HAL
open science

Etude du comportement mécanique et du pliage d'un anneau de tenségrité à base pentagonale

Anh-Dung Nguyen

To cite this version:

Anh-Dung Nguyen. Etude du comportement mécanique et du pliage d'un anneau de tenségrité à base pentagonale. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2009. Français. NNT : . tel-00858717

HAL Id: tel-00858717

https://theses.hal.science/tel-00858717

Submitted on 6 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

T H E S E

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE MONTPELLIER II

Discipline : Mécanique Génie Civil

Ecole Doctorale : Information, Structures, Systèmes

présentée et soutenue publiquement

par

NGUYEN Anh Dung

Le 3 Décembre 2009

ETUDE DU COMPORTEMENT MECANIQUE ET DU PLIAGE D'UN ANNEAU DE TENSEGRITE A BASE PENTAGONALE

JURY

M. LA BORDERIE Christian	Professeur	Université de Pau	Rapporteur
M. WIELGOSZ Christian	Professeur	Université de Nantes	Rapporteur
M. MILLARD Alain	Ingénieur de Recherche	CEA\DEN Saclay	Examinateur
M. CEVAËR Franck	Maître de Conférences	Université Montpellier 2	Examinateur
M. DUBE Jean-François	Professeur	Université Montpellier 2	Directeur de Thèse
M. QUIRANT Jérôme	Maître de Conférences	Université Montpellier 2	Co-Directeur
M. MOTRO René	Professeur	Université Montpellier 2	Membre invité

REMERCIEMENTS

Cette thèse est le résultat de trois ans de recherche au sein de l'équipe Conception en Structures du Laboratoire de Mécanique et Génie Civil de l'Université de Montpellier II.

Je tiens à remercier Monsieur René MOTRO d'avoir initialisé ce sujet et pour ses conseils précieux qu'il m'a donnés pendant la réalisation du travail.

Je remercie tous particulièrement Messieurs Christian LA BORDERIE – Professeur à l'Université de Pau, Christian WIELGOSZ – Professeur de l'Université de Nantes et Alain MILLARD – Ingénieur de Recherche au CEA, qui ont accepté d'examiner et rapporter ce travail.

Que Monsieur Jean-François DUBE, directeur de thèse, Messieurs Jérôme QUIRANT et Franck CEVAËR, codirecteurs de thèse, reçoivent toute ma reconnaissance pour leurs suivis scientifiques et pédagogiques qui m'ont permis de réussir cette étude.

Je souhaiterais également adresser mes remerciements à Messieurs Bernard MAURIN, Bertrand WATTRISSE, Alexandre MARTIN et Nicolas ANGELLIER pour leurs conseils en informatique et technique.

Je voudrais exprimer mes sincères gratitudes à Messieurs Gille CAMP, Alain CLARY, Thierry VIGO, Gilbert GOBO, Gilles REQUILE et Mesdames Reine BONNET, Jeannine BLANC pour la disponibilité, la sympathie et les soutiens qu'ils m'ont témoignés.

Toute mon amitié à mes collègues Chiara SILVESTRI, Marine BAGNERIS et Sébastien MORTEROLLE avec qui j'ai partagé le bureau 219 pendant ces années et avec qui j'ai eu des discussions très précieuses.

Enfin, je tiens à adresser un grand merci aux membres du LMGC et du Département Génie Civil de l'IUT de Nîmes qui ont partagé avec moi une ambiance idéale de travail pendant ces 3 ans inoubliables.

Ma profonde reconnaissance est également exprimée à ma famille, mon épouse et mes amis. Sans eux ce travail n'aurait pu être accompli.

Anh Dung NGUYEN

SOMMAIRE

Introduction générale 7
Chapitre 1 : Systèmes de tenségrité déployables 9
Introduction 11
1.1 Tenségrité 11
1.2 Systèmes de tenségrité déployables 23
Conclusion 26
Chapitre 2 : Anneau de tenségrité 27
Introduction 29
2.1 Origine 29
2.2 Pliabilité 30
2.3 Construction d'un module 31
2.4 Variété géométrique et applications 33
2.5 Conception d'un prototype de l'anneau de tenségrité à base pentagonale 35
2.6 Montage de l'anneau 41
Conclusion 44
Chapitre 3 : Etude du comportement mécanique 45
Introduction 47
3.1 Etude des états d'autocontrainte 47
3.2 Réponse d'un module sous chargement 51
3.3 Première expérimentation sur l'anneau 58
3.4 Etude paramétrique : influence de la raideur des éléments 60
3.5 Etude de l'homogénéisation 62
3.6 Comportement en flexion 65
Conclusion 69
Chapitre 4 : Identification de l'autocontrainte 71
Introduction 73
4.1 Identification de la tension 73
4.2 Problème lié à l'existence de la rigidité en flexion 77
4.3 Solution 79
Conclusion 89
Chapitre 5 : Etude du pliage 91
Introduction 93
5.1 Approche numérique 93
5.2 Approche analytique 96
5.3 Etude expérimentale 101
5.4 Comparaison Essais - Calcul 106
Conclusion 109
Conclusions et perspectives 111
Références bibliographiques 113
A Géométrie 119
B Aspects mécaniques 123
C Modèle sans inertie en flexion pour tensiomètre 127
D Fichiers informatiques 131

Introduction générale

Le travail présenté dans cette thèse porte sur une famille de systèmes mécaniques constructifs innovants : les systèmes de tenségrité pliables. Ces structures présentent de nombreux atouts pour de multiples domaines d'application. Elles font ainsi l'objet de recherches de la part d'architectes, d'ingénieurs, de mécaniciens, de mathématiciens et de biologistes dans le monde entier. Nous pouvons citer comme qualités essentielles : performance mécanique, légèreté et pliabilité. Dans le cadre de notre étude, l'objectif est de mettre en valeur les qualités mécaniques des ces systèmes en tant que structure porteuse, légère, pliable et/ou déployable. Bien que la conception de systèmes de tenségrité déployables ne soit pas nouvelle, l'étude poursuivie sur un anneau de tenségrité, n'a jamais été réalisée. De nouvelles applications possibles seront aussi abordées.

Ce manuscrit se décompose en 5 chapitres, chacun visant à exposer une étude ou une problématique concrète.

Chapitre 1 : Systèmes de tenségrité déployables

Il s'agit d'une étude bibliographique sur les travaux référencés dans la littérature. Nous discutons d'abord sur l'origine, le principe et les notions de base de la « tenségrité ». Ensuite, la famille des systèmes pliables est décrite. Il est cependant possible qu'une structure de tenségrité soit aussi un système pliable. Certains exemples de ces systèmes peuvent donc se retrouver dans cette sous-famille. L'accent est mis sur les systèmes de tenségrité pliables/dépliables qui sont l'axe central de notre travail.

Chapitre 2 : Anneau de tenségrité

De l'origine à la construction géométrique d'un module, nous définissons et justifions notre choix de sujet de recherche : l'anneau de tenségrité à base pentagonale. Trois modules sont proposés, l'un d'eux est réalisé. Les éléments de la structure ainsi que les dispositifs de connexion sont décrits. Différents modes de montage seront également détaillés.

Chapitre 3 : Etude du comportement mécanique d'un module

Dans ce chapitre, le comportement mécanique d'un module est simulé numériquement. Le but est d'étudier la réponse du système soumis à un chargement. Le comportement unilatéral des câbles et l'influence de la raideur des éléments constitutifs sur la rigidité globale de l'anneau sont aussi pris en compte et analysés. Cette étude est poursuivie par le développement d'un modèle rhéologique de type «macro élément ». L'étude du

comportement en flexion d'un assemblage linéaire de 4 modules selon l'axe du système est initiée.

Chapitre 4 : Contrôle de la mise en autocontrainte

La mesure de l'autocontrainte introduite dans le système est le cœur de ce chapitre. Un outil empirique permettant d'identifier les efforts dans les câbles à l'aide d'un tensiomètre est développé en tenant compte de l'inertie de flexion des câbles.

Chapitre 5 : Etude du pliage

Il convient de rappeler que cet anneau de tenségrité peut se plier par allongement jusqu'à détension complète d'un certain nombre de câbles judicieusement choisis. Nous développons dans cette partie, deux modèles analytique et numérique destinés à modéliser le déploiement du système. Une campagne expérimentale est ensuite menée pour vérifier la pertinence des modèles théoriques.

Chapitre 1 : Systèmes de tenségrité déployables

“All structures, properly understood, from the solar system to the atom, are tensegrity structures. Universe is omnitensional integrity.”

Richard Buckminster Fuller

Introduction

Dans ce chapitre, sont présentés les systèmes de tenségrité en général et les systèmes de tenségrité déployables en particulier. Un préambule résume les éléments essentiels du concept de tenségrité : l'émergence et l'état de l'art. Cela justifie le fondement de notre recherche. Ensuite, l'analyse bibliographique porte sur les caractéristiques de ces systèmes en tant que systèmes déployables dont je présente quelques exemples contemporains ainsi que les méthodes de pliage qui leurs sont appliquées.

1.1 Tenségrité

Après une présentation de l'évolution de l'architecture, nous verrons comment différents chercheurs sont arrivés à énoncer le concept de tenségrité. Le principe de la tenségrité ne peut être appréhendé sans certains pré-requis qui seront exposés.

1.1.1 Définition

1.1.1.1 Origine

Jusqu'au 19ème siècle et l'avènement des structures en acier, la majorité des matériaux du génie civil sont plus performants en compression qu'en traction. De ce fait, les ouvrages sont conçus et bâtis en favorisant la résistance en compression. Mais ce n'est sûrement pas la façon la plus efficace d'utiliser les matériaux en raison du phénomène de flambement des éléments comprimés lorsque l'élancement est élevé. Par ailleurs, ces édifices sont souvent constitués de pierres ou de briques faisant du poids propre la charge prédominante par rapport à la charge d'exploitation.

Figure 1.1. Pont du Gard Nîmes 1er siècle

Figure 1.2. Cathédrale St. Pierre Montpellier 1536

La Figure 1.1 présente un exemple de l'architecture romaine et la Figure 1.2 montre une cathédrale du style moyenâgeux. Certes, on peut trouver quelques abris ou ponts suspendus assez légers mais leur capacité portante est assez limitée. Il faut attendre le 19ème siècle et de

nombreux progrès technologiques dans la production de l'acier, pour que des ouvrages d'art moins massifs apparaissent. Les nouveaux matériaux, plus légers, aussi robustes en traction qu'en compression, permettent aux structures d'une part d'avoir une forme plus élancée, d'atteindre une hauteur plus importante et, d'autre part, de réduire le temps et le coût de la construction. Les premières structures et aussi les plus remarquables du génie civil que l'on peut considérer comme légères et résistantes sont le pont de Brooklyn (Figure 1.3) et la tour Eiffel (Figure 1.4).

Figure 1.3. Brooklyn bridge – New York 1883

Figure 1.4. Tour Eiffel – Paris 1889

C'est grâce à tous ces préalables, à l'imagination et au travail laborieux de l'homme, ou plus concrètement de trois pionniers que la tenségrité a vu le jour. C'est à R. B. Fuller, inventeur, ingénieur et architecte américain que l'on doit le mot tenségrité. Il s'agit de la traduction du mot anglais tensegrity [FUL61], [FUL62] qui est la contraction de **tens**ional (ou **tens**ile) et int**egrity** ([1]). Cette notion sous-entend un système constructif dont les éléments tendus forment un réseau continu.

Les principaux promoteurs de la tenségrité, qui chacun de leur côté, ont développé ou utilisé le concept sont : R. B. Fuller, K. D. Snelson et D. G. Emmerich. Selon R. Motro [MOT03], c'est Fuller qui a énoncé le concept de tenségrité. Snelson, un de ses élèves, a réalisé les modèles physiques permettant de concrétiser l'idée que Fuller n'avait pu matérialiser. Emmerich quant à lui, d'une façon indépendante, et inspiré par la sculpture Gleichgewichtkonstruction de K. Ioganson, a décrit la tenségrité comme étant des "structures tendues et autotendantes" [EMM64]. Le Tableau 1.1 résume les éléments historiques autour de la découverte de la tenségrité.

---

[1]Nous trouvons, dans les différentes publications de Fuller, ces deux différents termes soit tensional soit tensile. Bien que le premier soit plus utilisé par l'inventeur américain et aussi souvent cité par la plupart des chercheurs du domaine, c'est le second terme qui a été enregistré pour son brevet [FUL62].

Cependant, la question de la paternité entre les trois inventeurs (Fuller, Snelson et Emmerich) est une controverse persistante puisque Snelson réclame toujours son droit d'invention [SNE90] [VAL04]. Cette polémique est à l'origine d'une multitude d'études consacrées à clarifier la question de l'antériorité des brevets. Les lecteurs intéressés peuvent trouver dans l'édition spéciale de International Journal of Space Structures Vol.11 de 1996, des discussions instructives et multilatérales sur ce sujet.

1.1.1.2 Définitions

Le concept de tenségrité chez les différents inventeurs, converge vers la caractérisation d'un système constructif en auto-équilibre formé d'un ensemble discontinu d'éléments comprimés inséré dans un réseau continu d'éléments tendus. La traction et la compression s'équilibrent pour former une configuration stable et rigide. Un demi-siècle après l'émergence de la tenségrité, de nombreuses définitions sont proposées par les chercheurs passionnés par cette structure fascinante. Sans être exhaustif, nous en listons quelques unes dans les lignes suivantes.

D'une manière très poétique, Fuller décrit la tenségrité comme « *des îlots de compression au sein d'un océan de tension* » [FUL60]. Selon cet auteur, le principe de la tenségrité est valable à toute échelle micro ou macroscopique [FUL61]. Quelques années après, il écrit dans son livre « Synergetics » [FUL75] une explication plus approfondie : « *Tenségrité décrit un principe de relation structurelle où la forme structurale est garantie par le comportement complètement fermé, continu et tendu du système et non par le comportement des membres discontinus et localement comprimés* ».

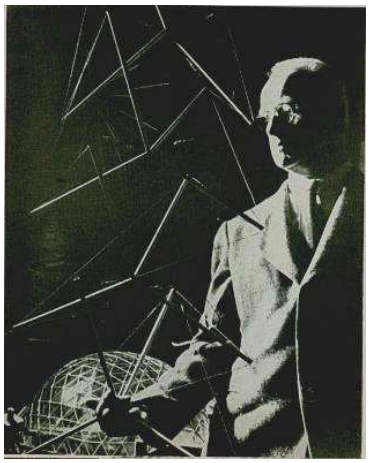


Figure 1.5. Fuller et son modèle physique

Basé sur le travail effectué par Fuller, A. Pugh définit la tenségrité de la façon suivante [PUG76] : « *Un système de tenségrité est établi quand un ensemble discontinu de composants comprimés interagissent avec un ensemble continu de composants tendus pour générer un volume stable dans l'espace* »

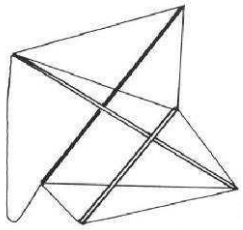
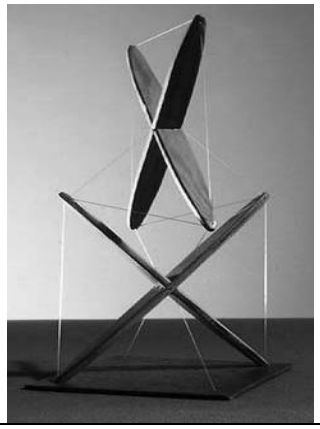
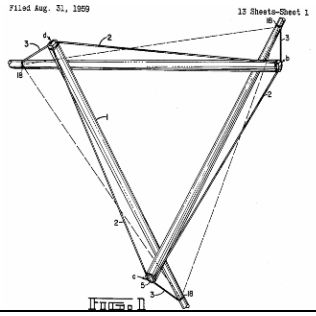
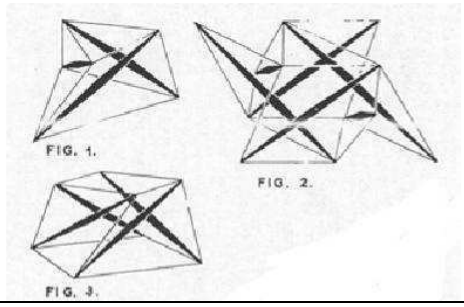
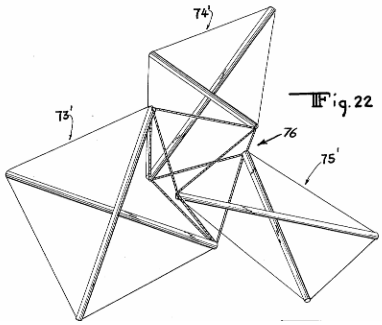
Années	Evénements & Auteurs	Illustrations
1921	*Gleichgewich konstruktion* Karl Ioganson [MOT03]	
1948	*Plywood X-piece* Snelson K. D. [SKE90]	
1962	*Tensile – Integrity structure* Fuller R.B [FUL62]	
1964	*Structures linéaires et autotendantes* Emmerich D.G. [EMM64]	
1965	*Continuous tension discontinuous compression structure* Snelson K. D.	

Tableau 1.1. Chronologie de la tenségrité

Motro [MOT03] définit la tenségrité ainsi : *« un système de tenségrité est un système dans un état d'auto-équilibre stable, qui comprend un ensemble discontinu de composants comprimés à l'intérieur d'un continuum de composants tendus »*. Cette définition insiste non seulement sur l'auto-équilibre mais intègre aussi la notion de composant au lieu d'élément. En effet, un composant pourra être une barre ou un ensemble de barres.

B. B. Wang, pour sa part, propose une autre définition mettant l'accent sur la caractéristique typiquement autoportante des systèmes de tenségrité [WAN03]. *« Des systèmes de tenségrité sont des réseaux autoportants de câbles réticulés avec un système continu de câbles tendus dans un système discontinu de barres ainsi que, tous les réseaux autoportants de câbles réticulés composés d'unités de construction conformes à cette définition »*.

Pour résumer, chaque auteur a sa façon de décrire la tenségrité. Avec une faible différence en terme de concept, ces propositions englobent les propriétés générales du système de tenségrité et surtout, confirment l'idée de Fuller qu'il s'agit d'un principe plutôt qu'un système structurel. Ce mot est de plus en plus connu dans le monde scientifique. Au-delà du génie civil, selon le domaine d'activité, dans les mathématiques [CON98] ou la biologie [ING03a,b] par exemple, la description de la tenségrité peut varier. Par contre, le principe d'auto-équilibre et de « tension continue, compression discontinue » reste toujours le fil rouge.

1.1.1.3 Caractéristiques générales

Dans le cadre de notre étude, nous ne sommes intéressés que par la tenségrité en tant que système structurel. Les caractéristiques générales de cette structure sont souvent discutées dans la littérature. Comme il s'agit d'un système en état de tension, le comportement global du système est dépendant du niveau de sa tension. En général, plus la tension (des éléments tendus) devient importante, plus la structure devient rigide. Il convient d'ajouter qu'une rigidité plus élevée ne signifie pas une limite de chargement supérieure, car une précontrainte trop élévée peut provoquer ou accélérer la ruine du système. Le choix du niveau de précontrainte doit donc être optimal en fonction de la réponse structurelle désirée.

Un système de tenségrité possède un comportement mécanique fortement non-linéaire [KEB98]. De plus, les câbles ne peuvent travailler qu'en traction : il conviendra donc de prendre en considération cette unilatéralité lors des analyses.

En plus de ces propriétés, d'autres caractéristiques peuvent être répertoriées :

Avantages

- *Esthétique :*

La transparence provenant des barres « flottant » dans l'espace est une originalité notable d'une structure de tenségrité (Figure 1.6). Snelson, sculpteur américain, a mis en valeur ce point au travers de ses travaux. On peut s'apercevoir qu'au sein de ses œuvres, émane toujours une architecture élégante et dégagée.

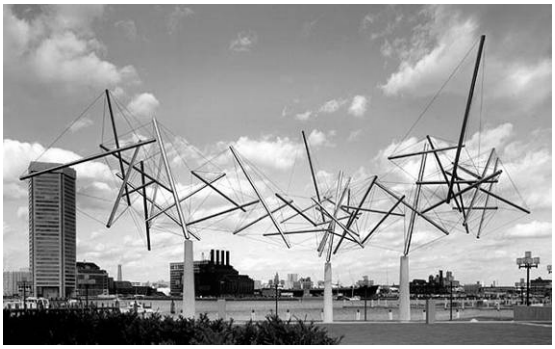


Figure 1.6. Easy Landing
Collection: City of Baltimore, Snelson 1977

- *Pliabilité :*

Par modification de longueur de certains éléments, un système de tenségrité peut être plié. Il est possible de contrôler le déploiement au moyen des câbles dits « actifs » [PEL93]. Cette particularité sera abordée dans la partie « système pliable ».

- *Légèreté :*

Selon la majorité des experts, une structure de tenségrité peut être considérée comme une structure légère, même si ce point de vue n'est pas tout à fait partagé par Wang [WAN03].

- *Auto-équilibre, stabilité*

Ce caractère particulier permet d'obtenir une forme déterminée en équilibre sans nécessiter de liaison externe supplémentaire.

- *Forte variété géométrique*

A partir d'une structure relationnelle, il existe plusieurs géométries d'équilibre régulières ou irrégulières. L'assemblage de modules élémentaires peut être envisagé selon différents modes, noeud–nœud ou nœuds–câbles par exemple, selon une ligne (rectiligne ou courbe) ou une surface, afin de générer la structure souhaitée.

Toutefois, la tenségrité connaît certains points faibles à surmonter …

Inconvénients

- *Instabilité*

Comme toutes les structures légères en général, la tenségrité s'expose aux risques d'instabilité et de grande déformabilité. Le niveau de précontrainte peut, plus ou moins,

atténuer ce point faible.

- *Fabrication et montage difficile*

Le nombre important d'éléments aboutissant au même nœud peut entraîner une difficulté pour la conception et la fabrication des liaisons. Le montage et la mise en tension d'un système à forte densité en éléments restent un obstacle pour la réalisation.

Malgré ces inconvénients, les nombreuses recherches au cours des vingt dernières années ont permis de faire avancer la connaissance sur la tenségrité de façon remarquable.

1.1.2 Caractérisation mécanique

Avant d'aborder notre cas d'étude, il convient d'exposer les rudiments de la mécanique des systèmes de tenségrité. La conception de ces systèmes débute par la recherche de forme. Ce processus consiste à déterminer la configuration géométrique compatible avec une autocontrainte, respectant le comportement unilatéral des câbles et supprimant les mouvements de solides rigides. Au début de son histoire, la recherche de forme d'une structure de tenségrité s'est faite par expérimentation. Les sculptures de Snelson sont de bons exemples. Cette approche est utilisée au cas par cas et n'est donc pas systématique [MOT03]. Dans la littérature, les autres approches se regroupent en deux catégories : cinématique et statique [TIB03]. Selon les méthodes cinématiques, les longueurs de câbles sont constantes tandis que les barres s'allongent jusqu'à ce que les valeurs maximales soient atteintes ou bien les longueurs des barres sont constantes alors que les câbles se raccourcissent jusqu'à ce que les valeurs minimales soient atteintes. Les méthodes statiques consistent à trouver la relation entre une configuration d'équilibre d'une structure dont la topologie est déjà connue et les efforts dans les éléments. Des méthodes hybrides ont aussi été développées. La méthode des densités de forces qui fait partie des méthodes statiques, est résumée dans ce chapitre car nous l'utilisons pour caractériser l'objet de notre étude ultérieure.

1.1.2.1 Notions de base

En écrivant l'équilibre selon la méthode des densités de forces, nous faisons apparaître mathématiquement les notions mécaniques d'autocontrainte et de mécanisme. **L'autocontrainte** est un état de sollicitation interne au système qui est indépendant de toute liaison avec l'extérieur. Son intensité est définie comme étant le niveau d'autocontrainte. **Un mécanisme** correspond à des déplacements nodaux tels que la variation de longueur d'élément soit infinitésimale ou nulle. Si elle est exactement nulle, le mécanisme est dit fini (Figure 1.7) (mouvement de solide rigide). Si elle est quasiment nulle, il s'agit d'un

mécanisme infinitésimal (Figure 1.8).

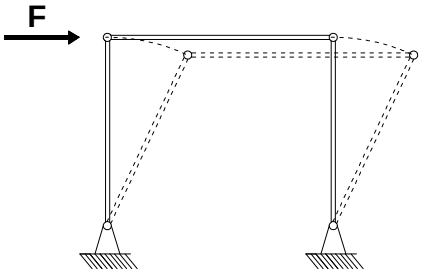


Figure 1.7. Mécanisme fini

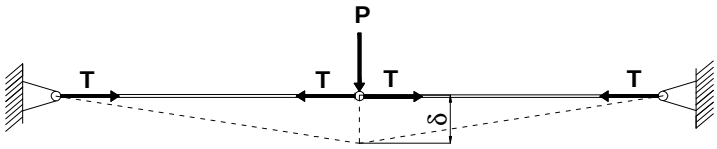


Figure 1.8. Mécanisme infinitésimal

1.1.2.2 Ecriture de l'équilibre par la méthode des densités de forces [SCH74]

Soit un système constructif réticulé de *n* nœuds et *b* éléments soumis à un système de charges nodales ; l'équilibre d'un noeud est décrit par l'équation vectorielle suivante :

$$f_i + \sum_{j \ni i} T_j = 0 \tag{1.1}$$

où les T_j sont les actions exercées par chaque élément *j* connecté au nœud *i* ($j \ni i$), et f_i l'action extérieure appliquée au nœud *i*. En faisant la projection de (1.1) sur les trois axes de l'espace cartésien, nous obtenons le système d'équations (1.2).

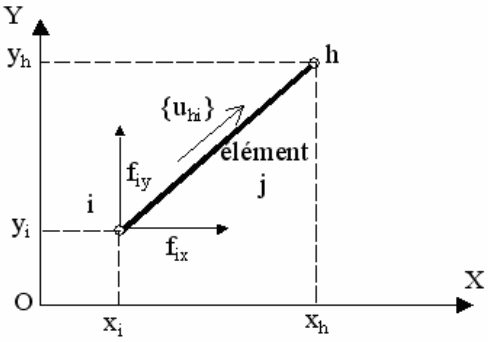


Figure 1.9. Nœud libre i connecté au nœud h par l'élément j, $\{u_{hi}\}$ est le vecteur directeur unitaire de l'élément. (Projection suivant la direction Z).

$$\begin{cases} \sum_{j \ni i} \frac{(x_h - x_i)}{l_j^0} T_j + f_{ix} = 0 \\ \sum_{j \ni i} \frac{(y_h - y_i)}{l_j^0} T_j + f_{iy} = 0 \\ \sum_{j \ni i} \frac{(z_h - z_i)}{l_j^0} T_j + f_{iz} = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

où *i*, *h* sont les deux nœuds de l'élément *j* de longueur libre l_j^0. En introduisant dans le système (1.2), le coefficient de densité de force q_j défini par :

$$q_j = \frac{T_j}{l_j^0} \tag{1.3}$$

celui-ci devient :

$$\begin{cases} \sum_{j \ni i} (x_i - x_h) q_j = f_{ix} \\ \sum_{j \ni i} (y_i - y_h) q_j = f_{iy} \\ \sum_{j \ni i} (z_i - z_h) q_j = f_{iz} \end{cases} \tag{1.4}$$

Ces équations peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$[A]\{q\} = \{f\} \tag{1.5}$$

La matrice [A] contient les informations basiques pour la recherche de forme. Etant donné que l'autocontrainte est un état de sollicitation sans chargement extérieur, la recherche d'un état d'autocontrainte revient à déterminer un vecteur $\{q^o\}$ non nul tel que :

$$[A]\{q^0\} = 0 \tag{1.6}$$

Ainsi tous les états d'autocontrainte sont inclus dans le noyau de la matrice [A]. Un travail similaire sur la compatibilité des déplacements par rapport à la déformation des éléments peut permettre de montrer que les mécanismes se situent, eux, dans le noyau de la matrice $[A]^t$ [VAS97].

1.1.2.3 Règle étendue de Maxwell

La règle étendue de Maxwell proposé par Pellegrino et Calladine [PEL86] donne la relation entre le nombre de mécanismes et le nombre d'états d'autocontrainte. Le nombre d'états d'autocontrainte *s*, défini comme le nombre de vecteurs d'autocontrainte linéairement indépendants, est aussi la dimension du noyau de la matrice [A]. Le nombre de mécanismes *m* est la dimension du noyau de la transposée de [A]. Soit *k* le nombre de degrés de liberté bloqués. Le calcul des dimensions de la matrice [A] (*N* lignes et *b* colonnes) donne les relations suivantes :

$$\mathbf{s = b - r_A} \qquad \textbf{et} \qquad \mathbf{m = N - r_A} \qquad \textbf{avec} \quad \mathbf{N = 3\,n - k} \tag{1.7}$$

où r_A est le rang de la matrice [A] et n est le nombre de nœuds du système. La formule de Maxwell est donnée par l'équation suivante :

$$\mathbf{s - m = b - 3\,n + k} \tag{1.8}$$

Les nombres d'états d'autocontrainte et de mécanismes sont deux paramètres qui différencient les systèmes de tenségrité par rapport à des systèmes réticulés conventionnels. La détermination purement mathématique du noyau de la matrice [A] peut faire apparaître des états d'autocontrainte dans lesquels certains câbles sont comprimés. Le comportement unilatéral des câbles rend ces états d'autocontrainte mécaniquement inacceptables (états non compatibles). Un état d'autocontrainte est défini comme *compatible* si aucun câble ne se trouve en état de compression [QUI00].

1.1.3 Applications

A l'heure actuelle, la tenségrité est plus que jamais présente dans la sphère scientifique. Que ce soit dans le domaine du génie civil, la technologie robotique, la conquête spatiale ou dans la biologie moléculaire, le principe de tenségrité fait partie des axes les plus innovants de la recherche. Nous présentons dans les paragraphes suivants quelques champs d'application déjà couverts par la tenségrité. Cette liste est sur le point de s'élargir en parallèle avec de nouvelles utilisations envisagées chaque jour.

1.1.3.1 Architecture – Bâtiment ou travaux publics

C'est dans ce domaine que l'on trouve la plus abondante source de publication scientifique. L'intérêt en termes d'esthétique architectural et de déployabilité motive de nombreuses équipes de recherche. La recherche de forme, l'analyse comportementale, l'étude du déploiement et le contrôle actif sont des thèmes de recherche menés de manière à mettre en évidence l'efficacité de la tenségrité. Dans la pratique, le principe de tenségrité est initialement connu par les œuvres sculpturales de Snelson, mais des ouvrages d'art sont aussi réalisés.

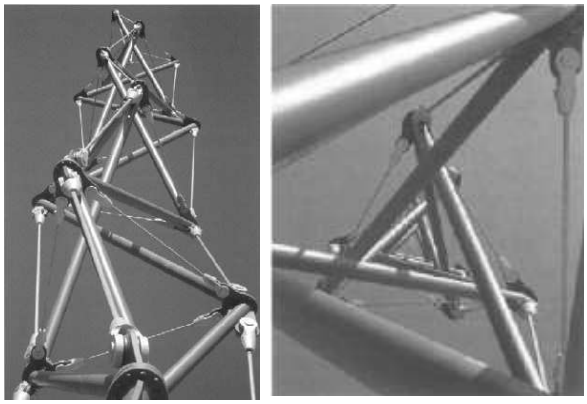


Figure 1.10. Tensegrity tower of Rostock

En 2003, à l'occasion de la foire de Rostok (Allemagne) une tour de tenségrité a été conçue par Gerkan, Marg and Partners en partenariat avec Schlaich, Bergermann and Partners (**Error! Reference source not found.**) [SCH04]. La Figure 1.11 présente une passerelle piétonne dont l'architecture est inspirée par le concept de tenségrité, en cours de construction à Brisbane en Australie. La conception a été faite par les cabinets d'architecte Baulderstone Hornibrook

Queensland et Cox Rayner Architects. Les travaux seront terminés en 2009.

Figure 1.11. Kurilpa Bridge à Brisbane en Australie
Source : http://www.cox.com.au

1.1.3.2 Conquête spatiale

Parmi les travaux récents, deux des plus connus sont effectués par Knight B. [KNI00] [KNI02] et Tibert G. [TIB02]. Leurs travaux consistent à la mise en œuvre d'antennes-réflecteurs déployables pour des applications spatiales. La Figure 1.12 expose le processus de déploiement d'un modèle physique étudié par Tibert. Dans le champ de pesanteur, cette antenne parabolique peut se plier facilement par la suspension des barres à l'aide d'un câble.

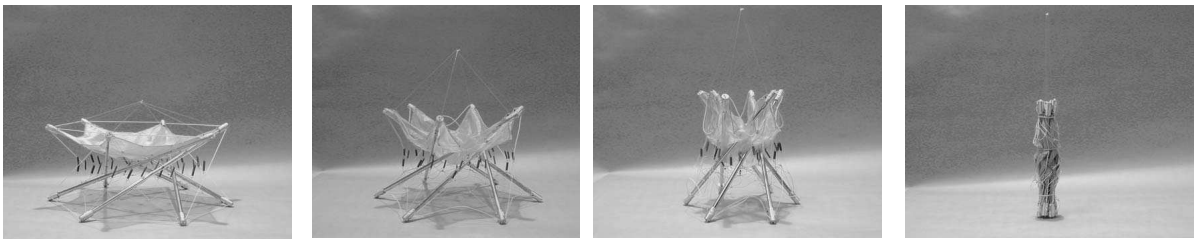


Figure 1.12. Pliage d'un modèle physique d'une antenne-réflecteur.

1.1.3.3 Biologie – Biomécanique

Un des experts les plus réputés voulant mettre en application le concept de la tenségrité dans ce domaine est sans doute D. Ingber. Dans son article intitulé « The architecture of life » [ING98] il montre que le principe d'auto-équilibre de tension/compression gouverne l'existence de tous les corps vivants et à toute échelle. Dans la Figure 1.13, Ingber fait une analogie entre une cellule vivante et un module de tenségrité.

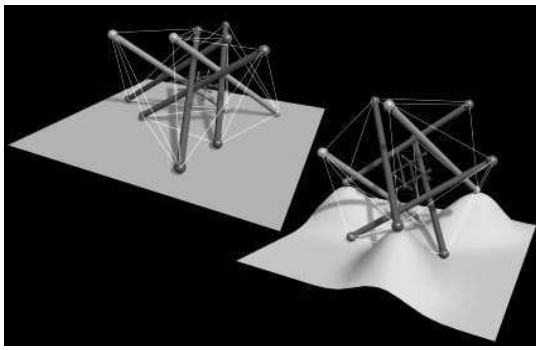


Figure 1.13. Cellule modélisée par un système de tenségrité par Ingber

Une méthode de recherche de forme de tenségrité plus complexe et non régulière est proposée, ensuite, par H. Baudriller et al. [BAU06] dans le but de mieux approcher le comportement réel du cytosquelette cellulaire (Figure 1.14).

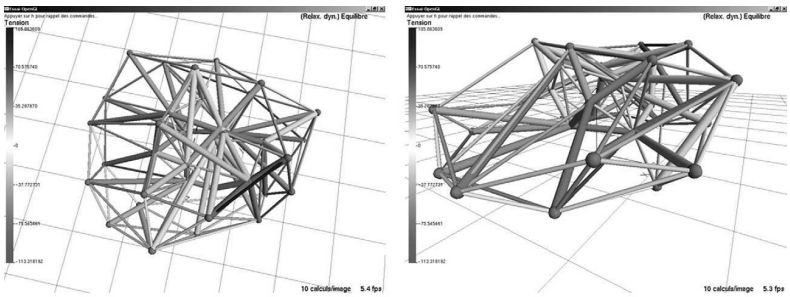


Figure 1.14. Modèle de tenségrité irrégulière pour une cellule épithéliale

1.1.3.4 Traitement médical

Sans aller vers le concept de la « passe magique » de Castaneda [CAS96] qui nous parait encore un peu abstrait, certains chercheurs ont trouvé l'intérêt de ce principe universel dans le domaine de la santé. J. C De Maury [DEM05] a montré l'analogie possible du rachis avec une structure de tenségrité (Figure 1.15). Cela peut servir à mettre en œuvre une nouvelle approche de la manipulation vertébrale [SAL05].

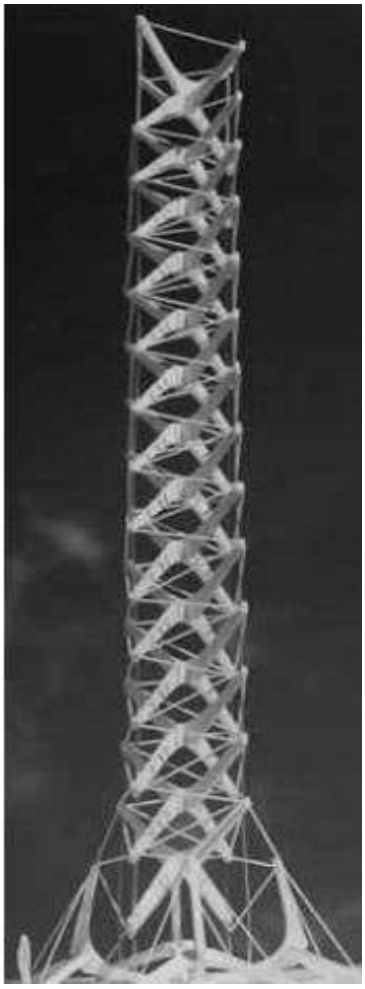


Figure 1.15. Modélisation du rachis

1.1.3.5 Technologie robotique

Au laboratoire des systèmes structuraux et de contrôle de l'Université de Californie à San Diego, une équipe dirigée par R. E. Skelton, travaille sur la dynamique et le contrôle des systèmes de tenségrité et leurs applications à la technologie robotique [ALD03] [PIN04].

Aussi inspirés par les systèmes de tenségrité, C. Paul et al. [PAU05] l'ont appliqué à la conception de la locomotion robotique. La Figure 1.16 expose le déplacement horizontal simulé d'un module de tenségrité à 3 barres. Ce déplacement est généré par des modifications successives de longueur des câbles.

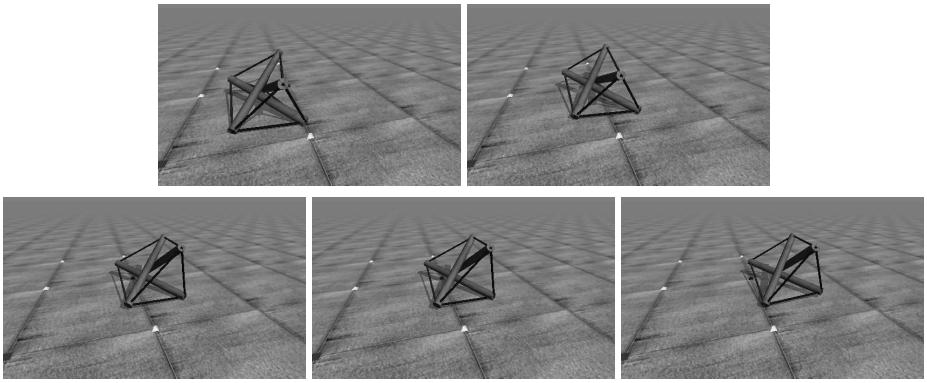


Figure 1.16. Mouvement horizontal d'un module simplex modélisé par Paul et al.

Pour conclure, le concept de tenségrité, que l'on peut considérer très en vogue aujourd'hui, attire des chercheurs de tous domaines de compétence. A toute échelle micro ou macroscopique, c'est l'auto-équilibre de la tension continue avec la compression discontinue qui est fondamentale. Cela signifie que notre recherche, qui se concentre actuellement sur le génie civil, peut, dans l'avenir, être applicable et pertinente pour d'autres domaines.

1.2 Systèmes de tenségrité déployables

Les systèmes pliables/dépliables sont des structures capables de se transformer d'une configuration fermée compacte à une configuration ouverte déployée, et inversement, sans rupture des éléments constructifs. La recherche de configurations pliables s'applique à tous les domaines. Dès qu'il s'agit d'un objet à stocker ou à transporter, le gain d'espace est incontestablement un atout. Le mécanisme du pliage est très présent dans la nature : ailes d'animaux, fleurs ou feuilles. Dans la vie quotidienne, les objets les plus courants de cette catégorie sont les chaises pliantes, les parapluies, les voiles de bateau et les parachutes. Ce concept offre d'innombrables applications dans la science et la technologie moderne. Nous pouvons citer comme autres exemples, la technologie aérospatiale avec antennes et réflecteurs, ou des constructions temporaires (centres commerciaux, manifestations culturelles et abris d'urgence)…

Les exigences pour ces systèmes peuvent être multiples. Ils sont soumis aux doubles impératifs opérationnels : en cours de déploiement et en service. Le premier critère nécessite que le déploiement soit aisé, rapide et contrôlé alors que le deuxième demande une stabilité et une rigidité mécanique face aux charges d'exploitation. Ainsi, la conception d'une telle

structure doit en même temps répondre aux trois conditions : configuration pliée la plus compacte, opération pliage/dépliage la plus facile et configuration déployée la plus rigide possible.

