

Autour des Relations entre SLE, CLE, Champ Libre Gaussien, et leur Conséquences —Introduction Générale—

Hao Wu
Université Paris-Sud

June 2013

Introduction

Les physiciens-statisticiens et probabilistes essayent souvent de comprendre le comportement macroscopique de systèmes comprenant de nombreuses entrées aléatoires microscopiques, qui peuvent donner lieu à des interfaces entre deux phases à une température critique, comme par exemple l'eau et la glace à 0 degré Celsius. Cela peut être modélisé par le comportement à la limite d'échelle (comportement macroscopique) des modèles de réseaux discrets (entrées microscopiques). Dans la plupart des cas (i.e. dans le champ des valeurs du paramètre du modèle qui peuvent jouer le rôle de la température), les limites de ces modèles discrets deviennent déterministes (dans l'esprit de la loi des grands nombres) et, dans certains cas critiques (c'est à dire pour la température critique), les limites peuvent rester aléatoires, ce qui les rend particulièrement intéressantes.

L'exemple le plus simple est celui de la marche aléatoire simple qui se comporte (lorsqu'elle est correctement renormalisée) comme le mouvement brownien

dans sa limite d'échelle. Notons que le mouvement brownien dans un certain sens est plus universel que la marche aléatoire, puisque c'est la limite d'échelle de n'importe quelle marche aléatoire simple.

Dans les modèles planaires (en dimension deux) discrets, certaines courbes apparaissent naturellement comme interfaces entre des phases, lignes de niveau de surfaces aléatoires etc. En fait, ces courbes permettent souvent de décrire la configuration aléatoire tout entière. Le mouvement brownien ne suffit pas en général à décrire la complexité de ces interfaces dans la limite d'échelle, lorsqu'elles sont aléatoires, et il a été prédit par les physiciens théoriques – et depuis prouvé dans plusieurs cas – que ces courbes devraient être conformément invariantes dans cette limite d'échelle continue.

Les processus SLE (Stochastic Loewner Evolution) d'Oded Schramm ont conduit les mathématiciens et les physiciens à une compréhension nouvelle et approfondie des limites d'échelle des modèles discrets en dimension deux. Oded Schramm a réalisé que le codage de Loewner des courbes planes par itérations de transformations conformes s'adaptait exactement à la propriété spatiale de Markov qui correspond au fait que l'on peut explorer les interfaces progressivement et décrire la loi conditionnelle des configurations restantes. Un SLE chordal est une courbe ne pouvant se croiser elle-même dans un domaine simplement connexe, joignant deux points fixés du bord du domaine. Et c'est la seule famille à un paramètre (souvent indexée par un nombre réel positif κ) de courbes planes aléatoires qui satisfasse l'invariance conforme et la propriété spatiale de Markov. Il est maintenant prouvé que les processus SLE sont les limites d'échelle de nombreux modèles discrets: SLE_2 est la limite de la marche aléatoire à boucles effacées [LSW04]; SLE_3 est la limite de l'interface du modèle d'Ising critique [CS12, CDCH⁺12]; SLE_4 est la limite de la ligne de niveau du champ libre Gaussien discret [SS09]; $SLE_{16/3}$ est la limite de l'interface du modèle FK critique [CS12, CDCH⁺12]; SLE_6 est la limite de l'interface du modèle de la percolation critique [CN07]; SLE_8 est la limite de la courbe d'exploration d'un arbre couvrant uniforme [LSW04]. L'ensemble CLE (Conformal Loop Ensemble) est l'objet limite géométrique qui apparaît lorsque l'on considère la limite d'échelle

du modèle discret tout entier (à la différence d'une seule interface, pour le processus SLE). Un CLE [She09, SW12] peut être considéré comme un ensemble dénombrable aléatoire de boucles simples disjointes dans le disque unité qui ne sont pas emboîtées. C'est la seule famille à un paramètre qui satisfait l'invariance conforme et la propriété spatiale de Markov (version de configuration des boucles). Il est prouvé (ou presque prouvé) que le CLE_3 est la limite de la collection des interfaces dans le modèle d'Ising critique; le CLE_4 est l'ensemble des lignes de niveau du champ libre Gaussien [MS13], et le CLE_6 est la limite de la collection des interfaces dans la percolation critique [CN06]. Comme l'on peut s'y attendre, chaque boucle de CLE est une boucle de type SLE, avec le même paramètre κ .

