frontière libre $F(\lambda, \gamma, u) = 0$ seront obtenus (au voisinage d'une solution régulière ou d'un point de retournement simple) de la façon suivante :

le problème à frontière libre sera augmenté d'une normalisation :

$$\text{Lin}(\lambda - \lambda_0, \gamma - \gamma_0, u - u_0) - (s - s_0) = 0$$

ensuite, le problème augmenté sera transporté sur le domaine fixe Ω_{γ_0} :

$$P(\lambda, \gamma, v, s) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} G(\lambda, \gamma, v) = 0 \\ \text{Lin}(\lambda - \lambda_0, \gamma - \gamma_0, v - u_0) - (s - s_0) = 0 \end{cases}$$

avec $v = u_0 T_\gamma$. On aura soin de choisir l'application Lin de telle façon

que la condition (C5) soit vérifiée :

(C5) $\text{Lin}(\Lambda, \Gamma, W) = 0$ pour (Λ, Γ, W) générateur de $\text{Ker DG}(\lambda_0, \gamma_0, u_0)$

Le problème augmenté définit alors localement des fonctions $\lambda(s)$, $\gamma(s)$, $v(s)$ par le théorème des fonctions implicites. On en déduira par le transport "retour" un paramétrage de la branche des solutions du problème à frontière libre :

$$\lambda(s) ; \gamma(s) ; u(s) = v(s) \circ T\gamma(s)^{-1}$$

Il arrive toutefois, en particulier pour certains problèmes d'obstacle, qu'on ne sache pas montrer que l'opérateur formel $G_{\gamma,v}$ est continu pour des topologies convenables (voir aussi [DER83] et [GUI77]). Les développements (3.32) à (3.36) peuvent alors, à priori, conduire à des "solutions" moins régulières que celles que l'on cherche. En effet, dans le problème linéarisé (3.31), si $u_0 \in C^{1+\alpha}(\Omega_{\gamma_0})$, alors pour tout $\delta \in G_{ad}$, $W\delta = \langle \nabla u_0, h(\delta) \rangle \in C^{1-1+\alpha}(\Omega_{\gamma_0})$ et la solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} -L_0 \cdot w = f(u_0) - L_0 \cdot W\delta \\ w = \langle \nabla g_1, h(\delta) \rangle \text{ sur } \gamma_0 \\ w = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

est de classe $C^{1-1+\alpha}$, au plus.

Ceci a pour première conséquence que le développement (3.33) ne donne pas une approximation de v dans $C^{1+\alpha}(\Omega_{\gamma_0})$, mais seulement dans $C^{1-1+\alpha}(\Omega_{\gamma_0})$. Ensuite, en raison de la perte de régularité sur la dérivée normale, la dernière équation de (3.31) ne permet pas, en général, de trouver $\Gamma \in C^{1+\alpha}(\gamma_0)$.

C'est pourquoi, au Chapitre IV, on préférera étudier directement les solutions d'un problème approché (pour lequel on peut justifier la résolution locale, en raison du caractère discret des inconnues), plutôt que d'étudier la résolution locale du problème à frontière libre continu (pour lequel on ne sait pas justifier la validité de la linéarisation).

CHAPITRE II

PROBLEME A FRONTIERE LIBRE ISSU D'UN PROBLEME D'OBSTACLE

(CAS A SYMETRIE RADIALE)

Plan du chapitre :

II.1. POSITION DU PROBLEME

II.2. PROBLEME A FRONTIERE LIBRE CONTINU

- II.2.1. Dérivation par rapport à la frontière libre
- II.2.2. Solution régulière. Point de retournement simple
- II.2.3. Méthode de continuation pour le problème continu

II.3. PROBLEME A FRONTIERE LIBRE DISCRET

- II.3.1. Discrétisation du problème à frontière libre
- II.3.2. Résolution locale du problème discret

II.4. RESULTATS NUMERIQUES

Résumé :

Le problème posé est de construire une méthode numérique pour calculer la branche inéquation (c'est à dire la branche (λ, u) ; $\lambda \in \mathbb{R}^+$ des solutions pour lesquelles l'ensemble de coïncidence est non vide) dans le problème d'obstacle suivant, où Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^n$:

$$u \in K$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v-u) - \lambda f(u)(v-u) > 0 ; \text{ pour tout } v \in K$$

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) / v \leq \Psi \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

On s'intéresse aux solutions à symétrie radiale pour lesquelles l'ensemble de coïncidence : $\{x \in \Omega / u(x) = \Psi(x)\}$ est une boule B_R , déterminée par son rayon R .

On envisage la résolution du problème à frontière libre associé :

$$\left[\begin{array}{l} -u''(r) - \frac{n-1}{r} u'(r) - \lambda f(u(r)) = 0 ; \text{ pour } 0 < R < r < 1 \\ u(R) = \Psi(R) \\ u'(R) = \Psi'(R) \\ u(1) = 0 \end{array} \right.$$

de deux façons différentes :

- 1) Au voisinage d'une solution (λ_0, R_0, u_0) , par changement de variable $r = T_R(\rho)$ et par changement de fonction inconnue $v = u \circ T_R$, le problème à frontière libre est transporté sur le domaine fixe $\Omega|_{B_{R_0}}$. Le problème à frontière libre transporté que l'on note :

$$G(\lambda, R, v) = 0$$

est résolu localement par la méthode de continuation standard présentée au chapitre I.

A partir de l'arc paramétré : $(\lambda(s), R(s), v(s))$ des solutions du problème transporté, on obtient localement les solutions du problème à frontière libre sous la forme d'un arc paramétré : $(\lambda(s), R(s), u(s))$ par le "transport retour" : $u(s) = v(s) \circ T^{-1}_{R(s)}$.

- 2) Le problème à frontière libre est approché par un problème discret :

$$F_h(\lambda, R, u_h) = 0$$

obtenu par un schéma aux différences finies. L'inconnue u_h peut être identifiée à un élément de $\mathbb{R}^N$, où N est le nombre de points de discrétisation. Le problème discret étant directement posé sur un espace fixe, on calcule la branche de ses solutions par application de la méthode standard.

On vérifie que les résultats numériques obtenus par ces deux méthodes sont très voisins.

II.1. POSITION DU PROBLEME

On considère les solutions à symétrie radiales de l'inéquation variationnelle suivante :

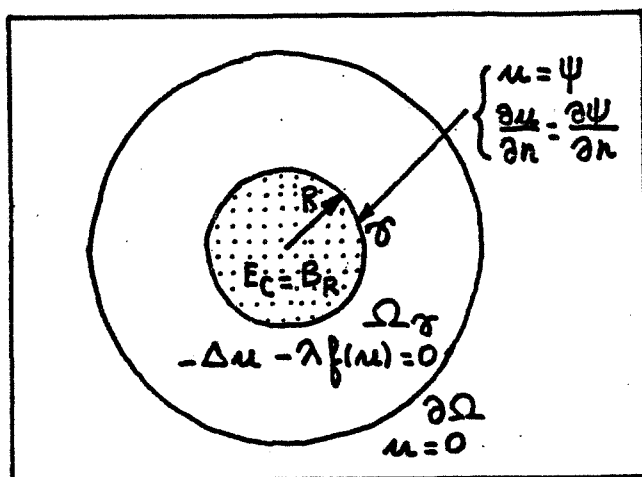
$$u \in K$$

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) / v \leq \Psi \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

$$(1.1) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v-u) - \lambda f(u)(v-u) > 0 ; \text{ pour tout } v \in K$$

où Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^n$, Ψ est un obstacle régulier, positif, à symétrie radiale et f une non-linéarité régulière, croissante, positive.

Si $\Psi \in H^2(\Omega)$, alors $u \in H^2(\Omega)$ et l'inéquation (1.1) admet la formulation forte suivante :



$$u \leq \Psi \quad \text{sur } \Omega_\gamma = \Omega \setminus E_C$$

$$-\Delta u - \lambda f(u) = 0 \quad \text{sur } \Omega_\gamma$$

$$\begin{cases} u = \Psi \text{ sur } \gamma = \partial E_C \\ \partial u / \partial n = \partial \Psi / \partial n \text{ sur } \gamma \end{cases}$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial \Omega$$

-figure II.1-

(on a noté $E_C = \{x \in \Omega / u(x) = \Psi(x)\}$ l'ensemble de coïncidence, que l'on suppose non vide).

On suppose que l'obstacle Ψ est à symétrie radiale. On cherche les solutions du problème fort qui sont à symétrie radiale, vérifiant :

- $E_C = B_R$, boule centrée à l'origine définie par son rayon R ,
- $u = u(r)$ est définie sur l'intervalle $[R, 1]$.

On écrit alors le problème à frontière libre :

Trouver $R > 0$ et $u \in C^2([R, 1])$ tels que :

$$(1.2) \quad \begin{cases} -u'' - \frac{n-1}{r} u' - \lambda f(u) = 0 & \text{pour } R < r < 1 \\ u(R) = \Psi(R) \\ u'(R) = \Psi'(R) \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Proposition II.1 :

Si l'obstacle régulier Ψ vérifie l'hypothèse :

$$(H) \quad \Psi'' + \frac{n-1}{r} \Psi' + \lambda f(\Psi) > 0 \text{ sur } [0, 1[$$

alors toute solution du problème à frontière libre (1.2) qui vérifie de plus :

$$u < \Psi \quad \text{et} \quad \Psi'' + \frac{n-1}{r} \Psi' + \lambda f(u) > 0 \quad \text{sur }]R, 1[$$

prolongée par Ψ sur $[0, R[$, est solution de l'inéquation variationnelle (1.1).

Preuve :

Soit R, u , une solution de (1.2), on prolonge u par Ψ pour $r < R$ et on note $\tilde{u}$ le prolongement.

Soit $v \in K$, soit B_R la boule ouverte de centre 0, de rayon R ,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \nabla (v - \tilde{u}) - \lambda f(\tilde{u})(v - \tilde{u}) \\ &= \int_{B_R} \nabla \Psi \nabla (v - \Psi) - \lambda f(\Psi)(v - \Psi) + \int_{\Omega \setminus B_R} \nabla u \nabla (v - u) - \lambda f(u)(v - u) \end{aligned}$$

par la formule de Green,

$$\begin{aligned} I &= \int_{B_R} \{-\Delta \Psi - \lambda f(\Psi)\}(v - \Psi) + \int_{\Omega \setminus B_R} \{-\Delta u - \lambda f(u)\}(v - u) \\ &\quad + 2\pi R \{ \Psi'(R)(v - \Psi)(R) - u'(R)(v - u)(R) \} \end{aligned}$$

alors, avec $u(R) = \Psi(R)$ et $u'(R) = \Psi'(R)$,

$$I = \int_{\Omega \setminus B_R} \{-\Delta \Psi - \lambda f(\Psi)\}(v - \Psi) > 0, \quad \text{si } \Delta \Psi + \lambda f(\Psi) > 0$$

Enfin, $\Delta \Psi + \lambda f(u) > 0$ et $u < \Psi$ assurent que B_R est l'ensemble de coïncidence et que $u \in K$. ■.

On écrira le problème à frontière libre sous la forme abstraite :

$$(1.2\text{bis}) \quad F(\lambda, R, u) = 0$$

En étudiant localement le problème à frontière libre (1.2), on cherche à obtenir un développement de la branche des solutions (λ, R, u) qui prenne en compte, à la fois, la variation de la frontière libre et la variation de la solution u sur le domaine (variable) où elle est définie par un problème aux limites.

Ce point de vue permet d'envisager la résolution numérique de l'inéquation (1.1) par une méthode de continuation dans laquelle, à chaque pas, on obtient, dans un même temps, une approximation de l'ensemble de coïncidence et une approximation de la solution sur le complémentaire de cet ensemble.

Le calcul numérique des solutions du problème à frontière libre (1.2) est exposé dans les deux paragraphes suivants.

II.2. PROBLEME A FRONTIERE LIBRE CONTINU

La méthode de continuation standard, présentée au Chapitre I., que l'on veut appliquer à la résolution du problème à frontière libre (1.2) est basée sur la linéarisation de l'opérateur F .

Or il n'est pas possible de calculer la dérivée partielle de F par rapport à R car, si on fixe les variables λ_0 et u_0 (définie sur l'intervalle $[R_0, 1]$), $F(\lambda_0, R, u_0)$ n'a pas de sens pour $R \neq R_0$. On va donc utiliser la technique de variation de domaine, qui consiste à transporter le problème sur un domaine fixe avant de le dériver.

II.2.1. Dérivation par rapport à la frontière libre

Soit λ_0, R_0, u_0 une solution de (1.2). Pour tout $R > 0$ (en particulier pour R voisin de R_0), on peut définir le **transport** :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} T_R : [R_0, 1] &\rightarrow [R, 1] \\ \rho &\rightarrow r = \frac{1-R}{1-R_0} \rho + \frac{R-R_0}{1-R_0} \end{aligned}$$

Alors, par le **changement de fonction inconnue** :

$$(2.2) \quad v = u \circ T_R$$

on ramène le problème (1.2) sur l'intervalle fixe $[R_0, 1]$:

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\left(\frac{1-R_0}{1-R}\right)^2 v'' - \frac{n-1}{T_R(\rho)} \frac{1-R_0}{1-R} v' - \lambda f(v) = 0 \text{ pour } R_0 < \rho < 1 \\ & v(R_0) - \Psi(R) = 0 \\ & \frac{1-R_0}{1-R} v'(R_0) - \Psi'(R) = 0 \\ & v(1) = 0 \end{aligned} \right.$$

On écrit le problème transporté :

$$(2.3\text{bis}) \quad G(\lambda, R, v) = 0$$

définissant ainsi, avec la notation :

$$(2.4) \quad C^k_0([R_0, 1]) = \{ v \in C^k([R_0, 1]) / v(1) = 0 \}$$

un opérateur $G : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times C^2_0([R_0, 1]) \rightarrow C^0([R_0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ de classe C^2 . En effet, G est composé d'applications linéaires continues et des applications C^2 suivantes (des variables λ, R, v) :

$$\left(\frac{1-R_0}{1-R}\right)^2 ; -\frac{1}{T_R(\rho)} \frac{1-R_0}{1-R} ; -\lambda f(v) ; -\Psi(R) ; \frac{1-R_0}{1-R} ; -\Psi'(R).$$

Les dérivées partielles de G au point (λ_0, R_0, u_0) sont notées G^0_{λ} , G^0_R et G^0_v ; on donne leur valeur :

$$(2.5) \quad G^0_{\lambda} = \begin{cases} -f(u_0) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$(2.6) \quad G^0_R = \begin{cases} \frac{1}{1-R_0} \frac{n-1}{\rho^2} u'_0 + 2 \lambda_0 f(u_0) \frac{1}{1-R_0} \\ -\Psi'(R_0) \\ \frac{1}{1-R_0} \Psi'(R_0) - \Psi''(R_0) \end{cases}$$

$$(2.7) \quad G^0_{v \cdot w} = \begin{cases} -\Delta w - \lambda_0 f'(u_0) w \\ w(R_0) \\ w'(R_0) \end{cases}$$

Définition II.1 :

On définit la **dérivée eulérienne** de F au point λ_0, R_0, u_0 par :

$$\dot{F} = \frac{d}{dR} \{G(\lambda_0, R, u_0)\}_{R=R_0} = G^0_R$$

Une technique issue de la mécanique des milieux continus [GER73] et reprise en identification de domaine [CEA81] utilise la relation :

$$(2.8) \quad F(\lambda, R, u) = G(\lambda, R, u \circ T_R)$$

pour définir la notion de **dérivée par rapport au domaine**, que l'on obtient par une dérivation composée de (2.8) par rapport à R :

$$(2.9) \quad F^0_D = G^0_R + G^0_{v \cdot} \left(\frac{1-\rho}{1-R_0} u'_0 \right)$$

La dérivée par rapport au domaine est utilisée, pour interpréter les variations de la solution du problème transporté (que l'on obtient rigoureusement en utilisant la dérivée Eulérienne) en terme de variation de la solution du problème posé sur un domaine variable.

On utilisera ici la dérivée par rapport au domaine pour simplifier l'écriture de certains opérateurs dérivés, comme le suggère la proposition suivante :

Proposition II.2 :

La dérivée par rapport au domaine du problème à frontière libre (1.2) au point (λ_0, R_0, u_0) est donnée par :

$$(2.10) \quad F_D^0 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\{\Delta \Psi + \lambda_0 f(\Psi)\}(R_0) \end{cases}$$

preuve :

Pour $w = \frac{1-\rho}{1-R_0} u'_0$,

avec $-\Delta u_0 - \lambda_0 f(u_0) = 0$, on a :

$$(i) \quad -\Delta w - \lambda_0 f'(u_0)w = \frac{1}{1-R_0} \{-2\lambda_0 f(u_0) - \frac{n-1}{\rho^2} u'_0\}$$

on a aussi :

$$(ii) \quad w(R_0) = u'_0(R_0) = \Psi'(R_0)$$

enfin, si l'équation est vérifiée sur $[R_0, 1[$,

$$\begin{aligned} w'(R_0) + \frac{1}{1-R_0} \Psi'(R_0) - \Psi''(R_0) &= u''_0(R_0) - \frac{1}{1-R_0} u'_0(R_0) + \frac{1}{1-R_0} \Psi'_0(R_0) - \Psi''(R_0) \\ &= -\frac{n-1}{\rho} \Psi'(R_0) - \lambda_0 f(\Psi(R_0)) - \frac{1}{1-R_0} \Psi'(R_0) + \frac{1}{1-R_0} \Psi'(R_0) - \Psi''(R_0) \\ &= -\Delta \Psi(R_0) - \lambda f(\Psi(R_0)) \quad (iii) \end{aligned} \quad \blacksquare.$$

On définit l'opérateur formel L_0 :

$$(2.11) \quad L_0 \cdot z = -\Delta z - \lambda_0 f'(u_0)z$$

alors, en utilisant (2.7) et (2.8) et (2.9) et en posant :

$$(2.12) \quad m = w - t \frac{1-\rho}{1-R_0} u'_0 \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \text{ et } w \in C^2_0([R_0, 1[)$$

l'opérateur dérivé $G_{R,v}(\lambda_0, R_0, u_0)$ est de la forme :

$$(2.13) \quad G^0_{R,v}(t, w) = \begin{cases} L_0 \cdot m \\ m(R_0) \\ m'(R_0) - t\{\Delta\Psi + \lambda_0 f(\Psi)\}(R_0) \end{cases}$$

II.2.3 Solution régulière. Point de retournement simple

Au point (λ_0, R_0, u_0) , solution de (1.2), dire qu'il existe un paramétrage local de la branche des solutions de (2.1) par λ revient à dire que l'opérateur $G^0_{R,v} : \mathbb{R} \times C^2_0([R_0, 1]) \rightarrow C^0([R_0, 1]) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ linéaire, et continu est un isomorphisme.

En effet, si $G^0_{R,v}$ est un isomorphisme, (2.3bis) définit localement des fonctions $R(\lambda)$ et $v(\lambda)$ par le théorème des fonctions implicites. On en déduit que le transport : $T_R = T_R(\lambda)$ est une fonction de λ et par conséquent, $u = v \circ T_R^{-1}$ définit u comme une fonction de λ , de telle sorte que $(\lambda, R(\lambda), u(\lambda))$ soit localement solution du problème à frontière libre continu (1.2).

Cette remarque permet de définir les solutions régulières du problème à frontière libre comme les solutions régulières du problème transporté. On définira les points de retournement du problème à frontière libre de la même façon :

Définition II.3 :

On dit que (λ_0, R_0, u_0) est une solution régulière du problème à frontière libre (1.2) si

$$(C1) \quad G^0_{R,v} \text{ est un isomorphisme.}$$

On dit qu'une solution (λ_0, R_0, u_0) de (1.2) est un point de retournement simple si l'opérateur $G^0_{R,v}$ vérifie les conditions de retournement simple :

- (C2) $\text{Ker } G^0_{R,v}$ est de dimension 1 dans $\mathbb{R} \times C^2_0([R_0, 1])$
- (C3) $\text{Im } G^0_{R,v}$ est de codimension 1 dans $C^0([R_0, 1]) \times \mathbb{R}^2$
- (C4) G^0_λ n'appartient pas à $\text{Im } G^0_{R,v}$

Lemme II.1 :

Soit B_{R_0} la boule de centre 0, de rayon R_0 . On considère l'opérateur L_0 avec des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord de $\Omega \setminus B_{R_0}$.

Si $\Delta \Psi + \lambda f(\Psi)$ ne s'annule pas sur $]0, 1[$ et si (λ_0, R_0, u_0) est une solution de (1.2) alors :

$$\dim \text{Ker } L_0 = \dim \text{Ker } G^0_{R,v} = \text{codim } \text{Im } G^0_{R,v}$$

preuve :

Avec la notation (2.12),

$$(t, w) \in \text{Ker } G^0_{R,v} \iff \begin{cases} L_0 \cdot m = 0 \\ m'(R_0) - t \{ \Delta \Psi + \lambda f(\Psi) \}(R_0) = 0 \end{cases}$$

$$\iff m \in \text{Ker } L_0 \text{ et } t = m'(R_0) / \{ \Delta \Psi + \lambda f(\Psi) \}(R_0)$$

Donc $\dim \text{Ker } L_0 = \dim \text{Ker } G^0_{R,v}$.

Comme L_0 est auto-adjoint, pour le produit scalaire de $L^2(\Omega \setminus B_{R_0})$ on a :

$$\text{Im } L_0 = (\text{Ker } L_0)^\perp$$

Pour ξ régulière, telle que $\xi(1) = 0$ et $\xi(R_0) = b$, on note :

$$l_0 \xi = -\Delta \xi - \lambda f(u_0) \xi$$

alors, en intégrant par parties, pour $\Phi \in \text{Ker } L_0$, on a :

$$\langle l_0 \xi, \Phi \rangle = \langle \xi, L_0 \cdot \Phi \rangle - b \Phi'(R_0) = -b \Phi'(R_0)$$

Soit $(a, b, c) \in C^0([R_0, 1]) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$(a, b, c) \in \text{Im } G^0_{R,v} \iff \exists (t, m) / \begin{cases} L_0 \cdot m = a - l_0 \xi \\ m'(R_0) - t\{\Delta \Psi + \lambda_0 f(\Psi)\}(R_0) = c \end{cases}$$

$$\iff a - l_0 \xi \in \text{Im } L_0 \quad \text{si } \{\Delta \Psi + \lambda \Psi\} \neq 0$$

$$\iff \langle a - l_0 \xi, \Phi \rangle = 0 ; \text{ pour tout } \Phi \in \text{Ker } L_0.$$

$$\iff \langle a, \Phi \rangle + b\Phi'(R_0) = 0 ; \text{ pour tout } \Phi \in \text{Ker } L_0.$$

Donc $\dim \text{Ker } L_0 = \text{codim Im } G^0_{R,v}$. ■

Proposition II.2 :

Si $\Delta \Psi + \lambda_0 f(\Psi)$ ne s'annule pas sur $]0, 1[$, alors (λ_0, R_0, u_0) solution de (1.2) est une solution régulière ssi :

$$\text{Ker } L_0 = \{0\} \text{ dans } \{v \in C^2([R_0, 1]) / v(R_0) = v(1) = 0\}.$$

preuve :

$$G^0_{R,v}(t, w) = (a, b, c) \iff \begin{cases} L_0 \cdot m = a \\ m(R_0) = b \\ m'(R_0) - t\{\Delta \Psi + \lambda_0 f(\Psi)\}(R_0) = c \end{cases}$$

Si $\text{Ker } L_0 = \{0\}$, il existe un unique $m \in C^2_0(]R_0, 1[)$ tel que :

$$L_0 \cdot m = a \text{ avec } m(R_0) = b \text{ et } m(1) = 0 ;$$

alors, si $\Delta \Psi + \lambda_0 f(\Psi)$ ne s'annule pas, la dernière équation détermine $t \in \mathbb{R}$ unique, puis w unique :

$$w = m + t u'_0 (1-\rho)/(1-R_0).$$

Donc $G^0_{R,v}$ est bijectif ; étant de plus continu, c'est un isomorphisme par le théorème de l'application ouverte.

Inversement, si $G^0_{R,v}$ est un isomorphisme,

supposons que $\{\Delta \Psi + \lambda f(\Psi)\}$ ne s'annule pas et qu'il existe un élément non nul $m \in \text{Ker } L_0$

dans ce cas, il existe $t \in \mathbb{R}$, non nul :

$$t = m'(R_0) / \{\Delta \Psi + \lambda f(\Psi)\}(R_0) \neq 0$$

pour lequel, avec w défini par (2.12),

$$(t, w) \in \text{Ker } G^0_{R,v} ; \text{ ce qui contredit l'hypothèse.} \quad \blacksquare$$

Le résultat de la Proposition II.2 revient à dire que (λ_0, R_0, u_0) est une solution régulière du problème à frontière libre (1.2) ssi (λ_0, u_0) est une solution régulière du problème de Dirichlet posé sur le complémentaire de l'ensemble de coïncidence $\Omega|_{B_{R_0}}$:

$$(2.14) \quad \begin{cases} -\Delta u - \lambda f(u) = 0 & \text{sur }]R_0, 1[\\ u(1) = 0 \\ u(R_0) = \Psi(R_0) \end{cases}$$

dont l'opérateur dérivé par rapport à u est justement :

$$L_0 z \in \{v \in C^2([R_0, 1]) / v(R_0) = v(1) = 0\} \rightarrow L_0 \cdot z.$$

Remarque :

Les hypothèses suivantes :

- (i) la frontière γ de $\Omega_\gamma = B_R$ est régulière
- (ii) $R > 0$
- (iii) $\Delta \Psi + \lambda f(\Psi) > 0$

et la Proposition II.1 assurent qu'une solution régulière (λ_0, R_0, u_0) du problème à frontière libre continu, qui vérifie de plus :

$$u_0 < \Psi \quad \text{et} \quad \Delta \Psi + \lambda f(u) > 0 \quad \text{sur } \Omega|_{B_{R_0}}$$

est en fait (moyennant son prolongement par Ψ sur B_R) une solution régulière de l'inéquation (1.1) (au sens "conique", voir [CIR83]).

Proposition II.3 :

Si $\Delta \Psi + \lambda_0 f(\Psi)$ ne s'annule pas sur $]0, 1[$, alors une solution (λ_0, R_0, u_0) de (1.2) est un point de retournement simple ssi :

$\dim \text{Ker } L_0 = 1$ dans $\{v \in C^2([R_0, 1]) / v(R_0) = v(1) = 0\}$
et $f(u_0) \notin \text{Im } L_0$.

De plus, si Φ est un générateur de $\text{Ker } L_0$, on note :

$$(2.15) \quad M = \Phi'(R_0) (\Delta\Psi(R_0) + \lambda f(\Psi(R_0)))^{-1}$$

alors $(M, \Phi + M \frac{1-\rho}{1-R_0} u'_0)$ est un générateur de $\text{Ker } G^0_{R,v}$.

preuve :

Conditions (C2) et (C3) :

$\dim \text{Ker } L_0 = 1 \iff \dim \text{Ker } G^0_{R,v} = \text{codim Im } G^0_{R,v} = 1$ (Lemme II.1),

Avec la notation (2.12), si Φ est un générateur de $\text{Ker } L_0$,

$$\begin{aligned} (t, w) \in \text{Ker } G^0_{R,v} &\iff \begin{cases} L_0 \cdot m = 0 \\ m'(R_0) - t\{\Delta\Psi + \lambda f(\Psi)\}(R_0) = 0 \end{cases} \\ &\iff (t, m) = k(M, \Phi) ; k \in \mathbb{R} \\ &\iff (t, w) = k\left(M, \Phi + M \frac{1-\rho}{1-R_0} u'_0\right) ; k \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

Condition (C4) :

$(a, b, c) \in \text{Im } G^0_{R,v} \iff \langle a, \Phi \rangle + b\Phi'(R_0) = 0$; pour tout $\Phi \in \text{Ker } L_0$

et G^0_λ définie par (2.5) n'appartient pas à $\text{Im } G^0_{R,v}$ ssi $f(u_0)$ n'appartient pas à $\text{Im } L_0$. ■

Par la Proposition II.3, dire que (λ_0, R_0, u_0) est un point de retournement simple du problème à frontière libre revient à dire que (λ_0, u_0) est un point de retournement du problème de Dirichlet (2.14) posé sur le complémentaire de l'ensemble de coïncidence $\Omega|_{B_{R_0}}$.

Remarque :

Comme dans le cas des solutions régulières, les hypothèses citées assurent qu'un point de retournement simple (λ_0, R_0, u_0) du problème à frontière libre continu, qui vérifie de plus :

$$u_0 < \Psi \quad \text{et} \quad \Delta\Psi + \lambda f(u_0) > 0 \quad \text{sur } \Omega|_{B_{R_0}}$$

est un point singulier de l'inéquation (1.1) vérifiant le théorème de retournement [CIR83 §3. Théorème 2] (moyennant le prolongement de u_0 par Ψ sur B_{R_0}).

On résume dans la proposition suivante, les formes explicites du générateur de $\text{Ker } G^0_{R,v}$ suivant que (λ_0, R_0, u_0) est une solution régulière ou un point de retournement simple du problème à frontière libre (1.2). Ces formes explicites permettent de déterminer une normalisation convenable pour mettre en oeuvre la méthode de continuation standard.

Proposition II.4 :

On suppose que $\Delta\Psi + \lambda f(\Psi)$ ne s'annule pas sur $[0,1]$.

Si (λ_0, R_0, u_0) est une solution régulière de (1.2), on note z , l'unique solution de $L_0 z = f(u_0)$; $z(1) = z(R_0) = 0$. Alors, le noyau de DG^0 est engendré par :

$$(2.16) \quad L = 1 ; T = \frac{z'(R_0)}{\{\Delta\Psi + \lambda f(\Psi)\}(R_0)} ; W = z + T \frac{1-\rho}{1-R_0} u'_0$$

Si (λ_0, R_0, u_0) est un point de retournement simple de (1.2), soit Φ , un générateur de $\text{Ker } L_0$, alors DG^0 est engendré par :

$$(2.17) \quad L = 0 ; T = \frac{\Phi'(R_0)}{\{\Delta\Psi + \lambda f(\Psi)\}(R_0)} ; W = \Phi + T \frac{1-\rho}{1-R_0} u'_0$$

preuve :

Par application de la Proposition I.1 (Chap. I). ■

II.2.3. Méthode de continuation pour le problème continu

On suppose que la branche des solutions du problème (1.2) n'est formée que de **solutions régulières** et de **points de retournement simple**.

On introduit un nouveau paramètre s et une équation de normalisation tels que la branche soit localement paramétrable par s en chacun de ses points (régulier ou de retournement simple).

Soit (λ_0, R_0, u_0) une solution régulière ou un point de retournement simple de (1.2), soit une application linéaire continue :

$$\text{Lin} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times C^2_0([R_0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant la condition suivante :

$$(C5) \quad \text{Lin}(L, T, W) \neq 0 ; \text{ pour } (L, T, W) \text{ générateur de } \text{Ker } DG^0$$

On pose :

$$(2.18) \quad N(\lambda, R, u, s) = \text{lin}(\lambda - \lambda_0, R - R_0, u - u_0) - (s - s_0)$$

et on considère le **problème augmenté** (transporté en domaine fixe):

$$(2.19) \quad \begin{cases} G(\lambda, R, v) = 0 \\ N(\lambda, R, v \circ T_R^{-1}, s) = 0 \end{cases}$$

que l'on note $P(\lambda, R, v, s) = 0$.

Alors l'opérateur $P_{\lambda, R, v}(\lambda_0, R_0, u_0)$ est un isomorphisme (Prop. I.2).

On en donne une expression, avec m défini par (2.12) :

$$P^0_{\lambda, R, v} : \mathbb{R}^2 \times C^2_0([R_0, 1]) \rightarrow C^0([R_0, 1]) \times \mathbb{R}^3$$

$$(2.20) \quad (l, t, w) \rightarrow \begin{cases} DG^0 \cdot (l, t, w) = \begin{cases} L^0 \cdot m - l f(u_0) \\ m(R_0) \\ m'(R_0) - t \{ \Delta \Psi + \lambda_0 f(\Psi) \}(R_0) \end{cases} \\ N^0_{\lambda, R, v} \cdot (l, t, w) = \text{lin}(l, t, m) \end{cases}$$

$$(2.21)$$

Par application du théorème des fonctions implicites à l'opérateur P , il existe des fonctions de classe C^1 : $\lambda(s)$, $R(s)$, $v(s)$ qui décrivent localement la branche des solutions du problème transporté (2.4).

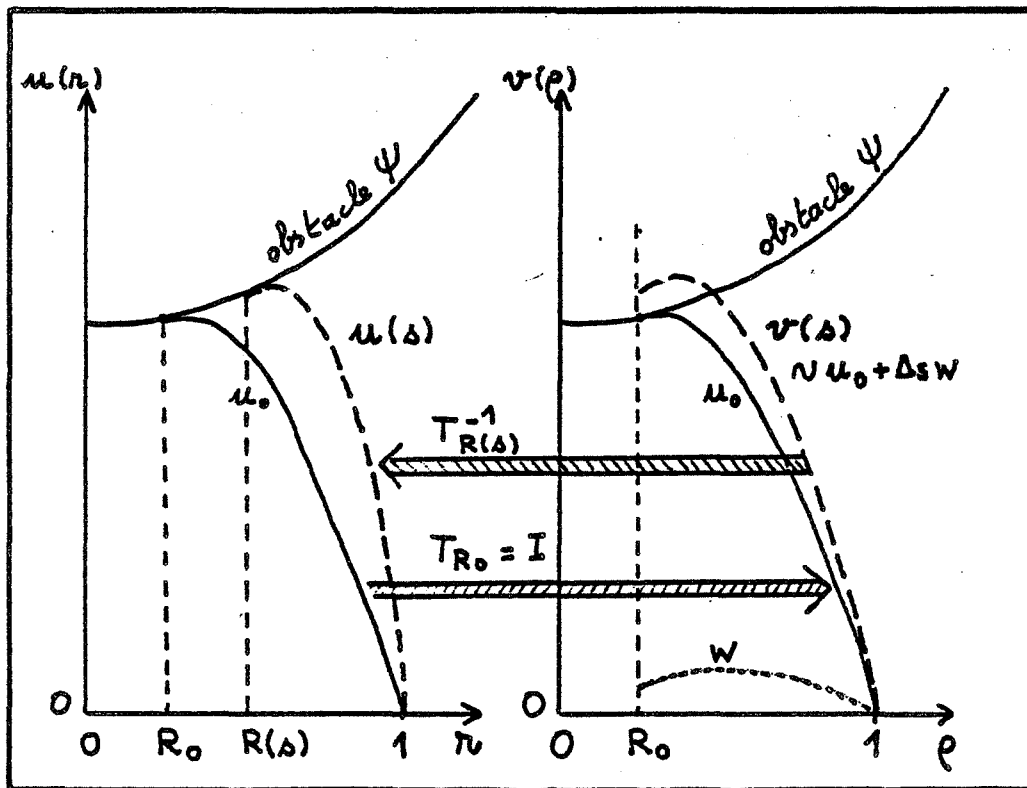
On obtient alors le transport (2.1) comme une fonction de s :

$$\begin{aligned} T(s) : [R_0, 1] &\rightarrow [R(s), 1] \\ \rho &\rightarrow \frac{1-R(s)}{1-R_0} \rho + \frac{R(s)-R_0}{1-R_0} \end{aligned}$$

puis, avec le changement de fonction $u = v(s) \circ T(s)^{-1}$, c'est à dire :

$$u(s)(r) = v(s) \left(\frac{1-R_0}{1-R(s)} r - \frac{R(s)-R_0}{1-R(s)} \right) ; R(s) < r < 1$$

on définit une fonction $u(s)$ telle que $\lambda(s)$, $R(s)$, $u(s)$ soit solution du problème à frontière libre continu (1.2) (voir fig. II.2).



-figure II.2-

Les dérivées $L = d\lambda/ds$, $T = dR/ds$ et $W = dv/ds$, au point $s = s_0$, sont solution du problème augmenté linéarisé : $P^0_{\lambda,R,v} \cdot (L, T, W) = -P^0_s$, soit :

$$(2.22) \quad \begin{cases} DG^0 \cdot (L, T, W) = 0 \\ \text{Lin}(L, T, W) = 1 \end{cases}$$

La méthode de continuation proposée est construite localement à partir des développements :

$$(2.23) \quad \begin{cases} \lambda(s_0 + \Delta s) = \lambda_0 + L \cdot \Delta s + o(\Delta s) \\ R(s_0 + \Delta s) = R_0 + T \cdot \Delta s + o(\Delta s) \\ v(s_0 + \Delta s) = u_0 + W \cdot \Delta s + o(\Delta s) \end{cases}$$

d'où l'on déduit le développement du transport :

$$(2.24) \quad T(s_0 + \Delta s) = I + \Delta s \frac{1-\rho}{1-R_0} T + o(\Delta s)$$

puis, avec $u(s_0 + \Delta s) \circ T(s_0 + \Delta s) = v(s_0 + \Delta s)$, on a le développement de u :

$$(2.25) \quad \begin{cases} \rho \in [R_0, 1] \\ x = \rho + \Delta s \frac{1-\rho}{1-R_0} T \in]R_0 + \Delta s T, 1[\\ u(s_0 + \Delta s)(x) = u_0(\rho) + \Delta s \cdot W(\rho) + o(\Delta s)(\rho) \end{cases}$$

On présente l'algorithme de continuation adapté de l'algorithme standard présenté au Chapitre I. Le choix de la normalisation est celui d'une pseudo-abscisse curviligne sur le diagramme de bifurcation (λ, R) , c'est à dire :

$$N(\lambda, R, u, s) = (\lambda - \lambda_k) \lambda^* + (R - R_k) R^* - (s - s_k)$$

au voisinage du point $(\lambda_k, R_k, u_k, s_k)$ avec λ^* , R^* approchant respectivement $d\lambda/ds$ et dR/ds en ce point.

Initialisation :

- 1) Il est nécessaire de connaître une solution (λ_0, R_0, u_0) du problème à frontière libre (1.2), avec $R_0 > 0$. Plusieurs algorithmes permettent de l'obtenir, citons (entre autres) : les méthodes de tir, les méthodes de monotonie...
- 2) On se donne s_0 arbitraire.
- 3) Il est nécessaire de connaître une approximation $\lambda^*(s_0), R^*(s_0)$ de $\lambda'(s_0), R'(s_0)$. Pour cela, après avoir linéarisé l'opérateur G au point (λ_0, R_0, u_0) (supposé régulier), on calculera $\lambda^*(s_0), R^*(s_0)$ pour que :

$$R^*(s_0) = \lambda^*(s_0) \frac{dR}{ds} \quad \text{et} \quad R^*(s_0)^2 + \lambda^*(s_0)^2 = 1$$

Itération :

(un indice k placé en haut indique la référence au point $(\lambda_k, R_k, u_k, s_k)$)

Etape 1 : Génération du noyau de DG^k

- 1) Approcher l'opérateur $L^k : w \rightarrow -\Delta w - \lambda f'(u_k)w$
- 2) Résoudre les systèmes linéaires :

$$(2.26) \quad \begin{cases} L_k \cdot z = f(u_k) \\ z(R_k) = 0 \\ z(1) = 0 \end{cases} \quad (2.27) \quad \begin{cases} L_k \cdot q = \frac{1}{1-R_k} \frac{n-1}{\rho^2} \{-u'_k - 2\lambda_k f(u_k)\} \\ q(R_k) = -\Psi'(R_k) \\ q(1) = 0 \end{cases}$$

- 3) Chercher alors w sous la forme $z + tq$ dans :

$$\frac{-1}{1-R_k} \{\Psi'(R_k) - \Psi''(R_k)\} t + w'(R_k) = 0 \quad \text{c'est à dire :}$$

$$(2.28) \quad \left\{ \frac{-1}{1-R_k} \Psi'(R_k) + \Psi''(R_k) + q'(R_k) \right\} t + z'(R_k) = 0$$

A cette étape, le noyau de DG^k est engendré par $(1, t, w)$.

Etape 2 : Normalisation

1) Approcher $\lambda'(s_k)$ et $R'(s_k)$:

Si $k > 0$,

$$\lambda^* = (\lambda_k - \lambda_{k-1})/\Delta s$$

$$R^* = (R_k - R_{k-1})/\Delta s$$

Si $k = 0$,

$$\lambda^* = (1 + t^2)^{-1/2}$$

$$R^* = \lambda^* t$$

2) Résoudre l'équation en L :

$$\ln(L, T, W) = 1$$

où $T = Lt$ et $W = Lw$ c'est à dire :

$$(2.29) \quad L\lambda^* + Lt R^* = 1$$

Etape 3 : Un pas de la méthode d'Euler

On calcule le point λ_{k+1} , R_{k+1} , u_{k+1} en utilisant les développements (2.23) :

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta s L$$

$$R_{k+1} = R_k + \Delta s T$$

$$T_{k+1} = T(R_{k+1})$$

et $u_{k+1}(r) = u_k(\rho) + \Delta s \cdot W$
pour $r \in [R_{k+1}, 1]$ et $r = T_{k+1}(\rho)$

Remarque : si on a discrétisé l'intervalle $[R_k, 1]$, le transport est implicite avec :

$$r_i = R_{k+1} + (i-1)h ; h = (1-R_{k+1})/N;$$

$$\rho_i = R_k + (i-1)h ; h = (1-R_k)/N;$$

$$u_{k+1}(r_i) = u_k(\rho_i) + \Delta s \cdot W(\rho_i).$$

II.3. PROBLEME A FRONTIERE LIBRE DISCRET

La méthode de calcul numérique des solutions du problème à frontière libre (1.2) que l'on propose ici consiste à résoudre par continuation (méthode standard du Chapitre I.) une approximation discrète de ce problème.

II.3.1. Discrétisation du problème à frontière libre

On se donne une grille de $N+2$ points équirépartis sur l'intervalle $[R, 1]$:

$$(3.1) \quad G = \{r_i = R + ih ; h = \frac{1-R}{N+1} ; i = 0..N+1\}$$

On note $X_h(R)$ l'ensemble des fonctions u_h définies par leurs valeurs sur la grille G . On utilisera aussi le sous espaces de $X_h(R)$:

$$(3.2) \quad V_h(R) = \{v_h \in X_h(R) / v_h(1) = 0\}$$

On définit sur $X_h(R)$ les opérateurs aux différences finies :

$$D_h^1(R) \cdot u_h(r) = (2h)^{-1} \{u_h(r+h) - u_h(r-h)\}$$

$$D_h^2(R) \cdot u_h(r) = h^{-2} \{u_h(r-h) - 2u_h(r) + u_h(r+h)\}$$

et on approche l'opérateur Laplacien par :

$$(3.3) \quad \Delta_h(R) \cdot u_h(r) = D_h^2(R) \cdot u_h(r) + \frac{n-1}{r} D_h^1(R) \cdot u_h(r)$$

Le problème (1.2), approché sur la grille G , prend la forme suivante :

problème à frontière libre discret

Trouver $R > 0$ et $u_h \in V_h(R)$ tels que :

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta_h(R) \cdot u_h(r_i) - \lambda f(u_h(r_i)) = 0 \text{ pour } i = 1..N \\ u_h(R) = \Psi(R) \\ u_h(R+h) = \Psi(R+h) \end{array} \right.$$

Remarque :

Dans ce schéma, l'approximation du raccord en $r = R$ est d'ordre 1 alors que l'approximation de Δu est d'ordre 2. On pourrait avoir un schéma entièrement d'ordre 2 en remplaçant la dernière équation par :

$$D_h^1(R) \cdot u_h(R) = D_h^1(R) \cdot \Psi(R)$$

$u(R-h)$ étant défini comme suit :

$$u(R-h) = u(R) - hu'(R) + h^2/2 u''(R), \text{ avec :}$$

$$u''(R) = -\frac{n-1}{R} u'(R) - \lambda f(\Psi(R))$$

$$u'(R) = \Psi'(R)$$

$$u(R) = \Psi(R)$$

Bien que le problème à frontière libre discret, que l'on note sous la forme abstraite :

$$(3.4\text{bis}) \quad F_h(\lambda, R, u_h) = 0,$$

soit posé sur un espace variable, comme l'était son analogue continu (1.2), on va pouvoir immédiatement le reformuler et montrer que la dépendance vis à vis du domaine est en fait beaucoup plus simple que dans le cas continu :

A tout élément u_h de $V_h(R)$, on associe un vecteur $U \in \mathbb{R}^N$:

$$(3.5) \quad U_i = u_h(r_i) \quad i = 1..N,$$

on définit la matrice $A(R)$ de taille N , tridiagonale :

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A(R)_{i,i-1} = h^{-2} - (2h)^{-1} \frac{n-1}{r_i} ; & i = 2..N \\ A(R)_{i,i} = -2h^{-2} ; & i = 1..N \\ A(R)_{i,i+1} = h^{-2} + (2h)^{-1} \frac{n-1}{r_i} ; & i = 1..N-1 \end{array} \right.$$

et le vecteur $a(R) \in \mathbb{R}^N$, identifié à sa première composante :

$$(3.7) \quad a(R) = a(R)_1 = h^{-2} - (2h)^{-1} \frac{n-1}{r_1} ; \quad a(R)_i = 0 \text{ pour } i = 2..N$$

On note $f(U)$ vecteur de $\mathbb{R}^N$ dont les composantes sont $f(U_i)$; alors la solution dans V_h du problème (3.4) est donnée par :

$$(3.8) \quad u_h(R) = \Psi(R); \quad u_h(R + ih) = U_i \text{ pour } i = 1..N$$

où $R > 0$ et $U \in \mathbb{R}^N$ sont solution du système non linéaire :

$$(3.9) \quad \begin{aligned} -A(R) \cdot U - \lambda f(U) - a(R)\Psi(R) &= 0 \\ U_1 - \Psi(R + h) &= 0 \end{aligned}$$

Pour résoudre (3.9), on cherche les inconnues dans l'espace fixe $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$, ce qui simplifie la dérivation par rapport au domaine (c'est à dire la dérivation par rapport à la variable R). En effet, si on réécrit le système non linéaire (3.9) sous la forme :

$$(3.9\text{bis}) \quad S(\lambda, R, U) = 0$$

on définit un opérateur S , de classe C^2 de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^{N+1}$, composé d'applications linéaires et des applications C^2 suivantes :

$$\begin{aligned} &h(R) \text{ défini dans (3.1)} \\ \lambda, R, U &\rightarrow \begin{aligned} &-A(R) \text{ et } -a(R)\Psi(R) \text{ avec } A \text{ et } a \text{ définies par (3.6) et (3.7)} \\ &-f(U) \\ &-\Psi(R + h) \end{aligned} \end{aligned}$$

II.3.2. Résolution locale du problème approché

On suppose qu'il existe une solution (R_0, u_{0h}) problème à frontière libre discret (3.4) pour une valeur λ_0 de λ . Soit $U_0 \in \mathbb{R}^N$ défini par les valeurs de u_{0h} aux points $\rho_1.. \rho_N$ de la grille G_0 :

$$G_0 = \{\rho_i = R_0 + ih_0 ; h_0 = (1-R_0)/(N+1) ; i = 0..N+1\}$$

Soit $A'(R_0)$, la matrice obtenue en dérivant en $R=R_0$ chacun des termes de la matrice $A(R)$:

$$\begin{aligned} A'(R_0)_{i,i-1} &= -2h^{-3} \frac{dh}{dR} + 2h^{-2} \frac{dh}{dR} \frac{n-1}{R_0+ih} + (2h)^{-1} \frac{n-1}{(R_0+ih)^2} \left(1 + i \frac{dh}{dR}\right) \\ &= \frac{1}{1-R_0} \left\{ 2h^{-2} - (2h)^{-1} \frac{n-1}{\rho_i} + (2h)^{-1} \frac{n-1}{\rho_i^2} (1-\rho_i) \right\} \\ &= \frac{1}{1-R_0} \left\{ 2 A(R_0)_{i,i-1} + (2h)^{-1} \frac{n-1}{\rho_i^2} \right\} \end{aligned}$$

de la même façon, on a :

$$A'(R_0)_{i,i} = \frac{1}{1-R_0} \{ 2 A(R_0)_{i,i} \}$$

$$A'(R_0)_{i,i+1} = \frac{1}{1-R_0} \left\{ 2 A(R_0)_{i,i+1} - (2h)^{-1} \frac{n-1}{\rho_i^2} \right\}$$

et :

$$a'(R_0) = \frac{d}{dR} a(R) \Big|_{R=R_0} = \frac{1}{1-R_0} \left\{ 2a(R_0) + (2h)^{-1} \frac{n-1}{\rho_i^2} \right\}$$

On définit la matrice K et le réel k en posant :

$$A'(R_0) = \frac{1}{1-R_0} \{ 2 A(R_0) - K \} \text{ et } a'(R_0) = \frac{1}{1-R_0} \{ 2a(R_0) - k \}$$

$$\begin{aligned} \text{alors, } S_R^0 &= \frac{\partial}{\partial R} \{ -A(R) \cdot U - \lambda f(U) - a(R) \Psi(R) \} \Big|_{R=R_0} \\ &= -A'(R_0) \cdot U_0 - a'(R_0) \Psi(R_0) - a(R_0) \Psi'(R_0) \\ &= \frac{1}{1-R_0} \{ -2 A(R_0) \cdot U_0 + K U_0 - 2a(R_0) \Psi(R_0) + k \Psi(R_0) \} - a(R_0) \Psi'(R_0) \end{aligned}$$

et λ_0, R_0, U_0 solution de (3.9) $\Rightarrow -2 A(R_0) \cdot U_0 - 2a(R_0) \Psi(R_0) = 2\lambda f(U_0)$. ■

Remarque : Pour $i = 1..N$, l'égalité suivante :

$$\{ K U_0 + k \Psi(R_0) \}_i = (n-1) D^1_{0h} \cdot u_{0h}(\rho_i) / \rho_i^2$$

permet de rapprocher S_R^0 de l'expression de la dérivée Eulérienne (2.6).

Proposition II.5

L'opérateur $DS(\lambda_0, R_0, U_0)$ que l'on note DS^0 , est défini par les dérivées partielles :

$$(3.10) \quad S^0_{\lambda} = \begin{cases} -f(U_0) \\ 0 \end{cases}$$

$$(3.11) \quad S^0_R = \begin{cases} \frac{1}{1-R_0} \{2\lambda_0 f(U_0) + KU_0 + k\Psi(R_0)\} - a(R_0)\Psi'(R_0) \\ -\Psi'(R_0 + h) \frac{N}{N+1} \end{cases}$$

$$(3.12) \quad S^0_{U \cdot w} = \begin{cases} -A(R) \cdot w - \lambda f'(U_0)w \\ w_1 \end{cases}$$

où K est la matrice tridiagonale :

$$(3.13) \quad \begin{cases} K_{i,i-1} = -(2h)^{-1} \frac{n-1}{\rho_i^2}; & i = 2..N \\ K_{i,i} = 0; & i = 1..N \\ K_{i,i+1} = (2h)^{-1} \frac{n-1}{\rho_i^2}; & i = 1..N-1 \end{cases}$$

et k le vecteur de R^N identifié à sa première composante :

$$(3.14) \quad k = k_1 = -(2h)^{-1} \frac{n-1}{\rho_1^2}; \quad k_i = 0 \text{ pour } i = 2..N$$

preuve :

On donne le calcul explicite de la dérivée partielle (3.11) :
(la dépendance $h(R)$ n'est pas explicitement mentionnée)

$$h = \frac{1-R}{N+1} \Rightarrow \frac{dh}{dR} \Big|_{R=R_0} = -\frac{1}{N+1} = -\frac{h}{1-R_0}$$

$$\frac{d}{dR} \{\Psi(R+h)\} \Big|_{R=R_0} = \Psi'(R_0+h) \left(1 + \frac{dh}{dR}\right) = \Psi'(R_0+h) \frac{N}{N+1}$$

On définit les solutions régulières et les points de retournement (simple) du problème à frontière libre discret en appliquant les définitions (I.1) et (I.2) au problème $S(\lambda, R, U) = 0$:

Définition II.4

Soit (λ_0, R_0, u_{0h}) une solution de (3.4).

Soient $G_0 = \{\rho_i = R_0 + ih ; h = (1-R_0)/(N+1) ; i = 0..N+1\}$ et $U_0 \in \mathbb{R}^N$ défini par $U_{0i} = u_{0h}(\rho_i) ; i = 1..N$.

On dit que (λ_0, R_0, u_{0h}) est une solution régulière du problème à frontière libre discret si :

$$(C1) \quad \text{Ker } S^0_{R,U} = \{0\}.$$

On dit que (λ_0, R_0, u_{0h}) est un point de retournement simple du problème à frontière libre discret si l'opérateur $S^0_{R,U}$ vérifie les conditions :

$$(C2) \quad \dim \text{Ker } S^0_{R,U} = 1$$

$$(C4) \quad S^0_{\lambda} \notin \text{Im } S^0_{R,U}$$

On s'intéresse maintenant à un paramétrage de la branche des solutions de (3.4), valable localement en tout point régulier ou de retournement simple. On obtient ce paramétrage après application de la méthode de continuation standard à la résolution du problème $S(\lambda, R, U) = 0$:

L'opérateur DS^0 admet un noyau de dimension 1 dans $\mathbb{R}^{N+2}$ (Prop. I.1).

Soit une application linéaire $\text{Lin} : \mathbb{R}^{N+2} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(C5) \quad \text{Lin}(L, T, W) \neq 0 \quad \text{pour } (L, T, W) \text{ générateur de } DS^0$$

on considère le problème augmenté :

$$(3.15) \quad P(\lambda, R, U) = 0 \iff \begin{cases} S(\lambda, R, U) = 0 \\ \text{Lin}(\lambda - \lambda_0, R - R_0, U - U_0) - (s - s_0) \end{cases}$$

au voisinage du point $(\lambda_0, R_0, U_0, s_0)$.

Comme l'opérateur $P^0_{R,U}$ est inversible (Prop. I.2), par application du théorème des fonctions implicites, on obtient les développements suivants de la branche des solutions du problème (3.9) :

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \lambda(s_0 + \Delta s) &= \lambda_0 + \Delta s L + o(\Delta s) \\ R(s_0 + \Delta s) &= R_0 + \Delta s T + o(\Delta s) \\ U(s_0 + \Delta s) &= U_0 + \Delta s W + o(\Delta s) \end{aligned}$$

où (L, T, W) est l'unique solution du problème augmenté linéarisé :

$$(3.17) \quad \begin{aligned} S^0_{R,U}(T, W) + LS^0_\lambda &= 0 \\ \text{Lin}(L, T, W) &= 1 \end{aligned}$$

On obtient un développement de u_{0h} , solution de (3.4), en posant :

$$(3.18) \quad \begin{aligned} h &= (1 - R_0 - \Delta s T) / (N+1) \\ u_h(R_0 + \Delta s T) &= \Psi(R_0 + \Delta s T) \\ u_h(R_0 + \Delta s T + ih) &= U(s_0 + \Delta s)_i ; i = 1..N \end{aligned}$$

ALGORITHME POUR LE PROBLEME A FRONTIERE LIBRE DISCRET

Dans l'algorithme que l'on décrit ici, on a choisi la même normalisation qu'au paragraphe (II.2) c'est à dire une pseudo-abcisse curviligne sur le diagramme (λ, R) .

Initialisation :

1) Pour R_0 fixé, résoudre le problème suivant avec $h = (1-R_0)/(N+1)$:

$$\begin{cases} -A(R_0) \cdot U_0 - \lambda_0 f(U_0) - a(R_0) \Psi(R_0) = 0 \\ U_{01} = \Psi(R_0+h) \end{cases}$$

2) fixer s_0 arbitraire

3) pour initialiser λ^* et R^* , approximations de $\lambda'(s_0)$ et $R'(s_0)$, voir étape 2.

Itération :

Etape 1 : Calcul du noyau de DS^m

1) Construire la matrice de l'opérateur :

$$L^m : W \rightarrow -A(R_m) \cdot W - \lambda_m f'(U_m) W$$

2) résolution des systèmes :

$$(3.19) \quad L^m \cdot z = f(U_m) \text{ (implicitement, } z(R_m) = z(1) = 0)$$

$$(3.20) \quad L^m \cdot p = -\frac{1}{1-R_m} \{2\lambda_m f(U_m) + KU_m + k\Psi(R_m) - a(R_m)\Psi'(R_m)\}$$

(K et k sont définis par (3.13) (3.14) ; ce système contient implicitement les conditions $p(R_m) = -\Psi'(R_m)$ et $p(1) = 0$)

3) Calculer t et $w = z + tp$ dans :

$$(3.21) \quad -t \Psi'(R_m + h)N/N+1 + (z_1 + tp_1) = 0$$

Le noyau de DS^m est engendré par $(1, t, w)$.