Il faut ajouter que les systèmes pliables sont utilisés depuis l'aube de l'histoire humaine. Dans ce chapitre, les éléments chronologiques ne seront pas analysés en détail car deux études historiques sur l'évolution des systèmes pliables ont été effectuées au sein du LMGC par M. Bouderbala [BOU98] et A. El Smaili [SMA04]. L'attention est portée surtout sur les systèmes pliables modernes utilisés dans le génie civil et les structures pliables de tenségrité.

1.2.1 Systèmes pliables contemporains

L'architecte espagnol E. P. Piñero est le premier à avoir conçu des structures pliables modernes modulaires [PIN61] [PIN72]. L'élément basique est de type ciseau 2D ou 3D [PIN65]. La rigidité après déploiement est obtenue par insertion d'éléments contraignant certains nœuds pour supprimer les mécanismes finis. La Figure 1.17 montre une maquette pour le projet d'un théâtre mobile de Piñero. La stabilité structurelle est d'autant plus difficile à assurer que la taille de la structure est importante.

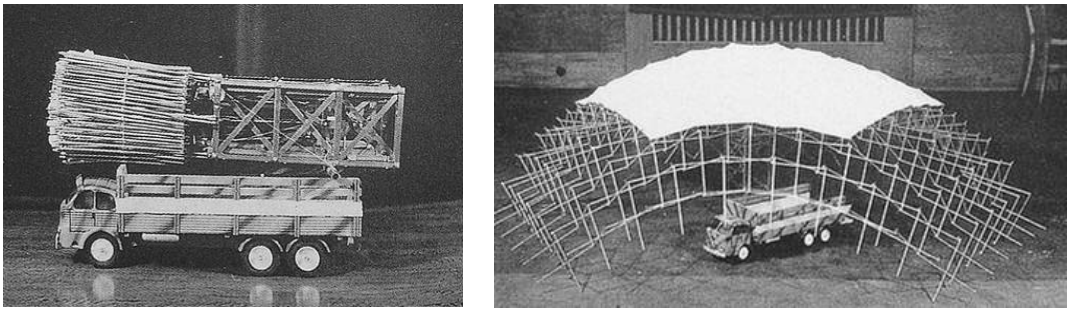


Figure 1.17. Projet de Piñero présenté à l'IUA Londres 1961

Les systèmes de Zeigler, apportent des solutions pour la rigidité et la stabilité de la structure [ZEI76]. En effet, cet auteur propose de rigidifier les systèmes par déformation élastique. L'ajout des éléments extérieurs n'est plus nécessaire (Figure 1.18). Pourtant, la présence d'éléments fléchis dans la configuration initiale déployée peut réduire la capacité mécanique du système en cas de rupture de ces éléments.

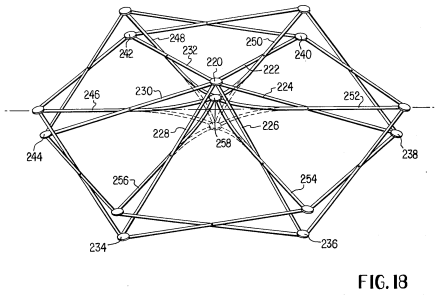


Figure 1.18. Module de base de Zeigler

S. Krishnapillai, quant à lui, a introduit une autre méthode pour générer le pliage. En effet, au

cours du déploiement, certains éléments se déforment progressivement jusqu'au moment du « claquage » [KRI85]. C'est le même principe que l'on observe lors de l'ouverture d'un parapluie. En se basant sur les éléments pantographes courbés, C. Hoberman, a conçu des dômes pliables (Figure 1.19) [HOB90].

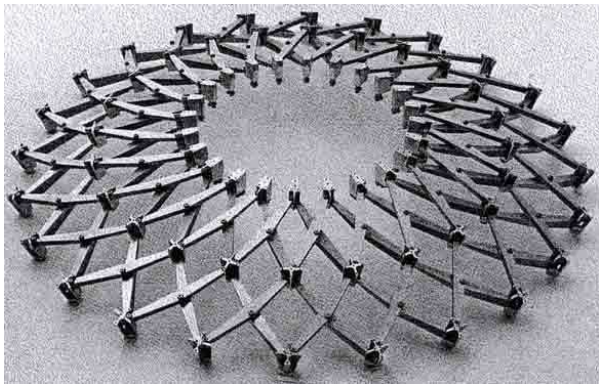


Figure 1.19. Dôme Iris [HOB90]

Pour conclure, les structures déployables sont très utilisées et étudiées depuis bien longtemps. Les méthodes développées peuvent d'une façon directe ou indirecte servir à créer une base de connaissances indispensables pour notre étude sur les systèmes de tenségrité déployables.

1.2.2 Systèmes de tenségrité pliables/dépliables

Les premiers chercheurs à avoir exploité les propriétés des structures de tenségrité en tant que systèmes pliables sont Furuya [FUR92] et Hanor [HAN93]. Pour les deux auteurs, le pliage se réalise par le biais de barres télescopiques. Furuya a proposé le pliage d'un mât de modules à trois barres sur un plan (Figure 1.20) tandis que Hanor a plié une grille en fagot (Figure 1.21). Pellegrino a introduit la notion de « câble actif » désignant les câbles sur lesquels on peut agir pour générer le déploiement [PEL93].

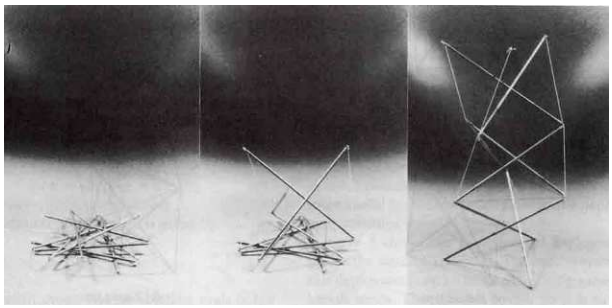


Figure 1.20. Modèle physique proposé par Furuya

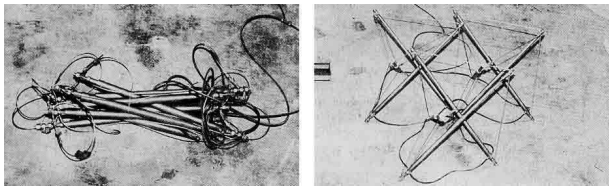


Figure 1.21. Modèle physique proposé par Hanaor

L'avantage du système de tenségrité déployable c'est l'existence de l'autocontrainte. Il est évident que le déploiement est lié à l'activation et la stabilisation des mécanismes. En effet, la suppression de l'autocontrainte permet de créer des mécanismes nécessaires pour le pliage alors que la mise en autocontrainte stabilise la structure. Le déploiement peut se contrôler par l'allongement de câbles ou le raccourcissement des barres ou la combinaison des deux approches. La suppression de l'autocontrainte pourra être totale ou partielle [SMA04].

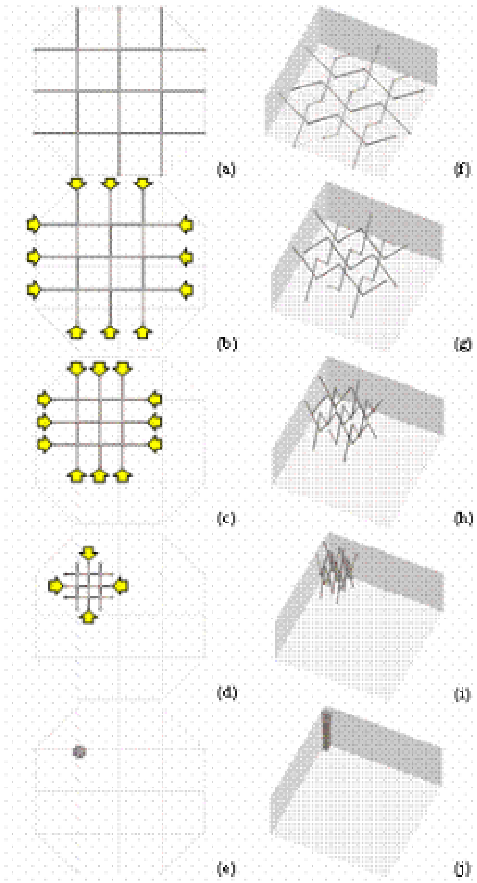


Figure 1.22. Stratégie de pliage d'une grille plane proposée par El Smaili [SMA04]

Conclusion

La performance mécanique, l'esthétisme et l'utilisation optimale des matériaux sont les avantages essentiels d'une structure de tenségrité. Au cours des 20 dernières années, la connaissance sur ce type de structure a vu une forte évolution en termes de recherche et de réalisations. De ce fait, les systèmes de tenségrité ou plus globalement le concept de tenségrité offrent de nombreuses utilisations. Les applications potentielles ne cessent de se développer chaque jour. La capacité à se déployer leur permet de les faire classer dans la catégorie des structures pliables dont l'intérêt réside dans la mobilité et la transformabilité. En conséquence, l'étude sur un sous-groupe de systèmes situé à l'intersection du groupe des systèmes de tenségrité et de celui des systèmes pliables s'avère intéressante. La faisabilité démontrée du pliage grâce aux études précédentes constitue l'élément préalable pour le déroulement de notre travail.

Chapitre 2 : Anneau de tenségrité

“If everything is tensegrity then tensegrity is nothing of any particular sort, so what’s the point in using that word?”

Kenneth Snelson

Introduction

Ce chapitre porte sur la construction de l'objet d'étude : d'abord les premières maquettes puis la réalisation d'un prototype. Le processus de conception sera détaillé ainsi que protocole de mise en œuvre.

2.1 Origine

Dans son livre publié en 1976 intitulé '*An introduction to tensegrity*', A. Pugh [PUG76] a présenté une bibliothèque des systèmes de tenségrité. D'une manière très élaborée, il a discuté sur la conception de plusieurs systèmes, des modèles les plus simples aux plus complexes, du module à l'assemblage. Pour parvenir à l'origine du concept de l'anneau de tenségrité faisant l'objet de notre étude, il faut étudier dans en premier temps le « diamond pattern » (Figure 2.1). La Figure 2.2 présente la base géométrique d'un module de ce genre. Par combinaison de 3 couches de 4 barres (Figure 2.3), nous arrivons à une structure plus complexe (Figure 2.4)

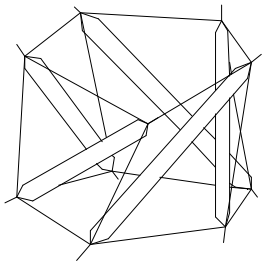


Figure 2.1. vue en perspective du modèle physique simple de 5 barres

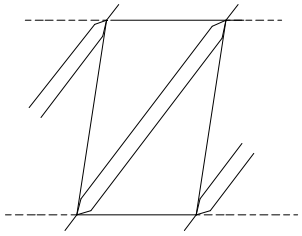


Figure 2.2. Vue en coordonnées cylindriques d'une partie élémentaire

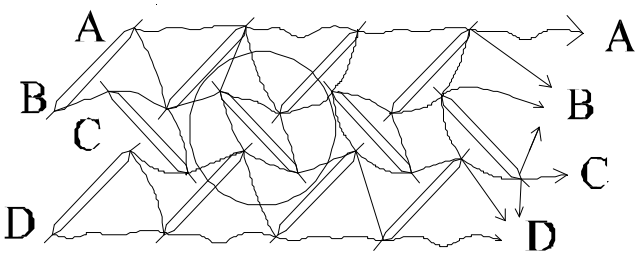


Figure 2.3. Vue en coordonnées cylindriques d'un modèle physique à 4 barres sur 3 couches

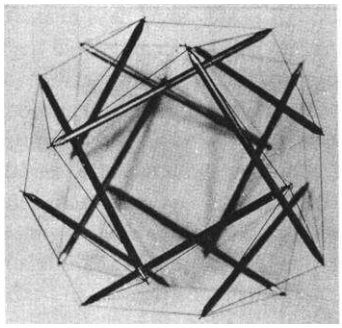


Figure 2.4. Modèle vu en perspective

Bien que cette structure soit très esthétique et transparente, l'absence de contact entre les barres engendre une souplesse importante due à la présence de nombreux mécanismes infinitésimaux. Pour remédier à cela, le rapprochement des 2 nœuds opposés (Figure 2.5) rend plus compacte la structure et superpose certains câbles (Figure 2.6)

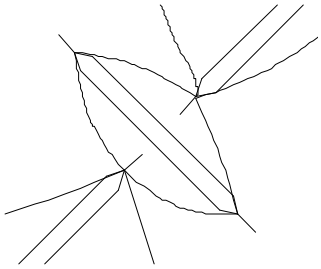


Figure 2.5. Zoom sur la zone cerclée de la Figure 2.3

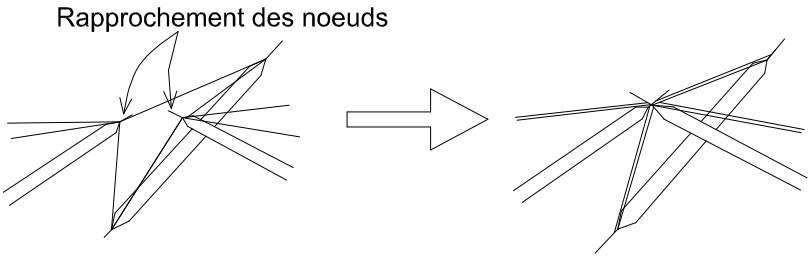


Figure 2.6. Nœuds vus en perspective avant et après rapprochement

Ainsi, le modèle devient plus rigide et possède moins de câbles (Figure 2.7). Ce rapprochement crée au sein des systèmes un ou plusieurs circuits fermés de barres. Cela justifie l'appellation proposée par l'auteur : 'maquettes à circuits de barres' (circuit pattern). Le passage du 'diamond pattern' au 'circuit pattern' donne naissance à une nouvelle famille de la tenségrité dont les éléments comprimés ne sont plus des barres discontinues mais des ensembles de barres liées. Pour conclure sur la forte diversité morphologique de cette famille, nous citerons 2 modèles conçus par A. Pugh que décrivent la Figure 2.8 et la Figure 2.9. Il s'agit de 2 systèmes structuraux dont les circuits de barres sont répartis sur un prisme droit à base pentagonale. Le premier est composé d'un seul circuit de 15 barres tandis que le deuxième comprend 5 circuits de 4 barres (5 carrés).

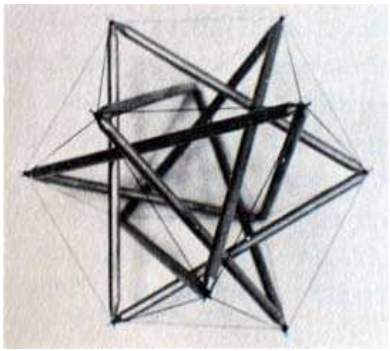


Figure 2.7. Cuboctahedron

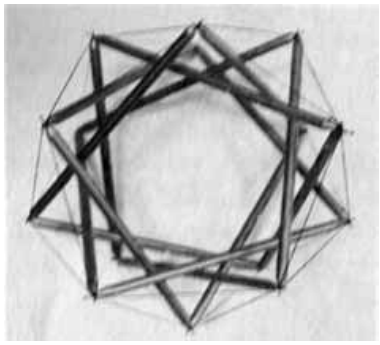


Figure 2.8. Modèle à un circuit de 15 barres

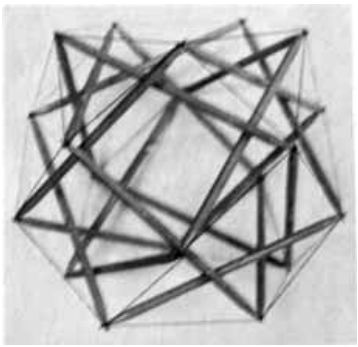


Figure 2.9. Modèle à 5 circuits de 4 barres

2.2 Pliabilité

R. Motro et al. [MOT06] ont montré la possibilité de plier complètement la maquette et envisagé quelques applications dans le domaine du génie civil. De notre coté, nous avons construit une première maquette en PVC représentant le modèle (Figure 2.8), ce qui nous a permis de visualiser ce déploiement. Dans la pratique, ce modèle physique se plie avec la suppression (ou l'allongement) des câbles des deux nappes supérieure et inférieure.

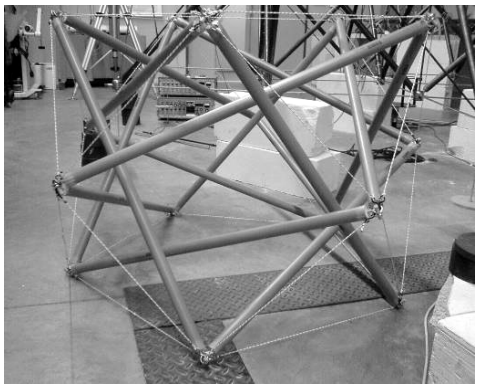


Figure 2.10. Maquette déployée

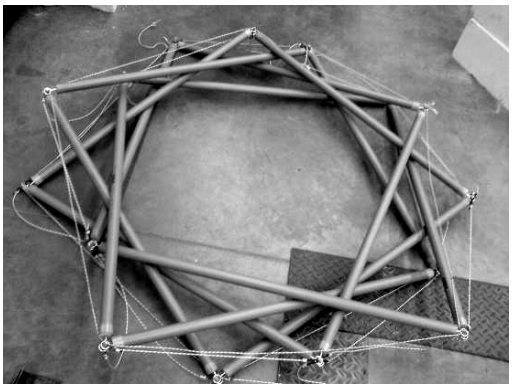


Figure 2.11. Maquette pliée

2.3 Construction d'un module

R. Motro a décrit la conception d'un module (celui de la Figure 2.8) que nous allons étudier plus profondément dans les chapitres suivants, mais d'une façon différente de celle de A. Pugh.

La géométrie de base est celle d'un prisme droit dont le polygone générateur est pentagonal (Figure 2.12). Sur chaque facette du prisme, une barre appelée **barre latérale** est mise en place selon la diagonale du rectangle (Figure 2.13). Les nœuds intermédiaires se trouvent sur le plan horizontal qui passe à mi-hauteur du prisme. Ils sont positionnés selon la règle suivante : sur la section droite à mi-hauteur du prisme, depuis un sommet du pentagone, on trace une droite perpendiculaire au côté opposé. Le nœud intermédiaire est porté par cette droite et en dehors du prisme (Figure 2.14).

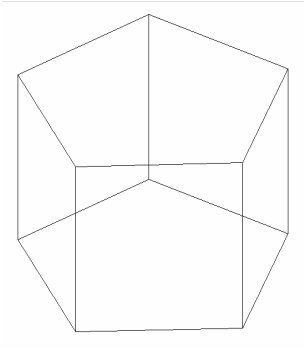


Figure 2.12. Prisme de base

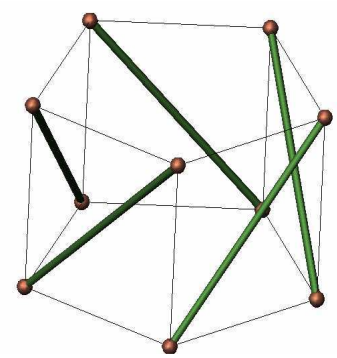


Figure 2.13. Barres latérales

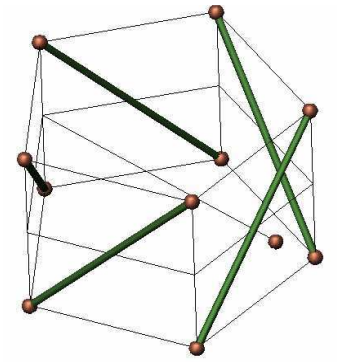


Figure 2.14. Nœud intermédiaire

A partir du nouveau nœud intermédiaire défini on ajoute un couple de barres nommées **barres intermédiaires** dont l'une est reliée à un point de la nappe supérieure et l'autre à un point de la nappe inférieure comme le montre la Figure 2.15 . Les 4 autres couples de barres sont mis en place successivement selon le même principe (Figure 2.16). Enfin des câbles sont positionnés sur les deux pentagones de base du prisme (**câbles de nappes**) et à chaque nœud intermédiaire 4 câbles (**câbles intermédiaires**) sont liés aux nœuds des nappes. La Figure

2.17 indique les éléments constructifs d'un côté du prisme sachant que la structure a une symétrie d'ordre 5 par rapport à son axe. On distingue 2 groupes de câbles intermédiaires : les **câbles coplanaires** (en vert) qui sont coplanaires avec une barre transversale et ceux qui ne le sont pas **câbles non-coplanaires** (en bleu). Cette nomenclature est indispensable pour l'analyse du comportement mécanique du système car au cours du chargement, l'évolution de l'effort dans ces deux éléments s'avère différente. Une particularité de ce modèle réside dans le fait qu'il est possible de parcourir le circuit de barres en partant d'un nœud quelconque, en passant successivement sur chacune des barres une seule fois, et de revenir au point de départ.

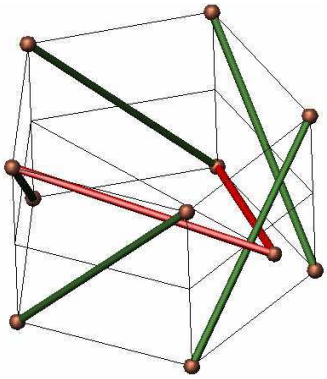


Figure 2.15. Mise en place de 2 barres intermédiaires

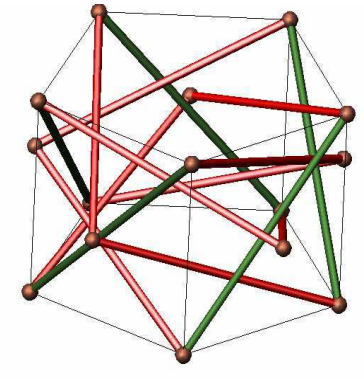


Figure 2.16. Toutes les barres

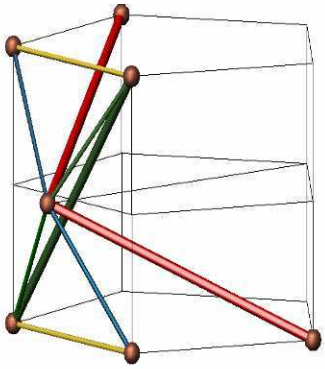
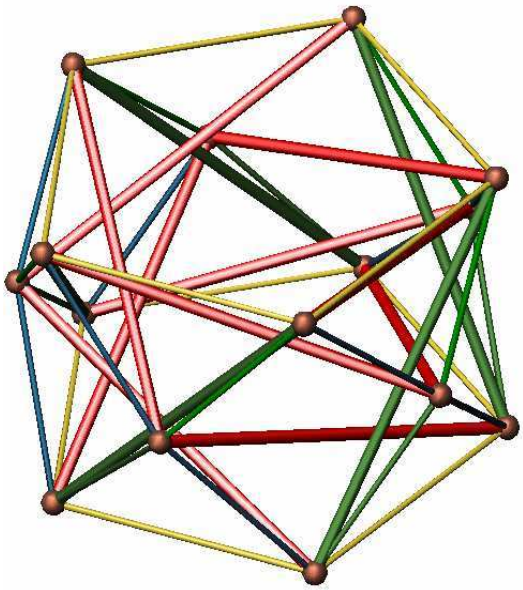


Figure 2.17. Mise en place des câbles



Câbles de nappes

Câbles coplanaires

Câbles non-coplanaires

Figure 2.18. Structure complète avec les 3 groupes de câbles différents

La structure est dotée d'un espace intérieur libre (Figure 2.19) d'où provient le nom d'*anneau de tenségrité* [MOT06] que nous utiliserons dans la suite du document.

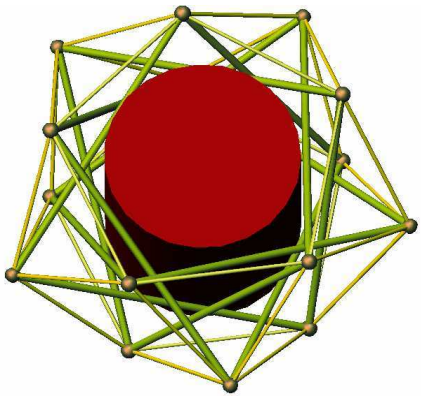


Figure 2.19. Vue en perspective

Théoriquement, cette conception peut se généraliser à partir d'une base prismatique pour un anneau de tenségrité à n côtés, où n > 3 est le nombre de côtés du prisme de base. Néanmoins, dans la pratique, le principe n'est valable et pertinent que dans certaines limites. En effet, pour n = 4, nous avons un modèle de 4 triangles possédant un espace assez limité comme le montre la Figure 2.7 alors qu'à partir de n = 7, la densité des éléments est considérable et donc la structure devient moins intéressante sur un plan esthétique et économique. Pour n = 5 ou 6, le nombre des éléments s'avère raisonnable. Nous constatons que le choix de n = 5 apporte une efficacité structurale et matérielle provenant du fait qu'il y a un circuit unique de barres tandis qu'avec n = 6, deux circuits d'éléments comprimés sont présents et peuvent potentiellement avoir un mouvement relatif important et assouplir la structure. C'est la raison pour laquelle, l'anneau de tenségrité à base pentagonale a été choisi comme objet de notre étude.

2.4 Variété géométrique et applications

Les paramètres gouvernant la géométrie d'un anneau sont le rayon R_1 du cercle circonscrit aux bases du prisme, la hauteur H et le rayon R_2 du cercle circonscrit au polygone intermédiaire (Figure 2.21 et Figure 2.20). Les deux paramètres dépendants à optimiser peuvent être les rayons de l'espace interne r et externe maximal (R_1 ou R_2).

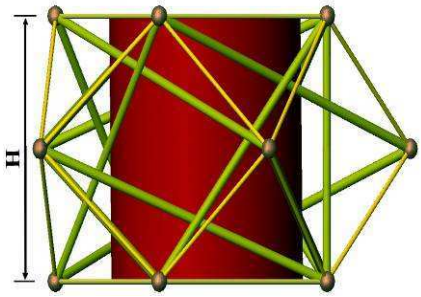


Figure 2.20. Vue de côté

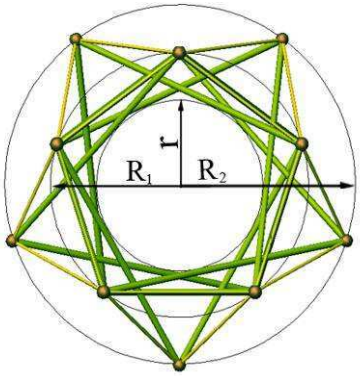


Figure 2.21. Vue de dessous

Certes, avec ces trois paramètres, il est possible de générer un nombre infini de modèles mais étant donné que les structures du génie civil sont souvent bâties sur des éléments réguliers, nous ne considérerons que les cas les plus avantageux. Nous nous imposerons donc une homogénéité géométrique des éléments pour simplifier le montage d'un module et une certaine régularité géométrique du système pour favoriser l'assemblage modulaire.

Tout en gardant une unicité de longueur de barres, trois géométries sont proposées : le module 1 (Figure 2.22) dont la projection verticale d'un nœud de nappe se trouve sur la droite reliant les projections de 2 nœuds intermédiaires, le module 2 (Figure 2.23) dont tous les câbles sont de longueur égale, et le module 3 (Figure 2.24) pour lequel $R_1 = R_2 = R$.

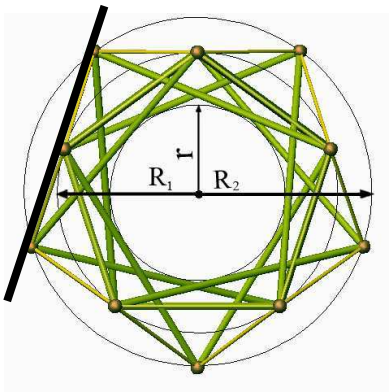


Figure 2.22. Module 1

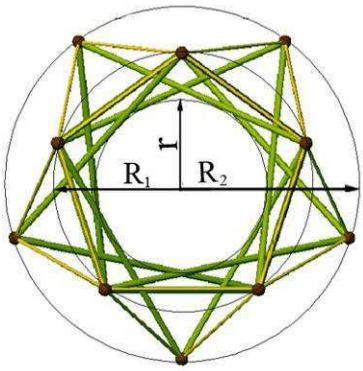


Figure 2.23. Module 2

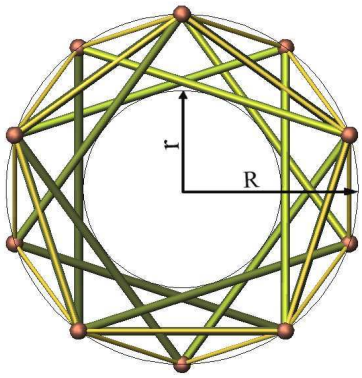


Figure 2.24. Module 3

Module	R_2/R_1	H/R_1	r/max (R_1, R_2)	H/max (R_1, R_2)
Module 1	1,236	1,596	0,524	1,291
Module 2	1,343	1,733	0,499	1,290
Module 3	1	1.284	0,588	1,284

Tableau 2.1. Rapports dimensionnels sur les trois modules proposés

Module 1 :

Cette configuration malgré son faible rapport r/max(R_1, R_2) peut être intéressante pour l'assemblage modulaire en plan sur ces 5 facettes verticales, extérieures et planes. De plus, si le module 1 à base pentagonale crée des 'pores' dans la grille, le module à base hexagonale permet de s'affranchir de ce défaut [ANNEXE A1].

Module 2 :

L'intérêt de ce module est qu'il possède une uniformité de longueur pour chaque type d'élément ce qui peut faciliter la fabrication et le montage. Par contre, le rapport de r/max(R_1, R_2) est faible [ANNEXE A.1].

Module 3 :

Ce module nous semble le plus efficace parmi les trois en matière d'utilisation possible de l'espace intérieur de l'anneau. On peut déterminer R en fonction de H ou inversement H en fonction de R [ANNEXE A1].

$$H = 4R\sqrt{\frac{\cos(2\pi/5)}{3}}$$

2.5 Conception d'un prototype de l'anneau de tenségrité à base pentagonale

La conception des systèmes de tenségrité est étudiée au sein de l'équipe Conception en Structures du LMGC depuis plusieurs années sur des modèles physiques élémentaires ou leurs assemblages. En 2000, une grille de 84 m^2 a été bâtie dans le cadre du projet Tensarch [MOT02].

Figure 2.25. Tensarch en construction

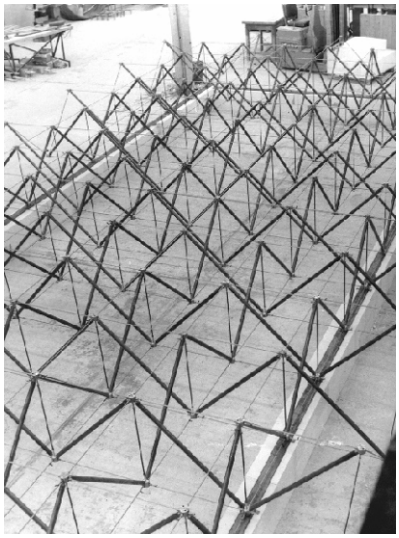


Figure 2.26. Tensarch

En ce qui concerne l'anneau de tenségrité, comme l'étude expérimentale est menée en parallèle avec la simulation numérique, un modèle physique à échelle humaine et résistant s'avère indispensable. Vu qu'il s'agit d'un système réticulé et léger, le prototype conçu doit non seulement assurer une remarquable performance mécanique, esthétique mais aussi être réalisable dans nos limites temporelles et budgétaires.

2.5.1 Choix de matériaux et pré-dimensionnement

Les trois éléments principaux contribuant aux choix des matériaux sont : les propriétés mécaniques, le ratio résistance/poids propre et le coût. Pour les barres, nous avons deux possibilités, soit en acier soit en matériau composite pultrudé (ce qui peut être une solution innovante). En effet, ce dernier offre de nombreux avantages : résistance axiale spécifique

élevée, bonne durabilité et bonne résistance à la fatigue. La légèreté et la bonne tenue en compression axiale sont les caractéristiques les plus importantes pour notre structure. Cependant, vu la souplesse du matériau, les problèmes de l'instabilité mécanique et de la déformabilité sont à vérifier. Les câbles sont en acier car les éléments de blocage et d'accastillage leurs sont adaptés.

En matière d'échelle, la taille de la structure doit permettre une faible influence des imprécisions de fabrication et de montage. De plus, les choix de longueur et de section des barres a été fait dans les gammes proposées par les fabricants pour l'utilisation économique des matériaux. Pour cela, nous avons choisi des barres de 2 m de longueur, de section tubulaire 40-35mm de diamètre. Nous en déduisons les longueurs de référence des câbles : 135,1 cm pour les câbles de nappes et 102,4 cm pour les câbles intermédiaires. Les câbles sont choisis en acier de 3 mm de diamètre.

Les caractéristiques géométriques sont décrites dans les tableaux suivants :

Longueur des barres	200,0 cm
Longueur des câbles de nappes	135,1 cm
Longueur des câbles intermédiaires	102,4 cm
Rayon du cercle circonscrit	114,9 cm
Hauteur du module	147,5 cm

Tableau 2.2. Propriétés géométriques du module

Nous devons concevoir et réaliser des nœuds qui s'approchent au mieux du comportement théorique modélisé. La connexion doit permettre aux barres de tourner librement (selon les trois axes de l'espace) des angles nécessaires pour le pliage.

2.5.2 Conception des nœuds

En tenant compte du comportement mécanique souhaité du système, nous avons esquissé les nœuds selon le modèle suivant :

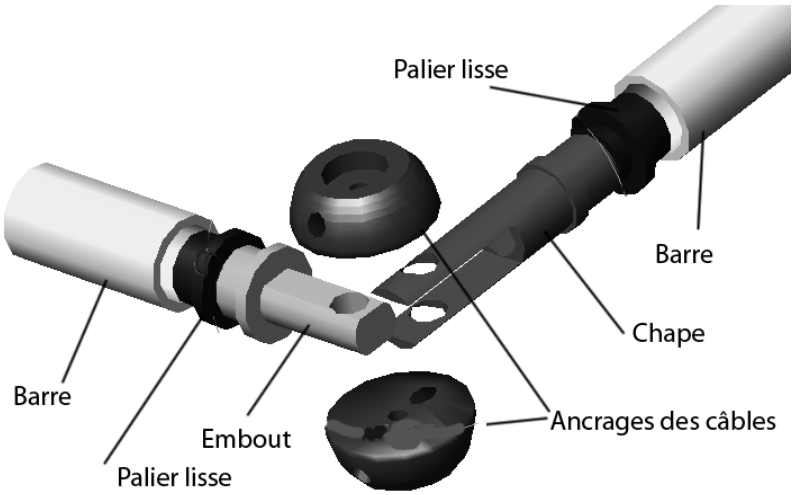


Figure 2.27. Nœud esquissé

Les trois pivots générés (2 paliers lisses et le pivot central) permettent de créer la rotule. Les produits industriels disponibles nous permettent d'optimiser notre conception. Les pièces utilisées sont décrites dans le catalogue de la société allemande CarlStahl et de IGUS. Notre modèle final a la composition suivante :

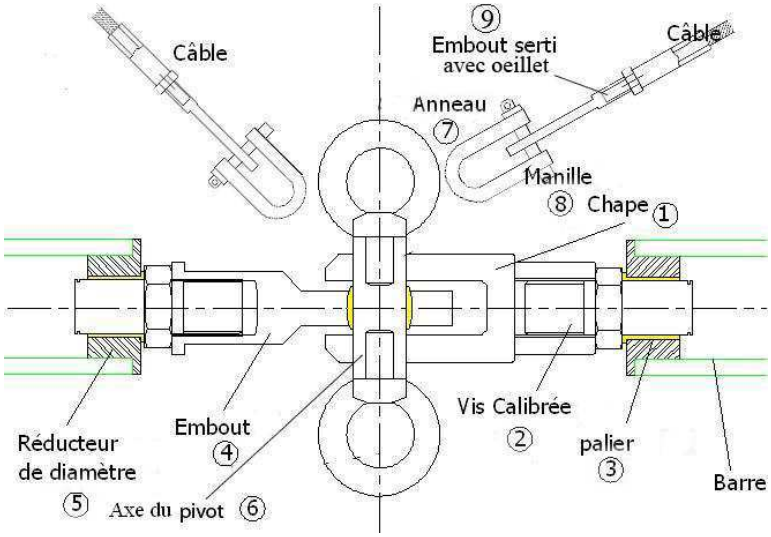


Figure 2.28. Nœud modélisé en détail

Légende

N°	Elément	Figure	N°	Elément	Figure
1	Chape	Figure 2.29	6	Axe du pivot	Figure 2.34
2	Vis calibrée	Figure 2.30	7	Anneau	Figure 2.35
3	Palier lisse	Figure 2.31	8	Manille	Figure 2.36
4	Embout à rotule	Figure 2.32	9	Embout serti avec œillet	Figure 2.37
5	Réducteur de diamètre	Figure 2.33			

Composition d'un nœud (cf. Figure 2.28) **:**

Les extrémités d'une barre sont composées d'une chape (1) pour un côté et d'un embout à rotule (4) pour l'autre. Un dispositif de forme cylindrique constitue l'axe de rotation des barres entre elles (6). Celui-ci et le réducteur de diamètre (5) sont les seuls éléments qui sont fabriqués dans l'atelier du LMGC. Les vis calibrées (2) et les paliers lisses (3) permettent aux barres de pivoter selon leur axe.

Les câbles sont dotés de deux œillets sur filetages intérieurs sertis aux deux extrémités (9). Les filetages servent à régler la longueur des câbles avec une capacité de réglage : +24/-34 mm. Ils permettent éventuellement la mise en tension du système. Les dispositifs d'accrochage des câbles sont des manilles (8) liées aux anneaux (7). Ces anneaux sont vissés, quant à eux, sur l'axe du pivot. Nous présentons sur les figures qui suivent le détail des pièces utilisées pour la composition des nœuds, les côtes sont en millimètres.

