



**HAL**  
open science

# Contrôlabilité de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles

Karine Mauffrey

► **To cite this version:**

Karine Mauffrey. Contrôlabilité de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Franche-Comté, 2012. Français. NNT : . tel-00864091v1

**HAL Id: tel-00864091**

**<https://theses.hal.science/tel-00864091v1>**

Submitted on 20 Sep 2013 (v1), last revised 16 Apr 2014 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

présentée par

**Karine Mauffrey**

en vue de l'obtention du grade de

**Docteur de l'Université de Franche-Comté**  
**Spécialité Mathématiques et Applications**

---

## Contrôlabilité de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles

---

soutenue publiquement le 23 octobre 2012, devant le jury composé de

<b>Jérôme LE ROUSSEAU</b>	Professeur, Université d'Orléans	<i>Président du jury</i>
<b>Jean-Michel CORON</b>	Professeur, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6	<i>Rapporteur</i>
<b>Marius TUCSNAK</b>	Professeur, Université de Lorraine, Institut Élie Cartan	<i>Rapporteur</i>
<b>Assia BENABDALLAH</b>	Professeur, Université de Provence, Aix-Marseille 2	<i>Examinatrice</i>
<b>Louis JEANJEAN</b>	Professeur, Université de Franche-Comté	<i>Examineur</i>
<b>Vilmos KOMORNIK</b>	Professeur, Université de Strasbourg	<i>Examineur</i>
<b>Farid AMMAR KHODJA</b>	HDR-Maitre de conférences, Université de Franche-Comté	<i>Directeur de thèse</i>
<b>Arnaud MÜNCH</b>	Professeur, Université Clermont-Ferrand 2	<i>Directeur de thèse</i>



# Remerciements

C'est avec beaucoup de reconnaissance que j'exprime mes remerciements à mes directeurs de thèse, Farid Ammar Khodja et Arnaud Münch, pour m'avoir encadrée pendant ces quatre années de thèse. Leur disponibilité, leur écoute, leur confiance et leurs encouragements ont permis d'instaurer un climat de travail de qualité. Je les remercie de m'avoir initiée à la théorie du contrôle et de m'avoir transmis leur passion de la recherche.

Je tiens également à remercier mes rapporteurs, Jean-Michel Coron et Marius Tucsnak, d'avoir accepté de relire mon manuscrit, Jérôme Le Rousseau de m'avoir fait l'honneur de présider son premier jury de thèse à l'occasion de ma soutenance, Assia Benabdallah, Vilmos Komornik et Louis Jeanjean pour leur participation au jury. Je voudrais en profiter pour remercier chaleureusement Assia Benabdallah pour les discussions et conseils avisés au cours des différentes rencontres qui ont jalonné mes années de doctorat, et Louis Jeanjean de m'avoir présentée à Farid et Arnaud, et sans qui cette thèse n'aurait certainement jamais commencé.

La vie d'un chercheur est parsemée de rencontres. Je remercie les collègues de la grande fratrie du Contrôle et des Problèmes Inverses que j'ai entrevus régulièrement au cours de conférences, colloques ou séminaires (à Marseille, Toulouse, Besançon, Nancy, Benasque, Cartagena, Clermont-Ferrand, Superbesse...) pour les discussions scientifiques enrichissantes, mais aussi les soirées conviviales autour d'un bon petit plat. Je préfère ne pas les citer au risque d'en oublier.

J'ai une pensée pour l'ensemble des membres du Laboratoire de Mathématiques de Besançon et de l'École Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques qui ont agrémenté le quotidien par des discussions (pas nécessairement scientifiques) lors de pauses café ou repas au Resto U, par des services rendus... Je les en remercie chaleureusement. Je remercie particulièrement Philippe Borie et Rémi Barrère de m'avoir permis d'initier les étudiants de l'ENSMM à la théorie des distributions et m'avoir accompagnée dans cette tâche pendant quatre ans. Je n'oublie pas mes collègues et amis du Bureau 401 du Laboratoire de Mathématiques de Besançon (ou assimilés), en particulier les anciens, Dimitri, Florent et Olivier, et les amis de longue date (ou presque), Alexis, Céline, Guillaume et Émilie. Ils ont toujours été là pour me permettre de faire face aux petits problèmes du quotidien (LaTeX, anglais, problèmes administratifs ou informatiques) et pour rendre chaque jour plus agréable, et je les en remercie humblement. Je remercie bien sûr mes nouveaux collègues de l'équipe MACS du Centre Inria Saclay Île-de-France de m'avoir accueillie dans leurs récents locaux à Palaiseau et de m'avoir permis de préparer ma soutenance de thèse dans les meilleures conditions.

Je tiens à remercier ma famille et ma belle-famille d'avoir eu confiance en moi et de m'avoir soutenue dans la voie que j'ai choisie. J'exprime ma profonde reconnaissance à mes parents pour m'avoir encouragée et accompagnée depuis le début : mon papa pour son esprit scientifique et inventeur qui m'a aidée dès la plus tendre enfance à résoudre mes problèmes de géométrie et ma maman qui se demandait jusqu'alors ce qu'il pouvait bien encore y avoir à démontrer en mathématiques de nos jours. J'espère lui avoir prouvé que le domaine de la recherche en mathématiques est encore très vaste (pour ne pas dire infini) et riche en perspectives. Je remercie également mon frère et sa petite famille pour tous les bons moments passés en leur compagnie.

Je remercie de tout coeur Dimitri et Anaïs d'égayer ma vie au quotidien et d'avoir su gérer les moments difficiles de cette thèse avec beaucoup d'amour et de compréhension. Je passe maintenant le flambeau à Dimitri, sa fin de thèse est proche, courage !



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Une introduction à la contrôlabilité des systèmes</b>	<b>3</b>
<b>1 Résultats d'existence et d'unicité pour des systèmes d'évolution des premier et second ordres</b>	<b>5</b>
1.1 Opérateurs maximaux dissipatifs et problèmes de Cauchy abstraits . . . . .	5
1.1.1 Opérateurs maximaux dissipatifs et semi-groupes de contractions . . . . .	5
1.1.1.1 Les opérateurs maximaux dissipatifs . . . . .	6
1.1.1.2 Les semi-groupes de contractions et leurs générateurs . . . . .	7
1.1.1.3 Caractérisation des opérateurs auto-adjoints maximaux dissipatifs . .	8
1.1.2 Restrictions et extrapolations des opérateurs maximaux dissipatifs . . . . .	8
1.1.2.1 Restrictions des opérateurs maximaux dissipatifs . . . . .	8
1.1.2.2 Extrapolations des opérateurs maximaux dissipatifs . . . . .	9
1.1.3 Régularité des solutions du problème de Cauchy homogène . . . . .	10
1.1.4 Problèmes de Cauchy non homogènes . . . . .	10
1.1.4.1 Problèmes de Cauchy avec terme source . . . . .	11
1.1.4.2 Problèmes frontières non homogènes abstraits . . . . .	13
1.1.5 Cas des opérateurs diagonalisables . . . . .	16
1.1.5.1 Définition et propriétés des opérateurs diagonalisables . . . . .	17
1.1.5.2 Décomposition des opérateurs diagonalisables coercifs . . . . .	17
1.1.5.3 Opérateurs anti-adjoints et problèmes du second ordre en temps . . .	19
1.1.6 Exemple d'un problème du second ordre pour un opérateur maximal dissipatif avec spectre essentiel . . . . .	22
1.1.6.1 Étude du problème homogène . . . . .	22
1.1.6.2 Reformulation du problème non homogène . . . . .	27
1.2 Systèmes paraboliques à coefficients non constants . . . . .	28
1.2.1 Un théorème abstrait d'existence et unicité de solutions . . . . .	29
1.2.2 Une application au cas des données initiales dans $(L^2(\Omega))^n$ . . . . .	29
1.2.3 Une application au cas des données initiales dans $(H_0^1(\Omega))^n$ . . . . .	30
Références bibliographiques du chapitre 1 . . . . .	31
<b>2 Contrôlabilité de systèmes d'équations aux dérivées partielles</b>	<b>33</b>
2.1 Concepts de contrôlabilité et d'observabilité . . . . .	33
2.1.1 Définition des différentes notions de contrôlabilité . . . . .	34
2.1.2 Dualité contrôlabilité-observabilité . . . . .	35
2.2 Contrôlabilité en dimension finie . . . . .	37
2.2.1 Équivalence entre les différentes notions . . . . .	37
2.2.2 Le critère de Kalman . . . . .	38
2.2.2.1 Cas des systèmes autonomes . . . . .	38
2.2.2.2 Cas des systèmes non autonomes . . . . .	39
2.3 Quelques exemples d'inégalités d'observabilité en lien avec des problèmes de contrôlabilité	40

2.3.1	Inégalité d'observabilité pour la contrôlabilité frontière d'un système du second ordre avec opérateur d'ordre mixte . . . . .	40
2.3.2	Inégalité d'observabilité pour la contrôlabilité frontière de l'équation des ondes . . . . .	42
2.3.3	Inégalité d'observabilité pour la contrôlabilité interne aux trajectoires d'un système parabolique . . . . .	44
	Références bibliographiques du chapitre 2 . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Quelques outils pour la contrôlabilité de systèmes paraboliques et hyperboliques</b>	<b>47</b>
3.1	L'inégalité de Ingham et ses applications à la contrôlabilité de l'équation des ondes . . . . .	47
3.1.1	L'inégalité de Ingham et la contrôlabilité de l'équation des ondes en dimension 1 . . . . .	47
3.1.2	Cas de la dimension 2 . . . . .	50
3.2	L'inégalité de Carleman et ses applications à la contrôlabilité des systèmes paraboliques . . . . .	58
3.2.1	L'inégalité de Carleman pour l'équation de la chaleur . . . . .	58
3.2.2	Application à la contrôlabilité des systèmes paraboliques de trois équations avec deux ou trois forces de contrôle . . . . .	59
3.2.2.1	Contrôlabilité aux trajectoires par trois contrôles. . . . .	61
3.2.2.2	Contrôlabilité aux trajectoires par deux contrôles. . . . .	61
3.2.2.3	Lien avec le critère de Kalman . . . . .	69
	Références bibliographiques du chapitre 3 . . . . .	70
<b>II</b>	<b>Deux résultats de contrôlabilité</b>	<b>73</b>
<b>4</b>	<b>Contrôlabilité frontière par une force de contrôle d'un système hyperbolique avec spectre essentiel</b>	<b>75</b>
4.1	Introduction - Problem statement . . . . .	75
4.2	Preliminaries and main results . . . . .	77
4.3	Well-posedness of the controlled system . . . . .	80
4.3.1	A Dirichlet map . . . . .	80
4.3.2	Toward an internal control problem . . . . .	82
4.4	Controllability and observability . . . . .	83
4.4.1	Formulation of the observability inequality . . . . .	83
4.4.2	Observability inequality in $H_{1/2}^+ \times H^+$ : proof of Theorem 4.3 . . . . .	85
4.4.2.1	First step: the observability inequality in terms of Fourier series . . . . .	85
4.4.2.2	Second step: some gap properties . . . . .	87
4.4.2.3	Third step: proof of the observability inequality . . . . .	88
4.4.3	Lack of controllability in $H^- \times H_{-1/2}^-$ . . . . .	92
4.4.3.1	Proof of Proposition 4.4 . . . . .	92
4.4.3.2	Numerical experiments . . . . .	92
4.5	Concluding remarks and comments . . . . .	93
4.5.1	A refined controllability result . . . . .	93
4.5.2	Controllability with respect to $T$ . . . . .	94
4.5.3	Partial controllability . . . . .	94
	Références bibliographiques du chapitre 4 . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Contrôlabilité aux trajectoires d'un système parabolique de trois équations avec une ou deux forces de contrôle</b>	<b>97</b>
5.1	Statement of the main results and presentation of the method . . . . .	97
5.1.1	Main results . . . . .	99
5.1.2	Presentation of the method . . . . .	101
5.2	An observability inequality for the non homogeneous backward system associated with (5.21) . . . . .	103
5.3	Controllability of (5.21) and proof of Theorem 5.3 . . . . .	106
5.4	Application of the method to the controllability by two forces: proof of Theorem 5.6 . . . . .	109
	Application of the method to the controllability by two forces: proof of Theorem 5.6 . . . . .	109
5.5	Construction of $\hat{y}$ . . . . .	110

5.5.1	Statement of the results . . . . .	110
5.5.2	An observability inequality for the backward system associated with (5.54) . . . . .	111
5.5.3	Proof of Theorem 5.21 . . . . .	115
5.6	Comments and further results . . . . .	116
5.6.1	Controllability of $n \times n$ parabolic systems by one force. . . . .	116
5.6.2	The nonlinear case. . . . .	116
5.6.3	The case of distinct diffusion coefficients. . . . .	116
5.7	Une application numérique en $2D$ au cas de la contrôlabilité d'un système de trois équations à coefficients constants avec une force de contrôle . . . . .	118
5.7.1	Approche indirecte . . . . .	119
5.7.2	Approche directe . . . . .	129
	Références bibliographiques du chapitre 5 . . . . .	132
	<b>Conclusion</b>	<b>135</b>
	<b>Bibliographie générale</b>	<b>139</b>
	<b>Notations</b>	<b>141</b>
	<b>Index</b>	<b>142</b>





# Introduction

La problématique générale de la contrôlabilité consiste à étudier s'il est possible, pour un système donné, d'amener n'importe quel état initial vers une cible donnée en un temps initialement fixé. Les moyens utilisés pour agir sur un système de façon à le diriger vers une cible sont appelés *contrôles*. Bien entendu, plus on s'autorise de libertés sur le nombre de contrôles à mettre en action, plus on a la possibilité de contrôler un système. En revanche, dans la pratique, le champ d'actions sur un système donné est plutôt restreint : par exemple, lorsque la zone d'action qui est accessible par le manipulateur n'est qu'une partie de la frontière de l'objet. Un des principaux enjeux de la théorie de la contrôlabilité consiste à contrôler des systèmes avec un nombre minimal de contrôles. Cette thèse s'inscrit au cœur de cette problématique. Son objectif est de présenter quelques résultats de contrôlabilité, par un nombre réduit de contrôles, de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Deux axes principaux sont abordés. Le premier axe concerne la contrôlabilité, par le bord, d'un système *hyperbolique* du second ordre en temps pour lequel l'opérateur associé possède un *spectre essentiel*. Le second axe concerne la contrôlabilité des *systèmes paraboliques à coefficients non constants*.

La partie I du manuscrit rappelle les définitions et résultats fondamentaux qui sont nécessaires pour aborder ces deux axes de recherche.

La définition de la contrôlabilité d'un système reposant essentiellement sur le sens que l'on donne à ses solutions, on présente dans le chapitre 1 des résultats généraux d'existence et d'unicité de solutions, à la fois pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles qui entrent dans le cadre de la théorie des semi-groupes, et pour des systèmes paraboliques.

Le chapitre 2 présente, d'un point de vue général, les différentes notions de contrôlabilité ainsi que la dualité entre contrôlabilité et observabilité. On formule également, dans ce chapitre, les problématiques de contrôlabilité pour les deux systèmes auxquels on s'intéresse et on établit les inégalités d'observabilité associées.

Le chapitre 3 est consacré à la présentation de deux outils qui sont utilisés pour démontrer la contrôlabilité d'équations aux dérivées partielles de types *équation des ondes* et *équation de la chaleur* : l'inégalité de Ingham et l'inégalité de Carleman. On présente également des applications de ces deux outils à la contrôlabilité de certains systèmes hyperboliques et paraboliques.

La partie II de la thèse est découpée en deux chapitres. Elle présente deux résultats principaux qui ont été obtenus au cours de ces années de doctorat.

Le chapitre 4 concerne l'étude de la contrôlabilité exacte, par le bord et avec un seul contrôle, d'un système hyperbolique de deux équations avec spectre essentiel qui provient de la modélisation des coques élastiques. Ce chapitre est le fruit d'un travail en collaboration avec Farid Ammar Khodja et Arnaud Münch qui a fait l'objet d'une publication dans *SIAM Journal on Control and Optimization*, intitulée "Exact boundary controllability of a system of mixed order with essential spectrum", [AKMM11]. Dans ce chapitre, on démontre que la présence de spectre essentiel empêche la contrôlabilité d'avoir lieu uniformément en les données initiales et on caractérise précisément l'espace des données initiales uniformément contrôlables. L'argument principal consiste à établir une inégalité de type Ingham qui repose sur une étude détaillée des valeurs propres de l'opérateur considéré et de ses propriétés spectrales. Enfin, on présente quelques résultats d'expériences numériques pour illustrer le fait que les données initiales qui sont engendrées par une infinité de fonctions propres associées aux valeurs propres générant le spectre essentiel ne sont pas contrôlables, alors qu'il y a une contrôlabilité uniforme lorsque les données initiales ne sont engendrées que par les fonctions propres associées aux valeurs propres du spectre ponctuel.

Le chapitre 5 traite de la contrôlabilité aux trajectoires, par un ou deux contrôles localisés en espace, d'un système parabolique linéaire de trois équations à coefficients non constants. Ce chapitre a initialement été motivé par l'étude de la contrôlabilité aux trajectoires d'un système non linéaire de réaction-diffusion modélisant une thérapie du cancer du cerveau. En cherchant à étudier la contrôlabilité du système linéarisé de ce système de réaction-diffusion, on s'est rapidement heurté au vide constitué par le peu de résultats existant sur la contrôlabilité des systèmes paraboliques linéaires à coefficients non constants. S'est alors naturellement imposée l'idée d'essayer d'élargir la classe des systèmes paraboliques linéaires pour lesquels on peut formuler une condition suffisante de contrôlabilité. On présente, dans le chapitre 5, une nouvelle approche pour étudier la contrôlabilité des systèmes paraboliques linéaires de trois équations à coefficients non constants. La méthode consiste à décomposer de manière adaptée la solution à contrôler, en s'appuyant sur l'existence d'une solution contrôlée par trois contrôles (existence qui est assurée par l'inégalité de Carleman) et sur la démonstration d'une inégalité d'observabilité à poids en lien avec la contrôlabilité sur tout le domaine d'un système non homogène de deux équations. La partie théorique du chapitre 5 fait l'objet d'un article intitulé "On the null controllability of a parabolic system with non-constant coefficients by one or two control forces", qui est en cours de publication dans *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, [Mau12]. En plus du résultat théorique, on présente à la fin du chapitre 5 une illustration numérique, sur un exemple en deux dimensions d'espace, de l'utilisation de la méthode présentée dans la première partie du chapitre, pour approcher une solution contrôlée d'un système parabolique de trois équations à coefficients constants.

Première partie

Une introduction à la contrôlabilité  
des systèmes



# Chapitre 1

## Résultats d'existence et d'unicité pour des systèmes d'évolution des premier et second ordres

Ce chapitre est consacré aux problèmes d'existence et d'unicité de solutions pour deux classes de systèmes d'équations aux dérivées partielles : les systèmes du premier et du second ordre en temps associés à des opérateurs maximaux dissipatifs et, les systèmes paraboliques à coefficients non constants. Cette question d'existence et d'unicité de solutions est inhérente à la définition de la *contrôlabilité* puisqu'elle donne un sens aux solutions des systèmes considérés.

Dans la section 1.1, on commence par rappeler des résultats généraux sur les opérateurs maximaux dissipatifs et les semi-groupes de contractions qu'ils engendrent, puis on énonce des résultats d'existence et d'unicité pour des problèmes de Cauchy homogènes et non homogènes associés à ce type d'opérateurs. Enfin, on introduit le système hyperbolique pour lequel on étudiera, en détails, la contrôlabilité exacte dans le chapitre 4 et, on utilise la théorie des semi-groupes pour donner un sens aux solutions de ce système.

Dans la section 1.2, on énonce un théorème abstrait d'existence et d'unicité de solutions pour des problèmes d'évolution du premier ordre en temps (voir [DL88]), que l'on applique au cas des systèmes paraboliques à coefficients non constants.

### 1.1 Opérateurs maximaux dissipatifs et problèmes de Cauchy abstraits

Dans cette section, on présente des résultats d'existence et d'unicité pour les solutions de problèmes d'évolution de la forme

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + f(t), & t \in [0, T], \\ y(0) = y^0, \end{cases}$$

où  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  est un opérateur maximal dissipatif (cf. Définition 1.1). Dans le chapitre 2, les termes sources  $f$  qu'on considérera pour les différentes problématiques de *contrôlabilité* seront de la forme  $f(t) = Bv(t)$ , où  $B : D(B) \subset U \rightarrow H_{-1}$  désigne un opérateur non borné entre deux espaces de Hilbert  $U$  et  $H_{-1}$  et  $v \in L^2(0, T; U)$  désigne un *contrôle*.

#### 1.1.1 Opérateurs maximaux dissipatifs et semi-groupes de contractions

Dans la suite, le terme *opérateur* désignera une application linéaire. On ne considérera que des opérateurs  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  définis sur un espace de *Hilbert complexe*  $H$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  et de la norme Hilbertienne  $\| \cdot \|_H$  qui en découle. On identifiera l'espace  $H$  avec son dual  $H'$  et on notera  $\mathcal{L}(H)$  l'ensemble des opérateurs *bornés* (ou *continus*) de  $H$  dans  $H$ . Certains des résultats qui seront énoncés sont aussi valables pour des opérateurs définis sur un espace de Banach quelconque. Mais, puisque pour les applications qui suivent on ne considérera que des espaces de Hilbert, on se

place dès maintenant dans le cadre de ces espaces, ce qui permet de simplifier bien des énoncés. Cette partie se réfère à [BC93], [Bre11] et [TW09].

### 1.1.1.1 Les opérateurs maximaux dissipatifs

#### Définition 1.1.

- On dit que  $A$  est *dissipatif* (sur  $H$ ) si

$$\forall x \in D(A), \quad \operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq 0.$$

- Si de plus  $I - A$  est surjectif de  $D(A)$  dans  $H$ , alors on dit que  $A$  est *maximal dissipatif* (sur  $H$ ).

La proposition suivante donne une caractérisation des opérateurs dissipatifs qui est utilisée pour démontrer de nombreux résultats concernant les opérateurs maximaux dissipatifs.

**Proposition 1.2.** *Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1.  $A$  est dissipatif sur  $H$ .
2.  $A$  vérifie

$$\forall x \in D(A), \quad \forall \lambda > 0, \quad \|x\|_H \leq \lambda^{-1} \|\lambda x - Ax\|_H.$$

3.  $A$  vérifie

$$\forall x \in D(A), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_{>0}, \quad \|x\|_H \leq (\operatorname{Re} \lambda)^{-1} \|\lambda x - Ax\|_H,$$

où  $\mathbb{C}_{>0} = \{\lambda \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ .

Cette caractérisation des opérateurs dissipatifs permet d'établir une caractérisation des opérateurs dissipatifs qui sont maximaux dissipatifs.

**Proposition 1.3.** *Si  $A$  est dissipatif alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1.  $A$  est maximal dissipatif.
2. Il existe  $\lambda_0 > 0$  tel que  $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - A) = H$ .
3. Pour tout  $\lambda > 0$ ,  $\lambda I - A$  est inversible, d'inverse borné dans  $\mathcal{L}(H)$  et  $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \lambda^{-1}$ .
4. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}_{>0}$ ,  $\lambda I - A$  est inversible, d'inverse borné dans  $\mathcal{L}(H)$  et  $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq (\operatorname{Re} \lambda)^{-1}$ .

**Remarque 1.4.** On rappelle la définition de l'ensemble résolvant  $\rho(A)$  d'un opérateur  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \lambda I - A \text{ est inversible et } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)\},$$

et du spectre  $\sigma(A)$  de  $A$  :

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

La Proposition 1.3 implique que le spectre d'un opérateur maximal dissipatif est contenu dans le demi-plan  $\mathbb{C}_{\leq 0} = \{\lambda \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} \lambda \leq 0\}$ .

On énonce maintenant une propriété importante des opérateurs maximaux dissipatifs.

**Proposition 1.5.** *Si  $A$  est maximal dissipatif alors*

1.  $D(A)$  est dense dans  $H$ ,
2.  $A$  est fermé (i.e.  $\operatorname{gr}(A) = \{(x, Ax); x \in D(A)\}$  est fermé dans  $H \times H$ ).

**Remarque 1.6.** On rappelle que lorsque l'opérateur  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  est fermé, l'égalité

$$\|x\|_{\operatorname{gr}(A)} = (\|x\|_H^2 + \|Ax\|_H^2)^{1/2}, \quad \forall x \in D(A),$$

définit une norme sur  $D(A)$  pour laquelle  $(D(A), \|\cdot\|_{\operatorname{gr}(A)})$  est un espace de Hilbert. La norme  $\|\cdot\|_{\operatorname{gr}(A)}$  est appelée *norme du graphe* sur  $D(A)$ . Pour cette norme,  $A \in \mathcal{L}(D(A), H)$ . Ainsi, si  $A$  est maximal dissipatif, alors pour tout  $\lambda > 0$ ,  $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H, D(A))$ .

La Proposition 1.5 assure l'existence de l'adjoint de  $A$ , lorsque l'opérateur  $A$  est maximal dissipatif, puisque dans ce cas  $D(A)$  est dense dans  $H$ . On rappelle que l'adjoint de  $A$  est l'opérateur  $A^* : D(A^*) \subset H \rightarrow H$  défini par

$$D(A^*) = \{x \in H / \exists c > 0, \quad \forall y \in D(A), \quad |\langle Ay, x \rangle| \leq c\|y\|_H\},$$

et, par le fait que, pour tout  $x \in D(A^*)$ ,  $A^*x$  est l'unique extension linéaire et continue à  $H$  de la forme linéaire  $a_x : y \in D(A) \mapsto \langle Ay, x \rangle \in \mathbb{C}$  vérifiant  $\|A^*x\|_{H'} = \|a_x\|_{(D(A))'}$  (dont l'existence est assurée par le théorème de Hahn-Banach). On peut alors démontrer le résultat suivant.

**Proposition 1.7.** *Si  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  est maximal dissipatif, alors son adjoint  $A^* : D(A^*) \subset H \rightarrow H$  est maximal dissipatif.*

### 1.1.1.2 Les semi-groupes de contractions et leurs générateurs

**Définition 1.8.**

- Une famille  $(S(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(H)$  est appelée *semi-groupe de contractions* si elle vérifie les propriétés suivantes :
  1.  $S(0) = I$ ,
  2.  $\forall s, t > 0, \quad S(s+t) = S(s)S(t)$ ,
  3.  $\forall t \geq 0, \quad \|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$ ,
  4. pour tout  $x \in H$ , l'application  $t \in [0, +\infty[ \mapsto S(t)x \in H$  est continue.
- On appelle *générateur* d'un semi-groupe de contractions  $(S(t))_{t \geq 0}$  l'opérateur  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  défini par :

1.  $D(A) = \left\{ x \in H / \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe dans } H \right\}$ ,
2.  $\forall x \in D(A), \quad Ax = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{S(t)x - x}{t}$ .

L'importance des opérateurs maximaux dissipatifs se mesure dans le résultat suivant dont on pourra trouver une démonstration dans [Paz83].

**Théorème 1.9.** [Lumer-Phillips-Hille-Yosida]

Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur.

1.  $A$  est maximal dissipatif si, et seulement si,  $A$  est le générateur d'un semi-groupe de contractions  $(S(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(H)$ . Le semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  est alors donné par

$$\forall x \in H, \quad \forall t \geq 0, \quad S(t)x = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} e^{tA_\lambda} x,$$

où  $A_\lambda = A(I - \lambda A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ , pour tout  $\lambda > 0$ .

2. Dans ce cas, pour tout  $y^0 \in D(A)$ , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = Ay(t), & t \in [0, +\infty[, \\ y(0) = y^0, \end{cases} \quad (1.1)$$

admet une unique solution  $y \in C([0, +\infty[, D(A)) \cap C^1([0, +\infty[, H)$ . De plus,

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad y(t) = S(t)y^0.$$

**Remarque 1.10.**

- La famille  $(A_\lambda)_{\lambda > 0} \subset \mathcal{L}(H)$  est appelée *approximation de Yosida* de  $A$ .
- Si  $A$  est maximal dissipatif, alors lorsque  $y^0$  n'appartient pas à  $D(A)$  mais à  $H$  seulement, l'application  $y : t \in [0, +\infty[ \mapsto y(t) = S(t)y^0$  est appelée *solution faible* (*mild solution*, en anglais) de (1.1).

Il est facile de démontrer le résultat suivant sur l'adjoint d'un opérateur maximal dissipatif.

**Proposition 1.11.** *Si  $A$  est le générateur d'un semi-groupe de contractions  $(S(t))_{t \geq 0}$ , alors  $(S(t)^*)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe de contractions, de générateur  $A^*$ .*



### 1.1.1.3 Caractérisation des opérateurs auto-adjoints maximaux dissipatifs

**Définition 1.12.** Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur tel que  $\overline{D(A)} = H$  et soit  $A^*$  l'adjoint de  $A$ .

- On dit que  $A$  est *auto-adjoint* si  $D(A^*) = D(A)$  et  $A^* = A$ .
- On dit que  $A$  est *symétrique* si :

$$\forall (x, y) \in D(A) \times D(A), \quad \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

De manière équivalente,  $A$  est symétrique si et seulement si  $D(A) \subset D(A^*)$  et  $A^*|_{D(A)} = A$ . Ainsi, si  $A$  est auto-adjoint alors il est symétrique, mais la réciproque n'est pas vraie, en général, si l'opérateur  $A$  n'est pas borné. Le résultat suivant donne l'équivalence entre ces deux notions lorsque  $A$  est maximal dissipatif.

**Proposition 1.13.** *Si  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  est maximal dissipatif, alors  $A$  est auto-adjoint si, et seulement si, il est symétrique.*

**Remarque 1.14.** L'hypothèse " $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  est maximal dissipatif" n'est pas nécessaire. Plus généralement, le résultat est encore vrai si on remplace cette hypothèse par "Il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\lambda I - A : D(A) \subset H \rightarrow H$  est inversible".

## 1.1.2 Restrictions et extrapolations des opérateurs maximaux dissipatifs

Dans cette sous-section, on construit, à partir d'un opérateur maximal dissipatif  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  donné, deux nouveaux opérateurs maximaux dissipatifs : d'abord un opérateur  $A_{(1)}$  appelé *restriction* de  $A$  qui, comme son nom l'indique, est la restriction de  $A$  à un sous-ensemble de  $D(A)$ , ici  $D(A^2)$ , puis un opérateur  $A_{(-1)}$ , appelé *extrapolation* de  $A$ , qui étend  $A$  en un opérateur défini sur l'espace  $H$  tout entier.

### 1.1.2.1 Restrictions des opérateurs maximaux dissipatifs

On rappelle que les puissances entières d'un opérateur  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  sont définies de la façon suivante.

**Définition 1.15.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , l'opérateur  $A^k : D(A^k) \subset H \rightarrow H$  est défini par

- $D(A^k) = \{x \in D(A^{k-1}) / Ax \in D(A^{k-1})\}$ ,
- $\forall x \in D(A^k), \quad A^k x = A^{k-1}(Ax)$ .

Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur *maximal dissipatif* qui génère un semi-groupe de contractions  $(S(t))_{t \geq 0}$  et soit  $\lambda$  un réel strictement positif. On a vu dans la Remarque 1.6 que  $(D(A), \|\cdot\|_{\text{gr}(A)})$  est un espace de Hilbert. La Proposition 1.2 permet de construire une nouvelle norme sur  $D(A)$ . En effet, l'inégalité

$$\|x\|_H \leq \lambda^{-1} \|(\lambda I - A)x\|_H, \quad \forall x \in D(A),$$

implique, en particulier, que l'application  $x \in D(A) \mapsto \|(\lambda I - A)x\|_H$  définit une norme sur  $D(A)$ . On note  $H_{1,\lambda}$  l'espace vectoriel normé  $D(A)$  muni de cette norme :  $\|x\|_{H_{1,\lambda}} = \|(\lambda I - A)x\|_H$ .

**Lemme 1.16.** *Sur  $D(A)$ , la norme  $\|\cdot\|_{H_{1,\lambda}}$  est équivalente à la norme du graphe. Plus précisément, il existe deux constantes  $c_1 > 0$  et  $c_2 > 0$  telles que*

$$c_1 \|x\|_{\text{gr}(A)} \leq \|x\|_{H_{1,\lambda}} \leq c_2 \|x\|_{\text{gr}(A)}, \quad \forall x \in D(A). \quad (1.2)$$

On construit maintenant une restriction de  $A$  qui est un opérateur maximal dissipatif sur  $H_{1,\lambda}$ , de domaine  $D(A^2)$ .

**Proposition 1.17.** *L'opérateur  $A_{(1),\lambda} : D(A_{(1),\lambda}) \subset H_{1,\lambda} \rightarrow H_{1,\lambda}$  défini par*

$$\begin{aligned} D(A_{(1),\lambda}) &= D(A^2), \\ A_{(1),\lambda} x &= Ax, \quad \forall x \in D(A_{(1),\lambda}), \end{aligned}$$

*est maximal dissipatif sur  $H_{1,\lambda}$ . Le semi-groupe de contractions  $(S_{1,\lambda}(t))_{t \geq 0}$  engendré par  $A_{(1),\lambda}$  vérifie la relation :*

$$S_{1,\lambda}(t)x = (\lambda I - A)^{-1} S(t)(\lambda I - A)x, \quad \forall x \in H_{1,\lambda}.$$

La norme du graphe  $\|\cdot\|_{\text{gr}(A)}$  étant équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{H_{1,\lambda}}$  sur  $D(A)$ , on déduit de la Proposition 1.17 le résultat suivant.

**Corollaire 1.18.** *Si  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  est maximal dissipatif, alors l'opérateur  $A_{(1)} : D(A_{(1)}) \subset H_1 \rightarrow H_1$  défini sur l'espace de Hilbert  $H_1 = D(A)$  muni de la norme du graphe  $\|\cdot\|_{\text{gr}(A)}$ , par*

$$\begin{cases} D(A_{(1)}) = D(A^2), \\ A_{(1)}x = Ax, \quad \forall x \in D(A_{(1)}), \end{cases} \quad (1.3)$$

*est maximal dissipatif sur  $H_1$ .*

**Remarque 1.19.** L'opérateur  $A_{(1)}$  n'est rien d'autre que la restriction de  $A$  à  $D(A^2)$ . En itérant la Proposition 1.18, on construit une suite  $(A_{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  d'opérateurs maximaux dissipatifs,

$$A_{(n)} : D(A_{(n)}) = H_{n+1} \subset H_n \rightarrow H_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

associée à la suite

$$\cdots \subset H_{n+1} \subset H_n \subset \cdots \subset H_1 \subset H_0 = H, \quad (1.4)$$

d'espaces de Hilbert *emboîtés* définie par  $H_n = D(A^n)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Remarquons au passage que chaque inclusion de la chaîne (1.4) est continue et dense.

### 1.1.2.2 Extrapolations des opérateurs maximaux dissipatifs

Dans tout ce paragraphe,  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  désigne un opérateur *maximal dissipatif* et  $\lambda$  un réel strictement positif. L'objectif ici est de prolonger  $A$  en un opérateur maximal dissipatif de domaine  $H$ .

D'après la Proposition 1.7,  $A^* : D(A^*) \subset H \rightarrow H$  est maximal dissipatif sur  $H$ . On peut donc considérer, comme dans le paragraphe précédent l'espace de Hilbert  $H_{1,\lambda}^* = D(A^*)$  muni de la norme  $\|x\|_{H_{1,\lambda}^*} = \|(\lambda I - A^*)x\|_H$  (équivalente à la norme du graphe  $\|\cdot\|_{\text{gr}(A^*)}$  sur  $D(A^*)$ ), d'après le Lemme 1.16).

On note maintenant  $H_{-1,\lambda}$  le dual de  $H_{1,\lambda}^*$  par rapport à l'espace pivot  $H$ . Dans le Lemme 1.16 appliqué à  $A^*$ , l'inégalité de gauche dans (1.2) donne en particulier

$$\|A^*x\|_H \leq \frac{1}{c_1} \|x\|_{H_{1,\lambda}^*}, \quad \forall x \in D(A^*),$$

ce qui établit la continuité de  $A^*$  comme opérateur de  $H_{1,\lambda}^*$  dans  $H$ . On note  $\tilde{A}_\lambda \in \mathcal{L}(H, H_{-1,\lambda})$  l'adjoint de  $A^* \in \mathcal{L}(H_{1,\lambda}^*, H)$ .

**Lemme 1.20.** *L'opérateur  $\tilde{A}_\lambda$  et l'espace  $H_{-1,\lambda}$  vérifient les propriétés suivantes.*

1.  $\forall x \in H, \quad \|x\|_{H_{-1,\lambda}} = \|(\lambda I - A)^{-1}x\|_H.$
2.  $\forall x \in H, \quad \|x\|_{H_{-1,\lambda}} \leq \lambda^{-1}\|x\|_H.$
3. *L'injection  $H \subset H_{-1,\lambda}$  est continue et dense.*
4.  *$\tilde{A}_\lambda$  est l'unique extension continue de  $A$  comme opérateur de  $H$  dans  $H_{-1,\lambda}$ .*
5.  $\forall x \in H, \quad \|x\|_{H_{-1,\lambda}} \leq \lambda^{-1}\|(I - \lambda\tilde{A}_\lambda)x\|_{H_{-1,\lambda}}.$

**Remarque 1.21.** L'espace  $H_{-1,\lambda}$  est le *complété* de  $H$  pour la norme

$$\|x\|_{H_{-1,\lambda}} = \|(\lambda I - A)^{-1}x\|_H.$$

De plus,  $H_{-1,\lambda} = H$  si, et seulement si,  $A \in \mathcal{L}(H)$ .

On note  $A_{(-1),\lambda} : D(A_{(-1),\lambda}) \subset H_{-1,\lambda} \rightarrow H_{-1,\lambda}$  l'opérateur défini par

$$\begin{cases} D(A_{(-1),\lambda}) = H \\ A_{(-1),\lambda}x = \tilde{A}_\lambda x, \quad \forall x \in D(A_{(-1),\lambda}). \end{cases}$$

Le Lemme 1.20 permet de démontrer facilement le résultat qui suit.

**Proposition 1.22.**  $A_{(-1),\lambda}$  est l'unique prolongement de  $A$  en un opérateur maximal dissipatif sur  $H_{-1,\lambda}$  de domaine  $H$ .

En fait, l'espace  $H_{-1,\lambda}$  et l'opérateur  $A_{(-1),\lambda}$  ne dépendent pas de  $\lambda$ . En effet, soient  $H_1^* = D(A^*)$  muni de la norme du graphe  $\|\cdot\|_{\text{gr}(A^*)}$  et  $H_{-1}$  le dual de  $H_1^*$  par rapport à l'espace pivot  $H$ . La norme du graphe sur  $D(A^*)$  étant équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{H_{1,\lambda}^*}$ ,  $H_{-1,\lambda}$  s'identifie à  $H_{-1}$  et on déduit de la Proposition 1.22 le résultat suivant.

**Proposition 1.23.** Si  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  est maximal dissipatif, alors  $A$  peut être prolongé de manière unique en un opérateur maximal dissipatif  $A_{(-1)} : D(A_{(-1)}) \subset H_{-1} \rightarrow H_{-1}$  de domaine  $D(A_{(-1)}) = H$  sur l'espace de Hilbert  $H_{-1}$ .

**Remarque 1.24.** Comme c'est le cas pour les restrictions de  $A$ , on peut construire

- une suite  $(H_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$  d'espaces de Hilbert emboîtés

$$H_0 = H \subset H_{-1} \subset \cdots \subset H_{-n+1} \subset H_{-n} \subset H_{-n-1} \subset \cdots,$$

chaque inclusion étant continue et dense, où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_{-n} = (D((A^*)^n))'$  est le dual de  $(D((A^*)^n), \|\cdot\|_{\text{gr}((A^*)^n)})$  par rapport à l'espace pivot  $H$ ,

- une suite  $(A_{(-n)})_{n \in \mathbb{N}}$  d'opérateurs maximaux dissipatifs

$$A_{(-n)} : D(A_{(-n)}) = H_{-n+1} \subset H_{-n} \rightarrow H_{-n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

tels que  $A_{(-n)}|_{D(A)} = A$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### 1.1.3 Régularité des solutions du problème de Cauchy homogène

En raisonnant par récurrence (sur l'entier  $k$  du Théorème 1.25) et en utilisant les différentes restrictions de l'opérateur  $A$ , on peut établir le résultat de régularité suivant pour les solutions du problème de Cauchy (1.1).

**Théorème 1.25.** Si  $y^0 \in D(A^k)$  pour  $k \geq 1$ , alors la solution  $y$  de (1.1) vérifie  $y \in C^{k-j}([0, +\infty[, D(A^j))$  pour tout  $j = 0, 1, \dots, k$ .

Le théorème qui suit, dont on pourra trouver la preuve dans [Bre11] (page 194), concerne le cas des opérateurs auto-adjoints.

**Théorème 1.26.** Si l'opérateur  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  est auto-adjoint et maximal dissipatif, alors pour tout  $x \in H$ , le problème

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = Ay(t), & t \in ]0, +\infty[, \\ y(0) = x, \end{cases}$$

admet une unique solution

$$y \in C(]0, +\infty[, D(A)) \cap C([0, +\infty[, H) \cap C^1(]0, +\infty[, H).$$

De plus,

$$y \in C^k(]0, +\infty[, D(A^l)), \quad \forall k, l \in \mathbb{N}.$$

### 1.1.4 Problèmes de Cauchy non homogènes

Dans cette sous-section, on étudie l'existence et l'unicité de solutions pour deux types de problèmes de Cauchy non homogènes : les problèmes de Cauchy avec terme source et les problèmes de Cauchy avec donnée au bord non homogène.

## 1.1.4.1 Problèmes de Cauchy avec terme source

On s'intéresse, dans ce paragraphe, aux problèmes de la forme

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + f(t), & t \in [0, T], \\ y(0) = y^0, \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $y^0 \in H$  et où la fonction  $f : [0, T] \rightarrow H$  est intégrable au sens de Bochner (noté  $f \in L^1(0, T; H)$ ). Pour plus de détails sur cette notion d'intégrabilité, on renvoie le lecteur à [Zab92] (§A.4., p. 248). On définit pour le problème (1.5) la notion de *solution faible* grâce au lemme suivant.

**Lemme 1.27.** *Si  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  est maximal dissipatif et  $f \in L^1(0, T; H)$ , alors pour tout  $y^0 \in H$ , la fonction  $y : [0, T] \rightarrow H$  définie par*

$$y(t) = S(t)y^0 + \int_0^t S(t-s)f(s) ds, \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.6)$$

où  $(S(t))_{t \geq 0}$  est le semi-groupe engendré par  $A$ , est continue de  $[0, T]$  dans  $H$ .

*Démonstration.*  $(S(t))_{t \geq 0}$  étant un semi-groupe de contractions, on sait déjà que  $t \mapsto S(t)y^0$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . L'objectif est de démontrer que la fonction  $g : t \mapsto \int_0^t S(t-s)f(s) ds$  est continue de  $[0, T]$  dans  $H$ . Remarquons déjà que  $g$  est bien à valeurs dans  $H$  puisque pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\left\| \int_0^t S(t-s)f(s) ds \right\|_H \leq \int_0^t \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(H)} \|f(s)\|_H ds \leq \|f\|_{L^1(0, T; H)}.$$

Soient maintenant  $t \in [0, T]$  et  $h \in \mathbb{R}$  tels que  $t+h \in [0, T]$  (i.e.  $h \in [-t, T-t]$ ). Supposons, dans un premier temps, que  $h \in [0, T-t]$ . On peut alors évaluer la différence  $g(t+h) - g(t)$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} g(t+h) - g(t) &= \int_0^{t+h} S(t+h-s)f(s) ds - \int_0^t S(t-s)f(s) ds \\ &= \int_0^t S(h)S(t-s)f(s) ds + \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s) ds \\ &\quad - \int_0^t S(t-s)f(s) ds \\ &= S(h)g(t) - g(t) + \int_0^h S(h-\tau)f(t+\tau) d\tau, \end{aligned}$$

où la dernière intégrale a subi le changement de variable  $\tau = s - t$  pour  $t \leq s \leq t+h$ . On en déduit que

$$\|g(t+h) - g(t)\|_H \leq \|S(h)g(t) - g(t)\|_H + \int_0^h \|f(t+\tau)\|_H d\tau,$$

puisque  $\|S(h-\tau)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$ . Ainsi, en utilisant à nouveau le fait que  $h \mapsto S(h)g(t)$  est continue sur  $[0, +\infty[$  (et donc en particulier en  $h = 0$ ) et l'intégrabilité (au sens de l'intégrale de Lebesgue) de  $\tau \mapsto \|f(t+\tau)\|_H$  sur  $[0, T-t]$ , il vient que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \|g(t+h) - g(t)\|_H = 0. \quad (1.7)$$

Si, maintenant,  $h \in [-t, 0]$ , alors le raisonnement précédent appliqué à  $\tilde{t} = t+h \in [0, t]$  et  $\tilde{h} = -h \in [0, t]$  donne

$$\lim_{\substack{\tilde{h} \rightarrow 0 \\ \tilde{h} > 0}} \|g(\tilde{t} + \tilde{h}) - g(\tilde{t})\|_H = 0,$$

i.e.

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \|g(t) - g(t+h)\|_H = 0. \quad (1.8)$$

(1.7) et (1.8) établissent alors la continuité de  $g$  en tout point  $t \in [0, T]$ , ce qui démontre le lemme.  $\square$

Dans la suite,  $A$  désignera un opérateur maximal dissipatif sur  $H$  dont le semi-groupe associé sera noté  $(S(t))_{t \geq 0}$ .

**Définition 1.28.** Si  $f \in L^1(0, T; H)$ , alors on appelle *solution faible* de (1.5) la fonction  $y \in C([0, T], H)$  définie par (1.6).

Le théorème qui suit justifie l'emploi de la terminologie de *solution*.

**Théorème 1.29.** Si  $f \in C^1([0, T], H)$  et  $y^0 \in D(A)$ , alors (1.5) admet une unique solution (classique)

$$y \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], H).$$

De plus, la solution  $y$  est donnée par (1.6).

Ce résultat repose sur les quatre lemmes qui suivent.

**Lemme 1.30** (Unicité). Pour toute fonction  $f \in L^1(0, T; H)$  et toute donnée initiale  $y^0 \in H$ , le problème (1.5) admet au plus une solution  $y$  dans la classe  $C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], H)$ .

*Démonstration.* Supposons que  $y_1$  et  $y_2$  sont deux solutions de (1.5) dans la classe  $C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], H)$ . Alors la différence  $y = y_1 - y_2$  est un élément de  $C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], H)$  qui vérifie le système

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = Ay(t), & t \in [0, T], \\ y(0) = 0 \in D(A). \end{cases}$$

La solution de ce problème étant unique d'après le Théorème (1.9), il suit que  $y = 0$ , puisque la fonction identiquement nulle est également solution. Cela prouve que  $y_1 = y_2$  et démontre que si (1.5) admet une solution dans  $C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], H)$ , alors celle-ci est unique.  $\square$

**Lemme 1.31.** Si  $f \in C([0, T], H)$ , alors pour tout  $t \in [0, T]$ , la fonction  $f_{S,t} : s \mapsto S(s)f(t-s)$  est continue de  $[0, t]$  dans  $H$ .

**Lemme 1.32.** Si  $f \in C^1([0, T], H)$ , alors pour tout  $t \in [0, T]$ , l'élément

$$g(t) = \int_0^t S(t-s)f(s) ds, \tag{1.9}$$

vérifie

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{S(h)g(t) - g(t)}{h} = \int_0^t S(s)f'(t-s) ds + S(t)f(0) - f(t).$$

En particulier  $g(t) \in D(A)$  et on a l'égalité

$$Ag(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{S(h)g(t) - g(t)}{h} = \int_0^t S(s)f'(t-s) ds + S(t)f(0) - f(t).$$

**Lemme 1.33.** La fonction  $g : [0, T] \rightarrow H$  définie par la formule (1.9) est un élément de  $C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], H)$  et

$$g'(t) = Ag(t) + f(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Par souci de clarté, on ne détaillera pas les démonstrations des Lemmes 1.32 et 1.33 qui sont essentiellement calculatoires. L'idée est d'utiliser des arguments du même type que ceux développés dans la démonstration du Lemme 1.27 et d'appliquer le Lemme 1.31 avec  $f$  et  $f'$ .

**Remarque 1.34.** La conclusion du Théorème 1.29 est encore vraie si on remplace  $f \in C^1([0, T], H)$  par  $f \in H^1(0, T; H)$ .

### 1.1.4.2 Problèmes frontières non homogènes abstraits

On s'intéresse maintenant à l'existence et à l'unicité des solutions de systèmes avec des conditions au bord non homogènes, du type :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = Ly(t), & t \in [0, T], \\ Gy(t) = v(t), & t \in [0, T], \\ y(0) = y^0 \in Y, \end{cases} \quad (1.10)$$

où  $U$ ,  $Y$  et  $H$  sont des espaces de Hilbert tels que l'injection  $Y \subset H$  est continue,  $L \in \mathcal{L}(Y, H)$  et  $G \in \mathcal{L}(Y, U)$ .

On définit ci-dessous la notion de *problème frontière non homogène abstrait* qui est développée dans [TW09].

**Définition 1.35.** On appelle *problème frontière non homogène abstrait* sur  $U$ ,  $Y$  et  $H$  tout couple  $(L, G) \in \mathcal{L}(Y, H) \times \mathcal{L}(Y, U)$  pour lequel il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que les propriétés suivantes soient vérifiées :

1.  $G$  est surjectif,
2.  $\ker G$  est dense dans  $H$ ,
3.  $(\lambda I - L)|_{\ker G}$  est bijectif.

Soit  $(L, G)$  un problème frontière non homogène abstrait. Puisque  $G \in \mathcal{L}(Y, U)$ ,  $\ker G$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $Y$ , donc l'espace vectoriel

$$H_1 = \ker G,$$

muni de la norme  $\|\cdot\|_Y$  est un espace de Hilbert. On définit alors l'opérateur

$$A = L|_{H_1} \in \mathcal{L}(H_1, H).$$

D'après le point 3 de la Définition 1.35,  $\lambda I - A$  est inversible et  $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H, H_1)$ . On peut ainsi considérer le complété  $H_{-1, \lambda}$  de  $H$  pour la norme

$$\|x\|_{H_{-1, \lambda}} = \|(\lambda I - A)^{-1}x\|_H.$$

Puisque  $A \in \mathcal{L}(H_1, H)$  et que  $H$  s'injecte de façon continue dans  $H_{-1, \lambda}$ , on a aussi  $A \in \mathcal{L}(H_1, H_{-1, \lambda})$ .  $H_1 = \ker G$  étant dense dans  $H$  d'après le point 1 de la Définition 1.35, on en déduit que  $A$  se prolonge de manière unique en un opérateur  $\tilde{A} \in \mathcal{L}(H, H_{-1, \lambda})$ .

La proposition qui suit permet de réécrire le problème avec condition au bord non homogène (1.10) sous la forme d'un problème avec terme source comme ceux étudiés au paragraphe précédent :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \tilde{A}y(t) + \tilde{B}v(t), & t \in [0, T], \\ y(0) = y^0. \end{cases}$$

**Proposition 1.36.** Soit  $(L, G)$  un problème frontière non homogène abstrait sur  $U$ ,  $Y$  et  $H$ .

1. Il existe un unique opérateur  $\tilde{B} \in \mathcal{L}(U, H_{-1, \lambda})$  tel que

$$L = \tilde{A} + \tilde{B}G. \quad (1.11)$$

2. De plus, si  $\mu \in \rho(A)$ , alors  $(\mu I - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \in \mathcal{L}(U, Y)$  et

$$G(\mu I - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = I. \quad (1.12)$$

*Démonstration.* 1.  $\tilde{B} \in \mathcal{L}(U, H_{-1, \lambda})$  vérifie (1.11) si et seulement si

$$\tilde{B}G = L - \tilde{A}. \quad (1.13)$$

L'opérateur  $G \in \mathcal{L}(Y, U)$  étant surjectif (d'après le point 1 de la Définition 1.35), il admet un inverse à droite  $G_d \in \mathcal{L}(U, Y)$ . Supposons qu'un tel opérateur  $\tilde{B}$  existe. Puisque  $GG_d = I \in \mathcal{L}(U)$ , on déduit de (1.13) que pour tout  $x \in U$ ,

$$\tilde{B}x = \tilde{B}G(G_dx) = (L - \tilde{A})G_dx,$$

d'où

$$\tilde{B} = (L - \tilde{A})G_d.$$

Cela démontre l'unicité de  $\tilde{B}$ . Réciproquement, posons  $\tilde{B} = (L - \tilde{A})G_d$  et montrons que  $\tilde{B}$  appartient à  $\mathcal{L}(U, H_{-1, \lambda})$  et vérifie (1.13). Puisque  $G_d \in \mathcal{L}(U, Y)$ ,  $L \in \mathcal{L}(Y, H)$  et l'injection  $H \subset H_{-1, \lambda}$  est continue, alors on a déjà  $LG_d \in \mathcal{L}(U, H_{-1, \lambda})$ . De même l'injection  $Y \subset H$  étant continue, on a aussi  $G_d \in \mathcal{L}(U, H)$  et donc  $\tilde{A}G_d \in \mathcal{L}(U, H_{-1, \lambda})$ , d'où  $\tilde{B} \in \mathcal{L}(U, H_{-1, \lambda})$ . Par définition de  $\tilde{B}$ , on a la suite d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned} (1.13) \quad &\iff (L - \tilde{A})G_dG = L - \tilde{A} \\ &\iff (L - \tilde{A})(G_dG - I) = 0 \\ &\iff L(G_dG - I) = \tilde{A}(G_dG - I). \end{aligned}$$

Puisque  $GG_d = I$ , on a  $G(I - G_dG) = 0$ , donc  $\text{Im}(I - G_dG) \subset \ker G$ . Comme  $L|_{\ker G} = A$  et  $\tilde{A}|_{\ker G} = A$ , on en déduit que

$$L(G_dG - I) = \tilde{A}(G_dG - I),$$

ce qui implique bien (1.13) d'après la suite d'équivalences ci-dessus. Par conséquent  $\tilde{B}$  vérifie la relation (1.11).

2. Soit  $\mu \in \sigma(A)$ . On remarque déjà que, par définition de  $\tilde{A}$ ,  $\mu I - \tilde{A}$  est inversible d'inverse  $(\mu I - \tilde{A})^{-1} \in \mathcal{L}(H_{-1, \lambda}, H)$ , et donc que  $(\mu I - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \in \mathcal{L}(U, H)$ . Montrons, qu'en fait,  $(\mu I - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \in \mathcal{L}(U, Y)$ . Puisque  $\tilde{B} = (L - \tilde{A})G_d$ , on peut écrire

$$\tilde{B} = (\mu I - \tilde{A})G_d - (\mu I - L)G_d,$$

avec  $(\mu I - L)G_d \in \mathcal{L}(U, H)$ . D'où

$$\begin{aligned} (\mu I - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} &= G_d - (\mu I - \tilde{A})^{-1}(\mu I - L)G_d \\ &= G_d - (\mu I - A)^{-1}(\mu I - L)G_d. \end{aligned}$$

Puisque  $(\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H, H_1)$ , on a  $(\mu I - A)^{-1}(\mu I - L)G_d \in \mathcal{L}(U, H_1)$  et donc,  $(\mu I - A)^{-1}(\mu I - L)G_d \in \mathcal{L}(U, Y)$  car  $\|\cdot\|_{H_1} = \|\cdot\|_Y$ . Il suit immédiatement de l'égalité précédente que  $(\mu I - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \in \mathcal{L}(U, Y)$ . De cette égalité découle également le fait que  $(\mu I - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} - G_d \in \mathcal{L}(H, H_1)$  et donc que

$$\text{Im} \left( (\mu I - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} - G_d \right) \subset H_1 = \ker G.$$

D'où

$$G(\mu I - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = GG_d = I,$$

ce qui achève la démonstration de la Proposition 1.36.  $\square$

**Corollaire 1.37.** *Si  $(L, G)$  est un problème frontière non homogène abstrait sur  $U, Y$  et  $H$ , et que  $\frac{dy}{dt}(t) \in H$ , pour tout  $t \in [0, T]$ , alors le problème (1.10) est algébriquement équivalent au problème suivant*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \tilde{A}y(t) + \tilde{B}v(t), & t \in [0, T], \\ y(0) = y^0. \end{cases} \quad (1.14)$$

*Démonstration.* Puisque  $L \in \mathcal{L}(Y, H)$ , alors il est évident, d'après (1.11), que si  $y$  vérifie (1.10) alors  $y$  vérifie aussi (1.14). Réciproquement, supposons que  $y$  vérifie (1.14). Alors, en appliquant  $G(\mu I - \tilde{A})^{-1}$  à l'équation  $\frac{dy}{dt}(t) = \tilde{A}y(t) + \tilde{B}v(t)$ , on a, d'après (1.12) :

$$\begin{aligned} v(t) &= G(\mu I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}v(t) \\ &= G(\mu I - \tilde{A})^{-1} \frac{dy}{dt}(t) - G(\mu I - \tilde{A})^{-1} \tilde{A}y(t) \\ &= -G(\mu I - \tilde{A})^{-1} \tilde{A}y(t), \end{aligned} \tag{1.15}$$

puisque  $\frac{dy}{dt}(t) \in H$  (et donc  $(\mu I - \tilde{A})^{-1} \frac{dy}{dt}(t) = (\mu I - A)^{-1} \frac{dy}{dt}(t) \in H_1 = \ker G$ ). En utilisant la décomposition  $L = \tilde{A} + \tilde{B}G$ , on déduit de (1.15) que

$$\begin{aligned} v(t) &= -G(\mu I - \tilde{A})^{-1} Ly(t) + G(\mu I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}Gy(t) \\ &= G(\mu I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}Gy(t), \end{aligned}$$

car  $(\mu I - \tilde{A})^{-1} Ly(t) \in H_1 = \ker G$ . Par conséquent, la relation (1.12) donne

$$v(t) = Gy(t),$$

ce qui entraîne

$$\frac{dy}{dt}(t) = \tilde{A}y(t) + \tilde{B}v(t) = \tilde{A}y(t) + \tilde{B}Gy(t) = Ly(t).$$

Ainsi  $y$  vérifie le problème (1.10). □

**Définition 1.38.** Si  $(L, G)$  est un problème frontière non homogène abstrait sur  $U, Y$  et  $H$ , alors on dit que  $\tilde{A}$  est le *générateur* de  $(L, G)$  et que l'opérateur  $\tilde{B}$  donné par la Proposition 1.36 est son *opérateur de contrôle*

**Remarque 1.39.** Pour un problème frontière non homogène abstrait, l'opérateur de contrôle  $\tilde{B}$  n'est *jamais borné* de  $U$  dans  $H$ . Plus précisément,  $\tilde{B}U \cap H = \{0\}$ . En effet, pour tout  $x \in \tilde{B}U \cap H$ , il existe  $v \in U$  tel que  $x = \tilde{B}v$  donc, d'après (1.12),  $v = G(\mu I - \tilde{A})^{-1}x = G(\mu I - A)^{-1}x$ , puisque  $x \in H$ . Comme  $(\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H, H_1)$ , l'élément  $(\mu I - A)^{-1}x$  appartient à  $H_1 = \ker G$ , donc  $v = G(\mu I - A)^{-1}x = 0$  ce qui implique que  $x = Bv = 0$ . Cependant,  $\tilde{B}$  est *borné* de  $U$  dans  $H_{-1, \lambda}$ . On présentera dans la section 1.1.6 un exemple de problème avec donnée au bord non homogène qui peut s'écrire sous la forme d'un problème de Cauchy avec terme source du type (1.14), mais qui n'est pas un *problème frontière non homogène abstrait* au sens de [TW09], puisque l'opérateur de contrôle correspondant est non borné de  $U$  dans  $H_{-1}$ .

**Remarque 1.40** (Construction de  $\tilde{B}$ ). Dans la pratique, au lieu de construire directement l'opérateur  $B$ , on effectue un *relèvement* de la condition de bord  $v$  : pour tout  $v \in U$  et tout  $\mu \in \rho(A)$ , l'élément  $y = (\mu I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}v \in H$  est l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} Ly = \mu y, \\ Gy = v. \end{cases} \tag{1.16}$$

En effet, remarquons déjà que la solution de ce problème est unique : si  $y_1$  et  $y_2$  sont solutions de (1.16), alors  $z = y_1 - y_2$  vérifie  $Lz = \mu z$  et  $Gz = 0$ , donc d'après la formule (1.11) de la Proposition 1.36 et le fait que  $z \in H_1 = \ker G$ , on a  $Az = \mu z$ , et donc  $z = 0$ , puisque  $\mu \in \rho(A)$ . Maintenant, vérifions que l'élément  $y = (\mu I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}v \in H$  est bien solution de (1.16) : la relation (1.12) appliquée à  $v$  donne directement  $Gy = v$ . D'après (1.11), on en déduit que  $(L - \mu I)y = (\tilde{A} - \mu I)y + \tilde{B}(Gy) = -\tilde{B}v + \tilde{B}(Gy) = 0$ , d'où le fait que  $y$  est solution de (1.16).

Maintenant que l'on a fait le rapprochement entre le problème avec condition de bord non homogène (1.10) et le problème de Cauchy avec terme source (1.14) dans le cas où  $(L, G)$  est un problème frontière non homogène abstrait, on peut appliquer les résultats du paragraphe précédent pour en déduire des conditions d'existence et d'unicité des solutions de (1.10).



**Proposition 1.41.** Soit  $(L, G)$  un problème frontière non homogène abstrait sur  $U, Y$  et  $H$ . On suppose que le générateur  $\tilde{A}$  de  $(L, G)$  définit un opérateur maximal dissipatif  $A_{(-1), \lambda} = \tilde{A} : D(A_{(-1), \lambda}) = H \subset H_{-1, \lambda} \rightarrow H_{-1, \lambda}$ . Alors, pour tout  $T > 0$ , toute donnée initiale  $y^0 \in Y$  et tout  $v \in H^2(0, T; U)$  tels que  $Gy^0 = v(0)$ , le système (1.10) admet une unique solution

$$y \in C([0, T], Y) \cap C^1([0, T], H).$$

Si, de plus, il existe  $T_0 > 0$  tel que pour tout  $v \in L^2(0, +\infty; U)$ ,

$$\int_0^{T_0} S_{(-1), \lambda}(T_0 - s) \tilde{B}v(s) ds \in H, \quad (1.17)$$

où  $(S_{(-1), \lambda}(t))_{t \geq 0}$  est le semi-groupe de contractions associé à  $A_{(-1), \lambda}$ , alors la condition  $v \in H^2(0, T; U)$  peut être remplacée par  $v \in H^1(0, T; U)$ .

**Définition 1.42.** Un opérateur de contrôle  $\tilde{B} \in \mathcal{L}(U, H_{-1, \lambda})$  pour lequel il existe  $T_0 > 0$  tel que la propriété (1.17) est vérifiée est dit *admissible*.

On pourra trouver la démonstration de la Proposition 1.41 dans [TW09]. On démontrera dans la sous-section 1.1.6 un résultat du même type pour l'exemple d'un système avec condition au bord non homogène qui ne vérifie pas les propriétés des problèmes frontières non homogènes abstraits et pour lequel l'opérateur de contrôle n'est pas admissible.

### 1.1.5 Cas des opérateurs diagonalisables

On note  $\ell^2$  l'ensemble des suites  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{C}$  de carré sommable et  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  la base canonique de  $\ell^2$  définie par

$$e_k = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{ème}}}{1}, 0, 0, 0, \dots), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

**Définition 1.43.** On appelle *base de Riesz* de  $H$  toute famille  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset H$  pour laquelle il existe un opérateur inversible  $Q \in \mathcal{L}(H, \ell^2)$  tel que

$$Q\phi_k = e_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

On dit alors que la famille  $(\tilde{\phi}_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$\tilde{\phi}_k = Q^*Q\phi_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

est la famille *biorthogonale* à la base de Riesz  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ .

**Remarque 1.44.** Remarquons qu'une *base Hilbertienne* (ou encore, *base orthonormale*), c'est-à-dire une base telle que pour tous  $k$  et  $j$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on ait

$$\|\phi_k\|_H = 1, \quad \langle \phi_k, \phi_j \rangle_H = 0 \text{ si } k \neq j,$$

est une base de Riesz : l'opérateur  $Q$  de la Définition 1.43 est dans ce cas un opérateur unitaire (i.e.  $Q^*Q = QQ^* = I$ ) et la famille biorthogonale  $(\tilde{\phi}_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est la base Hilbertienne  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  elle-même. De plus, si  $(\phi_k)_k$  est une base Hilbertienne de  $H$ , alors tout élément  $x \in H$  s'écrit  $x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle x, \phi_k \rangle_H \phi_k$ , avec  $\|x\|_H^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle x, \phi_k \rangle_H|^2$ , et pour tout  $(a_k)_k \in \ell^2$ ,

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k \phi_k \right\|_H = \|(a_k)_k\|_{\ell^2}.$$

Ce résultat se généralise aux bases de Riesz, mais les égalités se transforment, dans ce cas, en équivalences de normes. Plus précisément,

**Proposition 1.45.** Soit  $(\phi_k)_k$  une base de Riesz de  $H$  et soient  $Q$  et  $(\tilde{\phi}_k)_k$  comme dans la Définition 1.43. Soient  $m = 1/\|Q^{-1}\|_{\mathcal{L}(\ell^2, H)}$  et  $M = \|Q\|_{\mathcal{L}(H, \ell^2)}$ . Tout  $x \in H$  se décompose de la façon suivante :

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left\langle x, \tilde{\phi}_k \right\rangle_H \phi_k,$$

avec

$$m^2 \|x\|_H^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \left\langle x, \tilde{\phi}_k \right\rangle_H \right|^2 \leq M^2 \|x\|_H^2.$$

### 1.1.5.1 Définition et propriétés des opérateurs diagonalisables

On étudie ci-dessous les propriétés des opérateurs diagonalisables sur un espace de Hilbert complexe.

**Définition 1.46.** On dit qu'un opérateur  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  est *diagonalisable* si son ensemble résolvant  $\rho(A)$  est non vide (voir Remarque 1.4, page 6, pour la définition de  $\rho(A)$ ) et s'il existe une base de Riesz de  $H$  constituée de vecteurs propres de  $A$ .

**Proposition 1.47.** Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur diagonalisable et soit  $(\phi_k)_k$  une base de Riesz de  $H$  formée de vecteurs propres de  $A$ . On note  $(\lambda_k)_k \subset \mathbb{C}$  la suite des valeurs propres correspondantes et  $(\tilde{\phi}_k)_k$  la famille biorthogonale associée à  $(\phi_k)_k$ .

1.  $A$  se décompose de la manière suivante :

$$D(A) = \left\{ x \in H / \sum_k (1 + |\lambda_k|^2) \left| \langle x, \tilde{\phi}_k \rangle \right|^2 < +\infty \right\},$$

$$Ax = \sum_k \lambda_k \langle x, \tilde{\phi}_k \rangle \phi_k, \quad \forall x \in D(A).$$

2.  $A^* : D(A^*) \subset H \rightarrow H$  est diagonalisable, de vecteurs propres  $\tilde{\phi}_k$  et de valeurs propres  $\overline{\lambda_k}$ .

3.  $A$  est maximal dissipatif si et seulement si

$$\sup_k \operatorname{Re} \lambda_k < +\infty.$$

Si c'est le cas, alors le semi-groupe de contractions  $(S(t))_{t \geq 0}$  engendré par  $A$  s'écrit, pour tout  $t \geq 0$  et tout  $x \in H$ ,

$$S(t)x = \sum_k e^{\lambda_k t} \langle x, \tilde{\phi}_k \rangle \phi_k.$$

En particulier, dans le cas où  $A$  est diagonalisable dans une base Hilbertienne, on a le résultat suivant :

**Proposition 1.48.** Si  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  est diagonalisable, avec une base Hilbertienne  $(\phi_k)_k$  de vecteurs propres associés à des valeurs propres  $(\lambda_k)_k$  toutes réelles, alors  $A$  est auto-adjoint et

$$D(A) = \left\{ x \in H / \sum_k (1 + \lambda_k^2) |\langle x, \phi_k \rangle|^2 < +\infty \right\},$$

$$Ax = \sum_k \lambda_k \langle x, \phi_k \rangle \phi_k, \quad \forall x \in D(A).$$

### 1.1.5.2 Décomposition des opérateurs diagonalisables coercifs

On définit ici, pour un opérateur coercif, deux nouveaux espaces  $H_{1/2}$  et  $H_{-1/2}$  sur lesquels il peut respectivement être restreint ou prolongé. L'introduction de ces nouveaux espaces permettra, dans le paragraphe suivant, de reformuler certains problèmes du second ordre en temps comme des problèmes de Cauchy du type (1.5).

**Définition 1.49.** On dit que  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  est *coercif* si

1.  $A$  est auto-adjoint,
2. il existe une constante  $m > 0$  telle que

$$\langle Ax, x \rangle_H \geq m \|x\|_H^2, \quad \forall x \in D(A).$$

Dans ce cas, on note  $A \geq mI$ .

La proposition qui suit caractérise le spectre des opérateurs coercifs.