Etape 2 : Normalisation

1) Approcher $\lambda'(s_m)$ et $R'(s_m)$

Si $m > 0$,

$$\lambda^* = (\lambda_m - \lambda_{m-1})/\Delta s$$

$$R^* = (R_m - R_{m-1})/\Delta s$$

Si $m = 0$, alors avec $R'(s_0) = \lambda'(s_0)dR/d\lambda = \lambda'(s_0)t$, on fixe $\lambda'(s_0) = \lambda^* = (1+t^2)$ pour que $\lambda'(s_0)^2 + R'(s_0)^2 = 1$

2) Résoudre l'équation en L :

$$(3.22) \quad L\lambda^* + LtR^* = 1$$

On a alors $d\lambda/ds = L$, $dR/ds = Lt$ et $dU/ds = Lw$.

Etape 3 : Un pas de la méthode d'Euler

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m + \Delta s L$$

$$R_{m+1} = R_m + \Delta s L t$$

$$U_{m+1} = U_m + \Delta s L w$$

$$u_{hm+1}(R_{m+1}) = \Psi(R_{m+1})$$

$$h = (1 - R_{m+1}) / N+1$$

on a implicitement décrit u_h^{m+1} avec :

$$u_{hm+1}(\rho_i) = U_{m+1i} ; \rho_i = R_{m+1} + ih ; i = 1..N.$$

II.4. RESULTATS NUMERIQUES

Les deux algorithmes présentés ont été testés sur différents problèmes à frontière libre du type (1.2) avec :

la non-linéarité $f(u) = e^u$

des obstacles constant, convexe (vérifiant donc l'hypothèse (H)) ou concave,

en dimension 1, 2, 3, 4.

OBSTACLE CONSTANT (Planches II.1 à II.8)

Pour le choix de l'obstacle : $\Psi = 4$
on remarque que les 2 algorithmes, donnent des courbes (λ, R) , et des solutions u sur $]R, 1[$ identiques.

On remarque aussi que la solution u vérifie :

$$u < \Psi \quad \text{sur }]R, 1[\text{ pour tout } \lambda ;$$

pour un obstacle constant, les conditions :

$$\Delta \Psi + \lambda f(\Psi) > 0 \text{ et } \Delta \Psi + \lambda f(u) > 0$$

étant vérifiées, les solutions u calculées approchent la solution du problème d'obstacle (1.1) (Proposition II.1).

Les résultats que l'on présente sont identiques à ceux obtenus en résolvant le problème à frontière libre (1.2) par la méthode de tir (voir ces résultats dans [CON83]).

L'avantage des algorithmes présentés sur la méthode de tir, réside dans le fait qu'on peut généraliser leur utilisation au cas d'obstacles non constants.

OBSTACLES NON CONSTANTS (Planches II.9 à II.24)

On a testé les deux algorithmes avec les obstacles $\Psi = 4 + 2x^2$ (Planches II.9 à II.16) et $\Psi = 4 - x^2$ (Planches II.17 à II.24).

Ici encore, les résultats sont identiques et on observe que :

$$u < \Psi \text{ sur } [R, 1] \text{ pour tout } \lambda$$

Pour l'obstacle convexe, les hypothèses de la Proposition II.1 sont vérifiées et on a approché les solutions du problème d'obstacle (1.1).

Cette série de résultats numériques coïncide avec les résultats obtenus par la méthode suivante [HER84] :

pour R donné, résoudre le problème de Cauchy :

$$-\Delta u - \lambda f(u) = 0 \text{ sur }]R, 1[$$

$$u(R) = \Psi(R)$$

$$u'(R) = \Psi'(R)$$

puis déterminer λ tel que $u(1)$ soit nul.

CHAPITRE III

PROBLEME DE DISSOLUTION-CROISSANCE AVEC DIFFUSION ET SOURCE DE MATIERE

Plan du chapitre :

III.1. PRESENTATION DU MODELE

III.2. PROBLEME A FRONTIERE LIBRE STATIONNAIRE

III.2.1. Formulation adimensionnelle

III.2.2. Existence de solutions multiples

III.3. RESOLUTION LOCALE DU PROBLEME STATIONNAIRE

III.3.1. Transport et linéarisation

III.3.2. Choix de la normalisation

III.4. ALGORITHME ET RESULTATS NUMERIQUES

Résumé :

On étudie un phénomène de dissolution-croissance dans un système chimique, en présence de diffusion et d'une source de matière. La modélisation de ce système cinétique, due à M. Cournil [COU83], conduit à un problème à frontière libre dépendant du temps.

On s'intéresse aux solutions du problème stationnaire associé et plus particulièrement à l'existence et au calcul de solutions multiples en fonction des valeurs d'un paramètre de bifurcation λ qui mesure la compétition entre la diffusion et la vitesse de germination dans le système.

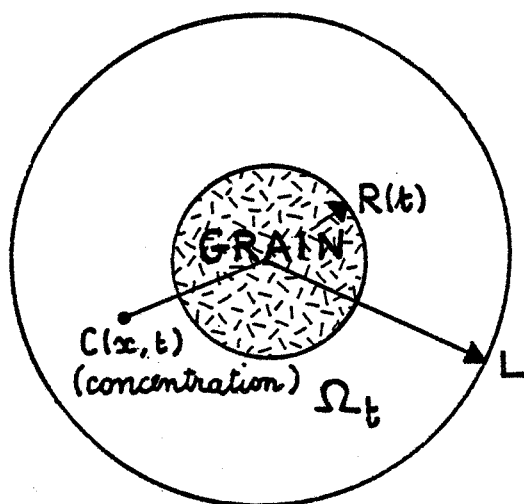
La branche des solutions est calculée par une méthode de continuation adaptée de la méthode standard présentée au Chapitre I. La construction de cette méthode a été détaillée au Chapitre II (pour un problème à frontière libre différent). On montre, de plus, que la frontière libre peut être choisie comme paramètre de continuation.

On présente des résultats numériques qui décrivent l'influence des différents paramètres, sur le diagramme de bifurcation qui représente la branche des solutions.

III.1. PRESENTATION DU MODELE

On étudie, dans R^3 , le comportement d'un système chimique constitué d'un milieu solide poreux baigné par un liquide. Les échanges de matière entre le liquide et le solide poreux rendent possible l'apparition d'un nouveau solide, présent sous la forme d'un grain sphérique.

Le système occupe un volume sphérique constant de rayon L . Le grain dont le rayon R dépend du temps est situé au centre :



-figure III. 1-

A l'instant t , on considère la couronne Ω_t de R^3 , limitée par les sphères de rayon $R(t)$ et L respectivement, contenant la phase liquide.

Soit $C(x, t)$ la concentration au sein de la phase liquide Ω_t , à la distance x du centre.

La diffusion de matière est isotrope dans Ω_t , caractérisée par un coefficient constant D . La source de matière est modélisée par une fonction F décroissante, positive, bornée. Le bilan matière s'obtient en écrivant la loi de Fick (voir [BSL66] ou [JOS70]) :

$$(1.1) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \Delta C + F(C) \quad \text{dans } \Omega_t$$

On suppose que les échanges de matières entre liquide et milieu poreux sont gouvernés par la loi de Nernst :

$$(1.2) \quad \frac{dR}{dt}(t) = K [C(x, t) - G(x)]_{R(t)}$$

où $G(x)$ est la concentration d'équilibre du liquide et K une constante cinétique positive.

Les échanges de matière entre le liquide et le grain obéissent à une équation cinétique faisant intervenir le rayon du grain (phénomène lié à la tension superficielle de l'interface). On écrit le bilan sur la surface du grain :

$$(1.3) \quad \left[pD \frac{\partial C}{\partial R} \right]_{R(t)} = \left[\frac{1}{V} - C(x, t) \right]_{R(t)} \frac{dR}{dt}(t)$$

où p et V sont des constantes positives désignant respectivement la porosité du solide et son volume molaire.

On choisit comme condition sur le bord fixe :

$$(1.4) \quad C(L, t) = C_1$$

D'autres conditions au bord sont envisageables, par exemple :

$$\partial C / \partial x(L, t) = 0.$$

Le rayon $R(0)$ du grain initial est donné, ainsi que le profil de la concentration initiale :

$$(1.5) \quad C(x, 0) = C_0(x) ; R(0) < x < L$$

Les allures des fonctions $F(C)$ et $G(x)$ ne sont pas connues avec certitude. On trouve classiquement, pour le terme source F , l'une des formes suivantes (k constante cinétique positive) :

$$(1.6a) \quad F(C) = k(C_0 - C)^+ \quad (\text{loi du 1er ordre})$$

$$(1.6b) \quad F(C) = k(C_0^2 - C^2)^+ \quad (\text{loi du 2me ordre})$$

$$(1.6c) \quad F(C) = k[(C_0 - C)^+]^2$$

Le choix de la fonction G est celui de Gibbs-Kelvin :

$$(1.7) \quad G(x) = C^* \exp(\gamma/x)$$

C^* est une constante homogène à une concentration et γ est une constante homogène à une longueur avec $0 < \gamma \ll L$.

III.2. PROBLEME A FRONTIERE LIBRE STATIONNAIRE

En régime stationnaire, les équations (1.1) (1.2) (1.3) (1.4) s'écrivent sous la forme du problème à frontière libre suivant :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} D\Delta C + F(C) = 0 \quad R < x < L \\ C(R) = G(R) \\ C'(R) = 0 \\ C(L) = C_1 \end{array} \right.$$

dont les données sont : L , la taille du système ; C_1 , la concentration au bord ($x = L$) ; les fonctions F et G qui dépendent des paramètres k , C^* et γ .

III.2.1. Formulation adimensionnelle

On définit les notations et changements d'inconnues suivants :

$$(2.2) \quad r = x/L \in]0,1[; R = R/L$$

$$(2.3) \quad c(r) = C(x)/C_1$$

$$(2.4) \quad f(c) = F(C_1 c)/F(0)$$

$$(2.5) \quad g(r) = G(x)/C_1$$

$$(2.6) \quad \lambda = L^2 f(0)/C_1 D \in \mathbb{R}^+$$

Ceci permet d'écrire le problème sous la forme adimensionnelle :

Trouver $R \in]0,1[$ et $c \in C^2(]R,1[)$ tels que :

$$(2.7) \quad \begin{cases} \Delta c + \lambda f(c) = 0 & R < r < 1 \\ c(R) = g(R) \\ c'(R) = 0 \\ c(1) = 1 \end{cases}$$

Les données du problème (2.7) sont les fonctions f et g que l'on détermine à l'aide des relations (2.4) et (2.5). On trouve ainsi pour f l'une des formes suivantes (α , β et δ constantes adimensionnelles) :

$$(2.8a) \quad f(c) = (1 - \alpha c / \beta)^+$$

$$(2.8b) \quad f(c) = (1 - \alpha^2 c^2 / \beta^2)^+$$

$$(2.8c) \quad f(c) = [(1 - \alpha c / \beta)^+]^2$$

et pour g , le choix (1.7) conduit à :

$$(2.9) \quad g(r) = \beta \exp(\delta/r)$$

(éventuellement la fonction f sera régularisée et/ou g sera tronquée pour r petit).

Les constantes α , β , γ ont les valeurs suivantes :

$$(2.10) \quad \alpha = C^*/C_0 ; \beta = C^*/C_1 ; \delta = \gamma/L$$

III.2.2. Existence de solutions multiples

Le problème "physique" consiste à trouver $R \in]0, 1[$ et $c \in C^2(]R, 1[)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$. On étudie ici l'ensemble des solutions (λ, R, c) ; $\lambda \in \mathbb{R}$ du problème à frontière libre (2.7).

On montre que pour tout $R \in]0, 1[$, il existe (au moins) un couple $(\lambda, c) \in \mathbb{R} \times C^2(]R, 1[)$ tel que (λ, R, c) soit solution du problème (2.7).

Remarque : Pour λ et R fixés, on verra que la solution c (si elle existe) est unique. Ainsi, le diagramme (λ, R) représente bien le phénomène de bifurcation.

Lemme III.1 :

Soient $R \in]0, 1[$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit w une solution du problème aux limites :

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \Delta w + \lambda f(w) &= 0 \\ w(R) &= g(R) \\ w(1) &= 1 \end{aligned}$$

(λ, R, w) est une solution du problème à frontière libre (2.7) si et seulement si :

$$(2.12) \quad \lambda = - \frac{1 - g(R)}{\int_R^1 f(w) r(1-r) dr}$$

Preuve :

On multiplie l'équation $\Delta w + \lambda f(w) = 0$ par $r(1-r)$ et on intègre sur l'intervalle $]R, 1[$:

$$\int_R^1 (r^2 w')' \frac{1-r}{r} + \lambda f(w) r(1-r) dr = 0$$

$$\Rightarrow \int_R^1 w' + [r(1-r)w'] \Big|_R^1 + \int_R^1 \lambda f(w) r(1-r) dr = 0$$

$$\Rightarrow w(1) - w(R) - w'(R)R(1-R) + \lambda \int_R^1 f(w) r(1-r) dr = 0$$

avec les conditions aux limites $w(R) = g(R)$ et $w(1) = 1$,

$$w'(R) = 0 \Leftrightarrow 1 - g(R) + \lambda \int_R^1 f(w) r(1-r) dr = 0$$

■

Pour tout $R \in]0, 1[$, on montre l'existence de $(\lambda, c) \in \mathbb{R} \times C^2(]R, 1[)$, vérifiant (2.11) (2.12) par le théorème du point fixe de Schauder :

Soit ϕ , la solution de l'équation $\Delta\phi = 0$ avec $\phi(R) = g(R)$ et $\phi(1) = 1$:

$$(2.13) \quad \phi(r) = -\frac{1-g(R)}{1-R} \frac{R}{r} + \frac{1-Rg(R)}{1-R}$$

les solutions du problème (2.11) sont alors donnée par :

$$(2.14) \quad \begin{aligned} w &= \phi + u \\ u &\in V_0 = \{v \in C^2([R,1[) / v(R)=v(1)=0\} \\ \Delta u + \lambda f(\phi+u) &= 0 \end{aligned}$$

On considère G , la fonction de Green définie de $C^0([R,1[)$ dans V_0 par :

$$(2.15) \quad u = G(v) \Leftrightarrow -\Delta u = v$$

et l'opérateur T défini de $\phi + V_0$, équipé de la norme C^0 , dans lui-même :

$$(3.6) \quad T(w) = \phi - \frac{1-g(R)}{\int_R^1 f(w)r(1-r)} G\{f(w)\}$$

Lemme III.2 :

Soit $R \in]0,1[$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) T admet c pour point fixe.

ii) (λ, R, c) est solution de (2.7) pour $\lambda = \frac{1-g(R)}{\int_R^1 f(c)r(1-r)}$.

Preuve :

$$c = T(c) \Leftrightarrow c = \phi - \frac{1-g(R)}{\int_R^1 f(c)r(1-r)} G\{f(c)\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta c = -\frac{1-g(R)}{\int_R^1 f(c)r(1-r)} f(c) \\ c(1) = \phi(1) = 1 ; c(R) = \phi(R) = g(R) \end{cases}$$

De plus $c \in C^0(]R, 1[) \Rightarrow G\{f(c)\} \in C^2(]R, 1[)$ et le Lemme III.1 permet de conclure. ■

Théorème III.1 :

Pour tout $R \in]0, 1[$, il existe $(\lambda, c) \in R \times C^2(]R, 1[)$ tel que (R, c) soit solution du problème (2.7). On a de plus l'estimation suivante :

$$\min(1, g(R)) < c(r) < \max(1, g(r)) ; r \in]R, 1[.$$

Preuve : on montre que T admet un point fixe.

1) On considère le fermé, convexe, borné de $\phi + V_0$:

$$B = \{v \in \phi + V_0 / \|w\|_{C^0} < \max(1, g(R))\}$$

et on montre que $T(B) \subset B$.

Soit $w \in B$,

$$z = T(w) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\Delta z = -\frac{1 - g(R)}{\int_R^1 f(w)r(1-r)} f(w) \\ z(1) = \phi(1) = 1 ; z(R) = \phi(R) = g(R) \end{cases}$$

$$\text{alors, } \int_R^1 (r^2 z')' \frac{1-r}{r} - \frac{1 - g(R)}{\int_R^1 f(w)r(1-r)} \int_R^1 f(w)r(1-r) = 0$$

$$\Rightarrow \int_R^1 z' + [r(1-r)z']_R^1 - 1 + g(R) = 0$$

$$\Rightarrow z(1) - z(R) - R(R-1)z'(R) - 1 + g(R) = 0$$

$$\Rightarrow z'(R) = 0$$

puis, $f > 0 \Rightarrow \Delta z$ a le signe de $1 - g(R)$;

si $1 - g(R) > 0$, alors $(r^2 z')'/r^2 > 0 \Rightarrow r^2 z'$ croissante

et $z'(R) = 0 \Rightarrow z' > 0$ sur $]R, 1[$

donc $g(R) = z(R) < z(r) < z(1) = 1$;

si $1 - g(R) < 0$, on a de même : $1 = z(1) < z(r) < z(R) = g(R)$.

Donc $z \in B$.

2) L'application : $w \rightarrow \frac{1 - g(R)}{\int_R^1 f(w)r(1-r)} f(w)$ est continue sur $C^0(]R, 1[)$,

donc, par composition avec la fonction de Green G , $w \rightarrow T(w)$ est continue. Comme G est compacte, T est compact. Alors, par le théorème de Schauder, T admet un point fixe dans B .

3) L'estimation a été montrée au cours de 1). ■

Lemme III.2 :

On suppose que $g(1) \neq 1$. Alors, pour $(1 - g(R))$ suffisamment voisin de 0, la solution $(\lambda, c) \in \mathbb{R} \times C^2(]R, 1[)$ du problème (2.7) est unique.

Preuve :

On montre que pour $(1 - g(R))$ assez petit, l'opérateur T est contractant. Soit K_1 , la constante de continuité de la fonction de Green telle que :

$$-\Delta u = v ; u \in V_0 ; v \in C^0(]R, 1[) \Rightarrow \|u\|_{C^0} \leq K_1 \|v\|_{C^0}$$

$$\|T(w_1) - T(w_2)\|_{C^0} \leq K_1 \|(1 - g(R)) \left(\frac{f(w_1)}{\int_R^1 f(w_1)r(1-r)} - \frac{f(w_2)}{\int_R^1 f(w_2)r(1-r)} \right)\|_{C^0}$$

$w_i < \max(1, g(R))$ et f décroissante $\Rightarrow f(w_i) > \alpha > 0$

$$\Rightarrow \int_R^1 f(w_i)r(1-r) > \alpha \int_R^1 r(1-r)$$

alors, avec $\int_R^1 r(1-r) = (1-R)^2(2R+1)/6 R$,

il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\|T(w_1) - T(w_2)\| < K_1 \left\{ \frac{\|1-g(R)\|}{\beta(1-R)^2} \|f(w_1)-f(w_2)\| \right. \\ \left. + (\sup f) \frac{\|1-g(R)\|}{\beta^2(1-R)^4} \left\| \int_R^1 r(1-r)(f(w_2)-f(w_1)) \right\| \right\}$$

puis il existe une constante $K_2 > 0$ telle que :

$$\|T(w_1) - T(w_2)\| < K_2 \frac{\|1-g(R)\|}{(1-R)^2} \|f(w_2) - f(w_1)\|$$

finalement , si $g(1) \neq 1$, pour $(1 - g(R))$ suffisamment voisin de 1, on a :

$$\|T(w_1) - T(w_2)\| < \|w_1 - w_2\|$$

Proposition III.1 :

- i) $\lim_{R \rightarrow 0^+} \lambda = +\infty$
- ii) si $\beta e^\delta < 1$, $\lim_{R \rightarrow 1^-} \lambda = (-\infty)$
- iii) si $\beta e^\delta > 1$, $\lim_{R \rightarrow 1^-} \lambda = (+\infty)$

Preuve :

on rappelle : $\lambda = -(1 - g(R)) \left(\int_R^1 f(c)r(1-r) \right)^{-1}$; $g(R) = \beta \exp(\delta/R)$

i) quand $R \rightarrow 0^+$: $1 - \beta \exp(\delta/R) \rightarrow (-\infty)$ et f bornée $\Rightarrow \lambda \rightarrow (+\infty)$

quand $R \rightarrow 1^-$: $\int_R^1 f(c)r(1-r) \rightarrow 0^+$;

ii) si $\beta \exp \delta < 1$, alors $\lambda \rightarrow (-\infty)$

iii) si $\beta \exp \delta > 1$, alors $\lambda \rightarrow (+\infty)$

si $\beta \exp \delta = 1$, on écrit :

$$\lambda = \frac{g(1) - g(R)}{1 - R} \left(\int_R^1 f(c)r \frac{1-r}{1-R} \right)^{-1}$$

Pour $r \in]R, 1[$, on a $0 < \frac{1-r}{1-R} < 1$, puis :

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \lambda = -g'(1) \lim_{R \rightarrow 1^-} \left(\int_R^1 f(c) r \frac{1-r}{1-R} \right)^{-1} = (+\infty)$$

Proposition III.2 :

i) si $\beta e^\delta < 1$, alors $(R = -\delta / \text{Log } \beta ; c \equiv 1)$ est l'unique solution du problème (2.7) pour $\lambda = 0$

ii) si $\beta e^\delta > 1$, alors le problème (2.7) n'a pas de solution pour $\lambda = 0$

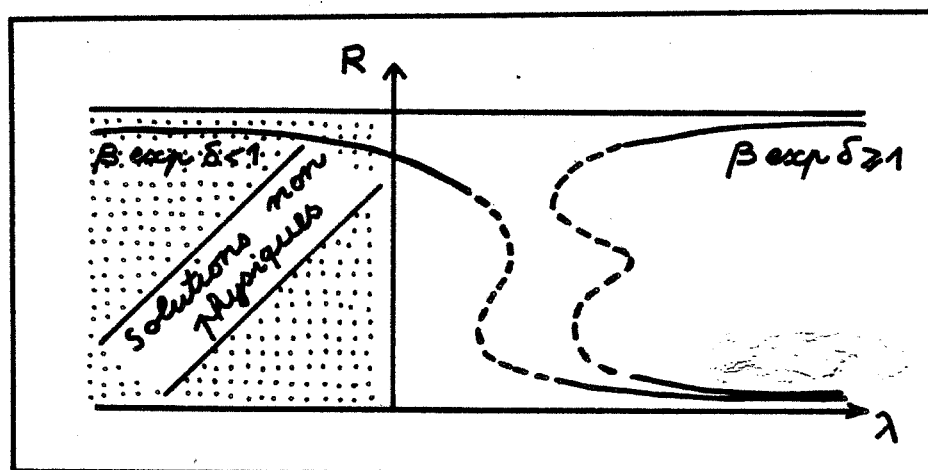
Preuve :

D'après (2.12), $\lambda = 0 \Leftrightarrow 1 - \beta \exp(\delta/R) = 0$.

Alors, $\beta \exp(\delta/r)$ décroissante et $g(1) = \beta e^\delta$ entraînent :

il existe $R \in]0, 1[$ tel que $\beta \exp(\delta/R) = 1$ si et seulement si $\beta e^\delta < 1$.

On déduit du Théorème III.1 et des Propositions III.1 et III.2 qu'il existe des solutions multiples si $\beta e^\delta > 1$. Le diagramme de bifurcation est esquissé sur la figure III.2.



-figure III. 2-

La branche des solutions présente un nombre impair de point(s) de retournement (au moins un) si $\beta e^\delta > 1$. Si $\beta e^\delta < 1$, elle présente un nombre pair de points de retournement (éventuellement aucun).

III.3. RESOLUTION LOCALE DU PROBLEME STATIONNAIRE

On suppose connue une solution $(R_0, c_0) \in]0, 1[\times C^2([R_0, 1[)$ du problème (2.7) pour une valeur λ_0 positive du paramètre λ (solution "physique"). Après avoir transporté le problème (2.7) sur un domaine fixe, on définit les solutions régulières et les points de retournement simple par application des définitions (I.1) et (I.2) au problème transporté.

On précise un choix de normalisations pour lequel la méthode standard énoncée au chapitre I permet de calculer localement l'arc des solutions du problème transporté passant par (λ_0, R_0, c_0) en fonction d'un paramètre s .

Transport :

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccc} T_R : [R_0, 1] & \rightarrow & [R, 1] \\ \rho & \rightarrow & r = \frac{1-R}{1-R_0} \rho + \frac{R-R_0}{1-R_0} \end{array}$$

Changement de fonction inconnue :

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} v(\rho) = c(r) \\ v'(\rho) = \frac{1-R}{1-R_0} c'(r) \\ v''(\rho) = \left(\frac{1-R}{1-R_0}\right)^2 c''(r) \end{array} \right.$$

Problème transporté :

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1-R_0)^2 v'' + \frac{2}{T_R(\rho)} (1-R_0)(1-R) v' + \lambda(1-R)^2 f(v) = 0 \\ v(R_0) - g(R) = 0 \\ v'(R_0) = 0 \\ v(1) - 1 = 0 \end{array} \right.$$

on l'écrit simplement :

$$(3.3bis) \quad G(\lambda, R, v) = 0$$

L'opérateur $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times C^2([R_0, 1]) \rightarrow C^0([R_0, 1]) \times \mathbb{R}^3$, défini par le problème transporté, est de classe C^2 .

On calcule les dérivées partielles de G au point (λ_0, R_0, c_0) :

$$(3.4) \quad G_\lambda = \begin{pmatrix} (1-R_0)^2 f(c_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3.5) \quad G_R^0 = \begin{pmatrix} -2/r^2 (1-R_0)^2 f(c_0) \\ -g'(R_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3.6) \quad G_v^0 = \begin{pmatrix} (1-R_0)^2 w'' + 2/r (1-R_0)^2 w' + \lambda_0 (1-R_0)^2 f'(c_0) w \\ w(R_0) \\ w'(R_0) \\ w(1) \end{pmatrix}$$

Définition III.1 :

On dira que (λ_0, R_0, c_0) est une solution régulière (resp. un point de retournement simple) du problème à frontière libre (2.7), si c'est une solution régulière (resp. un point de retournement simple) du problème transporté $G(\lambda, R, v) = 0$ au sens de la Définition I.1. (resp. I.2).

Pour paramétrer l'arc des solutions (λ, R, v) du problème transporté (3.3) passant par (λ_0, R_0, c_0) (solution régulière ou point de retournement simple de (2.7)), on utilise la méthode standard décrite au Chapitre I avec $x = (R, v)$:

- par la Proposition I.1, $DG(\lambda_0, R_0, c_0)$ est surjectif et admet un noyau de dimension 1.
- pour construire le problème augmenté, il faut trouver une application linéaire continue lin qui vérifie la condition suivante :

(C5) $\text{Lin}(\Delta, T, Z) \neq 0$ pour (Δ, T, Z) générateur de $\text{DG}(\lambda_0, R_0, c_0)$;

c'est l'objet du Paragraphe III.3.2.

- on obtiendra les développements suivants :

$$(3.7) \quad \begin{cases} \lambda = \lambda_0 + s\Delta + o(s) \\ R = R_0 + sT + o(s) \\ v = c_0 + sZ + o(s) \end{cases}$$

où (Δ, T, Z) est l'unique solution du problème linéarisé :

$$\begin{cases} \text{DG}(\lambda_0, R_0, c_0) \cdot (\Delta, T, Z) = 0 \\ \text{Lin}(\Delta, T, Z) = 1 \end{cases}$$

Enfin, on paramètre l'arc (λ, R, u) des solutions du problème (2.7) en ramenant $v(s)$ sur l'intervalle $]R(s), 1[$ par l'inverse du transport (3.1) :

- le transport T_R dépend linéairement de R donc :

$$(3.9) \quad T_R = T_{R_0} + sT + o(s)$$

- puis on déduit de la relation $c \circ T_R = v$ le développement :

$$(3.10) \quad c(s)([T_{R_0} + sT](\rho)) = c_0(\rho) + sZ(\rho) + o(s)(\rho)$$

III.3.2. Choix de la normalisation

Le générateur du noyau de $\text{DG}(\lambda_0, R_0, c_0)$ est donné dans la preuve de la Proposition I.1, on rappelle :

- si (λ_0, R_0, c_0) est une solution régulière de (2.7), alors $\text{KerDG}(\lambda_0, R_0, c_0)$ est engendré par $(1, 0, Z)$ où Z vérifie

$$G_{R,v}(\lambda_0, R_0, c_0) \cdot Z = -G_\lambda(\lambda_0, R_0, c_0).$$

- si (λ_0, R_0, c_0) est un point de retournement simple de (2.7) et si Φ est un générateur de $\text{Ker } G_{r,v}(\lambda_0, R_0, c_0)$, alors

$\text{Ker } DG(\lambda_0, R_0, c_0)$ est engendré par $(0, 1, \Phi)$.

On va donner de ce générateur une expression plus concrète qui permet d'expliciter la condition (C5) et de trouver effectivement des normalisations convenables.

Soit l'opérateur L_0 , défini sur l'espace :

$$(3.11) \quad V_0 = \{v \in C^2([R_0, 1]) / v(1) = v(R_0) = 0\}$$

$$(3.12) \quad L_0 z = z'' + 2z'/\rho + \lambda_0 f'(c_0)z$$

f étant positive et décroissante, par le second principe du maximum de Hopf, appliqué à l'opérateur L_0 , on a le résultat suivant :

$$(3.13) \quad \text{Ker } L_0 = \{0\}$$

$$(3.14) \quad \text{la solution de } L_0 z = f(c_0) \text{ vérifie } z'(R_0) < 0.$$

On notera : $I_0 \cdot \xi = \xi'' + 2\xi'/\rho + \lambda f'(c_0)\xi$ si ξ n'appartient pas à V_0 .

Proposition III.3 :

Soit p la solution du problème aux limites :

$$(3.15) \quad \begin{cases} I_0 \cdot p = \frac{2}{1-R_0} \left(\frac{c'_0}{\rho^2} + \lambda_0 f'(c_0) \right) \\ p(R_0) = g'(R_0) \\ p(1) = 0 \end{cases}$$

soit $z \in V_0$, la solution de l'équation $L_0 \cdot z = f(c_0)$.

Alors le vecteur :

$$(3.16) \quad (p'(R_0), z'(R_0), -p'(R_0)z + z'(R_0)p)$$

engendre $\text{Ker } DG(\lambda_0, R_0, c_0)$.

De plus, la solution du problème (2.7) est une solution régulière si $p'(R_0) \neq 0$; c'est un point de retournement simple si $p'(R_0) = 0$.

Preuve :

Pour tout $(l, t) \in \mathbb{R}^2$, $w = -lz + tp$ est solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} l_0 \cdot w - \frac{2t}{1-R_0} \left(\frac{c'_0}{\rho^2} + \lambda_0 f(c_0) \right) + lf(c_0) = 0 \\ w(R_0) - tg'(R_0) = 0 \\ w(1) = 0 \end{cases}$$

$(l, t, w) \in \text{Ker } DG(\lambda_0, R_0, c_0) \Leftrightarrow w'(R_0) = 0$ c'est à dire :

$$-lz'(R_0) + tp'(R_0) = 0$$

donc le vecteur (3.15) engendre $\text{Ker } DG(\lambda_0, R_0, c_0)$.

On s'intéresse maintenant à $G_{R,v}(\lambda_0, R_0, c_0)$.

Si $l=0$, alors $tp'(R_0) = 0$ et (t, tp) engendre $\text{Ker } G_{R,v}(\lambda_0, R_0, c_0)$:

- si $p'(R_0) \neq 0$, alors $t = 0$ et $\text{Ker } G_{R,v}(\lambda_0, R_0, c_0) = \{0\}$

- si $p'(R_0) = 0$, on montre que $G_{R,v}(\lambda_0, R_0, c_0)$ vérifie les conditions de retournement simple (Chap. I, conditions (C2)(C3)(C4)) :

(C2) : $\text{Ker } G_{R,v}(\lambda_0, R_0, c_0) = \langle (1, p) \rangle$ est de dimension 1.

(C3) : Soit $(a, b, c, d) \in C^0([R_0, 1]) \times \mathbb{R}^3$,

$(a, b, c, d) \in \text{Im } G_{R,v}(\lambda_0, R_0, c_0)$ équivaut à : il existe (t, w) tels que :

$$\begin{cases} l_0 \cdot w - \frac{2t}{1-R_0} \left(\frac{c'_0}{\rho^2} + \lambda_0 f(c_0) \right) = a \\ w(R_0) - tg'(R_0) = b \\ w'(R_0) = c \\ w(1) = d \end{cases}$$

ou encore, avec p solutions du problème (3.14) et q solution du problème :

$$l_0 \cdot q = a ; q(R_0) = b ; q(1) = d$$

à : il existe t tel que $w = q + tp$ et $w'(R_0) = q'(R_0) = 0$.

Or q dépend linéairement de (a, b, d) donc $\text{Im } G_{R,v}(\lambda_0, R_0, c_0)$ est le noyau de la forme linéaire continue $(a, b, c, d) \rightarrow q'(R_0) - c$.

Donc $\text{codim} (\text{Im } G_{R,v}(\lambda_0, R_0, c_0)) = 1$.

$$(C4) : G_\lambda(\lambda_0, R_0, c_0) = (-f(c_0), 0, 0, 0)$$

par le Lemme III.3 la solution du problème : $L_0 \cdot z = -f(c_0)$ vérifie :

$z'(R_0) \neq 0$ et donc $G_\lambda(\lambda_0, R_0, c_0) \notin \text{Im } G_{R,v}(\lambda_0, R_0, c_0)$. ■

La condition (C5) s'énonce maintenant sous la forme suivante :

$$(3.17) \quad \text{lin}(p'(R_0), z'(R_0), -p'(R_0)z + z'(R_0)p) \neq 0$$

Le choix $\text{lin}(1, t, w) = 1$ convient si (λ_0, R_0, c_0) est une solution régulière du problème (2.7) ; ce choix revient à paramétrer l'arc des solutions de (3.3) passant par (λ_0, R_0, c_0) avec $s = \lambda$.

En tout point de la branche, la relation $z'(R_0) \neq 0$ est vérifiée et on peut choisir $\text{lin}(1, t, w) = t$, ce qui revient à paramétrer l'arc des solutions de (3.3) passant par (λ_0, R_0, c_0) avec $s = R$.

On pourra retenir aussi le choix d'une pseudo-abscisse curviligne sur la branche des solutions de (3.3) :

$$N(\lambda, R, v, s) = \lambda^*(\lambda - \lambda_0) + R^*(R - R_0) + \langle w^*, v - c_0 \rangle - (s - s_0)$$

où λ^* , R^* et w^* approchent $d\lambda/ds$, dR/ds et dv/ds respectivement ;

ou une pseudo-abscisse curviligne sur le diagramme de bifurcation (λ, R) :

$$N(\lambda, R, v, s) = \lambda^*(\lambda - \lambda_0) + R^*(R - R_0) - (s - s_0)$$

où λ^* et R^* approchent $d\lambda/ds$ et dR/ds respectivement.

III.4. ALGORITHME ET RESULTATS NUMERIQUES

L'algorithme présenté est directement adapté de l'algorithme standard décrit au Chapitre I. On développe ici le choix qui a été fait pour l'initialisation et les particularités de la résolution numérique du problème linéarisé.

Initialisation

On fixe R_0 assez grand et tel que $g(R_0) > 1$.

Pour $l = 0$, la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \Delta u + lf(u) = 0 \\ u(R_0) = g(R_0) \\ u'(R_0) = 0 \end{cases}$$

vérifie $u(1) > 1$ ($u \equiv g(R_0)!$).

Puis on cherche l_k et l_{k+1} tels que :

$$l_k < l_{k+1}$$

pour $l = l_k$, $u(1) > 1$

pour $l = l_{k+1}$, $u(1) < 1$

en résolvant pour chaque l le problème de Cauchy par la méthode de Runge-Kutta.

On annule $u(1)-1$ par dichotomie sur l . On donne finalement à λ_0 , la valeur de l pour laquelle $|u(1)-1| < \text{erreur de Runge-Kutta}$. On obtient aussi un profil discrétisé de u_0 .

Itération

Etape 1 : Résolution du problème augmenté linéarisé

(i) générer le noyau de $DG(\lambda_k, R_k, c_k)$

- calculer la matrice tridiagonale approchant l'opérateur

$$L_0 : z \rightarrow z'' + 2z'/\rho + \lambda_k f'(c_k)z$$

sur la grille $G_k : \rho_j = R_k + (j-1)h ; h = (1-R_k)/N$.

- calculer les seconds membres sur la grille G_k :
 $MGL = f(c_k)$ et $MGR = (1-R_k)^{-1} \{ 2/\rho^2 c'_k - 2\lambda_k f(c_k) \}$
- résoudre les deux systèmes :
 $L_0 \cdot z = MGL$ et $L_0 \cdot q = MGR$.
- alors $w = z + tq$ et $w'(R_k) = 0$ déterminent t :
 $t = -z'(R_k)/q'(R_k)$
tel que $(1, t, w)$ génère $\text{Ker} DG^k$.

(ii) normalisation

on a choisi de paramétrer par le rayon du grain :
on fixe simplement $T=1$ puis, comme $t = \partial R / \partial \lambda$, on a :
 $L=1/t$ et $W=L(z+tq)$.

Etape 2 : Un pas de la méthode d'Euler

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta s L$$

$$R_{k+1} = R_k + \Delta s$$

On dispose depuis l'initialisation d'une grille de N points équirépartis sur l'intervalle courant $[R_k, 1]$. On la transporte sur l'intervalle $[R_{k+1}, 1]$:

$$h = (1-R_{k+1})/N$$

$$r_i = R_{k+1} + (i-1)h ; i = 1.. N+1$$

$$u_{k+1}(R_{k+1}) = g(R_{k+1})$$

$$u_{k+1}(r_i) = u_k(\rho_i) + \Delta s W(\rho_i) ; i = 2.. N$$

Un étude systématique des résultats numériques, exploitée du point de vue du phénomène chimique, fait l'objet d'un prochain travail en collaboration avec M. Cournil.

On présente ici trois séries de résultats qui précisent la nature du phénomène de bifurcation :

Série 1 (planches III.1 à III.6) :

$$\text{terme de source } f(c) = \text{cte} = 1$$

Série 2 (planches III.7 à III.11) :

$$\text{terme source } f(c) = (c - \alpha c / \beta)^+$$

Série 3 (planches III.12 à III.16)

$$\text{terme source } f(c) = (c - \alpha^2 c^2 / \beta^2)^+$$

Dans chacune de ces séries, on a fait varier le paramètre β , en gardant les paramètres α et δ constants.

L'allure des diagrammes de bifurcation change en fonction des valeurs du paramètre β . Plus précisément, on observe dans les deux cas présentés :

- pour β tel que $\beta e^\delta \ll 1$, aucun point de retournement.
- pour β tel que $\beta e^\delta < 1$, avec $\beta e^\delta \approx 1$, deux point de retournement.
- pour β tel que $\beta e^\delta > 1$, un unique point de retournement.

CHAPITRE IV

PROBLEME A FRONTIERE LIBRE DISCRET EN DIMENSION 2

Plan du chapitre :

IV.1. APPROXIMATION DU PROBLEME A FRONTIERE LIBRE PAR ELEMENTS FINIS

- IV.1.1. Approximation du problème variationnel
- IV.1.2. Représentation admissible de la frontière libre discrète
- IV.1.3. Enoncé local du problème à frontière libre discret

IV.2. DERIVATION PAR RAPPORT A LA FRONTIERE LIBRE DISCRETE

- IV.2.1. Variation du domaine triangularisé
- IV.2.2. Dérivations "élémentaires"
- IV.2.3. Assemblage de la dérivée partielle

IV.3. ETUDE LOCALE DE LA BRANCHE DES SOLUTIONS DU PROBLEME DISCRET

- IV.3.1. Introduction et notations
- IV.3.2. Linéarisation
- IV.3.3. Paramétrage local, méthode de continuation

Résumé :

On considère le problème discret noté :

$$F_h(\lambda, \gamma_h, u_h) = 0$$

où γ_h et u_h approchent respectivement la frontière libre γ et la solution régulière u du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u - \lambda f(u) = 0 \text{ sur } \Omega_\gamma \\ u = \Psi \text{ sur } \gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Psi}{\partial n} \text{ sur } \gamma \\ u = 0 \text{ sur } \gamma_\Omega \end{array} \right.$$

posé sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ (Ω_γ est la couronne limitée par $\partial\Omega$ -frontière extérieure fixe- et γ -frontière intérieure libre-).

La solution du problème à frontière libre discret est à chercher dans un espace d'interpolation qui dépend de γ_h . La dérivée de F_h par rapport à la frontière libre est calculée après transport sur un domaine triangulisé fixe. On suit en cela les travaux de J.P. Zolésio [ZOL84].

On montre ainsi que l'opérateur F_h est dérivable, ce qui permet de considérer le problème de la régularité de l'opérateur linéarisé DF_h . Les solutions régulières et les points de retournement simple seront définis comme dans le cadre abstrait du Chapitre I.

La branche paramétrée $\lambda(s)$, $\gamma_h(s)$, $u_h(s)$ des solution du problème à frontière libre discret est calculée par un algorithme adapté de l'algorithme standard de continuation.

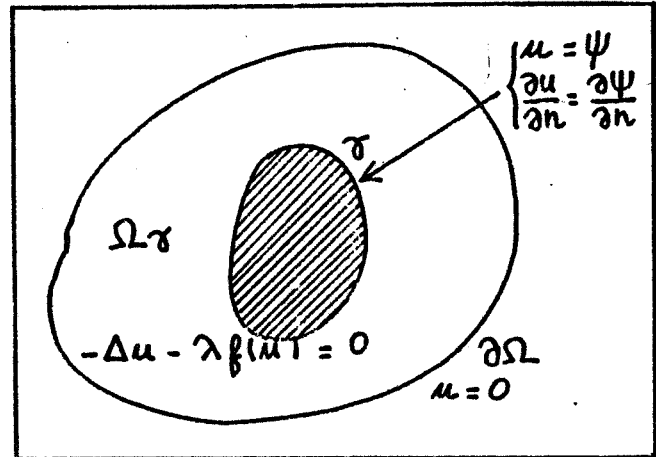
Annexe : on décrit de façon détaillée un programme modulaire qui calcule par continuation la branche des solutions d'un problème à frontière libre de type général dans $\mathbb{R}^2$.

IV.1. APPROXIMATION DU PROBLEME A FRONTIERE LIBRE PAR ELEMENTS FINIS

Soit Ω un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on considère le problème à frontière libre .

Trouver une courbe γ fermée, régulière, incluse dans Ω ;
trouver une fonction u régulière solution du problème posé sur le domaine Ω_γ (limité par les courbes γ et $\partial\Omega$) :

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\Delta u - \lambda f(u) = 0 & \text{sur } \Omega_\gamma \\ u = 0 & \text{sur } \gamma_\Omega \\ u = \Psi & \text{sur } \gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Psi}{\partial n} & \text{sur } \gamma \end{cases}$$



-figure IV.1-

On va construire une approximation par éléments finis du problème (1.1) mis sous forme variationnelle, sur un domaine fixé. On supposera connaître, pour une valeur λ_0 de λ , un domaine triangularisé $\Omega_{\gamma_0 h}$ (approchant Ω_γ) et une solution u_{0h} du problème (1.1) discrétisé sur $\Omega_{\gamma_0 h}$.

On définira localement, pour λ voisin de λ_0 , l'ensemble des lignes polygonales dans lequel on veut trouver la frontière discrète γ_h approchant la frontière libre régulière γ .

Enfin, on énoncera, toujours pour λ voisin de λ_0 , le problème discret approchant le problème à frontière libre et qu'on appellera pour cette raison problème à frontière libre discret .

IV.1.1. Approximation du problème variationnel

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$, soit γ une courbe fermée régulière de Ω et soit Ω_γ le domaine annulaire de $\mathbb{R}^2$, limité par les courbes γ (frontière interne) et $\partial\Omega$ (frontière externe).

On réécrit le problème (1.1) sous la forme variationnelle équivalente :

$$u \in \Phi + H_0^1(\Omega_\gamma)$$

$$(1.2) \quad \int_{\Omega_\gamma} \nabla u \nabla v - \lambda f(u)v = \int_\gamma \frac{\partial \Psi}{\partial n} v \quad \text{pour tout } v \in V$$

avec :

$$(1.3) \quad V = \{v \in H^1(\Omega_\gamma) / v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

$$(1.4) \quad \Phi \in V, \text{ arbitraire, vérifiant } \Phi = \Psi \text{ sur } \gamma.$$

On discrétise ce problème variationnel en utilisant des éléments finis triangulaires de type P1.

Numérotation des sommets :

On se donne une triangularisation τ_h de l'ouvert Ω_γ dont les sommets

$$(1.5) \quad \begin{aligned} M_1 \dots M_{nsi} &\text{ sont des sommets intérieurs,} \\ M_{nsi+1} \dots M_{nsi+n} &\text{ sont sur } \gamma, \\ M_{nsi+n+1} \dots M_{ns} &\text{ sont sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Approximation de l'ouvert Ω_γ :

On notera $\Omega_{\gamma h}$ l'ouvert limité par les deux lignes polygonales γ_h et $\partial\Omega_h$ avec :

$$\begin{aligned} \gamma_h &= \text{ligne polygonale joignant les sommets } M_{nsi+1} \dots M_{nsi+n} \\ \partial\Omega_h &= \text{ligne polygonale joignant les sommets } M_{nsi+n+1} \dots M_{ns} \end{aligned}$$

On suppose que la triangulation τ_h est entièrement définie par la position des noeuds de γ_h . Les noeuds intérieurs ne dépendent que de γ_h et de $\partial\Omega_h$ (qui reste fixe), par l'intermédiaire des nsi applications différentiables :

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \mu_j : (R^2)^n &\rightarrow R^2 \\ M_{nsi+1} \dots M_{nsi+n} &\rightarrow M_j(M_{nsi+1} \dots M_{nsi+n}; \partial\Omega_h); \\ \text{pour } j &= 1 \dots nsi \end{aligned}$$

Espaces d'interpolation sur $\Omega_{\gamma h}$:

On approche l'espace $H^1(\Omega)$ par l'espace X_h des fonctions continues sur $\Omega_{\gamma h}$, affines sur les triangles de τ_h .

L'espace X_h est muni de sa base canonique :

$$(1.7) \quad B_h = \{w_j \in X_h / w_j(M_i) = \delta_{ij} \text{ pour } i, j = 1.. ns\}$$

On approche $H_0^1(\Omega_\gamma)$ par le sous-espace de X_h :

$$(1.8) \quad V_{0h} = \{v_h \in X_h / v = 0 \text{ sur } \gamma_h \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_h\}$$

qui est engendré par $\{w_j \in B_h, j = 1.. nsi\}$.

On utilisera aussi le sous-espace de X_h :

$$(1.9) \quad V_h = \{v_h \in X_h / v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_h\}$$

engendré par $\{w_j \in B_h, j = n+1.. n+nsi\}$.

Approximation de l'obstacle et de ses dérivées sur γ_h :

Pour approcher Ψ sur γ_h , on définit Φ_h , élément de V_h , par :

$$(1.10) \quad \Phi_h = \sum_{i=nsi+1}^{nsi+n} \Psi(M_i) w_i$$

(ainsi, on cherchera la solution approchée u_h dans l'espace $\Phi_h + V_{0h}$).

Soit $\vec{V}$, un champ de vecteur sur $\Omega_{\gamma h}$; on approchera $\langle \vec{V}\Psi, \vec{V} \rangle$ sur γ_h , par l'élément x_h de V_h :

$$(1.11) \quad x_h = \sum_{i=nsi+1}^{nsi+n} \langle \vec{V}\Psi(M_i), \vec{V}(M_i) \rangle w_i$$

Soit γ_k , un côté de γ_h ; si n_k désigne la normale à γ_k , extérieure à $\Omega_{\gamma h}$, on notera pour $v_h \in V_h$:

$$(1.12) \quad \int_{\gamma_h} \frac{\partial \Psi}{\partial n} v_h = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \langle \vec{V}\Psi, \vec{n}_k \rangle v_h$$

éventuellement, l'intégrale sur γ_k sera calculée par une formule de quadrature.

Approximation de la non-linéarité et de ses dérivées :

Pour $u \in H^1(\Omega_\gamma)$, avec l'approximation u_h définie par :

$$(1.13) \quad u_h = \sum_{i=1}^{ns} u(M_i) w_i,$$

on approchera $f(u)$ par $f(u_h)$, $f'(u)$ par $f'(u_h)$...

L'intégrale des termes contenant la non-linéarité, sur un triangle sera approchée par une formule de quadrature (voir [CIA78] pour un choix adéquat).

Approximation du problème variationnel :

En utilisant les notations (1.7) à (1.13), on écrit le problème discret approchant le problème variationnel (1.2) :

$$u_h \in \Phi_h + V_{0h} ;$$

$$(1.14) \quad \int_{\Omega_\gamma} \nabla u_h \nabla v_h - \lambda f_h(u_h) v_h = \int_{\gamma_h} \frac{\partial \Psi}{\partial n} v_h ; \quad v_h \in V_h.$$

On peut remarquer que ce problème est **surdéterminé**. En effet, la seule inconnue est l'élément v_{0h} de V_{0h} (espace de dimension nsi) tel que :

$$u_h = \Phi_h + v_{0h} ;$$

le problème discret étant posé sur l'espace V_h de dimension $n+nsi$, il est clair que l'on doit vérifier n relations de compatibilité.

La détermination de la frontière polygonale γ_h nécessite, à priori, $2n$ paramètres : les coordonnées des points $M_{nsi+1} \dots M_{nsi+n}$ de $\mathbb{R}^2$.

Pour que le problème (1.14) soit posé correctement, il faut réduire l'ensemble des frontières γ_h admissibles, de façon que γ_h soit décrite par n paramètres seulement.

IV.1.2. Description des frontières libres discrètes admissibles

La frontière libre du problème (1.1) est une courbe γ , supposée régulière, que l'on cherche à approcher par une ligne polygonale γ_h formée de n sommets.

Pour ramener le nombre des paramètres qui décrivent γ_h de $2n$ à n , on

va chercher les sommets de γ_h sur n droites (ou demi-droites) données à l'avance, convenablement choisies, qu'on appellera directions méridiennes .

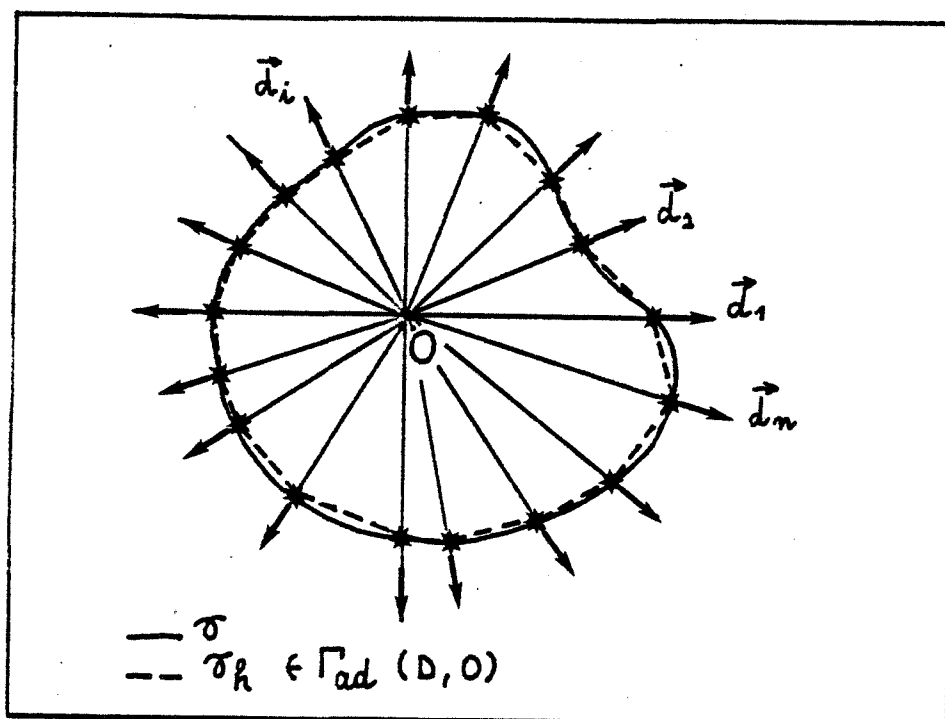
Le choix des directions méridiennes est assez large, il dépend de la forme de la frontière libre γ qu'on veut approcher et d'autres considérations d'ordre pratique.

On donne ici deux cas particuliers qui servent dans l'étude locale du problème à frontière libre.

A. Approximation de la frontière régulière d'un domaine étoilé

Soit γ une courbe régulière de $\mathbb{R}^2$ entourant un domaine étoilé par rapport à un point O . On se donne un ensemble de n vecteurs de $\mathbb{R}^2$:

$$D = \{ \vec{d}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i) ; \theta_i = (i-1) \frac{2\pi}{n} ; i = 1..n \}$$



-figure IV.2-

Définition IV.1 :

On appellera ensemble des courbes admissibles par la représentation suivant $(D, 0)$, et on notera $\Gamma_{ad}(D, 0)$ l'ensemble des lignes polygonales formées en joignant dans l'ordre $1 \rightarrow 2 \dots n \rightarrow 1$ des points placés respectivement sur les demi-droites $(0 + R^+ \vec{d}_i)$.

Un élément $\gamma_h \in \Gamma_{ad}(D, 0)$ pourra être identifié à un élément de R^n en posant :

$$M_i \in \gamma_h \Leftrightarrow M_i = 0 + \gamma_{hi} \vec{d}_i$$

On approchera la courbe régulière γ par l'élément γ_h de l'ensemble $\Gamma_{ad}(D, 0)$, formé en joignant dans l'ordre $1 \rightarrow 2 \dots n \rightarrow 1$ les intersections de γ avec les demi-droites $(0 + R^+ \vec{d}_i)$.

B. Approximation d'une courbe régulière voisine d'une courbe régulière donnée

On a vu, au chapitre I, un mode de repérage des courbes régulières voisines d'une courbe régulière donnée, γ_0 , utilisant un paramétrage de γ_0 et un champ de vecteurs donné sur γ_0 .

On propose ici une façon d'approcher les courbes régulières de γ_0 , en utilisant une approximation S de γ_0 et un ensemble de directions méridiennes donné sur les sommets de S .

Soit γ_0 une courbe de Jordan, régulière, dans R^2 . On se donne une ligne polygonale :

$$S = \{S_1 \dots S_n\}$$

proche de γ_0 dans un sens que l'on va définir dans la suite, et un ensemble de vecteurs normés de R^2 :

$$D = \{\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_n\}$$

vérifiant la condition suivante (voir fig. IV.3) :

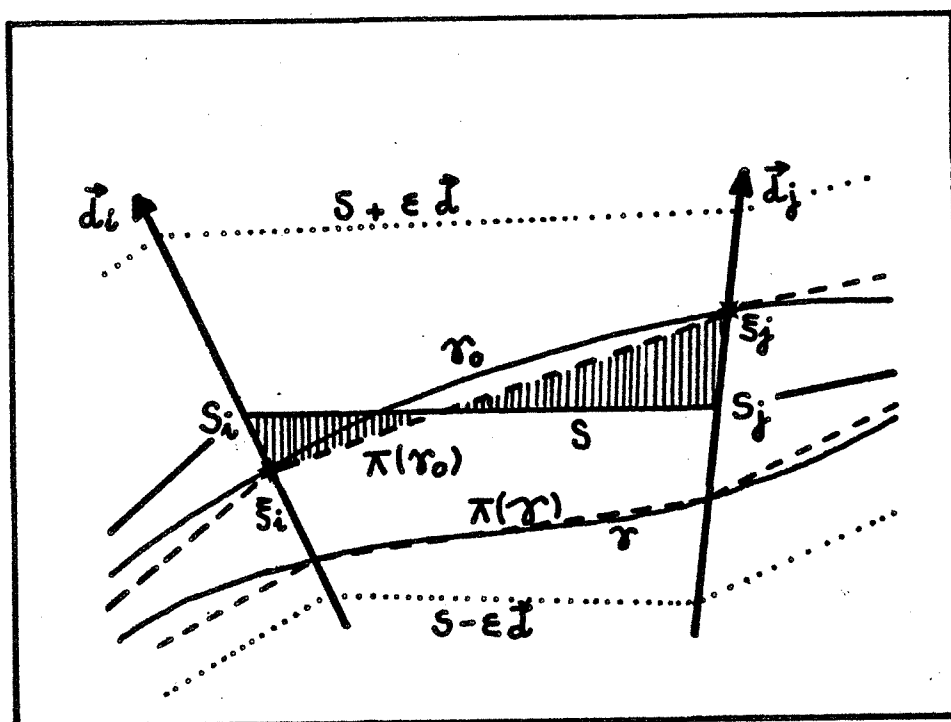
$$(1.15) \quad \vec{d}_i \text{ n'appartient pas au cône tangent à } S \text{ en } S_i ; i = 1 \dots n.$$

Les courbes voisines de γ_0 seront repérées, comme au chapitre I, grace au champ $\vec{V}$. On considère un voisinage G_{ad} de γ_0 inclus dans la couronne $\pi([- \epsilon, \epsilon[\times S)$ que l'on identifie à un voisinage de 0 dans $C^0(\gamma_0)$ par :

$$\gamma \in G_{ad} \Leftrightarrow \gamma = \{z \in \mathbb{R}^2 / z = \xi + \gamma(\xi)\vec{V}(\xi); \xi \in \gamma_0\}$$

Définition IV.2 :

On appellera ensemble des courbes admissibles par la représentation (D, S) et on notera $\Gamma_{ad}(D, S)$ l'ensemble des lignes polygonales obtenues en joignant dans l'ordre $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1$ des points placés respectivement sur les droites $(S_i + R \vec{d}_i)$.



