

Etude de cristaux phononiques bidimensionnels à gradient de propriété. Application à la déviation de faisceaux acoustiques.

Kun Zong

▶ **To cite this version:**

Kun Zong. Etude de cristaux phononiques bidimensionnels à gradient de propriété. Application à la déviation de faisceaux acoustiques.. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Havre, 2013. Français. NNT : . tel-00858085

HAL Id: tel-00858085

https://theses.hal.science/tel-00858085

Submitted on 4 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée par

Kun ZONG

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DU HAVRE

Discipline : **Sciences pour l'Ingénieur**
Spécialité : **Acoustique**
Thème : **Structures Phononiques (SP)**

Etude de cristaux phononiques bidimensionnels à gradient de propriété. Application à la déviation de faisceaux acoustiques.

Soutenue le 10/07/2013 devant le jury composé de :

J. O. Vasseur	P.U IUFM Nord-Pas de Calais/Université d'Artois
E. Akmansoy	Maître de Conférences HDR, Université Paris IX Orsay
J.-M. Conoir	Directeur de Recherche CNRS, Université Paris VI
M. V. Predoï	P. U. Université Polytechnique de Bucarest
O. Lenoir	P. U. Université du Havre
H. Franklin	P. U. Université du Havre

Groupe Ondes Acoustiques (GOA)

Laboratoire Ondes et Milieux Complexes (LOMC)

UMR CNRS 6294, Université du Havre

Remerciements

Je tiens dans un premier temps à remercier mon directeur de thèse, M. Olivier LENOIR, professeur d'Université du Havre pour m'avoir accueilli au sein d'équipe de structure phononique du laboratoire Ondes et Milieux Complexes. Je lui suis également reconnaissant pour le temps conséquent qu'il m'a accordé, ses qualités pédagogiques et scientifiques, sa franchise et sa sympathie. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse ma gratitude pour tout cela.

J'adresse de chaleureux remerciements à mon co-encadrant de thèse, M. Hervé FRANKLIN, professeur des Universités du Havre et du laboratoire ondes et Milieux Complexes, pour son attention de tout instant sur mes travaux, pour sa disponibilité, ses idées et conseils, ainsi que pour son aide précieuse de tous les jours. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

Je suis profondément reconnaissant envers Monsieur P.REMBERT, Maitre de conférence du LOMC, qui m'a apporté des soutiens permanents en informatique. Il m'a beaucoup appris, j'ai apprécié son enthousiasme et sa sympathie.

Je remercie aussi Madame Reveka.SAINIDOU Maitre de conférence du LOMC, qui m'a donnée des conférences et des connaissances supplémentaires sur structures phononiques.

Je voudrais remercier les rapporteurs de cette thèse, M. Vasseur, Professeur d'Université d'Artois, et M. Akmansoy, Maître de Conférences HDR, Université Paris IX Orsay, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

J'associe à ces remerciements M. Conoir Directeur de Recherche CNRS, Université Paris VI et M. Predoï Professeur d'Université Polytechnique de Bucarest pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Ce travail n'aurait pu aboutir sans l'aide de nombreuses personnes. J'ai pu travailler dans un cadre particulièrement agréable, grâce à l'ensemble des membres du groupe Ondes Acoustiques du LOMC. J'adresse mes remerciements à tous les enseignants - chercheurs, les techniciens et mes collègues doctorants pour tous les échanges techniques, scientifiques et pour leur sympathie, leur accueil chaleureux pendant ces trois ans de thèse.

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE 1

CHAPITRE 1 : DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR UN TUBE INFINIMENT LONG 4

1.1 Introduction 4
1.2 Onde dans le milieu fluide 5
1.3 Fonctions de forme 9
1.4 Spectre des résonances 13
1.4.1 Analyse du spectre des résonances du tube en acier de rapport *b/a* = 75/85 13
1.4.2 Influence de l'épaisseur du tube sur le spectre des résonances 15
1.5 Diagrammes angulaires 20
1.6 Conclusion 22
Références 24

CHAPITRE 2 : DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR UN RESEAU LINÉAIRE DE TUBES 25

2.1 Introduction 25
2.2 Généralités 26
2.3 Réflexion et transmission par un réseau 28
2.3.1 Transformation de Σ_0^ν en une superposition d'ondes planes 29
2.3.2 Transformation de Σ_n^ν ($n \neq 0$) en une superposition d'ondes planes. 31
2.3.3 Pression transmise par le réseau 32
2.3.4 Pression réfléchie par le réseau 33
2.4 Fréquences de coupure 33
2.5 Conservation de l'énergie 35
2.6 Matrices de réflexion et de transmission 37
2.7 Résultats numériques et graphiques 38
2.8 Conclusion 43
Référence 45

CHAPITRE 3 : DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR DES STRUCTURES PHONONIQUES A N RESEAUX OU BIRESEAUX LINEAIRES 46

3.1 Introduction 46
3.2 Matrices de réflexion et de transmission pour un réseau linéaire 47
3.3 Matrices de réflexion et de transmission pour deux réseaux linéaires 48
3.4 Matrices de réflexion et de transmission pour N réseaux linéaires 51
3.5 Cas d'un seul mode propagatif 52
3.6 Réseau bidimensionnel infini 54

3.7 Résultats numériques et graphiques 56
3.7.1 N réseaux identiques linéaires 56
3.7.3 Influence des paramètres géométriques sur les bandes interdites 63
3.8 Conclusion 66
Référence 67
CHAPITRE 4 : RESONANCES DE STRUCTURES PHONONIQUES A GRADIENTS DE PROPRIETES 68
4.1 Introduction 68
4.2 Rappels concernant la diffusion multiple par N réseaux 68
4.3 Etude de réseaux à gradients de propriétés 69
4.3.1 Variation du rapport *b/a* 70
4.3.2 Variation du rapport b/a pour une SP2D de trois réseaux 72
4.3.3 Variation du rapport b/a pour une SP2D de dix réseaux 73
4.3.4 Variation de la masse volumique 78
4.3.5 Variation de la vitesse de l'onde longitudinale 80
4.4 Conclusion 81
Références 82
CHAPITRE 5 : ELARGISSEMENT DE BANDES INTERDITES 83
5.1 Introduction 83
5.2 Distance variable entre réseaux linéaires simples 84
5.2.1 Géométrie du problème 85
5.2.2 Résultats des expérimentations numériques 85
5.3 Distance variable entre biréseaux 94
5.3.1 Géométrie du problème 94
5.3.2 Résultats des recherches 95
5.4 Conclusion 101
Références 102
CHAPITRE 6 : LENTILLES ACOUSTIQUES ET GUIDE D'ONDE : SIMULATIONS TEMPORELLES ET FREQUENTIELLES 103
6.1 Introduction 103
6.2 Modus *operandi* des simulations 104
6.2.1 Simulation fréquentielle 104
6.2.2 Simulation temporelle 112
6.3 Simulations pour 10 réseaux identiques 116
6.3.1 Simulation fréquentielle 116

6.3.2 Simulation temporelle 117
6.4 Lentilles acoustiques 119
6.4.1 Lentilles convergentes 119
6.4.2 Lentilles divergentes 126
6.4.3 Recomposition du paquet d'onde 131
6.5 Guides d'onde 134
6.6 Conclusion 141
Références 142
CONCLUSION GENERALE 143

INTRODUCTION GENERALE

La propagation d'ondes dans les milieux périodiquement structurés (très majoritairement artificiels) a connu un formidable essor ces vingt dernières années tant en optique (cristaux photoniques) qu'en acoustique (cristaux phononiques). Le terme *métamatériau* est même appliqué actuellement à tout *matériau composite artificiel* susceptible de dégager des propriétés acoustiques ou électromagnétiques qu'il n'est pas possible d'obtenir à partir d'un matériau naturel. Ces dispositifs sont très variés : structures multicouches périodiques unidimensionnelles (SP1D), structures périodiques bidimensionnelles formées par des cylindres ou des tubes disposés dans une matrice liquide ou solide (SP2D) et aussi structures formées par la disposition de domaines compacts périodiquement espacés placés dans une matrice (SP3D). Seuls les SP2D sont étudiés dans cette thèse.

Certaines recherches et applications tendent à miniaturiser sans cesse ces structures car si les métamatériaux possèdent des propriétés particulières, il convient pour la commodité de leur utilisation qu'elles aient des tailles relativement petites. C'est un problème crucial en optique. A l'opposé de ces tentatives, il existe en acoustique des domaines d'investigation à l'échelle macroscopique tels que l'isolation phonique de domaines prédéfinis de l'espace en milieu aérien ou aquatique. A cet effet, on peut entrevoir deux possibilités pour arriver à ses fins. La première consiste à réellement empêcher la pénétration du son en le renvoyant vers son point de départ ou en l'absorbant totalement. La seconde consiste à dévier le son en amont du domaine à protéger puis éventuellement à reconstituer le front d'onde en aval. Ces deux situations ne peuvent être réalisées pleinement qu'avec des métamatériaux. La conception de ces deux dispositifs fait l'objet de cette thèse.

Nous avons privilégié deux approches de calcul des champs acoustiques. La première dite de diffusion multiple privilégie les aspects analytiques, mais ne peut être appliquée que dans des cas particuliers, par exemple lorsque tous les diffuseurs sont identiques. La seconde approche privilégie le calcul par éléments finis en utilisant le logiciel COMSOL®. Elle prend le relais de la première chaque fois que l'on ne sait plus écrire analytiquement le problème à résoudre. Le mémoire comporte six chapitres structurés de la manière suivante.

Le premier chapitre de ce document présente la diffusion d'une onde plane acoustique par un tube infini immergé. L'exploitation des conditions de continuité aux interfaces fluide/solide permet de déterminer les coefficients de diffusion du tube puis la pression

diffusée. On peut alors calculer la fonction de forme en champ lointain. Les fonctions de forme de tubes en acier et en polyéthylène qui composeront les SP2D étudiés par la suite sont analysées. Les trajectoires de Regge récapitulant l'évolution des résonances en fonction de l'épaisseur des tubes et diagrammes angulaires sont fournis.

Dans le second chapitre, on étudie la diffusion acoustique par un réseau linéaire infini de tubes, soit en acier, soit en polyéthylène. Les coefficients de réflexion et de transmission pour un réseau linéaire sont établis théoriquement et les simulations numériques effectuées en Fortran, en fonction de la fréquence réduite *ka*, *k* étant le nombre d'onde dans l'eau et *a* le rayon externe des tubes tous identiques. L'identification des résonances des tubes est menée en comparant les courbes des coefficients aux trajectoires de Regge obtenues au chapitre 1..

Dans le troisième chapitre, on étudie une SP2D constituée de N réseaux linéaires parallèles (plans réticulaires). On rappelle d'abord les expressions des coefficients de réflexion et de transmission d'une structure phononique composée de N réseaux de tubes d'un même matériau. Les bandes passantes et interdites apparaissant sur les tracés des coefficients de réflexion et de transmission sont analysées. On généralise cette étude au cas d'une SP2D de N bi-réseaux constitués chacun de deux réseaux linéaires de tubes de matériaux différents. Dans ce dernier cas, des variations sur les paramètres géométriques et physiques du cristal sont envisagées. L'influence de ces variations sur la position et la largeur des bandes interdites est étudiée.

Les résonances d'une SP2D à gradient de propriétés, composée de N réseaux linéaires constitués de tubes, élastiques, isotropes, périodiquement espacés d'une distance d, sont étudiées dans le quatrième chapitre. Des études paramétriques portant sur les variations (i) du rapport *b/a* (où *b* désigne le rayon interne des tubes) (ii) de la masse volumique (iii) de la vitesse des ondes longitudinales, d'un réseau linéaire au suivant sont présentées.

On présente dans le cinquième chapitre une propriété particulière des cristaux phononiques obtenue à partir de la variation de la distance *D/a* entre les réseaux linéaires sur les modifications des bandes interdites.

Dans le dernier chapitre, des simulations temporelles et fréquentielles, réalisées à l'aide du logiciel de calcul par éléments finis COMSOL® version 3.5a sont présentées. On décrit le *modus operandi* utilisé pour réaliser ces simulations sur des SD2D formées de réseaux de tubes identiques. Les simulations fréquentielles données à l'appui permettent de vérifier les résultats du chapitre 3. Des SP2D élaborées permettent de créer des lentilles

acoustiques, soit convergentes soit divergentes dont l'association permet de recomposer le paquet d'onde incident, après la traversée du dispositif de deux lentilles. Enfin, certains guides d'ondes (virage, double virage et en fourche) sont étudiés. En particulier on examine les propriétés de guidage par association de tubes en acier et de tubes en polyéthylène. Les fréquences de l'onde incidente sur le guide sont toujours choisies dans la bande passante de l'acier (qui coïncide avec la bande interdite du polyéthylène).

CHAPITRE 1 :
DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR UN TUBE INFINIMENT LONG

1.1 Introduction

L'objectif de ce premier chapitre est de rappeler de façon très succincte, au regard de la pléthore de travaux parus sur le sujet, les principales propriétés de la diffusion acoustique d'une onde plane harmonique par un tube élastique infiniment long. Les travaux les plus proches de nos préoccupations dans ce chapitre sont ceux de G. Maze[1].

Le tube, de rayon externe a et de rayon interne b, est réalisé dans un matériau de masse volumique ρ_2, les célérités des ondes s'y propageant étant c_l (onde longitudinale) et c_t (onde transversale). Le milieu externe (respectivement interne) au tube est un fluide parfait de masse volumique ρ_1 (resp. ρ_3) et de célérité des ondes c_1 (resp. c_3).

La géométrie du problème est décrite à la Figure 1-1. La direction de propagation de l'onde plane incidente d'extension infinie est perpendiculaire à l'axe OZ du tube mais fait un angle α avec l'axe OX. On étudie la diffusion dans le plan OXY en utilisant le système de coordonnées polaires (r, θ).

[1] G. Maze, Méthode d'isolement et d'identification des résonances (MIIR) *in N. GESPA, La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple*, Editions du CEDOCAR (1987)

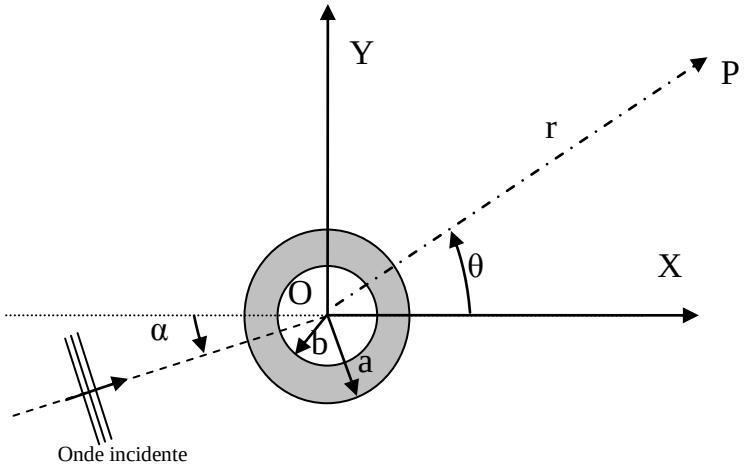


Figure 1-1 : géométrie du problème

La solution recherchée est la pression diffusée par le tube au point **P** dans le fluide externe. Cette pression est la somme de l'onde incidente et de l'onde diffusée par le cylindre dans la direction θ.

1.2 Onde dans le milieu fluide

Dans le milieu fluide, il ne peut se propager qu'une seule onde longitudinale. Le potentiel de l'onde plane harmonique incidente peut s'écrire :

$$\phi_{1inc} = \exp i(\vec{k}_1.\vec{r} - \omega t), \qquad (1.1)$$

où $\vec{k}_1 = (k_1 \cos\alpha, k_1 \sin\alpha)$ est le vecteur d'onde associé, $k_1 = \|\vec{k}_1\| = \omega / c_1$ le nombre d'onde et $\vec{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ un vecteur indiquant le point d'observation **P**. Dans la suite, le facteur $e^{-i\omega t}$ sera implicite (ω est la pulsation et t le temps). En coordonnées polaires, le champ incident (1.1) peut s'écrire

$$\phi_{1inc} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k_1 r) e^{in(\theta-\alpha)}, \qquad (1.2)$$

où $J_n(k_1 r)$ désigne la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n. A partir de là, on déduit la pression $p_{1inc} = -\rho_1 \omega^2 \phi_{1inc}$ et le déplacement radial $u_{r1inc} = \partial\phi_{1inc}/\partial r$ relatifs à l'onde incidente au point **P**.

Le potentiel diffusé ϕ_{1diff} par le tube au point **P** est donné par

$$\phi_{1\,diff} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n T_n H_n^{(1)}(k_1 r) e^{in(\theta-\alpha)} \qquad (1.3)$$

où $H_n^{(1)}(k_1 r)$ désigne la fonction de Hankel de première espèce, d'ordre n. L'équation (1.3) représente une superposition d'ondes cylindriques divergentes. On en déduit la pression $p_{1\,diff} = -\rho_1 \omega^2 \phi_{1diff}$ et le déplacement radial $u_{r1\,diff} = \partial \phi_{1diff} / \partial r$ relatifs à l'onde diffusée au point **P**.

Finalement, le potentiel total ϕ_1 au point P est la superposition de l'onde incidente $\phi_{1\,inc}$ et de l'onde diffusée par le cylindre élastique ϕ_{1diff} :

$$\phi_1 = \phi_{1inc} + \phi_{1diff} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n \left[J_n(k_1 r) + T_n H_n^{(1)}(k_1 r) \right] e^{in(\theta-\alpha)}. \qquad (1.4)$$

Les coefficients T_n, souvent appelés coefficients de diffusion simple, sont des inconnues caractérisant la diffusion de l'onde acoustique par le cylindre. Ils sont déterminés *via* la résolution du système linéaire résultant de l'application des conditions aux limites. Celles-ci stipulent la continuité des déplacements radiaux, de la contrainte normale et de la contrainte tangentielle aux interfaces $r = a$ et $r = b$ entre fluide et solide. On obtient l'expression suivante pour les coefficients de diffusion[2]

$$T_n = \frac{D_n^{[1]}(a,b)}{D_n(a,b)}, \qquad (1.5)$$

avec $T_{-n} = T_n$ où $D_n(a,b)$ et $D_n^{[1]}(a,b)$ sont les déterminants 6x6 suivants

$$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}, \qquad (1.6)$$

et

[2] L. Flax, L. R. Dragonette, H. Überall, in *Acoustic Resonance Scattering*, Gordon and Braich Eds, pp 49-67,1992

$$D_n^{[1]}(a,b)=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}, \qquad (1.7)$$

avec

$$a_{11}=\frac{\rho_1}{\rho_2}x_t^2H_n^{(1)}(x_1),$$

$$a_{12}=(-x_t^2+2n^2)J_n(x_l)-2x_lJ_n^{'}(x_l),$$

$$a_{13}=(-x_t^2+2n^2)N_n(x_l)-2x_lN_n^{'}(x_l),$$

$$a_{14}=2n\left[x_tJ_n^{'}(x_t)-J_n(x_t)\right],$$

$$a_{15}=2n\left[x_tN_n^{'}(x_t)-N_n(x_t)\right],$$

$$a_{21}=-x_1H_n^{(1)'}(x_1),$$

$$a_{22}=x_lJ_n^{'}(x_l),\ a_{23}=x_lN_n^{'}(x_l),$$

$$a_{24}=nJ_n(x_t),\ a_{25}=nN_n(x_t),$$

$$a_{32}=2n\left[-x_lJ_n^{'}(x_l)+J_n(x_l)\right],$$

$$a_{33}=2n\left[-x_lN_n^{'}(x_l)+N_n(x_l)\right]$$

$$a_{34}=(x_t^2-2n^2)J_n(x_t)+2x_tJ_n^{'}(x_t),$$

$$a_{35}=(x_t^2-2n^2)N_n(x_t)+2x_tN_n^{'}(x_t),$$

$$a_{42}=(-y_t^2+2n^2)J_n(y_l)-2y_lJ_n^{'}(x_l),$$

$$a_{43}=(-y_t^2+2n^2)N_n(y_l)-2y_lN_n^{'}(x_l),$$

$$a_{44}=2n\left[y_tJ_n^{'}(y_t)-J_n(y_t)\right],$$

$$a_{45}=2n\left[y_tN_n^{'}(y_t)-N_n(y_t)\right],$$

$$a_{46}=\frac{\rho_3}{\rho_2}y_t^2J_n(y_3), \qquad (1.8)$$

$$a_{52}=y_lJ_n^{'}(y_l),$$

$$a_{53}=y_lN_n^{'}(y_l),\ a_{54}=nJ_n(y_t),$$

$$a_{55} = nN_n(y_t),\ a_{56} = -y_3 J_n^{'}(y_3),$$

$$a_{62} = 2n\left[-y_l J_n^{'}(y_l) - J_n(y_l)\right],$$

$$a_{63} = 2n\left[-y_l N_n^{'}(y_l) - N_n(y_l)\right],$$

$$a_{64} = (y_t^2 - 2n^2)J_n(y_t) + 2y_l J_n^{'}(x_t),$$

$$a_{65} = (y_t^2 - 2n^2)N_n(y_t) + 2y_l N_n^{'}(x_t),$$

$$a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{31} = a_{41} = a_{51} = a_{61} = a_{66} = 0,$$

$$b_1 = -\frac{\rho_1}{\rho_2} x_t^2 J_n(x_1),\ b_2 = x_1 J_n^{'}(x_1).$$

Dans ce qui précède, on a posé

$$k_1 a = x_1,\ k_l a = x_l,\ k_t a = x_t, \tag{1.9}$$

$$k_l b = y_l,\ k_t b = y_t,\ k_3 b = y_3. \tag{1.10}$$

et $N_n(.)$ désigne la fonction de Neumann d'ordre *n*.

On définit habituellement la fonction de forme en champ lointain

$$f(\alpha,\theta) = \sqrt{\frac{r}{a}}\frac{p_{1diff}}{p_{1inc}}, \tag{1.11}$$

où p_{1diff} sont les pressions et p_{1inc} sont toutes deux exprimées en champ lointain $k_1 r \gg 1$. En utilisant le développement asymptotique suivant de la fonction de Hankel pour $k_1 r \gg k_1 a$ [3]:

$$H_n^{(1)}(k_1 r) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}} \cdot \exp i(k_1 r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), \tag{1.12}$$

on obtient

$$f(\alpha,\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi x_1}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n e^{in(\theta-\alpha)}. \tag{1.13}$$

Les résultats numériques peuvent également être présentés à l'aide de la fonction F_∞ appelée elle aussi fonction de forme en champ lointain.

$$F_\infty(x_1,\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi x_1}}\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n e^{in(\theta-\alpha)}\right|. \tag{1.14}$$

[3] M.Abramovitz et I.Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* , Dover, New-York (1964)

Ces deux fonctions de forme ne diffèrent que par leur amplitude.

1.3 Fonctions de forme

La fonction de forme en champ lointain permet de localiser les fréquences de résonances d'un tube. Les résultats numériques sont présentés pour des tubes d'acier et des tubes de polyéthylène. Les propriétés physiques de ces matériaux et de l'eau sont données dans le tableau ci-dessous.

Matériau	Masse volumique ($kg\ m^{-3}$)	Vitesse longitudinale ($m\ s^{-1}$)	Vitesse transversale ($m\ s^{-1}$)
Acier	7900	5900	3100
Polyéthylène	940	2370	800
Eau	1000	1470	-

Tableau 1-1 : Propriétés physiques des matériaux utilisés.

Pour un tube, la fonction de forme en champ lointain F_∞ dépend essentiellement de deux variables, la fréquence sans dimension et l'angle θ d'observation lorsque α est fixé. Le rapport b/a du rayon interne au rayon externe considéré ici est $75/85 \approx 0.8823$. Trois cas peuvent être alors envisagés en supposant que α = 0° (les fonctions F_∞ sont tracées en fonction de la fréquence réduite $x_1 = k_1 a = ka$, à angle fixé :

A) Diffusion vers l'avant : $\theta = 0°$ (Figure 1-2) ;

B) Rétrodiffusion (ou diffusion vers l'arrière) : $\theta = 180°$ (Figure 1-3) ;

C) Diffusion dans une direction, par exemple, $\theta = 10°$ (Figure 1-4)

Sur la Figure 1-2, on remarque que la courbe présente un fond non résonant continu d'amplitude croissante quand *ka* augmente, auquel se superposent des transitions brusques ou des pics en certaines valeurs x_1^* de x_1. Ces « accidents » sont liés aux résonances du tube à des fréquences d'excitation particulières. Les résonances résultent du bouclage en phase d'une onde circonférentielle sur elle-même[45].

[4] L. Flax, L. R. Dragonette, H. Überall, Theory of elastic resonance excitation by sound scattering, J. Acoust. Soc. Am, 63(3),723-731 (1978)

On s'est borné ici au domaine $0.1 \leq x_1 = ka \leq 5$ qui correspond à celui où existent les seules ondes de Scholte-Stoneley dites aussi **ondes A**. Ce sont des ondes se propageant autour du tube tout en ayant l'essentiel de leur énergie du côté du fluide extérieur. Elles sont appelées ondes externes et vont revêtir un intérêt particulier dans les structures telles que les réseaux car susceptibles de provoquer un couplage si les cibles sont suffisamment proches.

Si l'on compare les courbes des Figures 1-2, 1-3 et 1-4, on peut remarquer qu'elles présentent le même nombre de pics, tous situés dans l'intervalle $0.1 \leq x_1 \leq 5$. Ces pics se décalent très peu lorsque l'angle d'observation varie.

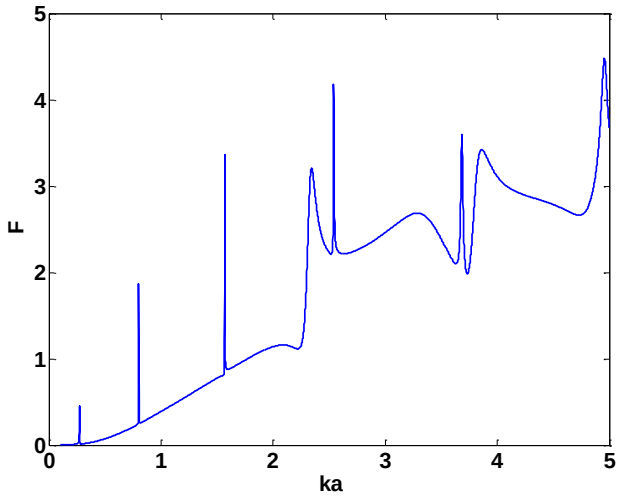


Figure 1-2 : fonction de forme de diffusion vers l'avant (θ = 0°) pour un tube en acier (b/a = 75/85)

[5] A. Derem, Relation entre la formation des ondes de surface et l'apparition des résonances, Revue du Cethedec 58, pp 43-79 (1979)

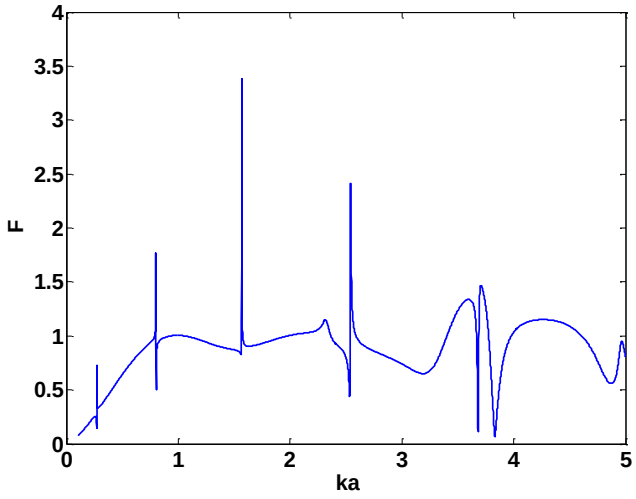


Figure 1-3 : fonction de forme de diffusion vers l'arrière (θ=180°) pour un tube en acier (b/a=75/85)

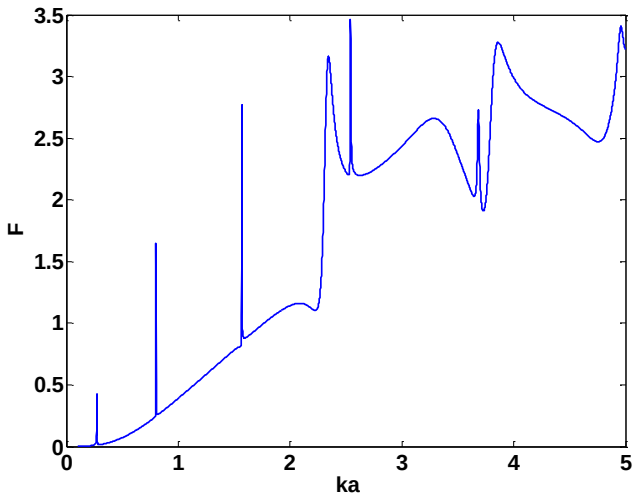


Figure 1-4 : fonction de forme de diffusion dans la direction(θ = 10°) pour un tube en acier (b/a=75/85)

Afin de mettre en évidence les différences dans la diffusion pouvant exister entre 2 types de matériau, on examine maintenant le cas d'un tube en polyéthylène tout en gardant le même rapport $b/a = 75/85$. Les Figures 1-5, 1-6 et 1-7 présentent respectivement la diffusion vers l'avant, vers l'arrière, et la diffusion dans la direction $\theta = 10°$.

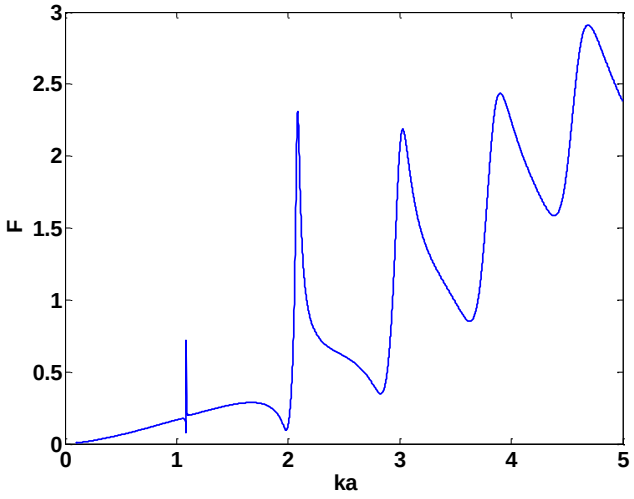


Figure 1-5 : fonction de forme de diffusion vers l'avant (θ = 0°) pour un tube en polyéthylène (b/a = 75/85)

En comparant les courbes obtenues pour le tube de polyéthylène à celles du tube d'acier, on observe dès les basses fréquences des différences notables. Les pics pour le polyéthylène sont plus larges que ceux détectés pour l'acier et ne sont pas situés aux mêmes valeurs de *ka*. Les largeurs de résonance caractérisent la réémission de l'énergie élastique vers le fluide extérieur. Cette réémission se fait plus vite pour le polyéthylène. Concrètement, les ondes effectuent moins de tours autour du tube en polyéthylène.

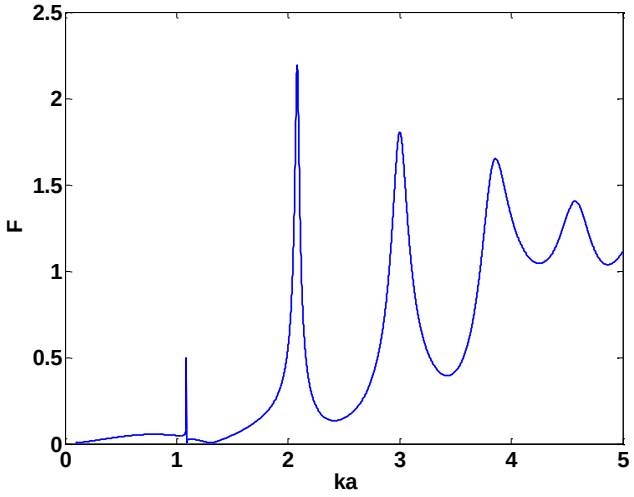


Figure 1-6 : fonction de forme de diffusion vers l'arrière (θ = 180°) pour un tube en polyéthylène (b/a=75/85)

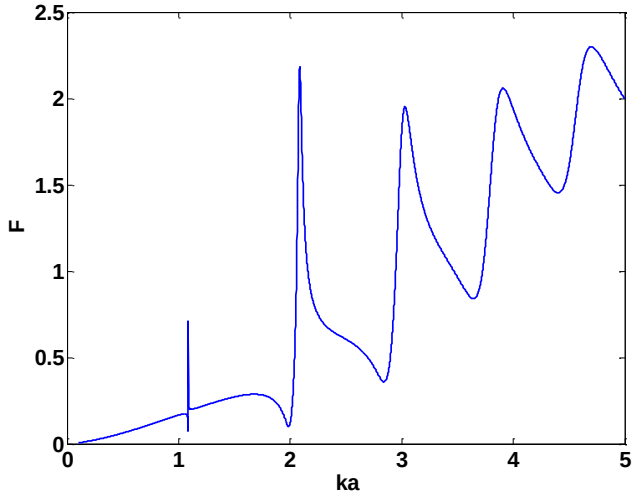


Figure 1-7 : fonction de forme de diffusion dans la direction (θ = 10°) pour un tube en polyéthylène (b/a=75/85)

1.4 Spectre des résonances

1.4.1 Analyse du spectre des résonances du tube en acier de rapport *b/a* = 75/85

On peut mettre en évidence deux familles de résonances. L'une est liée aux ondes se propageant dans le tube ; l'autre est liée aux ondes se propageant dans la colonne d'eau. La lettre « l » caractérise les résonances assimilables à celles du tube vide ; la lettre « l_f » caractérise quant à elle les résonances de la colonne d'eau. La lettre n désigne le numéro du mode de vibration. Les nombres n, l et l_f sont des entiers tels que $n \in \mathbb{N}$ et $l, l_f \in \mathbb{N}^*$.

Le tableau ci-dessous récapitule les fréquences de résonances x_1^* du tube rempli d'eau. On peut les déterminer avec une très grande précision en résolvant l'équation $D_n(a,b) \equiv D_n(x_1) = 0$. Ici, on les a déduites à partir des courbes des fonctions de forme. Le nombre l = 1 représente la première série de résonances assimilables à celles du tube vide ; l_f =1 représente la première série de résonances de la colonne d'eau,…etc.

Mode n	l=1 (onde **A**)	l=2 (onde $\mathbf{S_0}$)	l_f=1	l_f=2	l_f=3	l_f=4	l_f=5
0				4,343	7,951	11,530	15,100
1		5,097	2,087	6,042	9,674	13,267	16,845
2		8,562	3,461	7,600	11,299	14,926	18,527
3	0,799	11,843	4,761	9,084	12,879	16,531	20,161
4	1,563	15,551	6,027	10,520	14,373	18,093	21,756
5	2,532	19,058	7,271	11,923	15,852	19,621	23,319
6	3,673	22,819	8,501	13,299	17,304	21,122	24,856
7	4,945	26,182	9,722	14,657	18,733	22,601	26,370
8	6,308	30,089	10,934	15,998	20,144	24,060	27,865
9	7,723	33,030	12,140	17,325	21,538	25,502	29,343
10	9,094	37,254	13,340	18,641	22,919	26,929	30,806

Tableau 2 : fréquences de résonances x_1^* d'un tube en acier rempli d'eau *b/a* = 75/85.

La Figure 1-8 présente les trajectoires de Regge relative au tube en acier rempli d'eau. Elles sont obtenues en traçant le mode de vibration n en fonction de la fréquence réduite x_1. On distingue la famille de résonances de la colonne d'eau (courbes en grand nombre et régulières, étoiles reliées entre elles) de la famille des résonances de tube (cercles reliés entre eux). De telles observations ont déjà été faites dans le cas de tubes en aluminium[1].

Chaque trajectoire l ou l_f est en relation avec une onde circonférentielle se propageant autour du tube. Comme on le verra, ces ondes jouent un rôle non négligeable lors de la diffusion par des réseaux linéaires ou des réseaux à deux dimensions.

[1] G. Maze, Méthode d'isolement et d'identification des résonances (MIIR) *in N. GESPA, La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple*, Editions du CEDOCAR (1987)

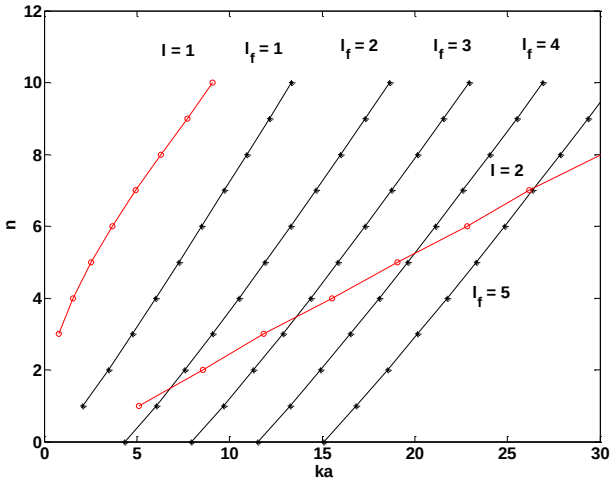


Figure 1-8 : trajectoires de Regge d'un tube en acier rempli d'eau, (b/a = 75/85)
Séries infinies de résonance lf : colonne d'eau ; Séries infinies de résonance l : tube en acier rempli de vide

1.4.2 Influence de l'épaisseur du tube sur le spectre des résonances

On examine dans un premier temps le comportement des résonances associées à la colonne d'eau lorsque l'on fait varier le rapport *b/a*. Les Figures. 1-9, 1-10 et 1-11 présentent respectivement les trajectoires de Regge des trois premières séries de résonances de la colonne d'eau. On observe que pour chaque mode de vibration *n* les fréquences de résonances augmentent lorsque le rapport *b/a* décroît. De telles observations ont également été faites lors de la comparaison des résonances de tubes en aluminium de rapports $b/a = 0,67$ et $b/a = 0,80$ [1]

[1] G. Maze, Méthode d'isolement et d'identification des résonances (MIIR) *in N. GESPA, La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple*, Editions du CEDOCAR (1987)

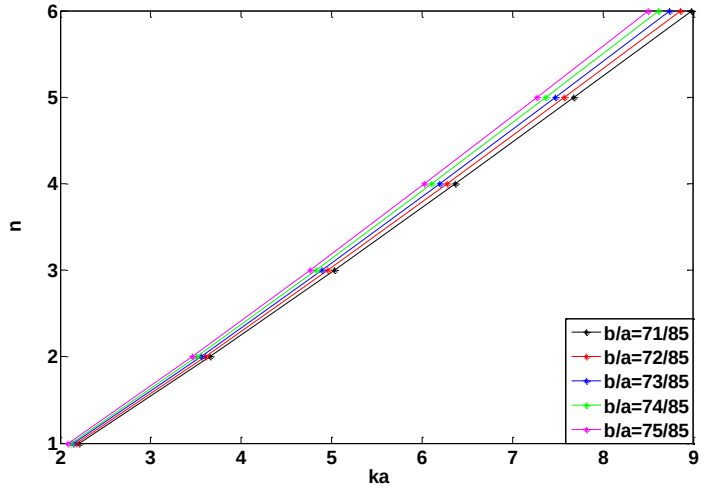


Figure 1-9 : évolution de la trajectoire de Regge de la série $l_f = 1$ de la colonne d'eau pour *b/a* variant de 71/85 à 75/85

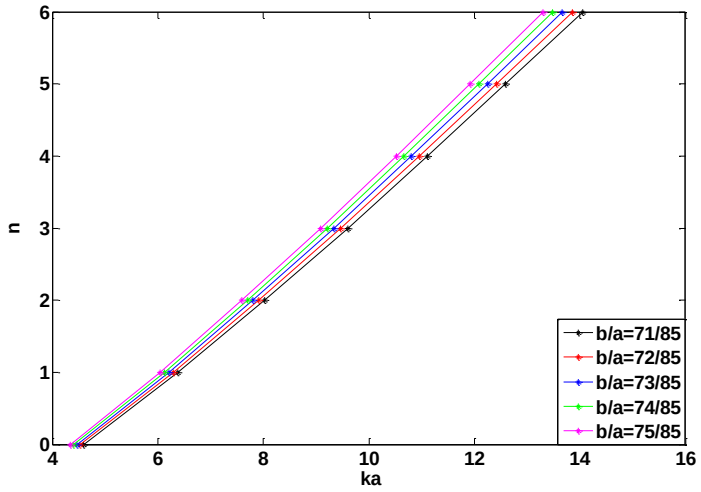


Figure 1-10 : évolution de la trajectoire de Regge de la série $l_f = 2$ de la colonne d'eau pour *b/a* variant de 71/85 à 75/85

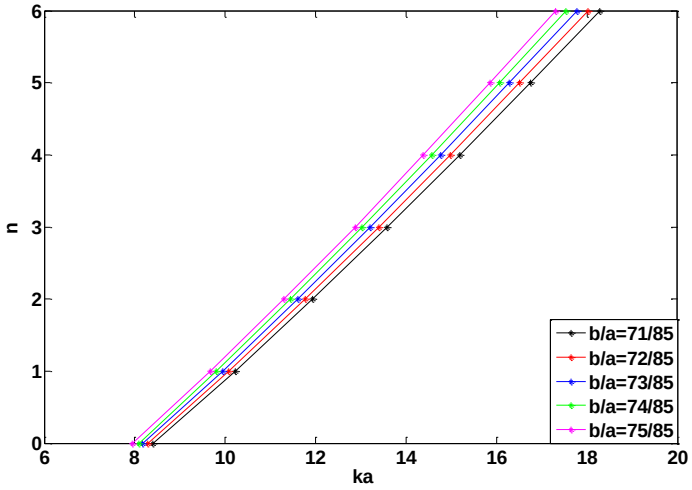


Figure 1-11 : évolution de la trajectoire de Regge de la série $l_f = 3$ de la colonne d'eau pour *b/a* variant de 71/85 à 75/85

On examine à présent l'évolution du comportement des résonances associées au tube en acier, lorsque l'épaisseur varie. Les Figures 1-12 et 1-13 montrent les trajectoires des séries $l = 1$ et $l = 2$. Ici aussi, lorsque le rapport *b/a* décroît, les fréquences de résonances croissent pour chaque mode de vibration.

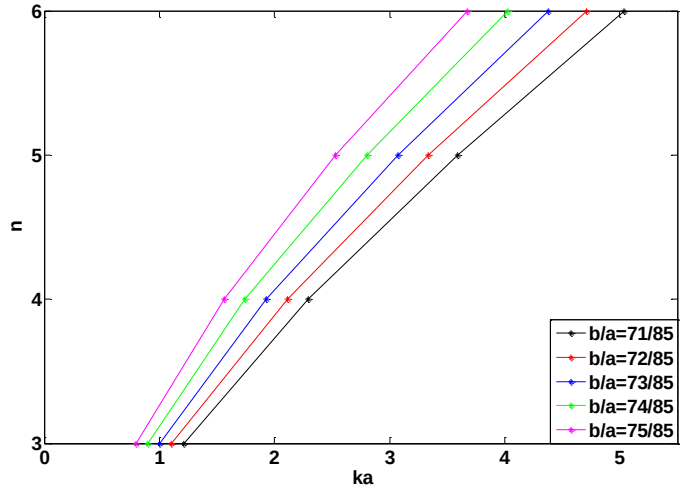


Figure 1-12 : évolution de la trajectoire de Regge de la série $l = 1$ du tube en acier pour *b/a* variant de 71/85 à 75/85

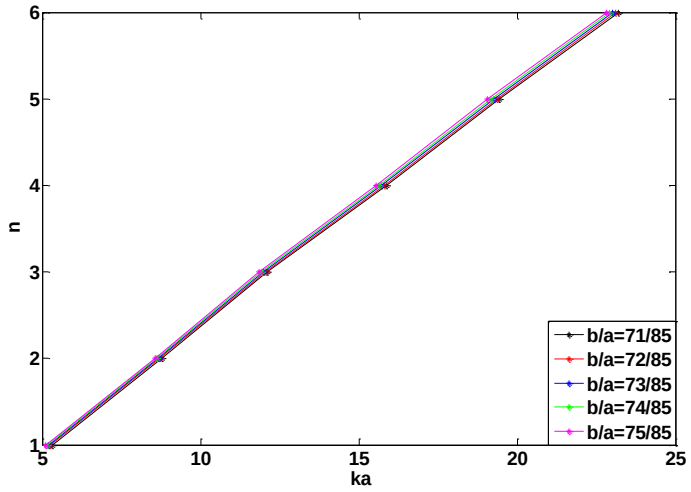


Figure 1-13 : trajectoire de Regge de la série $l = 2$ du tube en acier pour b/a variant de 71/85 à 75/85

La Figure 1-14 qui fournit un zoom d'une partie de la Figure 1-13 montre, malgré des décalages plus faibles, que les mêmes déductions que précédemment peuvent être faites. C'est-à-dire quand le rapport b/a diminue (l'épaisseur des tubes augmente), les résonances sont décalées vers les hautes fréquences pour n=2 et n=3.

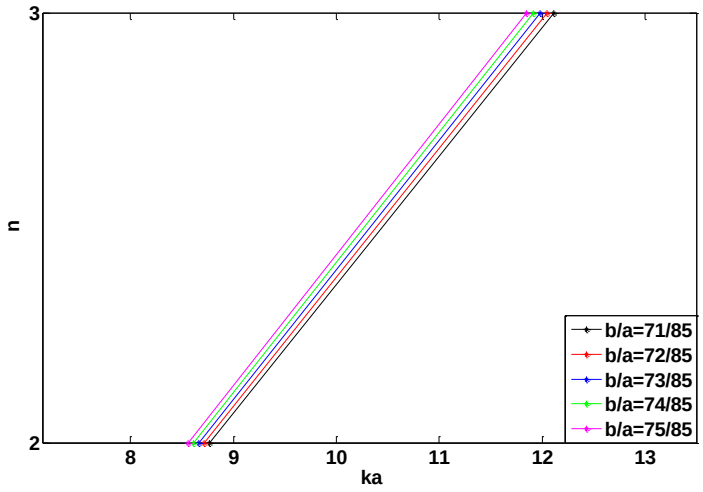


Figure 1-14 : trajectoire de Regge de la série $l = 2$ pour b/a variant de 71/85 à 75/85. Zoom de la figure précédente entre $n = 2$ et $n = 3$.

On s'intéresse maintenant à l'évolution des trajectoires de Regge de la série $l = 1$ du tube en polyéthylène, Figure 1-15. Lorsque le rapport b/a décroît, on observe que les fréquences de résonances croissent pour les modes de vibration $n = 1$ et 2. Mais à partir du

mode n = 3, ces fréquences décroissent. On peut d'ailleurs observer un croisement sur la Figure 1-16.

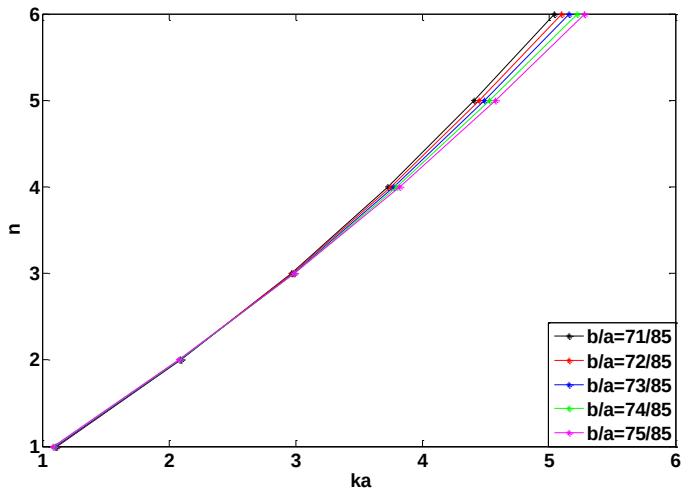


Figure 1-15 : trajectoire de Regge de la série l = 1 du tube en polyéthylène pour *b/a* variant de 71/85 à 75/85.

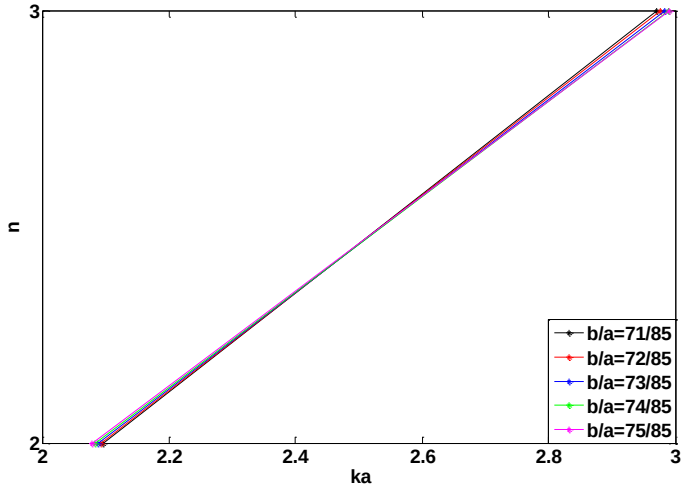


Figure 1-16 : trajectoire de Regge de la série l = 1 pour *b/a* variant de 71/85 à 75/85. Zoom de la figure précédente entre n = 2 et n = 3.

Dans notre étude, on ne s'intéresse pas à la série l = 2, parce que les fréquences des résonances de cette famille sont situées au-delà de la première fréquence de coupure, fréquence à laquelle nos simulations numériques ont été arrêtées sauf mention spéciale. Ce que l'on peut conclure de cette première étude numérique est que les déplacements des résonances en fonction de l'épaisseur s'amplifient lorsque le mode n augmente. Ainsi pour

l'acier, à *n* fixé, le décalage a lieu vers les hautes fréquences lorsque *b/a* diminue. Pour le polyéthylène, on observe le même phénomène mais seulement à partir de $n = 3$ (pour $n < 3$, c'est le contraire)

1.5 Diagrammes angulaires

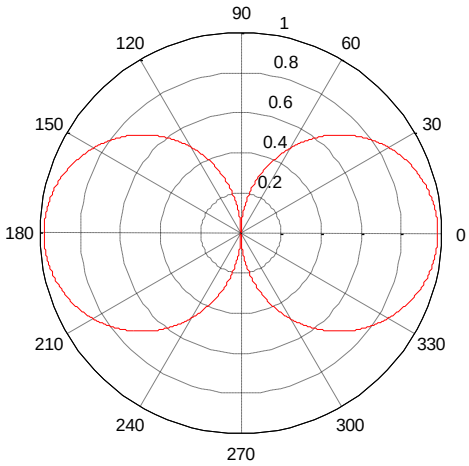
Intéressons-nous maintenant à la répartition angulaire de l'onde diffusée mode par mode. Les Figures 1-17 et 1-18 présentent quelques diagrammes angulaires pour un tube d'acier obtenus à l'aide du terme $\sqrt{2/\pi x_1}\varepsilon_n T_n \cos n\theta$ où $\varepsilon_0 = 1$ et $\varepsilon_n = 2$ si $n > 0$. Les courbes ⓐ sont tracées en coordonnées polaires alors que les courbes ⓑ sont tracées en coordonnées cartésiennes.