**Proposition 1.50.** *Soient  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur auto-adjoint et  $m > 0$ . Alors  $A \geq mI$  si et seulement si  $\sigma(A) \subset [m, +\infty[$ .*

Dans tout ce paragraphe,  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  désigne un opérateur coercif tel que  $A \geq mI$  pour un réel  $m > 0$  donné. On va construire la racine carrée de cet opérateur non borné. Remarquons d'abord que  $A$  est injectif puisque

$$\forall x \in D(A), \quad \|Ax\|_H \geq m\|x\|_H. \quad (1.18)$$

En fait,  $A$  est inversible. En effet, puisque  $(\text{Im}A)^\perp = \ker(A^*)$  et que  $A$  est auto-adjoint et injectif, alors  $(\text{Im}A)^\perp = \{0\}$  et,  $\text{Im}A$  est dense dans  $H$ . Or,  $A$  étant auto-adjoint,  $\text{Im}A$  est fermé dans  $H$ , donc  $\text{Im}A = H$ . On en déduit donc que  $A$  est inversible et d'après (1.18), que  $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ , avec  $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq m^{-1}$ . Il est clair que  $A^{-1}$  est également coercif. En particulier  $A^{-1}$  est un opérateur borné sur  $H$  et positif. On sait alors qu'il admet une unique racine carrée que l'on note

$$A^{-1/2} = (A^{-1})^{1/2}.$$

L'opérateur  $A^{-1/2}$  est, par construction, auto-adjoint dans  $H$  et inversible de  $H$  dans le sous-espace

$$D(A^{1/2}) = \text{Im}(A^{-1/2}),$$

muni de la norme de  $H$ . Remarquons que, puisque

$$\left(\text{Im}(A^{-1/2})\right)^T = \ker\left((A^{-1/2})^*\right) = \ker(A^{-1/2}) = \{0\},$$

alors  $D(A^{1/2})$  est dense dans  $H$ . On note  $A^{1/2} \in \mathcal{L}(D(A^{1/2}), H)$  l'inverse de  $A^{-1/2} \in \mathcal{L}(H, D(A^{1/2}))$ . En fait,

$$A^{1/2} = \left((A^{-1})^{1/2}\right)^{-1}.$$

On peut vérifier que  $A^{1/2} : D(A^{1/2}) \subset H \rightarrow H$  est également un opérateur coercif. Comme dans le paragraphe 1.1.2.1 (mais avec  $\lambda = 0$ , puisque l'on sait que  $A$  est inversible), on définit l'espace  $H_1 = D(A)$ , muni de la norme

$$\|x\|_{H_1} = \|Ax\|_H, \quad \forall x \in H_1.$$

De la même façon, on peut définir l'espace

$$H_{1/2} = D(A^{1/2}),$$

muni de la norme

$$\|x\|_{H_{1/2}} = \|A^{1/2}x\|_H, \quad \forall x \in H_{1/2}.$$

On peut montrer que les injections

$$H_1 \subset H_{1/2} \subset H$$

sont continues et denses. Par définition des normes sur  $H_1$  et  $H_{1/2}$ , il est clair que les opérateurs  $A^{1/2} \in \mathcal{L}(H_{1/2}, H)$  et  $A^{1/2} \in \mathcal{L}(H_1, H_{1/2})$  sont des isométries.

Comme dans le paragraphe 1.1.2.2 (toujours avec  $\lambda = 0$ , puisque les opérateurs considérés sont inversibles), on construit les espaces  $H_{-1} = (H_1)'$  et  $H_{-1/2} = (H_{1/2})'$ , où les duals sont pris par rapport à l'espace pivot  $H$ , et on peut étendre de manière unique les opérateurs  $A$  et  $A_{1/2}$  en des isométries :

$$A_{(-1)} \in \mathcal{L}(H, H_{-1}), \quad A^{1/2}_{(-1/2)} \in \mathcal{L}(H, H_{-1/2}).$$

On remarque que les normes sur  $H_{-1}$  et  $H_{-1/2}$  vérifient respectivement les relations suivantes

$$\|x\|_{H_{-1}} = \|(A_{(-1)})^{-1}x\|_H, \quad (1.19)$$

et

$$\|x\|_{H_{-1/2}} = \|(A^{1/2}_{(-1/2)})^{-1}x\|_H. \quad (1.20)$$

On peut également prolonger  $A$  de manière unique en un opérateur coercif

$$A_{(-1/2)} : D(A_{(-1/2)}) = H_{1/2} \subset H_{-1/2} \rightarrow H_{-1/2},$$

défini par

$$A_{(-1/2)}x = A^{1/2}_{(-1/2)} \left( A^{1/2}x \right), \quad \forall x \in H_{1/2}. \quad (1.21)$$

De plus,  $A_{(-1/2)}$  est une isométrie de  $H_{1/2}$  dans  $H_{-1/2}$ .

Le résultat qui suit donne l'expression des espaces  $H_{1/2}$  et  $H_{-1/2}$  et la décomposition de  $A^{1/2}$  en fonction des vecteurs propres de  $A$ , lorsque  $A$  est diagonalisable.

**Proposition 1.51.** *On suppose que  $A$  est coercif et diagonalisable. On note  $(\phi_k)_k$  la base orthonormale formée de vecteurs propres de  $A$  et  $(\lambda_k)_k \subset \mathbb{R}^+$  la suite de valeurs propres associée.*

1. L'opérateur  $A^{1/2} : D(A^{1/2}) \subset H \rightarrow H$  est donné par

$$D(A^{1/2}) = \left\{ x \in H / \sum_k \lambda_k |\langle x, \phi_k \rangle_H|^2 < +\infty \right\},$$

$$A^{1/2}x = \sum_k \lambda_k^{1/2} \langle x, \phi_k \rangle_H \phi_k, \quad \forall x \in D(A^{1/2}).$$

2. L'espace  $H_{-1/2}$  défini précédemment peut s'écrire comme

$$H_{-1/2} = \left\{ x \in H_{-1} / \sum_k \lambda_k^{-1} |\langle x, \phi_k \rangle|^2 < +\infty \right\},$$

et

$$\|x\|_{H_{-1/2}} = \left( \sum_k \lambda_k^{-1} |\langle x, \phi_k \rangle|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall x \in H_{-1/2}.$$

### 1.1.5.3 Opérateurs anti-adjoints et problèmes du second ordre en temps

On considère des systèmes du second ordre en temps de la forme

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2}(t) + Ay(t) = 0, & t \in [0, T], \\ y(0) = y^0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = y^1, \end{cases} \quad (1.22)$$

où l'opérateur  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  est coercif. Afin d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité des solutions de (1.22), on va réécrire ce système comme un problème de Cauchy du type

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt}(t) = Lz(t), & t \in [0, T], \\ z(0) = z^0, \end{cases} \quad (1.23)$$

où  $L : D(L) \subset Z \rightarrow Z$  est un opérateur maximal dissipatif anti-adjoint sur un espace de Hilbert particulier  $Z$ .

Tout d'abord, on rappelle la définition d'opérateur *anti-adjoint*.

**Définition 1.52.** On dit qu'un opérateur  $L : D(L) \subset Z \rightarrow Z$  sur un espace de Hilbert  $Z$  est

- *anti-adjoint* si  $D(L^*) = D(L)$  et  $L^* = -L$ ,
- *anti-symétrique* si

$$\forall (z, \tilde{z}) \in D(L) \times D(L), \quad \langle Lz, \tilde{z} \rangle_Z = -\langle z, L\tilde{z} \rangle_Z.$$

Comme pour les opérateurs symétriques et auto-adjoints, il est clair que tout opérateur anti-adjoint est anti-symétrique. De même, en analysant la démonstration de la Proposition 1.13 et la Remarque 1.14, on déduit facilement le résultat suivant.

**Lemme 1.53.** *Si l'opérateur  $L : D(L) \subset Z \rightarrow Z$  est anti-symétrique et inversible, alors il est anti-adjoint.*

On peut également démontrer (voir, par exemple, dans le livre de Tucsnak et Weiss [TW09], Theorem 3.8.6, p.105) une caractérisation des opérateurs anti-adjoints du même type que celle des opérateurs maximaux dissipatifs :

**Théorème 1.54.**  $L : D(L) \subset Z \rightarrow Z$  est anti-adjoint si, et seulement si,  $L$  est le générateur d'un groupe unitaire, i.e. il existe une famille  $(S(t))_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{L}(Z)$  qui vérifie les propriétés 1 et 4 de la Définition 1.8 (en remplaçant  $H$  par  $Z$ ) et les propriétés suivantes :

$$2'. \forall s, t \in \mathbb{R}, \quad S(s+t) = S(s)S(t),$$

$$3'. \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in Z, \quad \|S(t)z\|_Z = \|z\|_Z,$$

et pour laquelle

$$D(L) = \left\{ z \in Z / \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)z - z}{t} \text{ existe dans } Z \right\},$$

et

$$\forall z \in D(L), \quad Lz = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)z - z}{t}.$$

Pour transformer le problème du second ordre (1.22) en un problème du premier ordre comme (1.23), l'idée naturelle est de poser

$$z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) \end{pmatrix}.$$

On reprend les notations  $H_1, H_{1/2}, H_{-1/2}$  et  $H_{-1}$  du paragraphe précédent. On définit l'espace

$$Z = H_{1/2} \times H,$$

muni du produit scalaire

$$\langle z, \tilde{z} \rangle_Z = \langle A^{1/2}z_1, A^{1/2}\tilde{z}_1 \rangle_H + \langle z_2, \tilde{z}_2 \rangle_H, \quad \forall z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} \in Z.$$

On considère alors sur  $Z$  l'opérateur  $L : D(L) \subset Z \rightarrow Z$  défini par

$$\begin{cases} D(L) = D(A) \times D(A^{1/2}) = H_1 \times H_{1/2} \\ Lz = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} z_2 \\ -Az_1 \end{pmatrix}, \quad \forall z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in D(L). \end{cases}$$

Cet opérateur vérifie les propriétés suivantes :

**Proposition 1.55.**  $L : D(L) \subset Z \rightarrow Z$  est anti-adjoint et inversible.

*Démonstration.* D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que  $L$  est anti-symétrique et inversible. Puisque  $A$  est auto-adjoint et donc, en particulier, symétrique, il est facile de vérifier que  $L$  est anti-symétrique. Montrons maintenant que  $L$  est inversible. Soit  $\tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} \in Z = H_{1/2} \times H$ . On cherche à résoudre l'équation

$$\begin{cases} Lz = \tilde{z}, \\ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in D(L) = D(A) \times D(A^{1/2}), \end{cases}$$

qui est équivalente à

$$\begin{cases} z_2 = \tilde{z}_1, \\ z_2 \in D(A^{1/2}), \end{cases} \quad \begin{cases} -Az_1 = \tilde{z}_2, \\ z_1 \in D(A), \end{cases}.$$

Puisque  $\tilde{z}_1 \in H_{1/2} = D(A^{1/2})$ , l'équation  $z_2 = \tilde{z}_1$  a une unique solution  $z_2 \in H_{1/2}$ . D'autre part, on a démontré dans le paragraphe précédent, juste après (1.18), que  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  est inversible.

Puisque  $\tilde{z}_2 \in H$ , l'équation  $-Az_1 = \tilde{z}_2$  a donc une unique solution  $z_1 = -A^{-1}\tilde{z}_2 \in D(A)$ . On en déduit donc que  $L$  est inversible et on remarque, au passage, que l'expression de  $L^{-1}$  est donnée par :

$$L^{-1}\tilde{z} = \begin{pmatrix} -A^{-1}\tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -A^{-1} \\ I & 0 \end{pmatrix} \tilde{z}, \quad \forall \tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} \in Z.$$

Cela démontre la proposition.  $\square$

Comme dans le paragraphe précédent, on peut alors construire l'espace de Hilbert  $Z_1 = D(L)$  muni de la norme

$$\|z\|_{Z_1} = \|Lz\|_Z = \left( \|Az_1\|_H^2 + \|z_2\|_{H_{1/2}}^2 \right)^{1/2} = \left( \|z_1\|_{H_1}^2 + \|z_2\|_{H_{1/2}}^2 \right)^{1/2}.$$

On remarque, en particulier que  $Z_1$  est l'espace de Hilbert produit

$$Z_1 = H_1 \times H_{1/2}. \quad (1.24)$$

On construit alors le dual  $Z_{-1}$  de  $Z_1$  par rapport à l'espace pivot  $Z$ , et on sait, d'après (1.19) que

$$\|z\|_{Z_{-1}} = \|(L_{(-1)}z)^{-1}\|_Z,$$

où  $L_{(-1)} \in \mathcal{L}(Z, Z_{-1})$  est l'unique extension continue de  $L$  dans  $\mathcal{L}(Z, Z_{-1})$ . On peut vérifier que  $L_{(-1)}$  est donné par

$$L_{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_{(-1/2)} & 0 \end{pmatrix},$$

où  $A_{(-1/2)}$  est l'unique extension continue de  $A$  dans  $\mathcal{L}(H_{1/2}, H_{-1/2})$ . Par conséquent,

$$(L_{(-1)})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -(A_{(-1/2)})^{-1} \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

et la norme dans  $Z_{-1}$  est donnée par

$$\begin{aligned} \|z\|_{Z_{-1}} &= \|(L_{(-1)})^{-1}z\|_Z = \left( \|z_1\|_H^2 + \|(A_{(-1/2)})^{-1}z_2\|_{H_{1/2}}^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \|z_1\|_H^2 + \|A^{1/2}(A_{(-1/2)})^{-1}z_2\|_H^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.25)$$

d'après la définition de la norme dans  $H_{1/2}$ . D'autre part, (1.21) donne

$$(A_{(-1/2)})^{-1} = (A^{1/2})^{-1}(A^{1/2}_{(-1/2)})^{-1},$$

donc, pour tout  $z \in Z_{-1}$ ,

$$\|A^{1/2}(A_{(-1/2)})^{-1}z_2\|_H = \|(A^{1/2}_{(-1/2)})^{-1}z_2\|_H = \|z_2\|_{H_{-1/2}},$$

d'après (1.20). En revenant à (1.25), on en déduit que

$$\forall z \in Z_{-1}, \quad \|z\|_{Z_{-1}} = \left( \|z_1\|_H^2 + \|z_2\|_{H_{-1/2}}^2 \right)^{1/2},$$

ce qui établit que l'espace  $Z_{-1}$  est en fait le produit d'espaces de Hilbert

$$Z_{-1} = H \times H_{-1/2}. \quad (1.26)$$

Une propriété importante de l'opérateur  $L$  pour l'étude du problème d'existence et d'unicité de solutions pour (1.23) et donc pour (1.22)) est le résultat suivant qui est une conséquence du théorème de Stone et dont on pourra trouver la démonstration dans [TW09].

**Proposition 1.56.**  $L : D(L) \subset Z \rightarrow Z$  est maximal dissipatif.

On démontrera ce résultat "à la main" sur l'exemple de la section suivante, sans invoquer le théorème de Stone.

Comme conséquence de cette proposition,  $L$  engendre un semi-groupe de contractions  $(S(t))_{t \geq 0}$ . En fait,  $L$  est plus que maximal dissipatif, il est même le générateur d'un *groupe unitaire*.

Remarquons que, en posant

$$z = \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) \end{pmatrix},$$

alors  $y$  est solution de (1.22) avec  $y^0 \in H_1$  et  $y^1 \in H_{1/2}$  si et seulement si  $z$  est solution de (1.23) avec  $z^0 = \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \end{pmatrix} \in Z_1 = D(L)$ . En appliquant le Théorème 1.9 à  $L : D(L) = Z_1 \subset Z \rightarrow Z$ , on en déduit le résultat suivant :

**Proposition 1.57.** *Pour tout  $y^0 \in H_1$  et tout  $y^1 \in H_{1/2}$ , le problème (1.22) admet une unique solution*

$$y \in C([0, T], H_1) \cap C^1([0, T], H_{1/2}) \cap C^2([0, T], H).$$

### 1.1.6 Exemple d'un problème du second ordre pour un opérateur maximal dissipatif avec spectre essentiel

Dans le chapitre 4, on étudiera la contrôlabilité du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \Delta u_1 + \alpha \partial_x u_2, & ((x, y), t) \in Q_T = \Omega \times ]0, T[, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = -\alpha \partial_x u_1 - a u_2, & Q_T, \\ u_1 = v 1_\Gamma, & \Sigma_T = \partial\Omega \times ]0, T[, \\ u_1(\cdot, 0) = u_1^0, \quad u_2(\cdot, 0) = u_2^0, & \Omega, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(\cdot, 0) = u_1^1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(\cdot, 0) = u_2^1, & \Omega, \end{cases} \quad (1.27)$$

où  $\Omega$  est le carré unité  $\Omega = ]0, 1]^2$ ,  $\Gamma$  est la partie de la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  définie par  $\Gamma = \{(x, y) \in \partial\Omega, xy = 0\}$ ,  $T$  est un réel strictement positif et  $a$  et  $\alpha$  sont deux réels tels que  $a > \alpha^2 > 0$  et  $\sqrt{a - \alpha^2}/\pi \notin \mathbb{N}^*$ .

On se propose ici de donner un sens aux solutions de (1.27), lorsque sont fixées, dans des espaces adaptés, les conditions initiales  $u_i^0, u_i^1$  pour  $i = 1, 2$  et la condition de Dirichlet  $v$ . Pour ce faire, on va procéder en deux étapes : d'abord on étudie le problème homogène et les propriétés de l'opérateur auquel il est associé en le reformulant sous la forme d'un problème de Cauchy homogène comme dans le paragraphe précédent, puis on construit un relèvement de l'opérateur considéré pour reformuler le problème non homogène (1.27) comme un problème de Cauchy non homogène du type (1.10).

Commençons par réécrire le système (1.27) comme une seule équation du second ordre en temps. Posons

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad u^0 = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix}, \quad u^1 = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{pmatrix},$$

et notons formellement

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\Delta & -\alpha \partial_x \\ \alpha \partial_x & a \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système (1.27) est alors (algébriquement) équivalent au problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Lambda u(t) = 0, & t \in ]0, T[, \\ \mathcal{G}u(t) = v(t) 1_\Gamma, & t \in ]0, T[, \\ u(0) = u^0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u^1. \end{cases} \quad (1.28)$$

#### 1.1.6.1 Étude du problème homogène

On s'intéresse ici au cas où  $v = 0$ . On considère alors l'espace de Hilbert

$$H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

et l'opérateur  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  défini par

$$D(A) = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) / u_1 + \alpha \Delta^{-1} \partial_x u_2 \in H^2(\Omega) \right\},$$

et

$$Au = \Lambda u = \begin{pmatrix} -\Delta (u_1 + \alpha \Delta^{-1} \partial_x u_2) \\ \alpha \partial_x u_1 + a u_2 \end{pmatrix},$$

où  $\Delta$  est vu comme le Laplacien avec domaine  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,

$$\Delta : D(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega).$$

On rappelle que les valeurs propres et vecteurs propres associés de l'opérateur  $-\Delta$  sont données respectivement par

$$\begin{cases} \mu_{pq} = (p^2 + q^2) \pi^2, \\ \varphi_{pq}(x, y) = 2 \sin(p\pi x) \sin(q\pi y), \quad \forall (x, y) \in \Omega, \end{cases}$$

pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . On introduit alors les notations suivantes, pour  $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  et  $(x, y) \in \Omega$  :

$$\begin{aligned} \lambda_{p,q}^\pm &= \frac{1}{2} \left( \mu_{pq} + a \pm \sqrt{(\mu_{pq} - a)^2 + 4\alpha^2 p^2 \pi^2} \right), \\ \psi_{pq}(x, y) &= 2 \cos(p\pi x) \sin(q\pi y), \\ e_{p,q}^\pm &= \left( \frac{(\lambda_{p,q}^\pm - a)}{\sqrt{(\lambda_{p,q}^\pm - a)^2 + \alpha^2 p^2 \pi^2}} \varphi_{pq}, \frac{\alpha p \pi}{\sqrt{(\lambda_{p,q}^\pm - a)^2 + \alpha^2 p^2 \pi^2}} \psi_{pq} \right)^T, \\ e_q(x, y) &= (0, \sqrt{2} \sin(q\pi y))^T. \end{aligned}$$

**Lemme 1.58.** *L'ensemble des valeurs propres de  $A$  est*

$$\text{Vp}(A) = \{a\} \cup \{\lambda_{p,q}^+\}_{p,q \geq 1} \cup \{\lambda_{p,q}^-\}_{p,q \geq 1},$$

et l'ensemble des vecteurs propres associés est

$$\{e_q\}_{q \geq 1} \cup \{e_{p,q}^+\}_{p,q \geq 1} \cup \{e_{p,q}^-\}_{p,q \geq 1}.$$

*Démonstration.* Soient  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $u = (u_1, u_2)^T$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ . Alors  $u$  est une solution non nulle du système

$$\begin{cases} (\lambda - a) u_2 = \alpha \partial_x u_1 \\ \Delta (u_1 + \alpha \Delta^{-1} \partial_x u_2) + \lambda u_1 = 0 \\ u_1|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1.29)$$

Supposons dans un premier temps que  $\lambda = a$ , le système (1.29) entraîne alors d'une part, que  $\partial_x u_1 = 0$  dans  $\Omega$  avec  $u_1|_{\partial\Omega} = 0$  donc, que  $u_1 = 0$  dans  $\Omega$  et d'autre part, que l'équation  $\Delta (u_1 + \alpha \Delta^{-1} \partial_x u_2) + \lambda u_1 = 0$  dans  $\Omega$  s'écrit  $\alpha \partial_x u_2 = 0$  dans  $\Omega$ . Par conséquent, on peut écrire  $u_2$  sous la forme  $u_2(x, y) = f(y)$  avec  $f \in L^2(0, 1)$ . On en déduit donc que  $\lambda = a$  est bien une valeur propre de  $A$ , et que le sous-espace propre associé est  $\{(x, y) \mapsto (0, f(y))^T : f \in L^2(0, 1)\}$ . Supposons maintenant que  $\lambda \neq a$ , alors le système (1.29) peut s'écrire comme

$$\begin{cases} u_2 = \frac{\alpha}{\lambda - a} \partial_x u_1 \\ \left(1 + \frac{\alpha^2}{\lambda - a}\right) \partial_{xx} u_1 + \partial_{yy} u_1 + \lambda u_1 = 0 \\ u_1|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1.30)$$

Puisque la famille  $(\varphi_{pq})_{p,q \geq 1}$  des vecteurs propres de  $-\Delta$  est une base Hilbertienne de  $L^2(\Omega)$ ,  $u_1$  se décompose de manière unique sous la forme  $u_1 = \sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} u_{p,q} \varphi_{pq}$  avec  $(u_{p,q})_{p,q \geq 1} \in \ell^2$ .  $u_1$  est alors solution de (1.30) si et seulement si pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ,

$$\left( -p^2 \pi^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{\lambda - a}\right) - q^2 \pi^2 + \lambda \right) u_{p,q} = 0. \quad (1.31)$$



Soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que  $u_{p,q} \neq 0$ . Il suit de (1.31) que  $\lambda$  vérifie l'équation

$$\lambda^2 - (a + (p^2 + q^2) \pi^2) \lambda + ((a - \alpha^2) p^2 + a q^2) \pi^2 = 0. \quad (1.32)$$

Par conséquent,

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( a + (p^2 + q^2) \pi^2 \pm \sqrt{[a - (p^2 + q^2) \pi^2]^2 + 4\alpha^2 p^2 \pi^2} \right) = \lambda_{p,q}^\pm.$$

Réciproquement, il est facile de vérifier que  $Ae_{p,q}^\pm = \lambda_{p,q}^\pm e_{p,q}^\pm$ , ce qui complète la démonstration du lemme.  $\square$

Puisque les familles  $(\varphi_{pq})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$  et  $(\psi_{pq})_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$  sont deux bases Hilbertiennes de  $L^2(\Omega)$ , on peut vérifier facilement que la famille  $\mathcal{B} = \{e_q\}_{q \geq 1} \cup \{e_{p,q}^+\}_{p,q \geq 1} \cup \{e_{p,q}^-\}_{p,q \geq 1}$  forme une base Hilbertienne de  $H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . On en déduit donc le résultat suivant :

**Lemme 1.59.** *L'opérateur  $A$  est diagonalisable dans la base Hilbertienne*

$$\mathcal{B} = \{e_q\}_{q \geq 1} \cup \{e_{p,q}^+\}_{p,q \geq 1} \cup \{e_{p,q}^-\}_{p,q \geq 1}.$$

Les résultats présentés dans la section 1.1.5 s'appliquent donc à  $A$ . En particulier,  $A$  vérifie les propriétés suivantes.

**Lemme 1.60.**  *$-A$  est maximal dissipatif et  $A$  est auto-adjoint.*

*Démonstration.* On peut remarquer que, les valeurs propres de  $A$  étant toutes positives, on a

$$\sup_{\lambda \in \text{Vp}(A)} \text{Re}(-\lambda) \leq 0 < +\infty.$$

La Proposition 1.47 établit alors que l'opérateur  $-A$  est maximal dissipatif sur  $H$ . Le fait que  $A$  est auto-adjoint est une conséquence immédiate de la Proposition 1.48.  $\square$

On décrit maintenant les propriétés asymptotiques des deux suites de valeurs propres  $(\lambda_{p,q}^+)_{(p,q)}$  et  $(\lambda_{p,q}^-)_{(p,q)}$ .

**Lemme 1.61.** *1. Lorsque  $\|(p, q)\| \rightarrow +\infty$ , la suite  $\lambda_{p,q}^+$  a pour développement asymptotique  $\lambda_{p,q}^+ = \mu_{pq} + \frac{\alpha^2 p^2 \pi^2}{\mu_{pq} - a} + O\left(\frac{p^4}{\mu_{pq}^3}\right)$ . En particulier,*

$$\lambda_{p,q}^+ \underset{\|(p,q)\| \rightarrow +\infty}{\sim} \mu_{pq}. \quad (1.33)$$

*2. Tout réel du segment  $[a - \alpha^2, a]$  est une valeur d'adhérence de la suite  $(\lambda_{p,q}^-)_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ .*

*Démonstration.* Le premier point consiste en un simple développement limité. En ce qui concerne le deuxième point, il suffit de montrer que tout réel dans  $]a - \alpha^2, a[$  est une valeur d'adhérence de  $(\lambda_{p,q}^-)_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ . Soient  $\lambda \in (a - \alpha^2, a)$  et  $\theta \in ]0, \pi/2[$  tel que

$$\lambda = a - \alpha^2 \cos \theta.$$

Il existe une suite  $(\rho_n) \subset \mathbb{Q}^*$  telle que

$$\rho_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \tan \theta.$$

Par continuité, on a

$$\theta_n := \arctan \rho_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \theta.$$

Pour tout  $n$ , puisque  $\rho_n \in \mathbb{Q}^*$ , il existe un couple  $(p_n, q_n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que

$$\rho_n = p_n/q_n, \quad \|(p_n, q_n)\| \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \infty.$$

Si nécessaire, on peut remplacer  $(p_n, q_n)$  par  $(np_n, nq_n)$ , de façon à ce que la condition  $\|(p_n, q_n)\| \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  soit satisfaite. Par définition de  $\lambda_{p_n, q_n}^-$ , il suit que

$$\lambda_{p_n, q_n}^- \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a - \alpha^2 \cos \theta_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a - \alpha^2 \cos \theta = \lambda,$$

ce qui démontre le lemme.  $\square$

On rappelle ci-dessous la définition du *spectre essentiel* d'un opérateur. Pour plus de détails sur cette notion, on renvoie à [Dav95].

**Définition 1.62.** – On appelle *spectre essentiel* de  $A$  l'ensemble  $\sigma_{ess}(A)$  formé des nombres complexes  $\lambda$  pour lesquels l'une et l'une seulement des conditions suivantes est vérifiée :

1.  $\lambda I - A$  est injectif, mais pas surjectif,
  2.  $\lambda$  est une valeur propre non isolée de  $A$ ,
  3.  $\lambda$  est une valeur propre isolée de  $A$ , de multiplicité infinie.
- On appelle *spectre ponctuel* de  $A$  l'ensemble  $\sigma_p(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_{ess}(A)$  formé des valeurs propres de  $A$  qui sont isolées et de multiplicité finie.

Dans [GG77], les auteurs démontrent que le spectre essentiel d'un opérateur auto-adjoint d'ordre mixte  $A$  est composé des réels  $\lambda$  pour lesquels  $A - \lambda I$  n'est pas elliptique au sens de Douglis et Nirenberg, puis ils donnent une caractérisation du spectre essentiel qui, dans notre contexte, s'écrit

$$\sigma_{ess}(A) = \{ \lambda \in \mathbb{R}, \det(A_s(\xi_1, \xi_2, \lambda)) = 0, \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \xi \neq (0, 0) \},$$

où  $A_s(\xi_1, \xi_2, \lambda) = \begin{pmatrix} |\xi|^2 & -i\alpha\xi_1 \\ i\alpha\xi_1 & a - \lambda \end{pmatrix}$  est obtenu à partir de l'opérateur différentiel  $A$  en remplaçant  $\partial_x$  par  $i\xi_1$  et  $\partial_y$  par  $i\xi_2$ . On obtient immédiatement que

$$\lambda = a - \alpha^2 \frac{\xi_1^2}{|\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

d'où le résultat suivant.

**Lemme 1.63.** *Le spectre essentiel de  $A$  est  $\sigma_{ess}(A) = [a - \alpha^2, a]$ .*

On déduit des Lemmes 1.61 et 1.63 que  $\sigma_{ess}(A)$  est l'ensemble des points d'accumulation de la suite  $(\lambda_{p,q}^-)_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ . D'autre part, on peut montrer que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda_{p,q}^+ \geq \lambda_{1,1}^+ > a \geq \lambda_{p,q}^- \geq \min(a - \alpha^2, \pi^2).$$

Il vient alors que  $\sigma_p(A)$  est la réunion de l'ensemble des valeurs propres  $\lambda_{p,q}^+$  et d'un nombre fini de valeurs propres  $\lambda_{p,q}^-$ , et que

$$\sigma(A) = \sigma_{ess}(A) \cup \sigma_p(A) \subset [\min(a - \alpha^2, \pi^2), +\infty[.$$

Le réel  $\min(a - \alpha^2, \pi^2)$  étant strictement positif, la Proposition 1.50 permet de déduire immédiatement le résultat suivant :

**Lemme 1.64.** *L'opérateur  $A$  est coercif sur  $H$ . Plus précisément,*

$$\forall u \in D(A), \quad \langle Au, u \rangle_H \geq \min(a - \alpha^2, \pi^2) \|u\|_H^2.$$

On peut donc décomposer, pour  $\delta \in \{1, 1/2\}$ , la puissance  $A^\delta$  de  $A$  comme suit :

$$D(A^\delta) = \{u \in H / \sum_{p,q \geq 1} \lambda_{p,q}^{+2\delta} \langle u, e_{p,q}^+ \rangle_H^2 + \sum_{p,q \geq 1} \lambda_{p,q}^{-2\delta} \langle u, e_{p,q}^- \rangle_H^2 + \sum_{q \geq 1} a^{2\delta} \langle u, e_q \rangle_H^2 < +\infty\},$$

et, pour tout  $u \in D(A^\delta)$ ,

$$A^\delta u = \sum_{p,q \geq 1} \lambda_{p,q}^{+\delta} \langle u, e_{p,q}^+ \rangle_H e_{p,q}^+ + \sum_{p,q \geq 1} \lambda_{p,q}^{-\delta} \langle u, e_{p,q}^- \rangle_H e_{p,q}^- + \sum_{q \geq 1} a^\delta \langle u, e_q \rangle_H e_q.$$

Puisque  $(\lambda_{p,q}^-)_{(p,q)}$  est bornée, on peut même caractériser  $D(A^\delta)$  comme

$$D(A^\delta) = \{u \in H / \sum_{p,q \geq 1} \lambda_{p,q}^{+2\delta} \langle u, e_{p,q}^+ \rangle_H^2 < +\infty\}. \quad (1.34)$$

On peut alors exprimer  $D(A^{1/2})$  en termes d'espaces usuels.

**Proposition 1.65.**  $D(A^{1/2}) = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

*Démonstration.* Soit  $u = (u_1, u_2)^T \in H$ . D'après (1.34) et (1.33),

$$u \in D(A^{1/2}) \iff \left( \lambda_{p,q}^+{}^{1/2} \langle u, e_{p,q}^+ \rangle_H \right)_{p,q} \in \ell^2 \iff \left( \mu_{pq}{}^{1/2} \langle u, e_{p,q}^+ \rangle_H \right)_{p,q} \in \ell^2.$$

Or, en revenant à la définition des vecteurs propres  $e_{p,q}^+$  (voir juste au dessus du Lemme 1.58), on peut décomposer  $\mu_{pq}{}^{1/2} \langle u, e_{p,q}^+ \rangle$  sous la forme

$$\mu_{pq}{}^{1/2} \langle u, e_{p,q}^+ \rangle_H = \alpha_{pq} \langle u_1, \varphi_{pq} \rangle_{L^2(\Omega)} + \beta_{pq} \langle u_2, \psi_{pq} \rangle_{L^2(\Omega)},$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_{pq} &= \mu_{pq}{}^{1/2} \frac{\lambda_{p,q}^+ - a}{\sqrt{(\lambda_{p,q}^+ - a)^2 + \alpha^2 p^2 \pi^2}} \underset{\|(p,q)\| \rightarrow +\infty}{\sim} \mu_{pq}{}^{1/2}, \\ \beta_{pq} &= \alpha p \pi \frac{\mu_{pq}{}^{1/2}}{\sqrt{(\lambda_{p,q}^+ - a)^2 + \alpha^2 p^2 \pi^2}} \underset{\|(p,q)\| \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha p \pi \mu_{pq}{}^{-1/2}. \end{aligned}$$

De la définition de  $\mu_{pq}$ , il suit que  $\alpha p \pi \mu_{pq}{}^{-1/2} \leq 1$ , et donc que  $\beta_{pq} = \mathcal{O}(1)$  au voisinage de  $\|(p, q)\| \rightarrow +\infty$ . Il vient alors que la suite  $\left( \beta_{pq} \langle u_2, \psi_{pq} \rangle_{L^2(\Omega)} \right)_{p,q}$  est un élément de  $\ell^2$  puisque  $u_2 \in L^2(\Omega)$  et que  $(\psi_{pq})_{p,q}$  est une base Hilbertienne de  $L^2(\Omega)$ . On en déduit donc que

$$\begin{aligned} u \in D(A^{1/2}) &\iff \left( \alpha_{pq} \langle u_1, \varphi_{pq} \rangle_{L^2(\Omega)} \right)_{p,q} \in \ell^2 \\ &\iff \left( \mu_{pq}{}^{1/2} \langle u_1, \varphi_{pq} \rangle_{L^2(\Omega)} \right)_{p,q} \in \ell^2 \\ &\iff u_1 \in D\left((-\Delta)^{1/2}\right) = H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

puisque  $(\varphi_{pq})_{p,q}$  est une base Hilbertienne de  $L^2(\Omega)$  formée de vecteurs propres de l'opérateur  $-\Delta$  de domaine  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , associés aux valeurs propres  $\mu_{pq}$ . On en déduit donc que  $D(A^{1/2}) = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .  $\square$

Comme dans le paragraphe 1.1.5.3, on construit l'espace

$$Z = H_{1/2} \times H,$$

où  $H_{1/2} = D(A^{1/2})$  avec  $\|x\|_{H_{1/2}} = \|A^{1/2}x\|_H$ , sur lequel on considère l'opérateur anti-adjoint, inversible et maximal dissipatif  $\tilde{L} : D(\tilde{L}) \subset Z \rightarrow Z$  défini par

$$D(\tilde{L}) = H_1 \times H_{1/2}, \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{pmatrix}.$$

La Proposition 1.57 donne alors l'existence et l'unicité d'une solution  $u \in C([0, T], H_1) \cap C^1([0, T], H_{1/2}) \cap C^2([0, T], H)$ , pour le problème homogène associé à (1.27) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = 0, & ]0, T[, \\ u(0) = u^0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u^1, \end{cases}$$

lorsque  $u^0 \in H_1$  et  $u^1 \in H_{1/2}$ . On peut également considérer la première extrapolation de  $\tilde{L}$  i.e. l'opérateur  $L : D(L) = Z \subset Z_{-1} \rightarrow Z_{-1}$  défini sur le dual  $Z_{-1} = H \times H_{-1/2}$  de l'espace  $Z_1 = H_1 \times H_{1/2}$  par rapport à l'espace pivot  $Z$ , par

$$D(L) = H_{1/2} \times H, \quad L = \tilde{L}_{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_{(-1/2)} & 0 \end{pmatrix},$$

où  $A_{(-1/2)}$  est l'extension de  $A$  en un opérateur coercif sur  $H_{1/2}$  de domaine  $H_{-1/2}$ . Pour des raisons de cohérence entre les notations de ce chapitre et celles du chapitre 4, on introduit les notations suivantes

$$\begin{aligned} X &= H \times H_{-1/2}, \\ X_1 &= H_{1/2} \times H, \\ X_{-1} &= H_{-1/2} \times H_{-1}, \end{aligned}$$

de sorte que  $L$  est un opérateur anti-adjoint et maximal dissipatif sur  $X$  de domaine  $D(L) = X_1$ . L'espace  $X_{-1}$  n'est rien d'autre que le dual de  $X_1$  par rapport à l'espace pivot  $X$ . En appliquant le Théorème 1.9 à  $L : D(L) = X_1 \subset X \rightarrow X$ , on obtient le résultat suivant :

**Proposition 1.66.** *Pour tout  $u^0 \in H_{1/2}$  et tout  $u^1 \in H$ , le problème*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_{(-1/2)}u = 0, & ]0, T[, \\ u(0) = u^0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u^1, \end{cases}$$

*admet une unique solution*

$$u \in C([0, T], H_{1/2}) \cap C^1([0, T], H) \cap C^2([0, T], H_{-1/2}).$$

### 1.1.6.2 Reformulation du problème non homogène

On donne maintenant un sens aux solutions du problème non homogène (1.27) (ou encore (1.28)). L'idée est de réécrire ce problème comme un problème de Cauchy non homogène avec terme source afin de pouvoir lui appliquer le Théorème 1.29. Comme dans le paragraphe 1.1.5.3, on considère l'opérateur extrapolé  $L_{(-1)} : D(L_{(-1)}) \subset X_{-1} \rightarrow X_{-1}$  de  $L$ , donné par

$$D(L_{(-1)}) = X, \quad L_{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_{(-1)} & 0 \end{pmatrix},$$

où  $A_{(-1)} : D(A_{(-1)}) = H \subset H_{-1} \rightarrow H_{-1}$  est l'extension de  $A$  en un opérateur auto-adjoint sur  $H_{-1}$  de domaine  $H$ . On définit formellement l'opérateur  $G = \begin{pmatrix} \mathcal{G} & 0 \end{pmatrix}$  de sorte que, en posant  $z = \left(u, \frac{du}{dt}\right)^T$  et  $z^0 = (u^0, u^1)^T$ , le système (1.28) soit algébriquement équivalent au problème de Cauchy non homogène suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(t) = L_{(-1)}z(t), & t \in ]0, T[, \\ Gz(t) = v(t)1_\Gamma, & t \in ]0, T[, \\ z(0) = z^0. \end{cases} \quad (1.35)$$

En vertu de la Remarque 1.40 (avec  $\mu = 0$ , puisque  $L_{(-1)}$  est inversible), le point principal pour transformer ce problème en un problème de Cauchy avec terme source est de construire un relèvement de la condition de bord  $v1_\Gamma$ . On cherche donc à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} L_{(-1)}z = 0, \\ Gz = v1_\Gamma, \\ z = (z_1, z_2)^T \in X = H \times H_{-1/2}, \end{cases}$$

ce qui revient à poser  $z_2 = 0$  et à résoudre

$$\begin{cases} A_{(-1)}z_1 = 0, \\ \mathcal{G}z_1 = v1_\Gamma, \\ z_1 \in H. \end{cases} \quad (1.36)$$

Ce problème sera étudié dans le chapitre 4, section 4.3.1, sous la forme du problème (4.6). Plus précisément, on construira un opérateur  $\mathcal{D} : D(\mathcal{D}) \subset L^2(\Gamma) \rightarrow H$  fermé, *non borné*, de domaine

$D(\mathcal{D}) = \{v \in L^2(\Gamma) / \mathcal{D}v \in H\}$  dense dans  $L^2(\Gamma)$ , défini par le fait que  $\mathcal{D}v$  est l'unique solution  $z_1$  de (1.36). On considère alors l'opérateur *non borné*  $B : D(B) \subset L^2(\Gamma) \rightarrow X_{-1}$ , défini par

$$D(B) = D(\mathcal{D}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ A_{(-1)}\mathcal{D} \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

On démontrera dans le chapitre 4 que le problème avec condition au bord non homogène (1.35) peut se réécrire sous la forme du problème de Cauchy avec terme source suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(t) = L_{(-1)}z(t) + Bv(t), & t \in ]0, T[, \\ z(0) = z^0. \end{cases}$$

En appliquant le Théorème 1.29 (et la Remarque 1.34) à ce problème, on démontrera le résultat qui suit :

**Théorème 1.67.** *Pour toutes données initiales  $u^0 \in H$  et  $u^1 \in H_{-1/2}$  et tout élément  $v \in H^1(0, T; D(\mathcal{D}))$ , le problème (1.27) admet une unique solution  $u$  vérifiant*

$$u \in C([0, T], H) \cap C^1([0, T], H_{-1/2}) \cap C^2([0, T], H_{-1}).$$

**Remarque 1.68.** Notons que, contrairement au cas des problèmes frontières non homogènes abstraits, l'opérateur de *contrôle*  $B$  que l'on construit ici n'est pas nécessairement borné de l'espace de Hilbert  $U = L^2(\Gamma)$  dans  $X_{-1}$ .

Dans le chapitre 4, on démontrera en détail ce résultat d'existence et d'unicité pour les solutions du système (1.27), puis on étudiera ensuite la problématique de la *contrôlabilité* de ce système.

## 1.2 Systèmes paraboliques à coefficients non constants

Dans cette section, on présente les résultats généraux d'existence et d'unicité pour les systèmes paraboliques de  $n$  équations ( $n \geq 1$ ) à coefficients non constants du type

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = D\Delta y + \vec{b}(x, t) \cdot \nabla y + A(x, t)y + f(x, t), & (x, t) \in Q_T = \Omega \times ]0, T[, \\ y = 0, & (x, t) \in \Sigma_T = \partial\Omega \times ]0, T[, \\ y(x, 0) = y^0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1.38)$$

$\Omega$  désigne un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  (avec  $N \geq 1$ ), de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ ,  $T$  est un réel strictement positif,  $D$  est une matrice de diffusion diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix},$$

avec  $d_i > 0$  pour  $i = 1, \dots, n$ ,  $\vec{b} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)^T \in L^\infty(Q_T, M^{n,1}(\mathbb{R}))$  représente le terme d'advection (ou terme de couplage du système à l'ordre 1) et  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in L^\infty(Q_T, M^n(\mathbb{R}))$  représente la matrice de couplage à l'ordre 0.

Le chapitre 5 sera consacré à l'étude de la contrôlabilité interne aux trajectoires de ce système pour  $n = 3$  et  $\vec{b} = 0$ . Les différents cas de contrôlabilité que l'on considérera consisteront à poser  $f(x, t) = Bv(x, t)1_\omega(x)$  où  $\omega$  sera un ouvert non vide contenu dans  $\Omega$  et la matrice de contrôle  $B$  sera choisie comme étant la matrice identité  $B = I_3$  de  $M^3(\mathbb{R})$  (contrôlabilité par trois contrôles distincts, chacun agissant sur une des trois équations du système), ou bien la matrice  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (contrôlabilité par deux contrôles distincts  $v_1$  et  $v_2$  agissant respectivement sur la deuxième et la troisième équations), ou encore comme étant le vecteur  $B = (0, 0, 1)^T$  (contrôlabilité par un seul contrôle  $v$  agissant sur la troisième équation).

### 1.2.1 Un théorème abstrait d'existence et unicité de solutions

On va déduire l'existence et l'unicité de solutions pour (1.38) d'un résultat abstrait d'existence et unicité de solutions pour des problèmes d'évolution du premier ordre en temps qu'on rappelle ci-dessous et dont on pourra trouver une démonstration complète, par la méthode de Galerkin, dans le Volume 8 de l'ouvrage de Dautray et Lions [DL88]. Soient  $H$  et  $V$  deux espaces de Hilbert réels séparables tels que  $V$  s'injecte dans  $H$  de façon continue et dense. On note  $V'$  le dual de  $V$  par rapport à l'espace pivot  $H$  et on définit l'espace

$$W(0, T; V, V') = \left\{ y \in L^2(0, T; V) / \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0, T; V') \right\}.$$

Dans [DL88], les auteurs démontrent que l'espace  $W(0, T; V, V')$  s'injecte de façon continue dans  $C([0, T], H)$  et établissent le théorème qui suit.

**Théorème 1.69.** *Soit  $a : [0, T] \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  une application vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $(y, z) \mapsto a(t; y, z)$  est une forme bilinéaire sur  $V \times V$ ,*
2. *pour tout  $(y, z) \in V \times V$ , la fonction  $t \in [0, T] \mapsto a(t; y, z)$  est mesurable,*
3. *il existe une constante  $M > 0$  telle que*

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall (y, z) \in V \times V, \quad |a(t; y, z)| \leq M \|y\|_V \|z\|_V,$$

4. *il existe deux réels  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\alpha > 0$  tels que*

$$\forall y \in V, \quad \text{p.p.t. } t \in \mathbb{R}, \quad a(t; y, y) + \lambda \|y\|_V^2 \geq \alpha \|y\|_H^2.$$

Alors, pour tout  $y^0 \in H$  et tout  $f \in L^2(0, T; V')$ , le problème

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle y(\cdot), z \rangle_H + a(\cdot; y(\cdot), z) = \langle f(\cdot), z \rangle_{V', V} & \text{dans } \mathcal{D}'([0, T]), \quad \forall z \in V, \\ y(0) = y^0, \end{cases} \quad (1.39)$$

admet une unique solution

$$y \in W(0, T; V, V').$$

**Remarque 1.70.** Une analyse de la preuve des résultats exposés dans [DL88] permet d'établir précisément la dépendance de la solution  $y$  du problème (1.39) en fonction des données  $y^0 \in H$  et  $f \in L^2(0, T; V')$  :

$$\begin{aligned} \|y\|_{W(0, T; V, V')} &\leq C \left( 1 + \frac{e^{\lambda T}}{\sqrt{\alpha}} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) (1 + M) \right) (\|y^0\|_H + \|f\|_{L^2(0, T; V')}) \\ &\leq \exp \left( C \left( \lambda T + \frac{1}{\alpha} + M \right) \right) (\|y^0\|_H + \|f\|_{L^2(0, T; V')}), \end{aligned}$$

où  $C$  désigne une constante générique strictement positive ne dépendant pas des paramètres  $M, \lambda, \alpha$ , ni des données  $y^0$  et  $f$  du problème, et dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre.

### 1.2.2 Une application au cas des données initiales dans $(L^2(\Omega))^n$

On remarque que le système (1.38) peut s'écrire sous la forme variationnelle (1.39), où les espaces de Hilbert  $H = (L^2(\Omega))^n$  et  $V = (H_0^1(\Omega))^n$  sont munis respectivement des normes

$$\|y\|_H = \left( \sum_{i=1}^n \|y_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad \|y\|_V = \left( \sum_{i=1}^n \|\nabla y_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad \forall y = (y_1, \dots, y_n)^T,$$

(auquel cas  $V' = (H^{-1}(\Omega))^n$ ) et où la forme bilinéaire  $a : [0, T] \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  est définie, pour tout  $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in V$  et tout  $z = (z_1, \dots, z_n)^T \in V$ , par

$$\begin{aligned} a(t; y, z) &= \int_{\Omega} (D\nabla y) \cdot \nabla z - \int_{\Omega} (A(\cdot, t)y) z - \int_{\Omega} (\vec{b}(\cdot, t) \cdot \nabla y) z \\ &= \sum_{i=1}^n d_i \int_{\Omega} \nabla y_i \cdot \nabla z_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(\cdot, t) y_j z_i - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (\vec{b}_i(\cdot, t) \cdot \nabla y_i) z_i. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que  $a$  satisfait les hypothèses du Théorème 1.69 avec

$$\begin{aligned} M &= n \left( d_\infty + C_P^2 \|A\|_\infty + C_P \left\| \vec{b} \right\|_\infty \right), \\ \lambda &= n \|A\|_\infty + \frac{1}{2\epsilon} \left\| \vec{b} \right\|_\infty, \\ \alpha &= d_0 - \frac{\epsilon}{2} \left\| \vec{b} \right\|_\infty, \end{aligned}$$

où  $\epsilon > 0$  est un réel suffisamment petit bien choisi,  $C_P > 0$  désigne la constante dans l'inégalité de Poincaré :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

et où  $d_0, d_\infty, \|A\|_\infty$  et  $\left\| \vec{b} \right\|_\infty$  sont définis par

$$d_0 = \min_{1 \leq i \leq n} d_i, \quad d_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} d_i, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(Q_T)}, \quad \left\| \vec{b} \right\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \vec{b}_i \right\|_{L^\infty(Q_T)}.$$

On déduit donc du Théorème 1.69 le résultat suivant :

**Théorème 1.71.** *Pour tout  $y^0 \in (L^2(\Omega))^n$  et tout  $f \in L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^n)$ , le problème (1.38) admet une unique solution*

$$y \in W(0, T; (H_0^1(\Omega))^n, (H^{-1}(\Omega))^n),$$

avec

$$\|y\|_{W(0, T; (H_0^1(\Omega))^n, (H^{-1}(\Omega))^n)} \leq e^{CM_T} (\|y^0\|_{(L^2(\Omega))^n} + \|f\|_{L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^n)}),$$

où  $C = C(n) > 0$  et

$$M_T = 1/\sqrt{d_0} + d_\infty + \|A\|_\infty + \left\| \vec{b} \right\|_\infty + \|A\|_\infty T + \left\| \vec{b} \right\|_\infty T/d_0 + T/d_0.$$

En particulier,

$$y \in C([0, T], (L^2(\Omega))^n).$$

### 1.2.3 Une application au cas des données initiales dans $(H_0^1(\Omega))^n$

On peut également appliquer le Théorème 1.69 aux deux espaces de Hilbert  $V$  et  $H$  définis par

$$V = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n, \quad \|y\|_V = \left( \sum_{i=1}^n \|\Delta y_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad \forall y = (y_1, \dots, y_n)^T \in V,$$

et

$$H = (H_0^1(\Omega))^n, \quad \|y\|_H = \left( \sum_{i=1}^n \|\nabla y_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad \forall y = (y_1, \dots, y_n)^T \in H.$$

Dans ce cas, le dual de  $V$  par rapport à l'espace pivot  $H$  est  $V' = (L^2(\Omega))^n$ . Le système (1.38) s'écrit alors sous la forme variationnelle (1.39), où  $a : [0, T] \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$\begin{aligned} a(t; y, z) &= \int_\Omega (D\Delta y) \Delta z - \int_\Omega (A(\cdot, t)y) \Delta z + \int_\Omega (\vec{b}(\cdot, t) \cdot \nabla y) \Delta z \\ &= \sum_{i=1}^n d_i \int_\Omega \Delta y_i \Delta z_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(\cdot, t) y_j \Delta z_i + \sum_{i=1}^n \int_\Omega (\vec{b}_i(\cdot, t) \cdot \nabla y_i) \Delta z_i, \end{aligned}$$

pour tout  $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in V$  et tout  $z = (z_1, \dots, z_n)^T \in V$ . De simples estimations permettent de montrer que  $a$  vérifie les hypothèses du Théorème 1.69 pour

$$\begin{aligned} M &= n \left( d_\infty + C_P^2 \|A\|_\infty + C_P \left\| \vec{b} \right\|_\infty \right), \\ \lambda &= \frac{1}{2\epsilon} \left( nC_P \|A\|_\infty + \left\| \vec{b} \right\|_\infty \right), \\ \alpha &= d_0 - \frac{\epsilon}{2} \left( nC_P \|A\|_\infty + \left\| \vec{b} \right\|_\infty \right), \end{aligned}$$

avec  $\epsilon > 0$  bien choisi. Il vient alors :

**Théorème 1.72.** *Pour tout  $y^0 \in (H_0^1(\Omega))^n$  et tout  $f \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^n)$ , le problème (1.38) admet une unique solution*

$$y \in W\left(0, T; (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n, (L^2(\Omega))^n\right).$$

De plus,

$$\|y\|_{W(0, T; (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n, (L^2(\Omega))^n)} \leq e^{CM_T} (\|y^0\| + \|f\|),$$

où  $C = C(n) > 0$  et

$$M_T = 1/\sqrt{d_0} + d_\infty + \|A\|_\infty + \|\vec{b}\|_\infty + \|A\|_\infty^2 T/d_0 + \|\vec{b}\|_\infty^2 T/d_0 + T/d_0,$$

et,

$$y \in C\left([0, T], (H_0^1(\Omega))^n\right).$$

**Remarque 1.73.** Les Théorèmes 1.71 et 1.72 peuvent également se démontrer en adaptant au cas des *systèmes* les inégalités a priori qui sont établies dans [LSU67] pour prouver des résultats d'existence et unicité de solutions pour les *équations* paraboliques.

## Références bibliographiques du chapitre 1

- [BC93] H. BREZIS & T. CAZENAVE – « Linear semigroups of contractions; the Hille–Yosida theory and some applications », Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Centre National de la Recherche Scientifique (1993), no. A 92004.
- [Bre11] H. BREZIS – Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Universitext, Springer, New York, 2011.
- [Dav95] E. B. DAVIES – Spectral theory and differential operators, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [DL88] R. DAUTRAY & J.-L. LIONS – Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Vol. 8, INSTN : Collection Enseignement. [INSTN : Teaching Collection], Masson, Paris, 1988, Évolution : semi-groupe, variationnel. [Evolution : semigroups, variational methods], Reprint of the 1985 edition.
- [GG77] G. GRUBB & G. GEYMONAT – « The essential spectrum of elliptic systems of mixed order », Math. Ann. **227** (1977), no. 3, p. 247–276.
- [LSU67] O. A. LADYŽENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV & N. N. URAL'CEVA – Linear and quasilinear equations of parabolic type, Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.
- [Paz83] A. PAZY – Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [TW09] M. TUCSNAK & G. WEISS – Observation and control for operator semigroups, Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [Zab92] J. ZABCZYK – Mathematical control theory : an introduction, Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.





## Chapitre 2

# Contrôlabilité de systèmes d'équations aux dérivées partielles

Il existe différentes notions de *contrôlabilité* qui sont toutes équivalentes en dimension finie (c'est-à-dire pour le cas des systèmes d'équations différentielles ordinaires) mais qui sont bien distinctes en dimension infinie (c'est-à-dire pour le cas des systèmes d'équations aux dérivées partielles). Chacune de ces notions de contrôlabilité est équivalente à une notion duale que l'on appelle *observabilité* et qui est le moyen par lequel, en général, on établit la contrôlabilité d'un système. À titre d'exception, on présentera dans le chapitre 5 un problème de contrôlabilité (pour un système parabolique de trois équations contrôlé par un ou deux contrôles) qui ne sera pas résolu en établissant l'observabilité du système adjoint.

Dans ce chapitre, on commence par rappeler dans la section 2.1 les différentes notions de contrôlabilité pour les systèmes *linéaires* de contrôle formulés de manière abstraite (contrôlabilité exacte, contrôlabilité aux trajectoires qui est équivalente à la contrôlabilité à zéro, contrôlabilité approchée), et on présente les concepts d'observabilité qui leur sont associés ainsi que les dualités contrôlabilité-observabilité correspondantes. La section 2.2 pointe les spécificités de la contrôlabilité en dimension infinie. Dans la section 2.3, on présente trois problèmes de contrôlabilité pour lesquels on établit les inégalités d'observabilité associées et que l'on étudiera en détails dans les chapitres 4, 3 et 5. Le premier concerne la contrôlabilité exacte du système de deux équations (1.27), le second la contrôlabilité frontière exacte de l'équation des ondes en  $N$  dimension d'espace et le dernier la contrôlabilité aux trajectoires d'un système parabolique de trois équations du type (1.38) avec  $n = 3$ ,  $\vec{b} = 0$  et  $B(t) = B$  matrice constante.

### 2.1 Concepts de contrôlabilité et d'observabilité

Dans cette section, on considère un système de contrôle abstrait, i.e. un système de la forme

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t), & t \in ]T_0, T[, \\ y(T_0) = y^0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $T_0$  et  $T$  sont deux réels strictement positifs tels que  $T_0 < T$  et où on suppose que pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightarrow H$  et  $B(t) : D(B(t)) \subset U \rightarrow H_{-1}$  sont des opérateurs non bornés,  $U$ ,  $H$  et  $H_{-1}$  désignant des espaces de Hilbert séparables,  $H$  s'injectant de manière continue et dense dans  $H_{-1}$ . Les espaces  $U$  et  $H$  sont appelés respectivement *espace des contrôles* et *espace des états*. On suppose, en outre, que  $A$  est tel que pour tout  $T_0 > 0$ , tout  $T > 0$ , tout  $y^0 \in H$  et tout  $f \in L^2(0, T; H)$ , le problème

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = A(t)y(t) + f(t), & t \in ]T_0, T[, \\ y(T_0) = y^0, \end{cases} \quad (2.2)$$

admet une unique solution faible  $y \in C([T_0, T], H)$  qui dépend de manière continue des données  $y^0$  et  $f$ . On note  $\mathcal{U}_{T_0, T}$  l'ensemble des *contrôles*  $v \in L^2(T_0, T; U)$  tels que la solution  $y$  de (2.1) pour  $y^0 = 0$

vérifie  $y(T) \in H$ . Pour tout  $v \in \mathcal{U}_{T_0, T}$ , on note  $y(t; T_0, y^0, v)$  la solution du système (2.1) à l'instant  $t$ . Lorsque  $T_0 = 0$ , on note simplement  $y(t; y^0, v)$  et on pose  $\mathcal{U}_T = \mathcal{U}_{T_0, T}$ . On définit alors l'opérateur non borné

$$L_T : D(L_T) \subset L^2(0, T; U) \rightarrow H, \quad D(L_T) = \mathcal{U}_T, \quad L_T v = y(T; 0, v). \quad (2.3)$$

En d'autres termes, pour tout  $v \in \mathcal{U}_T$ ,  $L_T v = y(T)$  où  $y$  est la solution de (2.1) pour  $y^0 = 0$  et  $T_0 = 0$ . On suppose dans la suite que  $L_T$  est fermé et de domaine dense.

**Remarque 2.1.** Généralement, dans la littérature, les opérateurs  $A$  et  $B$  ne dépendent pas du temps,  $A$  est maximal dissipatif et  $B$  est borné de  $U$  dans  $H$  (voir, par exemple, les livres de Zabczyk [Zab92] et de Bensoussan, Da Prato, Delfour et Mitter [BDPDM93]) ou  $B$  est *admissible* i.e.  $B \in \mathcal{L}(U, H_{-1})$  avec  $L_T \in \mathcal{L}(L^2(0, T; U), H)$  (voir, par exemple, les livres de Coron [Cor07] et de Tucsnak et Weiss [TW09]). Pour le cas d'opérateurs  $A$  et  $B$  dépendant du temps, on suppose en général que  $B$  est borné au sens suivant :  $B \in L^\infty(0, T; \mathcal{L}(U, H))$ . Pour chacun de ces cas, il suffit alors de remplacer, dans tout ce qui suit,  $\mathcal{U}_T$  par  $L^2(0, T; U)$ . La raison pour laquelle on considère ici un opérateur  $B$  non borné provient du problème de contrôlabilité pour le système hyperbolique (1.27) présenté au chapitre 1. On a vu dans le chapitre 1 que le système (1.27) pouvait s'écrire sous la forme (2.1) où  $B$  est l'opérateur fermé, non borné, de domaine dense et indépendant du temps défini en (1.37).

### 2.1.1 Définition des différentes notions de contrôlabilité

Le principe de la contrôlabilité est le suivant : étant donnés deux états  $y^0 \in H$  et  $y^1 \in H$  du système (2.1), existe-t-il une fonction  $v$  (appelée *contrôle*) permettant de passer (en un sens à définir précisément) de l'état  $y^0$  à l'état  $y^1$  en un temps fixé  $T > 0$ ? Le terme "passer" peut-être interprété de différentes manières : par exemple il peut signifier que la valeur à l'instant  $t = T$  de la solution qui part de l'état  $y^0$  à l'instant  $t = 0$  soit exactement égale à  $y^1$ , auquel cas on parle de contrôlabilité *exacte* ; mais il peut aussi signifier que la valeur de cette solution à l'instant  $T$  soit suffisamment proche de  $y^1$ , sans nécessairement lui être égale, auquel cas on parle de contrôlabilité *approchée*. Les notions de contrôlabilité peuvent également différer selon la forme des cibles  $y^1$  que l'on cherche à atteindre : par exemple on peut ne chercher à atteindre que l'état nul  $y^1 = 0$ , auquel cas on parle de contrôlabilité *à zéro*, ou alors ne chercher à atteindre que des cibles correspondant à des trajectoires, ce qui consiste à contrôler *aux trajectoires*. Ces différents concepts de contrôlabilité se définissent plus précisément de la façon suivante :

**Définition 2.2.** Soient  $T > 0$  fixé et  $T_0 = 0$ .

- **Contrôlabilité exacte :** On dit que le système (2.1) est *exactement contrôlable au temps*  $T > 0$  si :

$$\forall (y^0, y^1) \in H \times H, \quad \exists v \in \mathcal{U}_T / \quad y(T; y^0, v) = y^1.$$

- **Contrôlabilité approchée :** On dit que le système (2.1) est *approximativement contrôlable au temps*  $T > 0$  si :

$$\forall (y^0, y^1) \in H \times H, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists v \in \mathcal{U}_T / \quad \|y(T; y^0, v) - y^1\|_H < \epsilon.$$

- **Contrôlabilité aux trajectoires :** On dit que le système (2.1) est *contrôlable aux trajectoires au temps*  $T > 0$  si :

$$\forall y^0 \in H, \quad \forall (y_*^0, v_*) \in H \times \mathcal{U}_T, \quad \exists v \in \mathcal{U}_T / \quad y(T; y^0, v) = y(T; y_*^0, v_*).$$

- **Contrôlabilité à zéro :** On dit que le système (2.1) est *contrôlable à zéro au temps*  $T > 0$  si :

$$\forall y^0 \in H, \quad \exists v \in \mathcal{U}_T / \quad y(T; y^0, v) = 0.$$

On peut également définir ces mêmes notions de contrôlabilité pour des systèmes non linéaires. On remarque immédiatement que, pour des systèmes linéaires ou non linéaires, la contrôlabilité exacte entraîne toujours la contrôlabilité approchée, la contrôlabilité aux trajectoires et la contrôlabilité à zéro. Le système (2.1) que l'on considère ici étant linéaire les concepts de contrôlabilité aux trajectoires et de contrôlabilité à zéro sont équivalentes. En effet, dans ce cas, la contrôlabilité aux trajectoires entraîne clairement la contrôlabilité à zéro : il suffit de prendre  $y_*^0 = 0$  et  $v_* = 0$  dans la définition de la

contrôlabilité aux trajectoires. Réciproquement si (2.1) est contrôlable à zéro au temps  $T$ , alors pour tout  $y^0 \in H$  et tout  $y_*^0 \in H$ , il existe  $w \in \mathcal{U}_T$  tel que  $y(T; y^0 - y_*^0, w) = 0$  i.e.  $y(T; y_0, v) = y(T; y_*^0, v_*)$  pour  $v = w + v_* \in \mathcal{U}_T$ ; d'où la contrôlabilité aux trajectoires au temps  $T$ .

De la même manière on peut définir des notions plus fortes de contrôlabilité qui sont la contrôlabilité exacte totale sur  $]0, T[$ , la contrôlabilité approchée totale sur  $]0, T[$ , la contrôlabilité aux trajectoires totale sur  $]0, T[$  et la contrôlabilité à zéro totale sur  $]0, T[$ . Par exemple,

**Définition 2.3** (voir [SM67]). On dira que le système (2.1) est :

– *totalemment exactement contrôlable sur  $]0, T[$*  si :

$$\forall ]T_0, T_1[ \subset ]0, T[, \quad \forall (y^0, y^1) \in H \times H, \quad \exists v \in \mathcal{U}_{T_0, T_1} / y(T_1; T_0, y^0, v) = y^1.$$

– *totalemment contrôlable aux trajectoires sur  $]0, T[$*  si :

$$\forall ]T_0, T_1[ \subset ]0, T[, \quad \forall y^0 \in H, \quad \forall (y_*^0, v_*) \in H \times \mathcal{U}_{T_0, T_1}, \quad \exists v \in \mathcal{U}_{T_0, T_1} / y(T_1; T_0, y^0, v) = y(T_1; T_0, y_*^0, v_*).$$

Dans le cas autonome ( $A(t) = A$  et  $B(t) = B$ ), il y a équivalence entre chacune des notions de contrôlabilité au temps  $T$  et la notion correspondante de contrôlabilité totale sur  $]0, T[$ . On verra dans la section 2.2 un exemple de système non autonome qui est totalemment exactement contrôlable.

**Remarque 2.4.** L'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \Delta y(t) + B(t)v(t), & t \in ]0, T[, \\ y(0) = y^0, \end{cases}$$

et plus généralement, les systèmes paraboliques ne sont pas exactement contrôlables au temps  $T$ , en raison de leur effet régularisant. En effet, pour les systèmes du type (1.38), par exemple, partant de  $y^0 \in (L^2(\Omega))^n$ , les cibles  $y^1 \in (L^2(\Omega))^n \setminus (H_0^1(\Omega))^n$  ne sont pas atteignables, puisque la solution  $y$  de (1.38) a la régularité

$$y \in W\left(0, T; (L^2(\Omega))^n, (H_0^1(\Omega))^n\right).$$

### 2.1.2 Dualité contrôlabilité-observabilité

On considère maintenant le système (2.1) pour  $T_0 = 0$ , i.e.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t), & t \in ]0, T[, \\ y(0) = y^0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Dans cette partie, on utilise la dualité pour caractériser chacune des différentes notions de contrôlabilité pour le système (2.4) en termes d'une inégalité *d'observabilité* que doit vérifier le système adjoint.

Commençons d'abord par remarquer que, par linéarité du système, la solution de (2.4) se décompose en la somme de la solution homogène ( $v = 0$ ) et de la solution avec donnée initiale nulle ( $y^0 = 0$ ) :

$$\forall t \in [0, T], \quad y(t; y^0, v) = y(t; y^0, 0) + y(t; 0, v).$$

En particulier, pour  $t = T$ , on a

$$y(T; y^0, v) = S_T y^0 + L_T v, \quad (2.5)$$

où  $L_T$  est donné par (2.3) et  $S_T \in \mathcal{L}(H)$  est défini par  $S_T y^0 = y(T; y^0, 0)$  pour tout  $y^0 \in H$ . En utilisant la décomposition (2.5), on peut réécrire les différentes notions de contrôlabilité de la Définition 2.2 de la façon suivante :

**Proposition 2.5.** *Le système (2.4) est*

- *exactement contrôlable au temps  $T$  si, et seulement si,  $L_T$  est surjectif,*
- *approximativement contrôlable au temps  $T$  si, et seulement si,  $\text{Im}(L_T)$  est dense dans  $H$ ,*
- *contrôlable aux trajectoires (ou encore contrôlable à zéro) au temps  $T$  si, et seulement si,  $\text{Im}(S_T) \subset \text{Im}(L_T)$ .*

Pour traduire en termes de dualité ces propriétés sur les images des opérateurs  $L_T$  et  $S_T$ , on fait appel aux résultats d'analyse fonctionnelle suivants :

**Théorème 2.6.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Hilbert et  $L : D(L) \subset E \rightarrow F$  un opérateur fermé et de domaine dense.

1.  $\overline{\text{Im}(L)} = (\text{Ker}(L^*))^\perp$ . En particulier,  $\text{Im}(L)$  est dense dans  $F$  si et seulement si  $L^*$  est injectif.
2.  $L$  est surjectif si, et seulement si, il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\forall x \in D(L^*), \quad \|x\|_F \leq c \|L^*x\|_E.$$

**Théorème 2.7.** Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois espace de Hilbert,  $K \in \mathcal{L}(G, F)$  et  $L : D(L) \subset E \rightarrow F$  un opérateur fermé et de domaine dense. L'inclusion d'images

$$\text{Im}(K) \subset \text{Im}(L)$$

est satisfaite si, et seulement si, il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\forall x \in D(L^*), \quad \|K^*x\|_G \leq c \|L^*x\|_E.$$

On renvoie au livre de Brezis voir [Bre11] (Corollary 2.18 p. 45 et Theorem 2.20 p.47) pour la démonstration du Théorème 2.6 et au livre de Coron [Cor07] (Lemma 2.48 p.58 et ses références) pour un énoncé plus complet du Théorème 2.7.

En appliquant les Théorèmes 2.6 et 2.7 avec  $E := L^2(0, T; U)$ ,  $F := H$ ,  $G := H$ ,  $L := L_T$  et  $S := S_T$ , on peut alors exprimer la contrôlabilité de (2.4) comme suit :

**Corollaire 2.8.** Le système (2.4) est

- **exactement contrôlable** au temps  $T$  si, et seulement si, il existe une constante  $C_T > 0$  telle que

$$\forall \phi^0 \in D(L_T^*), \quad \|\phi^0\|_H \leq C_T \|L_T^* \phi^0\|_{L^2(0, T; U)}, \quad (2.6)$$

- **approximativement contrôlable** au temps  $T$  si, et seulement si,

$$\forall \phi^0 \in D(L_T^*), \quad (L_T^* \phi^0 = 0 \Rightarrow \phi^0 = 0), \quad (2.7)$$

- **contrôlable aux trajectoires** (ou encore contrôlable à zéro) au temps  $T$  si, et seulement si, il existe une constante  $C_T > 0$  telle que

$$\forall \phi^0 \in D(L_T^*), \quad \|S_T^* \phi^0\|_H \leq C_T \|L_T^* \phi^0\|_{L^2(0, T; U)}. \quad (2.8)$$

Les inégalités (2.6) et (2.8) sont appelées *inégalités d'observabilité* respectivement *exacte* et *aux trajectoires*. La propriété (2.7) est appelée *principe de continuation unique*.

