



HAL
open science

Mesure du capital réglementaire par des modèles de risque de marché

Lancine Kourouma

► **To cite this version:**

Lancine Kourouma. Mesure du capital réglementaire par des modèles de risque de marché. Economies et finances. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT : 2012GRENG007 . tel-00864121

HAL Id: tel-00864121

<https://theses.hal.science/tel-00864121>

Submitted on 20 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Sciences de Gestion**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Lanciné KOUROUMA

Thèse dirigée par **M. Denis DUPRE**

préparée au sein du **Laboratoire Centre d'Etudes et de Recherches Appliquées à la Gestion**
et de l'**École Doctorale de Sciences de Gestion**

Mesure du capital réglementaire par des modèles de risque de marché

Thèse soutenue publiquement le **11 mai 2012**,
devant le jury composé de :

M. Ollivier TARAMASCO

Professeur des Universités, ENSIMAG INP de Grenoble, Président

M. Radu BURLACU

Professeur des Universités, Université de Nancy 2, Rapporteur

M. Christophe J. GODLEWSKI

Professeur des Universités, Université de Haute Alsace, Rapporteur

Mme Sonia JIMINEZ-GARCES

Professeur des Universités, Université de Lyon 2, Examinatrice

M. Christophe COUTURIER

Directeur Général d'Écofi Investissement, Examineur

M. Denis DUPRE

Docteur HDR, Université de Grenoble 2, Directeur de thèse



Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. Denis DUPRE pour l'encadrement de ce travail de recherche. Son cours de gestion des risques bancaires à l'Institut d'Administration des Entreprises (IAE) de Grenoble m'a donné envie de faire une thèse en finance bancaire. Ses judicieux conseils et ses critiques constructives tout long de cette thèse m'ont été précieux et enrichissants. Je le remercie pour son aide, sa disponibilité et ses encouragements qui ont permis la réalisation de ce travail de recherche.

Je suis profondément reconnaissant au professeur Ollivier TARAMASCO pour m'avoir partagé son expérience, pour ses conseils en modélisation des risques financiers et le temps qu'il m'a consacré tout au long de cette thèse. Je remercie également Gilles SANFILIPPO pour ses conseils et sa disponibilité.

Je remercie profondément les professeurs Radu BURLACU, Christophe J. GODLEWSKI, Ollivier TARAMASCO, Sonia JIMINEZ-GARCES, Christophe COUTURIER d'avoir accepté de lire ce travail et de faire partie du jury.

Je remercie également les professeurs Charles PIOT, Pascal DUMONTIER et tous les membres de l'atelier finance pour leurs suggestions et commentaires.

Je tiens à remercier Pierre VIOULAC, responsable du département des risques à la DPH de la Caisse des Dépôts et Consignations, qui m'a accueilli en tant que stagiaire puis contractuel sur le projet de la réglementation bancaire Bâle II. Cette expérience m'a permis de comprendre l'enjeu de la gestion des risques bancaires dans une institution financière.

Tous mes remerciements aux personnes qui ont eu à relire ce travail de recherche. Je remercie particulièrement Sylvie VAUCHEZ, Michel VAUCHEZ, Hélène HONORE et Bernard AUGIER pour avoir effectué une relecture attentive de ce travail de recherche.

Je remercie Marie-Christine ULRYCH, Brigitte BOIS et le personnel du CERAG pour avoir tout mis en oeuvre pour le bon déroulement de ce travail de recherche. Mes remerciements à tous les amis et collègues doctorants pour leurs soutiens et encouragements.

J'adresse une pensée affectueuse à mes parents, à ma famille et particulièrement à mon frère Mamady KOUROUMA pour leurs soutiens et encouragements inconditionnels.

*Je dédie cette thèse à mon père
et à ma soeur Siré.*

Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE

RÈGLEMENTATION BANCAIRE

1	Les accords de Bâle pour la réglementation bancaire	10
1.1	Accord de Bâle I	10
1.2	Accord de Bâle II	13
1.3	Accord de Bâle III	17
2	Méthodes standards de mesure de risque de marché	22
2.1	Risque sur actions	24
2.2	Risque sur produits de base	24
3	Modèles internes de mesure de risque de marché	26
3.1	Exigences minimales générales	27
3.2	Programme de simulation de crise	30
3.3	Procédure de contrôle ex-post	31
4	Conclusion	32

Partie I : ESTIMATION DES PERTES POTENTIELLES PAR DES MODÈLES DE RISQUE DE MARCHÉ

35

INTRODUCTION DE LA PREMIÈRE PARTIE

Chapitre 1

MODÉLISATION INCONDITIONNELLE DES PERTES POTENTIELLES SUR DES ACTIFS

1.1	Données de l'étude	40
1.2	Méthodes de mesure de risque de marché	43
1.2.1	Mesure de risque de marché	44
1.2.2	Méthode des excès : la distribution de Pareto généralisée	48

1.2.3	Estimation des paramètres de la distribution de Pareto généralisée	52
1.2.4	Mesure de risque par la distribution de Pareto généralisée . . .	52
1.3	Modélisation des rentabilités extrêmes	55
1.3.1	Sélection du seuil par le graphique de Hill	55
1.3.2	Sélection du seuil par le graphique de la moyenne des excès . . .	59
1.3.3	Analyse de conformité entre distributions empirique et théorique	62
1.4	Estimation des pertes potentielles	64
1.4.1	Paramètres estimés de la distribution de Pareto généralisée . . .	64
1.4.2	Value at Risk et Expected Shortfall	67
1.4.3	Évaluation de la fiabilité des modèles de mesure de risque . . .	72
1.5	Conclusion	79

Chapitre 2

MODÉLISATION CONDITIONNELLE DES PERTES POTENTIELLES SUR DES ACTIFS

2.1	Modélisation de la volatilité conditionnelle	83
2.1.1	Estimation des paramètres des modèles ARMA-GJR	85
2.1.2	Prévision de la moyenne et de la variance conditionnelles	89
2.2	Modélisation conditionnelle des mesures de risque de marché	90
2.3	Estimation des pertes potentielles	92
2.3.1	Paramètres estimés de la distribution de Pareto généralisée . . .	92
2.3.2	Value at Risk et Expected Shortfall	94
2.3.3	Modèle conditionnel GPD validé par le contrôle ex post	99
2.4	Conclusion	105

Chapitre 3

MODÉLISATION DES PERTES POTENTIELLES SUR UN PORTEFEUILLE

3.1	Mesure de dépendance par les copules	108
3.1.1	Copules de Student et de la loi normale	108
3.1.2	Méthodes d'estimation des copules	110
3.2	Estimation des pertes potentielles sur le portefeuille	112
3.2.1	Série de rentabilités du portefeuille	112
3.2.2	Value at Risk et Expected Shortfall	114
3.2.3	Corrélation empirique dans la méthode POT	120
3.2.4	Modèle GPD conditionnel validé par le contrôle ex post	123
3.3	Mesure du risque sur le long terme	126
3.3.1	Prévision du risque à long terme dans la théorie des valeurs extrêmes	127
3.3.2	Pertes potentielles estimées sur le long terme	128
3.4	Conclusion	131

CONCLUSION DE LA PREMIÈRE PARTIE

**Partie II : ESTIMATION DES PERTES POTENTIELLES EXTRÊMES
PAR LE STRESS TEST**

137

INTRODUCTION DE LA DEUXIÈME PARTIE

Chapitre 4

CONSTRUCTION DES SCÉNARIOS HISTORIQUES

4.1	Choix de la période d'événement	147
4.1.1	Scénario historique 1 : la guerre du Golfe de 1990-1991	148
4.1.2	Scénario historique 2 : l'attaque terroriste du 11 septembre 2001	149
4.2	Spécification des paramètres de choc	152
4.3	Stress des paramètres des modèles de risque	153
4.3.1	Stress de la volatilité conditionnelle	153
4.3.2	Stress de la matrice de corrélation	154
4.4	Estimation des pertes extrêmes sur le portefeuille	157
4.4.1	Pertes extrêmes déterminées par le stress de la volatilité	158
4.4.2	Pertes extrêmes déterminées par le stress de la matrice de cor- rélation	162
4.5	Conclusion	165

Chapitre 5

CONSTRUCTION DES SCÉNARIOS THÉORIQUES
--

5.1	Création des hypothèses de scénarios	169
5.1.1	Scénario hypothétique 1 : Une baisse des marchés européens difficilement gérable	170
5.1.2	Scénario hypothétique 2 : Crise au Moyen-Orient	171
5.2	Stress de la volatilité	172
5.2.1	Construction des chocs	172
5.2.2	Intégration des chocs dans la volatilité	173
5.2.3	Pertes potentielles extrêmes estimées sur les actifs du portefeuille	173
5.3	Stress de la matrice de corrélation	178
5.3.1	Matrices de corrélation historique	179
5.3.2	Matrices de corrélation hypothétique	180
5.3.3	Pertes potentielles extrêmes estimées sur le portefeuille	184
5.4	Recherche systématique des scénarios catastrophes	188
5.4.1	Méthode du Maximum Loss	188
5.4.2	Recherche de scénarios catastrophes avec le modèle GPD	192
5.5	Conclusion	199

Chapitre 6**MESURE DU CAPITAL RÉGLEMENTAIRE SOUS BÂLE III**

6.1	Mesure du stress VaR	202
6.1.1	Paramètres du stress VaR	202
6.1.2	Données réglementaires pour le calcul du stress VaR	203
6.2	Méthode de calcul du capital réglementaire	205
6.3	Application au portefeuille d'étude	206
6.3.1	Calcul du stress VaR	209
6.3.2	Détermination du capital réglementaire	214
6.4	Conclusion	221

CONCLUSION DE LA DEUXIÈME PARTIE**CONCLUSION GÉNÉRALE****Annexe A****Méthode standard de mesure de risque de marché**

A.1	Risque de taux d'intérêts	231
A.2	Risque sur devises	237
A.3	Risque sur options	237

Annexe B**Caractéristiques des actifs du portefeuille****Annexe C****Fondements de la théorie des valeurs extrêmes**

C.1	Théorème de Fisher-Thippett	248
C.3	Estimateur de Hill	251

Annexe D**Contrôle ex post des modèles de mesure de risque**

D.1	Méthodes statistiques de contrôle ex post	253
D.2	Résultats complémentaires du contrôle ex post	257

Annexe E**Théorie des copules**

E.1	Propriétés des copules	269
E.4	Copule de Student multivariée	271
E.5	Copule normale multivariée	272
E.6	Dépendance de queue	273
E.7	Méthodes d'inférence statistique	275

Annexe F**Modèles internes de mesure de risque de marché**

F.1	Méthode de la Simulation Historique	281
F.2	Méthode Filtered Historical Simulation	282
F.3	Méthode Variance-Covariance	282
F.4	Méthode GARCH de la loi normale	282

Annexe G**Validation de la matrice de corrélation modifiée****Annexe H****Maximum Loss**

Table des figures

1	Mesure VaR et stress test	6
1.1	Graphique de Hill	58
1.2	Graphique de la moyenne des excès	61
1.3	Test de conformité de la loi GPD à la distribution empirique	63
1.4	Performance des modèles inconditionnels	71
2.1	Performance des modèles conditionnels	104
3.1	Performance du modèle conditionnel GPD sur le portefeuille	119
3.2	Performance de la méthode FHS sur le portefeuille	119
3.3	Performance du modèle GARCH sur le portefeuille	120
3.4	Performance du modèle conditionnel GPD sans la copule sur le portefeuille	121
4.1	Volatilités journalières sous le scénario de la guerre du golfe de 1990-1991 .	149
4.2	Volatilités journalières sous le scénario de l'attentat du 11 septembre 2001 .	150
5.1	Maximum Loss estimé sur le portefeuille	191
5.2	Comparaison VaR et VaRmax estimées sur chaque actif du portefeuille . .	198
5.3	Comparaison VaR et VaRmax estimées sur le portefeuille	199
6.1	Évolution du cours des indices actions	207
6.2	Évolution du cours des actions individuelles	208
6.3	Évolution du cours des matières premières	208

6.4	Stress VaR par modèle de risque sur les indices actions	212
6.5	Stress VaR par modèle de risque sur les actions individuelles	212
6.6	Stress VaR par modèle de risque sur les matières premières	213
6.7	Stress VaR par modèle de risque sur le portefeuille	213
6.8	Capital réglementaire calculé sur les indices actions	219
6.9	Capital réglementaire calculé sur les actions individuelles	219
6.10	Capital réglementaire calculé sur les matières premières	219
6.11	Capital réglementaire calculé sur le portefeuille	220
B.1	Test d'autocorrélation des rentabilités	242
B.2	Test d'autocorrélation des rentabilités au carré	243
B.3	Test d'autocorrélation des résidus	244
B.4	Évolution des résidus et des volatilités conditionnelles des actifs	245
E.1	Relation entre les coefficients de corrélation de rang et le coefficient de corrélation linéaire	277

Liste des tableaux

1	Pondération pour exigence de fonds propres sur produits de base	25
2	Pondération par type de produits de base	26
1.1	Statistique descriptive des rentabilités des actifs	42
1.2	Paramètres estimés du modèle inconditionnel GPD	65
1.3	VaR estimée par les modèles inconditionnels	69
1.4	ES estimée par les modèles inconditionnels	70
1.5	Résultats du test de Kupiec et de Wald sur les modèles inconditionnels . .	77
1.6	Résultats du test de Christoffersen sur les modèles inconditionnels	78
1.7	Résultats du backtesting de l'ES des modèles inconditionnels	78
2.1	Résultats du test de Ljung-Box sur les rentabilités	84
2.2	Paramètres estimés des modèles ARMA-GJR	87
2.3	Résultats du test de Ljung-Box sur les résidus standardisés	89
2.4	Paramètres estimés du modèle conditionnel GPD	93
2.5	VaR estimée des modèles conditionnels	97
2.6	ES estimée des modèles conditionnels	98
2.7	Résultats du test de Kupiec et de Wald sur les modèles conditionnels . . .	102
2.8	Résultats du test de Christoffersen sur les modèles conditionnels	103
2.9	Backtesting de l'ES des modèles conditionnels	103
3.1	Coefficients de corrélation de la copule de Student	113

3.2	Coefficients de corrélation de la copule normale	113
3.3	Paramètres estimés du modèle inconditionnel GPD	117
3.4	Paramètres estimés du modèle conditionnel GPD	117
3.5	VaR et ES estimées par les modèles inconditionnels sur le portefeuille	118
3.6	VaR et ES estimées par les modèles conditionnels sur le portefeuille	118
3.7	VaR et ES estimées par le modèle conditionnel GPD sans la copule	122
3.8	Résultats du backtesting sur les modèles inconditionnels	125
3.9	Résultats du backtesting sur les modèles conditionnels	125
3.10	Facteurs multiplicatifs pour la mesure du risque sur le long terme dans la théorie des valeurs extrêmes	128
3.11	VaR estimée sur le long terme	130
3.12	Méthodes de stress test	141
4.1	Valeurs des paramètres de choc	153
4.2	Coefficients de corrélation avant l'invasion du Koweït	155
4.3	Coefficients de corrélation après l'invasion du Koweït	155
4.4	Coefficients de corrélation avant l'attentat du 11 septembre 2001	156
4.5	Coefficients de corrélation après l'attentat du 11 septembre 2001	156
4.6	Valeurs des pertes potentielles - scénario par la volatilité historique	160
4.7	Valeurs des pertes potentielles moyennes au-delà de la VaR - scénario par la volatilité historique	161
4.8	Valeurs des pertes potentielles - scénario par la corrélation historique	164
5.1	Rentabilités et volatilités hypothétiques	172
5.2	Valeurs des pertes potentielles - scénario par la volatilité hypothétique	176
5.3	Valeurs des pertes potentielles moyennes au-delà de la VaR - scénario par la volatilité hypothétique	177
5.4	Coefficients de corrélation de la copule de Student - scénario de base	179
5.5	Coefficients de corrélation de la copule de loi normale - scénario de base	179
5.6	Coefficients de corrélation modifiés - scénario hypothétique 1	180
5.7	Coefficients de corrélation modifiés - scénario hypothétique 2	181

5.8	Matrice de Cholesky - scénario hypothétique 1	182
5.9	Matrice de Cholesky - scénario hypothétique 2	183
5.10	Valeurs des pertes potentielles - scénario par la corrélation hypothétique . .	187
5.11	Résultats du calcul du Maximum Loss par la méthode de Studer	191
5.12	Résultats du calcul de la VaRmax par le modèle GPD	197
6.1	Facteurs complémentaires	206
6.2	Résultats du calcul de la VaR et du stress VaR	211
6.3	Nombre de dépassements de la VaR conditionnelle	215
6.4	Coefficients multiplicateurs du contrôle ex post de l'accord de Bâle	216
6.5	Calcul capital réglementaire à partir de la VaR et du stress VaR	218
6.6	Capital réglementaire	220
A.1	Pondération par la méthode de l'échéancier	232
A.2	Pondération par la méthode de la duration	234
A.3	Pondération par la méthode de l'algorithme de sensibilité	235
A.4	Pondération risque spécifique sur taux d'intérêt	236
A.5	Approche simplifiée sur risques optionnels	238
D.1	Matrice de contingence du test d'indépendance des exceptions	256
D.2	Résultats du test de Kupiec et de Wald sur les modèles inconditionnels . .	258
D.3	Test de Christoffersen sur les modèles inconditionnels	259
D.4	Résultats du test de Kupiec et de Wald sur les modèles inconditionnels . .	260
D.5	Test de Christoffersen sur les modèles inconditionnels	261
D.6	Résultats du backtesting de l'Expected Shortfall sur les modèles incondi- tionnels	262
D.7	Résultats du test de de Kupiec et de Wald sur les modèles conditionnels . .	263
D.8	Résultats du test de Christoffersen sur les modèles conditionnels	264
D.9	Résultats du test de Kupiec et de Wald sur les modèles conditionnels . . .	265
D.10	Résultats du test de Christoffersen sur les modèles conditionnels	266
D.11	Résultats du backtesting de l'Expected Shortfall	267

D.12 Résultats du backtesting de l'Expected Shortfall sur les modèles incondi- tionnels - Portefeuille	268
D.13 Résultats du backtesting de l'Expected Shortfall sur les modèles condition- nels - portefeuille	268
E.1 Coefficient de dépendance de la copule de Student	274
E.2 Coefficients de corrélation linéaire	276
E.3 Tau de Kendall - coefficients de corrélation	276
E.4 Rho de Spearman - coefficients de corrélation	276

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La solidité des banques est fondamentale pour la stabilité du système financier et de l'économie dans son ensemble. Elle devient préoccupante avec les événements de crise de plus en plus fréquents. Les crises financières de 1929, 1987 et 2008 ont montré combien la mauvaise santé financière des banques a pu avoir des conséquences désastreuses sur l'économie réelle. La faillite de la banque américaine Lehman Brothers le 15 septembre 2008 en est un exemple. En effet, la faillite de cette banque a failli entraîner un effondrement du système financier mondial. Il a fallu l'intervention des États pour limiter les faillites en cascade et la destruction des emplois. Les conséquences de la faillite de Lehman Brothers ont été analysées par Fender and Gyntelberg (2008). Ces deux auteurs observent que « *Les primes de risque ont atteint des records, les cours des actions ont connu des baisses historiques et la volatilité s'est intensifiée dans tous les segments, ce qui témoigne de tensions extrêmes sur les marchés financiers. Les rendements des obligations d'État ont diminué dans des conditions très volatiles, tandis que, de plus en plus, les craintes de récession et la recherche de placements refuges l'ont emporté sur l'anticipation du creusement des déficits budgétaires* ». Le Fonds Monétaire International, dans son rapport sur la stabilité financière internationale d'octobre 2009, a estimé les pertes¹ du système financier mondial à 3 400 milliards de dollars pour la période de 2007 à 2010. La bonne santé des établissements financiers est indispensable pour protéger le système financier et garantir la stabilité financière. Pour assurer cette bonne santé financière, il convient d'identifier,

1. Cette estimation représente le coût que vont devoir supporter les banques et autres institutions financières de la planète, en raison de la baisse de la valeur constatée ou probable des actifs financiers qu'elles détiennent.

de mesurer et de gérer les risques auxquels les établissements financiers sont exposés dans leurs activités.

Les établissements financiers sont exposés à plusieurs types de risques dont les principaux sont :

- **Le risque de crédit** est principalement le risque de défaut de remboursement de l'emprunteur, mais c'est aussi le risque que la valeur d'un actif financier varie en raison d'événements particuliers affectant la solvabilité potentielle de l'emprunteur.
- **Le risque de marché** est le risque de variation de la valeur de marché d'une position suite à la variation des facteurs de risque. Ce risque comprend principalement le risque sur les actions, les taux d'intérêts, les taux de change et les matières premières.
- **Le risque opérationnel** est le risque de pertes résultant de carences ou défaillances attribuables à des procédures, personnes et systèmes internes ou à des événements extérieurs.
- **Le risque de liquidité** revêt deux aspects : concernant un débiteur, le risque de liquidité est de ne pas pouvoir faire face, à un instant donné, à ses engagements ; et concernant des titres, le risque de liquidité est de ne pas pouvoir les vendre rapidement dans des conditions satisfaisantes.

Parmi ces risques financiers, celui de marché attire plus particulièrement notre attention. Le risque de marché est lié aux portefeuilles de négociation ou *trading book*. Selon la définition prudentielle², le portefeuille de négociation est composé des positions sur instruments financiers et produits de base³ détenus à des fins de négociation à court terme ou dans le but de couvrir d'autres éléments du portefeuille de négociation. Ces instruments ne comportent pas de clauses qui restreignent leur négociabilité ou la mise en place de

2. Définition donnée par le Comité de Bâle sur la supervision bancaire.

3. Les produits de base sont des matières premières dont on exclut l'or. Ce dernier est ajouté à la catégorie des devises.

couverture. Le Comité de Bâle sur la supervision bancaire, dans son document de révision de l'accord de Bâle II concernant le risque de marché (Basel Committee (2009)), observe : « *Losses in most banks' trading books during the financial crisis have been significantly higher than the minimum capital requirements under the former Pillar 1 market risks rules* ». C'est-à-dire que les pertes constatées dans les portefeuilles de négociation de la plupart des banques durant la crise financière de 2008 ont été significativement supérieures au capital réglementaire requis sous le pilier 1 de l'exigence de fonds propres au titre du risque de marché. Face à ce problème d'insuffisance de capital réglementaire, le Comité de Bâle recommande, en plus du calcul actuel de la Value at Risk (VaR), le calcul du stress VaR (sVaR). Par définition, la Value at Risk est la perte maximale potentielle à un niveau de confiance donné et sur une période de détention donnée qui peut être enregistrée sur un portefeuille de négociation. Et le stress Value at Risk est, selon le Comité de Bâle, la Value at Risk calculée sur une période d'au moins 12 mois consécutifs d'observations de pertes significatives. Cette nouvelle mesure dans la réglementation bancaire a pour objectif d'augmenter le capital réglementaire par la prise en compte des risques extrêmes.

La mesure des risques extrêmes dus aux événements extrêmes pose de nombreux problèmes dans la gestion des risques financiers. Ces événements ont un coût très élevé quand ils se produisent. Ils comprennent entre autres les crises financières et économiques, la faillite de grandes institutions financières et les catastrophes naturelles. Compte tenu du caractère systémique et du coût des risques extrêmes ainsi que leurs conséquences sur l'économie réelle, la mesure de ces risques devient une problématique majeure pour les autorités de contrôle bancaire et les établissements financiers. Alan Greenspan, directeur de la banque fédérale des Etats-Unis lors de la conférence sur la mesure du risque et du risque systémique de Washington en novembre 1998, observe : « *Work that characterises the statistical distribution of extreme events would be useful as well* ». Cette observation montre l'intérêt des autorités de contrôle bancaire à mesurer correctement les risques extrêmes. L'un des objectifs du Comité de Bâle est d'assurer la stabilité financière internationale. Cette stabilité ne peut être assurée que si on sait évaluer et gérer les risques extrêmes. Cette évaluation et gestion des risques relèvent du rôle des intermédiaires financiers. Une mesure fiable du risque permet la compréhension du risque supporté par

une banque, même dans des conditions extrêmes, la prise des décisions raisonnées, afin de gérer non seulement une diversification des expositions, mais aussi de garantir que le couple risque/rendement soit apprécié à sa juste valeur. Une mauvaise prévision et gestion des risques dans un établissement financier peut coûter aux actionnaires par la diminution de leur rendement espéré en cas de réalisation du risque.

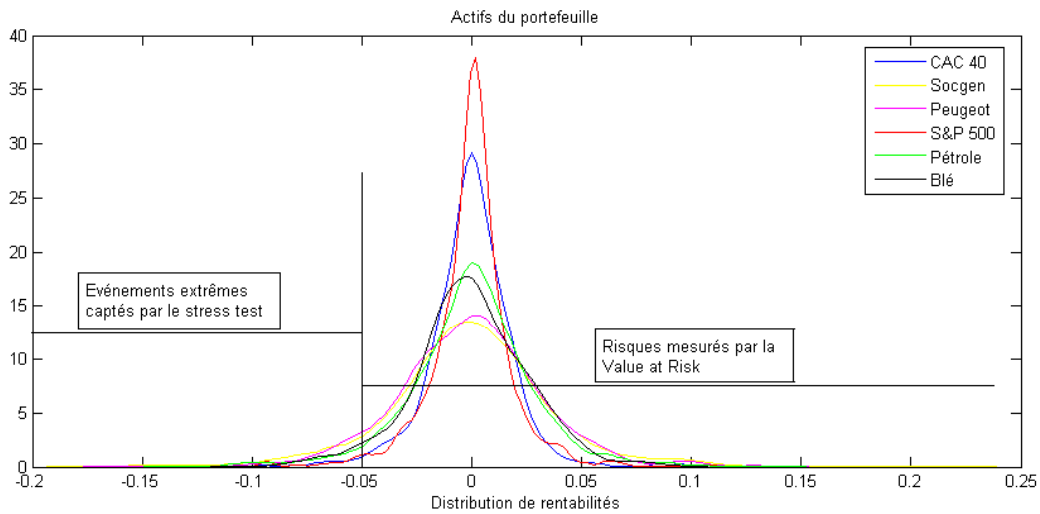
Pour mesurer correctement les risques extrêmes, nous avons besoin d'une approche ou d'une méthodologie de mesure de risque qui tienne compte des caractéristiques propres aux événements extrêmes. Par définition, les événements extrêmes sont caractérisés par leur faible fréquence et leur coût élevé quand ils se matérialisent. Il appartient à ce qu'on appelle la « queue de distribution ». Ainsi, ils peuvent être modélisés par la théorie des valeurs extrêmes qui représente mieux les queues de distribution des données financières. Cela marque une différence notable avec les modèles internes de risque de marché qui sont basés sur toute la distribution des variables aléatoires. C'est pourquoi, dans cette étude, nous faisons appel à la théorie des valeurs extrêmes et plus particulièrement à sa composante communément appelée méthode des excès ou *Peak Over Threshold* (POT). La méthode POT est basée sur la distribution de Pareto généralisée ou *Generalized Pareto Distribution* (GPD). Elle est la principale méthode que nous étudions dans ce travail de recherche. Tous les travaux antérieurs sur la théorie des valeurs extrêmes ont tendance à la préconiser uniquement pour la mesure des événements extrêmes (Embrechts et al. (1997) et Longin (1998)). Un modèle fiable doit être capable de mesurer le risque dans les conditions normales et dans les conditions extrêmes. Olivier PRATO du Secrétariat général de la Commission bancaire de la Banque de France observe dans la Revue⁴ de la stabilité financière de mai 2006 que « *Pour utiliser les estimations résultant de la modélisation du risque spécifique, il faut en effet que ces modèles soient en mesure d'expliquer ex ante la variation historique de la valeur du portefeuille [...]. Il doivent également faire preuve de leur fiabilité dans un environnement adverse ainsi qu'être validés par des contrôles ex post* ».

Le constat et les propositions du Comité de Bâle, lors de la crise financière de 2008, soulèvent principalement deux questions que nous traitons dans ce travail de recherche et

4. Pour plus de détails sur l'appréhension des risques du portefeuille de négociation, lire Prato (2006).

qui constituent notre problématique. La première question est de savoir pourquoi le capital réglementaire déterminé sur le portefeuille de négociation a été sous-estimé pendant la période de crise financière de 2008 ? La seconde question est de savoir comment évaluer et gérer correctement le risque d'un portefeuille de négociation dans les conditions normales (faible volatilité) et dans les conditions extrêmes (forte volatilité) des marchés ? Il s'agit, notamment, de vérifier la fiabilité des modèles de mesure de risque de marché, d'améliorer ces modèles et d'établir des recommandations concernant la mesure du risque de marché, à destination des gestionnaires de risques et des autorités de contrôle bancaire. De part ses contributions à la mesure du risque de marché, ce travail de recherche peut représenter un premier pas vers la reconnaissance, dans le dispositif de Bâle, de modèles de mesure de risque qui font preuve de fiabilité. Dans les accords de Bâle, même s'il n'y a pas de prescription pour un modèle particulier de mesure de risque de marché, les méthodes de VaR basées sur la distribution empirique (Simulation Historique), la distribution de la loi normale (Variance-Covariance) et la simulation de Monte Carlo sont généralement citées (cf. Basel Committee (2009), p. 14). La référence à ces modèles (modèles internes ou techniques traditionnelles de mesure de risque) peut conduire les banques à les utiliser sans se soucier des conséquences de leur utilisation.

Pour traiter notre problématique, nous utilisons un portefeuille de négociation composé d'actions et de matières premières. Le choix de ces instruments ou actifs financiers s'explique par une grande exposition des établissements financiers aux actions et leurs intérêts de plus en plus grandissants pour les matières premières. Les risques sur ces actifs financiers sont évalués par les mesures de la VaR et l'Expected Shortfall (ES) et par les techniques de stress test. L'Expected Shortfall est une mesure des pertes potentielles au-delà de la VaR. Comparativement à la VaR et à l'Expected Shortfall qui sont des outils quantitatifs de mesure de risque, le stress test est un outil plus qualitatif de gestion des risques extrêmes. A cet effet, ces outils sont considérés comme complémentaires pour la mesure et la gestion des risques financiers (cf. Figure 1).



GRAPH. 1 – Mesure VaR et stress test

Le stress test explore la queue de distribution de rentabilités pour capturer le risque extrême. Le stress test devient ainsi un complément à la mesure de la VaR.

Avant d’aborder la première partie de cette étude, nous présentons d’abord la réglementation bancaire pour la mesure et la gestion des risques financiers. Pour la détermination du capital réglementaire, les établissements financiers sont soumis à certaines règles prudentielles prescrites par les autorités de contrôle et de surveillance bancaires. Ces règles résultent généralement de la transposition⁵ au niveau national des accords du Comité de Bâle.

Dans la première partie de cette étude, nous étudions les apports de la théorie des valeurs extrêmes dans la mesure et la gestion des risques financiers. Nous évaluons la fiabilité du modèle *Generalized Pareto Distribution* et des modèles internes de mesure de risque de marché utilisés par les établissements financiers. Premièrement, nous estimons des pertes potentielles sous l’hypothèse de volatilité constante, d’identité et d’indépendance des rentabilités financières des actifs du portefeuille d’étude. Dans une deuxième étape, nous procédons à une modélisation conditionnelle des pertes potentielles qui permet de prendre en compte certaines réalités financières et économiques comme le changement

5. Pour les pays membres de l’Union Européenne, la transposition des accords de Bâle se fait d’abord au niveau européen puis au niveau national.

de la volatilité dans le temps, le clustering de volatilité et l'effet asymétrique des rentabilités des actifs financiers. Enfin, pour mesurer le risque sur le portefeuille d'actifs, nous introduisons la mesure de la dépendance entre les actifs du portefeuille par la théorie des copules. La copule est un outil qui permet d'extraire la structure de dépendance d'une distribution jointe. Parallèlement à cette étude sur la méthode des excès, nous utilisons les modèles internes de risque pour évaluer leur capacité à mesurer correctement le niveau de capital réglementaire nécessaire à la couverture des risques auxquels les établissements financiers sont exposés.

La deuxième partie de l'étude montre le processus d'intégration du stress test dans les modèles de risque de marché et le calcul du stress Value at Risk suivant les recommandations telles que définies dans l'accord de Bâle III. Ces nouvelles recommandations ont mis de nouveau l'accent sur l'intérêt pour les banques à élaborer un programme de stress test. Cette partie discute principalement de l'intégration du stress test dans la théorie des valeurs extrêmes. Nous utilisons l'analyse de scénarios qui se décompose principalement en scénarios historiques et en scénarios hypothétiques. Elle consiste à évaluer les pertes extrêmes suivant les événements extrêmes historiques (scénarios historiques) ou suivant des hypothèses de survenance d'événements extrêmes dans le futur (scénarios hypothétiques). Nous effectuons également de la recherche systématique de scénarios catastrophes (Algorithme basé sur la théorie des valeurs extrêmes) pour mesurer le risque extrême et identifier les facteurs de risque qui contribuent à la réalisation des pertes extrêmes. La question de la détermination du capital réglementaire est également traitée suivant le nouvel accord de Bâle III ainsi que ses conséquences sur les établissements financiers et sur l'économie réelle.