Le champ libre Gaussien est l'analogue naturel du mouvement brownien ayant un temps deux-dimensionnel [She07], et il a été largement utilisé comme outil fondateur de la théorie quantique des champs. Tout comme le mouvement brownien, c'est un objet aléatoire simple qui a de très nombreuses applications et qui est d'une grande beauté intrinsèque. La géométrie du champ libre Gaussien, c'est à dire le fait qu'il soit possible de décrire des lignes géométriques dans cette distribution très irrégulière, a été découvert récemment [SS12, SS09, MS13, Dub09, She11], et a donné plusieurs développements récents. Le champ libre Gaussien correspond également à la limite d'échelle de modèles discrets simples (par exemple la fonction de hauteur des modèles de dimères [Ken08]).

Les SLEs, CLEs et le champ libre Gaussien sont trois importantes structures planaires aléatoires reliées et ma thèse va explorer les aspects de ces trois objets et des relations existant entre eux.

De l'ensemble CLE au processus SLE

L'article [WW13] présente un moyen de construire les processus $SLE_\kappa(\rho)$ utilisant un CLE et un échantillon de restriction indépendant: Définissons de façon indépendante, dans un domaine simplement connexe D avec deux points du bord fixés a et b , les deux objets aléatoires suivants: Un CLE_κ ($\kappa \in (8/3, 4]$) que nous appelons Γ et une courbe de restriction chordale γ de a à b avec l'exposant de

restriction α . Ensuite, nous construisons l'ensemble obtenu en joignant à γ toutes les boucles de Γ qu'elle croise. Enfin, nous prenons la frontière la plus à droite de cet ensemble. Elle constitue encore une courbe simple de a à b dans D que nous appelons η (voir Figure 1). Nous montrons dans [WW13] que cette courbe η est un processus $\text{SLE}_\kappa(\rho)$ avec

$$\alpha = \frac{(\rho + 2)(\rho + 6 - \kappa)}{4\kappa}.$$

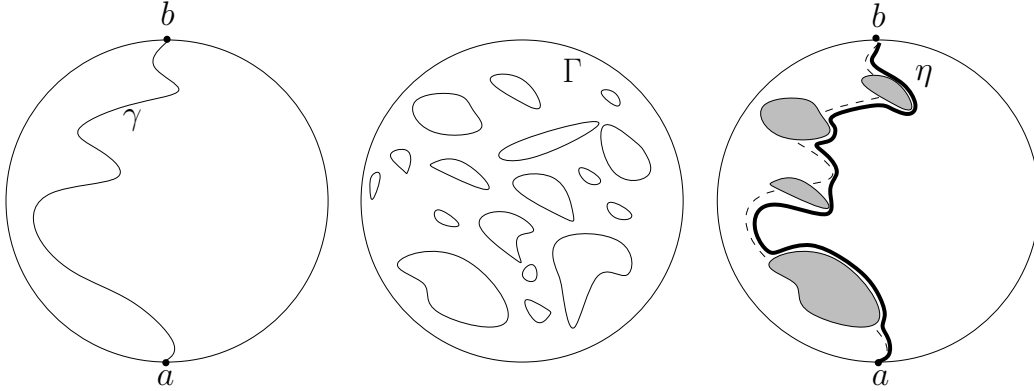


Figure 1: Construction de η utilisant γ et Γ .

De cette construction des SLEs, nous déduisons une conséquence immédiate intéressante qui fournit une preuve alternative simple d'un résultat non trivial ([Zha08, Zha10, MS12]): la réversibilité des processus $\text{SLE}_\kappa(\rho)$ avec $\kappa \in [8/3, 4], \rho > -2$. Une autre conséquence est l'estimée à deux points de l'intersection de $\text{SLE}_\kappa(\rho)$ avec la frontière qui à son tour donne une preuve simple de la dimension de Hausdorff de cette intersection.