Dans la pratique, on caractérise ces trois propriétés de  $L_T^*$  en termes du système adjoint associé à (2.4). Pour cela, on va supposer que, pour tout  $\phi^0 \in H$ , le problème adjoint

$$\begin{cases} -\frac{d\phi}{dt}(t) = A(t)^* \phi(t), & t \in ]0, T[ \\ \phi(T) = \phi^0 \end{cases} \quad (2.9)$$

admet une unique solution faible  $\phi \in C([0, T], H)$ . On peut alors facilement montrer que  $S_T^*$  est défini par

$$\forall \phi^0 \in H, \quad S_T^* \phi^0 = \phi(0),$$

où  $\phi$  est la solution de (2.9) et que  $L_T^* : D(L_T^*) \subset H \rightarrow L^2(0, T; U)$ , vérifie :

$$\forall \phi^0 \in D(L_T^*), \quad \text{p.p.t. } t \in [0, T], \quad (L_T^* \phi^0)(t) = B(t)^* \phi(t),$$

où  $\phi$  est la solution de (2.9).

Cela permet d'obtenir pour chacune des notions de contrôlabilité du système (2.4) une formulation en termes d'observabilité du système (2.9) qui est utilisable en pratique :

**Théorème 2.9.** Le système (2.4) est

- **exactement contrôlable** au temps  $T$  si, et seulement si, il existe une constante  $C_T > 0$  telle que pour tout  $\phi^0 \in D(L_T^*)$ , la solution du système (2.9) vérifie

$$\|\phi^0\|_H^2 \leq C_T \int_0^T \|B(t)^* \phi(t)\|_U^2 dt,$$

- **approximativement contrôlable** au temps  $T$  si, et seulement si, pour tout  $\phi^0 \in D(L_T^*)$  la solution  $\phi$  de (2.9) vérifie le principe de continuation unique suivant : si  $B(\cdot)^*\phi = 0$  dans  $L^2(0, T; U)$ , alors  $\phi^0 = 0$ ,
- **contrôlable aux trajectoires** (ou encore contrôlable à zéro) au temps  $T$  si, et seulement si, il existe une constante  $C_T > 0$  telle que pour tout  $\phi^0 \in D(L_T^*)$ , la solution du système (2.9) vérifie

$$\forall \phi^0 \in D(L_T^*), \quad \|\phi(0)\|_H^2 \leq C_T \int_0^T \|B(t)^*\phi(t)\|_U^2 dt.$$

## 2.2 Contrôlabilité en dimension finie

Dans le cadre de la dimension finie i.e. pour le cas d'un système d'équations différentielles ordinaires, on va voir que toutes ces notions de contrôlabilité coïncident et qu'elles peuvent être caractérisées par une condition algébrique sur les coefficients du système appelée *condition de Kalman*.

### 2.2.1 Équivalence entre les différentes notions

On se place dans le cadre de la dimension finie en posant  $H = H_{-1} = \mathbb{R}^n$  et  $U = \mathbb{R}^m$  où  $m$  et  $n$  sont des entiers naturels non nuls. On considère  $A \in L^1(0, T; M^n(\mathbb{R}))$  et  $B \in L^\infty(0, T; M^{n,m}(\mathbb{R}))$ . Il est bien connu que si  $f \in L^1(0, T; \mathbb{R}^n)$  et  $y^0 \in \mathbb{R}^n$ , alors le problème

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t), & t \in ]0, T[, \\ y(0) = y^0, \end{cases} \quad (2.10)$$

admet une unique solution

$$y \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}^n) := \left\{ z \in L^1(0, T; \mathbb{R}^n) / \frac{dz}{dt} \in L^1(0, T; \mathbb{R}^n) \right\},$$

qui dépend continûment des données  $y^0$  et  $f$ . De plus,  $y$  est donnée par la formule

$$y(t) = M(t)y^0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}f(s) ds,$$

où  $M(t)$  désigne la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt}(t) = A(t)M(t), & t \in ]0, T[, \\ y(0) = I. \end{cases}$$

Il est clair que l'opérateur  $S_T$  défini dans la partie 2.1.2 est donné par  $S_T = M(T)$ , et par conséquent que  $S_T$  est inversible dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . De plus, si on pose pour tout  $(s, t) \in [0, T]^2$ ,  $S(t, s) = M(t)M(s)^{-1}$ , alors

$$\forall v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m), \quad L_T v = \int_0^T S(T, t)B(t) dt.$$

L'opérateur  $L_T$  est ici borné de  $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

D'après la Proposition 2.5, la contrôlabilité exacte a lieu pour le système (2.4) si, et seulement si,  $\text{Im}(L_T) = \mathbb{R}^n$  et la contrôlabilité approchée a lieu si, et seulement si,  $\text{Im}(L_T)$  est dense dans  $\mathbb{R}^n$ . En tant que sous-espace d'un espace vectoriel normé de dimension finie,  $\text{Im}(L_T)$  est fermé. Il apparaît donc que les deux notions de contrôlabilité exacte et contrôlabilité approchée coïncident.  $S_T$  étant inversible dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , on a  $\text{Im}(S_T) = \mathbb{R}^n$ , de sorte que la Proposition 2.5 donne l'équivalence entre la contrôlabilité exacte et la contrôlabilité à zéro (qui est déjà, elle-même, équivalente à la contrôlabilité aux trajectoires, puisque le système est linéaire).

On définit maintenant la matrice symétrique suivante de  $M^n(\mathbb{R})$ , appelée *Gramien de contrôlabilité* :

$$Q_T = L_T L_T^* = \int_0^T S(T, t)B(t)B(t)^*S(T, t)^* dt.$$

Remarquons que  $Q_T$  est positive puisque, pour tout  $\phi^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\langle Q_T \phi^0, \phi^0 \rangle_{\mathbb{R}^n} = \|L_T^* \phi^0\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}^2$ . Il suit donc que  $Q_T$  est inversible si, et seulement si, elle est définie positive, ce qui équivaut encore à la propriété suivante

$$\forall \phi^0 \in \mathbb{R}^n, \quad (\langle Q_T \phi^0, \phi^0 \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \Rightarrow \phi^0 = 0),$$

qui n'est autre que l'injectivité de  $L_T^*$ . Au vu de la propriété (2.7) du Corollaire 2.8, on a donc démontré le résultat suivant :

**Proposition 2.10.** *Si  $A \in L^1(0, T; M^n(\mathbb{R}))$  et  $B \in L^\infty(0, T; M^{n,m}(\mathbb{R}))$ , alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le système (2.4) est exactement contrôlable au temps  $T$ .*
2. *Le système (2.4) est approximativement contrôlable au temps  $T$ .*
3. *Le système (2.4) est contrôlable aux trajectoires au temps  $T$ .*
4. *Le système (2.4) est contrôlable à zéro au temps  $T$ .*
5.  *$Q_T$  est inversible.*

## 2.2.2 Le critère de Kalman

On vient de caractériser la contrôlabilité d'un système en dimension finie par une condition purement algébrique qui est l'inversibilité de la matrice  $Q_T = L_T L_T^*$ . On va présenter dans cette partie un autre critère algébrique de contrôlabilité en dimension finie, qui va porter sur les coefficients du système (2.4) : le critère de Kalman. C'est Kalman qui a introduit en 1960 dans [Kal60b] les notions de contrôlabilité et d'observabilité qui s'avèrent être fondamentales, de nos jours, dans le domaine de la théorie du contrôle. Cet article est à l'origine de la première version du critère de Kalman pour les systèmes d'équations différentielles ordinaires à coefficients constants dans le cas d'un seul contrôle ( $m = 1$ ). La version générale ( $m$  quelconque), dans sa formulation actuelle, a ensuite été démontrée dans [Kal60a]. Plus tard, Silverman et Meadows ont généralisé ce résultat au cas des systèmes d'équations différentielles non autonomes (voir [SM67]).

### 2.2.2.1 Cas des systèmes autonomes

On suppose dans cette partie que le système (2.4) est autonome, c'est-à-dire que pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $A(t) = A$  et  $B(t) = B$  où  $A$  et  $B$  sont respectivement deux matrices de  $M^n(\mathbb{R})$  et  $M^{n,m}(\mathbb{R})$ . Le système (2.4) s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + Bv(t), & t \in ]0, T[, \\ y(0) = y^0. \end{cases} \quad (2.11)$$

On note

$$K = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B), \quad (2.12)$$

la matrice de  $M^{n, mn}(\mathbb{R})$  dont les colonnes consistent en la concaténation des colonnes des matrices  $A^j B$  pour tout  $j = 0, \dots, n-1$ .

**Théorème 2.11** (Critère de Kalman). *Les assertions équivalentes 1 à 5 de la Proposition 2.10 sont équivalentes à la condition de rang suivante*

$$\text{rang } K = n.$$

Remarquons que si la matrice  $K$  est carrée (i.e.  $m = 1$ ), ce qui est le cas si, par exemple on ne contrôle le système qu'avec un contrôle agissant sur la dernière équation ( $B = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ ), alors la condition de rang s'écrit  $\det K \neq 0$ .

*Démonstration.* Commençons par remarquer que pour tout  $\phi^0 \in \mathbb{R}^n$ , la solution  $\phi$  du système adjoint :

$$\begin{cases} -\frac{d\phi}{dt}(t) = A^* \phi(t), & t \in ]0, T[, \\ \phi(T) = \phi^0, \end{cases} \quad (2.13)$$

est de classe  $C^\infty$  de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^n$ , avec

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \frac{d^j \phi}{dt^j}(t) = (A^*)^j \phi(t) = (A^j)^* \phi(t).$$

On en déduit donc que  $L_T^* \phi = B^* \phi$  est de classe  $C^\infty$  de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^m$ , avec

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \frac{d^j (B^* \phi)}{dt^j}(t) = B^* (A^j)^* \phi(t) = (A^j B)^* \phi(t).$$

Supposons maintenant que  $B^* \phi = 0$  dans  $L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$ . Alors pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $j \in \mathbb{N}$ , on a  $(A^j B)^* \phi(t) = 0$ , donc, en particulier,  $K^* \phi(t) = 0$ . Si on suppose que  $\text{rang } K = n$ , i.e.  $\text{Ker } K^* = \{0\}$ , alors on en déduit que  $\phi(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ , ce qui démontre bien que (2.11) est approximativement contrôlable au temps  $T$ , au vu du Théorème 2.9.

Réciproquement, supposons que  $\text{rang } K < n$ , i.e. que  $\text{Ker } K^* \neq \{0\}$ . Alors il existe  $\phi^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\phi^0 \neq 0$  tel que  $K^* \phi^0 = 0$ . Soit  $\phi$  la solution du système (2.13) associée à la donnée initiale  $\phi^0$ . On va montrer que  $B^* \phi = 0$ , alors que  $\phi^0 \neq 0$ , de façon à contredire la contrôlabilité approchée de (2.11) en vertu du Théorème 2.9. La solution  $\phi$  est donnée par

$$\forall t \in [0, T], \quad \phi(t) = e^{(T-t)A^*} \phi^0 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{(T-t)^j}{j!} (A^*)^j \phi^0.$$

Puisque  $K^* \phi^0 = 0$ , on a  $B^* (A^*)^j = (A^j B)^* = 0$  pour tout  $j = 0, \dots, n-1$ . Donc

$$\forall t \in [0, T], \quad B^* \phi(t) = \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{(T-t)^j}{j!} B^* (A^*)^j \phi^0. \quad (2.14)$$

D'autre part, d'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$(A^*)^n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j (A^*)^j = 0,$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  désignent les coefficients du polynôme caractéristique  $P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \lambda^j$  de  $A^*$ . On a donc  $(A^*)^n \in \text{Vect} \left( \left\{ (A^*)^j ; j = 0, \dots, n-1 \right\} \right)$ . Par récurrence, on en déduit que pour tout entier  $k \geq n$ ,

$$(A^*)^k \in \text{Vect} \left( \left\{ (A^*)^j ; j = 0, \dots, n-1 \right\} \right),$$

d'où

$$B^* (A^*)^k \phi^0 = 0.$$

D'après la relation (2.14), il vient que  $B^* \phi(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ ; ce qui achève la démonstration.  $\square$

### 2.2.2.2 Cas des systèmes non autonomes

Silverman et Meadows ont généralisé dans [SM67], le critère de Kalman au cas des systèmes pour lesquels les matrices  $A$  et  $B$  dépendent du temps. On suppose que  $A \in C^{n-2}([0, T], M^n(\mathbb{R}))$  et que  $B \in C^{n-1}([0, T], M^{n,m}(\mathbb{R}))$ . On définit la famille  $(B_j(t))_{0 \leq j \leq n-1}$  en posant

$$B_0(t) = B(t), \quad (2.15)$$

$$B_j(t) = A(t)B_{j-1}(t) - \frac{dB_{j-1}}{dt}(t), \quad \forall j = 1, \dots, n-1, \quad (2.16)$$

et on considère, pour tout  $t \in [0, T]$ , la matrice  $\tilde{K}(t)$  de  $M^{n,mn}(\mathbb{R})$  définie par

$$\tilde{K}(t) = (B_0(t), B_1(t), \dots, B_{n-1}(t)).$$

Remarquons que si les matrices  $A$  et  $B$  sont constantes, alors pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\tilde{K}(t) = K$ , où  $K$  est la matrice de Kalman donnée en (2.12).



**Théorème 2.12.** *Sous les hypothèses exposées ci-dessus,*

1. *s'il existe  $t_0 \in ]0, T[$  tel que  $\text{rang} \tilde{K}(t_0) = n$ , alors le système (2.4) est exactement contrôlable au temps  $T$ ,*
2. *le système (2.4) est totalement exactement contrôlable sur  $]0, T[$  si, et seulement si, il existe un sous-ensemble  $E$  dense dans  $]0, T[$  tel que*

$$\forall t \in E, \quad \text{rang} \tilde{K}(t) = n.$$

Dans [SM67], les auteurs démontrent ce résultat en établissant des propriétés vérifiées par la matrice wronskienne associée à un certain système différentiel d'ordre  $n$ . Coron démontre par un contre-exemple, dans [Cor07] que le point 1 du Théorème 2.12 ne constitue qu'une condition suffisante, et pas une condition nécessaire, de contrôlabilité. En revanche, cette condition devient nécessaire dès que  $n = 1$  ou que les matrices  $A$  et  $B$  sont analytiques.

Une des questions étudiées actuellement dans le domaine de la théorie du contrôle est la généralisation de ces conditions de rang de type Kalman au cas de la dimension infinie, pour caractériser la contrôlabilité des systèmes d'équations aux dérivées partielles. On verra à la fin du chapitre 3 une extension des Théorèmes 2.11 et 2.12 au cas des systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques à coefficients constants et à coefficients dépendant du temps. L'objectif du chapitre 5 sera de présenter une condition suffisante – faisant intervenir la matrice de Kalman – pour la contrôlabilité d'un système parabolique de trois équations à coefficients non constants.

## 2.3 Quelques exemples d'inégalités d'observabilité en lien avec des problèmes de contrôlabilité

Dans cette section, on présente trois exemples de problèmes de contrôlabilité pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Le premier concerne la contrôlabilité par le bord du système hyperbolique (1.27) présenté dans la sous-section 1.1.6. Le second traite de la contrôlabilité par le bord de l'équation des ondes en dimension  $N$ . Le troisième exemple consiste en la contrôlabilité interne des systèmes paraboliques du type (1.38) (cf. section 1.2). Pour chacun de ces problèmes, on formule d'abord précisément la problématique de contrôlabilité étudiée, puis on établit l'inégalité d'observabilité associée.

### 2.3.1 Inégalité d'observabilité pour la contrôlabilité frontière d'un système du second ordre avec opérateur d'ordre mixte

Dans le chapitre 1, on a reformulé le problème (1.27) comme un problème de Cauchy abstrait

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt}(t) = L_{(-1)}z(t) + B(t)v(t), & t \in ]0, T[, \\ z(0) = z^0, \end{cases} \quad (2.17)$$

où

$$L_{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_{(-1)} & 0 \end{pmatrix} : D(L_{(-1)}) = X \subset X_{-1} \rightarrow X_{-1},$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ A_{(-1)}\mathcal{D} \end{pmatrix} : D(B) = D(\mathcal{D}) \subset L^2(\Gamma) \rightarrow X_{-1}.$$

On dira que le système (1.27) est contrôlable exactement (resp. approximativement, aux trajectoires, à zéro) au temps  $T$  si, et seulement si, le système (2.17) l'est. On rappelle que  $\mathcal{D} : D(\mathcal{D}) \subset L^2(\Gamma) \rightarrow H$  est l'application qui relève la condition de bord du problème (1.27) :  $\mathcal{D}v = ((\mathcal{D}v)_1, (\mathcal{D}v)_2)^T$  est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} A_{(-1)}\mathcal{D}v = 0, \\ (\mathcal{D}v)_1 = v1_\Gamma, \end{cases}$$

et  $D(\mathcal{D}) = \{v \in L^2(\Gamma) / \mathcal{D}v \in H\}$ . En vertu du résultat énoncé dans le Théorème 1.67 et du Théorème 1.29, l'opérateur  $L_T$  fermé et de domaine dense associé à (2.17) est défini par

$$L_T : D(L_T) \subset L^2(0, T; L^2(\Gamma)) \rightarrow X,$$

où

$$L_T v = \int_0^T S(T-t) B v(t) dt,$$

$(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$  étant le groupe unitaire associé à l'opérateur anti-adjoint  $L_{(-1)}$ , dont l'existence est assurée par le Théorème (1.54). L'opérateur  $S_T \in \mathcal{L}(X)$  défini comme étant la solution du système homogène est ici donné par

$$S_T = S(T).$$

Puisque  $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$  est un groupe,  $S_T$  est inversible dans  $\mathcal{L}(X)$ , donc  $\text{Im}(S_T) = X$ . Il suit donc de la Proposition 2.5 que, pour le système (2.17), la contrôlabilité exacte et la contrôlabilité à zéro (ou encore la contrôlabilité aux trajectoires) sont équivalentes.

Dans cette thèse, on ne s'intéresse uniquement qu'à la contrôlabilité exacte du système (1.27) : le chapitre (4) y est entièrement dédié. En revanche, le problème de la contrôlabilité approchée au temps  $T$  pour ce système est encore, à l'heure actuelle, un problème ouvert. D'après le Théorème 2.9, le système (2.17) est exactement contrôlable si, et seulement si, il existe une constante  $C_T > 0$  telle que,

$$\forall \phi^0 \in D(L_T^*), \quad \|\phi^0\|_X^2 \leq C_T \int_0^T \|B^* \phi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt, \quad (2.18)$$

où  $\phi$  désigne la solution du système adjoint de (2.17) associée à la donnée  $\phi^0$ . On a remarqué dans la sous-section 1.1.6 que l'opérateur  $L : D(L) = X_1 \subset X \rightarrow X$  est inversible de  $X_1$  dans  $X$ . Donc tout élément  $\phi^0 \in D(L_T^*)$  peut s'écrire sous la forme  $\phi^0 = L\zeta^0$  où  $\zeta^0 \in D(L_T^*L) := \{\zeta^0 \in D(L) / L\zeta^0 \in D(L_T^*)\}$ , avec  $\|\phi^0\|_X = \|\zeta^0\|_{X_1}$ . La solution  $\phi$  du système adjoint de (2.17) :

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt}(t) = - (L_{(-1)})^* \phi(t) = L_{(-1)} \phi(t), & t \in ]0, T[, \\ \phi(T) = \phi^0, \end{cases} \quad (2.19)$$

est alors donnée par

$$\forall t \in [0, T], \quad \phi(t) = L_{(-1)} \zeta(t),$$

où  $\zeta$  désigne la solution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\zeta}{dt}(t) = L_{(-1)} \zeta(t), & t \in ]0, T[, \\ \zeta(T) = \zeta^0. \end{cases}$$

En effet, d'après le Théorème (1.9), puisque  $\zeta^0 \in D(L)$ , la solution  $\zeta$  a la régularité  $\zeta \in C([0, T], D(L)) \cap C^1([0, T], X)$ . Par conséquent,  $L_{(-1)} \zeta \in C([0, T], X) \cap C^1([0, T], X_{-1})$  et

$$\frac{d(L_{(-1)} \zeta)}{dt}(t) = L_{(-1)} \frac{d\zeta}{dt}(t) = L_{(-1)} (L_{(-1)} \zeta(t)), \quad \forall t \in ]0, T[.$$

De plus,  $(L_{(-1)} \zeta)(T) = L_{(-1)} \zeta^0 = L\zeta^0 = \phi^0$ . Par unicité de la solution dans  $C([0, T], X) \cap C^1([0, T], X_{-1})$  du problème (2.19), il suit que  $\phi = L_{(-1)} \zeta$ . La condition (2.18) s'écrit donc de manière équivalente :

$$\forall \zeta^0 \in D(L_T^*L), \quad \|\zeta^0\|_{X_1}^2 \leq C_T \int_0^T \|B^* L_{(-1)} \zeta(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt. \quad (2.20)$$

Dans le chapitre 4 (cf. Lemma 4.9, page 84), on démontrera que pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$B^* L_{(-1)} \zeta(t) = - \left( \frac{\partial \zeta_{1,1}}{\partial \nu} + \alpha \zeta_{1,2} \nu_1 \right) \Big|_{\Gamma},$$

où  $\zeta(t) = \begin{pmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{pmatrix} \in X_1$ , avec  $\zeta_1(t) = \begin{pmatrix} \zeta_{1,1}(t) \\ \zeta_{1,2}(t) \end{pmatrix} \in H_{1/2}$ . En posant  $\zeta_0 = (\Phi^0, \Phi^1)^T$  et  $\zeta_1 = (\varphi, \psi)^T$ , on peut reformuler le critère de contrôlabilité exacte pour le système du second ordre en temps (1.27) de la façon suivante :

**Théorème 2.13.** *Le système (1.27) est exactement contrôlable au temps  $T$  si, et seulement si, il existe une constante  $C_T > 0$  telle que pour tout  $(\Phi^0, \Phi^1) \in D(L_T^*L)$ , la solution  $\Phi = (\varphi, \psi)^T$  du système adjoint :*

$$\begin{cases} \frac{d^2\Phi}{dt^2}(t) + A\Phi(t) = 0, & t \in ]0, T[ \\ \Phi(T) = \Phi^0, \quad \frac{d\Phi}{dt}(T) = \Phi^1, \end{cases} \quad (2.21)$$

vérifie l'inégalité d'observabilité suivante

$$\|(\Phi^0, \Phi_1)\|_{X_1}^2 \leq C_T \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + \alpha\psi\nu_1 \right)^2 d\sigma dt. \quad (2.22)$$

Dans le chapitre 4, on s'attachera à démontrer qu'il existe des données  $\Phi^0$  et  $\Phi^1$  pour lesquelles la solution du système (2.21) ne vérifie pas l'inégalité d'observabilité. On construira de telles données en leur attribuant, dans la base Hilbertienne  $\mathcal{B}$  définie par Lemme 1.59, une infinité de composantes non nulles selon les vecteurs propres  $e_{p,q}^-$  associés aux valeurs propres qui "engendrent" le spectre essentiel de  $A$ . On cherchera ensuite à caractériser au mieux l'ensemble des données  $\Phi^0$  et  $\Phi^1$  du système (2.21) pour lesquelles (2.22) est satisfaite.

### 2.3.2 Inégalité d'observabilité pour la contrôlabilité frontière de l'équation des ondes

On s'intéresse maintenant à la contrôlabilité de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = \Delta y(x, t), & (x, t) \in \Omega \times ]0, T[, \\ y(\sigma, t) = v(\sigma, t), & (\sigma, t) \in \Gamma \times ]0, T[, \\ y(\sigma, t) = 0, & (\sigma, t) \in (\partial\Omega \setminus \Gamma) \times ]0, T[, \\ y(x, 0) = y^0(x), \quad \frac{dy}{dt}(x, 0) = y^1(x), & t \in ]0, T[, \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  est un domaine borné de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$  et  $\Gamma$  est une partie de  $\partial\Omega$ . On utilise les résultats du chapitre 1 pour réécrire ce système comme un système du premier ordre en temps. On reprend les notations des paragraphes 1.1.5.3 et 1.1.4.2. On considère l'espace de Hilbert  $H = L^2(\Omega)$  et l'opérateur  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  défini par  $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  et  $A = -\Delta$ , puis on définit alors l'espace  $X = H \times H_{-1/2}$  et l'opérateur  $L : D(L) \subset X \rightarrow X$  défini par  $D(L) = H_{1/2} \times H$  et

$$L = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_{(-1/2)} & 0 \end{pmatrix}.$$

On introduit alors l'opérateur  $L_{(-1)} : D(L_{(-1)}) \subset X_{-1} \rightarrow X_{-1}$  défini sur l'espace de Hilbert  $X_{-1} = H_{-1/2} \times H_{-1}$  par  $D(L_{(-1)}) = X$  et

$$L_{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_{(-1)} & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit les espaces  $W = H_{1/2} \oplus \text{Im}(D)$  et  $Y = W \times H$ , où l'opérateur  $D \in \mathcal{L}(L^2(\Gamma), H)$  est défini comme suit. Pour tout  $v \in L^2(\Gamma)$ ,  $Dv$  désigne l'unique solution  $\theta \in H$  du problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} \Delta\theta = 0, \\ \theta|_{\partial\Omega} = v1_{\Gamma}. \end{cases}$$

On pose  $\tilde{L} = L_{(-1)}|_Y$ , de sorte que  $\tilde{L} \in \mathcal{L}(Y, X)$ . On peut réécrire formellement le système (2.23) sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt}(t) = \tilde{L}z(t), & t \in ]0, T[, \\ Gz(t) = v(t)1_{\Gamma}, & t \in ]0, T[, \\ z(0) = z^0, \end{cases} \quad (2.24)$$

où  $Gz(t)$  désigne la trace sur  $\partial\Omega$  de la première composante de  $z(t) = (z_1(t), z_2(t))$ . Dans [TW09], les auteurs montrent que le système (2.24) vérifie les propriétés des problèmes frontières non homogènes

abstraites (voir la Définition 1.35) et qu'on peut donc l'écrire, comme dans la Proposition 1.36, sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt}(t) = L_{(-1)}z(t) + Bv(t), & t \in ]0, T[, \\ z(0) = z^0, \end{cases} \quad (2.25)$$

où  $B$  est un opérateur admissible défini par  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ ADv \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(L^2(\Gamma), X_{-1})$ . Comme précédemment, on dira que le système (2.23) est contrôlable exactement (resp. approximativement, aux trajectoires, à zéro) si le système (2.25) l'est. On raisonne comme dans la sous-section 2.3.1 pour le cas du système 1.27 : le Théorème 2.9 permet d'affirmer que le système (2.25) est exactement contrôlable au temps  $T$  si, et seulement si, il existe une constante  $C_T > 0$  telle que

$$\forall \phi^0 \in X, \quad \|\phi^0\|_X^2 \leq C_T \int_0^T \|B^* \phi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt, \quad (2.26)$$

où  $\phi$  désigne la solution du système adjoint

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt}(t) = L_{(-1)}\phi(t), & t \in ]0, T[, \\ \phi(T) = \phi^0. \end{cases}$$

Dans [TW09], on démontre que  $B^*$  est donné par

$$B^* \phi = -\frac{\partial}{\partial \nu} (A_{(-1)}^{-1} \phi_2), \quad \forall \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in X.$$

Puisque l'opérateur  $L \in \mathcal{L}(X_1, X)$  est inversible, l'inégalité (2.26) est équivalente à

$$\forall \zeta^0 \in X_1, \quad \|\zeta^0\|_{X_1}^2 = \|L\zeta^0\|_X^2 \leq C_T \int_0^T \|B^* L_{(-1)} \zeta(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt,$$

où  $\zeta$  vérifie

$$\begin{cases} \frac{d\zeta}{dt}(t) = L_{(-1)}\zeta(t), & t \in ]0, T[, \\ \zeta(T) = \zeta^0. \end{cases}$$

En notant  $\zeta = (\Phi, \Psi)$ , on déduit de l'expression de  $B^*$  que

$$B^* L_{(-1)} \zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}.$$

On obtient finalement le résultat suivant en posant  $\zeta^0 = (\Phi^0, \Phi^1)^T$  et en rappelant que  $X_1 = H_{1/2} \times H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  :

**Théorème 2.14.** *Le système (2.23) est exactement contrôlable au temps  $T$  si, et seulement si, il existe une constante  $C_T > 0$  telle que pour tout  $(\Phi^0, \Phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , la solution  $\Phi$  du système adjoint*

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t) = \Delta \Phi(x, t), & (x, t) \in \Omega \times ]0, T[, \\ \Phi(\sigma, t) = 0, & (\sigma, t) \in \partial\Omega \times ]0, T[, \\ \Phi(\cdot, T) = \Phi^0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\cdot, T) = \Phi^1, & x \in \Omega, \end{cases}$$

vérifie

$$\|(\Phi^0, \Phi^1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq C_T \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt.$$

Dans le chapitre 3, on donnera différents résultats de contrôlabilité exacte au temps  $T$  pour le système (2.23), lorsque le temps de contrôlabilité  $T$  est assez grand.

### 2.3.3 Inégalité d'observabilité pour la contrôlabilité interne aux trajectoires d'un système parabolique

Dans cette partie, on s'intéresse à la contrôlabilité aux trajectoires (ou encore à zéro) des systèmes paraboliques du type

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = D\Delta y + \vec{b}(x, t) \cdot \nabla y + A(x, t)y + Bv(x, t)1_\omega, & (x, t) \in Q_T = \Omega \times ]0, T[, \\ y = 0, & (x, t) \in \Sigma_T = \partial\Omega \times ]0, T[, \\ y(x, 0) = y^0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.27)$$

vérifiant les hypothèses du début de la section 1.2,  $\omega$  étant un ouvert non vide contenu dans  $\Omega$  et  $B$  une matrice de  $M^m(\mathbb{R})$ . On note

$$q_T = \omega \times ]0, T[.$$

Ici  $H = (L^2(\Omega))^n$  et  $U = (L^2(\omega))^m$ . D'après le Théorème 1.71, ce problème admet, pour tout  $y^0 \in H$  et tout  $v \in L^2(0, T; U) = (L^2(q_T))^m$ , une unique solution  $y$  qui est continue de  $[0, T]$  dans  $H$ ; l'opérateur  $L_T$ , qui à  $v$  associe la valeur en  $T$  de la solution du problème pour  $y^0 = 0$ , est borné de  $L^2(0, T; U)$  dans  $H$ ; et l'opérateur  $S_T$ , qui à  $y^0$  associe la valeur en  $T$  de la solution du problème pour  $v = 0$ , est borné de  $H$  dans  $H$ . Un simple changement de variable  $t \rightarrow T - t$  dans le problème 2.27 donne que le Théorème 1.71 est encore vérifié pour le problème rétrograde

$$\begin{cases} -\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\Delta \phi - \operatorname{div}(\vec{b} \cdot \phi) + A(x, t)^* \phi + f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ \phi = 0, & (x, t) \in \Sigma_T, \\ \phi(x, T) = \phi^0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.28)$$

D'après le Théorème 2.9, le système (2.27) est contrôlable aux trajectoires au temps  $T$  si, et seulement si, il existe une constante  $C_T > 0$  telle que, pour tout  $\phi^0 \in (L^2(\Omega))^n$ , la solution du système (2.28) pour  $f = 0$  vérifie

$$\|\phi(\cdot, 0)\|_{(L^2(\Omega))^n} \leq C_T \int_{q_T} |B^* \phi(x, t)|^2 dx dt. \quad (2.29)$$

Dans les chapitres 3 et 5, on s'intéressera, en particulier, au cas où  $n = 3$  et  $\vec{b} = 0$ . On se propose donc, pour clore ce chapitre d'expliciter l'inégalité d'observabilité (2.29), correspondant à la contrôlabilité par un, deux ou trois contrôles du système (2.27) pour  $n = 3$  et  $\vec{b} = 0$ .

- **Contrôlabilité par trois contrôles, chaque contrôle agissant sur une seule équation.** On considère le problème de trois équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = D\Delta y + A(x, t)y + v(x, t)1_\omega, & (x, t) \in Q_T, \\ y = 0, & (x, t) \in \Sigma_T, \\ y(x, 0) = y^0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.30)$$

**Théorème 2.15.** *Le problème (2.30) est contrôlable aux trajectoires si, et seulement si, il existe une constante  $C_T > 0$  telle que, pour tout  $\phi^0 \in (L^2(\Omega))^3$ , la solution  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$  du problème*

$$\begin{cases} -\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\Delta \phi + A(x, t)^* \phi, & (x, t) \in Q_T, \\ \phi = 0, & (x, t) \in \Sigma_T, \\ \phi(x, T) = \phi^0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.31)$$

vérifie

$$\|\phi_1(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_2(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_3(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_T \int_{q_T} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2) dx dt.$$

Dans le chapitre qui suit, on montrera que l'inégalité d'observabilité du Théorème 2.15 est satisfaite sans aucune contrainte supplémentaire sur les coefficients de la matrice  $A(x, t)$ .

– **Contrôlabilité par deux contrôles, chaque contrôle agissant sur une seule équation.**

Le problème considéré est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = D\Delta y + A(x,t)y + \begin{pmatrix} 0 \\ v_1(x,t) \\ v_2(x,t) \end{pmatrix} 1_\omega, & (x,t) \in Q_T, \\ y = 0, & (x,t) \in \Sigma_T, \\ y(x,0) = y^0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.32)$$

**Théorème 2.16.** *Le problème (2.32) est contrôlable aux trajectoires si, et seulement si, il existe une constante  $C_T > 0$  telle que, pour tout  $\phi^0 \in (L^2(\Omega))^3$ , la solution  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$  du problème (2.31) vérifie*

$$\|\phi_1(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_2(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_3(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_T \int_{q_T} (\phi_2^2 + \phi_3^2) dx dt.$$

On démontrera dans le chapitre 3 que sous une hypothèse adéquate sur certains des coefficients de  $A(x,t)$ , il est possible de s'affranchir du terme en  $\phi_1$  dans le membre de droite de l'inégalité d'observabilité du Théorème 2.15.

– **Contrôlabilité par un contrôle agissant sur une seule équation.** On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = D\Delta y + A(x,t)y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v(x,t) \end{pmatrix} 1_\omega, & (x,t) \in Q_T, \\ y = 0, & (x,t) \in \Sigma_T, \\ y(x,0) = y^0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.33)$$

**Théorème 2.17.** *Le problème (2.33) est contrôlable à zéro si, et seulement si, il existe une constante  $C_T > 0$  telle que, pour tout  $\phi^0 \in (L^2(\Omega))^3$ , la solution  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$  du problème (2.31) vérifie*

$$\|\phi_1(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_2(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_3(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_T \int_{q_T} \phi_3^2 dx dt. \quad (2.34)$$

Un des nombreux problèmes ouverts qui sont étudiés actuellement en théorie du contrôle, est la caractérisation des opérateurs  $A(x,t)$  pour lesquels il y a contrôlabilité du système (2.33). Il existe déjà des résultats partiels que l'on présentera, pour certains, à la fin du chapitre 3 : par exemple, le critère de Kalman pour la classe des systèmes avec des matrices  $A$  constantes ([AKBDGB09b]) ou ne dépendant que du temps ([AKBDGB09a]), ou alors des conditions suffisantes de contrôlabilité (systèmes *en cascade* [GBdT10], conditions géométriques sur l'ouvert de contrôle  $\omega$  [BCGdT11]). Pour tous ces résultats, la démarche consiste à démontrer l'inégalité d'observabilité (2.34), en utilisant une inégalité à poids vérifiée par les solutions du système adjoint, qui est appelée *inégalité de Carleman*, et que l'on présentera dans le chapitre suivant. Dans le chapitre 5, on établira une condition suffisante de contrôlabilité aux trajectoires pour le système (2.33) sans passer par la dualité contrôlabilité-observabilité du Théorème 2.17.

## Références bibliographiques du chapitre 2

- [AKBDGB09a] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH, C. DUPAIX & M. GONZÁLEZ-BURGOS – « A generalization of the Kalman rank condition for time-dependent coupled linear parabolic systems », *Differ. Equ. Appl.* **1** (2009), no. 3, p. 427–457.
- [AKBDGB09b] —, « A Kalman rank condition for the localized distributed controllability of a class of linear parabolic systems », *J. Evol. Equ.* **9** (2009), no. 2, p. 267–291.
- [BCGdT11] A. BENABDALLAH, M. CRISTOFOL, P. GAITAN & L. DE TERESA – « Controllability to trajectories for some parabolic systems of three and two equations by one control force », *Preprint* (2011).

- [BDPDM93] A. BENSOUSSAN, G. DA PRATO, M. C. DELFOUR & S. K. MITTER – Representation and control of infinite-dimensional systems. Vol. II, Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.
- [Bre11] H. BREZIS – Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Universitext, Springer, New York, 2011.
- [Cor07] J.-M. CORON – Control and nonlinearity, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 136, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [GBdT10] M. GONZÁLEZ-BURGOS & L. DE TERESA – « Controllability results for cascade systems of  $m$  coupled parabolic PDEs by one control force », Port. Math. **67** (2010), no. 1, p. 91–113.
- [Kal60a] R. E. KALMAN – « Contributions to the theory of optimal control », Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) **5** (1960), p. 102–119.
- [Kal60b] — , « On the general theory of control systems », Proc. First Internat. Congress Automat. Contr. (1960), p. 481–491, Moscow.
- [SM67] L. M. SILVERMAN & H. E. MEADOWS – « Controllability and observability in time-variable linear systems », SIAM J. Control **5** (1967), p. 64–73.
- [TW09] M. TUCSNAK & G. WEISS – Observation and control for operator semigroups, Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [Zab92] J. ZABCZYK – Mathematical control theory : an introduction, Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.

## Chapitre 3

# Quelques outils pour la contrôlabilité de systèmes paraboliques et hyperboliques

Habituellement, pour résoudre un problème de contrôlabilité exacte ou aux trajectoires (ou encore, à zéro), on utilise la dualité, i.e. on cherche à établir l'inégalité d'observabilité correspondante pour le système adjoint. Plusieurs méthodes sont envisageables pour démontrer une telle inégalité, et, bien entendu, les outils à utiliser dépendent fortement du type de problème considéré. Dans le cadre auquel on s'intéresse ici, i.e. la contrôlabilité frontière d'un système dont on connaît explicitement les valeurs propres et qui se "comporte" asymptotiquement comme l'équation des ondes (voir la sous-section 1.1.6) et la contrôlabilité aux trajectoires des systèmes paraboliques présentés à la fin du chapitre précédent, on a choisi de présenter deux outils : les inégalités de type Ingham et les inégalités de type Carleman. Dans la section 3.1, on présente l'inégalité de Ingham et ses applications à la contrôlabilité de l'équation des ondes en dimensions un et deux d'espace. La section 3.2 est dédiée à l'inégalité de Carleman pour l'équation de la chaleur et à ses applications à la contrôlabilité de systèmes paraboliques.

### 3.1 L'inégalité de Ingham et ses applications à la contrôlabilité de l'équation des ondes

L'inégalité de Ingham constitue une généralisation de l'identité de Parseval pour les fonctions de la forme  $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t}$  lorsque la suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie une propriété d'écart du type  $\mu_{n+1} - \mu_n \geq \gamma$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , avec  $\gamma > 0$ . Son application à la démonstration d'inégalités d'observabilité ne peut se faire que dans le cas d'opérateurs diagonalisables pour lesquels on connaît suffisamment les propriétés spectrales.

#### 3.1.1 L'inégalité de Ingham et la contrôlabilité de l'équation des ondes en dimension 1

Dans cette sous-section, on renvoie à l'article de Ingham, [Ing36], pour la démonstration du Théorème 3.1, ainsi qu'au livre de Komornik et Loret, [KL05], pour une application de ce résultat à la contrôlabilité de l'équation des ondes en une dimension d'espace. On trouvera également dans [KL05], différentes améliorations et variantes du théorème de Ingham, ainsi que des applications à la contrôlabilité d'autres systèmes (par exemple, équations de poutres, de cordes, de membranes sphériques, systèmes couplés poutre-corde).

**Théorème 3.1** (Ingham, 1936). *Soient  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de nombres réels et  $J$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe un réel  $\gamma > 0$  tel que*

1.  $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \mu_{n+1} - \mu_n \geq \gamma,$
2.  $|J| > \frac{2\pi}{\gamma}.$



Il existe alors deux constantes  $c_1 > 0$  et  $c_2 > 0$  (ne dépendant que de  $|J|$  et  $\gamma$ ) telles que pour toute suite complexe  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$  on ait la double inégalité

$$c_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_J |f(t)|^2 dt \leq c_2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \quad (3.1)$$

où  $f$  est définie par

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t}. \quad (3.2)$$

En considérant la fonction  $f(t) = e^{i\mu_n t} - e^{i\mu_{n+1} t}$ , et en utilisant l'inégalité des accroissements finis  $|e^{i\mu_n t} - e^{i\mu_{n+1} t}| \leq |t| |\mu_n - \mu_{n+1}|$ , on remarque que la condition d'écart 1 du Théorème 3.1 est nécessaire pour que l'inégalité de gauche dans (3.1) ait lieu ; on a dans ce cas, pour  $J = [T_0, T]$ ,

$$|\mu_n - \mu_{n+1}|^2 \geq \frac{6c_1}{T^3 - T_0^3}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dans les applications de ce résultat à la contrôlabilité de systèmes d'équations aux dérivées partielles, c'est l'inégalité de gauche dans (3.1) qui est utilisée pour démontrer les inégalités d'observabilité associées.

**Remarque 3.2.** L'hypothèse 1 dans l'énoncé du Théorème 3.1 peut être remplacée par

$$\inf_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ n \neq m}} |\mu_n - \mu_m| = \gamma.$$

On considère, dans la suite, l'équation des ondes en une dimension d'espace sur le domaine  $\Omega = ]0, \pi[$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = \partial_{xx} y(x, t), & (x, t) \in ]0, \pi[ \times ]0, T[, \\ y(0, t) = 0, \quad y(\pi, t) = v(t), & t \in ]0, T[, \\ y(x, 0) = y^0(x), \quad \frac{dy}{dt}(x, 0) = y^1(x), & t \in ]0, T[, \end{cases} \quad (3.3)$$

où le terme  $v$  désigne les contrôles recherchés. On rappelle (voir le Théorème 2.14), que (3.3) est exactement contrôlable au temps  $T$  si, et seulement si, il existe une constante  $C_T > 0$  telle que pour tout  $(\Phi^0, \Phi^1) \in H_0^1(0, \pi) \times L^2(0, \pi)$ , la solution  $\Phi$  du système adjoint

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(x, t) = \partial_{xx} \Phi(x, t), & (x, t) \in ]0, \pi[ \times ]0, T[, \\ \Phi(0, t) = \Phi(\pi, t) = 0, & t \in ]0, T[, \\ \Phi(x, 0) = \Phi^0(x), \quad \frac{d\Phi}{dt}(x, 0) = \Phi^1(x), & t \in ]0, T[, \end{cases} \quad (3.4)$$

vérifie

$$\|(\Phi^0, \Phi^1)\|_{H_0^1(0, \pi) \times L^2(0, \pi)}^2 \leq C_T \int_0^T (\partial_x \Phi(\pi, t))^2 dt. \quad (3.5)$$

Il est bien connu que les valeurs propres de l'opérateur  $A : D(A) \subset L^2(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi)$  défini par  $D(A) = H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)$  et  $A = -\partial_{xx}$  sont les entiers de la forme  $n^2$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , et que la suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de fonctions définies par  $e_n(x) = \sqrt{2/\pi} \sin(nx)$  pour tout  $x \in [0, \pi]$  est une base Hilbertienne de  $L^2(0, \pi)$  formée de vecteurs propres de l'opérateur  $A$  associés à la suite de valeurs propres  $(n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Soit  $(\Phi^0, \Phi^1) \in H_0^1(0, \pi) \times L^2(0, \pi)$ . Décomposons  $\Phi^0$  et  $\Phi^1$  dans la base Hilbertienne  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sous la forme

$$\Phi^0 = \sum_{n \geq 1} \alpha_n^0 e_n, \quad \Phi^1 = \sum_{n \geq 1} \alpha_n^1 e_n,$$

avec  $\sum_{n \geq 1} n^2 (\alpha_n^0)^2 < +\infty$  et  $\sum_{n \geq 1} (\alpha_n^1)^2 < +\infty$ . On a alors

$$\|(\Phi^0, \Phi^1)\|_{H_0^1(0, \pi) \times L^2(0, \pi)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (n^2 (\alpha_n^0)^2 + (\alpha_n^1)^2). \quad (3.6)$$

D'autre part, il est facile de vérifier que la solution  $\Phi$  de (3.4) est donnée par

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left[ \left( \alpha_n^0 - i \frac{\alpha_n^1}{n} \right) e^{int} + \left( \alpha_n^0 + i \frac{\alpha_n^1}{n} \right) e^{-int} \right] \sin(nx), \quad (3.7)$$

pour tout  $(x, t) \in ]0, \pi[ \times ]0, T[$ . En dérivant cette égalité par rapport à la variable  $x$ , on en déduit que,

$$\partial_x \Phi(t, \pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t},$$

où, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\mu_n = n, \quad a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} (n\alpha_n^0 - i\alpha_n^1) & \text{si } n \geq 1, \\ 0 & \text{si } n = 0, \\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} ((-n)\alpha_{-n}^0 + i\alpha_{-n}^1) & \text{si } n \leq -1. \end{cases}$$

Remarquons que, d'après (3.6),

$$\|(\Phi^0, \Phi^1)\|_{H_0^1(0, \pi) \times L^2(0, \pi)}^2 = \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\mu_{n+1} - \mu_n = (n+1) - n = 1$ . Donc le Théorème 3.1 de Ingham s'applique avec  $\gamma = 1$  et donne, pour tout  $T > 2\pi$ , l'existence de deux constantes  $c_1 = c_1(T) > 0$  et  $c_2 = c_2(T) > 0$  telles que pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$  on ait

$$c_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 \leq \int_0^T |f(t)|^2 dt \leq c_2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2, \quad (3.8)$$

où

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{i\mu_n t}.$$

En appliquant l'inégalité de gauche de (3.8) à la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  définie par  $x_n = a_n$ , on obtient

$$\forall T > 2\pi, \quad c_1 \frac{1}{\pi} \|(\Phi^0, \Phi^1)\|_{H_0^1(0, \pi) \times L^2(0, \pi)}^2 \leq \int_0^T (\partial_x \Phi(t, \pi))^2 dt,$$

ce qui démontre l'inégalité d'observabilité (3.5) avec  $C_T = \frac{\pi}{c_1}$ , pour tout  $T > 2\pi$ . Notons que (3.5) est encore vraie si  $T = 2\pi$  d'après l'identité de Parseval. En effet, l'égalité

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2,$$

signifie exactement que

$$\|(\Phi^0, \Phi^1)\|_{H_0^1(0, \pi) \times L^2(0, \pi)}^2 = \frac{1}{2} \int_0^T (\partial_x \Phi(t, \pi))^2 dt.$$

En conclusion, le théorème de Ingham, a permis d'établir le résultat suivant :

**Théorème 3.3.** *Si  $T \geq 2\pi$ , alors l'équation des ondes (3.3) est exactement contrôlable au temps  $T$ .*

Plus généralement, dans [TW09], les auteurs démontrent, en utilisant le théorème de Ingham, un résultat d'observabilité pour des opérateurs anti-adjoints diagonalisables dans une base Hilbertienne de vecteurs propres pour lesquels les valeurs propres associées (qui sont de la forme  $\lambda_n = i\mu_n$ ) vérifient la propriété d'écart du théorème de Ingham.

Le résultat du Théorème 3.3 peut également s'obtenir en utilisant une méthode de *multiplicateurs*. Plus généralement, dans [Lio68], J.-L. Lions démontre, par une méthode de multiplicateurs le résultat suivant de contrôlabilité pour l'équation des ondes en dimension  $N \geq 1$  d'espace.

**Théorème 3.4.** Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un domaine borné de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ ,  $x^0$  un point de  $\mathbb{R}^N$ , et  $\Gamma^+(x^0) = \{x \in \partial\Omega / (x - x^0) \cdot \nu(x) > 0\}$ , où  $\nu(x)$  désigne la normale extérieure à  $\Omega$  au point  $x \in \partial\Omega$ . On note  $R(x^0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} |x - x^0|$  et  $T(x^0) = 2R(x^0)$ . Pour tout  $T > T(x^0)$  et pour tout  $(\Phi^0, \Phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , la solution  $\Phi$  du système adjoint

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(x, t) = \Delta \Phi(x, t), & (x, t) \in \Omega \times ]0, T[, \\ \Phi(\sigma, t) = 0, & (\sigma, t) \in \partial\Omega \times ]0, T[, \\ \Phi(x, 0) = \Phi^0(x), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, 0) = \Phi^1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.9)$$

vérifie

$$(T - T(x^0)) \|(\Phi^0, \Phi^1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq R(x^0) \int_0^T \int_{\Gamma^+(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt.$$

Par conséquent, le système

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = \Delta y(x, t), & (x, t) \in \Omega \times ]0, T[, \\ y(\sigma, t) = v(\sigma, t), & (\sigma, t) \in \Gamma^+(x^0) \times ]0, T[, \\ y(\sigma, t) = 0, & (\sigma, t) \in (\partial\Omega \setminus \Gamma^+(x^0)) \times ]0, T[, \\ y(x, 0) = y^0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y^1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.10)$$

est exactement contrôlable au temps  $T$ , pour tout  $T > T(x^0)$ .

**Remarque 3.5.** Lions démontre également, par une méthode de multiplicateurs, l'admissibilité de l'opérateur de contrôle. Plus précisément, il établit que pour tout  $T > 0$ , il existe une constante  $c_T > 0$  telle que toute solution  $\Phi$  du problème (3.9) vérifie

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt \leq c_T \|(\Phi^0, \Phi^1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2.$$

Le couple  $(T(x^0), \Gamma^+(x^0))$  du Théorème 3.4 satisfait la *condition d'optique géométrique*. Le temps minimal de contrôlabilité  $T(x^0)$  donné dans le Théorème 3.4 est *optimal*; ce qui est dû à la vitesse de propagation des ondes. En fait, ce temps minimal de contrôlabilité  $T(x^0)$  peut être interprété comme étant le temps maximal que met tout rayon optique satisfaisant les lois de la réflexion sur le bord du domaine  $\Omega$  pour atteindre la région de contrôle  $\Gamma^+(x^0)$ . Ainsi, si  $T < T(x^0)$ , alors il existe des rayons optiques qui n'ont encore pas atteint la région  $\Gamma^+(x^0)$  au temps  $T$ , et qui ne sont donc pas observables dans  $\Gamma^+(x^0)$  au temps  $T$ . Par conséquent, si  $T < T(x^0)$ , alors (3.10) n'est pas exactement contrôlable au temps  $T$ .

On remarque que le Théorème 3.4 pour  $N = 1$ ,  $\Omega = ]0, \pi[$  et  $x^0 = 0$  donne le temps optimal de contrôlabilité  $T(x^0) = 2\pi$ . Ce temps coïncide avec le temps minimal  $T_0 = 2\pi$  du Théorème 3.3, obtenu par le théorème de Ingham. La question que l'on se pose au vu de ces résultats est de savoir s'il est possible d'appliquer le théorème de Ingham pour démontrer la contrôlabilité de l'équation des ondes en dimension supérieure  $N > 1$  et, si c'est le cas, de vérifier si le théorème de Ingham permet d'obtenir le temps minimal de contrôlabilité donné par la méthode des multiplicateurs. Remarquons que l'utilisation du théorème de Ingham nécessite de connaître les valeurs propres de l'opérateur  $-\Delta$ , non pas explicitement, mais suffisamment pour savoir si elles vérifient la propriété d'écart requise par ce théorème. Considérons, dans la sous-section suivante, le cas le plus simple qui est celui de la dimension 2, avec le carré  $\Omega = ]0, \pi[ \times ]0, \pi[$ .

### 3.1.2 Cas de la dimension 2

Dans toute cette partie,  $\Omega$  désigne le domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $\Omega = ]0, \pi[ \times ]0, \pi[$  et  $\Gamma$  est la partie de la frontière de  $\Omega$  définie par  $\Gamma = ([0, \pi] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, \pi])$ . Remarquons que  $\Gamma = \Gamma^+(x^0)$  où  $x^0$  est le point de  $\mathbb{R}^2$  de coordonnées  $x^0 = (\pi, \pi)$ . D'après le Théorème 3.4, on sait que le système (3.10) est exactement contrôlable au temps  $T$  pour tout  $T > T(x^0) = 2\sqrt{2}\pi$ , le temps  $T(x^0)$  étant optimal. On cherche à démontrer ce résultat en utilisant une méthode de type Ingham.

Rappelons que les valeurs propres de l'opérateur  $-\Delta$  avec domaine  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  sont les entiers de la forme  $p^2 + q^2$ , avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$ . La suite  $(e_{p,q})_{p,q \geq 1}$  des fonctions définies par  $e_{p,q}(x_1, x_2) =$

$\frac{2}{\pi} \sin(px_1) \sin(qx_2)$ , pour tout  $(x_1, x_2) \in \Omega$ , est une base Hilbertienne de  $L^2(\Omega)$  formée de vecteurs propres de  $-\Delta$  associés respectivement aux valeurs propres  $p^2 + q^2$ . L'inégalité d'observabilité qui caractérise la contrôlabilité exacte du système (3.10) s'écrit

$$\|(\Phi^0, \Phi^1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq C_T \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt, \quad (3.11)$$

où  $\Phi$  est la solution de (3.9). Soit  $(\Phi^0, \Phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . On décompose  $\Phi^0$  et  $\Phi^1$  dans la base  $(e_{p,q})_{p,q \geq 1}$  sous la forme

$$\Phi^0(x) = \sum_{p,q \geq 1} \alpha_{p,q}^0 e_{p,q}(x), \quad \Phi^1(x) = \sum_{p,q \geq 1} \alpha_{p,q}^1 e_{p,q}(x),$$

avec  $\sum_{p,q \geq 1} (p^2 + q^2) (\alpha_{p,q}^0)^2 < +\infty$  et  $\sum_{p,q \geq 1} (\alpha_{p,q}^1)^2 < +\infty$ , de sorte que,

$$\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 = \sum_{p,q \geq 1} \left( (p^2 + q^2) (\alpha_{p,q}^0)^2 + (\alpha_{p,q}^1)^2 \right). \quad (3.12)$$

La solution  $\Phi$  de (3.9) s'écrit, dans ce cas,

$$\Phi(x, t) = \sum_{p,q \geq 1} \alpha_{p,q}(t) e_{p,q}(x),$$

où, pour tous  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $q \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{cases} \alpha_{p,q}(t) = a_{p,q} e^{i\mu_{p,q}t} + \overline{a_{p,q}} e^{-i\mu_{p,q}t} \\ \mu_{p,q} = \sqrt{p^2 + q^2} \\ a_{p,q} = \frac{1}{2} \left( \alpha_{p,q}^0 - i \frac{\alpha_{p,q}^1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right). \end{cases}$$

En utilisant l'identité de Parseval pour la suite  $(\sin(px_1))_{p \geq 1}$  et pour la suite  $(\sin(qx_2))_{q \geq 1}$ , on peut facilement montrer que

$$\int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma, t) \right|^2 d\sigma dt = \frac{2}{\pi} \left( \sum_{p \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{q \geq 1} q \alpha_{p,q}(t) \right|^2 dt + \sum_{q \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{p \geq 1} p \alpha_{p,q}(t) \right|^2 dt \right),$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\sigma, t) \right|^2 d\sigma dt = \frac{2}{\pi} \left( \sum_{p \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{q \in \mathbb{Z}^*} q x_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right|^2 dt + \sum_{q \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} p x_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right|^2 dt \right), \quad (3.13)$$

où les suites  $(\Lambda_{p,q})_{p,q \in \mathbb{Z}^*}$  et  $(x_{p,q})_{p,q \in \mathbb{Z}^*}$  sont définies par

$$\Lambda_{p,q} = \begin{cases} \mu_{p,q} & \text{si } p \geq 1 \text{ et } q \geq 1, \\ -\mu_{p,-q} & \text{si } p \geq 1 \text{ et } q \leq -1, \\ -\mu_{-p,q} & \text{si } p \leq -1 \text{ et } q \geq 1, \\ -\mu_{-p,-q} & \text{si } p \leq -1 \text{ et } q \leq -1, \end{cases} \quad x_{p,q} = \begin{cases} a_{p,q} & \text{si } p \geq 1 \text{ et } q \geq 1, \\ -\overline{a_{p,-q}} & \text{si } p \geq 1 \text{ et } q \leq -1, \\ -\overline{a_{-p,q}} & \text{si } p \leq -1 \text{ et } q \geq 1, \\ 0 & \text{si } p \leq -1 \text{ et } q \leq -1. \end{cases} \quad (3.14)$$

On peut alors réécrire (3.12) sous la forme

$$\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 = 4 \sum_{p,q \geq 1} (p^2 + q^2) |a_{p,q}|^2.$$

Au vu de cette égalité et de (3.13), l'inégalité d'observabilité (3.11) s'écrit

$$\sum_{p,q \geq 1} (p^2 + q^2) |a_{p,q}|^2 \leq \frac{C_T}{2\pi} \left( \sum_{p \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{q \in \mathbb{Z}^*} q x_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right|^2 dt + \sum_{q \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} p x_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right|^2 dt \right), \quad (3.15)$$

de sorte qu'on ait la caractérisation suivante :

**Proposition 3.6.** *Le système (3.10) est exactement contrôlable au temps  $T$  si, et seulement si, il existe une constante  $C_T > 0$  telle que, pour toute donnée initiale  $(\Phi^0, \Phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , la suite  $(x_{p,q})_{p,q \in \mathbb{Z}^*}$  définie précédemment vérifie l'inégalité (3.15).*

Pour démontrer (3.15), l'idée naturelle est d'appliquer le théorème de Ingham à la suite de réels  $(\Lambda_{p,q})_{p,q \in \mathbb{Z}^*}$ . Le problème est qu'on ne peut pas le faire directement puisque

$$\inf_{\substack{(p,q),(p',q') \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \\ (p,q) \neq (p',q')}} |\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p',q'}| = 0. \quad (3.16)$$

En effet, on remarque déjà que

$$\inf_{\substack{(p,q),(p',q') \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \\ (p,q) \neq (p',q')}} |\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p',q'}| \leq \inf_{p \geq 1} \gamma_p,$$

où, pour tout  $p \geq 1$ ,

$$\gamma_p = \inf_{\substack{q,q' \geq 1 \\ q \neq q'}} |\mu_{p,q} - \mu_{p,q'}|.$$

Puisque pour tous  $q, q' \geq 1$  tels que  $q \neq q'$ , on a

$$|\mu_{p,q} - \mu_{p,q'}| = |\sqrt{p^2 + q^2} - \sqrt{p^2 + q'^2}| = |q - q'| \frac{q + q'}{\sqrt{p^2 + q^2} + \sqrt{p^2 + q'^2}}, \quad (3.17)$$

alors il est clair que  $|\mu_{p,q} - \mu_{p,q'}| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$  pour tous  $q, q' \geq 1$  et donc que  $\gamma_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ , ce qui donne (3.16).

Pour démontrer la contrôlabilité de l'équation des ondes en  $N$  dimensions d'espace avec des arguments de type Ingham, Mehrenberger a développé dans [Meh09] une alternative à l'hypothèse d'écart "total" que doit vérifier la suite dans le théorème de Ingham original. Il a démontré qu'il suffisait que cette suite vérifie des propriétés d'écart partiels par rapport à ses indices pour pouvoir adapter la démonstration du théorème de Ingham. Il a ainsi obtenu une inégalité d'observabilité pour l'équation des ondes en dimension  $N$  qui est valable à partir d'un certain temps  $T_{Me}$ . Pour  $N = 2$ , et  $\Omega$  et  $\Gamma$  tels qu'on les a choisis ici, il a démontré que le système (3.10) est exactement contrôlable au temps  $T$  dès que  $T > T_{Me} = 8\pi$ , ce qui est supérieur au temps optimal  $T(x^0) = 2\sqrt{2}\pi$  obtenu par la méthode des multiplicateurs. On va s'inspirer de la démonstration proposée par Mehrenberger en dimension  $N$  pour adapter la preuve du théorème de Ingham de façon à établir une inégalité d'observabilité pour le système (3.9) en dimension 2. Plus précisément, on va démontrer le résultat de contrôlabilité suivant (voir [Mau08]) :

**Théorème 3.7.** *Soit  $T_0 = 4\pi\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ . Si  $T > T_0$ , alors l'inégalité (3.15) est satisfaite pour tout  $(\Phi^0, \Phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , de sorte que le système (3.10) est exactement contrôlable au temps  $T$ .*

Remarquons que le temps minimal de contrôlabilité  $T_0 = 4\pi\sqrt{2 + \sqrt{2}}$  du Théorème 3.7 est plus proche du pas optimal  $T(x^0) = 2\sqrt{2}\pi$  obtenu par la méthode des multiplicateurs, que le temps minimal de contrôlabilité  $T_{Me} = 8\pi$  obtenu par Mehrenberger.

La démonstration du Théorème 3.7 repose essentiellement sur les propriétés d'écart partiels suivantes :

**Proposition 3.8.** *Soient  $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\gamma_2 = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ .*

1.  $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall q, q' \in \mathbb{Z}^*, \quad \left( q \geq p, \quad q' \geq p \implies |\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p,q'}| \geq \gamma_1 |q - q'| \right),$
2.  $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall q, q' \in \mathbb{Z}^*, \quad \left( q \leq p, \quad q' \geq p \implies |\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p,q'}| \geq \gamma_2 |q - q'| \right),$
3.  $\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p, p' \in \mathbb{Z}^*, \quad \left( p \geq q, \quad p' \geq q \implies |\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p',q}| \geq \gamma_1 |p - p'| \right),$
4.  $\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p, p' \in \mathbb{Z}^*, \quad \left( p \leq q, \quad p' \geq q \implies |\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p',q}| \geq \gamma_2 |p - p'| \right).$

**Remarque 3.9.** Puisque  $\gamma_2 < \gamma_1$ , ce résultat entraîne en particulier que

1.  $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall q, q' \in \mathbb{Z}^*, \quad \left( p \leq \max(q, q') \implies |\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p,q'}| \geq \gamma_2 |q - q'| \right),$
2.  $\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p, p' \in \mathbb{Z}^*, \quad \left( q \leq \max(p, p') \implies |\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p',q}| \geq \gamma_2 |p - p'| \right).$

*Démonstration de la Proposition 3.8.* Comme  $p$  et  $q$  jouent des rôles symétriques, il suffit de démontrer les deux premiers points.

1. Soient  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $q, q' \in \mathbb{Z}^*$  tels que  $q \geq p$  et  $q' \geq p$ . Alors  $|\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p,q'}| = |\mu_{p,q} - \mu_{p,q'}|$ , et comme on l'a déjà remarqué en (3.17),

$$|\mu_{p,q} - \mu_{p,q'}| = |q - q'| \frac{q + q'}{\sqrt{p^2 + q^2} + \sqrt{p^2 + q'^2}}.$$

Il vient donc, puisque  $q \geq p$  et  $q' \geq p$ ,

$$|\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p,q'}| \geq |q - q'| \frac{q + q'}{\sqrt{2q^2} + \sqrt{2q'^2}} = \gamma_1 |q - q'|.$$

2. Soient  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $q, q' \in \mathbb{Z}^*$  tels que  $q \leq p$  et  $q' \geq p$ . Supposons, dans un premier temps, que  $p \geq 1$ . Alors,  $\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p,q'} = \mu_{p,q} - \mu_{p,q'}$  et donc,

$$|\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p,q'}| = |q - q'| \frac{q + q'}{\sqrt{p^2 + q^2} + \sqrt{p^2 + q'^2}},$$

avec, puisque  $0 < q \leq p \leq q'$ ,

$$\sqrt{p^2 + q^2} + \sqrt{p^2 + q'^2} \leq \sqrt{q'^2 + q^2} + \sqrt{2q'^2} \leq (\sqrt{2} + 1)(q + q').$$

On en déduit donc que

$$|\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p,q'}| \geq \frac{1}{\sqrt{2} + 1} |q - q'| = \gamma_2 |q - q'|.$$

Supposons maintenant que  $q \leq -1$  et démontrons la même inégalité. Dans ce cas, par définition de  $\Lambda_{p,q}$ , on a  $\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p,q'} = -(\mu_{p,-q} + \mu_{p,q'}) = -(\sqrt{p^2 + q^2} + \sqrt{p^2 + q'^2})$ . D'où

$$|\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p,q'}| = \sqrt{p^2 + q^2} + \sqrt{p^2 + q'^2} \geq |q| + |q'| = |q - q'| \geq \gamma_2 |q - q'|,$$

ce qui termine la preuve du point 2. □

*Démonstration du Théorème 3.7.* Supposons que  $T > T_0$ . On introduit la fonction  $k : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  définie par

$$k(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & \text{si } t \in [0, T] \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on note  $\widehat{k}$  la transformée de Fourier  $k$ , définie par  $\widehat{k}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} k(t) e^{-it\xi} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T k(t) e^{-it\xi} dt$ . Il est facile de vérifier que, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\widehat{k}(\xi) = e^{-i\frac{\xi T}{2}} T \sqrt{2\pi} \frac{\cos\left(\frac{\xi T}{2}\right)}{\pi^2 - T^2 \xi^2}, \quad (3.18)$$

de sorte que  $|\widehat{k}|$  est une fonction paire et que  $\widehat{k}(0) = \frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$  est réel. Puisque, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $k(t) \in [0, 1]$ , alors il est facile de montrer qu'on a la minoration suivante :

$$\sum_{p \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{q \in \mathbb{Z}^*} q x_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q} t} \right|^2 dt + \sum_{q \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} p x_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q} t} \right|^2 dt \geq I_1 + I_2 - 2(I_3 + I_4), \quad (3.19)$$

où

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{p \geq 1} \int_0^t k(t) \left| \sum_{q \geq p} qx_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right|^2 dt \\
I_2 &= \sum_{q \geq 1} \int_0^t k(t) \left| \sum_{p \geq q} px_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right|^2 dt \\
I_3 &= \left| \sum_{p \geq 1} \int_0^T k(t) \left( \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^* \\ q < p}} qx_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right) \left( \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^* \\ q \geq p}} q\overline{x_{p,q}} e^{-i\Lambda_{p,q}t} \right) dt \right| \\
I_4 &= \left| \sum_{q \geq 1} \int_0^T k(t) \left( \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}^* \\ p < q}} px_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right) \left( \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}^* \\ p \geq q}} p\overline{x_{p,q}} e^{-i\Lambda_{p,q}t} \right) dt \right|.
\end{aligned}$$

Pour établir l'inégalité (3.15), on va procéder en trois étapes : d'abord on va minorer les quantités  $I_1$  et  $I_2$ , puis on va majorer les quantités  $I_3$  et  $I_4$  et, enfin, on obtiendra une minoration de  $I_1 + I_2 - 2(I_3 + I_4)$  qui permettra de conclure, au vu de (3.19).