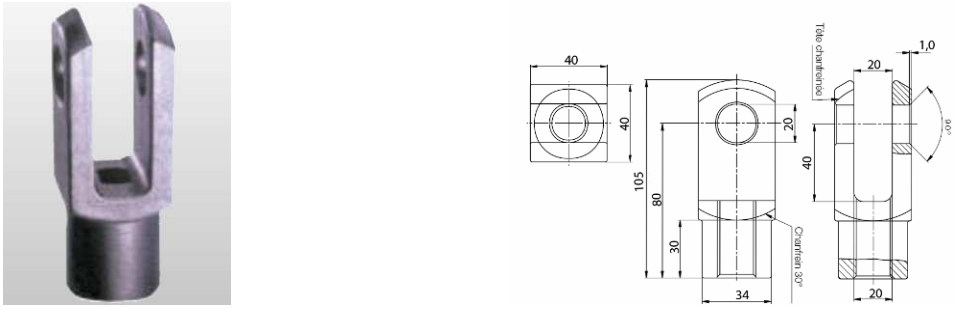


Figure 2.29. Chape GER (L) M -20

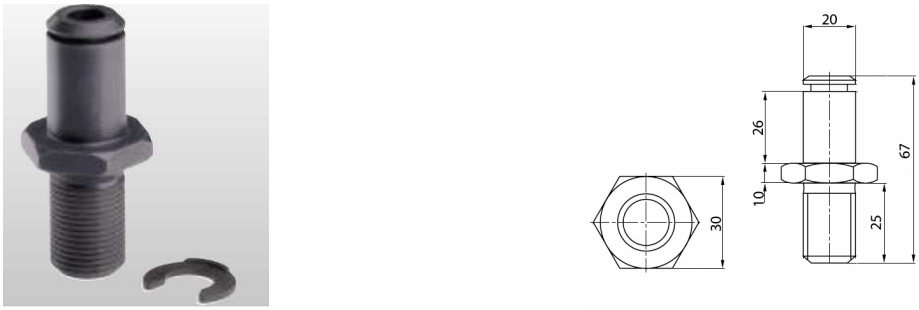


Figure 2.30. Vis calibrée igubal PKR (L) M -20

Figure 2.31. Palier lisse GFM – 202326 – 21

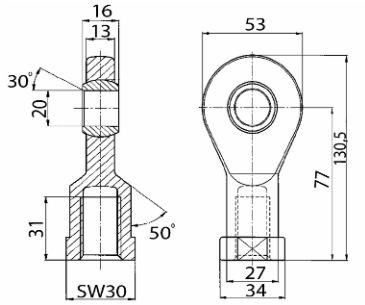


Figure 2.32. Embout à rotule EBR (L) M -20

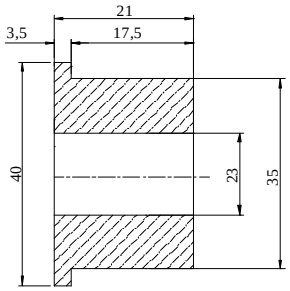


Figure 2.33. Réducteur de diamètre

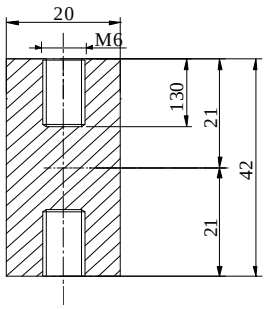


Figure 2.34. Axe du pivot

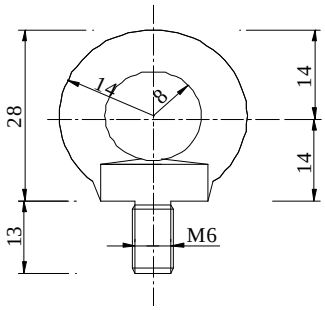


Figure 2.35. Anneau mâle 837-0600

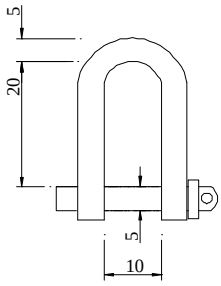


Figure 2.36. Manille droite 835-0032

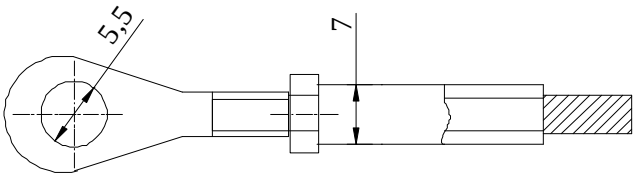


Figure 2.37. Œillet sur filetages intérieurs sertis aux deux extrémités IK 400-0301

Les différents dispositifs utilisés nous amènent à recalculer la longueur des éléments. Les schémas qui suivent nous détaillent ces longueurs.

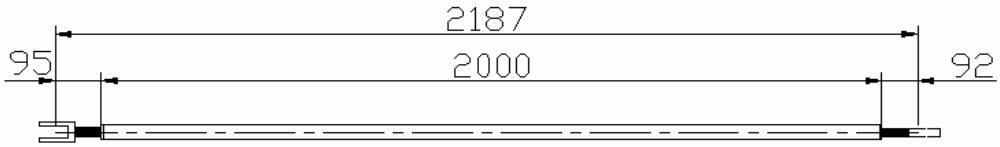


Figure 2.38. Barre avec dispositifs de connexion

Le détail des longueurs aux extrémités de barres est le suivant :

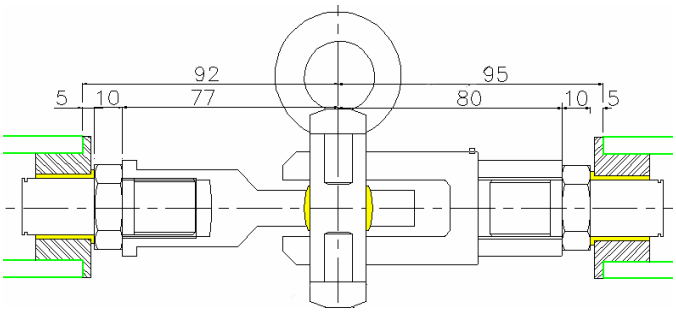


Figure 2.39. Dispositif de connexion des barres

La longueur des barres (Figure 2.38) est l'addition de celle de la partie composite et celle des dispositifs de connexion, soit 218,7 cm. Il est possible de l'augmenter grâce aux vis calibrées.

Vu la taille des liaisons, les extrémités des câbles sont décentrées de 35 mm du centre théorique du nœud (Figure 2.40). Suivant la position de la manille, la longueur des câbles peut varier. La valeur maximale correspond au cas où le plan de l'anneau est perpendiculaire au câble et la valeur minimale correspond au cas où le plan de l'anneau comprend le câble. Ce phénomène est expliqué par les Figure 2.41 et Figure 2.42.

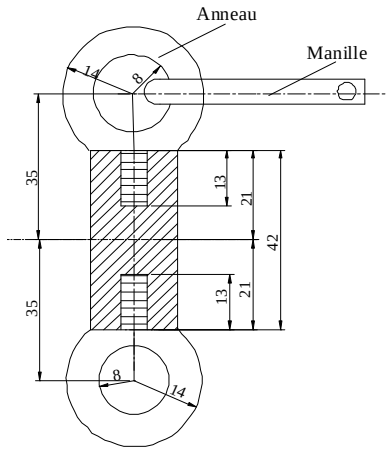


Figure 2.40. Décalage des extrémités des câbles

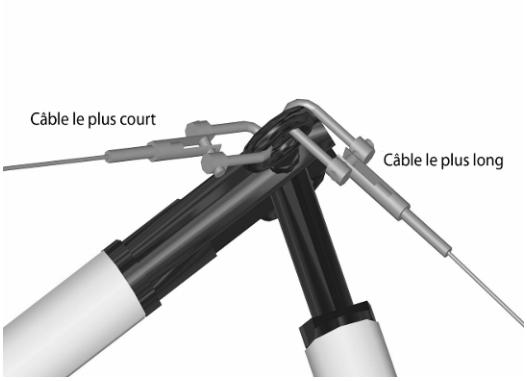


Figure 2.41. Dispositif de connexion des câbles (vue perspective)

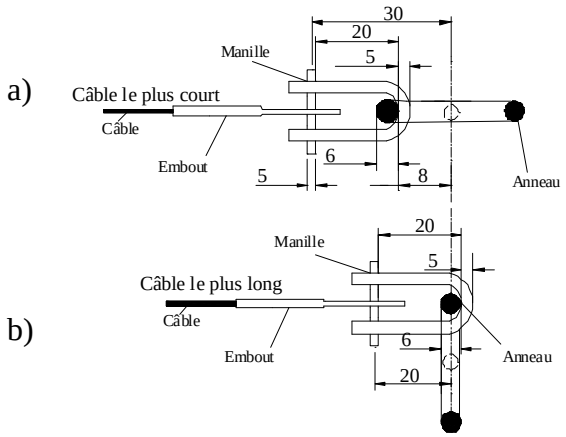


Figure 2.42. Positions minimisant (a) et maximisant (b) la longueur des câbles

La longueur des câbles de nappes (Figure 2.43) est déterminée en prenant en compte les différentes positions possibles des manilles sur les anneaux. Cela nous amène à retrancher entre 30 et 20 mm pour chaque extrémité des câbles par rapport à la longueur recalculée entre centres d'anneaux. En tenant compte de la capacité de réglage des œillets filetés (+24/-34 mm) nous avons commandé une longueur de câble de nappe de 1400 mm.

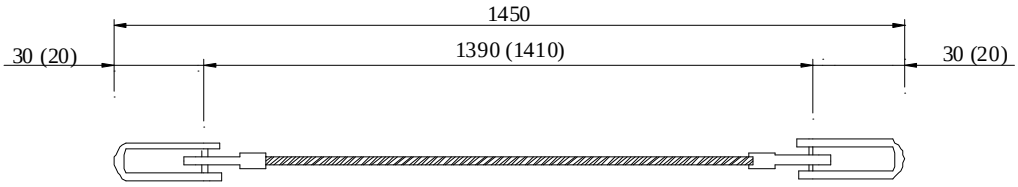


Figure 2.43. Longueur des câbles de nappes avec dispositifs de connexion

Les longueurs entre centres des anneaux des câbles intermédiaires peuvent être différentes selon leurs positions coplanaires ou non-coplanaires avec les barres latérales (L_1 et L_2). La longueur réelle des câbles intermédiaires (Figure 2.44) varie de 1023 à 1050 mm. La longueur de fabrication choisie est de 1040 mm.

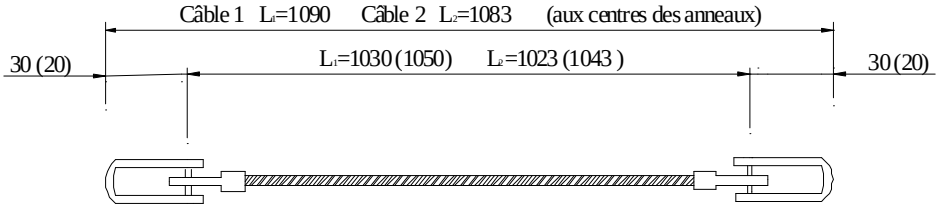


Figure 2.44. Longueur des câbles intermédiaires avec dispositifs de connexion

Masse de la maquette

Eléments	Masse (kg)	Nombre	Total (kg)
Barres	1,03	15	15,45
Câbles intermédiaires	0,09	20	1,8
Câbles de nappes	0,102	10	1,02
Nœuds	0,45	15	6,75
Total (kg)	**24,98**		

Tableau 2.3. Masse de la maquette

Un prototype avec des barres en acier serait de masse 75,23 kg (soit environ 3 fois plus). Le gain de masse est considérable ce qui justifie notre choix de matériau composite pultrudé.

2.6 Montage de l'anneau

A. Pugh a proposé une méthode de montage que nous allons tout d'abord exposer. Elle consiste à disposer sur un plan les 5 premières barres (Figure 2.45), puis on ajoute 5 autres barres (Figure 2.46) et enfin les 5 dernières (Figure 2.47). Le positionnement relatif (dessous ou dessus) doit être respecté.

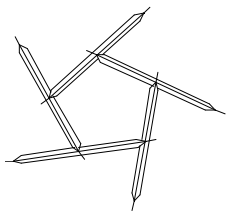


Figure 2.45. Etape 1

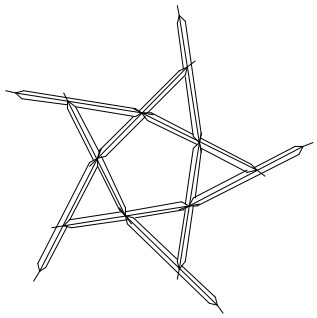


Figure 2.46. Etape 2

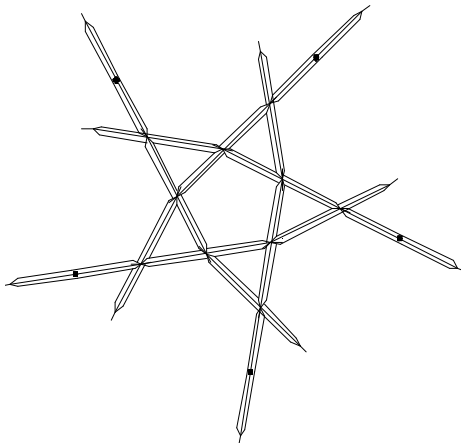


Figure 2.47. Etape 3

Ensuite, l'ensemble est inversé (Figure 2.48) et on attache les nœuds selon l'indication des flèches. Le nombre 4 ou 3 indique respectivement la position des quadrangles ou triangles des câbles mis en place précédemment.

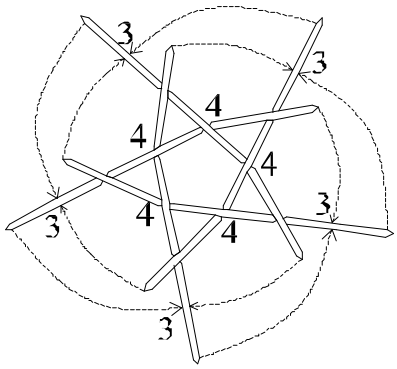


Figure 2.48. Etape 4

Motro introduit une autre méthode schématisée par la Figure 2.49. La construction se termine en refermant le circuit.

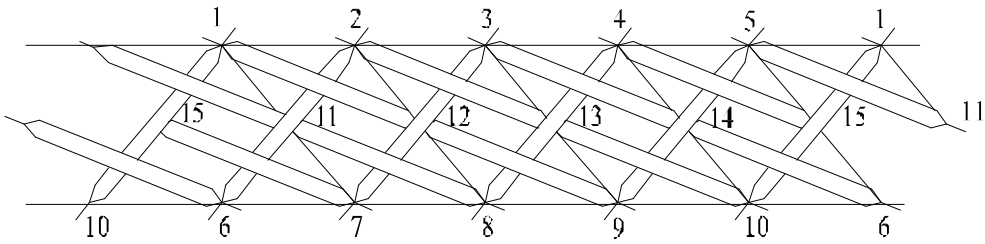


Figure 2.49. Projection cylindrique d'un module

Ces deux méthodes sont très simples pour des modèles physiques comportant peu d'éléments. Si le nombre d'éléments est important, elles deviennent alors moins pratiques en raison de l'encombrement. Nous proposons donc une autre méthode pour effectuer le montage du prototype. Elle consiste simplement, à partir de l'état aplati du système (Figure

2.50), à positionner successivement chacune des 15 barres numérotées en respectant la position relative de chacune par rapport aux autres comme décrit par la Figure 2.51. Les câbles sont ajoutés lorsque toutes les barres sont assemblées.

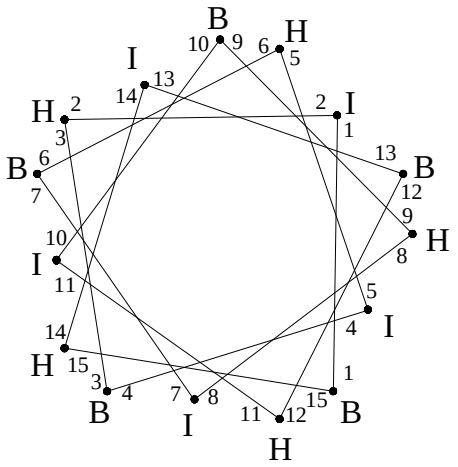


Figure 2.50. Schéma de mise en place des barres

A titre d'exemple : la barre 6 passe sous les barres 2 et 3 ; la barre 9 passe sur la barre 1 et sous les barres 2, 5 et 6. L'ordre de passage doit être respecté. Dans la Figure 2.50, B désigne un nœud situé sur la nappe inférieure, I signifie intermédiaire et H pour un nœud supérieur dans la configuration déployée.

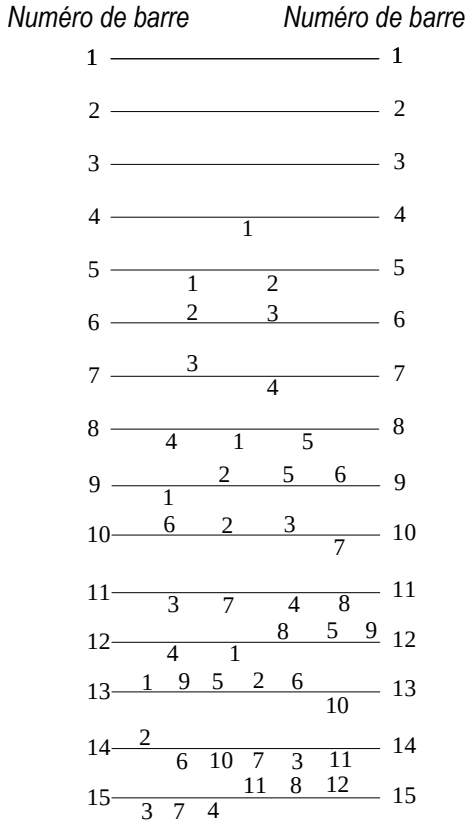


Figure 2.51. Processus à suivre pour l'ordre de mise en place des barres

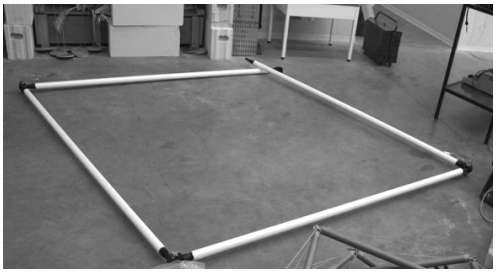


Figure 2.52. Mise en place des barres au sol

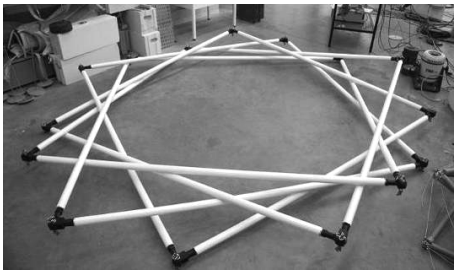


Figure 2.53. Circuit complet des barres

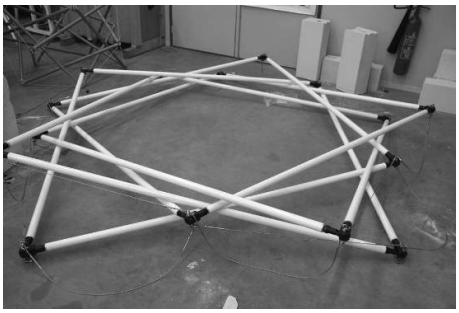


Figure 2.54. Mise en place des câbles

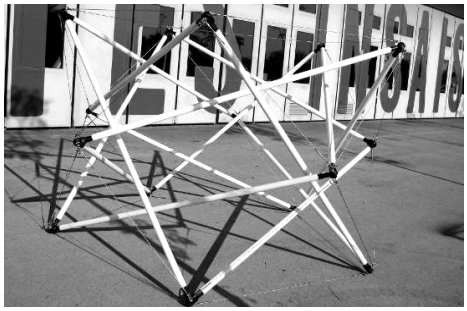


Figure 2.55. Structure déployée

Remarque :

Lors du montage, il se peut que des barres intermédiaires se mettent en traction. Ce phénomène se produit quand seulement les câbles d'une nappe, inférieure ou supérieure, sont mis en place. Dans l'annexe B.2, nous expliquons ce fait mathématiquement par l'apparition d'un état d'autocontrainte qui sollicite certaines barres en traction.

Conclusion

Nous avons détaillé la conception d'un anneau de tenségrité à base pentagonale qui est intéressant pour sa capacité de déploiement et sa relative simplicité géométrique. Les nœuds sont conçus pour s'approcher d'une rotule parfaite. La dimension importante du prototype facilitera les essais ultérieurs. Les matériaux utilisés confèrent une légèreté à l'anneau qui permet le déploiement en toute sécurité.

La méthode proposée pour le montage du prototype assure un assemblage aisé et rapide du module en une heure environ.

Chapitre 3 : Etude du comportement mécanique

"Structural Engineering is the art of moulding materials we do not really understand into shapes we cannot really analyse, so as to withstand forces we cannot really assess, in such a way that the public does not really suspect."

Eric Brown

Introduction

Dans ce chapitre, nous cherchons à caractériser le comportement statique du module de tenségrité à base pentagonale précédemment décrit (module 3).

Etant donné que le comportement du système dépend de l'état d'autocontrainte qui est introduit lors du montage, l'étude porte, dans en premier temps, sur les états d'autocontrainte du module. L'analyse sera faite à l'aide du logiciel Tenségrité 2000 conçu sous Matlab et développé au sein de l'équipe Conception en Structure [QUI00]. Cette étape consiste à trouver des vecteurs d'autocontrainte compatibles avec le comportement unilatéral des câbles et les combiner pour définir un état initial optimal dans la structure.

La réponse mécanique d'un module soumis à un chargement statique vertical est ensuite étudiée. La non-linéarité géométrique et le comportement unilatéral des câbles sont pris en compte avec le code de calcul éléments finis ANSYS. Nous allons donc décrire le comportement mécanique du module aussi bien en traction qu'en compression dans l'axe du module, jusqu'au relâchement total de certains câbles puis à la ruine de la structure.

Enfin, l'influence de la raideur des câbles et des barres sur la rigidité globale de la structure est évaluée.

Nous voyons également qu'il faut tenir compte lors de la conception des nœuds, du fait qu'il est possible au cours du pliage que le système passe par un état intermédiaire où certaines barres se mettent en état de traction. Un modèle rhéologique homogénéisant un anneau de tenségrité est aussi initié.

3.1 Etude des états d'autocontrainte

Pour pouvoir déterminer le nombre de mécanismes et d'états d'autocontrainte selon la méthode des densités de forces exposée dans le chapitre 1, il suffit de connaître la géométrie et la structure relationnelle du système étudié.

3.1.1 Coordonnées des nœuds

Comme nous l'avons présenté auparavant, le module est composé de 15 barres et 30 câbles. Les 15 nœuds d'assemblage des éléments sont répartis sur 3 couches dont la hauteur est définie suivant l'axe OZ. Les coordonnées complètes (X, Y et Z dans un système orthonormé) sont détaillées dans le Tableau 3.1.

Nœuds	X	Y	Z
1	-119,2	38,7	0,0
2	0,0	125,4	0,0
3	119,2	38,7	0,0
4	73,7	-101,4	0,0
5	-73,7	-101,4	0,0
6	-73,7	101,4	80,5
7	73,7	101,4	80,5
8	119,2	-38,7	80,5
9	0,0	-125,4	80,5
10	-119,2	-38,7	80,5
11	-119,2	38,7	160,9
12	0,0	125,4	160,9
13	119,2	38,7	160,9
14	73,7	-101,4	160,9
15	-73,7	-101,4	160,9

Tableau 3.1. Coordonnées des nœuds (cm)

La géométrie a été actualisée pour tenir compte de l'assemblage des nœuds (chapes, embouts) sur les barres. La distance entre nœuds connectés à une même barre est donc de 218,7 cm (Figure 2.38) au lieu de 200 cm.

3.1.2 Structure relationnelle

Le tableau suivant présente la connectivité des éléments d'un module.

Barres			Câbles					
N°	Nœuds	Nœuds	N°	Nœuds	Nœuds	N°	Nœuds	Nœuds
1	6	3	1	1	2	16	14	8
2	6	15	2	2	3	17	4	9
3	7	4	3	3	4	18	15	9
4	7	11	4	4	5	19	5	10
5	8	5	5	5	1	20	11	10
6	8	12	6	11	12	21	2	6
7	9	1	7	12	13	22	12	6
8	9	13	8	13	14	23	3	7
9	10	2	9	14	15	24	12	7
10	10	14	10	15	11	25	4	8
11	1	15	11	1	6	26	13	8
12	2	11	12	11	6	27	5	9
13	3	12	13	2	7	28	14	9
14	4	13	14	13	7	29	1	10
15	5	14	15	3	8	30	15	10

Tableau 3.2. Structure relationnelle

Légende : La couleur du numéro indique la famille des éléments

Barres intermédiaires		Câbles de nappes	
Barres latérales		Câbles coplanaires	
		Câbles non coplanaires	

3.1.3 Résultats

La matrice d'équilibre [A] dans l'équation [A]{q} = {0} permet de calculer le nombre de mécanismes et d'états d'autocontrainte. Le calcul effectué sans aucun blocage du module donne 6 états d'autocontrainte et 6 mécanismes. Ces mécanismes étant liés à l'absence de conditions d'appuis, nous en déduisons qu'il n'y a pas de mécanismes finis ou infinitésimaux dans le système une fois que seront supprimés de façon appropriée les 6 degrés de liberté de l'espace.

Nous pouvons vérifier la validité de la formule proposée par Calladine [CAL78] :

$$\mathbf{s - m = b - 3\,n + k} \qquad (3.1)$$

avec le nombre d'états d'autocontrainte s = 6, le nombre d'éléments b = 45 (15 barres + 30 câbles), le nombre de nœuds n = 15. Nous trouvons 6 mécanismes quand la structure est privée des conditions de bords c'est-à-dire k = 0 et 0 mécanisme quand k = 6. La

détermination numérique du noyau de la matrice [A] nous donne 6 états d'autocontrainte c'est-à-dire 6 vecteurs colonne linéairement indépendants formant la matrice [S] (les b lignes correspondant aux éléments et les s colonnes correspondant aux états d'autocontrainte). Ce résultat est purement mathématique et pas toujours exploitable du point de vue mécanique. En effet, il existe des états d'autocontrainte qui mettent en compression les câbles et ne peuvent être utilisés pour la mise en tension du système. Dans le sous-espace vectoriel défini par la matrice [S], il faut chercher les états compatibles avec le comportement unilatéral des câbles. Parmi les solutions possibles, nous souhaitons obtenir une symétrie sthénique qui facilite le réglage du système. Le seul état d'autocontrainte compatible obtenu est illustré sur la Figure 3.1. Sa détermination est explicitée dans l'annexe B.1.

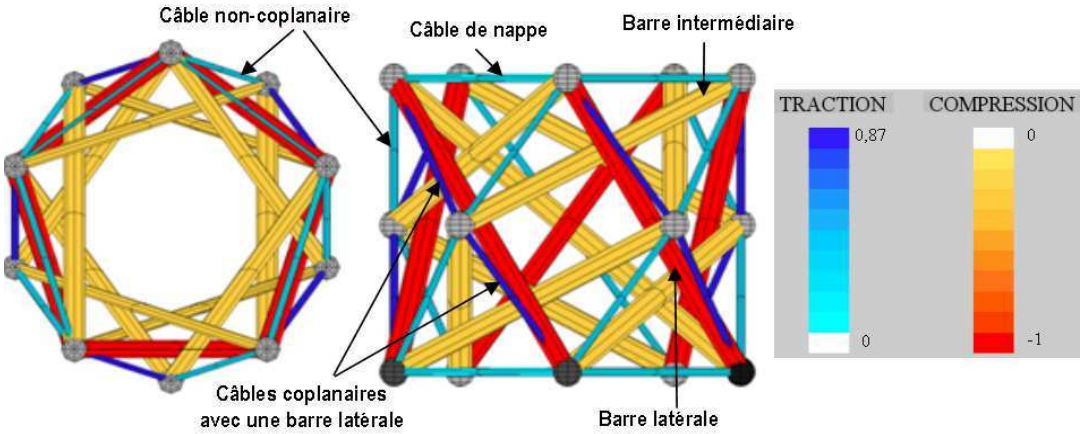


Figure 3.1. Visualisation de l'état d'autocontrainte obtenu

Barres intermédiaires	-0,34 kN
Barres latérales	-1,00 kN
Câbles des nappes	0,34 kN
Câbles coplanaires	0,87 kN
Câbles non coplanaires	0,33 kN

Tableau 3.3. Effort dans les éléments pour le niveau d'autocontrainte normalisé à -1 sur les barres latérales

Module d'Young des câbles	100 000 MPa
Diamètre	3,0 mm
Section	3,85 mm^2
Effort maximal de traction dans les câbles	5,03 kN

Tableau 3.4. Propriétés mécaniques et géométriques des câbles

Module d'Young des barres	20 000 MPa
Résistance élastique	220 MPa
Diamètre interne	35,0 mm
Diamètre externe	40,0 mm
Effort de compression maximal pour des barres de 2,187 m (Force critique d'Euler)	2,121 kN

Tableau 3.5. Propriétés mécaniques et géométriques des barres

3.2 Réponse d'un module sous chargement

Bien qu'en réalité, le comportement d'un système constructif soit rarement linéaire, en raison de la complexité du calcul, l'hypothèse de linéarité est souvent acceptée. Cela se justifie pour des structures dont la déformabilité n'est pas très importante car les petites perturbations conduisent à une quasi-linéarité géométrique. Or, pour un système de tenségrité avec la présence de multiples mécanismes infinitésimaux, cette hypothèse n'est plus valide. Le phénomène a été étudié par Kebiche [KEB98]. De plus l'état d'autocontrainte joue un rôle fondamental sur la rigidité mécanique d'une telle structure. Nous rappelons dans le premier paragraphe les idées de base avant de les appliquer à notre propre sujet.

Si dans ce qui suit, le calcul se fait dans un cadre géométrique non-linéaire, les matériaux par contre seront considérés comme ayant un comportement élastique linéaire.

3.2.1 Bases théoriques du calcul non-linéaire

La différence fondamentale entre un calcul linéaire et un calcul non-linéaire géométrique est que le calcul non-linéaire est réalisé en configuration déformée alors que le calcul linéaire s'effectue sur la configuration non déformée.

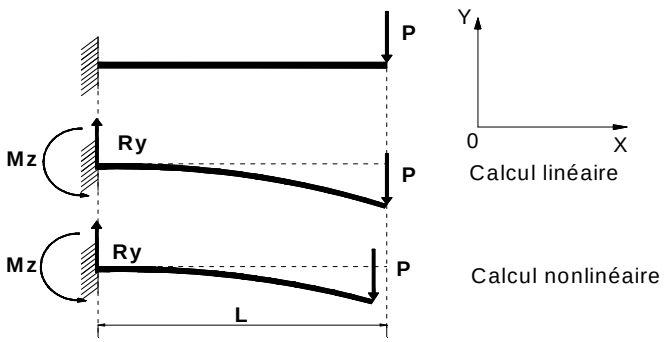


Figure 3.2. Illustration de la différence entre un calcul linéaire et un calcul non-linéaire

Cela peut modifier sensiblement la solution pour les systèmes subissant des déplacements importants. Dans le cas de la Figure 3.2, le calcul linéaire conduit à surestimer la déformée réelle et le moment M_z à l'encastrement.

L'équation d'équilibre d'un corps sollicité quelconque est la suivante :

$$[K]\{u\}=\{f\} \tag{3.2}$$

où [K] est la matrice de rigidité globale, {u} est le vecteur des déplacements et {f} le vecteur des actions extérieures appliquées.

Pour un calcul non-linéaire des systèmes de tenségrité, la matrice de rigidité [K] est constituée du terme correspondant à la raideur linéaire, de celui tenant compte de la non-linéarité géométrique et un terme prenant en compte la précontrainte du système.

$$[K]=[K_E]+[K_{NL}]+[K_G] \tag{3.3}$$

où $[K_E]$ est la matrice de rigidité élastique, $[K_{NL}]$ la matrice de non-linéarité traduisant l'effet des grands déplacements et $[K_G]$ la matrice de rigidité géométrique pour la prise en compte de l'autocontrainte initiale. Afin d'illustrer le rôle des deux derniers termes, nous présentons un exemple très classique de deux câbles alignés et sollicités par une force verticale (Figure 3.3). Lorsque la tension initiale des câbles augmente, la rigidité croît avec l'augmentation du terme $[K_G]$. De la même façon, au cours des itérations pour un pas de chargement donné, plus le déplacement augmente, plus le terme $[K_{NL}]$ croît.

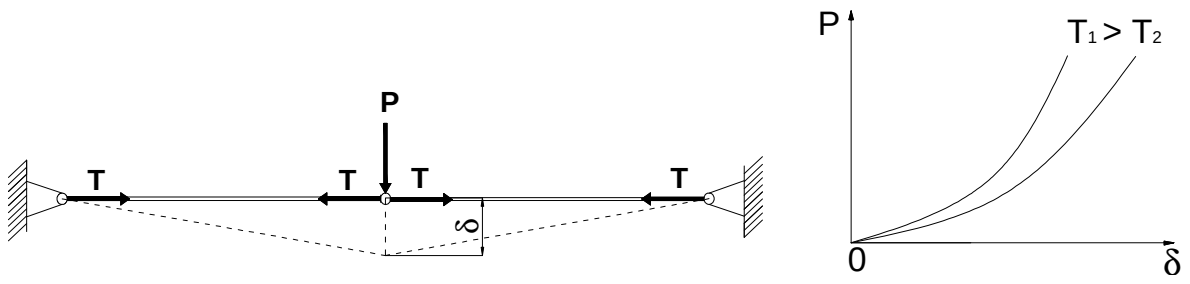


Figure 3.3. Effet de l'autocontrainte sur le changement de géométrie

La relation entre le niveau d'autocontrainte et la rigidité globale dépend fortement du système et n'est pas proportionnelle.

Sur le plan numérique, un problème non-linéaire peut être décomposé en un nombre fini de pas dans lesquels la linéarité est acceptable. La mise à jour de la géométrie à la fin de chaque pas aura pour conséquence l'actualisation de matrice [K]. Pour trouver la solution au problème, les deux méthodes qui peuvent être utilisées sont la méthode Newton-Raphson et la méthode Newton-Raphson modifiée [KEB98].

3.2.2 Hypothèses – Conditions aux limites

L'étude des états d'autocontrainte présentée précédemment nous a donné la valeur de l'effort

initial dans les éléments correspondant à la géométrie et au niveau d'autocontrainte choisis. A partir de cet effort, nous en déduisons la longueur de fabrication (longueur libre) des éléments. L'autocontrainte est introduite dans la pratique par une déformation initiale des éléments lors du montage.

La modélisation des systèmes de tenségrité sous ANSYS n'est pas nouvelle [ABE04]. Les liaisons sont considérées comme des rotules parfaites, les éléments sont soumis uniquement à de la traction ou de la compression et les charges sont appliquées aux nœuds. Nous allons utiliser les éléments de type barre : LINK8 et LINK10 [ANS98]. Le comportement unilatéral des câbles est aussi activé à l'aide de l'option : « tension unique ». La taille des dispositifs de connexion est négligée, c'est-à-dire que les longueurs des éléments sont supposées être égales exactement aux distances entre nœuds.

Le système est chargé par 5 forces nodales identiques descendantes (compression) ou ascendantes (traction) appliquées aux nœuds de la nappe supérieure (Figure 3.4), les nœuds de la nappe inférieure étant bloqués dans la direction OZ. Nous supposons que la charge est statique et que les matériaux travaillent dans leur domaine d'élasticité linéaire. Le poids propre est négligé. Les conditions aux limites imposées dans notre cas doivent conserver au maximum la symétrie du module. Les 6 degrés de liberté du système sont supprimés par des conditions d'appuis sur la nappe inférieure : nœud 2 (UZ, UX), 4 (UZ, UY) et 5 (UZ, UY). Comme dans le cas du prototype réel, le module repose sur le plan OXY horizontal, deux blocages en OZ sont ajoutés pour les nœuds 1 et 3. Les conditions aux limites sont schématisées par la Figure 3.5.

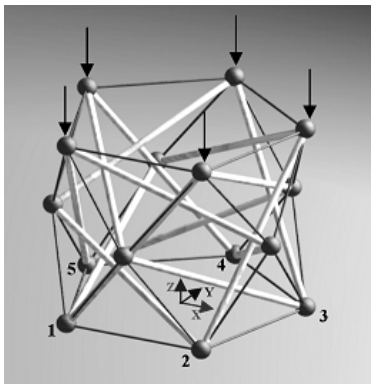


Figure 3.4. Description du chargement

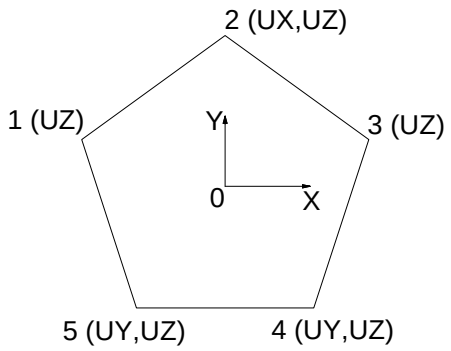


Figure 3.5. Blocages nodaux

3.2.3 Résultats

Etant donné que, pour une même géométrie de structure autocontrainte, les efforts dans les éléments sont proportionnels, nous choisissons l'effort de l'élément barre le plus comprimé comme référence et nous en déduisons les autres. Par exemple, pour le niveau

d'autocontrainte donnant un effort dans les barres latérales de 1 kN (~40 % de la charge critique d'Euler), les efforts dans les autres éléments sont les suivants :

Barres intermédiaires	-0,34 kN
Barres latérales	-1,00 kN
Câbles des nappes	0,34 kN
Câbles coplanaires	0,87 kN
Câbles non coplanaires	0,33 kN

Tableau 3.6. Effort dans les éléments pour un niveau d'autocontrainte donné

Nous allons faire varier la valeur du niveau d'autocontrainte en utilisant les données géométriques et mécaniques fournies dans la partie 2.5.1 *Choix des matériaux*. Le niveau d'autocontrainte évolue dans les barres latérales de 0,5 kN à 2,0 kN. Pour chaque niveau d'autocontrainte nous définissons le libellé suivant :

AC1	0,50 kN
AC2	1,00 kN
AC3	1,50 kN
AC4	2,00 kN

Tableau 3.7. Effort dans les barres latérales selon le niveau d'autocontrainte

Les déplacements affichés dans les graphiques sont les déplacements verticaux des 5 nœuds de la nappe supérieure. La structure est chargée jusqu'à la ruine qui est la force critique d'Euler des barres car les câbles n'atteignent pas leur charge limite de rupture. Les résultats de la simulation sont présentés dans les graphiques qui suivent.

3.2.3.1 Compression axiale de l'anneau

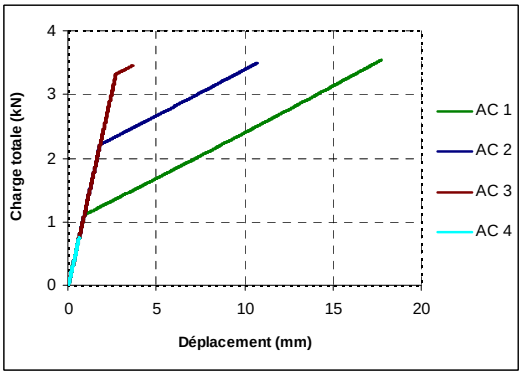


Figure 3.6. Chargement en fonction du déplacement vertical de la nappe supérieure

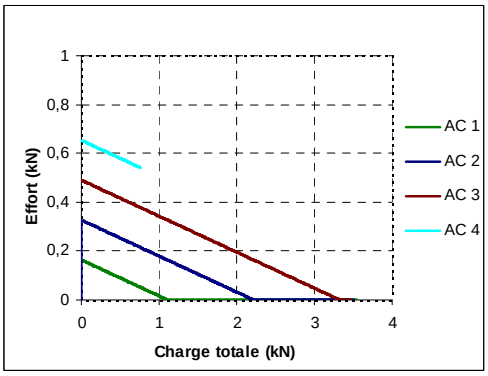


Figure 3.7. Effort dans les câbles non-coplanaires en fonction du chargement total

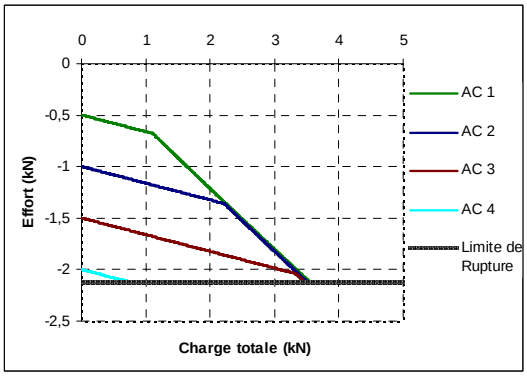


Figure 3.8. Effort dans les barres latérales en fonction du chargement total

De AC1 à AC3, nous distinguons deux phases quasi-linéaires dont le point de transition correspond au relâchement des câbles non-coplanaires. Dans la première phase, l'effort dans les câbles non-coplanaires diminue jusqu'à zéro ensuite ils sont relâchés (Figure 3.7), le système est rigide et les courbes pour tous les niveaux d'autocontrainte sont quasiment confondues (Figure 3.6). Dans cette phase, le niveau d'autocontrainte influe très peu sur la rigidité du système mais peut retarder ou avancer le relâchement des câbles non-coplanaires. Plus le niveau d'autocontrainte est élevé, plus le relâchement des câbles non-coplanaires est retardé. Le chargement de ruine varie très peu (ruine par flambement dans les barres latérales obtenue par dépassement de la force critique d'Euler) (Figure 3.8).