De SLE à CLE

Les ensembles CLE ont d'abord été définis par Scott Sheffield dans [She09] via des variantes branchantes des courbes SLE. En effet, dans [She09], il fournit

plusieurs constructions de ces arbres d’exploration des SLE et il conjecture qu’ils correspondent tous à la même collection aléatoire de boucles. Ceci a été ensuite prouvé dans le cas des arbres d’exploration symétriques dans [SW12]. Le premier résultat principal de l’article [WW12] peut être résumé comme suit: Pour chaque $\kappa \in (8/3, 4]$, toutes les collections aléatoires des SLE_κ de type quasi-boucles construites par les arbres d’exploration asymétriques de Sheffield dans [She09] ont la même loi. Ils correspondent tous à des CLE_κ , familles de boucles construites dans [SW12].

Mécanisme de croissance invariant conforme de CLE_4

Le deuxième résultat principal de [WW12] souligne une propriété spécifique de l’ensemble CLE_4 (notons qu’il correspond au CLE qui est le plus directement relié au champ libre Gaussien [SS12, SS09, MS13, Dub09, She11]). Dans ce cas particulier, il est possible de définir un mécanisme de croissance de boucles invariant conforme et non enraciné. Grosso modo, le processus de croissance qui découvre progressivement les boucles se forme “uniformément” sur la frontière et ne nécessite pas de choisir une racine. Le fait qu’un tel mécanisme de croissance non-local invariant conforme existe est assez surprenant (et le fait que ses paramétrisations temporelles vues à partir de différents points coïncident exactement l’est encore plus).

Grâce à ce mécanisme de croissance de l’ensemble CLE_4 , nous pouvons associer d’une manière invariante conforme un paramètre de temps positif u_L à chaque boucle L dans la configuration des boucles \mathcal{L} , qui correspond au temps dans le mécanisme de croissance pour lequel la boucle a été découverte. Nous définissons un processus de Markov sur les domaines $(D_u, u \geq 0)$: à l’instant $u = 0$, c’est le demi-plan supérieur; et à un instant $u > 0$, c’est le domaine qui reste lorsque l’on retire toutes les boucles ayant un paramètre de temps inférieur à u . De ce mécanisme de croissance invariant conforme, on déduit que $(D_u, u \geq 0)$ et $(\Phi(D_u), u \geq 0)$ sont identiquement distribués pour toute transformation conforme Φ de \mathbb{H} sur lui-même.

Couplage entre champ libre Gaussien et CLE_4 avec paramètre de temps

Notons que les courbes SLE_4 sont les lignes de niveau du champ libre Gaussien [SS09, SS12, Dub09]. Et l'ensemble CLE_4 est la collection des lignes de niveau du champ libre Gaussien [MS13], dans le sens où l'on peut coupler un champ libre Gaussien h avec un CLE_4 \mathcal{L} de telle sorte que les boucles de \mathcal{L} sont des lignes de niveau de h de hauteur $\pm\lambda$ ($\lambda = \pi/2$) et les signes de la valeur moyenne de h à l'intérieur de la boucle sont donnés par des variables de Bernoulli i.i.d indépendantes du CLE_4 . Dans ce couplage, on peut effectivement prouver que la configuration des boucles du CLE_4 est une fonction déterministe de h .

Dans [SWW13], nous fournissons un deuxième nouveau couplage entre le champ libre Gaussien et l'ensemble CLE_4 , en utilisant le paramètre de temps défini dans [WW12]. Plus précisément, nous couplons un champ libre Gaussien h (ayant une valeur zéro au bord) avec un CLE_4 (avec paramètre de temps) $((L, u_L), L \in \mathcal{L})$ en sorte que, pour chaque boucle L , il est la ligne de niveau de h et la valeur moyenne de h à l'intérieur de L est $2\lambda - 2\lambda u_L$. Nous montrons en plus que dans ce couplage la configuration des boucles de CLE_4 et le paramètre de temps sont des fonctions déterministes de h .

Du champ libre Gaussien aux processus SLE et aux intersections des courbes SLE

Les résultats principaux de l'article [MW13] sont la détermination de la dimension de Hausdorff des ensembles de points doubles et des ensembles de points de coupure des courbes SLE. Soient $\kappa' \in (4, 8)$ et γ' un processus $SLE_{\kappa'}$. L'ensemble de points de coupure de γ' est défini par $\mathcal{K} = \{\gamma'(t) : t \in (0, \infty), \gamma'(0, t) \cap \gamma'(t, \infty) = \emptyset\}$. Nous montrons que, presque sûrement,