**1ère étape : minoration de  $I_1$  et  $I_2$ .**

Par définition de  $I_1$  et de la transformée de Fourier de  $k$ , on a

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{p \geq 1} \int_0^T k(t) \left( \sum_{q \geq p} qx_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right) \left( \sum_{q' \geq p} q' \overline{x_{p,q'}} e^{-i\Lambda_{p,q'}t} \right) dt \\
&= \sqrt{2\pi} \sum_{p \geq 1} \sum_{q \geq p} \sum_{q' \geq p} qq' x_{p,q} \overline{x_{p,q'}} \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}),
\end{aligned}$$

d'où

$$I_1 \geq \sqrt{2\pi} \sum_{p \geq 1} \left( \widehat{k}(0) \sum_{q \geq p} q^2 |x_{p,q}|^2 - I_1(p) \right), \quad (3.20)$$

où, pour tout  $p \geq 1$ ,

$$I_1(p) = \sum_{\substack{q \geq p \\ q' \geq p \\ q' \neq q}} qq' \left| x_{p,q} \overline{x_{p,q'}} \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right|.$$

On va montrer que, sous les conditions données par la Proposition 3.8, alors on a

$$I_1(p) \leq \widehat{k}(0) \left( \frac{2\pi}{\gamma_1 T} \right)^2 \sum_{q \geq p} q^2 |x_{p,q}|^2, \quad (3.21)$$

dès que  $T > \frac{2\pi}{\gamma_1}$ . Pour tout  $p \geq 1$  et tout  $q \geq p$ , on a

$$\sum_{\substack{q' \geq p \\ q' \neq q}} qq' \left| x_{p,q} \overline{x_{p,q'}} \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right| \leq \frac{1}{2} \left( q^2 |x_{p,q}|^2 \sum_{\substack{q' \geq p \\ q' \neq q}} \left| \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right| + \sum_{\substack{q' \geq p \\ q' \neq q}} q'^2 |x_{p,q'}|^2 \left| \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right| \right),$$

donc, par parité de  $|\widehat{k}|$ , on obtient

$$I_1(p) \leq \sum_{q \geq p} q^2 |x_{p,q}|^2 S_{p,q}, \quad (3.22)$$

où

$$S_{p,q} = \sum_{\substack{q' \geq p \\ q' \neq q}} \left| \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right|.$$

Remarquons que le réel  $T_0$  donné dans l'énoncé du Théorème 3.7 peut s'écrire  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{2}{\gamma_2^2}}$ , où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont donnés par la Proposition 3.8. Soient  $q \geq 1$  et  $q' \geq 1$  tels que  $q \neq q'$ . La Proposition 3.8 permet alors de noter que

$$\frac{T}{\pi} |\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p,q'}| - 1 \geq \frac{\gamma_1 T}{\pi} |q - q'| - 1 > 1,$$

puisque  $T > T_0 > \frac{2\pi}{\gamma_1}$ . Donc, en utilisant la formule (3.18) pour la transformée de Fourier de  $k$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right| &\leq \frac{T\sqrt{2\pi}}{\pi^2} \frac{1}{\left(\frac{\gamma_1 T}{\pi}\right)^2 (q - q')^2 - 1} = \widehat{k}(0) \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2 \frac{1}{4(q - q')^2 - \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2} \\ &\leq \widehat{k}(0) \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2 \frac{1}{4(q - q')^2 - 1}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} S_{p,q} &\leq \widehat{k}(0) \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2 \sum_{\substack{q' \geq p \\ q' \neq q}} \frac{1}{4(q - q')^2 - 1} \\ &\leq \widehat{k}(0) \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2 \sum_{r \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{4r^2 - 1} = \widehat{k}(0) \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2. \end{aligned}$$

En revenant à (3.22), on en déduit bien la formule (3.21), ce qui donne finalement

$$I_1 \geq \widehat{k}(0) \left(1 - \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2\right) \sqrt{2\pi} \sum_{p \geq 1} \sum_{q \geq p} q^2 |x_{p,q}|^2,$$

d'après (3.20). Les rôles de  $p$  et  $q$  étant similaires, on a de même :

$$I_2 \geq \widehat{k}(0) \left(1 - \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2\right) \sqrt{2\pi} \sum_{q \geq 1} \sum_{p \geq q} p^2 |x_{p,q}|^2.$$

On déduit donc de ces deux estimations que

$$I_1 + I_2 \geq \widehat{k}(0) \left(1 - \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2\right) \sqrt{2\pi} \left( \sum_{p \geq 1} \sum_{q \geq p} q^2 |x_{p,q}|^2 + \sum_{q \geq 1} \sum_{p \geq q} p^2 |x_{p,q}|^2 \right).$$

D'autre part, il est facile de vérifier que

$$\sum_{p,q \geq 1} (p^2 + q^2) |x_{p,q}|^2 \leq 2 \left( \sum_{p \geq 1} \sum_{q \geq p} q^2 |x_{p,q}|^2 + \sum_{q \geq 1} \sum_{p \geq q} p^2 |x_{p,q}|^2 \right),$$

ce qui donne donc :

$$I_1 + I_2 \geq \widehat{k}(0) \left(1 - \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2\right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{p,q \geq 1} (p^2 + q^2) |x_{p,q}|^2.$$

En revenant à la définition de  $x_{p,q}$ , on peut réécrire cette inégalité sous la forme :

$$I_1 + I_2 \geq \widehat{k}(0) \left(1 - \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2\right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{p,q \geq 1} (p^2 + q^2) |a_{p,q}|^2. \quad (3.23)$$

**2ème étape : majoration de  $I_3$  et  $I_4$ .**



En utilisant la transformée de Fourier de  $k$ , montre facilement que

$$\begin{aligned} I_3 &= \sqrt{2\pi} \left| \sum_{p \geq 1} \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^* \\ q < p}} \sum_{q' \geq p} q x_{p,q} q' \overline{x_{p,q'}} \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right| \\ &\leq \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \sum_{p \geq 1} \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^* \\ q < p}} \sum_{q' \geq p} \left( q^2 |x_{p,q}|^2 + q'^2 |x_{p,q'}|^2 \right) \left| \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right|. \end{aligned}$$

La parité de  $|\widehat{k}|$  permet alors d'écrire que

$$I_3 \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{p \geq 1} \left( \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^* \\ q < p}} q^2 |x_{p,q}|^2 S_{p,q}^+ + \sum_{q \geq p} q^2 |x_{p,q}|^2 S_{p,q}^- \right), \quad (3.24)$$

où, pour tout  $p \geq 1$  et tout  $q \in \mathbb{Z}^*$ ,

$$\begin{aligned} S_{p,q}^+ &= \sum_{\substack{q' \geq p \\ q' < q}} \left| \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right|, \quad \text{si } q < p, \\ S_{p,q}^- &= \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^* \\ q < p}} \left| \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right|, \quad \text{si } q \geq p. \end{aligned}$$

Si  $q < p$ , alors on sait, d'après la Proposition 3.8 que, pour tout  $q' \geq p$ ,  $|\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p,q'}| \geq \gamma_2 |q - q'|$ . On peut donc en déduire, comme on l'a fait précédemment pour estimer  $S_{p,q}$ , que, puisque  $T > T_0 > \frac{2\pi}{\gamma_2}$ , alors

$$\left| \widehat{k}(\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p,q'}) \right| \leq \widehat{k}(0) \left( \frac{2\pi}{\gamma_2 T} \right)^2 \frac{1}{4(q - q')^2 - 1},$$

et donc

$$\begin{aligned} S_{p,q}^+ &\leq \widehat{k}(0) \left( \frac{2\pi}{\gamma_2 T} \right)^2 \sum_{q' \geq p} \frac{1}{4(q - q')^2 - 1} \\ &\leq \widehat{k}(0) \left( \frac{2\pi}{\gamma_2 T} \right)^2 \sum_{r \geq 1} \frac{1}{4r^2 - 1} = \frac{\widehat{k}(0)}{2} \left( \frac{2\pi}{\gamma_2 T} \right)^2. \end{aligned}$$

De la même façon, on peut montrer que

$$S_{p,q}^- \leq \frac{\widehat{k}(0)}{2} \left( \frac{2\pi}{\gamma_2 T} \right)^2,$$

ce qui permet d'obtenir, d'après (3.24), la majoration suivante

$$I_3 \leq \frac{\widehat{k}(0)}{2} \left( \frac{2\pi}{\gamma_2 T} \right)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{p \geq 1} \sum_{q \in \mathbb{Z}^*} q^2 |x_{p,q}|^2.$$

Pour des raisons de symétrie en  $p$  et  $q$ , il vient immédiatement que

$$I_4 \leq \frac{\widehat{k}(0)}{2} \left( \frac{2\pi}{\gamma_2 T} \right)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{q \geq 1} \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} p^2 |x_{p,q}|^2,$$

ce qui donne

$$I_3 + I_4 \leq \frac{\widehat{k}(0)}{2} \left( \frac{2\pi}{\gamma_2 T} \right)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \sum_{p \geq 1} \sum_{q \in \mathbb{Z}^*} q^2 |x_{p,q}|^2 + \sum_{q \geq 1} \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} p^2 |x_{p,q}|^2 \right).$$

En revenant à la définition de  $x_{p,q}$  (voir (3.14)), on en déduit que

$$I_3 + I_4 \leq \widehat{k}(0) \left( \frac{2\pi}{\gamma_2 T} \right)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{p,q \geq 1} (p^2 + q^2) |a_{p,q}|^2. \quad (3.25)$$

**3ème étape : minoration de  $I_1 + I_2 - 2(I_3 + I_4)$  et conclusion.**

En additionnant les inégalités (3.23) et (3.25), il vient que

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - 2(I_3 + I_4) &\geq \widehat{k}(0) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( 1 - \left( \frac{2\pi}{\gamma_1 T} \right)^2 - 2 \left( \frac{2\pi}{\gamma_2 T} \right)^2 \right) \sum_{p,q \geq 1} (p^2 + q^2) |a_{p,q}|^2 \\ &= \widehat{k}(0) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( 1 - \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \left( \frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{2}{\gamma_2^2} \right) \right) \sum_{p,q \geq 1} (p^2 + q^2) |a_{p,q}|^2 \\ &= \frac{T}{\pi} \left( 1 - \frac{T_0^2}{T^2} \right) \sum_{p,q \geq 1} (p^2 + q^2) |a_{p,q}|^2. \end{aligned}$$

En revenant à (3.19), on en déduit que

$$\sum_{p \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{q \in \mathbb{Z}^*} q x_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q} t} \right|^2 dt + \sum_{q \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} p x_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q} t} \right|^2 dt \geq \frac{T}{\pi} \left( 1 - \frac{T_0^2}{T^2} \right) \sum_{p,q \geq 1} (p^2 + q^2) |a_{p,q}|^2,$$

ce qui démontre l'inégalité d'observabilité (3.15) pour tout  $T > T_0$ , avec  $C_T = \frac{2\pi^2 T}{T^2 - T_0^2}$ .  $\square$

En fait, on a démontré le résultat suivant :

**Corollaire 3.10.** *Soient  $\gamma_1 > 0$  et  $\gamma_2 > 0$  tels que les propriétés 1 à 4 de la Proposition 3.8 soient vérifiées. Alors, pour tout  $T > 2\pi \sqrt{\frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{2}{\gamma_2^2}}$ , le système (3.10) est exactement contrôlable au temps  $T$ .*

De la même façon, Mehrenberger a démontré le résultat suivant :

**Théorème 3.11.** *Soient  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  tels que*

1.  $\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p, p' \in \mathbb{Z}^*, \quad \left( q \leq \max(p, p') \implies |\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p',q}| \geq C_1 |p - p'| \right).$
2.  $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall q, q' \in \mathbb{Z}^*, \quad \left( p \leq \max(q, q') \implies |\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p,q'}| \geq C_2 |q - q'| \right).$

*Alors, pour tout  $T > 2\pi \sqrt{\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2}}$ , le système (3.10) est exactement contrôlable au temps  $T$ .*

Dans [Meh09], Mehrenberger applique ce résultat avec  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ , ce qui explique le temps minimal de contrôlabilité  $T_{Me} = 8\pi$  qu'il obtient. Dans la méthode que l'on propose ici, le temps minimal de contrôlabilité  $T_0$  que l'on obtient est  $T_0 = 4\pi \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ . Ce temps  $T_0$  est obtenu avec  $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\gamma_2 = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ , ce qui correspond, au vu de la Remarque 3.9, à  $C_1 = C_2 = \gamma_2 = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ . La raison pour laquelle  $T_0 < T_{Me}$  ne provient que de ce choix plus précis des écarts  $C_1$  et  $C_2$ , car la preuve donnée par Mehrenberger repose sur des inégalités plus fines que celles que l'on obtient ici (par exemple dans (3.19)). On pourrait alors améliorer simultanément les deux temps minimaux de contrôlabilité  $T_0$  et  $T_{Me}$  en appliquant directement le Théorème 3.11 avec  $C_1 = C_2 = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$  :

**Théorème 3.12.** *Soit  $T_{MM} = 2\pi \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$ . Alors, pour tout  $T > T_{MM}$ , le système (3.10) est exactement contrôlable au temps  $T$ .*

Remarquons qu'on a bien  $T(x^0) < T_{MM} < T_0 < T_{Me}$  de sorte que ce résultat est plus précis que celui qu'on donne dans le Théorème 3.7 et que celui qui a été démontré dans [Meh09].

Dans le chapitre 4, on adaptera la preuve du résultat de Mehrenberger de façon à établir, pour  $T$  assez grand, la contrôlabilité frontière exacte au temps  $T$  du système (1.27) pour l'ensemble des données initiales qui s'écrivent comme combinaison linéaire des vecteurs propres  $e_{p,q}^+$  (associés aux valeurs propres  $\lambda_{p,q}^+$  qui se comportent asymptotiquement comme les valeurs propres de  $-\Delta$ ).

## 3.2 L'inégalité de Carleman et ses applications à la contrôlabilité des systèmes paraboliques

Cette partie traite de l'inégalité de Carleman et de ses applications à la contrôlabilité des systèmes paraboliques. On se réfère essentiellement à [AKBGBdT11] où Ammar Khodja et al. passent en revue des résultats récents portant sur la contrôlabilité des systèmes paraboliques. Le point de vue adopté dans cet article est celui de la généralisation du critère de Kalman que l'on a présenté dans le chapitre précédent pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles. On renvoie également à [FI96] et à [IY03] pour l'inégalité de Carleman.

### 3.2.1 L'inégalité de Carleman pour l'équation de la chaleur

On considère une équation parabolique rétrograde du type

$$\begin{cases} -\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) + L_0(x, t)\phi(x, t) = f_0(x, t), & \text{dans } Q_T = \Omega \times ]0, T[, \\ \phi = 0, & \text{sur } \Sigma_T = \partial\Omega \times ]0, T[, \\ \phi(x, T) = \phi^0(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.26)$$

où  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  dont la frontière est de classe  $C^2$ ,  $f_0 \in L^2(Q_T)$ , et où  $L_0(\cdot, t)$  est un opérateur parabolique auto-adjoint défini par

$$L_0(x, t)y(x, t) = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha_{ij}(x, t) \frac{\partial y}{\partial x_j}(x, t) \right),$$

les coefficients  $\alpha_{ij}$  satisfaisant les propriétés ci-dessous :

- (1).  $\alpha_{ij} \in W^{1,\infty}(Q_T)$  pour tous  $1 \leq i, j \leq N$ ,
- (2).  $\alpha_{ij}(x, t) = \alpha_{ji}(x, t)$  pour tout  $(x, t) \in Q_T$  et tous  $1 \leq i, j \leq N$ ,
- (3). il existe  $a_0 > 0$  tel que

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq a_0 |\xi|^2, \quad \forall \xi = (\xi_1 \cdots, \xi_N)^T \in \mathbb{R}^N, \quad \forall (x, t) \in Q_T.$$

Par exemple, pour  $\alpha_{ij} = d\delta_{ij}$  avec  $d > 0$ , on obtient  $L_0(x, t) = -d\Delta$ .

Fursikov et Imanuilov ont démontré dans [FI96] que les solutions de l'équation rétrograde (3.26) vérifient une inégalité d'observabilité à poids appelée *inégalité de Carleman*, l'observation portant sur n'importe quel sous-ensemble ouvert  $\omega \subset \Omega$ . Plus précisément, on a le résultat suivant :

**Théorème 3.13.** *Soient  $\omega$  un sous-ensemble ouvert non vide de  $\Omega$  et  $p \in \mathbb{R}$ . Il existe une fonction strictement positive  $\beta_0 \in C^2(\bar{\Omega})$  (ne dépendant que de  $\omega$  et  $\Omega$ ) et deux constantes  $C_p > 0$  et  $c_p > 0$  (ne dépendant que de  $p$ ,  $\omega$  et  $\Omega$ ) telles que pour tout  $\phi^0 \in L^2(\Omega)$ , la solution  $\phi$  de l'équation (3.26) vérifie, pour tout  $s \geq s_p = c_p(T + T^2)$ , l'inégalité*

$$I(p, \phi) \leq C_p \left( s^p \int_{q_T} e^{-2s\beta} \gamma(t)^p |\phi|^2 + s^{p-3} \int_{Q_T} e^{-2s\beta} \gamma(t)^{p-3} |f_0|^2 \right),$$

où

$$q_T = \omega \times ]0, T[, \quad \beta(x, t) = \frac{\beta_0(x)}{t(T-t)}, \quad \gamma(t) = \frac{1}{t(T-t)},$$

et

$$\begin{aligned} I(p, \phi) &= s^{p-4} \int_{Q_T} e^{-2s\beta} \gamma(t)^{p-4} \left( |\partial_t \phi|^2 + |\Delta \phi|^2 \right) \\ &\quad + s^{p-2} \int_{Q_T} e^{-2s\beta} \gamma(t)^{p-2} |\nabla \phi|^2 \\ &\quad + s^p \int_{Q_T} e^{-2s\beta} \gamma(t)^p |\phi|^2. \end{aligned}$$

On pourra trouver dans [IY03] la démonstration détaillée de ce résultat, ainsi qu'un énoncé plus complet. Cependant, dans [FI96] et [IY03], la dépendance en  $T$  du paramètre  $s_p$  n'est pas explicitée. On renvoie à [FCZ00] pour l'estimation de  $s_p$  qui est donnée ici. Dans [AKBGBdT11], les auteurs démontrent que cette inégalité de Carleman (pour  $p = 3$ ), combinée avec des estimations d'énergie sur les solutions de (3.26), permet d'obtenir le résultat suivant :

**Corollaire 3.14.** *Soit  $\omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^N$  contenu dans  $\Omega$ . Il existe une constante  $C_T > 0$  (qui ne dépend que de  $\omega$ ,  $\Omega$  et  $T$ ) telle que pour tout  $\phi^0 \in L^2(\Omega)$ , la solution  $\phi$  de (3.26) vérifie*

$$\|\phi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_T \int_{q_T} |\phi|^2 dx dt.$$

On ne donne pas la preuve de ce résultat ici. On démontrera en détails dans le paragraphe 3.2.2 comment passer d'une inégalité de Carleman globale pour un système parabolique de trois équations couplées à une inégalité d'observabilité (portant sur l'observabilité de deux des trois composantes). Au vu de la partie 2.3.3, une conséquence du Corollaire 3.14 est le résultat qui suit.

**Corollaire 3.15.** *Pour tout ouvert non vide  $\omega$  contenu dans  $\Omega$ , l'équation*

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + L_0(x, t)y = v1_\omega, & \text{dans } Q_T, \\ y = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0, & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

est contrôlable aux trajectoires à tout temps  $T > 0$ .

### 3.2.2 Application à la contrôlabilité des systèmes paraboliques de trois équations avec deux ou trois forces de contrôle

On considère les systèmes paraboliques (2.32) et (2.30) (voir page 44), où  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ . On rappelle que la matrice de diffusion est donnée par

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix},$$

où  $d_i > 0$  pour tout  $i = 1, 2, 3$ . On utilise l'inégalité de Carleman du Théorème 3.13 pour établir une inégalité de Carleman globale pour les solutions du système rétrograde non homogène associé à ces deux problèmes :

$$\begin{cases} -\partial_t \phi_1 = d_1 \Delta \phi_1 + a_{22} \phi_1 + a_{21} \phi_2 + a_{31} \phi_3 + f_1, & \text{dans } Q_T, \\ -\partial_t \phi_2 = d_2 \Delta \phi_2 + a_{12} \phi_1 + a_{22} \phi_2 + a_{32} \phi_3 + f_2, & \text{dans } Q_T, \\ -\partial_t \phi_3 = d_3 \Delta \phi_3 + a_{13} \phi_1 + a_{23} \phi_2 + a_{33} \phi_3 + f_3, & \text{dans } Q_T, \\ \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ \phi_1(\cdot, T) = \phi_1^0, \quad \phi_2(\cdot, T) = \phi_2^0, \quad \phi_3(\cdot, T) = \phi_3^0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.27)$$

pour  $f = (f_1, f_2, f_3)^T \in (L^2(Q_T))^3$  et  $\phi^0 = (\phi_1^0, \phi_2^0, \phi_3^0) \in (L^2(\Omega))^3$ .

**Proposition 3.16.** *Soient  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$  tels que  $|p_i - p_j| < 3$  pour tous  $i, j = 1, 2, 3$  et  $\omega$  un ouvert non vide contenu dans  $\Omega$ . Il existe deux constantes strictement positives  $C_1$  et  $c_1$  (dépendant uniquement de  $p_1, p_2, p_3, \omega$  et  $\Omega$ ) telles que pour tout  $\phi^0 \in (L^2(\Omega))^3$  et tout  $f \in (L^2(Q_T))^3$ , la solution  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$  de (3.27) vérifie*

$$I(p_1, \phi_1) + I(p_2, \phi_2) + I(p_3, \phi_3) \leq C_1 \sum_{j=1}^3 \left( \int_{q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_j} |\phi_j|^2 + \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_j-3} |f_j|^2 \right), \quad (3.28)$$

pour tout  $s \geq s_1$ , où

$$s_1 = c_1 \left( T + T^2 + \frac{T^2}{4} \max \left( \max_{1 \leq j \leq 3} \|a_{jj}\|_\infty^{2/3}, \max_{\substack{1 \leq i, j \leq 3 \\ j \neq i}} \|a_{ij}\|_\infty^{\frac{2}{p_i - (p_j - 3)}} \right) \right). \quad (3.29)$$

*Démonstration.* On pose  $C_0 = \max(C_{p_1}, C_{p_2}, C_{p_3})$  et  $s_0 = c_0(T + T^2)$ , avec  $c_0 = \max(c_{p_1}, c_{p_2}, c_{p_3})$  où les constantes  $C_{p_i}$  et  $c_{p_i}$  sont définies dans le Théorème 3.13. Pour tout  $j = 1, 2, 3$ , on applique l'inégalité de Carleman du Théorème 3.13 à la  $j^{\text{ème}}$  équation de (3.27), avec  $f_0 = a_{1j}\phi_1 + a_{2j}\phi_2 + a_{3j}\phi_3 + f_j$ . On a donc pour tout  $s \geq s_0 \geq s_{p_j}$ ,

$$\begin{aligned} I(p_j, \phi_j) &\leq C_0 \left( \int_{q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_j} |\phi_j|^2 + \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_j-3} |a_{1j}\phi_1 + a_{2j}\phi_2 + a_{3j}\phi_3 + f_j|^2 \right) \\ &\leq C_0 \int_{q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_j} |\phi_j|^2 + 4C_0 \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_j-3} |f_j|^2 \\ &\quad + 4\|a_{jj}\|_\infty^2 C_0 \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_j-3} |\phi_j|^2 + 4C_0 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 \left( \|a_{ij}\|_\infty^2 \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_j-3} |\phi_i|^2 \right). \end{aligned}$$

Soit  $\delta \in ]0, 1[$  fixé. Si, de plus,  $s \geq \frac{T^2}{4} \left( \frac{4C_0}{1-\delta} \right)^{1/3} \|a_{jj}\|_\infty^{2/3}$ , alors  $(s\gamma)^{p_j} - 4\|a_{jj}\|_\infty^2 C_0 (s\gamma)^{p_j-3} \geq \delta (s\gamma)^{p_j}$ , puisque  $\gamma \geq \frac{4}{T^2}$  sur  $]0, T[$ , et donc

$$\begin{aligned} \delta I(p_j, \phi_j) &\leq \int_{Q_T} e^{-2s\beta} [(s\gamma)^{p_j-4} (|\partial_t \phi_j|^2 + |\Delta \phi_j|^2) + (s\gamma)^{p_j-2} |\nabla \phi_j|^2] \\ &\quad + \int_{Q_T} e^{-2s\beta} \left( (s\gamma)^{p_j} - 4\|a_{jj}\|_\infty^2 C_0 (s\gamma)^{p_j-3} \right) |\phi_j|^2 \\ &\leq C_0 \int_{q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_j} |\phi_j|^2 + 4C_0 \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_j-3} |f_j|^2 \\ &\quad + 4C_0 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 \left( \|a_{ij}\|_\infty^2 \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_j-3} |\phi_i|^2 \right). \end{aligned}$$

En additionnant cette inégalité pour  $j = 1, 2, 3$ , on obtient, pour tout

$$s \geq \frac{T^2}{4} \left( \frac{4C_0}{1-\delta} \right)^{1/3} \max_{1 \leq j \leq 3} \|a_{jj}\|_\infty^{2/3}, \quad (3.30)$$

l'estimation

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 I(p_j, \phi_j) &\leq \sum_{j=1}^3 \left( \frac{C_0}{\delta} \int_{q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_j} |\phi_j|^2 + \frac{4C_0}{\delta} \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_j-3} |f_j|^2 \right) \\ &\quad + \frac{4C_0}{\delta} \sum_{j=1}^3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 \left( \|a_{ij}\|_\infty^2 \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_j-3} |\phi_i|^2 \right) \end{aligned}$$

Cette inégalité peut se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^3 \int_{Q_T} e^{-2s\beta} [(s\gamma)^{p_i-4} (|\partial_t \phi_i|^2 + |\Delta \phi_i|^2) + (s\gamma)^{p_i-2} |\nabla \phi_i|^2] \\ &+ \sum_{i=1}^3 \int_{Q_T} e^{-2s\beta} \left( (s\gamma)^{p_i} - \frac{4C_0}{\delta} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \|a_{ij}\|_\infty^2 (s\gamma)^{p_j-3} \right) |\phi_i|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^3 \left( \frac{C_0}{\delta} \int_{q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_j} |\phi_j|^2 + \frac{4C_0}{\delta} \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_j-3} |f_j|^2 \right). \quad (3.31) \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  fixé, on a

$$(s\gamma)^{p_i} - \frac{4C_0}{\delta} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \|a_{ij}\|_\infty^2 (s\gamma)^{p_j-3} = \frac{(s\gamma)^{p_i}}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \left( 1 - \frac{8C_0 \|a_{ij}\|_\infty^2}{\delta (s\gamma)^{p_i - (p_j-3)}} \right),$$

avec, par hypothèse,  $p_i > p_j - 3$  pour tout  $j \neq i$ . On en déduit donc que, si

$$s \geq \frac{T^2}{4} \max_{\substack{1 \leq j \leq 3 \\ j \neq i}} \left( \left( \frac{8C_0}{\delta(1-\delta)} \right)^{\frac{1}{p_i - (p_j - 3)}} \|a_{ij}\|_{\infty}^{\frac{2}{p_i - (p_j - 3)}} \right),$$

alors  $(s\gamma)^{p_i} - \frac{4C_0}{\delta} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \|a_{ij}\|_{\infty}^2 (s\gamma)^{p_j - 3} \geq \delta (s\gamma)^{p_i}$ , et donc

$$\int_{Q_T} e^{-2s\beta} \left( (s\gamma)^{p_i} - \frac{4C_0}{\delta} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \|a_{ij}\|_{\infty}^2 (s\gamma)^{p_j - 3} \right) |\phi_i|^2 \geq \delta \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_i} |\phi_i|^2.$$

Par conséquent, si on suppose, en plus de (3.30), que

$$s \geq \frac{T^2}{4} \max_{\substack{1 \leq i, j \leq 3 \\ j \neq i}} \left( \left( \frac{8C_0}{\delta(1-\delta)} \right)^{\frac{1}{p_i - (p_j - 3)}} \|a_{ij}\|_{\infty}^{\frac{2}{p_i - (p_j - 3)}} \right),$$

alors le membre de gauche dans l'inégalité (3.31) est minoré par  $\delta \sum_{i=1}^3 I(p_i, \phi_i)$ , ce qui donne l'inégalité annoncée avec  $C_1 = \frac{4C_0}{\delta^2}$ .  $\square$

### 3.2.2.1 Contrôlabilité aux trajectoires par trois contrôles.

La Proposition 3.16 donne en particulier, pour  $p_1 = p_2 = p_3$ , le résultat suivant :

**Corollaire 3.17.** *Pour tout  $p \in \mathbb{R}$ , il existe deux constantes  $C_0$  et  $c_0$  (dépendant uniquement de  $p$ ,  $\omega$  et  $\Omega$ ) telles que pour tout  $\phi^0 \in (L^2(\Omega))^3$  et tout  $f \in (L^2(Q_T))^3$ , la solution  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$  de (3.27) vérifie*

$$I(p, \phi) \leq C \left( \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^p |\phi|^2 + \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p-3} |f|^2 \right), \quad (3.32)$$

pour tout  $s \geq s_0$ , où

$$s_0 = c_0 \left( T + T^2 + \frac{T^2}{4} \max_{1 \leq i, j \leq 3} \|a_{ij}\|_{\infty}^{2/3} \right).$$

Tout comme dans le cas scalaire, on peut montrer que ce résultat, combiné avec des estimations d'énergie sur les solutions de 3.27, permet d'établir l'inégalité d'observabilité du Théorème 2.15 (voir page 44), ce qui mène à la conclusion suivante :

**Corollaire 3.18** (Contrôlabilité par trois contrôles). *Pour tout  $T > 0$  et tout ouvert non vide  $\omega$  contenu dans  $\Omega$ , le système (3.27) est contrôlable aux trajectoires au temps  $T$ .*

### 3.2.2.2 Contrôlabilité aux trajectoires par deux contrôles.

Pour simplifier, on suppose dans cette partie que  $D = I$  et que  $f_1 = f_2 = f_3 = 0$  de sorte que le système de contrôle que l'on étudie est

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + A(x, t)y + \begin{pmatrix} 0 \\ v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix} \mathbf{1}_{\omega}, & \text{dans } Q_T, \\ y = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, T) = y^0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.33)$$

et que son système adjoint s'écrit

$$\begin{cases} -\partial_t \phi_1 = \Delta \phi_1 + a_{22} \phi_1 + a_{21} \phi_2 + a_{31} \phi_3, & \text{dans } Q_T, \\ -\partial_t \phi_2 = \Delta \phi_2 + a_{12} \phi_1 + a_{22} \phi_2 + a_{32} \phi_3, & \text{dans } Q_T, \\ -\partial_t \phi_3 = \Delta \phi_3 + a_{13} \phi_1 + a_{23} \phi_2 + a_{33} \phi_3, & \text{dans } Q_T, \\ \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ \phi_1(\cdot, T) = \phi_1^0, \quad \phi_2(\cdot, T) = \phi_2^0, \quad \phi_3(\cdot, T) = \phi_3^0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.34)$$

On va voir que sous certaines hypothèses sur les coefficients de la matrice de couplage  $A(x, t)$  du système (3.33), il est possible d'éliminer le terme en  $\phi_1$  dans le membre de droite de l'inégalité de la Proposition 3.16. La démarche que l'on présente ici reprend une des étapes de la démonstration faite par González-Burgos et de Teresa dans [GBdT10] pour démontrer la contrôlabilité par un seul contrôle de systèmes paraboliques de  $n$  équations en cascade. Plus précisément, on va établir l'estimation suivante :

**Lemme 3.19.** *Soient  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$  tels que  $|p_i - p_j| < 3$  pour tous  $i, j = 1, 2, 3$  et  $\omega$  un ouvert non vide contenu dans  $\Omega$ . S'il existe un ouvert non vide  $\omega^0$  contenu dans  $\omega$  et une constante  $m > 0$  tels que  $a_{12} \geq m$  dans  $q_T^0 := \omega^0 \times ]0, T[$ , ou  $a_{12} \leq -m$  dans  $q_T^0$ , ou encore tels que  $a_{13} \geq m$  dans  $q_T^0$ , ou  $a_{13} \leq -m$  dans  $q_T^0$ , alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe deux constantes strictement positives  $C_A$  et  $C_{A,\epsilon}$  ne dépendant que de  $p_1, p_2, p_3, \omega^0, \omega, \Omega$  et  $\|a_{ij}\|_\infty$  (pour  $i, j = 1, 2, 3$ ) et respectivement de  $\epsilon$ , telles que toute solution  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$  du système (3.34) vérifie*

$$\int_{q_T^0} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1} |\phi_1|^2 \leq \epsilon C_A I(p_1, \phi_1) + C_{A,\epsilon} \int_{q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+4} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2).$$

*Démonstration.* On introduit une fonction de troncature  $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  telle que  $\text{supp}(\xi) \subset \omega$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $\xi = 1$  sur  $\omega^0$  et

$$\frac{\nabla \xi}{\sqrt{\xi}} \in L^\infty(\Omega), \quad \frac{\Delta \xi}{\sqrt{\xi}} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N),$$

et on pose

$$m_\xi = \max \left( \left\| \frac{\nabla \xi}{\sqrt{\xi}} \right\|_{L^\infty(\Omega)}, \left\| \frac{\Delta \xi}{\sqrt{\xi}} \right\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)} \right). \quad (3.35)$$

Supposons, par exemple, que  $a_{12} \geq m$  dans  $q_T^0$  ou  $a_{12} \leq -m$  dans  $q_T^0$ . Puisque  $\xi = 1$  sur  $\omega^0$ , on en déduit que

$$\int_{q_T^0} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1} |\phi_1|^2 \leq \frac{1}{m} \left| \int_{Q_T} a_{12} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1} |\phi_1|^2 \right|. \quad (3.36)$$

La preuve se divise naturellement en deux étapes : dans un premier temps, on montre que

$$\begin{aligned} \left| \int_{Q_T} a_{12} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1} |\phi_1|^2 \right| &\leq \epsilon I(p_1, \phi_1) + K_\epsilon \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+4} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2) \\ &\quad + C_\epsilon \int_{Q_T} (s\gamma)^{p_1+2} |\nabla \phi_2|^2, \end{aligned}$$

où  $K_\epsilon$  est donné par (3.47), puis on élimine, dans un deuxième temps, le terme en  $\nabla \phi_2$  dans cette inégalité en démontrant l'estimation suivante

$$\int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+2} |\nabla \phi_2|^2 \leq \epsilon^2 I(p_1, \phi_1) + M_\epsilon \int_{q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+4} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2),$$

où  $M_\epsilon$  est donné par (3.57).

– **Étape 1.**

On multiplie la 2<sup>ème</sup> équation de (3.34) par  $\xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1} \phi_1$  et on l'intègre sur  $Q_T$ . On obtient alors l'expression suivante :

$$\int_{Q_T} a_{12} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1} |\phi_1|^2 = - \int_{Q_T} a_{22} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1} \phi_1 \phi_2 - \int_{Q_T} a_{32} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1} \phi_1 \phi_3 - I, \quad (3.37)$$

où

$$I = \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1} \phi_1 \partial_t \phi_1 + \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1} \phi_1 \Delta \phi_2. \quad (3.38)$$

Puisque  $\sup_{x \in \Omega} (s\gamma(t))^{p_1} e^{-2s\beta(x,t)}$  a pour limite 0 en  $t \rightarrow 0$  et  $t \rightarrow T$ , une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} \phi_1 \partial_t \phi_1 &= - \int_{Q_T} \xi \partial_t (e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1}) \phi_1 \phi_2 \\ &\quad + \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} \phi_2 (\Delta \phi_1 + a_{11} \phi_1 + a_{21} \phi_2 + a_{31} \phi_3) \\ &= \int_{Q_T} \xi [a_{11} e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} - \partial_t (e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1})] \phi_1 \phi_2 + \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} \phi_2 \Delta \phi_1 \\ &\quad + \int_{Q_T} a_{21} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} |\phi_2|^2 + \int_{Q_T} a_{31} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} \phi_2 \phi_3. \end{aligned}$$

D'où, en revenant à (3.38),

$$\begin{aligned} I &= \int_{Q_T} \xi [a_{11} e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} - \partial_t (e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1})] \phi_1 \phi_2 + \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} (\phi_1 \Delta \phi_2 + \phi_2 \Delta \phi_1) \\ &\quad + \int_{Q_T} a_{21} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} |\phi_2|^2 + \int_{Q_T} a_{31} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} \phi_2 \phi_3 \\ &= \int_{Q_T} \xi [a_{11} e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} - \partial_t (e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1}) + \Delta (e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1})] \phi_1 \phi_2 \\ &\quad + \int_{Q_T} [2\nabla \xi \cdot \nabla (e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1}) + (\Delta \xi) e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1}] \phi_1 \phi_2 \\ &\quad - 2 \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 + \int_{Q_T} a_{21} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} |\phi_2|^2 + \int_{Q_T} a_{31} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} \phi_2 \phi_3. \end{aligned}$$

Finalement, en remplaçant  $I$  par cette expression dans (3.37), on conclut que

$$\int_{Q_T} a_{12} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} |\phi_1|^2 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 \quad (3.39)$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_{Q_T} a_{32} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} \phi_1 \phi_3 \\ I_2 &= \int_{Q_T} \xi [\partial_t (e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1}) - \Delta (e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1}) - (a_{11} + a_{22}) e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1}] \phi_1 \phi_2 \\ I_3 &= - \int_{Q_T} [2\nabla \xi \cdot \nabla (e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1}) + (\Delta \xi) e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1}] \phi_1 \phi_2 \\ I_4 &= 2 \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 \\ I_5 &= - \int_{Q_T} a_{21} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} |\phi_2|^2 \\ I_6 &= - \int_{Q_T} a_{31} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} \phi_2 \phi_3. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que, pour tous  $\eta$ ,  $\mu$  et  $\nu$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que  $\mu \leq \nu$ , il existe une constante  $C_{\mu,\nu}$  et une constante  $C_\eta$  telles qu'on ait sur  $]0, T[$  :

$$\begin{aligned} (s\gamma)^\mu &\leq C_{\mu,\nu} (s\gamma)^\nu, \\ |\nabla (e^{-2s\beta}(s\gamma)^\eta)| &\leq C_\eta e^{-2s\beta}(s\gamma)^{\eta+1}, \\ |\partial_t (e^{-2s\beta}(s\gamma)^\eta)| + |\Delta (e^{-2s\beta}(s\gamma)^\eta)| &\leq C_\eta e^{-2s\beta}(s\gamma)^{\eta+2}. \end{aligned}$$

Les estimations qui suivent reposent essentiellement sur ces trois inégalités ainsi que sur l'inégalité classique suivante

$$\forall \epsilon > 0, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |ab| \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}.$$



Dans la suite, on considérera un paramètre  $\epsilon > 0$ . Les lettres  $C$  et  $C_\epsilon$  désigneront respectivement des constantes génériques ne dépendant que des paramètres  $p_1, p_2, p_3, \omega^0, \omega, \Omega$  (resp. et  $\epsilon$ ). Les valeurs de  $C$  et  $C_\epsilon$  sont susceptibles de varier d'une ligne à l'autre.

**Estimation de  $I_1$ .** En utilisant les différentes inégalités précédemment citées, on obtient facilement :

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \epsilon \|a_{32}\|_\infty \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1} |\phi_1|^2 + C_\epsilon \|a_{32}\|_\infty \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1} |\phi_3|^2 \\ &\leq \epsilon \|a_{32}\|_\infty I(p_1, \phi_1) + C_\epsilon \|a_{32}\|_\infty \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+4} |\phi_3|^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

**Estimation de  $I_2$ .** De même, les estimations suivantes

$$|\partial_t (e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1})| + |\Delta (e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1})| \leq C e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+2}, \quad (s\gamma)^{p_1} \leq C (s\gamma)^{p_1+2},$$

donnent :

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C (1 + \|a_{11}\|_\infty + \|a_{22}\|_\infty) \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+2} |\phi_1| |\phi_2| \\ &\leq \epsilon \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1} |\phi_1|^2 + C_\epsilon (1 + \|a_{12}\|_\infty + \|a_{22}\|_\infty)^2 \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+4} |\phi_2|^2 \\ &\leq \epsilon I(p_1, \phi_1) + C_\epsilon (1 + \|a_{12}\|_\infty + \|a_{22}\|_\infty)^2 \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+4} |\phi_2|^2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

**Estimation de  $I_3$ .** De la même façon, on utilise les estimations

$$|\nabla (e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1})| \leq C e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+1}, \quad (s\gamma)^{p_1} \leq C (s\gamma)^{p_1+1},$$

pour en déduire une estimation de  $I_3$  :

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq C \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+1} (2|\nabla\xi| + |\Delta\xi|) |\phi_1| |\phi_2| \\ &\leq C m_\xi \int_{Q_T} \sqrt{\xi} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+1} |\phi_1| |\phi_2|, \end{aligned}$$

où  $m_\xi$  est donné par (3.35). On en déduit donc que

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \epsilon \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1} |\phi_1|^2 + C_\epsilon \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+2} |\phi_2|^2 \\ &\leq \epsilon I(p_1, \phi_1) + C_\epsilon \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+2} |\phi_2|^2 \\ &\leq \epsilon I(p_1, \phi_1) + C_\epsilon \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+4} |\phi_2|^2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

**Estimation de  $I_4$ .** On a facilement,

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq \epsilon \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1-2} |\nabla\phi_1|^2 + C_\epsilon \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+2} |\nabla\phi_2|^2 \\ &\leq \epsilon I(p_1, \phi_1) + C_\epsilon \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+2} |\nabla\phi_2|^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

**Estimation de  $I_5$ .** L'estimation  $(s\gamma)^{p_1} \leq C (s\gamma)^{p_1+4}$  donne immédiatement

$$|I_5| \leq C \|a_{21}\|_\infty \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+4} |\phi_2|^2. \quad (3.44)$$

**Estimation de  $I_6$ .** De même,

$$|I_6| \leq C \|a_{31}\|_\infty \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+4} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2). \quad (3.45)$$

**Fin de l'étape 1.** En rassemblant dans (3.39) les estimations obtenues en (3.40), (3.41), (3.42), (3.43), (3.44) et (3.45), on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \left| \int_{Q_T} a_{12} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1} |\phi_1|^2 \right| &\leq \epsilon (3 + \|a_{32}\|_\infty) I(p_1, \phi_1) \\ &+ K_\epsilon \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+4} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2) \\ &+ C_\epsilon \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+2} |\nabla \phi_2|^2, \end{aligned} \quad (3.46)$$

où

$$K_\epsilon = C (\|a_{21}\|_\infty + \|a_{31}\|_\infty) + C_\epsilon (1 + \|a_{32}\|_\infty + \|a_{12}\|_\infty^2 + \|a_{22}\|_\infty^2). \quad (3.47)$$

– **Étape 2.** On pose  $\eta(x, t) = e^{-2s\beta(x,t)} (s\gamma(t))^{p_1+2}$  pour tout  $(x, t) \in Q_T$ . Il s'agit d'établir une inégalité du type

$$\int_{Q_T} \eta |\nabla \phi_2|^2 \leq \epsilon^2 I(p_1, \phi_1) + M_\epsilon \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+4} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2).$$

Puisque  $\phi_2 = 0$  sur  $\Sigma_T$ , on a, d'une part en intégrant par parties sur  $\Omega$ ,

$$\int_{Q_T} \eta \xi |\nabla \phi_2|^2 = - \int_{Q_T} \phi_2 \nabla(\eta \xi) \cdot \nabla \phi_2 - \int_{Q_T} \eta \xi \phi_2 \Delta \phi_2. \quad (3.48)$$

D'autre part, en multipliant la deuxième équation de (3.34) par  $\eta \xi \phi_2$  et en intégrant sur  $Q_T$ , on peut exprimer la dernière intégrale de l'égalité précédente comme

$$- \int_{Q_T} \eta \xi \phi_2 \Delta \phi_2 = \int_{Q_T} \eta \xi \phi_2 \partial_t \phi_2 + \int_{Q_T} a_{12} \eta \xi \phi_1 \phi_2 + \int_{Q_T} a_{22} \eta \xi |\phi_2|^2 + \int_{Q_T} a_{32} \eta \xi \phi_2 \phi_3.$$

En remplaçant dans (3.48), on obtient :

$$\int_{Q_T} \eta \xi |\nabla \phi_2|^2 = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 \quad (3.49)$$

avec

$$\begin{aligned} J_1 &= - \int_{Q_T} \phi_2 \nabla(\eta \xi) \cdot \nabla \phi_2 \\ J_2 &= \int_{Q_T} \eta \xi \phi_2 \partial_t \phi_2 \\ J_3 &= \int_{Q_T} a_{12} \eta \xi \phi_1 \phi_2 \\ J_4 &= \int_{Q_T} a_{22} \eta \xi |\phi_2|^2 \\ J_5 &= \int_{Q_T} a_{32} \eta \xi \phi_2 \phi_3. \end{aligned}$$

**Estimation de  $J_1$ .** Une intégration par parties en espace donne

$$J_1 = -\frac{1}{2} \int_{Q_T} \nabla(\eta \xi) \cdot \nabla (|\phi_2|^2) = \frac{1}{2} \int_{Q_T} \Delta(\eta \xi) |\phi_2|^2. \quad (3.50)$$

Puisque

$$|\Delta(\eta \xi)| \leq |\Delta \eta| \xi + \eta |\Delta \xi| + 2|\nabla \eta| |\nabla \xi|,$$

et que  $\eta = e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+2}$  vérifie

$$|\Delta \eta| \leq C e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+4}, \quad \eta \leq C e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+4}, \quad |\nabla \eta| \leq C e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p_1+4},$$

alors, on a

$$|\Delta(\eta\xi)| \leq C(\xi + |\Delta\xi| + 2|\nabla\xi|) e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+4}.$$

En utilisant la définition de  $m_\xi$  et le fait que  $0 \leq \xi \leq 1$ , on obtient

$$|\Delta(\eta\xi)| \leq C(\xi + 3m_\xi\sqrt{\xi}) e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+4} \leq C\sqrt{\xi} e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+4}.$$

En combinant cette inégalité avec (3.50), il vient que

$$|J_1| \leq C \int_{Q_T} \sqrt{\xi} e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+4} |\phi_2|^2.$$

D'où

$$|J_1| \leq C \int_{q_T} e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+4} |\phi_2|^2, \quad (3.51)$$

puisque  $0 \leq \xi \leq 1$  et  $\text{supp}(\xi) \subset \omega$ .

**Estimation de  $J_2$ .** Une intégration par parties en temps dans  $J_2$  donne :

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_{Q_T} \eta \xi \partial_t (|\phi_2|^2) = -\frac{1}{2} \int_{Q_T} \xi \partial_t \eta |\phi_2|^2,$$

puisque  $\sup_{x \in \Omega} \eta(t, x) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow 0$  ou  $t \rightarrow T$ . En utilisant le fait que  $\eta = e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+2}$  vérifie

$$|\partial_t \eta| \leq C e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+4},$$

et les propriétés de  $\xi$ , on en déduit que

$$|J_2| \leq C \int_{q_T} e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+4} |\phi_2|^2. \quad (3.52)$$

**Estimation de  $J_3$ .** Il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq \|a_{12}\|_\infty \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+2} |\phi_1| |\phi_2| \\ &\leq \epsilon^2 \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} |\phi_1|^2 + C_\epsilon \|a_{12}\|_\infty^2 \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+4} |\phi_2|^2 \\ &\leq \epsilon^2 I(p_1, \phi_1) + C_\epsilon \|a_{12}\|_\infty^2 \int_{q_T} e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+4} |\phi_2|^2. \end{aligned} \quad (3.53)$$

**Estimation de  $J_4$ .** Toujours en utilisant l'estimation  $\eta \leq C e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+4}$ , on peut écrire que

$$|J_4| \leq C \|a_{22}\|_\infty \int_{q_T} e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+4} |\phi_2|^2. \quad (3.54)$$

**Estimation de  $J_5$ .** De même, on a

$$\begin{aligned} |J_5| &\leq \frac{\|a_{32}\|_\infty}{2} \int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+2} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2) \\ &\leq C \|a_{32}\|_\infty \int_{q_T} e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+4} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2). \end{aligned} \quad (3.55)$$

**Fin de l'étape 2.** D'après (3.49), les estimations (3.51)-(3.55) permettent de conclure que

$$\int_{Q_T} \xi e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+2} |\nabla \phi_2|^2 \leq \epsilon^2 I(p_1, \phi_1) + M_\epsilon \int_{q_T} e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+4} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2), \quad (3.56)$$

où

$$M_\epsilon = C(1 + \|a_{22}\|_\infty^2 + \|a_{32}\|_\infty^2) + C_\epsilon \|a_{12}\|_\infty^2. \quad (3.57)$$

– **Conclusion.** En combinant les inégalités (3.36), (3.46) et (3.56), on obtient finalement

$$\begin{aligned} \int_{q_T^0} e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} |\phi_1|^2 &\leq \frac{\epsilon}{m} (3 + \|a_{32}\|_\infty + \epsilon C_\epsilon) I(p_1, \phi_1) \\ &+ \frac{1}{m} (K_\epsilon + C_\epsilon M_\epsilon) \int_{q_T} e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+4} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2), \end{aligned} \quad (3.58)$$

les constantes  $K_\epsilon$  et  $M_\epsilon$  étant respectivement données par (3.47) et (3.57). En fait, la constante  $C_\epsilon$  peut être choisie de la forme  $C_\epsilon = \frac{C}{\epsilon}$  dans (3.46), (3.47) et (3.58), et de la forme  $C_\epsilon = \frac{C}{\epsilon^2}$  dans (3.57), ce qui donne finalement

$$\begin{aligned} \int_{q_T^0} e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1} |\phi_1|^2 &\leq \epsilon \frac{C}{m} (1 + \|a_{32}\|_\infty) I(p_1, \phi_1) \\ &+ C_{A,\epsilon} \int_{q_T} e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+4} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2), \end{aligned}$$

où

$$C_{A,\epsilon} = \frac{C}{m} \left( \|a_{21}\|_\infty + \|a_{31}\|_\infty + \frac{1 + \|a_{32}\|_\infty + \|a_{12}\|_\infty^2 + \|a_{22}\|_\infty^2 + \|a_{32}\|_\infty^2 + \frac{\|a_{12}\|_\infty^2}{\epsilon^2}}{\epsilon} \right). \quad (3.59)$$

□

**Proposition 3.20.** *Sous les hypothèses du Lemme 3.19, pour tout  $\phi^0 \in (L^2(\Omega))^3$ , la solution  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$  du système (3.34) associée à  $f_1 = f_2 = f_3 = 0$  vérifie, pour tout  $s \geq s_1$ ,*

$$I(p_1, \phi_1) + I(p_2, \phi_2) + I(p_3, \phi_3) \leq e^{C(1+\|A\|_\infty)} \int_{q_T} e^{-2s\beta}(s\gamma)^{p_1+4} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2),$$

où  $s_1$  est donné par (3.29) avec  $c_1$  ne dépendant que de  $p_1, p_2, p_3, \omega^0$  et  $\Omega$ , la constante  $C > 0$  ne dépend que de  $p_1, p_2, p_3, \omega^0, \omega, \Omega$  et  $m$ , et où  $\|A\|_\infty$  est défini par  $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq 3} \|a_{ij}\|_\infty$ .

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la Proposition 3.16 à l'ouvert non vide  $\omega^0$  et d'appliquer ensuite le Lemme 3.19 avec  $\epsilon = \frac{1}{2C_1 C_A}$ . On remarque alors que l'expression de la constante  $C_{A,\epsilon}$  obtenue dans (3.59) conduit à l'obtention de la constante  $e^{C(1+\|A\|_\infty)}$ . □

**Corollaire 3.21.** *Soient  $\omega$  un ouvert non vide contenu dans  $\Omega$  et  $T > 0$ . S'il existe un ouvert non vide  $\omega^0$  contenu dans  $\omega$  et une constante  $m > 0$  tels que  $a_{12} \geq m$  dans  $q_T^0 := \omega^0 \times ]0, T[$ , ou  $a_{12} \leq -m$  dans  $q_T^0$ , ou encore tels que  $a_{13} \geq m$  dans  $q_T^0$ , ou  $a_{13} \leq -m$  dans  $q_T^0$ , alors le système (3.33) (voir page 61) est contrôlable aux trajectoires au temps  $T$ .*

Pour démontrer ce résultat on va utiliser l'estimation d'énergie suivante :

**Lemme 3.22.** *Soit  $\phi$  une solution du système (3.34). La fonction  $t \mapsto e^{2\|A\|_\infty t} \int_\Omega |\phi(x, t)|^2 dx$  est croissante sur  $[0, T]$ . En particulier, on a*

$$\|\phi(\cdot, 0)\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 \leq \frac{2}{T} e^{2\|A\|_\infty T} \int_{\Omega \times [T/4, 3T/4]} |\phi|^2.$$

Pour démontrer ce lemme on peut considérer le système vérifié par la fonction  $\psi(x, t) = e^{2\|A\|_\infty t} \phi(x, t)$ . Il suffit alors de multiplier scalairement par  $\psi(\cdot, t)$  ce système et d'intégrer sur  $\Omega$  pour en déduire la croissance de  $t \mapsto \int_\Omega |\psi(x, t)|^2 dx$ , et donc de  $t \mapsto e^{2\|A\|_\infty t} \int_\Omega |\phi(x, t)|^2 dx$ , sur  $[0, T]$ .

*Démonstration du Corollaire 3.21.* D'après le Théorème 2.16, il s'agit de démontrer que

$$\|\phi(\cdot, 0)\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 \leq C_T \int_{q_T} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2), \quad (3.60)$$

avec  $C_T > 0$  indépendante de la donnée initiale  $\phi^0$ . On applique la Proposition 3.20 avec  $p_1 = p_2 = p_3 = p$  où  $p \in \mathbb{R}$ . Il suit que toute solution de (3.34) associée à  $f_1 = f_2 = f_3 = 0$  vérifie

$$I(p, \phi) \leq e^{C(1+\|A\|_\infty)} \int_{q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p+4} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2), \quad (3.61)$$

pour tout  $s \geq s_0$ , où  $s_0$  est défini dans le Corollaire 3.17 (avec  $c_0$  dépendant de  $p$ ,  $\omega^0$  et  $\Omega$ ), et où  $C$  dépend uniquement de  $p$ ,  $\omega^0$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$  et  $m$ . On va procéder en deux étapes :

– **Étape 1 : minoration de  $I(p, \phi)$  par  $\|\phi(\cdot, 0)\|_{(L^2(\Omega))^3}^2$ .** D'après le Lemme 3.22, on a déjà

$$\|\phi(\cdot, 0)\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 \leq \frac{2}{T} e^{2\|A\|_\infty T} \int_{\Omega \times [T/4, 3T/4]} |\phi|^2. \quad (3.62)$$

D'autre part, par définition de  $\beta_0$  et de  $\beta$  (voir le Théorème 3.13), on a, sur  $\Omega \times [T/4, 3T/4]$ ,  $e^{-2s\beta} (s\gamma)^p \geq e^{-2sM_0\gamma} \left(\frac{4s}{T^2}\right)^p \geq e^{-2^5 s M_0/T^2} \left(\frac{4s}{T^2}\right)^p$ , où  $M_0 = \max_{\bar{\Omega}} \beta_0$ . D'où l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times [T/4, 3T/4]} |\phi|^2 &\leq \left(\frac{T^2}{4s}\right)^p e^{2^5 s M_0/T^2} \int_{\Omega \times [T/4, 3T/4]} e^{-2s\beta} (s\gamma)^p |\phi|^2 \\ &\leq \left(\frac{T^2}{4s}\right)^p e^{2^5 s M_0/T^2} \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^p |\phi|^2 \\ &\leq \left(\frac{T^2}{4s}\right)^p e^{2^5 s M_0/T^2} I(p, \phi). \end{aligned}$$

En combinant cette inégalité avec (3.62), on obtient :

$$\|\phi(\cdot, 0)\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 \leq \frac{2}{T} \left(\frac{T^2}{4s}\right)^p e^{2\|A\|_\infty T + 2^5 s M_0/T^2} I(p, \phi). \quad (3.63)$$

– **Étape 2 : majoration de  $\int_{q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p+4} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2)$  par  $\int_{q_T} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2)$ .** Comme la fonction  $\beta_0$  est continue sur le compact  $\bar{\Omega}$ , on a par définition de  $\beta$ , l'inégalité  $e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p+4} \leq e^{-2m_0 s \gamma} (s\gamma)^{p+4}$  dans  $Q_T$ , où  $m_0 = \min_{\bar{\Omega}} \beta_0$ . Puisque la fonction  $\tau \mapsto e^{-2m_0 \tau} \tau^{p+4}$  est décroissante pour  $\tau \geq \frac{p+4}{2m_0}$  et que  $\gamma \geq \frac{4}{T^2}$  sur  $]0, T[$ , on en déduit que si  $s \geq \frac{(p+4)T^2}{8m_0}$ , alors

$$e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p+4} \leq e^{-(p+4)} \left(\frac{p+4}{2m_0}\right)^{p+4} = \left(\frac{p+4}{2m_0 e}\right)^{p+4}. \quad (3.64)$$

Il suit que

$$\int_{q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{p+4} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2) \leq \left(\frac{p+4}{2m_0 e}\right)^{p+4} \int_{q_T} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2), \quad (3.65)$$

pour tout  $s \geq \tilde{s}_0$ , où

$$\tilde{s}_0 = s_0 + \frac{(p+4)T^2}{8m_0} = \tilde{c}_0 \left( T + T^2 + \frac{T^2}{4} \max_{1 \leq i, j \leq 3} \|a_{ij}\|_\infty^{2/3} \right),$$

$\tilde{c}_0$  désignant une nouvelle constante ne dépendant que de  $p$ ,  $\omega^0$  et  $\Omega$ .

Finalement, en combinant les inégalités (3.61), (3.63) et (3.65), on obtient, pour tout  $s \geq \tilde{s}_0$ ,

$$\|\phi(\cdot, 0)\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 \leq C_{T,s} \int_{q_T} (|\phi_2|^2 + |\phi_3|^2),$$

où

$$C_{T,s} = \left(\frac{p+4}{2m_0 e}\right)^{p+4} \frac{2}{T} \left(\frac{T^2}{4s}\right)^p \exp\left(C(1+\|A\|_\infty) + 2\|A\|_\infty T + 2^5 s M_0/T^2\right),$$

ce qui démontre bien l'inégalité d'observabilité (3.60).  $\square$

**Remarque 3.23.** Il est possible d'obtenir une estimation de la *constante d'observabilité*  $C_T$  dans (3.60), ce qui est utile en vue des applications à l'étude de la contrôlabilité de systèmes non linéaires. Il suffit pour cela de prendre  $s = \tilde{s}_0$  dans l'expression de  $C_{T,s}$ , ce qui donne

$$C_T = \exp \left( C \left( 1 + \|A\|_\infty + \max_{1 \leq i, j \leq 3} \|a_{ij}\|_\infty^{2/3} + \|A\|_\infty T + \frac{1}{T} \right) \right),$$

où  $C > 0$  est une constante qui ne dépend que de  $p$ ,  $\omega^0$  et  $\Omega$ .

### 3.2.2.3 Lien avec le critère de Kalman

Remarquons que dans le Corollaire 3.18, aucune condition sur les coefficients de la matrice de couplage  $A$  n'est requise pour établir la contrôlabilité du système de trois équations (2.30) par trois contrôles. Notons que ce système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + A(x, t)y + Bv(x, t)1_\omega, & \text{dans } Q_T, \\ y = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(0) = y^0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.66)$$

où  $B = I$  est la matrice identité de  $M^3(\mathbb{R})$ . Supposons, un instant, que  $A \in M^3(\mathbb{R})$  (matrice constante), alors le critère de Kalman (voir Théorème 2.11) pour les systèmes d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bv(t), & t \in ]0, T[ \\ y(0) = y^0 \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (3.67)$$

donne l'équivalence entre la contrôlabilité de (3.67) et le fait que  $\text{rang} K = 3$ , où

$$K = (B, AB, A^2B). \quad (3.68)$$

Remarquons que, pour  $B = I$ , on a toujours  $\text{rang} K = 3$  et donc contrôlabilité de (3.67).

Dans le Corollaire 3.21, on a démontré qu'il y avait contrôlabilité de (3.66) lorsque

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sous la condition que l'un des coefficients  $a_{12}$  ou  $a_{13}$  soit positivement minoré ou négativement majoré sur un sous-ensemble  $q_T^0 = \omega^0 \times ]0, T[$  de la région de contrôle  $q_T$ . Si l'on suppose maintenant que la matrice  $A$  est à coefficients constants, alors le critère de Kalman donne pour ce choix des matrices  $A$  et  $B$  que le système (3.67) est contrôlable si, et seulement si, la matrice  $K$  admet au moins un mineur d'ordre 3 non nul. Les mineurs d'ordre 3 étant  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{12}(a_{11} + a_{21}) + a_{13}a_{21}$  et  $a_{12}a_{23} + a_{13}(a_{11} + a_{33})$ , il apparaît clairement que la condition de contrôlabilité pour (3.67) est que l'un des deux coefficients réels  $a_{12}$  ou  $a_{13}$  soit non nul.

Les deux résultats obtenus dans les Corollaires 3.18 et 3.21 semblent donc conforter la conjecture selon laquelle il serait possible de généraliser le critère de Kalman aux systèmes d'équations différentielles paraboliques. Cette conjecture a fait l'objet de plusieurs travaux ces dernières années (voir [AKBGBdT11]). Mentionnons particulièrement deux résultats majeurs qui ont été démontrés par Ammar Khodja, Benabdallah, Dupaix et González-Burgos, en utilisant les inégalités de Carleman.

– **Critère de Kalman pour les systèmes paraboliques à coefficients constants.** On considère le système parabolique suivant

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + Ay + Bv1_\omega, & \text{dans } Q_T, \\ y = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(0) = y^0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.69)$$

où  $A \in M^n(\mathbb{R})$  et  $B \in M^{n,m}(\mathbb{R})$ .

**Théorème 3.24** ([AKBDGB09b]). *Le système (3.69) est contrôlable aux trajectoires à tout temps  $T > 0$  si, et seulement si,  $\text{rang} K = n$ , où  $K = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ .*

Ce résultat étend le critère de Kalman du Théorème (2.11) au cas des systèmes paraboliques à coefficients constants.

- **Critère de Kalman pour les systèmes paraboliques à coefficients dépendant du temps.**

**Théorème 3.25** ([AKBDGB09a]). *Soient  $A \in C^{n-1}([0, T], M^n(\mathbb{R}))$  et  $B \in C^n([0, T], M^{n,m}(\mathbb{R}))$ . On pose  $B_0(t) = B(t)$  et pour tout  $j = 1, \dots, n-1$ ,  $B_j(t) = A(t)B_{j-1}(t) - \frac{dB_{j-1}}{dt}(t)$ . On définit alors la matrice  $\tilde{K}(t) = (B_0(t), B_1(t), \dots, B_{n-1}(t))$ .*

1. *S'il existe  $t_0 \in [0, T]$  tel que  $\text{rang} \tilde{K}(t_0) = n$ , alors le système (3.69) est contrôlable aux trajectoires au temps  $T$ .*
2. *Le système (3.69) est totalement contrôlable aux trajectoires sur  $]0, T[$  si, et seulement si, il existe un sous-ensemble  $E$  dense dans  $]0, T[$  tel que*

$$\forall t \in E, \quad \text{rang} \tilde{K}(t) = n.$$

Il s'agit d'une généralisation du Théorème 2.12 de Silverman et Meadows à la classe des systèmes paraboliques à coefficients non constants. Remarquons que dans ce cas, l'hypothèse de régularité sur les matrices  $A$  et  $B$  est légèrement plus forte que dans le cas de la dimension finie. On présentera dans le chapitre 5 une condition suffisante de contrôlabilité du système (3.69) par un seul contrôle qui renvoie, en un certain sens, à l'égalité  $\text{rang} \tilde{K}(t) = n$ .

## Références bibliographiques du chapitre 3

- [AKBDGB09a] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH, C. DUPAIX & M. GONZÁLEZ-BURGOS – « A generalization of the Kalman rank condition for time-dependent coupled linear parabolic systems », *Differ. Equ. Appl.* **1** (2009), no. 3, p. 427–457.
- [AKBDGB09b] —, « A Kalman rank condition for the localized distributed controllability of a class of linear parabolic systems », *J. Evol. Equ.* **9** (2009), no. 2, p. 267–291.
- [AKBGBdT11] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH, M. GONZÁLEZ-BURGOS & L. DE TERESA – « Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems : a survey », *Math. Control Relat. Fields* **1** (2011), no. 3, p. 267–306.
- [FCZ00] E. FERNÁNDEZ-CARA & E. ZUAZUA – « The cost of approximate controllability for heat equations : the linear case », *Adv. Differential Equations* **5** (2000), no. 4-6, p. 465–514.
- [FI96] A. V. FURSIKOV & O. Y. IMANUVILOV – *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes Series, vol. 34, Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.
- [GBdT10] M. GONZÁLEZ-BURGOS & L. DE TERESA – « Controllability results for cascade systems of  $m$  coupled parabolic PDEs by one control force », *Port. Math.* **67** (2010), no. 1, p. 91–113.
- [Ing36] A. E. INGHAM – « Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series », *Math. Z.* **41** (1936), no. 1, p. 367–379.
- [IY03] O. Y. IMANUVILOV & M. YAMAMOTO – « Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **39** (2003), no. 2, p. 227–274.
- [KL05] V. KOMORNIK & P. LORETI – *Fourier series in control theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [Lio68] J.-L. LIONS – *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Avant propos de P. Lelong, Dunod, Paris, 1968.
- [Mau08] K. MAUFFREY – *Inégalités d'Ingham et applications à la contrôlabilité*, Mémoire, Université de Franche-Comté, 2008.
- [Meh09] M. MEHRENBARGER – « An Ingham type proof for the boundary observability of a  $N - d$  wave equation », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **347** (2009), no. 1-2, p. 63–68.

- [TW09] M. TUCSNAK & G. WEISS – Observation and control for operator semigroups, Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.





Deuxième partie

Deux résultats de contrôlabilité



## Chapitre 4

# Contrôlabilité frontière par une force de contrôle d'un système hyperbolique avec spectre essentiel

On étudie dans ce chapitre la contrôlabilité exacte frontière du système (1.27) qui a été présenté dans la section 1.1.6.

Ce système est issu d'une simplification d'un modèle membranaire de coques élastiques (voir, par exemple, [SHSP89]). Comme on l'a vu dans le chapitre 1, l'opérateur  $A$  possède un spectre essentiel non vide. On montre que cette propriété empêche la contrôlabilité d'avoir lieu uniformément en les données initiales  $(u^0, u^1)$ . On donne ici une caractérisation de l'ensemble des données initiales contrôlables. En particulier, on démontre que l'ensemble des données initiales qui sont uniquement engendrées par les vecteurs propres  $e_{p,q}^+$  de  $A$  associés aux valeurs propres  $\lambda_{p,q}^+$  (qui se comportent asymptotiquement comme les valeurs propres de  $-\Delta$ ) est exactement contrôlable par l'intermédiaire d'un seul contrôle agissant sur la première composante du système. La preuve de ce résultat repose sur une inégalité d'observabilité que l'on démontre en adaptant l'inégalité de type Ingham qui existe pour l'équation des ondes en dimension deux (cf section 3.1). Ce travail fournit un exemple de système d'équations aux dérivées partielles contrôlé par un seul contrôle. On présente également quelques simulations numériques pour illustrer ce résultat.

Ce chapitre a fait l'objet d'une publication conjointe avec Farid Ammar Khodja et Arnaud Münch, [AKMM11], dans SIAM Journal on Control and Optimization. On donne ci-dessous une des versions, en anglais, de cet article.

### 4.1 Introduction - Problem statement

Let  $\Omega = (0, 1)^2$  and  $\Gamma$  be the part of  $\partial\Omega$  defined by  $\Gamma = \{(x, y) \in \partial\Omega, xy = 0\}$ . Let  $T$  be a positive real number and  $a, \alpha$  be two real numbers such that  $a > \alpha^2 > 0$  and  $\sqrt{a - \alpha^2}/\pi \notin \mathbb{N}^*$ . We analyze in this work the exact boundary controllability of the following system in  $u = (u_1, u_2)^T$

$$\begin{cases} u'' + Au = 0 & \text{in } Q_T = \Omega \times (0, T) \\ u_1 = v \mathbf{1}_\Gamma & \text{on } \Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T) \\ (u(\cdot, 0), u'(\cdot, 0)) = (u^0, u^1) & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

where

$$A = \begin{pmatrix} -\Delta & -\alpha\partial_x \\ \alpha\partial_x & a \end{pmatrix}.$$

The study of this system is motivated by the following one in  $u = (u_1, u_2, u_3)^T$

$$\begin{cases} u'' + \mathcal{A}u = 0 & \text{in } Q_T \\ (u_1, u_2) = (v_1, v_2) \mathbf{1}_\Gamma & \text{on } \Sigma_T \\ (u(\cdot, 0), u'(\cdot, 0)) = (u^0, u^1) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

where the operator

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -a\partial_{xx}^2 - c\partial_{yy}^2 & -(b+c)\partial_{xy}^2 & -ar^{-1}\partial_x \\ -(b+c)\partial_{xy}^2 & -c\partial_{xx}^2 - a\partial_{yy}^2 & -br^{-1}\partial_y \\ r^{-1}a\partial_x & r^{-1}b\partial_y & r^{-2}a \end{pmatrix}$$

is used to model a cylindrical membrane elastic shell (see [SHSP89]). Here  $a = 8\mu(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu)$ ,  $b = 4\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$  and  $c = 2\mu$  where  $\lambda, \mu > 0$  denote the Lamé coefficients and  $r^{-1} > 0$  - the coupling parameter between the tangential displacement  $(u_1, u_2)$  and the normal displacement  $u_3$  of the shell - denotes the curvature of the cylinder. This mixed order and formally self-adjoint operator, when associated with homogeneous Dirichlet boundary conditions on the first two components, enters in the framework of [GG77]. It possesses an essential spectrum  $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$  that can be computed using [GG79]: precisely  $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = [0, 2r^{-2}(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)]$ . Therefore, the spectrum of  $\mathcal{A}$  is composed of two distinct parts, the essential spectrum plus a discrete spectrum with asymptotic behavior equal, up to some constant, to the spectrum of  $-\Delta$ . The difficulty here is that the discrete spectrum is not known explicitly. In this paper, instead of  $\mathcal{A}$  we consider the operator  $A$  which is simpler but presents the same structure and which spectrum can be explicitly computed.

