



**HAL**  
open science

# Réduction de vibrations de structure complexe par shunts piézoélectriques : application aux turbomachines

Aurélien Sénéchal

► **To cite this version:**

Aurélien Sénéchal. Réduction de vibrations de structure complexe par shunts piézoélectriques : application aux turbomachines. Vibrations [physics.class-ph]. Conservatoire national des arts et métiers - CNAM, 2011. Français. NNT : 2011CNAM0785 . tel-00862517

**HAL Id: tel-00862517**

**<https://theses.hal.science/tel-00862517v1>**

Submitted on 17 Sep 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale du Conservatoire National des Arts et Métiers

Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC)

## THÈSE DE DOCTORAT

*présentée par* : Aurélien SÉNÉCHAL

*soutenue le* : 16 septembre 2011

*pour obtenir le grade de* : Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers

*Discipline / Spécialité* : Mécanique / Dynamique des Structures

### Réduction de vibrations de structure complexe par shunts piézoélectriques Application aux turbomachines

#### THÈSE DIRIGÉE PAR

M. DEÛ Jean-François

*Professeur des universités, Cnam*

#### CO-ENCADRANT

M. THOMAS Olivier

*Maître de conférence, Cnam*

#### RAPPORTEURS

M. COLLET Manuel

*Chargé de recherches CNRS, Institut Femto-ST*

M. TRINDADE Marcelo A.

*Associate Professor, University of São Paulo*

#### EXAMINATEURS

M. POLIT Olivier

*Professeur des universités, Université Paris Ouest*

M. THOUVEREZ Fabrice

*Professeur des universités, École Centrale de Lyon*

M. JEAN Pierrick

*Ingénieur, Snecma*



---

---

# Remerciements

**L**e Conservatoire National des Arts et Métiers est une grande maison que j'ai appris à connaître au fil de ces trois années passées à la chaire de mécanique. Parce que chacun peut un jour avoir besoin d'acquérir de nouvelles connaissances, puisqu'un savoir actualisé est un atout professionnel, car tout simplement il n'y a pas d'âge pour apprendre, je crois à la formation continue dispensée par le Cnam. Me permettrai-je aussi d'ajouter que cet établissement est le seul de France à proposer une formation continue de qualité ouverte à tous. Pour le bien de l'intérêt général, ses missions actuelles doivent perdurer.

Ce document de thèse présente les travaux menés au Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés de novembre 2007 à décembre 2010 sous la direction de Jean-François Deü et l'encadrement d'Olivier Thomas. Je les remercie de m'avoir fait confiance pour réaliser ce travail. De même, je remercie tous les membres du laboratoire et en particulier Frédéric Guillerm pour son aide lors de la réalisation du démonstrateur, ainsi qu'Antoine Legay, Olivier De Smet, Claude Blanzé et Walid Larbi. Je pense également à Julien Ducarne, au contact duquel j'ai beaucoup appris sur la piézoélectricité. Enfin, je remercie les différents post-doctorants, doctorants et élèves ingénieurs, Arnaud, Romain, Lucie, Mélodie, Christophe, Julien et Bryann de leur bonne humeur et pour avoir animé le laboratoire, notamment lors des entre-deux estivaux.

Cette période dense qu'est la thèse a été l'occasion pour moi d'acquérir de nouvelles connaissances dans d'autres domaines que la mécanique. Je remercie encore une fois Olivier Thomas et Jean-François Deü de m'avoir laissé suivre et obtenir, le Master de Finances d'Entreprise du Cnam dirigé par le professeur Denis Dubois. À cet effet, je remercie Alexandre Le Belleguy, camarade de promotion, pour son soutien lors de ces deux dernières années où il n'a pas toujours été facile de marier Science et Finance.

J'adresse mes plus vifs remerciements à ma famille et à mes amis, qui ont toujours été là pour me soutenir. J'en profite ici pour exprimer ma plus profonde gratitude envers mes parents pour, entre autres choses utiles dans la vie, m'avoir permis d'effectuer des études supérieures.

Pour terminer, je te remercie *Ana*, de m'avoir accompagné durant ces trois dernières années.

Paris, le 14 juillet 2011



---

---

## Résumé



ette thèse concerne la réduction des vibrations en basses fréquences d'une aube de rotor de soufflante d'un turboréacteur à partir de dispositifs d'amortissement piézoélectriques passifs ou semi-passifs. Les solutions étudiées utilisent des pastilles piézoélectriques liées à l'aube et connectées à des circuits électriques de type shunt résistif ou résonant, ou de type switch.

La première partie du travail propose une modélisation électromécanique d'une structure à géométrie complexe avec pastilles piézoélectriques. Pour cela, un modèle éléments finis tridimensionnel est développé pour prendre en compte le couplage entre une structure élastique de géométrie quelconque et des pastilles piézoélectriques planes ou courbes éventuellement épaisses. Ce modèle est basé sur une formulation originale définie en termes de variables mécaniques locales (aux nœuds du maillage) et de variables électriques globales (pour chaque pastille piézoélectrique). Un modèle d'ordre réduit, basé sur une approche modale, est ensuite construit et utilisé pour les analyses proposées dans la suite du travail.

La seconde partie du travail est consacrée à l'optimisation du système électromécanique, dans le but de maximiser l'amortissement apporté par les dispositifs piézoélectriques. Une procédure d'optimisation est développée pour déterminer les géométries et les emplacements des pastilles piézoélectriques permettant de maximiser le coefficient de couplage électromécanique modal entre les éléments piézoélectriques et le mode mécanique qu'il s'agit d'amortir, ceci de façon indépendante du choix des composants du circuit électrique. Cette étape, qui utilise la modélisation électromécanique du système couplé, est basée sur l'utilisation de deux algorithmes différents : le recuit simulé et la recherche avec liste taboue. Ces deux algorithmes sont couplés entre eux et connectés aux outils de calculs éléments finis développés dans le travail de façon à trouver les solutions optimales. Pour valider les résultats obtenus sur une structure industrielle, une campagne d'essai est menée sur une aube fan de CFM56-7b qui permet de mettre en évidence la très bonne concordance entre les niveaux d'atténuation prévus et ceux mesurés expérimentalement, ce qui valide à la fois les modèles et la procédure d'optimisation.

La dernière partie du travail traite de l'évaluation de l'effet d'éventuelles non-linéarités géométriques sur la dynamique d'une structure tournante, lorsque celle-ci vibre en grande amplitude. L'objectif est ici de déterminer l'évolution des caractéristiques dynamiques modales d'une aube en fonction de l'amplitude des vibrations et de certains paramètres de fonctionnement comme la vitesse de rotation. Pour cela, différents modèles de poutres en rotation sont développés et comparés pour juger de leur domaine de validité ainsi que de la présence et de l'importance des divers phénomènes non linéaires dans leur réponse forcée. Les résultats obtenus dans cette dernière partie viennent enrichir et compléter les études actuellement menées sur le sujet.

**Mots clés :** réduction de vibration, structure complexe, piézoélectricité, modèle éléments finis, modèle réduit, optimisation, shunts piézoélectriques



---

---

# Abstract

**T**he low frequency vibration reduction of a turbojet fan blade with passive or semi-passive piezoelectric damping devices is addressed in this Ph.D. thesis. The proposed solutions use piezoelectric patches bonded onto the fan blade and connected to electrical circuits like a resistive or a resonant shunt or a switch system.

The first part of the work is dedicated to the derivation of an electromechanical model suited for structures having a complex geometry with piezoelectric patches. To do so, a three-dimensional finite element model is developed to take into account the coupling between an elastic structure with an arbitrary geometry and flat or curved piezoelectric patches, possibly thick. This model is built on an original formulation defined in terms of local mechanical variables (at the nodes of the mesh) and global electrical variables (for each piezoelectric patch). A reduced order model, based on a modal approach, is then used for the analysis proposed in the rest of the work.

The second part is devoted to the optimization of the electromechanical system, in order to maximize the damping provided by the piezoelectric devices. Independently of the choice of the electrical circuit components, an optimization procedure is developed to find the geometries and the locations of the piezoelectric patches that maximize the modal electromechanical coupling coefficient between the piezoelectric patches and the mechanical mode which has to be damped. This step, which uses the electromechanical modeling of the coupled system, works thanks to two different algorithms : the simulated annealing and the tabu search. Both algorithms are coupled together and connected to the finite element computational tool developed in this thesis so as to find the optimal solutions. To validate the obtained results on an industrial structure, a measurement campaign is conducted on a CFM56-7B turbojet fan blade. A very good agreement between the expected attenuation levels and those experimentally measured is obtained, which validate both the models and the optimization procedure.

The last part of the work deals with the effects assessment of the possible geometric nonlinearities on the dynamics of a rotating structure, when the latter vibrates with large amplitude. Here, the objective is to determine the evolution of the modal dynamic characteristics of a blade according to the vibration amplitude and other operating parameters like rotational speed. To do this, different models of rotating beams are developed and compared to determine their validity range and to estimate the level of the various nonlinear phenomena in their forced response. The results obtained in this last part enrich and complete the current studies on the subject.

**Keywords :** vibration reduction, complexe structure, piezoelectricity, finite element modeling, reduced order model, optimization, piezoelectric shunts

---

---

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Contexte industriel . . . . .	1
1.2	Les technologies piézoélectriques . . . . .	2
1.3	Organisation du mémoire . . . . .	3
1.3.1	Partie I : réduction de vibrations . . . . .	3
1.3.2	Partie II : vibrations non linéaires . . . . .	3

## I RÉDUCTION DE VIBRATIONS

<b>2</b>	<b>Modélisation éléments finis d'un problème électromécanique</b>	<b>7</b>
2.1	Matériau piézoélectrique . . . . .	8
2.1.1	Effets piézoélectriques . . . . .	8
2.1.2	Grandeurs électriques . . . . .	9
2.1.3	Piézoélectricité . . . . .	12
2.1.4	Conducteurs en équilibre électrostatique . . . . .	15
2.1.5	Condensateur plan . . . . .	16
2.1.6	Lois de comportement piézoélectrique . . . . .	17
2.1.7	Coefficients de couplage matériau . . . . .	19
2.2	Modélisation éléments finis adaptée au cas de shunts . . . . .	20
2.2.1	Hypothèses et formulation variationnelle . . . . .	20
2.2.2	Formulation élément finis . . . . .	23
2.2.3	Construction de la matrice de couplage électromécanique . . . . .	24
2.3	Réduction modale et coefficients de couplage . . . . .	28
2.3.1	Modes propres en court-circuit . . . . .	29
2.3.2	Projection modale du problème général . . . . .	29
2.3.3	Association de plusieurs pastilles piézoélectriques . . . . .	30
2.3.4	Coefficient de couplage . . . . .	34
2.4	Implémentation du code de calcul éléments finis . . . . .	40
2.4.1	Choix des logiciels . . . . .	40
2.5	Application au cas d'une poutre : validations numérique et expérimentale . . . . .	42
2.6	Shunts linéaires : modélisation et optimisation . . . . .	46
2.6.1	Shunt résistif . . . . .	47
2.6.2	Shunt résonant . . . . .	48
2.7	Conclusion . . . . .	49

<b>3</b>	<b>Optimisation de la géométrie et de la localisation des pastilles piézoélectriques</b>	<b>53</b>
3.1	Introduction à l'optimisation . . . . .	54
3.2	Les métaheuristiques . . . . .	56
3.2.1	Principales notions liées à l'utilisation d'une métaheuristique . . . . .	56
3.2.2	Avantages et inconvénients . . . . .	57
3.3	Procédure d'optimisation . . . . .	58
3.3.1	Caractérisation et paramétrisation du problème . . . . .	58
3.3.2	Description des algorithmes . . . . .	60
3.3.3	Problématique et choix de la fonction coût . . . . .	68
3.3.4	Les critères d'arrêt . . . . .	70
3.3.5	Cas d'une optimisation multicritère . . . . .	70
3.4	Implémentation du code d'optimisation . . . . .	71
3.5	Applications au cas d'une plaque . . . . .	72
3.5.1	Cas d'un seul patch . . . . .	72
3.6	Conclusion . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Généralités sur les turboréacteurs</b>	<b>81</b>
4.1	Généralités sur les aubes de soufflante . . . . .	81
4.1.1	Les turboréacteurs double-corps/double-flux . . . . .	81
4.1.2	Les objectifs de la soufflante . . . . .	86
4.1.3	Les matériaux et la fabrication . . . . .	88
4.2	Conception d'une aube de soufflante . . . . .	91
4.2.1	Les différentes sources d'excitation . . . . .	91
4.2.2	Le phénomène de résonance . . . . .	94
4.2.3	Fatigue vibratoire . . . . .	95
4.2.4	Les techniques de réduction de vibrations d'aube de soufflante . . . . .	98
4.3	Conclusions . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Atténuation des vibrations d'une aube de soufflante de CFM56-7B par shunt piézoélectrique</b>	<b>103</b>
5.1	Analyse modale de l'aube . . . . .	103
5.1.1	Dispositif expérimental . . . . .	103
5.1.2	Calculs numériques . . . . .	109
5.1.3	Corrélation des modes aux points de mesure . . . . .	109
5.1.4	Résultats . . . . .	112
5.2	Réalisation d'une aube avec couplage optimisé . . . . .	117
5.2.1	Choix des pastilles piézoélectriques . . . . .	117
5.2.2	Modèle éléments finis et paramétrisation . . . . .	118
5.2.3	Optimisation de la configuration libre-libre : choix de la position et de l'épaisseur	120
5.2.4	Optimisation de la configuration encastrée-libre : choix de la position et de l'épaisseur . . . . .	132
5.2.5	Problématiques liées au collage . . . . .	140
5.2.6	Prise en compte de la mosaïque et du film de colle dans la modélisation . . . . .	147
5.3	Expériences . . . . .	156
5.3.1	Dispositif expérimental et protocole de mesure . . . . .	156
5.3.2	Réalisation des shunts . . . . .	157
5.3.3	Résultats . . . . .	159
5.3.4	Utilisation d'un shunt à commutation : mesures expérimentales et perspectives	169
5.4	Conclusion . . . . .	173

II VIBRATIONS NON LINÉAIRES

<b>6 Vibrations en grande amplitude d'un modèle simplifié d'aube de soufflante en rotation</b>	<b>177</b>
6.1 Objectifs . . . . .	177
6.2 bibliographie . . . . .	178
6.3 Formulation du problème mécanique . . . . .	179
6.3.1 La transformation . . . . .	179
6.3.2 Déformations . . . . .	181
6.3.3 Loi de comportement et efforts généralisés . . . . .	184
6.3.4 Equations du mouvement . . . . .	185
6.4 Modèles analytiques . . . . .	188
6.4.1 Modèle de von Kármán . . . . .	189
6.4.2 Modèle inextensible . . . . .	196
6.5 Modèle éléments finis . . . . .	202
6.5.1 Équations du mouvement . . . . .	203
6.5.2 Discrétisation éléments finis . . . . .	203
6.5.3 Résolution des équations dynamiques . . . . .	206
6.5.4 Résultats . . . . .	211
6.6 Passage à une structure tridimensionnelle : travaux en cours et perspectives .	221
6.6.1 Projection directe du problème assemblé . . . . .	221
6.6.2 Projection du problème lors de l'étape de discrétisation éléments finis . . . . .	222
6.6.3 Projection modale . . . . .	224
<b>7 Conclusion</b>	<b>227</b>
7.1 Partie I : réduction de vibrations . . . . .	227
7.2 Partie II : vibrations non linéaires . . . . .	228
7.3 Prolongements de l'étude . . . . .	229

ANNEXES

<b>A Éléments finis 1D en non linéaire géométrique</b>	<b>233</b>
A.1 Matrice des fonctions d'interpolation . . . . .	233
A.2 Matrice du gradient discrétisé . . . . .	233
A.3 Calcul de la matrice de masse $\mathbf{M}$ . . . . .	234
A.4 Vecteur des forces de déformation $\mathbf{f}_d$ . . . . .	234
A.5 Matrice de rigidité tangente matériau et géométrique . . . . .	235
A.6 Calcul des efforts $\mathbf{f}_\Omega^{nl}$ , $\mathbf{f}_\Omega^{lin}$ , $\mathbf{f}_\Omega^{cste}$ et des matrices $\mathbf{K}_c$ et $\mathbf{K}_{gc}$ . . . . .	237
<b>B Éléments finis 3D en non linéaire géométrique</b>	<b>239</b>
B.1 Expressions de $\mathbf{D}^{(1)}$ , $\mathbf{D}^{(2)}$ et $\mathbf{D}^{(2)'}$ . . . . .	239
<b>C Données matériau du PIC151</b>	<b>241</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>242</b>



---

# Introduction

Cette thèse CIFRE (Conventions Industrielles de Formation par la REcherche) est cofinancée par le ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche ainsi que par la Snecma<sup>1</sup>, motoriste aéronautique et spatial du groupe Safran.

Les travaux, qui portent principalement sur la réduction des vibrations de structure complexe par shunts piézoélectriques mais également sur les vibrations en grande amplitude, ont été menés dans le cadre d'un partenariat entre la Snecma et le Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés du Conservatoire National des Arts et Métiers de Paris.

## 1.1 Contexte industriel

Dans les turboréacteurs, les aubages sont soumis à de nombreuses sollicitations statiques et dynamiques d'origine aérodynamique ou mécanique. Ces phénomènes sont multiples, complexes et difficiles à prédire d'où l'existence de nombreuses marges (pompage, flottement, *etc.*), que l'amélioration des modèles théoriques et des outils de calcul doit permettre d'affiner. Bien que les excitations dépendent fortement de la position dans le moteur de l'étage étudié, celles affectant une aube fan peuvent être classées en deux catégories principales : les phénomènes aéroélastiques et les phénomènes mécaniques.

Baignées dans un flux d'air, les roues aubagées (stator et rotor) sont donc soumises à des sollicitations vibratoires d'origine aérodynamique. Ces excitations ont deux effets principaux d'un point de vue dynamique : elles peuvent provoquer une instabilité de la roue aubagée (phénomène de flottement) ou une résonance de la structure sur un (ou plusieurs) de ses modes propres de vibration, ce qui génère des contraintes alternées susceptibles de provoquer de la fatigue vibratoire.

Afin de réduire ces niveaux vibratoires et augmenter la limite d'endurance des aubes, la première stratégie consiste à apporter de l'amortissement. Pour cela, les motoristes privilégient aujourd'hui les techniques d'amortissement par frottement sec et par ajout de matériau viscoélastique. Partant de ce constat, un des objectifs de cette thèse est de démontrer que les technologies piézoélectriques passives sont capables d'atténuer les vibrations d'une aube fan de façon significative.

---

<sup>1</sup>En 1945, la nationalisation des motoristes aéronautiques français conduit à la création de la Snecma (Société Nationale d'Études et Construction de Moteurs d'Aviation).

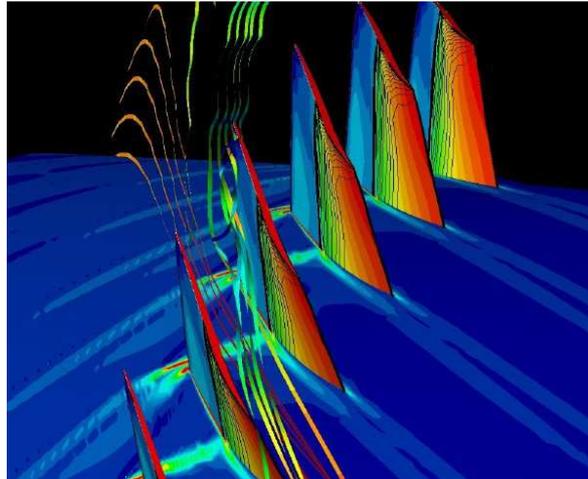


FIG. 1.1 – *Simulation du flux d'air dans un compresseur. Source : Cerfac.*

## 1.2 Les technologies piézoélectriques

Les principales technologies de réduction des vibrations peuvent être classées en 5 familles :

- les matériaux viscoélastiques qui, lorsqu'ils sont déformés, vont dissiper l'énergie des vibrations. Ces matériaux doivent être placés là où la déformation est maximale pour le mode de vibration à réduire. C'est une solution simple à mettre en oeuvre, peu onéreuse, efficace pour les vibrations haute fréquence mais pas en basse fréquence<sup>2</sup>.
- les amortisseurs à masse accordée. Ce type de dispositif peut être :
  - un résonateur non amorti (masse et raideur uniquement) dont l'unique fréquence propre est calée sur celle du mode à amortir. Dans ce cas, le dispositif modifie la fonction de réponse en fréquence de la structure de telle manière qu'un pic de résonance soit remplacé par une antirésonance encadrée par deux pics d'amplitude plus petite ;
  - un résonateur amorti, où une couche de matériau viscoélastique est rajoutée afin de dissiper également de l'énergie. Ces dispositifs sont efficaces en basse fréquence mais nécessitent un accord précis.
- les amortisseurs à friction. Ils doivent généralement être placés entre deux parties d'une structure ayant un déplacement relatif important, ce qui limite le nombre de leurs applications. Néanmoins, ce sont des technologies robustes, éprouvées et peu onéreuses.
- les systèmes électromagnétiques, qui utilisent le déplacement relatif d'un aimant et d'une bobine. Comme pour les amortisseurs à friction, il est nécessaire d'avoir un déplacement relatif entre deux points. Ces dispositifs sont efficaces en large bande mais nécessitent un circuit électronique couplé à la structure pour pouvoir réduire l'amplitude des vibrations.
- les systèmes piézoélectriques sont plus faciles à implémenter sur une structure quelconque car ils travaillent en déformation. Ils sont efficaces sur une large bande de fréquence mais nécessitent également un circuit électronique (plus ou moins complexe) pour réduire les vibrations.

<sup>2</sup>Des dispositifs amortissants à base de matériaux viscoélastiques peuvent être utilisés en basse fréquence mais il est nécessaire d'avoir des déplacements importants.

## 1.3 Organisation du mémoire

L'objet de cette thèse est d'étudier différents dispositifs d'amortissement de vibrations en basses fréquences des aubes de rotor de soufflante ("fan") d'un turboréacteur. Les solutions étudiées utilisent des pastilles piézoélectriques, liées à l'aube et connectées à un circuit électrique passif ou semi-passif.

### 1.3.1 Partie I : réduction de vibrations

En premier lieu, il s'agit de reprendre le modèle électromécanique développé dans [130, 46], puis de l'étendre au cas tridimensionnel par l'utilisation de la méthode des éléments finis. Ce modèle de comportement prend en compte le couplage entre une structure mécanique quelconque et des pastilles piézoélectriques planes ou courbes. Par la suite, un modèle réduit à faible nombre de degrés de liberté est construit, ce qui permet après résolution de prédire l'efficacité des dispositifs amortissants.

Deux techniques d'amortissement, nommées "shunt" et "switch" sont appliquées au cas d'une aube fan. Le premier dispositif consiste à utiliser un circuit électrique résistif ou résonant. Le second, encore à l'état de recherche, comporte un circuit muni d'un interrupteur synchronisé aux oscillations de la structure, ce qui produit un amortissement analogue à celui d'un frottement sec. La modélisation et l'optimisation électrique de ces circuits, issus des travaux [128, 46, 47] ne font l'objet que d'un rappel dans ce mémoire.

Une procédure d'optimisation est également mise en place pour pouvoir trouver les géométries et les emplacements des pastilles qui maximisent le couplage électromécanique. Deux algorithmes différents (recuit simulé et recherche avec liste tabouée) sont développés et mis en interaction avec les outils de calcul éléments finis et de construction des modèles réduits pour trouver des solutions optimisées.

Afin de valider sur un cas industriel l'ensemble des travaux sur les dispositifs piézoélectriques, une campagne d'essai est menée sur une aube fan de CFM56-7b. Les niveaux d'atténuation mesurés et ceux prévus par le modèle sont ensuite comparés.

### 1.3.2 Partie II : vibrations non linéaires

Une poutre en rotation est un modèle de base pour comprendre les phénomènes physiques qui interviennent lorsque qu'une structure tournante vibre avec des amplitudes valant plusieurs fois son épaisseur. La détermination des caractéristiques dynamiques modales (fréquences propres et modes associés) et leurs évolutions en fonction des paramètres de fonctionnement de l'aube (taux de rotation, force appliquée, fréquence d'excitation) constituent l'objet de cette partie. Plusieurs modèles sont développés et comparés pour pouvoir juger de la présence et de l'importance des divers phénomènes non linéaires dans la réponse forcée d'une poutre en rotation.

La première partie établit les équations générales du mouvement en deux dimensions d'une poutre plane en rotation dans le cadre des grands déplacements/grandes rotations et des petites déformations en utilisant le principe des puissances virtuelles. La seconde partie traite des deux principaux modèles analytiques qu'il est possible d'obtenir à partir des équations du mouvement. Ce sont les modèles de poutre de von Kármán et inextensible. La troisième partie porte sur la modélisation éléments finis du problème de vibrations planes non linéaires d'une poutre en rotation. La formulation choisie est celle de Timoshenko en Lagrangien total. La raison de ce développement supplémentaire est d'avoir un modèle fiable afin de pouvoir juger de la pertinence des solutions analytiques. La quatrième partie est dédiée aux simulations et

à l'interprétation des résultats. Quant à la dernière, elle aborde les développements en cours sur la projection modale d'un problème éléments finis 3D en non linéaire géométrique.

PARTIE I

---

## Réduction de vibrations

*Le Maître dit : " Étudier, c'est comme courir après ce qui nous échappe, tout en craignant de perdre ce qu'on a déjà. "*

*Entretiens de Confucius, VIII.17*



---

# Modélisation éléments finis d'un problème électromécanique

Ce chapitre a pour objectif d'introduire, succinctement, les matériaux et les phénomènes piézoélectriques ainsi que les principales technologies sur lesquels elles reposent. La relation de comportement piézoélectrique est ensuite exposée puis les différents coefficients de couplage du matériau sont définis.

Dans une deuxième partie, une formulation éléments finis d'une structure élastique munie de pastilles piézoélectriques minces est présentée. L'originalité de ce modèle, issu des travaux de [46, 130], est d'introduire des variables électriques globales : la différence de potentiel aux bornes des pastilles et la charge électrique contenue dans ses électrodes. Ce modèle, uniquement utilisé dans le cas d'éléments finis de poutre est ici développé pour une structure tridimensionnelle quelconque maillée avec des éléments tétraédriques quadratiques. En particulier, l'aspect technique de la construction de la matrice de couplage est détaillé.

En troisième partie, le modèle éléments finis est projeté sur la base des modes propres du système avec les pastilles piézoélectriques en court-circuit. Par la suite, le problème est réécrit dans les cas où les pastilles sont connectées en parallèle, en série et où 2 ensembles de pastilles connectées en parallèle sont reliés en série. Les modèles réduits obtenus permettent de faire apparaître les coefficients de couplage modaux, qui s'expriment à partir des déformées modales et de la matrice de couplage éléments finis.

La réalisation d'un code de calcul, capable de gérer un problème de grande taille issu de la discrétisation éléments finis d'une structure industrielle, se heurte à plusieurs difficultés techniques qui ont donné lieu à un travail conséquent de programmation.

- Une géométrie complexe nécessite de pouvoir modéliser des pastilles piézoélectriques courbes où chaque éléments finis de celles-ci, après discrétisation, est associé à un repère local indiquant la direction d'isotropie transverse du matériau piézoélectrique ;
- La création de  $P$  pastilles sur une structure quelconque, puis la génération d'un maillage volumique de grande taille comportant plusieurs dizaines de milliers de degrés de liberté et enfin la résolution du problème aux valeurs propres associé nécessitent d'utiliser des codes industriels performants ;
- L'automatisation des différentes étapes de la chaîne de calcul requiert de faire communiquer entre eux les différents codes.

Le choix des logiciels et l'organisation du code sont présentés en quatrième partie de ce chapitre.

Enfin, les résultats issus du modèle éléments finis développé dans ce mémoire pour des

éléments 3D sont validés avec des mesures expérimentales [46] sur une poutre encastrée/libre munie de deux pastilles piézoélectriques montées en série.

## 2.1 Matériau piézoélectrique

L'un des objectifs de cette thèse étant de prolonger les travaux antérieurs réalisés au LMSSC sur la réduction de vibration à l'aide de pastilles piézoélectriques, les bases de la discipline ne font pas l'objet d'une description exhaustive mais d'un simple rappel des notions utiles pour la compréhension de la physique d'une pastille.

Le chapitre commence par la définition des deux effets piézoélectriques, qui conduit à introduire 3 champs : électrique  $\mathbf{E}$ , de déplacement électrique  $\mathbf{D}$  et de polarisation  $\mathbf{P}$ . Les différentes grandeurs électriques, ainsi que les relations entre  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{P}$ , sont ensuite décrites. Les bases physiques des phénomènes étant posées, la piézoélectricité dans les céramiques est abordée (structure initiale, polarisation et propriétés).

À la suite de cet avant-propos général sur la piézoélectricité, les modèles mathématiques utilisés pour représenter l'électrostatique et le couplage électromécanique dans les pastilles piézoélectriques sont introduits. Ce sont, respectivement, un modèle de condensateur plan, qui permet d'obtenir la relation entre la tension et la charge, et un modèle à 4 champs issu de la mécanique des milieux continus, qui sont présentés.

Enfin, les coefficients de couplage matériau, qui permettent de quantifier la conversion de l'énergie mécanique en énergie électrique, sont définis.

Le lecteur est invité à consulter le mémoire de thèse de Julien Ducarne [46], à partir duquel les rappels qui suivent ont été formulés, pour une description complète des grandeurs électriques intervenant dans les matériaux piézoélectriques, des isolants et conducteurs en électrostatique, de la piézoélectricité dans les céramiques et des coefficients de couplage matériau.

### 2.1.1 Effets piézoélectriques

La piézoélectricité est la propriété que possèdent certains matériaux de convertir de l'énergie mécanique en énergie électrique, c'est-à-dire de se polariser électriquement sous l'action d'une contrainte mécanique, et réciproquement, de transformer de l'énergie électrique en énergie mécanique, en d'autres termes, de se déformer sous l'effet d'un champ électrique. Un ma-

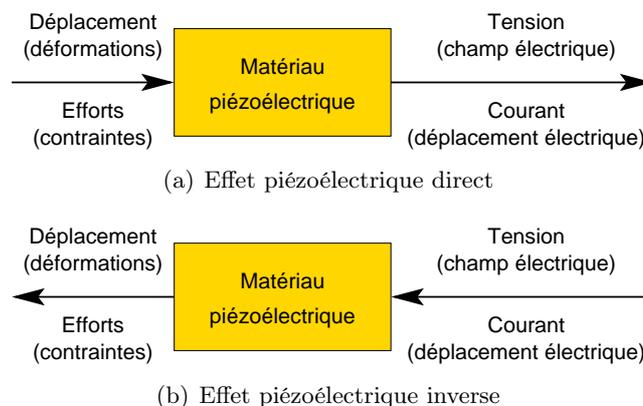


FIG. 2.1 –

tériau piézoélectrique présente toujours les deux effets. Le premier est appelé effet piézoélectrique direct (Fig. 2.1(a)) et le second effet piézoélectrique inverse (Fig. 2.1(b)). La variation

de la polarisation électrique d'un matériau diélectrique sous l'effet d'une contrainte ou d'un champ électrique est à l'origine des phénomènes piézoélectriques. Le champ électrique  $\mathbf{E}$ , le champ de déplacement électrique  $\mathbf{D}$  et le champ de polarisation  $\mathbf{P}$  doivent être introduits pour caractériser l'état électrostatique du milieu.

### 2.1.2 Grandeurs électriques

Dans un milieu solide, il existe trois phénomènes électromagnétiques :

- la conduction électrique, mesurée par la grandeur physique  $\sigma$ , conductivité du matériau ;
- la polarisation électrique, représentée par  $\epsilon$ , la permittivité du matériau ;
- la polarisation magnétique, caractérisée par  $\mu$ , la perméabilité du matériau ;

et deux types de charges :

- les charges libres, qui sont capables de se déplacer d'une orbite atomique à une autre et de créer des courants électriques ;
- les charges liées, qui restent attachées à l'atome.

Dans un matériau piézoélectrique soumis à des champs magnétiques négligeables, ce qui est le cas ici, seuls les deux premiers phénomènes jouent un rôle important.

#### (a) Conduction et charges libres

La conductivité est la capacité d'un matériau à laisser passer du courant électrique. Autrement dit, c'est l'aptitude à laisser les porteurs de charges électriques (les électrons libres dans un solide) se déplacer lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique. Les atomes qui constituent le matériau restent eux immobiles. Le courant est représenté par une densité volumique de courant électrique, définie par

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}_m, \quad (2.1)$$

où  $\rho_v$  est la densité volumique de charges libres et  $\mathbf{v}_m$  la vitesse moyenne de ces charges. La loi d'Ohm locale, qui rend compte du fait que les électrons libres se déplacent lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique  $\mathbf{E}$ , s'écrit

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.2)$$

avec  $\sigma$  la conductivité du matériau exprimée en  $\text{A.V}^{-1}.\text{m}^{-1}$  ou Siemens par mètre  $\text{S.m}^{-1}$ . Dans le domaine de l'électrostatique, c'est la conductivité électrique qui est plus généralement utilisée, notée  $\gamma$ , elle s'exprime en  $(\Omega.\text{m})^{-1}$ , qui est une unité homogène à celle de  $\sigma$  puisque le Siemens est homogène à un  $\Omega^{-1}$ .

Deux cas extrêmes peuvent être distingués :

- les matériaux isolants (ou diélectriques) ne possèdent pas d'électrons libres si bien qu'aucun courant électrique ne peut y prendre naissance. Ils sont caractérisés par des valeurs très faibles de  $\sigma$ , de l'ordre de  $10^{-16} \text{ S.m}^{-1}$  pour les meilleurs isolants. Les matériaux piézoélectriques font partie de cette famille
- les matériaux conducteurs, comme le cuivre ou l'aluminium, dont la conductivité est de l'ordre de  $10^8 \text{ S.m}^{-1}$ .

**(b) Polarisation d'un diélectrique et charges liées**

Bien qu'un matériau isolant ne possède pas de charges libres, lorsque celui-ci est soumis à un champ électrique, les charges positives (les protons du noyau de l'atome) et négatives (nuage d'électrons lié au même noyau) le constituant sont soumises à des forces de Coulomb et se déplacent légèrement par rapport à leur position moyenne d'équilibre, sans pouvoir pour autant se déplacer sur des distances importantes. Le cumul des charges déplacées peut causer un changement significatif de l'état électrique du milieu. Ce phénomène est la polarisation, qui est une propriété des matériaux diélectriques. La polarisation électronique, due aux déplacements et à la déformation des nuages électroniques, ainsi que la polarisation atomique, due aux déplacements des atomes, sont susceptibles de créer de nombreux dipôles électrostatiques. De manière générale, un dipôle électrostatique apparaît lorsqu'une répartition quelconque de charges électriques présente un barycentre des charges positives qui ne coïncide pas avec celui des charges négatives. Dans le cas d'un diélectrique soumis à un champ électrique, les dipôles créés sont des paires de charges positives et négatives espacées d'une certaine distance, fonction de l'intensité du champ électrique. Ainsi, chaque dipôle est caractérisé par son moment  $\mathbf{p}$  défini par

$$\mathbf{p}_i = q_i \mathbf{d}_i, \quad (2.3)$$

où  $q_i$  est la charge positive du  $i$ -ième dipôle et  $\mathbf{d}_i$  le vecteur reliant la charge négative à la charge positive. Le champ de polarisation électrique du milieu est alors défini comme la densité volumique de dipôles, qui s'écrit

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \rho_+ \mathbf{d}, \quad (2.4)$$

avec  $\Delta v$  un petit volume du matériau,  $N$  le nombre de dipôles contenus dans  $\Delta v$ ,  $\rho_+$  la densité de charges positives déplacées et  $\mathbf{d}$  le déplacement moyen des charges positives par rapport aux charges négatives. Une polarisation nulle peut signifier que les moments sont soit nuls, par exemple dans le cas d'atomes au repos, ou que les moments sont non nuls mais répartis uniformément dans toutes les directions.

Le champ de polarisation  $\mathbf{P}$  caractérise un déplacement de charges positives par rapport aux charges négatives. Si il n'est pas uniforme dans un volume donné, sa variation se traduit par un excès de charges positives hors du volume considéré (Fig. 2.2). D'un point de vue quantitatif, cela permet de définir une densité volumique de charge de polarisation  $\rho_p$ , telle que

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho_p. \quad (2.5)$$

Cette dernière relation montre qu'une polarisation non uniforme (caractérisée par  $\operatorname{div} \mathbf{P}$  non nulle) dans le matériau correspond à la création d'une densité de charge  $\rho_p$ , de signe opposé à celui de la divergence de  $\mathbf{P}$ .

**(c) Déplacement et champ électrique**

À la différence du vide, un milieu matériel peut donc contenir une densité de charge de polarisation non nulle (des charges liées, définies par la densité volumique  $\rho_p$ ) en plus d'éventuelles charges libres (caractérisées par leur densité volumique  $\rho_v$ ). Cette ensemble de charges est responsable du champ électrique  $\mathbf{E}$  dans le matériau, créé à la fois par les charges libres et les charges liées.

L'expression locale du théorème de Gauss dans le vide ( $\operatorname{div} (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_v$ ) devient, dans le cas d'un milieu matériel :

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_v + \rho_p, \quad (2.6)$$

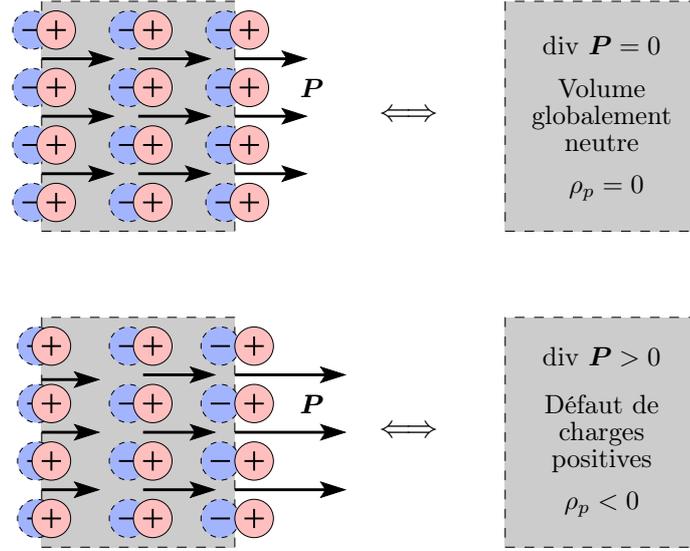


FIG. 2.2 – Polarisation  $\mathbf{P}$  uniforme (en haut) et non-uniforme (en bas) d'un élément de matière et densité de charge de polarisation  $\rho_p$  équivalente

soit encore, avec l'équation (2.5) :

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_v. \quad (2.7)$$

Cela permet de définir le *champ de déplacement électrique* (ou *induction électrique*)  $\mathbf{D}$  par :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (2.8)$$

L'expression locale du théorème de Gauss dans un milieu matériel s'écrit alors

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v, \quad (2.9)$$

#### (d) Loi de comportement

Lorsque le matériau est linéaire, la polarisation est proportionnelle au champ électrique, ce qui s'écrit

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (2.10)$$

avec  $\chi_e$  la susceptibilité du milieu (c'est un paramètre adimensionné). À partir de la relation (2.8), la relation entre  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  devient

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (2.11)$$

avec  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  la permittivité du milieu où  $\epsilon_r$  est la permittivité relative (par rapport au vide) définie par  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ . Les relations (2.10) et (2.11) ne sont valables que pour un milieu isotrope.

#### (e) Conditions aux limites

À partir du théorème de Gauss, les différentes conditions aux limites suivantes sont démontrées [46, 69] pour le champ électrique  $\mathbf{E} = E_n \mathbf{n} + E_t \mathbf{t}$ , le champ de déplacement électrique  $\mathbf{D} = D_n \mathbf{n} + D_t \mathbf{t}$  et le champ de polarisation  $\mathbf{P} = P_n \mathbf{n} + P_t \mathbf{t}$  :

- la composante normale  $D_n$  du déplacement électrique est discontinue au passage de l'interface entre deux milieux matériels. La valeur du saut est égale à  $\rho_s$  ;
- la composante normale  $P_n$  du champ de polarisation est discontinue au passage de l'interface entre deux milieux matériels et la valeur du saut est l'opposé d'une densité surfacique de charges de polarisation  $\rho_{sp}$  ;
- en conséquence, la composante normale  $E_n$  du champ électrique est discontinue au passage de l'interface entre deux milieux matériels et la valeur du saut vaut  $\rho_s + \rho_{sp}$  ;
- la composante tangentielle  $E_t$  du champ électrique est toujours continue à l'interface entre deux milieux.

### 2.1.3 Piézoélectricité

Cette section consiste en un rappel des propriétés des céramiques piézoélectriques. Les spécificités et les applications des matériaux piézoélectriques sont résumées brièvement.

#### (a) Les céramiques piézoélectriques

Les céramiques ne sont qu'une des différentes catégories de matériau piézoélectrique dont les cristaux, les polymères PVDF et les composites piézoélectriques font partis. Le lecteur pourra consulter [46] pour une description succincte mais néanmoins précise de ces différentes familles.

À la différence des cristaux dont la structure est figée, les céramiques piézoélectriques ont une structure qui peut varier ; leur polarisation peut être modifiée, après quoi ils présentent une polarisation rémanente. Une famille importante de céramiques piézoélectriques est celle des PZT (Titano-Zirconate de Plomb) qui possèdent d'excellentes propriétés piézoélectriques. Leur formule générale s'écrit  $A^{2+} B^{4+} O_3^{2-}$  où A est un ion métallique divalent (comme le Plomb ou le Barium) et B, un ion métallique tétravalent (comme le titane ou le zirconium). Une cellule élémentaire ou maille est représentée sur la figure 2.3.

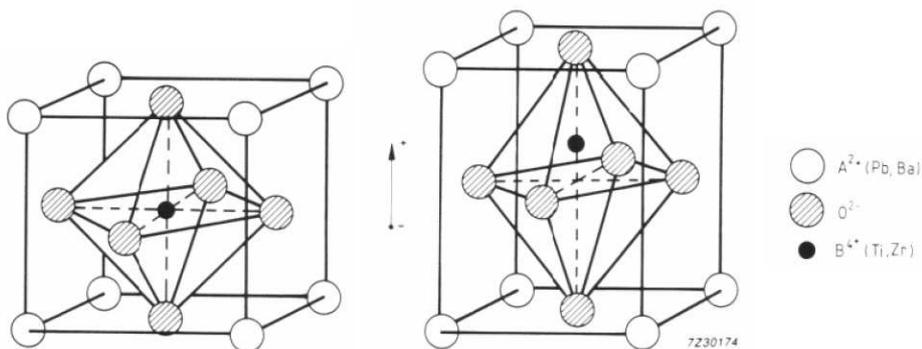


FIG. 2.3 – Cellule élémentaire d'un PZT. Gauche : structure cubique non polarisée (au dessus de la température de Curie) ; droite : structure tétragonale polarisée (en dessous de la température de Curie) [6]

**Structure initiale** Au dessus d'une température appelée température de Curie (entre 200°C et 350°C pour les PZT [7]), ces cristaux ont une structure cristalline cubique (Fig. 2.3 à gauche) avec les centres de gravité des charges positives et négatives coïncidents, si bien qu'ils ne sont pas polarisés ; comme ils sont souvent obtenus par frittage à chaud, ils commencent

leur existence sous cette forme. Au sein du matériau, il est possible de distinguer plusieurs cristallites ou grains, où la structure est régulière. En dessous de la température de Curie, les cristaux ont une structure tétragonale (Fig. 2.3 à droite) pour laquelle l'ion  $B^{4+}$  n'est plus au centre de la structure, si bien que chaque maille est le siège d'un dipôle électrostatique, dont la direction et le moment peuvent être modifiés par application d'un champ électrostatique. Plusieurs mailles contiguës ont en général la même polarisation et constituent un domaine ferroélectrique (ou domaine de Weiss) auquel est associé un vecteur polarisation  $\mathbf{P}$  particulier. Au sein d'un cristallite donné peuvent coexister plusieurs domaines de Weiss, avec une polarisation qui peut prendre 6 directions différentes (la maille de la figure 2.3 à droite peut tourner dans 6 directions différentes). À ce stade, le matériau est globalement isotrope et ne présente pas de couplage piézoélectrique (Fig. 2.5 (a)).

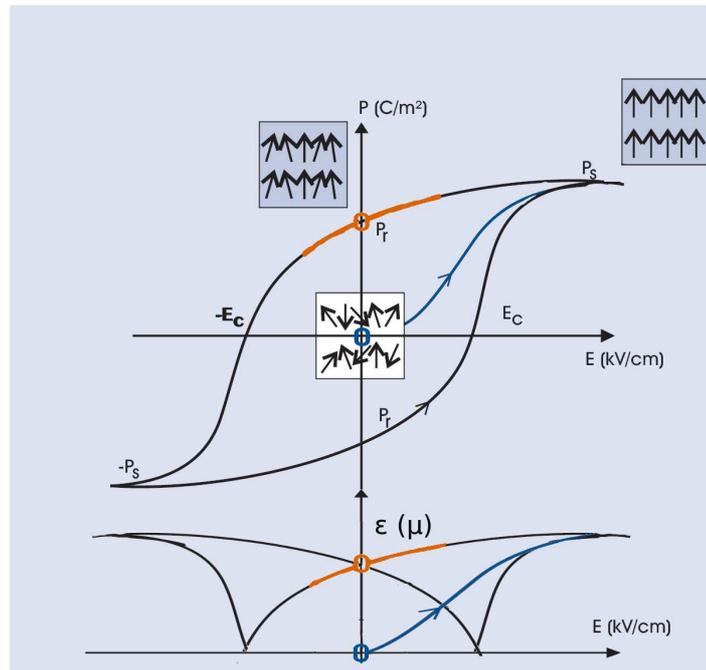


FIG. 2.4 – Polarisation et déformation en fonction du champ électrique, adapté de [7]

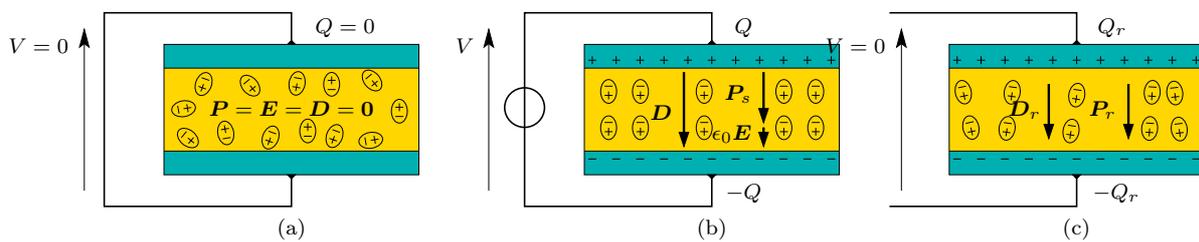


FIG. 2.5 – Différents états d'une pastille piézoélectrique. (a) état non polarisé ( $P = 0$ ); (b) état saturé ( $P = P_s$ ); (c) pastille après polarisation ( $P = P_r$ )

**Polarisation** L'élément piézoélectrique est muni d'électrodes et un champ électrique important est appliqué.  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  prennent des valeurs élevées (Fig. 2.4, tracé bleu). Au sein du cristal, les ions  $B^{4+}$  se déplacent dans les mailles en direction de l'électrode négative. La polarisation augmente rapidement et de façon non linéaire. Dans chaque cristallite, le domaine de

Weiss qui correspond à une des 6 directions la plus proche du champ électrique croît, jusqu'à ce que chaque cristallite soit entièrement polarisé dans la même direction. Ensuite la polarisation cesse d'augmenter rapidement ; la saturation est arrivée, et presque tous les dipôles sont alignés avec le champ électrique (Fig. 2.5 (b)). En même temps que ces modifications se produisent, les mailles se déforment, s'étirent légèrement dans la direction du champ et se rétrécissent orthogonalement ; au niveau macroscopique le matériau s'étire dans la direction d'application du champ et se rétrécit dans le plan orthogonal.

**Polarisation rémanente** Si maintenant le champ électrique appliqué cesse et que la différence de potentiel entre les électrodes est ramenée à 0 (Fig. 2.5 (c), Fig. 2.4 au point cerclé en orange), les ions ne se réarrangent pas dans les mailles de manière uniforme ; la plupart d'entre eux restent orientés vers l'électrode négative. Il subsiste ainsi une polarisation rémanente  $P_r$  et un déplacement électrique  $D_r$  ; ainsi qu'une charge libre à la surface des électrodes, qui assure un champ électrique nul ;  $Q_r = P_r A$  où  $A$  est la surface des électrodes. À partir de maintenant, les évolutions se font autour de cet état d'équilibre. Dans cet état le matériau présente aussi une déformation rémanente.

**Effet piézoélectrique** Pour de petites variations du champ électrique autour de cet état polarisé, une déformation du matériau est obtenue (Fig. 2.4, partie du graphe en orange) ; le matériau au niveau macroscopique présente désormais un couplage piézoélectrique. Ce comportement peut s'expliquer par le fait que les mailles sont plus ou moins toutes alignées. Si une maille seule est observée, sous l'application d'un champ électrique dans la direction de polarisation rémanente (souvent appelée direction 3), il s'en suit un étirement selon l'axe de polarisation (c'est le couplage "33") et une contraction dans les directions orthogonales (couplage "31" ). Ces deux couplages sont les plus fréquemment utilisés, car les mêmes électrodes sont utilisées pour la polarisation et pour utiliser l'effet piézoélectrique. Si un champ orthogonal à la direction de polarisation rémanente est appliqué, ce qui requiert de nouvelles électrodes et éventuellement d'enlever les anciennes, le matériau est cisailé (couplage "51"). Au dessus de certaines valeurs du champ électrique, le matériau risque de se dépolariser en changeant de branche du cycle de la figure 2.4.

**Propriétés** Les céramiques piézoélectriques sont produites et utilisées en volume. Du point de vue de la fabrication, l'obtention par frittage permet une variété de formes et de tailles bien plus importante que pour les cristaux. Pour obtenir un couplage important, il est préférable de maximiser le champ en tout point lors de la polarisation. Pour ce faire, une épaisseur constante entre les électrodes est préférable. Les éléments piézoélectriques sont donc très souvent des plaquettes droites ; il existe aussi des portions de coque sphérique [5]. Les céramiques présentent des couplages élevés, mais sont fragiles. Presque tous les paramètres piézoélectriques sont sensibles à la température [7] mais il est toujours possible, étant donnée la grande variété de céramique, de trouver une référence dont les propriétés sont stables sur une gamme de température donnée. Les propriétés évoluent aussi au cours du temps. Cependant, il est envisageable de les repolariser périodiquement afin de compenser ce vieillissement.

## (b) Spécificités et applications

Les éléments piézoélectriques sont utilisés pour des applications de capteur où l'effet piézoélectrique direct est utilisé ou bien d'actionneur en utilisant l'effet piézoélectrique inverse. Ils ont des spécificités dans ce domaine qui les font préférer à d'autres éléments ou systèmes à couplage électromécanique, par exemple, les actionneurs électrodynamiques de type bobine-aimant, les alliages à mémoire de forme et les dispositifs électrostrictifs.

- Ce sont des actionneurs/capteurs solides travaillant directement en déformation, il n'y a pas de mécanisme pouvant s'user ou froter. Cela est un avantage pour les applications en milieux hostiles ;
- ils présentent une bonne linéarité et une réponse quasi-instantanée. Des applications haute fréquence sont ainsi possibles ;
- le phénomène étant réversible, le rendement est élevé ;
- la puissance massique admissible est importante, sous réserve de travailler en haute fréquence ;
- les céramiques sont très rigides (impédance mécanique élevée) et les tensions apparaissant sont élevées pour de faibles déformations (sensibilité).

Au nombre de leurs défauts, un prix de revient pour l'instant assez élevé, un vieillissement mal connu, plus le fait que les hautes tensions et faibles charges en jeu ne sont pas toujours adaptées au couplage avec des circuits électroniques. En particulier, il faut souvent un amplificateur haute tension pour actionner un élément piézoélectrique. Enfin, travaillant en déformation, ils ne permettent que de faibles déplacements.

Le nombre des applications industrielles qui utilisent des éléments piézoélectriques se compte aujourd'hui par dizaines [46]. Le marché est dynamique<sup>1</sup> et les demandes pour de nouvelles applications sont nombreuses. Sont notamment concernés :

- les filtres fréquentiels pour les applications FDM (*Frequency Division Multiplex*) ;
- les systèmes à onde acoustique de surface pour les filtres TV ;
- les systèmes ultrasoniques air pour les détecteurs d'obstacles ;
- les transducteurs pour atomiseurs de liquide ;
- les systèmes multi-éléments linéaires pour l'imagerie ultrasonore ;
- les multicouches céramiques pour les piézovannes pour injecteur diesel ;
- les systèmes basés sur les technologies couches minces comme les *Micro et Nano ElectroMechanical Systems* , dits MEMS et NEMS ;
- la récupération d'énergie de vibrations mécaniques sous forme électrique, appelée *piezoelectric energy harvesting* ;
- la réduction active et passive du bruit et des vibrations.

#### 2.1.4 Conducteurs en équilibre électrostatique

L'hypothèse électrostatique [69, p. 181] stipule que les répartitions de charge et les densités de courant sont quasi-stationnaires, ce qui conduit à éliminer les dérivées temporelles des équations de Maxwell pour un milieu matériel.

Les matériaux conducteurs contiennent des électrons libres capables de créer des courants électriques. Si le conducteur est parfait, c'est à dire que sa conductivité est très grande ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), comme la densité de courant doit avoir une valeur bornée, l'équation  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  montre que  $\mathbf{E} = 0$  dans le conducteur ; *le potentiel est donc uniforme dans un conducteur* [69, p. 124,

<sup>1</sup>Une étude de marché réalisée en 2008 par *Innovative Research and Products (iRAP)*, intitulée *Piezoelectric ceramic, polymer and ceramic/polymer composite devices - types, materials, applications, new developments, industry structure and global market*, indique que la taille du marché global, constitué de 11 familles de technologies piézoélectriques, était de 10.6 milliards d'euros en 2007 et sera probablement autour de 19 milliards d'euros en 2012. Si les applications piézoélectriques traditionnelles représentent un marché mature, la demande adressée aux nouvelles technologies tire le marché global vers le haut puisqu'une croissance à 2 chiffres est attendue pour ce segment.

196-197]. La même conclusion est valable lorsque le conducteur est en équilibre électrostatique où dans ce cas, il n'est le siège d'aucun courant électrique :  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ .

Comme en général un conducteur n'est pas polarisable, alors  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ , ce qui donne  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ , d'après (2.8). Par la suite, l'équation (2.9) montre que  $\rho_v = 0$ , ce qui signifie qu'aucune charge volumique n'est présente dans un conducteur à l'équilibre électrostatique. Les charges libres contenues dans le conducteur sont donc toutes concentrées à la surface de celui-ci, ce qui correspond à une densité surfacique de charges libres non nulle ( $\rho_s \neq 0$ ) à la surface du conducteur.

### 2.1.5 Condensateur plan

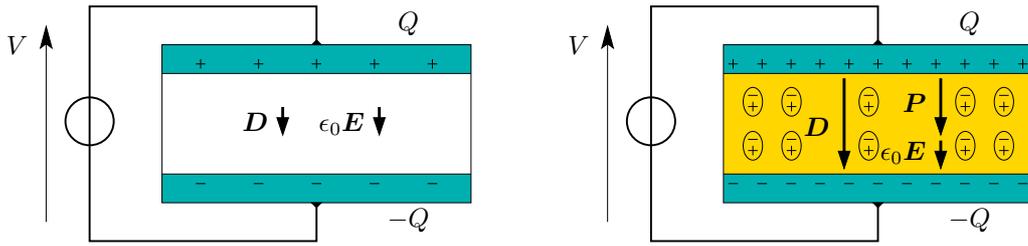


FIG. 2.6 – Condensateurs d'armatures identiques, dans le vide (à g.) et avec milieu diélectrique (à droite), soumis à la même différence de potentiel.

Un condensateur plan est constitué de deux armatures (ou électrodes) conductrices planes. L'espace entre les deux peut contenir une couche de matériau diélectrique de permittivité  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ , ou être laissé vide. Sous réserve que les surfaces soient grandes devant l'épaisseur  $e$  de l'espace entre les électrodes, les effets de bord sont négligeables, et les champs sont tous de direction verticale  $\mathbf{E} = E\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{D} = D\mathbf{x}$  et  $\mathbf{P} = P\mathbf{x}$ . En l'absence de perturbation extérieure, les champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{P}$  sont négligeables hors du condensateur. En appliquant le théorème de Gauss (Eq. (2.9)), la relation de comportement (Eq. (2.11)) et les conditions aux limites, et en tenant compte du fait que les armatures sont conductrices, les résultats suivants sont obtenus :

- pour une différence de potentiel imposé  $V$ , le champ électrique vaut  $E = -V/e$  ;
- le déplacement électrique est  $D = \epsilon_0 E$  pour un condensateur sans diélectrique ;
- en présence de diélectrique, apparaît une polarisation  $P = \chi_e \epsilon_0 E$  ; le déplacement devient  $D = \epsilon_r \epsilon_0 E$  ;
- sur l'électrode supérieure, la charge surfacique est l'opposé du flux de  $D$  : c'est donc  $Q^+ = -A\epsilon_r \epsilon_0 (-V/e)$  ;
- sur l'électrode inférieure, on trouve une charge opposée :  $Q^- = A\epsilon_r \epsilon_0 (-V/e)$  où  $A$  est l'aire des armatures.

Finalement, la capacité du condensateur est :

$$V = \frac{Q}{C}, \quad C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{e}, \quad (2.12)$$

Par ailleurs :

- le déplacement électrique est toujours dirigé des charges surfaciques *libres* positives vers les négatives. Le vecteur polarisation est quand à lui toujours dirigé dans le sens du déplacement des charges *liées*, c'est-à-dire des charges surfaciques *liées* négatives vers les positives.

- les interfaces diélectrique/armatures concentrent des charges libres provenant du conducteur et des charges liées provenant du diélectrique. À l'équilibre, la densité de charges libres est opposée et inférieure à celle des charges liées.

### 2.1.6 Lois de comportement piézoélectrique

La loi de comportement utilisée pour décrire le couplage électromécanique fait intervenir 4 grandeurs physiques :

- le champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$ , qui est un tenseur d'ordre 2, de composante  $\sigma_{ij}$ , exprimées en Pa ;
- le champ de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , également un tenseur d'ordre 2, de composante  $\varepsilon_{kl}$ , sans dimension ;
- le champ de déplacement électrique  $\boldsymbol{D}$ , de composante  $D_i$ , exprimées en  $\text{C.m}^{-2}$  ;
- le champ électrique  $\boldsymbol{E}$ , de composantes  $E_k$ , exprimées en  $\text{V.m}^{-1}$ .

où  $i, j, k, l$  peuvent correspondre aux 3 directions de l'espace  $x, y, z$ . Dans le cadre de la piézoélectricité linéaire<sup>2</sup>, la relation de comportement se présente sous la forme

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, & (2.13a) \\ D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik}^E E_k. & (2.13b) \end{cases}$$

Trois types de constantes apparaissent :

- $c_{ijkl}^E$ , les constantes de raideur à champ électrique constant, exprimées en Pa ;
- $e_{kij}$ , les constantes piézoélectriques, exprimées en  $\text{N.m}^{-1}.\text{V}^{-1}$  ;
- $\epsilon_{ik}^E$ , les constantes diélectriques à déformation nulle, exprimées en  $\text{F.m}^{-1}$ .

C'est à travers le tenseur des constantes piézoélectriques que se fait le couplage électromécanique propre au matériau. En l'absence de champ électrique, l'équation (2.13) se ramène à la loi de Hooke. Puisque les tenseurs  $\boldsymbol{c}$ ,  $\boldsymbol{e}$  et  $\boldsymbol{\epsilon}$  vérifient les relations de symétrie suivantes

$$c_{ijkl} = c_{ijlk} = c_{jikl} = c_{klij}, \quad e_{ijk} = e_{ikj}, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}, \quad (2.14)$$

il est possible de se ramener à un jeu d'écriture à 2 indices seulement. Le passage d'une notation tensorielle à une notation avec indices contractés, appelée aussi notation de Voigt, permet de réécrire les tenseurs des équations (2.13) sous forme de matrice et de vecteur, de sorte que la loi de comportement s'écrive

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}^E & -\boldsymbol{e}^T \\ \boldsymbol{e} & \boldsymbol{\epsilon}^E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

#### (a) Loi de comportement 3D

Une céramique piézoélectrique polarisée dans une direction donnée est considérée comme un matériau isotrope transverse dont le plan d'isotropie est perpendiculaire à la direction

<sup>2</sup>Lorsque les grandeurs mécaniques et électriques sont d'intensité modérée, l'approximation de relations linéaires entre ces grandeurs est justifiée. Dans le cas de piézocéramique, le comportement du matériau est linéarisé autour de l'état de polarisation rémanente [46].

	Contraintes						Déformations					
Tensorielles	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{zz}$	$\sigma_{yz}$	$\sigma_{xz}$	$\sigma_{xy}$	$\varepsilon_{xx}$	$\varepsilon_{yy}$	$\varepsilon_{zz}$	$2\varepsilon_{yz}$	$2\varepsilon_{xz}$	$2\varepsilon_{xy}$
Voigt	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_6$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_5$	$\varepsilon_6$

TAB. 2.1 – Correspondance entre les notations tensorielles et les notations de Voigt telle que  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_i)^T$  et  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_i)^T$ .

de polarisation. La relation de comportement, dans le cas où la direction de polarisation est  $z \equiv 3$ , s'écrit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ \frac{D_1}{D_2} \\ \frac{D_3}{D_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \frac{E_1}{E_2} \\ \frac{E_3}{E_3} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Ainsi, un matériau piézoélectrique isotrope transverse est caractérisé par 10 constantes indépendantes (5 élastiques, 3 piézoélectriques et 2 diélectriques). Par la suite, sauf indication contraire, les souplesses et les raideurs sont données à champ électrique constant.

La polarisation suivant l'axe 3 explique que certaines composantes de l'opérateur  $\mathbf{e}$  soient nulles. Par ailleurs, seule la composante suivant  $E_3$  du champ électrique crée des contraintes normales  $\sigma_{ii}$ . Inversement, seule la composante suivant  $D_3$  du déplacement électrique est modifiée par des déformations normales  $\varepsilon_{ii}$ .

Lors de l'utilisation d'un code commercial de *pre* et *post* traitement, tel que *Patran*, il est utile de définir les quantités ingénieurs (module d'Young, coefficient de Poisson et module de cisaillement) à partir des constantes élastiques du matériau. La matrice de souplesse  $\mathbf{S}$ , donnée par inversion de la matrice de raideur, est directement reliée à ces grandeurs. Son expression dans le cas isotrope transverse est

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Y_1} & \frac{-\nu_{12}}{Y_1} & \frac{-\nu_{13}}{Y_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{Y_1} & \frac{1}{Y_1} & \frac{-\nu_{13}}{Y_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{Y_1} & \frac{-\nu_{13}}{Y_1} & \frac{1}{Y_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_{12}}{Y_1} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

où  $Y_1$ ,  $Y_3$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{13}$  et  $G_{13}$  sont les 5 constantes élastiques indépendantes correspondant, respectivement, au module d'Young dans le plan d'isotropie puis dans la direction de polarisation, au coefficient de poisson dans le plan d'isotropie et dans la direction de polarisation et au module de cisaillement suivant cette même direction.

### (b) Loi de comportement 1D

Pour valider la méthode de calcul de la matrice de couplage dans le cas 3D (section 2.2.3), une poutre encastree-libre munie de deux pastilles piézoélectriques montées en série a été

modélisée avec des éléments finis TET10 et les couplages modaux ont été comparés à ceux issus d'un modèle éléments finis 1D et de l'expérience. Pour cette raison, il est nécessaire d'écrire la loi de comportement dans le cas 1D. Lorsque qu'un solide piézoélectrique de la forme d'une poutre est utilisé, la relation de comportement peut être réduite pour ne faire apparaître que les grandeurs mécaniques dans l'axe de la poutre et les grandeurs électriques dans la direction de polarisation.

Une poutre, dont l'axe principal est la direction 1 et l'axe de polarisation la direction 3, présente un couplage de type 31 entre les grandeurs mécaniques axiales ( $\sigma_1$  et  $\varepsilon_1$ ) et les grandeurs électriques transverses ( $E_3$  et  $D_3$ ). Si les dimensions 2 et 3 de la section sont comparables, les contraintes selon ces mêmes directions peuvent être supposées nulles :  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Sous ces hypothèses, la loi de comportement 3D se réduit à l'expression suivante :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \bar{c}_{11}^E \varepsilon_1 - \bar{e}_{31} E_3 & (2.18a) \\ D_3 = \bar{e}_{31} \varepsilon_1 + \bar{\epsilon}_{33}^E E_3 & (2.18b) \end{cases}$$

où  $\bar{c}_{11}$ ,  $\bar{e}_{31}$  et  $\bar{\epsilon}_{33}$  sont les constantes matériau modifiées en tenant compte des deux hypothèses précédentes. Elles sont définies par :

$$\bar{c}_{11}^E = Y_1^E = c_{11} - \frac{c_{12}^2 c_{33} + c_{13}^2 c_{11} - 2c_{13}^2 c_{12}}{\Delta}, \quad (2.19a)$$

$$\bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{c_{12} c_{33} - c_{13}^2}{\Delta} e_{31} - \frac{c_{13}(c_{11} - c_{12})}{\Delta} e_{33}, \quad (2.19b)$$

$$\bar{\epsilon}_{33}^E = \epsilon_{33} + \frac{c_{33} e_{31}^2 + c_{11} e_{33}^2 - 2c_{13} e_{31} e_{33}}{\Delta}. \quad (2.19c)$$

avec  $\Delta = c_{11} c_{33} - c_{13}^2$ .

### 2.1.7 Coefficients de couplage matériau

Pour évaluer l'efficacité d'un matériau piézoélectrique, c'est à dire sa faculté à convertir l'énergie mécanique en énergie électrique et inversement, des coefficients de couplage électro-mécanique sont généralement utilisés.

Une première méthode, proposée dans [82], permet de définir un coefficient de couplage  $k$  par les deux relations équivalentes suivantes

$$k^2 = \frac{\text{Énergie électrique stockée}}{\text{Énergie mécanique fournie}} = \frac{\text{Énergie mécanique stockée}}{\text{Énergie électrique fournie}}. \quad (2.20)$$

Une seconde consiste à simplement définir  $k$  à partir de la loi de comportement piézoélectrique réduite à une dimension seulement,

$$k^2 = \frac{\text{constante piézoélectrique}^2}{\text{constante élastique} \cdot \text{constante diélectrique}}. \quad (2.21)$$

Un exemple des 2 définitions (2.20) et (2.21) est l'expression usuelle de  $k_{31}$  calculée à partir d'un barreau cylindrique en matériau piézoélectrique, de section rectangulaire, chargé en traction compression suivant son axe 1, muni d'électrodes dans la direction 3 et soumis à des cycles de transformation imposés [46]. C'est l'expression (2.22) qui est utilisée par le constructeur pour établir la valeur de  $k_{31}$ .

$$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^\sigma}. \quad (2.22)$$

À partir de la loi de comportement (2.18) réduite au seul couplage  $(E_3, D_3) \leftrightarrow (\varepsilon_1, \sigma_1)$ , il apparaît une autre expression du facteur de couplage matériau notée  $\tilde{k}_{31}$ .

$$\tilde{k}_{31}^2 = \frac{e_{31}^2}{c_{11}^E \varepsilon_{33}}. \quad (2.23)$$

Une autre manière de faire apparaître le rapport des énergies, est de considérer les vibrations d'un matériau piézoélectrique, soit en court-circuit ( $\omega_i$ ), soit en circuit ouvert ( $\hat{\omega}_i$ ). Le cas d'un barreau cylindrique en matériau piézoélectrique vibrant en traction compression suivant son axe 1 et muni d'électrodes dans la direction 3 est traité dans [46]. Cet exemple académique vise à montrer que le rapport des carrés des fréquences propres est identique à celui des raideurs,

$$\frac{\hat{\omega}_i^2}{\omega_i^2} = \frac{\bar{c}_{11}^D}{\bar{c}_{11}^E}. \quad (2.24)$$

Puis, à utiliser les relations entre les coefficients de couplage et les constantes matériaux pour obtenir deux mesures du couplage,

$$k_{31}^2 = \frac{\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\hat{\omega}_i^2}, \quad \tilde{k}_{31}^2 = \frac{\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\omega_i^2}, \quad (2.25)$$

ce qui prouve que les coefficients de couplage matériaux sont directement reliés au rapport des fréquences propres en court-circuit et circuit ouvert d'un solide piézoélectrique. Par la suite, c'est la mesure  $\tilde{k}_{31}$  qui est utilisée (le tilde étant omis).

## 2.2 Modélisation éléments finis adaptée au cas de shunts

Dans cette section, la formulation générale d'un problème électromécanique est utilisée dans le cas particulier d'une structure élastique munie de pastilles piézoélectriques minces collées sur sa surface. Sous certaines hypothèses, qui sont rappelées ici, [130, 46] ont pu passer d'une formulation habituelle avec variables électriques locales, à une formulation faisant intervenir des variables électriques globales pour chaque pastille piézoélectrique  $(V^{(p)}, Q^{(p)})$ . Cette formulation simplifiée est ensuite utilisée afin de construire un modèle éléments finis [130, 22, 24]. Le lecteur est invité à consulter [46, 130] pour une description complète des différentes étapes de calcul.

Les principales contributions de ce travail portent sur :

- la programmation de routines *Matlab* pour le calcul de la matrice de couplage électromécanique entre une structure 3D quelconque et  $P$  pastilles piézoélectriques minces quelconques. Les étapes de sa construction sont d'abord détaillées puis validées ;
- l'écriture de modèles réduits pour des pastilles piézoélectriques connectées en série, en parallèle ou d'une mise en série de pastilles connectées en parallèle.

### 2.2.1 Hypothèses et formulation variationnelle

Une structure élastique, occupant un domaine noté  $\Omega_s$ , est équipée de  $P$  pastilles piézoélectriques. Chaque pastille, qui peut être courbe, a sa surface supérieure et inférieure recouverte d'une électrode très fine. La  $p$ -ième pastille,  $p \in [1, \dots, P]$ , occupe le domaine  $\Omega^{(p)}$  tel que  $\{\Omega_s, \Omega^{(1)}, \dots, \Omega^{(P)}\}$  soit une partition du domaine  $\Omega$  occupé par la structure munie de ses pastilles piézoélectriques. Dans  $\Omega$  sont appliquées des forces volumiques  $f_i^d$ . Sa frontière, notée  $\partial\Omega$ , est soumise à un déplacement imposé  $u_i^d$  sur sa partie notée  $\Gamma_u$  et à une densité de force surfacique  $t_i^d$  sur le reste noté  $\Gamma_t$ , tel que  $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ .

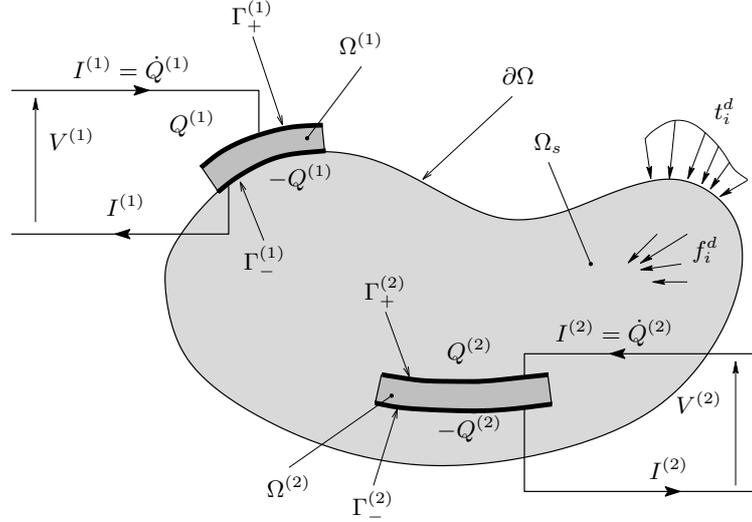


FIG. 2.7 – Structure élastique munie de 2 pastilles piézoélectriques.

Un ensemble d'hypothèses, valide dans la plupart des applications pratiques, permet d'obtenir une formulation variationnelle qui conduit après discrétisation à un problème éléments finis où à chaque pastille piézoélectrique correspond une paire de variables électriques globales [130, 46]. Les principales hypothèses, détaillées dans [130], sont résumées ci-dessous :

- seules les pastilles sont en matériau piézoélectrique. Par conséquent, les constantes de couplage piézoélectrique  $e_{ijk}$  disparaissent dans  $\Omega_s$ . Le champ de déplacement électrique de composantes  $D_i$  est négligé dans  $\Omega_s$ , par rapport à sa valeur dans  $\Omega_{(p)}$  ;
- l'épaisseur  $h^{(p)}$  de la  $p$ -ième pastille piézoélectrique est constante et petite par rapport à sa longueur caractéristique. L'épaisseur des électrodes est négligeable par rapport à  $h^{(p)}$  ;
- les pastilles piézoélectriques sont polarisées suivant leur direction transverse, c'est-à-dire suivant la direction normale aux électrodes. De plus, le champ électrique, de composantes  $E_k$ , est également normal et d'amplitude constante sur la pastille, de sorte que pour tout  $p \in [1, \dots, P]$

$$E_k = -\frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} n_k, \quad \text{in } \Omega^{(p)}, \quad (2.26)$$

où  $V^{(p)} = \psi_+^{(p)} - \psi_-^{(p)}$  est la différence de potentiel entre la surface supérieure et inférieure de la  $p$ -ième pastille, notées respectivement  $\Gamma_+^{(p)}$  et  $\Gamma_-^{(p)}$ .  $n_k$  est la  $k$ -ième composante du vecteur normal unitaire à la surface des électrodes. Cette dernière hypothèse, très forte, aurait du être validée à l'aide d'un modèle électromécanique 3D, ce qui n'a pas été le cas. De manière plus juste, plusieurs auteurs [25, 34] condensent les degrés de liberté électriques internes à la pastille<sup>3</sup>, ce qui permet de prendre en compte le potentiel électrique induit.

En considérant les hypothèses mentionnées ci-dessus, la formulation variationnelle du pro-

<sup>3</sup>La condensation est possible car il n'y a pas de masse sur la partie électrique.



deux permittivités permettent de calculer respectivement la capacité libre  $C^\sigma$  et la capacité bloquée  $C^\varepsilon$ .

La valeur de la capacité d'une pastille collée sur une structure hôte, n'est cependant pas égale à  $C^\sigma$ , ni à  $C^\varepsilon$ . En effet, la structure empêche partiellement les déformations de la pastille, ce qui implique que la valeur de sa capacité se situe entre  $C^\varepsilon$  et  $C^\sigma$ . Ainsi,  $C^{(p)}$  apparaît comme une propriété qui dépend des raideurs de la pastille et de la structure sur laquelle elle est collée. Sa valeur varie selon les conditions mécaniques imposées (entre bloquée et libre) [81].

Dans le cas traité ici, les pastilles sont collées et la couche d'adhésif est beaucoup plus souple que le matériau des pastilles. De plus, comme cela est montré dans la section 5.2.3, l'épaisseur des pastilles utilisées dans l'application du chapitre 5 est de plusieurs millimètres, ce qui est bien supérieur à l'épaisseur de la couche de colle. Par conséquent, il est considéré que les pastilles sont libres et c'est la permittivité à contrainte constante qui est utilisée pour le calcul de la capacité.

$$C^{(p)} = \frac{\epsilon_{33}^\sigma S^{(p)}}{h^{(p)}} \quad (2.29)$$

avec  $\epsilon_{33}^\sigma = \epsilon_{ijk}^\sigma n_i n_k$  la permittivité à contrainte constante dans la direction normale aux électrodes et  $S^{(p)}$  la surface des électrodes.

## 2.2.2 Formulation élément finis

Utiliser la méthode des éléments finis pour discrétiser la partie mécanique des équations (2.27) et (2.28) conduit à définir les matrices suivantes :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i \, d\Omega \implies \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{U}}, \quad (2.30a)$$

$$\int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega \implies \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_m \mathbf{U}, \quad (2.30b)$$

$$\sum_{p=1}^P \frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{kij} n_k \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega \implies \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_c \mathbf{V}, \quad (2.30c)$$

$$\sum_{p=1}^P \delta V^{(p)} C^{(p)} V^{(p)} \implies \delta \mathbf{V}^T \mathbf{K}_e \mathbf{V}, \quad (2.30d)$$

$$\int_{\Omega} f_i^d \delta u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i^d \delta u_i \, dS \implies \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}, \quad (2.30e)$$

$$\sum_{p=1}^P \delta V^{(p)} Q^{(p)} \implies \delta \mathbf{V}^T \mathbf{Q}, \quad (2.30f)$$

avec  $\mathbf{U}$  le vecteur des coordonnées nodales de  $u_i$ ,  $\mathbf{Q} = (Q^{(1)} Q^{(2)} \dots Q^{(P)})^T$  le vecteur colonne des charges électriques et  $\mathbf{V} = (V^{(1)} V^{(2)} \dots V^{(P)})^T$  le vecteur colonne des différences de potentiel.  $\mathbf{M}_m$  and  $\mathbf{K}_m$  sont les matrices de masse et de raideur mécaniques, de taille  $N \times N$ , où  $N$  est le nombre de degré de liberté mécanique.  $\mathbf{K}_c$  est la matrice de couplage électromécanique, de taille  $N \times P$ .  $\mathbf{K}_e = \text{diag}(C^{(1)} \dots C^{(P)})$  est la matrice diagonale des capacités de chacune des pastilles piézoélectriques. Enfin,  $\mathbf{F}$  est le vecteur des efforts nodaux. La formulation générale du problème électromécanique discrétisé par la méthode des éléments finis peut s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{V}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_m & \mathbf{K}_c \\ -\mathbf{K}_c^T & \mathbf{K}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Cette formulation (2.31) est particulièrement bien adaptée au cas des pastilles piézoélectriques "shuntées", c'est-à-dire, connectées à un circuit électronique (shunt), qui n'impose ni la charge  $\mathbf{Q}$ , ni la différence de potentiel  $\mathbf{V}$ , mais plutôt une relation entre les deux, liée à son impédance électrique. Dans ce cas, il faut rajouter une relation aux équations (2.31) pour pouvoir trouver la solution au problème. Par exemple, pour un shunt résonant connecté à la  $p$ -ième pastille et composé d'une résistance  $R$  et d'une inductance  $L$  [12, 130],

$$V^{(p)} + L\ddot{Q}^{(p)} + R\dot{Q}^{(p)} = 0. \quad (2.32)$$

Selon que les pastilles sont toutes mises en court-circuit ( $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ ) ou en circuit ouvert ( $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ ), le problème homogène associé à (2.31) prend les deux formes suivantes :

$$\mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_m \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad \text{short-circuit,} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{U}} + (\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T) \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad \text{open-circuit.} \quad (2.34)$$

Il est à noter que l'effet du couplage électromécanique en circuit ouvert sur la structure apparaît comme un terme de raideur ajoutée  $\mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T$ .

### 2.2.3 Construction de la matrice de couplage électromécanique

Une pastille piézoélectrique mince, courbe et polarisée dans la direction normale aux électrodes (Fig. 2.9) est considérée par la suite.  $i, j$  et  $k$  sont les indices associés aux 3 directions des repères locaux attachés à chaque élément fini de la pastille piézoélectrique. Comme la pastille est courbe, les axes du repère varient selon l'élément considéré. Cependant l'indice  $z \equiv k$  indique toujours la direction de polarisation de la pastille.

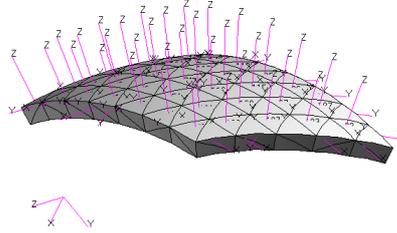


FIG. 2.9 – Pastille piézoélectrique courbe discrétisée par des éléments finis tétraédriques.

Dans la définition de la matrice de couplage électromécanique (Eq. 2.30c), les quantités  $e_{kij}n_k$  et  $\varepsilon_{ij}$  sont exprimées dans la repère local associé à chaque élément de la pastille piézoélectrique. Dans celui-ci, le produit  $e_{kij}n_k$  a une expression très simple. En utilisant les notations de Voigt et le fait que pour chaque élément fini, l'axe 3 est la direction de polarisation, alors  $\mathbf{n} = (n_i \ n_j \ n_k) = (0 \ 0 \ 1)^T$  et il vient

$$\mathbf{e} = e_{k\alpha}n_k = (e_{31} \ e_{31} \ e_{33} \ 0 \ 0 \ 0)^T \quad \text{avec } \alpha = 1, \dots, 6, \quad (2.35)$$

où  $\mathbf{e}$  est le vecteur des constantes piézoélectriques. À l'inverse, le calcul des déformations  $\varepsilon_{ij}$  dans le repère local n'est pas immédiat et implique d'utiliser une matrice de changement de base.

#### (a) Relation matricielle de changement de base pour la matrice des déformations

Dans un premier temps, deux bases distinctes sont à définir. La première est la base d'isotropie orthonormée directe ( $r$ ) =  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ , attachée à un élément fini quelconque appartenant à une pastille. La loi de comportement dans cette base s'écrit  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ .

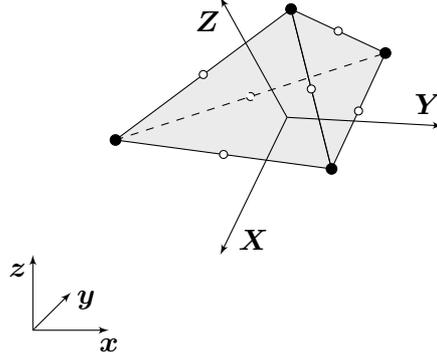


FIG. 2.10 – Représentation d'un élément fini TET10 appartenant à une pastille piézoélectrique.  $(r) = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$  est la base locale attachée à l'élément.  $\mathbf{Z}$  est la direction de polarisation et  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  le plan d'isotropie.

La seconde base, hors axes orthonormée directe,  $(\bar{r}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ , est la base globale du système dans laquelle la loi de comportement s'écrit  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . La matrice de passage de  $(\bar{r})$  à  $(r)$  est notée<sup>4</sup>

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Dès lors, les formules de changement de base des déformations sont données par  $\varepsilon_{ij} = a_{pi}a_{qj}\bar{\varepsilon}_{pq}$ , ou, sous forme matricielle par  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Les écritures explicites des  $\varepsilon_{ij}$  permettent de mettre la matrice de changement de base sous la forme

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{21}^2 & a_{31}^2 & a_{21}a_{31} & a_{31}a_{11} & a_{11}a_{21} \\ a_{12}^2 & a_{22}^2 & a_{32}^2 & a_{22}a_{32} & a_{32}a_{12} & a_{12}a_{22} \\ a_{13}^2 & a_{23}^2 & a_{33}^2 & a_{23}a_{33} & a_{33}a_{13} & a_{13}a_{23} \\ 2a_{12}a_{13} & 2a_{22}a_{23} & 2a_{32}a_{33} & a_{22}a_{33} + a_{32}a_{23} & a_{32}a_{13} + a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} + a_{22}a_{13} \\ 2a_{13}a_{11} & 2a_{23}a_{21} & 2a_{33}a_{31} & a_{23}a_{31} + a_{33}a_{21} & a_{33}a_{11} + a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} + a_{23}a_{11} \\ 2a_{11}a_{12} & 2a_{21}a_{22} & 2a_{31}a_{32} & a_{21}a_{32} + a_{31}a_{22} & a_{31}a_{12} + a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

### (b) Expression de la matrice de couplage électromécanique élémentaire $\mathbf{K}_c^e$

L'introduction de la matrice de changement de base  $\mathbf{a}$  amène à réécrire l'équation (2.30c)

$$\sum_{p=1}^P \frac{V(p)}{h(p)} \int_{\Omega(p)} e_{kij} n_k a_{pi} a_{qj} \bar{\varepsilon}_{pq} (\delta u) \, d\Omega \implies \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_c \mathbf{V}, \quad (2.38)$$

où  $a_{pi}a_{qj}\bar{\varepsilon}_{pq}$  est le tenseur des déformations dans la base locale, exprimé à partir du tenseur des déformations dans la base globale.

<sup>4</sup>Les expressions des 3 vecteurs de la base  $(r)$  en fonction de ceux de  $(\bar{r})$  sont données par

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= a_{11}\mathbf{x} + a_{21}\mathbf{y} + a_{31}\mathbf{z}, \\ \mathbf{Y} &= a_{12}\mathbf{x} + a_{22}\mathbf{y} + a_{32}\mathbf{z}, \\ \mathbf{Z} &= a_{13}\mathbf{x} + a_{23}\mathbf{y} + a_{33}\mathbf{z}. \end{aligned}$$

Le recours à la méthode des éléments finis justifie l'emploi de la matrice de changement de base  $\mathbf{M}$ . En effet, pour obtenir les déformations dans l'élément, il est nécessaire d'utiliser le vecteur des déplacements nodaux  $\mathbf{U}$ , qui lui est exprimé dans le repère global de l'analyse. En notation intrinsèque, le vecteur des déformations s'écrit  $\bar{\varepsilon}_\alpha = \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{N}\mathbf{U} = \mathbf{B}\mathbf{U}$ , où  $\mathbf{D}$  est l'opérateur gradient,  $\mathbf{N}$  la matrice des fonctions d'interpolations et  $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N}$  le gradient discrétisé. Par conséquent, la matrice de couplage élémentaire de l'élément  $e$  de la pastille  $p$  est donnée par

$$\mathbf{K}_c^e = \frac{1}{h^{(p)}} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{e} \, d\Omega, \quad (2.39)$$

avec  $\Omega_e$  le volume de l'élément  $e$ .

### (c) Application au cas d'un élément tétraédrique à 10 nœuds

Pour les applications numériques, un élément tétraédrique à 10 nœuds est choisi car

- c'est un élément quadratique à base triangulaire qui permet d'approximer n'importe quelle géométrie complexe. Sur ce point, cet élément est supérieur à un élément parallélépipédique [142];
- c'est un élément fini standard largement utilisé chez les industriels, dont la Snecma.

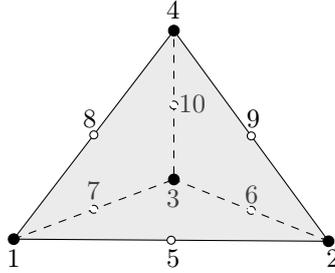


FIG. 2.11 – Élément fini tétraédrique à 10 nœuds (TET10).

Les coordonnées d'un point situé à l'intérieur de l'élément, dans la base locale cartésienne  $(r)$ , sont notées  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . Cependant, si ce choix est naturel pour un élément rectangulaire, il n'est pas adapté au cas d'un élément tétraédrique. Pour cette raison, un nouvel ensemble de coordonnées, notées  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  et  $L_4$ , est défini par les relations linéaires suivantes

$$\begin{cases} X = L_1 X_1 + L_2 X_2 + L_3 X_3 + L_4 X_4, \\ Y = L_1 Y_1 + L_2 Y_2 + L_3 Y_3 + L_4 Y_4, \\ Z = L_1 Z_1 + L_2 Z_2 + L_3 Z_3 + L_4 Z_4, \\ 1 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4. \end{cases} \quad (2.40)$$

La résolution des équations (2.40) donne

$$L_i = \frac{a_i + b_i X + c_i Y + d_i Z}{6\Omega_e}, \quad i \in [1, \dots, 4], \quad (2.41)$$

avec, pour  $i = 1$ ,

$$\begin{aligned} a_1 &= \det \begin{vmatrix} X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 \end{vmatrix}, & b_1 &= -\det \begin{vmatrix} 1 & Y_2 & Z_2 \\ 1 & Y_3 & Z_3 \\ 1 & Y_4 & Z_4 \end{vmatrix}, \\ c_1 &= -\det \begin{vmatrix} X_2 & 1 & Z_2 \\ X_3 & 1 & Z_3 \\ X_4 & 1 & Z_4 \end{vmatrix}, & d_1 &= -\det \begin{vmatrix} X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \\ X_4 & Y_4 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Fonctions de forme des nœuds 1 à 4 de sommet	
$N_1 = (2L_1 - 1)L_1$	$N_2 = (2L_2 - 1)L_2$
$N_3 = (2L_3 - 1)L_3$	$N_4 = (2L_4 - 1)L_4$
Fonctions de forme des nœuds 5 à 10 d'arête	
$N_5 = 4L_1L_2$	$N_6 = 4L_2L_3$
$N_7 = 4L_1L_3$	$N_8 = 4L_1L_4$
$N_9 = 4L_2L_4$	$N_{10} = 4L_3L_4$

TAB. 2.2 – Fonctions de forme des éléments tétraédriques à 10 nœuds.

Les autres constantes pour  $i = 2, 3, 4$ , sont obtenues en faisant une permutation circulaire des indices. La constante  $\Omega_e$  représente quant à elle le volume du tétraèdre.

$$6\Omega_e = \det \begin{vmatrix} 1 & X_1 & Y_1 & Z_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 & Z_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 & Z_3 \\ 1 & X_4 & Y_4 & Z_4 \end{vmatrix}. \quad (2.43)$$

Les coordonnées  $L_1$  à  $L_4$  varient linéairement en fonction des coordonnées cartésiennes de 1 à 0. Au nœud 1, par exemple,  $L_1 = 1$  et  $L_2 = L_3 = L_4 = 0$ , etc. Le calcul des fonctions de forme de cet élément quadratique se fait classiquement *via* des polynômes de Lagrange [142].

Le déplacement  $\mathbf{U}_i$  d'un nœud  $i \in [1, \dots, 10]$ , est défini par 3 composantes  $U_i$ ,  $V_i$  et  $W_i$  dans les directions  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . Le vecteur déplacement  $\mathbf{U}_e$  de l'élément  $e$ , de taille  $30 \times 1$ , est issu de l'assemblage des déplacements nodaux.

$$\mathbf{U}_i = \begin{pmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_{10} \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Ainsi, le déplacement d'un point quelconque dans l'élément s'écrit

$$\mathbf{u} = (\mathbf{I}N_1 \cdots \mathbf{I}N_{10}) \mathbf{U}_e = \mathbf{N} \mathbf{U}_e, \quad (2.45)$$

où  $\mathbf{I}$  est une matrice identité  $3 \times 3$  et  $\mathbf{N}$  la matrice des fonctions de forme, de taille  $3 \times 30$ .

La dernière étape avant le calcul proprement dit de  $\mathbf{K}_c^e$ , consiste à écrire explicitement la matrice du gradient discrétisé  $\mathbf{B}$ . De part les notations introduites précédemment, l'expression des déformations, en notation de Voigt, devient  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{N} \mathbf{U}_e = (\mathbf{B}_1 \cdots \mathbf{B}_{10}) \mathbf{U}_e$  avec

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} & \frac{\partial N_i}{\partial X} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Z} & \frac{\partial N_i}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial X} \end{pmatrix}, \quad i \in [1, \dots, 10]. \quad (2.46)$$

Les expressions des dérivées partielles de chacune des fonctions de forme  $N_i$  par rapport à  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial X} & \frac{\partial L_2}{\partial X} & \frac{\partial L_3}{\partial X} & \frac{\partial L_4}{\partial X} \\ \frac{\partial L_1}{\partial Y} & \frac{\partial L_2}{\partial Y} & \frac{\partial L_3}{\partial Y} & \frac{\partial L_4}{\partial Y} \\ \frac{\partial L_1}{\partial Z} & \frac{\partial L_2}{\partial Z} & \frac{\partial L_3}{\partial Z} & \frac{\partial L_4}{\partial Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Les dérivées partielles par rapport aux coordonnées  $L_i$  sont calculées directement à partir des relations du tableau 2.2.

Il ne reste plus alors qu'à réaliser une intégration numérique de l'expression (2.39) pour formuler une approximation de  $\mathbf{K}_c^e$ . Celle-ci est obtenue avec 4 points de Gauss dont les coordonnées sont fournies dans le tableau 2.3. L'expression finale de la matrice de couplage élémentaire, telle qu'elle a été implémentée pour l'élément fini TET10 est

$$\mathbf{K}_c^e = \frac{\Omega_e}{4h^{(p)}} (\mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_c + \mathbf{B}_d)^T \mathbf{M} \mathbf{e}, \quad (2.48)$$

où  $\mathbf{B}_a, \dots, \mathbf{B}_d$  sont les gradients discrétisés évalués aux différents points de Gauss.

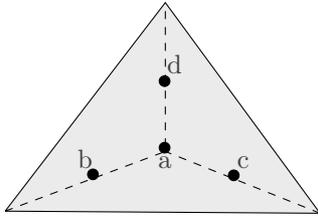


FIG. 2.12 – Position des points de Gauss.

Pour construire la  $p$ -ième colonne de la matrice de couplage globale  $\mathbf{K}_c$ , il faut répéter l'ensemble des opérations décrit dans cette sous section pour tous les éléments finis de la pastille  $p$ . Le maillage des pastilles est généré automatiquement en pilotant le logiciel *Patran* à l'aide de routines *Matlab*. Une fois les tables de connectivité et de coordonnées des nœuds des pastilles exportées, l'ensemble des opérations de construction de  $\mathbf{K}_c$  est fait sous *Matlab*. Les temps de calcul sont courts puisque la plupart des composantes de  $\mathbf{K}_c$  sont nulles sauf pour les degrés de liberté correspondant à un nœud de la pastille.

Points	Coordonnées	Poids
	$L_1$ $L_2$ $L_3$ $L_4$	
a	$\alpha$ $\beta$ $\beta$ $\beta$	0.25
b	$\beta$ $\alpha$ $\beta$ $\beta$	0.25
c	$\beta$ $\beta$ $\alpha$ $\beta$	0.25
d	$\beta$ $\beta$ $\beta$ $\alpha$	0.25

TAB. 2.3 – Formule d'intégration pour le tétraèdre à 10 nœuds.  $\alpha = 0.58541020$ ,  $\beta = 0.13819660$ .

## 2.3 Réduction modale et coefficients de couplage

Dans cette section, un modèle réduit du problème discrétisé est introduit en projetant les inconnues de déplacement mécanique sur la base des modes en court-circuit. Différents montages de pastilles existent et n'ont pas les mêmes coefficients de couplage modaux. Quatre cas sont traités : pastilles indépendantes, connectées en parallèle, en série et deux ensembles de pastilles connectées en parallèle et reliés en série.

### 2.3.1 Modes propres en court-circuit

Les modes propres du système en court-circuit, c'est-à-dire où toutes les pastilles sont court-circuitées séparément, sont les solutions de l'équation (2.33). Les pulsations propres  $\omega_i$  et modes propres  $\Phi_i$  sont les  $N$  solutions du problème

$$\mathbf{K}_m \Phi - \omega^2 \mathbf{M}_m \Phi = \mathbf{0}, \quad (2.49)$$

qui ne dépendent que des propriétés élastodynamiques de  $\Omega_s$ . Ces modes vérifient les propriétés d'orthogonalité suivantes

$$\forall (i, j), \quad \Phi_i^T \mathbf{M}_m \Phi_j = \delta_{ij}, \quad \Phi_i^T \mathbf{K}_m \Phi_j = \omega_i^2 \delta_{ij}. \quad (2.50)$$

avec les  $\Phi_j$  normalisés par rapport à la matrice de masse

$$\forall i, \quad \Phi_i^T \mathbf{M}_m \Phi_i = 1. \quad (2.51)$$

### 2.3.2 Projection modale du problème général

Les  $N$  vecteurs propres en court-circuit formant une base de  $\mathbb{R}^N$ , le vecteur déplacement  $\mathbf{U}$  peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{i=1}^N \Phi_i q_i(t) = \Phi \mathbf{q}, \quad (2.52)$$

avec  $\Phi = (\Phi_1 \cdots \Phi_N)$ , de taille  $N \times N$  et  $\mathbf{q} = (q_1 \cdots q_N)^T$ , de taille  $N \times 1$ . Le principal avantage des modes en court-circuit est qu'ils sont obtenus en résolvant un problème purement élastique (Eq. (2.49)) alors que les modes en circuit ouvert dépendent également des propriétés piézoélectriques du système (Eq. (2.34)). En insérant cette équation dans le système (2.31), en prémultipliant la partie mécanique du système par  $\Phi^T$  et en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes (2.50), il vient

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{V}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{\Omega}^2 & \Phi^T \mathbf{K}_c \\ -(\Phi^T \mathbf{K}_c)^T & \mathbf{K}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^T \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

$\mathbf{I}$  est la matrice identité de taille  $N \times N$ , et  $\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\omega_1 \cdots \omega_N)$ , la matrice diagonale des pulsations propres en court-circuit. Afin que la formulation modale soit générale, une matrice d'amortissement  $\mathbf{C} = \text{diag}(2\xi_1\omega_1 \cdots 2\xi_N\omega_N)$  est prise en compte, avec  $\xi_i$  l'amortissement associé au  $i$ -ième mode en court-circuit. Ces deux équations matricielles peuvent se réécrire sous la forme d'un ensemble d'oscillateurs linéairement couplés en séparant les équations de chaque élément piézoélectrique,

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i + \sum_{p=1}^P \chi_i^{(p)} V^{(p)} = F_i, \quad \forall i \in [1, N], \quad (2.54a)$$

$$C^{(p)} V^{(p)} - Q^{(p)} - \sum_{j=1}^N \chi_j^{(p)} q_j = 0, \quad \forall p \in [1, P], \quad (2.54b)$$

où  $\chi_i^{(p)}$  est le coefficient de couplage du  $i$ -ième mode avec la  $p$ -ième pastille piézoélectrique, défini par

$$\begin{pmatrix} \chi_i^{(1)} & \cdots & \chi_i^{(P)} \end{pmatrix} = \Phi_i^T \mathbf{K}_c, \quad \forall i \in [1, N]. \quad (2.55)$$

$F_i(t) = \Phi_i^T \mathbf{F}(t)$  est le forçage externe sur le  $i$ -ième mode. Les unités des différentes quantités sont :  $\text{kg}^{1/2} \cdot \text{m}$  pour  $q_i$ ,  $\text{kg}^{-1/2} \cdot \text{N}$  pour  $F_i$ ,  $\chi_i^{(p)}$  est en  $\text{kg}^{-1/2} \cdot \text{N} \cdot \text{V}^{-1}$  et l'unité de  $Q^{(p)}$  est le Coulomb.

La formulation élément finis (Eq. (2.31)) peut ainsi être remplacée par la formulation modale (Eq. (2.53) ou (2.54)) dont les inconnues sont les  $N$  coordonnées modales  $q_i$  et les  $P$  paires différence de potentiel/charge  $(V^{(p)}, Q^{(p)})$  associées à chaque élément. En pratique l'intérêt de ce type de formulation est de tronquer la base modale à quelques modes, par exemple à  $\tilde{N} \ll N$ . Les données nécessaires pour obtenir ce modèle sont :

- les  $\tilde{N}$  modes propres en court-circuit  $(\omega_i, \Phi_i)_{i \in [1, \tilde{N}]}$ , normalisés par rapport à la matrice masse (Eq. 2.51) ;
- les forçages modaux  $F_i$  ;
- les  $\tilde{N} \times P$  coefficients de couplage  $(\chi_i^{(p)})_{i \in [1, \tilde{N}], p \in [1, P]}$ .
- les  $P$  capacités des éléments piézoélectriques  $C^{(p)}$ , données par l'équation (2.29).

L'intérêt principal de la méthode proposée est que les calculs précédents ne nécessitent qu'une seule analyse modale du problème *elastodynamique*. Il s'agit donc :

- d'assembler les matrices liées au problème (2.31), soit  $\mathbf{M}_m$ ,  $\mathbf{K}_m$  et  $\mathbf{K}_c$  ;
- de calculer les  $\tilde{N}$  pulsations propres  $\omega_i$  et déformées modales  $\Phi_i$ , par résolution du problème (2.49). C'est un cas classique faisant intervenir uniquement  $\mathbf{M}_m$  et  $\mathbf{K}_m$  ;
- d'appliquer la formule (2.55) pour obtenir  $\chi_i^{(p)}$ . Au final, la matrice  $\mathbf{K}_c$  est la seule matrice dont l'assemblage requiert la prise en compte des caractéristiques piézoélectriques.

### 2.3.3 Association de plusieurs pastilles piézoélectriques

L'obtention du modèle réduit (2.53) du problème discrétisé (2.31) est une étape nécessaire pour le calcul des coefficients de couplage. Cependant, lorsque  $P$  pastilles sont connectées à une impédance  $Z$ , les grandeurs utiles sont la charge totale contenue dans le circuit, notée  $Q$  et la tension aux bornes de  $Z$ , notée  $V$ , et non plus le vecteur  $\mathbf{Q}$  des charges contenues dans chaque électrode et le vecteur  $\mathbf{V}$  des différences de potentiel. Une réécriture de (2.53) est donc nécessaire pour passer de  $(\mathbf{Q}, \mathbf{V})$  à  $(Q, V)$ .

Par ailleurs, il est essentiel que l'ensemble des pastilles piézoélectriques, du point de vue électrique, soient comparables à un réseau de capacités indépendantes, ceci afin de respecter l'hypothèse d'un champ de déplacement électrique ( $D_i = \epsilon_{ik} E_k$ ) négligeable dans  $\Omega_s$ , par rapport à sa valeur dans  $\Omega^{(p)}$  (section 2.2.1).

Pour une structure hôte conductrice, il faut que toutes les électrodes en contact avec  $\Omega_s$  soient au même potentiel que  $\Omega_s$ , afin d'éviter les effets de capacité parasite du film de colle<sup>5</sup>. De ce fait, il n'existe que 2 manières correctes de câbler les pastilles piézoélectriques entre elles :

- toutes les pastilles sont câblées en parallèle et l'une des 2 bornes du réseau est au potentiel de  $\Omega_s$  ;
- toutes les électrodes collées sont reliées électriquement à  $\Omega_s$  et l'ensemble des électrodes supérieures est séparé en 2 groupes connectés, respectivement, à l'une et l'autre des 2 bornes du réseau. Ce montage correspond à la mise en série de deux ensembles de pastilles connectées en parallèle.

---

<sup>5</sup>Si le film de colle est isolant, la différence de potentiel entre la structure et l'électrode collée va engendrer un champ électrique important dans la couche d'adhésif et celle-ci constituerait un condensateur de capacité non négligeable. Par conséquent, une partie de l'énergie électrique serait stockée dans cette capacité parasite et ne servirait plus au contrôle de la structure.

Pour une structure hôte diélectrique, ne pouvant amener de charges libres, seul le cas où des pastilles proches les unes des autres et dont les électrodes en contact avec  $\Omega_s$  ont des potentiels très différents peut créer un champ électrique important dans  $\Omega_s$  et donc un  $D_i$  non négligeable. Il s'en suit que la seule contrainte est d'avoir ces pastilles piézoélectriques assez éloignées les unes des autres, selon la valeur de  $\epsilon_{ik}$ , mais cela n'entraîne aucune restriction sur le câblage.

(a) Cas d'une connexion en parallèle

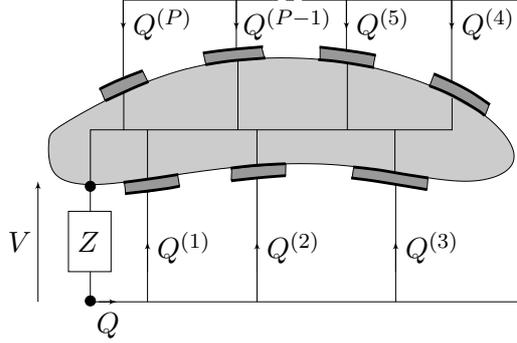


FIG. 2.13 –  $P$  pastilles piézoélectriques connectées en parallèle à une impédance  $Z$ .

Pour une connexion de  $P$  pastilles en parallèle, les relations suivantes sur les  $V^{(p)}$  et les  $Q^{(p)}$  sont vérifiées

$$\begin{cases} \forall p \in [1, P], & V^{(p)} = V, \\ \sum_{p=1}^P Q^{(p)} = Q, \end{cases} \quad (2.56)$$

soit  $\mathbf{V} = \mathbf{J}V$  et  $\mathbf{J}^T \mathbf{Q} = Q$  avec  $\mathbf{J}_{P \times 1} = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$  le vecteur unité. Par conséquent, en sommant les  $P$  équations électriques de (2.53),

$$-\mathbf{J}^T (\Phi^T \mathbf{K}_c)^T \mathbf{q} + \mathbf{J}^T \mathbf{K}_e \mathbf{J} V = \mathbf{J}^T \mathbf{Q} = Q. \quad (2.57)$$

La matrice des capacités étant diagonale, le terme  $\mathbf{J}^T \mathbf{K}_e \mathbf{J}$  correspond à la trace de  $\mathbf{K}_e$ , soit à la capacité équivalente d'un circuit composé de  $P$  pastilles connectées en parallèle,

$$C^{\text{eq}} = \text{Tr}(\mathbf{K}_e) = \sum_{p=1}^P C^{(p)}. \quad (2.58)$$

De manière identique, en remplaçant  $\mathbf{V}$  par  $\mathbf{J}V$  dans les  $N$  équations mécaniques de (2.53), puis en utilisant la relation (2.57) comme expression de la tension  $V$ , il vient

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega^2 + \frac{1}{C^{\text{eq}}} \Phi^T \mathbf{K}_c \mathbf{J} \mathbf{J}^T (\Phi^T \mathbf{K}_c)^T & \frac{1}{C^{\text{eq}}} \Phi^T \mathbf{K}_c \mathbf{J} \\ \frac{1}{C^{\text{eq}}} (\Phi^T \mathbf{K}_c \mathbf{J})^T & \frac{1}{C^{\text{eq}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^T \mathbf{F} \\ V \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Par la suite, il est aisé, avec ce formalisme, de connecter une impédance  $Z$  aux bornes du circuit. Si le cas du shunt résonant ( $V = -R\dot{Q} - L\ddot{Q}$ ) est considéré, le système précédent peut se reformuler uniquement en fonction du vecteur des coordonnées modales  $\mathbf{q}$  et de la charge  $Q$ . Par ailleurs, comme le produit  $\mathbf{J} \mathbf{J}^T$  est égal à la matrice unité de dimension  $P \times P$ , il est

noté **1**. Les coefficients de couplage  $\chi_i^{(p)}$ , introduits lors de la projection modale, sont quant à eux rassemblés dans la matrice  $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_c$ .

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega^2 + \frac{1}{C^{\text{eq}}} \boldsymbol{\chi} \mathbf{1} \boldsymbol{\chi}^T & \frac{1}{C^{\text{eq}}} \boldsymbol{\chi} \mathbf{J} \\ \frac{1}{C^{\text{eq}}} (\boldsymbol{\chi} \mathbf{J})^T & \frac{1}{C^{\text{eq}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Le cas du shunt résistif ( $V = -R\dot{Q}$ ) se traite de manière identique. Il est à noter que l'information concernant la direction de polarisation des pastilles est contenue dans la matrice de couplage électromécanique et n'intervient pas directement dans la mise en équation du problème avec les pastilles connectées.

**(b) Cas d'une connexion en série**

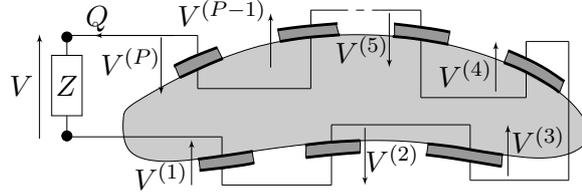


FIG. 2.14 –  $P$  pastilles piézoélectriques connectées en série à une impédance  $Z$ .

Pour  $P > 2$ , ce type de connexion n'est possible que pour une structure hôte diélectrique. Lorsque les  $P$  pastilles sont reliées en série, les relations entre les  $V^{(p)}$  et les  $Q^{(p)}$  deviennent

$$\begin{cases} \forall p \in [1, P], & Q^{(p)} = Q, \\ \sum_{p=1}^P V^{(p)} = V, \end{cases} \quad (2.61)$$

soit  $\mathbf{J}^T \mathbf{V} = V$  et  $\mathbf{Q} = \mathbf{J}Q$ . Là encore, l'équation électrique de (2.53) permet d'obtenir une relation entre  $\mathbf{V}$  et  $Q$ ,

$$\mathbf{V} = \mathbf{K}_e^{-1} (\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_c)^T \mathbf{q} + \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{J}Q, \quad (2.62)$$

qui est directement injectée dans l'équation mécanique. Les  $P$  équations de (2.62) sont ensuite sommées pour faire apparaître la tension  $V$ . Tout calcul fait, la relation (2.53) s'écrit, dans le cas d'une connexion en série,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega^2 + \boldsymbol{\chi} \mathbf{K}_e^{-1} \boldsymbol{\chi}^T & \boldsymbol{\chi} \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{J} \\ (\boldsymbol{\chi} \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{J})^T & \frac{1}{C^{\text{eq}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{F} \\ V \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

avec  $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_c$  et  $C^{\text{eq}}$  la capacité équivalente d'un circuit composé de  $P$  pastilles connectées en série.

$$\frac{1}{C^{\text{eq}}} = \mathbf{J}^T \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{J} = \sum_{p=1}^P \frac{1}{C^{(p)}}. \quad (2.64)$$

De la même façon que dans le cas parallèle, si un shunt résonant ou résistif est choisi, le système se ramène à  $N + 1$  équations où les degrés de liberté mécanique  $\mathbf{q}$  sont linéairement couplés à la charge électrique totale  $Q$  contenue dans le circuit.