RÉGLEMENTATION BANCAIRE

Les établissements financiers, dans le cadre de leurs activités, sont exposés à divers risques : risques de crédit, risque de marché, risques opérationnels, risques de liquidité et risques stratégiques. La réalisation de ces risques peut entraîner la faillite d'un établissement financier qui peut, à son tour, entraîner des faillites en cascade dans le système financier. C'est le cas par exemple de la faillite de la banque allemande Herstatt en 1974, qui a eu un effet domino sur d'autres banques. Ce qui peut avoir des conséquences désastreuses sur l'économie réelle. Ces conséquences peuvent se manifester par une récession économique ou par un chômage de masse. C'est pour répondre à ces préoccupations que le Comité de Bâle a été créé en 1974 par les gouverneurs des banques centrales du Groupe des Dix (G10⁶).

Deux objectifs fondamentaux président aux travaux du Comité de Bâle :

1. Renforcer la solidité et la stabilité du système financier international ;
2. Atténuer les inégalités concurrentielles entre les établissements financiers internationaux.

6. G10 représente les dix pays les plus développés du monde et qui composaient le Comité de Bâle à sa création. Le Comité de Bâle est aujourd'hui composé de 27 pays : Afrique du Sud, Allemagne, Argentine, Arabie Saoudite, Australie, Belgique, Brésil, Canada, Chine, Corée, Espagne, États-Unis, France, Hong Kong, Inde, Indonésie, Italie, Japon, Luxembourg, Mexique, Pays-Bas, Royaume-Uni, Russie, Singapour, Suède, Suisse, Turquie. Il est hébergé par la Banque des Règlements Internationaux à Bâle en Suisse.

Les fonds propres des établissements financiers sont devenus un levier indispensable à la disposition des régulateurs (autorités de contrôle bancaire) pour atteindre les deux objectifs que s'est assigné le Comité de Bâle. Parmi les éléments constitutifs des fonds propres, le Comité de Bâle définit les éléments qui à ses yeux peuvent assurer la solidité des établissements financiers. Ces fonds propres ainsi définis sont appelés fonds propres réglementaires ou capital réglementaire.

Nous présentons dans ce chapitre le cadre réglementaire que les établissements financiers doivent respecter pour évaluer les fonds propres nécessaires au maintien de leur solidité financière. La première section discute des trois accords de Bâle pour la régulation bancaire. Les approches standards de mesure de risque de marché proposées par le Comité de Bâle et concernant les actions et les produits de base sont décrites dans la deuxième section. La troisième section présente les conditions d'utilisation des modèles internes de mesure de risque de marché par les établissements financiers.

1 Les accords de Bâle pour la réglementation bancaire

Les travaux du Comité de Bâle ont abouti à la publication de trois grands accords : Bâle I en 1988, Bâle II en 2004 et Bâle III en 2010. Pour une analyse de ces accords, nous utilisons les textes réglementaires⁷ du Comité de Bâle dont certains ont été transposés dans la législation française (cf. Sardi (2008)).

1.1 Accord de Bâle I

Le premier accord de Bâle a été publié en 1988 et s'est principalement concentré sur la surveillance du risque de crédit dans les établissements de crédit. Cet accord a placé au coeur du dispositif réglementaire le Ratio Cooke⁸ qui rapporte les fonds propres réglementaires (capital social, réserves, résultats non distribués, titres hybrides, dettes

7. L'ensemble des textes réglementaires sur la surveillance bancaire sont disponibles sur www.bis.org/bcbs.

8. Le ratio Cooke porte le nom de Peter Cooke, directeur de la banque d'Angleterre qui avait été un des premiers à proposer la création du Comité de Bâle et fut son premier président.

subordonnées à terme) d'un établissement de crédit à l'ensemble de ses engagements de crédit pondérés. Les pondérations allaient, par exemple, de 0% pour les Etats OCDE⁹ à 100% pour les entreprises. Ce ratio doit être supérieur ou égal à 8% et s'applique uniquement aux banques actives sur le plan international.

Le développement des marchés financiers et la faillite de la banque Barings en 1995 ont conduit le comité de Bâle à amender le premier accord concernant le risque de crédit pour traiter les risques liés aux activités de marché. Ainsi, l'accord de Bâle I a été modifié et complété en 1996 pour prendre en compte le risque de marché. Ce nouvel accord distingue deux types de portefeuilles parmi les actifs des banques, à savoir le portefeuille de négociation et le portefeuille bancaire. Le portefeuille de négociation est composé des positions sur les instruments financiers et les produits de base détenus à des fins de négociation ou dans le but de couvrir d'autres éléments du portefeuille de négociation. Ces instruments ne comportent pas de clauses qui restreignent leur négociabilité ou la mise en place de couvertures. Quant au portefeuille bancaire, il correspond à l'ensemble des éléments d'actifs ou hors bilan qui n'appartiennent pas au portefeuille de négociation. En d'autres termes, il ne contient principalement que des prêts bancaires.

Les fonds propres des banques ont été augmentés du capital réglementaire lié aux risque de marché dont la détermination est basée sur deux approches. La première approche est basée sur une méthode standardisée (*standardized method*). Dans cette méthode, les types de risques et leurs pondérations sont définis par les règles établies par le Comité de Bâle. La deuxième approche communément appelée la méthode des modèles internes (*internal models method*) est basée sur les systèmes de gestion des risques des banques qui sont plus précis et adaptables que les règles rigides de la méthode standard. Pour la première fois, les autorités de contrôle ont relié les systèmes de gestion de risques des banques au calcul des fonds propres réglementaires. Depuis, les banques utilisent la méthode des modèles internes pour déterminer leurs fonds propres liés au risque de marché. Cependant, l'utilisation des modèles internes de mesure de risque de marché est conditionnée par le respect de certains critères et la mise en place d'une procédure de contrôle ex-post.

9. Organisation de Coopération et de Développement Économique.

Rappelons qu'avant ce nouveau dispositif du Comité de Bâle sur le risque de marché, la méthode standard avait déjà été introduite en 1993 par la Directive d'adéquation du capital ou *Capital Adequacy Directive* (CAD) de la Commission européenne puis complétée par la reprise de la méthode des modèles internes du Comité de Bâle en 1998. Ces règlements du Comité de Bâle et de la Directive d'adéquation du capital ont été transposés dans les législations nationales des pays membres.

L'accord de Bâle I de 1996 a permis d'accroître la solidité et la stabilité du système bancaire international et renforcé l'égalité des conditions de concurrence entre banques internationales. Après l'adoption de cet accord, il a été constaté une progression importante des fonds propres de la quasi-totalité des banques. Dans plus d'une centaine de pays, l'adoption de l'accord de Bâle I a contribué à assurer l'objectif d'égalité des conditions de concurrence entre les banques ainsi que l'objectif d'assurer la santé financière des établissements de crédit. Cette tendance s'est poursuivie, en particulier, avec les pressions du marché qui incitent les banques à maintenir des fonds propres plus élevés.

Malgré ces résultats positifs, il est apparu que l'accord de Bâle I était un début de chemin pour la régulation bancaire. L'accord de 1996 a montré quelques lacunes dans l'évaluation et la couverture de certains risques auxquels les établissements financiers étaient exposés :

- les fonds propres réglementaires sont insensibles aux risques parce que les divers degrés d'exposition au risque de crédit ne sont pas suffisamment différenciés.
- les établissements de crédit ont développé en interne des modèles de mesure de risque et d'allocation de fonds propres qui lient plus efficacement les risques aux fonds propres. L'application de la Value at Risk, tout d'abord aux risques de marché, puis aux risques de crédit et aux risques opérationnels, a été un facteur de progrès décisif.
- l'accord de 1996 ne prend en compte que les risques de crédit et de marché. Or, le risque opérationnel, le risque de taux d'intérêt sur le portefeuille bancaire et le risque de liquidité sont des facteurs de vulnérabilité pour les établissements de crédit.

- la seule exigence d'un capital minimum n'était plus suffisante pour inciter les établissements de crédit à gérer sainement leurs opérations. D'où la nécessité d'introduire des exigences qualitatives.
- arbitrage effectué par les banques entre le véritable risque économique et le risque mesuré en application de l'accord de Bâle. Par exemple, des arbitrages dans le choix des contreparties en fonction de leur taux de pondération réglementaire qui n'est pas toujours lié au véritable risque.
- l'accord de Bâle I n'incitait pas à utiliser les techniques de réduction des risques (garanties, sûretés) du fait de l'allègement trop faible en fonds propres.

Ce déphasage entre risques économiques et réglementaires, entre fonds propres économiques et réglementaires a fait que les fonds propres réglementaires n'étaient pas au coeur de la gestion quotidienne des établissements de crédit mais juste une contrainte qu'il convenait d'alléger au maximum. C'est ce déphasage que l'accord de Bâle II tente de corriger, en réconciliant le capital réglementaire avec le capital économique.

1.2 Accord de Bâle II

L'accord de 2004 ou accord de Bâle II vise à mieux évaluer les risques bancaires, à mettre en place un dispositif de surveillance et de transparence et à créer une discipline de marché par la communication financière. Cet accord a proposé une mesure plus fine du risque de crédit, et a introduit dans le calcul, à côté des risques de crédit et de marché, le risque opérationnel. Ce dernier est le risque de pertes résultant de carences ou défaillances attribuables à des procédures, personnes et systèmes internes ou à des événements extérieurs.

Les objectifs du Comité de Bâle sont restés les mêmes que dans l'accord de Bâle I. Le Comité de Bâle vise à accroître la solidité et la stabilité du système financier international et à maintenir l'égalité des conditions de concurrence entre les banques internationales.

Pour atteindre ces objectifs, l'accord de Bâle II va introduire de nouvelles approches destinées à :

- rapprocher le niveau du capital réglementaire au profil de risque spécifique de chaque établissement financier ;
- inciter les établissements financiers à développer des systèmes internes de mesure des risques ;
- renforcer le rôle des autorités de contrôle bancaire et celui des marchés ;
- appréhender les risques financiers soit par une exigence de fonds propres (par exemple le risque opérationnel), soit par le processus de surveillance prudentielle (par exemple le risque de taux sur le portefeuille bancaire).

L'architecture du dispositif de Bâle II repose sur trois piliers complémentaires : l'exigence minimale de fonds propres ou ratio de solvabilité McDonough (Pilier I), la procédure de surveillance prudentielle (Pilier II) et la discipline de marché ou transparence dans la communication des établissements financiers (Pilier III).

1. Pilier I : l'exigence minimale de fonds propres

L'exigence minimale de fonds propres ou le ratio McDonough¹⁰ qui remplace le ratio Cooke est maintenue à 8% des fonds propres (ou capital réglementaire) des établissements financiers. Ces fonds propres réglementaires ou capital réglementaire sont censés couvrir le risque de crédit, le risque de marché et le risque opérationnel.

10. Le ratio McDonough tient son nom de William Mc Donough, président en exercice du Comité Bâle pendant le processus d'établissement de l'accord de Bâle II.

L'exigence de fonds propres réglementaires est ainsi donnée par :

$$\frac{\text{Fonds propres}}{\text{Risque de crédit} + \text{Risque de marché} + \text{Risque opérationnel}} \geq 8\%$$

Le numérateur correspond aux fonds propres réglementaires d'un établissement financier et le dénominateur, aux exigences de fonds propres déterminés suivant les règles définies dans l'accord de Bâle II¹¹. Le mode de calcul du risque de crédit aboutit à des actifs pondérés. Celui du risque de marché et du risque opérationnel aboutit directement à des exigences de fonds propres. L'exigence de fonds propres au titre du risque de crédit est obtenue en multipliant les actifs pondérés par 8%. Les risques pondérés sont aussi déterminés en multipliant l'exigence de fonds propres pour les risque de marché et le risque opérationnel par 12,5 (qui est l'inverse du ratio de solvabilité de 8%) et en y ajoutant les risques pondérés du risque de crédit. La détermination des exigences de fonds propres est basée soit sur des méthodologies proposées (approches standards) par le Comité de Bâle, soit sur des méthodologies développées (modèles internes de risque) par les établissements financiers.

2. Pilier II : processus de surveillance prudentielle

La procédure de surveillance prudentielle vise d'une part, à inciter les établissements financiers à développer des techniques de gestion de leurs risques et d'autre part, à permettre aux autorités de contrôle bancaire de majorer le capital réglementaire en cas de nécessité. Le pilier II permet une implication et une présence plus importantes des autorités de contrôle pour prévenir les défaillances bancaires. Les autorités de contrôle bancaire peuvent demander aux établissements financiers de respecter un niveau de fonds propres plus élevé que la norme minimale suivant les résultats du contrôle ex post et du stress test. Chaque établissement financier doit prouver la

11. Pour le calcul de l'exigence de fonds propres et des risques pondérés, plusieurs approches ont été proposées par le Comité de Bâle dans le document révisé « International Convergence of Capital Measure and Capital Standards » du mois de juin 2006. Le document est disponible sur le site www.bis.org

validité de ses modèles internes de mesure de risque sur des périodes de 5 à 7 ans. Il doit également prouver, lors des simulations de situations extrêmes, la validité de ses fonds propres en cas de crise économique.

3. Pilier III : Discipline de marché

La discipline de marché consiste à améliorer la communication financière par la mise à la disposition du public de l'information sur les actifs, les risques et leur gestion. Elle est perçue comme un complément à l'action des autorités de contrôle bancaire. Le but du pilier III est de renforcer le rôle des marchés pour inciter les établissements financiers à conduire leurs activités de façon sûre, saine et efficace. Dumontier et al. (2008) explique que la mise à disposition aux actionnaires, prêteurs et déposants d'informations suffisantes et réglementées permet d'assurer une meilleure discipline de marché.

L'accord de Bâle II est essentiellement une norme de fonds propres minimale et ne traite pas tous les risques. Parmi les risques non traités, on peut citer le risque de liquidité. L'un des objectifs de Bâle II était de calculer le capital réglementaire en fonction du risque réel supporté par les établissements financiers. Cette sensibilité au risque est apparue *procyclique*. En effet, en période d'euphorie financière, les exigences de fonds propres réglementaires diminuent, les établissements financiers ont besoin de moins de fonds propres et il leur suffit de détenir le capital minimum exigé par les autorités de contrôle bancaire. Quand la situation se dégrade, ils doivent augmenter leurs fonds propres pour respecter les exigences de solvabilité. Ces fonds propres devenant plus rares et plus chers, cela précipite les établissements financiers dans un état « d'asphyxie financière » et réduit l'offre de crédit, accentuant ainsi la dégradation de la situation économique.

Il y a eu une sous-pondération du ratio des risque de marché surtout pour les produits les plus complexes et donc les plus risqués. Les établissements financiers ont échoué à évaluer correctement les risques qu'ils prenaient. Ainsi, leur niveau de fonds propres s'est retrouvé en inadéquation avec les risques réellement encourus.

Ces insuffisances de l'accord de Bâle II ont été constatées lors de la crise financière et économique de 2007 et 2008 et ont permis de proposer un nouvel accord en 2010 appelé accord de Bâle III.

1.3 Accord de Bâle III

La crise financière et économique de 2008 a mis en exergue les carences et les insuffisances du marché. Parmi ces carences, le mauvais fonctionnement des marchés financiers, l'illiquidité des marchés, les notes attribuées par les agences de notations. De façon générale, la question soulevée était l'adéquation entre le niveau de fonds propres des établissements financiers et les risques auxquels ils étaient exposés dans leurs activités. Le constat est que les actifs financiers plus ou moins risqués étaient financés par très peu de fonds propres voire pas du tout.

Au plus fort de la crise, les acteurs de marché ont perdu confiance en la solvabilité et la liquidité de nombreux établissements bancaires. Les faiblesses du secteur bancaire ont rapidement gagné le reste du système financier et l'économie réelle, entraînant une forte contraction de l'offre de liquidité et de crédit.

En réponse aux carences du marché mises en évidence par la crise, le Comité de Bâle a instauré plusieurs mesures pour réformer le dispositif réglementaire international de 2004 (Accord de Bâle II). Nous discutons dans cette section des principales réformes de l'accord de Bâle II, à savoir le renforcement des fonds propres réglementaires, l'instauration des ratios de liquidité, la mise en place d'un ratio de levier et la réduction du risque systémique (cf. Basel Committee (2010)).

Renforcement des fonds propres réglementaires

La crise a montré que certains éléments constitutifs des fonds propres étaient de moindre qualité que d'autres dans leur capacité d'absorption des pertes. Il s'agit donc d'améliorer la qualité du « noyau dur »¹² ou *Core Tier 1* des capitaux des établissements financiers. L'allocation de fonds propres de meilleure qualité aux activités les plus risquées

12. le noyau dur ou *Core Tier 1* est composé d'actions ordinaires et assimilées.

permet d'accroître la solvabilité des établissements financiers. Ainsi, le Comité de Bâle a décidé de limiter les fonds propres de base essentiellement aux actions ordinaires et aux bénéfiques non distribués. Pour renforcer la discipline de marché et la transparence des fonds propres, tous les éléments de fonds propres doivent faire l'objet d'une déclaration, accompagnée d'un rapprochement détaillé avec les comptes publiés.

Le ratio de fonds propres « durs » ou *Core tier 1* passe de 2% actuellement à 4,5% des actifs pondérés, auquel il faut rajouter 2,5% de coussin de conservation, soit 7% pour le ratio *Core Tier 1*. Le ratio des fonds propres de base ou *Tier 1*¹³ est fixé à 6% et celui des fonds propres complémentaires (*Tier 2*¹⁴) à 2%, soit 8% d'exigence minimale de fonds propres réglementaires. L'objectif du coussin de conservation est de maintenir le niveau des fonds réglementaires (*Tier 1* et *Tier 2*) à 8% des actifs pondérés d'un établissement. Ce qui veut que le niveau de fonds propres des établissements financiers doit être compris entre 8% et 10,5%. A chaque fois que le niveau des fonds propres s'écarte des 10,5%, l'établissement financier doit le reconstituer en puisant dans les bénéfiques futurs pour empêcher que les fonds propres réglementaires descendent en dessous des 8%.

Il a été créé un coussin de sécurité ou coussin contra-cyclique compris dans la fourchette de 0 à 2,5% qui sera constitué de résultats mis en réserve en période d'expansion du crédit. L'objectif étant d'utiliser ce coussin de sécurité en cas de crise et de le reconstituer en période de croissance. Ce coussin de sécurité peut être imposé à la discrétion des autorités de contrôles de chaque pays si elles estiment que certaines évolutions macroéconomiques, en particulier l'évolution du ratio endettement du secteur privé par rapport au produit intérieur brut, augmentent le risque de chocs d'ampleur systémique.

Instauration de ratios de liquidité

Le risque de liquidité a été un facteur décisif dans la crise financière et économique de 2008. Cependant, il ne faisait l'objet d'aucune réglementation harmonisée au niveau

13. Le *Tier 1* est composé d'actions ordinaires et assimilées, mais également des instruments émis par un établissement financier dont le remboursement du capital ou le versement des dividendes/coupons sont entièrement discrétionnaires.

14. Le *Tier 2* comprend les instruments de quasi-fonds propres émis par un établissement financier, n'appartenant pas au *Tier 1* et dont le remboursement du capital et le versement des dividendes/coupons sont subordonnés au maintien de l'exigence minimale des fonds propres réglementaires.

international. Le Comité de Bâle a ainsi proposé la mise en place dans l'accord de Bâle III de deux normes minimales applicables à la liquidité de financement : le ratio de liquidité à court terme ou *Liquidity Coverage Ratio* (LCR) et le ratio de liquidité à long terme ou *Net Stable Funding Ratio* (NSFR). Ces deux ratios de liquidité complètent ainsi les principes de saine gestion et de surveillance du risque de liquidité proposés par le Comité de Bâle (cf. Basel Committee (2008)). Il y formule des recommandations détaillées¹⁵ sur la gestion et la surveillance du risque de liquidité de financement dont l'objectif est de promouvoir une meilleure gestion du risque de liquidité.

Les deux ratios de liquidité visent deux objectifs distincts, mais complémentaires. Le ratio de liquidité à court terme permet de favoriser la résilience à court terme du profil de risque de liquidité d'un établissement financier en veillant à ce qu'il dispose de suffisamment d'actifs liquides de haute qualité pour surmonter une grave crise qui durerait un mois. Par exemple, il permet de faire face au déclassement de la note de l'établissement financier, à un arrêt de financement interbancaire et au retrait partiel des dépôts de la clientèle dans les établissements de crédit.

Le ratio de liquidité à long terme permet de promouvoir la résilience à plus long terme en instaurant des incitations supplémentaires afin que les établissements financiers financent leurs activités au moyen de sources structurellement plus stables. Il met en regard le financement stable disponible et le financement stable nécessaire sur un an.

Mise en place d'un ratio de levier

Le Comité de Bâle a constaté, lors de la crise financière et économique de 2008, que le système bancaire a accumulé un effet de levier excessif au bilan et au hors-bilan tout en présentant de solides ratios de fonds propres fondés sur les risques. Au plus fort de la crise, le secteur bancaire a été contraint par le marché de réduire son effet de levier d'une façon qui a accentué la baisse des prix des actifs, des fonds propres des banques et la contraction de l'offre de crédit. Pour éviter ce risque à l'avenir, le Comité de Bâle a proposé la mise en place d'un ratio de levier. Ce ratio est défini comme étant le rapport des fonds propres

15. Les recommandations détaillées sur la gestion du risque de liquidité « Principles for Sound Liquidity Risk Management and Supervision » sont disponibles sur www.bis.org.

de base ou *tier 1* sur le total du bilan (total actif ou total passif) d'un établissement financier. L'objectif de ce ratio est d'élaborer une mesure simple, transparente et non basée sur le risque, qui soit calibrée pour servir de mesure complémentaire crédible aux fonds propres réglementaires fondés sur le risque. Il est également considéré comme une protection contre le risque de modèle et les erreurs de mesure. Ainsi, le Comité de Bâle envisage d'intégrer directement ce ratio dans le pilier I de Bâle II à partir du mois de janvier 2018, avec une norme temporaire de 3%.

Il faut noter que ce ratio ne tient pas compte de la qualité des actifs détenus. Le Comité de Bâle s'est inspiré du ratio de levier déjà appliqué aux États-Unis où la norme est de 4% des fonds propres par rapport au total du bilan. Il a incité les banques américaines à titriser et à sortir de leur bilan certains crédits et opérations risqués qu'elles réalisaient. Il est également dépendant des normes comptables (USGAAP aux États-Unis et IFRS en Europe). Il y a donc une amélioration à faire pour prendre en compte ces différences comptables.

Réduction du risque systémique

Compte tenu de l'interdépendance excessive des établissements financiers d'importance systémique et des conséquences de cette interdépendance sur le système financier et l'économie, le Comité de Bâle a proposé que ces établissements disposent de fonds propres supérieurs aux exigences minimales de fonds propres. Ainsi, il a été recommandé de relever l'exigence en fonds propres pour les expositions liées aux portefeuilles de négociation, aux opérations sur produits dérivés, aux opérations de titrisation, aux opérations de hors-bilan et à d'autres intervenants du secteur financier. Il a été également question d'instaurer l'exigence de liquidité pour pénaliser le recours excessif au financement interbancaire à court terme pour couvrir les actifs à plus longue échéance.

Pour gérer le risque systémique, le *Financial Stability Board* (FSB) recommande de traiter un maximum de transactions, notamment les dérivés de gré à gré, sur des marchés organisés et transparents et d'identifier les établissements financiers qui font courir des risques aux autres. La taille, l'interconnexion et la substituabilité comme critères pour identifier les établissements financiers systémiques sont en cours d'étude. La taille permet

de saisir la concentration des transactions. L'interconnexion des établissements financiers permet de capter la possibilité de faillites en cascade. Quant à la substituabilité, elle permet d'identifier les activités que font les établissements financiers systémiques que les autres ne savent ou ne peuvent pas faire.

Limites de l'accord de Bâle III

Le renforcement des fonds propres va entraîner inéluctablement une baisse du crédit à l'économie. Si les établissements de crédit doivent accroître leurs fonds propres, il y aura moins de ressources pour le crédit, et cela pèsera sur le financement de l'économie, notamment sur le volume et le coût du crédit. La mise en place d'un coussin contracyclique pour lutter contre une croissance trop rapide du crédit et des mesures de rétention des fonds propres aura pour conséquences de bloquer inutilement du capital nécessaire au financement de l'économie. Le pilier II ou surveillance prudentielle permet déjà aux superviseurs de contenir la croissance du financement d'actifs jugés surévalués. Il est plus efficace d'augmenter la pondération des concours à ces actifs en période de bulle pour en renchérir le coût et donc diminuer leur demande.

Pour les ratios de liquidité, le Comité de Bâle doit également définir le périmètre des actifs considérés comme liquides à court terme et à long terme. Les scénarios sous-jacents (arrêt de financement interbancaire par exemple) au ratio de liquidité sont des scénarios extrêmes et peuvent empêcher les établissements de crédit à jouer pleinement leur rôle d'intermédiation et de transformation.

Le Comité de Bâle doit définir les modalités d'utilisation et l'utilité du ratio de levier dont les établissements financiers devront publier le niveau à partir de 2015 en vue de son intégration éventuelle dans le pilier I. Ce ratio de levier temporairement fixé à 3% s'il est intégré comme tel dans le pilier I, va encore augmenter l'exigence minimale de fonds propres. Il ne prend pas en compte la différence entre actifs risqués et non risqués et n'est réellement applicable que dans le cadre de règles comptables harmonisées.

L'égalité des conditions de concurrence entre les banques internationales qui est l'un des objectifs du Comité de Bâle risque de n'être pas respectée. L'accord de Bâle III ne devrait être appliqué qu'à une dizaine de banques américaines dont le bilan est supérieur

à 250 millions de dollars US et dont les actifs détenus à l'étranger dépassent 10 milliards de dollars US, qui sont déjà soumises à l'approche avancée de Bâle II.

Si tel était le cas, estime l'étude du 17/09/10 du département de recherches économiques de BNP Paribas, « *Les champs d'application de Bâle III qui en résulteraient seraient très différents entre l'Europe et les États-Unis. Le bilan agrégé des douze core banking organizations (10 banques dont 3 filiales de banques étrangères) ne représenterait que 61% de l'ensemble des actifs bancaires, ce qui signifie que la réforme Bâle III ne serait en réalité susceptible de contraindre qu'une proportion comprise entre 15% et 20% des financements du secteur privé non financier américain, contre plus de 80% de ceux de la zone euro, [...].* »

Pour finir, Jean-Paul CAUDAL, Directeur du département de la supervision bancaire et comptable de la Fédération Bancaire Française (FBF) observe dans la Revue Banque¹⁶ que « *Les banques françaises estiment ainsi que certaines propositions actuelles sont inadaptées ou excessives et pourraient avoir un impact négatif sur la croissance en pesant sur la capacité des banques à financer l'économie* ». Cependant, il faut noter que la mise en place de cette réforme est progressive, s'étalant de janvier 2011 à janvier 2019, avec des périodes d'observation et d'évaluation. Ce qui permettra certainement de corriger certaines insuffisances.

Après une analyse globale des trois accords du Comité de Bâle, nous réexaminons en détail la réglementation de la mesure et de la gestion du risque de marché dans les établissements financiers. La mesure de risque de marché a subi une profonde modification dans le cadre de la réforme de l'accord de Bâle II (cf. Basel Committee (2009)).

2 Méthodes standards de mesure de risque de marché

La prise en compte du risque de marché par le Comité de Bâle avait pour objectif de fournir un coussin de sécurité aux banques qui sont exposées au risque de fluctuation des prix de certains actifs négociés sur les marchés financiers. Du point de vue des autorités de contrôle, cela permet de renforcer la santé financière et la stabilité du système bancaire

16. Lecture dans la Revue Banque N° 730-731 décembre 2010, p. 33.

international et des marchés financiers. La méthode standard proposée en avril 1993, est basée sur une spécification construite par type de risques. Le risque de marché est calculé pour les portefeuilles exposés aux risques de taux d'intérêt, de taux de change, sur actions, sur produits de base et sur options associées à ces actifs. L'exigence de fonds propres est déterminée pour chaque type de risque et ensuite toutes les exigences de fonds propres sont additionnées de manière arithmétique pour obtenir le total des fonds propres. Le processus standardisé de construction de ces fonds propres a conduit à l'appellation de méthode standard.

La méthode standard est très simple à mettre en place. Cependant, elle a fait l'objet de plusieurs critiques. Premièrement, la classification par type de risques est arbitraire. En effet, un pourcentage de 8% est systématiquement appliqué aux positions détenues sur les actions et taux de change sans tenir compte de leur volatilité. Par exemple, l'Euro ou le Yen peuvent avoir des volatilités différentes par rapport au Dollar US et ces volatilités peuvent changer dans le temps.

Deuxièmement, la méthode standard conduit à une exigence de fonds propres conservatrice parce que les fonds propres par type de risques déterminés sont additionnés sans tenir compte de la diversification du portefeuille. Par exemple, les fonds propres pour le risque de taux (obligations d'État par exemple) sont calculés séparément dans chaque devise puis additionnés. Implicitement, cette approche devient une mesure du scénario catastrophe qui suppose que la pire perte se produira au même moment pour tous les facteurs de risque. Dans la pratique, les facteurs de risque ne sont pas indépendants, ce qui signifie que la pire perte des facteurs de risque sera moindre que la somme individuelle des pires pertes. Par conséquent, la méthode standard ne reconnaît pas les bénéfices de la diversification.

La méthode standard distingue cinq grands types de risque de marché : le risque de taux d'intérêts, le risque sur actions, le risque de change, le risque sur produits de base (matières premières sans l'or) et le risque sur produits dérivés. Nous présentons, dans cette section, les grands principes réglementaires de la mesure des risques des actifs du portefeuille d'étude (actions et produits de base) ainsi que de la détermination des fonds propres réglementaires. Les autres types de risque du portefeuille de négociation sont présentés dans l'Annexe A.

2.1 Risque sur actions

L'exigence de fonds propres pour risque sur actions est divisée en fonds propres au titre du risque général et du risque spécifique. L'exigence de fonds propres au titre du risque général est déterminée en appliquant un coefficient de 8% à la position nette globale, pour chaque marché national, puis en sommant les exigences ainsi calculées. La position nette globale est la différence entre le cumul des positions nettes acheteur sur chaque action et celui des positions nettes vendeur. Cette position nette globale est calculée pour chaque marché national.

Pour le calcul du risque spécifique sur actions, à chaque position nette, à l'achat ou à la vente, une pondération de 8% est appliquée. L'exigence de fonds propres pour risque spécifique est déterminée en faisant la somme des positions pondérées.

L'exigence de fonds propres sur actions (FP^A) est obtenue par la somme de l'exigence au titre du risque général (FP^G) et au titre du risque spécifique (FP^S) par l'expression suivante :

$$FP^A = FP^G + FP^S$$

2.2 Risque sur produits de base

Les produits de base sont des matières premières dont on exclut l'or. Ce dernier est classé parmi les devises. Les produits de base enregistrent beaucoup plus de volatilités que les devises et l'or. Pour mesurer le risque sur ces instruments, les établissements de crédit peuvent utiliser deux approches : l'approche simplifiée et l'approche du tableau d'échéances.

Approche simplifiée

L'approche simplifiée consiste à déterminer l'exigence de fonds propres sur chaque produit de base en prenant 15% de la position nette augmentée de 3% de la position brute. La position brute est la somme des positions longues (V^{longue}) et des positions courtes (V^{courte}).

$$FP^P = 15\%|V^{longue} - V^{courte}| + 3\%(|V^{Longue}| + |V^{Courte}|) \quad (1)$$

Approche du tableau d'échéances

L'exigence de fonds propres est déterminée en deux étapes. La première consiste à compenser les positions longues et les positions courtes au sein de chaque tranche de maturité. L'exigence de fonds propres au titre de cette compensation est égale, pour chaque tranche, à la somme des montants (position courte et position longue) compensés multipliés par 1,5% du coefficient d'écart de taux.

Dans la deuxième étape, la position nette résiduelle sera successivement reportée dans la tranche supérieure et compensée, le cas échéant, avec des positions de sens inverse par l'application du coefficient d'écart de taux. Chaque report d'une position vers l'échéance supérieure s'accompagne d'une exigence supplémentaire en fonds propres égale à 0,6% du coefficient de report du montant reporté.

La position nette qui apparaît par application successive du report est assujettie à une exigence égale à 15% (coefficient de risque directionnel) de son montant.

Maturité	0 - 1 mois	1 - 3 mois	3 - 6 mois	6 - 12 mois	1 - 2 ans	2 - 3 ans	> 3 ans
Pondération							
Coefficient d'écart de taux	1,5%	1,5%	1,5%	1,5%	1,5%	1,5%	1,5%
Coefficient de report	0,6%	0,6%	0,6%	0,6%	0,6%	0,6%	0,6%

Source : Basel Committee on Banking Supervision

TAB. 1 – **Pondération pour exigence de fonds propres sur produits de base**

Les établissements de crédit qui exercent une activité importante sur les produits de base et disposent d'un portefeuille diversifié de ces produits de base, peuvent être autorisés par les autorités de contrôle à utiliser les coefficients du Tableau 2 à la place des coefficients du Tableau 1.