-figure IV.4-

Une courbe régulière $\gamma \in G_{ad}$, sera approchée par l'élément $\Pi(\gamma)$ de $\Gamma_{ad}(D, S)$ défini dans le lemme suivant. On établit des estimations qui permettent de conclure que si S approche γ_0 , alors :

- (i) γ voisine de 0 dans $G_{ad} \Rightarrow \Pi(\gamma)$ voisine de 0 dans $\Gamma_{ad}(D, S)$
- (ii) $\Pi(\gamma)$ approche γ "aussi bien" que S approche γ_0 .

Lemme IV.1 :

On identifie un élément γ_h de $\Gamma_{ad}(D, S)$ à un élément de R^n ou à un élément de $C^0(\gamma_0)$ en posant :

$$(1.18) \quad X_i = S_i + \gamma_h \vec{d}_i \quad \text{pour } X_i \text{ sommet de } \gamma_h$$

ou :

$$(1.19) \quad x = \xi + \gamma_h(\xi) \vec{V}(\xi); \quad \text{pour } \xi \in \gamma_0 \quad \text{et } x \in \gamma_h$$

On suppose que la ligne polygonale S et l'ensemble des directions méridiennes D vérifient les hypothèses (1.15), (1.16) et (1.17).

Pour $\gamma \in G_{ad}$ $\pi(\cdot) \in]-\epsilon, \epsilon[\times S$, on note $\Pi(\gamma)$ l'élément de $\Gamma_{ad}(D, S)$ obtenu en joignant, dans l'ordre $1 \rightarrow 2 \dots n \rightarrow 1$ les intersections de γ avec les droites $(S_i + R \vec{d}_i)$. Alors :

$$(i) \quad \| \pi(\gamma) \|_{R^n} \leq \| \Pi(\gamma_0) \|_{R^n} + \| \gamma \|_{C^0(\gamma_0)}$$

$$(ii) \quad \| \Pi(\gamma) - \gamma \|_{C^0(\gamma_0)} \leq \| \Pi(\gamma_0) \|_{C^0(\gamma_0)} + 2 \| \gamma \|_{C^0(\gamma_0)}$$

$$(iii) \quad \| \Pi(\gamma_0) \|_{C^0(\gamma_0)} \leq 2 \| S \|_{C^0(\gamma_0)}$$

($\| \cdot \|_{R^n}$ désigne la norme du max)

Preuve :

(i) Pour $i \in 1..n$, et pour X_i sommet de $\Pi(\gamma)$, on écrit :

$$X_i = \xi_i + \gamma(\xi_i) d_i; \quad \xi_i \in \gamma_0$$

$$X_i = S_i + \Pi(\gamma)_i d_i$$

avec $\Pi(\gamma_0) = \{\xi_1 \dots \xi_n\}$, et $\xi_i = S_i + \Pi(\gamma_0)_i d_i$, on obtient :

$$\Pi(\gamma)_i = \gamma(\xi_i) + \Pi(\gamma_0)_i$$

d'où le résultat.

(ii) Avec la convention $\gamma_0 \equiv 0$ dans $C^0(\gamma_0)$, on écrit :

$$\|\Pi(\gamma) - \gamma\|_{C^0(\gamma_0)} \leq \|\Pi(\gamma) - \Pi(\gamma_0)\|_{C^0(\gamma_0)} + \|\Pi(\gamma_0)\|_{C^0(\gamma_0)} + \|\gamma\|_{C^0(\gamma_0)}$$

De façon évidente, pour $\gamma_h \in \Gamma_{ad}(D, S)$,

$$\|\gamma_h - \Pi(\gamma_0)\|_{C^0(\gamma_0)} = \|\gamma_h - \Pi(\gamma_0)\|_{R^n}$$

et comme $\Pi(\gamma)_i = \gamma(\xi_i) + \Pi(\gamma_0)_i$; $i = 1..n$, on a :

$$\|\Pi(\gamma) - \Pi(\gamma_0)\|_{R^n} \leq \|\gamma\|_{C^0(\gamma_0)}$$

$$(iii) \|\Pi(\gamma_0) - S\|_{C^0(\gamma_0)} = \|\Pi(\gamma_0) - S\|_{R^n} \leq \|S\|_{C^0(\gamma_0)}$$



Remarques : 1) dans la pratique, pour initialiser le calcul par continuation, on pourra prendre $S = \gamma_{0h}$, approximation de la frontière libre que l'on obtient en résolvant numériquement le problème (1.1) pour une valeur λ_0 de λ .

2) dans le cours du calcul de la branche, au voisinage du point courant $(\lambda_k, \gamma_{hk}, u_{hk})$, on prendra $S = \gamma_{hk}$.

3) $S \in \Gamma_{ad}(D, 0) \Rightarrow \Gamma_{ad}(D, S) = \Gamma_{ad}(D, 0)$.

IV.1.3. Énoncé local du problème à frontière libre discret

On suppose que le problème discret :

trouver $\gamma_h = \{M_{nsi+1}.. M_{nsi+n}\}$, déterminant Ω_{γ_h} ,
trouver u_h solution du problème (1.14) posé sur Ω_{γ_h}

admet une solution (γ_{0h}, u_{0h}) pour une valeur λ_0 de λ .

On se donne un ensemble de vecteurs de R^2 , $D = \{\vec{d}_1 .. \vec{d}_n\}$ vérifiant l'hypothèse (1.15) pour $S = \gamma_{0h}$.

On énonce, au voisinage de $(\lambda_0, \gamma_{0h}, u_{0h})$ le problème sous la forme suivante :

problème à frontière libre discret (variationnel).

Trouver $\gamma_h \in \Gamma_{ad}(D, \gamma_{0h})$, $\gamma_h = \{M_{n_{si}+1} \dots M_{n_{si}+n}\}$,
trouver $u_h \in \Phi_h + V_{0h}(\Omega_{\gamma_h})$ solution du problème :

pour tout $v_h \in V_h(\Omega_{\gamma_h})$,

$$(1.20) \quad \int_{\Omega_{\gamma_h}} \nabla u_h \nabla v_h - \lambda f_h(u_h) v_h = \int_{\gamma_h} \frac{\partial \Psi}{\partial n} v_h$$

où Φ_h est définie par (1.10) que l'on rappelle :

$$\Phi_h = \sum_{i=n_{si}+1}^{n_{si}+n} \Psi(M_i) w_i,$$

Dans le problème (1.20), la dépendance vis à vis du domaine s'exprime, comme dans le cas continu, par le fait qu'on cherche la solution u_h dans l'espace $X_h(\Omega_{\gamma_h})$ qui dépend de la frontière γ_h . Cependant, si on écrit dans la base de $X_h(\Omega_{\gamma_h})$:

$$(1.21) \quad u_h = \Phi_h + \sum_{i=1}^{n_{si}} U_i w_i$$

on peut reformuler le problème à frontière libre discret, comme un **système de n_{si} équations non linéaires** dont l'inconnue, $U = U_1 \dots U_{n_{si}}$ est à chercher dans l'espace fixe $\mathbb{R}^{n_{si}}$.

Pour décrire ce système non linéaire, on va expliciter la contribution de chaque triangle de τ_h , et donner un algorithme d'assemblage classique (voir [MER77]).

Opérateurs élémentaires

Soit K un triangle de τ_h , de sommets $M_{m_1}, M_{m_2}, M_{m_3}$ (avec $m_\alpha \in 1..ns; \alpha = 1, 2, 3$).

La restriction de u_h au triangle K peut s'écrire :

$$(1.22) \quad u_h = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ nsi+1 < m_\alpha < nsi+n}}^3 \Psi(M_{m_\alpha}) w_{m_\alpha} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ 1 < m_\alpha < nsi}}^3 U_{m_\alpha} w_{m_\alpha}$$

où $nsi+1 < m_\alpha < nsi+n$ signifie que M_{m_α} est sur γ_h et $1 < m_\alpha < nsi$ signifie que le sommet M_{m_α} est intérieur.

Sur le triangle K , le problème approché (1.20) se réduit à :

$$(1.23) \quad \int_K \nabla u_h \nabla w_{m_\alpha} - \lambda f(u_h) w_{m_\alpha} = \int_{\partial K \cap \gamma_h} \frac{\partial \Psi}{\partial n} w_{m_\alpha}; \alpha = 1..3$$

ce qu'on peut traduire par un système 3×3 non linéaire :

$$(1.24) \quad A_K \cdot U_K + B_K - \lambda F_K(u_h) = 0$$

avec (pour $\alpha, \beta = 1..3$) :

$$(1.25) \quad U_{K\alpha} = u_h(M_{m_\alpha}) = U_{m_\alpha}; \text{ si } M_{m_\alpha} \text{ est intérieur}$$

$$(1.26) \quad A_{K\beta, \alpha} = \int_K \nabla w_{m_\alpha} \nabla w_{m_\beta}; \text{ si } M_{m_\alpha} \text{ est intérieur et } 1 < m_\beta < nsi+n$$

$$(1.27) \quad F_K(u_h)_\alpha = \int_K f(u_h) w_{m_\alpha}; \text{ si } 1 < m_\alpha < nsi+n$$

Le terme B_K contient les conditions sur γ_h :

$$(1.28) \quad B_{K\alpha} = \int_K \nabla \Phi_h \nabla w_{m_\alpha} - \int_{\partial K \cap \gamma_h} \frac{\partial \Psi}{\partial n} w_{m_\alpha}; \text{ si } 1 < m_\alpha < nsi+n$$

Remarque : Si K n'a aucun sommet sur γ_h , B_K est nul.

Etant données les définitions de A_K , B_K et $F_K(U_K)$, l'algorithme suivant permet de construire, la matrice A et les vecteurs B et $F(U)$ du système de $n_{si}+n$ équations équivalent au problème variationnel (1.14), avec (1.21) :

$$(1.29) \quad A \cdot U + B - \lambda F(U) = 0; \quad U \in R^{n_{si}}$$

A condition d'indiquer comment on calcule les termes élémentaires, on pourra, dans la suite, utiliser le même algorithme pour assembler d'autres matrices et vecteurs du même type.

Algorithme d'assemblage

(1.30) Assemblage de la matrice de rigidité :

Mettre à zéro la matrice A de taille $n_{si} \times n$

Pour tout triangle $K \in \tau_h$

Calculer la matrice élémentaire A_K .

Pour $\alpha, \beta = 1..3$ faire :

si $M_{m\alpha}$ intérieur et $M_{m\beta} \notin \partial\Omega_h$,

alors $A_{m\beta, m\alpha} = A_{m\beta, m\alpha} + A_{K\beta, \alpha}$.

(1.31) Assemblage du terme non linéaire :

Mettre à zéro le vecteur $F(U)$ de taille n_{si}

Pour tout triangle $K \in \tau_h$

Calculer le vecteur élémentaire $F_K(u_h)$.

Pour $\alpha = 1..3$ faire :

si $M_{m\alpha} \notin \partial\Omega_h$,

alors $F(U)_{m\alpha} = F(U)_{m\alpha} + F_K(u_h)_\alpha$

(1.32) Assemblage du terme de bord :

Mettre à zéro le vecteur B de taille n_{si}

Pour tout triangle $K \in \tau_h$

Si T a (au moins) un sommet sur γ_h , alors

calculer le terme élémentaire B_K .

Pour $\alpha = 1..3$ faire :

si $M_{m\alpha} \notin \partial\Omega_h$,

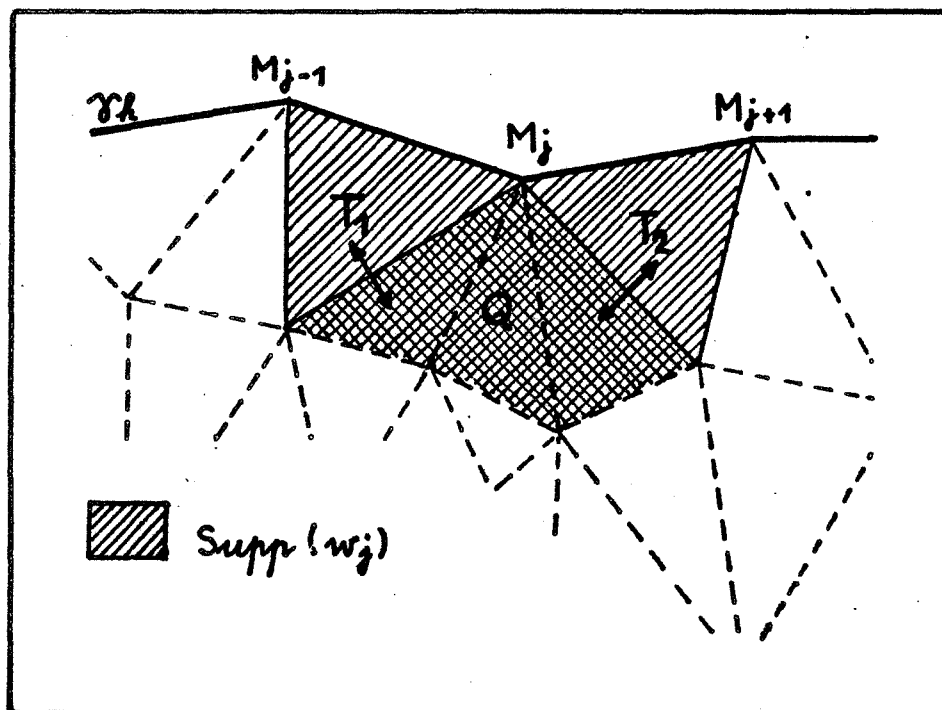
alors $B_{m\alpha} = B_{m\alpha} + B_{K\alpha}$

On montre dans le lemme suivant un résultat qui permet de remplacer le calcul des vecteurs élémentaires B_K (1.28) par le calcul des vecteurs :

$$(1.28\text{bis}) \quad \tilde{B}_{K\alpha} = \int_K (\nabla \Phi_h - \nabla \Psi) \nabla w_{m\alpha} - \Delta \Psi w_{m\alpha}, \quad \text{si } 1 \leq m\alpha \leq n_{si}+n$$

dont l'assemblage par l'algorithme (1.32) a pour résultat le même terme de bord B .

Remarque : Sur le triangle K , si on remplace B_K par $\tilde{B}_K$, l'égalité (1.24) n'est plus vérifiée.



- figure IV.5 -

LEMME IV.3 :

Pour tout $j \in n_{si}+1 \dots n_{si}+n$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\int_{\gamma_h} \frac{\partial \Psi}{\partial n} w_j = \int_{\text{Supp}(w_j)} (\Delta \Psi w_j + \nabla \Psi \nabla w_j)$$

preuve : (voir figure IV.5 pour les notations)

On note : - T1 le triangle ayant $[M_{j-1}, M_j]$ pour côté,
 - T2 " " $[M_j, M_{j+1}]$ " " ,
 - $Q = \text{Supp}(w_j) \setminus (T1 \cup T2)$;
 - $\partial/\partial n$ la dérivée normale sur le bord d'un triangle T_i (ou du domaine Q), orientée vers l'extérieur.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_h} \frac{\partial \Psi}{\partial n} w_j &= \int_{\gamma_h \cap T1} \frac{\partial \Psi}{\partial n} w_j + \int_{\gamma_h \cap T2} \frac{\partial \Psi}{\partial n} w_j \\ &= \int_{T1 \cup T2} (\nabla \Psi \cdot \nabla w_j + \Delta \Psi w_j) + \int_{\partial Q} \frac{\partial \Psi}{\partial n} w_j \\ &= \int_{T1 \cup T2} (\nabla \Psi \cdot \nabla w_j + \Delta \Psi w_j) + \int_Q (\nabla \Psi \cdot \nabla w_j + \Delta \Psi w_j) \end{aligned}$$

puis on remarque que $\int_{\gamma_h} \frac{\partial \Psi}{\partial n} w_j$ est le résultat de l'assemblage des termes

$\int_{\partial K \cap \gamma_h} \frac{\partial \Psi}{\partial n} w_j$, ce qui permet de remplacer B_K par $\tilde{B}_K$. ■

On peut maintenant donner une nouvelle forme à l'énoncé local du problème :

problème à frontière libre discret (système non linéaire)

Trouver $\gamma_h \in \Gamma_{ad}(D, \gamma_{0h})$,
 trouver $U \in R^{nsi}$, solution du système de $n+nsi$ équations :

$$(1.33) \quad A(\gamma_h) \cdot U + B(\gamma_h) - \lambda F(U)(\gamma_h) = 0$$

avec, pour passer à u_h dans $V_h(\Omega_{\gamma_h})$:

$$(1.34) \quad \begin{aligned} u_h &= \Psi \text{ sur les noeuds de } \gamma_h \\ u_h(M_i) &= U_i \text{ pour tout } M_i \text{ noeud intérieur de } \Omega_{\gamma_h} \end{aligned}$$

IV.2 DERIVATION PAR RAPPORT A LA FRONTIERE LIBRE DISCRETE

Soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$, on suppose connues γ_{0h} et u_{0h} telles que u_{0h} soit solution du problème (1.14) posé sur $\Omega_{\gamma_{0h}}$. Soit $U_0 \in \mathbb{R}^{n_{si}}$ tel que $U_{0i} = u_{0h}(M_i)$; $i = 1..n_{si}$.

L'ensemble des directions méridiennes $D = \{\vec{d}_1 .. \vec{d}_n\}$ étant donné, γ_h (élément de $\mathbb{R}^n$) détermine un élément $\gamma_h \in \Gamma_{ad}(D, \gamma_{0h})$ par :

$$\begin{aligned} \gamma_h &= \{M_{n_{si}+1} .. M_{n_{si}+n}\} \\ M_{n_{si}+i} &= M_{n_{si}+i} + \gamma_{hi} \vec{d}_i; \quad M_{n_{si}+i} \in \gamma_{0h}; \end{aligned}$$

Le problème (1.33) écrit sous la forme :

$$(2.1) \quad G(\lambda, \gamma_h, U) = 0$$

définit localement un opérateur $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_{si}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{si}+n}$ au voisinage de $(\lambda_0, 0, U_0)$, avec les identifications suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ad}(D, \gamma_{0h}) &\equiv \mathbb{R}^n \\ V_h(\Omega_{\gamma_{0h}}) &\equiv \mathbb{R}^{n_{si}} \end{aligned}$$

Une variation de $\gamma_h \in \mathbb{R}^n$ entraîne successivement une variation de γ_h dans $\Gamma_{ad}(D, \gamma_{0h})$, une variation de l'ouvert triangulé Ω_{γ_h} et une variation de la base B_h de $X_h(\Omega_{\gamma_h})$.

On étudie ici la dérivabilité de G par rapport à $\gamma_h \in \mathbb{R}^n$.

IV.2.1. Variation du domaine triangularisé

Soit $\delta \in \mathbb{R}^n$, pour $t \in \mathbb{R}^+$ assez petit, on considère l'élément de $\Gamma_{ad}(D, \gamma_{0h})$, noté γ_t , défini par les points :

$$(2.2) \quad M_{n_{si}+i}^t = M_{n_{si}+i}^0 + t \delta_i \vec{d}_i; \quad M_{n_{si}+i}^0 \in \gamma_{0h}; \quad i = 1..n.$$

On définit l'ouvert Ω_t compris entre γ_t et $\partial\Omega_h$. La triangularisation τ_t de l'ouvert Ω_t ne dépend que de γ_t ; elle est déduite de la

triangularisation τ_{0h} de l'ouvert $\Omega_{\gamma_0 h}$ (compris entre γ_{0h} et $\partial\Omega_h$), par transport.

Les résultats concernant le transport d'un maillage suivant un champ de vitesses de déplacement continu et affine par morceaux ont été établis par J.P. Zolésio dans [ZOL84].

Champ de vitesses de déplacement sur $\Omega_{\gamma_0 h}$

On construit sur $\Omega_{\gamma_0 h}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $\vec{V}$ continu, affine par morceaux, c'est à dire sur chacun des triangles de τ_{0h} , vérifiant :

$$(2.3) \quad \vec{V}(M_{nsi+i}^0) = \delta_i \vec{d}_i ; M_{nsi+i}^0 \in \gamma_{0h} ; i = 1..n$$

$$(2.4) \quad \vec{V}(M_i^0) = 0 ; \text{ si } M_i^0 \in \partial\Omega_h$$

Pour cela, on donne au champ $\vec{V}$, les valeurs suivantes, aux noeuds intérieurs de τ_{0h} :

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \vec{V}(M_j^0) &= [D\mu_j(M_{nsi+1}^0 \dots M_{nsi+n}^0 ; \partial\Omega)] \cdot (\delta_1 \vec{d}_1, \dots, \delta_n \vec{d}_n) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ \mu_j(M_{nsi+1}^0 + t\delta_1 \vec{d}_1 \dots M_{nsi+n}^0 + t\delta_n \vec{d}_n) - M_j^0 \} \end{aligned}$$

où les applications μ_j décrivent la dépendance des noeuds intérieurs vis à vis des noeuds frontière.

Puis on définit le champ de vitesses de déplacement $\vec{V}$ sur $\Omega_{\gamma_0 h}$ tout entier en utilisant la base B_{0h} de $X_h(\Omega_{\gamma_0 h})$:

$$(2.6) \quad \vec{V} = \sum_{j=1}^n \vec{V}(M_j^0) w_j^0$$

où on a noté w_j^0 , les éléments de la base B_{0h} .

Le champ $\vec{V}$ est C^∞ sur chacun des triangles de τ_{0h} ; sa matrice jacobienne est donnée sur le triangle $T = \{M_{m_1}, M_{m_2}, M_{m_3}\}$ par :

$$(2.7) \quad [D\vec{V}] = \sum_{\alpha=1}^3 \vec{V}(M_{m_\alpha}^0) \cdot t\vec{\nabla} w_{m_\alpha}^0$$

Transport

A partir du champ $\vec{V}(\delta)$, pour t petit, on construit une application continue sur $\Omega_{\gamma_0 h}$, affine sur chacun des triangles de τ_{0h} :

$$(2.8) \quad T_t = I + t\vec{V}$$

$$(2.9) \quad [DT_t] = I + t[D\vec{V}]$$

D'après les propriétés (2.3), (2.4) du champ $\vec{V}$, le transport T_t vérifie :

$$(2.10) \quad T_t(\Omega_{\gamma_0 h}) = \Omega_t \text{ et } T_t(\partial\Omega_h) = \partial\Omega_h$$

$$(2.11) \quad T_t(\gamma_{0h}) = \gamma_t$$

Par définition en (2.5), (2.6) l'application :

$$\begin{aligned} \text{"champ"} : \mathbb{R}^n &\rightarrow (V_h(\Omega_{\gamma_0 h}))^2. \\ \delta &\rightarrow \vec{V}(\delta) \end{aligned}$$

est linéaire. Avec (2.8), l'application suivante est analytique :

$$\begin{aligned} \text{"transport"} : \mathbb{R}^n &\rightarrow (V_h(\Omega_h))^4 ; \text{ pour tout } t \text{ assez petit} \\ \delta &\rightarrow T_t(\delta), T_t^{-1}(\delta) \end{aligned}$$

On cite deux résultats concernant le transport par l'application T_t du maillage et de l'espace d'interpolation $X_h(\Omega_{\gamma_0 h})$:

transport du maillage [ZOL84]

Pour t assez petit, le transport T_t vérifie :
pour tout triangle $K^0 \in \tau_{0h}$, $T_t(K^0)$ est un triangle K_t .

Ceci assure qu'on a construit une triangulation τ_t sur Ω_t , dont les sommets sont les points :

$$(2.12) \quad M_i^t = T_t(M_i^0) ; i = 1..ns$$

transport des fonctions de base [ZOL84]

Les éléments de $X_h(\Omega_t)$ sont donnés par la relation :

$$(2.13) \quad v^t \in X_h(\Omega_t) \Leftrightarrow v^t \circ T_t \in X_h(\Omega_{\gamma_0 h}),$$

les fonctions de base se déduisant par la relation :

$$(2.14) \quad w_i^0 = w_i^t \circ T_t ; i = 1..ns$$

Pour t assez petit, pour $x = T_t(\xi)$, on écrit :

$$(2.15) \quad T_t^{-1}(x) = x - t\vec{V}(\xi)$$

puis avec (2.14) (toujours pour $x = T_t(\xi)$) :

$$\nabla_{\xi} w_i^0 = \nabla(w_i^t \circ T_t) = {}^t[DT_t] \cdot \nabla_x w_i^t(x)$$

d'où l'on déduit la formule de dérivation, pour les fonctions de base :

$$\nabla_x w_i^t(T_t(\xi)) = {}^t[DT_t]^{-1} \cdot \nabla_{\xi} w_i^0(\xi) ; \text{ pour } \xi \in \Omega_{\gamma_0 h}$$

ou, plus généralement, pour une application g régulière :

$$(2.17) \quad \nabla_x g(T_t^t(\xi)) = {}^t[DT_t]^{-1} \cdot \nabla_{\xi} g(\xi) ; \text{ pour } \xi \in \Omega_{\gamma_0 h}$$

On va développer maintenant le calcul de la dérivée de l'application partielle :

$$\gamma_h \rightarrow A_K \cdot U_{0K} + \tilde{B}_K - \lambda_0 F_K(u_h)$$

construite, pour $\lambda = \lambda_0$ et $U = U_0$, à l'aide des définitions (1.22), (1.25); (1.26), (1.27) et (1.28bis).

On pourra éventuellement se reporter directement au Paragraphe IV.2.3. où les résultats de ces calculs sont résumés.

IV.2.2. Dérivations "élémentaires"

Soit $\delta \in \mathbb{R}^n$, on calcule ici la dérivée par rapport à la frontière, au point $(\lambda_0, \gamma_{0h}, U_0)$, dans la direction δ , de l'opérateur élémentaire :

$$(\lambda, \gamma_h, U) \rightarrow A_K \cdot U_K + \tilde{B}_K - \lambda F_K(u_h)$$

sur un triangle $K = \{M_{m_1}, M_{m_2}, M_{m_3}\}$, que l'on "suit dans le mouvement de Ω_{γ_h} " (voir la notion de "variables Eulériennes" dans [GER73]).

On adapte les lemmes de dérivation que l'on a déjà utilisés dans le Chapitre I au contexte de ce chapitre en utilisant (2.8) et (2.9) :

$$(2.18) \quad \frac{d}{dt} (|\det [DT_t]|)_{t=0} = \operatorname{div} \vec{V}$$

$$(2.19) \quad \frac{d}{dt} ({}^t[DT_t]^{-1} \cdot [DT_t]^{-1})_{t=0} = -[D\vec{V}] - {}^t[D\vec{V}]$$

Pour l'écriture des changements de variable, on définit les notations suivantes, sur le triangle $K_0 = \{M_{m_1}^0, M_{m_2}^0, M_{m_3}^0\}$:

$$(2.20) \quad J_K^t = |\det [DT_t]|$$

$$(2.21) \quad [H_K^t] = {}^t[DT_t]^{-1} \cdot [DT_t]^{-1}$$

Transport et dérivation de la matrice de rigidité

Pour $t > 0$, assez petit, sur le triangle $K_t = T_t(K_0)$, (1.26) s'écrit :

$$A_{K_{\beta,\alpha}}^t = \int_{K_t} \nabla_x w_{m\alpha}^t(x) \cdot \nabla_x w_{m\beta}^t(x) dx ; \alpha, \beta = 1..3 ;$$

Par le changement de variable $x = T_t(\xi)$, A_K^t prend la forme :

$$A_{K_{\beta,\alpha}}^t = \int_{K_0} \nabla_x w_{m\alpha}^t \circ T_t(\xi) \cdot \nabla_x w_{m\beta}^t \circ T_t(\xi) J_K^t(\xi) d\xi$$

puis en utilisant le transport des gradients des fonctions de base (2.16), on obtient A_K^t sous la forme "transportée":

$$(2.22) \quad A_{K,\alpha}^t = \int_{K_0} \langle [H_K^t] \cdot \nabla w_{m\alpha}^0, \nabla w_{m\beta}^0 \rangle J_K^t$$

On calcule la dérivée de A_K au point $(\lambda_0, \gamma_{0h}, U_0)$, par rapport à γ_h , dans la direction δ , en dérivant A_K^t par rapport à t en $t = 0$:

$$(2.23) \quad \dot{A}_{K,\alpha} = \int_{K_0} \langle (\operatorname{div} \vec{V} - [D\vec{V}] - t[D\vec{V}]) \cdot \nabla w_{m\alpha}^0, \nabla w_{m\beta}^0 \rangle$$

Transport et dérivation du terme non-linéaire

Sur le triangle K_t , on définit à partir de $U_0 \in R^{nsi}$, (qui reste fixe) la fonction :

$$(2.24) \quad u_{th} = \sum_{\substack{\beta=1 \\ nsi+1 \leq m\beta \leq nsi+n}}^3 \Psi(M_{m\beta}^t) w_{m\beta}^t + \sum_{\substack{\beta=1 \\ 1 \leq m\beta \leq nsi}}^3 U_{0m\beta} w_{m\beta}^t$$

Ainsi le terme non-linéaire (1.27) s'écrit (pour $\alpha = 1..3$) :

$$F_K^t(u_{th})_\alpha = \int_{K_t} f(u_{th}(x)) w_{m\alpha}^t(x) dx ; 1 \leq m\alpha \leq nsi+n.$$

Par le changement de variable $x = T_t(\xi)$, avec (2.20), on écrit :

$$F_K^t(u_{th})_\alpha = \int_{K_0} f(u_{th} \circ T_t(\xi)) w_{m\alpha}^t \circ T_t(\xi) J_K^t(\xi) d\xi$$

puis, en utilisant (2.14) on obtient le terme non linéaire transporté :

$$(2.25) \quad F_K^t(u_{th})_\alpha = \int_{K_0} f(u_{th} \circ T_t) w_{m\alpha}^0 J_K^t$$

Pour calculer la dérivée par rapport à γ_h de $F_K(u_h)$, on commence par dériver $t \rightarrow u_{th} \circ T_t$ en $t = 0$. On notera x_h cette dérivée :

$$(2.26) \quad x_h = \sum_{\substack{\beta=1 \\ nsi+1 \leq m\beta \leq nsi+n}}^3 \langle \vec{\nabla} \Psi(M_{m\beta}^0), \vec{\nabla} (M_{m\beta}^0) \rangle w_{m\beta}^0$$

on obtient finalement pour la dérivée du terme non-linéaire dans la direction $\delta \in \mathbb{R}^n$:

$$(2.27) \quad \dot{F}_K(u_{0h})_\alpha = \int_{K_0} f(u_{0h}) w_{m\alpha}^0 \operatorname{div} \vec{V} + \int_{K_0} f'(u_{0h}) \chi_h w_{m\alpha}^0$$

Transport et dérivation du terme élémentaire de bord

On considère un triangle $K_t = T_t(K_0)$ tel que K_0 possède au moins un sommet sur le bord γ_{0h} .

On considère la fonction Φ_{th} définie sur le triangle K_t par :

$$(2.28) \quad \Phi_{th} = \sum_{\substack{\beta=1 \\ nsi+1 \leq m\beta \leq nsi+n}}^3 \Psi(M_{m\beta}^t) w_{m\beta}^t$$

et le terme de bord défini en (1.28bis) :

$$\tilde{B}_{K\alpha}^t = \int_{K_t} (\nabla_x \Phi_{th} - \nabla_x \Psi)(x) \nabla_x w_{m\alpha}^t(x) - \Delta_x \Psi(x) w_{m\alpha}^t(x) dx$$

Par changement de variable (toujours le même), on écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{K\alpha}^t = \int_{K_0} \{ (\nabla_x \Phi_{th} - \nabla_x \Psi) \circ T_t(\xi) \cdot \nabla_x w_{m\alpha}^t \circ T_t(\xi) \\ - \Delta_x \Psi \circ T_t(\xi) w_{m\alpha}^t \circ T_t(\xi) \} J^t_K(\xi) d\xi \end{aligned}$$

En utilisant (2.16), (2.17) et (2.28), on obtient la relation :

$$(\nabla_x \Phi_{th} - \nabla_x \Psi) \circ T_t = t[DT]^{-1} \cdot \left(\sum_{\substack{\beta=1 \\ nsi+1 \leq m\beta \leq nsi+n}}^3 \Psi(M_{m\beta}^t) \nabla_\xi w_{m\beta}^0 - \nabla_\xi \Psi \right)$$

d'où l'expression du terme de bord transporté :

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \tilde{B}_{K\alpha}^t = \int_{K_0} \{ < [H_K^t] \cdot \left(\sum_{\substack{\beta=1 \\ nsi+1 \leq m\beta \leq nsi+n}}^3 \Psi(M_{m\beta}^t) \nabla w_{m\beta}^0 - \nabla \Psi \right), \nabla w_{m\alpha}^0 > \\ - \Delta \Psi \circ T_t w_{m\alpha}^0 \} J^t_K \end{aligned}$$

Pour dériver par rapport à t , on écrit successivement :

$$\frac{d}{dt} (\Psi(M_{m\beta}^t) \nabla w_{m\beta}^0)_{t=0} = \langle \vec{\nabla} \Psi(M_{m\beta}^0), \vec{V}(M_{m\beta}^0) \nabla w_{m\beta}^0 \rangle$$

$$(2.30) \quad \frac{d}{dt} \left(\sum_{\substack{\beta=1 \\ nsi+1 \leq m\beta \leq nsi+n}}^3 \Psi(M_{m\beta}^t) \nabla w_{m\beta}^0 \right)_{t=0} = \nabla \chi_h$$

$$\frac{d}{dt} (\Delta \Psi \circ T_t w_{m\alpha}^0)_{t=0} = \langle \vec{\nabla}(\Delta \Psi), \vec{V} \rangle w_{m\alpha}^0$$

puis, en utilisant les résultats (2.18) et (2.19) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\tilde{B}_K^t)_{t=0} &= \int_{K_0} \langle (\operatorname{div} \vec{V} - [D\vec{V}] - {}^t[D\vec{V}]) \cdot (\nabla \Phi_h - \nabla \Psi), \nabla w_{m\alpha}^0 \rangle \\ &\quad + \int_{K_0} \nabla \chi_h \cdot \nabla w_{m\alpha}^0 - \int_{K_0} (\operatorname{div} \vec{V} \Delta \Psi + \langle \vec{\nabla}(\Delta \Psi), \vec{V} \rangle) w_{m\alpha}^0 \end{aligned}$$

or $\int_{K_0} \operatorname{div} \vec{V} \Delta \Psi + \langle \vec{\nabla}(\Delta \Psi), \vec{V} \rangle = \int_{\partial K_0} \Delta \Psi \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle$ (formule de Stokes) d'où :

$$(2.31) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{B}}_{K\alpha} &= \int_{K_0} \langle (\operatorname{div} \vec{V} - [D\vec{V}] - {}^t[D\vec{V}]) \cdot (\nabla \Phi_h - \nabla \Psi) + \nabla \chi_h, \nabla w_{m\alpha}^0 \rangle \\ &\quad - \int_{\partial K_0} \Delta \Psi \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle w_{m\alpha}^0 \end{aligned}$$

Remarque :

Si K_0 a au moins un sommet sur γ_0 , l'intégrale sur ∂K_0 dans (2.31) est non nulle, seulement si $M_{m\alpha}$ est un sommet de γ_{0h} . Dans ce cas, on pourra se contenter de calculer :

$$\int_{\partial K_0 \cap \gamma_{0h}} \Delta \Psi \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle w_{m\alpha}^0$$

car l'intégrale sur les autres côtés de K_0 sera compensée au cours de l'assemblage par l'intégrale provenant des triangles voisins (voir Lemme IV.3).

On notera :

$$(2.31bis) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{C}}_{K\alpha} &= \int_{K_0} \langle (\operatorname{div} \vec{V} - [D\vec{V}] - {}^t[D\vec{V}]) \cdot (\nabla \Phi_h - \nabla \Psi) + \nabla \chi_h, \nabla w_{m\alpha}^0 \rangle \\ &\quad - \int_{\partial K_0 \cap \gamma_{0h}} \Delta \Psi \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle w_{m\alpha}^0 \end{aligned}$$

LEMME IV.3 :

Soit $j \in \text{nsi}+1 \dots \text{nsi}+n$, alors

$$\sum_{K \subset \text{supp}(w_j)} \int_{\partial K} \Delta \Psi \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle w_j = \sum_{K \subset \text{supp}(w_j)} \int_{\partial K \cap \gamma_{0h}} \Delta \Psi \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle w_j$$

preuve : (on utilise les notations du Lemme IV.3 (fig. IV.5))

$$\sum_{K \subset \text{supp}(w_j)} \int_{\partial K} \Delta \Psi \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle w_j = \int_{\partial T_1 \cup \partial T_2} \Delta \Psi \langle V, n \rangle w_j + \int_{\partial Q} \Delta \Psi \langle V, n \rangle w_j$$

comme $\Delta \Psi \vec{V} w_j$ est continue, il reste seulement :

$$\int_{(\partial T_1 \cap \gamma_{0h}) \cup (\partial T_2 \cap \gamma_{0h})} \Delta \Psi \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle w_j.$$



IV.2.3. Assemblage de la dérivée partielle

La dérivée $\dot{A}_K \cdot U_{0K} + \dot{B}_K - \lambda_0 \dot{F}_K(u_{0h})$ de l'opérateur élémentaire :

$$(\lambda, \gamma_h, U) \rightarrow A_K \cdot U + B_K - \lambda F_K(u_h)$$

par rapport à la frontière γ_h , au point $(\lambda_0, \gamma_{0h}, U_0)$, dans la direction $\delta \in \mathbb{R}^n$, a été calculée au paragraphe précédent. On rappelle :

$$(2.23) \quad \dot{A}_{K\beta,\alpha} = \int_{K_0} \langle (\text{div } \vec{V} - [D\vec{V}] - {}^t[D\vec{V}]) \cdot \nabla w_{m\alpha}^0, \nabla w_{m\beta}^0 \rangle$$

$$(2.27) \quad \dot{F}_K(u_{0h})_\alpha = \int_{K_0} f(u_{0h}) w_{m\alpha}^0 \text{div } \vec{V} + \int_{K_0} f'(u_{0h}) \chi_h w_{m\alpha}^0$$

$$(2.31) \quad \begin{aligned} \dot{B}_{K\alpha} = \int_{K_0} \langle (\text{div } \vec{V} - [D\vec{V}] - {}^t[D\vec{V}]) \cdot (\nabla \Phi_h - \nabla \Psi) + \nabla \chi_h, \nabla w_{m\alpha}^0 \rangle \\ - \int_{\partial K_0} \Delta \Psi \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle w_{m\alpha}^0 \end{aligned}$$

$$(2.31\text{bis}) \quad \begin{aligned} \dot{C}_{K\alpha} = \int_{K_0} \langle (\text{div } \vec{V} - [D\vec{V}] - {}^t[D\vec{V}]) \cdot (\nabla \Phi_h - \nabla \Psi) + \nabla \chi_h, \nabla w_{m\alpha}^0 \rangle \\ - \int_{\partial K_0 \cap \gamma_{0h}} \Delta \Psi \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle w_{m\alpha}^0 \end{aligned}$$

A partir des dérivées élémentaires, par rapport à la frontière : $\dot{A}_K$, $\dot{F}_K(u_{0h})$ et $\dot{C}_K$, on assemble une matrice $\dot{A}$ et des vecteurs $\dot{F}(u_{0h})$ et B en utilisant les algorithmes (1.30), (1.31) et (1.32).

Proposition IV.1 :

L'opérateur défini par le problème (1.33) :

$$G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nsi} \rightarrow \mathbb{R}^{nsi+n}$$

admet une dérivée partielle par rapport à la variable γ_h , au point $(\lambda_0, \gamma_{0h}, U_0)$:

$$(2.32) \quad \frac{\partial}{\partial \gamma_h} G(\lambda_0, \gamma_{0h}, U_0) : \delta \rightarrow \dot{A} \cdot U_0 + \dot{B} - \lambda_0 \dot{F}(u_{0h})$$

preuve :

On montre que l'application $\delta \rightarrow \dot{A} \cdot U_0 - \lambda_0 \dot{F}(u_{0h}) + \dot{B}$ est linéaire (et donc continue). En effet :

- l'application "champ" : $\delta \rightarrow \vec{V}(\delta)$ étant linéaire, il en est de même pour tout triangle $K \in \tau_{0h}$ des applications :

$$\delta \rightarrow \text{div} \vec{V}(\delta)|_K ; [D\vec{V}(\delta)]|_K ; \langle \vec{V}(\delta), \vec{n} \rangle|_{\partial K \cap \gamma_{0h}}$$

et pour tout point $M_i \in \gamma_{0h}$, des applications :

$$\delta \rightarrow \langle \vec{\nabla} \Psi(M_i), \vec{V}(\delta)(M_i) \rangle$$

donc les applications $\delta \rightarrow x_h ; \dot{A}_K ; \dot{F}_K(u_{0h}) ; \dot{\tilde{B}}_K ; \dot{C}_K$ sont linéaires.

- toutes les opérations de l'assemblage (1.30), (1.31), (1.32) étant linéaires, on obtient les dérivées partielles de A , $F(u_h)$, B dans la direction δ , en répétant ces mêmes opérations sur $\dot{A}_K$, $\dot{F}_K(u_{0h})$ et $\dot{\tilde{B}}_K$ (ou encore $\dot{C}_K$, comme on l'a vu dans le Lemme IV.3). ■

IV.3. ETUDE LOCALE DE LA BRANCHE DES SOLUTIONS DU PROBLEME DISCRET

IV.3.1. Introduction et notations

On suppose que le problème discret :

Trouver $\gamma_h = \{M_{nsi+1} \dots M_{nsi+n}\}$ déterminant Ω_{γ_h} ,

trouver u_h , solution du problème (1.20) posé sur Ω_{γ_h}

admet une solution (γ_{0h}, u_{0h}) pour une valeur λ_0 de λ .

On se donne un ensemble de directions méridiennes $D = \{d_1 \dots d_n\}$ du plan vérifiant l'hypothèse (1.15) pour $S = \gamma_{0h}$ et on considère le problème à frontière libre discret (1.33) écrit sous la forme locale :

$$(3.1) \quad G(\lambda, \gamma_h, U) = A(\gamma_h) \cdot U + B(\gamma_h) - \lambda F(u_h)(\gamma_h) = 0$$

On rappelle que l'on passe de $U \in \mathbb{R}^{nsi}$ à la solution u_h du problème à frontière libre discret dans $V_h(\Omega_{\gamma_h})$ par les relations :

$$(3.2) \quad u_h = \Psi \text{ sur les noeuds de } \gamma_h$$

$$(3.3) \quad u_h(M_i) = U_i \text{ si } M_i \text{ est un noeud intérieur}$$

Les notations utilisées dans ce paragraphe sont les suivantes :

$$\gamma_h = \{M_{nsi+1} \dots M_{nsi+n}\} ; M_{nsi+i} = M_{nsi+i}^0 + \gamma_{hi} d_i$$

Ω_{γ_h} ouvert polygonal limité par γ_h et $\partial\Omega_h$

τ_h triangularisation de Ω_{γ_h}

K triangle de τ_h de sommets $M_{nsi}^1, M_{nsi}^2, M_{nsi}^3$

$$u_h = \sum_{M_i \in \gamma_h} \Psi(M_i) w_i + \sum_{i=1}^{ns} U_i w_i ; \{w_i ; i=1 \dots ns\} \text{ base de } X_h(\Omega_{\gamma_h})$$

$\vec{V} = \vec{V}(\gamma_h)$ champ de vitesses de déplacement (2.5) (2.6) sur $\Omega_{\gamma_{0h}}$

$T = I + \vec{V}$, transport : $\Omega_{\gamma_{0h}} \rightarrow \Omega_{\gamma_h}$

$J_K = |\det [DT]|$ sur le triangle K

$[H_K] = t[DT]^{-1} \cdot [DT]^{-1}$ sur le triangle K

on indique par une étoile les grandeurs qui restent fixes, et par un indice 0 les grandeurs relatives au point $(\lambda_0, \gamma_{0h}, u_{0h})$.

IV.3.2. Linéarisation

La dérivée partielle de G par rapport à la frontière discrète γ_h a été calculée au Paragraphe IV.2. On donne maintenant les dérivées partielles par rapport aux variables λ et U .

Proposition IV.2 :

L'opérateur G admet des dérivées partielles continues, en tout point de $R \times \Gamma_{ad}(D, \gamma_{0h}) \times R^{nsi}$. Les dérivées partielles au point $(\lambda_0, \gamma_{0h}, U_0)$ sont les suivantes :

$$(3.4) \quad G_\lambda(\lambda_0, \gamma_{0h}, U_0) = -F(u_{0h})(\gamma_{0h})$$

$$(3.5) \quad G_\gamma(\lambda_0, \gamma_{0h}, U_0) : \delta \rightarrow \dot{A} \cdot U_0 + \dot{B} - \lambda \dot{F}(u_{0h}) ; \delta \in R^n$$

$$(3.6) \quad G_U(\lambda_0, \gamma_{0h}, U_0) \cdot w = [A(\gamma_{0h}) - \lambda_0 F'(u_{0h})] \cdot w ; w \in R^{nsi}$$

où $F'(u_{0h})$ désigne la matrice assemblée par l'algorithme (1.31) à partir des matrices élémentaires :

$$(3.7) \quad F'_K(u_{0h})_{\beta, \alpha} = \int_{K_0} f'(u_{0h}) w_{m\beta}^0 w_{m\alpha}^0 ; \alpha, \beta = 1..3$$

pour $M_{m\beta}$ noeud intérieur et $M_{m\alpha} \notin \partial\Omega_{\gamma_{0h}}$.

Preuve :

- l'application partielle $G(\lambda, \gamma^*_h, U^*)$ c'est à dire :

$\lambda \rightarrow A(\gamma^*_h) \cdot U^* + B(\gamma^*_h) - \lambda F(u^*_h)(\gamma^*_h)$ est affine. Sa dérivée est donnée par (3.4).

- l'application $U \rightarrow A(\gamma^*_h) \cdot U$ est linéaire ;

$$l'application U \rightarrow u_h(\gamma^*_h) = \sum_{M^*_i \in \gamma^*_h} \Psi(M^*_i) w^*_i + \sum_{i=1}^{nsi} U_i w^*_i$$

est affine, elle se dérive en :

$$dU \rightarrow \frac{\partial u_h}{\partial U} \cdot dU = \sum_{i=1}^{nsi} dU_i w^*_i$$

alors l'application partielle $U \rightarrow F(u_h)(\gamma_h^*)$ définie par assemblage des vecteurs élémentaires :

$$F_K(u_h)_\alpha = \int_{K^*} f(u_h) w_{m\alpha}^* ; \alpha = 1..3$$

est dérivable et :

$$\frac{\partial u_h}{\partial U} (F_K(u_h)_\alpha) \cdot dU = \int_{K^*} f'(u_h^*) \frac{\partial u_h}{\partial U} dU w_{m\alpha}^*$$

puis sur K^* , on écrit simplement :

$$\frac{\partial u_h}{\partial U} \cdot dU = \sum_{\substack{\beta=1 \\ 1 \leq m\beta \leq ns}}^3 dU_{m\beta} w_{m\beta}^*$$

d'où l'expression de la dérivée partielle (3.6). ■

De la continuité de l'application "champ" : $\gamma_h \rightarrow V(\gamma_h)$, découle la continuité d'un certain nombre d'applications qui figurent dans les dérivées partielles de l'opérateur G . Plus précisément :

Lemme IV.4 :

Les applications suivantes sont continues :

- (i) $\gamma_h \rightarrow \vec{V} ; T ; T^{-1} ; \Psi(M_i) ; w_i (i = 1..ns) ; \Phi_h$
- (ii) $\gamma_h \rightarrow [D\vec{V}] ; [DT] ; [DT^{-1}] ; J_K^0 ; [H_K^0] ; (K^0 \in \tau_{0h})$
- (iii) $\gamma_h \rightarrow x_h ; \nabla x_h$
- (iv) $(\gamma_h, U) \rightarrow u_h ; \partial u_h / \partial U$
- (v) $\gamma_h \rightarrow \vec{n}|_{\partial K \cap \gamma_h} ; K \in \tau_h$

Preuve :

(i) $\gamma_h \rightarrow V(\gamma_h)$ est continue par construction;
puis :

$$T(\gamma_h) = I + V(\gamma_h) \Rightarrow T \text{ et } T^{-1} \text{ continues}$$

$$\Psi(M_i)(\gamma_h) = \Psi \circ T(M_i^0) ; i = 1..ns$$

$$w_i(\gamma_h) = w_i^0 \circ T^{-1}(\gamma_h)$$

$$\Phi_h(\gamma_h) = \sum_{i=nsi+1}^{nsi+n} \Psi(M_i)(\gamma_h) w_i(\gamma_h)$$

(ii) sur le triangle K_0 , $\vec{V} \rightarrow [D\vec{V}]$ est continue donc $\gamma_h \rightarrow [D\vec{V}]$ aussi ;
 puis :

$$[DT] = I + [D\vec{V}]$$

$$J_{K_0} = |\det [DT]| ; [H_{K_0}] = {}^t[DT]^{-1} \cdot [DT]^{-1}$$

$$\nabla w_i = {}^t[DT]^{-1} \cdot \nabla w^0_i \circ T ; \nabla \Phi_h = \sum_{i=nsi+1}^{nsi+n} \Psi(M_i) \nabla w_i$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad x_h(\gamma_h) &= \sum_{i=nsi+1}^{nsi+n} \langle \vec{\nabla} \Psi(M_i) , \vec{V}(M_i) \rangle w_i \\ &= \sum_{i=nsi+1}^{nsi+n} \langle \vec{\nabla} \Psi \circ T(\gamma_h)(M^0_i) , \vec{V} \circ T(\gamma_h)(M^0_i) \rangle w_i \end{aligned}$$

$$\nabla x_h(\gamma_h) = \sum_{i=nsi+1}^{nsi+n} \langle \vec{\nabla} \Psi \circ T(\gamma_h)(M^0_i) , \vec{V} \circ T(\gamma_h)(M^0_i) \rangle \nabla w_i$$

$$\text{(iv)} \quad u_h = \Phi_h + \sum_{i=1}^{nsi} U_i w_i \text{ et pour tout } dU^* \text{ fixé dans } R^n ,$$

$$\frac{\partial u_h}{\partial U} \cdot W^* = \sum W^*_i w_i \text{ est continue.}$$

$$\text{(v)} \quad n|_{\partial K \cap \gamma_h} = \| {}^t[DT]^{-1} \cdot n_0 \|^{-1} \times {}^t[DT]^{-1} \cdot n_0|_{\partial K_0 \cap \gamma_{0h}}$$

Théorème IV.1 :

On considère le problème à frontière libre (1.1) discrétisé par éléments finis de type P1. On suppose qu'il existe une solution (γ_{0h}, u_{0h}) du problème discrétisé (1.14) pour une valeur λ_0 de λ . Alors le problème à frontière libre discret est localement équivalent au système non linéaire (3.1) dont l'opérateur $G : R \times \Gamma_{ad}(D, \gamma_{0h}) \times R^{nsi} \rightarrow R^{nsi+n}$ est de classe C^1 .

Preuve :

continuité de $G_\lambda(\lambda, \gamma_h, U) = -F(u_h)(\gamma_h)$:

Sur le triangle K, par changement de variable $x = T(\gamma_h)(\xi)$,

$$F_K(u_h)(\gamma_h) = \int_K f(u_h) w_{m\alpha} = \int_{K^0} f(u_h \circ T(\gamma_h)) w_{m\alpha}^0 J_K$$

L'application $f(u_h \circ T(\gamma_h)) J_K$ est continue car les applications u_h , T , J_K le sont (Lemme IV.4) et f aussi.

Le produit par $w_{m\alpha}^0$, l'intégration sur K^0 puis l'assemblage sont des opérations linéaires, donc continues.

continuité de $G_\gamma(\lambda, \gamma_h, U)$:

Soit δ^* , un élément fixé de R^n .

On construit un champ $\vec{V}^*$ de vitesses de déplacement sur Ω_{γ_h} , tel que $\vec{V}^*(M_i) = \delta_i \vec{d}_i$ (si $M_i \in \gamma_h$) et $\vec{V}^*(M_i) = 0$ (si $M_i \in \partial\Omega_h$), en posant :

$$\vec{V}^* = \vec{V}(\delta^*) \circ T^{-1} ; \text{ où } T \text{ désigne } T(\gamma_h)$$

ce qui revient à poser : $\vec{V}^*(x) = \vec{V}(\delta^*)(\xi)$; pour $x = T(\xi)$;
($x \in \Omega_{\gamma_h}$; $\xi \in \Omega_{\gamma_0 h}$).

Par la Proposition IV.1, on obtient alors la dérivée partielle au point (λ, γ_h, U) dans la direction δ^* :

$$G_\gamma(\lambda, \gamma_h, U) \cdot \delta^* = \dot{A} \cdot U + \dot{B} - \lambda \dot{F}(u_h)$$

avec, sur le triangle K, pour $\alpha, \beta = 1..3$:

$$\dot{A}_{K\beta, \alpha} = \int_K \langle (\text{div} \vec{V}^* - [D\vec{V}^*] - t[DV^*]) \cdot \nabla w_{m\alpha}, \nabla w_{m\beta} \rangle$$

$$\dot{F}_{K\alpha} = \int_K f(u_h) w_{m\alpha} \text{div} \vec{V}^* + f'(u_h) \chi_h^* w_{m\alpha}$$

$$\text{où } \chi_h^* = \sum_{i=nsi+1}^{nsi+n} \langle \vec{V}^*(M_i), \vec{V}^*(M_i) \rangle w_i$$

et enfin, si K est un triangle bordant γ_h ,

$$\begin{aligned} \dot{C}_{K\alpha} = & \int_K \langle (\operatorname{div} \vec{V}^* - [D\vec{V}^*] - t[D\vec{V}^*]) \cdot (\nabla \Phi_h - \nabla \Psi) + \nabla \chi_h^*, \nabla w_{m\alpha} \rangle \\ & - \int_{\partial K \cap \gamma_h} \Delta \Psi \langle \vec{V}^*, \vec{n} \rangle w_{m\alpha} \end{aligned}$$

Par le changement de variables $x = T(\xi)$, $\xi \in K_0$, on obtient :

$$\dot{A}_{K\beta, \alpha} = \int_{K_0} \langle [H_K] (\operatorname{div} \vec{V}^* \circ T - [D\vec{V}^*] \circ T - t[D\vec{V}^*] \circ T) \cdot \nabla w_{m\alpha}^0, \nabla w_{m\beta}^0 \rangle J_K$$

$$\dot{F}_{K\alpha} = \int_{K_0} \{ f(u_h) \circ T w_{m\alpha}^0 \operatorname{div} \vec{V}^* \circ T + f'(u_h) \circ T \chi_h^* \circ T w_{m\alpha}^0 \} J_K$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_{K\alpha} = & \int_{K_0} \langle (\operatorname{div} \vec{V}^* \circ T - [D\vec{V}^*] \circ T - t[D\vec{V}^*] \circ T) \cdot (\nabla \Phi_h - \nabla \Psi) \circ T + \nabla \chi_h^* \circ T, \nabla w_{m\alpha}^0 \rangle J_K \\ & - \int_{\partial K_0 \cap \gamma_{0h}} \Delta \Psi \circ T \langle \vec{V}(\delta^*), t[DT]^{-1} \cdot \vec{n} \rangle w_{m\alpha}^0 J_K \end{aligned}$$

- $\gamma_h \rightarrow T^{-1}$ étant continue, on a successivement la continuité des applications :

$$\vec{V}^*(\gamma_h) = \vec{V}(\delta^*) \circ T^{-1} ; \operatorname{div} \vec{V}^*(\gamma_h) \circ T ; [D\vec{V}^*(\gamma_h)] \circ T ; \quad K_0 \in \tau_{0h} ;$$

avec la continuité de $[H_K^0]$ et de J_{K_0} , on obtient celle de :

$$\gamma_h \rightarrow [H_{K_0}] (\operatorname{div} \vec{V}^* \circ T - [D\vec{V}^*] \circ T - t[D\vec{V}^*] \circ T) ;$$

on en déduit que les applications :

$$\gamma_h \rightarrow A_{K\beta, \alpha} \text{ (pour } K_0 \in \tau_{0h} \text{ et } \alpha, \beta = 1..3) \text{ sont continues;}$$

puis $\gamma_h \rightarrow A$ et $(\gamma_h, U) \rightarrow A \cdot U$ aussi.