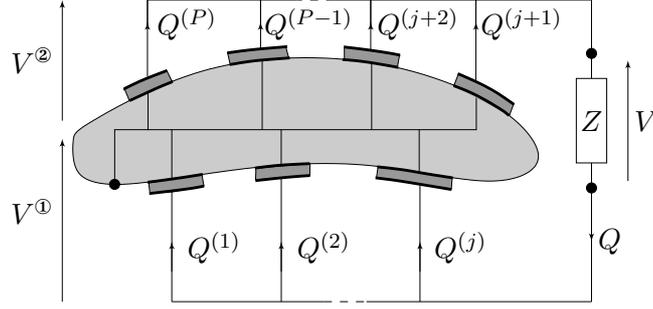


FIG. 2.15 – Mise en série d'un ensemble de  $j$  pastilles connectées en parallèle avec un ensemble de  $P - j$  pastilles également connectées en parallèle.

(c) Cas d'une mise en série de deux ensembles de pastilles connectées en parallèle

La seconde manière de câbler des pastilles piézoélectriques collées sur une structure conductrice impose les relations suivantes sur les  $V^{(p)}$  et les  $Q^{(P)}$

$$\begin{cases} \forall p \in [1, j], & V^{(p)} = V^{\textcircled{1}}, \\ \forall p \in [j+1, P], & V^{(p)} = V^{\textcircled{2}}, \\ \sum_{p=1}^j Q^{(p)} = \sum_{p=j+1}^P Q^{(p)} = Q, \end{cases} \quad (2.65)$$

soit

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{\textcircled{1}} \\ \mathbf{V}^{\textcircled{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{\textcircled{1}} \mathbf{V}^{\textcircled{1}} \\ \mathbf{J}^{\textcircled{2}} \mathbf{V}^{\textcircled{2}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{\textcircled{1}} \\ \mathbf{Q}^{\textcircled{2}} \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} V^{\textcircled{1}} + V^{\textcircled{2}} = V, \\ (\mathbf{J}^{\textcircled{1}})^{\text{T}} \mathbf{Q}^{\textcircled{1}} = Q, \\ (\mathbf{J}^{\textcircled{2}})^{\text{T}} \mathbf{Q}^{\textcircled{2}} = Q, \end{cases} \quad (2.66)$$

avec  $\mathbf{J}_{j \times 1}^{\textcircled{1}} = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^{\text{T}}$  et  $\mathbf{J}_{P-j \times 1}^{\textcircled{2}} = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^{\text{T}}$ . Il est également nécessaire de séparer la matrice des coefficients de couplage  $\boldsymbol{\chi}$  en deux parties

$$\boldsymbol{\chi} = \underbrace{\begin{pmatrix} \chi_1^{(1)} & \dots & \chi_1^{(j)} & \chi_1^{(j+1)} & \dots & \chi_1^{(P)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_N^{(1)} & \dots & \chi_N^{(j)} & \chi_N^{(j+1)} & \dots & \chi_N^{(P)} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\chi}^{\textcircled{1}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \chi_1^{(j+1)} & \dots & \chi_1^{(P)} \\ \vdots & & \vdots \\ \chi_N^{(j+1)} & \dots & \chi_N^{(P)} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\chi}^{\textcircled{2}}}. \quad (2.67)$$

Ainsi, la matrice de raideur de (2.53) peut se réécrire

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}^2 & \boldsymbol{\Phi}^{\text{T}} \mathbf{K}_c \\ -(\boldsymbol{\Phi}^{\text{T}} \mathbf{K}_c)^{\text{T}} & \mathbf{K}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}^2 & \boldsymbol{\chi}^{\textcircled{1}} & \boldsymbol{\chi}^{\textcircled{2}} \\ -(\boldsymbol{\chi}^{\textcircled{1}})^{\text{T}} & \mathbf{K}_e^{\textcircled{1}} & \mathbf{0} \\ -(\boldsymbol{\chi}^{\textcircled{2}})^{\text{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_e^{\textcircled{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{V}^{\textcircled{1}} \\ \mathbf{V}^{\textcircled{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

Les expressions de  $V^{\textcircled{1}}$  et  $V^{\textcircled{2}}$  en fonction de la charge s'obtiennent en sommant séparément les équations électriques de (2.53),

$$\begin{cases} -(\mathbf{J}^{\textcircled{1}})^{\text{T}} (\boldsymbol{\chi}^{\textcircled{1}})^{\text{T}} \mathbf{q} + (\mathbf{J}^{\textcircled{1}})^{\text{T}} \mathbf{K}_e^{\textcircled{1}} \mathbf{J}^{\textcircled{1}} V^{\textcircled{1}} = Q, \\ -(\mathbf{J}^{\textcircled{2}})^{\text{T}} (\boldsymbol{\chi}^{\textcircled{2}})^{\text{T}} \mathbf{q} + (\mathbf{J}^{\textcircled{2}})^{\text{T}} \mathbf{K}_e^{\textcircled{2}} \mathbf{J}^{\textcircled{2}} V^{\textcircled{2}} = Q. \end{cases} \quad (2.69)$$

En remplaçant, dans l'équation mécanique,  $V^{\textcircled{1}}$  et  $V^{\textcircled{2}}$  par leur expression en fonction de  $\mathbf{q}$  et  $Q$  et en sommant les deux équations (2.69) afin de faire apparaître le tension  $V$  aux bornes du circuit, le problème se met sous la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega^2 + \frac{1}{C^{\textcircled{1}}} \boldsymbol{\chi}^{\textcircled{1}} \mathbf{1}^{\textcircled{1}} (\boldsymbol{\chi}^{\textcircled{1}})^{\text{T}} + \frac{1}{C^{\textcircled{2}}} \boldsymbol{\chi}^{\textcircled{2}} \mathbf{1}^{\textcircled{2}} (\boldsymbol{\chi}^{\textcircled{2}})^{\text{T}} & \frac{1}{C^{\textcircled{1}}} \boldsymbol{\chi}^{\textcircled{1}} \mathbf{J}^{\textcircled{1}} + \frac{1}{C^{\textcircled{2}}} \boldsymbol{\chi}^{\textcircled{2}} \mathbf{J}^{\textcircled{2}} \\ \frac{1}{C^{\textcircled{1}}} (\boldsymbol{\chi}^{\textcircled{1}} \mathbf{J}^{\textcircled{1}})^{\text{T}} + \frac{1}{C^{\textcircled{2}}} (\boldsymbol{\chi}^{\textcircled{2}} \mathbf{J}^{\textcircled{2}})^{\text{T}} & \frac{1}{C^{\text{eq}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^{\text{T}} \mathbf{F} \\ V \end{pmatrix}, \quad (2.70)$$

où  $\mathbf{1}^{\textcircled{1}} = \mathbf{J}^{\textcircled{1}} (\mathbf{J}^{\textcircled{1}})^{\text{T}}$  et  $\mathbf{1}^{\textcircled{2}} = \mathbf{J}^{\textcircled{2}} (\mathbf{J}^{\textcircled{2}})^{\text{T}}$  sont deux matrices unités de taille respective  $j \times j$  et  $(P - j) \times (P - j)$ .  $C^{\textcircled{1}}$  et  $C^{\textcircled{2}}$  représentent les capacités équivalentes des 2 parties du réseau câblées en parallèle et  $C^{\text{eq}}$  la capacité équivalente de l'ensemble du circuit. Elles sont définies par

$$C^{\textcircled{1}} = \sum_{p=1}^j C^{(p)}, \quad C^{\textcircled{2}} = \sum_{p=j+1}^P C^{(p)}, \quad \frac{1}{C^{\text{eq}}} = \frac{1}{C^{\textcircled{1}}} + \frac{1}{C^{\textcircled{2}}}. \quad (2.71)$$

Une fois connue la relation entre  $V$  et  $Q$  imposée par l'impédance  $Z$ , les seules variables du problème sont les coordonnées modales  $\mathbf{q}$  et la charge  $Q$ .

### 2.3.4 Coefficient de couplage

Cette section a pour but de montrer que le coefficient  $\chi_i^{(p)}$  introduit lors de la projection modale du problème général est directement lié au facteur de couplage effectif. Ce dernier, sans dimension, caractérise l'échange d'énergie entre les éléments piézoélectriques et la structure mécanique. Selon la norme [4], il est défini pour le  $i$ -ième mode par

$$k_{\text{eff},i}^2 = \frac{\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\omega_i^2}, \quad (2.72)$$

où  $\omega_i$  et  $\hat{\omega}_i$  sont les pulsations propres en court-circuit et circuit ouvert du  $i$ -ième mode.

L'expression de  $\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \text{diag}(\hat{\omega}_1 \cdots \hat{\omega}_N)$  peut être soit approchée, en tronquant les équations mécaniques de (2.60) (cas parallèle) (2.63) (cas série) ou (2.70) (cas série de 2 ensembles de pastilles en parallèle) uniquement à la  $i$ -ième ligne, c'est-à-dire  $q_j(t) \equiv 0 \quad \forall j \neq i$ , soit exacte, en diagonalisant de nouveau le système lorsqu'il est en circuit ouvert. La première méthode est valide lorsque les modes sont bien découplés, dans ce cas, la troncature des équations mécaniques au seul mode d'intérêt est correcte et n'introduit qu'une erreur minime dans le calcul des facteurs de couplage effectif. La seconde méthode est toujours valide, que la densité modale soit importante ou non, mais ne permet plus d'avoir une expression explicite du facteur de couplage effectif.

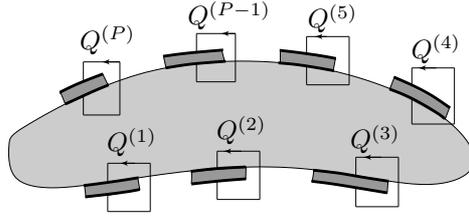
#### (a) Cas des pastilles indépendantes (sans circuit)

Quand toutes les pastilles sont en circuit ouvert, les  $P$  charges sont nulles, soit  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ . Dès lors, l'équation électrique du système (2.53) permet d'obtenir l'expression du vecteur des différences de potentiel

$$\mathbf{V} = \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^{\text{T}} \Phi \mathbf{q}. \quad (2.73)$$

En injectant (2.73) dans l'équation mécanique de (2.53),

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + (\Omega^2 + \boldsymbol{\chi} \mathbf{K}_e^{-1} \boldsymbol{\chi}^{\text{T}}) \mathbf{q} = \Phi^{\text{T}} \mathbf{F}, \quad (2.74)$$


 FIG. 2.16 –  $P$  pastilles piézoélectriques indépendantes en court-circuit.

avec  $\chi = \Phi^T \mathbf{K}_c$  la matrice des coefficients de couplage. Puisque le système a été projeté sur les modes en court-circuit, la matrice de raideur modale en circuit ouvert n'est pas diagonale<sup>6</sup>. Afin d'obtenir une expression de  $\hat{\Omega}$ , la première méthode consiste à négliger les termes hors diagonale, ce qui revient à découpler les équations mécaniques entre elles ou, ce qui est identique, à faire une troncature modale. Dès lors, il est possible d'écrire

$$\hat{\Omega}^2 \simeq \Omega^2 + \chi \mathbf{K}_e^{-1} \chi^T, \quad (2.75)$$

soit

$$\hat{\Omega}^2 \simeq \begin{pmatrix} \omega_1^2 + \sum_{p=1}^P \frac{(\chi_1^{(p)})^2}{C^{(p)}} & \sum_{p=1}^P \frac{\chi_1^{(p)} \chi_2^{(p)}}{C^{(p)}} & \cdots & \sum_{p=1}^P \frac{\chi_1^{(p)} \chi_N^{(p)}}{C^{(p)}} \\ \sum_{p=1}^P \frac{\chi_2^{(p)} \chi_1^{(p)}}{C^{(p)}} & \omega_2^2 + \sum_{p=1}^P \frac{(\chi_2^{(p)})^2}{C^{(p)}} & \cdots & \sum_{p=1}^P \frac{\chi_2^{(p)} \chi_N^{(p)}}{C^{(p)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{p=1}^P \frac{\chi_N^{(p)} \chi_1^{(p)}}{C^{(p)}} & \cdots & \sum_{p=1}^P \frac{\chi_N^{(p)} \chi_{N-1}^{(p)}}{C^{(p)}} & \omega_N^2 + \sum_{p=1}^P \frac{(\chi_N^{(p)})^2}{C^{(p)}} \end{pmatrix}, \quad (2.76)$$

$$\text{où } \forall i \in [1, N], \forall j \in [1, N] \setminus \{i\}, \quad \sum_{p=1}^P \frac{\chi_i^{(p)} \chi_j^{(p)}}{C^{(p)}} \simeq 0.$$

Sous réserve que la troncature modale soit valide, l'équation (2.74), qui correspond à l'équation mécanique de (2.53) en circuit ouvert, peut s'écrire sous forme d'oscillateur de la manière suivante,

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \left( \omega_i^2 + \sum_{p=1}^P \frac{(\chi_i^{(p)})^2}{C^{(p)}} \right) q_i = F_i, \quad (2.77)$$

soit encore

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 (1 + k_i^2) q_i = F_i, \quad (2.78)$$

avec

$$k_i = \sqrt{\sum_{p=1}^P (k_i^{(p)})^2}, \quad k_i^{(p)} = \frac{\chi_i^{(p)}}{\sqrt{C^{(p)}} \omega_i}. \quad (2.79)$$

$k_i$  est le facteur de couplage modal entre le  $i$ -ième mode et les  $P$  pastilles indépendantes.  $k_i^{(p)}$  est quant à lui le facteur de couplage modal entre le  $i$ -ième mode et la  $p$ -ième pastille piézoélectrique.

<sup>6</sup>Le produit  $\chi \mathbf{K}_e^{-1} \chi^T$  est une matrice pleine symétrique de taille  $N \times N$ .

L'approximation de la pulsation en circuit ouvert est alors donnée par  $\hat{\omega}_i^2 \simeq \omega_i^2 (1 + k_i^2)$ . Ainsi, le facteur de couplage effectif du  $i$ -ième mode, défini par (2.72), est directement approché par  $k_i$

$$k_{\text{eff},i} \simeq k_i. \quad (2.80)$$

La seconde méthode consiste à diagonaliser le système (2.74), c'est-à-dire à calculer les pulsations propres  $\hat{\omega}_i$  et modes propres  $\hat{\Phi}_i$  solutions du problème

$$(\Omega^2 + \chi \mathbf{K}_e^{-1} \chi^T) \hat{\Phi} - \hat{\omega}^2 \hat{\Phi} = \mathbf{0}, \quad (2.81)$$

puis à en déduire  $k_{\text{eff},i}$ . Si d'un point de vue numérique, cela ne pose pas de problème, il n'est en revanche plus possible d'avoir une expression explicite des  $\hat{\omega}_i$  et donc des  $k_{\text{eff},i}$ . Cette méthode est utile pour vérifier la validité de la troncature à un mode.

### (b) Cas d'une connexion en parallèle

Lorsque le circuit de la figure 2.13 est ouvert, la charge<sup>7</sup>  $Q$  s'annule et l'équation mécanique de (2.60) devient

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \left( \Omega^2 + \frac{1}{C^{\text{eq}}} \chi \mathbf{1} \chi^T \right) \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{F}. \quad (2.82)$$

Si les couplages modaux sont négligés, l'approximation de  $\hat{\Omega}^2$  s'écrit

$$\hat{\Omega}^2 \simeq \Omega^2 + \frac{\chi \mathbf{1} \chi^T}{C^{\text{eq}}}, \quad (2.83)$$

ou encore, en notant  $\chi_i^{\text{eq}} = \sum_{p=1}^P \chi_i^{(p)}$ ,

$$\hat{\Omega}^2 \simeq \begin{pmatrix} \omega_1^2 + \frac{(\chi_1^{\text{eq}})^2}{C^{\text{eq}}} & \frac{\chi_1^{\text{eq}} \chi_2^{\text{eq}}}{C^{\text{eq}}} & \dots & \frac{\chi_1^{\text{eq}} \chi_N^{\text{eq}}}{C^{\text{eq}}} \\ \frac{\chi_2^{\text{eq}} \chi_1^{\text{eq}}}{C^{\text{eq}}} & \omega_2^2 + \frac{(\chi_2^{\text{eq}})^2}{C^{\text{eq}}} & \dots & \frac{\chi_2^{\text{eq}} \chi_N^{\text{eq}}}{C^{\text{eq}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\chi_N^{\text{eq}} \chi_1^{\text{eq}}}{C^{\text{eq}}} & \dots & \frac{\chi_N^{\text{eq}} \chi_{N-1}^{\text{eq}}}{C^{\text{eq}}} & \omega_N^2 + \frac{(\chi_N^{\text{eq}})^2}{C^{\text{eq}}} \end{pmatrix}, \quad (2.84)$$

$$\text{où } \forall i \in [1, N], \forall j \in [1, N] \setminus \{i\}, \quad \frac{\chi_i^{\text{eq}} \chi_j^{\text{eq}}}{C^{\text{eq}}} \simeq 0.$$

Sous réserve que la troncature modale soit valide, l'équation (2.82), qui correspond à l'équation mécanique de (2.60) en circuit ouvert, peut s'écrire sous forme d'oscillateur de la manière suivante,

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \left( \omega_i^2 + \frac{(\sum_{p=1}^P \chi_i^{(p)})^2}{\sum_{p=1}^P C^{(p)}} \right) q_i = F_i, \quad (2.85)$$

soit encore

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 (1 + k_i^2) q_i = F_i, \quad (2.86)$$

avec

$$k_i = \sum_{p=1}^P k_i^{(p)}, \quad k_i^{(p)} = \frac{\chi_i^{(p)}}{\sqrt{\sum_{p=1}^P C^{(p)} \omega_i}}. \quad (2.87)$$

---

<sup>7</sup>Pour rappel, la charge électrique totale contenue dans le circuit est notée  $Q$  et ne doit pas être confondue avec les charges électriques  $Q^{(p)}$  contenues dans les électrodes des pastilles et rassemblées dans le vecteur  $\mathbf{Q}$ .

De manière analogue au cas des pastilles indépendantes, il est possible de définir un facteur de couplage modal entre le  $i$ -ième mode et les  $P$  pastilles connectées en parallèle, noté  $k_i$ , ainsi qu'un facteur de couplage modal entre le  $i$ -ième mode et la  $p$ -ième pastille piézoélectrique, note  $k_i^{(p)}$ .

L'approximation de la pulsation en circuit ouvert est également donnée par  $\hat{\omega}_i^2 \simeq \omega_i^2 (1 + k_i^2)$ . Là aussi, le facteur de couplage effectif du  $i$ -ième mode, défini par (2.72), est directement approché par  $k_i$

$$k_{\text{eff},i} \simeq k_i. \quad (2.88)$$

De même, il est possible d'obtenir les  $\hat{\omega}_i$  en résolvant le problème aux valeurs propres. Le calcul de  $k_{\text{eff},i}$  par cette méthode est un moyen rapide de vérifier la validité de la troncature modale.

$$\left( \Omega^2 + \frac{\chi \mathbf{1} \chi^T}{C^{\text{eq}}} \right) \hat{\Phi} - \hat{\omega}^2 \hat{\Phi} = \mathbf{0}. \quad (2.89)$$

### (c) Cas d'une connexion en série

Le calcul de  $k_i$  et l'approximation de  $k_{\text{eff},i}$  dans le cas d'une connexion de  $P$  pastilles en série se ramène à celui où elles sont indépendantes. En effet, lorsque le circuit de la figure 2.14 est ouvert, la charge  $Q$  s'annule et l'équation mécanique de (2.63) devient

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + (\Omega^2 + \chi \mathbf{K}_e^{-1} \chi^T) \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{F}, \quad (2.90)$$

Les équations (2.74) et (2.90) étant identiques, elles conduisent à la même approximation du facteur de couplage effectif pour le  $i$ -ième mode.

La différence entre  $P$  pastilles indépendantes et une connexion en série se trouve au niveau du couplage entre les coordonnées modales et la charge. Dans le cas des pastilles indépendantes, il s'exprime par  $\chi \mathbf{K}_e^{-1}$  et relie  $\mathbf{q}$  au vecteur  $\mathbf{Q}$ , alors que pour une connexion série, celui-ci s'écrit  $\chi \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{J}$  et lie  $\mathbf{q}$  à la charge globale  $Q$ .

### (d) Cas d'une mise en série de deux ensembles de pastilles connectées en parallèle

Lorsque le circuit de la figure 2.15 est ouvert, la charge  $Q$  s'annule et l'équation mécanique de (2.70) devient

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \left( \Omega^2 + \frac{\chi^{(1)} \mathbf{1}^{(1)} (\chi^{(1)})^T}{C^{(1)}} + \frac{\chi^{(2)} \mathbf{1}^{(2)} (\chi^{(2)})^T}{C^{(2)}} \right) \mathbf{q} + \left( \frac{\chi^{(1)} \mathbf{J}^{(1)}}{C^{(1)}} + \frac{\chi^{(2)} \mathbf{J}^{(2)}}{C^{(2)}} \right) Q = \Phi^T \mathbf{F}, \quad (2.91)$$

là encore, si les couplages modaux sont négligés, l'approximation de  $\hat{\Omega}$  s'écrit

$$\hat{\Omega}^2 \simeq \Omega^2 + \frac{\chi^{(1)} \mathbf{1}^{(1)} (\chi^{(1)})^T}{C^{(1)}} + \frac{\chi^{(2)} \mathbf{1}^{(2)} (\chi^{(2)})^T}{C^{(2)}}. \quad (2.92)$$

En suivant le même cheminement que précédemment, l'équation (2.91) restreinte au  $i$ -ième mode peut également s'écrire sous forme d'oscillateur

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \left( \omega_i^2 + \frac{\left( \sum_{p=1}^j \chi_i^{(p)} \right)^2}{\sum_{p=1}^j C^{(p)}} + \frac{\left( \sum_{p=j+1}^P \chi_i^{(p)} \right)^2}{\sum_{p=j+1}^P C^{(p)}} \right) q_i = F_i. \quad (2.93)$$

soit encore,

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 (1 + k_i^2) q_i = F_i, \quad (2.94)$$

où

$$k_i^2 = \left( \sum_{p=1}^j k_i^{(p)\textcircled{1}} \right)^2 + \left( \sum_{p=j+1}^P k_i^{(p)\textcircled{2}} \right)^2, \quad (2.95)$$

avec

$$k_i^{(p)\textcircled{1}} = \frac{\chi_i^{(p)}}{\sqrt{\sum_{p=1}^j C^{(p)}\omega_i}}, \quad k_i^{(p)\textcircled{2}} = \frac{\chi_i^{(p)}}{\sqrt{\sum_{p=j+1}^P C^{(p)}\omega_i}}. \quad (2.96)$$

$k_i$  est le facteur de couplage modal entre le  $i$ -ième mode et les deux ensembles reliés en série de  $j$  et  $P - j$  pastilles connectées en parallèle. Le couplage entre la  $p$ -ième pastille et le  $i$ -ième mode dépend du groupe auquel elle appartient ; il est noté  $k_i^{(p)\textcircled{1}}$  ou  $k_i^{(p)\textcircled{2}}$ .

L'approximation de la pulsation en circuit ouvert est toujours donnée par  $\hat{\omega}_i^2 \simeq \omega_i^2 (1 + k_i^2)$ . Au final, le facteur de couplage effectif du  $i$ -ième mode, défini par (2.72), est là aussi directement approché par  $k_i$ .

Le fait de pouvoir séparer les pastilles en deux groupes, noté  $\textcircled{1}$  et  $\textcircled{2}$ , permet d'améliorer sensiblement le coefficient de couplage par rapport au cas où toutes les pastilles sont en parallèle ou en série. Afin d'illustrer le propos, l'exemple suivant, dont les valeurs viennent d'un cas réel, est proposé.

Soit 15 pastilles identiques en tout point (géométrie et matériau). Les coefficients de couplage modal pour le premier mode de vibration de la structure sur laquelle elles sont collées sont donnés sur la figure 2.17(a). Ces pastilles, bien qu'identiques en théorie, présentent, comme dans la réalité, une certaine dispersion ( $\sigma = 0.02$  nF) de la valeur de leur capacité autour de la valeur moyenne (1.76 nF) fournie par le constructeur (Fig. 2.17(b)).

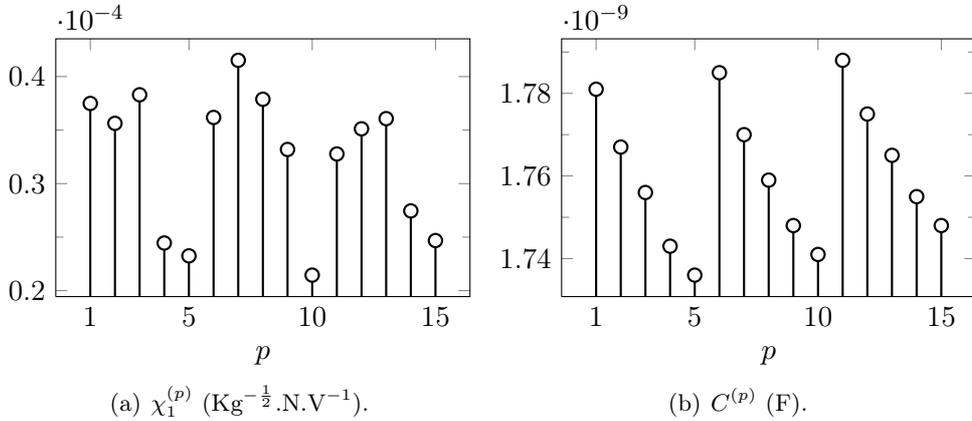


FIG. 2.17 – Coefficients de couplage et capacités des 15 pastilles.

Si toutes les pastilles sont connectées en parallèle ou en série, la question du câblage ne se pose pas et le facteur de couplage est  $k_1^{\text{para}} = 3.37\%$  (Eq. 2.87) ou  $k_1^{\text{série}} = 3.43\%$  (Eq. 2.79). Au contraire, dans le cas où il existe la possibilité de faire 2 groupes distincts, la problématique du choix des pastilles constituant chacun d'eux n'est pas anecdotique.

Sachant que les groupes  $\textcircled{1}$  et  $\textcircled{2}$  jouent le même rôle, faire un groupe, par exemple, de 3 pastilles appartenant à  $\textcircled{1}$  et 12 à  $\textcircled{2}$  ou l'inverse est identique. Par conséquent, seul le groupe  $\textcircled{1}$  est considéré<sup>8</sup> dans ce qui suit. De là, le nombre de pastilles étant  $P = 15$ , il est possible

<sup>8</sup>Les pastilles faisant partie du groupe  $\textcircled{2}$  sont celles qui restent.

de faire des groupes de  $j = 1$ , puis  $j = 2$  et jusqu'à  $j = 7$  pastilles. Puisque  $P$  est impair, il existe, pour chaque valeur de  $j$ ,  $\binom{P}{j}$  combinaisons de pastilles possibles<sup>9</sup>.

Le tableau 2.4 permet de voir, pour chaque valeur de  $j$ , la composition du groupe de pastilles qui donne le facteur de couplage  $k_1$  maximum. D'après les résultats du tableau,

j	$k_1$ [%]	Composition du meilleur groupe							
1	4.31	7							
2	4.55	3	7						
3	4.69	3	7	8					
4	4.77	1	3	7	8				
5	4.80	1	3	7	8	13			
6	4.81	1	3	6	7	8	13		
7	4.79	1	2	3	6	7	8	13	

TAB. 2.4 – Évolution, pour chaque valeur de  $j$ , du  $k_1$  maximum de l'ensemble des combinaisons possibles des pastilles. La composition du meilleur groupe est également donné.

connecter les pastilles 1, 3, 6, 7, 8 et 13 à une borne du circuit et les pastilles restantes à l'autre borne permet d'obtenir un facteur de couplage de 4.81% au lieu de 3.37% pour une connexion purement parallèle ou 3.43% pour une connexion purement série, ce qui correspond, respectivement, à une augmentation de 43% et 40% environ.

De manière générale, la différence entre  $k_i$  et  $k_i^{\text{para}}$  ou  $k_i^{\text{série}}$  ne dépend pas de la valeur moyenne des  $\chi_i^{(p)}$  et des  $C^{(p)}$  mais de leur dispersion. Par ailleurs, si  $P$  est pair,  $j = P/2$  et  $\forall p, \chi_i^{(p)} = \chi_i$  et  $C^{(p)} = C$  alors  $k_i = k_i^{\text{para}} = k_i^{\text{série}}$ .

Dans l'exemple précédent, un jeu de données réalistes constitué de  $\chi_i^{(p)}$  différents ainsi que d'une légère dispersion dans les valeurs des capacités a permis de trouver une configuration présentant un facteur de couplage largement supérieur à celui d'une connexion parallèle ou série.

### (e) Récapitulatif sur les facteurs et coefficients de couplage

Le lien qui a été établi entre les quantités  $k_{\text{eff},i}$ ,  $k_i$ ,  $k_i^{(p)}$  et  $\chi_i^{(p)}$  est très important pour la suite de l'étude.  $k_{\text{eff},i}$  est le facteur de couplage global du  $i$ -ième mode et regroupe les participations de toutes les pastilles piézoélectriques. Il a été montré qu'il peut être obtenu par deux méthodes :

- la différence entre la fréquence du  $i$ -ième mode lorsque le circuit est ouvert et sa fréquence lorsqu'il est fermé ;
- le calcul à partir de la matrice de couplage électromécanique  $\mathbf{K}_c$  et des modes en court-circuit  $\Phi$ .

Le facteur de couplage modal réduit  $k_i^{(p)}$  permet de quantifier le couplage entre le  $i$ -ième mode et la  $p$ -ième pastille, de même que  $\chi_i^{(p)}$ , cependant, il a l'avantage d'être sans dimension et compris entre  $-k_{31}$  et  $+k_{31}$ .

Le fait que les  $k_i^{(p)}$  soient signés dépend, toute chose égale par ailleurs, du sens de polarisation des pastilles piézoélectriques. Comme ces dernières sont polarisées selon la direction

<sup>9</sup>Lorsque  $P$  est pair, le nombre de combinaisons pour chaque valeur de  $j$  est toujours  $\binom{P}{j}$ , sauf pour  $j = P/2$  où ce nombre vaut  $\binom{P}{P/2}/2$  du fait d'un nombre équivalent de pastilles dans ① et ② et des symétries qui s'en suivent.

notation	dénomination	unité
$k_{\text{eff}, i}$	facteur de couplage effectif	adim.
$k_i$	facteur de couplage modal	adim.
$k_i^{(p)}$	facteur de couplage modal réduit	adim.
$\chi_i^{(p)}$	coefficient de couplage modal	$\text{Kg}^{1/2}.\text{N.V}^{-1}$

TAB. 2.5 – Récapitulatif des différents facteurs et coefficient de couplage.

normale aux électrodes,  $\mathbf{n}$  ne peut être qu'une normale sortante ou rentrante à  $\Omega_s$  ; il suffit donc de retourner la pastille pour changer le signe de  $k_i^{(p)}$ . Ce point n'est pas important lors des simulations, où c'est la valeur absolue qui compte, car il faut maximiser le couplage. À l'inverse, lors de la réalisation pratique du collage, il est nécessaire de le connaître pour les raisons suivantes :

- une connexion en parallèle impose que tous les  $k_i^{(p)}$  soient positifs pour maximiser la valeur de  $k_i$ , de même pour le couplage entre  $q$  et  $Q$ , qui s'écrit  $\sum_{p=1}^P \chi_i^{(p)} / \sum_{p=1}^P C^{(p)}$ .
- une connexion en série n'impose pas que tous les  $k_i^{(p)}$  soient positifs puisque  $k_i = \sum_{p=1}^P \left(k_i^{(p)}\right)^2$ . Cependant, la présence de  $k_i^{(p)}$  négatifs signifie qu'il est possible d'améliorer le couplage entre la charge  $Q$  et  $q_i$ , qui vaut  $\sum_{p=1}^P \chi_i^{(p)} / C^{(p)}$ , sans pour autant que cela n'augmente la valeur de  $k_i$ .

## 2.4 Implémentation du code de calcul éléments finis

L'implémentation d'un code de calcul capable de traiter un problème de grande taille issu de la discrétisation éléments finis d'une structure industrielle, se heurte à plusieurs difficultés techniques qui ont donné lieu à un important travail de programmation. Le choix des logiciels de calcul, l'organisation du code et les tests de validation numérique sont présentés dans cette partie.

### 2.4.1 Choix des logiciels

L'ensemble des spécifications à partir desquelles s'est faite la sélection des logiciels est le suivant :

- la résolution du problème aux valeurs propres issu d'un modèle éléments finis est l'opération la plus coûteuse en temps de calcul et requiert l'utilisation d'un code industriel performant.
- le calcul des coefficients de couplage et la construction du modèle réduit du problème électromécanique discrétisé, tels qu'ils ont été définis dans les sections 2.3.4 et 2.3.3, doivent être effectués à l'aide d'un langage de programmation flexible et facilement modifiable puisqu'il s'agit d'un travail de recherche, qui est susceptible de se modifier et d'évoluer fortement.
- les opérations de maillage volumique des pastilles piézoélectriques doivent pouvoir se faire automatiquement en ligne de commande
- la mise en forme et l'échange des données entre les différents codes doit être rapide car l'objectif est que la plus grande partie du temps de calcul soit passée à résoudre les problèmes aux valeurs propres.

**(a) Patran**

Pour le *pre* et *post* traitement, c'est-à-dire pour l'ensemble des opérations attendant à la création des  $P$  pastilles sur la surface de la structure hôte, ainsi que la récupération des fréquences et modes propres de l'ensemble structure/pastilles, c'est le logiciel *Patran* qui a été choisi. À chaque tâche correspond une routine contenant un certain nombre de commandes PCL (*Patran Command Language*). Ces macros, qui sont des fichiers texte de type *session file* (\*.ses), permettent, de manière compacte, d'écrire toutes les directives nécessaires pour :

- l'import et l'export de fichier (\*.bdf, \*.rpt, \*.OUT, ...);
- la création, suppression, vérification et renumérotation de maillage;
- le lancement des calculs et la récupération des résultats.

Plus précisément, il s'agit, en un temps très court et de façon automatique, de

- récupérer l'ensemble des nœuds et des éléments TET10 se situant aux interfaces entre la structure et les  $P$  pastilles;
- générer les enveloppes des pastilles d'après leurs dimensions puis les mailler avec des éléments surfaciques TRIA6;
- créer les maillages volumiques correspondants sur la base du maillage de leur enveloppe;
- associer, à chaque élément TET10 des pastilles, un repère local permettant de désigner la direction de polarisation et le plan d'isotropie;
- écrire un fichier contenant les coordonnées des nœuds, la table de connectivité, les matériaux et les propriétés de la structure hôte munie de ses pastilles;
- lancer le calcul des modes normaux puis récupérer les fréquences propres et les déformées modales.

Le contenu des macros *Patran* n'est pas connu *a priori* puisque la structure, les matériaux, le nombre de pastilles, *etc.*, varient d'un calcul à un autre. Par conséquent, leur rédaction doit elle aussi se faire automatiquement selon les données rentrées par l'utilisateur. Pour ce faire, un *shell* de pilotage est chargé de récupérer les données utilisateurs et de rédiger automatiquement les routines, qui sont à leur tour exécutées pour réaliser telle ou telle tâche en *Patran*, *Nastran* ou *Matlab*.

Par ailleurs, comme une "couche" optimisation est rajoutée par la suite (chapitre 3) pour déterminer les positions et géométries des pastilles qui maximisent le facteur de couplage modal, toutes les opérations citées ci-dessus vont être répétées un grand nombre de fois. Ainsi, le rôle du *shell* est aussi d'adapter le contenu des routines aux spécifications de l'algorithme d'optimisation qui indique, à chaque itération, quelles positions et géométries des pastilles il faut tester.

**(b) Nastran**

Le code de calcul *Nastran* est très performant pour la résolution de problème aux valeurs propres, raison pour laquelle il a été choisi. Il est de plus employé par de nombreux industriels.

**(c) Awk**

Le langage *Awk* est utilisé pour sa capacité à lire et écrire des fichiers textes volumineux beaucoup plus rapidement que *Matlab*.

(d) *Matlab*

Ce langage de programmation, de part sa flexibilité, convient parfaitement à des travaux de recherche où les codes peuvent évoluer fortement entre la première mouture et les suivantes. *Matlab* est utilisé pour des opérations de calcul mais aussi pour le pilotage de la rédaction des macros *Patran* et *Awk*, à savoir :

- les algorithmes d'optimisation du chapitre 3 (recuit simulé et de recherche avec liste taboue) sont entièrement codés avec ce langage, de même que l'assemblage de la matrice de couplage  $\mathbf{K}_c$ , le calcul des facteurs de couplage et la construction du modèle réduit ;
- les routines de rédaction des macros PCL, qui pilotent à leur tour *Patran* sont également faites sous *Matlab*, de même pour les routines de rédaction des routines *Awk* qui servent à lire et écrire les données échangées entre *Matlab*, *Patran* et *Nastran*.

## 2.5 Application au cas d'une poutre : validations numérique et expérimentale

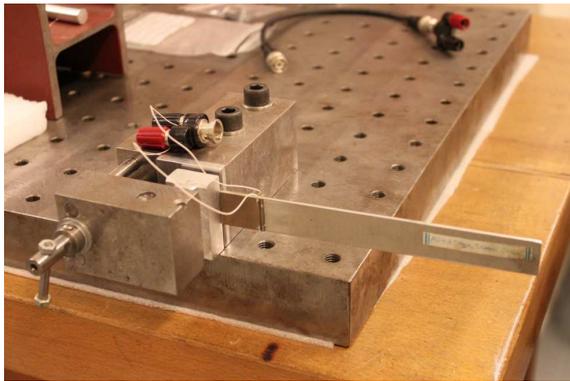


FIG. 2.18 – Poutre :  $AU_4G$ ,  $170 \times 20 \times 2$  mm.  
Patches :  $PIC151$ ,  $25 \times 20 \times 0.5$  mm

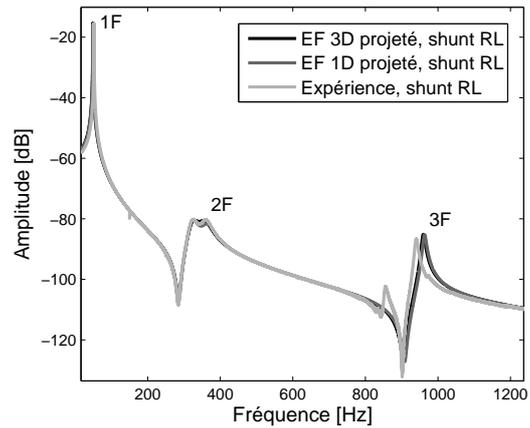


FIG. 2.19 – *FRF* observée en bout de poutre

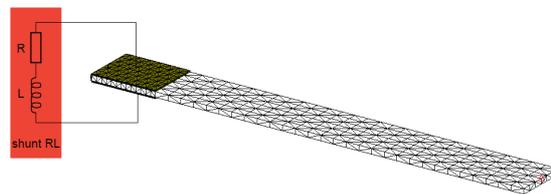


FIG. 2.20 – Maillage éléments finis *TET10* associé à la poutre de la figure 2.18.

Pour valider la méthode de calcul de la matrice de couplage, une poutre encastée-libre munie de deux pastilles piézoélectriques montées en série est modélisée par la méthode des éléments finis (Fig. 2.18). Lors de la modélisation, il est important que la poutre ait une orientation quelconque par rapport au repère global de l'analyse, afin de s'assurer que la construction de la matrice de changement de base  $\mathbf{M}$  soit correcte. Les résultats sont comparés à ceux d'un modèle éléments finis 1D et aux données expérimentales issues de [130].

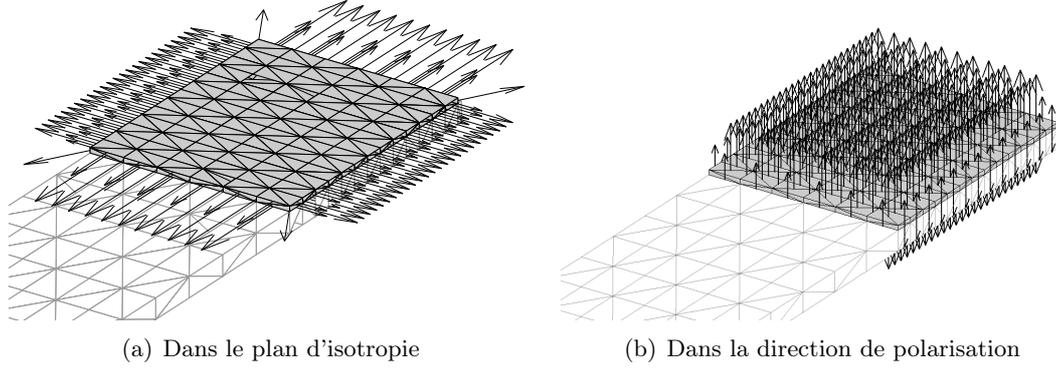


FIG. 2.21 – Composantes de la matrice de couplage aux nœuds de la pastille supérieure

D'après l'équation (2.31), la matrice de couplage  $\mathbf{K}_c$  correspond à des efforts piézoélectriques nodaux par unité de tension ( $\text{N.V}^{-1}$ ). La figure 2.21 représente ces efforts sous forme de vecteur en chacun des nœuds du maillage de la pastille supérieure. Le couplage entre le voltage appliqué aux électrodes (direction 3) et l'élongation de la pastille dans la direction 1 (couplage "31") est nul partout sauf sur les bords de la pastille (Fig. 2.21(a)). Cela rejoint le fait que l'action piézoélectrique s'effectue par l'intermédiaire de densités surfaciques d'efforts aux extrémités de la pastille [123]. En revanche, le couplage "33" intervient sur tous les nœuds des faces supérieures et inférieures (Fig. 2.21(b)).

Modes	Fréquence court-circuit [Hz]			Fréquence circuit ouvert [Hz]		
	$f_i$ EF 3D	$f_i$ EF 1D	$f_i$ Exp.	$\hat{f}_i$ EF 3D	$\hat{f}_i$ EF 1D	$\hat{f}_i$ Exp.
1F	48.66	48.96	51.46	48.98	49.42	51.98
2F	335.67	337.1	335.4	338.27	340.7	338.5
3F	949.67	951.8	926.8	956.42	960.6	931.4

Modes	Facteur de couplage effectif et modal				
	$k_i$ EF 3D	$k_{\text{eff},i}$ EF 3D	$k_i$ EF 1D	$k_{\text{eff},i}$ EF 1D	$k_{\text{eff},i}$ Exp.
1F	0.132	0.115	0.143	0.137	0.143
2F	0.142	0.124	0.150	0.145	0.136
3F	0.135	0.119	0.140	0.137	0.100

Modes	Erreur fréq. court-circuit		Erreur fréq. circuit ouvert		Erreur facteur de couplage	
	$\left(\frac{\Delta f_i}{f_i}\right)^{3\text{D}/1\text{D}}$	$\left(\frac{\Delta f_i}{f_i}\right)^{3\text{D}/\text{Exp}}$	$\left(\frac{\Delta \hat{f}_i}{\hat{f}_i}\right)^{3\text{D}/1\text{D}}$	$\left(\frac{\Delta \hat{f}_i}{\hat{f}_i}\right)^{3\text{D}/\text{Exp}}$	$\left(\frac{\Delta k_{\text{eff}}}{k_{\text{eff}}}\right)^{3\text{D}/1\text{D}}$	$\left(\frac{\Delta k_{\text{eff}}}{k_{\text{eff}}}\right)^{3\text{D}/\text{Exp}}$
1F	0.61%	5.44%	0.89%	5.77%	16.06%	19.58%
2F	0.42%	-0.08%	0.71%	0.07%	14.48%	8.82%
3F	0.22%	2.47%	0.43%	-2.68%	13.14%	-19.00%

TAB. 2.6 – Fréquences propres (court-circuit et circuit ouvert) et facteurs de couplage issus des calculs EF 3D, 1D et de l'expérience. Erreurs correspondantes.

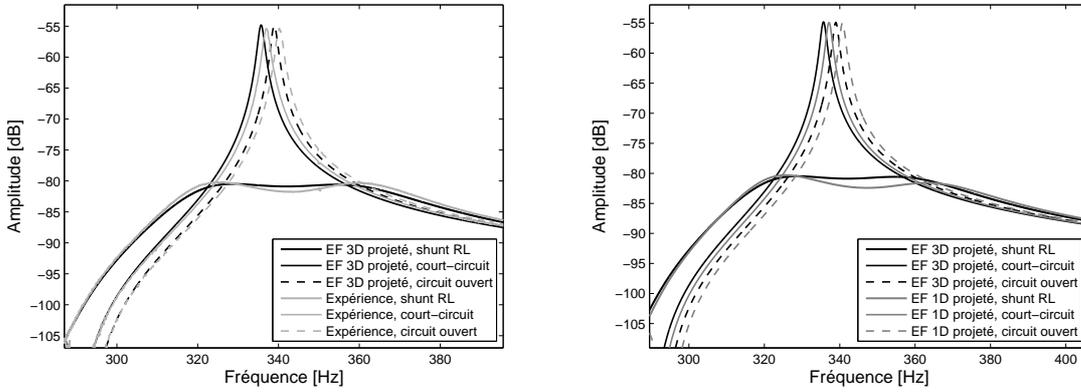
Le tableau 2.6 permet de comparer les fréquences propres  $f_i$  et les facteurs de couplage de la poutre calculés par le modèle éléments finis 3D, avec ceux provenant du modèle 1D et de l'expérience. Le facteur de couplage modal pour un système de deux pastilles identiques montées en série est donné par  $k_i = \sqrt{\left(k_i^{(1)}\right)^2 + \left(k_i^{(2)}\right)^2} = \sqrt{2/C} (\chi_i/\omega_i)$  (Eq. (2.79)). L'erreur

relative sur le facteur de couplage effectif est

$$\frac{\Delta k_{\text{eff},i}}{k_{\text{eff},i}} = \frac{\hat{f}_i \Delta \hat{f}_i - f_i \Delta f_i}{\hat{f}_i^2 - f_i^2} + \frac{\Delta f_i}{f_i} \simeq \frac{\hat{f}_i \Delta \hat{f}_i - f_i \Delta f_i}{\hat{f}_i^2 - f_i^2}. \quad (2.97)$$

Un bon accord est obtenu entre les fréquences propres des modèles 1D et 3D, ce qui valide ce dernier (moins de 1% d'écart). Néanmoins, il y a des différences plus marquées pour les coefficients de couplage. Cela s'explique en partie en observant l'équation (2.97) où il apparaît qu'une petite erreur en fréquence conduit à une erreur importante sur le calcul des  $k_{\text{eff},i}$  de part la faible valeur de  $\hat{f}_i^2 - f_i^2$ .

Les fonctions de réponse en fréquence (FRF) de la poutre munie d'un shunt résonant accordé sur le deuxième mode de flexion, noté 2F, sont calculées à partir du système (2.63) tronqué à  $N = 10$  modes. Les deux modèles éléments finis concordent avec l'expérience (Fig. 2.19 et 2.22). Les écarts constatés sur les  $\hat{f}_i$  et  $f_i$  n'influencent que très peu le niveau d'atténuation apporté par le shunt (Fig. 2.22(a) et 2.22(b)), qui est de l'ordre de -25 dB.



(a) Comparaison EF 3D et expérience, mode 2F

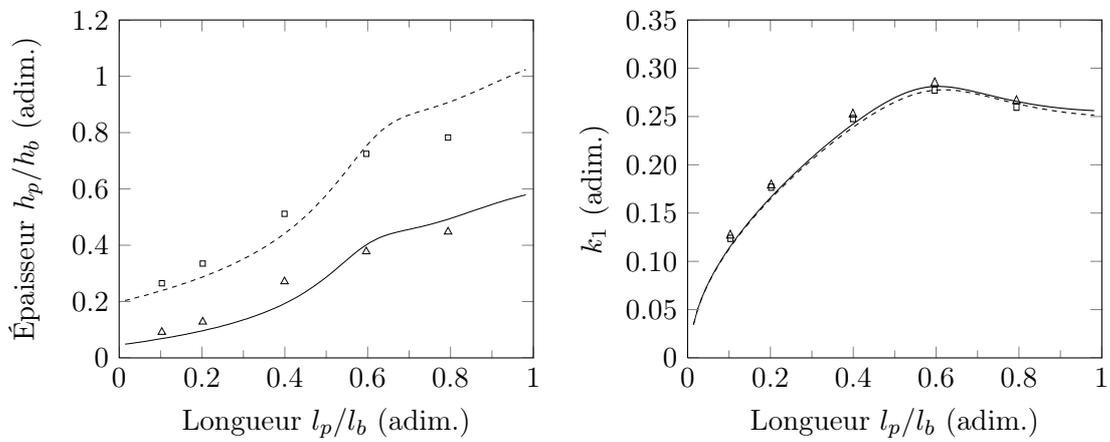
(b) Comparaison EF 3D et 1D, mode 2F

FIG. 2.22 – *Shunt RL accordé sur le mode 2F :  $R=7900 \Omega$ ,  $L=19.7 H$ . Facteurs d'amortissement modaux mesurés :  $\xi_1 = 1.7 \cdot 10^{-3}$ ,  $\xi_2 = 2.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\xi_3 = 5.0 \cdot 10^{-3}$  et  $\xi_i = 4.0 \cdot 10^{-3}$  pour  $i \geq 4$ .*

Une seconde validation, par rapport à un modèle analytique de poutre développé dans [128, 46, 47], a également été réalisée [120]. La structure de la figure 2.18 est de nouveau utilisée. La longueur et la hauteur de la poutre et de ses 2 pastilles sont notées, respectivement,  $l_b = 170$  mm,  $h_b = 2$  mm,  $l_p$  et  $h_p$ .

Pour chaque longueur de pastille  $l_p$ , le facteur de couplage modal du premier mode de flexion  $k_1$  a été calculé pour plusieurs valeurs de l'épaisseur  $h_p$ . La figure 2.23(a) donne, pour chaque  $l_p$ , la valeur de  $h_p$  qui maximise  $k_1$ . La figure 2.23(b) indique la valeur de  $k_1$  correspondant à l'épaisseur optimale. Les simulations ont été menées avec 2 matériaux différents pour la poutre (aluminium AU4G et acier) et du PIC151 pour les pastilles piézoélectriques.

La figure 2.23(a) montre que l'épaisseur optimale des pastilles dépend du type de matériau, avec une dépendance similaire à la longueur  $l_p$  pour l'aluminium et l'acier. Les résultats de la figure 2.23(b) sont plus intéressants car ils mettent en évidence le fait que, une fois choisie l'épaisseur optimale, le facteur de couplage ne dépend pratiquement pas du type de matériau de la poutre. Enfin, ces graphiques font voir qu'il existe également une longueur de pastille optimale :  $l_p = 0.6l_b$ .



(a) Épaisseur optimale de la pastille en fonction de sa longueur. (b) Facteur de couplage optimal en fonction de la longueur de la pastille.

FIG. 2.23 – Géométrie optimale des pastilles piézoélectriques pour la réduction des vibrations du premier mode de flexion.  $\square$  ' acier, EF 3D;  $\triangle$  ' aluminium, EF 3D; '- -' acier, modèle analytique [47]; '—' aluminium, modèle analytique [47].

## 2.6 Shunts linéaires : modélisation et optimisation

Cette partie présente la modélisation du shunt résistif (shunt  $R$ ) et du shunt résonant (shunt  $RL$ ), ainsi que les résultats de leur optimisation. Ces travaux, issus de [47, 46, 30], sont le point de départ de ceux réalisés dans ce mémoire. Pour cette raison, les principales notions et équations sont résumées et exposées.

De nombreuses variantes et améliorations de ces deux shunts  $R$  et  $RL$  existent par ailleurs. Elles n'ont pas été utilisées ici mais il est intéressant de les présenter :

- la valeur importante de l'inductance du shunt résonant, souvent de l'ordre de plusieurs Henry, a poussé certains auteurs [23] à ajouter une capacité additionnelle afin de réduire la valeur de l'inductance, ce qui conduit à réduire les performances du shunt ;
- l'utilisation d'une capacité négative pour augmenter le facteur de couplage électromécanique et donc les performances du shunt [127, 43]. Cette technique active, qui nécessite des composants électriques synthétiques, peut se révéler instable ;
- l'efficacité des shunts étant limitée à une faible largeur de bande autour du mode à amortir, certaines techniques ont été proposées pour réduire simultanément plusieurs résonances :
  - un réseau de shunt  $RL$  connecté à une seule pastille piézoélectrique [67] ;
  - plusieurs pastilles shuntées chacune avec un circuit  $RL$  et reliées entre elles [11, 45, 83] ;
  - un shunt  $RL$  adaptatif où la valeur de l'inductance change automatiquement pour s'adapter à la fréquence de résonance [68, 93].

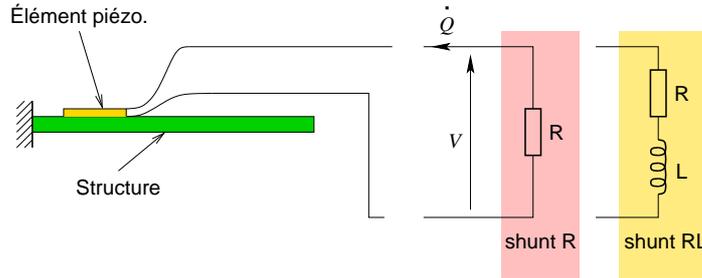


FIG. 2.24 – Structure, éléments piézoélectriques et shunts linéaires  $R$  ou  $RL$ .

Pour rappel, dans le modèle électromécanique le shunt introduit une relation entre le courant, qui dépend de la charge libre sur la pastille, et la tension aux bornes de celle-ci. De plus, les shunts linéaires, contrairement aux dispositifs à commutation, sont relativement simples à étudier théoriquement et expérimentalement.

Les résultats concernant l'optimisation et l'estimation des performances d'un shunt ont été obtenus sous l'hypothèse que les modes de la structure sont découplés, ce qui autorise à tronquer les équations au  $i$ -ième mode uniquement (*i.e.*  $q_j \equiv 0, \forall j \neq i$ ). Dans ce cas de figure, les équations mécaniques et électriques des configurations parallèle, série et mise en série de pastilles connectées en parallèle, peuvent toutes s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \hat{\omega}_i^2 q_i + \omega_i k_i Q = F_i, & (2.98a) \\ \omega_i k_i q_i + \frac{Q}{C^{eq}} = V. & (2.98b) \end{cases}$$

Les paramètres  $\hat{\omega}_i$ ,  $k_i$  et  $C^{eq}$  dépendent du type de connexion des pastilles (Tab. 2.7). Ils sont calculés à partir des équations (2.59), (2.70) et (2.63) tronquées à un mode.

	$\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2$	$\omega_i k_i$	$C^{eq}$
parallèle	$\frac{\left(\sum_{p=1}^P \chi_i^{(p)}\right)^2}{\sum_{p=1}^P C^{(p)}}$	$\frac{\sum_{p=1}^P \chi_i^{(p)}}{\sum_{p=1}^P C^{(p)}}$	$\sum_{p=1}^P C^{(p)}$
série	$\sum_{p=1}^P \frac{\left(\chi_i^{(p)}\right)^2}{C^{(p)}}$	$\sum_{p=1}^P \frac{\chi_i^{(p)}}{C^{(p)}}$	$\left(\sum_{p=1}^P \frac{1}{C^{(p)}}\right)^{-1}$
série de pastilles en parallèle	$\frac{\left(\sum_{p=1}^j \chi_i^{(p)}\right)^2}{\sum_{p=1}^j C^{(p)}} + \frac{\left(\sum_{p=j+1}^P \chi_i^{(p)}\right)^2}{\sum_{p=j+1}^P C^{(p)}}$	$\frac{\sum_{p=1}^j \chi_i^{(p)}}{\sum_{p=1}^j C^{(p)}} + \frac{\sum_{p=j+1}^P \chi_i^{(p)}}{\sum_{p=j+1}^P C^{(p)}}$	$\left(\frac{1}{\sum_{p=1}^j C^{(p)}} + \frac{1}{\sum_{p=j+1}^P C^{(p)}}\right)^{-1}$

 TAB. 2.7 – Valeurs des paramètres  $\hat{\omega}_i$ ,  $k_i$  et  $C^{eq}$  pour les différents assemblages de pastilles.

Ce formalisme est utilisé dans [47] pour réaliser l’optimisation d’un shunt  $R$  ou  $RL$ , qui vise à définir la valeur des paramètres électriques qui maximisent l’amortissement apporté. Lorsque la réponse libre de la structure est considérée, c’est la technique du placement de pôle qui est utilisée. Pour la réponse forcée, c’est la méthode de la fonction de transfert.

La technique du placement de pôle permet de trouver les paramètres du circuit qui minimisent le temps de décroissance des oscillations libres de la structure. Pour cela, les parties réelles des pôles de la fonction de transfert de l’équation (2.98) doivent être maximisées. Par ailleurs, si une de ces parties réelles est très supérieure aux autres, alors c’est elle qui pilote le temps de décroissance de  $q_i(t)$  et  $Q$ ; il suffit, par conséquent, de trouver les paramètres électriques qui maximisent cette partie réelle. D’autre part, cette dernière est aussi celle qui permet de mesurer l’amortissement total du système, composé de l’amortissement naturel  $\xi_i$  ainsi que l’amortissement supplémentaire apporté par le shunt  $\xi_{add}$ .

La méthode de la fonction de transfert consiste à choisir la valeur des paramètres électriques qui minimisent le pic d’amplitude du module de la fonction de réponse en fréquence (FRF). La mesure de la réduction des vibrations se fait à l’aide de l’indicateur

$$A_{dB} = 20 \log \frac{H_{cc}}{H_{shunt}}, \quad (2.99)$$

avec  $H_{cc}$  le pic d’amplitude de la FRF en court-circuit et  $H_{shunt}$  celui où le shunt est connecté aux pastilles piézoélectriques. Ainsi, cet indicateur représente le niveau de réduction des vibrations apporté par le shunt par rapport à la situation en court-circuit.

### 2.6.1 Shunt résistif

Un shunt résistif est constitué de  $P$  pastilles simplement reliées à une résistance  $R$ , qui dissipe de la puissance par effet Joule. Par conséquent, la relation entre la tension et la charge est la loi d’Ohm, qui s’écrit  $V = -R\dot{Q}$ . En remplaçant  $V$  dans l’équation (2.98b), il vient

$$\begin{cases} \ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \hat{\omega}_i^2 q_i + \omega_i k_i Q = F_i, & (2.100a) \\ R\dot{Q} + \frac{Q}{C^{eq}} + \omega_i k_i q_i = 0. & (2.100b) \end{cases}$$

Les résultats de l’optimisation sont directement fournis et le lecteur pourra se reporter à [47] pour les détails des calculs<sup>10</sup>.

<sup>10</sup>Dans [47], les calculs ont été menés pour deux pastilles identiques montées en série ou en parallèle mais pas pour  $P$  pastilles quelconques connectées en série, parallèle ou d’autres configurations.

	réponse libre	réponse forcée
résistance optimale	$R = \frac{1}{C^{\text{eq}}\omega_i(1+k_i^2/2)}$	$R = \frac{1}{C^{\text{eq}}\omega_i\sqrt{1+k_i^2/2}}$
performances	$\xi_{\text{add}}^R = \frac{k_i^2}{4\sqrt{1+k_i^2/2-k_i^4/16}} \approx \frac{k_i^2}{4}$	$A_{\text{dB}}^R = 20 \log \frac{k_i^2+2\sqrt{2}\xi_i\sqrt{2+k_i^2}}{4\xi_i\sqrt{1-\xi_i^2}}$

TAB. 2.8 – Valeur optimale de la résistance du shunt  $R$  pour une réponse libre ou forcée et indicateur de performance associé.

La figure (2.25) est d'une grande utilité lors du dimensionnement des pastilles piézo-électriques ou d'une expérience puisqu'elle permet, connaissant l'amortissement modal de la structure, de relier directement le niveau de réduction des vibrations au facteur de couplage modal nécessaire pour l'atteindre.

De manière générale, les performances du shunt résistif ne sont significatives que pour des niveaux d'amortissement modal inférieurs à 0.1%. Cependant, comme il est difficile de dépasser 10% de couplage dans la plupart des applications pratiques, il sera nécessaire d'avoir des  $\xi_i$  de l'ordre de  $10^{-4}$  pour réellement tirer partie de l'utilisation d'une résistance comme moyen de réduire les vibrations. De ce point de vue, les aubes de turbines métalliques sont de très bonnes candidates pour tester ce type de technologie.

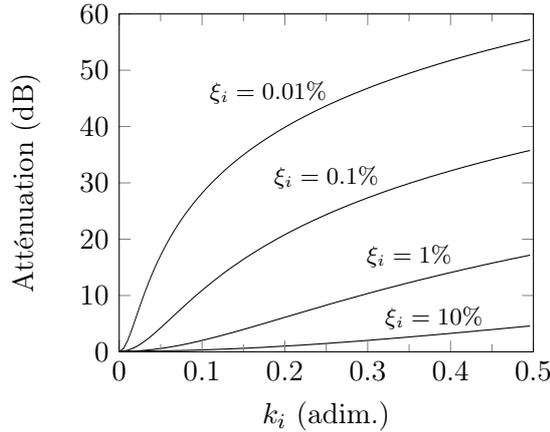


FIG. 2.25 – Atténuation apportée par un shunt résistif en fonction du facteur de couplage modal  $k_i$ , pour différentes valeurs de l'amortissement modal  $\xi_i$ .

Les deux avantages du shunt résistif sont sa simplicité de mise œuvre et des performances qui ne se dégradent pas trop si un des paramètres du système varie ( $\omega_i$ ,  $\xi_i$  ou  $R$ ).

### 2.6.2 Shunt résonant

Un shunt résonant est constitué de  $P$  pastilles reliées à une résistance  $R$  mise en série avec un inductance  $L$ . L'ajout de  $L$  permet d'augmenter le courant circulant dans le shunt à la résonance électrique et donc la dissipation par la résistance. La relation entre la tension et la charge s'écrit  $V = -R\dot{Q} - L\ddot{Q}$ . En remplaçant  $V$  dans l'équation (2.98b), il vient

$$\begin{cases} \ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \hat{\omega}_i^2q_i + \omega_i k_i Q = F_i, & (2.101a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C^{\text{eq}}} + \omega_i k_i q_i = 0. & (2.101b) \end{cases}$$

De la même manière que pour le shunt résistif, les paramètres électriques optimaux pour une réponse libre ou forcée sont directement donnés dans le tableau (2.9). Les détails des calculs ainsi que l'expression de  $A_{\text{dB}}^{\text{RL}}$  sont disponibles dans [47].

	réponse libre	réponse forcée
résistance optimale	$R = \frac{2k_i}{C^{\text{eq}}\omega_i(1+k_i^2)^{3/2}}$	$R = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{k_i}{C^{\text{eq}}\omega_i\sqrt{1+k_i^2}}$
inductance optimale	$L = \frac{1}{C^{\text{eq}}\omega_i^2(1+k_i^2)^2}$	$L = \frac{1}{C^{\text{eq}}\omega_i^2(1+k_i^2)}$
performances	$\xi_{\text{add}}^{\text{RL}} = \frac{\ k_i\ }{\sqrt{4-k_i^2}} \approx \frac{\ k_i\ }{2}$	$A_{\text{dB}}^{\text{RL}} = A_{\text{dB}}^{\text{RL}}(k_i, \xi_i)$

TAB. 2.9 – Valeurs optimales de la résistance et de l'inductance du shunt RL pour une réponse libre ou forcée et indicateur de performance associé.

La figure 2.26 permet de voir que le shunt résonant est bien plus efficace que le shunt résistif, même si l'amortissement modal est important. Néanmoins, il est très sensible au *detuning*, ce qui implique que ses performances sont très réduites si  $w_i$ ,  $R$  ou  $L$  varient légèrement. De plus, les valeurs importantes de  $L$  obligent à utiliser des inductances synthétiques, qui sont des composants actifs. Dès lors, le système est plus complexe à mettre en œuvre et une alimentation électrique est nécessaire.

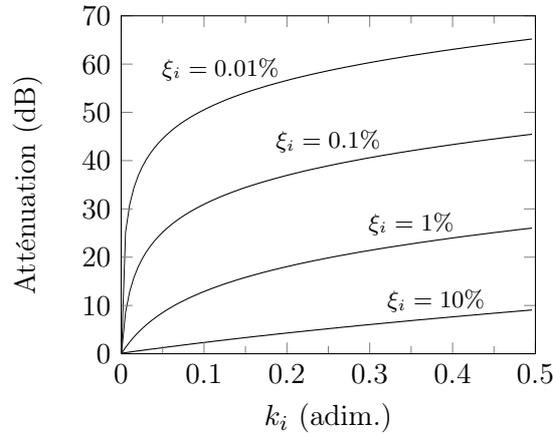


FIG. 2.26 – Atténuation apportée par un shunt résonant en fonction du facteur de couplage modal  $k_i$ , pour différentes valeurs de l'amortissement modal  $\xi_i$ .

## 2.7 Conclusion

Tout d'abord, le modèle utilisé pour le comportement d'un matériau piézoélectrique, dans le cadre de la piézoélectricité linéaire, a été présenté, de même que les divers coefficients de couplage matériau. Un modèle éléments finis d'une structure arbitraire munie d'éléments piézoélectriques minces a ensuite été développé dans le cas d'éléments finis tétraédriques à 10 nœuds. En particulier, toutes les étapes de construction de la matrice de couplage ont été détaillées pour cet élément. L'originalité du modèle éléments finis développé dans [130, 46] et appliqué ici dans le cas 3D [120, 121, 119] vient du fait qu'il n'y a que 2 degrés de liberté

électrique par pastille piézoélectrique au lieu d'un degré électrique par nœud comme dans la plupart des codes commerciaux. Ainsi, seule la partie mécanique du problème est à assembler. Par ailleurs, les hypothèses permettant de passer des variables électriques locales à une formulation faisant intervenir des variables électriques globales ( $V^{(p)}$ ,  $Q^{(p)}$ ) pour chaque pastilles s'adaptent à la plupart des cas rencontrés dans la pratique. Deux limitations demeurent néanmoins : l'hypothèse d'un potentiel électrique linéaire dans l'épaisseur de la pastille et le fait que celle-ci doit être mince.

Puis, le problème électromécanique couplé a été projeté sur la base des modes propres en court-circuit. Cette base a été choisie car elle peut être directement calculée à partir d'un problème d'élasticité classique. Le modèle réduit obtenu est particulièrement adapté à l'étude des shunts car il s'exprime directement à partir de la charge électrique contenue dans le circuit et de la tension électrique aux bornes du shunt. Par ailleurs, ce modèle permet de prendre facilement en compte les différentes configurations de câblage des pastilles et de calculer les coefficients de couplage effectif correspondants.

Enfin, la construction de la matrice de couplage, dans le cas d'une poutre munie de deux pastilles connectées en série et discrétisée par des éléments finis tétraédriques à 10 nœuds, a été validée en comparant les coefficients de couplage avec ceux obtenus à partir d'un modèle éléments finis 1D, de l'expérience et d'un modèle analytique. Lors de cette validation, il a également été vérifié que la réponse du modèle réduit converge lorsque le nombre de modes de la base de projection augmente.

Les différentes contributions, par rapport aux travaux antérieurs, portent essentiellement sur :

- le développement d'un code de calcul capable de traiter des problèmes électromécanique 3D quelconque grâce à
  - la prise en charge de pastilles courbes ;
  - l'utilisation de logiciels commerciaux pour la résolution de problèmes aux valeurs propres de grande taille ;
  - l'automatisation des opérations de maillage, de construction du modèle réduit et de calcul des coefficients de couplage ;
- la définition des coefficients de couplage effectif pour les différents câblages possibles de  $P$  pastilles piézoélectriques ;
- la validation numérique et expérimental du modèle 3D.

Il s'agira par la suite d'intégrer ce code de calcul dans un ensemble plus vaste permettant, en outre, d'optimiser la position et la géométrie de  $P$  pastilles piézoélectriques collées sur une structure quelconque (Chap. 3).

Un autre point important mis en avant dans cette partie est que la valeur optimale des paramètres électriques ne dépend que du facteur de couplage modal  $k_i$  et de l'amortissement modal de la structure  $\xi_i$ . Par conséquent, l'optimisation des paramètres du shunt peut se faire séparément de l'optimisation mécanique de la structure, dont l'objectif est de maximiser les  $k_i$ . Par conséquent, une démarche possible pour optimiser le système structure/pastilles/shunt est la suivante :

- déterminer le niveau d'atténuation souhaité, ainsi que l'amortissement du mode à atténuer ;
- lire les abaques des figures 2.25 et 2.26 afin d'évaluer le facteur de couplage nécessaire pour atteindre un tel objectif ;
- utiliser les algorithmes d'optimisation (chapitre 3) qui trouveront, sous certaines contraintes<sup>11</sup>,

---

<sup>11</sup>Les contraintes liées au processus d'optimisation, qui seront détaillées dans le chapitre 3, sont, par exemple, une masse maximum de matériau piézoélectrique à ne pas dépasser ou un nombre de pastilles figé.

une configuration (dimensions et positions des pastilles) qui maximise le facteur de couplage modal ;

- enfin, régler l'impédance d'après les formules des tableaux 2.9 et 2.8.

Dans le chapitre suivant, la méthode d'optimisation choisie est exposée et les algorithmes qui la composent sont détaillés.



---

---

# Optimisation de la géométrie et de la localisation des pastilles piézoélectriques

L'objectif de ce chapitre est de présenter une méthode pour maximiser le couplage modal électromécanique entre un ensemble de pastilles piézoélectriques et une structure élastique quelconque discrétisée par la méthode des éléments finis. La valeur optimale du couplage est ensuite utilisée pour maximiser les performances d'un shunt résistif ou résonant<sup>1</sup>.

Pour augmenter l'amortissement, un point important est d'optimiser le système dans son ensemble, c'est-à-dire la position et la géométrie des pastilles ainsi que le choix des composants du circuit électrique du shunt. Il a été montré, à la section 2.3.4 et dans [46, 130], que ces deux optimisations, mécanique et électrique, peuvent être réalisées séparément. De plus, il a été prouvé dans [62, 41, 22, 48] que les seuls paramètres à maximiser sont les coefficients de couplage modaux électromécaniques, qui caractérisent les échanges d'énergie entre les pastilles piézoélectriques et la structure selon les différents modes de vibration de cette dernière.

Puisque les valeurs optimales des composants du circuit électrique du shunt sont uniquement fonctions des coefficients de couplage modaux et des caractéristiques des pastilles et de la structure [47, 46], elles peuvent être calculées dans un second temps. Ainsi, il faut en premier lieu réaliser l'optimisation mécanique puis l'optimisation électrique, les deux étant découplées.

L'optimisation mécanique consiste uniquement à maximiser les coefficients de couplages modaux électromécaniques en déterminant les meilleures positions et dimensions des pastilles. Pour atteindre cet objectif, sous la contrainte que la structure sur laquelle elles sont collées possède une géométrie quelconque, une formulation éléments finis 3D du problème électromécanique est utilisée (chapitre 2). Puis, afin d'obtenir les coefficients de couplages modaux, un modèle réduit du problème discrétisé est construit en projetant le vecteur des inconnues de déplacement mécanique sur les modes du système en court-circuit.

Cependant, un problème rédhibitoire intervient lorsque la procédure d'optimisation, qui vise à réduire l'amplitude des vibrations, utilise plusieurs pastilles. Le nombre de combinaisons possibles de géométrie et de position, associé au fait qu'il faille résoudre un problème aux valeurs propres de grande taille pour accéder aux coefficients de couplages modaux, conduit à des temps de calcul gigantesques, qui rendent la méthode inutilisable. Même lorsque la taille de l'espace de recherche est réduit, *i.e.*, certains paramètres (longueurs, épaisseurs, ...) sont figés, les temps de simulation restent très importants (plusieurs jours). Pour remédier à cette difficulté, la procédure d'optimisation est séparée en deux étapes distinctes dont chacune

---

<sup>1</sup>le cas du *switch* [106] n'est pas abordé dans cette étude.

possède sa stratégie de recherche.

- dans la première étape, l'influence des pastilles sur les modes et les fréquences propres de la structure est négligée. Cela est équivalent à dire que les pastilles ont une épaisseur négligeable. Associé à cette hypothèse, qui permet de n'effectuer qu'une seule résolution de problème aux valeurs propres, un indicateur analytique de couplage électromécanique, basé sur les déformées modales de la structure nue, est défini et sert à indiquer si à tel ou tel choix de paramètre correspond un couplage élevé. Pour explorer de manière efficace l'espace de recherche, un algorithme de recuit simulé [44, 49, 51, 141] est employé. Le but est ici de trouver une solution dont les coefficients de couplage modaux associés sont proches de ceux de la solution optimale. La nature aléatoire du recuit simulé oblige à rejouer cette première étape plusieurs fois afin de constituer un ensemble de solution approchée de bonne qualité. La meilleure sert alors de point de départ à la seconde étape du processus d'optimisation.
- La seconde étape réintègre l'effet de la raideur et de la masse des pastilles piézoélectriques sur les modes et les fréquences propres de la structure. Un algorithme de recherche avec liste taboue [26, 141, 85, 71] est alors chargé d'explorer le voisinage local de la configuration fournie par l'algorithme de recuit simulé.

Cette approche est valide uniquement si la structure sur laquelle sont collées les pastilles est massive. Dans ce cas, l'approximation consistant à négliger les effets de la raideur et de la masse des pastilles sur les modes propres et valeurs propres de la structure ne devrait pas conduire l'algorithme de recuit simulé à trouver des solutions trop éloignées de la solution optimale. Dit autrement, les  $k_i$  sont supposés ne dépendent, dans un premier temps, que des modes propres de la structure nue, de la matrice de couplage et des capacités des pastilles. Le rôle de la seconde étape d'optimisation, très chronophage, est de prendre en compte cette petite influence des pastilles sur la structure et d'adapter localement les positions et les géométries des pastilles précédemment trouvées.

Le chapitre débute sur une présentation succincte du domaine de l'optimisation. Le fonctionnement de la procédure de calcul et des algorithmes qui la compose est ensuite détaillé. Enfin, l'implémentation du code ainsi qu'un cas test de validation sont présentés.

### 3.1 Introduction à l'optimisation

Dans le domaine de l'optimisation, la recherche des solutions d'un modèle mathématique, qui est utilisé pour représenter un problème donné (dynamique d'une structure, contrôle, ...), aboutit souvent à un ensemble très vaste de solutions. Il est alors nécessaire de déterminer, parmi cet ensemble, la meilleure solution satisfaisant le ou les critères fixés ainsi que d'éventuelles contraintes. L'optimisation intervient dans un grand nombre de disciplines scientifiques telles que la recherche opérationnelle, la théorie des jeux, des graphes ou du contrôle, en statistique ou bien encore en économie.

Au delà du modèle, qui prédit la réponse du système à un certain nombre de paramètres d'entrée, l'optimisation doit permettre de réduire l'ensemble des solutions possibles, voire, de choisir la meilleure. Les domaines où elle est employée de manière systématique sont nombreux mais concerne principalement les systèmes complexes tels que l'élaboration de chaînes d'assemblage, la disposition de composants électroniques sur des cartes, la gestion du trafic, la construction d'avion ou de navire, l'optimisation de réseaux mobiles UMTS, ainsi que la constitution de portefeuille d'investissement dont le risque doit être proche de celui du marché.

La maximisation et la minimisation sont les deux formes que peut revêtir un problème d'optimisation. Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble de solutions admissibles et  $f_c$  une fonction coût (ou fonction

objectif). Sous l'hypothèse que la solution optimale  $x^*$  existe, un problème de maximisation s'écrit

$$f_c : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \exists x^* \in \mathcal{A} \quad | \quad \forall x \in \mathcal{A}, f_c(x^*) \geq f_c(x). \quad (3.1)$$

Puisque le minimum de  $f_c$  est équivalent au maximum de  $-f$ , une méthode de maximisation suffit à résoudre un problème d'optimisation.

Dans le cadre d'une optimisation de la géométrie et de la localisation des pastilles piézo-électriques sur une surface maillée quelconque, l'ensemble  $\mathcal{A}$  se réduit à un sous-ensemble de  $\mathbb{N}^{5P}$ . Dans ce cas, il est courant de parler d'optimisation combinatoire.  $5P$  est la dimension du problème et correspond au nombre de paramètres nécessaires pour définir une pastille (5), multiplié par le nombre de celles-ci ( $P$ ).

Cependant, il est rare que la première solution trouvée à un problème de maximisation corresponde directement au maximum global. Il est plus courant de partir d'un maximum local, qui est facile à déterminer numériquement, pour ensuite progresser vers la solution qui domine toutes les autres. Un maximum local  $\tilde{x}$  est défini comme un point de  $\mathcal{A}$  pour lequel il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  tel que, pour tout  $x \in \mathcal{V} \cap \mathcal{A}$ ,  $f_c(x) \leq f_c(\tilde{x})$ . Dans le cas traité ici, où  $\mathcal{A}$  est un sous ensemble de  $\mathbb{N}^P$ , la définition précédente s'écrit

$$\exists \delta \in \mathbb{R} \quad | \quad \forall x \in \mathcal{A}, \|x - \tilde{x}\| \leq \delta \implies f_c(x) \leq f_c(\tilde{x}). \quad (3.2)$$

Les problèmes rencontrés peuvent être classés en 5 catégories :

- l'optimisation linéaire où la fonction coût et les contraintes caractérisant  $\mathcal{A}$  sont linéaires ;
- l'optimisation quadratique où la fonction objectif est une forme quadratique ;
- l'optimisation non linéaire où la fonction objectif ou/et les contraintes sont non linéaires ;
- l'optimisation stochastique dans laquelle certaines contraintes dépendent de variables aléatoires ;
- l'optimisation de problème difficile.

La dernière classe concerne ceux qui présentent, par exemple, de nombreux extrema locaux pauvres ou dont la fonction coût ne dépend pas explicitement des paramètres du problème. Le choix d'une technique de résolution appropriée dépend de la nature de la fonction objectif (continuité, dérivabilité, convexité, *etc.*) et de celle des contraintes caractérisant l'ensemble des solutions admissibles. Il existe, là encore, plusieurs classes de méthodes :

- la simplification, où le nombre d'inconnues du problème peut être réduit par un changement de variable et certaines contraintes relâchées par l'utilisation de multiplicateur de Lagrange ;
- la recherche des zéros du gradient de la fonction coût ;
- les méthodes analytiques directes, par exemple, la méthode du gradient conjugué en optimisation non linéaire ;
- les métaheuristiques, pour les problèmes réputés difficiles.

Ce dernier ensemble contient des méthodes dont le principe de fonctionnement repose, généralement, sur un phénomène physique<sup>2</sup>. Les plus connues sont le recuit simulé, les algorithmes génétiques et les algorithmes de colonies de fourmis.

Ainsi, le problème de l'optimisation de la position et de la géométrie de pastilles piézo-électriques relève de l'optimisation paramétrique combinatoire. Soit  $\mathcal{E}$  un ensemble de sous

<sup>2</sup>Les schémas de fonctionnement de ces algorithmes peuvent s'inspirer de phénomènes biologiques, physiques, naturelles ou faire appel au hasard.

ensemble de  $\mathbb{N}^{5P}$ , dont les éléments sont les solutions admissibles. Alors, un problème d'optimisation combinatoire consiste à déterminer

$$\max_{\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^{5P}} \{f_c(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in \mathcal{E}\}. \quad (3.3)$$

La difficulté à décrire l'ensemble des solutions réalisables par une liste exhaustive vient du fait que le nombre des solutions admissibles rend son énumération ardue, voire impossible puisque la cardinalité de  $\mathcal{E}$  est exponentielle en  $5P$ .

En théorie, trouver une solution optimale dans un ensemble discret fini est un problème facile puisqu'il suffirait d'essayer toutes les solutions, puis de comparer leurs qualités pour déterminer la meilleure. Cependant, en pratique, l'énumération de toutes les solutions prend trop de temps et c'est à cause de cela que les problèmes d'optimisation combinatoire sont réputés difficiles. En pratique, très souvent, une solution approchée satisfaisante, obtenue par une heuristique ou une métaheuristique, est suffisante.

## 3.2 Les métaheuristicques

Le terme méta-heuristique semble avoir été employé la première fois par Fred Glover lorsqu'il inventa l'algorithme de recherche avec liste tabouée en 1986 [56, 57].

**Métaheuristique** Un problème d'optimisation pour lequel il n'y a pas de méthodes de résolution connues efficaces est souvent traité par l'intermédiaire d'une métaheuristique. Cette dernière est généralement un algorithme d'optimisation qui, à chaque itération, va échantillonner l'espace de recherche d'une manière qui lui est propre et évaluer la qualité des solutions qu'il trouve à l'aide d'une fonction objectif, ceci afin de ne pas être piégées par des optima locaux. Une métaheuristique ne nécessite pas de connaissances particulières sur le problème à optimiser. La seule information nécessaire est de pouvoir associer une valeur à une solution *via* une fonction objectif. Selon le problème à traiter, une métaheuristique peut utiliser des algorithmes de recherche locale ou globale.

Une large gamme de problèmes différents peuvent être optimisés par une même métaheuristique sans qu'il soit nécessaire de la modifier en profondeur. En somme, une métaheuristique est une méthode d'optimisation générique itérative qui doit permettre d'atteindre la solution optimale en passant par un certain nombre de solutions de moins bonne qualité. La qualité d'une solution est quant à elle directement reliée à la valeur de la fonction objectif.

Dans le domaine de l'optimisation, un certain nombre de notions sont employées :

- une solution est appelée un *état* ou *design*<sup>3</sup> ;
- la métaheuristique fait évoluer un *état* au travers de *transitions* ou de *mouvements* ;
- si une nouvelle solution est construite à partir d'une solution existante, elle est sa *voisine*. Le choix du *voisinage* et de la structure de donnée le représentant est un point très important ;
- enfin, l'algorithme s'arrête après avoir atteint un *critère d'arrêt*, qui consiste le plus souvent en l'atteinte d'un temps d'exécution imparti.

### 3.2.1 Principales notions liées à l'utilisation d'une métaheuristique

D'une manière générale, les métaheuristicques s'articulent autour de plusieurs notions : voisinage, diversification/exploration, intensification/exploitation, mémoire et apprentissage.

---

<sup>3</sup>Le terme *design* est choisi puisqu'il correspond au fait qu'une certaine conception de la structure munie de ses pastilles a été sélectionnée.

**Voisinage** La notion de voisinage est le principe général le plus utilisé pour la conception de métaheuristique. Le voisinage d'une solution est un sous-ensemble de solutions qu'il est possible d'atteindre par une série de transformations données. La méthode de construction du voisinage a un impact important sur le comportement des métaheuristiques.

**Mémoire** Les métaheuristiques les plus simples utilisent uniquement l'information disponible à une itération donnée pour déterminer l'état de la prochaine itération. Elles sont dites sans mémoire et sont souvent employées pour de la recherche locale. À l'inverse, les métaheuristiques dotées d'une mémoire peuvent guider l'optimisation aux itérations suivantes en utilisant l'historique de leur recherche.

La mémoire peut être à plus ou moins long terme et consiste en la mémorisation d'un ensemble de paramètres décrivant la recherche. Plus le nombre d'itérations augmente, plus l'algorithme est capable d'éviter les optima locaux et de ne tenir compte que des zones où l'optimum global est susceptible de se trouver. La mémoire permet à la métaheuristique, en quelque sorte, de mieux connaître l'espace de recherche.

**Diversification et intensification** L'utilisation d'une fonction objectif, d'une mémoire et d'un processus aléatoire pour échantillonner l'espace de recherche permettent de définir deux nouvelles notions : la diversification et l'intensification.

La diversification vise à récolter de l'information sur le problème à optimiser. Durant cette phase, la métaheuristique teste un grand nombre de solutions en utilisant principalement sa mémoire et un processus aléatoire pour diriger ses recherches. La fonction objectif n'étant plus utilisée, l'algorithme peut accepter des solutions de moins bonne qualité, qui lui permettront de passer les "vallées" de l'espace de recherche.

L'intensification vise à utiliser l'information recueillie pour définir et parcourir les zones intéressantes de l'espace de recherche. Durant cette phase, qui fait suite à la diversification, l'algorithme utilise principalement sa fonction objectif pour diriger ses recherches.

En résumé, une métaheuristique est un algorithme, qui fait évoluer une solution de départ de façon itérative par l'intermédiaire de voisinages, en alternant des phases d'intensification, de diversification et d'apprentissage, jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit atteint. L'état de départ est souvent choisi aléatoirement. La dynamique de la recherche repose sur l'enchaînement des phases d'intensification et de diversifications. Ces deux notions sont importantes dans la conception d'une métaheuristique.

### 3.2.2 Avantages et inconvénients

Le principal avantage des métaheuristiques est d'être des méthodes généralistes pouvant être adaptées à un large panel de problèmes d'optimisation. Cependant, elles sont moins performantes que des méthodes exactes de résolution, si ces dernières existent. De plus, la découverte de l'optimum global en un temps fini n'est pas garantie.

Le domaine de la recherche opérationnelle utilise des métaheuristiques pour tous les problèmes qui ne sont pas optimisable efficacement par des approches purement mathématique. Ce sont, en fait, la plupart des problèmes réels : positionnement de composants électroniques sur une carte, découpe d'un nombre donnée de patrons sur un support (papier, acier, cuir) avec le moins de chute possible, ...

L'efficacité d'une métaheuristique repose sur deux objectifs contradictoires :

- la vitesse, mesurée en nombre d'évaluations de la fonction coût (ou objectif), qui est la partie la plus coûteuse en temps de calcul.

- la précision, qui est donnée par la distance entre la solution trouvée et l'optimum réel. Cette distance peut se mesurer vis-à-vis de la valeur de la fonction objectif ou de la solution.

La plupart du temps, une métaheuristique rapide est peu près précise et inversement.

Généralement, un choix doit être fait quant au critère d'arrêt adéquat. Un nombre d'évaluation ou un temps imparti est souvent utilisé, mais il peut également être décidé d'atteindre une valeur donnée de la fonction objectif. Il est également possible de choisir des critères dépendants du comportement de l'algorithme. En tout état de cause, le choix du critère d'arrêt influence la qualité de l'optimisation.

L'utilisation de métaheuristicques peut paraître relativement simple, en première approche, mais il est souvent nécessaire d'adapter l'algorithme au problème optimisé. En effet, la plupart des métaheuristicques disposent d'un certain nombre de paramètres dont le réglage n'est pas nécessairement trivial. Enfin, obtenir de bonnes performances passe généralement par une étape d'adaptation des diverses étapes de l'algorithme (initialisation, notamment). En pratique, seul le savoir-faire et l'expérience de l'utilisateur permettent de gérer ces problèmes.

### 3.3 Procédure d'optimisation

Comme énoncé précédemment, l'optimisation mécanique est une étape primordiale puisque la position et la géométrie des pastilles piézoélectriques ont une grande influence sur la performance des shunts [24, 53]. Plus précisément, trouver les paramètres du système qui maximisent les  $k_i$  relève du domaine de l'optimisation combinatoire. Ce type de problème est caractérisé, entre autre, par un espace de recherche dont la taille croît de manière exponentielle avec le nombre de paramètres du système. Afin d'approcher la solution optimale dans un temps raisonnable, l'optimisation mécanique est divisée en deux étapes.

#### 3.3.1 Caractérisation et paramétrisation du problème

Le problème à résoudre présente les caractéristiques suivantes :

- l'existence de nombreux optima locaux du fait, notamment, que lorsque la structure vibre selon un de ses modes propres, celle-ci présente plusieurs maxima locaux de déformation ;
- les pastilles ne doivent pas se chevaucher, ni sortir de la zone dans laquelle elles évoluent. La masse totale de matériau piézoélectrique ne doit pas non plus dépasser un certain seuil<sup>4</sup>. Ces contraintes fortes interdisent à l'algorithme d'optimisation d'explorer de larges sous-ensembles de l'espace de recherche. Ce dernier comporte donc de nombreuses discontinuités ;
- le temps de calcul de la fonction objectif est prohibitif si plusieurs milliers de calculs sont nécessaires.

Par conséquent, l'utilisation d'une métaheuristique est souhaitée. Dès lors, ce n'est plus la solution optimale au problème de maximisation des coefficients de couplages modaux électromécaniques qui est recherchée, mais une solution approchée. Les métaheuristicques les plus classiques sont celles fondées sur la notion de parcours. Dans cette optique, l'algorithme fait évoluer une seule solution sur l'espace de recherche à chaque itération. La notion de voisinage est alors primordiale. Les plus connues dans cette classe sont le recuit simulé et la recherche avec solution taboue. L'autre approche utilise la notion de population. La métaheuristique

---

<sup>4</sup>Sans critère de masse, l'algorithme tendrait à recouvrir une grande partie de la structure de pastilles piézoélectriques. Optimiser la disposition et la taille des pastilles n'aurait alors plus de sens.

manipule un ensemble de solutions en parallèle à chaque itération. Les algorithmes génétiques ou les algorithmes de colonies de fourmis font partie de cette classe.

Par ailleurs, des contraintes sont imposées au modèle éléments finis afin de simplifier l'implémentation du code.

- le maillage de la structure et celui des pastilles doivent être compatibles ;
- le maillage de la structure est figé, c'est-à-dire que celle-ci n'est pas remaillée lors de la procédure d'optimisation ;
- le maillage de la surface de la structure sur laquelle vont évoluer les pastilles doit être régulier ;
- l'empreinte d'une pastille sur la structure est de forme rectangulaire.

Cette dernière restriction ne concerne pas directement la forme de la pastille. Si une pastille est collée sur une portion de disque maillée régulièrement dans le système de coordonnées cylindrique par exemple (Fig. 3.1(a)) ou, pour une portion de celui-ci, dans le système de coordonnées cartésien (Fig. 3.1(b)), ce qui est appelé ici empreinte est rectangulaire dans les deux cas, mais sa forme physique change.

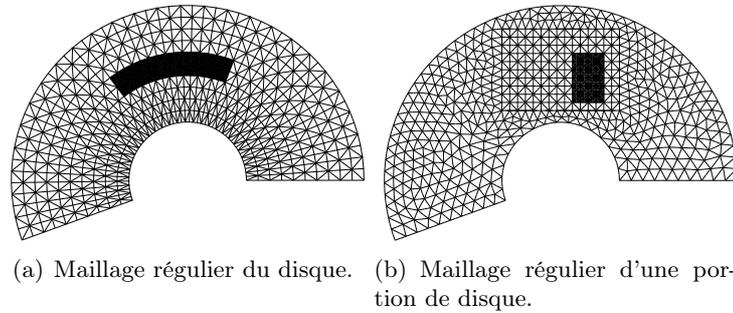


FIG. 3.1 – *Forme d'une empreinte rectangulaire de pastille piézoélectrique (noir) selon le type de maillage.*

Dans tous les cas de figure, la position et la géométrie d'une pastille sont entièrement déterminées par l'intermédiaire de 5 paramètres (Fig. 3.2) : 2 coordonnées curvilignes, notées  $x_-$  et  $y_-$ , pour la localisation sur la surface de la structure et 3 paramètres géométriques, notés  $L_x$ ,  $L_y$  et  $h$ . Sur la figure 3.2, la pastille est autorisée à évoluer à l'intérieur de la zone verte, qui est définie par l'utilisateur et maillée régulièrement. Sa position est repérée par rapport à un point de la frontière. Le nombre de valeur que peuvent prendre les paramètres  $x_-$ ,  $y_-$ ,  $L_x$  et  $L_y$  est directement lié à la finesse du maillage. Le nombre d'épaisseurs  $h$  est quant à lui limité par la contrainte  $h/\min(L_x, L_y) \ll 1$ . Si  $P$  pastilles sont considérées, l'espace de

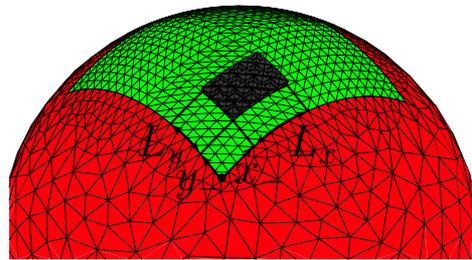


FIG. 3.2 – *Localisation d'une pastille sur un maillage régulier.*

recherche, noté  $\mathcal{A}$ , est un sous-ensemble discret et fini de  $\mathbb{R}^{5P}$  et les éléments de  $\mathcal{A}$ , notés  $D$ ,

sont appelés les solutions admissibles ou *design*.

$$\mathbf{D} = \underbrace{(x_-^{(1)}, y_-^{(1)}, L_x^{(1)}, L_y^{(1)}, h^{(1)})}_{\text{pastille 1}}, \dots, \underbrace{(x_-^{(P)}, y_-^{(P)}, L_x^{(P)}, L_y^{(P)}, h^{(P)})}_{\text{pastille P}}^T, \quad (3.4)$$

soit, après réarrangement,

$$\mathbf{D} = (\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y, \mathbf{h})^T. \quad (3.5)$$

### 3.3.2 Description des algorithmes

#### (a) Algorithme de recuit simulé

Le processus physique de recuit consiste à chauffer une pièce métallique à haute température puis à la refroidir graduellement afin d'atteindre un état d'énergie minimum. Il est à noter que celui-ci n'est atteint que si la température de chauffage est assez élevée et le refroidissement assez lent. Un processus analogue au recuit peut être simulé *via* un algorithme pour la résolution d'un problème d'optimisation. Les solutions du problème d'optimisation sont alors substituées aux états du système physique et le résultat de la fonction coût aux différents niveaux d'énergie. La mise en œuvre de cette procédure requiert l'utilisation de trois opérateurs :

- le premier doit générer une nouvelle solution par une transformation locale de la solution actuelle. Cet opérateur doit être conçu afin que l'espace de recherche soit échantillonné de manière efficace, ceci afin d'accélérer la convergence. Pour répondre à cet objectif, la méthode adoptée consiste à contraindre les transformations à être de plus en plus locales au fur et à mesure que la recherche progresse.
- le second concerne la probabilité d'accepter une nouvelle solution. Le choix s'est porté sur un test du type

$$\mathcal{P} = \begin{cases} 1 & \Delta C \geq 0, \\ e^{\Delta C/T} & \Delta C < 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $T$  est la température et  $\Delta C$  la variation du coût de la solution. Ainsi, une solution qui augmente la valeur de la fonction coût est toujours acceptée tandis que si elle la diminue, elle est acceptée avec une probabilité qui décroît à mesure que la température diminue.

- le dernier opérateur pilote la méthode qui fixe la température initiale et sa décroissance. Afin d'obtenir une convergence de l'algorithme vers l'optimum global, la température doit être abaissée lentement et en accord avec l'état d'avancement de la recherche. Pour cela, à chaque décrétement de  $T$ , la simulation doit être assez longue pour que le système atteigne un état d'équilibre<sup>5</sup>. Dès lors, deux difficultés apparaissent :
  - la principale réside dans le pilotage de la descente en température ou, dit autrement, à quelle vitesse le paramètre  $T$  doit-il décroître afin d'éviter que la recherche ne se fixe sur un maximum local ;
  - la seconde concerne le nombre de mouvements nécessaires dans l'espace de recherche à chaque décrétement de  $T$  pour atteindre l'état d'équilibre. La plupart du temps, il revient à l'utilisateur de régler ces deux derniers paramètres.

Différentes variantes de l'algorithme de recuit simulé ont été proposées pour tenter de régler le problème de la descente en température. La solution choisie ici et proposée dans [44] est appelée *Thermodynamic Simulated Annealing*. C'est une méthode alternative qui permet de

---

<sup>5</sup>Un état d'équilibre se manifeste par  $\Delta C \leq \epsilon$  pour un certain nombre de transformations successives.

piloter  $T$  sans que l'utilisateur ait à intervenir en ajustant expérimentalement les paramètres de l'opérateur. Le principe de l'algorithme *TSA* repose sur l'idée de mesurer  $T_{k+1}$  à l'incrément  $k + 1$  uniquement à partir de la somme des variations de la fonction coût et de  $T_k$ .

Afin de présenter succinctement la méthode, il est utile de considérer le premier et le second principe de la thermodynamique appliqués aux transformations réversibles. Le premier principe stipule qu'au cours d'une transformation, la variation d'énergie totale d'un système fermé est égale à la somme des quantités de chaleur reçues et des travaux reçus, soit  $\Delta U = Q + W$ . Le second principe énonce que la variation d'entropie d'un système fermé au cours d'une transformation réversible (pas de création d'entropie au sein du système) et dont la température est uniforme est donnée par  $Q = T\Delta S$ . En combinant le premier et le second principe, et en considérant le fait que le système ne reçoit aucun travail de l'extérieur, il est possible d'avoir une mesure indirecte de la température par la relation  $T = \Delta U/\Delta S$ . La variation de la valeur de la fonction coût est équivalente ici à celle de l'énergie interne, soit

$$T = \frac{\Delta C}{\Delta S}. \quad (3.7)$$

Il s'agit ensuite d'exprimer la variation d'entropie à partir de la probabilité  $\mathcal{P}$  d'accepter ou non une transformation. Dans l'algorithme *TSA*, cette relation est donnée par  $\Delta S = \ln \mathcal{P}$ . Ainsi, à la  $k$ -ième itération, la variation totale d'entropie est égale à  $\Delta S = \ln \prod_{i=1}^k \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^k \ln \mathcal{P}_i$ . Puisque  $\mathcal{P}_i = 1$  si  $\Delta C \geq 0$  alors

$$\Delta S = \sum_{i=1}^k \frac{\Delta C_i}{T_i}. \quad (3.8)$$

La transformation, qu'elle soit acceptée ou non, produit toujours une variation d'entropie. La variation totale de la valeur de la fonction coût est quant à elle donnée par

$$\Delta C = \sum_{i \in \mathcal{A}_{\text{acceptée}}^k} \Delta C_i, \quad (3.9)$$

où  $\mathcal{A}_{\text{acceptée}}^k$  désigne l'ensemble des indices des transformations acceptées à l'itération  $k$ . En insérant (3.8) et (3.9) dans (3.7), il vient

$$T_{k+1} = k_A \frac{\sum_{i \in \mathcal{A}_{\text{acceptée}}^k} \Delta C_i}{\sum_{i=1}^k \Delta C_i / T_i}. \quad (3.10)$$

La température peut donc être évaluée à chaque itération de l'algorithme uniquement à partir de données internes au système.  $T_{k+1}$  est utilisée pour le test d'acceptation de l'incrément  $k + 1$ . Un paramètre externe, noté  $k_A$  est introduit afin d'ajuster le temps de simulation au temps disponible de l'utilisateur.

En ce qui concerne la valeur de  $T_0$ , puisque la configuration initiale est générée aléatoirement, il est conseillé, selon [137], de la calculer à l'aide de la relation

$$T_0 = -\frac{\overline{\|\Delta C\|}}{\ln \mathcal{P}}, \quad (3.11)$$

où  $\overline{\|\Delta C\|}$  est la moyenne de la valeur absolue de la variation de la fonction coût obtenue à partir d'une séquence initiale de transformations tirées au hasard et  $\mathcal{P}$  une probabilité d'acceptation élevée proche de 1, de telle manière qu'au départ, presque toutes les nouvelles configurations soient acceptées.

En résumé, à chaque itération de l'algorithme de recuit simulé, et par analogie avec le processus physique de recuit, une nouvelle solution est choisie dans le voisinage de la solution

actuelle avec une probabilité qui dépend du paramètre global  $T$ , qui est abaissé graduellement durant la procédure<sup>6</sup>. La dépendance entre la probabilité du tirage et  $T$  est définie de manière à ce que la solution actuelle change de manière quasi aléatoire lorsque  $T$  est grand puis de plus en plus localement lorsque  $T$  diminue. Les nouvelles configurations ou *design*, comme définis par la relation (3.5), sont ensuite évaluées et soumises à un test d'acceptation. La nature probabiliste de l'algorithme l'autorise à accepter temporairement des nouvelles solutions moins bonnes que la solution actuelle afin de pouvoir s'extraire des optima locaux. Pour de plus amples détails sur l'algorithme, le lecteur peut se référer à [111].

Le schéma de l'algorithme implémenté dans la procédure d'optimisation est donné sur la figure 3.3.

### (b) Algorithme de recherche avec liste taboue

Cette approche vise à éviter les optimums locaux par une stratégie d'interdiction ou, plus généralement, de pénalisation de certains mouvements. Par ailleurs, comme énoncé au début du chapitre 3, les hypothèses posées lors de la première partie de l'optimisation sont maintenant relâchées. Le nouveau problème consiste dorénavant à conduire une optimisation avec prise en compte de la masse et de la raideur ajoutées par les pastilles piézoélectriques. Cela signifie qu'il faut résoudre le problème aux valeurs propres (2.49) pour chaque nouveau *design* testé. La résolution de (2.49) est une étape gourmande en temps de calcul et ne peut pas être faite avec un code éléments finis commercial, plus de quelques milliers de fois dans un temps raisonnable<sup>7</sup>. Pour cette raison, il est nécessaire de faire démarrer la recherche à partir d'une bonne configuration (venant de l'algorithme *TSA*) pour éviter d'avoir à tester un nombre trop important de *design* avant d'atteindre une solution qui maximise la fonction coût.

L'objectif est de regarder localement l'influence de la masse et de la raideur des pastilles piézoélectriques sur la configuration optimale trouvée précédemment. Pour atteindre ce but, un algorithme de recherche avec liste taboue [56, 26] est choisi. C'est une technique de recherche locale dotée d'une mémoire, qui améliore les performances des méthodes classiques de recherche (méthode du gradient, ...).

Lors d'une recherche avec liste taboue, les mouvements dans l'espace de recherche, *i.e.*, dans l'ensemble des solutions admissibles, se font par l'intermédiaire d'un voisinage local de la solution courante. D'une manière générale, une configuration  $\mathbf{D}$ , telle que définie par l'équation (3.5), peut également se noter  $\mathbf{D} = \{a_i\}$ ,  $i = (1, 2, \dots, \lambda)$ , avec  $\lambda = 5P$  et  $a_i$  prenant successivement les valeurs  $x_-^{(1)}$ ,  $x_-^{(2)}$ , ...,  $h^{(P-1)}$ ,  $h^{(P)}$ . Chacun des paramètres précédents est choisi dans un ensemble de valeurs possibles. Ces ensembles sont notés, respectivement,  $\mathcal{X}_-$ ,  $\mathcal{Y}_-$ ,  $\mathcal{L}_x$ ,  $\mathcal{L}_y$ ,  $\mathcal{H}$ . Cependant, à chaque fois qu'une pastille est construite, c'est-à-dire que ses 5 paramètres  $(x_-^{(p)}$ ,  $y_-^{(p)}$ ,  $L_x^{(p)}$ ,  $L_y^{(p)}$ ,  $h^{(p)})$  sont choisis, il faut vérifier trois conditions. La pastille ne doit pas sortir de la zone autorisée, ni en chevaucher une autre. La masse totale de matériau piézoélectrique ne doit pas non plus dépasser une valeur seuil définie par l'utilisateur. Dès lors, un voisinage de  $\mathbf{D}$ , noté  $N(\mathbf{D})$ , est un ensemble d'ensemble [26] tel que

$$N(\mathbf{D}) = \{\mathbf{D}_i\} \quad i = 1, \dots, 2\lambda, \quad (3.12)$$

---

<sup>6</sup>En terme de classe d'algorithme, il est possible de considérer qu'un recuit simulé, où la température baisse par paliers, a une structure à population puisqu'à chaque palier c'est un ensemble de points qui est manipulé. Il s'agit d'une méthode d'échantillonnage particulière.

<sup>7</sup>Une solution qui est souvent employée pour réduire les temps de calcul, mais qui n'a pas été mise en œuvre ici, consisterait à condenser la structure sur les nœuds de la zone où peuvent évoluer les pastilles piézoélectriques. Ainsi, le nombre de degrés de liberté du problème aux valeurs propres à résoudre à chaque itération de l'algorithme d'optimisation serait grandement réduit.

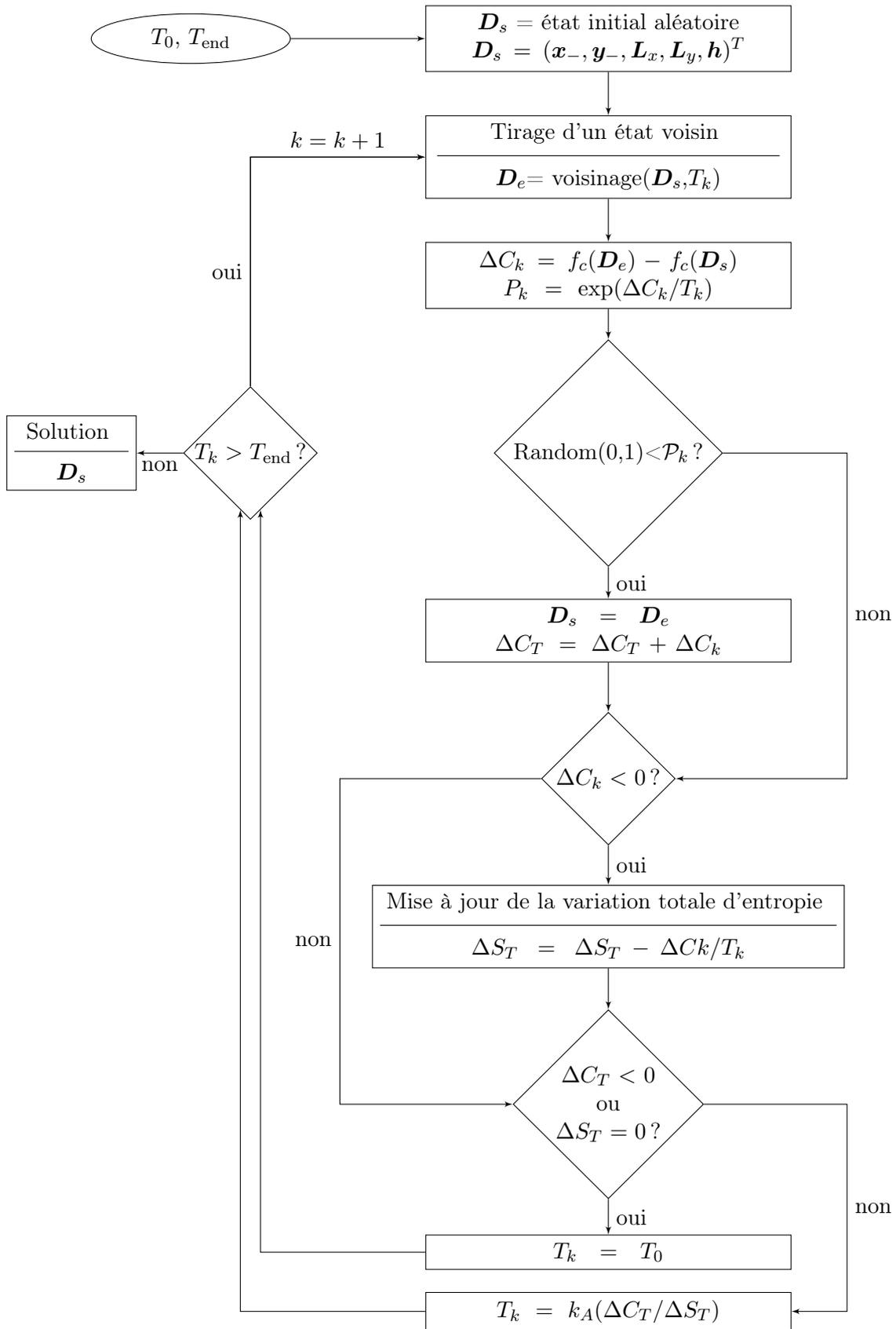


FIG. 3.3 – *Algorithme TSA*

où, si  $a_j = s_k$ , avec :

- $s_k \in \mathcal{X}_-$  si  $j \in [1, P]$  et  $k \in \{1, \dots, \text{Card}(\mathcal{X}_-)\}$ ,
- $s_k \in \mathcal{Y}_-$  si  $j \in [P + 1, 2P]$  et  $k \in \{1, \dots, \text{Card}(\mathcal{Y}_-)\}$ ,
- $s_k \in \mathcal{L}_x$  si  $j \in [2P + 1, 3P]$  et  $k \in \{1, \dots, \text{Card}(\mathcal{L}_x)\}$ ,
- $s_k \in \mathcal{L}_y$  si  $j \in [3P + 1, 4P]$  et  $k \in \{1, \dots, \text{Card}(\mathcal{L}_y)\}$ ,
- $s_k \in \mathcal{H}$  si  $j \in [4P + 1, 5P]$  et  $k \in \{1, \dots, \text{Card}(\mathcal{H})\}$ ,

alors, pour  $j = 1, \dots, \lambda$

$$\mathbf{D}_j = \{a_1, \dots, a_{j-1}, s_{k-1}, a_{j+1}, \dots, a_\lambda\}, \quad (3.13)$$

et encore pour  $j = 1, 2, \dots, \lambda$ ,

$$\mathbf{D}_{j+\lambda} = \{a_1, \dots, a_{j-1}, s_{k+1}, a_{j+1}, \dots, a_\lambda\}, \quad (3.14)$$

avec  $k \pm 1$  modulo

- $\text{Card}(\mathcal{X}_-) \in \{1, 2, \dots, \text{Card}(\mathcal{X}_-)\}$  si  $j \in [1, P]$
- ...
- $\text{Card}(\mathcal{H}) \in \{1, 2, \dots, \text{Card}(\mathcal{H})\}$  si  $j \in [4P + 1, 5P]$

L'expression du voisinage donnée par l'équation (3.12), et dont les configurations  $\mathbf{D}_i$  sont définies par les équations (3.13) et (3.14), a une profondeur de 1. Pour passer à une profondeur  $\beta$ , il suffit de remplacer  $s_{k-1}$  et  $s_{k+1}$  par  $s_{k-\beta}$  et  $s_{k+\beta}$ . De plus, ce voisinage est tel que  $i = 1, 2, \dots, 2\beta\lambda$ . Si  $\mathbf{D}$  est la configuration courante et  $N(\mathbf{D})$  son voisinage, alors l'algorithme sélectionne la configuration *autorisée*  $\mathbf{D}' \in N(\mathbf{D})$  qui présente la valeur de la fonction coût la plus élevée.  $\mathbf{D}'$  est une configuration *autorisée* si elle n'appartient pas à la *liste taboue*. Cette liste consiste en un tableau de taille  $m \times 5P$  où sont répertoriées les  $m$  dernières configurations acceptées. Une fois que l'algorithme a bougé sur le *design*  $\mathbf{D}'$ , il l'inclut dans la liste. Suivant la valeur de  $m$ , la liste taboue agit comme une mémoire à plus ou moins long terme. Au final, les 3 étapes principales de l'algorithme se résument à :

- générer le voisinage ;
- calculer la fonction coût pour l'ensemble des voisins autorisés puis prendre celui associé à la valeur la plus élevée ;
- mettre à jour la liste taboue.