	Métaux précieux	Métaux de base	Produits agricoles	Énergies et autres
Pondération				
Coefficient d'écart de taux	1,0%	1,2%	1,5%	1,5%
Coefficient de report	0,3%	0,5%	0,6%	0,6%
Coefficient directionnel	8,0%	10,0%	12,0%	15,0%

Source : Basel Committee on Banking Supervision

TAB. 2 – Pondération par type de produits de base

Pour l'ensemble des produits de base du portefeuille, l'exigence de fonds propres déterminée par l'approche du tableau d'échéance est donnée par l'expression :

$$FP^P = \sum_{i=1}^n FP_i^P \quad (2)$$

Il faut noter que l'exigence de fonds propres est calculée de façon individuelle pour chaque produit de base avant de faire la somme de l'ensemble des exigences de fonds propres.

Comme on peut le remarquer, toutes les méthodologies de détermination de l'exigence de fonds propres présentées dans la Section 2 sur la méthode standard sont basées sur les règles établies par le comité de Bâle. Ces méthodologies de calcul de l'exigence de fonds propres ont fait l'objet de beaucoup de critiques en ce qui concerne leur sensibilité aux risques ainsi que la prise en compte des corrélations. La reconnaissance de ces différents problèmes de la méthode standard pour la mesure du capital réglementaire a amené le comité de Bâle à autoriser des méthodologies plus flexibles basées sur les modèles internes des établissements de crédit.

3 Modèles internes de mesure de risque de marché

Contrairement à la méthode standard, la méthode des modèles internes utilise les modèles de mesure de risque élaborés par les banques elles-mêmes comme une base de détermination du capital réglementaire. L'adoption des modèles internes de mesure du risque de marché a été une étape majeure dans la régulation financière internationale. Pour la première fois, les autorités de contrôle ont reconnu que les banques peuvent développer des modèles sophistiqués et dans plusieurs cas plus sophistiqués que la méthode standard.

En effet, la complexité et la vitesse à laquelle les innovations financières progressent sont telles que les règles rigides peuvent être facilement contournées pour les nouveaux produits. Une autre motivation est que les banques utilisent les modèles internes parce que cela leur permet d'avoir moins de capital réglementaire à bloquer et les incite à développer et à mettre en place de meilleur système de gestion des risques. Cependant, les autorités de contrôle bancaire n'ont pas mis de côté leur surveillance sur le risque bancaire. Une banque peut utiliser des modèles internes après avoir été approuvés par les autorités de contrôle bancaire. Ainsi, les banques doivent satisfaire des exigences quantitatives et qualitatives, et leurs méthodologies doivent être suffisamment détaillées et faire l'objet d'une procédure rigoureuse de contrôle ex post.

3.1 Exigences minimales générales

L'utilisation des modèles internes est soumise à l'accord préalable des autorités de contrôle bancaire qui subordonne son approbation au respect des conditions minimales suivantes :

1. Le système de gestion des risques repose sur des principes sains et il est mis en oeuvre de manière intègre ;
2. Disponibilité d'un nombre suffisant de personnel qualifié pour l'utilisation des modèles dans le domaine de la négociation, du contrôle des risques, du contrôle interne et du back office ;
3. Les modèles ont fait la preuve qu'ils mesurent avec une précision raisonnable ;
4. Réalisations régulières de simulations de crise selon les modalités précises ;

Outre ces exigences générales, d'autres exigences décrites ci-dessous doivent être respectées.

Critères qualitatifs

Les éléments suivants doivent au minimum être prévus :

1. Existence d'une unité indépendante de contrôle des risques, responsable de la configuration et de l'exploitation du système de gestion des risques dont le contrôle des limites et la validation des modèles ;
2. L'organe exécutif est activement associé au processus de contrôle de risques ;
3. Les rapports quotidiens préparés par l'unité indépendante de contrôle des risques doivent être revus de manière appropriée et pris en compte par la gestion des limites ;
4. Les modèles internes de mesure des risques doivent être étroitement intégrés à la gestion journalière de ces risques ;
5. Un programme rigoureux de simulations de crise doit régulièrement compléter l'analyse des risques fondée sur les résultats quotidiens des modèles internes. Ses conclusions doivent être examinées par l'organe exécutif et prises en compte dans les politiques et les limites prévues de risque ;
6. Existence d'un programme de vérification du respect des règles et procédures internes relatives au fonctionnement du système de mesure des risques qui doit être documenté ;
7. Les établissements disposent de processus permettant de s'assurer que les modèles internes ont été validés par des entités qualifiées indépendantes des équipes de développement ;
8. Une analyse indépendante du système de mesure des risques doit être effectuée régulièrement dans le cadre du processus de contrôle interne de l'établissement. Elle doit porter à la fois sur les activités des unités de négociation et sur celles de l'unité indépendante de contrôle des risques ;
9. L'adéquation de la technique de modélisation et de son degré de sophistication pour chaque marché au type et au niveau d'engagement de l'établissement sur ce marché.

Les dernières évolutions méthodologiques et les meilleures pratiques en matière de modélisation doivent être intégrées dans les modèles internes des banques afin de déterminer des fonds propres suffisants (Sardi (2008)).

Critères quantitatifs

Les principes suivants doivent être respectés pour la détermination des fonds propres réglementaires :

1. La perte potentielle est calculée quotidiennement ;
2. Le niveau de confiance unilatéral requis est de 99% ;
3. La période d'observation (échantillon historique) pour le calcul de la perte potentielle doit être au minimum d'un an ;
4. Une période de détention minimale de dix jours ouvrés doit être considérée pour le calcul de la Value at Risk. Les banques peuvent, cependant, multiplier leurs Value at Risk journalières par la racine carrée du temps de détention de dix jours ouvrés ;
5. Les séries de données sont mises à jour au moins une fois par mois et plus fréquemment en cas d'accroissement notable des volatilités observées ;
6. Les corrélations empiriques entre tous les facteurs de risque peuvent être prises en compte sous réserve de la fiabilité du système de mesure de celles-ci ;
7. Les modèles doivent appréhender avec précision les risques liés au caractère non linéaire du prix des options ou positions assimilées.

A ces critères quantitatifs, il faut rajouter le choix des facteurs de risque c'est-à-dire les principaux paramètres de marché dont les variations sont considérées comme les plus à même d'affecter les valeurs des positions. Ils doivent être choisis de manière appropriée par rapport au niveau d'activité sur les divers marchés. Par exemple, la courbe des taux doit comprendre un minimum de six bandes de maturités pour les grandes devises afin d'appréhender la variation de la volatilité des taux tout au long de l'échéancier. Le système de mesure du risque doit également inclure des facteurs distincts pour saisir le risque lié aux écarts de taux entre types d'instruments ou catégories d'émetteurs.

Le système de mesure du risque de change doit prévoir des facteurs correspondant à l'or et aux diverses devises dans lesquelles sont libellées les positions.

Quant aux facteurs de risque sur les actions, au minimum un facteur de risque doit exister pour chaque marché sur lequel l'établissement financier détient des positions (indice de

marché) ou pour chaque secteur du marché (indice sectoriel). Dans une approche plus complète du choix des facteurs, les établissements financiers peuvent retenir les titres spécifiques (les actions détenues par exemple). Pour le risque sur les produits de base, il doit être prévu au minimum un facteur de risque pour chacun. Pour les établissements ayant une position importante sur les produits de base, les modèles doivent tenir compte des différences entre qualité du même produit et maturité. Il convient aussi d'intégrer la variation du rendement de détention entre positions sur instruments dérivés et positions au comptant ainsi que les caractéristiques du marché (dates de livraison et possibilités offertes aux opérateurs de dénouer leurs positions).

Pour les options, le système de mesure doit comporter un ensemble de facteurs de risque appréhendant la volatilité des sous-jacents. Pour les positions plus importantes, il est recommandé d'utiliser des volatilités différenciées en fonction des échéances ou des prix d'exercice.

3.2 Programme de simulation de crise

Le programme de simulation de crise ou stress test est une des exigences qualitatives pour les banques qui veulent utiliser les modèles internes. L'objectif de la simulation de crise ou du stress test est d'identifier les événements qui pourraient fortement impacter les portefeuilles des banques mais qui ne sont pas pris en compte dans la mesure de la VaR. Le principal but du stress test est d'évaluer la capacité des fonds propres de la banque à absorber les pertes potentielles qui seraient intervenues suite à un événement extrême.

Pour les établissements financiers ayant une activité significative de marché, le stress test doit couvrir tous les facteurs de risque pouvant donner lieu à des pertes exceptionnelles. Ces facteurs de risque comprennent des événements à faible probabilité pour tous grands types de risque. Les scénarios de crise à élaborer doivent mesurer l'impact de ces événements sur les positions ayant des caractéristiques de prix à la fois linéaires et non linéaires.

Le stress test doit être à la fois quantitatif et qualitatif, de manière à évaluer les impacts des perturbations importantes des marchés et à identifier des situations plausibles susceptibles de générer de grandes pertes potentielles. L'établissement financier doit éga-

lement faire un inventaire des mesures à prendre pour réduire ces risques identifiés afin de préserver ses fonds propres.

Un premier type de scénario consiste à tester le portefeuille courant dans les situations passées de perturbations majeures, en tenant compte de fortes variations de prix et la réduction de la liquidité associées à ces événements. Un deuxième type de scénario évalue la sensibilité des positions de marché aux modifications des hypothèses de volatilité et de corrélation. Les scénarios doivent comprendre les situations que l'établissement financier identifie comme étant les plus défavorables, sur la base des caractéristiques de son portefeuille. Une description de la méthodologie utilisée pour identifier les scénarios et la mesure de leur impact doit être communiquée aux autorités de contrôle bancaire.

En plus du stress test réalisé par les établissements financiers eux-mêmes, les autorités de contrôle peuvent leur demander d'évaluer l'impact de scénarios qu'elles ont définis et fournir l'ensemble des résultats et conclusions.

3.3 Procédure de contrôle ex-post

Les modèles internes ont été autorisés par les autorités de contrôle bancaire parce que leur fiabilité peut être vérifiée. Cette vérification consiste à savoir si le modèle de mesure de risque de marché est adéquat, c'est-à-dire que le modèle mesure correctement les pertes futures. Le contrôle de fiabilité des modèles internes est généralement effectué par une procédure de contrôle ex-post que le Comité de Bâle recommande aux banques.

Le contrôle ex-post est un test qui consiste à comparer, à intervalles réguliers, les estimations journalières de Value at Risk avec les pertes et profits enregistrés sur les portefeuilles de négociation des banques. Les estimations de la VaR doivent, en principe, être supérieures aux pertes effectives, à l'exception d'un niveau de dépassement (1% dans la réglementation bancaire) déterminé pour un niveau de confiance de 99%. Tout dépassement de la VaR par les pertes réelles est considéré comme une exception. Le contrôle ex-post se fait en comptant le nombre de fois où la VaR a été inférieure aux pertes effectives, puis en rapprochant le pourcentage réellement couvert et le niveau de couverture recherchée afin d'apprécier les performances des modèles. Le contrôle ex-post vise à s'assurer que les mesures de VaR couvrent réellement 99% (pourcentage de couverture recherché dans le

cadre de la réglementation bancaire du risque de marché) des pertes effectives.

Les contrôles ex-post sont réalisés à partir des pertes et profits réels ou des pertes et profits hypothétiques. Ces deux approches apportent des indications complémentaires et doivent si possible être mises en oeuvre conjointement. Les pertes et profits réels correspondent à la variation sur un jour de la valeur du portefeuille constatée à la fin du jour ouvrable suivant, tandis que les pertes et profits hypothétiques correspondent à l'écart entre la valeur du portefeuille en fin de journée et sa valeur à positions inchangées, à la fin de la journée suivante. La détermination du nombre d'exceptions se fait par la comparaison soit entre la VaR et les pertes et profits réels soit entre la VaR et les pertes et profits hypothétiques.

Les autorités de contrôle peuvent décider qu'un établissement financier effectue ses contrôles ex-post uniquement sur une base hypothétique, uniquement sur une base réelle (à l'exclusion des commissions et des revenus nets d'intérêts) ou sur une base réelle et hypothétique. La périodicité du contrôle ex post et de l'analyse des exceptions est au moins trimestrielle. A cet effet, les établissements financiers doivent utiliser les données des 250 derniers jours ouvrables.

4 Conclusion

Nous retenons dans ce chapitre que la réglementation bancaire évolue en fonction du développement des activités bancaires et des crises financières et économiques. Cette évolution tient principalement aux objectifs d'assurer la stabilité financière internationale et les conditions d'égalité de concurrence entre les établissements financiers internationaux. Le risque de crédit a été le premier risque à être traité par le Comité de Bâle dans le cadre de l'exigence des fonds propres réglementaires. Le risque de marché et le risque opérationnel ont été plus tard intégrés dans le dispositif de Bâle. Ces trois risques sont évalués généralement par deux approches : une approche standard proposée par le Comité de Bâle et une approche interne développée par les établissements financiers. Nous avons présenté dans ce chapitre, les règles prudentielles concernant le risque de marché. Ce dernier était au coeur de la récente crise de 2008.

Les crises financières et économiques de 2007 et 2008 ont poussé le Comité de Bâle à reformer l'accord de Bâle II. La réforme a eu pour objectif principal de renforcer les fonds propres réglementaires des établissements financiers. Pour renforcer le capital réglementaire, le nouvel accord de Bâle III exige 10,5% de fonds propres réglementaires pour 2018. Ce taux de fonds propres est égal à 8% dans l'accord de Bâle II. Les établissements financiers doivent désormais calculer des ratios de liquidité et de levier respectivement pour mieux gérer le risque de liquidité et limiter l'usage de l'effet de levier. Les établissements financiers considérés systémiques vont devoir à l'avenir mobiliser plus de fonds propres réglementaires.

Ces mesures sont une réaction à la crise de 2008 et à ses conséquences sur l'économie réelle. Il faut noter que les modèles internes de mesure de risque de marché n'ont pas fait l'objet de réforme majeure. Pourtant, ce sont ces modèles qui estiment le montant des fonds propres réglementaires au titre du risque de marché. Le calcul du capital réglementaire en faisant la somme de la Value at Risk et le stress Value at Risk comme l'exige l'accord de Bâle III ne permettra pas de couvrir les pertes quand le modèle de mesure de risque sous-estime fortement le risque réel.

Première partie

ESTIMATION DES PERTES POTENTIELLES PAR DES MODÈLES DE RISQUE DE MARCHÉ

INTRODUCTION DE LA PREMIÈRE PARTIE

La crise économique et financière de 2008 a montré les limites des modèles internes de mesure de risque de marché (techniques traditionnelles de mesure de risque) jusqu'à présent utilisés par les établissements financiers. Pourquoi ces modèles internes de risque ont-ils échoué à prévoir correctement le risque de marché ? Ces échecs ne sont-ils pas dus aux hypothèses sous-jacentes aux modèles de mesure de risque ? En effet, il est souvent supposé que les distributions de rentabilités financières suivent une distribution normale, que la volatilité est constante et que les corrélations entre les actifs financiers sont linéaires. Ces hypothèses ne sont généralement pas vérifiées sur les données financières. Pour répondre à ces questions et proposer des solutions alternatives, nous effectuons des modélisations inconditionnelle et conditionnelle du risque ainsi que la mesure de la dépendance entre les facteurs de risque. La modélisation inconditionnelle va consister à supposer que la volatilité est constante. La modélisation conditionnelle suppose le changement de la volatilité dans le temps. La prise en compte de certaines réalités économiques et financières dans les modèles de mesure de risque permet d'améliorer la mesure des risques financiers (Mandelbrot (1963)).

Parallèlement à l'estimation des pertes potentielles par la méthode POT basée sur la distribution de Pareto généralisée ou *Generalized Pareto Distribution* (GPD), nous estimons également des pertes potentielles à partir des modèles internes des banques (Simulation Historique (SH) et Variance-Covariance de la loi normale). Ces deux modèles internes de risque de marché sont largement utilisés dans les établissements financiers. Une étude récente menée par Perignon and Smith (2010) montre que la méthode SH est

utilisée à 73% par les établissements financiers pour évaluer leurs risques de marché.

Cette partie de l'étude traite de l'estimation des pertes potentielles par les mesures de la Value at Risk et l'Expected Shortfall basées sur le modèle GPD et sur les modèles internes de mesure de risque. A travers ces estimations de pertes potentielles, nous montrons les conséquences de certaines hypothèses dans la modélisation des risques financiers. Dans ce processus de modélisation des pertes potentielles, les performances de la théorie des valeurs extrêmes sont comparées à celles de la méthode SH et de la méthode basée sur la loi normale. Nous discutons des avantages que peut avoir l'utilisation de la théorie des valeurs extrêmes dans la mesure et la gestion des risques financiers mais aussi dans la mesure des exigences de fonds propres réglementaires.

Nous exposons dans le premier chapitre, les conséquences d'une modélisation inconditionnelle c'est-à-dire les conséquences de l'hypothèse de la volatilité constante dans les modèles de risque pendant les périodes de forte volatilité et de faible volatilité des marchés. Dans le deuxième chapitre, nous prenons en compte le changement de la volatilité dans le temps et l'effet asymétrique des rentabilités pour améliorer la fiabilité des modèles de risque. Les questions de dépendance entre les facteurs de risque sont traitées dans le troisième chapitre par la théorie des copules. En effet pour les distributions non elliptiques, la corrélation linéaire ne suffit pas pour décrire la structure de dépendance entre les variables aléatoires. Il est recommandé d'utiliser les copules pour la modélisation de la dépendance des événements extrêmes (cf. Demarta and McNeil (2005)).

Chapitre 1

MODÉLISATION INCONDITIONNELLE DES PERTES POTENTIELLES SUR DES ACTIFS

La modélisation inconditionnelle des pertes potentielles suppose que nous considérons la variance constante dans les modèles de risque. Au moment où les autorités de contrôle bancaire doutent de la fiabilité des modèles de mesure de risque de marché, il est aujourd'hui nécessaire d'évaluer les conséquences de certaines hypothèses sur lesquelles est basée la modélisation des risques financiers. En effet, il est souvent supposé dans les modèles de risque de marché que les distributions de rentabilités suivent une loi normale et qu'elles ont des paramètres (moyenne, variance et covariance) constants dans le temps. Ces hypothèses sont par exemple supposées dans le modèle de Black-Scholes. L'hypothèse de la volatilité constante est également supposée par Fromont (2005) qui conclut à la fiabilité de la théorie des valeurs extrêmes basée sur la distribution de Pareto généralisée dans le cadre de l'évaluation du risque extrême des Hedge Funds.

Nous évaluons les conséquences de ces hypothèses sur la modélisation des pertes potentielles pendant les périodes de faible volatilité et de forte volatilité des marchés financiers. La prise en compte de ces deux conditions de marché est importante pour statuer sur la fiabilité des modèles de mesure de risque. En effet, aucune étude n'a pris en compte l'évaluation de la fiabilité des mesures de risque basée sur la distribution de Pareto généralisée à la fois dans des conditions normales et extrêmes de marché. En supposant l'hypothèse de volatilité constante et en prenant en compte les deux conditions de marché, la problé-

matique majeure de ce chapitre est de vérifier la fiabilité d'une mesure de risque basée sur la distribution de Pareto généralisée. Ce test de fiabilité est également effectué sur les modèles internes de mesure de risque (Simulation Historique et loi normale).

La première section de ce chapitre présente les données de l'étude ainsi que ses caractéristiques statistiques. La deuxième section décrit les mesures de risque de marché (Value at Risk et Expected Shortfall) et les lois de distribution sur lesquelles elles sont basées. La troisième section s'attache à montrer comment les rentabilités extrêmes peuvent être modélisées par la méthode des excès. Dans la quatrième section, nous analysons les résultats de l'estimation des pertes potentielles ainsi que la fiabilité des techniques de mesure de risque de marché.

1.1 Données de l'étude

Notre étude est basée sur les indices actions (CAC 40 et S&P 500), les indices de matières premières (Pétrole et Blé) et les actions individuelles (Peugeot et Société Générale). Nous retenons la notation Socgen pour l'action Société Générale. L'étude couvre la période de janvier 1988 à décembre 2010 qui nous permet de travailler sur plus de 5800 observations journalières par actif. Ces données ont été extraites de la base de données *Datastream*¹⁷.

Les indices actions CAC 40 et S&P 500 et les actions Socgen et Peugeot sont des données qui tiennent compte du réinvestissement des dividendes. Nous utilisons les prix au comptant des indices Standard and Poor de Goldman Sachs Commodity Index (S&P GSCI) pour le pétrole brut et pour le blé que nous dénommons respectivement Pétrole et Blé tout au long de cette étude. Le Pétrole représente 34,6% de la composition de l'indice sectoriel énergie, qui à son tour représente 66,5% de la composition globale de l'indice phare des matières premières *S&P GSCI commodity index*¹⁸. Le Blé quant à lui, représente 3,8%, la plus grande proportion de l'indice sectoriel concernant l'agriculture qui vient juste après

17. Base de données mondiales sur les actions, obligations, indices boursiers, taux de change et taux d'intérêt, indicateurs économiques, matières premières, produits dérivés, séries macro-économiques, contrats à terme et options.

18. Statistiques du 31 décembre 2010, publiées par la société Standard and Poor.

le secteur de l'énergie en termes de poids (17,4%) dans la composition de l'indice global *S&P GSCI commodity Index*.

Le poids du Pétrole et du Blé dans la production mondiale et leurs impacts en termes de volatilité sur l'économie mondiale expliquent notre intérêt pour ces types de matières premières. Nous avons un intérêt particulier pour le Blé dont la mesure du risque n'a jamais été évaluée à notre connaissance par les modèles de risque de marché basés sur la méthode des excès. Nous portons également un intérêt sur les actions individuelles (Socgen et Peugeot) et les indices actions à travers les indices CAC 40 et S&P 500 puisqu'ils représentent généralement l'essentiel du portefeuille des institutions financières, donc très exposées à ce type d'actifs financiers. La disponibilité des données historiques suffisamment longues sur ces actifs pour pouvoir tester les modèles de risque de marché est aussi une des raisons du choix de ces actifs.

Par ailleurs, il existe d'autres actifs financiers comme le taux de change, le taux d'intérêt et les instruments dérivés (contrats financiers à terme, contrats d'échange sur taux d'intérêt ou sur devises, options sur actions, dérivés de crédit) qui sont hors du champs de cette étude mais qui mériteraient une attention particulière.

Tout au long de cette étude, nous supposons un investissement de 1 Euro dans chaque actif et dans le portefeuille équilibré composé des indices actions (CAC 40 et S&P 500) et matières premières (Pétrole et Blé). La modélisation des pertes potentielles est basée sur les rentabilités logarithmiques R_t .

$$R_t = \ln \left(\frac{C_t}{C_{t-1}} \right) \quad (1.1)$$

où C_t est le cours de l'actif à l'instant t .

Le tableau 1.1 présente l'analyse descriptive des rentabilités quotidiennes des actions et des matières premières. Il nous donne un aperçu des caractéristiques statistiques de la distribution des actifs du portefeuille d'étude.

	CAC 40	Socgen	Peugeot	S&P 500	Pétrole	Blé
Minimum	-0,095	-0,169	-0,163	-0,095	-0,384	-0,099
Maximum	0,106	0,227	0,129	0,110	0,136	0,088
Moyenne	0,000	0,000	0,00	0,000	0,000	0,000
Ecart-type	0,014	0,023	0,021	0,011	0,022	0,016
Skewness	-0,034	0,200	-0,013	-0,267	-1,069	0,074
Kurtosis	8,206	11,203	7,303	12,446	21,886	5,648
J-B test	6762(0,001)	16829(0,001)	4618(0,001)	22233(0,001)	9014(0,001)	1754(0,001)

TAB. 1.1 – **Statistique descriptive des rentabilités des actifs**

Les valeurs en gras sont significativement différentes de zéro au seuil de 5%. Les valeurs entre parenthèses sont des probabilités associées aux statistiques de Jarque Bera. Le test de Jarque Bera rejette l'hypothèse de normalité des rentabilités des actifs du portefeuille d'étude. La statistique descriptive est effectuée sur un historique de 5810 rentabilités journalières pour les actifs CAC 40, Socgen et Peugeot et de 5801 rentabilités journalières pour les actifs S&P 500, Pétrole et Blé. L'historique couvre la période de janvier 1988 à décembre 2010.

Nous observons à première vue une volatilité élevée pour les matières premières et les actions individuelles suivies par les indices actions. La volatilité est plus élevée (environ 2%) pour le Pétrole, le Blé, l'action Socgen et l'action Peugeot. Elle est plus faible (environ 1%) pour les indices actions CAC 40 et S&P 500. Ce niveau faible de volatilité sur les indices actions montre les bénéfices de leur diversification.

Le Skewness ou coefficient d'asymétrie mesure l'asymétrie de la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle. Nous observons que le S&P 500 et le Pétrole présentent un skewness significativement¹⁹ négatif au seuil de 5%. Cela signifie que ces actifs financiers ont enregistré plus de rentabilités négatives que de rentabilités positives. A l'inverse, l'action Socgen et le Blé ont enregistré plus de rentabilités positives que de rentabilités négatives.

Le kurtosis ou coefficient d'aplatissement mesure la disposition des masses de probabilité autour de leur moyenne. Il est égal à 3 pour une distribution de rentabilité suivant une loi normale. Nous constatons que les six actifs exhibent un kurtosis supérieur à 3 et significatif au seuil de 5%. Cela signifie que leur distribution est plus pointue que celle de la loi normale c'est-à-dire qu'elle possède plus de valeurs extrêmes. Cette caractéristique est plus marquée pour le Pétrole signalant un risque extrême très élevé.

Le test de Jarque Bera (J-B test) confirme l'hypothèse selon laquelle les distributions

19. L'erreur standard pour le skewness est de 0,03 et celle du Kurtosis est de 0,06 pour les actifs du portefeuille. Ces valeurs sont calculées suivant les formules de Tabachnik et Fidell (1996).

de rentabilités journalières des actifs étudiés entre janvier 1988 et décembre 2010 pour les actions et matières premières, ne sont pas gaussiennes puisque les probabilités associées aux statistiques sont toutes inférieures au seuil d'erreur de 5%.

Les actions et les matières premières considérées dans cette étude affichent des distributions à queues épaisses. Les données de l'étude ne suivent pas la distribution gaussienne. Ces résultats confirment les conclusions des études menées sur l'hypothèse de normalité de la majorité des actifs financiers. Les travaux pionniers de Mandelbrot (1963) et de Fama (1965) ont montré que les distributions de rentabilités des actifs financiers présentent des caractéristiques d'asymétrie, de clustering de volatilité et de queues épaisses.

Face à ces observations sur le portefeuille d'étude, il apparaît particulièrement important d'analyser la distribution suivie par les rentabilités des actifs afin de mieux évaluer leurs risques. Dans cette perspective, la théorie des valeurs extrêmes devrait permettre d'appréhender le type de distribution des rentabilités et de mieux quantifier les pertes potentielles qui peuvent être enregistrées sur ces différents actifs financiers. Nous testons donc, la théorie des valeurs extrêmes parallèlement aux modèles internes de risque utilisés par les établissements financiers.

1.2 Méthodes de mesure de risque de marché

La quantification du risque est un souci majeur des acteurs financiers. En effet, une meilleure quantification du risque permet de savoir combien un investisseur peut perdre sur son portefeuille dans les périodes de forte ou de faible volatilité sur un horizon de temps donné.

En considérant un portefeuille à un instant donné, le risque est une variation négative de la valeur de ce portefeuille dans le futur. Le risque ne se caractérise pas par une perte absolue, mais par une perte relative. Depuis très longtemps, la mesure naturelle du risque était la volatilité (mesure statistique de l'écart-type). Par exemple, dans le modèle de sélection de portefeuille de Markowitz, l'agent maximise son espérance de gain pour un niveau donné de volatilité. Cette vision de la mesure statistique du risque a beaucoup évolué depuis le début des années quatre vingt-dix. La banque Bankers Trust fut l'une

des premières institutions à utiliser la notion de Value at Risk à la fin des années quatre-vingts aux Etats-Unis, mais c'est principalement la banque JP Morgan qui dans les années quatre-vingt-dix a popularisé ce concept notamment grâce à son système *RiskMetrics*²⁰. Le Comité de Bâle chargé de la réglementation bancaire apporte en 1996 des amendements à son premier accord de 1988 afin de prendre en compte le risque de marché dans le calcul de l'exigence des fonds propres. Cet amendement laisse le choix aux établissements financiers entre l'utilisation de l'approche standardisée proposée par le Comité de Bâle et le développement de leurs propres modèles internes de mesure de risque de marché.

1.2.1 Mesure de risque de marché

Value at Risk

La Value at Risk est définie comme la perte maximale que peut subir un portefeuille pendant une période de temps donnée avec un seuil de confiance donné. D'un point de vue statistique, la VaR n'est rien d'autre que le quantile de la distribution de pertes et profits potentiels pour un horizon donné et à un seuil de confiance donné. La volatilité et la mesure quantile, dans un monde gaussien, sont parfaitement cohérentes, puisque nous pouvons exprimer l'une en fonction de l'autre. Dans un monde non gaussien, il est difficile d'établir cette relation et il n'y a plus de cohérence entre ces deux mesures de risque.

Il existe deux notions de VaR : la VaR relative et la VaR absolue. La VaR relative est égale à la perte en terme nominal, exprimée en unité monétaire, par rapport à la moyenne de la valeur future de la position. La VaR absolue quant à elle, est calculée en terme de perte en unité monétaire sans tenir compte de la valeur espérée de la position.

Soit X la variable aléatoire représentant les pertes et profits potentiels du portefeuille. Notons F la distribution de probabilité de X . Ainsi, nous pouvons avoir :

$$VaR_{\alpha}(X) = F_{\alpha}^{-1}(X) \tag{1.2}$$

Pour calculer cette valeur de VaR, trois éléments sont nécessaires à connaître : le seuil de confiance α , l'horizon de prévision et la distribution de probabilité F .

20. Système de mesure de risque basé sur la loi normale.

Nous pouvons assimiler le seuil de confiance à un indicateur de tolérance pour le risque. Par exemple, une couverture à 95% est plus exigeante et donc plus coûteuse qu'une couverture à 90%. Caractériser la distribution de probabilité exige aussi de définir l'horizon de prévision. Une couverture à 10 jours n'est pas la même qu'une couverture à un mois ou à un trimestre.

La combinaison du seuil de confiance et de l'horizon de prévision permet de mesurer le degré de couverture. Le plus souvent, le degré de couverture est exprimé en temps de retour (que nous notons par TR), une notion beaucoup plus pertinente pour un gestionnaire de risques (Roncalli (2009)). En effet, pour un gestionnaire, couvrir un risque à 4 ans ou à 40 ans est plus compréhensible que couvrir un risque à 99% ou à 99,9%. Le temps de retour mesure la durée moyenne entre deux dépassements de la Value at Risk. Ce temps de retour est en fonction de l'horizon de prévision h et du niveau de confiance α ; il est donné par :

$$TR(VaR) = \frac{h}{1 - F(F^{-1}(\alpha))} = \frac{h}{1 - \alpha} \quad (1.3)$$

Le niveau de confiance peut être défini par la réglementation (donnée externe) ou par l'établissement financier (donnée interne). Dans ce dernier cas, il mesure la tolérance de l'établissement financier vis-à-vis du risque qu'il prend, et on peut l'interpréter comme l'objectif de rating de l'établissement financier. Par exemple, les actionnaires d'un établissement financier noté AAA auront une exigence de couverture plus élevée que ceux d'un établissement financier noté BBB.

Le choix de l'horizon de prévision du risque est important dans la mesure où il permet de tenir compte principalement de la liquidité et de la stabilité de la composition du portefeuille. En effet, l'horizon doit être relativement plus long pour un portefeuille peu liquide ou pour lequel il n'y aurait pas de marchés de grande liquidité. Cette liquidité est définie par Jorion (2000) comme la durée nécessaire pour effectuer des transactions de volumes normaux afin de liquider la position concernée. Parmi les hypothèses sous-jacentes dans les modèles de VaR, nous trouvons celle de la stabilité de la composition de la position.

Dans cette hypothèse, le gestionnaire de risque doit choisir un horizon qui est concordant avec la période de temps durant laquelle la position sur le portefeuille est réputée être stable. Les autorités de contrôle bancaire ont choisi 10 jours ouvrés comme l'horizon de temps de mesure de la VaR pour la détermination des fonds propres réglementaires. Cette durée permet aux banques de prendre des mesures correctives en cas de difficultés sur les marchés.

Le troisième déterminant de la Value at Risk est la distribution de probabilité. Son choix est crucial pour une modélisation fiable des risques. Choisir une distribution normale pour un actif financier exposant une distribution à queue épaisse conduit à sous-estimer le risque de cet actif et inversement. Donc, il est important de choisir les modèles de mesure des risques en fonction des caractéristiques statistiques des actifs concernés.