- Comme $\gamma_h \rightarrow \vec{V}^*(\gamma_h)$ est continue, $\chi_h(\gamma_h)$ est continue ; avec la continuité de f et f' , en utilisant le Lemme IV.4, on a :
 $\{f(u_h \circ T) \operatorname{div} \vec{V}^* \circ T + f'(u_h \circ T) \chi_h^* \circ T\} J_K^0$ est continue ; le produit par $w_{m\alpha}^0$, l'intégration sur K_0 et l'assemblage étant linéaires, on établit la continuité de :
 $(\lambda, \gamma_h, U) \rightarrow -\lambda F(u_h).$

- $\nabla \Phi_h(\gamma_h) \circ T ; \nabla \Psi \circ T ; \Delta \Psi \circ T$ et $\nabla \chi_h^* \circ T$ étant continues, les applications suivantes sont aussi continues :

$$\gamma_h \rightarrow (\operatorname{div} \vec{V}^* \circ T - [D\vec{V}^*] \circ T - t[D\vec{V}^*] \circ T) \cdot (\nabla \Phi_h - \nabla \Psi) \circ T + \nabla \chi_h^* \circ T$$

$$\gamma_h \rightarrow \Delta \Psi \circ T \langle \vec{V}^* \circ T, t[DT]^{-1} \cdot \vec{n} \rangle J_{K_0}$$

on en déduit la continuité de $\gamma_h \rightarrow C_{K\alpha}$ donc de B (Lemme IV.3).

continuité de $G_U(\lambda, \gamma_h, U) = [A(\gamma_h) - \lambda F'(u_h)]$

$$A_{K\beta, \alpha} = \int_K \nabla w_{m\alpha} \nabla w_{m\beta}$$

$$F'_K(u_h)_{\beta, \alpha} = \int_K f'(u_h) w_{m\alpha} w_{m\beta}$$

Par changement de variable $x = T(\xi)$ ($\xi \in K_0$), on écrit :

$$A_K(\gamma_h)_{\beta, \alpha} = \int_{K_0} \langle [H_K] \cdot \nabla w_{m\alpha}^0, \nabla w_{m\beta}^0 \rangle J_K$$

$$F'_K(u_h)_{\beta, \alpha} = \int_{K_0} f'(u_h \circ T) w_{m\alpha}^0 w_{m\beta}^0 J_K$$

La continuité de f' et des applications :

$$(\gamma_h, U) \rightarrow T ; u_h ; [H_K] ; J_K$$

entraîne celle des applications :

$$\langle [H_K] \cdot \nabla w_{m\alpha}^0, \nabla w_{m\beta}^0 \rangle J_K \text{ et } f'(u_h \circ T) w_{m\alpha}^0 w_{m\beta}^0 J_K$$

d'où on déduit la continuité de :

$$(\gamma_h, U) \rightarrow A_K(\gamma_h) ; F'_K(u_h)(\gamma_h) ; A(\gamma_h) ; F'(u_h)(\gamma_h)$$

IV.3.3. Paramétrage local, méthode de continuation

L'opérateur du problème à frontière libre discret étant de classe C^1 , on peut définir les solutions régulières et les points de retournement simple, comme cela a été fait dans le cadre abstrait au Chapitre I. En tenant compte du fait que les espaces E et F sont ici de dimension finie, on obtient la caractérisation simple suivante :

Proposition IV.3 :

(i) $(\lambda_0, \gamma_{0h}, u_{0h})$ est une solution régulière du problème à frontière libre discret si et seulement si

$$(3.8) \quad \text{Ker } G_{\gamma, U}(\lambda_0, \gamma_{0h}, u_0) = \{0\}$$

(ii) $(\lambda_0, \gamma_{0h}, U_0)$ est un point de retournement simple du problème à frontière libre discret si et seulement si l'opérateur $G_{\gamma,U}$ vérifie les conditions suivantes :

$$(3.9) \quad \dim \text{Ker } G_{\gamma,U}(\lambda_0, \gamma_{0h}, U_0) = 1$$

$$(3.10) \quad G_{\lambda}(\lambda_0, \gamma_{0h}, U_0) \notin \text{Im } G_{\gamma,U}(\lambda_0, \gamma_{0h}, U_0)$$

Preuve : triviale. ■

Le problème $G(\lambda, \gamma_h, U) = 0$ est résolu localement par application de la méthode standard :

Soit $\text{Lin} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nsi} \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire (continue) qui vérifie la condition :

$$(C5) \quad \text{Lin}(L, \Gamma, W) \neq 0 ; \text{ pour } (L, \Gamma, W) \text{ générateur de } DG^0$$

On considère le problème augmenté :

$$(3.11) \quad P(\lambda, \gamma_h, U) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} G(\lambda, \gamma_h, U) = 0 \\ \text{Lin}(\lambda - \lambda_0, \gamma_h, U - U_0) - (s - s_0) = 0 \end{cases}$$

Par application du théorème des fonctions implicites, si $(\lambda_0, \gamma_{0h}, U_0)$ est une solution régulière ou un point de retournement simple, (3.11) définit des fonctions régulières $\lambda(s), \gamma_h(s), U(s)$ au voisinage de $s = s_0$.

La branche des solutions est calculée par intégration du système :

$$P_{\lambda, \gamma_h, U}^0 (d\lambda/ds, d\gamma_h/ds, dU/ds) = -P_s^0$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} DG^0(d\lambda/ds, d\gamma_h/ds, dU/ds) = 0 \\ \text{Lin}(d\lambda/ds, d\gamma_h/ds, dU/ds) = 1 \end{cases}$$

ou encore (le point désigne la dérivation suivant $d\gamma_h/ds$) :

$$(3.12) \quad \begin{cases} \frac{d\lambda}{ds} F(U_0) + \dot{A} \cdot U_0 + \dot{B} - \lambda_0 \dot{F}(U_0) + A \cdot \frac{dU}{ds} - \lambda_0 F'(U_0) \cdot \frac{dU}{ds} = 0 \\ \text{Lin} \left(\frac{d\lambda}{ds}, \frac{d\gamma_h}{ds}, \frac{dU}{ds} \right) = 1 \end{cases}$$

A partir des approximations de $\lambda(s + \Delta s)$, $\gamma_h(s + \Delta s)$ et $U(s + \Delta s)$, on obtient une approximation de la solution $u_h \in V_h(\Omega_{\gamma_h}(s+\Delta s))$:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} u_h(M_i) &= \Psi(M_i) ; \text{ sur les noeuds de } \gamma_h(s + \Delta s) \\ u_h(M_i) &= U_i(s + \Delta s) ; M_i \text{ noeud intérieur de } \Omega_{\gamma_h}(s+\Delta s) \end{aligned}$$

Remarque :

Dans les formules (3.13), la déformation de la triangularisation est implicite. Les noeuds de $\tau_h(s + \Delta s)$ sont calculés par transport :

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}(\gamma_h(s+\Delta s)) \\ T &= I + \vec{V} \\ M_i &= M_i^0 + \vec{V}(M_i^0) = T(M_i^0) ; i = 1 \dots n_s \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [BRE83] H. BREZIS Analyse Fonctionnelle, Masson, Paris, 1983
- [BSL66] R.B. BIRD, W.E. STEWARD, E.N. LIGHTFOOD, Transport phenomena, Wiley, New York, 1966.
- [CEA81] J. CEA., Problems if shape optimal design, in "Optimization of distributed parameter structures", tome 2, Céa J., Haug E.J., ed. Sijthoff et Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Holland, 1981.
- [CIA78] P.G. CIARLET, The finite element method for elliptic problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [CIR83] F. CONRAD , F. ISSARD-ROCH, Etude locale de branches de solutions dans une classe d'inéquations variationnelles, C. R. A. S. S., série I, tome 297, 1983, p. 37-40.
- [CMI83] M. CROUZEIX, A.L. MIGNOT, Analyse numérique des équations différentielles, Masson, Paris, 1983.
- [CRA73] M.C. CRANDALL, P.H. RABINOWITZ, Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability, Arch. Rat. Mech. Anal. 59, 1973, p. 161-180.
- [CON83] F. CONRAD, Perturbation de problèmes aux valeurs propres non linéaires et problèmes à frontière libre. Thèse. Université Lyon I (Juin 1983).
- [COU83] M. COURNIL, Stabilité d'un système hétérogène constitué d'un solide divisé et de sa solution aqueuse, C.R.A.S., série II, tome 297, 1983, p. 463
- [CTK84] M. COURNIL, V. TREGUER-KATOSSKY, Sur un problème de diffusion réaction avec frontière libre : dissolution croissance avec terme de source, à paraître.

- [DER81] A. DERVIEUX, Résolution de problèmes à frontière libre, Thèse, Université Paris VI, 1981, Chapitre VI.
- [GER73] P. GERMAIN, Cours de mécanique des milieux continus, Masson, Paris, 1973.
- [GUI77] C. GUILLOPE, Sur un problème à frontière libre intervenant en physique des plasmas, Thèse 3ème cycle, Université Paris-Sud, Orsay, 1977.
- [HER83] HERBIN R., Etude essentiellement numérique d'une classe de problèmes à frontière libre issus de la cinétique enzymatique, Rapport de DEA, Université Lyon I, 1983.
- [GUY81] J. GUYOT, Etude mathématique et numérique d'un problème elliptique nonlinéaire avec points de retournement, Thèse 3ème cycle, Université Lyon I, 1981.
- [JOS70] W. JOST, Diffusion in solids, liquids, gases, Acad. Press. Inc., New York, 1970.
- [KEL77] H.B. KELLER, Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems, applications of bifurcation theory, ed. Rabinowitz P. H., Ac. Press, 1977, p. 359-384.
- [MER77] B. MERCIER, O. PIRONNEAU, Some examples of implementation and of application of the finite element method, Rapport de Recherche IRIA, n° 248, 1977.
- [MIT80] H.D. MITELMANN, H. WEBER, Numerical methods for bifurcation problems - a survey and classification, in "Bifurcation problems and their numerical solution", ISNM 54, Birkhäuser Verlag, 1980.

- [MSI76] F. MURAT, J. SIMON, Sur le contrôle par un domaine géométrique, Lab. d'Analyse Numérique, Université Paris VI, 1976.
- [RHE80] L. RHEINARD, Sur la résolution numérique de problèmes aux limites non linéaires par des méthodes de continuation, thèse de 3ème cycle, Université Paris VI, 1980.
- [WIT83] P. WITOMSKI, Sur la résolution numérique de quelques problèmes non linéaires, Thèse, Université de Grenoble, 1983.
- [ZOL84] J.P. ZOLESIO, Les dérivées par rapport aux noeuds des triangularisations et leurs utilisations en identification de domaine, Ann; sc. math. Québec, 1984, vol. 8, n°1, p. 97-120.

ANNEXE 1

UN PROGRAMME DE RESOLUTION DES PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE DE R^2

PAR CONTINUATION

A.1. INTRODUCTION : STRUCTURE GENERALE DU PROGRAMME

A.2. SPECIFICATIONS POUR L'ECRIURE DES MODULES DE DEFINITION

- A.2.1. Structure des données
- A.2.2. Le module "fonctions"
- A.2.3. Le module "élémentaire"
- A.2.4. Le module "maillage"

A.3. ALGORITHME DE CONTINUATION : MODULES "POINT SUIVANT" ET "LINEARISATION"

A.1 INTRODUCTION : STRUCTURE GENERALE DU PROGRAMME

Le programme que l'on décrit ici approche par continuation la branche des solutions d'un problème à frontière libre de R^2 du type :

$$(A.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} Au - \lambda f(u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g_1 & \text{sur } \gamma \\ \partial u / \partial n = g_2 & \text{sur } \gamma \\ u = g_3 & \text{sur } \partial \Omega \end{array} \right.$$

Par une étude analogue à celle du Chapitre IV, le problème à frontière libre peut être discrétisé et approché par un système non linéaire sur-déterminé :

$$(A.2) \quad A(\gamma_h) \cdot U + B(\gamma_h) - \lambda F(u_h)(\gamma_h) = 0$$

$$(A.3) \quad u_h(M_i) = U_i \text{ si } M_i \text{ noeud interne}$$

$$(A.4) \quad u_h(M_i) = g_1 \text{ si } M_i \in \gamma_h$$

$$(A.5) \quad u_h(M_i) = g_3 \text{ si } M_i \in \partial \Omega_h$$

obtenu par assemblage des opérateurs élémentaires

$$(A.6) \quad (\lambda, U, \gamma_h) \rightarrow A_K \cdot U_K - \lambda F_K(u_h) + B_K(\gamma_h)$$

Les données à fournir au programme sont des procédures et des fonctions organisées de façon modulaire :

1) $f ; g_1 ; g_2 ;$ leurs dérivées et g_3 (module fonctions)

2) les dérivées des opérateurs élémentaires :

$$(A.7) \quad L \rightarrow -LF_K(u_h)$$

$$(A.8) \quad \Gamma \rightarrow \dot{A}_K \cdot U_K + \dot{B}_K - \lambda \dot{F}_K(u_h)$$

$$(A.9) \quad W \rightarrow A_K \cdot W_K - \lambda F'_K(u_h) \cdot W_K \quad (\text{module élémentaire})$$

- 3) pour l'initialisation : calcul d'une solution $(\lambda_0, \gamma_{0h}, u_{0h})$ du problème discret et d'un maillage de l'ouvert $\Omega_{\gamma_{0h}}$ correspondant (modules premier point et maillage) ;
- 4) pour déformer le maillage : une procédure de transport suivant un champ de vecteurs de déplacements (module maillage) ;
- 5) l'application linéaire Lin déterminant le choix du paramètre de continuation (module linéarisation) ;
- 6) une fonction d'arrêt et des procédures d'écriture (module sorties) .

Les variables globales manipulées par le programme sont :

- le paramètre de continuation s , le pas Δs
- le point courant : $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\gamma_h \in \mathbb{R}^n$, $u_h \in \mathbb{R}^{ns}$
- le maillage de l'ouvert Ω_{γ_h} courant
- les dérivées $d\lambda/ds$, $d\gamma/ds$, dU/ds au point courant si elles sont nécessaires à la normalisation
- des variables de comptage qui permettent d'évaluer la fonction arrêt

Le calcul de la branche par continuation est réalisé comme indiqué au Paragraphe IV.3.3.:

- la méthode standard de continuation est appliquée au problème augmenté transporté en domaine fixe au voisinage du point $(\lambda_0, \gamma_{0h}, u_{0h})$:

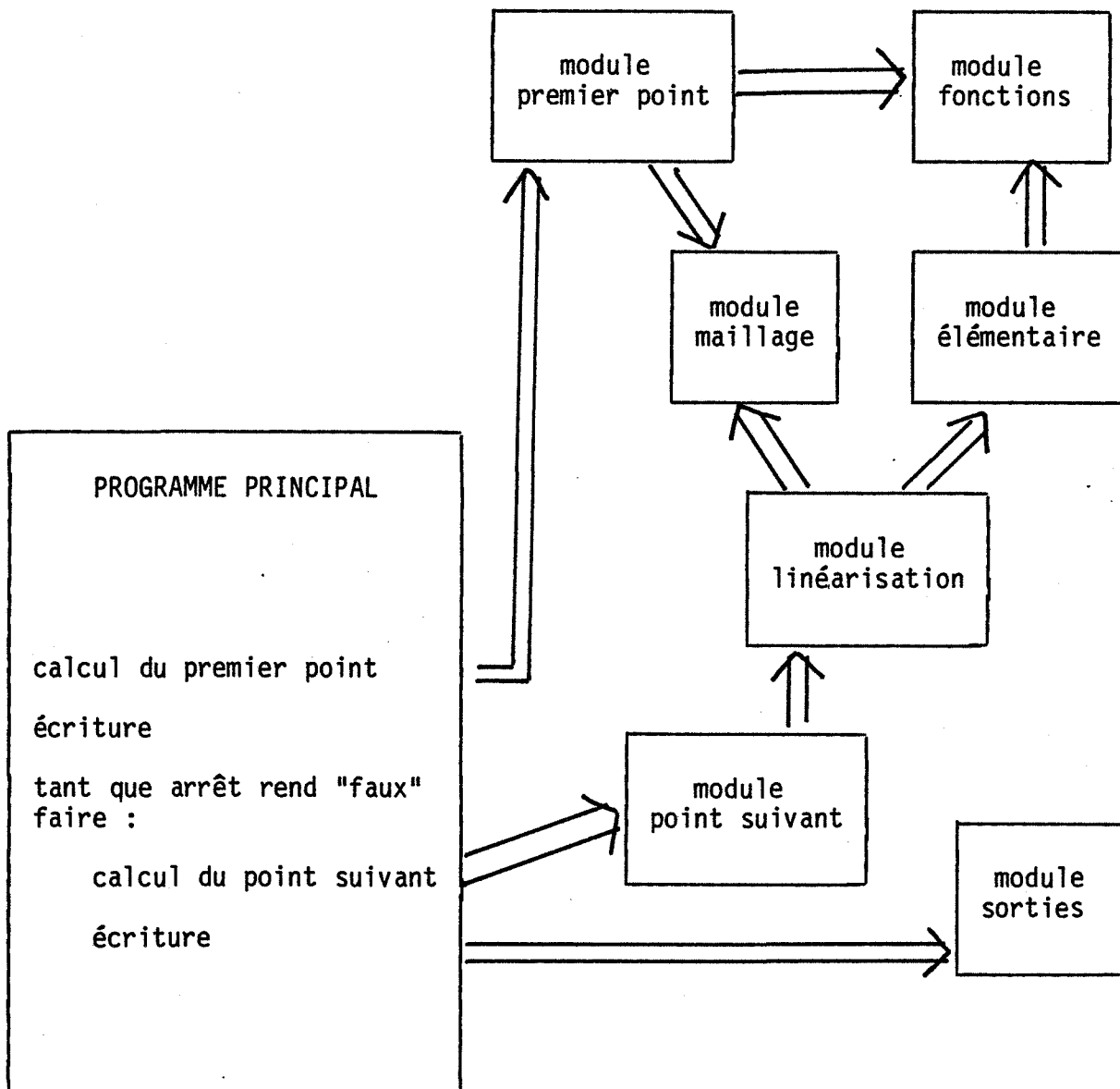
$$\lambda \in \mathbb{R}^+, U \in \mathbb{R}^{ns}, \gamma_h \in \text{Gad}(\gamma_{0h}, D)$$

$$(A.10) \quad \begin{cases} A(\gamma_h) \cdot U + B(\gamma_h) - \lambda F(u_h)(\gamma_h) = 0 \\ \text{Lin}(\lambda - \lambda_0, \gamma_h, U - U_0) - (s - s_0) = 0 \end{cases}$$

- à partir des approximations de $\lambda(s+\Delta s)$, $\gamma_h(s+\Delta s)$ et $U(s+\Delta s)$ le maillage de $\Omega_{\gamma_h(s+\Delta s)}$ est obtenu par déformation de celui de $\Omega_{\gamma_{0h}}$ et $u_h(s+\Delta s)$ par (A.3) (A.4) et (A.5).

L'arrêt du calcul intervient lorsque la fonction arrêt rend un résultat vrai.

Les connexions entre les modules du programme sont représentées sur la figure A.1 :



-Figure A.1- : Structure générale du programme-

"module A => module B" indique que les procédures du module A utilisent celles du module B.

A.2 SPECIFICATIONS POUR L'ECRITURE DES MODULES DE DEFINITION

A.2.1 Structure de données

Pour la solution du problème à frontière libre :

(A.10) **point :** λ = paramètre de bifurcation ;
 γ_h = tableau de n réels décrivant la frontière dans
 $\Gamma_{ad}(0, D)$ ou $\Gamma_{ad}(\gamma_{0h}, D)$ (voir Para-
 graphe IV.1.2) ;
 u_h = tableau de n_s réels donnant les valeurs de u_h
 aux sommets du maillage de Ω_{γ_h} .

Pour la triangularisation :

(A.11) **maillage :** n_s = nombre de sommets
 n_t = nombre de triangles
 n_{si} = nombre de sommets intérieurs

 Tab_{som} = tableau de taille n_s dont les éléments
 sont les couples de coordonnées
 (x_i, y_i) des noeuds M_i .

 Tab_{tri} = tableau de taille n_t dont les éléments
 donnent les numéros (m_1, m_2, m_3) des som-
 mets du triangle T_k .

 $\text{Tab}_{\text{genre}}$ = tableau de taille n_s indiquant, pour
 chaque noeud, si c'est un noeud interne,
 un noeud de $\partial\Omega_h$ ou un noeud de γ_h .

 m_{ud} = largeur de la partie supérieure de la bande
 de la matrice de rigidité.

Remarque : de façon peut-être implicite, on suppose connue la façon dont les noeuds internes dépendent des noeuds frontière.

A.2.2. Le module fonctions

fonction $F : t \rightarrow f(t)$

fonction $FPRIM : t \rightarrow f'(t)$

fonction $G1 : (x,y) \rightarrow g_1(x,y)$

fonction $DxG1 : (x,y) \rightarrow \partial g_1 / \partial x (x,y)$

fonction $DyG1 : (x,y) \rightarrow \partial g_1 / \partial y (x,y)$

fonction $G2 : (x,y) \rightarrow g_2(x,y)$

fonction $DxG2 : (x,y) \rightarrow \partial g_2 / \partial x (x,y)$

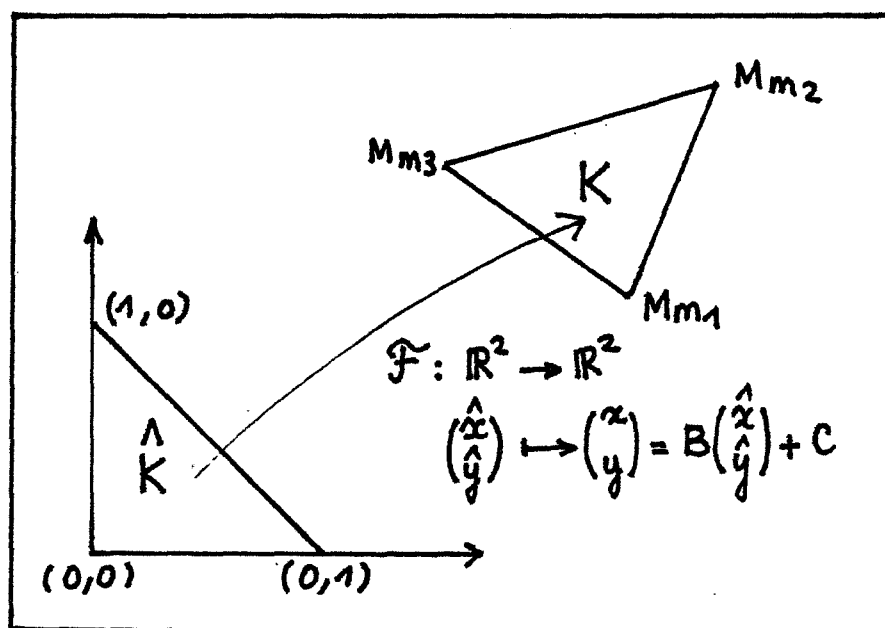
fonction $DyG2 : (x,y) \rightarrow \partial g_2 / \partial y (x,y)$

fonction $G3 : (x,y) \rightarrow g_3(x,y)$

A.2.3. Le module élémentaire

Dans ce module, un triangle K est référé selon les cas :

- par son numéro dans Tabtri
- par les numéros m_1, m_2, m_3 de ses sommets
- par la transformation affine qui transforme le triangle de référence $\hat{K} = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ en K (voir fig. A.2).



- Figure A.2 -

Les fonctions de base sur l'élément de référence sont des constantes de ce module. Par exemple, dans l'application que nous avons réalisée, les constantes suivantes sont connues :

$$\hat{w}_i(M_j) = \delta_{ij} ; i, j = 1..3 ;$$

$$\nabla \hat{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \nabla \hat{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \nabla \hat{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

procédure GEOM : calcule l'application affine qui transforme $\hat{K}$ en K .

paramètres d'entrée :

τ_h : maillage ; $k \in 1..nt$: numéro du triangle

en sortie :

B : matrice 2×2 ; $C \in \mathbb{R}^2$

méthode :

$$M_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Le module élémentaire contient des fonctions de calcul des formes linéaires et bilinéaires (pour les fonctions de base de l'élément), utiles au calcul des opérateurs élémentaires dérivés (A.7) (A.8) (A.9). Pour notre application, les fonctions qui ont été programmées sont les suivantes :

fonction FK : $F_K(u_h)_j ; j \in 1..3.$

paramètres d'entrée :

$j \in 1..3$: indice local d'un sommet de K ;

u_h

résultat :

$$\int_K f(u_h) w_j$$

méthode : par une formule de quadrature.

Pour dériver par rapport à U :

fonction AK : $A_{Kj,i}$; $i, j \in 1..3$.

paramètres d'entrée :

$i, j \in 1..3$: indices locaux ;

B : matrice 2×2 ;

constantes du module ;

résultat :

$$AK = \int_K \nabla w_i \nabla w_j$$

méthode : $\nabla w_{m\alpha} = {}^t[B^{-1}] \hat{\nabla w}_{m\alpha}$

$$AK = \langle {}^t[B^{-1}] \cdot \hat{\nabla w}_i, {}^t[B^{-1}] \cdot \nabla w_j \rangle_{\text{mes}(K)}.$$

fonction FPK : $F'_K(u_h)_{j,i}$; $i, j \in 1..3$.

paramètres d'entrée :

$i, j \in 1..3$: indices locaux ;

B : matrice 2×2 ; m_1, m_2, m_3 : numéro des sommets ;

u_h ;

résultat :

$$FPK = \int_K f'(u_h) w_i w_j$$

méthode : par une formule de quadrature.

Pour dériver par rapport au domaine :

procedure CONV : calcule $\text{div}(V)$ et la matrice $\text{div}(V) - [DV] - {}^t[DV]$ pour un champ V , affine sur le triangle K , connu par ses valeurs aux sommets.

paramètres d'entrée :

$V_1, V_2, V_3 \in \mathbb{R}^2$: valeurs du champ aux sommets ;

en sortie :

$\text{div}(V)$ et $[M] = \text{div}(V) - [DV] - {}^t[DV]$;

méthode :

$$V = \sum_{\alpha=1}^3 V_{\alpha} w_{m\alpha}$$

$$\text{div}(V) = \sum_{\alpha=1}^3 \langle \nabla w_{m\alpha}, \nabla V_{\alpha} \rangle$$

$$[DV] + {}^t[DV] = \sum_{\alpha=1}^3 [\nabla w_{m\alpha} \cdot {}^tV_{\alpha} + {}^tV_{\alpha} \cdot \nabla w_{m\alpha}]$$

$$\nabla w_{m\alpha} = {}^t[B^{-1}] \cdot \hat{\nabla} w_{\alpha}$$

fonction AKPOINTU : $(\hat{A}_K \cdot U_K)_j$; $j \in 1..3$; dans la direction d'un champ de déplacement V affine sur K .

paramètres d'entrée :

$j \in 1..3$: indice local ;

B : matrice 2×2 ; m_1, m_2, m_3 : numéro des sommets ;

u_h ;

$V_1, V_2, V_3 \in \mathbb{R}^2$: valeurs du champ aux sommets ;

constantes du module ;

résultat :

$$\int_K \langle (\text{div}(V) - [DV] - {}^t[DV]) \cdot \nabla u_h, \nabla w_{mj} \rangle$$

méthode : utiliser la procedure CONV

$[M] \leftarrow \text{CONV}(B, V_1, V_2, V_3)$;

$$\text{AKPOINTU} = \sum_{\alpha=1}^3 u_h(m_{m\alpha}) \langle [M] {}^t[B^{-1}] \cdot \nabla w_{\alpha}, {}^t[B^{-1}] \cdot \nabla w_j \rangle$$

fonction FKPOINT : $\{F_K(u_h)\}_j ; j \in 1..3$

paramètres d'entrée :

$j \in 1..3$: indice local ;

B : matrice 2×2 ; m_1, m_2, m_3 : numéro des sommets ;

$V_1, V_2, V_3 \in \mathbb{R}^2$: valeurs du champ au sommets ;

u_h ;

résultat :

$$\int_K f(u_h) w_{mj} \operatorname{div}(V) + \int_K f'(u_h) x_h w_{mj}$$

$$\text{où } x_h = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ M_{m\alpha} \in \gamma_h}}^3 \langle \nabla \Psi(M_{m\alpha}), V_\alpha \rangle w_{m\alpha}$$

méthode : par quadrature.

fonction CKPOINT : C_{Kj} ; $j \in 1..3$; dans la direction du champ V donné par ses valeurs aux sommets.

paramètres d'entrée :

$j \in 1..3$: indice local ;

B : matrice 2×2 ; m_1, m_2, m_3 : numéro des sommets ;

V_1, V_2, V_3 : valeurs du champ aux sommets ;
constantes du module ;

résultat :

$$\begin{aligned} \text{CKPOINT} = & \int_K \langle (\operatorname{div}(V) - [DV] - {}^t[DV]) \cdot \nabla \phi_h, \nabla w_{mj} \rangle + \int_K \nabla x_h \cdot \nabla w_{mj} \\ & - \int_K \langle (\operatorname{div}(V) - [DV] - {}^t[DV]) \cdot \nabla \Psi, \nabla w_{mj} \rangle \\ & - \int_K \Delta \Psi \langle V, n \rangle w_{mj} \end{aligned}$$

méthode : $[M] \leftarrow \text{CONV}(B, V_1, V_2, V_3)$

$$\begin{aligned} \text{Termel} = & \sum_{\substack{\alpha=1 \\ M_{m\alpha} \in \gamma_h}}^3 \Psi(M_{m\alpha}) \langle [M] {}^t[B^{-1}] \cdot \hat{\nabla} w_\alpha, {}^t[B^{-1}] \cdot \hat{\nabla} w_j \rangle \\ & + \langle \nabla \Psi(M_{m\alpha}), V \rangle \langle [M] {}^t[B^{-1}] \cdot \hat{\nabla} w_\alpha, {}^t[B^{-1}] \cdot \hat{\nabla} w_j \rangle \end{aligned}$$

Reste calculé par quadrature ;

$\text{CPOINTK} = \text{Termel} - \text{Reste}.$

A.2.4. Modules premier point et maillage

La réalisation du module **premier point** consiste à programmer une méthode de résolution du problème à frontière libre par éléments finis (de type P1 ou autres), pour une valeur donnée de λ .

Les choix opérés à ce niveau, déterminent, outre la solution $(\lambda_0, \gamma_0 h, u_0 h)$, le maillage $\tau_0 h$ de l'ouvert $\Omega_{\gamma_0 h}$ à partir duquel la méthode que nous proposons est initialisée.

La construction du maillage initial peut nécessiter la programmation de plusieurs procédures dans le module **maillage** telles que : maillage de l'ouvert Ω_h tout entier, élimination des noeuds qui sont dans l'ensemble de coïncidence, déformation d'un maillage...

En tout état de cause, on aura soin d'obtenir à la fin du calcul du premier point, un maillage décrit dans la structure de données (A.11) pour lequel la dépendance des noeuds intérieurs vis à vis des noeuds frontières est bien maîtrisée.

Le module **maillage** contient des procédures qui réalisent la déformation du maillage initial $\gamma_0 h$ liée à la déformation de la frontière γ_h dans $\Gamma_{ad}(0, D)$ ou $\Gamma_{ad}(\gamma_h, D)$, identifié à $\mathbb{R}^n$:

Procédure champ : calcule la valeur du champ de déplacement unitaire en un sommet du maillage.

Paramètres d'entrée :

numer : numéro d'un méridien
D : l'ensemble des n méridiens
 $\tau_0 h$: la triangularisation initiale
nusom : le numéro d'un sommet

En sortie :

$V(\vec{e}_{\text{numer}}) (M_{\text{nusom}})$.

méthode : Voir Paragraphe IV.2.1.

procedure remaille : transforme le maillage de Ω_{γ_0h} pour en faire un maillage de Ω_{γ_h} .

paramètres d'entrée :

τ_h : maillage de Ω_{γ_0h} ;
 D : ensemble des méridiens ;
 $\gamma_h \in \Gamma_{ad}(\gamma_0h, D) \equiv \mathbb{R}^n$;

en sortie :

τ_h : le maillage de Ω_{γ_h}

méthode : pour tout $i = 1..ns / M_i \quad \partial\Omega_h$,
pour numer = 1..n faire :
 $V \leftarrow \text{Champ}(\text{numer}, i)$;
 $M_i \leftarrow M_i + \gamma_h^{\text{numer}} \cdot V$
fin pour

A.3. ALGORITHME DE CONTINUATION : MODULES POINT SUIVANT ET LINEARISATION

Soit $(s_0, \lambda_0, \gamma_0h, u_0h)$ un point calculé de la branche et soit τ_0h , la triangularisation de Ω_{γ_0h} associée.

On se donne un ensemble de n directions méridiennes D sur les sommets de γ_0h .

MODULE POINT SUIVANT

La solution $\lambda(s_0+\Delta s)$, $\gamma_h(s_0+\Delta s) \in \Gamma_{ad}(\gamma_0h, D)$, $U(s+\Delta s) \in \mathbb{R}^{n\text{si}}$ du problème augmenté (A.10) est calculée par intégration numérique du problème linéarisé :

$$(A.12) \quad \begin{cases} A \cdot \frac{dU}{ds} - \lambda F'(u_h) \cdot \frac{dU}{ds} = \frac{d\lambda}{ds} F(u_h) - A \cdot U - B - \lambda F(u_h) \\ \text{Lin}(d\lambda/ds, d\gamma_h/ds, dU/ds) = 1 \end{cases}$$

(où le point représente la dérivation dans la direction $d\gamma_h/ds \in \mathbb{R}^n$), au voisinage du point $(s_0, \lambda_0, \gamma_0h, u_0h)$.

Le choix de la méthode d'Euler pour intégrer (A.12) nous a conduit à programmer la procédure suivante :

procedure EULER : Approximation de $\lambda(s_0+\Delta s)$, $\gamma_h(s_0+\Delta s)$, $U(s_0+\Delta s)$ par la méthode d'Euler. Déformation du maillage τ_h et calcul de $u_h(s_0+\Delta s)$.

paramètres d'entrée :

- s : paramètre de continuation ;
- le point courant ;
- les dérivées $d\lambda/ds$, $d\gamma_h/ds$ et dU/ds au point courant, si la linéarisation le nécessite ;
- le maillage courant τ_h ;
- l'ensemble des directions méridiennes ;
- le compteur des points calculés ;

en sortie :

- $s = s + \Delta s$;
- le point courant modifié ;
- les dérivées réajustées ;
- le maillage courant modifié ;
- le compteur des points incrémenté de 1 ;

méthode : Utiliser les procédures du module linéarisation pour résoudre le problème (A.12) au point courant ;
(soit $L \in \mathbb{R}^+$, $\Gamma \in \mathbb{R}^n$, $W \in \mathbb{R}^{ns_i}$ la solution)

$\lambda \leftarrow \lambda + \Delta s L$;

$\gamma_h \leftarrow \gamma_h + \Delta s \sum \Gamma_i d_i$ (d_i direction méridienne) ;

$u_h(M_i) = u_h(M_i) + \Delta s W_i$ pour i indice d'un noeud

interne ;

REMAILLE(τ_h , D , γ_h) $\rightarrow \tau_h$;

$u_h(M_i) \leftarrow \Psi(M_i)$ pour $M_i \in \gamma_h$;

compteur $\leftarrow$ compteur + 1 ;

MODULE LINEARISATION

Le module linéarisation fournit au module point suivant les procédures qui permettent d'assembler les opérateurs dérivés :

$$(A.13) \quad L \rightarrow -LF(u_h)$$

$$(A.14) \quad \Gamma \in R^n \rightarrow A \cdot \dot{U} + B \cdot \dot{\lambda} F(\dot{u}_h) \in R^{nsi+n}$$

$$(A.15) \quad W \in R^{nsi} \rightarrow A \cdot W - \lambda F'(u_h) \cdot W \in R^{nsi+n}$$

en un point, à partir des données du module élémentaire.

La structure de données utilisée dans ce module pour représenter le système creux (A.12) est indépendante de tout le reste du programme, ainsi que la méthode de résolution utilisée.

Décrire en détail les choix que nous avons opérés pour notre application ne présente pas un grand intérêt c'est pourquoi nous nous contentons de mentionner que la résolution de (A.12) peut être obtenu par l'exécution successive des trois procédures suivantes :

procedure assemblage : calcule les dérivées partielles de l'opérateur $G = A(\gamma h) + B(\gamma h) - \lambda F(u_h)$

paramètres d'entrée :

un point ;

un maillage ;

l'ensemble des directions méridiennes ;

en sortie :

la matrice de l'opérateur G_U ;

les vecteurs G_λ ; $G_{\gamma h} \cdot e_i$ ($i = 1..n$) ;

méthode :

calculer G_λ par l'algorithme (IV.1.31) ;

calculer G_U et $G_{\gamma h} \cdot e_i$ pour $i = 1..n$ par les algorithmes (IV.1.30 à 32) ;

procédure résolution : $G_U.W + \sum \Gamma_i G_{\gamma h}.e_i = -G_\lambda$

paramètres d'entrée :

la matrice G_U ;

les vecteurs $G_{\gamma h}.e_i$ ($i=1..n$) et G_λ ;

en sortie :

la solution $W \in R^{nsi}$; $\Gamma \in R^n$

procedure normalisation : après les procédure assemblage et résolution, détermine la solution du problème augmenté linéarisé (A.12).

paramètres d'entrée :

$W \in R^{nsi}$; $\Gamma \in R^n$;

l'application linéaire Lin ;

en sortie :

L, Γ, W ;

méthode :

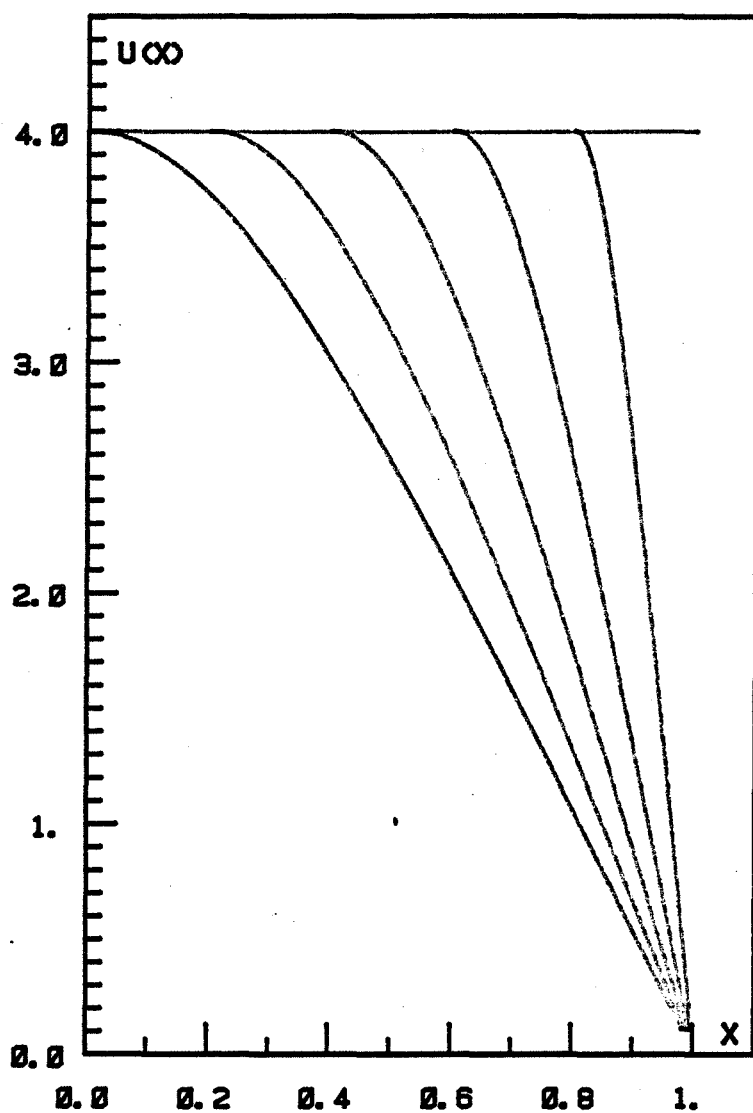
déterminer $L / Lin(L, L\Gamma, LW) = 1$;

$\Gamma \leftarrow L\Gamma$;

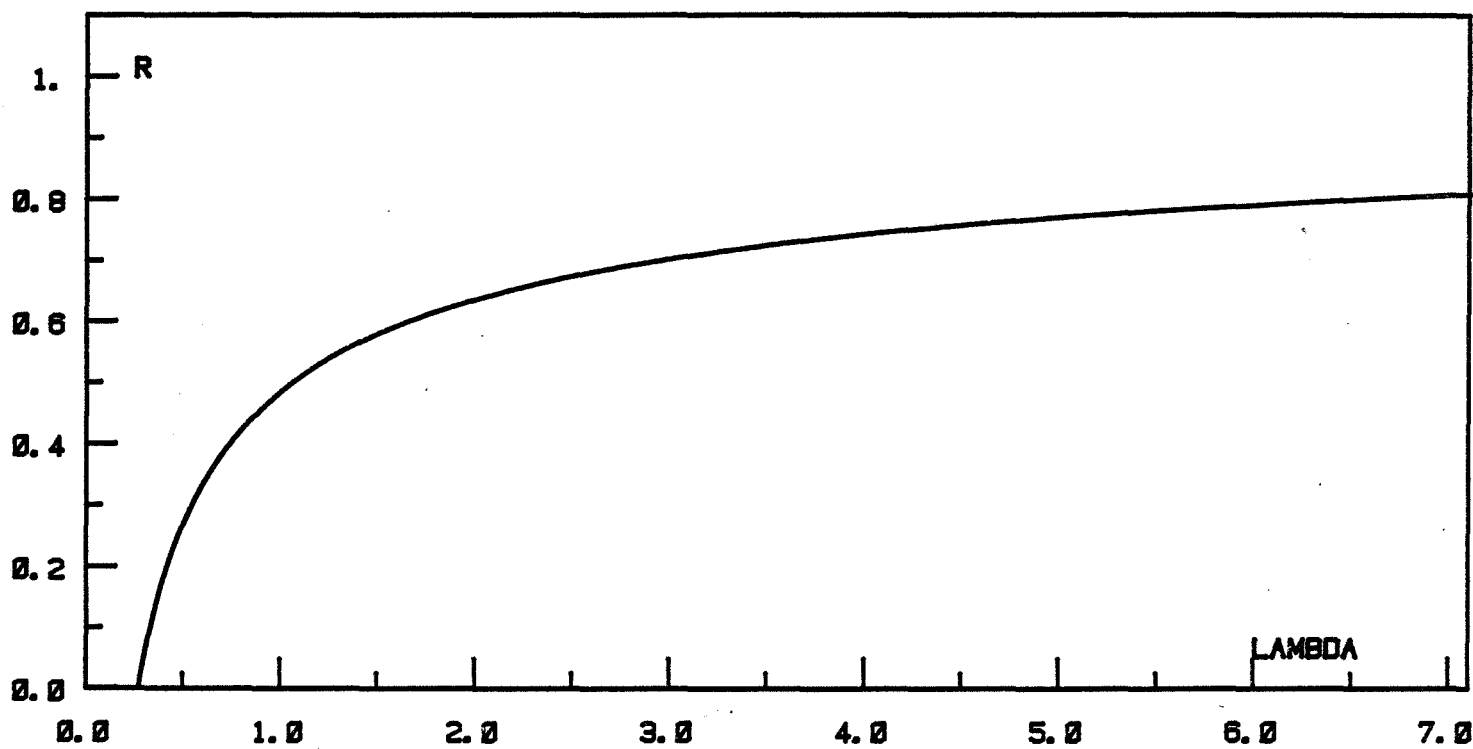
$W \leftarrow LW$.

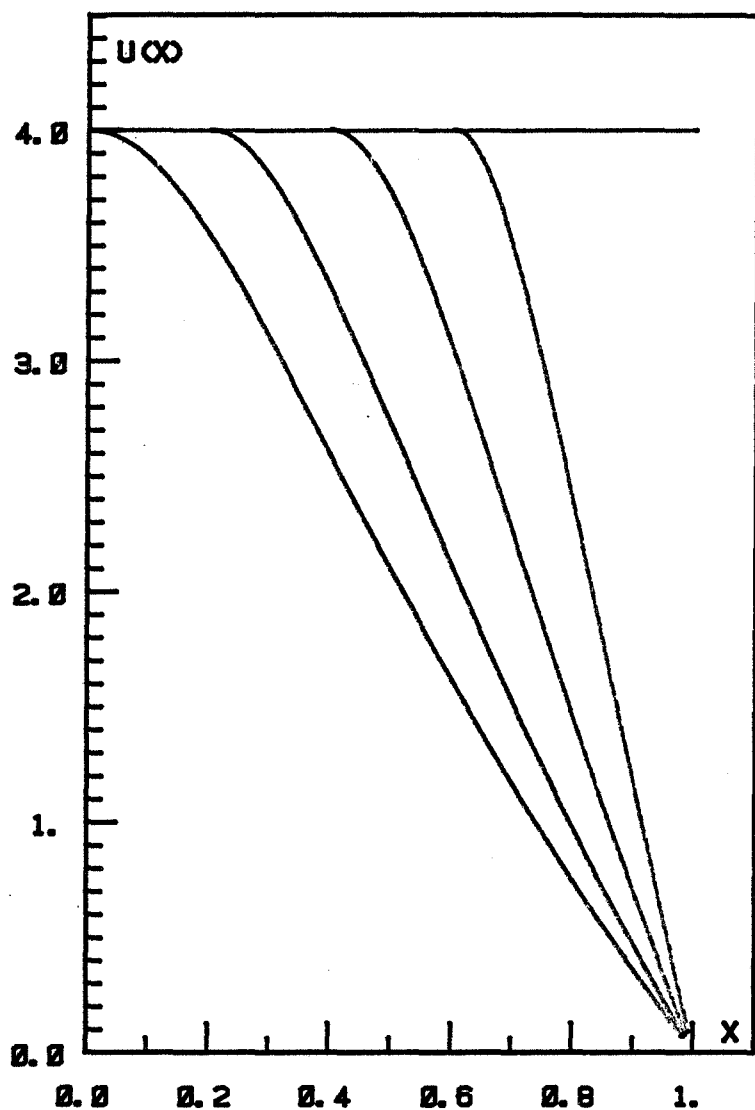
ANNEXE 2

PLANCHES DE RESULTATS NUMERIQUES

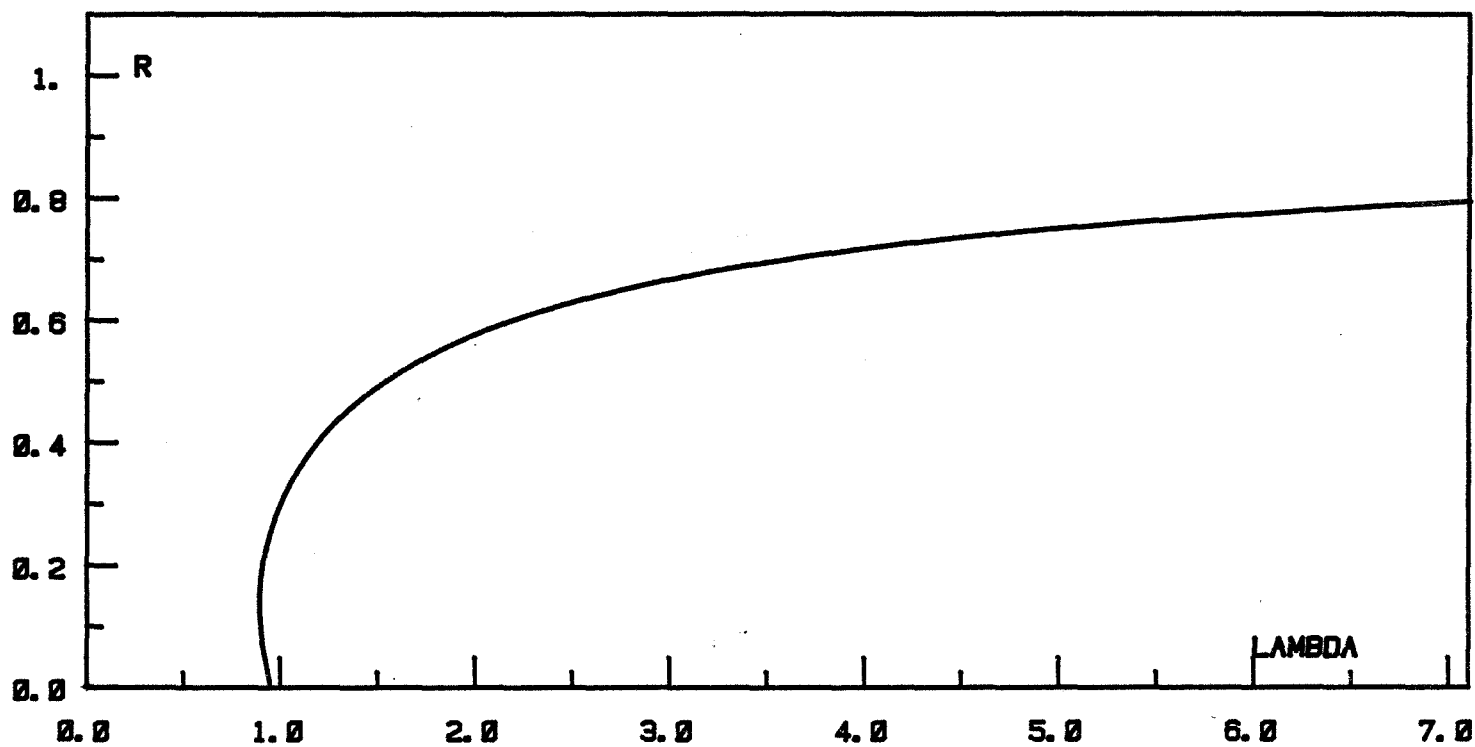


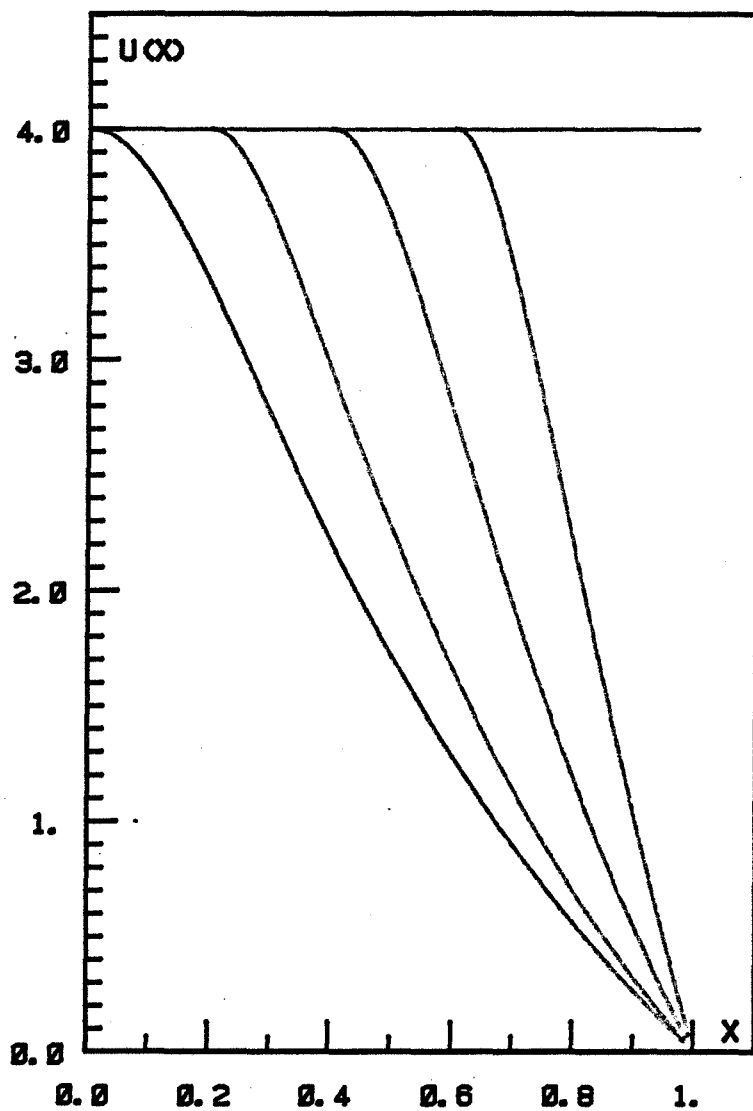
PB CONTINU
 DIMENSION 1
 OBSTACLE = 4
 DR = 0.5E-2
 N = 50



