



**HAL**  
open science

**Modélisation de la propagation et de la réception des ondes élastiques émises par un défaut sous contrainte. Application à la simulation des contrôles non destructifs par émission acoustique**

Warida Ben Khalifa

► **To cite this version:**

Warida Ben Khalifa. Modélisation de la propagation et de la réception des ondes élastiques émises par un défaut sous contrainte. Application à la simulation des contrôles non destructifs par émission acoustique. Autre. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2013. Français. NNT : 2013VALE0007 . tel-00860353

**HAL Id: tel-00860353**

**<https://theses.hal.science/tel-00860353>**

Submitted on 10 Sep 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Thèse de doctorat**

**Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de  
VALENCIENNES ET DU HAINAUT-CAMBRESIS**

Discipline, spécialité

**Électronique, Acoustique et télécommunications**

**Présentée et soutenue par Warida BEN KHALIFA.**

**Le 05/03/2013, au CEA Saclay**

**Ecole doctorale**

Sciences Pour l'Ingénieur (SPI)

**Equipe de recherche, Laboratoire**

Institut d'Electronique, de Micro-Electronique et de Nanotechnologie/Département d'Opto-Acousto-Electronique (IEMN/DOAE)

**Modélisation de la propagation et de la réception des ondes élastiques émises par un défaut sous contrainte. Application à la simulation des contrôles non-destructifs par émission acoustique.**

**JURY**

**Président du jury**

- Luppé, Francine. Professeur. Université du Havre.

**Rapporteurs**

- Godin, Nathalie. Maître de Conférences HDR. MATEIS Lyon.  
- Ben Tahar, Mabrouk. Professeur. UTC Compiègne.

**Examineurs**

- Luppé, Francine. Professeur. Université du Havre.  
- Ben Tahar, Mourad. Maître de conférences. Université du Maine Le Mans

**Directeur de thèse**

- Grondel, Sébastien. Professeur. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

**Co-encadrant** : Jezzine, Karim. Ingénieur de recherche. CEA LIST Gif-sur-Yvette.

**Membres invités**

- Zhang, Fan. Docteur ingénieur, chef de projet CND CETIM.



## REMERCIEMENTS

*J'aimerais tout d'abord remercier M. Philippe Benoist et Mme Clarisse Poidevin, mes chefs de département successifs, de m'avoir permise de réaliser cette thèse, ainsi que mes chefs de laboratoires successifs M. Steve Mahaut et M. Sylvain Chatillon de m'avoir accueillie au sein du LSM.*

*J'adresse toute ma reconnaissance envers M. Mabrouk Ben Tahar et M<sup>me</sup> Nathalie Godin d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail.*

*Je tiens à remercier M. Mourad Ben Tahar, M<sup>me</sup> Fan Zhang et M<sup>me</sup> Francine Luppé de faire partie du jury.*

*J'exprime ma gratitude envers M. Sébastien Grondel d'avoir accepté de diriger ma thèse ainsi que pour son aide et ses précieux conseils au cours de ces années. Je remercie également M. Alain Lhémy de m'avoir confié ce travail de recherche.*

*Mes plus vifs et sincères remerciements à M. Karim Jezzine, mon encadrant de thèse, pour sa sympathie, ses qualités humaines, sa disponibilité, ses conseils ainsi que son aide de tous les jours.*

*Je voudrais remercier ici tous le personnel du DISC pour leur bonne humeur en particulier Amira, Thomas, Mathieu, Clémence, Marouane, Anthony, Blandine et Audrey avec qui j'ai partagé des pauses café et des débats sans limites à la cantine du CEA.*

*Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers Amel, la nounou de ma fille Imen, pour sa grande générosité et son soutien.*

*J'adresse une pensée particulière à ma tante Jalila qui m'a soutenue pendant toute ma scolarité.*

*Mes dernières pensées iront vers mes parents, qui m'auront permis de poursuivre mes études jusqu'à aujourd'hui et mes sœurs Safa et Lobna pour leurs encouragements.*

*Pour terminer je remercie mon mari Ramy pour son éternel soutien et ma fille Imen d'avoir rendu cette période de rédaction très agréable.*



# TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS .....	3
TABLE DES MATIERES .....	5
INTRODUCTION .....	9
Chapitre 1 Généralités sur le contrôle par EA .....	13
1.1 Principe général du contrôle non destructif par émission acoustique .....	14
1.1.1 Définition et historique .....	14
1.1.2 Phénomènes physiques à l'origine de l'EA.....	14
1.1.2.1 Cas des systèmes évolutifs du point de vue physico-chimique en l'absence de sollicitations mécaniques .....	15
1.1.2.2 Cas des systèmes évoluant sous sollicitations mécaniques .....	15
1.1.3 Influence des phénomènes physiques sur la nature des signaux d'EA.....	16
1.1.4 Analyse de l'émission acoustique par un défaut sous contrainte .....	16
1.1.4.1 Approche dite « basée sur les signaux ».....	17
1.1.4.2 Approche basée sur les formes d'ondes.....	19
1.2 Simulation du CND par EA par un défaut sous contrainte .....	21
1.2.1 Phénomènes physiques à modéliser.....	21
1.2.1.1 Fissuration.....	21
1.2.1.2 Propagation.....	21
1.2.1.3 Détection.....	22
1.2.2 Intérêt de la simulation du CND par EA .....	22
1.2.3 Etat de l'art sur les méthodes de simulation du CND par EA.....	23
1.2.3.1 Simulation de l'EA en onde de Rayleigh .....	23
1.2.3.2 Simulation de l'EA en ondes guidées .....	26
1.2.3.3 Synthèse.....	28
1.3 Conclusion .....	29
Chapitre 2 Etat de l'art sur la modélisation des sources et des capteurs d'EA .....	30
2.1 Modèle de source d'EA en mécanique de la rupture.....	31
2.1.1 Description des processus de fissuration et des modes d'ouverture.....	31
2.1.2 Présentation des modèles existants dans la littérature .....	34
2.1.2.1 Approche statique asymptotique .....	34

2.1.2.2	Approche statique analytique.....	36
2.1.2.3	Approche dynamique asymptotique .....	41
2.1.3	Comparaison des modèles et choix du type de modélisation .....	42
2.1.3.1	Comparaison entre le modèle statique asymptotique et le modèle statique analytique .....	42
2.1.3.2	Comparaison entre le modèle statique asymptotique et le modèle dynamique asymptotique .....	43
2.1.3.3	Dynamisation de la solution statique analytique exacte.....	43
2.2	Etat de l'art sur la modélisation des capteurs d'EA.....	44
2.2.1	Types de capteurs utilisés en EA .....	44
2.2.2	Modélisation des capteurs piézoélectriques d'EA .....	48
2.2.2.1	Modèle piston .....	48
2.2.2.2	Extensions possibles du modèle piston .....	50
2.3	Conclusion .....	52
Chapitre 3	Modélisation 2D de l'EA en onde de Rayleigh .....	53
3.1	Etat de l'art sur la modélisation 2D de la propagation de l'onde de Rayleigh.....	54
3.1.1	Modèles de propagation analytiques pour une surface plane .....	54
3.1.1.1	Expression analytique du déplacement de l'onde de Rayleigh .....	54
3.1.1.2	Fonction de Green 2D de l'onde de Rayleigh .....	57
3.1.2	Modèles de propagation pour une surface cylindrique.....	61
3.1.2.1	Expression analytique du déplacement.....	61
3.1.2.2	Expression asymptotique du déplacement .....	64
3.1.3	Discussion sur les choix des modèles de propagation .....	67
3.2	Couplage entre un modèle de source d'EA et un modèle 2D de propagation de l'onde de Rayleigh .....	68
3.2.1	Formulation de couplage basée sur l'utilisation d'une onde virtuelle .....	68
3.2.1.1	Structure plane .....	68
3.2.1.2	Structure cylindrique .....	75
3.2.2	Applications numériques.....	78
3.2.2.1	Simulation de la source d'EA .....	79
3.2.2.2	Simulation des formes d'onde .....	80
3.2.3	Synthèse .....	86
3.3	Cas d'application : Simulation d'un contrôle par EA en onde de Rayleigh .....	87

3.3.1	Expression de la tension délivrée en sortie par un capteur d'EA .....	87
3.3.2	Exemples d'application .....	88
3.4	Conclusion .....	91
Chapitre 4	Modélisation 3D de l'EA en onde de Rayleigh .....	93
4.1	Etat de l'art sur la modélisation 3D de la propagation de l'onde de Rayleigh sur une surface plane .....	94
4.1.1	Calcul des fonctions de Green dans le domaine de Laplace.....	94
4.1.2	Calcul des fonctions de Green par la méthode de Aki et Richards .....	96
4.1.3	Calcul des fonctions de Green par application de la réciprocité .....	97
4.1.4	Discussion .....	102
4.2	Couplage entre un modèle de source et un modèle de propagation de l'onde de Rayleigh .....	103
4.2.1	Formulation de couplage basée sur les fonctions de Green de l'onde de Rayleigh .....	103
4.2.1.1	Présentation du problème .....	103
4.2.1.2	Définition des états élastodynamiques .....	103
4.2.1.3	Application du théorème de réciprocité.....	104
4.2.1.4	Obtention de la formulation de couplage par une méthode basée sur l'utilisation d'une onde virtuelle de surface .....	107
4.2.2	Applications numériques.....	108
4.2.2.1	Source d'EA .....	108
4.2.2.2	Simulation des formes d'onde .....	110
4.2.3	Synthèse .....	114
4.3	Cas d'application 3D : Simulation d'un contrôle par EA en onde de Rayleigh .....	115
4.3.1	Expression de la tension délivrée en sortie .....	115
4.3.2	Exemples d'application .....	117
4.4	Conclusion .....	120
Chapitre 5	Modélisation de l'EA en ondes guidées .....	122
5.1	Modélisation de la propagation des ondes guidées.....	123
5.1.1	Etat de l'art sur les méthodes de modélisation de la propagation des ondes guidées .....	123
5.1.1.1	Méthodes analytiques .....	123
5.1.1.2	Méthodes semi analytiques.....	124

5.1.1.3	Utilisation de la méthode SAFE pour la modélisation de la propagation guidée dans une plaque .....	124
5.1.2	Extension de la méthode SAFE pour la propagation guidée dans la direction circonférentielle dans les structures cylindriques .....	131
5.2	Couplage entre un modèle de source et un modèle de propagation des ondes guidées .....	137
5.2.1	Formulation de couplage basée sur l'onde virtuelle.....	137
5.2.1.1	Structure plane .....	137
5.2.1.2	Applications numériques .....	142
5.2.1.3	Synthèse.....	151
5.3	Cas d'application : Simulation d'un contrôle par EA en ondes guidées.....	152
5.3.1	Expression de la tension délivrée en sortie par un capteur d'EA .....	152
5.3.2	Exemples d'application .....	153
5.4	Conclusion .....	154
CONCLUSION .....		157
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....		160
ANNEXE A .....		168
ANNEXE B .....		170
ANNEXE C .....		174

# INTRODUCTION

De nombreux domaines comme l'énergie nucléaire, le secteur pétrolier et gazier, le génie civil, l'industrie mécanique nécessitent l'utilisation de techniques de contrôle non destructif (CND) afin de vérifier l'intégrité des structures. Différentes méthodes de contrôle existent, parmi lesquelles les méthodes ultrasonores. Dans le cadre de cette thèse nous nous intéressons plus particulièrement à la technique de l'émission acoustique (EA) qui est une méthode ultrasonore dite « passive ». Les systèmes susceptibles d'être étudiés par l'EA peuvent être classés en deux catégories. La première catégorie est celle des systèmes évolutifs du point de vue physico-chimique en l'absence de sollicitations mécaniques : dans ce cas, l'EA peut provenir des changements de phase, des réactions chimiques et des dispersions de gaz et de liquides. La deuxième catégorie représente les systèmes qui évoluent sous sollicitations mécaniques comme par exemple les structures industrielles. Dans ce travail on se limite à cette deuxième catégorie, c'est-à-dire au contrôle par EA dans les structures de grandes dimensions sous contraintes comme les équipements sous pression et les réservoirs de stockage. Il est important de rappeler ici que, selon la longueur d'onde par rapport à l'épaisseur de la structure, l'EA peut se produire sous forme d'ondes guidées (cas des structures minces) ou sous forme d'onde de Rayleigh (cas des structures épaisses).

Plusieurs approches ont été développées dans la littérature afin d'analyser l'EA par un défaut sous contrainte. L'une d'elle est basée sur les signaux d'EA, elle recouvre l'analyse des paramètres d'EA, l'analyse fréquentielle et l'analyse de l'activité de l'EA. Toutefois ces analyses restent des méthodes qualitatives, c'est pour cette raison qu'une autre approche a été développée afin de rendre la technique de l'EA plus quantitative et viable en tant que méthode de contrôle non destructif. Cette approche est basée sur les formes d'ondes et utilise la théorie des ondes transitoires afin de prédire des formes d'ondes émises par différents types de défauts sous contrainte ce qui permet ainsi d'interpréter physiquement les signaux d'EA.

D'une façon générale, la simulation constitue une aide à l'interprétation et à la compréhension des phénomènes physiques. Dans le domaine du CND, la simulation aide à réduire les coûts des essais non destructifs et à optimiser les performances de ces méthodes. La mise en œuvre de la technique d'EA est relativement simple. En revanche, l'analyse des signaux issus de cette méthode ultrasonore passive est particulièrement plus complexe que les autres méthodes ultrasonores. En effet, la difficulté du contrôle par EA réside dans l'interprétation des signaux complexes typiquement mesurés. De ce fait, la technique du contrôle par EA n'est pas considérée comme une technique quantitative mature contrairement aux autres contrôles non destructifs ultrasonores, et aux méthodes radiographiques ou par courants de Foucault.

L'objectif de la thèse est précisément de développer les modèles nécessaires afin de rendre possible la simulation des expériences de CND par EA. L'ambition et l'originalité de la thèse résident dans le développement de modèles capables de représenter les couplages entre la source d'EA, les différents modèles de propagation des ondes élastiques et le capteur. Ce travail s'inscrit dans la continuité des recherches effectuées au CEA List au sein du département DISC (Département d'Imagerie et de Simulation pour le Contrôle) sur les techniques de modélisation du CND et vient compléter les fonctionnalités de la plate-forme logicielle CIVA sur le CND par EA afin de permettre la simulation d'expériences de contrôle par EA dans des structures épaisses et minces.

Ce manuscrit se compose de cinq chapitres. Le premier chapitre a pour objectif de présenter la technique d'émission acoustique (EA) ainsi que les problématiques liées à la complexité et à la richesse des signaux d'EA. Dans un premier temps, les différents phénomènes physiques à l'origine de l'EA sont rappelés ainsi que les différentes méthodes d'analyse des signaux. Ensuite, les enjeux de la simulation du CND par EA sont discutés et un état de l'art sur les méthodes de simulation du CND/EA à la fois dans les structures épaisses et minces est donné. Ces études nous servent à faire un choix sur la méthode de modélisation de l'EA générée par un défaut sous contrainte.

Le deuxième chapitre a pour but de proposer un état de l'art sur la modélisation d'une part, du champ élastique au voisinage d'un défaut sous contrainte et, d'autre part, sur la réception des ondes ultrasonores par un traducteur. En premier lieu, nous rappelons les différents types de fissuration (fragile ou ductile) ainsi que les différents modes de rupture, puis nous détaillons les choix de modélisation effectués. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la modélisation des capteurs d'EA. Nous passons en revue les différents types de capteurs utilisés en EA et en particulier le capteur piézoélectrique qui est le plus communément exploité. En ce qui concerne sa modélisation, nous présentons un modèle piston rendant compte du mode d'épaisseur ainsi que ses possibles extensions.

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation à deux dimensions (2D) de l'EA en onde de Rayleigh par un défaut sous contrainte dans le cas des structures épaisses. Un rappel sur les modèles à deux dimensions (2D) de propagation de l'onde de Rayleigh le long de surfaces plane et cylindrique est effectué. Ensuite, le développement théorique des formulations de couplage entre un modèle de source d'EA et les différents modèles de propagation de l'onde de Rayleigh est présenté. Le premier modèle est basé sur une extension de la formulation d'Achenbach permettant de prédire le champ émis par une fissure d'orientation quelconque soumise à un champ de contraintes, sous forme d'ondes de Rayleigh le long d'une surface plane en 2D [I,II]. Le deuxième modèle qui utilise un modèle de propagation asymptotique en coordonnées curvilignes est une extension de la première formulation au cas de l'EA en onde de Rayleigh sur une surface cylindrique. En effet, l'écriture en coordonnées curvilignes offre des expressions dont la forme est proche des équations associées à la surface plane. Par conséquent, la résolution du problème en surface cylindrique est similaire à celle de la

surface plane. Des cas d'application 2D simulant la chaîne complète de contrôle par EA et prédisant la réponse d'un capteur d'EA sont présentés. Pour ces simulations, on utilise le calcul du champ de déplacement des ondes émises par un défaut sous contrainte obtenu à partir des formulations de couplage et un modèle de capteur d'EA basé sur l'approche piston décrit au deuxième chapitre. Des conclusions relatives à l'influence de la vitesse de fissuration sous contrainte et au mode de chargement des fissures sur les formes d'ondes émises en sont déduites.

Le quatrième chapitre traite de la modélisation à trois dimensions (3D) de l'EA en onde de Rayleigh par un défaut sous contrainte dans le cas des structures épaisses et planes. Comme pour la modélisation 2D, il détaille également le développement théorique de la formulation de couplage entre un modèle de source d'EA et un modèle de propagation de l'onde de Rayleigh. Cette formulation est basée sur un modèle de fissure plane 3D et les fonctions de Green de l'onde de Rayleigh 3D [III]. Des cas d'application sont illustrés afin de simuler la chaîne complète du contrôle par EA puis comparés à d'autres travaux réalisés sur le même type de problème [31, 40]. Une discussion sur les résultats obtenus à partir des modèles 2D et 3D est ensuite proposée mettant en lumière les similitudes et les divergences des deux modèles.

Le dernier chapitre traite de l'EA en ondes guidées dans le cas des structures minces. Il rappelle les différentes méthodes de modélisation de la propagation des ondes guidées. Des extensions de ces modèles sont également réalisées afin de prendre en compte les effets de courbure. La deuxième partie de ce chapitre s'intéresse au couplage entre un modèle de source d'EA, un modèle de propagation des ondes guidées et un capteur d'EA, la méthode de calcul [IV, V] choisie étant similaire à celle des structures épaisses. À partir des simulations, des analyses relatives aux comportements des formes d'ondes dans le cas des structures minces sont présentées.

Enfin, une conclusion générale est proposée permettant d'une part de définir les paramètres prépondérants dans la compréhension des signaux d'EA et d'autre part, l'utilisation en pratique de ces informations. Les perspectives à donner à ce travail sont ensuite définies.

- I. BEN KHALIFA W., JEZZINE K., HELLO G., GRONDEL S  
"Analytical modeling of acoustic emission from buried or surface-breaking crack under stress", *J. Phys.: Conf. Ser.* **353**, 012016
- II. BEN KHALIFA W., JEZZINE K., GRONDEL S  
"Modélisation des ondes élastiques émises par un défaut sous contrainte". Actes du congrès COFREND 2011, publiés en CD-ROM, 10 pages.
- III. BEN KHALIFA W., JEZZINE K., GRONDEL S.  
"3D modelling of Rayleigh wave acoustic emission from a crack under stress". 11ème Congrès Français d'Acoustique et le "2012 Annual IOA Meeting", Acoustics 2012, Nantes, France, Avril 23-27, 2012.
- IV. BEN KHALIFA W., JEZZINE K., GRONDEL S., LHEMERY A., CHATILLON S.

“Modeling of the Far-field Acoustic Emission from a Crack under Stress”. 30th European Conference on Acoustic Emission Testing / 7th International Conference on Acoustic Emission, EWGAE 2012, Grenade, Espagne, Septembre 12-15, 2012.

V. BEN KHALIFA W., JEZINE K., HELLO G, GRONDEL S., LHEMERY A.

“Modeling of the Far-field Acoustic Emission from a Crack under Stress”, à paraître dans le J. of Acoustic Emission, 2013.

# Chapitre 1 Généralités sur le contrôle par EA

1.1	Principe général du contrôle non destructif par émission acoustique .....	14
1.1.1	Définition et historique .....	14
1.1.2	Phénomènes physiques à l'origine de l'EA.....	14
1.1.2.1	Cas des systèmes évolutifs du point de vue physico-chimique en l'absence de sollicitations mécaniques .....	15
1.1.2.2	Cas des systèmes évoluant sous sollicitations mécaniques .....	15
1.1.3	Influence des phénomènes physiques sur la nature des signaux d'EA.....	16
1.1.4	Analyse de l'émission acoustique par un défaut sous contrainte .....	16
1.1.4.1	Approche dite « basée sur les signaux ».....	17
1.1.4.2	Approche basée sur les formes d'ondes.....	19
1.2	Simulation du CND par EA par un défaut sous contrainte .....	21
1.2.1	Phénomènes physiques à modéliser.....	21
1.2.1.1	Fissuration.....	21
1.2.1.2	Propagation.....	21
1.2.1.3	Détection.....	22
1.2.2	Intérêt de la simulation du CND par EA .....	22
1.2.3	Etat de l'art sur les méthodes de simulation du CND par EA.....	23
1.2.3.1	Simulation de l'EA en onde de Rayleigh .....	23
1.2.3.2	Simulation de l'EA en ondes guidées .....	26
1.2.3.3	Synthèse.....	28
1.3	Conclusion .....	29

*Ce chapitre a pour but de présenter la technique d'émission acoustique (EA) ainsi que les problématiques liées à la complexité et à la richesse des signaux d'EA. Après en avoir donné une définition ainsi qu'un bref historique, les différents phénomènes physiques à l'origine de l'EA sont précisés ainsi que les différentes méthodes d'analyse des signaux associés dans le cas de l'EA par un défaut sous contrainte. Ensuite, les enjeux de la simulation du CND par EA sont discutés et l'état de l'art sur les méthodes de simulation du CND/EA est présenté.*

## **1.1 Principe général du contrôle non destructif par émission acoustique**

### **1.1.1 Définition et historique**

La norme française établie en avril 2000 définit l'émission acoustique (EA) comme étant des "ondes élastiques transitoires engendrées par la libération d'énergie dans un matériau ou par un processus" [1]. La technique d'EA est une méthode de contrôle non destructif (CND) passive, basée sur l'exploitation de signaux engendrés par un phénomène d'émission spontanée d'ondes ultrasonores par un matériau ou un système sous l'effet d'une sollicitation ou d'une transformation interne.

Les premières expériences d'EA évoquées dans la littérature en géophysique datent de 1932, mais il a fallu attendre les années 1950 pour que les premiers travaux significatifs en sismologie soient effectués. C'est à cette même période que Mason [1] décrivait les premiers phénomènes d'EA audibles tandis que Kaiser s'intéressait pour sa part à un domaine plus haut en fréquence puisqu'il traitait le cas des fréquences ultrasonores (plus de 20kHz à quelques centaines de MHz)

Ce domaine des hautes fréquences fut rapidement exploité puisque l'une des premières applications de l'EA à la détection d'endommagements reposait sur le contrôle des enveloppes de propulseur des fusées Polaris dans les années 1960. Très rapidement la localisation des sources d'EA fut étudiée à partir de 1968. Puis cette technique prit de l'ampleur dans les années 1980. Elle s'est alors étendue à de nombreux domaines, comme l'énergie nucléaire, le secteur pétrolier et gazier, le génie civil, l'industrie mécanique. Les applications visées par cette technique vont de l'investigation physique des matériaux, la surveillance en service, en passant par le contrôle de fabrication, la surveillance de machines tournantes ou le contrôle et l'évaluation de matériaux composites.

Contrairement aux autres méthodes de CND, l'EA offre l'avantage de détecter des défauts au moment de leur création, avant qu'ils ne puissent être détectés par une inspection visuelle. Suivant les domaines d'application, les signaux d'EA peuvent être les signatures de différents types d'endommagement et de transformations internes dans les structures contrôlées. Dans le paragraphe suivant, les différents phénomènes physiques à l'origine de ces signaux d'EA sont détaillés.

### **1.1.2 Phénomènes physiques à l'origine de l'EA**

*On peut classer les systèmes susceptibles d'être étudiés par la technique d'EA en deux catégories. La première catégorie est celle des systèmes évolutifs du point de vue physico-chimique en l'absence de sollicitations mécaniques, dans ce cas, l'EA peut provenir des changements de phase, des réactions chimiques et des dispersions de gaz et de liquides. La deuxième catégorie concerne les systèmes qui évoluent sous sollicitations mécaniques*

*comme par exemple les structures industrielles. Ces catégories sont détaillées dans les deux paragraphes suivants.*

### 1.1.2.1 Cas des systèmes évolutifs du point de vue physico-chimique en l'absence de sollicitations mécaniques

L'EA peut être la signature de plusieurs phénomènes physico-chimiques. En absence de sollicitations mécaniques, l'activité de l'EA peut être générée par :

- l'apparition d'un certain nombre de microfissures à l'échelle macroscopique ou microscopique suite aux changements de phases induits par des traitements thermiques.
- les réactions chimiques sous forme d'ondes de choc produites par des événements microscopiques lors d'un processus chimique.
- la dispersion des particules de gaz dans un liquide, c'est-à-dire par les vibrations provoquées par la formation des bulles et leur déplacement.
- les collisions entre particules dans le cas d'un processus de broyage d'un matériau fragile et hétérogène.
- les fluctuations hydrodynamiques de pression lors de l'écoulement de particules.

### 1.1.2.2 Cas des systèmes évoluant sous sollicitations mécaniques

Dans le cas des systèmes évoluant sous sollicitations mécaniques, on distingue trois grandes catégories suivant la nature du matériau considéré [2]:

- L'EA dans le béton ou ciment (génie civil) :

L'EA est utilisée dans l'évaluation non destructive des ouvrages en génie civil et permet de détecter des pathologies dans le béton ou dans l'acier. Les signaux d'EA peuvent être la signature de plusieurs types d'endommagements dans le béton ou le ciment, par exemple la microfissuration de la résine, la décohésion résine/agrégats ainsi que la rupture des agrégats.

- EA dans les matériaux composites :

Les différents mécanismes d'endommagement rencontrés dans les matériaux composites sont principalement la fissuration de la matrice, le décollement à l'interface fibre/matrice (déchaussement), le délaminage interlaminaire (pour les matériaux stratifiés) et la rupture de fibres par exemple dans les structures aéronautiques.

- EA dans les matériaux métalliques :

Les mouvements des dislocations peuvent créer une activité acoustique. En effet, les défauts actifs et sous contrainte mécanique libèrent de l'énergie sous formes d'ondes ultrasonores.

Les propriétés de l'onde émise dépendent des variations des champs élastodynamiques au niveau des dislocations à l'intérieur du matériau.

### **1.1.3 Influence des phénomènes physiques sur la nature des signaux d'EA**

La nature des signaux d'EA peut être différente selon le phénomène physique détecté. Il existe deux types de signaux d'EA [2]. Le premier type est l'émission pseudo-continue qui est constituée d'un grand nombre de signaux aléatoires de très petite amplitude qui se superposent les uns les autres et qui s'ajoutent au bruit de fond comme par exemple les signaux provenant des fluctuations hydrodynamiques de pression utilisés pour la détection de fuite dans les tuyauteries ou les signaux émis par un défaut en rupture ductile (le matériau plastifie et rompt progressivement). Le deuxième type est l'émission discrète qui est constituée de signaux transitoires, bien séparés les uns des autres. C'est le cas des signaux d'EA provenant d'un défaut sous contrainte mécanique en rupture fragile. En effet, il existe différents types de rupture selon la ductilité du matériau. Cette dernière est définie comme étant la capacité d'un matériau à se déformer plastiquement sans se rompre.

On distingue quatre types de mode de rupture pour des matériaux sous sollicitation monotone en traction. Le premier mode est la rupture élastique fragile, le comportement global est linéaire élastique et la rupture intervient de façon brutale et les déformations à la rupture sont généralement faibles (inférieures à 1%). Les matériaux ayant ce type de comportement sont les céramiques massives, les verres, le béton et certains aciers. Le deuxième mode est la rupture quasi fragile, le comportement global est non linéaire essentiellement causé par l'apparition d'une microfissuration. Les matériaux ayant ce type de comportement sont les composites et les nouveaux bétons renforcés. On trouve ensuite le mode de rupture plastique fragile, le matériau plastifie mais rompt brutalement pour des déformations relativement faibles. C'est le cas des métaux de type cubique centré ou hexagonal lorsque la température est suffisamment faible. On trouve enfin le mode de rupture ductile, le matériau plastifie et rompt progressivement. L'endommagement peut être diffus et relativement important. Les métaux cubiques à faces centrées ainsi que les métaux de type cubique centré (pour une température suffisamment élevée) ont ce comportement.

### **1.1.4 Analyse de l'émission acoustique par un défaut sous contrainte**

*Nous allons maintenant présenter l'état de l'art sur les différentes approches développées pour étudier et analyser l'EA par un défaut sous contrainte, qui est l'objet de la thèse. Plus précisément, cela concerne l'EA dans les matériaux métalliques dans le cas d'un système sous sollicitation mécanique. Deux principales approches ont été développées pour caractériser les signaux d'EA [3], la première approche est dite « basée sur les signaux d'EA ». Elle consiste à caractériser les signaux émis notamment à partir du nombre d'évènements et des*

corrélations statistiques entre les mécanismes d'endommagements et les données expérimentales. Cette approche est surtout utilisée pour estimer le niveau d'endommagement et prédire les événements futurs. La deuxième approche est une approche basée sur les formes d'ondes, elle permet de localiser les défauts et les mécanismes d'endommagements en utilisant la théorie des ondes transitoires.

#### 1.1.4.1 Approche dite « basée sur les signaux »

Dans le cas de l'approche basée sur les signaux d'EA, trois types d'analyse ont été investiguées [4] :

- l'analyse basée sur les paramètres des signaux d'EA
- l'analyse de l'activité d'EA
- l'analyse fréquentielle des signaux d'EA

La Figure 1.1 présente les paramètres des signaux d'EA discrète utilisés dans les analyses des signaux.

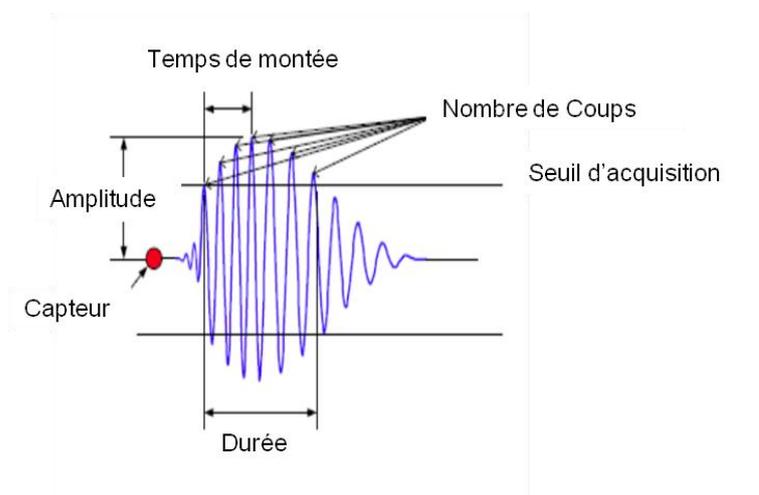


Figure 1.1 : paramètres des signaux d'EA [4]

##### a Analyses des paramètres d'EA :

Différents paramètres sont extraits des signaux recueillis et sont suivis dans le temps tels que le temps de montée, le nombre de coups, la durée du signal (Figure 1.1), d'autres paramètres pouvant être définis d'un point de vue énergétique.

Comme le montre la Figure 1.1, le nombre de coups dépend du réglage du seuil d'acquisition. Pour chaque événement d'EA, ces paramètres sont tracés en fonction des paramètres de test tels que le chargement mécanique, la déformation et la température. À partir des essais répétés sur des échantillons identiques, des déductions empiriques sont faites concernant l'importance des endommagements et l'identification des différents

mécanismes d'endommagement. Plusieurs études ont démontré l'intérêt de cette approche [5, 6], mais seulement quelques applications de cette technique ont vu le jour.

Bien que, la méthode d'analyse des paramètres d'EA soit notamment capable de fournir des informations utiles sur le développement des endommagements dans les matériaux composites et métalliques, les résultats obtenus à partir des paramètres d'EA, en général, ne permettent pas de caractériser une source d'EA de façon précise. De plus la distinction entre les différents mécanismes d'endommagements est assez difficile à réaliser en raison des variations des paramètres d'EA causées par la complexité du milieu de propagation (anisotropie, matériaux composites).

*b Analyse de l'activité d'EA*

Cette méthode permet d'obtenir des informations concernant l'initiation et l'évolution des endommagements tout au long d'un test ou au cours de la durée de vie d'un composant en se basant sur l'effet Kaiser et l'effet Félicity [4] (Figure 1.2). L'effet Kaiser traduit l'irréversibilité de l'EA. Lorsqu'une structure est soumise à un premier niveau de contrainte  $\sigma_1$  (AB), puis déchargée (BC), le matériau reste silencieux lors d'une seconde sollicitation tant que le niveau de contrainte reste inférieur à  $\sigma_1$  (CB). On appelle  $\sigma_2$  (au point F) le niveau de sollicitation à l'apparition de l'émission acoustique lors de la deuxième mise en charge. Si la structure est endommagée alors  $\sigma_2$  (au point F)  $< \sigma_1$  (au point D). On définit ainsi le rapport Felicity  $R_f = \sigma_2/\sigma_1$ . L'effet Kaiser est généralement observé dans les matériaux métalliques alors que l'effet Felicity est plus souvent observé dans les matériaux composites.

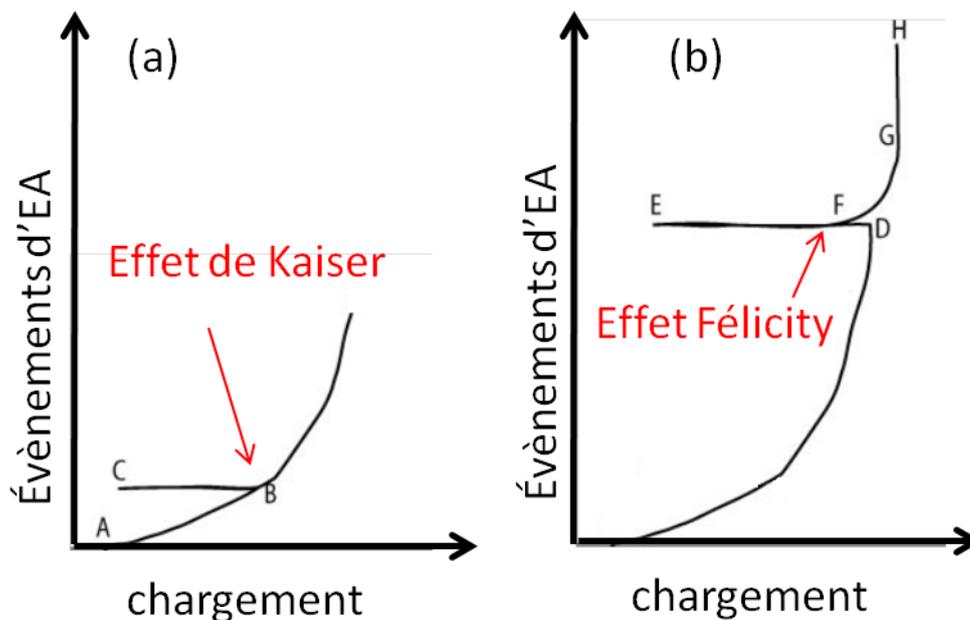


Figure 1.2 : historique des évènements d'EA en fonction du chargement montrant l'effet de Kaiser (a) et l'effet Félicity (b).

Cet exemple d'analyse est utilisé pour le contrôle de réservoirs de stockage en fibre de verre, des équipements sous pression et des tuyauteries [7, 8]. Ce type d'analyse a été normalisé en un certain nombre de codes de CARP (Committee on Acoustic emission from Reinforced Plastics) et de codes de l'ASME (American Society of Mechanical Engineers).

#### *c Analyse fréquentielle des signaux d'EA*

Cette technique fonctionne avec la transformée de Fourier rapide (FFT) afin d'analyser le spectre des ondes émises. Cette approche est principalement utilisée pour distinguer différents types d'endommagements. Cette méthode est fondée sur l'hypothèse que des phénomènes d'endommagements différents produisent des signaux dont le contenu fréquentiel est différent.

Contrairement aux autres analyses, un nombre limité d'articles a été publié sur ce sujet. De plus, cette analyse n'a pas fait l'objet d'une application pratique dans le domaine du CND par EA en raison de plusieurs inconvénients [9, 10]. La principale lacune de cette analyse provient du caractère multimodal et dispersif des ondes émises par un défaut sous contrainte, dans les structures minces, où les propriétés des ondes guidées dépendent de la fréquence. Cette complexité fait qu'il est difficile d'associer le spectre d'un signal à la signature d'un type d'endommagement.

#### *d Discussion*

Aucune de ces analyses des signaux d'EA n'a été capable de répondre aux difficultés rencontrées dans le cas des grandes structures industrielles, comme par exemple, la grande quantité de donnée à gérer, l'élimination des sources de bruits, la prise en compte de l'anisotropie et le caractère multimodal et dispersif des ondes ainsi que l'atténuation. Ces analyses ont donné parfois des résultats contradictoires à cause de la difficulté d'interprétation physique des signaux issus des mécanismes d'endommagements. En résumé, cette approche classique basée sur l'analyse des signaux reste une méthode qualitative.

Afin de rendre la technique d'EA plus quantitative et viable en tant que méthode de contrôle non destructif, une approche basée sur les formes d'ondes a donc été développée.

### 1.1.4.2 Approche basée sur les formes d'ondes

Cette approche est basée sur la théorie des ondes transitoires qui rend possible la prédiction des formes d'ondes émises par différents types de défauts sous contrainte permettant ainsi d'interpréter physiquement les signaux d'EA. La compréhension des relations qualitatives et quantitatives entre les ondes émises et les sources d'EA est essentielle afin de développer des algorithmes de détection et de caractérisation des défauts. Pour cela, il est nécessaire de comprendre les phénomènes physiques mis en jeu depuis la fissuration et la propagation des ondes dans les structures jusqu'à la détection par un capteur d'EA et la localisation des défauts par triangulation.

Les ondes émises sont détectées à la surface de la structure par les capteurs d'EA, les signaux sont ensuite amplifiés et fournissent le signal d'EA. Après un post traitement, les défauts sont localisés par triangulation. En effet, les différents temps d'arrivée ( $\Delta t$ ) d'un même signal provenant de plusieurs capteurs répartis sur la structure sont mesurés. La mesure des ( $\Delta t$ ) est généralement déclenchée par l'arrivée de l'onde émise au premier capteur atteint, et clôturée par son passage au dernier capteur. Ensuite, la détermination des coordonnées de la zone où s'est produit le défaut s'effectue en calculant le lieu des points auquel appartient la source, défini par :  $V \cdot (\Delta \tau) = cte$ , où  $V$  est la vitesse de propagation des ondes.

Le nombre de capteurs dépend de la surface à contrôler [11]:

- une localisation linéaire nécessite l'emploi de deux capteurs,
- une localisation plane (2D) requière l'utilisation d'au moins 3 capteurs,
- une localisation 3D impose de travailler avec 5 capteurs au minimum.

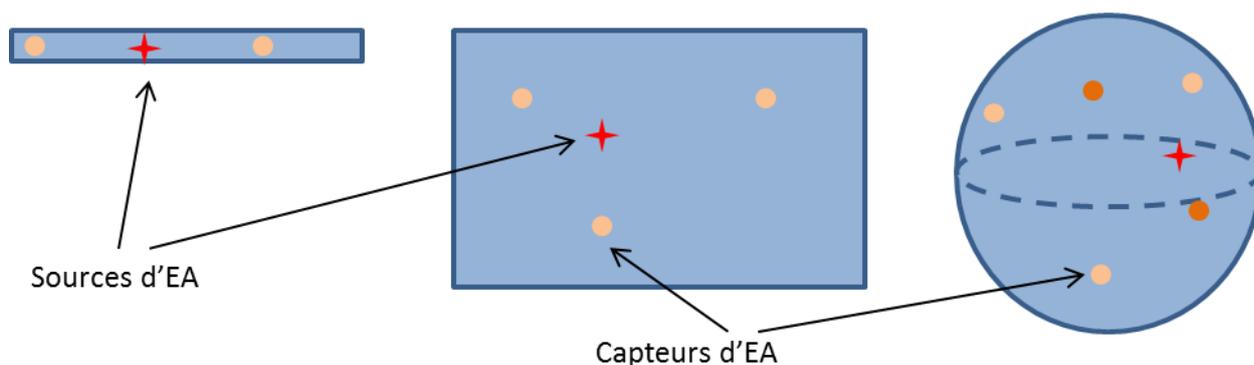


Figure 1.3 : localisation linéaire, localisation 2D et localisation 3D

Dans le cas des ondes guidées, les vitesses de propagation dépendent du mode de propagation et de la fréquence. De plus, il est nécessaire de prendre en compte le trajet géodésique parcouru par l'onde afin d'améliorer la localisation de la source. En effet, dans le cas des structures courbes, les géodésiques ne sont pas des lignes droites, mais des courbes qui correspondent au trajet minimal entre deux points de l'espace courbe. Par exemple, le chemin le plus court entre deux points sur une sphère est un arc du grand cercle passant par ces deux points et dans le cas des cylindres, les géodésiques sont des hélices.

Mathématiquement, l'identification d'une source d'EA correspond au problème inverse. Si la surface de la source (propagation d'une fissure) est petite par rapport à longueur d'onde dominante, mesurée à partir du signal d'EA, et la distance source-détecteur, la source d'EA peut effectivement être considérée comme une source ponctuelle [4].

## 1.2 Simulation du CND par EA par un défaut sous contrainte

### 1.2.1 Phénomènes physiques à modéliser

#### 1.2.1.1 Fissuration

On s'intéresse à la fissuration de fatigue dans le cas des structures soumises à un chargement mécanique. L'EA est produite par une libération rapide d'énergie de déformation, qui se propage dans la structure sous forme d'ondes ultrasonores transitoires. Ces sources, appelées sources localisées, agissent comme un centre de rayonnement à travers une petite surface finie émettant des ondes transitoires dans une bande de fréquence de quelques 100kHz à quelques MHz, ces ondes se propageant ensuite dans la structure.

#### 1.2.1.2 Propagation

##### *a Cas des structures épaisses : contrôle par onde de surface*

Dans le cas des structures épaisses, les ondes ultrasonores générées par le mécanisme de fissuration se propagent sous forme d'onde de volume et d'onde de surface, le champ lointain est donc dominé par la présence des ondes de surfaces dont la décroissance est moins rapide comparée aux ondes de volumes. En effet, en géométrie 2D l'onde de Rayleigh ne décroît pas et les ondes de volumes décroissent en  $1/\sqrt{r}$ . En géométrie 3D l'onde de Rayleigh décroît en  $1/\sqrt{r}$  tandis que les ondes de volume décroissent en  $1/r$  [12].

##### *b Cas des structures minces: contrôle par ondes guidées*

Dans le cas des structures minces, les ondes émises par un défaut sous contrainte se propagent sous formes d'ondes guidées. Ces modes guidés, symétriques et antisymétriques (dans le cas d'une plaque) [13], résultent des différentes réflexions d'ondes transversales verticales et d'ondes longitudinales sur les deux surfaces inférieure et supérieure de la structure mince. Elles se propagent sur des longues distances sans perte d'énergie.

Gorman [14] a par exemple proposé une manière de séparer les modes symétriques et antisymétriques dans les signaux d'EA et l'a appliquée en effectuant une rupture de mine de plomb à la fois sur l'aluminium et sur des composites unidirectionnels. La rupture de mine peut être assimilée à un chargement monopôle sur la surface. Dans le cas de la fissure, il faut utiliser un dipôle de force (voir 1.2.3.2). Toutes les études réalisées jusqu'ici ont porté essentiellement sur les deux premiers modes fondamentaux de flexion et d'extension respectivement, A0 (le mode symétrique d'ordre zéro) et S0 (le mode antisymétrique d'ordre zéro). Ces études permettent d'aider à la conception des méthodes de CND par EA [15].

### 1.2.1.3 Détection

La chaîne de détection de l'EA comporte deux fonctions : la détection et l'exploitation. Le premier élément de la chaîne est le capteur d'EA qui transforme l'énergie mécanique reçue en tension électrique, le signal est ensuite pré-amplifié et transmis par un câble coaxial à l'appareillage de contrôle afin d'être exploité (Figure 1.4).

La détection des signaux d'EA est basée sur l'effet piézoélectrique direct. La piézoélectricité est la propriété que possèdent certains corps de se polariser électriquement sous l'effet d'une contrainte mécanique et réciproquement de se déformer quand on lui applique un champ électrique [11]. Le premier effet est appelé effet piézoélectrique direct et le second effet piézoélectrique inverse.

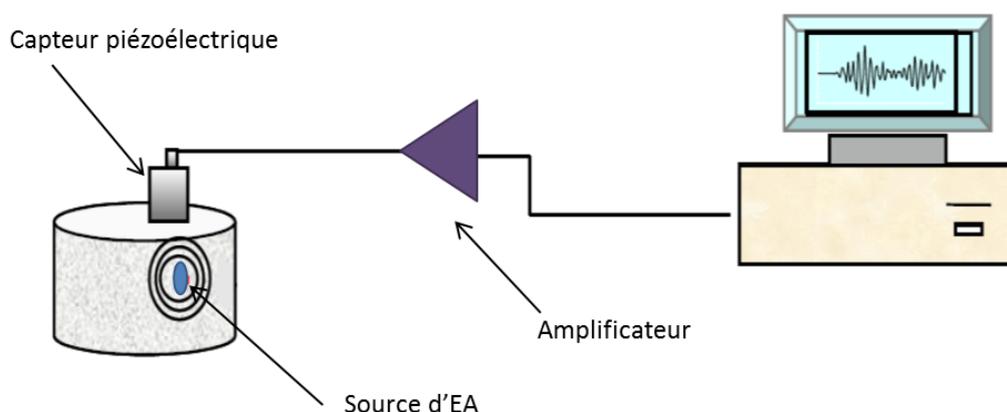


Figure 1.4 : chaîne d'acquisition des signaux d'EA

Contrairement aux transducteurs utilisés généralement en CND/US, les capteurs d'EA sont des capteurs piézoélectriques conçus sans amortisseur arrière (backing) pour avoir une bonne sensibilité à la détection des ondes transitoires émises par des défauts sous contrainte. Malgré l'absence d'amortissement mécanique, ils sont larges bandes puisque l'épaisseur des pastilles piézoélectriques utilisées est du même ordre de grandeur que le diamètre ce qui implique à la fois la présence de résonances en épaisseur et de résonances radiales .

## 1.2.2 Intérêt de la simulation du CND par EA

La simulation constitue une aide à l'interprétation et à la compréhension des phénomènes physiques. Dans le domaine du CND, la simulation permet de réduire les coûts des essais non destructifs et d'optimiser les performances pour la mise au point de ces méthodes de CND.

Dans le cas du contrôle par EA, la difficulté réside dans l'interprétation des signaux complexes typiquement mesurés ; de ce fait, la technique du contrôle par EA n'est pas considérée constituer une technique quantitative contrairement aux CND ultrasonores,

radiographiques ou par courants de Foucault [4]. L'objectif de la thèse est précisément de développer les modèles nécessaires afin de rendre possible la simulation des expériences de CND par EA. L'ambition et l'originalité de la thèse résident dans le développement de modèles capables de faire le couplage entre la source d'EA et les différents modèles de propagation des ondes élastiques permettant ainsi de simuler une expérience de contrôle par EA dans des structures épaisses et minces.

## **1.2.3 Etat de l'art sur les méthodes de simulation du CND par EA**

### **1.2.3.1 Simulation de l'EA en onde de Rayleigh**

Comme indiqué dans le paragraphe 1.1.1, les premiers travaux sur l'EA ont été effectués en sismologie. En effet, les fissures et les ruptures sismiques partagent le même mécanisme de source, à différentes échelles temporelles et spatiales [16], il est donc possible de faire des parallèles et d'utiliser des méthodes similaires. La méthode du tenseur des moments décrivant les différents types de points sources [17, 3, 18] et les forces volumiques équivalentes représentant les discontinuités de déplacement sur une surface interne [19, 20] sont les méthodes classiquement utilisées afin de décrire ces sources sismiques.

Pour ce type de méthode, la source sismique peut être caractérisée par des dipôles de force agissant au centre de la source. Mathématiquement, chaque dipôle peut être représenté par deux fonctions impulsionnelles (Dirac) agissant dans deux directions opposées, avec une distance de séparation infinitésimale. Ces dipôles de force peuvent être combinés par la suite afin de former le tenseur des moments [16]. À partir de l'équivalence observée entre les fissures et les ruptures sismiques, l'approximation du tenseur des moments a également été adoptée dans le domaine de l'EA afin de décrire les différents processus d'endommagements [21].

Ce tenseur des moments contient différentes composantes, chacune représentant un type particulier de mécanisme d'endommagement [4] comme le montre la Figure 1.5. Cette approche, nécessitant des calculs mathématiques assez complexes, a été appliquée à différents matériaux et à des structures de géométries planes [4].

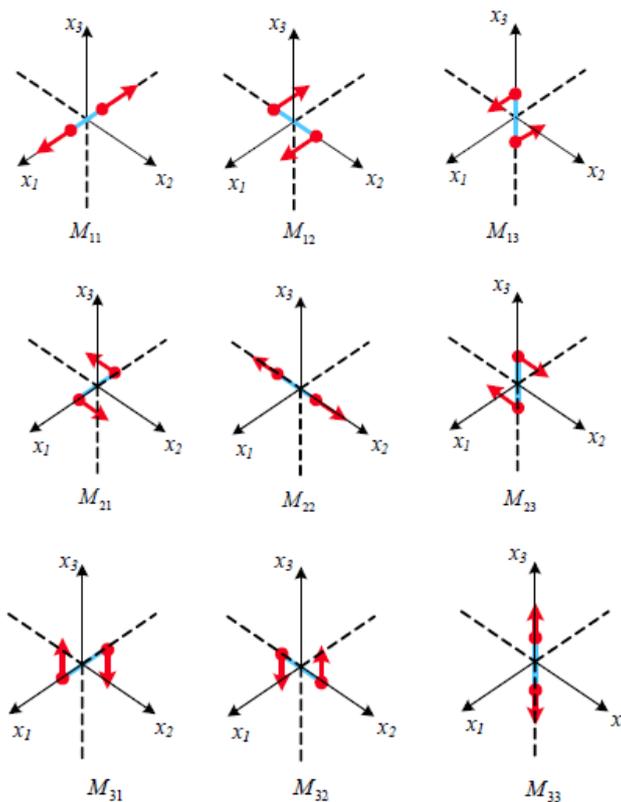


Figure 1.5 : les dipôles de chaque composante du tenseur des moments, figure extraite de [4]

Une déconvolution appropriée du signal et des procédures de décomposition sont souvent utilisées [22, 23] afin d'extraire des informations sur la source ponctuelle à partir des formes d'onde d'EA.

L'identification du mécanisme d'endommagement de la source d'EA, à partir des formes d'onde d'EA, a fait l'objet de nombreux travaux théoriques [22, 24, 25, 26].

Concernant la partie propagation, une généralisation de la théorie des rayons a été proposée afin de simuler les EA en ondes guidées transitoires dans les plaques [27, 23] et en ondes de surface dans les structures épaisses [28, 29, 30].

Dans le même temps, Harris et Pot [31] ont développé une méthode complète basée sur la théorie des rayons afin de simuler l'EA en ondes de volumes en champ proche et en onde de Rayleigh en champ lointain générée par la propagation d'une fissure circulaire (Figure 1.6). Le calcul en champ proche repose sur la théorie des rayons et un modèle de fissuration asymptotique issu de la mécanique de la rupture valable à proximité du fond de fissure. Le calcul du champ lointain en onde de Rayleigh fait appel au théorème de réciprocité élastodynamique permettant de combiner les fonctions de Green de l'onde de Rayleigh et le résultat obtenu en champ proche, c'est-à-dire le champ de déplacement des ondes de volume émises à proximité de la source. Le champ de déplacement émis par la fissure est

obtenu en évaluant la formulation intégrale de façon asymptotique sur une surface d'intégration englobant la fissure.

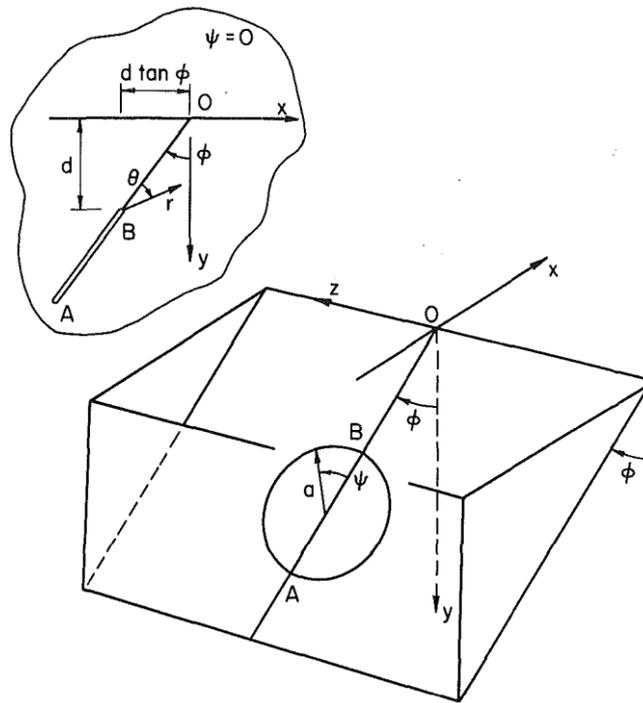


Figure 1.6 : géométrie du problème d'EA par une fissure circulaire [31]

Pour leur part, Achenbach et al [32] ont choisi de calculer le champ de déplacement émis par une fissure en mode I (mode d'ouverture) en appliquant le théorème de réciprocité entre deux états élastodynamiques différents. Le premier état correspond aux fonctions de Green de l'onde de Rayleigh et le deuxième état correspond à l'onde de Rayleigh émise par la propagation de la fissure. La Figure 1.7 présente la géométrie du problème d'EA considéré. Ils montrent que leur calcul est équivalent au calcul obtenu par la méthode du tenseur des moments après avoir appliqué l'approximation du dipôle au centre de la fissure. Cette approximation consiste à assimiler le champ de force émis par la fissure à un dipôle agissant au centre de la fissure.

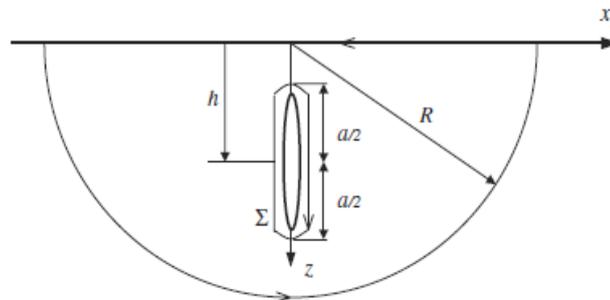


Figure 1.7 : géométrie du problème d'EA en onde de Rayleigh générée par une fissure interne sous contrainte utilisé dans le calcul d'Achenbach, figure extraite de [32].

Dans un second article, Achenbach [12], calcule le champ de déplacement généré par la propagation d'une fissure débouchante en mode d'ouverture (mode I) en appliquant la réciprocité d'une autre manière. La Figure 1.8 montre la géométrie du problème d'EA. Cette fois-ci l'auteur sélectionne une onde de surface virtuelle pour décrire le deuxième état élastodynamique en absence de la fissure, le premier état élastodynamique correspondant à l'onde de Rayleigh émise par la fissure. Il exprime ensuite l'amplitude de l'onde émise en fonction du COD (Crack Opening Displacement). On peut vérifier analytiquement que les deux approches [12, 32] sont équivalentes.

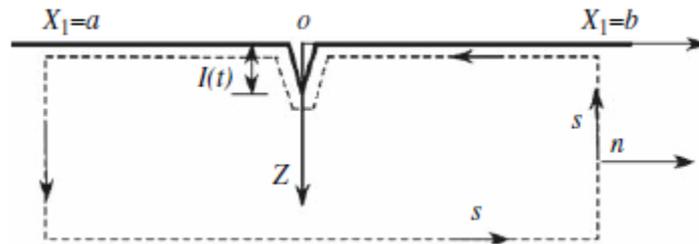


Figure 1.8 : géométrie du problème d'EA en onde de Rayleigh générée par une fissure débouchante utilisée dans le calcul d'Achenbach [12]

Lors de l'investigation de la propagation des ondes émises par des sources d'EA, les fonctions de Green analytiques ou numériques qui correspondent à des dipôles de forces internes dans un domaine infini ont été calculées et utilisées comme composantes du tenseur de moments ou dans la définition des états élastodynamiques du théorème de réciprocité. Bien que les propriétés élastiques du matériau changent chaque fois en présence d'endommagements multiples, cet effet n'est pas pris en compte dans le calcul des fonctions de Green. Dans le cas de la propagation d'une fissure, si les longueurs d'onde dominantes sont beaucoup plus grandes que la taille de la fissure, les diagrammes de rayonnement ne sont pas affectés par ces inhomogénéités. Cette hypothèse n'est pas valable dans le cas de la propagation d'une fissure préexistante puisque le rayonnement peut être affecté par l'ouverture initiale de la fissure, sauf si cette dernière est également assez petite.

### 1.2.3.2 Simulation de l'EA en ondes guidées

En pratique, de nombreuses structures industrielles sont minces et assimilables à des plaques. Une approche utilisant des ondes guidées se propageant dans une plaque doit tenir compte de la nature multimodale et dispersive de ces ondes qui complexifie l'interprétation des signaux d'EA. En raison de l'effet dispersif, les formes d'onde changent en se propageant et s'éloignant de la source. Par conséquent, il est nécessaire de comprendre la nature détaillée de ces ondes guidées dans les structures afin d'extraire des informations sur les formes d'onde détectées.

Compte tenu des modes de propagation, la détermination de la réponse sous forme de signaux d'EA en ondes guidées permet la localisation de la source par triangulation et la distinction entre les mécanismes d'endommagement [33, 34]. Cependant, une grande partie des résultats publiés n'ont traité que des sources d'EA simulées telles que la rupture de mine de crayon ou l'impact de balle afin de valider l'approche. Cette approche prenant en compte la théorie des ondes guidées (également appelées ondes de Lamb dans le cas d'une plaque) dans l'analyse des données d'EA est appelé MAE (Modal Acoustic Emission).

Un certain nombre d'avantages de l'approche MAE ont été identifiés dans la littérature [4]. Elle permet

- de faciliter la reconnaissance et la distinction entre les signaux d'endommagements d'EA,
- une meilleure élimination du bruit,
- et enfin, une localisation plus précise de la source.

D'autres travaux ont porté sur l'influence de l'orientation de la source [35] ou la détection des fissures dans les matrices dans le cas des matériaux composites [36].

Guo et al. [37] ont modélisé l'EA de différents mécanismes d'endommagement dans les composites en utilisant la théorie des plaques de premier ordre qui permet de calculer d'une manière approchée les modes guidés dans une plaque. L'EA à partir de la fissuration de la matrice et de rupture des fibres dans les poutres laminées a quant à elle été modélisée par Aberg et Gudmundson [38] en utilisant la théorie des poutres d'ordre supérieur. Pour leur part, Hamstad et al. [39] ont simulé les signaux provenant de sources d'EA dipolaires dans une plaque d'aluminium avec un code d'éléments finis 3D.

En 2009, Achenbach [13] a développé une méthode permettant de calculer l'amplitude des modes guidés dans une plaque isotrope générés par une fissure en mode d'ouverture en appliquant le théorème de réciprocité élastodynamique et en sélectionnant un mode guidé virtuel pour le deuxième état élastodynamique. Cette méthode est similaire à celle présentée pour les ondes de Rayleigh. La Figure 1.9 montre la géométrie du problème d'EA en ondes guidées. Cette méthode permet d'obtenir l'amplitude de chaque mode guidé en fonction du COD (Crack Opening Displacement) sur la fissure. L'amplitude des modes symétriques est calculée en considérant un mode virtuel symétrique et en utilisant la propriété d'orthogonalité des modes guidés. De la même manière, l'amplitude des modes antisymétriques est calculée en considérant un mode antisymétrique virtuel.