We set  $H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  (equipped with the natural scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ ) and  $H_{1/2} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Let  $H_{-1/2}$  denotes the dual of  $H_{1/2}$  with respect to the pivot space  $H$ . System (4.1) is said exactly controllable at time  $T > 0$  if for any initial data  $(u^0, u^1) \in H \times H_{-1/2}$  and any target  $(u_T^0, u_T^1) \in H \times H_{-1/2}$  there exists a control function  $v$  in a suitable space, such that the unique solution  $u = (u_1, u_2)^T$  of system (4.1) satisfies

$$(u(\cdot, T), u'(\cdot, T)) = (u_T^0, u_T^1) \quad \text{in } \Omega.$$

We point out that the variable  $u_2$  in system (4.1) is free of any condition on the boundary  $\partial\Omega$ . In particular, system (4.1) provides a non trivial example for which the number of controls is strictly lower than the number of components.

As it is usual, the controllability issue is equivalent to an observability inequality that we will rigorously prove to be:

$$\|(\Phi^0, \Phi^1)\|_{H_{1/2} \times H}^2 \leq C \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \alpha \psi \nu_1 \right)^2 d\sigma dt, \quad (4.2)$$

( $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  denotes the unit outward normal to  $\Gamma$ ) for any initial data  $(\Phi^0, \Phi^1)$  belonging to  $H_{1/2} \times H$ , for the homogeneous adjoint system in  $\Phi = (\varphi, \psi)^T$ :

$$\begin{cases} \Phi'' + A\Phi = 0 & \text{in } Q_T \\ \varphi = 0 & \text{on } \Sigma_T \\ (\Phi(\cdot, 0), \Phi'(\cdot, 0)) = (\Phi^0, \Phi^1) & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (4.3)$$

The observation zone  $\Gamma$  is defined so that the triplet  $(\Omega, \Gamma, T)$  satisfies the geometric optic condition.

The originality and difficulty of the - apparently simple - system (4.3) are related to the fact that  $A$  is a mixed order operator, and therefore, possesses a non-empty essential spectrum  $\sigma_{ess}(A)$ , as shown in [GG77] in a general situation. As a consequence, the observability does not hold uniformly with respect to the data  $(\Phi^0, \Phi^1)$ . Precisely, in [GV00] the authors exhibit Weil sequences, associated with some elements of  $\sigma_{ess}(A)$  for which the observability inequality (4.2) is not true. The observability is therefore only expected, roughly speaking, in the orthogonal of some space related to the essential spectrum. To our knowledge, the only way used up to now to address this kind of problem is based on spectral analysis and Ingham type approach which can be used to prove the observability for the discrete part of the spectrum, provided some spectral gap conditions (see [Ing36]). In that framework, the existing literature mainly concerns the controllability of dynamical systems modeling the vibrations of elastic membrane shell, where precisely mixed order and self-adjoint operators appear (we refer to [SHSP89] for a detailed spectral analysis). We also mention [GLV91, GLV93] where the controllability of a hemispherical cap is studied using a nonharmonic spectral analysis. The analysis, reduced to the one spatial dimension by axial symmetry, exhibits the loss of uniform observability due to the essential spectrum composed of a single positive element. A similar study is performed in [AKGM08]

for a non-uniform elliptic operator  $A$  for which  $0 \in \sigma_{ess}(A)$ . We also refer to the Chapter 5 of [KL05] for results based on some recent extensions of Ingham type inequalities. For systems of this kind, the uniform partial controllability, which consists to drive to rest only a restricted number of components is proved in [LV97]. The observability is obtained by a so-called *spectral compensation* argument, remarking that the bad behavior of the part of the spectrum which accumulates to  $\sigma_{ess}(A)$  is somehow compensated by the suitable gap of the discrete part. In a different context, we also mention [AZ08, LR09, RR07] for the controllability of systems with spectral accumulation point.

The paper is organized as follows. In Section 4.2, after introducing some spaces in connection with spectral properties of the operator  $A$ , we set our main results. In Section 4.3, we establish the well-posedness of (4.1) for  $v$  and initial data  $(u^0, u^1)$  in suitable spaces. We divide Section 4.4 into three parts. The first one is devoted to the analysis of the adjoint system and to the formulation of the observability inequality as (4.2). In the second part, we prove the observability for any initial data  $(\Phi^0, \Phi^1)$  belonging to a closed subspace of  $H_{1/2} \times H$  spanned by eigenfunctions of  $A$  associated with the isolated eigenvalues of  $A$  with finite multiplicity. The key point is that these eigenvalues enjoy gap properties similar to those of the eigenvalues of  $-\Delta$  with Dirichlet boundary condition, used in [Meh09]. On the contrary, the third part of Section 4.4 exhibits the lack of observability in spaces related to the essential spectrum. In particular, by numerical approximation, we check that the corresponding observability constant is not uniformly bounded with respect to  $(\Phi^0, \Phi^1)$ . Section 4.5 concludes this work with some remarks and open problems.

## 4.2 Preliminaries and main results

We recall that the eigenvalues and normalized eigenfunctions of the operator  $-\Delta$  with domain  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  are given by  $\mu_{pq} = (p^2 + q^2)\pi^2$  and  $\varphi_{pq}(x, y) = 2 \sin(p\pi x) \sin(q\pi y)$  (for  $(p, q)$  in  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  and  $(x, y) \in \Omega = (0, 1)^2$ ).

The natural operator we want to consider to transform (4.3) into a second order differential equation is the operator  $A = \begin{pmatrix} -\Delta & -\alpha \partial_x \\ \alpha \partial_x & a \end{pmatrix}$  in  $H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  with domain  $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times D(\partial_x)$ . Here  $\partial_x$  is considered as an unbounded operator in  $L^2(\Omega)$ . We can prove that this operator  $A$  is not closed in  $H$ . Therefore we have to consider its closure, still denoted by  $A$  and defined by (see [ALMS94]):

$$A \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta(\varphi + \alpha \Delta^{-1} \partial_x \psi) \\ \alpha \partial_x \varphi + a \psi \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$D(A) = \left\{ (\varphi, \psi)^T \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) / \varphi + \alpha \Delta^{-1} \partial_x \psi \in H^2(\Omega) \right\}.$$

We introduce the following notation:

**Notation 4.1.** For  $p, q \geq 1$ , we set

$$\lambda_{p,q}^\pm = \frac{1}{2} \left( \mu_{pq} + a \pm \sqrt{(\mu_{pq} - a)^2 + 4\alpha^2 p^2 \pi^2} \right), \quad \mu_{pq} = (p^2 + q^2)\pi^2,$$

$$\varphi_{pq}(x, y) = 2 \sin(p\pi x) \sin(q\pi y), \quad \psi_{pq}(x, y) = 2 \cos(p\pi x) \sin(q\pi y),$$

$$e_{p,q}^\pm = \begin{pmatrix} \frac{(\lambda_{p,q}^\pm - a)}{\sqrt{(\lambda_{p,q}^\pm - a)^2 + \alpha^2 p^2 \pi^2}} \varphi_{pq}, \frac{\alpha p \pi}{\sqrt{(\lambda_{p,q}^\pm - a)^2 + \alpha^2 p^2 \pi^2}} \psi_{pq} \end{pmatrix}^T,$$

$$e_q(x, y) = (0, \sqrt{2} \sin(q\pi y))^T.$$

Straightforward computations show that for every  $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , we have:  $Ae_{p,q}^\pm = \lambda_{p,q}^\pm e_{p,q}^\pm$ ,  $Ae_q = ae_q$  and for each  $\lambda \notin \{a\} \cup \{\lambda_{p,q}^+\}_{p,q \geq 1} \cup \{\lambda_{p,q}^-\}_{p,q \geq 1}$ ,  $\text{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$ . In other words, the sets of eigenvalues and associated eigenfunctions of  $A$  are  $\{a\} \cup \{\lambda_{p,q}^+\}_{p,q \geq 1} \cup \{\lambda_{p,q}^-\}_{p,q \geq 1}$  and  $\{e_q\}_{q \geq 1} \cup \{e_{p,q}^+\}_{p,q \geq 1} \cup \{e_{p,q}^-\}_{p,q \geq 1}$  respectively. It is also easy to check that  $\lambda_{p,q}^+ \underset{\|(p,q)\| \rightarrow +\infty}{\sim} \mu_{pq}$  (the order of approximation being  $\lambda_{p,q}^+ = \mu_{pq} + \frac{\alpha^2 p^2 \pi^2}{\mu_{pq} - a} + O(\frac{p^4}{\mu_{pq}^3})$ ) and  $\lambda_{p,q}^- \leq a < \lambda_{1,1}^+ \leq \lambda_{p,q}^+$  for all  $p, q \geq 1$ . Thus

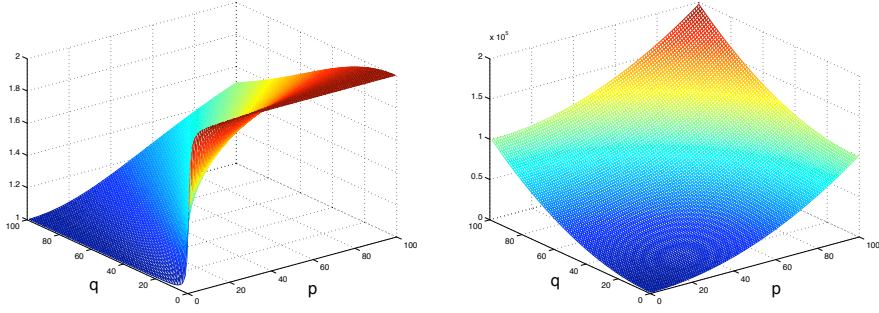


Figure 4.1: Graphs of  $(\lambda_{p,q}^-)_{(p,q) \in [1,100]^2}$  (**Left**) and of  $(\lambda_{p,q}^+)_{(p,q) \in [1,100]^2}$  (**Right**) for  $\alpha = 1$  and  $a = 2$ .

all the  $\lambda_{p,q}^+$  are isolated eigenvalues (of finite multiplicity). Figure 4.1 depicts the evolution of both sequences  $(\lambda_{p,q}^+)_{p,q \geq 1}$  and  $(\lambda_{p,q}^-)_{p,q \geq 1}$  with respect to  $p$  and  $q$ .

Using the fact that the families  $\{\varphi_{pq}\}_{p,q \geq 1}$  and  $\{\psi_{pq}\}_{p \geq 0, q \geq 1}$  are two orthonormal basis of  $L^2(\Omega)$ , we can easily check that the family  $\mathcal{B} = \{e_q\}_{q \geq 1} \cup \{e_{p,q}^+\}_{p,q \geq 1} \cup \{e_{p,q}^-\}_{p,q \geq 1}$  forms an orthonormal basis of  $H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

We refer to [Dav95] for the definition of the essential spectrum  $\sigma_{ess}(A)$  of  $A$ . As a consequence of the results in [GG77], we have:  $\sigma_{ess}(A) = [a - \alpha^2, a]$ . Besides, we can check that the set of accumulation points of the sequence  $(\lambda_{p,q}^-)_{p,q}$  is exactly  $\sigma_{ess}(A)$ . Figure 4.2 summarizes these properties.

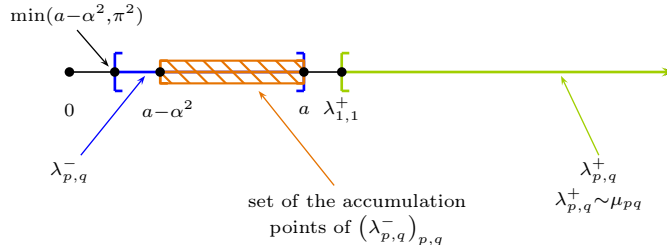


Figure 4.2: Distribution of the spectrum of  $A$  along  $\mathbb{R}$ .

**Remark 4.2.** The asymptotic behavior of  $(\lambda_{p,q}^+)_{p,q}$  is in agreement with [GG79] where it is shown that the asymptotic behavior of  $\sigma(A)$  is related to the spectrum of the principal part of  $A$ , in our case  $-\Delta$ .

The operator  $A$  defined in (4.4) is self-adjoint in  $H$ , and positive: this last assertion comes from the formula

$$\langle Au, u \rangle_H = \int_{\Omega} \left[ (\partial_x u_1 + \alpha u_2)^2 + (a - \alpha^2) u_2^2 + (\partial_y u_1)^2 \right] dx dy$$

(for  $u = (u_1, u_2)^T \in D(A)$ ) and the assumption  $a > \alpha^2$ .

For any  $\delta \in \mathbb{R}_+$ , we recall that the operator  $A^\delta$  is defined by

$$A^\delta = \sum_{p,q \geq 1} (\lambda_{p,q}^+)^\delta \langle \cdot, e_{p,q}^+ \rangle_H e_{p,q}^+ + \sum_{p,q \geq 1} (\lambda_{p,q}^-)^\delta \langle \cdot, e_{p,q}^- \rangle_H e_{p,q}^- + a^\delta \sum_{q \geq 1} \langle \cdot, e_q \rangle_H e_q,$$

$$D(A^\delta) = \left\{ \phi \in H, \sum_{p,q \geq 1} (\lambda_{p,q}^+)^{2\delta} \langle \phi, e_{p,q}^+ \rangle_H^2 + \sum_{p,q \geq 1} (\lambda_{p,q}^-)^{2\delta} \langle \phi, e_{p,q}^- \rangle_H^2 + a^{2\delta} \sum_{q \geq 1} \langle \phi, e_q \rangle_H^2 < \infty \right\}.$$

Since  $(\lambda_{p,q}^-)_{p,q}$  is bounded,  $D(A^\delta) = \left\{ \phi \in H, \sum_{p,q \geq 1} (\lambda_{p,q}^+)^{2\delta} \langle \phi, e_{p,q}^+ \rangle_H^2 < \infty \right\}$ . In the sequel, we will set

$$H_\delta = D(A^\delta), \quad \delta \geq 0.$$

The operator  $A$  is a bounded operator from  $D(A)$ , equipped with the graph norm, to  $H$ . It is well-known that  $A$  can be extended to a bounded operator from  $H$  to  $D(A)'$ , the dual space of  $D(A)$  with respect to the pivot space  $H$ . We continue to denote this extension by  $A$  and, thus,  $A$  can be seen as an unbounded self-adjoint operator on  $D(A)'$  with domain  $H$ .  $A$  is also a unitary operator from  $D(A)$  to  $H$  and from  $H$  to  $D(A)'$ . We will set in the sequel:

$$H_{-1} = D(A)'.$$

The other extension of  $A$  we will use later is the following.  $A$  can also be extended to a unitary operator from  $D(A^{1/2})$  equipped with the graph norm to  $D(A^{1/2})'$ , the dual space of  $D(A^{1/2})$  with respect to the pivot space  $H$ . We will set:

$$H_{1/2} = D(A^{1/2}), \quad H_{-1/2} = D(A^{1/2})'.$$

For details on these extensions, see for instance [TW09]. The last notation we will need is the following:

$$H^\pm = \text{span}(\{e_{p,q}^\pm, p, q \geq 1\}), \quad H^a = \text{span}(\{e_q, q \geq 1\})$$

and for  $\delta \in \mathbb{R}$ ,

$$H_\delta^\pm = H_\delta \cap H^\pm, \quad H_\delta^a = H_\delta \cap H^a.$$

We are now ready to set our main result:

**Theorem 4.3.** *Let  $\gamma = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2\pi+|\alpha|}}$  and  $T_0 = \frac{2\pi}{\gamma} \sqrt{1 + 2 \frac{(\lambda_{1,1}^+ - a + \alpha^2)^2}{(\lambda_{1,1}^+ - a)^2}}$ . Assume that  $a \leq 2\pi^2$ . For any  $T > T_0$ , any initial data  $(u^0, u^1) \in H^+ \times H_{-1/2}^+$  and any target  $(u_T^0, u_T^1) \in H^+ \times H_{-1/2}^+$ , there exist control functions  $v \in L^2(\Gamma \times (0, T))$  such that the unique solution  $u$  of system (4.1) satisfies  $u(\cdot, T) = u_T^0$  and  $u'(\cdot, T) = u_T^1$  in  $\Omega$ .*

The significant novelty of this result with respect to the literature mentioned in the introduction is that it concerns two spatial dimensions. The proof of this theorem, much less straightforward (than for the one-dimensional situation), relies on the adaptation to our problem of a recent Ingham type theorem due to Mehrenberger (see [Meh09]) for the wave equation. The restriction to the closed subspace  $H^+ \times H_{-1/2}^+$  is justified by the following proposition:

**Proposition 4.4.** *For any  $T > 0$  and any  $\epsilon > 0$ , there exist initial data  $(\Phi^0, \Phi^1) \in H_{-1/2}^- \times H^-$  for which the solution  $\Phi = (\varphi, \psi)^T$  of (4.3) satisfies*

$$\|(\Phi^0, \Phi^1)\|_{X_1}^{-2} \int_0^T \int_\Gamma \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \alpha \psi \nu_1 \right)^2 d\sigma dt < \epsilon. \quad (4.5)$$

This result means that the observability inequality (4.2) does not hold on  $H_{-1/2}^- \times H^-$  (and thus on the whole space  $H_{1/2} \times H$ ). This is in agreement with the result in [GV00] where it is shown that the lack of observability is related to the essential spectrum.

Before proving these results, we establish that the exact controllability of (4.1) is equivalent to the observability inequality (4.2). Actually, the control operator associated with system (4.1) is not bounded from the space of controls  $L^2(\Gamma \times (0, T))$  to the state space  $X_{-1}$  (the dual of  $X_1 = H_{1/2} \times H$  with respect to the pivot space  $X = H \times H_{-1/2}$ ). Section 4.3 is devoted to the study of this control operator and the formulation of the observability inequality.



### 4.3 Well-posedness of the controlled system

#### 4.3.1 A Dirichlet map

In this part, we introduce and analyze the Dirichlet map  $\mathcal{D} : D(\mathcal{D}) \subset L^2(\Gamma) \rightarrow H$  corresponding to system (4.1) defined as follows:  $D(\mathcal{D}) = \{v \in L^2(\Gamma), \mathcal{D}v \in H\}$  and for  $v \in L^2(\Gamma)$ , we denote by  $\mathcal{D}v$  the solution  $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T$  of the abstract elliptic problem

$$\begin{cases} \Lambda\theta = 0 & \text{in } \Omega \\ \theta_1 = v \mathbf{1}_\Gamma & \text{on } \partial\Omega \end{cases}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -\Delta & -\alpha\partial_x \\ \alpha\partial_x & a \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

For simplicity of notation, we set

$$\alpha_{p,q}^\pm = \frac{\pi(\lambda_{p,q}^\pm - a + \alpha^2)}{\sqrt{(\lambda_{p,q}^\pm - a)^2 + \alpha^2 p^2 \pi^2}}, \quad \beta_{p,q}^\pm = \frac{\pi(\lambda_{p,q}^\pm - a)}{\sqrt{(\lambda_{p,q}^\pm - a)^2 + \alpha^2 p^2 \pi^2}}. \quad (4.7)$$

The map  $\mathcal{D}$  satisfies the following continuity property:

**Proposition 4.5.** *For every  $\epsilon \in (1/2, 1]$ ,  $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(H^\epsilon(\Gamma), H)$ . Moreover for every  $v \in D(\mathcal{D})$  we have*

$$\langle \mathcal{D}v, e_{p,q}^\pm \rangle_H = p \frac{\alpha_{p,q}^\pm}{\lambda_{p,q}^\pm} v_{2,q} + q \frac{\beta_{p,q}^\pm}{\lambda_{p,q}^\pm} v_{1,p}, \quad \langle \mathcal{D}v, e_q \rangle_H = \frac{\alpha}{a\sqrt{2}} v_{2,q} \quad (4.8)$$

with  $v_{1,p} = 2 \int_0^1 v(x, 0) \sin(p\pi x) dx$  and  $v_{2,q} = 2 \int_0^1 v(0, y) \sin(q\pi y) dy$ .

*Proof.* Let  $\epsilon \in (1/2, 1]$  and  $v \in H^\epsilon(\Gamma)$ . Suppose that (4.6) has a solution  $\theta \in H$ . Using integrations by parts, we have

$$0 = \langle \Lambda\theta, e_{p,q}^\pm \rangle_H = \langle \theta, Ae_{p,q}^\pm \rangle_H + \int_\Gamma \left( \frac{\partial \varphi_{p,q}^\pm}{\partial \nu} + \alpha \psi_{p,q}^\pm \nu_1 \right) v \, d\sigma dt$$

where  $e_{p,q}^\pm = (\varphi_{p,q}^\pm, \psi_{p,q}^\pm)^T$ . Since  $Ae_{p,q}^\pm = \lambda_{p,q}^\pm e_{p,q}^\pm$ , this yields

$$\langle \theta, e_{p,q}^\pm \rangle_H = p \frac{\alpha_{p,q}^\pm}{\lambda_{p,q}^\pm} v_{2,q} + q \frac{\beta_{p,q}^\pm}{\lambda_{p,q}^\pm} v_{1,p}. \quad (4.9)$$

By the same arguments, we obtain

$$\langle \theta, e_q \rangle_H = \frac{\alpha}{a\sqrt{2}} v_{2,q}. \quad (4.10)$$

This proves that if (4.6) has a solution  $\theta$ , then this solution is unique and it writes

$$\theta = \sum_{p,q \geq 1} \langle \theta, e_{p,q}^+ \rangle_H e_{p,q}^+ + \sum_{p,q \geq 1} \langle \theta, e_{p,q}^- \rangle_H e_{p,q}^- + \sum_{q \geq 1} \langle \theta, e_q \rangle_H e_q,$$

with  $\langle \theta, e_{p,q}^\pm \rangle_H$  and  $\langle \theta, e_q \rangle_H$  given by (4.9) and (4.10) respectively. Now, we have to check that such a  $\theta$  is an element of  $H$ . Formula (4.9) gives

$$\left| \langle \theta, e_{p,q}^+ \rangle_H \right| \leq p^{\epsilon+1} \frac{\alpha_{p,q}^+}{\lambda_{p,q}^+} \frac{|v_{2,q}|}{p^\epsilon} + q^{\epsilon+1} \frac{\beta_{p,q}^+}{\lambda_{p,q}^+} \frac{|v_{1,p}|}{q^\epsilon}. \quad (4.11)$$

From the asymptotic property  $\lambda_{p,q}^+ \underset{\|(p,q)\| \rightarrow +\infty}{\sim} \mu_{pq}$ , we have (see (4.7))

$$\frac{\alpha_{p,q}^+}{\lambda_{p,q}^+} \sim \frac{\beta_{p,q}^+}{\lambda_{p,q}^+} \sim \frac{\pi}{\mu_{pq}} \quad \text{as } \|(p,q)\| \rightarrow +\infty.$$

Consequently, there exists a positive constant  $c_1$  such that for all  $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

$$\frac{\alpha_{p,q}^+}{\lambda_{p,q}^+} \leq \frac{c_1}{\mu_{pq}} \quad \text{and} \quad \frac{\beta_{p,q}^+}{\lambda_{p,q}^+} \leq \frac{c_1}{\mu_{pq}}.$$

Using  $0 \leq \epsilon \leq 1$  and the definition of  $\mu_{pq}$  (see Notation 4.1), we immediately obtain

$$p^{\epsilon+1} \frac{\alpha_{p,q}^+}{\lambda_{p,q}^+} \leq \frac{c_1}{\pi^2} \quad \text{and} \quad q^{\epsilon+1} \frac{\beta_{p,q}^+}{\lambda_{p,q}^+} \leq \frac{c_1}{\pi^2}.$$

From (4.11) we deduce that

$$\left| \langle \theta, e_{p,q}^+ \rangle_H \right| \leq \frac{c_1}{\pi^2} \left( \frac{|v_{2,q}|}{p^\epsilon} + \frac{|v_{1,p}|}{q^\epsilon} \right).$$

This gives

$$\sum_{p,q \geq 1} \left( \langle \theta, e_{p,q}^+ \rangle_H \right)^2 \leq 2 \left( \frac{c_1}{\pi^2} \right)^2 \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r^{2\epsilon}} \left( \sum_{q \geq 1} (v_{2,q})^2 + \sum_{p \geq 1} (v_{1,p})^2 \right) = C_1(\epsilon) \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad (4.12)$$

where  $C_1(\epsilon) = 4 \frac{c_1^2}{\pi^4} \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r^{2\epsilon}}$ .

Using the definition of  $\lambda_{p,q}^-$  and (4.7), we can prove that as  $\|(p, q)\| \rightarrow +\infty$

$$|\alpha_{p,q}^-| \sim |\alpha| \frac{q^2}{p(p^2+q^2)}, \quad |\beta_{p,q}^-| \sim -|\alpha| \frac{p}{p^2+q^2}.$$

Since  $(\lambda_{p,q}^-)_{p,q}$  is bounded away from 0, there exists a constant  $c_2 > 0$  such that for every  $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ :

$$\frac{|\alpha_{p,q}^-|}{\lambda_{p,q}^-} \leq c_2 \frac{q^2}{p(p^2+q^2)}, \quad \frac{|\beta_{p,q}^-|}{\lambda_{p,q}^-} \leq c_2 \frac{p}{p^2+q^2}.$$

Since  $0 \leq \epsilon \leq 1$ , this implies that

$$\frac{p^{\epsilon+1} |\alpha_{p,q}^-|}{q^\epsilon \lambda_{p,q}^-} \leq c_2 \frac{p^\epsilon q^{2-\epsilon}}{p^2+q^2} \leq c_2 \quad \text{and} \quad \frac{q^{\epsilon+1} |\beta_{p,q}^-|}{p^\epsilon \lambda_{p,q}^-} \leq c_2 \frac{p^{1-\epsilon} q^{\epsilon+1}}{p^2+q^2} \leq c_2.$$

Using (4.9), we deduce that

$$\left| \langle \theta, e_{p,q}^- \rangle_H \right| \leq \frac{p^{\epsilon+1} |\alpha_{p,q}^-|}{q^\epsilon \lambda_{p,q}^-} \frac{q^\epsilon |v_{2,q}|}{p^\epsilon} + \frac{q^{\epsilon+1} |\beta_{p,q}^-|}{p^\epsilon \lambda_{p,q}^-} \frac{p^\epsilon |v_{1,p}|}{q^\epsilon} \leq c_2 \left( \frac{q^\epsilon |v_{2,q}|}{p^\epsilon} + \frac{p^\epsilon |v_{1,p}|}{q^\epsilon} \right).$$

Since  $v \in H^\epsilon(\Gamma)$ , we can write from this inequality

$$\sum_{p,q \geq 1} \left( \langle \theta, e_{p,q}^- \rangle_H \right)^2 \leq 2c_2^2 \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r^{2\epsilon}} \left( \sum_{q \geq 1} (q^\epsilon v_{2,q})^2 + \sum_{p \geq 1} (p^\epsilon v_{1,p})^2 \right) \leq C_2(\epsilon) \|v\|_{H^\epsilon(\Gamma)}^2 \quad (4.13)$$

where  $C_2(\epsilon) = 4c_2^2 \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r^{2\epsilon}}$ .

Besides, formula (4.10) clearly gives  $(\langle \theta, e_q \rangle_H)_{q \geq 1} \in \ell^2$ , with

$$\sum_{q \geq 1} (\langle \theta, e_q \rangle_H)^2 = \frac{a^2}{2a^2} \sum_{q \geq 1} (v_{2,q})^2 \leq \frac{a^2}{a^2} \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad (4.14)$$

Combining (4.12), (4.13) and (4.14), we obtain  $\theta \in H$ , with  $\|\theta\|_H \leq C(\epsilon) \|v\|_{H^\epsilon(\Gamma)}$  and  $C(\epsilon) = \max \left( C_1(\epsilon), C_2(\epsilon), \frac{|\alpha|}{a} \right)$ .  $\square$

Proposition 4.5 gives that  $H^\epsilon(\Gamma) \subset D(\mathcal{D})$  for every  $\epsilon \in (1/2, 1]$ . This implies that  $\mathcal{D} : D(\mathcal{D}) \subset L^2(\Gamma) \rightarrow H$  is an unbounded operator with dense domain in  $L^2(\Gamma)$ . Consequently, the adjoint operator  $\mathcal{D}^*$  of  $\mathcal{D}$  is well-defined as an unbounded operator  $\mathcal{D}^* : D(\mathcal{D}^*) \subset H \rightarrow L^2(\Gamma)$ .

**Proposition 4.6.**  $\mathcal{D}^*$  is given by

$$D(\mathcal{D}^*) = \left\{ g \in H, \int_\Gamma \left( \frac{\partial(A^{-1}g)_1}{\partial\nu} + \alpha (A^{-1}g)_2 \nu_1 \right)^2 d\sigma < +\infty \right\},$$

$$\mathcal{D}^* g = \left( \frac{\partial(A^{-1}g)_1}{\partial\nu} + \alpha (A^{-1}g)_2 \nu_1 \right) \Big|_\Gamma, \quad \text{where } A^{-1}g = \begin{pmatrix} (A^{-1}g)_1 \\ (A^{-1}g)_2 \end{pmatrix}.$$

*Proof.* Let  $v \in D(\mathcal{D})$  and  $g \in H$ . By the definition of the adjoint of an unbounded operator,  $D(\mathcal{D}^*)$  is the set of the elements  $g \in H$  such that  $v \mapsto \langle \mathcal{D}v, g \rangle_H$  is a continuous linear form on  $L^2(\Gamma)$ . By (4.8), we have

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}v, g \rangle_H &= \sum_{p \geq 1} v_{1,p} \sum_{q \geq 1} \left( q \frac{\beta_{p,q}^+}{\lambda_{p,q}^+} \langle g, e_{p,q}^+ \rangle_H + q \frac{\beta_{p,q}^-}{\lambda_{p,q}^-} \langle g, e_{p,q}^- \rangle_H \right) \\ &+ \sum_{q \geq 1} v_{2,q} \left( \sum_{p \geq 1} \left( p \frac{\alpha_{p,q}^+}{\lambda_{p,q}^+} \langle g, e_{p,q}^+ \rangle_H + p \frac{\alpha_{p,q}^-}{\lambda_{p,q}^-} \langle g, e_{p,q}^- \rangle_H \right) + \frac{\alpha}{a\sqrt{2}} \langle g, e_q \rangle_H \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

This implies that  $D(\mathcal{D}^*)$  is the set of the elements  $g \in H$  such that the two following sequences are in  $\ell^2$ :  $\left( x_p = \sum_{q \geq 1} \left( q \frac{\beta_{p,q}^+}{\lambda_{p,q}^+} \langle g, e_{p,q}^+ \rangle_H + q \frac{\beta_{p,q}^-}{\lambda_{p,q}^-} \langle g, e_{p,q}^- \rangle_H \right) \right)_{p \geq 1}$ ,  $\left( y_q = \sum_{p \geq 1} \left( p \frac{\alpha_{p,q}^+}{\lambda_{p,q}^+} \langle g, e_{p,q}^+ \rangle_H + p \frac{\alpha_{p,q}^-}{\lambda_{p,q}^-} \langle g, e_{p,q}^- \rangle_H \right) + \frac{\alpha}{a\sqrt{2}} \langle g, e_q \rangle_H \right)_{q \geq 1}$ . It is also easily seen that

$$\left\| \frac{\partial(A^{-1}g)_1}{\partial\nu} + \alpha(A^{-1}g)_2 \nu_1 \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \|(x_p)_p\|_{\ell^2}^2 + \|(y_q)_q\|_{\ell^2}^2.$$

This allows us to conclude that  $D(\mathcal{D}^*) = \left\{ g \in H, \left\| \frac{\partial(A^{-1}g)_1}{\partial\nu} + \alpha(A^{-1}g)_2 \nu_1 \right\|_{L^2(\Gamma)} < \infty \right\}$ . Now we suppose that  $g \in D(\mathcal{D}^*)$ . Then we can easily check that (4.15) leads to  $\langle \mathcal{D}v, g \rangle_H = \int_{\Gamma} v \left( \frac{\partial(A^{-1}g)_1}{\partial\nu} + \alpha(A^{-1}g)_2 \nu_1 \right) d\sigma$ . This gives the formula for  $\mathcal{D}^*g$ .  $\square$

**Proposition 4.7.**  $\mathcal{D} : D(\mathcal{D}) \subset L^2(\Gamma) \rightarrow H$  is a closed operator on  $L^2(\Gamma)$ .

*Proof.* Let  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $D(\mathcal{D})$  which converges to a certain  $v$  in  $L^2(\Gamma)$  and such that  $(\mathcal{D}v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converges in  $H$  to an element  $\theta$ . Let  $v_{1,p}^n$  and  $v_{2,q}^n$  denote

$$v_{1,p}^n = 2 \int_0^1 v_n(x, 0) \sin(p\pi x) dx, \quad v_{2,q}^n = 2 \int_0^1 v_n(0, y) \sin(q\pi y) dy.$$

From the convergence of  $v_n$  to  $v$  in  $L^2(\Gamma)$ , we deduce that  $v_{1,p}^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v_{1,p}$  for any  $p \in \mathbb{N}^*$  and  $v_{2,q}^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v_{2,q}$  for any  $q \in \mathbb{N}^*$ . Using (4.8) we conclude that  $\langle \mathcal{D}v_n, e_{p,q}^\pm \rangle_H \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p \frac{\alpha_{p,q}^\pm}{\lambda_{p,q}^\pm} v_{2,q} + q \frac{\beta_{p,q}^\pm}{\lambda_{p,q}^\pm} v_{1,p}$  and  $\langle \mathcal{D}v_n, e_q \rangle_H \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{a\sqrt{2}} v_{2,q}$  for every  $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ .

Besides, the convergence of  $\mathcal{D}v_n$  to  $\theta$  in  $H$  implies the convergence of  $\langle \mathcal{D}v_n, e_{p,q}^\pm \rangle_H$  (resp.  $\langle \mathcal{D}v_n, e_q \rangle_H$ ) to  $\langle \theta, e_{p,q}^\pm \rangle_H$  (resp.  $\langle \theta, e_q \rangle_H$ ) for every  $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . Therefore:

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} \langle \theta, e_{p,q}^\pm \rangle_H = p \frac{\alpha_{p,q}^\pm}{\lambda_{p,q}^\pm} v_{2,q} + q \frac{\beta_{p,q}^\pm}{\lambda_{p,q}^\pm} v_{1,p} \\ \langle \theta, e_q \rangle_H = \frac{\alpha}{a\sqrt{2}} v_{2,q}. \end{cases}$$

From Proposition 4.5, this implies that  $\theta = \mathcal{D}v$ . It follows that  $v \in D(\mathcal{D})$ , since  $\theta \in H$ .  $\square$

### 4.3.2 Toward an internal control problem

We introduce the following notation:

$$X = H \times H_{-1/2}, \quad X_{-1} = H_{-1/2} \times H_{-1}, \quad X_1 = H_{1/2} \times H,$$

and

$$L : D(L) \subset X_{-1} \rightarrow X_{-1}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{pmatrix}, \quad D(L) = X.$$

Note that the operator occurring in the definition of  $L$  is the extension of  $A$  from  $H$  to  $H_{-1}$ .

In this part we transform the boundary control problem (4.1) into the familiar form of an internal control problem:

$$\begin{cases} U' = LU + Bv & \text{in } Q_T \\ U(0) = (u^0, u^1)^T & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (4.16)$$

where  $B$  is an unbounded control operator from  $L^2(\Gamma)$  to  $X_{-1}$ .

Assume that  $v$  is an element of  $H^1([0, T], D(\mathcal{D}))$ . For the moment let  $Z$  denote the vector  $Z = (u, u')^T - (\mathcal{D}v, 0)^T$  where  $u$  is solution of (4.1). Then  $Z$  is the solution of

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Lambda & 0 \end{pmatrix} Z - \begin{pmatrix} \mathcal{D}v' \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Since  $v \in H^1([0, T], D(\mathcal{D}))$ , we have  $(\mathcal{D}v', 0)^T \in L^2([0, T], D(L))$ . Therefore  $Z$  is the solution of  $Z' = LZ - (\mathcal{D}v', 0)^T$  in  $X_{-1}$  and the semigroup theory gives

$$Z(t) = S(t)Z(0) - \int_0^t S(t-s) \begin{pmatrix} \mathcal{D}v'(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds \quad (4.17)$$

where  $(S(t))_{t \geq 0}$  is the  $C^0$ -semigroup associated with the maximal and dissipative operator  $L$ . Integrating by parts in (4.17) and using  $(\mathcal{D}v(s), 0)^T \in D(L)$ , we obtain

$$Z(t) = S(t)Z(0) - \begin{pmatrix} \mathcal{D}v(t) \\ 0 \end{pmatrix} + S(t) \begin{pmatrix} \mathcal{D}v(0) \\ 0 \end{pmatrix} - \int_0^t S(t-s)L \begin{pmatrix} \mathcal{D}v(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds.$$

Replacing  $Z(t)$  with its definition, we obtain the following expression for  $(u(t), u'(t))^T$ :

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = S(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} + \int_0^t S(t-s)Bv(s)ds \quad (4.18)$$

where

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ A\mathcal{D} \end{pmatrix} : D(B) \subset L^2(\Gamma) \rightarrow X_{-1} \quad (4.19)$$

is an unbounded operator with dense domain  $D(B) = D(\mathcal{D})$ . Formula (4.18) means that  $(u, u')^T$  is the mild solution  $U$  of the internal control system (4.16).

**Theorem 4.8.** *For any  $(u^0, u^1) \in X$  and any  $v \in H^1([0, T], D(\mathcal{D}))$ , system (4.1) has a unique solution  $u$  in  $H_{-1/2}$ . Moreover,  $u \in C([0, T], H) \cap C^1([0, T], H_{-1/2}) \cap C^2([0, T], H_{-1})$ .*

*Proof.* The proof is a straightforward consequence of the semigroup theory (see for instance [TW09, Th. 4.1.6 p. 113]). The main argument is that  $Bv \in H^1([0, T], X_{-1})$  (since  $v \in H^1([0, T], D(\mathcal{D}))$ ).  $\square$

## 4.4 Controllability and observability

### 4.4.1 Formulation of the observability inequality

We introduce the control operator  $L_T : D(L_T) \subset L^2(\Gamma \times (0, T)) \rightarrow X$  defined by

$$L_T v = \int_0^T S(T-t)Bv(t)dt, \quad (4.20)$$

with domain  $D(L_T) = \{v \in L^2(\Gamma \times (0, T)), L_T v \in X\}$ . The exact boundary controllability problem for system (4.1) is the following: given  $T > 0$  large enough, initial data  $(u^0, u^1) \in X$  and final data  $(u_T^0, u_T^1) \in X$ , to find a control function  $v$  in  $D(L_T)$  such that the solution  $u$  of system (4.1) satisfies  $(u(\cdot, T), u'(\cdot, T)) = (u_T^0, u_T^1)$  in  $\Omega$ . Therefore, system (4.1) is exactly controllable at time  $T$  if and only if the control operator  $L_T$  is onto.

By Theorem 4.8,  $D(L_T)$  contains  $H^1([0, T], D(\mathcal{D}))$ , which is dense in  $L^2(\Gamma \times (0, T))$  since  $D(\mathcal{D})$  is dense in  $L^2(\Gamma)$ . Hence  $D(L_T)$  is dense in  $L^2(\Gamma \times (0, T))$ . This allows us to compute the adjoint  $L_T^*$  of  $L_T$ . Using similar arguments as in Proposition 4.7, we can prove that  $L_T : D(L_T) \subset L^2(\Gamma \times (0, T)) \rightarrow X$  is a closed operator. Consequently, the surjectivity of  $L_T$  is equivalent (see for instance [Bre83, Th. II.19 p. 29]) to the existence of a positive constant  $c$  such that

$$\left\| L_T^* \begin{pmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^1 \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\Gamma \times (0, T))}^2 \geq c \left\| \begin{pmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^1 \end{pmatrix} \right\|_X^2, \quad \forall \begin{pmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^1 \end{pmatrix} \in D(L_T^*).$$

This last inequality is also equivalent to:

$$\left\| L_T^* L \begin{pmatrix} \Phi^0 \\ \Phi^1 \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\Gamma \times (0, T))}^2 \geq c \left\| \begin{pmatrix} \Phi^0 \\ \Phi^1 \end{pmatrix} \right\|_{X_1}^2, \quad \forall \begin{pmatrix} \Phi^0 \\ \Phi^1 \end{pmatrix} \in D(L_T^* L). \quad (4.21)$$

Therefore, the exact controllability problem for system (4.1) relies on the ‘‘observability inequality’’ (4.21).

In what follows, we compute  $L_T^* L$  to translate (4.21) in terms of the adjoint system (4.3) of system (4.1). By the definition of  $L_T$  in (4.20) we have  $L_T^* = B^* S(T - \cdot)^*$ , so that it remains to compute the adjoint of  $B$ .

**Lemma 4.9.**  $B^* : D(B^*) \subset X_1 \rightarrow L^2(\Gamma)$  is given by:

$$\begin{aligned} D(B^*) &= \left\{ (\Phi^0, \Phi^1)^T \in X_1 / \Phi^1 \in D(\mathcal{D}^*) \right\}, \\ B^* \begin{pmatrix} \Phi^0 \\ \Phi^1 \end{pmatrix} &= \mathcal{D}^* \Phi^1. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Moreover for every  $(\Phi^0, \Phi^1)^T \in D(B^* L)$  we have

$$B^* L \begin{pmatrix} \Phi^0 \\ \Phi^1 \end{pmatrix} = - \left( \frac{\partial \Phi^0}{\partial \nu} + \alpha \Phi^0 \nu_1 \right)_{|\Gamma}, \quad \text{where } \Phi^0 = (\Phi_1^0, \Phi_2^0)^T. \quad (4.23)$$

*Proof.* Let  $v \in D(B) = D(\mathcal{D})$  and  $(\Phi^0, \Phi^1)^T \in X_1$ . We recall that since  $A$  is self-adjoint in  $H$ ,  $L$  is skew-adjoint in  $X_{-1}$  (i.e.  $L^* = -L$ ). This allows us to write

$$\left\langle \begin{pmatrix} \Phi^0 \\ \Phi^1 \end{pmatrix}, Bv \right\rangle_{X_1, X_{-1}} = \left\langle -L \begin{pmatrix} \Phi^0 \\ \Phi^1 \end{pmatrix}, L^{-1} Bv \right\rangle_X = \left\langle \begin{pmatrix} -\Phi^1 \\ A\Phi^0 \end{pmatrix}, L^{-1} Bv \right\rangle_X.$$

It is easily seen that  $L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -A^{-1} \\ I & 0 \end{pmatrix}$  so that  $L^{-1} Bv = \begin{pmatrix} -\mathcal{D}v \\ 0 \end{pmatrix}$ . This gives

$$\left\langle \begin{pmatrix} \Phi^0 \\ \Phi^1 \end{pmatrix}, Bv \right\rangle_{X_1, X_{-1}} = \langle \Phi^1, \mathcal{D}v \rangle_H,$$

which leads to (4.22).

Now, if  $(\Phi^0, \Phi^1)^T \in D(B^* L)$ , then  $B^* L \begin{pmatrix} \Phi^0 \\ \Phi^1 \end{pmatrix} = B^* \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ -A\Phi^0 \end{pmatrix} = -\mathcal{D}^*(A\Phi^0)$  and Proposition 4.6 gives (4.23).  $\square$

A direct consequence of Lemma 4.9 is:

**Proposition 4.10.**  $L_T^* L : D(L_T^* L) \subset X_1 \rightarrow L^2(\Gamma \times (0, T))$  is given by:

$$\begin{aligned} D(L_T^* L) &= \left\{ (\Phi^0, \Phi^1)^T \in X_1 / \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \alpha \psi \nu_1 \in L^2(\Gamma \times (0, T)) \right\}, \\ L_T^* L \begin{pmatrix} \Phi^0 \\ \Phi^1 \end{pmatrix} &= - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \alpha \psi \nu_1 \right)_{|\Gamma}, \end{aligned}$$

where  $\Phi = (\varphi, \psi)^T$  is the solution of the backward adjoint system of (4.1):

$$\begin{cases} \Phi'' + A\Phi = 0 & \text{in } Q_T \\ \Phi(\cdot, T) = \Phi^0, \Phi'(\cdot, T) = \Phi^1 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (4.24)$$

Thanks to Proposition 4.10, the observability inequality (4.21) consists in the following inequality:

$$\forall \begin{pmatrix} \Phi^0 \\ \Phi^1 \end{pmatrix} \in D(L_T^*L) \quad \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \alpha \psi \nu_1 \right)^2 d\sigma dt \geq c \left\| \begin{pmatrix} \Phi^0 \\ \Phi^1 \end{pmatrix} \right\|_{X_1}^2$$

where  $\Phi = (\varphi, \psi)^T$  is the solution of the backward adjoint system (4.24). Consequently, we have the following characterization of the controllability:

**Corollary 4.11.** *System (4.1) is exactly controllable at time  $T$  if and only if there exists a constant  $C(T) > 0$  such that for all initial data  $(\Phi^0, \Phi^1)^T \in D(L_T^*L)$ , the solution  $\Phi = (\varphi, \psi)^T$  of the adjoint system (4.3) with initial data  $(\Phi^0, \Phi^1)$  satisfies the following observability inequality*

$$\|(\Phi^0, \Phi^1)\|_{X_1}^2 \leq C(T) \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \alpha \psi \nu_1 \right)^2 d\sigma dt. \quad (4.25)$$

#### 4.4.2 Observability inequality in $H_{1/2}^+ \times H^+$ : proof of Theorem 4.3

In view of Corollary 4.11 and since duality does not affect diagonalization, the proof of Theorem 4.3 is done if we prove the following result:

**Theorem 4.12.** *Let  $\gamma = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2\pi+|\alpha|}}$  and  $T_0 = \frac{2\pi}{\gamma} \sqrt{1 + 2\frac{(\lambda_{1,1}^+ - a + \alpha^2)^2}{(\lambda_{1,1}^+ - a)^2}}$ . If  $a \leq 2\pi^2$ , then for any  $T > T_0$  there exists a positive constant  $C^+(T)$  such that for all initial data  $(\Phi^0, \Phi^1)^T$  in  $D(L_T^*L) \cap (H_{1/2}^+ \times H^+)$  the solution of (4.3) satisfies the following observability inequality:*

$$\|(\Phi^0, \Phi^1)\|_{X_1}^2 \leq C^+(T) \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \alpha \psi \nu_1 \right)^2 d\sigma dt. \quad (4.26)$$

We detail the proof of Theorem 4.12 in three steps.

##### 4.4.2.1 First step: the observability inequality in terms of Fourier series

From now on, we assume that  $a \leq 2\pi^2$  and  $T > T_0$ . Fix  $(\Phi^0, \Phi^1)^T \in D(L_T^*L) \cap (H_{1/2}^+ \times H^+)$ . By the definition of  $H_{1/2}^+$  and  $H^+$ ,  $\Phi^0$  and  $\Phi^1$  may be written as

$$\Phi^0 = \sum_{p,q \geq 1} \Phi_{p,q}^0 e_{p,q}^+, \quad \Phi^1 = \sum_{p,q \geq 1} \Phi_{p,q}^1 e_{p,q}^+$$

with  $\sum_{p,q \geq 1} \lambda_{p,q}^+ (\Phi_{p,q}^0)^2 < +\infty$  and  $\sum_{p,q \geq 1} (\Phi_{p,q}^1)^2 < +\infty$ . The solution  $\Phi = (\varphi, \psi)^T$  of system (4.3) with initial data  $(\Phi^0, \Phi^1)$  is given by

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \sum_{p,q \geq 1} \left[ a_{p,q} e^{i\sqrt{\lambda_{p,q}^+} t} + \overline{a_{p,q}} e^{-i\sqrt{\lambda_{p,q}^+} t} \right] e_{p,q}^+$$

with the notation

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad a_{p,q} = \Phi_{p,q}^0 - i \frac{\Phi_{p,q}^1}{\sqrt{\lambda_{p,q}^+}}. \quad (4.27)$$

Using the definition of  $e_{p,q}^+$ , the definition of  $\alpha_{p,q}^+$  and  $\beta_{p,q}^+$  in (4.7) and the Parseval equality, we can easily prove that

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \alpha \psi \nu_1 \right)^2 d\sigma dt &= \frac{1}{2} \sum_{q \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{p \geq 1} p \alpha_{p,q}^+ \left( a_{p,q} e^{i\sqrt{\lambda_{p,q}^+} t} + \overline{a_{p,q}} e^{-i\sqrt{\lambda_{p,q}^+} t} \right) \right|^2 dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{p \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{q \geq 1} q \beta_{p,q}^+ \left( a_{p,q} e^{i\sqrt{\lambda_{p,q}^+} t} + \overline{a_{p,q}} e^{-i\sqrt{\lambda_{p,q}^+} t} \right) \right|^2 dt. \end{aligned} \quad (4.28)$$

The left-hand side of (4.26) is given by

$$\|(\Phi^0, \Phi^1)\|_{X_1}^2 = \sum_{p,q \geq 1} \left( \lambda_{p,q}^+ (\Phi_{p,q}^0)^2 + (\Phi_{p,q}^1)^2 \right) = \sum_{p,q \geq 1} \lambda_{p,q}^+ |a_{p,q}|^2.$$

Consequently, the observability inequality (4.26) is equivalent to the following inequality

$$\begin{aligned} C(T) \sum_{p,q \geq 1} \lambda_{p,q}^+ |a_{p,q}|^2 &\leq \sum_{q \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{p \geq 1} p \alpha_{p,q}^+ \left( a_{p,q} e^{i\sqrt{\lambda_{p,q}^+} t} + \overline{a_{p,q}} e^{-i\sqrt{\lambda_{p,q}^+} t} \right) \right|^2 dt \\ &\quad + \sum_{p \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{q \geq 1} q \beta_{p,q}^+ \left( a_{p,q} e^{i\sqrt{\lambda_{p,q}^+} t} + \overline{a_{p,q}} e^{-i\sqrt{\lambda_{p,q}^+} t} \right) \right|^2 dt \end{aligned} \quad (4.29)$$

where  $C(T)$  is a positive constant which does not depend on  $(a_{p,q})_{p,q}$ . We recall below the main theorem of [Meh09] for the observability of the wave equation in two spatial dimensions:

**Theorem 4.13** (Mehrenberger [Meh09]). *Let  $(\lambda_{pq})_{p,q}$  be a sequence of real numbers. If there exist  $\gamma_1 > 0$  and  $\gamma_2 > 0$  such that for every  $p, p', q$  and  $q'$  in  $\mathbb{N}^*$*

$$\begin{aligned} p \leq \max(q, q') &\Rightarrow |\lambda_{pq} \pm \lambda_{pq'}| \geq \gamma_1 |q \pm q'| \\ q \leq \max(p, p') &\Rightarrow |\lambda_{pq} \pm \lambda_{p'q}| \geq \gamma_2 |p \pm p'|, \end{aligned} \quad (4.30)$$

then for any  $T > 2\pi \sqrt{\frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\gamma_2^2}}$ , there exists a positive constant  $C(T)$  such that

$$\begin{aligned} C(T) \sum_{p,q \geq 1} (p^2 + q^2) |z_{p,q}|^2 &\leq \sum_{q \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{p \geq 1} p (z_{p,q} e^{i\lambda_{pq} t} + \overline{z_{p,q}} e^{-i\lambda_{pq} t}) \right|^2 dt \\ &\quad + \sum_{p \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{q \geq 1} q (z_{p,q} e^{i\lambda_{pq} t} + \overline{z_{p,q}} e^{-i\lambda_{pq} t}) \right|^2 dt \end{aligned} \quad (4.31)$$

for every complex sequence  $(z_{p,q})_{p,q}$  such that the sums involved are finite.

The use of Ingham type methods (see [Ing36, KL05]) is based on some gap properties (here given by (4.30)). In [Meh09], to obtain the observability inequality for the wave equation, the author applies this theorem to the sequence  $\lambda_{pq} = \sqrt{\mu_{pq}}$ . In this case, our observability inequality (4.29) is similar to (4.31) since  $\lambda_{p,q}^+ \sim \mu_{pq}$  as  $\|(p, q)\|$  tends to  $+\infty$ . The only dissimilarity is that we have two different sequences  $x_{p,q} = \alpha_{p,q}^+ a_{p,q}$  and  $y_{p,q} = \beta_{p,q}^+ a_{p,q}$  instead of one sequence  $z_{p,q}$ . Consequently, we cannot apply directly Theorem 4.13 with  $\lambda_{pq} = \sqrt{\lambda_{p,q}^+}$  to obtain the observability inequality (4.29). However, from the asymptotic property  $\lambda_{p,q}^+ \sim \mu_{pq}$  and the definition of  $\alpha_{p,q}^+$  and  $\beta_{p,q}^+$  (see (4.7)) we can prove that both  $x_{p,q}$  and  $y_{p,q}$  are equivalent to the same term  $\pi a_{p,q}$ . This allows us to adapt the proof of Theorem 4.13. The key point is to prove that we have some good gap properties. To this end, we introduce the following notation.

**Notation 4.14.** 1. We denote by  $(\Lambda_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*}$  a sequence defined by

$$\Lambda_{p,q} = \begin{cases} \sqrt{\lambda_{p,q}^+} & \text{if } p \geq 1 \text{ and } q \geq 1 \\ -\sqrt{\lambda_{p,-q}^+} & \text{if } p \geq 1 \text{ and } q \leq -1 \\ -\sqrt{\lambda_{-p,q}^+} & \text{if } p \leq -1 \text{ and } q \geq 1. \end{cases}$$

2. For  $p \in \mathbb{Z}^*$  and  $q \in \mathbb{N}^*$  we write

$$x_{p,q} = \begin{cases} \alpha_{p,q}^+ a_{p,q} & \text{if } p \geq 1 \\ -\overline{x_{-p,q}} & \text{if } p \leq -1. \end{cases}$$

3. For  $p \in \mathbb{N}^*$  and  $q \in \mathbb{Z}^*$  we define

$$y_{p,q} = \begin{cases} \beta_{p,q}^+ a_{p,q} & \text{if } q \geq 1 \\ -y_{p,-q} & \text{if } q \leq -1. \end{cases}$$

With Notation 4.14 we deduce from (4.28) that

$$2 \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \alpha \psi \nu_1 \right)^2 d\sigma dt = \sum_{q \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} p x_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q} t} \right|^2 dt + \sum_{p \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{q \in \mathbb{Z}^*} q y_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q} t} \right|^2 dt.$$

Thus the observability inequality (4.26) that we have to prove is the following inequality

$$C(T) \sum_{p,q \geq 1} \lambda_{p,q}^+ |a_{p,q}|^2 \leq \sum_{q \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} p x_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q} t} \right|^2 dt + \sum_{p \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{q \in \mathbb{Z}^*} q y_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q} t} \right|^2 dt \quad (4.32)$$

where  $C(T)$  is a positive constant which does not depend on the sequence  $(a_{p,q})_{p,q}$ .

#### 4.4.2.2 Second step: some gap properties

We prove the following gap properties for the sequence  $(\Lambda_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*}$ .

**Proposition 4.15.** *Let  $\gamma$  be as in Theorem 4.12.*

1. For all  $p \in \mathbb{N}^*$  and all  $(q, q') \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$  such that  $p \leq \max(q, q')$ ,

$$|\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p,q'}| \geq \gamma |q - q'|.$$

2. For all  $q \in \mathbb{N}^*$  and all  $(p, p') \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$  such that  $q \leq \max(p, p')$ ,

$$|\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p',q}| \geq \gamma |p - p'|.$$

*Proof.* We only give the proof of the first assertion. The second one can be proved in the same way by interchanging  $(p, p')$  and  $(q, q')$ . According to the definition of  $\Lambda_{p,q}$ , it is sufficient to show that

– for all  $p \in \mathbb{N}^*$  and all  $(q, q') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  such that  $p \leq \max(q, q')$ , we have  $\left| \sqrt{\lambda_{p,q}^+} - \sqrt{\lambda_{p,q'}^+} \right| \geq \gamma |q - q'|$ ,

– for all  $p, q$  and  $q'$  in  $\mathbb{N}^*$ , we have  $\sqrt{\lambda_{p,q}^+} + \sqrt{\lambda_{p,q'}^+} \geq \gamma (q + q')$ .

Let us first consider  $p \in \mathbb{N}^*$  and  $(q, q') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  such that  $p \leq \max(q, q')$ . Using the definition of  $\lambda_{p,q}^+$  (see Notation 4.1 page 77), we can easily check that

$$\left| \lambda_{p,q}^+ - \lambda_{p,q'}^+ \right| = \frac{1}{2} |q^2 - q'^2| \pi^2 \left( 1 + \frac{(p^2 + q^2) \pi^2 - a + (p^2 + q'^2) \pi^2 - a}{\sqrt{\delta_{p,q}} + \sqrt{\delta_{p,q'}}} \right)$$

with  $\delta_{p,q} = ((p^2 + q^2) \pi^2 - a)^2 + 4\alpha^2 p^2 \pi^2$ . From the assumption  $a \leq 2\pi^2$ , we have  $(p^2 + q^2) \pi^2 - a \geq 2\pi^2 - a \geq 0$ . Therefore  $\left| \lambda_{p,q}^+ - \lambda_{p,q'}^+ \right| \geq \frac{\pi^2}{2} |q^2 - q'^2|$  and

$$\left| \sqrt{\lambda_{p,q}^+} - \sqrt{\lambda_{p,q'}^+} \right| = \frac{\left| \lambda_{p,q}^+ - \lambda_{p,q'}^+ \right|}{\sqrt{\lambda_{p,q}^+} + \sqrt{\lambda_{p,q'}^+}} \geq \frac{\pi^2}{2} \frac{q + q'}{\sqrt{\lambda_{p,q}^+} + \sqrt{\lambda_{p,q'}^+}} |q - q'|. \quad (4.33)$$

Consequently, we are reduced to bounding from below the quantity  $\frac{q+q'}{\sqrt{\lambda_{p,q}^+} + \sqrt{\lambda_{p,q'}^+}}$ . The inequality  $\sqrt{x_1 + x_2} \leq \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$  easily gives  $\lambda_{p,q}^+ \leq (p^2 + q^2) \pi^2 + |\alpha| p \pi$ , so that

$$\frac{q + q'}{\sqrt{\lambda_{p,q}^+} + \sqrt{\lambda_{p,q'}^+}} \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{q + q'}{\sqrt{(p^2 + q^2) \pi + |\alpha| p} + \sqrt{(p^2 + q'^2) \pi + |\alpha| p}}. \quad (4.34)$$



By assumption,  $p \leq \max(q, q')$ . Without loss of generality we can assume that  $q \leq q'$ . From (4.34) it follows that

$$\frac{q + q'}{\sqrt{\lambda_{p,q}^+} + \sqrt{\lambda_{p,q'}^+}} \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1 + \frac{q}{q'}}{\sqrt{\left(\frac{p^2}{q'^2} + \frac{q^2}{q'^2}\right)\pi + |\alpha| \frac{p}{q'^2} + \sqrt{\left(\frac{p^2}{q'^2} + 1\right)\pi + |\alpha| \frac{p}{q'^2}}} \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{2\pi + |\alpha|}}.$$

Combining this inequality with (4.33) we conclude that

$$\left| \sqrt{\lambda_{p,q}^+} - \sqrt{\lambda_{p,q'}^+} \right| \geq \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2\pi + |\alpha|}} |q - q'| = \gamma |q - q'|.$$

Now, consider any  $p, q$  and  $q'$  in  $\mathbb{N}^*$ . By the definition of  $\lambda_{p,q}^+$  (see Notation 4.1), it is clear that  $\lambda_{p,q}^+ \geq \frac{1}{2}\mu_{pq} \geq \frac{\pi^2}{2}q^2$ , so that

$$\sqrt{\lambda_{p,q}^+} + \sqrt{\lambda_{p,q'}^+} \geq \frac{\pi}{\sqrt{2}} (q + q') \geq \gamma (q + q').$$

This ends the proof of item 1.  $\square$

#### 4.4.2.3 Third step: proof of the observability inequality

**Notation 4.16.** Given  $T > T_0$ , we denote by  $k$  the function

$$k(t) := \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) & \text{if } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

and we define the following quantities:

$$\begin{aligned} I_1 &:= \sum_{p \geq 1} \int_0^T k(t) \left| \sum_{q \geq p} qy_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right|^2 dt, & I_2 &:= \sum_{q \geq 1} \int_0^T k(t) \left| \sum_{p \geq q} px_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right|^2 dt, \\ I_3 &:= \left| \sum_{p \geq 1} \int_0^T k(t) \left( \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^* \\ q < p}} qy_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right) \left( \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^* \\ q \geq p}} q\overline{y_{p,q}} e^{-i\Lambda_{p,q}t} \right) dt \right|, \\ I_4 &:= \left| \sum_{q \geq 1} \int_0^T k(t) \left( \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}^* \\ p < q}} px_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right) \left( \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}^* \\ p \geq q}} p\overline{x_{p,q}} e^{-i\Lambda_{p,q}t} \right) dt \right|. \end{aligned}$$

It is easily seen that the Fourier transform of  $k$  is given by

$$\widehat{k}(\xi) = e^{-i\frac{\xi T}{2}} T\sqrt{2\pi} \frac{\cos\left(\frac{\xi T}{2}\right)}{\pi^2 - T^2\xi^2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.35)$$

In particular,  $|\widehat{k}|$  is an even function and  $\widehat{k}(0) = \frac{T}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$  is real. In the following lemma we bound from below the right-hand side of the observability inequality (4.32), using the quantities  $I_j$  for  $j = 1, \dots, 4$ .

**Lemma 4.17.**

$$\sum_{q \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} px_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right|^2 dt + \sum_{p \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{q \in \mathbb{Z}^*} qy_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right|^2 dt \geq I_1 + I_2 - 2(I_3 + I_4).$$

*Proof.* If we prove that  $\sum_{p \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{q \in \mathbb{Z}^*} q y_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right|^2 dt \geq I_1 - 2I_3$ , then, replacing  $p$  with  $q$  and  $y_{p,q}$  with  $x_{p,q}$ , we deduce that  $\sum_{q \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} p x_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right|^2 dt \geq I_2 - 2I_4$ .

Since  $0 \leq k(t) \leq 1$  for all  $t \in [0, T]$ , it follows that

$$\begin{aligned} \sum_{p \geq 1} \int_0^T \left| \sum_{q \in \mathbb{Z}^*} q y_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right|^2 dt &\geq \sum_{p \geq 1} \int_0^T k(t) \left| \sum_{q \in \mathbb{Z}^*} q y_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right|^2 dt \\ &= \sum_{p \geq 1} \int_0^T k(t) \left| \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^* \\ q \geq p}} q y_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} + \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^* \\ q < p}} q y_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right|^2 dt \\ &\geq I_1 + \sum_{p \geq 1} \int_0^T k(t) \left| \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^* \\ q < p}} q y_{p,q} e^{i\Lambda_{p,q}t} \right|^2 dt - 2I_3 \\ &\geq I_1 - 2I_3. \end{aligned}$$

□

As a consequence of Lemma 4.17, the observability inequality (4.32) will be established if we bound from below  $I_1$  and  $I_2$  and bound from above  $I_3$  and  $I_4$ .

**Lemma 4.18.**

$$I_1 \geq \frac{2T}{\pi} \left( 1 - \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \right) \sum_{p \geq 1} \sum_{q \geq p} q^2 |y_{p,q}|^2.$$

*Proof.* By the definition of  $I_1$  and simple computations, we have

$$I_1 = \sqrt{2\pi} \sum_{p \geq 1} \sum_{q \geq p} \sum_{q' \geq p} q y_{p,q} q' \overline{y_{p,q'}} \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}).$$

Then, using the inequality  $|z_1 z_2| \leq \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{2}$ , we deduce that

$$I_1 \geq \sqrt{2\pi} \sum_{p \geq 1} \left( \widehat{k}(0) \sum_{q \geq p} q^2 |y_{p,q}|^2 - \sum_{\substack{q \geq p \\ q' \geq p \\ q' \neq q}} \frac{q^2 |y_{p,q}|^2 + q'^2 |y_{p,q'}|^2}{2} \left| \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right| \right). \quad (4.36)$$

Fix  $p \in \mathbb{N}^*$ . From parity of  $|\widehat{k}|$  it follows that

$$\sum_{\substack{q \geq p \\ q' \geq p \\ q' \neq q}} \frac{q^2 |y_{p,q}|^2 + q'^2 |y_{p,q'}|^2}{2} \left| \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right| = \sum_{q \geq p} q^2 |y_{p,q}|^2 \left( \sum_{\substack{q' \geq p \\ q' \neq q}} \left| \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right| \right). \quad (4.37)$$

Now, consider  $q \in \mathbb{Z}^*$  and  $q' \in \mathbb{Z}^*$  such that  $q \geq p$ ,  $q' \geq p$  and  $q' \neq q$ . Proposition 4.15 yields

$$|\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}| \geq \gamma |q - q'| > \gamma. \quad (4.38)$$

Since  $T > T_0 = \frac{2\pi}{\gamma} \sqrt{1 + 2 \frac{(\lambda_{1,1}^+ - a + \alpha^2)^2}{(\lambda_{1,1}^+ - a)^2}} > \frac{\pi}{\gamma}$ , we obtain  $|\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}| > \gamma > \frac{\pi}{T}$ . Using (4.35) and then (4.38), we deduce from this inequality that

$$\begin{aligned} \left| \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right| &\leq \frac{T\sqrt{2\pi}}{T^2 (\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q})^2 - \pi^2} = \widehat{k}(0) \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \frac{1}{4 \left( \frac{\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}}{\gamma} \right)^2 - \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2} \\ &\leq \widehat{k}(0) \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \frac{1}{4(q - q')^2 - 1}. \end{aligned}$$

Summing over  $q'$ , we obtain

$$\sum_{\substack{q' \geq p \\ q' \neq q}} \left| \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right| \leq \widehat{k}(0) \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \sum_{r \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{4r^2 - 1} = \widehat{k}(0) \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2.$$

Combining this inequality with (4.37) and (4.36), we conclude that

$$I_1 \geq \sqrt{2\pi} \widehat{k}(0) \left( 1 - \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \right) \sum_{\substack{q \geq p \\ p \geq 1}} q^2 |y_{p,q}|^2 = \frac{2T}{\pi} \left( 1 - \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \right) \sum_{\substack{q \geq p \\ p \geq 1}} q^2 |y_{p,q}|^2,$$

which proves the lemma.  $\square$

Interchanging  $p$  and  $q$  and replacing  $y_{p,q}$  with  $x_{p,q}$ , we also get

$$I_2 \geq \frac{2T}{\pi} \left( 1 - \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \right) \sum_{q \geq 1} \sum_{p \geq q} p^2 |x_{p,q}|^2.$$

Since  $\lambda_{p,q}^+ > a$ , it is easily seen that  $|x_{p,q}| \geq |y_{p,q}|$  (see Notation 4.14). It follows that

$$I_2 \geq \frac{2T}{\pi} \left( 1 - \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \right) \sum_{q \geq 1} \sum_{p \geq q} p^2 |y_{p,q}|^2.$$

Adding this inequality to that of Lemma 4.18, we obtain

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &\geq \frac{2T}{\pi} \left( 1 - \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \right) \left( \sum_{p \geq 1} \sum_{q \geq p} q^2 |y_{p,q}|^2 + \sum_{q \geq 1} \sum_{p \geq q} p^2 |y_{p,q}|^2 \right) \\ &\geq \frac{T}{\pi} \left( 1 - \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \right) \sum_{p,q \geq 1} (p^2 + q^2) |y_{p,q}|^2. \end{aligned}$$

Replacing  $y_{p,q}$  with its definition gives

$$I_1 + I_2 \geq \frac{T}{\pi} \left( 1 - \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \right) \sum_{p,q \geq 1} (p^2 + q^2) |a_{p,q}|^2 (\beta_{p,q}^+)^2. \quad (4.39)$$

Now, let us bound from above  $I_3$ .