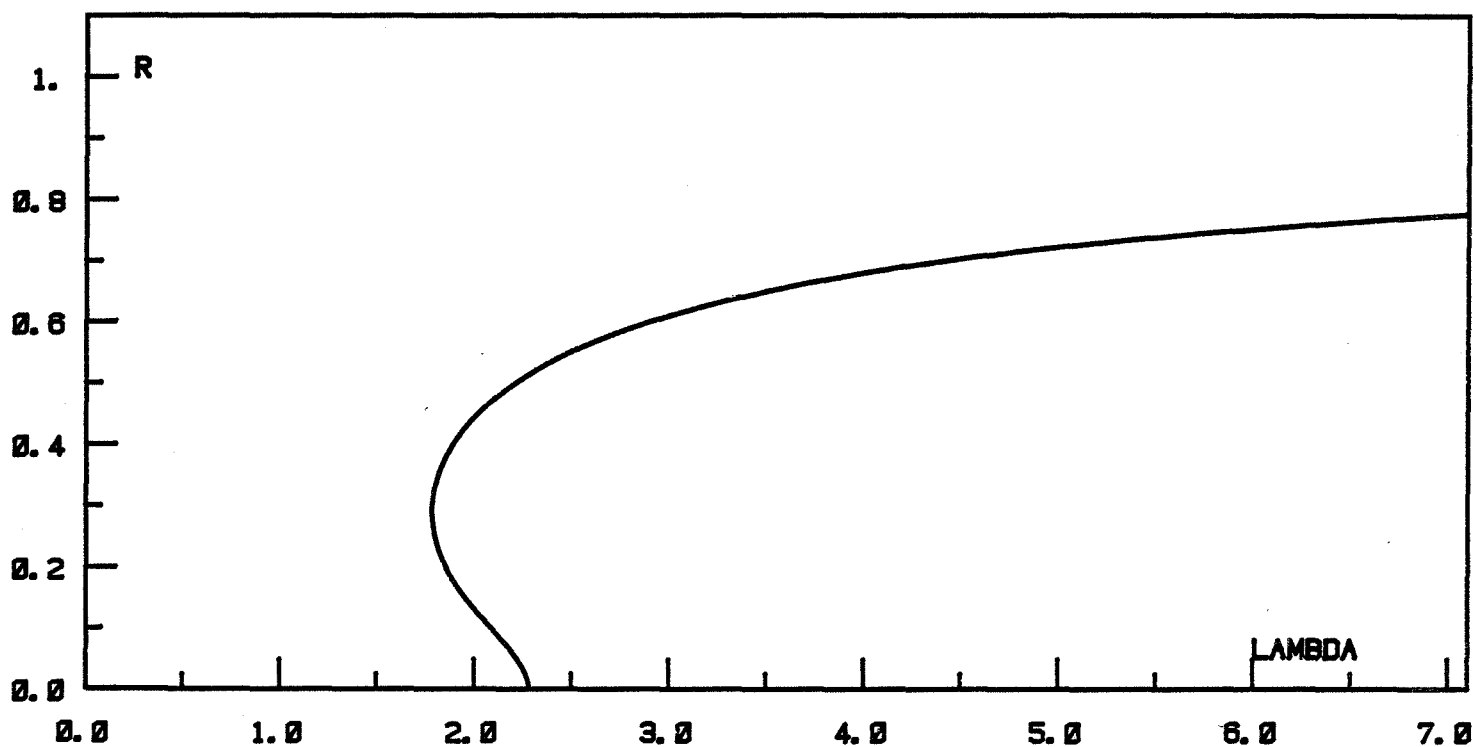


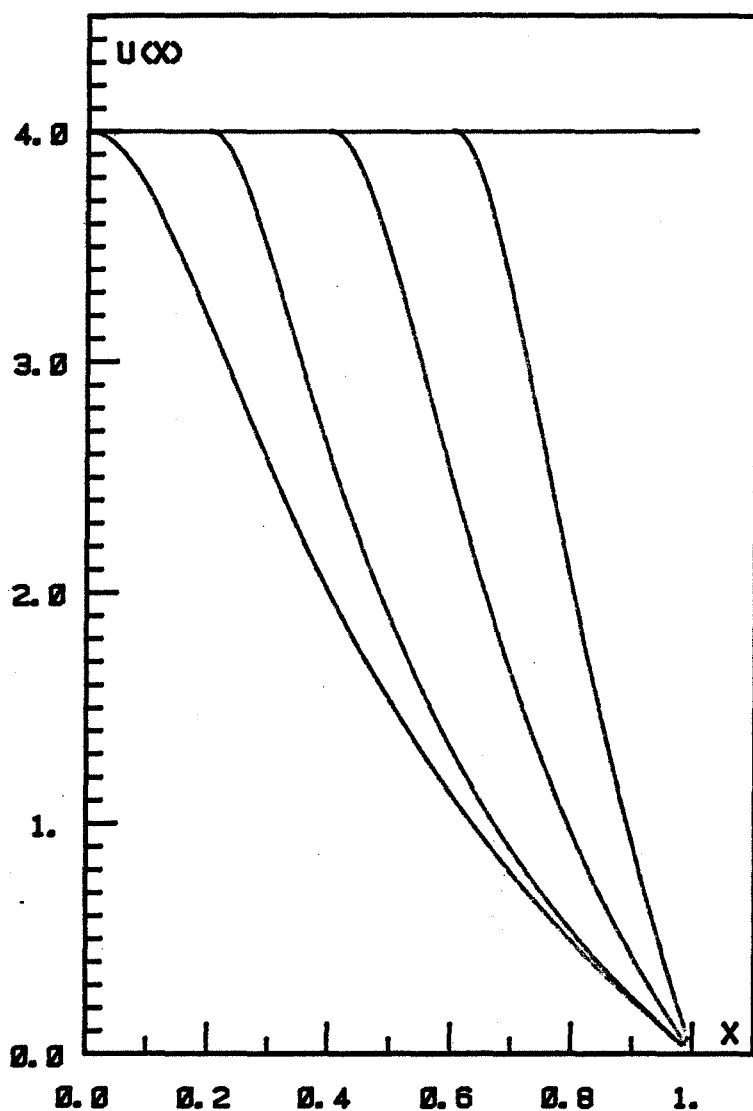
PB CONTINU
 DIMENSION 2
 OBSTACLE = 4
 DR = 0.5E-2
 N = 50



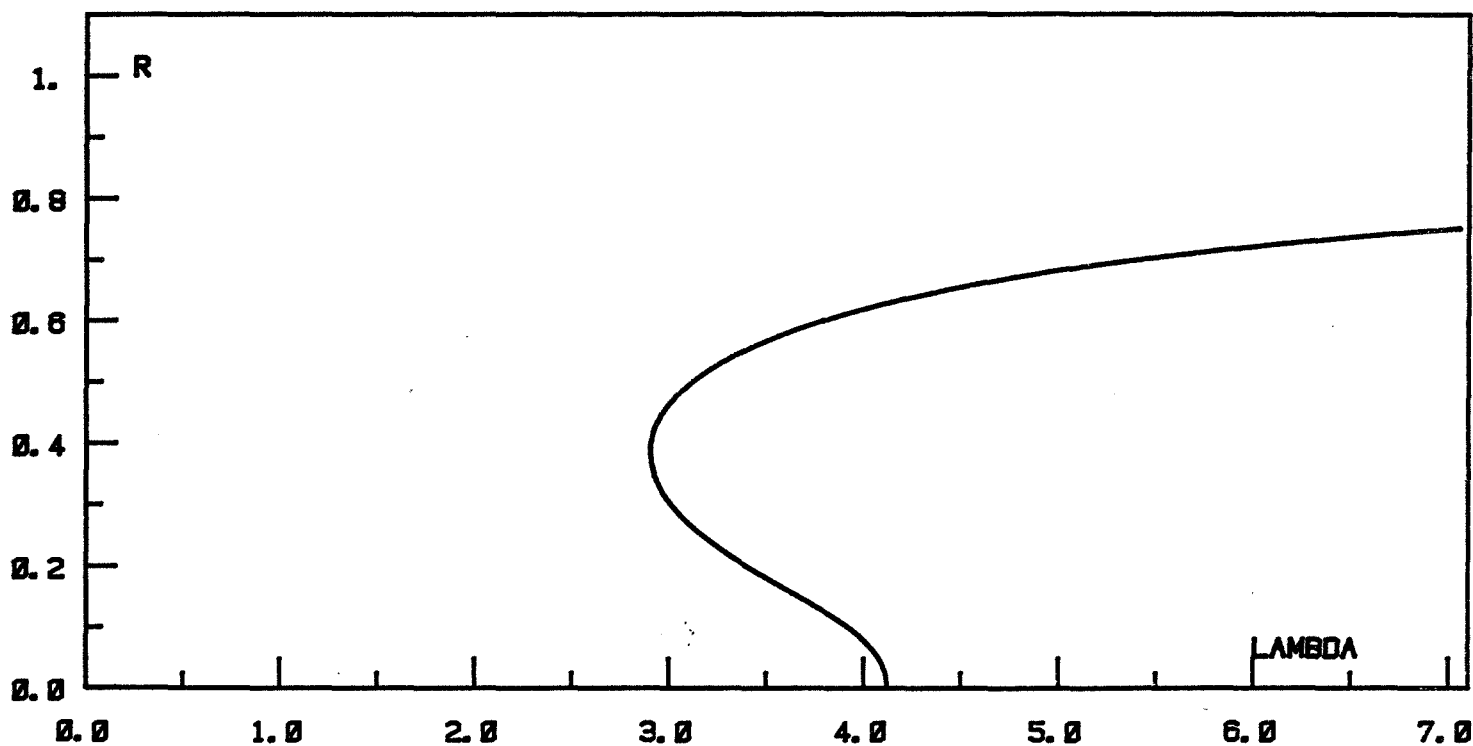


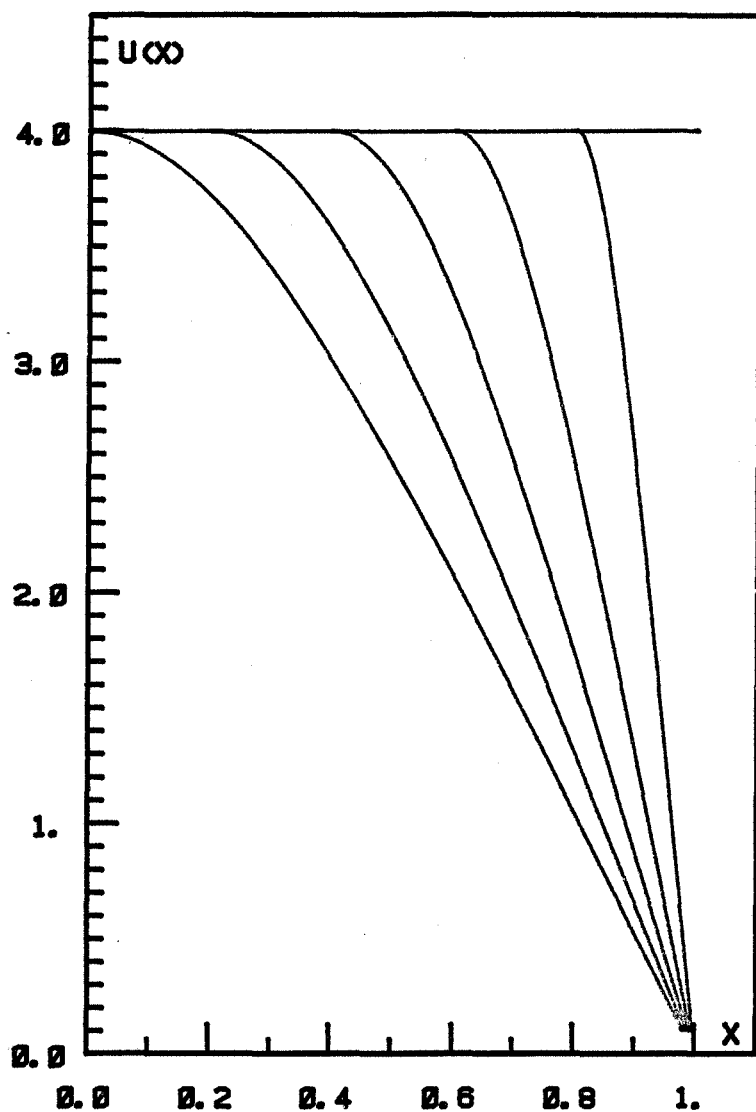
PB CONTINU
 DIMENSION 3
 OBSTACLE = 4
 DR = 0.5E-2
 N = 50





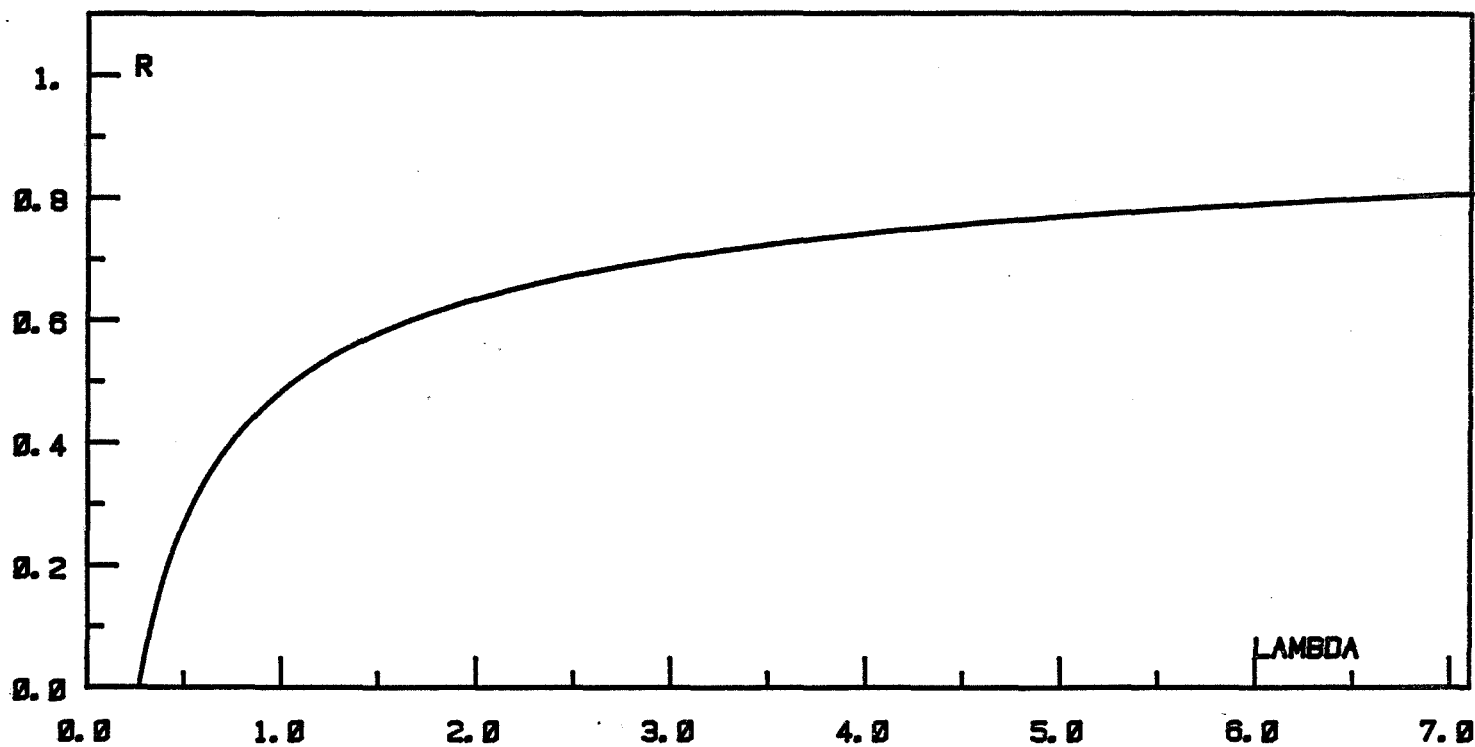
PB CONTINU
 DIMENSION 4
 OBSTACLE = 4
 $DR = 0.5E-2$
 $N = 50$

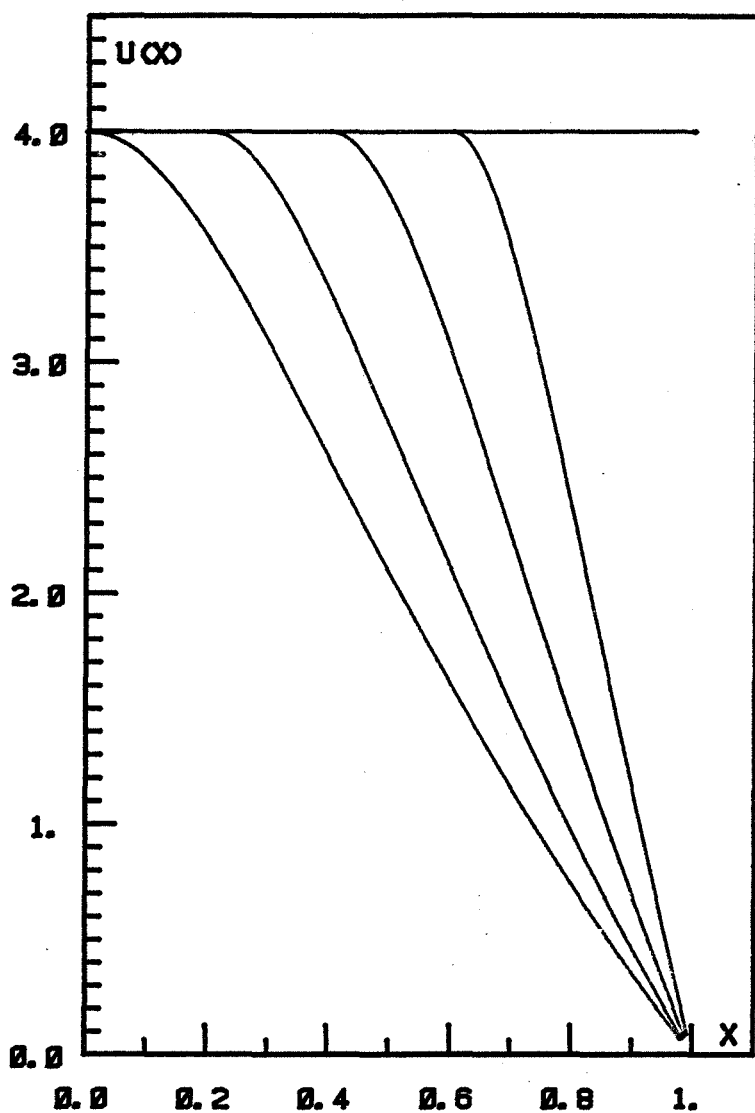




PFL DISCRET
 $N = 50$

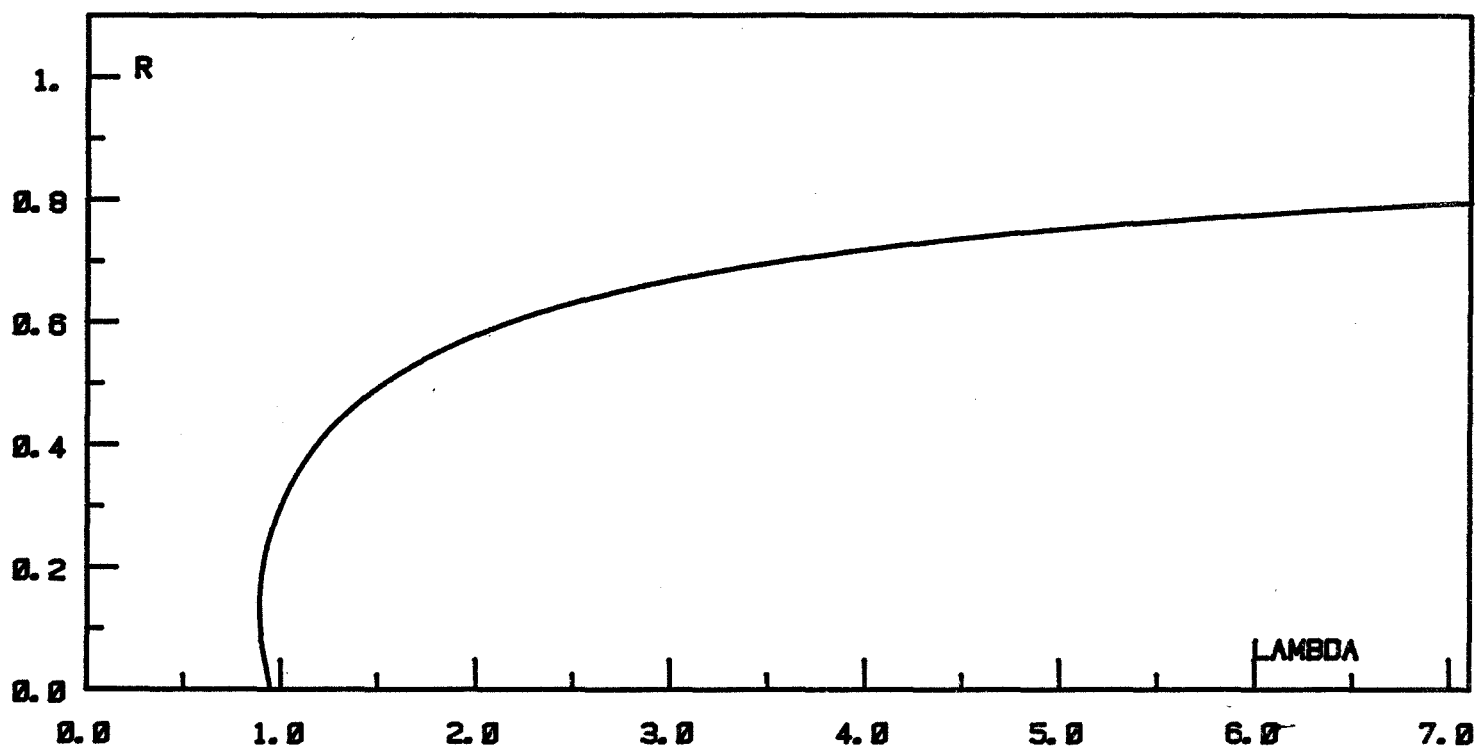
DIMENSION 1
 OBSTACLE = 4
 $DR = 0.5E-2$

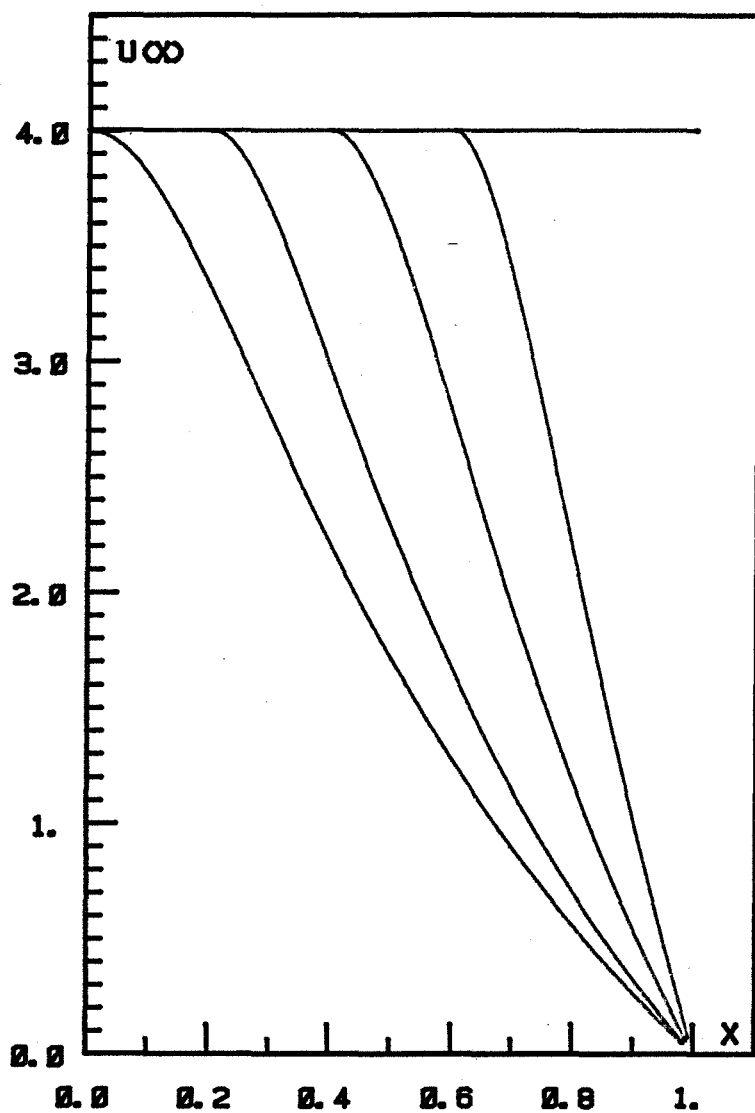




PFL DISCRET
N = 50

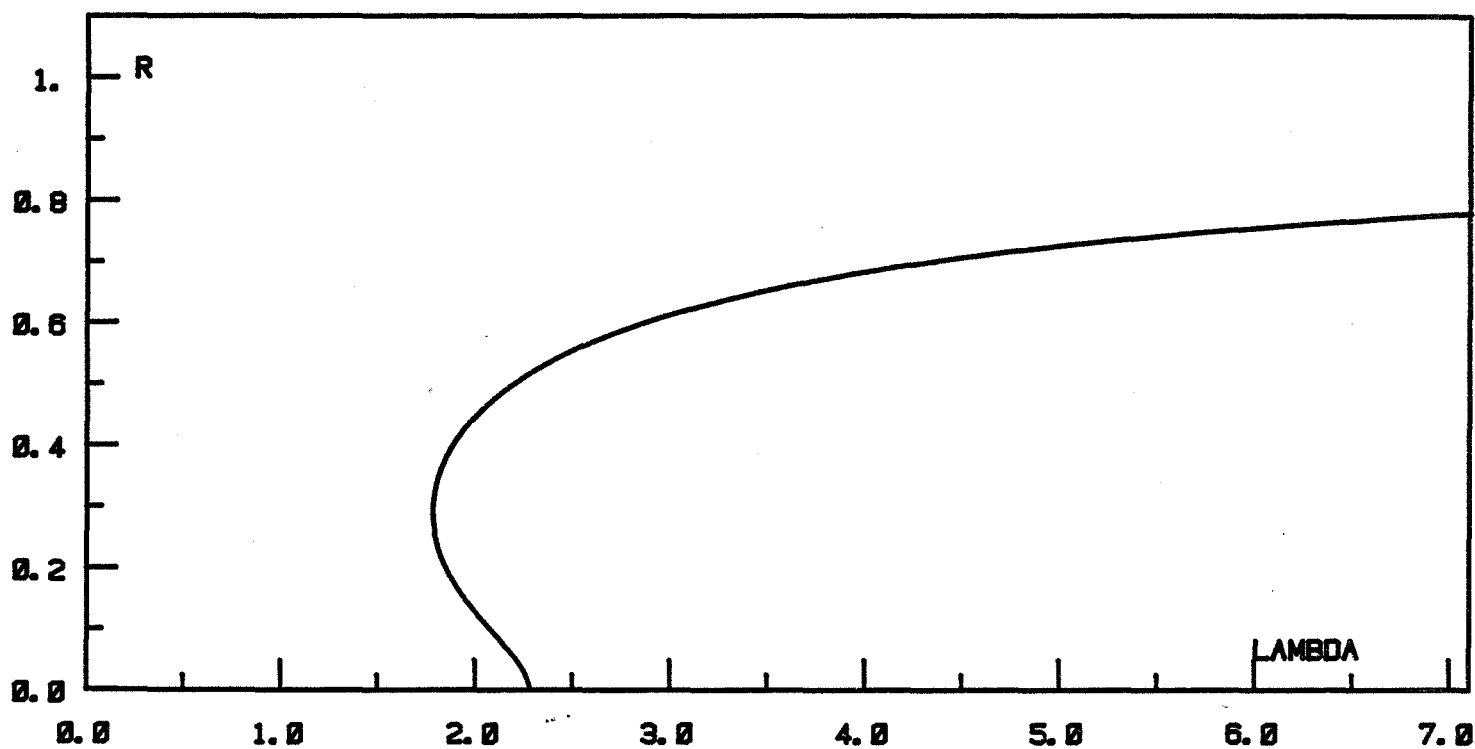
DIMENSION 2
OBSTACLE = 4
DR = 0.5E-2

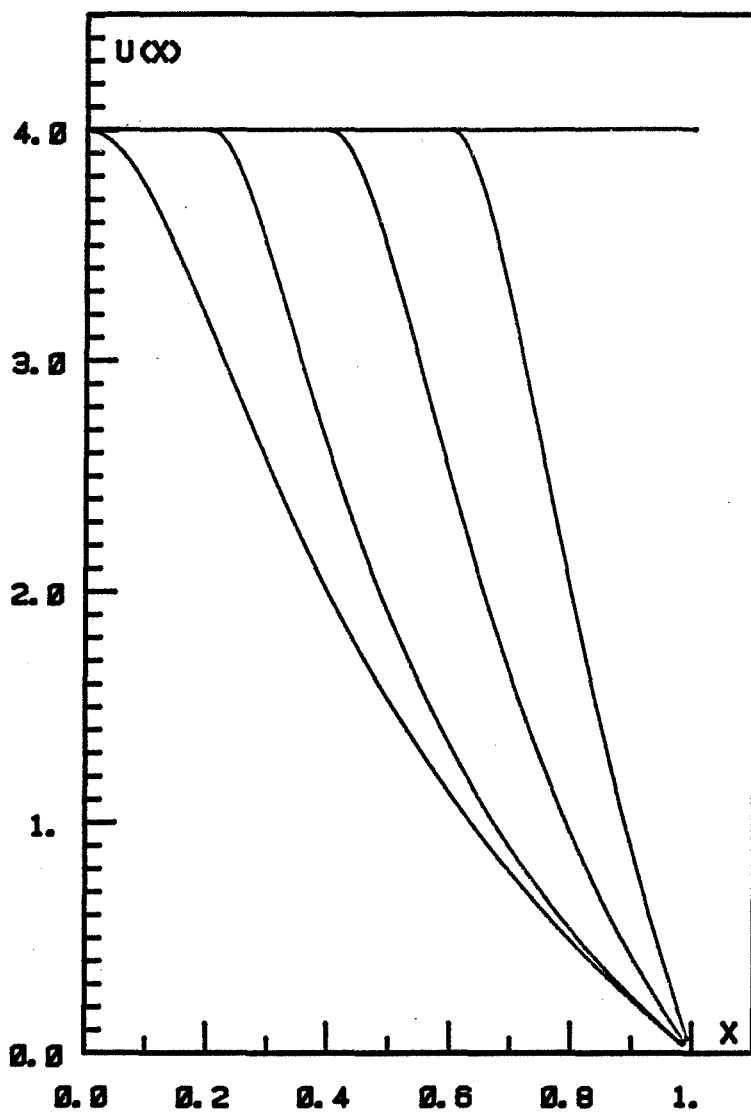




PFL DISCRET
 $N = 50$

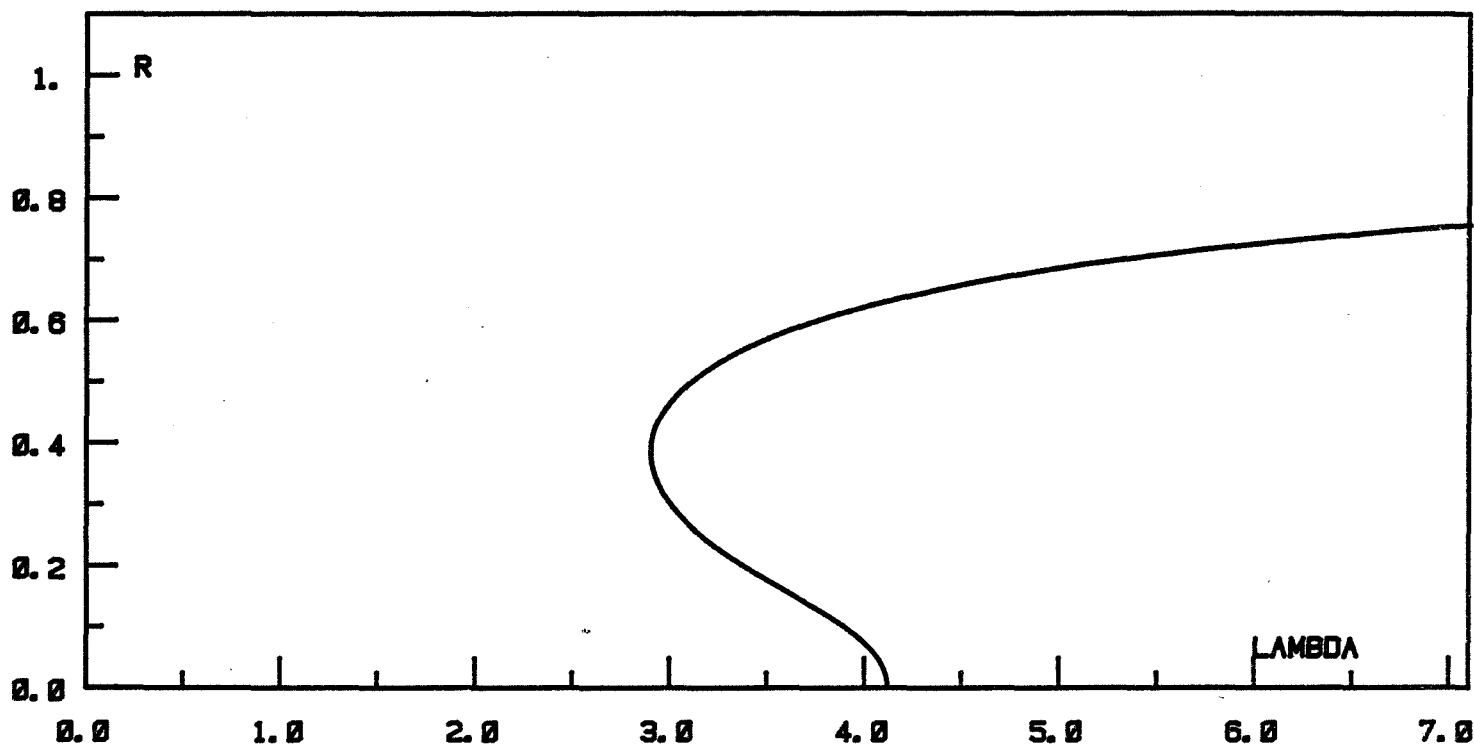
DIMENSION 3
 OBSTACLE = 4
 $DR = 0.5E-2$

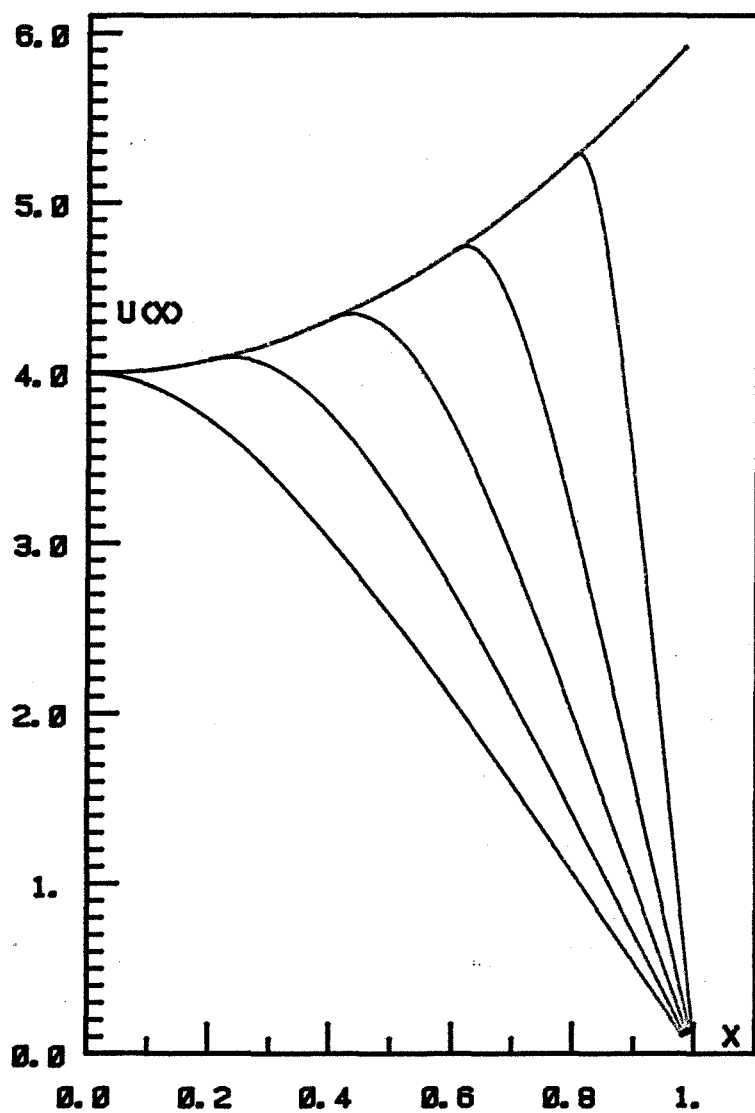




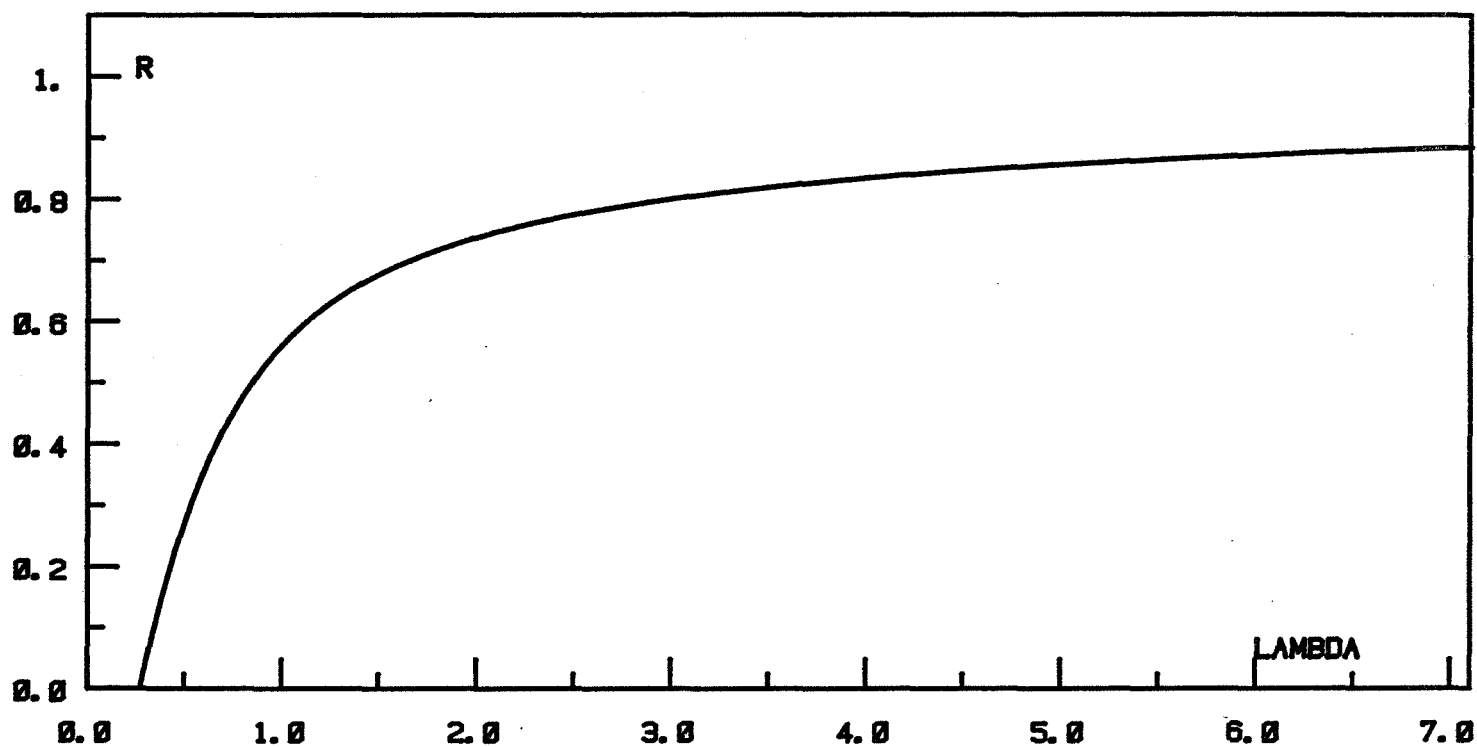
PFL DISCRET
N = 50

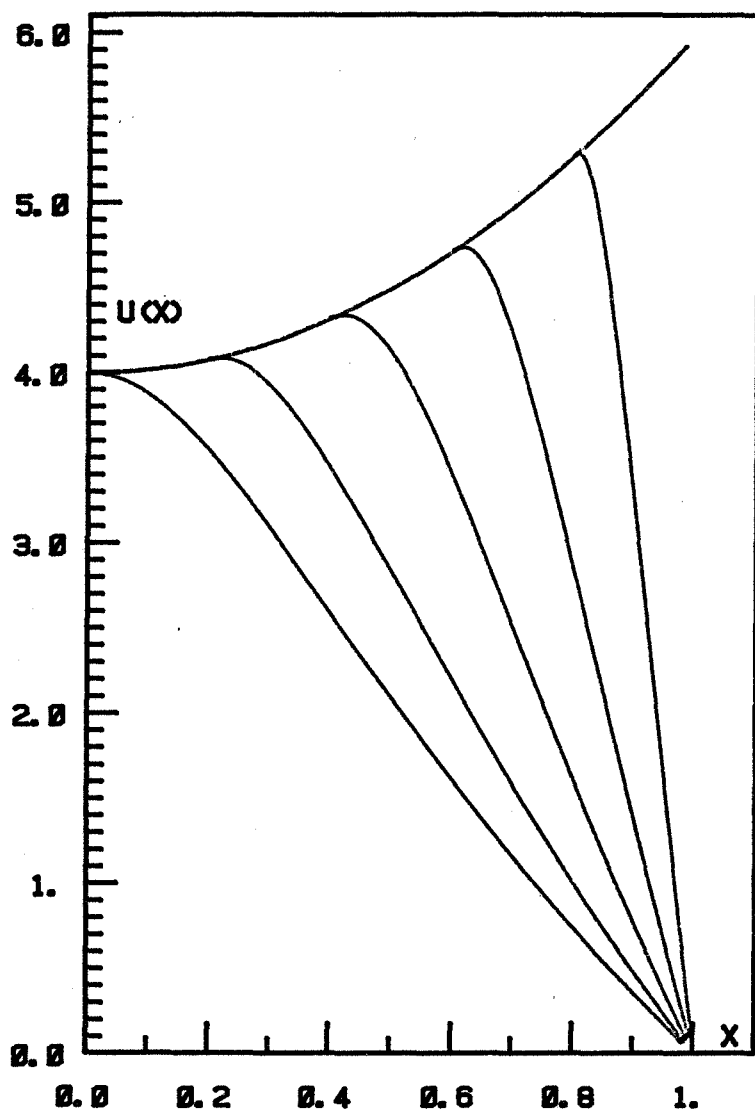
DIMENSION 4
OBSTACLE = 4
DR = 0.5E-2



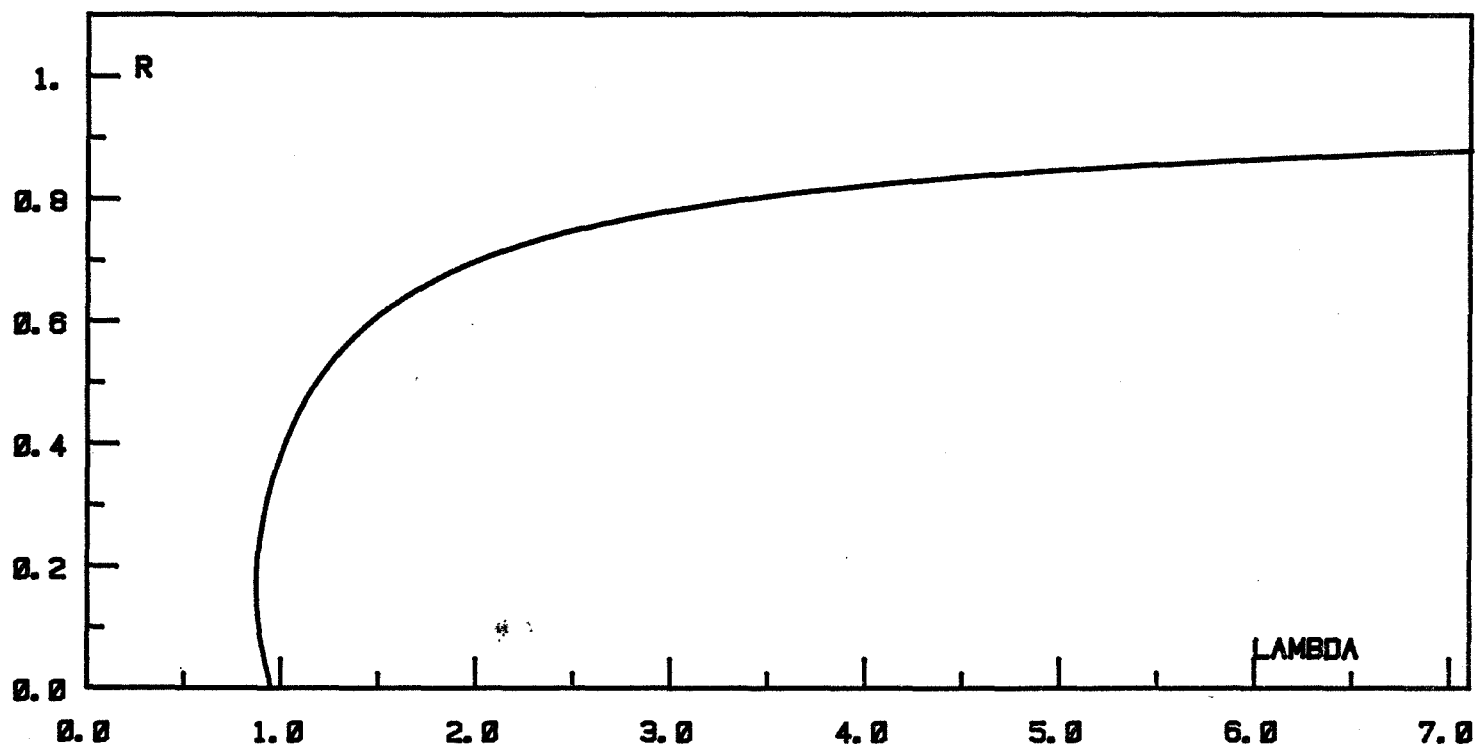


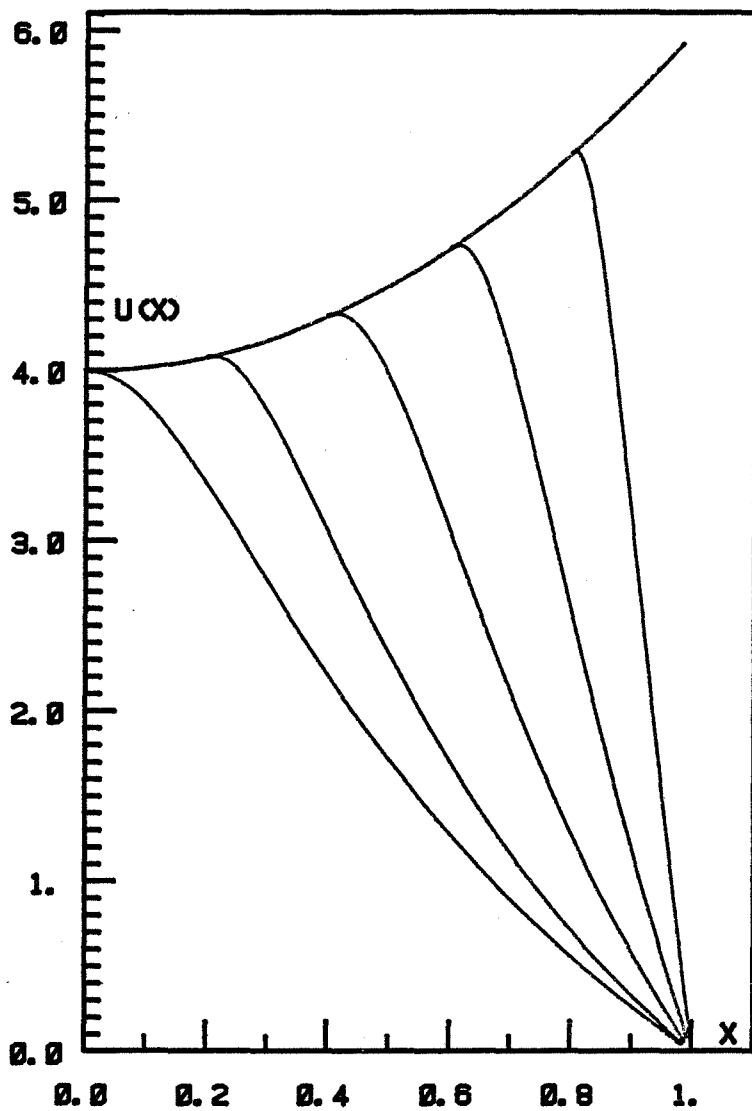
PB CONTINU
 DIMENSION 1
 OBSTACLE = $4 + 2 \cdot X \cdot X$
 DR = $0.5E-2$
 N = 50



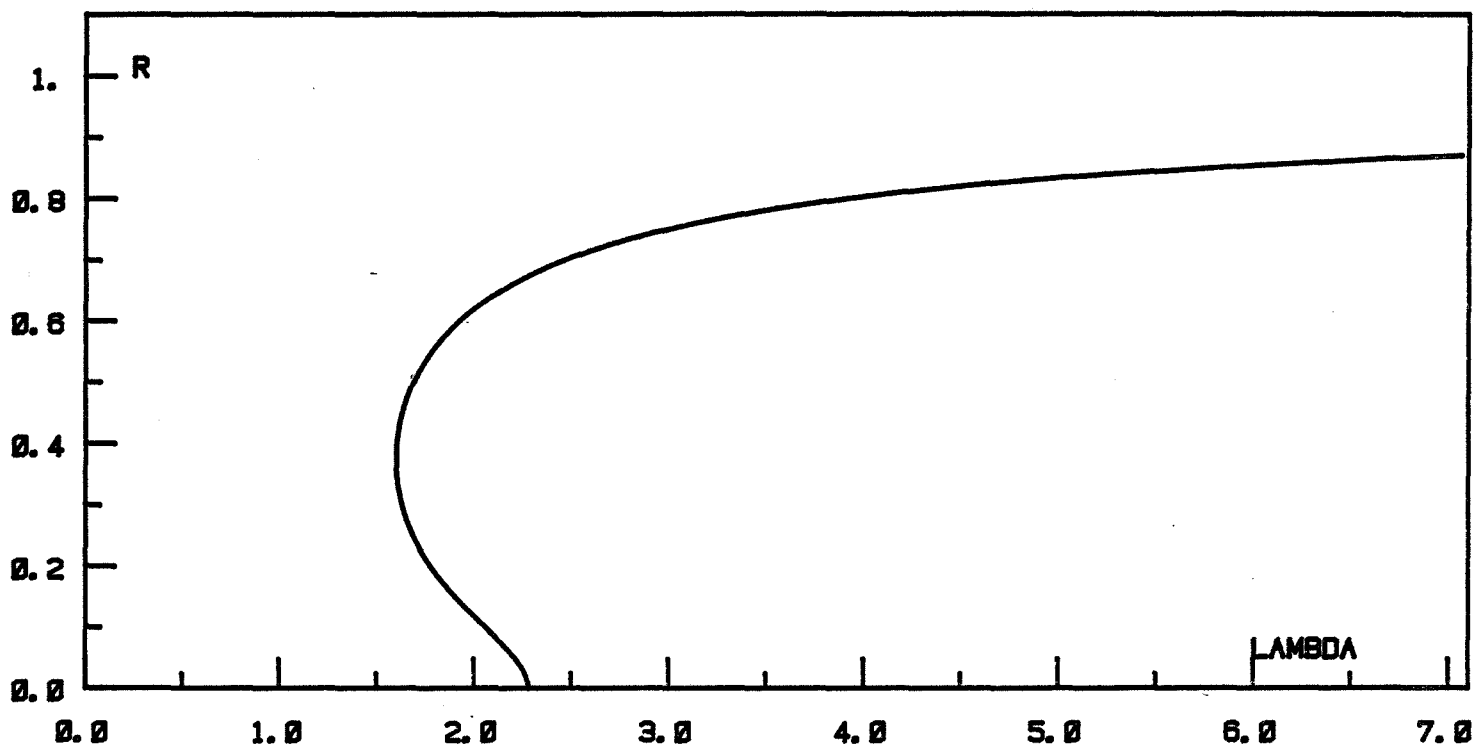


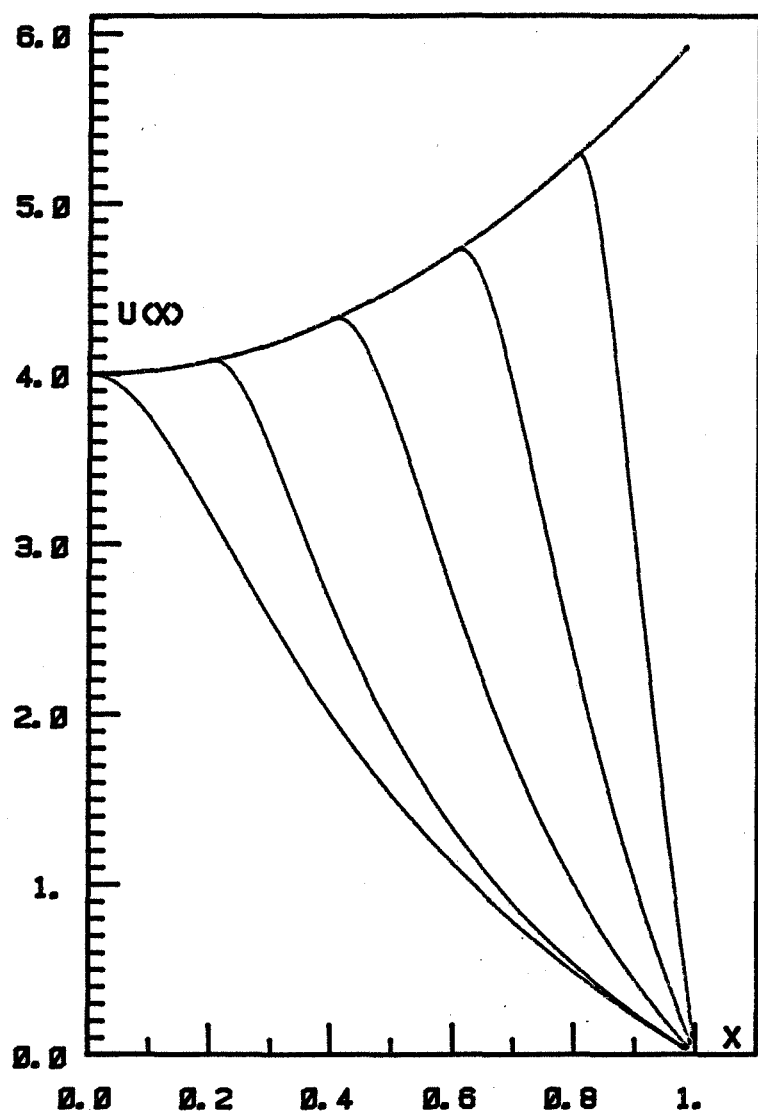
PB CONTINU
 DIMENSION 2
 OBSTACLE = $4 + 2 \cdot X \cdot X$
 DR = $0.5E-2$
 N = 50



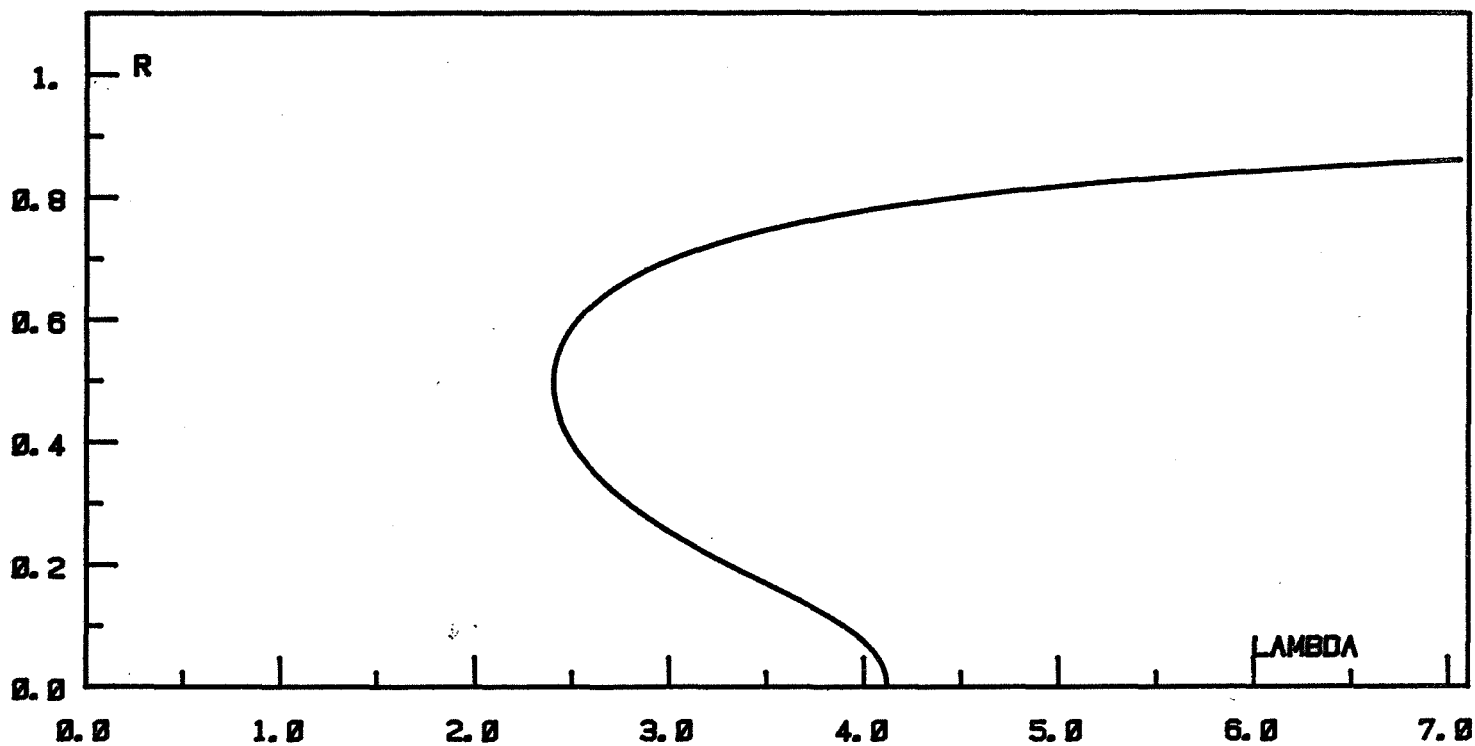


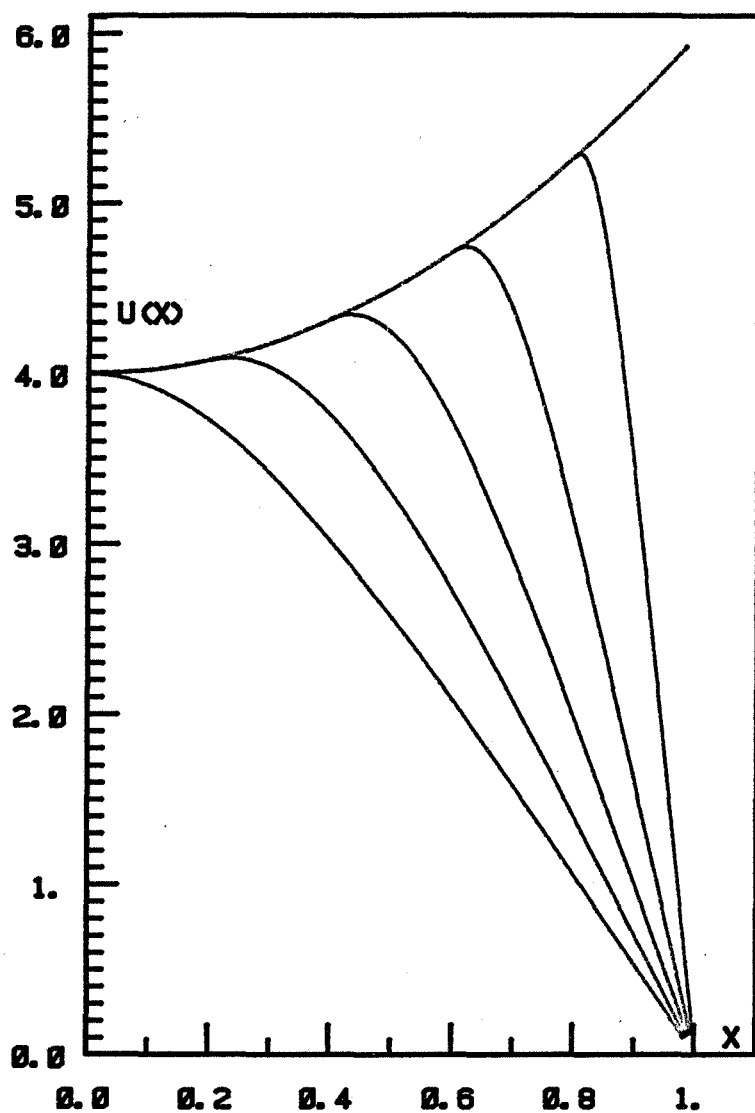
PB CONTINU
 DIMENSION 3
 OBSTACLE = $4 + 2 \cdot X \cdot X$
 DR = $0.5E-2$
 N = 50