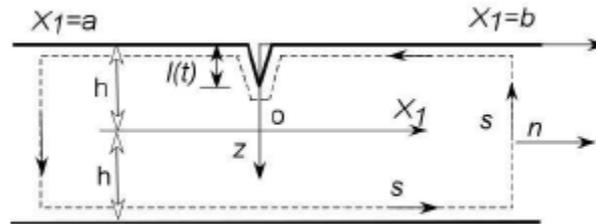


Figure 1.9 : géométrie du problème d'EA en ondes guidées générées par une fissure débouchante utilisée dans le calcul d'Achenbach, figure extraite de [13].

Plus récemment, Bogert [4] a appliqué la méthode du tenseur des moments afin de calculer les modes guidés dans une plaque isotrope en se basant sur la théorie des plaques de troisième ordre. Il a étudié l'influence de l'orientation de la source sur les deux premiers modes antisymétriques A0 et A1 et le premier mode symétrique. Il a ensuite comparé ses résultats avec la théorie des plaques de premier ordre.

### 1.2.3.3 Synthèse

Types de Fissure	EA en onde de Rayleigh	EA en ondes guidées
Fissure débouchante en mode d'ouverture	-Modèle 2D : Formulation de couplage analytique entre le COD (Crack Opening Displacement) et le champ de déplacement de l'onde de Rayleigh [12]	-Modèle 2D : Formulation de couplage analytique entre le COD et le champ de déplacement des ondes guidées [13] -Modèle 2D : modèle éléments finis [40]
Fissure enfouie	-Modèle 2D pour une fissure en mode d'ouverture: Formulation de couplage analytique entre le COD et les fonctions de Green de l'onde de Rayleigh [32]. -Modèle 3D : formulation de couplage analytique entre les ondes de volumes émises en champ proche et les fonctions de Green de l'onde de Rayleigh [31].	-Modèle 3D : basée sur le tenseur des moments et la théorie des plaques d'ordre 3. [4].

Tableau 1.1 : synthèse de l'état de l'art sur de modélisations de l'EA par une fissure sous contrainte.

En résumé, les différentes études qui ont été menées sur l'investigation des signaux d'EA à la fois dans les structures épaisses et minces n'ont donc considéré que des sources dipolaires et ponctuelles à l'aide de l'approximation des forces volumiques équivalentes décrivant la discontinuité de déplacement à l'intérieur du matériau. Il n'existe donc pas à ce jour de modélisation détaillée couplant à la fois un modèle de source d'EA issu de la mécanique de la rupture avec un modèle de propagation et un modèle de capteur. C'est tout l'enjeu de cette thèse de résoudre ce défi.

## 1.3 Conclusion

Plusieurs approches ont été développées afin d'étudier l'EA par un défaut sous contrainte. L'approche basée sur les formes d'ondes est la seule approche quantitative puisqu'elle permet d'analyser les ondes émises en tenant compte des sources d'EA, des propriétés élastiques du matériau, de la géométrie de la structure considérée et des spécificités des capteurs d'EA. Dans les prochains chapitres, nous allons développer la modélisation des ondes élastiques émises par un défaut sous contrainte en faisant le couplage entre un modèle de source d'EA et les différents modèles de propagation. La première partie de la thèse est consacrée à la simulation de l'EA en onde de Rayleigh. Cette étude est basée sur les travaux d'Achenbach utilisant le théorème de réciprocité élastodynamique [12, 13, 32] et ensuite comparée avec les résultats de Harris et Pot [31]. Les résultats sont utilisés pour simuler la chaîne complète de contrôle par EA. Plusieurs cas d'application de réception par un capteur d'EA sont présentés. La deuxième partie de la thèse est consacrée à l'étude de l'EA en ondes guidées par un défaut sous contrainte dans le cas d'une plaque en utilisant une méthode similaire à celle développée pour l'onde de Rayleigh. Le calcul modal est obtenu par la méthode SAFE (Semi Analytical Finite Element) basée sur la théorie de l'élasticité 3D. La formulation théorique des ondes guidées générées par la propagation d'une fissure est basée sur les travaux d'Achenbach et comparée avec les résultats de Lee *et al.* [40] obtenus à partir de la théorie des plaques de premier et troisième ordre. Avant d'aborder ces formulations de couplage, dans le chapitre suivant nous étudierons l'état de l'art sur les modèles de sources d'EA issus de la mécanique de la rupture ainsi que les différents types de capteurs piézoélectriques utilisés dans le CND par EA.

## Chapitre 2 Etat de l'art sur la modélisation des sources et des capteurs d'EA

2.1	Modèle de source d'EA en mécanique de la rupture .....	31
2.1.1	Description des processus de fissuration et des modes d'ouverture .....	31
2.1.2	Présentation des modèles existants dans la littérature .....	34
2.1.2.1	Approche statique asymptotique .....	34
2.1.2.2	Approche statique analytique .....	36
2.1.2.3	Approche dynamique asymptotique .....	41
2.1.3	Comparaison des modèles et choix du type de modélisation .....	42
2.1.3.1	Comparaison entre le modèle statique asymptotique et le modèle statique analytique .....	42
2.1.3.2	Comparaison entre le modèle statique asymptotique et le modèle dynamique asymptotique .....	43
2.1.3.3	Dynamisation de la solution statique analytique exacte .....	43
2.2	Etat de l'art sur la modélisation des capteurs d'EA .....	44
2.2.1	Types de capteurs utilisés en EA .....	44
2.2.2	Modélisation des capteurs piézoélectriques d'EA .....	48
2.2.2.1	Modèle piston .....	48
2.2.2.2	Extensions possibles du modèle piston .....	50
2.3	Conclusion .....	52

*Ce chapitre a pour but de donner l'état de l'art sur la modélisation d'une part du champ élastique au voisinage d'un défaut sous contrainte et d'autre part sur la réception des ondes émises par un traducteur. En premier lieu, je rappellerai les différents types de fissuration ainsi que les différents modes de rupture puis je détaillerai les choix de modélisation effectués notamment à partir d'une étude réalisée dans le cadre du projet ANR MACSIM. La deuxième partie de ce chapitre sera consacrée à la modélisation des capteurs d'EA. Je passerai en revue les différents capteurs utilisés en EA et en particulier le capteur piézoélectrique qui est le plus communément exploité. En ce qui concerne sa modélisation, je présenterai un modèle piston rendant compte du mode d'épaisseur ainsi que ses possibles extensions.*

## 2.1 Modèle de source d'EA en mécanique de la rupture

*La modélisation de l'EA par un défaut sous contrainte proposée dans les chapitres suivants repose sur le couplage entre un modèle de fissuration de défaut et un modèle de propagation des ondes. On doit ainsi disposer d'un modèle de fissuration permettant d'obtenir le COD sur la fissure. On s'intéressera donc dans ce chapitre à des défauts de types fissures rectilignes dans le cas du modèle 2D et aux fissures planes dans le cas du modèle 3D.*

### 2.1.1 Description des processus de fissuration et des modes d'ouverture

La fissuration peut être analysée selon deux approches. La première approche est une approche locale caractérisée par une étude des champs de contrainte et de déformation au voisinage du fond de fissure. L'approche globale quant à elle consiste à étudier le comportement global de la structure sur le plan énergétique.

La mécanique de la rupture permet de décrire les étapes d'amorçage et de propagation de la fissuration. Selon le comportement du matériau durant la propagation d'une fissure, on peut être confronté principalement à deux types de rupture :

- la rupture fragile qui se déclenche, en l'absence de déformation plastique significative (mécanique linéaire de la rupture)
- et la rupture ductile qui se produit, en présence de déformation plastique non négligeable (mécanique non linéaire de la rupture). La ductilité désigne la capacité d'un matériau à se déformer plastiquement sans se rompre.

Le processus de fissuration peut être décrit comme la succession de trois étapes [41] (Figure 2.1) que l'on rappelle ici :

Etape 1 : La zone (a) correspond à l'apparition de la zone de concentration de contrainte, elle est associée à un phénomène de dissipation d'énergie alors que les champs de déplacement et de déformation restent continus.

Etape 2 : La zone de concentration de contrainte devient ensuite de plus en plus étroite, on observe alors une zone (b) des discontinuités faibles des champs de contrainte et de déformation.

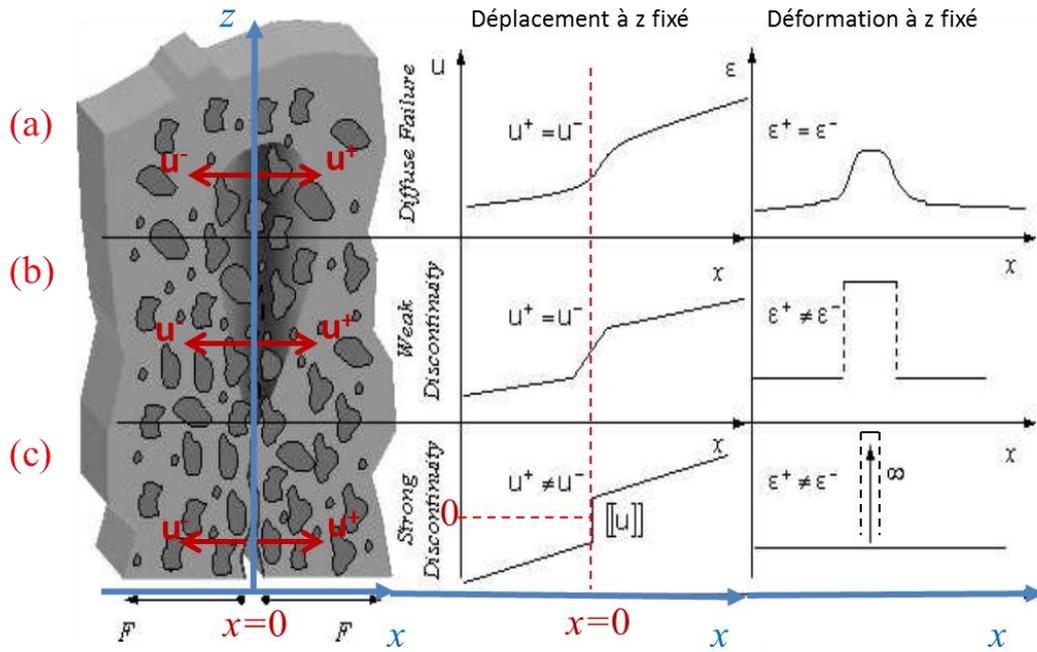


Figure 2.1: processus de fissuration, figure extraite de [41]

Etape 3 : La zone (c) est une zone de discontinuité forte qui devient de plus en plus étroite jusqu'à devenir d'épaisseur nulle. Les deux champs de déplacement et de déformation sont alors discontinus. On a ouverture de fissure au sein du solide.

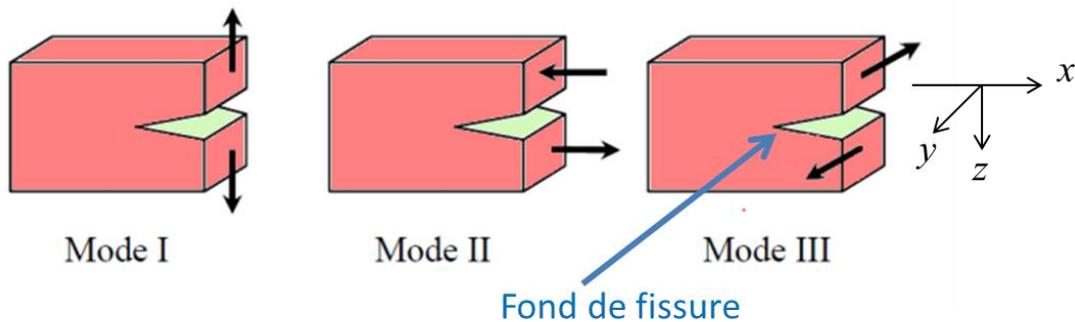


Figure 2.2 : les trois modes fondamentaux de fissuration.

En fonction de l'orientation relative de contrainte et de déformation, on distingue :

- ✓ le mode d'ouverture (Mode I) caractérisé par des déplacements normaux au plan de fissuration et dans des directions opposées suivant  $z$  (Figure 2.2),
- ✓ le mode de glissement dans le plan (mode II) où les lèvres glissent sur le plan de fissuration dans la direction  $x$  (Figure 2.2),
- ✓ et le mode de glissement anti plan (mode III) dans lequel les lèvres glissent dans le plan de fissuration dans la direction  $y$  (Figure 2.2).

Dans ce chapitre nous nous consacrerons, à l'aide d'une approche locale, au cas des sources d'EA en mécanique de la rupture linéaire, c'est-à-dire à l'étude du champ de contraintes et déplacements pour une fissuration dans le cas des matériaux fragiles. En effet, le couplage entre l'approche locale (discontinuité des champs de contraintes et déplacements) et le modèle de propagation des ondes nous permettra de prédire les formes d'onde générées par différents mécanismes d'endommagement.

Il existe deux approches locales qui étudient le comportement des solides fissurés, la première est une approche asymptotique et la deuxième est basée sur un calcul analytique en variable complexe. Dans le paragraphe suivant, nous présenterons une étude comparative entre ces deux approches en statique. Ensuite nous étudierons l'écart entre les modèles (asymptotiques) dynamique et statique en fonction de la vitesse de fissuration. On s'intéressera à des configurations de fissure plane. L'ajout des hypothèses de contraintes planes ou des déformations planes à la description plane de la fissuration permettra de décrire le comportement d'une fissure dans une plaque mince ou très épaisse (Figure 2.3).

Les hypothèses des déformations planes ou de contraintes planes aident sous certaines conditions à transformer une étude à trois dimensions ( $x, y, z$ ) en une étude à deux dimensions ( $x, z$ ). Ainsi, l'hypothèse de déformations planes repose sur les conditions suivantes :

- la dimension 'longitudinale' portée selon  $z$  doit être nettement supérieure aux deux autres dimensions (Figure 2.3 (b)).
- un encastrement doit exister à ses deux extrémités.
- les sollicitations doivent 'essentiellement' être exercées dans le plan de coupe ( $x, y$ ).

L'hypothèse des contraintes planes quant à elle vérifie les conditions suivantes :

- la dimension selon  $y$  est très inférieure aux deux autres (Figure 2.3 (a)).
- on vérifie également l'absence de forces externes s'exerçant perpendiculairement au plan de coupe ( $x, z$ ).

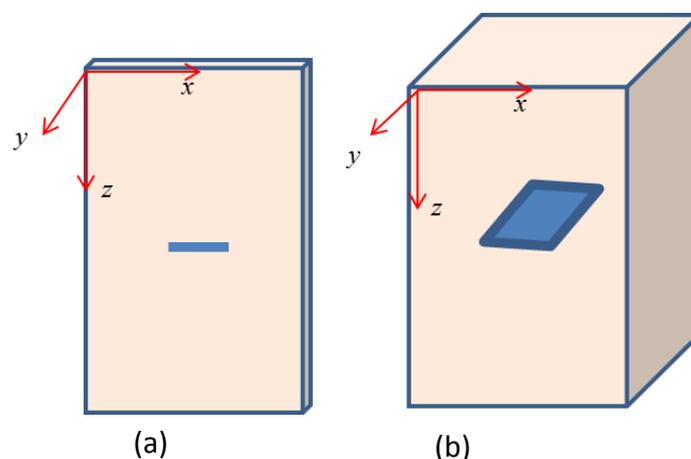


Figure 2.3 : hypothèses de contraintes planes (a) et de déformations planes (b)

Compte tenu de la nature des structures contrôlées par EA, on considérera particulièrement l'hypothèse des déformations planes lors de cette étude.

## 2.1.2 Présentation des modèles existants dans la littérature

### 2.1.2.1 Approche statique asymptotique

L'approche statique asymptotique consiste à utiliser un développement en série afin de décrire les champs de contraintes (équation (2.1)) et déplacements au voisinage du fond de fissure. Les travaux de Williams [42, 43] ont contribué de manière significative au progrès de la mécanique de la rupture, c'est en effet le premier à avoir mis en évidence le caractère singulier du champ de contrainte au niveau du fond de fissure en démontrant que ce dernier est inversement proportionnel à la racine carrée de la distance  $r$  au fond de fissure (Figure 2.4) pour les milieux plans élastiques linéaires et isotropes. La figure (2.4) montre le système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  lié à la pointe de la fissure. Le repère cartésien  $(x_1, x_2)$  est centré au milieu de la fissure,  $r$  et  $\theta$  étant les coordonnées polaires d'un point M du demi-plan. La variable complexe  $z$  est défini à partir de l'abscisse et l'ordonnée du point M dans le repère cartésien.

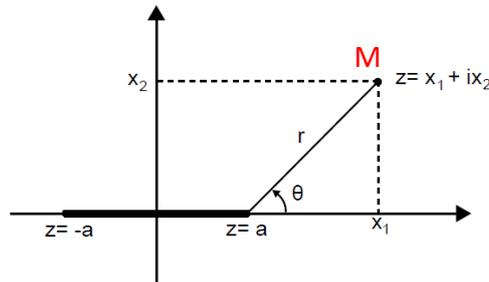


Figure 2.4: système de coordonnées lié au fond de fissure 2D [44]

Dans le cas d'un fond de fissure soumis à des sollicitations en mode I et en mode II les expressions asymptotiques du champ de contrainte dans un milieu plan sont définies par l'expression générale suivante [42, 43]:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m f_k^{m,ij}(\theta) r^{\frac{k}{2}-1} \quad (2.1)$$

L'index  $m$  correspond au mode de fissuration. Les coefficients  $a_k^m$  sont reliés à la géométrie, au chargement et au mode d'ouverture, et les fonctions angulaires  $f_k^{m,ij}(\theta)$  dépendent de la composante de contrainte et du mode de fissuration. On peut signaler ici que des

expressions analytiques des fonctions angulaires sont disponibles dans la littérature [45] et [46] :

$$f_k^{1,11}(\theta) = \frac{k}{2} \left[ \left( 2 + k/2 + (-1)^k \right) \cos(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta \right] \quad (2.2)$$

$$f_k^{1,22}(\theta) = \frac{k}{2} \left[ \left( 2 - k/2 - (-1)^k \right) \cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta \right] \quad (2.3)$$

$$f_k^{1,12}(\theta) = \frac{k}{2} \left[ (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta - \left( k/2 + (-1)^k \right) \sin(k/2 - 1)\theta \right] \quad (2.4)$$

$$f_k^{2,11}(\theta) = -\frac{k}{2} \left[ \left( 2 + k/2 - (-1)^k \right) \sin(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta \right] \quad (2.5)$$

$$f_k^{2,22}(\theta) = -\frac{k}{2} \left[ \left( 2 - k/2 + (-1)^k \right) \sin(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta \right] \quad (2.6)$$

$$f_k^{2,12}(\theta) = -\frac{k}{2} \left[ (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta - \left( k/2 - (-1)^k \right) \cos(k/2 - 1)\theta \right] \quad (2.7)$$

Les dépendances radiales et angulaires ne sont pas fonctions de la géométrie du problème ni de la nature des chargements et de leur intensité. La prise en compte des différents paramètres de fissuration se fait uniquement à travers les coefficients  $a_k^m$ . L'indice de sommation  $k$  est un entier relatif, et en élasticité linéaire, les termes avec  $k \leq 0$  sont rejetés afin de garantir une énergie de déformation finie dans la région autour du fond de fissure.

Si on considère la série proposée à l'équation (2.1) pour tout  $k \geq 1$ , le premier terme associé à  $k=1$  correspond à un terme singulier en  $r^{-\frac{1}{2}}$ . La notion de facteur d'intensité de contrainte (SIF, Stress Intensity Factor) est alors introduite afin de quantifier l'intensité de ce premier terme [44]. Dans le cas d'une fissure horizontale de longueur  $2a$  chargée selon l'axe  $x_2$  à l'infini avec une contrainte  $\sigma_{22}$ , le facteur d'intensité de contrainte peut s'écrire de la façon suivante :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sigma_{22} \sqrt{2\pi r} \right) \quad (2.8)$$

Ce facteur peut être déterminé de façon analytique, numérique ou expérimentale selon la configuration de rupture [47, 48, 49]. Néanmoins, la description de l'état de contrainte au premier ordre n'offre pas une grande précision particulièrement loin du fond de fissure. Plusieurs études ont donc tenté d'estimer les termes d'ordre supérieur afin d'affiner la description du comportement élastique du solide fissuré. L'estimation de ces termes d'ordres supérieurs est généralement réalisée par des moyens expérimentaux [50] ou numériques [52], mais peu d'expressions purement analytiques sont fournies dans la littérature de manière explicite. Dans le cadre du projet ANR MACSIM, des travaux analytiques sur les coefficients d'ordres supérieurs ont été réalisés par G Hello [51], dans le

cas d'un milieu fissuré bidimensionnel élastique isotrope soumis à des chargements à l'infini (Figure 2.5).

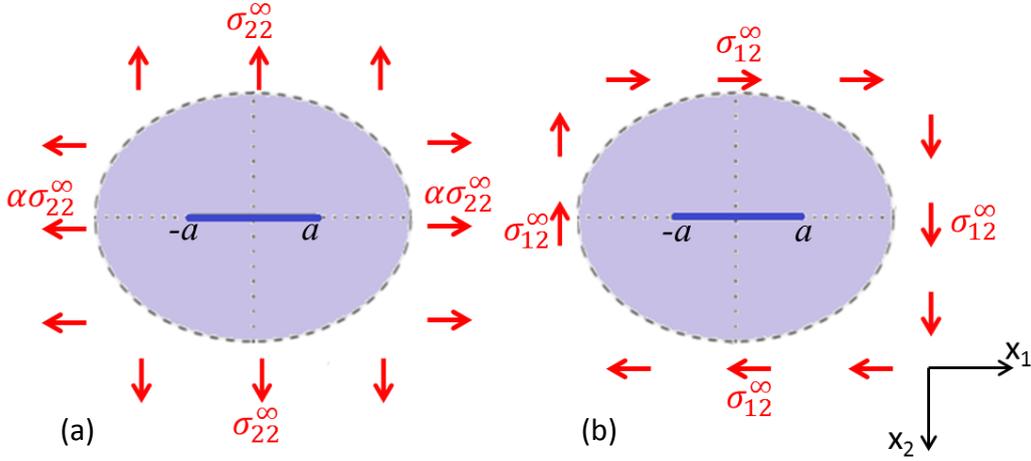


Figure 2.5: sollicitations considérées (a) chargement biaxial en mode I et (b) mode II

Lors de cette étude, ce dernier montre que pour ( $r < 2a$ ), les coefficients recherchés pour le développement en série suivant l'équation (2.1) sont, dans le cas d'une fissure soumise à un chargement biaxial en mode I égaux à :

$$a_{2n+1}^1 = \frac{(-1)^{n+1} (2n)!}{2^{3n+\frac{1}{2}} (n!)^2 (2n-1)} \frac{\sigma_{22}^\infty}{a^{n-\frac{1}{2}}}, n \geq 0 \quad (2.9)$$

$$a_2^1 = \frac{\sigma_{22}^\infty (\alpha - 1)}{4}$$

$$a_k^1 = 0, \text{ sinon}$$

Le paramètre  $\alpha$  (Figure 2.5(a) et équation (2.9)) définit le rapport de bi-axialité du chargement appliqué à l'infini et il est donné par :

$$\alpha = \frac{\sigma_{11}^\infty}{\sigma_{22}^\infty} \quad (2.10)$$

Pour le mode II on obtient les résultats suivants :

$$a_{2n+1}^2 = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{3n+\frac{1}{2}} (n!)^2 (2n-1)} \frac{\sigma_{12}^\infty}{a^{n-\frac{1}{2}}}, n \geq 0 \quad (2.11)$$

$$a_k^2 = 0, \text{ sinon}$$

### 2.1.2.2 Approche statique analytique

L'approche statique analytique repose sur la solution analytique en variable complexe. Cette dernière est basée sur l'utilisation de la théorie des fonctions complexes dans la résolution des problèmes en élasticité linéaire plane. Si l'on regarde la littérature, on s'aperçoit que les

premiers travaux en élasticité en variable complexe ont été effectués par Kolosov en 1909 [53] puis que différentes techniques d'analyse complexe pour l'élasticité ont été développées [54, 55, 56 ou 57] par la suite.

L'approche analytique exacte consiste à considérer une fonction d'Airy  $\Phi$  pour la définition des contraintes élastiques :

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \sigma_{22}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \sigma_{12}(x_1, x_2) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.12)$$

Si on remplace les définitions des contraintes dans les équations générales de l'élasticité, on obtient l'équation aux dérivées partielles d'ordre quatre suivante :

$$\nabla^4 \Phi = \Delta^2 \Phi = 0 \quad (2.13)$$

L'opérateur  $\nabla^4$  est connu sous le nom de l'opérateur biharmonique ou bilaplacien.

Westergaard [58] traite le problème en mode I d'une fissure finie soumise à une contrainte bi-axiale dans un milieu infini par la méthode semi-inverse. Cette dernière est un outil mathématique utilisé en mécanique des milieux continus qui aide à simplifier la résolution des équations aux dérivées partielles. [58] obtient une solution respectant les contraintes prescrite sur les lèvres de la fissure à l'infini. D'autres solutions ont été proposées par [59, 60, 61 et 62]. Nous nous intéressons particulièrement au formalisme de [54]. Ce dernier permet d'introduire deux potentiels complexes analytiques  $\phi$  et  $\chi$  de la variable complexe  $z = x_1 + ix_2$  (Figure 2.4).

Ce potentiel conduit à l'expression d'une solution de l'équation bi-harmonique sous la forme suivante :

$$\Phi(x_1, x_2) = \text{Re}[\bar{z}\phi(z) + \chi(z)] \quad (2.14)$$

Où  $\bar{z}$  est le conjugué de  $z$  et  $\text{Re}[\dots]$  la partie réelle. La combinaison des équations (2.12) et (2.14) aide à exprimer les contraintes et les déplacements en variable complexe en fonction des potentiels complexes  $\phi$  et  $\chi$  [44].

$$\sigma_{11}(z) + \sigma_{22}(z) = 4\text{Re}[\phi'(z)] \quad (2.15)$$

$$\sigma_{22}(z) - \sigma_{11}(z) + 2i\sigma_{12}(z) = 2\text{Re}[\bar{z}\phi''(z) + \chi'(z)] \quad (2.16)$$

$$2\mu(u_1(z) + iu_2(z)) = \kappa\phi(z) - \overline{z\phi'(z)} - \overline{\chi'(z)} \quad (2.17)$$

Où  $\mu$  est le module de cisaillement et  $\kappa$  la constante de Kolosov ayant pour valeur  $3-4\nu$  respectivement en déformations planes et  $(3-\nu)/(1+\nu)$  en contraintes planes,  $\nu$  correspondant au coefficient de Poisson.

Les solutions dans le domaine complexe sont disponibles dans les cas des problèmes en mode I et II d'un milieu plan linéaire infini contenant une fissure de chargement  $\Gamma$  (Figure 2.4) tel que :

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}[z] = 0, |\text{Re}[z]| \leq a\} \quad (2.18)$$

Dans le cas d'une fissure en mode I, les sollicitations lointaines vérifient l'égalité suivante :

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} [\sigma_{11}(z), \sigma_{12}(z), \sigma_{22}(z)] = [\alpha, 0, 1] \sigma_{22}^{\infty} \quad (2.19)$$

tandis que pour le mode II, on obtient :

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} [\sigma_{11}(z), \sigma_{12}(z), \sigma_{22}(z)] = [0, 1, 0] \sigma_{12}^{\infty} \quad (2.20)$$

#### ❖ Problème en mode I

Dans le cas d'une fissure en mode I, la contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}(z)$  doit s'annuler (Figure 2.5) pour  $\text{Im}[z] = 0$  (équation (2.18)) Cette condition nous ramène à une nouvelle équation permettant d'exprimer le potentiel  $\chi$  en fonction de  $\phi$ . Les expressions des contraintes et des déplacements ne dépendent plus que d'un potentiel complexe  $\phi_I$  et d'une constante  $C_I$ , on a donc :

$$\sigma_{11}^I(z) = 2 \text{Re}[\phi_I'(z)] - 2x_2 \text{Im}[\phi_I''(z)] + C_I \quad (2.21)$$

$$\sigma_{22}^I(z) = 2 \text{Re}[\phi_I'(z)] + 2x_2 \text{Im}[\phi_I''(z)] - C_I \quad (2.22)$$

$$\sigma_{12}^I(z) = -2x_2 \text{Re}[\phi_I''(z)] \quad (2.23)$$

$$2\mu u_1^I(z) = (\kappa - 1) \text{Re}[\phi_I(z)] - 2x_2 \text{Im}[\phi_I'(z)] + C_I x_1 \quad (2.24)$$

$$2\mu u_2^I(z) = (\kappa + 1) \text{Im}[\phi_I(z)] - 2x_2 \text{Re}[\phi_I'(z)] - C_I x_2 \quad (2.25)$$

Le potentiel complexe  $\phi_I$  et la constante  $C_I$  sont ensuite déterminés à partir des conditions limites sur la surface libre de la fissure et à l'infini à travers l'équation (2.19). La solution est disponible dans [54] :

$$\phi_I'(z) = \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{2} \left[ \frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} \right] + (\alpha - 1) \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{4} \quad (2.26)$$

$$C_I(z) = (\alpha - 1) \frac{\sigma_{22}^\infty}{2} \quad (2.27)$$

On injecte les expressions du potentiel complexe et de la constante  $C_I$  dans les équations (2.21) -(2.23), on obtient alors :

$$\sigma_{11}^I(z) = \sigma_{22}^\infty \left[ \operatorname{Re} \left[ \frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} \right] + (\alpha - 1) - x_2 \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] \right] \quad (2.28)$$

$$\sigma_{22}^I(z) = \sigma_{22}^\infty \left[ \operatorname{Re} \left[ \frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} \right] + x_2 \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] \right] \quad (2.29)$$

$$\sigma_{12}^I(z) = -\sigma_{22}^\infty x_2 \left[ \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] \right] \quad (2.30)$$

#### ❖ Problème en mode II

La solution du problème en mode II est obtenue en imposant la condition  $\sigma_{22}(z) = 0$  (équation (2.20)) quand  $\operatorname{Im}(z) = 0$  (équation (2.18)). Ensuite, en appliquant la même méthode que pour le mode I, on exprime les contraintes et déplacements en fonction d'un unique potentiel complexe noté  $\phi_{II}$  et d'une constante  $C_{II}$  tels que :

$$\sigma_{11}^{II}(z) = 4 \operatorname{Re}[\phi_{II}'(z)] - 2x_2 \operatorname{Im}[\phi_{II}''(z)] \quad (2.31)$$

$$\sigma_{22}^{II}(z) = 2x_2 \operatorname{Im}[\phi_{II}''(z)] \quad (2.32)$$

$$\sigma_{12}^{II}(z) = -2 \operatorname{Im}[\phi_{II}'(z)] - 2x_2 \operatorname{Re}[\phi_{II}''(z)] - C_{II} \quad (2.33)$$

$$2\mu u_1^{II}(z) = (\kappa + 1) \operatorname{Re}[\phi_{II}(z)] - 2x_2 \operatorname{Im}[\phi_{II}'(z)] - C_{II} x_2 \quad (2.34)$$

$$2\mu u_2^I(z) = (\kappa - 1) \operatorname{Im}[\phi_{II}(z)] - 2x_2 \operatorname{Re}[\phi_{II}'(z)] - C_{II} x_1 \quad (2.35)$$

La détermination de  $\phi_{II}$  et  $C_{II}$ , comme dans le cas du mode I, se réalise par la satisfaction des conditions limites de surface libre de la fissure et à l'infini par l'équation (2.20). Les expressions de  $\phi_{II}$  et  $C_{II}$  sont données dans [54] :

$$\phi_{II}'(z) = -i \frac{\sigma_{12}^\infty}{2} \left[ \frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} \right] + i \frac{\sigma_{12}^\infty}{2} \quad (2.36)$$

$$C_{II} = -\sigma_{12}^\infty \quad (2.37)$$

En remplaçant le potentiel complexe et la constante  $C_{II}$  par leurs expressions dans les équations (2.31)-(2.33), on obtient les expressions explicites des contraintes.

$$\sigma_{11}^{\text{II}}(z) = \sigma_{12}^{\infty} \left[ \text{Im} \left[ \frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} \right] + x_2 \text{Re} \left[ \frac{1}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] \right] \quad (2.38)$$

$$\sigma_{22}^{\text{II}}(z) = -x_2 \sigma_{12}^{\infty} \text{Re} \left[ \frac{1}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] \quad (2.39)$$

$$\sigma_{12}^{\text{II}}(z) = \sigma_{12}^{\infty} \left[ \text{Re} \left[ \frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} \right] - x_2 \text{Im} \left[ \frac{1}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] \right] \quad (2.40)$$

### ❖ Problème en mode III

La Figure 2.6 représente la configuration du mode de cisaillement anti-plan (mode III). Les solutions du problème en mode III se calculent par une méthode similaire à celle présentée pour les deux premiers modes et elles sont disponibles dans [54].

Les expressions des contraintes et des déplacements dans le cas du mode III sont données par:

$$\sigma_{13}^{\text{III}}(z) = \sigma_{23}^{\infty} \text{Im} \left[ \frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} \right] \quad (2.41)$$

$$\sigma_{23}^{\text{III}}(z) = \sigma_{23}^{\infty} \text{Re} \left[ \frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} \right] \quad (2.42)$$

$$u_3^{\text{III}}(z) = \frac{\sigma_{23}^{\infty}}{\mu} \text{Im} \left[ (z^2 - a^2)^{1/2} \right] \quad (2.43)$$

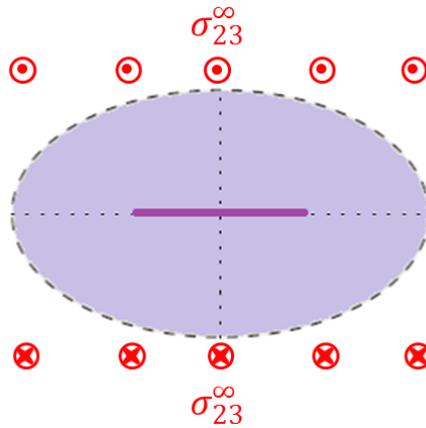


Figure 2.6: configuration du mode III

### 2.1.2.3 Approche dynamique asymptotique

En élastodynamique, les solutions peuvent se développer en série comme en élastostatique, dans le cas d'un milieu fissuré. L'évolution spatio-temporelle de la fissure se fait à travers l'évolution de la position de ses deux pointes en fonction de  $a(t)$  (Figure 2.4).

Les contraintes dynamiques (au premier ordre) au fond de la fissure sont décrites par des fonctions angulaires dynamiques et un coefficient d'intensité de contrainte dynamique. La dépendance radiale des champs est identique entre le cas statique et le cas dynamique. Freund [63] démontre que, dans le cas d'un défaut en mode I se propageant à une vitesse non-uniforme c'est-à-dire comme la succession d'accroissement à vitesses constantes, le facteur d'intensité de contrainte dynamique est relié directement au facteur d'intensité de contrainte statique  $K_I$  associé à la charge et à la taille de fissure instantanée, à travers la fonction universelle  $k$ .

$$K_I^{dyn}(t, a, V) = k(V) K_I(a(t)), \text{ avec } k(V) \approx \frac{1 - V/v_R}{\sqrt{1 - V/v_L}} \quad (2.44)$$

$v_R$  et  $v_L$  sont respectivement les vitesses de l'onde de Rayleigh et des ondes de compression et  $V$  la vitesse de propagation de la fissure. Les fonctions angulaires, pour un développement asymptotique donné par l'équation (2.45), deviennent dépendantes de la vitesse de propagation de la fissure. Lorsque le chargement est constant et la vitesse d'avancée de la fissure est constante [64], on peut écrire :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I^{dyn}(V, t)}{\sqrt{2\pi r}} f_I^{ij, I}(\theta, V) + \dots \quad (2.45)$$

Les fonctions angulaires dynamiques sont données par les équations suivantes :

$$f_1^{11, I} = \frac{1}{R(V)} \left( (1 + \alpha_s^2)(1 + 2\alpha_d^2 - \alpha_s^2) \frac{\cos(\theta_d/2)}{\sqrt{\gamma_d}} - 4\alpha_d\alpha_s \frac{\cos(\theta_s/2)}{\sqrt{\gamma_s}} \right) \quad (2.46)$$

$$f_1^{22, I} = \frac{1}{R(V)} \left( -(1 + \alpha_s^2) \frac{\cos(\theta_d/2)}{\sqrt{\gamma_d}} + 4\alpha_d\alpha_s \frac{\cos(\theta_s/2)}{\sqrt{\gamma_s}} \right) \quad (2.47)$$

$$f_1^{12, I} = \frac{2\alpha_d(1 + \alpha_s^2)}{R(V)} \left( \frac{\sin(\theta_d/2)}{\sqrt{\gamma_d}} - \frac{\sin(\theta_s/2)}{\sqrt{\gamma_s}} \right) \quad (2.48)$$

où

$$\gamma_d = \sqrt{1 - (V \sin(\theta)/v_L)^2}, \gamma_s = \sqrt{1 - (V \sin(\theta)/v_T)^2} \quad (2.49)$$

$$\alpha_d = \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_L^2}}, \alpha_s = \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_T^2}} \quad (2.50)$$

$$\tan(\theta_d) = \alpha_d \tan(\theta), \tan(\theta_s) = \alpha_s \tan(\theta) \quad (2.51)$$

$$R(V) = 4\alpha_d\alpha_s - (1 - \alpha_s^2)^2 \quad (2.52)$$

$v_T$  étant la vitesse des ondes de cisaillement.

## 2.1.3 Comparaison des modèles et choix du type de modélisation

### 2.1.3.1 Comparaison entre le modèle statique asymptotique et le modèle statique analytique

Dans le cadre du projet MACSIM, deux études comparatives entre les développements asymptotiques en série et les solutions en variables complexes ont été réalisées par G. Hello [44]. La première étude a consisté à comparer quantitativement les solutions en « facteur K » (correspondant au développement en série au premier ordre) utilisées généralement pour estimer le champ élastodynamique au voisinage du fond de la fissure avec celles analytiques en variables complexes. Dans ce but, les solutions « en facteur K » pour la contrainte  $\sigma_{22}^I$  et le saut de déplacement  $\Delta u_2^I$  dans le cas du mode I, sont données par :

$$\sigma_{22}^{K_I}(r, \theta = 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2.53)$$

$$\Delta u_2^{K_I}(r, \theta = \pm\pi) = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + 1) \quad (2.54)$$

Les solutions en variables complexes associées sont :

$$\sigma_{22}^C(x_1, 0) = \sigma_{22}^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{x_1}{(x_1^2 - a^2)^{1/2}} \right] \quad (2.55)$$

$$\Delta u_2^C(x_1, 0) = \frac{\sigma_{22}^\infty}{2\mu} (\kappa + 1) (a^2 - x_1^2)^{1/2} \quad (2.56)$$

Il apparait que la solution asymptotique en facteur K est équivalente à la solution complexe à proximité du fond de la fissure. Cependant, le comportement à l'infini est différent. Concernant les contraintes, la solution asymptotique (équation (2.53)) tend vers zéro quand  $r \rightarrow +\infty$  tandis que la solution complexe (équation (2.55)) tend vers la valeur du champ prescrit à l'infini. Pour le saut de déplacement, on constate que quand  $r \rightarrow +\infty$  le saut de déplacement tend vers l'infini pour la solution asymptotique (équation (2.54)) alors que la solution en variable complexe (équation (2.55)) tend vers zéro. On voit donc que l'approche asymptotique au premier ordre n'est pas valable quand on s'éloigne de la pointe de la fissure.

La deuxième étude a été de considérer des termes d'ordre supérieur dans le développement en série des solutions asymptotiques puis d'analyser leurs convergences vers la solution analytique exacte [51]. Lors de cette étude est discutée l'existence d'un disque de

convergence autour de la pointe de fissure (zone autour du fond de fissure de rayon  $r=2a$ ), où les réponses sont d'autant meilleures que le nombre de termes considérés augmente.

### 2.1.3.2 Comparaison entre le modèle statique asymptotique et le modèle dynamique asymptotique

On s'intéresse maintenant à la comparaison entre les modèles asymptotiques statique et dynamique et l'on considère donc la relation liant le facteur d'intensité dynamique et celui statique (équation (2.44)) On peut noter qu'à  $V=0$  le facteur d'intensité dynamique est égale au facteur d'intensité statique.

D'autre part la fonction universelle  $k$  (équation (2.44)) s'annule si  $V = v_R$ , ce qui s'interprète par le fait que la vitesse d'avancée de fissure ne peut dépasser la vitesse de l'onde de Rayleigh. L'analyse de l'équation (2.44) permet de montrer que l'écart entre les facteurs d'intensité statique et dynamique n'excède pas les 25% pour des fissures se propageant à des vitesses inférieure ou égale à  $v_R/3$ .

Dans le cas du mode I, l'influence de la vitesse d'avancée de la fissure sur l'écart entre les fonctions angulaires statiques (équations (2.2) à (2.4)) et dynamiques (équations (2.46) à (2.48)) est étudiée par G Hello [51]. On observe que pour une vitesse de fissuration allant de  $0.1 v_T \leq V \leq 0.5 v_T$ , les profils statiques et dynamiques des fonctions angulaires sont très proches. L'usage des fonctions angulaires statiques pour des problèmes de fissurations n'excédant pas  $0.5 v_T$  semble donc envisageable.

### 2.1.3.3 Dynamisation de la solution statique analytique exacte

Il n'existe pas de modèle exact pour l'élastodynamique avec une évolution de la taille de fissure. L'étude réalisée a pour but de déterminer quel modèle approché offre le meilleur compromis. Lorsque l'on considère les méthodes asymptotiques, il est possible de prendre en compte les effets dynamiques à travers le facteur d'intensité de contraintes et les fonctions angulaires qui dépendent de la vitesse de propagation de la fissure. Cependant, le modèle dynamique est limité spatialement (valable à proximité du fond de la fissure), il ne peut être utilisé que pour des propagations de défauts de quelques % de la taille de la fissure initiale [44]. Sachant que la formulation de couplage est basée sur le champ élastodynamique sur toute la surface du défaut et que les défauts évolutifs peuvent atteindre plusieurs fois leurs tailles initiales, il convient donc de privilégier une méthode donnant accès au champ élastodynamique sur une large zone.

L'idée est donc d'abandonner le modèle asymptotique dynamique et de choisir une l'hypothèse quasi-statique pour des vitesses de propagation de fissure inférieures à  $0.5 v_T$ . On fait l'hypothèse que l'expression analytique statique est valide à chaque position de la fissure à condition que la vitesse de fissuration reste raisonnable et que la fissure évolue d'une manière rectiligne dans un champ de contraintes uniformes (cf. chapitre3). La

modélisation de la source d'EA est alors basée sur l'utilisation de l'approche quasi-statique en variable complexe, la prise en compte du caractère dynamique de la source s'effectuant à travers l'évolution de la géométrie de la fissure en fonction du temps.

La formulation du couplage 2D (cf. chapitre 3) se basera sur le modèle de fissure 2D en quasi statique, tandis qu'en 3D (cf. chapitre 4) nous utiliserons le modèle analytique quasi-statique d'une fissure circulaire plane 3D. En effet, peu de modèles de fissures 3D sont développés dans la littérature, seul le modèle d'une fissure circulaire en mode I est disponible [65].

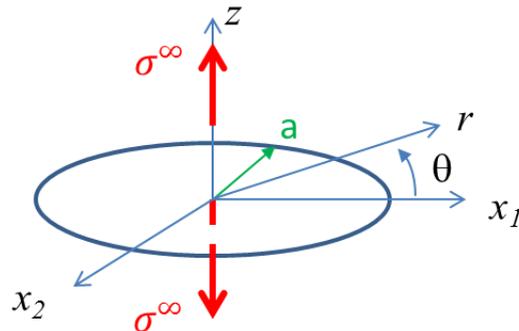


Figure 2.7 : fissure circulaire 3D

Dans le cas d'une fissure circulaire 3D, la solution complexe en mode I est donnée par l'équation suivante :

$$\Delta u_z^{\mathbb{C}} = \frac{\sigma^{\infty}}{\pi \mu} (\kappa + 1) (a(t)^2 - r^2)^{1/2} \quad (2.57)$$

Comme dans le cas 2D, la prise en compte du caractère dynamique de la solution analytique exacte est réalisée par l'intermédiaire de l'évolution temporelle du rayon de la fissure  $a(t)$ .

## 2.2 Etat de l'art sur la modélisation des capteurs d'EA

### 2.2.1 Types de capteurs utilisés en EA

La détection de l'EA peut être réalisée par différents types de capteurs : les capteurs à fibre optique, les capteurs électromagnétiques acoustiques (EMAT), les capteurs capacitifs, les capteurs piézoélectriques ou piézo-composites (sous forme de patch) spécifiques au contrôle par EA. Nous nous proposons dans ce paragraphe d'analyser les caractéristiques de chacune de ces solutions.

✓ Les EMATs

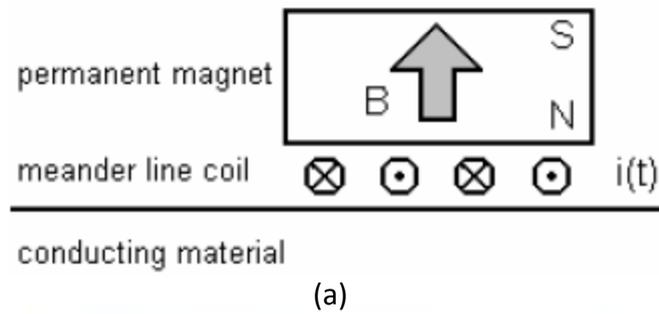


Figure 2.8 : (a) principe d'un EMAT (b) photo d'un EMAT [66]

Les EMATs sont constitués d'une bobine et d'un aimant. Ce type de capteur peut générer et recevoir des ondes ultrasonores sans contact. Le système doit être électriquement conducteur, l'efficacité de ce capteur diminue rapidement quand l'entrefer entre le système mesuré et le capteur augmente. De plus, les EMATs ont une bande étroite et nécessitent un champ magnétique intense [67]. Ils peuvent fonctionner à température élevée et dans des endroits éloignés mais ils ne sont pas très utilisés à cause de leur faible sensibilité et de leurs grandes dimensions.

✓ Les capteurs à fibres optiques

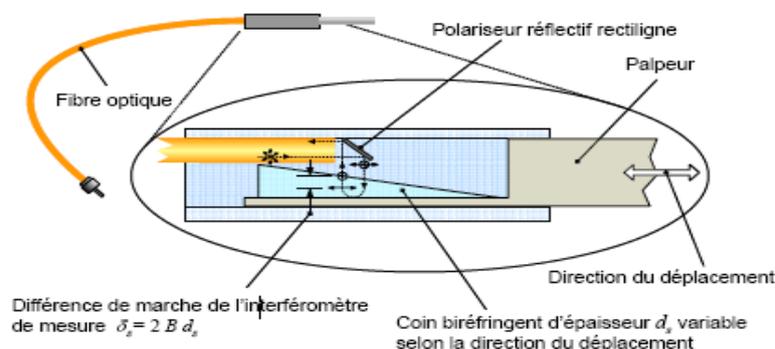


Figure 2.9: principe d'un capteur à fibre optique dédié à la mesure de déplacement [68]

Les capteurs à fibres optiques (Figure 2.9) sont constitués de deux éléments principaux : la jauge à fibre optique et le conditionneur de signal.

En outre, il existe deux types de capteurs à fibres optiques : les capteurs intrinsèques et extrinsèques. Pour le premier type l'élément sensible à la mesure est la fibre optique. Dans le cas des capteurs extrinsèques, un dispositif optique sensible à la grandeur mesurée est utilisé et il est situé à l'extrémité de la fibre optique qui se connecte au conditionneur de signal. Ce dernier sert en premier à injecter la lumière dans la fibre optique de la sonde, puis à détecter et analyser le signal lumineux retourné par la sonde et enfin à convertir les résultats en quantités physiques reliées au signal mesuré.

Différentes technologies de capteurs à fibres optiques existent suivant la grandeur optique modifiée ou modulée par la quantité mesurée. Il peut s'agir soit de la phase, de l'intensité, de la polarisation ou de la longueur d'onde. Parmi les technologies, on trouve l'interféromètre optique qui est une technique permettant de moduler la phase des ondes lumineuses et qui est reconnu comme la technologie de capteur à fibre optique la plus sensible.

Les capteurs à fibres optiques ont la possibilité de fonctionner à très hautes températures [67], de résister au rayonnement nucléaire et de s'adapter à toute mesure à distance. Les inconvénients qui sont fréquemment mentionnés, sont la complexité de la connectique associée, la difficulté à détecter un défaut dans les fibres et leurs prix plus élevés que les autres capteurs classiques.

Plusieurs études ont montré la faisabilité de l'utilisation des capteurs à fibres optiques comme une alternative aux capteurs résonnants classiquement utilisés en EA [67]. La Figure 2.10 montre un exemple d'exploitation des capteurs à fibres optiques en EA.

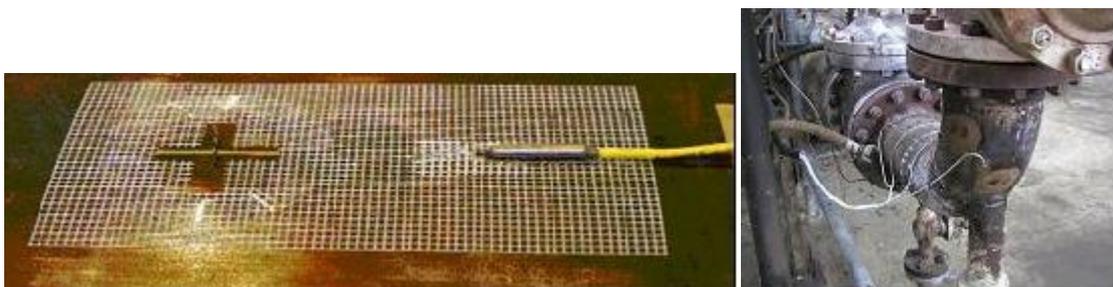


Figure 2.10: exemple d'utilisation des capteurs à fibres optique pour le contrôle des canalisations par EA [69]

✓ Capteur piézoélectrique

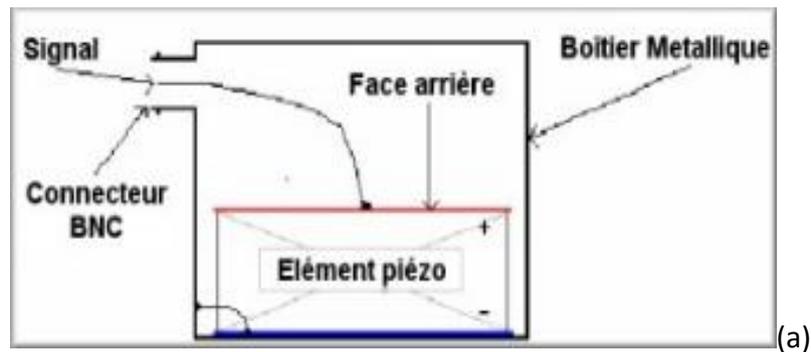


Figure 2.11 : (a) principe d'un capteur piézoélectrique d'EA (b) photo de capteurs d'EA [70].

Les capteurs piézoélectriques sont les plus employés en EA, ils sont assez spécifiques par rapport aux capteurs utilisés en CND traditionnel. En effet, ils sont plus épais que les capteurs piézoélectriques habituels et ne possèdent pas d'amortissement mécanique pour une meilleure sensibilité. Leur utilisation majoritaire en EA découle de leur faible coût, de leur robustesse, de leur facilité de manipulation et de leur sensibilité adéquate.

Traditionnellement, la partie de détection du signal ultrasonore est constituée d'une pastille en zirconium titane (PZT) sans amortissement mécanique et polarisée dans la direction de l'épaisseur. Il existe des capteurs possédant une fréquence naturelle autour de laquelle le capteur est très sensible [67], on parle alors de capteur d'EA résonnant. Un autre type de capteur d'EA commercialisé est le capteur large bande qui est de plus en plus utilisé, il a un spectre de fréquence plus étendu montrant quelques fluctuations, qui sont dues à la coexistence des résonances radiales en plus de la résonance en épaisseur.

Grâce au développement de nouveaux matériaux piézoélectriques comme le métaniobate et le polyvinylidène fluorure (PVDF), il est devenu possible de concevoir différents types de capteurs avec des propriétés directionnelles et de sensibilité bien définies rendant possible la sélection des modes de vibrations [67].

La taille de la surface de contact du capteur est également un facteur très important pour la réponse fréquentielle. Pour cela, des capteurs coniques avec une pastille PZT sous la forme

d'un cône tronqué avec un faible diamètre 1mm, sont conçus dans le but d'éviter l'effet de directivité observé dans le cas des capteurs d'EA classiques. Il apparaît qu'ils sont plus sensibles au déplacement normal de la surface de contact.

La calibration est nécessaire avant tout CND par EA. En effet, la calibration permet de connaître la réponse du capteur à un déplacement vertical en tout point du spectre fréquentiel. Actuellement, il existe seulement deux méthodes de calibration dites « absolues » (normalisées ASTM E1106, E976, E976, E1781 et NDIS 20109-91) mais leur mise en œuvre restent lourde, c'est pourquoi de nombreuses tentatives de simplification ont été menées [71, 72].

## 2.2.2 Modélisation des capteurs piézoélectriques d'EA

*La majorité des études de la littérature sur les capteurs d'EA sont expérimentales, néanmoins, on peut utiliser en première approximation un modèle basé sur l'approche piston afin de simuler la réponse d'un capteur d'EA.*

### 2.2.2.1 Modèle piston

Goujon et Baboux [73] proposent un modèle de capteur d'EA basé sur l'approche piston, ils définissent la sensibilité à la réception des ondes de Rayleigh par :

$$M_R = \frac{E_0}{v_z^0} \quad (2.58)$$

où  $E_0$  est la tension délivrée par le capteur en circuit ouvert et  $v_z^0$  est la vitesse normale de l'onde de Rayleigh au centre du capteur.

Dans le cas d'une onde de Rayleigh se propageant le long d'une surface, la vitesse normale sur la face du capteur n'est pas uniforme. La tension à travers le capteur est donc proportionnelle à la moyenne de la vitesse normale. En plus de la résonance intrinsèque du capteur, l'effet d'ouverture lié à la géométrie rend la sensibilité dépendante de la fréquence. L'influence de la taille du capteur sur la tension délivrée en sortie peut être évaluée par :

$$E_0 = \frac{1}{S} \iint_S v_z(r_0) m(r) dS \quad (2.59)$$

où  $S$  la surface du capteur,  $v_z(r_0)$  la vitesse normale de l'onde de Rayleigh et  $m(r)$  la sensibilité spatiale du capteur.  $r$  et  $r_0$  sont définis sur la Figure 2.12.

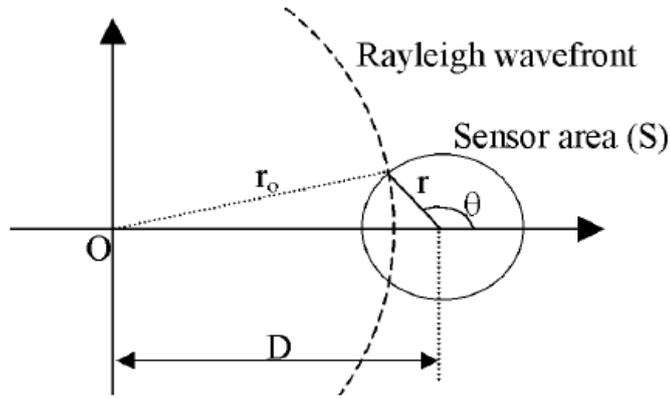


Figure 2.12 : géométrie utilisée dans le calcul de la tension délivrée par le capteur, figure extraite de [73].

La première approximation utilisée par Goujon et Baboux [73] consiste à considérer uniquement la sensibilité spatiale associée à la vitesse normale. Ensuite, ils remplacent cette sensibilité spatiale  $m(r)$  par une sensibilité uniforme et égale à  $m_0$ , dans le cas d'une onde de Rayleigh cylindrique d'amplitude  $A$ , l'équation (2.59) devient alors :

$$E_0 = \frac{m_0 A}{S} \iint_S \frac{e^{-ik_R r_0}}{\sqrt{r_0}} r dr d\theta \quad (2.60)$$

où  $k_R = 2\pi f / v_R$  est le nombre d'onde de l'onde de Rayleigh et  $f$  la fréquence. L'expression de la sensibilité à la réception pour l'onde de Rayleigh est donc :

$$M_R = \frac{E_0}{v_z(r_0 = D)} = \frac{m_0}{S} \sqrt{D} e^{ik_R D} \iint_S \frac{e^{-ik_R r_0}}{\sqrt{r_0}} r dr d\theta \quad (2.61)$$

ou encore :

$$M_R = m_0 F(f, r) \quad (2.62)$$

F étant la fonction d'ouverture du capteur présentée sur la Figure 2.13.

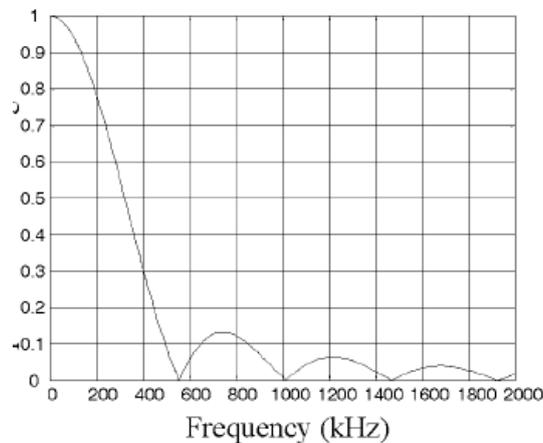


Figure 2.13 : fonction d'ouverture du capteur, figure extraite de [73]

Ils définissent aussi la sensibilité à la réception des ondes longitudinales se propageant en incidence normale par :

$$M_L = m_0 \quad (2.63)$$

Et on a donc la relation suivante :

$$M_R = M_L F \quad (2.64)$$

En comparant la courbe de sensibilité obtenue expérimentalement (Figure 2.14) pour la réception des ondes de surface et de l'onde longitudinale avec celle déterminé à partir de l'équation (2.64), on observe une bonne concordance. Les différences entre les courbes sont expliquées par la prise en compte d'une sensibilité spatiale constante et par l'influence des modes radiaux entre (300 et 350kHz). L'accord global permet de conclure que le capteur est soumis principalement aux vibrations normales, cela peut être expliqué par la présence du fluide couplant qui atténue les modes radiaux.

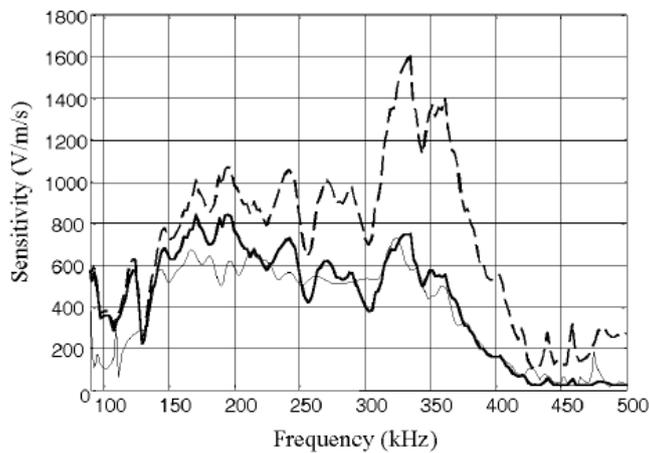


Figure 2.14: sensibilité à la réception du capteur piézoélectrique (PAC  $\mu 80$  : diamètre 10 mm, plage fréquentielle donnée par constructeur 100-500 kHz), onde de Rayleigh obtenue expérimentalement (en trait fin), onde longitudinale obtenue expérimentalement (en trait discontinu) et sensibilité de l'onde de Rayleigh obtenue par le produit entre la fonction d'ouverture et la sensibilité spatiale (trait épais), figure extraite de [73].