L'observation des courbes étiquetées ⓐ fait apparaître des lobes réguliers dont le nombre dépend de *n* (pour un mode *n* il faut compter 2*n* lobes). Les maxima sont liés à des ventres de vibration, figures étiquetées ⓑ, sur la circonférence du tube alors que les minima sont liés à des nœuds de vibration. Les diagrammes angulaires sont représentatifs de l'état vibratoire de la surface extérieure du tube telle qu'on peut l'observer dans l'eau. Il est montré en outre [6, 7] que des ondes circonférentielles du type Rayleigh ou Galerie à écho sont générées à leur angle critique propre et se propagent dans les deux sens de rotation. Lorsque plusieurs tubes sont disposés en réseau, on peut avoir une idée de leurs interactions en représentant à nouveau le diagramme angulaire correspondant. Pour les fréquences envisagées au chapitre 2 ($0.1 \le ka \le 5$), seuls les lobes des résonances (n,1) s'influencent.

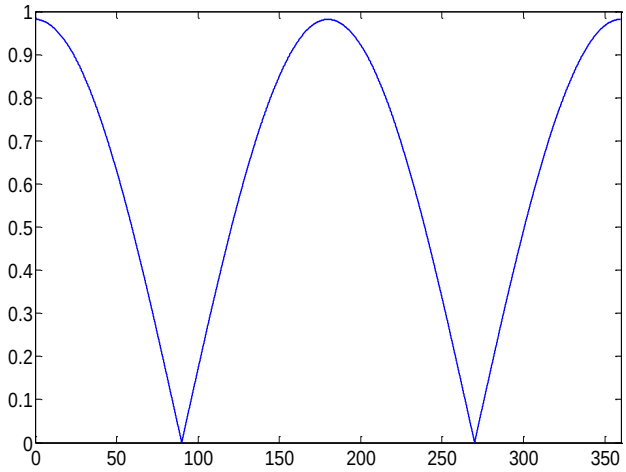
---

[6] J.W.Dickey, G.V.Frisk, H.Uberall. Whispering Gallery wave modes on elastic cylinders. J. Acoust. Soc. Amer. 59, 1976,pp. 1339-1346

[7] A.Derem. Diffusion des ondes acoustiques par des cylindres métalliques immergés : remarques concernant l'interprétation des phénomènes, Rev. Du CETHEDEC 72, 1982, pp.1-10



ⓐ



ⓑ

Figure 1-17 : Diagramme angulaire pour la résonance (n, l) = (1,2)

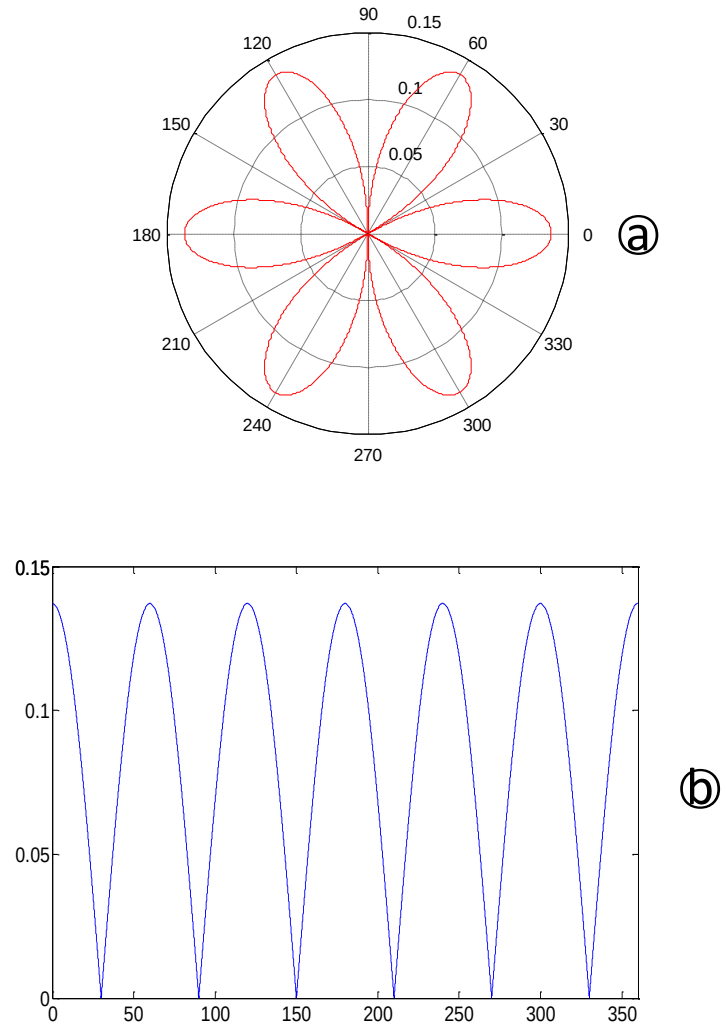


Figure 1-18 : Diagramme angulaire pour la résonance (n, l) = (3,1)

1.6 Conclusion

Dans ce premier chapitre, les bases de la diffusion acoustique par un tube infini dans un milieu fluide sont rappelées. Il s'agit d'écrire les équations qui permettent de calculer la pression diffusée par un tube élastique immergé, lorsque celui-ci est excité par une onde plane.

A partir de l'application des conditions de continuité aux interfaces fluide/solide, on obtient un système linéaire dont la résolution fournit les coefficients de diffusion du tube. Ces coefficients permettent de calculer la fonction de forme en champ lointain. On a étudié les propriétés résonnantes de deux tubes, le premier en acier, le second en polyéthylène. Les

tracés des fonctions de forme en fonction de la fréquence réduite, permettent de mettre en évidence des « résonances » (présence de pics ou transitions brusques). On a trouvé deux familles de résonances liées, l'une aux ondes se propageant principalement à l'extérieur et dans l'épaisseur des tubes, l'autre aux ondes dans les colonnes d'eau internes. Le tracé des trajectoires dites de Regge a permis de montrer que la variation du rapport d'épaisseur *b/a* décale les fréquences des résonances. Enfin, les diagrammes angulaires relatifs à un tube en acier sont fournis pour les résonances (1,2) et (3,1). Seule cette dernière et les autres résonances de la série $l = 1$ sont susceptibles de se manifester dans les réseaux de tubes car situées dans le domaine fréquentiel $0.1 \leq x_1 = ka \leq 5$ dans lequel nous étudierons les propriétés des structures phononiques. Cet aspect est abordé dans le chapitre suivant.

Références

1. G. Maze, Méthode d'isolement et d'identification des résonances (MIIR) *in N. GESPA, La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple*, Editions du CEDOCAR (1987)

2. L. Flax, L. R. Dragonette, H. Überall, in *Acoustic Resonance Scattering*, Gordon and Braich Eds, pp 49-67,1992

3. M.Abramovitz et I.Stegun, *Handbook of Mathematical Function*s , Dover, New-York (1964)

4. L. Flax, L. R. Dragonette, H. Überall, Theory of elastic resonance excitation by sound scattering, J. Acoust. Soc. Am, 63(3),723-731 (1978)

5. A.Derem, Relation entre la formation des ondes de surface et l'apparition des résonances, Revue du Cethedec 58, pp 43-79 (1979)

6. J.W.Dickey, G.V.Frisk, H.Uberall. Whispering Gallery wave modes on elastic cylinders. J. Acoust. Soc. Amer. 59, 1976,pp. 1339-1346

7. A.Derem. Diffusion des ondes acoustiques par des cylindres métalliques immergés : remarques concernant l'interprétation des phénomènes, Rev. Du CETHEDEC 72, 1982, pp.1-10

CHAPITRE 2 : DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR UN RESEAU LINÉAIRE DE TUBES

2.1 Introduction

Nous abordons l'étude de la diffusion acoustique par un réseau linéaire infini de tubes immergés dans l'eau. Les coefficients de réflexion et de transmission pour un réseau sont établis théoriquement en utilisant le formalisme de la diffusion multiple [1] prenant en compte toutes les interactions entre les tubes. Plusieurs développements se basent sur ce formalisme, que ce soit pour des obstacles placés dans un fluide [2,3,4,5] ou des cavités ou inclusions pratiquées dans une matrice élastique [6,7]. La présentation faite ici a bénéficié des notes internes au laboratoire rédigées par J.-M. Conoir [8]. Les résultats numériques sur les coefficients de réflexion et de transmission sont obtenus à l'aide d'un programme écrit en FORTRAN. On examine l'évolution de ces coefficients en fonction de la fréquence réduite *ka* (*k* nombre d'onde dans l'eau et *a* rayon externe des tubes) pour des réseaux de tubes en acier, puis en polyéthylène. Le lien existant entre fonction de forme et trajectoires de Regge introduits dans le chapitre 1 et les coefficients de réflexion et de transmission est examiné.

[1] V. Twersky, On the scattering of waves by an infinite grating, IEEE Trans. AP-4, 330-345(1956)
[2] G. Duméry, Sur la diffraction des ondes sonores par des grilles ou des réseaux d'obstacles, Acustica 18, 334-341 (1967)
[3] V. Twersky, Multiple scattering of sound by a periodic line of obstacles, J. Acoust. Soc. Am. 53 96-112 (1973)
[4] L. S. Mulholland and M. Heckl, Multidirectional sound wave propagation in through a tube bundle, J. Sound Vib. 176(3), 377-398 (1994)
[5] C. Audoly and G. Duméry, Modelling of compliant tube underwater reflectors, J. Acoust. Soc. Am. 87, 1841-1846 (1990)
[6] S. Robert, H. Franklin and J.-M. Conoir, Elastic resonances of a periodic array of fluid-filled cylindrical cavities imbedded in an elastic matrix, J. Sound Vib. 289, 109-129 (2006)
[7] C. Audoly and G. Duméry, Acoustic wave propagation in media containing two-dimensional periodically spaced elastic inclusions, in O. Leroy, M. A. Breazeale (Eds.), Physical Acoustics, Plenum Press, New-York (1991)
[8] J.-M. Conoir, Diffusion acoustique par un réseau (2000)

2.2 Généralités

Tous les tubes sont identiques, de rayon externe a et de rayon interne b. Ils contiennent un fluide a priori différent du fluide externe dans lequel ils sont placés. La géométrie du réseau est présentée sur la Figure 2-1.

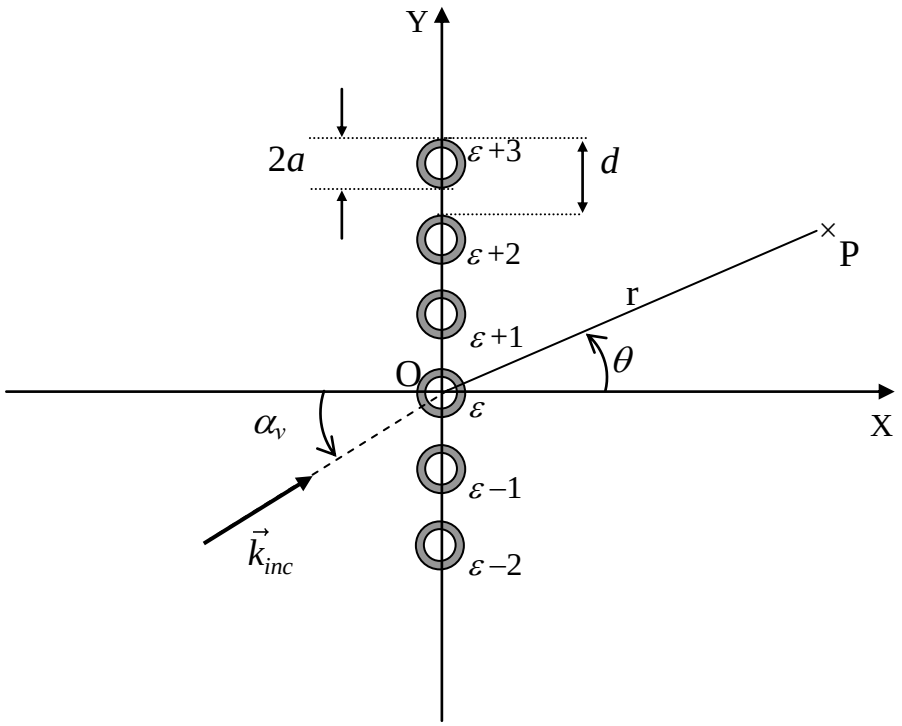


Figure 2-1 : géométrie du réseau

Les tubes sont disposés périodiquement le long de l'axe Oy, avec un pas de réseau égal à d . L'indice ε de numérotation des obstacles varie de $-\infty$ à $+\infty$. On suppose également que le réseau est excité par une onde de pression plane harmonique incidente sous l'angle α_ν caractérisant le mode ν . On a donc (le facteur $e^{-i\omega t}$ étant sous-entendu)

$$p_{inc}^{\nu} = A_{inc}^{\nu} e^{ik(x\cos\alpha_\nu + y\sin\alpha_\nu)} = A_{inc}^{\nu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{-in\alpha_\nu} J_n\left(kr_\varepsilon\right) e^{in\theta_\varepsilon} . \qquad (2.1)$$

Cette décomposition en série est liée au choix du tube ε comme élément de référence. Le déphasage du champ incident de l'obstacle ε à l'obstacle $\varepsilon+1$ est $e^{ikd\sin\alpha_\nu}$. Les coefficients de diffusion $C_n^{\varepsilon,\nu}$ $(-\infty \le n \le +\infty)$ du diffuseur ε sont régis par les conditions de périodicité

$$C_n^{\varepsilon+1,\nu} = C_n^{\varepsilon,\nu} e^{ikd\sin\alpha_\nu} , \qquad (2.2)$$

$$C_n^{\varepsilon+p,\nu} = C_n^{\varepsilon,\nu} e^{ikpd\sin\alpha_\nu}, \qquad (2.3)$$

cette dernière formule étant valable quel que soit le signe de l'entier p. Pour obtenir le système d'équations linéaire qui permet de calculer les coefficients inconnus $C_n^{\varepsilon,\nu}$, il faut tenir compte de (2.3) dans l'expression suivante[9]

$$C_n^{\varepsilon,\nu} - T_n^{\varepsilon} \sum_{\tau\neq\varepsilon} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m^{\tau,\nu} H_{m-n}^{(1)}\left(kr_{\varepsilon\tau}\right) e^{i(m-n)\theta_{\varepsilon\tau}} = T_n^{\varepsilon} A_n^{\varepsilon,\nu}, \qquad (2.4)$$

représentant un système linéaire de $2N+1$ équations à $2N+1$ inconnues $C_n^{\varepsilon,\upsilon}$ si $-N \le n, m \le N$. On a posé

$$A_n^{\varepsilon,\nu} = i^n e^{-in\alpha_\nu} A_{inc}^{\nu}, \qquad (2.5)$$

et la sommation sur τ va de $-\infty$ à $+\infty$. Si l'on pose par ailleurs

$$C_m^{\tau,\nu} = C_m^{\varepsilon,\nu} e^{i(\tau-\varepsilon)kd\sin\alpha_\nu}, \qquad (2.6)$$

l'équation (2.4) devient

$$C_n^{\varepsilon,\nu} - T_n^{\varepsilon} \sum_{\tau\neq\varepsilon} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m^{\varepsilon,\nu} H_{m-n}^{(1)}\left(kr_{\varepsilon\tau}\right) e^{i(m-n)\theta_{\varepsilon\tau}} e^{i(\tau-\varepsilon)kd\sin\alpha_\nu} = T_n^{\varepsilon} A_n^{\varepsilon,\nu}. \qquad (2.7)$$

Placer la référence sur l'obstacle ε, conduit à poser

$$\tau - \varepsilon = p, \qquad r_{\varepsilon\tau} = pd, \qquad \theta_{\varepsilon\tau} = \theta_p, \qquad p \in \mathbb{Z}, \qquad (2.8)$$

où

$$\theta_p = \frac{\pi}{2} \text{ si } p > 0 \qquad \text{et} \qquad \theta_p = -\frac{\pi}{2} \text{ si } p < 0. \qquad (2.9)$$

Ces relations permettent de transformer l'équation (2.7) en la suivante

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \delta_{mn} - T_n^{\varepsilon} \sum_{p\neq 0} H_{m-n}^{(1)}\left(kpd\right) e^{i(m-n)\theta_p} e^{ikpd\sin\alpha_\nu} \right\} C_m^{\varepsilon,\nu} = T_m^{\varepsilon} A_n^{\varepsilon,\nu}. \qquad (2.10)$$

C'est le système linéaire permettant de calculer les coefficients de diffusion $C_n^{\varepsilon,\nu}$ de l'élément de référence. Introduisons alors la série suivante, dite série de Schlömilch[10]:

$$\sigma\left(q,\alpha_\nu\right) = \sum_{\substack{p=-\infty \\ p\neq 0}}^{+\infty} H_q^{(1)}\left(kpd\right) e^{iq\theta_p} e^{ikpd\sin\alpha_\nu} \ .(\mathrm{q} \in \mathbb{Z}) \qquad (2.11)$$

D'après la définition (2.9) de θ_p, la fonction σ prend deux formes selon que q est pair ou impair. On montre que

[9] A.Heckl,L.S.Mulholland, Some recent developments in the theory of acoustic transmission in tube bundles. Journal of Sound and Vibration 179, 37-62 (1995).
[10] V.Twersky, Elementary functional representations of Schlömilch series. Archives of Rational Mechanics Analysis 8, 323-332 (1961).

$$\sigma(2q,\alpha) = 2(-1)^q \sum_{p=1}^{+\infty} H_{2q}^{(1)}(kpd)\cos(kpd\sin\alpha), \qquad (2.12)$$

et que

$$\sigma(2q+1,\alpha) = 2(-1)^q \sum_{p=1}^{+\infty} H_{2q+1}^{(1)}(kpd)\sin(kpd\sin\alpha). \qquad (2.13)$$

Le système linéaire (2.10) s'écrit donc, à l'aide de ces séries, en posant $T_n^{\varepsilon} \equiv T_n$, $C_n^{\varepsilon,\nu} \equiv C_n^{\nu}$ et $A_n^{\varepsilon,\nu} \equiv A_n^{\nu}$:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\delta_{mn} - T_n \sigma(m-n,\alpha_\nu)\right] C_m^{\nu} = T_n A_n^{\nu}. \qquad (2.14)$$

On notera que les séries de Schlömilch (2.11), (2.12) et (2.13) convergent très lentement. Il est par conséquent nécessaire, dans les applications numériques, de les transformer pour obtenir des expressions analytiques convergeant beaucoup plus rapidement. Un travail récent de Linton[11] présente avec plus de détails des représentations alternatives des séries de Schlömilch en vue des applications numériques.

2.3 Réflexion et transmission par un réseau

Lorsque l'onde incidente est envoyée sous un angle qui correspond à un ordre de diffraction du mode ν, la pression diffusée p_s^{ν} se trouve être la superposition des pressions diffusées par chacun des obstacles ε. On a donc

$$p_s^{\nu} = \sum_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty} \phi_s^{\varepsilon}, \qquad (2.15)$$

avec

$$\phi_s^{\varepsilon} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{\nu} H_n^{(1)}(kr_\varepsilon) e^{in\theta_\varepsilon}. \qquad (2.16)$$

Les conditions (2.2) et (2.3), tenant compte du fait que tous les obstacles sont identiques, permettent d'écrire

$$p_s^{\nu} = \sum_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{\nu} e^{ikd\varepsilon\sin\alpha_\nu} H_n^{(1)}(kr_\varepsilon) e^{in\theta_\varepsilon}. \qquad (2.17)$$

La pression diffusée est la superposition d'une infinité d'ondes cylindriques du type

[11] C. M. Linton, Schlömilch series that arise in diffraction theory and their efficient computation, J. Phys. A : Math. Gen. 39, 3325-3339 (2006)

$$\left[e^{ikd\varepsilon\sin\alpha_\nu}C_n^\nu\right]H_n^{(1)}\left(kr_\varepsilon\right)e^{in\theta_\varepsilon}, \tag{2.18}$$

le terme entre crochets représentant l'amplitude de l'onde modale d'ordre n. On peut montrer que le champ diffusé de part et d'autre du réseau peut s'écrire comme une somme d'ondes planes. Pour ce faire, on commence par réécrire la pression sous la forme

$$p_s^\nu = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^\nu \Sigma_n^\nu, \tag{2.19}$$

où

$$\Sigma_n^\nu = \sum_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty} e^{ikd\varepsilon\sin\alpha_\nu} H_n^{(1)}\left(kr_\varepsilon\right)e^{in\theta_\varepsilon}\ . \tag{2.20}$$

Examinons brièvement la signification du membre de droite de la relation (2.19).

2.3.1 Transformation de Σ_0^ν en une superposition d'ondes planes

Lorsque *n = 0* , le changement de variable $\xi_\nu = \pi/2 - \alpha_\nu$ entraîne

$$\Sigma_0^\nu = \sum_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty} e^{ikd\varepsilon\cos\xi_\nu} H_0^{(1)}\left(kr_\varepsilon\right). \tag{2.21}$$

La fonction de Hankel $H_0^{(1)}\left(kr_\varepsilon\right)$ est solution de l'équation de Helmholtz non homogène

$$\left[\vec{\nabla}^2 + k^2\right]H_0^{(1)}\left(kr_\varepsilon\right) = 4i\delta(x)\delta\left(y - d\varepsilon\right), \tag{2.22}$$

C'est en fait la fonction de Green de l'équation de Helmholtz en dimension 2. Le terme $\delta(x)\delta\left(y - d\varepsilon\right)$ représente un point source situé au point de coordonnées $\left(x = 0\,, y = d\varepsilon\right)$. La fonction de Green $H_0^{(1)}\left(kr_\varepsilon\right)$ représente donc le champ rayonné par ce point source. En raison de la linéarité de l'opérateur de Helmholtz $\vec{\nabla}^2 + k^2$, il découle de (2.22) les deux résultats (i) et (ii) suivants :

(i) La fonction Σ_0^ν est la solution de l'équation de Helmholtz non homogène

$$\left[\vec{\nabla}^2 + k^2\right]\Sigma_0^\nu = \frac{4i}{d}\delta(x)\sum_\varepsilon e^{iky\cos u_\varepsilon^\nu}, \tag{2.23}$$

dans laquelle

$$\cos u_\varepsilon^\nu = \cos\xi^\nu + \frac{2\pi\varepsilon}{kd} = \sin\alpha_\nu + \frac{2\pi\varepsilon}{kd}. \tag{2.24}$$

(ii) L'équation

$$\left[\vec{\nabla}^2 + k^2\right] v_\varepsilon^\nu = \frac{4i}{d}\delta(x) e^{iky\cos u_\varepsilon^\nu}, \tag{2.25}$$

admet pour solution les ondes planes de la forme [*]

$$v_\varepsilon^\nu = \frac{2}{kd\sin u_\varepsilon^\nu} e^{ik\left(|x|\sin u_\varepsilon^\nu + y\cos u_\varepsilon^\nu\right)}. \tag{2.26}$$

Les résultats (i) et (ii) permettent d'écrire Σ_0^ν sous la forme d'une somme infinie d'ondes planes, c'est-à-dire que

$$\Sigma_0^\nu = \sum_{\varepsilon=-\infty}^{\varepsilon=+\infty} v_\varepsilon^\nu . \tag{2.27}$$

On remarquera que $\lim_{\varepsilon\to+\infty} \cos u_\varepsilon^\nu = \pm\infty$. Il convient de poser $k\cos u_\varepsilon^\nu = \ell_\varepsilon^\nu$ avec

$$\ell_\varepsilon^\nu = k\sin\alpha_\nu + 2\pi\varepsilon/d , \tag{2.28}$$

et de poser aussi

$$k\sin u_\varepsilon^\nu = k_\varepsilon^\nu . \tag{2.29}$$

La formule (2.28) montre que le réseau ajoute à la composante selon y du vecteur d'onde incident un multiple de $2\pi/d$. Par suite,

$$k_\varepsilon^\nu = \left(k^2 - k^2\cos^2 u_\varepsilon^\nu\right)^{1/2} = \left(k^2 - \left(\ell_\varepsilon^\nu\right)^2\right)^{1/2}. \tag{2.30}$$

Le vecteur d'onde $\overrightarrow{k_\varepsilon^\nu} = (k_x, k_y)$ où $k_x = k_\varepsilon^\nu$ et $k_y = l_\varepsilon^\nu$ est représenté sur la Figure 2.2 ci-dessous :

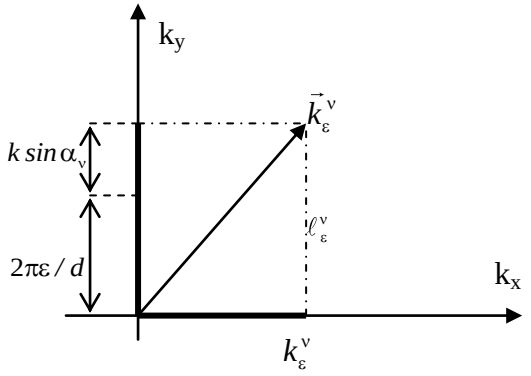


Figure 2-2 : Le vecteur d'onde $\vec{k}_\varepsilon^\nu$ des ondes planes de la série Σ_0^ν

Avec ces notations, on a :

[*] Le résultat (2.26) n'est pas immédiat. On le démontre en utilisant des résultats sur la transformation de Fourier des distributions, *cf.* Diffusion acoustique par un réseau, Communication personnelle de J.-M. Conoir

$$\Sigma_0^{\nu} = \sum_{\varepsilon=-\infty}^{\varepsilon=+\infty} \frac{2}{k_\varepsilon^{\nu} d} e^{i\left(k_\varepsilon^{\nu}|x|+\ell_\varepsilon^{\nu} y\right)}. \qquad (2.31)$$

C'est une superposition d'ondes planes, de vecteurs d'ondes $\vec{k}_\varepsilon^{\nu} = \left(k_\varepsilon^{\nu}, \ell_\varepsilon^{\nu}\right)$. Il reste à préciser la détermination de la racine carrée (2.30). Pour

$\left|\ell_\varepsilon^{\nu}\right| \le k$, $\quad k_\varepsilon^{\nu} = \sqrt{k^2 - \left(\ell_\varepsilon^{\nu}\right)^2}$ est un nombre réel,

tandis que pour

$\left|\ell_\varepsilon^{\nu}\right| \ge k$, $\quad k_\varepsilon^{\nu} = \pm i\sqrt{\left(\ell_\varepsilon^{\nu}\right)^2 - k^2}$ est un nombre imaginaire pur.

Le choix de la détermination positive (signe +) que l'on fait provient de ce que l'on souhaite avoir

$$\lim_{|x|\to+\infty} \Sigma_0^{\nu} = 0, \qquad (2.32)$$

On s'intéresse donc aux ondes évanescentes quand $|x| \to +\infty$, qui seules possèdent un sens physique.

2.3.2 Transformation de Σ_n^{ν} ($n \neq 0$) en une superposition d'ondes planes.

On introduit maintenant l'opérateur d'incrémentation-décrémentation $\mathcal{L}$ tel que

$$\mathcal{L}^n = \frac{1}{\left(-k_\varepsilon\right)^n}\left[\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right]^n \qquad \text{si} \qquad n \ge 0, \qquad (2.33)$$

$$\mathcal{L}^n = \frac{1}{k_\varepsilon^{|n|}}\left[\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right]^{|n|} \qquad \text{si} \qquad n < 0, \qquad (2.34)$$

qui permet, si l'on connaît la décomposition en ondes planes de Σ_0^{ν}, d'obtenir celle de Σ_n^{ν} ($n \neq 0$), en appliquant directement $\mathcal{L}^n$ à Σ_0^{ν}. Autrement dit, l'action de l'opérateur $\mathcal{L}^n$ sur Σ_0^{ν} doit être tel que

$$\Sigma_n^{\nu} = \mathcal{L}^n \Sigma_0^{\nu}. \qquad (2.35)$$

Evidemment, on doit différencier les deux cas $x > 0$ et $x < 0$. Ainsi,

- pour $x > 0$, on introduit

$$\Sigma_{0+}^{\nu} = \sum_{\varepsilon=-\infty}^{\varepsilon=+\infty} \frac{2}{k_\varepsilon^{\nu} d} e^{i\left(k_\varepsilon^{\nu} x+\ell_\varepsilon^{\nu} y\right)}, \qquad (2.36)$$

et les calculs donnent

$$\Sigma_{n+}^{\nu}=\sum_{\varepsilon=-\infty}^{\varepsilon=+\infty}\frac{2}{k_{\varepsilon}^{\nu}d}\left(\frac{\ell_{\varepsilon}^{\nu}-ik_{\varepsilon}^{\nu}}{k}\right)^{n}e^{i\left(k_{\varepsilon}^{\nu}x+\ell_{\varepsilon}^{\nu}y\right)}. \qquad (2.37)$$

- pour $x<0$, on procède de façon analogue et l'on obtient

$$\Sigma_{n-}^{\nu}=\sum_{\varepsilon=-\infty}^{\varepsilon=+\infty}\frac{2}{k_{\varepsilon}^{\nu}d}\left(\frac{\ell_{\varepsilon}^{\nu}+ik_{\varepsilon}^{\nu}}{k}\right)^{n}e^{i\left(-k_{\varepsilon}^{\nu}x+\ell_{\varepsilon}^{\nu}y\right)}. \qquad (2.38)$$

Remarque : la convergence des séries Σ_{n+}^{ν} et Σ_{n-}^{ν} données par (2.37) et (2.38) n'est pas assurée pour $x=0$ (zone entre les obstacles). Cette convergence, si elle a lieu, est due au terme $e^{-\sqrt{\left(\ell_{\varepsilon}^{\nu}\right)^{2}-k^{2}}|x|}$ qui tend très rapidement vers 0 quand $\varepsilon\to+\infty$. En effet, pour $\varepsilon\to+\infty$, $k_{\varepsilon}^{\nu}=+i\sqrt{\left(\ell_{\varepsilon}^{\nu}\right)^{2}-k^{2}}$ avec $\left|\ell_{\varepsilon}^{\nu}\right|\to+\infty$.

2.3.3 Pression transmise par le réseau

L'onde incidente se propageant dans le sens des $x>0$, la *pression diffusée transmise* par le réseau s'écrit

$$P_{T}^{\nu}=A_{inc}^{\nu}e^{ik\left(x\cos\alpha_{\nu}+y\sin\alpha_{\nu}\right)}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_{n}^{\nu}\Sigma_{n+}^{\nu}. \qquad (2.39)$$

Si l'on pose

$$k\cos\alpha_{\nu}=k_{0}^{\nu},\quad k\sin\alpha_{\nu}=\ell_{0}^{\nu}, \qquad (2.40)$$

et si l'on tient compte de la relation (2.37), alors

$$P_{T}^{\nu}=\sum_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty}\left[A_{inc}^{\nu}\delta_{\varepsilon\nu}+\frac{2}{k_{\varepsilon}^{\nu}d}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_{n}^{\nu}\left(\frac{\ell_{\varepsilon}^{\nu}-ik_{\varepsilon}^{\nu}}{k}\right)^{n}\right]e^{i\left(k_{\varepsilon}^{\nu}x+\ell_{\varepsilon}^{\nu}y\right)}, \qquad (2.41)$$

où $\delta_{\varepsilon\nu}$ désigne le symbole de Kronecker ($\delta_{\varepsilon\nu}=0$ si $\varepsilon\neq\nu$, $\delta_{\varepsilon\nu}=1$ si $\varepsilon=\nu$). D'après la relation (2.41), on définit les amplitudes des ondes planes transmises comme étant les coefficients

$$A_{T}^{\nu,\varepsilon}=A_{inc}^{\nu}\delta_{\varepsilon\nu}+\frac{2}{k_{\varepsilon}^{\nu}d}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_{n}^{\nu}\left(\frac{\ell_{\varepsilon}^{\nu}-ik_{\varepsilon}^{\nu}}{k}\right)^{n}. \qquad (2.42)$$

Il s'ensuit donc que

$$P_{T}^{\nu}=\sum_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty}A_{T}^{\nu,\varepsilon}e^{i\left(k_{\varepsilon}^{\nu}x+\ell_{\varepsilon}^{\nu}y\right)}. \qquad (2.43)$$

A partir de cette expression, on définit ensuite le coefficient de transmission en amplitude :

$$T^{\nu,\varepsilon} = A_T^{\nu,\varepsilon} \big/ A_{inc}^{\nu} \,. \tag{2.44}$$

2.3.4 Pression réfléchie par le réseau

La pression diffusée réfléchie par le réseau s'exprime

$$P_R^{\nu} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{\nu} \Sigma_{n-}^{\nu} \,, \tag{2.45}$$

ou encore

$$P_R^{\nu} = \sum_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2}{k_\varepsilon^{\nu} d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{\nu} \left(\frac{\ell_\varepsilon^{\nu} + i k_\varepsilon^{\nu}}{k} \right)^n \right] e^{i\left(-k_\varepsilon^{\nu} x + \ell_\varepsilon^{\nu} y\right)} . \tag{2.46}$$

Les amplitudes des ondes planes réfléchies sont

$$A_R^{\nu,\varepsilon} = \frac{2}{k_\varepsilon^{\nu} d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{\nu} \left(\frac{\ell_\varepsilon^{\nu} + i k_\varepsilon^{\nu}}{k} \right)^n , \tag{2.47}$$

d'où

$$P_R^{\nu} = \sum_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty} A_R^{\nu,\varepsilon} e^{i\left(-k_\varepsilon^{\nu} x + \ell_\varepsilon^{\nu} y\right)} . \tag{2.48}$$

On définit alors le coefficient de réflexion en amplitude

$$R^{\nu,\varepsilon} = A_R^{\nu,\varepsilon} \big/ A_{inc}^{\nu} \,. \tag{2.49}$$

Des développements tels que (2.43) et (2.48) sont appelés « développements de Rayleigh ». Il faut souligner que les termes $e^{i\left(-k_\varepsilon^{\nu} x + \ell_\varepsilon^{\nu} y\right)}$ représentent des ondes planes véritables que si k_ε^{ν} est réel et positif.

2.4 Fréquences de coupure

Pour que le nombre d'onde k_ε^{ν} soit réel, il faut d'après la formule (2.30) que l'on ait $\left|\ell_\varepsilon^{\nu}\right| \le k$, c'est-à-dire que $-k \le \ell_\varepsilon^{\nu} \le k$. Après réarrangement des termes, on trouve l'encadrement suivant pour ε :

$$\frac{-kd}{2\pi}\left(1+\sin\alpha_{\nu}\right) \le \varepsilon \le \frac{kd}{2\pi}\left(1-\sin\alpha_{\nu}\right) . \tag{2.50}$$

Puisque ε est entier, on doit même poser

$$-\varepsilon_{sup} \le \varepsilon \le \varepsilon_{inf} \,, \tag{2.51}$$

où

$$\varepsilon_{sup} = E\left[\frac{kd}{2\pi}\left(1+\sin\alpha_v\right)\right], \tag{2.52}$$

et

$$\varepsilon_{inf} = E\left[\frac{kd}{2\pi}\left(1-\sin\alpha_v\right)\right], \tag{2.53}$$

la fonction $E(X)$ désignant la partie entière du nombre réel X. De telles notations résultent du fait que $0 \le \alpha_v < \pi/2$ ($0 \le \sin\alpha_v \le 1$). Ceci implique $0 < \varepsilon_{inf} \le \varepsilon_{sup}$. C'est-à-dire d'après (2.51), qu'en général les valeurs entières négatives prises par ε sont en plus grand nombre que les valeurs entières positives. On notera qu'à fréquence (ou longueur d'onde) fixée il n'existe qu'un nombre fini de modes propagatifs. La double inégalité (2.50), compte tenu de (2.52) et (2.53), peut se transformer en deux inégalités simples :

$$\varepsilon \le \frac{kd}{2\pi}\left(1-\sin\alpha_v\right), \tag{2.54}$$

et

$$-\varepsilon \le \frac{kd}{2\pi}\left(1+\sin\alpha_v\right). \tag{2.55}$$

En posant $k = 2\pi f/c$ où f est la fréquence et c la célérité du son dans l'eau, on peut aussi écrire

$$f \ge \frac{\varepsilon c}{d\left(1-\sin\alpha_v\right)}, \tag{2.56}$$

et

$$f \ge \frac{-\varepsilon c}{d\left(1+\sin\alpha_v\right)}. \tag{2.57}$$

Ce sont deux inéquations à satisfaire simultanément, quel que soit le signe du mode ε. Ainsi, pour que tous les modes $\varepsilon \in \left\{-\varepsilon_{inf},...,0,...,+\varepsilon_{inf}\right\}$ puissent se propager, il faut que

$$f \ge \sup\left(\frac{\varepsilon_{inf} c}{d\left(1+\sin\alpha_v\right)}, \frac{\varepsilon_{inf} c}{d\left(1-\sin\alpha_v\right)}\right). \tag{2.58}$$

La plus grande valeur de f déterminée au second membre constitue, par définition, la fréquence de coupure f_c. Cette fréquence f_c croît avec ε_{inf}. Si, dans (2.58) on pose $\varepsilon_{inf} = 1$, la fréquence f doit vérifier

$$f \ge \sup\left(\frac{c}{d\left(1+\sin\alpha_v\right)}, \frac{c}{d\left(1-\sin\alpha_v\right)}\right), \tag{2.59}$$

pour que les trois modes –1, 0, 1 deviennent propagatifs. Plus la fréquence est élevée et plus le nombre de mode est élévé Par ailleurs, la fréquence de coupure est inversement proportionnelle à d : un réseau plus dense donne lieu à une fréquence de coupure plus élevée.

Plus particulièrement, seul le *mode fondamental* $\varepsilon = 0$ se propage aux fréquences telles que

$$f \le f_c = \frac{c}{d\left(1+\sin\alpha_\nu\right)}. \qquad (2.60)$$

Tous les autres modes sont évanescents. Dans ce cas, les coefficients de réflexion et de transmission par le réseau, $R^{\nu,\varepsilon}$ et $T^{\nu,\varepsilon}$, sont tous ceux d'ondes évanescentes exceptés R^{00} et T^{00}. On notera en passant que la fréquence de coupure (2.60) ne dépend pas des propriétés physiques des tubes constituant le réseau linéaire. Elle est inversement proportionnelle à d. Au réseau le plus dense il correspond la fréquence de coupure la plus la plus élevée.

2.5 Conservation de l'énergie

Par définition, le flux d'énergie F à travers une surface S de normale unitaire sortante $\vec{n}$ est :

$$F = \int_S \vec{I}.\vec{n}\, ds, \qquad (2.61)$$

où

$$\vec{I} = \vec{\sigma}.\vec{v}^*, \qquad (2.62)$$

représente le vecteur flux d'énergie (local). Le signe * en exposant désigne la conjugaison complexe. Dans cette formule, $\vec{\sigma}$ est le tenseur des contraintes du milieu et $\vec{v}$ la vitesse particulaire. Pour un fluide parfait, $\vec{\sigma} = -p\vec{1}$ où $\vec{1}$ est le tenseur unité. Dans le cadre de l'acoustique linéaire où $\rho\partial\vec{v}/\partial t = -\vec{\nabla}p$ (équation dite d'Euler), et en régime harmonique, on a donc

$$\vec{I} \propto p\vec{\nabla}p^*, \qquad (2.63)$$

où $\propto$ signifie « proportionnel à ». Par suite,

$$F \propto \int_S p\left(\vec{\nabla}p^*\right).\vec{n}\, ds, \qquad (2.64)$$

On montre qu'à travers la surface S convenablement choisie, délimitée par le réseau, ligne pointillée (d'équation X=0) de la figure 2-3 on tombe sur une singularité. Pour éviter cette

singularité, on considère plutôt deux surfaces $S_{x_0}^-$ et $S_{x_0}^+$ proches de S telles que les positions vérifient $x_0 > a$ (a rayon des tubes), l'application de (2.64) à travers les surfaces $S_{x_0}^-$ et $S_{x_0}^+$ donne :

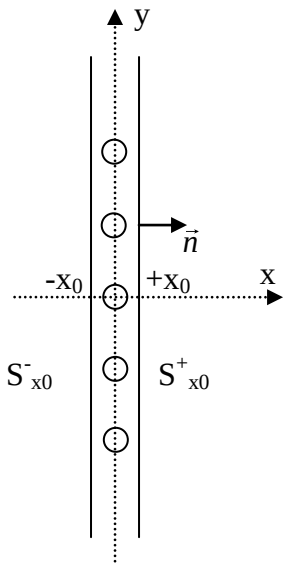


Figure 2-3 : Définition des surfaces.

$$F = 0 = p_{inc}^{\nu} \frac{\partial p_{inc}^{\nu\,*}}{\partial x} + \int_{-\infty}^{+\infty} p_T^{\nu} \frac{\partial p_T^{\nu *}}{\partial x} dy - \int_{-\infty}^{+\infty} p_R^{\nu} \frac{\partial p_R^{\nu *}}{\partial x} dy , \qquad (2.65)$$

une telle égalité traduisant la conservation de l'énergie. Les contributions respectives des trois termes du membre de droite sont, compte tenu des propriétés d'orthogonalité des fonctions exponentielles,

$$p_{inc}^{\nu} \frac{\partial p_{inc}^{\nu\,*}}{\partial x} = ik_0^{\nu} \left| A_{inc}^{\nu} \right|^2 , \qquad (2.66)$$

avec $k_0^{\nu} = k \cos \alpha_{\nu}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_T^{\nu} \frac{\partial p_T^{\nu *}}{\partial x} dy = -i \sum_{\varepsilon=-\infty}^{\varepsilon=+\infty} k_{\varepsilon}^{\nu} \left| A_T^{\nu,\varepsilon} \right|^2 , \qquad (2.67)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_R^{\nu} \frac{\partial p_R^{\nu *}}{\partial x} dy = i \sum_{\varepsilon=-\infty}^{\varepsilon=+\infty} k_{\varepsilon}^{\nu} \left| A_R^{\nu,\varepsilon} \right|^2 . \qquad (2.68)$$

La conservation de l'énergie, compte tenu de l'équation (2.65), devient

$$\sum_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty} \frac{k_\varepsilon^\nu}{k_0^\nu}\left(\left|A_R^{\nu,\varepsilon}\right|^2+\left|A_T^{\nu,\varepsilon}\right|^2\right)=\left|A_{inc}^\nu\right|^2, \tag{2.69}$$

ou encore, en tenant compte des formules (2-44) et (2-49) :

$$\sum_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty} \frac{k_\varepsilon^\nu}{k_0^\nu}\left(\left|R^{\nu,\varepsilon}\right|^2+\left|T^{\nu,\varepsilon}\right|^2\right)=1. \tag{2.70}$$

D'après (2-51), cette somme se limite à

$$\sum_{\varepsilon=-\varepsilon_{sup}}^{\varepsilon_{inf}} \frac{k_\varepsilon^\nu}{k_0^\nu}\left(\left|R^{\nu,\varepsilon}\right|^2+\left|T^{\nu,\varepsilon}\right|^2\right)=1. \tag{2.71}$$

Par ailleurs, étant donné que ε et ν jouent des rôles identiques, on a $\left(\varepsilon_{inf}+\varepsilon_{sup}+1\right)$ relations de conservation de l'énergie du type (2.71). On remarque que le calcul effectué pour (2.66) à (2.68) ne dépend pas de $x=\pm x_0$ (Figure 2.3). Il ne dépend pas non plus de la fréquence. Ceci amène à la conclusion que les modes évanescents ne jouent pas de rôle dans la conservation de l'énergie dès que la fréquence augmente, leur contribution devenant négligeable.

Il est bon d'examiner la formule (2.71) dans le cas où $\varepsilon_{inf}=\varepsilon_{sup}$ et où la fréquence est telle que seul le mode 0 se propage ($\nu=0$, $\varepsilon=0$). On a $k_\varepsilon^\nu=k_0^0$, $k_0^\nu=k_0^0$, $R^{\nu,n}=R^{00}$ et $T^{\nu,n}=T^{00}$, d'où la conservation de l'énergie

$$\left|R^{00}\right|^2+\left|T^{00}\right|^2=1. \tag{2.72}$$

Les calculs numériques des coefficients de réflexion et de transmission sont validés à l'aide de cette relation.

2.6 Matrices de réflexion et de transmission

Introduisons les vecteurs et matrices suivants, les indices ou exposants ε et ν étant limités aux seuls modes propagatifs :

$$\left(\vec{a}\right)_\nu=A_{inc}^\nu, \tag{2.73}$$

$$\left(\vec{e}^{\,-}\right)_\varepsilon=e^{j\left(-k_\varepsilon^\nu x+\ell_\varepsilon^\nu y\right)}=e_\varepsilon^-, \tag{2.74}$$

$$\left(\vec{e}^{\,+}\right)_\varepsilon=e^{j\left(k_\varepsilon^\nu x+\ell_\varepsilon^\nu y\right)}=e_\varepsilon^+, \tag{2.75}$$

$$(\mathbf{I})_{\nu\varepsilon} = \delta_{\nu\varepsilon}, \tag{2.76}$$

$$(\mathbf{T})_{\nu\varepsilon} = T^{\nu,\varepsilon}, \tag{2.77}$$

$$(\mathbf{R})_{\nu\varepsilon} = R^{\nu,\varepsilon}. \tag{2.78}$$

où $\mathbf{I}$, $\mathbf{T}$ et $\mathbf{R}$ sont respectivement les matrices identité, de transmission et de réflexion, chacune de taille $(\varepsilon_{inf} + \varepsilon_{sup} + 1) \times (\varepsilon_{inf} + \varepsilon_{sup} + 1)$. Le champ incident total p_{inc}^{tot} sur le réseau peut être défini par

$$p_{inc}^{tot} = \vec{a}^t.\mathrm{I}.\vec{e}^+ = \vec{a}^t.\vec{e}^+. \tag{2.79}$$

Il donne lieu au champ transmis total p_T^{tot} tel que

$$p_T^{tot} = \sum_{\nu} p_T^{\nu}, \tag{2.80}$$

soit encore

$$\begin{aligned} p_T^{tot} &= \sum_{\nu}\sum_{\varepsilon} A_T^{\nu,\varepsilon} e^{j\left(k_\varepsilon^\nu x + \ell_\varepsilon^\nu y\right)}, \\ &= \sum_{\nu}\sum_{\varepsilon} A_{inc}^{\nu} T^{\nu,\varepsilon} e^{j\left(k_\varepsilon^\nu x + \ell_\varepsilon^\nu y\right)}, \\ &= \vec{a}^t.\mathbf{T}.\vec{e}^+. \end{aligned} \tag{2.81}$$

et au champ réfléchi total p_R^{tot} tel que

$$p_R^{tot} = \sum_{\nu} p_R^{\nu}, \tag{2.82}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} p_R^{tot} &= \sum_{\nu}\sum_{\varepsilon} A_R^{\nu,\varepsilon} e^{j\left(-k_\varepsilon^\nu x + \ell_\varepsilon^\nu y\right)}, \\ &= \sum_{\nu}\sum_{\varepsilon} A_{inc}^{\nu} R^{\nu,\varepsilon} e^{j\left(-k_\varepsilon^\nu x + \ell_\varepsilon^\nu y\right)}, \\ &= \vec{a}^t.\mathbf{R}.\vec{e}^-. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Une extension de ces derniers développements matriciels au cas d'un système de plusieurs réseaux linéaires en interaction est présentée au chapitre 3.

2.7 Résultats numériques et graphiques

A l'aide des relations (2.44) et (2.49) précédentes, nous avons calculé les coefficients de réflexion et de transmission pour un réseau linéaire en fonction de la fréquence réduite *ka*.

Les courbes correspondent au cas de tubes en acier remplis d'eau et entourés d'eau. Le rapport du rayon interne *b* et du rayon externe *a* est $75/85 \approx 0{,}8823$. Le rapport *d/a*, la distance d séparant deux tubes du réseau au rayon externe a, est pris égal à 2,647.

Les Figures 2-4 et 2-5 montrent les coefficients de réflexion et de transmission tracés en fonction de *ka* dans le domaine compris entre 0,1 et 5. Entre 0,1 et 2,373 qui correspond à la première fréquence de coupure (relation (2-56)), seul le mode 0 est propagatif. Au-delà de cette fréquence de coupure, les modes -1, 0 et 1 sont propagatifs. Toutefois sur la Figure 2-4, seul le coefficient de réflexion relatif au mode 0 est tracé.

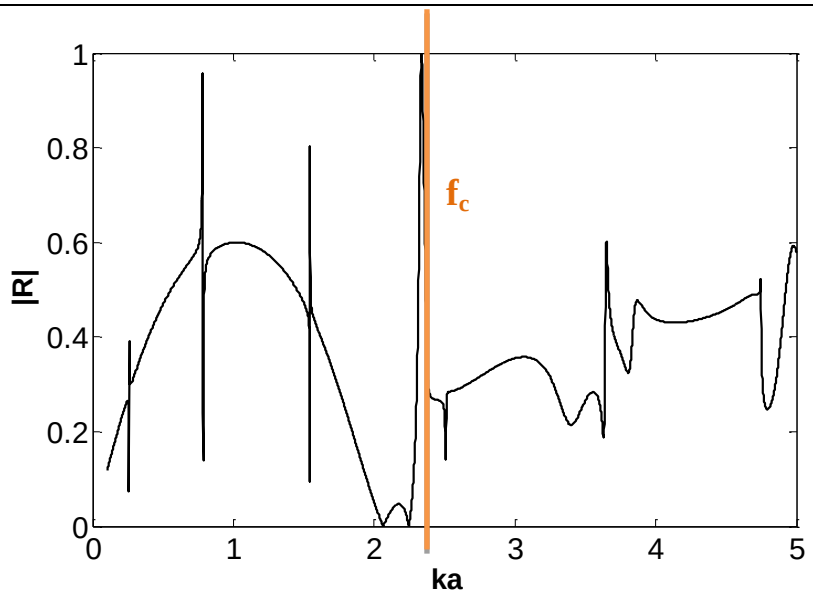


Figure 2-4 : coefficient de réflexion d'un réseau linéaire de tubes en acier (*b/a* = 75/85)

On peut noter la présence de plusieurs variations brusques (se manifestant par des pics étroits) tant sur le coefficient de réflexion que sur le coefficient de transmission situées aux mêmes *ka*. La présence de ces variations brusques peut-être expliquée de la façon suivante.