Cette procédure est la version de base des techniques de recherche avec liste taboue et peut être répétée jusqu'à ce qu'un nombre maximum d'itérations soit atteint ou qu'un certain temps de calcul soit dépassé. Un des mérites de la liste est qu'elle permet à l'algorithme, jusqu'à un certain point, de passer les maxima locaux et d'éviter ainsi les parcours en boucle sur de petits sous ensembles de l'espace de recherche [26]. Une description détaillée de la recherche avec taboue peut être trouvée dans [56, 57]. Par la suite, lorsque cet algorithme démarre avec une configuration pré optimisée fournie par l'algorithme de recuit simulé, la profondeur du voisinage est réglée à 1 ou 2, puisque l'objectif est d'optimiser localement le *design*.

Pour valider la conception de l'algorithme et évaluer ses performances, indépendamment de l'application au cas des pastilles piézoélectriques, une série de tests simples lui a été appliquée. La fonction objectif utilisée est de la forme

$$f_c(\mathbf{D}) = \sum_{i=1}^r \tau_i \log \left( \frac{v_i}{1 + \|\mathbf{D}_{\text{obj}}^{(i)} - \mathbf{D}\|} \right), \text{ avec } v_i = 1 + \max_{\mathbf{D}} \left( \|\mathbf{D}_{\text{obj}}^{(i)} - \mathbf{D}\| \right) \quad (3.15)$$

	longueur de la liste	$D_{\text{ini}}$	$D_{\text{obj}}$	$\beta$
optimum unique	10	{11 25 14 10 1}	{21 47 10 4 4}	2
optima multiples	50	{11 25 14 10 1}	{21 47 10 4 4}	2

TAB. 3.1 – Réglage des paramètres de l'algorithme de recherche taboue.

la configuration  $\mathbf{D}$  comprend 5 paramètres, soit  $\mathbf{D} = \{a_1, \dots, a_5\}$ . Les  $a_i$  prennent chacun leur valeur dans un sous ensemble différent de  $\mathbb{N}$ , noté  $\mathcal{N}_i$  tel que,  $\forall i \text{ Card}(\mathcal{N}_i) = 30$ . L'espace de recherche est ainsi constitué de  $30^5 = 24.3$  millions de points. L'algorithme doit être capable de trouver le maximum global de  $f_c$  dans les cas où il y a :

- un seul optimum, ce qui correspond à  $r = 1$ . La figure 3.4(a) donne une illustration de la fonction objectif  $f_c$  à un seul optimum dans le cas où  $\mathbf{D} = \{a_1, a_2\}$ ;
- un optimum global avec de nombreux optima pauvres (Fig. 3.4(b)), puis moyens (Fig. 3.4(c)). Ces deux cas sont obtenus en prenant  $r = 1$  et en ajoutant du bruit<sup>8</sup>;
- différents optima avec des niveaux similaires (Fig. 3.5(a)). La somme est tronquée à  $r = 10$ ,  $\tau_1$  à  $\tau_7$  sont pris positifs pour définir des "pics",  $\tau_8$  à  $\tau_{10}$  sont négatifs;
- différents optima avec de nombreux optima pauvres (Fig. 3.5(b)), puis moyens (Fig. 3.5(c)).

Les paramètres de l'algorithme (tab. 3.1) sont définis de telle manière qu'à chaque itération, un voisinage contenant  $2\beta\lambda = 2 \times 2 \times 5 = 20$  configurations "autour" de la configuration courante soit créé. Le design initial  $\mathbf{D}_{\text{ini}}$  et objectif  $\mathbf{D}_{\text{obj}}$  sont tirés au hasard dans l'espace de recherche.

Plusieurs observations peuvent être tirées de l'analyse des résultats des figures 3.4 et 3.5 :

- les cas à un seul optimum sans bruit et avec bruit faible sont résolus rapidement puisqu'une quinzaine d'itérations suffisent. L'algorithme a donc exploré  $15 \times 20 = 300$  configurations environ pour trouver  $\mathbf{D}_{\text{obj}}$ ;
- les cas à plusieurs optima avec ou sans bruit, ainsi que celui à un optimum fortement bruité nécessitent une centaine d'itérations;
- une liste taboue plus longue est nécessaire dans les cas à plusieurs optima. Si une liste courte est utilisée, comme dans le cas à un seul optimum par exemple, l'algorithme a tendance à boucler autour d'optima locaux sans pouvoir en sortir (Fig. 3.6).

Il apparaît, au terme de cette première application de l'algorithme de recherche avec liste taboue, que la connaissance préalable du problème permet de choisir de manière judicieuse les valeurs des paramètres, tels que la profondeur de voisinage et la longueur de la liste. Dans la pratique, c'est au terme de plusieurs essais que l'utilisateur pourra les définir afin d'atteindre une bonne solution, voire la meilleure, avec un nombre d'itérations raisonnable. Par ailleurs, la manière dont l'algorithme construit un voisinage, c'est-à-dire son mode d'échantillonnage, semble être correcte puisqu'il parcourt l'espace de recherche de  $\mathbf{D}_{\text{ini}}$  à  $\mathbf{D}_{\text{obj}}$  en peu d'itérations. Pour le cas de la figure 3.5(c), par exemple,  $\mathbf{D}_{\text{obj}}$  est atteint en 120 itérations environ, ce qui a nécessité l'évaluation de  $120 \times 20 = 2400$  configurations, ce qui, ramené au nombre de points de l'espace de recherche, reste faible.

<sup>8</sup>La génération de nombres aléatoires se fait en utilisant une distribution normale de moyenne nulle et d'écart type 1 (fonction *randn* de *Matlab*).

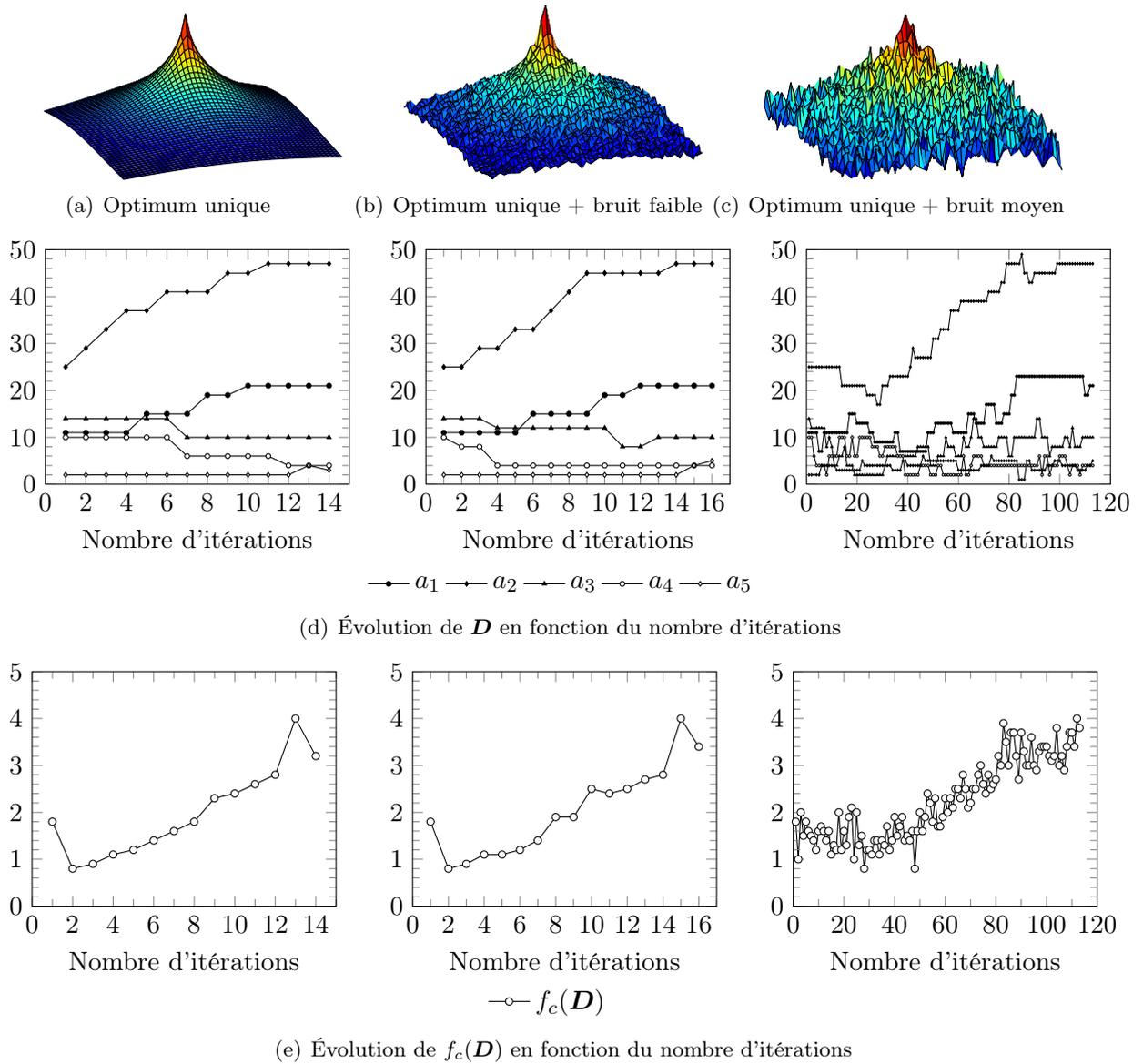


FIG. 3.4 – Convergence de l’algorithme de recherche avec tabou dans le cas d’une fonction objectif présentant un optimum unique. Les figures 3.4(a), 3.4(b) et 3.4(c) sont données à titre d’illustration dans le cas où  $\mathbf{D} = \{a_1, a_2\}$ .

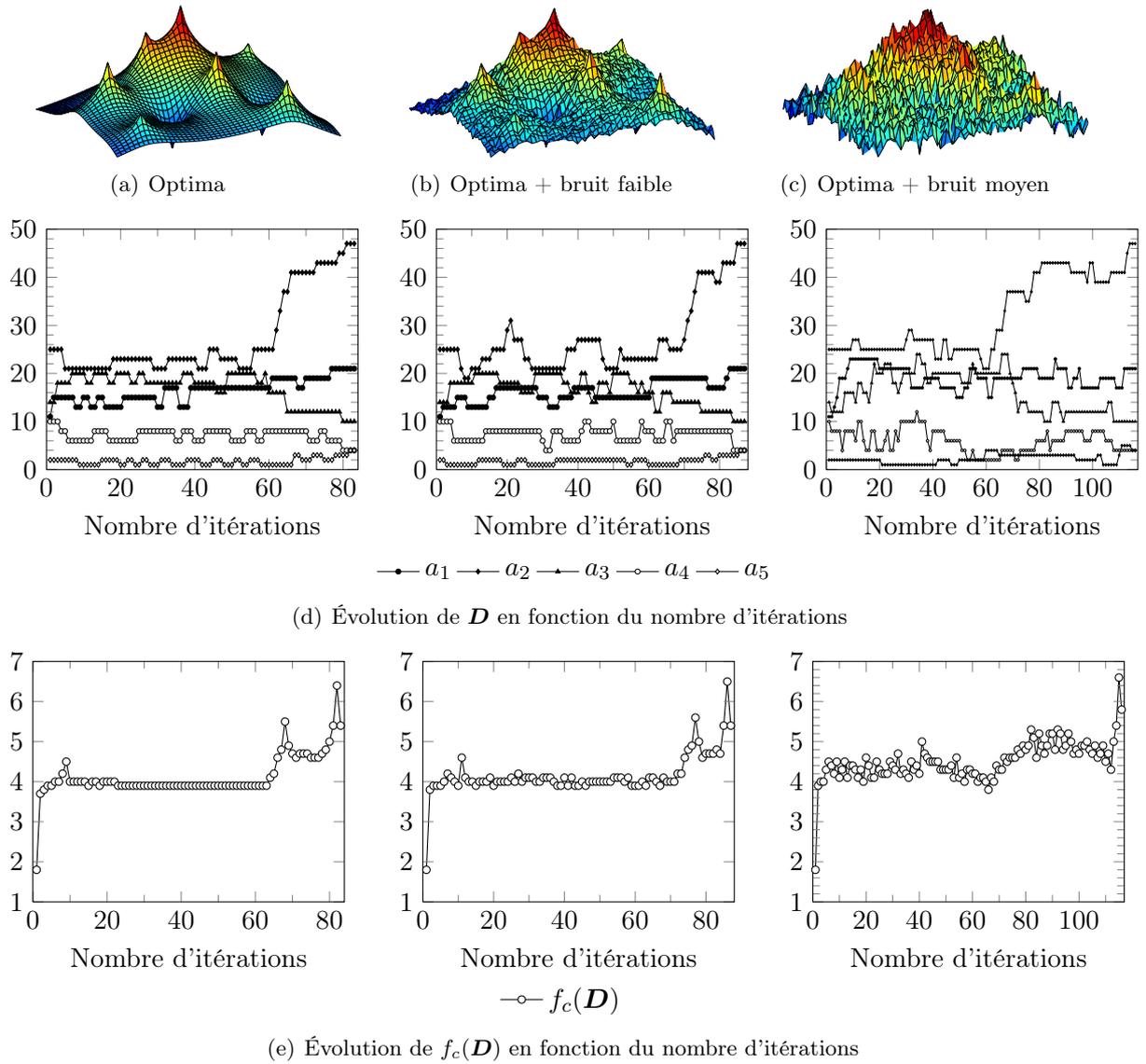


FIG. 3.5 – Convergence de l'algorithme de recherche avec taboue dans le cas d'une fonction objectif présentant plusieurs optima. Les figures 3.5(a), 3.5(b) et 3.5(c) sont données à titre d'illustration dans le cas où  $\mathbf{D} = \{a_1, a_2\}$ .

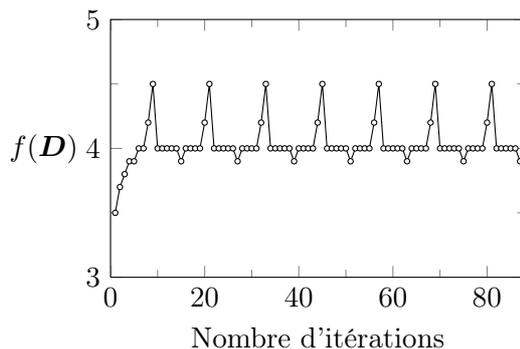


FIG. 3.6 – Algorithme munie d'une liste courte à 10 itérations, appliqué au cas de la figure 3.5(a).

### 3.3.3 Problématique et choix de la fonction coût

#### (a) Fonction coût pour l'algorithme de recuit simulé

Avant d'aborder le choix de la fonction coût proprement dit, il est nécessaire de définir un indicateur de couplage efficace. L'algorithme de recuit simulé devant évaluer plusieurs milliers de fois les couplages modaux, le terme d'efficacité se rapporte davantage à la rapidité d'évaluation du couplage qu'à la justesse de la prédiction. Pour cette raison, le terme d'indicateur de couplage est employé à la place de coefficient de couplage.

La caractéristique qui a été fixée à la première étape du processus d'optimisation (recuit simulé) est ainsi de devoir converger très rapidement vers une solution qui, bien qu'elle ne soit pas optimale, doit être assez "bonne" pour pouvoir être fournie à la seconde étape (recherche avec taboue) qui achèvera d'optimiser les paramètres des pastilles. Le critère de rapidité peut être atteint en supposant que la raideur et la masse des pastilles sur la structure hôte ont une influence faible sur les modes et les fréquences propres de cette dernière. Cette approximation, qui conduit à n'effectuer qu'une seule résolution du problème aux valeurs propres, a déjà été adoptée dans des études précédentes<sup>9</sup>. L'indicateur de couplage devra donc être capable, à partir des déformées modales de la structure nue, qui sont les seules informations disponibles *a priori*, d'estimer en peu de temps les coefficients de couplage électromécanique associés aux paramètres (géométrie et position) des pastilles.

L'idée principale consiste à utiliser la théorie des plaques pour définir cet indicateur et à l'utiliser dans le cas d'une structure 3D. L'approximation consiste à dire que le couplage modal d'une pastille faiblement courbée est le même que celui d'une pastille plane. Dans le cadre de la théorie de Kirchhoff-Love, l'équation différentielle du mouvement transverse  $w$  d'une plaque sur la surface de laquelle est collée une pastille piézoélectrique également plane est donnée par [123]

$$D_p \Delta \Delta w + \Delta M_p + \rho_p h_p \ddot{w} = q, \quad (3.16)$$

avec  $D_p$  la raideur en flexion,  $\rho_p$  et  $h_p$  la densité et l'épaisseur de la plaque et  $q$  une force externe transverse. L'opérateur Laplacien est noté  $\Delta$  et  $M_p$  est le terme de moment provenant des forces exercées par la pastille piézoélectrique. Dans l'équation (3.16), le cisaillement transverse et l'inertie de rotation sont négligés.

Dans le cas d'une pastille rectangulaire plane uniformément polarisée, le moment  $M_p$  est

$$M_p = \Theta [\text{H}(x - x_-) - \text{H}(x - x_+)] [\text{H}(y - y_-) - \text{H}(y - y_+)] V, \quad (3.17)$$

<sup>9</sup>Dans [54], par exemple, l'auteur utilise un critère basé sur l'énergie de déformation modale de la structure nue, afin de déterminer la position optimale d'une pastille piézoélectrique sur une plaque composite.

où  $\Theta$  est une constante qui dépend de la raideur de la plaque  $D_p$ , de la constante piézoélectrique  $e_{31}$  et de la différence de potentiel  $V$ . La fonction d'Heaviside  $H$  et les coordonnées  $x_-$ ,  $x_+$ ,  $y_-$  and  $y_+$  sont utilisées pour décrire l'empreinte de la pastille dans les directions  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . Afin d'introduire un indicateur de couplage modal, le déplacement  $w$  est projeté sur la base des modes propres transverses de la plaque  $(\psi_i, \omega_i)$ .

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x, y) q_i(t). \quad (3.18)$$

En injectant l'équation (3.18) dans (3.16) et en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes, il vient

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \tilde{k}_i V + \omega_i^2 q_i = q_i \quad i \in \mathbb{N}, \quad (3.19)$$

avec

$$\tilde{k}_i = \iint_S \Delta M_p \psi_i \, dS. \quad (3.20)$$

$S$  est la surface commune à la pastille et à la plaque. Si la géométrie de cette dernière est discrétisée avec des éléments finis 3D, alors, le déplacement transverse modal  $\psi_i(x, y)$  en chaque nœud peut être obtenu en calculant le produit scalaire du vecteur propre éléments finis  $\Phi_i$  (calculé, par exemple, à l'aide d'un code éléments finis commercial comme Nastran) avec le vecteur contenant les normales à la surface en chaque nœud, noté  $\mathbf{n}$ . Dès lors, il est possible d'écrire  $\tilde{k}_i$  comme

$$\tilde{k}_i = \iint_S \Delta M_p (\Phi_i \cdot \mathbf{n}) \, dS. \quad (3.21)$$

La démarche adoptée ici revient donc à remplacer la structure sous la pastille par une plaque de même empreinte, ce qui revient à négliger les courbures. L'insertion de (3.17) dans (3.21) mène à l'expression développée

$$\begin{aligned} \tilde{k}_i = \Theta \int_{x_-}^{x_+} \left( \frac{\partial (\Phi_i \cdot \mathbf{n})}{\partial y} \Big|_{y=y_+} - \frac{\partial (\Phi_i \cdot \mathbf{n})}{\partial y} \Big|_{y=y_-} \right) dx \\ + \Theta \int_{y_-}^{y_+} \left( \frac{\partial (\Phi_i \cdot \mathbf{n})}{\partial x} \Big|_{x=x_+} - \frac{\partial (\Phi_i \cdot \mathbf{n})}{\partial x} \Big|_{x=x_-} \right) dy. \end{aligned} \quad (3.22)$$

$\tilde{k}_i$  est l'indicateur de couplage modal sur lequel doit être construit la fonction coût utilisée dans l'algorithme de recuit simulé. Il dépend uniquement des paramètres géométriques de la pastille  $x_-$ ,  $x_+$ ,  $y_-$  et  $y_+$ , des modes  $\Phi_i$  et d'une constante  $\Theta$ . L'indicateur de couplage modal entre la  $p$ -ième pastille et le  $i$ -ième mode s'écrit  $\tilde{k}_i^{(p)}$ .

La définition proprement dite de la fonction coût dépend du cas de figure considéré. Il y en a 2 :

- l'optimisation mono-objectif, où une ou plusieurs pastilles doivent être optimisées pour un seul mode ;
- l'optimisation multicritère où une ou plusieurs pastilles doivent être optimisées pour plusieurs modes en même temps.

L'optimisation multicritère sera abordée dans la section 3.3.5. La définition de la fonction coût dans le cas d'une optimisation de  $P$  pastilles connectées en parallèle pour le  $i$ -ième mode a été choisie très simplement. Par analogie avec l'équation (2.87),

$$f_c(\mathbf{D}) = \tilde{k}_i = \sum_{p=1}^P |\tilde{k}_i^{(p)}| \quad (3.23)$$

### (b) Fonction coût pour l'algorithme de recherche avec taboue

De la même façon, dans le cas d'une optimisation de  $P$  pastilles en parallèle pour le  $i$ -ième mode, la fonction coût est donnée par

$$f_c(\mathbf{D}) = k_i = \sum_{p=1}^P |k_i^{(p)}|. \quad (3.24)$$

Ce sont les facteurs de couplage modaux, définis dans la section 2.3.4, qui sont utilisés puisque l'algorithme de recherche avec taboue est destiné à travailler avec prise en compte des raideurs et des masses ajoutés par les pastilles.

### 3.3.4 Les critères d'arrêt

L'algorithme de recuit simulé n'a pas besoin de critère d'arrêt car la température finie toujours par atteindre la valeur  $T_{\text{end}}$  qui déclenche l'arrêt de la simulation. Seule la recherche avec liste taboue, de par sa nature, nécessite d'y avoir recourt.

Les critères d'arrêt sont toujours plus ou moins arbitraires puisqu'il n'est jamais possible de savoir si l'algorithme a atteint ou non la solution optimale. Ce sont plutôt des contraintes extérieures (le temps disponible par exemple), ou un certain nombre de comportements de l'algorithme, qui vont servir de base à leur définition.

- Temps imparti : c'est un critère externe donné par l'utilisateur, qui spécifie le temps disponible pour réaliser la simulation. Ce critère d'arrêt est prioritaire sur tous les autres.
- Niveau de performance : la simulation s'arrête lorsque la valeur de la fonction coût dépasse un certain seuil spécifié par l'utilisateur. Le risque est de ne jamais atteindre ce seuil mais le critère du temps imparti est là pour palier à ce problème.
- Comportement oscillatoire : l'algorithme de recherche avec liste taboue ne converge pas de façon asymptotique vers la solution optimale mais "oscille" autour de celle-ci en parcourant en boucle le chemin qui lui permet de passer une fois par la solution optimale toutes les  $m$  itérations au minimum, où  $m$  est la longueur de la liste taboue. Un des critères d'arrêt est basé sur ce constat. En s'aidant d'une mémoire auxiliaire, qui retient le chemin empreinté sur un nombre d'itérations valant plusieurs fois  $m$ , il est possible de repérer si l'algorithme boucle sur le même chemin. Dans ce cas, la simulation est arrêtée et la solution optimale est repérée dans la mémoire auxiliaire.
- Obligation de résultat : si l'algorithme n'a pas trouvé de nouvelle configuration qui soit supérieure à toutes les autres depuis plus de  $N$  itérations, alors la simulation s'arrête.  $N$  est un paramètre fourni par l'utilisateur et doit valoir plusieurs fois la taille de la mémoire auxiliaire.
- Comportement asymptotique : ce dernier critère concerne le cas où l'algorithme progresse vers un optima mais avec une progression trop lente de la valeur de la fonction coût. La simulation est alors arrêtée et l'algorithme reprend avec une profondeur de voisinage plus importante.

Ces critères sont les 5 à avoir été implémentés dans le code.

### 3.3.5 Cas d'une optimisation multicritère

Un problème d'optimisation multi-objectif (ou multicritère) désigne le fait de poursuivre plusieurs objectifs contradictoires, qui doivent être optimisés de concert. C'est, typiquement,

le cas lorsqu'une ou plusieurs pastilles doivent être définies afin de maximiser le couplage électromécanique pour plusieurs mode à la fois.

La principale notion utilisée pour faire face à ce type de problème est celle de front de Pareto. Dans les problèmes multi-objectif, le front de Pareto désigne l'ensemble des solutions non dominées. Cet ensemble regroupe les solutions parmi lesquelles il n'est pas possible de décider si l'une est meilleure qu'une autre, aucune n'étant systématiquement inférieure aux autres sur tous les objectifs. La figure 3.7 permet d'illustrer le propos. Dans cet exemple, où l'objectif est de maximiser conjointement  $k_1$  et  $k_2$ , les points A et B sont non dominés alors que le point C n'est optimum pour aucun des 2 objectifs.

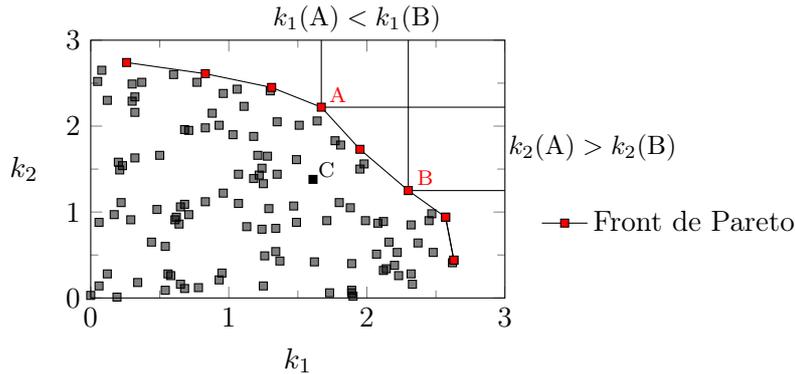


FIG. 3.7 – Exemple de front de Pareto dans un problème de maximisation des facteurs de couplage électromécanique des modes 1 et 2.

L'optimisation multi-objectif introduit un certain nombre de modifications dans l'algorithme de recuit simulé. À chaque tirage d'une configuration  $\mathbf{D}_e$  dans le voisinage de la configuration solution  $\mathbf{D}_s$  (Fig. 3.3), est associé un vecteur  $\Delta C_k$  (et non plus un scalaire) avec autant de composante que de mode visé dans l'optimisation. Les 3 relations d'inégalité que comporte l'algorithme, sur la probabilité  $\mathcal{P}_k$  d'acceptation de  $\mathbf{D}_e$ , la variation de la fonction coût  $\Delta C_k$  et sa variation totale  $\Delta C_T$ , sont remplacées par des tests identiques portant sur chacune des composantes de  $\mathcal{P}_k$ ,  $\Delta C_k$  et  $\Delta C_T$ . La relation est vraie si toutes les composantes vérifient l'inégalité. La raison de ce choix est que l'algorithme de recuit permettant d'explorer un nombre important de configurations, il n'est pas utile de s'intéresser à une configuration meilleure uniquement sur un seul objectif. Ainsi, ne sont retenues que les solutions qui dominent la précédente sur tous les objectifs en même temps. Cette adaptation de l'algorithme de recuit se traduit par des temps de recherche plus long.

L'optimisation multi-objectif modifie également l'algorithme de recherche avec liste taboue. Lorsque le voisinage  $N(\mathbf{D})$  de la configuration courante  $\mathbf{D}$  a été créé, son front de Pareto est construit. Toutes les configurations faisant partie du front sont considérées comme équivalentes. La configuration courante pour l'itération suivante est donc choisie au hasard dans cet ensemble. Ce choix, bien qu'il interdise d'explorer de vastes sous-ensembles de l'espace de recherche, est le seul qui puisse être appliqué lorsque plusieurs modes sont ciblés simultanément sans préférence.

### 3.4 Implémentation du code d'optimisation

L'organisation des différentes étapes du processus d'optimisation, ainsi que leur enchaînement sont donnés à la figure 3.2. Durant l'implémentation du code, de nombreuses moutures ont été testées et il s'est avéré que lors de la phase de pré optimisation, qui utilise l'indicateur

de couplage  $\tilde{k}_i$ , il pouvait être bénéfique de coupler recuit simulé et recherche taboue. Comme l'évaluation de  $\tilde{k}_i$  est très rapide, il n'est coûteux de terminer la pré optimisation en utilisant une recherche taboue pour savoir si, localement, il n'est pas possible de trouver une meilleure pré solution. Celle-ci est ensuite fournie à un deuxième algorithme de recherche taboue, qui lui, calcule à chaque itération les modes propres de la structure munie de ses pastilles.

### 3.5 Applications au cas d'une plaque

#### 3.5.1 Cas d'un seul patch

La première étape de validation de l'algorithme d'optimisation porte sur une plaque rectangulaire d'épaisseur constante dont les conditions aux limites sont de type CFFF (*encastrée-libre-libre-libre*). L'objectif est d'optimiser les dimensions ainsi que la position d'une seule pastille afin de maximiser le facteur de couplage du mode de vibration N°7 de la plaque. Ce mode est choisi car il correspond au mode (3,1)<sup>10</sup> pour lequel la position optimale de la pastille se trouve très éloignée des zones de maximum de déformation de la plaque nue. Pour cette raison, c'est un bon test d'évaluation de l'algorithme de recherche avec liste taboue. En effet, l'algorithme de recuit simulé est incapable de trouver la position optimale puisqu'il utilise les modes de la plaque nue, en revanche, l'algorithme avec taboue, qui effectue un calcul modal de la plaque munie de sa pastille, doit réussir à trouver la position optimale.

La plaque, de 200 mm × 100 mm, est en titane TA6V (Tab. 3.3) et la pastille est une céramique PIC151, dont les caractéristiques sont données dans l'annexe C. Le maillage de la plaque est constitué de 4000 éléments TET10 et comporte 9163 nœuds. La maille est régulière et mesure 5 mm. La distance entre nœud appartenant à la surface est de 2.5 mm. La surface de la plaque comporte donc  $200/2.5 + 1 = 81$  nœuds sur sa longueur et 41 sur sa largeur. Pour un calcul classique de mode, ce sont bien entendu des éléments de plaque de type QUAD4 par exemple, qui devraient être choisis, mais tout le code a été implémenté pour des éléments TET10 ou HEX8, ceci afin de pouvoir traiter des cas 3D quelconques. L'intérêt de la plaque vient plutôt de sa simplicité de mise en œuvre et du fait qu'aucune complexité géométrique (courbure, ...) ne vient perturber l'analyse des résultats.

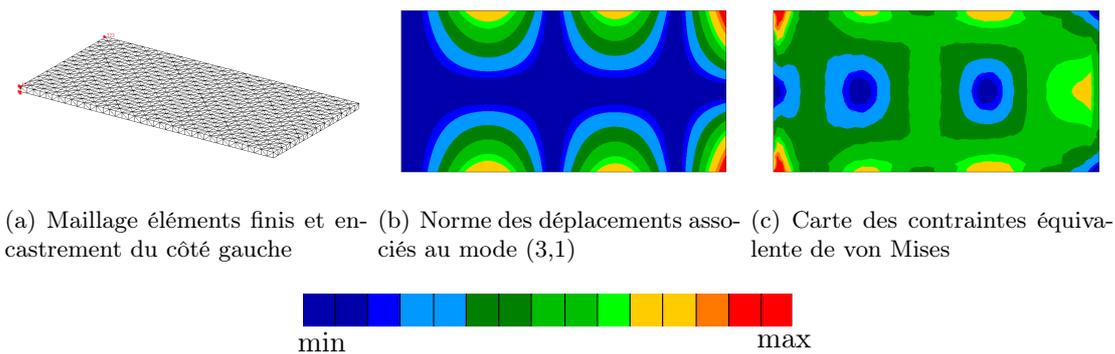
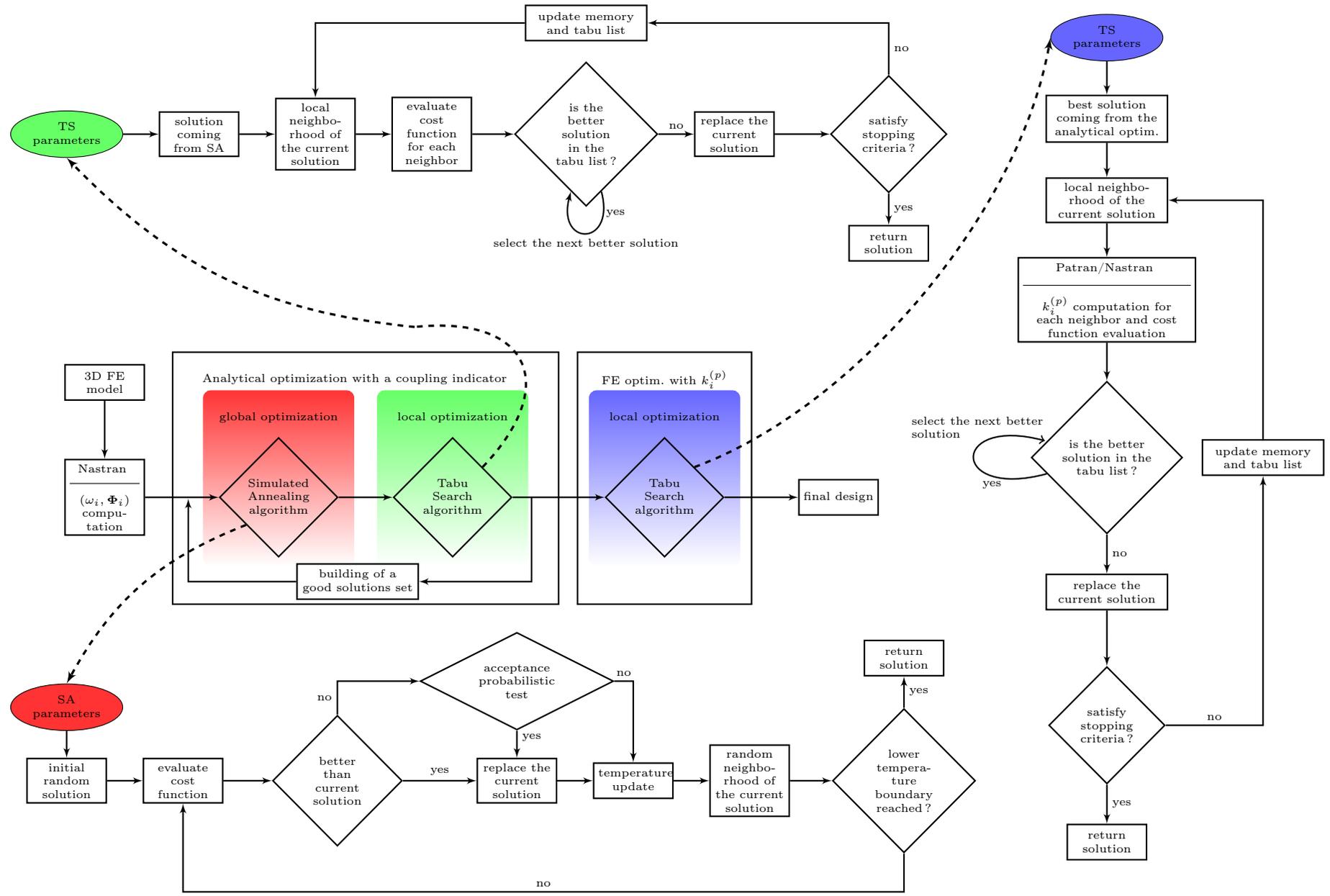


FIG. 3.8 – Caractéristiques du maillage éléments finis de la plaque et du mode N°7 (2.22 kHz). L'échelle des couleurs est donnée à titre indicatif avec  $max > min > 0$ .

La mise en données du problème nécessite également de définir une origine pour le repérage de la pastille, 5 ensembles de valeurs possibles pour chacun des paramètres  $x_-, y_-, L_x, L_y$  et

<sup>10</sup>Pour une plaque, le mode (3,1) est celui qui possède 3 lignes nodales suivant l'axe des x et 1 ligne nodale suivant l'axe des y.



TAB. 3.2 – Enchaînement des algorithmes d'optimisation de recuit simulé et de recherche avec liste taboue.

longueur (mm)	largeur (mm)	épaisseur (mm)	matériau	E (MPa)	$\nu$	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )
200	100	4	titane TA6V	114000	0.34	4460

TAB. 3.3 – Caractéristique géométrique et matériau de la plaque.

$h$ , ainsi qu'une masse limite de matériau piézoélectrique. Cette dernière est fixée à 10% de la masse de la plaque.

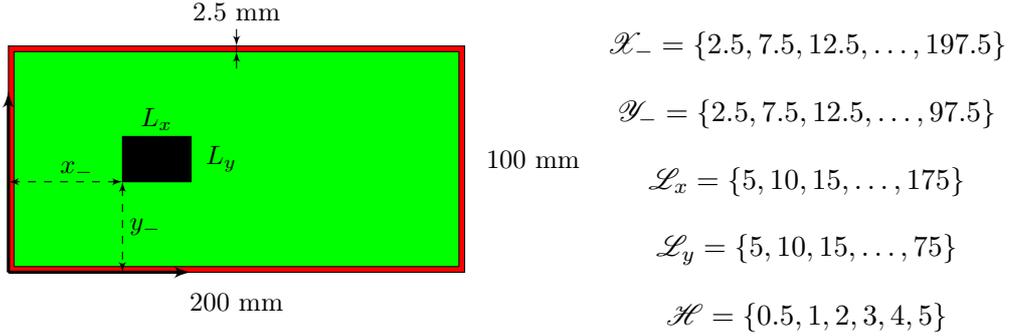


FIG. 3.9 – Paramétrisation du problème de la plaque CFFF. Les ensembles  $\mathcal{X}_-$ ,  $\mathcal{Y}_-$ ,  $\mathcal{L}_x$ ,  $\mathcal{L}_y$  et  $\mathcal{H}$  ont pour cardinal, respectivement, 40, 20, 35, 15 et 6.

### (a) Procédure d'optimisation

Les paramètres d'entrée de l'algorithme sont  $T_0$ ,  $T_{\text{end}}$ ,  $k_A$  le paramètre de qualité et la solution de départ  $\mathbf{D}_s$  (Fig. 3.3), qui est choisie au hasard dans l'espace de recherche. L'algorithme a itéré 6076 fois avant d'atteindre la température finale. Les grandeurs  $x_-$ ,  $y_-$ ,  $L_x$ ,  $L_y$  et  $h$  de l'ensemble des designs testés  $\mathbf{D}_e$  et acceptés  $\mathbf{D}_s$  durant le calcul sont donnés sur la figure 3.10.

Sur les figures 3.10(a), 3.10(c), 3.10(e), 3.10(g) et 3.10(i), chaque itération est représentée par un point dont l'ordonnée indique la valeur prise par, respectivement,  $x_-$ ,  $y_-$ ,  $L_x$ ,  $L_y$  et  $h$ . L'analyse de ces résultats montre clairement que l'algorithme balaye au départ, et jusqu'à 2000 itérations environ, l'ensemble des valeurs possibles pour chacun des 5 paramètres et chaque configuration testée est acceptée. Cette étape correspond à la phase où l'algorithme explore l'ensemble des configurations possibles. Entre 2000 et 4000 itérations, celui-ci se focalise sur des ensembles de valeurs possibles plus petits et le nombre des configurations testées et refusées augmente progressivement. La température diminuant, cette seconde phase est celle où la recherche se fait de plus en plus locale et les *designs* qui baissent la valeur de la fonction coût sont acceptés avec une probabilité de plus en plus faible. Au delà de 4000 itérations, les paramètres sont quasiment figés et seules 5 configurations sont acceptées jusqu'à 6000 itérations.

Les figures 3.10(b), 3.10(d), 3.10(f), 3.10(h) et 3.10(j) indiquent, pour chacune des valeurs des ensembles, le nombre total de fois qu'elles ont été testées et acceptées. Il est à noter que si les valeurs finales de  $h$  et  $y_-$  sont celles qui ont été sélectionnées le plus de fois, ce n'est pas le cas pour  $x_-$ ,  $L_x$  et  $L_y$ .

Enfin, les figures 3.11(a) et 3.11(b) permettent d'apprécier l'évolution de l'indicateur de couplage  $\tilde{k}_7$  ainsi que de la température  $T$ . La focalisation rapide de l'algorithme sur des sous ensembles de  $\mathcal{X}_-$ ,  $\mathcal{Y}_-$ ,  $\mathcal{L}_x$ ,  $\mathcal{L}_y$  et  $\mathcal{H}$  entre 3000 et 4000 itérations se traduit par une

augmentation très nette de la valeur moyenne de la fonction coût. De même, c'est vers 3500 itérations que l'algorithme atteint des solutions présentant des valeurs de  $\tilde{k}_7$  supérieures aux précédentes.

La solution retournée au terme de cette première étape du processus d'optimisation est  $D = \{62.5, 27.5, 35, 25, 1\}$ .

La seconde étape de la procédure d'optimisation utilise l'algorithme de recherche avec liste taboue, qui est paramétré de manière à générer des voisinages de profondeur 2. La longueur de la liste est fixée à 20 itérations et l'algorithme stoppe si aucune solution meilleure que celle trouvée jusqu'alors n'est découverte au bout de 20 itérations.

La meilleure solution est trouvée au bout de 40 itérations, soit après avoir visité 800 configurations différentes. Il est à noter que la valeur du couplage à la première itération (le premier voisin accepté de la solution de départ), est proche de celle de la solution fournie par l'algorithme de recuit simulé. En effet, l'indicateur de couplage est exact si le cas d'une plaque est traité, ce qui explique que  $\tilde{k}_7$  et  $k_7$  donnent des valeurs identiques. Cependant, cette égalité n'est plus vérifiée pour une structure 3D quelconque ; mais ce qui importe c'est que  $\tilde{k}_7$  et  $k_7$  aient les mêmes évolutions selon les valeurs des paramètres de la pastille.

Un phénomène intéressant (Fig. 3.12) est la variation rapide des coordonnées de la pastille comparée à celle de ses dimensions, qui sont assez stables. L'algorithme a stoppé au bout de la 60-ième itération, ce qui a correspondu à environ 120 minutes de calcul (station dual core 2 GHz, 3 Go de SDRAM).

Les résultats finaux du processus d'optimisation sont récapitulées dans le tableaux 3.4.

Algorithme	mesure du couplage	$x_-$ (mm)	$y_-$ (mm)	$L_x$ (mm)	$L_y$ (mm)	$h$ (mm)
Recuit simulé	$\tilde{k}_7 = 8.7\%$	62.5	27.5	35	25	1
Recherche taboue	$k_7 = 14.1\%$	82.5	42.5	50	20	3

TAB. 3.4 – Présentation des paramètres optimaux de la pastille, ainsi que de la mesure du couplage avec le 7-ième mode, à l'issue des deux algorithmes d'optimisation.

### (b) Recherche exhaustive

La recherche exhaustive est une méthode rudimentaire qui consiste à explorer l'intégralité de l'espace de recherche. Cependant, il est garanti qu'elle trouve la meilleure solution pour peu que l'ensemble des solutions ne soit pas trop long à parcourir ; sinon c'est une méthode impraticable. Pour pouvoir l'utiliser, il faut donc fixer quelques paramètres du problème afin de réduire sa taille. Ce sont les dimensions  $L_x$  et  $L_y$  de la pastille qui sont choisies à, respectivement, 50 mm et 20 mm (valeurs données par l'optimisation).

Le problème étant réduit à 3 dimensions, il est possible d'utiliser cette méthode pour valider, au moins partiellement, les valeurs fournies pour  $x_-$ ,  $y_-$  et  $h$ , par les algorithmes d'optimisation. D'un point de vue pratique, la pastille de  $50 \times 20$  mm<sup>2</sup> parcourt l'intégralité de la surface de la plaque et pour chaque position, au nombre de 144, l'ensemble des épaisseurs est testé, soit un total de 864 résolutions de problèmes aux valeurs propres.

Les résultats sont présentés sur les figures 3.13. La pastille donnant le couplage maximum a une épaisseur de 3 mm (Fig. 3.13(d)) et se situe en  $(x_-, y_-) = (85 \text{ mm}, 40 \text{ mm})$ . C'est pratiquement le même résultat, à taille de pastille fixée, que celui donné par la recherche avec liste taboue.

Sur cet exemple de la plaque, il apparaît clairement que :

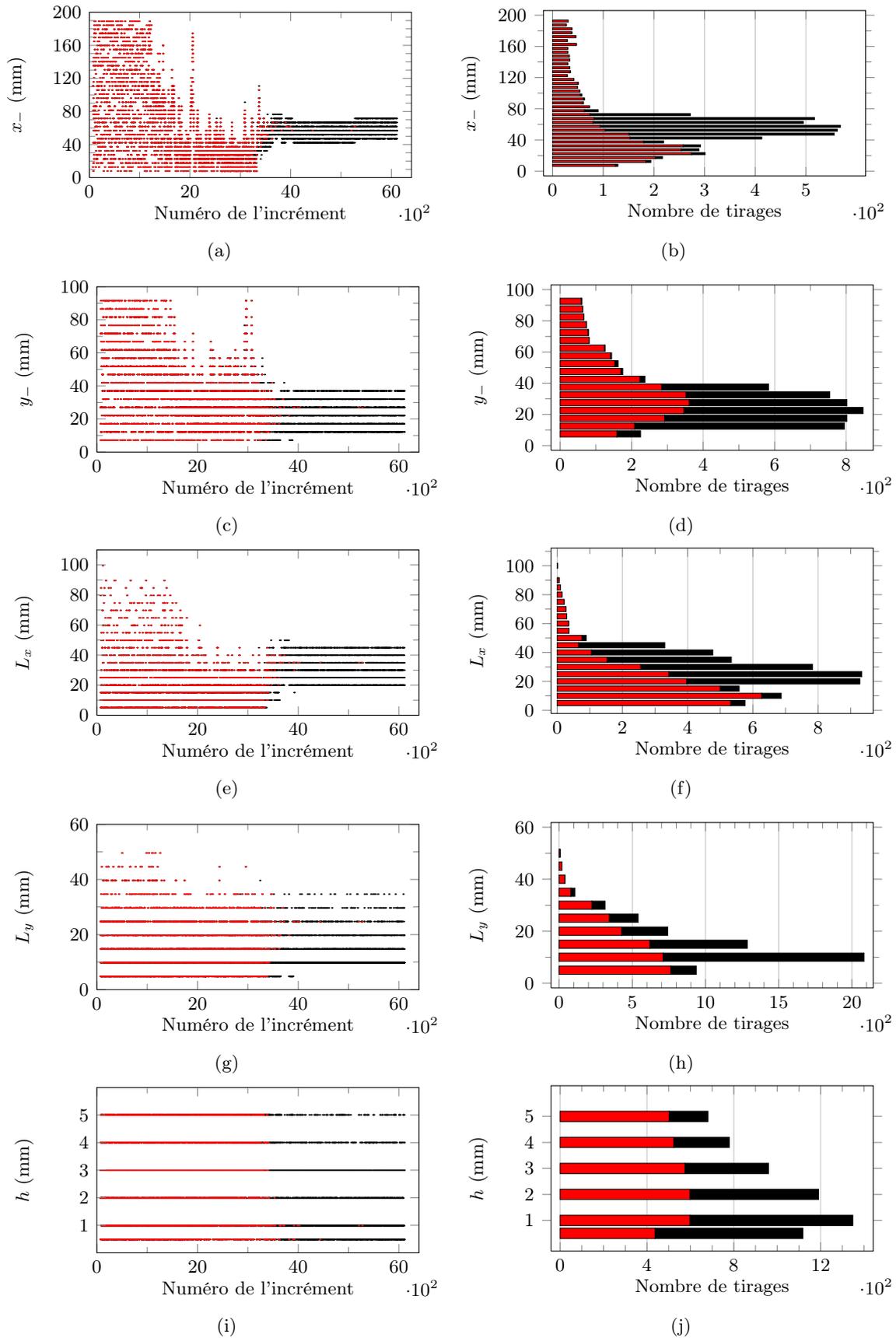


FIG. 3.10 – Résultats de l'algorithme de recuit simulé avec  $T_0 = 10^4$ ,  $T_{end} = 10^{-6}$  et  $k_A = 70$ . Les composantes des configurations testées  $D_e$  sont représentées en noir et celles des configurations acceptées  $D_s$  en rouge. 76

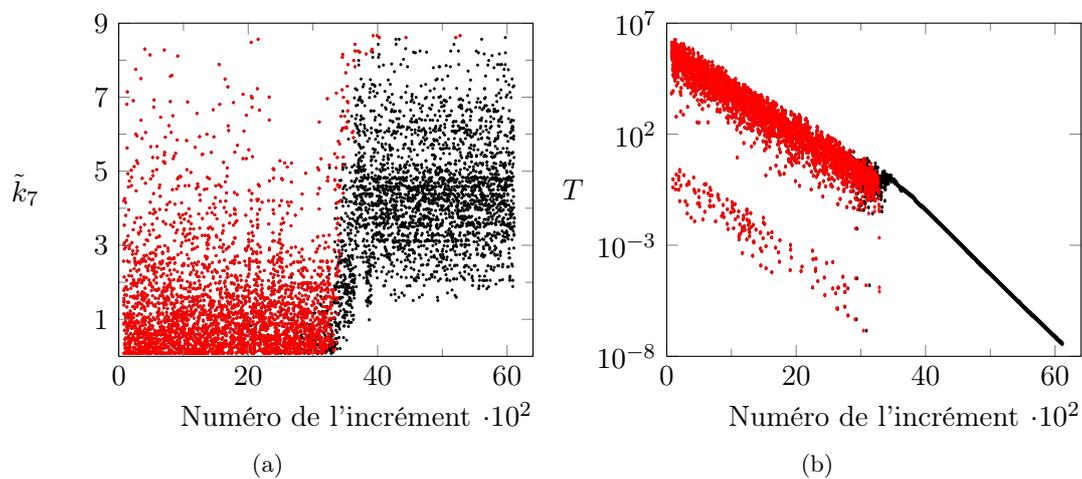


FIG. 3.11 – Valeurs de la fonction coût  $f_c(\mathbf{D}) = \tilde{k}_7(\mathbf{D})$  et de la température lors de l'optimisation par recuit simulé.

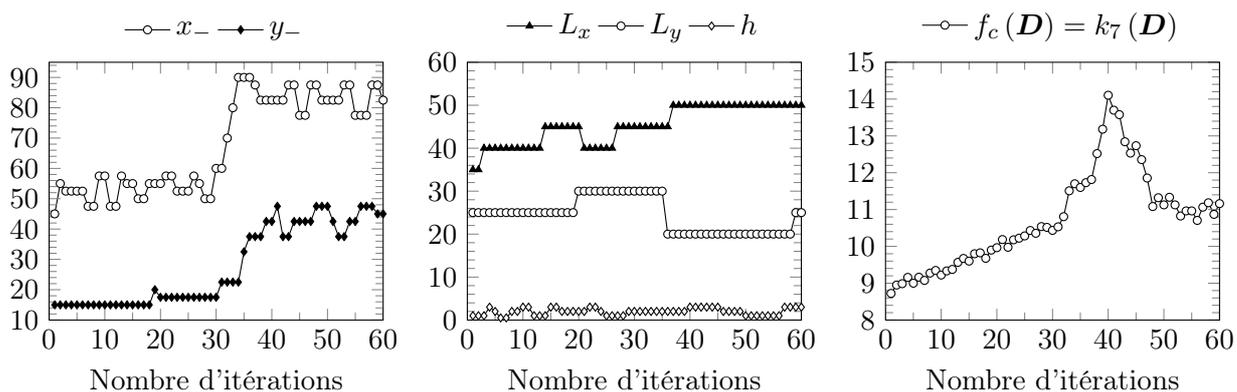


FIG. 3.12 – Résultats de l'algorithme de recherche avec liste taboue pour l'optimisation des paramètres de la pastille.

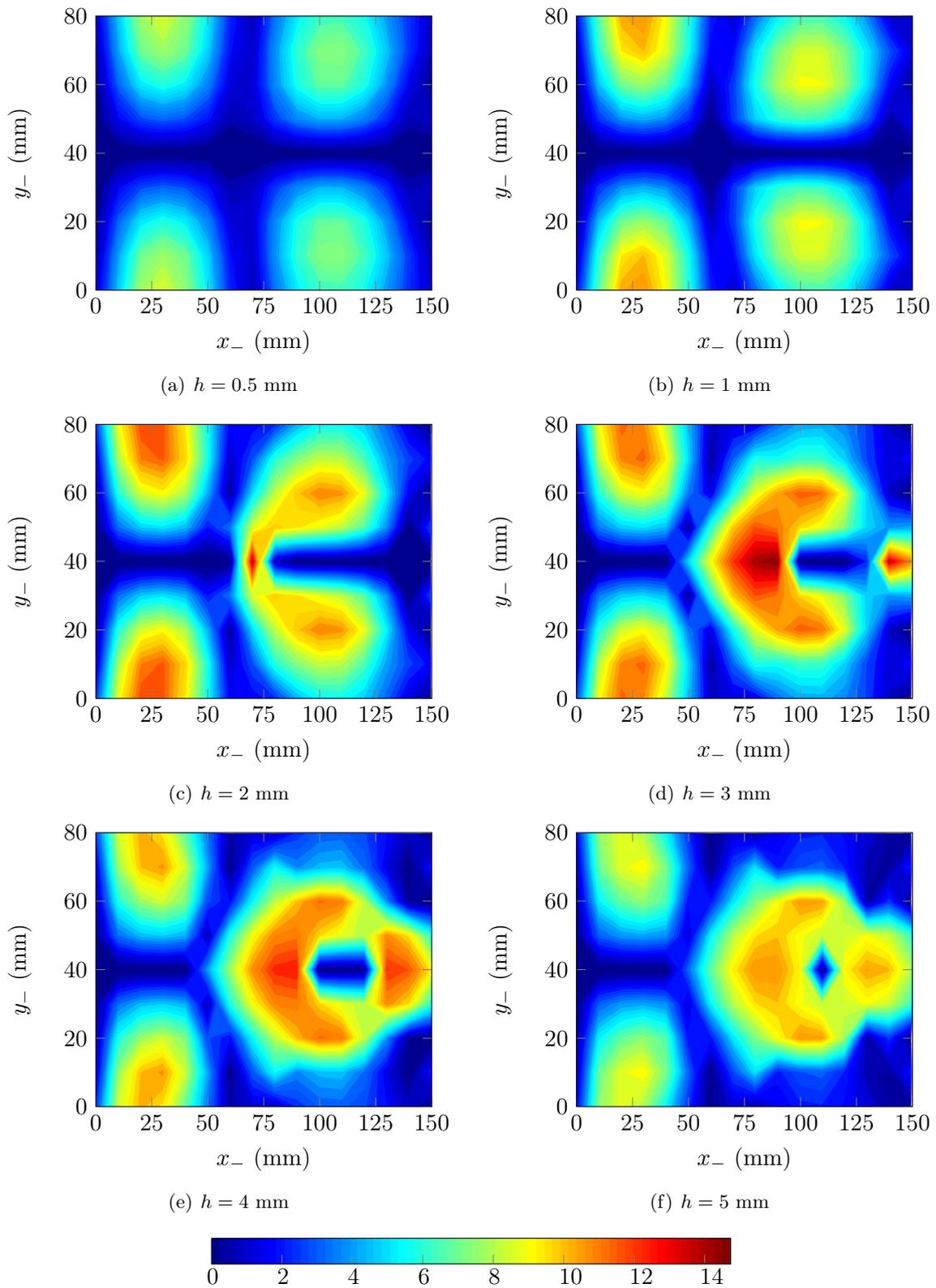


FIG. 3.13 – Facteur de couplage modal du 7-ième mode ( $k_7$ ), exprimé en %, en fonction de la position et de l'épaisseur de la pastille.

- la position optimale de la pastille ne se situe pas dans la zone du maximum de déformation (*cf* Fig. 3.8(c));
- des zones de maximum de couplage apparaissent pour certaines épaisseurs alors qu'elles n'existaient pas pour d'autres;
- même si la plaque est très raide (4 mm d'épaisseur en TA6V), la pastille modifie localement la déformée modale de la plaque;
- la solution fournie par le recuit simulé n'est pas très bonne et c'est la recherche taboue qui a du explorer un grand nombre de configurations.

Le dernier point est important car il implique que l'hypothèse, qui sous-tend la démarche d'optimisation, ne peut fonctionner que si la structure est réellement plus raide que les pastilles. Si tel n'est pas le cas, l'algorithme de recuit simulé n'est pas capable de trouver une bonne pré solution et l'intégralité du travail d'optimisation reviendra à l'algorithme de recherche taboue, qui est beaucoup plus lent.

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une démarche d'optimisation des positions et des géométries des pastilles piézoélectriques a été choisie, expliquée, intégrée au code précédemment développé puis testée.

L'originalité des travaux effectués vient de la séparation en deux parties distinctes du processus d'optimisation. En effet, les algorithmes qui le composent sont classiques et ont été largement étudiés. Les faits suivants peuvent être soulignés :

- l'hypothèse que la raideur et la masse des pastilles n'influencent pas beaucoup les modes propres et les fréquences propres de la structure a permis de développer toute une partie de l'optimisation sur un indicateur de couplage  $\tilde{k}$  très rapide à calculer et qui doit permettre d'approcher la solution optimale d'autant mieux que l'influence des pastilles est modéré;
- Si les pastilles n'avaient pas d'effet sur la structure, il n'y aurait pas de couplage, or ce n'est pas le cas. Par conséquent, la pré solution fournie par l'algorithme de recuit simulé doit être améliorée par l'utilisation d'une méthode exacte;
- la recherche avec liste taboue est la méthode de recherche exacte développée dans ce mémoire où un calcul de modes propres est effectué à chaque itération de l'algorithme afin de connaître précisément l'état du couplage selon les géométries et positions des pastilles;

L'ensemble du code d'optimisation a été intégré à celui du chapitre 2 et constitue désormais un outil relativement puissant pour évaluer rapidement l'efficacité d'un shunt résistif ou résonant connecté sur un ensemble de  $P$  pastilles piézoélectriques optimisées et collées sur une structure quelconque.

Dans le chapitre suivant, tous les outils développés précédemment (modélisation EF, pastilles connectées en parallèle, optimisation) vont être appliqués à un cas pratique de réduction de vibration d'aube fan de turboréacteur CFM56-7b par pastilles piézoélectriques shuntées. Cette validation expérimentale doit permettre de savoir si le modèle électromécanique est prédictif et si il est possible de s'en servir pour une application industrielle.



---

# Généralités sur les turboréacteurs

Au chapitre 5, des simulations numériques et une validation expérimentale du modèle électromécanique (chap. 2), ainsi que des algorithmes d'optimisation (Chap. 3), ont été menées sur une aube de soufflante. Dès lors, une présentation succincte du fonctionnement d'un turboréacteur, du rôle des aubes de soufflante, ainsi que des enjeux liés à leur conception et à leur fabrication permet de situer dans un contexte industriel la problématique de ce travail de thèse.

Il est à noter que cette partie est destinée à apporter aux lecteurs, dont le domaine de la propulsion aéronautique n'est pas la spécialité, des informations utiles à la compréhension du fonctionnement global d'un turboréacteur ainsi que des connaissances plus spécifiques relatives aux aubes de soufflante. Cependant, elle n'est pas nécessaire à la compréhension du chapitre 5.

De manière générale, les aubes sont soumises à diverses sources d'excitation et d'amortissement, naturelles ou intentionnelles, qu'il s'agit de connaître précisément en vue de déterminer la réponse forcée, qui doit permettre d'éviter, dès la phase de conception, les phénomènes de résonance et les risques d'endommagement dont le plus important est la fatigue vibratoire. Pour cela, différentes techniques de réduction de vibrations d'aube existent, qui utilisent le frottement, les matériaux viscoélastiques ou piézoélectriques.

## 4.1 Généralités sur les aubes de soufflante

Les avions civils, ainsi que la quasi totalité des avions militaires, sont équipés de turboréacteurs pour assurer leur propulsion. Le principe de base est d'absorber de l'air, de le comprimer puis de le chauffer et enfin de l'éjecter vers l'extérieur par l'intermédiaire d'une tuyère. Pour fournir une poussée, la vitesse d'éjection doit être supérieure à celle de l'admission. Ainsi, suivant le cycle "admission-compression-combustion-détente", le turboréacteur va fournir une poussée appropriée grâce à l'énergie apportée par la combustion du carburant.

### 4.1.1 Les turboréacteurs double-corps/double-flux

Les turboréacteurs qui propulsent les avions modernes de transports civils, sont presque tous de type double-corps/double-flux.

#### (a) Le double-corps

Dans ce type de turboréacteur, pour des raisons de performances, le compresseur est séparé en deux étages principaux. Le premier travaille à basse pression (BP) et le second à

haute pression (HP), chacun tournant à une vitesse appropriée pour assurer la compression de l'air, qui permet de créer la vitesse d'éjection. Ces deux compresseurs sont couplés, respectivement, à une turbine BP et à une turbine HP afin d'assurer leur rotation. L'entraînement de chaque couple compresseur-turbine se faisant par un arbre d'entraînement, celui du premier compresseur passe à l'intérieur de celui du deuxième (Fig. 4.2). Les turbines sont elles mêmes entraînées par les gaz chauds provenant de la chambre de combustion. Dans cette chambre, l'énergie est fournie par la combustion de kérosène avec l'oxygène disponible dans l'air absorbé et comprimé. Ainsi, un turboréacteur double-corps est constitué d'un corps basse pression (compresseur et turbine BP) et d'un corps haute pression (compresseur HP, chambre de combustion et turbine HP).

Un compresseur, BP ou HP, est constitué par des aubes tournantes et des aubes fixes et plusieurs étages de compression sont mis en série. Pour cette raison, le compresseur est dit axial. Un étage correspond à une roue tournante et une roue fixe. Les roues tournantes procurent une accélération aux particules d'air, en les déviant de l'axe moteur, et à cause de la géométrie des aubes tournantes (divergence), la pression augmente également (Fig. 4.1). Les aubes fixes, quant à elles, ralentissent le flux, ce qui fait augmenter la pression par la divergence de la section de passage, et elles empêchent la rotation du flux dans la conduite, car cela réduirait l'efficacité de la compression, d'où leur nom de redresseur. Pour la turbine, le fonctionnement est inverse de celui d'un compresseur. C'est l'air sous pression qui met en mouvement la turbine.

Parmi les différents étages qui composent le compresseur basse pression, le premier, appelé soufflante, joue un rôle très important. Ce module, caractérisé par un diamètre bien supérieur à celui des autres étages du compresseur BP, est ce que voit un observateur placé devant le moteur. L'équivalent anglais de la soufflante est fan et par extension, l'aube de soufflante ou aube fan désigne une aube appartenant à la soufflante.

### (b) Le double-flux

Le rendement de propulsion, qui est le rapport entre la puissance nécessaire pour le vol et la puissance thermique, est d'autant plus grand que le débit d'air est important (à poussée donnée). Augmenter simplement le débit d'air sans augmenter parallèlement le débit de carburant n'est donc pas une solution satisfaisante car cela diminue le rendement thermique. Ainsi, pour augmenter le débit d'air sans diminuer le rendement thermique, la solution a consisté à partager le débit d'air total en deux flux :

- un flux pour le générateur de gaz, tel que le rendement thermique optimum soit conservé, c'est le flux primaire ;
- un flux s'écoulant en dérivation et mélangé au flux chaud, soit dans l'atmosphère, soit dans une tuyère, c'est le flux secondaire.

Par ailleurs, la poussée d'un turboréacteur, pouvant être calculée approximativement comme le produit du débit massique de l'air passant dans le moteur par la différence des vitesses d'entrée et de sortie des gaz, peut être obtenue avec un débit plus faible et une vitesse d'éjection du gaz plus élevée, ou au contraire, un débit plus élevé à moindre vitesse.

Dans le premier cas, la poussée est importante mais une grande partie de l'énergie cinétique et thermique contenue dans les gaz expulsés est perdue par l'avion et va se disperser dans l'air ambiant. C'est typiquement le mode de fonctionnement des réacteurs mono-flux/simple-corps. Dans le second cas, l'énergie disponible dans le moteur est mieux utilisée puisqu'une partie est prélevée pour faire fonctionner un ou plusieurs étages supplémentaires de turbine qui elle-même entraîne un compresseur BP. Ce dernier crée une poussée supplémentaire en accélérant le flux secondaire à une vitesse modérée mais avec un débit important. C'est là, la raison

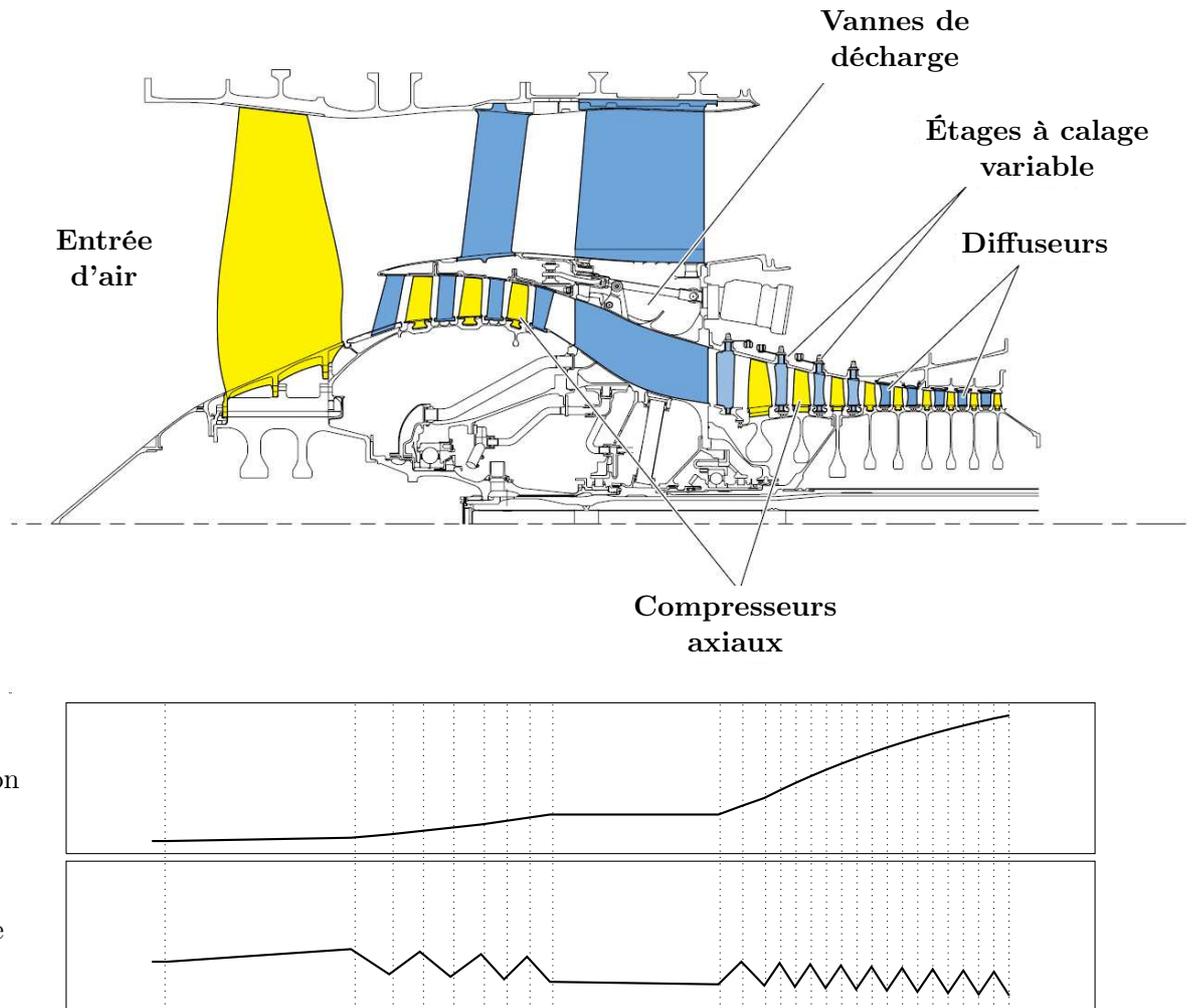


FIG. 4.1 – *diagramme des flux pour les compresseurs BP et HP. Source image : Snecma.*

du développement des réacteurs double-flux munis d'une très large soufflante qui favorisent le débit plutôt que la vitesse. Au final, pour une même poussée, le rendement plus élevé du double-flux par rapport au simple-flux permet une moindre consommation de carburant, une moindre charge en carburant, donc une charge utile supérieure.

La soufflante doit donc fournir un maximum de poussée mais avec des vitesses d'éjection pas trop élevées. Par conséquent, les vitesses aérodynamiques sur le rayon extérieur de celle-ci doivent rester modérées pour avoir un fonctionnement efficace. C'est pour cette raison que le corps BP, qui comprend la soufflante, tourne à une vitesse plus faible. Ainsi, dans la configuration double-corps/double-flux, la soufflante reçoit la totalité de l'air qui pénètre dans le moteur. Une grande partie de cet air va constituer le flux secondaire (ou flux froid), l'autre partie va constituer le flux primaire (ou flux chaud). Ce dernier passe par un compresseur BP solidaire de la soufflante, par un compresseur HP, par la chambre de combustion, par la turbine HP et, pour finir, par la turbine BP avant d'être éjecté. Le flux secondaire est éjecté par une tuyère secondaire, le flux primaire par une tuyère primaire, sauf si les deux flux sont mélangés. Dans ce dernier cas, les deux flux sont éjectés par une tuyère commune.

(c) L'architecture et les performances requises

En service depuis les années 1970, les moteurs à fort taux de dilution<sup>1</sup>, comme ceux de la famille CFM56<sup>2</sup> de la Snecma et General Electric, ont représenté un progrès majeur pour l'aviation civile. Outre le fait que les double-corps/double-flux ont permis une réduction importante de la consommation des avions (20% à cette époque) et que leur soufflante génère l'essentiel de la poussée (jusqu'à plus de 80% sur un avion long-courrier), c'est aussi par leur architecture de conception que les CFM56 se sont imposés.

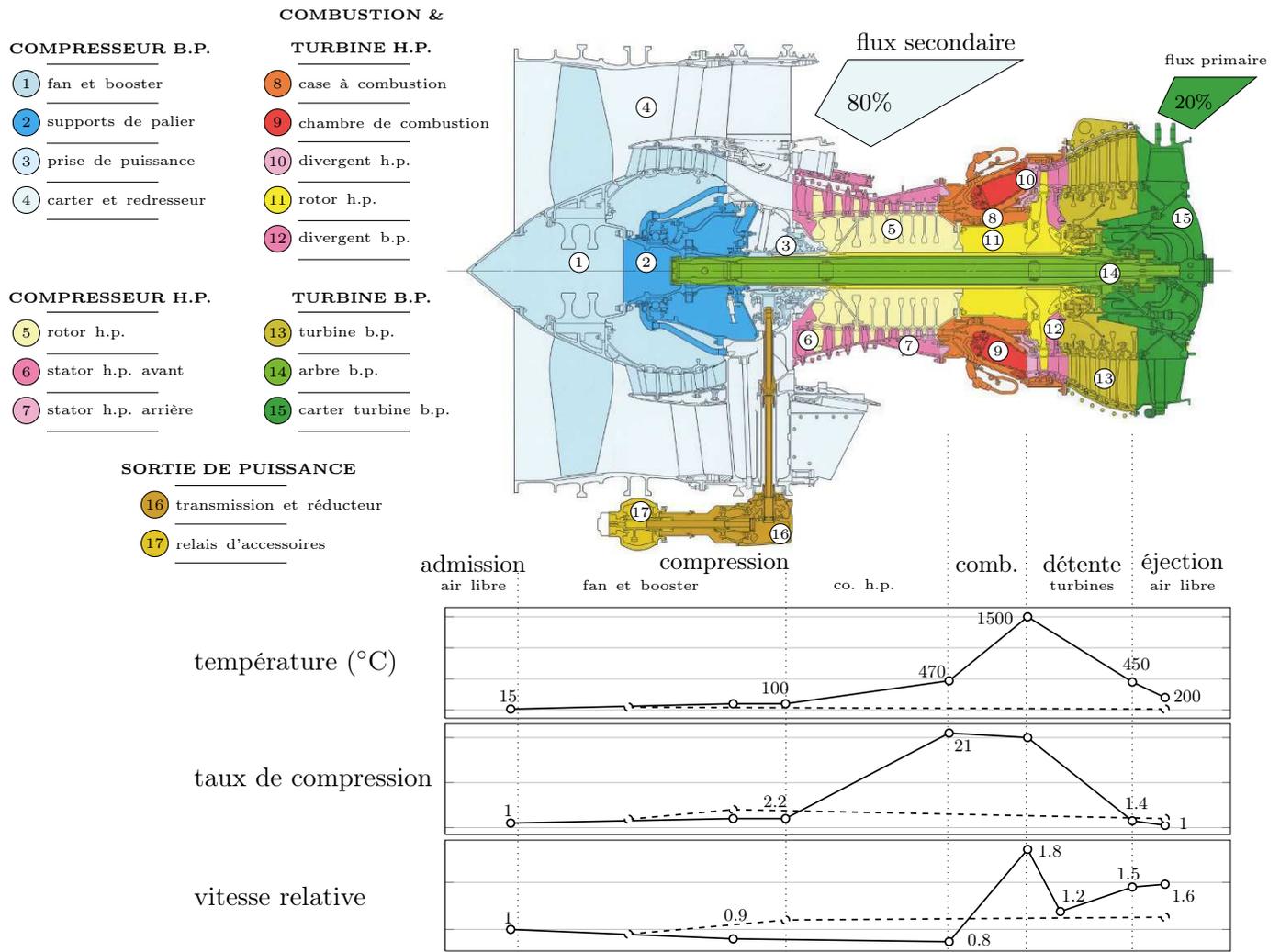


FIG. 4.2 – Conception modulaire d'un CFM56-7. Source image : Snecma.

L'architecture modulaire du CFM56-7 (Fig. 4.2) permet de réduire la complexité du système [116] en offrant une décomposition en sous-systèmes relativement autonomes connectés par des interfaces. Cette architecture, c'est-à-dire la manière d'agencer les composants d'un système, contribue à gérer la complexité croissante des produits des industries d'assemblage

<sup>1</sup>le taux de dilution est le rapport du débit du flux secondaire sur le débit du flux primaire

<sup>2</sup>L'appellation marie la manière de faire des deux sociétés en matière de désignation de leurs produits. CF pour *Commercial (Turbo) Fan* chez GE, M pour *Moteur* chez la Snecma. Compte tenu de l'existence préalable de l'avant-projet M56 chez les français, c'est ce chiffre qui a été retenu.

qui sont confrontées, à l'instar de l'industrie aéronautique, à l'apparition de nouvelles technologies, telles que l'électronique ou la mécatronique. Elle constitue donc une des modalités pour résoudre les problèmes de coordination découlant d'une dispersion des compétences (mécanique, électronique, informatique, *etc.*) de plus en plus dissemblables, nécessitées par le jeu concurrentiel. En ce qui concerne le CFM56-7, la conception modulaire offre le triple avantage d'une maintenance facilitée, ce qui accroît la disponibilité de l'avion et abaisse les coûts d'opération, une meilleure fiabilité du fait d'une architecture simple, ainsi qu'un certain degré d'évolutivité qui permet des gains substantiels lors des programmes de modernisation.

Les performances que doit afficher un moteur sont nombreuses et différentes suivant la phase du vol. Au décollage et à la montée de l'appareil, c'est une forte poussée qui est souhaitée. En particulier, c'est en fin de montée que l'air, raréfié en haute altitude, doit être le plus fortement comprimé. Cette spécification est critique dans la conception de la soufflante. En régime de croisière, la consommation spécifique<sup>3</sup> est optimisée et doit permettre de réduire les émissions de gaz carbonique. Sur la durée du vol, c'est le *fuel burn*, qui est le carburant consommé sur l'ensemble de la mission, qui doit être le plus faible possible. Enfin, des objectifs de masse, de bruit, d'émissions polluantes et de coût de possession sont aussi des critères de performances incontournables.

Le concept de moteur à fort taux de dilution s'articule ainsi autour de cinq thèmes majeurs :

- la poussée, elle peut être augmentée en adoptant de meilleurs profils aérodynamiques ou en élevant le taux de compression global<sup>4</sup> ;
- la consommation, qui dépend de nombreux paramètres mais particulièrement du taux de dilution, du taux de compression global et de la température d'entrée en turbine HP ;
- le bruit, qui est d'autant plus faible que le taux de dilution est important ;
- les émissions polluantes, que les réglementations visent à réduire, sont directement reliées aux systèmes d'injection et à la chambre de combustion ;
- le profit, qui résulte de la différence positive entre le taux d'échange<sup>5</sup> et les surcoûts de production liés à la mise en place d'une nouvelle technologie. Le motoriste peut alors espérer vendre ses réacteurs, qui incorporent une nouvelle technologie liée au gain de masse ou la baisse de consommation de kérosène, avec une marge supérieure.

Cependant, l'amélioration continue des performances du moteur ne provient pas simplement d'une maximisation de ces paramètres mais plutôt d'un compromis. Sur les cinq points précédents, les remarques suivantes soulignent le fait qu'il s'agit de trouver un optimum technologique.

- Plus le taux de dilution est grand, plus le bruit et la consommation sont faibles mais la masse et la traînée augmentent parallèlement du fait d'un diamètre de soufflante plus important ;
- si le taux de compression global augmente, cela fait baisser la consommation spécifique mais augmente les émissions d'oxyde d'azote ;
- une température élevée en entrée de turbine HP permet des gains de masse et de consommation mais pénalise le coût de possession du moteur.

<sup>3</sup>la consommation spécifique est le rapport entre la consommation et la poussée

<sup>4</sup>le taux de compression global est le taux de compression procuré par la soufflante, le booster et le compresseur HP

<sup>5</sup>Une tonne en moins sur la masse d'un avion représente un gain de consommation de 400 kg en kérosène sur un vol long-courrier. Il en résulte un surcoût accepté par les clients par kilogramme gagné sur la masse de l'avion appelé taux d'échange. En avril 2008, avec un baril à moins de 100\$, ce taux d'échange variait de 300€ par kilogramme gagné sur un avion régional à 2000€ par kilogramme sur un vol long-courrier.

	1970	1980	1990	2000	2010	2020
	JT8D	CFM56-3	CFM56-5	CFM56-7	LEAPX	?
Consommation	-20 %		-10 %		-10 à -15%	
Bruit	-8 dB		-1.5 dB		-6 à -8 dB	
Émission de NoX	-60 %		-35 %		-40 %	

source : Gifas

TAB. 4.1 – Progrès réalisés et à venir sur trois axes de performance moteur.

Il est intéressant, en aparté, d'énoncer les principaux modes de financement de ces programmes de recherche :

- l'autofinancement ;
- l'emprunt remboursable à l'état ;
- la subvention via des projets de recherche de type pôle de compétitivité (ASTech et AESE) ou grand emprunt national (CORAC-EPICE), ou Européen (ACARE avec Clean Sky notamment) ;
- la subvention directe de projets R&D *via* la DGAC.

Par ailleurs, les programmes européens, ou propres aux entreprises, sont regroupés par thèmes et le lecteur pourra facilement consulter leur contenu sur les sites des constructeurs ou des agences européennes et parfaire sa connaissance des projets qui ont eu lieu ou sont en cours tels que TECH56, LEAP56, VITAL, MAIA, INCA ou Clean Sky.

Les projets relatifs au module fan constituent le noyau dur des programmes de recherche actuels et futurs. En effet, tout découle des nouvelles architectures de fan développées et c'est sur elles que reposent les trois concepts de moteurs à fort taux de dilution autour desquels s'articule l'ensemble du programme : poussée, consommation et bruit. C'est aussi au niveau du module fan lui-même que les gains réalisés pour diminuer le bruit sont les plus importants (- 6 dB). Cependant, et malgré une architecture modulaire, la difficulté des recherches réside dans les conséquences que peut induire toute modification d'un des éléments du moteur sur les autres éléments. La recherche doit être effectuée sous l'angle système, en tenant compte des interactions éventuelles entre les différents éléments.

#### 4.1.2 Les objectifs de la soufflante

De manière plus précise, les objectifs assignés à une aube fan peuvent, eux aussi, se décliner autour de cinq thèmes majeurs :

- la performance, mesurée par le débit et le rendement aérodynamique ;
- l'opérabilité, attestée par la marge au pompage et la marge au flottement ;
- la sécurité, certifiée par des tests de perte d'aube et d'ingestion (sable, eau, oiseaux, glace) ;
- l'environnement, à travers le bruit large bande émis par les aubes fan ;
- le coût de possession, dont le niveau est fonction de l'architecture de la soufflante.

Le premier objectif passe par l'augmentation du taux de dilution, qui se réalise en augmentant le débit secondaire. À poussée donnée, cette augmentation de débit conduit à une diminution de la vitesse des gaz d'échappement et donc du bruit, qu'ils génèrent, aussi appelé «bruit de jet». Les taux de dilution, qui étaient inférieurs à 4 ou 5 il y a trente ans, atteignent aujourd'hui des valeurs de 8 à 9 ; progrès cependant arbitrés par des compromis. Avec un

diamètre plus grand, la masse du moteur et celle de la nacelle augmentent et les phénomènes de traînée sont plus importants. La contribution relative de ces fans de grand diamètre au bruit total du moteur s'intensifie et la recherche de nouvelles formes d'aubes, pour améliorer le rendement et diminuer le bruit du fan, devient alors nécessaire. Enfin, l'énergie cinétique des aubes s'accroissant, les structures du moteur et de la nacelle doivent être renforcées, donc alourdies. Les nouvelles technologies, notamment composites, permettent de réduire la masse de l'ensemble du système propulsif.

Le second objectif est lié à deux phénomènes dangereux pour le fonctionnement du moteur : le pompage et le flottement.

Le phénomène de pompage apparaît lorsque la pression du circuit aval devient supérieure à la pression de refoulement du compresseur, la détente des gaz s'effectue alors non seulement vers l'arrière, mais aussi vers l'avant. Dans ce cas, le débit devient nul et la pression chute. Le phénomène de pompage prend naissance dans le compresseur lorsqu'il y a décrochage des filets d'air sur les pales. Ce décrochage intervient lorsque l'angle d'incidence devient trop important, c'est à dire lorsque le débit d'air diminue. La seconde origine du pompage vient du fait que, comme le gradient de pression est parallèle au flux d'air dans un compresseur (pression plus élevée à chaque étage du compresseur), l'air comprimé cherche naturellement à revenir à l'étage d'avant, ce qui se traduit par des fuites et une baisse de rendement. Le phénomène de pompage compresseur consiste alors à un retour des gaz vers l'entrée d'air. Ainsi, sans étanchéité adéquate, le champ d'écoulement peut être renversé et cela se traduit également par une perte de poussée et de possibles retours de flammes à l'admission. Les pièces des premières sections sont alors fortement endommagées. La position précise du point d'apparition de cette limite de fonctionnement du compresseur, qu'est le pompage, est difficile à estimer et les motoristes ont recours à une marge de sécurité dite marge de pompage. Au niveau du fan, l'étanchéité est assurée par des joints de type labyrinthe tournant utilisant la technique des dépôts abrasables sur le carter intérieur du fan.

Le phénomène de flottement est un terme plus générique, qui désigne les phénomènes d'instabilité aéroélastique. De manière générale, les vibrations induites par le mouvement du fluide sont dues à des instabilités aéroélastiques qui se déclenchent lorsque la vitesse moyenne du flux d'air est supérieure à une vitesse critique. Le flottement se caractérise, du point de vue de la structure, par un amortissement aéroélastique négatif supérieur (en valeur absolue) à l'amortissement structural (Fig. 4.3), de telle sorte que l'énergie apportée par le fluide est supérieure à celle dissipée dans la structure.

Lors du cycle de conception, et afin d'éviter la découverte tardive de ce problème au cours des essais moteur, la marge au flottement, qui mesure, à un débit donné, l'écart de pression entre la ligne de flottement et la ligne de fonctionnement, est calculée<sup>6</sup>.

L'objectif de sécurité vise notamment à évaluer la capacité des aubes de soufflante à fonctionner correctement à la suite d'impacts de corps étrangers. En effet, l'ingestion à grande vitesse d'oiseaux ou de glace provoque la formation de zones plastifiées à l'intérieur des aubes métalliques. Il s'agit alors d'évaluer l'effet de ces modifications structurales sur le comportement dynamique des aubes.

<sup>6</sup>Les critères les plus simples utilisés dans l'industrie pour déterminer le risque de flottement subsonique sur les premiers modes de flexion et de torsion sont :

- le *Twist Bend Coupling*, représentant le rapport entre les déplacements du mode de torsion et du mode de flexion. Plus le paramètre TBC est élevé, plus le risque de flottement l'est également ;
- la vitesse réduite, ou critère de Strouhal, donnée par la formule suivante :  $V_R = W/(\pi C f)$ , où  $W$  est la vitesse relative,  $C$  la corde de l'aube à une hauteur donnée et  $f$  la fréquence du mode d'aube considéré. Ce critère représente la cohérence entre la fréquence de vibration de l'aubage et la fréquence de l'instationnarité de l'écoulement le long de cet aubage.

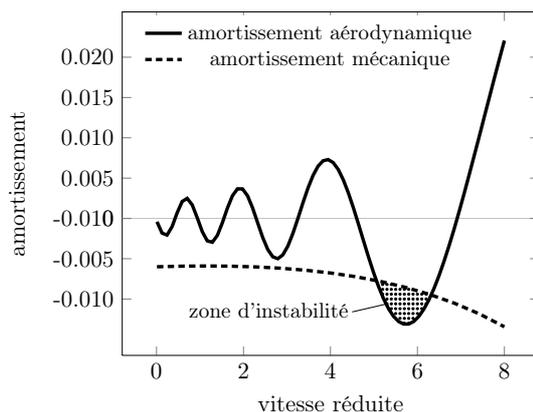


FIG. 4.3 – zone d'instabilité

Les problématiques liées à l'environnement sont devenues un axe central de recherche pour les motoristes et englobent le bruit, la consommation de carburant, les émissions de polluants et le retraitement des matériaux qui composent le turboréacteur en fin de vie. Par exemple, l'augmentation du taux de dilution, et la légère diminution de la vitesse périphérique du fan qui en découle, est une des voies explorées pour la réduction du bruit. Un autre développement envisagé, lié aussi aux thématiques environnementales, est l'adoption d'aubes de soufflante non carénées réparties sur deux étages de rotors contrarotatifs. Si ces pales sont capables de fonctionner sans perte de rendement lorsqu'elles sont animées d'une vitesse supérieure à Mach 1, c'est-à-dire pour des vitesses de vol élevées, alors le rendement de propulsion est supérieur à celui d'un turboréacteur<sup>7</sup>. Ce constat pourrait pousser les motoristes à recourir à la technologie de l'*open rotor* puisque pour une poussée donnée, l'accroissement du rendement de propulsion conduit à une baisse de la consommation de kérosène. Bien entendu, cet avantage est à comparer aux défauts d'une configuration *open rotor* : bruit, perte d'aube, . . .

Enfin, parce que les aubes sont les organes les plus sollicités d'un turboréacteur, une maintenance beaucoup plus fréquente que pour les autres pièces est nécessaire. Il en résulte un coût de possession, qui peut être diminué en réduisant le nombre de pièces, en augmentant la durée de vie ou en employant des matériaux meilleur marché.

Au final, les recherches réalisées sur la soufflante consiste à :

- augmenter la poussée à diamètre constant ;
- diminuer la consommation de carburant ;
- réduire le nombre de pièces (donc la masse et les coûts de production) ;
- améliorer la signature acoustique.

### 4.1.3 Les matériaux et la fabrication

La fabrication d'aubes de soufflante de grand diamètre, nécessaires à la conception de moteurs à fort taux de dilution, a été rendue possible par l'utilisation de titane. Ce matériau

<sup>7</sup>L'un des principaux inconvénients des turbopropulseurs est la perte rapide de rendement pour des vitesses de vol supérieures à  $650 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  due, notamment, aux ondes de choc créées autour de la pale lorsque l'extrémité de celle-ci approche Mach 1. Cependant, les pales actuelles, dont le profil aérodynamique s'est beaucoup amélioré, peuvent avoir une vitesse supérieure à Mach 1 sans que cela entraîne une perte de rendement de propulsion. En utilisant ces pales dans une configuration contrarotative, qui permet de réduire les pertes dues aux turbulences ainsi que de répartir l'augmentation de pression à réaliser sur deux rangées d'aubages, il est possible d'obtenir un très bon rendement de propulsion pour des vitesses de vol supérieures à  $800 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  [108]. Les vitesses sont données dans [108] pour une altitude proche du niveau de la mer

convient tout à fait pour des applications aéronautiques de part sa faible masse volumique et ses excellentes propriétés mécaniques. Pour les aubes fan du CFM56-7B, fabriquées à partir d'un alliage de titane TA6V contenant 6% d'aluminium et 4% de vanadium, les propriétés sont les suivantes :

- un rapport résistance mécanique sur masse volumique bien supérieur à celui des autres métaux ( $R_m = 900 \text{ MPa}$ ,  $\rho = 4460 \text{ kg.m}^{-3}$ );
- une excellente résistance à la corrosion<sup>8</sup>;
- une bonne ténacité et tenue au fluage jusqu'à 550 °C;
- une résistance satisfaisante à la propagation des criques;
- une bonne limite de fatigue à  $10^8$  cycles située à la moitié de sa résistance en traction ( $R_e=830 \text{ MPa}$ ).

Néanmoins, les caractéristiques mécaniques ne sont stables que jusqu'à 700 °C, ce qui réserve les alliages de titane (hors supers alliages) aux parties froides du moteur fortement sollicitées : la soufflante et le booster.

Du fait de sa forme complexe<sup>9</sup>, les techniques de fabrication pouvant être mises en œuvre sont, *a priori*, limitées à l'usinage, le moulage et le forgeage. Cependant, l'usinage, souvent onéreux, n'est en général pas utilisé pour fabriquer des pièces mais seulement pour réaliser des opérations de finition de surface et pour améliorer la précision dimensionnelle des pièces après moulage ou forgeage, de plus le titane s'usine mal. Quant aux procédés de fonderie, ils ne sont pas utilisés à cause de la mauvaise moulabilité des alliages de titane. C'est donc le forgeage, qui désigne l'ensemble des procédés de formage, par chocs ou pression, d'une pièce massive entre deux outillages, qui est le procédé de fabrication utilisé pour les aubes de soufflante.

Plus précisément, ces aubes sont obtenues par forgeage à chaud de barres ou de lopins<sup>10</sup> portés à environ 1000 °C sur presse à filer ou machine à forger de 600 à 1600 tonnes. La mise en forme des lopins est ensuite réalisée par chocs entre deux matrices montées sur presses à vis de 2300 à 8000 tonnes. Les matrices de presse utilisées aujourd'hui permettent d'obtenir des pièces dont la précision après frappe atteint quelques millimètres. Le travail par choc permet une meilleure remontée dans la matrice supérieure que le travail à la presse; les gravures fines sont donc plus facilement remplies. Quant au matriçage, il est réalisé à l'aide d'une presse hydraulique dont la vitesse est inférieure à  $1 \text{ m.s}^{-1}$ . La pièce offre ainsi une résistance à la déformation moins grande que dans le cas d'un travail réalisé à l'aide d'un marteau-pilon dont l'outil est animé d'une vitesse supérieure à  $5 \text{ m.s}^{-1}$  lors de la frappe. Les pièces obtenues sont plus résistantes aux contraintes mécaniques car la déformation des métaux engendre un grand nombre de phénomènes métallurgiques, tant au niveau microscopique que macroscopique. Parmi ces phénomènes, il y a notamment le corroyage, qui lui même est à l'origine du fibrage du métal. La santé métallurgique des pièces forgées est très bonne et contrairement à l'usinage, le fibrage de la pièce est favorable.

Après matriçage et ébavurage, les aubes subissent un décapage chimique avant polissage. L'attache des aubages, ou pied, est finie par fraisage. En fin de gamme, une couche de vernis de quelques microns d'épaisseur est déposée sur le pied afin d'en limiter l'usure.

Ce procédé de fabrication est adapté à la moyenne série<sup>11</sup> et permet de produire des soufflantes dont la taille varie de 200 mm pour un réacteur Adour à 920 mm pour le moteur

<sup>8</sup>Le titane devient passif par la formation d'un film  $\text{TiO}_2$  insensible à la corrosion caverneuse ou par piqûres.

<sup>9</sup>Les aubes sont vrillées (angle le plus grand en tête) avec un extradors convexe et un intradors concave, afin de répartir le travail des gaz et d'assurer un écoulement uniforme en sortie.

<sup>10</sup>Bloc de métal débité dans un demi-produit ou une barre, et dont le volume correspond à celui de la pièce à obtenir, majoré de celui nécessaire au forgeage.

<sup>11</sup>entre 15000 et 20000 aubes de soufflante sont forgées chaque année par la Snecma sur le site de Gennevilliers.

civil CF6-80E. Une aube fan de CFM56-7B a une masse de 5 kg environ pour une longueur de 520 mm.

#### (a) La technologie métallique

Les dernières avancées sur les aubes métalliques datent de 1999. Des tests ont été réalisés sur une nouvelle forme d'aube en flèche à large corde et deux versions de soufflante, de 1.5 (61") et 1.7 (68") mètre ont été étudiées. Les aubes en titane de la première sont pleines, celles de la seconde, plus grandes, sont creuses pour compenser l'augmentation de masse. Les essais ont commencé en 2000 sur le fan de 61", monté sur un moteur CFM56-7B adapté. Ils ont démontré une nette augmentation de la poussée et du débit, ainsi qu'une diminution correspondante de la consommation de carburant. Les aubes creuses du fan de 68" ont été testées dans le courant de l'année 2001 sur un CFM56-5C modifié. Les premiers résultats montrent également une augmentation de débit comparable. Les travaux menés sur les aubes creuses concernaient surtout le procédé de fabrication par formage superplastique<sup>12</sup>, aujourd'hui maîtrisé. Les essais ont continué par des essais d'ingestion et le programme s'est terminé par un essai majeur en 2004 sur un second démonstrateur : l'essai de perte d'aube moteur, qui valide la conception de l'aube.

#### (b) La technologie composite

La technologie composite supplante progressivement la technologie métallique, pour les parties froides, car elle permet des gains de masse importants et autorise la conception de soufflantes plus grandes dont les dimensions atteignent 1.60 m. Bien que la réalisation de ces aubes coûte plus chère qu'une aube métallique<sup>13</sup>, les gains de masse donnent accès à des économies sur d'autres modules. De plus, les soufflantes composites de grande taille permettent de réaliser des moteurs double-corps/double-flux de forte puissance comme le GE90, le GENx et le Leap-X et de réduire la consommation et le bruit de manière importante. Il est certain que des progrès seront faits dans le domaine des aubes en composite et que leur coût de fabrication rejoindra celui des aubes métalliques.

Deux modèles d'aube fan en composite existent et sont en concurrence :

- l'aube pleine en composite de CFAN, co-entreprise GE-Snecma. Celle-ci est fabriquée à partir d'un empilement de plis unidirectionnels, ou tissés préimprégnés, de fibre de carbone placées dans un moule en orientant différemment les plis successifs avant compactage et polymérisation à l'autoclave. Le bord d'attaque est renforcé par une lame de titane afin d'augmenter la résistance thermomécanique et dissiper l'énergie d'éventuels chocs avec des volatils. La forme complexe du profil de l'aube donne un très bon rendement et la légèreté du carbone (une aube pèse 27 kg) permet des gains de masse également importants (300 kg sur un GE90). Cependant, le procédé de fabrication est difficilement automatisable car il repose sur la superposition de centaines de plis de carbone et par plusieurs passages en autoclave ;
- l'aube RTM tissée 3D. La Snecma a développé une technique de fabrication spécifique où la pièce est réalisée par infiltration d'une résine thermodurcissable dans une ébauche fibreuse sèche placée dans un moule fermé. Ce procédé de moulage par injection basse pression de résine liquide<sup>14</sup> est couramment appelé procédé RTM (Resin Transfer Molding). Les résultats d'essais sont très bons, car l'aube est formée d'une seule pièce com-

<sup>12</sup>Le procédé de formage superplastique exploite la capacité du titane à subir de grandes déformations lorsqu'il est porté à haute température (950 °C).

<sup>13</sup>Le rapport de coût entre la dernière technique "métal" et les techniques composites serait de 3.

<sup>14</sup>La viscosité de la résine se situe entre 0.2 et 0.6 Pa.s et la pression entre 1 et 4 bar.

prenant le pied et la pale, mais le principal avantage est que les opérations de tissage sont automatisées.

Que les aubes soient métalliques ou composites, la conception de moteurs à fort taux de dilution fait appel à des soufflantes de grande taille dont la masse, c'est à dire la valeur dans le prix total d'un moteur, prend de plus en plus d'importance<sup>15</sup>. La conception de la soufflante devient, plus que jamais, un phase déterminante dans le développement d'un nouveau moteur.

## 4.2 Conception d'une aube de soufflante

La conception d'un disque aubagé de turbomachine, qui est un assemblage comportant des aubes réparties autour d'un disque, est particulièrement délicate et fait appel à différents types d'analyses, destinées en particulier à garantir la sécurité du moteur. Le dimensionnement de ces pièces fortement chargées est un compromis entre les critères de performance aérodynamique et les critères mécaniques de tenue statique et dynamique. Concernant les aspects dynamiques, les analyses dimensionnelles sont basées à la fois sur des résultats d'essais et des prédictions des modèles éléments finis. L'enjeu du dimensionnement est de s'assurer que les composants ne sont pas soumis à de la fatigue vibratoire pouvant induire une rupture dans des délais très courts.

Les enjeux autour de la conception de la soufflante étant forts :

- la soufflante fournit 80% de la poussée au décollage ;
- 1% de rendement gagné équivaut à une baisse de 0.6% de la consommation spécifique ;

la phase de conception dure environ huit mois<sup>16</sup> pendant lesquels une cinquantaine de versions sont analysées. Il s'agit de trouver un compromis aéromécanique afin de répondre aux cinq impératifs technologiques : performances, opérabilité, sécurité, environnement, coûts, développés au chapitre 4.1.2. Ce processus multidisciplinaire et itératif peut s'appréhender au travers de la figure 4.4.

### 4.2.1 Les différentes sources d'excitation

Les aubages sont soumis à de nombreuses sollicitations statiques et dynamiques d'origine aérodynamique ou mécanique. Ces phénomènes sont multiples, complexes et difficiles à prédire d'où l'existence de nombreuses marges (pompage, flottement, *etc.*) que l'amélioration des modèles théoriques et des outils de calcul doit permettre d'affiner. Bien que les excitations dépendent fortement de la position dans le moteur de l'étage étudié, celles affectant une aube fan peuvent être classées en deux catégories principales : les phénomènes aéroélastiques et les phénomènes mécaniques.

#### (a) Phénomènes aéroélastiques

Baignées dans un flux d'air, les roues aubagées (stator et rotor) sont soumises à des sollicitations vibratoires d'origine aérodynamique, dont il convient d'étudier les effets sur leur comportement mécanique. Ces excitations aérodynamiques ont deux effets principaux d'un point de vue dynamique : elles peuvent provoquer une instabilité de la roue aubagée (phénomène de flottement analogue à ceux rencontrés chez les avionneurs) ou une résonance de la

<sup>15</sup>La soufflante du moteur CF6-80C de 27 tonnes de poussée qui équipe les Boeing 767 représente 21% de la masse du moteur. Dans le GenX-1B, de 31 tonnes, qui doit équiper les futurs Boeing B787, leur masse est passée à 33%.

<sup>16</sup>La phase de conception et le départ de la mise au point d'un moteur durent un an. S'en suivent quatre années de test depuis le début des essais en vol jusqu'à la certification et la mise en service.

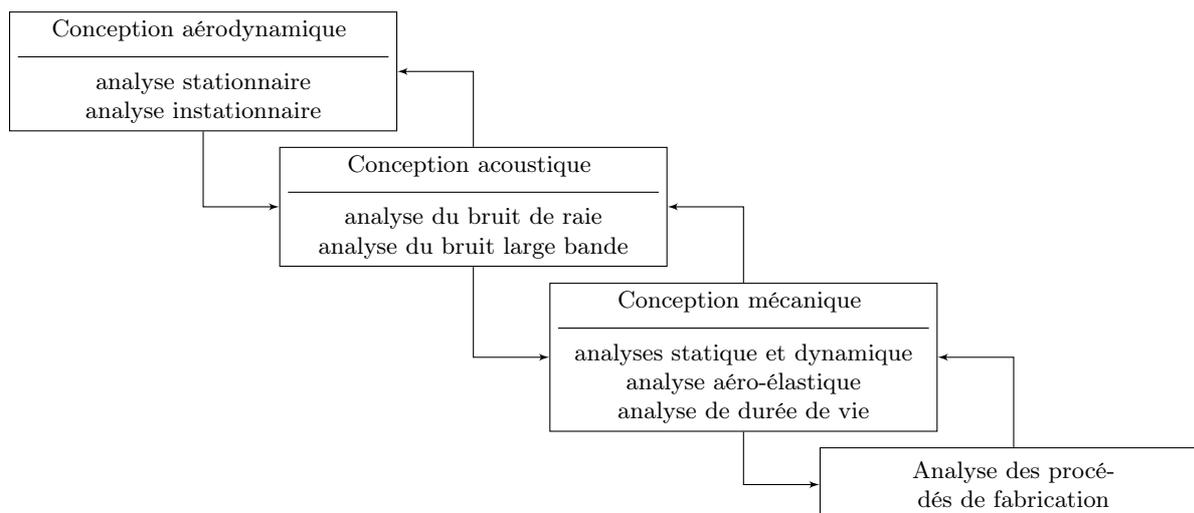


FIG. 4.4 – La conception d'une aube de soufflante.

structure sur un (ou plusieurs) de ses modes propres de vibration, ce qui génère des contraintes alternées susceptibles de provoquer de la fatigue vibratoire. Ces sources d'excitations aérodynamiques peuvent être synchrones ou asynchrones.

Les excitations synchrones sont caractérisées par une fréquence liée à une harmonique du régime moteur. Différents types d'excitation peuvent être trouvés :

- les excitations de bas ordre, induites par les dissymétries présentes dans la veine d'air ;
- les distorsions de la manche d'entrée d'air générées par des conditions de vol en incidence : montées, descentes ou vent de travers ;
- les excitations harmoniques générées par un balourd résiduel du à un équilibrage de la roue imparfait ;
- les excitations par sillage. Dans son mouvement de rotation, l'aube se retrouve en amont ou en aval de différents obstacles (aubes, bras de carter, *etc.*) qui provoquent une perturbation dans l'écoulement dont la fréquence est égale à la fréquence de rotation multipliée par le nombre d'obstacles. Si il y a coïncidence de la fréquence d'excitation avec la fréquence propre de l'aube, cette dernière entre alors en résonance. Ce phénomène de croisement d'une harmonique de l'excitation avec une fréquence propre de l'aube est prédit à l'aide d'un diagramme de Campbell.

La réponse des aubages à des excitations synchrones est correctement prédite par la théorie et ne pose pas de problème lors de la phase de conception, ce qui n'est pas le cas des excitations asynchrones.

Les excitations asynchrones sont caractérisées par une fréquence qui n'est pas un multiple du régime de rotation. Les phénomènes les plus importants sont :

- le décollement tournant ;
- le flottement ;
- le SFV (*Separated Flow Vibration*).

Le décollement tournant est un phénomène qui prend naissance lorsqu'il y a décrochage des filets d'air sur les aubes du à un angle d'incidence trop élevé. Si ce décrochage, ou décollement, n'affecte qu'une seule aube du disque et se déplace dans le sens (ou le sens inverse) de la rotation, il est dit tournant. Si la vitesse de déplacement de ces zones fluides "décollées" est

différente de la vitesse de rotation du disque, il en résulte des différences de pression entre les différentes aubes ce qui génère des niveaux vibratoires importants, voire des surcharges en deçà de la limite de pompage.

Le flottement peut être caractérisé de classique ou de décrochage suivant la nature de l'instabilité qui amène l'aube à vibrer en grande amplitude (cycle limite) ou à sa destruction (flottement pur) :

- le flottement, dit "classique", est celui des avionneurs et concerne les structures ayant un profil d'aile, comme les aubes, où les mouvements de torsion et de flexion sont couplés. Pour une vitesse du flux d'air donnée, les forces aérodynamiques vont modifier les fréquences propres et si les fréquences de torsion et de flexion se rejoignent, l'amplitude de l'aube croît sans limite jusqu'à sa ruine. Dans ce type de problème, plus l'écart entre les fréquences propres est grand, plus la vitesse limite à partir de laquelle se déclenche l'instabilité est élevée ;
- le flottement de décrochage est une instabilité où les efforts engendrés par le flux d'air déforment la structure, ce qui modifie en retour l'écoulement de celui-ci, et ainsi de suite. Au dessus d'une vitesse critique, et si les propriétés aérodynamiques de la structure le permettent, l'énergie apportée par le fluide devient supérieure à celle dissipée dans la structure et l'amplitude vibratoire augmente progressivement et se stabilise à un certain niveau. Ce type d'instabilité, dit par amortissement ajouté, conduit à des oscillations de cycle limite.

Le décollement tournant et le flottement, qui augmentent le niveau vibratoire des aubes, ne prennent naissance que parce que les aubes vibrent préalablement. Pour cette raison, ces phénomènes sont dits auto-entretenus. Ils sont encore mal connus et difficile à prendre en compte dès la phase de conception. Leur découverte apparaît le plus souvent pendant les essais moteurs, ce qui implique de nouvelles boucles de conception.

Enfin, si le flottement est une instabilité aéroélastique due à un couplage entre l'écoulement du fluide et le mouvement de la structure, c'est à dire une vibration induite par le mouvement du fluide, le dernier type d'excitation, le SFV, est quant à lui une vibration induite par la turbulence. Du fait que la vitesse du flux d'air n'est pas constante et qu'elle évolue aussi bien dans le temps que dans l'espace, il s'ensuit des efforts aérodynamiques non constants qui peuvent faire vibrer les aubes de manière irrégulière.

### **(b) Phénomènes mécaniques**

Les aubages sont également soumis à des sollicitations statiques et dynamiques d'origine mécanique. Les principales sollicitations statiques sont les efforts centrifuges. La charge induite par un taux de rotation élevé sur une aube fan peut atteindre plusieurs dizaines de tonnes. Quant aux sollicitations dynamiques, les trois principales sont :

- les chocs ;
- le balourd ;
- le contact rotor-stator.

Les chocs sont des phénomènes transitoires violents qui peuvent être rencontrés lors d'ingestion de corps étrangers (oiseaux, glace) par le moteur, principalement pendant les phases de décollage et d'atterrissage. Si le choc est si violent qu'il s'en suit une perte d'aube, un balourd très important est créé jusqu'à l'arrêt du moteur. Les carters jouent alors un rôle crucial puisqu'ils doivent être capables de contenir les pièces perdues lors de l'impact et de maintenir la cohésion du moteur soumis au balourd.

Afin de limiter les fuites vers l'amont du compresseur, une solution consiste à réduire au minimum les jeux<sup>17</sup> entre les extrémités des aubes et le carter. Ces contacts sont à l'origine d'interactions modales entre la roue aubagée et le carter ainsi que d'instabilités associées à des niveaux vibratoires élevés. Ces phénomènes restent toutefois difficiles à prédire quantitativement [75].

#### 4.2.2 Le phénomène de résonance

Les phénomènes de résonance, coïncidence d'une fréquence propre de l'aube avec une fréquence d'excitation, sont fréquemment à l'origine des incidents mécaniques rencontrés sur les turboréacteurs. Un calcul des modes propres de la roue aubagée, ainsi que la connaissance des excitations qui sont susceptibles de lui être appliquées en fonctionnement, permettent d'améliorer sensiblement la fiabilité et la disponibilité du matériel.

Les phénomènes vibratoires qui interviennent dans les turboréacteurs, décrits au paragraphe 4.2.1, sont complexes pour au moins deux raisons :

- la première tient au fait que les aubes sont riches en modes propres et soumises à des forces dynamiques variées et intenses : excitations multi-harmoniques fixes ou tournantes, asynchrones, interaction rotor-stator, *etc.*, qui sont souvent difficiles à anticiper, particulièrement pour les excitations asynchrones ;
- la seconde vient de ce que la roue aubagée étant une structure à symétrie cyclique, c'est à dire une structure circulaire refermée sur elle-même composée d'un ensemble de sous-structures identiques, les déformées modales de la roue sont harmoniques selon la direction circonférentielle et il apparaît des modes à diamètres nodaux. Il est possible de rencontrer trois types de mode : ceux où toutes les aubes vibrent en phase ou en opposition de phase et ceux dit "dégénérés" où il existe deux modes propres orthogonaux par pulsation<sup>18</sup>.