### 2.2.2.2 Extensions possibles du modèle piston

Le modèle de Goujon et Baboux [73] est étendu par Monnier et Dia [74]. Ces derniers proposent une approche semi empirique pour la prise en compte de la dépendance radiale de la fonction d'ouverture du capteur. Cette approche consiste à compléter le calcul analytique par des mesures expérimentales du profil de vibration à l'aide d'un interféromètre sans contact. En effet, ils considèrent une sensibilité spatiale plus complexe basée sur un profil vibratoire axisymétrique donnée par l'équation (2.65).

$$m(r) = m_0 \psi(r) e^{-i\varphi(r)} \quad (2.65)$$

où  $m_0$  est la sensibilité spatiale maximale à la vitesse normale de la surface du capteur,  $\varphi(r)$  est le déphasage de cette vibration et  $\psi(r)$  est un réel compris entre 0 et 1. La fonction d'ouverture peut alors s'écrire :

$$F(f, r) = \frac{m_0}{S} \sqrt{D} e^{ik_R D} \psi(r) \iint_S \frac{e^{-i(k_R r_0 + \varphi(r))}}{\sqrt{r_0}} r dr d\theta \quad (2.66)$$

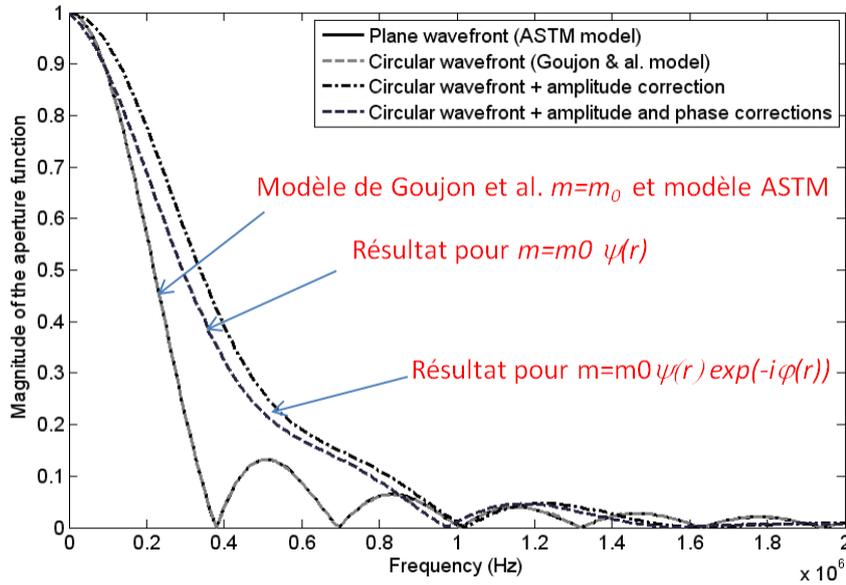


Figure 2.15: influence de la dépendance radiale de la sensibilité spatiale sur la fonction d'ouverture du capteur [74].

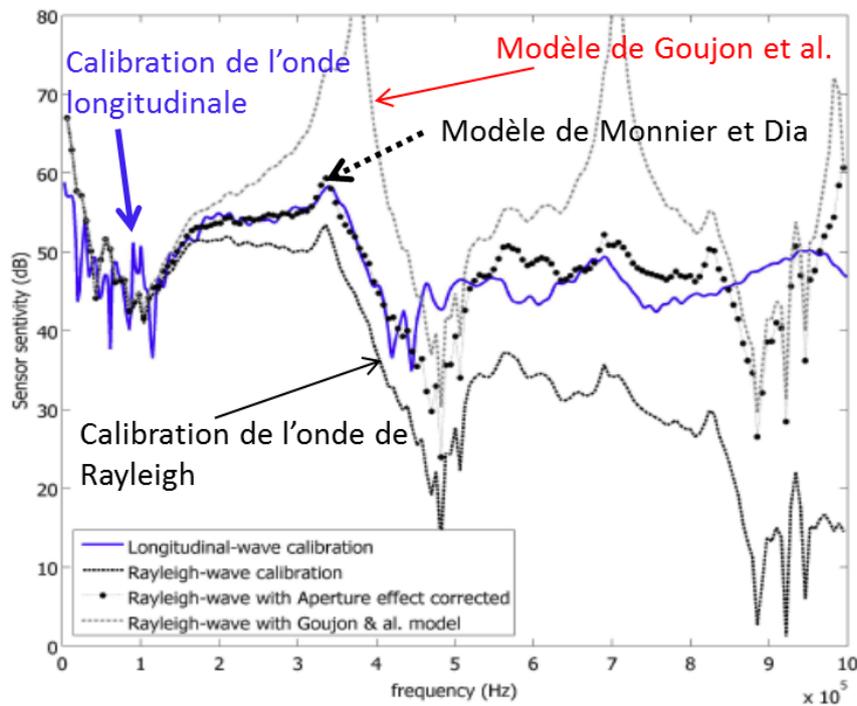


Figure 2.16 : influence de la correction de la fonction d'ouverture sur la sensibilité à la réception de l'onde de Rayleigh et comparaison avec la sensibilité de l'onde longitudinale [74].

Les fonctions  $\varphi(r)$  et  $\psi(r)$  sont déterminés expérimentalement. La Figure 2.15 montre l'influence de la prise en compte de la dépendance radiale de la sensibilité spatiale sur la

fonction d'ouverture du capteur. L'analyse de la Figure 2.16 montre qu'il y a un très bon accord entre les mesures expérimentales de la sensibilité de la réception de l'onde de Rayleigh et celle obtenue par une correction du modèle analytique à l'aide des fonctions  $\varphi(r)$  et  $\psi(r)$ .

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, deux études bibliographiques ont été menées en parallèle, la première concernait la modélisation de la source d'EA et la seconde les capteurs d'EA. La première étude m'a permis de faire un choix quant à la nature du modèle de source issue de la mécanique de la rupture qui offre le meilleur compromis pour notre étude. Ce modèle prend en compte à la fois la dépendance temporelle du profil de fissure et le champ élastodynamique sur toute la fissure. La seconde étude avait pour objectif d'établir un modèle de réception par un capteur d'EA. J'ai particulièrement détaillé la modélisation du capteur piézoélectrique car il est le plus exploité en CND par EA, et j'utiliserai le modèle piston par la suite afin de modéliser la réception des ondes émises par un défaut sous contrainte.

## Chapitre 3 Modélisation 2D de l'EA en onde de Rayleigh

3.1	Etat de l'art sur la modélisation 2D de la propagation de l'onde de Rayleigh.....	54
3.1.1	Modèles de propagation analytiques pour une surface plane .....	54
3.1.1.1	Expression analytique du déplacement de l'onde de Rayleigh .....	54
3.1.1.2	Fonction de Green 2D de l'onde de Rayleigh .....	57
3.1.2	Modèles de propagation pour une surface cylindrique.....	61
3.1.2.1	Expression analytique du déplacement.....	61
3.1.2.2	Expression asymptotique du déplacement .....	64
3.1.3	Discussion sur les choix des modèles de propagation .....	67
3.2	Couplage entre un modèle de source d'EA et un modèle 2D de propagation de l'onde de Rayleigh .....	68
3.2.1	Formulation de couplage basée sur l'utilisation d'une onde virtuelle .....	68
3.2.1.1	Structure plane .....	68
3.2.1.2	Structure cylindrique .....	75
3.2.2	Applications numériques.....	78
3.2.2.1	Simulation de la source d'EA .....	79
3.2.2.2	Simulation des formes d'onde .....	80
3.2.3	Synthèse .....	86
3.3	Cas d'application : Simulation d'un contrôle par EA en onde de Rayleigh .....	87
3.3.1	Expression de la tension délivrée en sortie par un capteur d'EA .....	87
3.3.2	Exemples d'application .....	88
3.4	Conclusion .....	91

*Ce chapitre est consacré à l'étude de l'émission acoustique en onde de Rayleigh par un défaut sous contrainte dans le cas des structures épaisses. Dans un premier temps, nous présentons l'état de l'art sur la modélisation de la propagation de l'onde de Rayleigh le long de surfaces plane et cylindrique (modèle 2D). Dans un deuxième temps nous détaillons, le développement théorique des formulations de couplage entre un modèle de source d'EA et les différents modèles de propagation de l'onde de Rayleigh. Le premier modèle est basé sur une extension de la formulation d'Achenbach [12], permettant de prédire le champ émis par une fissure d'orientation quelconque soumise à un champ de contraintes quelconque, sous forme d'onde de Rayleigh le long d'une surface plane en 2D. Ensuite nous décrivons l'extension de cette*

formulation au cas de l'EA en onde de Rayleigh sur une surface cylindrique, utilisant un modèle de propagation asymptotique. Dans la dernière partie, nous donnons des cas d'application 2D qui permettent de simuler la chaîne complète de contrôle par EA et de prédire la réponse d'un capteur d'EA. Pour les simulations, nous utilisons le calcul de champ de déplacement des ondes émises par un défaut sous contraintes obtenu à partir des formulations de couplage et un modèle de capteur d'EA basé sur l'approche piston présentée au chapitre précédent.

## 3.1 Etat de l'art sur la modélisation 2D de la propagation de l'onde de Rayleigh

### 3.1.1 Modèles de propagation analytiques pour une surface plane

#### 3.1.1.1 Expression analytique du déplacement de l'onde de Rayleigh

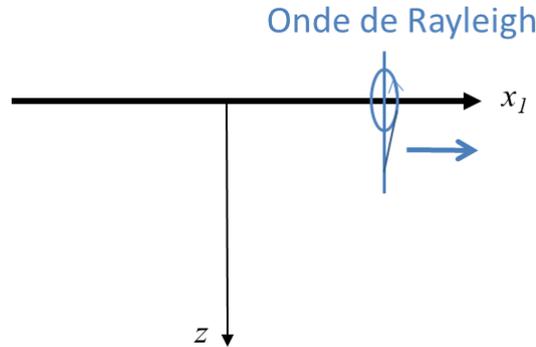


Figure 3.1 : onde de Rayleigh dans un demi-plan.

On considère un demi plan et une onde de Rayleigh se propageant le long de la surface dans la direction des  $x_1 > 0$  (Figure 3.1).

Les premiers travaux réalisés sur la description de l'onde de Rayleigh ont été effectués par Viktorov [76]. Il calcule les expressions du déplacement en résolvant les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_R}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_R}{\partial z^2} + k_L^2 \varphi_R &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi_R}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi_R}{\partial z^2} + k_T^2 \psi_R &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

qui ont pour inconnues les potentiels scalaire  $\varphi_R$  et vecteur  $\psi_R$  tels que :

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi_R + \text{rot } \psi_R \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur déplacement,  $k_L$  et  $k_T$  étant respectivement les nombres d'onde des ondes longitudinale et transversale.

Les composantes des déplacements et des contraintes peuvent s'exprimer de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{\partial \varphi_R}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_R}{\partial z} \\
 u_z &= \frac{\partial \varphi_R}{\partial z} + \frac{\partial \psi_R}{\partial x_1} \\
 \tau_{11} &= \lambda \left( \frac{\partial^2 \varphi_R}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_R}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_R}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi_R}{\partial x_1 \partial z} \right) \\
 \tau_{zz} &= \lambda \left( \frac{\partial^2 \varphi_R}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_R}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_R}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_R}{\partial x_1 \partial z} \right) \\
 \tau_{1z} &= \mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_R}{\partial x_1 \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_R}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi_R}{\partial z^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Il cherche ensuite des solutions correspondant à une onde plane harmonique se propageant le long des  $x_1 > 0$  dont les potentiels peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \varphi_R &= F(z) e^{-i(k_R x_1 - \omega t)} \\
 \psi_R &= G(z) e^{-i(k_R x_1 - \omega t)}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Les équations (3.1) deviennent donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} - (k_R^2 - k_L^2) F(z) &= 0 \\
 \frac{\partial^2 G(z)}{\partial z^2} - (k_R^2 - k_T^2) G(z) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

avec

$$k_R^2 > k_T^2 > k_L^2 \tag{3.6}$$

Les solutions des deux équations différentielles (3.5) linéairement indépendantes sont :

$$\begin{aligned}
 F(z) &= A e^{\pm \sqrt{(k_R^2 - k_L^2)} z} \\
 G(z) &= B e^{\pm \sqrt{(k_R^2 - k_T^2)} z}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$A$  et  $B$  étant des constantes. Le nombre d'onde de l'onde de Rayleigh est défini par  $k_R = k_T / \eta_R$

où  $k_T = \omega \left( \frac{\rho}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}$  et  $k_L = \omega \left( \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)} \right)^{\frac{1}{2}}$ . Une expression approchée de  $\eta_R$  (équation (3.8)) est calculée par Viktorov [76].

$$\eta_R = \frac{0.87 + 1.12\nu}{1 + \nu} \quad (3.8)$$

$\rho$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  sont respectivement la masse volumique, le coefficient de Poisson et les constantes de Lamé qui sont données par:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.9)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$E$  étant le module de Young.

Les solutions avec une racine positive correspondent à une onde qui croit exponentiellement avec la profondeur, les solutions avec une racine négative correspondent quant à elles à une onde qui décroît exponentiellement, i.e. une onde de surface. Par conséquent, les potentiels sont donnés par les expressions suivantes :

$$\varphi_R = Ae^{-pz} e^{-i(k_R x_1 - \omega t)} \quad (3.10)$$

$$\psi_R = Be^{-qz} e^{-i(k_R x_1 - \omega t)} \quad (3.11)$$

$p$  et  $q$  sont définis par :

$$p^2 = k_R^2 - k_L^2 \quad (3.12)$$

$$q^2 = k_R^2 - k_T^2$$

À partir des conditions limites de contraintes nulles en  $z=0$ , on peut déduire la relation entre les deux amplitudes  $A$  et  $B$  et obtenir les équations de potentiels suivantes :

$$\varphi_R = Ae^{-pz} e^{-i(k_R x_1 - \omega t)} \quad (3.13)$$

$$\psi_R = iA \frac{2k_R q}{k_R^2 + k_T^2} e^{-qz} e^{-i(k_R x_1 - \omega t)}$$

Les composantes de déplacements et de contraintes s'obtiennent à partir des équations (3.3).

À partir de ces expressions, on peut écrire les déplacements et les contraintes de l'onde de Rayleigh d'amplitude  $M$  se propageant suivant les  $x_1 > 0$  de la façon suivante [75]:

$$u_1(x_1, z) = -iM(\omega)V^R(z)e^{-ik_R x_1} \quad (3.14)$$

$$u_z(x_1, z) = M(\omega)W^R(z)e^{-ik_R x_1} \quad (3.15)$$

$$\tau_{11}(x_1, z) = M(\omega)T_{11}^R(z)e^{-ik_R x_1} \quad (3.16)$$

$$\tau_{1z}(x_1, z) = -iM(\omega)T_{1z}^R(z)e^{-ik_R x_1} \quad (3.17)$$

$$\tau_{zz}(x_1, z) = M(\omega)T_{zz}^R(z)e^{-ik_R x_1} \quad (3.18)$$

Le terme en  $e^{i\omega t}$  étant omis et :

$$M(\omega) = \frac{1}{2} \frac{k_R^2 + q^2}{p k_R^2} A \quad (3.19)$$

$$V^R(z) = d_1 e^{-pz} + d_2 e^{-qz} \quad (3.20)$$

$$W^R(z) = d_3 e^{-pz} - e^{-qz} \quad (3.21)$$

$$T_{11}^R(z) = \mu [d_4 e^{-pz} + d_5 e^{-qz}] \quad (3.22)$$

$$T_{1z}^R(z) = \mu [d_6 e^{-pz} + d_7 e^{-qz}] \quad (3.23)$$

$$T_{zz}^R(z) = \mu [d_8 e^{-pz} + d_9 e^{-qz}] \quad (3.24)$$

$d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8$  sont définis par:

$$d_1 = -\frac{1}{2} \frac{k_R^2 + q^2}{k_R p} \quad (3.25)$$

$$d_2 = \frac{q}{k_R} \quad (3.26)$$

$$d_3 = \frac{1}{2} \frac{k_R^2 + q^2}{k_R^2} \quad (3.27)$$

$$d_4 = \frac{1}{2} (k_R^2 + q^2) \frac{2p^2 + k_R^2 - q^2}{p k_R^2} \quad (3.28)$$

$$d_5 = -2q \quad (3.29)$$

$$d_6 = \frac{k_R^2 + q^2}{k_R} \quad (3.30)$$

$$d_7 = -\frac{k_R^2 + q^2}{k_R} \quad (3.31)$$

$$d_8 = -\frac{1}{2} \frac{k_R^2 + q^2}{k_R^2 p} (k_R^2 + q^2) \quad (3.32)$$

$$d_9 = 2q \quad (3.33)$$

### 3.1.1.2 Fonction de Green 2D de l'onde de Rayleigh

#### a Calcul par application de la réciprocité

Achenbach [32] calcule les fonctions de Green associées à l'onde de Rayleigh en appliquant le théorème de réciprocité qui relie deux états élastodynamiques différents ( $A$  et  $B$ ). Dans le domaine fréquentiel, ce théorème se traduit par l'équation (3.34) pour un volume  $V$  de surface  $S$ .

$$\int_V [f_j^A u_j^B - f_j^B u_j^A] dV = \int_S [\tau_{ij}^B u_j^A - \tau_{ij}^A u_j^B] n_i dS \quad (3.34)$$

$f_j, u_j, \tau_{ij}$  et  $n_i$  sont respectivement les composantes des forces volumiques, des déplacements des contraintes et de la normale sortante à  $S$ .

L'état  $A$  est équivalent à l'onde de surface générée par une force appliquée en un point source et le deuxième état est un état auxiliaire qui correspond à une onde de surface se

propageant en absence du point source. Les termes du tenseur de Green  $u_{ij}$  correspondent aux déplacements dans la direction  $i$  engendrés par une force  $f_j$  de direction  $j$ .

- calcul de  $u_{1,1}$  et  $u_{z,1}$

Afin de calculer les composantes de la première colonne du tenseur de Green, on associe l'état A à une force ponctuelle suivant la direction  $x_1$  (Figure 3.2). Cette force est donnée par l'expression suivante :

$$f_1 = Q\delta(x_1)\delta(z-z_0)e^{+i\omega t} \quad (3.35)$$

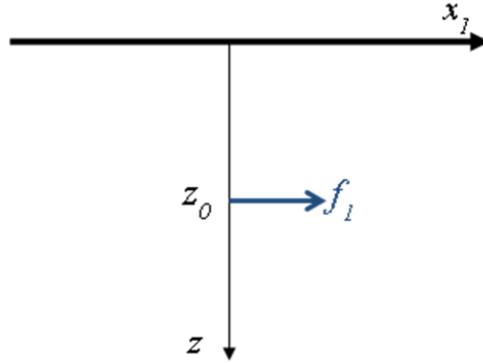


Figure 3.2 : force ponctuelle de direction  $x_1$ .

Les déplacements et les contraintes de l'onde de Rayleigh d'amplitude  $A$  générée par la force  $f_1$  sont donnés par les expressions suivantes :

$$u_1^A(x_1, z) = \pm iA(\omega)V^R(z)e^{\pm ik_R x_1} \quad (3.36)$$

$$u_z^A(x_1, z) = A(\omega)W^R(z)e^{\pm ik_R x_1} \quad (3.37)$$

$$\tau_{11}^A(x_1, z) = A(\omega)T_{11}^R(z)e^{\pm ik_R x_1} \quad (3.38)$$

$$\tau_{1z}^A(x_1, z) = \pm iA(\omega)T_{1z}^R(z)e^{\pm ik_R x_1} \quad (3.39)$$

$$\tau_{zz}^A(x_1, z) = A(\omega)T_{zz}^R(z)e^{\pm ik_R x_1} \quad (3.40)$$

Les signes + et – dans les équations (3.36) à (3.40) indiquent une propagation dans le sens des  $x_1 < 0$  et des  $x_1 > 0$ . L'inconnue est  $A(\omega)$  qui correspond à l'amplitude de l'onde émise par le défaut.

Le second état (état B) est un état auxiliaire, il correspond à une onde de Rayleigh virtuelle d'amplitude unitaire se propageant suivant les  $x_1 > 0$ . Les déplacements et les contraintes s'écrivent sous les formes suivantes:

$$u_1^B(x_1, z) = -iV^R(z)e^{-ik_R x_1} \quad (3.41)$$

$$u_z^B(x_1, z) = W^R(z)e^{-ik_R x_1} \quad (3.42)$$

$$\tau_{11}^B(x_1, z) = T_{11}^R(z)e^{-ik_R x_1} \quad (3.43)$$

$$\tau_{1z}^B(x_1, z) = -iT_{1z}^R(z)e^{-ik_R x_1} \quad (3.44)$$

$$\tau_{zz}^B(x_1, z) = T_{zz}^R(z) e^{-ik_R x_1} \quad (3.45)$$

Le contour d'intégration utilisé pour l'application du théorème de réciprocité est représenté sur la Figure 3.3:

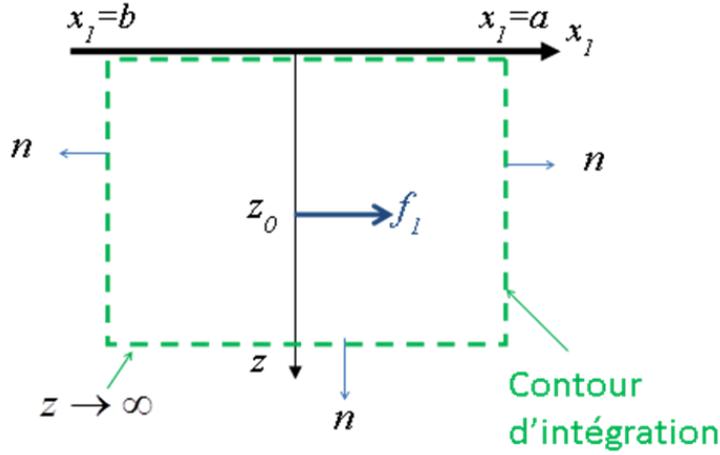


Figure 3.3 : contour d'intégration utilisé pour la résolution de l'équation (3.34).

$J_1$  est l'intégrale suivant la ligne  $x_1 = a, 0 \leq z \leq \infty$ ,  $J_2$  l'intégrale suivant la ligne  $x_1 = b, 0 \leq z \leq \infty$  et  $J_4$  l'intégrale suivant la ligne  $z = \text{constante} \rightarrow \infty$  c'est-à-dire là où l'amplitude de l'onde de Rayleigh tend vers zéro (Figure 3.3).

Les intégrales sur la surface libre et sur la ligne  $z = \text{constante} \rightarrow \infty$  s'annulent. La contribution des intégrales  $J_1$  et  $J_2$  est non nulle uniquement si les ondes se propagent en sens opposés [32].

Suivant la ligne  $x_1 = a, 0 \leq z \leq \infty$ , les ondes associées à l'état A et B se propagent dans la même direction, c'est-à-dire suivant les  $x_1 > 0$ . Les deux états sont similaires, on a donc:

$$J_1 = \int_0^{\infty} \left[ \tau_{ij}^B u_j^A - \tau_{ij}^A u_j^B \right]_{x_1=a} n_i dz = 0 \quad (3.46)$$

Suivant la ligne  $x_1 = b, 0 \leq z \leq \infty$ , on a:

$$J_2 = \int_0^{\infty} F_{AB} \Big|_{x_1=b} n_i dz \quad (3.47)$$

avec

$$F_{AB} = u_1^A \tau_{11}^B + u_z^A \tau_{1z}^B - u_1^B \tau_{11}^A - u_z^B \tau_{1z}^A \quad (3.48)$$

Le théorème de réciprocité s'écrit donc de la façon suivante :

$$\int_V \left[ f_1^A u_1^B \right] dV = J_2 = \int_0^{\infty} F_{AB} \Big|_{x_1=b} dz \quad (3.49)$$

À partir des équations (3.35) et (3.41), l'intégrale sur le volume se simplifie par :

$$\int_V [f_1^A u_1^B] dV = QV^R(z_0) \quad (3.50)$$

Et on obtient

$$QV^R(z_0) = 2iAI \quad (3.51)$$

où

$$I = \int_0^\infty [T_{11}^R(z)V^R(z) - T_{1z}^R(z)W^R(z)] dz \quad (3.52)$$

À partir de l'équation (3.51), on obtient l'expression de l'amplitude de l'onde de Rayleigh générée par la force  $f_1$  :

$$A = \frac{QV^R(z_0)}{2iI} \quad (3.53)$$

Les composantes du champ de déplacement de l'onde de Rayleigh se propageant suivant les  $x_1 > 0$  générée par une force de direction  $x_1$  appliquée au point  $(0, z_0)$  sont donc données par les expressions suivantes :

$$u_{1,1}^A(x_1, z) = i \frac{QV^R(z_0)}{2iI} V^R(z) e^{-ik_R x_1} \quad (3.54)$$

$$u_{z,1}^A(x_1, z) = - \frac{QV^R(z_0)}{2iI} W^R(z) e^{-ik_R x_1} \quad (3.55)$$

- calcul de  $u_{1,z}$  et  $u_{z,z}$

On applique de la même manière la réciprocité en considérant une force ponctuelle suivant l'axe  $z$ , appliquée en  $(x_1=0, z=z_0)$ , pour l'état  $A$ , tel que :

$$f_z = P\delta(x_1)\delta(z-z_0)e^{+i\omega t} \quad (3.56)$$

En utilisant la même démarche que précédemment, on peut montrer que les composantes du champ de déplacement de l'onde de Rayleigh, se propageant suivant les  $x_1 > 0$ , générée par une force de direction  $z$  sont :

$$u_{1,z}^A(x_1, z) = i \frac{PW^R(z_0)}{2iI} V^R(z) e^{-ik_R x_1} \quad (3.57)$$

$$u_{z,z}^A(x_1, z) = - \frac{PW^R(z_0)}{2iI} W^R(z) e^{-ik_R x_1} \quad (3.58)$$

Les déplacements de l'onde de Rayleigh générée par une force de direction quelconque s'obtiennent en effectuant une combinaison linéaire des équations (3.54) et (3.57) pour le déplacement horizontal et des équations (3.55) et (3.58) pour le déplacement vertical.

*b Calcul des fonctions de Green de l'onde de Rayleigh par la méthode d'Aki et Richards*

Aki et Richards [16] calculent les fonctions de Green des ondes de Rayleigh multicouches dans un demi-plan verticalement inhomogène. Il existe  $n$  modes de l'onde de Rayleigh, le nombre de modes dépend de l'inhomogénéité et du nombre de couches du milieu. Le tenseur de Green des ondes de Rayleigh en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\mathbf{G}^{Rayleigh} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{1z} \\ G_{z1} & G_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

avec

$$G_{11} = \sum_n \frac{r_1(k_n, h, \omega) r_1(k_n, z, \omega)}{4k_n c U I_1} e^{ik_n x + i \frac{\pi}{2}} \quad (3.60)$$

$$G_{z1} = \sum_n \frac{r_1(k_n, h, \omega) r_2(k_n, z, \omega)}{4k_n c U I_1} e^{ik_n x + i\pi} \quad (3.61)$$

$$G_{1z} = \sum_n \frac{r_2(k_n, h, \omega) r_1(k_n, z, \omega)}{4k_n c U I_1} e^{ik_n x} \quad (3.62)$$

$$G_{zz} = \sum_n \frac{r_2(k_n, h, \omega) r_2(k_n, z, \omega)}{4k_n c U I_1} e^{ik_n x + i \frac{\pi}{2}} \quad (3.63)$$

$c$  étant la vitesse de phase,  $U$  la vitesse de groupe et  $I_1$  est défini par :

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho (r_1^2 + r_2^2) dz \quad (3.64)$$

Les fonctions  $r_1$  et  $r_2$  sont des fonctions implicites dépendant de  $z$  et du nombre d'onde défini par des expressions intégrales, ces expressions ainsi que le détail de calcul sont disponibles dans [16]. À partir de ces équations, on peut retrouver l'expression de l'onde de Rayleigh en milieu isotrope en prenant les expressions de  $r_1$  et  $r_2$  correspondant à un tel milieu.

## 3.1.2 Modèles de propagation pour une surface cylindrique

### 3.1.2.1 Expression analytique du déplacement

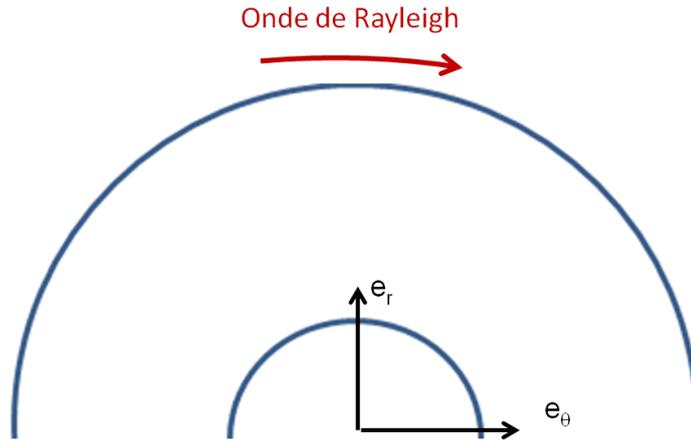


Figure 3.4 : onde de Rayleigh sur une surface cylindrique concave.

Viktorov [76] a également établi les solutions en ondes de Rayleigh de l'équation de propagation en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  à l'aide des fonctions de Bessel modifiées et des fonctions de Hankel, dans le cas d'une surface cylindrique concave ou convexe. Dans ces travaux, il définit le nombre d'onde angulaire  $\tilde{k}$  tel que :

$$\tilde{k} = kr \quad (3.65)$$

$k$  étant le nombre d'onde de l'onde de Rayleigh se propageant le long d'une surface cylindrique.

De la même manière que dans le cas de la surface plane, il calcule les déplacements et les contraintes de l'onde de Rayleigh se propageant le long d'une surface cylindrique à partir des potentiels scalaire et vecteur:

$$u_r = \frac{\partial \varphi_R}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_R}{\partial \theta} \quad (3.66)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_R}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_R}{\partial r} \quad (3.67)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \quad (3.68)$$

$$\sigma_{rr} = \lambda \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (3.69)$$

Le terme en  $e^{i\omega t}$  étant omis, les potentiels scalaires et vecteur sont définis dans le cas d'une surface concave par :

$$\varphi_R = Ae^{i\tilde{k}\theta} I_{\tilde{k}}(k_L r) \quad (3.70)$$

$$\psi_R = Be^{i\tilde{k}\theta} I_{\tilde{k}}(k_T r) \quad (3.71)$$

et par :

$$\varphi_R = Ae^{i\tilde{k}\theta} H_{\tilde{k}}(k_L r) \quad (3.72)$$

$$\psi_R = Be^{i\tilde{k}\theta} H_{\tilde{k}}(k_T r) \quad (3.73)$$

dans le cas d'une surface convexe.

$A$  et  $B$  sont des constantes,  $I_n$  et  $H_n$  sont respectivement les fonctions de Bessel modifiées et les fonctions de Hankel d'ordre  $n$  de première espèce définies par :

$$I_n(X) = i^{-n} J_n(iX) \quad (3.74)$$

$$H_n(X) = J_n(X) + iY_n(X) \quad (3.75)$$

$J_n$  et  $Y_n$  sont respectivement les fonctions de Bessel de première et de seconde espèce.

Viktorov [76] présente les relations entre le rayon de courbure  $R_c$  du cylindre et le nombre d'onde angulaire de l'onde de Rayleigh  $\tilde{k}$ . Dans le cas d'une onde se propageant sur une surface cylindrique convexe, le nombre d'onde angulaire et le rayon de courbure du cylindre sont liés par l'équation (3.76) et par l'équation (3.77) dans le cas d'une surface concave [76].

$$\frac{I_{\tilde{k}+2}(k_L R_c) + I_{\tilde{k}-2}(k_L R_c) - 2 \left( \frac{k_T^2}{k_L^2} - 1 \right) I_{\tilde{k}}(k_L R_c)}{I_{\tilde{k}+2}(k_L R_c) - I_{\tilde{k}-2}(k_L R_c)} = \frac{I_{\tilde{k}+2}(k_T R_c) - I_{\tilde{k}-2}(k_T R_c)}{I_{\tilde{k}+2}(k_T R_c) + I_{\tilde{k}-2}(k_T R_c)} \quad (3.76)$$

$$\frac{H_{\tilde{k}+2}^1(k_L R_c) + H_{\tilde{k}-2}^1(k_L R_c) - 2\left(\frac{k_T^2}{k_L^2} - 1\right)H_{\tilde{k}}^1(k_L R_c)}{H_{\tilde{k}+2}^1(k_L R_c) - H_{\tilde{k}-2}^1(k_L R_c)} = \frac{H_{\tilde{k}+2}^1(k_T R_c) - H_{\tilde{k}-2}^1(k_T R_c)}{H_{\tilde{k}+2}^1(k_T R_c) + H_{\tilde{k}-2}^1(k_T R_c)} \quad (3.77)$$

On remarque que le nombre d'onde angulaire intervient dans l'ordre des fonctions de Bessel ou de Hankel. Viktorov [76] résout graphiquement les équations (3.76) et (3.77), il en déduit que pour  $\tilde{k}$  assez grand ( $\tilde{k} > 100$ ) la vitesse de phase de l'onde de Rayleigh dans le cas d'une surface convexe peut s'écrire sous la forme suivante :

$$c_{convexe} \approx c_R (1 + \delta) \quad (3.78)$$

$\delta$  étant une correction de la vitesse de phase, elle tend vers zéro quand  $\tilde{k}$  tend vers l'infini. L'expression de  $\delta$  est calculée à partir de l'équation (3.76), pour des valeurs de  $k_L R_c$ ,  $k_T R_c$  et  $\tilde{k}$  assez grandes, en remplaçant les fonctions de Bessel par leurs représentations asymptotiques à l'aide de la série de Debye suivante :

$$I_{\tilde{k}}(\tilde{\gamma}) = \frac{e^{\tilde{k}(\text{th}(\tilde{\alpha}) - \tilde{\alpha})}}{\sqrt{2\pi\tilde{k}\text{th}(\tilde{\alpha})}} \left[ 1 + \frac{1}{\tilde{k}} \left( \frac{1}{8} \text{cth}(\tilde{\alpha}) - \frac{5}{24} \text{cth}^3(\tilde{\alpha}) \right) + \dots \right] \quad (3.79)$$

avec  $\frac{\tilde{k}}{\tilde{\gamma}} = \cosh(\tilde{\alpha})$ . En substituant les fonctions de Bessel dans l'équation (3.76) par leurs expressions asymptotiques de l'équation (3.79), on obtient :

$$\delta = \frac{N}{D} \quad (3.80)$$

avec

$$N = \left[ 1 + \frac{q}{p} + \frac{k_R}{2q} \left( 1 - \frac{q^2}{p^2} \right) \right] e^{2\text{arcth} \frac{p}{k_R} - 2\text{arcth} \frac{q}{k_R}} + \quad (3.81)$$

$$\left[ 1 + \frac{q}{p} - \frac{k_R}{2q} \left( 1 - \frac{q^2}{p^2} \right) \right] e^{-2\text{arcth} \frac{p}{k_R} + 2\text{arcth} \frac{q}{k_R}} - \frac{2q^2}{k_T^2} \left( \frac{k_T^2}{k_L^2} - 1 \right) \quad (3.82)$$

$$D = k_R R_c \left[ \left( 1 - \frac{q}{p} \right) \left( e^{2\text{arcth} \frac{p}{k_R} - 2\text{arcth} \frac{q}{k_R}} - e^{-2\text{arcth} \frac{p}{k_R} + 2\text{arcth} \frac{q}{k_R}} \right) + \frac{4k_R q}{k_T^2} \left( \frac{k_T^2}{k_L^2} - 1 \right) \right]$$

$p$  et  $q$  étant définis par l'équation (3.12).

D'une manière similaire, il démontre que la vitesse de phase en surface convexe s'écrit sous la forme suivante :

$$c_{concave} \approx c_R (1 - \delta) \quad (3.83)$$

Dans le cas cylindrique, les déplacements sont exprimés à l'aide des fonctions de Bessel et des fonctions de Hankel dont l'ordre dépend du nombre d'onde angulaire  $\tilde{k}$ .

Alternativement, il existe un modèle asymptotique permettant d'avoir des expressions plus simples que l'on présente dans le paragraphe suivant.

### 3.1.2.2 Expression asymptotique du déplacement

Les solutions analytiques présentées par Viktorov [76] étant exprimées à l'aide des fonctions de Bessel et des fonctions de Hankel dont l'ordre et l'argument dépendent du nombre d'onde angulaire, le calcul des expressions de déplacements est assez complexe. D'autres modèles de l'onde de Rayleigh se propageant sur une surface courbe ont été développés, parmi lesquels on peut citer la méthode asymptotique en 2D développée par Jin et al. [77]. Ces derniers modélisent la propagation de l'onde de Rayleigh en appliquant une méthode appelée WBK (Wentzel–Kramers–Brillouin), qui consiste à approximer asymptotiquement les solutions des équations différentielles linéaires du second ordre.

Jin et al. décrivent le comportement de l'onde de Rayleigh sur une surface à deux courbures constantes, la première courbure étant suivant la direction de propagation et la deuxième courbure suivant la direction  $\beta$  (Figure 3.5). On considère le modèle de [77] avec une seule courbure dans la direction de propagation.

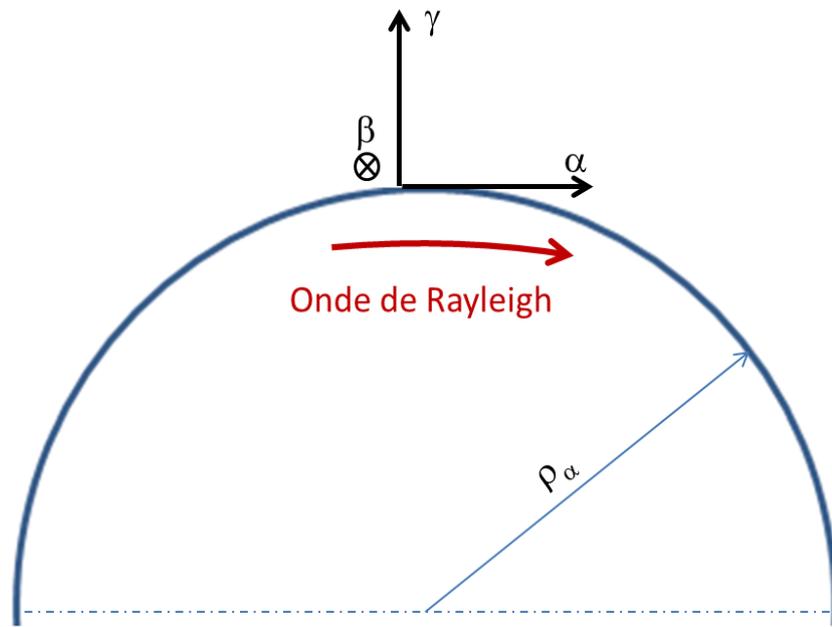


Figure 3.5 : onde de Rayleigh sur une surface cylindrique convexe.

Dans le cas d'une onde se propageant dans la direction  $\alpha$ , ils considèrent [77] les fonctions potentielles suivantes :

$$\varphi_R = e^{ik_R\alpha} U(\alpha, \gamma) \quad (3.84)$$

$$\psi_R = e^{ik_R\alpha} V(\alpha, \gamma) \quad (3.85)$$

le terme en  $e^{i\omega t}$  étant omis et  $k_R$  étant le nombre d'onde de l'onde de Rayleigh sur une surface plane.

À partir des potentiels scalaire et vecteur, ils expriment les composantes du déplacement dans la base orthogonale curviligne  $(\alpha, \gamma)$  de la façon suivante:

$$u_\alpha = \left(1 - \frac{\gamma}{\rho_\alpha}\right) \frac{\partial \varphi_R}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi_R}{\partial \gamma} \quad (3.86)$$

$$u_\gamma = \frac{\partial \varphi_R}{\partial \gamma} + \left(1 - \frac{\gamma}{\rho_\alpha}\right) \frac{\partial \psi_R}{\partial \alpha} \quad (3.87)$$

Les potentiels vérifient les équations de propagations suivantes :

$$\frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{h_\beta h_\gamma}{h_\alpha} \frac{\partial \varphi_R}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{h_\alpha h_\beta}{h_\gamma} \frac{\partial \varphi_R}{\partial \gamma} \right) \right] + k_l^2 \varphi_R = 0 \quad (3.88)$$

$$\frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{h_\beta h_\gamma}{h_\alpha} \frac{\partial \psi_R}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{h_\alpha h_\beta}{h_\gamma} \frac{\partial \psi_R}{\partial \gamma} \right) \right] + k_t^2 \psi_R = 0 \quad (3.89)$$

où :

$$h_\alpha \approx 1 + \frac{\gamma}{\rho_\alpha} \quad (3.90)$$

$$h_\beta \approx 1 \quad (3.91)$$

$$h_\gamma = 1 \quad (3.92)$$

En utilisant la technique WBK, ils obtiennent deux solutions approchées des équations différentielles (3.88) et (3.89) en fonctions des rayons de courbure de la surface.

$$\varphi_R = M \exp \left[ -ik\alpha + \left( q + \frac{n}{4} + \frac{p_0^2}{4q^2} \right) \gamma - \frac{1}{4} \left( nq + \frac{p_0^2}{q} \right) \gamma^2 \right] \quad (3.93)$$

$$\psi_R = N \exp \left[ -ik\alpha + \left( s + \frac{n}{4} + \frac{l_0^2}{4s^2} \right) \gamma - \frac{1}{4} \left( ns + \frac{l_0^2}{s} \right) \gamma^2 \right] \quad (3.94)$$

le terme en  $e^{i\omega t}$  étant omis et :

$$n = \frac{1}{\rho_\alpha} \quad (3.95)$$

$$q^2 = k^2 - k_L^2 \quad (3.96)$$

$$s^2 = k^2 - k_T^2 \quad (3.97)$$

$$p_0^2 = n(k_R^2 + k_L^2) \quad (3.98)$$

$$l_0^2 = n(k_R^2 + k_T^2) \quad (3.99)$$

Les conditions aux limites sur la surface libre sont traduites par l'équation suivante:

$$\tau_{\gamma\gamma}|_{\gamma=0} = \tau_{\alpha\gamma}|_{\gamma=0} = \tau_{\beta\gamma}|_{\gamma=0} = 0 \quad (3.100)$$

La satisfaction des conditions aux limites sur la surface libre nous permet d'obtenir la relation liant les deux amplitudes  $M$  et  $N$ . Pour cela, on écrit dans un premier temps les déformations dans la base curviligne orthogonale :

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \left(1 + \frac{\gamma}{\rho_\alpha}\right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} \quad (3.101)$$

$$\varepsilon_{\gamma\gamma} = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} \quad (3.102)$$

$$\varepsilon_{\alpha\gamma} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{u_\alpha}{\rho_\alpha} + \left(1 + \frac{\gamma}{\rho_\alpha}\right) \frac{\partial u_\gamma}{\partial \alpha} \quad (3.103)$$

Ensuite on exprime les conditions aux limites de contraintes nulles sur la surface libre en fonction des déformations (équations (3.104) et (3.105)).

$$\left(\lambda \varepsilon_{\alpha\alpha} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{\gamma\gamma}\right)|_{\gamma=0} = 0 \quad (3.104)$$

$$\left(2\mu \varepsilon_{\alpha\gamma}\right)|_{\gamma=0} = 0 \quad (3.105)$$

En injectant les équations (3.101) à (3.103) dans (3.104) et (3.105), on obtient la relation liant  $M$  et  $N$  (cf. annexe [A]).

Le calcul asymptotique [77] nous permet aussi d'exprimer la relation entre le nombre d'onde de l'onde de Rayleigh sur une surface plane et le nombre d'onde de l'onde de Rayleigh sur une surface cylindrique en fonction d'un paramètre  $\delta k$  qui dépend de la courbure de la surface ainsi que la fréquence:

$$k^2 = k_R^2(1 + \delta k) \quad (3.106)$$

avec

$$\delta k = \frac{1}{k_R A_3} \left( \frac{1}{\rho_\alpha} A_1 \right) \quad (3.107)$$

et

$$A_1 = (\lambda + 2\mu) \left( 2\sqrt{1-a} - a\sqrt{1-b} \right) \quad (3.108)$$

$$A_3 = 2 \left[ (\lambda + 2\mu)a - \mu(5 - 2b) \right] \quad (3.109)$$

$$a = \frac{k_L^2}{k_R^2} \quad (3.110)$$

$$b = \frac{k_T^2}{k_R^2} \quad (3.111)$$

Le développement du calcul en coordonnées curvilignes offre des expressions plus simples et facilement comparables à celles des expressions de l'onde de Rayleigh sur une surface plane. En effet, si on compare les expressions (3.10) et (3.11) avec (3.93) et (3.94), on

remarque que dans le cas d'une surface plane, on a une dépendance simple en  $z$  dans les exponentielles tandis que dans le cas cylindrique la dépendance est en  $\gamma$  et  $\gamma^2$  dans les exponentielles pour les expressions asymptotiques. En revanche, dans le cas du modèle de Viktorov [76] la dépendance en  $r$  intervient dans l'argument et l'ordre des fonctions de Bessel à travers le nombre d'onde angulaire (équation (3.65)).

### 3.1.3 Discussion sur les choix des modèles de propagation

Nous venons de détailler la modélisation de la propagation de l'onde de Rayleigh à travers les fonctions de Green ou les champs élastodynamiques de déplacement et de contrainte dans le cas d'une géométrie 2D plane ou cylindrique.

Concernant la géométrie cylindrique 2D, le modèle analytique de Viktorov [76] exprime les champs de déplacements et de contraintes à l'aide des fonctions de Hankel et de Bessel dont l'ordre et l'argument dépendent du nombre d'onde angulaire. De plus, l'utilisation des expressions asymptotiques en fonction des séries de Debye (équation (3.79)) et la relation reliant la vitesse de phase et le rayon de courbure  $R_c$  ne permet pas d'obtenir des expressions avec une dépendance simple en  $r$  dans les exponentielles. À l'inverse, le modèle asymptotique développé en coordonnées curvilignes permet de décrire l'onde de Rayleigh se propageant le long d'une surface cylindrique d'une manière explicite dans la direction circonférentielle. En effet, ce modèle offre des expressions plus simples et rend possible l'expression explicite des déplacements et des contraintes en fonction du rayon de courbure et du nombre d'onde associé à une surface plane. Par conséquent, l'approche WBK développée par Jin et al. [77] offre plus d'avantages pour étudier l'EA en surface cylindrique, c'est pourquoi nous adopterons cette approche pour la modélisation de l'EA en géométrie cylindrique 2D. De plus, l'écriture en coordonnées curvilignes nous permet d'avoir des expressions sous une forme proche de celle associée à une surface plane. De ce fait la résolution du problème sera similaire au cas d'une surface plane 2D.

Pour le cas de la géométrie plane 2D, la méthode de calcul d'Achenbach [32] semble la plus pertinente puisqu'elle permet de remonter directement et d'une manière explicite aux expressions des fonctions de Green dans le domaine fréquentiel pour un milieu isotrope. Le résultat de [16] est intéressant lorsqu'il s'agit d'un milieu verticalement inhomogène mais la dépendance en  $z$  est prise en compte implicitement. Toutefois, il est possible de retrouver les expressions de l'onde de Rayleigh en milieu isotrope en calculant les expressions intégrales des fonctions  $r_1$  et  $r_2$ . Comme nous nous intéresserons dans le cadre de la thèse à des matériaux isotropes, nous utiliserons donc la formulation d'Achenbach [32] afin d'effectuer le couplage entre le modèle de source d'EA et le modèle de propagation de l'onde de Rayleigh en géométrie plane 2D. Le couplage entre les modèles de fissuration issus de la mécanique de la rupture et les différents modèles de propagation constitue une originalité dans cette thèse.

## 3.2 Couplage entre un modèle de source d'EA et un modèle 2D de propagation de l'onde de Rayleigh

### 3.2.1 Formulation de couplage basée sur l'utilisation d'une onde virtuelle

L'objectif de cette partie est de présenter le couplage entre les modèles de propagation en onde de Rayleigh (surface plane et cylindrique) et les modèles de sources d'EA. L'originalité de ce paragraphe, est d'une part l'utilisation de modèles de sources issus de la mécanique de la rupture et d'autre part la prise en compte d'un défaut incliné soumis à un champ de contrainte arbitraire. Une autre originalité est l'extension du modèle de l'EA en onde de Rayleigh pour une surface plane aux cas des surfaces cylindriques en se basant sur un modèle de propagation de l'onde de Rayleigh en coordonnées curvilignes.

#### 3.2.1.1 Structure plane

##### a Présentation du problème

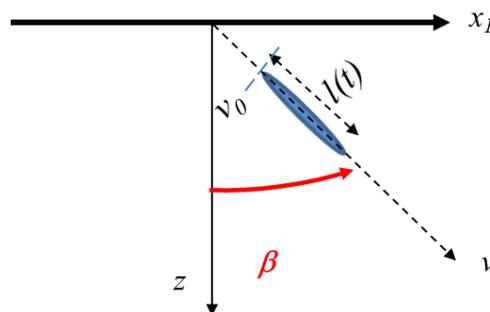


Figure 3.6 : fissure dans un demi-plan

Afin de calculer l'amplitude de l'onde de Rayleigh émise par un défaut sous contrainte (Figure 3.6), on applique une nouvelle fois le théorème de réciprocité élastodynamique donné par l'équation (3.34) pour effectuer le couplage entre les deux modèles.

##### b Définition des états élastodynamiques

On considère que le premier état élastodynamique A est la solution du problème d'EA en onde de Rayleigh générée par la propagation d'une fissure, le second état B étant un état élastodynamique auxiliaire pour lequel on choisit une onde de Rayleigh virtuelle se propageant suivant les  $x_1 > 0$  dans un milieu non fissuré.

Le premier état élastodynamique représente la solution du problème d'EA, c'est l'onde de Rayleigh d'amplitude  $A$  émise par un défaut sous contrainte se propageant à droite et à gauche de la fissure. Les déplacements et les contraintes relatives à l'état A sont donnés par les équations (3.36) à (3.40). Les signes + et - indiquent une propagation dans le sens des  $x_1 < 0$  et des  $x_1 > 0$ . L'inconnue que l'on cherche à déterminer est donc  $A(\omega)$  l'amplitude de l'onde émise par le défaut.

Le second état est un état auxiliaire, il correspond à une onde de Rayleigh virtuelle d'amplitude unitaire se propageant suivant l'axe des  $x_1 > 0$ . En absence de la fissure, les déplacements et les contraintes sont donnés par les équations (3.41) à (3.45).

### c Application de la réciprocité

En l'absence de forces volumiques dans les deux états, l'intégrale sur le volume de l'équation (3.34) s'annule et le principe de réciprocité s'écrit:

$$\int_S [\tau_{ij}^B u_j^A - \tau_{ij}^A u_j^B] n_i dS = 0 \quad (3.112)$$

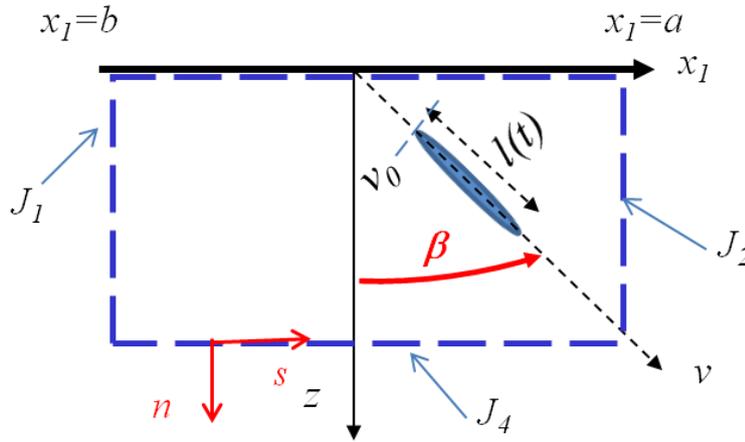


Figure 3.7 : définition des contours d'intégration

On considère la région du demi-plan limité par les lignes  $x_1=a$  et  $x_1=b$ . La source d'émission acoustique est une fissure d'orientation quelconque soumise à une contrainte arbitraire, dont l'origine est située à une distance  $v_0$  suivant l'axe  $\nu$  du repère local lié à la fissure. Le plan de la fissure fait un angle  $\beta$  avec l'axe  $z$ . La surface  $S$  considérée dans le théorème de réciprocité est composée de la surface délimitée par le contour bleu en pointillé sur la Figure 3.7, et la surface de la fissure. On note  $n$  la normale sortante à la surface.

On note  $J_3$  l'intégrale sur la surface du défaut,  $J_1$  l'intégrale suivant la ligne  $x_1 = b, 0 \leq z \leq \infty$ ,  $J_2$  l'intégrale suivant la ligne  $x_1 = a, 0 \leq z \leq \infty$  et  $J_4$  l'intégrale suivant la ligne  $z = \text{constante} \rightarrow \infty$ , où l'amplitude de l'onde de Rayleigh tend vers zéro (Figure 3.7).

La contribution des intégrales  $J_1$  et  $J_2$  est non nulle uniquement si les ondes se propagent en sens opposés [Achenbach].

Suivant la ligne  $x_1 = a, 0 \leq z \leq \infty$ , les ondes associées à l'état A et B se propagent dans la même direction, c'est-à-dire suivant les  $x_1 > 0$ . Les deux états sont similaires, on a donc:

$$J_2 = \int_0^\infty [\tau_{ij}^B u_j^A - \tau_{ij}^A u_j^B] \Big|_{x_1=a} n_i dz = 0 \quad (3.113)$$

Suivant la ligne  $x_1 = b, 0 \leq z \leq \infty$ , on a:

$$J_1 = \int_0^{\infty} F_{AB} \Big|_{x_1=b} n_i dz \quad (3.114)$$

$F_{AB}$  est donnée par l'équation (3.48). On remplace les déplacements et les contraintes par leurs expressions des équations (3.36) à (3.45), l'intégrale  $J_1$  devient:

$$J_1 = 2iAI \quad (3.115)$$

$I$  est donnée par l'équation (3.52).

On décompose l'intégrale sur la fissure en deux intégrales, la première intégrale  $J_3^+$  est suivant la ligne ( $u=0^+, v_0 \leq v < v_0 + l$ ) et la deuxième intégrale  $J_3^-$  est suivant la ligne ( $u=0^-, v_0 \leq v < v_0 + l$ ). On définit  $n$  et  $s$  comme étant les coordonnées relatives à la normale et la tangente aux contours d'intégration (Figure 3.7).

Suivant la ligne ( $u=0^+, v_0 \leq v < v_0 + l$ ), on a:  $v = v_0 + s, u_n = -u_w, u_s = u_v, \tau_n = \tau_{uw}, \tau_{ns} = -\tau_{uv}$  et  $dv = ds$ .

$$J_3^+ = - \int_{v_0}^{v_0+l} F_{AB}(u, v) \Big|_{v=0^+} dv \quad (3.116)$$

avec

$$F_{AB} = u_u^A \tau_{uu}^B + u_v^A \tau_{uv}^B - u_u^B \tau_{uu}^A - u_v^B \tau_{uv}^A \quad (3.117)$$

Suivant la ligne ( $u=0^-, v_0 \leq v < v_0 + l$ ), on a:  $v = v_0 + l - s, u_n = u_w, u_s = -u_v, \tau_n = \tau_{uw}, \tau_{ns} = -\tau_{uv}$  et  $dv = -ds$

$$J_3^- = \int_{v_0}^{v_0+l} E_{AB}(u, v) \Big|_{v=0^-} dv \quad (3.118)$$

L'intégrale sur la surface de la fissure s'écrit alors :

$$J_3 = J_3^- + J_3^+ = \int_{v_0}^{v_0+l} \left\{ E_{AB}(u, v) \Big|_{v=0^-} - E_{AB}(u, v) \Big|_{v=0^+} \right\} dv \quad (3.119)$$

ou encore

$$J_3 = \int_{v_0}^{v_0+l} \left\{ -\tau_{uu}^B \Big|_{u=0} \Delta u_u^A - \tau_{uv}^B \Big|_{u=0} \Delta u_v^A + \Delta \tau_{uu}^A u_u^B \Big|_{u=0} + \Delta \tau_{uv}^A u_u^B \Big|_{u=0} \right\} dv \quad (3.120)$$

avec

$$\Delta u_u^A = u_u^A(0^+, v) - u_u^A(0^-, v) \quad (3.121)$$

$$\Delta u_v^A = u_v^A(0^+, v) - u_v^A(0^-, v) \quad (3.122)$$

$$\Delta \tau_{uv}^A = \left[ \tau_{uv}^A(0^+, v) - \tau_{uv}^A(0^-, v) \right] \quad (3.123)$$

$$\Delta \tau_{uu}^A = \left[ \tau_{uu}^A(0^+, v) - \tau_{uu}^A(0^-, v) \right] \quad (3.124)$$

L'intégrale  $J_2$  étant nulle, l'amplitude de l'onde de Rayleigh émise par le défaut se calcule à partir de l'équation (3.125).

$$J_1 + J_3 = 0 \quad (3.125)$$

On remplace les intégrales  $J_1$  et  $J_3$  par leurs expressions des équations (3.115) et (3.120).

$$2i AI = \int_{v_0}^{v_0+l} \left\{ \tau_{uu}^B(0, v) \Delta u_u + \tau_{vv}^B(0, v) \Delta u_v - \Delta \tau_{uu}^A u_u^B(0, v) - \Delta \tau_{uv}^A u_v^B(0, v) \right\} dv \quad (3.126)$$

On note :

$$\begin{aligned} \widehat{C} &= \cos \beta \\ \widehat{S} &= \sin \beta \end{aligned} \quad (3.127)$$

La matrice de passage du repère global  $(0, x_1, z)$  au repère local lié à la fissure  $(0, u, v)$  est donnée par:

$$M = \begin{pmatrix} \widehat{C} & -\widehat{S} \\ \widehat{S} & \widehat{C} \end{pmatrix} \quad (3.128)$$

Les déplacements et contraintes dans le repère local sont définis par :

$$\begin{pmatrix} u_u \\ u_v \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_1 \\ u_z \end{pmatrix} \quad (3.129)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{uu}^B & \tau_{uv}^B \\ \tau_{vu}^B & \tau_{vv}^B \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \tau_{11}^B & \tau_{1z}^B \\ \tau_{z1}^B & \tau_{zz}^B \end{pmatrix} M \quad (3.130)$$

La relation entre les coordonnées locales et globales d'un point de demi espace situé dans la région des  $x_1 > 0$  est donnée par :

$$\begin{aligned} x_1 &= \widehat{C} u + \widehat{S} v \\ z &= -\widehat{S} u + \widehat{C} v \end{aligned} \quad (3.131)$$

En  $u=0$ , on a :

$$\begin{aligned} x_1 &= \widehat{S} v \\ z &= \widehat{C} v \end{aligned} \quad (3.132)$$

On remplace les contraintes et les déplacements par leurs expressions (équations (3.41) à (3.45)) dans l'équation (3.126), on obtient:

$$2i AI = \int_{v_0}^{l+v_0} \left\{ P(0, v) \Delta u_u + Q(0, v) \Delta u_v - \Delta \tau_{uu}^A \widetilde{V}(0, v) - \Delta \tau_{uv}^A \widetilde{W}(0, v) \right\} dv \quad (3.133)$$

avec

$$P(0, v) = [\widehat{C}^2 T_{11}^R - 2i \widehat{C} \widehat{S} T_{1z}^R + \widehat{S}^2 T_{zz}^R] e^{-ik_R \widehat{S} v} \quad (3.134)$$

$$Q(0, v) = [-\widehat{C} \widehat{S} T_{11}^R - i(\widehat{C}^2 - \widehat{S}^2) T_{1z}^R + \widehat{S} \widehat{C} T_{zz}^R] e^{-ik_R \widehat{S} v} \quad (3.135)$$

$$\tilde{V}(0, \nu) = -[\hat{C}iV + \hat{S}W] e^{-ik_R \bar{S}\nu} \quad (3.136)$$

$$\tilde{W}(0, \nu) = [-\hat{S}iV + \hat{C}W] e^{-ik_R \bar{S}\nu} \quad (3.137)$$

L'amplitude de l'onde de Rayleigh émise par le défaut est :

$$A = \frac{-i}{2I} \int_{\nu_0}^{l+\nu_0} \left\{ P(0, \nu) \Delta u_u + Q(0, \nu) \Delta u_v - \Delta \tau_{uu}^A \tilde{V}(0, \nu) - \Delta \tau_{uv}^A \tilde{W}(0, \nu) \right\} d\nu \quad (3.138)$$

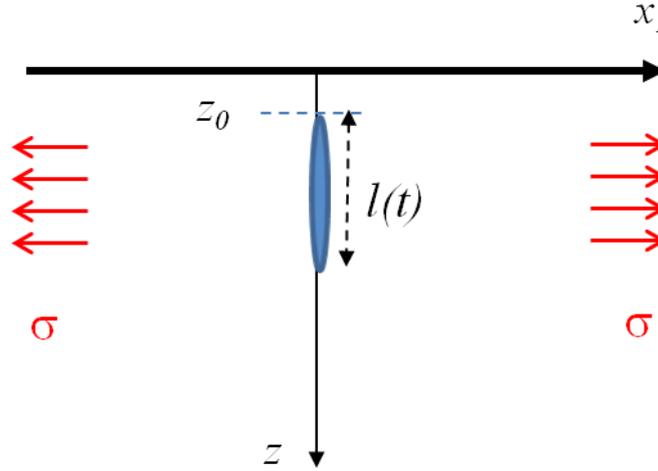


Figure 3.8 : fissure en mode I dans un demi-plan.