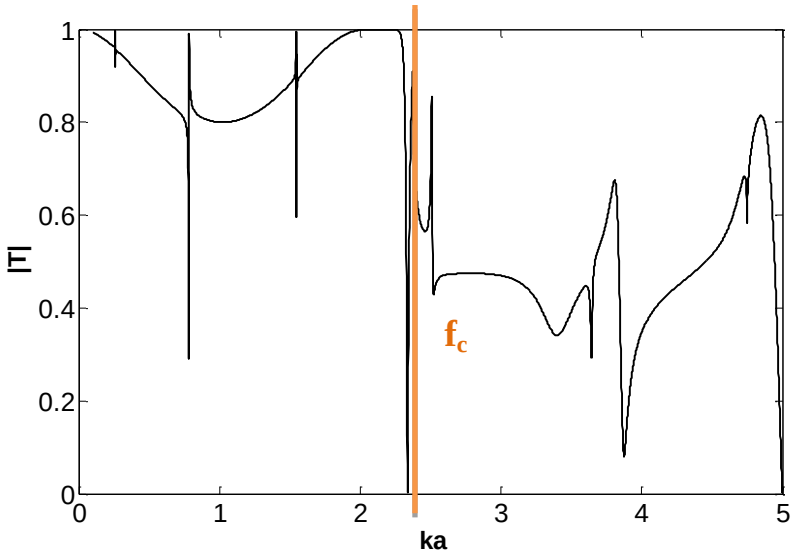


Figure 2-5 : Coefficient de transmission d'un réseau linéaire de tubes en acier (*b/a* = 75/85)

Si nous comparons les figures (2-4) et (2-5) à la figure (1-2) du chapitre 1, on observe sur les trois courbes des pics correspondant à des résonances, situés sensiblement aux mêmes fréquences. Pour être plus précis, le tableau ci-dessous répertorie les fréquences de résonance d'un tube et celles d'un réseau de tubes en acier.

Fréquences de résonance repérées sur la fonction de forme de diffusion en acier	Fréquences correspondant aux pics étroits sur les coefficients R et T du réseau	Ecart relatif sur les positions des fréquences
0.272	0.26	4.41%
0.802	0.782	2.49%
1.568	1.545	1.47%
2.343	2.336	0.3%
2.541	2.508	1.3%
3.686	3.65	0.98%
3.862	3.871	0.23%

Tableau 1 : comparaison des fréquences des résonances d'un tube et d'un réseau de tubes en acier

(*b/a* = 75/85)

On note une correspondance très nette entre la pluspart des résonances du tube et celle du réseau . L'écart relatif sur les positions est inférieur à 5%. On peut se poser la question de savoir si une telle manifestation est indépendante du matériau constituant les tubes.

Nous examinons donc ensuite un réseau linéaire infini de tubes en polyéthylène en gardant les mêmes rayons interne et externe, ainsi que le même rapport *d/a*. La Figure 2-6 présente le coefficient de réflexion du réseau et la Figure 2-7 le coefficient de transmission. La première fréquence de coupure pour un réseau de tubes en polyéthylène est identique à celle d'un réseau de tubes en acier.

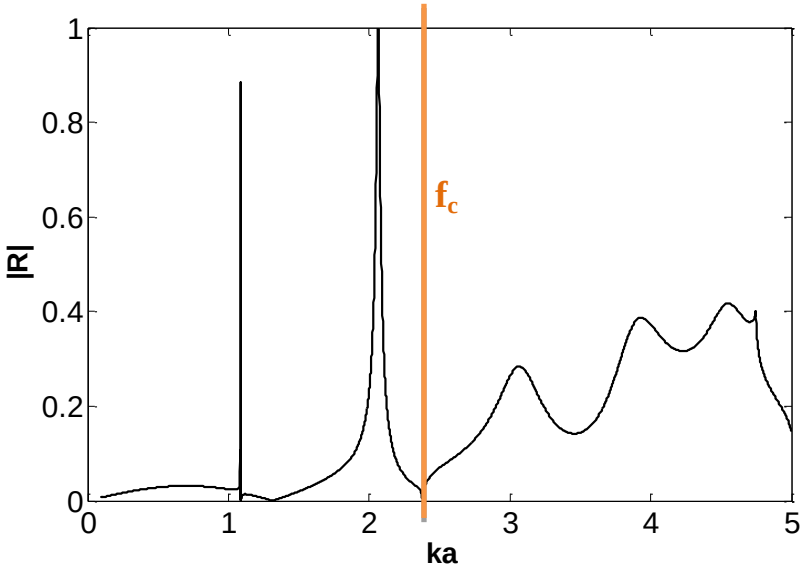


Figure 2-6 : coefficient de réflexion d'un réseau linéaire de tubes en polyéthylène (*b/a* = 75/85)

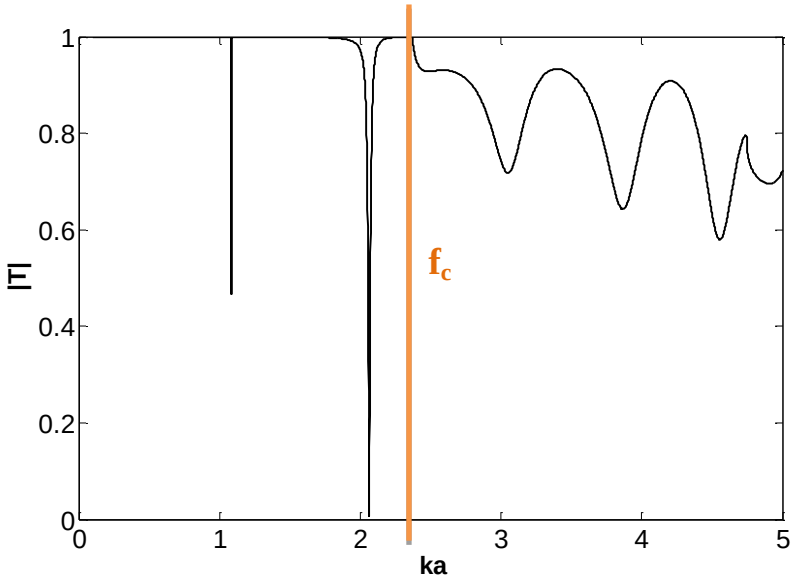


Figure 2-7 : coefficient de transmission d'un réseau linéaire de tubes en polyéthylène (*b/a* =75/85)

Les fréquences de résonance d'un tube seul et d'un réseau de tubes en polyéthylène sont comparées dans le tableau 2. Dans ce cas, l'écart relatif sur les positions est inférieur à 3%

Fréquences de résonance repérées sur la fonction de forme de diffusion en polyéthylène	Fréquences de résonances repérées sur les coefficients R et T du réseau	Ecart relatif sur les positions des fréquences
1.086	1.085	0.09%
2.085	2.064	1%
3.027	3.067	1.32%
3.903	3.93	0.69%
4.689	4.552	2.92%

Tableau 2 : comparaison des fréquences des résonances d'un tube et d'un réseau de tubes en polyéthylène (b/a = 75/85)

Ainsi que cela avait été souligné dans le chapitre 1, les pics apparaissant sur les figures 2-4 à 2-7 sont liés à des résonances caractérisées par des couples (n, l) indiquant le mode de vibration et l'ordre de la famille dans le tube et par des couples (n, l_f) pour la colonne d'eau (*cf* Figure 2-8). Elles peuvent être identifiées en comparant la Figure 2-8 aux trajectoires de Regge d'un tube seul d'acier rempli d'eau (Fig. 1-8).

On observe que la première résonance de la colonne d'eau est situé à ka = 2,34 (à proximité de la première fréquence de coupure ka = 2,37 séparant les domaines d < λ et d > λ). Les 3 premières résonances de tube (n = 2, 3, 4) de l'onde de Rayleigh (l = 1) ont une influence non négligeable sur les propriétés de réflexion et de transmission, en particulier dans la gamme de fréquence réduite comprise entre 0,1 et 2,2. Une extension de calculs au-delà de la fréquence de coupure est également présentée sur la Figure 2-8.

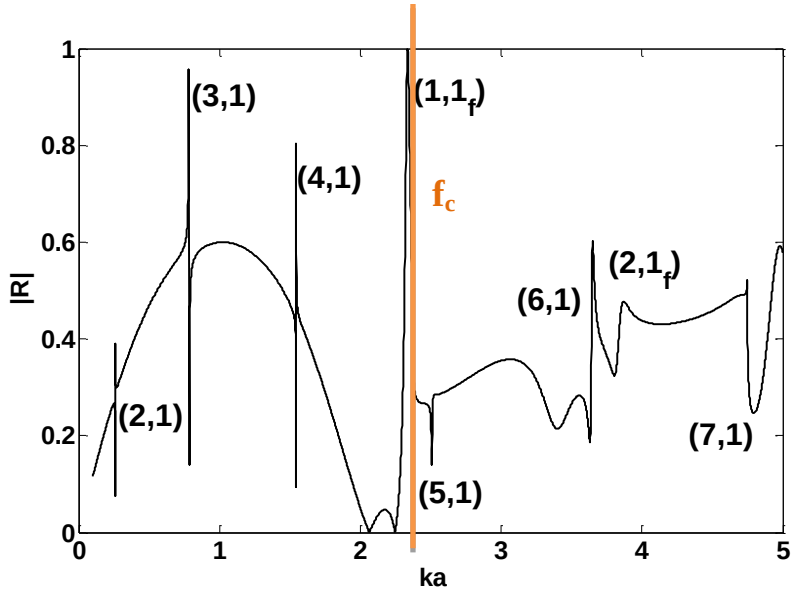


Figure 2-8 : coefficient de réflexion d'un réseau linéaire de tubes en acier. Identification des résonances

On constate qu'il n'y a pas de changement significatif entre les fréquences de résonance d'une rangée et celles d'un tube seul. Le réseau linéaire signale donc fidèlement les positions des résonances des tubes en acier.

2.8 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, le phénomène de la diffusion acoustique par un réseau linéaire infini de tubes a été examiné. On a présenté dans les grandes lignes le développement théorique conduisant aux expressions des coefficients de réflexion et de transmission d'un réseau linéaire de tubes. On a ensuite fourni des résultats numériques se basant sur les formules analytiques obtenues pour des tubes en acier puis en polyéthylène, en fonction de la fréquence réduite *ka*. Les courbes des coefficients de réflexion et de transmission sont confrontées aux fonctions de forme et aux trajectoires de Regge d'un tube seul. On peut voir sur les courbes de coefficients de réflexion ou de transmission des réseaux, des résonances situées sensiblement aux mêmes fréquences que celles apparaissant sur les fonctions de forme d'un tube seul présentées au chapitre précédent. L'intérêt pour les réseaux linéaires de diffraction tels que ceux étudiés ici réside dans le fait qu'ils présentent une grande souplesse d'utilisation. Par exemple, en les considérants comme des plans, on peut facilement réaliser des empilements de tels plans et constituer des structures phononiques bidimensionnelles (SP2D) dans lesquelles on peut faire varier toute sorte de paramètres, en particulier

géométriques. De plus, ils présentent une grande stabilité dans les calculs et peuvent fournir des détails assez fins sur les résonances les plus fines.

Référence

1. V. Twersky, On the scattering of waves by an infinite grating, IEEE Trans. AP-4, 330-345(1956)
2. G. Duméry, Sur la diffraction des ondes sonores par des grilles ou des réseaux d'obstacles, Acustica 18, 334-341 (1967)
3. V. Twersky, Multiple scattering of sound by a periodic line of obstacles, J. Acoust. Soc. Am. 53 96-112 (1973)
4. L. S. Mulholland and M. Heckl, Multidirectional sound wave propagation in through a tube bundle, J. Sound Vib. 176(3), 377-398 (1994)
5. C. Audoly and G. Duméry, Modelling of compliant tube underwater reflectors, J. Acoust. Soc. Am. 87, 1841-1846 (1990)
6. S. Robert, H. Franklin and J.-M. Conoir, Elastic resonances of a periodic array of fluid-filled cylindrical cavities imbedded in an elastic matrix, J. Sound Vib. 289, 109-129 (2006)
7. C. Audoly and G. Duméry, Acoustic wave propagation in media containing two-dimensional periodically spaced elastic inclusions, in O. Leroy, M. A. Breazeale (Eds.), Physical Acoustics, Plenum Press, New-York (1991)
8. J.-M. Conoir, Diffusion acoustique par un réseau (2000)
9. A.Heckl,L.S.Mulholland, Some recent developments in the theory of acoustic transmission in tube bundles. Journal of Sound and Vibration 179, 37-62 (1995).
10. V.Twersky, Elementary functional representations of Schlömilch series. Archives of Rational Mechanics Analysis 8, 323-332 (1961).
11. C. M. Linton, Schlömilch series that arise in diffraction theory and their efficient computation, J. Phys. A : Math. Gen. 39, 3325-3339 (2006)

CHAPITRE 3 : DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR DES STRUCTURES PHONONIQUES A N RESEAUX OU BIRESEAUX LINEAIRES

3.1 Introduction

L'existence de bandes interdites dans les structures phononiques unidimensionnelles (SP1D) aussi bien que bidimensionnelles (SP2D) a conduit à des applications variées telle que la mise au point de matériaux ou de dispositifs peu émissifs d'ondes ultrasonores dans le milieu aquatique[1] utilisant des tubes, la conception de guides d'onde ayant des fréquences sélectives ou de filtres acoustiques[2], l'évaluation non destructive et la surveillance de réseaux de tubes immergés[3,4].

Les propriétés de réflectance des matériaux à bandes interdites[5], la conception de bands interdites très larges par la considération de cylindres rigides ou liquides dans un liquide environnant[6], mais aussi dans des solides non homogènes isotropes (à coefficient périodiques), ou des cylindres en aluminium dans une matrice époxy ont été abordés[7].

Dans ce chapitre, nous étudions l'influence de plusieurs types de perturbation dans des SP2D composées d'un nombre fini (N) de réseaux linéaires formés de tubes en acier immergés. Les perturbations incluent (i) des variations du rayon interne de tubes d'une rangée à sa voisine ; (ii) des variations de l'espacement entre les rangées ; (iii) des variations dans

[1] C. Audoly, G. Dumery, Modelling of compliant tube underwater reflectors, J. Acoust. Soc. Am. 87(5), 1841-1846 (1990)

[2] A. Khelif, P. A. Deymier, B. Djafari-Rouhani, J. O. Vasseur, and L. Dobrzynski, Two-dimensional phononic crystal with tunable narrow passband : Application to a waveguide with selective frequency, J. Appl. Phys. 94(3), 1308–1311 (2003).

[3] X. Y. Huang and M. A. Heckl, Transmission and dissipation of sound waves in tube bundles, Acustica 78, 191–200 (1993)

[4] M. A. Heckl, Sound propagation in bundles of periodically arranged cylindrical tubes, Acustica 77, 143–152 (1992)

[5] L. Sanchis, F. Cervera, J. Sanchez-Dehesa, J. V. Sanchez-Perez, C. Rubio, and R. Martinez-Sala, Reflectance properties of two-dimensional sonic band-gaps crystals, J. Acoust. Soc. Am. 109(6), 2598–2605 (2001).

[6] J.Vasseur , B Djafari-Rouhani, L Dobrzynski, M S Kushwaha and P Halevi, Complete acoustic band gaps in periodic fibre-reinforced composite materials. J. Phys.Condens Matter (1994), pp.8759-8770

[7] Y. Lai, X. Zhang, and Z.-Q. Zhang, Engineering acoustic band gaps, Appl. Phys. Lett. 79(20), 3224–3226 (2001).

l'espacement entre les tubes d'une même rangée, et enfin (iv) des variations telles que la substitution d'un rangée de tubes en acier par une rangée de tubes en polyéthylène. L'influence du nombre de rangées est aussi évaluée.

Dans les paragraphes 3.1 à 3.3, nous présentons une méthode matricielle de calcul des coefficients de réflexion et de transmission par ces SP2D. L'intérêt de la méthode est de prendre en compte tous les ordres de diffraction du réseau linéaire à une fréquence[8] et de pouvoir éventuellement quantifier les contributions de chacunne . Dans le paragraphe 3.4, on montre comment obtenir à partir du cas général le cas, utile en pratique, où un seul ordre de diffraction (aussi qualifié de mode 0) existe. Par la suite paragraphe 3.5, une extension des formules des coefficients de réflexion et de transmission est proposée pour le cas de réseaux plus complexes où les coefficients de réflexion différent selon le côté d'insonation du réseau bidimensionnel. Dans la limite de grands valeurs de N, le réseau bidimensionnel devient quasiment un vrai milieu périodique avec ses problématiques propres. C'est pourquoi dans le paragraphe 3.6, nous exposons ce cas particulier, tout en ayant à l'esprit, dans les résultats numériques fournis dans le paragraphe suivant, de faire le lien avec le cas où N est fini

3.2 Matrices de réflexion et de transmission pour un réseau linéaire

Rappelons pour commencer les résultats du paragraphe 2.6. Les indices ou exposants ε et ν sont limités aux modes propagatifs associés à la fréquence considérée. Introduisons les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{e}^{-}$ et $\vec{e}^{+}$ à $\left(\nu_{sup}-\nu_{inf}+1\right)$ composantes ainsi que les matrices carrées $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{R}$ de taille $\left(\nu_{sup}-\nu_{inf}+1\right)^2$ suivants :

$$\left(\vec{a}\right)_{\nu}=A_{inc}^{\nu}, \tag{3.1}$$

$$\left(\vec{e}^{-}\right)_{\varepsilon}=e^{i\left(-k_{\varepsilon}^{\nu}x+\ell_{\varepsilon}^{\nu}y\right)}=e_{\varepsilon}^{-}, \tag{3.2}$$

$$\left(\vec{e}^{+}\right)_{\varepsilon}=e^{i\left(k_{\varepsilon}^{\nu}x+\ell_{\varepsilon}^{\nu}y\right)}=e_{\varepsilon}^{+}. \tag{3.3}$$

$$\left(\boldsymbol{I}\right)_{\varepsilon\nu}=\delta_{\varepsilon\nu} \tag{3.4}$$

$$\left(\boldsymbol{T}\right)_{\varepsilon\nu}=T_{\varepsilon\nu} \tag{3.5}$$

[8] L. S. Mulholland and M. A. Heckl, Multi-directional sound wave propagation through a tube bundle, J. Sound Vib. 176(3), 377–398 (1994)

$$\left(\boldsymbol{R}\right)_{\varepsilon\nu} = R_{\varepsilon\nu} \tag{3.6}$$

Le champ incident total p_{inc}^{tot} peut s'écrire

$$p_{inc}^{tot} = \vec{a}^{t}.\vec{e}^{+}, \tag{3.7}$$

où le signe *t* mis en exposant signifie la transposition. Le champ réfléchi total p_R^{tot} résultant de ce champ incident est

$$p_R^{tot} = \sum_{\nu} p_R^{\nu}, \tag{3.8}$$

ou encore

$$\begin{aligned} p_R^{tot} &= \sum_{\nu}\sum_{\varepsilon} A_R^{\nu,\varepsilon} e^{i\left(-k_\varepsilon^\nu x + \ell_\varepsilon^\nu y\right)} \\ &= \sum_{\nu}\sum_{\varepsilon} A_{inc}^{\nu} R_{\nu\varepsilon} e^{i\left(-k_\varepsilon^\nu x + \ell_\varepsilon^\nu y\right)}, \\ &= \vec{a}^{t}\boldsymbol{R}\vec{e}^{-} \end{aligned} \tag{3.9}$$

De la même façon, le champ transmis total résultant de p_{inc}^{tot} peut s'écrire

$$p_T^{tot} = \vec{a}^{t}\boldsymbol{T}\vec{e}^{+}, \tag{3.10}$$

avec

$$\left(\boldsymbol{T}\right)_{\nu\varepsilon} = T^{\nu,\varepsilon}. \tag{3.11}$$

La généralisation de cette présentation matricielle à plusieurs réseaux en interaction est présentée dans ce qui suit.

3.3 Matrices de réflexion et de transmission pour deux réseaux linéaires

La géométrie du problème est la suivante. L'origine des axes du repère principal est placée sur le réseau de gauche d'épaisseur $2a_1$. Les deux rangées sont séparées d'une distance D_1. Le second réseau a une épaisseur $2a_2$

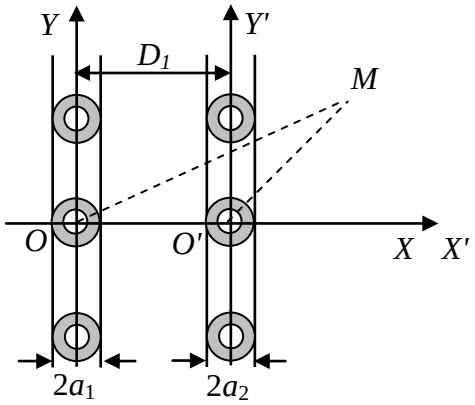


Figure 3.1 Un réseau à deux rangées

Soit un point M de coordonnées x' et y' dans le repère cartésien $O'X'Y'$ et de coordonnées $x'+D_1$ et y' dans le repère OXY. En ce point,

$$e^{i\left(-k_\varepsilon^\nu x'+\ell_\varepsilon^\nu y'\right)}=e^{i\left(-k_\varepsilon^\nu x+\ell_\varepsilon^\nu y\right)}e^{ik_\varepsilon^\nu D_1}, \tag{3.12}$$

$$e^{i\left(k_\varepsilon^\nu x'+\ell_\varepsilon^\nu y'\right)}=e^{i\left(k_\varepsilon^\nu x+\ell_\varepsilon^\nu y\right)}e^{-ik_\varepsilon^\nu D_1}. \tag{3.13}$$

Ensuite, en introduisant les vecteurs $\vec{e}_1'^{-}$ et $\vec{e}_1'^{+}$ liés au repère $O'X'Y'$, on obtient

$$\left(\vec{e}_1'^{-}\right)_\varepsilon=\left(\vec{e}^{-}\right)_\varepsilon e^{ik_\varepsilon^\nu D_1}, \tag{3.14}$$

$$\left(\vec{e}_1'^{+}\right)_\varepsilon=\left(\vec{e}^{+}\right)_\varepsilon e^{-ik_\varepsilon^\nu D_1}. \tag{3.15}$$

En considérant la matrice diagonale $\boldsymbol{D}_1$ supposée inversible et telle que

$$\left(\boldsymbol{D}_1\right)_{\varepsilon\nu}=\delta_{\varepsilon\nu}e^{ik_\varepsilon^\nu D_1}, \tag{3.16}$$

les relations (3.14) et (3.15) deviennent

$$\vec{e}_1'^{-}=\boldsymbol{D}_1\vec{e}^{-},\qquad \vec{e}_1'^{+}=\boldsymbol{D}_1^{-1}\vec{e}^{+}. \tag{3.17}$$

Les ondes incidentes sur le deuxième réseau s'expriment donc

$$\vec{a}^t.\vec{e}^{+}=\vec{a}^t\boldsymbol{D}_1\vec{e}_1'^{+}=\left(\boldsymbol{D}_1\vec{a}\right)^t\vec{e}_1'^{+} \tag{3.18}$$

Le champ acoustique produit par le deuxième réseau s'écrit, pour la transmission

$$P_{T2}=\left(\boldsymbol{D}_1\vec{a}\right)^t\boldsymbol{T}_2\vec{e}_1'^{+}=\vec{a}^t\left(\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{D}_1^{-1}\right)\vec{e}^{+}, \tag{3.19}$$

et pour la réflexion

$$P_{R2}=\left(\boldsymbol{D}_1\vec{a}\right)^t\boldsymbol{R}_2\vec{e}_1'^{-}=\vec{a}^t\left(\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{D}_1\right)\vec{e}^{-}. \tag{3.20}$$

Si on introduit les matrices $\boldsymbol{F}_2$ et $\boldsymbol{G}_2$ telles que

$$\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{D}_1^{-1},\ \boldsymbol{G}_2 = \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{D}_1. \qquad (3.21)$$

on obtient la pression diffusée en transmission et en réflexion par le second réseau sous la forme

$$p_{T2} = \vec{a}^t\boldsymbol{F}_2\vec{e}^{+}, \qquad \text{pour } x > D_1 + a_2, \qquad (3.22)$$

$$p_{R2} = \vec{a}^t\boldsymbol{G}_2\vec{e}^{-}, \qquad \text{pour } x < D_1 - a_2. \qquad (3.23)$$

Les trajectoires des rayons, pour le système de deux réseaux, sont schématisées ci-dessous.

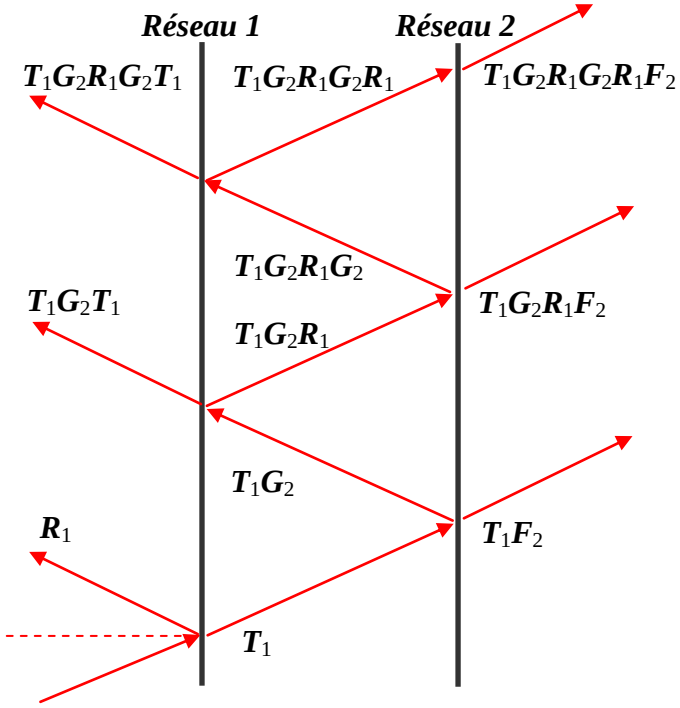


Figure 3.2. Trajectoires des rayons acoustiques pour le système de deux réseaux

La pression transmise totale par le système de deux réseaux, compte tenu des rayons représentés sur la Figure. 3.2, est

$$p_{T2}^{total} = \vec{a}^t\mathcal{T}(2)\vec{e}^{+}, \qquad (3.24)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(2) &= \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{F}_2 + \ldots \\ &= \boldsymbol{T}_1\left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{R}_1 + \ldots\right]\boldsymbol{F}_2\end{aligned} \qquad (3.25)$$

Dans les crochets, on reconnaît une série géométrique de raison $\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{R}_1$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(2) &= \boldsymbol{T}_1\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{R}_1\right]^{-1}\boldsymbol{F}_2, \\ &= \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{K}\boldsymbol{F}_2\end{aligned} \qquad (3.26)$$

De même, en se reportant à la Figure 3.2, on peut mettre la pression réfléchie totale par le système de deux réseaux sous la forme

$$p_{R2}^{total} = \vec{a}^{t}\boldsymbol{\mathcal{R}}(2)\vec{e}^{+}, \tag{3.27}$$

où

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{R}}(2) &= \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{T}_1 + \ldots \\ &= \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{T}_1\left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{R}_1 + \ldots\right]\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{T}_1\end{aligned}. \tag{3.28}$$

Dans les crochets on reconnaît la même série géométrique que précédemment eu (3.25). On a donc

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}(2) = \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{K}\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{T}_1. \tag{3.29}$$

L'avantage de la prise en compte des matrices de réflexion et de transmission est de pouvoir déterminer les coefficients $\boldsymbol{\mathcal{R}}(2)$ et $\boldsymbol{\mathcal{T}}(2)$ à n'importe quelle fréquence. C'est-à-dire quel que soit le nombre de modes de diffraction pris en compte. Dans le paragraphe qui suit, on généralise cette méthode matricielle à un nombre quelconque de réseaux.

3.4 Matrices de réflexion et de transmission pour N réseaux linéaires

La géométrie du problème est représentée ci-dessous. On schématise les réseaux par des plans pour simplifier et on définit une nouvelle origine O pour le repère principal.

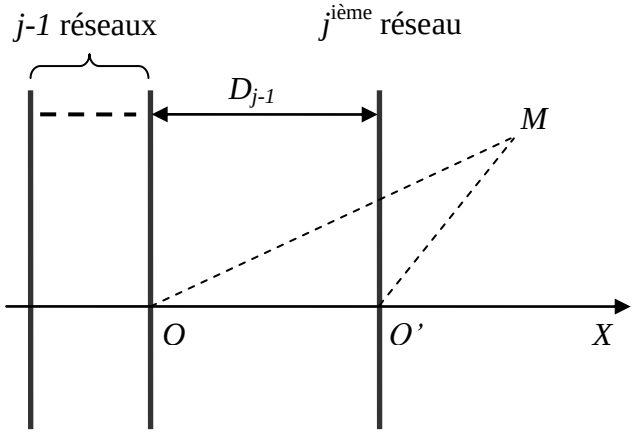


Figure 3.3 : Géométrie pour la construction des matrices de réflexion et de transmission.

Notons par $\boldsymbol{\mathcal{R}}(j-1)$ et $\boldsymbol{\mathcal{T}}(j-1)$ les coefficients de réflexion et de transmission pour les $(j-1)$ réseaux groupés, puis par G_j et F_j les coefficients de réflexion et de transmission du réseau j. On peut déduire, en suivant un raisonnement en tout point analogue à celui de la

section 3.2, les coefficients de réflexion et de transmission du groupe de j réseaux. En effet, d'après la Figure 3.4 montrant les trajets des rayons.

On a

$$\mathcal{T}(j)=\mathcal{T}(j-1)\left[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}_j\mathcal{R}(j-1)\right]^{-1}\boldsymbol{F}_j \qquad (3.30)$$

$$\mathcal{R}(j)=\mathcal{R}(j-1)+\mathcal{T}(j-1)\left[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}_j\mathcal{R}(j-1)\right]^{-1}\boldsymbol{G}_j\mathcal{T}(j-1) \qquad (3.31)$$

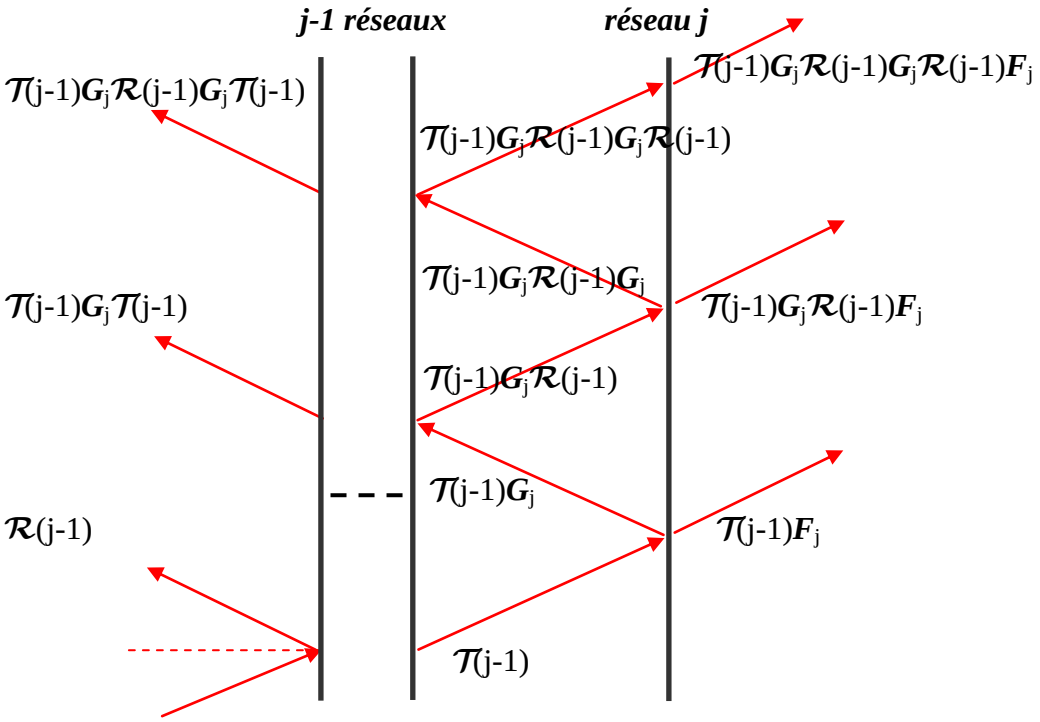


Figure 3.4 : Trajectoires des rayons acoustiques entre le groupe de (j-1) réseaux et le réseau j.

3.5 Cas d'un seul mode propagatif

Lorsqu'il n'y a qu'un seul mode propagatif ($\nu_{inf}=\nu_{sup}=0$), les matrices se réduisent à un seul élément. On a, d'après les formules (3.26) et (3.27) :

$$\mathcal{T}(2)=T_1\left[1-\boldsymbol{G}_2R_1\right]^{-1}\boldsymbol{F}_2\,, \qquad (3.32)$$

$$\mathcal{R}(2)=R_1+T_1\left[1-\boldsymbol{G}_2R_1\right]^{-1}\boldsymbol{G}_2T_1\,. \qquad (3.33)$$

Or, ~~puisque~~ comme (cf Eqs 3.21)

$$\boldsymbol{G}_2=e^{ikD_1}R_2e^{ikD_1}\,, \qquad (3.34)$$

et que

$$F_2 = e^{ikD_1} T_2 e^{-ikD_1} . \qquad (3.35)$$

On trouve

$$\mathcal{T}(2) = \frac{T_1 T_2}{1 - R_1 R_2 e^{2ikD_1}} , \qquad (3.36)$$

$$\mathcal{R}(2) = \frac{T_1^2 R_2 e^{2ikD_1}}{1 - R_1 R_2 e^{2ikD_1}} + R_1 . \qquad (3.37)$$

Posons $\varphi_j = kD_j$ où j est un entier naturel ; en généralisant cette formule au cas de *j* réseaux, on obtient :

$$\mathcal{T}(j) = \frac{\mathcal{T}(j-1) T_j}{1 - \mathcal{R}(j-1) R_j e^{2i\varphi_j}} , \qquad (3.38)$$

$$\mathcal{R}(j) = \frac{\mathcal{T}^2(j-1) R_j e^{2i\varphi_j}}{1 - \mathcal{R}(j-1) R_j e^{2i\varphi_j}} + \mathcal{R}(j-1) . \qquad (3.39)$$

Au facteur $e^{i\varphi_j}$ près, manquant dans (3.38), ces équations sont celles utilisés dans les calculs numériques des coefficients de réflexion et de transmission par j réseaux.

On peut pousser un peu plus loin la généralisation des équations obtenues pour les coefficients de réflexion et de transmission. En effet, notons toujours $\mathcal{R}(j)$ et $\mathcal{T}(j)$ les coefficients de réflexion et de transmission par *j* réseaux ($1 < j < N$), R_j et T_j ceux d'un seul réseau (*j*) lorsque l'onde incidente provient de la gauche (propagation selon les x croissants). Introduisons maintenant les coefficients $\mathcal{R}_d(j)$ et $\mathcal{T}_d(j) \equiv \mathcal{T}(j)$ par j réseaux et R_{d_j} et $T_{d_j} \equiv T_j$ parun seul réseau (*j*) lorsque l'onde incidente arrive pour la droite (propagation selon les x décroissants). On suppose que la distance entre le réseau (*j*-1) et le réseau (*j*) est d_j. En utilisant la méthode exposée à la section 3.3.

On obtient :

$$\mathcal{R}(j) = \frac{\mathcal{T}^2(j-1) R_j e^{2i\varphi_j}}{1 - \mathcal{R}_d(j-1) R_j e^{2i\varphi_j}} + \mathcal{R}(j-1) , \qquad (3.40)$$

$$\mathcal{T}(j) = \frac{\mathcal{T}(j-1) T_j e^{i\varphi_j}}{1 - \mathcal{R}_d(j-1) R_j e^{2i\varphi_j}} , \qquad (3.41)$$

$$\mathcal{R}_d(j) = \frac{\mathcal{R}_d(j-1) T_j^2 e^{2i\varphi_j}}{1 - \mathcal{R}_d(j-1) R_j e^{2i\varphi_j}} + R_{d_j} , \qquad (3.42)$$

Les relations (3.40) et (3.41) sont conformes à celles données en (3.38) et (3.39), si $\mathcal{R}_d(j) \equiv \mathcal{R}(j), \forall j \in \{1,...,N\}$. Elles restent valables si tous les réseaux sont identiques, auquel cas $R_j = R_{d_j} \equiv R$, $T_j = R$.

Si la période de la structure étudiée est un multicouche (bi-réseaux par exemple), elles restent valables avec cependant $R_j = R_0$, $R_{d_j} = R_{0d}$ et $T_j = T_0$. On notera que dans (3.41), on a rétabli le facteur $e^{i\varphi_j}$ qui manquait dans (3.38).

3.6 Réseau bidimensionnel infini

On considère maintenant un réseau bidimensionnel supposé contenir une infinité de réseaux linéaires identiques et répartis avec une période δ selon l'axe OX. La propagation d'onde dans tel milieu peut être décrite à l'aide du théorème de Bloch [4], reliant les champs de déplacement et les pressions pris en deux points du réseau bidimensionnel distants d'une période δ (Figure 3.5). Le théorème dit qu'il existe un nombre d'onde (complexe en général) $\gamma = \gamma' + i\gamma''$ ($\gamma', \gamma'' \in \mathbb{R}$), tel que, entre deux points de coordonnées $(0, y)$ et (δ, y), on ait, pour la pression et le déplacement, les relation suivantes :

$$p(x+\delta, y) = e^{i\gamma\delta} p(x, y), \qquad (3.43)$$

$$u(x+\delta, y) = e^{i\gamma\delta} u(x, y). \qquad (3.44)$$

[4] M. A. Heckl, Sound propagation in bundles of periodically arranged cylindrical tubes, Acustica 77, 143–152 (1992)

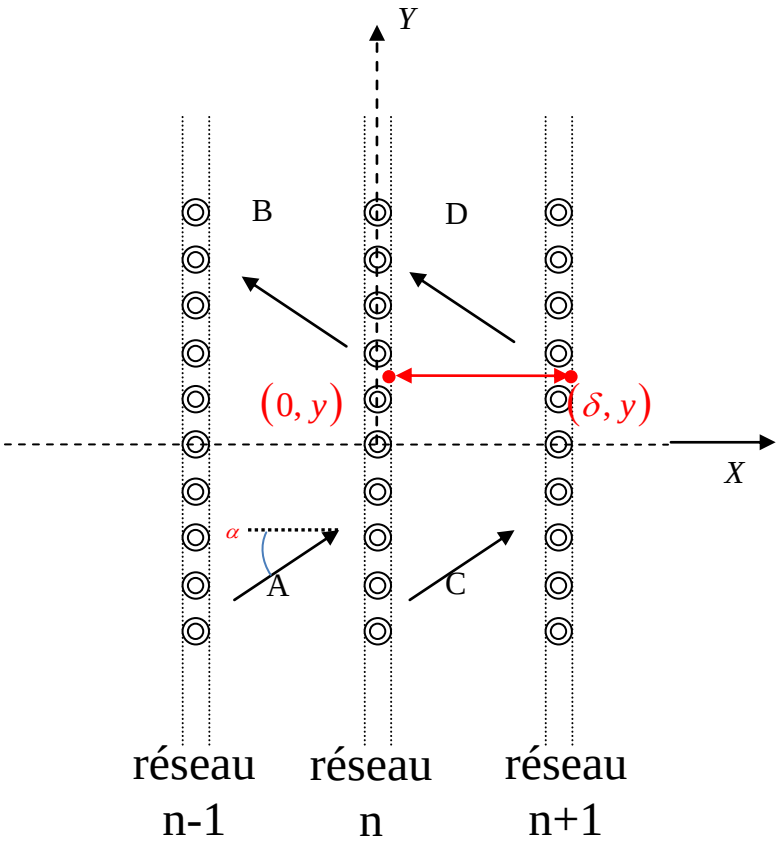


Figure 3.4 : Illustration du théorème de Bloch.

Il faut préciser que l'on examine le problème pour de grandes longueurs (donc on se trouve dans le mode 0 de diffraction). La partie réelle du nombre d'onde, $\gamma'(=\omega/c_{Bloch})$ permet de définir la vitesse de phase c_{Bloch} des ondes se propageant dans le milieu effectif. Dans ce domaine, une longueur d'onde contient plusieurs périodes qui peut être estimé $\lambda=\frac{2\pi}{\gamma'}$. La partie imaginaire caractérise l'atténuation de ces ondes.

Appliquons le théorème de Bloch dans le fluide situé entre les réseaux, aux points indiqués sur la Figure 3.5, en supposant des ondes planes (de pression et de vitesse) d'amplitudes A,B,C,D. A l'interface gauche du réseau n situé en X = 0.

On a :

$$p(0,y)=(Ae^{ik_0x\cos\alpha}e^{ik_0y\sin\alpha}+Be^{-ik_0x\cos\alpha}e^{ik_0y\sin\alpha})_{x=0}, \qquad (3.45)$$
$$=(A+B)e^{ik_0y\sin\alpha}$$

$$u(0,y)=\frac{\cos\alpha}{\rho_0c_0}(A-B)e^{ik_0y\sin\alpha}. \qquad (3.46)$$

La pression et la vitesse d'une période pmus loin vers la droite sont données par :

$$p(\delta, y) = (Ce^{ik_0\delta\cos\alpha} + De^{-ik_0\delta\cos\alpha})e^{ik_0 y\sin\alpha}, \qquad (3.47)$$

$$u(\delta, y) = \frac{\cos\alpha}{\rho_0 c_0}(Ce^{ik_0\delta\cos\alpha} - De^{-ik_0\delta\cos\alpha})e^{ik_0 y\sin\alpha}. \qquad (3.48)$$

Les équations (3.43) à (3.48) forment un système linéaire homogène de quatre équations à quarte inconnues. Il n'existe de solutions non triviales que si le déterminant du système est nul.

En effectuant les calculs, on obtient la formule, dite équation de dispersion des ondes de Bloch, en incidence normale ($\alpha = 0$)

$$\cos(\gamma\delta) = \frac{1}{2T_0}\left[\cos\chi(T_0^2 - R_0R_{0d} + 1) + i\sin\chi(T_0^2 - R_0R_{0d} + 1)\right], \qquad (3.49)$$

tenant compte de la possibilité de distinguer les ondes incidentes selon les X croissant des ondes incidentes selon les X décroissants. Sinon, si chaque période est constituée d'un seul type de réseau, on a $R_{0d} \equiv R_0$ et l'on retrouve la formule classique donnée dans les références[9,4]

Les coefficients de réflexion et de transmission R_0, R_{0d}, T_0 étant des données du problème, on peut en principe résoudre directement (3.49). On obtient

$$\overline{\gamma'} = \frac{\gamma'\delta}{\pi} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[-i\ln(Z + i\sqrt{1-Z^2})\right], \qquad (3.50)$$

$$\overline{\gamma''} = \frac{\gamma''\delta}{\pi} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left[-i\ln(Z + i\sqrt{1-Z^2})\right]. \qquad (3.51)$$

où Z est le second membre de (3.49)

3.7 Résultats numériques et graphiques

3.7.1 N réseaux identiques linéaires

D'abord, les calculs numériques sont effectués pour des réseaux de tubes en acier, de masse volumique $\rho_2 = 7900\,kg/m^3$ où les célérités des ondes élastiques sont $c_l = 5790\,m/s$ et $c_t = 3100\,m/s$, les tubes sont remplis d'eau et immergés dans l'eau de masse volumique

[9] N. W. Aschcroft et N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Holt, Rinehart and Winston (1976)
[4] M. A. Heckl, Sound propagation in bundles of periodically arranged cylindrical tubes, Acustica 77, 143–152 (1992)

$\rho_1 = 1000\, kg/m^3$ et où la célérité des ondes élastiques est $c_1 = 1470\, m/s$. La distance D entre deux réseaux consécutifs est égale à six fois le rayon externe ***a*** d'un tube (=6a). La distance entre 2 tubes d'un réseau est égale à d (= 2.647a) avec $a = 5\, mm$.Le schéma de structure est présenté dans la Figure 3-6

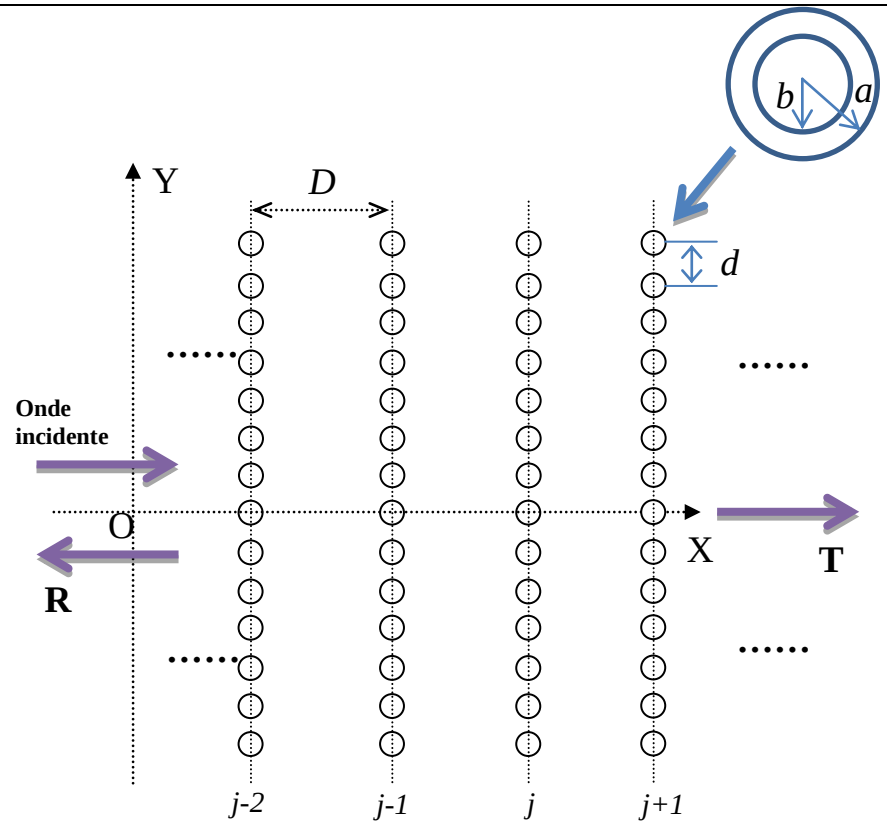


Figure 3-6 : schéma de N réseaux identiques linéaire

La Figure 3-7 montre le coefficient de transmission de N $(N = 1,5,10)$ réseaux, tracés en fonction de la fréquence réduite ka. Le calcul a été fait pour un angle d'incidence de 0°.

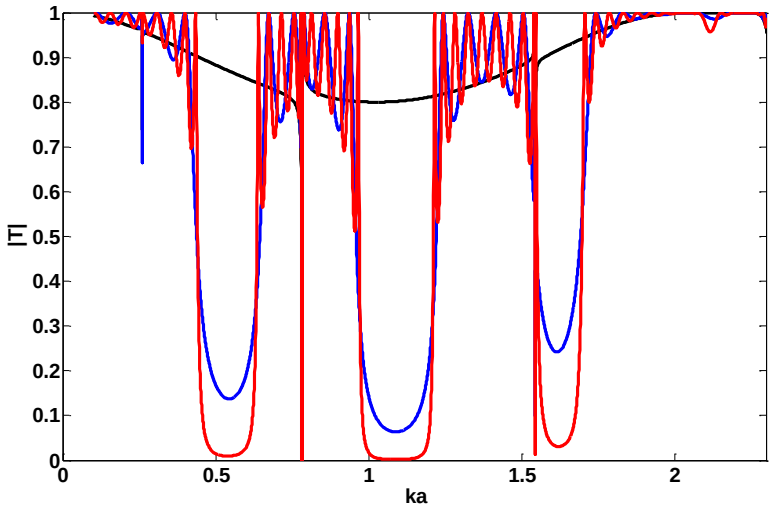


Figure 3-7 Coefficient de transmission de N réseaux en acier

(N = 1 : noir, N = 5 : bleu, N = 10 : rouge)

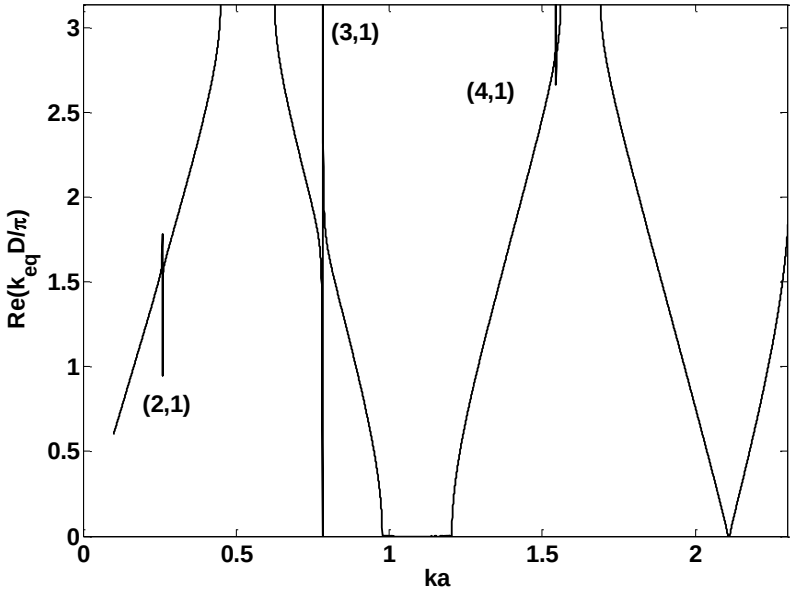


Figure 3-8 Courbe de dispersion d'un seul réseau d'acier

Nous présentons Figure 3-8 la courbe de dispersion, donnant la partie réelle du nombre d'onde normalisé de Bloch $k_{eq}\delta/\pi$ en fonction de ka. Sur cette figure, on peut observer qu'il existe trois bande interdites ($k_{eq}\delta/\pi = 0 \; ou \; \pi$). Elles confirment les résultats observables sur la Figure 3-7. En outre, la courbe de dispersion présente aussi des résonances aux mêmes fréquences que celles des tubes données dans le chapitre 1

On procède de la même façon avec des réseaux 2D de tubes en polyéthylène Les valeurs des paramètres sont : $\rho_2 = 940kg/m^3$; $c_l = 2370m/s$ et $c_t = 800m/s$. Les Figures 3-9 présentent les coefficients de transmission pour N réseaux linéaires infinis ($N = 1,5,10$) de tubes en polyéthylène.