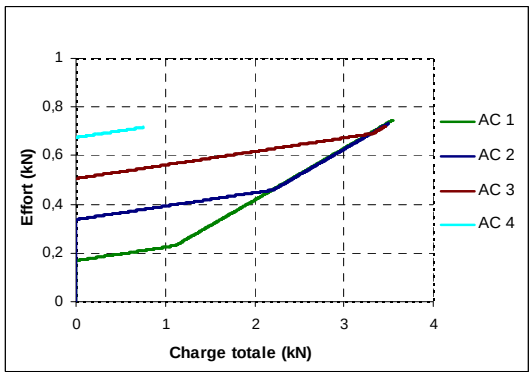


Figure 3.9. Effort dans les câbles de nappes en fonction du chargement total

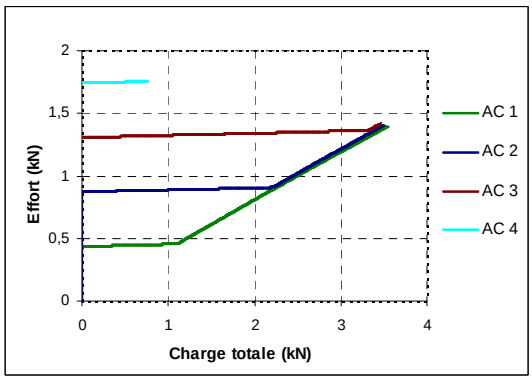


Figure 3.10. Effort dans les câbles coplanaires en fonction du chargement total

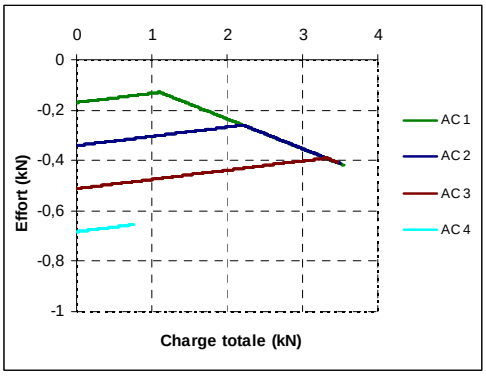


Figure 3.11. Effort dans les barres intermédiaires en fonction du chargement

Nous constatons que l'effort dans les barres latérales (Figure 3.8) a tendance à augmenter tandis que celui des barres intermédiaires (Figure 3.11) diminue. Si l'effort reste quasiment constant dans les câbles coplanaires (Figure 3.10) et il augmente dans les câbles de nappes (Figure 3.9).

Dans la deuxième phase (après le relâchement des câbles non-coplanaires) le comportement est encore linéaire mais la rigidité du système chute fortement (environ 88%) indépendamment du niveau d'autocontrainte. L'effort augmente dans toutes les barres (Figure 3.8, Figure 3.11) commence à augmenter dans les câbles coplanaires (Figure 3.10) et augmente plus fortement dans les câbles de nappes (Figure 3.9) qu'avant le relâchement. Les efforts dans les barres non-coplanaires sont repris par les autres éléments de la structure. Les figures 3.8, 3.10 et 3.11 montrent une augmentation des forces données dans tous les autres éléments à partir du relâchement.

Pour AC4, le comportement de la structure atteint la ruine des barres latérales avant relâchement des câbles non-coplanaires. Par contre, le chargement maximal est plus faible que pour les niveaux AC1 à AC3 (Figure 3.6).

3.2.3.2 Traction axiale de l'anneau

Dans le cas de la traction, la ruine se produit cette fois dans les barres intermédiaires. Nous détectons deux phases, une première phase linéaire suivie d'une seconde phase non-linéaire. Le point de transition correspond au relâchement des câbles de nappes et de compression nulle dans les barres latérales. Par la suite, ces barres travaillent en traction. Les figures suivantes résument les résultats.

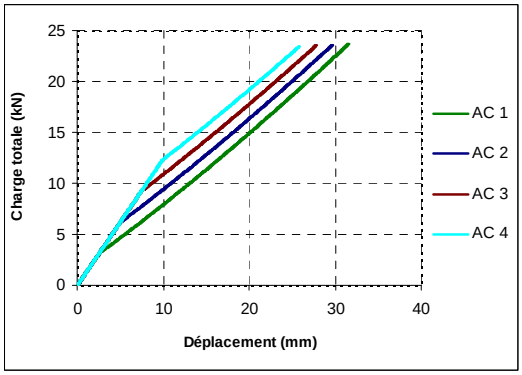


Figure 3.12. Chargement en fonction du déplacement vertical de la nappe supérieure

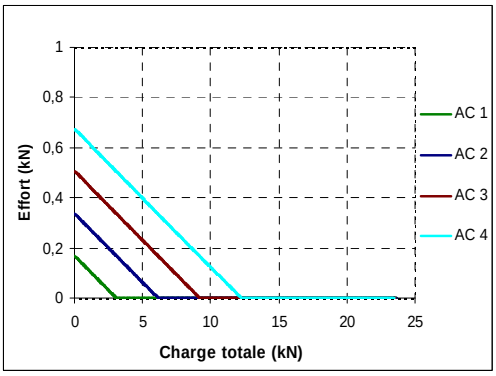


Figure 3.13. Effort dans les câbles de nappes en fonction du chargement total

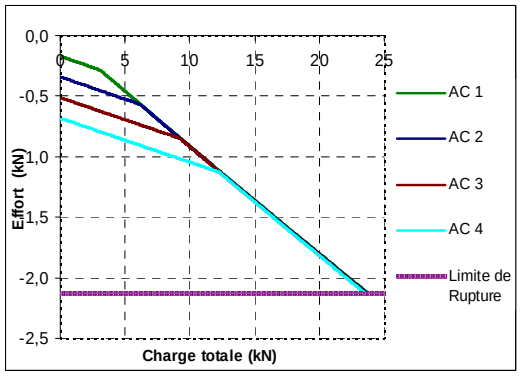


Figure 3.14. Effort dans les barres intermédiaires en fonction du chargement total

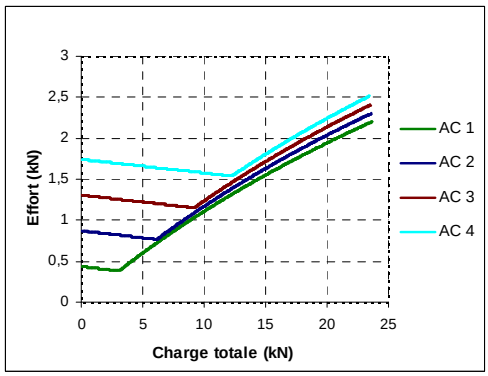


Figure 3.15. Effort dans les câbles coplanaires en fonction du chargement total

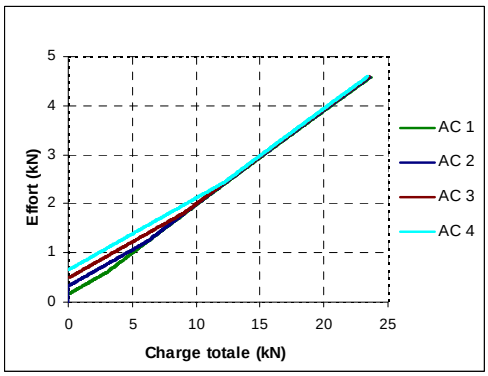


Figure 3.16. Effort dans les câbles non coplanaires en fonction du chargement total

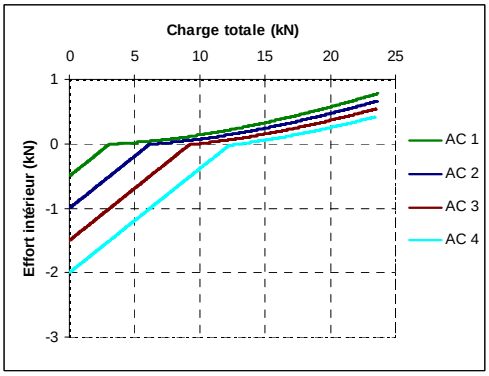


Figure 3.17. Effort dans les barres latérales en fonction du chargement total

3.2.4 Commentaires

L'évolution des efforts dans les éléments est très variable.

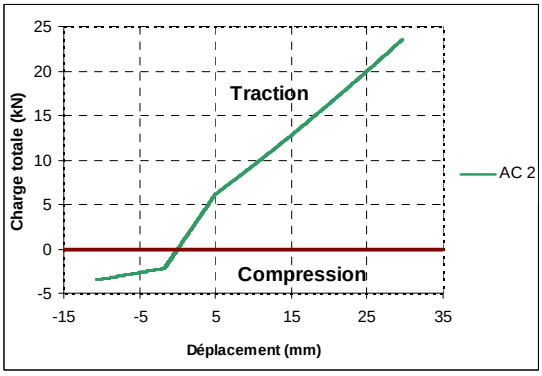


Figure 3.18. Allure de la rigidité du module

Avant le relâchement des câbles, la rigidité en compression (1,24 kN/mm) est identique à celle en traction. Après détension des câbles, la rigidité en traction (0,73 kN/mm) est plus élevée qu'en compression (0,15 kN/mm). La déformabilité en traction est bien plus importante que celle obtenue en compression.

Le niveau d'autocontrainte ne change pas la rigidité instantanée du système avant ou après relâchement des câbles. Par contre la rigidité moyenne pour un déplacement amissible imposé avec relâchement des câbles augmente avec l'autocontrainte. Ce paramètre permet également de retarder ou avancer le relâchement de certains câbles et ainsi d'optimiser la déformation de la structure. Le choix d'un niveau d'autocontrainte optimal est dépendant de l'utilisation envisagée. Nous pouvons choisir un niveau d'autocontrainte tel que le relâchement des câbles coïncide avec la ruine des barres ou bien garder un peu de réserve (sécurité).

Le choix d'une rupture quasi-simultanée dans les deux types d'éléments permet une utilisation optimale des matériaux mais peut s'avérer dangereuse à l'utilisation.

3.3 Première expérimentation sur l'anneau

3.3.1 Description

Dans ce premier essai, la structure est chargée avec des poids suspendus aux 5 nœuds de la nappe supérieure, Figure 3.19. Son comportement mécanique est observé et confronté à celui obtenu numériquement. La mise en tension est faite par raccourcissement des câbles. Un réglage manuel sur les longueurs des éléments est réalisé de manière à ce que ces dernières ne varient pas trop pour les éléments de même famille. Le poids des dispositifs d'accrochage des masses est considéré négligeable.

Dans cette expérimentation, la tension dans les câbles n'est pas identifiée. Huit pas de chargement sont effectués de façon statique. Pour ne pas endommager le système nous nous limitons à 23.6 kg par nœud. Le déchargement n'a pas été mesuré. Les mesures sont relevées pour 5 barres : 2 latérales et 3 intermédiaires. Le processus pour déterminer les coordonnées des nœuds, depuis la position des cibles réfléchissantes collées aux extrémités des barres, sera détaillé dans le chapitre 5.

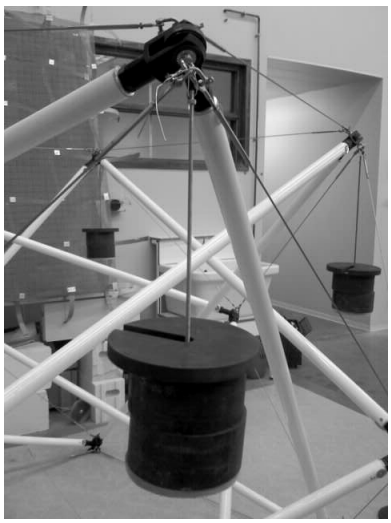


Figure 3.19. Structure chargée

3.3.2 Résultat et commentaires

La courbe de déplacement vertical de chacun des 5 nœuds supérieurs en fonction de la charge est donnée (Figure 3.20). La courbe moyenne obtenue (Figure 3.21) est quasiment linéaire ce qui ne fait pas apparaître le changement de pente attendu en raison du relâchement des câbles non-coplanaires.

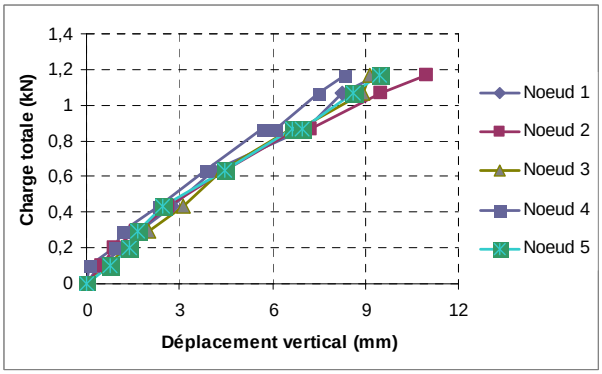


Figure 3.20. Courbe expérimentale charge - déplacement

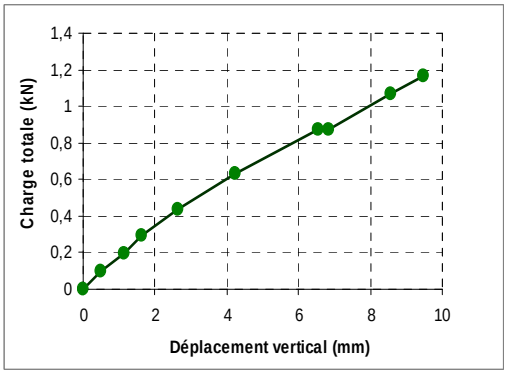


Figure 3.21. Courbe expérimentale charge - déplacement moyen

La rigidité globale est donc en moyenne de 0,123 kN/mm. On peut noter que deux mesures, à 3 heures d'intervalle pour une même valeur de charge, ont permis de mettre en évidence un léger fluage de la structure. Numériquement, la rigidité globale moyenne est de 1,24 kN/mm avant et 0,15 kN/mm après le relâchement des câbles non-coplanaires. Les résultats expérimentaux s'approchent donc à 20 % des résultats numériques pour la portion de courbe correspondant au relâchement des câbles.

N'ayant pu mesurer la tension en place ni même constater le relâchement de câbles, nous n'avons pu nous assurer de l'homogénéité et du niveau d'autocontrainte. Il est possible qu'un relâchement prématuré et non-simultané des câbles non-coplanaires se soit produit, ce qui

peut expliquer la perte progressive de rigidité au cours du chargement. De plus, ni l'excentrement des fixations des câbles sur les nœuds, ni la mise en flexion des éléments (induite par cet excentrement) n'est pris en compte dans le modèle numérique.

Une modélisation numérique plus proche du modèle physique pourrait être développée pour améliorer l'adéquation entre résultats numériques et expérimentaux. De même, une meilleure connaissance de l'état d'autocontrainte en place est souhaitable pour atteindre l'autocontrainte cible prise en compte numériquement. Le chapitre 4 permettra d'exposer les bases de l'identification de cette autocontrainte.

Même si des choix de matériaux et de caractéristiques mécaniques ont été faits pour le prototype, il s'avère intéressant d'étudier l'influence des rigidités des éléments sur le comportement de l'anneau.

3.4 Etude paramétrique : influence de la raideur des éléments

3.4.1 Objectifs

Nous étudions l'influence sur le comportement en compression axiale de l'anneau de la rigidité des câbles et des barres décrite par le produit ES du module d'Young E par la section droite S des éléments. Ici, nous choisissons de faire varier la rigidité ES des éléments et de garder inchangé le niveau d'autocontrainte égal à AC2. ES_b^o, ES_c^o sont respectivement les rigidités des câbles et des barres utilisées dans les simulations numériques servant de référence. Les études numériques sont faites sur le module suivant :

Longueur des barres	200,0 cm
Longueur des câbles de nappes	135,1 cm
Longueur des câbles intermédiaires	102,4 cm
Rayon du cercle circonscrit	114,9 cm
Hauteur du module	147,5 cm

Tableau 3.8. Propriétés géométriques du module

Module d'YOUNG des barres	20 000 MPa
Diamètre interne	35,0 mm
Diamètre externe	40,0 mm

Tableau 3.9. Propriétés mécaniques et géométriques des barre.

Module d'YOUNG des câbles	125 000 MPa
Diamètre	4,0 mm

Tableau 3.10. Propriétés mécaniques et géométriques des câbles

3.4.2 Résultats

Deux valeurs caractérisant la rigidité apparente (K) du système sont considérées : K_1 avant le relâchement des câbles non-coplanaires (Figure 3.22), K_2 après le relâchement (Figure 3.23).

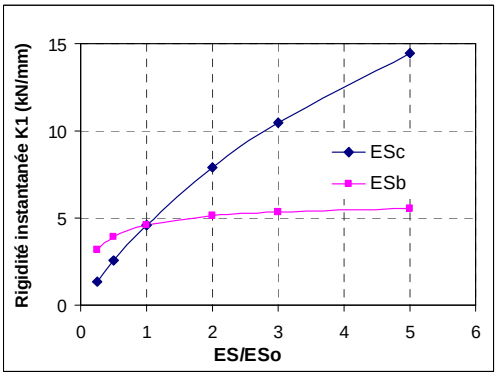


Figure 3.22. Rigidité instantanée K_1 avant le relâchement des câbles non-coplanaires

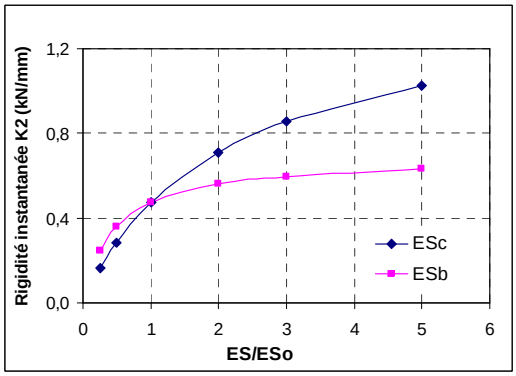


Figure 3.23. Rigidité instantanée K_2 après le relâchement des câbles non-coplanaires

Nous constatons que la raideur des câbles a une influence plus forte que celle des barres sur la rigidité globale. Par exemple, si l'on double ES_c, on augmente de 70% la rigidité instantanée globale alors que ce facteur n'est que de 11% pour ES_b. En effet, avant le relâchement des câbles non-coplanaires, la rigidité instantanée K_1 varie de -32% à +20% par rapport à la référence (ES_b^0 et ES_c^0) lorsque la rigidité des barres varie de -75% à +400%. Pour une même variation sur la rigidité des câbles, K_1 varie de -70% à +212%.

Après le relâchement des câbles non-coplanaires, la rigidité instantanée K_2 évolue de -48% à +33% pour une même variation de la rigidité des barres, et de -66 % à +117% en fonction de la rigidité des câbles.

Dans le but d'observer cette tendance sur une plage plus large des valeurs, nous avons ensuite fait varier la rigidité des deux types d'éléments simultanément. Les figures suivantes exposent les résultats.

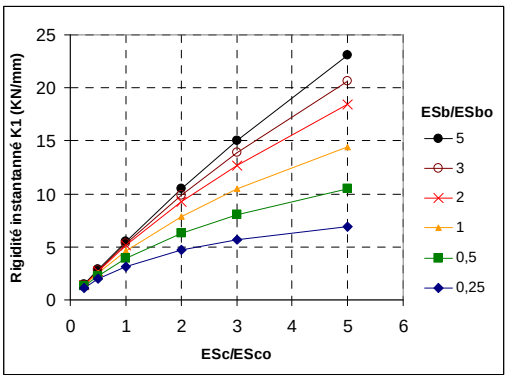


Figure 3.24. Rigidité instantanée K_1 en fonction de ES_c^0 pour différentes valeurs de ES_c^0

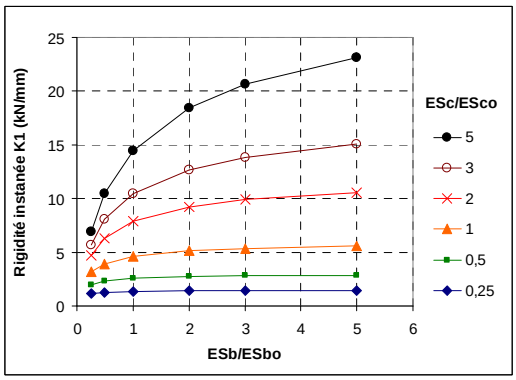


Figure 3.25. Rigidité instantanée K_1 en fonction de ES_b^0 pour différentes valeurs de ES_c^0

Nous constatons que pour une valeur fixée de ES_c^0, l'évolution de la rigidité instantanée K_1 du module est plus importante en fonction de la rigidité des câbles que celle des barres. La même tendance est aussi obtenue pour la rigidité K_2. Cela nous conforte dans notre choix du matériau composite qui est moins rigide mais beaucoup plus léger que l'acier pour les barres.

3.5 Etude de l'homogénéisation

3.5.1 Modélisation rhéologique du comportement mécanique axial

Les résultats des simulations numériques dans l'étude paramétrique montrent que le comportement global de l'anneau semble régi par la raideur des câbles constitutifs et que le niveau d'autocontrainte n'influe pas sur la rigidité apparente instantanée de l'anneau. Dans ce paragraphe nous développons une modélisation de la rigidité de compression axiale à partir des raideurs des barres et des câbles. Les structures de tenségrité sont parfois assimilées à un ballon dans lequel la membrane représente les câbles et l'air représente les barres. Pour déterminer le comportement global de structures gonflables, Thomas [THO02] a montré que l'on devait associer les souplesses de différents éléments. Nous utilisons le même principe pour modéliser le comportement axial élastique instantané de l'anneau. Le modèle rhéologique se résume alors en l'association en série de deux ressorts : l'un de raideur k_b associé aux barres, l'autre de raideur k_c associé aux câbles (Figure 3.26).

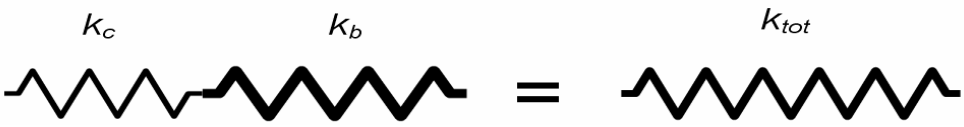


Figure 3.26. Modèle rhéologique du comportement de l'anneau de tenségrité

Chaque raideur s'écrit comme suit :

$$k_b = \frac{E_b S_b}{L_b^*} \quad \text{et} \quad k_c = \frac{E_c S_c}{L_c^*}$$

avec E_b, S_b et L_b^* le module d'Young, la section et la longueur équivalente des barres, E_c, S_c et L_c^* le module d'Young, la section et la longueur équivalente des câbles. La raideur k_{tot} de l'assemblage des deux ressorts en série est :

$$k_{tot} = \frac{\dfrac{E_b S_b}{L_b^*}\dfrac{E_c S_c}{L_c^*}}{\dfrac{E_b S_b}{L_b^*} + \dfrac{E_c S_c}{L_c^*}} = \frac{1}{L_b^*}\frac{E_b S_b}{1 + \dfrac{E_b S_b L_c^*}{E_c S_c L_b^*}}$$

Dans ce modèle, les modules d'Young des barres et des câbles sont connus ainsi que les

sections S_b et S_c. Les paramètres à identifier sont les longueurs équivalentes L_b^* et L_c^* ou plutôt la longueur équivalente L_b^* et le rapport des deux longueurs équivalentes L_c^*/L_b^*. La Figure 3.27 montre que l'on peut trouver un couple de longueurs équivalentes tel que l'évolution de la raideur k_{tot} en fonction de E_b et de E_c soit en concordance avec les simulations numériques. On trouve une longueur équivalente L_b^* de 0,2m et un rapport L_c^*/L_b^*égal à 1,47. Nous retrouvons parfaitement l'évolution de la rigidité axiale apparente lorsque le module d'Young des barres ou des câbles varie.

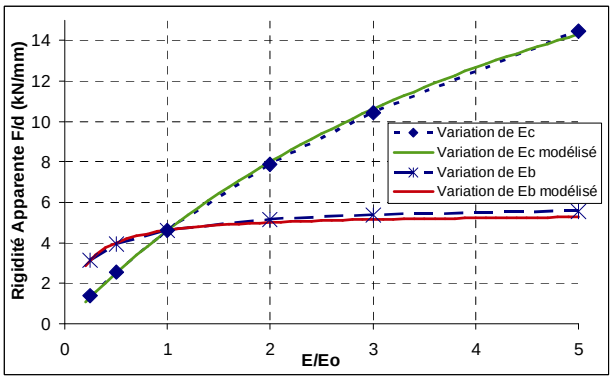


Figure 3.27. Comparaison entre les simulations numériques et le modèle rhéologique

3.5.2 Validation du modèle

Pour vérifier la pertinence du modèle, nous avons réalisé les simulations du comportement en compression axiale en faisant varier la géométrie de l'anneau. La première série de tests consiste à vérifier que le rapport L_c^*/L_b^* reste constant lorsque l'on fait une homothétie de l'anneau et que la longueur équivalente suit bien l'évolution d'échelle. La seconde série doit permettre de retrouver le même type de résultat pour un anneau de forme différente. Pour l'anneau à base pentagonale nous avons effectué une série de simulations du comportement axial pour une dimension de l'anneau deux fois plus petite, puis, deux fois plus grande que celle de référence.

Pour la première série, les longueurs des barres et des câbles suivent naturellement l'évolution d'échelle. Les figures Figure 3.28 et Figure 3.29 montrent une très bonne concordance entre le modèle rhéologique et les simulations. Le rapport L_c^*/L_b^* reste constant et la longueur équivalente L_b^*suit bien l'évolution d'échelle.

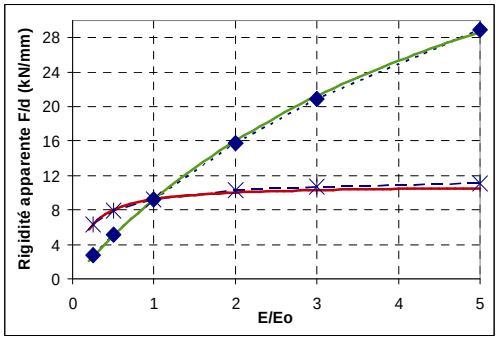


Figure 3.28. Validation du modèle à l'échelle 1/2

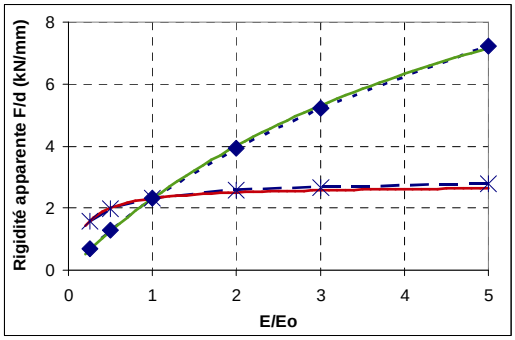


Figure 3.29. Validation du modèle à l'échelle 2

Pour compléter cette validation nous avons légèrement modifié la longueur des câbles ce qui conduit à obtenir un anneau de tenségrité avec des nappes inférieures et supérieures ayant un rayon différent de celui de la nappe intermédiaire. Il s'agit du module 2 décrit au paragraphe 2.4. Malgré une différence de l'état d'autocontrainte, l'évolution est identique (Figure 3.30).

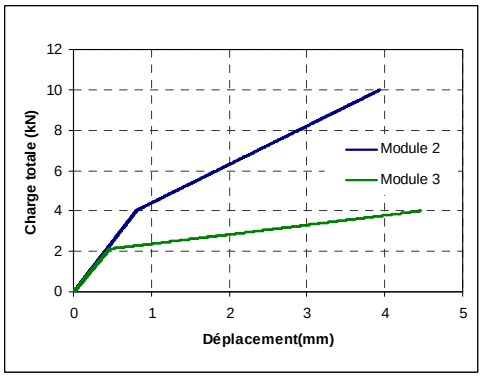


Figure 3.30. Comparaison des comportements en compression axiale des modules 2 et 3

L'identification montre que l'on retrouve bien l'évolution de la rigidité en fonction du module d'Young des barres et des câbles. Pour les trois échelles, nous conservons la proportionnalité entre l'échelle et la longueur équivalente L_b^* et le rapport L_c^*/L_b^* reste contant et égal 0,5 (Figure 3.31).

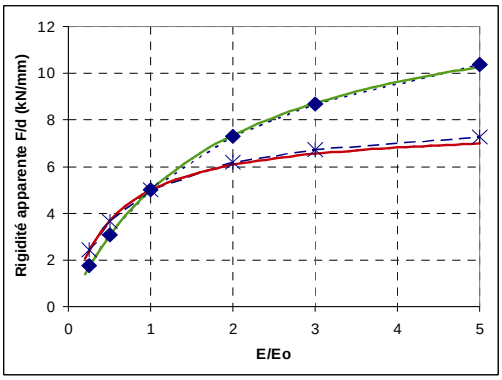


Figure 3.31. Modèle rhéologique pour le module 2

Un dernier test a porté sur la validation du modèle avec un anneau à base hexagonale. Il s'agit alors de vérifier si le modèle est transposable à d'autres types d'anneaux de tenségrité. La

comparaison entre les simulations et la modélisation montre que le modèle est capable de décrire l'évolution de la rigidité en fonction du module d'Young des éléments (Figure 3.32). Nous trouvons une longueur équivalente de barre $L_b^* = 0{,}15$ m pour une longueur de barre réelle de 2 m. Le rapport L_c^*/L_b^* est alors égal à 1,37 proche de la valeur déterminée pour le pentagone.

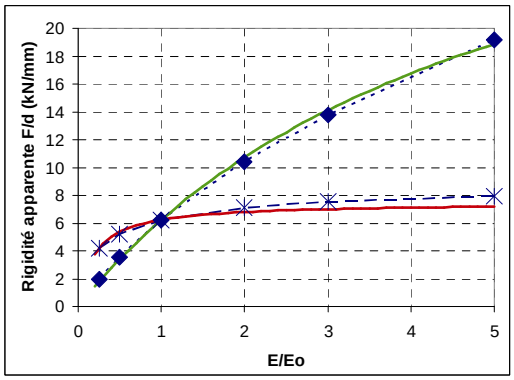


Figure 3.32. Modèle rhéologique pour l'anneau à base hexagonale

3.6 Comportement en flexion

Après des études sur le comportement axial en traction et en compression, nous poursuivons notre travail en analysant la réponse en flexion de l'anneau. Pour obtenir une relation force-déplacement conséquente, nous nous proposons d'assembler 4 modules selon l'axe de l'anneau. Pour minimiser les effets parasites de torsion dus à la non-symétrie des éléments par rapport aux plans de base des pentagones, nous utilisons deux modules symétriques par rapport à ces plans ce qui permet d'avoir un cheminement des barres inversé entre chaque module (Figure 3.33). Le phénomène de torsion parasite est étudié à l'IMAC – Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne [RHO08].

3.6.1 Conditions aux appuis et chargement

Les conditions aux limites sont identiques à celles utilisées lors de la précédente étude (Figure 3.34). La structure est chargée par des forces horizontales appliquées sur tous les nœuds (Figure 3.35). Par souci de simplification, les charges nodales sont supposées uniformes. L'état d'autocontrainte est le même que celui utilisé précédemment pour le module isolé. Sur les nappes d'assemblage, les câbles de nappes sont doublés, ce qui permet d'avoir le même état d'autocontrainte sur chacun des modules.

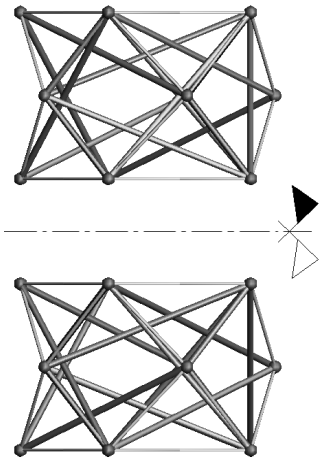


Figure 3.33. Deux modules symétriques par rapport aux bases des pentagones

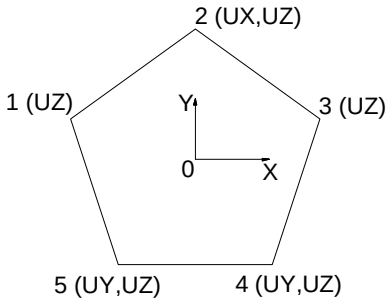


Figure 3.34. Conditions aux limites

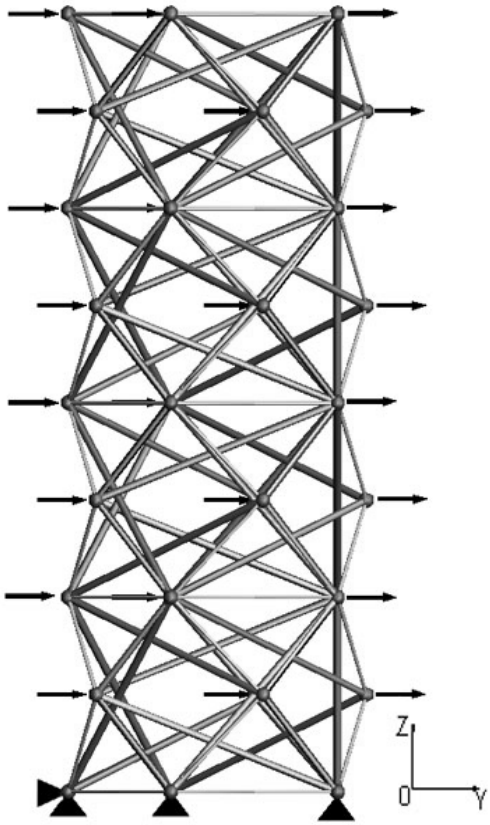


Figure 3.35. Schéma de chargement

Le système est chargé jusqu'à la rupture des éléments. Comme dans l'étude en traction ou en compression, la ruine apparaît en premier lieu dans les barres.

3.6.2 Résultats

La Figure 3.36 présente les efforts dans les éléments avant et après le chargement pour le niveau d'autocontrainte AC2. Les efforts dans les éléments ne sont plus homogènes par morceaux mais très dispersés. On remarque que certains câbles sont détendus et que les éléments les plus sollicités sont ceux qui se trouvent près des appuis.

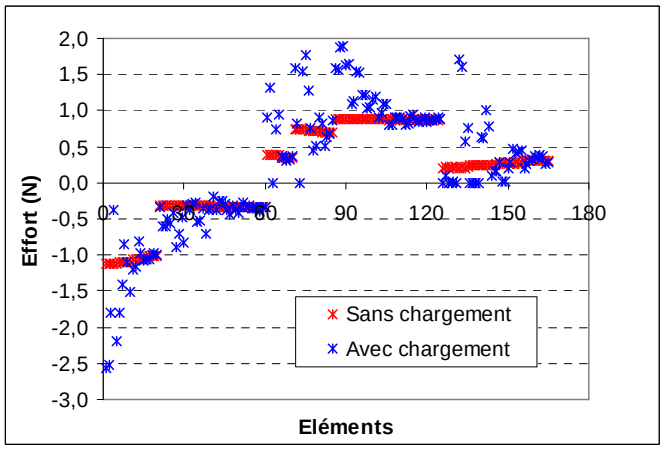


Figure 3.36. Efforts dans les éléments avant et après le chargement

Nous avons étudié l'influence du niveau d'autocontrainte sur la réponse. Pour cela nous avons appliqué les niveaux d'autocontrainte de AC1 à AC5 (Tableau 3.7). Ce sont les niveaux d'autocontrainte utilisés dans l'analyse précédente. On constate que plus le niveau d'autocontrainte est élevé, moins les forces sont dispersées (Figure 3.37). Cela peut s'expliquer par le fait qu'il y a beaucoup moins de câbles détendus quand le niveau d'autocontrainte est important.

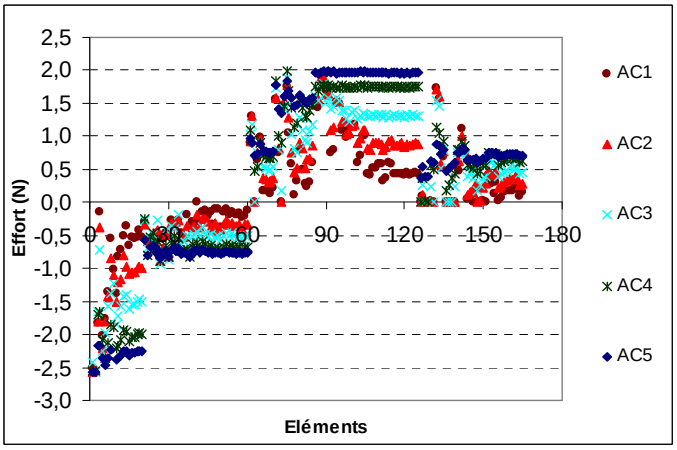


Figure 3.37. Efforts dans les éléments à la ruine pour différents niveaux d'autocontrainte

La rupture se produit par flambement d'une barre, l'élément 3 correspondant à la barre latérale située sur le module le plus bas et sur la partie comprimée. Les Figure 3.39 et Figure 3.40 présentent la force limite appliquée à chaque nœud et le déplacement maximal correspondant aux différents niveaux d'autocontrainte. L'évolution du déplacement maximal est assez régulière dans les simulations précédentes, la chute de rigidité provient du relâchement de câbles (Figure 3.38) qui se produit d'une manière assez progressive dans ce cas.

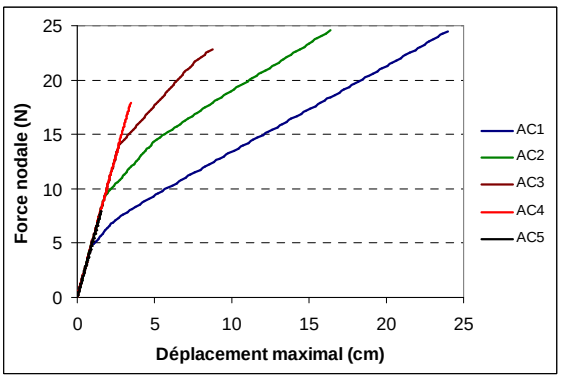


Figure 3.38. Déplacement maximal

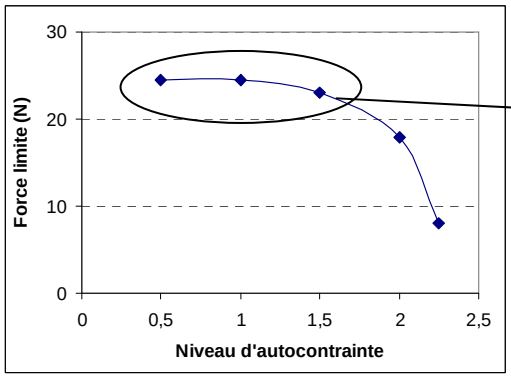


Figure 3.39. Charge limite de ruine

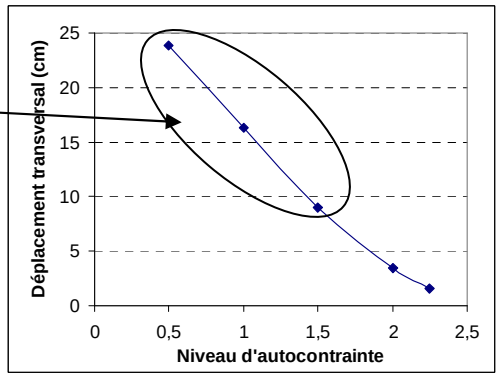


Figure 3.40. Déplacement maximal

En général et dans la mesure du possible, un processus de conception a pour but de maximiser la charge limite et de minimiser la déformation. Or, ces deux critères peuvent être contradictoires. Si un faible niveau d'autocontrainte (AC1) ne permet pas d'augmenter la force limite, un niveau d'autocontrainte élevé (AC5) amène une chute de la cette dernière (Figure 3.39). Par contre, l'augmentation de l'autocontrainte rigidifie sensiblement le module. On peut trouver à l'aide de cette analyse un bon compromis charge limite – déplacement maximum.

3.6.3 Influence de la rigidité des éléments

Pour améliorer la rigidité de la structure, nous étudions deux possibilités consistant à augmenter la rigidité ES des câbles ou des barres. Pour vérifier si cela peut avoir une influence, nous avons réalisé cette analyse avec différents niveaux d'autocontrainte (AC1, AC2 et AC3). La figure suivante présente les résultats.

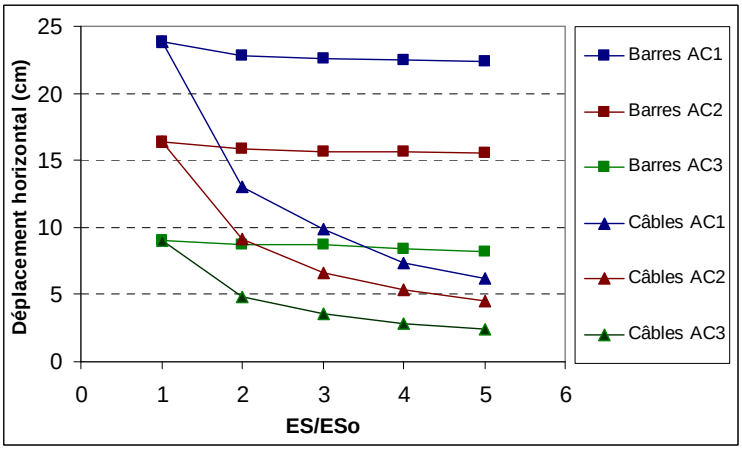


Figure 3.41. Influence de la rigidité des câbles et les barres

A nouveau, nous constatons que l'influence de la rigidité des câbles est plus forte que celle des barres. Lorsque l'état d'autocontrainte est fort, l'influence de la rigidité des câbles se fait moins sentir : l'autocontrainte joue un rôle important dans la rigidité du système.