Dans le cas d'une fissure en mode I, avec  $\beta=0$  (Figure 3.8) on a:

$$A = \frac{-i}{2I} \int_{z_0}^{z_0+l} \left\{ T_{11}(0, z) \Delta u_1 \right\} dz \quad (3.139)$$

Le déplacement de l'onde de Rayleigh s'écrit alors :

$$u_1^A(x_1, z) = i \frac{-i}{2I} \int_{z_0}^{z_0+l} \left\{ T_{11}(0, z) \Delta u_1 \right\} dz V^R(z) e^{\pm ik_R x_1} \quad (3.140)$$

$$u_z^A(x_1, z) = \pm \frac{-i}{2I} \int_{z_0}^{z_0+l} \left\{ T_{11}(0, z) \Delta u_1 \right\} dz W^R(z) e^{\pm ik_R x_1} \quad (3.141)$$

En développant ces expressions, on peut retrouver facilement les expressions du déplacement calculé par Achenbach [32] pour le mode I et exprimer  $T_{11}$  en fonction des déplacements des fonctions de Green qui sont obtenus à partir des équations (3.54), (3.55), (3.57) et (3.58) en considérant des forces d'amplitudes unitaires. On obtient :

$$u_1^A(x_1, z) = \int_{z_0}^{z_0+l} \left\{ \Delta u_1 \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_{1,1}^G((x_1, z), (0, \tilde{z}))}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_{1,z}^G((x_1, z), (0, \tilde{z}))}{\partial z} \right) \right\} d\tilde{z} \quad (3.142)$$

$$u_z^A(x_1, z) = \int_{z_0}^{z_0+l} \left\{ \Delta u_1 \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_{z,1}^G((x_1, z), (0, \tilde{z}))}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_{z,z}^G((x_1, z), (0, \tilde{z}))}{\partial z} \right) \right\} d\tilde{z} \quad (3.143)$$

$(x_1, z)$  étant les coordonnées du point d'observation et  $\tilde{z}$  correspond à la coordonnée du point d'application suivant l'axe  $z$ .

Ce résultat est équivalent à une distribution de forces impulsives sur les deux lèvres de la fissure [32]. Achenbach approxime cette distribution de dipôles par un seul dipôle appliqué au centre de la fissure, ce qui revient à considérer les fonctions de Green des équations (3.144) et (3.145) au centre du défaut. On a alors :

$$u_1^A(x_1, z) = \int_{z_0}^{z_0+l} \{ \Delta u_1 \} d\tilde{z} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_{1,1}^G((x_1, z), (0, h))}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_{1,z}^G((x_1, z), (0, h))}{\partial z} \right) \quad (3.144)$$

$$u_z^A(x_1, z) = \int_{z_0}^{z_0+l} \{ \Delta u_1 \} d\tilde{z} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_{z,1}^G((x_1, z), (0, h))}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_{z,z}^G((x_1, z), (0, h))}{\partial z} \right) \quad (3.145)$$

On retrouve donc les expressions du déplacement de l'onde de Rayleigh générée par un dipôle en  $z=h$  d'amplitude  $(\lambda + 2\mu)\Delta$  et  $\lambda \Delta$ , avec :

$$\Delta = \int_{z_0}^{z_0+l} \{ \Delta u_1 \} d\tilde{z} \quad (3.146)$$

*d Obtention de la formulation du couplage par une méthode basée sur les fonctions de Green*

*On a démontré dans le paragraphe précédent qu'on peut retrouver les expressions des déplacements générés par une fissure en mode I développées par Achenbach à partir des fonctions de Green. Dans ce paragraphe, on détaille l'obtention de la formulation de couplage dans le cas d'une fissure inclinée sous contrainte par une autre méthode. Cette dernière utilise les fonctions de Green à la place des champs de déplacement et de contrainte.*

- Définitions des états élastodynamiques

On considère une fissure inclinée soumise à une contrainte quelconque, situé à une distance  $v_0$  suivant l'axe  $v$  du repère local  $(u, v)$  lié au défaut. On applique la réciprocité dans le repère local lié au défaut en prenant pour état A la solution du problème d'émission acoustique en ondes de Rayleigh et l'état B les déplacements et les contraintes engendrés par une force appliquée dans la direction  $x_k$ , ( $k=v$  ou  $u$ )

- Application de la réciprocité

Dans le repère local, les composantes du déplacement généré par la fissure sont [32]:

$$u_k^A(\tilde{\xi}) = \int_{\Sigma} \left[ u_{i,k}^G(\tilde{X}, \tilde{\xi}) \tau_{ij}^A - u_i^A c_{ijpq} \frac{\partial u_{p,k}^G(\tilde{X}, \tilde{\xi})}{\partial \tilde{x}_q} \right] n_i(\tilde{X}) d\Sigma(\tilde{X}) \quad (3.147)$$

$\tilde{\xi}$  et  $\tilde{X}$  sont respectivement les coordonnées du point d'observation et du point d'application de la force.

D'où :

$$u_u^A(\tilde{\xi}) = \int_{v_0}^{v_0+l} \left[ \Delta u_u^A \left( c_{11} \frac{\partial u_{u,u}^G(\tilde{X}, \tilde{\xi})}{\partial u} + c_{13} \frac{\partial u_{v,u}^G(\tilde{X}, \tilde{\xi})}{\partial v} \right) + \right. \quad (3.148)$$

$$\left. \Delta u_v^A \left( c_{55} \frac{\partial u_{u,u}^G(\tilde{X}, \tilde{\xi})}{\partial v} + c_{55} \frac{\partial u_{v,u}^G(\tilde{X}, \tilde{\xi})}{\partial u} \right) - \Delta \tau_{uu}^A u_{u,u}^G(\tilde{X}, \tilde{\xi}) - \Delta \tau_{vu}^A u_{v,u}^G(\tilde{X}, \tilde{\xi}) \right] dv$$

$$u_v^A(\tilde{\xi}) = \int_{v_0}^{v_0+l} \left[ \Delta u_u^A \left( c_{11} \frac{\partial u_{u,v}^G(\tilde{X}, \tilde{\xi})}{\partial u} + c_{13} \frac{\partial u_{v,v}^G(\tilde{X}, \tilde{\xi})}{\partial v} \right) \right. \quad (3.149)$$

$$\left. + \Delta u_v^A \left( c_{55} \frac{\partial u_{u,v}^G(\tilde{X}, \tilde{\xi})}{\partial v} + c_{55} \frac{\partial u_{v,v}^G(\tilde{X}, \tilde{\xi})}{\partial u} \right) - \Delta \tau_{uu}^A u_{u,v}^G(\tilde{X}, \tilde{\xi}) - \Delta \tau_{vu}^A u_{v,v}^G(\tilde{X}, \tilde{\xi}) \right] dv$$

avec

$$c_{11} = (\lambda + 2\mu) \quad (3.150)$$

$$c_{13} = \lambda \quad (3.151)$$

$$c_{55} = \mu \quad (3.152)$$

Or,

$$u_{p,k}^G(\tilde{X}, \tilde{\xi}) = u_{k,p}^G(\tilde{\xi}, \tilde{X}) \quad (3.153)$$

donc

$$u_u^A(\tilde{\xi}) = \int_{v_0}^{v_0+l} \left[ \Delta u_u^A \left( c_{11} \frac{\partial u_{u,u}^G(\tilde{\xi}, \tilde{X})}{\partial u} + c_{13} \frac{\partial u_{u,v}^G(\tilde{\xi}, \tilde{X})}{\partial v} \right) \right. \quad (3.154)$$

$$\left. + \Delta u_v^A \left( c_{55} \frac{\partial u_{u,u}^G(\tilde{\xi}, \tilde{X})}{\partial v} + c_{55} \frac{\partial u_{u,v}^G(\tilde{\xi}, \tilde{X})}{\partial u} \right) - \Delta \tau_{uu}^A u_{u,u}^G(\tilde{\xi}, \tilde{X}) - \Delta \tau_{vu}^A u_{u,v}^G(\tilde{\xi}, \tilde{X}) \right] dv$$

$$u_v^A(\tilde{\xi}) = \int_{v_0}^{v_0+l} \left[ \Delta u_u^A \left( c_{11} \frac{\partial u_{v,u}^G(\tilde{\xi}, \tilde{X})}{\partial u} + c_{13} \frac{\partial u_{v,v}^G(\tilde{\xi}, \tilde{X})}{\partial v} \right) \right. \quad (3.155)$$

$$\left. + \Delta u_v^A \left( c_{55} \frac{\partial u_{v,u}^G(\tilde{\xi}, \tilde{X})}{\partial v} + c_{55} \frac{\partial u_{v,v}^G(\tilde{\xi}, \tilde{X})}{\partial u} \right) - \Delta \tau_{uu}^A u_{v,u}^G(\tilde{\xi}, \tilde{X}) - \Delta \tau_{vu}^A u_{v,v}^G(\tilde{\xi}, \tilde{X}) \right] dv$$

Le tenseur de Green dans le repère local  $(u, v)$  est défini par :

$$\begin{bmatrix} u_{u,u}^G & u_{u,v}^G \\ u_{v,u}^G & u_{v,v}^G \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

La relation entre les tenseurs de Green en coordonnées locales et globales est définie par :

$$\begin{bmatrix} u_{u,u}^G & u_{u,v}^G \\ u_{v,u}^G & u_{v,v}^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1}^G & u_{1,z}^G \\ u_{z,1}^G & u_{z,z}^G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

On peut facilement retrouver les expressions du déplacement calculé par la première méthode de couplage en repassant dans le repère global.

### 3.2.1.2 Structure cylindrique

#### a Présentation du problème et adaptation du modèle de propagation

La modélisation de l'EA en onde de Rayleigh sur une surface cylindrique (Figure 3.9) repose sur le développement d'une formulation du couplage entre un modèle asymptotique de propagation en coordonnées curvilignes (présentée au paragraphe 3.1.2.2) et un modèle de source d'EA.

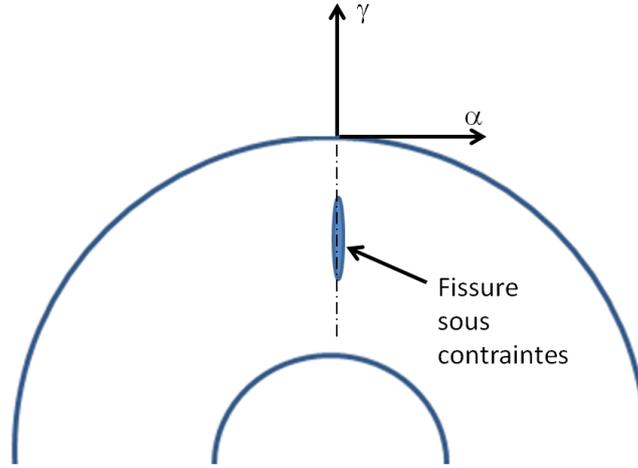


Figure 3.9 : configuration du problème d'EA en onde de Rayleigh en géométrie cylindrique 2D.

La première étape de l'établissement de la formulation du couplage est l'obtention des expressions des déplacements et des contraintes en fonction d'une même amplitude  $M$ . Pour cela, on exprime la relation entre les amplitudes  $M$  et  $N$  des potentiels scalaires et vecteurs, à partir des conditions aux limites, en fonction de  $\chi$  qui est défini dans l'annexe [A]. Les potentiels (équations (3.93) et (3.94)) s'écrivent alors sous la forme suivante :

$$\varphi_R = M e^{-ik\alpha} \exp \left[ \left( q + \frac{n}{4} + \frac{p_0^2}{4q^2} \right) \gamma - \frac{1}{4} \left( nq + \frac{p_0^2}{q} \right) \gamma^2 \right] \quad (3.158)$$

$$\psi_R = i\chi M e^{-ik\alpha} \exp \left[ \left( s + \frac{n}{4} + \frac{l_0^2}{4s^2} \right) \gamma - \frac{1}{4} \left( ns + \frac{l_0^2}{s} \right) \gamma^2 \right] \quad (3.159)$$

Afin de simplifier les expressions, on note :

$$\tilde{F}(\gamma) = \left( q + \frac{n}{4} + \frac{p_0^2}{4q^2} \right) \gamma - \frac{1}{4} \left( nq + \frac{p_0^2}{q} \right) \gamma^2 \quad (3.160)$$

$$\tilde{G}(\gamma) = \left( s + \frac{n}{4} + \frac{l_0^2}{4s^2} \right) \gamma - \frac{1}{4} \left( ns + \frac{l_0^2}{s} \right) \gamma^2 \quad (3.161)$$

On obtient donc les expressions des déplacements et contraintes sous la forme suivante :

$$u_\alpha = -iMV^C(\gamma)e^{-ik\alpha} \quad (3.162)$$

$$u_\gamma = MW^C(\gamma)e^{-ik\alpha} \quad (3.163)$$

$$\tau_{\alpha\gamma} = -iMT_{\alpha\gamma}^C(\gamma)e^{-ik\alpha} \quad (3.164)$$

$$\tau_{\alpha\alpha} = MT_{\alpha\alpha}^C(\gamma)e^{-ik\alpha} \quad (3.165)$$

avec

$$V^C(\gamma) = k \left( 1 - \frac{\gamma}{\rho_\alpha} \right) e^{\tilde{F}(\gamma)} + \chi \tilde{G}'(\gamma) e^{\tilde{G}(\gamma)} \quad (3.166)$$

$$W^C(\gamma) = \tilde{F}' e^{\tilde{F}(\gamma)} + \left( 1 - \frac{\gamma}{\rho_\alpha} \right) \chi k e^{\tilde{G}(\gamma)} \quad (3.167)$$

$$T_{\alpha\alpha}^C(\gamma) = \left[ \lambda \frac{dW^C(\gamma)}{d\gamma} + (\lambda + 2\mu) \left( 1 + \frac{\gamma}{\rho_\alpha} \right) k V^C(\gamma) \right] \quad (3.168)$$

$$T_{\alpha\gamma}^C(\gamma) = 2\mu \left[ \frac{dV^C(\gamma)}{d\gamma} + \frac{V^C(\gamma)}{\rho_\alpha} + \left( 1 + \frac{\gamma}{\rho_\alpha} \right) k W^C(\gamma) \right] \quad (3.169)$$

### b Définitions des états élastodynamiques

De la même manière que dans le cas plan, on définit l'état A comme la solution du problème d'EA associé à l'onde de Rayleigh émise par la propagation de la fissure et l'état B comme une onde de surface virtuelle d'amplitude unitaire se propageant le long de la surface dans la direction des  $\alpha$  positifs. Les expressions des déplacements et de contraintes associées à l'état A sont données par les équations suivantes :

$$u_\alpha = \pm iAV^C(\gamma)e^{\pm ik\alpha} \quad (3.170)$$

$$u_\gamma = AW^C(\gamma)e^{\pm ik\alpha} \quad (3.171)$$

$$\tau_{\alpha\gamma} = \pm iAT_{\alpha\gamma}^C(\gamma)e^{\pm ik\alpha} \quad (3.172)$$

$$\tau_{\alpha\alpha} = AT_{\alpha\alpha}^C(\gamma)e^{\pm ik\alpha} \quad (3.173)$$

L'état B est traduit par les équations suivantes :

$$u_\alpha = -iV^C(\gamma)e^{-ik\alpha} \quad (3.174)$$

$$u_\gamma = W^C(\gamma)e^{-ik\alpha} \quad (3.175)$$

$$\tau_{\alpha\gamma} = -iT_{\alpha\gamma}^C(\gamma)e^{-ik\alpha} \quad (3.176)$$

$$\tau_{\alpha\alpha} = T_{\alpha\alpha}^C(\gamma)e^{-ik\alpha} \quad (3.177)$$

### c Application de la réciprocité

On applique le théorème de réciprocité élastodynamique sur la configuration de la Figure 3.9. Les contours d'intégrations sont définis sur la Figure 3.10.

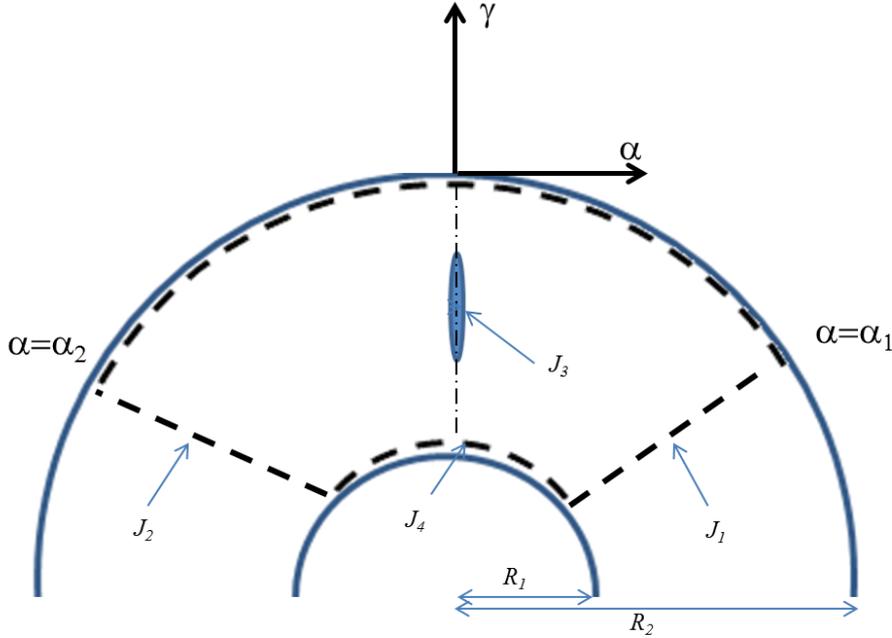


Figure 3.10 : contours d'intégration utilisés dans la formulation de réciprocité.

En l'absence de force volumique, on considère l'équation (3.112).

On note  $J_3$  l'intégrale sur la surface du défaut,  $J_1$  l'intégrale suivant la ligne  $\alpha = \alpha_1, 0 \leq \gamma < R_2 - R_1$ ,  $J_2$  l'intégrale suivant la ligne  $\alpha = \alpha_2, 0 \leq \gamma < R_2 - R_1$  et  $J_4$  l'intégrale suivant la ligne  $\gamma = R_1$ , où l'amplitude de l'onde de Rayleigh tend vers zéro (Figure 3.10).

La contribution des intégrales  $J_1$  et  $J_2$  est non nulle uniquement si les ondes se propagent en sens opposés comme dans le cas plan.

L'intégrale  $J_1$  s'écrit :

$$J_1 = - \int_0^{R_2-R_1} \left[ (u_\alpha^A \tau_{\alpha\alpha}^B - u_\alpha^B \tau_{\alpha\alpha}^A) + (u_\gamma^A \tau_{\alpha\gamma}^B - u_\gamma^B \tau_{\alpha\gamma}^A) \right] d\gamma \quad (3.178)$$

Après avoir remplacé les contraintes et déplacement par leur expressions des équations (3.170) à (3.177), l'équation (3.178) peut s'écrire de la façon suivante :

$$J_1 = 2iA \int_0^{R_2-R_1} \left[ T_{\alpha\alpha}^C V^C - T_{\alpha\gamma}^C W^C \right] d\gamma \quad (3.179)$$

$$J_1 = 2iA I^C \quad (3.180)$$

avec

$$I^C = \int_0^{R_2 - R_1} [T_{\alpha\alpha}^C V^C - T_{\alpha\gamma}^C W^C] d\gamma \quad (3.181)$$

$V^C$ ,  $W^C$ ,  $T_{\alpha\alpha}^C$  et  $T_{\alpha\gamma}^C$  sont définis dans les équations (3.166) à (3.169).

L'intégrale sur la surface du défaut peut s'écrire de la façon suivante :

$$J_3 = \int_{\gamma_0}^{\gamma_0+l} [(u_{\alpha}^A \tau_{\alpha\alpha}^B - u_{\alpha}^B \tau_{\alpha\alpha}^A) + (u_{\gamma}^A \tau_{\alpha\gamma}^B - u_{\gamma}^B \tau_{\alpha\gamma}^A)] \Big|_{\gamma=0^-} - [(u_{\alpha}^A \tau_{\alpha\alpha}^B - u_{\alpha}^B \tau_{\alpha\alpha}^A) + (u_{\gamma}^A \tau_{\alpha\gamma}^B - u_{\gamma}^B \tau_{\alpha\gamma}^A)] \Big|_{\gamma=0^+} d\gamma \quad (3.182)$$

Or  $J_1 + J_3 = 0$ , donc :

$$2iAI^C = \int_{\gamma_0}^{\gamma_0+l} [\Delta u_{\alpha}^A T_{\alpha\alpha}^C + \Delta u_{\gamma}^A T_{\alpha\gamma}^C - \Delta \tau_{\alpha\alpha}^A V^C - \Delta \tau_{\alpha\gamma}^A W^C] d\gamma \quad (3.183)$$

avec

$$\Delta u_{\gamma}^A = u_{\gamma}^A \Big|_{\gamma=0^+} - u_{\gamma}^A \Big|_{\gamma=0^-} \quad (3.184)$$

$$\Delta \tau_{\alpha\alpha}^A = \tau_{\alpha\alpha}^A \Big|_{\gamma=0^+} - \tau_{\alpha\alpha}^A \Big|_{\gamma=0^-} \quad (3.185)$$

$$\Delta \tau_{\alpha\gamma}^A = \tau_{\alpha\gamma}^A \Big|_{\gamma=0^+} - \tau_{\alpha\gamma}^A \Big|_{\gamma=0^-} \quad (3.186)$$

$$\Delta u_{\alpha}^A = u_{\alpha}^A \Big|_{\gamma=0^+} - u_{\alpha}^A \Big|_{\gamma=0^-} \quad (3.187)$$

À partir de l'équation (3.183), on obtient l'amplitude de l'onde de Rayleigh émise par la fissure.

$$A = \frac{-i}{2I^C} \int_{\gamma_0}^{\gamma_0+l} [\Delta u_{\alpha}^A T_{\alpha\alpha}^C + \Delta u_{\gamma}^A T_{\alpha\gamma}^C - \Delta \tau_{\alpha\alpha}^A V^C - \Delta \tau_{\alpha\gamma}^A W^C] d\gamma \quad (3.188)$$

Dans le cas d'une fissure en mode I, l'expression de l'amplitude de l'onde de Rayleigh est réduite à :

$$A = \frac{-i}{2I^C} \int_{\gamma_0}^{\gamma_0+l} [\Delta u_{\alpha}^A T_{\alpha\alpha}^C] d\gamma \quad (3.189)$$

Comme on pouvait s'y attendre, on retrouve bien une équation de forme similaire à celle obtenue dans le cas d'une surface plane 2D.

### 3.2.2 Applications numériques

*L'objectif de cette partie est d'étudier les formes d'onde en utilisant un modèle de source d'EA issu de la mécanique de la rupture. Dans un premier temps, on présente le modèle de source utilisé pour la simulation. Ensuite, on analysera l'influence de certains paramètres comme la vitesse de fissuration et le mode de chargement sur les formes d'onde. Ces analyses permettront d'améliorer la compréhension de l'évolution des formes d'ondes en fonction de certains paramètres et de conclure sur l'aspect pratique de cette étude*

concernant la distinction entre les formes d'onde ainsi que leurs détections. On considère un coefficient de poisson  $\nu=0.33$ .

### 3.2.2.1 Simulation de la source d'EA

Si l'on considère une fissure rectiligne en mode I, de longueur  $2a$  soumise à un champ de contraintes constant  $\sigma$ , le saut de déplacement peut alors s'écrire sous la forme suivante (cf. chapitre 2) :

$$\Delta u_1^A(z) = \frac{4(1-\nu^2)\sigma}{E} \sqrt{a^2 - z^2} \quad (3.190)$$

On suppose que la fissure se propage à une vitesse  $V$ , et on la discrétise. La Figure 3.11 montre la forme de la fissure et les points de la discrétisation.

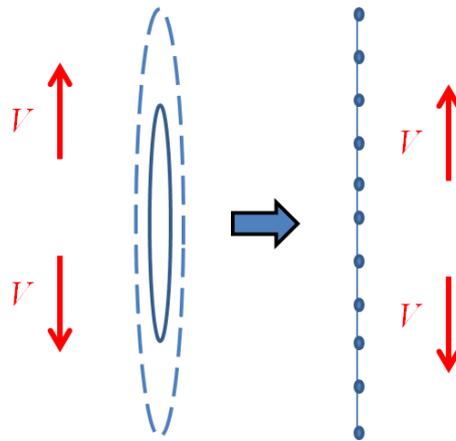


Figure 3.11 : discrétisation de la fissure (a) forme de la fissure, (b) fissure discrétisée.

On considère une fissure avec une longueur évoluant de  $l_0 = 1\text{mm}$  à  $l = 5\text{mm}$  à une vitesse  $V$  durant un temps d'ouverture  $T$  et on considère une fréquence d'échantillonnage  $F_e = 50\text{MHz}$ .

On définit  $z_j$  et  $t_n$  par :

$$z_j = jV\Delta t \quad (3.191)$$

$$t_n = t_0 + n \frac{1}{F_e} \quad (3.192)$$

L'indice spatial  $j$  varie de 0 à  $J/2$  et l'indice temporel  $n$  varie de 0 à  $N$  avec :

$$\Delta t = 1 / F_e \quad (3.193)$$

$$N = \frac{T}{\Delta t} \quad (3.194)$$

$$J = \frac{l}{V\Delta t} \quad (3.195)$$

L'équation (3.190) peut être discrétisée sous la forme suivante:

$$\Delta u_1(z_j, t_n) = \sigma \frac{4(1-\nu^2)}{E} \sqrt{((l_0 + nV\Delta t)/2)^2 - z_j^2}, \text{ si } |z_j| \leq (l_0 + nV\Delta t)/2 \quad (3.196)$$

et

$$\Delta u_1(z_j, t_n) = 0, \text{ si } (l_0 + nV\Delta t)/2 \leq |z_j| \leq l/2 \quad (3.197)$$

On calcule les déplacements de l'onde de Rayleigh émise par la fissure dans le domaine fréquentiel (équations (3.140) et (3.141)) en utilisant la transformée de Fourier des équations (3.196) et (3.197). On applique ensuite une transformée de Fourier inverse afin d'obtenir les formes d'onde dans le domaine temporel.

### 3.2.2.2 Simulation des formes d'onde

#### a Fissure en mode I

#### Etude paramétrique en fonction de la vitesse de fissuration

On simule dans un premier temps la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure sous contraintes en un point d'observation situé à  $x=100\text{mm}$  en mode I se propageant à une vitesse  $V$  que l'on fait varier. De plus on choisit deux cas, le premier correspond à une fissure située à une distance  $z_0=5\text{mm}$  de la surface (Figure 3.12) et le second pour une distance  $z_0=15\text{mm}$  (Figure 3.13).

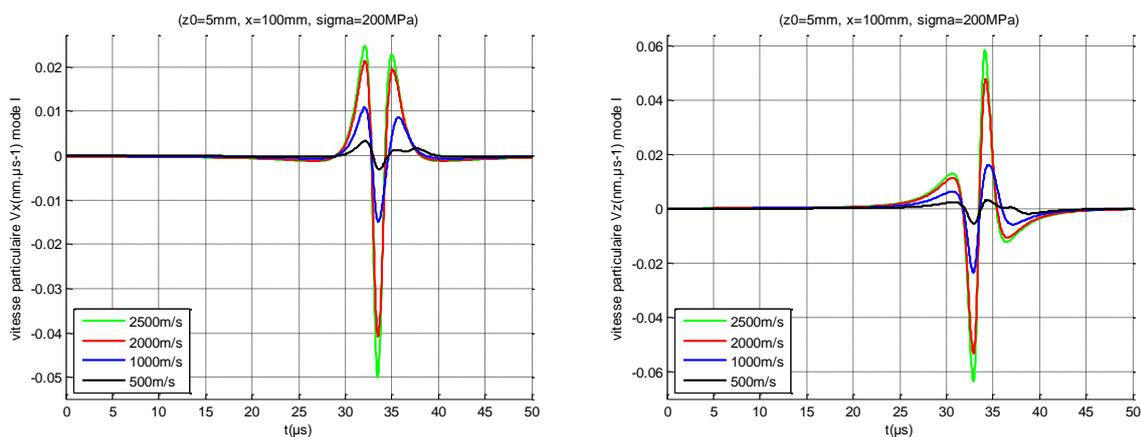


Figure 3.12 : (a) composante horizontale (b) composante verticale de la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure sous 200MPa située à 5mm de la surface se propageant à différentes vitesses  $V$ .

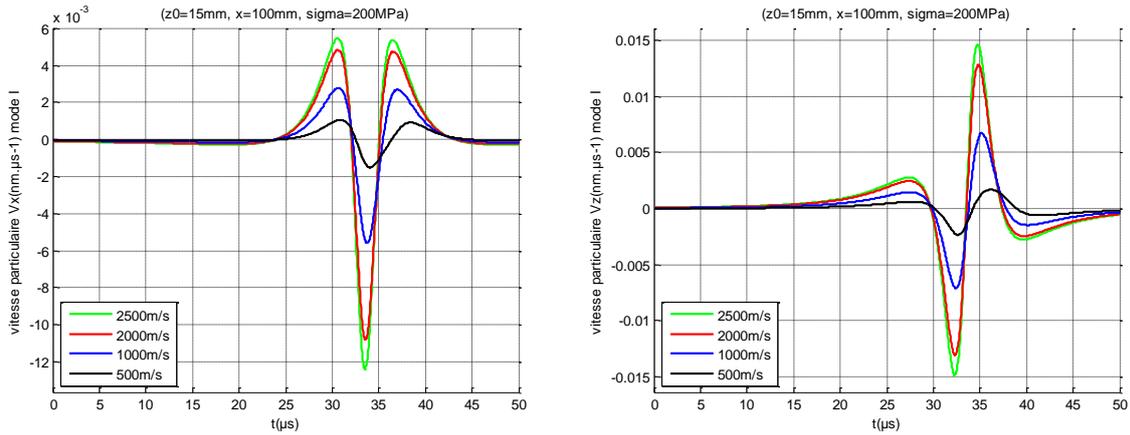


Figure 3.13 : composantes horizontale (a) et verticale (b) de la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure sous 200MPa située à 15mm de la surface se propageant à différentes vitesses  $V$ .

Etude paramétrique en fonction de la position de la fissure

Dans un deuxième temps, la fissure se propage à une vitesse  $V=2000\text{m/s}$  et est située à différentes distances  $z_0$  (Figure 3.14) de la surface.

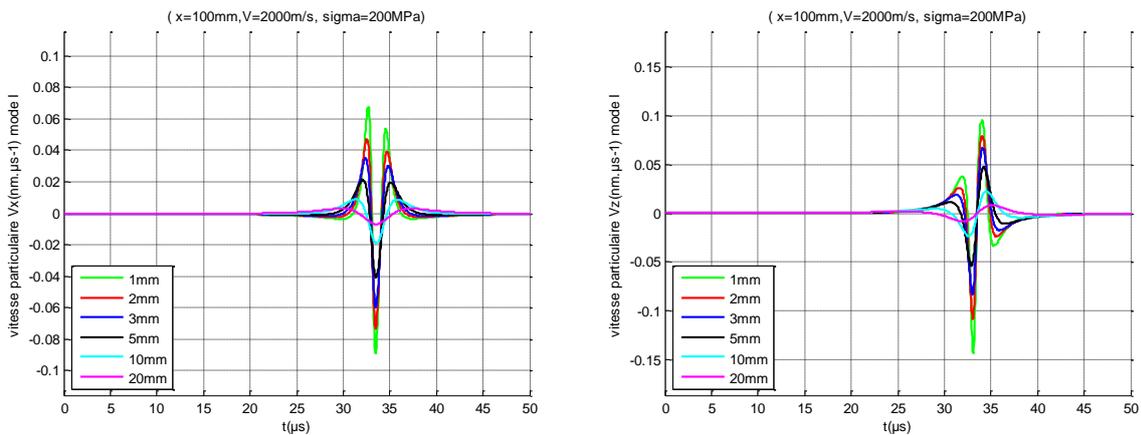


Figure 3.14 : composantes horizontale (a) et verticale (b) de la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure sous 200MPa se propageant à une vitesse  $V=2000\text{m/s}$  et située à différentes distances  $z_0$

Après analyses des courbes, on remarque que l'amplitude de la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure en mode I augmente avec la vitesse de propagation de la fissure. En effet, l'amplitude de la composante verticale de la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh est multipliée par dix quand on passe d'une vitesse de 500m/s à 2000m/s pour une fissure située à une distance de 5mm de la surface. En outre, l'écart est moins important quand la fissure est plus éloignée de la surface. De plus, l'amplitude de la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh augmente lorsque la fissure s'approche de la surface. On observe un facteur dix sur l'amplitude de l'onde émise entre une fissure située à 3mm et celle à 20mm.

*b Fissure en mode II*

L'expression du saut de déplacement dans le cas d'une fissure en mode II est disponible dans le chapitre 2 [paragraphe 2.1.2].

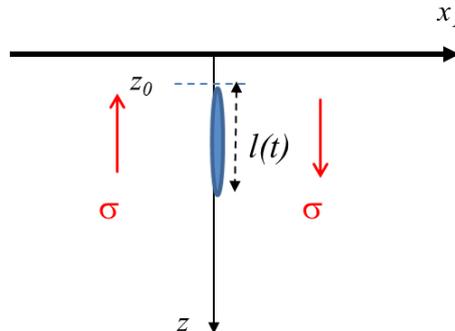


Figure 3.15 : fissure en mode II située à une distance  $z_0$  de la surface.

Etude paramétrique en fonction de la vitesse de fissuration

De la même manière que précédemment, on simule la vitesse particulière de l'onde de Rayleigh émise par une fissure sous contraintes en un point d'observation situé à  $x=100\text{mm}$  en mode II (Figure 3.15) La fissure se propage à différentes vitesses  $V$  et est située respectivement aux distances  $z_0=5\text{mm}$  (Figure 3.16) et  $z_0=10\text{mm}$  (Figure 3.17) de la surface.

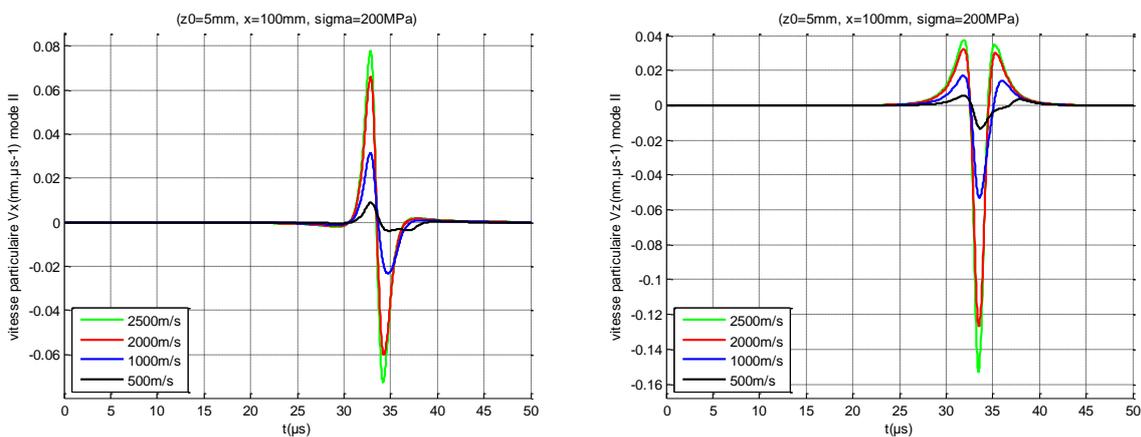


Figure 3.16 : composantes horizontale (a) et verticale (b) de la vitesse particulière de l'onde de Rayleigh émise par une fissure en mode II sous 200MPa située à 5mm de la surface se propageant à différentes vitesses  $V$ .

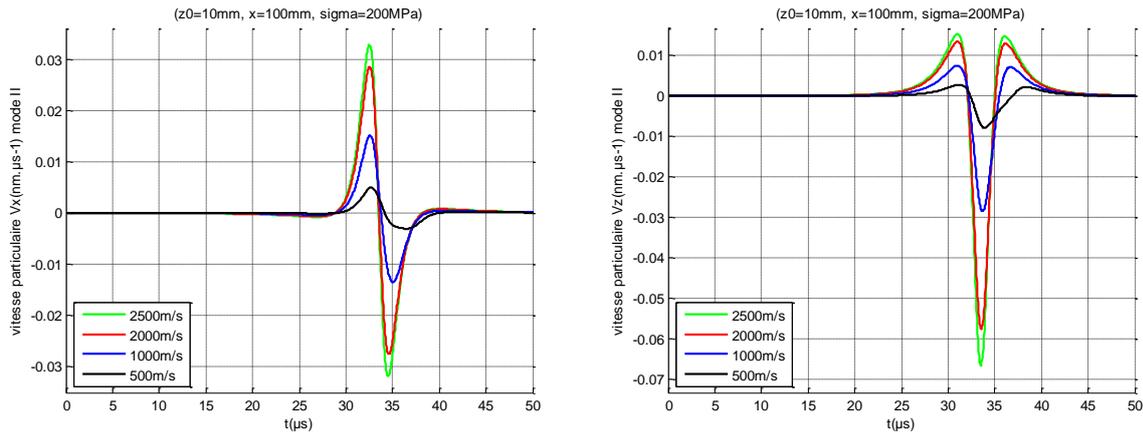


Figure 3.17 : composantes horizontale (a) et verticale (b) de la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure en mode II sous 200MPa située à 10mm de la surface se propageant à différentes vitesses  $V$ .

On retrouve le même comportement de l'onde de Rayleigh en mode II que dans le cas du mode I. En effet, l'amplitude de l'onde émise augmente avec la vitesse de propagation de la fissure et l'écart est moins important quand la fissure est plus éloignée de la surface.

*c Comparaison entre les modes*

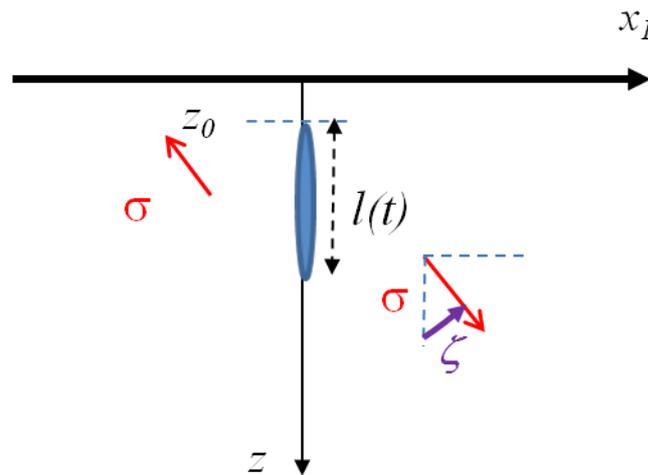


Figure 3.18 : fissure en mode mixte,  $\zeta$  étant l'angle entre le plan de la fissure et la direction de la contrainte.

On a choisi de comparer ensuite les composantes de vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure en mode I et en mode II soumises à la même intensité de contrainte 200MPa. Les fissures se propagent ici à la même vitesse  $V=2000\text{m/s}$  et sont situées à une distance  $z_0=5\text{mm}$  de la surface.

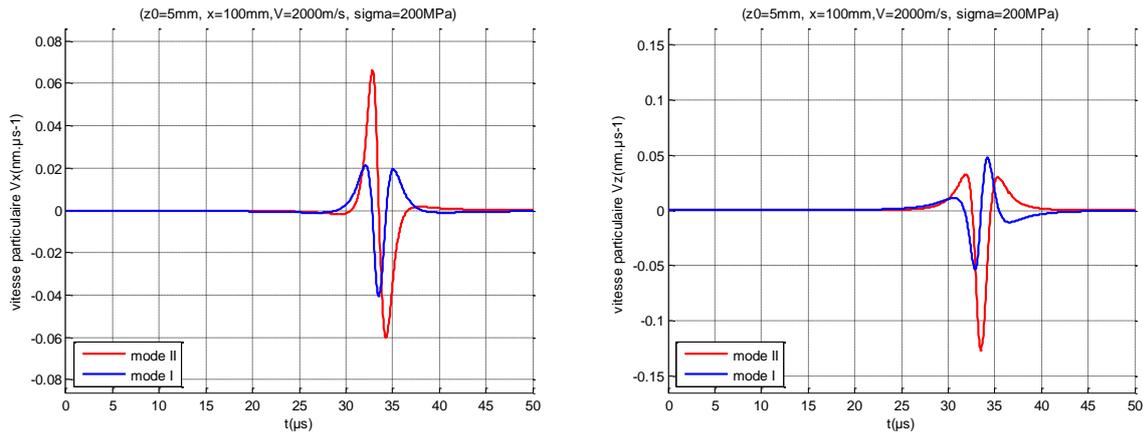


Figure 3.19 : composantes horizontale (a) et verticale (b) de la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure sous 200MPa située à 5mm de la surface se propageant à une vitesse  $V=2000\text{m/s}$  en mode I ou II.

En considérant la même intensité de chargement pour le mode de cisaillement et le mode d'ouverture, l'amplitude de l'onde émise en mode II est 5 fois plus grande que celle du mode I. On observe aussi que la forme d'onde dépend du mode de fissuration.

On étudie ensuite les composantes de vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure en mode I, en mode II et en mode mixte (Figure 3.18) avec  $\zeta = 45^\circ$  et  $\zeta = 60^\circ$  ( $\zeta$  étant l'angle que fait la direction de la contrainte avec le plan de la fissure), dans les mêmes conditions que précédemment.

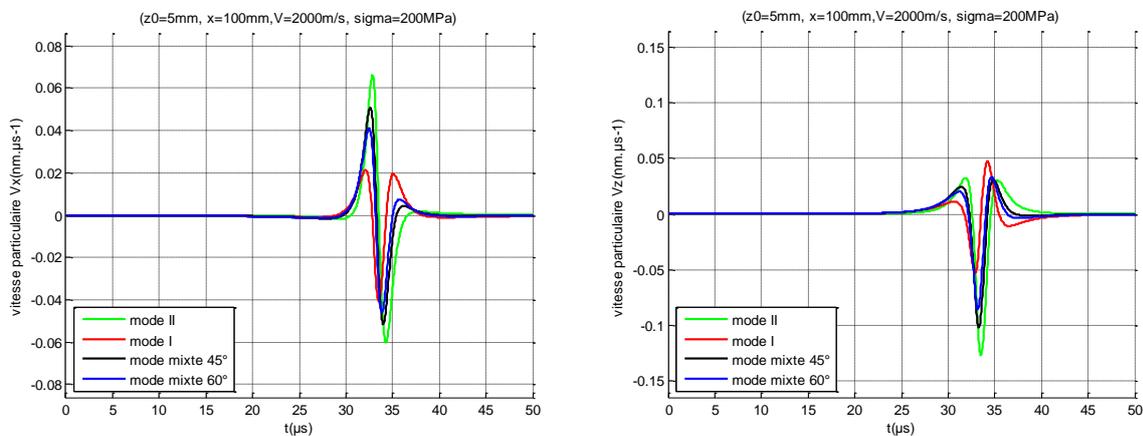


Figure 3.20 : composantes horizontale (a) et verticale (b) de la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure sous 200MPa située à 5mm de la surface se propageant à  $V=2000\text{m/s}$  en mode I, II et en mode mixte.

Il apparaît que l'amplitude de la l'onde de Rayleigh émise par une fissure en mode mixte est inférieure à celle du mode II ( de 20% (pour  $\zeta = 45^\circ$ ) ) et est supérieure à celle du mode I (de 50% (pour  $\zeta = 45^\circ$ ) ).

d Fissure inclinée :

Par la suite, on s'intéresse à l'étude de l'inclinaison d'une fissure sur l'onde de Rayleigh. La Figure 3.21 montre les configurations des fissures inclinées en mode I et II. On simule la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure inclinée sous contraintes en un point d'observation situé à  $x=100\text{mm}$ , en mode I et II. La fissure se propage à une vitesse  $V=2000\text{m/s}$  et est située à une distance  $v_0=5\text{mm}$  (suivant l'axe  $v$ ) de la surface.

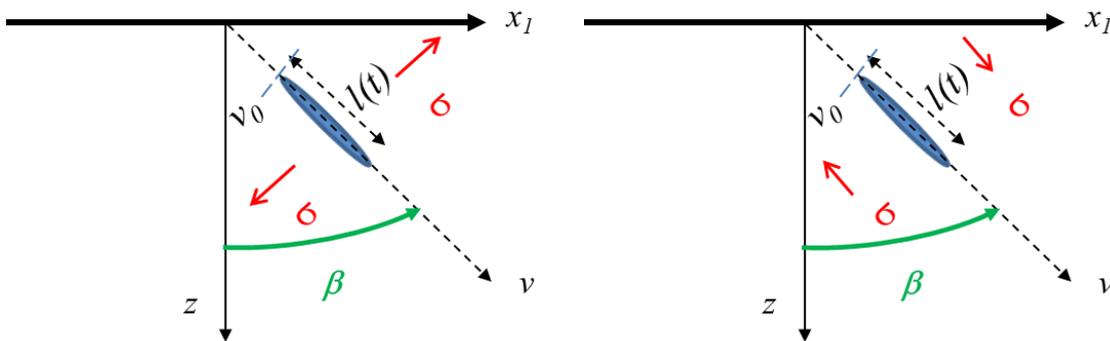


Figure 3.21 : fissure inclinée, (a) en mode I, (b) en mode II

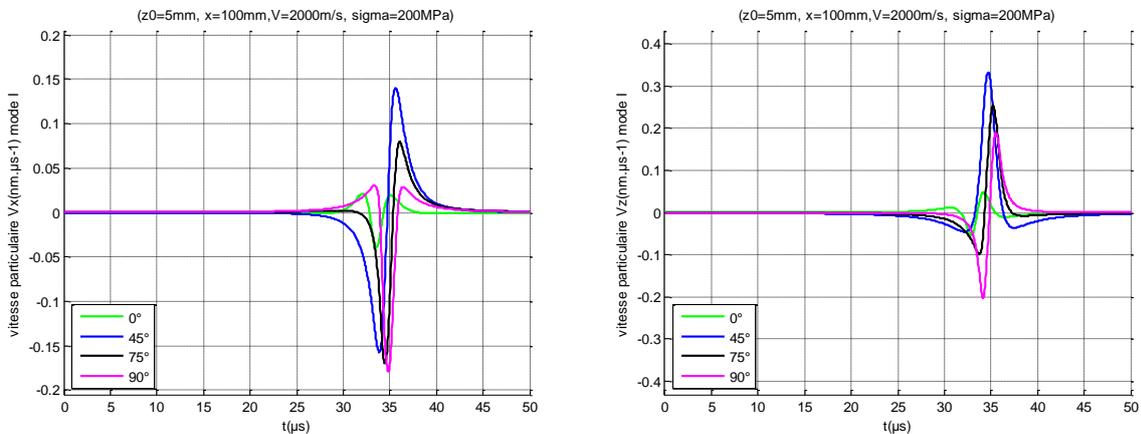
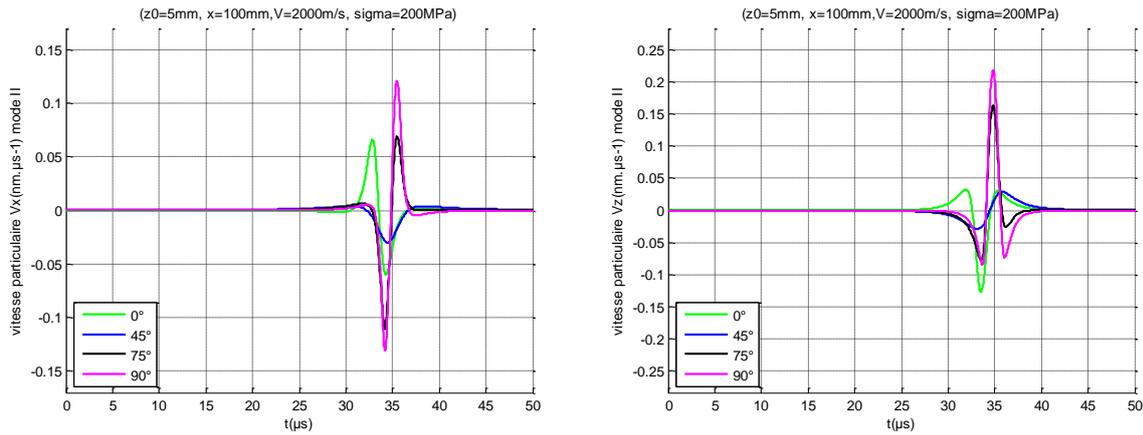


Figure 3.22 : composantes horizontale (a) et verticale (b) de la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure en mode I sous 200MPa située à 5mm de la surface se propageant à une vitesse  $V=2000\text{m/s}$  pour différentes inclinaisons par rapport à l'axe  $z$ .



**Figure 3.23 : composantes horizontale (a) et verticale (b) de la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure en mode II sous 200MPa située à 5mm de la surface se propageant à une vitesse  $V=2000\text{m/s}$  pour différentes inclinaisons par rapport à l'axe  $z$ .**

On note que l'amplitude de la vitesse particulaire de l'onde émise par une fissure en mode I augmente avec l'inclinaison de la fissure et atteint son maximum dans le cas d'une fissure horizontale.

On remarque que pour le mode II, l'amplitude de l'onde de Rayleigh émise par la fissure diminue quand on passe d'une fissure droite ( $0^\circ$ ) à une fissure inclinée de  $45^\circ$  et qu'ensuite elle augmente avec l'inclinaison. D'autre part l'amplitude de l'onde émise par une fissure horizontale en mode I ou II est plus grande que celle obtenue à partir d'une fissure verticale (mode I ou II).

### 3.2.3 Synthèse

Comme on pouvait s'y attendre, l'amplitude de la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par la propagation d'une fissure est d'autant plus importante que la position de la fissure se rapproche de la surface. La simulation nous permet de montrer que l'amplitude augmente avec la vitesse de propagation de la fissure. Concernant les formes d'onde, la simulation nous permet de confirmer également que la forme du signal varie avec le mécanisme de fissuration et l'inclinaison de la fissure. D'autre part, pour la même intensité de chargement, l'amplitude de l'onde émise par une fissure en mode II est plus importante que celle émise par une fissure en mode I ou en mode mixte avec  $\zeta=45^\circ$  et  $\zeta=60^\circ$ . En effet, la contrainte  $T_{Iz}$  intervient dans le calcul de l'amplitude émise par une fissure en mode II, tandis que l'amplitude de l'onde émise par une fissure en mode I fait intervenir la contrainte  $T_{II}$ . L'analyse des expressions analytiques des contraintes montre qu'à une position donnée, l'amplitude de  $T_{Iz}$  est supérieure à celle de  $T_{II}$ .

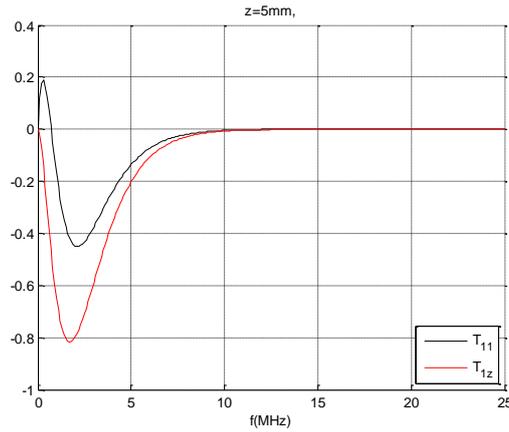


Figure 3.24 : comparaison entre la contrainte T11 et T1z en z=5mm.

L'étude paramétrique en fonction de l'inclinaison de la fissure a montré que l'amplitude de l'onde émise diminue quand on passe de 0° à 45°, qu'ensuite elle augmente et atteint son maximum à 90° dans le cas du mode II contrairement au mode I où l'amplitude de l'onde croît avec l'inclinaison de la fissure. D'une façon générale, en mode I comme en mode II, l'amplitude de l'onde émise par une fissure horizontale est plus importante que celle obtenue par une fissure verticale.

### 3.3 Cas d'application : Simulation d'un contrôle par EA en onde de Rayleigh

#### 3.3.1 Expression de la tension délivrée en sortie par un capteur d'EA

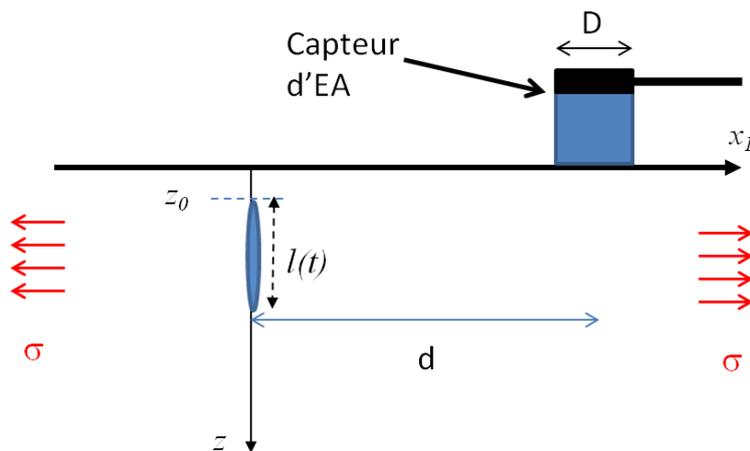


Figure 3.25 : principe de la réception par un capteur d'EA en 2D.

On utilise le modèle piston développé par Goujon et Baboux [73] présenté dans le deuxième chapitre. L'expression de la tension délivrée en sortie par le capteur peut s'écrire sous la forme suivante :

$$E_0 = \frac{1}{S} \int_S v_z(x_1, 0) m_0 dS \quad (3.198)$$

avec

$$v_z(x_1, 0) = i \omega A(\omega) W^R(0) e^{-ik_R x_1} \quad (3.199)$$

$A(\omega)$  est calculée dans le paragraphe (3.1.2.2) et  $W^R$  est donné par l'équation (3.21).

Donc après calcul, on obtient :

$$E_0 = \frac{1}{D} \int_{\frac{D}{2}+d}^{\frac{D}{2}} i \omega A(\omega) W^R(0) e^{-ik_R x_1} m_0 dx_1 \quad (3.200)$$

ou encore :

$$E_0 = \frac{-v_R A(\omega) W^R(0) m_0}{D} \left[ e^{-ik_R \left( \frac{D}{2} + d \right)} - e^{-ik_R \left( \frac{D}{2} \right)} \right] \quad (3.201)$$

### 3.3.2 Exemples d'application

Le modèle de couplage permet ici de simuler la tension délivrée en sortie par le capteur en utilisant le calcul de champ présenté dans le paragraphe (3.1.2.2). La Figure 3.26 montre la tension délivrée par le capteur après l'émission de l'onde de Rayleigh générée par la propagation d'une fissure sous 200MPa pour deux vitesses de propagation de fissure (2000m/s et 500m/s). La forme du signal correspond à l'interaction de l'onde avec les deux extrémités selon la largeur du capteur. En effet, l'intégration de la composante verticale de la vitesse particulière de l'onde de Rayleigh sur la surface du capteur rend compte de la différence de phase entre les extrémités inférieures et supérieures du capteur (équation (3.201)).

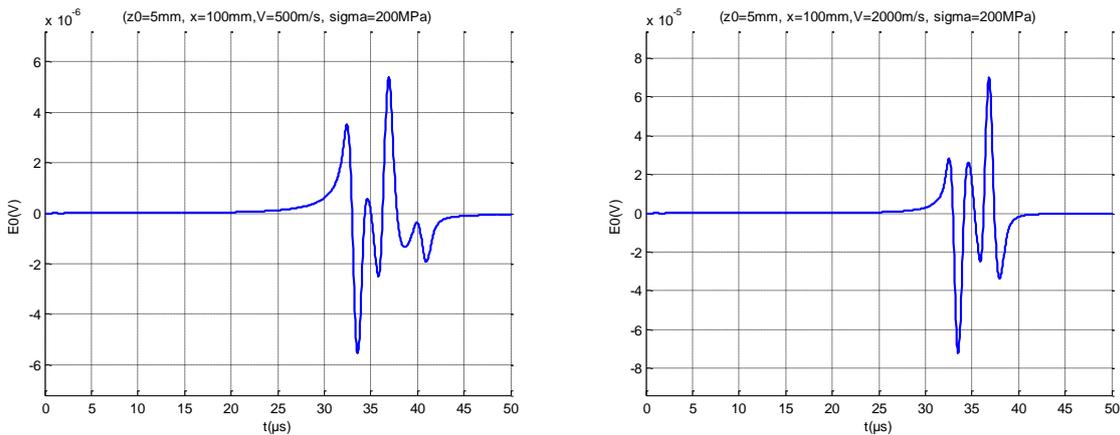


Figure 3.26 : tension délivrée en sortie du capteur après l'EA en onde de Rayleigh générée par la propagation d'une fissure en mode I située à une distance  $z_0=5\text{mm}$  de la surface et se propageant à une vitesse  $V$ , (a)  $V=500\text{m/s}$ , (b)  $V=2000\text{m/s}$ .

Plusieurs études paramétriques ont été ensuite réalisées sur la réception de l'onde de Rayleigh. On a d'abord étudié l'influence de la vitesse de propagation de la fissure sur le signal délivré en sortie par le capteur. La deuxième étude a eu pour objectif de quantifier les différences entre les signaux obtenus à partir de différentes positions de la fissure par rapport à la surface. La Figure 3.27 présente le résultat de simulation de la première étude paramétrique. On retrouve le même comportement que lors de la première étude paramétrique du champ de vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure en mode I. La deuxième étude (Figure 3.28) montre que l'amplitude du signal délivrée par le capteur décroît rapidement avec la profondeur de la fissure (distance par rapport à la surface). L'amplitude est divisée par 6 quand on passe d'une fissure située à 1mm de la surface à une fissure située à 5mm.

De manière générale, on arrive aux mêmes conclusions que précédemment, ce qui est logique car l'expression de la tension délivrée par le capteur est similaire à celle de la vitesse particulaire.

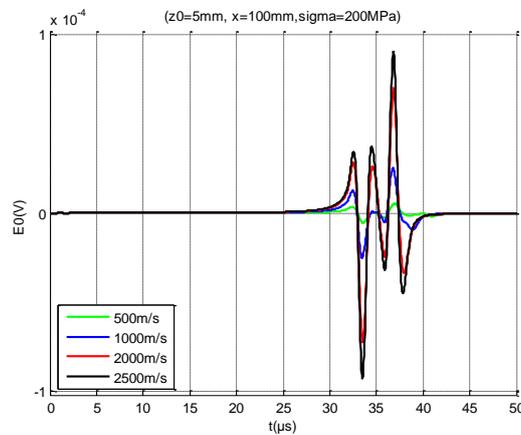


Figure 3.27 : tension délivrée en sortie par le capteur après l'émission de l'onde de Rayleigh par une fissure située à une distance  $z_0=5\text{mm}$  de la surface et se propageant à une vitesse  $V$ ,  $V=2500\text{m/s}$ ,  $V=2000\text{m/s}$ ,  $V=1000\text{m/s}$ ,  $V=500\text{m/s}$ .