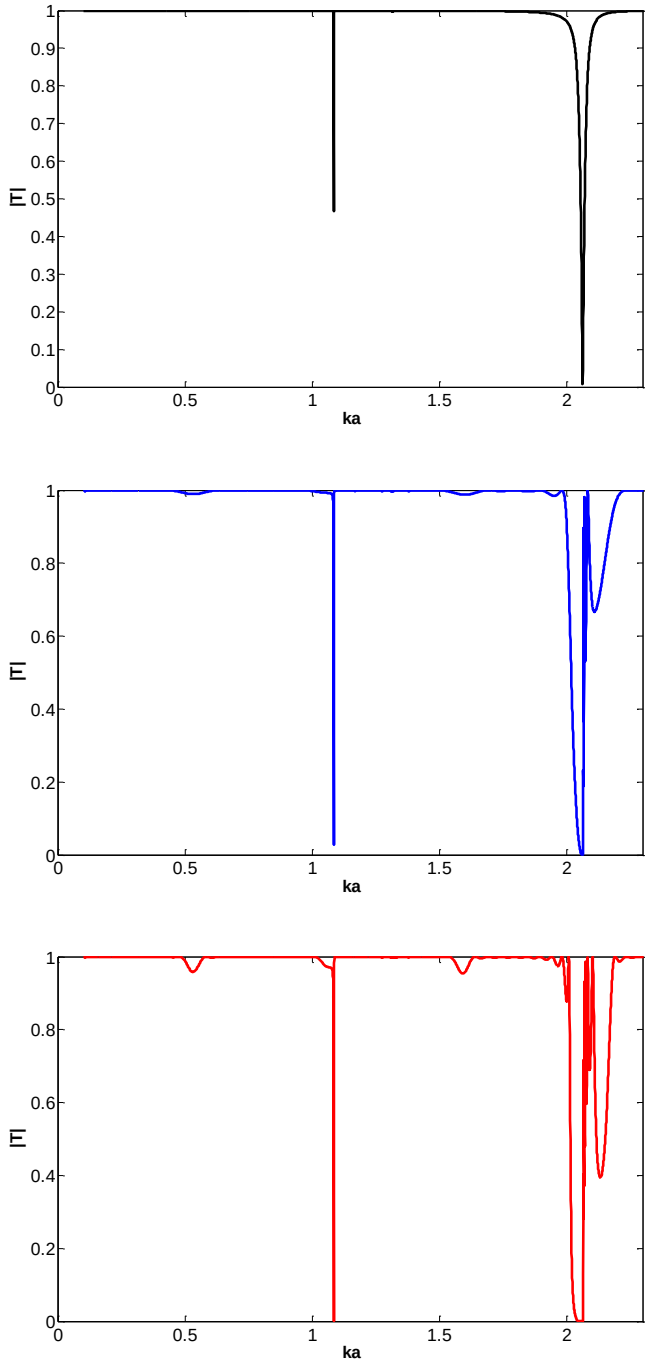


Figure 3-9 Coefficient de transmission de N réseaux en polyéthylène

(N = 1 : noir (a), N = 5 : bleu (b), N = 10 : rouge (c))

Les courbes sont tracées sur la gamme de fréquence réduite comprise entre 0,1 et 2,373. La valeur maximale correspond à la première fréquence de coupure, donc seul le mode 0 est pris en compte.

Dans le cas d'un seul réseau, on observe des zones fréquentielles dans lesquelles les coefficient de transmission T_1 passe par un minimum n'atteignant pas 0. Quand le nombre de réseaux augmente (5 et 10 réseaux), se forment des zones dans lesquelles les coefficients de transmission T_j (N=5,10) tendent vers 0. L'accumulation de réseaux linéaires infinis répartis périodiquement entraîne donc l'apparition de bandes interdites, ici une seule, sur laquelle il n'y a pas d'ondes qui peuvent être transmises à travers le cristal phononique 2D. On constate par ailleurs que plus le nombre de réseaux augmente, plus la bande interdite est marquée d'une part et plus les oscillations de part et d'autre de la bande interdite sont nombreuses, d'autre part.

Quand on étudie des cristaux phononiques comportant 100 réseaux linéaires infinis de tubes en acier ou en polyéthylène, on observe très nettement sur les courbes de coefficient de transmission (Figure 3-10 : réseaux de tubes en acier, Figure 3-11 : réseaux de tubes en polyéthylène) des bandes interdites respectivement circonscrites dans les gammes fréquentielles. La largeur des bandes interdites est d'autant plus importante que le contraste d'impédance entre le réseau de tubes considéré et le fluide environnant est élevé.

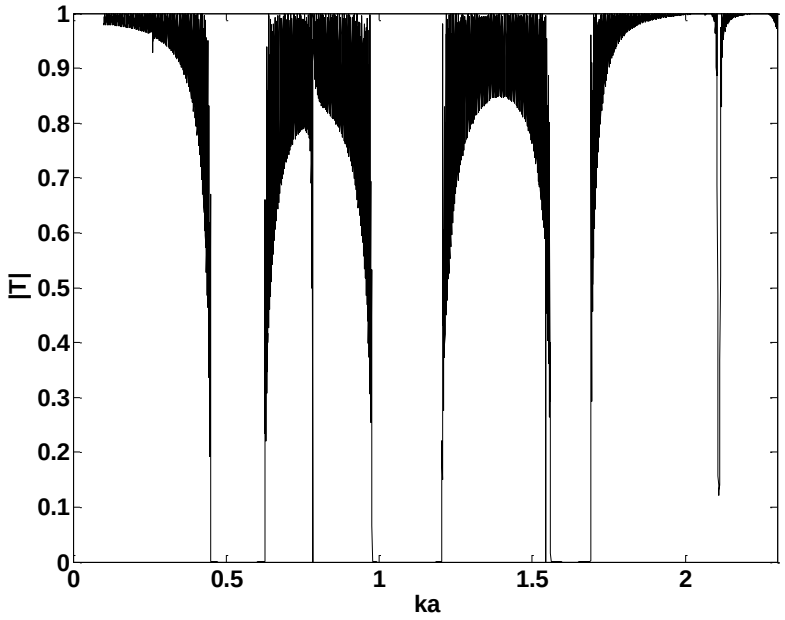


Figure 3-10 Coefficient de transmission de N (N = 100) réseaux en acier

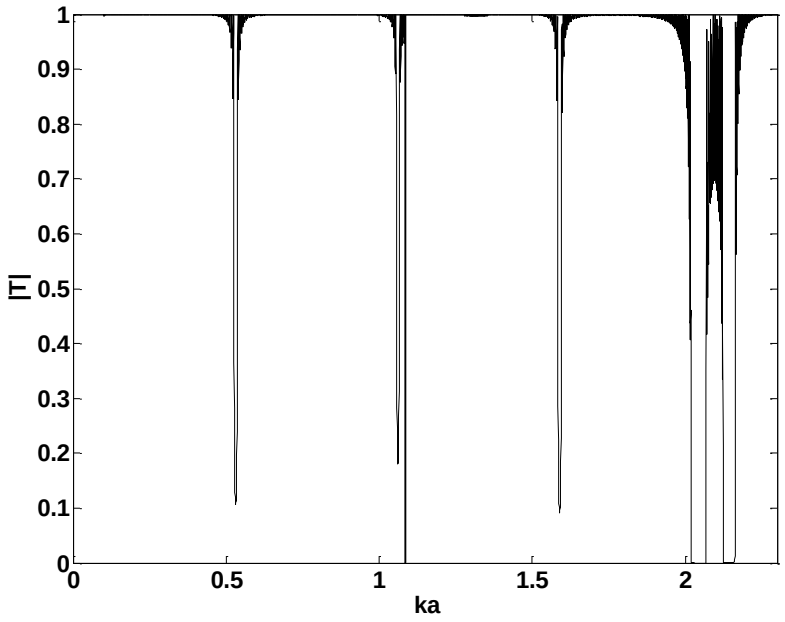


Figure 3-11 Coefficient de transmission de N (N = 100) réseaux en polyéthylène

3.7.2 N bi-réseaux identiques linaires

On étudie dans ce paragraphe un réseau 2D constitué de N biréseaux linéaires infinis de tubes présentés dans le paragraphe précédent. D'abord, le schéma de structure de bi-réseaux est montré dans la Figure 3-12. D_B présente la distance entre deux biréseaux est égale à six fois le rayon externe ***a*** d'un tube (=6a). Et l'écart entre deux rangée de chaque biréseaux est donné par D (=3a). La distance entre les 2 tubes est toujours égale à d (= 2.647a) avec $a = 5\,mm$. La Figure 3-13 présente les coefficients de transmissions du mode 0 incident pour N=1,5,10 bi-réseaux.

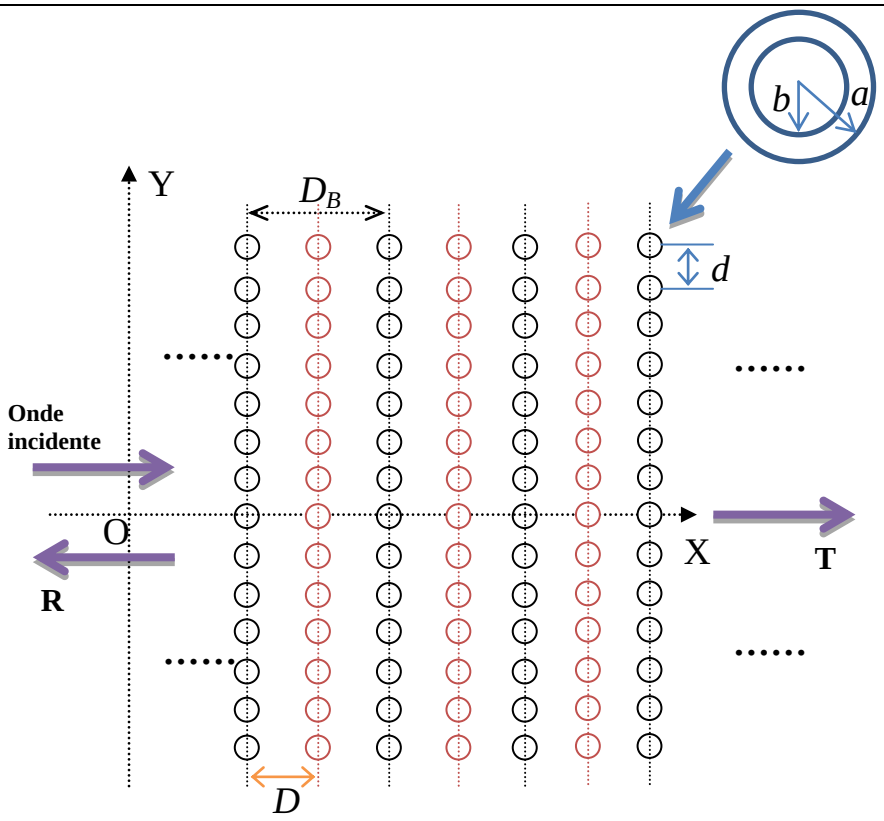


Figure 3-12 : schéma de N biréseaux linéaire

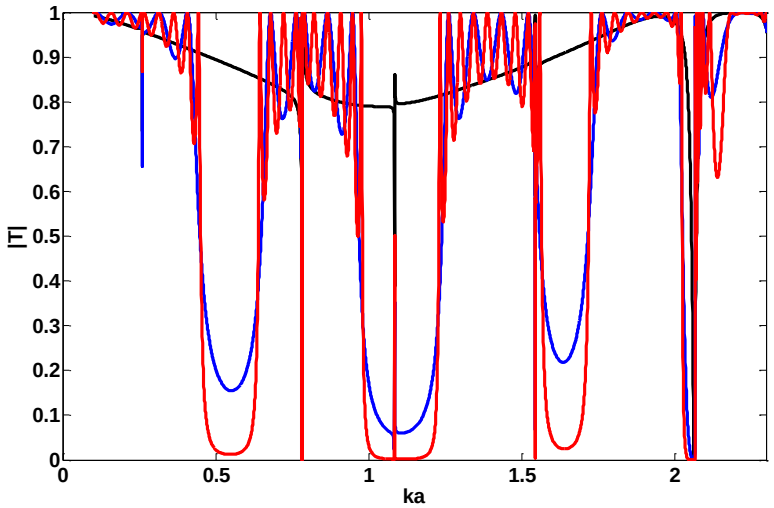


Figure 3-13 : Coefficient de transmission des N bi-réseaux (acier et polyéthylène)

(N = 1 : noir, N = 5 : bleu, N = 10 : rouge)

Tout se passe comme si les coefficients de transmission de N bi-réseaux étaient la superposition de ces coefficients pour des réseaux uniformes (Figures 3-7 et 3-9). On constate également qu'il y a plus de bandes interdites que dans les cas de réseaux uniformes, sur une même gamme de fréquence réduite.

Une transition très fine est apparue dans la bande interdite située entre 1 et 1,2. La fréquence réduite de cette transition correspond exactement à celle du premier pic la fonction de forme de diffusion d'un tube en polyéthylène. Avec N bi-réseaux, il est donc possible de créer un filtre sélectif.

Nous présentons Figure 3-14 la courbe de dispersion d'un bi-réseau. En comparant cette figure avec Figure 3-8, on observe deux nouvelles bandes étroites qui sont situés haute fréquence entre ka=2 et 2,3. En plus, il y a aussi un pic très fin apparaît dans la deuxième bande. Ces bandes interdites supplémentaires et la résonance sont liées à la présence de réseaux de tubes en polyéthylène dans les bi-réseaux. Ces résultats confirment ceux observés Figure 3-13.

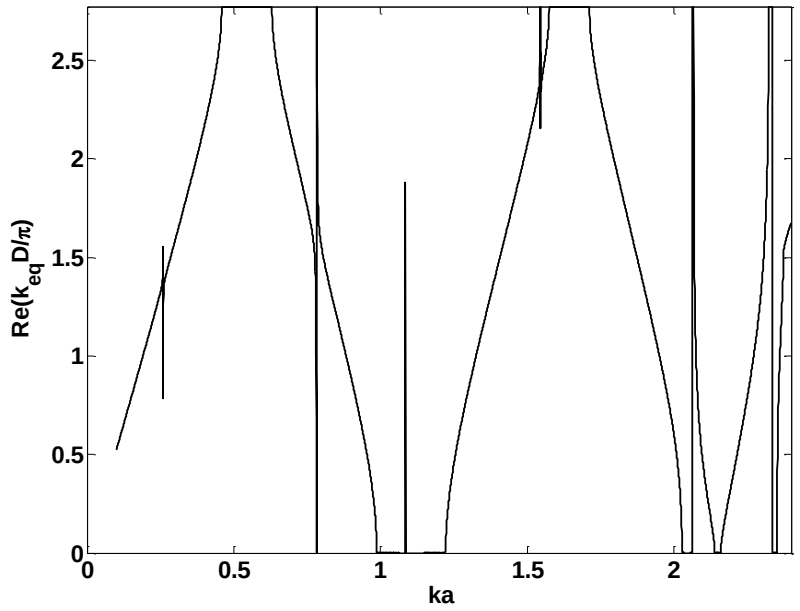


Figure 3-14 la courbe de dispersion d'un bi-réseau (acier et polyéthylène)

3.7.3 Influence des paramètres géométriques sur les bandes interdites

On s'intéresse à l'influence d'une variation de D/a, b/a et de d/a sur les positions et les largeurs des bandes interdites.

D'abord, on fait passer la distance D entre deux rangée de chaque bi-réseaux de trois fois le rayon externe de tube à six fois. On compare les coefficients de réflexion et de transmission quand D=6a (Figures 3-15) à ceux obtenus quand D=3a (Figures 3-13). On constate que quand on augmente l'écart entre deux réseaux, les bandes interdites deviennent plus nombreuses, et leur largeur est diminuée.

Puis on change le rapport b/a du rayon interne et du rayon externe des tubes. On passe à $b/a = 60/85 \approx 0.7059$. On compare cette courbe (Figure 3-16) avec les courbes obtenues avec $b/a = 75/85 \approx 0.88$ (Figure 3-13). On peut observer des bandes interdites qui sont plus marquées et plus larges quand on a les mêmes nombres de bi-réseaux.

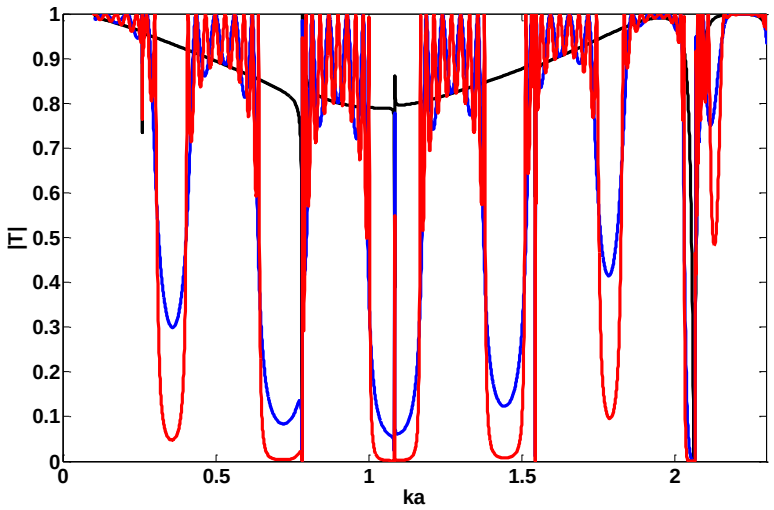


Figure 3-15 : Coefficient de transmission des N bi-réseaux (acier et polyéthylène) avec D=6a

(N = 1 : noir, N = 5 : bleu, N = 10 : rouge)

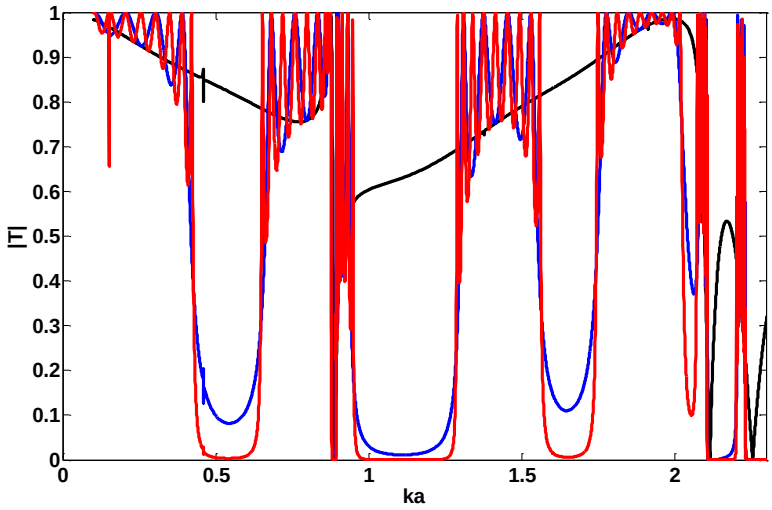


Figure 3-16 : Coefficient de transmission des N bi-réseaux (acier et polyéthylène) avec b/a=60/85

(N = 1 : noir, N = 5 : bleu, N = 10 : rouge)

Finalement, on change le rapport *d/a*. On passe *d/a* de 2,647 à 4,647. Dans ce cas-là, la première fréquence de coupure *ka* se déplace de 2,373 à 1,35, c'est-à-dire qu'on trace les coefficients de transmission sur la gamme de fréquence entre 0 et 1,35 pour le mode 0 est pris en compte. On obtient les courbes suivantes. En comparant aux Figure 3-13, on peut observer des bandes interdites qui sont moins marquées. D'autre part, il faut plus de réseaux pour obtenir une bande interdite «parfaite» (*T* tend vers 0).

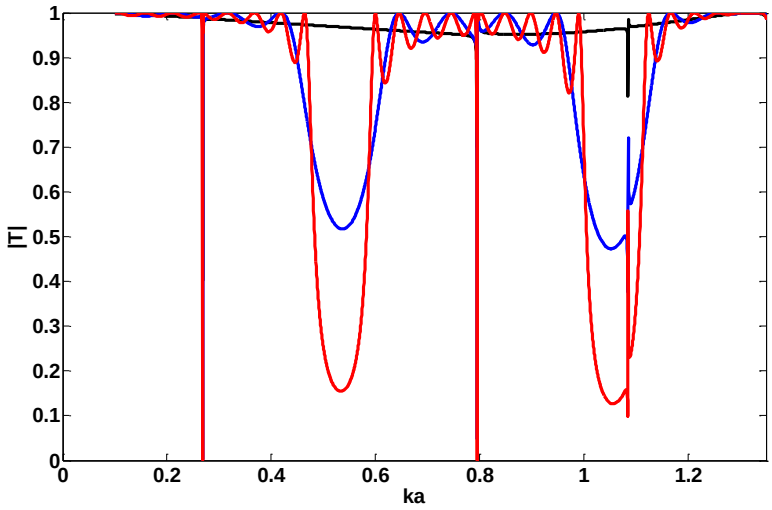


Figure 3-17 : Coefficient de transmission des N bi-réseaux (acier et polyéthylène) avec d/a=4.647

(N = 1 : noir, N = 5 : bleu, N = 10 : rouge)

3.8 Conclusion

On présente d'abord la diffusion acoustique par des SP2D de N réseaux linéaires infinis composés de tube d'un même matériau. Dans un second temps, on s'est intéressé à des SP2D composées de N bi-réseaux de tubes de matériaux différents. Un bi-réseau est ici composé d'un réseau linéaire infini de tubes en acier et d'un autre de tubes en polyéthylène. Il faut envisager dans cette configuration des ondes incidentes d'un côté ou de l'autre d'un bi-réseau, car les coefficients de réflexion sont différents (celui de transmission reste identique). De nouvelles formules itératives sont donc établies pour prendre cette différence en compte. A l'examen des tracés des coefficients de réflexion et de transmission par N bi-réseaux, tout se passe comme s'ils étaient la superposition des coefficients de réflexion et de transmission par N réseaux de tubes en acier et N réseaux de tubes en polyéthylène. Par ailleurs, on peut observer dans la bande interdite centrale, sur la gamme de fréquence étudiée, l'apparition d'une bande passante très fine permettant la transmission d'ondes à travers le cristal, n'existant pas pour un réseau uniforme de tubes en acier. On peut voir l'ensemble des réseaux de tubes en polyéthylène comme l'introduction de défauts dans un réseau uniforme de tubes en acier. Ceci explique le dernier phénomène décrit. On a ainsi créé un guide d'ondes très sélectif. Ensuite, on étudie l'influence d'une variation de D/a, b/a, d/a (D est la distance entre deux réseaux, d est le pas entre deux tubes dans un même réseau, a et b sont les rayons externe et interne des tubes) sur les positions et les largeurs des bandes interdites. Quand D/a augmente (on passe de $D = 3a$ à $D = 6a$), les bandes interdites deviennent plus nombreuses, et leurs largeurs diminuent. Quand les rapports b/a et d/a diminuent (soit l'épaisseur du tube augmente, soit le cristal phononique sur une épaisseur constante devient plus dense), les bandes interdites sont plus marquées, c'est-à-dire que le coefficient de réflexion tend vers 1 avec un nombre moins important de réseaux d'une part, et la largeur des bandes.

Référence

1. C. Audoly, G. Dumery, Modelling of compliant tube underwater reflectors, J. Acoust. Soc. Am. 87(5), 1841-1846 (1990)
2. A.Khelif, P. A. Deymier, B. Djafari-Rouhani, J. O. Vasseur, and L. Dobrzynski, Two-dimensional phononic crystal with tunable narrow passband : Application to a waveguide with selective frequency, J. Appl. Phys. 94(3), 1308–1311 (2003).
3. X. Y. Huang and M. A. Heckl, Transmission and dissipation of sound waves in tube bundles, Acustica 78, 191–200 (1993)
4. M. A. Heckl, Sound propagation in bundles of periodically arranged cylindrical tubes, Acustica 77, 143–152 (1992)
5. L. Sanchis, F. Cervera, J. Sanchez-Dehesa, J. V. Sanchez-Perez, C. Rubio, and R. Martinez-Sala, Reflectance properties of two-dimensional sonic band-gaps crystals, J. Acoust. Soc. Am. 109(6), 2598–2605 (2001).
6. J.Vasseur , B Djafari-Rouhani, L Dobrzynski, M S Kushwaha and P Halevi, Complete acoustic band gaps in periodic fibre-reinforced composite materials. J. Phys.Condens Matter (1994), pp.8759-8770
7. Y. Lai, X. Zhang, and Z.-Q. Zhang, Engineering acoustic band gaps, Appl. Phys. Lett. 79(20), 3224–3226 (2001).
8. L. S. Mulholland and M. A. Heckl, Multi-directional sound wave propagation through a tube bundle, J. Sound Vib. 176(3), 377–398 (1994)
9. N. W. Aschcroft et N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Holt, Rinehart and Winston (1976)

CHAPITRE 4 : RESONANCES DE STRUCTURES PHONONIQUES A GRADIENTS DE PROPRIETES

4.1 Introduction

Les résonances de structures phononiques bidimensionnelles (SP2D) à gradients de propriétés, composé de *N* réseaux linéaires infinis constitués de tubes creux, élastiques, isotropes, périodiquement espacés d'une distance *d*, sont examinées. Les propriétés géométriques et physiques dans un réseau linéaire sont identiques mais sont modifiées en passant à un autre réseau. A écartement identique, noté *D* entre deux réseaux adjacents, les études portent sur les variations du rapport *b/a* entre rayon interne et rayon externe, de la masse volumique ρ et de la vitesse de phase des ondes longitudinales c_L dans les tubes. Les réseaux de tube en acier, de rapport *b/a* égal à 75/85 ont été choisis comme référence. Ils sont immergés dans l'eau et remplis d'eau. Pour tous les types de SP2D, les résonances sont analysées à partir des coefficients de réflexion ou de transmission d'un réseau linéaire infini en utilisant la théorie de la diffusion multiple (*cf.* chapitre 2), puis ceux de N réseaux (identiques ou différents) en utilisant des séries de Debye[1] (*cf.* chapitre 3).

4.2 Rappels concernant la diffusion multiple par N réseaux

On rappelle (*cf.* chapitre 3) que pour calculer les coefficients de réflexion et de transmission globaux de *N* réseaux, il faut avoir préalablement obtenu les coefficients notés R_j et T_j ($1<j<N$) pour chacun des *N* réseaux pouvant avoir des caractéristiques différentes (rayon, masse volumique, vitesse de phase longitudinale). On peut construire les coefficients de réflexion et de transmission de j réseaux à l'aide d'une relation de récurrence. Elle nécessite la

[1] Zong K., Franklin H. et Lenoir O, *Etude de cristaux phononiques de N périodes d'un bi-réseau de cylindres infinis*, 10ème Congrès Français d'Acoustique, Lyon 12-16 avril 2010, ISBN : 978-2-9521105-7-0

connaissance de $R(j\text{-}1)$ et $T(j\text{-}1)$ qui sont les coefficients de réflexion et de transmission de (j-1) réseaux quand l'onde incidente se propage suivant les x croissants. Elle nécessite également la connaissance de $R_d(j\text{-}1)$ et $T_d(j\text{-}1)$ quand l'onde incidente se propage suivant les x décroissants. Elle doit faire intervenir, R_j et T_j les coefficients d'un $j^{\text{ème}}$ réseau. Entre les (j-1) réseaux et le réseau supplémentaire, existent des réflexions et transmissions multiples. En utilisant un modèle de type Fabry-Pérot ou les séries de Debye, on montre que les coefficients de réflexion et de transmission de j réseaux, $R(j)$ et $T(j)$ s'écrivent :

$$R(j) = R(j\text{-}1) + \frac{R_j T^2 (j\text{-}1) e^{j\varphi_R}}{1\text{-}R_d(j\text{-}1) R_j e^{j\varphi_R}}, \qquad (4.1)$$

$$T(j) = \frac{T(j-1) T_j e^{j\varphi_T}}{1 - R_d(j-1) R_j e^{2j\varphi_T}}. \qquad (4.2)$$

où $\varphi_T = kD/\cos\varphi_0$ et $\varphi_R = 2\varphi_T$. Ces relations sont valables dans les cas où les réseaux sont identiques (R_j=R_1, $\forall j$) et où chaque réseau est lui-même un ensemble de sous-réseaux[1].

4.3 Etude de réseaux à gradients de propriétés

Les réseaux de référence sont constitués de tubes en acier dont les paramètres sont donnés dans les chapitres 1 et 2 ; le rapport des rayons *b/a* est égal à 75/85. Ils sont immergés dans l'eau et remplis d'eau. Le rapport *d/a* est égal à 2,647 et *D/a* vaut 3. Nous nous sommes intéressés à des SP2D à 3 et 10 réseaux linéaires présentant des gradients de propriétés géométriques ou physiques, en particulier des variations du rapport *b/a*, de la masse volumique et de la vitesse de phase des ondes longitudinales[2]. Quand un paramètre varie, tous les autres restent ceux des tubes de référence. Dans chaque cas, les coefficients de transmission ont été tracés et comparés à celui obtenu pour le SP2D de référence. L'onde incidente est envoyée sous incidence normale sur les structures et on considère que seul l'ordre 0 de diffraction est propagatif. Les résultats sont donc donnés dans une gamme de fréquence dont la limite supérieure est donnée par la première fréquence de coupure.

[1] Zong K., Franklin H. et Lenoir O, *Etude de cristaux phononiques de N périodes d'un bi-réseau de cylindres infinis*, 10ème Congrès Français d'Acoustique, Lyon 12-16 avril 2010, ISBN : 978-2-9521105-7-0

[2] K. Zong, O. Lenoir, H. Franklin, Résonances de réseaux 2D de cylindres élastiques à gradients de propriété, 20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon 29 août-2 septembre 2011.

4.3.1 Variation du rapport *b/a*

On présente, Figure 4-1, les coefficients de réflexion d'un réseau linaire de tubes en acier avec *b/a* = 75/85 puis avec *b/a* = 73/85. La flèche verte indique la première fréquence de coupure ; avant cette fréquence, seul l'ordre de diffraction 0 est propagatif et tous les autres ordres de diffraction sont évanescents. On peut observer que les deux courbes présentent chacune quatre résonances. La diminution du rapport *b/a* entraîne des décalages des fréquences de résonance [3]. Quand l'épaisseur des tubes augmente (*b/a* diminue), celles-ci sont décalées vers les hautes fréquences, *cf.* Tableau 4-1.

b/a	(2,1)	(3,1)	(4,1)	$(1,1_f)$
71/85	0,409	1,189	2,257	2,373
72/85	0,370	1,086	2,088	2,363
73/85	0,332	0,984	1,910	2,351
74/85	0,295	0,882	1,728	2,342
75/85	0,260	0,782	1,545	2,336

Tableau 4-1 : positions des résonances du réseau linéaire en fonction de l'épaisseur des tubes

[3] Zong K., Franklin H. et Lenoir O, Caractérisation des résonances d'un réseau 2D de N rangées infinies de tubes présentant un gradient d'épaisseur, Journées Acoustique Physique, Sous-marine et Ultra-Sonore, JAPSUS, Lille, 8-10 juin 2011.

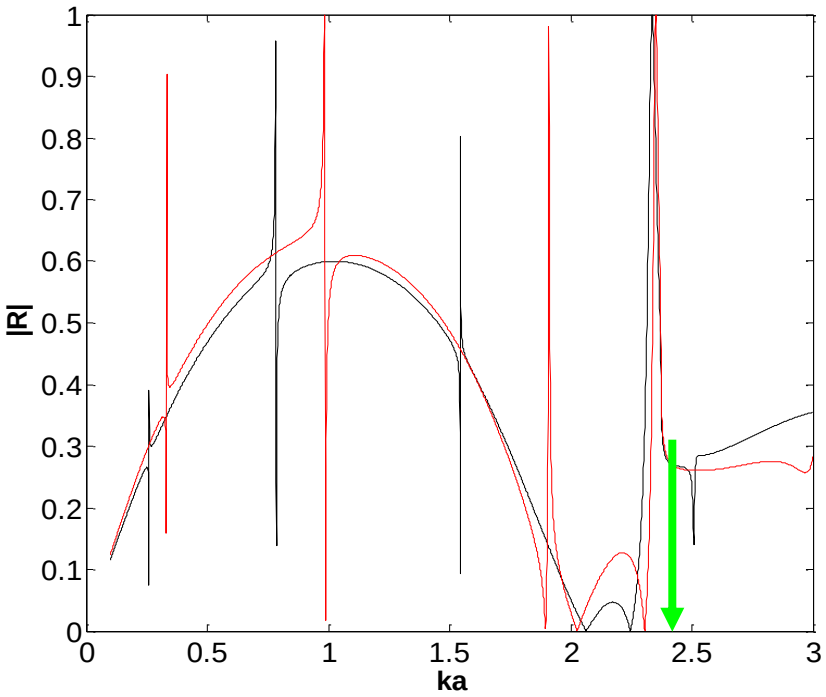


Figure 4-1 : Coefficients de réflexion d'un seul réseau de tubes *b/a* = 75/85 (noir), *b/a* = 73/85 (rouge). Ordre de diffraction 0.

Examinons maintenant, le cas de plusieurs réseaux. Quatre SP2D à gradient d'épaisseur sont étudiés. Les géométries sont présentées ci-dessous, Figure 4-2 :

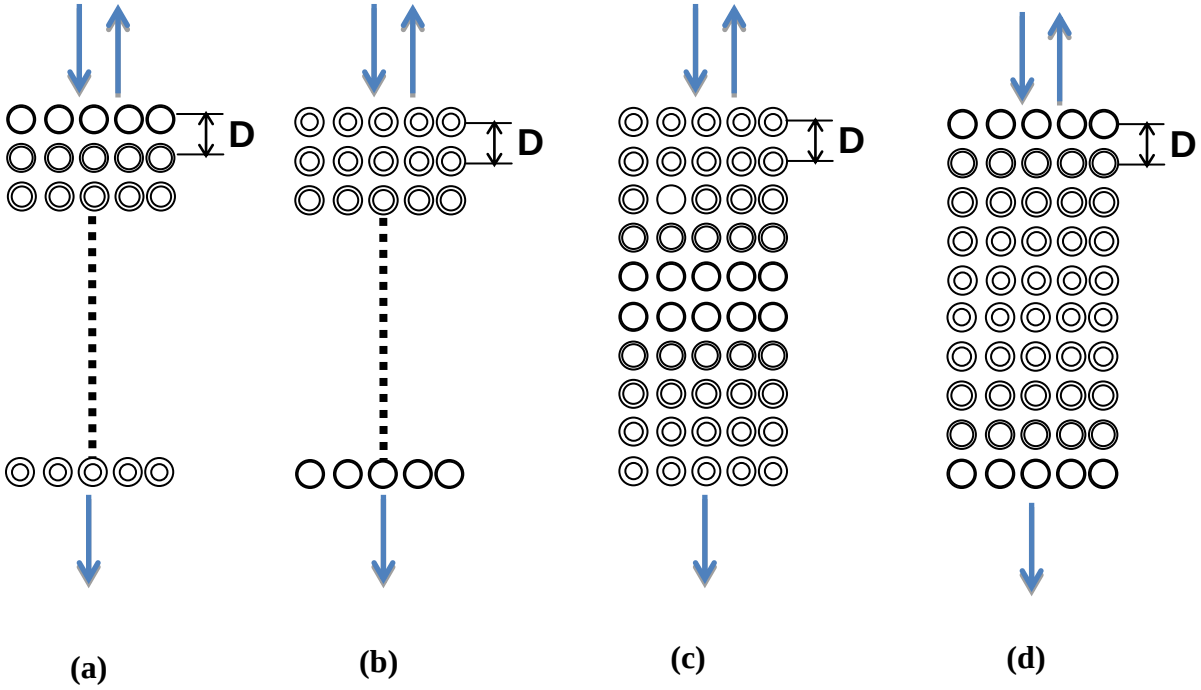


Figure 4-2 : N réseaux linéaires, *b/a* décroissant du haut vers le bas (a) ;
N réseaux linéaires, *b/a* croissant du haut vers le bas (b) ;
10 réseaux linéaires, *b/a* croissant jusqu'à l'axe de symétrie puis décroissant (c) ;
10 réseaux linéaires, *b/a* décroissant jusqu'à l'axe de symétrie puis croissant (d) ;

4.3.2 Variation du rapport b/a pour une SP2D de trois réseaux

On s'intéresse d'abord à une structure du type représenté à la Figure 4-2(a). On prend b/a = 75/85 et N = 3. Le coefficient de transmission tracé en noir, Figure 4-3, présente une bande interdite peu marquée située dans l'intervalle $ka \approx$ 0.8-1,55 et centrée sur ka = 1,1. De part et d'autre de cette bande interdite. On observe des transitions brusques dans la courbe en ka = 0,26, 0,78 et 1,54 attribuables à des résonances de tubes, de la famille l = 1.

Lorsque la SP2D est formée de trois réseaux linéaires distincts contenant des tubes soit de plus en plus épais soit de plus en plus minces, le coefficient de transmission (la courbe est la même selon la face d'insonation), représenté en rouge Figure 4-3, a une allure globalement analogue à celui de 3 réseaux identiques, avec cependant l'apparition de résonances supplémentaires. En effet, chaque réseau linéaire impose ses résonances (de tube) à l'ensemble de la SP2D. On observe trois groupes de trois résonances : les résonances (2,1),

(3,1) et (4,1) dégénérées en trois résonances chacune. Il existe un quatrième groupe trois de résonances très proches dues à la dégénérescence de la résonance (de colonne d'eau) ($1,1_f$).

On constate sur la courbe rouge qu'il y a ouverture de bandes passantes très étroites dues aux dégénérescences par rapport à la courbe noire.

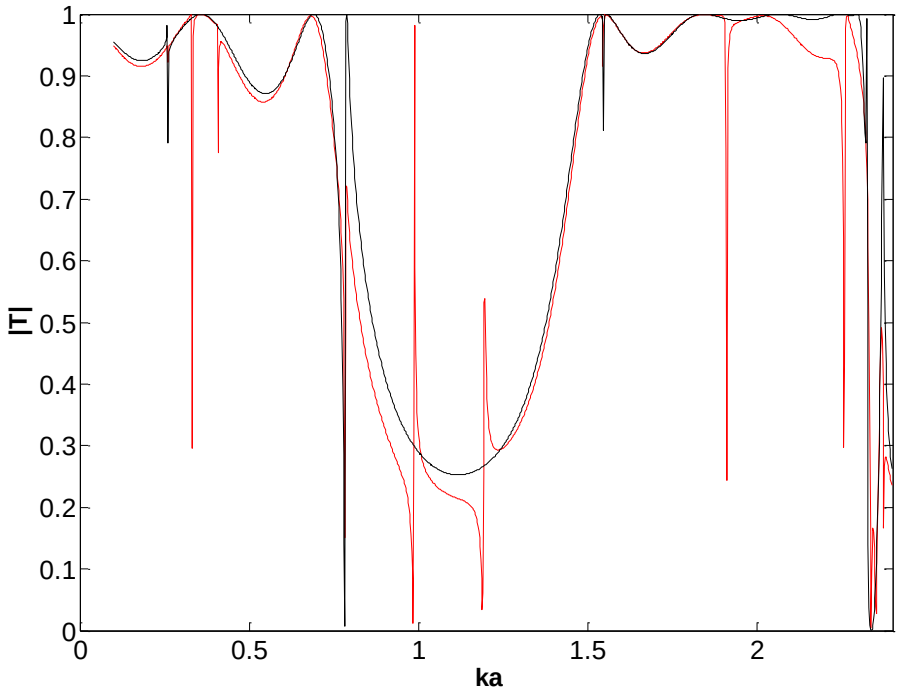


Figure 4-3 : Coefficient de transmission d'une SP2D de 3 réseaux : en noir, *b/a* = 75/85 pour les 3 réseaux, en rouge, *b/a* = 75/85 (1er réseau), 73/85 (2ème réseau) et 71/85 (3ème réseau).

4.3.3 Variation du rapport b/a pour une SP2D de dix réseaux

Pour 10 réseaux, on compare le cas où les tubes de tous les réseaux ont un rapport *b/a* de 75/85 et celui où le rapport *b/a* varie entre 75/85 et 70,5/85 (b varie par pas de 0,5) ; l'exemple traité est celui de la Figure 4-2 (a). La Figure 4-5 présente les coefficients de transmission dans les deux cas. On observe sur les deux courbes une bande interdite bien marquée (contrairement à ce qui était observé sur la Figure 4-3) mais toujours centrée sur 1,1. On observe de même des oscillations, de part et d'autre, dans les bandes passantes. On peut constater que le nombre d'oscillations est lié au nombre de réseaux pris en compte dans la SP2D. Quand le rapport *b/a* varie dans la SP2D, on crée en plus des transitions brusques dans les bandes passantes et la bande interdite. Elles sont groupées par 10 et sont liées à des résonances de tube. Contrairement au cas de 3 réseaux, on n'observe pas nettement à cette échelle de résonances dans la bande interdite car elles sont trop fines. Mais en prenant un pas

de calcul beaucoup plus fin (au prix d'un temps de calcul plus long), il est possible de détecter dix pics très fins d'amplitude unitaire. Khelif *et al.* [4]ont présenté un travail similaire en 2003 en remplaçant un ou plusieurs réseaux linéaires de cylindres en acier par un ou plusieurs réseaux de tubes

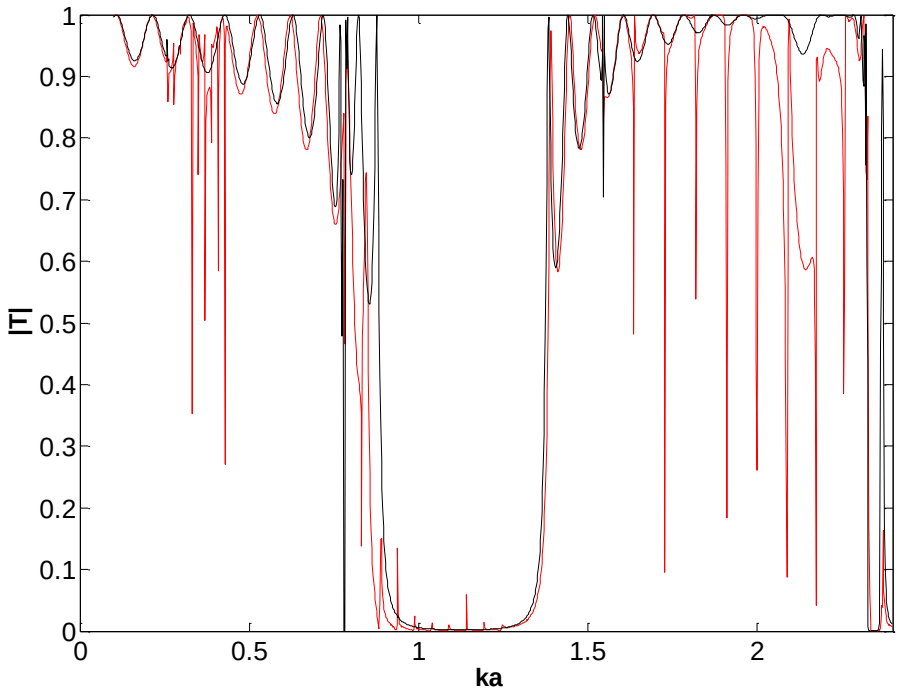


Figure 4-5 : Coefficient de transmission d'une SP2D de 10 réseaux : en noir, *b/a* = 75/85 pour les 10 réseaux, en rouge, *b/a* varie de 70,5/85 (1er réseau) à 75/85 (dernier réseau). *b* varie par pas de 0,5

Ensuite, on passe au cas d'une SP2D telle que celle présentée à la Figure 4-2 (b). C'est-à-dire que les réseaux linéaires respectent une disposition inverse de la SP2D traitée à la section 4.3.3. Le coefficient de transmission de cette structure est comparé celui de la Figure 4-5. On observe, Figure 4-6, une dégénérescence à l'ordre 10 des 3 résonances de tube. Par ailleurs, il y a aussi une bande interdite centrale dans la gamme de fréquence étudiée.

[4] A. Khelif, P. A. Deymier, B. Djafari-Rouhani, J. O. Vasseur, and L. Dobrzynski,Two-dimensional phononic crystal with tunable narrow passband : Application to a waveguide with selective frequency, J. Appl. Phys. 94(3), 1308–1311 (2003).

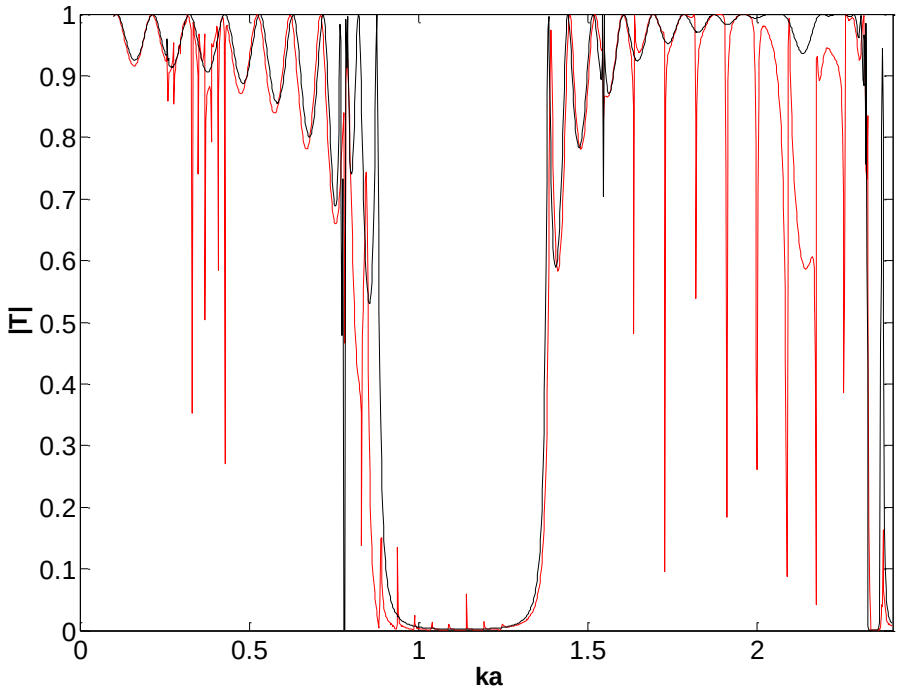


Figure 4-6 : Coefficient de transmission d'une SP2D de 10 réseaux : en noir, *b/a* = 75/85 pour les 10 réseaux, en rouge, *b/a* varie de 75/85 (1er réseau) à 70,5/85 (dernier réseau). *b* varie par pas de 0,5

Les coefficients de transmission des deux SP2D sont comparés, Figure 4-7. Le tracé bleu est obtenu pour une insonation du côté des réseaux de tubes les plus fins. Le tracé rouge pointillé correspond à une insonation du côté des tubes les plus épais. Les deux courbes se superposent parfaitement.

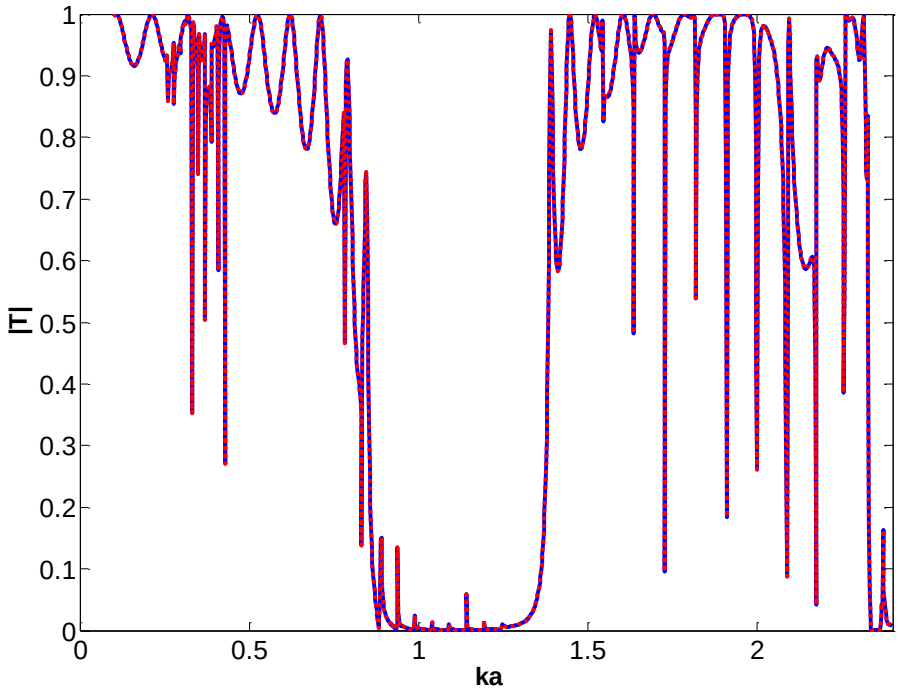


Figure 4-7 : Comparaison des coefficients de transmission de deux SP2D de 10 réseaux.

Maintenant, on étudie les deux dernières structures de cristaux phononiques, Figures 4-2 (c) et (d). On trace le coefficient de transmission d'une SP2D de 10 réseaux de tubes tel que celle de la Figure 4-2 (c). On peut observer, Figure 4-8, une dégénérescence à l'ordre 5 des 3 résonances de tube. On trace ensuite les coefficients de transmission d'une SP2D de 10 réseaux de tubes telle que celle de la Figure 4-2 (d). On remarque, Figure 4-9, un phénomène similaire avec une même dégénérescence à l'ordre 5 des 3 résonances de tube.