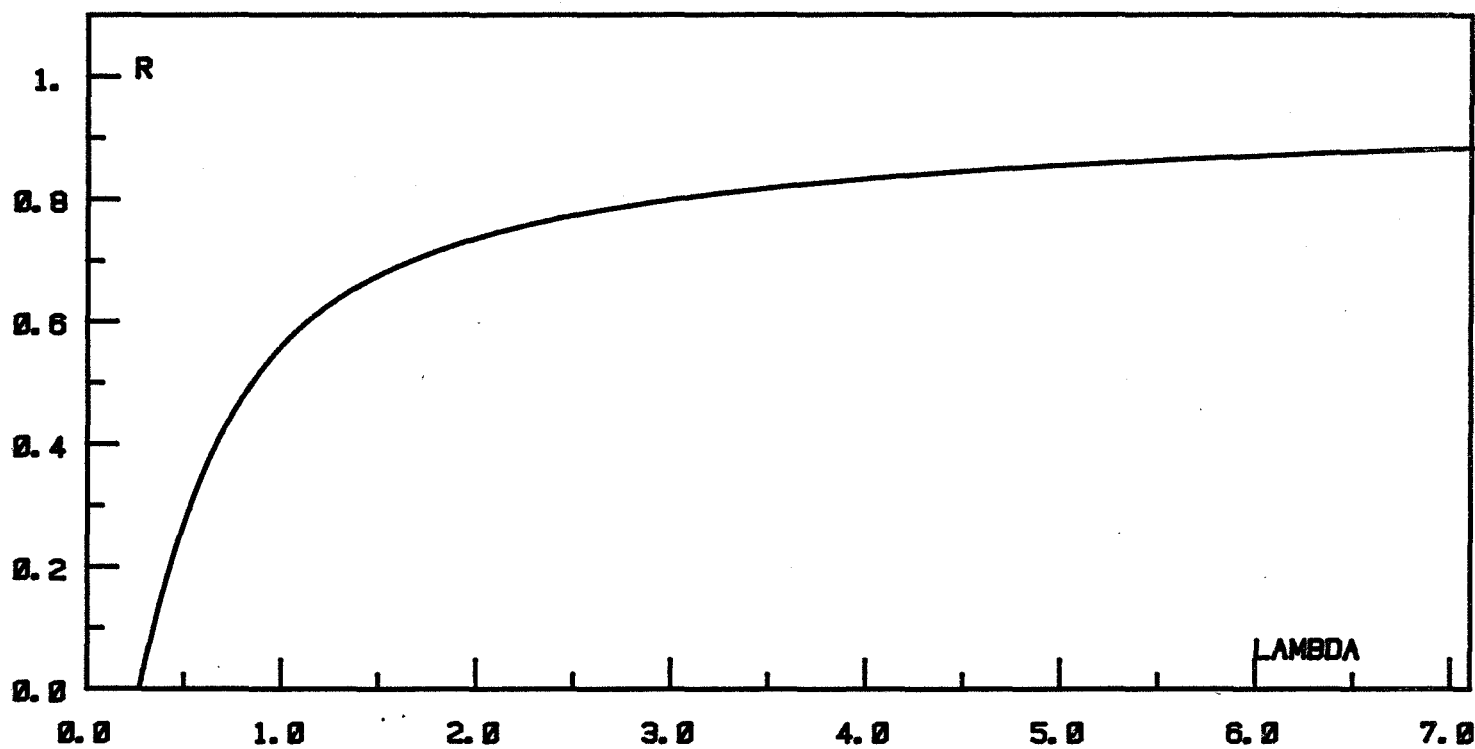
PB CONTINU
 DIMENSION 4
 OBSTACLE = $4 + 2 \cdot X \cdot X$
 DR = $0.5E-2$
 N = 50

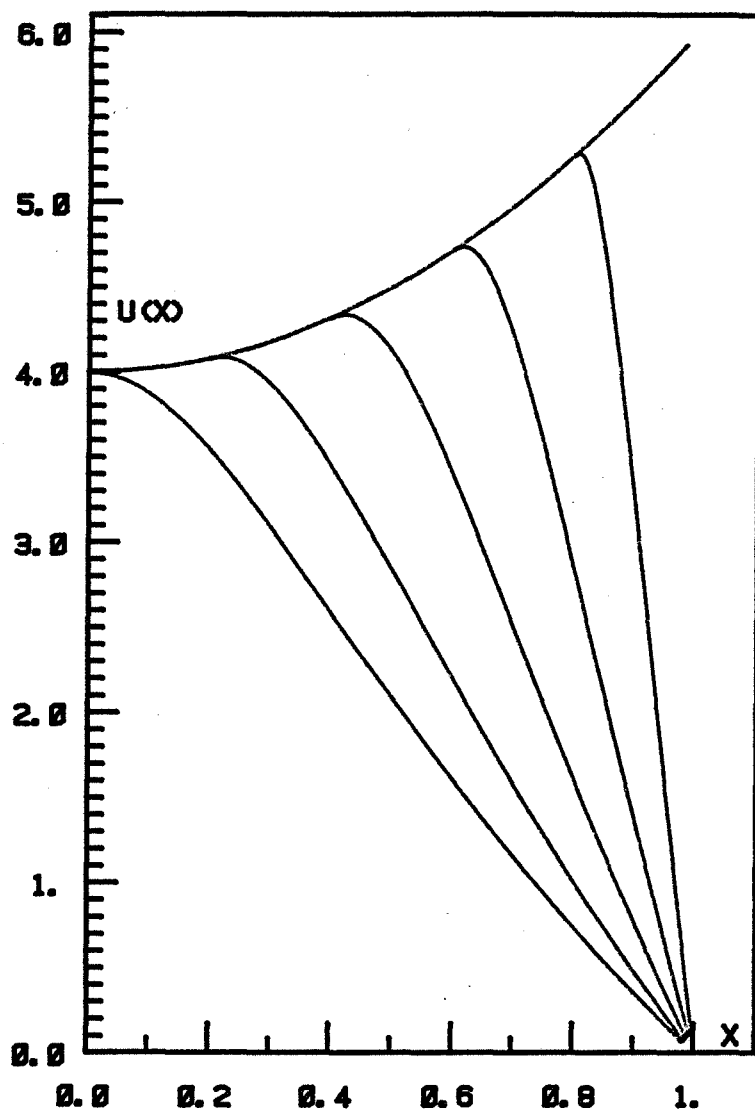




PFL DISCRET
N = 50

DIMENSION 1
OBSTACLE = $4 + 2 \cdot X \cdot X$
DR = $0.5E-2$





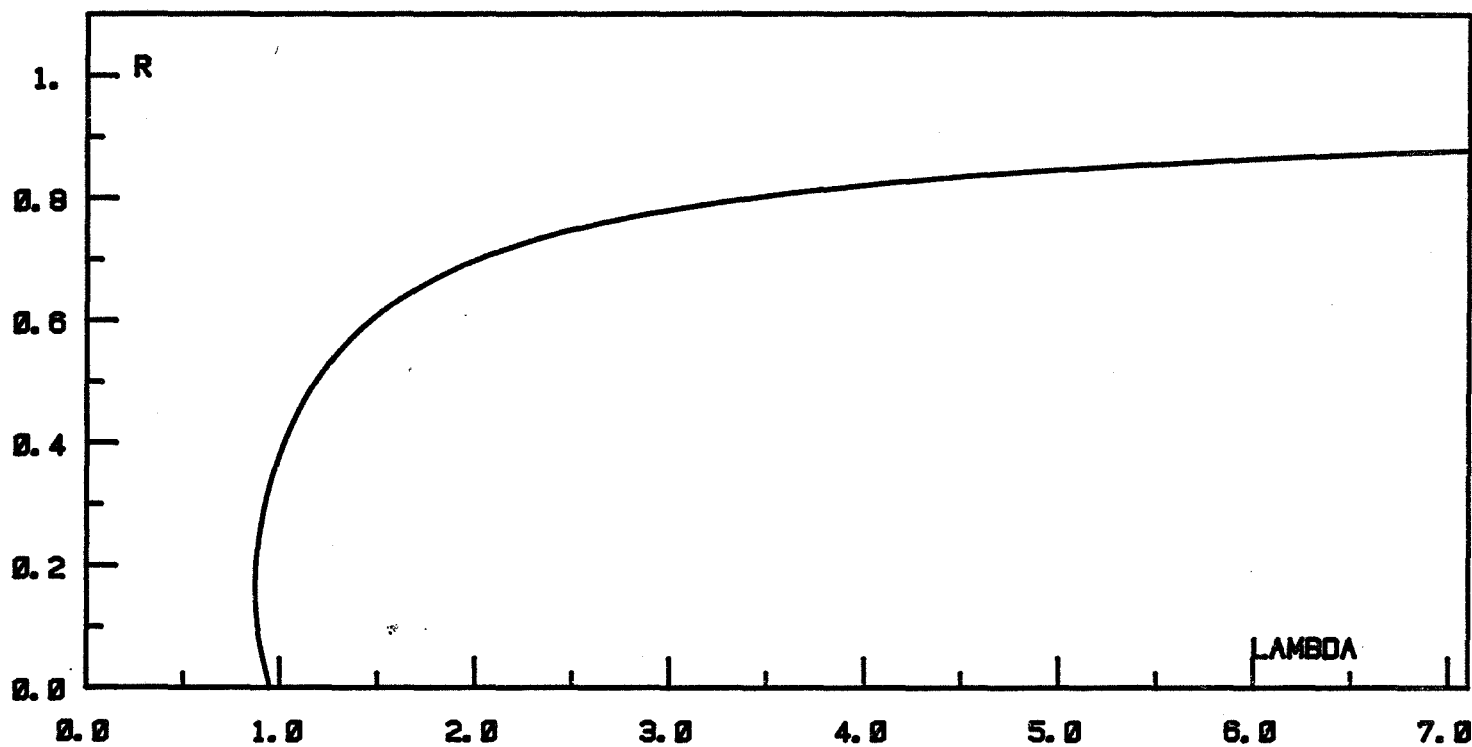
PFL DISCRET

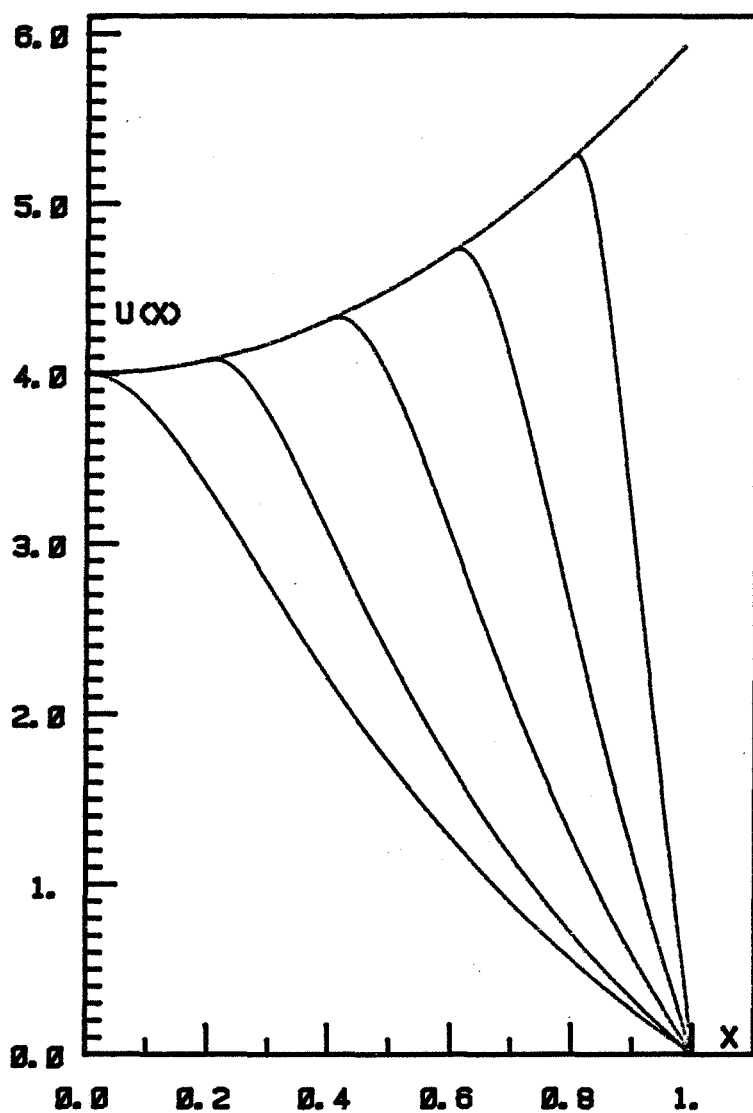
$N = 50$

DIMENSION 2

OBSTACLE = $4 + 2 * X * X$

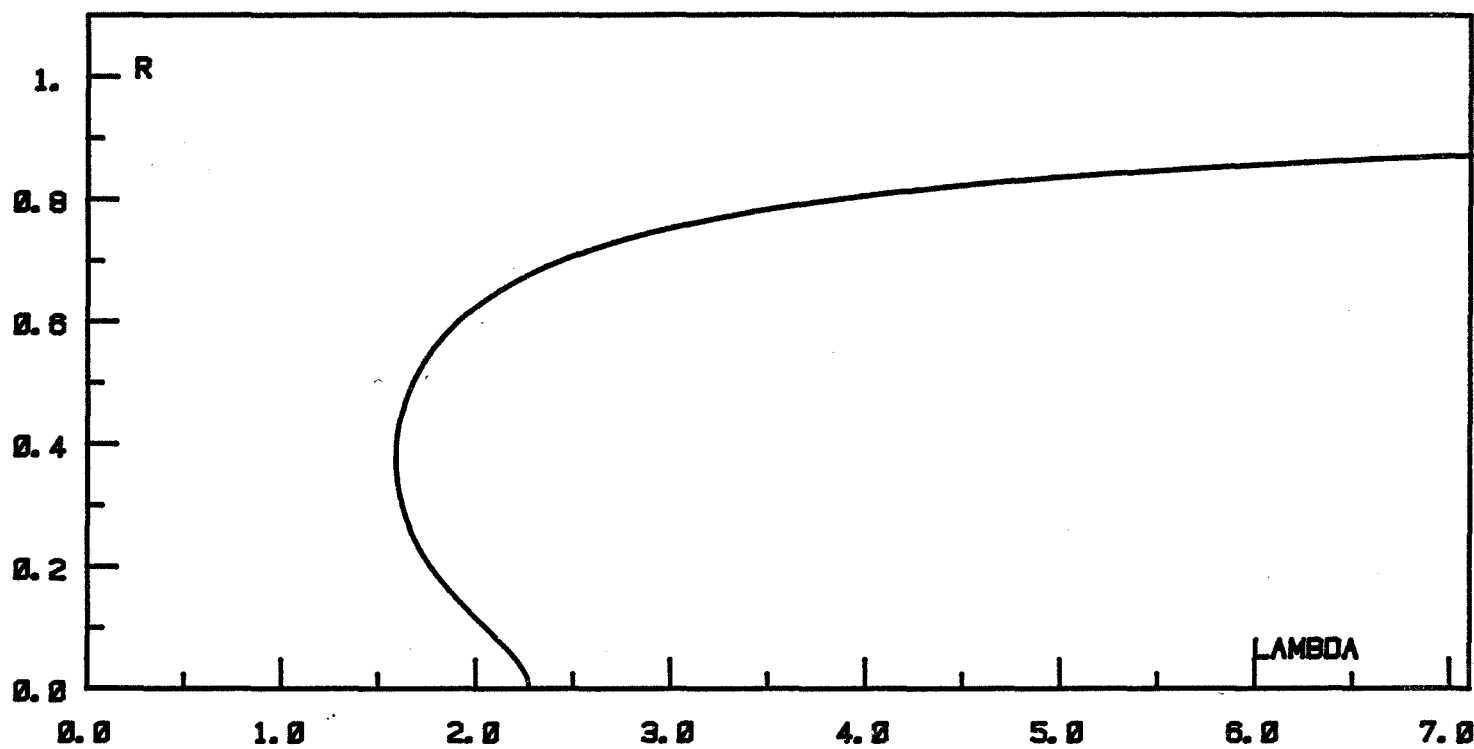
$DR = 0.5E-2$

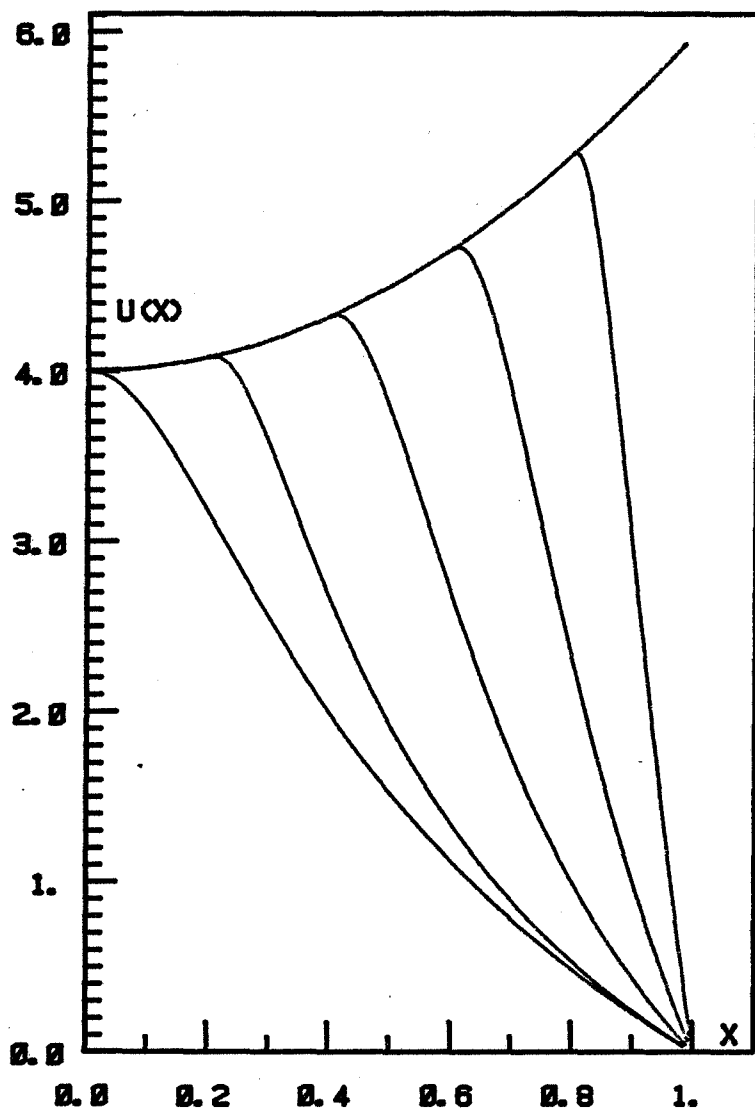




PFL DISCRET
N = 50

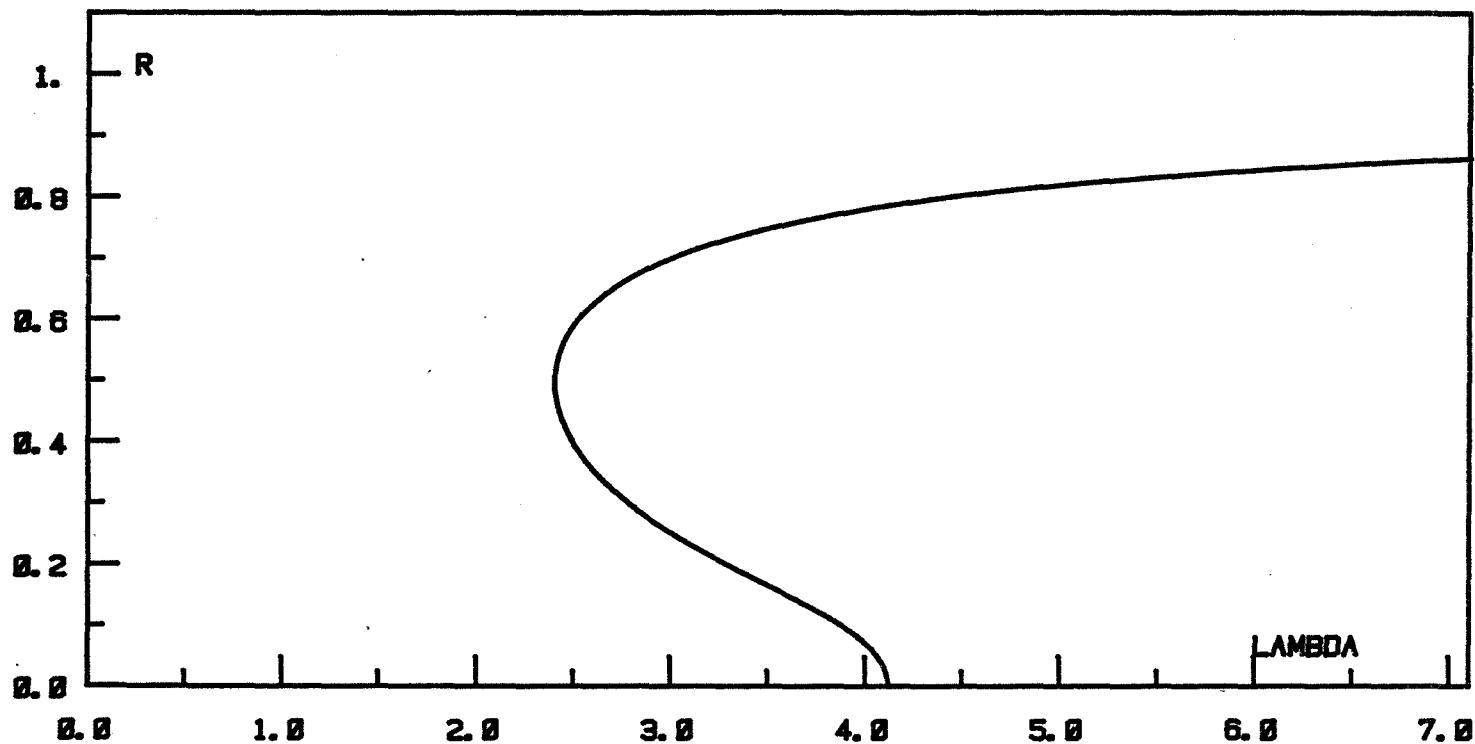
DIMENSION 3
OBSTACLE = $4 + 2*X*X$
DR = $0.5E-2$

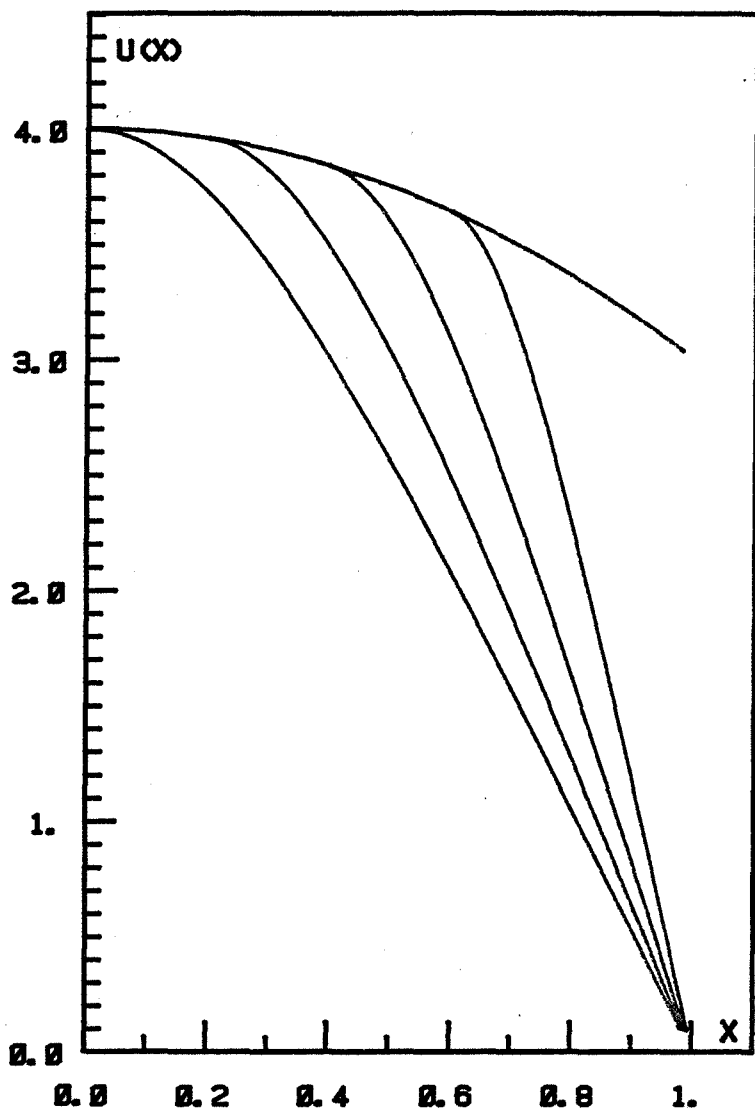




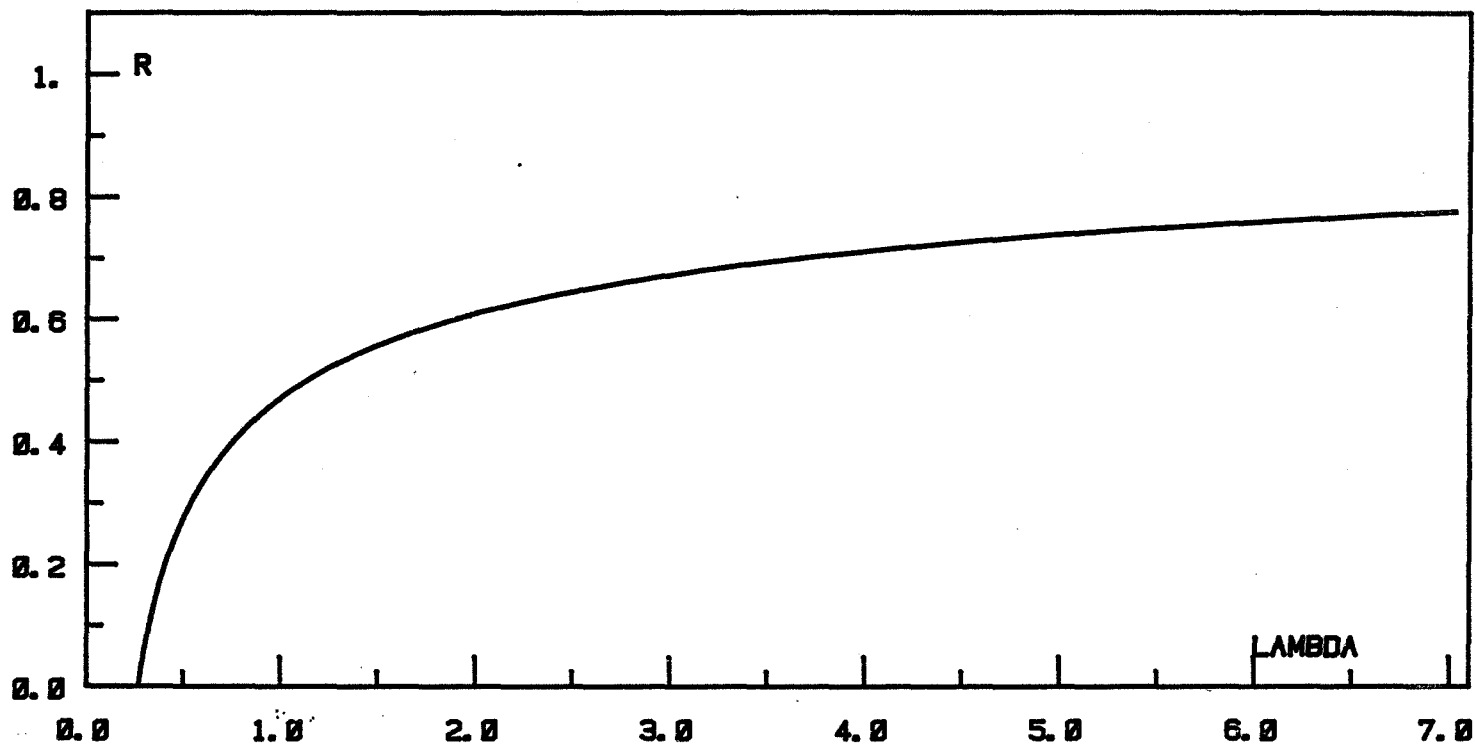
PFL DISCRET
 $N = 50$

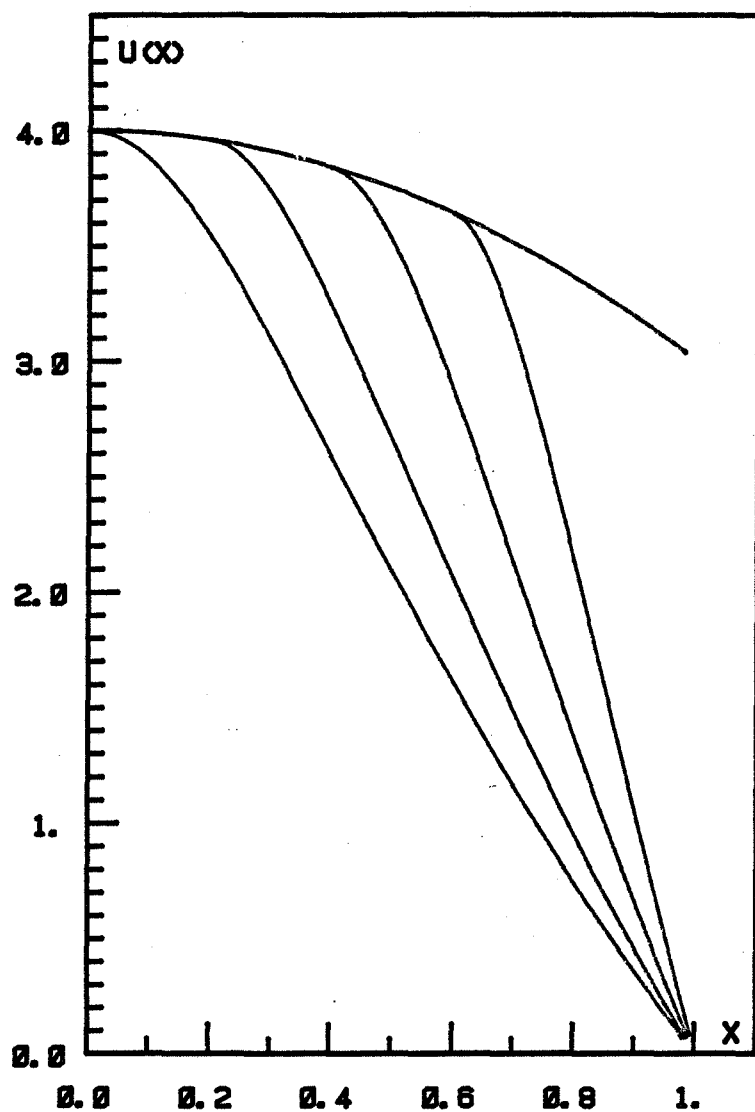
DIMENSION 4
 OBSTACLE = $4 + 2 \cdot X \cdot X$
 $DR = 0.5E-2$



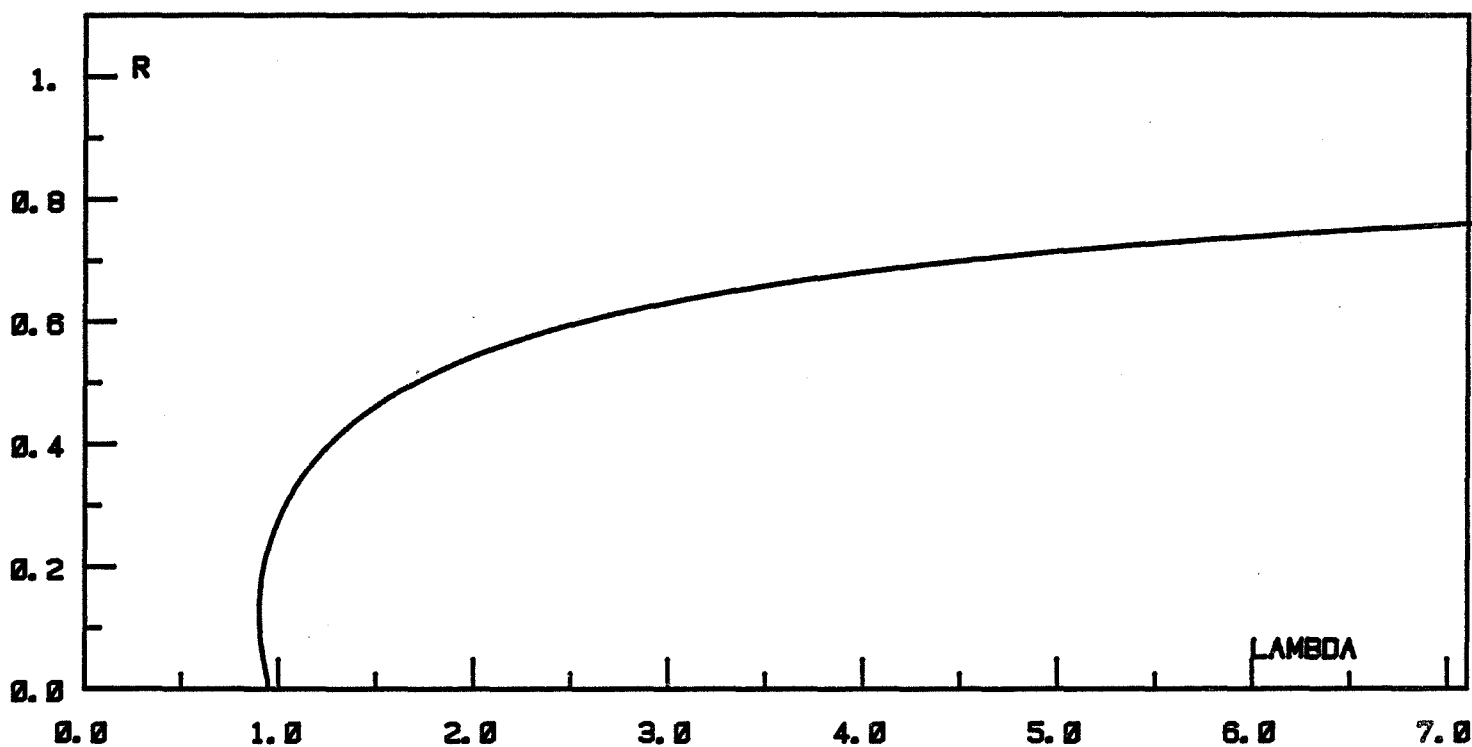


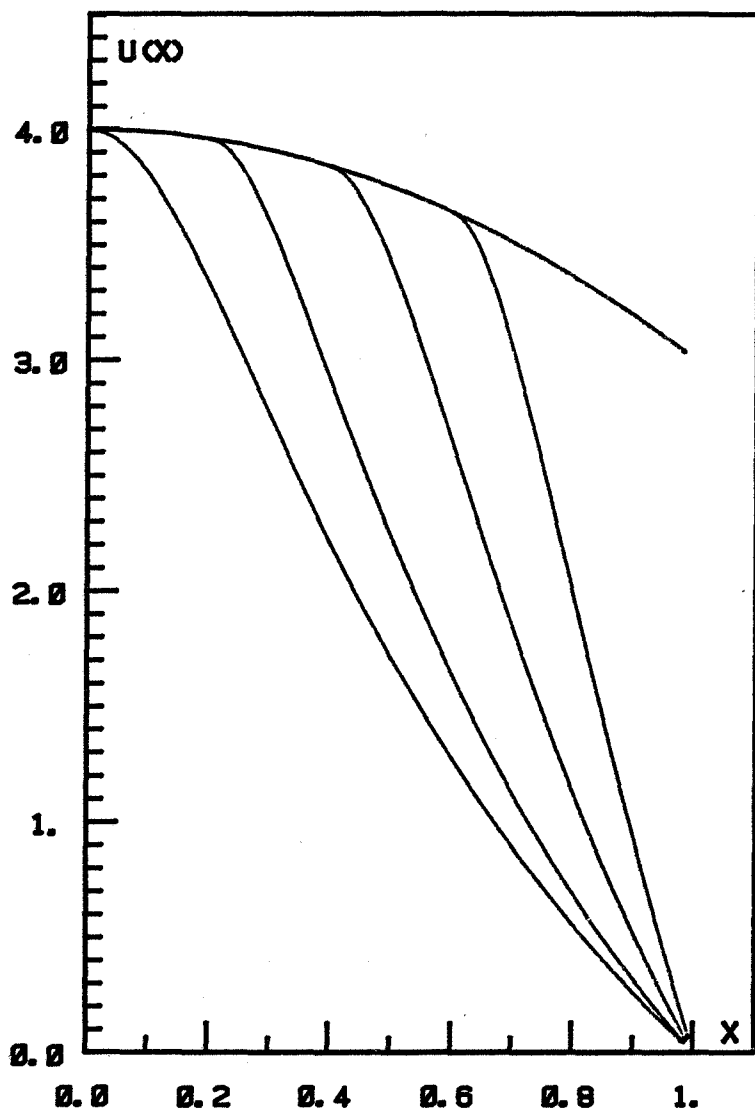
PB CONTINU
 DIMENSION 1
 OBSTACLE = $4 - X^2$
 $DR = 0.5E-2$
 $N = 50$



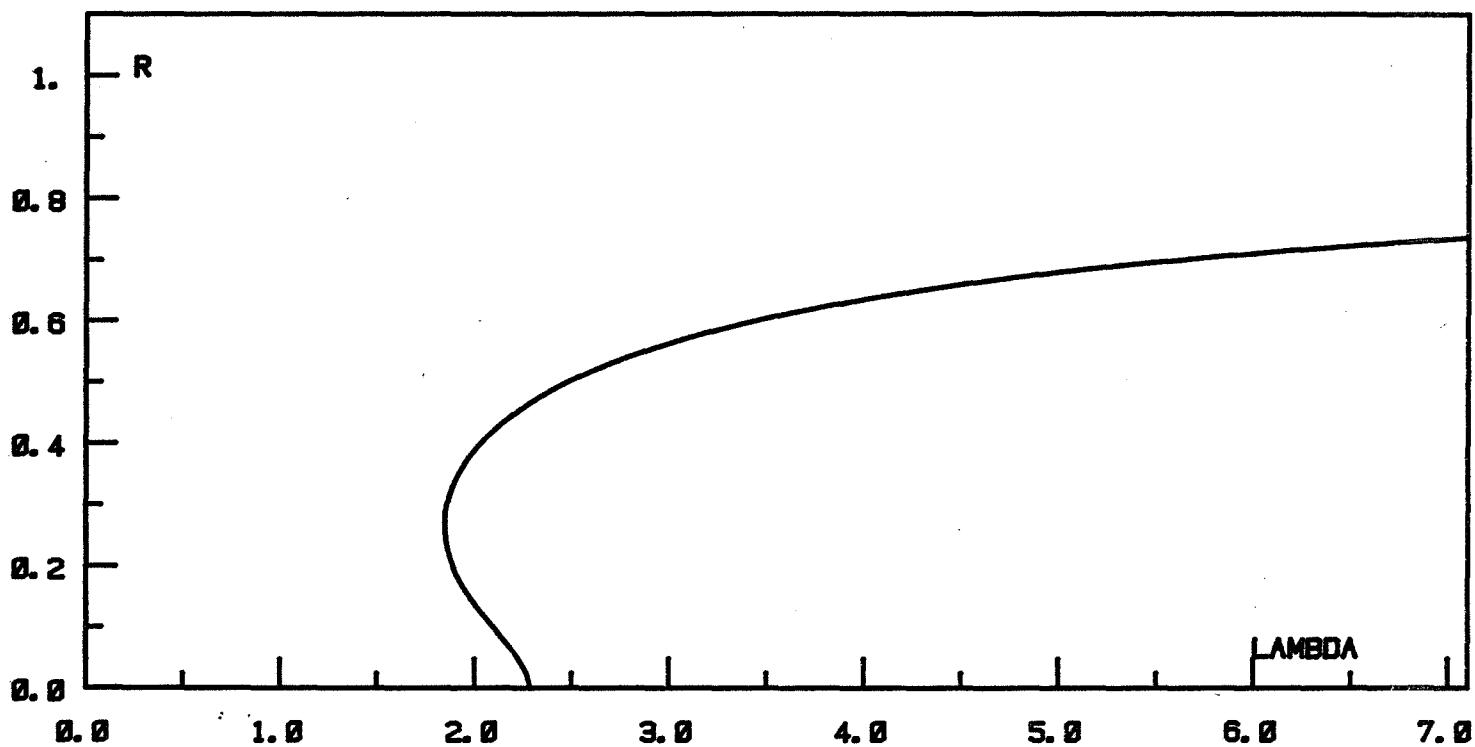


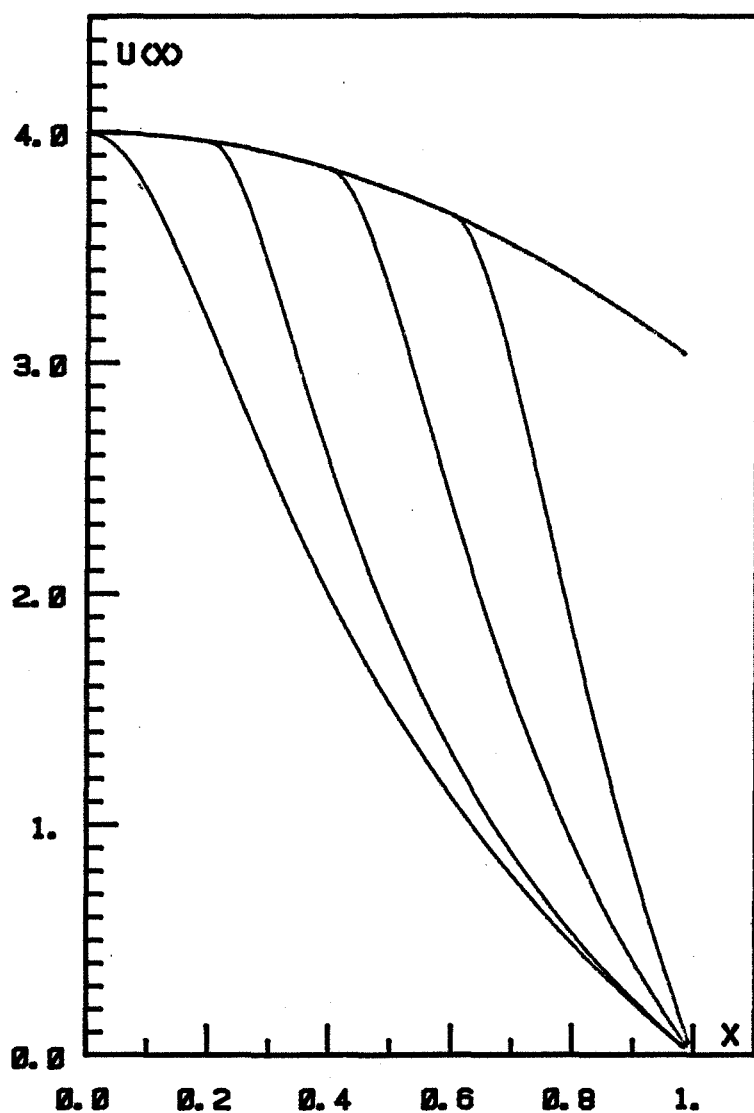
PB CONTINU
 DIMENSION 2
 OBSTACLE = $4 - X^2$
 $DR = 0.5E-2$
 $N = 50$



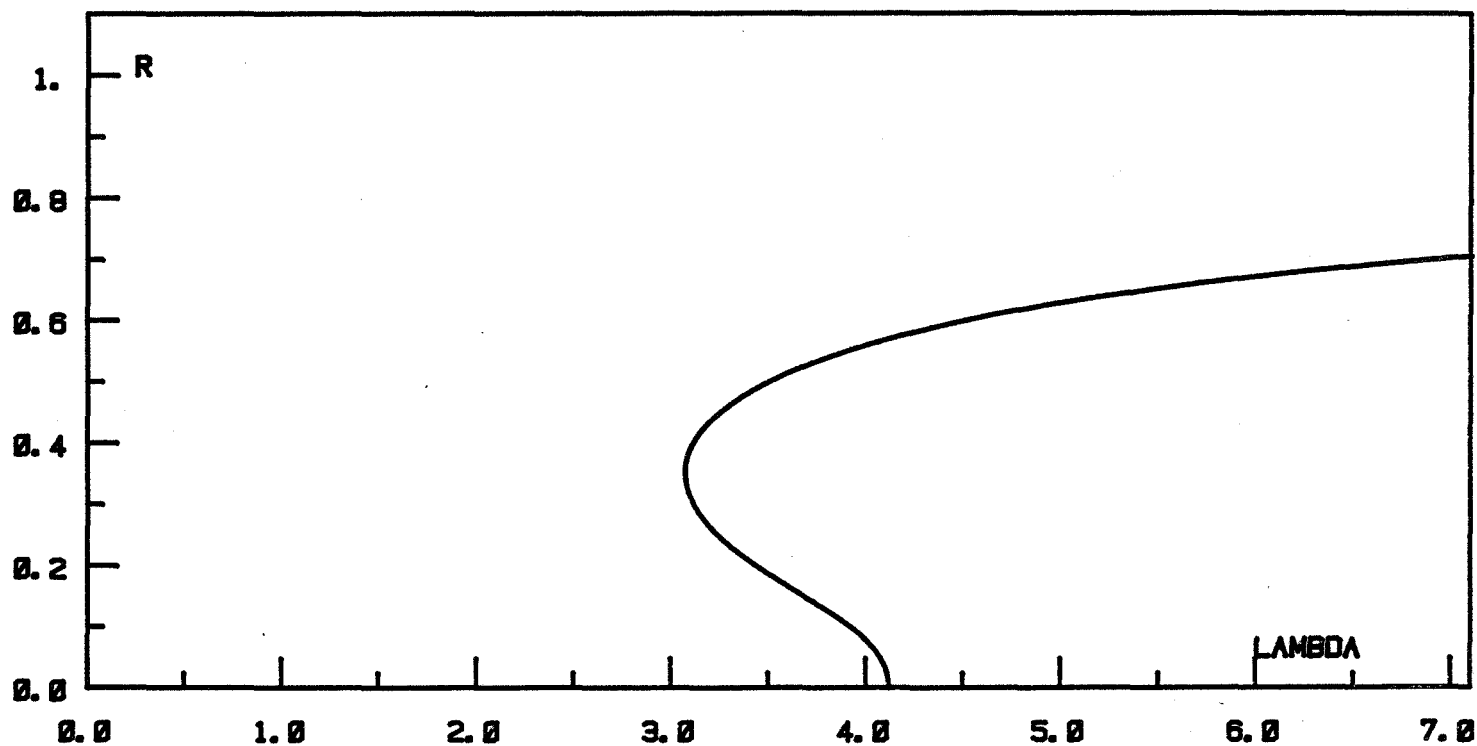


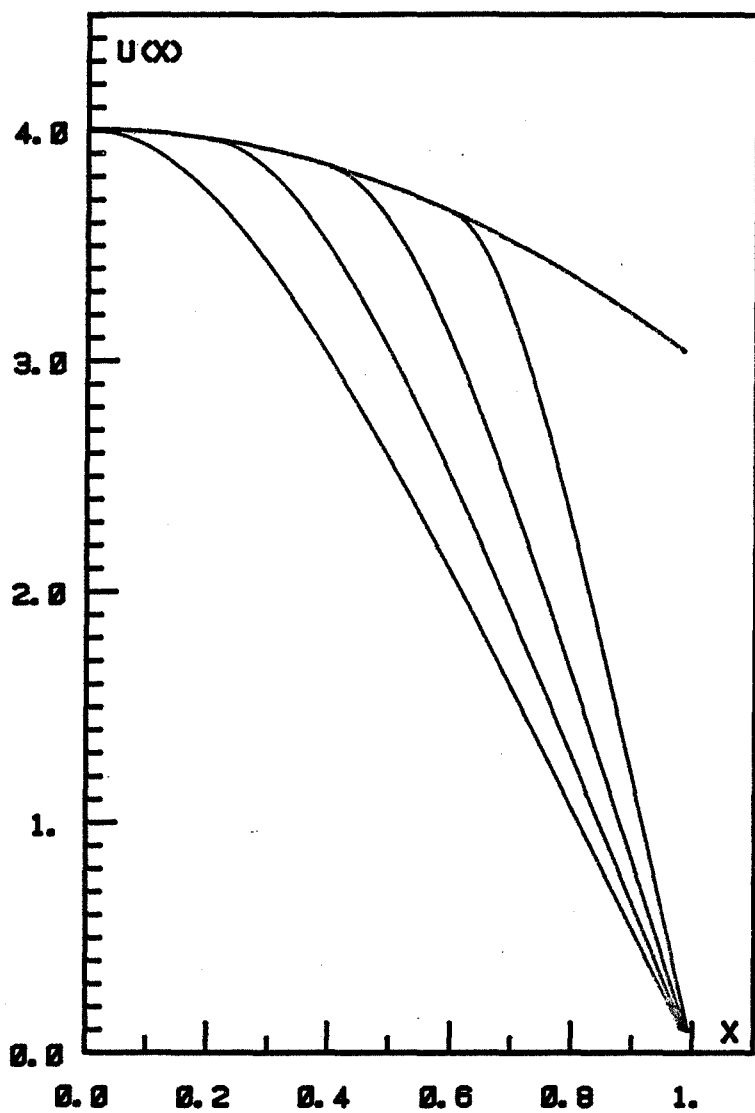
PB CONTINU
 DIMENSION 3
 OBSTACLE = $4 - X^2$
 $DR = 0.5E-2$
 $N = 50$





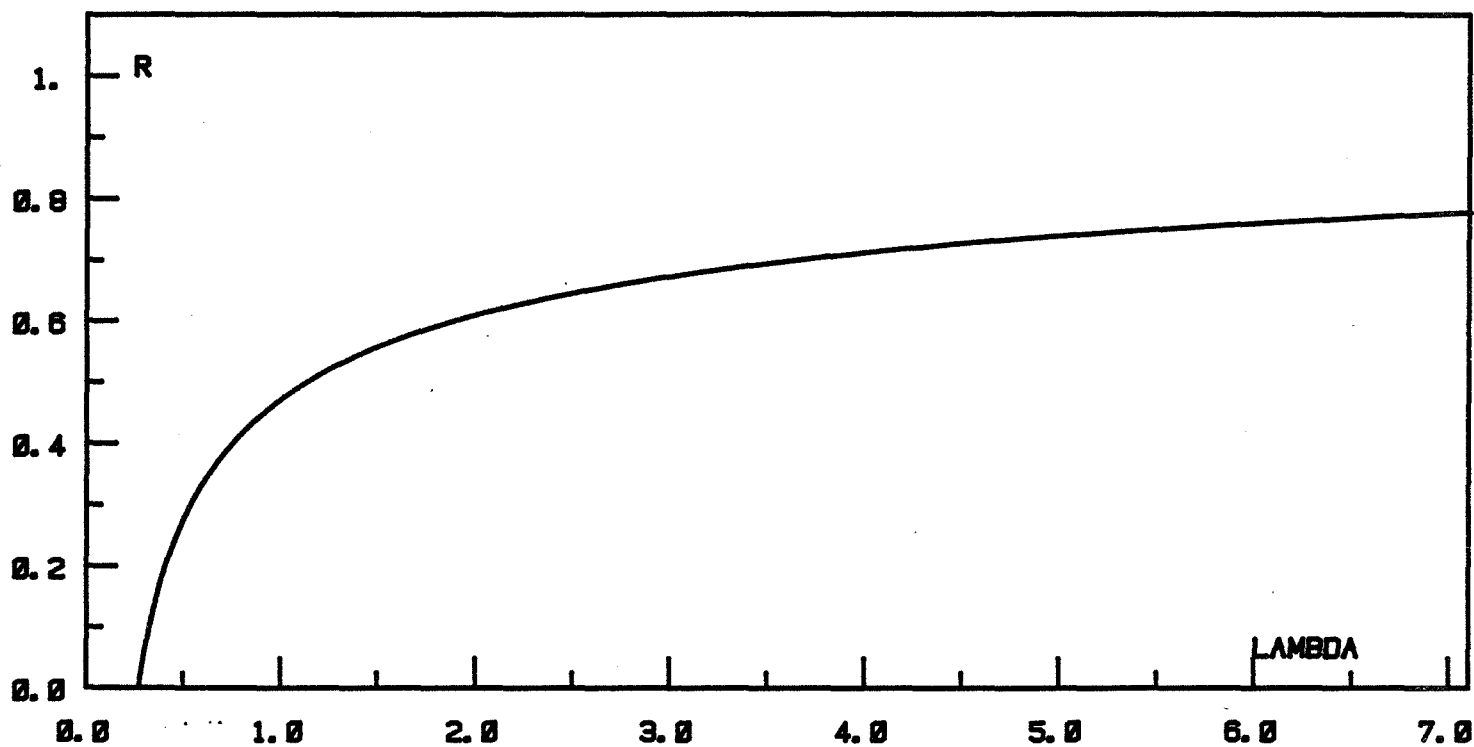
PB CONTINU
 DIMENSION 4
 OBSTACLE = $4 - X^2$
 $DR = 0.5E-2$
 $N = 50$

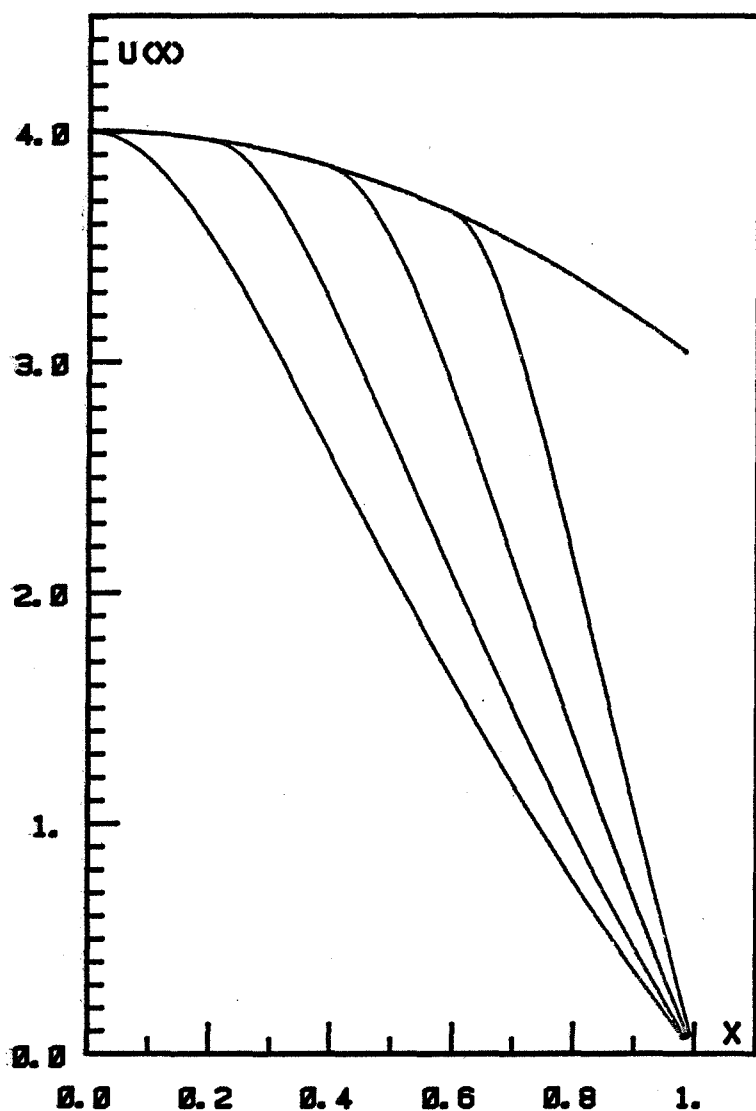




PFL DISCRET
 $N = 50$

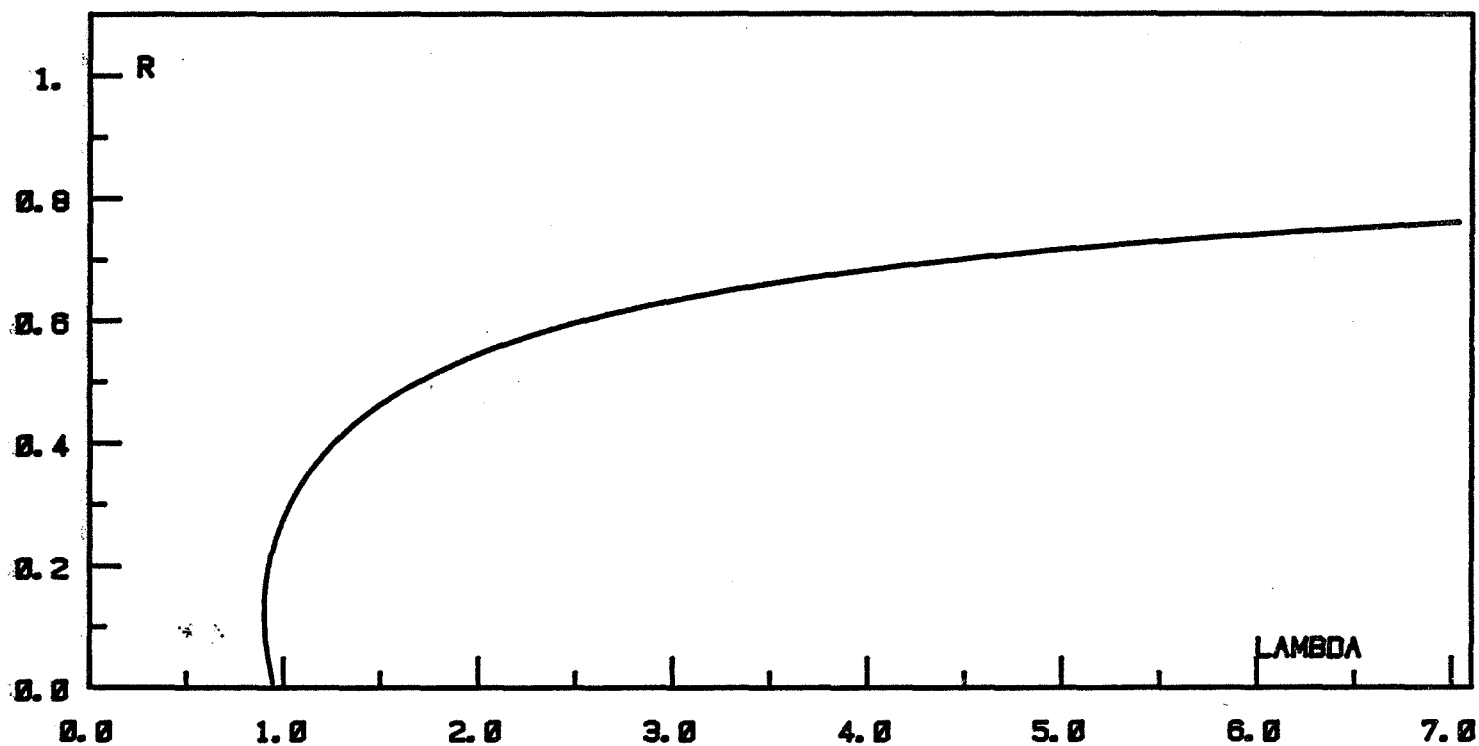
DIMENSION 1
 OBSTACLE = $4 - X^2$
 $DR = 0.5E-2$