**Lemma 4.19.**

$$I_3 \leq \frac{T}{\pi} \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \sum_{p \geq 1} \sum_{q \geq 1} q^2 |a_{p,q}|^2 (\beta_{p,q}^+)^2. \quad (4.40)$$

*Proof.* By the definition of  $I_3$  (see Notation 4.16), we have

$$\begin{aligned} I_3 &= \sqrt{2\pi} \left| \sum_{p \geq 1} \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^* \\ q < p}} \sum_{q' \geq p} q y_{p,q} q' \overline{y_{p,q'}} \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right| \\ &\leq \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \sum_{p \geq 1} \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^* \\ q < p}} \sum_{q' \geq p} (q^2 |y_{p,q}|^2 + q'^2 |y_{p,q'}|^2) \left| \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right|. \end{aligned}$$

Analysis similar to that in the proof of Lemma 4.18 shows that for all  $p \in \mathbb{N}^*$  and all  $q \in \mathbb{Z}^*$  such that  $q < p$  we have

$$\sum_{q' \geq p} \left| \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right| \leq \widehat{k}(0) \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \sum_{q' \geq p} \frac{1}{4(q - q')^2 - 1} \leq \frac{\widehat{k}(0)}{2} \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2.$$

Therefore

$$\sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^* \\ q < p}} \sum_{\substack{q' \geq p \\ q' < p}} q^2 |y_{p,q}|^2 \left| \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right| \leq \frac{\widehat{k}(0)}{2} \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^* \\ q < p}} q^2 |y_{p,q}|^2.$$

Similarly we can prove that

$$\sum_{\substack{q' \geq p \\ q' < p}} \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^* \\ q < p}} q'^2 |y_{p,q'}|^2 \left| \widehat{k}(\Lambda_{p,q'} - \Lambda_{p,q}) \right| \leq \frac{\widehat{k}(0)}{2} \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \sum_{\substack{q' \geq p \\ q' < p}} q'^2 |y_{p,q'}|^2.$$

Adding these last two inequalities, we obtain:

$$I_3 \leq \frac{\sqrt{2\pi} \widehat{k}(0)}{4} \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \sum_{p \geq 1} \sum_{q \in \mathbb{Z}^*} q^2 |y_{p,q}|^2,$$

which gives the desired inequality after replacing  $y_{p,q}$  with its definition.  $\square$

Similarly,

$$I_4 \leq \frac{T}{\pi} \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \sum_{p,q \geq 1} p^2 |a_{p,q}|^2 (\alpha_{p,q}^+)^2. \quad (4.41)$$

Adding (4.40) and (4.41) leads to the following inequality (since  $0 \leq \beta_{p,q}^+ \leq \alpha_{p,q}^+$ ):

$$I_3 + I_4 \leq \frac{T}{\pi} \left( \frac{2\pi}{\gamma T} \right)^2 \sum_{p,q \geq 1} (p^2 + q^2) |a_{p,q}|^2 (\alpha_{p,q}^+)^2. \quad (4.42)$$

From (4.39) and (4.42) it follows that

$$I_1 + I_2 - 2(I_3 + I_4) \geq \frac{T}{\pi} \sum_{p,q \geq 1} (p^2 + q^2) |a_{p,q}|^2 b_{p,q}, \quad (4.43)$$

where  $(b_{p,q})_{p,q}$  is defined by  $b_{p,q} = \left(1 - \left(\frac{2\pi}{\gamma T}\right)^2\right) (\beta_{p,q}^+)^2 - 2\left(\frac{2\pi}{\gamma T}\right)^2 (\alpha_{p,q}^+)^2$ . To bound from below  $I_1 + I_2 - 2(I_3 + I_4)$  by  $\sum_{p,q \geq 1} \lambda_{p,q}^+ |a_{p,q}|^2$ , it suffices to prove that the sequence  $\left(\frac{(p^2 + q^2)b_{p,q}}{\lambda_{p,q}^+}\right)_{p,q}$  is bounded from below. Actually

$$b_{p,q} = \frac{1}{T^2} \beta_{p,q}^+ \left( T^2 - \left( \frac{2\pi}{\gamma} \right)^2 \left( 1 + 2 \frac{(\lambda_{p,q}^+ - a + \alpha^2)^2}{(\lambda_{p,q}^+ - a)^2} \right) \right)$$

and it is easy to check that

$$\sup_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{(\lambda_{p,q}^+ - a + \alpha^2)^2}{(\lambda_{p,q}^+ - a)^2} = \frac{(\lambda_{1,1}^+ - a + \alpha^2)^2}{(\lambda_{1,1}^+ - a)^2}.$$

Since  $T > T_0 = \frac{2\pi}{\gamma} \sqrt{1 + 2 \frac{(\lambda_{1,1}^+ - a + \alpha^2)^2}{(\lambda_{1,1}^+ - a)^2}}$ , this implies that  $b_{p,q} > 0$  for any  $(p, q)$  in  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . Besides, from the asymptotic property  $\lambda_{p,q}^+ \underset{\|(p,q)\| \rightarrow +\infty}{\sim} \mu_{pq} = (p^2 + q^2) \pi^2$  we deduce that

$$\frac{(p^2 + q^2) b_{p,q}}{\lambda_{p,q}^+} \underset{\|(p,q)\| \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi^2} b_{p,q}.$$

It is easily seen that  $\lim_{\|(p,q)\| \rightarrow +\infty} b_{p,q} = \pi \left(1 - 3 \left(\frac{2\pi}{\gamma T}\right)^2\right)$ . Since  $T > T_0 > \sqrt{3} \frac{2\pi}{\gamma}$ , it follows that

$\lim_{\|(p,q)\| \rightarrow +\infty} b_{p,q} > 0$ . Consequently, the sequence  $\left(\frac{(p^2 + q^2)b_{p,q}}{\lambda_{p,q}^+}\right)_{p,q}$  which is positive with a positive

limit is uniformly bounded from below by a positive constant, denoted by  $c$ . It follows from (4.43) that

$$I_1 + I_2 - 2(I_3 + I_4) \geq \pi c T \sum_{p,q \geq 1} \lambda_{p,q}^+ |a_{p,q}|^2,$$

which gives inequality (4.32) (according to Lemma 4.17) and then the observability inequality (4.26). This ends the proof of Theorem 4.12.

### 4.4.3 Lack of controllability in $H^- \times H_{-1/2}^-$

#### 4.4.3.1 Proof of Proposition 4.4

We consider the two sequences  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  and  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  of positive integers given by  $p_n = n(n+1)/2$  and  $q_n = n$ . We denote by  $\Phi_n = (\varphi_n, \psi_n)^T$  the solution of the adjoint system (4.3) with initial data  $(\Phi_n^0, \Phi_n^1) = (e_{p_n, q_n}^-, 0) \in H_{1/2}^- \times H^-$ . The idea is to write  $(p_n, q_n)$  in the polar coordinates  $(p_n, q_n) = r_n(\cos(\theta_n), \sin(\theta_n))$ . It is easily seen that  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = +\infty$  and  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = 0$ . This leads to  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{p_n, q_n}^- = a - \alpha^2$ . Since  $\|(\Phi_n^0, \Phi_n^1)\|_{X_1}^2 = \|e_{p_n, q_n}^-\|_{H_{1/2}^-}^2 = \lambda_{p_n, q_n}^-$  and  $a > \alpha^2$ , it follows that  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(\Phi_n^0, \Phi_n^1)\|_{X_1}^2 = a - \alpha^2 > 0$ . Besides, by simple computations we can prove that the solution  $\Phi_n(t) = \cos(\sqrt{\lambda_{p_n, q_n}^-} t) e_{p_n, q_n}^-$  of (4.3) associated with  $(\Phi_n^0, \Phi_n^1)$  satisfies  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} + \alpha \psi_n \nu_1 \right)^2 d\sigma dt = 0$ . This contradicts the uniform observability and proves Proposition 4.4.

#### 4.4.3.2 Numerical experiments

Remark that the counterexample is obtained for  $(\Phi^0, \Phi^1)$  composed of only one eigenfunction for which the limit of the associated eigenvalue is  $\lambda = a - \alpha^2$ . This value is very particular because any other datum  $(\Phi^0, \Phi^1)$  composed of one eigenfunction associated with  $\lambda \in (a - \alpha^2, a]$  does not contradict the observability. The loss of observability may be exhibited by considering a (non trivial) combination of such modes (as done in [GV00] using Weil sequences), in order to enhance the lack of spectral gap. Simpler, this phenomenon may be observed numerically as follows. Let  $\mathbb{H}_N^\pm$  be the space of the initial data  $(\Phi^0, \Phi^1)$  in  $H_{1/2}^\pm \times H^\pm$  spanned by  $\{e_{p,q}^\pm\}_{1 \leq p, q \leq N}$ . If we denote by  $\Phi^\pm \in \mathbb{R}^{2N^2}$  the components of  $(\Phi^0, \Phi^1)^T$  in the basis  $\{e_{p,q}^\pm\}_{1 \leq p, q \leq N}$ , then we can write for every  $(\Phi^0, \Phi^1)$  in  $\mathbb{H}_N^\pm$

$$\|(\Phi^0, \Phi^1)\|_{X_1}^2 = (\mathbf{A}^\pm \Phi^\pm, \Phi^\pm)_{\mathbb{R}^{2N^2}}, \quad \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \alpha \psi \nu_1 \right)^2 d\sigma dt = (\mathbf{B}^\pm \Phi^\pm, \Phi^\pm)_{\mathbb{R}^{2N^2}},$$

where  $\mathbf{A}^\pm, \mathbf{B}^\pm \in \mathbb{R}^{2N^2 \times 2N^2}$  denote real symmetric matrices ( $\mathbf{A}^\pm$  is diagonal) and  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^{2N^2}}$  denotes the scalar product in  $\mathbb{R}^{2N^2}$ . On  $\mathbb{H}_N^\pm$ , the observability inequality formally writes

$$(\mathbf{A}^\pm \Phi^\pm, \Phi^\pm)_{\mathbb{R}^{2N^2}} \leq C_N^\pm(T) (\mathbf{B}^\pm \Phi^\pm, \Phi^\pm)_{\mathbb{R}^{2N^2}}.$$

The observability constant  $C_N^\pm(T)$  whose behavior allows us to detect the lack of observability, is then solution of the generalized eigenvalue problem

$$C_N^\pm(T) = \max\{\lambda > 0, \mathbf{A}^\pm \Phi = \lambda \mathbf{B}^\pm \Phi, \Phi \in \mathbb{R}^{2N^2} \setminus \{0\}\}. \quad (4.44)$$

In practice, since  $\mathbf{A}^\pm$  is diagonal, it is easier to evaluate  $(C_N^\pm)^{-1}$  equal to the lowest eigenvalue of  $\mathbf{B}^\pm (\mathbf{A}^\pm)^{-1}$ . Table 4.1 gives the value of  $C_N^\pm(T)$  for various values of  $N$  and clearly exhibits the non-uniform boundedness with respect to  $N$ , in contrast to  $C_N^\pm(T)$ . This is in agreement with Theorem 4.3 and Proposition 4.4.

	$N = 5$	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$
$C_N^+(T)$	$5.01 \times 10^{-1}$	$5.43 \times 10^{-1}$	$5.71 \times 10^{-1}$	$5.95 \times 10^{-1}$	$6.02 \times 10^{-1}$
$C_N^-(T)$	$2.42 \times 10^1$	$4.41 \times 10^2$	$3.24 \times 10^3$	$8.6 \times 10^4$	$1.01 \times 10^6$

Table 4.1: Evolution of the observability constant  $C_N^\pm(T)$  vs.  $N$  for  $(a, \alpha, T) = (4, 1, 3)$ .

## 4.5 Concluding remarks and comments

### 4.5.1 A refined controllability result

We can prove that the observability inequality (4.25) remains true if we consider initial data  $(\Phi^0, \Phi^1)$  which are spanned by all the  $e_{p,q}^+$ , all the  $e_q$  and a finite number of  $e_{p,q}^-$ . More precisely, for every  $N \in \mathbb{N}^*$  let us denote by  $H^{N^-}$  (resp.  $H_{-1/2}^{N^-}$ ,  $H_{1/2}^{N^-}$ ) the Hilbert subspace of  $H$  (resp.  $H_{-1/2}$ ,  $H_{1/2}$ ) spanned by  $\{e_{p,q}^-\}_{1 \leq p, q \leq N}$ . By using Lemma 4.15, we can prove that if  $a \leq 2\pi^2$  then the new sequences  $(\Lambda_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*}$  and  $(\tilde{\Lambda}_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^*}$  defined by

$$\Lambda_{p,q} = \begin{cases} \sqrt{a} & \text{if } p = 1 \\ \sqrt{\lambda_{p-1,q}^+} & \text{if } 2 \leq p \leq N+1 \text{ and } 1 \leq q \leq N \\ \sqrt{\lambda_{p-N-1,q}^-} & \text{if } N+2 \leq p \leq 2N+1 \text{ and } 1 \leq q \leq N \\ \sqrt{\lambda_{p-N-1,q}^+} & \text{if } p \geq 2N+2 \text{ and } 1 \leq q \leq N \\ \sqrt{\lambda_{p-1,q}^+} & \text{if } p \geq 2 \text{ and } q \geq N+1 \\ -\Lambda_{-p,q} & \text{if } p \leq -1 \text{ and } q \geq 1, \end{cases}$$

$$\tilde{\Lambda}_{p,q} = \begin{cases} \sqrt{a} & \text{if } q = 1 \\ \sqrt{\lambda_{p,q-1}^+} & \text{if } 1 \leq p \leq N \text{ and } 2 \leq q \leq N+1 \\ \sqrt{\lambda_{p,q-N-1}^-} & \text{if } 1 \leq p \leq N \text{ and } N+2 \leq q \leq 2N+1 \\ \sqrt{\lambda_{p,q-N-1}^+} & \text{if } 1 \leq p \leq N \text{ and } q \geq 2N+2 \\ \sqrt{\lambda_{p-1,q}^+} & \text{if } p \geq N+1 \text{ and } q \geq 2 \\ -\tilde{\Lambda}_{p,-q} & \text{if } p \geq 1 \text{ and } q \leq -1 \end{cases}$$

satisfy the following gap property:

- for all  $p \in \mathbb{N}^*$  and all  $(q, q') \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$  such that  $p \leq \max(q, q')$ ,

$$\left| \tilde{\Lambda}_{p,q} - \tilde{\Lambda}_{p,q'} \right| \geq \gamma_N |q - q'|,$$

- for all  $q \in \mathbb{N}^*$  and all  $(p, p') \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$  such that  $q \leq \max(p, p')$ ,

$$|\Lambda_{p,q} - \Lambda_{p',q}| \geq \gamma_N |p - p'|,$$

with a gap  $\gamma_N$  which tends to 0 as  $N$  tends to  $+\infty$ . Using the same methods as in Section 4.4.2.3, we can prove that there exists a time  $T_N > 0$  (which tends to  $+\infty$  with  $N$ ) such that for every  $T > T_N$  and every initial data  $(\Phi^0, \Phi^1)$  in  $D(L_T^* L) \cap \left( \left( H_{1/2}^a \oplus H_{1/2}^+ \oplus H_{1/2}^{N^-} \right) \times \left( H^a \oplus H^+ \oplus H^{N^-} \right) \right)$  the observability inequality (4.25) is satisfied. This leads to the following controllability result:

**Theorem 4.20.** *If  $a \leq 2\pi^2$ , then there exists  $T_N > 0$  such that for any  $T > T_N$ , any initial data  $(u^0, u^1)$  and final data  $(u_T^0, u_T^1)$  belonging to  $\left( H^a \oplus H^+ \oplus H^{N^-} \right) \times \left( H_{-1/2}^a \oplus H_{-1/2}^+ \oplus H_{-1/2}^{N^-} \right)$  there exists a control function  $v$  in  $D(L_T)$  such that the solution  $u$  of (4.1) satisfies  $(u(\cdot, T), u'(\cdot, T)) = (u_T^0, u_T^1)$  in  $\Omega$ .*

**Remark 4.21.** As a consequence of Theorem 4.20,  $\overline{\bigcup_{T>0} \mathbb{R}(L_T)} = X$  (where  $\mathbb{R}(L_T)$  denotes the range of  $L_T$ ). However, the problem of approximate controllability at a fixed time  $T$  (which consists in  $\mathbb{R}(L_T) = X$ ) is still open.

### 4.5.2 Controllability with respect to $T$

The eigenvalue problem (4.44) allows us to estimate numerically the minimal controllability time for any  $a, \alpha, N$  fixed. Figure 4.3 depicts the evolution of  $C_N^+(T)$  with respect to  $T$  for  $(a, \alpha, N) = (4, 1, 50)$  and suggests that the minimal controllability time is about 2.5. The lower bound time  $T_0$  in Theorem 4.3 leading for  $(a, \alpha, N) = (4, 1, 50)$  to  $T_0 \approx 21.96$  is thus not sharp.

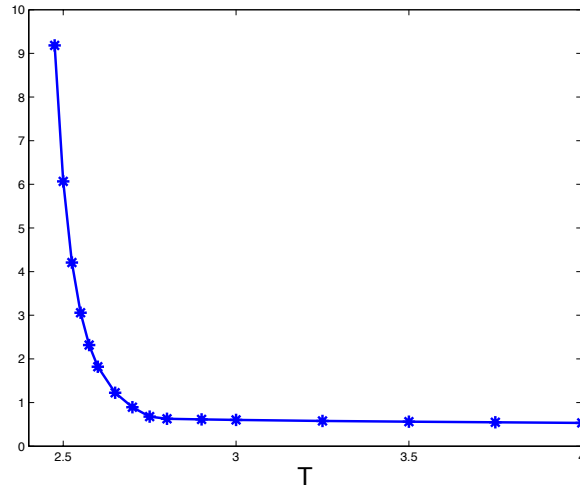


Figure 4.3: Evolution of  $C_N^+(T)$  with respect to  $T$  for  $(a, \alpha, N) = (4, 1, 50)$ .

### 4.5.3 Partial controllability

Following [LV97], one may analyze the uniform partial controllability which consists in controlling to rest only the first component  $u_1$  of system (4.1). This weaker controllability problem is equivalent to proving observability inequality (4.25) for initial data  $(\Phi^0, \Phi^1)$  of the adjoint system (4.3) such that  $\Phi_2^0 = \Phi_2^1 = 0$ . From the second equation of (4.3) with  $\Phi_2^0 = \Phi_2^1 = 0$ , we express  $\psi$  in terms of  $\varphi$  as follows:  $\psi(\cdot, t) = -\alpha \int_0^t \partial_x \varphi(\cdot, s) \sin(\sqrt{a}(t-s)) ds$  in  $Q_T$ . The variable  $\varphi$  is then solution of

$$\begin{cases} \varphi'' = \Delta \varphi - \alpha^2 \int_0^t \partial_{xx} \varphi(\cdot, s) \sin(\sqrt{a}(t-s)) ds & \text{in } Q_T, \\ \varphi = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ (\varphi(\cdot, 0), \varphi'(\cdot, 0)) = (\Phi_1^0, \Phi_1^1) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

The difference with respect to the full controllability problem, is that the Fourier coefficients in  $\varphi$  are all connected to each other. This should allow a compensation of the modes  $\{e_{p,q}^-\}_{p,q}$  by the modes  $\{e_{p,q}^+\}_{p,q}$  (we refer to [LV97] for the analysis on a similar system). Thus the partial controllability should be uniform with respect to the data  $(u^0, u^1)$ . The analysis remains to be fully written.

## Références bibliographiques du chapitre 4

- [AKGM08] F. AMMAR KHODJA, G. GEYMONAT & A. MÜNCH – « On the exact controllability of a system of mixed order with essential spectrum », C. R. Math. Acad. Sci. Paris **346** (2008), no. 11-12, p. 629–634.
- [AKMM11] F. AMMAR KHODJA, K. MAUFFREY & A. MÜNCH – « Exact boundary controllability of a system of mixed order with essential spectrum », SIAM J. Control Optim. **49** (2011), no. 4, p. 1857–1879.
- [ALMS94] F. V. ATKINSON, H. LANGER, R. MENNICKEN & A. A. SHKALIKOV – « The essential spectrum of some matrix operators », Math. Nachr. **167** (1994), p. 5–20.

- [AZ08] F. D. ARARUNA & E. ZUAZUA – « Controllability of the Kirchhoff system for beams as a limit of the Mindlin-Timoshenko system », *SIAM J. Control Optim.* **47** (2008), no. 4, p. 1909–1938.
- [Bre83] H. BREZIS – *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1983, Théorie et applications. [Theory and applications].
- [Dav95] E. B. DAVIES – *Spectral theory and differential operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [GG77] G. GRUBB & G. GEYMONAT – « The essential spectrum of elliptic systems of mixed order », *Math. Ann.* **227** (1977), no. 3, p. 247–276.
- [GG79] — , « Eigenvalue asymptotics for selfadjoint elliptic mixed order systems with nonempty essential spectrum », *Boll. Un. Mat. Ital. B (5)* **16** (1979), no. 3, p. 1032–1048.
- [GLV91] G. GEYMONAT, P. LORETI & V. VALENTE – « Contrôlabilité exacte d'un modèle de coque mince », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **313** (1991), no. 2, p. 81–86.
- [GLV93] — , « Exact controllability of a thin elastic hemispherical shell via harmonic analysis », in *Boundary value problems for partial differential equations and applications*, RMA Res. Notes Appl. Math., vol. 29, Masson, Paris, 1993, p. 379–385.
- [GV00] G. GEYMONAT & V. VALENTE – « A noncontrollability result for systems of mixed order », *SIAM J. Control Optim.* **39** (2000), no. 3, p. 661–672 (electronic).
- [Ing36] A. E. INGHAM – « Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series », *Math. Z.* **41** (1936), no. 1, p. 367–379.
- [KL05] V. KOMORNIK & P. LORETI – *Fourier series in control theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [LR09] Z. LIU & B. RAO – « A spectral approach to the indirect boundary control of a system of weakly coupled wave equations », *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **23** (2009), no. 1-2, p. 399–414.
- [LV97] P. LORETI & V. VALENTE – « Partial exact controllability for spherical membranes », *SIAM J. Control Optim.* **35** (1997), no. 2, p. 641–653.
- [Meh09] M. MEHRENBARGER – « An Ingham type proof for the boundary observability of a  $N - d$  wave equation », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **347** (2009), no. 1-2, p. 63–68.
- [RR07] L. ROSIER & P. ROUCHON – « On the controllability of a wave equation with structural damping », *Int. J. Tomogr. Stat.* **5** (2007), no. W07, p. 79–84.
- [SHSP89] J. SANCHEZ HUBERT & E. SÁNCHEZ-PALENCIA – *Vibration and coupling of continuous systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1989, Asymptotic methods.
- [TW09] M. TUCSNAK & G. WEISS – *Observation and control for operator semigroups*, Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.





## Chapitre 5

# Contrôlabilité aux trajectoires d'un système parabolique de trois équations avec une ou deux forces de contrôle

Ce chapitre concerne la contrôlabilité à zéro, par un ou deux contrôles localisé(s) en espace, d'une classe de systèmes paraboliques linéaires de trois équations à coefficients non constants. On étend à cette classe de systèmes la condition de Kalman qui existe déjà pour les systèmes à coefficients constants (Théorème 3.24) et les systèmes à coefficients ne dépendant que du temps (Théorème 3.25). Pour démontrer ce résultat, on utilise une décomposition adaptée des solutions à contrôler. Cette décomposition permet de transformer le problème de contrôlabilité par un seul contrôle (*localisé* en espace) en l'étude de la contrôlabilité à zéro d'un système parabolique non homogène de deux équations par l'intermédiaire d'un seul contrôle agissant sur *tout* le domaine. De même, le problème de contrôlabilité par deux contrôles *localisés* en espace se ramène à l'étude de la contrôlabilité à zéro d'une équation parabolique non homogène par l'intermédiaire de deux contrôles agissant sur *tout* le domaine.

Les sections 5.1 à 5.6 qui suivent ont fait l'objet d'une publication, [Mau12], à paraître dans Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. C'est une des versions de cette publication qui est rapportée ici, en anglais, dans les six premières sections de ce chapitre.

La section 5.7 illustre par des applications numériques, dans le cas d'un exemple simple de système à coefficients constants en dimension deux d'espace, la méthode constructive présentée d'un point de vue théorique dans les sections 5.1, 5.2, 5.3 et 5.5. En particulier, on construit les approximations numériques de solutions contrôlées par un ou trois contrôles.

### 5.1 Statement of the main results and presentation of the method

The starting point of this work is the study of the controllability to trajectories of drug delivery to brain tumors for a distributed parameters model (see (5.73) and the comments in Subsection 5.6.3). As we would like to apply the fixed point method described and used in the scalar case by [FCZ00b] in particular, we are naturally led to investigate the null controllability of a linear  $3 \times 3$  parabolic system by a single control force localized in space. In the literature devoted to this kind of systems, most of the results on null controllability by one force are proved for systems of two equations (see for instance [AKBD06], [GBPG06], [Gue07] or, more recently [ABL11]). There are very few results concerning the case of systems of  $n$  equations, with  $n \geq 3$ . To the author knowledge, the first characterizations of the null controllability for a linear parabolic system of  $n$  equations are proved by Ammar Khodja et al. in [AKBDGB09b] for the case of *constant coefficients* and in [AKBDGB09a] for the case of *time-dependent coefficients*. For coefficients depending on both variables  $x$  and  $t$ , we mention the paper of González-Burgos and de Teresa [GBdT10] which deals with the case of cascade systems. Recent results obtained by Benabdallah et al. in [BCGdT10] and [BCGdT11] for  $3 \times 3$  systems get round

the restrictive hypothesis of cascade systems but assume a geometrical constraint on the boundary of the control domain. For a recent survey on controllability results for parabolic systems, we refer the reader to the paper by Ammar Khodja et al. [AKBGBdT11b].

The main goal of the present paper is to provide sufficient conditions to control a parabolic system of three equations by one or two forces supported in space (for the boundary controllability of parabolic systems, we refer to [AKBGBdT11a]). More precisely, we analyze the null controllability of the  $3 \times 3$  system

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + Ay + B v 1_\omega & \text{in } Q_T = \Omega \times (0, T), \\ y = 0 & \text{on } \Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T), \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

where  $\Omega$  is a bounded domain in  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) with boundary  $\partial\Omega$  of class  $C^2$ ,  $\omega$  is an arbitrary nonempty open subset of  $\Omega$  and  $T$  is a positive real number. In (5.1),  $y$  denotes a three components vector  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ ,  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  is a matrix with coefficients  $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$  for all  $1 \leq i, j \leq 3$ ,  $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq k}$  is a control operator and  $v$  is a searched control belonging to  $(L^2(\omega \times (0, T)))^k$  with  $k \in \{1, 2\}$ . We will consider the cases where  $B$  equals one of the two matrices

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Let us introduce the following notation.

- Notation 5.1.** – Set  $q_T = \omega \times (0, T)$  and  $q_T^0 = \omega^0 \times (0, T)$  for every open subset  $\omega^0 \subset \omega$  of  $\Omega$ .
- $W_\infty^{2,1}(q_T) = W^{1,\infty}(q_T) \cap L^\infty(0, T; W^{2,\infty}(\omega))$ , where  $W^{p,\infty}(\mathcal{O}) = \{f / D^r f \in L^\infty(\mathcal{O}), \forall 0 \leq r \leq p\}$ .
  - For a given positive measurable function  $\rho$  defined on a subset  $\mathcal{O}$  of  $Q_T$ , let us denote by  $L^2(\mathcal{O}, \rho)$  the space of functions  $f$  such that  $f\rho \in L^2(\mathcal{O})$ , endowed with the norm  $\|f\|_{L^2(\mathcal{O}, \rho)} = \|f\rho\|_{L^2(\mathcal{O})}$ .
  - For any dense subspace  $U$  of a Hilbert space  $H$ , we define

$$W(0, T; U, U') = \{\psi \in L^2(0, T; U) / \partial_t \psi \in L^2(0, T; U')\},$$

where  $U'$  denotes the dual of  $U$  with respect to the pivot space  $H$ . The norm of an element  $\psi \in W(0, T; U, U')$  is defined by

$$\|\psi\|_{W(0, T; U, U')} = (\|\psi\|_{L^2(0, T; U)}^2 + \|\partial_t \psi\|_{L^2(0, T; U')}^2)^{1/2}.$$

We recall that we have a continuous embedding (see, for instance, [DL88, chap. VIII]):

$$W(0, T; U, U') \hookrightarrow C([0, T], H).$$

For simplicity of notation we write, for every open subset  $\mathcal{O}$  of  $\Omega$ ,

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{O}}^1(0, T) &= W(0, T; H_0^1(\mathcal{O}), H^{-1}(\mathcal{O})), \\ W_{\mathcal{O}}^2(0, T) &= W(0, T; H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O}), L^2(\mathcal{O})), \end{aligned}$$

where the pivot spaces are  $H = L^2(\mathcal{O})$  for  $W_{\mathcal{O}}^1(0, T)$  and  $H = H_0^1(\mathcal{O})$  for  $W_{\mathcal{O}}^2(0, T)$ , respectively.

- We use the symbol  $\|A\|_\infty$  to denote the norm of  $A$ :  $\|A\|_\infty = \sum_{i,j=1}^3 \|a_{ij}\|_\infty$ , with  $\|a_{ij}\|_\infty = \|a_{ij}\|_{L^\infty(Q_T)}$ .

We state below the well-known result of existence and uniqueness for the solutions to the general system

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + Ay + f & \text{in } Q_T, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (5.2)$$

**Proposition 5.2.** 1. If  $y^0 \in (L^2(\Omega))^3$  and  $f \in L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3)$ , then (5.2) admits a unique solution  $y \in (W_\Omega^1(0, T))^3$  in the distributional sense

$$\langle \partial_t y(\cdot), z \rangle_{H^{-1}, H_0^1} + \langle \nabla y(\cdot), \nabla z \rangle_{L^2} - \langle A(\cdot)y(\cdot), z \rangle_{L^2} = \langle f(\cdot), z \rangle_{H^{-1}, H_0^1},$$

for every  $z \in (H_0^1(\Omega))^3$ . Moreover,  $y$  satisfies the estimate

$$\|y\|_{(W_{\Omega}^1(0,T))^3}^2 \leq e^{CM_T} (\|y^0\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3)}^2),$$

where  $C$  is a positive constant which depends neither on  $y^0$ , neither on  $f$ , nor on  $y$ , and  $M_T$  is given by

$$M_T = 1 + \|A\|_{\infty} + T(1 + \|A\|_{\infty}^2).$$

2. If  $y^0 \in (H_0^1(\Omega))^3$  and  $f \in (L^2(Q_T))^3$ , then (5.2) has a classical solution  $y \in (W_{\Omega}^2(0,T))^3$  with the estimate

$$\|y\|_{(W_{\Omega}^2(0,T))^3}^2 \leq e^{CM_T} (\|y^0\|_{(H_0^1(\Omega))^3}^2 + \|f\|_{(L^2(Q_T))^3}^2), \quad (5.3)$$

where  $M_T$  and  $C$  are as above.

For the proof of Proposition 5.2 we refer to the arguments used in the book of Ladyženskaja, Solonnikov and Ural'ceva ([LSU67, ch. III]). This result can also be obtained by the Galerkin method (see, for instance [DL88, chap. viii]).

### 5.1.1 Main results

The aim of this paper is to prove the following controllability result.

**Theorem 5.3** (Controllability by one force,  $B = B_1$ ). *Let us assume that  $a_{13}, a_{23} \in W_{\infty}^{2,1}(Q_T)$  and that there exist two positive constants  $\alpha$  and  $c$  such that*

$$|a_{23}| \geq \alpha \quad \text{in } q_T \quad (5.4)$$

and

$$\frac{\det K}{a_{23}^2} + \partial_t \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \geq c \quad \text{in } q_T \quad \text{or} \quad \frac{\det K}{a_{23}^2} + \partial_t \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \leq -c \quad \text{in } q_T, \quad (5.5)$$

where  $K = (B_1, AB_1, A^2 B_1)$  is the Kalman matrix corresponding to the matrix  $A$  and the control matrix  $B_1$ . Then for every  $y^0 \in (L^2(\Omega))^3$ , there exists at least one function  $v \in L^2(q_T)$  such that the solution  $y$  to

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + Ay + B_1 v 1_{\omega} & \text{in } Q_T, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (5.6)$$

satisfies

$$y(\cdot, T) = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

**Remark 5.4.** – We clearly see that if both coefficients  $a_{13}$  and  $a_{23}$  of the coupling matrix  $A$  are identically equal to zero in  $Q_T$ , then the first two equations in system (5.6) are decoupled from the third one, so that we can not expect controllability in this case. A necessary condition for the controllability of (5.6) is that either  $a_{13}$ , or  $a_{23}$  does not vanish at a place, namely either  $\text{supp}(a_{13}) \neq \emptyset$ , or  $\text{supp}(a_{23}) \neq \emptyset$ . The method presented in this paper supposes that  $\text{supp}(a_{23}) = q_T$ . This extends to the case  $\text{supp}(a_{23}) \cap q_T \neq \emptyset$ . Indeed, applying Theorem 5.3 on a part  $\tilde{q}_T = \tilde{\omega} \times (0, T)$  contained in  $\text{supp}(a_{23}) \cap q_T$ , we obtain the controllability of system (5.6) in  $\tilde{\omega}$  and consequently in  $\omega \supset \tilde{\omega}$ . However, the case where  $\text{supp}(a_{23})$  and the control domain  $q_T$  are disjoint is a difficult open problem and there are only few results concerning this geometrical configuration. We refer, in particular, to [ABL11] for an example of a system of two coupled parabolic equations —with coupling terms depending on the space variable  $x \in \Omega$ — controlled by one force acting on a region that can be disjoint from the coupling region.

– In the statement of Theorem 5.3, the coefficients  $a_{13}$  and  $a_{23}$  play symmetric roles. More precisely, the conclusion of Theorem 5.3 is still true if we replace  $a_{23}$  by  $a_{13}$  in condition (5.4), and if condition (5.5) is turned into

$$\frac{\det K}{a_{13}^2} - \partial_t \left( \frac{a_{23}}{a_{13}} \right) \geq c \quad \text{in } q_T \quad \text{or} \quad \frac{\det K}{a_{13}^2} - \partial_t \left( \frac{a_{23}}{a_{13}} \right) \leq -c \quad \text{in } q_T.$$

Note that (5.5) and the above condition are “equivalent” since we have formally

$$\frac{\det K}{a_{13}^2} - \partial_t \left( \frac{a_{23}}{a_{13}} \right) = \left( \frac{a_{23}}{a_{13}} \right)^2 \left( \frac{\det K}{a_{23}^2} + \partial_t \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \right),$$

and since either  $a_{13}$  or  $a_{23}$  satisfies (5.4).

The proof of Theorem 5.3 is based on a suitable decomposition of the solution  $y$  to (5.6) as

$$y = (1 - \theta)\hat{y} + \eta\theta Y + F, \quad (5.7)$$

where

- $Y$  is the solution without control,
- $\hat{y}$  is a well-chosen controlled solution of (5.1) associated with three control forces i.e. for  $B = I_3$  (see Theorem 5.21),
- $\theta$  and  $\eta$  are two truncation functions satisfying (5.12), and
- $F$  is to be determined such that  $y$  is a controlled solution of (5.6). Such a  $F$  is obtained by the resolution of a null controllability problem for a  $2 \times 2$  non homogeneous system controlled by only one force acting on the whole domain.

This decomposition was inspired by [GBPG06] in the case of a parabolic system of two equations. In fact, in [GBPG06], the authors use a similar decomposition to construct, from two controls, a regularized control acting on only one equation.

**Remark 5.5.** Theorem 5.3 generalizes the Kalman rank condition given in [AKBDGB09a] for matrices  $A$  depending only on time to the case of matrices  $A$  depending on space and time. Precisely, in [AKBDGB09a], the authors prove that system (5.1) with  $A \in C^2([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$  and  $B \in C^3([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n))$  ( $n \geq 2$ ,  $k \geq 1$ ), is null controllable if and only if there exists a dense subset  $E$  of  $(0, T)$  such that

$$\text{rank } \tilde{K}_{k,n}(t) = n, \quad \forall t \in E, \quad (5.8)$$

where  $\tilde{K}_{k,n}(t) = (b_0(t), \dots, b_{n-1}(t))$ , and the sequence  $(b_i)_{0 \leq i \leq n-1}$  is defined by  $b_0(t) = B(t)$  and  $b_i(t) = A(t)b_{i-1}(t) - \frac{d}{dt}b_{i-1}(t)$ . For  $n = 3$ ,  $k = 1$  and  $B = B_1$ , condition (5.8) writes

$$\det \tilde{K}(t) \neq 0, \quad \forall t \in E,$$

where  $\tilde{K}(t) = (B_1, A(t)B_1, A(t)^2B_1 - \frac{d}{dt}A(t)B_1)$  and  $\det \tilde{K}(t) = \det K(t) - a_{13} \frac{d}{dt}a_{23} + a_{23} \frac{d}{dt}a_{13}$ , with  $K$  defined in Theorem 5.3. The result of [AKBDGB09a] mentioned above ensures the controllability of (5.6) under this condition. In Theorem 5.3, the coefficient  $a_{23}$  is bounded from both sides, so that (5.5) is equivalent to

$$\det \tilde{K}(x, t) \geq \tilde{c}, \quad \forall (x, t) \in q_T, \quad \text{or} \quad \det \tilde{K}(x, t) \leq -\tilde{c}, \quad \forall (x, t) \in q_T.$$

However, in the present paper we do not investigate the equivalence between (5.5) and the controllability of (5.6), and we only deal with the case of the control matrix with constant coefficients  $B_1$ .

We also apply the decomposition (5.7) to prove the controllability of (5.1) by two forces ( $B = B_2$ ), which can be stated as follows.

**Theorem 5.6** (Controllability by two forces,  $B = B_2$ ). *Let us assume that  $a_{12}, a_{13} \in W_\infty^{2,1}(q_T)$  and that there exists a positive constant  $c$  such that*

$$|a_{12}|^2 + |a_{13}|^2 \geq c \quad \text{in } q_T. \quad (5.9)$$

*Then for every  $y^0 \in (L^2(\Omega))^3$  there exists a vector  $v = (v_1, v_2)^T \in (L^2(q_T))^2$  such that the solution  $y$  to*

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + Ay + B_2 v 1_\omega & \text{in } Q_T, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (5.10)$$

*satisfies*

$$y(\cdot, T) = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

### 5.1.2 Presentation of the method

In this paragraph, we use hypothesis (5.4) to transform the controllability problem for system (5.6) into a controllability problem for a  $2 \times 2$  non homogeneous system. Let  $\omega^0$  be a nonempty open subset of  $\Omega$  contained in  $\omega$ . Let  $(\widehat{y}, \widehat{v})$  be a solution to

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{y} = \Delta \widehat{y} + A \widehat{y} + \widehat{v} 1_{\omega^0} & \text{in } Q_T, \\ \widehat{y} = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \widehat{y}(\cdot, 0) = y^0, \quad \widehat{y}(\cdot, T) = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (5.11)$$

$(\widehat{y}, \widehat{v})$  will be suitably chosen in Section 5.5. Let us consider  $p \in \mathbb{N}$  and two truncation functions  $\eta \in C^\infty([0, T])$  and  $\theta \in C_c^2(\overline{\Omega})$  satisfying,

$$\begin{cases} 0 \leq \eta \leq 1, \\ \eta = 1 & \text{in } [0, T/4], \\ \eta = 0 & \text{in } [3T/4, T], \\ \eta(t) \leq C_\eta (T-t)^{p/2}, \quad t \in [0, T], \end{cases} \quad \begin{cases} \text{supp}(\theta) \subset \omega, \\ 0 \leq \theta \leq 1, \\ \theta = 1 & \text{on } \overline{\omega^0}, \end{cases} \quad (5.12)$$

where  $C_\eta$  is a positive constant. Let  $Y$  be the solution to the system without control which is

$$\begin{cases} \partial_t Y = \Delta Y + AY & \text{in } Q_T, \\ Y = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ Y(\cdot, 0) = y^0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

We search a solution  $y$  to (5.6) such that  $y(\cdot, T) = 0$  in the form

$$y = (1 - \theta)\widehat{y} + \eta\theta Y + F, \quad (5.13)$$

where  $F(x, t)$  is to be determined. Since the researched control forces  $v$  are acting on  $\omega$ , the function  $F$  can be chosen with support in  $\omega \times [0, T]$ . In this case, for fixed  $v$ , the function  $y$  defined by (5.13) is a solution to (5.6) satisfying  $y(\cdot, T) = 0$  if and only if  $F$  satisfies

$$\begin{cases} F(\cdot, 0) = F(\cdot, T) = 0 & \text{in } \omega, \\ \partial_t F - \Delta F - AF - h = (0, 0, v)^T & \text{in } q_T, \end{cases} \quad (5.14)$$

where

$$h = -2\nabla\theta \cdot \nabla\widehat{y} - (\Delta\theta)\widehat{y} - (\eta'\theta - \eta\Delta\theta)Y + 2\eta\nabla\theta \cdot \nabla Y. \quad (5.15)$$

Writing  $F = (F_1, F_2, F_3)^T$ ,  $F_0 = (F_1, F_2)^T$ ,  $A_0 = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ , and  $B_0 = (a_{13}, a_{23})^T$ , we see that there exists a function  $v$  and a function  $F$  satisfying (5.14), with support in  $\omega \times [0, T]$ , if and only if there exists a function  $F_3$ , with

$$F_3(\cdot, 0) = F_3(\cdot, T) = 0 \quad \text{in } \omega, \quad (5.16)$$

such that the solution  $F_0$  to

$$\begin{cases} \partial_t F_0 = \Delta F_0 + A_0 F_0 + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + B_0 F_3 & \text{in } q_T, \\ F_0 = 0 & \text{on } \sigma_T := \partial\omega \times (0, T), \\ F_0(\cdot, 0) = 0 & \text{in } \omega, \end{cases} \quad (5.17)$$

satisfies

$$F_0(\cdot, T) = 0 \quad \text{in } \omega. \quad (5.18)$$

In this case, the corresponding control  $v$  for system (5.1) is given by

$$v = \partial_t F_3 - \Delta F_3 - a_{31}F_1 - a_{32}F_2 - a_{33}F_3 - h_3. \quad (5.19)$$

**Remark 5.7.** The decomposition (5.13) enables us to state that controlling system (5.6) with one force consists in controlling the two equations of (5.17) with the same control force  $F_3$ . In the  $2 \times 2$  system (5.17) the control operator is  $B_0 = (a_{13}, a_{23})^T$  and then  $B_0^* \phi = a_{13}\phi_1 + a_{23}\phi_2$  for  $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ . To the author knowledge, the existing techniques used to prove observability inequalities for parabolic systems do not apply for a control operator of this form (even if the control acts on the whole domain).

In view of Remark 5.7, we apply a change of variables to transform (5.17) into a  $2 \times 2$  system where the control force acts only on one equation. Indeed, hypothesis (5.4) allows us to consider the new variables

$$z = (z_1, z_2)^T, \quad z_1 = F_1 - \frac{a_{13}}{a_{23}}F_2, \quad z_2 = F_2, \quad u = F_3, \quad (5.20)$$

and to rewrite system (5.17) as

$$\begin{cases} \partial_t z = \Delta z + \tilde{A}z + g + \tilde{B}u & \text{in } q_T, \\ z = 0 & \text{on } \sigma_T, \\ z(\cdot, 0) = 0 & \text{in } \omega, \end{cases} \quad (5.21)$$

where  $\tilde{B} = (0, a_{23})^T$ ,  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  with

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= \frac{a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}}{a_{23}}, \\ \tilde{a}_{12} &= -\frac{\det K}{a_{23}^2} + (\Delta - \partial_t) \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) + 2\nabla \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \cdot \nabla, \\ \tilde{a}_{21} &= a_{21}, \\ \tilde{a}_{22} &= \frac{a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23}}{a_{23}}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

and

$$g = (g_1, g_2)^T, \quad g_1 = h_1 - \frac{a_{13}}{a_{23}}h_2, \quad g_2 = h_2. \quad (5.23)$$

**Remark 5.8.** As explained before,  $z_1$  is chosen by the mean of the change of variables (5.20) so as to have one control force only. Note that —unlike the localized control force  $v$  in (5.6)— this control force  $u$  acts on the *whole* domain  $\omega$  where the solution  $z$  to (5.21) evolves. This will be the key point of the proofs in the following section.

To shorten notation in the sequel, we set

$$\|\tilde{A}\|_\infty = \|\tilde{a}_{11}\|_\infty + \|\tilde{a}_{21}\|_\infty + \|\tilde{a}_{22}\|_\infty + a_\infty, \quad (5.24)$$

where

$$a_\infty = \left\| \frac{\det K}{a_{23}^2} \right\|_\infty + \left\| (\Delta + \partial_t) \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \right\|_\infty + \left\| \nabla \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \right\|_\infty.$$

$K$  is the  $3 \times 3$  Kalman matrix given in Theorem 5.3 whose determinant is

$$\det K = a_{13}(a_{22}a_{23} + a_{21}a_{13}) - a_{23}(a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23}).$$

Note that  $\tilde{a}_{12}$  is not a  $L^\infty$  coefficient, but a first order operator in space. We have simplified the adjoint of the control operator of the  $2 \times 2$  system (5.17). With the new operator  $\tilde{B}^* \phi = a_{23} \phi_2$  for  $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ , we are now able to prove the controllability of (5.21). Rewriting conditions (5.16), (5.18) and (5.19) with the change of variables (5.20), we have:

**Lemma 5.9.** *If there exists a function  $u \in W_\omega^2(0, T)$  satisfying*

$$u(\cdot, 0) = u(\cdot, T) = 0, \quad (5.25)$$

*such that the solution  $z$  to (5.21) satisfies  $z(\cdot, T) = 0$ , then there exists a function  $v \in L^2(q_T)$  such that the solution  $y$  to (5.6) satisfies  $y(\cdot, T) = 0$ .*

*Moreover,  $v$  can be obtained as*

$$v = \partial_t u - \Delta u - a_{31}z_1 - \left( a_{32} + \frac{a_{13}a_{31}}{a_{23}} \right) z_2 - a_{33}u - h_3, \quad (5.26)$$

*where  $h$  is defined by (5.15).*

**Remark 5.10.** For the controllability of system (5.21) we need that the source term  $g$  belongs to an appropriate space. By the definition of  $g$  (see (5.15) and (5.23)), this implies some constraints on the solution  $(\hat{y}, \hat{v})$  to (5.11).

The paper is organized as follows. Sections 5.2 and 5.3 concern the proof of Theorem 5.3. Section 5.2 is devoted to the proof of an observability inequality for the backward system associated with (5.21). In Section 5.3 we follow the method provided by Lemma 5.9 to prove Theorem 5.3: first, we prove that, under some hypotheses on the solution  $(\hat{y}, \hat{v})$  to system (5.11), the reduced system (5.21) is null controllable with control forces  $u \in L^2(q_T)$ , and then, we choose a control  $u$  belonging to  $W_\omega^2(0, T)$  (so that  $v$  defined by (5.26) belongs to  $L^2(q_T)$ ) and satisfying (5.25). In Section 5.4, we apply the decomposition (5.13) to investigate the null controllability of (5.1) by two forces and to prove Theorem 5.6. Section 5.5 is devoted to the proof of the existence of a solution  $(\hat{y}, \hat{v})$  to (5.11) satisfying the hypotheses required in Sections 5.3 and 5.4. Some remarks and further results are discussed in Section 5.6.

## 5.2 An observability inequality for the non homogeneous backward system associated with (5.21)

As it is usual, we state the controllability of system (5.21) as a consequence of the observability of its adjoint system. Let us consider the following non homogeneous backward system associated with (5.21):

$$\begin{cases} -\partial_t \phi_1 = \Delta \phi_1 + \tilde{a}_{11} \phi_1 + \tilde{a}_{21} \phi_2 + f_1 & \text{in } q_T, \\ -\partial_t \phi_2 = \Delta \phi_2 + \tilde{a}_{12}^* \phi_1 + \tilde{a}_{22} \phi_2 + f_2 & \text{in } q_T, \\ \phi_1 = \phi_2 = 0 & \text{on } \sigma_T, \\ \phi_1(\cdot, T) = \phi_1^0, \phi_2(\cdot, T) = \phi_2^0 & \text{in } \omega, \end{cases} \quad (5.27)$$

where  $\tilde{a}_{12}^*$  is the formal adjoint of the operator  $\tilde{a}_{12}$ . This section is devoted to the proof of the following observability result for the solutions to (5.27).

**Proposition 5.11.** *Under hypotheses of Theorem 5.3, for every  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 3$ , there exists a positive constant  $C_0 = C_0(R_0, \|\tilde{A}\|_\infty, c, \alpha, p, T)$  (where  $\|\tilde{A}\|_\infty$  is defined in (5.24) and  $R_0$  in (5.35)) such that for every  $\phi^0 = (\phi_1^0, \phi_2^0)^T \in (L^2(\omega))^2$  and every  $f = (f_1, f_2)^T \in (L^2(q_T))^2$ , the solution  $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$  to (5.27) satisfies*

$$\begin{aligned} \|\phi(0)\|_{(L^2(\omega))^2}^2 + \int_{q_T} (T-t)^p |\phi|^2 \\ \leq C_0 \left( \int_{q_T} t^{p-3} (T-t)^{p-3} (\tilde{B}^* \phi)^2 + \int_{q_T} (T-t)^p |f|^2 \right). \end{aligned}$$

The proof of Proposition 5.11 is decomposed in two steps (see page 105). In the first step we establish a weak observability inequality (5.38) with an observation on the two components of the solution to system (5.27). In the second step we remove the first component  $\phi_1$ , as it is estimated by the second one  $\phi_2$ . This second step is the key point of the proof of Proposition 5.11 and it can be formulated as the following lemma.

**Lemma 5.12.** *Under hypotheses of Theorem 5.3, for every  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 3$ , there exists a positive constant  $C_1 = C_1(\|\tilde{A}\|_\infty, c, p, T)$  such that, for every  $\phi^0 \in (L^2(\omega))^2$  and every  $f \in (L^2(q_T))^2$ , the solution  $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$  to (5.27) satisfies*

$$\int_{q_T} t^p (T-t)^p \phi_1^2 \leq C_1 \left( \int_{q_T} t^{p-3} (T-t)^{p-3} \phi_2^2 + \int_{q_T} t^p (T-t)^p |f|^2 \right). \quad (5.28)$$

*Proof.* Fix  $\delta \in (0, 1)$ . To simplify notations, let us consider the function  $\varphi$  defined by

$$\varphi(t) = t(T-t), \quad t \in [0, T].$$

All along the proof  $K = K(\|\tilde{A}\|_\infty, p, T)$ ,  $K_\epsilon = K_\epsilon(\|\tilde{A}\|_\infty, p, T, \epsilon)$ , and the values of those constants may change from one line to another. Multiplying the second equation of (5.27) by  $\varphi^p \phi_1$  and integrating by parts over  $q_T$ , we obtain

$$\begin{aligned} \int_{q_T} \varphi^p (\tilde{a}_{12}^* \phi_1) \phi_1 &= \int_{q_T} (p\varphi' \varphi^{p-1} - \varphi^p (\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22})) \phi_1 \phi_2 + 2 \int_{q_T} \varphi^p \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 \\ &\quad - \int_{q_T} \varphi^p \tilde{a}_{21} \phi_2^2 - \int_{q_T} \varphi^p (f_2 \phi_1 + f_1 \phi_2). \end{aligned} \quad (5.29)$$



Besides, by the definition of  $\tilde{a}_{12}$  and simple computations, we can prove that

$$\begin{aligned} \int_{q_T} \varphi^p (\tilde{a}_{12}^* \phi_1) \phi_1 &= \int_{q_T} \varphi^p \phi_1 (\tilde{a}_{12} \phi_1) \\ &= - \int_0^T \varphi^p(t) \left[ \int_{\omega} \left( \frac{\det K}{a_{23}^2} + \partial_t \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \right) \phi_1^2 dx \right] dt. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Recalling hypothesis (5.5), we deduce from (5.30) that

$$c \int_{q_T} \varphi^p \phi_1^2 \leq \left| \int_{q_T} \varphi^p (\tilde{a}_{12}^* \phi_1) \phi_1 \right|. \quad (5.31)$$

Now, from (5.29) and (5.31) and using  $\varphi'(t) = T - 2t \in [-T, T]$  and the inequality  $ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2$  for every  $a, b \in \mathbb{R}^+$  and  $\epsilon > 0$ , we deduce that

$$\begin{aligned} c \int_{q_T} \varphi^p \phi_1^2 &\leq \epsilon K \left( \int_{q_T} \varphi^p \phi_1^2 + \int_{q_T} \varphi^{p+1} |\nabla \phi_1|^2 \right) \\ &\quad + K_\epsilon \left( \int_{q_T} \varphi^{p-1} |\nabla \phi_2|^2 + \int_{q_T} \varphi^{p-3} \phi_2^2 + \int_{q_T} \varphi^p |f|^2 \right). \end{aligned}$$

Choosing  $\epsilon$  such that  $c - \epsilon K \geq \delta c$ , we obtain

$$\begin{aligned} \delta c \int_{q_T} \varphi^p \phi_1^2 &\leq \epsilon K \int_{q_T} \varphi^{p+1} |\nabla \phi_1|^2 \\ &\quad + K_\epsilon \left( \int_{q_T} \varphi^{p-1} |\nabla \phi_2|^2 + \int_{q_T} \varphi^{p-3} \phi_2^2 + \int_{q_T} \varphi^p |f|^2 \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

To “control” the variable  $\phi_1$  by the variable  $\phi_2$  and the source term  $f$ , we have to eliminate the terms in  $\nabla \phi_1$  and  $\nabla \phi_2$  in the right-hand side of (5.32). We begin by getting rid of the term in  $\nabla \phi_2$ . To this end, we multiply the second equation of (5.27) by  $\varphi^{p-1} \phi_2$  and we integrate by parts over  $q_T$ :

$$\begin{aligned} \int_{q_T} \varphi^{p-1} |\nabla \phi_2|^2 &= - \int_{q_T} \varphi^{p-1} \phi_2 \Delta \phi_2 \\ &= \int_{q_T} \varphi^{p-1} \phi_2 (\partial_t \phi_2 + \tilde{a}_{12}^* \phi_1 + \tilde{a}_{22} \phi_2 + f_2) \\ &= \int_{q_T} \varphi (\varphi \tilde{a}_{22} - \frac{p-1}{2} \varphi') \varphi^{p-3} \phi_2^2 + \int_{q_T} \varphi^{p-1} (\tilde{a}_{12} \phi_2) \phi_1 \\ &\quad + \int_{q_T} \varphi^{p-1} f_2 \phi_2. \end{aligned} \quad (5.33)$$

By the definition of  $\tilde{a}_{12}$  (see (5.22)) and integration by parts on  $\omega$ , we can prove that

$$\begin{aligned} \int_{q_T} \varphi^{p-1} (\tilde{a}_{12} \phi_2) \phi_1 &= - \int_{q_T} \varphi^{p-1} \left( \frac{\det K}{a_{23}^2} + (\Delta + \partial_t) \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \right) \phi_1 \phi_2 \\ &\quad - 2 \int_{q_T} \varphi^{p-1} \phi_2 \nabla \phi_1 \cdot \nabla \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right). \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} \left| \int_{q_T} \varphi^{p-1} (\tilde{a}_{12} \phi_2) \phi_1 \right| &\leq \epsilon^2 a_\infty \left( \int_{q_T} \varphi^p \phi_1^2 + \int_{q_T} \varphi^{p+1} |\nabla \phi_1|^2 \right) \\ &\quad + \frac{a_\infty}{\epsilon^2} \left( \frac{T^2}{4} + 1 \right) \int_{q_T} \varphi^{p-3} \phi_2^2. \end{aligned}$$

Combining this inequality with (5.33) and (5.32), we obtain

$$\begin{aligned} \delta c \int_{q_T} \varphi^p \phi_1^2 &\leq \epsilon K \left( \int_{q_T} \varphi^p \phi_1^2 + \int_{q_T} \varphi^{p+1} |\nabla \phi_1|^2 \right) \\ &\quad + K_\epsilon \left( \int_{q_T} \varphi^{p-3} \phi_2^2 + \int_{q_T} \varphi^p |f|^2 \right). \end{aligned}$$

Now we choose  $\epsilon$  such that  $\delta c - \epsilon K \geq \delta^2 c$ , and we deduce from this inequality that

$$\delta^2 c \int_{q_T} \varphi^p \phi_1^2 \leq \epsilon K \int_{q_T} \varphi^{p+1} |\nabla \phi_1|^2 + K_\epsilon \left( \int_{q_T} \varphi^{p-3} \phi_2^2 + \int_{q_T} \varphi^p |f|^2 \right). \quad (5.34)$$

To eliminate  $\nabla \phi_1$  in the right-hand side of (5.34), we multiply the first equation of (5.27) by  $\varphi^{p+1} \phi_1$ . After integrations by parts in  $q_T$ , we obtain

$$\int_{q_T} \varphi^{p+1} |\nabla \phi_1|^2 = \int_{q_T} (\varphi \tilde{a}_{11} - \frac{p+1}{2} \varphi') \varphi^p \phi_1^2 + \int_{q_T} \varphi^{p+1} \tilde{a}_{21} \phi_1 \phi_2 + \int_{q_T} \varphi^{p+1} f_1 \phi_1.$$

Hence

$$\int_{q_T} \varphi^{p+1} |\nabla \phi_1|^2 \leq K \left( \int_{q_T} \varphi^p \phi_1^2 + \int_{q_T} \varphi^{p-3} \phi_2^2 + \int_{q_T} \varphi^p |f|^2 \right).$$

Combining this inequality with (5.34) gives

$$\delta^2 c \int_{q_T} \varphi^p \phi_1^2 \leq \epsilon K \int_{q_T} \varphi^p \phi_1^2 + K_\epsilon \left( \int_{q_T} \varphi^{p-3} \phi_2^2 + \int_{q_T} \varphi^p |f|^2 \right).$$

For  $\epsilon$  satisfying  $\delta^2 c - \epsilon K \geq \delta^3 c$ , we deduce from this inequality that

$$\int_{q_T} \varphi^p \phi_1^2 \leq \frac{K_\epsilon}{\delta^2 c} \left( \int_{q_T} \varphi^{p-3} \phi_2^2 + \int_{q_T} \varphi^p |f|^2 \right).$$

This proves the lemma.  $\square$

We also recall the energy inequality satisfied by the solutions to (5.27).

**Lemma 5.13.** *For every  $\phi^0 \in (L^2(\omega))^2$  and every  $f \in (L^2(q_T))^2$ , the solution  $\phi$  to (5.27) satisfies for all  $(t_1, t_2) \in [0, T]^2$  such that  $t_1 \leq t_2$*

$$\|\phi(t_1)\|_{(L^2(\omega))^2}^2 \leq e^{4R_0(t_2-t_1)} \|\phi(t_2)\|_{(L^2(\omega))^2}^2 + e^{4R_0(T-t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|_{(L^2(\omega))^2}^2 dt$$

where

$$\begin{aligned} R_0 &= \|a_{11}\|_\infty + \|a_{12}\|_\infty + \|a_{21}\|_\infty + \|a_{22}\|_\infty \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} (\|a_{11}\|_\infty^2 + \|a_{13}\|_\infty^2 + \|a_{21}\|_\infty^2 + \|a_{22}\|_\infty^2) \\ &\quad + \frac{\|a_{13}\|_\infty^4}{\alpha^3} + \left\| (\Delta + \partial_t) \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \right\|_\infty + \left\| \nabla \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \right\|_\infty^2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

We do not give the proof of Lemma 5.13 which is standard.

*Proof of Proposition 5.11.* Applying Lemma 5.13, firstly with  $t_1 = t \in [0, T/4]$ ,  $t_2 = T/4$ , secondly with  $t_1 = T/4$ ,  $t_2 = t \in [T/4, T/2]$ , we obtain

$$\begin{aligned} \int_0^{T/4} \|\phi(t)\|_{(L^2(\omega))^2}^2 dt &\leq e^{2R_0 T} \int_{T/4}^{T/2} \|\phi(t)\|_{(L^2(\omega))^2}^2 dt \\ &\quad + \frac{T}{4} e^{4R_0 T} \int_0^{T/2} \|f(t)\|_{(L^2(\omega))^2}^2 dt. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Since

$$\int_{q_T} (T-t)^p |\phi|^2 \leq T^p \int_0^{T/4} \|\phi(t)\|_{(L^2(\omega))^2}^2 dt + \frac{2^{2p}}{T^p} \int_{T/4}^T t^p (T-t)^p \|\phi(t)\|_{(L^2(\omega))^2}^2 dt,$$

we deduce from (5.36) that

$$\begin{aligned} \int_{q_T} (T-t)^p |\phi|^2 &\leq T^p e^{2R_0 T} \int_{T/4}^{T/2} \|\phi(t)\|_{(L^2(\omega))^2}^2 dt \\ &\quad + \frac{T^{p+1}}{4} e^{4R_0 T} \int_0^{T/2} \|f(t)\|_{(L^2(\omega))^2}^2 dt \\ &\quad + \frac{2^{2p}}{T^p} \int_{T/4}^T t^p (T-t)^p \|\phi(t)\|_{(L^2(\omega))^2}^2 dt. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Using the fact that the functions  $t^p(T-t)^p$  and  $(T-t)^p$  are lower bounded by a positive constant for  $t \in [T/4, T/2]$  and  $t \in [0, T/2]$  respectively, we obtain from (5.37)

$$\int_{q_T} (T-t)^p |\phi|^2 \leq C \left( \int_{q_T} t^p (T-t)^p |\phi|^2 + \int_0^{T/2} (T-t)^p \|f(t)\|_{(L^2(\omega))^2}^2 dt \right), \quad (5.38)$$

where  $C = C(R_0, p, T)$ . Combining this inequality with (5.28), we finally obtain

$$\int_{q_T} (T-t)^p |\phi|^2 \leq C \left( \int_{q_T} t^{p-3} (T-t)^{p-3} \phi_2^2 + \int_{q_T} (T-t)^p |f|^2 \right),$$

with  $C = C(R_0, \|\tilde{A}\|_\infty, c, p, T)$ . This ends the proof of Proposition 5.11, recalling that  $\tilde{B}^* \phi = a_{23} \phi_2$  with  $a_{23}$  satisfying (5.4).  $\square$

**Remark 5.14.** In order to deal with the controllability of non linear systems, it is crucial to know the explicit dependence on the parameters  $T$ ,  $\alpha$  and  $\|a_{ij}\|_\infty$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) of the observability constant  $C_0$  in Proposition 5.11. Analyzing in details the proofs of Lemma 5.12 and Proposition 5.11, we can obtain

$$C_0 = \exp(\kappa N_T),$$

where  $\kappa$  is a positive constant which depends only on  $p$  and  $c$ , and  $N_T$  is given by

$$N_T = 1 + M_0 + \left\| \nabla \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \right\|_\infty + \frac{1}{\alpha^2} + T + M_0 T + \frac{1}{T}, \quad (5.39)$$

where  $M_0 = R_0 - \left\| \nabla \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \right\|_\infty^2$ , with  $R_0$  as in (5.35).

### 5.3 Controllability of (5.21) and proof of Theorem 5.3

For the moment, let us assume that the source term  $g$  in (5.21) satisfies

$$g \in (L^2(q_T, \rho))^2, \quad (5.40)$$

where

$$\rho(t) = (T-t)^{-p/2}, \quad \forall t \in (0, T). \quad (5.41)$$

This will be proved in details in Section 5.5.

The aim of the present section is to prove Theorem 5.3. According to Lemma 5.9, Theorem 5.3 will be proved if we construct a regular control  $u$  for system (5.21) which ensures that the control  $v$  for system (5.6) defined by (5.26) belongs to  $L^2(q_T)$ . This is the subject of the following result.

**Theorem 5.15.** *Let assumptions of Theorem 5.3 hold. Then there exists at least one function  $u \in W_\omega^2(0, T)$  satisfying (5.25) and such that the solution  $z$  to (5.21) satisfies  $z(\cdot, T) = 0$ .*

Before proving this theorem, let us recall the well-known result of existence of regular solutions to the following parabolic system

$$\begin{cases} \partial_t z = \Delta z + \tilde{A}z + f & \text{in } q_T, \\ z = 0 & \text{on } \sigma_T, \\ z(\cdot, 0) = 0 & \text{in } \omega, \end{cases} \quad (5.42)$$

whose proof can be obtained using the same method as in [LSU67].

**Proposition 5.16.** *For every  $f \in (L^2(q_T))^2$ , system (5.42) admits a unique solution  $z \in (W_\omega^2(0, T))^2$ , which satisfies*

$$\|z\|_{(W_\omega^2(0, T))^2}^2 \leq e^{CR_T} \|f\|_{(L^2(q_T))^2}^2,$$

where  $C = C(\omega) > 0$  and  $R_T = (1 + T)(1 + R_0)$  (with  $R_0$  given by (5.35)).

The proof of Theorem 5.15 follows the idea developed by Fursikov and Imanuvilov in [FI96] to prove the existence of solutions to parabolic equations which exponentially decrease at  $t = T$ . This method will also be applied in Section 5.4 for the proof of Lemma 5.20 and in Section 5.5 for the proof of Theorem 5.21.

*Proof of Theorem 5.15.* Let us introduce the following notation

$$Lz = \partial_t z - \Delta z - \tilde{A}z, \quad L^* \phi = -\partial_t \phi - \Delta \phi - \tilde{A}^* \phi.$$

For  $p \in \mathbb{N}$  with  $p \geq 8$ , we consider the weight functions defined for  $t \in (0, T)$  and for  $k \in \mathbb{N}^*$  by,

$$\tilde{\rho}_0(t) = (t(T - t))^{-(p-3)/2}, \quad \rho_k(t) = (T + \frac{1}{k} - t)^{-p/2}.$$

Then the observability inequality of Proposition 5.11 may be written as

$$\|\phi(\cdot, 0)\|_{(L^2(\omega))^2}^2 + \int_{q_T} \rho^{-2} |\phi|^2 \leq C_0 \left( \int_{q_T} \tilde{\rho}_0^{-2} (\tilde{B}^* \phi)^2 + \int_{q_T} \rho^{-2} |L^* \phi|^2 \right), \quad (5.43)$$

where  $C_0 = \exp(\kappa N_T)$  with  $N_T$  given by (5.39). All along this proof,  $C$  stands for a generic positive constant depending only on  $\omega$ ,  $p$  and on the parameter  $c$  occurring in hypothesis (5.5). Let us consider, for each  $k \in \mathbb{N}^*$ , the following minimization problem

$$\begin{cases} \text{minimize } \tilde{\mathcal{J}}_k(u) = \frac{1}{2} \int_{q_T} \tilde{\rho}_0^2 u^2 + \frac{1}{2} \int_{q_T} \rho_k^2 |z_u|^2, \\ u \in L^2(q_T, \tilde{\rho}_0), \end{cases} \quad (5.44)$$

where  $z_u$  stands for the solution to (5.21) associated with  $u \in L^2(q_T, \tilde{\rho}_0)$ . The functional  $\tilde{\mathcal{J}}_k : L^2(q_T, \tilde{\rho}_0) \rightarrow \mathbb{R}^+$  is clearly differentiable, coercive and strictly convex on  $L^2(q_T, \tilde{\rho}_0)$ . Therefore, following [Lio68], we deduce that the minimization problem (5.44) admits a unique solution  $u_k$  which is characterized by the following optimality conditions

$$Lz_k = g + \tilde{B}u_k \text{ in } q_T, \quad z_k = 0 \text{ on } \sigma_T, \quad z_k(\cdot, 0) = 0, \quad (5.45)$$

$$L^* \phi_k = \rho_k^2 z_k \text{ in } q_T, \quad \phi_k = 0 \text{ on } \sigma_T, \quad \phi_k(\cdot, T) = 0, \quad (5.46)$$

$$u_k = -\tilde{\rho}_0^{-2} \tilde{B}^* \phi_k. \quad (5.47)$$

Using (5.47) and (5.46), we can write

$$\tilde{\mathcal{J}}_k(u_k) = \frac{1}{2} \int_{q_T} \tilde{\rho}_0^{-2} (\tilde{B}^* \phi_k)^2 + \frac{1}{2} \int_{q_T} \rho_k^{-2} |\rho_k^2 z_k|^2.$$

Since  $\rho_k \leq \rho$ , we can deduce from the observability inequality (5.43) that

$$\tilde{\mathcal{J}}_k(u_k) \geq \frac{1}{2C_0} \left( \|\phi_k(\cdot, 0)\|_{(L^2(\omega))^2}^2 + \int_{q_T} \rho^{-2} |\phi_k|^2 \right). \quad (5.48)$$

Besides, the optimality conditions also imply

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}_k(u_k) &= -\frac{1}{2} \int_{q_T} (\tilde{B}^* \phi_k) u_k - \frac{1}{2} \int_{q_T} (\partial_t \phi_k + \Delta \phi_k + \tilde{A}^* \phi_k) z_k \\ &= -\frac{1}{2} \int_{q_T} \phi_k \tilde{B} u_k + \frac{1}{2} \int_{q_T} (\partial_t z_k - \Delta z_k - \tilde{A}^* z_k) \phi_k \\ &= \frac{1}{2} \int_{q_T} \phi_k g. \end{aligned}$$

By (5.48), it follows that

$$\tilde{\mathcal{J}}_k(u_k) \leq \sqrt{\frac{C_0}{2}} \sqrt{\tilde{\mathcal{J}}_k(u_k)} \|g\|_{(L^2(q_T, \rho))^2}.$$

Consequently,

$$\tilde{\mathcal{J}}_k(u_k) \leq \frac{C_0}{2} \|g\|_{(L^2(q_T, \rho))^2}^2. \quad (5.49)$$

Besides, from (5.40) we have  $\|g\|_{(L^2(q_T, \rho))^2}^2 \leq T^p \|g\|_{(L^2(q_T, \rho))^2}^2$ . By the definition of  $\tilde{\rho}_0$  and the estimate (5.49), we also have  $\|\tilde{B}u_k\|_{L^2(q_T)}^2 \leq \|a_{23}\|_\infty^2 \frac{T^{2p-6}}{4^{p-3}} \int_{q_T} \tilde{\rho}_0^2 |u_k|^2 \leq \|a_{23}\|_\infty^2 C_0 \|g\|_{(L^2(q_T, \rho))^2}^2$ , so that the source term  $g + \tilde{B}u_k$  in (5.45) belongs to  $(L^2(q_T))^2$ , with the estimate

$$\|g + \tilde{B}u_k\|_{(L^2(q_T))^2}^2 \leq \|a_{23}\|_\infty^2 C_0 \|g\|_{(L^2(q_T, \rho))^2}^2.$$

From Proposition 5.16, it follows that the solution  $z_k$  to (5.45) belongs to  $(W_\omega^2(0, T))^2$ , with the estimate

$$\|z_k\|_{(W_\omega^2(0, T))^2}^2 \leq e^{\kappa S_T} \|g\|_{(L^2(q_T, \rho))^2}^2, \quad (5.50)$$

where  $S_T = R_T + N_T + \|a_{23}\|_\infty$ . From (5.49) and (5.50), we deduce the existence of subsequences, still denoted  $z_k$  and  $u_k$ , such that as  $k \rightarrow \infty$ , we have

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u && \text{in } L^2(q_T, \tilde{\rho}_0), \\ z_k &\rightharpoonup z && \text{in } (W_\omega^2(0, T))^2, \\ \rho_k z_k &\rightharpoonup \rho z && \text{in } (L^2(q_T))^2. \end{aligned}$$

Passing to the weak-limit in (5.45) as  $k \rightarrow +\infty$ , we see that  $z$  is the solution to (5.21) associated with  $u$ . Using the continuous embedding  $(W_\omega^2(0, T))^2 \hookrightarrow C([0, T]; (H_0^1(\omega))^2)$ , we deduce from  $z \in (W_\omega^2(0, T))^2$  that  $z \in C([0, T]; (H_0^1(\omega))^2)$ . Therefore, the fact that  $\rho z$  belongs to  $(L^2(q_T))^2$  implies that  $z(\cdot, T) = 0$ , since the weight  $\rho$  blows up at  $t = T$ .