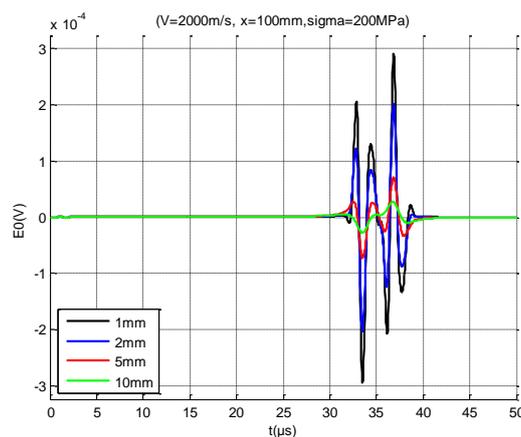


Figure 3.28 : tension délivrée en sortie par le capteur après l'émission de l'onde de Rayleigh par une fissure se propageant à une vitesse  $V=2000\text{m/s}$  et située à une distance  $z_0$ ,  $z_0=10\text{mm}$ ,  $z_0=5\text{mm}$ ,  $z_0=2\text{mm}$ ,  $z_0=1\text{mm}$ .

On s'est aussi intéressé à la comparaison de la réception de l'onde de Rayleigh émise par une fissure en mode I ou en mode II (Figure 3.29). On remarque que la forme d'onde dépend du mode de fissuration et que pour une même intensité de chargement, l'amplitude du signal associé au mode II est supérieure à celle du mode I. De plus, l'étude paramétrique en fonction de l'inclinaison de la contrainte par rapport au plan de la fissure (

Figure 3.30) montre que l'amplitude du signal obtenue à partir d'une fissure en mode mixte est supérieure à celle déterminée à partir d'une fissure en mode I.

On observe aussi que l'inclinaison de la fissure (Figure 3.31) change les formes d'onde et que l'amplitude obtenue à partir d'une fissure horizontale en mode I ou en mode II est très supérieure à celle calculée à partir d'une fissure verticale.

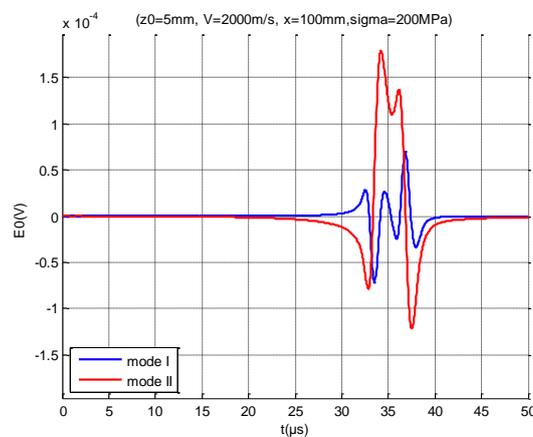


Figure 3.29 : tension délivrée en sortie par le capteur après l'émission de l'onde de Rayleigh par une fissure en mode I ou II se propageant à une vitesse  $V=2000\text{m/s}$  et située à une distance  $z_0=5\text{mm}$ .

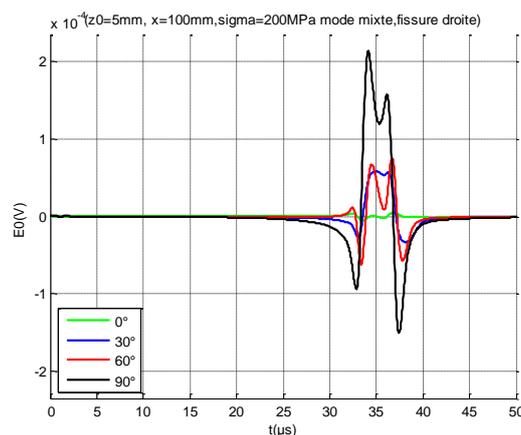


Figure 3.30 : tension délivrée en sortie par le capteur après l'émission de l'onde de Rayleigh par une fissure soumise à une contrainte inclinée se propageant à une vitesse  $V=2000\text{m/s}$  et située à une distance  $z_0=5\text{mm}$ ,  $0^\circ$  (mode I),  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  (mode II).

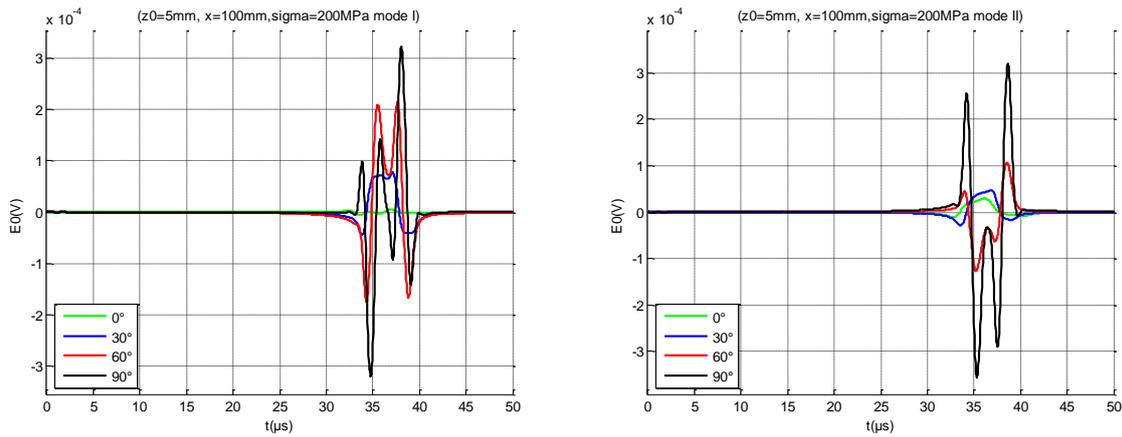


Figure 3.31 : tension délivrée en sortie par le capteur après l'émission de l'onde de Rayleigh par une fissure inclinée se propageant à une vitesse  $V=2000\text{m/s}$  et située à une distance  $v_0=5\text{mm}$  (a) mode I et (b) mode II,  $\beta=0^\circ, 30^\circ, \beta=60^\circ, \beta=90^\circ$ .

### 3.4 Conclusion

J'ai présenté dans la première partie de ce chapitre, différentes études bibliographiques sur la modélisation de la propagation de l'onde de Rayleigh en 2D (surface plane et cylindrique). Ces études m'ont permis de faire un choix sur les modèles de propagation que j'ai utilisés par la suite dans le développement des formulations de couplage. Dans un second temps, j'ai détaillé la démarche de calcul du champ élastodynamique émis par une fissure sous contrainte dans le cas d'une surface plane 2D par deux méthodes de couplage inspirées de la littérature ; j'ai démontré l'équivalence de ces deux méthodes. Cette formulation a été étendue aux cas d'une surface cylindrique à l'aide d'un modèle de propagation asymptotique en coordonnées curvilignes.

Différentes études paramétriques sur l'EA par une fissure sous contraintes ont été effectuées dans le cas d'une surface plane. Il apparaît que l'amplitude de l'onde émise augmente avec la vitesse de propagation de la fissure dans le cas du mode I et II. De plus, pour une même intensité de chargement des modes I et II l'amplitude de l'onde émise par une fissure en mode II est 5 fois plus grande que celle émise par une fissure en mode I. Dans le cas d'une fissure inclinée en mode II, l'amplitude de l'onde de Rayleigh est décroissante entre  $0^\circ$  et  $45^\circ$  puis croît et atteint son maximum à  $90^\circ$  (fissure horizontale). Par conséquent, l'amplitude de l'onde de Rayleigh émise par une fissure horizontale en mode II est plus importante (de 60%) que celle émise par une fissure droite en mode I.

Le résultat de calcul du champ élastodynamique est utilisé afin de simuler la réponse d'un capteur d'EA basée sur une approche piston. La forme du signal délivrée par le capteur correspond à l'interaction entre l'onde de Rayleigh et les extrémités du capteur. Il apparaît que l'amplitude du signal délivré par le capteur décroît rapidement avec la profondeur de la fissure. En effet, l'amplitude est divisée par huit quand on passe d'une profondeur de 1mm à 5mm pour les configurations étudiées. Les formes d'onde obtenues à partir d'une fissure en mode I, mode II et mode mixte sont comparées, on remarque que les formes d'ondes obtenues dépendent du mécanisme de fissuration et de l'inclinaison de la fissure. D'autre part, l'amplitude du signal obtenue à partir d'une fissure en mode II est supérieure à celle

obtenue à partir d'une fissure en mode I ou en mode mixte sous même intensité de chargement.

Les résultats présentés dans ce chapitre correspondent à l'EA par une fissure rectangulaire d'extension infinie. Dans le prochain chapitre, je présenterai la modélisation de l'EA en onde de Rayleigh sur une surface plane 3D en utilisant un modèle de fissure plane 3D.

# Chapitre 4 Modélisation 3D de l'EA en onde de Rayleigh

4.1	Etat de l'art sur la modélisation 3D de la propagation de l'onde de Rayleigh sur une surface plane .....	94
4.1.1	Calcul des fonctions de Green dans le domaine de Laplace.....	94
4.1.2	Calcul des fonctions de Green par la méthode de Aki et Richards .....	96
4.1.3	Calcul des fonctions de Green par application de la réciprocité .....	97
4.1.4	Discussion .....	102
4.2	Couplage entre un modèle de source et un modèle de propagation de l'onde de Rayleigh .....	103
4.2.1	Formulation de couplage basée sur les fonctions de Green de l'onde de Rayleigh	103
4.2.1.1	Présentation du problème .....	103
4.2.1.2	Définition des états élastodynamiques .....	103
4.2.1.3	Application du théorème de réciprocité.....	104
4.2.1.4	Obtention de la formulation de couplage par une méthode basée sur l'utilisation d'une onde virtuelle de surface .....	107
4.2.2	Applications numériques.....	108
4.2.2.1	Source d'EA .....	108
4.2.2.2	Simulation des formes d'onde .....	110
4.2.3	Synthèse .....	114
4.3	Cas d'application 3D : Simulation d'un contrôle par EA en onde de Rayleigh .....	115
4.3.1	Expression de la tension délivrée en sortie .....	115
4.3.2	Exemples d'application .....	117
4.4	Conclusion .....	120

*Ce chapitre est consacré à l'étude de l'EA en onde de Rayleigh par un défaut sous contrainte dans le cas des structures épaisses grâce à une modélisation 3D. Dans un premier temps, nous présentons l'état de l'art sur la modélisation 3D de la propagation de l'onde de Rayleigh le long d'une surface plane. Dans un deuxième temps, nous détaillons le développement théorique de la formulation de couplage entre un modèle de source d'EA et un modèle de propagation de l'onde de Rayleigh. Cette formulation est basée sur un modèle de fissure plane 3D et les fonctions de Green de l'onde de Rayleigh 3D. Dans la dernière partie, nous présentons des cas d'application 3D qui permettent de simuler la chaîne complète du*

contrôle par EA et de prédire la réponse d'un capteur d'EA. Dans ce but on utilise le calcul de champ de déplacement des ondes émises par un défaut sous contrainte obtenu à partir des formulations de couplage et un modèle de capteur d'EA basé sur l'approche piston présentée au deuxième chapitre.

## 4.1 Etat de l'art sur la modélisation 3D de la propagation de l'onde de Rayleigh sur une surface plane

Dans ce paragraphe, on présente les différentes méthodes d'obtention des fonctions de Green de l'onde de Rayleigh. La première méthode est basée sur la technique de transformation intégrale qui permet d'exprimer les fonctions de Green dans le domaine de Laplace [78]. La deuxième méthode est développée par Aki et Richards [16], utilisée en sismologie et offre des expressions en milieu verticalement inhomogène. La dernière méthode est développée par Achenbach [75], elle est basée sur l'application du théorème de réciprocité élastodynamique et permet d'exprimer d'une manière explicite la contribution de l'onde de Rayleigh dans les fonctions de Green.

### 4.1.1 Calcul des fonctions de Green dans le domaine de Laplace.

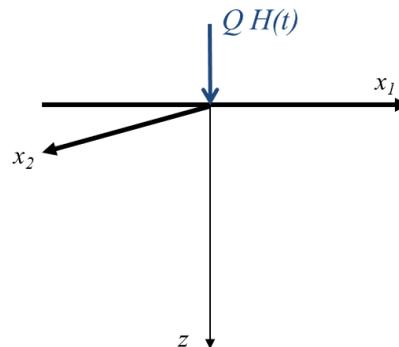


Figure 4.1 : demi-espace soumis à une force de direction  $z$  appliquée à l'origine.

Achenbach [78] détermine le déplacement généré par une force verticale de direction  $z$  appliquée à l'origine d'un demi-espace isotrope et homogène (Figure 4.1) en utilisant une technique de transformation intégrale. Il développe son calcul en coordonnées cylindriques puisque l'onde émise par une force de direction  $z$  et d'amplitude  $Q$  appliquée en un point source possède une symétrie axiale. Le détail de ce calcul est rappelé dans l'annexe [B]. Les déplacements générés par une telle force sont donnés par les équations suivantes :

$$\bar{u}_z = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\mu} \left[ \left( \frac{1}{v_T^2} s^2 + 2k^2 \right) e^{-\alpha z} - 2k^2 e^{-\beta z} \right] \frac{\alpha}{D_H(k, s)} \frac{1}{s} \quad (4.1)$$

$$\bar{u}_r = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\mu} \left[ \left( \frac{1}{v_T^2} s^2 + 2k^2 \right) e^{-\alpha z} - 2\alpha\beta e^{-\beta z} \right] \frac{k}{D_H(k, s)} \frac{1}{s} \quad (4.2)$$

$s$  étant la variable complexe de Laplace.  $\bar{u}_z$  et  $\bar{u}_r$  sont les transformées de Laplace des composantes de déplacement.  $k$  est le nombre d'onde et les expressions de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $D_H$  sont définies dans l'annexe [B].

Les déplacements associés à l'onde de Rayleigh peuvent être calculés à partir des équations (4.1) et (4.2) en appliquant la transformée de Hankel inverse et en cherchant une solution de l'intégrale complexe en fonction d'un résidu particulier qui correspond au nombre d'onde de l'onde de Rayleigh.

Par exemple, dans le cas d'un point source (on remplace  $H(t)$  par un Dirac (Figure 4.1)), le déplacement vertical dans le domaine fréquentiel s'obtient en remplaçant  $s$  par  $i\omega$

$$u_z = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\mu} \frac{\omega^2}{v_T^2} \frac{p(k)}{D_H(k)} \quad (4.3)$$

$p$  étant défini par :

$$p(k) = \frac{\omega^2}{v_T^2} - k^2 \quad (4.4)$$

On applique ensuite la transformée de Hankel inverse d'ordre zéro puisque l'équation (4.1) est obtenue à partir d'une transformée de Hankel d'ordre zéro. En effet la transformée de Hankel inverse d'ordre  $n$  est définie par :

$$f(r) = \int_0^\infty f^{H_n^{(1)}}(k) J_n(kr) k dk \quad (4.5)$$

$J_n$  et  $H_n^{(1)}$  sont respectivement les fonctions de Bessel de première espèce et les fonctions de Hankel de premier type d'ordre  $n$ .

On obtient l'expression suivante :

$$u_z = -\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\mu} \frac{\omega^2}{v_T^2} \int_0^\infty \frac{p(k)}{D_H(k)} k J_0(kr) k dk \quad (4.6)$$

Or,

$$J_0(kr) = \frac{1}{2} \left( H_0^{(1)}(kr) - H_0^{(1)}(-kr) \right) \quad (4.7)$$

En substituant ce résultat dans l'équation (4.6) on trouve :

$$u_z = -\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\mu} \frac{\omega^2}{v_T^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{p(k)}{D_H(k)} k H_0^{(1)}(kr) k dk \quad (4.8)$$

L'onde de Rayleigh est obtenue à partir de la contribution du pôle  $k=k_R$ , où  $k_R$  est solution de  $D_H(k)=0$ , les autres pôles correspondant aux ondes de volumes.

Le déplacement vertical de l'onde de Rayleigh peut alors s'écrire de la façon suivante:

$$u_z^R = \frac{Q}{2\pi} \frac{i \omega^2}{\mu v_T^2} \frac{(k_R^2 - \omega^2/v_L^2)^{\frac{1}{2}}}{D_H'(k_R)} k_R H_0^{(1)}(k_R r) \quad (4.9)$$

avec :

$$D_H'(k) = \left. \frac{dD_H(k)}{dk} \right|_{k=k_R} \quad (4.10)$$

Le déplacement radial s'obtient par la même démarche. L'expression approchée de  $k_R$  est donnée dans le chapitre 3.

## 4.1.2 Calcul des fonctions de Green par la méthode de Aki et Richards

Après avoir traité le cas 2D, Aki et Richards [16] ont également calculé les fonctions de Green des  $n$  modes de l'onde de Rayleigh dans un milieu multicouches en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Pour ce calcul, ils définissent trois potentiels scalaires  $(\varphi, \psi, \chi)$  représentant respectivement l'onde de compression, l'onde de cisaillement verticale et l'onde de cisaillement horizontale. De plus, ils utilisent les expressions asymptotiques des fonctions de Hankel.

En coordonnées cartésiennes, le tenseur de Green de l'onde de Rayleigh est donné par :

$$G^{Rayleigh} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{1z} \\ G_{21} & G_{22} & G_{2z} \\ G_{z1} & G_{z2} & G_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

avec

$$G_{11} = \sum_n \frac{1}{8cUI_1} r_1(z) r_1(h) \cos^2 \theta \times \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} e^{i(k_n r + \frac{\pi}{4})} \quad (4.12)$$

$$G_{12} = \sum_n \frac{1}{8cUI_1} r_1(z) r_1(h) \sin \theta \cos \theta \times \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} e^{i(k_n r + \frac{\pi}{4})} \quad (4.13)$$

$$G_{1z} = \sum_n \frac{1}{8cUI_1} -i r_1(z) r_2(h) \cos \theta \times \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} e^{i(k_n r + \frac{\pi}{4})} \quad (4.14)$$

$$G_{21} = \sum_n \frac{1}{8cUI_1} r_1(z) r_1(h) \sin \theta \cos \theta \times \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} e^{i(k_n r + \frac{\pi}{4})} \quad (4.15)$$

$$G_{22} = \sum_n \frac{1}{8cUI_1} r_1(z) r_1(h) \sin^2 \theta \times \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} e^{i(k_n r + \frac{\pi}{4})} \quad (4.16)$$

$$G_{2z} = \sum_n \frac{1}{8cUI_1} -i r_1(z) r_2(h) \sin \theta \times \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} e^{i(k_n r + \frac{\pi}{4})} \quad (4.17)$$

$$G_{z1} = \sum_n \frac{1}{8cUI_1} i r_2(z) r_1(h) \cos \theta \times \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} e^{i(k_n r + \frac{\pi}{4})} \quad (4.18)$$

$$G_{z2} = \sum_n \frac{1}{8cUI_1} i r_2(z) r_1(h) \sin \theta \cos \theta \times \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} e^{i(k_n r + \frac{\pi}{4})} \quad (4.19)$$

$$G_{zz} = \sum_n \frac{1}{8cUI_1} r_2(z) r_2(h) \times \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} e^{i(k_n r + \frac{\pi}{4})} \quad (4.20)$$

$c$  étant la vitesse de phase,  $U$  la vitesse de groupe et  $I_1$  est défini par l'équation (3.64).

Comme dans le cas 2D (cf. chapitre 3 [3.1.1.2]), la dépendance en  $z$  est implicite et dépend du mode de l'onde de Rayleigh. Cependant on peut retrouver les expressions des fonctions de Green pour un milieu isotrope en développant les expressions intégrales des fonctions  $r_1$  et  $r_2$  pour un milieu isotropes et homogènes. Ces expressions ainsi que le détail de calcul des fonctions de Green sont fournis dans [16].

### 4.1.3 Calcul des fonctions de Green par application de la réciprocité

Pour appliquer la méthode de réciprocité, on considère un demi espace muni du repère  $(x_1, x_2, z)$ , on note  $x_1 = r \cos \theta$  et  $x_2 = r \sin \theta$  (Figure 4.2).

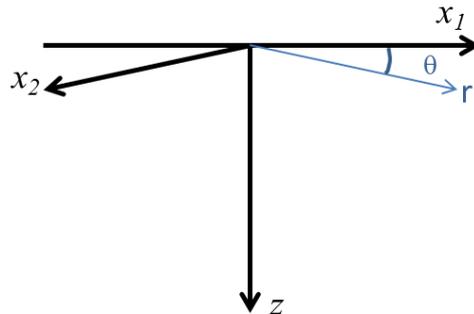


Figure 4.2 : définition du demi-espace.

Dans le cas général, les déplacements dans la direction  $i$  engendrés par une force d'amplitude  $F$  exercée à l'origine dans la direction  $k$  peuvent s'écrire de la façon suivante [75] :

$$u_{i,k}^G(x_1, z) = \frac{1}{k_T^2} \frac{F}{\mu} \left[ -G(k_L R) + G(k_T R) \right]_{i,k} + \frac{F}{\mu} G(k_T R) \delta_{ik} \quad (4.21)$$

Où  $\delta_{ik}$  est le symbole de Kronecker,  $G(k_\gamma R) = e^{ik_\gamma R} / 4\pi R$  et  $R^2 = x_1^2 + x_2^2 + z^2$ .

L'équation (4.21) contient la contribution des ondes de volumes et des ondes de surfaces ; ce qui signifie que les solutions des fonctions de Green associées à l'onde de Rayleigh doivent donc vérifier cette équation. D'autre part, les déplacements de l'onde de Rayleigh générée par un point source peuvent être écrits en coordonnées cylindriques sous la forme suivante [75]:

$$u_r = A \frac{1}{k_R} V^R(z) \frac{\partial \varphi(r, \theta)}{\partial r} \quad (4.22)$$

$$u_\theta = A \frac{1}{k_R} V^R(z) \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r, \theta)}{\partial \theta} \quad (4.23)$$

$$u_z = A W^R(z) \varphi(r, \theta) \quad (4.24)$$

$V^R(z)$  et  $W^R(z)$  sont définis dans le troisième chapitre.

Le potentiel  $\varphi$  vérifie l'équation de propagation suivante :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + k^2 \varphi = 0 \quad (4.25)$$

La démarche consiste à chercher des fonctions de Green de la forme des équations (4.22) à (4.24) vérifiant l'équation (4.21).

- Déplacements générés par une force de direction  $x_1$  :

On exprime les déplacements générés par une force de direction  $x_1$  à partir de l'équation (4.21) en remplaçant l'indice  $i$  par 1.

$$u_{1,1}^G(x_1, z) = \frac{1}{k_T^2} \frac{F}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ -G(k_L R) + G(k_T R) \right] + \frac{F}{\mu} G(k_T R) \quad (4.26)$$

$$u_{2,1}^G(x_1, z) = \frac{1}{k_T^2} \frac{F}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ -G(k_L R) + G(k_T R) \right] \quad (4.27)$$

$$u_{z,1}^G(x_1, z) = \frac{1}{k_T^2} \frac{F}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ -G(k_L R) + G(k_T R) \right] \quad (4.28)$$

Ensuite on se place dans le repère cylindrique (équations (4.29) et (4.30)), et on effectue un changement de variable sur les dérivées partielles en fonction de  $r$  et de  $\theta$  suivant les équations (4.31) et (4.32).

$$u_{r,1}^G = \cos \theta u_{1,1}^G + \sin \theta u_{2,1}^G \quad (4.29)$$

$$u_{\theta,1}^G = -\sin \theta u_{1,1}^G + \cos \theta u_{2,1}^G \quad (4.30)$$

$$\begin{pmatrix} r \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -rs & rc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

$$\begin{pmatrix} D_r^2 \\ D_{r,\theta}' \\ D_\theta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & 2sc & s^2 \\ -sc & (c^2 - s^2) & sc \\ s^2 & -2sc & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{x_1}^2 \\ D_{x_1,x_2}' \\ D_{x_2}^2 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

avec

$$D_{x_1}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \quad (4.33)$$

$$D_{x_1,x_2}' = \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_2 x_1}$$

$$D_{x_2}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

$$D_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \quad (4.34)$$

$$D_{r,\theta}' = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

$$D_\theta^2 = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

$$c = \cos \theta$$

$$s = \sin \theta$$

Finalement, les expressions des composantes du champ de déplacement généré par une force de direction  $x_1$ , dans le repère cylindrique sont décrites par les équations suivantes :

$$u_{r,1}^G(x_1, z) = \left\{ \frac{1}{k_T^2} \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[ -G(k_L R) + G(k_T R) \right] + \frac{F}{\mu} G(k_T R) \right\} \cos \theta \quad (4.35)$$

$$u_{\theta,1}^G(x_1, z) = \left\{ \frac{1}{k_T^2} \frac{F}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [G(k_L R) - G(k_T R)] - \frac{F}{\mu} G(k_T R) \right\} \sin \theta \quad (4.36)$$

$$u_{z,1}^G(x_1, z) = \left\{ \frac{1}{k_T^2} \frac{F}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} [-G(k_L R) + G(k_T R)] \right\} \cos \theta \quad (4.37)$$

Ces solutions présentent une dépendance simple en  $\theta$ . Si on compare les équations (4.22) à (4.24) avec les équations (4.35) à (4.37), on en déduit que la dépendance angulaire du potentiel  $\varphi$  est donnée par l'équation suivante :

$$\varphi(r, \theta) = \Phi(k_R, r) \cos \theta \quad (4.38)$$

Or,  $\varphi$  est solution de l'équation (4.25), c'est pourquoi  $\Phi(k_R, r)$  est solution de l'équation qui suit :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \left( k^2 - \frac{1}{r^2} \right) \Phi = 0 \quad (4.39)$$

Les solutions de l'équation différentielle sont ensuite exprimées à travers les fonctions de Hankel d'ordre 1. Il existe deux solutions, la première solution (4.40) correspond à une onde de surface sortante. La deuxième solution (équation (4.41)) est le complexe conjugué de la première solution, elle correspond physiquement à une onde de surface qui converge vers l'origine.

$$\Phi(k_R, r) = \Phi(k_R r) = H_1^{(1)}(k_R r) \quad (4.40)$$

$$\overline{\Phi(k_R, r)} = \Phi(k_R r) = H_1^{(2)}(k_R r) \quad (4.41)$$

On note

$$\Phi'(X) = \frac{d\Phi(X)}{dX} \quad (4.42)$$

La contribution de l'onde de Rayleigh du déplacement généré par une force de direction  $x_I$  peut ainsi s'écrire sous la forme suivante :

$$u_{r,1} = AV^R(z) \Phi'(k_R r) \cos \theta \quad (4.43)$$

$$u_{\theta,1} = AV^R(z) \frac{-1}{rk_R} \Phi(k_R r) \sin \theta \quad (4.44)$$

$$u_{z,1} = AW^R(z) \Phi(k_R r) \cos \theta \quad (4.45)$$

L'amplitude  $A$  est calculée par application de la réciprocité, en considérant une force ponctuelle de direction  $x_I$  d'amplitude  $Q$  (équation (4.46)) pour le premier état élastodynamique, quant au deuxième état, il est associé à la demi-somme d'une onde de Rayleigh sortante et d'une onde de Rayleigh qui converge vers l'origine.

$$f_I = Q\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(z-z_0)e^{i\omega t} \quad (4.46)$$

Après avoir appliqué le théorème de réciprocité, on obtient les composantes de déplacement de l'onde de Rayleigh générée par un point source de direction  $x_I$  :

$$u_{r,1} = \frac{k_R}{4i} \frac{QV^R(z_0)}{I} V^R(z) \Phi'(k_R r) \cos\theta \quad (4.47)$$

$$u_{\theta,1} = \frac{k_R}{4i} \frac{QV^R(z_0)}{I} V^R(z) \left( \frac{-1}{rk_R} \right) \Phi(k_R r) \sin\theta \quad (4.48)$$

$$u_{z,1} = \frac{k_R}{4i} \frac{QV^R(z_0)}{I} W^R(z) \Phi(k_R r) \cos\theta \quad (4.49)$$

Le détail de ce calcul est fourni dans l'annexe [C].

- Déplacements générés par une force de direction  $z$  :

Dans le cas d'une force de direction  $z$ , les expressions de déplacements en coordonnées cartésiennes sont données par :

$$u_{1,z}^G = \frac{1}{k_t^2} \frac{F}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial z} [-G(k_L R) + G(k_T R)] \quad (4.50)$$

$$u_{2,z}^G = \frac{1}{k_t^2} \frac{F}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial z} [-G(k_L R) + G(k_T R)] \quad (4.51)$$

$$u_{z,z}^G = \frac{1}{k_t^2} \frac{F}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} [-G(k_L R) + G(k_T R)] + \frac{F}{\mu} G(k_T R) \quad (4.52)$$

En coordonnées cylindriques, on a :

$$u_{r,z}^G = \frac{1}{k_t^2} \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} [-G(k_L R) + G(k_T R)] \quad (4.53)$$

$$u_{\theta,z}^G = 0 \quad (4.54)$$

$$u_{z,2}^G = \frac{1}{k_t^2} \frac{F}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} [-G(k_L R) + G(k_T R)] + \frac{F}{\mu} G(k_T R) \quad (4.55)$$

En comparant les équations (4.50) à (4.52) et (4.22) à (4.24), on en déduit que :

$$\varphi(r, \theta) = \Phi_0(k_R, r) \quad (4.56)$$

Or  $\Phi$  vérifie l'équation suivante

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + k^2 \Phi_0 = 0 \quad (4.57)$$

Les deux solutions (équations (4.58) et (4.59)) de l'équation différentielle (4.57) sont exprimées à travers les fonctions de Hankel d'ordre 0.

$$\Phi_0(k_R, r) = \Phi_0(k_R r) = H_0^{(1)}(k_R r) \quad (4.58)$$

$$\overline{\Phi_0(k_R, r)} = \overline{\Phi_0(k_R r)} = H_0^{(2)}(k_R r) \quad (4.59)$$

On applique la réciprocité en prenant une force ponctuelle (équation (4.60)) de direction  $z$  d'amplitude  $P$  pour l'état A et le même état auxiliaire que précédemment.

$$f_z = P\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(z-z_0)e^{-i\omega t} \quad (4.60)$$

On obtient donc les composantes de déplacement de l'onde de Rayleigh générée par un point source de direction  $z$  :

$$u_{r,z} = -\frac{k_R}{4i} \frac{PW^R(z_0)}{I} V^R(z) \Phi_0'(k_R r) \quad (4.61)$$

$$u_{\theta,z} = 0 \quad (4.62)$$

$$u_{z,z} = -\frac{k_R}{4i} \frac{PW^R(z_0)}{I} W^R(z) \Phi_0(k_R r) \quad (4.63)$$

On peut ensuite vérifier analytiquement l'équivalence entre les équations (4.63) et (4.9) pour un point source placé en  $z_0=0$ .

#### 4.1.4 Discussion

Nous venons de détailler les différentes méthodes de calcul des fonctions de Green de l'onde de Rayleigh en géométrie plane 3D. L'approche basée sur la transformée de Laplace ne permet pas de calculer directement les déplacements de l'onde de Rayleigh, puisque les expressions obtenues par cette approche contiennent la contribution des ondes de volumes en plus de l'onde de surface. En effet, un travail supplémentaire est nécessaire pour l'obtention des expressions des contraintes et des déplacements de l'onde de Rayleigh dans le domaine fréquentiel, en appliquant la transformée de Hankel inverse et en évaluant l'intégrale complexe à l'aide du résidu au pôle du nombre d'onde de l'onde de Rayleigh dans le plan complexe.

La méthode de calcul des fonctions de Green de l'onde de Rayleigh de Aki et Richards [16] offre l'avantage de la prise en compte d'un milieu multicouche mais les expressions des déplacements sont déterminées à l'aide de fonctions implicites dépendantes de  $z$ . Toutefois, les expressions des fonctions de Green de l'onde de Rayleigh d'un milieu isotrope peuvent être retrouvées en recalculant les expressions intégrales de  $r_1$  et  $r_2$  pour un milieu homogène et isotrope.

On choisira cependant d'utiliser par la suite la méthode présentée par Achenbach [75] basée sur le théorème de réciprocité élastodynamique puisqu'elle permet de calculer les différents termes du tenseur de Green associé à l'onde de Rayleigh dans le domaine fréquentiel et de manière explicite.

## 4.2 Couplage entre un modèle de source et un modèle de propagation de l'onde de Rayleigh

*L'objectif de cette partie est de présenter le couplage entre un modèle de propagation en onde de Rayleigh 3D et un modèle de sources d'EA. L'originalité de ce paragraphe, est l'utilisation d'un modèle de source issu de la mécanique de la rupture.*

### 4.2.1 Formulation de couplage basée sur les fonctions de Green de l'onde de Rayleigh

#### 4.2.1.1 Présentation du problème

La modélisation de l'EA en 3D repose également sur l'application du théorème de réciprocité comme dans le cas 2D. On utilise les fonctions de Green 3D de l'onde de Rayleigh calculées par la méthode de réciprocité, ces fonctions sont détaillées dans la première partie de ce chapitre, au paragraphe (4.1.3). On s'intéresse à la modélisation de l'émission acoustique par une fissure plane sous contrainte dans un demi-espace.

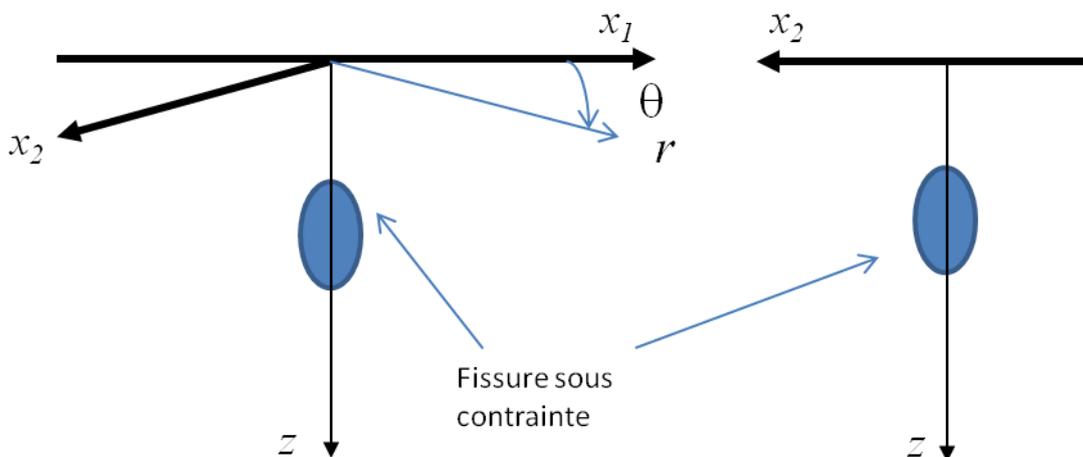


Figure 4.3 : fissure plane sous contrainte dans un demi-espace.

#### 4.2.1.2 Définition des états élastodynamiques

On définit l'état A comme la solution du problème d'émission acoustique, c'est l'onde de Rayleigh générée par une fissure sous contrainte. L'état B correspond aux perturbations générées par une force ponctuelle de direction  $x_k$ , c'est à dire aux fonctions de Green.

## 4.2.1.3 Application du théorème de réciprocité

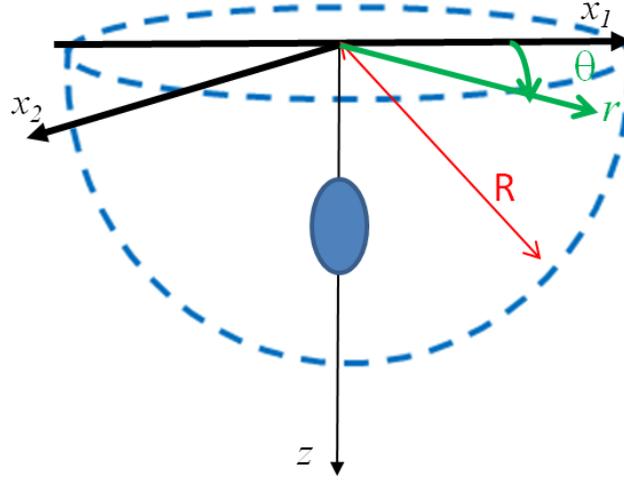


Figure 4.4 : contours d'intégrations utilisés dans l'application du théorème de réciprocité

Quand on applique le théorème de réciprocité sur le volume défini sur la Figure 4.4, les intégrales sur la demi-sphère de rayon R et sur la surface libre du demi-espace s'annulent et l'expression de la réciprocité s'écrit :

$$u_k^A(\xi) = \int_{\Sigma} [u_{i,k}^G(X, \xi) \tau_{ij}^A - u_i^A \tau_{ij,k}^G(X, \xi)] n_j(X) d\Sigma(X) \quad (4.64)$$

Les déplacements de l'onde de Rayleigh générée par une fissure située dans le plan  $(x_2, z)$  s'écrivent alors sous la forme suivante :

$$u_k^A(\xi) = \int_{\Sigma} [u_{i,k}^G(X, \xi) \tau_{i\theta}^A - u_i^A \tau_{i\theta,k}^G(X, \xi)] d\Sigma(X) \quad (4.65)$$

Ces expressions peuvent s'exprimer en fonction des intégrales sur  $\Sigma^+$  et  $\Sigma^-$  qui sont respectivement les surfaces du défaut en  $x_1=0^+$  et  $x_1=0^-$ .

$$\begin{aligned} u_k^A(\xi) &= \int_{\Sigma^+} [u_{i,k}^G(X, \xi) \tau_{i\theta}^A - u_i^A \tau_{i\theta,k}^G(X, \xi)] n_{\theta}(X) d\Sigma(X) \\ &+ \int_{\Sigma^-} [u_{i,k}^G(X, \xi) \tau_{i\theta}^A - u_i^A \tau_{i\theta,k}^G(X, \xi)] n_{\theta}(X) d\Sigma(X) \end{aligned} \quad (4.66)$$

Ou encore :

$$u_k^A(\xi) = \int_{\Sigma^+} [u_{i,k}^G(X, \xi) \Delta \tau_{i\theta}^A - \Delta u_i^A \tau_{i\theta,k}^G(X, \xi)] n_{\theta}(X) d\Sigma(X) \quad (4.67)$$

avec

$$\Delta \tau_{i\theta}^A = \tau_{i\theta}^A \Big|_{x_1=0^+} - \tau_{i\theta}^A \Big|_{x_1=0^-} \quad (4.68)$$

$$\Delta u_i^A = u_i^A \Big|_{x_1=0^+} - u_i^A \Big|_{x_1=0^-} \quad (4.69)$$

Cas d'une fissure en mode I :

Dans le cas d'une fissure en mode I située dans le plan  $(x_2, z)$  qui correspond à  $\theta=\pi/2$ , la fissure s'ouvre suivant l'axe  $x_1$  et le déplacement à la surface du défaut vérifie l'équation suivante :

$$\Delta u_\theta^A = \Delta u_1^A \quad (4.70)$$

$$\Delta u_r^A = 0 \quad (4.71)$$

$$\Delta u_z^A = 0 \quad (4.72)$$

$$\Delta \tau_{ir}^A = 0 \quad (4.73)$$

En substituant les expressions des sauts de contrainte et de déplacement par les équations (4.70) à (4.73), l'expression du déplacement de l'onde de Rayleigh émise par la fissure peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$u_k^A(\xi) = \int_{\Sigma^+} \left[ -\Delta u_\theta^A \tau_{\theta\theta,k}^G(X, \xi) \right] n_\theta(X) d\Sigma^+(X) \quad (4.74)$$

En remplaçant l'expression de la contrainte en fonction des dérivées des déplacements des fonctions de Green, l'intégrale sur la surface  $\Sigma^+$  peut être donnée sous la forme suivante :

$$u_k^A(\xi) = \int_{\Sigma^+} -\Delta u_\theta^A \left( \lambda \frac{\partial u_{r,k}^G(X, \xi)}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_{\theta,k}^G(X, \xi)}{\partial \theta} + u_{r,k}^G(X, \xi) \right) + \lambda \frac{\partial u_{z,k}^G(X, \xi)}{\partial z} \right) d\Sigma^+(X) \quad (4.75)$$

Puisque  $u_{i,k}^G(X, \xi) = u_{k,i}^G(\xi, X)$ , on a donc:

$$u_k^A(\xi) = \int_{\Sigma^+} -\Delta u_\theta^A \left( \lambda \frac{\partial u_{k,r}^G(\xi, X)}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_{k,\theta}^G(\xi, X)}{\partial \theta} + u_{k,r}^G(\xi, X) \right) + \lambda \frac{\partial u_{k,z}^G(\xi, X)}{\partial z} \right) d\Sigma^+(X) \quad (4.76)$$

L'équation (4.76) correspond à une distribution de dipôles le long de la surface du défaut. On simplifie cette équation en remplaçant les différents dipôles par un dipôle agissant au centre de la fissure [32] tel que :

$$u_k^A(\xi) = \left( \lambda \frac{\partial u_{k,r}^G(\xi, h)}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_{k,\theta}^G(\xi, h)}{\partial \theta} + u_{k,r}^G(\xi, h) \right) + \lambda \frac{\partial u_{k,z}^G(\xi, h)}{\partial z} \right) \int_{\Sigma^+} -\Delta u_\theta^A d\Sigma^+(X) \quad (4.77)$$

Dans le paragraphe (4.1.3), on a présenté les déplacements de l'onde de Rayleigh générée par une force de direction  $x_1$  ou  $z$  dans le cas d'une surface plane 3D. On peut calculer d'une manière similaire les déplacements générés par une force de direction  $x_2$  [Annexe C]. On applique ensuite le principe de superposition afin d'obtenir le tenseur de Green de l'onde de Rayleigh en coordonnées cylindriques, ce dernier s'exprime sous la forme suivante :

$$G^R = \begin{pmatrix} u_{r,r}^G & u_{r,\theta}^G & u_{r,z}^G \\ u_{\theta,r}^G & u_{\theta,\theta}^G & u_{\theta,z}^G \\ u_{z,r}^G & u_{z,\theta}^G & u_{z,z}^G \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

avec

$$u_{r,r}^G = \frac{k_R}{4i} \frac{V^R(z_0)}{I} V^R(z) \Phi'(k_R r), \quad (4.79)$$

$$u_{\theta,r}^G = 0, \quad (4.80)$$

$$u_{z,r}^G = \frac{k_R}{4i} \frac{V^R(z_0)}{I} W^R(z) \Phi(k_R r), \quad (4.81)$$

$$u_{r,\theta}^G = 0, \quad (4.82)$$

$$u_{\theta,\theta}^G = \frac{k_R}{4i} \frac{V^R(z_0)}{I} V^R(z) \left( \frac{-1}{k_R r} \right) \Phi(k_R r) (1 - 2 \sin^2 \theta) \quad (4.83)$$

$$u_{z,\theta}^G = 0. \quad (4.84)$$

$$u_{r,z}^G = -\frac{k_R}{4i} \frac{W^R(z_0)}{I} V^R(z) \Phi_0'(kr). \quad (4.85)$$

$$u_{\theta,z}^G = 0. \quad (4.86)$$

$$u_{z,z}^G = -\frac{k_R}{4i} \frac{W^R(z_0)}{I} W^R(z) \Phi_0(kr). \quad (4.87)$$

On applique ensuite une approximation utilisée par Aki et Richards [16], c'est-à-dire que l'on néglige les termes dont la décroissance est plus rapide que  $1/\sqrt{r}$  et on utilise les expressions asymptotiques des fonctions de Hankel (dans le cas d'une onde sortante) données par :

$$H_m^{(1)}(k_R r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{i \left( k_R r - \frac{2m+1}{4} \pi \right)} \quad (4.88)$$

Ensuite, on exprime les différentes fonctions de Hankel et leurs dérivées en fonction de la fonction de Hankel d'ordre 0 afin de mettre toutes les composantes du tenseur de Green sous la même forme.

$$\begin{aligned} \left(H_1^{(1)}(X)\right)' &= H_0^{(1)}(X) - \frac{1}{X} H_1^{(1)}(X) \approx H_0^{(1)}(X) & (4.89) \\ H_1^{(1)}(X) &= -i H_0^{(1)}(X) \\ \left(H_0^{(1)}(X)\right)' &= i H_0^{(1)}(X) \end{aligned}$$

En remplaçant les fonctions de Hankel par leurs expressions asymptotiques et en négligeant les termes dont la décroissance est plus rapide que  $1/\sqrt{r}$ , les expressions des fonctions de Green deviennent :

$$u_{r,r}^G = \frac{k_R}{4i} \frac{V^R(z_0)}{I} V^R(z) \sqrt{\frac{2}{\pi k_R r}} e^{i\left(k_R r - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad (4.90)$$

$$u_{\theta,r}^G = 0, \quad (4.91)$$

$$u_{z,r}^G = -\frac{k_R}{4} \frac{V^R(z_0)}{I} W^R(z) \sqrt{\frac{2}{\pi k_R r}} e^{i\left(k_R r - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad (4.92)$$

$$u_{r,\theta}^G = 0, \quad (4.93)$$

$$u_{\theta,\theta}^G = 0 \quad (4.94)$$

$$u_{z,\theta}^G = 0. \quad (4.95)$$

$$u_{r,z}^G = -\frac{k_R}{4} \frac{W^R(z_0)}{I} V^R(z) \sqrt{\frac{2}{\pi k_R r}} e^{i\left(k_R r - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (4.96)$$

$$u_{\theta,z}^G = 0. \quad (4.97)$$

$$u_{z,z}^G = -\frac{k_R}{4i} \frac{W^R(z_0)}{I} W^R(z) \sqrt{\frac{2}{\pi k_R r}} e^{i\left(k_R r - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (4.98)$$

#### 4.2.1.4 Obtention de la formulation de couplage par une méthode basée sur l'utilisation d'une onde virtuelle de surface

Comme dans le cas 2D vu au chapitre 3 [paragraphe 3.2.1], l'onde de Rayleigh générée par la propagation d'un défaut peut être obtenue à partir d'un modèle de propagation utilisant soit les fonctions de Green soit à travers les expressions du champ de déplacement.

En effet, à partir des expressions de fonctions de Green, on peut déduire les expressions du champ de déplacement de l'onde de Rayleigh sur une surface plane 3D et ainsi appliquer la première méthode de couplage (basée sur l'utilisation d'une onde de Rayleigh virtuelle et sur le théorème de réciprocité). La méthode revient alors à déduire les composantes de champ de déplacement de l'onde de Rayleigh d'amplitude  $A$  se propageant le long d'une surface plane 3D en fonction du type de défaut simulé :

$$u_r = iA(\omega) V(z) \sqrt{\frac{1}{r}} e^{i\left(k_R r - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (4.99)$$

$$u_z = A(\omega)W(z)\sqrt{\frac{1}{r}}e^{i\left(k_R r - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (4.100)$$

## 4.2.2 Applications numériques

L'objectif de cette partie est d'étudier les formes d'onde en utilisant un modèle de source d'EA issu de la mécanique de la rupture. Dans un premier temps, on présente le modèle de source utilisé pour la simulation. Ensuite on présentera une comparaison avec un modèle de la littérature et on analysera l'influence de certains paramètres comme la vitesse de fissuration ou la position du point d'observation sur les formes d'onde. Ensuite, on comparera le modèle 2D et 3D. Ces analyses permettront d'améliorer la compréhension de l'évolution des formes d'onde en fonction de certains paramètres et de conclure sur l'aspect pratique concernant la distinction entre les formes d'onde et leurs détections. On considère un coefficient de poisson  $\nu=0.33$ .

### 4.2.2.1 Source d'EA

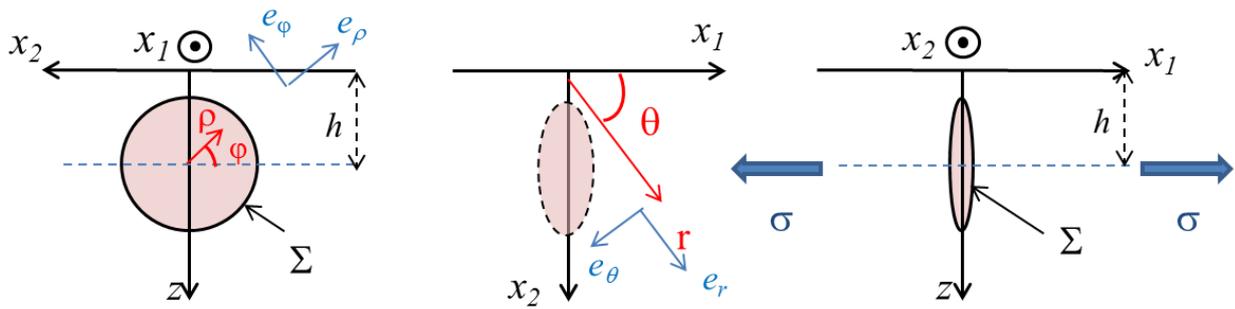


Figure 4.5 : géométrie de la fissure axisymétrique.

Dans le cas d'une fissure axisymétrique de rayon  $a$  soumise à une contrainte  $\sigma$  (Figure 4.5), le saut de déplacement (COD) peut s'écrire sous la forme suivante (cf. chapitre 2) :

$$\Delta u_\theta^A(\rho) = 2 \frac{4(1-\nu^2)\sigma}{\pi E} \sqrt{a^2 - \rho^2} \quad (4.101)$$

On considère une fissure avec un diamètre évoluant  $l_0 = 1\text{mm}$  à  $l = 5\text{mm}$  à une vitesse  $V$  durant un temps d'ouverture  $T$ , et une fréquence d'échantillonnage  $F_e = 50\text{MHz}$ . La discrétisation de la fissure est représentée sur la Figure 4.6.

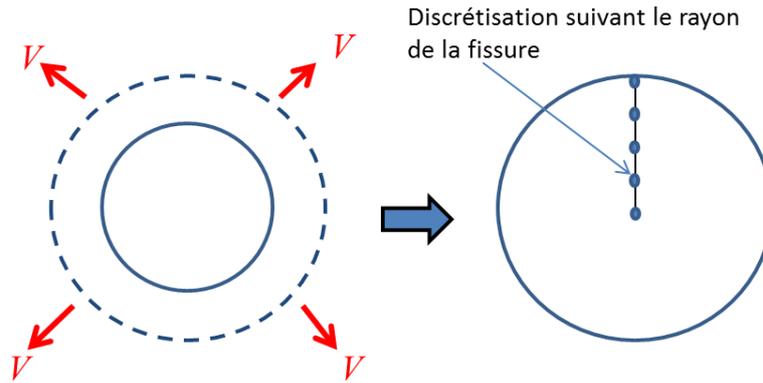


Figure 4.6 : discrétisation de la fissure circulaire.

On définit  $\rho_j$  et  $t_n$  par :

$$\rho_j = jV\Delta t \quad (4.102)$$

$$t_n = t_0 + n \frac{1}{Fe} \quad (4.103)$$

L'indice spatial  $j$  varie de 0 à  $J/2$  et l'indice temporel  $n$  varie de 0 à  $N$  avec :

$$\Delta t = 1/Fe \quad (4.104)$$

$$N = \frac{T}{\Delta t} \quad (4.105)$$

$$J = \frac{l}{V\Delta t} \quad (4.106)$$

L'équation (4.101) peut ainsi être discrétisée sous la forme suivante:

$$\Delta u_1(\rho_j, t_n) = 2\sigma \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \sqrt{((l_0 + nV\Delta t)/2)^2 - \rho_j^2}, \text{ si } \rho_j \leq (l_0 + nV\Delta t)/2 \quad (4.107)$$

et

$$\Delta u_1(\rho_j, t_n) = 0, \text{ si } (l_0 + nV\Delta t)/2 \leq \rho_j \leq l/2 \quad (4.108)$$

D'une manière similaire au cas 2D, on applique une transformée de Fourier sur l'équation (4.107) afin d'obtenir le saut de déplacement dans le domaine fréquentiel et on en déduit le déplacement de l'onde de Rayleigh émise par la fissure dans le domaine fréquentiel (équation (4.77)). Le déplacement de cette onde dans le domaine temporel est ensuite déterminé à partir de la transformée de Fourier inverse.

### 4.2.2.2 Simulation des formes d'onde

#### Etude paramétrique en fonction de la vitesse de fissuration

Dans un premier temps, on décide de simuler la vitesse particulière de l'onde de Rayleigh émise par une fissure sous contraintes. Cette fissure se propage à une vitesse  $V$  avec un diamètre variant entre 1mm et 5mm. Elle est située à une distance  $z_0 = 5\text{mm}$  de la surface et le point d'observation à  $r = 100\text{mm}$  (Voir Figure 4.7).

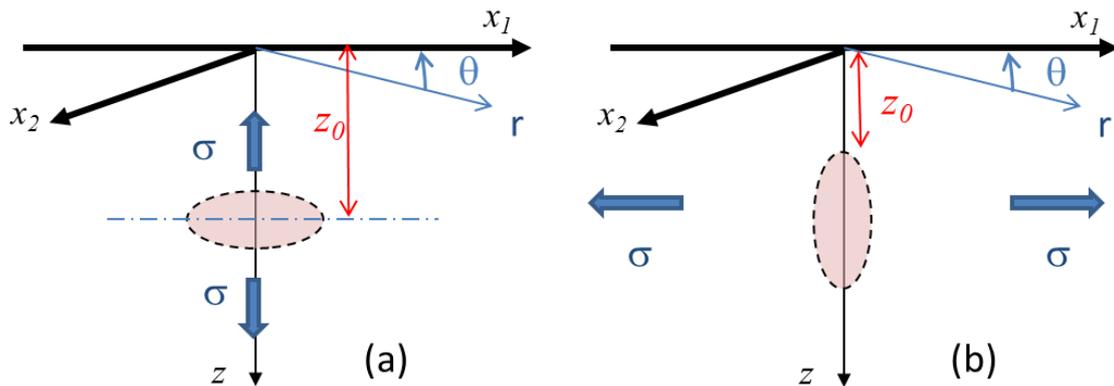


Figure 4.7 : fissure circulaire en mode I, (a) fissure horizontale, (b) fissure verticale.

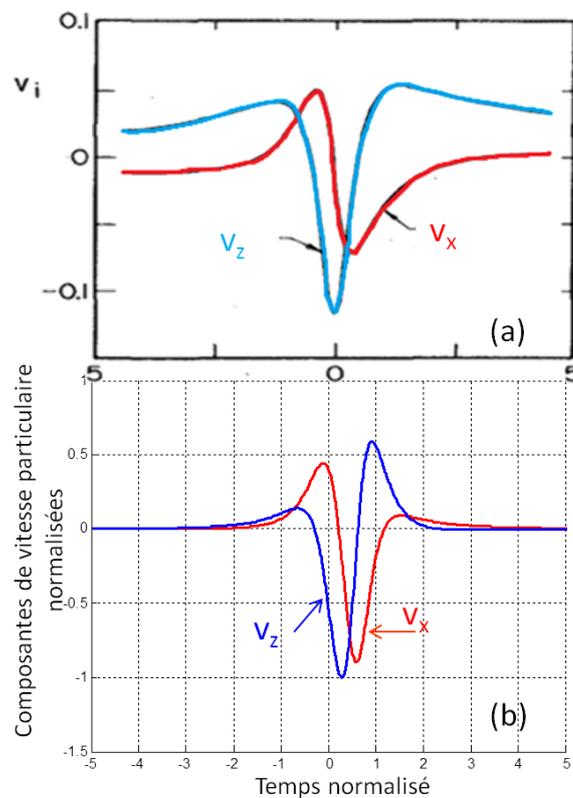


Figure 4.8 : comparaison avec un modèle de la littérature (a) résultat issu de [31], (b) le résultat du modèle donné au paragraphe (4.2.1).

Ce résultat est ensuite comparé avec un résultat issu de la littérature [31] pour lequel la vitesse particulière de l'onde de Rayleigh est obtenue à partir du couplage entre les ondes de volumes émises en champ proche par une fissure circulaire sous contrainte et les fonctions de Green de l'onde de Rayleigh. Plus précisément, la formulation intégrale de Harris [31] est évaluée en appliquant l'approximation des phases stationnaires dans le domaine fréquentiel. Par conséquent, les formes d'onde dans le domaine temporel, sont obtenues à partir d'une approximation haute fréquence de la transformée de Fourier inverse au voisinage du temps d'arrivée de l'onde de Rayleigh.

La Figure 4.8 illustre la comparaison entre les deux modèles. Après analyse des deux courbes, on retrouve la forme générale de la vitesse particulière de l'onde de Rayleigh. Il est essentiel de souligner ici que notre formulation permet de faire le couplage entre le COD sur toute la surface de la fissure à l'aide d'une approche analytique quasi statique et des fonctions de Green de l'onde de Rayleigh, tandis que le modèle de Harris prend en compte l'avancement de la pointe de la fissure pour le calcul des ondes de volumes en champ proche. Ces dernières sont utilisées dans sa formulation de couplage afin de calculer l'onde de Rayleigh en champ lointain. Ceci peut expliquer les légères différences entre les résultats.

En outre, comme dans le cas 2D, on remarque que l'amplitude des vitesses particulières augmente avec la vitesse de fissuration et que l'amplitude du signal généré par une fissure horizontale (Figure 4.10) est plus importante que celle émise par une fissure verticale (Figure 4.9).

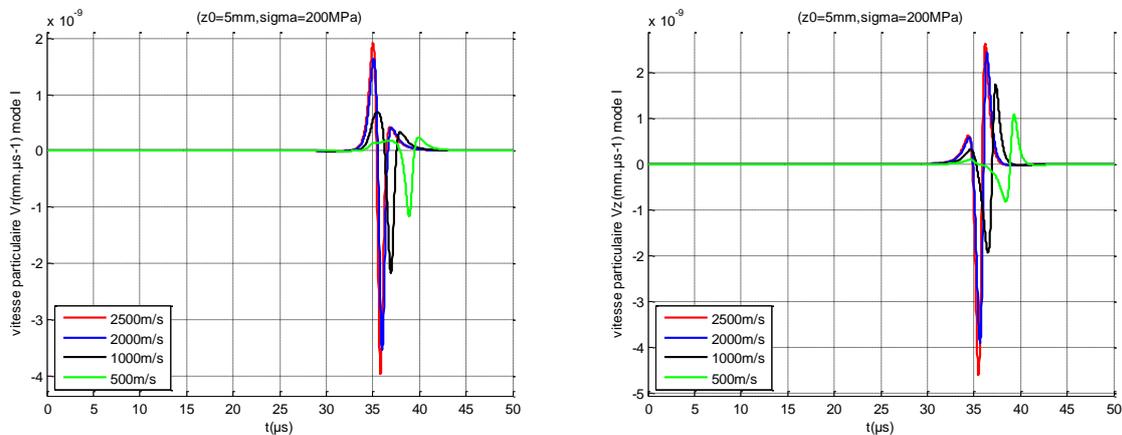


Figure 4.9 : composante radiale (a) et composante normale (b) de la vitesse particulière de l'onde de Rayleigh émise par une fissure circulaire droite située à 5mm de la surface, sous 200MPa et se propageant à différentes vitesses V.

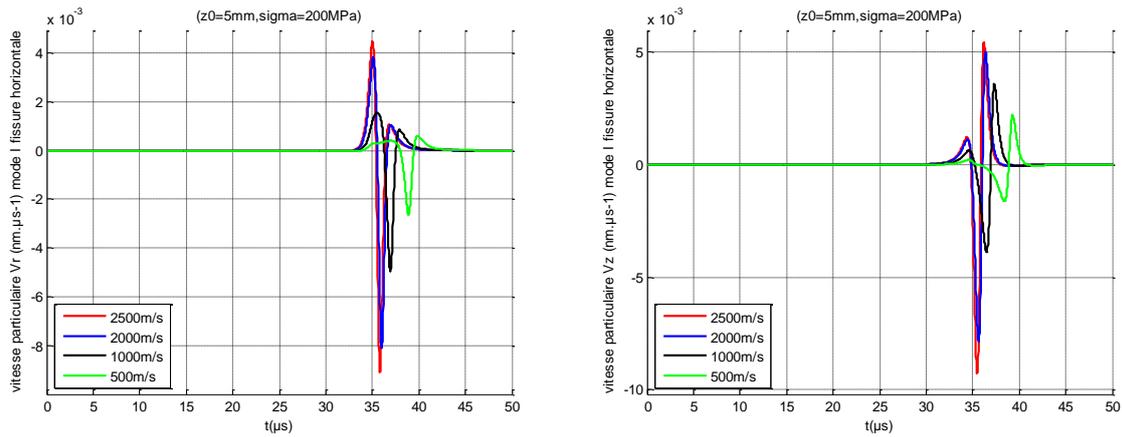


Figure 4.10 : composante radiale (a) et composante normale (b) de la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure circulaire horizontale située à 5mm de la surface, sous 200MPa et se propageant à différentes vitesses  $V$ .