$$\dim_H(\mathcal{K}) = 3 - \frac{3\kappa'}{8}.$$

Soit \mathcal{D} l'ensemble de points doubles de γ' . Nous montrons que, presque sûrement,

$$\dim_H(\mathcal{D}) = 2 - \frac{(12 - \kappa')(4 + \kappa')}{8\kappa'}.$$

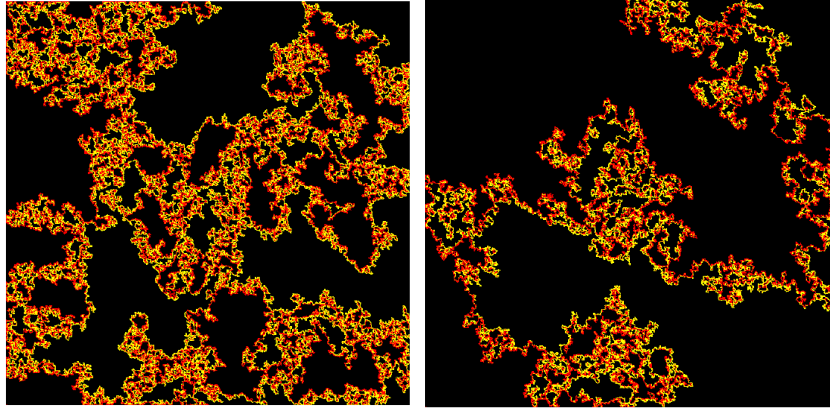


Figure 2: SLE_6 (gauche) et $SLE_{16/3}$ (droite).

Restriction conforme: le cas radial

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de l'analogue radial de l'échantillon de restriction chordale [LSW03]. Plus précisément, considérons le disque unité \mathbb{U} et fixons un point du bord 1 et un point à l'intérieur 0. Un échantillon de restriction radiale est un sous-ensemble aléatoire fermé K de $\overline{\mathbb{U}}$ tel que:

- K est connexe, $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe, $K \cap \partial\mathbb{U} = \{1\}$, $0 \in K$.
- Pour chaque sous-ensemble fermé A de $\overline{\mathbb{U}}$ tel que $A = \overline{\mathbb{U} \cap A}$, $\mathbb{U} \setminus A$ est simplement connexe, contient l'origine et le point 1 est sur sa frontière, la loi de $\Phi_A(K)$ conditionnée sur $(K \cap A = \emptyset)$ est égale à la loi de K où Φ_A est la transformation conforme de $\mathbb{U} \setminus A$ à \mathbb{U} qui préserve 1 et l'origine (Figure 3).

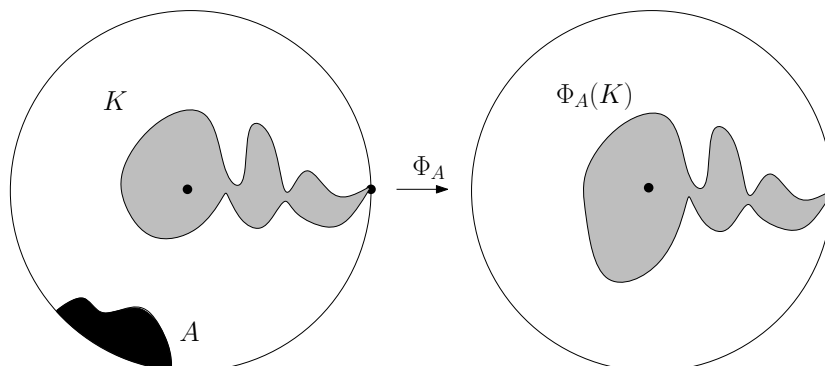


Figure 3: Φ_A est la transformation conforme de $\mathbb{U} \setminus A$ à \mathbb{U} qui préserve 1 et l'origine. La loi de $\Phi_A(K)$ conditionnée sur $(K \cap A = \emptyset)$ est égale à la loi de K .