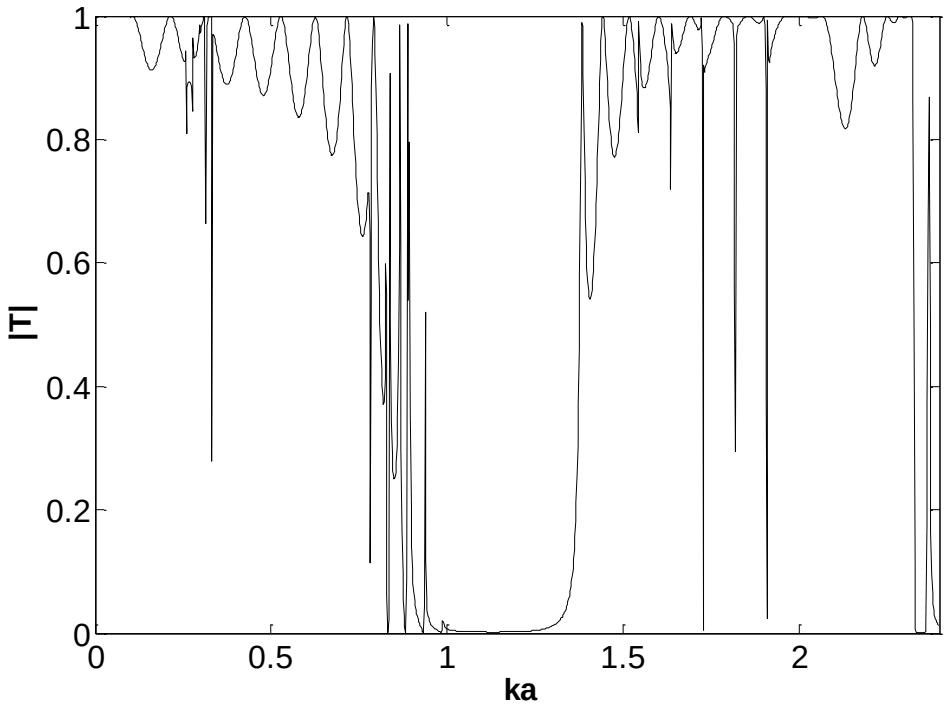


Figure 4-8 : Coefficient de transmission d'une SP2D de 10 réseaux telle que celle de la Figure 4-2 (c)

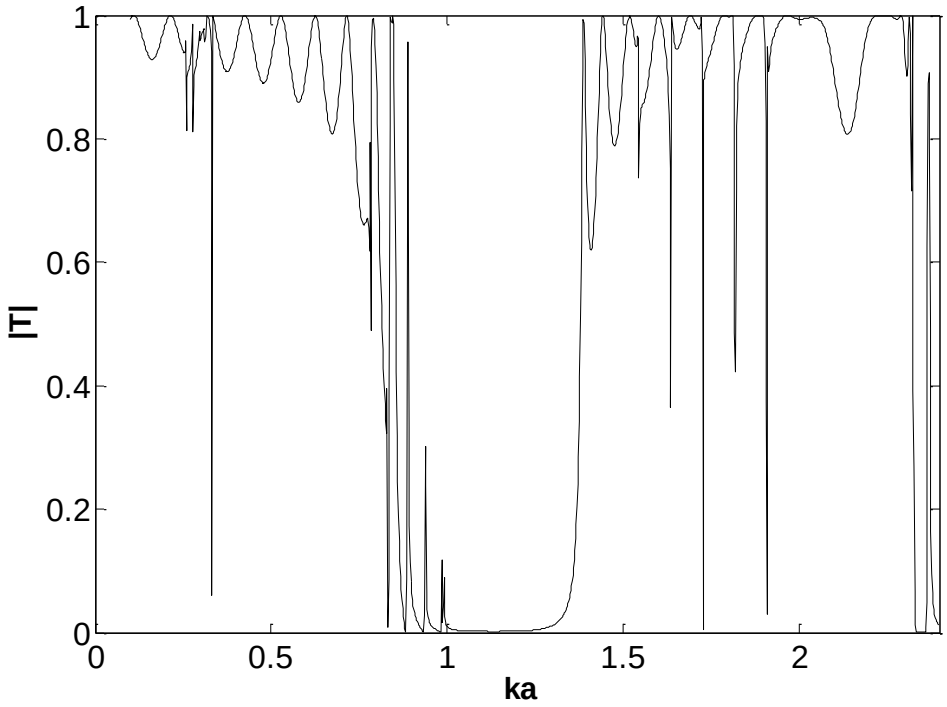


Figure 4-9 : Coefficient de transmission d'une SP2D de 10 réseaux telle que celle de la Figure 4-2 (d)

Les deux courbes de coefficient de transmission sont superposées, Figure 4-10. La courbe rouge correspond à la SP2D de la Figure 4-2 (c) et celle en bleu à la SP2D de la Figure

4-2 (d). On peut constater que les deux courbes sont très semblables, les positions des résonances sont exactement identiques mais les amplitudes des oscillations différentes.

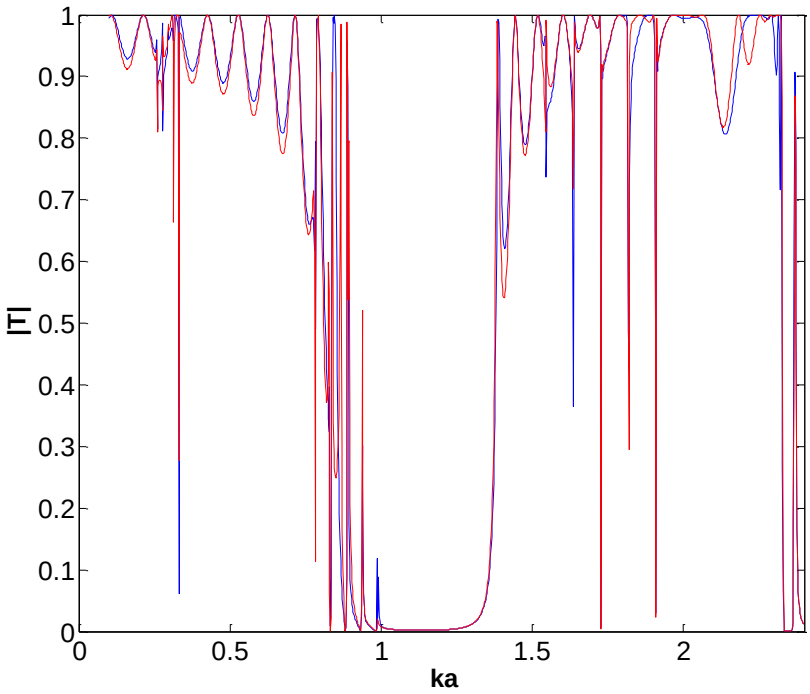


Figure 4-10 : Comparaison des coefficients de transmission de deux SP2D de 10 réseaux.

4.3.4 Variation de la masse volumique

La masse volumique de référence pour un réseau de tube en acier est de 7900 kg/m^3. Le coefficient de transmission pour trois réseaux identiques avec cette valeur de référence a été tracé en rouge continu sur les Figures 4-11 et 4-12, sur tout ou partie de la gamme de fréquence étudiée. On a superposé à ces tracés ceux du coefficient de transmission de 3 réseaux où les masses volumiques varient et valent 7900, 7500 et 7100 kg/m^3, en bleu. Sur la Figure 4-11, il semble y avoir coïncidence quasi parfaite entre les tracés. Un agrandissement au voisinage d'une des fréquences de résonances des tubes (Figure 4-12) montre qu'il y a triplement des résonances dans la diffusion globale, aux fréquences réduites 1,517, 1,531 et 1,545. On constate que la dernière résonance correspond à une résonance du réseau où la masse volumique vaut 7900 kg/m^3.

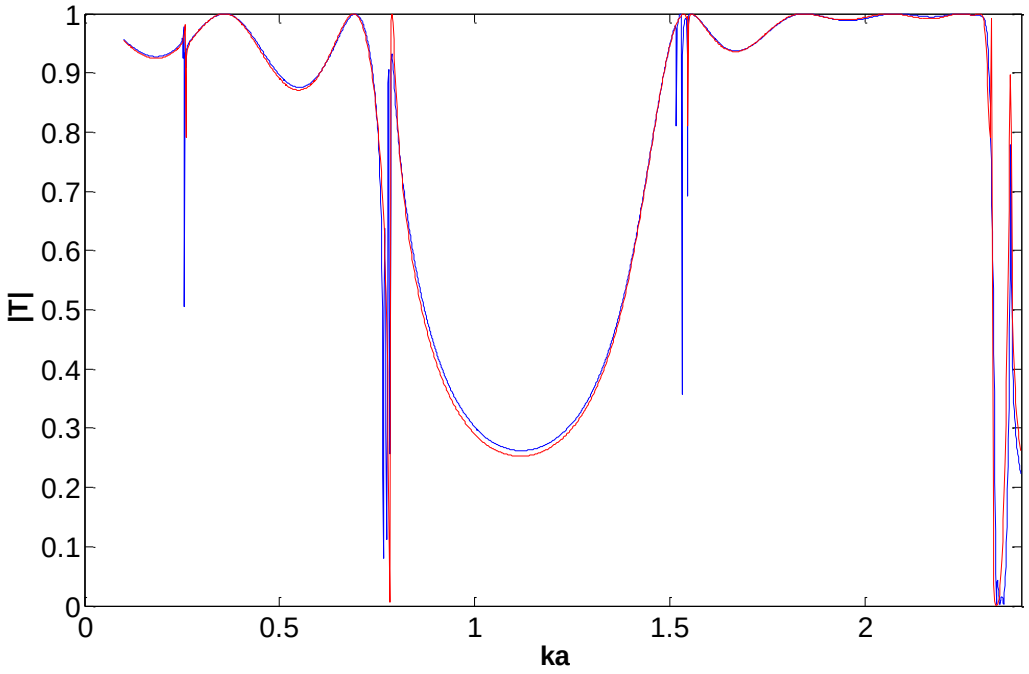


Figure 4-11: Coefficients de transmission d'une SP2D de 3 réseaux identiques dont tous les tubes ont la même masse volumique ρ = 7900kg/m3 (rouge) et d'une SP2D de 3 réseaux linéaires dont les masses volumiques varient de l'un à l'autre ρ = 7900, 7500, 7100kg/m3 (bleu),

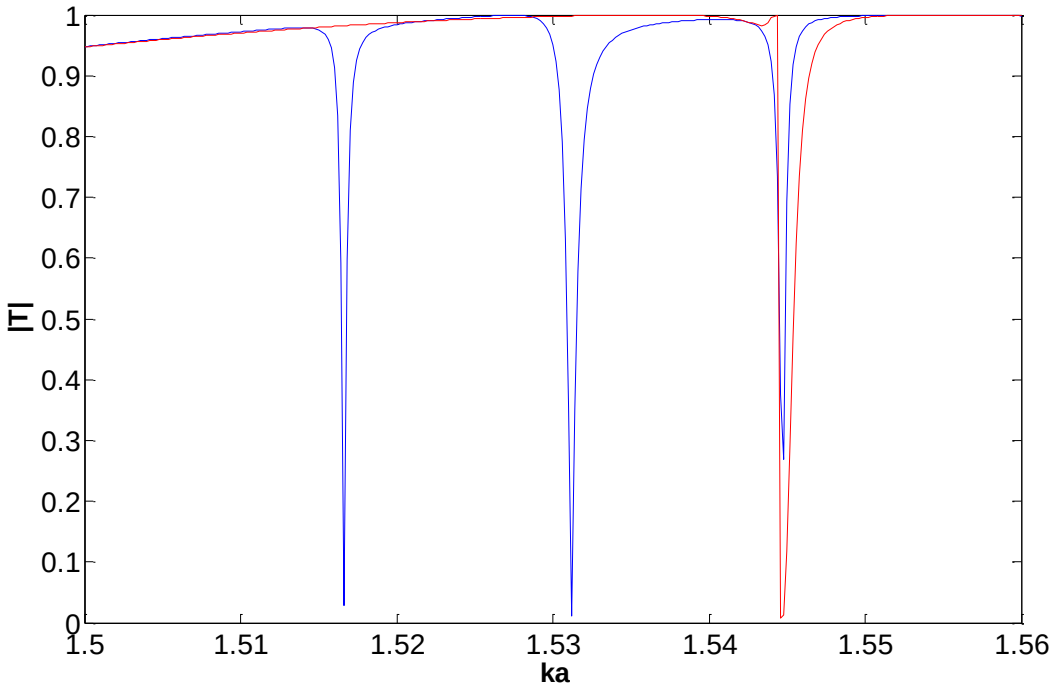


Figure 4-12: Agrandissement de la Figure précédente montrant un triplement des résonances

4.3.5 Variation de la vitesse de l'onde longitudinale

On a étudié une SP2D de trois réseaux dans laquelle les vitesses de phase des ondes longitudinales, c_L valent 5790, 5500 et 5200 m/s respectivement. La Figure 4-13 montre le coefficient de transmission de cette SP2D, tracé en trait rouge pointillé. Il semble qu'il y ait superposition parfaite avec le tracé en trait noir continu du coefficient de transmission des trois réseaux identiques. Un agrandissement sur la Figure 4-14 montre qu'il y a trois minimums très rapprochés, en ka = 1,47, 1,51 et 1,54. Le dernier coïncide avec celui qui est observable sur le tracé de la transmission par les 3 réseaux identiques où c_L vaut 5790 m/s. Le minimum situé en ka = 1,47 est associé à une résonance du réseau où c_L vaut 5200 m/s et celui à 1,51 est associé à une résonance du réseau où c_L vaut 5500 m/s.

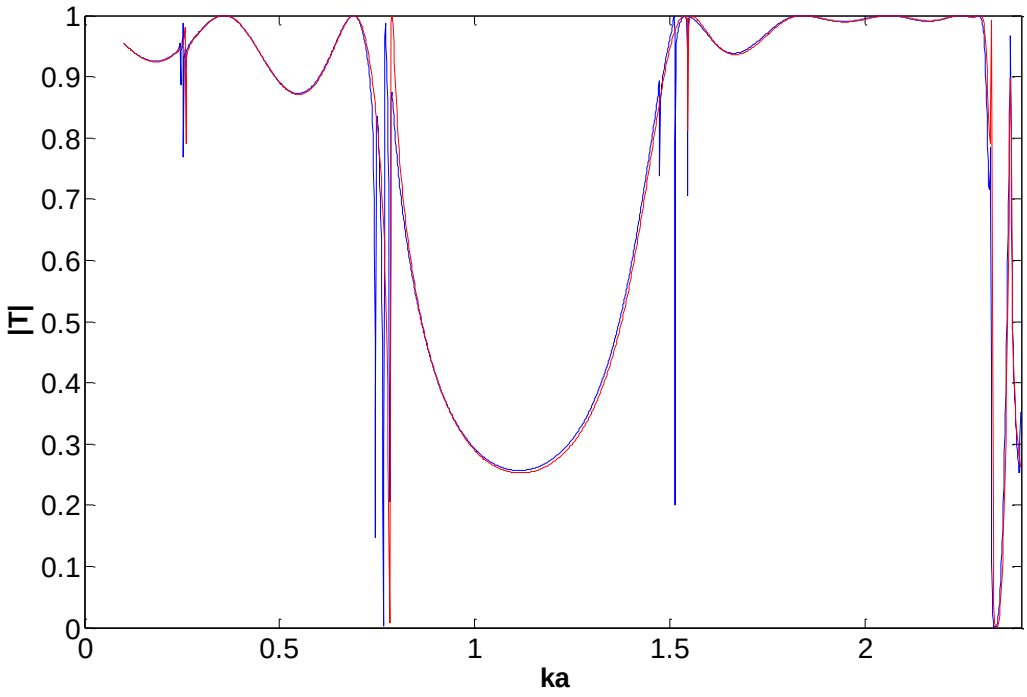


Figure 4-13: Coefficients de transmission d'une SP2D de 3 réseaux identiques dont tous les tubes ont la même vitesse longitudinale cL = 5790 m/s (rouge), et d'une SP2D de 3 réseaux linéaires dont les vitesses varient de l'un à l'autre cL = 5790, 5500, 5200 m/s (bleu)

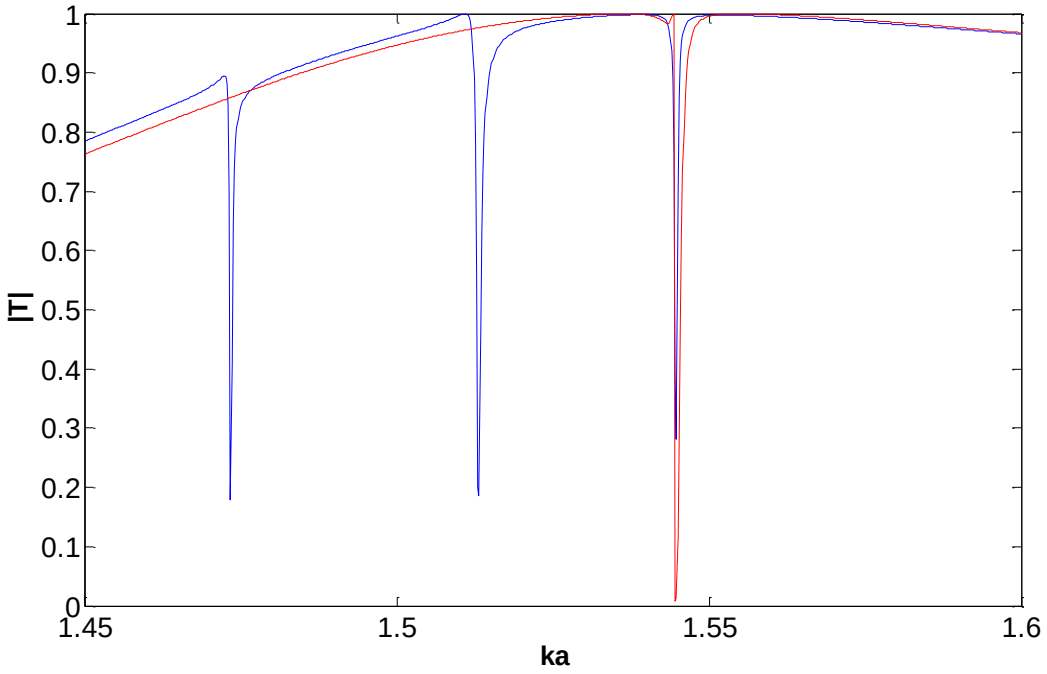


Figure 4-14: Agrandissement de la Figure précédente montrant un triplement des résonances.

4.4 Conclusion

Les études menées sur des réseaux présentant des gradients de propriétés, aussi bien géométriques qu'élastiques, montrent que ceux-ci induisent des démultiplications des résonances par rapport au cas où tous les réseaux sont identiques. Les résonances liées aux variations d'épaisseur des tubes se retrouvent non seulement dans la bande interdite mais également de part et d'autre de cette bande. Les résonances liées aux variations de la masse volumique se retrouvent autour des résonances de tubes qui sont elles-mêmes hors de la bande interdite. Les résonances liées aux variations de la vitesse des ondes longitudinales sont quant à elles localisées autour de la bande interdite.

Références

1. Zong K., Franklin H. et Lenoir O, Etude de cristaux phononiques de N périodes d'un bi-réseau de cylindres infinis, 10ème Congrès Français d'Acoustique, Lyon 12-16 avril 2010, ISBN : 978-2-9521105-7-0
2. Zong K., Franklin H. et Lenoir O, Caractérisation des résonances d'un réseau 2D de N rangées infinies de tubes présentant un gradient d'épaisseur, Journées Acoustique Physique, Sous-marine et Ultra-Sonore, JAPSUS, Lille, 8-10 juin 2011.
3. K. Zong, O. Lenoir, H. Franklin, Résonances de réseaux 2D de cylindres élastiques à gradients de propriété, 20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon 29 août-2 septembre 2011.
4. Khelif, P. A. Deymier, B. Djafari-Rouhani, J. O. Vasseur, and L. Dobrzynski,Two-dimensional phononic crystal with tunable narrow passband : Application to a waveguide with selective frequency, J. Appl. Phys. 94(3), 1308–1311 (2003).

CHAPITRE 5 :
ELARGISSEMENT DE BANDES INTERDITES

5.1 Introduction

Dans le chapitre 4, on a étudié des SP2D pour lesquelles les rayons internes des tubes étaient variables et les distances entre plans réticulaires (réseaux linéaires) égales. Tous les tubes de la structure étaient constitués du même matériau, acier ou polyéthylène.

On examine maintenant l'effet de la variation de la distance *D* entre les réseaux linéaires sur la position et la largeur des bandes interdites. Dans le paragraphe 5.2, on examine le cas de réseaux de tubes en acier. Dans le paragraphe 5.3, on étudie le cas où les réseaux linéaires sont remplacés par des bi-réseaux composés d'un réseau de tubes en acier et d'un autre de tubes en polyéthylène, l'association de ces deux matériaux étant dû à leurs comportements acoustiques très différents. L'écart entre les deux réseaux constitutifs de chaque biréseau est identique. L'influence d'une variation de la distance *d* entre chaque tube d'un même réseau linéaire est également étudiée. Tous les tubes ont un rapport b/a = 75/85 constant (rayon externe a =0,2 cm).

5.2 Distance variable entre réseaux linéaires simples

Considérons d'abord un réseau linéaire dont les tubes (en acier) sont séparés par une distance *d* (distance entre plus proche voisins, de centre à centre). On veut montrer ici les propriétés de transmittivité d'un tel réseau découlant de la variation du rapport *d/a*. On examine donc successivement trois valeurs du rapport *d/a*.

L'onde plane incidente est envoyée sous incidence normale. Les résultats sont donnés dans un intervalle de fréquence dont la borne supérieure est la première fréquence de coupure. On montre, Figure 5-1, les coefficients de transmission obtenus. Les tracés bleu, rouge et vert correspondent respectivement à un réseau de tubes avec *d/a* = 2,3, *d/a* = 2,647 et *d/a* = 3. Les flèches indiquent les positions des premières fréquences de coupure : 2.732 (*d/a* = 2.3), 2.374 (*d/a* = 2,647) et 2.094 (*d/a* = 3) (*cf.* Eq. (2.60)). Les positions des trois premières transitions brusques qui sont des manifestations des résonances des tubes ne sont que très légèrement affectées par la variation de la distance entre les tubes

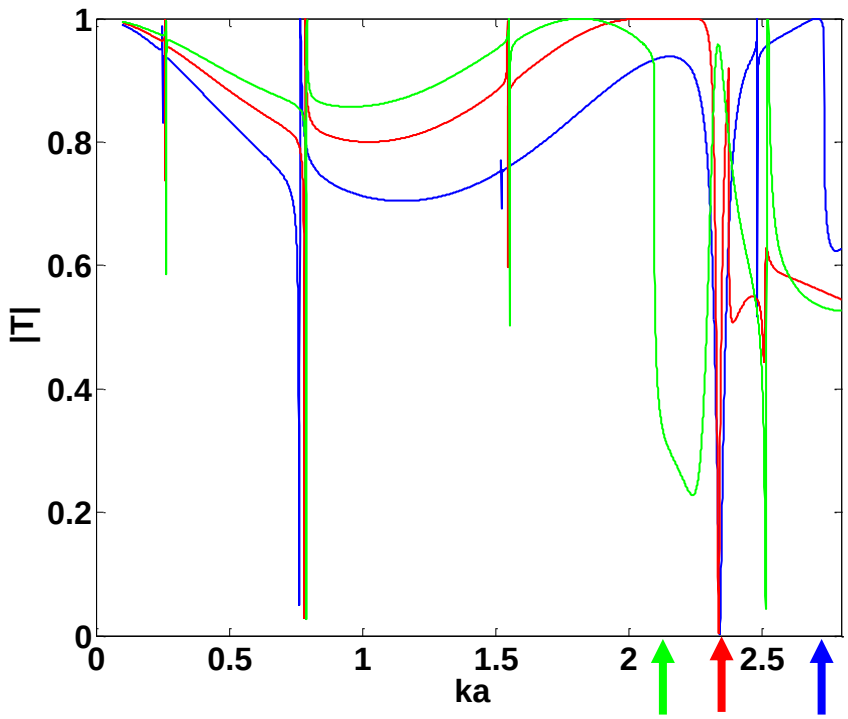


Figure 5-1 : Coefficients de transmission d'un réseau linéaire de tubes
d/a = 2.3 (bleu), d/a = 2.647 (rouge), d/a = 3 (vert). Ordre de diffraction 0.

5.2.1 Géométrie du problème

La géométrie de la SP2D que nous allons étudier est donnée ci-dessous, Figure 5-2. Les réseaux linéaires au sein de la SP2D sont irrégulièrement espacés. On examine le cas simple où la distance de séparation *D* varie linéairement (en croissant ou en décroissant) pour un écart entre tubes *d* constant. Dans la mesure où cette variation est assez faible, on qualifie une telle structure de SP2D à gradient de distance. Bien entendu, la situation de référence demeurera celle où la distance *D* est constante dans toute la SP2D.

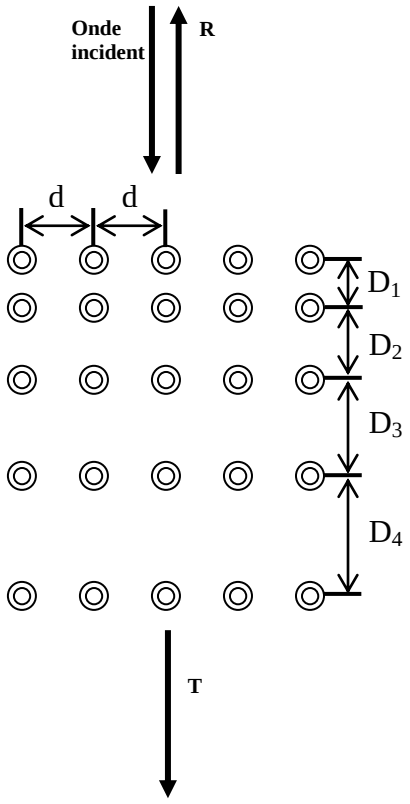


Figure 5-2 : SP2D à gradient de distance

5.2.2 Résultats des expérimentations numériques

(i) Cas d/a = 2,647

Les coefficients de transmission pour 10, 30 et 100 réseaux avec espacement constant D/a = 3 sont donnés, Figure 5-3. On y retrouve toutes les informations présentées dans les chapitres précédents : une bande interdite centrale, des oscillations apériodiques de part et d'autre de celle-ci et des transitions brusques liées à des résonances de tubes. Par ailleurs, la

comparaison des trois courbes montre qu'il n'y a pratiquement pas de variation de la largeur de la bande interdite centrale. Plus le nombre de réseaux est important, plus les passages du module de T de 1 à 0 puis de 0 à 1 en bords de bande interdite sont marquées. Le nombre d'oscillations de part et d'autre de la bande interdite augmente aussi avec le nombre de réseaux présents dans la SP2D.

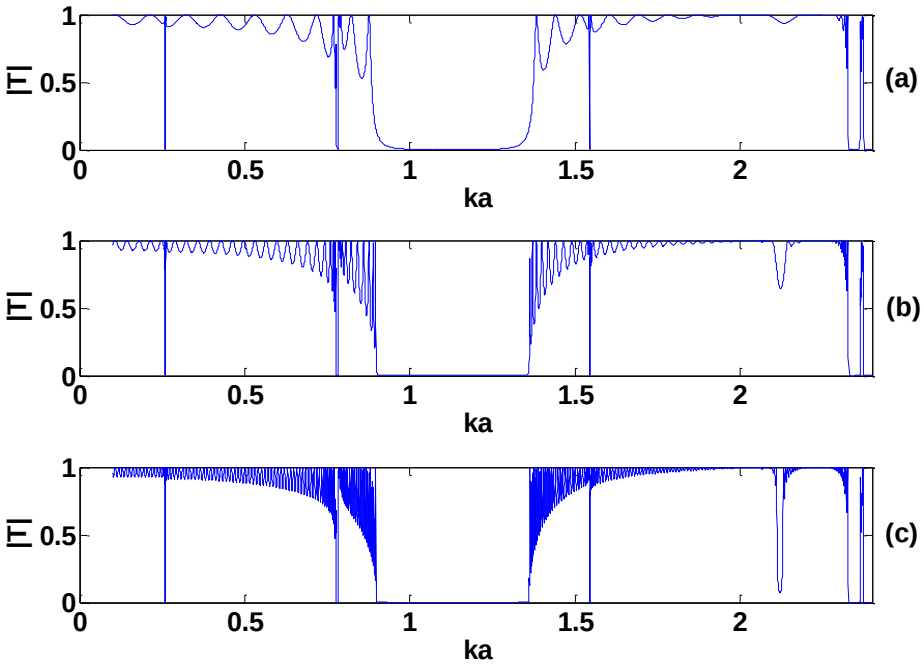


Figure 5-3 : Coefficients de transmission d'une SP2D de N réseaux linéaires régulièrement espacés N = 10 (a), N = 30 (b), N = 100 (c). Les rapports des d/a = 2,647 et D/a = 3.

On introduit maintenant un espacement irrégulier entre réseaux linéaires, la distance D_M entre deux réseaux consécutifs, le M ième et le (M+1) ième, étant donnée par la relation suivante :

$$D_M / a = (M-1) \times r + D_{initial} / a , \qquad (5.1)$$

où M est l'ordre des intervalles. Ici, $D_{initial}/a$ est la valeur de l'intervalle de référence qui est égal à 3 (ou 6) et r un paramètre sans dimension égal à 0,1 (ou 0,05 ou encore 0,2). Quantitativement, pour un rayon extérieur a de chaque tube, la largeur totale de la SP2D avec N réseaux est calculée par :

$$D_{total} = \left[D_1 \times M + \frac{M(M-1) \times r}{2} \right] \times a . \qquad (5.2)$$

Ainsi, avec des tubes de rayon a= 0,2 cm, la SP2D a une largeur de 6,12 cm pour 10 réseaux linéaires, de 25,52 cm pour 30 réseaux et de 156,42 cm pour 100 réseaux. Les résultats sont présentés dans l'intervalle $ka \simeq$ 0,1-2,374, ce qui équivaut au domaine en fréquence allant de 11,7 kHz à 277,7 kHz. La Figure 5-4 montre les coefficients de transmission pour une SP2D de 10, 30 et 100 réseaux linéaires correspondant à ces nouvelles données.

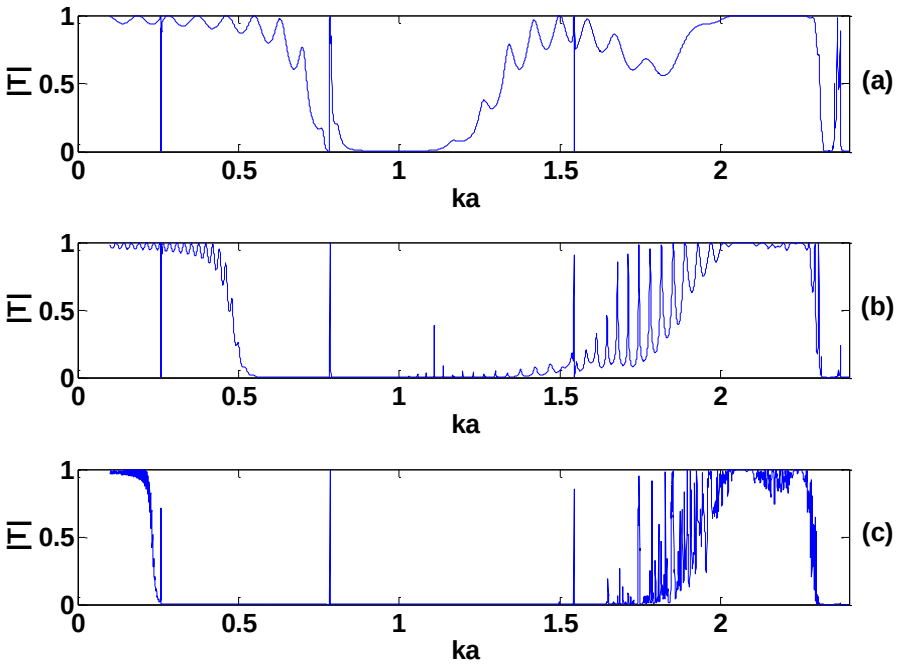


Figure 5-4 : Coefficients de transmission d'une SP2D de N réseaux linéaires irrégulièrement espacés N = 10 (a), N = 30 (b), N = 100 (c). d/a = 2,647 et $D_M/a = (M-1)\times 0,1+3$.

On peut observer avec cette nouvelle SP2D que la bande interdite centrale devient de plus en plus large et marquée quand on augmente le nombre de réseaux. Elle est bornée à basse fréquence par la fréquence de la résonance (2,1) et à haute fréquence par la fréquence de la résonance (4,1) pour 100 réseaux linéaires de tubes. Les nombreuses oscillations étroites se situant après la résonance (4,1) ne sont pas des résonances ; elles vont disparaître avec un plus grand nombre de réseaux linéaires. Ce faisant, on élargit encore la bande interdite jusqu'à la limite représentée par la première fréquence de coupure. Ceci représente une méthode différente de celle présentée par d'autres auteurs[1]. On peut souligner que dans la bande

[1] Yun Lai and Zhao-Qing Zhang, Large band gaps in elastic phononic crystals with air inclusion, Appl. Phys. Lett. 83 (19) 3900-3903 (2003)

interdite, le seul moyen restant pour transmettre des ondes acoustiques est d'accorder la fréquence de l'onde incidente sur les fréquences des résonances (2,1), (3,1) ou (4,1).

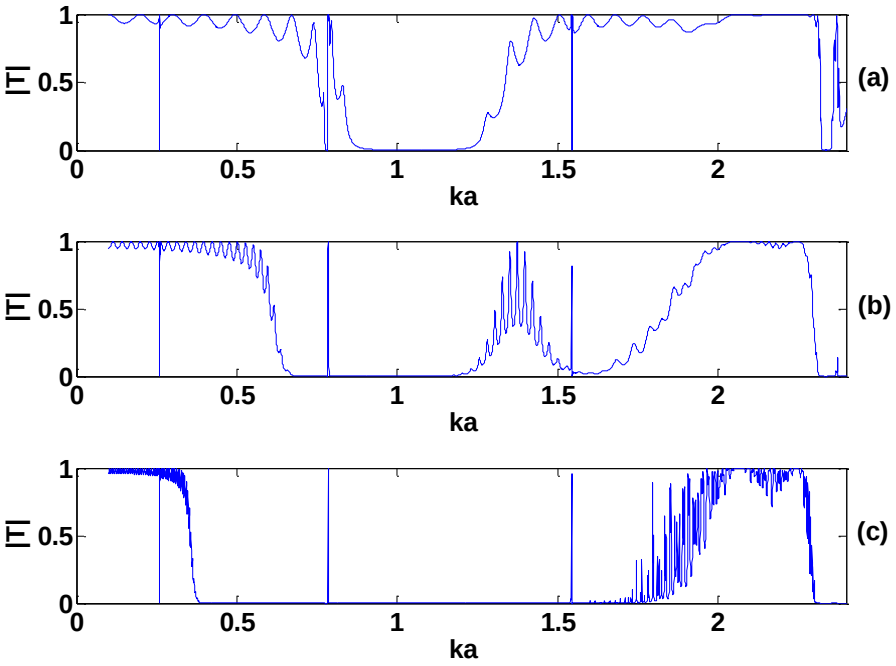


Figure 5-5 : Coefficients de transmission d'une SP2D de N réseaux linéaires irrégulièrement espacés N = 10 (a), N = 30 (b), N = 100 (c). d/a = 2,647 et D_M/a= (M-1)×0,05+3.

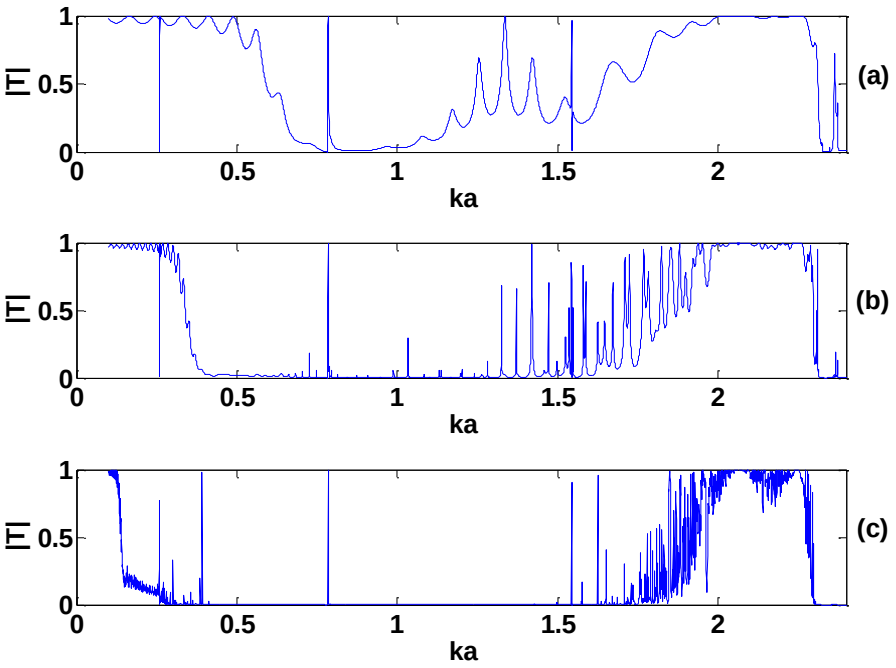


Figure 5-6 : Coefficients de transmission d'une SP2D de N réseaux linéaires irrégulièrement espacés N = 10 (a), N = 30 (b), N = 100 (c). d/a = 2,647 et D_M/a= (M-1)×0,2+3

L'influence du paramètre *r* sur la bande interdite de la SP2D est présentée, Figure 5-5 pour *r* = 0,05 et Figure 5-6 pour *r* = 0,2. On peut constater un élargissement de la bande interdite du côté des basses fréquences quand la valeur de *r* augmente, alors que le côté droit reste identique. Cependant, les oscillations des deux cotés de cette bande deviennent plus nombreuses.

(ii) Cas d/a = 2,3

On examine maintenant l'effet d'un autre espacement *d* sur les bandes interdites produites par le SP2D. On trace d'abord les coefficients de transmissions avec D/a = 3, Figure 5-7. Les courbes s'étalent de *ka* = 0,1 jusqu'à *ka* = 2,73 qui est la première fréquence de coupure lorsque *d/a* = 2,3. La bande interdite centrale est plus large que celle de la Figure 5-3.

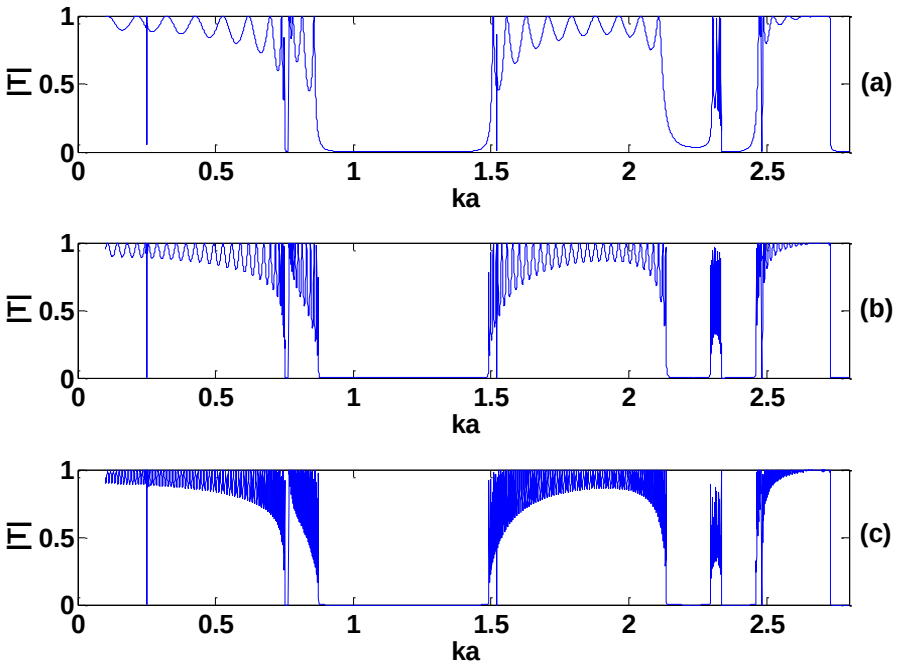


Figure 5-7 : Coefficients de transmission d'une SP2D de N réseaux linéaires régulièrement espacés N = 10 (a), N = 30 (b), N = 100 (c). d/a = 2,3 et D/a = 3.

La superposition des coefficients de transmission pour 30 réseaux avec les deux valeurs de *d/a* (2,3 et 2,647) montre, Figure 5-8, que la bande interdite centrale du cas *d/a* = 2,647 est incluse dans celle du cas *d/a* = 2,3. De plus, les amplitudes des oscillations des deux côtés de la bande interdite sont plus importantes pour le cas *d/a* = 2,3. Ainsi l'écartement entre les tubes au sein des réseaux linéaires a un effet non négligeable sur la largeur des bandes.

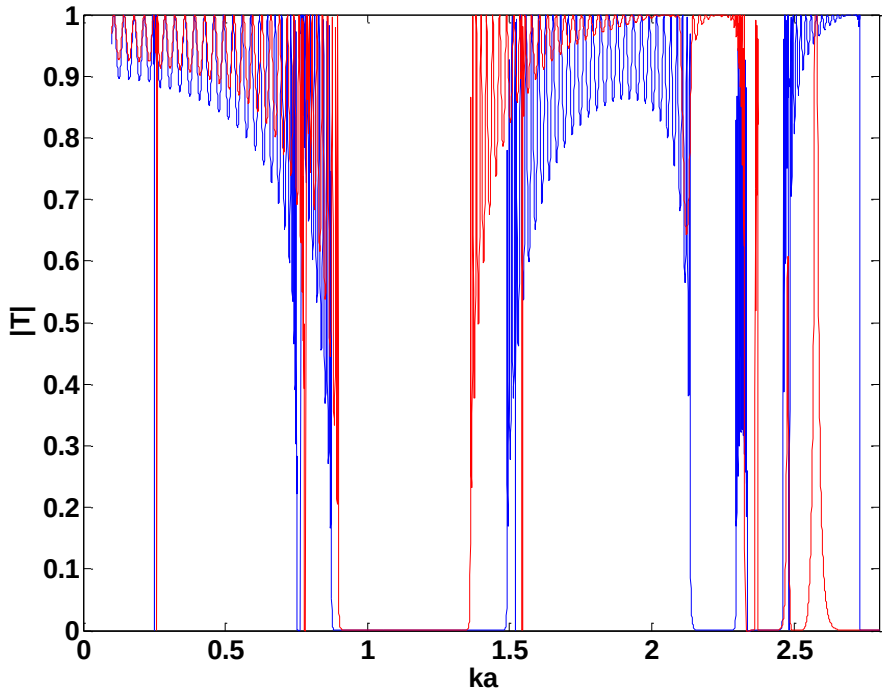


Figure 5-8 : Coefficients de transmission d'une SP2D de 30 réseaux linéaires régulièrement espacés avec D/a = 3, d/a = 2,3 (bleu), d/a = 2,647 (rouge)

Pour d/a = 2,3, On fait varier la distance D entre réseaux linéaires selon la relation (5.1), avec $D_{initial}/a$ = 3 et r = 0,1. Les coefficients de transmission, Figure 5-9, montrent une bande interdite centrale plus large à nombre de réseaux identique que dans le cas d/a = 2,647 (Figure 6-4). Pour la SP2D avec d/a = 2,3, la bande interdite pour 100 réseaux s'étend à haute fréquence jusqu'à la valeur de fréquence réduite 2,5, alors qu'elle ne s'étend que jusqu'à 1,6 pour d/a = 2.647 : plus d/a diminue, plus la bande interdite est large. Une superposition des coefficients de transmission pour 100 réseaux (Figure 5-4 (c) et Figure 5-9 (c)) est présentée, Figure 5-10 pour mettre en évidence cet élargissement de la bande interdite. On remarque que le changement du rapport d/a n'a aucun effet sur le bord de la bande interdite situé à basse fréquence.

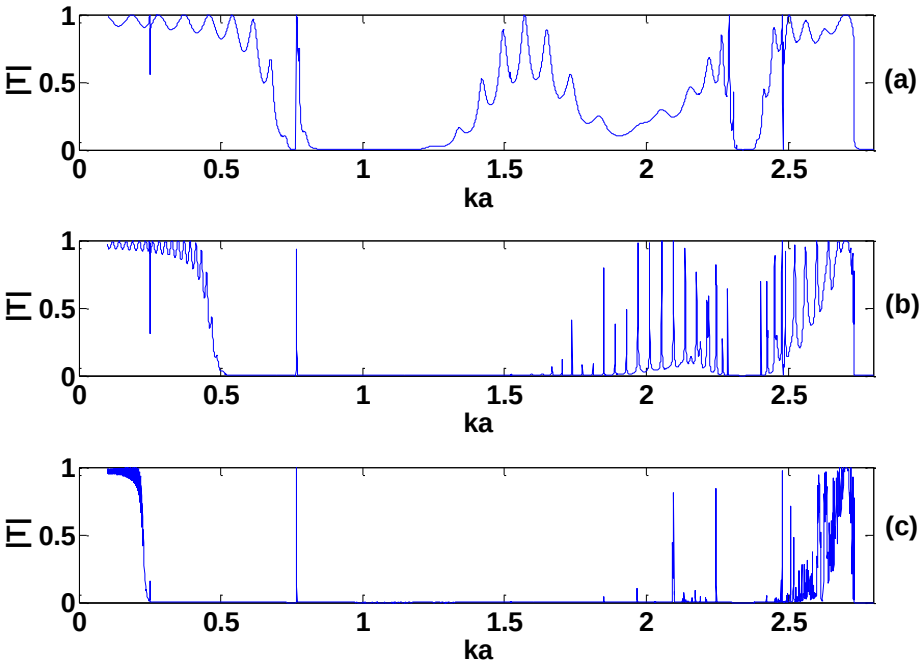


Figure 5-9 : Coefficients de transmission d'une SP2D de N réseaux linéaires irrégulièrement espacés N = 10 (a), N = 30 (b), N = 100 (c). d/a = 2,3 et D_M/a= (M-1)×0,1+3.

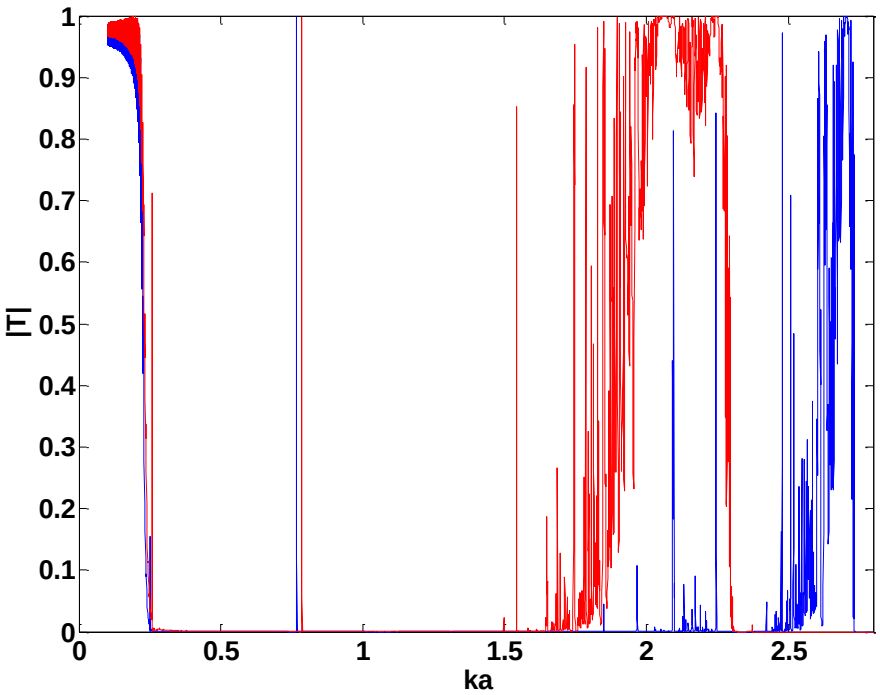


Figure 5-10 : Coefficients de transmission d'une SP2D de 100 réseaux linéaires irrégulièrement espacés avec D_M/a= (M-1)×0,1+3, d/a = 2,3 (bleu), d/a = 2,647 (rouge)

La Figure 5-11 présente les coefficients de transmission pour une SP2D de 10, 30 et 100 réseaux lorsque *r* = 0,05 et la Figure 5-12 les mêmes coefficients mais avec *r* = 0,2. On observe des phénomènes similaires à ceux obtenus avec la SP2D où l'on avait d/a = 2,647. Toutefois, dans ce dernier type de SP2D, les bandes interdites obtenues sont beaucoup plus larges. On dispose donc d'un moyen simple de créer des barrières acoustiques efficaces ou des filtres favorisant uniquement le passage des ondes aux fréquences de résonance des tubes.

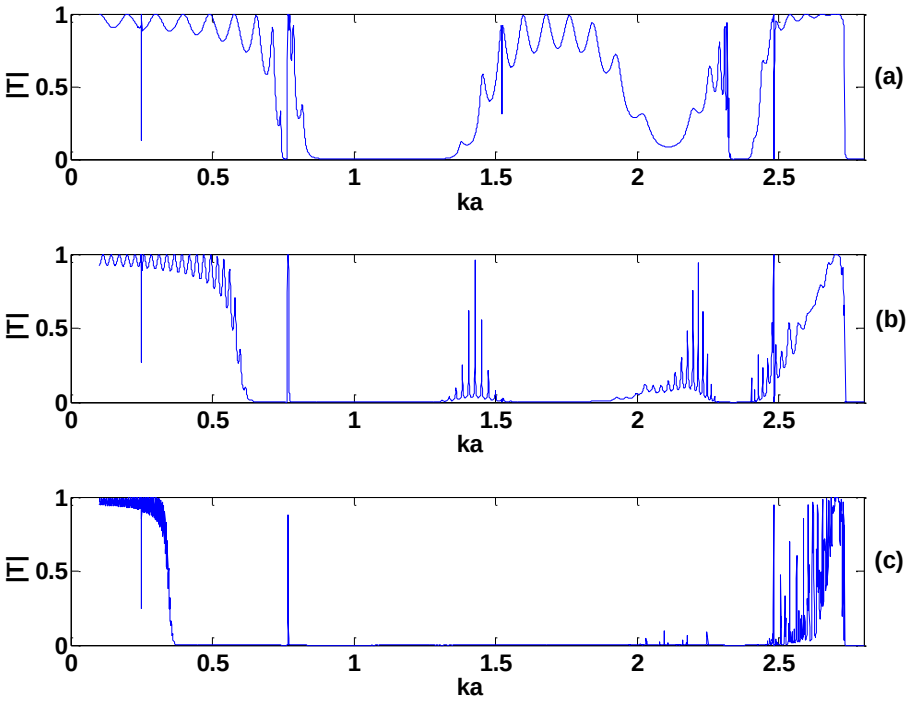


Figure 5-11 : Coefficients de transmission d'une SP2D de N réseaux linéaires irrégulièrement espacés N = 10 (a), N = 30 (b), N = 100 (c). d/a = 2,3 et D_M/a= (M-1)×0,05+3.