Note that if  $u$  belongs to  $W_\omega^2(0, T)$ , then  $u$  necessarily satisfies (5.25), since  $u \in L^2(q_T, \tilde{\rho}_0)$  and  $\tilde{\rho}_0$  blows up at  $t = 0$  and  $t = T$ . Consequently, the proof of Theorem 5.15 will be ended if we prove that  $u$  belongs to  $W_\omega^2(0, T)$ . Let us recall that  $u$  is given by the weak-limit of  $u_k$  in  $L^2(q_T, \tilde{\rho}_0)$ , where each  $u_k$  satisfies the optimality conditions (5.45)-(5.47). Let  $k$  be fixed. The weight function  $\rho_k$  is bounded on  $q_T$ , so that the solution  $\phi_k = (\phi_{k,1}, \phi_{k,2})$  to (5.46) belongs to  $(W_\omega^2(0, T))^2$ . It follows that  $u_k \in W_\omega^2(0, T)$ , since we have by (5.47)  $u_k = -\tilde{\rho}_0^{-2} a_{23} \phi_{k,2}$  with  $a_{23} \in W_\infty^{2,1}(q_T)$ . The idea is to prove that  $u_k$  weakly converges in  $W_\omega^2(0, T)$ . This will be obtained by proving that the norm of  $u_k$  in  $W_\omega^2(0, T)$  is bounded from above independently of  $k$ . The function  $\psi_k = \tilde{\rho}_0^{-2} \phi_k$  is the solution to

$$L^* \psi_k = \tilde{\rho}_0^{-2} \rho_k^2 z_k - \partial_t(\tilde{\rho}_0^{-2}) \phi_k \text{ in } q_T, \quad \psi_k = 0 \text{ on } \sigma_T, \quad \psi_k(\cdot, T) = 0.$$

Using the facts that  $p \geq 6$  and  $\int_{q_T} \rho_k^2 |z_k|^2 \leq \frac{C_0}{2} \|g\|_{(L^2(q_T, \rho))^2}^2$  (given by (5.49)), we can prove that  $\int_{q_T} |\tilde{\rho}_0^{-2} \rho_k^2 z_k|^2 \leq e^{CN_T} \|g\|_{(L^2(q_T, \rho))^2}^2$ . The estimate  $\int_{q_T} |\partial_t(\tilde{\rho}_0^{-2}) \phi_k|^2 \leq e^{CN_T} \|g\|_{(L^2(q_T, \rho))^2}^2$  follows from the inequality  $\int_{q_T} \rho^{-2} |\phi_k|^2 \leq C_0 \|g\|_{(L^2(q_T, \rho))^2}^2$  (obtained by combination of (5.48) and (5.49)) and the fact that  $p \geq 8$ . Therefore, we have  $\|L^* \psi_k\|_{(L^2(q_T))^2}^2 \leq e^{CN_T} \|g\|_{(L^2(q_T, \rho))^2}^2$ . Applying the inequality of Proposition 5.16 to  $\psi_k$ , we obtain

$$\|\psi_k\|_{(W_\omega^2(0, T))^2}^2 \leq e^{C(R_T + N_T)} \|g\|_{(L^2(q_T, \rho))^2}^2,$$

so that for a subsequence we have  $\psi_k \rightharpoonup \psi$  in  $(W_\omega^2(0, T))^2$ . Then,  $\tilde{B}^* \psi_k$  weakly converges to  $\tilde{B}^* \psi$  in  $W_\omega^2(0, T)$ , since  $a_{23} \in W_\infty^{2,1}(q_T)$ . Therefore,  $u_k = -\tilde{\rho}_0^{-2} \tilde{B}^* \psi_k$  weakly converges to  $-\tilde{\rho}_0^{-2} \tilde{B}^* \psi$  in  $W_\omega^2(0, T)$ . By the uniqueness of the weak-limit of  $u_k$  in  $L^2(q_T)$ , we obtain  $u = -\tilde{\rho}_0^{-2} \tilde{B}^* \psi$ , and in particular  $u \in W_\omega^2(0, T)$ . This ends the proof of Theorem 5.15.  $\square$

## 5.4 Application of the method to the controllability by two forces: proof of Theorem 5.6

In this section we apply the method detailed in Section 5.1.2 to the controllability of system (5.1) by two forces. The proof is more straightforward in this case than for the controllability by three forces. Indeed, if the decomposition (5.13) defines a solution  $y$  to (5.10) controlled by two forces  $v = (v_1, v_2)^T$ , then (5.14) becomes

$$\begin{cases} F(\cdot, 0) = F(\cdot, T) = 0 & \text{in } \omega, \\ \partial_t F - \Delta F - AF - h = (0, v_1, v_2)^T & \text{in } q_T, \end{cases} \quad (5.51)$$

where  $h$  is given by (5.15). This leads to the controllability of the equation

$$\begin{cases} \partial_t F_1 = \Delta F_1 + a_{11}F_1 + h_1 + a_{21}F_2 + a_{31}F_3 & \text{in } q_T, \\ F_1 = 0 & \text{on } \sigma_T, \\ F_1(\cdot, 0) = 0 & \text{in } \omega, \end{cases}$$

by two control forces  $F_2$  and  $F_3$  satisfying  $F_2(\cdot, 0) = F_2(\cdot, T) = F_3(\cdot, 0) = F_3(\cdot, T) = 0$  in  $\omega$ . The two control forces  $v_1$  and  $v_2$  associated with  $y$  are then expressed functions of  $F_1$ ,  $F_2$  and  $F_3$  thanks to (5.51). For more readability, we set

$$z = F_1, \quad u_1 = F_2, \quad u_2 = F_3, \quad u = (u_1, u_2)^T, \quad \mathcal{B}u = a_{21}u_1 + a_{31}u_2.$$

The result analogous to Lemma 5.9 is given below.

**Lemma 5.17.** *If there exists  $u \in (W_\omega^2(0, T))^2$  satisfying*

$$u(\cdot, 0) = u(\cdot, T) = 0, \quad (5.52)$$

and such that the solution  $z$  to

$$\begin{cases} \partial_t z = \Delta z + a_{11}z + h_1 + \mathcal{B}u & \text{in } q_T, \\ z = 0 & \text{on } \sigma_T, \\ z(\cdot, 0) = 0 & \text{in } \omega, \end{cases} \quad (5.53)$$

satisfies  $z(\cdot, T) = 0$  in  $\omega$ , then system (5.10) is null controllable by two forces  $v_1$  and  $v_2$ . Moreover,  $v_1$  and  $v_2$  can be obtained as

$$\begin{aligned} v_1 &= \partial_t u_1 - \Delta u_1 - a_{21}z - a_{22}u_1 - a_{23}u_2 + h_2, \\ v_2 &= \partial_t u_2 - \Delta u_2 - a_{31}z - a_{32}u_1 - a_{33}u_2 + h_3. \end{aligned}$$

The method provided by Lemma 5.17 to prove Theorem 5.6 is similar to that provided by Lemma 5.9 to prove Theorem 5.3: first, we state that system (5.53) is controllable by two forces  $u = (u_1, u_2)^T \in (L^2(q_T))^2$ , then we construct some forces  $u$  satisfying (5.52) and belonging to  $(W_\omega^2(0, T))^2$ .

Let us consider, for  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 1$ , the following weight function

$$\rho_0(t) = (t(T-t))^{-(p-1)/2}.$$

**Proposition 5.18.** *Let us assume that hypothesis (5.9) is satisfied. Then there exists  $u \in (L^2(q_T, \rho_0))^2$  such that the solution  $z$  to (5.53) satisfies  $z(\cdot, T) = 0$  in  $\omega$ .*

By the definition of  $\mathcal{B}$ , it is easy to prove that Proposition 5.18 is true if we replace  $u \in (L^2(q_T, \rho_0))^2$  by  $u \in (L^2(q_T))^2$ , since the source term  $h_1$  belongs to  $L^2(q_T)$ . But we need to construct control forces  $u$  which satisfy (5.52) and belong to  $(W_\omega^2(0, T))^2$ . This is the reason why we introduce the weight functions  $\rho$  and  $\rho_0$ , where  $\rho$  is given by (5.41). It will be proved in Section 5.5 that we can assume  $h_1$  belonging to  $L^2(q_T, \rho)$ . As a consequence, Proposition 5.18 follows by standard duality arguments from the following observability result.

**Lemma 5.19.** *Under hypothesis (5.9), for every  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 1$ , there exists  $\kappa = \kappa(p) > 0$  such that, for every  $\phi^0 \in L^2(\omega)$  and every  $f \in L^2(q_T)$ , the solution  $\phi$  to the backward system*

$$\begin{cases} -\partial_t \phi = \Delta \phi + a_{11} \phi + f & \text{in } q_T, \\ \phi = 0 & \text{on } \sigma_T, \\ \phi(T) = \phi^0 & \text{in } \omega, \end{cases}$$

satisfies

$$\int_{q_T} \rho^{-2} \phi^2 \leq e^{\kappa N_T} \left( \int_{q_T} \rho_0^{-2} |\mathcal{B}^* \phi|^2 + \int_{q_T} \rho^{-2} f^2 \right),$$

where  $N_T = \frac{1}{T} + (1+T)(1 + \|a_{11}\|_\infty)$ .

We do not give the proof of this result which can be obtained by straightforward computations. Note that the proof is simpler than that of Proposition 5.11, because it concerns only one equation. In general, there is no difficulty to prove the observability inequality when the number of controls in the forward system is greater than the number of equations, a fortiori when the control forces act on the whole domain.

Now, we apply the arguments of the proof of Theorem 5.15, with  $\tilde{\mathcal{J}}_k$  replaced with

$$\mathcal{J}_k : (L^2(q_T, \rho_0))^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{J}_k(u) = \frac{1}{2} \int_{q_T} \rho_0^2 |u|^2 + \frac{1}{2} \int_{q_T} \rho_k^2 z_u^2,$$

to obtain the following result.

**Lemma 5.20.** *If  $a_{12}$  and  $a_{13}$  belong to  $W_\infty^{1,2}(q_T)$ , then there exists  $u \in (W_\omega^2(0, T))^2$  satisfying (5.52) such that the solution  $z$  to (5.53) satisfies  $z(\cdot, T) = 0$  in  $\omega$ .*

In view of Lemma 5.17, Lemma 5.20 gives the proof of Theorem 5.6.

## 5.5 Construction of $\hat{y}$

The aim of this section is to prove that we can construct a solution  $(\hat{y}, \hat{v})$  to (5.11) such that the source terms  $g$  in (5.21) and  $h_1$  in (5.53) respectively belong to  $(L^2(q_T, \rho))^2$  and  $L^2(q_T, \rho)$ , where  $\rho$  is defined by (5.41).

### 5.5.1 Statement of the results

The following result states the controllability of (5.1) with three forces and the existence of solutions which exponentially decrease at  $t = T$ .

**Theorem 5.21** (Controllability by three forces,  $B = I_3$ ). *If  $y^0 \in (L^2(\Omega))^3$  then there exists a function  $\hat{v} \in (L^2(q_T))^3$  such that the solution  $\hat{y}$  to*

$$\begin{cases} \partial_t \hat{y} = \Delta \hat{y} + A \hat{y} + \hat{v} 1_\omega & \text{in } Q_T, \\ \hat{y} = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \hat{y}(\cdot, 0) = y^0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (5.54)$$

satisfies

$$\hat{y}(\cdot, T) = 0 \text{ in } \Omega,$$

and

$$\hat{y} \in \left( L^2 \left( Q_T, \exp \left( \frac{1}{T-t} \right) \right) \right)^3, \quad \nabla \hat{y} \in \left( L^2 \left( Q_T, \exp \left( \frac{1}{T-t} \right) \right) \right)^{N \times 3}.$$

**Corollary 5.22.** *For every  $p \in \mathbb{N}$ , the function  $h$  defined by (5.15) belongs to  $(L^2(q_T, \rho))^3$ , where  $\rho$  is given by (5.41).*

*Proof.* By the definition of  $h$ , we have

$$\begin{aligned} \int_{q_T} \rho^2 |h|^2 &\leq 16 \|\theta\|_{C^2(\bar{\Omega})}^2 \left( \int_{q_T} \rho^2 (|\nabla \hat{y}|^2 + |\hat{y}|^2) + \int_{q_T} \rho^2 |\eta'|^2 |Y|^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{q_T} \rho^2 |\eta|^2 (|\nabla Y|^2 + |Y|^2) \right). \end{aligned} \quad (5.55)$$

From Theorem 5.21 and the definition of  $\rho$ , we deduce that  $\hat{y}$  satisfies in particular

$$\int_{q_T} \rho^2 (|\nabla \hat{y}|^2 + |\hat{y}|^2) < +\infty.$$

Besides, the definitions of  $\eta$  (see (5.12)) and  $\rho$  imply that

$$\int_{q_T} \rho^2 |\eta|^2 (|\nabla Y|^2 + |Y|^2) \leq C_\eta \int_{q_T} (|\nabla Y|^2 + |Y|^2) \leq C_\eta \|Y\|_{(W_3^1(0,T))^3}^2 < +\infty.$$

Finally, using that  $\eta'(t) = 0$  for  $t \in (0, T/4)$  and  $t \in (3T/4, T)$ , we have

$$\begin{aligned} \int_{q_T} \rho^2 |\eta'|^2 |Y|^2 &\leq \|\eta\|_{C^1([0,T])}^2 \int_{T/4}^{3T/4} \frac{|Y|^2}{(T-t)^p} \\ &\leq \|\eta\|_{C^1([0,T])}^2 \left( \frac{4}{3T} \right)^p \int_{q_T} |Y|^2 < +\infty. \end{aligned}$$

By (5.55), this implies that  $\int_{q_T} \rho^2 |h|^2 < \infty$ , which completes the proof of Corollary 5.22.  $\square$

Since  $\frac{a_{13}}{a_{23}}$  is bounded in  $q_T$  (according to hypothesis (5.4)), we deduce from Corollary 5.22 the following result.

**Corollary 5.23.** *For every  $p \in \mathbb{N}$ , the function  $g$  defined by (5.23) belongs to  $(L^2(q_T, \rho))^3$ .*

To prove Theorem 5.21 we still apply the method developed by Fursikov and Imanuvilov in [FI96]. We also refer to [FCM11] for a similar proof. As for the proofs of Theorem 5.15 and Lemma 5.20, the main idea is to state an observability inequality for the backward system associated with (5.54). This is the goal of the next section.

## 5.5.2 An observability inequality for the backward system associated with (5.54)

The main point is to establish a weighted observability estimate without singularity at  $t = 0$  in the weights. First, we prove a global Carleman estimate for the solutions to the non homogeneous backward system associated with (5.54):

$$\begin{cases} -\partial_t \phi = \Delta \phi + A^* \phi + f & \text{in } Q_T, \\ \phi = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \phi(\cdot, T) = \phi^0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (5.56)$$

Let us first recall the global Carleman inequality satisfied by the solutions to the backward heat equation.

**Lemma 5.24** (Carleman inequality). *There exist a positive function  $\beta_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ , two positive constants  $C_0 = C_0(\Omega, \omega)$  and  $c_0 = c_0(\Omega, \omega)$  such that for every  $\phi^0 \in L^2(\Omega)$ , every  $f \in L^2(Q_T)$  and every  $s \geq s_0 := c_0(T + T^2)$  the solution to*

$$\begin{cases} -\partial_t \phi = \Delta \phi + f & \text{in } Q_T, \\ \phi = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \phi(\cdot, T) = \phi^0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$



satisfies

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} e^{-2s\beta} [(s\gamma)^{-4} ((\partial_t \phi)^2 + (\Delta \phi)^2) + (s\gamma)^{-2} |\nabla \phi|^2 + \phi^2] \\ & \leq C_0 \left( \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{-3} f^2 + \int_{q_T^0} e^{-2s\beta} \phi^2 \right), \end{aligned}$$

where  $\beta$  and  $\gamma$  denote the functions  $\beta(x, t) = \frac{\beta_0(x)}{t(T-t)}$  (for  $(x, t) \in Q_T$ ) and  $\gamma(t) = \frac{1}{t(T-t)}$  (for  $t \in (0, T)$ ).

The proof of Lemma 5.24 can be found in [Fur00]. However, in [Fur00] the author does not specify the dependence of the parameter  $s_0$  on  $T$ . This explicit dependence has been obtained in [FCZ00a]. Applying Lemma 5.24 to each equation of system (5.56) and summing the three Carleman inequalities obtained, we can easily prove the following Carleman inequality for the solutions to (5.56).

**Lemma 5.25.** *Let  $\delta \in (0, 1)$ . For every  $\phi^0 \in (L^2(\Omega))^3$  and every  $f \in (L^2(Q_T))^3$  the solution  $\phi$  to (5.56) satisfies*

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} e^{-2s\beta} [(s\gamma)^{-4} (|\partial_t \phi|^2 + |\Delta \phi|^2) + (s\gamma)^{-2} |\nabla \phi|^2 + |\phi|^2] \\ & \leq \frac{4C_0}{\delta^2} \left( \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{-3} |f|^2 + \int_{q_T} e^{-2s\beta} |\phi|^2 \right), \end{aligned}$$

for all

$$s \geq s_1 := \max \left( s_0, \frac{T^2}{4} \left( \frac{4C_0}{\delta(1-\delta)} \right)^{1/3} \|A\|_\infty^{2/3} \right), \quad (5.57)$$

where  $C_0$  and  $s_0$  are given by Lemma 5.24.

We deduce from the Carleman estimate of Lemma 5.25 the following weighted observability estimate.

**Lemma 5.26.** *Let  $s \geq s_1$  ( $s_1$  given by (5.57)). There exists a positive constant  $C = C(\Omega, \omega, T, \|A\|_\infty, s)$  such that for every  $\phi^0 \in (L^2(\Omega))^3$  and every  $f \in (L^2(Q_T))^3$  the solution  $\phi$  to (5.56) satisfies*

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} e^{-2s\tilde{\beta}} [(s\tilde{\gamma})^{-4} (|\partial_t \phi|^2 + |\Delta \phi|^2) + (s\tilde{\gamma})^{-2} |\nabla \phi|^2 + |\phi|^2] \\ & \leq C \left( \int_{Q_T} e^{-2s\tilde{\beta}} (s\tilde{\gamma})^{-3} |f|^2 + \int_{q_T} e^{-2s\tilde{\beta}} |\phi|^2 \right), \end{aligned}$$

where the functions  $\tilde{\beta}$  and  $\tilde{\gamma}$  are defined by

$$\tilde{\beta}(x, t) = \frac{t}{T} \beta(x, t), \quad \tilde{\gamma}(t) = t\gamma(t).$$

**Remark 5.27.** – We will prove in Subsection 5.5.3 that Lemma 5.26 (through Proposition 5.28) implies existence of a solution  $\hat{y}$  to (5.54) such that  $\hat{y}$  and  $\nabla \hat{y}$  exponentially decrease at  $t = T$ .

The reason why we break the symmetry with respect to  $t$  in the weight functions is that we can not impose exponential decay at  $t = 0$ , since  $\hat{y}$  must satisfy the initial condition  $\hat{y}(\cdot, 0) = y^0$ .

– From Lemma 5.26 to the end of this section, both parameters  $s$  and  $T$  are fixed and the constant  $C$  in the statement of Lemma 5.26 depends of these parameters.

*Proof of Lemma 5.26.* Let  $\eta$  be a function in  $C^\infty([0, T])$  such that  $0 \leq \eta \leq 1$  in  $[0, T]$ ,  $\eta = 1$  in  $[0, T/4]$ ,  $\eta = 0$  in  $[3T/4, T]$ , and  $|\eta'(t)| \leq c_0/T$  in  $[0, T]$  ( $c_0$  being a positive constant independent of  $T$ ). Let  $\phi$  be the solution to (5.56) associated with  $\phi^0$  and  $f$ . Then the function  $\psi(x, t) = \eta(t)\phi(x, t)$  is the solution to

$$\begin{cases} -\partial_t \psi = \Delta \psi + A^* \psi + g & \text{in } Q_T, \\ \psi = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \psi(\cdot, T) = 0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

where  $g = \eta f - \eta' \phi \in (L^2(Q_T))^3$ . In this proof,  $C$  stands for a generic positive constant depending only on  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $T$ ,  $\|A\|_\infty$  and  $s$ , and  $\kappa$  denotes a positive constant depending only on  $\omega$  and  $\Omega$ . The values of those constants may change from one line to another. Applying (5.3) to  $\psi$  and using the definition of  $g$  and  $\eta$ , we have

$$\|\psi\|_{(W_\Omega^2(0,T))^3}^2 \leq e^{\kappa M_T} \|g\|_{(L^2(Q_T))^3}^2 \leq C \left( \int_{Q_{3T/4}} |f|^2 + \int_{T/4}^{3T/4} \int_\Omega |\phi|^2 \right).$$

From the definition of  $\beta$ , we have  $e^{-2s\beta} \geq e^{-16s\|\beta_0\|_\infty/T^2}$  for  $t \in [T/4, 3T/4]$ , so that the above inequality implies that

$$\|\psi\|_{(W_\Omega^2(0,T))^3}^2 \leq C \left( \int_{Q_{3T/4}} |f|^2 + \int_{Q_T} e^{-2s\beta} |\phi|^2 \right). \quad (5.58)$$

Since the weights  $e^{-2s\tilde{\beta}}$  and  $\tilde{\gamma}^{-3}$  are lower bounded for  $t \in [0, 3T/4]$ , we have

$$\int_{Q_{3T/4}} |f|^2 \leq C \int_{Q_{3T/4}} e^{-2s\tilde{\beta}} (s\tilde{\gamma})^{-3} |f|^2. \quad (5.59)$$

The integral term  $\int_{Q_T} e^{-2s\beta} |\phi|^2$  in (5.58) can be estimated by applying Lemma 5.25:

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} e^{-2s\beta} [(s\gamma)^{-4} (|\partial_t \phi|^2 + |\Delta \phi|^2) + (s\gamma)^{-2} |\nabla \phi|^2 + |\phi|^2] \\ & \leq \kappa \left( \int_{Q_T} e^{-2s\beta} (s\gamma)^{-3} |f|^2 + \int_{q_T} e^{-2s\beta} |\phi|^2 \right) \\ & \leq \kappa \left( T^3 \int_{Q_T} e^{-2s\tilde{\beta}} (s\tilde{\gamma})^{-3} |f|^2 + \int_{q_T} e^{-2s\tilde{\beta}} |\phi|^2 \right), \end{aligned} \quad (5.60)$$

since  $e^{-2s\tilde{\beta}} = e^{-2s\beta t/T} \geq e^{-2s\beta}$  and  $\tilde{\gamma}^{-1} = \frac{\gamma^{-1}}{t} \geq \frac{\gamma^{-1}}{T}$  for every  $t \in [0, T]$ . This implies that

$$\int_{Q_T} e^{-2s\beta} |\phi|^2 \leq \kappa \left( T^3 \int_{Q_T} e^{-2s\tilde{\beta}} (s\tilde{\gamma})^{-3} |f|^2 + \int_{q_T} e^{-2s\tilde{\beta}} |\phi|^2 \right). \quad (5.61)$$

Combining (5.58), (5.59) and (5.61), we obtain

$$\|\psi\|_{(W_\Omega^2(0,T))^3}^2 \leq C \left( \int_{Q_T} e^{-2s\tilde{\beta}} (s\tilde{\gamma})^{-3} |f|^2 + \int_{q_T} e^{-2s\tilde{\beta}} |\phi|^2 \right).$$

On the other hand, by the definitions of  $\tilde{\beta}$  and  $\tilde{\gamma}$ , we have

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{(W_\Omega^2(0,T))^3}^2 & \geq \|\psi\|_{(W_\Omega^2(0,T/4))^3}^2 \\ & \geq K \int_{Q_{T/4}} e^{-2s\tilde{\beta}} [(s\tilde{\gamma})^{-4} (|\partial_t \phi|^2 + |\Delta \phi|^2) + (s\tilde{\gamma})^{-2} |\nabla \phi|^2 + |\phi|^2], \end{aligned}$$

where

$$K = \frac{\exp(2s \min_{\bar{\Omega}} \beta_0 / T^2)}{1 + s^2 T^2 + s^4 T^4}.$$

Adding the last two inequalities, we have

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{T/4}} e^{-2s\tilde{\beta}} [(s\tilde{\gamma})^{-4} (|\partial_t \phi|^2 + |\Delta \phi|^2) + (s\tilde{\gamma})^{-2} |\nabla \phi|^2 + |\phi|^2] \\ & \leq C \left( \int_{Q_T} e^{-2s\tilde{\beta}} (s\tilde{\gamma})^{-3} |f|^2 + \int_{q_T} e^{-2s\tilde{\beta}} |\phi|^2 \right). \end{aligned} \quad (5.62)$$

For the estimation of  $e^{-2s\tilde{\beta}} [(s\tilde{\gamma})^{-4} (|\partial_t \phi|^2 + |\Delta \phi|^2) + (s\tilde{\gamma})^{-2} |\nabla \phi|^2 + |\phi|^2]$  on  $[T/4, T]$ , remark that for  $(x, t) \in \Omega \times [T/4, T]$  we have

$$e^{-2s\tilde{\beta}(x,t)} \leq e^{8s\|\beta_0\|_\infty/T^2} e^{-2s\beta(x,t)}, \quad \tilde{\gamma}(t)^{-1} \leq \frac{4}{T} \gamma(t)^{-1},$$

which implies that

$$\begin{aligned} & \int_{T/4}^T e^{-2s\tilde{\beta}} [(s\tilde{\gamma})^{-4} (|\partial_t\phi|^2 + |\Delta\phi|^2) + (s\tilde{\gamma})^{-2} |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2] \\ & \leq C \int_{T/4}^T e^{-2s\beta} [(s\gamma)^{-4} (|\partial_t\phi|^2 + |\Delta\phi|^2) + (s\gamma)^{-2} |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2]. \end{aligned}$$

Combining this inequality with (5.60), we deduce that

$$\begin{aligned} & \int_{T/4}^T e^{-2s\tilde{\beta}} [(s\tilde{\gamma})^{-4} (|\partial_t\phi|^2 + |\Delta\phi|^2) + (s\tilde{\gamma})^{-2} |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2] \\ & \leq C \left( \int_{Q_T} e^{-2s\tilde{\beta}} (s\tilde{\gamma})^{-3} |f|^2 + \int_{q_T} e^{-2s\tilde{\beta}} |\phi|^2 \right). \end{aligned}$$

Adding this inequality with (5.62) gives the inequality announced in the statement of Lemma 5.26.  $\square$

From now on, let us choose

$$s = s_0 + \frac{T^2}{4} \left( \frac{4C_0}{\delta(1-\delta)} \right)^{\frac{1}{3}} \|A\|_{\infty}^{\frac{2}{3}}, \quad (5.63)$$

so that  $s \geq s_1$ , with  $s_0$  and  $s_1$  given by Lemma 5.24 and (5.57) respectively. In what follows, we will use the notation:

$$\widehat{\rho}(x, t) = \frac{e^{s\tilde{\beta}(x, t)}}{(T-t)^{3/2}}, \quad \widehat{\rho}_0(x, t) = \widehat{\rho}(x, t)(T-t)^{3/2}.$$

Analyzing the different steps in the proof of Lemma 5.26, we can obtain the following estimate of the constant  $C$  for this particular choice of  $s$ :

$$C = e^{\kappa P_T},$$

where  $\kappa = \kappa(\omega, \Omega) > 0$  and  $P_T$  is defined in the following proposition.

**Proposition 5.28.** *There exists  $\kappa = \kappa(\omega, \Omega) > 0$  such that, for every  $\phi^0 \in (L^2(\Omega))^3$  and every  $f \in (L^2(Q_T))^3$ , the solution  $\phi$  to (5.56) satisfies the inequality*

$$\|\phi(\cdot, 0)\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 \leq e^{\kappa P_T} \left( \int_{Q_T} \widehat{\rho}^{-2} |f|^2 + \int_{q_T} \widehat{\rho}_0^{-2} |\phi|^2 \right), \quad (5.64)$$

with

$$P_T = 1 + \frac{1}{T} + \|A\|_{\infty}^2 + T(1 + \|A\|_{\infty} + \|A\|_{\infty}^{1/3}).$$

*Proof.* Lemma 5.26 applied to  $\phi$  with  $s$  defined by (5.63) gives

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} e^{-2s\tilde{\beta}} [(s\tilde{\gamma})^{-4} (|\partial_t\phi|^2 + |\Delta\phi|^2) + (s\tilde{\gamma})^{-2} |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2] \\ & \leq e^{\kappa P_T} \left( \int_{Q_T} \widehat{\rho}^{-2} |f|^2 + \int_{q_T} \widehat{\rho}_0^{-2} |\phi|^2 \right). \end{aligned} \quad (5.65)$$

By the definitions of  $\tilde{\beta}$  and  $\tilde{\gamma}$ , the weights  $e^{-2s\tilde{\beta}}$  and  $(s\tilde{\gamma})^{-1}$  are uniformly bounded from below on  $Q_{T-\delta}$  by a positive constant, so that (5.65) implies

$$C_{\delta} \int_{Q_{T-\delta}} (|\partial_t\phi|^2 + |\Delta\phi|^2 + |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2) \leq e^{\kappa P_T} \left( \int_{Q_T} \widehat{\rho}^{-2} |f|^2 + \int_{q_T} \widehat{\rho}_0^{-2} |\phi|^2 \right),$$

with  $C_{\delta} = e^{-\frac{2s\|\beta_0\|_{\infty}}{T\delta}} \min(1, s^{-2}\delta^2, s^{-4}\delta^4)$ , for every  $\delta \in (0, T)$ . The last inequality reads also

$$\|\phi\|_{(W_{\Omega}^2(0, T-\delta))^3}^2 \leq \frac{e^{\kappa P_T}}{C_{\delta}} \left( \int_{Q_T} \widehat{\rho}^{-2} |f|^2 + \int_{q_T} \widehat{\rho}_0^{-2} |\phi|^2 \right). \quad (5.66)$$

Using the continuous embedding

$$W_{\Omega}^2(0, T - \delta) \hookrightarrow C([0, T - \delta]; H_0^1(\Omega)),$$

we deduce from (5.66) the inequality

$$\|\phi(\cdot, 0)\|_{(H_0^1(\Omega))^3}^2 \leq e^{\kappa P_T} \left( \int_{Q_T} \hat{\rho}^{-2} |f|^2 + \int_{q_T} \hat{\rho}_0^{-2} |\phi|^2 \right),$$

which yields (5.64).  $\square$

### 5.5.3 Proof of Theorem 5.21

The construction of  $\hat{v}$  and  $\hat{y}$  can be done in a similar way to that of  $u$  and  $z$  in Theorem 5.15, the only difference being in the definition of the functional  $\tilde{\mathcal{J}}_k$ . Instead of  $\tilde{\mathcal{J}}_k$ , we consider the functional  $\mathcal{I}_k : (L^2(q_T, \hat{\rho}_0))^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , defined by

$$\mathcal{I}_k(v) = \frac{1}{2} \int_{q_T} \hat{\rho}_0^2 |v|^2 + \int_{Q_T} \hat{\rho}_k^2 |y_v|^2,$$

where  $y_v$  denotes the solution to (5.54) associated with  $v$  and

$$\hat{\rho}_k(t) = \exp\left(\frac{s\beta(x)}{T(T+1/k-t)}\right) (T+1/k-t)^{-3/2}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Similar arguments to those in the proof of Theorem 5.15 (in particular the use of observability inequality (5.64)) give the existence of a function  $\hat{v} \in (L^2(q_T, \hat{\rho}_0))^3$ , with  $\|\hat{v}\|_{(L^2(q_T, \hat{\rho}_0))^3}^2 \leq e^{\kappa P_T} \|y^0\|_{(L^2(\Omega))^3}^2$  ( $P_T$  defined in Proposition 5.28), such that the solution  $\hat{y}$  to (5.54) associated with  $\hat{v}$  satisfies  $\hat{y} \in (W_{\Omega}^2(0, T))^3$ ,  $\hat{y} \in (L^2(Q_T, \hat{\rho}))^3$  with  $\|\hat{y}\|_{(L^2(Q_T, \hat{\rho}))^3}^2 \leq e^{\kappa P_T} \|y^0\|_{(L^2(\Omega))^3}^2$  and  $\hat{y}(\cdot, T) = 0$  in  $(L^2(\Omega))^3$ . In particular, it follows from the definition of  $\hat{\rho}$  (see (5.41)) that

$$\hat{y} \in \left( L^2\left(Q_T, \exp\left(\frac{1}{T-t}\right)\right) \right)^3.$$

The only point remaining is to prove that  $\nabla \hat{y} \in \left( L^2\left(Q_T, \exp\left(\frac{1}{T-t}\right)\right) \right)^{N \times 3}$ . Multiplying scalarly the equation of  $\hat{y}$  by  $\hat{\rho}(\cdot, t)^2 (T-t)^2 \hat{y}(\cdot, t)$  and integrating on  $[0, T]$ , we obtain

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \hat{\rho}^2 (T-t)^2 |\nabla \hat{y}|^2 &= \int_{Q_T} \hat{\rho}^2 (T-t)^2 \hat{y} (A\hat{y}) + \int_{q_T} \hat{\rho}^2 (T-t)^2 \hat{y} \hat{v} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{Q_T} \hat{\rho}^2 (T-t)^2 \partial_t |\hat{y}|^2. \end{aligned} \quad (5.67)$$

From  $\hat{y} \in (L^2(Q_T, \hat{\rho}))^3$  and the definition of  $\hat{\rho}$ , we deduce that  $\lim_{t \rightarrow T} \hat{\rho}^2(\cdot, t) (T-t)^2 |\hat{y}(\cdot, t)|^2 = 0$  in  $(L^2(\Omega))^3$ , so that, integrating by parts on  $[0, T]$  in the last term of (5.67), we obtain

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \hat{\rho}^2 (T-t)^2 |\nabla \hat{y}|^2 &= \int_{Q_T} \hat{\rho}^2 (T-t)^2 \hat{y} (A\hat{y}) + \int_{q_T} \hat{\rho}^2 (T-t)^2 \hat{y} \hat{v} \\ &\quad + \frac{T^2}{2} \int_{\Omega} \hat{\rho}(x, 0)^2 |y^0(x)|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{Q_T} \partial_t (\hat{\rho}^2 (T-t)^2) |\hat{y}|^2. \end{aligned} \quad (5.68)$$

It is clear that

$$\int_{Q_T} \hat{\rho}^2 (T-t)^2 \hat{y} (A\hat{y}) \leq T^2 \|A\|_{\infty} \int_{Q_T} \hat{\rho}^2 |\hat{y}|^2 \leq e^{\kappa P_T} \|y^0\|_{(L^2(\Omega))^3}^2.$$

Besides, by the definition of  $\widehat{\rho}$  and  $\widehat{\rho}_0$ , we also have

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \widehat{\rho}^2(T-t)^2 \widehat{y} \widehat{v} &= \int_{Q_T} (T-t)^{1/2} \widehat{\rho} \widehat{\rho}_0 \widehat{y} \widehat{v} \\ &\leq T^{1/2} \left( \|\widehat{v}\|_{(L^2(Q_T, \widehat{\rho}_0))^3}^2 + \|\widehat{y}\|_{(L^2(Q_T, \widehat{\rho}))^3}^2 \right) \\ &\leq e^{\kappa P_T} \|y^0\|_{(L^2(\Omega))^3}^2, \end{aligned} \quad (5.69)$$

and

$$T^2 \int_{\Omega} \widehat{\rho}(x, 0)^2 |y^0(x)|^2 \leq T^{-1} e^{2s\|\beta_0\|_{\infty}/T^2} \|y^0\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 \leq e^{\kappa P_T} \|y^0\|_{(L^2(\Omega))^3}^2, \quad (5.70)$$

with  $\beta_0$  given in Lemma 5.24. Consequently, it remains to bound the last term in (5.68). Since  $\partial_t(\widehat{\rho}^2(T-t)^2) = \widehat{\rho}^2(T-t+2s\beta_0(x)/T)$ , we can write

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \partial_t(\widehat{\rho}^2(T-t)^2) |\widehat{y}|^2 &\leq \left( T + \frac{2s\|\beta_0\|_{\infty}}{T} \right) \|\widehat{y}\|_{(L^2(Q_T, \widehat{\rho}))^3}^2 \\ &\leq e^{\kappa P_T} \|y^0\|_{(L^2(\Omega))^3}^2. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Combining (5.68)–(5.71), we finally obtain

$$\int_{Q_T} \widehat{\rho}^2(T-t)^2 |\nabla \widehat{y}|^2 \leq e^{\kappa P_T} \|y^0\|_{(L^2(\Omega))^3}^2,$$

which ensures that

$$\nabla \widehat{y} \in \left( L^2 \left( Q_T, \exp \left( \frac{1}{T-t} \right) \right) \right)^{N \times 3},$$

by the definition of  $\widehat{\rho}$ . This completes the proof of Theorem 5.21.

## 5.6 Comments and further results

### 5.6.1 Controllability of $n \times n$ parabolic systems by one force.

In a forthcoming paper, we will deal with the null controllability of system (5.1) in the case  $n \geq 3$  (that is  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in (L^{\infty}(Q_T))^{n \times n}$  and  $B = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ ), using the same approach as for the proof of Theorem 5.3 and working by induction.

### 5.6.2 The nonlinear case.

The knowledge of the dependence of the observability constant  $C_0$  (see Proposition 5.11 and Remark 5.14) with respect to the coefficients of  $A$  is needed to study the controllability to trajectories of systems like

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + F(y) + B_1 v 1_{\omega} & \text{in } Q_T, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (5.72)$$

with a nonlinearity  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . The next step of our study is to perform a Kakutani fixed-point argument on a linearized system of (5.72) to deduce a local controllability result for the solutions to (5.72).

### 5.6.3 The case of distinct diffusion coefficients.

The problem of the controllability to trajectories for (5.72) is derived from the study of the controllability to trajectories of the following system which models the therapy for brain tumors:

$$\begin{cases} \partial_t y = D \Delta y + F(y) + B_1 v 1_{\omega} & \text{in } Q_T, \\ \partial_{\nu} y = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (5.73)$$

In this system  $\partial_\nu y = (\partial_\nu y_1, \partial_\nu y_2, \partial_\nu y_3)^T$  stands for the normal derivative of  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ ,  $D$  is a diagonal matrix given by  $D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$  with  $d_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) and the non linearity  $F$  is defined by

$$F(y) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}y_1g_1(y_1) - (\alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3)y_1 \\ \alpha_{22}y_2g_2(y_2) - (\alpha_{21}y_1 + \alpha_{23}y_3)y_2 \\ -\alpha_{33}y_3 \end{pmatrix},$$

where either  $g_i(y_i) = 1$ , either  $g_i(y_i) = 1 - y_i/k_i$  or  $g_i(y_i) = \ln(k_i/y_i)$ , with  $k_i > 0$  for  $i = 1, 2$  (see [CH05] for more details). As for system (5.72), the study of the controllability to trajectories for (5.73) begins with the study of the null controllability of the following linear system

$$\begin{cases} \partial_t y = D\Delta y + Ay + B_1 v 1_\omega & \text{in } Q_T, \\ \partial_\nu y = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (5.74)$$

where  $A$  is a  $3 \times 3$  matrix with coefficients  $a_{ij}$  belonging to  $L^\infty(Q_T)$ . Applying the decomposition (5.13) where  $Y$  is the solution to (5.74) with  $v = 0$  and  $(\hat{y}, \hat{v})$  is a solution to

$$\begin{cases} \partial_t \hat{y} = D\Delta \hat{y} + A\hat{y} + \hat{v} 1_{\omega_0} & \text{in } Q_T, \\ \partial_\nu \hat{y} = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \hat{y}(\cdot, 0) = y^0, \quad \hat{y}(\cdot, T) = 0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

for an open subset  $\omega^0 \subset \omega$  of  $\Omega$ , we obtain, after the change of variables (5.20), the new system posed in  $q_T$

$$\begin{cases} \partial_t z_1 = d_1 \Delta z_1 + \tilde{a}_{11} z_1 + \left( c_{12} + 2d_1 \nabla \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \cdot \nabla + (d_1 - d_2) \frac{a_{13}}{a_{23}} \Delta \right) z_2 + g_1, \\ \partial_t z_2 = d_2 \Delta z_2 + \tilde{a}_{21} z_1 + \tilde{a}_{22} z_2 + g_2 + a_{23} u, \\ \partial_\nu z_1 = \partial_\nu z_2 = 0 & \text{on } \sigma_T, \\ z_1(\cdot, 0) = z_2(\cdot, 0) = 0 & \text{in } \omega, \end{cases}$$

with

$$c_{12} = -\frac{\det K}{a_{23}^2} + (d_1 \Delta - \partial_t) \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right),$$

$K$  being given in Theorem 5.3. The new coefficient:

$$\tilde{a}_{12} = c_{12} + 2d_1 \nabla \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \cdot \nabla + (d_1 - d_2) \frac{a_{13}}{a_{23}} \Delta \quad (5.75)$$

is a second order operator in space (compare with the corresponding coefficient in the case  $d_1 = d_2 = 1$  we have considered in the previous sections).

Actually, the starting point of the proof of Lemma 5.12 is the inequality (5.31) which is a consequence of the following property: for almost every  $t \in (0, T)$ ,  $\tilde{a}_{12}(\cdot, t)$  satisfies

$$\begin{aligned} \int_\omega \psi(\tilde{a}_{12}(\cdot, t)\psi) \, dx &= \int_\omega (\tilde{a}_{12}^*(\cdot, t)\psi)\psi \, dx \geq c \int_\omega \psi^2 \, dx, \quad \forall \psi \in H_0^1(\omega), \\ \text{or} \\ \int_\omega \psi(\tilde{a}_{12}(\cdot, t)\psi) \, dx &\leq -c \int_\omega \psi^2 \, dx, \quad \forall \psi \in H_0^1(\omega). \end{aligned} \quad (5.76)$$

An inspection of the proof of our main result shows that the assumption (5.5) was only needed in the proof of Lemma 5.12 to establish (5.76) and so (5.31). Consequently, the assumption (5.5) in Theorem 5.3 can be replaced by the assumption (5.76). Now, taking into account the diffusion coefficients  $d_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , in the proof of Lemma 5.12, we get the following result.

**Theorem 5.29.** *Let us assume that  $a_{13}, a_{23} \in W_\infty^{2,1}(q_T)$  and that there exist two positive constants  $\alpha$  and  $c$  such that*

$$|a_{23}| \geq \alpha \quad \text{in } q_T$$

and for almost every  $t \in (0, T)$ , either

$$\int_\omega \psi(\tilde{a}_{12}(\cdot, t)\psi) \, dx \geq c \int_\omega \psi^2 \, dx, \quad \forall \psi \in H_{\partial_\nu}^2 = \{\psi \in H^2(\omega) / \partial_\nu \psi = 0\},$$

or

$$\int_{\omega} \psi(\tilde{a}_{12}(\cdot, t)\psi) dx \leq -c \int_{\omega} \psi^2 dx, \quad \forall \psi \in H_{\partial\nu}^2,$$

where  $\tilde{a}_{12}$  is defined in (5.75). Then for every  $y^0 \in (L^2(\Omega))^3$ , there exists at least one function  $v \in L^2(q_T)$  such that the solution  $y$  to (5.74) satisfies

$$y(\cdot, T) = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

*Proof.* The proof is similar to that of Theorem 5.3, the main step being the proof of Lemma 5.12. Consequently, we only point out the differences that appear in the proof of Lemma 5.12 when we consider the diffusion coefficients  $d_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . First, note that (5.32) is still true because in (5.29) we only have to change the integral term  $2 \int_{q_T} \varphi^p \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2$  into  $(d_1 + d_2) \int_{q_T} \varphi^p \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2$ , where  $(\phi_1, \phi_2)$  is now the solution to the following backward system

$$\begin{cases} -\partial_t \phi_1 = d_1 \Delta \phi_1 + \tilde{a}_{11} \phi_1 + \tilde{a}_{21} \phi_2 + f_1 & \text{in } q_T, \\ -\partial_t \phi_2 = d_2 \Delta \phi_2 + \tilde{a}_{12}^* \phi_1 + \tilde{a}_{22} \phi_2 + f_2 & \text{in } q_T, \\ \partial_\nu \phi_1 = \partial_\nu \phi_2 = 0 & \text{on } \sigma_T, \\ \phi_1(\cdot, T) = \phi_1^0, \phi_2(\cdot, T) = \phi_2^0 & \text{in } \omega. \end{cases} \quad (5.77)$$

The main difference consists in the estimate of  $\nabla \phi_2$ . Indeed, in (5.33) the term  $\int_{q_T} \varphi^{p-1} |\nabla \phi_2|^2$  has to be changed in  $d_2 \int_{q_T} \varphi^{p-1} |\nabla \phi_2|^2$  and the term  $\int_{q_T} \varphi^{p-1} (\tilde{a}_{12} \phi_2) \phi_1$  is now given by the formula

$$\begin{aligned} \int_{q_T} \varphi^{p-1} (\tilde{a}_{12} \phi_2) \phi_1 &= - \int_{q_T} \varphi^{p-1} \left( \frac{\det K}{a_{23}^2} + (\partial_t + d_2 \Delta) \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \right) \phi_1 \phi_2 \\ &\quad - 2d_2 \int_{q_T} \varphi^{p-1} \phi_2 \nabla \phi_1 \cdot \nabla \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \\ &\quad + (d_1 - d_2) \int_{q_T} \varphi^{p-1} \frac{a_{13}}{a_{23}} \phi_2 \Delta \phi_1. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Therefore, we need an estimate on  $\Delta \phi_1$  with respect to  $\phi_1$  and  $\nabla \phi_1$ . This estimate is obtained by multiplying the first equation of (5.77) by  $\varphi^{p+2} \Delta \phi_1$ . In fact, we have

$$\int_{q_T} \varphi^{p+2} (\Delta \phi_1)^2 \leq C \left( \int_{q_T} \varphi^p \phi_1^2 + \int_{q_T} \varphi^{p+1} |\nabla \phi_1|^2 + \int_{q_T} \varphi^{p+2} \phi_2^2 + \int_{q_T} \varphi^{p+2} f_1^2 \right).$$

Combining this inequality with (5.78), we obtain for  $\epsilon > 0$  small enough

$$\left| \int_{q_T} \varphi^{p-1} (\tilde{a}_{12} \phi_2) \phi_1 \right| \leq \epsilon C \left( \int_{q_T} \varphi^p \phi_1^2 + \int_{q_T} \varphi^{p+1} |\nabla \phi_1|^2 \right) + C_\epsilon \left( \int_{q_T} \varphi^{p-4} \phi_2^2 + \int_{q_T} \varphi^{p+2} f_1^2 \right).$$

The new estimate on  $\int_{q_T} \varphi^{p-1} |\nabla \phi_2|^2$  follows from the last inequality. Finally, the elimination of  $|\nabla \phi_1|^2$  is obtained as in Lemma 5.12. This leads to an inequality similar to (5.28) but with the weight  $t^{p-4}(T-t)^{p-4}$  instead of  $t^{p-3}(T-t)^{p-3}$  in front of  $\phi_2^2$ .  $\square$

## 5.7 Une application numérique en 2D au cas de la contrôlabilité d'un système de trois équations à coefficients constants avec une force de contrôle

On s'intéresse maintenant à l'approximation numérique d'une solution contrôlée du système suivant

$$\begin{cases} \partial_t y = c \Delta y + Ay + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} 1_\omega, & \text{dans } Q_T, \\ y = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(0) = y^0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (5.79)$$

où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Dans les simulations numériques, on prendra  $c = 0.1$ ,  $\Omega = ]0, 1[^2$  et  $\omega = ]0.2, 0.8[^2$ . Pour simplifier le problème, on se placera dans le cadre d'une matrice  $A$  à coefficients constants satisfaisant les hypothèses du Théorème 5.3 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on sait déjà que le système (5.79) est contrôlable. Comme on l'a vu dans la sous-section 5.1.2 (en particulier, dans (5.13), (5.20) et le Lemme 5.9), il est possible de construire une solution contrôlée de ce système sous la forme

$$y = (1 - \theta)\hat{y} + \eta\theta Y + F,$$

où  $\eta$  et  $\theta$  sont deux fonctions de troncature (respectivement en temps et en espace) bien choisies,  $\hat{y}$  est la solution contrôlée par trois forces sur un sous-ensemble  $\omega^0 \subset \omega$  construite dans la section 5.5 et  $Y$  désigne la solution non contrôlée.  $F$  est donné par  $F = (z_1 + \frac{a_{13}}{a_{23}}z_2, z_2, u)^T$ , où  $z = (z_1, z_2)^T$  est la solution du système  $2 \times 2$  non homogène (5.21), contrôlée par un contrôle sur tout le domaine  $\omega$ , qui est construite dans la section 5.3. Rappelons que l'on a construit les solutions  $\hat{y}$  et  $z$  en résolvant des problèmes de minimisation de fonctionnelles (voir la sous-section 5.5.3 pour  $\hat{y}$  et la démonstration du Théorème 5.15 page 107 pour  $z$ ).

Dans la présente section, on utilise cette décomposition pour construire une approximation numérique de la solution contrôlée  $y$  ainsi obtenue, en construisant d'abord une approximation de la solution contrôlée par trois forces  $\hat{y}$ , puis une approximation de la solution contrôlée par une force  $z$ . Dans un deuxième temps, sachant que le système (5.79) est contrôlable, on approche numériquement un contrôle  $v$  (et la solution contrôlée associée) en résolvant directement un problème de minimisation pour ce système. Ces deux méthodes d'approximation d'une solution contrôlée ont été mises en oeuvre avec le logiciel d'éléments finis FreeFem++ version 3.18-1 (téléchargeable sur <http://www.freefem.org/>).

### 5.7.1 Approche indirecte

Dans cette partie, on approche numériquement la solution contrôlée du système (5.79) qui est définie par

$$y = (1 - \theta)\hat{y} + \eta\theta Y + \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix},$$

où

- $A_0$  est la matrice  $2 \times 2$  définie par

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{13}}{a_{23}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- $(\hat{y}, \hat{v})$  est la solution de

$$\begin{cases} \partial_t \hat{y} = c\Delta \hat{y} + A\hat{y} + \hat{v}1_{\omega^0}, & \text{dans } Q_T, \\ \hat{y} = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ \hat{y}(0) = y^0, \quad \hat{y}(T) = 0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (5.80)$$

pour  $\omega^0 \subset \omega$  tel que  $\omega^0 \neq \emptyset$  et  $\omega^0 \neq \omega$ , construite dans la sous-section 5.5.3,

- $Y$  est la solution de

$$\begin{cases} \partial_t Y = c\Delta Y + AY, & \text{dans } Q_T, \\ Y = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ Y(0) = y^0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (5.81)$$

- $\eta \in C^1([0, T])$  et  $\theta \in C_c^2(\bar{\Omega})$  vérifient (5.12),
- $z = (z_1, z_2)^T$  et  $u$  constituent la solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t z = c\Delta z + \tilde{A}z + g + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{23}u \end{pmatrix}, & \text{dans } q_T = \omega \times ]0, T[, \\ z = 0, & \text{sur } \sigma_T = \partial\omega \times ]0, T[, \\ z(0) = 0, \quad z(T) = 0, & \text{dans } \omega, \end{cases} \quad (5.82)$$



qui a été construite dans la démonstration du Théorème 5.15.

On rappelle que  $\tilde{A}$  est définie par (5.22) et que  $g = \left(G_1 - \frac{a_{13}}{a_{23}}G_2, G_2\right)^T$ , où  $G = (G_1, G_2, G_3)^T$  est donné par

$$G = -2c\nabla\theta \cdot \nabla\hat{y} - c(\Delta\theta)\hat{y} - (\eta'\theta - c\eta\Delta\theta)Y + 2c\eta\nabla\theta \cdot \nabla Y.$$

Remarquons que pour le choix que l'on a fait ici de la matrice  $A$ , on a

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de sorte que le coefficient  $\tilde{a}_{12}$  n'est pas un opérateur d'ordre 1, mais simplement un nombre réel :

$$\tilde{a}_{12} = -\frac{\det K}{a_{23}^2} = 1.$$

Pour les simulations numériques, on choisit  $\omega = ]0.2, 0.8[^2$  et  $\omega^0 = ]0.4, 0.6[^2$ . On construit les fonctions  $\eta$  et  $\theta$  de la façon suivante (voir [MP10]). Pour tout triplet de réels  $(r_1, r_2, R)$ , on définit une fonction  $\zeta_{r_1, r_2, R} \in C^1([0, R])$  en posant

$$\zeta_{r_1, r_2, R} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r \leq r_1, \\ \frac{(r - r_2)^2(3r_1 - r_2 - 2r)}{(r_1 - r_2)^3} & \text{si } r_1 \leq r \leq r_2, \\ 0, & \text{si } r_2 \leq r \leq R. \end{cases}$$

On pose alors  $\eta = \zeta_{T/4, 3T/4, T}$  et  $\theta = \zeta_{r_1, r_2, 1}$ , avec  $r_1$  et  $r_2$  vérifiant  $a_1 < r_1 < r_2 < a_2$ , pour  $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}|\omega^0| = \sqrt{2} \cdot 10^{-1}$  et  $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}|\omega| = 3\sqrt{2} \cdot 10^{-1}$ . On choisit  $(r_1, r_2) = (0.18, 0.26)$ . On cherche un contrôle amenant la solution à zéro à l'instant  $T = 0.5$ , en partant de la donnée initiale

$$y^0(x) = (1, 2, 1.5)^T \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega.$$

La discrétisation en temps que l'on considère est une discrétisation uniforme de pas  $\Delta t = \frac{T}{60}$ . Pour chaque  $n \in \{0, \dots, 60\}$ , on note  $t_n = n\Delta t$ . On discrétise le domaine  $\Omega = ]0, 1[^2$  avec un maillage uniforme  $\mathcal{T}_h$  constitué de  $2n_x n_y$  triangles (et  $(n_x + 1)(n_y + 1)$  nœuds) pour  $n_x = n_y = 29$ . On note  $\mathcal{V}_h$  l'espace d'éléments finis de type  $P_2$  associé à ce maillage. On va construire une approximation  $y_h^n \in \mathcal{V}_h$  de  $y(\cdot, t_n)$ , en utilisant la décomposition

$$y_h^n = (1 - \theta_h)\hat{y}_h^n + \eta^n \theta_h Y_h^n + \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_h \\ u_h \end{pmatrix}, \quad (5.83)$$

où  $\hat{y}_h^n \in \mathcal{V}_h$  est une approximation de  $\hat{y}(\cdot, t_n)$ ,  $Y_h^n \in \mathcal{V}_h$  est une approximation de  $Y(\cdot, t_n)$ ,  $\theta_h \in \mathcal{V}_h$  est une approximation de  $\theta$ ,  $\eta^n = \eta(\cdot, t_n)$  et  $(z_h^n, u_h^n) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h$  est une approximation de  $(z, u)(\cdot, t_n)$ . Dans le cas considéré,  $A_0$  est une matrice à coefficients constants, qui ne dépend donc pas des paramètres de discrétisation  $h$  et  $n$ . On procède en cinq étapes pour construire l'approximation  $y_h = (y_h^n)_{0 \leq n \leq 60}$  de  $y$ . D'abord on construit l'approximation  $Y_h$  de  $Y$ . Dans un second temps, on détermine une approximation  $\hat{y}_h$  de  $\hat{y}$ . Puis, on approche le terme source  $g$  dans le problème en  $z$  (5.82) en utilisant les approximations  $Y_h$  et  $\hat{y}_h$ . On construit ensuite une approximation  $(z_h, u_h)$  de la solution  $(z, u)$  du problème (5.82). Enfin, on utilise (5.83) pour obtenir une approximation  $y_h$  de  $y$ .

### Étape 1 : construction de $Y_h$ .

On discrétise en temps le problème (5.81) via un schéma de Crank-Nicolson :

$$\begin{cases} \frac{Y^{n+1} - Y^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(c\Delta Y^{n+1} + AY^{n+1}) + \frac{1}{2}(c\Delta Y^n + AY^n), & \text{dans } \Omega, \\ Y^{n+1} = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

et  $Y^0 = y^0$  où, pour chaque  $m \in \{0, \dots, n_T\}$ ,  $Y^m = Y(\cdot, t_m)$ . La formulation de ce problème avec la discrétisation en espace d'éléments finis est la suivante :

- $Y_h^0 = y_h^0$  (approximation de la donnée initiale  $y^0$ ),

- connaissant  $Y_h^n \in \mathcal{V}_h$ , trouver  $Y_h^{n+1} \in \mathcal{V}_h$  tel que

$$\forall \bar{Y}_h \in \mathcal{V}_h, \quad \int_{\mathcal{T}_h} Y_h^{n+1} \bar{Y}_h = \int_{\mathcal{T}_h} Y_h^n \bar{Y}_h + \frac{\Delta t}{2} \left( -c \int_{\mathcal{T}_h} \nabla Y_h^{n+1} \cdot \nabla \bar{Y}_h + \int_{\mathcal{T}_h} (A Y_h^{n+1}) \bar{Y}_h \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( -c \int_{\mathcal{T}_h} \nabla Y_h^n \cdot \nabla \bar{Y}_h + \int_{\mathcal{T}_h} (A Y_h^n) \bar{Y}_h \right).$$

On verra par la suite (courbes en noir sur la Figure 5.5), une représentation graphique de l'évolution de la norme de  $Y_h(t)$  en fonction du temps  $t$  (i.e. l'évolution de  $\|Y_h(t_n)\|_{\mathcal{V}_h} = (\int_{\mathcal{T}_h} Y_h^n Y_h^n)^{1/2}$  en fonction de  $n$ ) et de ses trois composantes.

### Étape 2 : construction de $\hat{y}_h$ .

D'après la section 5.5,  $\hat{y}$  est la solution du système (5.80) associée au contrôle  $\hat{v} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{v}_k$ , où

$$\hat{v}_k = \underset{v \in (L^2(q_T^0, \hat{\rho}_0))^3}{\operatorname{argmin}} \left( \frac{1}{2} \int_{q_T^0} \hat{\rho}_0^2 |v|^2 + \frac{1}{2} \int_{Q_T} \hat{\rho}_k^2 |y_v|^2 \right),$$

$y_v$  désignant la solution du problème (5.80) associée à  $v$ , et les poids  $\hat{\rho}_0$  et  $\hat{\rho}_k$  étant donnés par

$$\hat{\rho}_0(x, t) = \exp\left(\frac{s\beta_0(x)}{T(T-t)}\right), \quad \hat{\rho}_k(x, t) = \exp\left(\frac{s\beta_0(x)}{T(T + \frac{1}{k} - t)}\right) (T + \frac{1}{k} - t)^{-3/2}. \quad (5.84)$$

Numériquement, on ne peut pas se permettre de considérer directement le poids  $\hat{\rho}_0$  qui n'est pas défini pour  $t = T$ . On l'approche alors par

$$\widehat{\rho}_{0,k}(x, t) = \exp\left(\frac{s\beta_0(x)}{T(T + \frac{1}{k} - t)}\right). \quad (5.85)$$

L'idée consiste à choisir  $k$  suffisamment grand ( $k = 1000$  dans les simulations) et à faire l'approximation suivante :  $\hat{v} \simeq \hat{v}_k$ , où  $\hat{v}_k$  est l'unique minimiseur dans  $(L^2(q_T, \widehat{\rho}_{0,k}))^3$  de la fonctionnelle

$$I_k(v) = \frac{1}{2} \int_{q_T^0} \widehat{\rho}_{0,k}^2 |v|^2 + \frac{1}{2} \int_{Q_T} \widehat{\rho}_k^2 |y_v|^2. \quad (5.86)$$

Puisque  $\widehat{\rho}_{0,k}(\cdot, T)$  et  $\widehat{\rho}_k(\cdot, T)$  sont respectivement de l'ordre de  $\mathcal{O}(\exp(k))$  et  $\mathcal{O}(k^{3/2} \exp(k))$ , il est nécessaire de choisir une discrétisation suffisamment fine de  $Q_T$ , de façon à approcher au mieux les intégrales qui composent  $I_k(v)$ . D'où le choix des paramètres de discrétisation  $\Delta t$ ,  $n_x$  et  $n_y$ . La fonction  $\beta_0$  qui apparaît dans les expressions de  $\widehat{\rho}_{0,k}$  et de  $\widehat{\rho}_k$  est de la forme

$$\beta_0(x) = e^{2\lambda\|\psi\|_{C(\bar{\Omega})}} - e^{2\lambda\psi(x)},$$

où  $\lambda$  est une constante strictement positive suffisamment grande et  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$  est une fonction vérifiant les propriétés suivantes (voir [FI96]) :

$$\psi > 0 \text{ dans } \Omega, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad |\nabla\psi| > 0 \text{ dans } \Omega \setminus \widetilde{\omega}^0,$$

pour un ouvert non vide  $\widetilde{\omega}^0 \subset \omega^0$ . Une fonction  $\psi$  très simple qui vérifie ces hypothèses pour n'importe quel ouvert  $\widetilde{\omega}^0 \subset \Omega = ]0, 1]^2$  contenant le point  $(0.5, 0.5)$  est la fonction :

$$\psi(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2).$$

C'est ce choix de fonction  $\psi$  que l'on fait pour les simulations numériques. D'autre part, bien que les valeurs des paramètres  $s$  et  $\lambda$  doivent être prises suffisamment grandes, on les choisit relativement petites ( $s = 10^{-1}$ ,  $\lambda = 10^{-2}$ ) de façon à ce que les valeurs de  $\widehat{\rho}_{0,k}(T)$  et  $\widehat{\rho}_k(T)$  soit accessibles numériquement. Pour approcher le minimiseur  $\hat{v}$  de la fonctionnelle  $I_k$ , on met en œuvre l'algorithme du gradient conjugué (dans sa version de Polack-Ribière) que l'on rappelle ci-dessous (voir, par exemple, [GLH08]).

**Algorithme du gradient conjugué**• *Étape 0 - Initialisation.*

- On se donne  $\epsilon > 0$  et  $\widehat{v}^{(0)} \in U = (L^2(q_T^0, \widehat{\rho}_{0,k}))^3$ .
- On calcule le résidu  $g^{(0)} = DI_k(\widehat{v}^{(0)})$ .
- On pose  $w^{(0)} = g^{(0)}$ .

Pour chaque  $p \geq 0$ , tel que  $\widehat{v}^{(p)}$ ,  $g^{(p)}$  et  $w^{(p)}$  sont connus, on calcule  $\widehat{v}^{(p+1)}$ ,  $g^{(p+1)}$  et éventuellement  $w^{(p+1)}$  de la façon suivante :

- *Étape 1 - Optimisation de  $\widehat{v}^{(p)}$  dans la direction  $w^{(p)}$ .*
  - On pose  $\widehat{v}^{(p+1)} = \widehat{v}^{(p)} - \beta_p w^{(p)}$ , où

$$\beta_p = \frac{\langle g^{(p)}, w^{(p)} \rangle_U}{D^2 I_k(\widehat{v}^{(p)}) \cdot w^{(p)^2}}.$$

- On calcule le résidu  $g^{(p+1)} = DI_k(\widehat{v}^{(p+1)})$ .

• *Étape 2 - Test de convergence et construction de la nouvelle direction de descente.*

- Si  $\|g^{(p+1)}\|_U / \|g^{(0)}\|_U < \epsilon$ , alors on pose  $\widehat{v} = \widehat{v}^{(p+1)}$ .
- Sinon, on pose  $w^{(p+1)} = g^{(p+1)} + \gamma_p w^{(p)}$ , où

$$\gamma_p = \frac{\langle g^{(p+1)}, g^{(p+1)} - g^{(p)} \rangle_U}{\|g^{(p)}\|_U^2},$$

puis on pose  $p = p + 1$ , et on recommence à partir de l'Étape 1.

Dans notre cas, il est facile de vérifier que les dérivées première et seconde de  $I_k$  sont données par

$$DI_k(v) = (v + \widehat{\rho}_{0,k}^{-2} \phi_v) 1_{\omega^0},$$

où  $\phi_v$  désigne la solution du problème rétrograde

$$\begin{cases} -\partial_t \phi_v = c \Delta \phi_v + A^* \phi_v + \widehat{\rho}_k^{-2} y_v, & \text{dans } Q_T, \\ \phi_v = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ \phi_v(T) = 0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (5.87)$$

et

$$D^2 I_k(v) \cdot w^2 = \int_{q_T^0} \widehat{\rho}_{0,k}^{-2} |w|^2 + \int_{Q_T} \widehat{\rho}_k^{-2} |\widetilde{y}_w|^2,$$

où  $\widetilde{y}_w$  est la solution du problème direct

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{y}_w = c \Delta \widetilde{y}_w + A \widetilde{y}_w + w 1_{\omega^0} & \text{dans } Q_T, \\ \widetilde{y}_w = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ \widetilde{y}_w(0) = 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (5.88)$$

À chaque itération dans la méthode du gradient conjugué, on résout alors le problème direct (5.80) associé à  $\widehat{v}^{(p)}$  pour calculer la solution correspondante  $\widehat{y}^{(p)}$ , puis résoudre le problème rétrograde (5.87) pour déterminer la solution  $\phi^{(p)} := \phi_{\widehat{v}^{(p)}}$  et calculer le résidu

$$g^{(p)} = \left( \widehat{v}^{(p)} + \widehat{\rho}_{0,k}^{-2} \phi^{(p)} \right) 1_{\omega^0}.$$

On résout ensuite le problème direct (5.88) pour calculer la solution  $\widetilde{y}^{(p)}$  associée à  $w^{(p)}$  et le paramètre

$$\beta_p = \frac{\int_{q_T^0} \widehat{\rho}_{0,k}^{-2} g^{(p)} w^{(p)}}{\int_{q_T^0} \widehat{\rho}_{0,k}^{-2} |w^{(p)}|^2 + \int_{Q_T} \widehat{\rho}_k^{-2} |\widetilde{y}^{(p)}|^2}.$$

On peut alors définir  $\widehat{v}^{(p+1)} = \widehat{v}^{(p)} - \beta_p w^{(p)}$ , puis calculer

$$\gamma_p = \frac{\int_{q_T^0} \widehat{\rho_{0,k}}^2 g^{(p+1)} (g^{(p+1)} - g^{(p)})}{\int_{q_T^0} \widehat{\rho_{0,k}}^2 |g^{(p)}|^2},$$

et  $w^{p+1} = g^{(p+1)} + \gamma_p w^{(p)}$ . On implémente l'algorithme du gradient conjugué sur un nombre maximal d'itérations fixé à  $p_{max} = 2000$ . On construit alors une approximation  $\widehat{y}_h^{(p)} \in \mathcal{V}_h$  de chacun des  $\widehat{y}^{(p)}$ . Comme pour la construction de  $Y_h$ , on utilise un schéma de Crank-Nicolson en temps pour résoudre chacun des trois systèmes (5.80), (5.87) et (5.88). La Figure 5.1 représente l'évolution (en échelle  $\log_{10}$ ) de  $I_k(\widehat{v}_h^{(p)})$ ,  $\|g^{(p)}\|_U / \|g^{(0)}\|_U$  et  $\|\widehat{y}_h^{(p)}(T)\|_{(L^2(\Omega))^3}$ . La Table 5.1 consigne quelques unes des valeurs de ces trois quantités pour différentes valeurs de  $p \leq p_{max}$ . On remarque que le coût  $I_k(\widehat{v}_h^{(p)})$  décroît bien avec  $p$ . C'est également le cas pour la norme de la solution  $\widehat{y}_h^{(p)}$  en  $T$ , qui décroît pour atteindre, après  $p_{max} = 2000$  itérations, une valeur de l'ordre de  $\mathcal{O}(10^{-4})$ . On choisit alors, comme approximation  $\widehat{y}_h$  de  $\widehat{y}$ , la solution  $\widehat{y}_h = \widehat{y}_h^{(p_{max})}$ . La Figure 5.2 représente les normes de  $\widehat{y}_h(t)$  et de ses trois composantes en fonction de  $t \in [0, T]$ . On remarque sur ce graphique, que les allures des quatre courbes sont semblables.

	$p = 0$	$p = 400$	$p = 800$	$p = 1200$	$p = 1600$	$p = 2000$
$I_k(\widehat{v}_h^{(p)})$	$8.47 \times 10^8$	$2.36 \times 10^3$	$8.19 \times 10^2$	$5.43 \times 10^2$	$3.93 \times 10^2$	$3.23 \times 10^2$
$\frac{\ g_h^{(p)}\ _{L^2(q_T, \widehat{\rho}_0)}}{\ g_h^{(0)}\ _{L^2(q_T, \widehat{\rho}_0)}}$	1	$5.39 \times 10^{-14}$	$2.43 \times 10^{-14}$	$1.55 \times 10^{-14}$	$1.10 \times 10^{-14}$	$5.84 \times 10^{-15}$
$\ \widehat{y}_h^{(p)}(T)\ _{(L^2(\Omega))^3}$	1.23	$1.38 \times 10^{-3}$	$7.80 \times 10^{-4}$	$5.87 \times 10^{-4}$	$4.65 \times 10^{-4}$	$3.99 \times 10^{-4}$

TABLE 5.1 – Évolution du coût, de la norme du résidu et de la norme à l'instant final  $T$  de la solution  $\widehat{y}_h^{(p)}$ , au cours des itérations de l'algorithme du gradient conjugué.