Expected Shortfall

Plusieurs études ont été menées par les chercheurs et les praticiens afin de définir une mesure cohérente du risque car la Value at Risk est considérée comme une mesure non cohérente du risque. La plus importante de ces études est celle qui a été menée par Artzner et al. (1999) dans laquelle une mesure cohérente du risque est censée respecter quatre axiomes : l'invariance par translation, la sous additivité, l'homogénéité positive et la monotonie.

Pour illustrer ces axiomes, considérons X et Y deux actifs financiers, un nombre réel $m > 0$, k une constante et $\rho(\cdot)$ une mesure de risque.

Le premier axiome est celui d'invariance par translation, c'est-à-dire que l'ajout (ou la soustraction) d'un montant initial k à la position d'un portefeuille ou d'un actif et son investissement dans un actif sans risque conduirait à une diminution (ou une augmentation) de la position à mesure du montant initial k .

$$\rho(X + k) = \rho(X) - k$$

Le deuxième axiome de sous additivité stipule que la somme des risques calculés séparément sur les composantes d'un portefeuille est supérieure ou égale au risque global du portefeuille. Cette sous additivité est due à l'effet de diversification.

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

Le troisième axiome ou celui de l'homogénéité positive signifie que le risque résultant de la multiplication d'une position risquée par un scalaire est égal au produit de ce scalaire par la quantité de risque de cette position.

$$\rho(Xm) = m\rho(X)$$

Enfin, le quatrième axiome appelé monotonie stipule que pour deux variables aléatoires X et Y , si X est inférieur ou égal à Y , le risque sur Y doit être inférieur ou égal à celui de X . Cela est dû au fait que, pour chaque quantile, la distribution des pertes de X excède le montant de la perte dans la distribution de Y .

$$\rho(Y) \leq \rho(X) \quad \text{si} \quad X \leq Y$$

Selon Artzner et al. (1999), la Value at Risk ne respecte pas l'axiome de la sous additivité. En effet, il y a des situations où la VaR calculée sur un portefeuille n'est pas inférieure à la somme des VaR de chacun des actifs composant le portefeuille. Par conséquent, la Value at Risk ne tient pas compte de l'effet de diversification du portefeuille.

Une autre critique et non la moindre à l'encontre de la Value at Risk est qu'elle ne donne aucune information sur la taille des pertes potentielles. En effet, nous ne connaissons pas avec la mesure de VaR les pertes attendues une fois que la VaR est dépassée. La connaissance de la perte moyenne au-delà de la VaR paraît essentielle pour les gestionnaires de risques pour savoir ce qu'ils risquent de perdre une fois que la VaR est dépassée.

Pour répondre à ces questions de sous additivité et de la moyenne au-delà de la VaR, les mêmes auteurs ont mis en place la mesure TCE (Tail Conditional Expectation). La TCE est définie comme l'espérance conditionnelle en cas de dépassement de la VaR. Elle est une mesure cohérente du risque contrairement à la Value at Risk.

Elle peut être formulée comme suit :

$$TCE_{\alpha} = E(X|X \leq -VaR_{\alpha}) \quad (1.4)$$

Cependant, Acerbi and Tasche (2002) montrent que la TCE ne satisfait pas la propriété de sous additivité dans le cas d'une distribution discontinue. Ils introduisent ainsi l'Expected Shortfall comme une mesure cohérente et alternative à la VaR. L'Expected Shortfall est par définition la moyenne de la queue de distribution des pertes et profits. Elle est donnée par l'expression :

$$ES_{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} F^{-1}(p) dp \quad (1.5)$$

où $p \in (0, \alpha]$

Il faut noter que la mesure ES est identique à la mesure TCE pour les distributions continues.

Comme on peut le remarquer les deux mesures (VaR et ES) de risque de marché sont basées sur une distribution de rentabilités F . Cette distribution est à spécifier pour déterminer les pertes potentielles maximales au seuil de confiance α et sur un horizon de temps donné. Dans cette étude nous considérons la distribution empirique pour la méthode de Simulation Historique, la distribution normale pour la méthode variance-covariance et la distribution de Pareto généralisée pour la méthode des excès. L'objectif est de tester la performance de la distribution de Pareto généralisée comparativement aux deux modèles internes de mesure de risque.

1.2.2 Méthode des excès : la distribution de Pareto généralisée

La théorie des valeurs extrêmes s'intéresse uniquement à la modélisation des queues de distribution à partir des lois spécifiques propres. Cela marque une différence importante

comparativement aux théories qui font une modélisation totale de la distribution. Elle est basée principalement sur deux approches : l'approche du *Block Maxima* (cf. Annexe C) et l'approche *Peak Over Threshold* (POT) ou encore appelée méthode des excès que nous utilisons dans cette étude. L'approche *Block Maxima* (BM) est basée sur la distribution de *Generalized Extreme Value*. Elle choisit les extrêmes par blocs pour modéliser les maxima et minima d'échantillons de grande taille.

L'approche POT basée sur la distribution de Pareto généralisée ou en anglais *Generalized Pareto Distribution* (GPD) fournit une méthode pour modéliser les excès au-delà d'un seuil relativement élevé. Contrairement à l'approche *Block Maxima*, la méthode POT exige moins de paramètres à estimer et est préférable quand on a à faire à peu de données historiques.

Le mode de construction de la série des extrema dans la méthode POT permet d'obtenir des estimateurs plus efficaces qu'avec la méthode du *Block Maxima* (Fromont (2005)). En effet, certaines données sélectionnées par la méthode de sélection par blocs peuvent ne pas représenter de véritables variables extrêmes puisqu'elles n'appartiennent pas aux queues de la distribution. Inversement, certaines données appartenant aux queues de la distribution peuvent ne pas être prises en compte dans la méthode du *Block Maxima*.

Supposons X_1, X_2, \dots, X_n , des variables aléatoires indépendamment et identiquement distribuées ayant pour fonction de distribution $F(x)$ et un seuil u relativement élevé au-delà duquel sont déterminés les excès. Considérons Y_1, Y_2, \dots, Y_n , les excès à valeurs positives définis par l'expression $Y_i = X_i - u$ avec $i = 1, 2, \dots, n$. Ainsi, nous pouvons définir la fonction de répartition des excès de pertes au-delà du seuil u , notée $F_u(y)$, par l'expression :

$$F_u(y) = P(X - u \leq y / X > u) \quad (1.6)$$

$$F_u(y) = P(X - u \leq y / X > u) \quad (1.7)$$

$$F_u(y) = \frac{F(y+u) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (1.8)$$

Cette formule donne la probabilité des excès de pertes sachant que les valeurs de X sont au-delà du seuil u . La distribution de X est inconnue et peut suivre n'importe quel type de distributions (normale, lognormale, student t ou Bêta). L'estimation de la loi des valeurs extrêmes à partir de la fonction parente F pose une difficulté majeure car, cette dernière n'est pas connue. Pour contourner cette limite, les chercheurs (Fisher-Tippet (1928)) se sont intéressés au comportement asymptotique de la variable aléatoire y . Il s'agit de déterminer la loi vers laquelle les valeurs extrêmes convergent quand n tend vers l'infini afin de remplacer F par cette dernière pour les plus grandes valeurs de n .

Les théorèmes de Fisher-Tippet (cf. Annexe C), de Balkema and Haan (1974) et Pickands (1975) ont permis de caractériser la loi de la distribution des valeurs extrêmes sans que celle-ci soit conditionnée par la loi de la variable parente. Pour déduire la loi asymptotique dans la méthode des excès, on applique le théorème de Balkema-Pickands-de Haan.

Théorème de Balkema-Pickands-de Haan : $F_u(y)$ appartient au domaine d'attraction de la théorie des valeurs extrêmes s'il existe un seuil u relativement élevé tel que :

$$\lim_{u \rightarrow X_F} \sup_{0 \leq y < X_F - u} |F_u(y) - G_{\xi, \beta}(y)| = 0 \quad (1.9)$$

En d'autres termes, ce théorème énonce que pour un seuil relativement élevé, la distribution $F_u(y)$ converge vers une distribution de Pareto généralisée ou Generalized Pareto Distribution (GPD) dont la fonction de répartition $G_{\xi, \beta}(y)$ de paramètres (ξ, β) est donnée par :

$$G_{\xi,\beta}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{y}{\beta})^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{y}{\beta}) & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

où $y \geq 0$ si $\xi \geq 0$ et $0 \leq y \leq -\beta/\xi$ pour $\xi < 0$.

L'équation (1.10) dérive de la fonction de densité $g_{\xi,\beta}(y)$ définie par :

$$g_{\xi,\beta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} (1 + \xi \frac{y}{\beta})^{-1-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\beta} \exp(-\frac{y}{\beta}) & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Cette distribution a seulement deux paramètres à estimer : un paramètre de dispersion β et un paramètre de forme ou indice de queue ξ . Si $\xi < 0$, les queues de la distribution sont bornées, si $\xi = 0$, elles décroissent de manière exponentielle et si $\xi > 0$, les queues de distribution sont épaisses. Les cas généralement rencontrés sur les données financières sont les deux derniers et plus particulièrement le dernier cas ($\xi > 0$) car il correspond aux données ayant une distribution à queue épaisse.

L'indice de queue ξ informe sur le poids des queues dans la distribution parente. En effet, un indice de queue supérieur à zéro signifie que la probabilité d'occurrence de pertes extrêmes (dans le cas de la queue gauche) est plus importante que ce que prévoit la loi normale. Selon Longin (1996) et McNeil (1999), le risque extrême d'un investissement est d'autant plus important que l'indice de queue estimé sur la queue gauche de la distribution de rentabilités est élevé.

La loi asymptotique étant définie, nous pouvons estimer les paramètres de la distribution de Pareto généralisée. Ces paramètres permettent de déterminer les quantiles qui traduisent les pertes potentielles maximales d'un investissement pour un niveau de confiance donné et sous certaines conditions de marché (normale ou extrême).

1.2.3 Estimation des paramètres de la distribution de Pareto généralisée

Les paramètres ξ et β sont généralement estimés par les méthodes de maximum de vraisemblance et semi-paramétrique. Dans cette étude, nous utilisons la première méthode parce qu'elle est plus fiable comparativement à la méthode sémi-paramétrique (cf. Dowd (2005), p. 197).

La méthode de maximum de vraisemblance sélectionne les estimateurs $\hat{\xi}$ et $\hat{\beta}$ qui maximise la fonction de vraisemblance

$$L(\hat{\xi}, \hat{\beta}/y) = \max_{\xi, \beta} L(\xi, \beta/y) = \max_{\xi, \beta} \prod_{i=1}^n g_{\xi, \beta}(y_i) \quad (1.12)$$

où $g_{\xi, \beta}(y_i)$ est la fonction de densité et $y = y_1, \dots, y_n$ des variables aléatoires (pertes journalières) positives. Nous maximisons la fonction log vraisemblance de la distribution de Pareto généralisée :

$$l(\hat{\xi}, \hat{\beta}/y) = \max_{\xi, \beta} L(\xi, \beta/y) = \max_{\xi, \beta} \sum_{i=1}^n \log g_{\xi, \beta}(y_i) \quad (1.13)$$

La fonction log vraisemblance $L(\xi, \beta/y)$ est le logarithme de la densité jointe $g_{\xi, \beta}(y_i)$ des n observations. Utilisant les propriétés du logarithme, $L(\xi, \beta/y)$ se simplifie en donnant :

$$l(\xi, \beta/y) = \begin{cases} -n \log \beta - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \frac{\xi y_i}{\beta}\right) & \text{si } \xi \neq 0 \\ -n \log \beta - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n y_i & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

1.2.4 Mesure de risque par la distribution de Pareto généralisée

Dans cette sous-section, nous exposons le calcul des quantiles à partir de la distribution de Pareto généralisée afin de mesurer la Value at Risk et l'Expected Shortfall (cf. Embrechts et al. (1997) et McNeil and Frey (2000)).

Nous commençons par réarranger le coté droit de l'équation (1.8) et nous déterminons la distribution des excès à partir de la distribution parente $F(x)$:

$$F(x) = (1 - F(u))G_{\xi,\beta}(x - u) + F(u), \quad \text{avec } x > u \quad (1.15)$$

Pour pouvoir utiliser cette équation, nous avons besoin d'estimer $F(u)$, la proportion des observations n'excédant pas le seuil. Le meilleur estimateur de $F(u)$ est la proportion des observations en dessous du seuil u c'est à dire $(N - N_u)/N$, où N est le nombre d'observations et N_u le nombre d'observations excédant le seuil u . Nous pouvons maintenant remplacer $F(u)$ par cet estimateur et introduire l'équation (1.10) dans l'équation (1.15) pour obtenir l'estimateur de la queue de distribution :

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{N} [1 + \hat{\xi}(\frac{x - u}{\hat{\beta}})]^{-1/\hat{\xi}} \quad (1.16)$$

Le quantile de la distribution de Pareto généralisée est donnée par la variable x de l'équation (1.16) que nous considérons comme le quantile de la VaR. En prenant l'inverse de l'équation (1.16), nous pouvons extraire le quantile de la Value at Risk :

$$VaR_\alpha = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} [(\frac{N}{N_u}(\alpha))^{-\hat{\xi}} - 1] \quad (1.17)$$

où α est le niveau de risque choisi, $\hat{\xi}$ et $\hat{\beta}$ sont les estimateurs des paramètres ξ et β .

Nous décrivons également l'Expected Shortfall considérée comme une mesure cohérente du risque. L'Expected Shortfall ou la perte moyenne attendue au-delà de la VaR pour une distribution de Pareto généralisée peut être écrite en fonction de la VaR par l'expression suivante :

$$ES_\alpha = E(X|X > VaR_\alpha) = VaR_\alpha + E(X - VaR_\alpha|X > VaR_\alpha)$$

L' ES_α est la somme du seuil VaR_α et la moyenne des excès au-delà de ce seuil.

Pour une variable aléatoire X suivant une distribution de Pareto généralisée, l'estimateur de la moyenne des excès au-delà du seuil u (sachant que $\xi < 1$) est donné par :

$$E(X - u | X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}, \quad \text{avec } \beta + \xi u > 0 \quad (1.18)$$

Supposons que les excès au-delà du seuil u aient la même distribution c'est-à-dire $(X - u) | X > u$ suivent une distribution de Pareto généralisée et notons que $VaR_{\alpha > u}$, nous pouvons écrire :

$$(X - VaR_{\alpha}) | X > VaR_{\alpha} = ((X - u) - (VaR_{\alpha} - u)) | (X - u) > (VaR_{\alpha} - u)$$

Il peut être démontré que

$$(X - VaR_{\alpha}) | X > VaR_{\alpha} \sim G_{\xi, \beta + \xi(VaR_{\alpha} - u)},$$

donc, les excès au-delà d'un seuil élevé VaR_{α} suivent aussi la distribution de Pareto généralisée avec le même indice de queue ξ mais de paramètre de dispersion différent. Nous pouvons alors utiliser l'équation 1.18 pour obtenir l'expression de la moyenne des excès au-delà de la VaR par :

$$E(X - VaR_{\alpha}) | X > VaR_{\alpha} = \frac{\beta + \xi(VaR_{\alpha} - u)}{1 - \xi} \quad (1.19)$$

Ainsi, l'expression de l'Expected Shortfall peut être donnée par la formule suivante :

$$ES_{\alpha} = VaR_{\alpha} + \frac{\beta + \xi(VaR_{\alpha} - u)}{1 - \xi} = \frac{VaR_{\alpha}}{1 - \xi} + \frac{\beta - \xi u}{1 - \xi} \quad (1.20)$$

La modélisation inconditionnelle des pertes potentielles utilise la méthodologie présentée dans cette section. Pour pouvoir appliquer cette méthodologie, nous avons besoin de construire les rentabilités extrêmes sur lesquelles seront basées les mesures de la VaR et l'ES.

1.3 Modélisation des rentabilités extrêmes

Les paramètres de la distribution de Pareto généralisée sont estimés en commençant par le choix du seuil u qui détermine les rentabilités extrêmes sur lesquelles se repose cette estimation. Nous avons donc besoin de choisir un seuil u qui détermine le nombre d'observations N_u au-delà du seuil u . Le choix de u doit maintenir un bon équilibre entre variance et biais. L'objectif est de choisir un seuil permettant d'obtenir une série d'excès suffisamment importante pour que l'estimateur converge, mais suffisamment petite pour éviter qu'un biais n'apparaisse²¹. En choisissant un seuil relativement faible, le risque est d'introduire certaines observations centrales dans la série d'extrema : l'indice de queue est plus précis (moins de variance) mais biaisé. Cependant, en fixant un seuil relativement élevé, l'indice de queue est moins biaisé mais également moins robuste.

Il n'existe pas à ce jour, de consensus quant à la méthode de construction de séries des excès. Par exemple, Gavin (2000) et Neftci (2000) ont choisi de retenir arbitrairement respectivement 10% et 5% de l'échantillon alors que McNeil et al. (2005) ont déterminé ce seuil par la courbe de la moyenne des excès (*Mean Excess plot*). Fromont (2005) détermine ce seuil par le graphique de Hill ou *Hill plot*.

Dans cette étude, nous testons les deux méthodes de détermination des séries d'extrema. Ces deux techniques permettront de renforcer nos jugements sur les seuils à retenir pour assurer un équilibre entre biais et variance.

1.3.1 Sélection du seuil par le graphique de Hill

Le graphique de Hill se construit à la fois sur le nombre d'observations et l'estimation de l'indice de queue communément appelé l'estimateur de Hill. Il permet de déterminer le nombre d'observations à partir duquel se forment les valeurs extrêmes. La valeur de l'observation correspondante à ce nombre constitue le seuil. L'estimateur de Hill est basé sur la différence entre la moyenne des N_u excès situés au-delà du seuil u marquant le début de la zone des extrêmes et le N_u ième plus grand excès. Le graphique de Hill se définit par :

21. Pour plus de détails sur le choix du seuil, lire le chapitre 6 de Embrechts et al. (1997).

$$\{(N_u, \xi_{N_u, N}^H), 1 \leq N_u \leq N - 1\}$$

où N_u est le nombre d'observations au-delà du seuil u et $\xi_{N_u, N}^H$, l'estimateur de Hill de l'indice de queue de la loi GPD tel que :

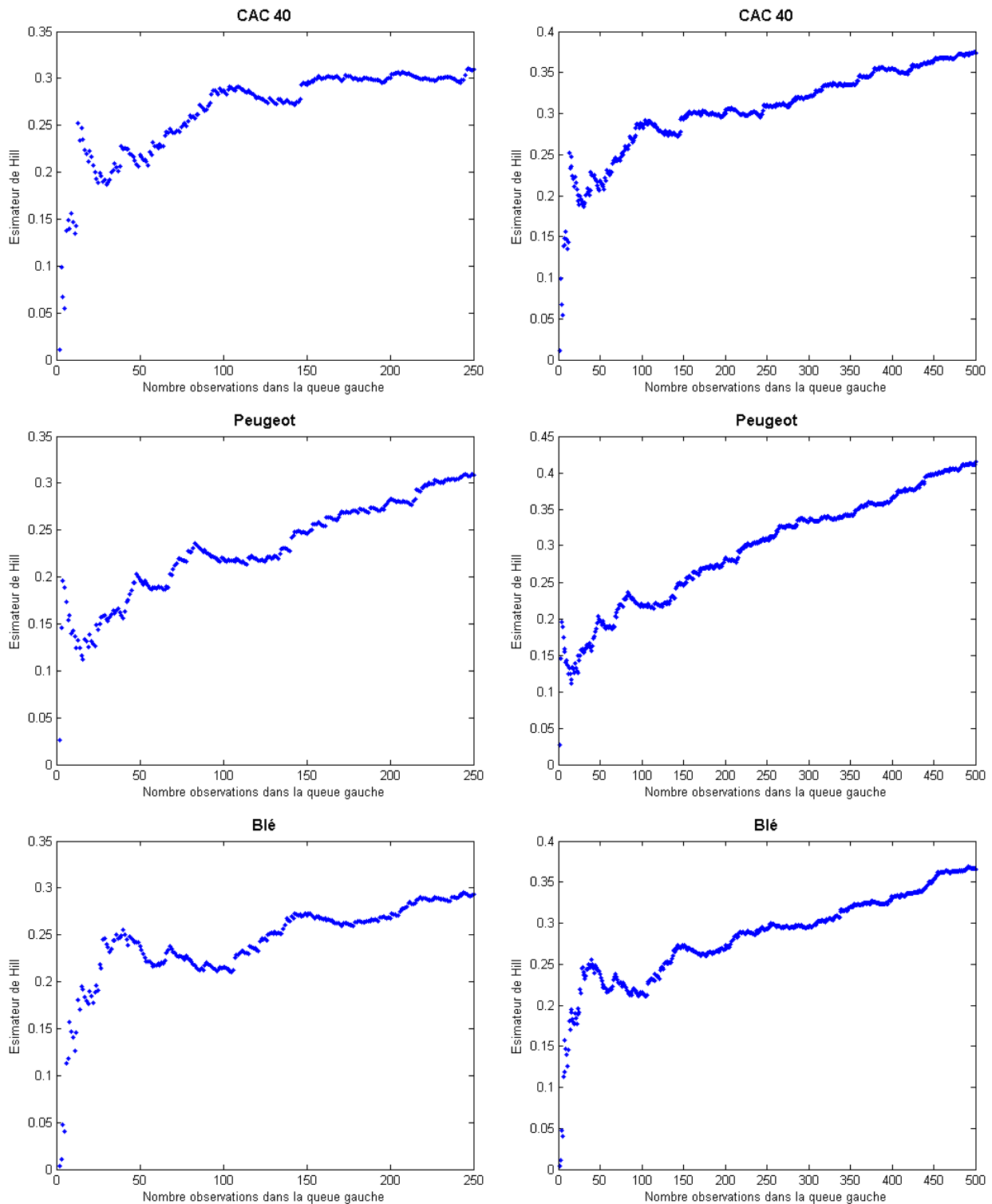
$$\xi_{N_u, N}^H = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} \log\left(\frac{Y_{i, N}}{Y_{N_u, N}}\right) \quad (1.21)$$

où $Y_{i, N}$ représente les excès au-delà du seuil u .

Il faut noter que l'estimateur de Hill ne s'applique qu'aux distributions à queues épaisses c'est-à-dire les distributions ayant un indice de queue positif. Cela constitue une limite d'application du graphique de Hill si nous avons à faire à des distributions normales ou des distributions à queues fines ayant un indice queue inférieur à zéro. En utilisant cette méthodologie, le choix du seuil se fait en observant la stabilité de la valeur de l'indice de queue. Par conséquent, la stabilité de l'estimateur de Hill est d'une grande importance pour déterminer un seuil optimal. En effet, le nombre d'excès correspondant au seuil est déterminé par l'observation sur le graphique de la zone de stabilité (zone où la valeur de l'indice de queue ne varie pas assez) de la valeur de l'indice de queue. Le nombre d'observations à retenir correspond au début de la zone de stabilité.

En appliquant la méthode *Hill plot* sur le portefeuille d'étude, nous rencontrons un problème de choix du nombre d'observations à partir duquel nous pourrions estimer stable l'indice de queue. Par exemple, sur le Graphique 1.1 concernant le Blé, le graphique ne donne aucune idée sur le nombre de rentabilités extrêmes à retenir, car la stabilité de l'estimateur est difficile à établir. Cela est valable aussi pour les indices actions CAC 40 et S&P 500, les actions Socgen et Peugeot et le pétrole. Ce choix difficile du seuil par le *Hill plot* a été illustré par Embrechts et al. (1997) et Dowd (2005) qu'ils qualifient de *Hill horror plot*. Ils démontrent que la stabilité de l'estimateur de Hill en faisant varier le nombre d'observations n'est pas toujours acquise. Cette instabilité de l'estimateur de Hill (cf. Graphique 1.1) est bien vérifiée sur les actifs du portefeuille d'étude. Nous observons

sur l'indice CAC 40, sur l'action Peugeot et sur le Blé qu'en passant de 250 observations extrêmes à 500 observations extrêmes, l'estimateur de Hill devient encore plus instable au point de ne plus permettre de choisir le seuil optimal recherché.



GRAPH. 1.1 – Graphique de Hill

La sélection du nombre de rentabilités extrêmes se fait à partir du point où la valeur de l'estimateur de Hill commence à être stable. Par exemple sur le CAC 40, on peut sélectionner les 100 premières rentabilités les plus extrêmes dans la queue gauche. Le nombre 100 correspond à la valeur 0,3 de l'estimateur de Hill qui varie moins après l'intersection (100 ; 0,3). La stabilité de l'estimateur de Hill n'est plus assurée quand on passe de 250 à 500 observations dans la queue gauche.

Pour pallier à ce problème de choix du seuil sur le graphique de Hill, nous choisissons la méthode *Mean Excess plot* pour une meilleure construction des rentabilités extrêmes sur lesquelles seront basées les estimations de paramètres de la loi de Pareto généralisée.

1.3.2 Sélection du seuil par le graphique de la moyenne des excès

Supposons X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendamment et identiquement distribuées, de fonction de répartition F et introduisons la statistique d'ordre : $X_1 \geq X_2 \geq X_3, \dots, \geq X_n$. La fonction de la moyenne des excès est par définition la somme des excès dépassant un certain seuil élevé divisé par le nombre d'observations qui dépassent ce seuil. L'estimateur empirique de la fonction de la moyenne des excès $e_n(u)$ est défini par l'expression suivante :

$$e_n(u) = \frac{1}{N_u} \sum (X_i - u), \quad u > 0 \quad (1.22)$$

Nous rappelons que pour une variable aléatoire X suivant une distribution de Pareto généralisée, l'estimateur de la moyenne des excès de la GPD est donné par :

$$e_n(u) = E(X - u/x > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}, \quad \xi < 1 \quad (1.23)$$

où $0 \leq u < \infty$ si $0 \leq \xi < 1$ et $0 \leq X - u \leq -\beta/\xi$ si $\xi < 0$.

La courbe de la moyenne des excès est définie comme suit :

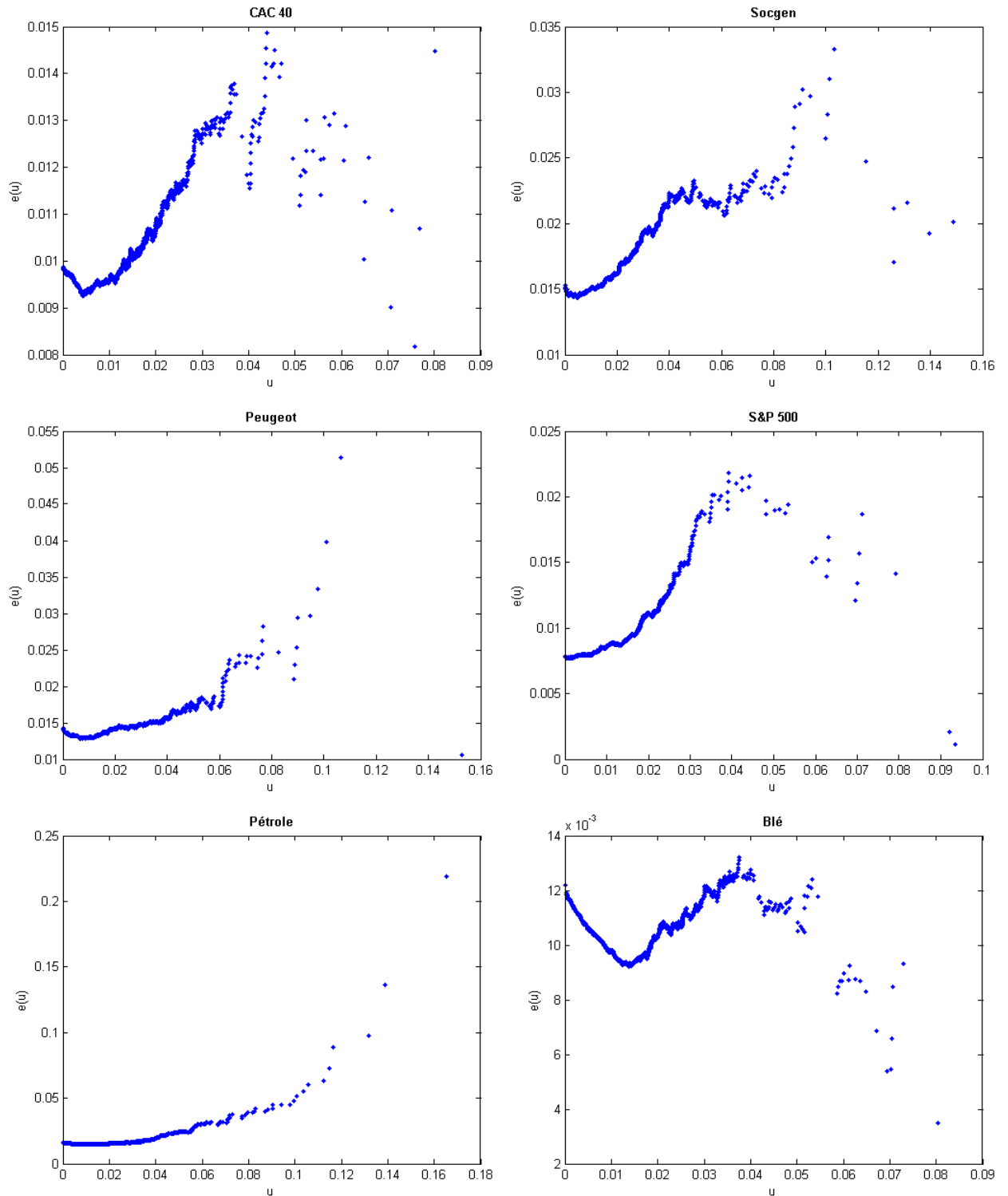
$$\langle (u, e_n(u)), X_{n:n} < u < X_{1:n} \rangle$$

où $X_{1:n}$ et $X_{n:n}$ sont respectivement le maximum et le minimum de l'échantillon.

Le choix du seuil se fait par rapport au comportement de la courbe de la moyenne des excès. En effet, si le *Mean Excess plot* semble avoir un comportement linéaire au dessus d'une certaine valeur positive de u , cela signifie que les excès au-delà de ce seuil suivent une distribution de Pareto généralisée. En pratique, il s'agit de repérer les valeurs de u à partir desquelles $e_n(u)$ est approximativement linéaire. Graphiquement, cela se traduit

par un changement de la pente de la courbe qui ensuite reste stable.

Nous observons sur le Graphique 1.2, par exemple pour la queue gauche de l'indice CAC 40 que la courbe devient presque linéaire quand le seuil u est autour de 0,02. La courbe de la moyenne des excès devient linéaire autour de 0,018 pour le S&P 500 et le Blé, de 0,034 pour l'action Socgen, de 0,032 pour l'action Peugeot et de 0,035 pour le Pétrole. La valeur de ces seuils montre des niveaux de rentabilités à partir desquels on peut considérer que les marchés financiers entrent dans une phase de forte volatilité. En rapportant le nombre de valeurs extrêmes au delà de ces seuils déterminés par la méthode *Mean Excess plot* au nombre d'observations dans les queues de distribution, nous obtenons en moyenne un pourcentage de valeurs extrêmes de 10%. Ces résultats confirment le choix de 10% que Gavin (2000) a utilisé pour la construction des valeurs extrêmes. Il est recommandé d'utiliser cette méthode graphique pour renforcer nos jugements sur les valeurs extrêmes que peuvent enregistrer les actifs, car le seuil u n'est pas toujours unique sur la courbe de la moyenne des excès.



GRAPH. 1.2 – Graphique de la moyenne des excès

La sélection du seuil se fait à partir du moment où la courbe $e(u)$ semble avoir un comportement linéaire au dessus d'une certaine valeur positive de u . Par exemple, sur le S&P 500, le seuil 0,018 peut être retenu comme seuil de formation des rentabilités extrêmes.

Le test de la méthode *Hill plot* a permis de constater qu'elle n'est pas adaptée pour la formation des valeurs extrêmes des données de l'étude. Quant à la méthode *Mean Excess plot*, le choix du seuil sur le graphique peut être difficile. Cependant, les seuils qui sont facilement déterminés sur le *Mean Excess plot* ont généralement 10% de valeurs extrêmes au-delà de ces seuils. Ainsi, nous retenons 10% des queues de distribution des actifs du portefeuille d'étude pour former les rentabilités extrêmes. Ce choix est fondé sur les résultats obtenus du graphique de la moyenne des excès et des propositions de Gavin (2000) et Nefteci (2000). Ces auteurs recommandent de choisir au maximum 10% des queues de distribution pour former les valeurs extrêmes.

Nous rappelons que, comme il a été indiqué par Longin (1998) et Gavin (2000), le choix du seuil peut être subjectif mais sa valeur doit nécessairement respecter l'équilibre entre variance et biais pour permettre la convergence de l'estimateur de la loi GPD. C'est pourquoi nous testons la conformité de la distribution empirique des observations extrêmes et la distribution théorique par la méthode *Quantile-Quantile plot* ou QQ-plot.