Etude paramétrique en fonction de la position de la fissure

Par la suite, on simule la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure sous contrainte en un point d'observation situé à  $r=100\text{mm}$ . On considère que la fissure s'ouvre en mode I, se propage à une vitesse  $V=2000\text{m/s}$  et est située à différentes distance  $z_0$  de la surface (Figure 4.11 et Figure 4.12).

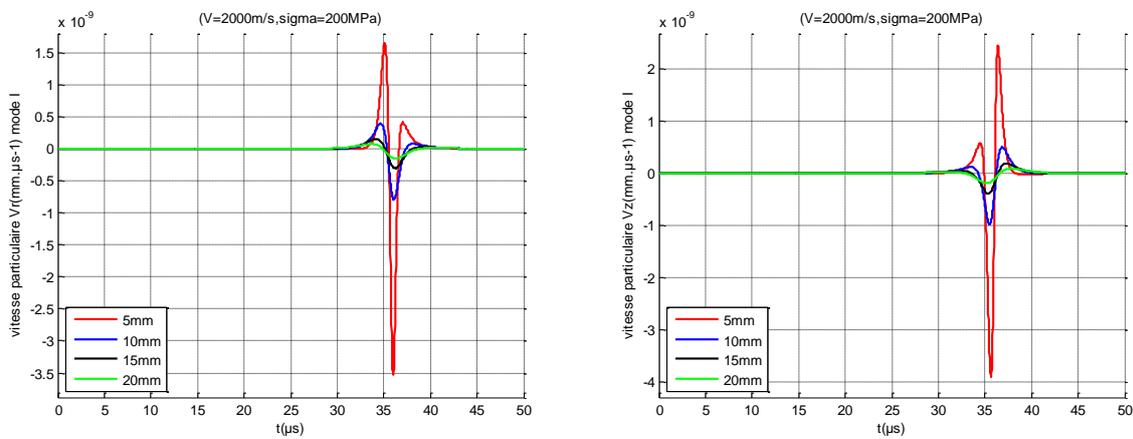


Figure 4.11 : composantes radiale (a) et verticale (b) de la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh en  $r=100\text{mm}$  émise par une fissure verticale sous 200MPa se propageant à une vitesse  $V=2000\text{m/s}$  et située à différentes positions  $z_0$  de la surface.

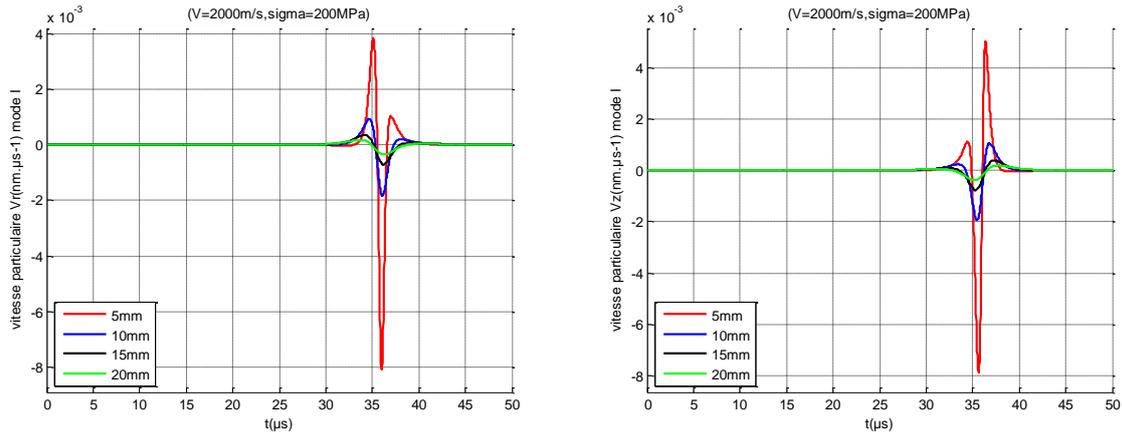


Figure 4.12 : composantes radiale (a) et verticale (b) de la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh en  $r=100\text{mm}$  émise par une fissure horizontale sous 200MPa se propageant à une vitesse  $V=2000\text{m/s}$  et située à différentes positions  $z_0$  de la surface.

Après analyse on s'aperçoit que l'on retrouve, en 3D le même comportement de l'onde de Rayleigh qu'en 2D : l'amplitude de l'onde émise décroît rapidement lorsque la position de la fissure s'éloigne de la surface, l'amplitude du signal est en effet divisée par quatre quand on passe d'une fissure située à 5mm de la surface libre à une fissure située à 10mm (Figure 4.11 et Figure 4.12).

#### Etude paramétrique en fonction du point d'observation

Dans cette partie, on choisit d'effectuer une étude paramétrique en fonction du point d'observation. Aussi, on simule la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure sous contraintes en mode I, se propageant à une vitesse  $V=2000\text{m/s}$  et située à une distance  $z_0=5\text{mm}$  de la surface à différents points d'observation (Figure 4.13 et Figure 4.14).

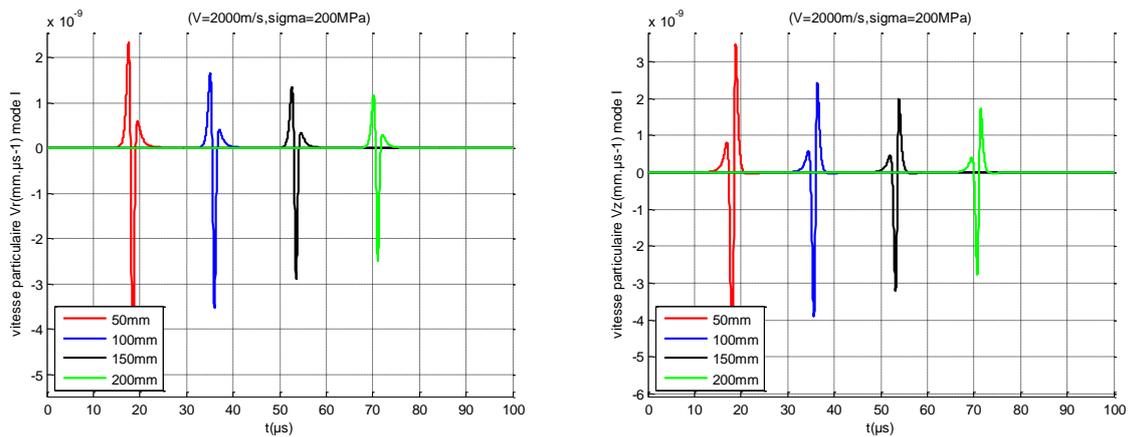


Figure 4.13 : composantes radiale (a) et normale (b) de la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure verticale sous 200MPa se propageant à une vitesse  $V=2000\text{m/s}$  et située à différentes position  $z_0$  de la surface, en  $r=50\text{mm}$ ,  $r=100\text{mm}$ ,  $r=150\text{mm}$  et  $r=200\text{mm}$ .

Contrairement au modèle 2D, l'amplitude de la vitesse particulaire décroît quand la distance qui sépare l'épicentre de la fissure et le point d'observation augmente. Ce résultat est logique puisque l'onde de Rayleigh décroît en  $1/\sqrt{r}$  en 3D contrairement au cas 2D.

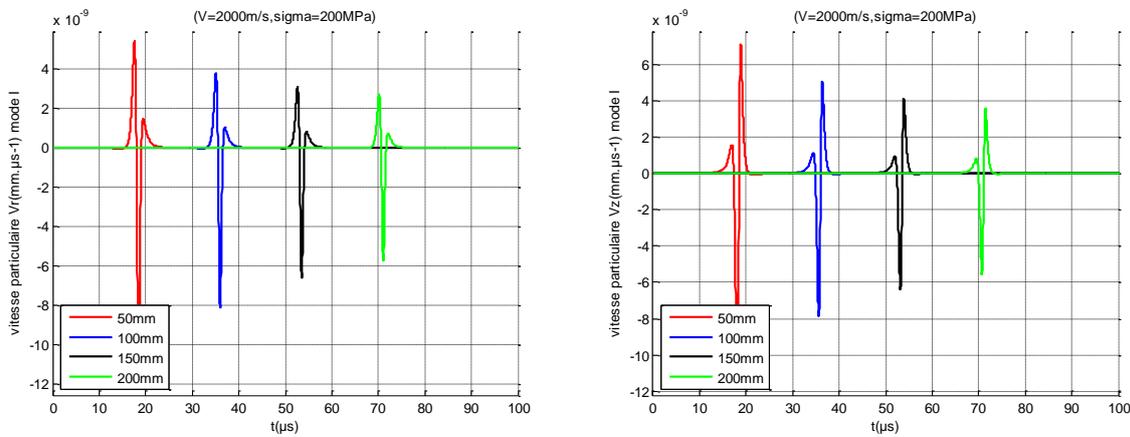


Figure 4.14 : composantes radiale (a) et normale (b) de la vitesse particulaire de l'onde de Rayleigh émise par une fissure sous horizontale 200MPa se propageant à une vitesse  $V=2000\text{m/s}$  et située à différentes position  $z_0$  de la surface, en  $r=50\text{mm}$ ,  $r=100\text{mm}$ ,  $r=150\text{mm}$  et  $r=200\text{mm}$ .

### 4.2.3 Synthèse

En conclusion de cette partie, on retrouve les mêmes évolutions en 3D qu'en 2D. En effet, l'amplitude de la vitesse particulaire de l'onde émise augmente avec la vitesse de fissuration et diminue rapidement quand l'épicentre de la fissure s'éloigne de la surface. L'amplitude des formes d'ondes est deux fois plus grande quand on passe d'une fissure droite à une fissure horizontale pour les configurations étudiées. Toutefois, lorsque l'on compare les formes d'ondes obtenues à partir des modèles 2D et 3D, on remarque (Figure 4.15) que la forme du signal est assez différente. En effet, s'ajoute à la décroissance spatiale le fait que le modèle 2D revient à considérer une fissure rectangulaire d'extension infinie contrairement au modèle de fissure 3D qui correspond à une fissure plane circulaire 3D. Par ailleurs, le contenu fréquentiel des fonctions de Green 3D n'est pas le même qu'en 2D. On identifie dans les équations un facteur  $\sqrt{\omega}$  entre ces deux modèles.

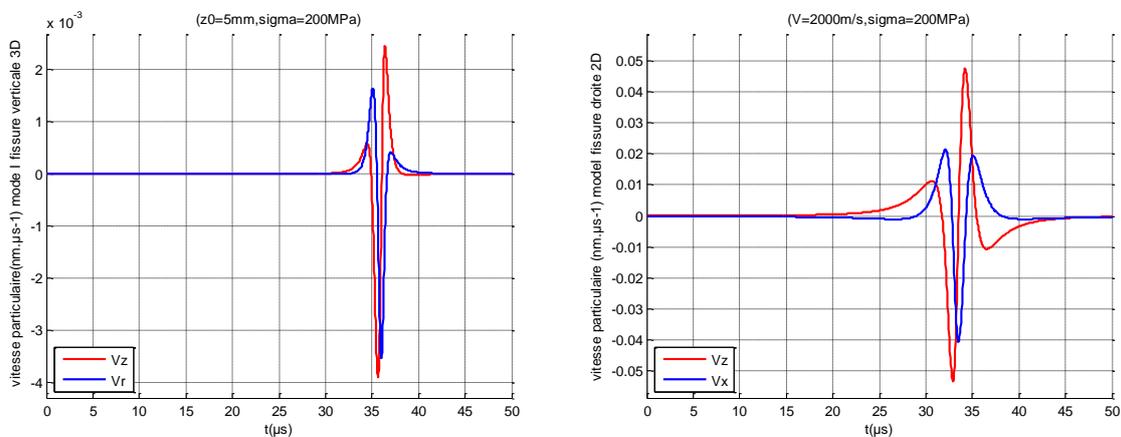


Figure 4.15 : comparaison entre les formulations de couplage 2D et 3D.

## 4.3 Cas d'application 3D : Simulation d'un contrôle par EA en onde de Rayleigh

### 4.3.1 Expression de la tension délivrée en sortie

La Figure 4.16 montre le principe de détection des ondes de Rayleigh par un capteur d'EA en 3D. On considère ici le cas de la détection par un capteur cylindrique de diamètre  $D$ ,  $d_1$  et  $d_2$  étant respectivement les coordonnées du centre du capteur suivant  $x_1$  et  $x_2$  dans le repère global  $(0, x_1, x_2)$ .

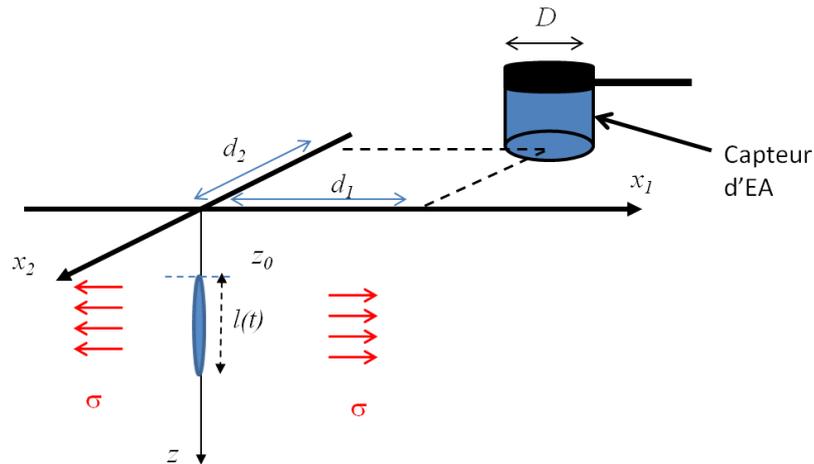


Figure 4.16 : principe de la détection par un capteur d'EA (configuration 3D).

On définit ensuite une base locale cartésienne  $(\chi_1, \chi_2)$ . (Figure 4.17) et une base locale cylindrique  $(r, \varphi)$  liées au centre du capteur.

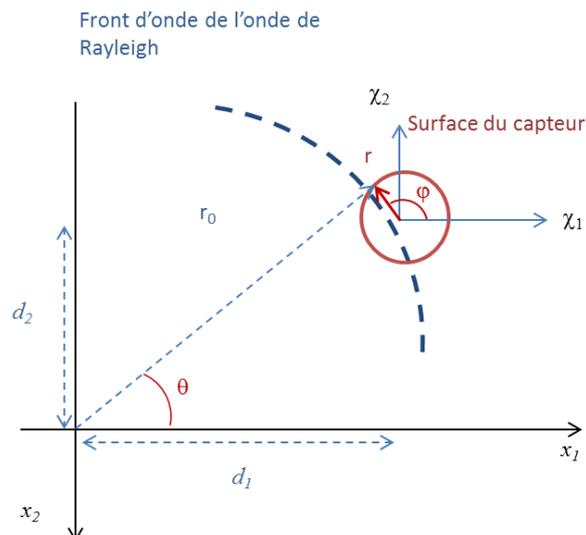


Figure 4.17 : définitions du repère local lié au capteur d'EA.

En tenant compte de cette nouvelle configuration, l'expression de la tension délivrée en sortie par le capteur peut s'écrire sous la forme suivante :

$$E_0 = \frac{1}{\pi(D/2)^2} \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} v_z(r_0(r, \varphi), 0) m_0 r dr d\varphi \quad (2.109)$$

Avec

$$v_z(\xi) = i\omega \left( \lambda \frac{\partial u_{z,r}^G(\xi, h)}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_{k,\theta}^G(\xi, h)}{\partial \theta} + u_{k,r}^G(\xi, h) \right) + \lambda \frac{\partial u_{k,z}^G(\xi, h)}{\partial z} \right) \int_{\Sigma^+} -\Delta u_1^A d\Sigma^+(X) \quad (2.110)$$

où

$$\xi = (r_0(r, \varphi), 0) \quad (2.111)$$

La relation entre les deux repères cartésiens est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \chi_1 + d_1 \\ x_2 &= \chi_2 + d_2 \end{aligned} \quad (2.112)$$

Sachant que,

$$\begin{aligned} x_1 &= r_0 \cos \theta \\ x_2 &= -r_0 \sin \theta \\ \chi_1 &= r \cos \varphi \\ \chi_2 &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.113)$$

On peut écrire alors que :

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{r \cos \varphi + d_1}{\cos \theta} \\ \tan \theta &= -\frac{r \cos \varphi + d_1}{r \sin \varphi + d_2} \end{aligned} \quad (2.114)$$

Ou encore

$$r_0 = \frac{r \cos \varphi + d_1}{\cos \left( \tan^{-1} \left( -\frac{r \cos \varphi + d_1}{r \sin \varphi + d_2} \right) \right)} \quad (2.115)$$

Comme  $\cos(\tan^{-1}(X)) = \frac{1}{\sqrt{1+X^2}}$ , l'équation (2.115) peut être simplifiée de la façon suivante :

$$r_0 = (r \cos \varphi + d_1) \sqrt{1 + \left( \frac{r \cos \varphi + d_1}{r \sin \varphi + d_2} \right)^2} \quad (2.116)$$

Après avoir effectué le changement de variable entre  $r$  et  $r_0$  dans l'équation (2.109), on évalue numériquement l'intégrale dans le domaine fréquentiel de façon similaire au cas 2D. On applique ensuite une transformée de Fourier inverse afin d'obtenir la tension délivrée en sortie par le capteur dans le domaine temporel.

### 4.3.2 Exemples d'application

Dans cette partie, on choisit de simuler la tension délivrée en sortie par le capteur d'EA après l'émission de l'onde de Rayleigh générée par une fissure verticale sous contraintes en mode I, se propageant à une vitesse  $V=2000\text{m/s}$  et située à une distance  $z_0=5\text{mm}$  de la surface. Le centre du capteur est placé à une distance  $d=100\text{mm}$  de l'épicentre de la fissure avec  $\theta_0=45^\circ$  et  $R_{\text{capteur}}=5\text{mm}$  (

Figure 4.18).

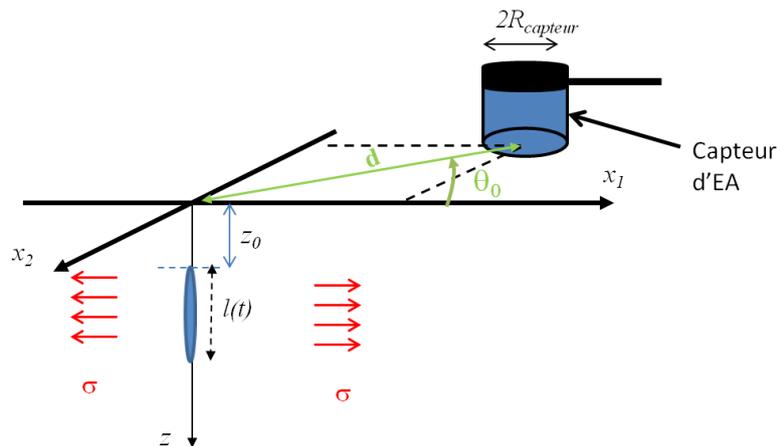


Figure 4.18 : définition de  $d$  et  $\theta_0$ .

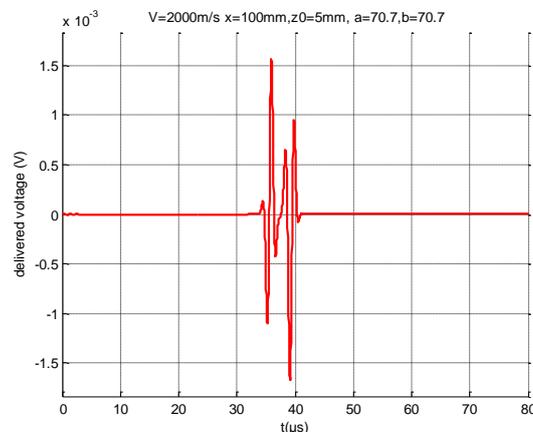


Figure 4.19 : tension délivrée en sortie par le capteur d'EA après la propagation d'une fissure droite,  $V=2000\text{m/s}$ ,  $z_0=5\text{mm}$ ,  $d=100\text{mm}$ ,  $R_{\text{capteur}}=5\text{mm}$ .

Comme dans le cas 2D, on vérifie bien sur la

Figure 4.19 que, la forme du signal correspond à l'interaction de l'onde de Rayleigh avec les bords du capteur.

Afin d'analyser l'influence de la position du capteur sur la réception de l'onde de Rayleigh, on fait varier l'angle  $\theta_0$  et les distances  $d$ . Les Figure 4.20 et Figure 4.22 montrent le résultat de simulation de la détection de l'onde de Rayleigh pour différentes positions angulaires  $\theta_0$  et distances entre l'épicentre de la fissure et le centre du capteur.

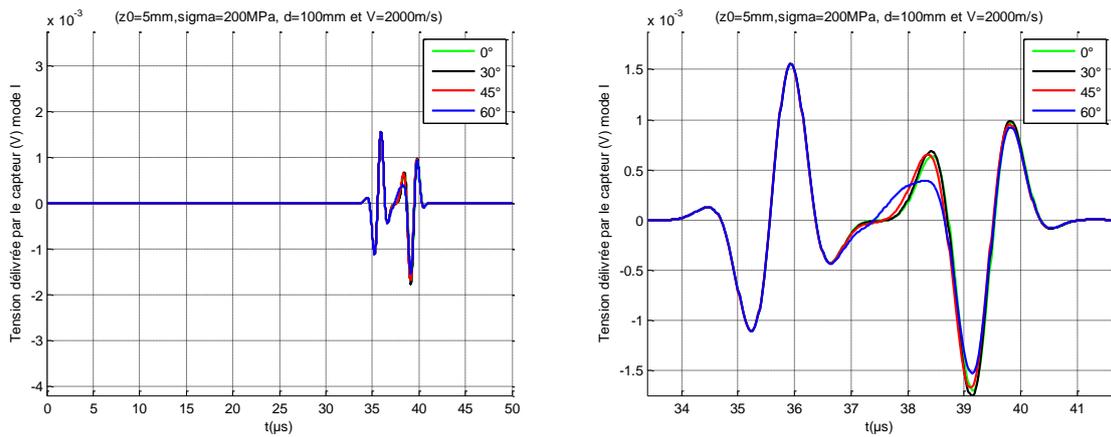


Figure 4.20 : tension délivrée en sortie par un capteur d'EA après la propagation d'une fissure verticale à différents angles  $\theta_0$ ,  $V=2000\text{m/s}$ ,  $z_0=5\text{mm}$ ,  $d=100\text{mm}$ ,  $R_{\text{capteur}}=5\text{mm}$ .

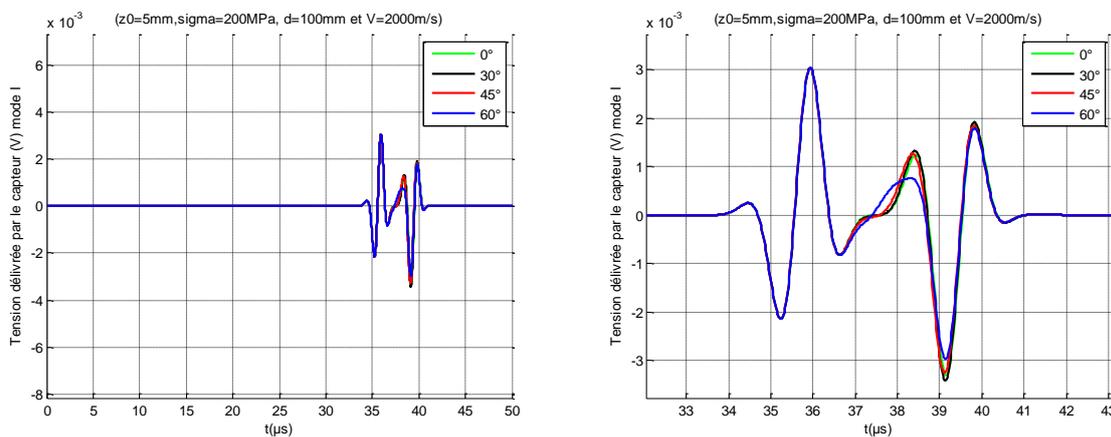


Figure 4.21 : tension délivrée en sortie par un capteur d'EA après la propagation d'une fissure horizontale à différents angles  $\theta_0$ ,  $V=2000\text{m/s}$ ,  $z_0=5\text{mm}$ ,  $d=100\text{mm}$ ,  $R_{\text{capteur}}=5\text{mm}$ .

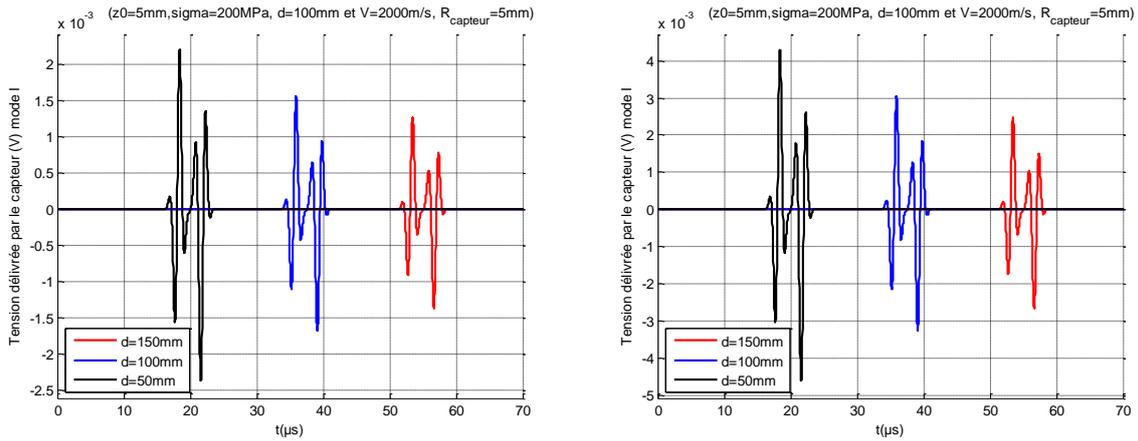


Figure 4.22 : tension délivrée en sortie par le capteur d'EA à différentes distances  $d$ ,  $\theta_0 = 45^\circ$ ,  $V=2000\text{m/s}$ ,  $z_0=5\text{mm}$ ,  $R_{\text{capteur}}=5\text{mm}$  (a) fissure verticale (b) fissure horizontale.

Après analyse des résultats, on remarque que l'influence de la position angulaire du capteur est très faible. Comme on pouvait s'y attendre, une même évolution est observée entre le champ de déplacement et la tension sur le capteur lorsque la distance  $d$  varie. On note, par exemple, que le rapport entre les amplitudes pour  $d=50\text{mm}$  et  $150\text{mm}$  est égale à  $\sqrt{150/50} \approx 1.73$ .

Etude paramétrique en fonction du rayon du capteur :

La Figure 4.23 présente la tension délivrée en sortie pour différents rayons du capteur. On remarque que le capteur ne peut pas être considéré comme ponctuel.

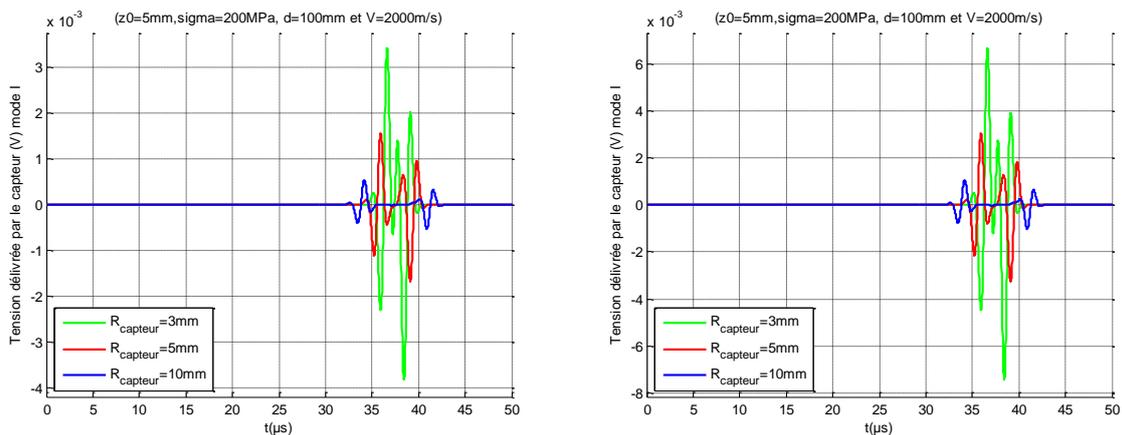


Figure 4.23 : tension délivrée en sortie par le capteur d'EA pour trois différents rayons de capteur,  $V=2000\text{m/s}$ ,  $z_0=5\text{mm}$ ,  $d=100\text{mm}$ , (a) fissure droite, (b) fissure horizontale.

La Figure 4.24 présente une comparaison entre les modèles 2D et 3D. On observe aussi que le contenu fréquentiel est différent, ce qui s'explique comme indiqué précédemment par le rapport  $\sqrt{\omega}$  entre les expressions en 2D et 3D.

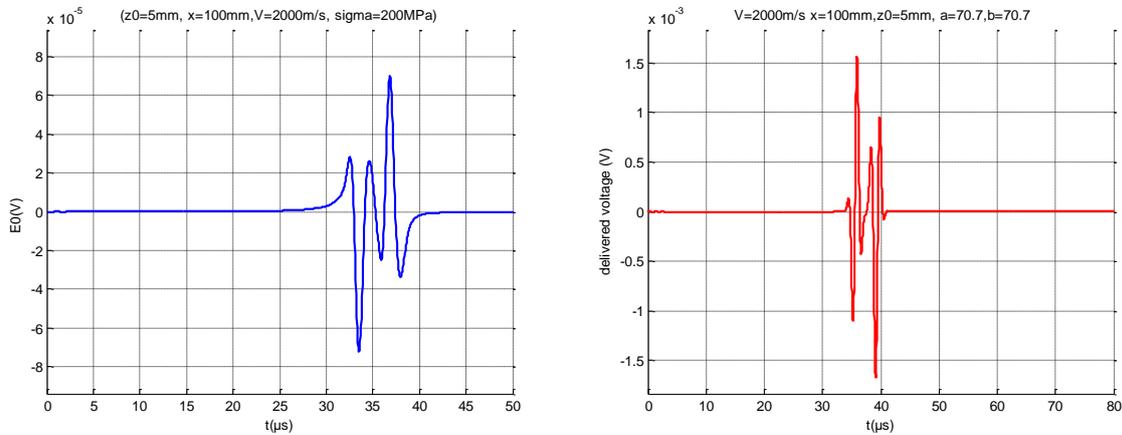


Figure 4.24 : comparaison entre le modèle de réception 2D et 3D, (a) 2D et (b) 3D

## 4.4 Conclusion

Le plan de ce chapitre était similaire à celui du chapitre 3. Il s'agissait dans une première partie d'effectuer une l'étude bibliographique sur la modélisation de la propagation de l'onde de Rayleigh en 3D dans le cas d'une surface plane. Ces études m'ont permis de faire un choix sur les modèles de propagation que j'ai utilisés ensuite dans le développement des formulations de couplage. Dans un second temps, j'ai détaillé la démarche de calcul du champ élastodynamique émis par une fissure plane 3D sous contraintes.

Une comparaison avec un résultat de la littérature a été effectuée. On retrouve la forme générale des vitesses particulières de l'onde de Rayleigh, les différences entre les méthodes peuvent expliquer les légères différences dans les résultats. Différentes études paramétriques sur l'EA par une fissure sous contraintes ont été réalisées. On retrouve le même comportement de l'onde de Rayleigh qu'en 2D. En effet, L'amplitude de la vitesse particulière de l'onde émise augmente avec la vitesse de fissuration et diminue rapidement avec la profondeur de la fissure. De plus, l'amplitude des formes d'ondes est deux fois plus grande quand on passe d'une fissure droite à une fissure horizontale pour les configurations étudiées.

Le résultat du calcul de champ élastodynamique est utilisé afin de simuler la réponse d'un capteur d'EA basée sur une approche piston. Plusieurs études paramétriques ont été menées afin d'étudier l'influence à la fois de la position du capteur par rapport à l'épicentre de la fissure, la vitesse de fissuration ainsi que celle du rayon du capteur sur le signal reçu. Il apparaît que l'amplitude des formes d'onde augmente avec la vitesse de fissuration et décroît quand la distance qui sépare l'épicentre de la fissure et le point d'observation augmente. De plus l'amplitude des formes d'ondes décroît rapidement lorsque la position de la fissure s'éloigne de la surface. Les modèles de réception 2D et 3D ont été également

comparés. On note que le contenu fréquentiel est différent, ce qui s'explique par le rapport  $\sqrt{\omega}$  entre les expressions 2D et 3D.

Ce chapitre a traité l'EA dans une structure épaisse et plane. Dans le dernier chapitre, je m'intéresserai à la modélisation de l'EA en ondes guidées dans le cas des structures minces.

# Chapitre 5 Modélisation de l'EA en ondes guidées

5.1	Modélisation de la propagation des ondes guidées.....	123
5.1.1	Etat de l'art sur les méthodes de modélisation de la propagation des ondes guidées .....	123
5.1.1.1	Méthodes analytiques .....	123
5.1.1.2	Méthodes semi analytiques.....	124
5.1.1.3	Utilisation de la méthode SAFE pour la modélisation de la propagation guidée dans une plaque .....	124
5.1.2	Extension de la méthode SAFE pour la propagation guidée dans la direction circonférentielle dans les structures cylindriques .....	131
5.2	Couplage entre un modèle de source et un modèle de propagation des ondes guidées .....	137
5.2.1	Formulation de couplage basée sur l'onde virtuelle.....	137
5.2.1.1	Structure plane .....	137
5.2.1.2	Applications numériques .....	142
5.2.1.3	Synthèse.....	151
5.3	Cas d'application : Simulation d'un contrôle par EA en ondes guidées.....	152
5.3.1	Expression de la tension délivrée en sortie par un capteur d'EA .....	152
5.3.2	Exemples d'application .....	153
5.4	Conclusion .....	154

Ce chapitre traite de l'EA en ondes guidées dans le cas des structures minces. Dans un premier temps, je rappelle les différentes méthodes de modélisation de la propagation des ondes guidées. Puis, je présente les extensions réalisées afin de prendre en compte l'effet de courbure. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée au couplage entre un modèle de source d'EA et un modèle de propagation des ondes guidées. La formulation de couplage est obtenue en utilisant une méthode similaire à celle des structures épaisses. Ensuite, le résultat de calcul du champ émis par une fissure sous contrainte est employé afin de simuler la réception par un capteur d'EA.

## 5.1 Modélisation de la propagation des ondes guidées

*Dans ce paragraphe, sont exposées la modélisation de la propagation guidée à l'aide de la méthode SAFE (Semi Analytical Finite Element Method) ainsi que les différentes extensions que j'ai effectuées pour la prise en compte d'une courbure constante dans la direction de propagation.*

### 5.1.1 Etat de l'art sur les méthodes de modélisation de la propagation des ondes guidées

Ce paragraphe a pour objet de donner une vue d'ensemble des méthodes analytiques ou numériques utilisées pour la modélisation de la propagation des ondes guidées.

#### 5.1.1.1 Méthodes analytiques

La modélisation analytique de la propagation des ondes guidées repose en premier lieu sur la résolution de l'équation de dispersion. Parmi les techniques de résolution, on peut citer les méthodes basées sur les matrices de transfert qui sont bien adaptées aux structures stratifiées mais qui sont généralement limitées aux géométries de type plaque ou cylindrique. On distingue deux types de méthodes matricielles. La première méthode est appelée « méthode de la matrice de transfert ». Développée en 1949 par Thomson [79], elle a ensuite été complétée par Haskell [80] en 1953. Dans cette méthode, les champs de contrainte et de déplacement aux interfaces sont calculés à partir des multiplications de matrices correspondant aux différentes couches et l'équation de dispersion de la structure multicouche est alors obtenue à l'aide des relations de continuité entre contraintes et déplacements pour deux plis successifs. L'avantage de cette méthode réside dans l'indépendance de la taille du système matriciel à résoudre par rapport au nombre de plis. Cependant, cette méthode présente l'inconvénient de devenir instable à haute fréquence et pour des couches de grande épaisseur. En outre, elle provoque des problèmes numériques à cause de l'addition de termes très petits et de termes très grands résultant des exponentielles dont les arguments sont de signes opposés et de valeur absolue importante.

La deuxième méthode est appelée méthode de la matrice globale [81]. Cette dernière également basée sur la continuité des champs de contraintes et de déplacements aux interfaces entre les plis est à la base du logiciel Disperse développé à Impérial College [81]. Contrairement au cas précédent, les matrices sont concaténées et le système complet est représenté par une matrice unique. L'équation de dispersion est recherchée en annulant le déterminant de la matrice globale. Soulignons ici que cette méthode est numériquement plus stable que la première.

Des méthodes similaires ont été également développées, comme par exemple la méthode de la matrice de Raideur de couche [82]. Cette dernière nécessite plus de calcul mais elle est

plus stable numériquement. Il existe également des méthodes basées sur la matrice d'impédance obtenue en reliant les contraintes avec les vitesses particulières. Une méthode dérivée de cette dernière est d'ailleurs à la base du logiciel PROPAG [82] développé par le laboratoire de mécanique physique de l'université Bordeaux 1.

### 5.1.1.2 Méthodes semi analytiques

Les méthodes analytiques ne sont utilisables que dans les cas canoniques. C'est pour cette raison que d'autres solutions semi-analytiques ont été proposées. Elles consistent à prendre en compte la déformation dans l'épaisseur de façon numérique et la propagation dans le plan de manière analytique.

Parmi les méthodes semi-analytiques, on peut citer la méthode « Wave Finite Element » appelée (WFE) développée par Mencik *et al.* [83]. Elle permet de modéliser la propagation guidée dans des structures complexes. Elle repose sur une vision périodique de la structure. En effet, une section du guide est choisie et modélisée à l'aide des éléments finis, puis les modes sont déterminés en prenant en compte la continuité des déplacements et l'équilibre des forces comme illustré sur la Figure 5.1.

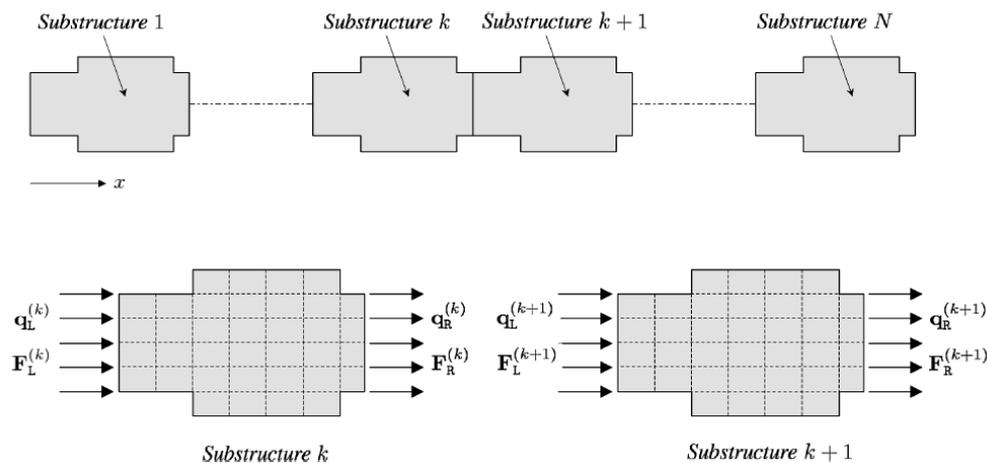


Figure 5.1 : principe de décomposition d'une structure périodique [83].

On trouve également la méthode SAFE qui est très utilisée en raison de la simplicité de sa mise en œuvre. Cette dernière est privilégiée dans le cadre de cette étude, elle sera décrite dans le paragraphe suivant.

### 5.1.1.3 Utilisation de la méthode SAFE pour la modélisation de la propagation guidée dans une plaque

La méthode SAFE permet de calculer les propriétés d'une onde se propageant dans un guide qui possède une section invariante selon la direction de propagation ; le déplacement dans la section est pris en compte par éléments finis, alors que la dépendance axiale est gérée de façon analytique. Cette méthode a été étudiée par de nombreux auteurs pour différents

types de structures et différentes propriétés de matériaux. Dong et al. (1972) [84] ont simulé la propagation dans des guides d'ondes de section rectangulaire ou carrée pour des matériaux isotropes et homogènes.

L'objectif est de modéliser la propagation des ondes guidées (ondes de Lamb) dans une plaque. Dans la suite du paragraphe un bref rappel de la méthode SAFE est donné et la géométrie du problème correspondante est décrite sur la Figure 5.2.

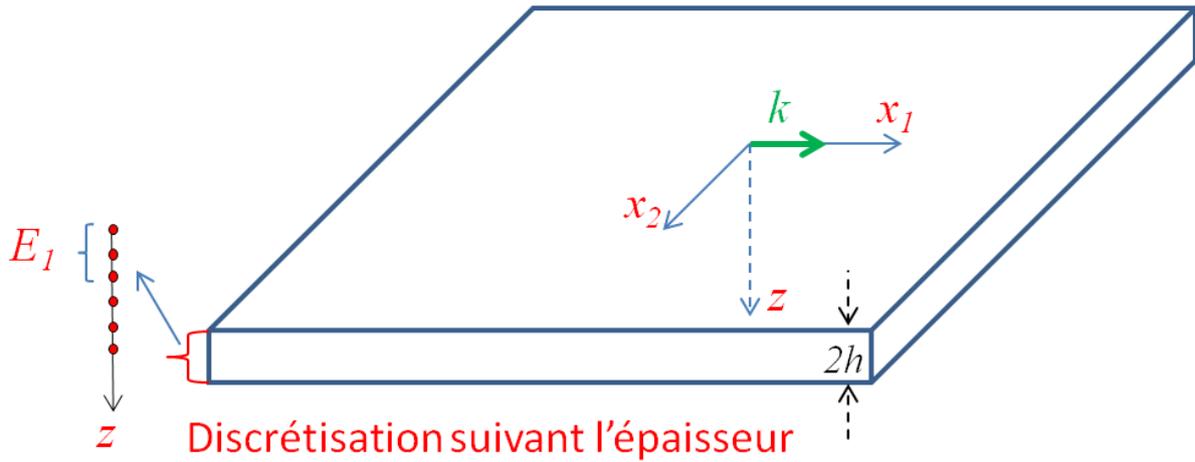


Figure 5.2 : discrétisation de l'épaisseur d'une plaque infinie d'épaisseur  $2h$  suivant  $z$  dans le cadre de la méthode SAFE.

On considère que la plaque est infinie suivant  $x_2$ , ce qui revient à résoudre le problème en 2D. On suppose ici que le vecteur d'onde est suivant l'axe  $x_1$ .

Soient  $u$  le champ de déplacements,  $\varepsilon$  le champ de déformations, et  $\sigma$  le champ de contraintes dans la plaque.

$$u = [u_1 \ u_2 \ u_z]^T \quad (5.1)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{zz} \ 2\varepsilon_{2z} \ 2\varepsilon_{1z} \ 2\varepsilon_{12}]^T \quad (5.2)$$

$$\sigma = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{2z} \ \sigma_{1z} \ \sigma_{12}]^T \quad (5.3)$$

où  $T$  désigne la transposée de la matrice ou du vecteur.

On cherche à exprimer le déplacement associé à un mode sous la forme suivante :

$$u(x_1, z, t) = U(z) e^{i(\omega t - kx_1)} \quad (5.4)$$

$k$  étant le nombre d'onde et  $U(z)$  correspondant au profil du déplacement dans l'épaisseur de la plaque et  $\omega$  la pulsation de l'onde.

On considère des éléments finis constitués chacun d'un segment à trois nœuds. En 2D, le déplacement pour un élément,  $e$ , s'écrit de la façon suivante :

$$u^{(e)}(x_1, z, t) = N(z) d^{(e)} e^{i(\omega t - kx_1)} \quad (5.5)$$

avec

$$d^{(e)} = \left[ d_x^{(e),1} \ d_y^{(e),1} \ d_z^{(e),1} \ d_x^{(e),2} \ d_y^{(e),2} \ d_z^{(e),2} \ d_x^{(e),3} \ d_y^{(e),3} \ d_z^{(e),3} \right]^T \quad (5.6)$$

$d_i^{(e),m}$  étant la  $i$ -ième composante du déplacement nodal au  $m$ -ième nœud de l'élément  $e$ .  $N$  représente la matrice d'interpolation donnée par :

$$N(z) = \left( N_1(z) \quad N_2(z) \quad N_3(z) \right) \quad (5.7)$$

et

$$N_1(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1(z) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(z) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

$$N_2(z) = \begin{pmatrix} \varphi_2(z) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2(z) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_2(z) \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

$$N_3(z) = \begin{pmatrix} \varphi_3(z) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_3(z) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3(z) \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Dans le cas des éléments quadratiques 1D, les fonctions d'interpolation  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  sont définies par :

$$\varphi_1(z) = [\xi(z) - 1][2\xi(z) - 1] \quad (5.11)$$

$$\varphi_2(z) = 4\xi(z)[\xi(z) - 1]$$

$$\varphi_3(z) = \xi(z)[2\xi(z) - 1]$$

avec,

$$\xi(z) = \frac{z - z_1^{(e)}}{\Delta} \quad (5.12)$$

où  $\Delta$  est la longueur d'un élément et  $z_1^{(e)}$  la coordonnée suivant  $z$  du premier nœud de l'élément ( $e$ ).

Dans le cas d'un matériau isotrope, la loi de Hooke s'exprime comme suit :

$$\sigma = C \varepsilon \quad (5.13)$$

$C$  étant la matrice d'élasticité donnée par :

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

On exprime ensuite les déformations en fonction des déplacements dans le cas du modèle 2D comme :

$$\varepsilon = \left[ L_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + L_z \frac{\partial}{\partial z} \right] \mathbf{u} \quad (5.15)$$

avec

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, L_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

On substitue le déplacement par son expression de l'équation (5.5), la relation (5.15) devient :

$$\varepsilon = [B_1 - jkB_2] d^{(e)} e^{i(\omega t - kx_1)} \quad (5.17)$$

avec

$$B_1 = L_z N_{,z} \quad (5.18)$$

$$B_2 = L_1 N$$

$N_{,z}$  étant la dérivée de  $N$  par rapport à  $z$ .

On applique ensuite le principe des travaux virtuels à un volume infinitésimal de la plaque :

$$\int_{V_e} \delta \mathbf{u}^{(e)T} f_v dV + \int_{\Sigma_e} \delta \mathbf{u}^{(e)T} f_s d\Gamma = \int_{V_e} \delta \mathbf{u}^{(e)T} (\rho \ddot{\mathbf{u}}^{(e)}) dV + \int_{V_e} \delta \varepsilon^{(e)T} \sigma^{(e)T} dV \quad (5.19)$$

$\Sigma_e$  et  $V_e$  sont respectivement la surface et le volume de l'élément ( $e$ ),  $\delta \mathbf{u}$  représente le déplacement virtuel et  $\delta \varepsilon$  correspond à la déformation associée à  $\delta \mathbf{u}$ ,  $f_v$  et  $f_s$  les vecteurs de forces volumiques et surfaciques extérieures agissant sur l'élément  $e$ ,  $\rho$  la masse volumique et  $\ddot{\mathbf{u}}$  la dérivée seconde du déplacement par rapport au temps. En l'absence de forces extérieures de surface et de volume, l'intégrale de volume dans le cas des éléments

de type segment devient une intégrale linéique  $L_e$  sur la longueur de l'élément ( $e$ ), il en découle que :

$$\int_{L_e} \delta \mathbf{u}^{(e)T} \left( \rho \ddot{\mathbf{u}}^{(e)} \right) dz + \int_{L_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)T} dz = 0 \quad (5.20)$$

On prend le déplacement virtuel sous la forme suivante :

$$\delta \mathbf{u}^{(e)} = N \delta d^{(e)} e^{ikx} e^{-i\omega t} \quad (5.21)$$

On exprime le principe des travaux virtuels en fonction de  $d^{(e)}$ . L'équation (5.20) devient :

$$\delta d^{(e)} \int_{L_e} \left[ B_1^T + ik B_2^T \right] C \left[ B_1 - ik B_2 \right] d^{(e)} dz - \delta d^{(e)} \int_{L_e} \rho \omega^2 N^T N d^{(e)} dz = 0 \quad (5.22)$$

On définit ensuite les matrices élémentaires suivantes :

$$K_{11}^{(e)} = \int_{L_e} B_1^T C B_1 dz \quad (5.23)$$

$$K_{22}^{(e)} = \int_{L_e} B_2^T C B_2 dz$$

$$K_{12}^{(e)} = \int_{L_e} \left[ B_1^T C B_2 - B_2^T C B_1 \right] dz$$

$$M^{(e)} = \int_{L_e} \rho N^T N dz \quad (5.24)$$

$K_{mn}^{(e)}$  est la matrice de raideur pour un élément  $e$  et  $M^{(e)}$  la matrice élémentaire de masse.

Les matrices globales sont obtenues en assemblant les matrices élémentaires :

$$K_{mn} = \bigcup_{e=1}^{n_e} K_{mn}^{(e)} \quad (5.25)$$

$$M = \bigcup_{e=1}^{n_e} M^{(e)} \quad (5.26)$$

$$d = \bigcup_{e=1}^{n_e} d^{(e)} \quad (5.27)$$

Après avoir assemblé les matrices, l'équation (5.22) s'écrit sous la forme suivante :

$$-\omega^2 M d + \left[ k^2 K_{22} - ik K_{12} + K_{11} \right] d = 0 \quad (5.28)$$

Pour simplifier la résolution de l'équation (5.28), on linéarise le système quadratique [81] comme suit :

$$\left[ P_1 - k P_2 \right] P_3 = 0 \quad (5.29)$$

avec

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & K_{11} - \omega^2 M \\ K_{11} - \omega^2 M & -i K_{12} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} K_{11} - \omega^2 M & 0 \\ 0 & -(K_{22}) \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} d \\ k d \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres (première partie du vecteur  $P_3$ , c'est-à-dire  $d$ ) de ce système correspondent respectivement aux nombres d'onde des modes se propageant dans la plaque et aux déplacements nodaux associés.

Les déplacements des modes guidés peuvent être également obtenus de façon analytique [75]. En effet, dans le cas d'une plaque isotrope homogène d'épaisseur  $2h$ , un mode symétrique guidé d'ordre  $n$  se propageant suivant les  $x_1 > 0$  peut être représenté de la façon suivante (le terme  $e^{i\omega t}$  étant omis dans le reste des équations) :

$$u_1^{sn}(x_1, z) = -iA_n^s V^{sn}(z) e^{-ik_n x_1} \quad (5.33)$$

$$u_z^{sn}(x_1, z) = A_n^s W^{sn}(z) e^{-ik_n x_1} \quad (5.34)$$

$$\tau_{11}^{sn}(x_1, z) = A_n^s T_{11}^{sn}(z) e^{-ik_n x_1} \quad (5.35)$$

$$\tau_{1z}^{sn}(x_1, z) = -iA_n^s T_{1z}^{sn}(z) e^{-ik_n x_1} \quad (5.36)$$

$$\tau_{zz}^{sn}(x_1, z) = A_n^s T_{zz}^{sn}(z) e^{-ik_n x_1} \quad (5.37)$$

avec

$$V^{sn}(z) = s_1 \cos(pz) + s_2 \cos(qz) \quad (5.38)$$

$$W^{sn}(z) = s_3 \sin(pz) + s_4 \sin(qz) \quad (5.39)$$

$$T_{1z}^{sn}(z) = \mu [s_5 \sin(pz) + s_6 \sin(qz)] \quad (5.40)$$

$$T_{zz}^{sn}(z) = \mu [s_7 \cos(pz) + s_8 \cos(qz)] \quad (5.41)$$

$$T_{11}^{sn}(z) = \mu [s_9 \cos(pz) + s_{10} \cos(qz)] \quad (5.42)$$

et

$$s_1 = 2 \cos(qh) \quad s_3 = -2(p/k_n) \cos(qh) \quad (5.43)$$

$$s_2 = -\left[ (k_n^2 - q^2) / k_n^2 \right] \cos(ph) \quad s_4 = -\left[ (k_n^2 - q^2) / qk_n \right] \cos(ph) \quad (5.44)$$

$$s_5 = 4p \cos(qh) \quad s_6 = \left[ (k_n^2 - q^2)^2 / qk_n^2 \right] \cos(ph) \quad (5.45)$$

$$s_7 = \left[ 2(k_n^2 - q^2) / k_n \right] \cos(qh) \quad s_8 = -\left[ 2(k_n^2 - q^2) / k_n \right] \cos(ph) \quad (5.46)$$

$$s_9 = \left[ 2(2p^2 - k_n^2 - q^2) / k_n \right] \cos(qh) \quad s_{10} = \left[ 2(k_n^2 - q^2) / k_n \right] \cos(ph) \quad (5.47)$$

$$p^2 = \frac{\omega^2}{v_L^2} - k_n^2 \quad (5.48)$$

$$q^2 = \frac{\omega^2}{v_T^2} - k_n^2 \quad (5.49)$$

Dans le cas des modes antisymétriques on a :

$$u_1^{an}(x_1, z) = -iA_n^a V^{an} e^{-ik_n x_1} \quad (5.50)$$

$$u_z^{an}(x_1, z) = A_n^a W^{an} e^{-ik_n x_1} \quad (5.51)$$

$$\tau_{11}^{an}(x, z) = A_n^a T_{11}^{an}(z) e^{-ik_n x_1} \quad (5.52)$$

$$\tau_{1z}^{an}(x_1, z) = -iA_n^a T_{1z}^{an}(z) e^{-ik_n x_1} \quad (5.53)$$

$$\tau_{zz}^{an}(x_1, z) = A_n^a T_{zz}^{an}(z) e^{-ik_n x_1} \quad (5.54)$$

avec

$$W^{an}(z) = a_1 \cos(pz) + a_2 \cos(qz) \quad (5.55)$$

$$V^{an}(z) = a_3 \sin(pz) + a_4 \sin(qz) \quad (5.56)$$

$$T_{1z}^{an}(z) = \mu [a_5 \cos(pz) + a_6 \cos(qz)] \quad (5.57)$$

$$T_{zz}^{an}(z) = \mu [a_7 \sin(pz) + a_8 \sin(qz)] \quad (5.58)$$

$$T_{11}^{an}(z) = \mu [a_9 \sin(pz) + a_{10} \sin(qz)] \quad (5.59)$$

et

$$a_1 = 2 \sin(qh) \quad a_2 = -\left[ \frac{k_n^2 - q^2}{k_n^2} \right] \sin(ph) \quad (5.60)$$

$$a_3 = -2(p/k_n) \sin(qh) \quad a_4 = -\left[ \frac{k_n^2 - q^2}{qk_n} \right] \sin(ph) \quad (5.61)$$

$$a_5 = -4p \sin(qh) \quad a_6 = -\left[ \frac{(k_n^2 - q^2)^2}{qk_n^2} \right] \sin(ph) \quad (5.62)$$

$$a_7 = \left[ \frac{2(k_n^2 - q^2)}{k_n} \right] \sin(qh) \quad a_8 = -\left[ \frac{2(k_n^2 - q^2)}{k_n} \right] \sin(ph) \quad (5.63)$$

$$a_9 = \left[ \frac{2(2p^2 - k_n^2 - q^2)}{k_n} \right] \sin(qh) \quad a_{10} = \left[ \frac{2(k_n^2 - q^2)}{k_n} \right] \sin(ph) \quad (5.64)$$

Les modes symétriques et antisymétriques vérifient les relations d'orthogonalité [75] :

$$I_{mn}^s = 0 \quad \text{et} \quad I_{mn}^a = 0 \quad \text{pour} \quad m \neq n \quad (5.65)$$

avec :

$$I_{mn}^s = \int_{-h}^h \left[ T_{11}^{sm}(z) V^{sn}(z) - T_{1z}^{sm}(z) W^{sn}(z) \right] dz \quad (5.66)$$

$$I_{mn}^a = \int_{-h}^h \left[ T_{11}^{am}(z) V^{an}(z) - T_{1z}^{am}(z) W^{an}(z) \right] dz \quad (5.67)$$

Les composantes des déplacements des ondes guidées se propageant suivant les  $x_1 > 0$  peuvent s'écrire comme une superposition de tous les modes symétriques et antisymétriques :

$$u_1(x_1, z) = -i \left[ \sum_{n=0}^{\infty} A_n^a V^{an}(z) e^{-ik_n x_1} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^s V^{sn}(z) e^{-ik_n x_1} \right] \quad (5.68)$$

$$u_z(x_1, z) = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} A_n^a W^{an}(z) e^{-ik_n x_1} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^s W^{sn}(z) e^{-ik_n x_1} \right] \quad (5.69)$$

### 5.1.2 Extension de la méthode SAFE pour la propagation guidée dans la direction circonférentielle dans les structures cylindriques

Ce paragraphe présente la formulation SAFE en coordonnées curvilignes pour la détermination des modes circonférentiels dans le cas des "plaques" à courbure non nulle. L'originalité de ce développement réside dans l'obtention des expressions dépendantes de la courbure de la plaque et dont la forme est proche à celles d'une plaque. La résolution du problème est donc similaire.

On applique la méthode SAFE sur une plaque courbe en faisant le calcul en coordonnées curvilignes et en se basant sur une méthode développée par Treyssède [85] pour le calcul des modes guidés dans un câble hélicoïdal.

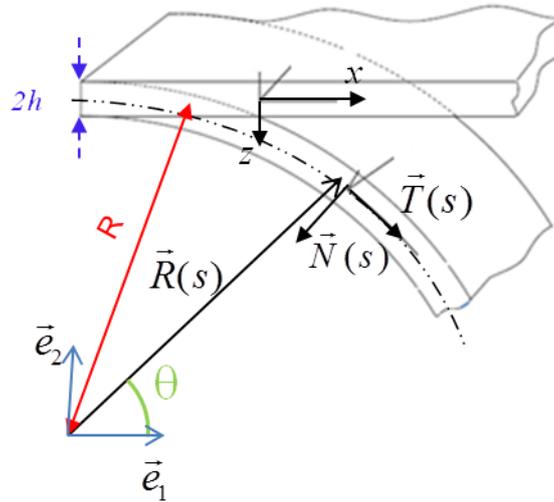


Figure 5.3 : présentation du repère de Serret-Frenet lié à la plaque à courbure non nulle.

L'équation paramétrée de la fibre neutre de la plaque courbe est donnée par l'équation d'un cercle:

$$x_1 = R \cos(\theta) \quad (5.70)$$

$$x_2 = R \sin(\theta) \quad (5.71)$$

On définit l'abscisse curviligne \$s\$ et la courbure \$\gamma\$ de la plaque tel que :

$$s = R\theta \quad (5.72)$$

$$\gamma = \frac{1}{R} \quad (5.73)$$

On écrit le vecteur \$\vec{R}\$, associé à un point de la fibre neutre, de la façon suivante :

$$\vec{R}(s) = R \left( \cos\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}_1 + \sin\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}_2 \right) \quad (5.74)$$

À partir de ce vecteur, on spécifie le vecteur tangent  $\vec{T}$  et le vecteur normal  $\vec{N}$  tels que :

$$\vec{T} = \frac{d\vec{R}}{ds} = -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}_1 + \cos\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}_2 \quad (5.75)$$

$$\vec{N} = R \frac{d\vec{T}}{ds} = -\cos\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}_1 - \sin\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}_2 \quad (5.76)$$

Ensuite, on exprime le vecteur position  $\vec{X}(z, s)$  comme indiqué ci-dessous :

$$\vec{X}(z, s) = \vec{R} + z\vec{N} = (R - z) \cos\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}_1 + (R - z) \sin\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}_2 \quad (5.77)$$

On définit la base covariante  $(\vec{g}_1, \vec{g}_2)$  et le tenseur métrique covariant  $g$  associé au repère curviligne et aux nouvelles coordonnées  $(z, s)$  tels que :

$$(\vec{g}_1, \vec{g}_2) = \left( \frac{d\vec{X}}{dz}, \frac{d\vec{X}}{ds} \right) \quad (5.78)$$

$$g_{\text{cov}} = \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_1 & \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 \\ \vec{g}_2 \cdot \vec{g}_1 & \vec{g}_2 \cdot \vec{g}_2 \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

D'où les expressions suivantes :

$$(\vec{g}_1, \vec{g}_2) = (\vec{N}, (1 - \gamma z) \vec{T}) \quad (5.80)$$

$$g_{\text{cov}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 - \gamma z)^2 \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

La base contravariante  $(\vec{g}^1, \vec{g}^2)$  et le tenseur métrique contravariant  $G$  quant à eux sont définis par :

$$g^i \cdot g_j = \delta_{ij} \quad (5.82)$$

$$G = \begin{pmatrix} \vec{g}^1 \cdot \vec{g}^1 & \vec{g}^1 \cdot \vec{g}^2 \\ \vec{g}^2 \cdot \vec{g}^1 & \vec{g}^2 \cdot \vec{g}^2 \end{pmatrix} \quad (5.83)$$

Ce qui revient à écrire:

$$(\vec{g}^1, \vec{g}^2) = \left( \vec{N}, \frac{1}{(1 - \gamma z)} \vec{T} \right) \quad (5.84)$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1 - \gamma z)^2} \end{pmatrix} \quad (5.85)$$

On définit ensuite les symboles de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  comme suit :

$$\Gamma_{ij}^k = \bar{g}_{i,j} \cdot \bar{g}^k \quad (5.86)$$

$\bar{g}_{i,j}$  étant la dérivée de vecteur  $\bar{g}_i$  par rapport à  $j$  ( $j=1$  correspond à une dérivée par rapport à  $z$  et  $j=2$  correspond à une dérivée par rapport à  $s$ ).