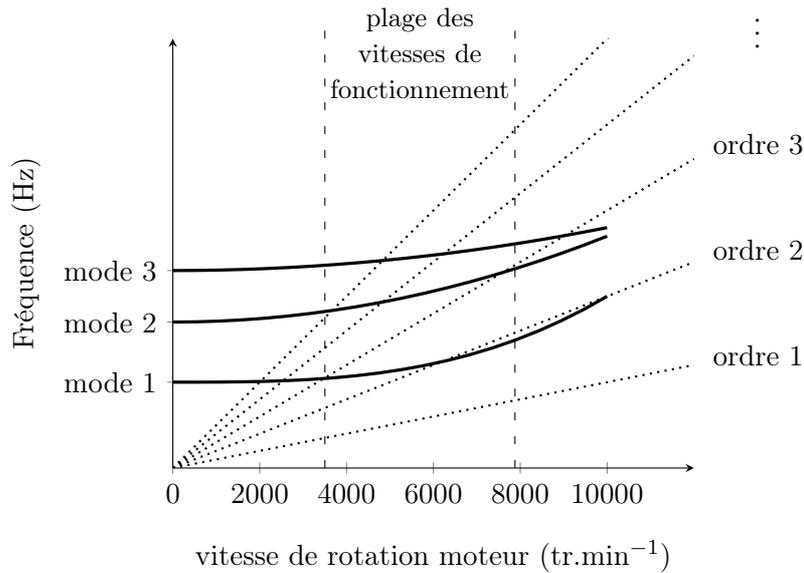
De ce fait, ces forces vont pouvoir venir exciter des modes d'aube et de disque<sup>19</sup>. Il en résulte une situation modale complexe de la roue aubagée, qui peut être appréhendée dès la phase de conception par l'intermédiaire d'un diagramme de Campbell. Cependant, ce diagramme n'est valable que pour les phénomènes synchrones où les harmoniques du régime moteur peuvent coïncider avec les fréquences propres de la roue ou de l'aube. La prise en compte des phénomènes asynchrones se faisant plutôt par retour d'expériences.

Ce diagramme, figure 4.5, consiste à reporter les fréquences propres d'aubages ou de roue aubagée, en fonction de la vitesse de rotation de la turbine. De la même manière, les fréquences d'excitation répertoriées pour l'étage considéré sont représentées. Les fréquences propres d'aubages sont, en général, pratiquement des horizontales au raidissement centrifuge près et les fréquences d'excitation, proportionnelles à la vitesse de rotation, sont des droites passant par l'origine. La figure 4.5 permet de voir qu'il est impossible d'éviter toutes les résonances sur l'ensemble de la plage de fonctionnement du moteur, et comme certaines d'entre elles sont associées à des niveaux de contraintes qui conduisent à des dommages par fatigue, l'ajout d'amortissement capable d'augmenter la limite d'endurance des aubes apparaît comme une solution très intéressante.

<sup>17</sup>Les jeux doivent tenir compte de l'élongation due aux efforts centrifuges et du fluage pour les parties chaudes.

<sup>18</sup>Ces deux vecteurs propres étant orthogonaux, ils forment une base dans laquelle toute combinaison linéaire de ces vecteurs est encore un vecteur propre.

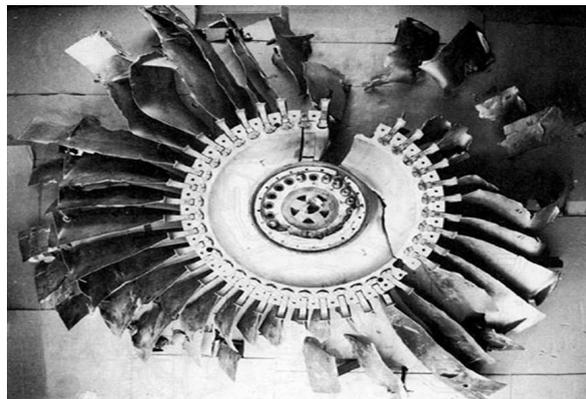
<sup>19</sup>Outre la coïncidence fréquentielle, entre l'excitation et le mode de l'aube, il est également nécessaire, dans le cas des roues aubagées, d'avoir une condition de coïncidence entre l'ordre d'une des harmoniques de l'excitation et le nombre de diamètres nodaux du mode.

FIG. 4.5 – *Diagramme de Campbell*

Il arrive cependant que la lecture des coïncidences ne soit pas aussi aisée. Les aubes de soufflante à large corde, fortement vrillées ou creuses ont des fréquences propres qui varient de manière non linéaire avec l'augmentation du taux de rotation. Cela s'explique par le fait que les efforts centrifuges déforment fortement la géométrie de l'aube, sa raideur varie et modifie ses fréquences et ses modes propres. L'évolution des fréquences propres avec le taux de rotation peut alors présenter des phénomènes de croisement appelés *veering*.

### 4.2.3 Fatigue vibratoire

Des accidents moteurs ont toujours lieu, bien que rares (Fig. 4.6), car les motoristes ne connaissent parfaitement leurs pièces qu'après avoir accumulé un important retour d'expérience. Les causes de rupture sont par ailleurs difficilement évitables car elles sont rares, peu détectables et interviennent tout au long de la vie de la pièce.

FIG. 4.6 – *Roue aubagée reconstruite suite à une rupture de disque due aux phénomènes de fatigue*

Ces différentes causes de rupture peuvent être classées en trois catégories :

- les problèmes de jeunesse qui peuvent provenir d'une action de réduction de coût hasardeuse, d'une nouvelle technologie sur laquelle l'expérience est insuffisante, une erreur manifeste de conception (matériau, dimensionnement, montage, lubrification) ou un niveau de chargement vibratoire excessif et mal connu en conditions de vol ;
- les causes aléatoires et rares en milieu de vie. Les principales sont : des défauts dans les alliages, des inclusions en métallurgie des poudres, des chocs lors de l'usinage, la manutention ou la maintenance et enfin des impacts de corps étrangers (gravillons, boulons, oiseaux, *etc.*) ;
- les causes liées au vieillissement. Ce sont les sources de rupture dominantes, dues à des phénomènes de fatigue.

La fatigue des pièces de turbomachine peut provoquer leur rupture et mettre en danger la sécurité des passagers. Or, cette dernière est un impératif absolu pour des raisons éthiques et économiques évidentes. Par conséquent, l'initiation de fissure, puis de rupture, par fatigue est un phénomène à maîtriser car il représente un risque majeur (Fig. 4.7).

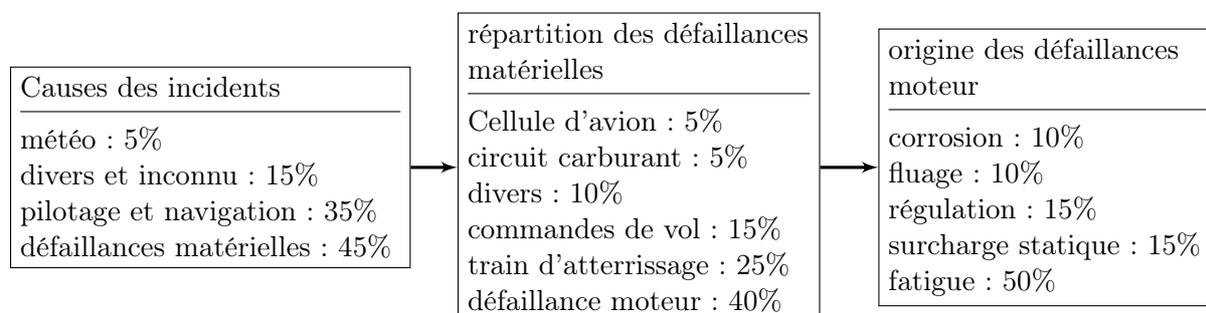


FIG. 4.7 – *Origine des indisponibilités appareils. Enquête sur 4000 incidents majeurs.*

Le phénomène de fatigue désigne le fait que des contraintes répétées, même d'un niveau très inférieur à la limite de résistance du matériau, peuvent ruiner les aubages si le nombre de cycles est suffisant. La naissance puis la propagation de fissures, et la rupture qui s'en suit, ont essentiellement pour cause la fatigue par fluage (tenue aux hautes températures) et la fatigue vibratoire (tenue aux sollicitations répétées). Cette dernière regroupe deux modes de dégradation différents :

- la fatigue oligocyclique, pour des contraintes importantes conduisant à la ruine en moins de  $5 \cdot 10^4$  cycles ;
- la fatigue conventionnelle ou polycyclique, pour des niveaux de contraintes plus faibles menant à la limite d'endurance vers  $10^8$  ou  $10^9$  cycles.

Les vitesses de propagation des fissures étant de l'ordre de  $10^{-10}$  m à  $10^{-9}$  m par période et la fréquence de vibration des aubes de quelques centaines de Hertz à plusieurs milliers, une fissure peut conduire à la rupture en quelques heures de vol seulement. De ce constat, les différents types d'excitations auxquelles est soumise une aube, décrites dans la partie 4.2.1, peuvent être reclassées de manière pertinente du point de vue du phénomène de fatigue de la manière suivante :

- les excitations composées d'harmoniques multiples de la fréquence de rotation et du nombre de redresseurs ;
- les excitations dont les variations sont associées à celles du régime moteur.

Les premières ont des fréquences élevées avec de faibles niveaux de contrainte et sont à l'origine de la fatigue polycyclique ou HCF (*High Cycle Fatigue*), comme les excitations par sillage.

Les secondes interviennent à des fréquences beaucoup plus basses mais avec des niveaux de contrainte plus importants et sont à l'origine de la fatigue oligocyclique ou LCF (*Low Cycle Fatigue*). Ce type d'excitation est associé aux fréquences de variation du régime moteur (décollage, montée, croisière, atterrissage), comme les variations d'effort centrifuge.

Deux outils empiriques, les courbes de Wöhler et les diagrammes de Haigh, permettent l'étude de la fatigue vibratoire. Les courbes de Wöhler (Fig. 4.8) sont généralement obtenues à partir d'essais de fatigue effectués sur des éprouvettes chargées uniaxialement jusqu'à la rupture avec une contrainte moyenne nulle et un maximum de contrainte inférieur à la résistance mécanique. Un essai fournit un point sur le diagramme. Pour certains matériaux, il existe une contrainte limite de fatigue ( $\sigma_e$ ) en dessous de laquelle il n'y a jamais de rupture quelque soit le nombre de cycles. C'est une propriété vérifiée notamment par les alliages de titane. Il s'agit alors, durant la phase de conception, de garantir un niveau de contrainte maximum inférieur à  $\sigma_e$  avec une marge de sécurité suffisante étant donné les incertitudes sur les niveaux de chargement réellement subis par l'aube en vol.

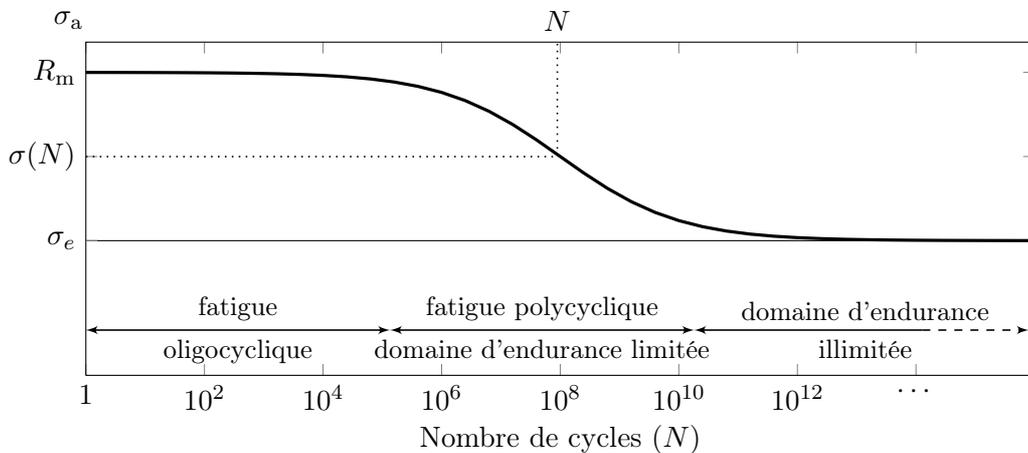


FIG. 4.8 – Courbe de Wöhler

Dans la pratique, la fréquence et l'amplitude des contraintes ne suffisent pas à caractériser correctement le chargement. Il est nécessaire de connaître également le profil du cycle de contrainte.

- alterné à moyenne nulle ;
- alterné dissymétrique à moyenne positive ou négative
- répété ou ondulé à moyenne positive ou négative

En effet, la limite d'endurance  $\sigma_e$  obtenue pour une contrainte moyenne nulle n'est plus valable pour des profils à moyenne non nulle. Or, les aubes sont soumises à des contraintes statiques importantes dues aux efforts centrifuges et à la pression stationnaire du gaz. Pour palier à cette limitation, plusieurs modèles ont été développés afin d'estimer l'effet de la contrainte moyenne sur la durée de vie en fatigue. Les modèles de Goodman et Soderberg sont des droites et ils relient la limite d'endurance en contrainte nulle  $\sigma_e$  à, respectivement,  $R_m$ , la contrainte de rupture statique et  $R_e$ , la limite d'élasticité. Le modèle de Soderberg est donc plus conservatif. Le diagramme de Haigh (Fig. 4.9), qui relie la limite d'endurance à la contrainte moyenne  $\sigma_m$ , est généralement utilisé pour représenter les différentes limites proposées par les modèles. Un point de fonctionnement est acceptable si il se situe en dessous d'une des droites.

Ces outils sont relativement faciles d'utilisation et permettent de statuer rapidement sur le risque de fatigue. Cependant, ils ne permettent pas de prendre en compte les effets de fatigue

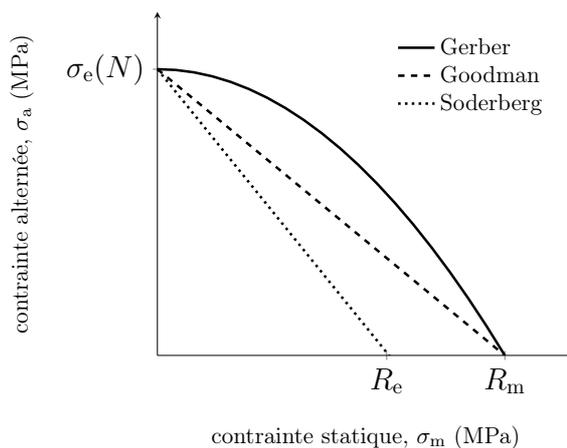


FIG. 4.9 – Diagramme de Haigh

combinés (HCF+LCF), les chargements multiaxiaux ou bien encore des cycles de contraintes complexes.

La durée de vie des aubes étant directement liée à l'intensité des contraintes dynamiques, la maîtrise des niveaux vibratoires est un problème majeur pour les bureaux d'études. Ainsi, il est généralement nécessaire d'apporter un amortissement supplémentaire, soit pour augmenter la durée de vie à niveau de contrainte donné, soit pour augmenter le niveau de contrainte maximum à durée de vie fixée.

#### 4.2.4 Les techniques de réduction de vibrations d'aube de soufflante

Comme toutes les coïncidences entre les harmoniques du régime moteur et les fréquences propres des aubes ne peuvent pas être évitées sur toute la plage de fonctionnement du moteur, les aubes ont tendance à vibrer fortement, ce qui accélère leur usure et diminue leur durée de vie. Afin de réduire les niveaux vibratoires, la première stratégie consiste à apporter de l'amortissement. Ces techniques d'amortissement de vibrations appliquées au domaine aéronautique, et en particulier à celui des aubes, doivent cependant intégrer un nombre important de contraintes :

- les variations de température de fonctionnement ( $-50^\circ\text{C}$  en vol pour les aubes fan à  $+50^\circ\text{C}$  sur le tarmac) et les efforts centrifuges ;
- la masse ajoutée, qui est critique sur des structures tournantes et embarquées ;
- les impératifs de fiabilité, de robustesse et de coût.

L'ensemble des solutions technologiques peut être divisé en trois catégories : actives, semi-passives ou passives. Les dispositifs passifs ont l'avantage, outre leur simplicité d'implémentation, d'être inconditionnellement stables, puisqu'il n'y a aucune énergie injectée dans la structure à contrôler, contrairement aux technologies actives. Parmi les dispositifs passifs, les motoristes privilégient les techniques d'amortissement par frottement sec et par ajout de matériau viscoélastique.

##### (a) Amortissement par frottement sec

Les dispositifs de dissipation par frottement sec introduisent des non-linéarités ponctuelles dans la dynamique de l'aube et exploitent le déplacement relatif de l'aube par rapport au disque ou entre deux aubes adjacentes. Le frotteur, généralement logé entre deux aubes,

est plaqué sous les plates-formes par la force centrifuge, ce qui engendre une dissipation d'énergie à l'interface entre le frotteur et les plates-formes lorsque les aubes se mettent à vibrer (Fig. 4.10(a)). Comme la masse du frotteur détermine la force normale de contact, celle-ci doit être optimisée (Fig. 4.10(b)). Si la masse est trop petite, il n'y a pas de frottement et la résonance des aubes n'est pas amortie. À l'inverse, si la masse est trop grande, elle ne permet plus le glissement et il n'y a plus de dissipation. Selon le type de turboréacteur, les frotteurs

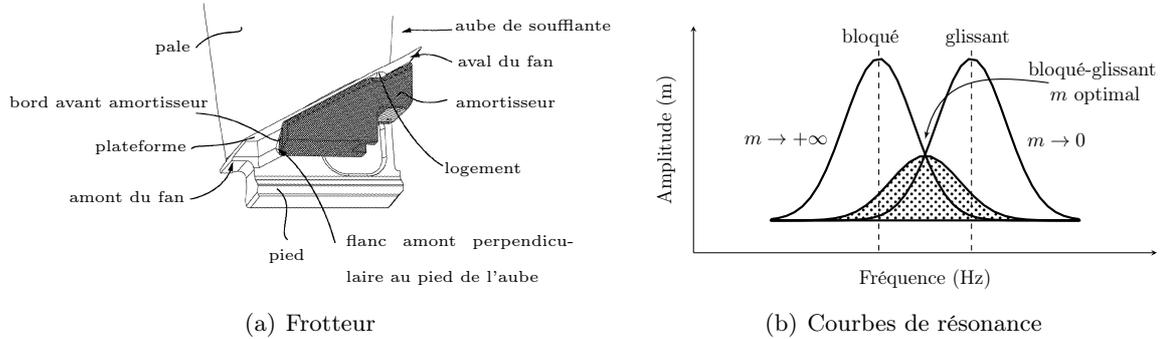


FIG. 4.10 – *Modèle de frotteur pour aube fan et courbes de résonance pour plusieurs valeurs de masse du frotteur.*

doivent avoir une masse différente. Des frotteurs standards sont donc usinés afin d'obtenir la masse désirée. Cette opération de calibrage est cependant réalisée de manière empirique et par retour d'expérience et ne peut donc pas être reproduite de manière simple et peu coûteuse pour différents modèles. Il existe différentes géométries de frotteur (creux, plat ou en coin) et les études portant sur cette technologie sont nombreuses [59, 113, 101, 99, 139, 140]. D'autres technologies d'amortissement par frottement existent mais elles sont moins, ou ne sont plus, employées :

- l'amortissement par un fil traversant à mi-hauteur les aubes [125] ;
- l'utilisation d'aube fan à nageoires, où chaque aube de la roue vient s'appuyer contre l'aube voisine. Initialement conçue pour rigidifier les aubes de grande taille, cette technologie limite les vibrations par frottement mais la présence de nageoires perturbent fortement l'écoulement du flux ;
- les aubes à talon dissipent également de l'énergie par frottement dans cette seconde liaison ;
- Des frotteurs annulaires, appelés joncs [61, 74], montés sous la jante, les viroles ou les labyrinthes d'étanchéité des disques aubagés monoblocs (DAM) permettent également de dissiper de l'énergie par frottement

Il existe également une source naturelle de frottement dans les liaisons entre les aubes et le disque mais qui n'est pas suffisante telle quelle pour amortir les vibrations [88, 132, 31]. Enfin, comme l'introduction de frottement dans les modèles de vibration d'aube conduit à des équations non linéaires, les méthodes de résolution reposent principalement sur l'intégration temporelle, la méthode de l'équilibrage harmonique ou des méthodes qui alternent domaine temporel (pour le calcul des forces de frottement) et le domaine fréquentiel (pour le calcul du mouvement).

#### (b) Amortissement par ajout de matériau viscoélastique

Les matériaux viscoélastiques, en raison de leur propriété dissipative sont également très utilisés. Ils sont efficaces en haute fréquence, peu chers, travaillent en déformation et consti-

tuent des technologies éprouvées. Cependant, les premiers modes propres d'aubes fan, à l'origine du flottement par exemple, et compris entre 40 Hz et 400 Hz, ne sont pas ciblés par les matériaux viscoélastiques.

Traditionnellement, l'utilisation de matériau viscoélastique se fait sous forme de couche à l'extérieur de l'aube, à l'interface aube-disque (Fig. 4.11) ou bien sous forme de noyau à l'intérieur d'aube creuse. Les aubes composites permettent d'utiliser des couches viscoélastiques entre les renforts d'acier et l'aube proprement dite (Fig. 4.11), ce qui s'avère une solution élégante (écoulement non perturbé, pas de pièce supplémentaire), ou par insertion en usinant directement l'aube. Étant donné les basses températures de fonctionnement de la soufflante,

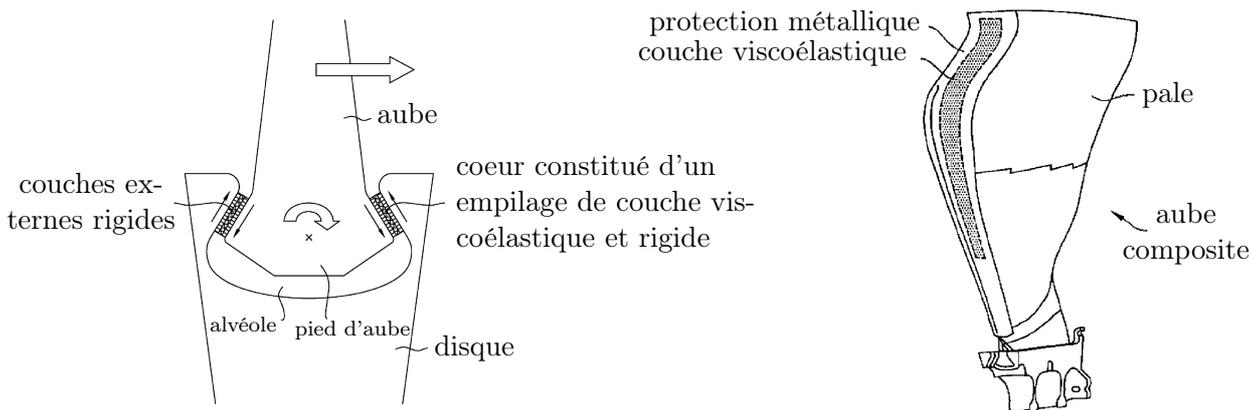


FIG. 4.11 – Dispositifs amortisseurs de vibrations viscoélastiques pour aubes de turbomachine (demande de brevet - consultation libre). Figure de gauche : amortissement localisé sur les portées de l'aube et du disque. Figure de droite : amortissement réparti sur le bord d'attaque entre l'aube et la lame de titane.

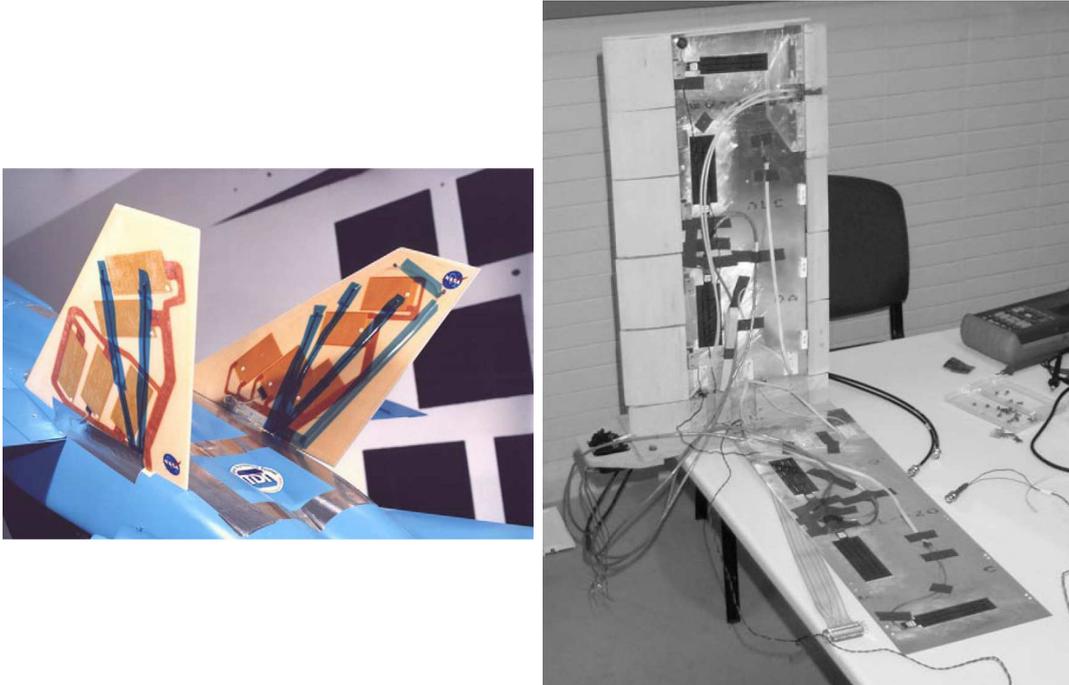
le matériau viscoélastique est de préférence du caoutchouc, du silicone ou des polymères élastomères. Sur la figure 4.11 de droite, la couche de matériau viscoélastique se situe sous la lame, soit sur les zones de déformation maximale pour un mode de vibration déterminé de l'aube, soit recouvre tout le bord d'attaque. Le matériau amortissant peut être monocouche ou multicouche en fonction de l'environnement.

### (c) Amortissement par ajout de matériau piézoélectrique

Les techniques de réduction de vibration à base de matériau piézoélectrique sont couramment employées dans l'aéronautique depuis une quinzaine d'années [55]. Les applications concernent, en grande majorité, la réduction des phénomènes de flottement, que cela soit en actif [114, 87, 124] ou semi-passif/passif [37, 9]. Elles portent sur le contrôle de pâle d'hélicoptère, d'aile [94], d'aileron [114], de volet [124] ou d'une partie d'un fuselage.

Cependant, assez peu d'études se sont penchées sur l'amortissement des aubes de turbomachine elles-mêmes. Dans [77, 78] par exemple, une application sur un secteur de DAM encastré-libre muni de 5 éléments piézoélectriques de type Quickpack est mise en œuvre. Les shunts R et RL sont testés sur le premier mode du secteur et donnent, respectivement, -3 dB et -7 dB d'atténuation.

Ainsi, l'utilisation de matériaux piézoélectriques connectés à des circuits actifs, semi-passifs ou passifs a été largement étudiée mais les expériences traitent presque toujours de cas académiques de poutre ou de plaque. De ce point de vue, l'étude présentée ici sur la modélisation éléments finis 3D d'un système piézoélectrique de réduction de vibration associée à une vali-



(a) Maquette au 1/6 d'un empennage de F/A-18 (b) Intérieur d'une maquette d'aile équipée [124]. [114].

FIG. 4.12 – Exemples d'implémentation de technologies piézoélectriques pour le contrôle des vibrations de structure.

dation expérimentale sur une aube fan de CFM56-7B apporte une vraie valeur ajoutée pour la Snecma par rapport à la littérature existante. Les performances des shunts piézoélectriques en terme d'atténuation sur une structure massive faiblement amortie sont clairement exposées.

### 4.3 Conclusions

Ce chapitre a permis d'introduire certaines problématiques liées à la dynamique des aubes fan de turboréacteurs, qui constitue la partie applicative de ce travail de thèse. Pour résumer, il peut être dit que :

- les aubes sont des structures à géométrie complexe soumises à des efforts centrifuges intenses et plongées dans un flux d'air à haute vitesse dont la température peut s'élever jusqu'à plusieurs centaines de degrés. Il en résulte qu'elles sont soumises à de nombreuses sollicitations plus ou moins complexes ;
- si certains phénomènes dangereux les plus simples peuvent être correctement prédits (phénomène de résonance avec une harmonique moteur par exemple), d'autres restent difficilement prévisibles et nécessitent le calcul de marges pour être évités (marge au flottement ou au pompage) ;
- de ce fait, le cycle de conception des aubes est hautement itératif et a pour but de converger vers le meilleur compromis aéro-thermo-mécanique, c'est-à-dire où le profil aérodynamique autorise de bonnes performances tout en garantissant la tenue mécanique pour différentes températures.

Dans la suite, les solutions piézoélectriques proposées pour réduire les vibrations doivent, à terme, permettre de répondre aux exigences de conception des aubes pour lesquelles la

fatigue vibratoire et les phénomènes de résonance doivent être réduits. Ces deux aspects sont toujours des enjeux importants pour les motoristes aéronautiques et plus généralement pour les constructeurs de turbomachines.

---

# Atténuation des vibrations d'une aube de soufflante de CFM56-7B par shunt piézoélectrique

Cette partie a pour objet de valider les résultats des chapitres précédents sur la modélisation et l'optimisation d'une structure élastique munie de pastilles piézoélectriques auxquelles est connecté un shunt. Parmi les différents modules qui composent un turboréacteur double-corps/double-flux, c'est sur une aube de soufflante que le système de contrôle vibratoire par shunt piézoélectrique a été implémenté.

La fabrication d'un système de contrôle vibratoire à base de pastilles piézoélectriques apparaît comme un moyen naturel de réduire le risque de fatigue et par conséquent d'allonger la durée de vie des aubes. Pour réaliser efficacement un tel système, il a été démontré dans les chapitres 2 et 3, que le couplage électromécanique entre l'aube et les pastilles doit être maximisé en optimisant les caractéristiques géométriques et la localisation des pastilles sur la structure. Il s'agit ensuite d'associer à cet ensemble des shunts résistifs et résonants tels que ceux du chapitre 2.6, puis de mesurer les caractéristiques du tout pour vérifier l'accord avec la théorie.

*Dans tout le chapitre, les valeurs des fréquences propres, qu'elles soient issues de l'expérience ou des calculs, ont été adimensionnées par rapport à la première fréquence propre expérimentale de l'aube nue en conditions libre-libre ( $f^{ref}$ ), ceci dans un souci de confidentialité.*

## 5.1 Analyse modale de l'aube

Le but de cette analyse modale est de prendre connaissance des propriétés dynamiques de l'aube nue (structure seule sans pastilles piézoélectriques) en terme de fréquences propres, de coefficients d'amortissement structural et de déformées modales. Pour cela, deux conditions aux limites ont été testées : libre-libre et encastree-libre. La première condition est très proche des simulations numériques et a l'avantage d'être relativement simple à mettre en œuvre. La seconde, avec le pied de l'aube encastree dans un mors, est une condition limite plus proche de celle que connaît l'aube en fonctionnement dans le moteur.

### 5.1.1 Dispositif expérimental

Préalablement à la réalisation des essais, un protocole a été suivi afin de déterminer :

- les masses exactes de l'aube et du mors ;
- la meilleure manière de réaliser les conditions aux limites. Plusieurs configurations sont testées pour :
  - les conditions aux limites libre-libre : suspension par sandows avec plusieurs nombres de points d'attache ;
  - les conditions aux limites encastrée-libre : mors posé sur un bâti, suspension par chaînes (plusieurs nombres de points d'attache) et suspension par sangles (plusieurs nombres de sangles testés) ;
  - le couple à appliquer sur les vis de serrage du mors ainsi que l'ordre dans lequel il convient de les visser afin de rendre les opérations de serrage et desserrage aussi reproductibles que possible ;
- le site de mesure de référence, unique, susceptible de convenir aux premiers modes de vibrations à analyser ;
- le site d'excitation, unique, susceptible de solliciter au mieux les premiers modes de vibrations à analyser ;
- le processus de traitement des données conduisant à la détermination des coefficients d'amortissement structuraux.

Au final :

- l'aube pèse 4.86 kg et le mors d'essai 125 kg ;
- le site d'excitation, identique au site de mesure de référence, est au coin de l'extrémité libre de l'aube et du bord d'attaque ;
- les deux conditions aux limites testées ont été installées comme suit :
  - l'aube est suspendue par le pied au moyen de deux sandows. Un petit dispositif additionnel a été conçu à cet effet au laboratoire. Il vient se fixer sur le pied de l'aube au moyen de quatre vis de pression. Sa fonction est de prolonger le pied de l'aube pour créer un logement au sandow (Fig. 5.1). À l'autre extrémité, c'est le pied de l'aube qui sert de logement au second sandow. Les deux sandows sont ensuite attachés à un mousqueton à vis et ce dernier est clippé à un anneau en acier. Ainsi, le bâti n'est relié à l'aube que par un contact ponctuel ;
  - la condition avec le pied de l'aube bloqué a été mise en place à partir d'un mors d'essai fourni par la Snecma. Ce mors est usiné dans un bloc d'acier. Des logements curvilignes permettent au pied de l'aube de s'insérer dans le mors. Les portées de l'aube sont ensuite plaquées contre les portées du mors à l'aide d'un serrage par vis (Fig. 5.2). Le mors d'essai est suspendu par une sangle en deux points ;
- le couple de serrage maximum appliqué est d'environ 800 Nm et l'ordre de serrage est le suivant : vis 2, vis 3, vis 4, vis 5, vis 1, vis 6. Enfin, la procédure de montage comprend un serrage, suivi d'un desserrage (1/4 de tour, ordre indifférent) puis un resserrage au couple cible.
- l'acquisition des données est réalisée avec le logiciel SmartOffice de M+P et la détermination des amortissements structuraux avec le logiciel d'identification modale *Modan*, développé par le laboratoire Femto-ST de Besançon ;

L'excitation est réalisée à l'aide d'un système électromagnétique sans contact fabriqué au laboratoire et déjà utilisé dans des études précédentes [128, 131]. Ce système est composé d'un petit aimant (4 g), collé sur la structure à mettre en vibration, et d'une bobine fixe, parcourue par un courant qui permet de créer une force magnétique sur l'aimant. Ce dernier est collé à l'aide de cire d'abeille. La cire s'applique et se retire facilement de la structure, ce

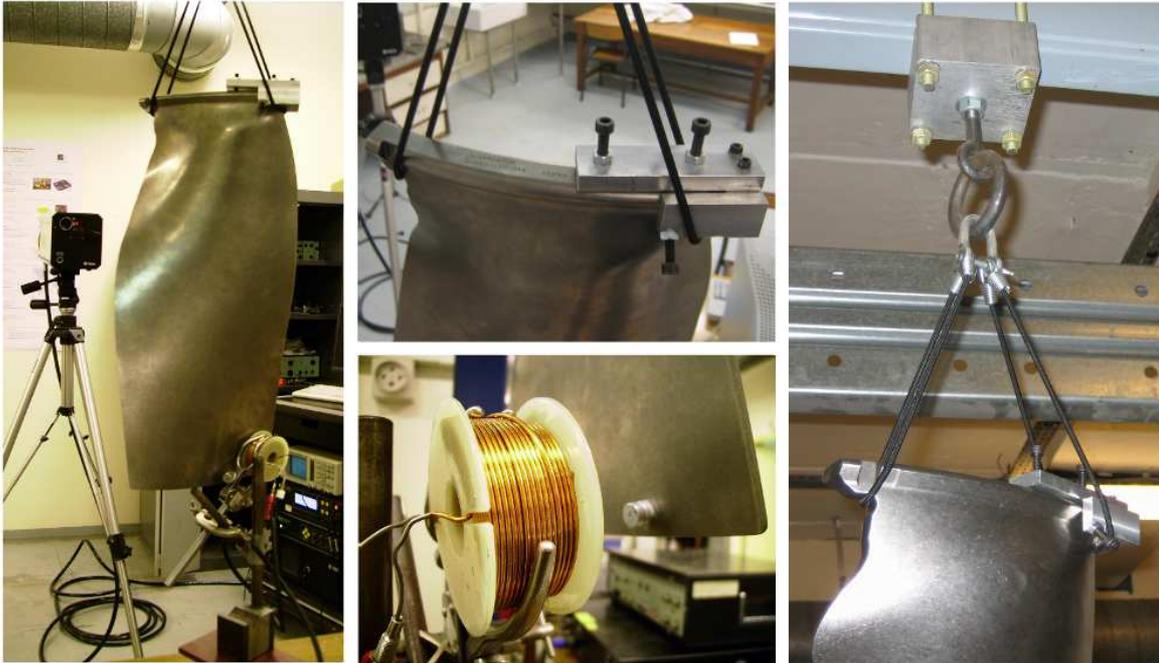


FIG. 5.1 – Photographies du dispositif expérimental en conditions aux limites libre-libre : vibromètre laser à balayage, suspension de l'aube, système bobine-aimant pour l'excitation et anneau d'accrochage.

qui permet de tester plusieurs sites d'excitation sans endommager l'aube, au contraire de la colle. De plus, la cire réagit très bien aux sollicitations dynamiques et possède une large bande passante jusqu'à 1 kHz environ. Il a été montré dans [131] que la force est proportionnelle à l'intensité du courant introduit dans la bobine, avec une distorsion harmonique largement négligeable (peu de non-linéarité). Pour cette raison, aucun capteur de force n'est utilisé et le signal de force pris pour l'extraction modale est celui en sortie de l'amplificateur. L'atout principal de ce système d'excitation est qu'il est sans contact, ce qui présente les avantages et les inconvénients suivants :

- la mise en place est aisée ;
- la dynamique de la structure n'est pas parasitée. Ce problème se rencontre notamment lorsque la structure est excitée par l'intermédiaire d'un pot vibrant où la liaison pot-structure se fait par une tige en métal ou une corde à piano, qui couple la dynamique de la structure avec celle du pot vibrant ;
- la masse ajoutée est celle de l'aimant, de 4 à 8 g suivant le nombre utilisé, qui est très faible comparée à la masse de la structure, qui est de 4.86 kg ;
- l'obtention d'effort important nécessite de faire passer dans la bobine un courant de 20 A environ. Il faut alors, soit refroidir la bobine, soit marquer des temps de pause à intervalle court.
- la longueur de déplacement est limitée par la hauteur de l'aimant. En effet, au moins la moitié de la hauteur de l'aimant doit rester dans le champ magnétique créé par la bobine afin que le signal d'excitation soit correctement transmis. Par conséquent, l'obtention de déplacement important ne peut être obtenu qu'en empilant plusieurs aimants, ce qui conduit à deux problèmes :

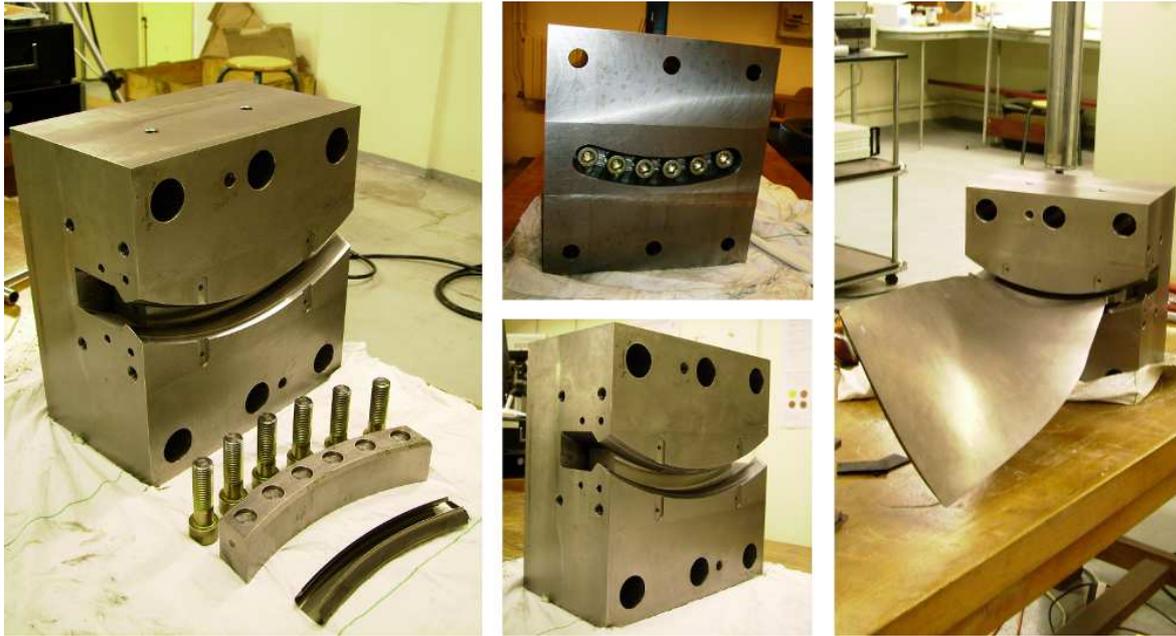


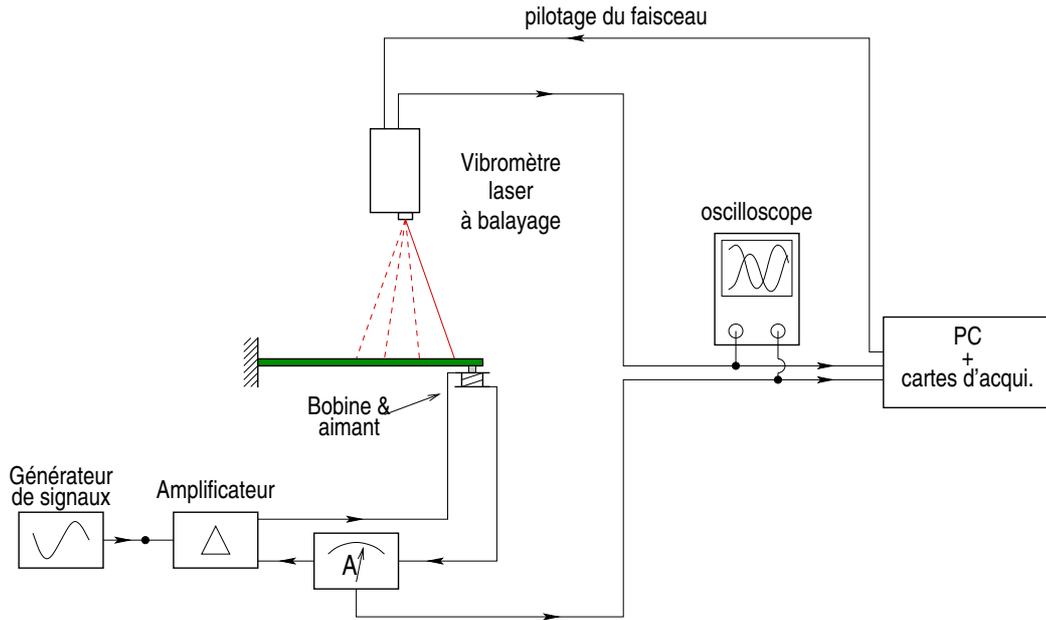
FIG. 5.2 – Photographies du dispositif expérimental en conditions aux limites encastrée-libre : mors, vis, cale de serrage et clinquant.

- la masse collée sur la structure augmente
- la liaison entre aimant n'est pas parfaite et perturbe le signal dans le cas d'efforts importants

Les mesures sont effectuées à l'aide d'un vibromètre laser à balayage Polytec PSV-300 muni d'une seule tête laser, ce qui permet de mesurer le signal de vitesse uniquement selon la direction du laser. Puisqu'une seule composante du vecteur vitesse est accessible, l'aube a été placée de façon à ce que le plan moyen de celle-ci soit perpendiculaire au laser. Une grille de mesure est ensuite définie sur l'aube via l'interface vidéo du logiciel d'acquisition puis l'appareil mesure et calcule les fonctions de réponse en fréquence (signal de vitesse au point courant par rapport au signal de force au point d'excitation, FRF) de la structure en chacun des points de la grille. Cela est possible grâce à deux miroirs articulés, dont l'inclinaison est commandée par l'appareil, qui permettent de faire pointer le laser aux endroits voulus. La FRF obtenue au point d'excitation (point de mesure de référence) est représentée sur la figure 5.4, pour les deux conditions aux limites. C'est à partir de ces résultats que sont obtenues et calculées :

- les déformées modales opérationnelles : pour cela, les maxima des fonctions de réponse en fréquence sont d'abord détectés. Ensuite, pour chaque fréquence  $f_0$  d'un des maxima, l'amplitude de la FRF à la fréquence  $f_0$  est tracé en chaque point de la grille de mesure. Une carte de la déformée de la structure à la fréquence  $f_0$  est alors obtenue, qui coïncide avec une déformée modale si la densité modale est faible au voisinage de cette fréquence. Les déformées opérationnelles pour les deux conditions aux limites sont représentées sur les figures 5.10 et 5.11 ;
- une estimation des fréquences propres et des amortissements modaux. Cette estimation a été conduite avec le logiciel *Modan (Modal Analysis)* par une méthode d'identification modal de type *LSCF (Least Squares Complex Frequency)*.

La position de l'excitation a été choisie sur l'extrémité de l'aube, à un endroit où la majorité des modes présentent un ventre de vibration. Trois signaux d'excitation ont été utilisés :



Appareils	Constructeur	Modèles
Synthétiseur de signaux	Bruel & Kjør	1051
Amplificateur de puissance	Bruel & Kjør	2719
Vibromètre laser	Polytec	PSV-300 / OFV056
Boîtier d'acquisition	Polytec	OFV30015
Logiciel d'acquisition	Polytec	PSV
Logiciel d'analyse modale	M+P	SmartOffice
Logiciel d'analyse modale	Femto ST, Besançon	Modan

FIG. 5.3 – Dispositif expérimental et références des appareils utilisés.

- un signal à spectre d'amplitude constant et à phase parabolique en fonction de la fréquence (*periodic chirp*). Il permet d'envoyer de l'énergie à toutes les fréquences contenues dans la bande passante choisie, et donc d'exciter convenablement les modes ayant un ventre à la position d'excitation ;
- un signal sinusoïdal, dont la fréquence est choisie égale à celle correspondant à un maximum local des FRF mesurées précédemment. Dans ce cas, l'acquisition des données pour tous les points de la grille est très rapide, car seule l'amplitude du signal de réponse de la structure est enregistrée, au lieu des nombreux points fréquentiels des FRF. En général, une très bonne estimation de la déformée modale est obtenue, car le mode correspondant est excité de façon prépondérante à sa résonance. Il est également possible de choisir une grille de mesure plus fine dans un temps de mesure donné, et d'obtenir ainsi une carte de la déformée très précise. Il est à noter que cette technique devient délicate lorsque la densité modale est importante.

La difficulté intrinsèque aux aubes métalliques vient du très faible amortissement structural. Par conséquent, il est nécessaire de conduire les expérimentations avec des résolutions fréquentielles très fines et dans le cas d'excitation par sinus glissant, d'avoir des vitesses de balayage lentes.

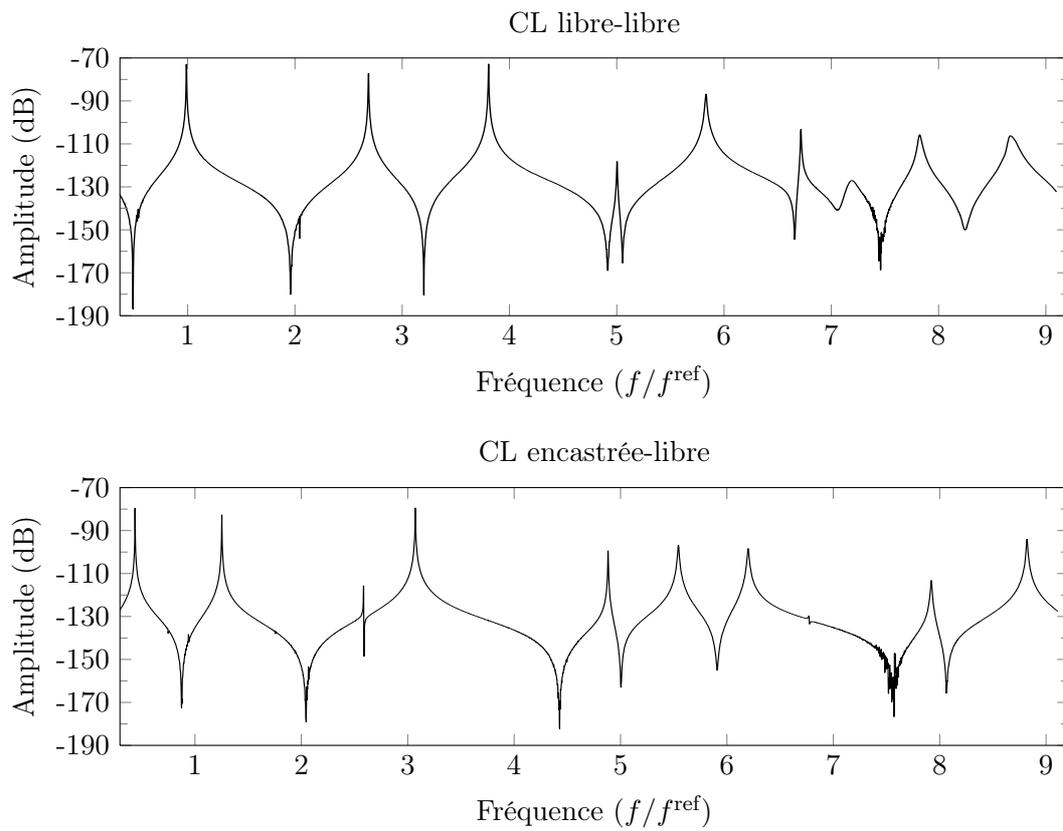
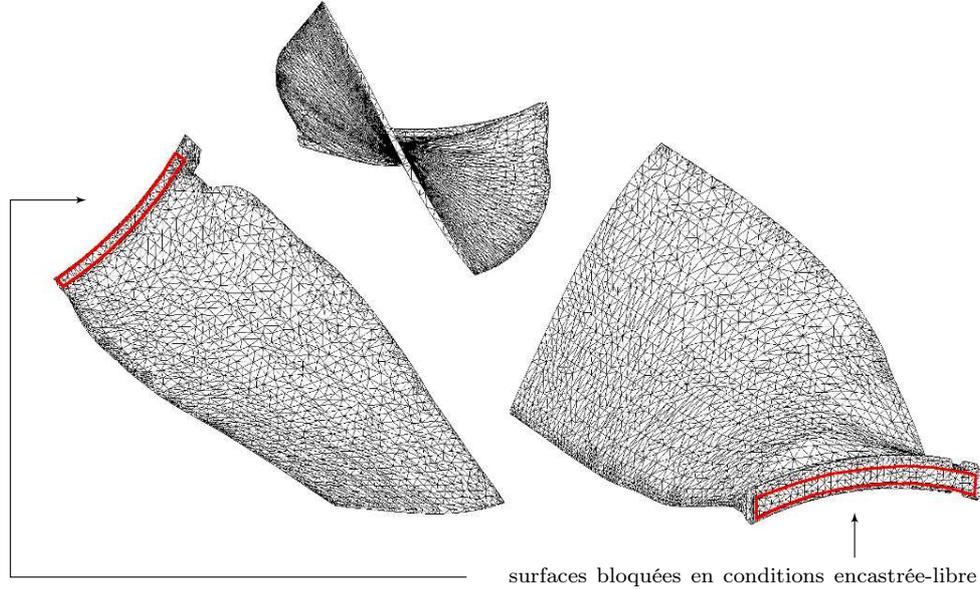


FIG. 5.4 – Fonctions de réponse en fréquence au point de mesure de référence pour les deux conditions aux limites testées.

### 5.1.2 Calculs numériques

Un calcul numérique des modes propres de l'aube a été effectué à partir du code de calcul *Nastran*. Les caractéristiques du calcul et le maillage de l'aube sont donnés sur la figure 5.5.



Type d'élément fini	tétraédrique à 10 noeuds (TET10)
Nombre d'éléments	17130
Nombre de noeuds	32114
Module d'Young	114000 MPa
Coefficient de Poisson	0.34
Masse volumique	4460 kg.m <sup>-3</sup>

FIG. 5.5 – Maillage éléments finis de l'aube utilisé pour le calcul *Nastran* et caractéristiques matériau.

Comme pour les mesures, deux types de conditions aux limites ont été simulés :

- libre-libre : aucun blocage de nœud n'a été imposé ;
- encastrée-libre. Dans ce cas, la surface représentée sur la figure 5.5 a été bloquée suivant les trois directions.

### 5.1.3 Corrélation des modes aux points de mesure

Le MAC (*Modal Assurance Criterion*) est le critère de corrélation des déformées modales le plus utilisé. Ce critère de validation permet d'établir dans quelle mesure deux vecteurs sont corrélés entre eux. Dans le cas des modes, les déformées opérationnelles  $\Phi_{i,\text{exp}}$  aux points de mesures sont comparées aux modes normaux du modèle éléments finis aux mêmes points  $c\Phi_i$  où  $c$  est la matrice d'observation de taille  $N_c \times N_{\text{ddl}}$  avec  $N_c$  le nombre de points de mesure et  $N_{\text{ddl}}$  le nombre de degrés de liberté (ddl) du modèle éléments finis. Le MAC a pour expression

$$\text{MAC}(i, j) = \frac{\left( \Phi_{i,\text{exp}}^T c \Phi_j \right)^2}{\left( \Phi_{i,\text{exp}}^T \Phi_{i,\text{exp}} \right) \left( \Phi_j^T c^T c \Phi_j \right)}. \quad (5.1)$$

Une corrélation parfaite entre deux modes donne un MAC égal à 1, ce qui traduit l'égalité des sous espaces générés par les deux modes. Par ailleurs, le MAC ne dépend pas du type de normalisation, ainsi les modes expérimentaux et éléments finis, qui peuvent être normalisés selon deux critères différents, sont directement comparables [18].

Les différents paliers caractérisants la qualité de la corrélation entre deux modes sont généralement définis de la manière suivante :

- $0.9 \leq \text{MAC} \leq 1$ , les modes sont corrélés ;
- $0.7 \leq \text{MAC} < 0.9$ , la corrélation est incertaine ;
- $0.1 \leq \text{MAC} < 0.7$ , les modes sont décorrélés ;
- $\text{MAC} < 0.1$ , les modes sont orthogonaux.

La figure 5.6 permet de vérifier que la configuration expérimentale est bonne puisque les termes hors diagonale sont presque tous inférieurs à 10%. Les corrélations entre les modes 5 et 7 pour la configuration libre-libre et entre les modes 1 et 2, et 2 et 4, pour la configuration encastrée-libre sont plus élevées ( $\simeq 50\%$ ) et s'expliquent par la similitude des déformées modales.

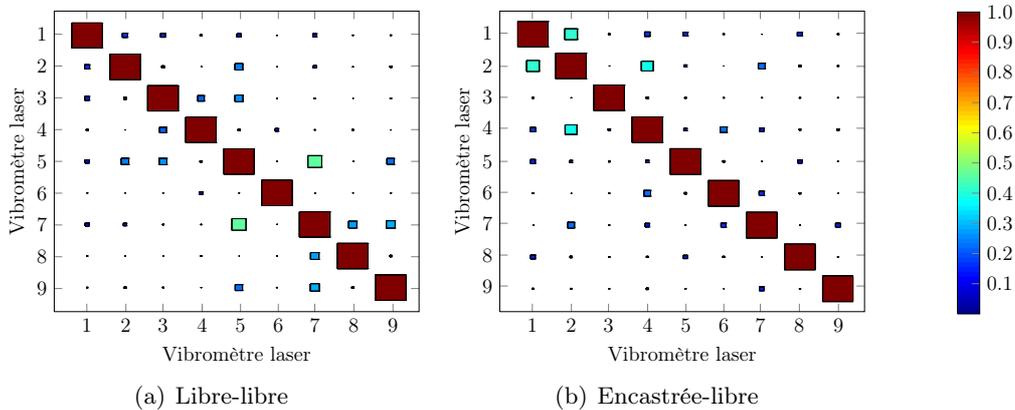


FIG. 5.6 – Auto-MAC des 9 premiers modes mesurés pour les configurations libre-libre et encastrée-libre de l'aube nue.

Pour obtenir la corrélation entre les modes expérimentaux et éléments finis, la grille de mesure (maillage 2D) utilisée par le vibromètre, définie à l'aide du logiciel Polytec, est importée dans le logiciel *Patran* et ses nœuds sont associés à ceux du maillage éléments finis 3D. La connaissance de tous les vecteurs reliant les nœuds de mesure (ou d'observation) à ceux du maillage (Fig. 5.7) permet de construire la matrice d'observation  $\mathbf{c}$  et de tracer les MAC entre les modes expérimentaux et éléments finis.

Comme la densité modale de l'aube est faible en basse fréquence, il n'y a pas de réel problème d'appariement des déformées. Pour la configuration libre-libre, les 9 premiers modes mesurés correspondent aux 9 premiers modes éléments finis. Cependant, pour la configuration encastrée-libre, le 8-ième mode éléments finis n'a pas pu être obtenu expérimentalement du fait que le placement de la force d'excitation coïncide avec un nœud de vibration. Les corrélations calculs/essais pour les deux configurations (Fig. 5.8) sont bonnes et, *a priori*, seuls les termes correspondant à des déformées appariées ont une signification.

Les corrélations des modes mesurés 6, 7 et 8 avec les modes éléments finis 6, 7 et 8 en libre-libre (Fig. 5.8(a)) sont, respectivement, de 0.9, 0.8 et 0.9. Cette corrélation moyenne peut être due à une densité de point de mesure trop faible et les déplacements maximums de ces modes, qui sont très localisés (bord d'attaque et de fuite), ne sont, par conséquent, pas mesurés. Un

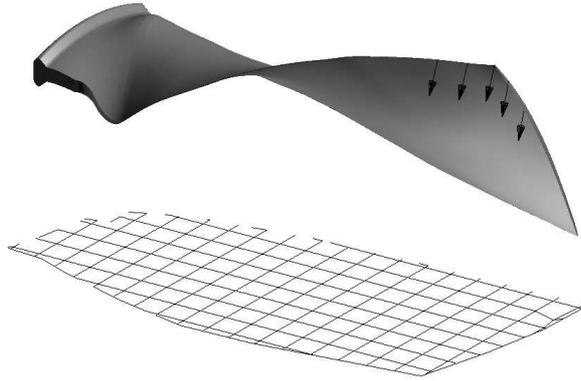


FIG. 5.7 – Association des nœuds du plan de mesure aux nœuds du maillage éléments finis et construction des vecteurs de la matrice d'observation.

mauvais relevé de l'orientation du plan de mesure et l'obtention d'une matrice d'observation également mauvaise aurait eu un effet sur toutes les corrélations et non pas seulement sur les modes 6, 7 et 8. La valeur maximale des termes non diagonaux est d'environ 0.7 entre le 6e mode éléments finis et le 7-ième mode mesurés, ainsi qu'entre le 7-ième mode éléments finis et le 8-ième mode mesurés. L'origine de ces deux valeurs non négligeables est la présence d'un certain nombre de points communs entre les déformés. Les modes 6, 7 et 8 en libre-libre sont tous des modes de torsion dont les positions des ventres et des nœuds de vibrations sont très proches d'un mode à l'autre. Si, par exemple, le mode 6 du modèle éléments finis présente des ventres et nœuds de vibrations à des endroits proches mais différents du mode mesuré correspondant, sa déformée s'identifie rapidement avec celles des modes voisins de déformées semblables tels que les 7-ième et 8-ième modes.

Des résultats identiques sont obtenus pour la configuration encastrée-libre (Fig. 5.8(b)). Le 8-ième mode éléments finis n'ayant pas de correspondant expérimental, la 8-ième ligne et la 8-ième colonne sont vides.

De manière générale, comme tous les points de mesure sur l'aube sont de même nature (vitesse de translation suivant la direction du laser), la matrice identité est une bonne approximation de la matrice de masse réduite. Il en résulte que pour les modes normaux, qui sont orthogonaux entre eux par rapport à la masse, le niveau des termes non diagonaux soit faible.

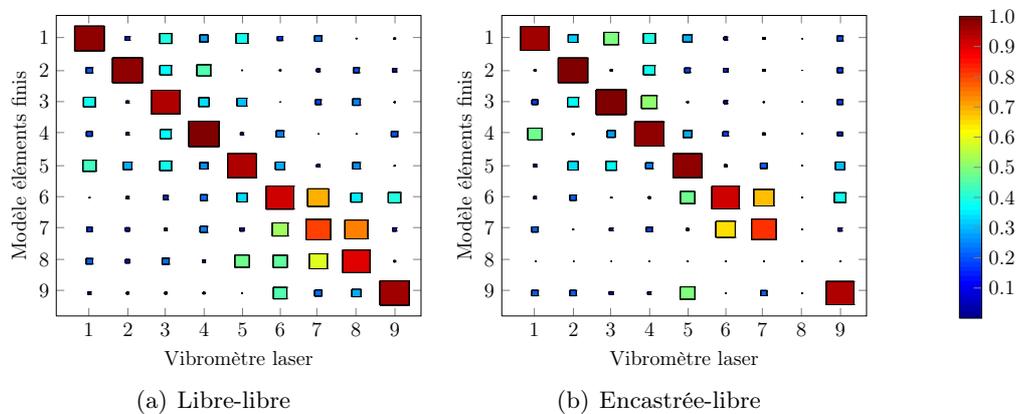


FIG. 5.8 – MAC de comparaison des 9 premiers modes mesurés avec les 9 premiers modes calculés, pour les configurations libre-libre et encastrée-libre de l'aube nue.

La vérification que les termes extra diagonaux du MAC sont faibles est une étape importante de la validation d'une configuration de test et de la qualité du modèle éléments finis. Aux vues des auto-MAC des déformées expérimentales de la figure 5.7, il est conclut à la validité de la réalisation expérimentale des configurations libre-libre et encastrée-libre, au moins pour les 9 premiers modes de l'aube. Aux vues du MAC de comparaison de la figure 5.8(a), il est conclut à la validité certaine du modèle éléments finis en condition libre-libre pour les six premiers modes ainsi que le 9-ième. Les résultats portant sur les modes 7 et 8 sont à considérer avec précaution. De même, de part le MAC de comparaison de la figure 5.8(b), il est conclut à la validité certaine du modèle éléments finis en condition encastrée-libre pour les 5 premiers modes ainsi que le 9-ième. Les résultats portant sur les modes 6 et 7 sont incertains.

#### 5.1.4 Résultats

Le tableau 5.1 regroupe :

- les fréquences et les facteurs d'amortissement identifiés avec *Modan* à partir des mesures faites avec le vibromètre, pour les conditions limites libres et encastrées ;
- les fréquences propres obtenues par calcul numérique avec *Nastran*.

La figure 5.9 résume ces résultats sous forme de courbes. Les figures 5.10 à 5.11 regroupent les déformées opérationnelles et modales correspondant aux mesures et au calcul numérique et permettent de localiser les positions des ventres de vibrations des déformées modales

Mode	Libre-libre			Encastrée-libre		
	Vibromètre		<i>Nastran</i>	Vibromètre		<i>Nastran</i>
	Fréq. ( $f/f^{\text{ref}}$ )	Amort. ( $10^{-4}$ )	Fréq. ( $f/f^{\text{ref}}$ )	Fréq. ( $f/f^{\text{ref}}$ )	Amort. ( $10^{-4}$ )	Fréq. ( $f/f^{\text{ref}}$ )
1	1.00	0.71	0.99	0.46	5.23	0.42
2	2.74	0.87	2.75	1.13	10.72	1.16
3	3.71	6.98	3.94	2.60	10.81	2.54
4	4.84	6.13	4.96	3.08	4.33	2.97
5	5.71	10.91	6.13	4.66	3.77	4.61
6	6.54	10.94	6.57	5.48	12.45	5.15
7	6.93	31.50	7.80	6.01	13.39	5.90
8	7.60	14.00	8.93	/	/	6.54

TAB. 5.1 – Comparaison des fréquences et des amortissements pour les conditions aux limites libre-libre et encastrée-libre, obtenus par l'expérience avec le vibromètre laser et par le calcul numérique avec *Nastran* pour le maillage de la figure 5.5.

La figure 5.9 montre une bonne corrélation entre les fréquences propres  $f_i$  obtenues par calcul et par mesure, et cela pour les deux conditions aux limites étudiées. Cela est remarquable dans le cas des conditions aux limites encastrée-libre, et s'explique par la qualité du montage d'encastrement du pied de l'aube.

Quant aux amortissements structuraux, ils proviennent de dissipations internes au matériau constitutif de l'aube, de dissipations à la liaison de l'aube dans son mors et, en théorie, d'une contribution du couplage avec le fluide ambiant, supposée marginale en pratique lorsqu'il s'agit d'air ambiant et d'amplitudes de vibrations faibles. Le tableau 5.1 indique que les facteurs d'amortissements  $\xi_i$  obtenus sont en moyenne de l'ordre de  $10^{-4} = 0,01\%$  pour les

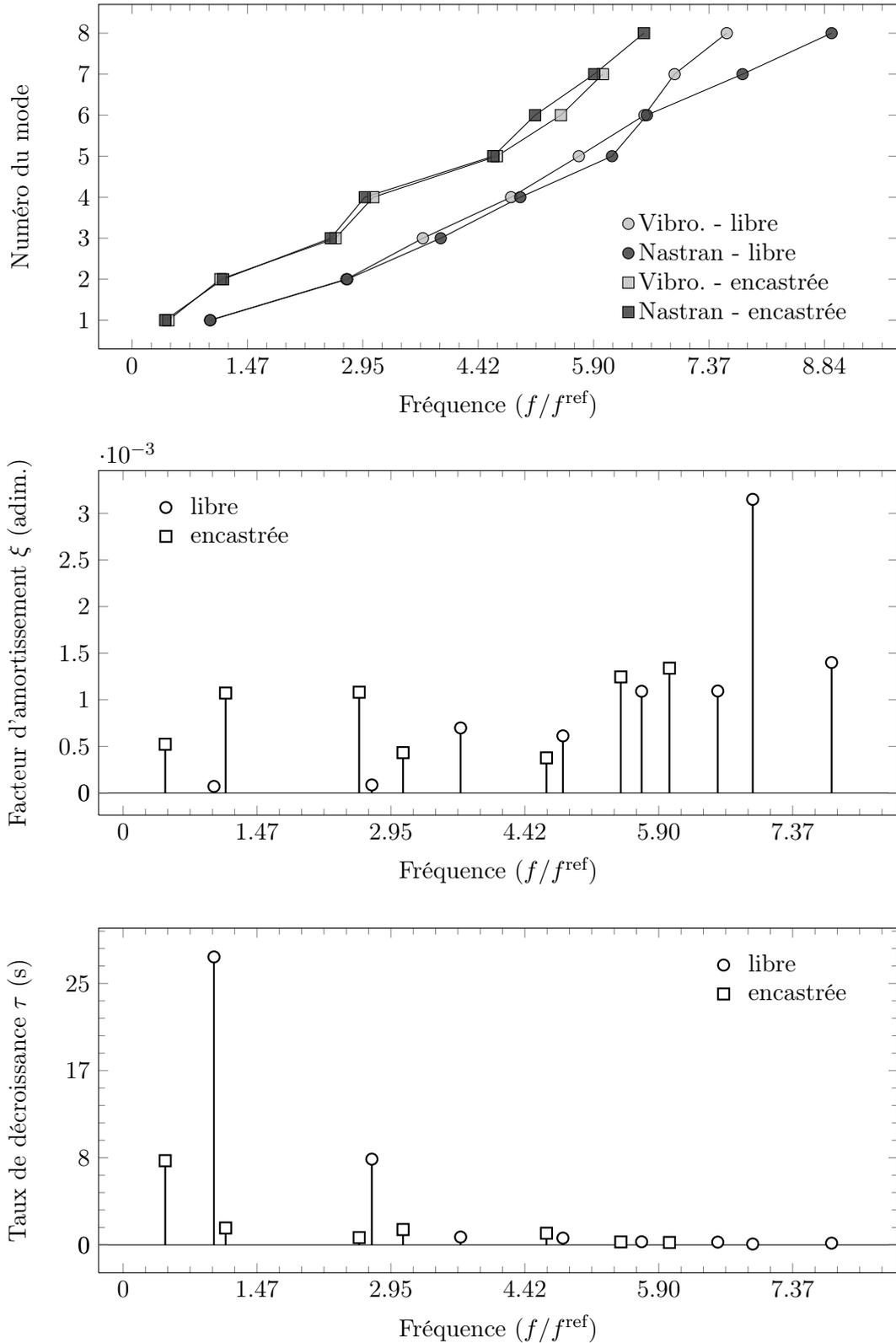


FIG. 5.9 – Comparaison des fréquences propres, des amortissements structuraux  $\xi_i$  et des temps de décroissance  $\tau_i = 1/\xi_i\omega_i$  de l'aube, obtenus par vibrométrie laser et calcul numérique. Les mesures ont été refaites depuis [128].

premières fréquences propres<sup>1</sup>. Il est remarquable qu'ils soient du même ordre de grandeur pour les deux conditions aux limites étudiées car il aurait pu être pensé, *a priori*, que la liaison aube/mors ajouterait un amortissement non négligeable à la structure. Cela s'explique probablement là encore, par la qualité des surfaces du mors de montage en contact avec celles du pied de l'aube. En revanche, les temps de décroissance  $\tau_i = 1/\xi_i\omega_i$  avec  $\omega_i = 2\pi f_i$  sont pour les premiers modes légèrement plus importants pour les conditions aux limites libres que pour les conditions aux limites encastées.

Les figures 5.10 et 5.11 indiquent qu'il y a une bonne corrélation entre les déformées modales issues des mesures et du calcul numérique. De plus, il est aisé de déterminer les nœuds et les ventres des déplacements normaux (déplacement de flexion, sachant que les nœuds des déplacements de membranes ne sont pas placés au même endroit) à la surface moyenne de l'aube.

Après observation des déformées modales, deux cas se présentent :

- pour certains modes, le mouvement est simplement une vibration de flexion. Dans ce cas, la direction de la vitesse (ou du déplacement) des points de la structure est uniquement suivant la direction normale à la surface moyenne de l'aube et une mesure à l'aide d'un vibromètre 1D est suffisante. Or, du fait de la géométrie incurvée de l'aube, il faut être vigilant lors de l'observation d'une mesure obtenue à partir d'un vibromètre monodimensionnel. En effet, dans certaines zones de l'aube où la surface moyenne est proche de la perpendiculaire au plan d'acquisition, les mesures 1D indiqueraient une vitesse presque nulle, alors qu'elle pourrait en fait être du même ordre de grandeur qu'à d'autres endroits de la structure.
- pour d'autres modes, le mouvement des points de la structure est le résultat d'un fort couplage entre des vibrations de flexion (normales à la surface moyenne) et des vibrations de membrane (parallèles à la surface moyenne). Dans ce cas, les mesures réalisées par un vibromètre 1D ne permettent pas de connaître, *a priori*, la direction réelle de la vitesse. Un exemple est le premier mode de vibration de l'aube encastée (Fig. 5.11) qui est le résultat d'un fort couplage flexion/membrane, probablement du à la géométrie vrillée de l'aube [128].

---

<sup>1</sup>Le facteur d'amortissement du  $i$ -ième mode est  $\xi_i$  tel que l'équation du mouvement de ce mode s'écrit :

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2q_i^2 = 0,$$

avec  $\omega_i$  la pulsation propre et  $q_i$  la coordonnée généralisée. La solution en vibrations libres de cette équation est :

$$q_i(t) = \exp^{-\xi_i\omega_i t} \cos(\tilde{\omega}_i t + \phi),$$

avec  $\tilde{\omega}_i = \omega_i\sqrt{1 - \xi_i^2}$  la pseudo pulsation et  $\tau_i = 1/\xi_i\omega_i$  un temps indicatif de décroissance.

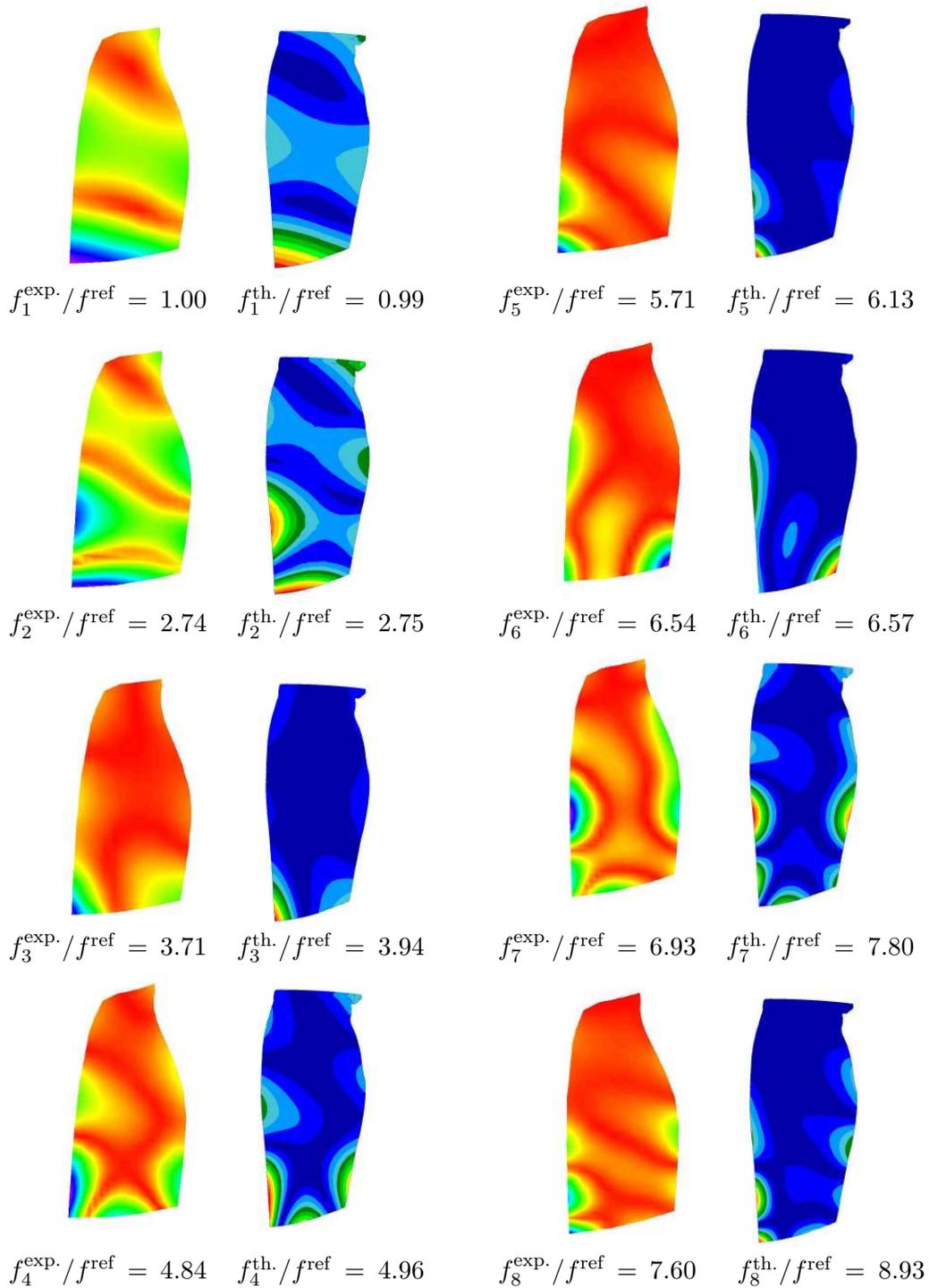


FIG. 5.10 – Déformées modales des modes 1 à 8 de l'aube **libre**. 1<sup>e</sup> colonne : mesures du vibromètre ; 2<sup>e</sup> colonne : calculs Nastran. Les niveaux de couleur représentent le module du déplacement, en valeur absolue pour la première colonne et signé pour la seconde.

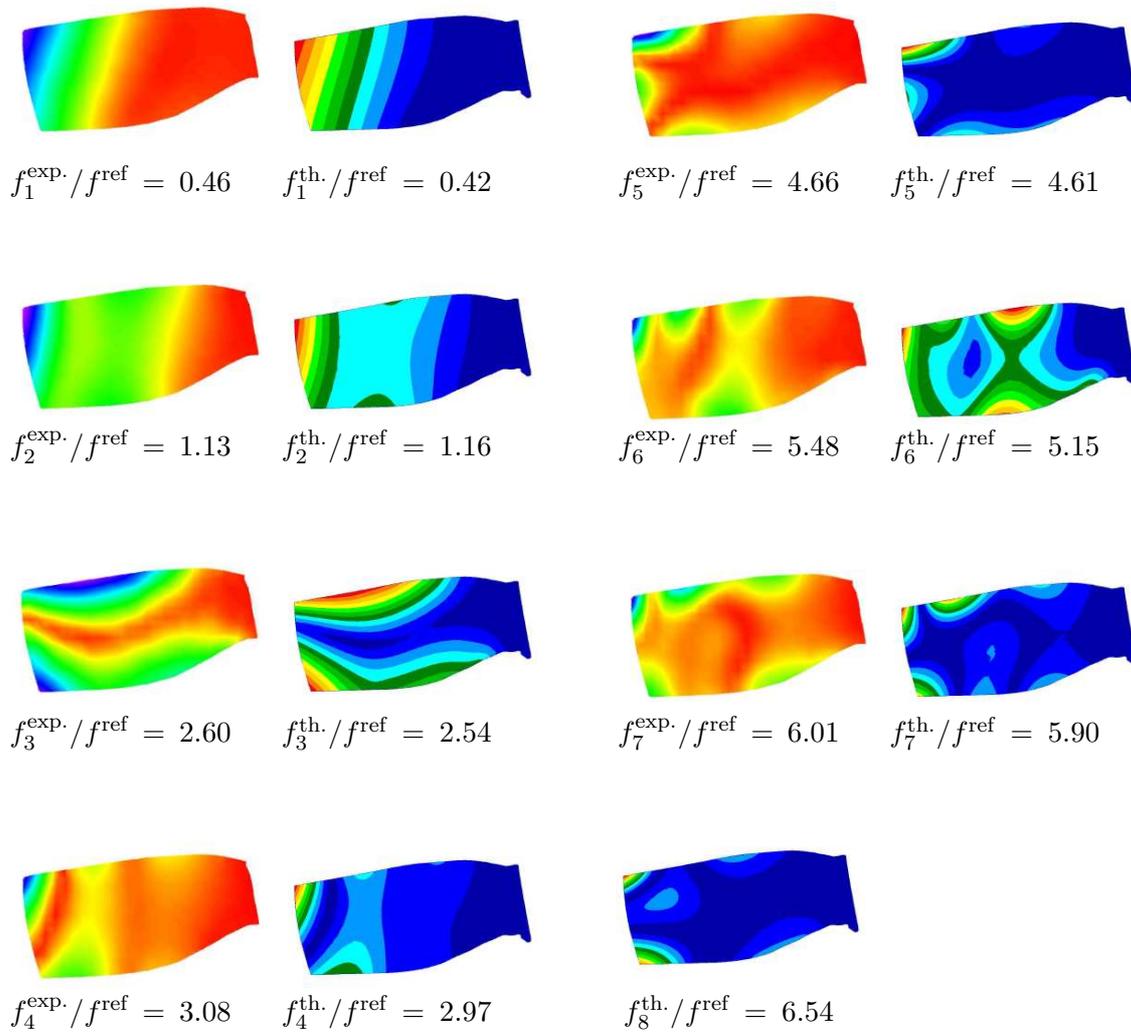


FIG. 5.11 – Déformées modales des modes 1 à 8 de l'aube *encastrée*. 1<sup>e</sup> colonne : mesures du vibromètre ; 2<sup>e</sup> colonne : calculs Nastran. Les niveaux de couleur représentent le module du déplacement, en valeur absolue pour la première colonne et signé pour la seconde.

## 5.2 Réalisation d'une aube avec couplage optimisé

La réalisation d'une aube munie de pastilles piézoélectriques auxquelles est connecté un shunt résistif ou résonant a pour objectif d'améliorer la réponse harmonique de l'aube à des excitations aérodynamiques asynchrones de type flottement, telles que celles décrites dans la partie 4.2.1, en augmentant l'amortissement de l'aube mais également d'améliorer la réponse harmonique à des excitations aérodynamiques synchrones afin d'augmenter la limite d'endurance de celle-ci.

Comme il a été vu au chapitre 2, il est nécessaire de maximiser le coefficient de couplage entre l'aube et les pastilles piézoélectriques, pour le mode ciblé, afin d'obtenir une atténuation optimale. La qualité du couplage, qui dépend des caractéristiques de la structure et des pastilles, peut être amélioré à travers différents critères :

- matériau, géométrie, dimensions, position et nombre de pastilles ;
- caractéristiques matériau et épaisseur de la couche d'adhésif ;
- mode ciblé.

Le matériau et les dimensions de l'aube, desquels dépend aussi le couplage, sont figés et n'apparaissent par conséquent pas dans la liste des différents critères d'optimisation du couplage.

Ce chapitre présente les différentes étapes de réalisation d'une aube avec couplage optimisé. En premier lieu, le matériau piézoélectrique est choisi, puis des simplifications du problème sont proposées. Les résultats de l'optimisation sont ensuite présentés. Enfin, la réalisation d'un démonstrateur ainsi que les problèmes liés au collage sont exposés. Le chapitre se concluant sur la comparaison des résultats issus des simulations et ceux provenant de l'expérience.

### 5.2.1 Choix des pastilles piézoélectriques

Le premier levier d'action consiste à prendre un matériau piézoélectrique avec un coefficient de couplage  $k_{31}$  élevé. Les transducteurs piézoélectriques se présentent sous diverses formes dont les principales sont : les céramiques, les monocristaux, les polymères et les composites.

Les céramiques sont utilisées dans une vaste gamme d'applications, sont produites en grande quantité et disponibles dans une large gamme de géométrie et de dimension. Ce sont des matériaux rigides et cassants mais qui présentent un couplage électromécanique important (de 30 à 40%) pour une large bande de fréquence. Les monocristaux ont un couplage encore plus élevé mais une durée de vie beaucoup plus courte. Les polymères sont souples et peuvent s'adapter sur des surfaces non planes mais leur facteur de couplage électromécanique est faible (de 20 à 30%). Les matériaux composites, à électrodes interdigitées ou à fibres piézoélectriques, présentent tous les avantages des composites : forme, géométrie et combinaison matrice/fibre variées offrant un large panel de propriétés mécaniques et piézoélectriques. Cependant, leur supériorité en terme de couplage et de durée de vie n'est pas nette. Leur modélisation et leur mise en œuvre sont également plus complexes. Enfin, ces matériaux sont relativement récents et les retours d'expérience peu nombreux.

C'est une céramique PIC151 de chez PI Ceramic avec un coefficient de couplage  $k_{31}$  de 38% qui a été retenue. C'est une céramique de type zirconate de plomb/titanate de plomb qui a de bonnes caractéristiques mécaniques et piézoélectriques. Elle est également disponible dans des tailles et des géométries variées. Enfin, c'est une céramique qui a été largement étudiée et ses propriétés élastiques, piézoélectriques et diélectriques sont toutes parfaitement déterminées. Ce dernier point est important car l'étape de modélisation éléments finis nécessite de connaître toutes les constantes matériau de la céramique, or les données constructeur sont souvent partielles. Il s'avère donc essentiel d'avoir une littérature abondante où trouver les données manquantes.

Les pastilles piézoélectriques sont également disponibles avec électrodes retournées ou non. Dans le premier cas, une des électrodes fait le tour de la pastille et est accessible de l'autre côté pour établir le contact électrique. Dans le second, le contact avec l'électrode inférieure, celle en contact avec la structure, est plus problématique. Cependant, comme l'aube sur laquelle vont être collées les pastilles est en titane, qui est un très bon conducteur électrique ( $\gamma = 2.34 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ ), et que toutes les électrodes inférieures sont au même potentiel, il suffit d'assurer le contact électrique entre les électrodes et l'aube et prendre le potentiel directement sur cette dernière. Dans le cadre de cette étude, il est apparu plus simple dans la modélisation du problème de ne pas prendre des pastilles avec électrodes retournées, qui ont l'inconvénient d'avoir une partie de matériau piézoélectrique entre deux électrodes au même potentiel. Cette zone ne participe donc pas à la constitution du condensateur électrique mais ajoute raideur et masse au système. Ce problème disparaît avec des électrodes simples puisque l'intégralité des surfaces inférieure et supérieure de la pastille sont à des potentiels différents.

Par ailleurs, le fait que le titane ait une conductivité très élevée permet d'avoir une résistivité très petite et de là un courant de masse également très faible.

Les techniques de contrôle vibratoire par shunt R, RL ou SSDI sont des techniques de contrôle passives, ce qui implique que les pastilles doivent, par leur raideur propre, avoir un effet sur la structure. Cet effet se mesure à l'aide du coefficient de couplage qui dépend de plusieurs paramètres (section 2.3.4) : facteur de couplage matériau  $k_{31}$ , géométrie et position des pastilles, mode visé et rapport des modules d'Young de la structure et des pastilles. Ce dernier point implique qu'il n'est pas possible de choisir des structures piézoélectriques souples (PVDF, Quickpack) pour amortir efficacement les vibrations de l'aube fan. Cela s'explique par le fait que l'adaptation d'impédance mécanique avec une structure rigide est très mauvaise si une pastille piézoélectrique souple est utilisée.

### 5.2.2 Modèle éléments finis et paramétrisation

Un certain nombre de simplifications concernant la modélisation, le maillage de l'aube et la géométrie des pastilles ont été faites afin de limiter les difficultés de programmation :

- le film de colle entre la pastille et l'aube est négligé dans un premier temps ;
- l'aube est maillée une seule fois avec des éléments tétraédriques à dix nœuds (TET10) ;
- les pastilles sont parallélépipédiques et également maillées avec des TET10 ;
- les maillages de l'aube et des pastilles doivent être compatibles ;
- le maillage de la surface de l'aube est régulier pour pouvoir prescrire simplement des déplacements aux pastilles.

Le maillage de la figure 5.12 respecte ces quatre contraintes. Il n'est alors possible d'orienter une pastille que suivant deux directions et le nombre de positions accessibles est limité et défini par la finesse du maillage de l'aube. Ces deux inconvénients permettent cependant de définir simplement les déplacements des pastilles le long de la surface de l'aube.

Comme il est souhaitable que les mesures, qui seront réalisées sur le démonstrateur, soient proches de celles issues des simulations, il est nécessaire, avant de réaliser les simulations, de déterminer les zones où le collage des pastilles peut être réalisé correctement.

#### (a) Limitation de la surface de test

*A priori*, la recherche de la meilleure position implique de réaliser des simulations sur l'intrados et l'extrados et du pied de l'aube jusqu'en bout de pale. Cependant, la forte courbure du pied de l'aube, par exemple, si elle ne pose pas de problème d'un point de vue modélisation éléments finis, risque fort de rendre le collage des pastilles piézoélectriques, si cet endroit

s'avérait être celui où il est nécessaire de les coller pour maximiser le couplage, très délicat. Dans ce cas de figure, il est très probable que les mesures et les résultats des simulations éléments finis ne soient pas comparables. Or, comme l'objectif est de réaliser un démonstrateur efficace, qui prouve que des pastilles piézo-céramiques de petites tailles sont capables, couplées à un shunt, de réduire l'amplitude vibratoire ; il est nécessaire de pouvoir les coller proprement sur l'aube, c'est à dire avec un film d'adhésif de faible épaisseur. Pour cette raison, la surface, accessible aux pastilles lors des simulations, se limite aux zones de faible courbure. Sur l'aube fan, les zones de faibles courbures sont localisées autour du centre de la pale.

En plus de son rayon, le signe de la courbure (concavité ou convexité) modifie fortement le profil du film de colle. Ce fait a conduit à préférer l'intrados à l'extrados pour le collage des pastilles.

### (b) Choix de l'intrados comme surface de test

Pour estimer laquelle des deux surfaces (intrados ou extrados) permet de réaliser le meilleur couplage électromécanique, 3 aspects sont à considérer :

- une pastille collée sur une surface concave (intrados) présente une épaisseur de colle moins importante sur ses bords qu'en son centre et inversement si la surface est convexe (extrados) ;
- le film de colle détériore la transmission des efforts de la pastille à la structure et inversement. L'adhésif joue donc un rôle important et est à l'origine de pertes substantielles de couplage.
- comme énoncé au chapitre 2, sous l'action d'un champ électrique dans la direction 3, la pastille piézoélectrique se déforme en extension dans son plan (direction 1). Il en résulte que l'action piézoélectrique sur la structure hôte s'effectue par l'intermédiaire de densités surfaciques d'efforts et de moments aux extrémités du patch [123].

Ces différents points indiquent qu'il serait plus efficace de coller les pastilles sur l'intrados de l'aube. En effet, cela favoriserait la bonne transmission des efforts puisque ces derniers étant localisés sur les bords de la pastille, c'est aussi à cet endroit que l'épaisseur de colle serait la plus faible, donc la moins gênante. Par ailleurs, il s'avère qu'un film de colle plus mince sur les bords, comme dans le cas d'un collage sur une surface concave, permet de minimiser les effets de bords à l'origine d'une perte d'efficacité des pastilles piézoélectriques [42].

Au final, la région choisie pour mener cette première optimisation se limite à une zone rectangulaire située sur l'intrados (Fig. 5.12). Cette zone est maillée finement pour pouvoir déterminer précisément la position correspondant au maximum de couplage. Le maillage du reste de l'aube est plus grossier mais permet cependant au modèle éléments finis d'être convergé en fréquence.

### (c) Paramétrisation

Cinq paramètres sont nécessaires pour déterminer la position et la taille d'une pastille (Fig. 5.13) : 2 coordonnées curvilignes, notées  $x_-$  et  $y_-$  et 3 grandeurs géométriques, la longueur, la largeur et l'épaisseur, notées respectivement  $L_x$ ,  $L_y$  et  $h$ . Le nombre de valeurs que peuvent prendre chacun des cinq paramètres est limité par la taille de la zone dans laquelle peuvent évoluer les pastilles et par la finesse du maillage. L'espace de recherche est par conséquent un sous ensemble discret et fini de  $\mathbb{R}^5$  qui regroupe l'ensemble des conceptions (localisation et géométrie) possibles d'une pastille. Les deux coordonnées curvilignes ( $x_-$ ,  $y_-$ ) servent à repérer la position de la pastille et sont appelées, respectivement, coordonnée radiale et coordonnée orthoradiale. La première est portée par l'axe allant du pied à la tête de l'aube

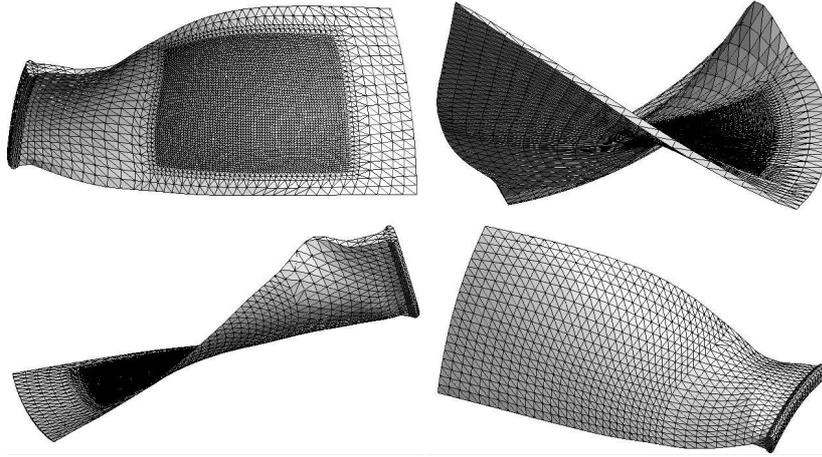


FIG. 5.12 – Zone d'investigation limitée

et la seconde par l'axe moteur. L'origine des coordonnées est le point, appartenant à la surface explorée lors de la recherche exhaustive, située le plus près du pied et du bord d'attaque de l'aube (Fig. 5.13). La longueur  $L_x$  est calculée comme la somme des longueurs des arêtes des éléments qui constituent le segment de courbe allant de  $x_-$  à  $x_+$ . La largeur  $L_y$  est définie de manière identique. Lorsque la pastille se déplace, ce sont les longueurs  $L_x$  et  $L_y$  qui sont conservées et non le nombre d'éléments constituant les segments de courbe allant de  $x_-$  à  $x_+$  et de  $y_-$  à  $y_+$ .

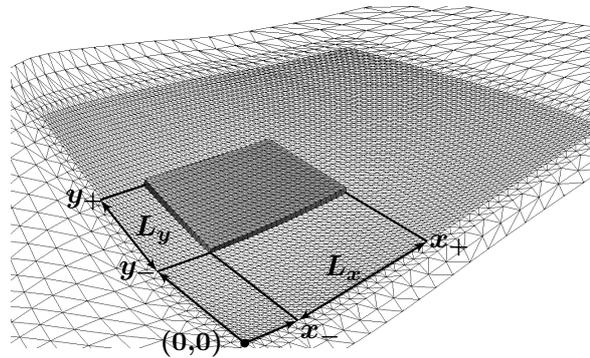


FIG. 5.13 – Système de coordonnées attaché à la pastille et origine du repère.

### 5.2.3 Optimisation de la configuration libre-libre : choix de la position et de l'épaisseur

Après avoir sélectionné le matériau piézoélectrique, il conviendrait d'utiliser l'algorithme d'optimisation, développés au chapitre 3, afin de déterminer les caractéristiques des pastilles (nombre, géométrie et position) qui optimisent les coefficients de couplage pour les modes souhaités, sous la contrainte de ne pas dépasser une masse limite de matériau piézoélectrique. Cependant, pour cette première application au cas d'une aube fan, il a été décidé d'utiliser l'algorithme d'optimisation dans un espace de recherche restreint :

- une seule pastille piézoélectrique rectangulaire ;
- à l'issu de plusieurs recherches exhaustives, il a été décidé de fixer la longueur et la largeur de celle-ci à, respectivement, 100 mm et 60 mm ;

- la position (2 coordonnées) et l'épaisseur sont les trois paramètres laissés libres.

La raison de ce choix vient du fait, qu'en parallèle de l'optimisation, une recherche exhaustive a été menée afin d'avoir les coefficients de couplage pour toutes les positions et épaisseurs testées. Par conséquent, le nombre de simulations doit être restreint pour pouvoir être effectuées dans un temps raisonnable, ce qui se traduit par un espace de recherche limité. Ce double calcul, optimisation et recherche exhaustive, a trois objectifs :

- vérifier que le résultat de l'optimisation correspond à la meilleure solution de toutes les configurations testées par la recherche exhaustive ;
- montrer que la meilleure position de la pastille n'est pas celle qui correspond à la zone de maximum de déformation ;
- connaître les évolutions du couplage lorsque les paramètres de la pastille varient.

### (a) Caractéristiques des simulations

Le maillage de l'aube de soufflante de CFM56-7B (Fig. 5.12) mesure approximativement 560 mm du pied à la tête, pour une corde maximale de 250 mm, une épaisseur moyenne de 7 mm et a une masse de 4.86 kg. Cette structure est maillée avec 21 616 éléments TET10 qui correspondent à 124 614 degrés de liberté.

La recherche exhaustive consiste à faire parcourir à l'unique pastille de la simulation, de face rectangulaire et de profil courbe, afin de s'adapter à la surface de l'aube, toute la zone définie pour la recherche. La taille de la pastille (100 mm par 60 mm) permet d'explorer 195 positions différentes et pour chacune d'entre elles, 6 épaisseurs de pastille, de 0.5, 1, 2, 3, 4 et 5 mm, sont testées (valeurs disponibles chez PI Ceramic). L'espace de recherche est par conséquent réduit à 1 170 configurations possibles. À chacune de ces configurations position/épaisseur correspond un certain nombre d'opérations dont les principales sont, dans l'ordre :

- maillage 3D de la pastille avec *Patran* ;
- résolution du problème aux valeurs propres avec *Nastran* ;
- construction de la matrice de couplage avec *Matlab* ;
- calculs des coefficients de couplages ;
- changement de la configuration position/épaisseur de la pastille.

L'ensemble de ces simulations a été réalisé sur une station de calcul DELL dual core 2 GHz dotée de 3 Go de SDRAM pour un temps de calcul processeur de 49 heures environ. Les calculs ont été effectués pour les 3 premiers modes de l'aube dont les déformées sont données sur la figure 5.14.

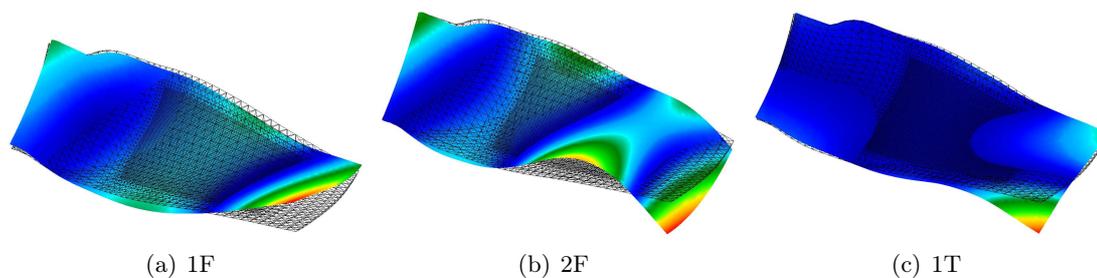


FIG. 5.14 – Déformées modales de l'aube nue en conditions libre-libre correspondant au premier mode de flexion (1F), au deuxième mode de flexion (2F) et au premier mode de torsion (1T).

L'algorithme d'optimisation, appliqué au même problème, converge sur une configuration en 2 heures et 30 minutes environ par mode ciblé.

### (b) Résultats de la recherche exhaustive

Les figures 5.15(a) à 5.15(f) donnent, pour chaque épaisseur, la valeur du facteur de couplage pour le premier mode de flexion en fonction de la position de la pastille. Les figures 5.16 et 5.17 correspondent aux résultats pour le second (2F) et le troisième (1T) mode. Différentes observations peuvent être faites :

- l'épaisseur de la pastille ne change pas la forme ni la position de la zone de couplage maximum ;
- chaque mode à une zone de couplage maximum qui lui est propre ;
- il existe une épaisseur optimale, pour chaque mode, qui maximise le couplage.

L'ensemble de ces résultats est résumé sur les figures 5.18, 5.19 et 5.20 où la valeur du coefficient de couplage correspondant à l'épaisseur optimale est tracée pour chaque position.

À chaque point du plan correspond une coordonnée radiale et orthoradiale et une épaisseur pour lesquelles le couplage modal est maximum. Le lien avec la position sur l'aube est direct puisque ce sont des longueurs curvilignes qui sont représentées sur le plan. Ainsi, pour le mode 1F, le couplage maximum est atteint en  $(x_-, y_-) = (140 \text{ mm}, 50 \text{ mm})$  avec une épaisseur de  $h_{\text{opt}} = 4 \text{ mm}$ . Il est à noter que rechercher la valeur optimale de l'épaisseur de la pastille est de première importance et conduit à doubler le facteur de couplage modal  $k_1$  pour la position optimale. Entre  $h = 0.5 \text{ mm}$  et  $h = h_{\text{opt}} = 4 \text{ mm}$ , le couplage passe de 4.7% à 9.9% (Fig. 5.18(c)).

La figure 5.18(d) permet de visualiser le maillage solution. La masse de la pastille piézoélectrique ainsi calculée représente 3.8% de la masse de l'aube, soit 184 g. Pour le mode 2F, le couplage maximum est de  $k_2 = 11.5\%$  en  $(x_-, y_-) = (140 \text{ mm}, 50 \text{ mm})$  avec une épaisseur de  $h_{\text{opt}} = 5 \text{ mm}$ . La masse de la pastille piézoélectrique est alors de 234 g, soit 4.8% de la masse de l'aube. Enfin, pour le mode 1T, le couplage maximum est de 9.1% en  $(x_-, y_-) = (140 \text{ mm}, 50 \text{ mm})$  avec une épaisseur de  $h_{\text{opt}} = 3 \text{ mm}$ . Enfin, il est intéressant de constater, que pour la zone de recherche considérée, les positions optimales sont identiques pour les trois premiers modes.

Ces premiers résultats attestent que seules des pastilles piézocéramiques épaisses de plusieurs millimètres sont capables de procurer un couplage relativement important avec une structure massive lorsque celles-ci ne représentent que quelques pourcents de la masse totale du système. La courbe donnant le facteur de couplage modal en fonction de l'épaisseur de la pastille croît rapidement, présente un maximum, puis décroît lentement. Ce profil indique que le facteur de couplage modal, tel qu'il est défini par la relation (2.87), est un compromis entre la facilité de la pastille à se déformer, ce qui correspond à une faible épaisseur et une matrice de couplage  $\mathbf{K}_c$  ayant des termes élevés, et la raideur apportée par celle-ci, qui modifie la valeur des composantes du vecteur propre  $\Phi_i$  correspondants aux degrés de liberté de la pastille.

La courbe qui représente  $k_1$  en fonction de l'épaisseur (Fig. 5.18(c)) peut être expliquée plus précisément en s'intéressant à l'évolution relative des différentes grandeurs qui le composent. Celle-ci est tracée sur la figure 5.21 dans le cas du mode 1F. Toutes les quantités ont la même valeur pour l'épaisseur  $h_0 = 0.5 \text{ mm}$ , ce qui permet de tracer les évolutions en indice sur le même graphique.

La courbe (1), qui est la norme du premier vecteur propre (1F) de l'ensemble aube plus pastille piézoélectrique, montre que cette dernière, qui est de petite taille par rapport à l'aube, a un effet négligeable sur la dynamique du système. Pour la courbe (2), c'est la norme du

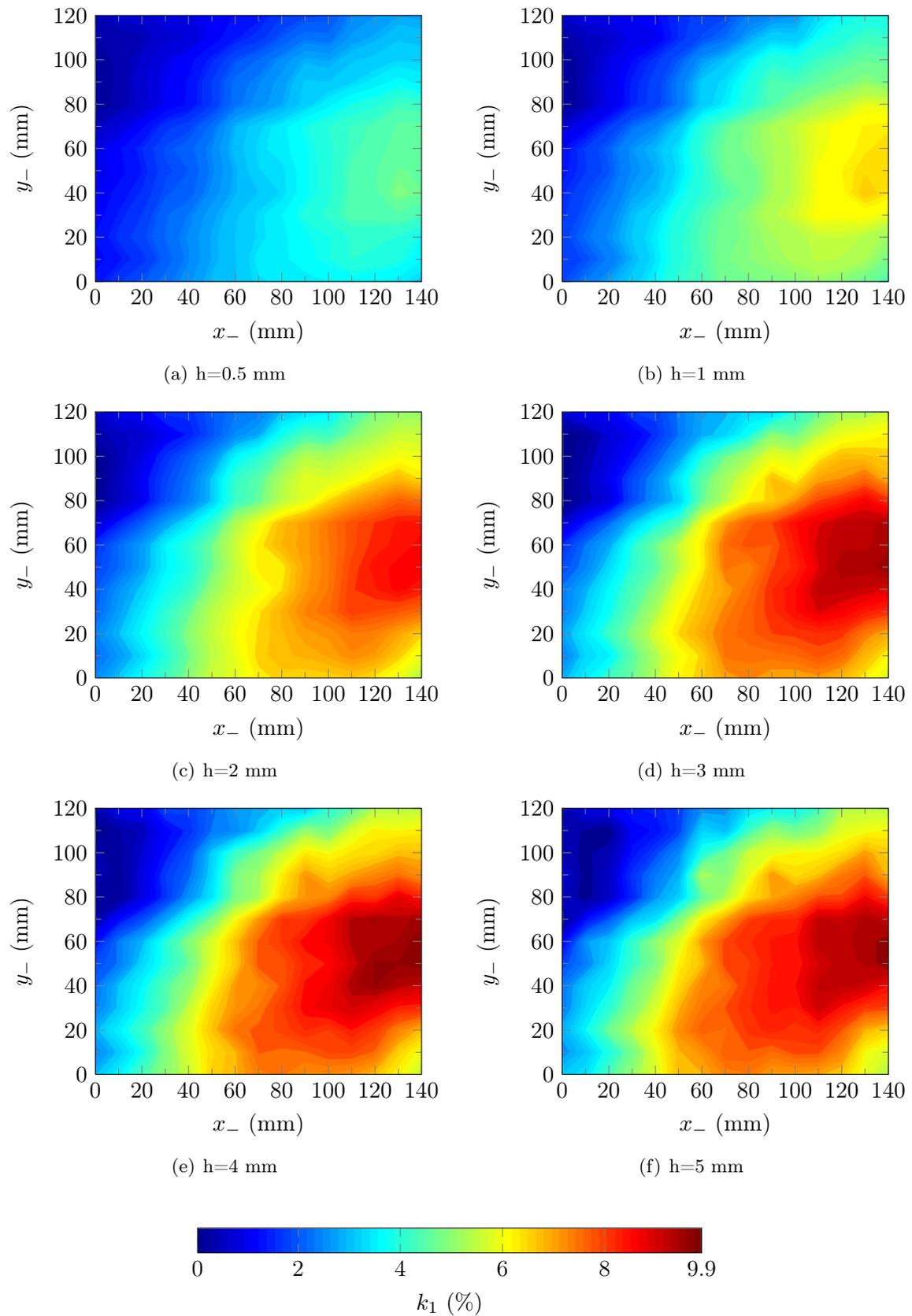


FIG. 5.15 – *Facteur de couplage modal pour le mode 1F selon la localisation sur la surface de l'aube pour plusieurs épaisseurs de pastille.*

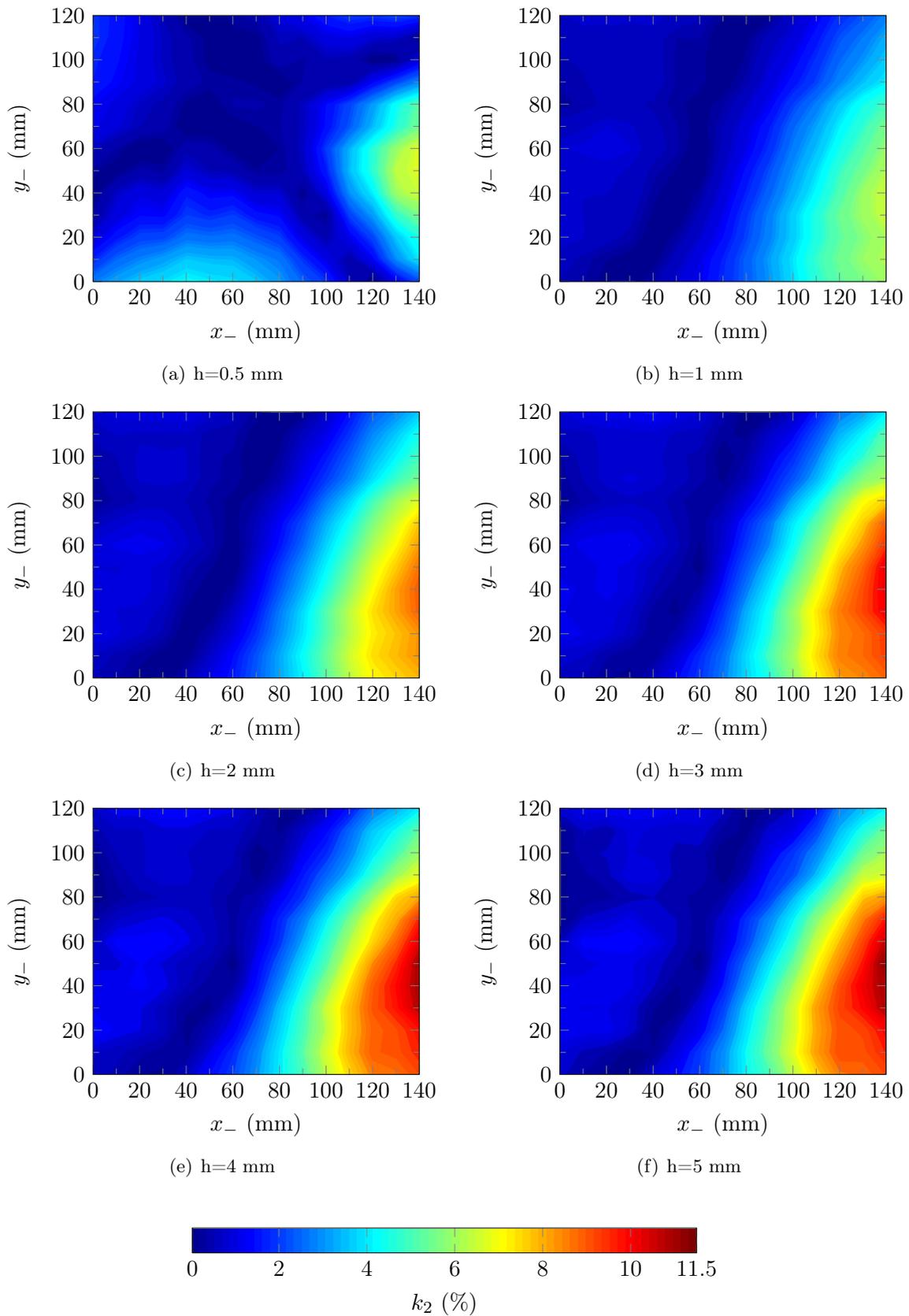


FIG. 5.16 – *Facteur de couplage modal pour le mode 2F selon la localisation sur la surface de l'aube pour plusieurs épaisseurs de pastille.*

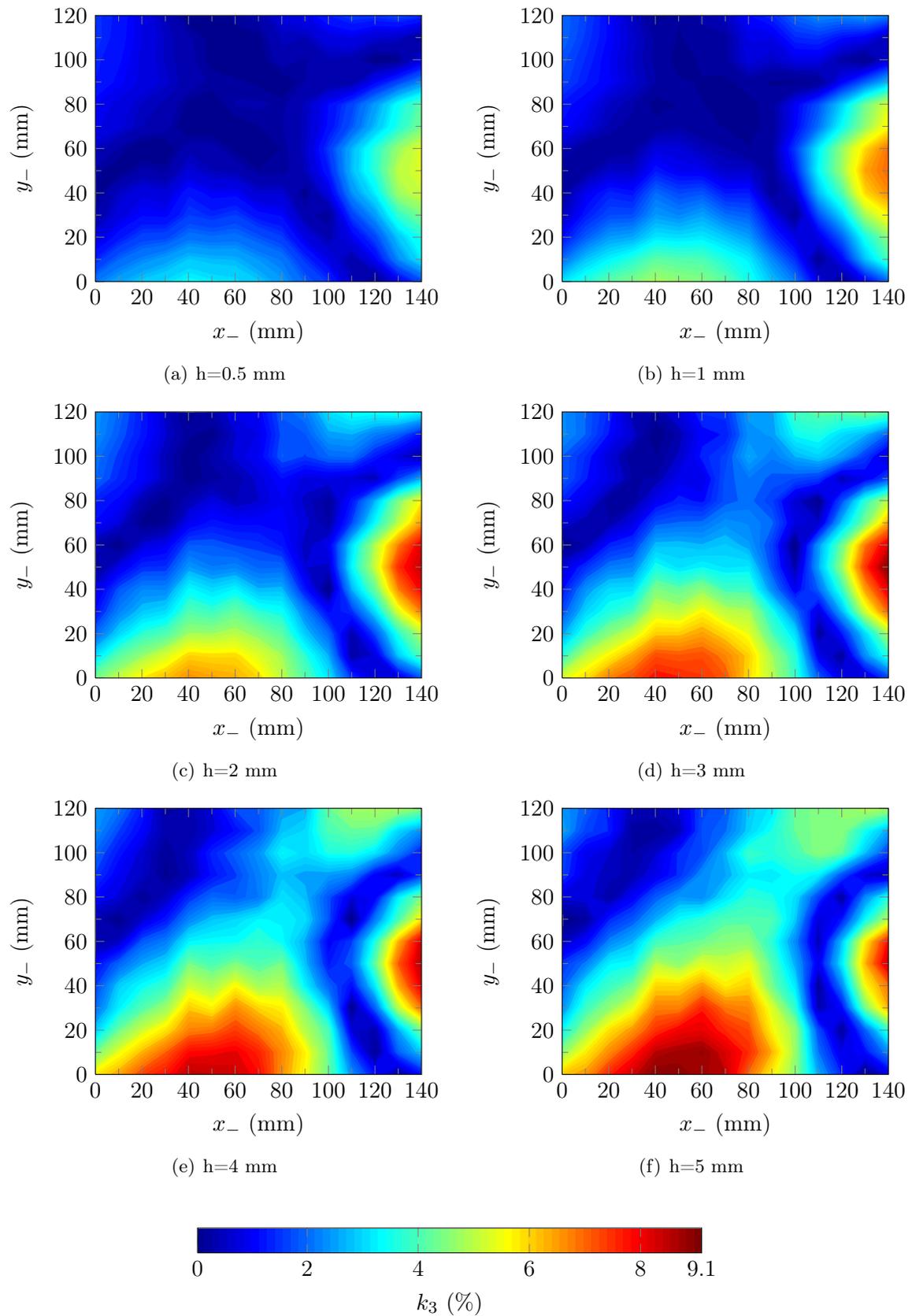


FIG. 5.17 – *Facteur de couplage modal pour le mode 1T selon la localisation sur la surface de l'aube pour plusieurs épaisseurs de pastille.*

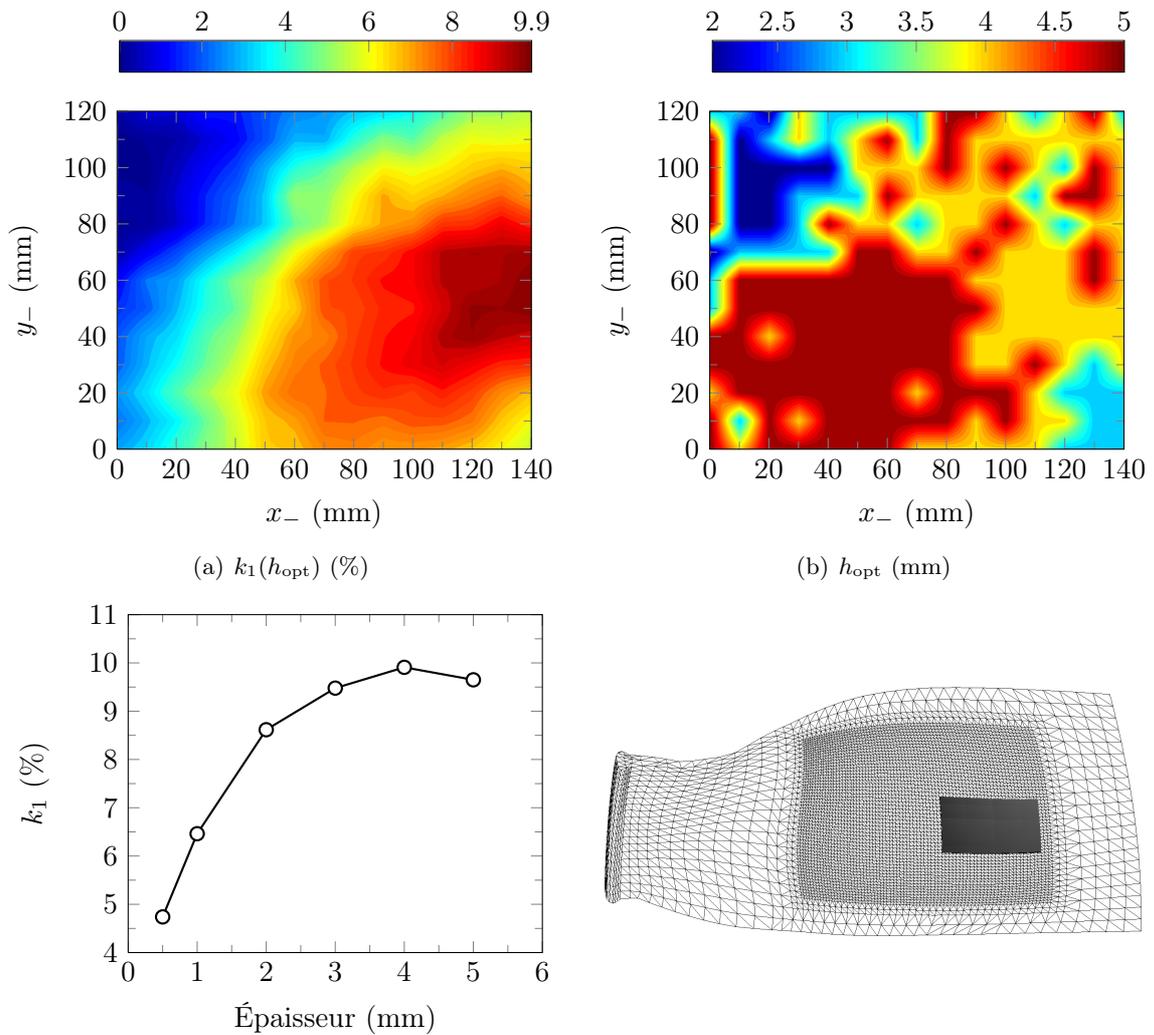


FIG. 5.18 – Facteur de couplage modal pour le mode  $1F$  selon la localisation sur la surface de l'aube pour la valeur optimale de l'épaisseur.