### Étape 3 : construction de $g_h$ .

On cherche ici à construire une approximation  $g_h$  du terme source  $g = (G_1 + \frac{a_{13}}{a_{23}}G_2, G_2)^T$  dans le système (5.82), où

$$G_i = -2c\nabla\theta \cdot \nabla\widehat{y}_i - c(\Delta\theta)\widehat{y}_i - (\eta'\theta - c\eta\Delta\theta)Y_i + 2c\eta\nabla\theta \cdot \nabla Y_i, \quad i = 1, 2.$$

Connaissant des approximations  $Y_h$  et  $\widehat{y}_h$  de  $Y$  et  $\widehat{y}$ , on peut maintenant construire des approximations  $G_{1h}$  et  $G_{2h}$  de  $G_1$  et  $G_2$  en utilisant la formulation éléments finis suivante pour tout  $n = 0, \dots, 60$  :

$$\begin{aligned} \forall \overline{G} \in \mathcal{V}_h, \quad \int_{\mathcal{T}_h} G_{ih}^n \overline{G} &= -2c \int_{\mathcal{T}_h} ((\nabla\theta)_h \cdot \nabla\widehat{y}_{ih}^n) \overline{G} - c \int_{\mathcal{T}_h} (\Delta\theta)_h \widehat{y}_{ih}^n \overline{G} \\ &\quad - \int_{\mathcal{T}_h} (\eta'^n \theta_h - c\eta^n (\Delta\theta)_h) Y_{ih}^n \overline{G} + 2c\eta^n \int_{\mathcal{T}_h} ((\nabla\theta)_h \cdot \nabla Y_{ih}^n) \overline{G}, \end{aligned}$$

où  $\eta'^n = \eta'(t_n)$  et  $(\nabla\theta)_h$  et  $(\Delta\theta)_h$  désignent respectivement des approximations de  $\nabla\theta$  et  $\Delta\theta$  dans  $\mathcal{V}_h$ . On en déduit alors des approximations de  $g_1$  et  $g_2$  :

$$g_{1h} = G_{1h} + \frac{a_{13}}{a_{23}}G_{2h}, \quad g_{2h} = G_{2h}.$$

### Étape 4 : construction de $(z_h, u_h)$ .

On rappelle que  $z$  est la solution de (5.82) associée à  $u = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k$ , où

$$u_k = \underset{\overline{u} \in L^2(q_T, \rho_0)}{\operatorname{argmin}} \left( \frac{1}{2} \int_{q_T} \rho_0^2 \overline{u}^2 + \frac{1}{2} \int_{q_T} \rho_k^2 |z_{\overline{u}}|^2 \right),$$

$z_{\overline{u}}$  désignant la solution de (5.82) associée à  $\overline{u}$  et les poids  $\rho_0$  et  $\rho_k$  étant définis par

$$\rho_0(t) = (t(T-t))^{-(p-3)/2}, \quad \rho_k(t) = (T + \frac{1}{k} - t)^{-p/2},$$

pour  $p \geq 8$ . Pour les simulations numériques, on choisit  $p = 8$  et  $k = 1000$  et on suppose que  $u \simeq u_k$  où  $u_k$  est l'unique minimiseur dans  $L^2(q_T, \rho_{0,k})$  de la fonctionnelle

$$\tilde{J}_k(\bar{u}) = \frac{1}{2} \int_{q_T} \rho_{0,k}^2 \bar{u}^2 + \frac{1}{2} \int_{q_T} \rho_k^2 |z_{\bar{u}}|^2,$$

pour

$$\rho_{0,k}(t) = \left( (t + \frac{1}{k})(T + \frac{1}{k} - t) \right)^{-5/2}, \quad \rho_k(t) = (T + \frac{1}{k} - t)^{-4}.$$

On applique alors un algorithme de gradient conjugué sur  $p_{max} = 2000$  itérations pour résoudre ce problème de minimisation. Le problème (5.82) étant posé sur  $q_T$ , on doit considérer cette fois une triangulation  $\mathcal{T}_H$  de  $\omega$ . On choisit, par exemple, un maillage de même structure et de même taille que  $\mathcal{T}_h$ , et un espace d'éléments finis  $\mathcal{V}_H$  de type  $P_2$ . On obtient pour chaque itération  $p$  du gradient conjugué une approximation  $u_H^{(p)}$  de  $u^{(p)}$  et une approximation  $z_H^{(p)}$  de la solution de (5.82) associée à  $u^{(p)}$ . Les Figure 5.3 et Table 5.2 décrivent l'évolution du coût  $\tilde{J}_k(u_H^{(p)})$ , de la norme du résidu et de la norme de  $z_H^{(p)}$  en  $T$  au cours des itérations du gradient conjugué. On remarque encore une fois qu'il y a bien décroissance du coût à chaque itération. La norme de  $z_H^{(p)}$  décroît également avec  $T$  jusqu'à atteindre, après  $p_{max}$  itérations, une valeur de l'ordre de  $\mathcal{O}(10^{-5})$ . On pose alors  $(z_H, u_H) = (z_H^{(p_{max})}, u_H^{(p_{max})})$ .

	$p = 0$	$p = 400$	$p = 800$	$p = 1200$	$p = 1600$	$p = 2000$
$\tilde{J}_k(u_H^{(p)})$	$5.42 \times 10^{19}$	$2.91 \times 10^{13}$	$2.22 \times 10^{13}$	$2.04 \times 10^{13}$	$1.96 \times 10^{13}$	$1.84 \times 10^{13}$
$\frac{\ g_H^{(p)}\ _{L^2(q_T, \tilde{\rho}_0)}}{\ g_H^{(0)}\ _{L^2(q_T, \tilde{\rho}_0)}}$	1	$7.98 \times 10^{-6}$	$2.75 \times 10^{-6}$	$6.79 \times 10^{-7}$	$1.60 \times 10^{-6}$	$7.17 \times 10^{-6}$
$\ z_H^{(p)}(T)\ _{(L^2(\Omega))^3}$	$1.61 \times 10^{-1}$	$1.18 \times 10^{-4}$	$1.03 \times 10^{-4}$	$9.88 \times 10^{-5}$	$9.69 \times 10^{-5}$	$9.40 \times 10^{-5}$

TABLE 5.2 – Évolution du coût, de la norme du résidu et de la norme à l'instant final  $T$  de la solution  $z_H^{(p)}$ , au cours des itérations  $p$  de l'algorithme du gradient conjugué.

On définit à partir de l'approximation  $(z_H, u_H)$  de  $(z, u)$  dans  $\mathcal{V}_H$  une approximation  $(z_h, u_h)$  dans  $\mathcal{V}_h$  par interpolation.

### Étape 5 : construction de $y_h$ .

On construit simplement une approximation  $y_h$  de  $y$  dans  $\mathcal{V}_h$  en utilisant la décomposition (5.83). L'élément  $y_h$  ainsi défini approche bien une solution contrôlée (par un contrôle) du système (5.79) puisque qu'il vérifie  $\|y_h(T)\|_{(L^2(\Omega))^3} \simeq 3.27 \times 10^{-4}$ . Le graphique de la Figure 5.4 représente l'évolution au cours du temps de  $\|y_h(t)\|_{(L^2(\Omega))^3}$  et  $\|y_{i_h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Contrairement au cas de trois contrôles (voir la Figure 5.2), on remarque ici que l'évolution de la norme de  $y_h$  est gouvernée par celle de  $\hat{y}_{3h}$ , ce qui provient du fait que le contrôle n'agit que sur la troisième équation du système. Dans la Figure 5.5, on compare, d'une part l'évolution au cours du temps des normes de  $y_h(t)$ ,  $\hat{y}_h(t)$  et  $\hat{Y}_h(t)$ , d'autre part l'évolution des normes de  $y_{i_h}(t)$ ,  $\hat{y}_{i_h}(t)$  et  $Y_{i_h}(t)$ , pour chaque  $i = 1, 2, 3$ . L'amplitude des courbes obtenues pour  $y_h$  et  $y_{3h}$  (Bleu) est beaucoup plus importante que l'amplitude de celles de  $\hat{y}_h$  et  $\hat{y}_{3h}$  (Magenta). Cela provient du fait que le contrôle n'agit sur la première et la deuxième composantes de  $y_h$  que par l'intermédiaire de  $y_{3h}$ , qui doit donc agir de manière conséquente pour forcer  $y_{h1}$  et  $y_{h2}$  à s'annuler en  $T$ .

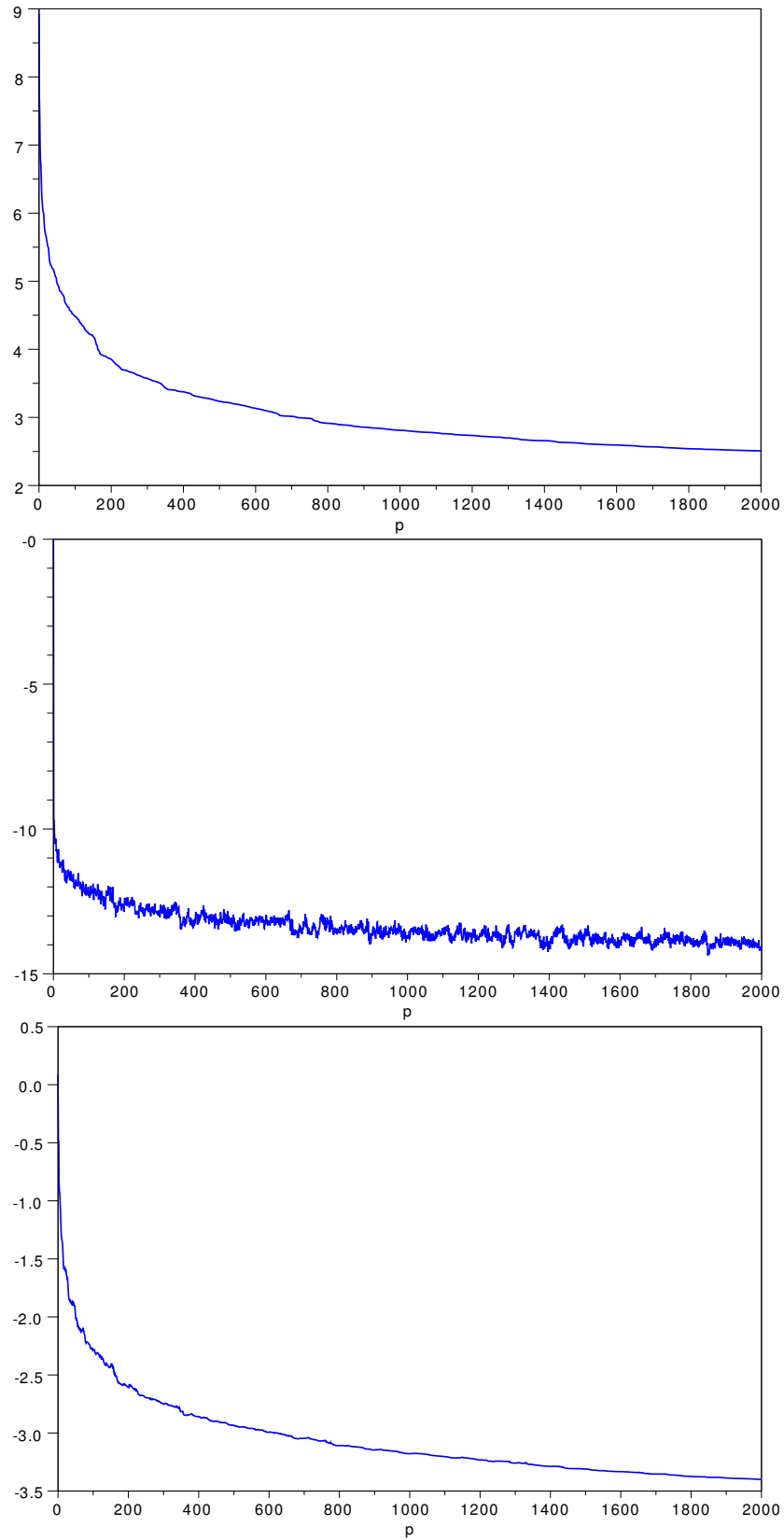


FIGURE 5.1 – Évolution de  $\log_{10} I_k(\widehat{v}_h^{(p)})$  (**Haut**),  $\log_{10} \left( \frac{\|g_h^{(p)}\|_{L^2(q_T, \widehat{\rho}_0)}}{\|g_h^{(0)}\|_{L^2(q_T, \widehat{\rho}_0)}} \right)$  (**Milieu**) et  $\log_{10} \|\widehat{y}_h^{(p)}(T)\|_{(L^2(\Omega))^3}$  (**Bas**) en fonction du nombre d'itérations dans l'algorithme du gradient conjugué.

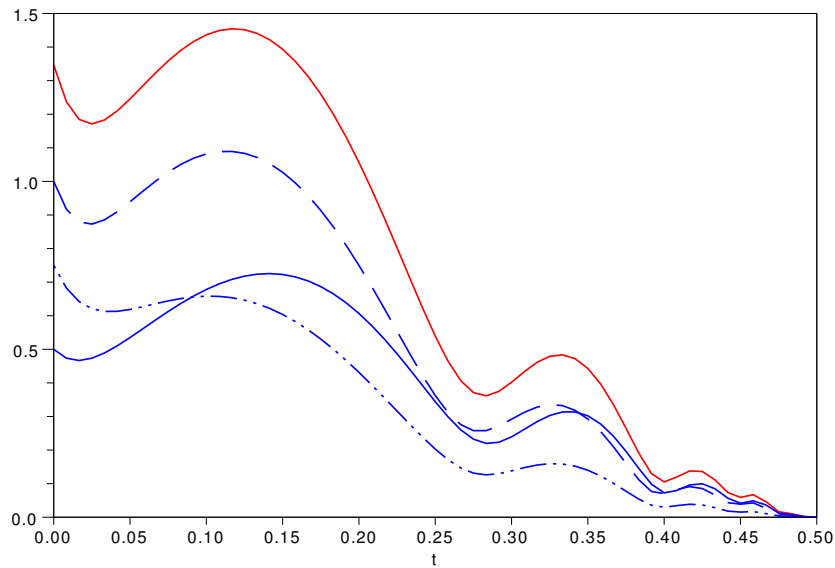


FIGURE 5.2 – Évolution, en fonction de  $t \in [0, T]$ , de  $\|\hat{y}_h(t)\|_{(L^2(\Omega))^3}$  (Rouge),  $\|\hat{y}_{1h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Bleu, trait continu),  $\|\hat{y}_{2h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Bleu, trait discontinu) et  $\|\hat{y}_{3h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Bleu, trait pointillé).

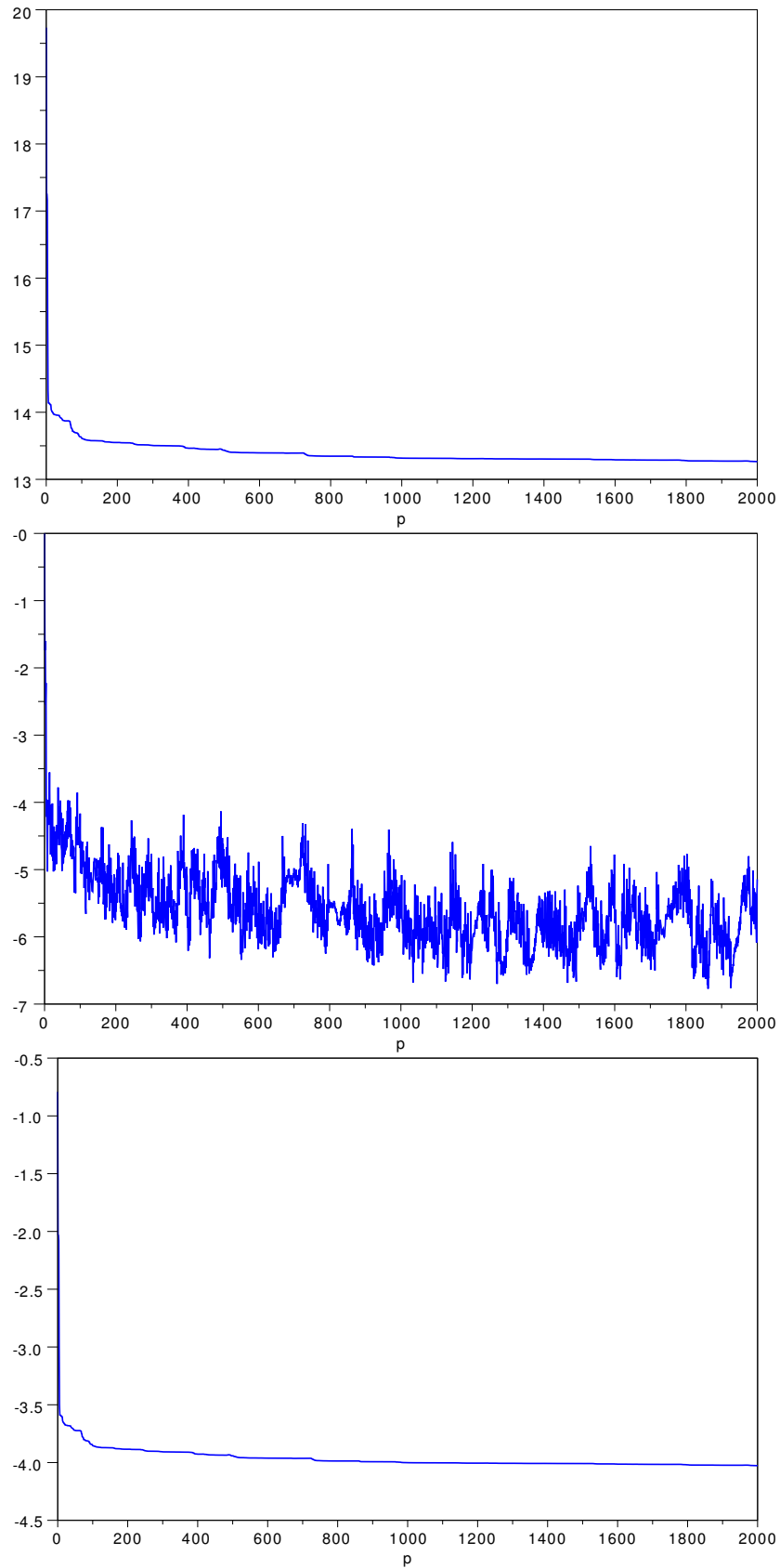


FIGURE 5.3 – Évolution de  $\log_{10} \tilde{J}_k(u_H^{(p)})$  (**Haut**),  $\log_{10} \left( \frac{\|g_H^{(p)}\|_{L^2(q_T, \tilde{\rho}_0)}}{\|g_H^{(0)}\|_{L^2(q_T, \tilde{\rho}_0)}} \right)$  (**Milieu**) et  $\log_{10} \|z_H^{(p)}(T)\|_{(L^2(\Omega))^3}$  (**Bas**) en fonction du nombre d'itérations  $p$  dans l'algorithme du gradient conjugué.



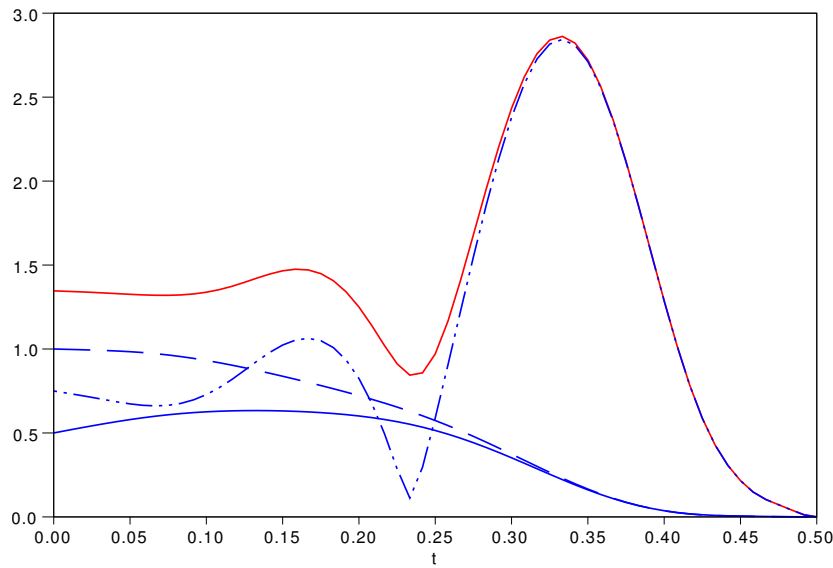


FIGURE 5.4 – Évolution, en fonction de  $t \in [0, T]$ , de  $\|y_h(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Rouge),  $\|y_{1h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Bleu, trait continu),  $\|y_{2h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Bleu, trait discontinu) et  $\|y_{3h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Bleu, trait pointillé).

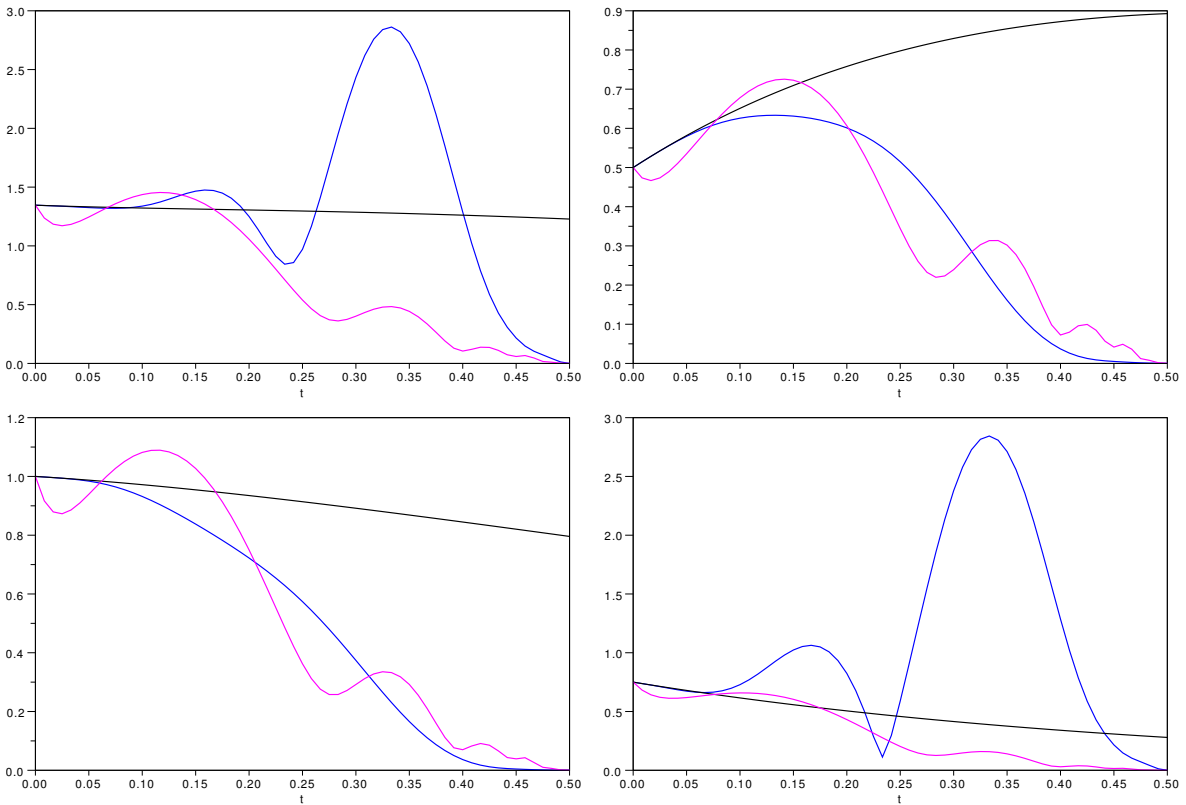


FIGURE 5.5 – Évolution, en fonction de  $t \in [0, T]$ , des normes de  $y_h(t)$ ,  $Y_h(t)$ ,  $\hat{y}_h(t)$ ,  $y_{ih}(t)$ ,  $Y_{ih}(t)$  et  $\hat{y}_{ih}(t)$  pour  $i = 1, 2, 3$ . **Haut - Gauche** :  $\|y_h(t)\|_{(L^2(\Omega))^3}$  (Bleu),  $\|Y_h(t)\|_{(L^2(\Omega))^3}$  (Noir), et  $\|\hat{y}_h(t)\|_{(L^2(\Omega))^3}$  (Magenta). **Haut - Droite** :  $\|y_{1h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Bleu),  $\|Y_{1h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Noir) et  $\|\hat{y}_{1h}(t)\|_{(L^2(\Omega))^3}$  (Magenta). **Bas - Gauche** :  $\|y_{2h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Bleu),  $\|Y_{2h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Noir) et  $\|\hat{y}_{2h}(t)\|_{(L^2(\Omega))^3}$  (Magenta). **Bas - Droite** :  $\|y_{3h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Bleu) v.s.  $\|Y_{3h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Noir) et  $\|\hat{y}_{3h}(t)\|_{(L^2(\Omega))^3}$  (Magenta).

### 5.7.2 Approche directe

Cette approche consiste, puisqu'on sait que le système (5.79) est contrôlable, à construire un contrôle en étudiant un problème de minimisation pour une fonctionnelle du type

$$J(\bar{v}) = \frac{1}{2} \int_{q_T} \rho_0^2 \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \int_{Q_T} \rho^2 |y_{\bar{v}}|^2,$$

où  $y_{\bar{v}}$  est la solution de (5.79) associée à  $\bar{v}$  et le poids  $\rho \in C([0, T[, \mathbb{R}^{+*})$  est choisi de sorte que  $\rho(t) \rightarrow_{t \rightarrow T} +\infty$ . En effet, cela implique que si  $J(v) < +\infty$  et  $y_v \in (C([0, T], L^2(\Omega)))^3$ , lorsque le minimum est atteint pour un certain  $v \in L^2(q_T, \rho_0)$ , alors on a  $y_v(T) = 0$ . On considère la même fonctionnelle que celle définie dans (5.86) :

$$\forall \bar{v} \in L^2(q_T, \widehat{\rho}_{0,k}), \quad I_k(\bar{v}) = \frac{1}{2} \int_{q_T} \widehat{\rho}_{0,k}^2 \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \int_{Q_T} \widehat{\rho}_k |y_{\bar{v}}|^2,$$

avec  $\widehat{\rho}_{0,k}$  et  $\widehat{\rho}_k$  comme dans (5.85) et (5.84), toujours avec  $s = 10^{-1}$  et  $\lambda = 10^{-2}$ . Cette fonctionnelle étant différentiable, strictement convexe et coercive, elle admet un unique minimiseur  $v_k$ . On pose  $v \simeq v_k$  pour  $k$  grand ( $k = 1000$ ). Comme pour l'approximation de  $\hat{y}$ , on met en œuvre l'algorithme du gradient conjugué avec  $p_{max} = 2000$  itérations, pour approcher le minimiseur  $v$  de  $I_k$  et la solution  $y_v$  qui lui est associée. On se place dans les mêmes conditions que pour l'approche indirecte, à savoir  $\Omega = ]0, 1]^2$ ,  $\omega = ]0.2, 0.8]^2$ ,  $T = 0.5$  et  $y^0(x) = (2, 1, 1.5)^T \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$ .

La Figure 5.6 représente l'évolution du coût, de la norme du résidu et de la norme de la solution à l'instant  $T$  au cours de l'algorithme du gradient conjugué. Les ordres de grandeur de ces trois quantités sont donnés pour différentes valeurs de  $p$  (nombre d'itérations du gradient conjugué) dans la Table 5.3. Comme pour les cas de  $\hat{y}_h$  et  $z_h$ , on observe toujours la décroissance du coût et de la norme en  $T$  de la solution au cours des itérations, avec après  $p = p_{max}$  itérations,  $\|y_h^{(p)}(T)\|_{(L^2(\Omega))^3} = 2.69 \times 10^{-3}$ . La solution  $y_h := y_h^{(p_{max})}$  ainsi obtenue semble donc approcher une solution contrôlée du système (5.79). On peut comparer ces résultats à ceux des Figure 5.1 et Table 5.1 (pour l'approximation de  $\hat{y}$ ) : avec les mêmes fonctions poids dans la fonctionnelle à minimiser et au bout du même nombre d'itérations du gradient conjugué, la décroissance du coût et des résidus est beaucoup plus rapide lorsqu'on contrôle le même système avec trois contrôles (un contrôle agissant sur chacune des équations) que lorsqu'on le contrôle avec un seul contrôle. Il en va de même de la convergence vers zéro de la norme de la solution en  $T$ . Tout cela semble naturel d'un point de vue pratique : plus on réduit le nombre de contrôles agissant sur un système, plus il est difficile de contrôler ce système.

	$p = 0$	$p = 400$	$p = 800$	$p = 1200$	$p = 1600$	$p = 2000$
$J_k(v_h^{(p)})$	$8.47 \times 10^8$	$1.87 \times 10^5$	$3.55 \times 10^4$	$1.89 \times 10^4$	$1.41 \times 10^4$	$1.14 \times 10^4$
$\frac{\ g_h^{(p)}\ _{L^2(q_T, \hat{\rho}_0)}}{\ g_h^{(0)}\ _{L^2(q_T, \hat{\rho}_0)}}$	1	$6.57 \times 10^{-4}$	$2.59 \times 10^{-4}$	$1.32 \times 10^{-4}$	$1.23 \times 10^{-4}$	$5.94 \times 10^{-5}$
$\ y_h^{(p)}(T)\ _{(L^2(\Omega))^3}$	1.23	$1.59 \times 10^{-2}$	$5.04 \times 10^{-3}$	$3.43 \times 10^{-3}$	$2.95 \times 10^{-3}$	$2.69 \times 10^{-3}$

TABLE 5.3 – Évolution du coût, de la norme du résidu et de la norme à l'instant final  $T$  de la solution  $y_h^{(p)}$ , au cours des itérations  $p$  de l'algorithme du gradient conjugué.

La Figure 5.7 décrit l'évolution au cours du temps de la norme de l'approximation  $y_h$  et compare ce tracé à celui de la norme de l'approximation  $Y_h$  de la solution sans contrôle. On remarque bien que  $y_h$  est contrôlée à zéro et que la norme de  $y_h$  suit encore l'évolution de celle de sa troisième composante  $y_{3h}$  (le contrôle agit directement sur la troisième équation). Dans la Figure 5.8, on trace l'évolution de la norme du contrôle  $v_h := v_h^{(p_{max})}$  au cours du temps.

L'approximation par l'approche indirecte semble fournir de meilleurs résultats que l'approximation par l'approche directe puisqu'elle construit une solution  $y_h$  vérifiant  $\|y_h(T)\|_{(L^2(\Omega))^3} = 3.27 \times 10^{-4}$ , alors que l'approche directe conduit à  $\|y_h(T)\|_{(L^2(\Omega))^3} = 2.69 \times 10^{-3}$ . Mais l'approche indirecte est beaucoup plus coûteuse en temps puisqu'elle nécessite de construire, au préalable, les approximations numériques des solutions de trois systèmes ( $Y_h$ ,  $\hat{y}_h$  et  $z_h$ ). Pour pousser encore plus loin la comparaison entre ces deux approches, on pourrait les tester sur des domaines  $\omega$  plus petits que celui que l'on

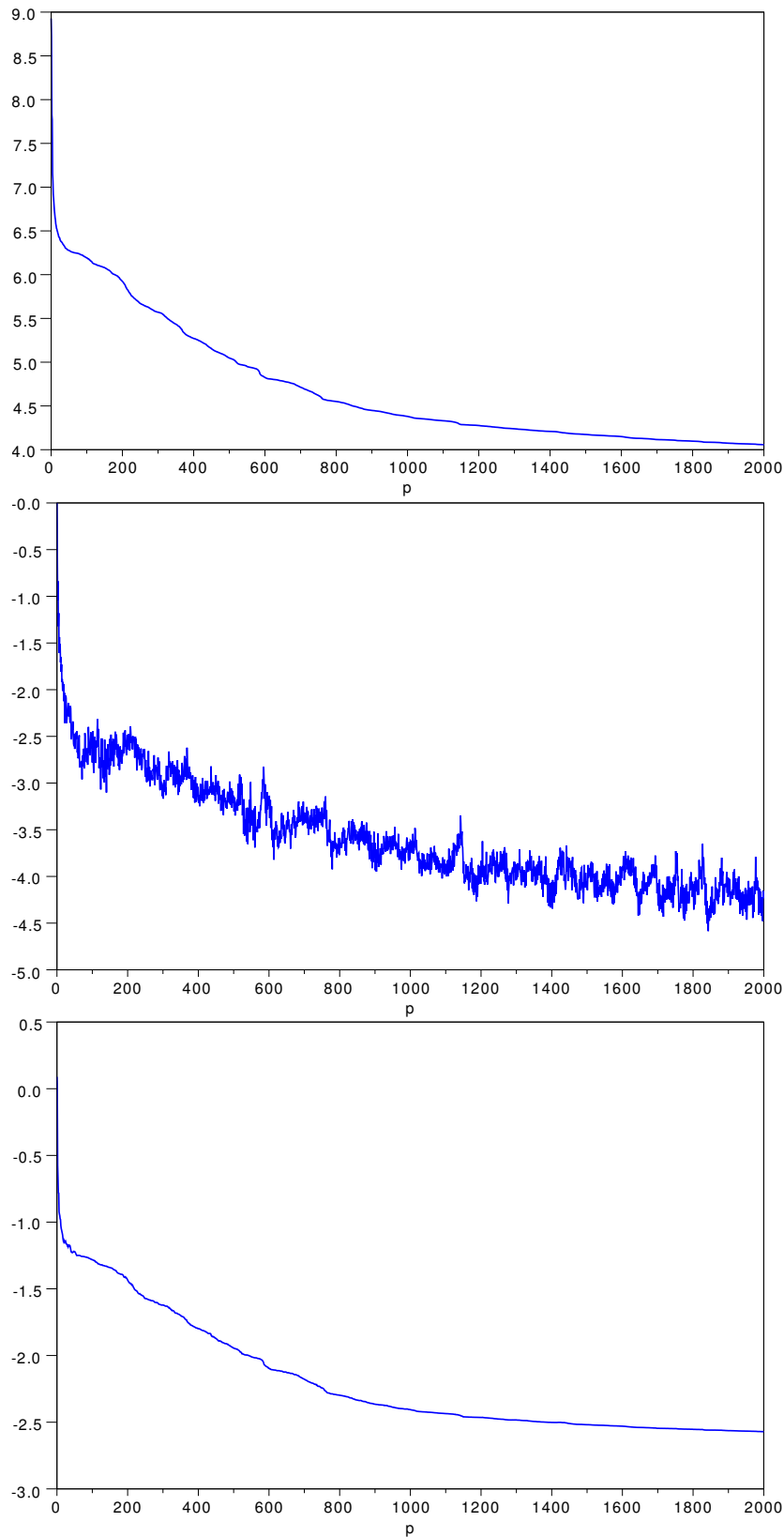


FIGURE 5.6 – Évolution de  $\log_{10} J_k(v_h^{(p)})$  (**Haut**),  $\log_{10} \left( \frac{\|g_h^{(p)}\|_{L^2(q_T, \hat{\rho}_0)}}{\|g_h^{(0)}\|_{L^2(q_T, \hat{\rho}_0)}} \right)$  (**Milieu**) et  $\log_{10} \|y_h^{(p)}(T)\|_{(L^2(\Omega))^3}$  (**Bas**) en fonction du nombre d'itérations  $p$  dans l'algorithme du gradient conjugué.

a considéré ici ( $\omega = ]0.2, 0.8[^2$ ), et bien sûr sur des exemples simples de systèmes à coefficients *non constants* qui vérifient la condition suffisante de contrôlabilité du Théorème 5.3. On pourrait également les tester sur des systèmes à coefficients non constants qui ne vérifient pas la condition du Théorème 5.3 pour vérifier que cette condition n'est pas une condition *nécessaire* de contrôlabilité par un contrôle.

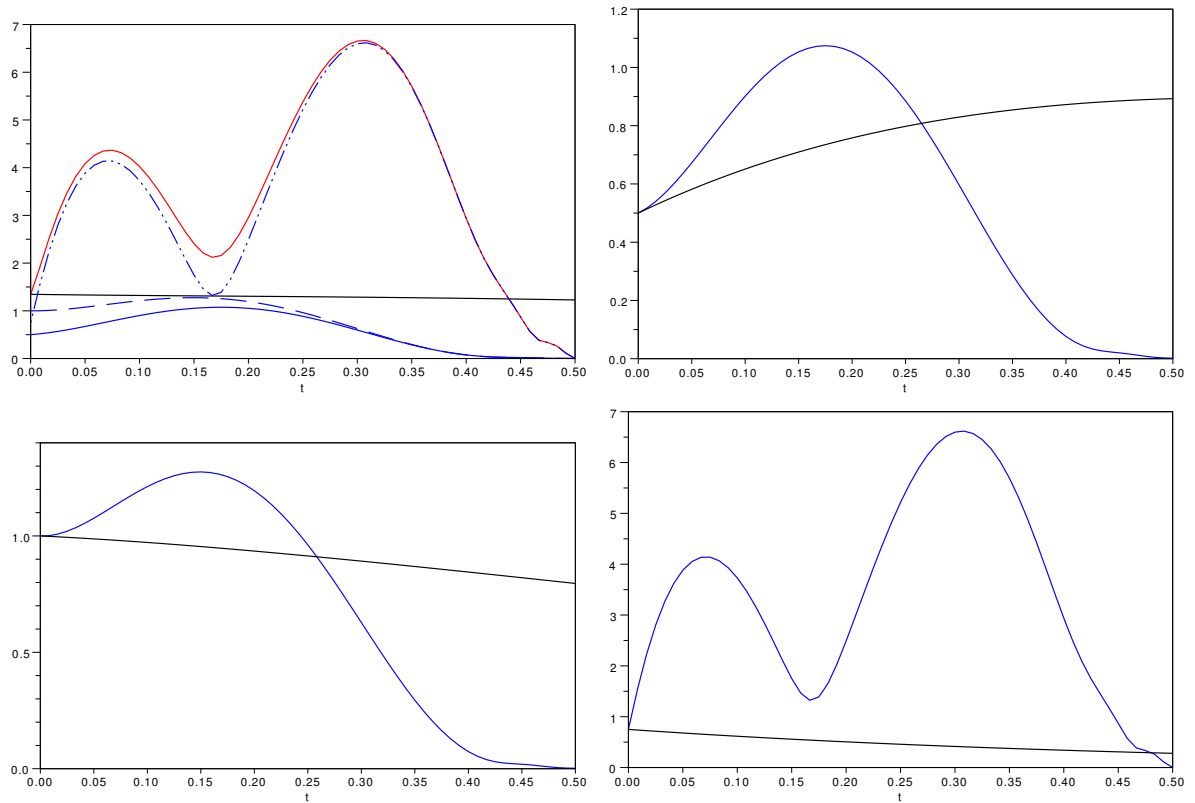


FIGURE 5.7 – Évolution, en fonction de  $t \in [0, T]$ , de  $\|y_h(t)\|_{(L^2(\Omega))^3}$ ,  $\|y_{i_h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$ ,  $\|Y_h(t)\|_{(L^2(\Omega))^3}$  et  $\|Y_{i_h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). **Haut - Gauche** :  $\|y_h(t)\|_{(L^2(\Omega))^3}$  (Rouge),  $\|Y_h(t)\|_{(L^2(\Omega))^3}$  (Noir),  $\|y_{1_h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Bleu, trait continu),  $\|y_{2_h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Bleu, trait discontinu) et  $\|y_{3_h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Bleu, trait pointillé). **Haut - Droite** :  $\|y_{1_h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Bleu) v.s.  $\|Y_{1_h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Noir). **Bas - Gauche** :  $\|y_{2_h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Bleu) v.s.  $\|Y_{2_h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Noir). **Bas - Droite** :  $\|y_{3_h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Bleu) v.s.  $\|Y_{3_h}(t)\|_{L^2(\Omega)}$  (Noir).

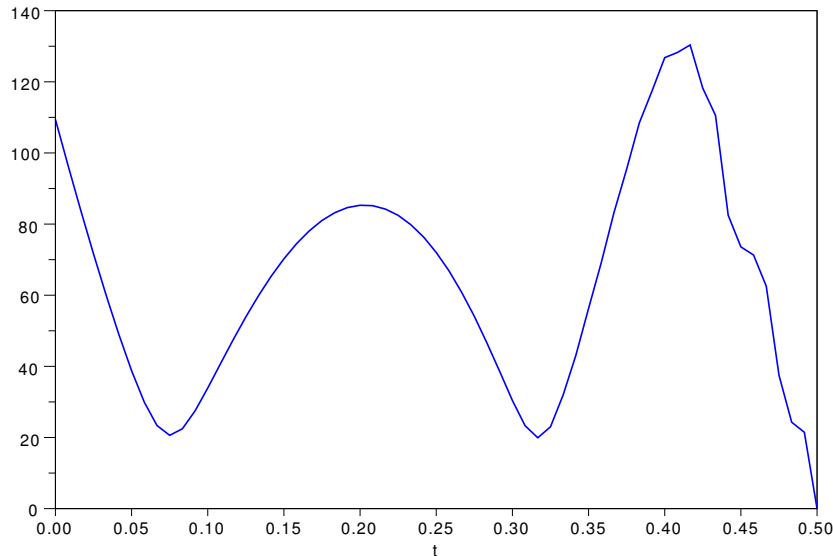


FIGURE 5.8 – Évolution, en fonction de  $t \in [0, T]$ , de  $\|v_h(t)\|_{L^2(\Omega)}$ .

## Références bibliographiques du chapitre 5

- [ABL11] F. ALABAU-BOUSSOIRA & M. LÉAUTAUD – « Indirect controllability of locally coupled systems under geometric conditions », C. R. Math. Acad. Sci. Paris **349** (2011), no. 7-8, p. 395–400.
- [AKBD06] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH & C. DUPAIX – « Null-controllability of some reaction-diffusion systems with one control force », J. Math. Anal. Appl. **320** (2006), no. 2, p. 928–943.
- [AKBDGB09a] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH, C. DUPAIX & M. GONZÁLEZ-BURGOS – « A generalization of the Kalman rank condition for time-dependent coupled linear parabolic systems », Differ. Equ. Appl. **1** (2009), no. 3, p. 427–457.
- [AKBDGB09b] — , « A Kalman rank condition for the localized distributed controllability of a class of linear parabolic systems », J. Evol. Equ. **9** (2009), no. 2, p. 267–291.
- [AKBGBdT11a] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH, M. GONZÁLEZ-BURGOS & L. DE TERESA – « The Kalman condition for the boundary controllability of coupled parabolic systems. Bounds on biorthogonal families to complex matrix exponentials », J. Math. Pures Appl. (9) **96** (2011), no. 6, p. 555–590.
- [AKBGBdT11b] — , « Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems : a survey », Math. Control Relat. Fields **1** (2011), no. 3, p. 267–306.
- [BCGdT10] A. BENABDALLAH, M. CRISTOFOL, P. GAITAN & L. DE TERESA – « A new Carleman inequality for parabolic systems with a single observation and applications », C. R. Math. Acad. Sci. Paris **348** (2010), no. 1-2, p. 25–29.
- [BCGdT11] A. BENABDALLAH, M. CRISTOFOL, P. GAITAN & L. DE TERESA – « Controllability to trajectories for some parabolic systems of three and two equations by one control force », Preprint (2011).
- [CH05] S. P. CHAKRABARTY & F. B. HANSON – « Optimal control of drug delivery to brain tumors for a distributed parameters model », Proc. American Control Conf. (2005), p. 973–978.
- [DL88] R. DAUTRAY & J.-L. LIONS – Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Vol. 8, INSTN : Collection Enseignement. [INSTN : Teaching Collection], Masson, Paris, 1988, Évolution : semi-groupe, variationnel. [Evolution : semigroups, variational methods], Reprint of the 1985 edition.

- [FCM11] E. FERNÁNDEZ-CARA & A. MÜNCH – « Numerical null controllability of the 1d heat equation : primal and dual algorithms », Preprint (2011).
- [FCZ00a] E. FERNÁNDEZ-CARA & E. ZUAZUA – « The cost of approximate controllability for heat equations : the linear case », Adv. Differential Equations **5** (2000), no. 4-6, p. 465–514.
- [FCZ00b] — , « Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations », Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **17** (2000), no. 5, p. 583–616.
- [FI96] A. V. FURSIKOV & O. Y. IMANUVILOV – Controllability of evolution equations, Lecture Notes Series, vol. 34, Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.
- [Fur00] A. V. FURSIKOV – Optimal control of distributed systems. Theory and applications, Translations of Mathematical Monographs, vol. 187, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, Translated from the 1999 Russian original by Tamara Rozhkovskaya.
- [GBdT10] M. GONZÁLEZ-BURGOS & L. DE TERESA – « Controllability results for cascade systems of  $m$  coupled parabolic PDEs by one control force », Port. Math. **67** (2010), no. 1, p. 91–113.
- [GBPG06] M. GONZÁLEZ-BURGOS & R. PÉREZ-GARCÍA – « Controllability results for some nonlinear coupled parabolic systems by one control force », Asymptot. Anal. **46** (2006), no. 2, p. 123–162.
- [GLH08] R. GLOWINSKI, J.-L. LIONS & J. HE – Exact and approximate controllability for distributed parameter systems, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 117, Cambridge University Press, Cambridge, 2008, A numerical approach.
- [Gue07] S. GUERRERO – « Null controllability of some systems of two parabolic equations with one control force », SIAM J. Control Optim. **46** (2007), no. 2, p. 379–394.
- [Lio68] J.-L. LIONS – Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Avant propos de P. Lelong, Dunod, Paris, 1968.
- [LSU67] O. A. LADYŽENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV & N. N. URAL'CEVA – Linear and quasilinear equations of parabolic type, Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.
- [Mau12] K. MAUFFREY – « On the null controllability of a parabolic system with non-constant coefficients by one or two control forces », J. Math. Pures Appl. (2012).
- [MP10] A. MÜNCH & P. PEDREGAL – « Relaxation of an optimal design problem in fracture mechanic : the anti-plane case », ESAIM Control Optim. Calc. Var. **16** (2010), no. 3, p. 719–743.



# Conclusion

La problématique de cette thèse était d'étudier la contrôlabilité, par un nombre réduit de contrôles, de certaines classes de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.

Dans la partie I, on a d'abord démontré l'existence et l'unicité des solutions pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont on a étudié, par la suite, la contrôlabilité dans la partie II. Cela a permis, dans un second temps, de définir les problématiques de contrôlabilité associées à ces systèmes, puis d'utiliser la dualité pour formuler les inégalités d'observabilité correspondantes.

Le chapitre 4 de la partie II était consacré à la démonstration d'un résultat de contrôlabilité/non-contrôlabilité exacte pour un système hyperbolique linéaire, en dimension 2 d'espace, constitué d'une équation de type équation des ondes, couplée avec une équation de type équation différentielle du second ordre en temps. La contrôlabilité n'a été étudiée que dans le cas d'un seul contrôle agissant sur la première équation du système par l'intermédiaire d'une condition de Dirichlet sur une partie de la frontière. On a démontré que l'opérateur associé à ce système possède un spectre essentiel non vide. Cette propriété a permis d'établir l'existence de données initiales non contrôlables : les données initiales dont la décomposition dans la base des fonctions propres contient une infinité de termes associés aux valeurs propres qui engendrent le spectre essentiel. En revanche, on a démontré que si on ne garde qu'un nombre fini de telles fonctions propres, alors la contrôlabilité a lieu uniformément. Ces deux propriétés ont été illustrées numériquement, en utilisant le fait qu'on peut exprimer la constante d'observabilité à l'aide d'un problème aux valeurs propres généralisé.

Dans le chapitre 5 de la partie II, on a présenté une nouvelle façon d'aborder la contrôlabilité aux trajectoires pour des systèmes paraboliques linéaires de trois équations à coefficients non constants. Cette approche a permis d'établir une condition suffisante de contrôlabilité par un seul contrôle localisé en espace. Cette condition, qui porte sur les coefficients de la matrice de couplage, peut être vue comme une généralisation du critère de Kalman qui existe déjà pour les systèmes paraboliques à coefficients constants ou les systèmes paraboliques dont les coefficients ne dépendent que de la variable de temps. L'argument principal a consisté à écrire la solution à contrôler en fonction d'une solution  $\hat{y}$  contrôlée par trois contrôles bien choisie (solution qui s'annule polynômialement en  $t = T$ , construite à partir de l'inégalité de Carleman et d'un problème de minimisation de fonctionnelle) et d'une solution  $z$  d'un système parabolique non homogène de deux équations, solution qui est contrôlée par un seul contrôle agissant sur tout le domaine et s'annulant en  $t = 0$  et en  $t = T$  (l'existence de  $z$  a été assurée par la résolution d'un problème de minimisation en lien avec une inégalité d'observabilité à poids). Enfin, on a présenté une application numérique de cette méthode sur un exemple simple de système à coefficients constants en deux dimensions d'espace.

Comme on l'a mentionné à la fin des chapitres 4 et 5 (respectivement dans les sections 4.5 et 5.6), de nombreuses perspectives sont envisageables. En particulier, il serait intéressant de généraliser les résultats de ces deux chapitres aux systèmes originaux dont proviennent les deux systèmes étudiés. Pour le système suivant duquel est issu le système étudié dans le chapitre 4 (voir [SHSP89]),

$$\begin{cases} u'' + \mathcal{A}u = 0, & \text{dans } Q_T \\ (u_1, u_2) = (v_1, v_2) \mathbf{1}_\Gamma, & \text{sur } \Sigma_T, \\ (u(\cdot, 0), u'(\cdot, 0)) = (u^0, u^1), & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$



la difficulté principale est qu'on ne connaît pas explicitement les valeurs propres de l'opérateur

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -a\partial_{xx}^2 - c\partial_{yy}^2 & -(b+c)\partial_{xy}^2 & -ar^{-1}\partial_x \\ -(b+c)\partial_{xy}^2 & -c\partial_{xx}^2 - a\partial_{yy}^2 & -br^{-1}\partial_y \\ r^{-1}a\partial_x & r^{-1}b\partial_y & r^{-2}a \end{pmatrix}.$$

En fait, on ne connaît que le spectre essentiel de  $\mathcal{A}$  et le comportement asymptotique des valeurs propres de son spectre discret. Le point encourageant est que ce comportement asymptotique est encore, à une constante près, celui des valeurs propres  $(p^2 + q^2)\pi^2$  du Laplacien. Une adaptation de l'approche de type Ingham exposée dans le chapitre 4 serait envisageable dès lors qu'on arriverait à établir des propriétés d'écart partiel pour la suite des valeurs propres discrètes, en se basant sur celles des valeurs propres du Laplacien. Cela nécessite, au minimum, de connaître l'ordre d'approximation dans le comportement asymptotique.

Enfin, le chapitre 5 a été motivé par l'étude de la contrôlabilité d'un système non linéaire de réaction-diffusion du type

$$\begin{cases} \partial_t y = D\Delta y + F(y) + B_1 v 1_\omega, & \text{dans } Q_T, \\ \partial_\nu y = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0, & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

modélisant une thérapie du cancer du cerveau (cf. [CH05]). En général, l'étude de la contrôlabilité aux trajectoires d'un système non linéaire commence par celle de son système linéarisé. Le résultat du chapitre 5 ouvre donc une porte sur l'étude des systèmes non linéaires. En effet, il serait intéressant d'utiliser un argument de type point-fixe pour déduire de ce chapitre un résultat de contrôlabilité aux trajectoires pour le système non linéaire, et ainsi contribuer, en une très moindre mesure, à une solution envisageable de réduction de tumeurs cérébrales cancéreuses.

# Bibliographie générale

- [ABL11] F. ALABAU-BOUSSOIRA & M. LÉAUTAUD – « Indirect controllability of locally coupled systems under geometric conditions », C. R. Math. Acad. Sci. Paris **349** (2011), no. 7-8, p. 395–400.
- [AKBD06] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH & C. DUPAIX – « Null-controllability of some reaction-diffusion systems with one control force », J. Math. Anal. Appl. **320** (2006), no. 2, p. 928–943.
- [AKBDGB09a] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH, C. DUPAIX & M. GONZÁLEZ-BURGOS – « A generalization of the Kalman rank condition for time-dependent coupled linear parabolic systems », Differ. Equ. Appl. **1** (2009), no. 3, p. 427–457.
- [AKBDGB09b] —, « A Kalman rank condition for the localized distributed controllability of a class of linear parabolic systems », J. Evol. Equ. **9** (2009), no. 2, p. 267–291.
- [AKBGBdT11a] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH, M. GONZÁLEZ-BURGOS & L. DE TERESA – « The Kalman condition for the boundary controllability of coupled parabolic systems. Bounds on biorthogonal families to complex matrix exponentials », J. Math. Pures Appl. (9) **96** (2011), no. 6, p. 555–590.
- [AKBGBdT11b] —, « Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems : a survey », Math. Control Relat. Fields **1** (2011), no. 3, p. 267–306.
- [AKGM08] F. AMMAR KHODJA, G. GEYMONAT & A. MÜNCH – « On the exact controllability of a system of mixed order with essential spectrum », C. R. Math. Acad. Sci. Paris **346** (2008), no. 11-12, p. 629–634.
- [AKMM11] F. AMMAR KHODJA, K. MAUFFREY & A. MÜNCH – « Exact boundary controllability of a system of mixed order with essential spectrum », SIAM J. Control Optim. **49** (2011), no. 4, p. 1857–1879.
- [ALMS94] F. V. ATKINSON, H. LANGER, R. MENNICKEN & A. A. SHKALIKOV – « The essential spectrum of some matrix operators », Math. Nachr. **167** (1994), p. 5–20.
- [AZ08] F. D. ARARUNA & E. ZUAZUA – « Controllability of the Kirchhoff system for beams as a limit of the Mindlin-Timoshenko system », SIAM J. Control Optim. **47** (2008), no. 4, p. 1909–1938.
- [BC93] H. BREZIS & T. CAZENAVE – « Linear semigroups of contractions ; the Hille–Yosida theory and some applications », Publications du Laboratoire d’Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Centre National de la Recherche Scientifique (1993), no. A 92004.
- [BCGdT10] A. BENABDALLAH, M. CRISTOFOL, P. GAITAN & L. DE TERESA – « A new Carleman inequality for parabolic systems with a single observation and applications », C. R. Math. Acad. Sci. Paris **348** (2010), no. 1-2, p. 25–29.
- [BCGdT11] A. BENABDALLAH, M. CRISTOFOL, P. GAITAN & L. DE TERESA – « Controllability to trajectories for some parabolic systems of three and two equations by one control force », Preprint (2011).
- [BDPDM93] A. BENSOUSSAN, G. DA PRATO, M. C. DELFOUR & S. K. MITTER – Representation and control of infinite-dimensional systems. Vol. II, Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.

- [Bre83] H. BREZIS – Analyse fonctionnelle, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree], Masson, Paris, 1983, Théorie et applications. [Theory and applications].
- [Bre11] — , Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Universitext, Springer, New York, 2011.
- [CH05] S. P. CHAKRABARTY & F. B. HANSON – « Optimal control of drug delivery to brain tumors for a distributed parameters model », Proc. American Control Conf. (2005), p. 973–978.
- [Cor07] J.-M. CORON – Control and nonlinearity, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 136, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [Dav95] E. B. DAVIES – Spectral theory and differential operators, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [DL88] R. DAUTRAY & J.-L. LIONS – Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Vol. 8, INSTN : Collection Enseignement. [INSTN : Teaching Collection], Masson, Paris, 1988, Évolution : semi-groupe, variationnel. [Evolution : semigroups, variational methods], Reprint of the 1985 edition.
- [FCM11] E. FERNÁNDEZ-CARA & A. MÜNCH – « Numerical null controllability of the 1d heat equation : primal and dual algorithms », Preprint (2011).
- [FCZ00a] E. FERNÁNDEZ-CARA & E. ZUAZUA – « The cost of approximate controllability for heat equations : the linear case », Adv. Differential Equations **5** (2000), no. 4-6, p. 465–514.
- [FCZ00b] — , « Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations », Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **17** (2000), no. 5, p. 583–616.
- [FI96] A. V. FURSIKOV & O. Y. IMANUVILOV – Controllability of evolution equations, Lecture Notes Series, vol. 34, Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.
- [Fur00] A. V. FURSIKOV – Optimal control of distributed systems. Theory and applications, Translations of Mathematical Monographs, vol. 187, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, Translated from the 1999 Russian original by Tamara Rozhkovskaya.
- [GBdT10] M. GONZÁLEZ-BURGOS & L. DE TERESA – « Controllability results for cascade systems of  $m$  coupled parabolic PDEs by one control force », Port. Math. **67** (2010), no. 1, p. 91–113.
- [GBPG06] M. GONZÁLEZ-BURGOS & R. PÉREZ-GARCÍA – « Controllability results for some nonlinear coupled parabolic systems by one control force », Asymptot. Anal. **46** (2006), no. 2, p. 123–162.
- [GG77] G. GRUBB & G. GEYMONAT – « The essential spectrum of elliptic systems of mixed order », Math. Ann. **227** (1977), no. 3, p. 247–276.
- [GG79] — , « Eigenvalue asymptotics for selfadjoint elliptic mixed order systems with nonempty essential spectrum », Boll. Un. Mat. Ital. B (5) **16** (1979), no. 3, p. 1032–1048.
- [GLH08] R. GLOWINSKI, J.-L. LIONS & J. HE – Exact and approximate controllability for distributed parameter systems, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 117, Cambridge University Press, Cambridge, 2008, A numerical approach.
- [GLV91] G. GEYMONAT, P. LORETI & V. VALENTE – « Contrôlabilité exacte d’un modèle de coque mince », C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **313** (1991), no. 2, p. 81–86.
- [GLV93] — , « Exact controllability of a thin elastic hemispherical shell via harmonic analysis », in Boundary value problems for partial differential equations and applications, RMA Res. Notes Appl. Math., vol. 29, Masson, Paris, 1993, p. 379–385.
- [Gue07] S. GUERRERO – « Null controllability of some systems of two parabolic equations with one control force », SIAM J. Control Optim. **46** (2007), no. 2, p. 379–394.

- [GV00] G. GEYMONAT & V. VALENTE – « A noncontrollability result for systems of mixed order », SIAM J. Control Optim. **39** (2000), no. 3, p. 661–672 (electronic).
- [Ing36] A. E. INGHAM – « Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series », Math. Z. **41** (1936), no. 1, p. 367–379.
- [IY03] O. Y. IMANUVILOV & M. YAMAMOTO – « Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations », Publ. Res. Inst. Math. Sci. **39** (2003), no. 2, p. 227–274.
- [Kal60a] R. E. KALMAN – « Contributions to the theory of optimal control », Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) **5** (1960), p. 102–119.
- [Kal60b] — , « On the general theory of control systems », Proc. First Internat. Congress Automat. Contr. (1960), p. 481–491, Moscow.
- [KL05] V. KOMORNIK & P. LORETI – Fourier series in control theory, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [Lio68] J.-L. LIONS – Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Avant propos de P. Lelong, Dunod, Paris, 1968.
- [LR09] Z. LIU & B. RAO – « A spectral approach to the indirect boundary control of a system of weakly coupled wave equations », Discrete Contin. Dyn. Syst. **23** (2009), no. 1-2, p. 399–414.
- [LSU67] O. A. LADYŽENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV & N. N. URAL’CEVA – Linear and quasilinear equations of parabolic type, Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.
- [LV97] P. LORETI & V. VALENTE – « Partial exact controllability for spherical membranes », SIAM J. Control Optim. **35** (1997), no. 2, p. 641–653.
- [Mau08] K. MAUFFREY – Inégalités d’Ingham et applications à la contrôlabilité, Mémoire, Université de Franche-Comté, 2008.
- [Mau12] — , « On the null controllability of a parabolic system with non-constant coefficients by one or two control forces », J. Math. Pures Appl. (2012).
- [Meh09] M. MEHREBERGER – « An Ingham type proof for the boundary observability of a  $N - d$  wave equation », C. R. Math. Acad. Sci. Paris **347** (2009), no. 1-2, p. 63–68.
- [MP10] A. MÜNCH & P. PEDREGAL – « Relaxation of an optimal design problem in fracture mechanics : the anti-plane case », ESAIM Control Optim. Calc. Var. **16** (2010), no. 3, p. 719–743.
- [Paz83] A. PAZY – Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [RR07] L. ROSIER & P. ROUCHON – « On the controllability of a wave equation with structural damping », Int. J. Tomogr. Stat. **5** (2007), no. W07, p. 79–84.
- [SHSP89] J. SANCHEZ HUBERT & E. SÁNCHEZ-PALENCIA – Vibration and coupling of continuous systems, Springer-Verlag, Berlin, 1989, Asymptotic methods.
- [SM67] L. M. SILVERMAN & H. E. MEADOWS – « Controllability and observability in time-variable linear systems », SIAM J. Control **5** (1967), p. 64–73.
- [TW09] M. TUCSNAK & G. WEISS – Observation and control for operator semigroups, Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [Zab92] J. ZABCZYK – Mathematical control theory : an introduction, Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.



# Notations

## Espaces de fonctions continues

- $C_c^2(\overline{\Omega})$  : ensemble des fonctions  $\theta : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  à support compact.
- $C^\infty([0, T])$  : ensemble des fonctions  $\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ .
- $C([0, T], H)$  : ensemble des fonctions continues sur  $[0, T]$  à valeurs dans un espace de Hilbert  $H$ .
- $C^k([0, T], H)$  : ensemble des fonctions  $y : [0, T] \rightarrow H$  de classe  $C^k$ .
- $\mathcal{D}(]0, T[)$  : ensemble des fonctions  $f : ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  à support compact.

## Espaces d'applications linéaires

- $\mathcal{D}'(]0, T[)$  : ensemble des formes linéaires continues sur  $\mathcal{D}(]0, T[)$ .
- $\mathcal{L}(F, G)$  : ensemble des applications linéaires continues  $L : F \rightarrow G$  entre deux espaces vectoriels normés  $F$  et  $G$ .
- $\mathcal{L}(H)$  : ensemble des applications linéaires continues d'un espace de Hilbert  $H$  dans lui-même.
- $M^n(\mathbb{R})$  : ensemble des matrices carrées à  $n$  lignes et  $n$  colonnes.
- $M^{n,m}(\mathbb{R})$  : ensemble des matrices carrées à  $n$  lignes et  $m$  colonnes.

## Espaces $L^2$ et $\ell^2$

- $L^2(0, T; U)$  : espace des classes de fonctions de carré intégrable (au sens de Bochner) de  $[0, T]$  dans un espace de Hilbert  $U$ .
- $\ell^2(I)$  : ensemble des suites de nombres complexes, indexées par un ensemble dénombrable  $I$  et de carré sommable. On notera simplement  $\ell^2$  lorsque  $I = \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  ou  $\mathbb{Z}$ .

## Normes, ensembles et éléments

- $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  :  $\|y\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla y\|_{L^2(\Omega)}$ , pour tout  $y \in H_0^1(\Omega)$ .
- $\|\cdot\|_{H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)}$  :  $\|y\|_{H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} = \|\Delta y\|_{L^2(\Omega)}$ , pour tout  $y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ .
- $|\cdot|$  :  $|\xi| = \left(\sum_{i=1}^N |\xi_i|^2\right)^{1/2}$ , pour tout  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ .
- $\|\cdot\|_{\ell^2(I)}$  :  $\|x\|_{\ell^2(I)} = \left(\sum_{i \in I} |x_i|^2\right)^{1/2}$ , pour tout  $x = (x_i)_{i \in I} \in \ell^2(I)$ .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V', V}$  : crochet de dualité entre  $V$  et  $V'$  lorsque l'injection  $V \subset H$  est continue et dense et que  $V'$  désigne le dual de  $V$  par rapport à l'espace pivot  $H$ .
- supp :  $\text{supp}(f)$  désigne le support d'une fonction  $f$ .
- $I$  : peut désigner l'application identité dans  $\mathcal{L}(H)$  ou dans  $\mathcal{L}(D(A), H)$  lorsque l'inclusion  $D(A) \rightarrow H$  est continue, ou encore la matrice identité de  $M^n(\mathbb{R})$ .
- $\partial\Omega$  : frontière d'un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . On note indifféremment  $x$  ou  $\sigma$  les éléments de  $\partial\Omega$ .
- $\nu$  : normale extérieure au domaine  $\Omega$ .
- $\frac{dy}{dt}$  : dérivée de  $y(x, t)$  par rapport à  $t$ . On utilise également les notations  $y'$ ,  $\frac{\partial y}{\partial t}$  et  $\partial_t y$ .

# Index

- anti-adjoint (opérateur -), 21
- anti-symétrique (opérateur -), 21
- auto-adjoint (opérateur -), 10
- base
  - de Riesz, 18
  - Hilbertienne, 18
  - orthonormale, 18
- Carleman (inégalité de -), 60
- chaleur (équation de la -), 60
- coercif (opérateur -), 19
- contrôlabilité, 36
- contrôlable (système -)
  - à zéro, 36
  - approximativement -, 36
  - aux trajectoires, 36
  - exactement -, 36
  - totalement contrôlable aux trajectoires, 37
  - totalement exactement -, 37
- diagonalisable (opérateur -), 19
- dissipatif (opérateur -), 8
- extrapolation, 11
- Fourier (transformée de -), 55
- générateur d'un
  - problème frontière non homogène abstrait, 17
  - semi groupe de contractions, 9
- graphe (norme du -), 8
- Ingham (Théorème de -, inégalité de -), 49
- Kalman (critère de -, condition de -), 40
- maximal dissipatif (opérateur -), 8
- multiplicateurs (méthode des -), 51
- observabilité (inégalité d'-), 38
- ondes (équations des -), 50
- problème frontière non homogène abstrait, 15
  - générateur d'un -, 17
- résolvent (ensemble -), 8
- restriction, 10
- semi-groupe (de contractions), 9
  - générateur d'un -, 9
- spectre d'un opérateur, 8
  - spectre essentiel, 27
  - spectre ponctuel, 27
- symétrique (opérateur -), 10
- Yosida (approximation de -), 9

## Résumé

Cette thèse présente des résultats de contrôlabilité pour deux types de systèmes d'équations aux dérivées partielles : un système hyperbolique avec spectre essentiel et des systèmes paraboliques à coefficients non constants. On commence par rappeler des résultats généraux d'existence et d'unicité de solutions pour ces systèmes et de dualité entre contrôlabilité et observabilité, puis on présente deux outils (l'inégalité de Ingham et l'inégalité de Carleman) permettant d'établir des inégalités d'observabilité. Cette première partie permet de situer les résultats principaux qui sont démontrés ensuite. Dans la deuxième partie, on étudie tout d'abord la contrôlabilité exacte, par le bord et avec un seul contrôle, d'un système hyperbolique formé d'une équation des ondes couplée avec une équation différentielle du second ordre en temps. La présence de spectre essentiel empêchant la contrôlabilité d'avoir lieu uniformément en les données initiales, on caractérise l'espace des données initiales contrôlables. L'argument principal consiste à établir une inégalité de type Ingham reposant sur une étude détaillée des valeurs propres. Dans un second temps, on prouve une condition suffisante pour la contrôlabilité interne à zéro, par un ou deux contrôles, de systèmes de trois équations paraboliques couplées par des termes d'ordre zéro. On présente une nouvelle approche basée sur l'existence d'une solution contrôlée par trois contrôles et sur la démonstration d'une inégalité d'observabilité à poids associée à la contrôlabilité sur tout le domaine d'un système parabolique non homogène de une ou deux équations. Les résultats de cette partie sont illustrés par des exemples numériques.

*Mots clés* : contrôlabilité, observabilité, opérateur d'ordre de mixte, spectre essentiel, inégalité de Ingham, système parabolique, inégalité de Carleman, critère de Kalman

---

## Abstract

This work presents some controllability results for two kinds of systems of partial differential equations: a hyperbolic system with essential spectrum and parabolic systems with non constant coefficients. We first recall some general results on existence and uniqueness of solutions for these systems and on the duality between controllability and observability. Then we present two methods to prove observability inequalities: the Ingham inequality and the Carleman inequality. This first part allows us to state the context of the main results, which are proven in the second part. The second part begins with the study of the exact boundary controllability of a hyperbolic system, which consists of a wave equation coupled (by means of first-order terms in space) with a second-order differential equation in time. For this system, the presence of an essential spectrum prevents the controllability from holding uniformly with respect to the initial data. Therefore, we characterize the space consisting of controllable initial data. To prove the result, we establish an Ingham type inequality which relies on a detailed study of the eigenvalues. Secondly, we prove a sufficient condition for the null controllability—by one or two controls localized in space—of systems of three parabolic equations coupled by zero-order terms. We present a new approach relying on the existence of a solution controlled by three controls and on the proof of a weighted observability inequality for the null controllability, on the whole domain, of a non-homogeneous parabolic system of one or two equations. The results of this part are illustrated by numerical experiments.

*Keywords*: controllability, observability, mixed order operator, essential spectrum, Ingham inequality, parabolic system, Carleman inequality, Kalman rank condition

---

*Mathematics Subject Classification*: 93C20, 93B05, 93B07, 35L20, 93B60, 35K05