Conclusion

Les simulations numériques du comportement de l'anneau ont montré l'influence du niveau d'autocontrainte et le comportement non-linéaire du système. Le niveau d'autocontrainte a une forte influence sur la limite de chargement de la structure et donc sur la flèche maximale.

La relation entre la rigidité des éléments et la raideur de la structure a débouché sur l'élaboration d'un modèle rhéologique. Enfin, la simulation d'un assemblage d'anneaux permet d'initier l'étude du comportement en flexion.

Néanmoins, le manque d'information fiable sur l'état d'autocontrainte mis en œuvre ne nous a pas permis de conclure définitivement sur le comportement expérimental du module. Le développement d'un outil d'identification des tensions en place s'avère nécessaire pour aller plus loin dans notre étude expérimentale. Tel est l'objet du chapitre qui suit.

Chapitre 4 : Identification de l’autocontrainte

“A discovery is said to be an accident meeting a prepared mind”

Albert Szent-Gyorgyi

Introduction

Le contrôle de la mise en autocontrainte est une étape cruciale pour mettre en service un système de tenségrité. Dans le cadre de notre étude, cela doit permettre de vérifier les résultats des simulations numériques sur le comportement mécanique du prototype. Ce travail peut être décomposé en deux tâches : identification de l'état actuel et procédure de réglage de la mise en autocontrainte.

La première étape, identification de l'autocontrainte en place, consiste à évaluer les efforts dans les éléments à l'aide des mesures effectuées. Nous évaluerons seulement les efforts dans les câbles et nous pourrons en déduire les efforts dans les barres. Si l'identification de l'effort dans des barres au moyen des jauges de déformation est assez bien connue, elle nécessite une instrumentation spécifique. Dans notre cas d'étude, nous souhaitons en même temps développer une méthode pertinente qui permette la détermination de la tension dans les câbles pour lesquels l'usage de jauges n'est pas aisé. Ainsi, les câbles font l'objet de notre travail d'identification de l'état d'autocontrainte en place.

La deuxième étape, le réglage de l'autocontrainte, permet à partir de l'état en place d'agir sur un nombre défini d'éléments pour atteindre un état le plus proche possible de l'état cible [AVE04].

4.1 Identification de la tension

La manipulation a pour objectif d'identifier les efforts de tension dans les câbles. C'est une étape nécessaire pour pouvoir régler la précontrainte cible et étudier expérimentalement le comportement mécanique de la structure. Pour ce travail, deux méthodes ont été étudiées au sein de l'équipe Conception en Structures :

La méthode statique consiste à quantifier la tension au moyen d'un tensiomètre fabriqué dans notre laboratoire au cours des travaux de thèse de Nicolas ANGELLIER [ANG08].

La méthode dynamique permet d'identifier la tension à partir de la mesure de fréquences de vibration du câble (modèle corde vibrante avec ou sans inertie).

4.1.1 Approche statique

L'approche statique s'effectue à l'aide d'un tensiomètre dont le principe fonctionnel est développé par F. Cévaër [CEV97] (voir ANNEXE C.1). Les figures suivantes montrent le schéma du dispositif.

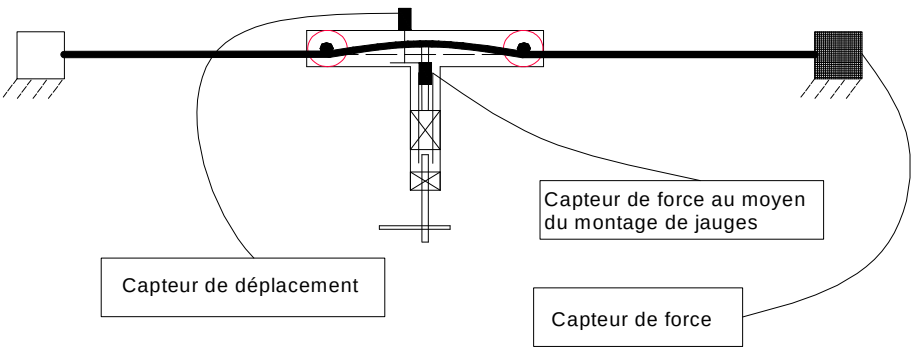


Figure 4.1. Schéma du tensiomètre sur le banc d'étalonnage [ANG08]

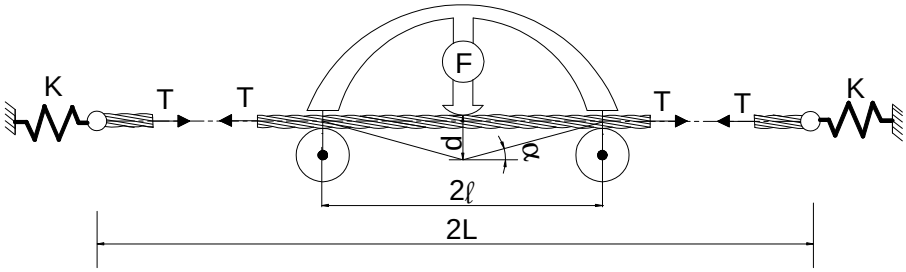


Figure 4.2. Caractéristiques du câble, du tensiomètre et des appuis

K est la raideur des appuis supposés ici identiques. Le tensiomètre, positionné sur le câble, impose un déplacement **d** sous l'action d'une force **F** (en dehors de toute action de pesanteur). La relation analytique entre la charge appliquée **F** et le déplacement **d** est donnée, dans le cas d'un élément tendu sans rigidité de flexion, par la formule :

$$F = \frac{2T}{\ell} d + \frac{KK_0}{K + K_0} \frac{1}{\ell^2} d^3 \tag{4.1}$$

où **T** est la tension dans l'élément tendu (N), **ℓ** la demi-portée entre les poulies du tensiomètre et $K_0 = ES/L$ la rigidité de traction de l'élément tendu.

Les mesures sont gérées par un ordinateur doté du logiciel LabVIEW. Le pas de temps de mesure est incrémenté automatiquement en tenant compte du fait que la vitesse de chargement à la main n'est pas tout à fait régulière. L'incrément entre deux mesures a pour ordre de grandeur le centième de seconde.

4.1.2 Approche dynamique

L'approche dynamique consiste à déterminer la tension dans les câbles à partir des fréquences vibratoires mesurées. Cette méthode a été proposée par J.L. Robert [ROB93] avec le modèle de corde vibrante sans inertie. La figure qui suit schématise son principe.

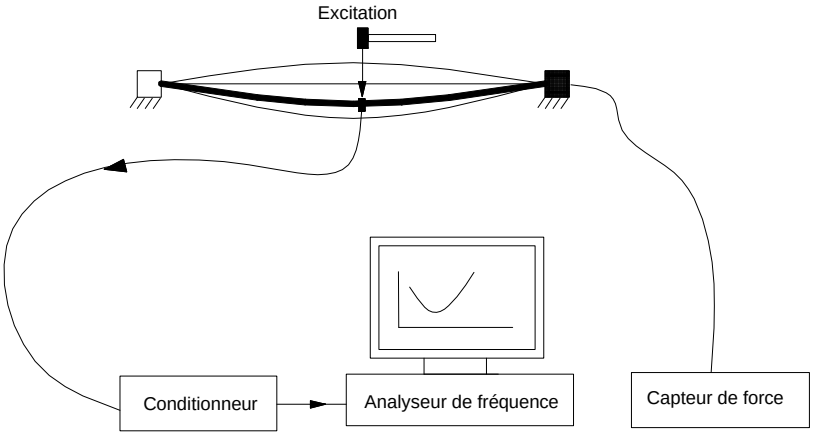


Figure 4.3. Schéma de l'approche dynamique

La formule théorique de la corde vibrante est :

$$f = \frac{n}{4L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{4.2}$$

où **T** est la tension (N), **L** la demi-longueur de la corde (m), **μ** la masse linéique (kg/m), **f** la fréquence (Hz) et n l'ordre du mode de vibration.

Pour le mode fondamental n = 1, on peut écrire :

$$T = 16\,L^2 f^2 \mu \tag{4.3}$$

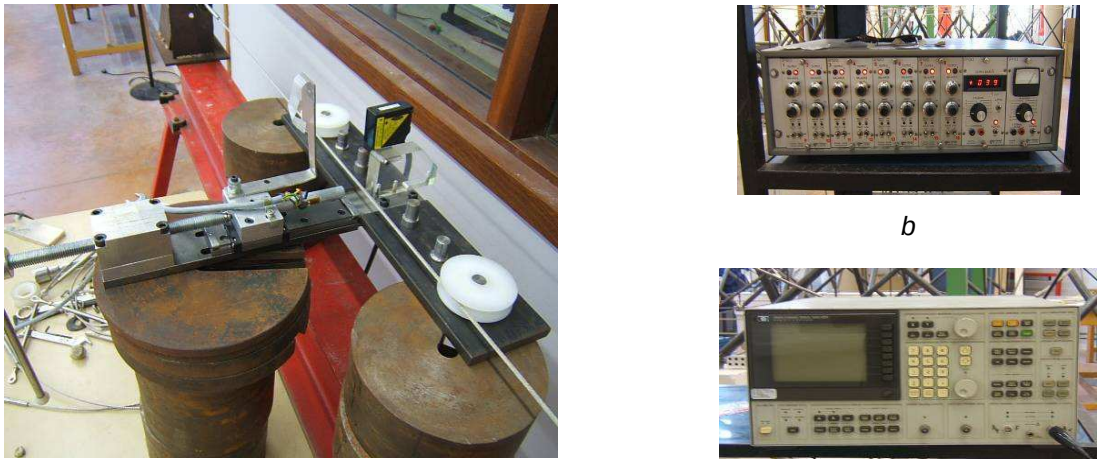
La méthode est ensuite développée par D. Siegert et al. [SIE04] avec prise compte de l'inertie par un coefficient multiplicatif sur la fréquence.

4.1.3 Matériel expérimental

Le matériel à notre disposition se compose d'un capteur de force, un analyseur de fréquence (avec accéléromètre et amplificateur) et un tensiomètre.

a *b* *c*

Figure 4.4. Conditions aux bords (a, b), Accéléromètre (c)



a *b* *c*

Figure 4.5. Matériels : Tensiomètre (a), Affichage du capteur de force (b), Analyseur de fréquence (c)

Nous avons pu mesurer la fréquence propre de tous les câbles de l'anneau (Figure 4.6). Les valeurs relevées présentent une homogénéité des efforts dans les éléments d'une même famille.

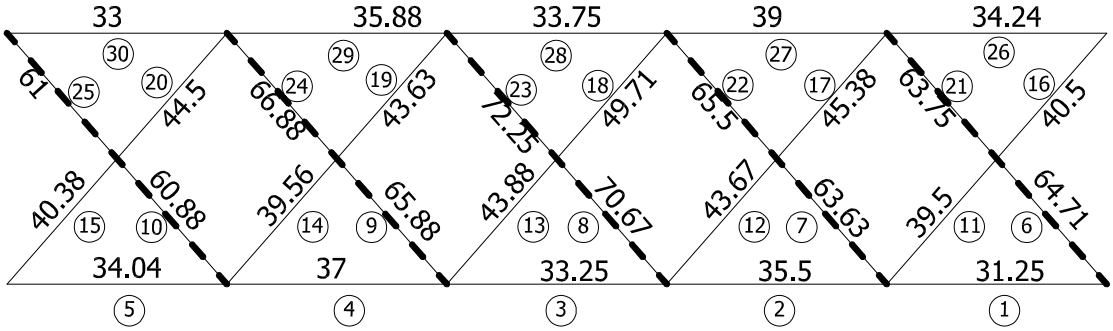


Figure 4.6. Mesure de fréquence en Hz sur les câbles (projection cylindrique)

Il serait idéal de calibrer la loi fréquentielle sur un banc de tension pour pouvoir en déduire la tension dans les câbles en place. Cependant, la courbe expérimentale est loin de présenter une loi linéaire de T en fonction de f^2 comme dans l'équation (4.3) mais plutôt linéaire en fonction de $f^{2,3}$.

4.1.4 Commentaires

Parmi ces deux approches, l'approche dynamique est considérée comme plus simple et plus rapide à réaliser à condition que les caractéristiques d'ancrage soient bien définies (articulation pure ou encastrement pur). Cela n'est pas le cas de notre prototype où la position des dispositifs de connexion est de caractère complexe et irrégulier rendant difficile la détermination du type de liaison et la longueur effective des câbles. De ce fait, nous nous sommes orientés vers l'approche statique.

4.2 Problème lié à l'existence de la rigidité en flexion

4.2.1 Première manipulation

Théoriquement, la tension d'un élément sans rigidité en flexion, par le biais de deux couples de mesures (F_1, d_1) et (F_2, d_2) avec le tensiomètre, peut être déterminée par la formule :

$$T = \frac{l}{2}\left(\frac{F_1}{d_1} - \frac{d_1}{d_2}\frac{(d_1F_2 - d_2F_1)}{(d_2^2 - d_1^2)}\right) \tag{4.4}$$

d_1 : déplacement du point d'application de la force sous la force F_1 appliquée

d_2 : déplacement du point d'application de la force sous la force F_2 appliquée

Cette démarche est réalisable quand le point d'origine de la courbe (F_0 = 0, d_0 = 0) est bien défini. Or, dans la réalité, nos équipements électroniques de mesure laissent apparaître d'inévitables bruits numériques (Figure 4.7). Cette incertitude de mesure engendre une difficulté pour déterminer le point d'origine, ainsi que le choix des 2 points expérimentaux qui sont susceptibles d'entraîner une forte variation de la valeur de tension déduite.

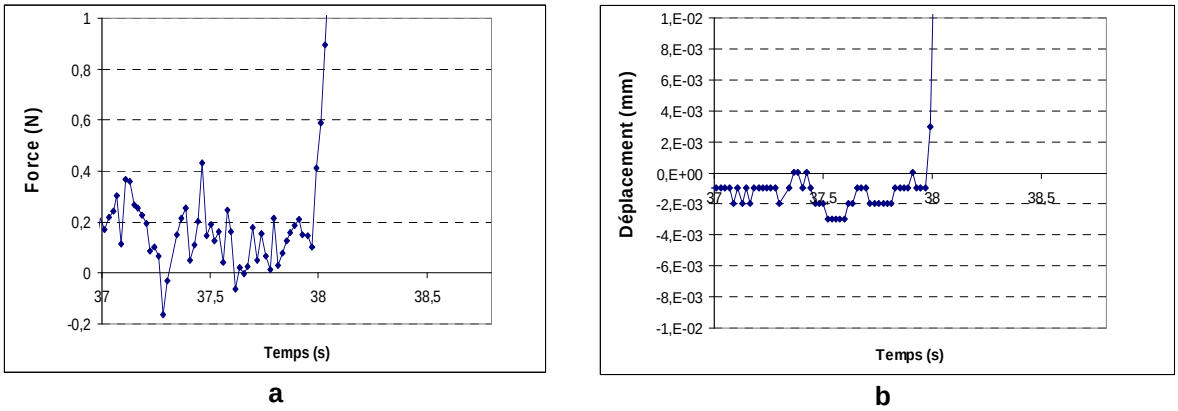


Figure 4.7. Courbes expérimentales Charge – Temps (a) et Déplacement –Temps (b)

Pour surmonter cet obstacle, nous proposons une méthode qui permet de déterminer le décalage. La formule (4.1) avec prise en compte des inconnues sur F_0 et d_0 du point départ devient donc la suivante :

$$F - F_0 = \frac{2T}{\ell}(d - d_0) + \frac{KK_0}{K + K_0}\frac{1}{\ell^2}(d - d_0)^3 \tag{4.5}$$

Par souci de simplification, l'équation (4.5) peut s'écrire sous forme :

$$F = F_0 + A(d - d_0) + B(d - d_0)^3 \tag{4.6}$$

où $A = \frac{2T}{\ell}$ et $B = \frac{KK_0}{K + K_0}\frac{1}{\ell^2}$

L'objectif est donc de trouver les 4 paramètres A, B, F_0 et d_0 tels que l'écart entre les valeurs de la charge appliquée F calculée selon la formule (4.6) et les valeurs de F^{exp} données par le capteur de force soit minimisé. Cela consiste à obtenir la valeur minimale de J donnée par l'expression suivante :

$$J = \sum \left[F_i - F_i^{exp} \right]^2 \tag{4.7}$$

Où F_i^{exp} et F_i sont respectivement la valeur de la charge donnée par le capteur de force sur un point de mesure i et celle calculée selon la formule (4.6) pour le même point. Pour avoir la meilleure précision possible, il faut effectuer une régression polynomiale sur une plage suffisamment large des points expérimentaux. La procédure mathématique est détaillée dans [BJO96]. Le calcul est réalisé sous Excel.

Les premiers essais sont réalisés sur un banc de tension pour différentes tensions (mesurées à l'aide d'un dynamomètre) du câble (supposé en première approximation à rigidité de flexion négligeable). L'exploitation est ensuite effectuée. La figure suivante expose un exemple avec une tension en place fixée de 1000 N, sur un câble de demi-longueur 650 mm, avec un demi espacement des poulies fixé à ℓ = 100 mm.

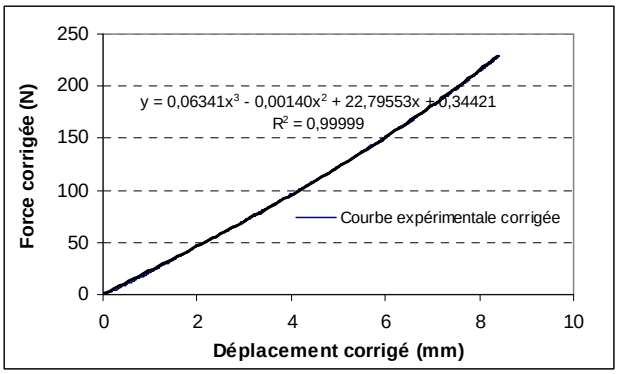


Figure 4.8. Courbe expérimentale Force ($F-F_0$) – Déplacement ($d-d_0$)

En recherchant une courbe de tendance de degré 3 dont les coefficients de degré 0 et 2 sont nuls, on trouve F_0 = -5 N, d_0 = -0,29 mm, A = 22,85 N/mm, B = 0,0554 N/mm^3 avec R^2 = 0,9995. Si la forme de l'équation (4.6) est validée par le coefficient de détermination R^2, la tension peut être évaluée avec la méthode à 4 paramètres (A, B, F_0, d_0), qui est alors, sous l'hypothèse d'inertie de flexion négligeable, de 1160 N présentant ainsi un écart de 9% avec la tension réelle mesurée par le dynamomètre.

4.2.2 Analyse

L'écart de la tension calculée par rapport à la tension réelle est vraisemblablement dû, outre les incertitudes expérimentales, à l'hypothèse d'inertie de flexion négligeable. Deux

questions peuvent se poser : comment la rigidité de flexion du câble peut-elle modifier les coefficients de degré 1 et 3 et, plus largement, comment la faire intervenir dans une relation analytique F-d du tensiomètre ?

4.3 Solution

Une solution analytique qui permettrait de calculer la tension du câble en tenant compte de l'inertie de flexion de celui-ci serait idéale. Cependant, cette solution, même si elle existe, apparaît difficile à élaborer. Nous cherchons donc dans un premier temps à mettre en œuvre une méthode empirique basée sur des résultats numériques.

4.3.1 Idée

Nous nous proposons de corriger les coefficients de la formule (4.6) en tenant compte de la rigidité en flexion du câble. L'équation cherchée doit mettre en corrélation l'inertie du câble, les raideurs des appuis et la tension en place. Pour cela, il nous faut avoir un nombre important de résultats numériques et les analyser pour établir une formule de type empirique.

4.3.2 Modélisation numérique

Le modèle est basé sur les caractéristiques du câble utilisé sur l'anneau de tenségrité introduit précédemment. L'inertie initiale I_0 est évaluée à partir de la propriété de la section droite du câble (Figure 4.9 et Tableau 4.1). On fait ensuite varier l'inertie du câble de la valeur I_0 jusqu'à $I = I_0/100$. La raideur du câble déterminée par ES/L est fixée à 592,3 N/mm. Le câble est modélisé par des éléments ''poutre'' de longueur 5 mm entre les poulies du tensiomètre et de 10 mm pour le reste. Les appuis de rigidité K fixée (Figure 4.2) sont matérialisés par deux éléments ''poutre'' reliés aux extrémités du câble. On fait aussi varier la raideur des appuis de 10^8 N/mm (infinie) à 100 N/mm (très souple). La Figure 4.10 schématise notre modèle.

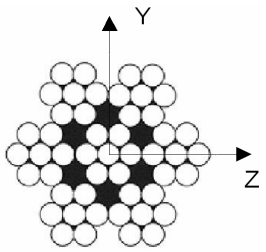


Figure 4.9. Section droite des câbles

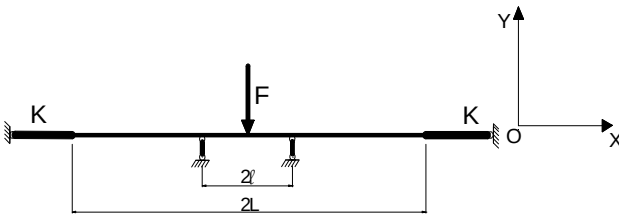


Figure 4.10. Modèle numérique

Les deux poulies sont considérées comme deux appuis simples. Le chargement est simulé par déplacement imposé du point d'application de la charge F. La valeur de la réaction en ce point est ensuite relevée comme étant la valeur de la charge F.

Section pleine S	3,85 mm^2
Inertie I_z	1,67 mm^4
Module d'Young E	100 000 MPa
Demi longueur L	650 mm
Rigidité K_0	592,3 N/mm

Tableau 4.1. Propriétés mécaniques et géométriques du câble

La Figure 4.11 montre une partie de la déformée du câble. La déformée à l'extérieur des deux poulies traduit l'influence de la rigidité de flexion du câble.

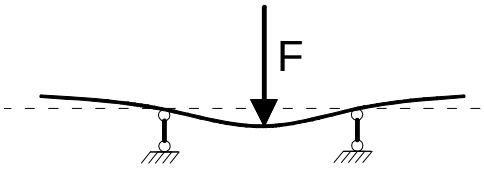


Figure 4.11. Déformée du câble au point de chargement

La figure suivante présente un exemple de la courbe d'une simulation numérique charge – déplacement dans le cas T = 1000 N et K = 10^8 N/mm pour différentes valeurs de l'inertie du câble (par rapport à l'inertie de référence I_0).

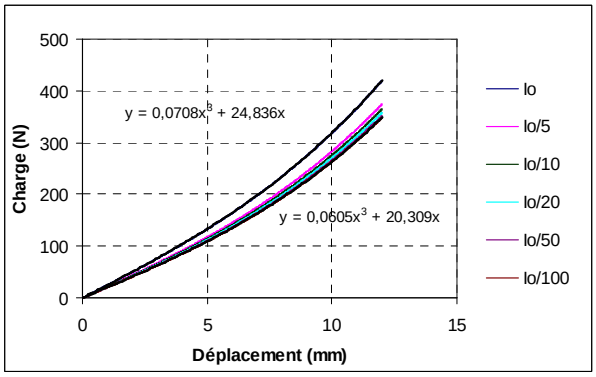


Figure 4.12. Charge – Déplacement T = 1000N et K = 1E+8N/mm

La Figure 4.12 montre qu'en deçà de I = $I_0/50$ l'influence de l'inertie est très faible sur la courbe (F-d). En imposant que les coefficients de degré 0 et 2 soient nuls, les courbes de tendance de (F-d) sont de la forme :

$$F = C_1 d + C_3 d^3 \tag{4.8}$$

Il faut remarquer, dans le cas I = $I_0/100$, que C_1 et C_3 (20,309 et $6{,}05.10^{-2}$) sont très voisins respectivement de $2T/\ell$ = 20 N/mm et $K_0K/[(K_0+K)\ell^2]$ = $5{,}92.10^{-2}$N/mm^3 (écarts d'environ 1,5% et 2,1% respectivement) ce qui valide le modèle analytique de la formule (4.6).

4.3.3 Outils empiriques

Le but de cette méthode est de trouver une fonction ou un facteur correctif qui permette d'inclure l'inertie I dans les expressions littérales de C_1 et C_3, qui dépendent de T, K, L et ℓ. La demi-longueur L du câble et le demi-espacement ℓ entre les poulies ne vont pas apparaître dans la formule que nous souhaitons établir puisque ces paramètres seront gardés constants. Les expressions de C_1 et C_3 doivent nécessairement fournir, pour I = 0, les valeurs particulières de la formule (4.6). Bien sûr, il y a une infinité de propositions possibles, selon la précision recherchée et les plages de tension et de rigidité d'appuis auscultées.

Nous cherchons dans un premier temps à analyser l'influence des paramètres I, K et T sur les coefficients C_1 et C_3. A partir des courbes numériques charge – déplacement et après une régression polynomiale, nous pouvons obtenir les valeurs de C_1 et C_3 correspondant aux différentes valeurs de I, K et T. L'hypothèse que les coefficients de degré 0 et 2 (C_0 et C_2) sont nuls est adoptée et systématiquement validée avec une grande précision. En effet la division de l'équation (4.8) par le déplacement d, équation (4.9), met en évidence une relation linéaire de F/d avec d^2, et les courbes numériques $F/d=f(d^2)$ seront caractérisées par les 2 coefficients C_1 et C_3 par régression linéaire avec un coefficient de détermination R^2 extrêmement voisin de 1.

$$\frac{F}{d} = C_1 + C_3 d^2 \tag{4.9}$$

Nous souhaitons proposer une solution empirique qui exprime les 2 coefficients C_1 et C_3 sous la forme suivante :

$$C_i = C_i(I=0)\left[1 + g_i(I,K,T)\right] \quad \text{(avec i = 1 et i = 3)} \tag{4.10}$$

Où les coefficients $C_1(I=0)$ et $C_3(I=0)$ d'après la formule (4.6) sont égaux respectivement à $2T/\ell$ et $K_0K/[(K_0+K)\ell^2]$, et où les 2 fonctions $g_1(I, K, T)$ et $g_3(I, K, T)$ sont des fonctions correctives à modéliser par $g_1^{mod}(I,K,T)$ et $g_3^{mod}(I,K,T)$ qui doivent tendre vers 0 quand I tend vers 0.

4.3.3.1 Recherche de la fonction $g_1^{mod}(I,K,T)$

La fonction $g_1(I, K, T)$ déduite de l'équation (4.10) s'exprime par :

$$g_1(I,K,T) = \frac{C_1}{C_1(I=0)} - 1 \tag{4.11}$$

La Figure 4.13 présente, pour les 5 valeurs de la tension T étudiées, les tendances de

$g_1(I, K,T)$ paramétrées pour différentes valeurs de I/I_0, en fonction de la rigidité équivalent K_e définie par :

$$K_e = \frac{K.K_0}{K + K_0} \tag{4.12}$$

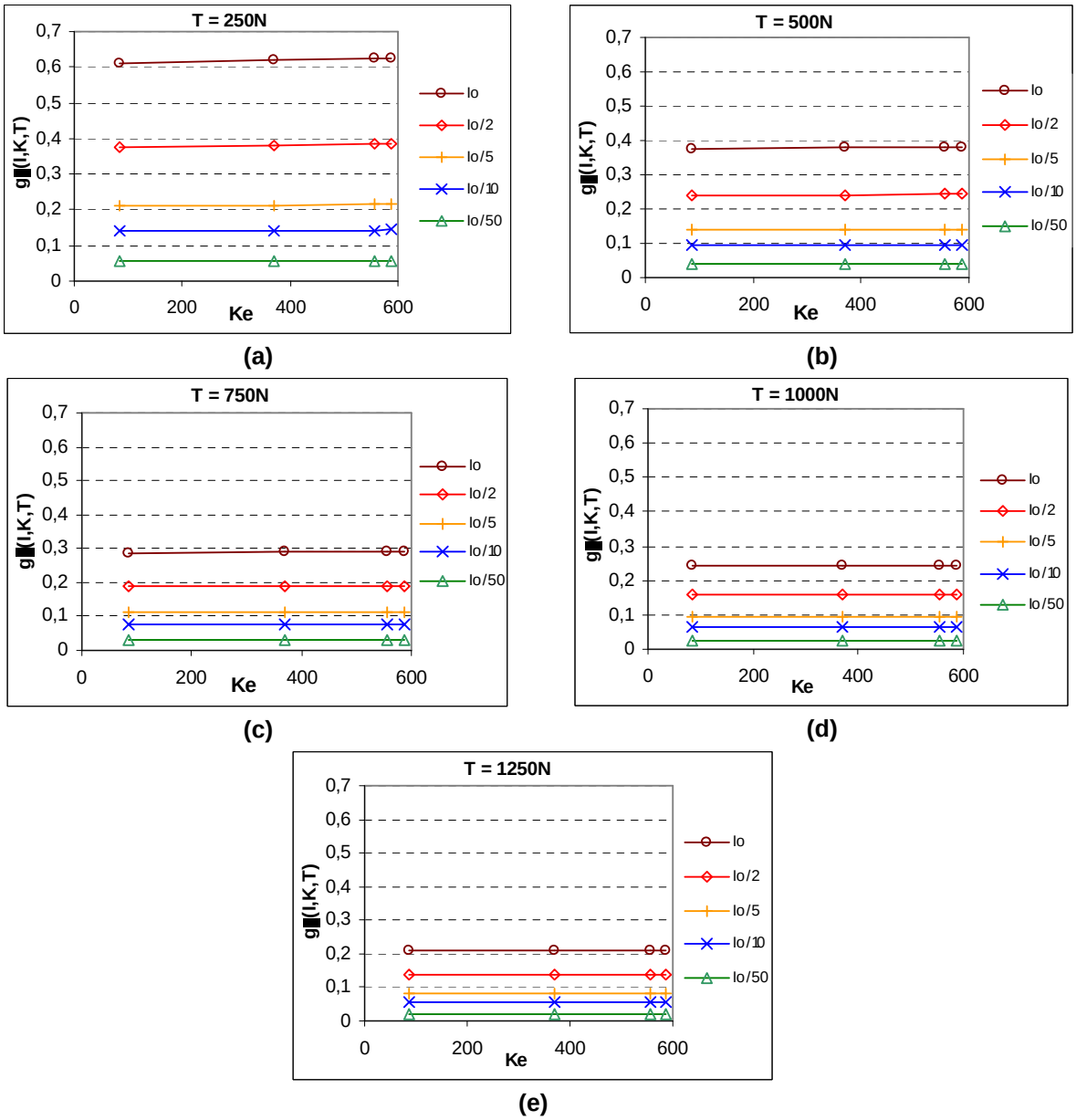


Figure 4.13. Valeurs de $g_1(I, K,T)$ pour T = 250 N (a), T = 500 N (b), T = 750 N (c), T = 1000 N (d) et T = 1250 N (e)

Pour T fixé, on observe avec une excellente précision que la fonction $g_1(I,K,T)$ ne varie qu'en fonction de I : cela signifie que le coefficient C_1 ne dépend que de I et T et pas de K. La formule (4.11) peut alors s'écrire :

$$g_1(I,T) = \frac{C_1}{C_1(I=0)} - 1 \tag{4.13}$$

L'évolution de $g_1(I,T)$ en fonction de T et I est exposée dans les figures suivantes :

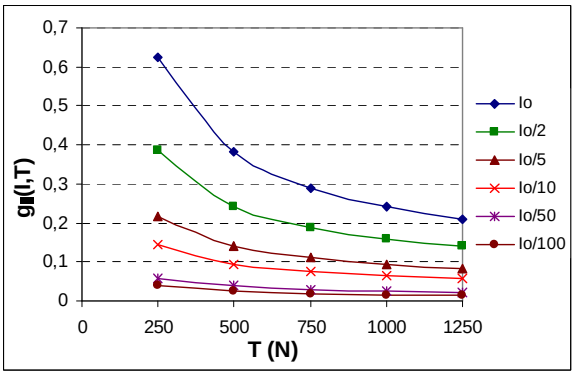


Figure 4.14. Corrélation de $g_1(I,T)$ et T

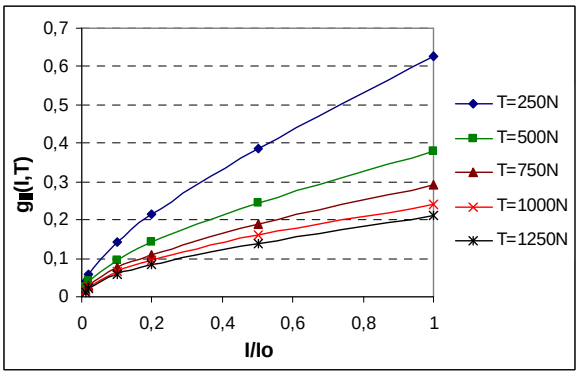


Figure 4.15. Corrélation de $g_1(I,T)$ et I/I_0

Ces courbes laissent supposer des dépendances de $g_1(I,T)$ avec I et T selon des lois exponentielles. Nous allons donc rechercher une expression de la fonction $g_1^{mod}(I,T)$ sous la forme :

$$g_1^{mod}(I,T) = \gamma (I/I_0)^{\alpha} T^{\beta} \tag{4.14}$$

Sous forme logarithmique, l'équation précédente devient :

$$G_1^{mod}(I,T) = \ln(\gamma) + \alpha \ln(I/I_0) + \beta \ln(T) \tag{4.15}$$

avec $G_1^{mod}(I,T) = \ln[g_1^{mod}(I,T)]$. Il est possible de trouver une fonction de la forme (4.14) en déterminant les 3 coefficients α, β et γ minimisant la fonctionnelle J suivante :

$$J = \sum_I \sum_T \left[G_1^{mod}(I,T) - G_1(I,T) \right]^2 \tag{4.16}$$

Où $G_1(I,T)$ sont les logarithmes népériens des valeurs $g_1(I,T)$ obtenues par les simulations numériques. La minimisation de J donne : $\gamma = 19{,}07$ $\alpha = 0{,}591$ $\beta = -0{,}632$

$$g_1^{mod}(I,T) = \frac{19{,}07}{T^{0{,}632}} \left(\frac{I}{I_0} \right)^{0{,}591} \tag{4.17}$$

Les valeurs de $g_1^{mod}(I,T)$ calculées par l'équation (4.17) sont confrontées dans la figure suivante aux valeurs de $g_1(I,T)$.

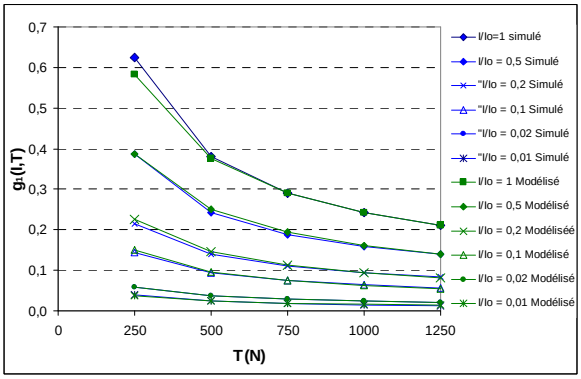


Figure 4.16. Valeurs de $g_1(I,T)$ expérimentales et modélisées pour différentes valeurs de I/I_0

La corrélation des points expérimentaux avec le modèle obtenu se caractérise par le coefficient de détermination usuel R^2 qui ne concerne que la fonction $G_1^{mod}(I,T)$ et les logarithmes népériens de nos valeurs expérimentales $g_1(I,T)$. L'écart relatif de $g_1^{mod}(I,T)$ avec $g_1(I,T)$ auquel nous nous intéressons est présenté dans le tableau suivant :

I/I_0	T(N)				
	250	500	750	1000	1250
1	**-6,8%**	-1,2%	0,4%	0,5%	0,3%
0,5	0,2%	2,8%	2,4%	1,4%	0,4%
0,2	4,3%	3,4%	1,7%	-0,4%	-1,9%
0,1	4,3%	1,8%	-0,7%	-2,7%	-4,3%
0,02	-0,4%	-2,8%	-4,1%	-4,2%	-3,8%
0,01	-2,1%	-2,0%	-0,1%	**6,7%**	**8,9%**

Tableau 4.2 Ecarts relatifs de $g_1(I,T)$ du modèle empirique avec les simulations

L'écart relatif est souvent inférieur à 5% ce qui est très satisfaisant.

4.3.3.2 Recherche de la fonction $g_3^{mod}(I,K,T)$

Identiquement au coefficient C_1, nous supposons que le coefficient C_3 à trouver est de la forme :

$$C_3 = C_3(I=0)\left[1 + g_3(I,K,T)\right] \tag{4.18}$$

où C_3 (I=0) d'après la formule (4.6) est égal à K_e/ℓ^2 et $g_3(I,K,T)$ est la fonction corrective à trouver qui doit tendre vers 0 quand I tend vers 0. Nous la modéliserons par $g_3^{mod}(I,K,T)$.

$g_3(I,K,T)$ s'exprime également par la formule suivante :

$$g_3(I,K,T) = \frac{C_3}{C_3(I=0)} - 1 \tag{4.19}$$

La figure suivante présente la tendance de $g_3(I,K,T)$ pour différentes valeurs de I et de K en fonction de T.

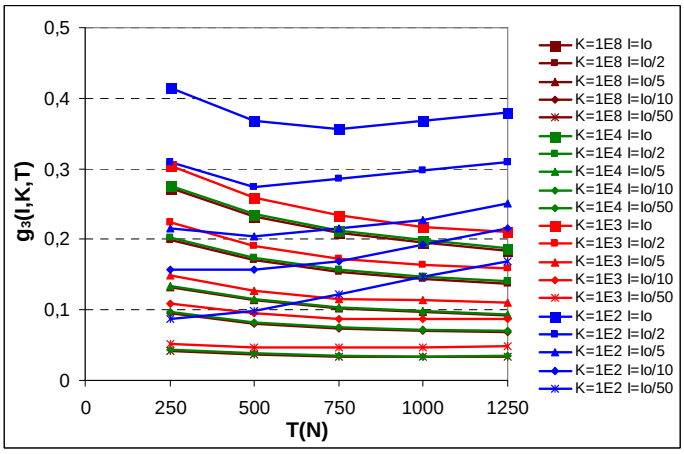


Figure 4.17. Evolutions de $g_3(T)$ pour différentes valeurs de I et K

On observe que la fonction $g_3(I,K,T)$ varie simultanément avec les trois paramètres I, K et T. Nous cherchons à la modéliser sous une variation polynomiale de degré 2 avec la tension dont les paramètres dépendent de I et K. De ce fait, on a relevé les coefficients de degré 0,1, et 2 (nommés D_0, D_1 et D_2) donnés par les régressions polynomiales de chacune des évolutions tracées sur la Figure 4.17. Ces coefficients sont ensuite tracés en fonction de I/I_0 pour différentes valeurs de K_e.