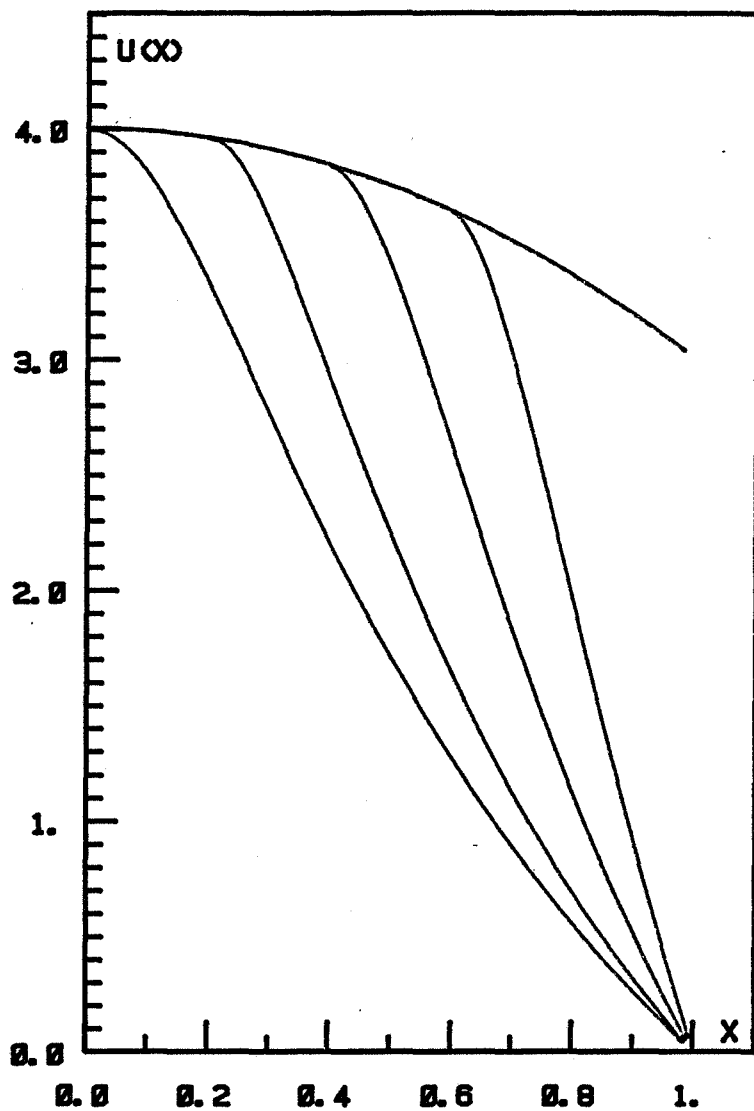




PFL DISCRET
 $N = 50$

DIMENSION 2
 OBSTACLE = $4 - X * X$
 $DR = 0.5E-2$





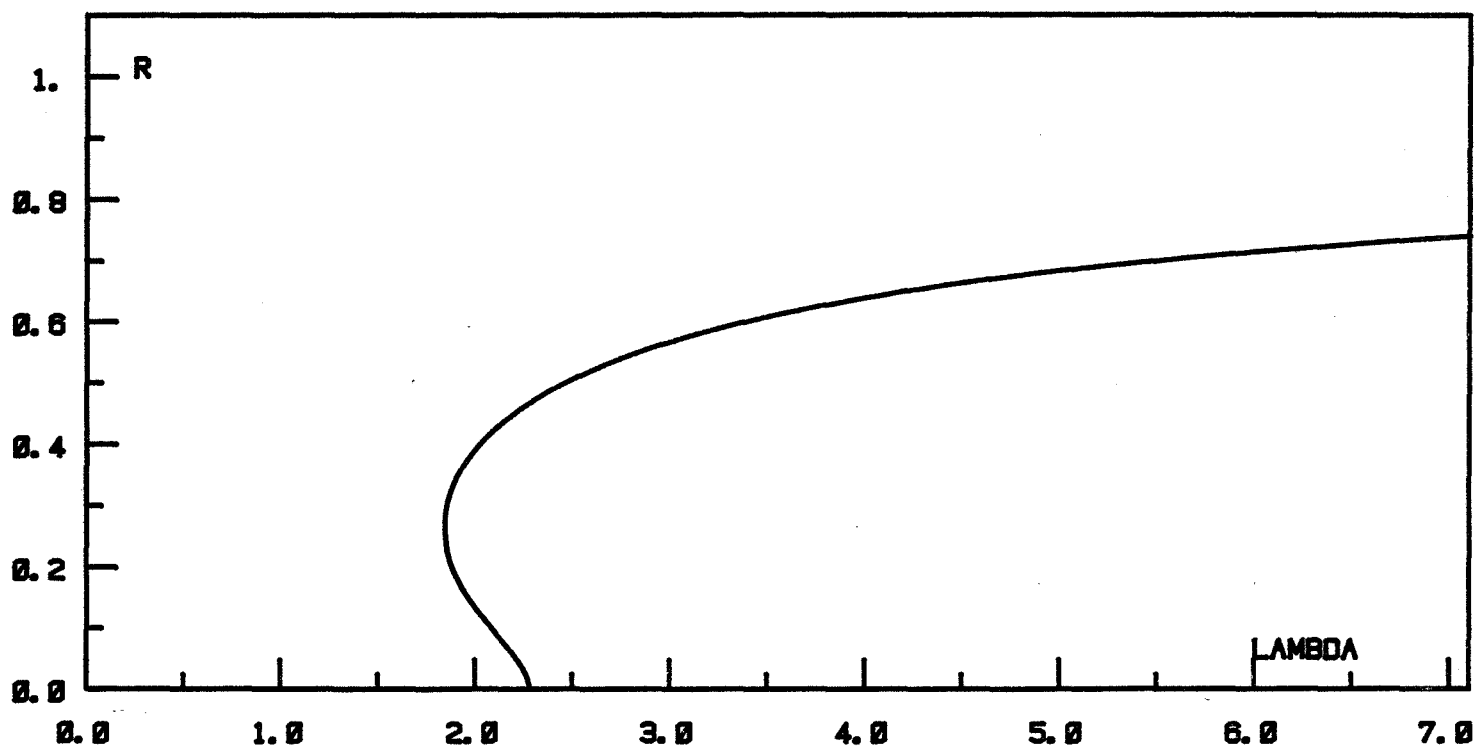
PFL DISCRET

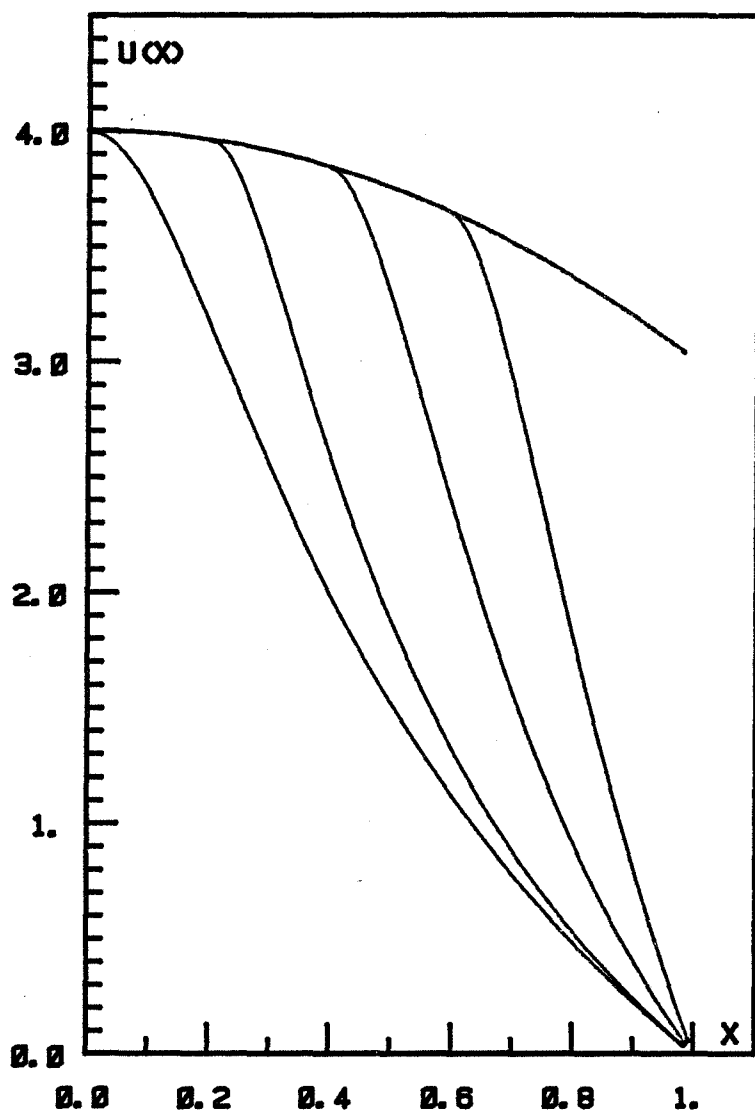
$N = 50$

DIMENSION 3

OBSTACLE = $4 - X * X$

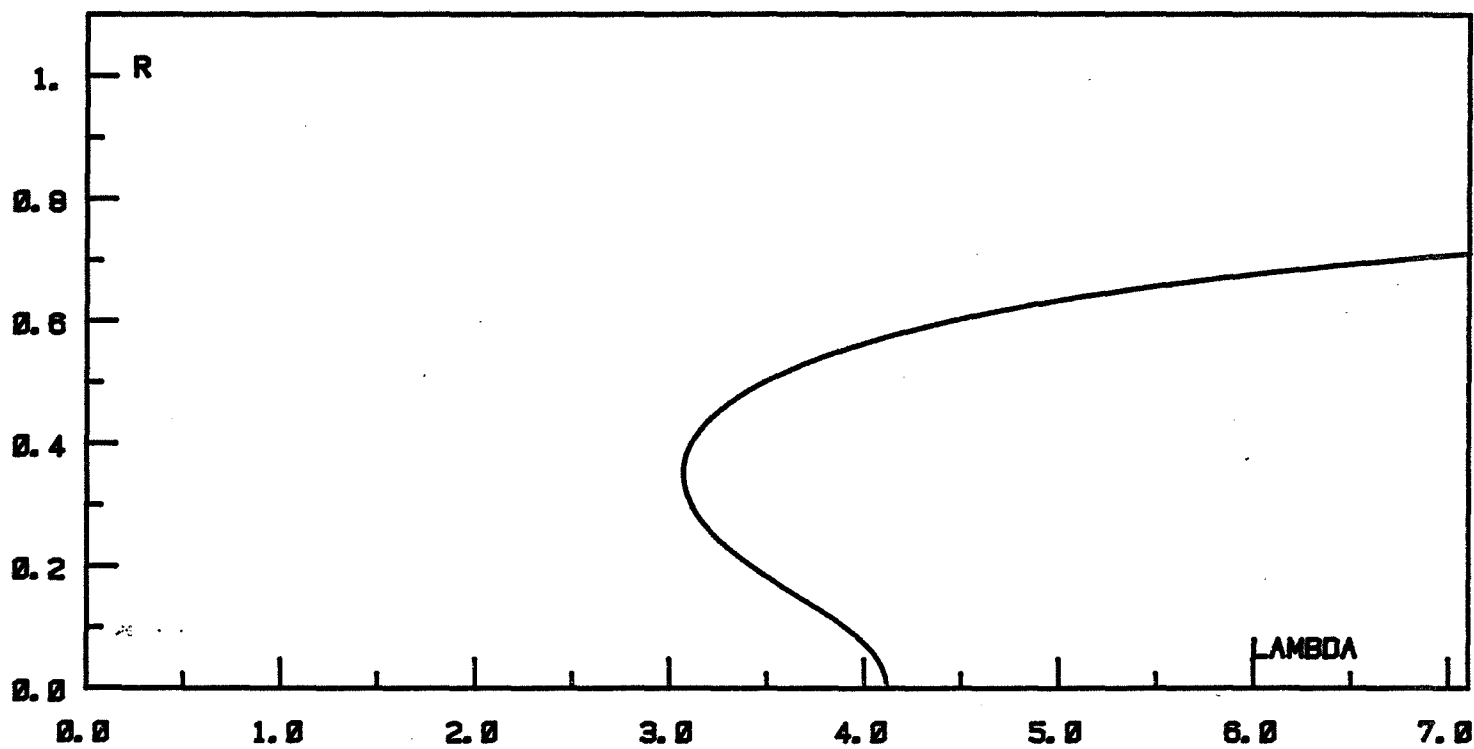
$DR = 0.5E-2$

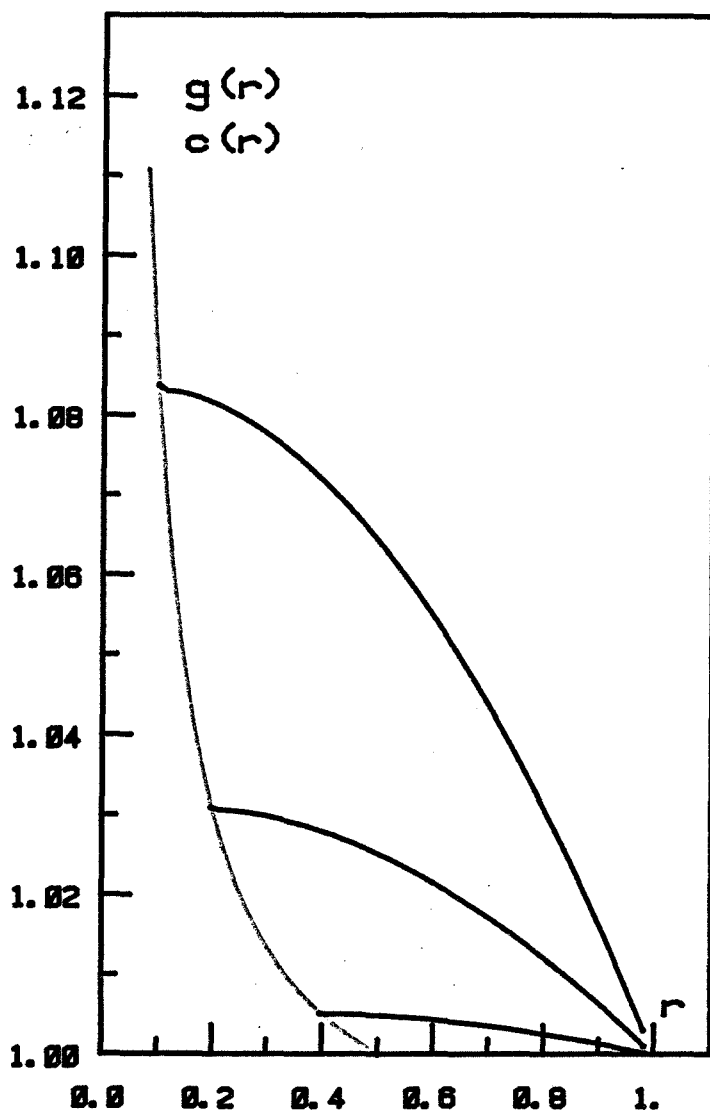




PFL DISCRET
N = 50

DIMENSION 4
OBSTACLE = $4 - X \cdot X$
DR = $0.5E-2$





DIMENSION 3

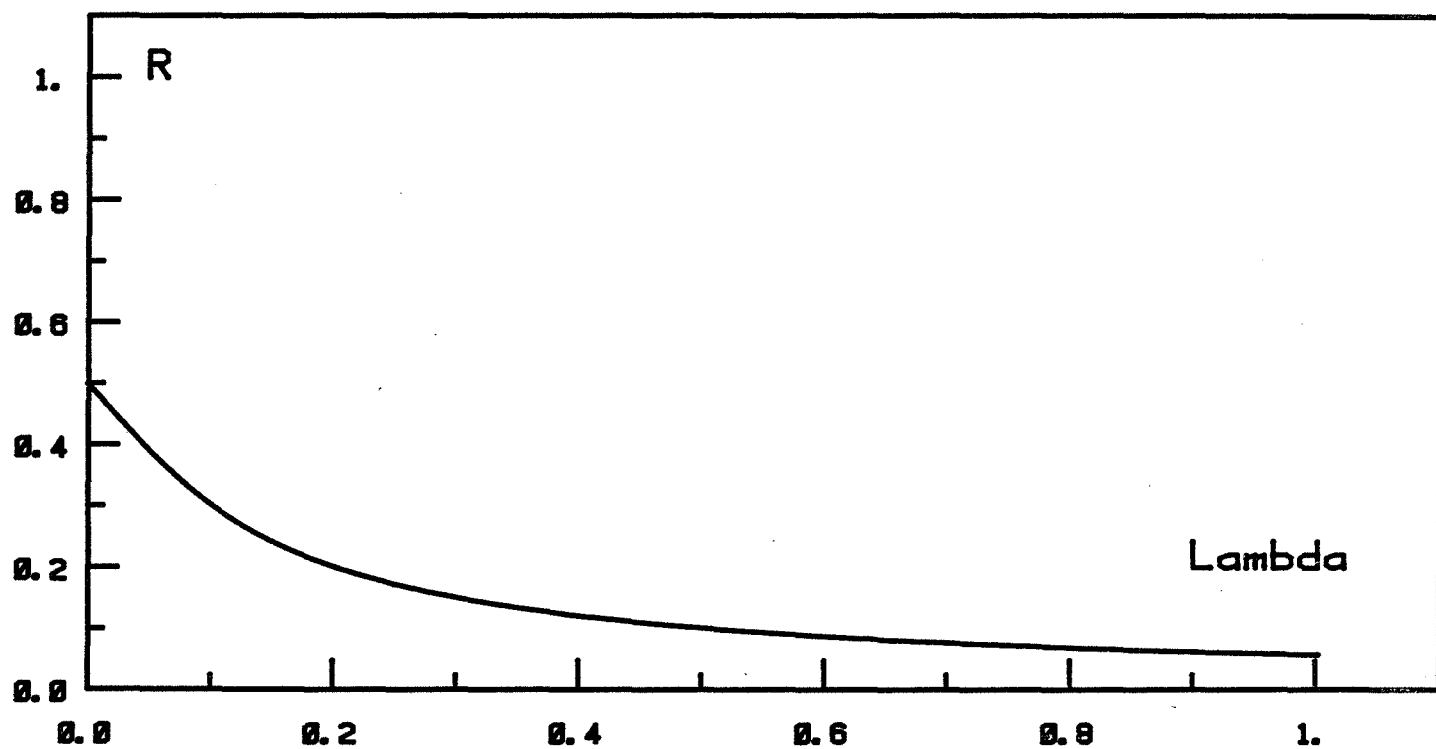
f = cte = 1

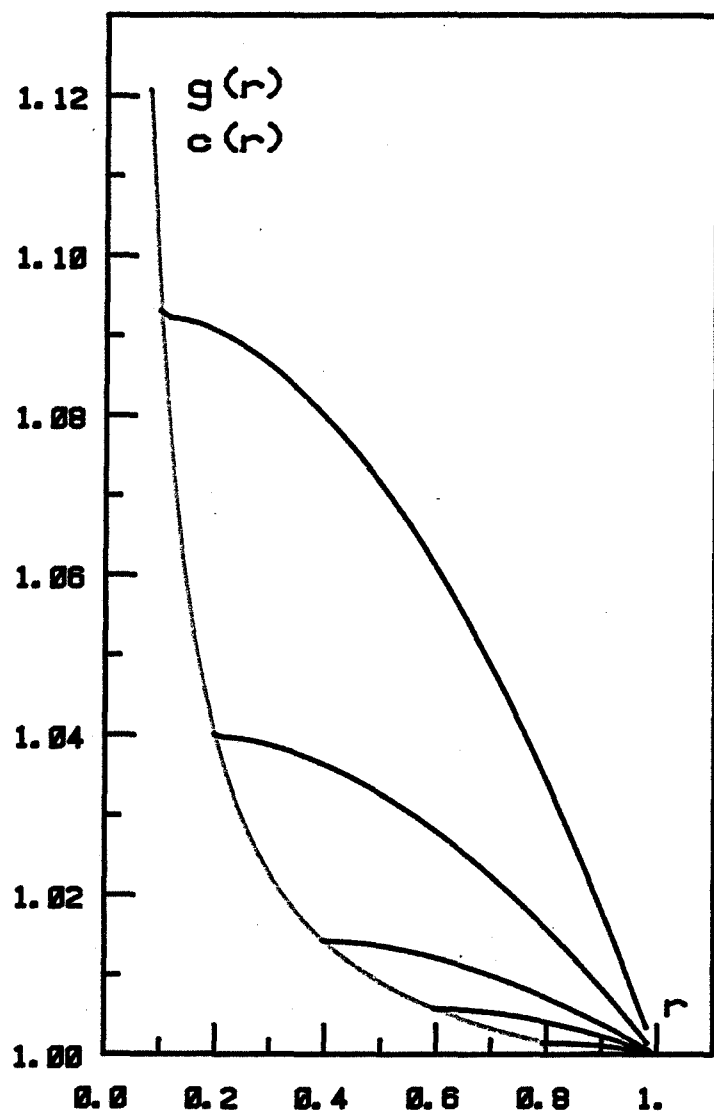
$g = \beta \exp(\delta/r)$

Alpha Beta Delta

0.0000 0.9802 0.0100

N = 50





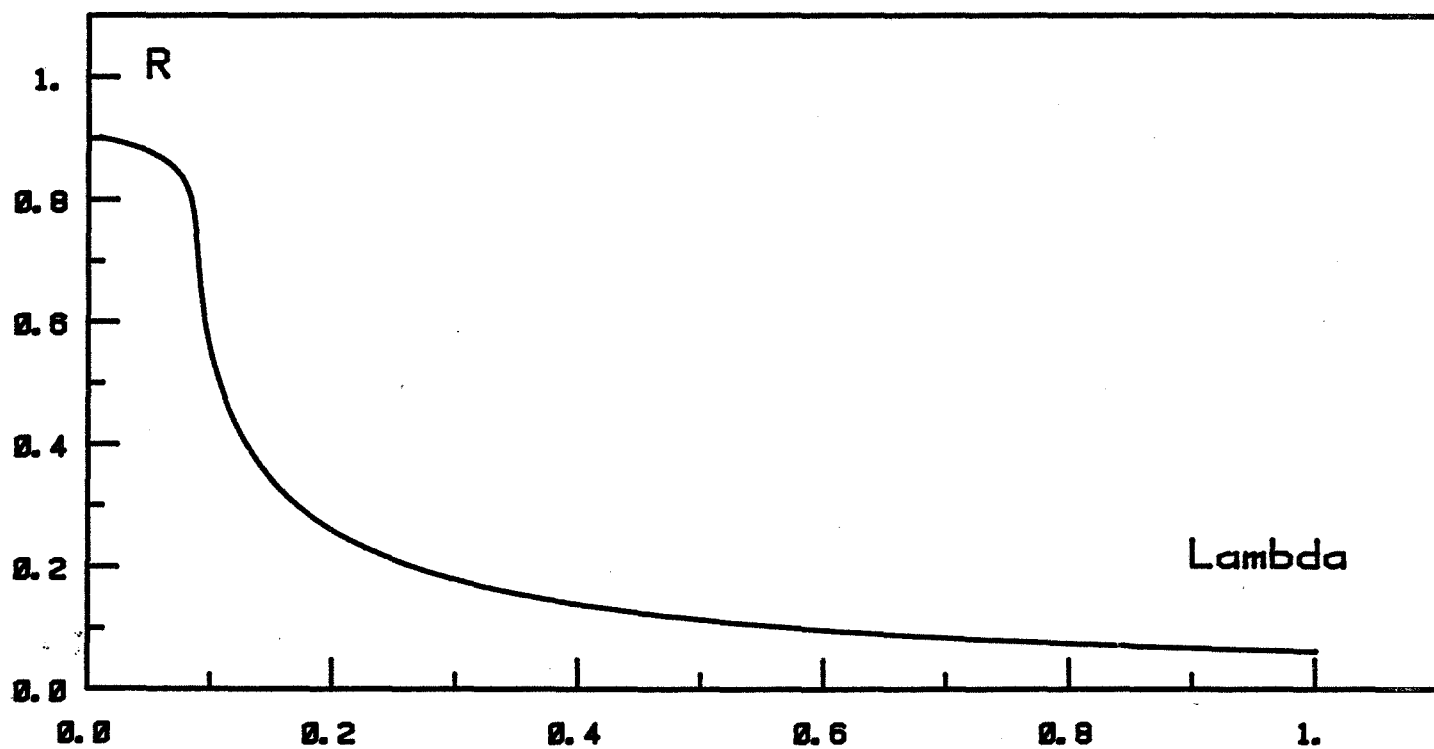
DIMENSION 3

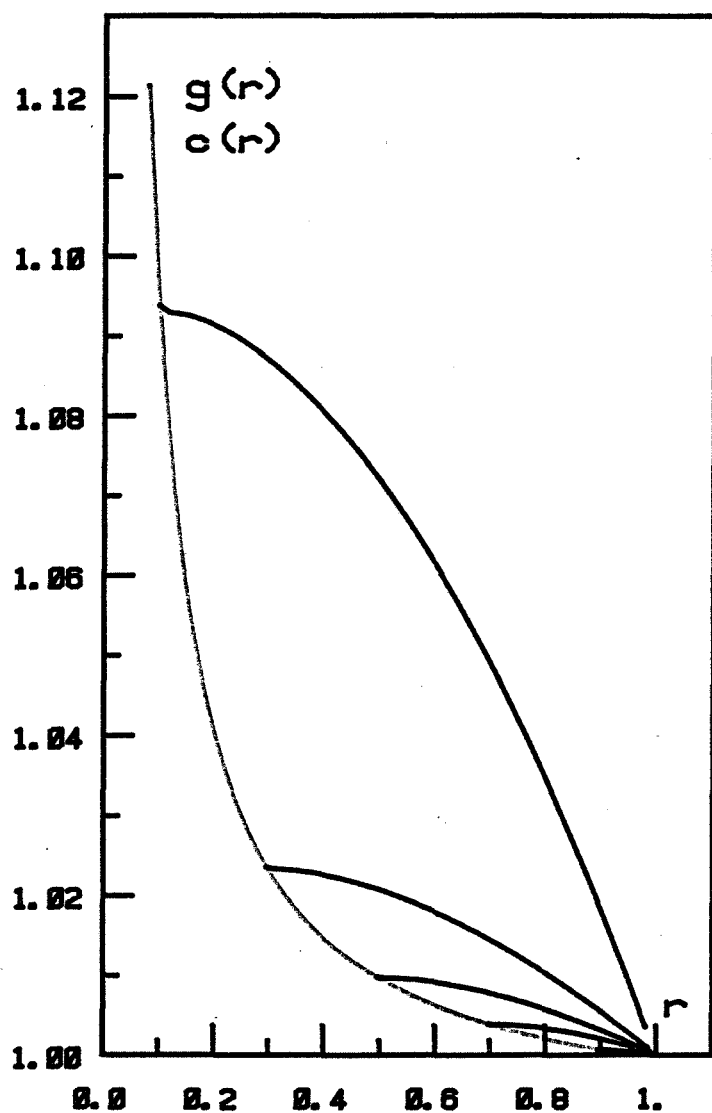
f = cte = 1

$g = \text{beta} \exp(\text{delta}/r)$

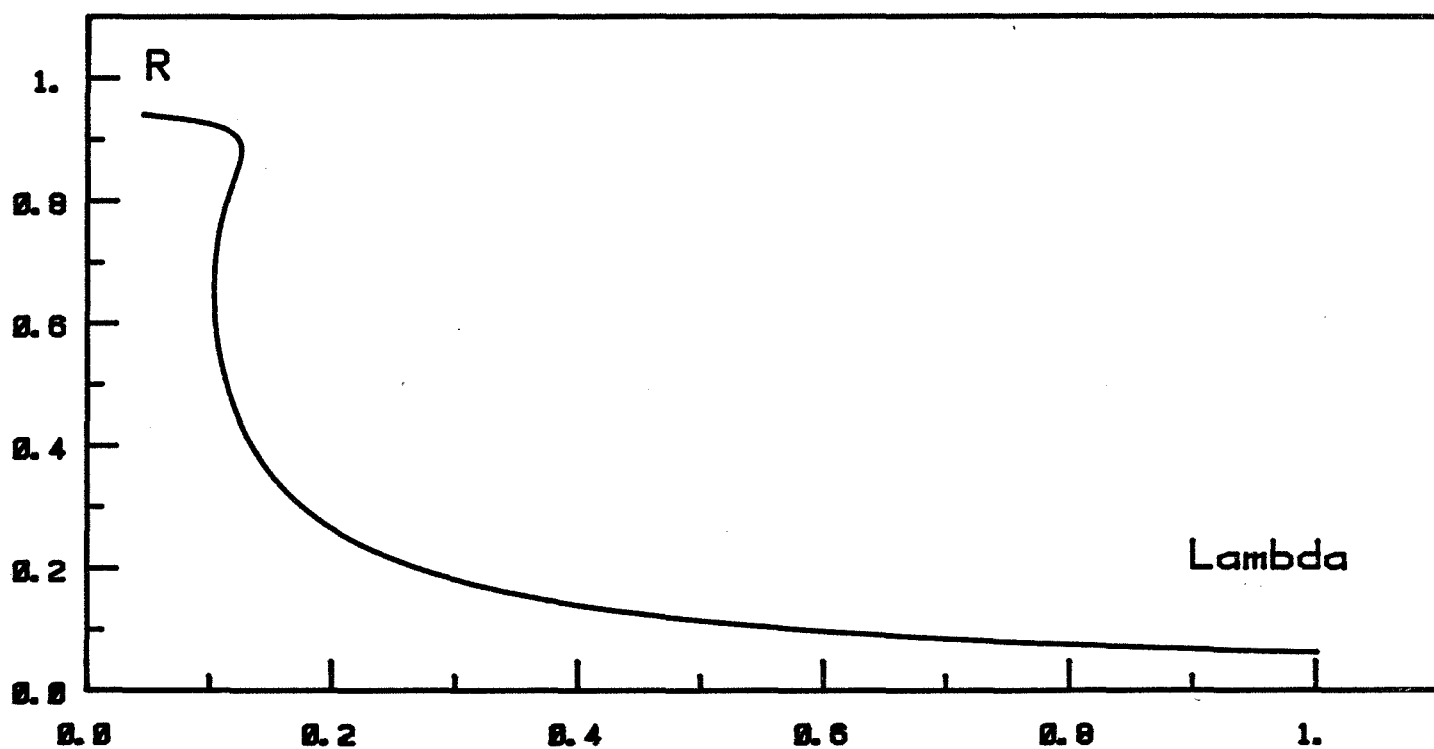
Alpha	Beta	Delta
0.0000	0.9890	0.0100

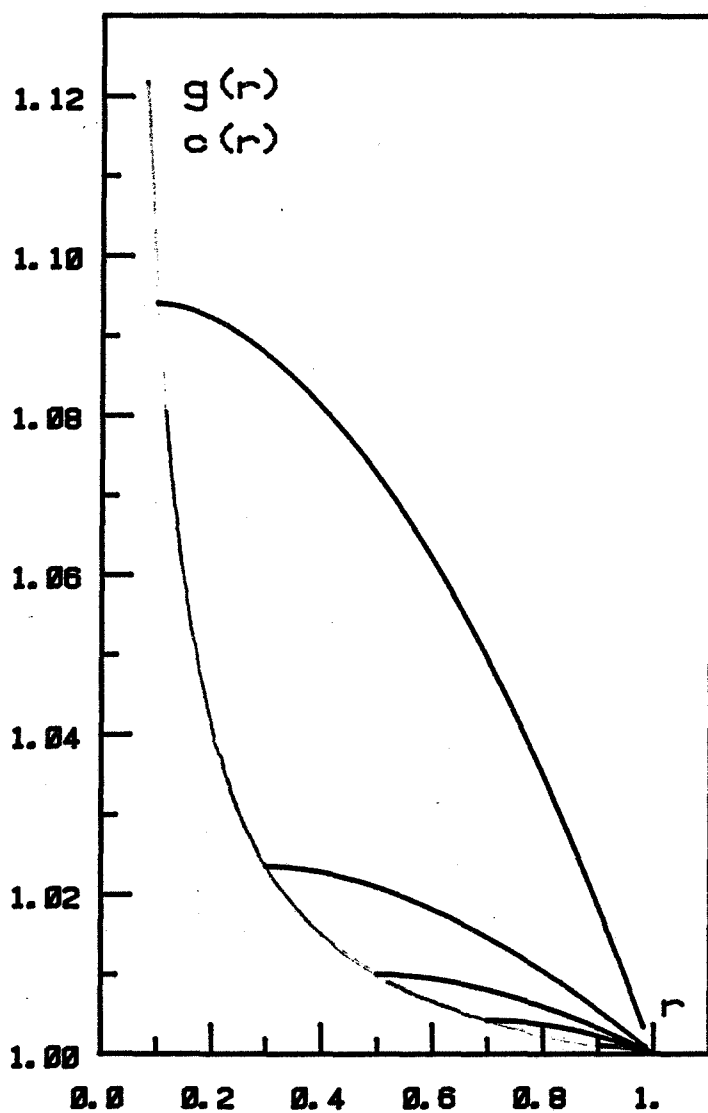
N = 50





DIMENSION 3
 $f = \alpha = 1$
 $g = \beta \exp(\delta/r)$
 Alpha Beta Delta
 0.0000 0.9895 0.0100
 N = 50





DIMENSION 3

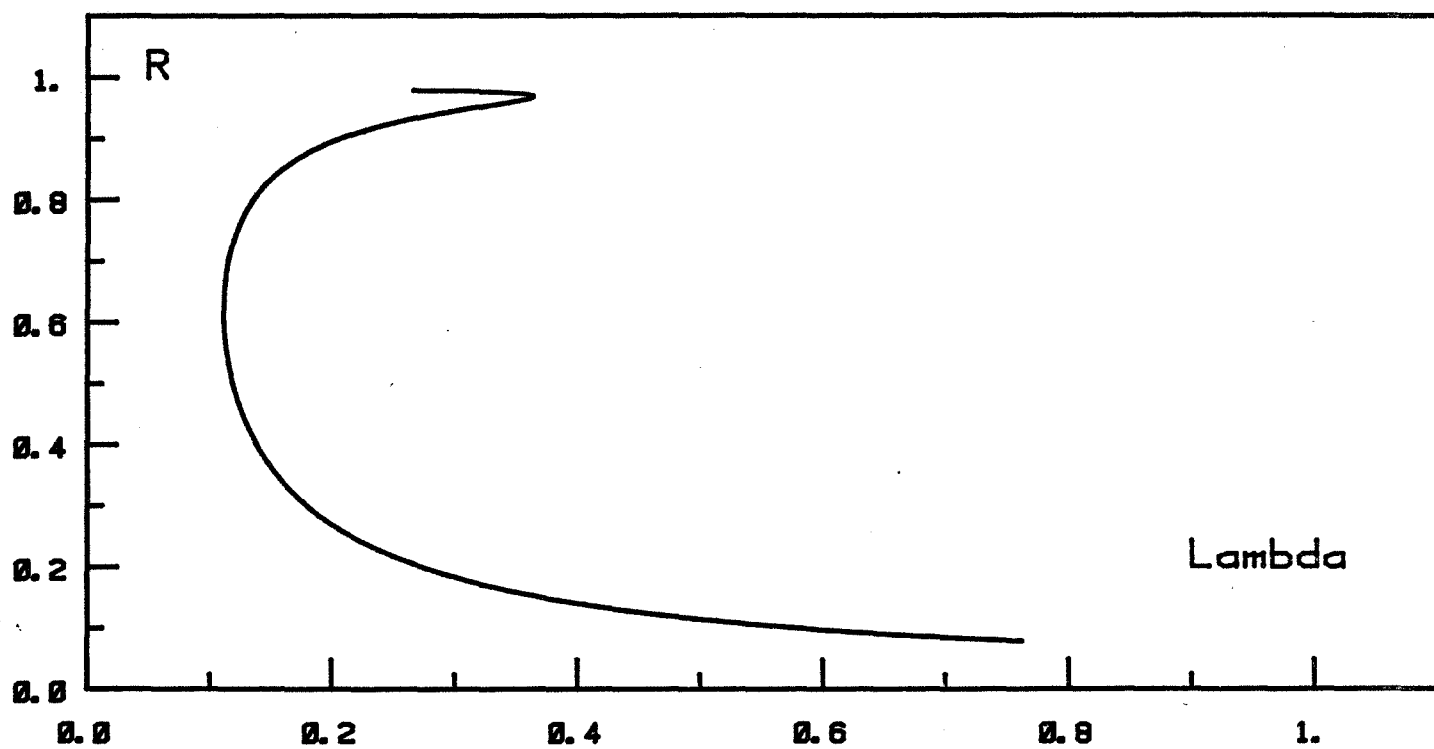
f = cte = 1

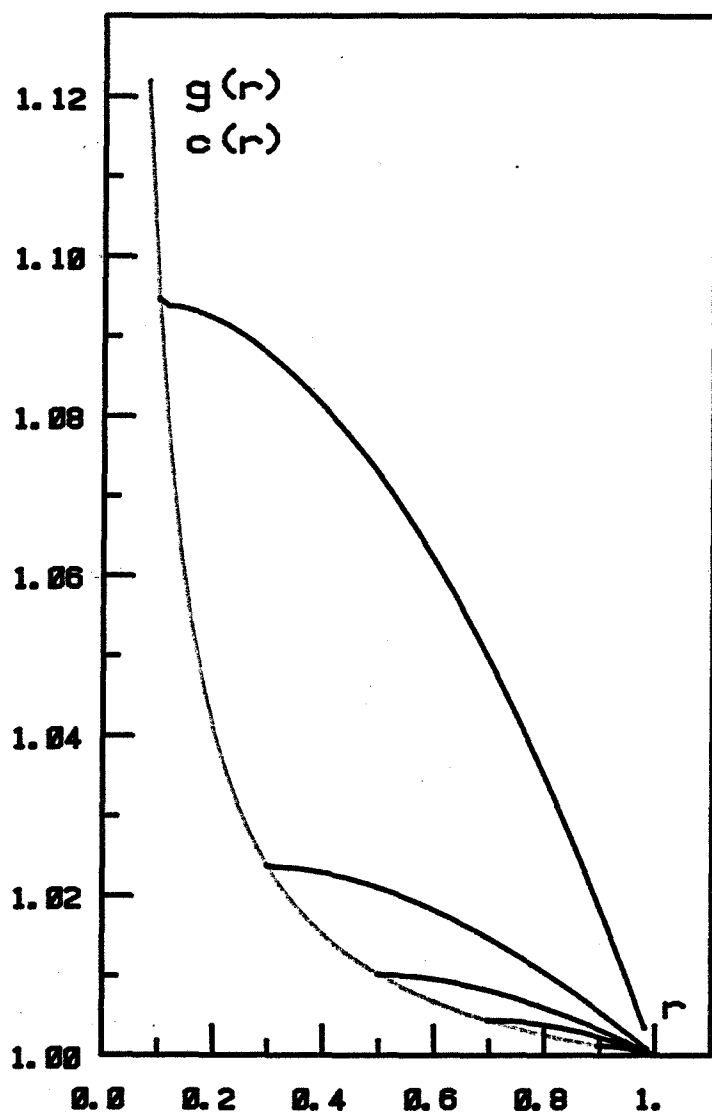
$g = \text{beta} \exp(\text{delta}/r)$

Alpha Beta Delta

0.0000 0.9899 0.0100

N = 50





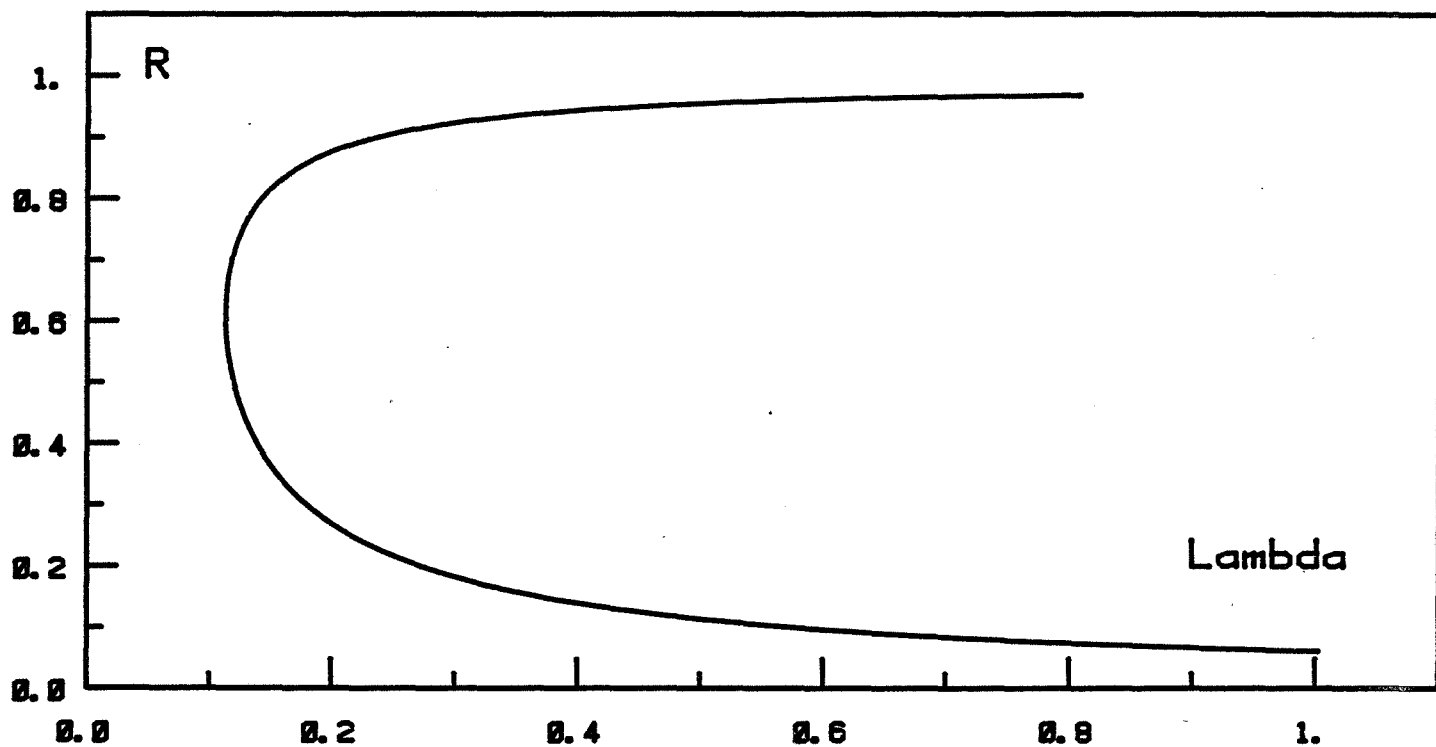
DIMENSION 3

$f = \text{cte} = 1$

$g = \text{beta} \exp(\text{delta}/r)$

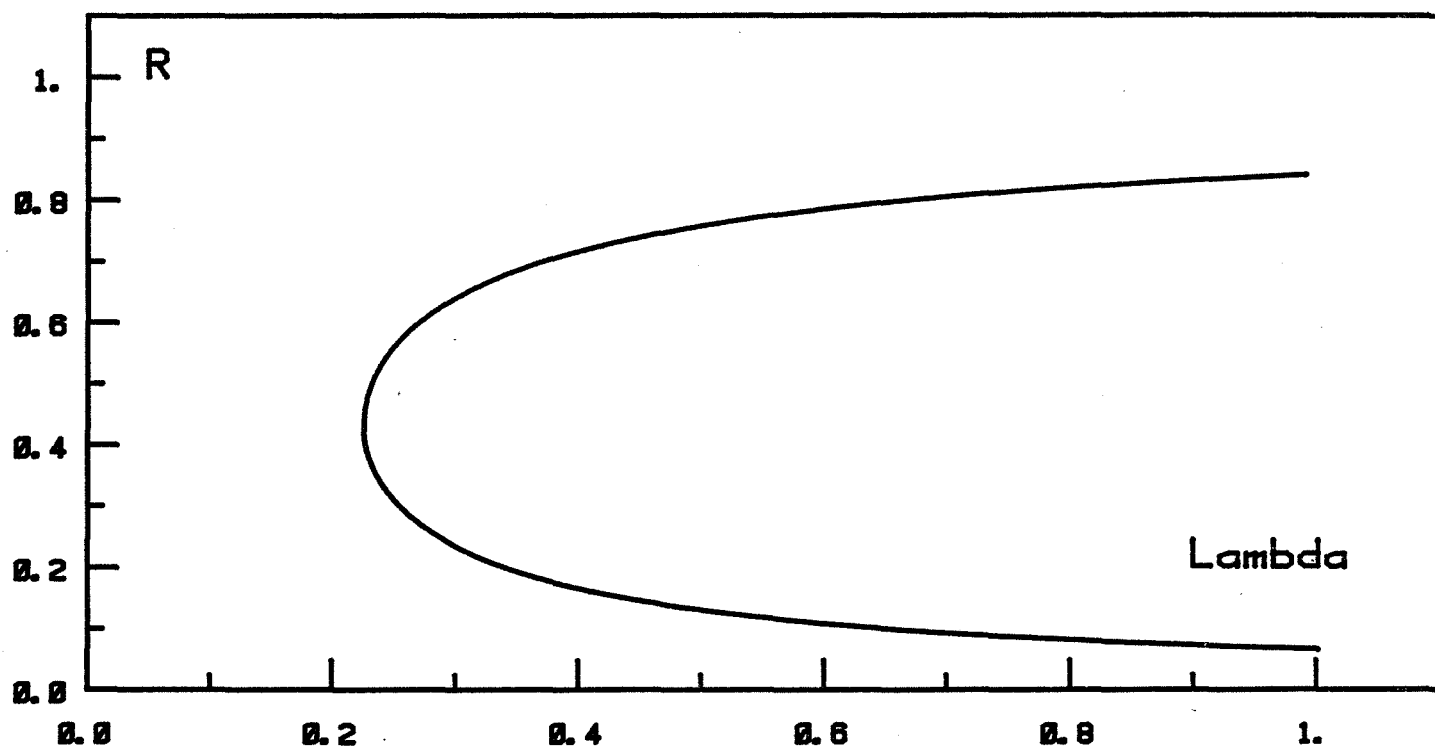
Alpha	Beta	Delta
0.0000	0.9901	0.0100

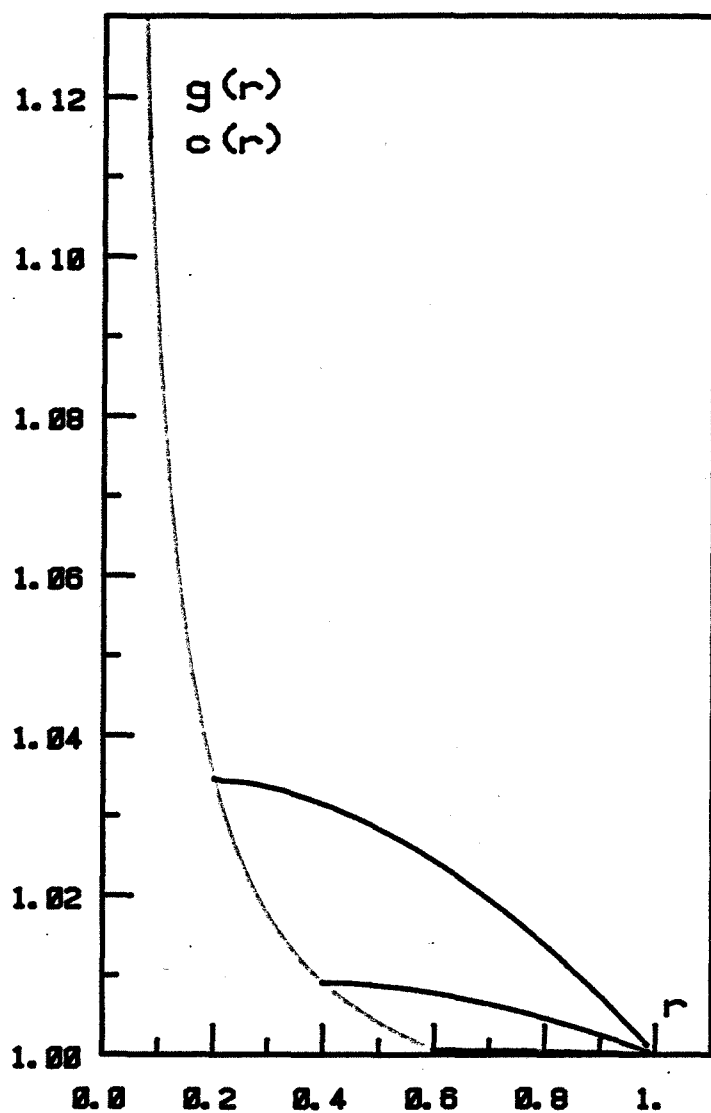
N = 50



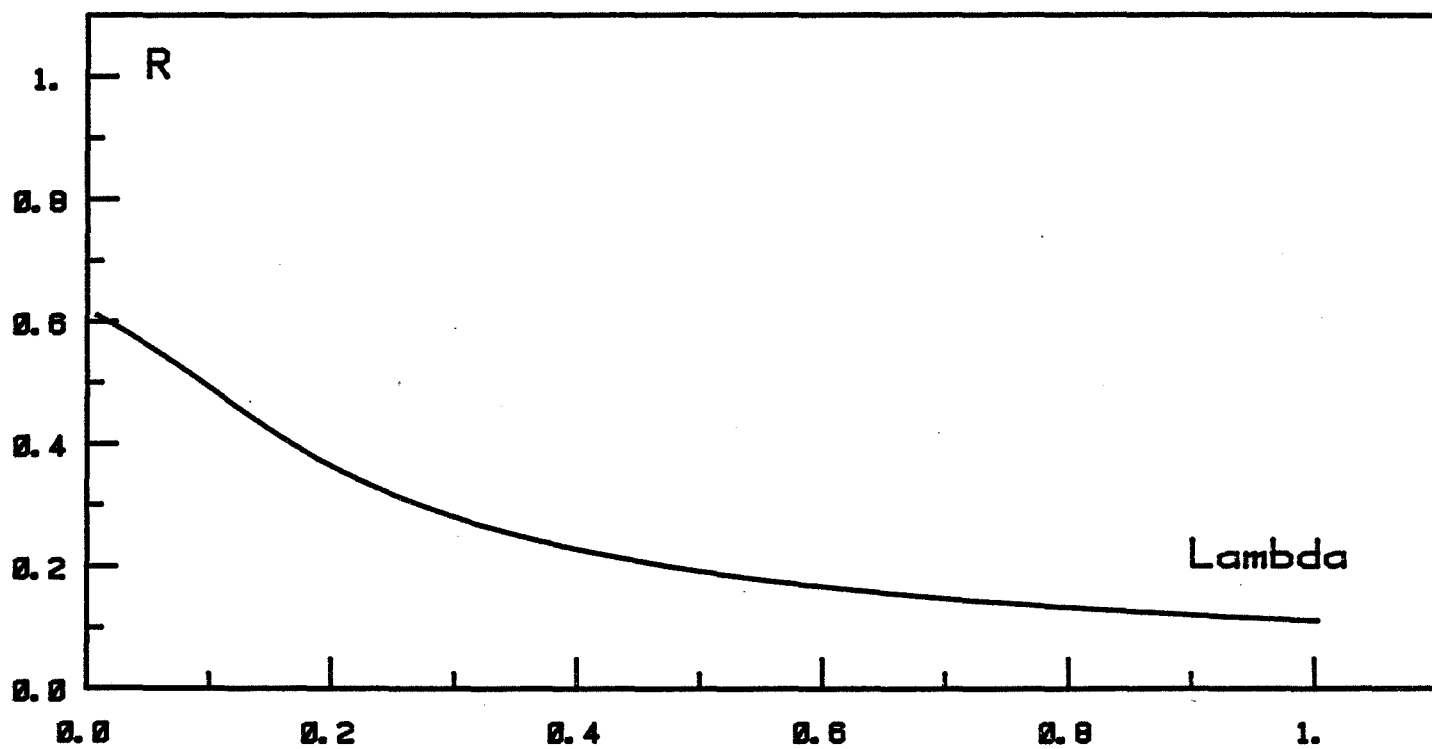


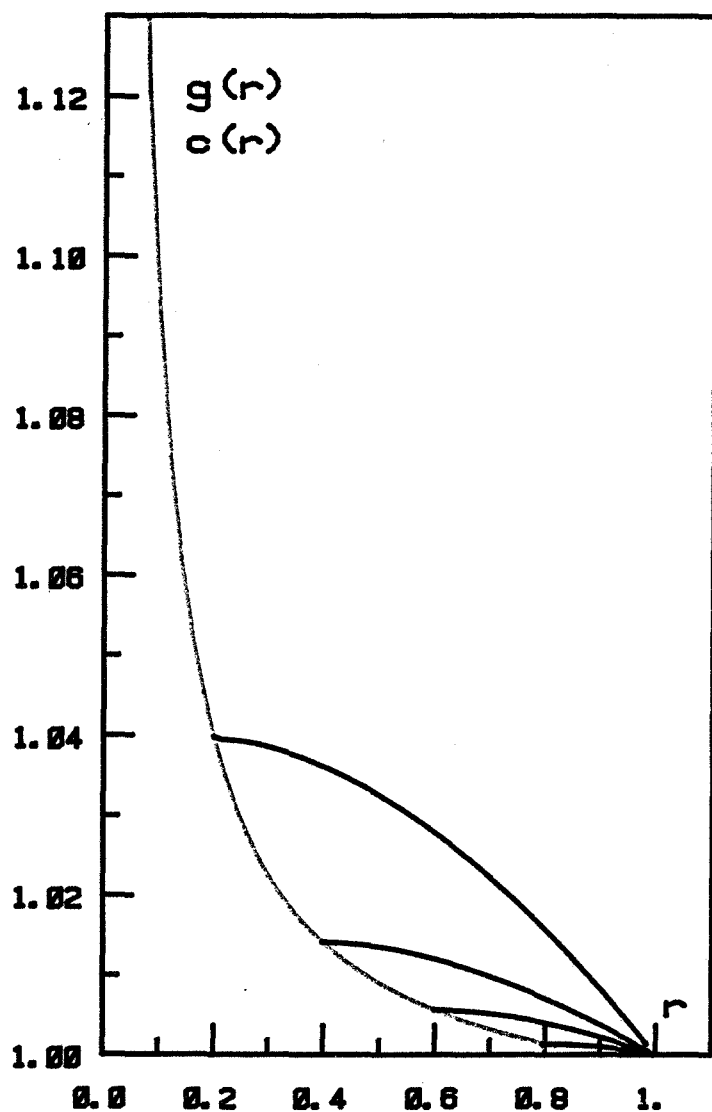
DIMENSION 3
 $f = c = 1$
 $g = \beta \exp(\delta/r)$
 Alpha Beta Delta
 0.0000 1.0000 0.0100
 $DS = -1.0000$
 $N = 50$