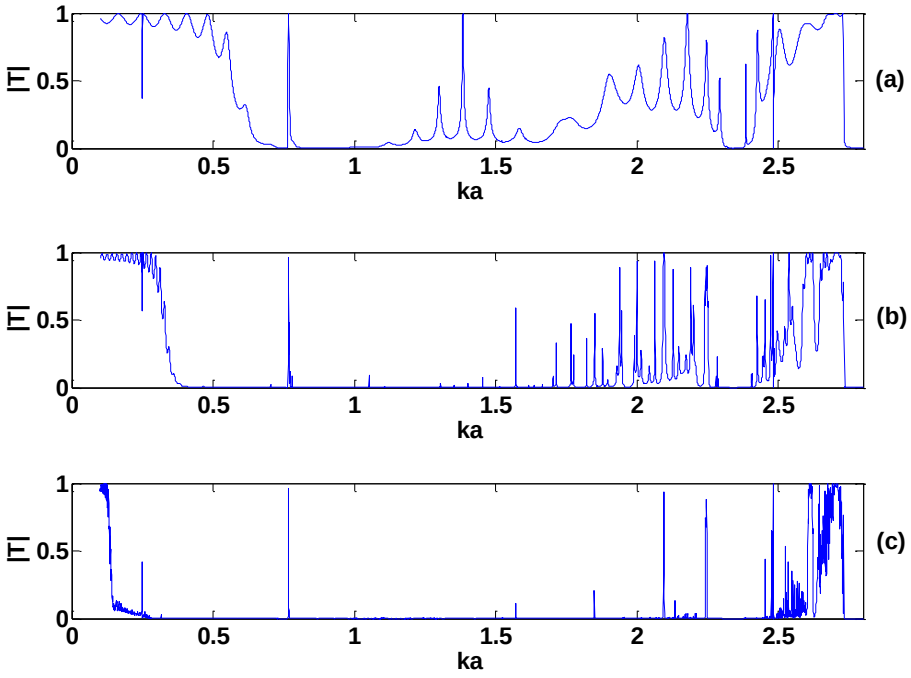


Figure 5-12 : Coefficients de transmission d'une SP2D de N réseaux linéaires irrégulièrement espacés N = 10 (a), N = 30 (b), N = 100 (c). d/a = 2,3 et D_M/a= (M-1)×0,2+3.

5.3 Distance variable entre biréseaux

Dans l'étude précédente, on a montré comment la modification de certains paramètres agissait sur la bande interdite principale de la SP2D. Cependant, en bordure de bande interdite, par exemple pour 100 réseaux linéaires, et à haute fréquence, nous n'avons pas réussi à faire disparaître les nombreuses oscillations présentes dans la transmission. On examine ici la façon d'y remédier. La solution proposée est de considérer à la place des réseaux linéaires de tubes en acier, une association de deux réseaux linéaires, l'un en acier, l'autre en polyéthylène. Par commodité, nous les appelons biréseaux. Un tel choix revient à ajouter un réseau de tubes de polyéthylène entre deux réseaux de tubes en acier dans la SP2D.

5.3.1 Géométrie du problème

La géométrie est présentée Figure 5-13. Les anneaux noirs et rouges schématisent des tubes de matériau différent. La distance inter-tubes noirs est notée d_1 et celle entre les tubes

rouges d_2. Pour le bi-réseau de référence, la distance entre le réseau de tubes noirs et celui de tubes rouges est notée D_0. La distance inter biréseau est notée D_M (1<*M*<*N*) et obéit à la relation (5.1). La distance entre les deux premiers biréseaux est telle que $D_1/a = D_{initial}/a = 3$.

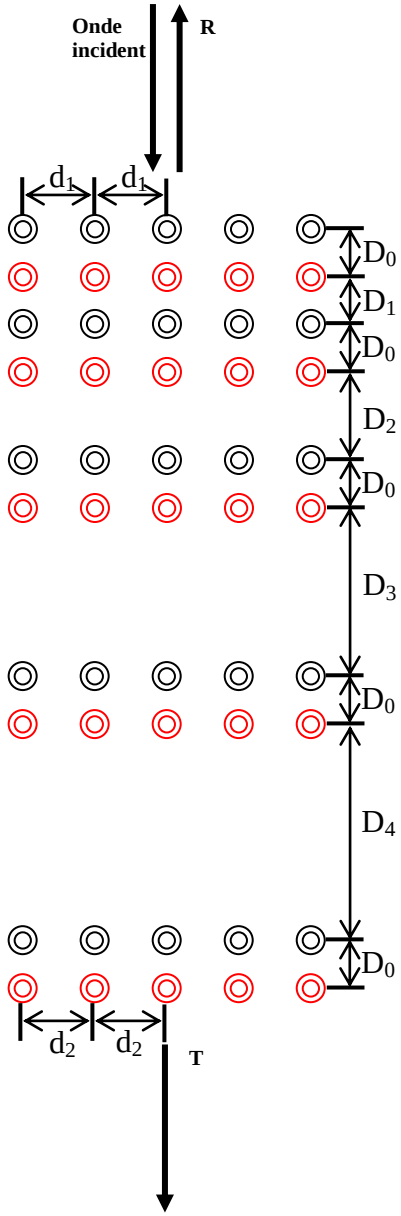


Figure 5-13 : SP2D à gradient de distance entre 2 biréseaux

5.3.2 Résultats des recherches

(i) Cas $d_1/a = d_2/a = 2,647$

On rappelle d'abord quelques propriétés des coefficients de réflexion et de transmission de *N* biréseaux présentés dans le chapitre 3. Ces coefficients apparaissent comme

la superposition de ceux de *N* réseaux de tubes des deux matériaux choisis, quand tous les paramètres géométriques sont constants. On trace les coefficients de transmission des réseaux en acier (Figure 5-14) et en polyéthylène (Figure 5-15) avec *d/a* = 2,647. On remarque que le comportement des coefficients de transmission de la SP2D en polyéthylène est radicalement différent de celui de la SP2D en acier. Pour 100 réseaux par exemple, là où l'on observe une bande interdite très large pour l'acier, on observe plutôt une bande passante (coefficient de transmission très proche de l'unité). Inversement, dans l'intervalle de fréquence où la SP2D en polyéthylène admet une bande interdite, il n'en existe pas pour la SP2D en acier.

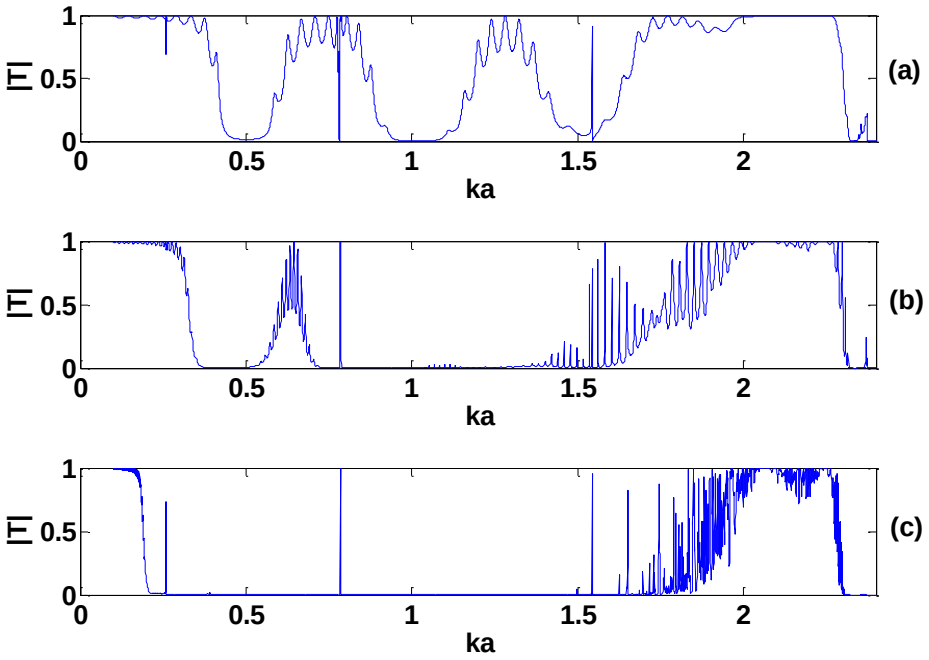


Figure 5-14 : Coefficients de transmission d'une SP2D de N réseaux linéaires (en acier) irrégulièrement espacés. N = 10 (a), N = 30 (b), N = 100 (c). d/a = 2,647 et D_M/a= (M-1)×0,1+6.

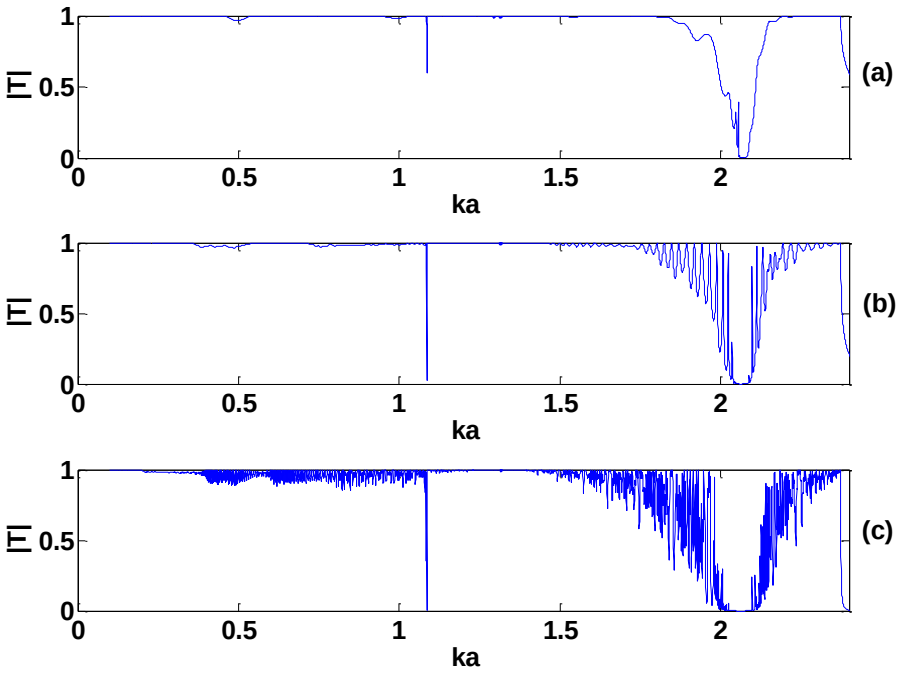


Figure 5-15 : Coefficients de transmission d'une SP2D de N réseaux linéaires (en polyéthylène) irrégulièrement espacés. N = 10 (a), N = 30 (b), N = 100 (c). d/a = 2,647 et D_M/a= (M-1)×0,1+6.

On présente ensuite les coefficients de transmission de la nouvelle structure de biréseaux, Figure 5-16, en prenant $d_1/a = d_2/a$ = 2,647 et en considérant la formule (5.1) avec r = 0,1 et $D_{initial}/a$ = 3. On constate en particulier que pour N=10, 30 ou 100 biréseaux les bandes interdites présentes dans les Figures 5-14(c) et 5-15 (c) se retrouvent intégralement dans la Figure 5-16 (c) donnant le coefficient de transmission de la SP2D constituée des bi-réseaux.

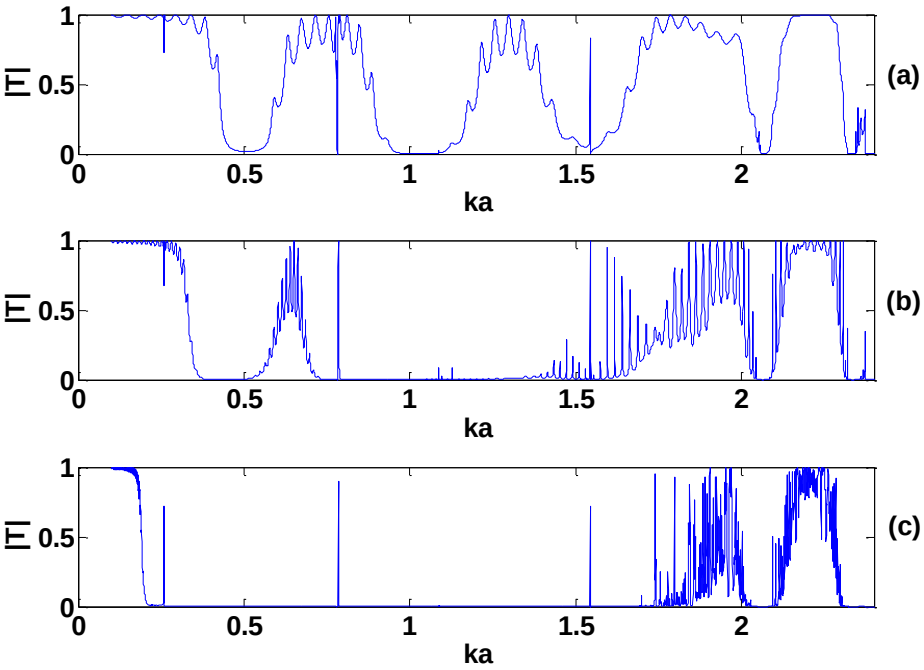


Figure 5-16 : Coefficients de transmission d'une SP2D de N biréseaux linéaires (en acier/polyéthylène) irrégulièrement espacés. N = 10 (a), N = 30 (b), N = 100 (c). $d_1/a = d_2/a = 2{,}647$ et $D_M/a = (M-1)\times 0{,}1+3$.

(ii) Cas $d_1/a = d_2/a = 2{,}3$

Tous les paramètres géométriques précédents sont conservés, exceptés d_1/a et d_2/a qui sont maintenant égaux à 2,3 (Figure 5-17). La comparaison du résultat obtenu avec celui de la Figure 5-16 (c) montre qu'il y a création d'une bande interdite très large (*ka* allant de 0,2 à 2,5 approximativement). La bande interdite de la SP2D en polyéthylène et celle de la SP2D uniquement en acier sont maintenant raccordées moyennant donc une diminution des rapports *d/a*.

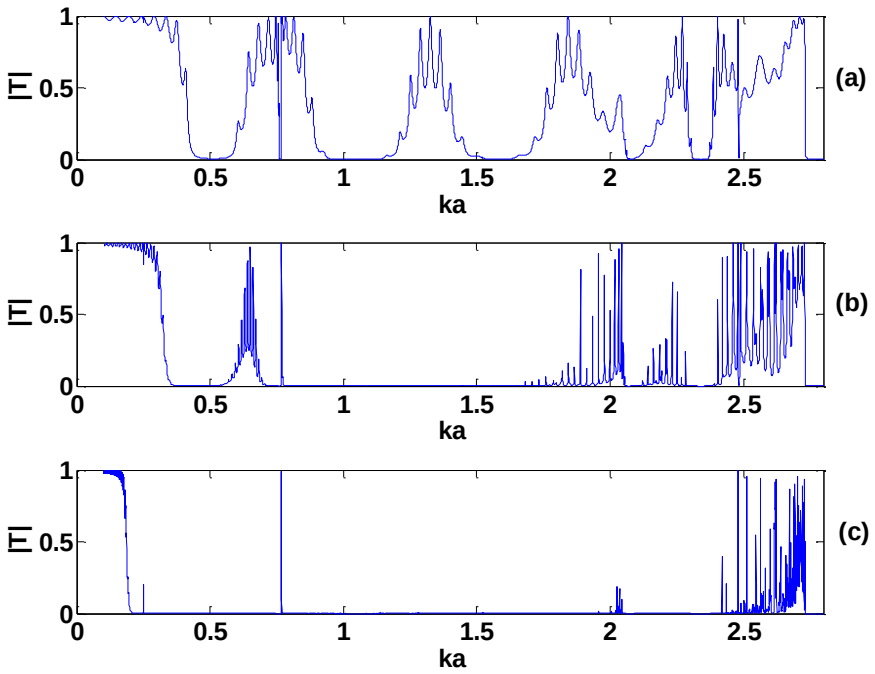


Figure 6-17 : Coefficients de transmission d'une SP2D de N biréseaux linéaires (en acier/polyéthylène) irrégulièrement espacés. N = 10 (a), N = 30 (b), N = 100 (c). $d_1/a = d_2/a = 2,3$ et $D_M/a = (M-1)\times 0,1+3$.

(iii) Cas $d_1/a=2,3$ et $d_2/a=2,647$ ou $d_1/a=2,647$ et $d_2/a=2,3$

On peut aussi rompre la symétrie dans les biréseaux en choisissant différents espacements *d/a* dans chaque rangée. Dans ce contexte, les coefficients de transmission d'une SP2D de 100 biréseaux sont tracés sur la Figure 5-18 pour le cas d_1/a = 2,647 et d_2/a = 2,3. On trouve un phénomène similaire à celui de la Figure 5-16(c). Lorsque l'on considère le cas inverse, $d_1/a = 2,3$ et $d_2/a = 2,647$, Figure 5-19, on retombe sur ce qui observé Figure 5-17(c).

On constate que le cas fournissant la bande interdite la plus large est représenté Figure 5-19. Un pas de calcul beaucoup plus fin adopté pour le calcul de ce coefficient de transmission montre la présence effective des pics de résonance relatifs à l'acier (2,1), (3,1) et la colonne d'eau ($1,1_f$) dans la bande interdite. Ces pics de résonance représentent des bandes passantes très étroites.

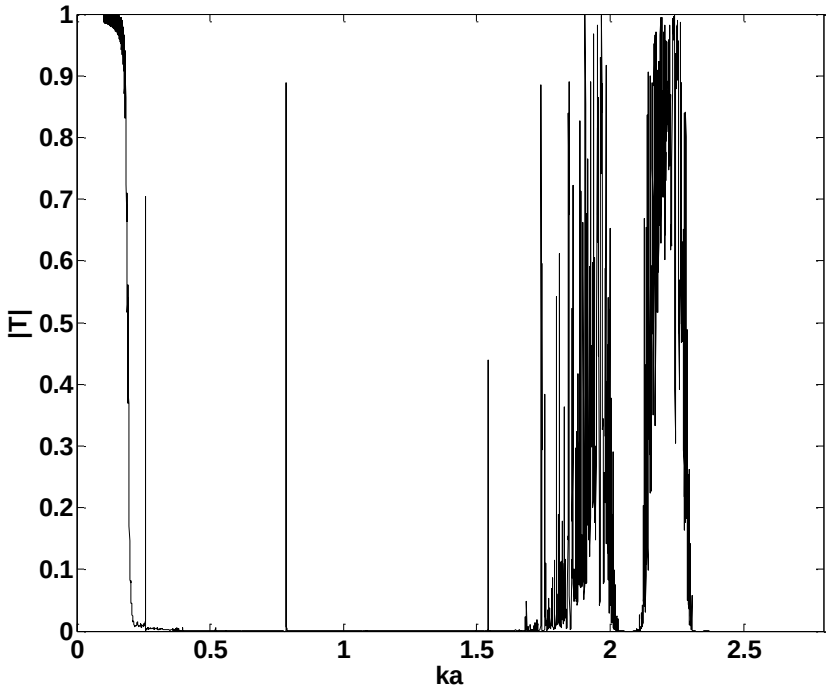


Figure 5-18 : Coefficients de transmission d'une SP2D de 100 biréseaux linéaires (en acier/polyéthylène) irrégulièrement espacés. d_1/a =2.647, d_2/a = 2,3 et D_M/a= (M-1)×0,1+3.

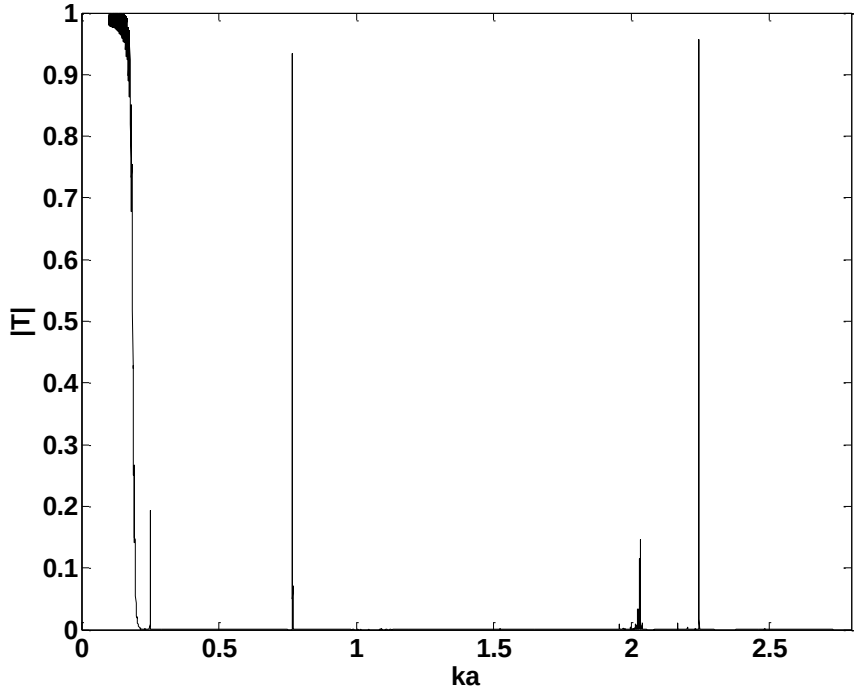


Figure 5-19 : Coefficients de transmission d'une SP2D de 100 biréseaux linéaires (en acier/polyéthylène) irrégulièrement espacés. d_1/a =2,3, d_2/a = 2,647 et D_M/a= (M-1)×0,1+3.

5.4 Conclusion

Les études de ce chapitre montrent qu'il est possible de modifier la transmittivité des SP2D par modification des espacements entre les réseaux linéaires et en combinant deux types de matériaux. On observe que la bande interdite centrale s'élargit lorsque l'on considère des intervalles irréguliers entre les réseaux. Par ailleurs, une SP2D de biréseaux en acier et polyéthylène irrégulièrement espacés permet d'obtenir un élargissement plus conséquent de la bande interdite. Ces travaux ont été publiés récemment[2].

Le but de cette étude théorique était de vérifier la faisabilité de certaines barrières acoustiques larges bandes. Ici, dans le cas d'une SP2D de 100 biréseaux linéaires (en acier/polyéthylène) irrégulièrement espacés (*cf.* Figure 5-19), aucune onde de fréquence comprise entre 23,4 kHz et 277,2 kHz ne peut traverser la SP2D, excepté aux fréquences particulières de résonance des tubes d'acier.

[2] Z. Kong, H. Franklin, O. Lenoir, and M. V. Predoï, Effects of periodicity perturbations on the transmission by underwater phononic crystals, J. Acoust. Soc. Am. 132 (4) Pt. 2 2834-2841 (2012)

Références

1 Yun Lai and Zhao-Qing Zhang, Large band gaps in elastic phononic crystals with air inclusion, Appl. Phys. Lett. 83 (19) 3900-3903 (2003)

2 Z. Kong, H. Franklin, O. Lenoir, and M. V. Predoï, Effects of periodicity perturbations on the transmission by underwater phononic crystals, J. Acoust. Soc. Am. 132 (4) Pt. 2 2834-2841 (2012)

CHAPITRE 6 : LENTILLES ACOUSTIQUES ET GUIDE D'ONDE : SIMULATIONS TEMPORELLES ET FREQUENTIELLES

6.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, on a présenté les propriétés d'un certain type de cristaux phononiques dans le domaine fréquentiel. Les influences des paramètres géométriques et physiques ont été étudiées en poussant le plus loin possible les développements analytiques. Une des résultats essentiels a été de montrer qu'on pouvait élargir les bandes interdites sur un grand intervalle de fréquences en jouant sur la répartition des réseaux linéaires.

Dans ce chapitre nous abordons des structures plus complexes. De ce fait, des simulations temporelles et fréquentielles vont être présentées ; elles sont réalisées avec le logiciel de calcul par éléments finis COMSOL MULTIPHYSICS 3.5a. Dans une première partie, le *modus operandi* utilisé pour réaliser ces simulations est décrit. Il comprend la réalisation d'un schéma de la structure, l'écriture des conditions aux frontières entre les domaines fluide et solide et la définition de maillages. Dans la deuxième partie, des résultats de simulations numériques portant sur des cristaux formés de réseaux de tubes identiques sont donnés. Les simulations fréquentielles données à l'appui permettent de vérifier les résultats du chapitre 3. Dans la troisième partie, des cristaux composés de réseaux de tubes de propriétés géométriques différentes sont étudiés. En particulier, on s'intéresse à des réseaux de tubes d'épaisseur différente. Les cristaux phononiques élaborés permettent de créer des lentilles acoustiques, soit convergentes [1,2] soit divergentes. L'association d'une lentille divergente et d'une lentille convergente, situées à une certaine distance l'une de l'autre, permet de recomposer le paquet d'onde incident, presque à l'identique, après la traversée de la structure globale. Entre les deux lentilles, on montre que l'on peut disposer d'un domaine très peu influencé par l'onde acoustique incidente. Les propriétés de convergence, de divergence et de

[1] Suxia Yang, J. H. Page, Zhengyou Liu, M. L. Cowan, C. T. Chan, and Ping Sheng, Focusing of Sound in a 3D Phononic Crystal, Phys. Rev. Lett. 93 (2), 024301-1-4 (2004)
[2] Alfonso Climente, Daniel Torrent, and José Sanchez-Dehesa, Sound Focusing by gradient index sonic lenses, Appl. Phys. Lett. 97, 104103 (2010)

recomposition de faisceaux acoustiques sont mises en évidence par des simulations temporelles. Dans la dernière section de ce chapitre, des simulations numériques portant sur des guides d'onde présentant un ou plusieurs virages[3], ou des guides en forme de Y sont présentées.

6.2 Modus *operandi* des simulations

COMSOL MULTIPHYSICS est un logiciel d'élément finis utilisable dans plusieurs domaines de la physique : mécanique des fluides, électromagnétisme, mécanique des structures, thermique et acoustique. En acoustique, il permet notamment de résoudre, en chaque nœud d'un maillage à définir, des systèmes d'équation aux dérivées partielles décrivant les interactions entre milieux, fluides et solides, de propriétés très différentes.

Dans ce chapitre, on décrit les différentes fonctions de ce logiciel permettant d'effectuer tout type de simulations sur les ondes, fréquentielles ou temporelles, en particulier, les différentes étapes permettant la visualisation de la propagation d'une onde plane envoyée vers un réseau de tubes, ainsi que les phénomènes de réflexion et de transmission sur celui-ci.

6.2.1 Simulation fréquentielle

Pour une simulation fréquentielle, un choix doit être fait entre les différents modules proposés par COMSOL. Dans notre étude, des réseaux de tubes élastiques immergés dans l'eau et remplis d'eau sont considérés. Des modules d'analyse fréquentielle en acoustique sont utilisés dans trois domaines : deux domaines concernant la propagation dans les fluides interne et externe aux tubes et un domaine portant sur la propagation des ondes dans l'épaisseur des tubes élastiques (Figure 6-1). Pour les domaines fluides, le module **Pressure Acoustics** est choisi et pour le domaine solide, c'est le module **Frequency response analysis** (**Plane Strain**) qui est retenu.

[3] J.-M. Lourtioz *et al.*, *Les cristaux photoniques ou la lumière en cage*, HermèsSciences Lavoisier (2003)

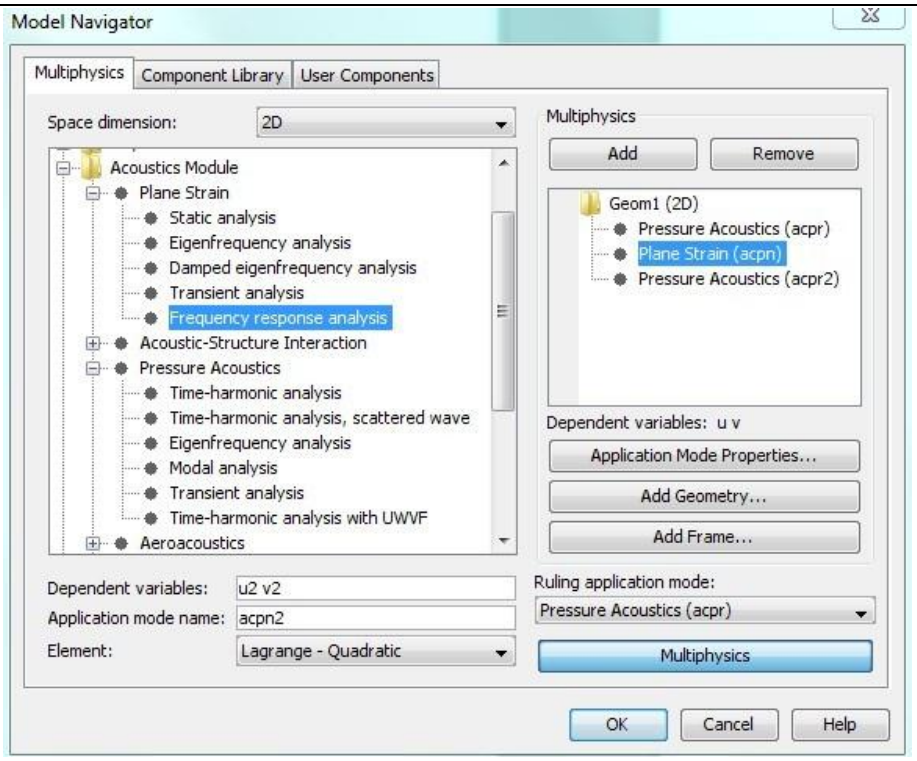


Figure 6-1 : navigateur dans les modèles

Dans un premier temps, un schéma du cristal est élaboré. Un tube est tout d'abord dessiné (Figure 6-2). Le rayon externe est noté *a* et le rayon interne *b*. La valeur de *a* est de 5 mm et le rapport *b/a* est égal à 75/85. Dans le schéma de la figure 6-2, les zones notées A et B représentent les fluides et la zone C l'épaisseur du tube. Un tableau des constantes (Figure 6-3) répertorie tous les paramètres utilisés ainsi que leur valeur numérique.

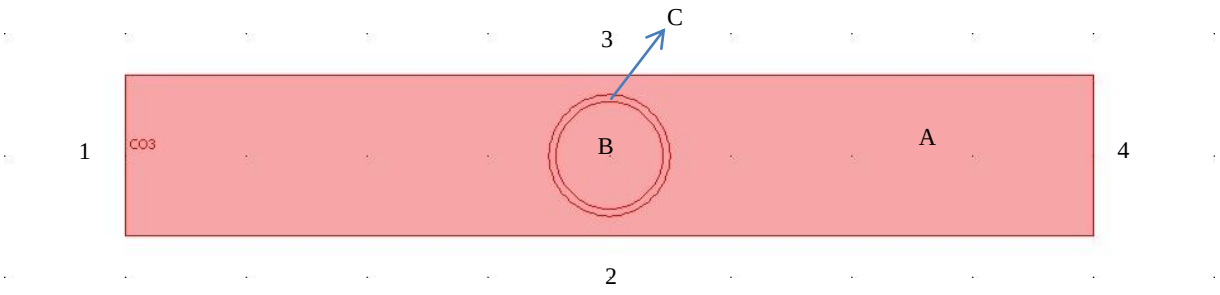


Figure 6-2 : géométrie d'un tube

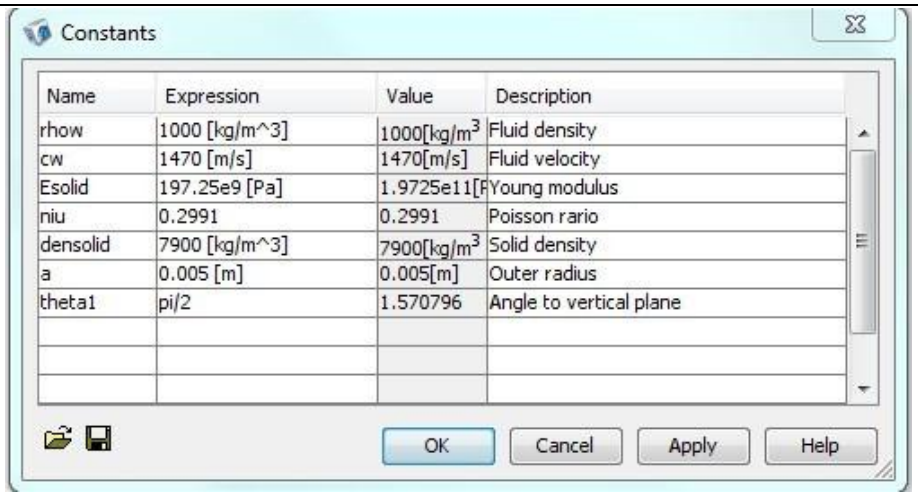


Figure 6-3 : paramètres physiques

Ensuite, pour la réalisation du schéma d'un réseau de tubes identiques, on n'a pas besoin de dessiner tous les tubes. On peut ajouter des conditions périodiques de frontière sur les parois numérotées 2 et 3 (Figure 6-4). Le réseau est donc linéaire et infini dans le sens vertical.

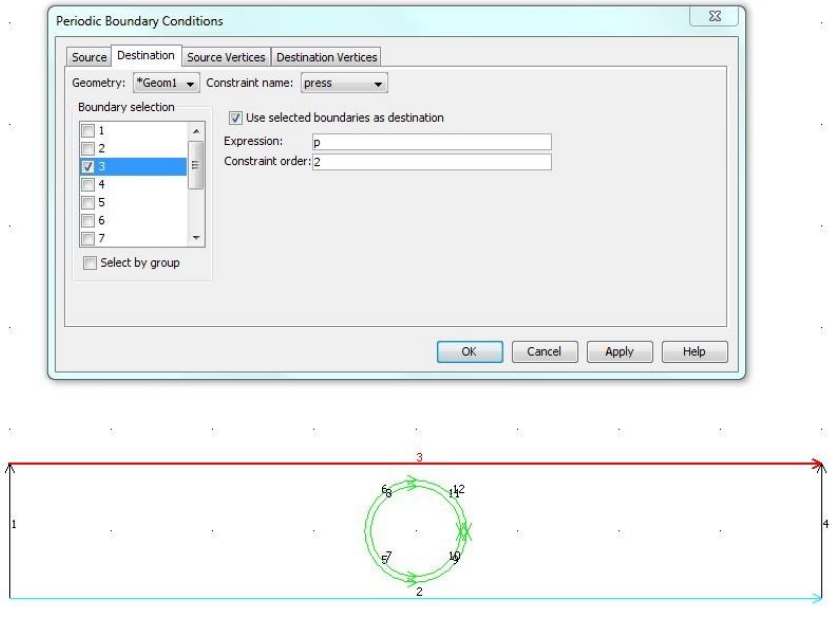


Figure 6-4 : conditions périodiques de frontière

Dans l'onglet **physique**, on indique les paramètres utiles dans les 3 sous-domaines fluides (Figures 6-5 et 6-7) et solide (Figure 6-6). Pour un fluide, les paramètres à rentrer sont la masse volumique et la vitesse de phase.

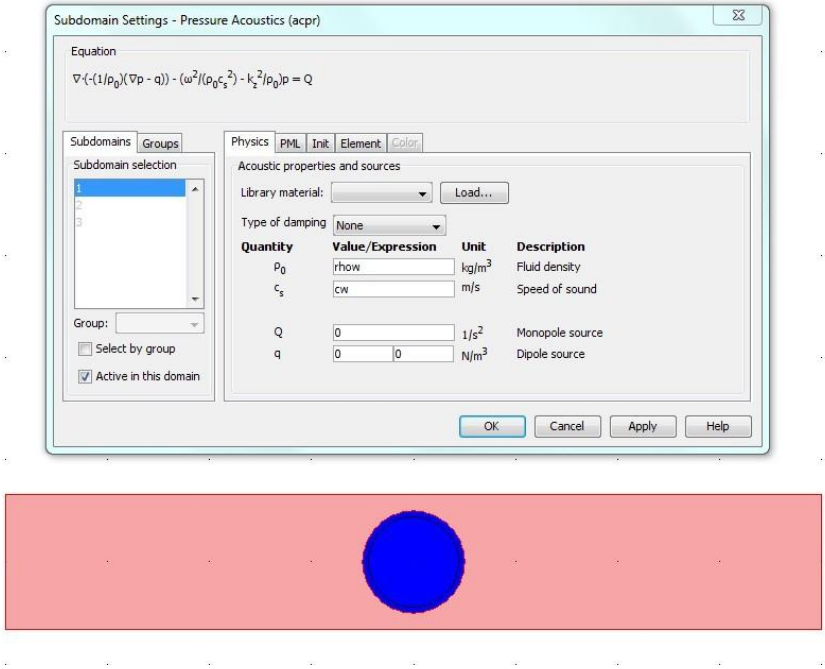


Figure 6-5 : réglages des paramètres du sous-domaine fluide externe 1 (rose)

Pour un solide, les paramètres à indiquer sont le module d'Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique.

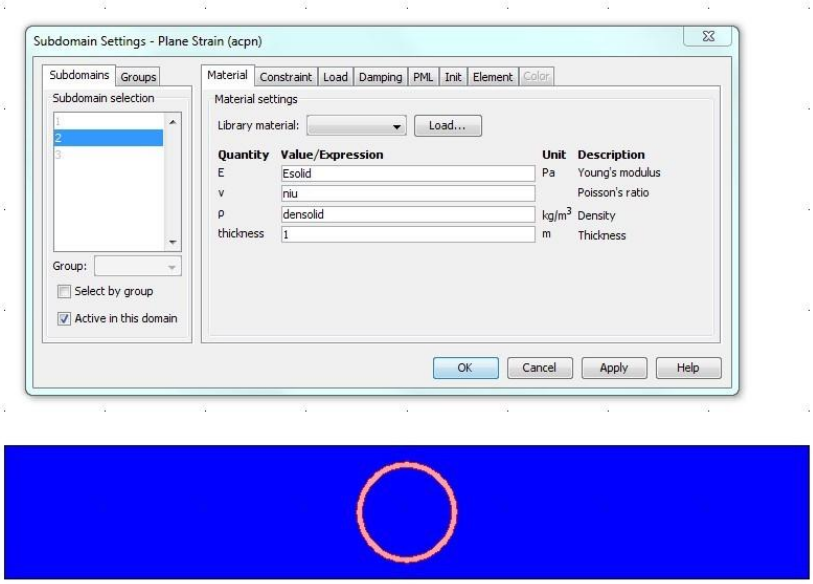


Figure 6-6 : réglages des paramètres du sous-domaine solide 2 (rose)

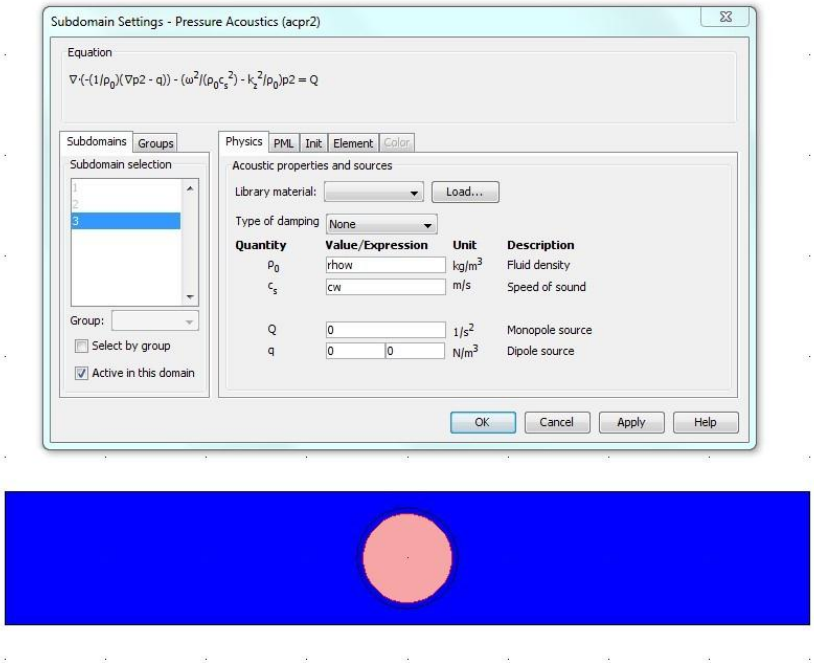


Figure 6-7 : réglages des paramètres du sous-domaine fluide interne 3

Il faut également préciser les conditions aux frontières entre le solide et les fluides externe et interne. La Figure 6-8 indique les conditions à la frontière entre le fluide externe ou interne et le solide. Pour une frontière circulaire, ces conditions sont écrites sur 4 arcs de cercle numérotés par le logiciel. La condition à la frontière fluide/solide revient à écrire l'accélération normale dans la partie fluide comme suit :

$$a_n = \frac{\overrightarrow{n_F}}{\rho_F}\overrightarrow{\nabla p},$$

où $\overrightarrow{n_F}$ est un vecteur unitaire dirigé vers le fluide et p la pression normale exercée par le fluide sur le solide.

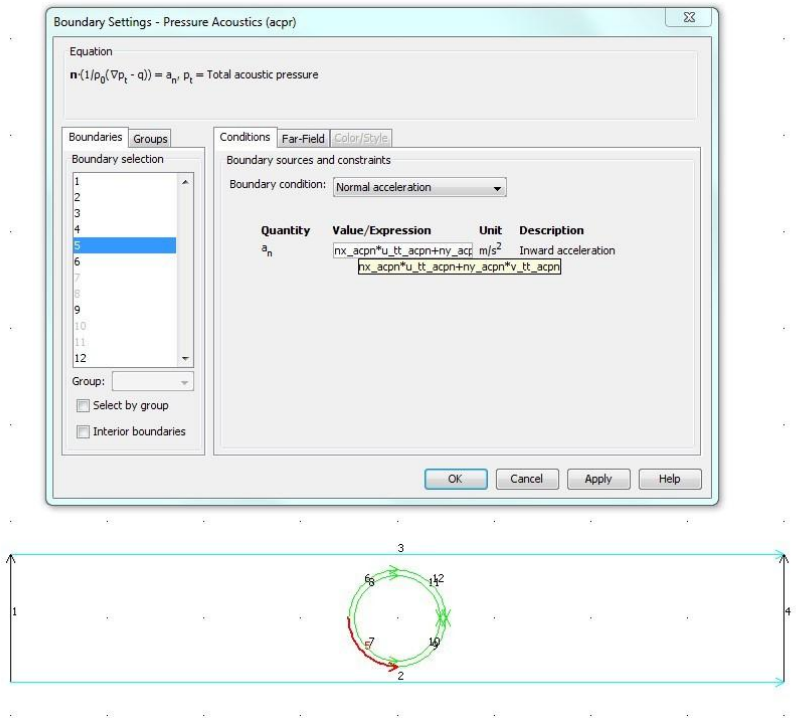


Figure 6-8 : réglages des conditions de frontière dans les sous-domaines fluides interne et externe

La Figure 6-9 montre la condition à la frontière solide/fluide écrite dans le solide. La force surfacique $\vec{F}$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{F} = p\overrightarrow{n_S},$$

où $\overrightarrow{n_S}$ est un vecteur unitaire cette fois dirigé vers le solide.

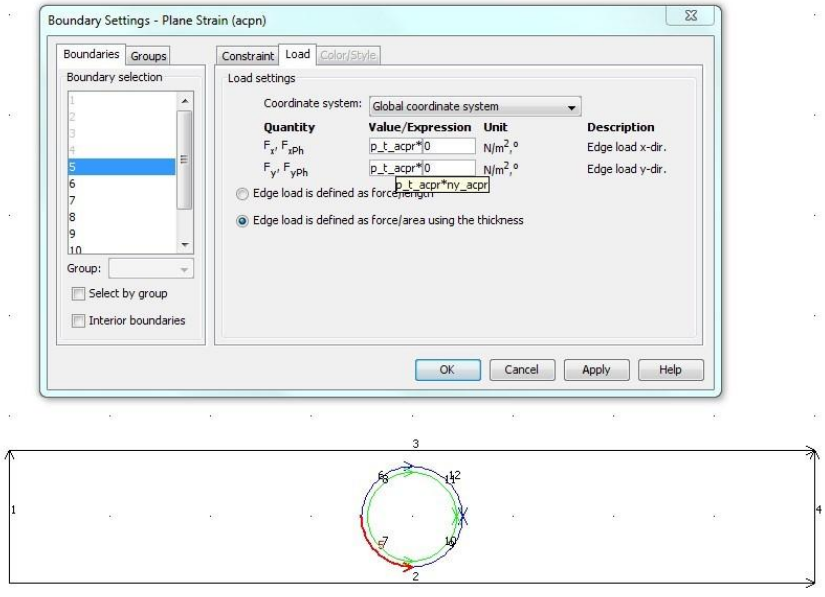


Figure 6-9 : réglages des conditions de frontière dans le sous-domaine solide

L'étape suivante consiste à mailler par des éléments finis triangulaires (triangle (advancing front) selon les informations disponibles sur COMSOL, sans que l'on sache s'il s'agit de triangles de type P1 ou P2) les trois domaines : fluide externe, fluide interne et solide apparaissant dans le problème, *cf.* Figure 6-10.

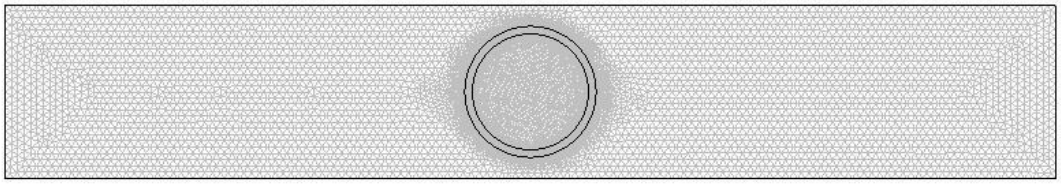


Figure 6-10 : maillages de domaines pour un tube

Pour une bonne description du champ acoustique, les régions situées dans et autour du tube nécessitent un maillage fin dont la taille est inférieure à 1/5, voire 1/10, de la longueur d'onde, selon la précision et le temps d'exécution de calcul souhaités. Les régions plus éloignées situées dans le fluide sont maillées plus grossièrement.

Dans la dernière étape, les paramètres nécessaires à l'analyse fréquentielle sont fixés (Figure 6-11). Les bornes de l'intervalle dans lequel doit varier le nombre d'onde réduit ka de même que le pas de calcul sont fournis.

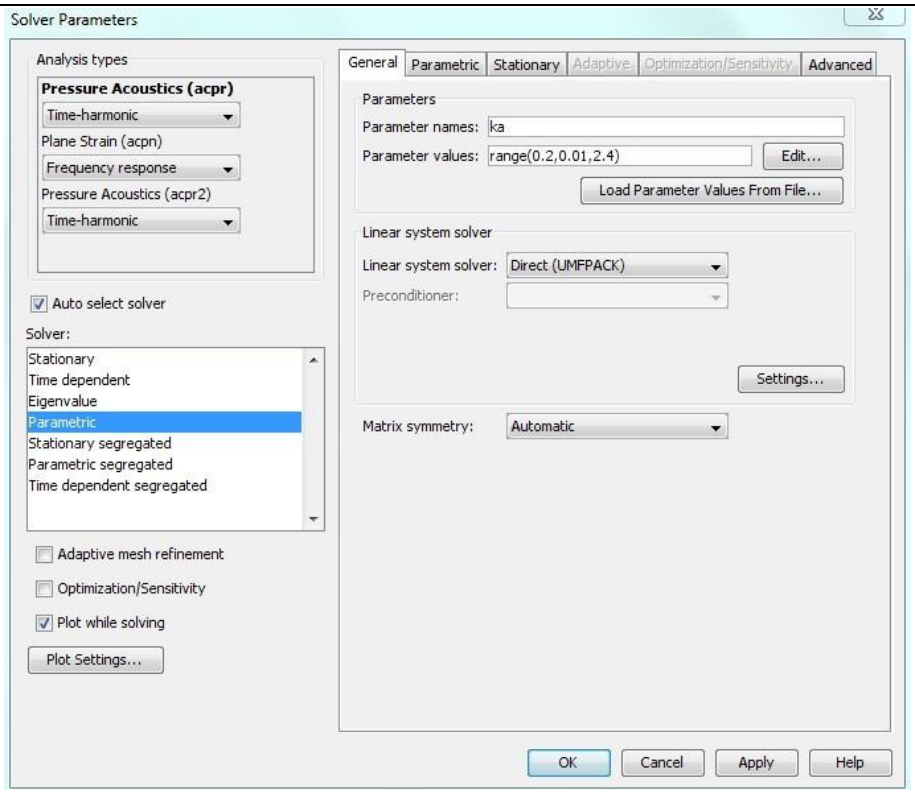


Figure 6-11 : paramètres de simulation fréquentielle

La Figure 6-12 présente l'évolution du coefficient de réflexion d'un réseau de tubes en acier en fonction de la fréquence réduite ka, en incidence normale. En comparant avec la courbe de la Figure 2-4 obtenue au chapitre 2, on constate que les deux courbes sont quasiment identiques. Toutefois, au voisinage proche des résonances, la méthode de diffusion multiple fournit plus de détails.

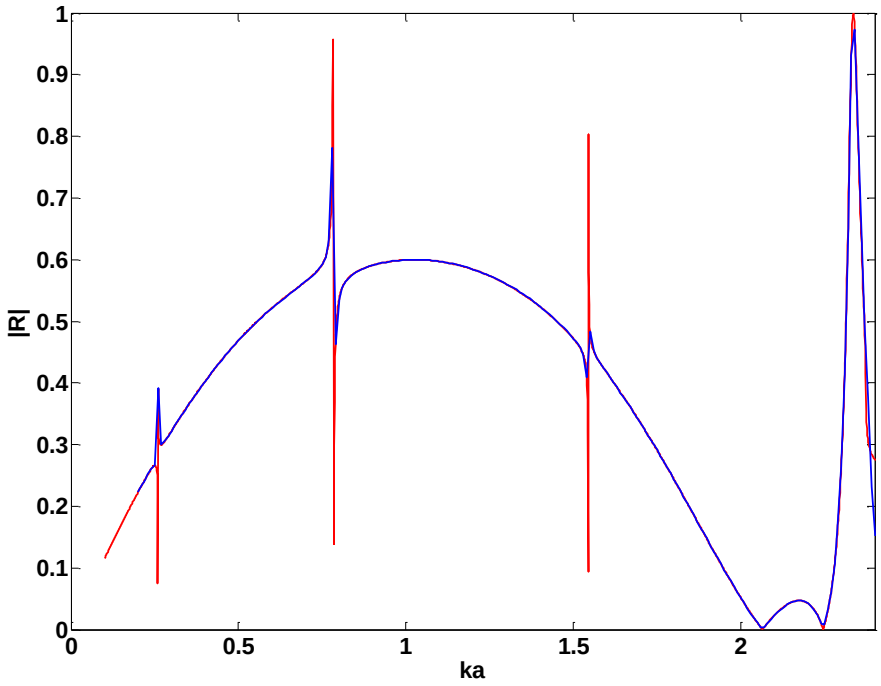


Figure 6-12 : coefficient de transmission d'un réseau de tubes identiques obtenu à l'aide de COMSOL (tracé bleu) ; le même coefficient obtenu par la méthode de diffusion multiple avec les calculs numériques effectués sous FORTRAN (tracé rouge)

6.2.2 Simulation temporelle

Pour réaliser une simulation temporelle, on choisit dans le **navigateur des modèles** le module d'analyse transitoire (**Transient analysis**)**,** Figure 6-13. Le solide est décrit par la fonction **Plane Strain acpn** et les fluides par les fonctions **Pressure Acoustics acpr** et **acpr2**.