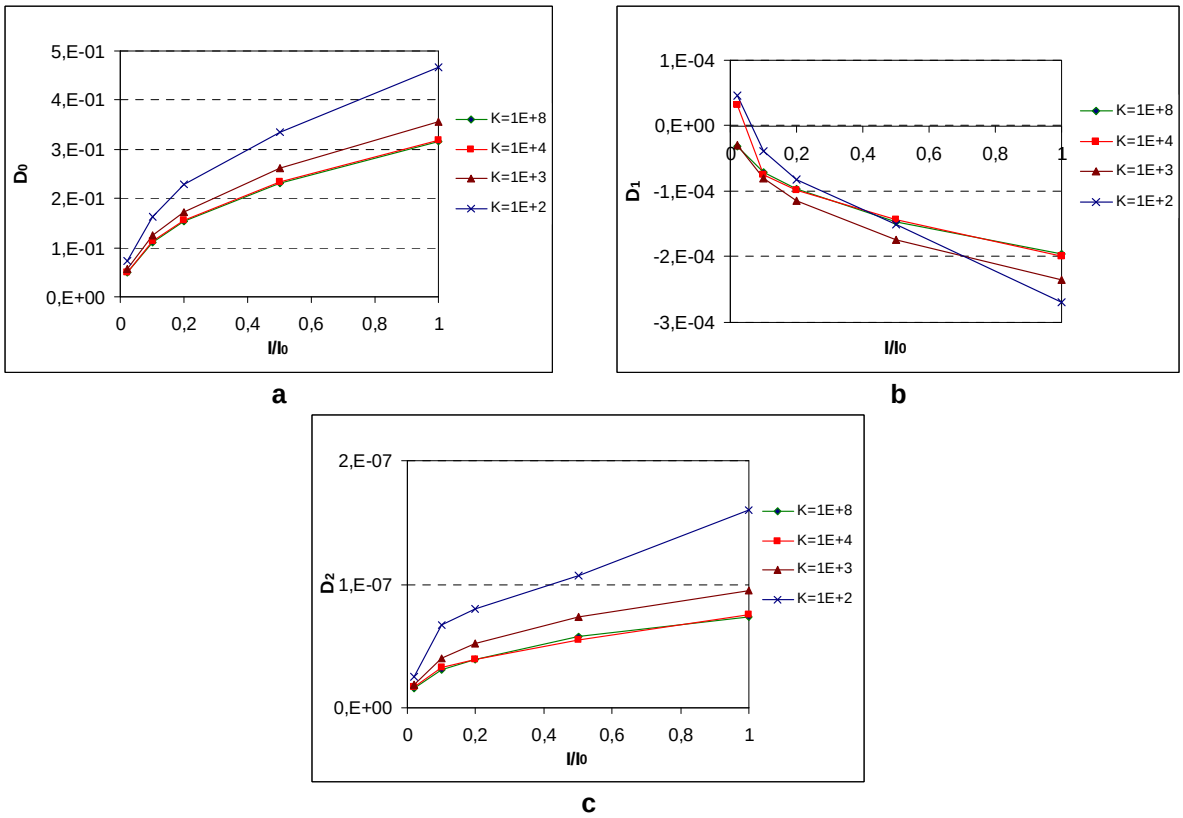


Figure 4.18. Evolutions de D_0, D_1 et D_2 avec I/I_0 pour différentes valeurs de K

Ces courbes montrent que D_0, D_1 et D_2 tendent vers 0 lorsque I tend vers 0, assurant

l'hypothèse de la fonction $g_3(I,K,T)$ et présentent une allure exponentielle avec I/I_0. On montre (Figure 4.19) que ces courbes se linéarisent assez bien si on trace les valeurs de D_0, D_1 et D_2 en fonction de $(I/I_0)^{0,45}$.

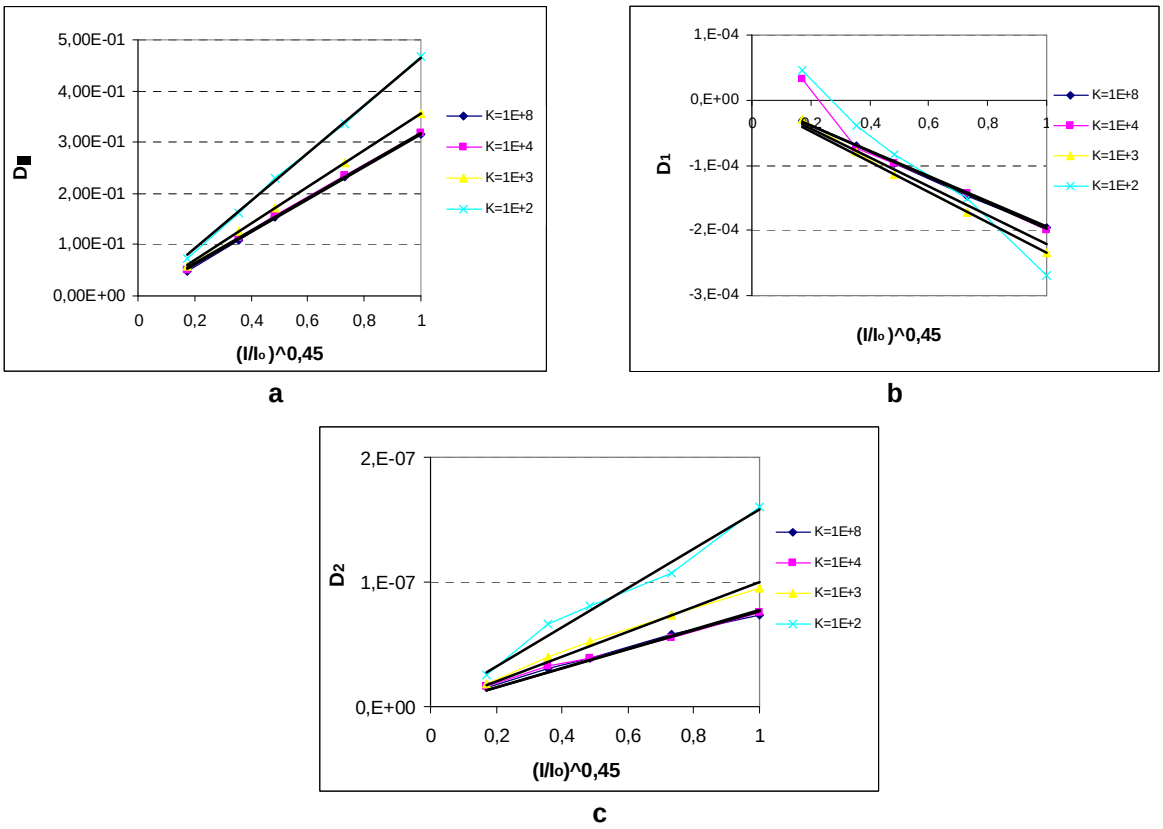


Figure 4.19. Linéarisation de D_0, D_1 et D_2

De ce fait, nous proposons une expression empirique de $g_3^{mod}(I,K,T)$ sous la forme suivante :

$$g_3^{mod}(I,K,T) = \left[(\eta_0 + \mu_0 K_e) + (\eta_1 + \mu_1 K_e)T + (\eta_2 + \mu_2 K_e)T^2\right]\left(\frac{I}{I_0}\right)^{0,45} \qquad (4.20)$$

Les pentes des droites de la Figure 4.19 sont calculées et tracées en fonction de K_e desquelles on déduit les valeurs de μ_i et η_i :

μ_0 = -2,96E-04	μ_1 = 5,61E-08	μ_2 = -1,63E-10
η_0 = 4,83E-01	η_1 = -2,34E-04	η_2 = 1,69E-07

Tableau 4.3. Valeurs de μ_i et η_i pour le modèle 1

Nous présentons dans le Tableau 4.4 les écarts relatifs sur la fonction $g_3^{mod}(I,K,T)$ avec les valeurs μ_i et η_i du tableau précédent (Modèle 1). Des écarts importants apparaissent notamment pour le cas particulier de K = 100N/mm.

Modèle1						
K	I/I0	T=250N	T=500N	T=750N	T=1000N	T=1250N
1E+08	1	4%	3%	6%	9%	8%
1E+08	0,5	4%	3%	6%	9%	9%
1E+08	0,2	4%	3%	5%	10%	10%
1E+08	0,1	2%	1%	6%	10%	13%
1E+08	0,02	-7%	-4%	-1%	9%	14%
1E+04	1	1%	0%	2%	3%	1%
1E+04	0,5	2%	1%	3%	4%	3%
1E+04	0,2	2%	0%	2%	5%	4%
1E+04	0,1	0%	-1%	1%	5%	6%
1E+04	0,02	-8%	-7%	0%	3%	11%
1E+03	1	-7%	-13%	-17%	**-23%**	-31%
1E+03	0,5	-7%	-12%	-16%	-19%	**-27%**
1E+03	0,2	-7%	-12%	-14%	-15%	**-21%**
1E+03	0,1	-7%	-10%	-12%	-10%	-13%
1E+03	0,02	-9%	-9%	-2%	0%	3%
1E+02	1	1%	-4%	-5%	-4%	-9%
1E+02	0,5	3%	-2%	4%	6%	2%
1E+02	0,2	8%	9%	16%	18%	**20%**
1E+02	0,1	7%	14%	**22%**	**29%**	**32%**
1E+02	0,02	19%	**34%**	**48%**	**55%**	**58%**

Tableau 4.4. Ecarts relatifs du modèle 1 sur $g_3(I, K, T)$

Dans le but de minimiser les écarts pour l'ensemble des valeurs de la fonction avec K ≥ 1000N/mm (Modèle 2), de nouvelles valeurs de μ_i et η_i sont déterminées sans prendre en compte les valeurs correspondant à K = 100N/mm. On obtient alors :

μ_0 = -1,69E-04	μ_1 = 1,90E-07	μ_2 = -1,10E-10
η_0 = 4,25E-01	η_1 = -3,05E-04	η_2 = 1,41E-07

Tableau 4.5. Valeurs de μ_i et η_i pour le modèle 2

Ce nouveau modèle nous permet d'obtenir un nouveau tableau des écarts relatifs sur la fonction $g_3^{mod}(I, K, T)$:

Modèle2						
K	**I/I_0**	**T=250N**	**T=500N**	**T=750N**	**T=1000N**	**T=1250N**
1E+08	1	-4%	-6%	-6%	-6%	-10%
1E+08	0,5	-3%	-6%	-6%	-6%	-8%
1E+08	0,2	-4%	-6%	-7%	-5%	-7%
1E+08	0,1	-6%	-8%	-6%	-4%	-3%
1E+08	0,02	-15%	-15%	-13%	-6%	-3%
1E+04	1	-4%	-6%	-6%	-6%	-9%
1E+04	0,5	-3%	-6%	-5%	-5%	-8%
1E+04	0,2	-3%	-6%	-5%	-4%	-7%
1E+04	0,1	-5%	-8%	-6%	-4%	-4%
1E+04	0,02	-14%	-14%	-8%	-6%	2%
1E+03	1	-2%	-4%	-3%	-4%	-7%
1E+03	0,5	-1%	-3%	-3%	-1%	-3%
1E+03	0,2	-1%	-3%	-1%	3%	2%
1E+03	0,1	-2%	-1%	1%	7%	8%
1E+03	0,02	-4%	-1%	10%	15%	**21%**

Tableau 4.6. Ecarts relatifs du modèle 2 sur $g_3(I, K, T)$

Nous obtenons des résultats nettement meilleurs que pour le modèle 1 puisque pour $K \geq 1000N$ /mm et $I/I_0 \geq 0,1$, les écarts sont toujours inférieurs à 10%.

Pour résumer, les coefficients C_1 et C_3 sont déterminés par :

$$C_1(I,T) = \frac{2T}{\ell}\left[1 + \frac{19,07}{T^{0,632}}\left(\frac{I}{I_0}\right)^{0,591}\right] \tag{4.21}$$

$$C_3(I,K,T) = \frac{K_e}{\ell^2}\left[1 + \left((\mu_0 K_e + \eta_0) + (\mu_1 K_e + \eta_1)T + (\mu_2 K_e + \eta_2)T^2\right)\left(\frac{I}{I_0}\right)^{0,45}\right] \tag{4.22}$$

Avec μ_i et η_i donnés dans le Tableau 4.3 ou Tableau 4.5 .

Les formules empiriques (4.21) et (4.22) permettent d'évaluer la tension dans les câbles, puis la rigidité des appuis une fois que l'inertie des câbles est connue. Or, dans la pratique, c'est un paramètre difficile à mesurer. Sur une courbe expérimentale, on peut déterminer C_1. Or, si l'essai s'effectue sur le banc de tension, T est connue. Ainsi, avec C_1 et T connus, nous pouvons déterminer I/I_0 pour le câble par l'équation (4.21). Cette valeur permet ensuite

d'identifier T quand le câble est mis en place sur la structure. On peut évaluer la raideur des appuis à partir de la valeur de C_3 par l'équation (4.22). Ce processus est présenté dans le tableau suivant :

	Connus	A déterminer
Sur banc de tension	**C_1, C_3, T**	**I/I_0**
Sur la structure	**C_1, C_3, I/I_0**	**T, K_e**

Conclusion

Nous avons montré l'influence de la rigidité en flexion des câbles sur l'identification de la tension en place. Un modèle empirique a été développé pour évaluer facilement la tension à l'aide d'un tensiomètre en prenant compte la rigidité en flexion des câbles. La modélisation est basée sur une centaine de simulations numériques par la méthode des éléments finis dans lesquelles on a fait varier les trois paramètres de rigidité des appuis, de tension et d'inertie en flexion du câble.

Chapitre 5 : Etude du pliage

“Essentially, all models are wrong, but some are useful.”

George Edward Pelham Box

Introduction

Comme nous l'avons évoqué précédemment, le point fort de l'anneau de tenségrité est qu'il peut être plié par allongement des câbles de deux nappes. Dans ce chapitre, consacré à la cinématique de pliage, un modèle numérique et un modèle analytique sont proposés. Le but est d'observer l'évolution de chaque nœud ou élément en cours de pliage. Certaines relations quantitatives sont ainsi établies. Une campagne d'expérimentation est ensuite confrontée aux études précédentes. L'influence de l'étape de conception est finalement discutée.

5.1 Approche numérique

Cette partie concerne la modélisation numérique à l'aide du code de calcul éléments finis ANSYS.

5.1.1 Principe

La difficulté de la méthode des éléments finis pour la simulation du pliage provient des grands déplacements générés et de la présence de nombreux mécanismes finis qui peuvent faire diverger le calcul numérique. L'ajout de blocages secondaires qui n'empêchent pas le pliage peut faciliter le calcul : en supprimant un maximum de degrés de liberté surabondants, le processus de calcul converge plus facilement. Pour pouvoir proposer une procédure pertinente et généralisable, nous avons testé différentes méthodes.

La première tentative se fait par suppression totale des câbles actifs ce qui est une modélisation assez brutale. Le mouvement est généré par 5 déplacements verticaux imposés sur les 5 nœuds de la nappe supérieure. La présence des mécanismes finis fait que la structure pliée perd sa symétrie et les mouvements sont incontrôlables (Figure 5.1 et Figure 5.2).

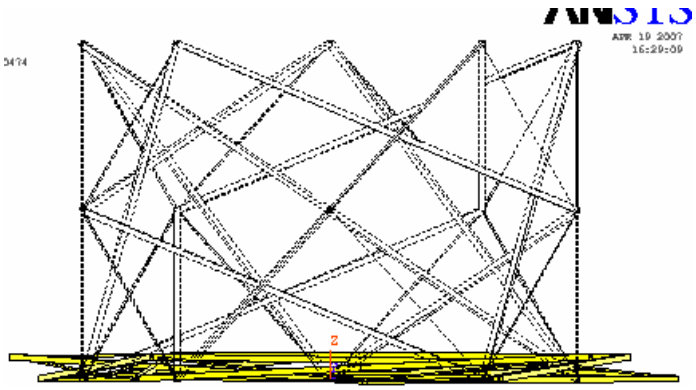


Figure 5.1. Vue de côté de la structure pour de déplacement Δ = 95%H

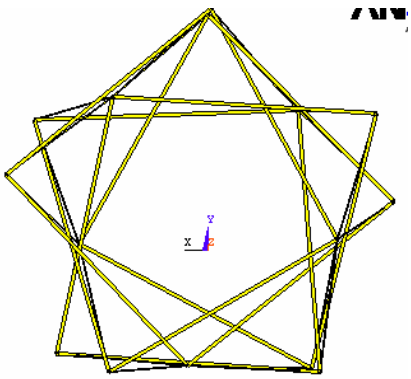


Figure 5.2. Vue de dessous de la structure pour déplacement Δ = 95%H

La deuxième approche consiste à simuler des câbles actifs (câbles de nappe) très souples.

Pour cette méthode, les autres câbles et barres restent sollicités mais avec un effort de quelques Newtons. Nous imposons aux câbles de nappes d'avoir un module d'Young $E_c^{actif} = E_c/100000$. Les déplacements verticaux Δ sont alors appliqués sur les 5 nœuds des nappes inférieure et supérieure vers la nappe intermédiaire ou bien des 5 nœuds de la nappe supérieure vers la nappe inférieure. Les 5 nœuds intermédiaires sont contraints dans un plan horizontal. Cela permet de limiter le nombre de degrés de liberté. La déformation des câbles de nappes est le paramètre qui est relevé pour traduire l'allongement nécessaire à une réduction donnée de la hauteur du module.

5.1.2 Résultats

La Figure 5.3 montre l'évolution de la hauteur de l'anneau en fonction de l'allongement des câbles de nappes. La hauteur de l'anneau passe de 161 cm, configuration déployée, à 0 cm quand le module est complètement plié. Dans le même temps, un câble de nappe s'allonge de 34,2 cm.

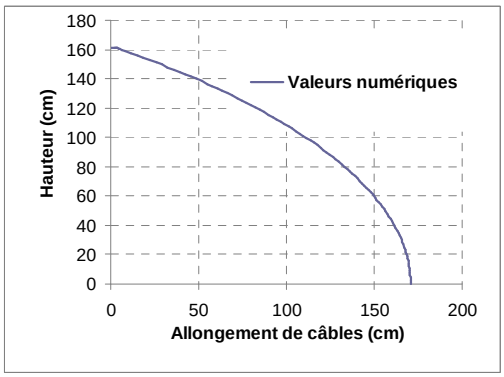


Figure 5.3. Hauteur du module en fonction de l'allongement de câbles de nappes

A chaque itération, nous vérifions que les efforts dans les éléments sont quasiment nuls en raison de la faible rigidité des câbles de nappe. Le Tableau 5.1 fournit les efforts dans les éléments dans le cas où le déplacement vertical imposé des nœuds supérieurs est égal à la hauteur du module.

Barre latérale	-3,92 N
Barre intermédiaire	-0,79 N
Câble de nappe	1,63 N
Câble coplanaire	2,74 N
Câble non-coplanaire	0,00

Tableau 5.1. Efforts dans les éléments pour Δ = 161 cm

La symétrie est conservée dans le processus de pliage comme en attestent les efforts dans les

barres latérales dans la configuration pliée du système (Tableau 5.2).

Barre latérale 1	-3,92 N
Barre latérale 2	-3,92 N
Barre latérale 3	-3,92 N
Barre latérale 4	-3,92 N
Barre latérale 5	-3,92 N

Tableau 5.2. Efforts dans les barres latérales pour Δ = 161 cm

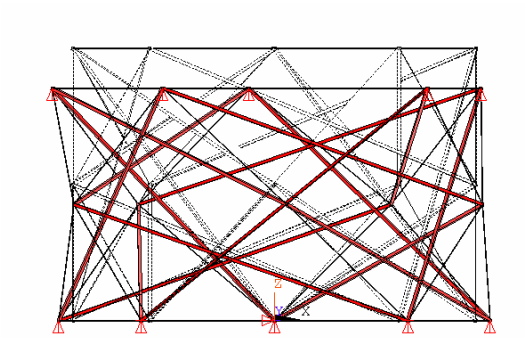


Figure 5.4. Vue de côté pour Δ = 30 cm

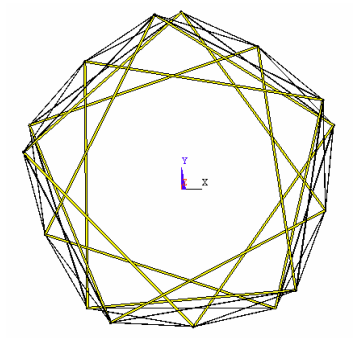


Figure 5.5. Δ = 30 cm

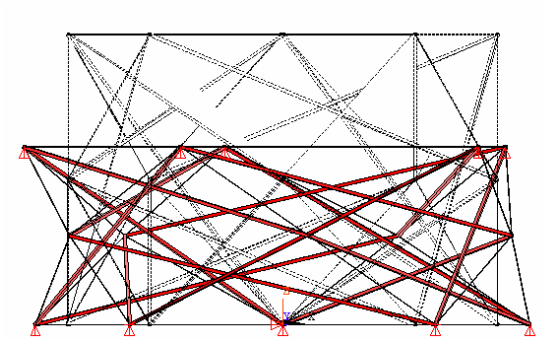


Figure 5.6. Vue de côté pour Δ = 60cm

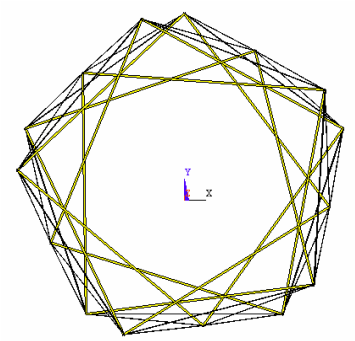


Figure 5.7. Δ = 60 cm

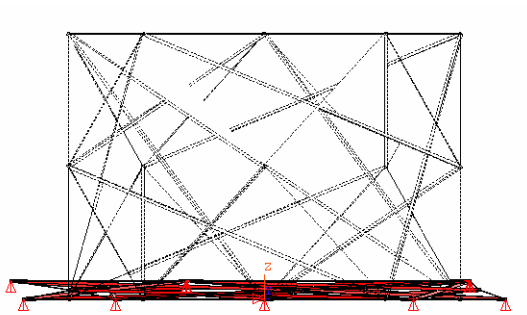


Figure 5.8. Vue de côté pour la configuration aplatie

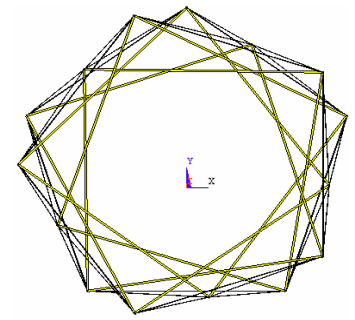


Figure 5.9.Configuration aplatie

Pour connaître l'influence du nombre de pas de chargement et du module d'Young des câbles

de nappes sur la solution, nous réalisons des simulations numériques en faisant varier ces valeurs. Nous trouvons que le nombre de pas de chargement N_{pas} et le module d'Young des câbles actifs E_c^{actif} ont peu d'influence. Dans la Figure 5.10, à partir de $E_c^{actif} = E_c/1000$, les courbes hauteur - allongement de câbles sont confondues. Dans le même temps, plus E_c^{actif} est petit, plus l'effort est négligeable (Tableau 5.3).

Module d'Young des éléments actifs	Effort des barres latérales
$E_c^{actif} = E_c/100\ 000$	-3,92 N
$E_c^{actif} = E_c/10\ 000$	-39,15 N
$E_c^{actif} = E_c/1000$	-388,17 N
$E_c^{actif} = E_c/100$	-3613,5 N

Tableau 5.3. Effort dans les barres latérales pour Δ = 160 cm

La Figure 5.11 montre que l'influence du nombre de pas de déplacement imposé est insignifiante.

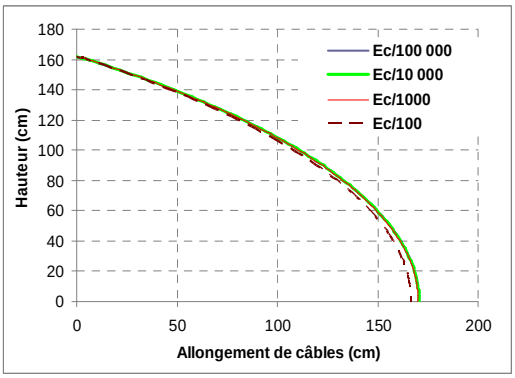


Figure 5.10. Variation de Ec_{actif}

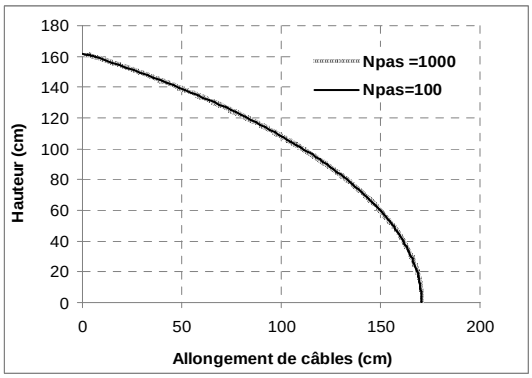


Figure 5.11. Variation de N_{pas}

5.2 Approche analytique

5.2.1 Hypothèses

Pour compléter l'analyse numérique, nous avons établi la relation analytique du pliage en exprimant la hauteur de module en fonction de l'allongement des câbles de nappes et réciproquement. La complexité géométrique et la présence des mécanismes finis au cours du pliage rendent difficile la détermination de la position des nœuds dans l'espace. Nous sommes amenés à simplifier ce système complexe par l'adoption d'un certain nombre d'hypothèses liées à la symétrie du module. La confrontation expérimental – analytique permet de vérifier si ces dernières sont acceptables. Vu la symétrie du système, nous admettons les hypothèses suivantes :

- les trois nappes supérieure, inférieure et intermédiaire restent parallèles et horizontales au cours du pliage,

- les 5 nœuds de chaque nappe forment un pentagone équilatéral et les trois pentagones équilatéraux sont coaxiaux,

- les deux cercles circonscrits aux 2 pentagones supérieur et inférieur sont de même rayon R_1 tandis que le celui circonscrit au pentagone intermédiaire est de rayon R_2. On définit α l'angle de rotation relative du pentagone supérieur par rapport au pentagone inférieur. Vu la symétrie du système, la rotation du pentagone intermédiaire par rapport au pentagone inférieur est d'angle $\alpha/2$. H, R_1, R_2 et α sont les variables géométriques du processus de pliage. Dans nos équations, nous décrivons la hauteur H et les rayons R_1 et R_2 en fonction de l'angle α. Le pentagone inférieur ne tourne pas. Cela veut dire qu'un nœud inférieur se déplace sur un rayon par rapport au centre du pentagone inférieur. Les nœuds restants ont un mouvement combiné de rotation autour d'OZ et de translation radiale,

- les câbles coplanaires restent tendus au cours du pliage ce qui permet de considérer que le triangle formé des 3 éléments (câble coplanaire – barre latérale – câble coplanaire) est indéformé dans l'espace. La Figure 5.12 montre la projection de ce triangle sur le plan OXY avec la position des nœuds,

- les câbles non-coplanaires sont détendus, ils ne sont donc pas pris en compte. Le contact entre barres est évalué par le calcul de la distance entre les axes des barres.

5.2.2 Solutions

Comme la structure est symétrique, nous ne considérons qu'un côté du pentagone. La Figure 5.12 décrit la projection des points sur OXY. Les nœuds 1, 2 se situent dans le plan inférieur, les nœuds 3, 4 appartiennent à la nappe supérieure et les nœuds 5 et 6 sont des nœuds intermédiaires. Ainsi, nous avons une barre latérale 1 – 4 ; une barre intermédiaire 1 – 6 ; deux câbles de nappes 1 – 2 (inférieure) et 3 – 4 (supérieure) et deux câbles coplanaires 1 – 5 et 5 – 4. Les conditions gouvernant cette analyse sont la constance de longueur des barres et des câbles coplanaires puisque ce sont les câbles de nappes qui s'allongent au cours du pliage. A l'état initial, les coordonnées des nœuds sont les suivantes :

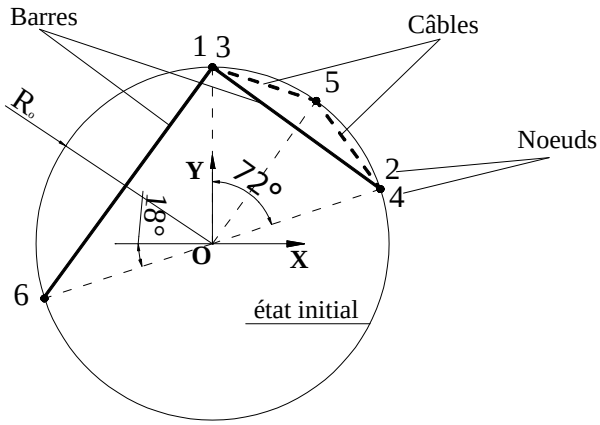


Figure 5.12. Etat initial

Noeuds	X	Y	Z
1	0	R_0	0
2	R_0sin (2π/5)	R_0cos (2π/5)	0
3	0	R_0	H
4	R_0sin (2π/5)	R_0cos (2π/5)	H
5	R_0sin (π/5)	R_0cos (π/5)	H/2
6	R_0sin (7π/5)	R_0cos (7π/5)	H/2

Tableau 5.4. Géométrie initiale

R_0 est le rayon des cercles : à l'état initial les trois cercles sont de même rayon.

A l'état intermédiaire au cours du pliage, les coordonnées des nœuds sont les suivantes :

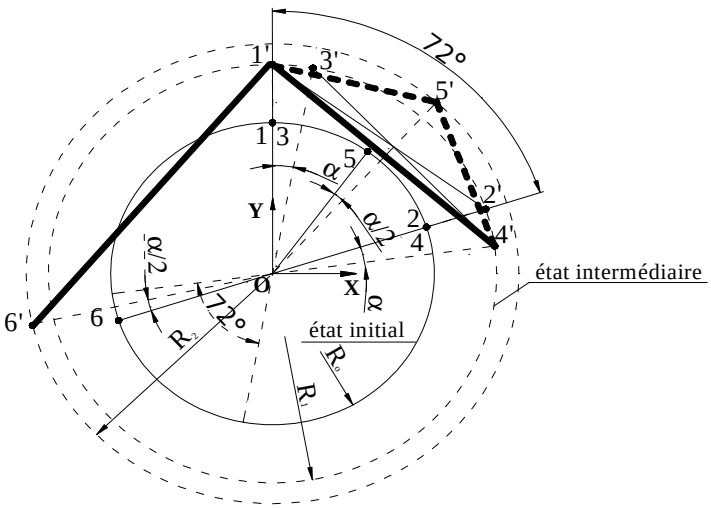


Figure 5.13. Etat intermédiaire

Nœuds	X	Y	Z
1	0	R1	0
2	$R_1\sin(2\pi/5)$	$R_1\cos(2\pi/5)$	0
3	$R_1\sin(\alpha)$	$R_1\cos(\alpha)$	H
4	$R_1\sin(2\pi/5+\alpha)$	$R_1\cos(2\pi/5+\alpha)$	H
5	$R_2\sin(\pi/5+\alpha/2)$	$R_2\cos(\pi/5+\alpha/2)$	H/2
6	$R_2\sin(7\pi/5+\alpha/2)$	$R_2\cos(7\pi/5+\alpha/2)$	H/2

Tableau 5.5. Géométrie intermédiaire

Dans l'annexe A, on montre que pour une position initiale quelconque, la longueur **B** de la barre latérale 1 – 4 est :

$$B^2 = 4R_1^2 \sin^2(\frac{\pi}{5}+\frac{\alpha}{2}) + H^2 \tag{5.1}$$

De la même façon, la longueur de la barre intermédiaire 1 – 6 qui est aussi de valeur **B**, est décrite par la relation :

$$B^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos(\frac{7\pi}{5}+\frac{\alpha}{2}) + \frac{H^2}{4} \tag{5.2}$$

La longueur $\mathbf{C_1}$ du câble de nappe 1 – 2 est définie par :

$$C_1 = 2R_1\sin(\frac{\pi}{5}) \tag{5.3}$$

Et la longueur $\mathbf{C_2}$ du câble coplanaire 1 – 5 est :

$$C_2^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos(\frac{\pi}{5}+\frac{\alpha}{2}) + \frac{H^2}{4} \tag{5.4}$$

Des équations (5.1), (5.2) et (5.4), avec **B** et $\mathbf{C_2}$ constants, nous obtenons un système de 3 équations avec 4 inconnues H, R_1, R_2 et α :

$$4R_1^2 \sin^2(\frac{\pi}{5}+\frac{\alpha}{2}) + H^2 = B^2 \tag{5.5}$$

$$R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos(\frac{7\pi}{5}+\frac{\alpha}{2}) + \frac{H^2}{4} = B^2 \tag{5.6}$$

$$R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos(\frac{\pi}{5}+\frac{\alpha}{2}) + \frac{H^2}{4} = C_2^2 \tag{5.7}$$

Les deux positions extrêmes, anneau déployé et anneau plié, permettent de lever deux inconnues : $\alpha = 0$ en position 'déployé' (avec $R_1 = R_2 = R_0$), et $H = 0$ en position 'plié'. La position 'déployé' étant connue, nous résolvons le système dans la position 'plié' à l'aide du logiciel mathématique MAPLE [Annexe D.2], dans le domaine de validité des inconnues : $R_0 \leq (R_1$ et $R_2)$, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Pour $H = 0$, le précédent système devient :

$$4R_1^2 \sin^2(\frac{\pi}{5}+\frac{\alpha}{2}) = B^2 \tag{5.8}$$

$$R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos(\frac{7\pi}{5}+\frac{\alpha}{2}) = B^2 \tag{5.9}$$

$$R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos(\frac{\pi}{5}+\frac{\alpha}{2}) = C_2^2 \tag{5.10}$$

Dans cette géométrie pliée R_1, R_2 et α prennent leur valeur maximale nommées R_{1max}, R_{2max} et α_{max}

5.2.3 Résultats

Après résolution, nous obtenons $R_{1max} = 1{,}23\ R_0$, $R_{2max} = 1{,}06\ R_0$ et $\alpha_{max} = 18{,}23°$. Cela nous permet de déduire que l'angle α varie de 0 à $\alpha_{max} = 18{,}23°$ au cours du pliage. C'est la variable qui est utilisée comme paramètre pour simuler le pliage. Nous recalculons alors H, R_1 et R_2 en fonction de l'angle α, de degré en degré. L'évolution de H, R_1 et R_2 pour toute valeur de α comprise entre 0 et 18,23° est présentée sur les Figure 5.14 et Figure 5.15.

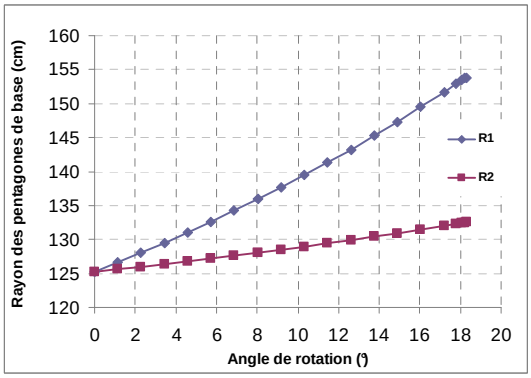


Figure 5.14. Rayons en fonction de α

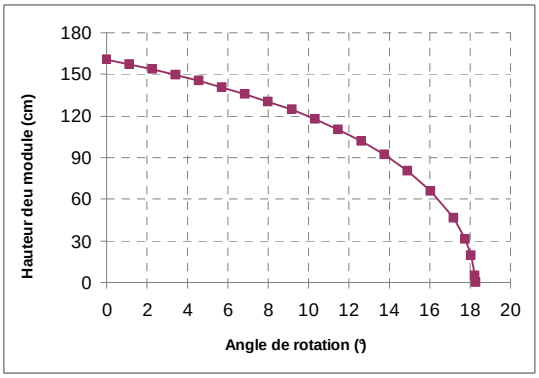


Figure 5.15. Hauteur du module en fonction de α

Connaissant les évolutions des rayons (ce qui permet de calculer l'allongement des câbles de nappe) en fonction de α et de la hauteur en fonction de α, l'évolution de la hauteur en fonction de l'allongement des câbles de nappes peut être tracée. Elle est présentée sur la Figure 5.16.

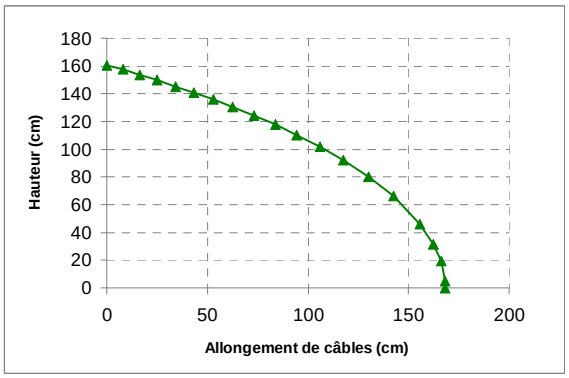


Figure 5.16. Hauteur du module en fonction de l'allongement des câbles de nappes

De cette façon, nous pouvons aussi déterminer la trajectoire des points de l'état déployé à l'état plié. Les résultats numériques et la solution analytique sont en parfaite concordance (Figure 5.16). Par calcul de la distance entres les barres nous détectons que ces dernières entrent en contact pour une hauteur théorique est de 23 cm.

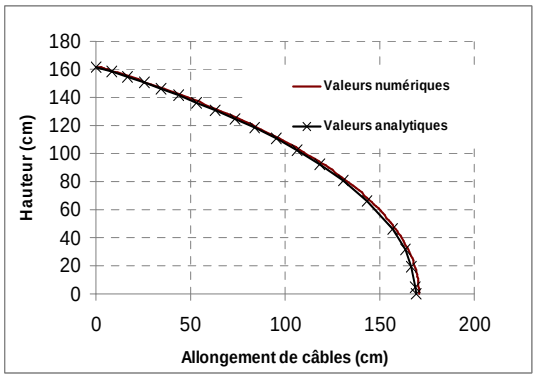


Figure 5.17. Comparaison des méthodes numérique et analytique

5.3 Etude expérimentale

Le but de cette campagne est de fournir des données fiables pour une comparaison avec les résultats numériques. La méthode, les difficultés rencontrées, les solutions proposées sont présentées.

5.3.1 Matériels

Pour cette campagne de mesures, nous disposons d'un théodolite Leica TDA 5005 (Figure 5.18) qui permet de faire des relevés de position en 3D de 3 réflecteurs sphériques de 38 mm de diamètre (Figure 5.19) et de cibles réfléchissantes de 26 mm de diamètre (Figure 5.21). L'exploitation et le transfert des données s'effectuent à l'aide de logiciels dédiés. En ce qui concerne le prototype, deux câbles continus en acier sont mis en place en remplacement des câbles de nappes (supérieure et inférieure) pour réaliser le pliage du module (Figure 5.20). Les pieds du module sont équipés de patins en téflon posés sur le sol pour minimiser le frottement (Figure 5.22).

Figure 5.18. Théodolite Leica TPS –System 1000

Figure 5.19. Réflecteur sphérique

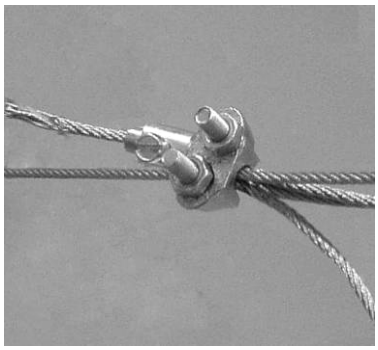


Figure 5.20. Serre-câble sur câble continu

Figure 5.21. Cible réfléchissante

Figure 5.22. Patin en téflon sur le sol

5.3.2 Procédure de mesures

La structure est mesurée dans sa position autocontrainte, puis dans sa position initiale non autocontrainte avec les câbles continus au niveau des deux nappes supérieure et inférieure. Par la suite les positions intermédiaires sont obtenues par allongement progressif des câbles continus avec des pas de 20 cm. On effectue un relevé du positionnement des cibles des barres à chaque pas. Les barres sont de longueur identique (à 2 mm près). Les cibles sont collées sur chaque extrémité et sur une même génératrice de la barre (Figure 5.21). Vu la géométrie particulière du prototype, la station de mesure nécessite plusieurs implantations successives pour chaque position du module afin de pouvoir viser toutes les barres. Trois réflecteurs sphériques fixés dans le hall d'essais sont utilisés comme trièdre de recalage lors du déplacement de la station. Ces dispositifs permettent d'avoir une précision de mesure inférieure au millimètre.

5.3.3 Traitement de données

5.3.3.1 Détermination da la position des nœuds

Lors des mesures, nous obtenons la position d'une génératrice des barres. Un décalage est opéré pour retrouver l'axe des barres et finalement la position des nœuds. La Figure 5.23 montre comment est réalisé cette reconstruction.

Reconstruction des axes

Le point P est la position de l'appareil. A et B sont les cibles collées sur les barres qui donnent la génératrice de l'élément. Soit A' et B' les points situés sur l'axe de la barre au droit des cibles, dans le plan défini par (ABP). Les points A' et B' sont reconstruits telle façon que les droites (AA') et (BB') soient perpendiculaires à (AB) et (A'B') et que les segments [AA'] et [BB'] soient de 20 mm de longueur, le rayon de la barre.

Prolongement les axes

Aux extrémités de la droite (A'B') nous rajoutons108 mm qui est la distance entre la cible et le nœud d'extrémité. Les points I et J obtenus sont les 2 nœuds d'extrémités de l'élément. Afin de faciliter le traitement de données qui est répétitif, nous avons développé un programme informatique permettant d'automatiser ce processus.