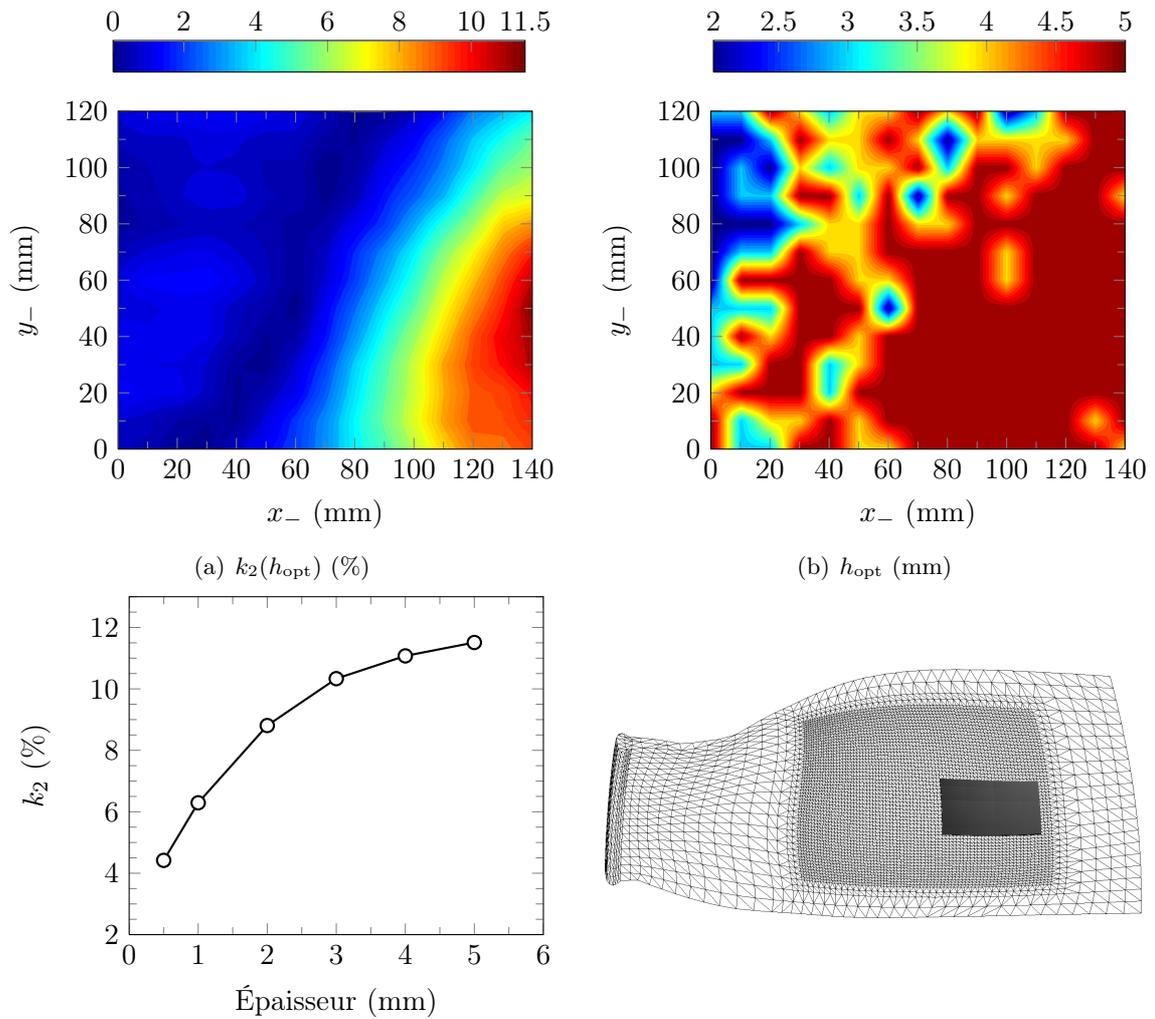


FIG. 5.19 – Facteur de couplage modal pour le mode  $2F$  selon la localisation sur la surface de l'aube pour la valeur optimale de l'épaisseur.

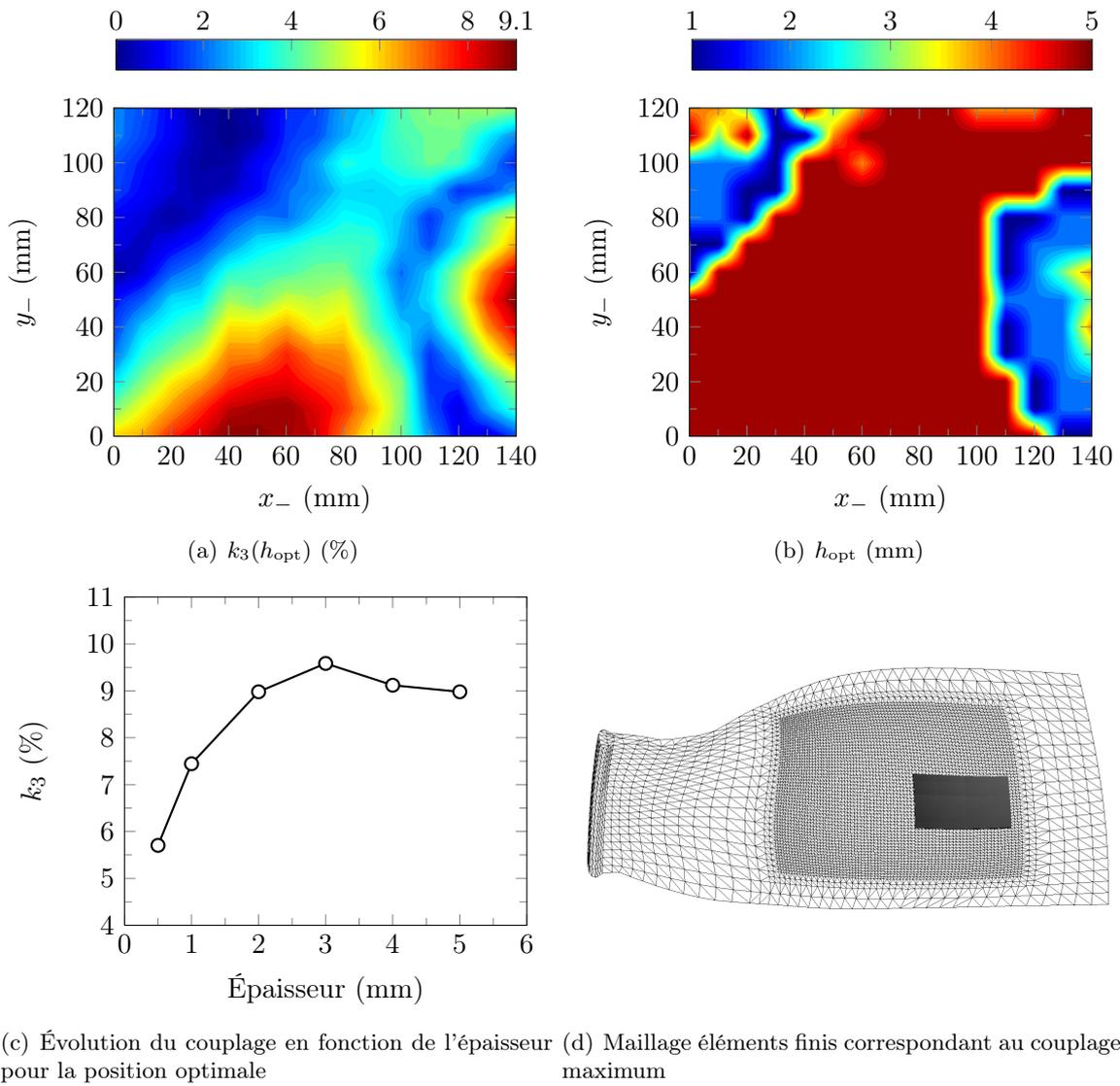


FIG. 5.20 – Facteur de couplage modal pour le mode 1T selon la localisation sur la surface de l'aube pour la valeur optimale de l'épaisseur.

vecteur propre restreint aux degrés de liberté de la pastille qui est tracé. Il apparaît nettement qu'une pastille épaisse rigidifie localement la structure, ce qui se traduit par un déplacement moindre, donc une norme plus petite. Puisqu'il n'y a qu'une seule pastille,  $\mathbf{K}_c$  est un vecteur colonne et il est possible de tracer sa norme en fonction de l'épaisseur, c'est la courbe (3). Dans le cas d'une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions de la pastille, la capacité est proche de celle d'un condensateur plan et elle est donnée par  $C = S\epsilon_{33}/h$  où  $S$  est la surface des électrodes. C'est cette expression de la capacité qui est utilisée pour tracer la courbe (4).

Enfin, les deux dernières courbes sont équivalentes à l'expression de  $k_1 = \Phi_1^T \mathbf{K}_c / (\sqrt{C}\omega_i)$ , à un facteur près, dans la mesure où la pulsation est quasiment constante lorsque  $h$  varie, ce qui n'affecte que très peu  $k_1$ . La différence entre les deux courbes est que pour l'avant dernière, le facteur de couplage modal est calculé, de manière classique, avec  $\Phi_1$  et  $\mathbf{K}_c$  recalculés pour chaque épaisseur tandis que pour la dernière, l'hypothèse est faite que la pastille ne modifie pas les  $\Phi_i$  du système, ce qui revient à prendre les vecteurs propres de l'aube nue pour le calcul du couplage.

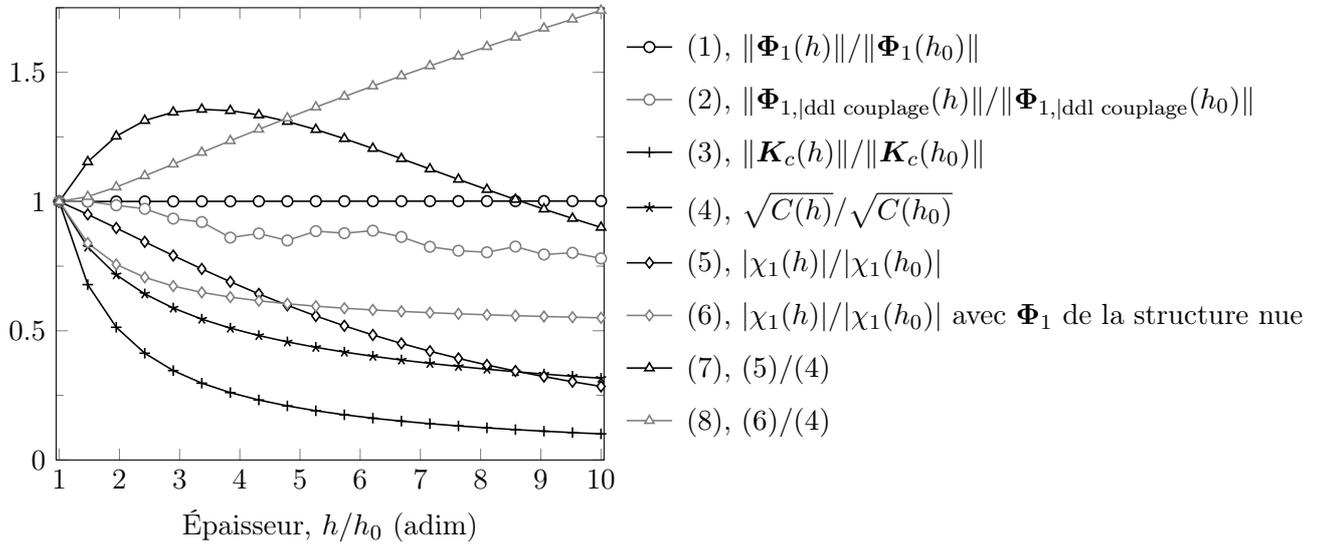


FIG. 5.21 – Comportement des différentes grandeurs entrant dans le calcul du facteur de couplage modal en fonction de l'épaisseur de la pastille.

L'analyse de ces courbes apporte plusieurs informations importantes. Le fait que la masse et la raideur ajoutées par la pastille seule, c'est à dire non connectée à un shunt, aient un effet négligeable sur la dynamique du système est positif car ainsi elle ne vient pas perturber les caractéristiques vibratoires de la structure sur laquelle elle est collée. Par ailleurs, le calcul du facteur de couplage modal avec les modes de la structure nue conduit à toujours choisir les pastilles les plus épaisses (courbe (8)) sans voir qu'il existe un optimum (avant dernière courbe). Par conséquent, la simplification, qui consisterait à prendre un  $\Phi$  constant, ce qui est très avantageux d'un point de vue numérique puisqu'il suffirait de résoudre un seul problème aux valeurs propres, conduit à des résultats erronés et à un mauvais choix de pastille. Il est également intéressant de relever le fait qu'à une matrice de couplage de norme élevée (courbe (3)) correspond une pastille de faible épaisseur, qui se déforme facilement, mais qui ne correspond pas au facteur de couplage modal maximum. Il est nécessaire que la pastille apporte, localement, une certaine raideur (courbe (2)) à la structure et c'est un compromis entre les deux qui permet d'avoir un pic de couplage (courbe (7)).

		1 <sup>ère</sup> étape	2 <sup>nd</sup> étape	recherche exhaustive	erreur relative (%) 1 <sup>ère</sup> / 2 <sup>nd</sup>	erreur relative (%) 2 <sup>nd</sup> / exhaust.
1F	$(x_-, y_-)$ (mm)	(95, 80)	(135, 50)	(140, 50)	(-29, +60)	(-4, 0)
	$h$ (mm)	3	4	4	∅	0
	$k_1$ (%)	7.3	9.7	9.9	-26	-2
2F	$(x_-, y_-)$ (mm)	(140, 105)	(140, 50)	(140, 50)	(0, +110)	(0, 0)
	$h$ (mm)	4	5	5	∅	0
	$k_2$ (%)	5.8	11.5	11.5	-49	0
1T	$(x_-, y_-)$ (mm)	(140, 10)	(140, 50)	(140, 50)	(0,-80)	(0, 0)
	$h$ (mm)	3	3	3	∅	0
	$k_3$ (%)	4.0	9.1	9.1	-56	0

TAB. 5.2 – Position, épaisseur et facteur de couplage modal issus des deux étapes de l'optimisation et de la recherche exhaustive pour les trois premiers modes de l'aube fan.

### (c) Résultat de l'optimisation

La procédure d'optimisation conduit aux mêmes positions et épaisseurs optimales, pour les trois modes, que celles trouvées par la méthode de la recherche exhaustive, mais avec un temps de calcul processeur réduit.

À l'issue de la première étape de la procédure d'optimisation, qui est celle où un algorithme de recuit simulé évalue le couplage modal par l'intermédiaire d'un indicateur  $\tilde{k}$  provenant de la théorie des plaques (section 3.3.3), il est déjà possible de connaître une position de la pastille assez proche de la solution finale. Sur la figure 5.22(a), le résultat de la première étape, pour le mode 1F, est un cadre gris qui représente l'empreinte de la pastille. Les coordonnées de la pastille sont  $(x_-, y_-)=(95 \text{ mm}, 80 \text{ mm})$  et le couplage de 7.3 %.

Cette solution approchée est le point de départ de la seconde étape de l'optimisation où un algorithme de recherche taboue utilise comme fonction coût le facteur de couplage modale calculé de manière exacte par la méthode des éléments finis. L'algorithme a exploré quinze positions et le choix de la position suivante s'est fait sur un voisinage comprenant quatre voisins. Au total, il y a eu 60 résolutions de problème aux valeurs propres. Le critère d'arrêt de la recherche a été réglé pour stopper l'algorithme si une position génère un voisinage dont le coefficient de couplage le plus élevé reste inférieur au maximum trouvé jusqu'à lors. En effet, la recherche exhaustive menée au préalable a permis de voir que la carte des facteurs de couplage pour le mode 1F ne présente qu'un seul maximum. Par conséquent, le chemin à parcourir à partir de n'importe quel point de départ est monotone et dans ce cas de figure, il est possible d'arrêter l'algorithme facilement.

Le résultat de la seconde étape est pratiquement identique à la solution trouvée par la méthode de la recherche exhaustive et est représenté par une pastille noire. Les coordonnées sont  $(x_-, y_-)=(135 \text{ mm}, 50 \text{ mm})$  pour une épaisseur de 4 mm et un couplage de 9.7 %. La différence minime de position est due au fait que la distance entre positions voisines lors de la recherche taboue a été choisie assez grande afin de parcourir rapidement la surface de l'aube et diminuer ainsi le nombre de problèmes aux valeurs propres à résoudre, donc le temps de calcul. L'inconvénient est une résolution spatiale plus faible qui éloigne la solution trouvée par l'algorithme de la solution exacte. Le temps de calcul pour le mode 1F est 45 minutes.

La même procédure d'optimisation, avec les mêmes réglages, a été appliquée pour les modes 2F (Fig. 5.22(b)) et 1T (Fig. 5.22(c)). Les résultats sont consignés dans le tableau 5.2.

Lorsque la carte des déformations équivalentes de von Mises est superposée à celle du maillage, il apparaît clairement que :

- l'indicateur de couplage défini par l'équation (3.22), utilisé lors de la première étape de la

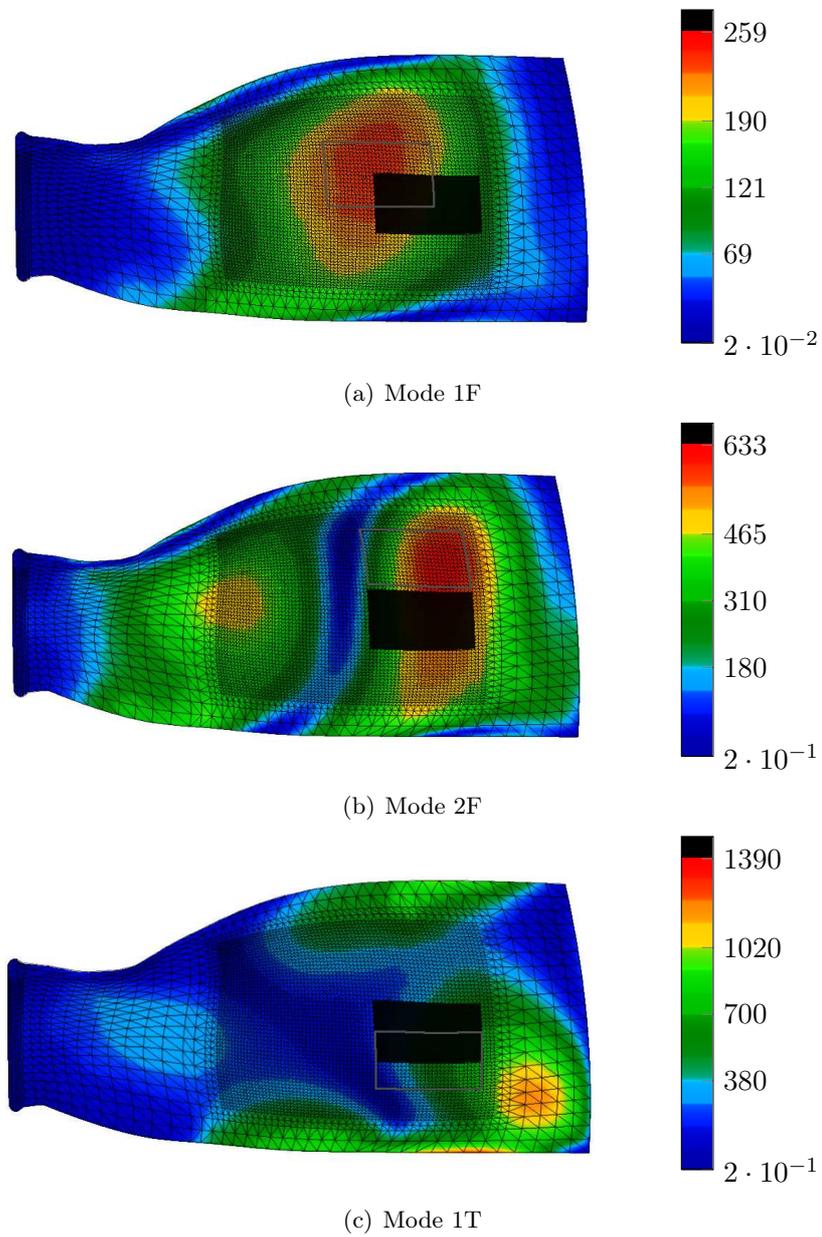


FIG. 5.22 – Superposition des déformations équivalentes de von Mises en  $\mu\text{m}/\text{m}$  de l'aube nue, du maillage de l'aube, de la solution issue de la première étape du processus d'optimisation ( $\square$ ) et du patch optimisé ( $\blacksquare$ ) pour les modes 1F, 2F et 1T.

procédure d'optimisation, fait converger l'algorithme vers le maximum des déformations équivalentes de von Mises ;

- la position qui maximise  $k_i$  n'est pas, dans le cas d'une aube fan, celle qui correspond au maximum de déformation équivalente de von Mises ;
- les distances entre les deux positions, qui sont respectivement pour le 1F, 2F et 1T de 46, 106 et 137 mm, sont petites comparées aux dimensions de l'aube fan, mais cela suffit à faire chuter  $k_1$  de 26 %,  $k_2$  de 49 % et  $k_3$  de 55 %.

Il est également intéressant de regarder la carte des déformations équivalentes de von Mises pour les trois premiers modes de l'aube munie de sa pastille optimisée pour le mode 1F, 2F ou 1T (puisque ce sont les mêmes). La répartition des déformations à la surface de l'aube est largement modifiée par la présence de la pastille, cependant que le niveau moyen reste le même, il apparaît des pics de déformation très localisés. Bien qu'un mode n'ait pas d'amplitude, il est intéressant de faire le rapport des niveaux de déformation de l'aube avec et sans pastille. Pour le mode 1F (Fig. 5.23(a)), le niveau moyen des déformations est de 200  $\mu\text{m}/\text{m}$  (zone verte-orange) pour l'aube nue et reste du même ordre avec une pastille. La surface du maximum de déformation se réduit et passe d'une zone étendue autour 240  $\mu\text{m}/\text{m}$  à un pic localisé autour 517  $\mu\text{m}/\text{m}$ . La même observation peut être faite pour les modes 2F (Fig. 5.23(b)) et 1T ((Fig. 5.23(c))).

Les caractéristiques de la pastille, qui sera collée sur l'aube, sont données dans le tableau 5.3. Il n'y a pas de choix à faire pour la position puisqu'elle est identique pour les trois modes.

$(x_-, y_-)$	$L_x$	$L_y$	$h$	matériau	constructeur
(mm) (140, 50)	100	60	5	PIC151	PI Ceramic

TAB. 5.3 – *Caractéristiques géométriques et matériau de la pastille à coller sur l'aube pour maximiser le facteur de couplage modal pour les trois premiers modes.*

Quant à l'épaisseur de la pastille, elle a été choisie à 5 mm afin de minimiser les pertes de couplage pour chaque mode (Fig. 5.18(c), 5.19(c), 5.20(c)).

#### 5.2.4 Optimisation de la configuration encastrée-libre : choix de la position et de l'épaisseur

La configuration encastrée-libre est proche de celle de l'aube en fonctionnement. Pour cette raison, plusieurs types d'analyses ont été menés. La première concerne l'évaluation du couplage dans une zone comprise entre le pied de l'aube et la veine d'air, appelée l'échasse. Cette zone est celle qui permet d'implémenter un système piézoélectrique sans perturber l'écoulement du fluide, ce qui est primordial pour le rendement aérodynamique d'une soufflante. Les trois paramètres libres de la recherche sont toujours la position ainsi que l'épaisseur et une recherche exhaustive est menée en parallèle d'une recherche avec l'algorithme d'optimisation. Le maillage de l'aube est modifié afin de permettre des déplacements réguliers dans la zone de l'échasse (Fig. 5.2.4).

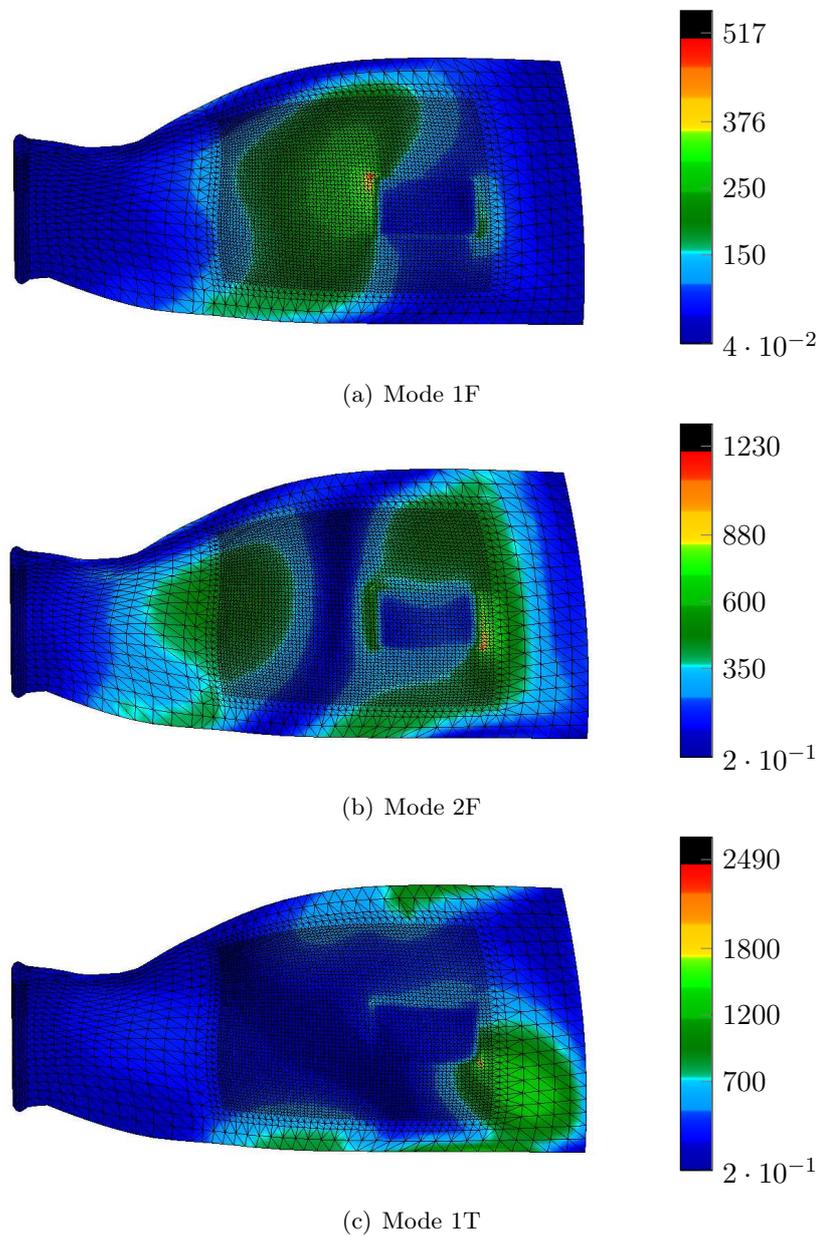


FIG. 5.23 – Déformations équivalentes de von Mises en  $\mu\text{m}/\text{m}$  de l'aube munie de la pastille optimisée pour les mode 1F, 2F et 1T. Visualisation de la surface de l'intrados de l'aube

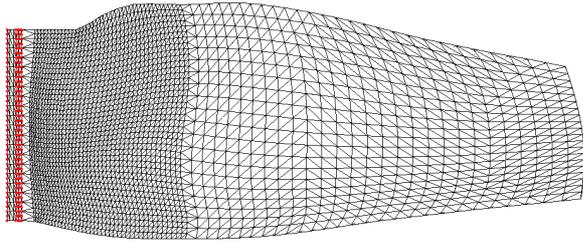


FIG. 5.24 – Maillage régulier de l'échasse de l'aube fan.

figures 5.25(b), 5.25(d) et 5.25(f).

Bien que la méthode exhaustive ne soit pas une méthode efficace de recherche de solution optimale, elle a permis, dans cette section et la précédente, de valider l'algorithme d'optimisation sur un espace de recherche restreint. Un démonstrateur avec des conditions aux limites encastrée-libre devant être réalisé, la contrainte d'implémentation au niveau de l'échasse est abandonnée et une recherche sur l'intégralité de l'intrados est réalisée au moyen de l'algorithme d'optimisation uniquement.

Pour rappel (chapitre 3), la procédure d'optimisation est scindée en deux parties. Un algorithme de recuit simulé est utilisé dans la première et un algorithme de recherche taboue dans la seconde.

L'algorithme de recuit simulé est une métaheuristique probabiliste utilisée fréquemment lorsque l'espace de recherche est discret [44, 49, 51, 86, 35]. Le but est de trouver une bonne approximation du maximum global de la fonction coût  $f_c$ , définie par l'équation (3.22). Par analogie avec le processus physique de recuit, à chaque étape de l'algorithme, un voisinage aléatoire de la configuration courante  $(x_-, y_-, L_x, L_y, h)$ , qui est un point dans l'espace de recherche et qui permet de définir une pastille, est générée avec une probabilité qui dépend de la valeur d'un paramètre de contrôle  $T$  (la température dans le phénomène de recuit), qui décroît graduellement durant la procédure. La dépendance à  $T$  est définie de façon à ce que la configuration courante change de manière quasi-aléatoire lorsque de  $T$  est élevé puis de plus en plus localisée au fur et à mesure que  $T$  se rapproche de zéro. Chaque nouvelle configuration, choisie dans le voisinage de la précédente, est évaluée à l'aide d'un test d'acceptation. Comme la fonction coût doit être maximisée, tout changement associé à une augmentation de celle-ci est acceptée alors qu'une solution diminuant sa valeur est acceptée selon une probabilité du type  $e^{\Delta C/T}$ . La nature probabiliste de cet algorithme l'autorise à accepter temporairement (tant que  $T$  est élevé) des mauvaises solutions afin d'éviter ou de sortir des minima locaux. Le lecteur pourra se reporter à [111] pour de plus amples informations sur l'algorithme de recuit.

Malgré le succès qu'a connu cet algorithme [71] dans la résolution de problème combinatoire, il nécessite l'ajustement de nombreux paramètres pour obtenir de bonnes performances. Pour cette raison, il a été décidé d'utiliser une variante appelée TSA (*Thermodynamic Simulated Annealing*) pour réaliser les simulations numériques. Son principal avantage réside dans le fait que la loi de décroissance du paramètre de contrôle  $T$  n'est pas pilotée par l'utilisateur mais sa valeur est calculée en continue à partir de la variation de la fonction coût  $f_c$ . L'algorithme TSA est détaillé dans [44] et constitue la première partie de l'optimisation.

La seconde partie du processus d'optimisation est basée sur un algorithme de recherche taboue, qui prend comme point de départ de sa recherche la solution proposée par l'algorithme de recuit. Cet algorithme fait parti des techniques de recherche à mémoire (la liste taboue) qui

Les résultats sont présentés sur la figure 5.25 et indiquent qu'il n'y a pas de configuration position-épaisseur favorable à une implémentation de pastilles piézoélectriques en pied d'aube. Les valeurs de couplage obtenues sont faibles et de l'ordre du pourcent. Sur les figures 5.25(a), 5.25(c) et 5.25(e), la position trouvée par l'algorithme d'optimisation est indiquée par un point noir<sup>2</sup> et l'épaisseur optimale par un trait noir<sup>3</sup> sur les fi-

<sup>2</sup>Pour le mode 1, le point est situé en bas à droite, pour le mode 2, en haut à droite et pour le mode 3 en bas à gauche

<sup>3</sup>Pour le mode 1, le trait est situé à 4 mm, pour le mode 2 le trait est à 0.5 mm, de même pour le mode 3.

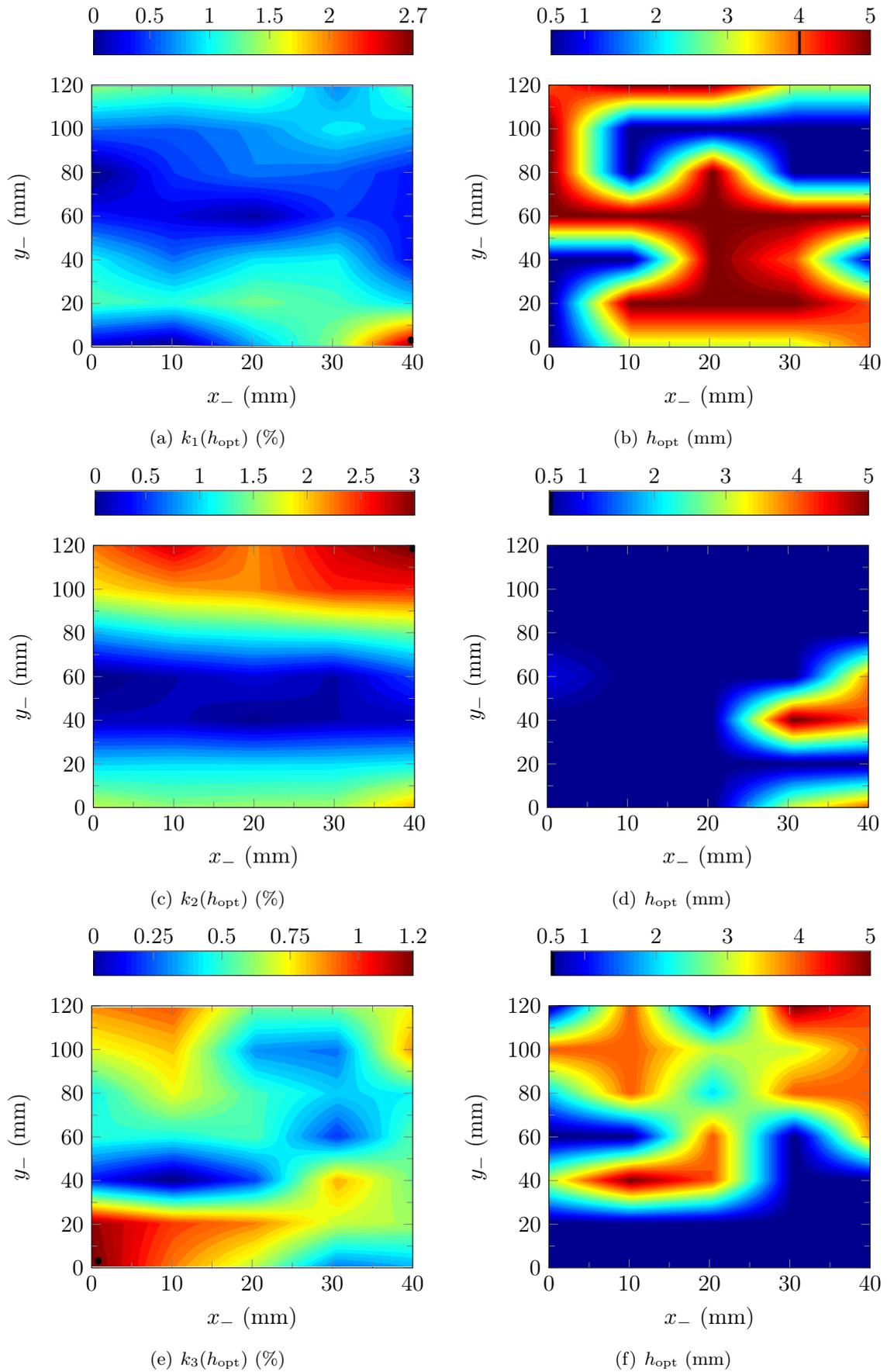


FIG. 5.25 – Facteur de couplage modal pour les modes  $1F$ ,  $2F$  et  $1T$  selon la localisation sur l'échasse de l'aube pour la valeur optimale de l'épaisseur.

visent à améliorer la performance des méthodes traditionnelles de recherche locale (méthode de plus grande pente, ...). Le mouvement à l'intérieur de l'espace de recherche se fait ici dans le voisinage local de la solution courante. Ce voisinage peut être plus ou moins étendu mais est déterminé de façon déterministe (Eq. (3.12)). Chaque nouvelle solution est choisie dans le voisinage de la précédente et n'est acceptée que si elle présente le plus grand facteur de couplage modal et si elle n'appartient pas à la liste taboue. Cette dernière est une liste de type FIFO et contient les solutions acceptées les plus récentes. Elle fonctionne comme une mémoire à plus ou moins long terme et une fois que l'algorithme a accepté une nouvelle solution, celle-ci est incluse dans la liste taboue et l'algorithme n'aura le droit d'y retourner uniquement que lorsqu'elle n'en fera plus partie.

La procédure de génération du voisinage, le test d'acceptation de la solution et la mise à jour de la liste taboue constituent les trois étapes d'une recherche taboue basique et peuvent être répétés jusqu'à ce qu'un nombre maximum d'itérations soit atteint ou qu'un temps prédéfini de calcul soit dépassé. Un des mérites de cet algorithme est qu'il est capable d'éviter, jusqu'à un certain degré, les phénomènes de boucle autour de minima locaux de la fonction coût. Une description détaillée de la recherche taboue peut être trouvée dans [56, 57]. L'objectif de cette seconde étape est d'optimiser localement la solution trouvée à la première.

Deux types de simulations ont été menés. La première est à 4 degrés de liberté ( $x_-$ ,  $y_-$ ,  $L_x$ ,  $L_y$ ), épaisseur fixée et masse maximale de matériau piézoélectrique limitée à 5% de la masse de la structure. La seconde est à 5 degrés de liberté pour une masse maximale également limitée à 5%. Les deux simulations étant toujours faites avec une seule pastille piézoélectrique. Afin de limiter le nombre de positions possibles et réduire la taille de l'espace de recherche, un maillage régulier et plus grossier de l'intrados est créé (Fig. 5.2.4). Le mode ciblé pour l'optimisation est le premier.

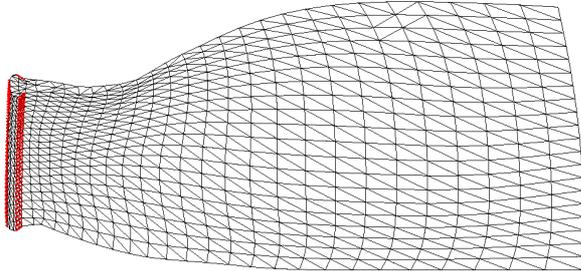


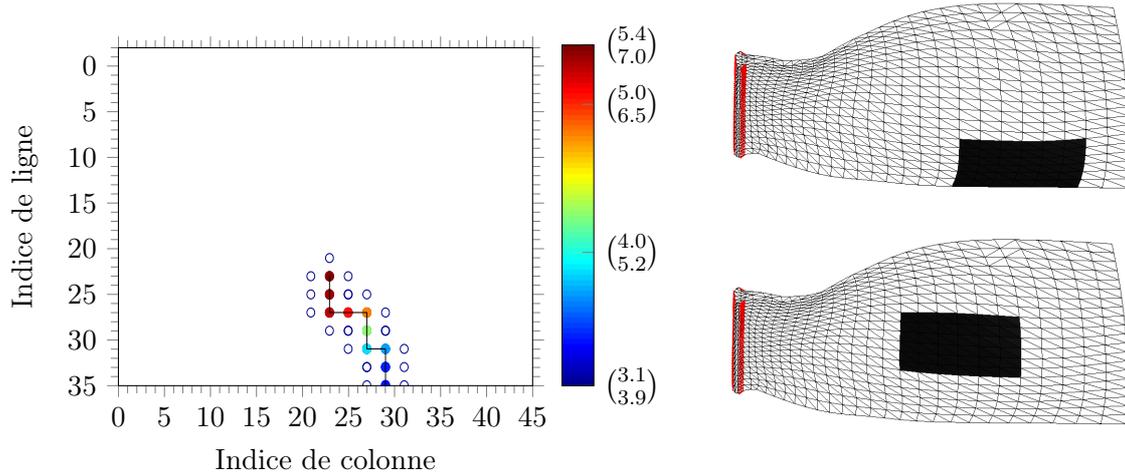
FIG. 5.26 – Maillage régulier de l'intrados de l'aube fan.

À l'inverse des sections précédentes, où la recherche exhaustive permet d'avoir une vue d'ensemble de l'évolution des facteurs de couplages modaux en fonction de la position et de l'épaisseur, la procédure d'optimisation ne donne des informations que sur les solutions qui ont été acceptées ainsi que sur les configurations constituant les différents voisinages qu'il a fallu créer.

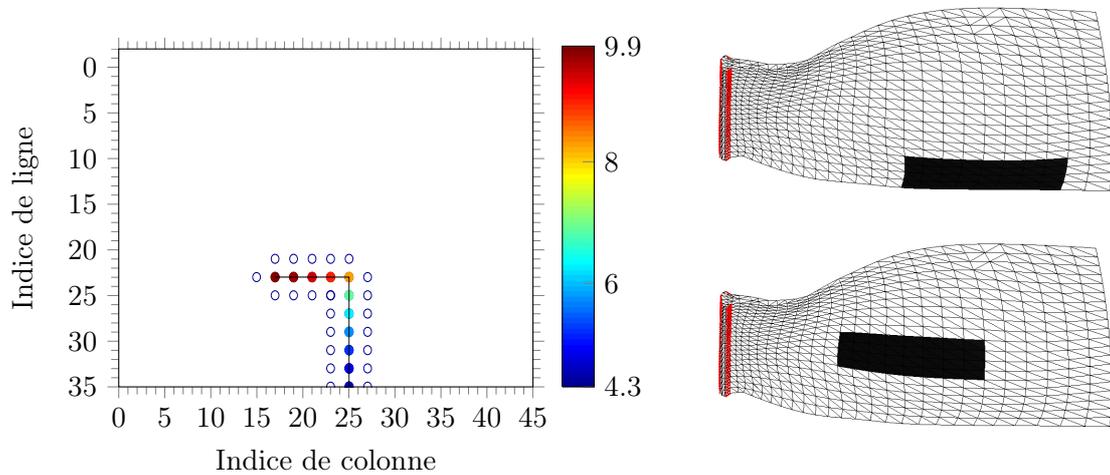
Sur les figures 5.27(a), 5.27(c) et 5.27(e) sont indiquées, pour  $h=1, 2, 3$  et  $4$  mm, les coordonnées successives de la pastille, qui montrent le chemin emprunté pour arriver à la position optimale. Ce ne sont pas les coordonnées physiques de la pastille qui sont données mais les indices de ligne et de colonne du tableau dans lequel sont rangées les nœuds appartenant à la surface de l'aube (ici l'intrados). Les ronds de couleurs désignent les positions acceptées et les autres, les positions faisant partie des voisinages. Sur ces graphiques, l'intégralité du parcours de la pastille n'est pas tracé et celui-ci s'arrête lorsque la position optimale est atteinte. Lors des simulations, l'algorithme se poursuit tant que l'un des critères d'arrêt n'est pas vérifié.

Pour  $h=1, 2, 3$  et  $4$  mm, le couplage a une croissance monotone à chaque nouvelle position acceptée et la pastille arrive directement, mais en suivant des parcours différents selon l'épaisseur, à la position optimale. Dans ce cas de figure, un algorithme plus simple, qui stoppe dès qu'une configuration renvoie un coefficient de couplage plus faible que la précédente, aurait pu être utilisé.

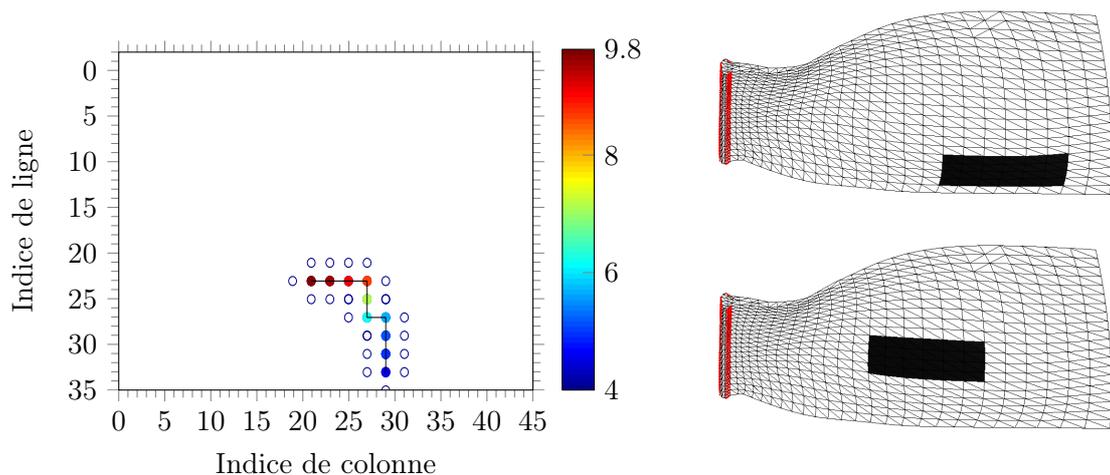
De part la déformée du mode ciblé pour l'optimisation (le 1F), la pastille a une géométrie



(a) Chemin suivi lors de la recherche de la position optimale pour  $h=1$  mm. Les résultats sont identiques pour  $h=2$  mm. (b) Résultats de la première phase d'optimisation (haut) et de la seconde (bas).

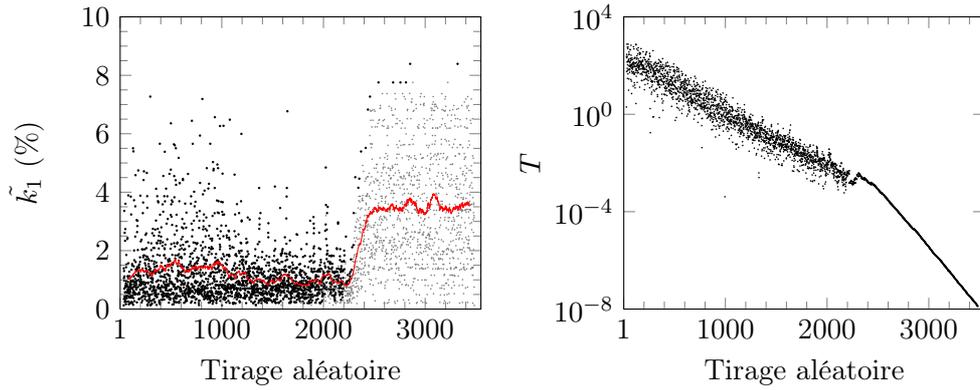


(c) Chemin suivi lors de la recherche de la position optimale pour  $h=3$  mm. (d) Résultats de la première phase d'optimisation (haut) et de la seconde (bas).



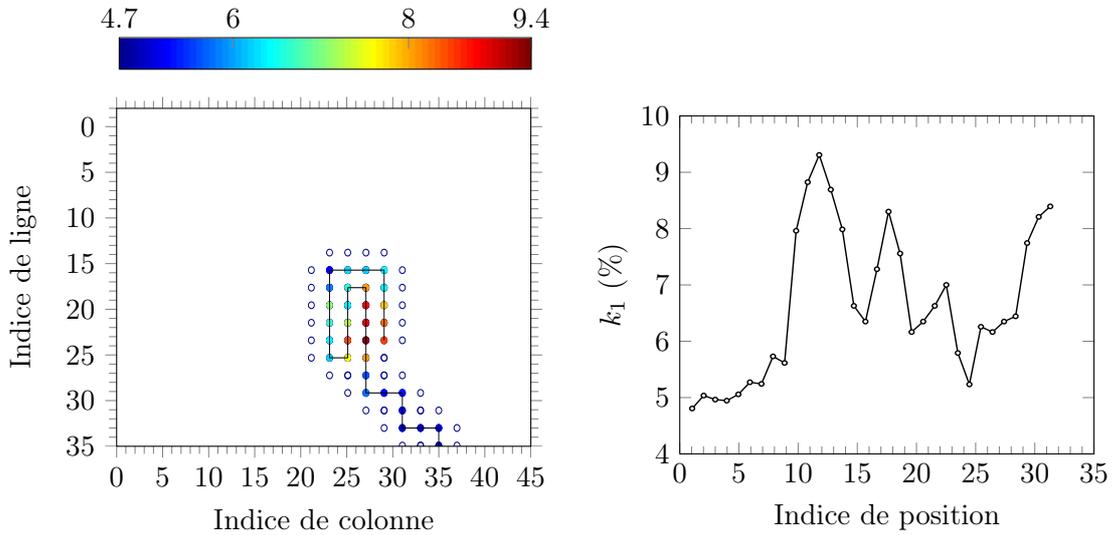
(e) Chemin suivi lors de la recherche de la position optimale pour  $h=4$  mm. (f) Résultats de la première phase d'optimisation (haut) et de la seconde (bas).

FIG. 5.27 – Parcours effectué par le patch lors de la recherche taboue et maillages éléments finis associés aux deux phases du processus d'optimisation, pour les épaisseurs  $h=1, 2, 3$  et  $4$  mm. Le niveau de couleur des points indique la valeur du couplage en %.



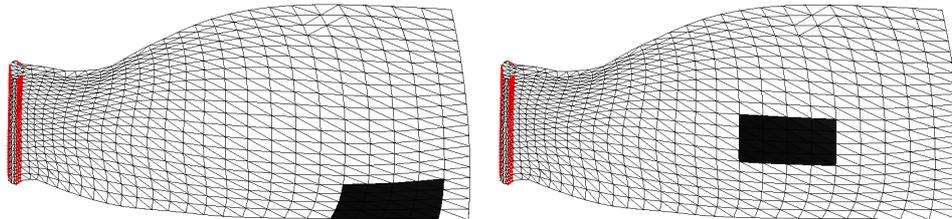
(a) Estimation du facteur de couplage modal (b) Évolution du paramètre de contrôle en  $k_1$  à chaque tirage aléatoire. (●) configuration fonction du nombre de tirages aléatoires acceptées. (○), configurations refusées.

FIG. 5.28 – *Algorithme de recuit simulé. Les 4 paramètres libres sont  $x_-$ ,  $y_-$ ,  $L_x$  et  $L_y$ . L'épaisseur est fixée à 5 mm*



(a) Chemin suivi lors de la recherche de la position optimale. (b) Évolution du facteur de couplage modal en fonction de la position sur la surface de l'aube.

FIG. 5.29 – *Algorithme de recherche taboue. La configuration de départ est celle issue de l'algorithme de recuit simulé. Les 2 paramètres libres sont  $x_-$  et  $y_-$ .*



(a) Position et Dimensions optimales du patch à l'issue de la première phase d'optimisation. (b) Position optimale à l'issue de la seconde phase de l'optimisation. Les Dimensions sont inchangées.

FIG. 5.30 – *Maillages éléments finis associés aux deux phases du processus d'optimisation.*

rectangulaire dont le côté le plus grand est orienté suivant la direction radiale de l'aube. Cette direction est perpendiculaire à la ligne nodale du 1F et permet à la pastille de subir une déformation importante. Selon la valeur de  $h$ , la forme rectangulaire n'est pas la même. Enfin, puisque la masse est limitée à 5 % de la masse de la structure, la surface de la pastille doit diminuer à mesure que  $h$  augmente (Fig. 5.27(b), 5.27(d) et 5.27(f)). Les coordonnées du coin inférieur gauche de la pastille, par lesquelles elle est repérée, ne sont pas identiques d'une épaisseur à l'autre et changent légèrement.

L'optimisation a également été menée pour  $h=5$  mm. Cette épaisseur est plus intéressante que les précédentes du point de vue de l'algorithme d'optimisation. Pour cette raison, les deux étapes de la procédure sont représentées. La figure 5.28 retrace l'évolution des paramètres de l'algorithme de recuit simulé et la figure 5.29, ceux de l'algorithme de recherche taboue.

Les figures 5.28(a) et 5.28(b) donnent, pour chaque tirage, la valeur de l'indicateur de couplage pour le mode 1, noté  $\tilde{k}_1$ , ainsi que la valeur du paramètre de contrôle, noté  $T$ . Le premier tirage consiste à choisir au hasard une configuration dans l'espace de recherche complet. Puis, à chaque nouvelle itération, la configuration courante est choisie dans le voisinage de la précédente. Comme énoncé précédemment, lorsque  $T$  est grand, l'algorithme génère un voisinage étendu et peut accepter une solution qui baisse la fonction coût avec une probabilité également grande. Cela se traduit par des configurations ayant, la plupart du temps, une faible valeur de  $\tilde{k}_1$ . Néanmoins, comme l'algorithme est autorisé à explorer une large partie de l'espace de recherche, certains tirages peuvent présenter un  $\tilde{k}_1$  beaucoup plus élevé que la moyenne<sup>4</sup> (courbe rouge de la figure 5.28(a)).

À mesure que la recherche progresse, le paramètre  $T$  décroît, ce qui implique que les voisinages générés sont moins profonds. Par conséquent, l'algorithme est contraint de choisir, toujours au hasard, des nouvelles configurations plus près de la configuration courante. De plus, il y a de moins en moins de chance pour qu'une configuration qui diminue la valeur de la fonction coût soit acceptée. Ainsi, la recherche, qui était globale, devient locale lorsque  $T$  diminue. Cela se traduit sur la figure 5.28(a) par la baisse du nombre de configurations acceptées lors de la progression de l'algorithme.

L'algorithme TSA est peu sensible à la solution de départ et à la température initiale  $T_0$ . La valeur de  $T_0$  est basse<sup>5</sup> mais après quelques itérations,  $T$  s'accorde à la qualité de la configuration courante et fini par se stabiliser. Ce comportement est visible sur la figure 5.28(b) où les variations sont importantes jusqu'à 500 itérations puis diminuent.  $T$  décroît jusqu'à  $T_{\text{final}}$ .

Bien que des configurations présentant un  $\tilde{k}_1$  élevé aient été trouvées lors de la phase de recherche globale, il s'avère, dans l'exemple de la figure 5.28(a), que c'est durant la phase de recherche locale que  $\tilde{k}_1$  est maximum.

Pour la seconde étape du processus d'optimisation, un algorithme de recherche taboue utilise comme solution de départ la configuration  $(x_-, y_-, L_x, L_y)$  trouvée par l'algorithme TSA. Pour cette pré-solution,  $\tilde{k}_1 = 8.5$  % et  $k_1 = 4.7$  %. Ces valeurs ne sont pas identiques puisque  $\tilde{k}_1$  n'est qu'un indicateur de couplage obtenu à partir d'un modèle de plaque, alors

<sup>4</sup>La courbe rouge de la figure 5.28(a) est une moyenne mobile calculée sur un échantillon de 100 tirages.

<sup>5</sup>La valeur initiale du paramètre  $T$  est donnée par

$$T_0 = -\frac{\overline{|\Delta C|}}{\ln \mathcal{P}}$$

où  $\overline{|\Delta C|}$  est la moyenne de la valeur absolue de la variation de la fonction coût obtenue pour un échantillon initial de configurations choisies au hasard dans l'espace de recherche complet.  $\mathcal{P}$ , qui est la probabilité d'accepter une configuration, est proche de 1 de manière à ce qu'au départ de l'algorithme TSA, presque tous les mouvements dans l'espace de recherche, c'est-à-dire tout nouveau choix d'une configuration  $(x_-, y_-, L_x, L_y)$ , soit accepté.

que  $k_1$  est calculé à partir du premier mode propre de l'aube munie de sa pastille  $\Phi_1$  et de la matrice de couplage  $\mathbf{K}_c$  issus du modèle éléments finis 3D, ce qui permet de prendre en compte la masse et la raideur ajoutée par la pastille. Mais l'objectif étant de faire démarrer la recherche taboue sur une solution pré-optimisée, il est nécessaire et suffisant que les variations de  $\tilde{k}_1$  soient justes.

Sur la figure 5.29(a) est indiqué le chemin suivi par la pastille ainsi que les valeurs de  $k_1$  pour chacune des positions. Si pour les épaisseurs  $h = 1, 2, 3$  et  $4$  mm, la croissance de  $k_1$  est monotone, ce n'est plus le cas pour  $h = 5$  mm. La figure 5.29(b) permet de voir clairement que la pastille passe par 3 maxima locaux avant d'atteindre la position optimale pour laquelle  $k_1$  est maximal. Dans ce type de situation, un algorithme de recherche sans mémoire aurait retourné comme solution la configuration correspondant au premier pic de couplage à 5%. Mais ici, la liste taboue interdit à l'algorithme de recherche de revenir aux positions déjà explorées, ce qui l'oblige à accepter de mauvaises solutions pour atteindre de nouvelles configurations présentant un meilleur couplage.

L'algorithme a effectué 11 mouvements pour atteindre la position de couplage maximum. Sur la figure 5.29(a) est également affiché le reste du chemin, de la position 12 à 32. Dans cet exemple, Le critère d'arrêt stoppe la recherche si le dernier maximum de  $k_1$  sort de la liste taboue sans qu'un nouveau ait été trouvé. La longueur de la liste est de 20 configurations. De la position 12 à 32, l'algorithme n'a pas trouvé de configuration favorable et a cherché à retourner à la meilleure position trouvée.

Les figures 5.30(a) et 5.30(b) présentent les résultats de la première et de la seconde phase du processus d'optimisation pour  $h$  fixé à 5 mm. La distance entre l'extrémité du bord d'attaque situé en tête d'aube (coin inférieur droit sur la figure 5.30(b)) et le coin de la pastille le plus proche est de 167 mm le long du bord d'attaque puis de 67 mm du bord d'attaque au coin de la pastille. Ses dimensions sont de 117 mm  $\times$  56 mm  $\times$  5 mm.

Lors de l'optimisation de la pastille pour le mode 1F de l'aube en condition libre-libre (Fig. 5.25(a)), les dimensions  $L_x$  et  $L_y$  avaient été fixées à 100 mm et 60 mm. La position et l'épaisseur optimales avaient alors été recherchées via un algorithme de recherche exhaustive ainsi que par l'algorithme d'optimisation utilisé ici. La distance entre l'extrémité du bord d'attaque situé en tête d'aube et le coin de la pastille le plus proche est de 113 mm le long du bord d'attaque puis de 87 mm du bord d'attaque au coin de la pastille, avec une épaisseur optimale de 4 mm.

La pastille optimale, pour  $h = 5$  mm et pour le mode 1F, de l'aube encastrée-libre est donc proche de la pastille optimale pour le mode 1F, à  $L_x$  et  $L_y$  fixés, de l'aube libre-libre. Néanmoins, elle se situe plus près du bord d'attaque de 20 mm et plus loin de la tête de l'aube de 50 mm.

En comparant les résultats de l'optimisation de l'aube en conditions libre-libre pour les mode 1F, 2F et 1T, il a été décidé de prendre, pour la réalisation du démonstrateur, la configuration  $(L_x, L_y, h) = (100 \text{ mm}, 60 \text{ mm}, 5 \text{ mm})$  qui permet de minimiser les pertes sur les 3 modes (tableau 5.3).

Pour l'aube en conditions encastrée-libre, il serait intéressant de considérer la même pastille que dans le cas libre-libre, puisque les résultats de l'optimisation sont proches. Cela éviterait d'avoir à réaliser un second démonstrateur, qui est une opération délicate, et de réserver la seconde aube fan que possède le laboratoire pour un autre essai de collage si le premier venait à échouer.

### 5.2.5 Problématiques liées au collage

Bien que les caractéristiques de la pastille soient désormais connues, il n'est pas possible de la coller directement sur l'aube car cette dernière présente une courbure bien trop importante,

ce qui nécessiterait un film de colle de plusieurs millimètres d'épaisseur, qui rendrait inefficace la pastille piézoélectrique. Il faut donc partitionner la pastille initiale en pastille élémentaire dont la taille doit être choisie de manière à pouvoir réaliser un bon collage. Cette solution technique ne permet cependant pas de réaliser une couche d'adhésif aussi fine que dans le cas d'un collage sur poutre ou plaque et l'hypothèse qui consiste à la négliger dans la modélisation n'est plus vérifiée. Il s'avère donc nécessaire de réévaluer les couplages modaux en prenant en compte la mosaïque de pastilles élémentaires et le film de colle.

### (a) Caractéristiques mécaniques du film de colle

La plupart des études sur l'utilisation de pastilles piézoélectriques comme moyen de contrôle vibratoire n'intègrent pas la couche de colle dans leur modèle électromécanique. Cette approximation, constatée expérimentalement, est justifiée car ces études portent, le plus souvent, sur des structures planes de type poutre ou plaque. Il est alors possible de réaliser, lors des validations expérimentales, des films de colle très fins dont l'épaisseur, de l'ordre de 10  $\mu\text{m}$ , est négligeable au regard des épaisseurs des pastilles et de la structure [46].

Dans l'hypothèse d'un collage de qualité (pas de bulle d'air, cure thermique, *etc.*) mais d'une épaisseur plus importante, il apparaît que l'effet sur la transmission des contraintes et des déformations de la structure aux pastilles piézoélectriques n'est plus négligeable, ce qui peut être à l'origine de perte de couplage électromécanique de 10 à 20% par rapport à la valeur prédite par un modèle où la couche de colle est négligée [42].

Parmi les nombreux paramètres qui influencent la réponse dynamique de la couche d'adhésif, deux jouent un rôle important : l'épaisseur et le module de cisaillement [100, 42, 10, 36]. En considérant une plaque collée à une pastille piézoélectrique rectangulaire parfaitement plane et en supposant que le film de colle travaille uniquement en cisaillement, [42] a pu tirer d'un problème bidimensionnel simplifié où les contraintes de cisaillement transverses sont proportionnelles aux déplacements de membrane, un indicateur de qualité de la couche adhésive. Celui-ci est donné par la relation (5.2) où  $G_c$  et  $h_c$  représentent, respectivement, le module de cisaillement et l'épaisseur de la couche de colle,  $E_p$ ,  $\nu_p$  et  $h_p$  le module d'Young, le coefficient de Poisson et l'épaisseur de la pastille piézoélectrique et  $A$  la surface commune au film de colle et à la pastille.

$$\Gamma = \frac{G_c A (1 - \nu^2)}{E h h_p} \quad (5.2)$$

Plus le paramètre  $\Gamma$  est élevé, plus la couche de colle transmettra correctement les efforts. Par conséquent, c'est la raideur en cisaillement ( $G_c/h_c$ ) qu'il convient de maximiser puisque les autres paramètres, qui correspondent aux caractéristiques géométriques et matériau de la pastille piézoélectrique, sont fixées pour maximiser le couplage tel qu'il a été défini à la section 2.3.4.

L'ordre de grandeur de la raideur en cisaillement se situe entre  $5 \cdot 10^{11}$  et  $5 \cdot 10^{12}$   $\text{N.m}^{-3}$  [115, 100]. *A priori*, l'épaisseur moyenne du film de colle nécessaire pour coller les pastilles sur une surface courbe est compris entre 0.5 mm et 1 mm, ce qui implique de trouver une colle avec un module de cisaillement compris entre 0.25 GPa, pour la raideur de cisaillement et l'épaisseur les plus faibles, à 5 GPa, pour les plus élevées.

Les spécifications suivantes sont également nécessaires à la réalisation d'un joint de qualité :

- l'adhésif doit convenir au collage de type métal-métal, plus particulièrement au titane et à l'alliage paladium-argent avec lequel sont recouvertes les électrodes des pastilles ;
- la colle doit présenter une durée de vie importante sous sollicitations dynamiques ;
- la capacité à polymériser à température ambiante, donc sans cure thermique, est aussi recherchée puisque le laboratoire ne possède pas de four assez grand pour accueillir une

viscosité 30-45 Pas	durée d'utilisation >1 heure	durcissement 7 jours
module de cisaillement 0.6-0.8 GPa	résistance au cisaillement 20-22 MPa	module d'Young 1.7-1.9 GPa
résistance élastique 60 MPa	température de fonctionnement -40 à +40 °C	test de fatigue 10 <sup>7</sup> cycles

TAB. 5.4 – *Grandeurs caractéristiques de l'Araldite 2011 A/B.*

aube fan ;

- elle doit être assez visqueuse pour pouvoir s'appliquer manuellement et sécher sans couler ;
- la durée de vie d'utilisation, c'est-à-dire le temps de collage proprement dit, devrait être d'une vingtaine de minutes environ.

La recherche d'une colle structurale pour liaison métal-métal s'est faite auprès des trois principaux fournisseurs que sont les groupes Hunstmann (Araldite), Henkel (Hysol, Loctite, Teroson) et Epoxy Technology (Epotek). Les caractéristiques de l'adhésif sélectionné sont données dans le tableau 5.4.

Toutes les caractéristiques du tableau sont valables pour une température de 23°C. L'Araldite 2011 est un adhésif époxyde bicomposant dont la viscosité après mélange est de 30 à 45 Pas, ce qui le situe entre le sirop alimentaire et le miel. Cette viscosité permettra une application à la main sur des surfaces courbes plus aisément que dans le cas d'une colle liquide comme les cyanoacrylates. Bien qu'une durée de durcissement de 10 heures à 23°C soit suffisante pour atteindre une résistance en cisaillement à 50% de la valeur optimale, il est nécessaire, au vue de l'épaisseur probablement importante de la couche de colle entre l'aube et les pastilles, de planifier un temps de durcissement de 7 jours afin d'obtenir 100% de la résistance en cisaillement<sup>6</sup>. Dans l'optique d'une implémentation industrielle, les critères de tenue en température et en fatigue ont également été examinés. La plage de température dans laquelle la résistance au cisaillement varie entre -10% et +10% de sa valeur optimale s'étend de -40°C à +40°C, ce qui correspond à l'étendue couverte par les températures de fonctionnement d'une aube fan. Enfin, des tests de fatigue menés avec une charge sinusoïdale de moyenne nulle, de fréquence 90 Hz et dont l'amplitude se situe à 15% de la résistance statique moyenne en cisaillement (19 MPa) ont donné un nombre de cycles avant rupture du collage de 10<sup>7</sup> cycles<sup>7</sup>. Il reste que le critère principal de sélection de la colle est le module ainsi que la résistance au cisaillement dont les valeurs ont été choisies les plus élevées possible.

Les colles conductrices, qui permettent d'avoir directement une liaison électrique entre l'électrode inférieure des pastilles et l'aube, ne sont pas des colles structurales<sup>8</sup>. Elles ont l'inconvénient majeur d'avoir un faible module de cisaillement. Pour cette raison, elles n'ont pas été choisies.

Outre l'épaisseur, la température a aussi un effet sur les caractéristiques de la couche d'adhésif. Dans l'étude [92] où la colle utilisée est également de l'Araldite, la fonction de réponse en fréquence entre 0 Hz et 4 kHz d'une poutre encastree-libre munie de pastilles piézoélectriques est tracée expérimentalement pour -20°C, 15°C et 50°C. La colle étant plus

<sup>6</sup>Les tests réalisés par Huntsman sont par ailleurs tous effectués avec une durée de durcissement de 7 jours à 23°C si il n'y a pas de cure thermique.

<sup>7</sup>Une charge fluctuante à 20% et 30% donne respectivement 10<sup>6</sup>-10<sup>7</sup> et 10<sup>5</sup>-10<sup>6</sup> cycles.

<sup>8</sup>Les colles conductrices sont le plus souvent employées pour assurer le collage de circuits électriques, de composants électroniques et de semi-conducteurs.

raide à basse température, il apparaît un décalage des pics de résonance vers les hautes fréquences lorsque la température diminue. Cet effet s'amplifie des basses vers les hautes fréquences et il est négligeable en dessous 1.5 kHz. La dernière fréquence propre observée, vers 4 kHz, voit sa fréquence changer de plusieurs dizaines de Hertz entre  $-20^{\circ}\text{C}$  et  $50^{\circ}\text{C}$ . À l'inverse, les amplitudes des pics de résonance restent constantes lorsque la température varie.

### (b) Mosaïque de pastilles piézoélectriques

L'optimisation de la géométrie et de la position des pastilles piézoélectriques est menée à l'aide d'un modèle éléments finis 3D qui permet de réaliser des pastilles courbes afin de s'adapter à la surface de l'aube. Cependant, la réalisation physique de la solution numérique n'est pas possible directement puisque les pastilles piézoélectriques choisies sont des céramiques planes. Une solution technique, qui permet de rester très proche de la solution numérique, consiste à réaliser une mosaïque de petites pastilles carrées. Plusieurs contraintes doivent alors être prises en compte :

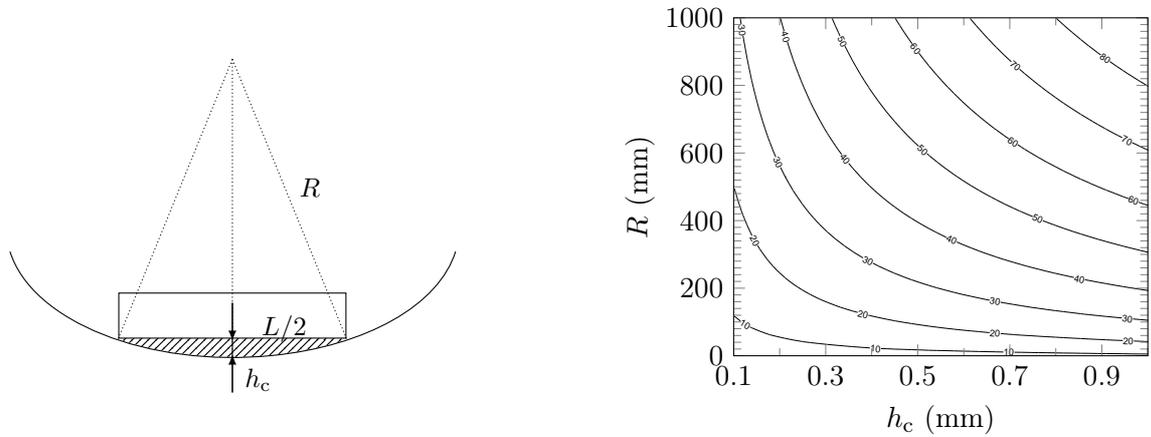
- la somme des surfaces des pastilles piézoélectriques élémentaires qui composent la mosaïque doit être égale à la surface de la pastille issue du calcul éléments finis ;
- la taille des pastilles élémentaires est calculée de manière à ce que d'une part, l'épaisseur du film de colle permette de suivre la courbure de l'aube (Fig. 5.31(a)), et d'autre part, la géométrie de la pastille issue du calcul soit respectée ;
- les pastilles élémentaires doivent être collées au plus près les unes des autres pour minimiser les pertes de couplage.

La dimension optimale d'une pastille élémentaire est estimée à l'aide de la figure 5.31(b) qui, pour une longueur  $L$ , donne le rayon de courbure  $R$  en fonction de l'épaisseur du film de colle  $h_c$ . À partir du modèle éléments finis de l'aube, il est également possible de calculer les rayons de courbure principaux<sup>9</sup> en chaque nœud du maillage de la zone d'optimisation. La figure 5.32 permet d'estimer qu'à l'endroit où est collée la pastille  $(x_-, y_-)=(140,50)$ , les rayons de courbure sont compris entre 200 et 600 mm.

D'après le graphique 5.31(b), une longueur de 20 mm pour une pastille élémentaire permet de couvrir des rayons de courbure jusqu'à 100 mm sans dépasser les 0.5 mm de film de colle. Pour la zone où est collée la pastille, qui présente des rayons de courbure compris entre 200 et 600 mm, cette longueur permet d'avoir une couche d'adhésif entre 0.1 mm et 0.25 mm. Ce qui donne, puisque le module de cisaillement  $G_c$  de l'Araldite 2011 est compris entre 0.8 et 1 GPa, une raideur en cisaillement entre  $1 \cdot 10^{12}$  et  $3.2 \cdot 10^{12}$  N.m<sup>-3</sup>. C'est une raideur élevée qui assure un bon transfert des déformations de l'aube à la pastille [115, 100]. Une pastille élémentaire de taille plus petite, qui conviendrait parfaitement pour le collage, impliquerait néanmoins d'avoir une mosaïque constituée d'élément piézoélectrique de plus petite taille, ce qui ferait chuter davantage le couplage. Pour cette raison, c'est la plus grande dimension de pastille élémentaire possible qui est choisie.

Avec une pastille élémentaire de 20 mm par 20 mm (Fig. 5.33), la mosaïque est constituée de 15 éléments : 3 dans la largeur et 5 dans la longueur. La distance minimale entre pastille

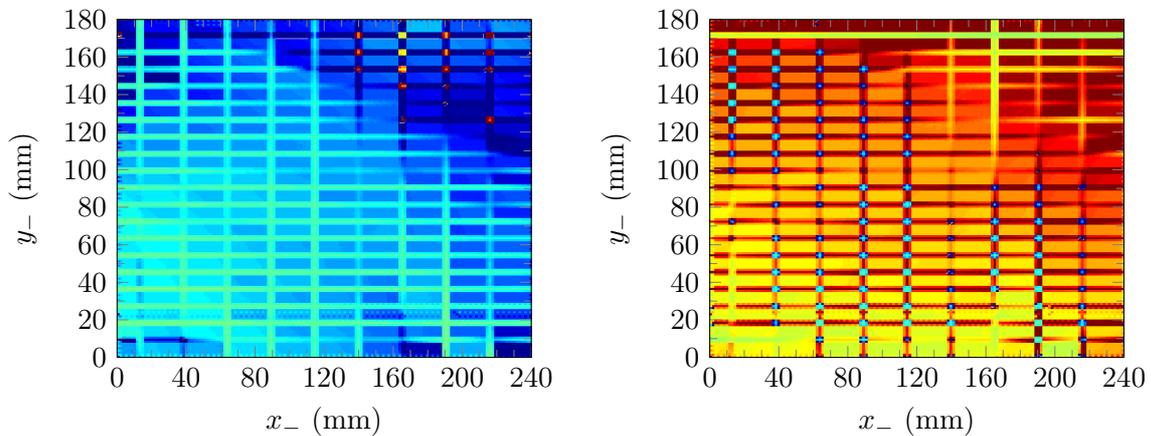
<sup>9</sup>Il est possible de construire, en chaque point  $M$  d'une surface différentiable de  $\mathbb{R}^3$ , un vecteur normal à la surface et de définir un plan qui contient cette normale ainsi qu'une tangente à la surface en ce point. L'intersection du plan et de la surface est une courbe plane dont la courbure au point  $M$  peut prendre différente valeur selon la direction de la tangente à la surface en  $M$ . Les courbures principales sont les valeurs minimale et maximale de la courbure en  $M$  rencontrées en faisant tourner le plan de coupe. La courbure est positive si la courbe tourne dans la même direction que la normale à la surface, sinon elle est négative. D'un point de vue mathématique, les courbures principales et directions principales sont respectivement les valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique du plan tangent (endomorphisme de Weingarten).



(a) Schéma d'une pastille collée sur une surface courbe

(b) Carte des dimensions d'une pastille

FIG. 5.31 – Choix de la dimension d'une pastille piézoélectrique en fonction du rayon de courbure et de l'épaisseur du film de colle



(a) Premier rayon de courbure principal (mm)

(b) Second rayon de courbure principal (mm)

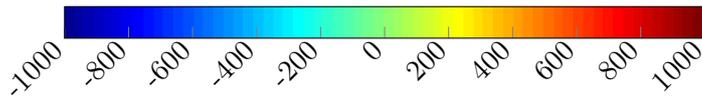


FIG. 5.32 – Rayons de courbures principaux en chaque nœud de la zone d'optimisation.

qu'il est possible de réaliser lors du collage est de 1 mm, ce qui amène la mosaïque à occuper une surface rectangulaire de 104 mm par 62 mm.

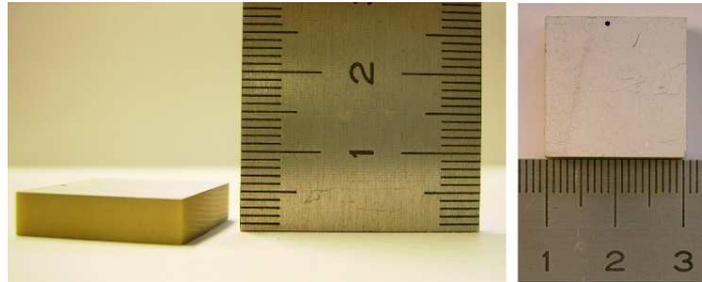


FIG. 5.33 – Pastille piézoélectrique de 20 mm × 20 mm × 5 mm en PIC151 de chez PI Ceramic.

### (c) Réalisation pratique du collage

La procédure de collage des pastilles élémentaires sur l'aube comprend trois phases :

- préparation des surfaces de l'aube et des pastilles ;
- préparation et dépôt de la colle sur les surfaces ;
- positionnement des pastilles sur l'aube et application d'une pression normale à la surface pendant le séchage.

Ces phases sont techniquement simples à mettre en œuvre avec une colle époxyde comme l'Araldite 2011, de plus, il n'y a pas de cure thermique ni étape de désaération de la colle car le laboratoire n'est pas équipé de four assez grand, ni de pompe à vide. Cependant, une préparation minutieuse des surfaces est requise. Le protocole de collage est inspiré de celui utilisé pour les jauges de déformation [8] ainsi que des conseils du fabricant [2].

La résistance et la durée de vie d'un joint collé dépendent de la qualité du prétraitement des surfaces à assembler. Les surfaces à encoller doivent être nettoyées au moyen d'un agent dégraissant tel que l'acétone ou le méthoxy-propanol afin d'éliminer toute trace d'huile, de graisse ou de poussière [2]. Cette étape est suivie d'une abrasion mécanique des surfaces dégraissées, qui permet d'enlever la couche d'oxyde pour accéder au métal et d'augmenter la surface de contact entre l'aube et la colle. Enfin, un deuxième dégraissage enlève les particules de métal arrachées lors de l'abrasion. Cette procédure dégraissage-abrasion-nettoyage des particules, suffit dans la plupart des applications, mais afin d'obtenir une résistance maximale de la couche d'adhésif un traitement chimique de la surface est nécessaire. Le titane étant extrêmement oxydable, la surface de l'aube n'est pas du titane pur, mais une combinaison d'oxyde ( $\text{TiO}$ ,  $\text{TiO}_2$ ,  $\text{TiO}_3$ ) et d'autres contaminants aux propriétés mécaniques plus faibles que celles du titane et dont la compatibilité chimique avec la colle n'est pas assurée. Pour les métaux, un nettoyage à l'acide, après abrasion, permet la formation d'une couche d'oxyde qui est chimiquement et mécaniquement compatible avec l'adhésif. Cette étape est délicate car un mauvais choix d'acide ou une application incorrecte peut conduire à une résistance du film de colle inférieure à celle qu'il aurait été possible d'obtenir sans traitement chimique. La préparation des surfaces, première phase de la procédure de collage, comprend ainsi 6 étapes :

- nettoyage à l'acétone de la surface de l'aube pour éliminer graisse et poussière ;
- ponçage à la toile émeri de grain 400 (diamètre moyen du grain de 23  $\mu\text{m}$ ) pour décaper la couche d'oxyde et accéder au titane ;
- nettoyage des particules arrachées à l'acétone ;

- application d'une solution d'acide nitrique pour un temps d'activation de 1 minute et essuyage ;
- neutralisation de l'acide avec une solution d'ammoniaque puis essuyage ;
- les surfaces des pastilles sont simplement nettoyées à l'acétone.

Le ponçage puis l'application de l'acétone, de l'acide et de la base se font selon une seule et même direction. Cela évite de laisser des particules sur la surface ou de rapporter des contaminants<sup>10</sup>. Le papier abrasif est constitué d'émeri, plus appropriée au travail des métaux que l'alumine, et s'utilise avec de l'eau comme lubrifiant afin de faciliter la circulation des particules. L'anodisation aurait également été un prétraitement de surface excellent pour le titane. Le but de l'anodisation est de déposer un oxyde poreux sur l'oxyde formé par le décapage chimique à l'acide. La colle pénètre alors la couche poreuse et forme un film très résistant.

La seconde phase de la procédure de collage commence par la préparation du mélange résine/durcisseur. Les parties pondérales sont de 100 pour la résine et 80 pour le durcisseur. Une balance de précision est utilisée pour que ces proportions soient respectées à  $\pm 5\%$ . La résine est déposée sur une plaque de verre puis pesée. Sur la même plaque, le durcisseur est déversé et la masse de l'ensemble est mesurée. Le mélange est mixé à la main lentement, pour incorporer le moins d'air possible, de manière circulaire pendant 1 minute dans le sens horaire puis 1 minute dans le sens inverse, de façon à avoir une pâte homogène. Le temps d'emploi de la colle est d'environ 1 heure. Avant le collage proprement dit, les pastilles ont été positionnées par 5 sur un ruban adhésif. Trois rubans sont préparés. L'intérêt est d'assurer la mise en position avec un écart de 1 mm entre chaque pastille et de limiter leur manipulation au moment du collage. Les pièces à assembler doivent en effet être accostées et sécurisées dans une position fixe immédiatement après l'application de l'adhésif. La pose de la colle se fait à la main directement sur la surface de l'aube. La zone à enduire est précisément délimitée par des rubans adhésifs collés sur l'aube, qui permettent de déposer un film de colle en excès. Puisque cette dernière n'est pas conductrice, l'étape finale avant l'assemblage est de relier électriquement l'électrode inférieure des pastilles à l'aube. Des cotons tiges très fins de chez Vishay permettent d'enlever un petit cylindre de colle de 2-3 mm de diamètre au centre de chaque pastille sans qu'il reste de colle sur la surface de l'aube. La connexion électrique avec l'aube est obtenue en injectant une goutte de résine conductrice chargée d'argent (Ecolit 340) à cet endroit. Bien que la résine ait des propriétés mécaniques moins bonnes que de la colle conductrice, qui aurait pu être employée ici, elle a l'avantage d'être liquide, ce qui facilite le remplissage du petit cylindre évidé à cet effet.

La dernière phase, la plus délicate, est le positionnement des 3 rubans de 5 pastilles sur l'aube. La pose doit être faite du premier coup car c'est le contact électrique qui risque d'être perdu si les pastilles sont déplacées. En fin de collage, une pression normale à la surface est appliquée sur la mosaïque, ce qui fait remonter la colle entre les patchs et la fait déborder des pourtours de celle-ci. Pour protéger l'aube au-delà de la zone de collage, un ruban d'adhésif, situé à 1 mm de la bordure de la mosaïque est collée directement sur l'aube (Fig. 5.35(a)). Le fait que la colle remonte peut être bénéfique à la tenue mécanique des pastilles en les solidarissant les unes aux autres (Fig. 5.34). Un champ de pression uniforme sur la mosaïque courbe est obtenu en utilisant une mousse entre deux surfaces conformes. Puisque le laboratoire possède deux aubes fan, il est possible d'utiliser la deuxième comme une presse qui vient comprimer une mousse posée sur la mosaïque. Plusieurs tests effectués au préalable ont

---

<sup>10</sup>Un test simple permet de vérifier que la surface de titane est parfaitement propre. Si une goutte d'eau distillée mouille la surface et se répand sans se briser en gouttelette plus petite, alors la surface peut être considérée comme parfaitement propre. Un mouillage uniforme de la surface par l'eau distillée indique que, probablement, elle le sera aussi par de la colle.

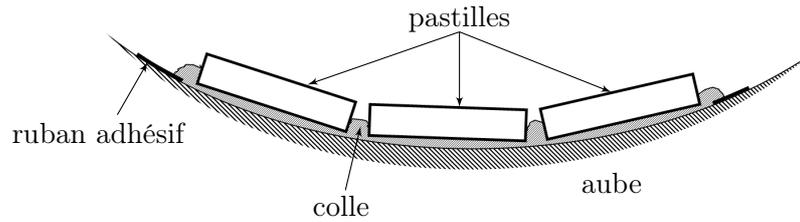


FIG. 5.34 – Schéma de la mosaïque collée sur l'intrados de l'aube de soufflante.

permis de choisir une mousse polyuréthane semi-rigide (Fig. 5.35(b)). Quant à la pression à appliquer, elle dépend principalement de la fluidité de l'Araldite 2011. L'expérience acquise au laboratoire indique qu'une pression de 3 à 4 kPa est suffisante pour chasser les bulles d'air et le surplus de colle. Les deux aubes sont plaquées l'une contre l'autre par l'intermédiaire de 5 pinces crocodiles (Fig. 5.35(c)).

La durée de séchage de la colle est de 6 jours. Un essai de collage, réalisé au préalable, a permis de constater que la tension mesurée entre les électrodes croît régulièrement entre le premier et le sixième jour de séchage, ceci pour une déformation identique de la pastille. La tension se stabilise par la suite, indiquant que la composition de la colle est figée et le séchage terminé<sup>11</sup>.

Après séchage, les pastilles sont connectées en parallèle avec du fil à wrapper (30 AWG, 0.255 mm de diamètre) soudé à l'étain sur les électrodes supérieures (Fig. 5.35(d)). La prise du potentiel de l'aube se fait également avec du fil à wrapper, mais comme le titane se soude très mal, le collage du fil est réalisé avec une goutte de résine conductrice Ecolit 340 (Fig. 5.35(e)).

La mesure au comparateur micrométrique permet d'estimer, *a posteriori*, une épaisseur moyenne du film de colle comprise entre 0.1 et 0.15 mm. Les mesures se font sur le bord de la mosaïque par comparaison du niveau de la surface de l'aube et de l'électrode supérieure des pastilles.

### 5.2.6 Prise en compte de la mosaïque et du film de colle dans la modélisation

Un nouveau modèle éléments finis est nécessaire pour rendre compte de l'effet de la mosaïque sur les facteurs de couplage modaux entre l'aube et les pastilles piézoélectriques. Découper la pastille initiale en 15 pastilles élémentaires permet le collage sur une surface courbe mais se traduit par une perte de couplage qu'il faut estimer. La présence d'un film de colle d'une épaisseur moyenne comprise entre 0.1 et 0.15 mm a également pour effet de diminuer le couplage.

Les résultats numériques de ce modèle éléments finis, très proches de la réalisation physique (Fig. 5.35(e)), sont ceux qui ont été comparés aux mesures expérimentales. Le maillage a été affiné et comporte désormais 81945 éléments TET10 pour 147185 nœuds (Fig. 5.36). L'ensemble des pastilles compte pour 9312 éléments.

#### (a) Modélisation du film de colle

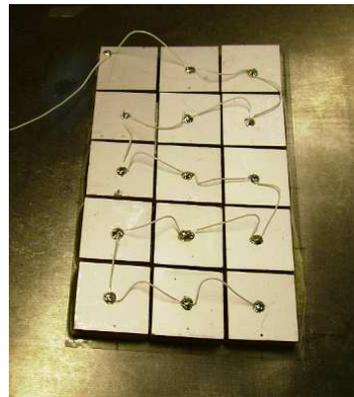
La fixation de pastilles piézoélectriques sur la surface externe d'une structure est une solution technique qui présente plusieurs avantages. Elle est facile à réaliser et ne complique pas le

<sup>11</sup>Lors de ce test, cinq mesures à l'oscilloscope ont été effectuées. La première après 24 heures de séchage, puis à intervalle d'une journée. Toutes les mesures ont été effectuées avec une même excitation sinusoïdale de faible intensité.



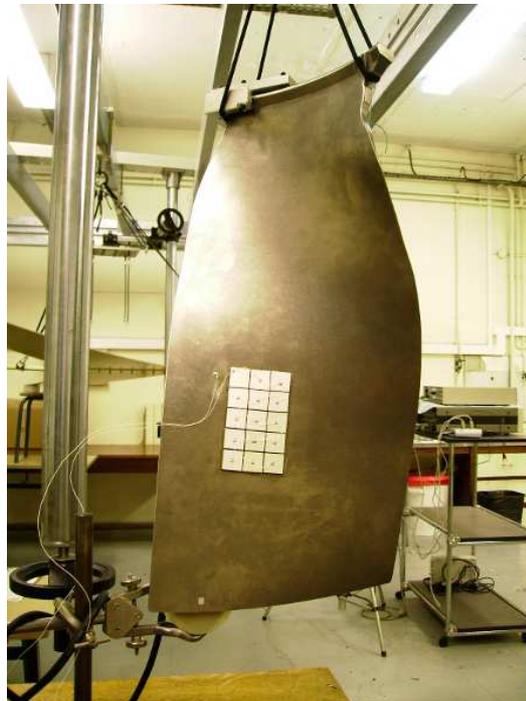
(a) Mosaïque collée et positionnée par rubans adhésifs

(b) Mosaïque recouverte de mousse avant mise sous pression



(c) Une seconde aube est plaquée sur la première à l'aide de pince

(d) Cablage en parallèle des pastilles



(e) Montage final de l'aube fan

FIG. 5.35 – Présentation, dans l'ordre chronologique, des différentes étapes de la procédure de collage.

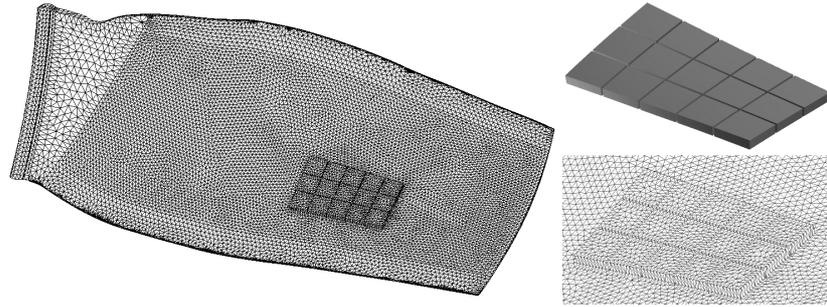


FIG. 5.36 – Maillage de l'aube fan et de la mosaïque piézoélectrique, sans prise en compte de la colle.

	E (MPa)	G (MPa)	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )
Araldite 2011	1904	700	1050

TAB. 5.5 – Caractéristiques matériau de l'Araldite 2011 à 23°C, [1].

process de fabrication, à l'inverse de pastilles incorporées qui nécessiteraient une reconception. De plus, des pastilles peuvent être montées sur des structures existantes, comme c'est le cas ici, afin de les contrôler. L'inconvénient principal vient du fait que la méthode usuelle pour fixer des pastilles est de les coller, ce qui se traduit par l'ajout d'une couche d'adhésif dans l'assemblage. D'une part, la couche d'adhésif est bien plus souple que la structure hôte et les pastilles en céramique, et dans le cas d'une surface de collage irrégulière ou courbe, le film est épais. D'autre part, la qualité du couplage dépend de la capacité de la couche de colle à transférer les contraintes et les déformations de la structure aux pastilles piézoélectriques. Ainsi, les propriétés mécaniques et géométriques du film d'adhésif affectent les performances du système de contrôle vibratoire [102].

De manière générale, la loi de comportement d'une colle époxyde dépend de la fréquence de l'excitation ainsi que de la température. Pour cette raison, elle est modélisée par un matériau viscoélastique linéaire. Le facteur de perte  $\nu$ , qui lie l'énergie dissipée à l'énergie stockée par cycle de déformation, est défini par  $\nu = E'/E''$ , où  $E'$  et  $E''$  sont, respectivement, le module élastique et de perte. En basse fréquence (0-1 kHz) et pour une température comprise entre -20 et 60°C, le facteur de perte d'une colle époxyde est de l'ordre de 0.02 [3], ce qui indique que l'énergie dissipée par cycle par la couche d'adhésif est 50 fois plus faible que l'énergie qui y est stockée. Ainsi, pour les basses fréquences, qui sont celles où apparaissent les premiers modes de l'aube fan, et pour des basses températures, qui sont celles de son fonctionnement, la colle a un comportement élastique et dissipe peu d'énergie.

Par comparaison, un matériau viscoélastique dissipatif, tel que l'ISD112 à 27°C, a un facteur de perte compris entre 0.8 et 1.2 lorsque la fréquence varie de 0 Hz à 1 kHz [133]. À plus haute température, de l'ordre de la centaine de degrés, le facteur de perte d'une colle époxyde, toujours entre 0 et 1 kHz, rejoint celui de l'ISD112 à température ambiante.

La modélisation de la couche d'adhésif, qui permet de prendre en compte l'effet assouplissant de la colle dans l'assemblage aube-pastilles, est un matériau isotrope dont les caractéristiques sont données dans le tableau 5.5.

(b) Effets de la mosaïque et de la colle sur les facteurs de couplage modaux

Le fait de remplacer une pastille unique par une mosaïque et d'introduire une couche d'adhésif dans la modélisation a pour effet principal de faire chuter les facteurs de couplage modaux. Les figures 5.37 et 5.38 permettent de comparer les différents cas possibles pour les configurations libre-libre et encastrée-libre.

Il existe 6 modèles :

- une seule pastille sans colle ( $\mathcal{M}_1$ ) et avec colle ( $\mathcal{M}_2$ );
- une mosaïque sans colle dont les pastilles ne sont pas connectées entre elles ( $\mathcal{M}_3$ , noté indep., Eq.(2.79));
- une mosaïque sans colle dont les pastilles sont connectées en parallèle ( $\mathcal{M}_4$ , noté para., Eq.(2.87));
- les modèles  $\mathcal{M}_5$  et  $\mathcal{M}_6$  correspondent, respectivement, aux modèles  $\mathcal{M}_3$  et  $\mathcal{M}_4$  mais en intégrant l'effet de la colle.

Le dernier cas avec prise en compte de la colle étant le modèle le plus proche de l'expérience.

Bien que la tendance principale soit à la diminution du couplage, le fait de briser une pastille piézoélectrique en une mosaïque de pastilles plus petites n'a pas toujours pour effet de diminuer le facteur de couplage modal. Pour les modes 4 et 5 de la configuration libre-libre et 3 et 7 de la configuration encastrée-libre, le couplage est plus élevé avec une mosaïque qu'avec une pastille unique de dimension équivalente. Cela reste encore vrai si la colle est prise en compte. Dans la quasi totalité des cas, la colle a pour effet de diminuer le couplage. Il n'y a que 2 exceptions, qui ne concernent que le cas d'une pastille unique. Il s'agit du mode 4 en libre-libre et du mode 5 en encastrée-libre.

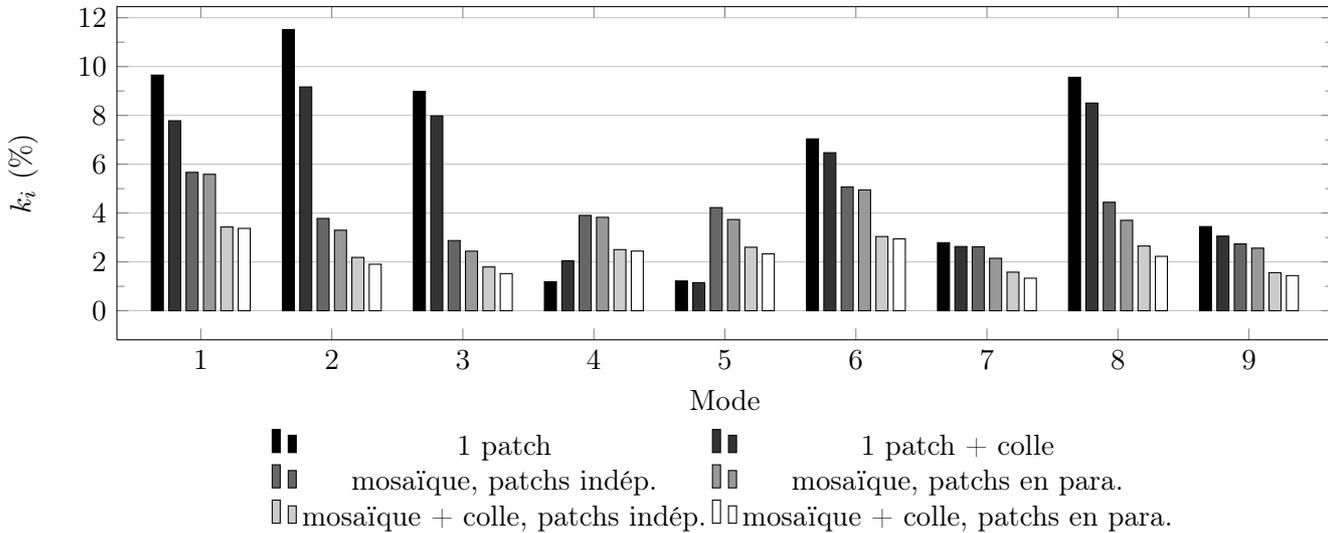


FIG. 5.37 – Aube en conditions libre-libre : facteurs de couplage modaux pour l'aube munie d'un seul patch ou d'une mosaïque, avec ou sans la couche d'adhésif et avec les patches non connectés ou en parallèle dans le cas de la mosaïque.

Les différents modèles sont comparés et les variations de couplage sont données dans le tableau 5.6. La comparaison de  $\mathcal{M}_2$  avec  $\mathcal{M}_1$ , puis de  $\mathcal{M}_4$  avec  $\mathcal{M}_3$  (ou de  $\mathcal{M}_6$  avec  $\mathcal{M}_5$ ) indique que le film de colle a un effet plus important sur les facteurs de couplage modaux dans le cas d'une mosaïque (-65 %) que dans le cas d'une pastille monobloc (-7 %). Le fait que

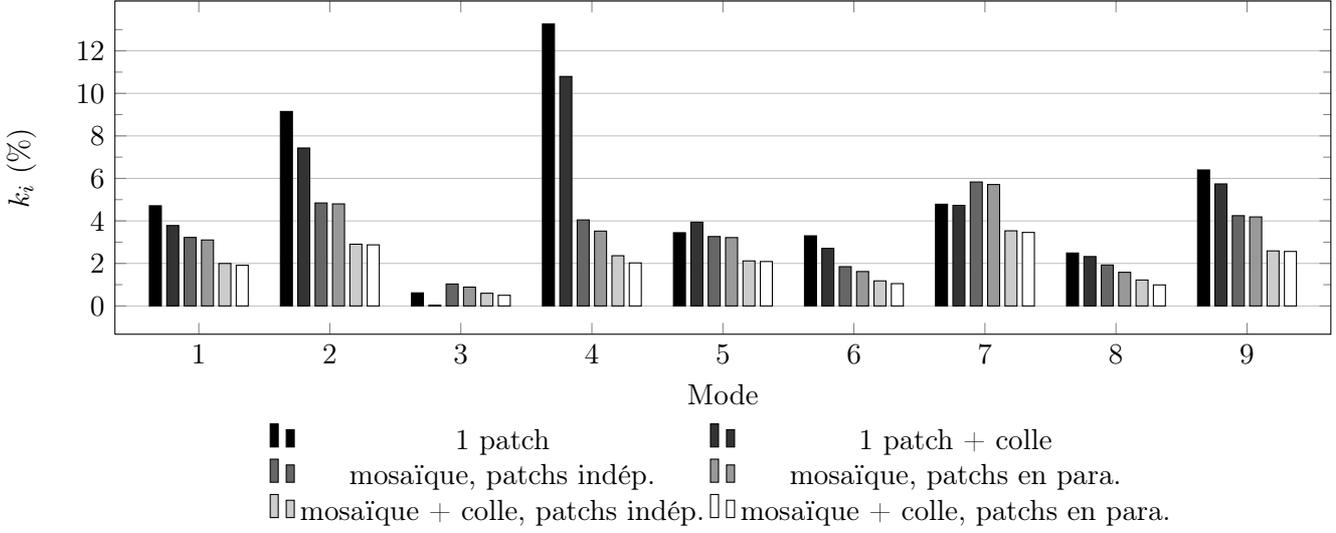


FIG. 5.38 – Aube en conditions encastrée-libre : facteurs de couplage modaux pour l'aube munie d'un seul patch ou d'une mosaïque, avec ou sans la couche d'adhésif et avec les patches non connectés ou en parallèle dans le cas de la mosaïque.

$\Delta k_i / k_i$	Libre-libre			Encastrée-libre		
	moyen (%)	max. (%)	min. (%)	moyen (%)	max. (%)	min. (%)
$\mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1$	-7	42	-25	-211	12	-1802
$\mathcal{M}_5 - \mathcal{M}_3$	-11	-1	-22	-8	-1	-22
$\mathcal{M}_6 - \mathcal{M}_4$	-11	-2	-19	-9	-1	-23
$\mathcal{M}_4 - \mathcal{M}_3$	-66	-56	-75	-63	-54	-73
$\mathcal{M}_6 - \mathcal{M}_5$	-65	-57	-78	-64	-54	-77
$\mathcal{M}_6 - \mathcal{M}_1$	-200	51	-504	-173	-23	-555

TAB. 5.6 – Comparaison des variations de couplage des différents modèles éléments finis électromécanique de l'aube en condition libre-libre et encastrée-libre.

les pastilles soient connectées en parallèle se traduit par une légère baisse des  $k_i$  par rapport au cas où elles sont indépendantes les unes des autres, que le film de colle soit présent ( $\mathcal{M}_6 - \mathcal{M}_4$ ) ou non ( $\mathcal{M}_5 - \mathcal{M}_3$ ).

La valeur des  $k_i$  est divisée en moyenne par 2 entre le modèle utilisé pour le calcul de la pastille optimale ( $\mathcal{M}_1$ ) et le modèle choisi pour la comparaison avec l'expérience ( $\mathcal{M}_6$ ).

Pour apprécier simplement l'effet de la mosaïque sur la valeur des facteurs de couplage modaux, il est commode de considérer les énergies en jeu lorsque les pastilles sont en circuit ouvert ( $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ ). L'énergie cinétique  $\mathcal{E}_c^{(p)}$  et de déformation  $\hat{\mathcal{E}}_d^{(p)}$  de chaque pastille sont données par

$$\mathcal{E}_c^{(p)} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{U}}^{(p)})^T \mathbf{M}^{(p)} \dot{\mathbf{U}}^{(p)}, \quad (5.3)$$

$$\hat{\mathcal{E}}_d^{(p)} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^{(p)})^T \hat{\mathbf{K}}^{(p)} \mathbf{U}^{(p)} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^{(p)})^T \left( \mathbf{K}^{(p)} + \frac{\mathbf{K}_c^{(p)} (\mathbf{K}_c^{(p)})^T}{C^{(p)}} \right) \mathbf{U}^{(p)} = \mathcal{E}_d^{(p)} + \mathcal{E}_p^{(p)}, \quad (5.4)$$

où  $\mathbf{M}^{(p)}$ ,  $\mathbf{K}^{(p)}$ ,  $\mathbf{K}_c^{(p)}$ ,  $C^{(p)}$  et  $\mathbf{U}^{(p)}$  sont, respectivement, les matrices de masse, de raideur, de

couplage électromécanique, la capacité dans la direction normale aux électrodes et le vecteur déplacement de la pastille  $p$ .  $\mathcal{E}_d^{(p)}$  est l'énergie de déformation en court-circuit et  $\mathcal{E}_p^{(p)}$  l'énergie de couplage piézoélectrique de la pastille  $p$  et sont définies de la manière suivante

$$\mathcal{E}_d^{(p)} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^{(p)})^T \mathbf{K}^{(p)} \mathbf{U}^{(p)}, \quad (5.5)$$

$$\mathcal{E}_p^{(p)} = \frac{1}{2C^{(p)}}(\mathbf{U}^{(p)})^T \mathbf{K}_c^{(p)} (\mathbf{K}_c^{(p)})^T \mathbf{U}^{(p)}. \quad (5.6)$$

Afin d'obtenir la distribution d'énergie sur les premiers modes de la structure, le déplacement  $\mathbf{U}^{(p)}$ , qui est un sous vecteur du vecteur déplacement de la structure  $\mathbf{U}$ , peut être projeté sur la base des modes propres éléments finis du système en court-circuit puis tronqué aux  $N$  premiers modes,

$$\mathbf{U}^{(p)} = \sum_{i=1}^N \Phi_i^{(p)} q_i, \text{ avec } \Phi_i^{(p)} = \Phi_{i|\text{ddl} \in p}, \quad (5.7)$$

en notant  $\Phi_{i|\text{ddl} \in p}$  la restriction du mode propre en court-circuit de la structure  $\Phi_i$  aux degrés de liberté de la pastille  $p$ .  $\mathcal{E}_d^{(p)}$  se réécrit alors

$$\mathcal{E}_d^{(p)} = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_{d,i}^{(p)}, \quad (5.8)$$

$$\mathcal{E}_{d,i}^{(p)} = \frac{1}{2}(\Phi_i^{(p)})^T \mathbf{K}^{(p)} \Phi_i^{(p)} q_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\Phi_i^{(p)})^T \mathbf{K}^{(p)} \Phi_j^{(p)} q_i q_j. \quad (5.9)$$

$\mathcal{E}_{d,i}^{(p)}$  est l'énergie de déformation modale du mode  $i$  pour la pastille  $p$ . La formulation est équivalente pour  $\mathcal{E}_c^{(p)}$  et  $\mathcal{E}_p^{(p)}$ .