On a :

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0 \quad (5.87)$$

$$\Gamma_{12}^2 = -\frac{\gamma}{1-\gamma z}$$

$$\Gamma_{21}^2 = -\frac{\gamma}{1-\gamma z}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \gamma(1-\gamma z)$$

Ces coefficients interviennent dans les relations liant les composantes covariantes de déformations et de déplacements dans un repère curviligne.

Soient  $\underline{u}$  le champ de déplacement dans la base covariante,  $\varepsilon$  le champ de déformations dans la base covariante,  $\sigma$  le champ de contraintes dans la plaque dans la base covariante et  $C_\gamma$  le tenseur d'élasticité. On peut écrire que :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\underline{u}_{i,j} + \underline{u}_{j,i}) - \Gamma_{ij}^k \underline{u}_k \quad (5.88)$$

$$\sigma_{ij} = C_\gamma^{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5.89)$$

$$\delta \underline{u} \cdot \underline{u} = \delta \underline{u}_i \cdot g^{ij} \underline{u}_j \quad (5.90)$$

avec

$$C_\gamma^{ijkl} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} g^{ij} g^{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) \quad (5.91)$$

$\lambda$  et  $\mu$  étant les coefficients de Lamé  $g^{ij} = \bar{g}^i \cdot \bar{g}^j$ .

Le tenseur d'élasticité s'écrit :

$$C_\gamma = \begin{bmatrix} C_\gamma^{1111} & C_\gamma^{1122} & C_\gamma^{1112} \\ C_\gamma^{2211} & C_\gamma^{2222} & C_\gamma^{2212} \\ C_\gamma^{1211} & C_\gamma^{1222} & C_\gamma^{1212} \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

Après contraction des indices du tenseur, on obtient :

$$C_\gamma = \begin{bmatrix} C_\gamma^{11} & C_\gamma^{12} & C_\gamma^{13} \\ C_\gamma^{21} & C_\gamma^{22} & C_\gamma^{23} \\ C_\gamma^{31} & C_\gamma^{32} & C_\gamma^{33} \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

D'où :

$$C_\gamma = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{(1-\nu^2)(1-\gamma z)^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-\nu^2)(1-\gamma z)^2} & \frac{E}{(1-\nu^2)(1-\gamma z)^4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)(1-\gamma z)^2} \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

Les composantes covariantes de déplacement sont sans dimension [85], les composantes physiques sont données par :  $\underline{u}_{(i)} = \sqrt{g^{ii}} \underline{u}_i$  (sans sommation sur  $i$ ).

Soit  $u$  le champ de déplacements dans la base  $(\vec{N}, \vec{T})$ , on définit la matrice de passage de la base covariante à la base  $(\vec{N}, \vec{T})$  par :

$$\underline{u}_i = Q_{i\alpha} u_\alpha \text{ avec } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\gamma z \end{pmatrix} \quad (5.95)$$

où  $\alpha=n, t$  pour les composantes dans la base  $(\vec{N}, \vec{T})$ .

Les vecteurs  $\varepsilon$ ,  $\sigma$ , et  $\delta u$  se écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12}] \\ \sigma &= [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}] \\ \delta u &= [\delta u_n \quad \delta u_t] \end{aligned} \quad (5.96)$$

À partir des équations (5.88) et (5.95), on calcule les composantes des déformations (de la base covariante) en fonction des déplacements:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_n}{\partial z} \\ \varepsilon_{22} &= -\gamma(1-\gamma z)u_n + (1-\gamma z) \frac{\partial u_t}{\partial s} \\ 2\varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_n}{\partial s} + \gamma u_t + (1-\gamma z) \frac{\partial u_t}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.97)$$

et on obtient la relation entre déplacement et déformations qui peut alors s'écrire sous forme matricielle :

$$\varepsilon = \left( \frac{\partial}{\partial z} L_{z1} + L_0 + \frac{\partial}{\partial s} L_s \right) u \quad (5.98)$$

avec,

$$L_{z1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (1-\gamma z) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, L_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma(1-\gamma z) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, L_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\gamma(1-\gamma z) & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

Le champ de déplacement  $u$  et le déplacement virtuel  $\delta u$  sont pris sous la forme suivante:

$$u = u(z)e^{i(\omega t - ks)} \quad (5.100)$$

$$\delta u = \delta u(z)e^{-i(ks - \omega t)} \quad (5.101)$$

On considère des éléments constitués chacun d'un segment à trois nœud. Dans ce cas le déplacement et le déplacement virtuel pour un élément  $e$  s'écrivent de la façon suivante :

$$u = N^{(e)} d^{(e)} e^{i(\omega t - ks)} \quad (5.102)$$

$$\delta u = N^{(e)} \delta d^{(e)} e^{-i(\omega t - ks)} \quad (5.103)$$

$N^{(e)}$  et  $d^{(e)}$  sont respectivement la matrice d'interpolation et le vecteur colonne des déplacements nodaux qui sont définis par :

$$N^e = \begin{bmatrix} \Phi_1(\tilde{\xi}) & 0 & \Phi_2(\tilde{\xi}) & 0 & \Phi_3(\tilde{\xi}) & 0 \\ 0 & \Phi_1(\tilde{\xi}) & 0 & \Phi_2(\tilde{\xi}) & 0 & \Phi_3(\tilde{\xi}) \end{bmatrix} \quad (5.104)$$

$$d^e = \begin{bmatrix} d_n^1 \\ d_t^1 \\ d_n^2 \\ d_t^2 \\ d_n^3 \\ d_t^3 \end{bmatrix} \quad (5.105)$$

avec

$$\tilde{\xi} = \frac{z - (j-1)\Delta}{\Delta} \quad (5.106)$$

$$\Phi_1(\tilde{\xi}) = (\tilde{\xi} - 1)(2\tilde{\xi} - 1) \quad (5.107)$$

$$\Phi_2(\tilde{\xi}) = 4\tilde{\xi}(\tilde{\xi} - 1)$$

$$\Phi_3(\tilde{\xi}) = \tilde{\xi}(2\tilde{\xi} - 1)$$

$\Delta$  étant la longueur d'un élément et  $j$  l'indice de l'élément.

L'équation (5.98) devient :

$$\varepsilon = (B_1 - ikB_2) N d^{(e)} e^{i(\omega t - ks)} \quad (5.108)$$

avec

$$B_1 = L_z N \quad (5.109)$$

$$B_2 = L_s N$$

et

$$L_z = \left( \frac{\partial}{\partial z} L_{z1} + L_0 \right) \quad (5.110)$$

Comme dans le cas de la plaque, on applique le principe des travaux virtuels dans la base covariante à un élément ( $e$ ) et l'équation (5.19) devient :

$$\int_{r_1}^{r_3} \delta \varepsilon^{(e)T} \sigma^{(e)} \sqrt{g} dz - \omega^2 \int_{r_1}^{r_3} \rho \delta u^{(e)T} Q^T G Q u^{(e)} \sqrt{g} dz = 0 \quad (5.111)$$

où  $r_1$  et  $r_3$  sont respectivement les rayons du premier et du troisième nœud (discrétisation suivant la coordonnée radiale) et  $g$  le déterminant de la matrice covariante.

D'autre part, on peut vérifier analytiquement que :

$$Q^T G Q = I \quad (5.112)$$

En utilisant les équations (5.108) et (5.109), l'équation (5.112) s'écrit :

$$\delta d^{(e)} \int_{r_1}^{r_3} [B_{1c}^T + ikB_{2c}^T] C [B_{1c} \quad -ikB_{2c}] d^{(e)} \sqrt{g} dz - \delta d^{(e)} \int_{r_1}^{r_3} \rho \omega^2 N^T N d^{(e)} \sqrt{g} dz = 0 \quad (5.113)$$

On définit les matrices élémentaires suivantes :

$$K_{11c}^{(e)} = \int_{r_1}^{r_3} B_{1c}^T C_\gamma B_{1c} \sqrt{g} dz \quad (5.114)$$

$$K_{22c}^{(e)} = \int_{r_1}^{r_3} B_{2c}^T C_\gamma B_{2c} \sqrt{g} dz \quad (5.115)$$

$$K_{12c}^{(e)} = \int_{r_1}^{r_3} [B_{1c}^T C_\gamma B_{2c} - B_{2c}^T C_\gamma B_{1c}] \sqrt{g} dz \quad (5.116)$$

$$M_c^{(e)} = \int_{r_1}^{r_3} \rho N^T N \sqrt{g} dz \quad (5.117)$$

$K_{mmc}^{(e)}$  étant la matrice de raideur pour un élément  $e$  et  $M^{(e)}$  est la matrice élémentaire de masse. Les matrices globales sont obtenues en assemblant les matrices élémentaires de la façon suivante :

$$K_{mmc} = \bigcup_{e=1}^{n_e} K_{mmc}^{(e)} \quad (5.118)$$

$$M_c = \bigcup_{e=1}^{n_e} M_c^{(e)} \quad (5.119)$$

$$d = \bigcup_{e=1}^{n_e} d^{(e)} \quad (5.120)$$

Après l'assemblage des matrices globales, l'équation (5.113) devient :

$$\{K_{11c} - \omega^2 M_c - ikK_{12c} + k^2 K_{22c}\} d = 0 \quad (5.121)$$

Pour simplifier la résolution de l'équation (5.28), on linéarise le système quadratique [81] de la façon suivante :

$$[P_{1c} - kP_{2c}]P_{3c} = 0 \quad (5.122)$$

avec

$$P_{1c} = \begin{bmatrix} 0 & K_{11c} - \omega^2 M_c \\ K_{11c} - \omega^2 M_c & -iK_{12c} \end{bmatrix} \quad (5.123)$$

$$P_{2c} = \begin{bmatrix} K_{11c} - \omega^2 M_c & 0 \\ 0 & -(K_{22c}) \end{bmatrix} \quad (5.124)$$

$$P_{3c} = \begin{bmatrix} d \\ kd \end{bmatrix} \quad (5.125)$$

Comme dans le cas d'une plaque, les valeurs propres et vecteurs propres (première partie du vecteur  $P_{3c}$ ) de ce système correspondent respectivement aux nombres d'onde des modes se propageant dans la plaque et aux déplacements nodaux associés. La présence de la courbure intervient dans l'écriture du tenseur d'élasticité ainsi que dans les matrices de raideur. On note qu'on retrouve les matrices calculées dans le cas d'une plaque quand le rayon de courbure est infini.

## 5.2 Couplage entre un modèle de source et un modèle de propagation des ondes guidées

*L'objectif de cette partie est de présenter le couplage entre les modèles de propagation en ondes guidées et les modèles de sources d'EA. L'originalité de ce paragraphe, est d'une part l'utilisation des modèles de sources issus de la mécanique de la rupture et d'autre part la prise en compte d'un défaut incliné soumis à un champ de contrainte arbitraire. On donne également la méthode pour étendre le modèle au cas d'une plaque courbe.*

### 5.2.1 Formulation de couplage basée sur l'onde virtuelle

#### 5.2.1.1 Structure plane

##### *a Présentation du problème d'EA en ondes guidées dans une plaque*

On considère une fissure inclinée soumise à un champ de contrainte quelconque dans une plaque d'épaisseur  $2h$  (Figure 5.4). Afin de calculer les amplitudes des ondes guidées émises par cette fissure, on applique le théorème de réciprocité élastodynamique donné par l'équation (3.34). Comme dans le cas de l'onde de Rayleigh, ce théorème permet d'effectuer le couplage entre le modèle de propagation en ondes guidées et le modèle de source d'EA. Cette méthode est déjà utilisée par Achenbach [13] dans le cas d'une fissure droite débouchante en mode I. On va ici étendre son calcul au cas d'une fissure inclinée soumise à un champ de contrainte quelconque.

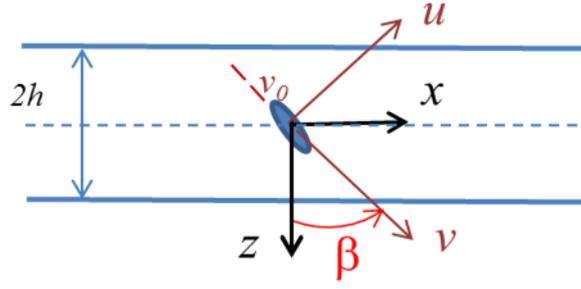


Figure 5.4 : géométrie du problème d'EA en onde guidées

On considère une fissure d'orientation quelconque, de longueur  $l$  à l'intérieur de la plaque, la fissure s'étend de  $\nu_0$  à  $\nu_0+l$  selon l'axe  $\nu$  du repère local  $(u, \nu)$  dont l'origine est prise au centre de la fissure.

- Définitions des états élastodynamiques

Le théorème de réciprocité est appliqué en prenant pour l'état A la solution du problème de l'EA générée par la fissure inclinée. L'EA est composée de la superposition des modes symétriques et antisymétriques, les déplacements et les contraintes peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$u_x^A = \pm i \left[ \sum_{m=0}^{\infty} A_m^a V_a^m(z) e^{\pm i k_m x_1} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m^s V_s^m(z) e^{\pm i k_m x_1} \right] \quad (5.126)$$

$$u_z^A = \left[ \sum_{m=0}^{\infty} A_m^a W^{am}(z) e^{\pm i k_m x_1} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m^s W^{sm}(z) e^{\pm i k_m x_1} \right] \quad (5.127)$$

$$\tau_{xx}^A = \left[ \sum_{m=0}^{\infty} A_m^s T_{11}^{sm}(z) e^{\pm i k_m x_1} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m^a T_{11}^{am}(z) e^{\pm i k_m x_1} \right] \quad (5.128)$$

$$\tau_{xz}^A = \pm i \left[ \sum_{m=0}^{\infty} A_m^a T_{xz}^{am}(z) e^{\pm i k_m x_1} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m^s T_{1z}^{sm}(z) e^{\pm i k_m x_1} \right] \quad (5.129)$$

$$\tau_{zz}^A = \left[ \sum_{m=0}^{\infty} A_m^a T_{zz}^{am}(z) e^{\pm i k_m x_1} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m^s T_{zz}^{sm}(z) e^{\pm i k_m x_1} \right] \quad (5.130)$$

Les signes + et – dans les équations (5.126) à (5.130) indiquent une propagation dans le sens des  $x_1 < 0$  et des  $x_1 > 0$ . Les inconnues sont  $A_m^A$  et  $A_m^S$  les amplitudes des modes antisymétriques et symétriques émis par le défaut. Les expressions de  $V^{am}$ ,  $V^{sm}$ ,  $W^{am}$ ,  $W^{sm}$ ,  $T_{11}^{sm}$ ,  $T_{11}^{am}$ ,  $T_{1z}^{sm}$ ,  $T_{1z}^{am}$ ,  $T_{zz}^{sm}$  et  $T_{zz}^{am}$  sont données par les équations (5.55) à (5.59) et (5.38) à (5.42).

- Calcul de l'amplitude des modes symétriques :

Afin de déterminer les amplitudes des modes symétriques, on choisit l'état B comme le  $n$ ème mode symétrique se propageant dans le sens des  $x_1 > 0$  en l'absence de la fissure. Dans ce cas, les expressions des déplacements et des contraintes s'écrivent de la façon suivante :

$$u_1^B = -iB_n^s V^{sn}(z) e^{-ik_n x_1} \quad (5.131)$$

$$u_z^B = B_n^s W^{sn}(z) e^{-ik_n x_1} \quad (5.132)$$

$$\tau_{11}^B = B_n^s T_{11}^{sn}(z) e^{-ik_n x_1} \quad (5.133)$$

$$\tau_{1z}^B = -iB_n^s T_{1z}^{sn}(z) e^{-ik_n x_1} \quad (5.134)$$

$$\tau_{zz}^B = B_n^s T_{zz}^{sn}(z) e^{-ik_n x_1} \quad (5.135)$$

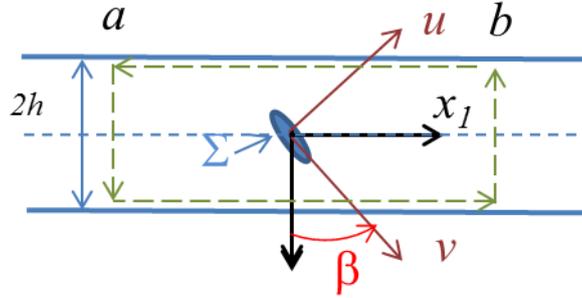


Figure 5.5 : contour d'intégration

Ensuite, on applique le théorème de réciprocité avec le contour d'intégration défini sur la Figure 5.5.

En l'absence de forces volumiques, la réciprocité s'écrit :

$$\int_S [\tau_{ij}^B u_j^A - \tau_{ij}^A u_j^B] n_j dS = 0 \quad (5.136)$$

On note  $J_1$  l'intégrale sur  $-h \leq z \leq h, x_1 = a$ ,  $J_2$  l'intégrale sur  $-h \leq z \leq h, x_1 = b$ , et  $J_3$  l'intégrale sur le contour de la fissure  $\Sigma$ . Les intégrales sur les deux surfaces libres en  $z = \pm h$  sont nulles.

L'intégrale sur,  $-h \leq z \leq h, x_1 = a$  s'écrit quant à elle :

$$J_1 = -\int_{-h}^h [\tau_{11}^B u_1^A + \tau_{1z}^B u_z^A - \tau_{11}^A u_1^B - \tau_{1z}^A u_z^B] dz \quad (5.137)$$

En remplaçant les déplacements et contraintes relatifs à l'état A par les équations (5.126) à (5.130) et ceux de l'état B par les équations (5.131) à (5.135), on obtient :

$$J_1 = \sum_{m=0}^{\infty} i A_m^s B_n^s [I_{mn}^s + I_{nm}^s] e^{i(k_m - k_n)a} + \sum_{m=0}^{\infty} i A_m^a B_n^s [I_{mm}^{as} + I_{nm}^{as}] e^{i(k_m - k_n)a} \quad (5.138)$$

avec

$$I_{mm}^{as} = \int_{-h}^h [T_{11}^{am}(z) V^{sn}(z) - T_{1z}^{am}(z) W^{sn}(z)] dz \quad (5.139)$$

En utilisant les équations (5.38), (5.39), (5.58) et (5.59), on remarque que l'intégrale définie par l'équation (5.139) est composée des termes suivants :

$$\begin{aligned} \mu [a_9 \sin(pz) + a_{10} \sin(qz)] [s_1 \cos(pz) + s_2 \cos(qz)] \\ \mu [a_5 \cos(pz) + a_6 \cos(qz)] [s_3 \sin(pz) + s_4 \sin(qz)] \end{aligned} \quad (5.140)$$

Ces termes sont de la forme suivante :

$$\sin(qz) \cos(pz) = \frac{1}{2} [\sin(q+p) + \sin(q-p)] \quad (5.141)$$

L'intégrale de l'expression (5.141) entre  $-h$  et  $h$  est nulle. On a :

$$I_{mn}^{as} = 0 \quad (5.142)$$

d'où :

$$J_1 = 2iA_n^s B_n^s I_{mn}^s \quad (5.143)$$

$$J_2 = 0 \quad (5.144)$$

On calcule l'intégrale sur la surface du défaut en prenant en compte la discontinuité des déplacements et des contraintes sur la surface de la fissure.

$$J_3 = \int_{\Sigma} [\tau_{uu}^A u_u^B + \tau_{uv}^A u_v^B - \tau_{uu}^B u_u^A - \tau_{uv}^B u_v^A] d\Sigma \quad (5.145)$$

$$J_3 = \int_{v_0}^{v_0+l} [\tau_{uu}^A u_u^B + \tau_{uv}^A u_v^B - \tau_{uu}^B u_u^A - \tau_{uv}^B u_v^A] \Big|_{u=0^+} dv \quad (5.146)$$

$$+ \int_{v_0+l}^{v_0} [\tau_{uu}^A u_u^B + \tau_{uv}^A u_v^B - \tau_{uu}^B u_u^A - \tau_{uv}^B u_v^A] \Big|_{u=0^-} dv$$

Cela revient à exprimer  $J_3$  tel que :

$$J_3 = \int_{v_0}^{v_0+l} [-\Delta \tau_{uu}^A u_u^B(0, v) - \Delta \tau_{uv}^A u_v^B(0, v) + \tau_{uu}^B(0, v) \Delta u_u^A + \tau_{uv}^B(0, v) \Delta u_v^A] dv \quad (5.147)$$

avec

$$\Delta u_u^A = u_u^A(0^+, v) - u_u^A(0^-, v) \quad (5.148)$$

$$\Delta u_v^A = u_v^A(0^+, v) - u_v^A(0^-, v) \quad (5.149)$$

$$\Delta \tau_{uv}^A = [\tau_{uv}^A(0^+, v) - \tau_{uv}^A(0^-, v)] \quad (5.150)$$

$$\Delta \tau_{uv}^A = [\tau_{uv}^A(0^+, v) - \tau_{uv}^A(0^-, v)] \quad (5.151)$$

On note :

$$\widehat{C} = \cos \beta \quad (5.152)$$

$$\widehat{S} = \sin \beta$$

La matrice de passage du repère global  $(0, x_l, z)$  au repère local lié à la fissure  $(0, u, v)$  est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} \widehat{C} & -\widehat{S} \\ \widehat{S} & \widehat{C} \end{pmatrix} \quad (5.153)$$

Les déplacements et contraintes dans le repère local sont définis par :

$$\begin{pmatrix} u_u \\ u_v \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_1 \\ u_z \end{pmatrix} \quad (5.154)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{uu}^B & \tau_{uv}^B \\ \tau_{vu}^B & \tau_{vv}^B \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \tau_{11}^B & \tau_{1z}^B \\ \tau_{z1}^B & \tau_{zz}^B \end{pmatrix} M \quad (5.155)$$

La relation entre les coordonnées locales et globales d'un point du demi-espace situé dans la région des  $x_1 > 0$  est donnée par :

$$\begin{aligned} x_1 &= \widehat{C} u + \widehat{S} v \\ z &= -\widehat{S} u + \widehat{C} v \end{aligned} \quad (5.156)$$

En  $u=0$ , on a :

$$\begin{aligned} x_1 &= \widehat{S} v \\ z &= \widehat{C} v \end{aligned} \quad (5.157)$$

On remplace les contraintes et les déplacements par leurs expressions (équations (5.131) à (5.135)) dans l'équation (5.147), on obtient:

$$2i A_n^s I_{mn}^s = \int_{v_0}^{l+v_0} \left\{ P^{sn}(0, v) \Delta u_u + Q^{sn}(0, v) \Delta u_v - \Delta \tau_{uu}^A \tilde{V}^{sn}(0, v) - \Delta \tau_{uv}^A \tilde{W}^{sn}(0, v) \right\} dv \quad (3.158)$$

avec

$$P^{sn}(0, v) = [\widehat{C}^2 T_{11}^{sn} - 2i \widehat{C} \widehat{S} T_{1z}^{sn} + \widehat{S}^2 T_{zz}^{sn}] e^{-ik_n \widehat{S} v} \quad (3.159)$$

$$Q^{sn}(0, v) = [-\widehat{C} \widehat{S} T_{11}^{sn} - i(\widehat{C}^2 - \widehat{S}^2) T_{1z}^{sn} + \widehat{S} \widehat{C} T_{zz}^{sn}] e^{-ik_n \widehat{S} v} \quad (3.160)$$

$$\tilde{V}^{sn}(0, v) = [-\widehat{C} i V^{sn} + \widehat{S} W^{sn}] e^{-ik_n \widehat{S} v} \quad (3.161)$$

$$\tilde{W}^{sn}(0, v) = [-\widehat{S} i V^{sn} + \widehat{C} W^{sn}] e^{-ik_n \widehat{S} v} \quad (3.162)$$

Or, on sait que :

$$J_3 + J_1 = 0 \quad (5.163)$$

d'où l'expression de l'amplitude du mode symétrique suivante :

$$A_n^s = \frac{-i}{2I_{mn}^s} \int_{v_0}^{v_0+l} \left[ P^{sn}(0, v) \Delta u_u + Q^{sn}(0, v) \Delta u_v - \Delta \tau_{uu}^A \tilde{V}^{sn}(0, v) - \Delta \tau_{uv}^A \tilde{W}^{sn}(0, v) \right] dv \quad (5.164)$$

De la même manière, en prenant pour l'état B le nième mode antisymétrique, on obtient :

$$A_n^a = \frac{-i}{2I_{mn}^A} \int_{v_0}^{v_0+l} \left[ P^{an}(0, v) \Delta u_u + Q^{an}(0, v) \Delta u_v - \Delta \tau_{uu}^A \tilde{V}^{an}(0, v) - \Delta \tau_{uv}^A \tilde{W}^{an}(0, v) \right] dv \quad (5.165)$$

avec

$$P^{an}(0, v) = [\widehat{C}^2 T_{11}^{an} - 2i \widehat{C} \widehat{S} T_{1z}^{an} + \widehat{S}^2 T_{zz}^{an}] e^{-ik_n \widehat{S} v} \quad (3.166)$$

$$Q^{an}(0, \nu) = [-\widehat{C} \widehat{S} T_{11}^{an} - i(\widehat{C}^2 - \widehat{S}^2) T_{1z}^{an} + \widehat{S} \widehat{C} T_{zz}^{an}] e^{-ik_n \widehat{S} \nu} \quad (3.167)$$

$$\widetilde{V}^{an}(0, \nu) = -[\widehat{C} i V^{an} + \widehat{S} W^{an}] e^{-ik_n \widehat{S} \nu} \quad (3.168)$$

$$\widetilde{W}_A^n(0, \nu) = [-\widehat{S} i V^{an} + \widehat{C} W^{an}] e^{-ik_n \widehat{S} \nu} \quad (3.169)$$

Les équations (5.164) et (5.165) donnent respectivement les amplitudes des modes symétriques et antisymétriques émis par une fissure inclinée soumise à un champ de contraintes quelconque. On remarque que les expressions des amplitudes des modes guidés dépendent des discontinuités des champs de contrainte et de déplacement à la surface de la fissure. Dans le paragraphe suivant nous verrons comment on peut faire l'extension de ce modèle au cas des plaques courbes.

### b Plaque courbe

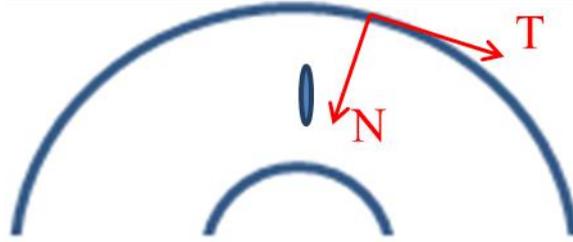


Figure 5.6 : fissure dans une plaque courbe.

Le cas des plaques courbes peut être facilement résolu de la même manière en utilisant les nombres d'ondes (valeurs propres) et les vecteurs propres (première partie du vecteur  $P_{3c}$ ) calculés par la méthode SAFE au paragraphe (5.2.1).

En effet, ces vecteurs propres nous permettent de calculer les contraintes et déplacements des ondes guidées associées à la plaque courbe. On peut donc réécrire la formulation présentée dans le paragraphe précédent en coordonnées curvilignes sous réserve que les modes circonférentiels soient orthogonaux.

En pratique, on s'intéresse à des structures dont le rayon de courbure est très important, dans ce cas on peut considérer que les modes sont orthogonaux.

### 5.2.1.2 Applications numériques

*L'objectif de ce paragraphe est de présenter dans un premier temps une comparaison avec un résultat de la littérature. Dans un second temps, nous montrons des études paramétriques afin de comprendre le comportement des modes guidés en fonctions des paramètres de la*

source d'EA issue de la mécanique de la rupture. On considère un coefficient de poisson  $\nu=0.33$ .

a Comparaison avec un résultat de la littérature

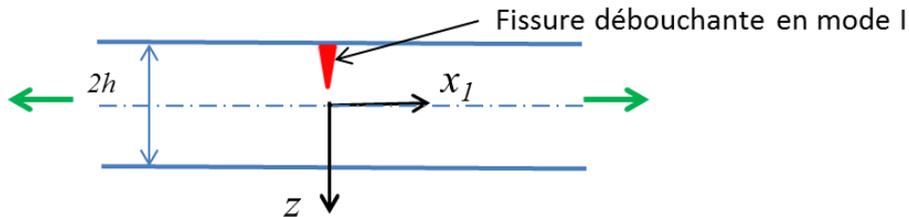


Figure 5.7 : fissure débouchante en mode I.

On simule dans un premier temps, les déplacements verticaux des modes A0 et S0 émis par une fissure de longueur 1.5mm, verticale et débouchante en mode I, en un point d'observation situé à 300mm du plan de la fissure dans le cas d'une plaque d'épaisseur 3mm. Le saut de déplacement évolue ici comme un échelon  $H(t)$ , c'est-à-dire qu'on considère que le saut de déplacement est le même sur toute la surface de la fissure et que  $\Delta u_x(z, t) = H(t)$ . Le résultat obtenu (pour un saut de déplacement de  $1\mu\text{m}$ ) est comparé avec un résultat issu de la littérature [40] à l'aide d'un modèle éléments finis (Figure 5.8).

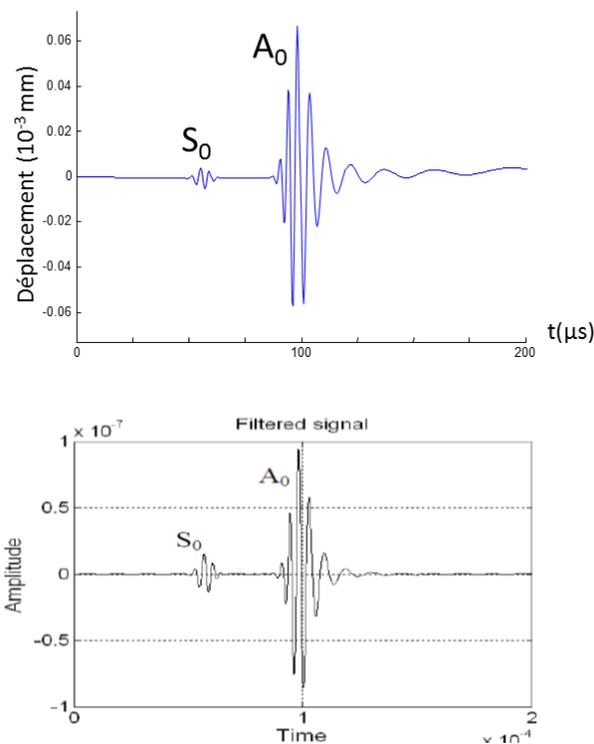


Figure 5.8 : amplitude des déplacements verticaux (modes A0 et S0) émis par la une fissure débouchante en un point d'observation situé à 300mm du plan de la fissure (a) notre modèle (b) résultat issu de [40]

Les courbes présentées sur la Figure 5.8 sont obtenues après avoir appliqué une fenêtre gaussienne centrée sur 250 kHz (bande passante de 125 kHz à -6db). On retrouve les mêmes formes d'ondes émises par la fissure.

On a également effectué une étude paramétrique en fonction de la profondeur de la fissure débouchante et on a comparé notre résultat avec le modèle de Lee *et al.* [40] (Figure 5.9). Il est intéressant de noter que l'amplitude du mode A0 est maximale quand la longueur de la fissure atteint 50% de l'épaisseur de la plaque. Ensuite, elle s'annule quand la fissure atteint 100% de l'épaisseur. On remarque également que l'amplitude du mode S0 est croissante et elle est maximale quand la profondeur de la fissure atteint 100% de l'épaisseur de la plaque. Après analyse des courbes, on remarque qu'il y a un bon accord entre les deux modèles même si les modèles des sources sont assez différents. En effet, le résultat de Lee *et al.* [40] est obtenu à partir d'un modèle numérique basé sur l'utilisation des éléments finis où l'épaisseur de la plaque est maillée à l'aide de huit éléments. La fissure est donc représentée par des éléments finis contrairement à notre formulation qui est analytique.

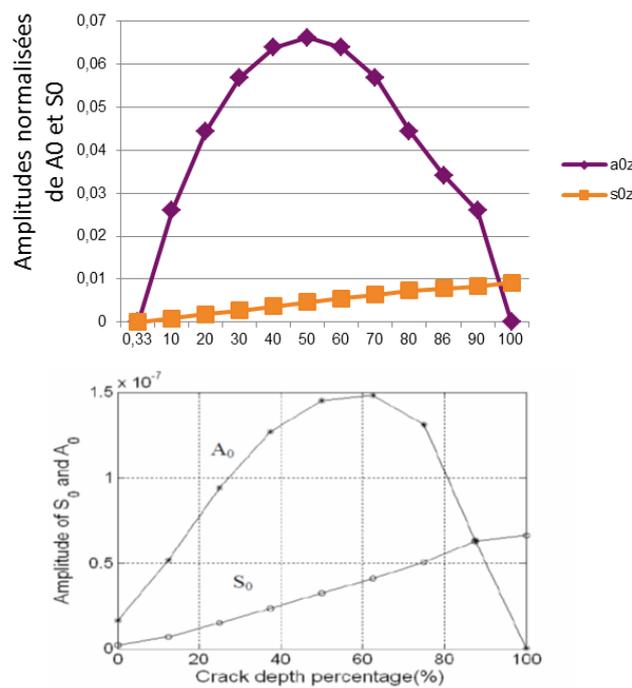


Figure 5.9 : étude paramétrique en fonction du pourcentage de la profondeur de la fissure débouchante par rapport à l'épaisseur de la plaque (a) notre modèle, (b) résultat issue de [40].

*b* Prise en compte d'un modèle de source d'EA

Par la suite, on s'intéresse à la prise en compte d'une source d'EA par un modèle issu de la mécanique de la rupture comme présenté au chapitre 2. Les Figure 5.10 et Figure 5.11 montrent les configurations des fissures inclinées d'un angle  $\beta$  en mode I et en mode II. La Figure 5.12 montre la configuration d'une fissure inclinée en mode mixte,  $\zeta$  étant l'angle entre le plan de la fissure et la direction de la contrainte considérée.

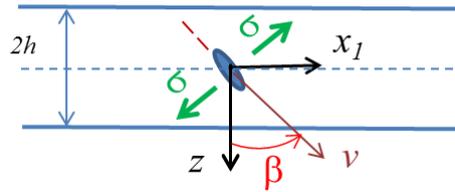


Figure 5.10 : fissure inclinée en mode I.

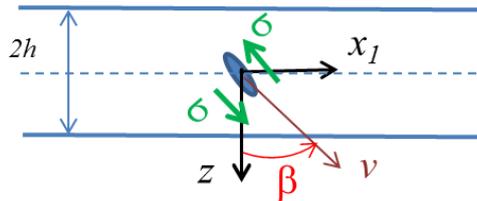


Figure 5.11 : fissure inclinée en mode II.

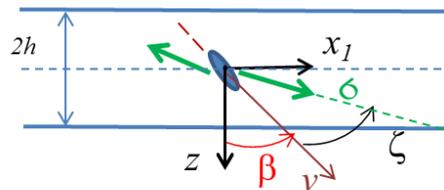


Figure 5.12 : fissure inclinée en mode mixte.

On considère une plaque d'épaisseur 20mm, on simule la vitesse particulière des modes A0, S0, A1, S1, dans le cas d'une fissure verticale en mode I sous 200MPa se propageant à une vitesse  $V$  et située à une distance  $z_0$  de la surface (Figure 5.13).

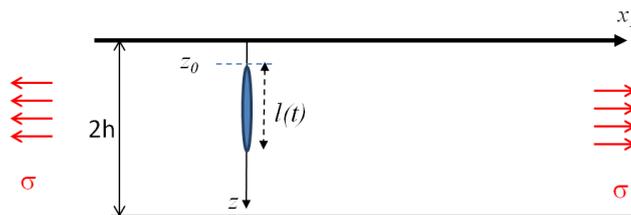


Figure 5.13 : fissure verticale en mode I

La Figure 5.14 montre les courbes de dispersion de vitesse de phase et de vitesse de groupe des modes guidés en fonction de la fréquence. La relation entre la vitesse de phase et le nombre d'onde est donnée par l'expression suivante :

$$v_n = \frac{\omega}{k_n} \tag{3.170}$$

$\omega$  étant la pulsation.

La vitesse de groupe quant à elle est définie par :

$$v_{g_n} = \frac{\partial \omega}{\partial k_n} \quad (3.171)$$

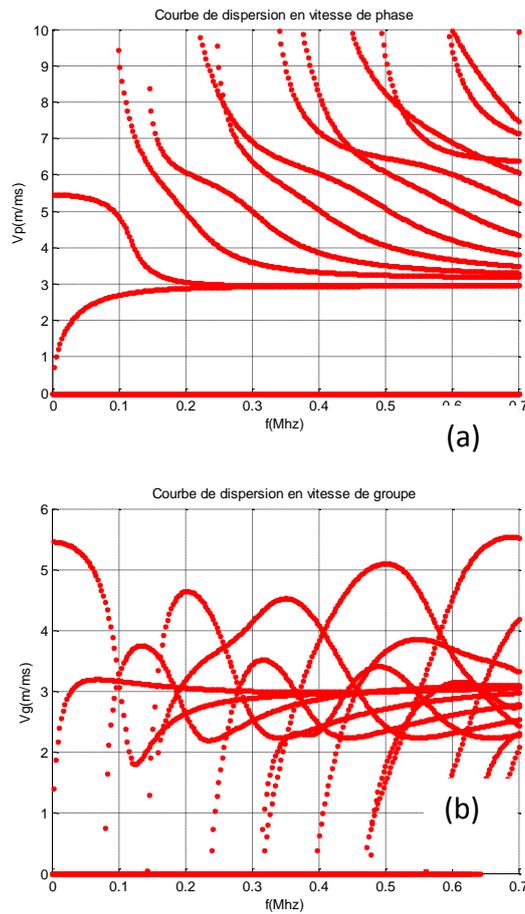


Figure 5.14 : courbes de dispersion en vitesse de phase(a), et en vitesse de groupe (b) d'une plaque en aluminium d'épaisseur 20 mm, résultat issu de la méthode SAFE.

En analysant les courbes de dispersion, on constate qu'il existe plusieurs modes à une fréquence donnée, on s'intéressera par la suite qu'aux quatre premiers modes. Le calcul des amplitudes des modes suivants se fait de la même manière puisque la formulation développée permet de calculer l'amplitude de chaque mode guidée séparément. La Figure 5.15 montre les composantes verticales des vitesses particulières après avoir appliquée une fenêtre gaussienne centrée à 0.4 MHz (bande passante de largeur 60 kHz mesurée à -6 dB).

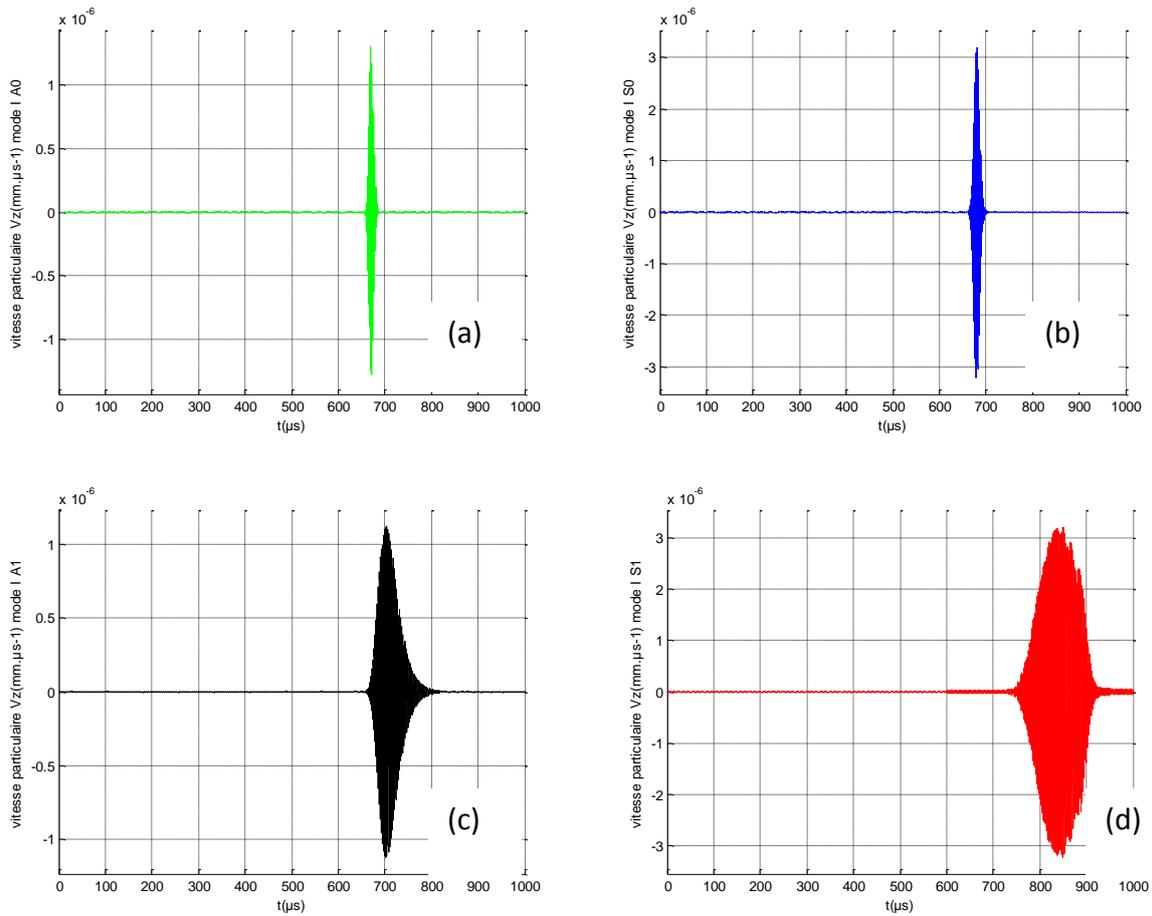


Figure 5.15 : composantes verticales de la vitesse particulaire des quatre premiers modes émis par la propagation d'une fissure située à une distance  $z_0 = -5\text{mm}$  et se propageant à  $V = 500\text{m/s}$  (a) mode A0, (b) mode S0, (c) mode A1, (d) mode S1.

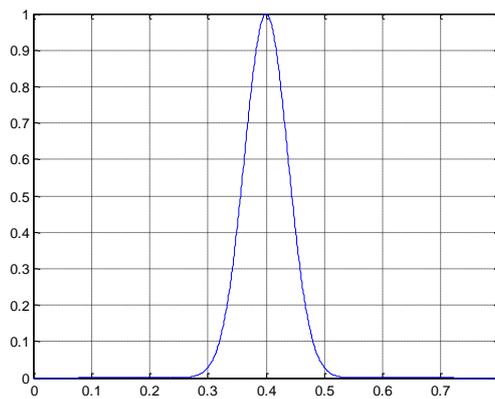


Figure 5.16 : fenêtre gaussienne utilisée pour le filtrage des signaux.

Le filtre est utilisé (Figure 5.16) comme une fenêtre d'apodisation afin de pouvoir appliquer la FFT (Fast Fourier Transform). Son utilisation se justifie d'autant plus que les hautes fréquences ne seront pas détectées par un capteur d'EA qui est sensible en général aux basses fréquences.

Les temps d'arrivées des formes d'ondes correspondent au rapport entre la position du point d'observation et la valeur maximale de la vitesse de groupe (Figure 5.14) à la fréquence centrale du filtre. De plus, en analysant les courbes de dispersion, on remarque que les modes S1 et A1 sont plus dispersifs que les modes A0 et S0 à 0.4 MHz ce qui explique l'étalement des formes d'onde des modes A1 et S1.

- Etude paramétrique en fonction de la vitesse de fissuration  $V$

On a effectué dans un premier temps, une étude paramétrique en fonction de la vitesse de propagation de la fissure et de la position de la fissure par rapport à la surface libre. La Figure 5.17 montre les composantes verticales des vitesses particulières des modes A0, S0, A1 et S1 émis par une fissure sous contraintes en mode I à différentes vitesses  $V$  en un point d'observation situé à 2000mm du plan de la fissure.

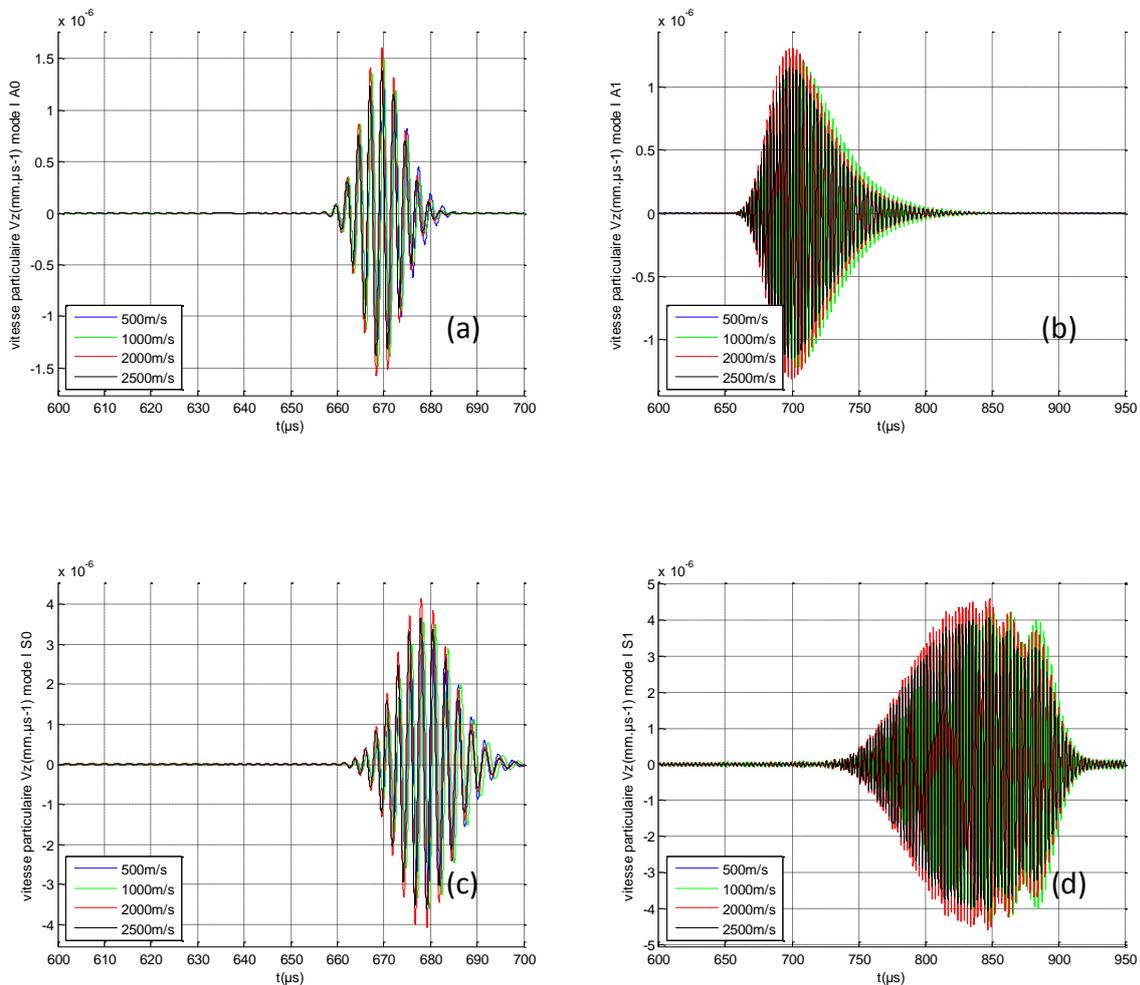


Figure 5.17 : composantes verticales de la vitesse particulière des quatre premiers modes émis par la propagation d'une fissure en mode I située à une distance  $z_0 = -5\text{mm}$  et se propageant à différentes vitesses de propagation (a) mode A0, (b) mode A1, (c) mode S0, (d) mode S1.

On remarque que l'amplitude de la composante verticale de la vitesse particulière des quatre premiers modes augmente avec la vitesse de propagation de la fissure quand on passe d'une vitesse de 500m/s à 2000m/s ensuite diminue pour 2500m/s. Aucune relation simple n'existe a priori entre la vitesse de fissuration et l'amplitude des modes émis, ce qui peut être expliqué par la nature multimodale et dispersive des ondes guidées.

- Etude de l'influence de la symétrie des configurations sur les modes émis

La Figure 5.18 présente des configurations de fissures horizontales et verticales en mode I (a) et (b) et en mode II (c) et (d). on s'intéresse ici au deux premiers modes A0 et S0.

On simule les formes d'onde des modes A0 et S0 dans le cas d'une fissure de longueur initiale 1mm et longueur finale de 5mm, se propageant à une vitesse de 2000m/s, sous 200MPa. La Figure 5.19 et la Figure 5.20 montrent les formes d'ondes des deux premiers modes A0 et S0 associées aux 4 configurations.

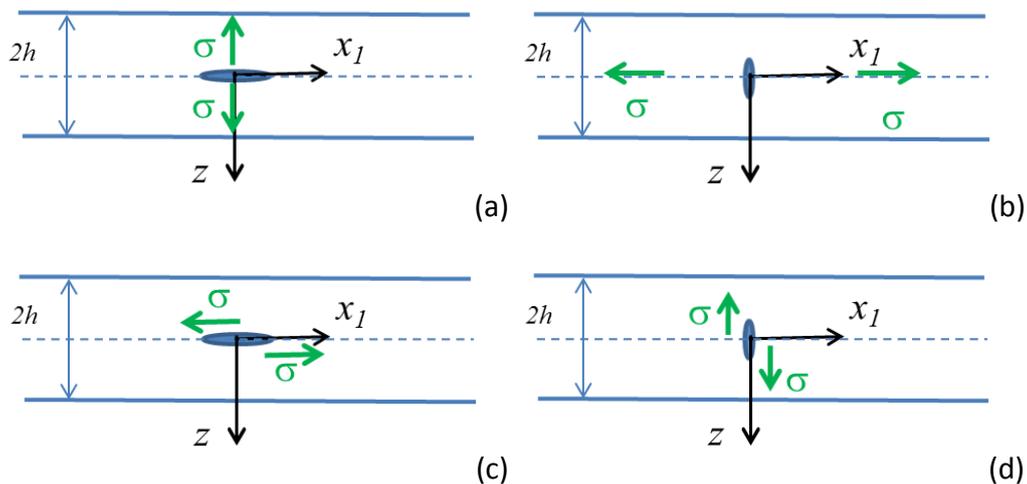


Figure 5.18 : fissure centrée au niveau de la fibre neutre de la plaque, (a) et (b) configurations symétriques, (c) et (d) configurations antisymétriques.

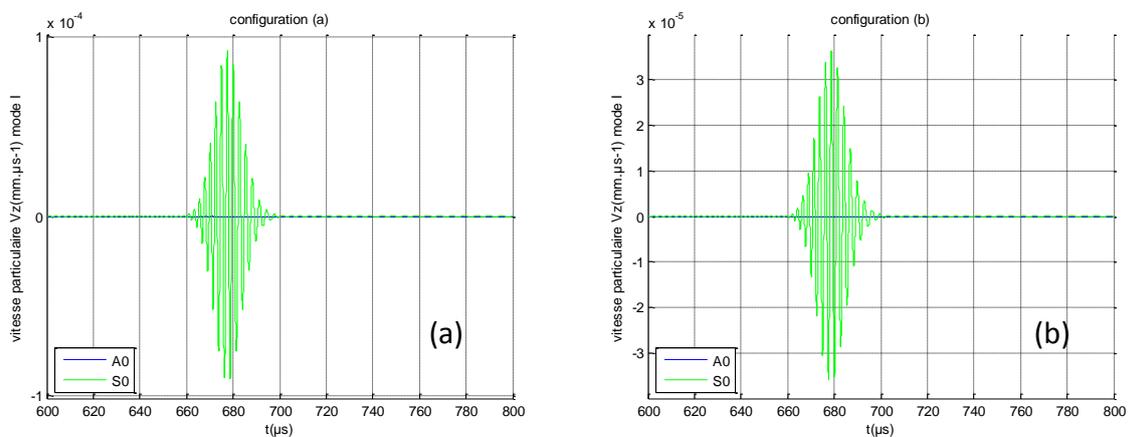


Figure 5.19 : composantes verticales des vitesses particulières des modes A0 et S0 émis par la propagation de la fissure associées aux configurations (a) et (b) de la Figure 5.18

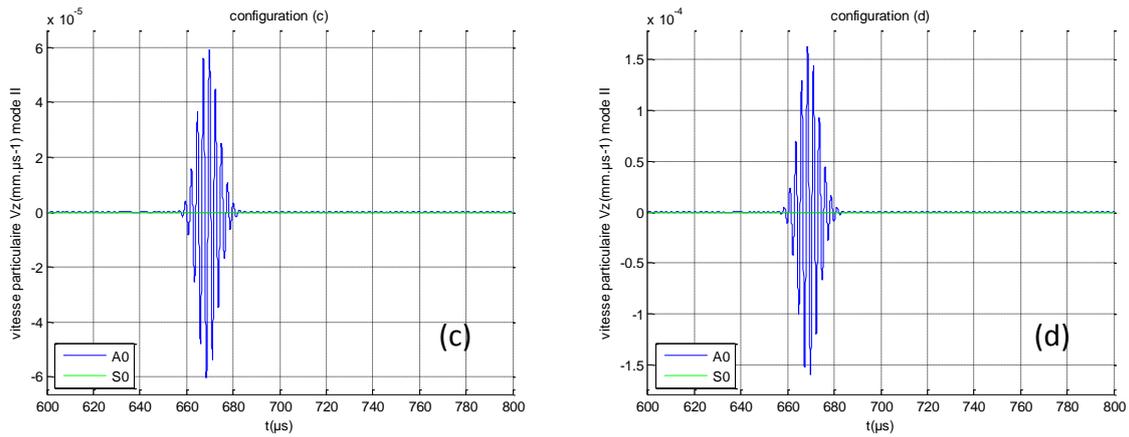


Figure 5.20 : composantes verticales des vitesses particulières des modes A0 et S0 émis par la propagation de la fissure associées aux configurations (c) et (d) de la Figure 5.18.

On remarque que dans le cas où les configurations sont symétriques, l'amplitude du mode A0 est quasiment nulle. De la même manière l'amplitude du mode S0 est nulle quand la configuration est antisymétrique. Ce résultat n'est valable que lorsque la fissure est située au centre de la plaque. En effet, les amplitudes des modes A0 et S0 dépendent aussi de la position de la fissure. Par exemple, si on change la position de la fissure dans la configuration (a), on remarque que l'amplitude du mode A0 devient non nulle quand la configuration n'est plus symétrique (Figure 5.21). De plus, l'amplitude des modes augmente quand on passe d'une fissure située à  $z_0 = -9\text{mm}$  à  $z_0 = -7\text{mm}$  ensuite elle diminue avec la profondeur de la fissure (Figure 5.21). Si l'on fait l'hypothèse que le capteur d'EA est sensible au mode S0, une fissure située à  $-7\text{mm}$  de la surface libre sera ainsi plus facilement détectée.

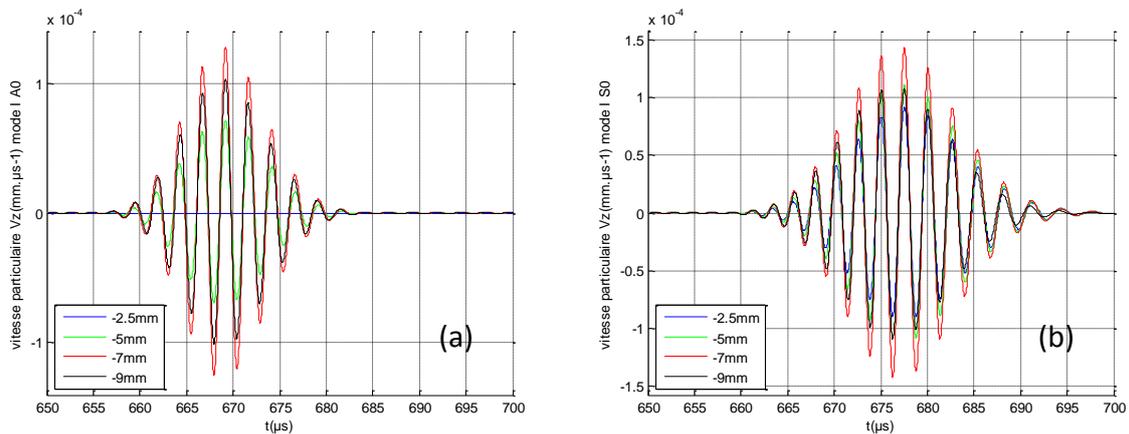


Figure 5.21 : composantes verticales des vitesses particulières des modes A0 (a) et S0 (b) pour une fissure verticale en mode I à différentes positions  $z_0$ .

Les configurations de la Figure 5.18 ne sont plus symétriques si on change l'inclinaison de la fissure. Aussi, si l'on considère une fissure inclinée située au centre de la plaque en mode I, l'amplitude du mode A0 devient non nulle (Figure 5.22).

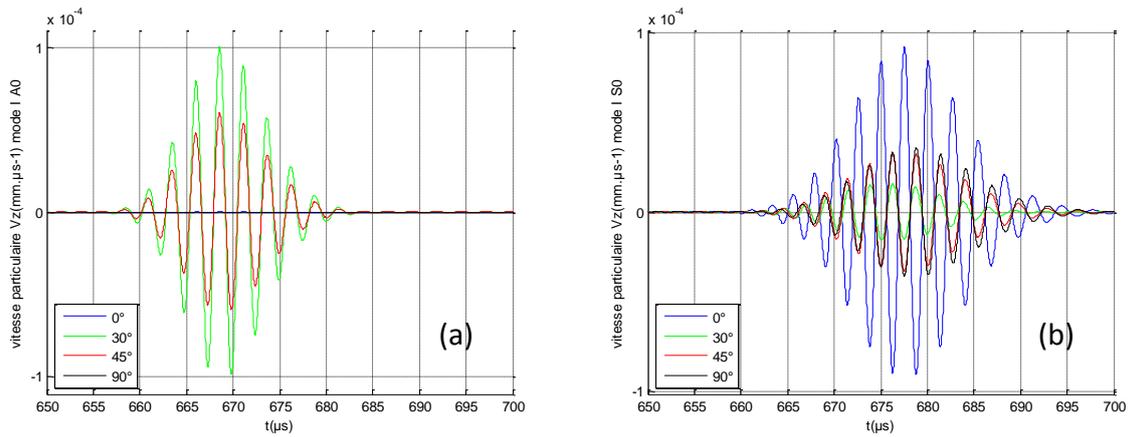


Figure 5.22 : composantes verticales des vitesses particulières des modes A0 (a) et S0 (b) pour une fissure inclinée en mode I à située  $z_0=-2.5\text{mm}$ ,  $V=2000\text{m/s}$ .