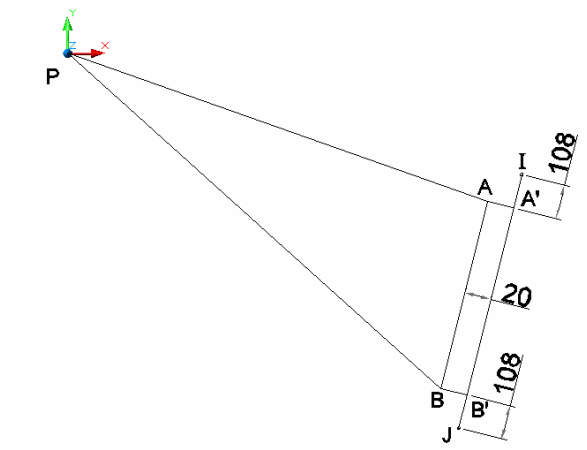


Figure 5.23. Schéma de reconstruction des axes

5.3.3.2 Sensibilité des mesures

Après avoir récupéré toutes les données, nous pouvons réaliser une étude statistique sur les mesures effectuées pour évaluer la sensibilité de l'appareillage utilisé. Cela passe par une étude sur les longueurs de barres et les positions des nœuds qui sont supposées préalablement connues.

Longueur des barres

Pour avoir une idée de la précision que nous pouvons attendre de l'appareil, nous avons calculé la distance entre chacune des cibles d'une même barre pour chaque mesure. Comme la distance entre ces cibles peut être mesurée manuellement avec un mètre à ruban, nous pouvons considérer que nous connaissons cette distance au millimètre près. Compte tenu du nombre important des positions de mesure, chaque barre a été mesurée de 5 à 17 fois. Nous

avons ensuite établi la différence entre chaque mesure et la distance fournie par le mètre à ruban. La Figure 5.24 donne la fréquence de cette différence de longueur.

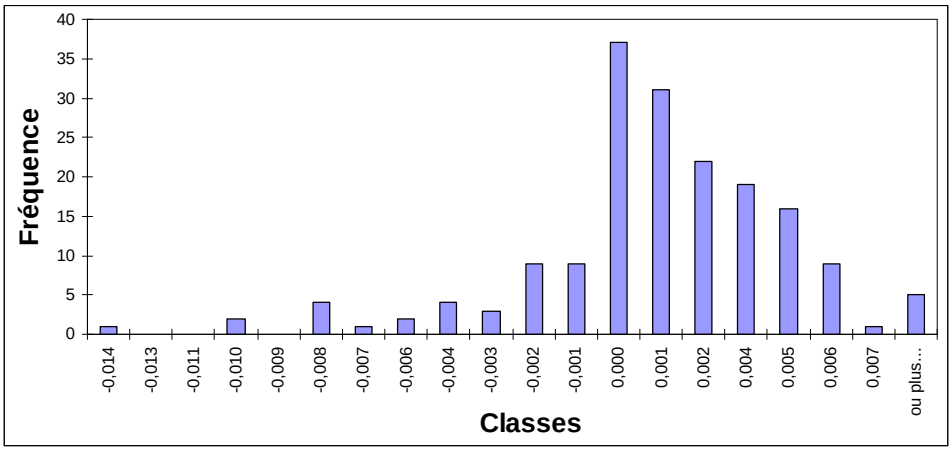


Figure 5.24. Histogramme des mesures brutes

On peut noter que certaines valeurs sont aberrantes, donc les mesures ne sont pas fiables à 100%. Nous avons constaté que de forts angles d'incidence de la visée ainsi que de faibles distances de l'appareil par rapport à la cible pouvaient générer ces écarts importants. Si on retire les valeurs ayant un écart supérieur à 7mm, on améliore sensiblement la forme du graphique (Figure 5.25). Cette courbe s'approchant sensiblement de la courbe gaussienne, nous avons déterminé les valeurs statistiques donnant des informations sur la répartition des mesures.

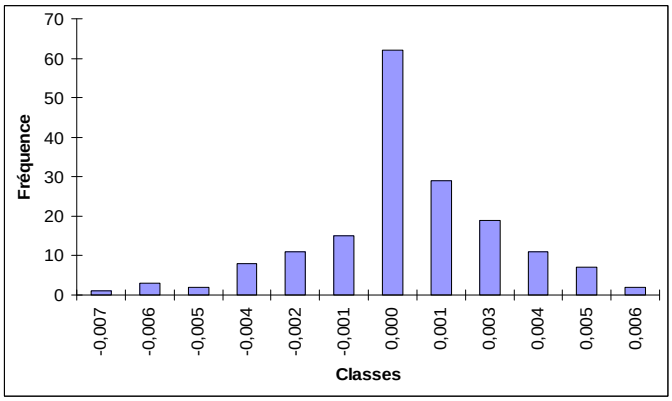


Figure 5.25. Histogramme des mesures après correction

La moyenne des écarts par rapport à la valeur attendue est inférieure au millimètre on peut donc considérer qu'il n'y pas globalement de déviation de la mesure. L'écart-type est lui de 2,5 mm. Cela veut dire que nous ne pourrons raisonnablement assurer la position des nœuds qu'à 0,5 cm près. Cela peut sembler décevant par rapport à la technologie utilisée mais suffisant par rapport aux amplitudes mesurées pour notre cas d'étude. C'est ce que nous allons vérifier en étudiant la différence de position d'un nœud relié à deux barres différentes.

5.3.3.2.1 Position d'un nœud

Comme pour les longueurs des barres, nous avons établi les fréquences des écarts observées pour un nœud dont la position est déterminée à deux reprises grâce à deux mesures réalisées sur des barres reliées au même nœud (Figure 5.26). Nous constatons que la moyenne des écarts avoisine 1 cm. Cela s'explique par les dispersions des mesures relevées plus haut, mais aussi le décalage possible de l'axe des barres par rapport au plan (ABP) (Figure 5.23) car l'orientation par rapport au théodolite de la génératrice des barres sur laquelle sont collées les cibles est approximative.

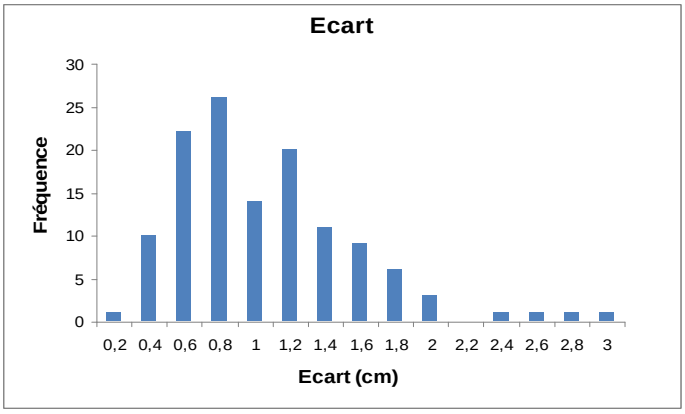


Figure 5.26. Ecart observé entre deux nœuds de deux barres liées

Là encore, les écarts peuvent sembler importants, mais les amplitudes des déplacements des nœuds mesurées sont telles, que nous nous en satisferons.

5.3.4 Résultats

La Figure 5.27 présente la hauteur du module en fonction de l'allongement des câbles de nappes. La courbe **Mesure 1** donne la valeur de l'allongement réel tandis que la courbe **Mesure 2** donne la valeur calculée à partir de la position réelle des nœuds déterminée précédemment. Les deux valeurs présentent un écart dû au déport des câbles par rapport au centre de nœud théorique.

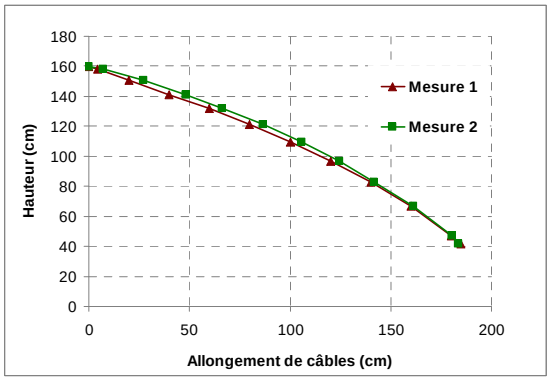


Figure 5.27. Hauteur en fonction de l'allongement des câbles

Les trois Figure 5.28, Figure 5.29 et Figure 5.30 montrent la géométrie du système au cours du pliage. Il peut y avoir des fluctuations importantes de la position des nœuds d'un pas à l'autre en raison de l'apparition d'un nombre important de mécanismes.

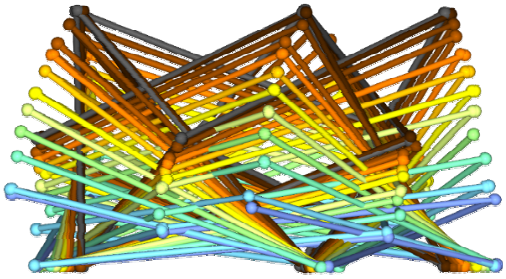


Figure 5.28. Vue de côté

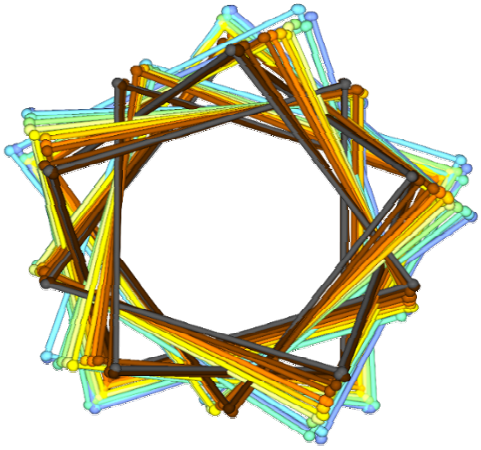


Figure 5.29. Vue de dessus

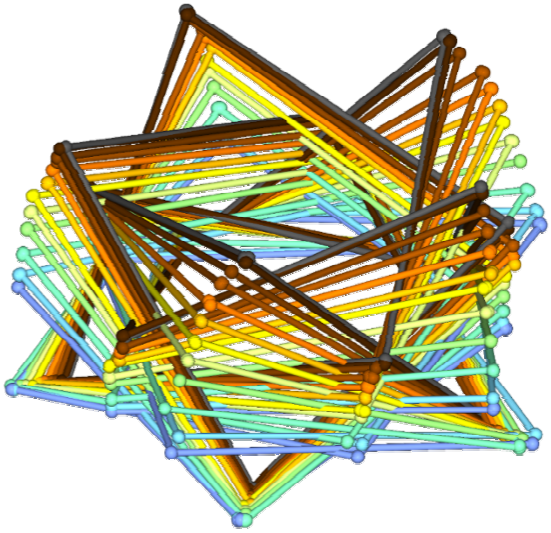


Figure 5.30. Perspective

5.4 Comparaison Essais - Calcul

5.4.1 Comparaison brute

La Figure 5.31 résume les résultats de nos trois approches. Nous avons vu précédemment que les résultats des simulations numériques étaient quasiment confondus avec ceux du calcul analytique.

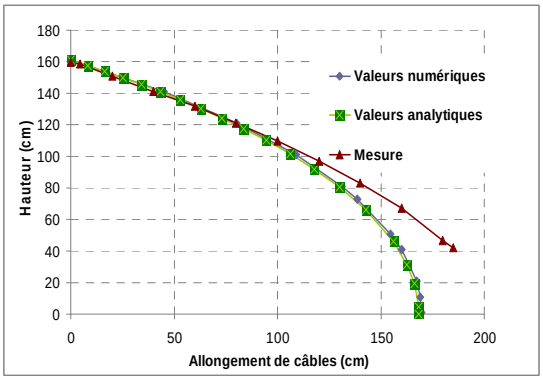


Figure 5.31. Ecart expérimentation – modélisation

Les mesures expérimentales concordent avec les simulations jusqu'à un allongement de 100 cm et un pliage de 60 cm. Ensuite, il y a divergence entre les résultats expérimentaux et les approches numériques. La source de l'écart, mise en évidence, provient du déport du point d'accrochage du câble. En effet, nous avons constaté qu'au cours du pliage les nœuds reliés par les câbles coplanaires ont tendance à se rapprocher alors que les câbles restent de même longueur. Ce phénomène est causé par la rotation des nœuds de l'anneau sur lesquels sont attachés les câbles. Cette variation est loin d'être négligeable puisqu'elle conduit en moyenne à une différence de longueur pour un câble de 2,5 cm.

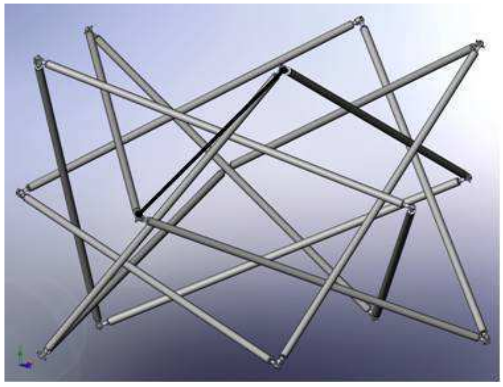


Figure 5.32. Modèle complet avec un câble coplanaire

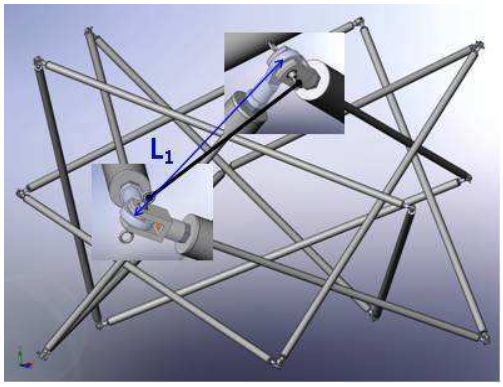


Figure 5.33. Zoom sur les abouts du câble

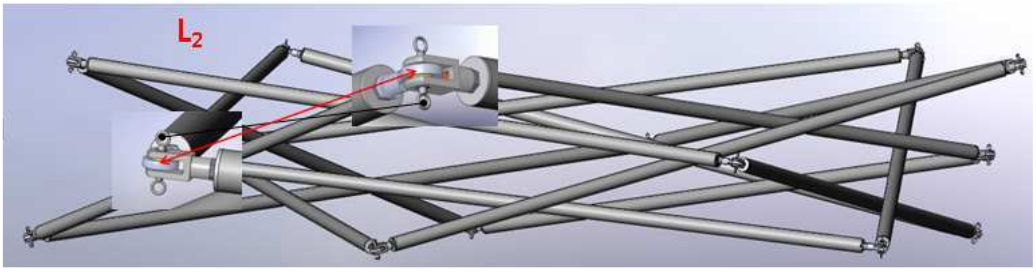


Figure 5.34. Rapprochement des nœuds reliés par le câble coplanaire

En effet, la longueur de ces câbles (le trait en gras noir dans les Figure 5.33 et Figure 5.34) n'évolue pas. Mais avec la réorientation des dispositifs de connexion, la distance entre centres de nœuds diminue : $L_2 < L_1$. Ce raccourcissement a été quantifié et il est présenté sur

la figure qui suit.

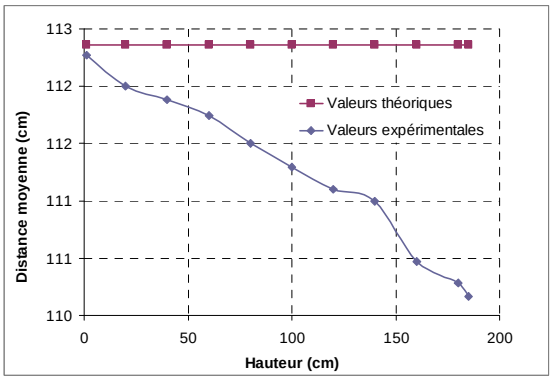


Figure 5.35. Distance des nœuds reliés par des câbles coplanaires

5.4.2 Correction analytique

Afin de vérifier l'hypothèse que l'écart théorique/expérimental a pour origine le rapprochement des 2 nœuds reliés par un câble coplanaire, nous avons refait un calcul analytique avec une longueur variable de ce câble. Rappelons que les 3 équations qui gouvernent la géométrie du module au cours du pliage sont les suivantes :

$$4R_1^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\alpha}{2}\right) = B^2 \tag{5.5}$$

$$R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos\left(\frac{7\pi}{5}+\frac{\alpha}{2}\right) = B^2 \tag{5.6}$$

$$R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\alpha}{2}\right) = C_2^2 \tag{5.7}$$

où R_1, R_2 sont respectivement le rayon du cercle circonscrit aux pentagones des nappes et celui du cercle circonscrit au pentagone intermédiaire, H la hauteur du module, α l'angle de rotation du pentagone supérieur par rapport au pentagone inférieur, B la longueur du câble coplanaire et L la longueur de barres. Après chaque pas d'allongement des câbles, **la longueur des câbles coplanaires (C_2) est corrigée par la valeur mesurée expérimentalement**. **La hauteur du module que l'on obtient est aussi introduite comme donnée dans le calcul**. Les trois variables à déduire des équations sont alors R_1, R_2 et α. La longueur du câble de nappe est ensuite déterminée par $C_1 = R_1 \sin(2\pi/5)$. Ce processus réalisé sous MAPLE est schématisé par la Figure 5.36.

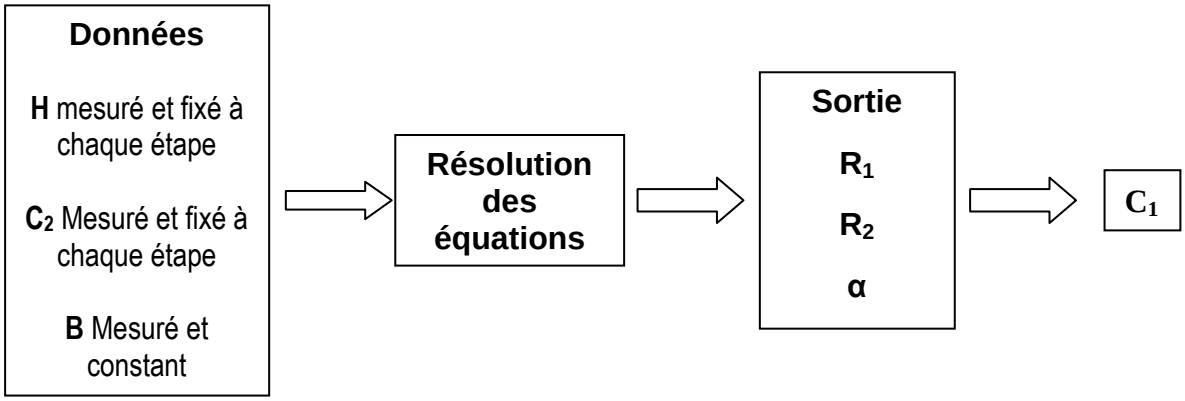


Figure 5.36. Processus de calcul

Les valeurs calculées nous permettent de tracer une courbe 'corrigée' présentée ci-dessous et donnant H en fonction de l'allongement des câbles.

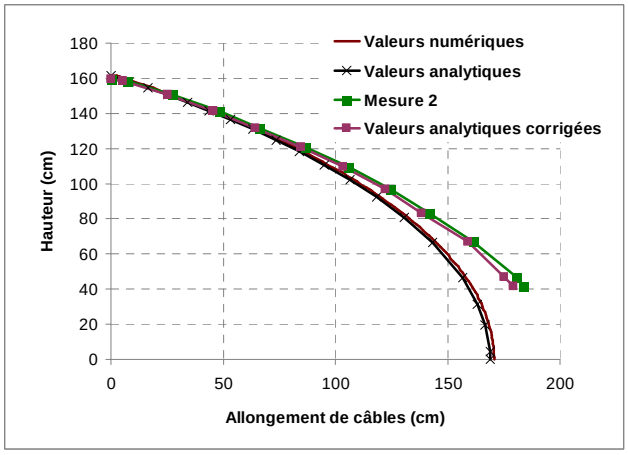


Figure 5.37. Confrontation des résultats après correction

Nous constatons que l'écart des valeurs ***analytiques corrigées*** est très faible par rapport aux résultats expérimentaux ce qui justifie pleinement notre hypothèse.

Conclusion

Sur le plan théorique, deux approches différentes (numérique et analytique) permettant de modéliser le pliage ont donné des résultats quasiment identiques. Cela signifie que la méthode choisie pour simuler le pliage à l'aide d'un logiciel de calcul éléments finis est pertinente.

Des écarts non négligeables des approches théoriques avec l'expérimentation sont observés et expliqués par le déport des dispositifs d'accrochage les câbles aux nœuds intermédiaires, provoquant un rapprochement de certains nœuds au cours du pliage. La correction réalisée sur le calcul analytique a permis la parfaite superposition des courbes expérimentale et théorique.

Néanmoins, dans les futures études, il serait intéressant d'améliorer la conception du nœud pour se rapprocher du modèle théorique dans lequel les barres et les câbles sont concourants, mais aussi d'adapter le modèle numérique pour tenir compte de l'imperfection des liaisons.

Conclusions et perspectives

Nous avons abordé le concept de la tenségrité, ses caractéristiques principales, les concepts associés ainsi que ses applications. L'accent est mis sur la pliabilité de ces systèmes. Cet avantage nous a amené à étudier dans le détail un module à forte potentialité, un anneau de tenségrité à base pentagonale. Nous avons présenté le concept et la construction de cet anneau. Le travail s'est poursuivi par la conception et le montage d'un prototype de taille humaine, léger, rigide et facilement déployable. Ce prototype a permis d'éprouver nos études théoriques. Notre étude est décomposée en deux grandes parties : le comportement mécanique et le comportement du pliage.

En ce qui concerne les études mécaniques, après une analyse des états d'autocontrainte, nous avons effectué des simulations numériques non-linéaires du comportement de l'anneau. Pour le comportement en traction et compression d'un seul module, les résultats montrent que le niveau d'autocontrainte peut avancer ou retarder le relâchement des câbles ce qui engendre une baisse de rigidité globale du module. Il a été montré que la raideur des câbles a plus d'influence que celle des barres sur la rigidité globale de la structure. Un modèle rhéologique à 2 ressorts en série a été développé pour modéliser ce phénomène. En flexion, nous avons trouvé cette même influence de la raideur des éléments. La géométrie, qui a de l'influence sur la distribution des efforts entre les éléments, et le niveau d'autocontrainte choisi sont deux éléments capitaux régissant le comportement mécanique. En somme, nos études ont fourni aux concepteurs les idées principales pour analyser, améliorer ou optimiser la performance mécanique d'un anneau de tenségrité.

La question posée sur l'indentification et la mise en autocontrainte est partiellement résolue dans le chapitre 4. Nous avons développé une approche statique permettant de prendre en compte l'inertie des câbles lors d'une mesure effectuée à l'aide d'un tensiomètre pour évaluer la tension en place dans les câbles. Des campagnes de mesures expérimentales sous chargement doivent être entreprises pour les confronter avec les modèles théoriques et analyser ainsi les imperfections réelles des liaisons.

Nous avons simulé et expérimenté le prototype en tant que structure pliable. Le processus de pliage est dans un premier temps modélisé numériquement et analytiquement. Ces deux modèles ont présenté une forte concordance. Une campagne d'expérimentation a été dans un deuxième temps menée pour vérifier les résultats des deux méthodes précédentes. Bien que les résultats expérimentaux présentent un écart non négligeable vers la fin du pliage, nous avons pu identifier la source de cet écart et apporter une correction.

A l’heure actuelle, nous sommes en mesure de proposer quelques idées pour la mise en applications de l’anneau de tenségrité, et envisageons de concevoir des échafaudages ou de passerelles piétonnes déployables, par assemblage selon l’axe des anneaux.

Sur le plan numérique, afin de compléter notre modèle rhéologique (macro élément) pour un module, le comportement en flexion devra être traité. Comme la majorité des applications de l’anneau de tenségrité réside dans les assemblages, le développement des macro éléments et modèles de calculs s’avère important. Nous n’avons étudié que le comportement en mode statique alors que pour les systèmes légers, l’aspect dynamique est très présent. Cela demande une poursuite des calculs.

Dans ce travail, nous avons étudié une possibilité de pliage sur une géométrie. Suite à des échanges avec Motro, nous pouvons toutefois, prévoir d’autres modes de pliage, en fagot par exemple. Comme les barres d’un module forment un circuit unique, il est possible de concevoir une structure gonflable jouant le rôle de ce circuit et donc déployable par surpression.

Pour aller plus loin dans le choix de la configuration géométrique, la génération des assemblages courbes ou surfaciques est envisageable. Ainsi, les concepteurs ont la possibilité de faire des structures de tenségrité non-standard [BAG08].

Sur le plan expérimental, les nœuds d’assemblage jouent un rôle primordial et peuvent modifier fortement le comportement de la structure. Les inconvénients de la solution retenue pour le prototype doivent être surmontés. Il faudra également envisager le développement de dispositifs technologiques plus performants permettant de générer le déploiement et la mise en tension.

L’identification de l’état d’autocontrainte en place nécessite une amélioration de la méthode. Le modèle doit pouvoir tenir compte des paramètres qui étaient fixés initialement dans notre travail : la longueur des câbles, l’espacement entre les poulies et la rigidité de flexion.

Références bibliographiques

[ABE04] ABEDI K., SHEKASTEHBAND B., *Investigation into Stability Behaviour of Tensegrity Structure*, IASS 2004 Montpellier, France. pp. 108-109 extended abstract. CDrom complete text, 2004.

[ALD03] ALDRICH, J.B., SKELTON, R.E., KREUTZ-DELGADO, K., *Control Synthesis for a Class of Light and Agile Robotic Tensegrity Structures*, Proceedings of American Control Conference, Denver, p. 5245-5251, 2003.

[ANG08] ANGELLIER N., *Etat d'autocontrainte des grilles de tenségrité. Vers l'indentification sous sollicitation naturelle*, Thèse de doctorat, Université Montpellier 2, 2008.

[ANS05] ANSYS, basic analysis guide ANSYS Release 10.0, 2005.

[AVE04] AVERSENG J., *Mise en oeuvre et contrôle des systèmes de tenségrité*, Thèse de doctorat, Université Montpellier 2, 2004.

[BAG08] BAGNERIS M., MAURIN B., MOTRO R., *Toward a non standard tensegrity*, Seminaire Morphogisics Accapulco – Mexique, 2008.

[BAU06] BAUDRILLER H., MAURIN B ., CAÑADAS P., MONTCOURRIER P. et al., *Form-finding of complex tensegrity structures: application to cell cytoskeleton modelling*, Comptes rendus mécanique, vol. 334, n° 11, p. 662 -668, 2006.

[BJO96] BJORCK A., *Numerical method for least squares problems, Solfcover*, 1996.

[BOU98] BOUDERBALA M., *Systèmes spatiaux pliables/dépliables - Le cas des systèmes de tenségrité*, Thèse de doctorat, Université Montpellier 2, 1998.

[CAL78] CALLADINE, C.R., *Buckminster Fuller's "tensegrity" structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames*, International Journal of Solids and Structures, Vol.14, No.2, p. 161-172, 1978.

[CAS96] CASTANEDA C., *Readers of Infinity,* A journal of applied hermeneutics, N°1, Vol.1, Cleargreen, Incorporated, 1996.

[CEV97] CEVAËR F., Annales DEA, LMGC Université Montpellier 2, 1997.

[CHA04] CHAN, W., ARBELAEZ, D., BOSSENS, F., SKLETON, R.E*., Active vibration control of a three-stage tensegrity structure*, SPIE 11th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials, California, USA, 2004.

[CON98] CONELLY R., Back A., *Mathematics and tensegrity*, Issue of The American Scientist, March - April 1998.

[EMM64] EMMERICH D.G., *Structures linéaires Autotendantes*, Brevet français N°1,377,291, 1964.

[EMM88] EMMERICH D.G., *Structures tendues et autotendantes*, Ecole d'architecture de Paris La Villette, 1988.

[FUL61] FULLER R.B., *The revolutionary architect-engineer's own patent revelation about his basic structural discoveries*, Portfolio and Art News Annual, N°4, 1961.

[FUL62] FULLER R.B., *Tensile – Integrity structure*, U.S. patent 3,063,521, 1962.

[FUL73] FULLER R.B., *The Dymaxion world of Buckminister Fuller*, Anchor Books Edition, 1973.

[FUL75] FULLER R.B., *Synergetics: Exploration in The Geometry of Thinkings*, Mac Milan Publishing Co., 1975.

[FUR04] FARRUGIA P., NOOSHIN H., DISNEY P., PARKE G. A. R., *Spatial foldable rings*, IASS Symposium, Montpellier, France pp. 70-71 extended abstract. CDrom complete text, 2004.

[FUR92] FURUYA, H., *Concept of deployable tensegrity structures in space application*, International Journal of Space Structures, Vol. 7, N°2, p. 143-151, 1992.

[HAN93] HANAOR, A., *Double-layer Tensegrity Grids as Deployable Structures*, International Journal of Space Structures, Vol. 8, N°1&2, p. 135-143, 1993.

[ING98] INGBER D.E., *The Architecture of Life*, Scientific American, p. 30-39, January 1998.

[ING03a] INGBER D.E., *Tensegrity I: Cell structure and hierarchical systems*, Journal of Cell Science 116, p. 1157-1173, 2003.

[ING03b] INGBER D.E., *Tensegrity II: How structural networks influence cellular information processing networks*, Journal of Cell Science, p. 1397-1408, 2003.

[KEB98] KEBICHE K., *Etude en non-linéarités géométriques et homogénéisation des systèmes réticulés autocontraints : applications aux systèmes de tenségrité*, Thèse doctorat, Université Montpellier 2, 1998.

[KNI00] KNIGHT B., *Deployable antenna kinematics using tensegrity design*, PhD. Thesis, University of Florida, Gaineville, Florida, USA, 2000.

[LAL96] LALVANI H., Special issue on Morphology, International Journal of Space Structures, vol.11, N°1&2, 1996.

[LUO04] LUO Y., FU G. CHEN T., *Testing study of flat four–prism Tensegrity system*, IASS Symposium, Montpellier, France,p. 226-227 extended abstract. CDrom complete text, 2004.

[MAU05] DE MAUROY J.C, SCIASCIA G, *Nouvelle biomécanique non linéaire du rachis "tensegrity"*, 10ème congrès de la SIRER, Lyon, 2005.

[MOT02] MOTRO R., RADUCANU V., *Tensarch Project*, Fifth international conference on space structures, University of Surrey, Guildford, UK, 2002.

[MOT03] MOTRO R.,*Tensegrity*, Kogan Page Science, 2003.

[MOT09] MOTRO R. QUIRANT J., NGUYEN A. D., MAURIN B., *Foldable tensegrity rings: from conceptual design to physical and numerical models*, ASPC Symposium, Japan, 2009.

[NGU06] NGUYEN A.D., QUIRANT J., CEVAËR F., DUBE J-F., Study of mechanical behaviour and folding of pentagon-based tensegrity ring, IASS Symposium, extended abstract, CDrom complete text, p. 79-80, Venice, Italy, 2007.

[NGU09] NGUYEN A.D., QUIRANT J., CEVAËR F., DUBE J-F., Etude du comportement d'un anneau de tenségrité à base pentagonale, Congrès Français de Mécanique, Résumé p.151, Marseille, 2009.

[PAU05] PAUL C., LIPSON H., VALERO CUEVAS F. J., *Gait Production in a Tensegrity Based Robot*, Proceedings of 12th International Conference on Advanced Robotics, p. 216-222, Seattle, Washington, USA, 2005.

[PAU06] PAUL C., VALERO CUEVAS F. J. LIPSON H., *Design and Control of Tensegrity Robots*, IEEE Transactions on Robotics, Vol. 22 N°5, p. 94 4-957, 2006.

[PEL 86] PELLEGRINO S. and CALLADINE C. R., *Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks*, International Journal Solids and Structures, Vol. 22, 1986.

[PEL93] PELLEGRINO S., KWAN A. S. K., YOU Z., *Active and passive cable elements in deployable masts*, International Journal of Space Structures, 8 (1-2), ISSN0266-3511, p. 29-40, 1993.

[PIN61] PINERO, E. P., *Project for a mobile theatre*, Architectural Design 12, p. 570, 1961.

[PIN65] PINERO E. P., *Three dimensional reticular structure*, US Patent No. 3,185,164, 1965.

[PIN72] PINERO E. P., *Expandable space framing*, Progressive Architecture, 12, p. 154-155,1972.

[PUG76] PUGH A., *Introduction to tensegrity*, University of California Press, 1976.

[QUI00] QUIRANT J., *Systèmes de tenségrité et autocontraints: qualification, sensibilité et incidence sur le comportement*, Thèse de doctorat, Université Montpellier 2, 2000.

[QUI03] QUIRANT J., KAZI AOUAL N., LAPORTE R., *Tensegrity systems: the application of linear programmation in search of compatible selfstress states*, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, vol. 44 (1), p.33-55, 2003.

[RHO08] RHODE-BARBARIGOS L*., Active and Deployable structures*, Master thesis IMAC, Ecole Fédérale polytechnique de Lausane, 2008.

[ROB93] ROBERT J. L., *Mesure de la tension des câbles par vibration*, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, ISBN 2-7208-3510-2,1993.

[SAL05] SALMOCHI J. F., *Une nouvelle approche des manipulations vertébrales par la «tenségrité»*, 10ème congrès de la SIRER, Lyon, 2005.

[SAN05] SANCHEZ L. R., *Contribution à l'étude mécanique des systèmes de tenségrité*, Thèse doctorat, Université Montpellier 2, 2005.

[SCH74] SCHEK H. J., *The force density method for form finding and computation of general networks,* Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Volume 3 p. 115-134, 1974.

[SCH04] SCHLAICH M., *The Messeturm in Rostock – A Tensegrity Tower*, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, Montpellier, 2004.

[SIE04] SIEGERT D., CHOINSKA M.M., BREVET P, BRUTHAT D, TOUTLEMONDE F., *Détermination de la tension des câbles à partir des fréquences de vibration*, Revue française de Génie Civil, Volume 8 – N°9, 2004.

[SKE97] ROBERT E. SKELTON and CORNEL Sultan, *Controllable Tensegrity, a New Class of Smart Structures*, Proc. of SPIE 4th Symposium on Smart Structures and Materials, San Diego, USA, 1997.

[SMA04] SMAILI A. E., *Systèmes légers pliables/dépliables: Le cas des systèmes de tenségrité*, Thèse de doctorat, Université Montpellier 2, 2004.

[SNE65] SNELSON K., *Continuous tension, discontinuous compression structure*, U.S. patent N°3,169,611, 1965.

[SNE90] SNELSON K., *Snelson's letter to Motro*, International Journal of Space Structures, 1990.

[THO02] THOMAS J. C., *Etude expérimentale et modélisations analytique et numérique de poutres gonflables à haute pression*, Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2002.

[TIB02] TIBERT G., *Deployable tensegrity Structure for Space Applications*, Doctoral Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2002.

[VAS97] VASSART N., *Recherche de forme et stabilité des systèmes réticulés autocontraints : Application aux systèmes de tenségrité*, Thèse de doctorat, Université Montpellier 2, 1997.

[WAN03] WANG B.B., LI Y.Y., *Novel Cable-Strut Grids made of prisms: Basic Theory and Design*, Int. Journal Space Structures, Vol.44, N°142, p.9 3-125, 2003.

[WAN98] WANG B.B., *Cable-strut systems: Part I - Tensegrity*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 45, N°3, p.281-289, 1998.

[ZEI76] ZEIGLER T.R., *Collapsable self-supporting structures*, US Patent N° 3,968,808, 1976.

ANNEXES

A Géométrie

A.1 Géométrie d'un module à base pentagonale 1, 2 et 3

Pour un module quelconque construit selon la méthode décrite dans le chapitre 2, soit R_1 le rayon du cercle inscrit le pentagone de nappe et R_2 celui du pentagone intermédiaire. Vue la symétrie circulaire du module, nous n'étudions qu'un côté sur 5. Les coordonnées des points concernés sont les suivantes :

Nœuds	X	Y	Z
1	0	R_1	0
2	$R_1\sin(2\pi/5)$	$R_1\cos(2\pi/5)$	0
3	$R_1\sin(\alpha)$	R_1	H
4	$R_1\sin(2\pi/5)$	$R_1\cos(2\pi/5)$	H
5	$R_2\sin(\pi/5)$	$R_2\cos(\pi/5)$	H/2
6	$R_2\sin(7\pi/5)$	$R_2\cos(7\pi/5)$	H/2

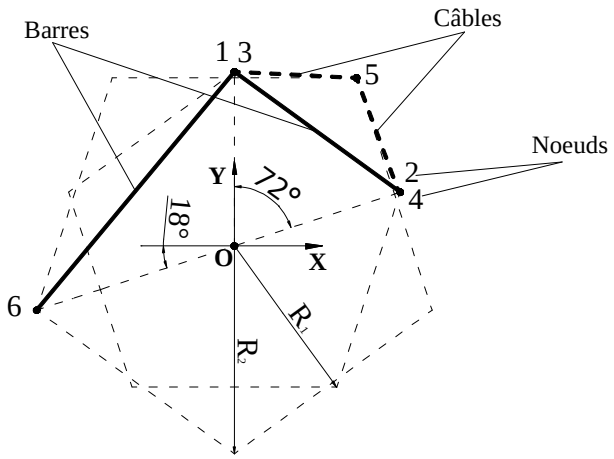


Figure A.1.Extrait d'un côté de l'anneau de tenségrité à base pentagonale. Vue de dessus

La longueur $\mathbf{B_1}$ de la barre latérale 1 – 4 est :

$$B_1^2 = (X_1 - X_4)^2 + (Y_1 - Y_4)^2 + (Z_1 - Z_4)^2 = R_1^2 \sin^2(\frac{2\pi}{5}) + \left(R_1 - R_1\cos(\frac{2\pi}{5})\right)^2 + H^2$$

$$B_1^2 = 4R_1^2 \sin^2(\frac{\pi}{5}) + H^2$$

De la même façon, la longueur de la barre intermédiaire 1 – 6 qui est de valeur $\mathbf{B_2}$, est décrite par la relation :

$$B_2^2 = \left[R_2 \sin(\frac{7\pi}{5})\right]^2 + \left[R_1 - R_2 \cos(\frac{7\pi}{5})\right]^2 + [H/2]^2$$

$$B_2^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos(\frac{7\pi}{5}) + \frac{H^2}{4}$$

La longueur $\mathbf{C_1}$ du câble de nappe 1 – 2 est définie par :

$$C_1 = 2R_1 \sin(\frac{2\pi}{2\times 5}) = 2R_1 \sin(\frac{\pi}{5})$$

Et la longueur $\mathbf{C_2}$ du câble coplanaire 1 – 5 est :

$$C_2^2 = R_2^2 \sin^2(\frac{\pi}{5}) + \left(R_1 - R_2 \cos(\frac{\pi}{5})\right)^2 + \frac{H^2}{4}$$

$$C_2^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos(\frac{\pi}{5}) + \frac{H^2}{4}$$

L'unicité de la longueur des barres (dans chacun des 3 modules étudiés) impose que $B_1 = B_2 = B$ ce qui donne :

$$R_1^2\left(1 - 4\sin^2(\frac{\pi}{5})\right) + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos(\frac{7\pi}{5}) - \frac{3}{4}H^2 = 0$$

On peut également calculer la distance entre l'axe central des prismes et une barre intermédiaire qui présente le rayon **r** de l'espace interne de l'anneau.

Module 1 : 4 câbles intermédiaires se trouvent sur un plan

$R_1 = R_2\cos(\pi/5)$

$H = 1{,}596R_1$; $C_1 = 1{,}176R_1$; $C_2 = 1{,}079R_1$; $B = 1{,}982R_1$ et $r = 0{,}648R_1$.