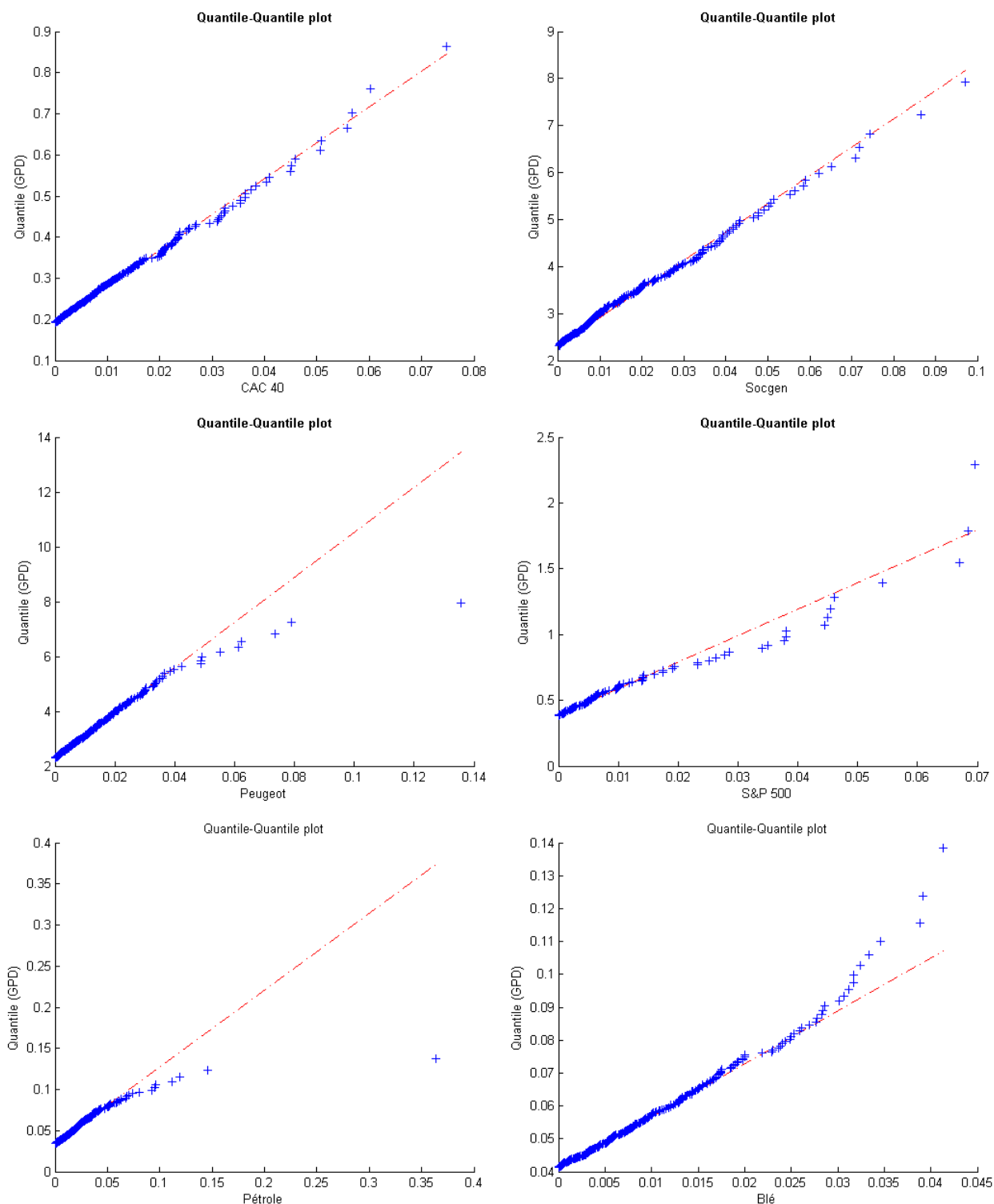
1.3.3 Analyse de conformité entre distributions empirique et théorique

La pertinence du seuil se vérifie en analysant visuellement le graphique quantile-quantile. Le QQ-plot permet de tester la conformité entre la distribution empirique d'une variable et une distribution théorique qui, dans notre cas d'espèce, est la distribution de Pareto généralisée.

Le graphique quantile-quantile est défini par :

$$\{(X_k, F^{\leftarrow}(\frac{n-k+1}{n+1})), k = 1, 2, n\} \quad (1.24)$$

Ce graphique doit correspondre à une droite. L'alignement des points QQ-plot du Graphique 1.3 suppose que la loi GPD déterminée pour un seuil de 0,02, décrit relativement bien le comportement des excès situés dans la queue gauche de la distribution de l'indice CAC 40. L'observation de la linéarité de la courbe quantile-quantile est aussi valable pour l'indice S&P 500, les actions Socgen et Peugeot et les matières premières Pétrole et Blé.



GRAPH. 1.3 – Test de conformité de la loi GPD à la distribution empirique

La relative linéarité des courbes par rapport à la droite montre une certaine conformité entre la distribution GPD et la distribution empirique des rentabilités extrêmes des actifs.

La détermination d'un seuil pour chacune des queues de distribution du portefeuille d'étude a permis de former la série des rentabilités extrêmes. La linéarité de la courbe *QQ-plot* pour tous les actifs du portefeuille d'étude permet d'affirmer la conformité entre la distribution empirique des rentabilités extrêmes et la distribution de Pareto généralisée.

Nous pouvons dès à présent estimer les paramètres de la distribution de Pareto généralisée à partir des rentabilités extrêmes construites.

1.4 Estimation des pertes potentielles

1.4.1 Paramètres estimés de la distribution de Pareto généralisée

La détermination des paramètres de la loi de Pareto généralisée peut être effectuée par plusieurs méthodes comme cela a été présenté dans la section 1.2.3. Dans cette étude, nous estimons les paramètres du modèle GPD par la méthode du maximum de vraisemblance. En considérant les rentabilités extrêmes ou les excès de rentabilités y_i du portefeuille d'étude, la méthode du maximum de vraisemblance consiste à déterminer les valeurs ξ et β qui maximisent la fonction de vraisemblance $l(\xi, \beta/y)$ définie par :

$$l(\xi, \beta/y) = \begin{cases} -n \log \beta - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \frac{\xi y_i}{\beta}\right) & \text{si } \xi \neq 0 \\ -n \log \beta - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n y_i & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Le Tableau 1.2 présente les résultats de l'estimation des paramètres de la distribution de Pareto (ξ et β) ainsi que le nombre d'observations extrêmes N_u et le seuil u obtenus sur les indices actions CAC 40 et S&P 500, les actions Socgen et Peugeot et les matières premières Pétrole et Blé. N est le nombre d'observations dans les queues de distribution des actifs du portefeuille. Ces résultats correspondent à la moyenne des paramètres estimés sur 750 jours de janvier 2008 à décembre 2010 sur la valeur absolue des rentabilités négatives et positives. Nous avons utilisé un historique de 5040 rentabilités journalières pour les actifs CAC 40, Socgen et Peugeot et de 5044 pour les actifs S&P 500, Pétrole et Blé.

	Queue gauche				Queue droite								
	N	Nu	ξ	β	(ξ)	(β)	N	Nu	u	ξ	β	(ξ)	(β)
CAC 40													
Moyenne	2430	242	0,022	0,055	0,010	0,074	0,001	2614	0,020	0,237	0,008	0,082	0,001
Ecart type	14	1	0,001	0,021	0,001	0,002	0,000	9	0,001	0,051	0,000	0,002	0,000
Minimum	2397	239	0,021	0,016	0,009	0,069	0,001	2602	0,020	0,141	0,007	0,077	0,001
maximum	2449	244	0,023	0,143	0,011	0,080	0,001	2640	0,021	0,323	0,008	0,089	0,001
Socgen													
Moyenne	2408	240	0,034	0,071	0,018	0,078	0,002	2478	0,035	0,168	0,015	0,082	0,002
Ecart type	11	1	0,002	0,044	0,001	0,003	0,000	16	0,001	0,032	0,001	0,005	0,000
Minimum	2376	237	0,030	-0,011	0,016	0,072	0,002	2454	0,033	0,098	0,013	0,072	0,001
maximum	2422	241	0,037	0,166	0,021	0,087	0,002	2506	0,037	0,232	0,017	0,093	0,002
Peugeot													
Moyenne	2486	248	0,032	0,097	0,013	0,066	0,001	2429	0,033	0,045	0,014	0,066	0,001
Ecart type	12	1	0,002	0,013	0,001	0,002	0,000	15	0,001	0,036	0,001	0,004	0,000
Minimum	2459	245	0,029	0,080	0,011	0,061	0,001	2409	0,031	-0,026	0,013	0,058	0,001
maximum	2503	249	0,034	0,150	0,015	0,071	0,001	2466	0,035	0,098	0,015	0,072	0,001
S&P 500													
Moyenne	2334	232	0,018	0,211	0,007	0,079	0,001	2703	0,016	0,167	0,007	0,076	0,001
Ecart type	8	1	0,001	0,050	0,001	0,005	0,000	8	0,001	0,060	0,001	0,003	0,000
Minimum	2320	231	0,017	0,110	0,006	0,068	0,001	2690	0,015	0,050	0,006	0,069	0,001
maximum	2347	234	0,019	0,319	0,009	0,089	0,001	2720	0,017	0,231	0,008	0,080	0,001
Pétrole													
Moyenne	2404	239	0,035	0,326	0,012	0,085	0,001	2558	0,034	0,107	0,013	0,069	0,001
Ecart type	8	1	0,001	0,017	0,001	0,003	0,000	7	0,001	0,011	0,001	0,002	0,000
Minimum	2389	237	0,033	0,276	0,010	0,078	0,001	2545	0,032	0,087	0,012	0,064	0,001
maximum	2417	241	0,036	0,358	0,013	0,090	0,001	2571	0,035	0,156	0,014	0,073	0,001
Blé													
Moyenne	2477	247	0,025	0,067	0,010	0,075	0,001	2426	0,027	0,094	0,010	0,077	0,001
Ecart type	9	1	0,001	0,039	0,001	0,003	0,000	7	0,001	0,030	0,001	0,004	0,000
Minimum	2460	245	0,023	-0,065	0,008	0,068	0,001	2413	0,025	0,030	0,009	0,070	0,001
maximum	2495	249	0,026	0,124	0,011	0,081	0,001	2441	0,028	0,147	0,011	0,083	0,001

TAB. 1.2 – Paramètres estimés du modèle inconditionnel GPD

Les valeurs (ξ) et (β) correspondent respectivement aux erreurs standards de l'indice de queue ξ et du paramètre de dispersion β du modèle GPD. N est le nombre d'observations dans les queues. Nu est le nombre d'observations au-delà du seuil u. Les valeurs en gras correspondent aux valeurs de l'indice de queue ξ la plus élevée comparativement à l'autre queue de distribution. Les estimations des paramètres ont été effectuées sur un historique de 5040 rentabilités journalières pour les actifs CAC 40, Socgen et Peugeot et de 5044 pour les actifs S&P 500, Pétrole et Blé. La période d'estimation est de janvier 2008 à décembre 2010.

L'indice de queue ξ de la distribution de Pareto généralisée attire particulièrement notre attention parce qu'il fournit une information sur le poids des extrêmes dans la distribution parente. L'examen du Tableau 1.2 révèle que la valeur de l'indice de queue ξ des actions et des matières premières estimée à la fois sur la queue droite et la queue gauche est supérieure à zéro. Cela signifie que ces actifs présentent des distributions à queues épaisses c'est-à-dire que la probabilité d'occurrence de pertes extrêmes ou de gains extrêmes est plus élevée que ce que prévoit la loi normale. Cette information signale au gestionnaire de risques que certains actifs du portefeuille comme le Pétrole et S&P 500 présentent un risque de pertes très élevé. Par conséquent, la détention de ces actifs demandent beaucoup plus de fonds propres réglementaires.

La comparaison des indices de queues de distribution des actifs du portefeuille d'étude permet d'observer une valeur estimée de l'indice de queue dans la queue gauche supérieure à celle estimée dans la queue droite pour l'action Peugeot, l'indice S&P 500 et le Pétrole. Cela montre que la queue gauche de ces actifs est plus épaisse que la queue droite. Ces actifs apparaissent donc plus risqués dans la mesure où la probabilité d'occurrence de gains est associée à un risque de pertes extrêmes relativement plus élevé.

A l'opposé, il apparaît que la valeur du paramètre $\hat{\xi}$ estimée dans la queue gauche de distribution de l'indice CAC 40, de l'action Socgen et du Blé est inférieure à celle estimée dans la queue droite. Ce résultat souligne que ces actifs ont plus de chance d'enregistrer des gains extrêmes que des pertes extrêmes. Le risque de pertes extrêmes serait donc inférieur à la perspective de gains extrêmes.

Les valeurs de l'indice de queue de la distribution de rentabilités sont positives pour tous les actifs. Cela confirme la présence des queues épaisses dans la distribution de rentabilités des actifs du portefeuille d'étude. Ces rentabilités suivent ainsi une distribution de Student ou de Pareto. Ce qui veut dire qu'en utilisant la loi normale pour estimer les pertes potentielles, il y a un risque de sous-estimation des pertes réelles. L'application de la théorie des valeurs extrêmes sur les données de l'étude est donc justifiée car elle n'impose pas de distribution particulière aux données.

Après l'estimation des paramètres du modèle GPD sur le portefeuille d'étude, les valeurs de la VaR et de l'ES peuvent être déterminées.

1.4.2 Value at Risk et Expected Shortfall

Nous avons calculé la VaR et l'ES sur le portefeuille d'étude conformément à la méthodologie présentée dans la Section 1.2.4 en utilisant le modèle inconditionnel de la loi de Pareto généralisée. Nous avons également déterminé la VaR et l'ES suivant les méthodes de Simulation Historique et de Variance-Covariance (cf. Annexe F). Ce qui nous permet de comparer la performance du modèle GPD à celle des modèles internes des banques. Les calculs sont effectués sur un horizon d'investissement d'un jour et un niveau de confiance de 95%, 99% et 99,9% pendant la période d'estimation de janvier 2008 à décembre 2010.

L'analyse des résultats du Tableau 1.3 montre que les valeurs de VaR estimées par le modèle GPD sont supérieures à celles estimées par les méthodes de la Simulation Historique et de la loi normale. Cette supériorité est valable quel que soit le niveau de confiance choisi. En comparant les deux modèles internes de mesure de risque entre eux, nous constatons de façon générale qu'au niveau de confiance de 95%, les valeurs de la VaR estimées à partir de la loi normale sont supérieures à celles estimées par la méthode de la Simulation Historique. Ce qui sous-entend que l'estimation de la VaR par la méthode de la Simulation Historique à ce niveau de confiance pourrait sous-estimer le risque de pertes. Par contre, aux niveaux de confiance de 99% et 99,9%, les valeurs de la VaR de la méthode de la Simulation Historique sont supérieures à celles calculées par le modèle de loi normale. Les valeurs inférieures de la VaR estimées par le modèle de mesure de risque basé sur la loi normale quand le niveau de confiance devient plus élevé s'explique par le fait que la loi normale ne permet pas de mesurer correctement les risques extrêmes. En effet, la normalité suppose qu'il y a autant de gains que de pertes autour de la moyenne. Ainsi, quand il y a plus de pertes que de gains dans les queues de distribution de rentabilités, la loi normale ne peut pas les capter.

La hiérarchie entre les différents modèles de mesure de risque est également respectée sur les valeurs de l'Expected Shortfall que nous observons dans le Tableau 1.4. En effet, quel que soit le niveau de confiance retenu, les pertes moyennes au-delà de la VaR estimées par le modèle GPD restent supérieures à celles estimées par les modèles internes de mesure de risque. Les pertes moyennes au-delà de la VaR estimées par la méthode de Simulation

Historique sont aussi supérieure à celles estimées par la loi normale.

Cette mesure de l'Expected Shortfall donne une idée au gestionnaire de risques de ce qu'il peut perdre en moyenne sur chaque actif de son portefeuille une fois que la valeur de la VaR est dépassée.

L'analyse des résultats sur le calcul de la VaR et de l'ES qui vient d'être faite est valable pour tous les actifs du portefeuille d'étude. Ces mêmes résultats peuvent être visualisés par actif sur le Graphique 1.4.

VaR(1, P)	95%			99%			99,9%					
	Moyenne	Ecart type	Min	Max	Moyenne	Ecart type	Min	Max	Moyenne	Ecart type	Min	Max
CAC 40												
GPD	-0,029	0,001	-0,027	-0,030	-0,047	0,002	-0,049	-0,042	-0,076	0,004	-0,108	-0,067
SH	-0,021	0,001	-0,020	-0,022	-0,039	0,002	-0,041	-0,035	-0,068	0,005	-0,098	-0,058
Normale	-0,022	0,001	-0,021	-0,023	-0,031	0,001	-0,033	-0,029	-0,042	0,002	-0,062	-0,039
Socgen												
GPD	-0,047	0,003	-0,042	-0,051	-0,080	0,006	-0,086	-0,069	-0,135	0,016	-0,152	-0,108
SH	-0,033	0,002	-0,029	-0,035	-0,065	0,004	-0,069	-0,057	-0,121	0,014	-0,130	-0,098
Normale	-0,036	0,002	-0,033	-0,039	-0,051	0,003	-0,055	-0,046	-0,068	0,004	-0,073	-0,062
Peugeot												
GPD	-0,041	0,002	-0,037	-0,044	-0,066	0,004	-0,070	-0,059	-0,110	0,008	-0,116	-0,095
SH	-0,031	0,002	-0,028	-0,033	-0,054	0,004	-0,057	-0,047	-0,096	0,005	-0,100	-0,088
Normale	-0,033	0,002	-0,030	-0,035	-0,046	0,002	-0,049	-0,042	-0,062	0,003	-0,065	-0,056
S&P 500												
GPD	-0,023	0,001	-0,021	-0,025	-0,040	0,004	-0,043	-0,032	-0,076	0,013	-0,089	-0,054
SH	-0,017	0,001	-0,016	-0,018	-0,030	0,002	-0,032	-0,026	-0,065	0,009	-0,071	-0,049
Normale	-0,018	0,001	-0,016	-0,019	-0,026	0,002	-0,027	-0,023	-0,034	0,002	-0,036	-0,030
Pétrole												
GPD	-0,044	0,002	-0,041	-0,045	-0,075	0,004	-0,079	-0,069	-0,160	0,010	-0,172	-0,143
SH	-0,034	0,001	-0,032	-0,035	-0,058	0,003	-0,061	-0,055	-0,122	0,006	-0,128	-0,111
Normale	-0,036	0,001	-0,035	-0,037	-0,051	0,002	-0,053	-0,049	-0,068	0,002	-0,070	-0,065
Blé												
GPD	-0,032	0,002	-0,029	-0,034	-0,050	0,003	-0,054	-0,042	-0,079	0,008	-0,085	-0,058
SH	-0,025	0,001	-0,023	-0,026	-0,042	0,003	-0,046	-0,036	-0,070	0,006	-0,078	-0,053
Normale	-0,026	0,001	-0,024	-0,028	-0,037	0,002	-0,040	-0,034	-0,050	0,002	-0,045	-0,045

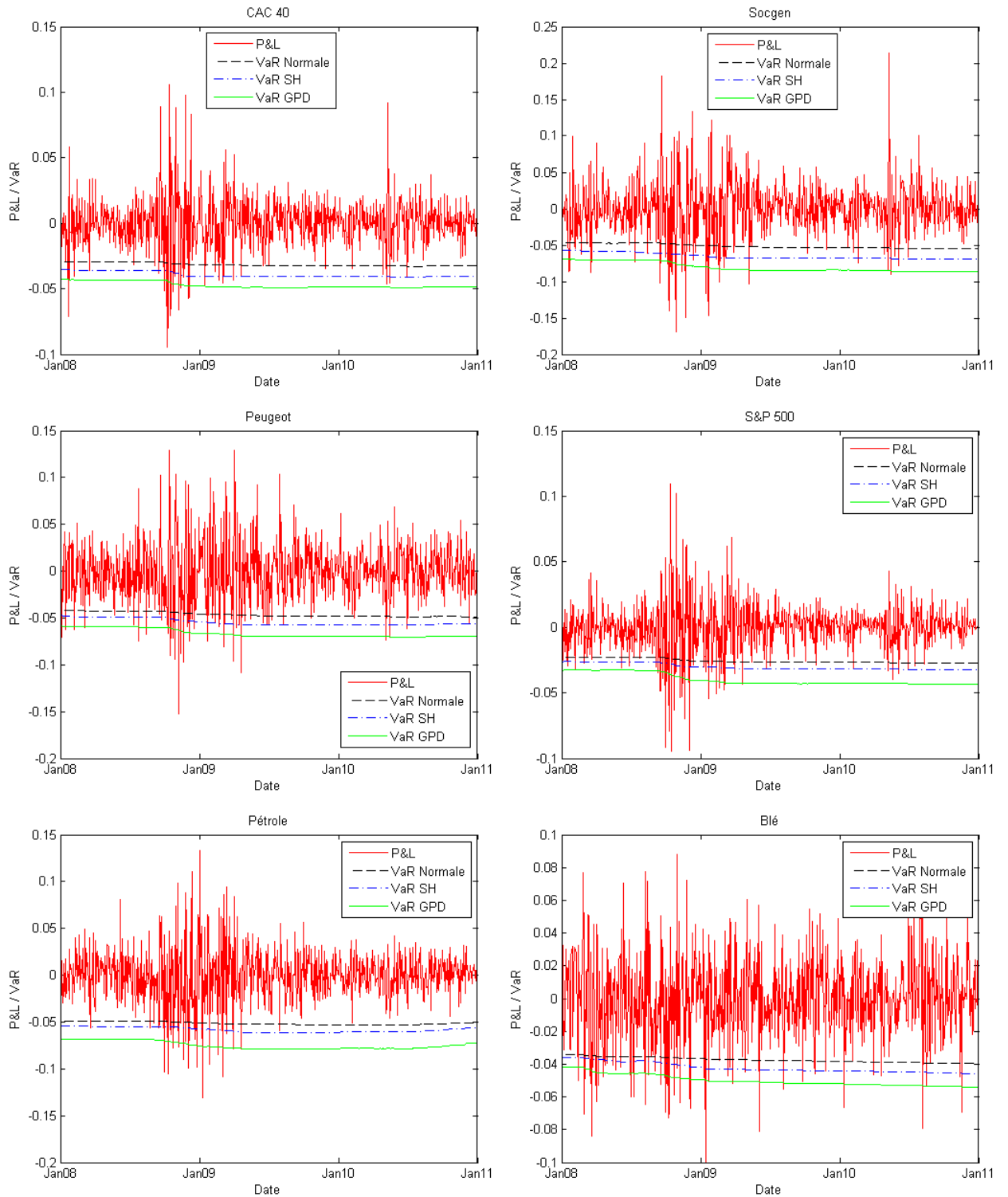
TAB. 1.3 – VaR estimée par les modèles inconditionnels

$VaR(1, P)$ correspond à la VaR calculée sur un horizon d'un jour et au niveau de confiance P (95%, 99% et 99,9%). Les valeurs de la VaR sont estimées sur un historique de 5040 rentabilités journalières pour les actifs CAC 40, Socgen et Peugeot et de 5044 pour les actifs S&P 500, Pétrole et Blé. La période d'estimation est de janvier 2008 à décembre 2010.

ES(1, P)	95%				99%				99,9%			
	Moyenne	Ecart type	Min	Max	Moyenne	Ecart type	Min	Max	Moyenne	Ecart type	Min	Max
CAC 40												
GPD	-0,040	0,002	-0,037	-0,042	-0,060	0,003	-0,053	-0,062	-0,090	0,005	-0,079	-0,101
SH	-0,032	0,001	-0,029	-0,033	-0,050	0,003	-0,045	-0,052	-0,077	0,004	-0,067	-0,079
Normale	-0,028	0,001	-0,026	-0,029	-0,036	0,001	-0,033	-0,038	-0,046	0,002	-0,042	-0,048
Socgen												
GPD	-0,068	0,005	-0,059	-0,073	-0,104	0,010	-0,086	-0,111	-0,164	0,022	-0,124	-0,196
SH	-0,053	0,004	-0,046	-0,056	-0,086	0,007	-0,073	-0,092	-0,136	0,016	-0,108	-0,146
Normale	-0,046	0,003	-0,041	-0,049	-0,059	0,003	-0,053	-0,063	-0,074	0,004	-0,067	-0,079
Peugeot												
GPD	-0,057	0,004	-0,051	-0,061	-0,085	0,006	-0,074	-0,090	-0,133	0,009	-0,115	-0,142
SH	-0,046	0,003	-0,041	-0,049	-0,071	0,005	-0,062	-0,075	-0,120	0,007	-0,109	-0,125
Normale	-0,041	0,002	-0,037	-0,043	-0,053	0,003	-0,048	-0,056	-0,067	0,004	-0,061	-0,071
S&P 500												
GPD	-0,034	0,003	-0,028	-0,037	-0,056	0,008	-0,042	-0,062	-0,103	0,021	-0,066	-0,131
SH	-0,026	0,002	-0,023	-0,028	-0,044	0,005	-0,034	-0,048	-0,079	0,010	-0,062	-0,086
Normale	-0,023	0,002	-0,020	-0,024	-0,029	0,002	-0,026	-0,031	-0,037	0,003	-0,033	-0,039
Pétrole												
GPD	-0,066	0,003	-0,061	-0,069	-0,112	0,007	-0,101	-0,119	-0,238	0,017	-0,210	-0,263
SH	-0,051	0,002	-0,048	-0,053	-0,087	0,004	-0,080	-0,091	-0,186	0,002	-0,179	-0,187
Normale	-0,046	0,001	-0,043	-0,047	-0,059	0,002	-0,056	-0,061	-0,074	0,002	-0,071	-0,077
Bié												
GPD	-0,043	0,003	-0,037	-0,047	-0,063	0,005	-0,049	-0,068	-0,094	0,011	-0,064	-0,104
SH	-0,035	0,002	-0,031	-0,038	-0,054	0,004	-0,044	-0,058	-0,079	0,007	-0,057	-0,084
Normale	-0,033	0,001	-0,030	-0,035	-0,043	0,002	-0,039	-0,046	-0,054	0,002	-0,049	-0,058

TAB. 1.4 – ES estimée par les modèles inconditionnels

ES(1, P) correspond à l'ES calculé sur un horizon d'un jour et au niveau de confiance P (95%, 99% et 99,9%). Les valeurs de l'ES sont estimées sur un historique de 5040 rentabilités journalières pour les actifs CAC 40, Socgen et Peugeot et de 5044 pour les actifs S&P 500, Pétrole et Bié. La période d'estimation est de janvier 2008 à décembre 2010.



GRAPH. 1.4 – Performance des modèles inconditionnels

P&L correspond aux pertes et profits. Les valeurs de la VaR correspondent à la VaR journalière au niveau de confiance de 99%.

L'observation du Graphique 1.4 permet de constater que le modèle GPD surestime fortement le risque en période de faible volatilité comparativement aux modèles internes de mesure de risque. En 2010, le modèle GPD surestime le risque sur les actions individuelles, le pétrole, le CAC 40 et le S&P 500. Ces résultats observables sur le Graphique 1.4 montrent que ces trois modèles de risque sous-estiment le risque en période de crise et le surestiment en période de faible volatilité sur les marchés.

1.4.3 Évaluation de la fiabilité des modèles de mesure de risque

La procédure de backtesting ou de contrôle ex post a pour objectif de vérifier la fiabilité des modèles de mesure de risque. L'application d'une mesure de risque inadaptée dans le cadre de la gestion des risques, peut conduire à une sous-estimation du risque réel pouvant conduire à de lourdes pertes. Pour tester la qualité d'une mesure de risque, il est préconisé de recourir au backtesting (Basel Committee (1998)).

La première étape d'un travail de contrôle ex post consiste à construire la série des violations sur laquelle sera appliquée un ensemble de tests visant à mesurer la fiabilité d'un modèle de mesure de risque.

En fréquence journalière par exemple, la série des violations permet d'estimer le nombre de jours où la perte enregistrée dépasse la perte maximale estimée par le modèle de mesure de risque. La série des violations notée I_t est définie par l'expression suivante :

$$I_t(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_t \leq VaR_t(\alpha) \\ 0 & \text{si } x_t > VaR_t(\alpha) \end{cases} \quad (1.25)$$

où x_t est la rentabilité de l'actif à l'instant t avec t compris entre 1 et T c'est-à-dire compris dans la fenêtre temporelle utilisée pour le contrôle ex post.

Christoffersen (1998) énonce qu'une méthode de VaR est fiable lorsque la séquence des violations I_t satisfait les propriétés de couverture inconditionnelle (*Unconditional Coverage Property*) et d'indépendance (*Independance Property*) des exceptions ou des violations.

La propriété de couverture inconditionnelle établit que la probabilité de réaliser une perte

qui excède la VaR estimée pour un niveau de risque de $\alpha\%$, doit être précisément de $\alpha\%$. Ainsi, pour une VaR calculée avec un niveau de confiance de 99%, seules 2 exceptions sont acceptées sur une fenêtre de 200 jours de test. Si cette fréquence est plus importante, cela indique que le modèle de mesure de risque sous-estime le niveau de risque. A l'inverse, lorsque la proportion de violations est inférieure à $\alpha\%$, cela signifie que le modèle de mesure de risque tend à surestimer le risque de l'actif considéré.

La propriété d'indépendance des exceptions introduit une restriction sur la fréquence d'occurrence des exceptions. Elle exige que les violations soient indépendantes les unes des autres. L'historique des violations de la VaR ne doit donner aucune information sur la réalisation ou non d'une violation à la période suivante. La présence de regroupement des violations signifie que la méthode de mesure de VaR ne réagit pas assez vite aux changements des conditions du marché.

La description de ces tests est présentée en détails dans l'Annexe D.1. Nous utilisons principalement les tests de couvertures inconditionnelles de Kupiec (1995) et de Campbell (2005) et le test de d'indépendance des violations de Christoffersen (1998).

Choix de la période de contrôle ex-post

Nous choisissons de tester les différents modèles de mesure de risque sur une fenêtre de temps de 250 jours. Cette fenêtre de temps correspond aux 250 jours ouvrables recommandés par le Comité de Bâle et est largement supérieure aux conseils promulgués dans le document «*Risk Management : A practical Guide*» du groupe *RiskMetrics*. En effet, le groupe *RiskMetrics* fixe à 90 jours ouvrables la fenêtre de backtesting minimale permettant d'obtenir des résultats significatifs.

Le contrôle ex post est effectué sur les rentabilités journalières enregistrées sur les actifs du portefeuille ainsi que sur le portefeuille global de janvier à décembre de chaque année (2008, 2009 et 2010). Il s'agit des 250 jours qui suivent la période sur laquelle ont été estimées les pertes potentielles par les méthodes de mesure de risque. Après le choix de la période de backtesting, les pertes potentielles journalières sont estimées par le modèle GPD, par la méthode de la Simulation Historique et par le modèle de la loi normale. Ces estimations sont effectuées sur trois niveaux de confiance : 95%, 99% et 99,9%.

Pour chaque méthode, les 250 valeurs de pertes potentielles sont calculées de manière glissante. Par exemple sur le CAC 40, la première valeur est basée sur les rentabilités quotidiennes enregistrées entre le 4 janvier 1988 et le 31 décembre 2007, la seconde, sur les rentabilités journalières relevées entre le 5 janvier 1988 et le 2 janvier 2008 et ainsi de suite jusqu'à la 250 ème valeur.

Chacune de ces 250 estimations des pertes potentielles est ensuite comparée à la rentabilité véritablement enregistrée sur l'actif. La première valeur de la VaR estimée sur le CAC 40 par exemple est confrontée à la rentabilité constatée le 2 janvier 2008 ; la seconde, à la rentabilité du 3 janvier 2008 et la 250 ème VaR, à la rentabilité du 19 décembre 2008.

L'objectif est d'identifier le nombre de violations où la perte réellement enregistrée sur les actifs dépasse le niveau de risque estimé par chacun des trois modèles de mesure de risque. Pour statuer sur la fiabilité de ces trois modèles de mesure de risque, les séries de violations sont ensuite soumises aux tests de backtesting présentés dans l'Annexe D.1. Ces derniers permettent de tester si les propriétés de couverture inconditionnelle et d'indépendance des violations sont vérifiées pour les modèles de mesure de VaR.

Pour vérifier aussi la fiabilité de l'Expected Shortfall, nous utilisons le test proposé par Embrechts et al. (2005) qui est présenté dans l'Annexe D.1. Il consiste à calculer la somme de la différence entre les rentabilités excédant la VaR et l'Expected Shortfall. La statistique est la valeur absolue de la somme de cette différence rapportée au nombre de fois que les rentabilités excèdent la VaR. En d'autres termes c'est une moyenne de l'écart entre les rentabilités et l'Expected Shortfall pour toutes les rentabilités excédant la VaR. La mesure de l'Expected Shortfall est fiable si la valeur de la statistique est nulle. Cependant, ce test ne permet pas de calculer la probabilité associée (p-value) à la statistique déterminée pour pouvoir prendre une décision sur la fiabilité de l'Expected Shortfall.