On remarque que pour une fissure verticale en mode mixte les deux modes A0 et S0 sont émis (Figure 5.23) dans les configurations étudiées ici. Dans le cas du mode I, on ne retrouve que le mode S0 et inversement dans le mode II, ici, on n'émet que le mode A0.

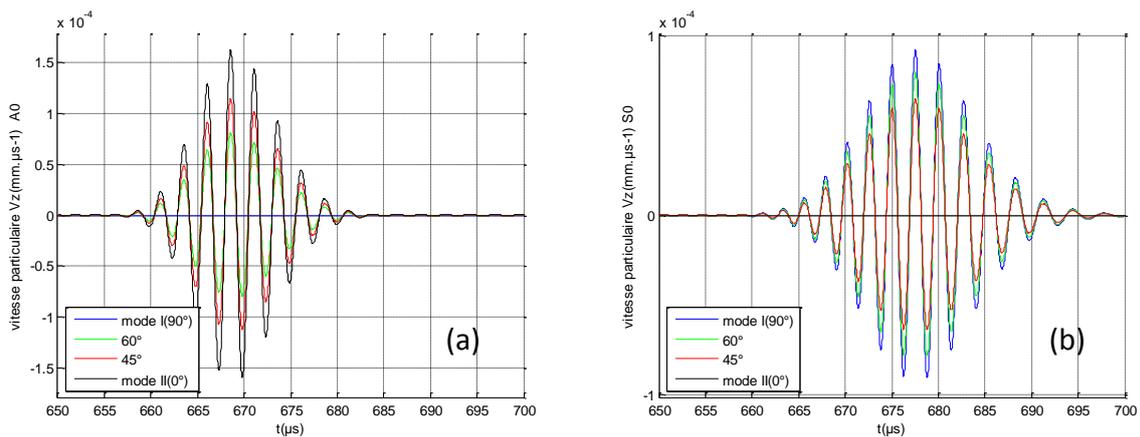


Figure 5.23 : composantes verticales des vitesses particulières des modes A0 (a) et S0 (b) pour une fissure verticale pour différents mode de chargement située à  $z_0=-2.5\text{mm}$ ,  $V=2000\text{m/s}$ .

### 5.2.1.3 Synthèse

À partir de ces simulations, on peut conclure que l'amplitude des formes d'onde augmente avec la vitesse de propagation de la fissure (pour  $V$  entre  $500\text{m/s}$  et  $2000\text{m/s}$ ) ensuite diminue pour  $2500\text{m/s}$ . Aucune relation simple n'existe a priori entre la vitesse de fissuration et l'amplitude des modes émis.

Concernant l'étude de l'inclinaison de la fissure, l'analyse des formes d'onde associées au mode S0 montre que l'amplitude de ce dernier est maximale dans les configurations symétriques (dans le cas d'une fissure droite et verticale en mode I). De la même manière l'amplitude du mode A0 est maximale dans les configurations antisymétriques.

D'autre part les deux modes A0 et S0 sont émis quand la configuration n'est ni symétrique ni antisymétrique, dans ce cas les amplitudes des modes dépendent de la position de la fissure, de son inclinaison et du mode de chargement.

## 5.3 Cas d'application : Simulation d'un contrôle par EA en ondes guidées

### 5.3.1 Expression de la tension délivrée en sortie par un capteur d'EA

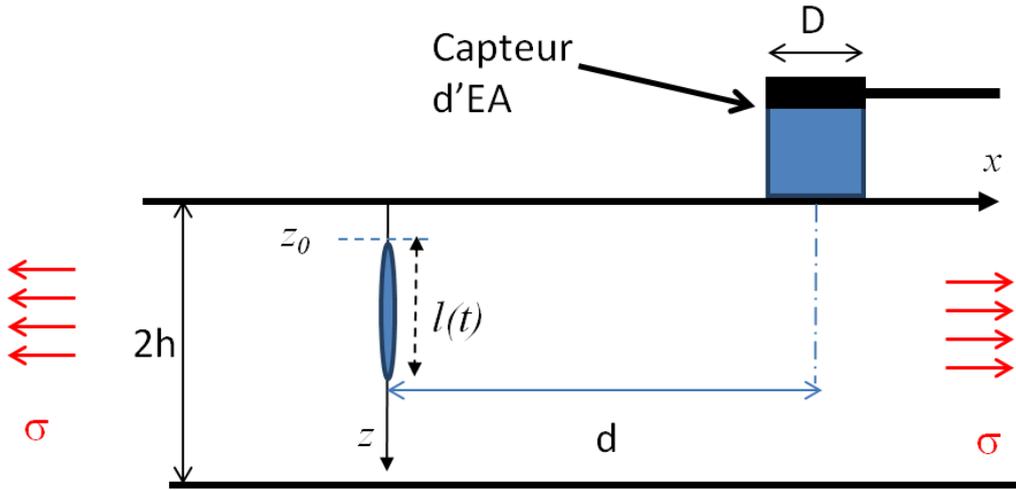


Figure 5.24 : principe de détection des ondes guidées par un capteur d'EA en 2D.

On rappelle que l'expression de la tension délivrée en sortie par un capteur d'EA peut s'écrire de la façon suivante :

$$E_0 = \frac{1}{S} \int_S v_z(x_1, 0) m_0 dS \quad (5.172)$$

Or

$$v_z = i\omega \left[ \sum_{m=0}^{\infty} A_m^A W_A^m e^{\pm ik_m x} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m^S W_S^m e^{\pm ik_m x} \right] \quad (5.173)$$

En remplaçant la vitesse particulière des modes guidés par l'expression de l'équation (5.173), l'équation (5.172) devient :

$$E_0 = \frac{1}{D} \int_{-\frac{D}{2}+d}^{\frac{D}{2}+d} i\omega \left[ \sum_{m=0}^{\infty} A_m^A W_A^m e^{\pm ik_m x} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m^S W_S^m e^{\pm ik_m x} \right] m_0 dx_1 \quad (5.174)$$

avec  $d$  et  $D$  définis sur la Figure 5.24. Finalement, on obtient :

$$E_0 = \frac{m_0}{D} \left( \sum_{m=0}^{\infty} -v_{mS} A_m^S W_S^m(0) \left[ e^{-ik_m \left( \frac{D}{2} + d \right)} - e^{-ik_m \left( -\frac{D}{2} + d \right)} \right] \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} -v_{mA} A_m^A W_A^m(0) \left[ e^{-ik_m \left( \frac{D}{2} + d \right)} - e^{-ik_m \left( -\frac{D}{2} + d \right)} \right] \right) \quad (5.175)$$

$v_{mS}$  et  $v_{mA}$  sont respectivement les vitesses de phases des modes symétriques et antisymétriques.

### 5.3.2 Exemples d'application

On a simulé la tension délivrée en sortie par un capteur d'EA de rayon  $R=5\text{mm}$  après l'émission des modes guidés générés par la propagation d'une fissure en mode I et en mode II située à une distance  $z_0=-2.5\text{mm}$ . Le capteur est placé à une distance de 2000mm par rapport au plan de fissure. On considère que la réponse fréquentielle du capteur est identique au filtre défini sur la Figure 5.16 et une sensibilité spatiale  $m_0=600\text{ V/m/s}$ .

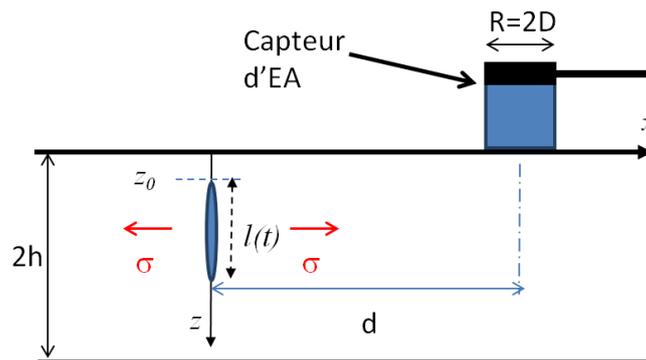


Figure 5.25 : configuration de l'étude de la réception de l'EA générée par une fissure en mode I.

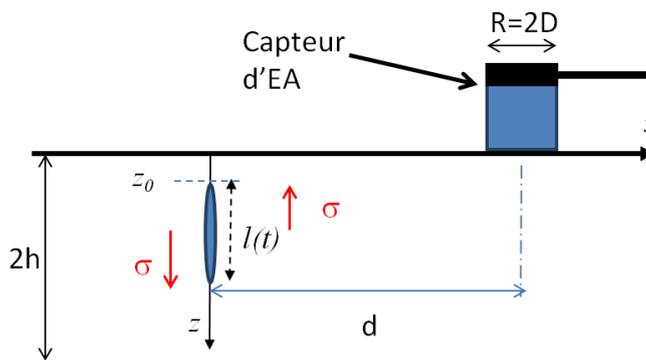


Figure 5.26 : configuration de l'étude de la réception de l'EA générée par une fissure en mode II.

On s'intéresse ici qu'aux quatre premiers modes émis A0, S0, A1 et S1. La Figure 5.27 présente la tension délivrée en sortie par le capteur d'EA après la propagation de la fissure en mode I ou II.

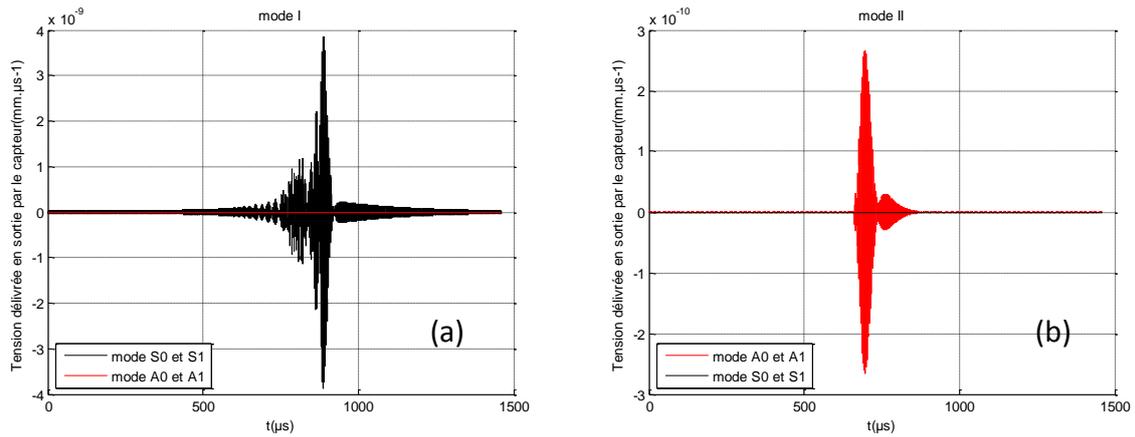


Figure 5.27 : réception des quatre premiers modes émis par une fissure située à  $z_0 = -2.5\text{mm}$  se propageant à  $V = 2000\text{m/s}$ , (a) mode I, (b) mode II

Comme on pouvait s'y attendre, le signal délivré par le capteur est différent selon le mode de chargement de la fissure. Dans le cas d'une fissure verticale situé à  $z_0 = -2.5\text{mm}$  en mode I, on émet plus de modes symétriques. Dans le cas du mode II, on émet des modes antisymétriques, ce qui s'explique par la symétrie de la configuration. La configuration en mode I est symétrique et celle du mode II est antisymétrique. Le modèle piston considéré ici utilise uniquement les composantes verticales de la vitesse particulière, le résultat est similaire à celui obtenu à partir de calcul de champ de vitesse si la longueur d'onde du mode considéré est très grande devant le diamètre du capteur.

## 5.4 Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, j'ai présenté la modélisation de la propagation guidée dans une plaque à l'aide de la méthode SAFE. Ensuite une première extension de cette méthode a permis de prendre en compte les effets de courbure. Dans la seconde partie, j'ai proposé une formulation de couplage entre un modèle de propagation des ondes guidées et un modèle de source d'EA. Cette dernière est similaire à celle présentée pour l'onde de Rayleigh et permet de prédire les amplitudes des modes guidés émis par une fissure. Contrairement à l'onde de Rayleigh, les ondes guidées sont multimodales et dispersives. Le calcul des solutions modales a donc été effectué par la méthode SAFE présentée dans la première partie. Une comparaison a été effectuée entre les formes d'ondes obtenues avec les formes d'onde calculées à partir d'un modèle éléments finis issu de la littérature montrant un bon accord entre les deux modèles.

Ensuite, j'ai présenté différentes études paramétriques qui avaient pour objectif de quantifier et d'étudier l'influence des modes de chargement, de l'inclinaison, et de la position de la fissure sur les formes d'ondes générées. Il apparaît que, pour les configurations étudiées, on émet le mode A0 dans les configurations antisymétriques. Le mode S0 est prépondérant dans les configurations symétriques.

Le résultat du calcul de champs de vitesse particulaire obtenu à partir de la formulation de couplage est ensuite utilisé afin de simuler la réponse d'un capteur d'EA. On remarque que la forme du signal délivré par le capteur dépend du mécanisme de chargement de la fissure.



# CONCLUSION

Les travaux de modélisation présentés dans cette thèse permettent de prédire les ondes émises par un défaut sous contrainte et de simuler une expérience complète de CND par EA dans diverses configurations.

Le premier modèle développé est un modèle 2D qui rend possible la simulation des ondes émises par la propagation d'un défaut sous contrainte dans les structures épaisses et planes. Il est basé sur une formulation de couplage entre un modèle de source d'EA issu de la mécanique de la rupture et un modèle de propagation de l'onde de Rayleigh. Une extension de ce modèle en coordonnées curvilignes a été développée pour la prise en compte d'une surface cylindrique. L'écriture en coordonnées curvilignes nous a permis d'avoir des expressions sous une forme proche de celle associée à la surface plane. De ce fait, la résolution du problème est similaire. Des études paramétriques ont été ensuite réalisées afin de mieux comprendre l'évolution des formes d'onde en fonction de certains paramètres comme les modes de chargement de la fissure ou la vitesse de fissuration. Ces études permettent aussi de tirer des conclusions concernant l'aspect pratique du contrôle par EA et la capacité de discerner les formes d'ondes en fonction du mécanisme de fissuration. On peut notamment observer des changements des formes d'ondes suivant le mode de chargement.

Le troisième modèle présenté dans le quatrième chapitre concerne également les structures épaisses et planes mais en géométrie 3D. Ce modèle est basé sur l'utilisation d'un modèle de propagation en onde de Rayleigh 3D et un modèle de fissure plane 3D. Plusieurs cas d'application sont également présentés utilisant un modèle de capteur d'EA basé sur l'approche piston. Des comparaisons entre les modèles 2D et 3D sont ensuite proposées. Contrairement au modèle 2D, le modèle 3D présente une décroissance spatiale en  $1/\sqrt{r}$ . De plus, les expressions issues des deux modèles ne présentent pas le même contenu fréquentiel, un facteur  $\sqrt{\omega}$  étant présent dans les équations du modèle 3D, ce qui explique les différences observées au niveau des formes d'ondes. Le modèle 3D a par ailleurs été comparé avec un modèle issu de la littérature basé sur une formulation intégrale.

Le dernier chapitre du manuscrit traite de la modélisation 2D de l'EA en ondes guidées dans les structures minces et planes. Ce dernier modèle est basé sur une formulation de couplage similaire à celle utilisée dans les structures épaisses pour l'onde de Rayleigh. Le couplage est effectué entre un modèle de source d'EA et un modèle de propagation en ondes guidées. Les ondes guidées étant multimodales et dispersives, les solutions modales sont obtenues à l'aide de la méthode SAFE (méthode des éléments finis semi analytique), cette dernière nous permet de calculer les nombres d'ondes et les déplacements en fonctions de la fréquence en résolvant un système aux valeurs propres dans lequel les valeurs propres correspondent aux nombres d'onde. Les amplitudes des modes guidés émis par une fissure sous contrainte sont calculées à partir des nombres d'ondes et des expressions analytiques des déplacements des ondes guidées. L'extension du code SAFE en coordonnées curvilignes pour la prise en compte d'une surface cylindrique nous permet de faire l'extension de la formulation de couplage obtenue pour la surface plane. Des comparaisons avec la littérature ont été

effectuées et des études paramétriques ont été réalisées dans le but d'estimer l'influence des différents paramètres d'entrée du modèle sur les formes d'onde.

Ces travaux, en fournissant des outils de simulation de contrôle par EA, permettent de répondre à l'ambition initiale de participer à la compréhension des signaux d'EA et de rendre la technique d'EA plus quantitative.

Cette thèse ouvre de nombreuses perspectives aussi bien scientifiques qu'industrielles à court et à long terme :

-Une première perspective repose sur l'extension des modèles présentés en fonction de la géométrie et du matériau considérés : aussi, on pourrait imaginer dans le cas des structures épaisses le développement de modèles 3D pour les surfaces courbes tandis qu'il serait opportun d'étudier un passage au 3D dans le cas des structures minces. De plus, la prise en compte des matériaux composites présente un intérêt industriel important.

-En ce qui concerne la source d'EA, il serait intéressant de l'étendre à des cas plus complexes et sans doute plus réalistes que ceux présentés dans la thèse, notamment à travers la prise en compte de la plasticité et de profils de vitesses de fissuration complexes.

-Pour la partie réception par un capteur d'EA, on pourrait envisager d'ajouter au modèle la possibilité de prendre en compte le déplacement radial ainsi qu'une sensibilité spatiale non uniforme.

L'ensemble de ces extensions devront bien sûr être orientées en fonction de résultats de campagnes d'essais expérimentaux qui n'ont pas été réalisées dans le cadre de cette thèse. A long terme, les modèles développés dans cette thèse pourraient servir de support à des travaux d'inversion qui permettraient de déterminer le type d'endommagement en fonction des signaux d'émission acoustique mesurés.



## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. M. Perrin (2009)  
“Étude et caractérisation par émission acoustique et mesures électrochimiques de la fragilisation par l’hydrogène des câbles de précontrainte. Application aux ouvrages d’art”, thèse de doctorat de l’université de Lyon.
2. E. A. Ceausescu-Ersen (2004)  
“Application de la technique d’émission acoustique à la caractérisation de matériaux céramiques évolutifs”, thèse de doctorat de l’université de Limoges.
3. K. Aki (1966)  
“Estimation of Earthquake Movement, Released Energy, and Stress-strain Drop from G Wave Spectrum”, *Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo University*, **44**, pp. 23-88.
4. Philip B. Bogert (2010)  
“Transient Waves from Acoustic Emission Sources in Isotropic Plates Using a Higher Order Extensional and Bending Theory”, thèse de doctorat de l’université North Carolina.
5. J. P. Favre and J. C. Laizet (1989)  
“Amplitude and Counts per Event Analysis of the Acoustic Emission Generated by the Transverse Cracking of Cross-ply CFRP”, *Composites Science and Technology*, **36**, pp. 27-43.
6. Y. A. Dzenis and J. Qian (2001)  
“Analysis of Microdamage Evolution Histories in Composites”, *International Journal of Solids and Structures*, **38**, pp. 1831-1854.
7. T. J. Fowler, J. A. Blessing, P. J. Conlisk, and T. L. Swanson (1989)  
“Transient Waves from Acoustic Emission Sources in Isotropic Plates Using a Higher Order Extensional and Bending Theory”, *The MONPAC System, Journal of Acoustic Emission*, **8**, No. 3, pp. 1-8.
8. M. A. Hamstad and K. S. Downs (1995)  
“On Characterization and Location of Acoustic Emission Sources in Real Size Composite Structures – A Waveform Study”, *The MONPAC System, Journal of Acoustic Emission*, **13**, No. 1/2, pp. 31-41.
9. S. Ghaffari and J. Awerbuch (1991)  
“On the Correlation between Acoustic Emission and Matrix Splitting in a Unidirectional Graphite/Epoxy Composite”, *Acoustic Emission: Current Practice and Future Directions*, ASTM STP 1077, W, Sachse et al., Eds., ASTM, Philadelphia, pp. 404-415.
10. P. J. de Groot, P. A. M. Wijnen, and R. B. F. Janssen (1995)

- “Real-time Frequency Determination of Acoustic Emission for Different Fracture Mechanisms in Carbon/Epoxy Composites”, *Composites Science and Technology*, **55**, pp. 405-412.
11. Rachid Berbaoui (2010)  
Identification et analyse de l’endommagement par fatigue des matériaux granulaires à base polymère, thèse de doctorat de l’université de Maine.
  12. Achenbach (2008)  
“Acoustic emission from a surface-breaking crack under cyclic loading”, *Acta Mech.*, **195**, pp 61–68.
  13. J. D. Achenbach (2009)  
“Acoustic Emission from a Surface-breaking Crack in a Layer under Cyclic Loading”, *J. Mech. Mat. and Struct.*, **4**, No 4, pp 649-657.
  14. M. R. Gorman (1991)  
“Plate Wave Acoustic Emission”, *Journal of the Acoustic Society of America*, **90**, No. 1, pp. 358-364.
  15. M. A. Hamstad (2000)  
“Application of Acoustic Emission to Composite Materials”, *Acoustic Emission – Beyond the Millennium*, T. Kishi *et al.*, Eds., Elsevier Science Ltd., UK, pp. 77-91.
  16. K. Aki and P. G. Richards (1992)  
“*Quantitative Seismology*”, University Science Books, Sausalito, California.
  17. A. V. Vvedenskaya (1956)  
“The Determination of the Displacement Fields by means of Dislocation Theory”, *Izvestiya Akas, Nauk, S.S.S.R., Ser. Geofiz.*, pp. 227-284, 1956.
  18. B. V. Kostrov (1974)  
“Seismic Moment and Energy of Earthquake, and Seismic Flow of Rock”, *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, Vol. 10, pp. 13-21.
  19. T. Maruyama (1963)  
“On the Force Equivalents of Dynamic Elastic Dislocations with Reference to the Earthquake Mechanism”, *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, Tokyo, University, **41**, 467-486.
  20. R. Burridge and L. Knopoff (1964)  
“Body Force Equivalents for Seismic Dislocations”, *Bulletin of Seismological Society of America*, **54**, pp. 1875-1888.
  21. J. R. Rice (1980)  
“Elastic Wave Emission from Damage Processes”, *Journal of Nondestructive Evaluation*, **1**, No. 4, pp. 215-224.

22. J. E. Michaels, T. E. Michaels, and W. Sachse (1981)  
 "Application of Deconvolution to Acoustic Emission Signal Analysis", *Materials Evaluation*, **3**, pp. 1032-1036.
  
23. C. Chang and W. Sachse (1985)  
 "Analysis of Elastic Wave Signals from an Extended Source in a Plate", *Journal of the Acoustical Society of America*, **77**, pp. 1335-1341.
  
24. C. B. Scruby, G. R. Baldwin, and K. A. Stacey (1985)  
 "Characterization of Fatigue Crack Extension by Quantitative Acoustic Emission", *International Journal of Fracture*, **28**, pp. 201-222.
  
25. K. R. Shah and J. F. Labuz (1995)  
 "Damage Mechanisms in Stressed Rock from Acoustic Emission", *Journal of Geophysical Research*, **100**, No. R8, pp. 15527-15539.
  
26. M. Ohtsu, T. Okamoto, and S. Yuyama (1998)  
 "Moment Tensor Analysis of Acoustic Emissions for Cracking Mechanisms in Concrete", *ACI Structures Journal*, **95**, 90 No. 2, pp. 87-95.
  
27. Y. H. Pao, R. R. Gajewski, and A. N. Ceranoglu (1992)  
 "Acoustic Emission and Transient Waves in an Elastic Plate", *Journal of the Acoustical Society of America*, **65**, pp. 96-105.
  
28. J. D. Achenbach (1979)  
 "Acoustic Emission from a Brief Crack Propagation Event", *Journal of applied mechanics*, **46**, 107-112.
  
29. A. K. Mal (1972)  
 "Rayleigh Waves From a Moving Thrust Fault", *Bulletin of the seismological society of America*, **62**, No. 3, pp 751-762.
  
30. J. G. Harris et J. D. Achenbach (1983)  
 "Rayleigh Waves Excited by the Discontinuous Advance of a Rupture Front", *journal of geophysical research*, **88**, No. B3, pp 2233-2239.
  
31. J. Pott et J. G. Harris (1984)  
 "Surface Motion Excited by Acoustic Emission From a Buried Crack", *Journal of Applied Mechanics*, **51**, 77-83.
  
32. J. D. Achenbach (2005)  
 "Combination of a Virtual Wave and the Reciprocity Theorem to Analyse Surface Wave Generation on a Transversely Isotropic Solid", *Philosophical Magazine*, **85**, Nos. 33-35, pp4143-4157.

33. M. A. Hamstad et K. S. Downs (1995)  
 "On Characterization and Location of Acoustic Emission Sources in Real Size Composite Structures – A Waveform Study", *89 Journal of Acoustic Emission*, **13**, No. 1/2, pp. 31-41.
34. W. H. Prosser (1996)  
 "Applications of Advanced, Waveform based AE Techniques for Testing Composite Materials", Proceedings of the SPIE Conference on Nondestructive Evaluation Techniques for Aging Infrastructure and Manufacturing: Materials and Composites, SPIE, Scottsdale, AZ, pp. 146-153.
35. M. R. Gorman et S. M. Ziola (1990)  
 "AE Source Orientation by Plated Wave Analysis", *Journal of Acoustic Emission*, **9**, No. 4, pp. 283-288.
36. M. R. Gorman et S. M. Ziola (1991)  
 "Plate Waves produced by Transverse Matrix Cracking", *Ultrasonics*, **29**, pp. 245-251.
37. D. Guo, A. Mal, et K. Ono (1996)  
 "Wave Theory of Acoustic Emission in Composite Laminates", *Journal of Acoustic Emission*, **14**, pp. 19-46.
38. M. Aberg et P. Gudmundson (2000)  
 "Micromechanical Modeling of Transient Waves from Matrix Cracking and Fiber Fracture in Laminated Beams", *International Journal of Solids and Structures*, **37**, pp. 4083-4102.
39. M. A. Hamstad, A. O'Gallagher, et J. Gary (2001)  
 "Effects of Lateral Plate Dimensions on Acoustic Emission Signals from Dipole Sources", *Journal of Acoustic Emission*, **19**, pp. 258-274.
40. C. K. Lee, J. J. Scholey, P. D. Wilcox, M. R. Wisnom, M. I. Friswell et B. W. Drinkwater (2006)  
 "Guided Wave Acoustic Emission from Fatigue crack growth in Aluminium Plate", *Advanced Material Research*. **13-14**, pp 23-28.
41. Malika BONGUE BOMA (2007)  
 "Modélisation de la Fissuration pour l'évaluation de la Perte d'Etanchéité des Structures en Béton arme Sous Chargements Mécaniques, thèse de doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
42. M. L. Williams (1952.)  
 "Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension", *J. Appl. Mech*, **19**, 526–528.
43. M. L. Williams (1957)  
 "On the stress distribution at the base of a stationary crack", *ASME J. Appl. Mech*, **24**, pp 109–114.

44. G. Hello et M. Ben Tahar (2011)  
 “Modélisation de l’émission acoustique associée à la propagation dynamique de fissures”.  
 Rapport V110914, Projet ANR MACSIM, ANR-08-COSI-05-04.
45. B. L. Karihaloo, et Q. Z. Xiao, (2001b).  
 “Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a  
 hybrid crack element with p-adaptivity, *Eng. Fract. Mech.* 68 (15), pp 1609 –1630.
46. D. R. J. Owen et A. J. Fawkes (1983).  
 “Engineering fracture mechanics : numerical methods and applications, Pineridge Press,  
 Swansea.
47. H. Tada, P. C. Paris et G. R. Irwin (2000).  
 “The stress analysis of cracks handbook”. ASME, New York.
48. Y. Murakami (2001)  
 “Stress Intensity Factors Handbook”, *The Society of Material Science*, **3-5**  
 Japan and Elsevier, Oxford, JSMS Japan.
49. E. Gdoutos, C. Rodopoulos, C. et J. Yates, (2003).  
 “Problems of Fracture Mechanics and Fatigue : A Solution Guide”, Kluwer Academic  
 Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
50. K. Ramesh, S. Gupta, A. A. Kelkar (1997).  
 “Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity” -  
 revisited. *Eng. Fract. Mech.* **56 (1)**, pp. 25 – 41.
51. G. Hello, M. B. Tahar et J. M. Roelandt (2011).  
 “Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in  
 an infinite plane medium”, *International Journal of Solids and Structures*, **49**, 556-566.
52. B. Karihaloo et Q. Xiao (2001a)  
 “Higher order terms of the crack tip asymptotic field for a notched three-point bend  
 beam”, *Int. J. Fract.* **112 (2)**, pp 111–128.
53. G. Kolosov (1909)  
 “On the application of the complex function theory to a plane problem of the  
 mathematical theory of elasticity [in Russian]”, Tech. rep., Dorpat University.
54. N. Muskhelishvili (1953).  
 “Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity”, Noordhoff, Leyden.
55. A. E. Green et W. Zerna ( 1968)  
 “Theoretical Elasticity, Dover Publications”, New York.

56. A. H. England (1971).

“Complex variable method in elasticity, Dover Publications, New York.

57. N. D. Aparicio (2000).

“Elastic complex analysis and its applications in fracture mechanics”, *Int. J. Solids Struct.* **37 (28)**, pp. 3873–3895.

58. H. Westergaard (1939)

“Bearing pressures and cracks”, *J. Appl. Mech.*, **A**, pp.49–53.

59. G. C. Sih (1966).

“On the Westergaard method of crack analysis”, *Int. J. Fract.* **2**, pp.628 – 631.

60. J. Eftis, H. Liebowitz (1972).

“On the modified Westergaard equations for certain plane crack problems”, *Int. J. Fract.* **8**, pp.383–392.

61. R. Sanford (1979).

“A critical re-examination of the Westergaard method for solving opening-mode crack problems”, *Mech. Res. Commun.*, **6 (5)**, pp.289 – 294.

62. C. T. Sun, T. N. Farris (1989)

“On the completeness of the Westergaard stress functions”, *Int. J. Fract.* **40**, pp.73–77.

63. L. Freund (1998).

“Dynamic fracture mechanics”, Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics, Cambridge University Press.

64. K. Ravi-Chandar (2004).

“Dynamic fracture”, Elsevier.

65. T. Fett (1982)

“Crack opening displacement of a penny-shaped crack in an infinite body loaded by internal pressure over a circular area”, *Int. J. Fract.*, **20**, pp.135-138.

66. P. Fidler et P. Beneš (2009)

“Measurement of surface displacement excited by EMAT transducer”, XIX IMEKO World Congress Fundamental and Applied Metrology, September 6-11, 2009, Lisbon, Portugal.

67. R. F. Da Costa Oliveira (2004)

“Health monitoring of FRP using Acoustic Emission and Fibre Optic Techniques”, thèse de doctorat de l’université du Maine et de l’université de Porto.

68. [www.opsens.com](http://www.opsens.com)

69. [http://www.wins-ndt.com/fiber\\_optic\\_sensors\\_acoustic\\_emission.php](http://www.wins-ndt.com/fiber_optic_sensors_acoustic_emission.php)

70. [http://www.epandt.com/capteur\\_ea.html](http://www.epandt.com/capteur_ea.html)
71. T. Yan et B. E. Jones (2002)  
 "In-situ AE transducer calibration using artificial AE energy source", *Proceedings of the 25<sup>th</sup> European Conference on Acoustic Emission Testing*, Prague, II, pp. 279-286.
72. L Goujon, J C Baboux et F Zhang (2002)  
 "Reciprocity calibration of AE transducers", *Proceedings of the 25<sup>th</sup> European Conference on Acoustic Emission Testing*, Prague, I, pp. 217-222.
73. L Goujon et J C Baboux (2003)  
 "Behaviour of acoustic emission sensors using broadband calibration techniques", *Meas. Sci. Technol.* **14**, pp 903-908.
74. T. Monnier, S. Dia (2012)  
 "Towards an improved consideration of aperture effect in the Rayleigh calibration of acoustic emission sensors", soumis à [2012] *Meas. Sci. Technol.*
75. J D Achenbach (2003)  
 "Reciprocity in elastodynamics", Cambridge University Press.
76. I. Viktorov (1958-1963)  
 "Rayleigh and Lamb waves", *Plenum Press, New York*.
77. F. Jin, Z. Wang et K. Kishimoto (2005)  
 "Basic properties of Rayleigh surface wave propagation along curved surfaces", *International Journal of Engineering Science*, **43**, pp. 250–261.
78. J. D. Achenbach (1973)  
 Wave propagation in elastic solids, North-Holland, Amsterdam.
79. W. T. Thomson (1950)  
 "Transmission of elastic waves through a stratified medium", *J. Appl. Phys.* **21**, pp. 89-93.
80. N. A. Haskell (1953)  
 "The dispersion of surface waves on multilayered media", *Bull. Seismol. Soc. Am.* **43**, pp. 17-34.
81. K. Jezzine (2007)  
 "Approche modale pour la simulation globale de contrôles non-destructifs par ondes élastiques guidées", thèse de doctorat de l'Université Bordeaux I.
82. L. Taupin (2011)  
 Modélisation des méthodes ultrasonores de surveillance de structures aéronautiques instrumentées en vue de leur optimisation, thèse de doctorat de l'école polytechnique.
83. J.- M. Mencik and M. N. Ichchou (2005)

"Multi-mode propagation and diffusion in structures through finite elements", *European J. Mechanics A/Solids* **24**, pp. 877-898.

84. S. B. Dong and R. B. Nelson (1972)

"On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates", *J. Appl. Mech.* **39**, pp. 739-745.

85. F. Treysède (2008)

"Elastic waves in helical waveguides", *Wave Motion*, **45** pp. 457–470.

# ANNEXE A

## A. Obtention de la relation entre M et N

On détermine la relation entre les amplitudes  $M$  et  $N$ , à partir des conditions aux limites suivantes :

$$\sigma_{\gamma\gamma}|_{\gamma=0} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}|_{\gamma=0} = 0$$

avec

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \lambda(\varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\gamma\gamma}) + 2\mu\varepsilon_{\gamma\gamma} \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma_{\alpha\gamma} = 2\mu\varepsilon_{\alpha\gamma}$$

Les déformations sont définies par les équations suivantes :

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \left(1 + \frac{\gamma}{\rho_\alpha}\right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha}, \varepsilon_{\gamma\gamma} = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma}, \varepsilon_{\alpha\gamma} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{u_\alpha}{\rho_\alpha} + \left(1 + \frac{\gamma}{\rho_\alpha}\right) \frac{\partial u_\gamma}{\partial \alpha} \quad (\text{A.3})$$

Et les déplacements sont obtenus à partir des relations suivantes :

$$u_\alpha = \left(1 - \frac{\gamma}{\rho_\alpha}\right) \frac{\partial \varphi_R}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi_R}{\partial \gamma}, u_\gamma = \frac{\partial \varphi_R}{\partial \gamma} + \left(1 - \frac{\gamma}{\rho_\alpha}\right) \frac{\partial \psi_R}{\partial \alpha} \quad (\text{A.4})$$

avec :

$$\varphi_R = M e^{-ik\alpha} \exp \left[ \left( q + \frac{n}{4} + \frac{p_0^2}{4q^2} \right) \gamma - \frac{1}{4} \left( nq + \frac{p_0^2}{q} \right) \gamma^2 \right] \quad (\text{A.5})$$

$$\psi_R = N e^{-ik\alpha} \exp \left[ \left( s + \frac{n}{4} + \frac{l_0^2}{4s^2} \right) \gamma - \frac{1}{4} \left( ns + \frac{l_0^2}{s} \right) \gamma^2 \right] \quad (\text{A.6})$$

En exprimant la contrainte  $\sigma_{\gamma\gamma}|_{\gamma=0}$  en fonction des potentiels scalaire et vecteurs, on obtient:

$$M \left[ (\lambda + 2\mu) \left( q + \frac{n}{4} + \frac{p_0^2}{4q^2} \right)^2 - \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \left( nq + \frac{p_0^2}{q} \right) - \lambda k^2 \right] \\ + N i k \left[ 2\mu \left( s + \frac{n}{4} + \frac{l_0^2}{4s^2} \right) - 2\lambda \left( \frac{1}{\rho_\alpha} \right) - 2\mu \frac{1}{\rho_\alpha} \right] = 0 \quad (\text{A.7})$$

La relation entre  $M$  et  $N$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$N = i\chi M \quad (\text{A.8})$$

Avec

$$\chi = \frac{\left[ (\lambda + 2\mu) \left( q + \frac{n}{4} + \frac{p_0^2}{4q^2} \right)^2 - \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \left( nq + \frac{p_0^2}{q} \right) - \lambda k^2 \right]}{k \left[ 2\mu \left( s + \frac{n}{4} + \frac{l_0^2}{4s^2} \right) - 2\lambda \left( \frac{1}{\rho_\alpha} \right) - 2\mu \frac{1}{\rho_\alpha} \right]} \quad (\text{A.9})$$

## ANNEXE B

### B. Fonction de Green de l'onde de Rayleigh dans le domaine de Laplace

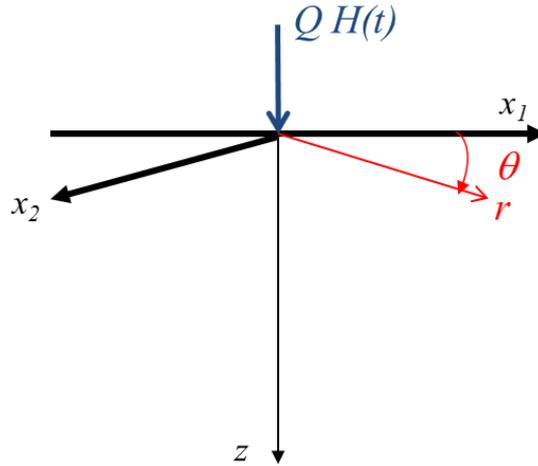


Figure 28 : définition de la géométrie du problème.

On définit les conditions aux limites sur la surface  $z=0$  par :

$$\tau_{rz} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\tau_{zz} = -QH(t) \frac{\delta(r)}{2\pi r} \quad (\text{B.2})$$

La fonction Dirac en coordonnées cylindriques vérifie l'équation suivante :

$$\delta(x_1)\delta(x_2) = \frac{\delta(r)}{2\pi r} \quad (\text{B.3})$$

Dans le cas d'une onde vérifiant une symétrie axiale les relations entre les déplacements et les potentiels scalaire  $\varphi$  et vecteur  $\psi$  peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (\text{B.4})$$

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi)}{\partial r} \quad (\text{B.5})$$

De plus, les deux potentiels satisfont les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{v_L^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\psi}{r^2} = \frac{1}{v_T^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (\text{B.7})$$

Les contraintes s'écrivent sous la forme suivante :

$$\tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$\tau_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} \quad (\text{B.9})$$

La méthode utilisée par Achenbach [75] consiste à appliquer la transformation de Laplace pour le paramètre temps et la transformation de Hankel pour la variable radiale  $r$ . Il utilise à  $t=0$  les conditions initiales suivantes :

$$\varphi(r, z, t=0) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(r, z, t=0) = \psi(r, z, t=0) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(r, z, t=0) = 0 \quad (\text{B.10})$$

On rappelle que la transformée de Laplace pour une fonction  $f$  dépendant du temps est définie par :

$$\bar{f} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (\text{B.11})$$

La transformée de Laplace de la dérivée seconde ( $f''$ ) de la fonction  $f$  par rapport au temps est donnée par :

$$\bar{f}'' = s^2 \bar{f} - s f(0^-) - f'(0^-) \quad (\text{B.12})$$

$f'$  étant la dérivée de  $f$  par rapport au temps.

Après application de la transformée de Laplace les équations (B.6) et (B.7) deviennent :

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} = \frac{p^2}{v_L^2} \bar{\varphi} \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} - \frac{\bar{\psi}}{r^2} = \frac{p^2}{v_T^2} \bar{\psi} \quad (\text{B.14})$$

$\bar{\varphi}$  et  $\bar{\psi}$  correspondent aux potentiels dans le domaine de Laplace.

La transformée de Hankel d'ordre  $n$  pour une fonction quelconque dépendant de la variable  $r$  est défini par :

$$f^{H_n}(\xi) = \int_0^{\infty} f(r) J_n(\xi r) r dr \quad (\text{B.15})$$

On applique ensuite la transformée de Hankel d'ordre zéro au potentiel scalaire et la transformée de Hankel d'ordre un au potentiel vecteur dans les équations (B.13) et (B.14). Les équations différentielles sont donc réduites à :

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}^{H_0}}{\partial z^2} - \alpha^2 \bar{\varphi}^{H_0} = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}^{H_1}}{\partial z^2} - \beta^2 \bar{\varphi}^{H_1} = 0 \quad (\text{B.17})$$

avec

$$\alpha^2 = \left( \xi^2 + \frac{1}{v_L^2} p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.18})$$

$$\beta^2 = \left( \xi^2 + \frac{1}{v_T^2} p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.19})$$

Les solutions des équations différentielles (B.20) et (B.21) peuvent s'écrire sous les formes suivantes :

$$\bar{\varphi}^{H_0} = \phi(\xi, p) e^{-\alpha z} \quad (\text{B.20})$$

$$\bar{\psi}^{H_0} = \Psi(\xi, p) e^{-\beta z} \quad (\text{B.21})$$

Ensuite, on applique les transformées de Laplace et de Hankel aux déplacements et aux contraintes ((B.22) à (B.25)).

$$\bar{u}_z^{H_0} = \frac{d\bar{\varphi}^{H_0}}{dz} + \xi \bar{\psi}^{H_1} \quad (\text{B.22})$$

$$\bar{u}_r^{H_1} = -\xi \bar{\psi}^{H_0} - \frac{d\bar{\psi}^{H_0}}{dz} \quad (\text{B.23})$$

$$\bar{\tau}_{zz}^{H_0} = \mu \left\{ \left( \frac{1}{v_T^2} p^2 + 2\xi^2 \right) \bar{\varphi}^{H_0} + 2\xi \frac{d\bar{\psi}^{H_1}}{dz} \right\} \quad (\text{B.24})$$

$$\bar{\tau}_{rz}^{H_0} = -\mu \left\{ 2\xi \frac{d\bar{\varphi}^{H_0}}{dz} + \left( \frac{1}{v_T^2} p^2 + 2\xi^2 \right) \bar{\psi}^{H_1} \right\} \quad (\text{B.25})$$

On exprime les conditions aux limites en  $z=0$  (équations (B.1) et (B.2)) dans le domaine de Laplace (équations (B.26) et (B.27)).

$$\bar{\tau}_{rz}^{H_0} = 0 \quad (\text{B.26})$$

$$\bar{\tau}_{zz}^{H_1} = -\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{p} \quad (\text{B.27})$$

En substituant les contraintes par leurs expressions dans les équations (B.26) et (B.27), on obtient le système d'équations suivant:

$$\left\{ \left( \frac{1}{v_T^2} p^2 + 2\xi^2 \right) \phi - 2\beta \xi \Psi \right\} = -\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\mu} \frac{1}{p} \quad (\text{B.28})$$

$$\left\{ -2\alpha \xi \phi + \left( \frac{1}{v_T^2} p^2 + 2\xi^2 \right) \Psi \right\} = 0 \quad (\text{B.29})$$

Les solutions de ce système sont alors :

$$\phi = -\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\mu} \frac{1}{p} \frac{\left(\frac{1}{v_T^2} p^2 + 2\xi^2\right)}{D_H(\xi, p)} \quad (\text{B.30})$$

$$\Psi = -\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\mu} \frac{1}{p} \frac{2\alpha\xi}{D_H(\xi, p)} \quad (\text{B.31})$$

avec

$$D_H(\xi, p) = \left(\frac{1}{v_T^2} p^2 + 2\xi^2\right)^2 - 4\xi^2\alpha\beta \quad (\text{B.32})$$

En substituant les potentiels scalaire et vecteur par leurs expressions dans les équations (B.22) et (B.23), on peut écrire les expressions des déplacements dans le domaine de Laplace de la façon suivante :

$$\bar{u}_z^{H_0} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\mu} \left[ \left(\frac{1}{v_T^2} p^2 + 2\xi^2\right) e^{-\alpha z} - 2\xi^2 e^{-\beta z} \right] \frac{\alpha}{D_H(\xi, p)} \frac{1}{p} \quad (\text{B.33})$$

$$\bar{u}_r^{H_1} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\mu} \left[ \left(\frac{1}{v_T^2} p^2 + 2\xi^2\right) e^{-\alpha z} - 2\alpha\beta e^{-\beta z} \right] \frac{\xi}{D_H(\xi, p)} \frac{1}{p} \quad (\text{B.34})$$

## ANNEXE C

### C. Calcul des fonctions de Green de l'onde de Rayleigh par le théorème de réciprocité

#### C.1. Calcul des déplacements de l'onde de Rayleigh générée par une force de direction $x_1$

On applique le théorème de réciprocité dans le but de déterminer le déplacement de l'onde de Rayleigh générée par une force de direction  $x_1$  et d'amplitude  $Q$ , cette force est représentée par l'équation suivante :

$$f_1 = Q\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(z-z_0)e^{-i\omega t} \quad (\text{C.1})$$

Le théorème de réciprocité est appliqué de la même manière qu'en 2D, l'état A est défini par l'onde de Rayleigh générée par la force d'amplitude  $Q$ .

$$u_r^A = AV^R(z)\Phi'(kr)\cos\theta \quad (\text{C.2})$$

$$u_\theta^A = AV^R(z)\frac{-1}{rk_R}\Phi(kr)\sin\theta \quad (\text{C.3})$$

$$u_z^A = AW^R(z)\Phi(kr)\cos\theta \quad (\text{C.4})$$

$$\tau_{rz}^A = AT_{rz}^R(z)\Phi'(kr)\cos(\theta) \quad (\text{C.5})$$

$$\tau_{rr}^A = AT_{rr}^R(z)\Phi(kr)\cos(\theta) - \bar{A}\bar{T}_{rr}^R\left[\frac{1}{kr}\Phi'(kr) - \frac{1}{(kr)^2}\Phi(kr)\right]\cos(\theta) \quad (\text{C.6})$$

$$\tau_{r\theta}^A = AT_{r\theta}^R(z)\left[\frac{1}{kr}\Phi'(kr) - \frac{1}{(kr)^2}\Phi(kr)\right]\sin\theta \quad (\text{C.7})$$

avec

$$T_{rz}^R(z) = \mu k \left( \frac{1}{k} \frac{dV^R}{dz} + W^R \right) = \mu(d_6 e^{-pz} + d_7 e^{-qz}) = T_{1z}^R \quad (\text{C.8})$$

$$T_{rr}^R(z) = \mu \left[ \frac{c_L^2}{c_T^2} (kV^R - \frac{dW^R}{dz}) + 2 \frac{dW^R}{dz} \right] = T_{11}^R \quad (\text{C.9})$$

$$\bar{T}_{rr}^R(z) = 2\mu k V^R = 2\mu k (d_1 e^{-pz} + d_2 e^{-qz}) \quad (\text{C.10})$$

$$T_{r\theta}^R(z) = -2\mu k V^R = -2\mu k (d_1 e^{-pz} + d_2 e^{-qz}) \quad (\text{C.11})$$

L'état B correspond à une onde de Rayleigh virtuelle définie comme la demi-somme d'une onde sortante et d'une onde qui converge vers l'origine du demi-espace, en absence du point source. Les composantes des champs de déplacements et de contraintes relatifs à cet état sont données par les expressions suivantes :

$$u_r^B = \frac{1}{2} B \frac{1}{k_R} V^R(z) [\Phi'(kr) + \bar{\Phi}'(kr)] \cos\theta \quad (\text{C.12})$$

$$u_{\theta}^B = \frac{1}{2} B V^R(z) \frac{-1}{r k_R} [\Phi(kr) + \bar{\Phi}(kr)] \sin \theta \quad (C.13)$$

$$u_z^B = \frac{1}{2} B W^R(z) [\Phi(kr) + \bar{\Phi}(kr)] \cos \theta \quad (C.14)$$

$$\tau_{rz}^B = \frac{1}{2} B T_{rz}^R(z) [\Phi'(kr) + \bar{\Phi}'(kr)] \cos(\theta) \quad (C.15)$$

$$\tau_{rr}^B = \frac{1}{2} B T_{rr}^R(z) [\Phi(kr) + \bar{\Phi}(kr)] \cos(\theta) - \frac{1}{2} B \bar{T}_{rr}^R \left[ \frac{1}{kr} [\Phi'(kr) + \bar{\Phi}'(kr)] - \frac{1}{(kr)^2} [\Phi(kr) + \bar{\Phi}(kr)] \right] \cos(\theta) \quad (C.16)$$

$$\tau_{r\theta}^B = \frac{1}{2} B T_{r\theta}^R(z) \left[ \frac{1}{kr} [\Phi'(kr) + \bar{\Phi}'(kr)] - \frac{1}{(kr)^2} [\Phi(kr) + \bar{\Phi}(kr)] \right] \sin \theta \quad (C.17)$$

La surface d'intégration de l'équation de réciprocité est définie par le surface du volume  $V$  tels que  $0 \leq r \leq b, 0 \leq z < \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

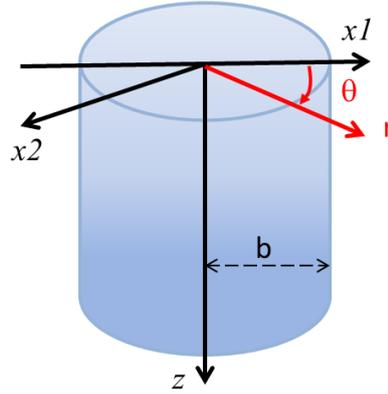


Figure C.1 : définition du contour d'intégration pour le calcul des fonctions de Green

L'intégrale sur la surface s'écrit :

$$\int_S [\tau_{ij}^B u_j^A - \tau_{ij}^A u_j^B] = b \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} [(\tau_{rr}^B u_r^A - \tau_{rr}^A u_r^B) + (\tau_{rz}^B u_z^A - \tau_{rz}^A u_z^B) + (\tau_{r\theta}^B u_{\theta}^A - \tau_{r\theta}^A u_{\theta}^B)] d\theta dz \quad (C.18)$$

Afin de simplifier les calculs on note  $\Phi = \Phi(kb)$  et on substitue les contraintes et déplacements des états A et B par leurs expressions. On a :

$$u_r^A \tau_{rr}^B = \frac{1}{2} A B V^R \Phi' T_{rr}^R(z) (\Phi + \bar{\Phi}) \cos^2 \theta - \frac{1}{2} A B V^R \Phi' \bar{T}_{rr}^R \left( \frac{1}{k_R r} (\Phi' + \bar{\Phi}') - \frac{1}{(k_R r)^2} (\Phi + \bar{\Phi}) \right) \cos^2 \theta$$

$$u_r^B \tau_{rr}^A = \frac{1}{2} A B V^R (\Phi' + \bar{\Phi}') T_{rr}^R(z) \Phi \cos^2 \theta - \frac{1}{2} A B V^R (\Phi' + \bar{\Phi}') \bar{T}_{rr}^R \left( \frac{1}{k_R r} \Phi' - \frac{1}{(k_R r)^2} \Phi \right) \cos^2 \theta$$

$$u_z^A \tau_{rz}^B = \frac{1}{2} A B W^R \Phi T_{rz}^R(z) (\Phi' + \bar{\Phi}') \cos^2 \theta$$

$$u_z^B \tau_{rz}^A = \frac{1}{2} ABW^R (\Phi + \bar{\Phi}) T_{rz}^R(z) \Phi' \cos^2 \theta$$

$$u_\theta^A \tau_{r\theta}^B = \frac{1}{2} ABV^R \left(-\frac{1}{k_R r}\right) \Phi T_{r\theta}^R(z) \left[ \frac{1}{k_R r} [\Phi' + \bar{\Phi}'] - \frac{1}{(k_R r)^2} [\Phi + \bar{\Phi}] \right] \sin^2 \theta$$

$$u_\theta^B \tau_{r\theta}^A = \frac{1}{2} ABV^R \left(-\frac{1}{k_R r}\right) (\Phi + \bar{\Phi}) T_{r\theta}^R(z) \left[ \frac{1}{k_R r} \Phi' - \frac{1}{(k_R r)^2} \Phi \right] \sin^2 \theta$$

D'où :

$$\left( \tau_{rr}^B u_r^A - \tau_{rr}^A u_r^B \right) = \frac{1}{2} ABV^R \left( T_{rr}^R(z) + \bar{T}_{rr}^R(z) \left( -\frac{1}{(k_R r)^2} \right) \right) (\bar{\Phi}' \Phi - \Phi' \bar{\Phi}) \cos^2 \theta$$

$$\left( \tau_{rz}^B u_z^A - \tau_{rz}^A u_z^B \right) = -\frac{1}{2} ABW^R T_{rz}^R(z) (\bar{\Phi}' \Phi - \Phi' \bar{\Phi}) \cos^2 \theta$$

$$\left( \tau_{r\theta}^B u_\theta^A - \tau_{r\theta}^A u_\theta^B \right) = \frac{1}{2} ABV^R \left(-\frac{1}{k_R r}\right) T_{r\theta}^R(z) \left( \frac{1}{k_R r} \right) (\bar{\Phi}' \Phi - \Phi' \bar{\Phi}) \sin^2 \theta$$

Sachant que,  $T_{r\theta}(z) = -\bar{T}_{rr}(z)$  et  $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi$ , on a :

$$\left( \tau_{rr}^B u_r^A - \tau_{rr}^A u_r^B \right) + \left( \tau_{rz}^B u_z^A - \tau_{rz}^A u_z^B \right) + \left( \tau_{r\theta}^B u_\theta^A - \tau_{r\theta}^A u_\theta^B \right) = \frac{1}{2} AB \left( T_{rr}^R(z) V^R(z) - T_{rz}^R(z) W^R(z) \right) (\bar{\Phi}' \Phi - \Phi' \bar{\Phi}) \cos^2 \theta$$

ou encore

$$\frac{1}{2} QBV^R(z_0) = \frac{1}{2} ABIH \quad (C.19)$$

avec

$$I = \int_0^\infty \left[ T_{rr}^R(z) V^R(z) - T_{rz}^R(z) W^R(z) \right] dz \quad (C.20)$$

$$H = \pi b \left( \Phi'(k_R b) \bar{\Phi}(k_R b) - \bar{\Phi}'(k_R b) \Phi(k_R b) \right) \quad (C.21)$$

Les fonctions de Hankel vérifient la propriété suivante :

$$\left[ \frac{d}{d\xi} H_v^{(1)}(\xi) \right] H_v^{(2)}(\xi) - H_v^{(1)}(\xi) \left[ \frac{d}{d\xi} H_v^{(2)}(\xi) \right] = \frac{4i}{\pi \xi} \quad (C.22)$$

Donc  $H = \frac{4i}{k_R}$

L'amplitude A est donc :

$$A = \frac{k_R}{4i} \frac{QV^R(z_0)}{I} \quad (C.23)$$

Les composantes de déplacement de l'onde de Rayleigh générée par un point source de direction  $x_1$  sont donc données par les expressions suivantes :

$$u_{r,1} = \frac{k_R}{4i} \frac{QV^R(z_0)}{I} V(z) \Phi'(kr) \cos\theta \quad (C.24)$$

$$u_{\theta,1} = \frac{k_R}{4i} \frac{QV^R(z_0)}{I} V(z) \left( \frac{-1}{rk_R} \right) \Phi(kr) \sin\theta \quad (C.25)$$

$$u_{z,1} = \frac{k_R}{4i} \frac{QV^R(z_0)}{I} W(z) \Phi(kr) \cos\theta \quad (C.26)$$

### C.2. Calcul des déplacements de l'onde de Rayleigh générée par une force de direction z

On applique la réciprocité en prenant une force ponctuelle (équation(C.27)) de direction z d'amplitude  $P$  pour l'état A et le même état auxiliaire que précédemment.

$$f_z = P\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(z-z_0)e^{-i\omega t} \quad (C.27)$$

On obtient, après développement des expressions, l'amplitude de l'onde de Rayleigh générée par un point source de direction z :

$$A = -\frac{k_R}{4i} \frac{PW^R(z_0)}{I} \quad (C.28)$$

### C.3. Calcul des déplacements de l'onde de Rayleigh générée par une force de direction x2

On applique de la même manière la réciprocité en prenant une force ponctuelle de direction  $x_2$  d'amplitude  $M$  (équation (C.29)) pour l'état A et la demi-somme d'une onde de surface sortante et d'une onde de surface qui converge vers l'origine en absence du point source.

$$f_2 = M\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(z-z_0)e^{-i\omega t} \quad (C.29)$$

On obtient, après développement des expressions, l'amplitude de l'onde de Rayleigh générée par un point source de direction  $x_2$  :

$$A = -\frac{k_R}{4i} \frac{MV^R(z_0)}{I} \quad (C.30)$$

Les composantes de déplacement de l'onde de Rayleigh générée par un point source de direction  $x_2$  sont donc :

$$u_{r,2} = -\frac{k_R}{4i} \frac{MV^R(z_0)}{I} V(z) \Phi'(kr) \sin\theta \quad (C.31)$$

$$u_{\theta,2} = \frac{k_R}{4i} \frac{MV^R(z_0)}{I} V(z) \left( \frac{-1}{rk_R} \right) \Phi(kr) \cos \theta \quad (\text{C.32})$$

$$u_{z,2} = -\frac{k_R}{4i} \frac{MV^R(z_0)}{I} W(z) \Phi(kr) \sin \theta \quad (\text{C.33})$$

**« Modélisation de la propagation et de la réception des ondes élastiques émises par un défaut sous contrainte. Application à la simulation des contrôles non-destructifs par émission acoustique »**

**Résumé** - Le contrôle non destructif (CND) par émission acoustique (EA) est utilisé dans un grand nombre de domaines tels l'énergie nucléaire, le secteur pétrolier et gazier, le génie civil ou l'industrie mécanique afin de vérifier l'intégrité des structures sous contrainte. Selon le rapport entre la longueur d'onde et l'épaisseur de la structure, l'énergie libérée par un défaut sous contrainte peut se propager sous forme d'ondes guidées (cas des structures minces) ou sous forme d'onde de Rayleigh (cas des structures épaisses). L'analyse des signaux issus de cette méthode ultrasonore « passive » présente des difficultés liées principalement à la complexité des signaux typiquement mesurés. L'objectif de la thèse est de développer des modèles permettant la simulation d'expériences de CND par EA dans le cas des structures épaisses ou minces. Les modèles développés sont basés sur un couplage entre un modèle de source d'EA, un modèle de propagation des ondes et un modèle de capteur d'EA. Dans le cas des structures épaisses, deux modèles 2D (concernant le contrôle de pièces de surface plane et cylindrique) et un modèle 3D (surface plane) ont été développés afin de prédire le signal correspondant à l'onde de Rayleigh émise par un défaut sous contraintes. Concernant les structures minces, un modèle 2D a été développée permettant de prédire le signal correspondant aux modes guidés émis par une fissure sous contrainte. Plusieurs études paramétriques ont été menées afin de définir l'influence des différentes données d'entrée des modèles sur les signaux d'EA et ainsi aider à l'interprétation des contrôles par EA.

**Mots clés** : Emission acoustique, onde de Rayleigh, ondes guidées, capteur d'EA, défauts sous contrainte.

**« Modeling of the propagation and reception of elastic waves emitted by a crack under stress. Application to the simulation of non-destructive testing by Acoustic Emission ».**

**Abstract** - AE Non-destructive testing is used in many fields such as nuclear energy, oil and gas, civil engineering or mechanical engineering to check the integrity of structures under stress. Depending on the ratio of structure thickness to wavelength, the energy released by a crack under stress can propagate either as guided waves (in thin structures) or as Rayleigh wave (in thick structures). The analysis of signals resulting from this ultrasonic "passive" method is particularly difficult due to the complexity of typically measured signals. The objective of this thesis is to develop models to enable the simulation of AE testing experiments in the case of thick or thin structure. The developed models rely on the coupling between an AE source model, wave propagation models and an AE Sensor model. In the case of thick structures two 2D models (for plane and cylindrical surfaces) and a 3D model (for plane surface) have been developed to predict the signal corresponding to the Rayleigh wave emitted by a crack under stress. In the case of thin structures, a 2D model has been developed to predict the signal corresponding to the guided modes emitted by a crack under stress. Several parametric studies have been conducted to determine the influence of the different model input data on the AE signals and thus help to interpret AE testing results.

**Keywords:** Acoustic Emission, Rayleigh wave, guided waves, AE sensor, cracks under stress.