Nous montrons dans [Wu13] que la mesure de restriction radiale est caractérisée par le couple de deux nombres réels (α, β) tel que

$$\mathbb{P}(K \cap A = \emptyset) = |\Phi'_A(0)|^\alpha |\Phi'_A(1)|^\beta$$

où A est un sous-ensemble fermé de $\overline{\mathbb{U}}$ tel que $A = \overline{\mathbb{U} \cap A}$, $\mathbb{U} \setminus A$ est simplement connexe, contient l'origine et 1 sur sa frontière, et Φ_A est la transformation conforme de $\mathbb{U} \setminus A$ à \mathbb{U} qui préserve 0 et 1. La mesure de restriction radiale correspondante est notée $\mathbb{P}(\alpha, \beta)$. En plus, nous montrons que $\mathbb{P}(\alpha, \beta)$ existe si et seulement si

$$\beta \geq \frac{5}{8}, \quad \alpha \leq \xi(\beta) = \frac{1}{48} \left((\sqrt{24\beta + 1} - 1)^2 - 4 \right).$$

References

- [CDCH⁺12] Dmitry Chelkak, Hugo Duminil-Copin, Clément Hongler, Antti Kemppainen, and Stanislav Smirnov. Convergence of ising interfaces to sles. 2012.

- [CN06] Federico Camia and Charles M. Newman. Two-dimensional critical percolation: the full scaling limit. *Comm. Math. Phys.*, 268(1):1–38, 2006.
- [CN07] Federico Camia and Charles M. Newman. Critical percolation exploration path and SLE_6 : a proof of convergence. *Probab. Theory Related Fields*, 139(3-4):473–519, 2007.
- [CS12] Dmitry Chelkak and Stanislav Smirnov. Universality in the 2D Ising model and conformal invariance of fermionic observables. *Invent. Math.*, 189(3):515–580, 2012.
- [Dub09] Julien Dubédat. SLE and the free field: partition functions and couplings. *J. Amer. Math. Soc.*, 22(4):995–1054, 2009.
- [Ken08] Richard Kenyon. Height fluctuations in the honeycomb dimer model. *Comm. Math. Phys.*, 281(3):675–709, 2008.
- [LSW03] Gregory Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. Conformal restriction: the chordal case. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(4):917–955 (electronic), 2003.
- [LSW04] Gregory F. Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees. *Ann. Probab.*, 32(1B):939–995, 2004.
- [MS12] Jason Miller and Scott Sheffield. Imaginary geometry ii: reversibility of $sle_\kappa(\rho_1; \rho_2)$ for $\kappa \in (0, 4)$. 2012.
- [MS13] Jason Miller and Scott Sheffield. $Cle(4)$ and gaussian free field. 2013.
- [MW13] Jason Miller and Hao Wu. Intersections of sle paths: the double and cut point dimension of sle, 2013.

- [She07] Scott Sheffield. Gaussian free fields for mathematicians. *Probab. Theory Related Fields*, 139(3-4):521–541, 2007.
- [She09] Scott Sheffield. Exploration trees and conformal loop ensembles. *Duke Math. J.*, 147(1):79–129, 2009.
- [She11] Scott Sheffield. Conformal weldings of random surfaces: Sle and the quantum gravity zipper. *preprint*, 2011.
- [SS09] Oded Schramm and Scott Sheffield. Contour lines of the two-dimensional discrete Gaussian free field. *Acta Math.*, 202(1):21–137, 2009.
- [SS12] Oded Schramm and Scott Sheffield. A contour line of the continuum gaussian free field. *Probab. Theor. rel. Fields*, page to appear, 2012.
- [SW12] Scott Sheffield and Wendelin Werner. Conformal loop ensembles: the Markovian characterization and the loop-soup construction. *Ann. of Math. (2)*, 176(3):1827–1917, 2012.
- [SWW13] Scott Sheffield, Samuel Watson, and Hao Wu. Couplings between gff and cle_4 . 2013.
- [Wu13] Hao Wu. Conformal restriction: the radial case. 2013.
- [WW12] Wendelin Werner and Hao Wu. On conformally invariant cle explorations. *Comm. Math. Phys.*, page to appear, 2012.
- [WW13] Wendelin Werner and Hao Wu. From $\text{cle}(\kappa)$ to $\text{sle}(\kappa, \rho)$'s. *Electron. J. Probab.*, 18:no. 36, 1–20, 2013.
- [Zha08] Dapeng Zhan. Reversibility of chordal SLE. *Ann. Probab.*, 36(4):1472–1494, 2008.
- [Zha10] Dapeng Zhan. Reversibility of some chordal $\text{SLE}(\kappa; \rho)$ traces. *J. Stat. Phys.*, 139(6):1013–1032, 2010.