Les modèles inconditionnels invalidés par le contrôle ex post

Les résultats du contrôle ex post sur les mesures de VaR où nous avons supposé la constance de la volatilité pour vérifier la pertinence de cette hypothèse sont présentés dans les Tableaux 1.5 et 1.6. Ces tableaux présentent le contrôle ex post réalisé sur l'année 2008.

L'hypothèse de couverture inconditionnelle est rejetée sur la VaR estimée au niveau de confiance de 95% et 99% par les modèles de mesure de risque. La VaR mesurée au niveau de confiance de 99,9% par le modèle GPD respecte la couverture inconditionnelle sur l'action Peugeot et sur le Pétrole. La VaR mesurée au niveau de confiance de 99,9% par la méthode SH respecte également la couverture inconditionnelle sur le pétrole. Les valeurs positives et élevées de la statistique de Wald indiquent une forte sous-estimation du risque par les modèles de risque. Ce constat est confirmé par les valeurs des probabilités associées à ces statistiques qui sont inférieures au seuil d'acceptation de 5%.

Les résultats du test d'indépendance des violations montrent que les différentes violations de la VaR sont indépendantes pour tous les modèles de mesure de risque. Cela signifie que la violation de la VaR à la date t n'est pas influencée par la violation de la VaR à la date $t-1$. Il faut également noter que le test de couverture conditionnelle qui consiste à évaluer à la fois la couverture inconditionnelle et l'indépendance des violations, montre que les trois modèles de mesure de risque ne sont pas fiables. Malgré cette tendance globale, le modèle GPD mesure mieux le risque sur le pétrole et sur l'action Peugeot quand le niveau de confiance est élevé.

Nous avons mis en place la procédure de backtesting qui existe à ce jour pour évaluer la fiabilité de l'Expected Shortfall à mesurer le risque moyen au-delà de la VaR. La procédure a été développée par Embrechts et al. (2005). Elle est limitée par l'absence de probabilité associée à la statistique estimée. Par conséquent, la décision à prendre en termes de fiabilité de l'Expected Shortfall ne dépend que de la valeur de la statistique. Les résultats du test (cf. Tableau 1.7) indique que l'Expected Shortfall basée sur les trois modèles de mesure de risque évalue plus ou moins correctement le risque moyen au-delà de la VaR.

Les résultats du contrôle ex post réalisé sur les années 2009 et 2010 sont présentés dans les Tableaux D.2 à D.6. De manière générale, nous constatons une fiabilité relative

des modèles internes de mesure de risque sur les périodes de 2009 et 2010 (cf. Tableaux D.2 à D.6). En effet, la fiabilité de ces modèles dépend du niveau de confiance et de l'actif choisi. Sur ces périodes, le modèle GPD est fiable mais surestime le risque des actifs du portefeuille d'étude.

	Test de Kupiec			Test de Wald		
	GPD	SH	Normale	GPD	SH	Normale
CAC 40						
95%	11,87 (0,00)	41,37 (0,00)	38,82 (0,00)	3,92 (0,00)	7,98 (0,00)	7,69 (0,00)
99%	22,32 (0,00)	37,04 (0,00)	72,24 (0,00)	6,67 (0,00)	9,22 (0,00)	14,30 (0,00)
99,9%	9,44 (0,00)	20,55 (0,00)	85,98 (0,00)	5,50 (0,00)	9,50 (0,00)	27,51 (0,00)
Socgen						
95%	22,81 (0,00)	73,03 (0,00)	52,12 (0,00)	5,66 (0,00)	11,17 (0,00)	9,14 (0,00)
99%	33,15 (0,00)	49,45 (0,00)	97,27 (0,00)	8,58 (0,00)	11,12 (0,00)	17,48 (0,00)
99,9%	20,55 (0,00)	26,77 (0,00)	119,75 (0,00)	9,50 (0,00)	11,51 (0,00)	35,52 (0,00)
Peugeot						
95%	33,92 (0,00)	89,46 (0,00)	79,46 (0,00)	7,11 (0,00)	12,62 (0,00)	11,75 (0,00)
99%	29,40 (0,00)	58,27 (0,00)	102,51 (0,00)	7,95 (0,00)	12,40 (0,00)	18,12 (0,00)
99,9%	1,27 (0,26)	14,74 (0,00)	119,75 (0,00)	1,50 (0,07)	7,50 (0,00)	35,52 (0,00)
S&P 500						
95%	38,82 (0,00)	69,89 (0,00)	69,89 (0,00)	7,69 (0,00)	10,88 (0,00)	10,88 (0,00)
99%	41,06 (0,00)	82,00 (0,00)	124,20 (0,00)	9,85 (0,00)	15,57 (0,00)	20,66 (0,00)
99,9%	14,74 (0,00)	26,77 (0,00)	155,45 (0,00)	7,50 (0,00)	11,51 (0,00)	43,52 (0,00)
Pétrole						
95%	11,87 (0,00)	31,57 (0,00)	20,79 (0,00)	3,92 (0,00)	6,82 (0,00)	5,37 (0,00)
99%	3,56 (0,06)	37,04 (0,00)	53,80 (0,00)	2,22 (0,01)	9,22 (0,00)	11,76 (0,00)
99,9%	-	-	54,66 (0,00)	-0,50 (0,69)	-0,50 (0,69)	19,51 (0,00)
Blé						
95%	49,35 (0,00)	103,44 (0,00)	92,89 (0,00)	8,85 (0,00)	13,78 (0,00)	12,91 (0,00)
99%	67,49 (0,00)	113,22 (0,00)	113,22 (0,00)	13,67 (0,00)	19,39 (0,00)	19,39 (0,00)
99,9%	14,74 (0,00)	47,31 (0,00)	146,37 (0,00)	7,50 (0,00)	17,51 (0,00)	41,52 (0,00)

TAB. 1.5 – Résultats du test de Kupiec et de Wald sur les modèles inconditionnels

Les valeurs manquantes correspondent au cas où les statistiques ne sont pas calculables parce que le modèle n'a enregistré aucune violation. Les valeurs entre parenthèses sont des probabilités associées aux statistiques. Les valeurs en gras sont des statistiques dont la probabilité associée est supérieure au seuil d'acceptation (5%, 1%, 0,1%) de l'hypothèse de couverture inconditionnelle. Le test est effectué sur une fenêtre de backtesting de 250 jours (janvier 2008 à décembre 2008).

	Test d'indépendance			Test de couverture conditionnelle		
	GPD	SH	Normale	GPD	SH	Normale
CAC 40						
95%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	11,87 (0,00)	41,37 (0,00)	38,82 (0,00)
99%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	22,32 (0,00)	37,04 (0,00)	72,24 (0,00)
99,9%	0,00 (0,98)	0,00 (0,96)	0,00 (1,00)	9,44 (0,0)	20,55 (0,00)	85,98 (0,00)
Socgen						
95%	2,49 (0,11)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	25,29 (0,00)	73,03 (0,00)	52,12 (0,00)
99%	5,20 (0,02)	1,21 (0,27)	5,15 (0,02)	38,35 (0,00)	50,66 (0,00)	102,42 (0,00)
99,9%	3,04 (0,08)	2,24 (0,13)	3,07 (0,08)	23,59 (0,00)	29,01 (0,00)	122,83 (0,00)
Peugeot						
95%	1,72 (0,19)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	35,64 (0,00)	89,46 (0,00)	79,46 (0,00)
99%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	29,40 (0,00)	58,27 (0,00)	102,51 (0,00)
99,9%	0,00 (1,00)	0,00 (0,97)	0,21 (0,65)	1,27 (0,53)	14,74 (0,00)	119,96 (0,00)
S&P 500						
95%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	38,82 (0,00)	69,89 (0,00)	69,89 (0,00)
99%	0,21 (0,65)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	41,27 (0,00)	82,00 (0,00)	124,20 (0,00)
99,9%	0,00 (0,97)	0,00 (0,95)	0,00 (1,00)	14,74 (0,00)	26,77 (0,00)	155,45 (0,00)
Pétrole						
95%	0,93 (0,33)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	12,80 (0,00)	31,57 (0,00)	20,79 (0,00)
99%	0,00 (0,95)	0,00 (1,00)	0,36 (0,55)	3,56 (0,17)	37,04 (0,00)	54,17 (0,00)
99,9%	-	0,00 (1,00)	0,06 (0,81)	-	0,50 (0,78)	54,72 (0,00)
Bié						
95%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	49,35 (0,00)	103,44 (0,00)	92,89 (0,00)
99%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	67,49 (0,00)	113,22 (0,00)	113,22 (0,00)
99,9%	12,24 (0,00)	4,27 (0,04)	0,00 (1,00)	26,98 (0,00)	51,58 (0,00)	146,37 (0,00)

TAB. 1.6 – Résultats du test de Christoffersen sur les modèles inconditionnels

Les valeurs manquantes correspondent au cas où les statistiques ne sont pas calculables parce que le modèle n'a enregistré aucune violation. Les valeurs entre parenthèses sont des probabilités associées aux statistiques. Les valeurs en gras sont des statistiques dont la probabilité associée est inférieure au seuil d'acceptation (5%, 1%, 0,1%) de l'hypothèse de couverture conditionnelle. Les valeurs en italique sont des statistiques dont la probabilité associée est supérieure au seuil critique (5%, 1%, 0,1%). Le test est effectué sur une fenêtre de backtesting de 250 jours (janvier 2008 à décembre 2008).

	CAC 40			Socgen			Peugeot			S&P 500			Pétrole			Bié		
	95%	99%	99,9%	95%	99%	99,9%	95%	99%	99,9%	95%	99%	99,9%	95%	99%	99,9%	95%	99%	99,9%
GPD	0,01	0,01	0,00	0,02	0,01	0,00	0,01	0,00	0,03	0,01	0,01	0,00	0,00	0,01	-	0,01	0,00	0,01
SH	0,01	0,01	0,00	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	-	0,01	0,01	0,00
Normale	0,01	0,02	0,02	0,03	0,03	0,03	0,01	0,02	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01

TAB. 1.7 – Résultats du backtesting de l'ES des modèles inconditionnels

Les valeurs égales à zéro montrent que les modèles mesurent correctement le risque moyen au-delà de la VaR.

1.5 Conclusion

Ce premier chapitre nous a permis d'attirer l'attention sur la non normalité et de leptokurticité de la distribution des rentabilités. L'indice de queue de la distribution de Pareto généralisée qui détermine la loi suivie par les rentabilités indique que ces distributions de rentabilités présentent des queues épaisses. Ces caractéristiques des actifs du portefeuille dénotent leur exposition aux risques extrêmes.

Nous remarquons que la construction des rentabilités extrêmes par la méthode *Mean Excess plot* est plus efficace que par la méthode *Hill plot*. La méthode *Mean Excess plot* a permis de choisir le seuil de formation des rentabilités extrêmes sur lesquelles a été basée l'estimation des paramètres de la distribution de Pareto généralisée.

De façon générale, nous observons que les fluctuations des pertes et profits ne sont pas suivies par les mesures de VaR. Il s'est révélé une sous-estimation des pertes potentielles mesurées par les trois modèles de mesure de risque pendant la crise financière et économique de 2008. Il faut également noter une forte surestimation du risque par le modèle GPD durant les deux années qui ont suivi cette période de crise financière. En termes hiérarchiques entre les modèles de mesure de risque, les pertes potentielles estimées par le modèle GPD sont supérieures à celles estimées par la méthode de Simulation Historique. Cette dernière estime des pertes potentielles qui sont aussi supérieures à celles estimées par le modèle de la loi normale.

La défaillance de ces trois modèles de mesure de risque est due principalement à l'hypothèse selon laquelle la variation de la volatilité est constante dans le temps. Autre cause non négligeable serait le fait de ne pas prendre en compte le clustering de volatilité.

La sous-estimation du risque pendant les périodes de crise et la surestimation du risque durant les périodes de faible volatilité des marchés peuvent être résolues en prenant en compte le changement de la volatilité dans le temps et le clustering de volatilité.

Chapitre 2

MODÉLISATION CONDITIONNELLE DES PERTES POTENTIELLES SUR DES ACTIFS

Nous avons supposé dans le Chapitre 1 que les rentabilités étaient identiquement et indépendamment distribuées (i.i.d) et que leurs variances étaient constantes dans le temps. Empiriquement, ces hypothèses ne sont généralement pas vérifiées. En effet, les rentabilités sont souvent hétéroscédastiques et autocorrélées (Engle (1982)). Il est approprié d'estimer la volatilité conditionnelle, c'est-à-dire la volatilité qui est conditionnelle au passé récent. Ainsi, la modélisation inconditionnelle des pertes du Chapitre 1 ne permet pas d'obtenir de résultats satisfaisants pendant les périodes de fortes volatilités (McNeil and Frey (2000), Kourouma et al. (2011)).

Dans ce chapitre, nous tenons compte de certaines caractéristiques des rentabilités à savoir l'autocorrélation, le clustering de volatilités et nous introduisons la dynamique de volatilités dans les modèles de mesure de risque. Les rentabilités sont rendues i.i.d en éliminant les corrélations sérielles et le clustering de volatilités. Le problème de la corrélation sérielle peut être résolu en introduisant dans la moyenne conditionnelle le terme MA (Moving Average). Pour éliminer le clustering de volatilités, il est nécessaire de le modéliser avec un processus qui le génère comme le processus GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity). Le modèle GARCH a été introduit par Bollerslev (1986) pour tenir compte de la dynamique de la volatilité dans le temps. Ce modèle est une extension du modèle ARCH initialement développé par Engle (1982).

Dans cette étude, nous utilisons le modèle GJR (Glosten, Jagannathan, Runkle) d'ordre 1 connu sous le nom de GARCH asymétrique (Glosten et al. (1993)) qui est une des formes du modèle GARCH pour estimer la volatilité conditionnelle. Il permet non seulement d'estimer la volatilité conditionnelle mais aussi de tenir compte du caractère asymétrique de distribution de variables aléatoires comparativement au modèle GARCH standard qui suppose cette asymétrie nulle. L'un des apports de ce chapitre est de tenir compte du caractère asymétrique des distributions de rentabilités dans la méthode des excès ou Peak Over Threshold.

Le modèle de volatilité est utilisé dans cette étude pour trois raisons. La première raison est l'utilisation du modèle comme une méthodologie de mesure de risque. Le modèle de volatilité est directement utilisé pour modéliser la Value at Risk et l'Expected Shortfall basées sur la loi normale. La deuxième raison est d'extraire des résidus standardisés sur lesquels est basée la méthode des excès, de tenir compte du changement de la volatilité dans le temps et de l'effet asymétrique des rentabilités. L'estimation des paramètres de la loi GPD n'est plus basée sur les rentabilités mais plutôt sur les résidus standardisés. La troisième raison est que ces résidus standardisés servent à la construction de l'approche de la Simulation Historique Filtrée ou *Filtered Historical Simulation* (FHS²²) de Barone-Adesi et al. (1998) qui est une approche conditionnelle de la méthode de la Simulation Historique.

Contrairement aux études menées par McNeil and Frey (2000), Alexander and Sheedy (2008) qui utilisent le modèle GARCH symétrique dans la méthode POT, nous combinons le modèle GARCH asymétrique et la théorie des valeurs extrêmes. Le modèle GARCH asymétrique permet de différencier l'impact des rentabilités négatives et celui des rentabilités positives c'est-à-dire des mauvaises et des bonnes informations entrant sur le marché. En effet, une rentabilité négative a plus d'impact sur la volatilité des actifs financiers qu'une rentabilité positive (Glosten et al. (1993)).

La première section de ce chapitre présente la modélisation de la volatilité conditionnelle. La deuxième section expose comment la volatilité conditionnelle est prise en compte dans la détermination de la Value at Risk et l'Expected Shortfall. Dans la troisième sec-

22. Pour plus de détails sur cette méthodologie, voir Barone-Adesi et al. (1999).

tion, les pertes potentielles sont estimées suivant la combinaison de la modélisation de la volatilité conditionnelle et les modèles de mesure de risque. Dans cette dernière section, la fiabilité des trois modèles de mesure de risque est également évaluée.

2.1 Modélisation de la volatilité conditionnelle

La méthode des excès basée sur la distribution de Pareto généralisée exige que les variables aléatoires soient indépendamment et identiquement distribuées. Cependant, la plupart des rentabilités financières présentent une certaine corrélation sérielle et de l'hétéroscédasticité (Ding et al. (1993) et Lo and Craig MacKinlay (1990)). Nous vérifions ces caractéristiques sur les rentabilités des actifs du portefeuille d'étude à partir du test de Ljung-Box (Box et al. (1994)) et de l'autocorrélogramme.

Le test de Ljung-Box est basé sur la statistique

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^L \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \sim \chi_{(\alpha, L)}^2 \quad (2.1)$$

où n est la taille de l'échantillon et $\hat{\rho}_k$ est l'échantillon d'autocorrélation au retard k et L est le nombre de retard testé.

Le Test de Ljung-Box permet de tester la présence de la corrélation sérielle dans les variables aléatoires. Si la statistique calculée est inférieure à la valeur critique du Khi-deux, cela indique une absence d'autocorrélation dans les données. Dans le cas contraire, les données présentent une corrélation sérielle et ne sont pas considérées comme des variables indépendamment distribuées. Les résultats de ce test (Tableau 2.1) effectué sur les rentabilités des actifs du portefeuille rejettent l'hypothèse d'absence de corrélation sérielle. Ces résultats sont confirmés par le Graphique B.1 et le Graphique B.2 qui montrent respectivement l'autocorrélation et la persistance de la volatilité dans les rentabilités.

	Test de Ljung-Box					
	CAC 40	Socgen	Peugeot	S&P 500	Pétrole	Blé
Statistique	85,03	101,25	120,66	90,83	61,98	55,92
Valeur critique	43,77	43,77	43,77	43,77	43,77	43,77
P-value	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

TAB. 2.1 – **Résultats du test de Ljung-Box sur les rentabilités**

Les P-values étant nulles, l'hypothèse i.i.d est rejetée au seuil de 5%.

Ces résultats indiquent que les rentabilités des actifs du portefeuille d'étude ne sont pas identiquement et indépendamment distribuées. Ainsi, pour produire des rentabilités i.i.d, nous avons besoin d'utiliser le modèle ARMA en complément d'une modélisation GARCH qui traite la question d'hétéroscédasticité des rentabilités financières.

Le modèle GARCH est un processus qui permet de tenir compte du changement de la volatilité dans le temps. Tous les modèles GARCH ont en commun la corrélation positive entre la volatilité à la date $t-1$ et celle à la date t , c'est-à-dire une structure auto-régressive dans la volatilité. Le modèle GJR est un modèle GARCH non linéaire qui permet de rendre compte de l'asymétrie dans la réponse de la variance conditionnelle à une innovation. Le principe du modèle GJR est que la dynamique de la variance conditionnelle admet un changement de régime qui dépend du signe de l'innovation passée. La notation GJR(1,1) signifie que nous utilisons un modèle d'ordre 1, c'est-à-dire que la variance à la date t est prévue comme étant la moyenne pondérée d'une constante, de la variance et du résidu au carré à la date $t-1$.

Supposons X_t des variables aléatoires satisfaisant une représentation de type ARMA(1,1)-GJR(1,1) où ARMA est le modèle d'estimation de la moyenne conditionnelle. Ce processus s'écrit sous la forme de ARMA(1,1)

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \epsilon_t + \alpha_2 \epsilon_{t-1} \quad (2.2)$$

où ϵ représente l'innovation ou le résidu ; α_0 , α_1 et α_2 sont des paramètres du modèle.

La variance conditionnelle GJR(1,1) est donnée par :

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \epsilon_{t-1}^2 + \varphi I_{\epsilon_{t-1} < 0} \epsilon_{t-1}^2 \quad (2.3)$$

où $\beta_0 \geq 0$, $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$.

Il est important d'imposer des contraintes sur ces paramètres pour satisfaire la condition de positivité de la variance conditionnelle. La stationnarité des résidus est assurée si $(\beta_1 + \beta_2 + \varphi/2) < 1$. $I_{\epsilon_{t-1} < 0}$ est un indicateur tel que $I_{\epsilon_{t-1} < 0} = 1$ si $\epsilon_{t-1} < 0$ et $I_{\epsilon_{t-1} < 0} = 0$ sinon. Le paramètre φ représente le paramètre qui fait la différence entre un modèle de GARCH symétrique et un modèle GARCH asymétrique (modèle GJR). Ce paramètre permet de modéliser un effet asymétrique lié aux signes des innovations ou résidus passés ϵ_{t-1} . Si $\varphi > 0$ (respectivement $\varphi < 0$), un choc négatif (positif) sur les innovations passées à la date t-1 se traduira à la date t par une augmentation (respectivement une diminution) de la variance conditionnelle ou de la volatilité conditionnelle. Cet effet asymétrique peut être justifié par l'accroissement de l'effet de levier (ratio d'endettement) d'une entreprise suite à une diminution de sa valeur boursière, ce qui devrait se traduire par une augmentation de son risque tel que mesuré par sa variance.

2.1.1 Estimation des paramètres des modèles ARMA-GJR

Nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance pour déterminer les paramètres du modèle ARMA-GJR. Les estimateurs $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\varphi})$ s'obtiennent en maximisant la fonction de log-vraisemblance $L(\theta)$. La fonction de log-vraisemblance du modèle ARMA(1,1)-GJR(1,1) de variables aléatoires X_t obtenue sous l'hypothèse de la normalité de la loi conditionnelle de X_t sachant son propre passé, est donnée par la formule suivante :

$$L(\theta) = \log \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2(\theta)}} \exp\left(-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2(\theta)}\right) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left(\log \sigma_t^2(\theta) + \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2(\theta)}\right) \quad (2.4)$$

où θ désigne l'ensemble des paramètres du modèle, ϵ_t représente les résidus ou innovations obtenus par la différence entre les rentabilités X_t et la moyenne μ_{t-1} . σ_t^2 représente la variance conditionnelle.

Il n'existe pas de solution analytique à la maximisation de la vraisemblance dans le cas général des modèles GARCH. Nous devons donc recourir à une optimisation numérique de la vraisemblance. Nous avons retenu pour conditions initiales sur les paramètres θ , les valeurs estimées dans le cas d'un modèle GARCH sous l'hypothèse de normalité des résidus.

A partir de l'équation (2.4), nous avons maximisé la fonction de log-vraisemblance pour obtenir les estimateurs $\hat{\theta}$ dont les valeurs estimées au 03/01/2008 sont données dans le Tableau 2.2. Dans ce tableau, figure en première ligne les paramètres estimés de la fonction de log-vraisemblance. Ensuite, nous avons par actif, les valeurs estimées, l'erreur standard, la statistique de Student associée au test de nullité du paramètre considéré et la p-value associée à la loi asymptotique de la statistique de Student.

Il est à noter que pour un risque de première espèce de $\alpha\%$, si la p-value est inférieure au seuil de $\alpha\%$, nous sommes conduits à rejeter l'hypothèse de nullité du coefficient. Le coefficient est donc significativement différent de zéro.

		Paramètres ARMA(1,1)				Paramètres GJR(1,1)			
		$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\varphi}$	
CAC 40	Estimation	0,0004	-0,0395	0,0580	0,0000	0,9184	0,0196	0,0821	
	Erreur std	0,0004	0,7854	0,7854	0,0000	0,0058	0,0058	0,0075	
	t-value	1,1856	-0,0503	0,0740	9,8849	158,74	3,4012	10,935	
	P-value	0,1179	0,5201	0,4705	0,0000	0,0000	0,0003	0,0000	
Socgen	Estimation	0,0004	-0,1317	0,1719	0,0000	0,9393	0,0296	0,0513	
	Erreur std	0,0003	0,3331	0,3322	0,0000	0,0030	0,0034	0,0050	
	t-value	1,4537	-0,3953	0,5175	7,9256	313,193	8,7229	10,178	
	P-value	0,0730	0,6537	0,3024	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
Peugeot	Estimation	0,0003	-0,0522	0,1186	0,0000	0,8952	0,0606	0,0339	
	Erreur std	0,0003	0,2182	0,2169	0,0000	0,0084	0,0063	0,0072	
	t-value	1,2338	-0,2394	0,5466	7,9892	106,90	9,5934	4,7296	
	P-value	0,1087	0,5946	0,2923	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
SP 500	Estimation	0,0004	-0,1296	0,1357	0,0000	0,9449	0,0028	0,0824	
	Erreur std	0,0001	0,0077	0,0077	0,0000	0,0040	0,0040	0,0063	
	t-value	3,2762	-16,773	17,5452	9,5011	234,60	0,7046	13,073	
	P-value	0,0005	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2405	0,0000	
Pétrole	Estimation	0,0001	0,7933	-0,8108	0,0000	0,9329	0,0693	-0,0156	
	Erreur std	0,0001	0,1689	0,1612	0,0000	0,0044	0,0042	0,0058	
	t-value	1,0314	4,6970	-5,0286	5,3961	213,21	16,355	-2,6870	
	P-value	0,1512	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9964	
Blé	Estimation	0,0001	-0,0806	0,1497	0,0000	0,9426	0,0648	-0,0383	
	Erreur std	0,0002	0,2060	0,2041	0,0000	0,0053	0,0061	0,0073	
	t-value	0,3721	-0,3914	0,7334	5,6648	177,46	10,715	-5,2379	
	P-value	0,3549	0,6522	0,2317	0,0000	0,0000	0,0000	0,9958	

TAB. 2.2 – Paramètres estimés des modèles ARMA-GJR

Les valeurs en gras représentent les P-value inférieures à 5%. Les valeurs des paramètres correspondant aux P-value inférieures à 5% sont significativement différentes de zéro. L'estimation a été effectuée sur un historique de 5040 rentabilités journalières pour les actifs CAC 40, Socgen et Peugeot et de 5044 pour les actifs S&P 500, Pétrole et Blé.

On observe dans le cas du portefeuille d'étude que les paramètres estimés $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ et $\hat{\varphi}$ de la variance conditionnelle de l'équation 2.3 sont significativement différents de zéro au seuil de 5% sauf le paramètre $\hat{\varphi}$ pour les matières premières. Les valeurs du coefficient $\hat{\varphi}$ pour les matières premières sont négatives et la p-value est presque à 100%. Cela signifie que l'hypothèse de nullité de l'effet asymétrique sur le Pétrole et sur le Blé est acceptée au seuil de 5%. Nous remarquons également qu'au seuil de 5%, les paramètres estimés $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$ sur la moyenne conditionnelle de l'Equation 2.2 ne sont pas significativement différents de zéro à l'exception des paramètres $\hat{\alpha}_0$ et $\hat{\alpha}_2$ sur l'indice *S&P500* et du paramètre $\hat{\alpha}_1$ sur le Pétrole.

La volatilité conditionnelle est très persistante ($\beta_2 = 0,95$) pour l'indice *S&P 500* mais pas réactive ($(\beta_1 + \varphi/2) = 0,04$). Cela est vrai pour la volatilité conditionnelle de l'action Peugeot qui est aussi persistante ($\beta_2 = 0,89$) mais moins réactive ($(\beta_1 + \varphi/2) = 0,08$). Les autres actifs du portefeuille d'étude présentent les mêmes caractéristiques. Ce qui signifie que leur volatilité à la date t réagit faiblement aux innovations mais fortement au changement de la volatilité à la date $t - 1$. Il faut noter que la stationnarité du modèle de volatilité est bien vérifiée ($(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\varphi}/2) < 1$).

En estimant le modèle ARMA(1,1)-GJR(1,1) sur les rentabilités des actifs du portefeuille d'étude, nous obtenons des résidus et des volatilités conditionnelles. Le processus ARMA(1,1) de l'Equation 2.2 fournit la moyenne conditionnelle avec des résidus déterminés par les rentabilités ajustées de la moyenne. Notons Z_t le rapport entre le résidu et la volatilité à la date t représentant un bruit blanc de faible homoscédasticité tel que $E(z_t) = 0$ et $Var(z_t) = \sigma_z^2$.

$$Z_t = \frac{x_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}_t} \quad (2.5)$$

Les variables Z_t sont des résidus standardisés qui constituent les données de base pour le calcul des pertes potentielles par la méthode des excès et par les méthodes traditionnelles de mesure de risque de marché. Ces résidus standardisés sont approximativement identiquement et indépendamment distribués comme le démontre le test de Ljung-Box du Tableau 2.3. Le Graphique B.3 présente également l'autocorrélogramme montrant l'ab-

sence de l'autocorrélation dans les résidus standardisés.

	Test de Ljung-Box					
	CAC 40	Socgen	Peugeot	S&P 500	Pétrole	Blé
Statistique	37,40	32,25	34,03	42,26	20,37	40,75
Valeur critique	43,77	43,77	43,77	43,77	43,77	43,77
P-value	0,17	0,36	0,28	0,07	0,91	0,09

TAB. 2.3 – Résultats du test de Ljung-Box sur les résidus standardisés
Les P-values étant supérieures à 5%, l'hypothèse i.i.d est acceptée au seuil de 5%.

2.1.2 Prédiction de la moyenne et de la variance conditionnelles

Après avoir estimé les paramètres du modèle ARMA(1,1)-GJR(1,1), nous pouvons prévoir les moyennes conditionnelles $(\hat{\mu}_{t-n+1}, \dots, \hat{\mu}_t)$ et les volatilités conditionnelles $(\hat{\sigma}_{t-n+1}, \dots, \hat{\sigma}_t)$. Les moyennes et les variances conditionnelles sont calculées de façon récursive à partir des Équations 2.2 et 2.3 après substitution de valeurs initiales. Le Graphique B.4 compare l'évolution des résidus et des volatilités conditionnelles estimés par le modèle ARMA(1,1)-GJR(1,1) sur les actifs du portefeuille d'étude. Ce graphique montre la présence du changement de la volatilité (hétéroscédasticité) dans les résidus.

Les valeurs prévisionnelles de la moyenne et de la variance conditionnelles sont déterminées par les formules ci-dessous :

$$\mu_{t+1} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_t \quad (2.6)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sigma_t^2 + \hat{\beta}_2 \epsilon_t^2 + \hat{\varphi} I_{\epsilon_t < 0} \epsilon_t^2 \quad (2.7)$$

La variance σ_{t+1}^2 est déterminée à partir des coefficients estimés $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ et $\hat{\varphi})$ et à partir du résidu et de la variance à la date t. Les résidus standardisés et les volatilités prévisionnelles σ_{t+1} servent à l'estimation des paramètres de la distribution de Pareto généralisée et à la modélisation conditionnelle des mesures de risque de marché.

2.2 Modélisation conditionnelle des mesures de risque de marché

Dans cette section, la Value at Risk et l'Expected Shortfall sont calculées en tenant compte de la dynamique de la volatilité dans le temps. Les variables aléatoires sur lesquelles sont basés les modèles de mesure de risque de marché ont été rendues identiquement et indépendamment distribuées. En effet, l'hypothèse d'indépendance et d'identité des variables aléatoires est souvent supposée pour mieux estimer les paramètres des modèles de probabilité. Ainsi, pour l'application de la théorie des valeurs extrêmes basée sur la distribution de Pareto généralisée, nous utilisons les résidus standardisés dont l'hypothèse i.i.d est vérifiée afin de calculer convenablement les pertes potentielles sur les actifs du portefeuille d'étude. La mesure de ces pertes potentielles est donnée par la détermination de la VaR et l'ES suivant les formules :

$$\widehat{VaR}_\alpha^{t+1}(Z) = \hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} VaR_\alpha(Z) \quad (2.8)$$

$$\widehat{ES}_\alpha^{t+1}(Z) = \hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} ES_\alpha(Z) \quad (2.9)$$

où $VaR_\alpha(Z)$ et $ES_\alpha(Z)$ sont respectivement le quantile et l'Expected Shortfall de la GPD obtenus sur les résidus standardisés Z_t .

Pour déterminer la VaR, nous partons de l'Equation (2.10) qui estime la queue $F_z(z)$ de la distribution de Pareto généralisée.

$$F_z(z) = 1 - \frac{k}{N} \left[1 + \hat{\xi} \left(\frac{Z - Z_{k+1}}{\hat{\beta}} \right) \right]^{-1/\hat{\xi}} \quad (2.10)$$

où Z_{k+1} est le $(k + 1)$ ième résidu standardisé correspondant au seuil de formation des rentabilités extrêmes, N est le nombre d'observations dans la queue de distribution et k , le nombre de résidus standardisés au-delà du seuil Z_{k+1} . Les paramètres $\hat{\xi}$ et $\hat{\beta}$ de la distribution de Pareto généralisée sont estimés sur les excès de résidus standardisés en

utilisant la méthode du maximum de vraisemblance.