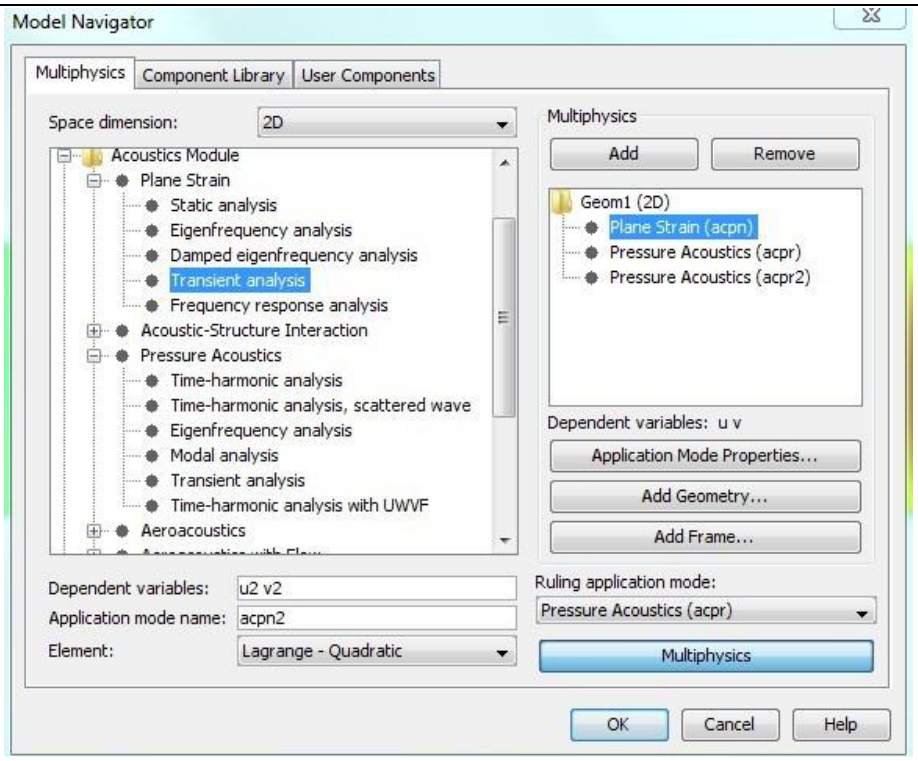


Figure 6-13 : navigateur des modèles

La Figure 6-14 représente un réseau linéaire de tubes ayant les mêmes paramètres géométriques et physiques que ceux utilisés dans la partie simulation fréquentielle. En vue de la simulation temporelle, on doit en plus définir des conditions d'amortissement sur les 4 faces du rectangle contenant le fluide externe ou matrice (PML : Perfectly Matched Layer). Trois types de conditions sont appliqués sur les 4 parois :

(i) La paroi 1 sert à générer l'onde de pression plane incidente. Pour une fréquence *f* fixée, elle s'écrit :

$$P = A\sin(2\pi ft)e^{-20\frac{(t-t_0)^2}{(2t_0)^2}}$$

avec $t_0 = \frac{2}{f}$.

(ii) Une condition de frontière appelée **Sound hard boundary** (wall) est appliquée sur les 2 parois horizontales notées 2 et 3. Elle permet de préserver la forme des ondes planes incidentes dans le domaine balayé avant leur rencontre avec le réseau.

(iii) Une pression nulle est appliquée sur les parois restantes numérotées 4, 5 et 6 pour éviter les phénomènes de réflexion. Ainsi, lorsque l'onde diffusée par le réseau arrive sur la paroi 6, il n'y a pas d'onde réfléchie.

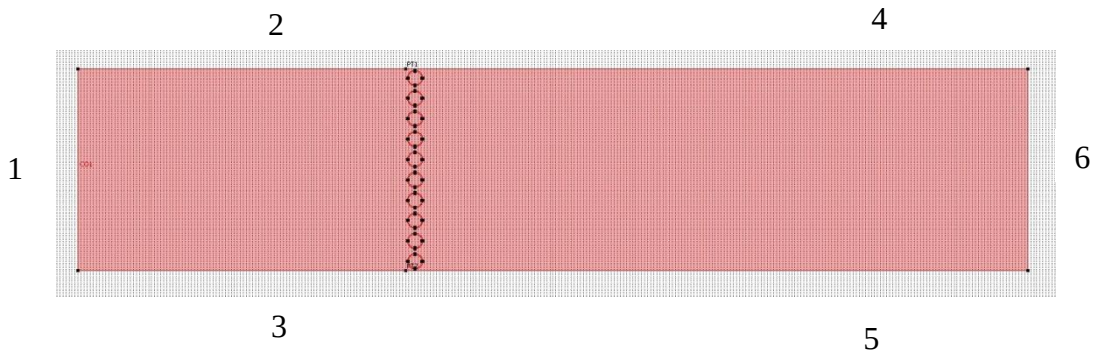


Figure 6-14 : géométrie d'un réseau de tube

On garde les mêmes paramètres physiques et les mêmes conditions de frontière entre le solide (tube) et les fluides que lors de la simulation fréquentielle. La Figure 6-15 montre le maillage par éléments finis triangulaires pour le réseau linéaire de tubes. Ce maillage est très fin près des tubes et plus grossier dans le fluide environnant.

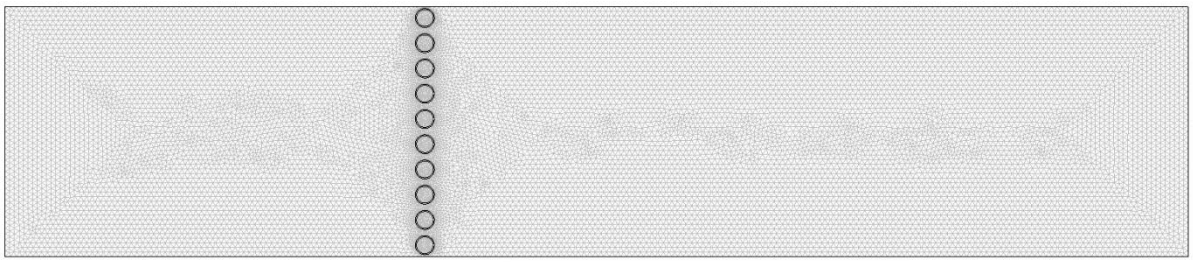


Figure 6-15 : maillage~~s~~ d'un réseau de tube en simulation temporelle

Les paramètres de contrôle utilisés lors de la simulation temporelle sont donnés sur la Figure 6-16. Le domaine temporel étudié s'étend de 0 à 0,6 ms par pas de 5µs. Le résultat de la simulation numérique est montré à trois instants différents, Figure 6-17 : à l'instant $t=6x10^{-5}$ s, l'onde plane incidente est située loin du réseau linéaire, à l'instant $t=1,7x10^{-4}$ le premier front d'onde rencontre le réseau, à l'instant $t=2,8x10^{-4}$ s une fraction de l'onde plane a traversé le réseau, l'autre fraction a été réfléchie. On peut constater qu'après avoir traversé le réseau les fronts d'onde conservent leur caractère rectiligne.

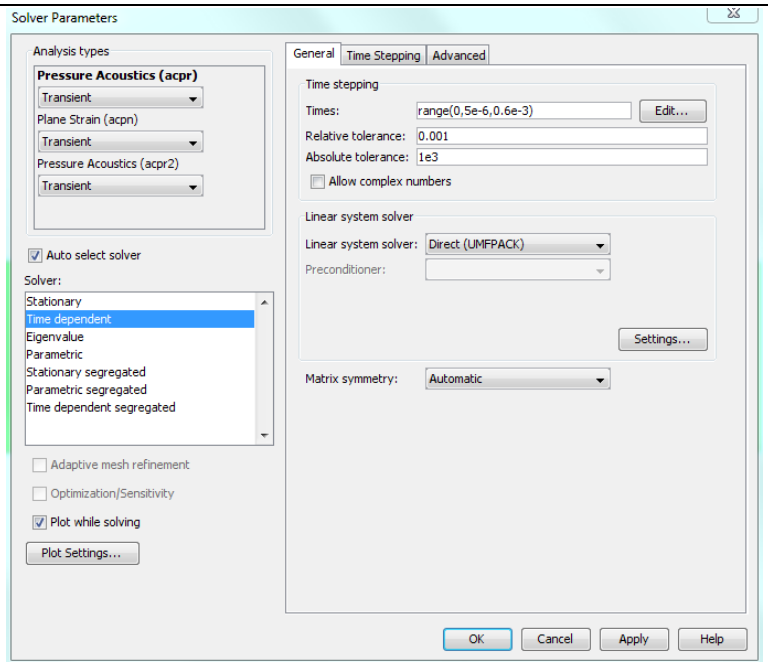


Figure 6-16 : paramètres utilisés pour la simulation temporelle

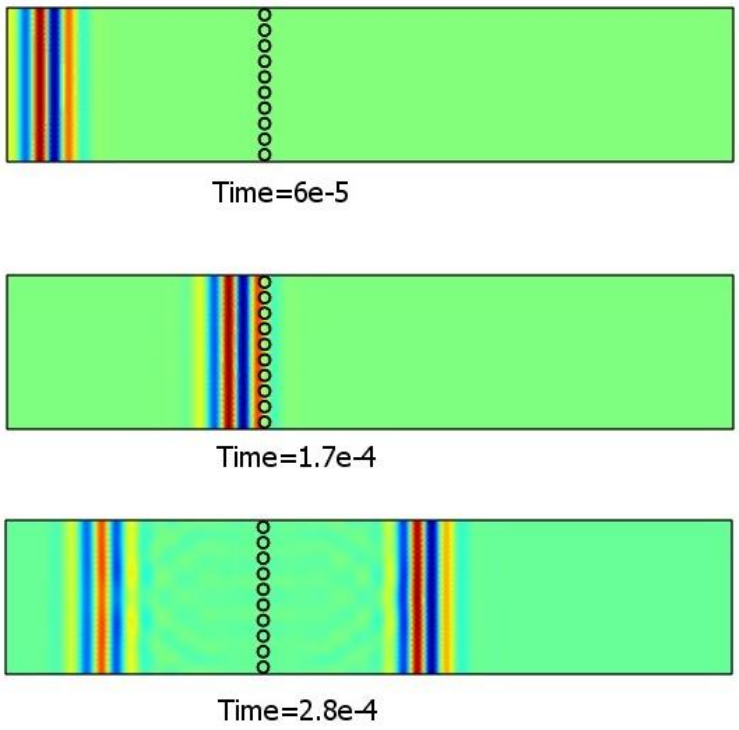


Figure 6-17 : simulation temporelle d'une onde plane normalement incidente sur un réseau de tubes. Trois durées sont représentées. Au temps t=0,28 ms, compte tenu des conditions aux limites sur les parois horizontales, on observe une onde plane transmise et une one plane réfléchie par le réseau

6.3 Simulations pour 10 réseaux identiques

Dans le chapitre 3, il a déjà été présenté des courbes fréquentielles des coefficients de transmission par N réseaux linéaires identiques périodiquement espacés. Nous commençons par comparer ces résultats avec ceux obtenus à l'aide de la méthode des éléments finis du logiciel COMSOL. La Figure 6-18 représente le schéma du cristal phononique considéré.

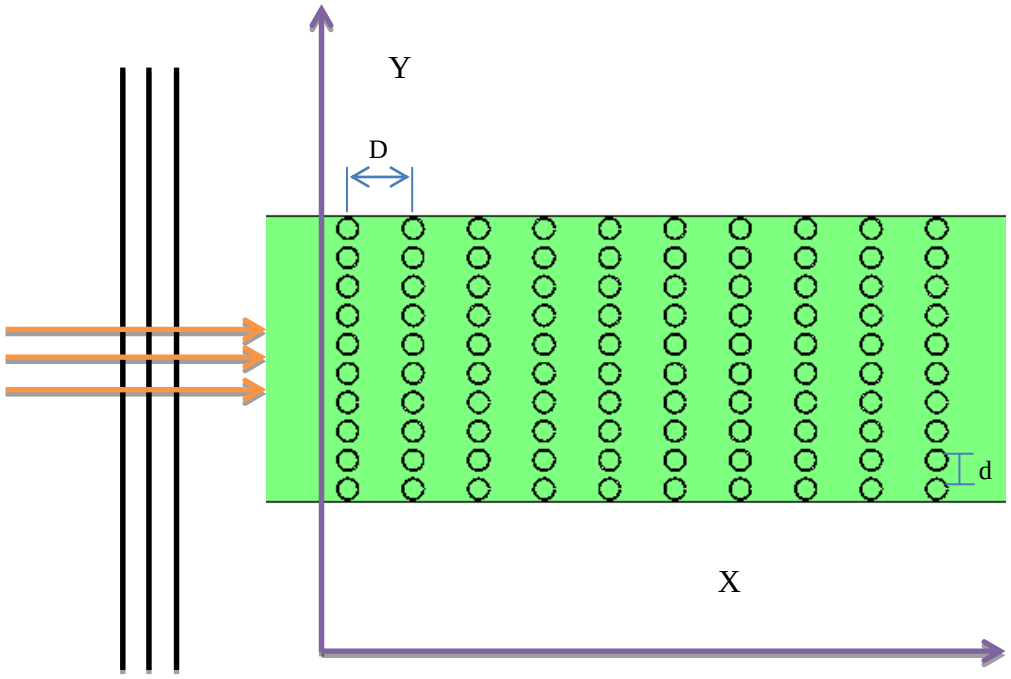


Figure 6-18 : géométrie du cristal phononique formé de 100 tubes (10 réseaux linéaires identiques contenant chacun 10 tubes)

6.3.1 Simulation fréquentielle

On suit de nouveau le processus de simulation fréquentielle détaillé dans la partie 6.2. Le calcul numérique est effectué pour des réseaux de tubes en acier (rapport rayon interne sur rayon externe $b/a = 75/85$), remplis d'eau et immergés dans l'eau. La distance D entre deux réseaux consécutifs est égale à $6a$. L'écart d entre deux tubes de chaque réseau linéaire (vertical) est quant à lui égal à 2.647 a. Le coefficient de transmission obtenu avec la méthode de diffusion multiple et celui obtenu avec les éléments finis sous COMSOL sont comparés, Figure 6-19. La superposition des deux courbes montre un excellent accord, sauf à l'extrémité du domaine fréquentiel (ka~2,5). Un tel résultat n'est pas étonnant puisque pour de tels ka on se trouve au-delà de la première fréquence de coupure. Or, on sait qu'en ce qui concerne la

méthode de diffusion multiple on ne tient compte dans nos calculs que du mode fondamental (ordre 0 de diffraction). Il a été constaté que pour $D \leq 4a$, les calculs exécutés sous COMSOL ne coïncident plus correctement avec ceux obtenus sous FORTRAN. S. Robert a montré dans ses travaux qu'il existe aussi une limite au rapport d/a pour un réseau linéaire.

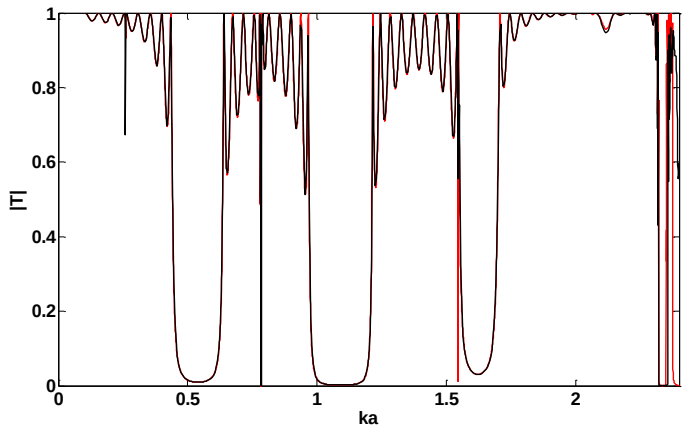


Figure 6-19 : coefficients de transmission par 10 réseaux linéaires identiques obtenus avec avec la méthode de diffusion multiple, les calculs numériques étant effectués sous FORTRAN (tracé rouge) et avec COMSOL (tracé noir)

6.3.2 Simulation temporelle

En vue des simulations temporelles, deux fréquences sont choisies, l'une dans une bande passante et l'autre dans une bande interdite. En se basant sur la Figure 6-19, on choisit d'abord la fréquence réduite ka = 0,355 située dans une bande passante.

La Figure 6-20 présente le champ de pression en fonction du temps et de la position. La zone A est la partie où sont localisés les 10 réseaux de tubes. On peut remarquer qu'après la traversée du cristal par l'onde incidente, une transmission quasi totale a lieu.

Toujours d'après la Figure 6-19 on choisit maintenant une fréquence ka = 0,52 située dans la bande interdite large. La Figure 6-21 montre le champ de pression correspondant. On remarque que les ondes sont presque totalement réfléchies après avoir en partie pénétré le cristal phononique (il y a très peu de transmission).

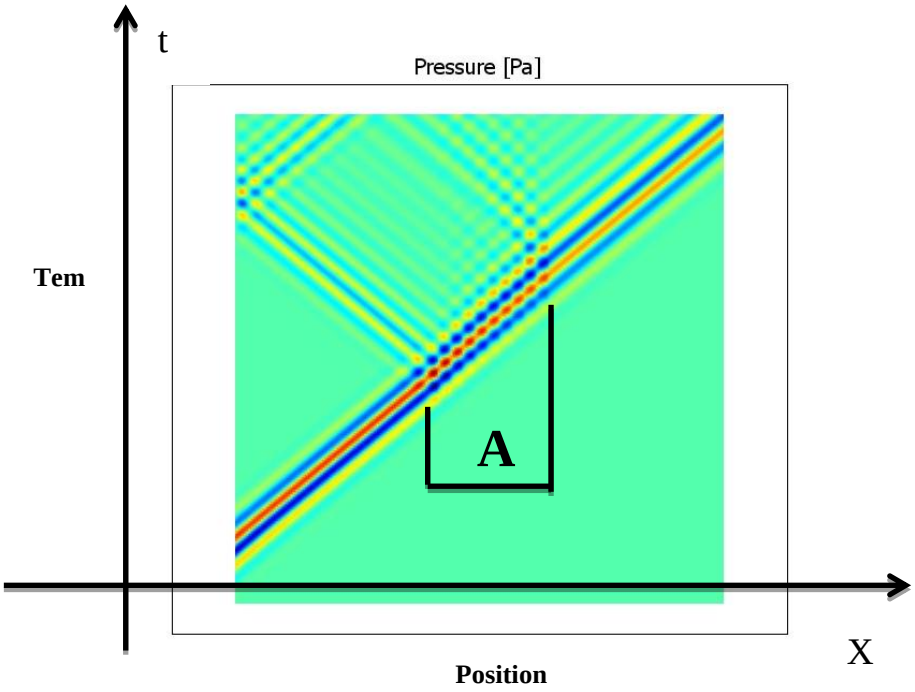


Figure 6-20 : la pression en fonction du temps et de la position pour *ka* = 0,355. Le domaine A est occupé par le cristal phononique

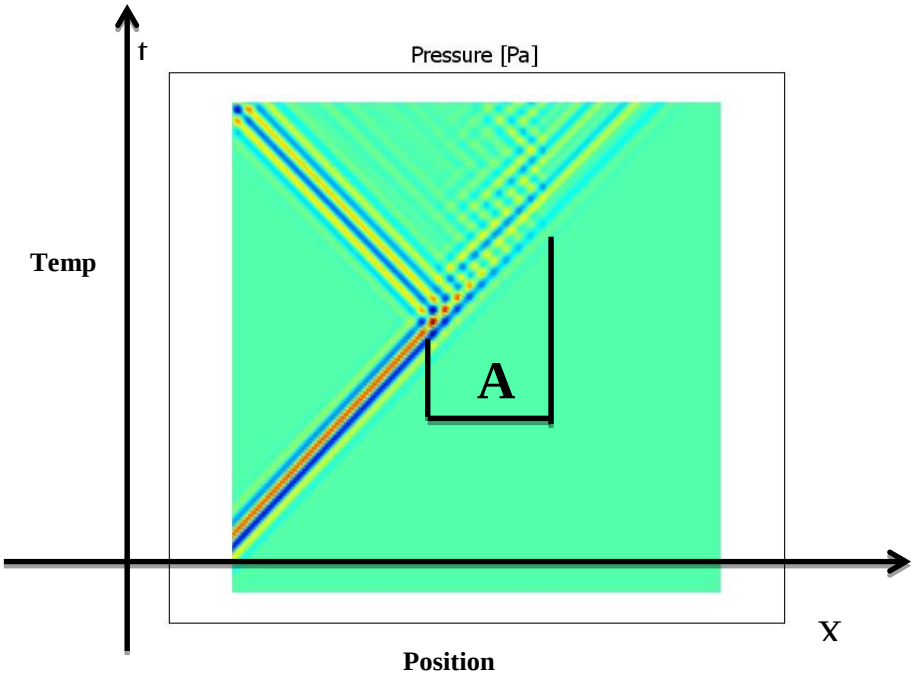


Figure 6-21 : la pression en fonction du temps et de la position pour ka = 0,52.

Le domaine A est occupé par le cristal phononique

6.4 Lentilles acoustiques

Lorsque le son se propage dans un milieu inhomogène, les fronts d'onde ralentissent dans les régions denses et accélèrent dans les régions moins denses. Deux rayons acoustiques non confondus traversant un tel milieu seront donc déviés différemment, d'où l'idée de concevoir des lentilles soit convergentes soit divergentes à l'aide des milieux inhomogènes. Ici, l'idée de base est d'ordonner des tubes de différentes épaisseurs de façon à réaliser le plus simplement possible des dispositifs simulant des milieux inhomogènes.

A partir de maintenant, il n'est plus possible de formuler analytiquement les problèmes, d'où l'abandon des simulations avec FORTRAN. On admet implicitement que ceux fournis par COMSOL sont acceptables. On pourra donc considérer des rapports *D/a* inférieurs à la limite évoquée ci-dessus.

6.4.1 Lentilles convergentes

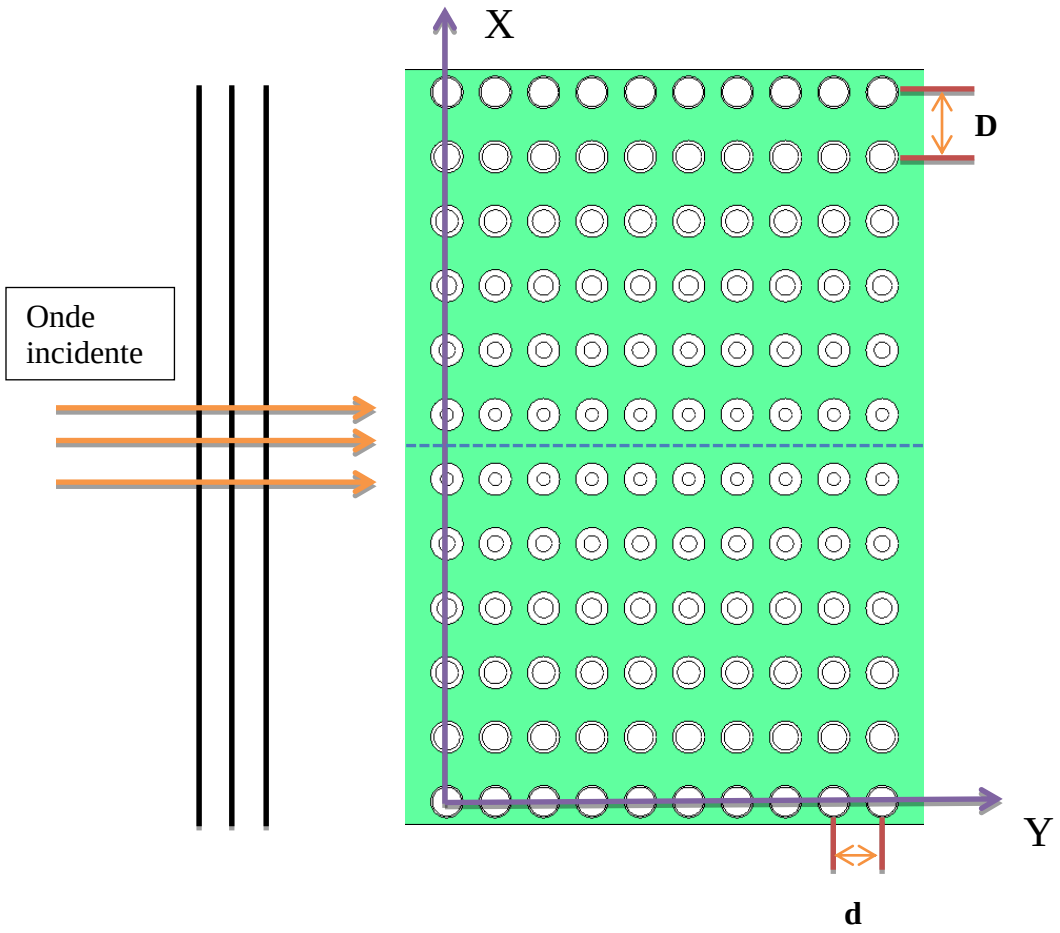


Figure 6-22 : structure de la lentille convergente

Le schéma suivant présente la structure du réseau bidimensionnel de tubes en vue de la réalisation du phénomène de focalisation d'une onde plane incidente. On désigne toujours par *a* (= 5 mm) le rayon externe et par b le rayon interne des tubes. Les épaisseurs des tubes vérifient *b/a* = 0,9 pour les plus externes. Ce rapport diminue progressivement dans la direction X jusqu'à atteindre *b/a* = 0,4 pour les tubes les plus internes situés près de l'axe de symétrie du cristal (en pointillé sur la figure 6-22). Le rapport *d/a* qui détermine l'écartement entre deux tubes d'un réseau linéaire horizontal est constant (= 3). Par contre, on fait varier le rapport *D/a* quantifiant la distance entre deux réseaux horizontaux.

(i) Cas D/a *= 4*

On suppose que l'origine A des axes X et Y, *cf.* Figure 6-22, se trouve au centre du premier tube. La largeur totale du cristal phononique, du centre du premier tube au centre du dernier tube, le long de l'axe Y, est égale à 0,135m. La hauteur totale, le long de l'axe X, de centre à centre vaut elle 0,22 m.

La Figure 6-23 présente le coefficient de transmission d'une structure formée de 12 réseaux horizontaux contenant chacun 10 tubes. La courbe obtenue est caractéristique de celles obtenues pour des réseaux de tubes tous identiques, cf. Figure 6-19. Sur la figure 6-23, la fréquence *ka* = 0,54 (*f* = 25,27 kHz) correspond à un maximum du coefficient de transmission (|*T*| ≈ 1). On se place à cette fréquence dans le but d'obtenir le maximum d'énergie transmise (réflexion quasi-nulle) permettant de simuler correctement la focalisation.

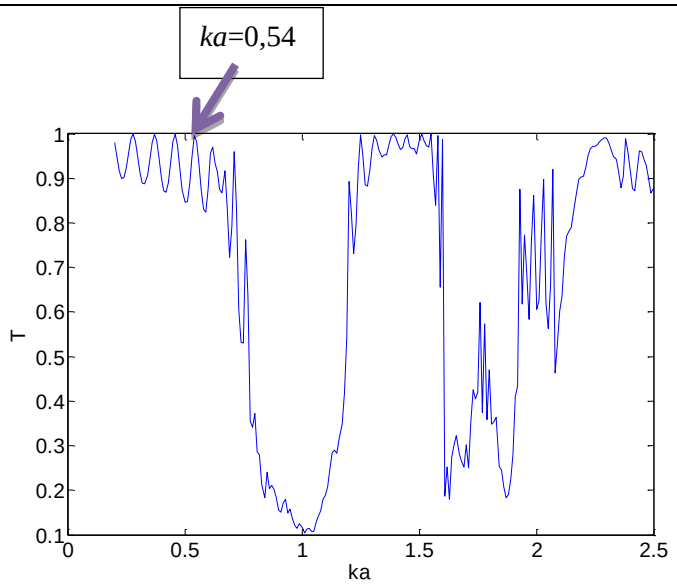


Figure 6-23 : coefficient de transmission d'une structure formée de 12 réseaux horizontaux arrangés selon la Figure 6-22 (*d/a* =3, *D/a* = 4).

La Figure 6-24 fournit les pressions incidente, diffractée dans le réseau et diffusée dans l'eau en fonction de la variable d'espace Y et pour différents temps de propagation, le long d'une ligne passant par le centre de symétrie du réseau (indiqué par la ligne horizontale en pointillé sur la Figure 6-22). La Figure 6-25 donne l'intensité $I=ap/\omega$ en fonction de cette même variable Y. Ici, a désigne l'accélération particulaire et ω la pulsation. Sur ces deux figures, on observe une évolution de l'amplitude en fonction de la position Y. La valeur Y = -5 mm correspond à la face d'entrée du cristal et la valeur Y = 0,14 m à la face de sortie. Avant sa pénétration dans le cristal, l'onde présente une amplitude constante (champ de pression $p \approx 10^6$ Pa et intensité $I \approx 3\times10^5$ W/m^2). Très près de la face de sortie du signal, l'amplitude de l'onde passe par un minimum ($p \approx 0{,}83\times10^6$ Pa et $I \approx 2{,}2\times10^5$ W/m^2 à la position Y = 0,1513 m) puis croît jusqu'à atteindre une valeur maximale ($p \approx 1{,}36\times10^6$ Pa et $I \approx 6{,}34\times10^5$ W/m^2 à la position Y = 0,2668 m). L'accroissement relatif de l'amplitude du champ, entre son entrée et sa sortie du cristal est approximativement de 26%. Au-delà de cette position, l'amplitude décroît à nouveau lorsque l'onde s'éloigne, mais beaucoup plus lentement puis devient constante. Loin de la face de sortie, on a $p \approx 0{,}71\times10^6$ Pa et I $\approx 1{,}81\times10^5$ W/m^2 en Y = 1,60 m. Ainsi, il existe un domaine spatial en sortie où l'amplitude de la pression et de l'intensité est plus élevée que celle avant son entrée dans le cristal.

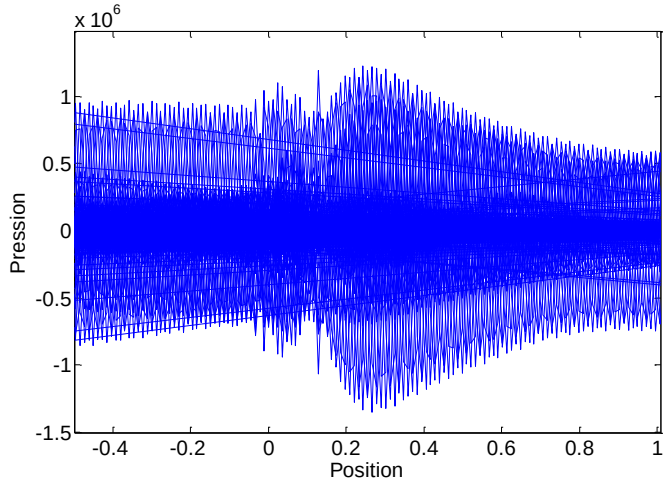


Figure 6-24 : pressions de l'onde incidente, diffractée dans le réseau et diffusée en fonction de la variable Y

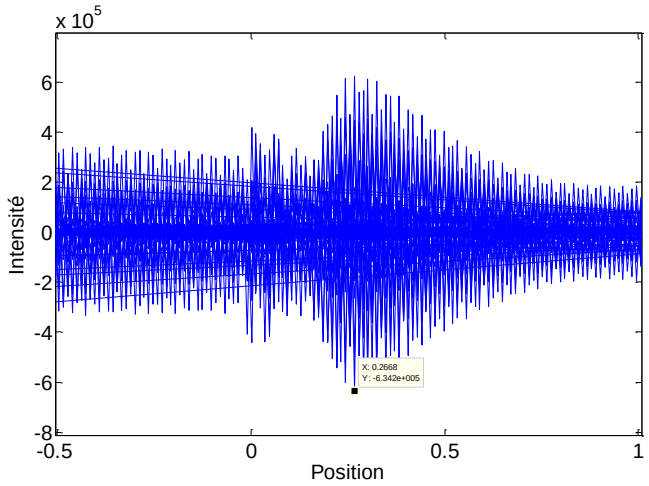


Figure 6-25 : intensité des ondes incidente, diffractée dans le réseau et diffusée en fonction de la variable Y. Le carreau indique la position de la tâche de focalisation

La simulation temporelle du phénomène, *cf.* Figure 6-26, présentée ici à trois instants différents, montre que l'onde plane ayant traversé le cristal se focalise en une tâche située sur l'axe de symétrie à la position Y = 0,2668 m indiquée sur la figure 6-25. A partir de l'instant t = 7,9 10^{-4} s, l'onde se met à diverger.

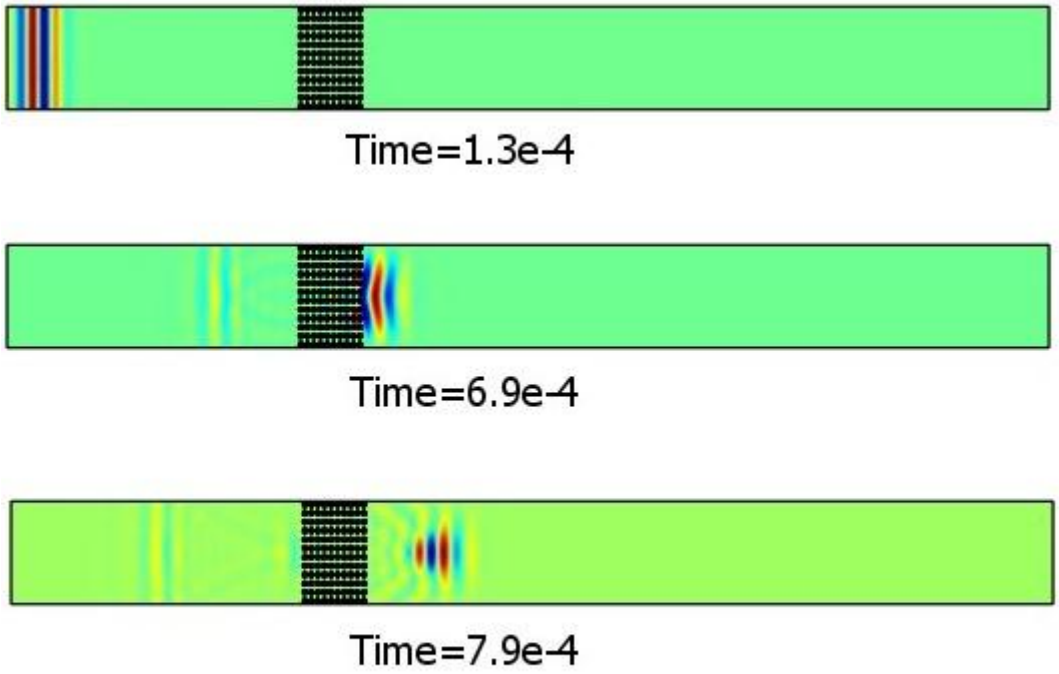


Figure 6-26 : focalisation d'une onde plane incidente par le réseau de la Figure 6-22

(ii) Cas D/a = *2,4*

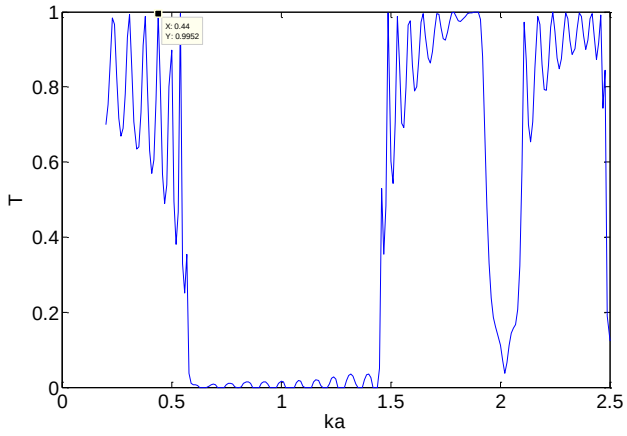


Figure 6-27 : coefficient de transmission par une structure formée de 12 réseaux horizontaux arrangés selon la Figure 6-22 (d/a =3, *D/a* = 2,4).

Sur la figure 6-27, on observe une bande interdite large située entre *ka* = 0,55 et *ka* = 1,45 (coefficient de transmission ≈ 0) en opposition à ce que l'on voyait sur la Figure 6-23. On vérifie comme dans le cas *D/a* =4, qu'il y a toutefois focalisation de l'onde plane incidente à la traversée de la structure.

Il s'avère que le choix du rapport *D/a* = 2,4 conduit à une focalisation située à l'intérieur du cristal. Cependant, si l'on réduit le nombre de tubes formant chaque réseau linéaire horizontal, en passant de 10 à 3 par exemple, tout en gardant le même rapport *d/a*, on obtient une focalisation en dehors du cristal. L'origine A des axes se trouvant toujours au centre du premier tube, la largeur totale du cristal phononique, du centre du premier tube au centre du dernier tube est égale à 0,03 m. La hauteur totale de centre à centre vaut elle 0,22 m. La Figure 6-28 montre le coefficient de transmission dans ce cas. Il est beaucoup moins riche en oscillations de part et d'autre de la bande interdite comparativement à la Figure 6-27. En choisissant la fréquence *ka* = 0,48 à laquelle correspond un maximum du coefficient de transmission, on obtient, *cf*. Figure 6-29, l'amplitude de la pression incidente et de la pression diffusée en fonction de la variable de position Y. Le point de focalisation est situé en Y = 77,6 mm.

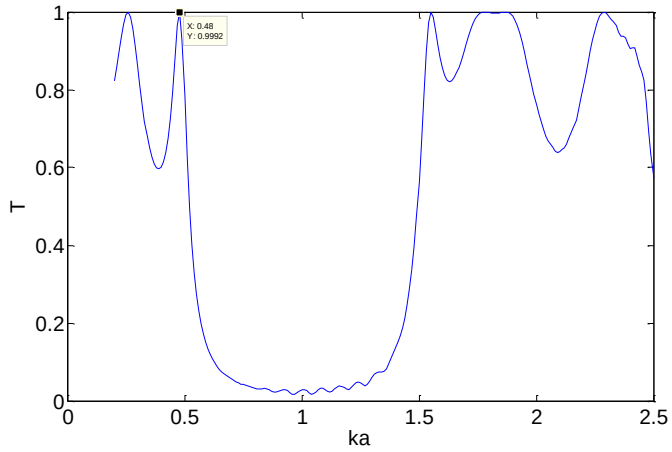


Figure 6-28 : coefficient de transmission par une structure formée de 12 réseaux horizontaux arrangés selon la Figure 6-22 (d/a =3, *D/a* = 2,4).

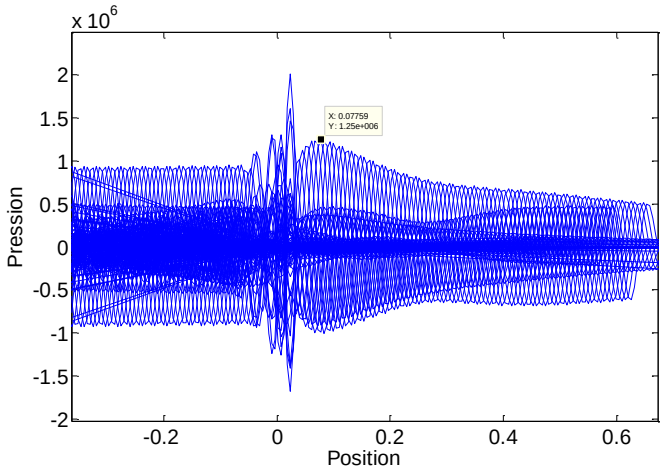


Figure 6-29 : pression de l'onde incidente, diffractée dans le réseau et diffusée en fonction de la variable Y. Le carreau indique la position de la tâche de focalisation

(iii) Déplacement de la tâche de focalisation en fonction du rapport D/a.

On fait varier le rapport *D/a* de 3,2 à 5 cf. Tableau ci-dessous, tandis que le rapport *d/a* vaut toujours 3. On considère une onde plane de fréquence $f \approx 25{,}27$ kHz ($ka = 0{,}54$). Les points de focalisation sont consignés dans le tableau suivant

D/a	***Position du point de focalisation***
3,2	***15,06 cm (situé sur la face de sortie du cristal)***
3,3	***16,88 cm***
3,5	***20,9 cm***
3,8	***24,37 cm***
4	***26,68 cm***
4,2	***28,99 cm***
4,5	***35,93 cm***
4,8	***38,24 cm***
5	***41,71 cm***

La courbe représentant la position de la tâche de focalisation en fonction du rapport *D/a* est donnée ci-dessous, Figure 6-30.

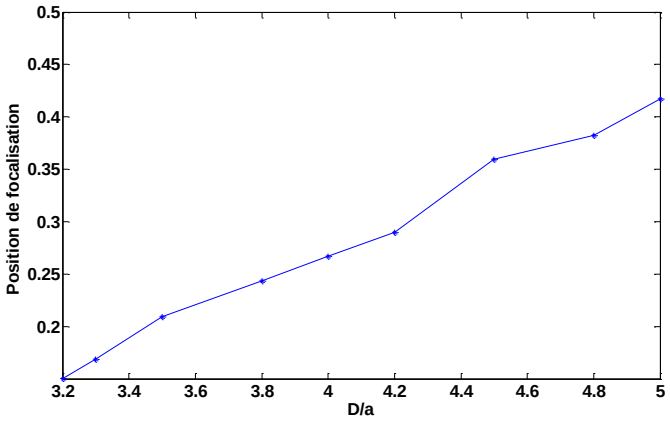


Figure 6-30 : position du point de focalisation en fonction du rapport *D/a*

Une évolution quasi linéaire du déplacement en fonction du rapport D/a est observée. Des incertitudes quant à la détermination de la position exacte du point le plus intense de la tâche de focalisation peuvent expliquer le caractère non rigoureusement linéaire de cette courbe.

6.4.2 Lentilles divergentes

Le schéma suivant présente la structure du réseau bidimensionnel de tubes en vue de la réalisation d'une lentille divergente.

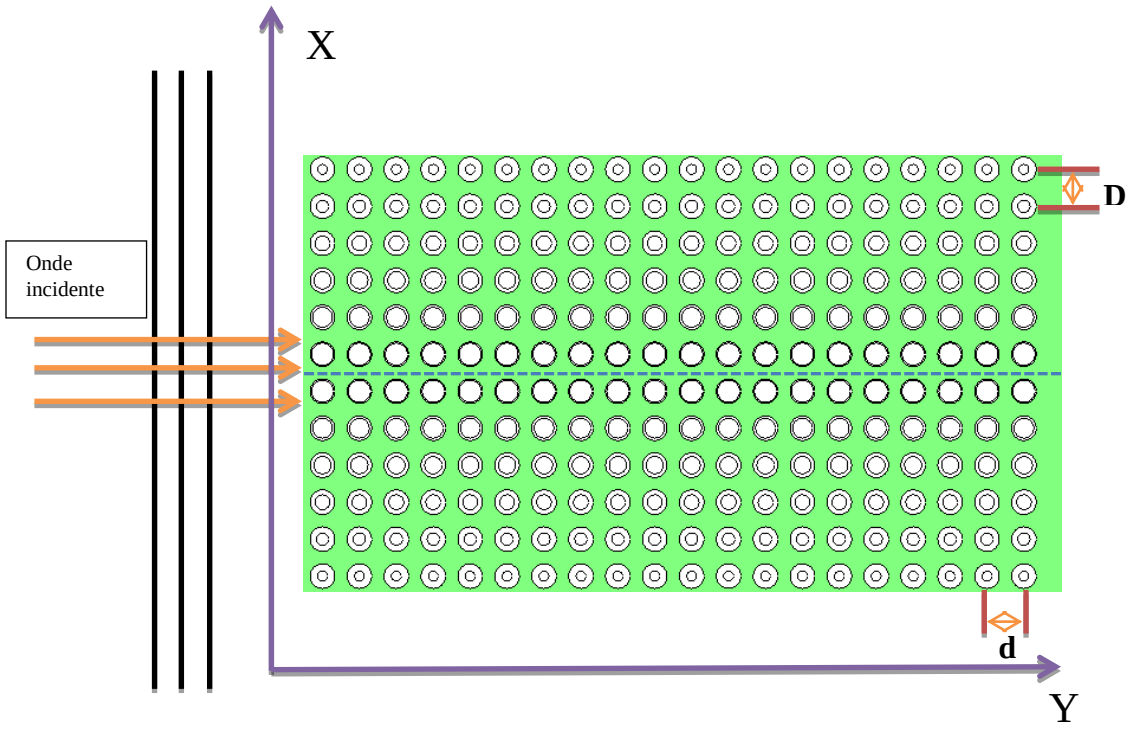


Figure 6-31 : structure de la lentille divergente

On considère des tubes de rayon externe *a* (=5 mm) et de rayon interne *b*. Les épaisseurs des tubes vérifient *b/a* = 0,4 pour les plus externes. Ce rapport augmente progressivement dans la direction X jusqu'à atteindre *b/a* = 0,9 pour les tubes les plus internes situés près de l'axe de symétrie du cristal (signalé en pointillé). Par ailleurs, on garde constant le rapport *d/a* (= 3) et le rapport *D/a* (= 4).

La Figure 6-32 présente le coefficient de transmission d'une lentille divergente formée de 12 réseaux horizontaux contenant chacun 20 tubes (*cf.* figure 6-31). On peut remarquer l'absence de bandes interdites strictes. En vue de simuler correctement la divergence du faisceau incident, ce qui ne peut être fait qu'aux maxima d'énergie transmise, on choisit une fréquence *ka* = 0,54 (*f* = 25,27 kHz) correspondant à un maximum du coefficient de transmission ($|T| \approx 1$).

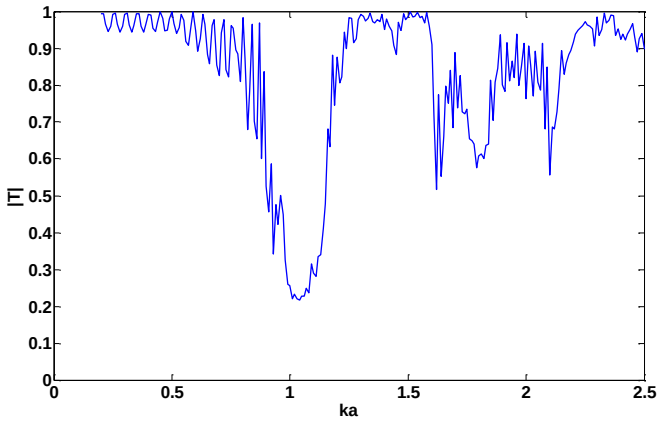


Figure 6-32 : coefficient de transmission d'une structure formée de 12 réseaux horizontaux arrangés selon la Figure 6-31 (d/a =3, D/a = 4).

Comme lors de l'étude de la focalisation, on trace aussi les pressions incidente, diffractée dans le réseau et diffusée en fonction de la variable d'espace Y (*cf.* Figure 6-33) et pour différents temps de propagation, le long d'une ligne passant par l'axe de symétrie du réseau (indiqué par la ligne horizontale en pointillé sur la Figure `6-31). La Figure 6-34 donne l'intensité en fonction de cette même variable Y. Sur les figures 6-33 et 6-34, on observe une différence dans d'évolution de l'amplitude comparativement au phénomène de focalisation. La position Y = - 5 mm correspond toujours à l'entrée du cristal et la position Y = 0,29 m à la face de sortie. Avant sa pénétration dans le cristal, l'onde présente une amplitude constante (la même que pour la focalisation où le champ de pression $p \approx 10^6$ Pa et l'intensité $I \approx 3\times10^5$ W/m^2). L'amplitude de l'onde prend une valeur minimale après le traversée de la structure ($p \approx 0{,}48\times10^6$ Pa et $I \approx 0{,}62\times10^5$ W/m^2 à la position Y = 0,508 m). La décroissance relative de l'amplitude du champ, entre son entrée dans le cristal phononique et le point en sortie où l'énergie devient minimale est approximativement de 52%. Au-delà de cette position, l'amplitude croît à nouveau lorsque l'onde s'éloigne, mais aussi beaucoup plus lentement puis devient constante ($p \approx 0{,}514\times10^6$ Pa et I $\approx 1{,}05\times10^5$ W/m^2 en Y = 0,9 m). Ce phénomène de croissance de l'amplitude peut s'expliquer par le fait que loin de la lentille (donc après la position Y = 0,508 m) les deux faisceaux obtenus par division du front d'onde de l'onde incidente se comportent non plus comme des ondes planes mais comme des ondes cylindriques.