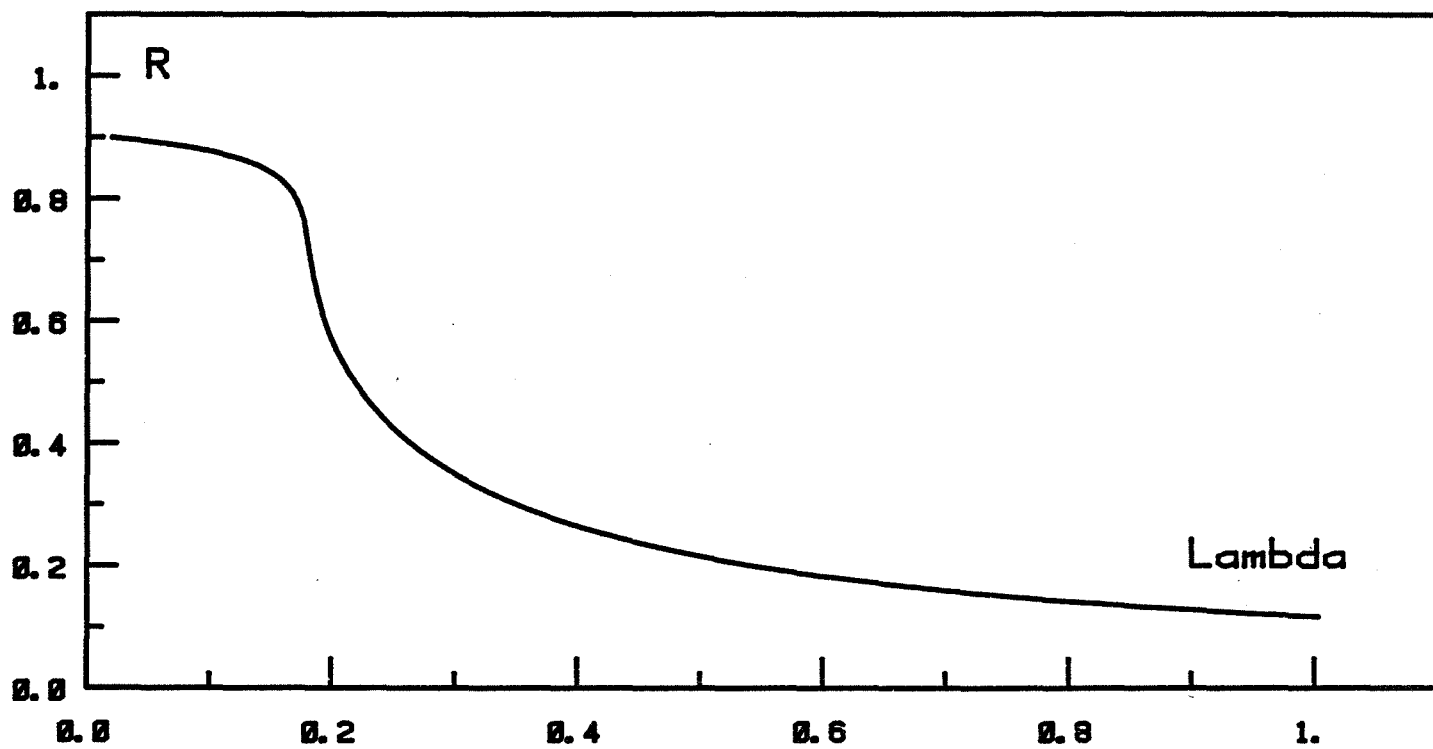


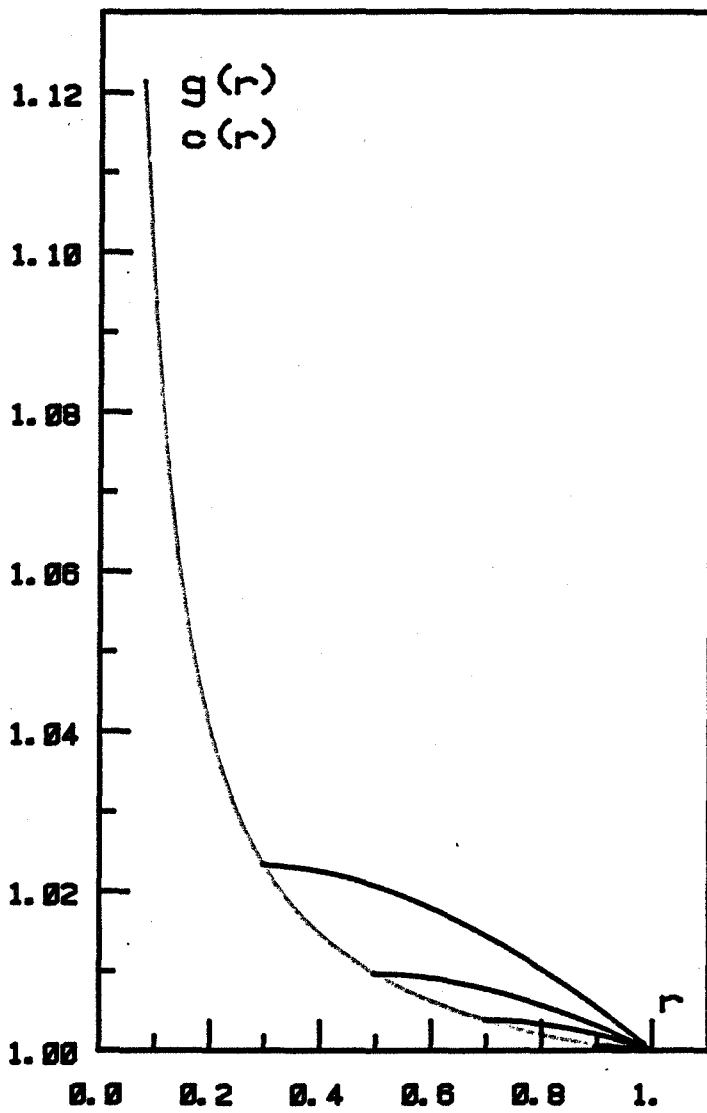
DIMENSION 3
 $f = (1 - \alpha \cdot x / \beta) +$
 $g = \beta \exp(\delta / r)$
 Alpha Beta Delta
 0.5000 0.9840 0.0100
 N = 50





DIMENSION 3
 $f = (1 - \alpha * x / \beta) +$
 $g = \beta \exp(\delta / r)$
 Alpha Beta Delta
 0.5000 0.9890 0.0100
 N = 50





DIMENSION 3

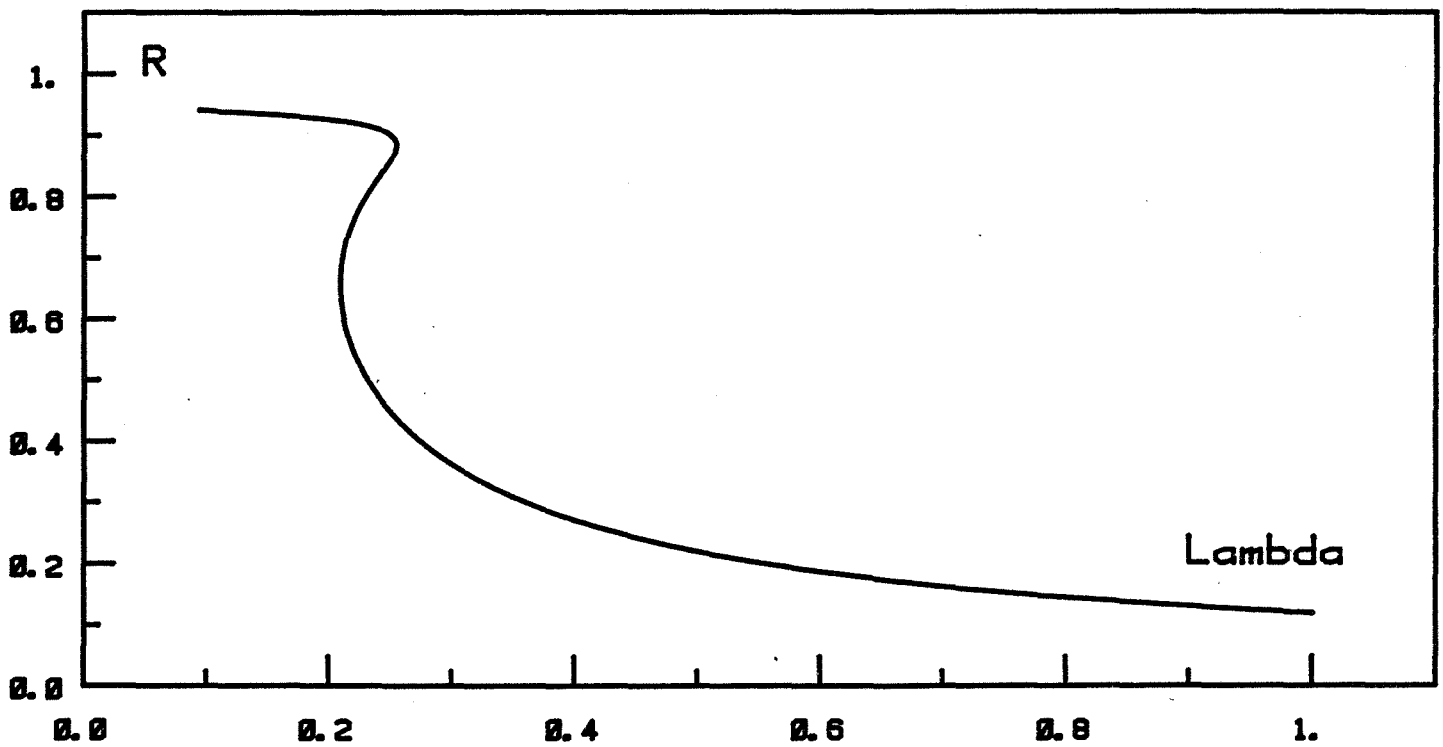
$$f = (1 - \alpha * x / \beta) +$$

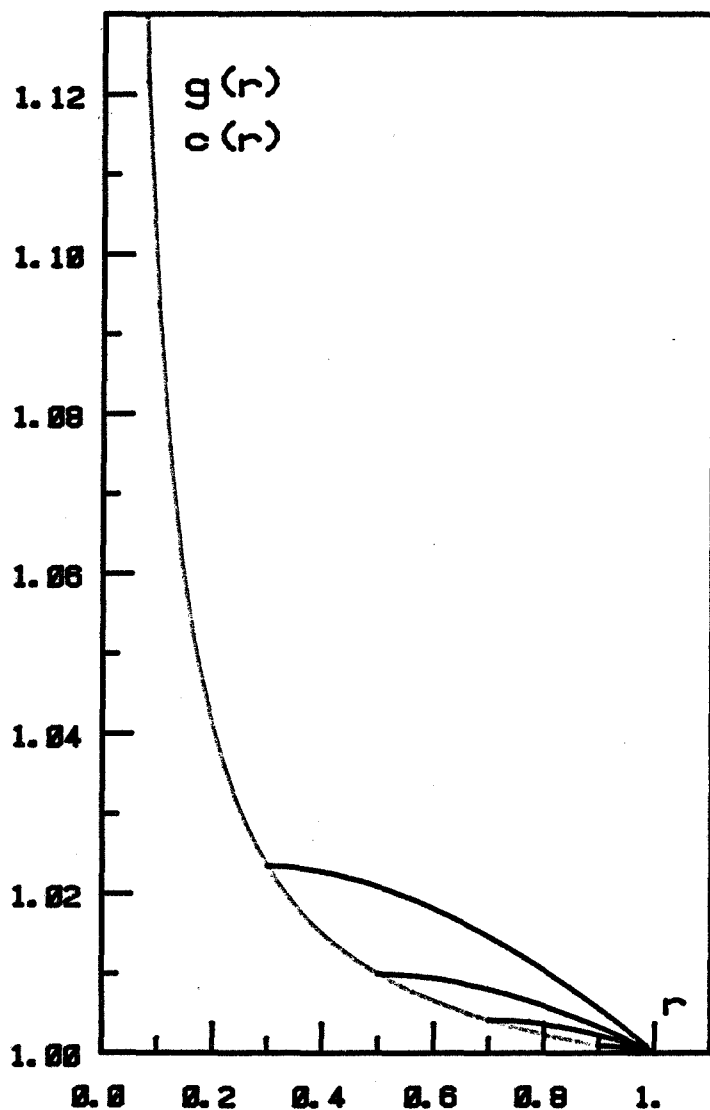
$$g = \beta \exp(\delta / r)$$

Alpha Beta Delta

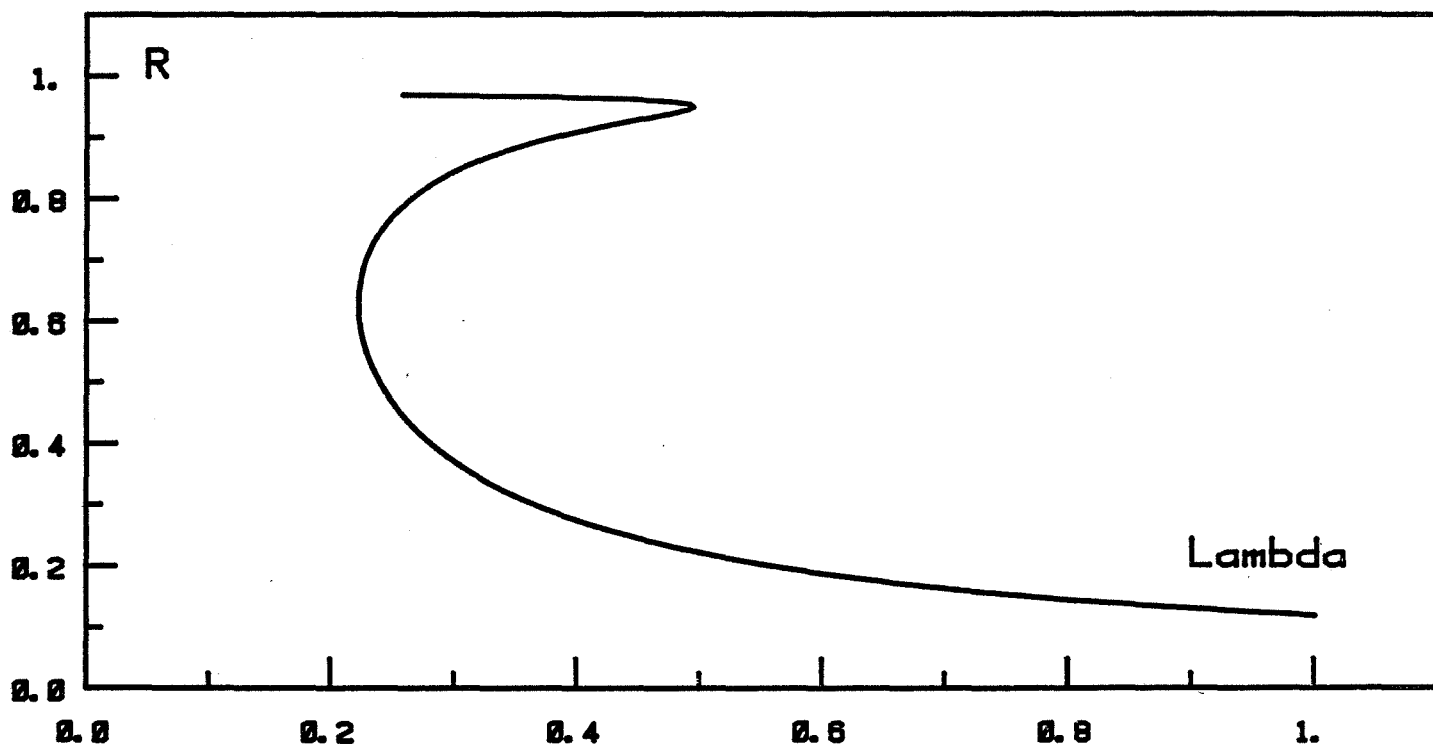
0.5000 0.9895 0.0100

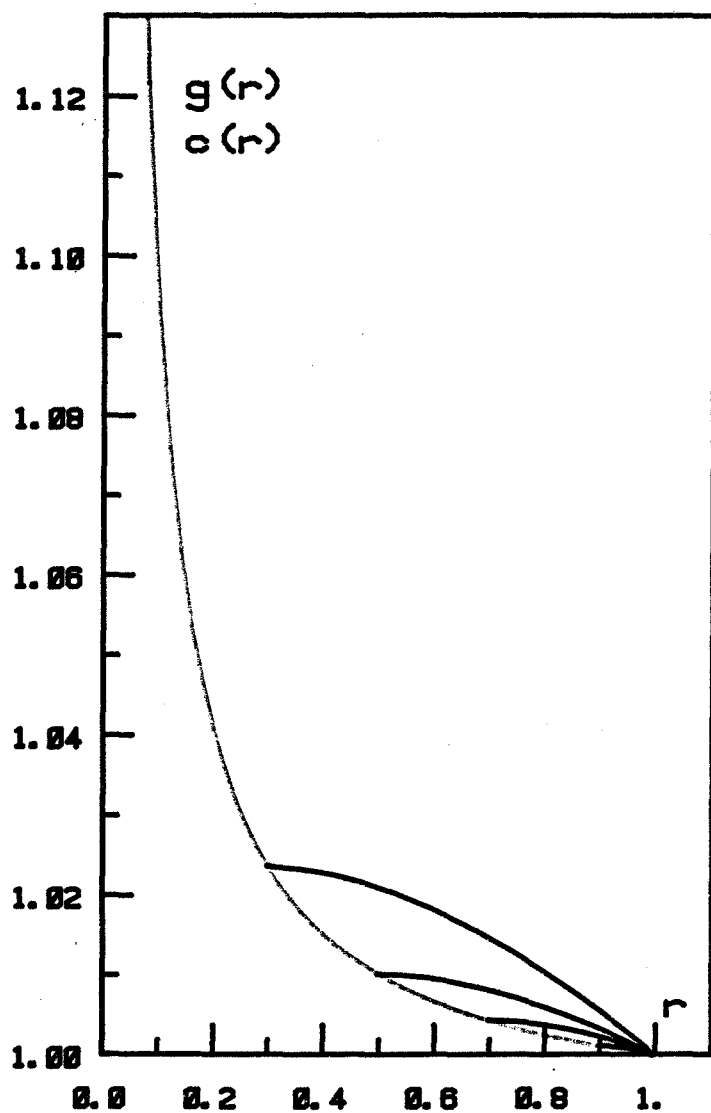
N = 50



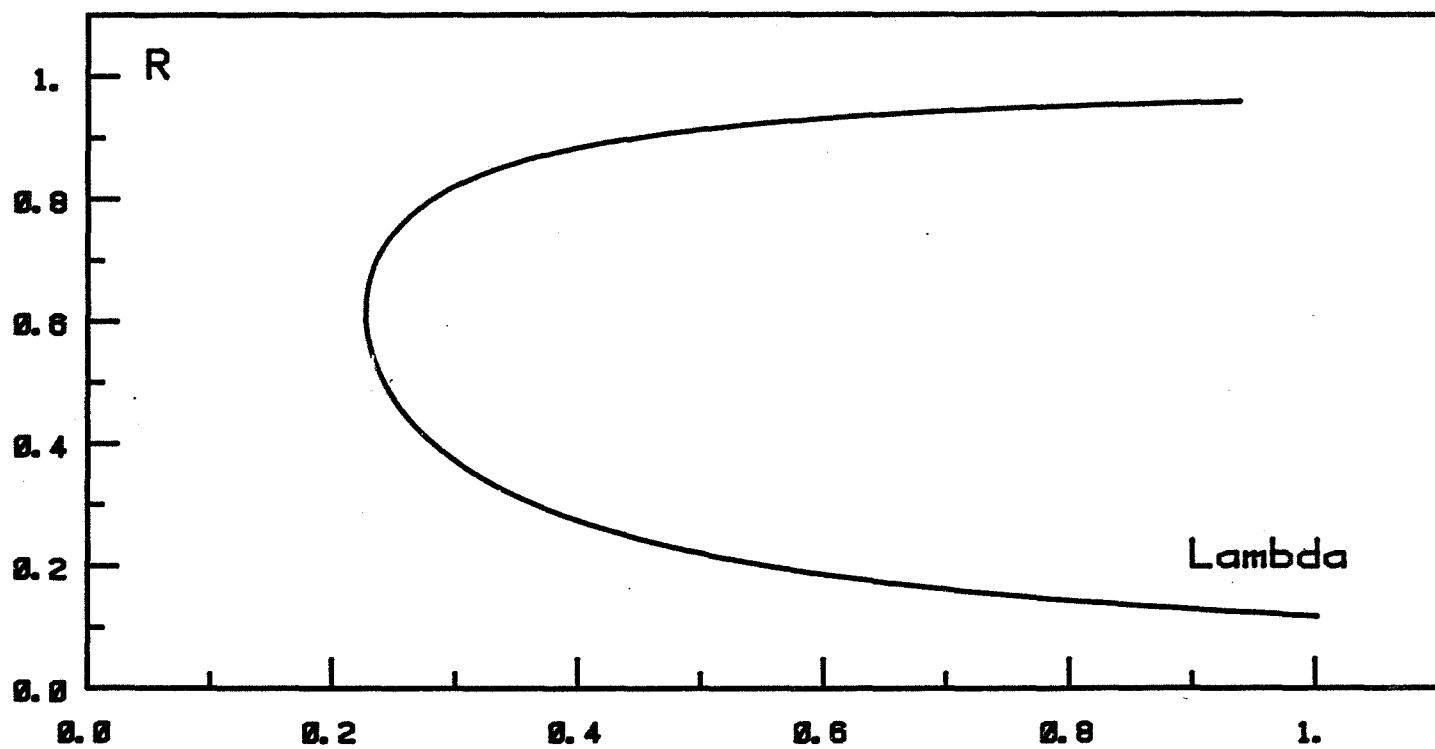


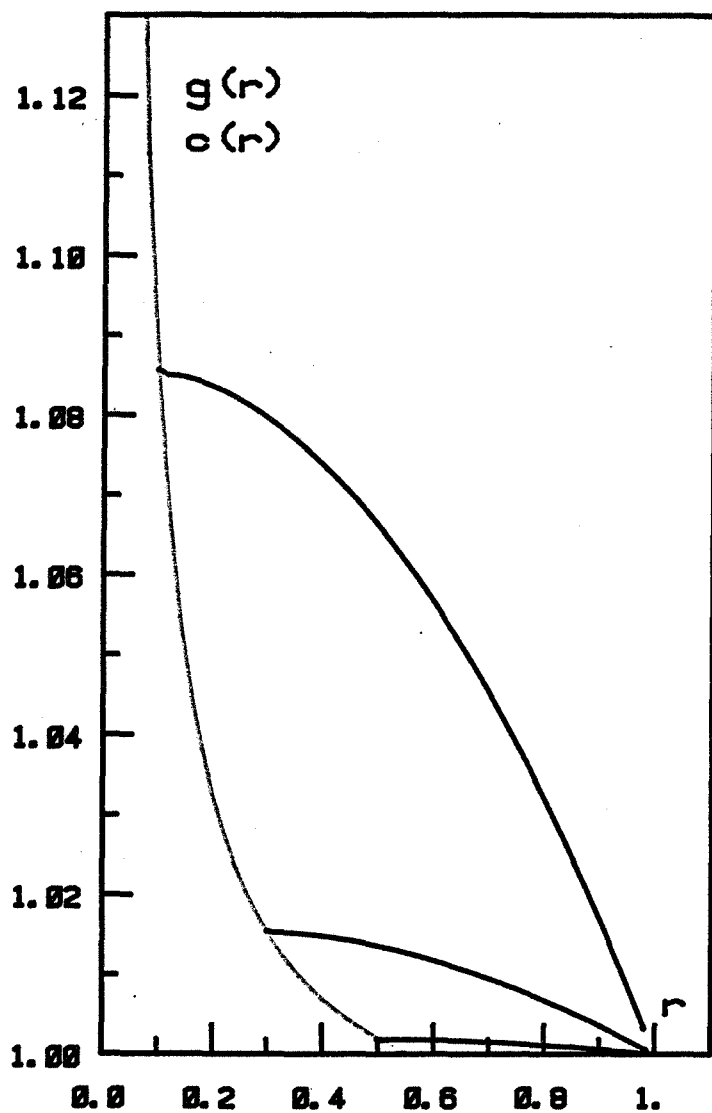
DIMENSION 3
 $f = (1 - \alpha \cdot x / \beta) +$
 $g = \beta \exp(\delta / r)$
 Alpha Beta Delta
 0.5000 0.9898 0.0100
 N = 50





DIMENSION 3
 $f = (1 - \alpha \cdot x / \beta) +$
 $g = \beta \exp(\delta / r)$
 Alpha Beta Delta
 0.5000 0.9900 0.0100
 N = 50





DIMENSION 3

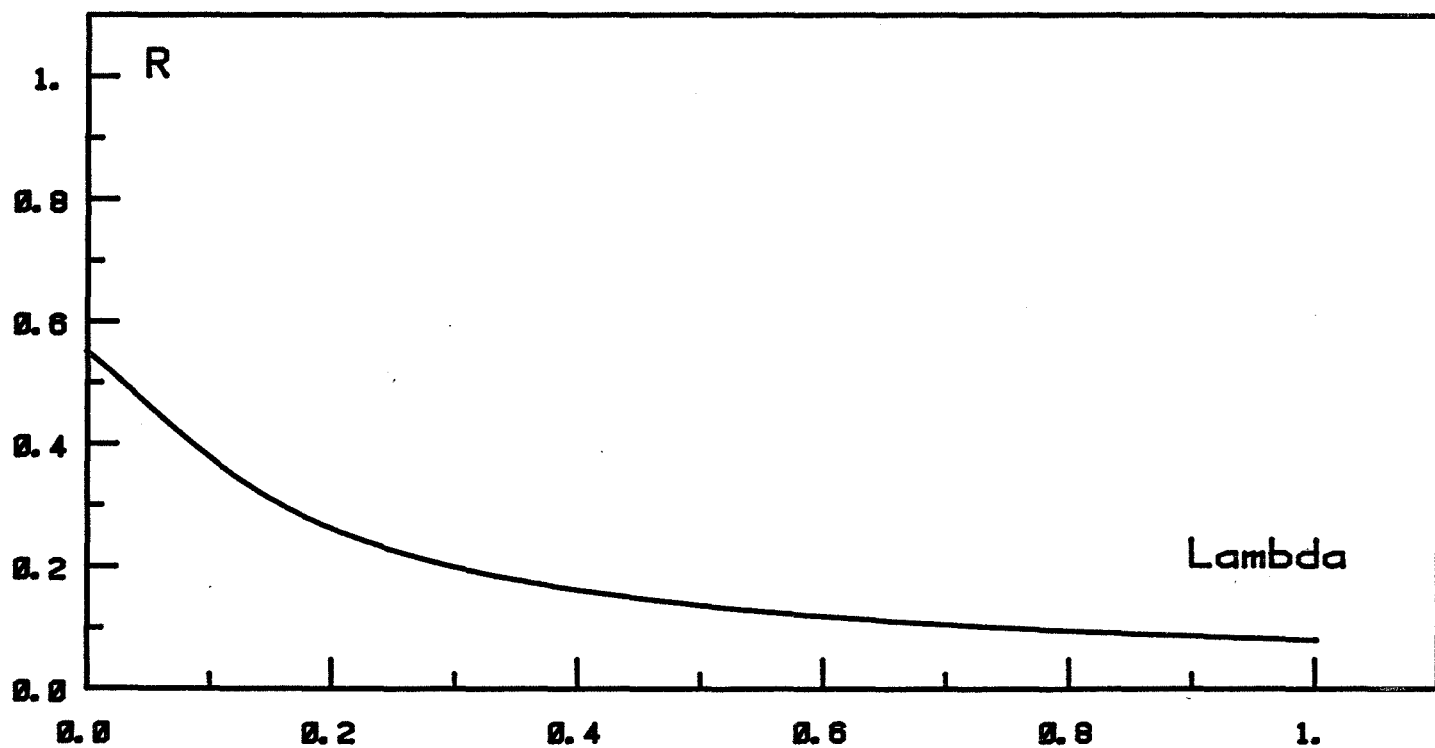
$$f = (1 - \alpha^2 x^2 / \beta^2) +$$

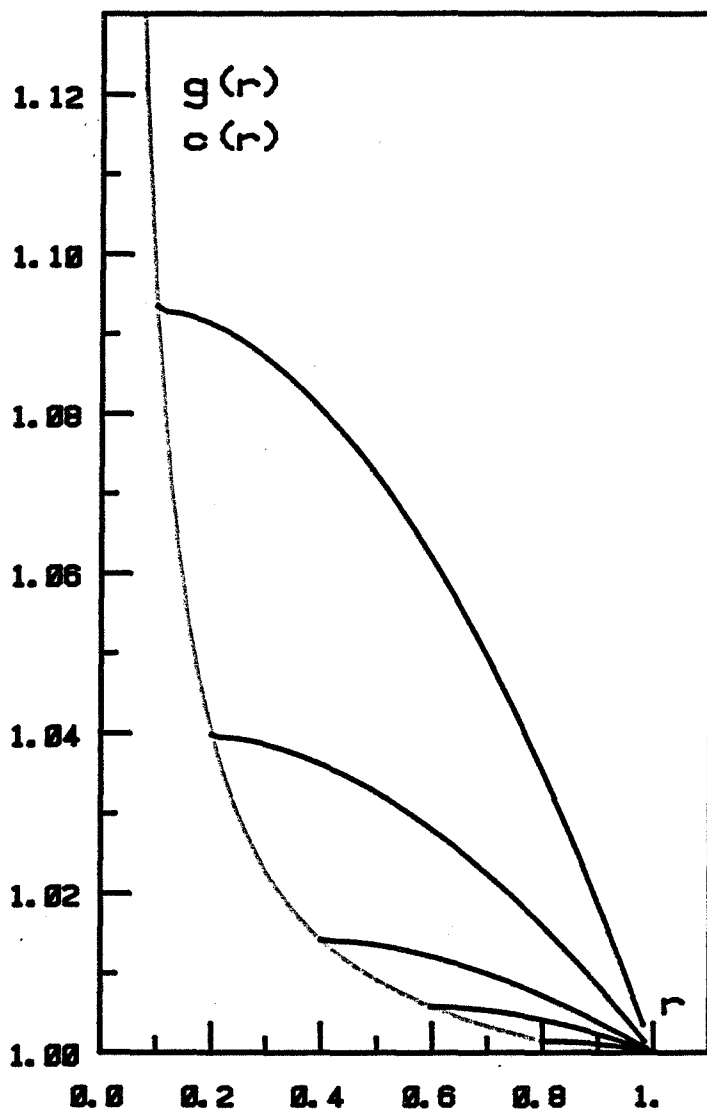
$$g = \beta \exp(\delta / r)$$

Alpha Beta Delta

0.5000 0.9820 0.0100

N = 50





DIMENSION 3

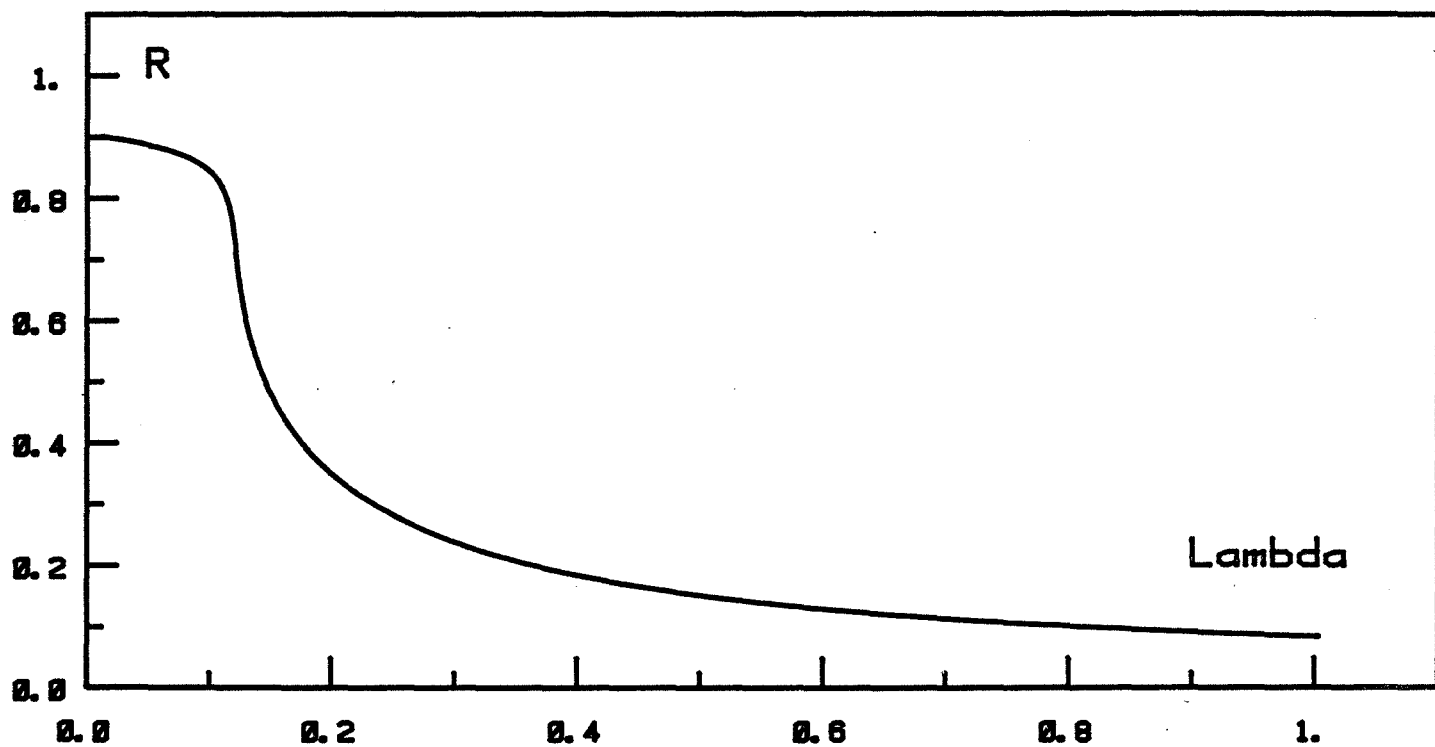
$$f = (1 - \alpha^2 x^2 / \beta^2) +$$

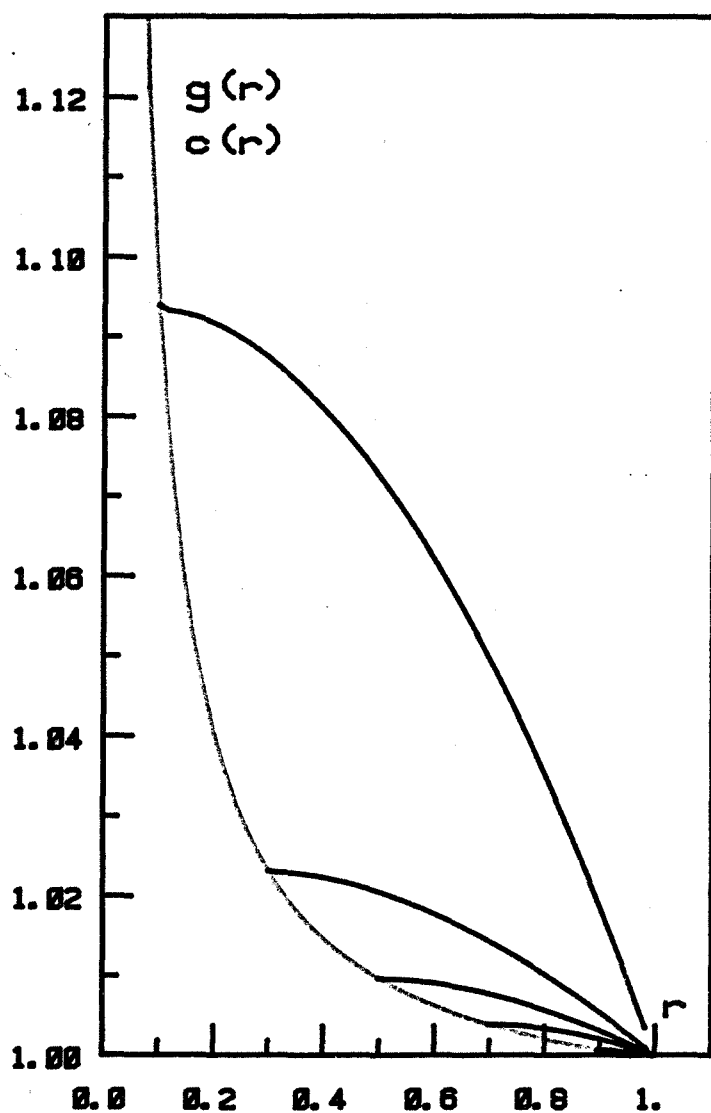
$$g = \beta \exp(\delta / r)$$

Alpha Beta Delta

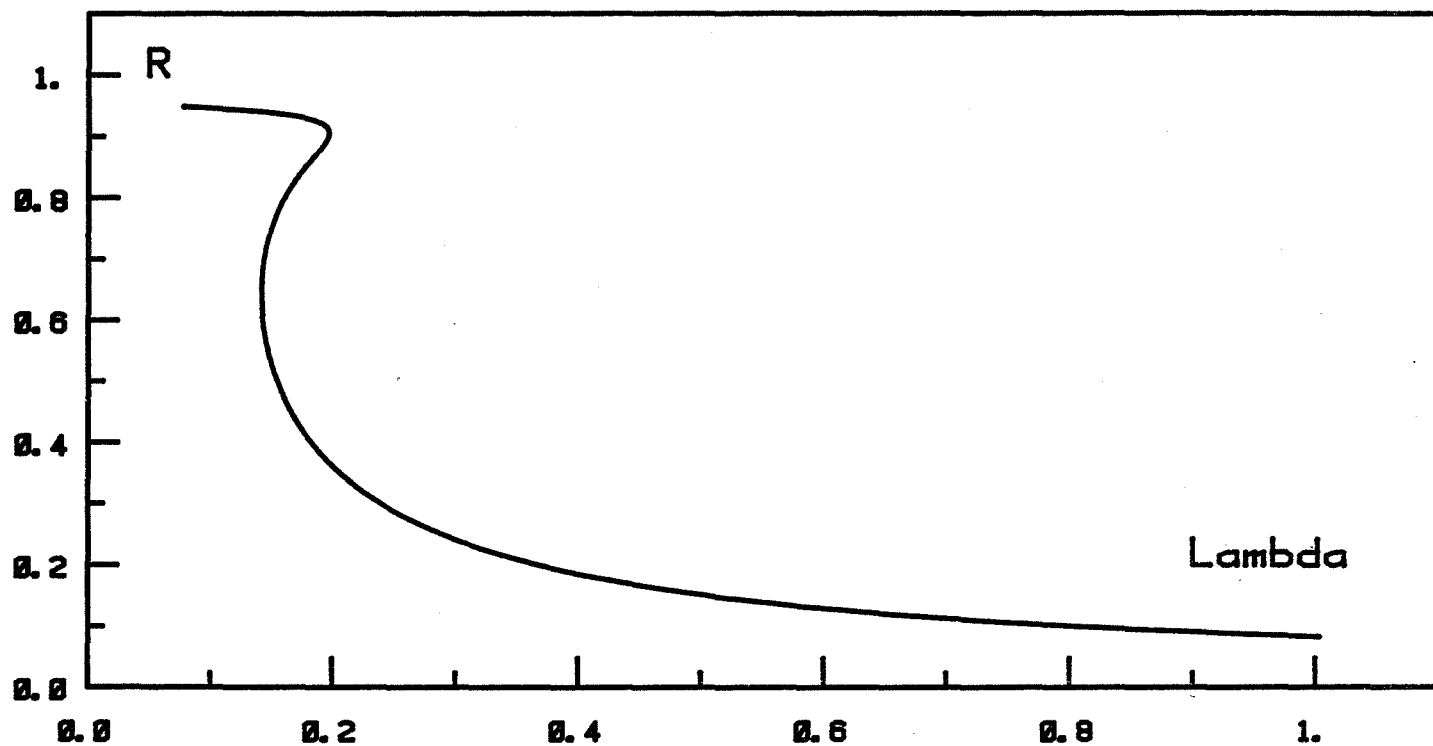
0.5000 0.9890 0.0100

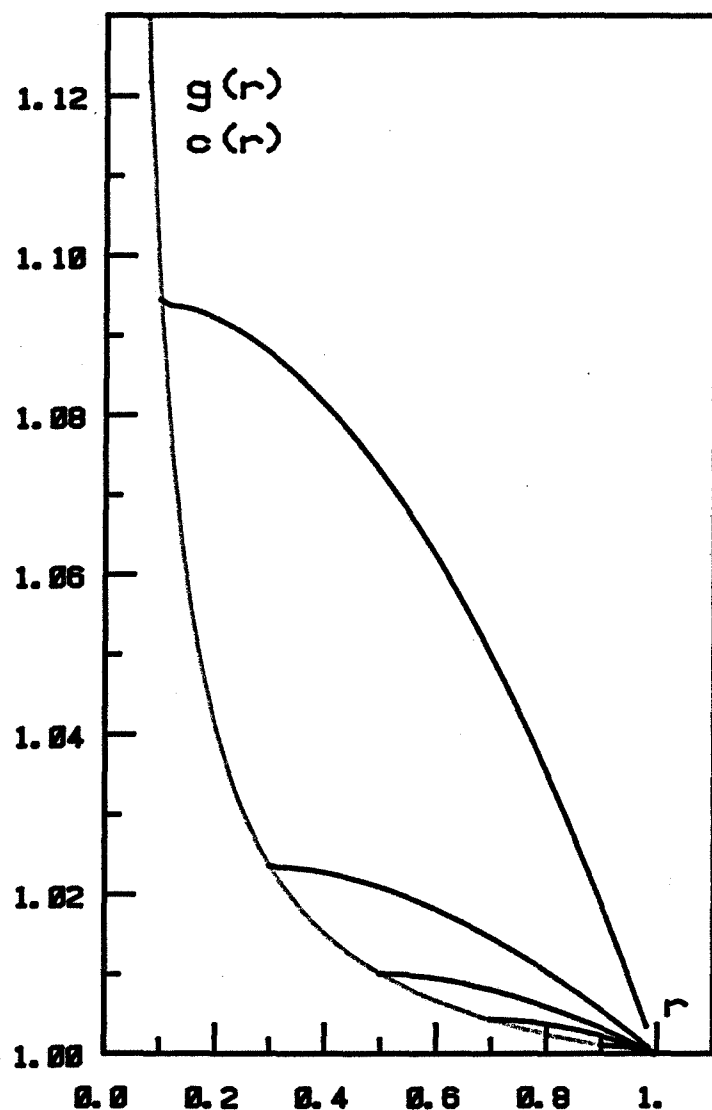
N = 50





DIMENSION 3
 $f = (1 - \alpha^2 x^2 / \beta^2) +$
 $g = \beta \exp(\delta / r)$
 Alpha Beta Delta
 0.5000 0.9896 0.0100
 N = 50





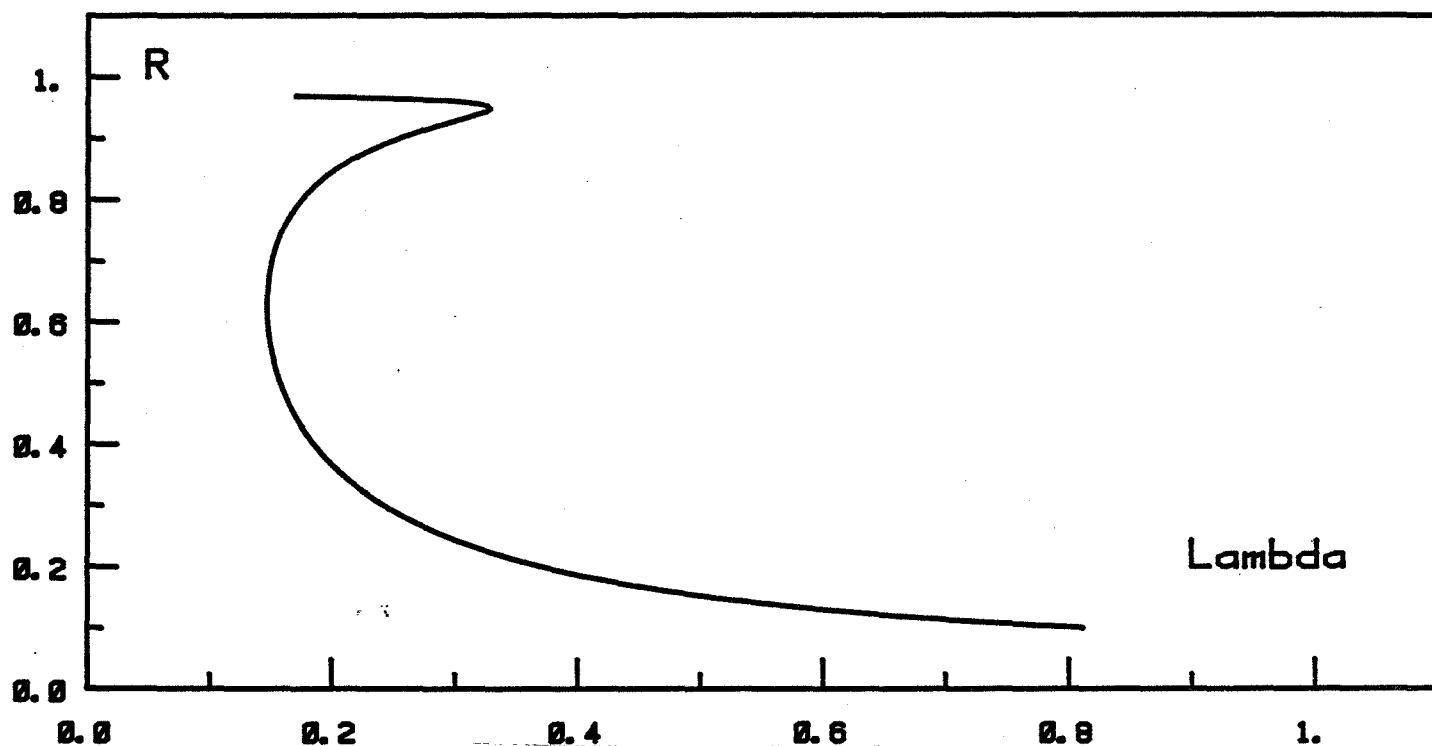
DIMENSION 3

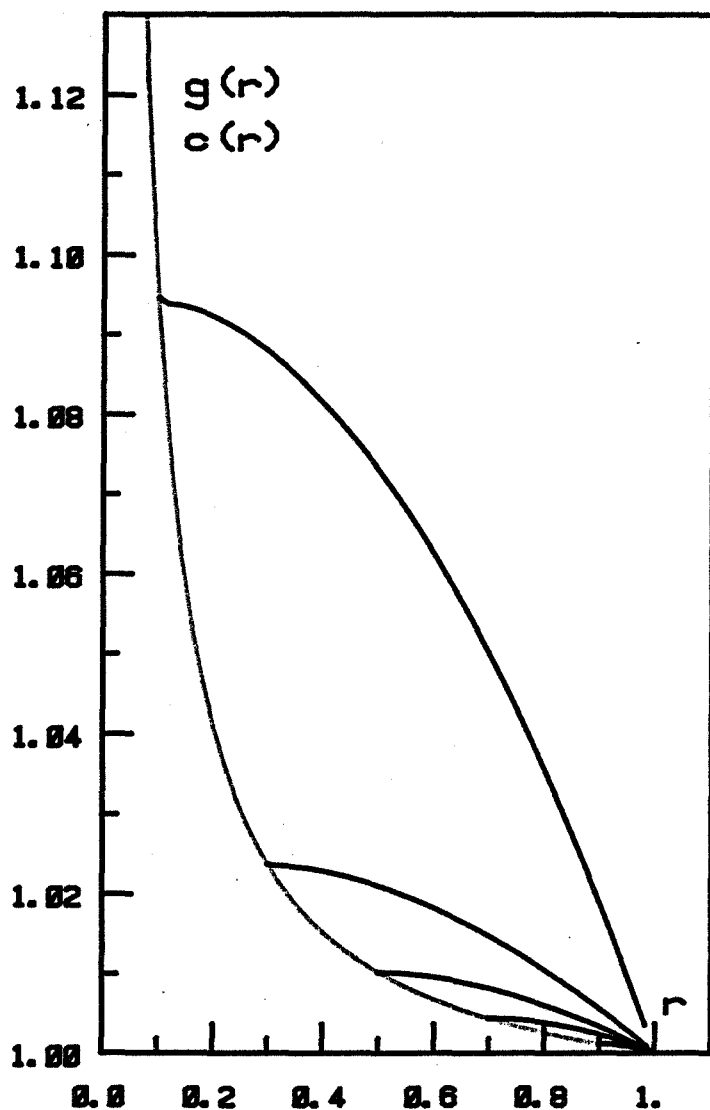
$$f = (1 - \alpha^2 \cdot x^2 / \beta^2) +$$

$$g = \beta \exp(\delta / r)$$

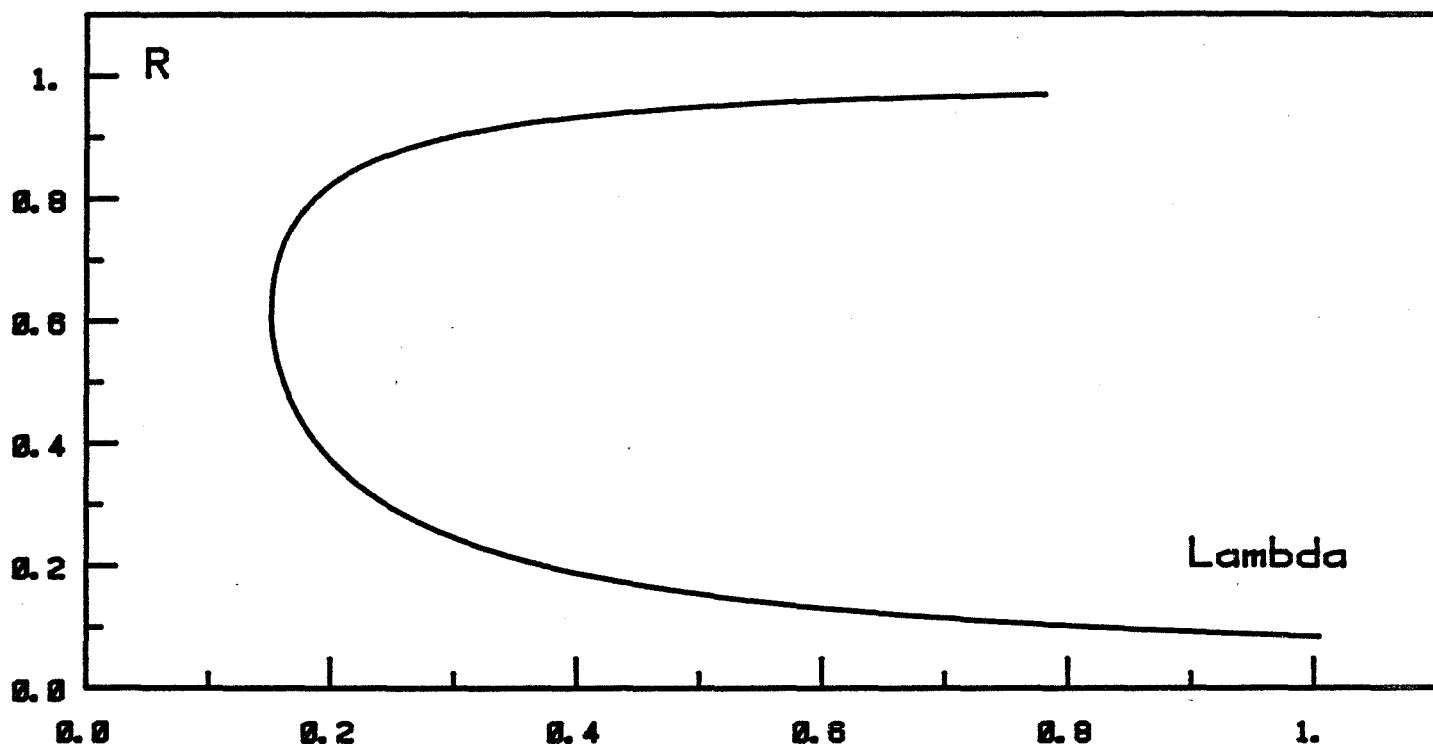
Alpha	Beta	Delta
0.5000	0.9898	0.0100

N = 50





DIMENSION 3
 $f = (1 - \alpha^2 x^2 / \beta^2) +$
 $g = \beta \exp(\delta / r)$
 Alpha Beta Delta
 0.5000 0.9900 0.0100
 N = 50



RESOLUTION NUMERIQUE DE PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE

PAR DES METHODES DE CONTINUATION

Véra TREGUER-KATOSKY

Thèse de Doctorat de 3ème cycle

N° d'ordre : 170

Mots clés :

Equations aux dérivées partielles
Problèmes à frontière libre
Bifurcation
Méthodes de continuation
Identification de domaine

Résumé :

On décrit une manière d'adapter les méthodes de continuation (bien connues pour la résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires) à la résolution de problèmes à frontière libre.

On présente les applications de cette méthode à :

- un problème d'obstacle en symétrie radiale
- un problème à frontière libre en dimension 3 issu d'un problème concret en chimie, pour lequel on a mis ainsi en évidence des propriétés nouvelles,
- un problème à frontière libre non radial en dimension 2.