L'inversion de l'équation (2.10) permet d'obtenir le quantile $VaR_\alpha(Z)$ donné par la formule :

$$VaR_\alpha(Z) = Z_{k+1} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left[\left(\frac{N}{k}(\alpha) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right] \quad (2.11)$$

En remplaçant l'Equation (2.11) par son expression dans l'Equation (2.8), cela nous permet de mesurer la Value at Risk.

$$VaR_\alpha^{t+1}(Z) = \hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} \left(Z_{k+1} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left[\left(\frac{N}{k}(\alpha) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right] \right)$$

L'Expected Shortfall est la moyenne des pertes au-delà de la VaR. Pour la déterminer, nous calculons d'abord $ES_\alpha(Z)$ par la formule :

$$ES_\alpha(Z) = \frac{VaR_\alpha(Z)}{1 - \hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi}Z_{t+1}}{1 - \hat{\xi}} \quad (2.12)$$

Ensuite, l'Equation (2.12) est substituée par sa valeur dans l'Equation (2.9) pour obtenir l'Expected Shortfall.

$$\hat{ES}_\alpha^{t+1}(Z) = \hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} \left(\frac{VaR_\alpha(Z)}{1 - \hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi}Z_{t+1}}{1 - \hat{\xi}} \right)$$

Ces mesures de risque basées sur la modélisation de la volatilité conditionnelle permettent d'estimer les pertes potentielles maximales en prenant en compte le changement de la volatilité et l'effet asymétrique des rentabilités des actifs financiers.

2.3 Estimation des pertes potentielles

2.3.1 Paramètres estimés de la distribution de Pareto généralisée

L'estimation des paramètres de la distribution de Pareto généralisée se fait sur les variables identiquement et indépendamment distribuées c'est-à-dire sur les résidus standardisés qui ont été calculés par l'application des modèles ARMA(1,1)-GJR(1,1) sur les rentabilités des actifs du portefeuille d'étude. Nous avons considéré pour l'estimation des paramètres la queue gauche et la queue droite de distribution de chaque actif. Pour la formation des rentabilités extrêmes nous avons appliqué les mêmes méthodologies que celles décrites dans le Chapitre 1, c'est-à-dire en prenant 10% des résidus standardisés des queues gauche et droite de la distribution de rentabilités des actifs du portefeuille d'étude. Après avoir construit les résidus standardisés extrêmes, les paramètres sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance . Les résultats de cette estimation de janvier 2008 à décembre 2010 sont présentés dans le Tableau 2.4.

	Queue gauche					Queue droite								
	N	Nu	u	ξ	β	(ξ)	(β)	N	Nu	u	ξ	β	(ξ)	(β)
CAC 40														
Moyenne	2612	260	1,686	0,166	0,458	0,064	0,040	2603	259	1,568	-0,016	0,449	0,058	0,038
Ecart type	39	4	0,012	0,024	0,011	0,003	0,000	39	4	0,010	0,013	0,007	0,002	0,000
Minimum	2566	256	1,665	0,124	0,437	0,058	0,039	2550	254	1,549	-0,050	0,417	0,054	0,037
maximum	2665	266	1,705	0,204	0,483	0,069	0,041	2649	264	1,593	0,019	0,472	0,065	0,040
Socgen														
Moyenne	2671	266	1,601	0,130	0,529	0,065	0,047	2544	253	1,644	0,091	0,536	0,068	0,049
Ecart type	21	2	0,013	0,023	0,020	0,002	0,001	21	2	0,014	0,039	0,019	0,002	0,002
Minimum	2639	263	1,555	0,095	0,484	0,061	0,044	2496	249	1,616	0,039	0,489	0,063	0,045
maximum	2719	271	1,618	0,179	0,562	0,071	0,049	2576	257	1,675	0,190	0,568	0,075	0,051
Peugeot														
Moyenne	2697	269	1,535	0,047	0,600	0,056	0,050	2518	251	1,672	-0,017	0,615	0,060	0,054
Ecart type	14	1	0,012	0,011	0,017	0,001	0,001	14	1	0,009	0,008	0,007	0,002	0,001
Minimum	2678	267	1,517	0,026	0,559	0,053	0,047	2490	248	1,658	-0,034	0,600	0,056	0,052
maximum	2727	272	1,555	0,072	0,631	0,059	0,051	2537	253	1,703	-0,001	0,634	0,063	0,056
S&P 500														
Moyenne	2618	261	1,678	0,174	0,524	0,066	0,047	2597	259	1,587	-0,143	0,515	0,049	0,041
Ecart type	14	1	0,012	0,041	0,028	0,003	0,002	14	1	0,007	0,014	0,013	0,002	0,001
Minimum	2317	231	1,642	0,102	0,476	0,060	0,044	2463	245	1,552	-0,242	0,463	0,044	0,038
maximum	2752	274	1,698	0,233	0,612	0,072	0,052	2898	289	1,629	0,007	0,554	0,070	0,046
Pétrole														
Moyenne	2658	265	1,636	0,086	0,581	0,058	0,049	2557	255	1,602	0,016	0,529	0,064	0,047
Ecart type	21	2	0,010	0,011	0,014	0,002	0,001	21	2	0,006	0,013	0,017	0,002	0,002
Minimum	2615	261	1,610	0,059	0,549	0,054	0,047	2505	250	1,577	-0,017	0,490	0,058	0,044
maximum	2710	270	1,656	0,130	0,614	0,062	0,051	2600	259	1,617	0,055	0,569	0,070	0,051
Blé														
Moyenne	2663	265	1,566	-0,069	0,534	0,063	0,047	2552	254	1,619	0,015	0,545	0,066	0,050
Ecart type	25	3	0,006	0,041	0,023	0,005	0,003	25	3	0,007	0,015	0,016	0,002	0,001
Minimum	2499	249	1,525	-0,121	0,468	0,054	0,043	2437	243	1,598	-0,023	0,462	0,063	0,043
maximum	2778	277	1,647	0,030	0,582	0,071	0,051	2716	271	1,687	0,101	0,599	0,074	0,055

TAB. 2.4 – Paramètres estimés du modèle conditionnel GPD

Les valeurs (ξ) et (β) correspondent respectivement aux erreurs standards de l'indice de queue ξ et du paramètre de dispersion β du modèle conditionnel GPD. N est le nombre d'observations dans les queues. Nu est le nombre d'observations au-delà du seuil u. Les valeurs en gras correspondent aux valeurs de l'indice de queue ξ la plus élevée comparativement à l'autre queue de distribution. Les estimations des paramètres ont été effectuées sur un historique de 5040 rentabilités journalières pour les actifs CAC 40, Socgen et Peugeot et de 5044 pour les actifs S&P 500, Pétrole et Blé. La période d'estimation est de janvier 2008 à décembre 2010.

L'examen du Tableau 2.4 révèle que l'indice de queue estimé sur la queue gauche du CAC 40, S&P 500, Peugeot, Socgen et du pétrole est supérieur à zéro. Cela signifie que ces actifs présentent des distributions à queues épaisses c'est-à-dire que la probabilité d'occurrence de pertes extrêmes est très élevée.

La comparaison des indices de queues de distribution des actifs du portefeuille d'étude permet d'observer une valeur estimée de l'indice de queue dans la queue gauche supérieure à celle estimée dans la queue droite pour les indices CAC40 et S&P 500, les actions Peugeot et Socgen, et le Pétrole. Cela montre que la queue gauche de ces actifs est plus épaisse que leur queue droite. Ces actifs apparaissent donc plus risqués dans la mesure où la probabilité d'occurrence de gains est associée à un risque de pertes extrêmes relativement plus élevé.

A l'opposé, il apparaît que la valeur du paramètre $\hat{\xi}$ mesurée dans la queue gauche de distribution de rentabilités du Blé est inférieure à celle estimée dans la queue droite de la distribution de rentabilités. Ce résultat souligne que le Blé a plus de chance d'enregistrer des gains extrêmes que des pertes extrêmes. Le risque de pertes extrêmes serait donc inférieur à la perspective de gains extrêmes.

2.3.2 Value at Risk et Expected Shortfall

Cette section présente les valeurs estimées de la Value at Risk et de l'Expected Shortfall basée sur la distribution de Pareto généralisée et sur la modélisation de la volatilité conditionnelle. A titre comparatif, les mesures de la VaR et l'ES basées sur les modèles internes (cf. Annexe F) des établissements financiers ont été calculées. Ces modèles internes comprennent la méthode FHS (méthode conditionnelle de la Simulation Historique) et le modèle GARCH basé sur la distribution de la loi normale.

L'estimation des mesures de risque (VaR et ES) a été réalisée sur la période de janvier 2008 à décembre 2010 à partir d'un historique de 5040 rentabilités journalières pour les actifs CAC 40, Socgen et Peugeot et de 5044 pour les actifs S&P 500, Pétrole et Blé. Sur cette période d'estimation de trois ans, la moyenne, l'écart-type, le minimum et le maximum des pertes estimées ont été calculés sur chaque actif du portefeuille et au niveau de confiance de 95%, 99% et 99,9%.

L'examen du Tableau 2.5 montre qu'en moyenne les valeurs de la $VaR_{GPDcond.}$ sont supérieures à celles de la VaR_{FHS} et de la VaR_{GARCH} aux niveaux de confiance de 95% et 99% pour tous les actifs du portefeuille d'étude. Cependant, au niveau de confiance de 99,9%, les valeurs de la $VaR_{GPDcond.}$ deviennent inférieures à celles de la VaR_{FHS} . Cette supériorité de la VaR_{FHS} s'explique par la présence des pertes extrêmes dans la queue gauche de la distribution empirique des pertes et profits sur laquelle est basée la méthode FHS. Ces pertes extrêmes sont plus élevées que celles que peut estimer le modèle de mesure de risque GPD au niveau de confiance très élevé de 99,9%. Nous observons également qu'au niveau de confiance de 95%, les valeurs de la VaR_{GARCH} sont supérieures à celles de la VaR_{FHS} . Cela s'explique par le fait que la loi normale s'adapte mieux à la mesure du risque quand on s'éloigne des queues de distribution des actifs financiers présentant des rentabilités extrêmes.

L'analyse de l'Expected Shortfall du Tableau 2.6 nous laisse observer, au niveau de confiance de 95% et 99%, des valeurs moyennes de l' $ES_{GPDcond.}$ plus élevées que celles des modèles internes de mesure de risque. Cependant, il faut noter que la valeur de la VaR_{FHS} est supérieure à celle de la $VaR_{GPDcond.}$ sur le CAC 40 au niveau de confiance de 99%. Au niveau de confiance de 99,9%, les valeurs moyennes de l' ES_{FHS} sont également supérieures à celles de l' $ES_{GPDcond.}$ sur la majorité des actifs du portefeuille d'étude (CAC 40, Socgen, S&P 500 et Pétrole). La comparaison des modèles internes de mesure de risque entre eux montre aussi des valeurs moyennes de l' ES_{FHS} plus élevées que celles de l' ES_{GARCH} .

Il faut noter que l'examen du Tableau 2.6 montre qu'au niveau de confiance de 99,9%, la VaR_{FHS} et l' ES_{FHS} sont égales. Cela s'explique par le choix de 1000 simulations pour former les pertes et profits pour la détermination de la VaR_{FHS} et de l' ES_{FHS} . Par conséquent, la VaR_{FHS} à 99,9% correspond à la plus petite valeur des 1000 scénarios ordonnés de façon croissante. l'ES qui est la moyenne des pertes au-delà de la VaR correspond à cette VaR parce qu'il n'y a pas de pertes au-delà de cette valeur de la VaR. Nous sommes confrontés à une limite de la méthode FHS car pour estimer la VaR et l'ES à des niveaux de confiance très élevés, il faut nécessairement augmenter le nombre de scénarios simulés ou disposer de plus de données historiques.

Nous pouvons retenir que le modèle conditionnel GPD estime des pertes potentielles

plus élevées que celles estimées par les modèles internes de mesure de risque au niveau de confiance de 95% et 99%. La méthode FHS estime des pertes potentielles très élevées au niveau de confiance de 99,9%. Quant au modèle GARCH, il estime les pertes potentielles les plus faibles comparativement aux deux autres modèles de mesure de risque. Cependant, cette supériorité d'un modèle de mesure de risque par rapport à un autre, ne donne aucune information sur la fiabilité à mesurer correctement le risque des actifs du portefeuille d'étude.

VaR(1, P)	95%			99%			99,9%					
	Moyenne	Ecart type	Max	Min	Moyenne	Ecart type	Max	Min	Moyenne	Ecart type	Max	Min
CAC 40												
GPD cond.	-0,033	0,015	-0,017	-0,106	-0,049	0,023	-0,024	-0,158	-0,080	0,038	-0,038	-0,263
FHS	-0,026	0,012	-0,011	-0,082	-0,039	0,017	-0,019	-0,135	-0,136	0,083	-0,027	-0,530
GARCH	-0,028	0,013	-0,014	-0,085	-0,039	0,018	-0,020	-0,120	-0,052	0,024	-0,027	-0,160
Socgen												
GPD cond.	-0,067	0,029	-0,031	-0,172	-0,102	0,044	-0,047	-0,262	-0,167	0,074	-0,077	-0,438
FHS	-0,056	0,024	-0,024	-0,144	-0,088	0,039	-0,036	-0,292	-0,219	0,124	-0,053	-0,692
GARCH	-0,055	0,024	-0,021	-0,138	-0,078	0,034	-0,030	-0,195	-0,103	0,045	-0,040	-0,259
Peugeot												
GPD cond.	-0,055	0,019	-0,028	-0,131	-0,085	0,030	-0,043	-0,201	-0,131	0,046	-0,066	-0,310
FHS	-0,044	0,015	-0,022	-0,110	-0,074	0,028	-0,037	-0,202	-0,143	0,064	-0,049	-0,402
GARCH	-0,046	0,016	-0,023	-0,107	-0,066	0,023	-0,032	-0,151	-0,087	0,030	-0,043	-0,201
S&P 500												
GPD cond.	-0,032	0,019	-0,011	-0,104	-0,049	0,029	-0,017	-0,160	-0,085	0,053	-0,028	-0,283
FHS	-0,025	0,015	-0,008	-0,084	-0,039	0,025	-0,012	-0,143	-0,122	0,096	-0,021	-0,502
GARCH	-0,026	0,015	-0,010	-0,078	-0,037	0,021	-0,014	-0,110	-0,049	0,028	-0,019	-0,146
Pétrole												
GPD cond.	-0,053	0,023	-0,025	-0,129	-0,080	0,036	-0,038	-0,196	-0,127	0,056	-0,061	-0,307
FHS	-0,040	0,018	-0,019	-0,100	-0,064	0,028	-0,028	-0,168	-0,174	0,091	-0,041	-0,497
GARCH	-0,043	0,019	-0,020	-0,105	-0,060	0,027	-0,029	-0,148	-0,080	0,036	-0,038	-0,196
Blé												
GPD cond.	-0,047	0,010	-0,027	-0,071	-0,065	0,014	-0,037	-0,100	-0,089	0,020	-0,050	-0,142
FHS	-0,039	0,009	-0,021	-0,065	-0,059	0,014	-0,029	-0,097	-0,096	0,033	-0,041	-0,193
GARCH	-0,041	0,009	-0,023	-0,068	-0,057	0,012	-0,033	-0,096	-0,076	0,017	-0,043	-0,128

TAB. 2.5 – VaR estimée des modèles conditionnels

$VaR(1, P)$ correspond à la VaR calculée sur un horizon d'un jour et au niveau de confiance P (95%, 99% et 99,9%). Les valeurs de la VaR sont estimées sur un historique de 5040 rentabilités journalières pour les actifs CAC 40, Socgen et Peugeot et de 5044 pour les actifs S&P 500, Pétrole et Blé. La période d'estimation est de janvier 2008 à décembre 2010.

ES	95%			99%			99,9%		
	Moyenne	Ecart type	Min	Moyenne	Ecart type	Min	Moyenne	Ecart type	Min
CAC 40									
GPD cond.	-0,043	0,020	-0,140	-0,062	0,029	-0,203	-0,100	0,049	-0,333
FHS	-0,038	0,018	-0,122	-0,066	0,037	-0,259	-0,136	0,083	-0,530
GARCH	-0,035	0,016	-0,107	-0,045	0,021	-0,138	-0,057	0,026	-0,174
Socgen									
GPD cond.	-0,089	0,039	-0,231	-0,130	0,057	-0,337	-0,205	0,093	-0,547
FHS	-0,078	0,034	-0,234	-0,124	0,062	-0,488	-0,219	0,124	-0,692
GARCH	-0,069	0,030	-0,173	-0,089	0,039	-0,223	-0,112	0,049	-0,282
Peugeot									
GPD cond.	-0,074	0,026	-0,175	-0,105	0,037	-0,248	-0,153	0,053	-0,362
FHS	-0,064	0,023	-0,170	-0,094	0,039	-0,269	-0,143	0,064	-0,402
GARCH	-0,058	0,020	-0,134	-0,075	0,026	-0,173	-0,095	0,033	-0,219
S&P 500									
GPD cond.	-0,043	0,026	-0,141	-0,064	0,039	-0,213	-0,109	0,070	-0,369
FHS	-0,036	0,023	-0,135	-0,061	0,043	-0,275	-0,122	0,096	-0,502
GARCH	-0,033	0,019	-0,097	-0,042	0,024	-0,126	-0,053	0,030	-0,159
Pétrole									
GPD cond.	-0,070	0,031	-0,172	-0,100	0,044	-0,244	-0,151	0,066	-0,365
FHS	-0,059	0,026	-0,148	-0,094	0,043	-0,286	-0,174	0,091	-0,497
GARCH	-0,053	0,024	-0,131	-0,069	0,031	-0,169	-0,087	0,039	-0,214
Blé									
GPD cond.	-0,058	0,012	-0,089	-0,076	0,016	-0,118	-0,098	0,023	-0,160
FHS	-0,052	0,012	-0,089	-0,072	0,018	-0,133	-0,096	0,033	-0,193
GARCH	-0,051	0,011	-0,085	-0,066	0,014	-0,110	-0,083	0,018	-0,139

TAB. 2.6 – ES estimée des modèles conditionnels

$ES(1, P)$ correspond à l'ES calculée sur un horizon d'un jour et au niveau de confiance P (95%, 99% et 99,9%). Les valeurs de l'ES sont estimées sur un historique de 5040 rentabilités journalières pour les actifs CAC 40, Socgen et Peugeot et de 5044 pour les actifs S&P 500, Pétrole et Blé. La période d'estimation est de janvier 2008 à décembre 2010.

2.3.3 Modèle conditionnel GPD validé par le contrôle ex post

Les résultats du contrôle ex post réalisé sur la période de crise de 2008 sont présentés dans les Tableaux 2.7, 2.8 et 2.9. L'examen des résultats du test de Kupiec sur le modèle conditionnel GPD montre une acceptation de l'hypothèse de couverture inconditionnelle sur tous les actifs du portefeuille d'étude et à tous les niveaux de confiance. En effet, les probabilités associées aux statistiques calculées sont toutes supérieures aux seuils requis (5%, 1% et 0,1%). Au niveau de confiance de 99,9%, à l'exception du CAC 40, le modèle conditionnel GPD n'enregistre aucune violation sur les autres actifs du portefeuille.

Les modèles internes de mesure de risque à savoir la méthode FHS et le modèle GARCH ont une fiabilité relative. En effet, la fiabilité de ces modèles selon le test de Kupiec, dépend des actifs et du niveau de confiance choisi. Par exemple, la méthode FHS n'est pas fiable sur l'indice CAC 40 et l'action Peugeot. Cependant, elle assure une fiabilité sur le Pétrole. Quant au modèle GARCH, il n'est pas fiable sur l'indice S&P 500, mais assure une fiabilité sur le Pétrole. Les deux modèles internes de mesure de risque assurent une fiabilité sur le Blé au niveau de confiance de 99% mais sont invalidés au niveau de confiance de 95%.

Compte tenu de la limite du test de Kupiec qui ne peut fournir de statistiques quand le modèle n'enregistre aucune violation, nous avons effectué le test de Wald sur l'ensemble des actifs du portefeuille d'étude. Le principal avantage du test de Wald par rapport au test de Kupiec est que le calcul de la statistique est possible même lorsqu'aucune violation n'est constatée. En plus, la statistique de Wald donne une indication sur la cause du rejet de l'hypothèse nulle de couverture inconditionnelle. Si celle-ci est élevée et positive, cela signifie que le modèle considéré sous-estime significativement le risque de l'actif étudié alors qu'une valeur négative traduit à l'inverse une surestimation du risque. Une statistique égale à zéro signale, quant à elle, que le nombre réel de violations est identique au niveau de risque fixé pour le calcul de la VaR.

Les résultats du test de Wald valident le modèle conditionnel GPD sur tous les actifs du portefeuille d'étude quel que soit le niveau de risque retenu. En effet, toutes les probabilités associées aux statistiques de Wald sont supérieures au seuil critique (5%, 1% et 0,1%). Ce qui signifie que la différence entre le niveau de risque fixé pour le calcul de la VaR

et la proportion de violations observée n'est pas significative. Cependant, les statistiques de Wald sont dans la majorité des cas faiblement négatives au niveau de risque. Ce qui signifie que le modèle conditionnel GPD surestime légèrement le risque réel. Aux niveaux de risque de 5% sur le Blé et de 0,1% sur le CAC 40, le modèle conditionnel GPD sous-estime le risque réel.

L'examen des résultats du test de Wald sur les modèles internes de mesure de risque montre que dans la majorité des cas, les statistiques de Wald sont positives et élevées. Cela signifie que les modèles internes ou techniques traditionnelles sous-estiment fortement le risque sur les actifs du portefeuille d'étude.

Les résultats du test d'indépendance de Markov présentés dans le Tableau 2.8, montrent que pour les trois modèles de mesure de VaR, les violations sont significativement indépendantes. En effet, toutes les probabilités associées aux statistiques sont supérieures au seuil critique requis. Ainsi, on peut considérer que la propriété d'indépendance des séries des violations est remplie par l'ensemble des modèles de risque.

Le test de couverture conditionnelle permet de tester conjointement la propriété de couverture inconditionnelle (test de Kupiec) et celle d'indépendance d'une série de violations. Ce test confirme les analyses précédentes en ce qui concerne la fiabilité des modèles de risque utilisées dans cette étude. Nous observons dans le Tableau 2.8 que le modèle conditionnel GPD assure mieux la couverture conditionnelle que les modèles internes de mesure de risque.

Afin de compléter l'analyse, nous examinons aussi les résultats du test de l'Expected Shortfall. La mesure de l'Expected Shortfall permet d'avoir un indicateur complémentaire à la VaR. Cet indicateur permet de connaître la perte moyenne potentielle une fois que la VaR est dépassée. Les statistiques obtenues par le test proposé par Embrechts et al. (2005) sont présentées dans le Tableau 2.9. Quand la valeur absolue de la statistique est égale à zéro, la méthode de mesure de l'ES est considérée comme fiable. L'analyse des résultats de ce test montre que l'ES estimée par les trois modèles de mesure de risque évalue plus ou moins correctement le risque moyen au-delà de la VaR. Cependant, nous ne pouvons rien décider de la fiabilité de l'ES car ce test souffre de l'absence de probabilité associée à la statistique calculée.

Les résultats du contrôle ex post réalisé sur les années 2009 et 2010 sont présentés dans les Tableaux D.7 à D.11. De manière générale, nous constatons une amélioration de la fiabilité des modèles internes de mesure de risque. Le modèle conditionnel GPD est fiable sur tous les actifs du portefeuille d'étude.

	Test de Kupiec			Test de Wald		
	GPD cond.	FHS	GARCH	GPD cond.	FHS	GARCH
CAC 40						
95%	1,14 (0,29)	20,79 (0,00)	7,52 (0,01)	-1,02 (0,85)	5,37 (0,00)	3,05 (0,00)
99%	0,11 (0,74)	15,89 (0,00)	1,96 (0,16)	-0,32 (0,62)	5,40 (0,00)	1,59 (0,06)
99,9%	1,27 (0,26)	9,44 (0,00)	4,83 (0,03)	1,50 (0,07)	5,50 (0,00)	3,50 (0,00)
Socgen						
95%	0,02 (0,88)	7,52 (0,01)	4,04 (0,04)	-0,15 (0,56)	3,05 (0,00)	2,18 (0,01)
99%	0,11 (0,74)	3,56 (0,06)	10,23 (0,00)	-0,32 (0,62)	2,22 (0,01)	4,13 (0,00)
99,9%	-	4,83 (0,03)	4,83 (0,03)	-0,50 (0,69)	3,50 (0,00)	3,50 (0,00)
Peugeot						
95%	0,02 (0,88)	24,89 (0,00)	6,26 (0,01)	-0,15 (0,56)	5,95 (0,00)	2,76 (0,00)
99%	0,11 (0,74)	29,40 (0,00)	5,50 (0,02)	-0,32 (0,62)	7,95 (0,00)	2,86 (0,00)
99,9%	-	62,22 (0,00)	4,83 (0,03)	-0,50 (0,69)	21,51 (0,00)	3,50 (0,00)
S&P 500						
95%	0,02 (0,88)	7,52 (0,01)	6,26 (0,01)	-0,15 (0,56)	3,05 (0,00)	2,76 (0,00)
99%	0,11 (0,74)	0,09 (0,76)	12,96 (0,00)	-0,32 (0,62)	0,32 (0,38)	4,77 (0,00)
99,9%	-	4,83 (0,03)	9,44 (0,00)	-0,50 (0,69)	3,50 (0,00)	5,50 (0,00)
Pétrole						
95%	1,94 (0,16)	3,09 (0,08)	1,54 (0,21)	-1,31 (0,90)	1,89 (0,03)	1,31 (0,10)
99%	1,18 (0,28)	0,09 (0,76)	1,96 (0,16)	-0,95 (0,83)	0,32 (0,38)	1,59 (0,06)
99,9%	-	-	1,27 (0,26)	-0,50 (0,69)	-0,50 (0,69)	1,50 (0,07)
Blé						
95%	2,26 (0,13)	13,49 (0,00)	6,26 (0,01)	1,60 (0,06)	4,21 (0,00)	2,76 (0,00)
99%	5,03 (0,02)	5,50 (0,02)	7,73 (0,00)	-1,59 (0,94)	2,86 (0,00)	3,50 (0,00)
99,9%	-	-	-	-0,50 (0,69)	-0,50 (0,69)	-0,50 (0,69)

TAB. 2.7 – Résultats du test de Kupiec et de Wald sur les modèles conditionnels

Les valeurs manquantes correspondent au cas où les statistiques ne sont pas calculables parce que le modèle de risque n'a enregistré aucune violation. Les valeurs entre parenthèses sont des probabilités associées aux statistiques. Les valeurs en gras sont des statistiques dont la probabilité associée est supérieure au seuil d'acceptation (5%,1% et 0,1%) de l'hypothèse de couverture inconditionnelle. Le test est effectué sur une fenêtre de backtesting de 250 jours (janvier 2008 à décembre 2008).

	Test d'indépendance			Test de couverture conditionnelle		
	GPD cond.	FHS	GARCH	GPD cond.	FHS	GARCH
CAC 40						
95%	0,01 (0,91)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	1,15 (0,56)	20,79 (0,00)	7,52 (0,02)
99%	0,00 (0,99)	0,02 (0,88)	0,00 (0,96)	0,11 (0,95)	15,91 (0,00)	1,96 (0,38)
99,9%	0,00 (1,00)	0,00 (0,98)	0,00 (0,99)	1,27 (0,53)	9,44 (0,01)	4,83 (0,09)
Soegen						
95%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,02 (0,99)	7,52 (0,02)	4,04 (0,13)
99%	0,00 (0,99)	0,00 (0,95)	0,50 (0,48)	0,11 (0,95)	3,56 (0,17)	10,73 (0,00)
99,9%	-	0,00 (0,99)	0,00 (0,99)	-	4,83 (0,09)	4,83 (0,09)
Peugeot						
95%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,02 (0,99)	24,89 (0,00)	6,26 (0,04)
99%	0,00 (0,99)	0,00 (1,00)	0,01 (0,94)	0,11 (0,95)	29,40 (0,00)	5,50 (0,06)
99,9%	-	0,00 (1,00)	0,00 (0,99)	-	62,22 (0,00)	4,83 (0,09)
S&P 500						
95%	0,03 (0,86)	0,23 (0,63)	0,20 (0,66)	0,05 (0,97)	7,75 (0,02)	6,46 (0,04)
99%	0,00 (0,99)	0,00 (0,98)	0,02 (0,90)	0,11 (0,95)	0,10 (0,95)	12,97 (0,00)
99,9%	-	0,00 (0,99)	0,00 (0,98)	-	4,83 (0,09)	9,44 (0,01)
Pétrole						
95%	0,01 (0,93)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	1,95 (0,38)	3,09 (0,21)	1,54 (0,46)
99%	0,00 (1,00)	0,00 (0,98)	0,00 (0,96)	1,18 (0,56)	0,10 (0,95)	1,96 (0,38)
99,9%	-	-	0,00 (1,00)	-	-	1,27 (0,53)
Bié						
95%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	2,26 (0,32)	13,49 (0,00)	6,26 (0,04)
99%	0,00 (1,00)	0,01 (0,94)	0,01 (0,93)	5,03 (0,08)	5,50 (0,06)	7,74 (0,00)
99,9%	-	-	-	-	-	-

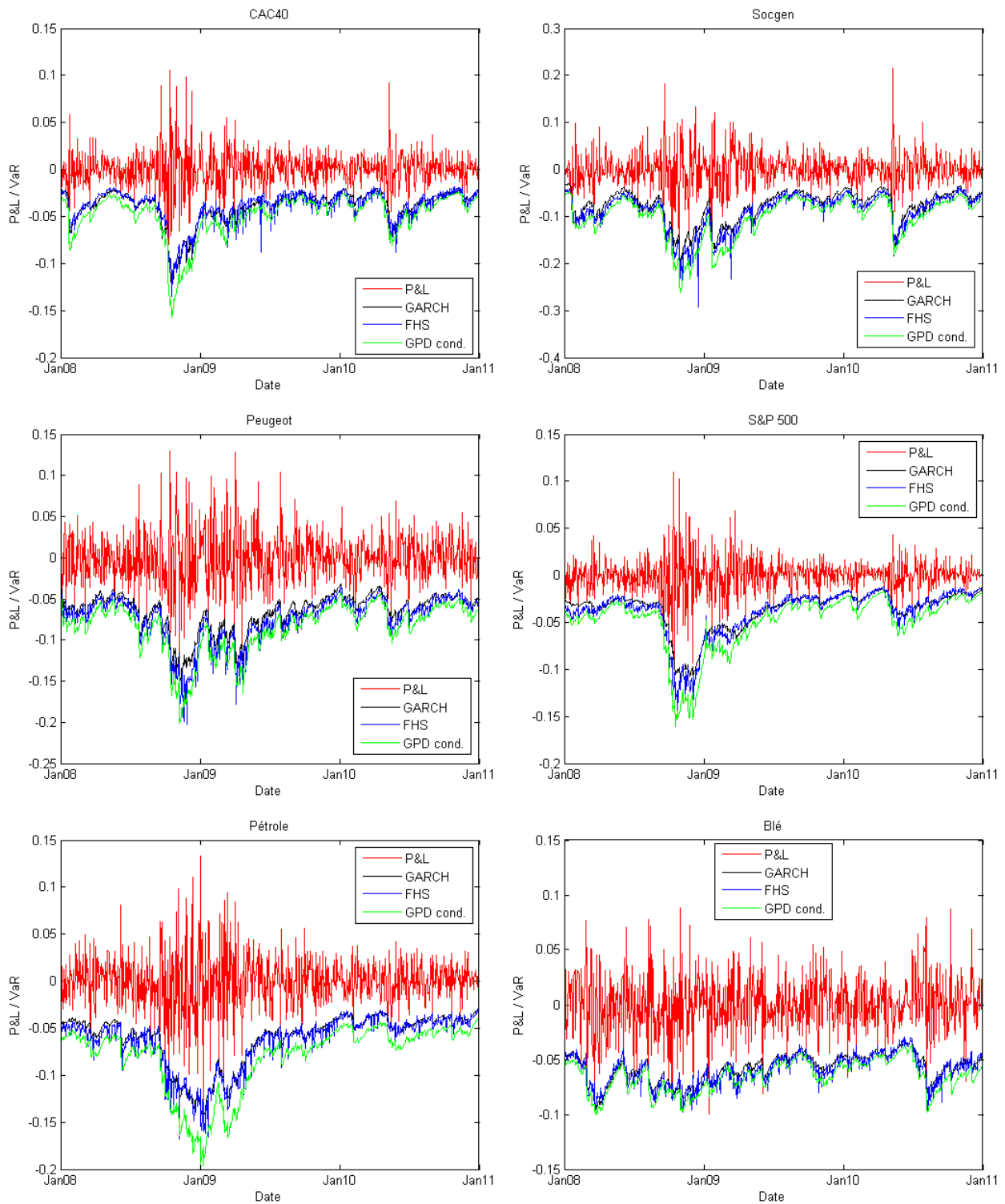
TAB. 2.8 – Résultats du test de Christoffersen sur les modèles conditionnels

Les valeurs manquantes correspondent au cas où les statistiques ne sont pas calculables parce que le modèle de risque n'a enregistré aucune violation. Les valeurs entre parenthèses sont des probabilités associées aux statistiques. Les valeurs en gras sont des statistiques dont la probabilité associée est inférieure au seuil d'acceptation (5%, 1%, 0,1%) de l'hypothèse de couverture conditionnelle. Le backtesting est effectué sur une fenêtre de backtesting de 250 jours (janvier 2008 à décembre 2008).