La bande de fréquence contenant les 9 premiers modes de la structure présente une densité modale moyenne faible, de l'ordre de 7 ms<sup>12</sup> et les modes sont très peu amortis. Par conséquent, lorsque l'aube est soumise à un forçage harmonique dont la fréquence correspond à une fréquence de résonance, la majeure partie de l'énergie est localisée sur le mode excité et le couplage avec les autres modes est négligeable. Ainsi, à la résonance du mode  $i$ , et dans ce cas seulement,  $q_i^2 \gg q_i q_j \forall i \in [1, N], \forall j \in [1, N] \setminus \{i\}$ , ce qui permet d'établir l'approximation suivante,

$$\mathcal{E}_{d,i}^{(p)} \simeq \frac{1}{2}(\Phi_i^{(p)})^T \mathbf{K}^{(p)} \Phi_i^{(p)} q_i^2. \quad (5.10)$$

L'énergie de déformation des  $P$  pastilles pour le mode  $i$ , notée  $\mathcal{E}_{d,i}^P$  est la somme des énergies de déformation de chaque pastille pour ce même mode, d'où

$$\mathcal{E}_{d,i}^P = \sum_{p=1}^P \mathcal{E}_{d,i}^{(p)} \simeq \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P (\Phi_i^{(p)})^T \mathbf{K}^{(p)} \Phi_i^{(p)} q_i^2. \quad (5.11)$$

De la même manière, l'énergie cinétique modale  $\mathcal{E}_{c,i}^P$  et l'énergie de couplage piézoélectrique

<sup>12</sup>La densité modale  $d$  est définie par  $d = \frac{N}{\Delta f}$  et s'exprime en seconde.

modale  $\mathcal{E}_{p,i}^P$  des  $P$  pastilles s'écrivent

$$\mathcal{E}_{c,i}^P \simeq \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P (\Phi_i^{(p)})^T M^{(p)} \Phi_i^{(p)} \dot{q}_i^2, \quad (5.12)$$

$$\mathcal{E}_{p,i}^P \simeq \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P (\Phi_i^{(p)})^T \frac{\mathbf{K}_c^{(p)} (\mathbf{K}_c^{(p)})^T}{C^{(p)}} \Phi_i^{(p)} q_i^2 = \frac{1}{2} \Phi_i^T \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T \Phi_i q_i^2. \quad (5.13)$$

Pour la structure complète, constituée de l'aube et des pastilles, il est également possible de distinguer pour chaque mode :

- l'énergie cinétique modale  $\mathcal{E}_{c,i} = \dot{q}_i^2$ ,
- l'énergie de déformation modale en circuit ouvert  $\hat{\mathcal{E}}_{d,i} = \hat{\omega}_i^2 q_i^2$ ,
- l'énergie de déformation modale en court-circuit  $\mathcal{E}_{d,i} = \omega_i^2 q_i^2$ ,
- l'énergie de couplage piézoélectrique modale  $\mathcal{E}_{p,i} = \mathcal{E}_{p,i}^P$  puisque chaque colonne  $p$  de la matrice de couplage  $\mathbf{K}_c$  est constituée de 0 sauf pour les degrés de liberté appartenant à la pastille  $p$ .

Les rapports des énergies modales des  $P$  pastilles sur celles de la structure sont alors données par

$$\hat{\eta}_{d,i} = \frac{\hat{\mathcal{E}}_{d,i}^P}{\hat{\mathcal{E}}_{d,i}} = \frac{1}{\hat{\omega}_i^2} \sum_{p=1}^P (\Phi_i^{(p)})^T \hat{\mathbf{K}}^{(p)} \Phi_i^{(p)}, \quad (5.14)$$

$$\eta_{d,i} = \frac{\mathcal{E}_{d,i}^P}{\mathcal{E}_{d,i}} = \frac{1}{\omega_i^2} \sum_{p=1}^P (\Phi_i^{(p)})^T \mathbf{K}^{(p)} \Phi_i^{(p)}, \quad (5.15)$$

$$\eta_{c,i} = \frac{\mathcal{E}_{c,i}^P}{\mathcal{E}_{c,i}} = \sum_{p=1}^P (\Phi_i^{(p)})^T M^{(p)} \Phi_i^{(p)}, \quad (5.16)$$

$$\eta_{p,i} = \frac{\mathcal{E}_{p,i}^P}{\mathcal{E}_{d,i}} = \frac{1}{\omega_i^2} \Phi_i^T \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T \Phi_i = k_i^2. \quad (5.17)$$

La figure 5.39 compare les différentes énergies pour les 9 premiers modes de l'aube en condition libre-libre dans le cas d'une aube munie d'une seule pastille et dans le cas d'une mosaïque de taille équivalente constituée de 15 pastilles élémentaires. Différentes remarques peuvent être faites :

- l'énergie de déformation des 15 pastilles de la mosaïque varie de 1.3 à 8.9% de l'énergie de déformation de la structure bien qu'elle ne représente que 4.8% de la masse de l'aube. Elle varie 1.3 à 18.7% dans le cas d'une seule pastille ;
- l'énergie de couplage piézoélectrique ne représente au mieux, dans le cas de la mosaïque, que 0.3% de l'énergie de déformation de la structure et 1.3% dans le cas d'une seule pastille ;
- pour les modes 4 et 5, l'énergie de déformation (en cc ou co) de la mosaïque est inférieure à celle d'une seule pastille alors que c'est l'inverse pour l'énergie de couplage piézoélectrique ;
- pour le mode 7, c'est le contraire. L'énergie de déformation (en cc ou co) de la mosaïque est bien supérieure à celle d'une seule pastille mais c'est dans le cas de cette dernière que l'énergie de couplage piézoélectrique est la plus importante.

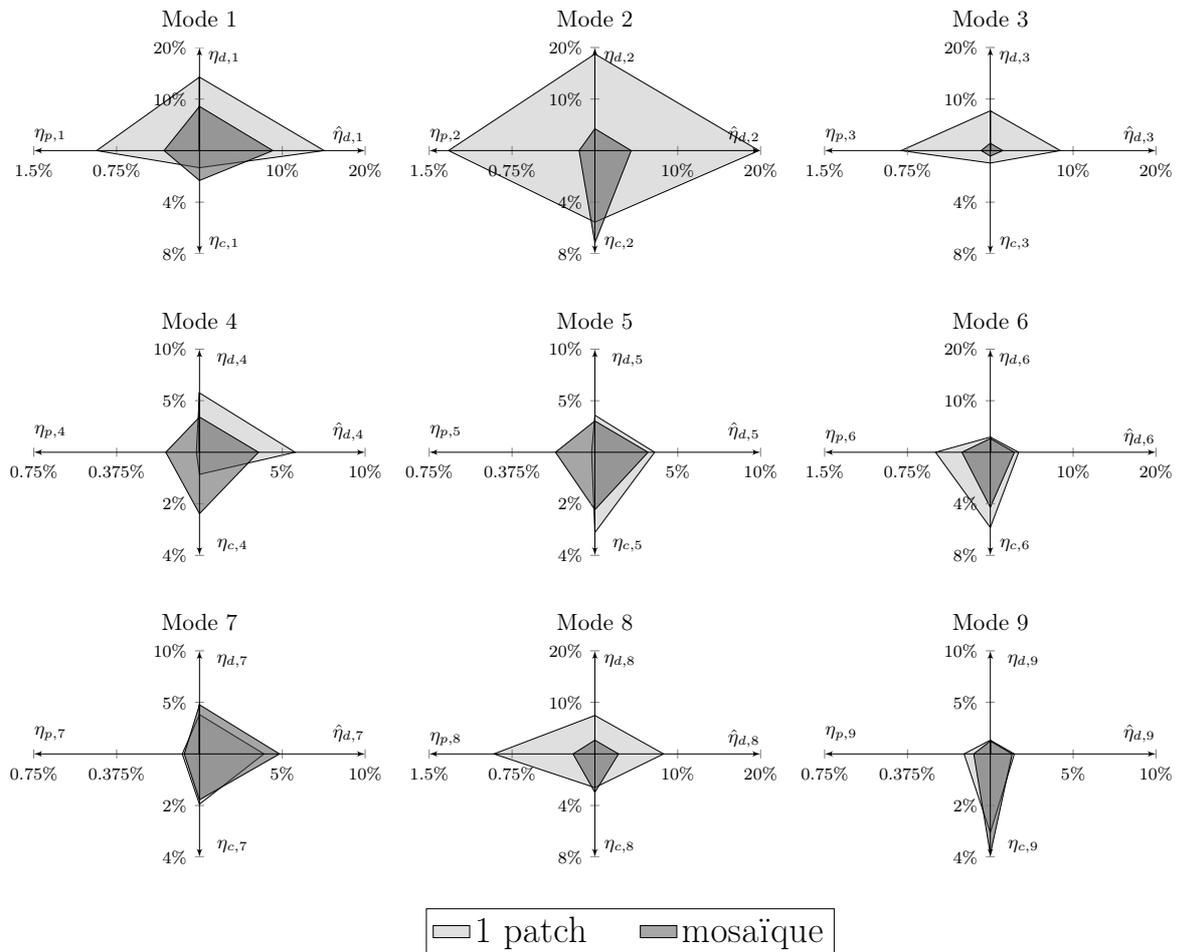


FIG. 5.39 – Comparaisons de  $\eta_{d,i}$ ,  $\hat{\eta}_{d,i}$ ,  $\eta_{c,i}$  et  $\eta_{p,i}$  dans le cas d'une seule pastille de dimension  $100\text{ mm} \times 60\text{ mm} \times 5\text{ mm}$  et dans le cas d'une mosaïque, de dimension équivalente, constituée de 15 pastilles de  $20\text{ mm} \times 20\text{ mm} \times 5\text{ mm}$ . Pour la mosaïque, le calcul de  $\hat{\eta}_{d,i}$  et  $\eta_{p,i}$  se fait en considérant que chacune des 15 pastilles est en circuit ouvert. L'aube est en condition libre-libre et le film de colle n'est pas pris en compte dans le modèle.

Pour les modes 1, 2, 3, 6, 7 et 8 le passage d'une pastille à une mosaïque se traduit par une diminution de l'énergie de couplage piézoélectrique et donc à une perte de couplage. L'inverse est constaté pour les modes 4 et 5. Les mêmes observations peuvent être faites pour les modes 3 et 7 de la configuration encastrée-libre (Fig. 5.38).

Par ailleurs, lors de la recherche de la position optimale de la pastille sur l'intrados de l'aube, qui maximise le facteur de couplage modal pour le mode ciblé (section 5.2.3(c)), il a été constaté que celle-ci n'était pas localisée dans la zone du maximum de déformation de l'aube nue (Fig. 5.22). La masse et la raideur ajoutées par la pastille modifiant la répartition des déformations dans l'aube, il n'est pas possible de connaître, *a priori*, la ou les positions optimales à partir d'un calcul des modes propres de l'aube nue. Cependant, il existe une liaison linéaire entre déformation de la pastille et couplage électromécanique, comme l'atteste la figure 5.40, qui permet de voir la répartition de l'énergie de déformation modale et de l'énergie de couplage piézoélectrique par pastille pour le mode 1 de la configuration libre-libre sans prise en compte de la colle dans le modèle.

Dans le tableau 5.7 sont regroupés les coefficients de corrélation linéaire<sup>13</sup> entre  $\mathcal{E}_{d,1}^{(p)}/\mathcal{E}_{d,1}^P$  et  $\mathcal{E}_{p,1}^{(p)}/\mathcal{E}_{p,1}^P$  pour chacun des modes ainsi que pour les deux configurations étudiées. Pour les modes 4, 6 et 7 de la configuration libre-libre et 3, 8 et 9 de la configuration encastrée-libre, il n'existe aucune liaison de type linéaire, mais cela n'exclue pas l'existence de liaisons d'un autre type, quadratique par exemple. Pour les modes 2 et 5 de la configuration encastrée-libre, le lien de dépendance est douteux. Pour tous les autres modes, il existe une relation linéaire.

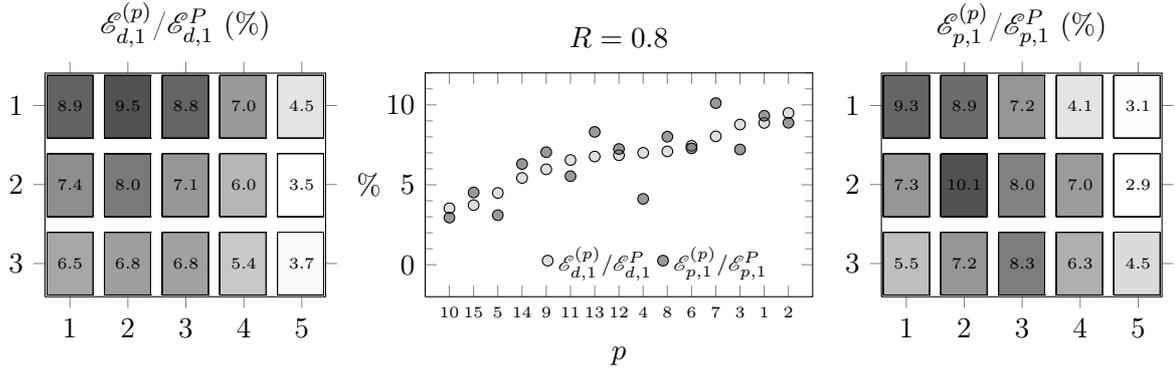


FIG. 5.40 – Répartition de l'énergie de déformation modale et de l'énergie de couplage piézoélectrique par pastille pour le mode 1 de la configuration libre-libre et calcul du coefficient de corrélation linéaire  $R$  entre  $\mathcal{E}_{d,1}^{(p)}/\mathcal{E}_{d,1}^P$  et  $\mathcal{E}_{p,1}^{(p)}/\mathcal{E}_{p,1}^P$ . Le film de colle n'est pas pris en compte.

Le principal intérêt des calculs précédents est de pouvoir évaluer les différentes quantités d'énergies mises en jeu, ainsi que leur évolution, pour les différents modes de vibration de la structure ainsi que pour les deux types de pastilles : monobloc ou mosaïque. De plus, ils permettent de mettre au jour une éventuelle corrélation entre l'énergie de déformation et l'énergie de couplage piézoélectrique, mais ce n'est pas toujours le cas, comme cela a été montré pour certains modes.

<sup>13</sup>Le coefficient de corrélation linéaire  $R$  entre deux échantillons  $u$  et  $v$  de taille  $n$  et de moyennes  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  est défini par

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2}}.$$

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R, libre-libre	0.80	0.93	0.94	-0.12	0.95	0.37	0.19	0.95	0.85
R, encastrée-libre	0.94	0.67	0.48	0.96	0.66	0.89	0.84	0.20	0.19

TAB. 5.7 – Calcul du coefficient de corrélation linéaire entre  $\mathcal{E}_{d,i}^{(p)}/\mathcal{E}_{d,i}^P$  et  $\mathcal{E}_{p,i}^{(p)}/\mathcal{E}_{p,i}^P$  pour les 9 premiers modes de la structure en condition libre-libre et encastrée-libre. Le film de colle n'est pas pris en compte.

## 5.3 Expériences

L'objectif est d'amortir les vibrations, en régime forcé, d'une aube fan de CFM56-7b en condition aux limites libre-libre et encastrée-libre, en utilisant une mosaïque de 15 pastilles piézoélectriques connectées en parallèle et collées sur celle-ci. Deux cas sont traités. Le premier où les pastilles sont court-circuitées par un circuit purement résistif (shunt résistif) et le second, qui consiste à choisir comme shunt une résistance électrique associée à une inductance afin de former avec les pastilles un circuit résonant.

Les résultats issus de la modélisation du problème électromécanique par un modèle éléments finis 3D, qui prend en compte la couche d'adhésif, sont comparés à ceux issus de l'expérience. L'accord entre les résultats numériques et expérimentaux permettant de valider le modèle.

La dernière partie porte sur l'utilisation d'un shunt à commutation de type SSDI comme moyen de contrôle vibratoire de l'aube en régime forcé sinusoïdale. Les performances, les avantages et les inconvénients de ce dispositif sont mises en évidence expérimentalement et comparés à ceux des shunts linéaires. L'objectif est de savoir si le *switch* SSDI constitue une perspective de développement intéressante pour l'atténuation des vibrations d'une aube fan. L'aspect modélisation n'est pas abordé.

### 5.3.1 Dispositif expérimental et protocole de mesure

La mesure à réaliser sur l'aube fan est la fonction de réponse en fréquence vitesse/effort. Un générateur de signaux crée un signal en tension et un amplificateur de puissance asservi en courant envoie dans la bobine un courant proportionnel à ce signal. Le courant est mesuré au sein de l'amplificateur et disponible pour la mesure. L'hypothèse est faite que l'effort sur la structure est proportionnel au courant dans la bobine [131].

Le dispositif présenté figure 5.3 est utilisé pour acquérir les déformées opérationnelles de l'aube, à partir desquelles seront identifiés les paramètres modaux et notamment les amortissements, ainsi que les fonctions de réponse en fréquence (FRF) vitesse sur effort. Ces mesures sont réalisées sur l'aube en conditions libre-libre et encastrée-libre, d'abord en court-circuit (CC) puis en circuit ouvert (CO). Ensuite, les shunts sont réglés pour les premiers modes de la structure. Le protocole de réglage des shunts est le suivant :

- shunt R :
  - le potentiomètre est réglé à la valeur théorique de la résistance, donnée par la relation du tableau 2.8, puis la FRF est observée à l'analyseur de spectre ;
  - la valeur de R qui minimise l'amplitude du mode ciblé est recherchée en ajustant manuellement le potentiomètre puis en observant la FRF à l'analyseur de spectre. La valeur optimale du paramètre électrique peut différer de la valeur théorique ;
  - l'acquisition de la mesure est faite à l'ordinateur.

- shunt RL :

- l'inductance est d'abord réglée à la valeur d'accord prévue pour le mode visé (Tab. 2.9) et la résistance additionnelle laissée à zéro. La résonance du shunt, qui correspond à une antirésonance, est observée sur la FRF. La valeur de l'inductance est ensuite ajustée pour amener l'antirésonance sur le mode ciblé ;

- de la même façon, la partie résistive du shunt résonant est réglée, dans un premier temps, à sa valeur théorique (Tab. 2.9), puis ajustée manuellement en observant la FRF à l'analyseur ;

- l'acquisition est faite à l'ordinateur et les valeurs de l'inductance et de la résistance sont relevées au multimètre.

Les réglages des appareils de la chaîne de mesure sont donnés dans le tableau 5.8 et sont figés pour la durée de l'expérience. Ces informations permettent de reproduire exactement les mesures et sont nécessaires pour la comparaison avec les simulations numériques.

Les FRF en circuit fermé et ouvert permettent de déterminer le facteur de couplage effectif pour chacun des modes. L'erreur relative commise sur les  $k_{\text{eff},i}$  est donnée par

$$\frac{\Delta k_{\text{eff},i}}{k_{\text{eff},i}} = \frac{\hat{f}_i \Delta \hat{f}_i - f_i \Delta f_i}{\hat{f}_i^2 - f_i^2} + \frac{\Delta f_i}{f_i} \simeq \frac{\hat{f}_i \Delta \hat{f}_i - f_i \Delta f_i}{\hat{f}_i^2 - f_i^2} \quad (5.18)$$

Sachant que la précision fréquentielle lors des mesures est  $\Delta f_i = 7.81$  mHz, il est possible de connaître l'erreur relative sur les  $k_{\text{eff},i}$ . L'erreur minimum correspond au cas où  $\Delta \hat{f}_i = \Delta f_i$ , alors  $\Delta k_{\text{eff},i}/k_{\text{eff},i} = \Delta f_i/(\hat{f}_i + f_i) \simeq 0$ . Si  $\Delta \hat{f}_i = -\Delta f_i$ , il vient  $\Delta k_{\text{eff},i}/k_{\text{eff},i} = \Delta f_i/(\hat{f}_i - f_i)$ , qui est l'erreur maximum commise. Cette dernière est reportée dans les tableaux de résultats 5.10 et 5.11.

Comme expliqué dans la partie 2.2.1 (a), c'est la permittivité électrique à déformation constante  $\epsilon_{33}^\sigma$  qui a été choisie pour le calcul des capacités des pastilles. Puisque le démonstrateur expérimental a été réalisé, il est maintenant possible de vérifier que ce choix est justifié. La mesure au multimètre de la capacité équivalente des 15 pastilles collées et connectées en parallèle est comparée à celle issue du calcul éléments finis (Tab. 5.9).

### 5.3.2 Réalisation des shunts

#### (a) Shunt résistif

La partie résistive du shunt est réglée à l'aide d'un boîtier de potentiomètres de  $100 \Omega$  à  $10 \text{ M}\Omega$ .

#### (b) Shunt résonant

Les valeurs d'inductance prévues sont élevées et nécessitent le recours à une inductance synthétique réalisée sur la base d'amplificateurs opérationnels (AOP). L'alimentation électrique des AOP fait que le shunt RL appartient à la catégorie des dispositifs de contrôle vibratoire semi-passif. Cependant aucune énergie n'est injectée dans la structure et le shunt reste inconditionnellement stable. Le circuit utilisé est un inducteur synthétique d'Antoniu (Fig. 5.41). Les amplificateurs opérationnels sont des OPA445AP qui peuvent être alimentés avec des tensions élevées évitant ainsi la saturation dès l'apparition de petites amplitudes de vibration. Une alimentation régulée Hewlett-Packard E3620A alimente les deux composants en  $\pm 30 \text{ V}$ .

Analyse modale	FRF monopoint	
Générateur de signaux	Bruel & Kjør	1051
bruit blanc	2 Hz - 2 kHz	1 V
sinus balayé	$f_i \pm 50$ Hz	0.1 V
calibre	$0.1 \text{ V.A}^{-1}$	
Logiciel d'acquisition	M+P	SmartOffice
plage de mesure	20 Hz - 1.3 kHz	
échantillonnage	7.81 mHz	
recouvrement	75%	
moyennage	30 blocs de mesure	
fenêtrage	Hanning	
temps moyen de mesure	$\simeq 20$ min	
Déformées opérationnelles	FRF multipoint	
Générateur de signaux	Polytec	PSV
<i>periodic chirp</i>	0 Hz - 2 kHz	
Logiciel d'acquisition	Polytec	PSV
nombre de points	209	
plage de mesure	0 Hz - 1.6 kHz	
échantillonnage	0.1 Hz	
recouvrement	75 %	
moyennage	30 blocs de mesure	
fenêtrage	Rectangulaire	
temps moyen de mesure	$\simeq 90$ min	
Identification modale	ST Femto	Modan
méthode	LSCF	
Amplificateur de puissance	Bruel & Kjør	2719
courant	0.6 A	
tension	6.7 V	
Vibromètre laser	Polytec	OFV 056/OFV 3001 S
calibre	$10 \text{ mm.s}^{-1}.\text{V}^{-1}$	

TAB. 5.8 – *Tableau récapitulatif des réglages retenus pour les mesures expérimentales*

	mesurée	éléments finis
Capacité (nF)	$25.8 \pm 0.1$	trace( $\mathbf{K}_e$ )=26.4

TAB. 5.9 – *Valeurs expérimentale et numérique de la capacité équivalente des 15 pastilles piézoélectriques connectées en parallèle.*

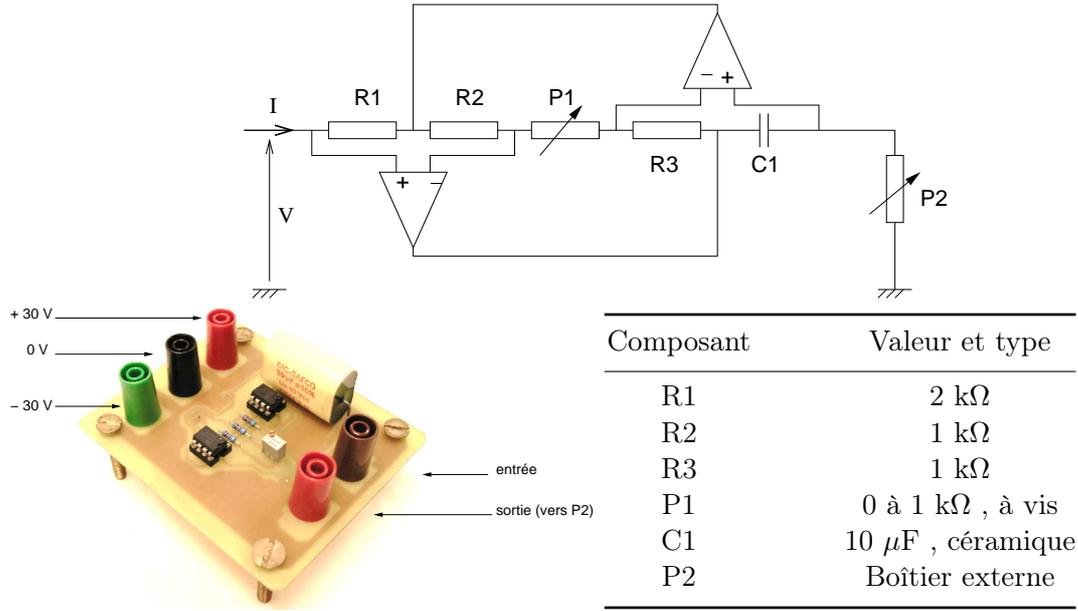


FIG. 5.41 – Schéma, photographie et composants de l'inducteur synthétique utilisé.

L'impédance d'entrée de ce système en régime harmonique, tous les composants étant supposés idéaux, est équivalente à une inductance et une résistance négative :

$$Z_{\text{eq}} = \frac{V}{I} = jC\omega P_2 R_3 \frac{R_1}{R_2} - P_1 \frac{R_1}{R_2} = jL_{\text{eq}} + R_{\text{eq}}, \quad (5.19)$$

avec  $L_{\text{eq}} = C\omega P_2 R_3 \frac{R_1}{R_2} = \alpha P_2$  et  $R_{\text{eq}} = -P_1 \frac{R_1}{R_2}$ . L'inductance est proportionnelle à  $P_2$  avec une constante  $\alpha$  égale à 20 H.kΩ<sup>-1</sup>. Il faut d'abord régler  $P_1$  afin de compenser une éventuelle résistance parasite du circuit, puis régler  $P_2$  afin d'obtenir l'inductance désirée. Pour la résistance  $P_2$ , un boîtier externe de potentiomètres de 100 Ω à 10 MΩ est utilisé. Ce circuit a été fabriqué et validé par [46] et est réutilisé tel quel.

### 5.3.3 Résultats

Dans cette section, les résultats expérimentaux sont comparés avec ceux issus du modèle réduit. Le facteur de couplage modal de  $P$  pastilles connectées en parallèle, noté  $k_i$  (Eq. (2.87)), qui dépend des coefficients matériaux, du mode et n'est pas mesurable directement, est comparé au facteur de couplage effectif  $k_{\text{eff},i}$ , calculé par différence des fréquences expérimentales en circuit ouvert et court-circuit. La projection du modèle éléments finis sur la base des 10 premiers modes propres de l'aube en court-circuit, ainsi que l'identification des amortissements modaux correspondants, permet d'obtenir un modèle réduit avec la charge comme onzième ddl lorsqu'un shunt R ou RL est connecté. À partir de ce modèle, la FRF déplacement/effort au point d'excitation du système est reconstruite et est comparée à celle issue de l'expérience. Enfin, les réductions d'amplitude obtenues expérimentalement pour les shunts R et RL sont également comparées à celles prédites par le modèle réduit.

(a) Aube avec conditions aux limites libre-libre

Le tableau 5.10 regroupe l'ensemble des résultats pour l'aube en condition libre-libre. La figure 5.42 représente la FRF expérimentale de la structure en circuit ouvert illustrée par ses déformées opérationnelles aux pics de résonance. Enfin, les figures 5.44, 5.45 et 5.46 permettent de comparer les FRF expérimentales et numériques de la structure en court-circuit, circuit ouvert, connectée à un shunt R et à un shunt RL, sur une bande de fréquence centrée autour des trois premiers modes. Les résultats expérimentaux concordent avec ceux issus du modèle éléments finis projeté sur les 10 premiers modes propres en court-circuit.

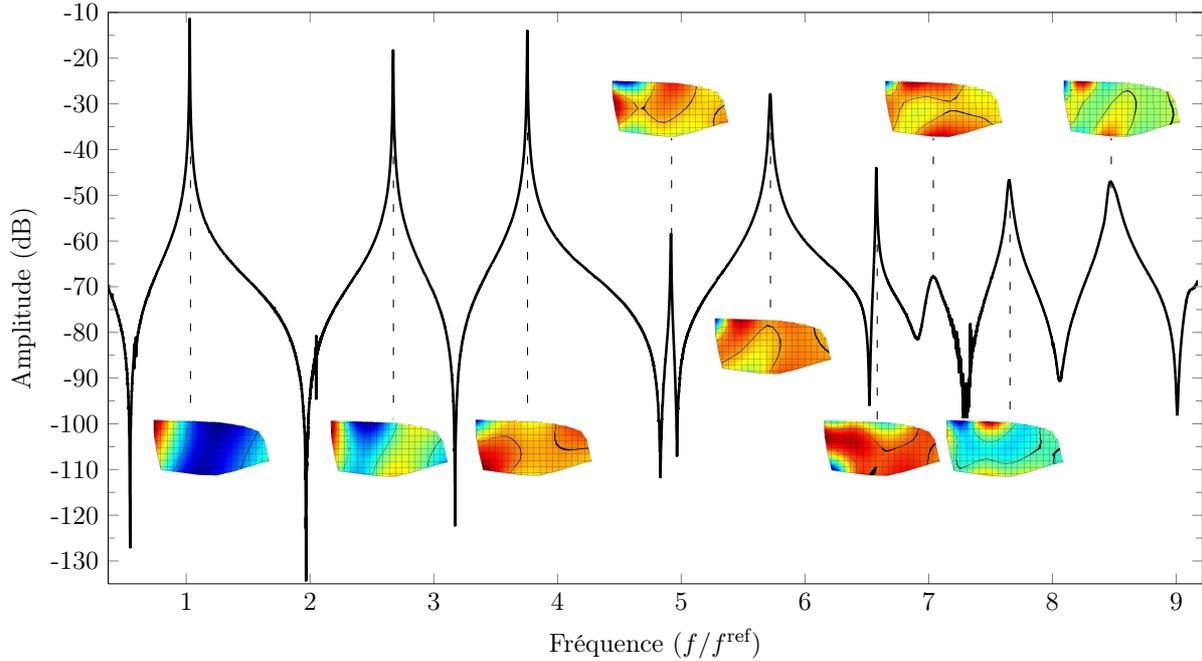


FIG. 5.42 – Fonction de réponse en fréquence expérimentale en circuit ouvert de l'aube en conditions libre-libre et déformées opérationnelles aux pics de résonance.

Plusieurs remarques peuvent être tirées du tableau 5.10.

- L'erreur relative sur les  $k_{\text{eff}}$  est importante en basse fréquence lorsque le couplage est faible. Bien que le pas fréquentiel, de l'ordre de 7 mHz, soit fin, l'erreur relative sur les  $k_{\text{eff}}$  pour les 3 premiers modes est de 10%. Dit autrement, il est plus aisé de mesurer des couplages faibles en moyenne fréquence ;
- Les deux seuls paramètres qui pilotent le niveau d'atténuation sont le couplage et l'amortissement modal. Un mode faiblement couplé et peu amorti, comme le mode 3, affiche des performances équivalentes au mode 1 dont le couplage et l'amortissement sont plus importants.
- Pour le shunt R, les valeurs expérimentales et théoriques de la résistance concordent et l'atténuation apportée est faible. L'atténuation maximum est de -3.7 dB pour le mode 6, soit une diminution de l'amplitude des vibrations de  $1 - 10^{-3.7/20} = 34\%$ , et le minimum est de -1.75 dB pour le mode 3, soit une diminution de l'amplitude des vibrations de 18% ;
- Pour le shunt RL, les valeurs expérimentales et théoriques de l'inductance concordent mais pas celles de la résistance. L'atténuation maximum est de -28.9 dB pour le mode

mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\xi_i$ ( $10^{-4}$ )	7.3	5.6	3.2	3.8	11.7	3.9	65.6	20.2	28.0
$f_{th}/f^{ref}$ (%)	103.862	268.843	392.269	492.622	608.869	652.615	774.755	878.525	927.241
$\hat{f}_{th}/f^{ref}$ (%)	103.920	268.891	392.314	492.769	609.033	652.898	774.823	878.743	927.338
$k_i$ (%)	3.37	1.90	1.52	2.44	2.33	2.94	1.33	2.23	1.44
$f_{exp.}/f^{ref}$ (%)	102.629	267.902	376.835	493.484	574.207	660.282	706.633	768.065	850.456
$\hat{f}_{exp.}/f^{ref}$ (%)	102.687	267.959	376.893	493.658	574.379	660.570	706.633	768.180	850.456
$k_{eff}$ (%)	3.35	2.07	1.75	2.65	2.45	2.95	0	1.73	0
$\Delta k_{eff}/k_{eff}$ (%)	10.0	10.0	10.0	3.3	3.3	2	∅	5.0	∅
Shunt R									
$R_{th}$ (k $\Omega$ )	44.3	17.0	12.0	9.2	7.9	6.9	6.4	5.9	5.3
$R_{exp}$ (k $\Omega$ )	43.6	16.7	12.0	8.0	7.7	6.5	∅	∅	∅
$A_{th}$ (dB)	-2.8	-1.2	-1.4	-2.9	-1.0	-3.7	0	-0.3	0
$A_{exp}$ (dB)	-2.9	-2.1	-1.0	-3.1	-1.2	-3.7	0	0	0
Shunt RL									
$R_{th}$ ( $\Omega$ )	1815.1	430.5	258.1	298.8	237.6	249.1	0	125.4	0
$L_{th}$ (H)	50.57	7.43	3.75	2.19	1.62	1.22	0	0.90	0
$R_{exp}$ ( $\Omega$ )	1362.0	286.4	58.9	211.5	158.8	194.7	∅	20.0	∅
$L_{exp}$ (H)	48.86	7.23	3.64	2.03	1.59	0.98	∅	0.81	∅
$A_{th}$ (dB)	-24.6	-22.2	-24.8	-27.3	-17.3	-25.0	0	-13.3	0
$A_{exp}$ (dB)	-24.2	-24.0	-23.4	-28.9	-17.4	-25.0	0	-6.4	0

TAB. 5.10 – Aube en conditions libre-libre : fréquences propres, coefficients de couplages, paramètres électriques des shunts R et RL et atténuations apportées par les dispositifs.

4, soit une diminution de l'amplitude des vibrations de 96%, et le minimum est de -6.4 dB pour le mode 8, soit une diminution de 52%.

Il existe plusieurs hypothèses pour lesquelles la valeur expérimentale de la résistance du shunt RL pourrait différer de la valeur théorique :

- le calcul des valeurs optimales des paramètres électriques n'est valable que pour un système tronqué à un mode ;
- l'inductance synthétique comporte une résistance interne qui, connectée en série avec la résistance du circuit RLC, oblige à régler la valeur de cette dernière en deçà, ou au-delà, de la valeur théorique ;
- l'erreur commise sur la mesure de la valeur du couplage effectif ainsi que sur les autres paramètres rentrant dans le calcul de la résistance théorique aboutit à une valeur erronée de cette dernière ;
- les faibles valeurs de couplage rendent le calcul de la résistance théorique moins fiable.

Les 3 premières hypothèses ne fournissent pas d'explication satisfaisante, en effet :

- les modes de l'aube sont découplés ;
- la résistance interne de l'inductance synthétique est de l'ordre de  $10 \Omega^{14}$ , ce qui s'avère être une valeur trop faible pour fausser le calcul de la résistance optimale, comparée aux valeurs expérimentales bien plus grandes de cette dernière ;

<sup>14</sup>la mesure a été effectuée avec l'inductance synthétique sous tension et connectée aux pastilles piézoélectriques, mais sans excitation de la structure. La mesure, *in situ*, directement à l'ohmmètre de la résistance interne, qui donne une valeur aux alentours de  $10 \Omega$ , est probablement fautive car elle perturbe le fonctionnement de l'inductance.

- le calcul de l'erreur relative sur la valeur de la résistance optimale est la suivante

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta k_{\text{eff},i}}{k_{\text{eff},i}} + \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta \hat{f}_i}{\hat{f}_i} \quad (5.20)$$

avec  $k_{\text{eff},i}$  le facteur de couplage effectif avec le  $i$ -ième mode,  $C$  la capacité des pastilles connectées en parallèle et  $\hat{f}_i$  la fréquence du  $i$ -ième mode en circuit ouvert. Pour le premier mode, par exemple, l'erreur relative sur le facteur de couplage effectif est de 10%, ce qui donne, en sachant que  $\Delta C = 0.1$  nF et  $\Delta \hat{f}_i = 7.28$  mHz,  $\Delta R/R = 10.4$  %. L'erreur relative commise sur le calcul de la résistance optimale à partir des mesures du couplage effectif, de la capacité et de la fréquence en circuit ouvert dépend quasi exclusivement de l'erreur relative sur le couplage effectif, or, la différence entre la valeur théorique et expérimentale de la résistance optimale, toujours pour le mode 1F, est de 33 % (Tab. 5.10). Par conséquent, les erreurs de mesure attachées à  $k_{\text{eff}}$ ,  $C$  et  $\hat{f}_i$  ne permettent pas d'expliquer entièrement l'écart observé entre  $R_{\text{th}}$  et  $R_{\text{exp}}$ .

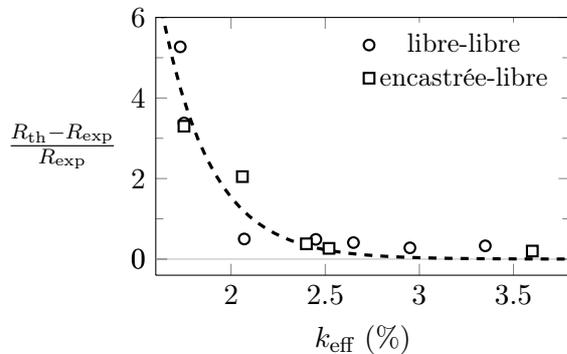


FIG. 5.43 – Erreur relative sur la résistance optimale en fonction du facteur de couplage effectif.

Comme il a été montré dans [46, 47], les atténuations apportées par un shunt R et RL, notées respectivement  $A_{\text{dB}}^R$  et  $A_{\text{dB}}^{RL}$ , ne dépendent que de 2 paramètres : le coefficient de couplage modal  $k_i$  et l'amortissement modal  $\xi_i$ . Deux remarques avaient alors été formulées par l'auteur :

- Pour un mode et un coefficient de couplage donnés, l'atténuation du pic de réponse est d'autant plus importante que l'amortissement modal en court-circuit est faible ;
- Pour un mode et un facteur d'amortissement modal donnés, l'atténuation du pic de réponse est d'autant plus importante que le coefficient de couplage est fort.

La conclusion étant que  $k_i$  est l'unique paramètre à maximiser, ce qui se comprend par le fait qu'il représente la fraction d'énergie électrique qu'il est possible de dissiper sur l'énergie totale de la structure en vibration. De là, et en tronquant le système à 1 ddl, l'auteur a pu tirer une expression analytique de  $A_{\text{dB}}^R$  et de  $A_{\text{dB}}^{RL}$  uniquement en fonction de  $k_i$  et de  $\xi_i$ .

Sur les figures 5.47(a) et 5.47(b), les résultats obtenus par le modèle éléments finis 3D projeté et par l'expérience sont superposés à ceux issus des expressions analytiques de  $A_{\text{dB}}^R$  et de  $A_{\text{dB}}^{RL}$ . Un bon accord expérimental est obtenu jusqu'à 2% de couplage. Pour des couplages inférieurs à 2%, les résultats analytiques, expérimentaux et du modèle réduit divergent les uns des autres.

<sup>15</sup>La fonction *fminsearch* de *Matlab* est utilisée pour minimiser la somme des carrés des erreurs entre les données et une fonction exponentielle pour différents paramètres  $A$  et  $\lambda$ .

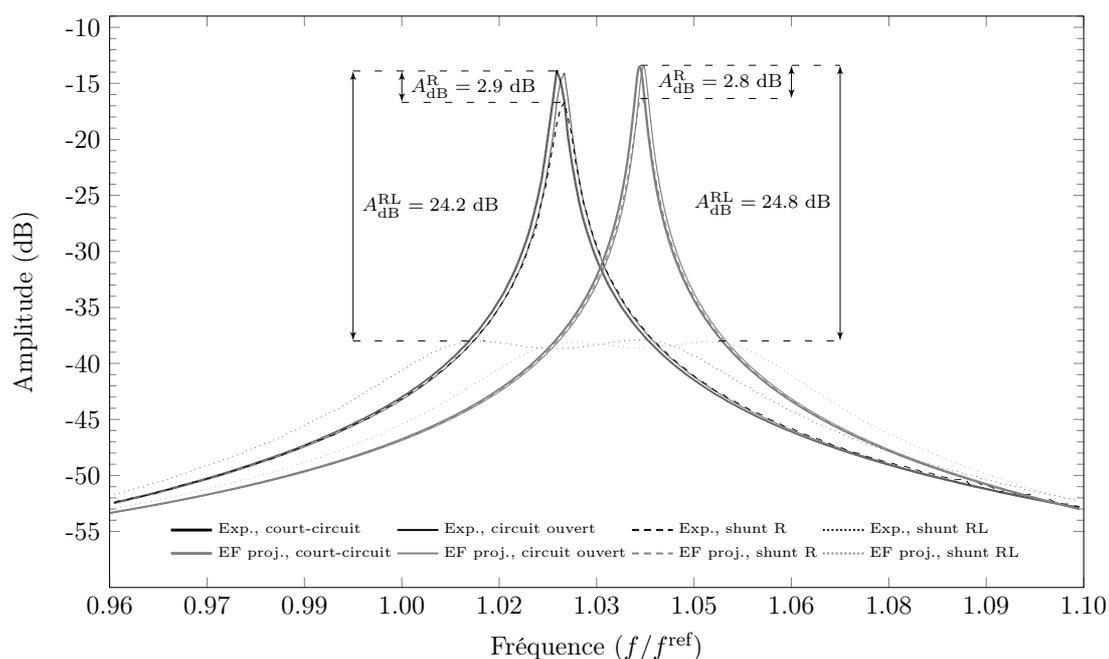


FIG. 5.44 – Fonctions de réponse en fréquence issues de l'expérience et du modèle éléments finis 3D projeté pour les configurations en court-circuit, circuit ouvert, shunt R et shunt RL. Bande de fréquence centrée sur le mode 1F.

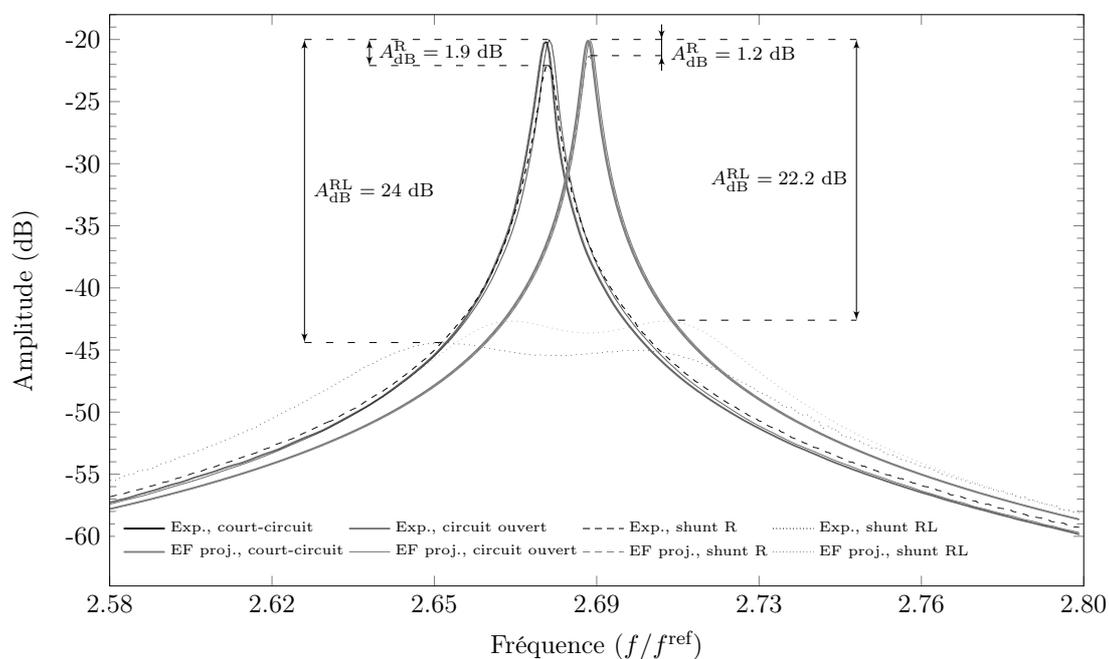


FIG. 5.45 – Fonctions de réponse en fréquence issues de l'expérience et du modèle éléments finis 3D projeté pour les configurations en court-circuit, circuit ouvert, shunt R et shunt RL. Bande de fréquence centrée sur le mode 2F.

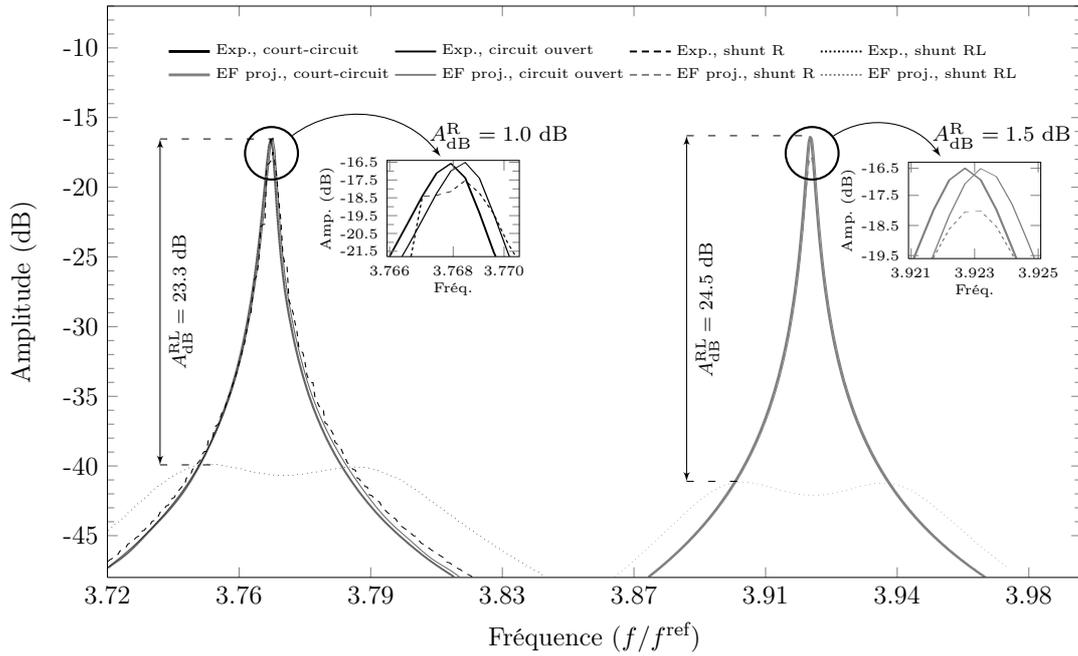


FIG. 5.46 – Fonctions de réponse en fréquence issues de l'expérience et du modèle éléments finis 3D projeté pour les configurations en court-circuit, circuit ouvert, shunt R et shunt RL. Bande de fréquence centrée sur le mode 1T.

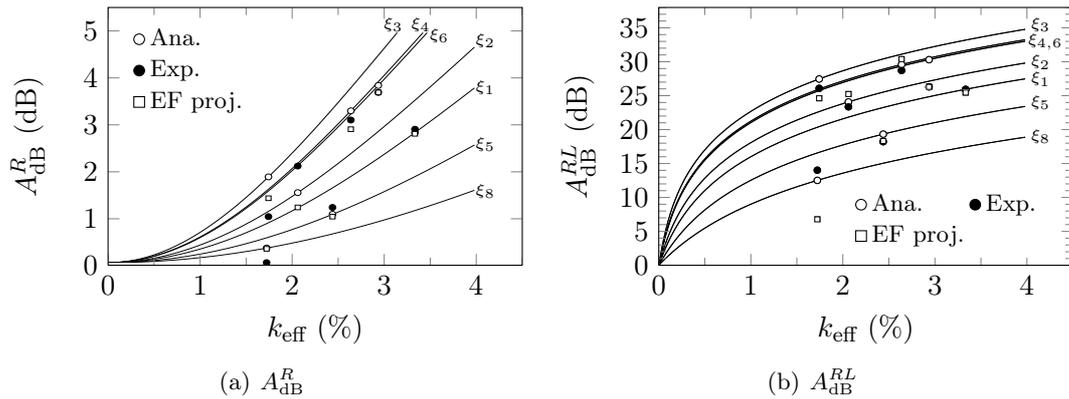


FIG. 5.47 – Atténuations des pics de réponse prévues pour un shunt R et RL, en fonction du facteur de couplage et de l'amortissement, par la formule analytique de [46](Ana.) ainsi que par le modèle éléments finis projeté (EF proj.). Comparaison avec les atténuations obtenues par l'expérience (Exp.).

La raison avancée par [46], et qui est confirmée ici, pour expliquer que les performances obtenues ne sont plus conformes aux prédictions lorsque le couplage est trop faible est qu'il est difficile de régler correctement le shunt résonant. Dans ce cas de figure, l'accord exact de la fréquence de résonance électrique sur la fréquence de résonance mécanique nécessite d'ajuster la valeur de l'inductance et de la résistance avec une grande précision difficilement atteignable. Le moindre désaccord faisant chuter le niveau de performance. Ainsi, l'atténuation prévue par le modèle est juste mais impossible à obtenir en pratique.

### (b) Aube avec conditions aux limites encastrée-libre

Le tableau 5.11 regroupe l'ensemble des résultats pour l'aube en condition encastrée-libre. La figure 5.48 représente la FRF expérimentale de la structure en circuit ouvert illustrée par ses déformées opérationnelles aux pics de résonance. Enfin, Les figures 5.49, 5.50 et 5.51 permettent de comparer les FRF expérimentales et numériques de la structure en court-circuit, circuit ouvert, connectée à un shunt R et à un shunt RL, sur une bande de fréquence centrée autour des modes 1, 2 et 7. Les résultats expérimentaux concordent avec ceux issus du modèle éléments finis projeté sur les 10 premiers modes propres en court-circuit.

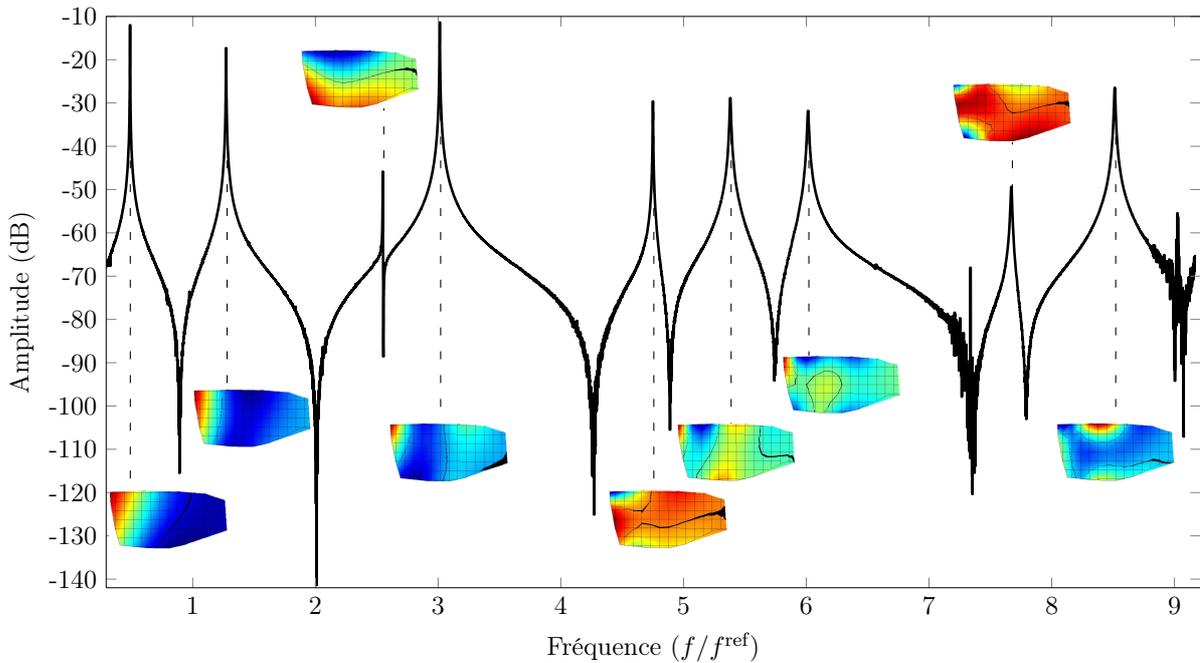


FIG. 5.48 – Fonction de réponse en fréquence expérimentale en circuit ouvert de l'aube en conditions encastrée-libre et déformées opérationnelles aux pics de résonance.

Plusieurs remarques peuvent être tirées du tableau 5.11.

- la fréquence du premier mode étant très basse et la différence de fréquence court-circuit et circuit ouvert très faible, l'erreur relative sur  $k_{\text{eff}}$  est très importante.
- Pour le shunt R, les valeurs expérimentales et théoriques de la résistance concordent et l'atténuation apportée est faible. L'atténuation maximum est de -2.2 dB pour le mode 7, soit une diminution de l'amplitude des vibrations de 22%, et le minimum est de 0 dB pour le mode 6.

mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\xi_i$ ( $10^{-4}$ )	5.9	5.6	1.6	3.2	2.7	10.3	11.7	/	6.3
$f_{th}/f^{ref}$ (%)	41.754	116.120	247.315	292.764	466.582	510.444	595.168	648.077	756.462
$\hat{f}_{th}/f^{ref}$ (%)	41.762	116.168	247.318	292.824	466.684	510.472	595.523	648.109	756.711
$k_i$ (%)	1.97	2.87	0.48	2.02	2.09	1.05	3.45	0.99	2.56
$f_{exp}/f^{ref}$ (%)	8.536	127.180	255.562	302.205	476.868	540.225	603.837	/	770.133
$\hat{f}_{exp}/f^{ref}$ (%)	48.547	127.220	255.562	302.251	476.868	540.255	604.228	/	770.355
$k_{eff}$ (%)	2.06	2.52	0.00	1.75	0.00	1.06	3.60	/	2.40
$\Delta k_{eff}/k_{eff}$ (%)	55	14	$\emptyset$	12	$\emptyset$	19	2	/	3
Shunt R									
$R_{th}$ (k $\Omega$ )	93.6	35.7	17.8	15.0	9.5	8.4	7.5	/	5.9
$R_{exp}$ (k $\Omega$ )	90.0	32.3	$\emptyset$	14.5	$\emptyset$	0.0	7.5	/	5.8
$A_{th}$ (dB)	-1.3	-2.7	$\emptyset$	-2.4	$\emptyset$	-0.2	-1.9	/	-2.1
$A_{exp}$ (dB)	-1.6	-1.6	$\emptyset$	-1.8	$\emptyset$	0.0	-2.2	/	-1.7
Shunt RL									
$R_{th}$ ( $\Omega$ )	2365.0	1105.1	0	322.9	0	109.0	331.8	/	173.5
$L_{th}$ (H)	226.26	32.95	8.16	5.84	2.34	1.83	1.46	/	0.90
$R_{exp}$ ( $\Omega$ )	776.0	872.0	$\emptyset$	75.1	$\emptyset$	$\simeq 0$	276.5	/	125.4
$L_{exp}$ (H)	208.35	31.45	$\emptyset$	5.79	$\emptyset$	1.80	1.42	/	0.86
$A_{th}$ (dB)	-21.7	-25.5	$\emptyset$	-27.2	$\emptyset$	-12.8	-20.8	/	-22.3
$A_{exp}$ (dB)	-21.1	-24.7	$\emptyset$	-23.2	$\emptyset$	-11.3	-21.2	/	-21.7

TAB. 5.11 – Aube en conditions encastrée-libre : fréquences propres, coefficients de couplages, paramètres électriques des shunts R et RL et atténuations apportées par les dispositifs.

- Pour le shunt RL, les valeurs expérimentales et théoriques de l'inductance concordent mais pas celles de la résistance. L'atténuation maximum est de -24.7 dB pour le mode 2, soit une diminution de l'amplitude des vibrations de 94%, et le minimum est de -11.3 dB pour le mode 6, soit une diminution de 73%.

### (c) Conclusions

De cette première étude sur l'implémentation des shunts résistifs et résonants sur une aube fan de CFM56-7b, il peut être affirmé que :

- les prédictions de performance des shunts R et RL sont bonnes tant que le couplage reste supérieur à 2 % ;
- une masse de matériau piézoélectrique équivalente à 4.8 % de la masse de l'aube est suffisante pour procurer de 1 à 4 dB d'atténuation avec un shunt R et de 10 à 30 dB avec un shunt RL ;
- si une pastille monobloc avait pu être réalisée, les couplages aurait été ceux des figures 5.37 et 5.38, ce qui aurait procuré des atténuations bien plus importantes ;
- les performances des shunts sont équivalentes pour les deux types de conditions aux limites ;
- une atténuation de 3 à 4 dB semble suffisante pour prévenir les instabilités dues au couplage aérodynamique [78].

Ces conclusions sont à mettre en regard de celles établies dans [46]. Dans cette thèse, la validation expérimentale portait sur une poutre encastrée-libre de 19g dont la masse de matériau piézoélectrique représentait 20.5 % de la masse de la poutre. Les prédictions restaient alors valables jusqu'à 5 % de couplage du fait d'un amortissement modal environ 10 fois

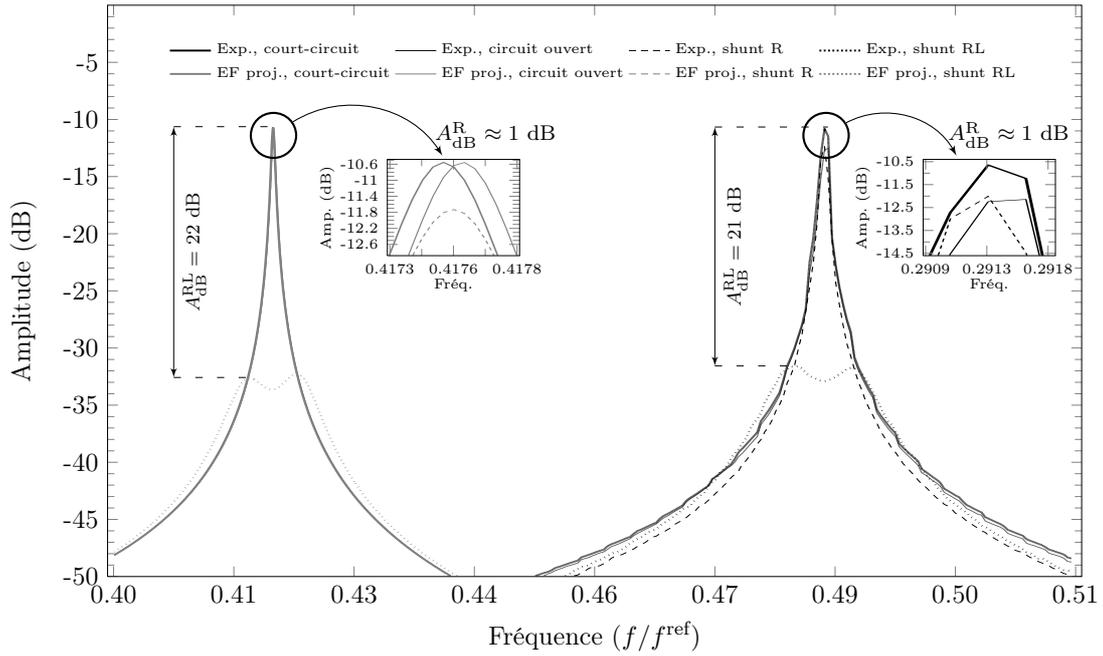


FIG. 5.49 – Fonctions de réponse en fréquence issues de l'expérience et du modèle éléments finis 3D projeté pour les configurations en court-circuit, circuit ouvert, shunt R et shunt RL. Bande de fréquence centrée sur le mode 1F.

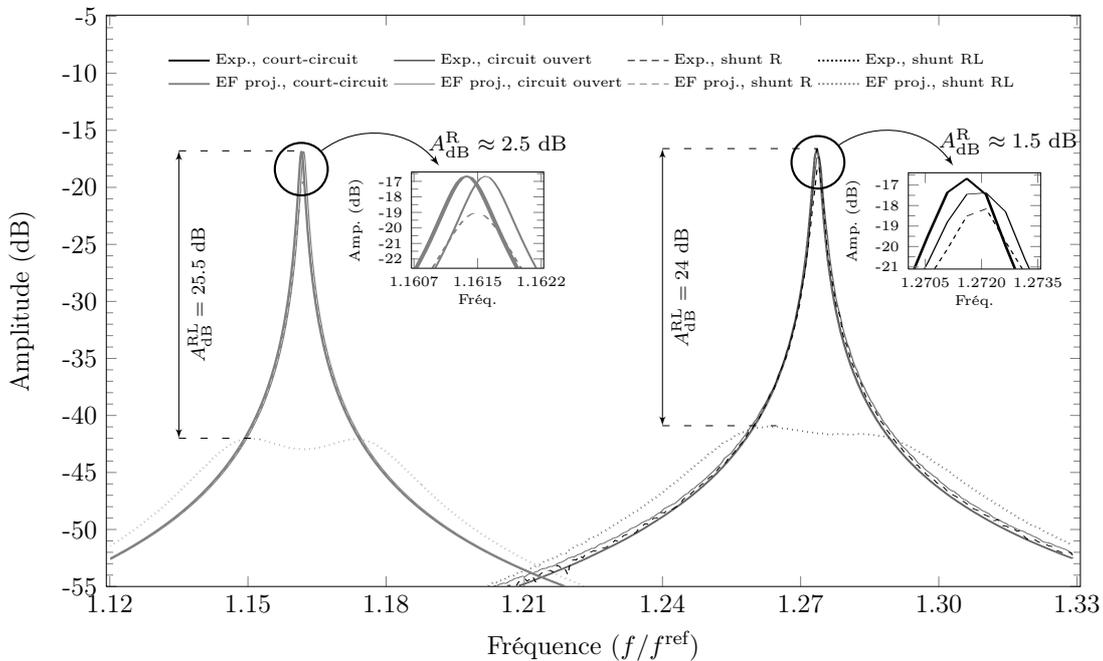


FIG. 5.50 – Fonctions de réponse en fréquence issues de l'expérience et du modèle éléments finis 3D projeté pour les configurations en court-circuit, circuit ouvert, shunt R et shunt RL. Bande de fréquence centrée sur le mode 2F.

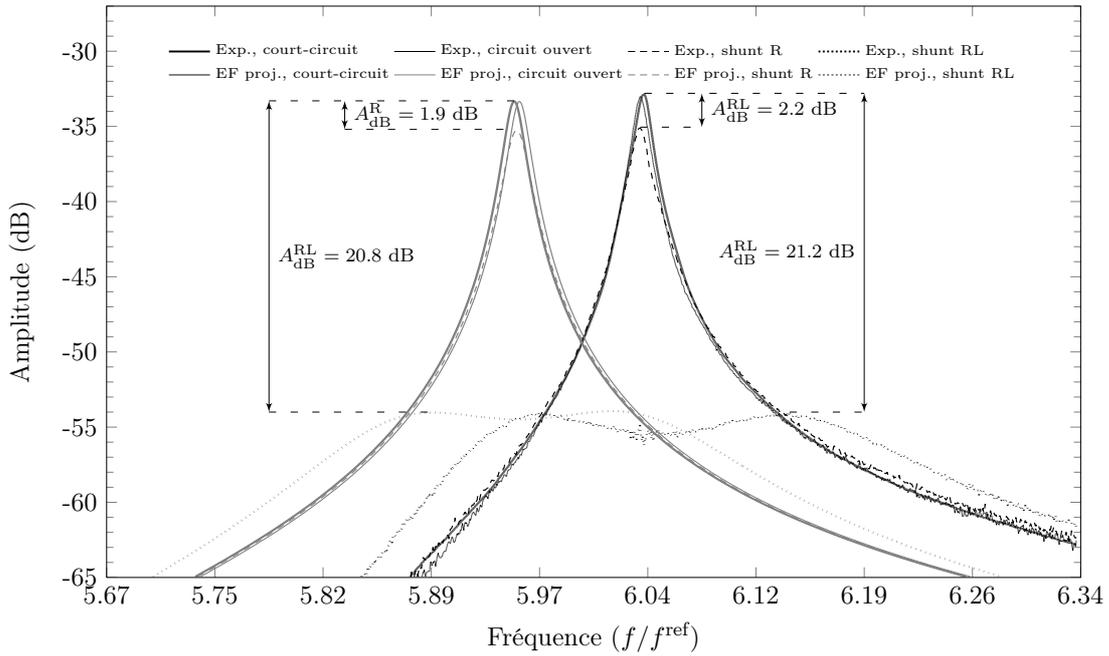


FIG. 5.51 – Fonctions de réponse en fréquence issues de l'expérience et du modèle éléments finis 3D projeté pour les configurations en court-circuit, circuit ouvert, shunt R et shunt RL. Bande de fréquence centrée sur le mode 7.

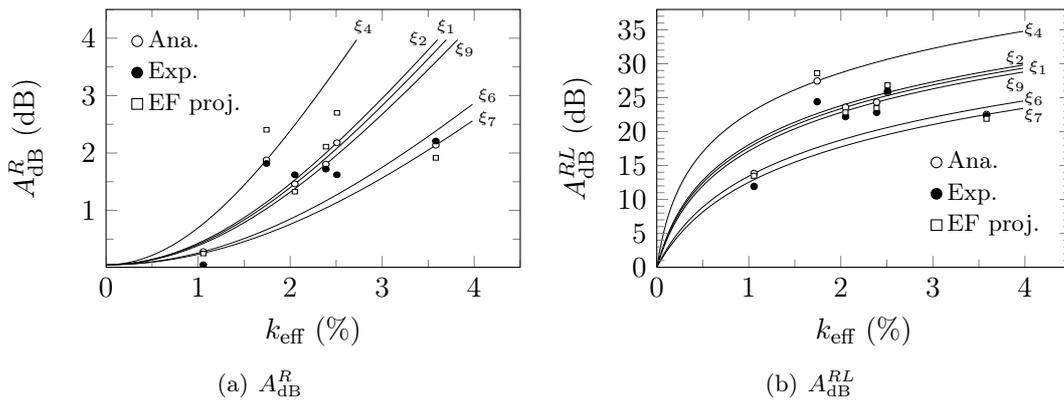


FIG. 5.52 – Atténuations des pics de réponse prévues pour un shunt R et RL, en fonction du facteur de couplage et de l'amortissement, par la formule analytique de [46](Ana.) ainsi que par le modèle éléments finis projeté (EF proj.). Comparaison avec les atténuations obtenues par l'expérience (Exp.).

supérieur sur les premiers modes de la poutre par rapport à ceux mesurés sur l'aube. Dans le cas d'une structure très faiblement amortie, comme une aube fan, la limite de couplage pour laquelle les prédictions sont fiables descend à 2 %.

Un travail qui n'a pas été fait est l'évaluation des niveaux contrôlables par un shunt RL avant saturation des AOP. Cependant, l'objectif poursuivi a d'abord été de montrer que la méthode de calcul des coefficients de couplage piézoélectrique est correcte. Par ailleurs, le shunt résonant n'est pas robuste vis-à-vis d'un désaccord avec le mode à amortir, l'emploi de cette technique n'est donc pas envisageable pour une aube fan en condition de fonctionnement réelle, à l'inverse d'un shunt résistif.

#### 5.3.4 Utilisation d'un shunt à commutation : mesures expérimentales et perspectives

Bien que le shunt résistif soit robuste vis-à-vis d'une imprécision sur le réglage de la résistance ou d'une dérive des valeurs des paramètres du système, comme par exemple la légère variation de la capacité des pastilles piézoélectriques avec la température ou l'évolution des fréquences propres de l'aube due à son usure, l'atténuation apportée reste cependant faible et de l'ordre de quelques décibels pour un couplage voisin de 3-4%. Son implémentation sur une aube est cependant aisée puisqu'il consiste uniquement en une résistance.

À l'inverse, le shunt résonant est très efficace en terme d'atténuation mais ses performances reposent sur un réglage fin des paramètres électriques et nécessitent une inductance synthétique. Ces deux inconvénients limitent fortement les possibilités d'implémentation industrielle sur une aube de soufflante. De plus, la sélectivité fréquentielle du shunt résonant fait que seul le mode ciblé est amorti ou, dit autrement, le moindre désaccordage entre la fréquence du mode à atténuer et la fréquence de résonance électrique rend inefficace le shunt RL.

Les shunts à commutation, ou *switch*, qui sont des shunts qui s'ouvrent et qui se ferment de manière synchronisée avec le mouvement de la structure, sont capables de s'adapter à la fréquence de vibration de la structure de manière autonome et procurent facilement 10 dB d'atténuation. Cette technologie s'avère être, par conséquent, une alternative intéressante pour palier aux défauts des shunts linéaires.

Pour cette raison, il a été décidé, pour clore les essais menés sur l'aube fan de CFM56-7b, de connecter un *switch* SSDI aux pastilles piézoélectriques et de mesurer l'atténuation obtenue pour les 3 premiers modes de la structure en conditions libre-libre et encastrée-libre. La technique SSDI (*Synchronized Switch Damping on Inductor*) consiste à connecter les pastilles piézoélectriques à un shunt résonant muni d'un interrupteur qui s'ouvre et qui se ferme à des instants déterminés du mouvement de la structure. De cette manière, le shunt RL passe alternativement en circuit ouvert puis en circuit fermé, ce qui permet d'obtenir une réduction des vibrations [46].

Le principe de base, à l'instar du shunt résonant, est d'utiliser la charge électrique afin de réduire les vibrations de l'aube. Plus précisément, l'objectif est d'accumuler une charge électrique et de s'en servir pour s'opposer au mouvement de la structure. Pour cela, le circuit est ouvert durant une demi-période du mouvement puis fermé, et réouvert immédiatement après, à chaque maximum de déplacement. Pendant la demi-période où le *switch* est ouvert, son évolution est bloquée et une charge électrique s'accumule dans les électrodes des pastilles piézoélectriques. Lorsque la structure arrive à un maximum de déplacement, ce qui correspond à un changement de signe de la vitesse, le *switch* est fermé jusqu'à obtenir une inversion de tension, puis réouvert. La durée de fermeture dépend de la constante de temps du circuit électrique, qui doit être la plus petite possible afin que l'inversion de charge se fasse quasi-instantanément au regard de la période du mouvement de l'aube. Ainsi, puisque la charge change de signe à chaque fois que la vitesse change également de signe, l'effort appliqué par

les pastilles piézoélectriques sur l'aube s'oppose toujours au mouvement de cette dernière.

L'objectif de cette section est d'utiliser un *switch* SSDI sur une aube et de relever les principaux problèmes de mise en œuvre de cette technique. La modélisation du comportement n'est pas abordée et le lecteur pourra se reporter, entre autre, à [46] pour une description des techniques d'amortissement par *switch* ainsi que des différentes stratégies de commutations.

### (a) Mesures expérimentales

Le circuit a été réalisé par Élie Lefeuvre au LGEF de Lyon sur le schéma de base du brevet [107] (Fig. 5.53), afin de réduire les vibrations d'une petite poutre encastrée-libre dans le cadre de la thèse de Julien Ducarne [46]. Il est réutilisé tel quel ici pour estimer quelles pourraient être les potentialités d'un *switch* appliqué au cas d'une aube. Ce *switch* a l'avantage d'être autoalimenté et il suffit de le connecter aux éléments piézoélectriques. Un circuit autonome tel que celui-ci conviendrait parfaitement pour des applications sur structures tournantes telles que des aubes fan puisque aucune connexion électrique vers l'extérieur, autre que celle avec les pastilles, n'est nécessaire.

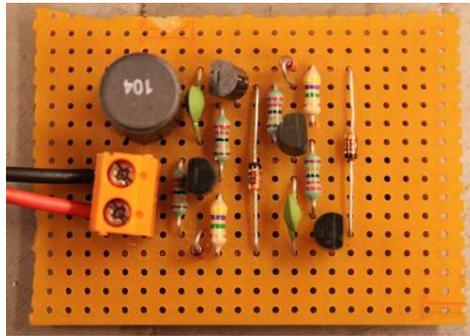


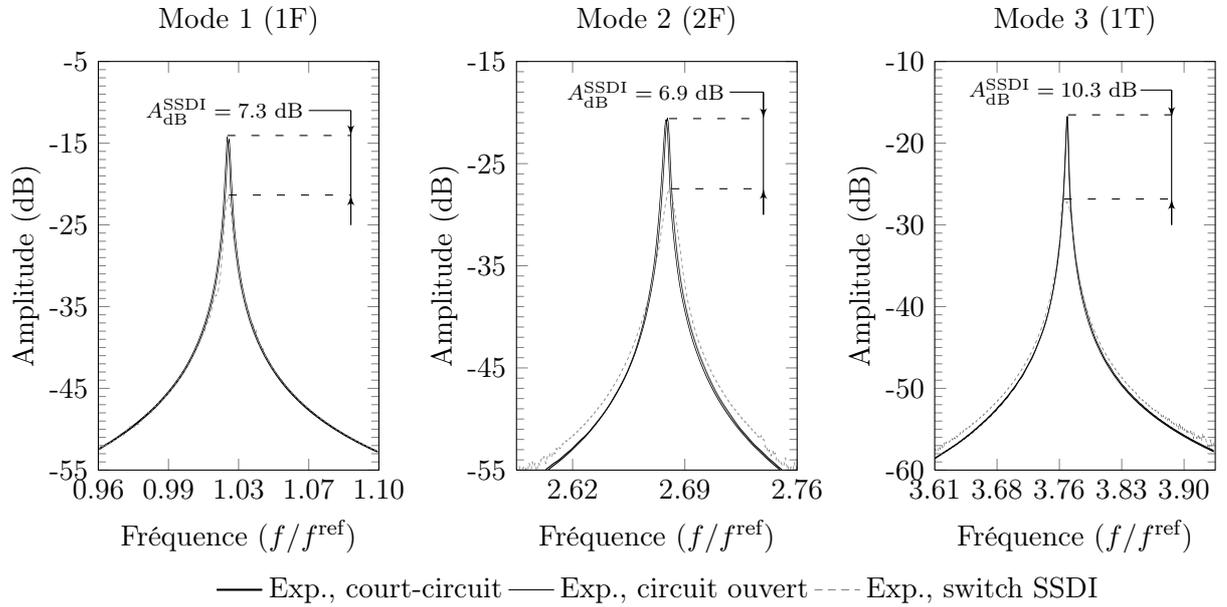
FIG. 5.53 – Circuit autonome fourni par le LGEF dans le cadre de la thèse [46].

Le protocole expérimental consiste à exciter l'aube à l'aide d'un sinus glissant à quelques Hertz par seconde autour des 3 premières fréquences de résonance. La mesure de la vitesse se fait au point d'excitation à l'aide du vibromètre laser utilisé précédemment. L'excitation est réalisée par l'intermédiaire du système bobine-aimant, également utilisé lors des expériences précédentes.

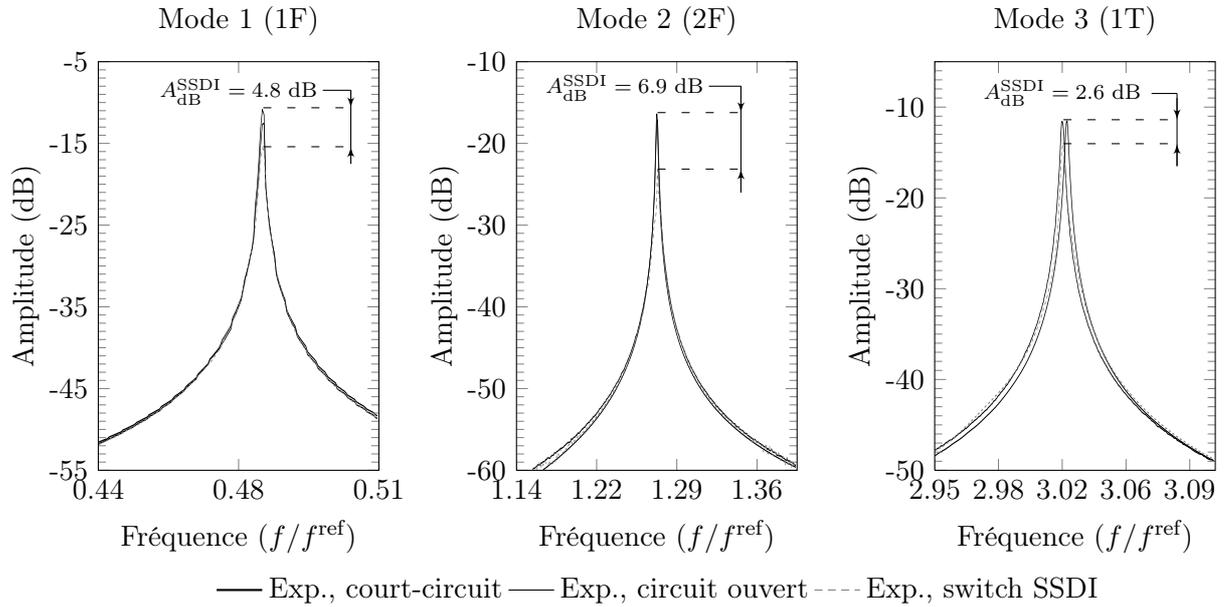
Les résultats en libre-libre et en encastrée-libre sont présentés, respectivement, sur les figures 5.54(a) et 5.54(b). Il peut être constaté, qu'en terme d'atténuation apportée à la structure sur ses 3 premiers mode, le *switch* SSDI se place au dessus du shunt résistif mais en dessous du shunt résonant. L'atténuation moyenne est de 8.2 dB en libre-libre et de 4.8 dB en encastrée-libre. Un couplage plus faible en encastrée-libre explique cette différence d'atténuation.

Bien que les résultats soient encourageant, un certains nombre d'inconvénients, ou de limitations, pourraient apparaître lors de la mise en œuvre de cette technique :

- la performance semble dépendre de l'amplitude du mouvement. Le fait que le circuit utilise les non-linéarités des composants électroniques, en particulier les tensions de seuil des composants, pourrait expliquer que le comportement dépende de l'amplitude des vibrations ;
- seule une excitation sinusoïdale permet au *switch* de fonctionner correctement. En effet, le mouvement de l'aube doit être périodique avec une harmonique prépondérante afin que le circuit soit capable de synchroniser ses ouvertures et fermetures sur le mouve-



(a) Aube en conditions libre-libre



(b) Aube en conditions encastrée-libre

FIG. 5.54 – Fonctions de réponse en fréquence de l'aube, connectée à un switch SSDI, à une excitation sinusoïdale de fréquence variable ( $0.25 \text{ Hz.s}^{-1}$ ). Pour chaque mode, la fréquence de l'excitation varie autour de la fréquence de résonance.

ment de l'aube. Une excitation de type bruit blanc ou multi-harmonique rend le switch inopérant.

- un signal d'excitation sinusoïdale conduit à un spectre de la réponse du système qui présente des pics pour des fréquences harmoniques de l'excitation ainsi que pour des fréquences correspondant aux modes propres de la structure. Ce fait est lié aux non-linéarités du dispositif.

### (b) Transfert d'énergie

Si, par exemple, l'aube est excitée à une fréquence  $f_1$  correspondant à celle de son premier mode (Fig. 5.55), il peut être constaté que le spectre de la réponse est toujours périodique (amplitude importante à la fréquence  $f_1$ ) et comporte un certain nombre d'harmoniques de la fréquence d'excitation ainsi que des fréquences des autres modes.

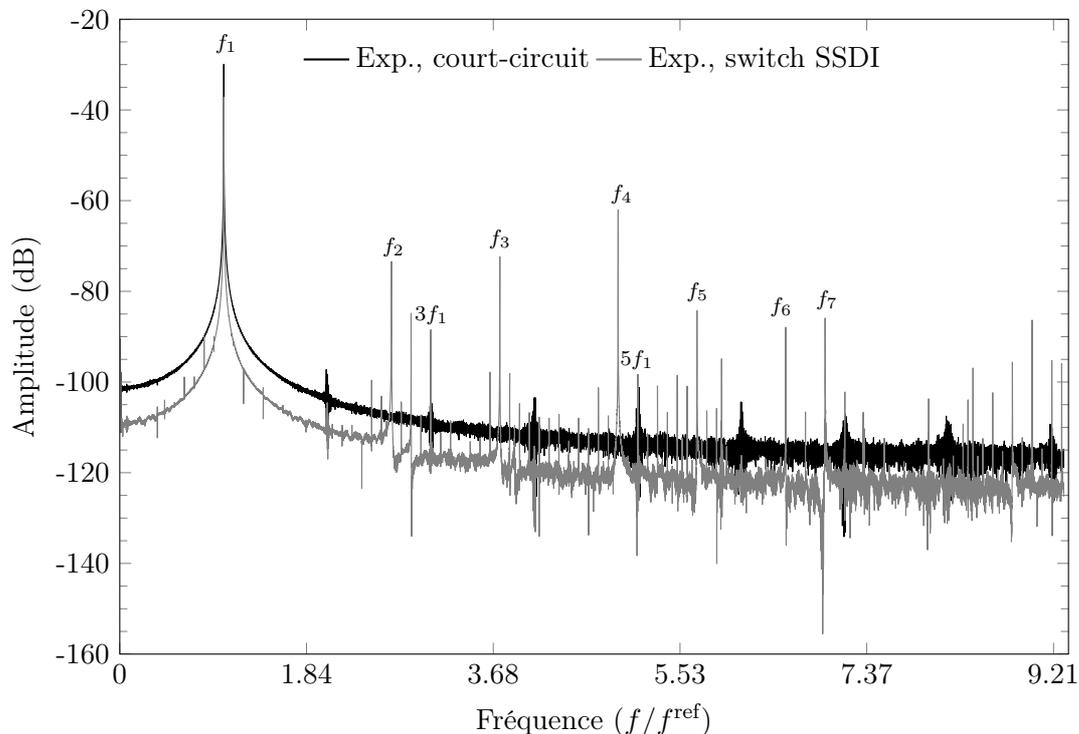


FIG. 5.55 – Transformée de Fourier rapide de la réponse temporelle de l'aube, connectée à un switch, à une excitation sinusoïdale de fréquence  $f_1$ .

L'observation des signaux temporels permet d'expliquer la présence d'harmonique dans la réponse de l'aube. La structure est toujours excitée avec un signal sinusoïdal à la résonance du premier mode. La bande temporelle observée correspond à 10 oscillations de l'aube à la fréquence  $f_1$ .

Sur la figure supérieure 5.56, l'analyse du signal de tension montre que les commutations ne se font pas exactement aux instants où la vitesse s'annule, par contre, l'inversion de tension est satisfaisante et prend des valeurs quasiment opposées à chaque commutation. Le signal de tension est également très perturbé. Le signal de vitesse n'est pas parfaitement sinusoïdale de fréquence  $f_1$  et comporte un certain nombre d'autres fréquences. De plus, le signal de force présente un léger retard de phase par rapport au signal de vitesse.

Le signal de tension peut s'interpréter comme la superposition d'un signal périodique, principalement à la fréquence  $f_1$ , et d'une perturbation non périodique. Comme le signal de

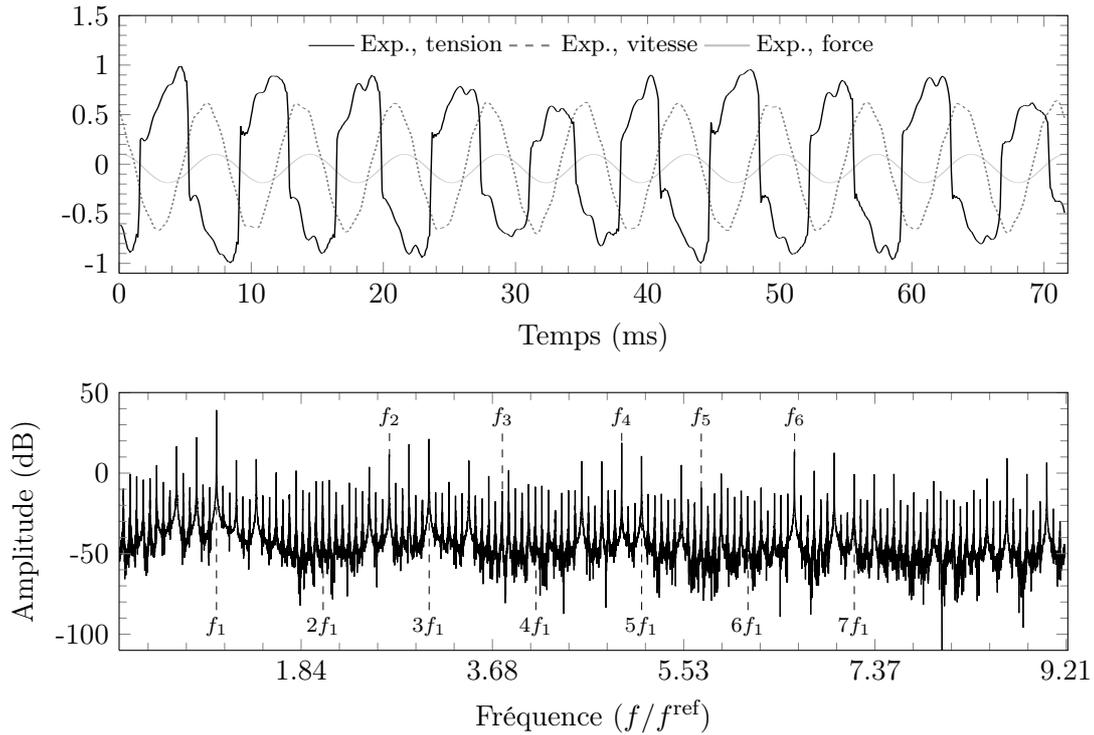


FIG. 5.56 – Réponses temporelles sur 10 périodes à une excitation sinusoïdale de fréquence  $f_1$  (haut) et transformée de fourier rapide du signal de tension (bas).

tension joue le rôle d'effort sur la structure, sa partie périodique explique la partie harmonique du spectre de vitesse (Fig. 5.55). La partie du non périodique du signal de tension vient faire résonner l'aube à ses fréquences propres, qui apparaissent également dans le spectre de vitesse.

La figure inférieure 5.56 présente le spectre du signal de tension dont le profil comporte de nombreux pics. Il apparaît clairement que les harmoniques impaires du signal d'excitation de fréquence  $f_1$  ont une amplitude plus importante que les harmoniques paires. De plus, il existe des pics à toutes les fréquences de résonances de l'aube mais dont l'amplitude dépend du couplage avec l'aube. Les pics des modes 4 et 6, qui présentent les deux couplages les plus importants, après le premier mode, avec l'aube en libre-libre, ont les amplitudes les plus grandes.

## 5.4 Conclusion

L'étude expérimentale des shunts  $R$  et  $RL$  pour la réduction de vibrations d'une aube fan de CFM56-7b a démontré, sur un cas industriel, la validité de l'ensemble des outils développés dans les chapitres 2, 2.6 et 3. Plusieurs observations peuvent résumer concrètement les avancées depuis [128] :

- les vibrations d'une structure complexe, massive et peu amortie peuvent être réduites significativement par l'ajout d'une faible masse de pastilles piézoélectriques. Ce point n'était pas clairement établi auparavant puisque la quasi totalité des travaux portaient sur des plaques ou des poutres, qui sont des structures planes et minces.
- les caractéristiques des pastilles doivent être optimisées pour obtenir un niveau de performance intéressant [121]. En particulier, pour une position et une taille données, il est

possible de doubler le facteur de couplage modal si l'épaisseur de la pastille est optimale (Fig. 5.18). Si la zone du maximum de déformation de la structure peut être un bon point de départ pour une optimisation de la position, elle ne correspond pas forcément au meilleur emplacement de la pastille.

- l'épaisseur des pastilles doit être importante ( $\simeq 5$  mm) pour maximiser le couplage et avoir un effet sur l'aube ;
- la prédiction du couplage est précise si la mosaïque et la colle sont prises en compte [119]. Il a été démontré que si la couche d'adhésif a une épaisseur non négligeable, alors elle entraîne une perte de couplage importante (Fig. 5.37 et Fig. 5.38), de même pour le passage d'une pastille monobloc à une mosaïque équivalente de pastilles ;
- le shunt résistif a un effet significatif (-2.3 dB en moyenne) et les performances du shunt résonant sont importantes (-25 dB en moyenne) pour de faible couplage (2.5% en moyenne). Notamment, la prédiction du niveau d'atténuation apporté par un shunt  $R$  (Tab. (2.8)) ou  $RL$  (Tab. (2.9)) à partir de l'amortissement du mode et du facteur de couplage modal correspond à ce qui a été obtenu par le modèle éléments finis 3D et par l'expérience (Fig.5.52) ;
- si une pastille monobloc adaptée à la courbure de l'aube est réalisée en PIC151, la théorie prévoit, toujours pour une masse de matériau inférieure à 5% de la masse l'aube et pour un amortissement de  $10^{-4}$ , que les atténuations sont de -30 dB avec un shunt R et de -55 dB avec un shunt RL.
- l'emploi d'un shunt à commutation de type SSDI ouvre des perspectives intéressantes en terme d'atténuation. Il a été possible d'obtenir -8 dB en moyenne sur les 3 premiers modes de l'aube en condition libre-libre et -5 dB en conditions encastrée-libre sous excitation harmonique. Les deux principaux écueils de cette technologie restent l'inversion rapide de la charge dans les éléments piézoélectriques, qui provoque des changements de contrainte et excite les modes de vibration élevés de la structure ainsi que les problèmes de synchronisation de la commutation du *switch* avec le maximum de déplacement du mode, qui dégrade les performances en terme d'atténuation. Cependant, le switch utilisé n'a pas été conçu pour l'aube. Par conséquent, les conclusions demandent à être confirmées par de nouveaux essais avec un switch adapté.

PARTIE II

---

## Vibrations non linéaires

*"L'examen combine les techniques de la hiérarchie qui surveille et celles de la sanction qui normalise. Il est un regard normalisateur, une surveillance qui permet de qualifier, de classer et de punir. Il établit sur les individus une visibilité à travers laquelle on les différencie et on les sanctionne. C'est pourquoi, dans tous les dispositifs de discipline, l'examen est hautement ritualisé. En lui viennent se rejoindre la cérémonie du pouvoir et la forme de l'expérience, le déploiement de la force et l'établissement de la vérité. Au coeur des procédures de discipline, il manifeste l'assujettissement de ceux qui sont perçus comme des objets et l'objectivation de ceux qui sont assujettis. La superposition des rapports de pouvoir et des relations de savoir prend dans l'examen tout son éclat visible."*

*Michel Foucault, Surveiller et Punir, III.2 L'examen*



---

# Vibrations en grande amplitude d'un modèle simplifié d'aube de soufflante en rotation

Une demande de la Snecma en terme d'évaluation de l'effet des nonlinéarités géométriques sur la dynamique d'une structure tournante a donné lieu à ce chapitre. Initialement prévue pour être intégrée à la partie shunt piézoélectrique, ceci afin de pouvoir estimer l'efficacité de ce dernier lorsque la structure tourne et vibre en grande amplitude, l'étude n'a pas été poursuivie et constitue une partie sans lien avec les techniques de réduction de vibrations. Néanmoins, les résultats obtenus en 1D, ainsi que la méthode de prise en compte des nonlinéarités dans le cas 3D viennent compléter et enrichir les différentes études actuelles menées sur le sujet ([60] par exemple), raison pour laquelle ce chapitre a été ajouté à ce mémoire.

## 6.1 Objectifs

Les théories de poutre sont des modèles adaptées aux structures possédant une dimension caractéristique plus longue que les autres. La modélisation de ces dernières peut se révéler plus difficile qu'il n'y paraît puisqu'elle implique de transformer un problème tridimensionnel par nature en un problème unidimensionnel.

La théorie des poutres est souvent utilisée en première approche pour modéliser des pales de rotor d'hélicoptère, des aubes de turbomachine ou bien encore des arbres de transmission. De plus, le développement de l'aéronautique et de l'aérospatial conduit à l'utilisation de structures flexibles pouvant subir de grands déplacements. L'élaboration de théories de poutre capables de restituer les principaux phénomènes physiques associés reste par conséquent d'actualité.

Des poutres avec des sections irrégulières, anisotropes, vrillées, avec des couplages élastiques ou subissant de grands déplacements nécessitent des théories spécifiques et ne peuvent pas être résolus en utilisant la théorie de la résistance des matériaux (RDM). Celles-ci peuvent être classées en deux grandes familles. La première regroupe la théorie de poutre d'Euler-Bernoulli et la seconde les théories avec cisaillement.

La problématique traitée dans ce chapitre est celle des vibrations d'une aube fan de turbo-réacteur en grande amplitude. Une poutre en rotation est un modèle de base pour comprendre les phénomènes physiques qui interviennent lorsque qu'une structure tournante vibre avec des amplitudes valant plusieurs fois son épaisseur. La détermination des caractéristiques dyna-

miques modales (fréquences propres et modes associés) et leurs évolutions en fonction des paramètres de fonctionnement de l'aube (taux de rotation, force appliquée, fréquence d'excitation) constituent l'objet de cette recherche. Plusieurs modèles sont développés et comparés pour pouvoir juger de la présence et de l'importance des divers phénomènes non linéaires dans la réponse forcée d'une poutre en rotation.

La première partie établit les équations générales du mouvement en deux dimensions d'une poutre plane en rotation dans le cadre des grands déplacements/grandes rotations et des petites déformations en utilisant le principe des puissances virtuelles. La seconde partie traite des deux principaux modèles analytiques qu'il est possible d'obtenir à partir des équations du mouvement. Ce sont les modèles de poutre de von Kármán et inextensible. La troisième partie porte sur la modélisation éléments finis du problème de vibrations planes non linéaires d'une poutre en rotation. La formulation choisie est celle de Timoshenko en Lagrangien total. La raison de ce développement supplémentaire est d'avoir un modèle fiable afin de pouvoir juger de la pertinence des solutions analytiques. La quatrième partie est dédiée aux simulations et à l'interprétation des résultats. Quant à la dernière, elle aborde les développements en cours sur la projection modale d'un problème éléments finis 3D en non linéaire géométrique. La conclusion précise l'état des recherches effectuées au LMSSC quant à la présence, au type et à l'importance des phénomènes non linéaires dans les vibrations transverses d'une poutre en rotation et se termine sur des perspectives d'applications aux éléments finis des méthodes de calcul des vibrations non linéaires.

## 6.2 bibliographie

Une littérature abondante traite de structures tournantes modélisées par des poutres. De ce fait, il est intéressant de rappeler ici les principales problématiques afin de mieux distinguer les apports de cette étude parmi la grande quantité d'articles déjà écrits sur le sujet. La bibliographie consiste en un rapide exposé des travaux antérieurs sur les vibrations de poutre avec et sans rotation.

Lorsque le comportement statique ou dynamique d'une structure complexe doit être étudiée, une première approche consiste à simplifier le problème et d'utiliser pour cela des poutres. Ces dernières sont des structures de base pouvant être classées selon différentes catégories :

- elles sont qualifiées d'élançées ou d'épaisses et leur section d'uniforme ou d'évolutive selon leurs propriétés géométriques ;
- elles sont également classées selon leur propriété matériaux comme homogène ou composite.

Il est à noter que les poutres élançées à section uniforme sont les premières à avoir été étudiées du fait de leur simplicité et se rencontrent fréquemment dans la littérature. L'existence d'une multitude de géométries et de matériaux permet de s'adapter à la structure étudiée tout en la simplifiant. Dans le cas d'une aube par exemple, certaines exigences liées à la conception impliquent une variation de raideur en flexion le long de l'axe principal. Un modèle d'aube doit donc utiliser une poutre à section variable afin d'obtenir une répartition optimale du poids et de la force [21].

Historiquement, les premières études ont porté sur les vibrations de flexion d'une poutre [21]. Daniel Bernoulli et Leonhard Euler (1750) ont été les premiers à écrire l'équation différentielle qui régit les vibrations transverses d'une poutre mince. L'hypothèse principale de leur modèle est qu'une section plane initialement perpendiculaire à la fibre neutre de la poutre reste plane et perpendiculaire à celle-ci après déformation. La prédiction des premières fréquences des modes de flexion est correcte, néanmoins, pour des modes d'ordre plus élevé, le modèle

donne des fréquences supérieures à celles mesurées expérimentalement. Par la suite, Rayleigh (1877) inclut les effets d'inertie de rotation mais son modèle ne prédit toujours pas correctement les fréquences des modes élevés. En 1921, Timoshenko introduit un terme de correction supplémentaire qui permet de prendre en compte les déformations de cisaillement transverse. La théorie de poutre de Timoshenko est moins restrictive que celle d'Euler-Bernoulli. L'hypothèse d'une section plane initialement perpendiculaire à la fibre neutre de la poutre est toujours utilisée, mais celle-ci n'est plus astreinte à rester perpendiculaire après déformation, mais seulement plane. Le cisaillement introduit est négligeable pour les premiers modes de flexion mais augmente avec la fréquence, ce qui a pour effet de diminuer les valeurs des fréquences des modes d'ordre élevé.

Par la suite, la prise en compte de la rotation a permis d'obtenir des modèles pour de nombreuses applications, telles que les pales d'hélicoptère [66, 64, 65] ou les aubes de turbines. Ces premières études sur les poutres tournantes apparaissent vers 1920 lors du développement de l'industrie des turbomachines pour la génération d'électricité. La plupart d'entre elles utilisaient des modèles linéaires et se concentraient principalement sur l'effet rigidifiant de la rotation sur les fréquences propres, qui fut mise en évidence pour la première fois par Lamb et Southwell (1921) [73]. Pour prédire correctement l'évolution des fréquences propres et des modes propres associés en fonction du taux de rotation, les travaux ultérieurs ont intégré de nombreux paramètres additionnels afin de mieux représenter la géométrie, les effets aérodynamiques ou d'autres contraintes techniques. Ces améliorations permettent de prendre en compte des sections de poutre variables ou non symétriques, un angle de vrillage [109, 117], de battement, de traîné ou d'attaque [80, 21], un décalage du point d'attache de la poutre avec le centre de rotation [27, 79], des inerties de rotation, des masses embarquées [16, 70, 97] et de nombreuses conditions aux limites [20, 126, 40]. Au final, tous ces paramètres conduisent à des effets supplémentaires complexes qui ne sont pas pris en compte dans les modèles de poutre classiques.

De nombreuses études visent également à intégrer des nonlinéarités dans leur modèle. Ces dernières peuvent provenir de différentes sources :

- les forces de Coriolis [103, 104] ;
- la courbure de la poutre [13] ;
- les couplages entre les vibrations dans et hors plan de rotation [66, 64, 65].

Ces nonlinéarités géométriques sont l'objet de ce chapitre où sont développés différents modèles de poutre afin d'étudier les effets des forces centrifuges dues à la rotation et des vibrations en grande amplitude.

## 6.3 Formulation du problème mécanique

La poutre considérée a une longueur  $L$ , une section constante d'aire  $A$ , et elle est constituée d'un matériau homogène et isotrope. L'une de ses extrémités est attachée à un disque de rayon  $R$  tandis que l'autre est libre. Les vibrations transverses de la poutre se font dans le plan de rotation (vibrations de type *flapping*).

### 6.3.1 La transformation

La poutre est représentée en deux dimensions sur la figure 6.1. La position de tout point  $M$  situé sur une section droite de centre d'inertie  $G$  (intersection de la section et de la fibre neutre) avant transformation est définie par

$$\mathbf{OG} = X\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{OM} = \mathbf{OG} + \mathbf{GM} = X\mathbf{e}_x + Z\mathbf{e}_z, \quad (6.1)$$

où  $(X, Z)$  sont les coordonnées (lagrangiennes) de  $M$ , dans la base de référence  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ . La position  $m$  de  $M$  dans la configuration déformée est

$$\mathbf{O}m = \mathbf{O}M + \mathbf{u}(M) = x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z, \quad (6.2)$$

avec  $\mathbf{u}(M)$  le déplacement du point  $M$  et  $(x, z)$  les coordonnées (Eulériennes) de  $M$  après transformation.

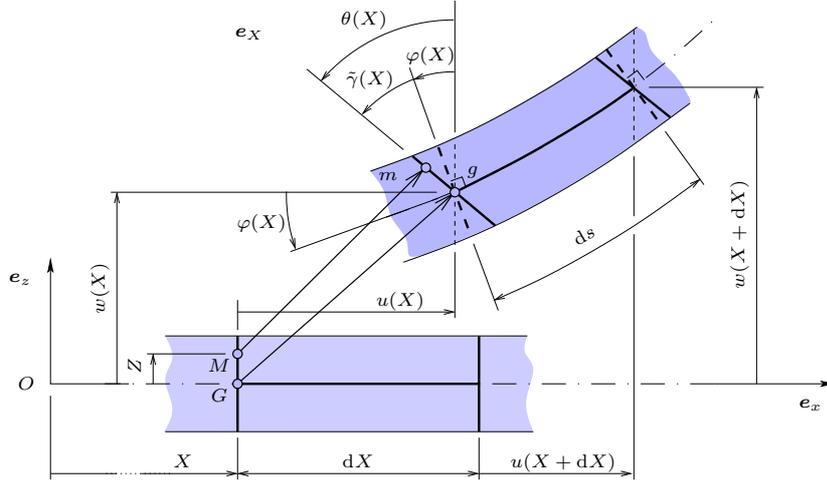


FIG. 6.1 – Cinématique lagrangienne d'un élément de poutre 2D aligné avec l'axe  $\mathbf{e}_x$  de la configuration de référence

Une cinématique classique de poutre est choisie, où toute section droite est animée d'un mouvement de solide rigide. Le déplacement d'un point quelconque est défini à partir d'un opérateur de rotation  $\mathbf{R}(\theta)$  de la façon suivante

$$\mathbf{u}(M) = \mathbf{u}(G) + [\mathbf{R}(\theta) - \mathbf{1}] \mathbf{G}M, \quad (6.3)$$

où  $\mathbf{1}$  est l'identité et

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}_{(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)}, \quad (6.4)$$

avec  $\theta$  l'angle de rotation de la section droite. Si le déplacement des points de la fibre neutre est

$$\mathbf{u}(G) = u\mathbf{e}_x + w\mathbf{e}_z, \quad (6.5)$$

alors le champ de déplacement du milieu continu est donné par

$$\mathbf{u} = \left[ \underbrace{u - Z \sin \theta}_{u_x} \right] \mathbf{e}_x + \left[ \underbrace{w + Z(\cos \theta - 1)}_{u_z} \right] \mathbf{e}_z, \quad (6.6)$$

tel que  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(X, Z, t)$  est le champ de déplacement du milieu continu et  $(u_x, u_z)$  ses composantes. Il ne dépend que des champs de déplacement axial  $u = u(X, t)$  et transverse  $w = w(X, t)$  de la poutre. La position de  $M$  dans la configuration déformée est donc, d'après l'équation (6.2)

$$\mathbf{O}m = [X + u - Z \sin \theta] \mathbf{e}_x + [w + Z \cos \theta] \mathbf{e}_z. \quad (6.7)$$

Le gradient de la transformation  $\nabla \mathbf{u}$  peut alors se calculer à partir de l'équation (6.6) de la façon suivante

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial X} & \frac{\partial u_x}{\partial Z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial X} & \frac{\partial u_z}{\partial Z} \end{pmatrix}_{(e_x, e_z)} = \begin{pmatrix} u' - Z\theta' \cos \theta & -\sin \theta \\ w' - Z\theta' \sin \theta & \cos \theta - 1 \end{pmatrix}_{(e_x, e_z)}. \quad (6.8)$$

La notation  $\circ'$  désigne la dérivée de  $\circ$  par rapport à  $X$ . Le gradient de la transformation est

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{O}\mathbf{m}) = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 + u' - Z\theta' \cos \theta & -\sin \theta \\ w' - Z\theta' \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}_{(e_x, e_z)}. \quad (6.9)$$

### 6.3.2 Déformations

#### (a) Déformation "ingénieur"

D'après la figure 6.2, une petite fibre de longueur  $dX$  prise sur la fibre neutre avant déformation reste sur la fibre neutre et s'allonge (ou se rétrécit). Sa nouvelle longueur est  $ds$  et il est possible de définir la mesure de déformation de la fibre neutre  $\tilde{\epsilon}$ , dite de l'ingénieur, telle que

$$ds = (1 + \tilde{\epsilon}) dX, \quad \implies \quad \tilde{\epsilon} = \frac{ds}{dX} - 1. \quad (6.10)$$

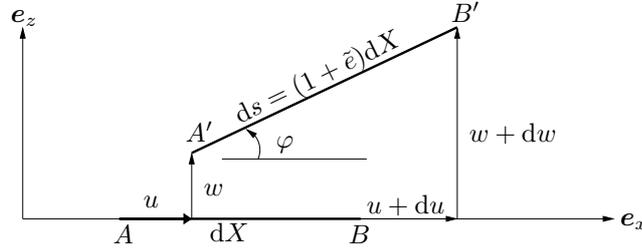


FIG. 6.2 – Relation déformation/déplacement d'un élément différentiel de la fibre neutre

La même figure permet d'écrire

$$\sin \varphi = \frac{dw}{ds} \quad \implies \quad \sin \varphi = \frac{w'}{1 + \tilde{\epsilon}}, \quad (6.11a)$$

$$\cos \varphi = \frac{du + dX}{ds} \quad \implies \quad \cos \varphi = \frac{1 + u'}{1 + \tilde{\epsilon}}, \quad (6.11b)$$

où  $\varphi$  est l'angle de rotation de la tangente à la fibre neutre. Il est différent de  $\theta$  si il y a du cisaillement. À partir de la figure 6.1, l'angle de cisaillement est défini comme

$$\tilde{\gamma} = \theta - \varphi. \quad (6.12)$$

En éliminant  $\varphi$  entre les équations (6.11a) et (6.11b), il advient

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{(1 + u')^2 + w'^2} - 1. \quad (6.13)$$

(b) Déformation de Green-Lagrange

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange s'écrit

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}). \quad (6.14)$$

À partir de l'expression (6.8), les composantes dans  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  de  $\mathbf{E}$  sont

$$E_{xx} = u' - Z\theta' \cos \theta + \frac{1}{2} (u' - Z\theta' \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} (w' - Z\theta' \sin \theta)^2 \quad (6.15a)$$

$$E_{xz} = E_{zx} = -(1 + u') \sin \theta + u' \cos \theta, \quad (6.15b)$$

$$E_{zz} = 0. \quad (6.15c)$$

La transformation du milieu continu étudiée ici correspond aux déplacements de la poutre introduite au paragraphe précédent (§6.3.1). Si celle-ci est mince, elle peut être soumise à des grands déplacements  $u$  et  $w$ , associés à des grandes rotations  $\theta$ , sans que les déformations locales soient importantes. En d'autres termes, un petit élément de matière pris avant transformation sera soumis à un déplacement de solide rigide qui peut être important, mais sera très peu déformé; la déformation ingénier  $\tilde{\epsilon}$  introduite plus haut sera alors petite. Le tenseur de Green-Lagrange introduit ci-dessus donne une mesure de ces déformations locales, qui peuvent être grandes dans le cas général. Notamment, il peut être utilisé dans des cas où le milieu est soumis à des grandes déformations, en élasticité ou en plasticité.  $\mathbf{E}$  mesure les déformations pures et ne dépend pas de la partie déplacement de solide rigide de la transformation. Pour s'en rendre compte, il suffit de constater qu'il est toujours nul dans le cas où la transformation est uniquement un déplacement de solide rigide<sup>1</sup>. Dans le cas traité ici, le milieu est mince et les déformations locales sont petites. Il peut être intéressant de simplifier les expressions (6.15) en négligeant certains termes. Comme les champs  $u$ ,  $w$  et  $\theta$  décrivent à la fois la rotation du milieu et ses déformations locales, il n'est pas possible de faire cela directement, comme par exemple pour les classiques hypothèses de petites perturbations, où les termes quadratiques  $\nabla^T \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}$  sont négligés directement dans l'équation (6.14).

Pour séparer les contributions "solide rigide" et "déformation pure" dans la transformation du milieu continu, il faut procéder à la décomposition polaire suivante du gradient de la transformation [112, 52]

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{U}, \quad (6.16)$$

où  $\mathbf{R}(\theta)$  est l'opérateur de rotation défini par (6.4) et  $\mathbf{U}$  la déformation pure de la transformation. En remarquant que d'après l'équation (6.9),  $\mathbf{F}$  s'écrit

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 + u' & 0 \\ w' & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}(\theta)} \begin{pmatrix} -Z\theta' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.17)$$

et que  $\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}^T(\theta) = \mathbf{R}(-\theta)$ , puisque c'est un opérateur orthogonal, il vient

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}(-\theta)\mathbf{F} = \begin{pmatrix} (1 + u') \cos \theta + w' \sin \theta - Z\theta' & 0 \\ -(1 + u') \sin \theta + w' \cos \theta & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

<sup>1</sup>Il est nécessaire pour cela de supposer que  $u$ ,  $w$  et  $\theta$  ne dépendent pas de  $X$  pour que l'équation (6.3) corresponde à un déplacement de solide rigide sans déformation du milieu. Dès lors, les équations (6.15) montrent que  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ .