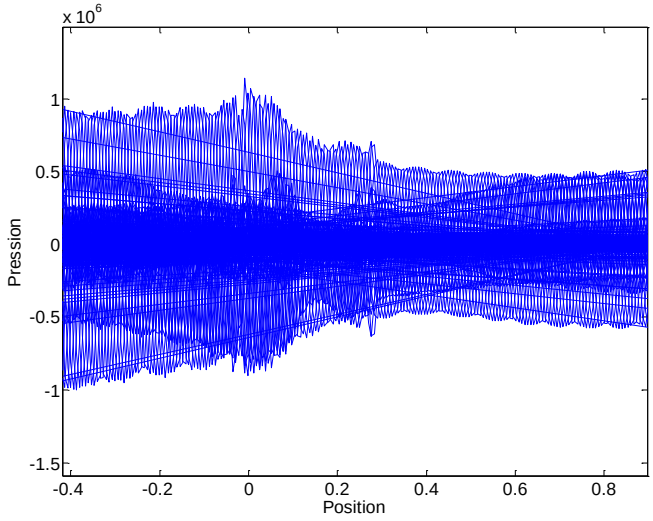


Figure 6-33 : pressions de l'onde incidente, diffractée dans le réseau et diffusée en fonction de la variable Y

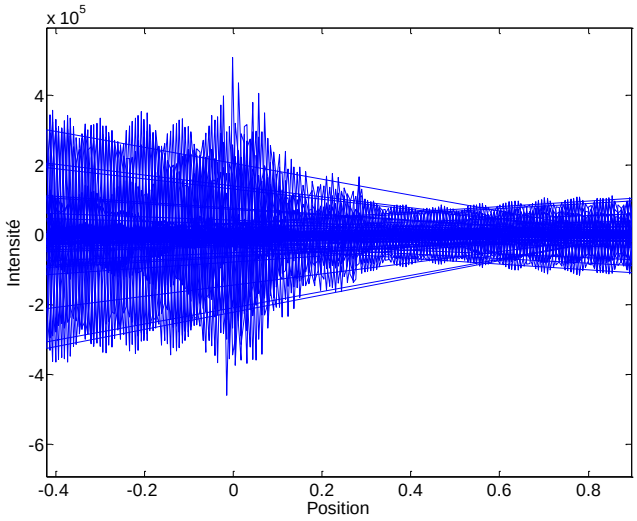


Figure 6-34 : intensité des ondes incidente, diffractée dans le réseau et diffusée en fonction de la variable Y

En s'éloignant de la lentille, elles forment des cercles de rayons croissants qui vont interférer ainsi que le montre la simulation temporelle de la Figure 6-35. A l'instant t=6,5 10^{-4} s, on voit que l'onde plane ayant pénétré le cristal phononique et ayant été transformée par les phénomènes de diffusion multiple entre les cylindres, se retrouve en sortie apparemment séparée en deux ondes non planes mais identiques, une de chaque côté de l'axe de symétrie. Il s'agit bien d'une séparation apparente car en réalité, même immédiatement après la sortie du cristal phononique, on observe une continuité (même si celle-ci paraît ténue) des fronts d'onde. D'ailleurs, au-delà d'une certaine distance, on observe une reconstruction. Etant donné que l'on s'intéresse aux phénomènes créés dans des zones pas trop éloignées du cristal,

on peut également dire que le faisceau incident a subit une « déviation » lors de la traversée du cristal.

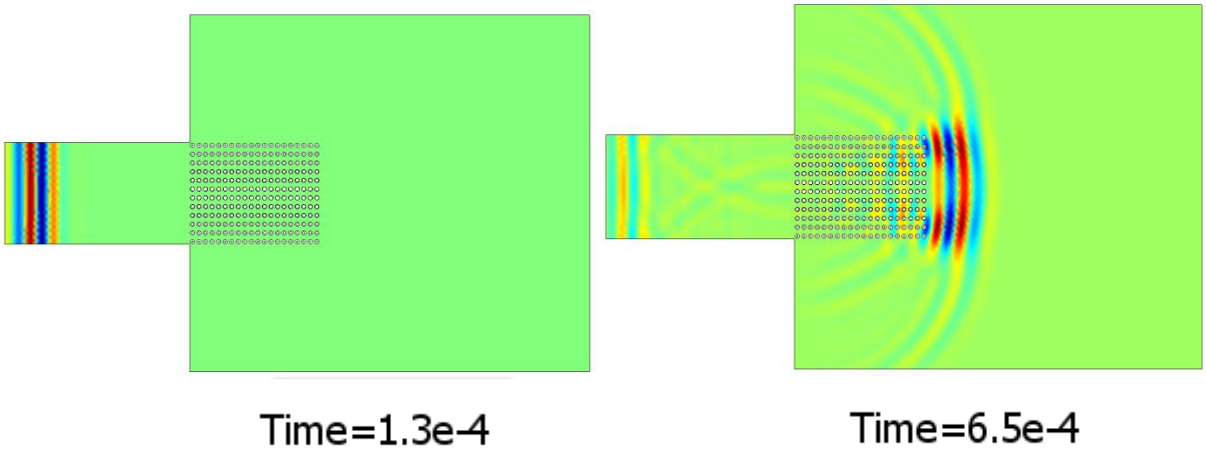


Figure 6-35 : déviation d'une onde plane incidente sur le réseau de la Figure 6-31

Le phénomène de déviation ne se présente pas très clairement lors de la simulation temporelle avec la structure du réseau de la figure 6-31.

La Figure 6-36 montre une nouvelle disposition des tubes dans le réseau. On garde tous les paramètres physiques et géométriques sauf *D/a* qui est introduit par l'expression D_N = (N+2).a, N est l'ordre d'écart entre des réseaux horizontaux. La simulation temporelle utilisant la structure de la Figure 6-36 est présentée Figure 6-37. Cette fois-ci, le phénomène de déviation de l'onde plane paraît plus net. Ce qui paraît important à souligner ici, c'est la possibilité de créer à la sortie du cristal phononique un domaine (borné) de l'espace très faiblement ou pas du tout insoné. La surface de ce domaine dépend bien évidemment de la taille du dispositif constituant la lentille. Il est en même temps indépendant de la fréquence : le choix d'une autre fréquence devrait produire des résultats similaires. En ce sens, on dispose d'un isolant phonique différent des dispositifs à bandes d'arrêt ou à forte absorption d'énergie. Les premiers ne fonctionnent que pour des fréquences particulières et renvoient l'onde incidente à son point de départ ; les seconds font appels à des matériaux particuliers (milieux à plusieurs porosités par exemple) dont la fabrication n'est pas aisée. Ici, la lentille dévie l'onde tout en la réfléchissant très faiblement (cf. figure 7-35 au temps t=6,5 10^{-4} s : l'onde réfléchie à la gauche de la lentille a une intensité très faible comparée à l'onde transmise).

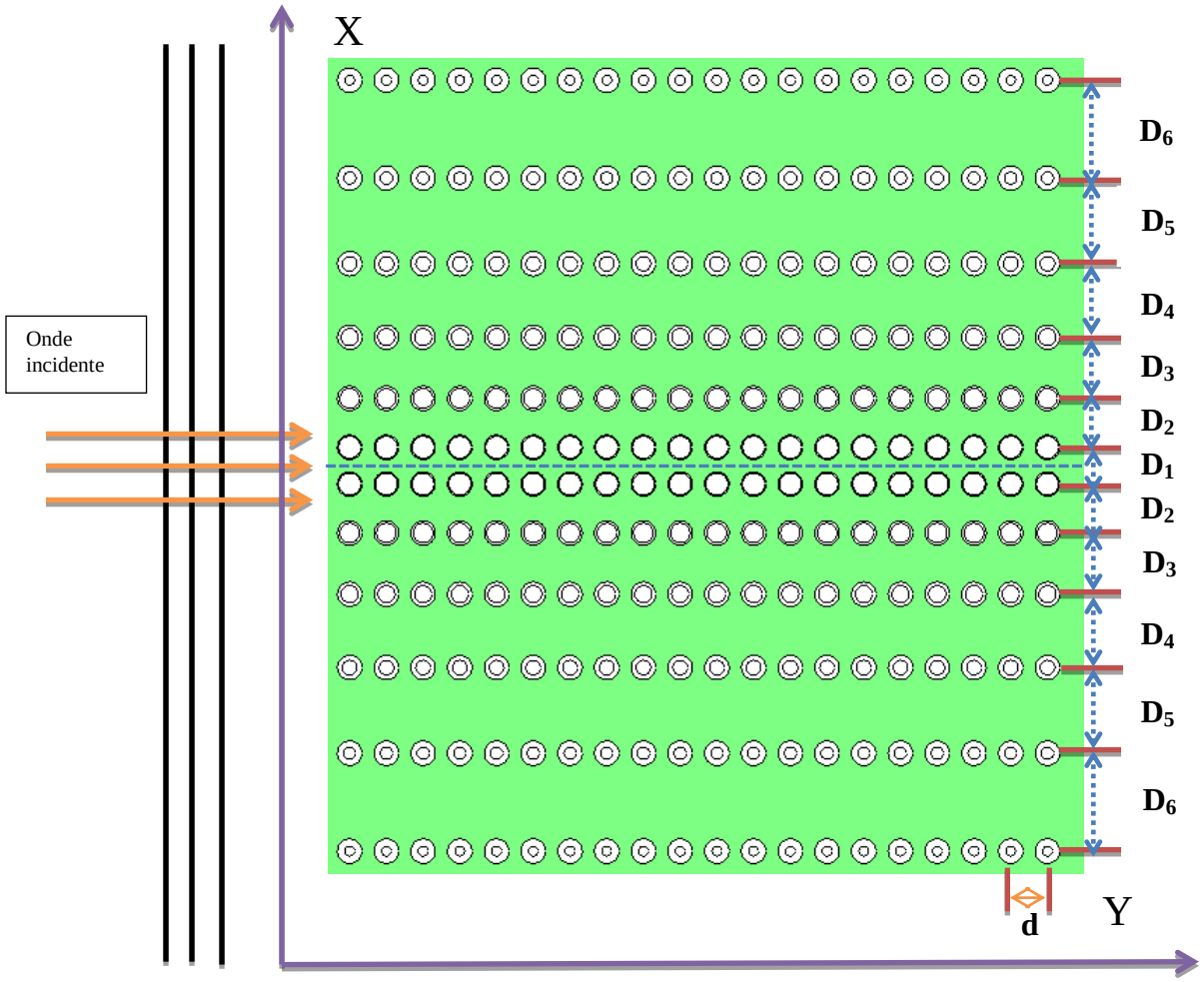


Figure 6-36 : nouvelle structure de la lentille divergente

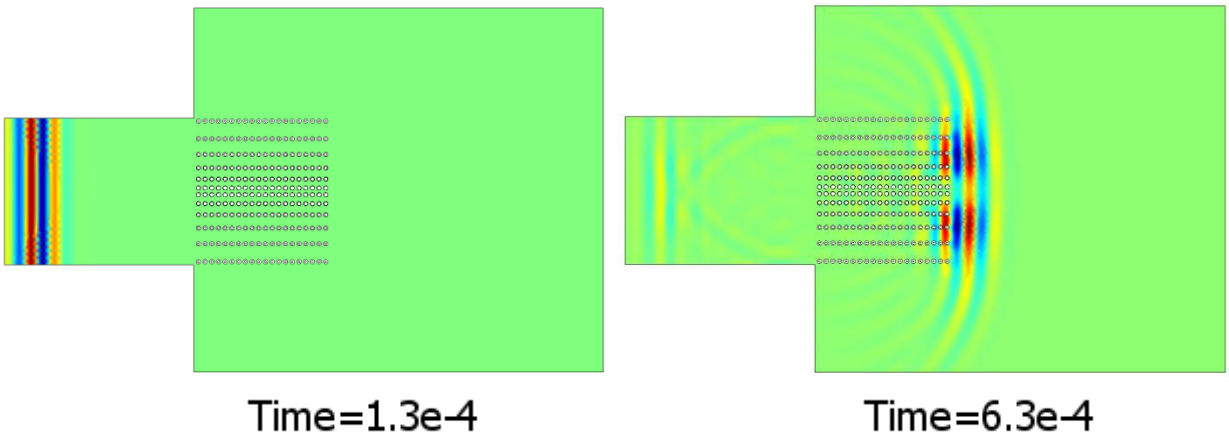


Figure 6-37 : déviation d'une onde plane incidente par le réseau de la Figure 6-36

6.4.3 Recomposition du paquet d'onde

Une des applications possible des résultats précédents va consister à créer une zone protégée située entre une lentille divergente et une lentille convergente. Le rôle de la lentille convergente en aval est de reconstituer sur une distance assez courte un front d'onde quasi identique au front d'onde incident. D'une part, la signature acoustique d'un objet placé dans la zone protégée sera de ce fait quasi-inexistante en aval. D'autre part, on aura créé une zone sanctuarisée ne renvoyant pas les ondes acoustiques dans n'importe quelle direction. Le schéma du dispositif est présenté à la figure 6-37.

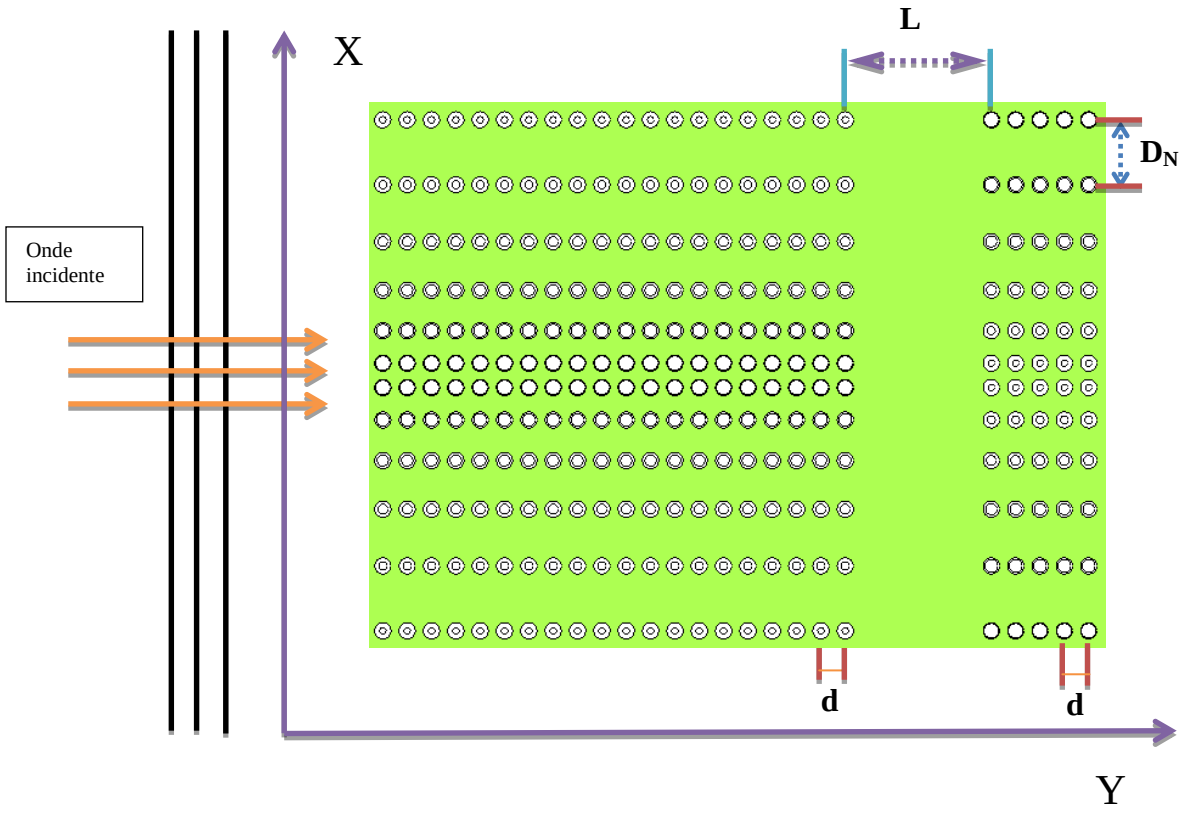


Figure 6-37 : structure de la recomposition du paquet d'onde

On place en amont de la zone une lentille divergente. Une lentille convergente de dimension plus petite est placée en aval. Tous les paramètres physiques et géométriques sont repris des simulations précédentes, en particulier, D_N = (N+2).a.

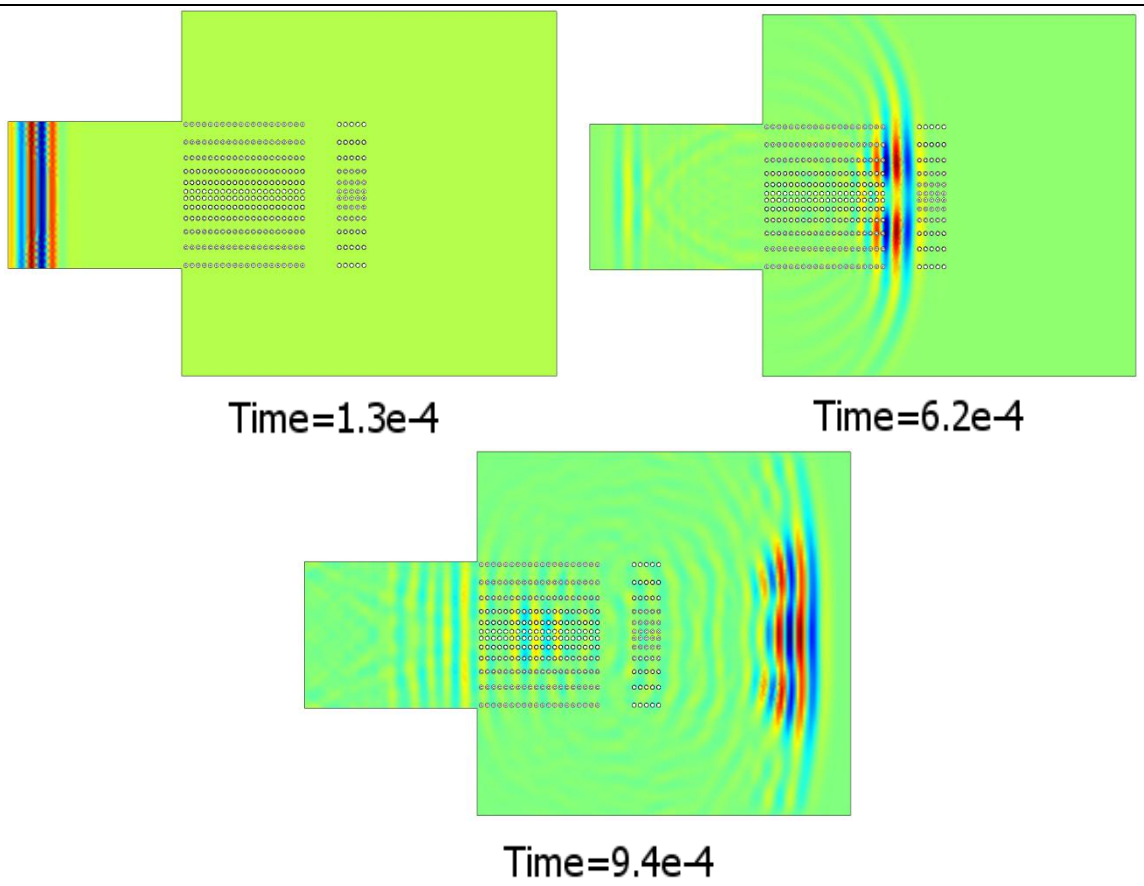


Figure 6-38 : recomposition d'une onde plane incidente sur le réseau de la Figure 6-37

Nous avons choisi 20 tubes pour chaque réseau linéaire horizontal afin que l'onde incidente puisse être bien séparée en deux ondes. Pour la même raison, nous fixons la distance entre les deux lentilles à 0,08m. La lentille convergente comporte elle 5 tubes pour chaque réseau linéaire horizontal.

Comme le montre la Figure 6-38, une onde plane est envoyée sur la lentille divergente. Après la traversée du système des deux lentilles, on retrouve quasiment la forme de l'onde incidente si l'on se place suffisamment loin de la lentille convergente.

Les pressions (Figure 6-39) et intensités (Figure 6-40) incidente, diffractée dans les réseaux et diffusée sont tracées en fonction de la variable d'espace Y (comme dans la Figure 6-33), le long d'une ligne passant par le centre de symétrie du réseau (indiqué par la ligne horizontale en pointillé sur la Figure 6-31). La valeur Y = -5 mm correspond toujours à l'entrée du cristal et la valeur $Y = 0,29m$ à la face de sortie. L'amplitude de l'onde incidente est constante (champ de pression $p \approx 10^6$ Pa et intensité $I \approx 3\times10^5$ W/m^2). Les valeurs de la pression et de l'intensité minimales après la traversée de la lentille convergente sont $p \approx 0,427\times10^6$ Pa et $I \approx 0,44\times10^5$ W/m^2 à la position Y = 0,32 m . Lorsque les ondes sortent de la

lentille convergente, on retrouve à une certaine distance les mêmes amplitudes que celles des ondes incidentes.

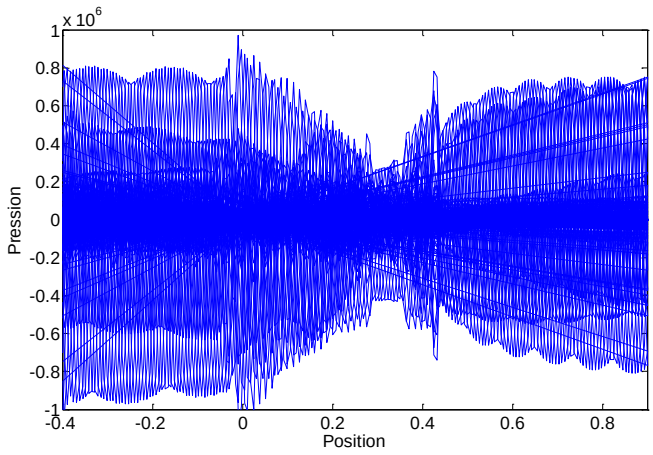


Figure 6-39 : pressions de l'onde incidente, diffractée dans les réseaux et diffusée en fonction de la variable Y

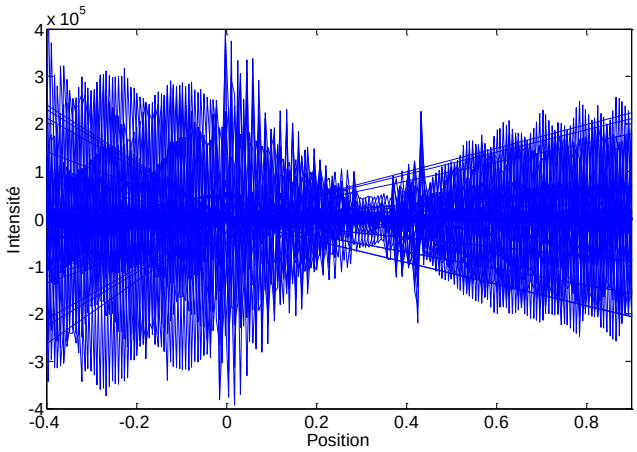


Figure 6-40 : intensité des ondes incidente, diffractée dans les réseaux et diffusée en fonction de la variable Y

6.5 Guides d'onde

Dans cette section, on présente des études sur le guidage d'ondes à l'aide de cristaux phononiques composites, formés de tubes en matériaux différents.

Ces guides peuvent être réalisés par retrait de tubes (création d'un défaut) dans un cristal phononique 2D selon une géométrie déterminée à l'avance : guides droits et/ou virages. On désigne par W_i le guide obtenu, *i* étant le nombre de rangées retirées, selon une codification utilisée en optique[4]. Dans notre cas, il ne s'agira pas de retrait mais plutôt de substitution : à partir d'un réseau 2D de tubes en polyéthylène. On réalise un guide d'ondes en remplaçant sur quatre rangée les tubes par des tubes en acier. Selon la codification mentionnée ci-dessus, on réalise ainsi un guide W_4. Les guides W_1 et W_2 présentent des pertes (d'énergie acoustique) assez fortes et ne sont donc pas intéressants pour le guidage d'ondes ni commodes pour la visualisation du phénomène. C'est pourquoi nous choisissons un indice élevé (4) assurant moins de pertes. Trois guides W_4 sont examinés : un guide tournant à un seul virage, un guide tournant à quatre virages et un guide en fourche (ou en Y).

Rappelons que l'intérêt du guidage en utilisant un cristal phononique réside non seulement dans la maîtrise du lieu et de la largeur de la porte de sortie de l'onde acoustique, mais aussi dans la modulation de l'énergie acoustique sortante par rapport à l'entrante. Dans les dispositifs présentés, nous ne nous sommes pas capables de créer de l'amplification. Tous les cas traités traduisent des pertes par rapport à l'entrée.

[4] H. Rigneault *et al*., *La nanophotonique*, Hermès Sciences, Lavoisier 2005

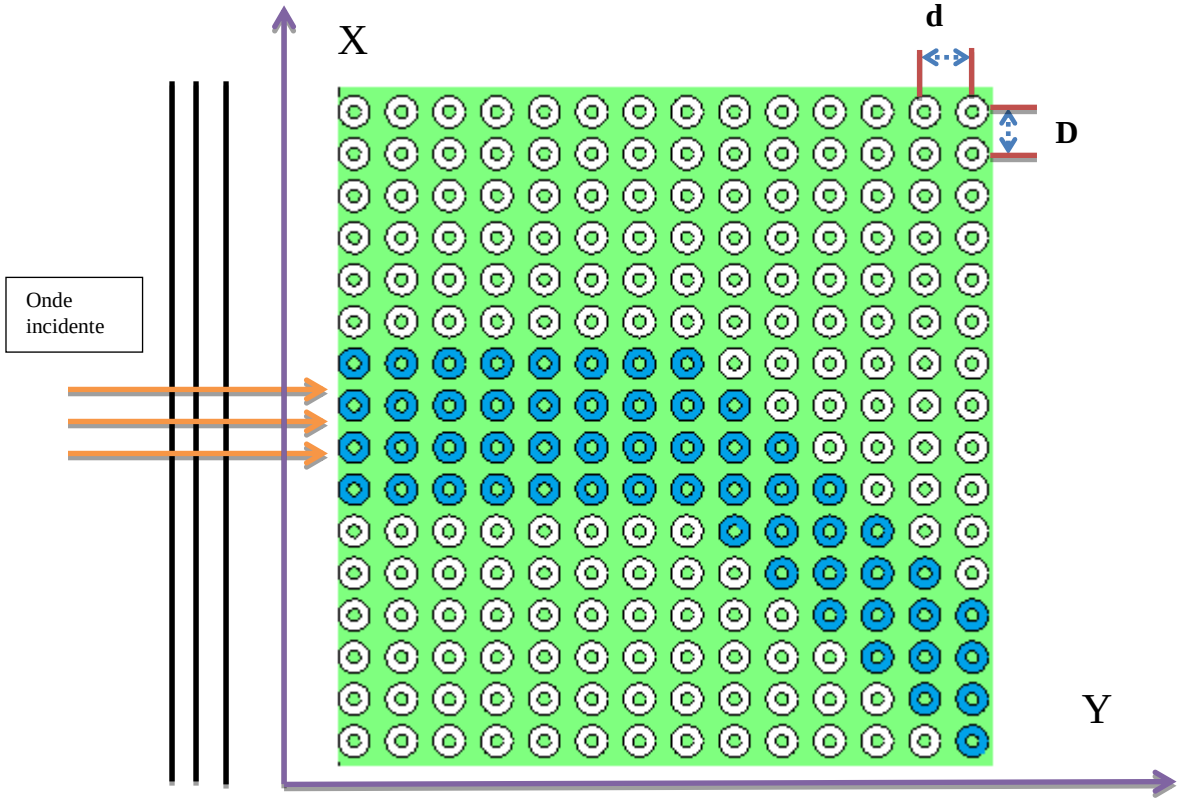


Figure 6-41 : structure de guide W_4 dans un cristal phononique présentant un virage. Les tubes blancs sont en polyéthylène tandis que les tubes bleus sont en acier.

La Figure 6-41 montre une première structure de guide W_4. Tous les tubes ont un rayon externe a = 5 mm et un rayon interne $b = 0,4a$. On garde constant le rapport $d/a = 3$ qui détermine l'écartement entre deux tubes d'un réseau linéaire horizontal ainsi que le rapport $D/a = 2,647$ fournissant la distance entre deux réseaux horizontaux. Les tubes blancs sont en polyéthylène et les tubes bleus en acier.

Une onde plane incidente (d'extension infinie) de fréquence f = 25,27 kHz située dans la bande interdite du réseau 2D en polyéthylène tout en étant dans la bande passante du réseau de même géométrie mais avec des tubes en acier est envoyée sur la structure, cf. figure 6-41. Elle rencontre tous les tubes en entrée au même instant. La Figure 6-42, montre les simulations à 5 instants différents. A l'instant t = 3,7x10^{-4} s l'effet de gap dans le réseau 2D de polyéthylène n'est pas encore effectif. A l'instant t = 4,4x10^{-4} s on remarque que l'énergie acoustique demeure localisée majoritairement dans le guide W_4. On observe bien des ondes dans la partie où les tubes sont en polyéthylène, mais elles ont une amplitude très faible comparativement à celles dans le guide. Aux instants ultérieurs t = 5,3x10^{-4} s puis t = 5,9x10^{-4} s, on peut suivre le trajet de l'onde dans le guide ; depuis le virage jusqu'à la sortie dans la

milieu environnant. On peut noter que la déviation de faisceaux acoustiques peut être obtenue par d'autres moyens, *cf.* Z. He *et al*.[5]

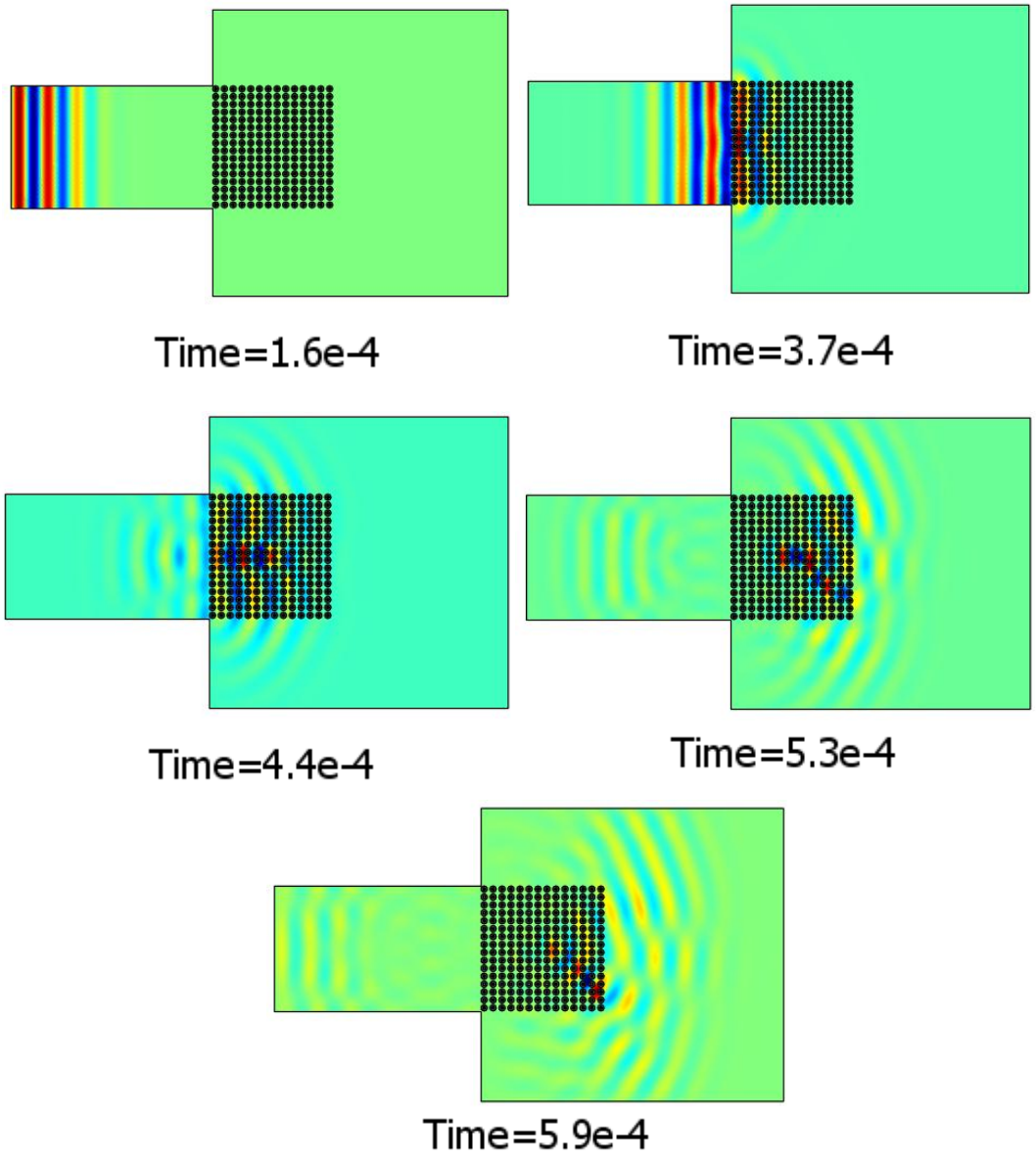


Figure 6-42 : simulation numérique du guide tournant présentant un seul virage

Les Figures 6-43 et 6-44 montrent chacune une structure de guide W_4 un peu plus complexe que celle qui vient d'être étudiée. Les simulations temporelles sont présentées dans les Figure 6-45 et Figure 6-46.

[5] Zhaojian He, Feiyan Cai, Zhengyou Liu, Guiding acoustic waves with graded phononic crystals, Solid State Communications 148, pp. 74-77 (2008)

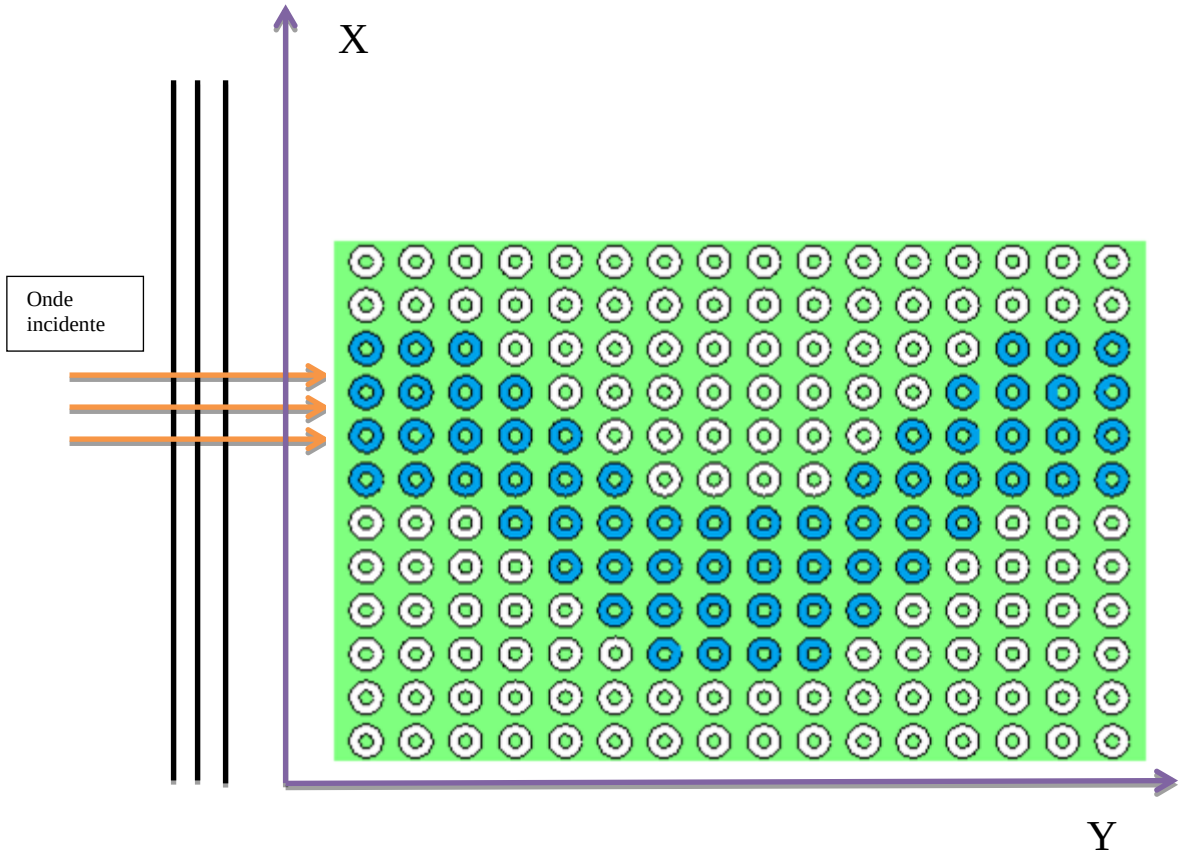


Figure 6-43 : structure de guide W_4 dans un cristal phononique présentant quatre virages. Les tubes blancs sont en polyéthylène tandis que les tubes bleus sont en acier.

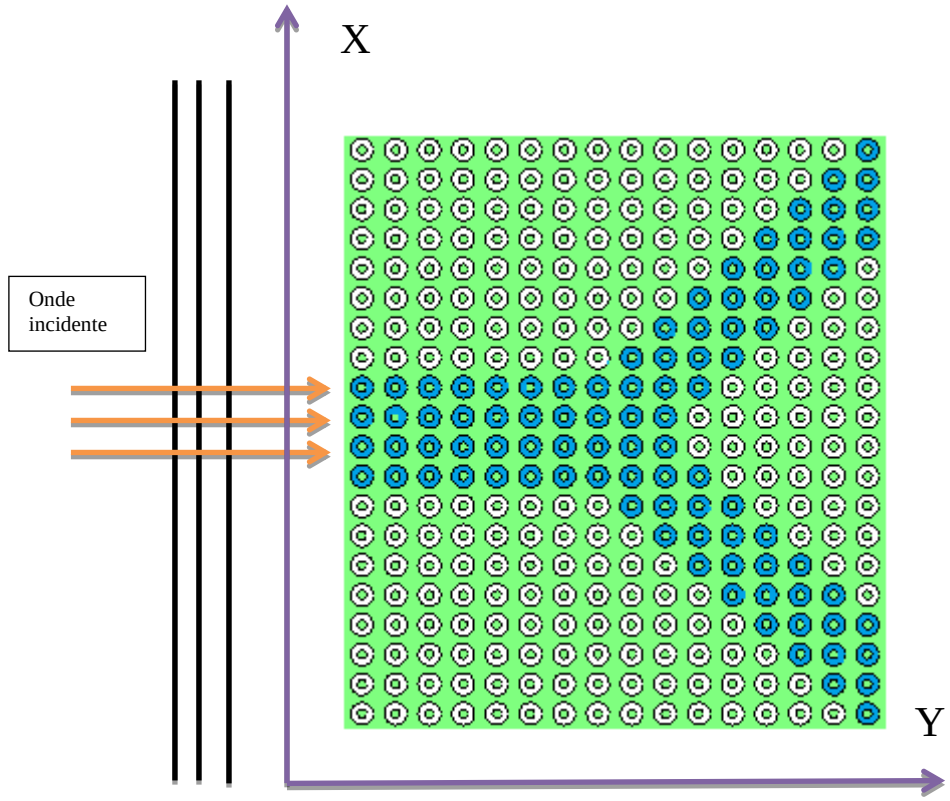


Figure 6-44 : structure de guide W_4 dans un cristal phononique présentant une fourche (ou un Y). Les tubes blancs sont en polyéthylène tandis que les tubes bleus sont en acier.

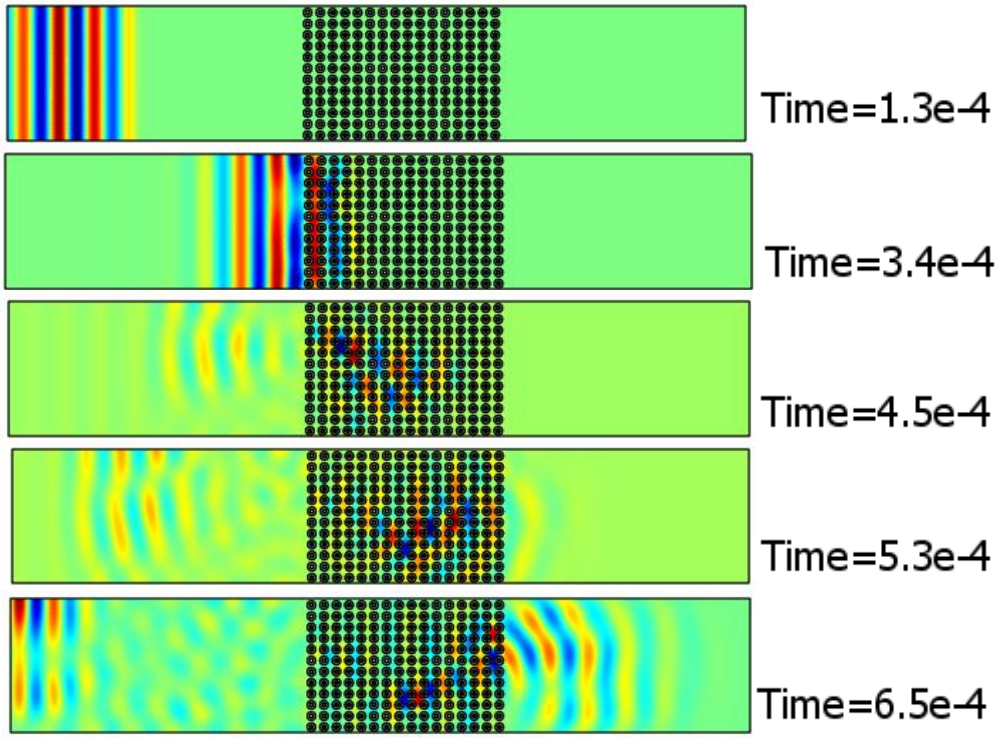


Figure 6-45 : simulation numérique pour le guide d'onde en forme de V

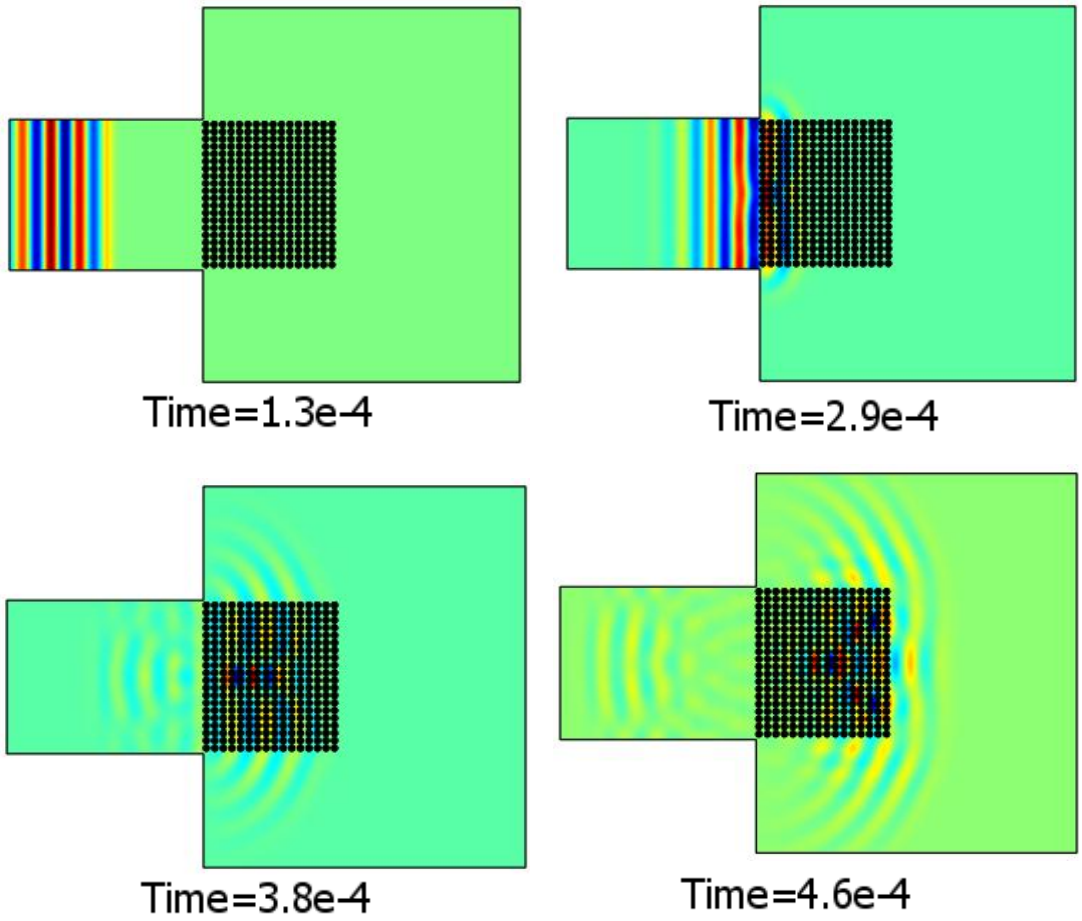


Figure 6-46 : simulation numérique pour le guide d'onde en forme de Y

On doit souligner le fait que dans les trois simulations précédentes le matériau le plus dense (acier) est celui utilisé pour initier le guidage. Si on intervertit les rôles des tubes en polyéthylène et en acier, on n'est pas assuré des résultats précédents, surtout si on choisit la même fréquence pour l'onde incidente. Pour pouvoir guider une onde il faudrait que la fréquence de l'onde plane incidente soit telle qu'elle se trouve à la fois dans la bande interdite de l'acier et dans la bande passante du polyéthylène.

6.6 Conclusion

On a réalisé des simulations temporelles et fréquentielles d'ondes se propageant dans des SP2D à l'aide du logiciel de calcul par éléments finis COMSOL. D'abord, on introduit le *modus operandi* qui comprend la réalisation d'un schéma de la structure, l'écriture des conditions aux frontières entre les domaines fluide et solide et la définition des maillages. Dans la deuxième partie, on vérifie les résultats du chapitre 3 en utilisant des simulations numériques portant sur des cristaux formés de réseaux de tubes identiques qui sont donnés par COMSOL. Dans la troisième partie, on étudie des réseaux de tubes avec des épaisseurs différentes. Dans ce cas-là, des lentilles acoustiques sont créés, soit convergentes soit divergentes. L'association de lentilles convergente et divergente situées à une certaine distance l'une de l'autre permet de recomposer le paquet d'onde incident, presque à l'identique, après la traversée de la structure globale. Les propriétés de convergence, de divergence et de recomposition de faisceaux acoustique sont mises en évidence par des simulations temporelles. Dans la dernière partie, des simulations portant sur des guides d'onde soit en forme de Y soit en forme de V sont présentées.

Références

1 Suxia Yang, J. H. Page, Zhengyou Liu, M. L. Cowan, C. T. Chan, and Ping Sheng, Focusing of Sound in a 3D Phononic Crystal, Phys. Rev. Lett. 93 (2), 024301-1-4 (2004)

2 Alfonso Climente, Daniel Torrent, and José Sanchez-Dehesa, Sound Focusing by gradient index sonic lenses, Appl. Phys. Lett. 97, 104103 (2010)

3 J.-M. Lourtioz *et al.*, *Les cristaux photoniques ou la lumière en cage*, HermèsSciences Lavoisier (2003)

4 H. Rigneault *et al*., *La nanophotonique*, Hermès Sciences, Lavoisier 2005

5 Zhaojian He, Feiyan Cai, Zhengyou Liu, Guiding acoustic waves with graded phononic crystals, Solid State Communications 148, pp. 74-77 (2008)

CONCLUSION GENERALE

Les structures phononiques (ou « cristaux phononiques » en s'inspirant directement de la physique des solides) ont ouvert la voie à de nouvelles générations de dispositifs présentant des propriétés acoustiques que ne peuvent pas fournir les matériaux traditionnels. Le domaine d'investigation est de ce fait très vaste. Dans ce travail, on s'est limité à des structures phononiques très simples composées de tubes en acier ou en polyéthylène immergés (de rayons externes de 2 mm) dans l'eau. D'une part, de telles structures sont faciles à réaliser en vue de campagnes expérimentales futures. D'autre part, on se situe dans une gamme de fréquence relativement basse correspondant à l'acoustique sonore voire ultrasonore, où des telles structures peuvent entrer dans la conception de barrières acoustiques, de filtres passifs, de lentilles et de guides d'ondes. Des études similaires ayant été réalisées avec d'autres matériaux et dispositifs, il était surtout question ici de montrer l'efficacité de moyens alternatifs.

Au niveau numérique, nous sommes passés d'une méthode plutôt analytique nous ayant permis de comprendre les propriétés de base des structures phononiques (chapitres 1 à 5) à la méthode des éléments finis (chapitre 6) nécessaire pour concevoir les lentilles et les guides d'ondes. Les lentilles et les guides d'ondes que nous avons présentés sont des éléments de base que seule une utilisation intensive de la méthode des éléments finis permettra de perfectionner et d'associer en vue de concevoir des dispositifs plus complexes. Deux pas sont faits dans ce sens : d'abord, l'association d'une lentille divergente et d'une lentille convergente en vue de "sanctuariser" acoustiquement un domaine borné de l'espace, ensuite l'association de deux types de tubes pour créer des chemins prédéfinis aux ondes acoustiques incidentes et dévier leurs trajectoires initiales.

Résumé

Des structures phononiques ou cristaux phononiques constitués de réseaux ordonnés de tubes en acier favorisent l'existence de bandes interdites et de bandes passantes. Les premières sont des domaines fréquentiels où une onde incidente ne peut traverser de telles structures. En introduisant de légères variations sur le positionnement des tubes, il est possible d'élargir considérablement les bandes interdites. En faisant varier l'épaisseur des tubes dans un cristal phononique à symétrie carrée, l'effet d'une onde plane incidente parallèlement à la direction de variation est de créer de fines bandes passantes dans la bande interdite obtenue initialement lorsque les tubes ont même épaisseur. Si l'on envoie l'onde incidence perpendiculairement à la direction de variation de l'épaisseur des tubes, on crée des lentilles acoustiques convergentes ou divergentes déviant les faisceaux acoustiques. Enfin, lorsque dans un cristal composé de tubes en polyéthylène on insère une allée de tubes en acier en forme de virages, les simulations numériques montrent qu'une onde acoustique peut être guidée aux fréquences correspondant aux bandes passantes du cristal phononique entièrement en acier.

Mots clés : structures phononiques, bandes interdites, lentilles acoustiques, guides d'onde

Abstract

Phononic structures or crystals made of rows of steel pipes privilege the existence of band gaps and pass bands. The first ones are frequency domains where the incident wave cannot pass through the structure. By introducing small changes about the positioning of the pipes, it is possible to expand greatly the width of the band gaps. By varying the thickness of the pipes in a phononic crystal with a square symmetry, the effect of an incident plane wave which propagates in the direction of the variation is to create thin pass bands in the band gap obtained initially when the pipes have the same thickness. If the incidente wave propagates perpendicularly to the direction of the thickness variation of the pipes, convergent or divergent acoustic lenses which could deviate acoustic beams are created. Finally, when a crystal constituted by the steel pipes is inserted in an array of polyethylene pipes, numerical simulations show that a sound wave can be guided at frequencies corresponding to the pass bands of a steel phononic crystal.

Key words: phononic structures, band gaps, acoustic lenses, wave guides

Groupe Ondes Acoustiques (GOA)
Laboratoire Ondes et Milieux Complexes (LOMC)
UMR CNRS 6294, Université du Havre