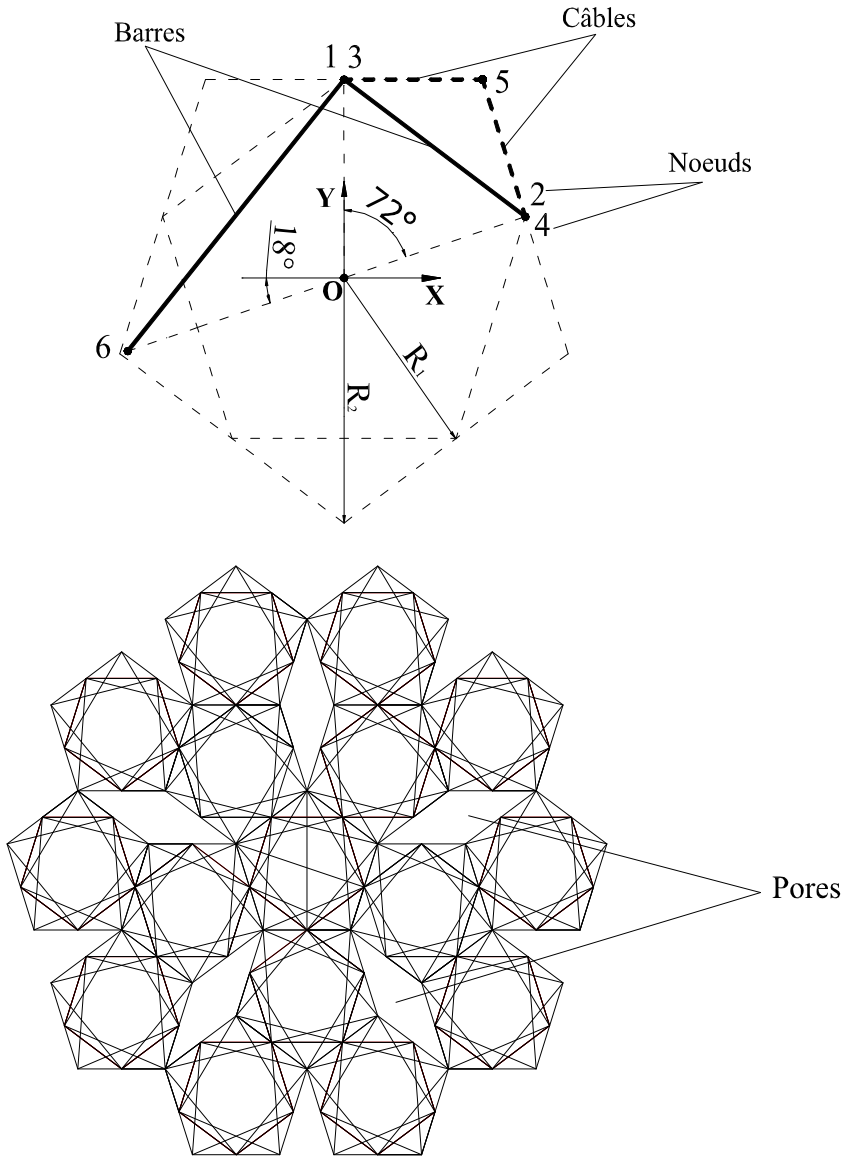


Figure A.2.Extrait d'un côté de l'anneau de tenségrité à base pentagonale et assemblage. Vues de dessus

Module 2 : tous les câbles sont aussi de longueur identique

$C_1 = C_2 = C$

$$R_1^2\left(1-4\sin^2(\frac{\pi}{5})\right)+R_2^2-2R_1R_2\cos\ (\frac{\pi}{5})+\frac{H^2}{4}=0$$

$R_2 = 1{,}343R_1$; $H = 1{,}733R_1$; $C = 1{,}176R_1$; $B = 2{,}094R_1$ et $r = 0{,}670R_1$.

Module 3 : 3 pentagones de base sont égaux $R_1 = R_2 = R$

On a :

$$R^2\left(1-4\sin^2(\frac{\pi}{5})+1-\cos(\frac{7\pi}{5})\right)=\frac{3}{4}H^2 \quad \textbf{ou} \quad H=4R\sqrt{\frac{\cos(2\pi/5)}{3}}$$

H = 1,284R ; C_1 = 1,176R ; C_2 = 0,891R ; B = 1,741R et r = 0,588R.

A.2 Anneau à base hexagonale et assemblage

Le module à base hexagonale dont les câbles intermédiaires se trouvent dans un plan permet un pavage du plan très régulier comme le montre la figure suivante ($R_1 = R_2\cos(\pi/6)$) :

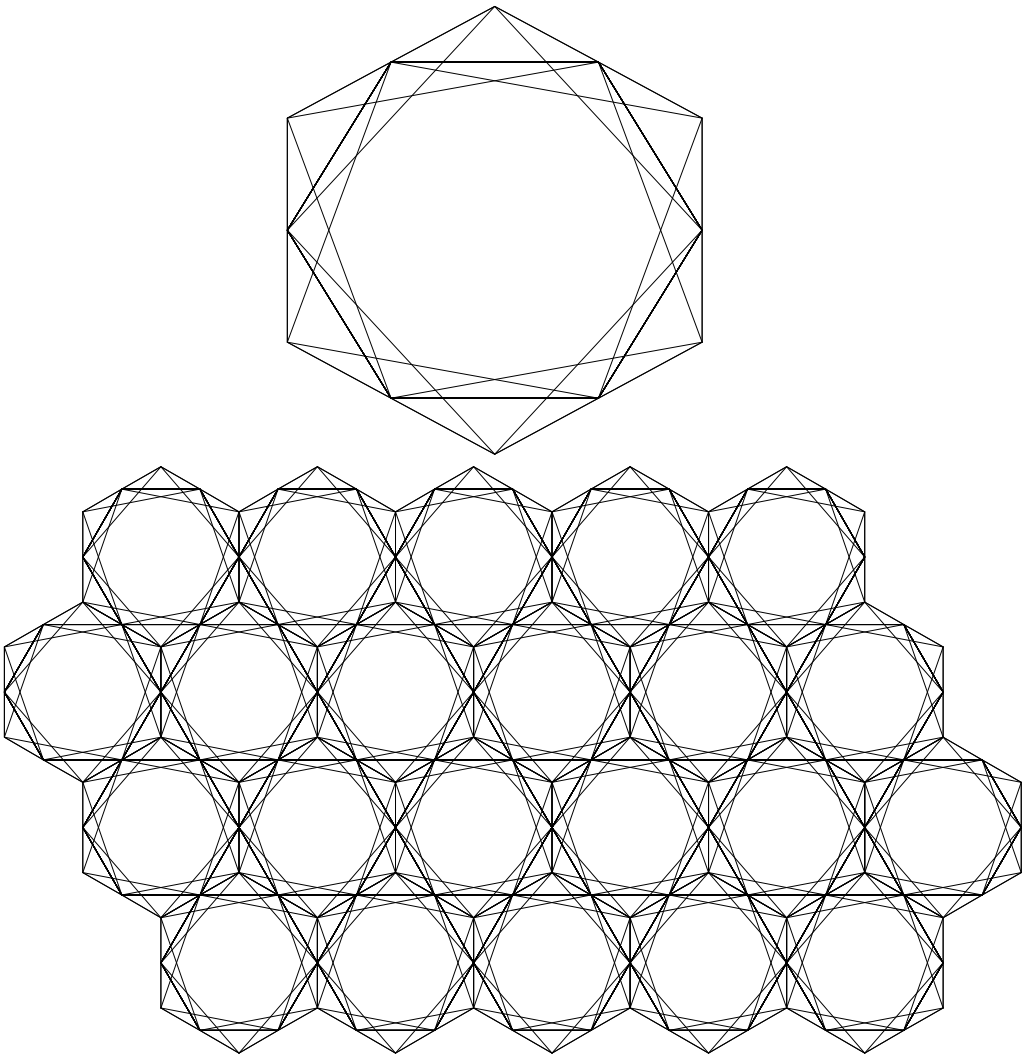


Figure A.4.Anneau de tenségrité à base hexagonale et assemblage. Vues de dessus

B Aspects mécaniques

B.1 Etude des états d'autocontrainte

Suite à la détermination du noyau de la matrice [A], le résultat purement numérique n'est pas exploitable du point de vue mécanique. Le but est de trouver une combinaison linéaire qui respecte la nature des éléments : les barres doivent êtres comprimées et les câbles tendus. Pour trouver cette combinaison linaire, une méthode peut consister à fixer 6 conditions linéairement indépendantes qui vont imposer une seule solution. C'est ce qui est appelée méthode conditionnelle [QUI00].

Dans notre cas, comme il y a 10 barres intermédiaires, il est possible de fixer ces 6 conditions sur 6 d'entre elles. Cela permet de déterminer la combinaison donnant le vecteur d'autocontrainte complet. On constate que ce vecteur est bien compatible. Il est présenté dans le tableau suivant.

Elément	Vecteurs d'autocontrainte						Vecteur autocontrainte combiné
	1	2	3	4	5	6	
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,00	**-1,00**
2	-1,00	0,00	1,62	0,00	-1,62	0,00	**-1,00**
3	0,00	-1,00	0,00	1,62	0,00	-1,62	**-1,00**
4	-1,62	0,00	1,62	0,00	-1,00	0,00	**-1,00**
5	0,00	-1,62	0,00	1,62	0,00	-1,00	**-1,00**
6	-1,56	-1,56	-0,15	-0,15	0,25	0,25	**-1,00**
7	0,25	0,25	-1,96	-1,96	0,25	0,25	**-1,00**
8	0,25	0,25	-0,15	-0,15	-1,56	-1,56	**-1,00**
9	-1,56	-1,56	2,77	2,77	-2,68	-2,68	**-1,00**
10	-2,68	-2,68	2,77	2,77	-1,56	-1,56	**-1,00**
11	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**-2,93**
12	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**-2,93**
13	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00	**-2,93**
14	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	**-2,93**
15	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	**-2,93**
16	1,41	0,10	-1,37	0,44	1,10	-0,21	**1,46**
17	1,10	-0,21	-0,37	0,44	0,41	0,10	**1,46**
18	0,41	0,10	0,44	-0,37	0,29	0,60	**1,46**
19	0,29	0,60	-0,06	-0,87	0,91	0,60	**1,46**
20	0,91	0,60	-1,18	-0,37	1,41	0,10	**1,46**
21	0,60	0,29	-0,37	0,44	0,10	0,41	**1,46**
22	0,10	0,41	0,44	-0,37	-0,21	1,10	**1,46**
23	-0,21	1,10	0,44	-1,37	0,10	1,41	**1,46**
24	0,10	1,41	-0,37	-1,18	0,60	0,91	**1,46**
25	0,60	0,91	-0,87	-0,06	0,60	0,29	**1,46**
26	0,20	0,70	0,38	-0,93	-0,30	1,82	**4,99**
27	-0,20	-0,70	-0,38	0,93	3,22	2,11	**4,99**
28	2,92	2,42	-4,92	-4,61	4,34	4,84	**4,99**
29	1,01	0,51	-1,43	-0,13	2,01	-0,11	**4,99**
30	-0,30	1,82	0,68	-2,24	-0,11	2,01	**4,99**

31	3,22	2,11	-5,42	-4,11	4,84	4,34	**4,99**
32	4,34	4,84	-4,11	-5,42	2,11	3,22	**4,99**
33	2,01	-0,11	-2,24	0,68	1,82	-0,30	**4,99**
34	-0,11	2,01	-0,12	-1,43	0,51	1,01	**4,99**
35	4,84	4,34	-4,61	-4,92	2,42	2,92	**4,99**
36	2,11	3,22	0,93	-0,37	-0,70	-0,20	**1,87**
37	1,82	-0,30	-0,93	0,37	0,70	0,20	**1,87**
38	0,51	1,01	-0,93	0,37	0,70	0,20	**1,87**
39	2,42	2,92	0,93	-0,37	-0,70	-0,20	**1,87**
40	-0,70	-0,20	3,24	3,55	-0,20	-0,70	**1,87**
41	0,70	0,20	0,68	-0,63	0,20	0,70	**1,87**
42	0,70	0,20	-0,62	0,68	0,20	0,70	**1,87**
43	-0,70	-0,20	3,55	3,24	-0,20	-0,70	**1,87**
44	-0,20	-0,70	-0,38	0,93	2,92	2,42	**1,87**
45	0,20	0,70	0,38	-0,93	1,01	0,51	**1,87**

Légende : La couleur du numéro indique la famille des éléments

Barres intermédiaires		Câbles de nappes	
Barres latérales		Câbles coplanaires	
		Câbles non coplanaires	

B.2 Etude de l'état d'autocontrainte temporaire observé lors du montage

Pour comprendre le phénomène ayant conduit certaines barres à passer en traction en cours de montage, nous avons essayé de déterminer les états d'autocontrainte pour un système sur lequel une nappe de câbles (inférieure ou supérieure) n'aurait pas été montée. Un calcul sous Tenségrité 2000 a permis de montrer qu'il existait effectivement un nouvel état d'autocontrainte temporaire qui induisait de la traction dans les barres.

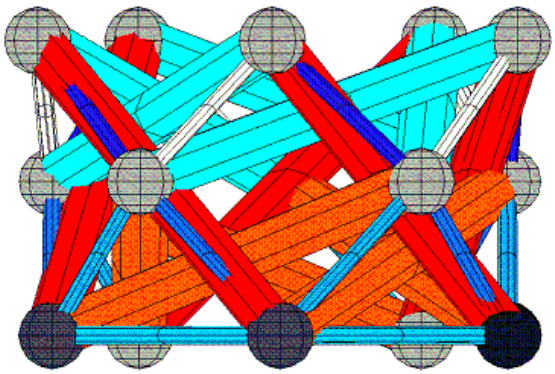
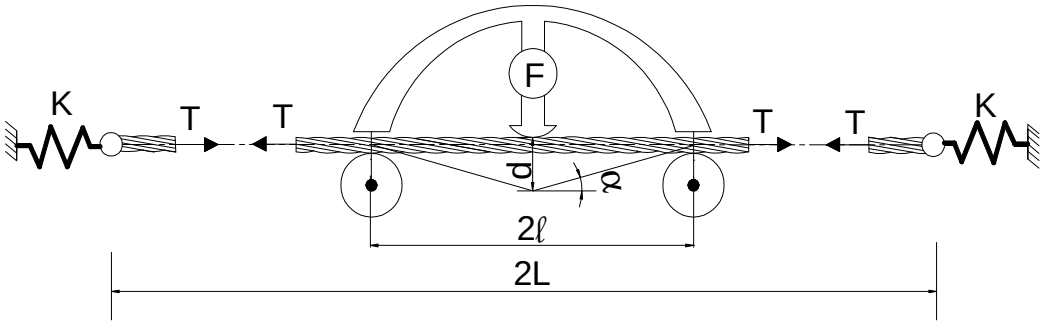


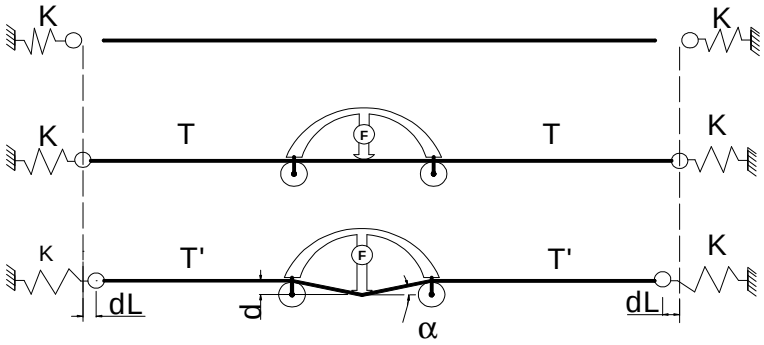
Figure B.1.Visualisation d'un état d'autocontrainte admissible par le module après enlèvement de la nappe supérieure de câble. Vue de côté.

Dans ce cas de figure il existe 3 états d'autocontrainte linéairement indépendants et 2 mécanismes (respectant ainsi la formule de Maxwell équation 8 dans le paragraphe 1.1.2.3).

Au cours du montage, les efforts observés sont très faibles et uniquement dus au poids propre des éléments. Il faut prendre en considération ce phénomène lors de la conception des nœuds pour qu'ils restent solidaires des barres et ainsi éviter un désassemblage en cours de montage.

C Modèle sans inertie en flexion pour tensiomètre





Longueur	Allongement	Tension
L_0	0	0
L	ξ	T
L'	ξ'	T'

Figure C.1.Tensiomètre

Détermination de la tension T dans le câble en fonction de la force F et du déplacement d imposés par le tensiomètre. Comme point de départ, on se propose d'écrire les allongements avant et après le chargement en fonction des demi-longueurs du câble associées *L* et *L'* et de sa demi-longueur libre L_0. Par définition, la déformation du câble sous tension *T* et la déformation sous tension *T'* après application de la déviation transversale sont :

$$\xi = \frac{L - L_0}{L_0} \qquad \text{pour la tension } T \tag{1}$$

$$\xi' = \frac{L' - L_0}{L_0} \qquad \text{pour la tension } T' \tag{2}$$

On peut aussi exprimer la longueur *L'* de manière géométrique. On trouve :

$$L' = L + \ell\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) - dL \tag{3}$$

avec *dL* l'allongement du ressort modélisant la condition limite du câble, α l'angle formé par le câble déformé et 2ℓ la distance séparant les appuis du dispositif de mesure. A partir de ces équations, nous sommes en mesure d'exprimer la différence des allongements. En reportant (3) dans la différence (1) – (2), on obtient :

$$\xi' - \xi = \frac{\ell\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) - dL}{L_0} \tag{4}$$

La contrainte dans le câble peut s'écrire de deux manières. Soit en fonction de la tension, soit en fonction de l'allongement. Les contraintes pour les deux configurations sont respectivement :

$$\sigma = \frac{T}{S} = E\xi \tag{5}$$

$$\sigma' = \frac{T'}{S} = E\xi' \tag{6}$$

On peut alors calculer la variation de tension en fonction de la variation de déformation :

$$T' - T = \Delta T = ES(\xi' - \xi) \tag{7}$$

En reportant (4) dans (7) on obtient :

$$\Delta T = ES\frac{\ell\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) - dL}{L_0} \tag{8}$$

L'analyse de l'équilibre du point d'application du déplacement transverse nous donne la relation entre l'effort mesuré *F* et la tension *T'* :

$$T' = \frac{F}{2\sin\alpha} \tag{9}$$

L'équilibre des conditions limites du câble donne les expressions suivantes :

$$T' = K(L' - L_0) \tag{10}$$

$$T = K(L - L_0) \tag{11}$$

Avec *K* la raideur des appuis du câble supposés symétriques. De la différence (10) - (11) on déduit :

$$T' = T + KdL \tag{12}$$

On peut donc calculer $T = T' - \Delta T$ en utilisant (9) pour *T'* et (12) pour éliminer le terme *dL* qui apparaît dans *ΔT*.

En posant $k_0 = \frac{ES}{L_0}$ la raideur du câble, on obtient :

$$T = \frac{F}{2\sin\alpha} - \frac{k_0 K}{k_0 + K}\ell\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) \tag{13}$$

Pour simplifier cette formulation, nous allons voir de quelle manière il est possible de s'affranchir des termes en sinus et cosinus.

Dans le dispositif réalisé, il apparaît clairement que le déplacement imposé *d* est très faible comparé aux autres longueurs.

En supposant donc $d << \ell$, on utilise les développements limités :

$\sin\alpha \cong \alpha$ qui permet d'écrire $\alpha \cong \frac{d}{\ell} << 1$,

$\cos\alpha \cong 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ et $\frac{1}{\cos\alpha} = 1 + \frac{\alpha^2}{2}$.

Ce qui donne :

$$T \cong \frac{F}{2\alpha} - \frac{k_0 K}{k_0 + K}\ell\frac{\alpha^2}{2} \tag{14}$$

Il suffit de remplacer α pour obtenir :

$$T = \frac{F\ell}{2d} - \left(\frac{k_0 K}{k_0 + K}\right)\frac{d^2}{2\ell} \tag{15}$$

L'expression finale donne *F* en fonction de *d :*

$$F = \frac{2T}{\ell}d + \left(\frac{k_0 K}{k_0 + K}\right)\frac{d^3}{\ell^2} \tag{16}$$

Au premier ordre nous avons :

$$\frac{\partial F}{\partial d} = \frac{2T}{\ell} + \left(\frac{k_0 K}{k_0 + K}\right)\frac{3d^2}{\ell^2} \xrightarrow[d\to 0]{} \frac{2T}{\ell} \tag{17}$$

On peut en conclure que la valeur de la pente à l'origine de la courbe *F-d* est proportionnelle à la tension *T*. Et cela signifie qu'une seule mesure peut suffire pour obtenir cette information si on prend un couple proche de l'origine de la courbe. Encore faut-il être sûr de se trouver dans cette zone. Pour connaître la raideur équivalente des appuis du câble, on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial d^2} = \left(\frac{k_0 K}{k_0 + K}\right)\frac{6d}{\ell^2} \tag{18}$$

On réécrit l'expression (16) pour obtenir une formulation de la tension *T* du câble en fonction du déplacement *d* et de la force *F*. Ce sont ces données qui sont mesurées expérimentalement dans le dispositif présenté figure 31.

Si on pose $F = \frac{2T}{\ell}d + \left(\frac{k_0 K}{k_0 + K}\right)\frac{d^3}{\ell^2} = C_1 d + C_3 d^3$

Pour deux couples de mesures (F_1, d_1) et (F_2, d_2) on a

$$F_1 = C_1 d_1 + C_3 d_1^3$$

$$F_2 = C_1 d_2 + C_3 d_2^3$$

En combinant les deux expressions on trouve le paramètre C_3.

$$d_1F_2 = C_1d_2d_1 + C_3d_2^3d_1$$

$$d_2F_1 = C_1d_1d_2 + C_3d_1^3d_2$$

$$d_1F_2 - d_2F_1 = C_3(d_1d_2^3 - d_2d_1^3) = C_3d_1d_2\,(d_2^2 - d_1^2)$$

$$C_3 = \frac{d_1F_2 - d_2F_1}{d_1d_2(d_2{}^2 - d_1{}^2)}$$

En le reportant dans l'expression d'une des forces on obtient la relation entre la tension et les mesures.

$$F_1 - C_3d_1^3 = C_1d_1 = \frac{2T}{\ell}d_1$$

$$\frac{2T}{\ell} = \frac{F_1}{d_1} - C_3d_1{}^2 \text{ ou } T = \frac{\ell}{2}\left(\frac{F_1}{d_1} - C_3d_1{}^2\right)$$

$$T = \frac{\ell}{2}\left(\frac{F_1}{d_1} - \frac{d_1}{d_2}\frac{(d_1F_2 - d_2F_1)}{(d_2{}^2 - d_1{}^2)}\right) \tag{19}$$

Théoriquement deux mesures suffisent pour trouver la valeur de la tension du câble en s'affranchissant de la raideur équivalente des appuis du câble.

D Fichiers informatiques

D.1 Modélisation numérique sous ANSYS

Voici le code de calcul élaboré sous ANSYS. Celui-ci a pour but de modéliser le pliage. Pour le cas de l'étude mécanique, il suffit de remplacer le module d'Young du câble actif par celui du câble (variable *eactif* à modifier) et le pilotage initialement en déplacement est à transformer par un pilotage en force.

```
FINISH
/CLEAR,START
/Title,Anneau de tenségrité LMGC - UM2
/config,nres,100000

/PREP7
!PROPRIETES MECANIQUES

eb= 20*(10**9)          ! module d'Young des barres ( N/m^2)
ec= 100*(10**9)         ! module d'Young des câbles ( N/m^2)
ecactif =ec/100000      ! module d'Young des câbles actifs pour le pliage ( N/m^2)

!CÂBLES
pi=4*atan(1)
rc=0.0015               ! rayon du câble( m )
sc=pi*(rc**2)           ! section du câble  (m^2)
scm=2*sc                ! section du câble commun  (m^2)

!BARRES
reb = 0.02              ! rayon extérieur (m)
rib = 0.0175            ! rayon intérieur (m)
sb=pi*(reb**2-rib**2)   ! section du tube (m^2)

!TENSIONS INITIALES DANS LA STRUCTURE AUTOCONTRAINTE

tbla1= (-2.9302)/2.9302         ! barres laterales
tbin1= (-1)/2.9302              ! barres intermédiaires
tcna1= 0.98598/2.9302           ! câbles de nappes
tcbar1= 2.55454/2.9302          ! câbles coplanaires
tcinv1= 0.9573/2.9302           ! câbles non-coplanaires

coeff=1000                      ! précontrainte = 1000 N ou 1kN dans les barres les plus comprimées

tbla= tbla1*coeff               ! barres laterales
tbin= tbin1*coeff               ! barres intermédiaires
tcna= tcna1*coeff               ! câbles de nappes
tcbar= tcbar1*coeff             ! câbles coplanaires
tcinv= tcinv1*coeff             ! câbles non-coplanaires

!CALCUL DEFORMATION INITIALE POUR INTRODUCTION DE L'AUTOCONTRAINTE

epsbla= tbla/(eb*sb)            ! barres laterales
epsbin= tbin/(eb*sb)            ! barres intermédiaires
epscna= tcna/(ec*sc)            ! câbles de nappes
epscnac= 2*tcna/(ec*scm)        ! câbles de nappes communes
epscbar= tcbar/(ec*sc)          ! câbles coplanaires
epscinv= tcinv/(ec*sc)          ! câbles non-coplanaires

!DEFINITION DES ELEMENTS

et,1,LINK8              !  barres latérales
```

```
et,2,LINK8                  !  barres intermédiaires

et,3,LINK10                 !  câbles supérieurs -inférieurs
et,4,LINK10                 !  câbles intermédiaires coplanaires
et,5,LINK10                 !  câbles intermédiaires noncoplanaires
et,6,LINK10                 !  câbles communs

keyopt,3,3,0                ! câbles avec comportement unilateral
keyopt,4,3,0                ! câbles avec comportement unilateral
keyopt,5,3,0                ! câbles avec comportement unilateral

!CONSTANTES REELLES

R,1,sb,epsbla                       ! barres latérales
R,2,sb,epsbin                       ! barres intermédiaires
R,3,sc,epscna                       ! câbles de nappes
R,4,sc,epscbar                      ! câbles coplanaires
R,5,sc,epscinv                      ! câbles non-coplanaires
R,6,scm,epscnac                     ! câbles de nappes communes

!MATERIAUX PROPRIETES

MP,EX,1,eb                          ! module d'Young de la barre ( N/m^2)
MP,EX,2,ec                          ! module d'Young du câble ( N/m^2)
MP,EX,3,ecactif                     ! module d'Young du câble actif pour le pliage( N/m^2)


!GEOMETRIE DE REFERENCE

rpen= 1.2523656           !rayon du cercle inscrit ( m) pour que lbarre soit 2.18 m

h=((8/3)*(rpen**2)*( 1+sin(pi/10)-2*(sin(pi/5))**2))**(1/2)    !hauteur

lcna=2*rpen*sin(pi/5)                ! longueur de câbles de nappes= cote du pentagone

lb= (lcna**2+h**2)**(1/2)            ! longueur de barres

lcla   =((rpen*cos(3*pi/10))**2+(rpen-rpen*sin(3*pi/10))**2+(h/2)**2)**(1/2)      !   longueur   de   câbles
latérales

!CREATION DES NOEUDS

*ask,Netage,    LE NOMBRE DE MODULES SOUHAITE

Npen= 2*Netage+1    ! Nombre de pentagones définissant la geometrie de la structure

!NAPPE INFERIEURE - INTERMEDIAIRE - SUPERIEURE

*do,i,1,Npen,1

        *do,j,1+5*(i-1),5+5*(i-1),1
        N,j,rpen*cos(pi/10+j*2*pi/5-sin(pi/2+i*pi/2)**2*pi/5),rpen*sin(pi/10+j*2*pi/5-
sin(pi/2+i*pi/2)**2*pi/5),(i-1)*h/2
        *enddo

*enddo

!CREATION DES ELEMENTS

!BARRES LATERALES

TYPE,1
REAL,1
```

```
MAT,1

*do,k,1,Netage,1
        test=sin(k*pi/2)
        *if,test,abgt,0.5,then

        e,1+(k-1)*10,15+(k-1)*10
        e,2+(k-1)*10,11+(k-1)*10
        e,3+(k-1)*10,12+(k-1)*10
        e,4+(k-1)*10,13+(k-1)*10
        e,5+(k-1)*10,14+(k-1)*10

        *else

        e,1+(k-1)*10,12+(k-1)*10
        e,2+(k-1)*10,13+(k-1)*10
        e,3+(k-1)*10,14+(k-1)*10
        e,4+(k-1)*10,15+(k-1)*10
        e,5+(k-1)*10,11+(k-1)*10

        *endif
*enddo

!BARRES INTERMEDIAIRES

TYPE,2
REAL,2
MAT,1

*do,l,1,Netage,1
        test=sin(l*pi/2)

        *if,test,abgt,0.5,then

        e,6+(l-1)*10,4+(l-1)*10
        e,6+(l-1)*10,12+(l-1)*10
        e,7+(l-1)*10,5+(l-1)*10
        e,7+(l-1)*10,13+(l-1)*10
        e,8+(l-1)*10,1+(l-1)*10
        e,8+(l-1)*10,14+(l-1)*10
        e,9+(l-1)*10,2+(l-1)*10
        e,9+(l-1)*10,15+(l-1)*10
        e,10+(l-1)*10,3+(l-1)*10
        e,10+(l-1)*10,11+(l-1)*10

        *else

        e,6+(l-1)*10,14+(l-1)*10
        e,6+(l-1)*10,2+(l-1)*10
        e,7+(l-1)*10,15+(l-1)*10
        e,7+(l-1)*10,3+(l-1)*10
        e,8+(l-1)*10,11+(l-1)*10
        e,8+(l-1)*10,4+(l-1)*10
        e,9+(l-1)*10,12+(l-1)*10
        e,9+(l-1)*10,5+(l-1)*10
        e,10+(l-1)*10,13+(l-1)*10
        e,10+(l-1)*10,1+(l-1)*10

        *endif
*enddo

!CREATION DES CÂBLES
```

```
TYPE,3
REAL,3
MAT,3

!CABLE DE NAPPE INFERIEURE

e,1,2
e,2,3
e,3,4
e,4,5
e,5,1

!CABLE DE NAPPE SUPERIEURE

e,1+Netage*10,2+Netage*10
e,2+Netage*10,3+Netage*10
e,3+Netage*10,4+Netage*10
e,4+Netage*10,5+Netage*10
e,5+Netage*10,1+Netage*10


!Câbles des nappe commune


*if,Netage,GT,1,THEN

TYPE,6
REAL,6
MAT,3

        *do,m,2,Netage,1

        e,1+(m-1)*10,2+(m-1)*10
        e,2+(m-1)*10,3+(m-1)*10
        e,3+(m-1)*10,4+(m-1)*10
        e,4+(m-1)*10,5+(m-1)*10
        e,5+(m-1)*10,1+(m-1)*10

        *enddo
*endif

!CABLES COPLANAIRES
TYPE,4
REAL,4
MAT,2
*do,n,1,Netage,1

        test=sin(n*pi/2)

        *if,test,abgt,0.5,then

        e,6+(n-1)*10,1+(n-1)*10
        e,6+(n-1)*10,15+(n-1)*10

        e,7+(n-1)*10,2+(n-1)*10
        e,7+(n-1)*10,11+(n-1)*10,

        e,8+(n-1)*10,3+(n-1)*10,
        e,8+(n-1)*10,12+(n-1)*10,

        e,9+(n-1)*10,4+(n-1)*10
        e,9+(n-1)*10,13+(n-1)*10
```

```
        e,10+(n-1)*10,5+(n-1)*10
        e,10+(n-1)*10,14+(n-1)*10

        *else

        e,6+(n-1)*10,5+(n-1)*10
        e,6+(n-1)*10,11+(n-1)*10

        e,7+(n-1)*10,1+(n-1)*10
        e,7+(n-1)*10,12+(n-1)*10

        e,8+(n-1)*10,2+(n-1)*10
        e,8+(n-1)*10,13+(n-1)*10

        e,9+(n-1)*10,3+(n-1)*10
        e,9+(n-1)*10,14+(n-1)*10

        e,10+(n-1)*10,4+(n-1)*10
        e,10+(n-1)*10,15+(n-1)*10

        *endif
*enddo

!CABLES NONCOPLANAIRES
TYPE,5
REAL,5
MAT,2

*do,o,1,Netage,1
        test=sin(o*pi/2)
        *if,test,abgt,0.5,then

        e,6+(o-1)*10,5+(o-1)*10
        e,6+(o-1)*10,11+(o-1)*10

        e,7+(o-1)*10,1+(o-1)*10
        e,7+(o-1)*10,12+(o-1)*10

        e,8+(o-1)*10,2+(o-1)*10
        e,8+(o-1)*10,13+(o-1)*10

        e,9+(o-1)*10,3+(o-1)*10
        e,9+(o-1)*10,14+(o-1)*10

        e,10+(o-1)*10,4+(o-1)*10
        e,10+(o-1)*10,15+(o-1)*10

        *else

        e,6+(o-1)*10,1+(o-1)*10
        e,6+(o-1)*10,15+(o-1)*10

        e,7+(o-1)*10,2+(o-1)*10
        e,7+(o-1)*10,11+(o-1)*10,

        e,8+(o-1)*10,3+(o-1)*10,
        e,8+(o-1)*10,12+(o-1)*10,

        e,9+(o-1)*10,4+(o-1)*10
        e,9+(o-1)*10,13+(o-1)*10

        e,10+(o-1)*10,5+(o-1)*10
        e,10+(o-1)*10,14+(o-1)*10
```

```
        *endif
*enddo

Finish

/SOL

ANTYPE,0 ! analyse statique
NLGEOM,1 ! nonlinéaire géométrie
NLDIAG,NRRE,on
NLDIAG,EFLG,on
NSUBST,1000,   !10000,100
AUTOTS,Off !autots,on
OUTRES,ALL,ALL  !Controles les données résultats écrites dans un fichier
TIME,1
KBC,0
lnsrch,on                    ! line search

Neqit,500          !
OUTRES,ALL,all
!sstif,on!stress-stiffening

!BLOQUAGE EN BAS
d,1,ux
d,1,uz
d,4,uy
d,4,uz
d,3,uy
d,3,uz
d,2,uz
d,5,uz

!BLOQUAGE SUPLEMENTAIRE SUR LES NOEUS

*do,i,2,Npen-1,1
        *do,j,1,4,1
        ce,next,0,j+(i-1)*5,uz,1,j+1+(i-1)*5,uz,-1
        *enddo
*enddo

un=-Netage*h              !Déplacements imposés, à remplacer par des forces pour l'étude mécanique
Np=Npen*5

*do,ij,Np-4,Np,1
        d,ij,uz,un
*enddo
SOLVE
Finish

/pmacro
Nbla=5*Netage                          ! Nombre ordinal des barres latérales
Nbi=Nbla+10*Netage                     ! Nombre cardinal des barres intermédiaires
Ncnap=Nbi+5*2                           !nombre cardinal des cables de nappe

Ncnapc=Ncnap+5*(Netage-1)              !nombre cardinal des cable de nappes communes
Ncaco=Ncnapc+Netage*10                 !nombre cardinal des cables coplanaires
Ncanoc=Ncaco+Netage*10                 !nombre cardinal des cables non-coplanaires

/POST1
!SORTIES POUR LES ELEMENTS
etable,Efforts,smisc,1              ! force axiale barre laterale
etable,ungsuat,LS,1                !contrainte
pldisp,2          ! structure déformée uniquement
```

Finish
/POST1
FINISH

D.2 Modélisation analytique du pliage sous MAPLE

Détermination des coefficients R_1, R_2 et α pour H = 0

```
> restart:
> with (student):
```

Données géométriques en (cm)

```
> B:=218: C2:=111.6:
```

Longueur de barre latérale

```
> f1:= 4*R1^2*sin(Pi/5+Alpha/2)^2-B^2 = 0 :
```

Longueur de barre intermédiare

```
> f2:=R1^2+R2^2-2*R1*R2*cos(7*Pi/5+Alpha/2)-B^2 = 0:
```

Longueur de câble intermédiare

```
> f3:=R1^2+R2^2-2*R1*R2*cos(Pi/5+Alpha/2)-C2^2 = 0:
```

Solutions

```
> fsolve({f1, f2, f3},{R1,R2,Alpha},{R1 = 126..300,R2 = 126..300,Alpha =
0..Pi});
```

Détection du contact aucour du pliage

```
> restart:
> with (student):
```

Données géométriques

```
> B:=218.00:C2:=111.60:
r:=2+0.0001:      # Rayon des barres
d:=10:            # Initialiser une valeur de la distance
> Alpha:=0.0:     # L'angle de rotation à la configuration initiale
```

Comparaisions la distance des barres avec le diamètre des barres

```
> while d >0 do
Alpha:=Alpha+0.000001:
unassign('R1'):
unassign('R2'):
unassign('H'):
f1:=4*R1^2*sin(Pi/5+Alpha/2)^2+H^2-B^2=0:
f2:=R1^2+R2^2-2*R1*R2*cos(7*Pi/5+Alpha/2)+H^2/4-B^2=0:
f3:=R1^2+R2^2-2*R1*R2*cos(Pi/5+Alpha/2)+H^2/4-C2^2=0:

k:=fsolve({f1,f2,f3},{R1,R2,H},{R1 = 124..160, R2 = 124..140, H =..160.8}):
assign(k);R1;R2;H;R1:=R1;R2:=R2;H:=H:
x1:=0;y1:=R1;z1:=0:
x4:=R1*sin(2*Pi/5+Alpha);y4:=R1*cos(2*Pi/5+Alpha);z4:=H:
x5:=R2*sin(Pi/5+Alpha/2);y5:=R2*cos(Pi/5+Alpha/2);z5:=H/2:
x6:=R1*sin(4*2*Pi/5+Alpha);y6:=R1*cos(4*2*Pi/5+Alpha);z6:=H:
x7:=R1*sin(2*2*Pi/5);y7:=R1*cos(2*2*Pi/5);z7:=0:

B1:=evalf(((x1-x4)^2+(y1-y4)^2+(z1-z4)^2)^(1/2)):
B2:=evalf(((x5-x6)^2+(y5-y6)^2+(z5-z6)^2)^(1/2)):
B3:=evalf(((x5-x7)^2+(y5-y7)^2+(z5-z7)^2)^(1/2)):

v1x:=evalf(x1-x4): v1y:=evalf(y1-y4): v1z:=evalf(z1-z4):
v2x:=evalf(x5-x6): v2y:=evalf(y5-y6): v2z:=evalf(z5-z6):
v3x:=evalf(x5-x7): v3y:=evalf(y5-y7): v3z:=evalf(z5-z7):

n1x:=evalf(v1y*v2z-v1z*v2y):                n1y:=evalf(-(v1x*v2z-v1z*v2x)):
n1z:=evalf(v1x*v2y-v1y*v2x):
```

```
n2x:=evalf(v1y*v3z-v1z*v3y);n2y:=evalf(-(v1x*v3z-v1z*v3x)):
n2z:=evalf(v1x*v3y-v1y*v3x):
ux:=evalf(x1-x5): uy:=evalf(y1-y5): uz:=evalf(z1-z5):
n1:=evalf((n1x^2+n1y^2+n1z^2)^(1/2)):
n2:=evalf((n2x^2+n2y^2+n2z^2)^(1/2)):
d1x:=evalf(ux*n1x): d1y:=evalf(uy*n1y): d1z:=evalf(uz*n1z):
d2x:=evalf(ux*n2x): d2y:=(uy*n2y): d2z:=(uz*n2z):
d1:=evalf(abs((d1x+d1y+d1z)/n1)):
d2:=evalf(abs((d2x+d2y+d2z)/n2)):
d:=d1-2*r:
od:

> R1;R2;H;Alpha;d;                    # Sortie
```

RESUME en français

Les structures de tenségrité sont des systèmes constructifs à barres et câbles en état d'autocontrainte, légers et souvent déployables qui présentent de nombreuses applications potentielles dans le domaine du génie civil. L'objectif de ce travail est d'étudier le comportement mécanique et le pliage d'un anneau de tenségrité à base pentagonale. Nous souhaitons mettre en valeur les qualités mécaniques de ce système en tant que structure porteuse, la facilité et la rapidité du pliage/dépliage en tant que structure déployable. L'étude est menée selon deux approches : modélisation et expérimentation. La première consiste à analyser le comportement mécanique et à modéliser le déploiement de la structure. Pour la seconde, un premier prototype est conçu puis bâti dans le but d'étudier le comportement réel et vérifier l'adéquation avec l'étude théorique. De plus, une méthode statique permettant d'identifier la tension dans les câbles en tenant compte d'inertie de flexion des câbles a été développée.

TITRE en anglais

Study of mechanical behaviour and folding of a pentagon-based tensegrity ring

RESUME en anglais

The aim is to study the mechanical behaviour and the deployment of a pentagon-based tensegrity ring. This self-standing, light-weight and deployable structure can be adapted to solve problems in various domains of civil engineering. This study is carried out in two approaches: theoretical modelling and experimental testing. The modelling consists of analysing mechanical response and of simulating deployment. The experiment is to study the behaviour of a real prototype in order to check the consistency of the theoretical model. Moreover, we have also developed a static method taking into account cable flexural rigidity to evaluate the tensional force in cables.

SPECIALITE DOCTORALE

Mécanique, Génie Civil (CNU section 60)

MOTS-CLES

TENSEGRITE – DEPLOIEMENT – AUTOCONTRAINTE – MECANIQUE – MECANISME - GRAND DEPLACEMENT

INTITULE ET ADRESSE DE L'U.F.R. OU DU LABORATOIRE :

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil - UMR 5508

CC. 048, Place Eugène Bataillon 34095 Montpellier