Pour interpréter ce résultat, l'équation (6.17) peut se réécrire de la façon suivante, en utilisant la déformation ingénieur  $\tilde{e}$  (Eqs. (6.10), (6.11a) et (6.11b))

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}(\varphi) \begin{pmatrix} 1 + \tilde{e} & 0 \\ 0 & 1 + \tilde{e} \end{pmatrix} + \mathbf{R}(\theta) \begin{pmatrix} -Z\theta' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

si bien que

$$\mathbf{U} = \mathbf{1} + \mathbf{L}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} (1 + \tilde{e}) \cos \tilde{\gamma} - 1 - Z\theta' & 0 \\ 0 & -(1 + \tilde{e}) \sin \tilde{\gamma} \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

avec  $\tilde{\gamma} = \theta - \varphi$  l'angle de cisaillement (Eq. (6.12)). En remarque,  $\mathbf{L}$  ne dépend que des déformations locales et pas des rotations. Ainsi, lorsque celles-ci sont petites, c'est à dire que  $\tilde{e} \ll 1$  (faible dilatation),  $\tilde{\gamma} \ll 1$  (faible cisaillement) et  $Z\theta' \ll 1$  (faible épaisseur, qui n'implique aucune restriction sur la courbure  $\theta'$ ), l'équation ci-dessus montre que  $\mathbf{L}$  est petit. En calculant  $\mathbf{E}$  de la manière suivante

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^T \mathbf{U} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T + \mathbf{L}^T \mathbf{L}), \quad (6.21)$$

il est alors possible de négliger le terme quadratique en  $\mathbf{L}$  et de simplifier  $\mathbf{E}$ .

$$\mathbf{E} \simeq \tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T). \quad (6.22)$$

$\tilde{\mathbf{E}}$  est la linéarisation consistante de  $\mathbf{E}$  [52]. Cette simplification consiste en fait à négliger les termes du second ordre *hormis ceux provenant des rotations*.

Finalement,  $\mathbf{L}$  et  $\tilde{\mathbf{E}}$  s'écrivent en fonction de  $u$ ,  $w$  et  $\theta$  (Eq. 6.18) ou en fonction des quantités ingénieur  $\tilde{e}$  et  $\tilde{\gamma}$  (Eq. (6.20))

$$\boxed{\mathbf{L} = \begin{pmatrix} e - Z\kappa & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} e - Z\kappa & \gamma/2 \\ \gamma/2 & 0 \end{pmatrix}}, \quad (6.23)$$

avec

$$\begin{cases} e = (1 + u') \cos \theta + w' \sin \theta - 1 = (1 + \tilde{e}) \cos \tilde{\gamma} - 1, & (6.24a) \\ \kappa = \theta', & (6.24b) \\ \gamma = -(1 + u') \sin \theta + w' \cos \theta = -(1 + \tilde{e}) \sin \tilde{\gamma}. & (6.24c) \end{cases}$$

La déformation axiale de la poutre est notée  $e = e(X)$ , sa courbure  $\kappa = \kappa(X)$  et sa déformation de cisaillement  $\gamma = \gamma(X)$ .

### (c) Comparaison entre les mesures de déformation

Dans le cas général, si deux petits vecteurs infinitésimaux  $d\mathbf{X}_1$  et  $d\mathbf{X}_2$  sont pris dans la configuration de référence et se transforment en  $d\mathbf{s}_1$  et  $d\mathbf{s}_2$ , le tenseur de Green-Lagrange mesure la déformation du parallélogramme de cotés  $d\mathbf{X}_1$  et  $d\mathbf{X}_2$  comme suit

$$d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 = 2 d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{X}_2. \quad (6.25)$$

En choisissant  $d\mathbf{X}_1 = d\mathbf{X}_2 = dX \mathbf{e}_x$  sur la fibre neutre de la poutre ( $Z = 0$ ), il se transforme en  $d\mathbf{s}_1 = d\mathbf{s}_2 = dX \mathbf{e}_r$  et

$$ds^2 - dX^2 = 2(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{e}_x) dX^2 = 2E_{xx}^0 dX^2, \quad (6.26)$$

soit encore

$$\boxed{\tilde{e} + 1 = \sqrt{2E_{xx}^0 + 1}}, \quad (6.27)$$

avec  $E_{xx}^0 = E_{xx}(Z = 0)$ .

La formule (6.27), démontrée dans le cas général d'un milieu continu quelconque, est retrouvée dans le cas particulier de poutre, en calculant  $E_{xx}^0$  à partir de l'équation (6.15a)

$$E_{xx}^0 = \frac{1}{2}[(1 + u')^2 + w'^2 - 1]. \quad (6.28)$$

et en la comparant à l'équation (6.13).

Il est à noter que les expressions de  $\mathbf{E}$  en fonction de  $\nabla \mathbf{u}$  (Eq. (6.14)) et en fonction de  $\mathbf{L}$  (Eq. (6.21)) sont rigoureusement identiques. Notamment, l'expression (6.28) est obtenue de la même manière en insérant l'équation (6.23) dans (6.21) et en écrivant que  $E_{xx}^0 = e + (e^2 + \gamma^2)/2$ . Par conséquent, lorsque les déformations sont petites

$$\boxed{\tilde{e} \simeq E_{xx}^0 \simeq e.} \quad (6.29)$$

La première des égalités provient de la linéarisation de l'équation (6.27) avec  $E_{xx}^0 \ll 1$  et la seconde égalité est issue de la linéarisation consistante (Eqs. (6.22) et (6.23)). Par conséquent, *si les déformations sont petites, les déformations ingénieur et les déformations de Green-Lagrange peuvent être confondues.*

#### (d) Cas d'une cinématique d'Euler-Bernoulli

Négliger le cisaillement conduit à écrire  $\gamma = 0$ , ce qui revient à imposer  $\tilde{\gamma} = 0$ , d'après l'équation (6.24c). L'équation (6.24a) montre alors que

$$\boxed{e = \tilde{e} = \sqrt{(1 + u')^2 + w'^2} - 1,} \quad (6.30)$$

où la seconde égalité provient de l'équation (6.13). Il est donc démontré que *dans le cas d'une cinématique d'Euler-Bernoulli (sans cisaillement), la déformation ingénieur  $\tilde{e}$  est rigoureusement égale à la déformation axiale  $e$  de Green-Lagrange, obtenue après linéarisation consistante.*

Ce résultat peut aussi s'obtenir de manière classique, en éliminant  $\theta$  au profit de  $w$  lorsque  $\gamma = 0$ . À partir de l'équation (6.24c), il vient

$$\tan \theta = \frac{w'}{1 + u'}, \quad (6.31)$$

si bien qu'en utilisant les identités  $\cos \theta = 1/\sqrt{1 + \tan^2 \theta}$  et  $\sin \theta = \tan \theta/\sqrt{1 + \tan^2 \theta}$  dans l'équation (6.24a), la seconde égalité de l'équation (6.30) est retrouvée.

### 6.3.3 Loi de comportement et efforts généralisés

Le matériau étant supposé linéaire élastique, la loi de comportement de Kirchhoff-Saint-Venant est utilisée. Elle établit une relation linéaire entre  $\mathbf{E}$  et le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$ .

$$\mathbf{E} = \frac{1 + \nu}{E} \mathbf{S} - \frac{\nu}{E} \text{Trace}(\mathbf{S}) \mathbf{1}. \quad (6.32)$$

$E$  est le module d'Young du matériau et  $\nu$  son coefficient de poisson. Dans le cas de la poutre étudiée ici, les contraintes transverses  $S_{yy}$  et  $S_{zz}$  sont supposées nulles, si bien qu'en utilisant l'expression (6.23) de  $\mathbf{E}$ , il vient

$$S_{xx} = EE_{xx} = E(e - Z\kappa), \quad (6.33a)$$

$$S_{xz} = S_{zx} = 2GE_{xz} = G\gamma, \quad (6.33b)$$

avec  $G$  le module de cisaillement du matériau. Dès lors, les efforts généralisés sont

$$N = \iint_A S_{xx} \, dA = E \iint_A (e - Z\kappa) \, dA = EAe, \quad (6.34a)$$

$$M = - \iint_A Z S_{xx} \, dA = -E \iint_A Z(e - Z\kappa) \, dA = EI\kappa, \quad (6.34b)$$

$$T = \iint_A S_{xz} \, dA = G \iint_A \gamma \, dA = GA\gamma. \quad (6.34c)$$

$A$  représente l'aire de la section droite de la poutre et  $I$  son moment quadratique. Le loi de comportement, qui relie les efforts généralisés aux déformations est notée  $\mathbf{C}$  et a pour expression

$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \gamma \\ \kappa \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{e} \quad (6.35)$$

### 6.3.4 Equations du mouvement

#### (a) Cas sans rotation

Le principe des travaux virtuels stipule que *pour tout déplacement virtuel infinitésimal  $\delta\mathbf{u}$ , la somme des travaux des efforts intérieurs et des efforts extérieurs est à toute date  $t$  égale au travail des efforts d'accélération*, ce qui s'écrit

$$\forall t, \quad \forall \delta\mathbf{u}, \quad \delta\mathcal{W}_i + \delta\mathcal{W}_e = \delta\mathcal{W}_a, \quad (6.36)$$

avec

$$\delta\mathcal{W}_i = - \iiint_{\Omega} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} \, d\Omega, \quad (6.37a)$$

$$\delta\mathcal{W}_e = \iiint_{\Omega} \mathbf{f}_e \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega + \iint_{\partial\omega} \mathbf{F}_e \cdot \delta\mathbf{u} \, dS, \quad (6.37b)$$

$$\delta\mathcal{W}_a = \iiint_{\Omega} \rho \mathbf{\Gamma}_{/\mathcal{R}} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega, \quad (6.37c)$$

où  $\mathbf{f}_e$  et  $\mathbf{F}_e$  sont les efforts volumiques et surfaciques extérieurs,  $\delta\mathbf{E}$  la variation de  $\mathbf{E}$  dans le déplacement virtuel  $\delta\mathbf{u}$ , et  $\mathbf{\Gamma}_{/\mathcal{R}}$  l'accélération par rapport au repère galiléen  $\mathcal{R} = (0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ .

Le champ de déplacement de l'équation (6.6) est utilisé comme déplacement virtuel, ce qui donne

$$\delta\mathbf{u} = [\delta u - Z \cos \theta \delta \theta] \mathbf{e}_x + [\delta w - Z \sin \theta \delta \theta] \mathbf{e}_z. \quad (6.38)$$

La variation de  $\mathbf{E}$  se calcule à partir de la linéarisation consistante des équations (6.23) et (6.24), avec les variations de  $e$ ,  $\kappa$  et  $\gamma$ .

$$\delta e = \cos \theta \delta u' + \sin \theta \delta w' + \underbrace{[-(1 + u') \sin \theta + w' \cos \theta]}_{\gamma} \delta \theta, \quad (6.39a)$$

$$\delta \kappa = \delta \theta', \quad (6.39b)$$

$$\delta \gamma = -\sin \theta \delta u' + \cos \theta \delta w' - \underbrace{[(1 + u') \cos \theta + w' \sin \theta]}_{1+e} \delta \theta. \quad (6.39c)$$

Par suite, le travail des efforts intérieurs est

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W}_i &= - \iiint_{\Omega} [S_{xx}\delta E_{xx} + 2S_{xz}\delta E_{xx}] d\Omega, \\ &= - \iiint_{\Omega} [S_{xx}(\delta e - Z\delta\kappa) + S_{xz}\delta\gamma] d\Omega, \\ &= - \int_0^L [N\delta e + M\delta\kappa + T\delta\gamma] dX,\end{aligned}\tag{6.40}$$

où les efforts généralisés définis au paragraphe 6.3.3 sont introduits. En insérant les équations (6.39) dans (6.40) puis en intégrant par partie,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W}_i &= \int_0^L \left\{ (N \cos \theta - T \sin \theta)' \delta u + (N \sin \theta + T \cos \theta)' \delta w + [T(1 + e) - N\gamma + M'] \delta \theta \right\} dX \\ &\quad - \left[ (N \cos \theta + T \sin \theta) \delta u + (N \sin \theta + T \cos \theta) \delta w + M \delta \theta \right]_0^L = 0.\end{aligned}\tag{6.41}$$

En prenant l'équation (6.38) et par le même enchaînement, le travail des efforts extérieurs se met sous la forme

$$\delta\mathcal{W}_e = \int_0^L (n\delta u + p\delta w + q\delta\theta) dX + \left[ N_e\delta u + T_e\delta w + M_e\delta\theta \right]_0^L.\tag{6.42}$$

$p$  et  $n$  sont les efforts linéiques extérieurs appliqués, respectivement, suivant  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_z$ .  $q$  est un moment linéique et  $N_e$ ,  $T_e$  et  $M_e$  sont les efforts (forces et moments) appliqués aux extrémités de la poutre.

Enfin, pour le travail des efforts d'accélération,  $\mathbf{\Gamma}_{/\mathcal{R}}$  est calculée en dérivant deux fois par rapport au temps l'expression (6.6). Ainsi, la vitesse et l'accélération du point  $m$  dans le repère  $\mathcal{R}$  s'expriment par

$$\mathbf{v}_{/\mathcal{R}} = [\dot{u} - Z\dot{\theta} \cos \theta] \mathbf{e}_x + [\dot{w} - Z\dot{\theta} \sin \theta] \mathbf{e}_z,\tag{6.43a}$$

$$\mathbf{\Gamma}_{/\mathcal{R}} = [\ddot{u} - Z(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta)] \mathbf{e}_x + [\ddot{w} - Z(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)] \mathbf{e}_z.\tag{6.43b}$$

Après produit scalaire avec  $\delta\mathbf{u}$ , les termes en  $\dot{\theta}^2$  s'éliminent. Puis, après intégration sur la section droite de la poutre, les termes facteurs de  $Z$  disparaissent.

$$\delta\mathcal{W}_a = \int_0^L (\rho A \ddot{u} \delta u + \rho A \ddot{w} \delta w + \rho I \ddot{\theta} \delta \theta) dX.\tag{6.44}$$

En appliquant le principe des travaux virtuels, c'est à dire l'équation (6.36) quel que soit  $\delta\mathbf{u}$ , soit encore, quels que soient  $\delta u$ ,  $\delta w$  et  $\delta \theta$ , le terme en facteur de chacun de ces champs virtuels est nul. Les trois équations du mouvement sont ainsi définies par

$$\boxed{\begin{cases} \rho A \ddot{u} = (N \cos \theta - T \sin \theta)' + n, \\ \rho A \ddot{w} = (N \sin \theta + T \cos \theta)' + p, \\ \rho I \ddot{\theta} = T(1 + e) - N\gamma + M' + q. \end{cases}}\tag{6.45a}$$

$$\tag{6.45a}$$

$$\tag{6.45b}$$

$$\tag{6.45c}$$

et les conditions aux limites naturelles par

$$N \cos \theta + T \sin \theta = N_e \quad \text{en } X = 0, L\tag{6.46a}$$

$$N \sin \theta + T \cos \theta = T_e \quad \text{en } X = 0, L\tag{6.46b}$$

$$M = M_e \quad \text{en } X = 0, L.\tag{6.46c}$$

Dans le cas particulier d'une poutre encastree/libre, les conditions aux limites sont  $u = w = \theta = 0$  en  $X = 0$  et  $N_e = T_e = M_e = 0$  en  $X = L$ . D'où

$$u(0) = w(0) = \theta(0) = 0, \quad (6.47a)$$

$$N(L) = T(L) = M(L) = 0. \quad (6.47b)$$

Ces équations, liées à un modèle de Timoshenko où le cisaillement transverse n'est pas négligé, ont été écrites auparavant, dans le cas où  $\gamma = 0$  dans [138, 89, 91, 50], en étudiant directement l'équilibre d'un petit élément de poutre. L'aspect "automatique" dans l'établissement des équations régissant le mouvement d'une poutre en grands déplacements/grandes rotations et petites déformations n'apparaît qu'en utilisant la décomposition polaire du gradient de la transformation et en utilisant le principe des travaux virtuels. Ce qui ne se trouve pas dans les références citées ci-dessus.

### (b) Cas avec rotation

Lorsque la poutre est en rotation telle que  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$  avec  $\Omega$  constant (Fig. 6.3), cela ne modifie que le travail des efforts d'accélération  $\delta \mathcal{W}_a$ . Un repère galiléen  $\mathcal{R}$  et un repère

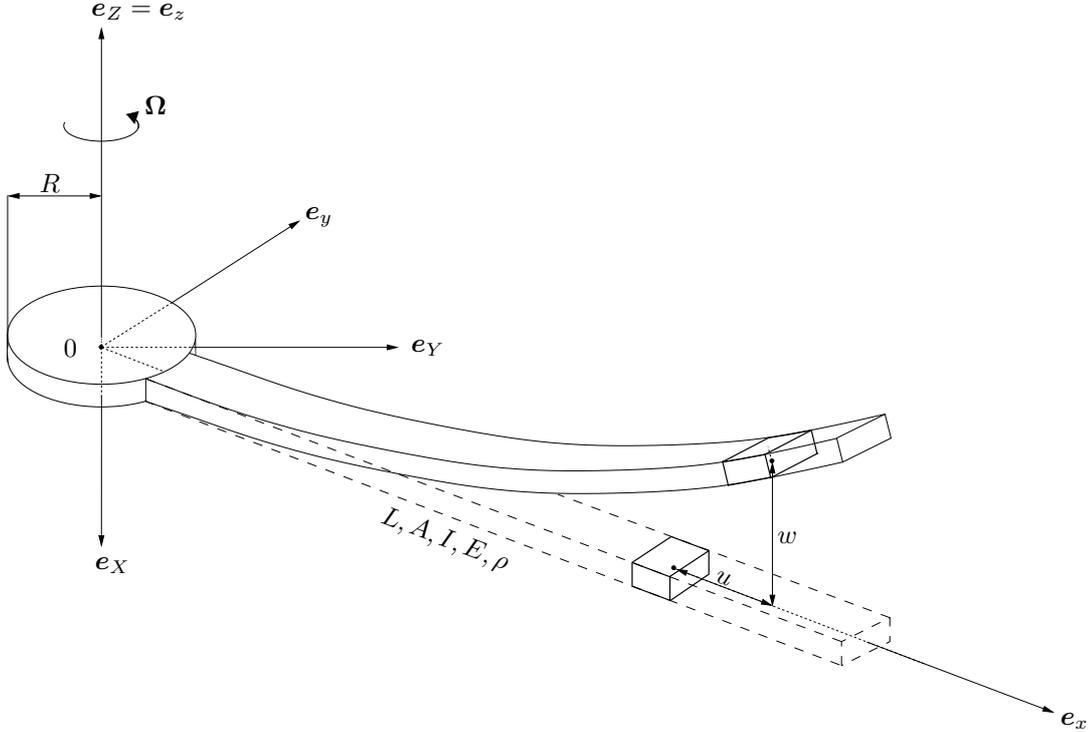


FIG. 6.3 – Poutre en rotation à  $\Omega$  constant.

tournant  $\mathcal{R}_t$  sont définis comme suit d'après la figure 6.3.

$$\mathcal{R} = (0, \mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_t = (0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$$

La vitesse et l'accélération du point  $m$  de la poutre en rotation sont

$$\mathbf{v}/\mathcal{R} = \mathbf{v}/\mathcal{R}_t + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}m, \quad (6.48a)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}/\mathcal{R} = \boldsymbol{\Gamma}/\mathcal{R}_t + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}/\mathcal{R}_t}_{\text{Accélération de Coriolis}} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}m)}_{\text{Accélération d'entraînement}}. \quad (6.48b)$$

$\mathbf{v}/_{\mathcal{R}_t}$  et  $\mathbf{\Gamma}/_{\mathcal{R}_t}$  sont calculées en dérivant deux fois par rapport au temps l'expression (6.6).

$$\mathbf{v}/_{\mathcal{R}_t} = [\dot{u} - Z\dot{\theta} \cos \theta] \mathbf{e}_x + [\dot{w} - Z\dot{\theta} \sin \theta] \mathbf{e}_z, \quad (6.49a)$$

$$\mathbf{\Gamma}/_{\mathcal{R}_t} = [\ddot{u} - Z(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta)] \mathbf{e}_x + [\ddot{w} - Z(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)] \mathbf{e}_z. \quad (6.49b)$$

Du fait que le vecteur rotation n'a qu'une seule composante suivant  $\mathbf{e}_z$ , il vient

$$\mathbf{v}/_{\mathcal{R}} = [\dot{u} - Z\dot{\theta} \cos \theta] \mathbf{e}_x + [R + X + u - Z \sin \theta] \mathbf{e}_y + [\dot{w} - Z\dot{\theta} \sin \theta] \mathbf{e}_z, \quad (6.50a)$$

$$\mathbf{\Gamma}/_{\mathcal{R}} = [\ddot{u} - Z(\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 \sin \theta) - \Omega^2 (R + X + u - Z \sin \theta)] \mathbf{e}_x + [\ddot{w} - Z(\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta)] \mathbf{e}_z \quad (6.50b)$$

où  $R$  a été rajouté dans l'expression de  $\mathbf{Om}$  pour tenir compte du rayon du disque auquel est encastrée la poutre (Fig. 6.3). Le produit scalaire avec  $\delta \mathbf{u}$  et une intégration sur la section droite donnent la nouvelle expression du travail des efforts d'accélération

$$\delta \mathcal{W}_a = \int_0^L \rho A [\ddot{u} - \Omega^2 (R + X + u)] \delta u + \rho A \ddot{w} \delta w + \rho I (\ddot{\theta} - \Omega^2 \sin \theta \cos \theta) \delta \theta \, dX. \quad (6.51)$$

Un taux de rotation constant appliqué à la structure ajoute deux termes d'inertie d'entraînement dans l'expression de  $\delta \mathcal{W}_a$ . Le terme  $\Omega^2 (R + x + u)$  est la précontrainte axiale due à la rotation et  $\rho I \Omega^2 \sin \theta \cos \theta$  un moment additionnel. Toutes les forces d'inertie de Coriolis sont reprises par l'encastrement puisque l'on se place dans une configuration à deux dimensions. De nouveau, en appliquant le principe des travaux virtuels, c'est à dire l'équation (6.36) quels que soient  $\delta u$ ,  $\delta w$  et  $\delta \theta$ , le terme en facteur de chacun de ces champs virtuels est nul. Les trois équations du mouvement de la poutre en rotation se mettent sous la forme

$$\begin{cases} \rho A \ddot{u} = (N \cos \theta - T \sin \theta)' + \rho A \Omega^2 (R + X + u) + n, & (6.52a) \\ \rho A \ddot{w} = (N \sin \theta + T \cos \theta)' + p, & (6.52b) \\ \rho I \ddot{\theta} = T(1 + e) - N\gamma + M' + \rho I \Omega^2 \sin \theta \cos \theta + q. & (6.52c) \end{cases}$$

Avec des conditions limites identiques au cas  $\Omega = 0$  (6.47a) :

$$u(0) = w(0) = \theta(0) = 0 \quad (6.53a)$$

$$N(L) = T(L) = M(L) = 0 \quad (6.53b)$$

## 6.4 Modèles analytiques

Deux modèles analytiques ont été comparés. Le premier est basé sur les hypothèses de von Kármán où n'est retenu dans l'expression de la déformation axiale que le premier terme de flexion non linéaire (terme quadratique). Ce modèle prédit correctement le couplage membrane/flexion qui intervient dans les plaques et les coques lorsque ces dernières vibrent avec des amplitudes valant plusieurs fois leur épaisseur [129]. De même, le comportement vibratoire en grande amplitude d'une poutre avec déplacement axial bloqué à ses extrémités est prédit de manière très satisfaisante avec ce modèle [136, 76, 17, 105]. Dans le cas d'une poutre encastrée/libre qui ne tourne pas, la source des non-linéarités n'est pas le couplage membrane/flexion mais les non-linéarités de courbure, qui n'apparaissent qu'à partir de l'ordre trois. Par conséquent, le modèle de von Kármán produit une réponse linéaire. À l'inverse, en présence de force d'inertie (effet centrifuge), ce modèle prédit un comportement non linéaire provenant du fait que la poutre est précontrainte par la rotation [98, 95].

Pour étudier le comportement non linéaire d'une poutre encastrée/libre à un ordre plus élevé, il a été proposé dans la littérature un modèle analytique basé sur l'hypothèse d'inextensibilité [38, 91]. Celui-ci a été largement utilisé mais uniquement en l'absence de rotation. L'hypothèse d'inextensibilité est ici étendue au cas où la poutre est en rotation.

Après une étape d'adimensionnement, les équations des deux modèles sont discrétisées par projection sur les modes linéaires de la structure au repos (sans la précontrainte due à la rotation). Le système se présente alors sous la forme d'un ensemble d'oscillateurs couplés par des non-linéarités quadratiques et cubiques. Puis, une méthode d'équilibrage harmonique permet de ramener le système d'équations à un système algébrique du second degré dans le cas où la réponse est périodique. Enfin, la résolution en régime forcée sinusoïdale est menée à l'aide d'une méthode asymptotique numérique (MAN, [32]).

### 6.4.1 Modèle de von Kármán

La première étape dans la construction de modèle de vibration plane en grande amplitude d'une poutre est de considérer le modèle linéaire augmenté d'un terme de couplage membrane/flexion quadratique. Ce modèle non linéaire de base est obtenu en linéarisant tous les termes des équations générales du mouvement (6.52a), (6.52b) et (6.52c), sauf celui correspondant au couplage membrane/flexion.

Deux formulations sont proposées. La première est en effort/déplacement et présente uniquement des non-linéarités quadratiques. Quant à la seconde, qui est la plus répandue, elle est écrite en déplacement et contient des non-linéarités quadratiques et cubiques. L'objectif poursuivi est de montrer que seule la première formulation permet de vérifier les conditions aux limites non linéaires d'une poutre encastrée-libre.

Une poutre rectiligne à section rectangulaire constante dont le matériau est homogène et isotrope est considérée. Par ailleurs, le cisaillement  $\gamma$  est négligé et seul l'effort linéique  $p$  est gardé. Puis, la cinématique de poutre est linéarisée ( $\theta$  petit) et ne sont conservés que les termes linéaires sauf le couplage membrane/flexion.

La linéarisation au premier ordre et l'absence de cisaillement permet d'écrire  $\gamma = 0$ . Les équations (6.52a), (6.52b) et (6.52c) se simplifient en

$$\begin{cases} \rho A \ddot{u} = N' - (T\theta)' + \rho A \Omega^2 (R + X + u), & (6.54a) \\ \rho A \ddot{w} = (N\theta)' + T' + p, & (6.54b) \\ \rho I \ddot{\theta} = T(1 + e) + M' + \rho I \Omega^2 \theta. & (6.54c) \end{cases}$$

Les termes du second ordre qui sont négligés sont  $T\theta$  et  $Te$ . D'autre part, en utilisant la relation (6.34b), qui relie le moment  $M$  et l'angle de rotation  $\theta$ , et (6.54c), une expression de  $T$  fonction uniquement de  $\theta$  peut être trouvée

$$T = -EI\theta'' + \rho I (\ddot{\theta} - \Omega^2 \theta). \quad (6.55)$$

L'équation (6.31) permet d'écrire l'angle  $\theta$  en fonction du déplacement transverse  $w$ . En linéarisant cette dernière, cela donne  $\theta = w'$ , puis, en remplaçant  $T$  par son expression dans (6.54b)

$$\rho A \ddot{u} = N' + \rho A \Omega^2 (R + X + u), \quad (6.56a)$$

$$\rho A \ddot{w} = (Nw')' - EIw'''' + \rho I (\ddot{w}' - \Omega^2 w'') + p, \quad (6.56b)$$

avec pour expression de l'effort tranchant  $T = -EIw'''' + \rho I (\ddot{w}' - \Omega^2 w'')$ . Il est à noter qu'une augmentation du taux de rotation  $\Omega$ , donc de l'effort de traction  $N$ , a une influence sur l'équation en déplacement transverse (6.56b) par l'intermédiaire du terme couplage  $(Nw')'$ .

Une hypothèse supplémentaire, souvent employée, traite l'équation (6.56a) comme quasi-statique [98]. Dans ce cas, l'accélération axiale  $\ddot{u}$  est négligée. Une dernière simplification consiste à éliminer les inerties de rotation  $\rho I$  qui n'ont que peu d'effet lorsqu'on s'intéresse aux premiers modes de vibration d'une structure [134]. Au final, le modèle de von Kármán se présente sous la forme

$$N' + \rho A \Omega^2 (R + X + u) = 0, \quad (6.57a)$$

$$\rho A \ddot{w} + EI w'''' - (N w')' = p. \quad (6.57b)$$

Étant données toutes les hypothèses du modèle, qui sont, pour rappel

- $\gamma = 0$ ,
- $\cos \theta \approx 1$ ,  $\sin \theta \approx \theta$ ,
- $T\theta \approx 0$ ,  $Te \approx 0$ ,

Les relations suivantes sont vérifiées :  $\theta = w'$ ,  $M = EI w''$  et  $T = -EI w'''$ . De plus, d'après (6.57a),  $N'(0) = -\rho A \Omega^2 R$ . Ainsi, les conditions aux limites des équations générales du mouvement (6.53a) et (6.53b) se particularisent en

$$N'(0) = -\rho A \Omega^2 R, \quad N(L) = 0, \quad (6.58a)$$

$$w(0) = w'(0) = w''(L) = w'''(L) = 0. \quad (6.58b)$$

### (a) Formulation en effort et déplacement

Les équations du mouvement (6.57a) et (6.57b) sont fonctions de  $N$  et  $w$  mais aussi du champ de déplacement axial  $u$ . Il donc nécessaire d'exprimer  $u$  en fonction de  $N$  et  $w$  afin de se ramener à un système de deux équations à deux inconnues. L'effort généralisé  $N$  s'écrit, d'après (6.34a),  $N = EAe$  où  $e$  est la déformation axiale de Green-Lagrange obtenue après linéarisation consistante (6.24a). Dans le cadre des petites déformations, un développement limité au premier ordre donne

$$e = u' + \frac{1}{2} w'^2 \quad \text{soit} \quad N = EA \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right). \quad (6.59)$$

L'hypothèse classique de von Kármán, qui consiste à ne garder dans les relations déformation/déplacement que le premier terme non linéaire de flexion ( $\frac{1}{2} w'^2$ ) dans la déformation axiale, apparaît clairement dans (6.59). Ceci amène à écrire la dérivée du déplacement axial de la manière suivante

$$u' = \frac{N}{EA} - \frac{1}{2} w'^2. \quad (6.60)$$

En dérivant une fois (6.57a), puis en injectant (6.60), il vient

$$N'' + \rho A \Omega^2 \left( 1 + \frac{N}{EA} - \frac{1}{2} w'^2 \right) = 0, \quad (6.61a)$$

$$\rho A \ddot{w} + EI w'''' - (N w')' = p. \quad (6.61b)$$

Les conditions aux limites sont (Eq. 6.58a) et (Eq. 6.58b).

### (b) Formulation en déplacement

Pour établir la formulation en déplacement, la relation (6.59) est utilisée et  $N$  est remplacé par son expression en fonction du déplacement transverse et axial. Le système d'équation

(6.57a) et (6.57b) se transforme en

$$EAu'' + EA w'' w' + \rho A \Omega^2 (R + X + u) = 0, \quad (6.62a)$$

$$\rho A \ddot{w} + EI w'''' - EA \left( u' w' + \frac{1}{2} w'^3 \right)' = p. \quad (6.62b)$$

Cette formulation a le désavantage de contenir des non-linéarités cubiques. En effet, la résolution par une méthode asymptotique numérique ayant lieu sur un système algébrique quadratique, il faut ramener un système d'ordre trois à un système d'ordre deux, ce qui implique d'augmenter par  $N^2$  le nombre d'équations à résoudre, avec  $N$  le nombre d'équations présentant une non-linéarité cubique. Ce qui, en terme de temps de calcul peut s'avérer relativement coûteux.

Pour le modèle en déplacement, les conditions aux limites des équations générales du mouvement (6.53a) et (6.53b) se particularisent en

$$u(0) = 0, \quad u'(L) = -\frac{1}{2} w'^2(L), \quad (6.63a)$$

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad w''(L) = w'''(L) = 0. \quad (6.63b)$$

Comme l'étape de discrétisation consiste à décomposer le déplacement transverse  $w$  et axial  $u$  sur la base des modes propres linéaires de la poutre non précontrainte par la rotation, la condition en déplacement  $u' = -\frac{1}{2} w'^2$ , qui est non linéaire ne peut pas être vérifiée. La formulation en déplacement a donc été abandonnée au profit de celle en effort/déplacement.

### (c) Adimensionnement

Adimensionner les équations (6.61a) et (6.61b) présente deux avantages. D'une part, le problème n'est plus piloté que par un seul paramètre, noté  $\varepsilon$ , et d'autre part, les valeurs prises par les quantités présentes dans les équations sont proches de l'unité, ce qui assure un bon conditionnement des matrices lors de la résolution du système linéaire de chaque branche de solution par une méthode de continuation.

L'adimensionnement est le suivant

$$\bar{X} = \frac{X}{X_0}, \quad x_0 = L, \quad (6.64a)$$

$$\bar{w} = \frac{w}{w_0}, \quad w_0 = L, \quad (6.64b)$$

$$\bar{R} = \frac{R}{R_0}, \quad R_0 = L, \quad (6.64c)$$

$$\bar{N} = \frac{N}{N_0}, \quad N_0 = EA, \quad (6.64d)$$

$$\bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad t_0^2 = \frac{\rho AL^4}{EI}, \quad (6.64e)$$

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega_0}, \quad \Omega_0^2 = t_0^{-2}, \quad (6.64f)$$

$$\bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad p_0 = \frac{EI}{L^3}, \quad (6.64g)$$

où  $\bar{X}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{N}$ ,  $\bar{t}$ ,  $\bar{\Omega}$  et  $\bar{p}$  sont sans dimension.

Les équations (6.61a) et (6.61b) adimensionnées se présentent sous la forme

$$\bar{N}'' + \varepsilon \bar{\Omega}^2 \left( 1 + \bar{N} - \frac{1}{2} \bar{w}'^2 \right) = 0, \quad (6.65a)$$

$$\ddot{\bar{w}} + \bar{w}'''' - \frac{1}{\varepsilon} (\bar{N} \bar{w}')' = \bar{p}, \quad (6.65b)$$

avec les conditions aux limites

$$N'(0) = -\varepsilon \Omega^2 R, \quad N(1) = 0, \quad (6.66a)$$

$$w(0) = w'(0) = w''(1) = w'''(1) = 0. \quad (6.66b)$$

L'unique paramètre géométrique du système est

$$\varepsilon = \frac{I}{AL^2} = \frac{h^2}{12L^2}, \quad (6.67)$$

Par la suite, l'écriture  $\bar{\phantom{x}}$  n'est plus utilisée afin de ne pas alourdir les notations.

#### (d) Prise en compte de la rotation

Pour résoudre (6.65a) et (6.65b), il est commode d'écrire  $N$  comme la somme d'une contribution statique  $N_s$ , ne dépendant que de  $X$ , et d'une contribution dynamique  $N_d$ , fonction de  $X$  et de  $t$ .

$$N(X, t) = N_s(X) + N_d(X, t). \quad (6.68)$$

Procéder de cette manière nécessite d'avoir 2 étapes de résolution. La première correspond à la mise en rotation de l'aube, c'est un problème statique sans vibration transverse, où il s'agit de calculer l'élongation due à cette précontrainte. La seconde étape est celle où la poutre vibre autour de la position précontrainte, c'est un problème de dynamique classique.

$N_s$  vérifie la version statique de l'équation (6.65a) sans déflexion transverse,  $w(X, t) \equiv 0$ , qui est donnée par

$$N_s' + \varepsilon \Omega^2 N_s = -\varepsilon \Omega^2. \quad (6.69)$$

En utilisant les conditions limites (6.66a), l'expression de  $N_s$  est

$$N_s = \frac{1 + \mu R \sin(\mu)}{\cos(\mu)} \cos(\mu X) - \mu R \sin(\mu X) - 1, \quad (6.70)$$

avec  $\mu^2 = \varepsilon \Omega^2$ . Il est à noter que  $N_s = u_s' = e_s$  où  $e_s$  correspond à la déformation axiale linéaire due à la mise en rotation de la poutre [98].

En introduisant  $N = N_s + N_d$  dans (6.65a) et (6.65b), les équations du mouvement deviennent

$$N_d'' + \varepsilon \Omega^2 \left( N_d - \frac{1}{2} w'^2 \right) = 0, \quad (6.71a)$$

$$\ddot{w} + w'''' - \frac{1}{\varepsilon} (N_d w')' - \frac{1}{\varepsilon} (N_s w')' = p. \quad (6.71b)$$

**(e) Discrétisation**

La discrétisation consiste à projeter le déplacement  $w$  et l'effort de traction "dynamique"  $N_d$  sur leur base de modes propres respective, puis à utiliser les propriétés d'orthogonalités des modes afin d'obtenir un ensemble d'oscillateurs couplés.

Pour cela, il est nécessaire d'effectuer une séparation de variables sur  $w$  définie par  $w(X, t) = \Phi(X)q(t)$ . L'équation d'équilibre linéaire tirée de (6.65b) devient

$$\Phi''''/\Phi = -\ddot{q}/q = \omega^2. \quad (6.72)$$

(6.72) est une égalité de deux fonctions de variables indépendantes. Les deux fonctions sont donc égales à une constante. Cette constante est choisie positive pour assurer la stabilité de la solution en temps. Pour la partie en espace

$$\Phi'''' - \beta^4 \Phi = 0 \implies \Phi(X) = A \cos(\beta X) + B \sin(\beta X) + C \cosh(\beta X) + D \sinh(\beta X), \quad (6.73)$$

avec  $\beta = \omega^2$ . Les constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont calculées à partir des conditions aux limites (6.66b)

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = 0, \quad (6.74a)$$

$$\Phi''(1) = \Phi'''(1) = 0. \quad (6.74b)$$

Le système d'équation qui en découle a une solution non triviale si

$$\cos(\beta) \cosh(\beta) + 1 = 0. \quad (6.75)$$

Les modes transverses possibles sont donc caractérisés par

$$\Phi_k(X) = \cos(\beta_k X) - \cosh(\beta_k X) + \frac{\cos(\beta_k) + \cosh(\beta_k)}{\sin(\beta_k) + \sinh(\beta_k)} (\sinh(\beta_k X) - \sin(\beta_k X)), \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad (6.76)$$

où les  $\beta_k$  sont solutions de l'équation (6.75). Ainsi le déplacement transverse s'écrit

$$w(X, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(X) q_k(t), \quad (6.77)$$

avec les conditions d'orthogonalité

$$\int_0^1 \Phi_i(X) \Phi_j(X) dX = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \Phi_i''''(X) \Phi_j(X) dX = \beta_i^4 \delta_{ij}. \quad (6.78)$$

Les modes propres  $(\omega_k, \Phi_k)$  sont les modes transverses linéaires de la poutre sans rotation.

En procédant de manière similaire pour l'effort de traction "dynamique",

$$N_d(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(x) \eta_k(t), \quad (6.79a)$$

$$\Psi_k(X) = \sqrt{2} \cos(\alpha_k X), \quad k \in \mathbb{N}^* \quad \text{où} \quad \alpha_k = (2k-1) \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (6.79b)$$

avec les conditions d'orthogonalité

$$\int_0^1 \Psi_i(X) \Psi_j(X) dX = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \Psi_i''(X) \Psi_j(X) dX = -\alpha_i^2 \delta_{ij}. \quad (6.80)$$

Les modes propres  $(\alpha_k, \Psi_k)$  sont les modes axiaux linéaires de la poutre précontrainte.

En injectant (6.79a) dans (6.71a), en multipliant par  $\Psi_k$ , en intégrant entre 0 et 1, puis en utilisant les propriétés d'orthogonalité (6.80), l'équation discrétisée du mouvement axial s'écrit

$$0 = (\Omega^2 - \alpha_k^2) \eta_k - \Omega^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} E_{pq}^k q_p q_q, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (6.81)$$

En injectant (6.77) dans (6.71b), en multipliant par  $\Phi_k$ , en intégrant entre 0 et 1, puis en utilisant les propriétés d'orthogonalité (6.78), il est obtenu l'équation discrétisée du mouvement transverse

$$\ddot{q}_k + \beta_k^4 q_k = \sum_{p=1}^{\infty} A_p^k q_p + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} H_{pq}^k \eta_p q_q + p_k, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (6.82)$$

Les coefficients  $E_{pq}^k$ ,  $A_p^k$  et  $H_{pq}^k$ , ainsi que le forçage modal  $p_k$  sont donnés par

$$E_{pq}^k = \int_0^1 \Phi_p' \Phi_q' \Psi_k \, dX, \quad (6.83a)$$

$$A_p^k = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 (N_s \Phi_p')' \Phi_k \, dX, \quad (6.83b)$$

$$H_{pq}^k = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 (\Psi_p \Phi_q')' \Phi_k \, dX, \quad (6.83c)$$

$$p_k = - \int_0^1 p \Phi_k \, dX. \quad (6.83d)$$

Par la suite, les sommes sont tronquées à  $N_t$  modes transverses et  $N_a$  modes axiaux.

#### (f) Résolution en régime forcé sinusoïdal

La résolution du système en régime forcé sinusoïdal implique de rechercher les solutions périodiques des équations (6.81) et (6.82) tronquées respectivement à  $N_t$  modes transverses et  $N_a$  modes axiaux, par la méthode de l'équilibrage harmonique [90] couplée à la méthode asymptotique numérique (MAN) [32, 33], codée sous *Matlab* sous le nom de *Manlab* [15].

Une excitation sinusoïdale ponctuelle est appliquée en bout de poutre,

$$p = \tilde{p} \delta(X - 1) \sin \omega t \quad \text{soit} \quad p_k = \tilde{p} \Phi_k(1) \sin \omega t, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad (6.84)$$

avec  $\omega$  la pulsation du forçage et  $\tilde{p}$  son amplitude. D'autre part, lorsqu'il est choisi d'introduire de l'amortissement dans un problème de vibration libre, représenté par l'équation  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ , une façon simple de construire une matrice d'amortissement diagonale dans la base des modes propres consiste à réaliser une somme pondérée des termes de masse et de raideur telle que  $\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$ . En projetant le vecteur solution sur les modes propres  $\mathbf{X}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k q_k(t)$ , il est obtenu, pour tout entier  $k$  non nul

$$\ddot{q}_k + \underbrace{(a + b\beta_k^4)}_{c_k} \dot{q}_k + \beta_k^4 q_k = 0. \quad (6.85)$$

Comme le facteur d'amortissement du  $k$ -ième mode, noté  $\xi_k$ , est défini par  $\xi_k = c_k/(2\beta_k^2)$ , il vient  $\xi_k = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{\beta_k^2} + b\beta_k^2 \right)$ . Un amortissement proportionnel à la masse ( $b = 0$ ) conduit à

prendre  $a = 2\xi_k\beta_k^2$ , ainsi  $c_k = 2\xi_k\beta_k^2$ . Ce type d'amortissement est utilisé par la suite dans les équations discrétisées du mouvement.

Pour résoudre le système constitué des équations (6.81) et (6.82), il est nécessaire, dans un premier temps, de se ramener à un système d'équations différentielles du premier ordre non linéaires de  $n = 2N_t + N_a$  équations à  $n + 1$  inconnues, dépendant d'un paramètre de continuation, de la forme

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \omega) = \mathbf{0}, \quad (6.86)$$

où le vecteur résidu d'équation  $\mathbf{R}$  et le vecteur des inconnues  $\mathbf{U}$  appartiennent à  $\mathbb{R}^n$  et  $\omega$  à  $\mathbb{R}$ . Le paramètre de continuation, qui est une inconnue, est la pulsation d'excitation  $\omega$ . En effet, la méthode de continuation *MAN* utilisée dans *Manlab* repose sur la recherche des branches de solutions plutôt que des points solutions. Pour cela, le vecteur  $\mathbf{U}$  est décomposé en série de puissances tronquée à un certain ordre d'une variable  $a$  appelée paramètre de chemin.

$$\mathbf{U}(a) = \sum_{i=0}^{\text{ordre}} a^i \mathbf{U}^i. \quad (6.87)$$

L'intérêt d'utiliser des séries est de pouvoir aller à des ordres élevés plus simplement qu'avec la méthode des échelles multiples. Ceci fournit des représentations riches en informations sur la branche. Or, ce n'est possible avec la version actuelle de la *MAN*, que si le vecteur d'équation  $\mathbf{R}$  est écrit dans un formalisme simple et adapté, ce qui est le cas lorsque  $\mathbf{R}$  est quadratique par rapport à  $\mathbf{U}$  [15].

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}), \quad (6.88)$$

avec  $\mathbf{L}_0$  un vecteur constant,  $\mathbf{L}$  un opérateur linéaire en  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{Q}$  un opérateur bilinéaire en  $\mathbf{U}$ . En introduisant les variables  $v_k = \dot{q}_k$ , les équations (6.81) et (6.82) se réécrivent

$$\begin{cases} \dot{q}_k = v_k & (6.89a) \\ \dot{v}_k = -2\xi_k\beta_k^2 v_k - \beta_k^4 q_k + \sum_{p=1}^{N_t} A_p^k q_p + \sum_{p=1}^{N_a} \sum_{q=1}^{N_t} H_{pq}^k \eta_p q_q + p_k & (6.89b) \\ 0 = (\Omega^2 - \alpha_k^2) \eta_k - \Omega^2 \sum_{p=1}^{N_t} \sum_{q=1}^{N_t} E_{pq}^k q_p q_q & (6.89c) \end{cases}$$

Puis, en utilisant le formalisme (6.88), (6.89) devient

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + \mathbf{F} \sin \omega t \quad \text{où} \quad \mathbf{U} = (q_1, \dots, q_{N_t}, v_1, \dots, v_{N_t}, \eta_1, \dots, \eta_{N_a})^T \quad (6.90)$$

Dans un deuxième temps, la méthode de l'équilibrage harmonique permet d'obtenir un système d'équations algébriques. Pour cela,  $\eta_k$  et  $q_k$  sont décomposés en série de Fourier tronquée à  $H$  harmoniques

$$\eta_k(t) = \eta_k^0(t) + \sum_{h=1}^H \left( \eta_k^{(h)c} \cos(h\omega t) + \eta_k^{(h)s} \sin(h\omega t) \right), \quad (6.91a)$$

$$q_k(t) = q_k^0(t) + \sum_{h=1}^H \left( q_k^{(h)c} \cos(h\omega t) + q_k^{(h)s} \sin(h\omega t) \right). \quad (6.91b)$$

Les solutions  $N_d(X, t)$  et  $w(X, t)$  s'écrivent alors

$$N_d(X, t) = N_d^0(X) + \sum_{h=1}^H \left( N_d^{(h)c}(X) \cos(h\omega t) + N_d^{(h)s}(X) \sin(h\omega t) \right), \quad (6.92a)$$

$$w(X, t) = w^0(X) + \sum_{h=1}^H \left( w^{(h)c}(X) \cos(h\omega t) + w^{(h)s}(X) \sin(h\omega t) \right), \quad (6.92b)$$

avec

$$N_d^{(i)}(X) = \sum_{k=1}^{N_t} \Psi_k(X) \eta_k^{(i)}, \quad (6.93a)$$

$$w^{(i)}(X) = \sum_{k=1}^{N_t} \Phi_k(X) q_k^{(i)}, \quad (6.93b)$$

en notant  $i = 0, 1c, 1s, \dots, Hc, Hs$ . Du reste, l'amplitude des harmoniques est définie, pour tout  $h = 1, 2, \dots, H$ , par

$$\eta_k^{(h)} = \sqrt{\left(\eta_k^{(h)c}\right)^2 + \left(\eta_k^{(h)s}\right)^2}, \quad N_d^{(h)}(X) = \sqrt{\left(N_d^{(h)c}(X)\right)^2 + \left(N_d^{(h)s}(X)\right)^2}, \quad (6.94a)$$

$$q_k^{(h)} = \sqrt{\left(q_k^{(h)c}\right)^2 + \left(q_k^{(h)s}\right)^2}, \quad w^{(h)}(X) = \sqrt{\left(w^{(h)c}(X)\right)^2 + \left(w^{(h)s}(X)\right)^2}. \quad (6.94b)$$

Le vecteur des inconnues  $\mathbf{U}$  s'obtient à partir de (6.91a) et (6.91b)

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}^0(t) + \sum_{h=1}^H \left( \mathbf{U}^{hc} \cos(h\omega t) + \mathbf{U}^{hs} \sin(h\omega t) \right), \quad (6.95)$$

ce qui conduit à un système de  $(2N_t + N_a)(2H + 1)$  équations algébriques

$$\mathbf{0} = \mathbf{L}(\mathbf{Z}) + \mathbf{Q}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) - \omega \mathbf{M}(\mathbf{Z}) + \mathbf{F} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Z} = (\mathbf{U}^0, \mathbf{U}^{1c}, \mathbf{U}^{1s}, \dots, \mathbf{U}^{Hc}, \mathbf{U}^{Hs})^T. \quad (6.96)$$

$\mathbf{Z}$  est un vecteur de taille  $(2N_t + N_a^2)(2H + 1)$  contenant les harmoniques de chaque variable. Le paramètre de continuation  $\omega$  étant aussi une inconnue du problème, le vecteur  $\omega \mathbf{M}$ , venant de la dérivation temporelle de  $\mathbf{U}$ , est également un terme quadratique de l'équation (6.96).

### 6.4.2 Modèle inextensible

L'équation (6.65b) du modèle de von kármán ne comporte qu'une seule non-linéarité géométrique  $(Nw')'$ , qui couple l'effet de précontrainte de la rotation et des vibrations axiales avec les vibrations transverses. De surcroît, l'hypothèse quasi-statique  $\ddot{u} = 0$  revient à négliger, d'après (6.59), les non-linéarités inertielles

$$\ddot{u} = \int_0^L \left( \frac{\ddot{N}}{EA} - \frac{1}{2} (w'^2)'' \right) dX.$$

Dans la plupart des études portant sur le comportement d'une poutre en grande amplitude, les non-linéarités inertielles sont considérées comme ayant une grande influence sur la réponse vibratoire [90, 91]. De plus, du fait de la linéarisation dans le modèle de von Kármán, le terme  $T\theta$ , qui contient des non-linéarités de courbure (géométrique) du type  $(w'''w')'$ , n'est pas pris

en compte. Or, il a été montré dans [38, 39], que l'effet de celles-ci, qui sont généralement négligées au profit des non-linéarités inertielles, est du même ordre de grandeur que l'effet de ces dernières.

Pour ces deux raisons, un second modèle analytique sans cisaillement ( $\gamma = 0$ ) a été développé afin d'appréhender plus finement le comportement non linéaire d'une poutre encastree/libre. Une hypothèse, beaucoup moins restrictive que celles appliquées au modèle de von kármán, postule l'inextensibilité de la poutre autour de la position précontrainte. Il est à noter que cette hypothèse est généralement appliquée dans le cas où il n'y a pas de rotation [38, 91]. Il est proposé ici de relâcher cette restriction afin de pouvoir prendre en compte une rotation de la structure. Aucune autre hypothèse n'intervient jusqu'à la résolution proprement dite. La cinématique est celle définie par (6.6) et l'accélération axiale  $\ddot{u}$  est prise en compte. En dernier lieu, et afin de pouvoir résoudre les équations, le modèle inextensible est développé à l'ordre trois. Cette ordre est celui qui permet d'obtenir un nombre d'équations raisonnable tout en garantissant la consistance du système [63, 110].

### (a) Formulation en déplacement

Les équations générales du mouvement (6.52a), (6.52b) et (6.52c) sans cisaillement sont utilisées. Un nouveau paramètre  $\lambda$  est introduit, tel que

$$\lambda = 1 + e, \quad (6.97)$$

avec  $e$  la déformation axiale de Green-Lagrange obtenue après linéarisation consistante (6.24a). En outre, seul l'effort linéique  $p$  est gardé.

$$\rho A \ddot{u} = (N \cos \theta - T \sin \theta)' + \rho A \Omega^2 (R + X + u), \quad (6.98a)$$

$$\rho A \ddot{w} = (N \sin \theta + T \cos \theta)' + p, \quad (6.98b)$$

$$\rho I \ddot{\theta} = T \lambda + M' + \rho I \Omega^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (6.98c)$$

Les conditions aux limites sont (6.53a) et (6.53b). La procédure de mise en équation consiste à tirer de (6.98a) une expression de  $N$  et à trouver une expression de  $T$  à partir de (6.98c). Puis, à utiliser (6.98b) comme équation du mouvement, fonction uniquement de  $w$  et  $\lambda$ . De part les conditions limites (6.53b), une intégration entre  $L$  et  $X$  de (6.98a) autorise la réécriture suivante

$$N = \frac{1}{\cos \theta} \left( \rho A \int_L^X (\ddot{u} - \Omega^2 (R + X + u)) dX + T \sin \theta \right). \quad (6.99)$$

L'effort tranchant est directement donné par

$$T = \frac{1}{\lambda} \left( \rho I \left( \ddot{\theta} - \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \right) - M' \right). \quad (6.100)$$

Il a été montré au paragraphe §6.3.2 (a), que pour une cinématique d'Euler-Bernouilli ( $\gamma = 0$ ), les relations (6.10), (6.11a) et (6.11b) sont exactes. Elles permettent d'obtenir respectivement une expression de  $u$ ,  $\sin \theta$  et  $\cos \theta$ .

$$u = \int_0^X \lambda \sqrt{1 - \left( \frac{w'}{\lambda} \right)^2} - 1 dX, \quad (6.101a)$$

$$\sin \theta = \frac{w'}{\lambda}, \quad (6.101b)$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \left( \frac{w'}{\lambda} \right)^2}, \quad (6.101c)$$

L'équation (6.101a) vient du fait que  $\int_0^X u' dX = u(X) - u(0) = u(X)$ . En utilisant la relation  $M = EI\theta'$  et en insérant les trois équations précédentes dans (6.99), (6.100) et (6.98b), ces dernières se transforment en

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{w'}{\lambda}\right)^2}} \left[ \rho A \int_L^X \left( \int_0^X \lambda \sqrt{1 - \left(\frac{w'}{\lambda}\right)^2} dX \right)'' dX - \rho A \Omega^2 \int_L^X \left( R + X + \int_0^X \lambda \sqrt{1 - \left(\frac{w'}{\lambda}\right)^2} - 1 dX \right) dX + T \frac{w'}{\lambda} \right], \quad (6.102)$$

$$\left( N \frac{w'}{\lambda} \right)' + \left( T \sqrt{1 - \left(\frac{w'}{\lambda}\right)^2} \right)' = \rho A \ddot{w} + p, \quad (6.103)$$

avec

$$T = \frac{\rho I}{\lambda} \arcsin \left( \frac{w'}{\lambda} \right)'' - \rho I \Omega^2 \frac{w'}{\lambda^2} \sqrt{1 - \left(\frac{w'}{\lambda}\right)^2} - \frac{EI}{\lambda} \arcsin \left( \frac{w'}{\lambda} \right)'''. \quad (6.104)$$

Une fois remplacé  $T$  par son expression, (6.102) et (6.103) sont uniquement fonction de  $N$  et  $w$  puisque  $\lambda = 1 + e = 1 + (N/EA)$ . Ainsi, *les deux équations générales en effort/déplacement, sans cisaillement, du mouvement d'une poutre en rotation sont (6.102) et (6.103)*. Il est à remarquer que l'hypothèse d'inextensibilité n'a pas encore été faite.

La première étape pour se ramener à une formulation en déplacement et d'injecter (6.104) et (6.102) dans (6.103).

$$\begin{aligned} & \rho A \left[ \frac{w'}{\lambda \sqrt{1 - \left(\frac{w'}{\lambda}\right)^2}} \int_L^X \left( \int_0^X \lambda \sqrt{1 - \left(\frac{w'}{\lambda}\right)^2} dX \right)'' dX \right]' \\ & - \rho A \Omega^2 \left[ \frac{w'}{\lambda \sqrt{1 - \left(\frac{w'}{\lambda}\right)^2}} \int_L^X \left( R + X + \int_0^X \lambda \sqrt{1 - \left(\frac{w'}{\lambda}\right)^2} - 1 dX \right) dX \right]' \\ & - EI \left[ \frac{\arcsin \left(\frac{w'}{\lambda}\right)'''}{\lambda \sqrt{1 - \left(\frac{w'}{\lambda}\right)^2}} \right]' + \rho I \left[ \frac{\arcsin \left(\frac{w'}{\lambda}\right)''}{\lambda \sqrt{1 - \left(\frac{w'}{\lambda}\right)^2}} \right]' - \rho I \Omega^2 \left( \frac{w'}{\lambda^2} \right)' = \rho A \ddot{w} + p \end{aligned} \quad (6.105)$$

À ce stade, il peut être vérifié que si le taux de rotation  $\Omega$  est nul, ce qui implique qu'il n'y a pas de déformation axiale, alors  $\lambda = 1$  et l'équation classique d'une poutre inextensible sans rotation fournie dans [91, 38] est retrouvée.

Cependant, lorsque  $\Omega \neq 0$ , l'équation (6.105) est fonction du déplacement transverse et de la déformation axiale par l'intermédiaire de  $\lambda$ . Afin qu'elle ne dépende plus que de  $w$ , il est nécessaire de faire l'hypothèse d'inextensibilité. Cette hypothèse est réalisée dans la littérature [91, 38] en posant directement  $e = 0$ . Dans le cas traité ici, où la poutre est en rotation, il est plus intéressant de décomposer la déformation axiale  $e$  en deux contributions. La première, notée  $e_s$ , est la déformation statique due à la mise en rotation de la poutre. Quant à la seconde, notée  $e_d$ , elle correspond à une déformation "dynamique". De manière équivalente à (6.68), il est posé

$$e(X, t) = e_s(X) + e_d(X, t). \quad (6.106)$$

L'hypothèse d'inextensibilité, élargie au cas de la rotation, consiste à écrire  $e(X, t) \approx e_s(X)$ . L'expression de  $e_s$  est issue de la résolution du problème statique sans déflexion transverse associé à (6.98a), qui est calculée au paragraphe §6.4.1 (d).

Jusqu'ici, les seules hypothèses énoncées sont : un cisaillement nul et une déformation axiale indépendante du temps. Cependant, afin de pouvoir résoudre les équations, il est nécessaire de faire deux simplifications. La première est de négliger les inerties de rotations  $\rho I$ , ceci, pour les mêmes raisons que celles énoncées dans [134]. La seconde, qui est la seule à avoir un réel impact sur la qualité du modèle, est de réaliser un développement limité en  $w$  de l'équation (6.105). Il a été montré par la suite (§6.5.4), que la limite de validité du modèle simplifié est uniquement due à cette troncature. Par ailleurs, il a été choisi de négliger les termes de déformation statique d'ordre supérieur ou égal à 2. L'équation du mouvement (6.105), où  $\lambda$  a été remplacé par  $1 + e_s$ , est la suivante

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{w} = & -EI (w'''' + w' w''^2 + w'''' w'^2 - (w' e_s)'' - w'''' e_s)' \\ & - \rho A \frac{1}{2} \left[ w' \int_L^X \left( \int_0^X w'^2 dX \right)'' dX \right]' \\ & - \rho A \Omega^2 \left[ (w'(1 - e_s) + \frac{1}{2} w'^3) \int_L^X (R + X) dX \right]' \\ & + \rho A \Omega^2 \left[ w' \int_L^X \int_0^X \left( \frac{1}{2} w'^2 + e_s \right) dX dX \right]' + p \end{aligned} \quad (6.107)$$

Cette équation appelle plusieurs remarques. Premièrement, les non-linéarités sont cubiques. En effet, [63, 110] ont montré que les équations qui gouvernent le déplacement transverse ne sont consistantes que si les termes de couplage sont au minimum d'ordre trois. Deuxièmement,  $(w' w''^2 + w'''' w'^2)$  représentent les non-linéarités de courbure et  $-(w' e_s)'' - w'''' e_s$  est la précontrainte linéaire due à la rotation. Les termes facteurs de  $\rho A \Omega^2$  contiennent des non-linéarités dues à la rotation. Enfin, le terme d'accélération non linéaire est celui qui permet de tenir compte du raccourcissement de la poutre, c'est la non-linéarité inertielle. Pai et Nayfeh [91] ont mis en évidence le fait que la non-linéarité géométrique a un effet raidissant alors que celle inertielle a un effet assouplissant. Par conséquent, l'effet cumulé de ces deux phénomènes peut être soit raidissant soit assouplissant selon la force de chacune des deux non-linéarités. Un autre fait intéressant, étudié également par Nayfeh et Pai, est que le premier mode, pour une poutre encastree-libre à section constante et isotrope, est raidissant alors que le deuxième mode et les suivants sont assouplissants.

Les conditions aux limites du problème (6.107) se déduisent de (6.53a) et (6.53b), qui sont celles du problème général. Contrairement au modèle de von Kármán, où la linéarisation de la cinématique conduit à  $w(0) = w'(0) = w''(L) = w'''(L) = 0$ , une cinématique développée au troisième ordre donne des conditions aux limites qui tiennent compte de la rotation. Un développement limité à l'ordre trois de (6.101b) permet d'avoir une expression de l'angle  $\theta$  et de ses dérivées  $\theta'$ ,  $\theta''$ .

$$\theta = \arcsin \left( \frac{w'}{\lambda} \right) = \frac{w'}{\lambda} + \frac{1}{6} \left( \frac{w'}{\lambda} \right)^3 + o \left( \frac{w'}{\lambda} \right)^3. \quad (6.108)$$

L'encastrement donne toujours  $w(0) = 0$ . De plus, sachant que  $\lambda(L) = 1$ ,

$$w(0) = 0, \quad (6.109a)$$

$$\theta(0) = 0 \iff w'(0) = 0, \quad (6.109b)$$

$$M(L) = EI\theta'(L) = 0 \iff \theta'(L) = 0 \implies w''(L) = -w'(L)e'_s(L), \quad (6.109c)$$

$$T(L) = -EI\theta''(L) = 0 \iff \theta''(L) = 0 \implies w'''(L) = -2w''(L)e'_s(L) - w'(L)e''_s(L). \quad (6.109d)$$

### (b) Adimensionnement

L'adimensionnement est identique à celui du paragraphe §(c). L'équation (6.107) adimensionnée est

$$\begin{aligned} \ddot{w} = & - (w'''' + w'w''^2 + w''w'^2 - \varepsilon(w'e_s)'' - \varepsilon w''''e_s)' \\ & - \frac{1}{2} \left[ w' \int_1^X \left( \int_0^X w'^2 dX \right)'' dX \right]' - \Omega^2 \left[ (w'(1 - \varepsilon e_s) + \frac{1}{2}w'^3) \int_1^X (R + X) dX \right]' \\ & + \Omega^2 \left[ w' \int_1^X \int_0^X \left( \frac{1}{2}w'^2 + \varepsilon e_s \right) dX dX \right]' + p, \end{aligned} \quad (6.110)$$

avec  $\varepsilon = I/(AL^2)$ . La notation  $\bar{\circ}$  est omise.

### (c) Discrétisation

De manière similaire au paragraphe §6.4.1 (e), la discrétisation consiste à projeter le déplacement  $w$  sur une base de modes propres, puis à utiliser les propriétés d'orthogonalités des modes afin d'obtenir un ensemble d'oscillateurs couplés. D'un point de vu mathématique, n'importe quelle base de modes peut être choisie à partir du moment où les conditions aux limites (6.109) sont vérifiées<sup>2</sup>. Pour cette raison, on reprend l'expression (6.73) de  $\Phi$  issue du problème linéaire sans rotation (6.72). Les constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont calculées à partir des conditions aux limites (6.109). Le système suivant est obtenu

$$\begin{cases} A + C = 0 & (6.111a) \\ B + D = 0 & (6.111b) \\ -A \cos(\beta) - B \sin(\beta) + C \cosh(\beta) + D \sinh(\beta) = -a_1 e'_s(1) & (6.111c) \\ A \sin(\beta) - B \cos(\beta) + C \sinh(\beta) + D \cosh(\beta) = -2a_2 e'_s(1) - a_1 e''_s(1) & (6.111d) \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 &= (-A \sin(\beta) + B \cos(\beta) + C \sinh(\beta) + D \cosh(\beta)) \\ a_2 &= (-A \cos(\beta) - B \sin(\beta) + C \cosh(\beta) + D \sinh(\beta)) \end{aligned}$$

qui a une solution non triviale si

$$\begin{aligned} \cos(\beta) \cosh(\beta) + (\cos(\beta) \sinh(\beta) + 2 \sin(\beta) \sinh(\beta) e'_s(1) + \sin(\beta) \cosh(\beta)) e'_s(1) \\ - \sin(\beta) \sinh(\beta) e''_s(1) = -1. \end{aligned} \quad (6.112)$$

---

<sup>2</sup>Bien entendu, le choix d'une "bonne" base se traduit par une convergence rapide et inversement. Il est donc important de choisir une base de modes, qui respectent les conditions aux limites, mais qui assure aussi la convergence de la solution avec le moins de coordonnées modales possible.

Les modes transverses possibles sont caractérisés par

$$\Phi_k(X) = \cos(\beta_k X) - \cosh(\beta_k X) + a_3 (\sinh(\beta_k X) - \sin(\beta_k X)), \quad (6.113)$$

où

$$a_3 = \frac{\cos(\beta_k) + \cosh(\beta_k) + (\sin(\beta_k) + \sinh(\beta_k))e'_s(1)}{\sin(\beta_k) + \sinh(\beta_k) + (\cosh(\beta_k) - \cos(\beta_k))e'_s(1)},$$

avec  $k \in \mathbb{N}^*$ . Les  $\beta_k$  sont solutions de l'équation (6.112) et dépendent du taux de rotation. Dès lors, la projection n'est valable que pour un taux de rotation donné. Le déplacement transverse s'écrit

$$w(X, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(X) q_k(t). \quad (6.114)$$

Les conditions d'orthogonalité sont identiques à (6.78). Les modes propres  $(\omega_k, \Phi_k)$  sont les modes transverses linéaires de la poutre vérifiant les conditions aux limites de la structure en rotation.

L'équation discrétisée du mouvement s'obtient en injectant (6.114) dans (6.110), en multipliant par  $\Phi_k$ , en intégrant entre 0 et 1, puis en utilisant les propriétés d'orthogonalité (6.78)

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k &= \sum_{p=1}^{\infty} (A_p^k + \Omega^2 B_p^k) q_p \\ &\quad - \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \left( \left( \Gamma_{pqr}^k + \frac{1}{2} \Omega^2 \Lambda_{pqr}^k \right) q_q q_r + \Pi_{pqr}^k (\ddot{q}_q q_r + \dot{q}_q \dot{q}_r) \right) q_p + p_k. \end{aligned}} \quad (6.115)$$

Les coefficients  $A_p^k$ ,  $B_p^k$ ,  $\Gamma_{pqr}^k$ ,  $\Lambda_{pqr}^k$  et  $\Pi_{pqr}^k$ , ainsi que le forçage modal  $p_k$  sont

$$A_p^k = \varepsilon \int_0^1 [(\Phi'_p e_s)'' + \Phi_p''' e_s]' \Phi_k \, dX, \quad (6.116a)$$

$$B_p^k = \int_0^1 \left[ \left( \varepsilon \Phi'_p \int_1^X \int_0^X e_s \, dX \, dX \right)' - \left( \Phi'_p (1 - \varepsilon e_s) \int_1^X (R + X) \, dX \right)' \right] \Phi_k \, dX, \quad (6.116b)$$

$$\Gamma_{pqr}^k = \int_0^1 [\Phi'_p \Phi''_q \Phi''_r + \Phi_p''' \Phi'_q \Phi'_r] \Phi_k \, dX, \quad (6.116c)$$

$$\Lambda_{pqr}^k = \int_0^1 \left[ \Phi'_p \Phi'_q \Phi'_r \int_1^X (R + X) \, dX - \Phi'_p \int_1^X \int_0^X \Phi'_q \Phi'_r \, dX \, dX \right]' \Phi_k \, dX, \quad (6.116d)$$

$$\Pi_{pqr}^k = \int_0^1 \left[ \Phi'_p \int_1^X \int_0^X \Phi'_q \Phi'_r \, dX \, dX \right]' \Phi_k \, dX, \quad (6.116e)$$

$$p_k = - \int_0^1 p \Phi_k \, dX. \quad (6.116f)$$

Par la suite, les sommes sont tronquées à  $N_t$  modes transverses.

#### (d) Résolution en régime forcé sinusoïdal

La résolution du système en régime forcé sinusoïdal consiste à rechercher les solutions périodiques de l'équation (6.115), tronquée à  $N_t$  modes transverses, par la méthode de l'équilibrage harmonique [90] couplée à la méthode asymptotique numérique (*MAN* [32]), également

utilisée pour la résolution des équations du modèle de von Kàrmàn. Les différentes étapes pour aboutir au système d'équations algébriques sont les mêmes qu'au paragraphe §(f). Une excitation sinusoïdale ponctuelle de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $\tilde{p}$  est appliquée en bout de poutre et un amortissement proportionnel à la masse est ajouté dans les équations modales (6.115).

Il s'agit d'abord de se ramener à un système d'équations différentielles du premier ordre présentant uniquement des non-linéarités quadratiques, afin de pouvoir résoudre, par la suite, les équations avec la *MAN*. Le même formalisme (6.88) est utilisé. Cela pourrait sembler ne pas convenir pour le système (6.115) où apparaissent des couplages entre coordonnées modales d'ordre trois, mais moyennant une augmentation du nombre d'inconnues, il est possible de se ramener à un système quadratique. Concrètement, (6.115) se réécrit

$$\begin{cases} \dot{q}_k = v_k & (6.117a) \\ \dot{v}_k = \chi_k & (6.117b) \\ 0 = -\chi_k - 2\xi_k \beta_k^2 v_k - \beta_k^4 q_k + \sum_{p=1}^{N_t} (A_p^k + \Omega^2 B_p^k) q_p - \sum_{p=1}^{N_t} (R_p^k + Q_p^k) q_p + p_k & (6.117c) \\ 0 = R_p^k - \sum_{q=1}^{N_t} \sum_{r=1}^{N_t} \left( \Gamma_{pqr}^k + \frac{1}{2} \Omega^2 \Lambda_{pqr}^k \right) q_q q_r & (6.117d) \\ 0 = Q_p^k - \sum_{q=1}^{N_t} \sum_{r=1}^{N_t} \Pi_{pqr}^k (\chi_q q_r + v_q v_r) & (6.117e) \end{cases}$$

Trois nouvelles séries de variables  $\chi_k$ ,  $R_p^k$  et  $Q_p^k$  ont été introduites.  $\chi_k$  autorise le traitement des non-linéarités inertielles du type  $\dot{q}q$ , tandis que  $R_p^k$  et  $Q_p^k$  permettent de ramener le système (6.115) d'ordre trois au système (6.117) d'ordre deux. Le nouveau problème est constitué de  $(3N_t + 2N_t^2)$  équations. Sous forme vectorielle, le système quadratique discrétisé s'écrit

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + \mathbf{F} \cos \omega t \quad , \quad \mathbf{U} = (q_1, \dots, q_{N_t}, v_1, \dots, v_{N_t}, \chi_1, \dots, \chi_{N_t}, R_1^1, \dots, R_{N_t}^{N_t}, Q_1^1, \dots, Q_{N_t}^{N_t})^T \quad (6.118)$$

La méthode de l'équilibrage harmonique permet ensuite d'obtenir un système d'équations algébriques. Pour cela,  $q_k$  est décomposé en série de Fourier tronquée à  $H$  harmoniques. Puis, pareillement qu'à la section §(f), le système est mis sous la forme algébrique

$$\mathbf{0} = \mathbf{L}(\mathbf{Z}) + \mathbf{Q}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) - \omega \mathbf{M}(\mathbf{Z}) + \mathbf{F} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Z} = (\mathbf{U}^0, \mathbf{U}^{1c}, \mathbf{U}^{1s}, \dots, \mathbf{U}^{Hc}, \mathbf{U}^{Hs})^T. \quad (6.119)$$

$\mathbf{Z}$  est un vecteur de taille  $(3N_t + 2N_t^2)(2H + 1)$  contenant les harmoniques de chaque variable. Le paramètre de continuation  $\omega$  étant aussi une inconnue du problème, le vecteur  $\omega \mathbf{M}$ , venant de la dérivation temporelle de  $\mathbf{U}$ , est également un terme quadratique.

## 6.5 Modèle éléments finis

Dans ce chapitre, la cinématique Lagrangienne (6.6), qui permet de tenir compte des grands déplacements et des grandes rotations en deux dimensions, est utilisée pour établir les équations du mouvement par la méthode des éléments finis. Pour cela, un élément de poutre de Timoshenko à deux nœuds est utilisé. Il a été vu précédemment que deux modèles sont couramment utilisés en mécanique des structures : Euler-Bernoulli et Timoshenko. Le modèle de Timoshenko permet de corriger le modèle d'Euler-Bernoulli en prenant en compte

le cisaillement (au premier ordre) dans le calcul de la déformation. Dans cette théorie, une section doit rester droite mais n'est plus astreinte à être perpendiculaire à l'axe neutre de la poutre. L'écart par rapport à la perpendiculaire est produit par le cisaillement transverse  $\gamma$ , qui est supposé constant pour une section donnée.  $\gamma$  reste cependant très petit, de l'ordre de  $10^{-4}$  radians [52]. Bien que ce modèle paraisse plus compliqué du fait de l'introduction du cisaillement, les éléments finis qui en découlent sont en fait plus simples à construire pour la raison suivante. L'hypothèse  $\theta(X)$  indépendant de  $u(X)$  et  $w(X)$  permet d'utiliser des fonctions d'interpolations linéaires pour les déplacements et les rotations, ce qui n'est pas le cas avec Euler-Bernoulli où des fonctions d'interpolations cubiques sont nécessaires puisque  $\theta(X)$  dépend de  $w(X)$ . Les hypothèses de petites déformations, de matériau isotrope linéaire et de section constante sont maintenues.

### 6.5.1 Équations du mouvement

Les équations de Lagrange du mouvement sont

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \mathcal{E}_d}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{g} \quad (6.120)$$

avec  $\mathcal{E}_d$  l'énergie de déformation du système,  $\mathcal{E}_c$  son énergie cinétique,  $\mathbf{u}$  le champ de déplacement définie par 6.6 et  $\mathbf{g}$  les efforts extérieurs. L'énergie de déformation et l'énergie cinétique sont

$$\mathcal{E}_d = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \mathbf{S} : \mathbf{E} \, d\Omega, \quad (6.121)$$

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho \mathbf{v}^T \mathbf{v} \, d\Omega. \quad (6.122)$$

Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  et des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  sont définis à la section 6.3.3. La vitesse  $\mathbf{v}$  d'un point  $m$  de la poutre en rotation est donnée quant à elle par (6.43a). En intégrant sur la section de la poutre, il vient

$$\mathcal{E}_d = \frac{1}{2} \int_0^L EAe^2 + EI\kappa^2 + GA\gamma^2 \, dX, \quad (6.123)$$

$$\mathcal{E}_c = \underbrace{\frac{\rho}{2} \int_0^L (A\dot{u}^2 + A\dot{w}^2 + I_2\dot{\theta}^2) \, dX}_{\mathcal{E}_c^{(2)}} + \underbrace{\frac{\rho\Omega^2}{2} \int_0^L [A(R+X+u)^2 + I \sin^2 \theta] \, dX}_{\mathcal{E}_c^{(0)}}. \quad (6.124)$$

L'énergie de déformation apparaît clairement comme la somme de l'énergie de déformation axiale, de l'énergie de déformation de cisaillement et de l'énergie de déformation de flexion. L'énergie cinétique est la somme de deux contributions. La première,  $\mathcal{E}_c^{(2)}$ , de degré 2 en  $\dot{\mathbf{u}}$  et 0 en  $\mathbf{u}$ , est l'énergie cinétique relative. La seconde,  $\mathcal{E}_c^{(0)}$ , de degré 0 en  $\dot{\mathbf{u}}$  et 2 en  $\mathbf{u}$ , est l'énergie cinétique d'entraînement.

### 6.5.2 Discrétisation éléments finis

L'utilisation de la méthode des éléments finis conduit à approximer la fonction inconnues continues  $\mathbf{u}$  par un vecteur inconnu  $\mathbf{q}$ , appelé vecteur des déplacements nodaux par la suite, dont les composantes sont des valeurs de ces fonctions en certains points appelés nœuds. La poutre est discrétisée à l'aide de  $\mathcal{N}$  éléments finis et la procédure conduit à réécrire les

équations (6.120) en un problème dynamique non linéaire de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0 \text{ donnés} \end{cases} \quad (6.125)$$

Le terme  $\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{q})$  est le vecteur des efforts intérieurs fonction, dans le cas général, des déplacements. Il inclut à la fois la contribution des forces élastiques, des forces de dissipation interne et celles des forces d'inertie. Le terme  $\mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{q})$  représente le vecteur des efforts extérieurs et, dans le cas général, il peut varier avec les déplacements subis par le système.  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse. En identifiant les termes de l'équation 6.125 avec ceux de l'équation 6.120

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_c^{(2)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right), \quad (6.126)$$

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \frac{\partial \mathcal{E}_d}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{E}_c^{(0)}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (6.127)$$

L'élément choisi pour mener la discrétisation est un élément fini de poutre de Timoshenko à 2 nœuds. Chaque nœud  $i$  possède trois degrés de liberté : deux déplacements nodaux  $u_i$  et  $w_i$ , et une rotation nodale  $\theta_i$  autour de l'axe  $\mathbf{e}_y$ .

Le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  et de déformation  $\mathbf{e}^T = [e \ \gamma \ \kappa]$  sont reliés aux déplacements nodaux  $\mathbf{q}$ , respectivement, par la matrice d'interpolation  $\mathbf{N}$  tel que  $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}$ , et par le gradient discrétisé  $\mathbf{B}$  tel que  $\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{q}$ . Les expressions de  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{B}$  sont données dans les annexes A.1 et A.2.

### (a) Calcul de la matrice de masse

La matrice de masse  $\mathbf{M}$  se calcule à partir de (6.126).

$$\mathcal{E}_c^{(2)} = \frac{\rho}{2} \int_0^L (A\dot{u}^2 + A\dot{w}^2 + I\dot{\theta}^2) dX = \frac{\rho}{2} \int_0^L \dot{\mathbf{u}}^T \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} dX \quad (6.128)$$

Puisque  $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}$ ,

$$\mathcal{E}_c^{(0)} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left( \rho \int_0^L \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \mathbf{N} dX \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (6.129)$$

ainsi

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_c^{(2)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \left( \rho \int_0^L \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \mathbf{N} dX \right) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}. \quad (6.130)$$

Le calcul final de  $\mathbf{M}$  est fourni dans l'annexe A.3.

### (b) Calcul du vecteur des efforts intérieurs

Le vecteur des efforts intérieurs est la somme du vecteur des efforts de déformation, noté  $\mathbf{f}_d$ , et du vecteur des efforts d'inertie d'entraînement, noté  $\mathbf{f}_\Omega$ .

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{f}_d - \mathbf{f}_\Omega \quad \text{où} \quad \mathbf{f}_d = \frac{\partial \mathcal{E}_d}{\partial \mathbf{q}} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_\Omega = \frac{\partial \mathcal{E}_c^{(0)}}{\partial \mathbf{q}} \quad (6.131)$$

La présence des termes  $\sin \theta$  et  $\cos \theta$  dans  $e$  et  $\gamma$  implique que  $\mathcal{E}_d$  est une fonction non linéaire de  $\theta$ . Par conséquent, il n'est pas possible de l'exprimer comme le produit d'une matrice par

le vecteur des déplacements nodaux  $\mathbf{q}$ . Dès lors,  $\mathbf{f}_d$  doit être approchée par un développement de  $\mathcal{E}_d$  au premier ordre. Au niveau élémentaire,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{E}_d &= \int_0^L (EAe\delta e + GA\gamma\delta\gamma + EI\kappa\delta\kappa) dX \\ &= \int_0^L [e \ \gamma \ \kappa] \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta e \\ \delta\gamma \\ \delta\kappa \end{bmatrix} dX \\ &= \int_0^L [N \ T \ M] \begin{bmatrix} \delta e \\ \delta\gamma \\ \delta\kappa \end{bmatrix} dX\end{aligned}\quad (6.132)$$

Avec  $N$ ,  $T$  et  $M$  les efforts généralisés définis à la section (6.3.3). Par conséquent,

$$\delta\mathcal{E}_d = \int_0^L [N \ T \ M] \mathbf{B}\delta\mathbf{q} dX = \left( \int_0^L \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} dX \right)^T \delta\mathbf{q} = \mathbf{f}_d^T \delta\mathbf{q} \quad (6.133)$$

Cependant,  $\mathbf{f}_d$  n'est pas obtenu en intégrant exactement. En effet, une intégration réduite à un point de Gauss doit être utilisée afin d'éviter le problème de verrouillage en cisaillement qui intervient dans les éléments de poutre de Timoshenko lorsque le cisaillement est faible [19].

$$\mathbf{f}_d = \int_0^L \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} dX = L\bar{\mathbf{B}}^T \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{T} \\ \bar{M} \end{bmatrix}, \quad (6.134)$$

où  $\bar{N}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{M}$  et  $\bar{B}$  sont calculés à partir des quantités moyennes  $\bar{e}$ ,  $\bar{\gamma}$  et  $\bar{\kappa}$  dans l'élément, évaluées pour  $\theta = \bar{\theta} = (\theta_1 + \theta_2)/2$ . Le calcul effectif de  $\mathbf{f}_d$  est donné dans l'annexe A.3.

Pour obtenir le vecteur des efforts d'inertie d'entraînement  $\mathbf{f}_\Omega$ , il est commode de décomposer l'énergie cinétique d'entraînement en une partie constante, linéaire et non linéaire

$$\mathcal{E}_c^{(0)} = \mathcal{E}_{c, \text{nl}}^{(0)} + \mathcal{E}_{c, \text{lin}}^{(0)} + \mathcal{E}_{c, \text{cste}}^{(0)}, \quad (6.135a)$$

$$\mathcal{E}_{c, \text{nl}}^{(0)} = \frac{\rho I \Omega^2}{2} \int_0^L \sin^2 \theta dX, \quad (6.135b)$$

$$\mathcal{E}_{c, \text{lin}}^{(0)} = \frac{\rho A \Omega^2}{2} \int_0^L 2(R + X)u + u^2 dX, \quad (6.135c)$$

$$\mathcal{E}_{c, \text{cste}}^{(0)} = \frac{\rho A \Omega^2}{2} \int_0^L (R + X)^2 dX. \quad (6.135d)$$

Ainsi,  $\mathbf{f}_\Omega$  s'écrit

$$\mathbf{f}_\Omega = \mathbf{f}_\Omega^{\text{nl}} + \mathbf{f}_\Omega^{\text{lin}} + \mathbf{f}_\Omega^{\text{cste}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{f}_\Omega^{\text{nl}} = \frac{\partial \mathcal{E}_{c, \text{nl}}^{(0)}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{f}_\Omega^{\text{lin}} = \frac{\partial \mathcal{E}_{c, \text{lin}}^{(0)}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{f}_\Omega^{\text{cste}} = \frac{\partial \mathcal{E}_{c, \text{cste}}^{(0)}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (6.136)$$

Dans les problèmes linéaires de rotation de structure (par exemple [31]), le terme  $\mathbf{f}_\Omega^{\text{nl}}$  est négligé et  $\mathbf{f}_\Omega^{\text{lin}}$  s'écrit  $\mathbf{f}_\Omega^{\text{lin}} = \mathbf{K}_c \mathbf{q}$  où  $\mathbf{K}_c$  est la matrice de raideur centrifuge et  $\mathbf{f}_\Omega^{\text{cste}}$  correspond aux efforts centrifuges.

Au final, le vecteur des efforts intérieurs  $\mathbf{f}_{\text{int}}$ , en utilisant les grandeurs introduites ci-dessus, se met sous la forme

$$\boxed{\mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{f}_d - \mathbf{f}_\Omega^{\text{nl}} - \mathbf{f}_\Omega^{\text{lin}} - \mathbf{f}_\Omega^{\text{cste}}} \quad (6.137)$$

Les expressions de  $\mathbf{f}_\Omega^{\text{nl}}$ ,  $\mathbf{f}_\Omega^{\text{lin}}$ , et  $\mathbf{f}_\Omega^{\text{cste}}$  sont fournies dans l'annexe (A.4).

### 6.5.3 Résolution des équations dynamiques

Il a été établi dans le paragraphe précédent les équations éléments finis du mouvement d'une poutre sous l'hypothèse des grands déplacement/grandes rotations et des petites déformations (Eq. 6.125). L'intégration de la réponse transitoire, tout comme dans le cas linéaire, demande une intuition préalable du comportement de la solution des équations du mouvement. Puisque seuls les premiers modes de vibrations de la poutre sont visés par cette étude, il s'agit d'un problème classique de dynamique des structures et les fréquences basses sont dominantes. Par conséquent, c'est un opérateur d'intégration de type implicite [58] qui a été pris pour obtenir la réponse temporelle du système. Avec une méthode de résolution implicite, les déplacements, vitesses et accélérations apparaissant dans les équations (6.125) ne peuvent être considérés comme des quantités indépendantes puisque liés par l'opérateur d'intégration.

La première étape est d'introduire le vecteur résidu  $\mathbf{r}$ , défini à partir de l'équation du mouvement (6.125) régissant les déplacements  $\mathbf{q}(t)$ .

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (6.138)$$

Le schéma d'intégration utilisé est celui de Newmark, qui est une méthode à un pas. L'état du système est calculé à un instant donné  $t_{n+1} = t_n + h$  en fonction de l'état connu à l'instant  $t_n$  par la formule de Taylor, qui permet d'écrire  $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$  et  $\mathbf{q}_{n+1}$  en fonction de  $\dot{\mathbf{q}}_n$  et  $\mathbf{q}_n$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \\ \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau) \ddot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.139)$$

$\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$  a été développé à l'ordre 0 et  $\mathbf{q}_{n+1}$  à l'ordre 1. L'approximation de la méthode de Newmark consiste à calculer les intégrales de l'accélération par quadrature numérique. Les constantes  $\tilde{\gamma}$  et  $\tilde{\beta}$  sont les deux paramètres de la formule de quadrature utilisée.  $\tilde{\gamma} = 0.5$  et  $\tilde{\beta} = 0.25$  correspond à adopter une valeur moyenne de l'accélération  $\ddot{\mathbf{q}}(\tau) = (\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \ddot{\mathbf{q}}_n)/2$  sur l'intervalle. Ce choix est aussi celui qui rend le schéma inconditionnellement stable. Les relations d'intégration de Newmark temporelle [58] sont

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + h[(1 - \tilde{\gamma})\ddot{\mathbf{q}}_n + \tilde{\gamma}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}] \\ \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + \frac{h^2}{2} \left[ (1 - 2\tilde{\beta})\ddot{\mathbf{q}}_n + 2\tilde{\beta}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \right] \end{aligned} \quad (6.140)$$

Les relations (6.140) peuvent être inversées sous la forme

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \frac{1}{\tilde{\beta}h^2} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_{n+1}^*) \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^* + \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}h} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_{n+1}^*) \end{aligned} \quad (6.141)$$

Avec l'expression des prédicteurs extraites de (6.140) en faisant  $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^* &= \dot{\mathbf{q}}_n + h(1 - \tilde{\gamma})\ddot{\mathbf{q}}_n \\ \mathbf{q}_{n+1}^* &= \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + \frac{h^2}{2} (1 - 2\tilde{\beta})\ddot{\mathbf{q}}_n \end{aligned} \quad (6.142)$$

Par substitution de (6.141) dans (6.138), l'équation résiduelle devient une fonction de  $\mathbf{q}_{n+1}$  seulement

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}_{n+1}) = \mathbf{0} \quad (6.143)$$

La plupart des méthodes de résolution d'un système d'équations tel que (6.143) font appel à une technique de linéarisation. Soit une approximation  $\mathbf{q}_{n+1}^k$  de  $\mathbf{q}_{n+1}$  obtenue à l'itération  $k$ . Dans un certain voisinage de celle-ci, l'équation résiduelle peut être décrite avec une précision satisfaisante par l'expression linéaire

$$\mathbf{r}_L(\mathbf{q}_{n+1}^{k+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{q}_{n+1}^k) + \mathbf{S}(\mathbf{q}_{n+1}^k) (\mathbf{q}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{q}_{n+1}^k). \quad (6.144)$$

La matrice jacobienne  $\mathbf{S}$ , ou matrice d'itération, est définie par

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}_{n+1}^k) = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]_{\mathbf{q}_{n+1}^k}, \quad (6.145)$$

et a pour expression

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{ext}}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (6.146)$$

Ses différents termes peuvent être interprétés comme suit :

- $\partial \mathbf{f}_{\text{int}} / \partial \mathbf{q}$  est la variation des forces internes avec les déplacements et représente donc la matrice de raideur tangente  $\mathbf{K}_{\text{tan}}$  ;
- $\partial \mathbf{f}_{\text{int}} / \partial \dot{\mathbf{q}}$  est la variation des forces internes avec la vitesse et représente la matrice d'amortissement tangente  $\mathbf{C}_{\text{tan}}$  ;
- $\partial \mathbf{f}_{\text{ext}} / \partial \mathbf{q}$  décrit la variation des forces externes avec la géométrie.

En notant que les formules d'intégrations (6.141) donnent lieu aux relations

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{\tilde{\beta} h^2} \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta} h} \mathbf{I} \quad (6.147)$$

L'expression finale de la matrice d'itération est

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \mathbf{K}_{\text{tan}} + \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta} h} \mathbf{C}_{\text{tan}} + \frac{1}{\tilde{\beta} h^2} \mathbf{M} \quad (6.148)$$

Le système (6.143) peut être résolu de manière itérative par la méthode de Newton-Raphson. Soit  $(\mathbf{q}_{n+1}^k, \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^k, \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^k)$  l'approximation des déplacements, vitesses et accélérations obtenue à l'itération  $k$  du pas de temps  $n + 1$ . Celles-ci peuvent être corrigées sous la forme  $(\mathbf{q}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{q}^k, \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^k + \Delta \dot{\mathbf{q}}^k, \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^k + \Delta \ddot{\mathbf{q}}^k)$ . La correction des déplacements est solution de l'équation linéarisée

$$\mathbf{S} \Delta \mathbf{q}^k = -\mathbf{r}(\mathbf{q}_{n+1}^k) \quad (6.149)$$

et les corrections de vitesses et d'accélérations y sont reliées par la loi d'intégration temporelle (6.141).

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\mathbf{q}}^k &= \frac{1}{\tilde{\beta} h^2} \Delta \mathbf{q}^k \\ \Delta \dot{\mathbf{q}}^k &= \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta} h} \Delta \mathbf{q}^k \end{aligned} \quad (6.150)$$

Les relations ci-dessus donnent lieu au schéma d'intégration temporelle décrit par l'organigramme de la figure (6.4) [58]. Celui-ci comporte, à l'intérieur de la boucle sur le temps, une boucle d'itération sur l'équilibre qui s'arrête lorsque le résidu tombe en dessous d'un certain seuil de précision.

$$\left\| \mathbf{r}(\mathbf{q}_{n+1}^k) \right\| < \varepsilon \|\mathbf{f}_{\text{int}}\| \quad (6.151)$$

La quantité  $\|\mathbf{f}_{\text{int}}\|$  représente une mesure des forces en présence dans le système.

La procédure de calcul de la figure (6.4) a les caractéristiques suivantes

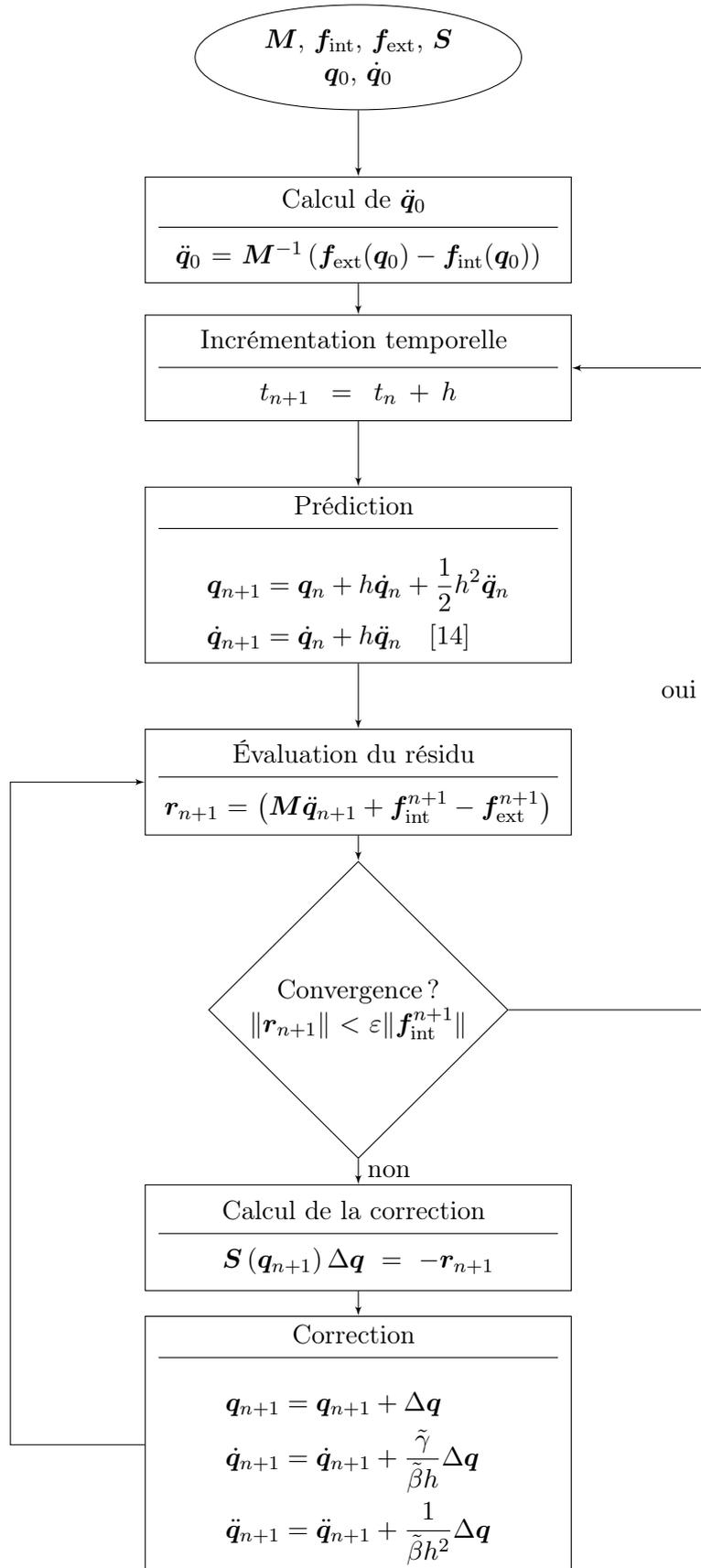


FIG. 6.4 – Calcul implicite de la réponse temporelle d'un système non linéaire.

- À chaque pas de temps, l'itération doit être démarrée avec une prédiction des déplacements, vitesses et accélérations. La prédiction qui correspond à poser  $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \mathbf{0}$  est une approximation de départ donnant lieu à une procédure d'itération relativement stable [58];
- La méthode de Newton-Raphson étant caractérisée par un certain rayon de convergence dans le voisinage de la solution, la convergence de la procédure itérative n'est garantie que dans la mesure où la prédiction adoptée est suffisamment proche de la solution de (6.143). Il en résulte que, dans le cas non linéaire, le pas de temps non seulement gouverne la précision de la solution, mais influence aussi la stabilité de la procédure itérative. Son choix est donc en soi un problème;
- Le système linéaire donnant lieu au calcul de la correction implique l'évaluation de la matrice jacobienne (6.148). Celle-ci variant avec l'état du système, doit être recalculée à chaque itération. La construction et la résolution du système (6.149) contribuent donc pour la plus large part au coût de la solution;
- Une méthode dite "Newton modifié" consiste à sortir le calcul de la matrice jacobienne de la boucle d'évaluation du résidu. Cela permet de réduire le coût de la procédure itérative sous certaines conditions. En effet, évaluer  $\mathbf{K}_{\text{tan}}$  une seule fois par pas de temps est bénéfique si le nombre d'itérations pour atteindre la convergence du résidu ne devient pas trop grande ou, à nombre d'itérations limite fixé, si le pas de temps ne devient pas trop petit. Globalement, si les amplitudes du mouvement sont moyennes, une seule résolution du système (6.149) par incrément de temps ne conduit pas à une augmentation trop violente du nombre d'itérations. Dans ce cas, le gain de temps est positif. Au contraire, si les amplitudes sont importantes, il est plus intéressant d'avoir une bonne correction et de recalculer  $\mathbf{K}_{\text{tan}}$  à chaque itération, ceci afin d'atteindre plus rapidement la convergence du résidu ou, à nombre d'itérations limite fixé, de ne pas avoir à diminuer trop fortement le pas de temps.

#### (a) Calcul de la matrice de rigidité tangente

Pour pouvoir construire la matrice d'itération  $\mathbf{S}$  (6.148), la matrice de raideur tangente  $\mathbf{K}_{\text{tan}}$  doit être calculée. Selon (6.146),

$$\mathbf{K}_{\text{tan}} = \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{f}_d}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{f}_{\Omega}^{\text{nl}}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{f}_{\Omega}^{\text{lin}}}{\partial \mathbf{q}} \quad (6.152)$$

La dérivée de  $\mathbf{f}_d$  par rapport à  $\mathbf{q}$ , qui est une quantité non linéaire, est approchée à l'aide d'un développement au premier ordre de l'expression (6.134).

$$\delta \mathbf{f}_d = \int_0^L \left( \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} \delta N \\ \delta T \\ \delta M \end{bmatrix} + \delta \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} \right) dX. \quad (6.153)$$

Deux contributions à la raideur totale de la structure apparaissent. La première est la rigidité tangente matérielle  $\mathbf{K}_m$ , qui correspond à la raideur linéaire. La seconde est la rigidité tangente géométrique  $\mathbf{K}_g$ , qui est la raideur non linéaire.

$$\mathbf{K}_m \delta \mathbf{q} = \int_0^L \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} \delta N \\ \delta T \\ \delta M \end{bmatrix} dX \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_g \delta \mathbf{q} = \int_0^L \delta \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} dX \quad (6.154)$$

Sachant que les efforts généralisés sont reliés aux déformations par la loi de comportement  $\mathbf{C}$  (Eq. 6.35), et les déformations aux déplacements nodaux par  $\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{q}$ ,

$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{q} \quad \text{soit} \quad \begin{bmatrix} \delta N \\ \delta T \\ \delta M \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{B}\delta\mathbf{q}. \quad (6.155)$$

La matrice de rigidité tangente matérielle est alors

$$\mathbf{K}_m = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dX. \quad (6.156)$$

La matrice de rigidité tangente géométrique se définit quant à elle par

$$\mathbf{K}_g \delta\mathbf{q} = \int_0^L \delta\mathbf{B}^T \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} dX = \left( \int_0^L \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{q}} \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} dX \right) \delta\mathbf{q}, \quad (6.157)$$

soit,

$$\mathbf{K}_g = \int_0^L \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{q}} \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} dX. \quad (6.158)$$

Les calculs effectifs de  $\mathbf{K}_m$  et  $\mathbf{K}_g$  sont en annexe A.3.

Le calcul de  $\partial \mathbf{f}_\Omega^{\text{lin}} / \partial \mathbf{q}$  est immédiat puisque  $\mathbf{f}_\Omega^{\text{lin}}$  est linéaire,

$$\frac{\partial \mathbf{f}_\Omega^{\text{lin}}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K}_c \mathbf{q}, \quad (6.159)$$

avec  $\mathbf{K}_c$  la matrice de raideur centrifuge.

Enfin,  $\mathbf{f}_\Omega^{\text{nl}}$ , qui est le terme venant de la prise en compte des grandes rotations, donne lieu à l'introduction d'une matrice de raideur tangente géométrique centrifuge notée ici  $\mathbf{K}_{\text{gc}}$ .

$$\frac{\partial \mathbf{f}_\Omega^{\text{nl}}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K}_{\text{gc}}(\mathbf{q})\mathbf{q} \quad (6.160)$$

L'expression complète de la matrice de raideur tangente est alors composée de 4 contributions.

$$\boxed{\mathbf{K}_{\text{tan}} = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_{\text{gc}} - \mathbf{K}_c.} \quad (6.161)$$

### (b) Stratégie de résolution

Pour étudier les vibrations de la poutre en rotation, il est utile de décomposer le déplacement  $\mathbf{q}$  en deux contributions de la manière suivante,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_\Omega + \tilde{\mathbf{q}}$ . La mise en rotation de la poutre amène celle-ci dans un état précontraint (Fig. 6.5) et il faut résoudre le problème statique non linéaire 6.162 pour obtenir le déplacement  $\mathbf{q}_\Omega$ .

$$\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{q}_\Omega) = \mathbf{0}. \quad (6.162)$$

Puis, les vibrations autour de la position précontrainte sont étudiées (Fig. 6.5). Le déplacement  $\tilde{\mathbf{q}}$  est solution du problème dynamique non linéaire

$$\mathbf{M}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{q}_\Omega + \tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (6.163)$$

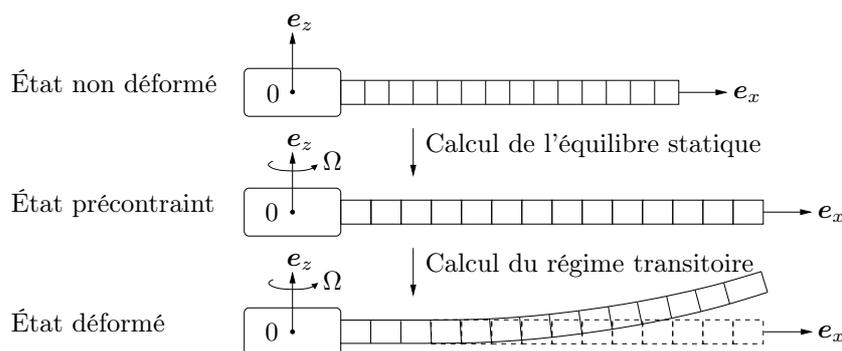


FIG. 6.5 – *Prise en compte de la précontrainte due à la rotation dans le calcul de la réponse transitoire*

Une méthode itérative de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre (6.162). La solution statique  $\mathbf{q}_\Omega$  sert alors de condition initiale en déplacement à l’algorithme de résolution temporelle de la figure (6.4) ainsi qu’à calculer les nouvelles fréquences propres. En effet, la connaissance de ces dernières lorsque la structure tourne permet de définir les bandes de fréquence d’excitation appropriées ainsi que les bons amortissements comme nous le verrons dans le chapitre consacré aux simulations. Le schéma de la figure (6.6) donne une vue d’ensemble des étapes de calcul nécessaires pour obtenir les fonctions de réponse en fréquence.

Puisque par la suite, les résultats des deux modèles analytiques sont évalués par rapport à ceux du modèle éléments finis, le choix du type d’amortissement doit permettre les comparaisons entre modèles.

Une matrice d’amortissement proportionnelle et diagonale du type  $\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$  est souvent utilisée. Cette hypothèse sur l’amortissement est cohérente avec l’hypothèse de structure faiblement dissipative. En effet, il est montré que lorsque l’amortissement est faible et que les fréquences propres sont bien distinctes, l’influence des termes hors diagonale sur le contenu spectral du système peut être négligée [58]. Un amortissement proportionnel à la raideur n’est cependant pas simple à implémenter dans un modèle éléments finis non linéaire car la matrice de raideur du système est recalculée à chaque incrément de l’algorithme de Newton-Raphson. Par conséquent, et de manière identique aux modèles analytiques, l’amortissement est choisi proportionnel à la masse ( $b = 0$ ).

#### 6.5.4 Résultats

La poutre utilisée pour les simulations a les caractéristiques suivantes

$L$ (m)	$b$ (m)	$h$ (mm)	$E$ (GPa)	$\xi_i$	$R$ (m)
1	0.1	5	114	$5 \cdot 10^{-3}, \forall i$	0.1

TAB. 6.1 – *Caractéristiques géométriques et matériau de la poutre.*

Les deux premiers modes de flexion sont simulés pour 3 vitesses de rotations : 0, 1000 et 3000 tours par minute. Les fréquences propres linéaires associées sont données dans le tableau 6.2. Le calcul de ces dernières permet de tracer l’évolution des fréquences propres issues des modèles inextensible et de von Kàrmàn en indice et ainsi de mieux juger de l’importance des phénomènes non linéaires. Le nombre de modes transverses et d’harmoniques pour les deux modèles analytiques : Von Kàrmàn (VK) et Inextensible (Inxt), est choisi de manière à assurer la convergence. En effet, comme le problème est projeté sur les modes de la poutre

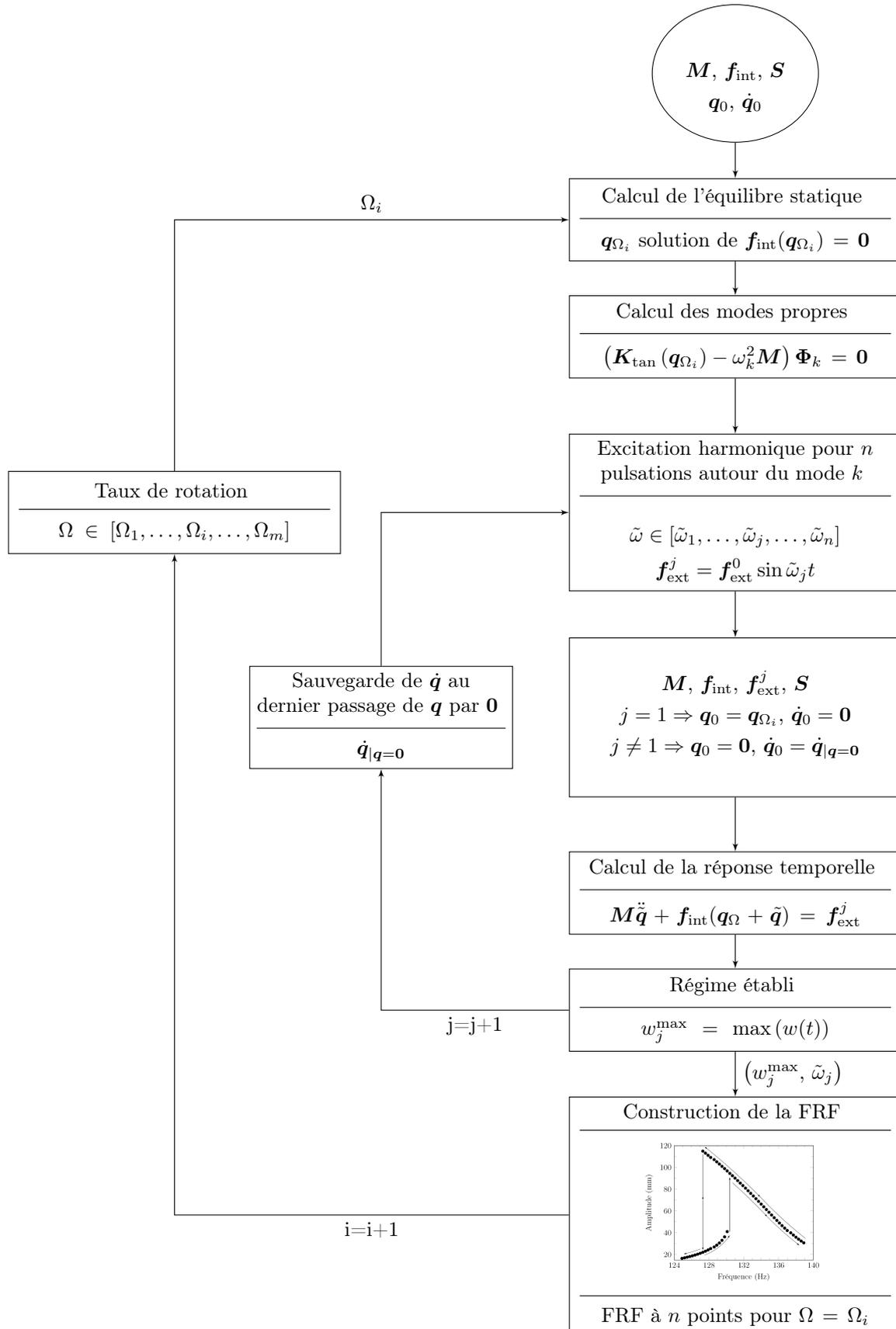


FIG. 6.6 – Chaînage des calculs nécessaires à la construction d'une fonction de réponse en fréquence.

Taux Rotation (tr.min <sup>-1</sup> )	0	1000	3000
Mode 1	3.92	19.07	54.84
Mode 2	24.61	51.21	135.00

TAB. 6.2 – *Fréquences propres linéaires de la poutre (Hz).*

sans rotation, il est nécessaire, lorsque celle-ci tourne, de vérifier que le nombre de modes retenu dans la base de projection est suffisant. En ce qui concerne le nombre d'harmoniques  $H$ , il a été choisi *a priori*, c'est-à-dire sans connaissance préalable de l'importance des effets non linéaires. Pour cela,  $H = 7$ , ce qui assure de retranscrire correctement la physique du problème.

	von Kármán			Inextensible	
	$N_a$	$N_t$	$H$	$N_t$	$H$
Mode 1	4	5	7	4	7
Mode 2	5	6	7	5	7

TAB. 6.3 – *Nombre de modes retenus pour la troncature et nombre d'harmoniques de chaque coordonnée modale.*

Pour le modèle éléments finis, le nombre d'éléments est choisi afin d'assurer la convergence en fréquence. Quant au pas de temps de l'intégration temporelle, il doit être assez fin pour pouvoir capturer les harmoniques au moins à l'ordre 3, pour cela, il est 50 fois plus petit que la période du mode considéré. Enfin, le nombre de périodes doit permettre d'atteindre le régime permanent ; il est fixé à 200. L'écart entre la fréquence de résonance indiquée par le modèle et la fréquence de résonance linéaire est noté  $\Delta f$ .

mode	nombre d'éléments	nombre de ddl	$\Delta f$ (Hz)
1	20	63	0.008
2	40	123	0.03

TAB. 6.4 – *Caractéristiques du modèle éléments finis.*

Enfin, un forçage harmonique ponctuel est appliqué à l'extrémité de la poutre et la pré-contrainte  $N_s$  est calculée pour chacun des taux de rotation.

### (a) Comparaison des trois modèles

Les comportements vibratoires provenant des trois modèles, pour le premier et le second mode de flexion de la poutre, sont comparés, respectivement, sur les figures 6.7(a) à 6.7(e) et 6.7(b) à 6.7(f).

Il est à noter, avant de s'intéresser aux résultats proprement dit, que ces simulations *HBM/MAN*, conduites avec un nombre de modes important, permettent de prendre facilement en compte les couplages modaux, ce qui est difficile à réaliser avec la méthode des échelles multiples qui, le plus souvent, n'est praticable qu'avec un ou deux modes [96].

Différentes conclusions peuvent être tirées de l'observation de la figure 6.7.

La première est que le modèle de von Kármán, comme énoncé précédemment lors de la mise en équation du problème, est linéaire si la structure ne tourne pas et ce, quel que soit le mode

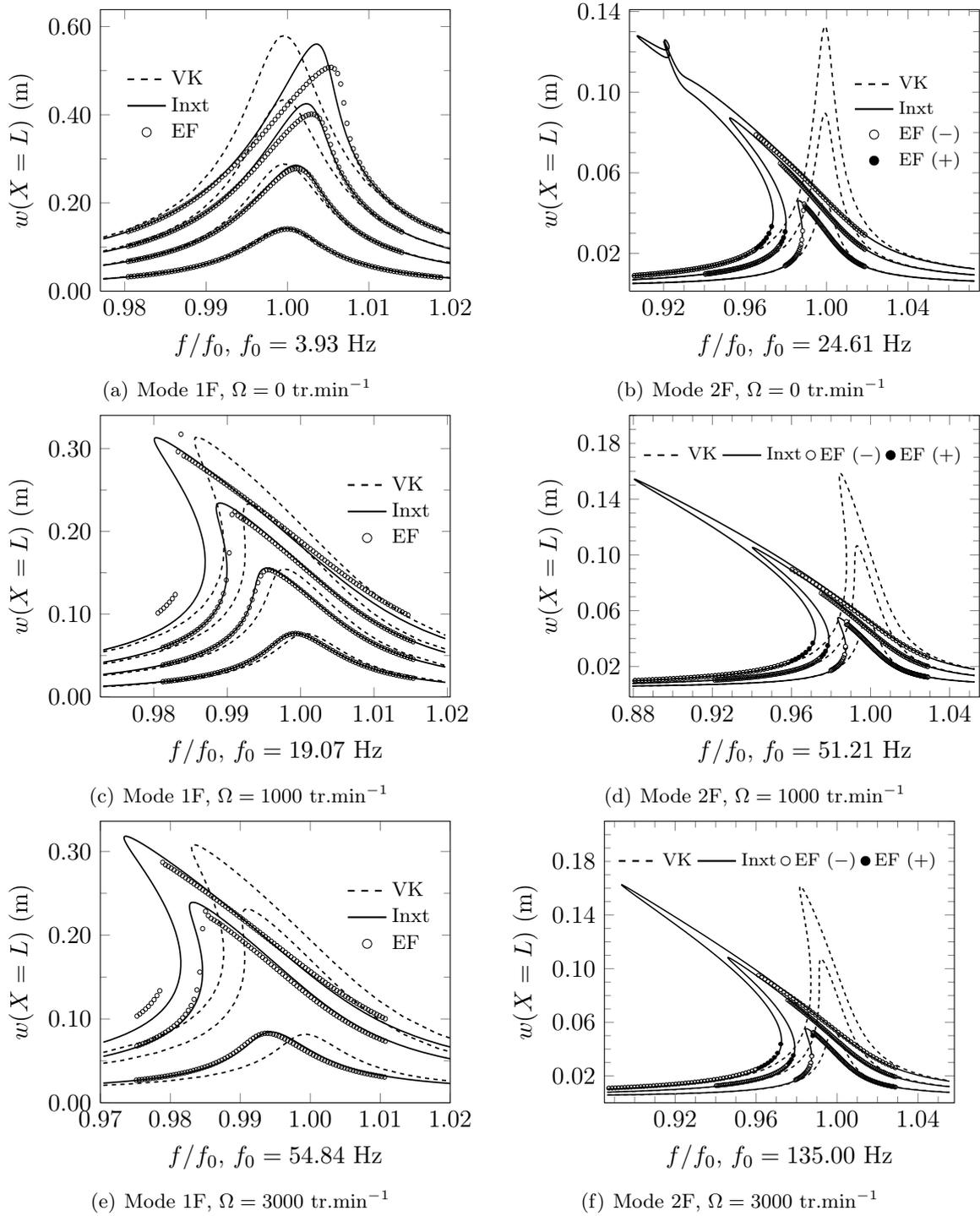


FIG. 6.7 – Comparaison des modèles analytiques et éléments finis pour le premier mode de flexion et 3 taux de rotation.

ou le niveau de forçage. Lorsque le taux de rotation est différent de 0, le modèle VK intègre une non-linéarité due à la précontrainte. Cet unique couplage membrane/flexion dû à la rotation semble suffisant pour prédire, avec une erreur faible par rapport au modèle inextensible ou éléments finis, les non-linéarités apparaissant pour le premier mode. À l'inverse, le modèle VK n'est absolument pas valide pour le second mode, avec ou sans rotation.

La deuxième porte sur le fait que le modèle inextensible et éléments finis donnent des résultats très proches pour les deux modes et tous les taux de rotation mais seulement jusqu'à une certaine amplitude. La limite de validité en amplitude du modèle inextensible s'explique par le développement limité à l'ordre trois de  $\sin \theta$  et  $\cos \theta$ .

La dernière concerne le modèle éléments finis. À l'instar d'un modèle analytique, il est possible de statuer quant à la présence d'un saut, et donc d'une branche instable, si deux fonctions de réponse en fréquence, l'une issue d'un balayage en fréquence montante (légende EF+) et l'autre en fréquence descendante (EF-), sont superposées.

De part les figures 6.7(a) à 6.7(e), il est observé que le premier mode est raidissant à  $\Omega = 0$  tr.min<sup>-1</sup> et assouplissant lorsque la poutre est mise en rotation. Par ailleurs, en se plaçant sur la *backbone curve* à une amplitude  $w = 0.20$  m, pour laquelle le modèle élément fini et inextensible donnent des résultats concordant, le rapport  $f/f_0$  passe successivement de 1.001 à l'arrêt, à 0.992 pour 1000 tr.min<sup>-1</sup>, puis à 0.988 pour 3000 tr.min<sup>-1</sup>. Par conséquent, *les forces centrifuges ont un effet assouplissant pour le premier mode de flexion*. Les figures 6.7(b) à 6.7(f) indiquent que le second mode de flexion est assouplissant pour les 3 taux de rotation. De manière identique, en se positionnant sur la *backbone curve* à une amplitude  $w = 0.06$  m, le rapport  $f/f_0$  prend respectivement, pour chaque taux de rotation, les valeurs 0.980, 0.985 puis 0.990. Ainsi, *les forces centrifuges ont un effet raidissant négligeable pour le second mode de flexion*.

Les figures 6.8, 6.9, 6.10 et 6.11 permettent de quantifier la présence des autres modes dans la réponse de la poutre calculée avec le modèle Inxt, ainsi que les différentes harmoniques de chacun. Elles mettent également en évidence l'écart de comportement obtenu entre ce modèle non linéaire et un modèle linéaire classique. La fréquence observée est indiquées par un cercle noir sur la fonction de réponse en fréquence des figures 6.8(a), 6.9(a), 6.10(a) et 6.11(a).

Pour le mode 1 et  $\Omega = 0$  tr.min<sup>-1</sup>, il n'y a que la fondamentale de la première coordonnée modale qui ait une amplitude importante. L'harmonique 3 de  $q_1$  est très faible, ce qui explique le comportement presque linéaire de la poutre encastree-libre. Pour ce même mode, mais à  $\Omega = 1000$  tr.min<sup>-1</sup>, la présence des modes 2, 3 et 4 est plus marquée et c'est l'harmonique 3 du second mode qui est la plus importante dans la réponse (bien que minime).

Pour le second mode sans rotation, c'est l'harmonique 1 de  $q_1$  et l'harmonique 3 de  $q_2$  et  $q_3$  qui ont les contributions les plus importantes. Très petites par rapport à la fondamentale de  $q_2$ , ces contributions suffisent néanmoins à faire chuter la fréquence de résonance de 4% par rapport au modèle linéaire (Fig. 6.10(a)) pour une amplitude de 8 cm en bout de poutre. Pour  $\Omega = 1000$  tr.min<sup>-1</sup>, l'harmonique 1 de  $q_3$  et  $q_4$  apparaissent également, mais comme dans le cas du premier mode avec rotation, il n'est pas possible de discerner dans les contributions des autres modes, la part due au couplage, de celle nécessaire pour atteindre la convergence du fait que le problème a été projeté sur la base des modes propres de la structure sans rotation.

Il n'y a pas d'intérêt particulier à présenter les résultats pour  $\Omega = 3000$  tr.min<sup>-1</sup> car ils sont équivalents, en terme de couplage modal et de présence des autres harmoniques, à ceux observés pour  $\Omega = 1000$  tr.min<sup>-1</sup>.

### (b) Limite de validité en amplitude du modèle de poutre inextensible

Chaque point de fréquence d'une FRF issue du modèle éléments finis correspond au maximum de déplacement du nœud observé lorsque le régime permanent est atteint.

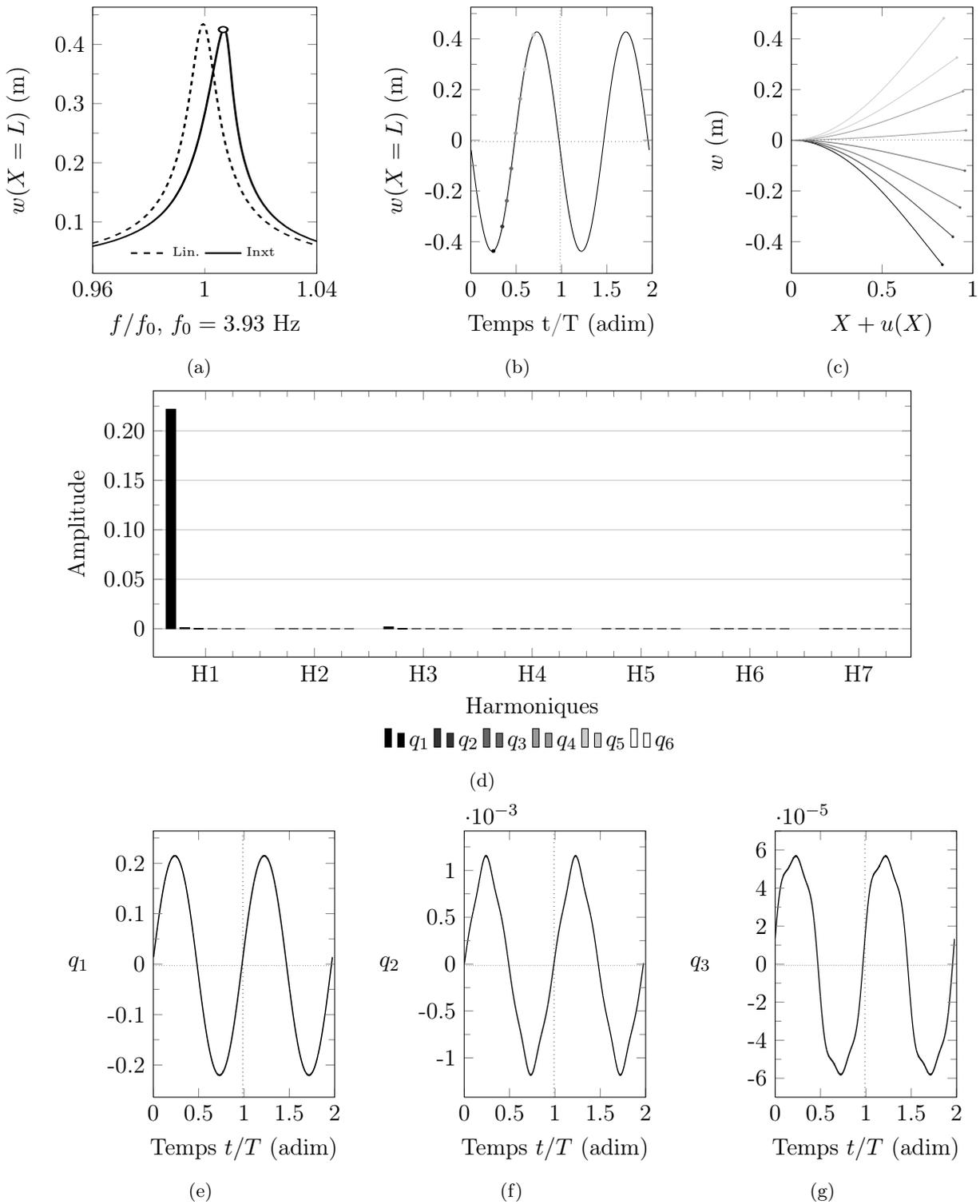


FIG. 6.8 – Mode 1F,  $\Omega = 0$  tr.min<sup>-1</sup>, forçage N°3 (1.5 N).

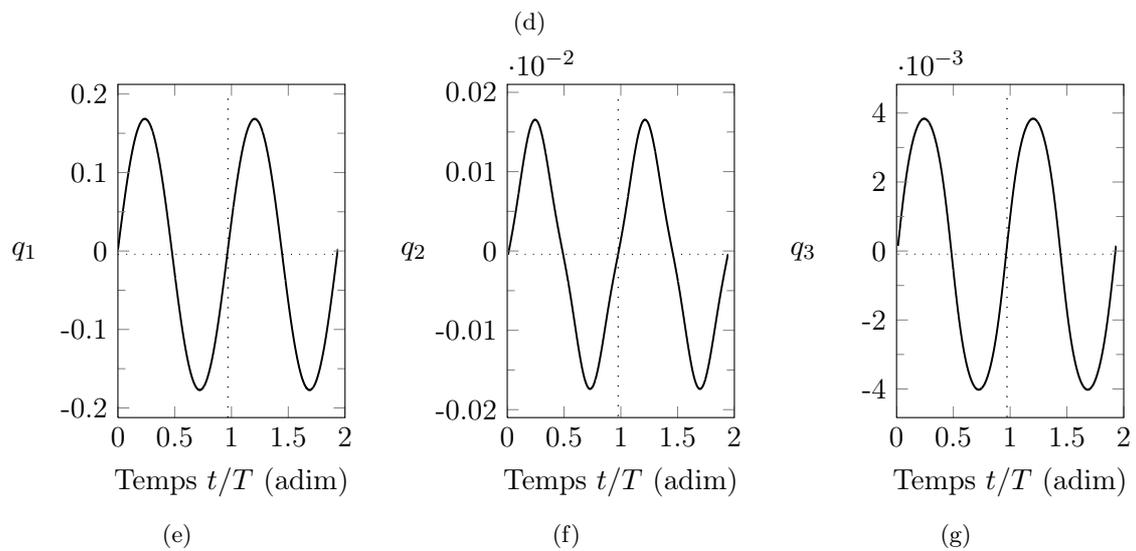
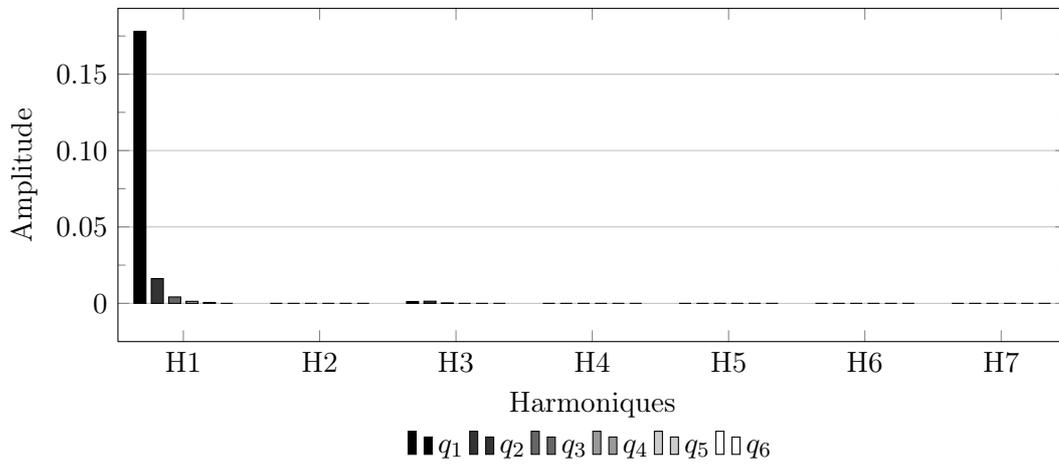
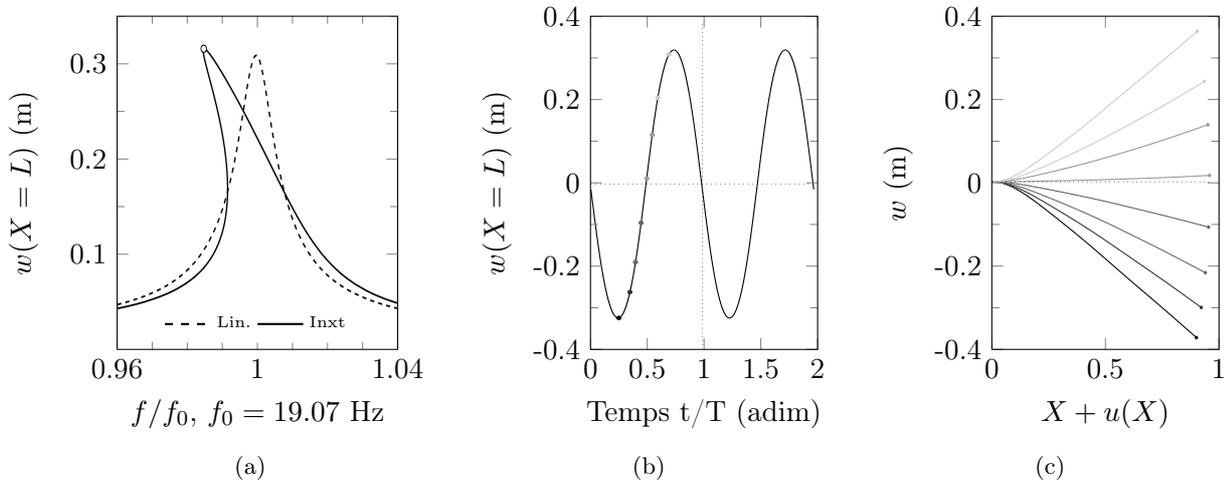


FIG. 6.9 – Mode 1F,  $\Omega = 1000$  tr.min<sup>-1</sup>, forçage N°4 (30.0 N).

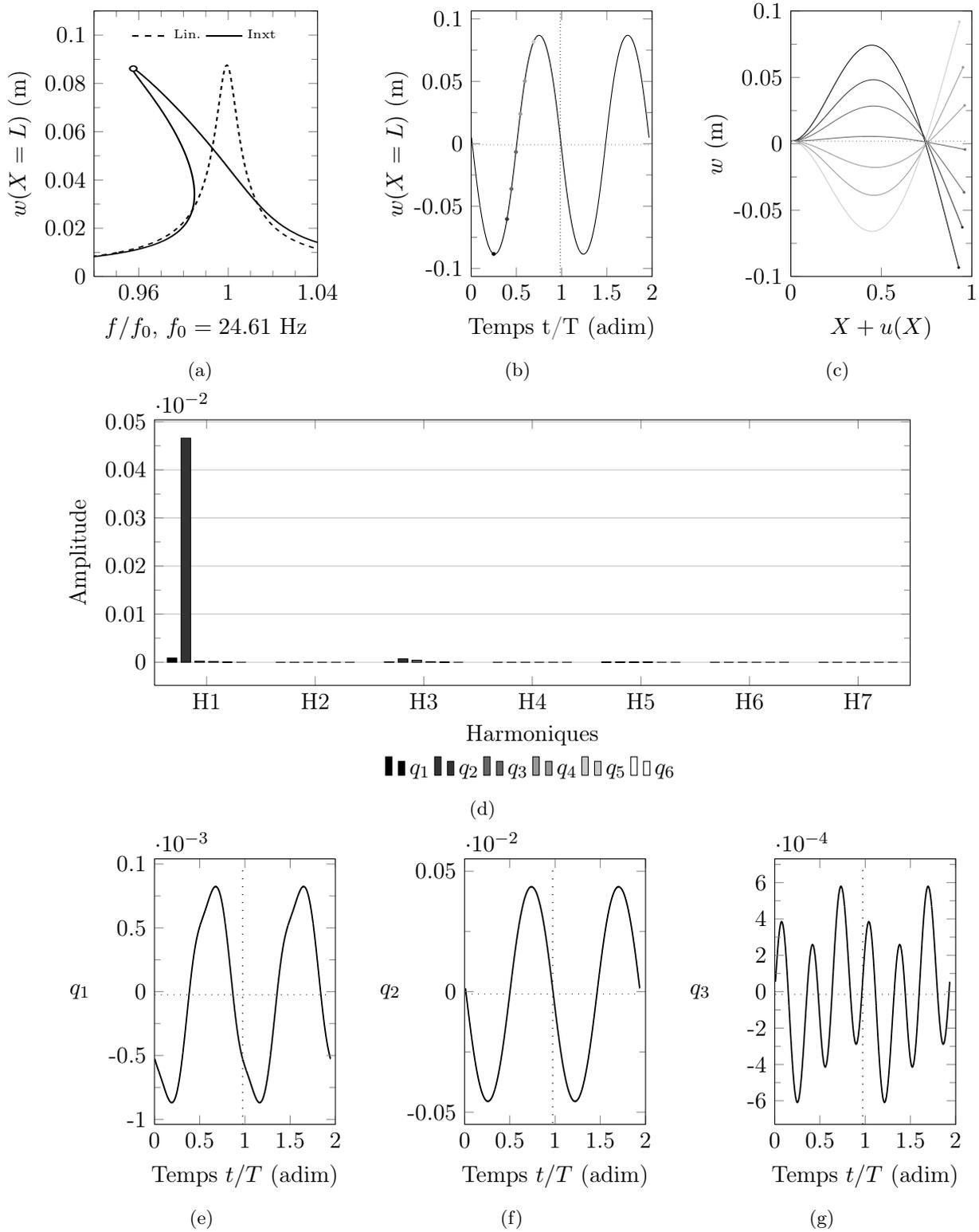


FIG. 6.10 – Mode  $2F$ ,  $\Omega = 0$   $tr.min^{-1}$ , forçage N°2 (12 N).

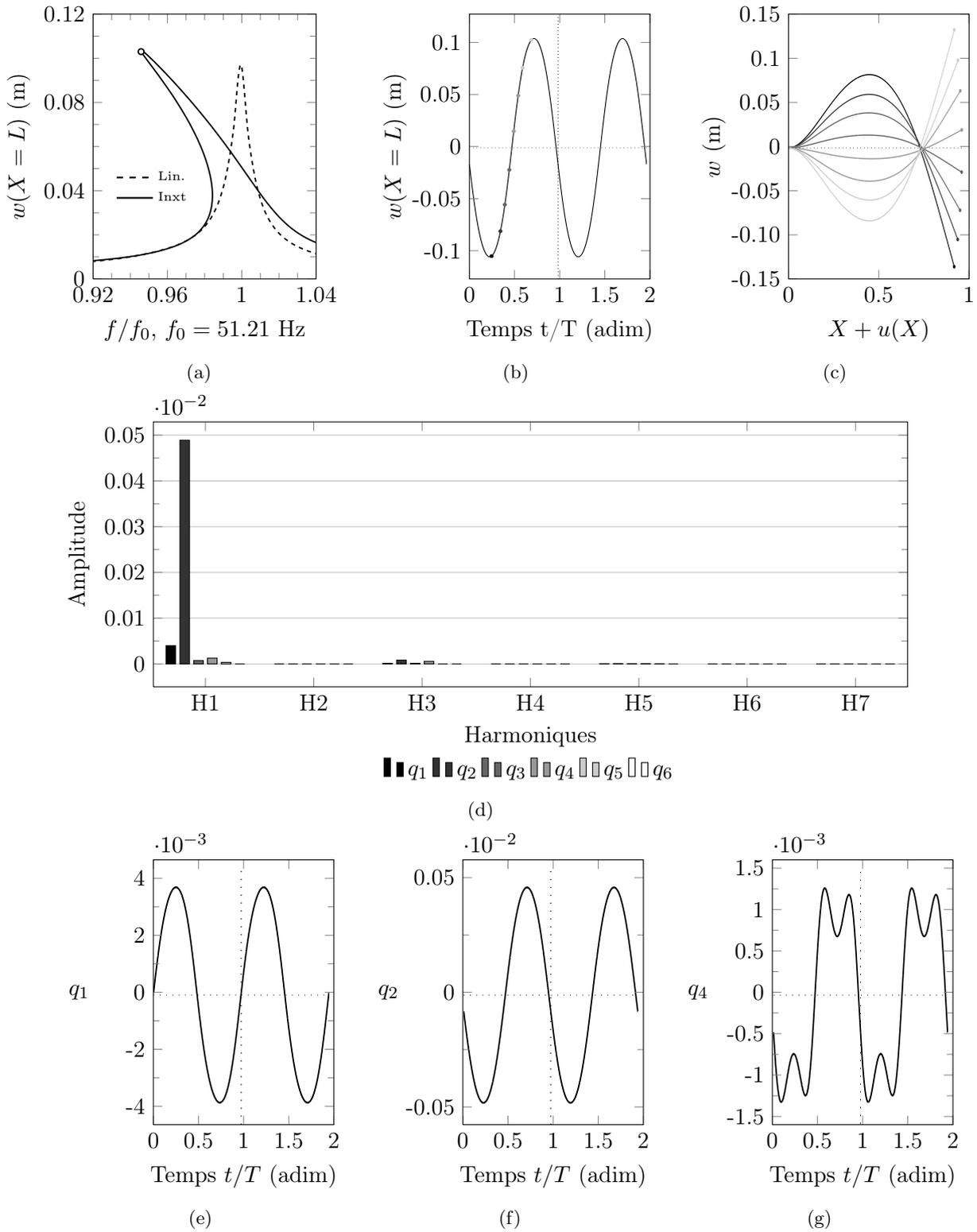


FIG. 6.11 – Mode 2F,  $\Omega = 1000$  tr.min<sup>-1</sup>, forçage N°2 (48 N).

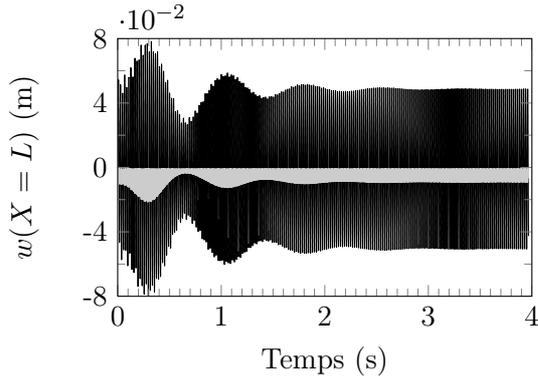


FIG. 6.12 – Réponse temporelle. Mode 2,  $f/f_0 = 0.98$ , forçage N°2 et  $\Omega = 1000$  tr.min<sup>-1</sup>.

de  $\theta(X = L)$ , par niveau de forçage décroissant, est de 80°, 50°, 20° puis 10° environ. Ce qui correspond au fait que les deux FRF de plus faible amplitude issues du modèle inextensible sont identiques à celles provenant du modèle éléments finis. Les deux autres sortent du domaine de validité du modèle analytique. Pour  $\Omega = 1000$  et 3000 tr.min<sup>-1</sup>, et pour tous les forçages testés,  $\theta$  reste inférieur à 45°. Il en est de même pour toutes les configurations du mode 2.

Pour une fréquence d'excitation et un forçage donné, ce modèle permet de connaître l'évolution de  $u$ ,  $w$  et  $\theta$  en chaque nœud du maillage durant l'intégration temporelle (figure ci-contre) jusqu'au régime établi.

Par ailleurs, la limite de validité du modèle inextensible est due, comme énoncé précédemment, au développement limité à l'ordre 3 des fonctions sinus et cosinus. Ces approximations sont valides jusqu'à un angle de 45° environ. En se plaçant à la résonance d'une des FRF tracées pour le premier mode à  $\Omega = 0$  tr.min<sup>-1</sup> (Fig. 6.7(a)), il peut être constaté, via le modèle éléments finis, que l'amplitude maximum

### (c) Comparaison des temps de calcul

Les temps de calcul nécessaires pour obtenir une fonction de réponse en fréquence avec le modèle inextensible, pour différents nombres de modes transverses et d'harmoniques, sont comparés à ceux du modèle éléments finis pour différents nombres d'éléments (Fig. 6.13).

Les nombres d'éléments 20, 40 et 70 sont ceux nécessaires pour atteindre la convergence en fréquence pour, respectivement, les modes 1F, 2F et 3F. La courbure plus importante du 3F impliquant d'avoir plus d'élément que pour le 2F ou le 1F. Pour le 3F, seule une FRF à  $\Omega = 0$  tr.min<sup>-1</sup>) a été tracée du fait d'un temps de calcul prohibitif. Les résultats n'ont donc pas été présentés pour ce mode puisque l'objectif était de pouvoir comparer modèles analytiques et éléments finis pour différents forçages et taux de rotation.

Les temps de calcul dépendent principalement du nombre d'inconnues, soit du nombre de modes transverses et d'harmoniques pour le modèle inextensible et du nombre d'éléments finis pour le modèle discrétisé. Le niveau de forçage influence peu la durée de simulation.

### (d) Conclusion

La caractérisation à  $\Omega = 0$  tr.min<sup>-1</sup> des modes 1 et 2 comme étant raidissant et assouplissant n'est pas nouvelle et a également été menée dans [91] par exemple. À l'inverse, la détermination de l'effet de la rotation en non linéaire sur l'évolution de la fréquence propre du premier et du second mode de flexion d'une poutre encastree-libre est relativement originale et il semble n'avoir été mentionné que dans très peu d'article, dont ceux de P. Apiwattana-lungarn. La nouveauté de cette étude vient plutôt d'avoir posé l'hypothèse d'inextensibilité autour de la position précontrainte pour développer un modèle analytique d'ordre 3 capable de prédire le comportement d'une poutre encastree-libre en rotation jusqu'à une amplitude d'environ  $L/3$  [118]. Il a également été montré que la formulation en effort/déplacement conduit à des conditions aux limites linéaires, ce qui permet de prendre les modes linéaires de la structure comme base de projection. Au contraire, l'utilisation d'une formulation en déplacement

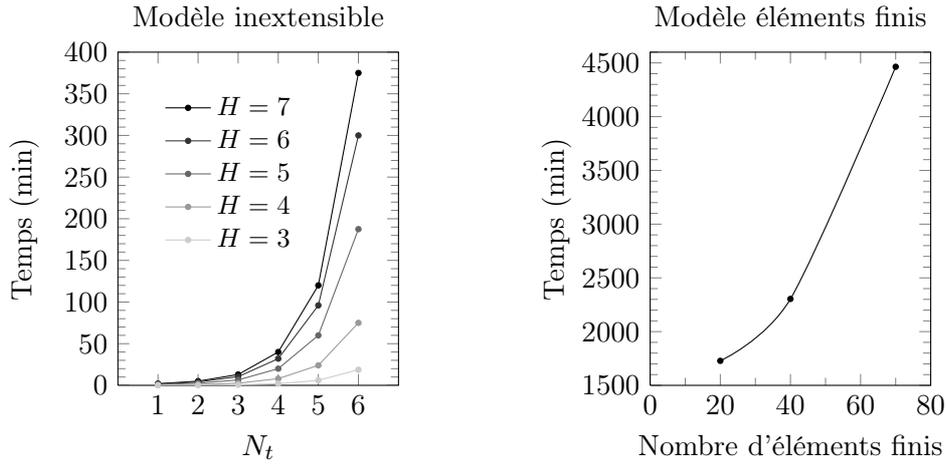


FIG. 6.13 – Temps de calcul pour le modèle inextensible. Comparaison avec ceux du modèle éléments finis

aboutit à des conditions aux limites non linéaires, qui ne peuvent pas être vérifiées par ces mêmes modes.

## 6.6 Passage à une structure tridimensionnelle : travaux en cours et perspectives

Le dernier chapitre aborde la projection modale d'un problème éléments finis 3D en non linéaire géométrique. Il s'agit de développer le déplacement de la structure sur la base des modes propres de celle-ci afin de réécrire le problème sous la forme d'un nombre réduit d'oscillateurs non linéaires couplés.

L'idée centrale n'est pas de projeter la structure complète, c'est à dire le problème assemblé, mais au contraire d'introduire les modes bien plus tôt dans les développements, au niveau de la discrétisation.

### 6.6.1 Projection directe du problème assemblé

Un problème de vibration en non linéaire géométrique, discrétisé par la méthode des éléments finis, peut s'écrire

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad (6.164)$$

avec  $\mathbf{q}$  le vecteur des déplacements nodaux,  $\mathbf{M}$  la matrice de masse,  $\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{q})$  le vecteur des efforts internes, qui dépend de  $\mathbf{q}$ , et  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  le vecteur des efforts extérieurs.  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{f}_{\text{int}}$  et  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  sont de dimension  $N$ ,  $N$  étant le nombre de degrés de liberté du problème.  $\mathbf{M}$  est une matrice de taille  $N \times N$ .

L'expression du vecteur des forces internes, autour de la position d'équilibre  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ , peut être approchée par un développement de Taylor dont l'ordre est choisi afin de pouvoir prendre en compte les non-linéarités quadratiques et cubiques.

$$f_i(\mathbf{q}) = K_{ij}^{(1)} q_j + K_{ijk}^{(2)} q_j q_k + K_{ijkl}^{(3)} q_j q_k q_l + \mathcal{O}(\|\mathbf{q}\|^4). \quad (6.165)$$

Les règles de sommation d'Einstein sont utilisées, avec  $i, j, k, l = 1 \dots N$ . Les matrices de

raideur linéaire, quadratique et cubiques sont définies par

$$K_{ij}^{(1)} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}, \quad K_{ijk}^{(2)} = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}, \quad K_{ijkl}^{(3)} = \left. \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_i}{\partial q_j \partial q_k \partial q_l} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}. \quad (6.166)$$

### (a) Analyse modale linéaire

Les modes propres du problème correspondent aux solutions de la partie linéaire de 6.164 en régime libre ( $\mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$ ). Ce sont les  $N$  couples  $(\Phi_i, \omega_i)$  vérifiant le problème aux valeurs propres

$$\left( \mathbf{K}^{(1)} - \omega_i^2 \mathbf{M} \right) \Phi_i = \mathbf{0}. \quad (6.167)$$

Ces modes ont les propriétés classiques d'orthogonalité et sont normalisés à l'unité par rapport à la matrice de masse. De plus, la matrice des déformées modales est définie en rangeant les  $\Phi_i$

$$\Phi = (\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_N), \quad (6.168)$$

de sorte que  $\Phi_{ip}$  est la  $i$ ème composante du vecteur  $\Phi_p$ ,  $p = 1, \dots, N$ . Les relations d'orthogonalité s'écrivent alors

$$\Phi_{pi} M_{ij} \Phi_{jq} = \delta_{pq}, \quad \Phi_{pi} K_{ij}^{(1)} \Phi_{jq} = \omega_p \delta_{pq}. \quad (6.169)$$

### (b) Décomposition modale du problème non linéaire

La solution de 6.164 est recherchée sous la forme

$$\mathbf{q}(t) = \Phi \boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{p=1}^N \Phi_p \eta_p(t), \quad q_i(t) = \Phi_{ip} \eta_p(t). \quad (6.170)$$

En insérant l'équation précédente dans celle du mouvement 6.164, il vient

$$M_{ij} \Phi_{jq} \ddot{\eta}_q + K_{ij}^{(1)} \Phi_{jq} \eta_p + K_{ijk}^{(2)} \Phi_{jp} \Phi_{kq} \eta_p \eta_q + K_{ijkl}^{(3)} \Phi_{jp} \Phi_{kq} \Phi_{lr} \eta_p \eta_q \eta_r = f_{\text{ext},i} \quad (6.171)$$

Pour obtenir les  $N$  équations modales, 6.171 est multipliée à gauche par  $\Phi_p^T$ , c'est-à-dire par  $\Phi_{pi}$ , et les propriétés d'orthogonalité sont utilisées,

$$\ddot{\eta}_p + \omega_p^2 \eta_p + \sum_{q,r=1}^N \beta_{qr}^p \eta_q \eta_r + \sum_{q,r,s=1}^N \Gamma_{qrs}^p \eta_q \eta_r \eta_s = Q_p, \quad \forall p = 1, \dots, N, \quad (6.172)$$

avec

$$\beta_{qr}^p = K_{ijk}^{(2)} \Phi_{ip} \Phi_{jq} \Phi_{kr} \quad \text{et} \quad \Gamma_{qrs}^p = K_{ijkl}^{(3)} \Phi_{ip} \Phi_{jq} \Phi_{kr} \Phi_{ls}. \quad (6.173)$$

## 6.6.2 Projection du problème lors de l'étape de discrétisation éléments finis

Afin d'écrire le problème sous la forme d'un ensemble réduit d'oscillateurs non linéaires couplés, une autre méthode proposée ici consiste à projeter le problème lors de l'étape de discrétisation éléments finis. La démarche proposée nécessite cependant de partir plus en amont.

Le principe des travaux virtuels formulé en (6.36) est utilisé pour obtenir les équations du mouvement. Le travail virtuel des efforts intérieurs est donné par (6.37a) et celui des efforts d'accélération par (6.37c).

$$\delta\mathcal{W}_i = - \iiint_{\Omega} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} \, d\Omega = - \iiint_{\Omega} \mathbf{E}^T \mathbf{C} \delta\mathbf{E} \, d\Omega, \quad (6.174)$$

$$\delta\mathcal{W}_a = \iiint_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega. \quad (6.175)$$

### (a) Discrétisation

La structure est discrétisée avec  $\mathcal{N}$  éléments à  $n$  nœuds et comporte  $N$  degrés de liberté. Ainsi, le champ de déplacement dans un élément est

$$\mathbf{u}(X, t) = \mathbf{N}_e(X) \mathbf{q}_e(t), \quad (6.176)$$

où  $\mathbf{N}_e$  est la matrice des fonctions de forme de l'élément  $e$ , de taille  $3 \times n$  et  $\mathbf{q}_e$  le vecteur des déplacements nodaux de l'élément  $e$ , de taille  $1 \times n$ . Après assemblage des vecteurs  $\mathbf{q}_e$  et des matrices  $\mathbf{N}_e$ ,

$$\mathbf{u}(X, t) = \mathbf{N}(X) \mathbf{q}(t). \quad (6.177)$$

$\mathbf{N}$  est la matrice d'interpolation du système de taille  $3 \times N$ .  $\mathbf{q}$  est le vecteur des déplacements nodaux de la structure de taille  $1 \times N$ .

### (b) Efforts intérieurs élémentaires

Le tenseur de Green-Lagrange en coordonnées cartésiennes est relié au champ de déplacement par (6.14), qui sous forme matricielle, est donné par

$$\mathbf{E} = \left( \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{D}^{(2)}(\mathbf{u}) \right) \mathbf{u}, \quad (6.178)$$

avec  $\mathbf{D}^{(1)}$ , la partie linéaire du gradient de la transformation et  $\mathbf{D}^{(2)}$  sa partie non linéaire (annexe B.1). La variation de l'énergie interne nécessite de calculer

$$\delta\mathbf{E} = \left( \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{D}^{(2)'} \mathbf{u} \right) \delta\mathbf{u}, \quad (6.179)$$

où  $\mathbf{D}^{(2)'}$  est la partie non linéaire de la variation du gradient de la transformation (annexe B.1). En utilisant (6.176),  $\mathbf{E}$  et  $\delta\mathbf{E}$  se discrétisent de la manière suivante

$$\mathbf{E} = (\mathbf{B}_e^{(1)} + \mathbf{B}_e^{(2)}(\mathbf{q}_e)) \mathbf{q}_e, \quad (6.180)$$

$$\delta\mathbf{E} = (\mathbf{B}_e^{(1)} + \mathbf{B}_e^{(2)'}(\mathbf{q}_e)) \delta\mathbf{q}_e, \quad (6.181)$$

avec  $\mathbf{B}_e^{(1)} = \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{N}_e$ ,  $\mathbf{B}_e^{(2)} = \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{N}_e$  et  $\mathbf{B}_e^{(2)'} = \mathbf{D}^{(2)'} \mathbf{N}_e$  les gradients discrétisés. L'expression du travail virtuel des efforts intérieurs dans l'élément  $e$  est

$$\delta\mathcal{W}_{i,e} = \delta\mathcal{W}_{i,e}^{(1)} + \delta\mathcal{W}_{i,e}^{(2)} + \delta\mathcal{W}_{i,e}^{(3)}, \quad (6.182)$$

avec les parties linéaire, quadratique et cubique ci-dessous

$$\delta\mathcal{W}_{i,e}^{(1)} = -\mathbf{q}_e^T \left( \iiint_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^{(1)T} \mathbf{C} \mathbf{B}_e^{(1)} \, d\Omega \right) \delta\mathbf{q}_e, \quad (6.183)$$

$$\delta\mathcal{W}_{i,e}^{(2)} = -\mathbf{q}_e^T \left( \iiint_{\Omega_e} \left[ \mathbf{B}_e^{(1)T} \mathbf{C} \mathbf{B}_e^{(2)'}(\mathbf{q}_e) + \mathbf{B}_e^{(2)T}(\mathbf{q}_e) \mathbf{C} \mathbf{B}_e^{(1)} \right] \, d\Omega \right) \delta\mathbf{q}_e, \quad (6.184)$$

$$\delta\mathcal{W}_{i,e}^{(3)} = -\mathbf{q}_e^T \left( \iiint_{\Omega_e} \left[ \mathbf{B}_e^{(2)T}(\mathbf{q}_e) \mathbf{C} \mathbf{B}_e^{(2)'}(\mathbf{q}_e) \right] \, d\Omega \right) \delta\mathbf{q}_e. \quad (6.185)$$

La partie linéaire s'exprime aussi à partir de la matrice de raideur linéaire élémentaire

$$\mathbf{K}_e = \iiint_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^{(1)T} \mathbf{C} \mathbf{B}_e^{(1)} d\Omega, \quad (6.186)$$

ce qui donne, pour la partie linéaire du travail virtuel des efforts intérieurs, en notant  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur globale du système obtenue après assemblage des matrices de raideur élémentaires  $\mathbf{K}_e$

$$\delta \mathcal{W}_i^{(1)} = -\mathbf{q}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{q}. \quad (6.187)$$

### (c) Efforts d'accélération élémentaire

L'expression du travail virtuel des efforts d'accélération élémentaire s'écrit

$$\delta \mathcal{W}_{a,e} = \ddot{\mathbf{q}}_e^T \left( \iiint_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e d\Omega \right) \delta \mathbf{q}_e = \ddot{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{M}_e \delta \mathbf{q}_e, \quad (6.188)$$

où  $\mathbf{M}_e$  est la matrice de masse de l'élément  $e$ . En notant  $\mathbf{M}$  la matrice de masse globale du système obtenue après assemblage des matrices de masse élémentaires  $\mathbf{M}^e$ , il vient

$$\delta \mathcal{W}_a = -\ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \delta \mathbf{q}. \quad (6.189)$$

### 6.6.3 Projection modale

De la même manière que lors de la projection directe du problème assemblé, le vecteur des déplacements nodaux  $\mathbf{q}$  est recherché sous la forme

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{p=1}^N \Phi_p \eta_p(t). \quad (6.190)$$

Les modes propres discrétisés  $(\omega_p, \Phi_p)$  sont solutions du problème aux valeurs propres linéaire 6.167. La projection du vecteur des déplacements nodaux de l'élément  $e$  est notée

$$\mathbf{q}_e(t) = \sum_{p=1}^N \Phi_p^e \eta_p(t), \quad (6.191)$$

avec  $\Phi_p^e$  le vecteur contenant les valeurs de la  $p$ -ième déformée modale aux nœuds de l'élément  $e$ .

Par ailleurs, la seule condition sur le déplacement virtuel est qu'il doit être cinématiquement admissible. Pour cela, il est défini comme

$$\delta \mathbf{q} = \Phi_p \delta \eta, \quad p \in [0, N], \quad (6.192)$$

soit au niveau élémentaire,  $\delta \mathbf{q}_e = \Phi_p^e \delta \eta$ . En injectant (6.190) et (6.192) dans (6.187) et (6.189), puis en utilisant les propriétés d'orthogonalités des modes propres,

$$\delta \mathcal{W}_i^{(1)} = - \sum_{q=1}^N \underbrace{\Phi_q^T \mathbf{K} \Phi_p}_{\omega_p^2 \delta_{qp}} \eta_q \delta \eta = \omega_p^2 \eta_p \delta \eta \quad (6.193)$$

$$\delta \mathcal{W}_a = \sum_{q=1}^N \underbrace{\Phi_q^T \mathbf{M} \Phi_p}_{\delta_{qp}} \ddot{\eta}_q \delta \eta = \ddot{\eta}_p \delta \eta. \quad (6.194)$$

Les expressions de la partie quadratique et cubique des travaux virtuels des efforts intérieurs élémentaires s'écrivent de manière analogue, en insérant (6.190) et (6.192) dans (6.184) et (6.185).

$$\delta\mathcal{W}_{i,e}^{(2)} = - \left[ \sum_{q,r=1}^N \Phi_q^{eT} \underbrace{\left( \iiint_{\Omega_e} \left[ \mathbf{B}^{(1)T} \mathbf{C} \mathbf{B}^{(2)'}(\Phi_r^e) + \mathbf{B}^{(2)T}(\Phi_r^e) \mathbf{C} \mathbf{B}^{(1)} \right] d\Omega \right)}_{\beta_{qr}^{e,p}} \Phi_p^e \eta_q \eta_r \right] \delta\eta, \quad (6.195)$$

$$\delta\mathcal{W}_{i,e}^{(3)} = - \left[ \sum_{q,r,s=1}^N \Phi_q^{eT} \underbrace{\left( \iiint_{\Omega_e} \left[ \mathbf{B}^{(2)T}(\Phi_r^e) \mathbf{C} \mathbf{B}^{(2)'}(\Phi_s^e) \right] d\Omega \right)}_{\Gamma_{qrs}^{e,p}} \Phi_p^e \eta_q \eta_r \eta_s \right] \delta\eta. \quad (6.196)$$

Le travail virtuel des efforts intérieurs s'obtient en ajoutant les travaux virtuels élémentaires. Il vient alors, en utilisant (6.182)

$$\delta\mathcal{W}_i = \sum_{e=1}^{\mathcal{N}} \delta\mathcal{W}_{i,e} = - \left( \omega_p^2 \eta_p + \sum_{q,r=1}^N \beta_{qr}^p \eta_q \eta_r + \sum_{q,r,s=1}^N \Gamma_{qrs}^p \eta_q \eta_r \eta_s \right) \delta\eta, \quad (6.197)$$

avec

$$\beta_{qr}^p = \sum_{e=1}^{\mathcal{N}} \beta_{qr}^{e,p} \quad \text{et} \quad \Gamma_{qrs}^p = \sum_{e=1}^{\mathcal{N}} \Gamma_{qrs}^{e,p}. \quad (6.198)$$

En appliquant le principe des travaux virtuels, c'est à dire l'équation (6.36), quel que soit  $\delta\eta$ , avec pour expression du travail virtuel des efforts extérieurs

$$\delta\mathcal{W}_e = \underbrace{\Phi_p^T \mathbf{F}}_{Q_p} \delta\eta, \quad (6.199)$$

le problème se met alors sous la forme d'un ensemble d'oscillateurs non linéaires couplés

$$\ddot{\eta}_p + \omega_p^2 \eta_p + \sum_{q,r=1}^N \beta_{qr}^p \eta_q \eta_r + \sum_{q,r,s=1}^N \Gamma_{qrs}^p \eta_q \eta_r \eta_s = Q_p, \quad p \in [0, N]. \quad (6.200)$$

L'étape cruciale est de calculer les coefficients des termes non linéaires des équations (6.200). cette méthode, qui fait intervenir la projection modale au niveau local, consiste à calculer les coefficients  $\beta_{qr}^{p,e}$  et  $\Gamma_{qrs}^{p,e}$  puis à les ajouter pour obtenir  $\beta_{qr}^p$  et  $\Gamma_{qrs}^p$ . *Il n'y a donc pas d'opération d'assemblage.*

Deuxièmement, il n'y a plus à construire et à stocker les matrices de raideur quadratique et cubique, nécessaires dans le cas d'une projection modale au niveau global, pour calculer les coefficients  $\beta_{qr}^p$  et  $\Gamma_{qrs}^p$ . Ces matrices, de taille respective  $N^3$  et  $N^4$  impliquent, dans le cas d'une structure composée de 60 ddl par exemple, de pouvoir calculer et stocker  $60^3 + 60^4 = 13.176$  millions de scalaires, pour ensuite se ramener, après projection sur 20 modes par exemple, à  $20^3 + 20^4 = 168000$  coefficients. Par conséquent, *l'avantage est ici de calculer et de ne stocker que les coefficients des termes non linéaires.* Cependant, deux points posent problème. Le premier est de savoir combien d'éléments sont nécessaires pour assurer la convergence des valeurs des coefficients  $\beta_{qr}^p$  et  $\Gamma_{qrs}^p$ . Le deuxième point concerne le choix des modes à retenir dans la base de projection. En effet, pour représenter correctement les couplages membrane/flexion, *la base doit être constituée des premiers modes de flexion, mais aussi des premiers modes de membrane.*

Pour éclaircir le premier point, un modèle éléments finis d'une poutre bi-encastée est considéré. Celle-ci est discrétisée à l'aide d'éléments TET10, puis la convergence de la première fréquence propre (1F), ainsi que des coefficients  $\beta_{11}^1$  et  $\Gamma_{111}^1$  est observée en fonction du nombre d'éléments. Le résultat, présenté sur la figure 6.14, montre clairement que la convergence des coefficients quadratique et cubique pour le premier mode de flexion est beaucoup plus lente que la convergence de la fréquence propre associée. Le nombre élevé d'éléments nécessaires pour atteindre des valeurs stabilisées de  $\beta_{11}^1$  et  $\Gamma_{111}^1$  semble donc être un handicap important de la méthode. Cependant, puisqu'un seul calcul de mode propre est nécessaire pour évaluer tous les  $\beta_{qr}^p$  et  $\Gamma_{qrs}^p$ , il pourrait s'avérer "rentable" d'allouer du temps à la résolution d'un calcul modal pour ensuite n'avoir à résoudre qu'un système algébrique constitué d'un nombre réduit d'inconnues.

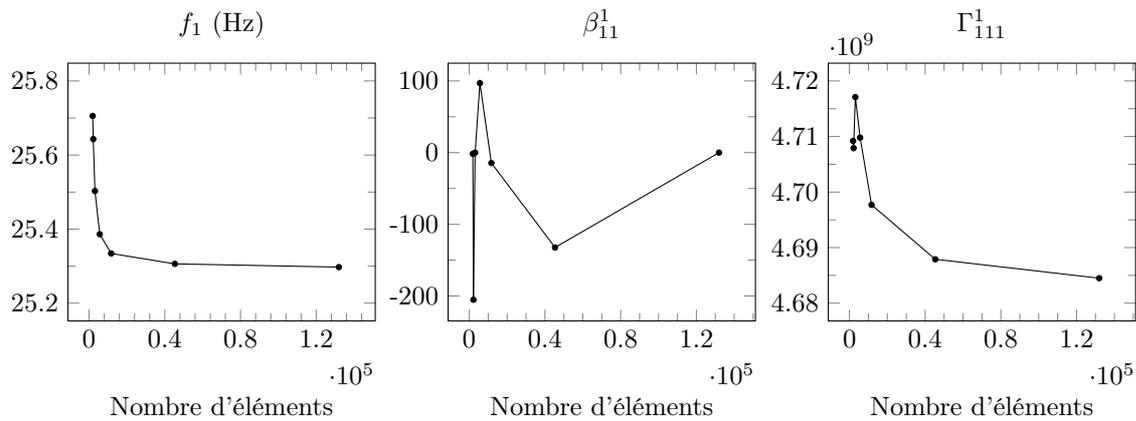


FIG. 6.14 – Convergences de la première fréquence propre, ainsi que de  $\beta_{11}^1$  et  $\Gamma_{111}^1$ , d'une poutre bi-encastée en titane de dimension  $1m \times 0.01m \times 5mm$ . L'élément fini est un tétraèdre à 10 nœuds.

Par manque de temps, les travaux se sont arrêtés à ce stade. Par la suite, il conviendrait de refaire les calculs précédents afin d'obtenir des valeurs des coefficients convergées puis, d'utiliser la *HBM/MAN* avec un système réduit à un mode de flexion et quelques modes de membrane, afin que le couplage membrane/flexion puisse exister. L'intérêt de la poutre bi-encastée est double. Les coefficients non linéaires peuvent être calculés analytiquement, ce qui permet la comparaison avec les valeurs issues du modèle éléments finis, et les non-linéarités apparaissent pour de très faibles amplitudes et sont dues exclusivement au couplage membrane/flexion.

---

## Conclusion

Ce mémoire présente les travaux réalisés sur la problématique de la maîtrise des niveaux vibratoires des aubes fan de turboréacteurs, ainsi qu'une étude sur l'importance des non-linéarités géométriques et inertielles dans la réponse fréquentielle d'une poutre encastree-libre en rotation soumises à des grandes amplitudes et de petites déformations. Un travail de recherche a également été réalisé sur la projection modale d'un problème éléments finis 3D en non linéaire géométrique.

Les contributions à la première thématique concernent principalement le développement d'un outil logiciel capable de réaliser l'intégralité d'une étude de réduction de vibration d'une structure par des pastilles piézoélectriques connectées à un shunt linéaire. Sur la seconde thématique des vibrations non linéaires, c'est l'évaluation et la quantification des différentes non-linéarités, ainsi que l'effet assouplissant des forces centrifuges en non linéaire, qui a été réalisée.

Une synthèse du mémoire ainsi que des perspectives sur différents aspects scientifiques et techniques sont présentés ci-après.

### 7.1 Partie I : réduction de vibrations

L'utilisation d'un modèle éléments finis où les déplacements nodaux sont directement couplés avec la tension et la charge dans les pastilles piézoélectriques permet de réduire la complexité de mise en œuvre des modèles électromécaniques. La principale restriction concerne la géométrie des pastilles, qui doivent être minces, mais cela permet néanmoins de couvrir la majorité des cas pratiques.

La projection des équations de la dynamique sur les modes en court-circuit permet de construire un modèle réduit efficace, qui représente correctement la dynamique du système et permet de faire apparaître de manière explicite les différents facteurs de couplage modaux selon les types de connexions utilisées : parallèle, série ou mise en série de 2 ensembles de pastilles en parallèle. Le choix des modes en court-circuit se justifie par le fait qu'ils sont solutions d'un problème élastique, ce qui permet de les calculer avec un logiciel éléments finis standard.

Bien que la seconde façon de câbler des pastilles collées sur une structure conductrice n'ait pas été utilisée, il semble qu'elle permette d'augmenter nettement le facteur de couplage modal. C'est le choix des pastilles à relier à l'une ou l'autre des 2 bornes de l'impédance du circuit qui permet d'avoir cette augmentation de couplage.

L'implémentation de routines *Matlab* permettant d'écrire des routines en langage PCL a permis de piloter le logiciel (*Patran* et le solveur *Nastran* pour qu'ils réalisent automatiquement

les opérations les plus complexes et notamment qu'ils gèrent la géométrie complexe d'une aube et les propriétés matériau isotrope transverse des pastilles piézoélectriques courbes. Puis, l'utilisation de routines en langage *Awk*) a permis d'accélérer de façon importante l'échange d'informations entre *Matlab*, *Patran* et *Nastran*, ce qui a permis de réduire considérablement le temps passé à chaque itération à lire des résultats issus de *Nastran* ou écrire des routines. Les principaux développements ont porté sur :

- l'écriture d'un code pouvant gérer des maillages TET10 de structures quelconques ;
- la réalisation de routines capables de calculer la matrice de couplage électromécanique pour des pastilles minces courbes ;
- la mise en place d'une procédure d'optimisation de la position et de la géométrie de plusieurs pastilles collées sur une structure quelconque ;
- la validation expérimentale d'un outil logiciel capable de réaliser l'intégralité d'une étude de réduction de vibration d'une structure par des pastilles piézoélectriques connectées à un shunt linéaire.

Quelques restrictions demeurent néanmoins. Le maillage entre les pastilles et la structure doit être compatible, les pastilles doivent être de formes parallélépipédiques et minces, le nombre de pastilles pour l'optimisation ne doit pas être trop important ( $< 10$ ) afin de limiter les temps de calcul.

Pour valider l'ensemble des résultats numériques, un dispositif expérimental a été mis au point. Il comporte les différents points suivants :

- une aube fan de CFM56-7b en conditions libre-libre ou encastrée-libre ;
- une mosaïque de pastilles piézoélectriques dont l'emplacement et l'épaisseur sont choisis pour maximiser le couplage électromécanique sur les trois premiers mode de flexion de l'aube ;
- des pastilles élémentaires dont la taille est calculée pour permettre le meilleur ajustement possible entre la courbure de l'aube, l'épaisseur du film de colle et la surface plane des pastilles piézoélectriques.

Les mesures expérimentales concordent précisément avec les résultats numériques sur les 3 premiers modes de l'aube, qu'elle soit en conditions libre-libre ou encastrée-libre, ce qui permet de valider le modèle éléments finis, dont la modélisation du film de colle, la méthode de construction de la matrice de couplage électromécanique et le choix des modes en court-circuit comme base de projection.

## 7.2 Partie II : vibrations non linéaires

Une étude sur l'influence du taux de rotation ainsi que de l'intensité et de la fréquence de l'excitation sur l'évolution des deux premières fréquences propres d'une poutre encastrée-libre a été réalisée. Pour cela, un modèle analytique d'ordre 3 capable de prédire son comportement jusqu'à une amplitude d'environ  $L/3$  a été développé. Son originalité vient de l'hypothèse d'inextensibilité, qui a été utilisée autour de la position précontrainte ( $\Omega \neq 0$  tr.min<sup>-1</sup>) et non pas seulement à  $\Omega = 0$  tr.min<sup>-1</sup>. De plus, il a été montré que seule la formulation en effort/déplacement conduit à des conditions aux limites linéaires, les seules à pouvoir être vérifiées si des modes normaux sont utilisés pour la projection.

La projection du mouvement transverse de la poutre sur les modes de la structure à l'arrêt ( $\Omega = 0$  tr.min<sup>-1</sup>) amène à réécrire l'équation du mouvement sous la forme d'un système d'équations nonlinéaires d'ordre 3, qui a été résolu par l'utilisation de la technique de l'équilibrage harmonique couplée à la méthode asymptotique numérique (*MAN*). L'intérêt de la

*MAN* est qu'elle permet de prendre en compte plusieurs modes et plusieurs harmoniques pour chaque mode dans le calcul de la réponse. Les résultats obtenus ont permis de mettre en évidence deux effets des forces centrifuges :

- un effet classique raidissant en linéaire ;
- un effet assouplissant en non linéaire sur le premier mode de flexion. Cet effet est pratiquement inexistant sur le second mode, qui est déjà assouplissant.

Dit autrement, la rotation modifie l'effet des nonlinéarités géométriques sur la fonction de réponse en fréquence. Par ailleurs, il est clair que les effets non linéaire de la rotation sur les fréquences propres sont faibles et restent de l'ordre du pourcent pour une poutre encastree-libre.

Enfin, pour traiter les nonlinéarités géométriques par la méthode des éléments finis, une idée a consisté à effectuer le calcul des coefficients de couplage non linéaires lors de la discrétisation du modèle. Cependant, cela n'a pas donné les résultats escomptés. Il apparaît que le nombre très important d'éléments finis nécessaires pour obtenir une valeur convergée des coefficients rend la méthode impraticable.

## 7.3 Prolongements de l'étude

### (a) Réduction de vibrations

La présence des pastilles sur la surface de l'aube n'est pas une solution technique viable puisque cela perturberait fortement l'écoulement du flux et ferait chuter le rendement aérodynamique du fan. Pour parer à ce problème, au moins trois solutions pourraient être envisagées :

- dans l'étude [72] (Rolls-Royce), des petites poches sont pratiquées dans des aubes métalliques par électroérosion pour y loger les pastilles piézoélectriques afin que celles-ci arrivent à fleur de surface et ne perturbent plus l'écoulement ;
- l'introduction de fibres piézoélectriques à l'intérieur des aubes semble également être une voie prometteuse. À ce titre, un certain nombre d'études ont déjà été engagées [29, 122, 28, 135] ;
- dans le cas où les aubes seraient en matériau composite<sup>1</sup>, il pourrait être envisagé d'incorporer les pastilles à l'intérieur au moment de la fabrication.

À court terme, l'action la plus importante semble de réaliser une pastille piézocéramique monobloc. En effet, d'après les résultats des simulations numériques avec prise en compte de la colle, une telle pastille d'un seul tenant permet d'obtenir des coefficients de couplage pour les 2 premiers modes d'une aube de CFM56-7b encastree-libre de respectivement 4% et 8%, ce qui correspond, étant donnés les facteurs d'amortissements mesurés de  $5.2 \cdot 10^{-4}$  et  $10.7 \cdot 10^{-4}$ , à des atténuations d'environ -30 dB pour un shunt R. La réalisation d'une telle pastille n'est pas en soi une opération difficile et pourrait être fabriquée rapidement par un laboratoire spécialisé. Dans l'immédiat, un certain nombre d'autres actions pourraient être menées :

- la prise en compte des efforts centrifuges dans la modélisation du problème. C'est une opération classique qui ne devrait pas poser de problème particulier. Il faudra veiller à régler les paramètres électriques sur les fréquences en rotation si des shunts linéaires sont utilisés ;
- prendre en compte les effets de la température sur le couplage.

<sup>1</sup>Pour les aubes fan, les technologies composites sont l'empilement de plis tissés de fibre de carbone (CFAN) ou l'infiltration d'une résine thermodurcissable dans une ébauche fibreuse sèche (procédé RTM)

- réaliser des tests de durée de vie des pastilles sous chargement dynamique prolongé ;
- les aubes fan en composite vont supplanter progressivement la technologie métallique dans les turboréacteurs à fort taux de dilution. Pour cette raison, il faudrait entreprendre une étude de faisabilité sur l'intégration des pastilles piézoélectriques dans une structure composite.

Les études portant sur les mesures de l'évolution des caractéristiques modales des aubes sous chargement centrifuge et aérodynamique donnent déjà un certain nombre de réponses sur la tenue du collage aux efforts centrifuges. Dans [72, 31] par exemple, des pastilles piézoélectriques ainsi que des jauges de déformation sont collées sur des aubes. Ces dernières tournent jusqu'à  $19500 \text{ tr.min}^{-1}$  dans la première étude et  $5000 \text{ tr.min}^{-1}$  dans la seconde, sans qu'il n'est fait mention de problème d'arrachement des pastilles piézoélectriques.

### (b) Vibrations non linéaires

Sur la partie non linéaire, une expérience de vibration en grande amplitude a été menée à la toute fin de la thèse pour établir une *backbone curve* sur le second mode de flexion de l'aube. Les résultats sont donnés sur la figure ci-dessous. Il apparaît clairement que la fréquence propre

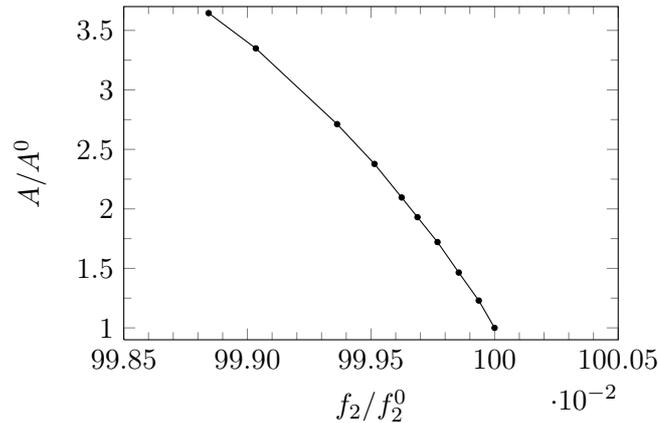


FIG. 7.1 – Évolution du rapport de la fréquence propre du second mode de flexion  $f_2$  d'une aube encastrée-libre de CFM56-7b sur sa fréquence propre initiale  $f_2^0$  (linéaire) en fonction du rapport de l'amplitude des vibrations  $A$  sur l'amplitude initiale  $A^0$ .

du second mode ne varie pratiquement pas. Lorsque l'amplitude des vibrations est multipliée par 3.6, la fréquence ne diminue que de 0.1%. Il semble donc exclu qu'une aube seule, même pour des amplitudes plus grandes que celles réalisées en expérience, présente des non-linéarités géométriques capables de modifier la valeur de la fréquence propre au delà du pourcent. Ce résultat ne dit cependant rien sur le comportement d'une aube pour des modes supérieurs ou sur celui d'une roue aubagée, qui est une structure à symétrie cyclique où les vibrations de plusieurs aubes sont couplées entre elles par le disque [60].

---

# Annexes



## Éléments finis 1D en non linéaire géométrique

### A.1 Matrice des fonctions d'interpolation

Lorsqu'un seul élément fini de longueur  $L_0$  est considéré, le champ inconnu continu  $\mathbf{u}$  est discrétisé par

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{q}. \quad (\text{A.1})$$

Les déplacements et la rotation sont des fonctions linéaires des déplacements et des rotations aux noeuds. Les fonctions d'interpolation sont

$$N_1 = 1 - \xi, \quad (\text{A.2a})$$

$$N_2 = 1 + \xi, \quad (\text{A.2b})$$

$$\xi = (2X/L_0) - 1. \quad (\text{A.2c})$$

La coordonnée paramétrique  $\xi$  varie de -1 au noeud 1 à +1 au noeud 2. La différenciation de l'expression (A.1) par rapport à  $X$  permet d'avoir  $\mathbf{u}'$  en fonction de  $\mathbf{q}$ .

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} u' \\ w' \\ \theta' \end{bmatrix} = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}'\mathbf{q}. \quad (\text{A.3})$$

### A.2 Matrice du gradient discrétisé

La relation entre le vecteur des déformations  $\mathbf{e}^T = [e \ \gamma \ \kappa]$  et les déplacements nodaux  $\mathbf{q}$  est donnée par  $\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{q}$  où  $\mathbf{B}$  est le gradient discrétisé. Les expressions des déformations axiale  $e$ , de cisaillement  $\gamma$  et de courbure  $\kappa$  sont données par (6.24). En utilisant (A.3), il est possible

d'écrire, pour un élément

$$e = \left(1 + \frac{u_2 - u_1}{L_0}\right) \cos \theta + \left(\frac{w_2 - w_1}{L_0}\right) \sin \theta - 1, \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma = \left(\frac{w_2 - w_1}{L_0}\right) \cos \theta - \left(1 + \frac{u_2 - u_1}{L_0}\right) \sin \theta, \quad (\text{A.5})$$

$$\kappa = \frac{\theta_2 - \theta_1}{L_0}, \quad (\text{A.6})$$

ce qui permet de calculer le gradient discrétisé

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial u_1} & \frac{\partial e}{\partial w_1} & \frac{\partial e}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e}{\partial u_2} & \frac{\partial e}{\partial w_2} & \frac{\partial e}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial u_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial w_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial u_2} & \frac{\partial \gamma}{\partial w_2} & \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \kappa}{\partial u_1} & \frac{\partial \kappa}{\partial w_1} & \frac{\partial \kappa}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \kappa}{\partial u_2} & \frac{\partial \kappa}{\partial w_2} & \frac{\partial \kappa}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

### A.3 Calcul de la matrice de masse $\mathbf{M}$

La matrice de masse d'un élément est

$$\mathbf{M} = \rho \int_0^{L_0} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \mathbf{N} \, dX. \quad (\text{A.8})$$

Sachant que

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & 0 & 1 + \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \xi & 0 & 0 & 1 + \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \xi & 0 & 0 & 1 + \xi \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad dX = \frac{L_0}{2} d\xi, \quad (\text{A.9})$$

une intégration directe ou à deux points de Gauss (les deux méthodes sont exactes) donne

$$\mathbf{M} = \frac{\rho L_0}{6} \begin{bmatrix} 2A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 2A & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 2I & 0 & 0 & I \\ A & 0 & 0 & 2A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 2A & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

### A.4 Vecteur des forces de déformation $\mathbf{f}_d$

Les quantités moyennes calculées dans l'élément sont évaluées par

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \left(1 + \frac{u_2 - u_1}{L_0}\right) \bar{c} + \left(\frac{w_2 - w_1}{L_0}\right) \bar{s} - 1, \\ \bar{\gamma} &= \left(\frac{w_2 - w_1}{L_0}\right) \bar{c} - \left(1 + \frac{u_2 - u_1}{L_0}\right) \bar{s}, \\ \bar{\kappa} &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{L_0}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

où  $\bar{c} = \cos \bar{\theta}$ ,  $\bar{s} = \sin \bar{\theta}$  avec  $\bar{\theta} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ .

Les efforts généralisés moyens sont donc définis par  $\bar{N} = EA\bar{e}$ ,  $\bar{T} = GA\bar{\gamma}$  et  $\bar{M} = EI\bar{\kappa}$  et le gradient discrétisé moyens par

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{e}}{\partial u_1} & \frac{\partial \bar{e}}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{e}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial u_1} & \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \bar{\kappa}}{\partial u_1} & \frac{\partial \bar{\kappa}}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{\kappa}}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} -\bar{c} & -\bar{s} & L_0 \frac{\partial \bar{e}}{\partial \theta_1} & \bar{c} & \bar{s} & L_0 \frac{\partial \bar{e}}{\partial \theta_2} \\ \bar{s} & -\bar{c} & L_0 \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \theta_1} & -\bar{s} & -\bar{c} & L_0 \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \theta_2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{e}}{\partial \theta_1} &= \left(1 + \frac{u_2 - u_1}{L_0}\right) \left(\frac{-\sin \bar{\theta}}{2}\right) + \left(\frac{w_2 - w_1}{L_0}\right) \left(\frac{\cos \bar{\theta}}{2}\right) = \frac{\bar{\gamma}}{2}, \\ \frac{\partial \bar{e}}{\partial \theta_2} &= \frac{\bar{\gamma}}{2}, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \theta_1} &= \left(\frac{w_2 - w_1}{L_0}\right) \left(\frac{-\sin \bar{\theta}}{2}\right) - \left(1 + \frac{u_2 - u_1}{L_0}\right) \left(\frac{\cos \bar{\theta}}{2}\right) = -\frac{\bar{e} + 1}{2}, \\ \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \theta_2} &= -\frac{\bar{e} + 1}{2}. \end{aligned}$$

Le calcul de  $\mathbf{f}_d$  est alors immédiat

$$\mathbf{f}_d = L_0 \bar{\mathbf{B}}^T \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{T} \\ \bar{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{c} & \bar{s} & 0 \\ -\bar{s} & -\bar{c} & 0 \\ \frac{L_0}{2} \bar{\gamma} & -\frac{L_0}{2} (1 + \bar{e}) & -1 \\ \bar{c} & -\bar{s} & 0 \\ \bar{s} & \bar{c} & 0 \\ \frac{L_0}{2} \bar{\gamma} & -\frac{L_0}{2} (1 + \bar{e}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA\bar{e} \\ GA\bar{\gamma} \\ EI\bar{\kappa} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

ou encore

$$\mathbf{f}_d = EA\bar{e} \begin{bmatrix} -\bar{c} \\ -\bar{s} \\ \frac{L_0}{2} \bar{\gamma} \\ \bar{c} \\ \bar{s} \\ \frac{L_0}{2} \bar{\gamma} \end{bmatrix} + GA\bar{\gamma} \begin{bmatrix} \bar{s} \\ \bar{c} \\ -\frac{L_0}{2} (1 + \bar{e}) \\ -\bar{s} \\ \bar{c} \\ -\frac{L_0}{2} (1 + \bar{e}) \end{bmatrix} + EI\bar{\kappa} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

## A.5 Matrice de rigidité tangente matériau et géométrique

Pour un élément,

$$\mathbf{K}_m = \int_0^{L_0} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dX. \quad (\text{A.16})$$

En intégrant à un point de Gauss  $\mathbf{K}_m = L_0 \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}}$  où l'expression de  $\bar{\mathbf{B}}$  est donnée dans l'annexe A.1. En ce qui concerne la matrice de raideur géométrique, il a été obtenu

$$\mathbf{K}_g = \int_0^{L_0} \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{q}} \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} dX. \quad (\text{A.17})$$

Soit, en intégrant avec un point de Gauss

$$\mathbf{K}_g = L_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{q}} \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{T} \\ \bar{M} \end{bmatrix} dX. \quad (\text{A.18})$$

Par ailleurs, il se démontre aisément que

$$\mathbf{K}_{\text{tan}} = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_g = \mathbf{K}_{\text{tan}}^e + \mathbf{K}_{\text{tan}}^\gamma + \mathbf{K}_{\text{tan}}^\kappa. \quad (\text{A.19})$$

Ces trois contributions correspondent respectivement aux matrices de raideur tangente dues à la déformation axiale  $e$ , au cisaillement  $\gamma$  et à la courbure  $\kappa$ . Sous cette forme,

$$\mathbf{K}_{\text{tan}}^e = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} K_1 & K_3 & K_4 & -K_1 & -K_3 & K_4 \\ & K_2 & K_5 & -K_3 & -K_2 & K_5 \\ & & K_6 & -K_4 & -K_5 & K_6 \\ & & & K_1 & K_3 & -K_4 \\ & & & & K_2 & -K_5 \\ & & & & & K_6 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{K}_{\text{tan}}^\gamma = \frac{GA}{L_0} \begin{bmatrix} K_2 & -K_3 & K_7 & -K_2 & K_3 & K_7 \\ & K_1 & K_8 & K_3 & -K_1 & K_8 \\ & & K_9 & -K_7 & -K_8 & K_9 \\ & & & K_2 & -K_3 & -K_7 \\ & & & & K_1 & -K_8 \\ & & & & & K_9 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{K}_{\text{tan}}^\kappa = \frac{EI}{L_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.22})$$

avec les paramètres

$$\begin{aligned} K_1 &= \bar{c}^2, \\ K_2 &= \bar{s}^2, \\ K_3 &= \bar{c}\bar{s}, \\ K_4 &= \frac{L_0}{2} (\bar{e}\bar{s} - \bar{\gamma}\bar{c}), \\ K_5 &= -\frac{L_0}{2} (\bar{e}\bar{c} + \bar{\gamma}\bar{s}), \\ K_6 &= \frac{L_0^2}{4} [\bar{\gamma}^2 - \bar{e}(\bar{e} + 1)], \\ K_7 &= \frac{L_0}{2} [\bar{\gamma}\bar{c} - (\bar{e} + 1)\bar{s}], \\ K_8 &= \frac{L_0}{2} [\bar{\gamma}\bar{s} + (\bar{e} + 1)\bar{c}], \\ K_9 &= \frac{L_0^2}{4} [(\bar{e} + 1)^2 - \bar{\gamma}^2]. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Il est rappelé que  $L_0$  est la longueur d'un élément de poutre dans la configuration initiale et que les quantités moyennes  $\bar{c}$ ,  $\bar{s}$ ,  $\bar{e}$  et  $\bar{\gamma}$  sont données par l'équation A.11.

## A.6 Calcul des efforts $\mathbf{f}_\Omega^{nl}$ , $\mathbf{f}_\Omega^{lin}$ , $\mathbf{f}_\Omega^{cste}$ et des matrices $\mathbf{K}_c$ et $\mathbf{K}_{gc}$

Pour un élément

$$\frac{\partial \mathcal{E}_c^{(0)}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}_\Omega^{nl} + \mathbf{f}_\Omega^{lin} + \mathbf{f}_\Omega^{cste}, \quad (\text{A.24})$$

et

$$\mathcal{E}_c^{(0)} = \frac{\rho\Omega^2}{2} \int_0^{L_0} \left[ A(R+x+u)^2 + I_2 \sin^2 \bar{\theta} \right] dX. \quad (\text{A.25})$$

Le jacobien de  $\mathcal{E}_c^{(0)}$  par rapport à  $\mathbf{q}$  est calculé avec  $\theta = \bar{\theta} = (\theta_1 + \theta_2)/2$ . La raison de ce choix est que  $\theta = N_1\theta_1 + N_2\theta_2$  qui est l'expression exacte de  $\theta$  résultant de la discrétisation éléments finis donne des efforts sous forme de fraction dont le dénominateur est  $(\theta_1 - \theta_2)^2$ . Par conséquent, le risque est, lorsque la poutre passe par sa position initiale ( $\theta_1 \approx \theta_2$ ), d'avoir des efforts très importants, ce qui n'est pas le cas *a priori* puisque la position initiale est celle où les seuls efforts en présence sont ceux dus à la rotation. Le choix a donc été fait de sous intégrer en prenant l'angle moyen.

La sous intégration est généralement réservée à la partie élastique afin d'éliminer le problème de verrouillage en cisaillement introduit par l'utilisation de fonctions d'interpolation  $N_i$  linéaires, qui sont responsables d'une énergie de cisaillement artificiellement élevée [84]. L'utilisation de la sous intégration est ici étendue à la partie cinématique venant de la rotation et uniquement pour  $\theta$ .

$$\frac{\partial \mathcal{E}_c^{(0)}}{\partial \mathbf{q}} = \underbrace{\frac{1}{4}\rho I_2 \Omega^2 L_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(2\bar{\theta}) \\ 0 \\ 0 \\ \sin(2\bar{\theta}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_\Omega^{nl}} + \underbrace{\frac{1}{6}\rho A \Omega^2 L_0 \begin{bmatrix} 2u_1 + u_2 \\ 0 \\ 0 \\ u_1 + 2u_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_\Omega^{lin}} + \underbrace{\frac{1}{6}\rho A \Omega^2 L_0 \begin{bmatrix} L_0 + 3R \\ 0 \\ 0 \\ 2L_0 + 3R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_\Omega^{cste}}. \quad (\text{A.26})$$

D'après (6.159) et (6.160)

$$\frac{\partial \mathbf{f}_\Omega^{lin}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K}_c \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{f}_\Omega^{nl}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K}_{gc}(\mathbf{q}), \quad (\text{A.27})$$

ce qui donne lieu aux expressions

$$\mathbf{K}_c = \frac{1}{6}\rho A L_0 \Omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{gc} = \frac{1}{4}\rho I_2 L_0 \Omega^2 \cos 2\bar{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.28})$$

La matrice de raideur tangente d'un élément de poutre 2D non-linéaire de Timoshenko en rotation est par conséquent

$$\mathbf{K}_{tan} = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_c - \mathbf{K}_{gc} = \mathbf{K}_{tan}^e + \mathbf{K}_{tan}^\gamma + \mathbf{K}_{tan}^\kappa - \mathbf{K}_c - \mathbf{K}_{gc}. \quad (\text{A.29})$$



## Éléments finis 3D en non linéaire géométrique

### B.1 Expressions de $D^{(1)}$ , $D^{(2)}$ et $D^{(2)'}$

Sous forme matricielle, le gradient linéaire de la transformation est

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

et la partie non linéaire

$$D^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

La partie non-linéaire de la variation du gradient de la transformation est quant à elle donnée par

$$D^{(2)'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$



## Données matériau du PIC151

Les paramètres matériau ont été fournis par *PI Ceramic*. Ils sont mesurés d'après le standard Européen EN 50324 2.

Coefficient	Unité	Valeur	Coefficient	Unité	Valeur
$\rho$	$\text{kg.m}^{-3}$	$7.76 \cdot 10^3$	$N_1$	Hz.m	1384
$Q_m$		88	$N_3$	Hz.m	1817
$\epsilon_{11}^\sigma$		1936	$N_5$	Hz.m	1050
$\epsilon_{33}^\sigma$		2400	$N_p$	Hz.m	1915
$\epsilon_{11}^\epsilon$		1110	$N_t$	Hz.m	2118
$\epsilon_{33}^\epsilon$		852	$d_{31}$	$\text{m.V}^{-1}$	$-2.14 \cdot 10^{-10}$
$\tan \delta$		$15.7 \cdot 10^{-3}$	$d_{33}$	$\text{m.V}^{-1}$	$4.23 \cdot 10^{-10}$
$k_{31}$		0.382	$d_{15}$	$\text{m.V}^{-1}$	$6.10 \cdot 10^{-10}$
$k_{33}$		0.697	$g_{31}$	$\text{V.m.N}^{-1}$	$-1.15 \cdot 10^{-2}$
$k_{15}$		0.653	$g_{33}$	$\text{V.m.N}^{-1}$	$2.18 \cdot 10^{-2}$
$k_p$		0.663	$g_{15}$	$\text{V.m.N}^{-1}$	$3.65 \cdot 10^{-2}$
$k_t$		0.528	$e_{31}$	$\text{N.V}^{-1}.\text{m}^{-1}$	-9.60
$\nu$		0.34	$e_{33}$	$\text{N.V}^{-1}.\text{m}^{-1}$	15.10
$s_{11}^E$	$\text{m}^2.\text{N}^{-1}$	$1.683 \cdot 10^{-11}$	$e_{15}$	$\text{N.V}^{-1}.\text{m}^{-1}$	12.00
$s_{33}^E$	$\text{m}^2.\text{N}^{-1}$	$1.900 \cdot 10^{-11}$	$c_{11}^E$	$\text{N.m}^{-2}$	$1.076 \cdot 10^{11}$
$s_{12}^E$	$\text{m}^2.\text{N}^{-1}$	$-5.656 \cdot 10^{-12}$	$c_{33}^E$	$\text{N.m}^{-2}$	$1.004 \cdot 10^{11}$
$s_{13}^E$	$\text{m}^2.\text{N}^{-1}$	$-7.107 \cdot 10^{-12}$	$c_{12}^E$	$\text{N.m}^{-2}$	$6.312 \cdot 10^{10}$
$s_{44}^E$	$\text{m}^2.\text{N}^{-1}$	$5.096 \cdot 10^{-11}$	$c_{13}^E$	$\text{N.m}^{-2}$	$6.385 \cdot 10^{10}$
$s_{66}^E$	$\text{m}^2.\text{N}^{-1}$	$4.497 \cdot 10^{-11}$	$c_{44}^E$	$\text{N.m}^{-2}$	$1.962 \cdot 10^{10}$
$s_{11}^D$	$\text{m}^2.\text{N}^{-1}$	$1.436 \cdot 10^{-11}$	$c_{66}^E$	$\text{N.m}^{-2}$	$2.224 \cdot 10^{10}$
$s_{33}^D$	$\text{m}^2.\text{N}^{-1}$	$9.750 \cdot 10^{-11}$	$c_{11}^D$	$\text{N.m}^{-2}$	$1.183 \cdot 10^{11}$
$s_{12}^D$	$\text{m}^2.\text{N}^{-1}$	$-8.112 \cdot 10^{-12}$	$c_{33}^D$	$\text{N.m}^{-2}$	$1.392 \cdot 10^{11}$
$s_{13}^D$	$\text{m}^2.\text{N}^{-1}$	$-2.250 \cdot 10^{-12}$	$c_{12}^D$	$\text{N.m}^{-2}$	$7.376 \cdot 10^{10}$
$s_{44}^D$	$\text{m}^2.\text{N}^{-1}$	$2.924 \cdot 10^{-11}$	$c_{13}^D$	$\text{N.m}^{-2}$	$4.436 \cdot 10^{10}$
$s_{66}^D$	$\text{m}^2.\text{N}^{-1}$	$4.497 \cdot 10^{-11}$	$c_{44}^D$	$\text{N.m}^{-2}$	$3.420 \cdot 10^{10}$
			$c_{66}^D$	$\text{N.m}^{-2}$	$2.224 \cdot 10^{10}$

TAB. C.1 – Coefficients du matériau piézoélectrique PIC151 de chez PI Ceramic



---

# Bibliographie

- [1] Advanced Materials, Araldite 2011. Tech. rep., Hunstman.
- [2] Araldite bonding. Surface preparation and pretreatments. Tech. rep., Hunstman.
- [3] Epoxy adhesive application guide. Tech. rep., Epoxy Technology.
- [4] IEEE Standard on Piezoelectricity. Tech. rep., The Institution of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 1988. ANSI/IEEE STD 176-1987.
- [5] Céramiques piézoélectriques. Tech. rep., Saint-Gobain, 2006. <http://www.quartz.saint-gobain.com>.
- [6] Piezoelectric ceramics. Properties & Applications. Tech. rep., Morgan Electro Ceramics, 2008. <http://www.morganelectroceramics.com/pzbook.html>.
- [7] Piezoelectric ceramic products. Tech. rep., Physik Instrumente, 2009. <http://www.piceramic.com>.
- [8] Strain Gage Installation with M-Bond 200 Adhesive. Tech. rep., Vishay Micro-Measurements, 2010. <http://www.vishaypg.com/micro-measurements>.
- [9] AGNENI, A., MASTRODDI, F., AND POLLI, G. Shunted piezoelectric patches in elastic and aeroelastic vibrations. *Computers and Structures* **81** (2003), 91–105.
- [10] ALAIMO, A., MILAZZO, A., AND ORLANDO, C. Boundary elements analysis of adhesively bonded piezoelectric. *Engineering fracture mechanics* **76** (2009), 500–511.
- [11] ALESSANDRONI, S., DELL ISOLA, F., AND PORFIRI, M. A revival of electric analogs for vibrating mechanical systems aimed to their efficient control by pzt actuators. *International Journal of Solids and Structures* **39**, 20 (2002), 5295–5324.
- [12] ANDERSON, E. H., AND HAGOOD, N. W. Simultaneous piezoelectric sensing / actuation : analysis and application to controlled structures. *Journal of Sound and Vibration* **174**, 5 (1992), 617–639.
- [13] ANDERSON, T. J., NAYFEH, A. H., AND BALACHANDRAN, B. Experimental verification of the importance of the nonlinear curvature in the response of a cantilever beam. *Journal of Vibration and Acoustics* **118** (1996), 21–27.
- [14] ARGYRIS, J., AND MLEJNEK, H. P. *Dynamics of Structures*, vol. V. North-Holland, 1991.
- [15] ARQUIER, R. Manlab : logiciel de continuation interactif (Manuel utilisateur). Tech. rep., Laboration de Mécanique et d’Acoustique, CNRS, <http://www.lma.cnrs-mrs.fr/manlab>, 2005.
- [16] AUSTIN, F., AND PAN, H. H. Planar dynamics of free rotating flexible beams with tip masses. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* **8** (1970), 726–733.
- [17] AZRAR, L., BENAMAR, R., AND WHITE, R. G. A semi-analytical approach to the non-linear dynamic response problem of beams at large vibration amplitudes - part II : multimode approach to the steady state forced periodic response. *Journal of Sound and Vibration* **255**, 1 (2002), 1–41.
- [18] BALMÈS, E. Methods for vibration design and validation. Tech. rep., École Centrale de Paris, Master MSSMat, November 2009. [www.sdtools.com](http://www.sdtools.com).

- [19] BATOZ, J. L., AND DHATT, G. *Modélisation des structures par éléments finis*, vol. 2 : poutres et plaques. 1990.
- [20] BAUER, H. F., AND EIDEL, W. Vibration of a rotating uniform beam, part II : Orientation perpendicular to the axis of rotation. *Journal of Sound and Vibration* **122** (1988), 357–375.
- [21] BAZOUNE, A. Survey on modal frequencies of centrifugally stiffened beams. *The Shock and Vibration Digest* **37** (2005), 449–469.
- [22] BECKER, J., O. FEIN, M. M., AND GAUL, L. Finite element-based analysis of shunted piezoelectric structures for vibration damping. *Computers and Structures* **84** (2006), 2340–2350.
- [23] BEHRENS, S., MOHEIMANI, S., AND FLEMING, A. J. Multiple mode current flowing passive piezoelectric shunt controller. *Journal of Sound and Vibration* **266**, 5 (2003), 929–942.
- [24] BELLOLI, A., AND ERMANNI, P. Optimum placement of piezoelectric ceramic modules for vibration suppression of highly constrained structures. *Smart Materials and Structures* **16** (2007).
- [25] BENJEDDOU, A. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements : a survey. *Computers and Structures* **76** (2000), 347–363.
- [26] BLAND, J. A. Discrete-variable Optimal Design Using a Tabu Search Approach. *The Built Environment, Wit Press* **13** (1995), 415–423.
- [27] BOYCE, W. E. Effect of hub radius on the vibrations of a uniform Bar. *Journal of Applied Mechanics* **23** (1956), 287–290.
- [28] BREI, D., AND CANNON, B. Piezoceramic hollow fiber active composites. *Composites Science and Technology* **64** (2004), 245–261.
- [29] BROCKMANN, T., AND LAMMERING, R. Beam finite elements for rotating piezoelectric fiber composite structures. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **17** (2006), 431–448.
- [30] CARUSO, G. A critical analysis of electric shunt circuits employed in piezoelectric passive vibration damping. *Smart Materials and Structures* **10** (2001), 1059–1068.
- [31] CHARLEUX, D. *Étude des effets de la friction en pied d’aube sur la dynamique des roues aubagées*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2006.
- [32] COCHELIN, B., DAMIL, N., AND POTIER-FÉRRY, M. *Méthodes asymptotique numérique*. Hermès, 2007.
- [33] COCHELIN, B., AND VERGEZ, C. A high order purely based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration* **324** (2009), 243–262.
- [34] COLLET, M., AND CUNEFARE, K. Modal synthesis and dynamical condensation methods for accurate piezoelectric systems impedance computation. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **19** (2008), 1251–1269.
- [35] CORREIA, V. M. F., SOARES, C. M. M., AND SOARES, C. A. M. Refined Models for the Optimal Design of Adaptive Structures Using Simulated Annealing. *Composites Structures* **54** (2001), 161–167.
- [36] CRAWLEY, E., AND DE LUIS, J. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. *AIAA Journal* **10** (1987), 1373–1385.
- [37] CROSS, C., AND FLEETER, S. Shunted piezoelectric for passive control of turbomachine blading flow induced vibrations. *Smart Materials and Structures* **11** (2002), 239–248.
- [38] DA SILVA, M. R. M. C., AND GLYNN, C. C. Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams - part I : Equations of motion. *Journal of Structural Mechanics* **6**, 4 (1978), 437–448.
- [39] DA SILVA, M. R. M. C., AND GLYNN, C. C. Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams - part II : Forced motions. *Journal of Structural Mechanics* **6**, 4 (1978), 449–461.
- [40] DAS, S., RAY, P. C., AND POHIT, G. Free vibration of a rotating beam with nonlinear spring and mass system. *Journal of Sound and Vibration* **301** (2007), 165–188.

- 
- [41] DAVIS, C. L., AND LESIEUTRE, G. A. A modal strain energy approach to the prediction of resistively shunted piezoceramic damping. *Journal of Sound and Vibration* **184**, 1 (1995), 129–139.
- [42] DE FARIA, A. R. The impact of finite-stiffness bonding on the sensing effectiveness of piezoelectric patches. *Smart Materials and Structures* **12** (2003), N5–N4.
- [43] DE MARNEFFE, B., AND PREUMONT, A. Vibration damping with negative capacitance shunts : theory and experiment. *Smart Materials and Structures* **17**, 3 (2008), 035015.
- [44] DE VICENTE, J., LANCHARES, J., AND HERMIDA, R. Placement by Thermodynamic Simulated Annealing. *Physics Letters A* **317**, 5-6 (2003), 415–423.
- [45] DELL’ISOLA, F., MAURINI, C., AND PORFIRI, M. Passive damping of beam vibrations through distributed electric networks and piezoelectric transducers : prototype design and experimental validation. *Smart Materials and Structures* **13**, 2 (2004), 299–308.
- [46] DUCARNE, J. *Modélisation et optimisation de dispositifs non-linéaires d’amortissement de structures par systèmes piézoélectriques commutés*. PhD thesis, Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, Cnam, Paris, 2009.
- [47] DUCARNE, J., THOMAS, O., AND DEÛ, J.-F. Performance and optimization of piezoelectric shunts for vibration reduction. *Journal of Sound and Vibration - manuscript draft* (2011).
- [48] DUCARNE, J., THOMAS, O., AND DEÛ, J.-F. Optimisation de dispositif passif d’atténuation de vibration par shunt piézoélectrique. In *Actes du 8ème colloque national en calcul de structures* (Giens, France, May 2007), vol. 2, Hermes, pp. 519–524. In french.
- [49] DUQUE-ANTÓN, M. Constructing Efficient Simulated Annealing Algorithms. *Discrete Applied Mathematics* **77** (1997), 139–159.
- [50] ERINGEN, A. C. On the non-linear vibration of elastic bars. *Quarterly of Applied Mathematics* **9** (1952), 361–369.
- [51] FABIAN, V. Simulated Annealing Simulated. *Computers & Mathematics with Applications* **33**, 1/2 (1997), 81–94.
- [52] FELIPPA, C. *Nonlinear Finite Element Methods*. 2007, ch. 9 : The TL Timoshenko Plane Beam Element.
- [53] FRECKER, M. I. Recent Advances In Optimization of Smart Structures and Actuators. *Journal of Intelligent Systems and Structures* **14**, 4-5 (2003), 207–216.
- [54] GHORBEL, S. *Couplage électromécanique effectif dans les structures piézoélectriques : expérimentations, simulations et corrélations*. PhD thesis, LISMMA, Institut Supérieur de Mécanique de Paris, 2009.
- [55] GIURGIUTIU, V. Review of Smart-Materials Actuation Solutions for Aeroelastic and Vibration Control. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **11** (2000), 525–544.
- [56] GLOVER, F. Tabu Search - Part 1. *ORSA Journal on Computing* **1** (1989), 190–206.
- [57] GLOVER, F. Tabu Search - Part 2. *ORSA Journal on Computing* **2** (1990), 4–32.
- [58] GÉRADIN, M., AND RIXEN, D. *Théories des vibrations, application à la dynamique des structures*. Masson, 1996.
- [59] GRIFFIN, J. H. Friction damping of resonant stresses in gas turbine engine airfoils. *Journal of Engineering for Power* **102** (1980), 329–333.
- [60] GROLET, A., THOUVEREZ, F., AND JEAN, P. Simulation et analyse d’une structure non-linéaire à symétrie cyclique. *Mécanique & Industries* **11** (2010), 453–463.
- [61] GUILLEN, J. *Studies of the dynamics of dry-friction-damped blade assemblies*. PhD thesis, The University of Michigan, 1999.
- [62] HAGOOD, N., AND VON FLOTOW, A. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration* **146**, 2 (1991), 243–268.
- [63] HODGES, D., AND DOWELL, E. H. Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades. *NASA TN D-7818* (1974).

- [64] HODGES, D. H. Nonlinear flexure and torsion of rotating beams, with application to helicopter rotor blades - I. Formulation. *Vertica* **10** (1986), 151–169.
- [65] HODGES, D. H. Nonlinear flexure and torsion of rotating beams, with application to helicopter rotor blades - II. Response and stability results. *Vertica* **10** (1986), 171–186.
- [66] HODGES, D. H. Nonlinear beam kinematics for small strains and finite rotations. *Vertica* **11** (1987), 573–589.
- [67] HOLLKAMP, J. J. Multimodal passive vibration suppression with piezoelectric materials and resonant shunts. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **5**, 1 (1994), 49–57.
- [68] HOLLKAMP, J. J., AND STARCHVILLE, T. F. A self-tuning piezoelectric vibration absorber. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **5**, 4 (1994), 559–566.
- [69] JOHNK, C. T. A. *Engineering electromagnetic fields and waves*, 2nd ed. J. Wiley & sons, 1988.
- [70] JONES, L. H. The transverse vibration of a rotating beam with tip mass : the method of integral equations. *Quarterly of Applied Mathematics* **33** (1975), 193–203.
- [71] JR, M. A. A., KADIPASAOGLUB, S. N., AND KHUMAWALAB, B. M. An empirical comparison of Tabu Search, Simulated Annealing, and Genetic Algorithms for facilities location problems. *International Journal Production Economics* **103** (2006), 742–754.
- [72] KIELB, J. J., AND ABHARI, R. S. Experimental study of aerodynamic and structural damping in a full-scale rotating turbine. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **125** (2003), 102–112.
- [73] LAMB, H., AND SOUTHWELL, R. V. The vibrations of a spinning disc. *Proceedings of the Royal Society* **99** (1921), 272–280.
- [74] LAXALDE, D. *Étude d'amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2007.
- [75] LEGRAND, M. *Modèles de prédiction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion*. PhD thesis, École Centrale de Nantes, 2005.
- [76] LEWANDOWSKI, R. Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures - part II : numerical strategy and examples. *International Journal of Solids and Structures* **34**, 15 (1997), 1949–1964.
- [77] LIVET, S. *Stabilisation du flottement fan et réduction des niveaux vibratoires des disques aubagés monoblocs par contrôle semi-passif*. PhD thesis, UFR des sciences et techniques de l'université de Franche-Comté, Besançon, France, 2009.
- [78] LIVET, S., BERTHILLIER, M., COLLET, M., AND COTE, J. Numerical and experimental optimized shunted piezoelectric circuit for turbomachinery blades. In *12th IFToMM World Congress* (Besançon, France, June 2007).
- [79] LO, H., GOLDBERG, J. E., AND BOGDANOFF, J. L. Effect of small hub radius change on bending frequencies of a rotating beam. *Journal of Applied Mechanics* **27** (1960), 548–550.
- [80] LO, H., AND RENBARGER, J. L. Bending vibrations of a rotating beam. In *First US national congress of applied mechanics* (Chicago, Illinois, 1951).
- [81] M. PORFIRI, C. M., AND POUGET, J. Identification of electromechanical modal parameters of linear piezoelectric structures. *Smart Materials and Structures* **16** (2007), 323–331.
- [82] MASON, W. P. *Piezoelectric Crystals and Their Application to Ultrasonics*. Tech. rep., D. Van Nostrand Company, Inc., 1950.
- [83] MAURINI, C., DELL'ISOLA, F., AND VESCOVO, D. D. Comparison of piezoelectronic networks acting as distributed vibration absorbers. *Mechanical Systems and Signal Processing* **18**, 5 (2004), 1243–1271.
- [84] MCNEAL, R. H. A simple quadrilateral shell element. *Computers and Structures* **8** (1978), 175–183.
- [85] MICHEL, L., AND HENTENRYCK, P. V. A simple tabu search for warehouse location. *European Journal of Operational Research* **157** (2004), 576–591.

- [86] MOITA, J. M. S., CORREIA, V. M. F., AND *al.* Optimal Design in Vibration Control of Adaptive Structures Using a Simulated Annealing Algorithm. *Composite Structures* **75** (2006), 79–87.
- [87] MOON, S. H., AND KIM, S. Suppression of nonlinear composite panel flutter with active passive hybrid piezoelectric networks using finite element method. *Composite Structures* **59** (2003), 525–533.
- [88] NACIVET, S. *Modélisation du frottement en pied d'aube par une approche fréquentielle*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2002.
- [89] NAYFEH, A. H. Nonlinear transverse vibrations of beams with properties that vary along the length. *The Journal of the Acoustical Society of America* **53**, 3 (1973), 766–770.
- [90] NAYFEH, A. H., AND MOOK, D. T. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & sons, 1979.
- [91] NAYFEH, A. H., AND PAI, P. F. *Linear and nonlinear Structural mechanics*. Wiley series in nonlinear science, 2004.
- [92] NGUYEN, C.-H., PIETRZKO, S., AND BUETIKOFER, R. The influence of temperature and bonding thickness on the actuation of a cantilever beam by PZT patches. *Smart Materials And Structures* **13** (2004), 851–860.
- [93] NIEDERBERGER, D., FLEMING, A., MOHEIMANI, S. O. R., AND MORARI, M. Adaptive multi-mode resonant piezoelectric shunt damping. *Smart Materials and Structures* **13**, 5 (2004), 1025–1035.
- [94] NJUGUNA, J. Flutter prediction, suppression and control in aircraft composite wings as a design prerequisite : a survey. *Structural Control and Health Monitoring* **14** (2007), 715–758.
- [95] P. APIWATTANALUNGGARN, S. W. SHAW, C. P., AND JIANG, D. Finite-element-based nonlinear modal reduction of a rotating beam with large-amplitude motion. *Journal of Vibration and Control* **9**, 3-4 (2003), 235–263.
- [96] PAI, P. F., AND NAYFEH, A. H. Non-linear non-planar oscillations of a cantilever beam under lateral base excitation. *International Journal of Nonlinear Mechanics* **25** (1990), 455–474.
- [97] PARK, J.-H., AND KIM, J.-H. Dynamic analysis of rotating curved beam with a tip mass. *Journal of Sound and Vibration* **228**, 5 (1999), 1017–1034.
- [98] PESHECK, E., PIERRE, C., AND SHAW, S. Modal reduction of a nonlinear rotating beam through nonlinear normal modes. *Journal of Vibration and Acoustics* **124** (2002), 229–236.
- [99] PETROV, E. P. Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks. *Journal of Turbomachinery* **125**, 2 (2003).
- [100] PIETRZAKOWSKI, M. Active damping of beams by piezoelectric system : effects of bonding layer properties. *International Journal of Solids and Structures* **38** (2001), 7885–7897.
- [101] PODOU, O., AND PIERRE, C. Hybrid frequency-time domain methods for the analysis of complex structural systems with dry friction damping. In *44th AIAA/ASME/ASCE/AHS Conferences* (Norfolk, Virginia, USA, 2003), AIAA.
- [102] RABINOVITCH, O., AND VINSON, J. R. Adhesive layer effects in surface-mounted piezoelectric actuators. *Journal of Intelligent Material Systems And Structures* **13** (2002), 689–704.
- [103] RAO, J. S., AND CARNEGIE, W. Non-linear vibrations of rotating cantilever beams. *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society* **74** (1970), 161–165.
- [104] RAO, J. S., AND CARNEGIE, W. Non-linear vibrations of rotating cantilever blades treated by the Ritz averaging process. *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society* **76** (1972), 566–569.
- [105] RIBEIRO, P., AND PETYT, M. Non-linear vibration of beams with internal resonance by the hierarchical finite-element method. *Journal of Sound and Vibration* **224**, 4 (1999), 591–624.
- [106] RICHARD, C., GUYOMAR, D., AUDIGIER, D., AND BASSALER, H. Enhanced semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device on an inductor. In *Smart Structures and Materials : Passive Damping and Isolation*, SPIE (2000), vol. 3989, pp. 288–299.

- [107] RICHARD, C., GUYOMAR, D., AND LEFEUVRE, E. Self-powered electronic breaker with automatic switching by detecting maxima and minima of potential difference between its power electrodes. Patent # PCT/FR2005/003000 WO/2007/063194, Organisation mondiale de la propriété intellectuelle, 2007.
- [108] ROLLS-ROYCE. *The jet engine*, fifth ed. Technical Publications Department, 1996.
- [109] ROSEN, A. Structural and dynamic behaviour of pre-twisted rods and beams. *Applied Mechanics Review* **44** (1991), 483–515.
- [110] ROSEN, A., AND FRIEDMANN, P. The nonlinear behavior of elastic slender straight beams undergoing small strains and moderate rotations. *Journal of Applied Mechanics* **46** (1988), 161–168.
- [111] S. KIRKPATRICK, C. D. G., AND VECCHI, M. P. Optimization by Simulated Annealing. *Science* **200**, 4598 (1983).
- [112] SALENÇON, J. *Mécanique des milieux continus*, vol. 1 : concepts généraux. Ecole polytechnique, Palaiseau, Fr., 1996.
- [113] SANLITURK, K. Y., EWINS, D. J., AND STANBRIDGE, A. B. Underplatform dampers for turbine blades : Theoretical modelling, analysis and comparison with experimental data. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **123** (2001), 919–929.
- [114] SHETA, E., MOSES, R., AND HUTTSELL, L. Active smart material control system for buffet alleviation. *Journal of Sound and Vibration* **292** (2006), 854–868.
- [115] SHEU, W.-J., HUANG, R.-T., AND WANG, C.-C. Influence of bonding glues on the vibration of piezoelectric fans. *Sensors and Actuators A*, 148 (2008), 115–121.
- [116] SIMON, H. The architecture of Complexity. *Proceedings of the American Philosophical Society* **106**, 6 (1962), 467–482.
- [117] SINHA, S. K. Combined torsional-bending-axial dynamics of a twisted rotating cantilever timoshenko beam with contact-impact loads at the free end. *Journal of Applied Mechanics* **74** (2007), 505–522.
- [118] SÉNÉCHAL, A., THOMAS, O., AND DEÛ, J.-F. Non-linear vibrations of rotating cantilever beams : finite elements validations of various reduced order models. In *EUROMECH Colloquium 503* (Frascati, Italy, 2009).
- [119] SÉNÉCHAL, A., THOMAS, O., AND DEÛ, J.-F. Optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction of complex structures - Application to a turbojet fan blade. In *International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, ASME* (Montréal, Canada, 2010).
- [120] SÉNÉCHAL, A., THOMAS, O., DEÛ, J.-F., AND JEAN, P. Atténuation des vibrations de structures complexes par shunt piézoélectrique - Application à un modèle simplifié d’aube de turbomachine. In *Neuvième colloque national en calcul des structures* (Giens, France, 2009).
- [121] SÉNÉCHAL, A., THOMAS, O., DEÛ, J.-F., AND JEAN, P. Optimization of shunted piezoelectric patches for complex structure vibration reduction - Application to a turbojet fan blade. In *IV European Conference on Computational Mechanics* (Paris, France, 2010).
- [122] SODANO, H., PARK, G., AND INMAN, D. An investigation into the performance of macro-fiber composites for sensing and structural vibration applications. *Mechanical Systems and Signal Processing* **18** (2004), 683–697.
- [123] SONTI, V., KIM, S., AND JONES., J. Equivalent forces and wavenumber spectra of shaped piezoelectric actuators. *Journal of Sound and Vibration* **187**, 1 (1995), 111–131.
- [124] SULEMAN, A., CRAWFORD, C., AND COSTA, A. P. Experimental Aeroelastic Response of Piezoelectric and Aileron Controlled 3D Wing. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **13** (2003), 75–83.
- [125] SWIKERT, M. A., AND JOHNSON, R. L. Friction and wear under fretting conditions of materials for use as wire friction dampers of compressor blade vibration. Tech. rep., 1968.
- [126] TABADDOR, M. Influence of nonlinear boundary conditions on the single-mode response of a cantilever beam. *International Journal of Solids and Structures* **37** (2000), 4915–4931.

- [127] TANG, J., AND K.W.WANG. Active-passive hybrid piezoelectric networks for vibration control : comparisons and improvement. *Smart Materials and Structures* **10**, 4 (2001), 794–806.
- [128] THOMAS, O. Amortissement d’aubes FAN par contrôle semi-actif. Rapport d’avancement RAP-Snecma-12/2005-1, RAP-Snecma-12/2006-1, LMSSC, 2006.
- [129] THOMAS, O., AND BILBAO, S. Geometrically non-linear flexural vibrations of plates : in-plane boundary conditions and some symmetry properties. *Journal of Sound and Vibration* **315**, 3 (2008), 569–590.
- [130] THOMAS, O., DEÛ, J.-F., AND DUCARNE, J. Vibration of an Elastic Structure with Shunted Piezoelectric Patches : Efficient Finite Element Formulation and Electromechanical Coupling Coefficients. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **80** (2009).
- [131] THOMAS, O., TOUZÉ, C., AND CHAIGNE, A. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates - part II : experiments. *Journal of Sound and Vibration* **265**, 5 (2003), 1075–1101.
- [132] TOKAR, G., ZINKOVSKI, A. P., AND MATVEEV, V. V. On the problem of improvement of the damping ability of rotor blades of contemporary gas-turbine engines. *Strength of Materials* **35**, 4 (2003), 368–375.
- [133] TRINDADE, A. *Contrôle hybride actif-passif des vibrations de structures par des matériaux piézoélectriques et viscoélastiques : poutres sandwich/multicouches intelligentes*. PhD thesis, Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, Cnam, Paris, 2000.
- [134] WANG, F. Y., AND GUAN, G. Influence of rotary inertia, shear and loading on vibrations of flexible manipulators. *Journal of Sound and Vibration* **171** (1994), 433–452.
- [135] WILLIAMS, R., AND INMAN, D. An overview of composite actuators with piezoceramic fibers. Tech. rep., Center for Intelligent Material Systems and Structures, Department of Mechanical engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University, 310 Durham Hall, Blacksburg, VA 24061-0261, 2002.
- [136] WOJNOWSKY-KRIEGER, S. The effect of axial force on the vibration of hinged bars. *Journal of Applied Mechanics* **17** (1950), 35–36.
- [137] WONG, D. F., AND LIU, C. L. A new algorithm for Floorplan design. 23rd ACM/IEEE Design Automation Conference, pp. 101–107.
- [138] WOODALL, S. R. On the large amplitude oscillations of a thin elastic beam. *International Journal of Non-linear Mechanics* **1** (1966), 217–238.
- [139] YANG, D., AND MENQ, C. H. Characterization of contact kinematics and application to the design of wedge dampers in turbomachinery blading, part I : stick-slip contact kinematics. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **120** (1998), 410–417.
- [140] YANG, D., AND MENQ, C. H. Characterization of contact kinematics and application to the design of wedge dampers in turbomachinery blading, part II : prediction of forced response and experimental verification. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **120** (1998), 418–423.
- [141] ZHENG, C., AND WANG, P. Parameter structure identification using tabu search and simulated annealing. *Advances in Water Resources* **19**, 4 (1996), 215–224.
- [142] ZIENKIEWICZ, O. C., AND TAYLOR, R. L. *The finite element method*, fifth ed., vol. 1. BH, 2000.