	Soegen			Peugeot			S&P 500			Pétrole			Bié		
	95%	99%	99,9%	95%	99%	99,9%	95%	99%	99,9%	95%	99%	99,9%	95%	99%	99,9%
CAC 40															
GPD cond.	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00	-	0,00	0,01	-	0,00	0,01	-	0,01	0,02	-
FHS	0,00	0,01	0,02	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00	-
GARCH	0,00	0,01	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,01	0,00	0,00	0,01

TAB. 2.9 – Backtesting de l'ES des modèles conditionnels

Les valeurs de la statistique égales à zéro montrent que les modèles mesurent correctement le risque moyen au-delà de la VaR.



GRAPH. 2.1 – Performance des modèles conditionnels

P&L correspond aux pertes et profits. GPD cond., FHS, GARCH correspondent à la VaR journalière au niveau de confiance de 99%.

2.4 Conclusion

Compte tenu de la forte sous-estimation du risque par les trois modèles de mesure de risque sous l'hypothèse de volatilité constante dans le précédent chapitre, nous avons pris en compte dans celui-ci la dynamique de la volatilité, l'effet asymétrique des rentabilités et le clustering de volatilité. Ces éléments ont été pris en compte par la modélisation de la volatilité conditionnelle.

Les résultats de l'estimation des pertes potentielles montrent d'une part, une diminution de la sous-estimation du risque en période de crise financière et économique et d'autre part, une diminution de la surestimation du risque en période de faible volatilité des marchés. Cette amélioration des trois modèles de mesure de risque dans leur ensemble et sur tous les actifs du portefeuille d'étude est due à la prise en compte du changement de la volatilité dans le temps, de l'effet asymétrique des rentabilités sur la volatilité et du clustering de volatilité dans les modèles de mesure de risque.

Les résultats de la procédure du contrôle ex post révèle une fiabilité du modèle conditionnel GPD par rapport aux modèles internes de mesure de risque. La fiabilité des modèles internes de mesure de risque est relative c'est-à-dire qu'elle dépend du type d'actif et du niveau de confiance choisi. Cependant, parmi ces deux modèles de mesure de risque, la méthode FHS évalue mieux le risque sur certains actifs du portefeuille que le modèle GARCH de la loi normale. Nous notons également que le modèle conditionnel GPD a tendance à légèrement surestimer le risque. Les modèles internes de mesure de risque quant à eux sous-estiment le risque des actifs du portefeuille d'étude.

Etant donnée la fiabilité de la distribution de Pareto généralisée sur les actifs individuels du portefeuille d'étude, quelle sera sa fiabilité sur un portefeuille global qui prend en compte les questions de corrélation? Une des solutions est d'associer la théorie des valeurs extrêmes et la théorie des copules. Cette question est importante dans la mesure où la théorie des valeurs extrêmes devient une alternative aux modèles internes de mesure de risque jusqu'à présent utilisés dans les établissements financiers .

Chapitre 3

MODÉLISATION DES PERTES

POTENTIELLES SUR UN PORTEFEUILLE

Nous avons jusqu'à présent traité l'estimation des pertes potentielles sur les actifs individuels du portefeuille d'étude. Dans la réalité, ces actifs individuels ne sont pas indépendants. Ils entretiennent une dépendance entre eux. Pour tenir compte de cette dépendance entre les actifs du portefeuille d'étude, nous faisons appel à la théorie des copules afin de mesurer les pertes potentielles sur le portefeuille global. La copule permet de caractériser la dépendance entre différentes variables aléatoires sans se préoccuper de ses lois marginales. L'apport de ce chapitre est l'association de la méthode des excès à la théorie des copules pour mesurer les pertes potentielles sur un portefeuille financier composé d'actions et de matières premières.

La dépendance est souvent prise en compte par la corrélation linéaire entre les différentes variables aléatoires. La mesure de la dépendance par la corrélation linéaire n'est adaptée que lorsque la relation de dépendance est linéaire et l'univers considéré comme gaussien, cadre d'analyse malheureusement rare en finance. Pour remédier à cela, il existe des indicateurs de dépendance se fondant sur les discordances et les concordances observées sur des variables aléatoires. Parmi ces indicateurs de dépendance, il y a des coefficients de corrélation non linéaire et non paramétrique²³, comme le tau de Kendall ou encore le rho de Spearman. Ce sont de bons indicateurs globaux de la dépendance entre variables

23. Pour plus de détails, lire le chapitre 3 de Cherubini et al. (2004).

aléatoires et leurs valeurs sont comprises entre -1 et 1 comme le coefficient de corrélation linéaire.

Pour les distributions non gaussiennes, la corrélation linéaire ne suffit pas pour décrire la structure de dépendance entre les variables aléatoires. En effet, pour la modélisation de la dépendance des événements extrêmes, il est recommandé d'utiliser les copules (Zeevi and Mashal (2002)). La copule est une fonction de dépendance contrairement aux corrélations linéaires et non linéaires qui ne sont que des indicateurs statistiques. Une grande diversité de copules²⁴ permet de modéliser la dépendance des événements extrêmes parmi lesquelles la copule de Student que nous utilisons dans le cadre de cette étude. Plusieurs études (Breymann et al. (2003) et Demarta and McNeil (2005)) ont montré que la copule de Student permet de modéliser la structure de dépendance des valeurs extrêmes. Quant à la copule gaussienne, son utilisation est limitée du fait de l'hypothèse sous-jacente selon laquelle les valeurs extrêmes sont indépendantes.

L'objectif de ce chapitre est de tenir compte de la dépendance entre les actifs du portefeuille d'étude pour modéliser les pertes potentielles globales et mesurer le risque sur le long terme. La première section décrit les copules de la loi de Student et de la loi normale que nous utilisons pour estimer la dépendance entre les actifs du portefeuille d'étude. Dans la deuxième section, la dépendance entre les actifs, le risque sur le portefeuille global et la performance des techniques de mesure de risque sont évalués. La troisième section présente la manière de mesurer le risque sur le long terme avec la théorie des valeurs extrêmes. Cette dernière section présente la méthodologie d'extrapolation de la VaR journalière à la VaR de plus d'un jour.

3.1 Mesure de dépendance par les copules

3.1.1 Copules de Student et de la loi normale

Dans la théorie des copules, la dépendance entre variables aléatoires est parfaitement décrite par leur distribution jointe. Cependant, nous pouvons distinguer les comporte-

24. Les détails sur les différents types de copules et leur estimation peuvent être trouvés dans *Copula methods in finance* de Cherubini et al. (2004) et dans une étude menée par Costinot et al. (2000).

ments des distributions marginales de la structure de dépendance. La copule est l'outil permettant d'extraire la structure de dépendance d'une distribution jointe et ainsi de séparer dépendance et comportement marginal. En isolant cette structure de dépendance, il est alors possible de déterminer une loi multivariée originale, car composée de distributions marginales différentes. Un exemple simple est la structure de dépendance générée par une copule gaussienne dont la distribution jointe est gaussienne mais avec des distributions marginales différentes.

La copule de loi de Student est définie comme la structure de dépendance implicite de la distribution multivariée de Student (cf. Annexe E.4). C'est un modèle qui attire beaucoup d'attention pour la modélisation de la structure de dépendance des rentabilités financières. Un certain nombre d'auteurs comme Zeevi and Mashal (2002) et Breyman et al. (2003) ont montré empiriquement que la copule de la loi de Student est généralement supérieure à celle de la loi normale. Une des raisons à cela, est la capacité de la copule de Student à mieux mesurer le phénomène de dépendance des valeurs extrêmes qui sont souvent observées dans les données de rentabilités financières (Demarta and McNeil (2005)). C'est pourquoi, nous l'utilisons dans la méthode POT pour estimer la corrélation entre les facteurs de risque du portefeuille d'étude.

Nous utilisons également la copule normale (cf. Annexe E.5) pour estimer la matrice de corrélation pour le modèle GARCH. L'introduction de la copule normale permet de comparer la performance du modèle Generalized Pareto Distribution (GPD) à celle du modèle GARCH. Pour la méthode *Filtered Historical Simulation* (FHS), nous faisons la somme des rentabilités logarithmiques des actifs pour déterminer la rentabilité du portefeuille. L'une des qualités de la méthode FHS est de ne pas supposer d'hypothèses ni sur la loi suivie par la distribution des rentabilités, ni sur le type de corrélation qui peut exister entre les facteurs de risque. Ainsi, en considérant la somme des rentabilités logarithmiques des actifs du portefeuille, la corrélation est empiriquement prise en compte entre les actifs du portefeuille.

3.1.2 Méthodes d'estimation des copules

L'estimation de la copule commence par la transformation des données à "l'échelle de la copule" en estimant d'abord les distributions marginales des données et en transformant ces marginales en variables uniformes. De façon générale, la modélisation des distributions marginales est réalisée de trois manières : une estimation paramétrique de chaque marginale, une modélisation non paramétrique en utilisant les fonctions de distribution empirique et une estimation hybride en combinant les modélisations paramétrique et non paramétrique.

La première méthode est connue sous le nom de *Inference Functions for Margins method* ou IFM (cf. Annexe E.7) développée par Joe and Xu (1996). Dans la pratique, le succès de cette méthode dépend du choix approprié des modèles paramétriques pour les distributions marginales qui n'est pas toujours évident surtout quand les données exposent des queues épaisses.

La deuxième méthode suppose une estimation des distributions marginales par la fonction de densité empirique couramment appelée la méthode de pseudo-vraisemblance qui a été développée par Genest et al. (1995). Les paramètres estimés de la copule qui résultent de cette méthode sont consistants et asymptotiquement convergents pour les variables aléatoires indépendamment et identiquement distribuées.

Soit les vecteurs de variables aléatoires $X_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,d})'$, $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, d$, l'estimation de la j ème distribution marginale du i ème vecteur F_j est donnée par :

$$\hat{F}_j(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_{i,j} \leq x\}} \quad (3.1)$$

Le pseudo-échantillon de la copule est ensuite construit par les vecteurs $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n$ suivant la formule

$$\hat{U}_i = (U_{i,1}, \dots, U_{i,d})' = (\hat{F}_1(X_{i,1}), \dots, \hat{F}_d(X_{i,d}))' \quad (3.2)$$

Les rentabilités de chaque facteur de risque X_1, \dots, X_n doivent être identiquement et indépendamment distribuées. Les estimations des distributions marginales \hat{F}_j sont construites à partir des vecteurs de données originelles univariées $X_{1,j}, \dots, X_{n,j}$.

La méthode hybride quant à elle peut être développée par la modélisation des queues de distributions par la théorie des valeurs extrêmes (Davison and Smith (1990)) et la partie intérieure peut être estimée par une fonction de distribution empirique comme dans l'Equation (3.1).

Les paramètres de la copule sont estimés suivant plusieurs méthodes d'inférence statistiques : méthode des moments, méthode du maximum de vraisemblance, méthode IFM et méthode *Canonical Maximum Likelihood* (CML). Ces différentes méthodes sont présentées dans l'Annexe E.7. Après l'analyse des avantages et des inconvénients de chacune de ces méthodes, nous retenons dans cette étude, une estimation de la copule par la méthode CML. Dans cette méthode d'inférence statistique, les paramètres de la copule sont estimés sans spécifier les distributions marginales. La méthode d'estimation consiste à transformer l'échantillon d'observations $[(x_1^t, \dots, x_n^t)]_{t=1}^T$ en variables uniformes $[(u_1^t, \dots, u_n^t)]_{t=1}^T$ et d'estimer les paramètres de la copule. Cette méthode peut être décrite comme suit :

Estimer les distributions marginales en utilisant les distributions empiriques (sans supposition de formes paramétriques des distributions), c'est-à-dire $\hat{F}_j(x_i^t)$ avec $i = 1, \dots, n$.

Estimer par le maximum de vraisemblance les paramètres de la copule

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \sum_{t=1}^T \log c(\hat{F}_1(x_1^t), \dots, \hat{F}_n(x_n^t); \theta) \quad (3.3)$$

Cette méthode recommandée par Bouye et al. (2000) est voisine de la méthode IFM à la différence qu'elle ne nécessite pas d'avoir recours à l'estimation des marginales. Elle a l'avantage de procéder à une estimation paramétrique de la copule totalement indépendante de la forme paramétrique des distributions marginales.

3.2 Estimation des pertes potentielles sur le portefeuille

Les pertes potentielles sur le portefeuille composé des indices actions (CAC 40 et S&P 500) et des matières premières (Pétrole et Blé), peuvent être estimées en intégrant l'estimation de la copule dans les mesures de la Value at Risk et l'Expected Shortfall. Cette méthodologie des copules permet de mieux prendre en compte la dépendance entre les différents actifs du portefeuille sans imposer un type particulier de corrélation. En adoptant la corrélation linéaire, cela suppose une relation linéaire entre les actifs dont les distributions de rentabilités suivent une loi normale. Sachant que les actifs du portefeuille d'étude ne suivent pas la loi normale, nous adoptons une mesure de dépendance par les copules.

3.2.1 Série de rentabilités du portefeuille

Pour construire la série de rentabilités du portefeuille sur laquelle est basée la détermination de la Value at Risk et l'Expected Shortfall, nous avons besoin d'estimer les coefficients de corrélation entre les différents actifs. L'estimation de la matrice de corrélation par la copule commence par la construction des variables uniformes basées sur les résidus standardisés. Pour déterminer les résidus standardisés, nous adoptons la même procédure que celle de la Section 2.1 du chapitre précédent. Cette procédure consiste à déterminer pour chaque actif, les résidus et les volatilités conditionnelles en estimant les modèles ARMA(1,1)-GJR(1,1) et ARMA(1,1)-GARCH(1,1). Les résidus sont ensuite standardisés par le rapport entre les résidus et les volatilités conditionnelles estimés. Les résidus standardisés permettent, par transformation, la construction des variables uniformes. Cette transformation est effectuée en estimant la fonction de répartition empirique (cf. Equation 3.1) des résidus standardisés afin de ne pas imposer une distribution particulière aux données. Si les lois de distribution suivies par les données étaient bien connues, il serait judicieux de choisir ces lois pour la transformation des résidus standardisés. Comme les lois de distribution suivies par les données financières ne sont toujours pas connues avec certitude, nous choisissons la transformation par la fonction de répartition empirique. Cela consiste à estimer la fonction de répartition empirique des résidus standardisés.

Une fois cette transformation de variables aléatoires effectuée en variables uniformes, ces données transformées sont utilisées pour estimer la matrice de corrélation de la copule par la méthode *Canonical Maximum Likelihood* décrit précédemment et dont les résultats de l'estimation du 2/01/2008 sont présentés dans le Tableau 3.1. La méthode CML permet de déterminer la dépendance entre les variables aléatoires séparément du choix des distributions marginales.

	CAC 40	S&P 500	Pétrole	Blé
CAC 40	1	0,337 (0,00)	0,009 (0,64)	0,014 (0,22)
S&P 500	0,337 (0,00)	1	-0,028 (0,09)	-0,001 (0,68)
Pétrole	0,009 (0,64)	-0,028 (0,09)	1	0,039 (0,13)
Blé	0,014 (0,22)	-0,001 (0,68)	0,039 (0,13)	1

TAB. 3.1 – Coefficient de dépendance de la copule de Student

Les valeurs entre parenthèses correspondent aux P-value. Si elles sont inférieures à 5%, l'hypothèse de nullité de la corrélation est rejetée, sinon, l'hypothèse de corrélation est acceptée. Les coefficients de corrélation sont estimés sur des rentabilités journalières de janvier 1988 à décembre 2007.

	CAC 40	S&P 500	Pétrole	Blé
CAC 40	1	0,338 (0,00)	0,007 (0,59)	0,016 (0,25)
S&P 500	0,338 (0,00)	1	-0,033 (0,09)	0,003 (0,70)
Pétrole	0,007 (0,59)	-0,033 (0,09)	1	0,035 (0,01)
Blé	0,016 (0,25)	0,003 (0,70)	0,035 (0,01)	1

TAB. 3.2 – Coefficient de dépendance de la copule normale

Les valeurs entre parenthèses correspondent aux P-value. Si elles sont inférieures à 5%, l'hypothèse de nullité de la corrélation est rejetée, sinon, l'hypothèse de corrélation est acceptée. Les coefficients de corrélation sont estimés sur des rentabilités journalières de janvier 1988 à décembre 2007.

L'analyse des résultats du Tableau 3.1 de l'estimation de la copule de Student permet de remarquer une forte corrélation significative entre le CAC 40 et S&P 500. Il existe une faible corrélation positive entre le CAC 40 et les matières premières et une corrélation négative entre le S&P 500 et les matières premières. Mais ces corrélations ne sont pas significativement différentes de zéro. A la différence de la copule de Student, la copule normale estime une corrélation positive et significativement différente de zéro entre le Pétrole et le Blé.

Nous avons besoin d'estimer les variables uniformes qui ont une structure de dépendance équivalente aux coefficients de corrélation précédemment déterminés. Pour déterminer ces variables uniformes dépendantes, il est nécessaire d'utiliser la simulation de Monte Carlo basée sur les fonctions de densité des copules (cf. Annexes E.4 et E.5) et ayant pour paramètres de simulation : la matrice de corrélation et le degré de liberté déterminés par la méthode *Canonical Maximum Likelihood*.

Les données de la simulation sont ensuite transformées en résidus standardisés par inversion de la fonction de répartition empirique sur les variables uniformes de chaque actif du portefeuille. Cela donne des résidus standardisés simulés consistants comme ceux obtenus de l'estimation du modèle de volatilité conditionnelle. Les résidus standardisés de chacun des actifs du portefeuille sont identiquement et indépendamment distribués. Chaque actif du portefeuille garde avec les autres une corrélation de rang induite par la fonction copule.

En utilisant les résidus standardisés simulés comme un processus de bruit blanc (variables i.i.d), nous réintroduisons l'autocorrélation et l'hétéroscédasticité observées dans les rentabilités d'origine par la simulation de Monte Carlo basée sur le modèle de volatilité conditionnelle. Cette simulation permet d'avoir des rentabilités à l'image des rentabilités d'origine sauf qu'elles gardent une dépendance les unes par rapport aux autres. Ainsi, comme les rentabilités utilisées sont des rentabilités logarithmiques, nous faisons la somme des rentabilités équipondérées des facteurs de risque pour obtenir une série de rentabilités du portefeuille global.

Les rentabilités du portefeuille global ainsi calculées sont ensuite utilisées pour déterminer les résidus standardisés par l'estimation du modèle de volatilité conditionnelle. Ces résidus standardisés du portefeuille servent de données pour l'estimation de la Value at Risk et l'Expected Shortfall basées sur les modèles de risque.

3.2.2 Value at Risk et Expected Shortfall

Les mesures de la Value at Risk et l'Expected Shortfall sont réalisées sur le portefeuille en considérant d'une part la constance de la volatilité et d'autre part le changement de la volatilité dans le temps.

L'estimation des mesures de risque (VaR et ES) a été faite sur la période de janvier 2008 à décembre 2010 à partir d'un historique de 5214 rentabilités journalières pour les actifs CAC 40, S&P 500, Pétrole et Blé. Sur cette période d'estimation de trois ans, la moyenne, l'écart-type, le minimum et le maximum des pertes estimées ont été calculés sur le portefeuille et au niveau de confiance de 95%, 99% et 99,9%.

Les paramètres estimés du modèle GPD sur le portefeuille en supposant la constance de la volatilité sont présentés dans le Tableau 3.3. L'examen de ce tableau montre que le portefeuille global présente un risque extrême (indice de queue ξ en moyenne supérieure à zéro dans la queue gauche). Cependant, après prise en compte du changement de la volatilité dans le temps et du clustering de volatilité, l'indice de queue ξ (en moyenne inférieure à zéro) dans le Tableau 3.4 montre que le portefeuille global ne présente plus de risque extrême. Ces résultats montrent l'avantage de la prise en compte du clustering de volatilité et du changement de la volatilité dans la mesure du risque de portefeuille financier.

Le Tableau 3.5 présente les estimations de la VaR et l'ES sous l'hypothèse de la volatilité constante. L'analyse de ce tableau montre en termes hiérarchiques que les valeurs moyennes de la VaR_{GPD} et de l' ES_{GPD} sont supérieures à celles de la VaR_{SH} et l' ES_{SH} . Les valeurs de la VaR_{SH} et l' ES_{SH} sont aussi supérieures à celles de la $VaR_{Normale}$ et de l' $ES_{Normale}$. Ces résultats obtenus sur le portefeuille confirment ceux obtenus sur les actifs individuels dans le Chapitre 1.

Les pertes potentielles déterminées en prenant en compte le changement de la volatilité dans le temps sont présentées dans le Tableau 3.6. Dans ce tableau, nous observons que les valeurs de la $VaR_{GPDcond.}$ et l' $ES_{GPDcond.}$ sont supérieures à celles des techniques traditionnelles de mesure de risque aux niveaux de confiance de 95% et 99%. Cependant, les valeurs de la VaR_{FHS} et de l' ES_{FHS} au niveau de confiance de 99,9% sont supérieures à celles du modèle GPD. Cette supériorité de la méthode FHS au niveau de confiance de 99,9% s'explique par la présence de pertes plus élevées dans la queue de distribution empirique des pertes et profits. Les valeurs de la VaR_{GARCH} et de l' ES_{GARCH} basées sur la loi normale sont inférieures à celles estimées par les deux méthodes précédentes. Cela prouve que la mesure des pertes potentielles par la méthode de la loi normale est

inadaptée pour les actifs pris individuellement mais également pour le portefeuille global. Cette analyse est observable sur le Graphique 3.1 pour la $VaR_{GPDcond.}$, le Graphique 3.2 pour la VaR_{FHS} et le Graphique 3.3 pour la VaR_{GARCH} . Ces graphiques sont réalisés pour comparer les valeurs de VaR aux pertes et profits effectivement enregistrés sur le portefeuille.

	Queue gauche						Queue droite							
	N	Nu	u	ξ	β	(ξ)	(β)	N	Nu	u	ξ	β	(ξ)	(β)
Moyenne	2000	199	0,010	0,069	0,005	0,076	0,001	2000	199	1,228	-0,040	0,542	0,064	0,051
Ecart-type	0	0	0,001	0,113	0,001	0,007	0,000	0	0	0,012	0,038	0,034	0,005	0,002
Minimum	2000	199	0,009	-0,148	0,004	0,056	0,000	2000	199	1,196	-0,148	0,476	0,052	0,048
maximum	2000	199	0,011	0,266	0,006	0,086	0,001	2000	199	1,270	0,031	0,628	0,076	0,057

TAB. 3.3 – Paramètres estimés du modèle inconditionnel GPD

Les valeurs (ξ) et (β) correspondent respectivement aux erreurs standards de l'indice de queue ξ et du paramètre de dispersion β du modèle conditionnel GPD. N est le nombre d'observations dans les queues. Nu est le nombre d'observations au-delà du seuil u. Les valeurs en gras correspondent aux valeurs de l'indice de queue ξ la plus élevée comparativement à l'autre queue de distribution. Les estimations des paramètres ont été effectuées sur un historique de 5214 rentabilités journalières. La période d'estimation est de janvier 2008 à décembre 2010.

	Queue gauche						Queue droite							
	N	Nu	u	ξ	β	(ξ)	(β)	N	Nu	u	ξ	β	(ξ)	(β)
Moyenne	2000	199	1,245	-0,065	0,610	0,063	0,058	2000	199	1,228	-0,040	0,542	0,064	0,051
Ecart-type	0	0	0,016	0,028	0,025	0,005	0,002	0	0	0,012	0,038	0,034	0,005	0,002
Minimum	2000	199	1,193	-0,140	0,552	0,048	0,050	2000	199	1,196	-0,148	0,476	0,052	0,048
maximum	2000	199	1,288	0,011	0,681	0,078	0,062	2000	199	1,270	0,031	0,628	0,076	0,057

TAB. 3.4 – Paramètres estimés du modèle conditionnel GPD

Les valeurs (ξ) et (β) correspondent respectivement aux erreurs standards de l'indice de queue ξ et du paramètre de dispersion β du modèle conditionnel GPD. N est le nombre d'observations dans les queues. Nu est le nombre d'observations au-delà du seuil u. Les valeurs en gras correspondent aux valeurs de l'indice de queue ξ la plus élevée comparativement à l'autre queue de distribution. Les estimations des paramètres ont été effectuées sur un historique de 5214 données journalières pour une période d'estimation de janvier 2008 à décembre 2010.

Portefeuille	95%			99%			99,9%					
	Moyenne	Ecart type	Max	Min	Moyenne	Ecart type	Max	Min	Moyenne	Ecart type	Max	Min
VaR(1, P)												
GPD	-0,044	0,007	-0,030	-0,061	-0,059	0,017	-0,034	-0,097	-0,089	0,044	-0,038	-0,185
SH	-0,014	0,001	-0,012	-0,015	-0,025	0,002	-0,021	-0,028	-0,056	0,015	-0,030	-0,065
Normale	-0,016	0,001	-0,014	-0,017	-0,022	0,001	-0,019	-0,024	-0,029	0,002	-0,026	-0,031
ES(1, P)												
GPD	-0,054	0,014	-0,032	-0,085	-0,072	0,028	-0,035	-0,135	-0,108	0,066	-0,039	-0,255
SH	-0,021	0,002	-0,017	-0,024	-0,036	0,006	-0,025	-0,041	-0,065	0,017	-0,035	-0,075
Normale	-0,019	0,001	-0,017	-0,021	-0,025	0,002	-0,022	-0,027	-0,032	0,002	-0,028	-0,034

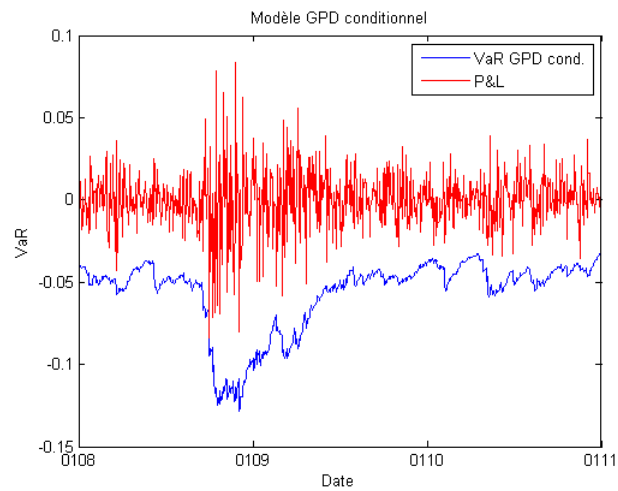
TAB. 3.5 – VaR et ES estimées par les modèles inconditionnels sur le portefeuille

$VaR(1, P)$ correspond à la VaR calculée sur un horizon d'un jour et au niveau de confiance P (95%, 99% et 99,9%). $ES(1, P)$ correspond à l'ES calculée sur un horizon d'un jour et au niveau de confiance P (95%, 99% et 99,9%). Les estimations des paramètres ont été effectuées sur un historique de 5214 données journalières pour une période d'estimation de janvier 2008 à décembre 2010.

Portefeuille	95%			99%			99,9%					
	Moyenne	Ecart type	Max	Min	Moyenne	Ecart type	Max	Min	Moyenne	Ecart type	Max	Min
VaR (1, P)												
GPD cond.	-0,048	0,018	-0,028	-0,106	-0,056	0,022	-0,032	-0,129	-0,067	0,028	-0,036	-0,162
FHS	-0,025	0,011	-0,012	-0,063	-0,038	0,017	-0,019	-0,099	-0,076	0,038	-0,027	-0,207
GARCH	-0,020	0,007	-0,012	-0,040	-0,028	0,010	-0,017	-0,057	-0,037	0,013	-0,022	-0,076
ES(1, P)												
GPD cond.	-0,053	0,020	-0,030	-0,120	-0,061	0,024	-0,034	-0,143	-0,071	0,030	-0,038	-0,177
FHS	-0,035	0,015	-0,018	-0,086	-0,053	0,024	-0,024	-0,141	-0,081	0,040	-0,030	-0,207
GARCH	-0,025	0,008	-0,015	-0,051	-0,032	0,011	-0,019	-0,065	-0,041	0,014	-0,024	-0,083

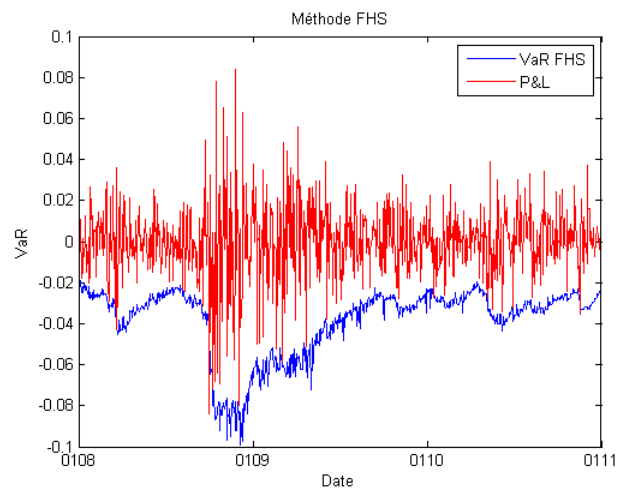
TAB. 3.6 – VaR et ES estimées par les modèles conditionnels sur le portefeuille

$VaR(1, P)$ correspond à la VaR calculée sur un horizon d'un jour et au niveau de confiance P (95%, 99% et 99,9%). $ES(1, P)$ correspond à l'ES calculée sur un horizon d'un jour et au niveau de confiance P (95%, 99% et 99,9%). Les estimations des paramètres ont été effectuées sur un historique de 5214 données journalières pour une période d'estimation de janvier 2008 à décembre 2010.



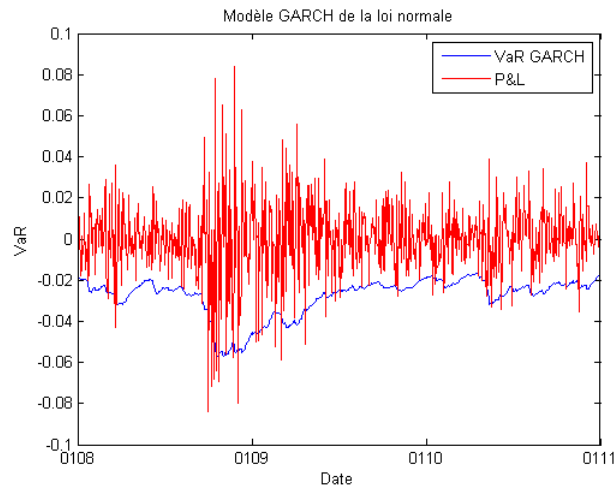
GRAPH. 3.1 – Performance du modèle conditionnel GPD sur le portefeuille

P&L correspond aux pertes et profits. VaR GPD cond. est la VaR journalière au niveau de confiance de 99%.



GRAPH. 3.2 – Performance de la méthode FHS sur le portefeuille

P&L correspond aux pertes et profits. VaR FHS est la VaR journalière au niveau de confiance de 99%.



GRAPH. 3.3 – Performance du modèle GARCH sur le portefeuille

P&L correspond aux pertes et profits. VaR GARCH est la VaR journalière au niveau de confiance de 99%.

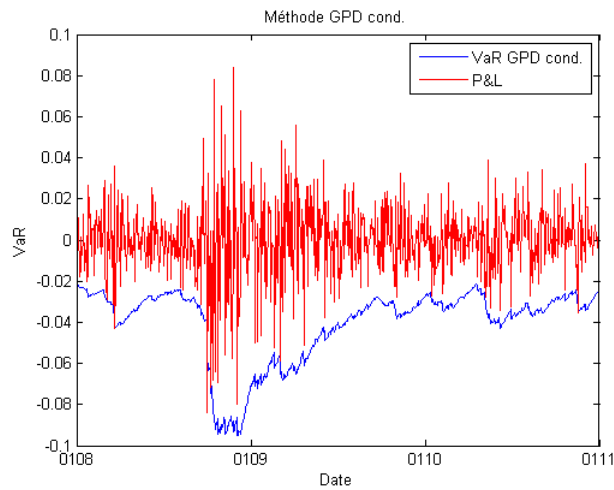
3.2.3 Corrélation empirique dans la méthode POT

L'observation du Graphique 3.1 montre une surestimation du risque réel du portefeuille par le modèle GPD. Pour limiter cette surestimation qui peut contraindre un établissement financier à bloquer plus de fonds propres réglementaires que de risque réel à assumer, nous proposons une méthodologie alternative à l'utilisation de la théorie des copules. Cette méthodologie consiste à considérer une corrélation empirique entre les actifs. Ainsi, nous tenons compte de la corrélation empirique entre les actifs du portefeuille en additionnant les rentabilités de tous les actifs (CAC 40, S&P 500, Pétrole et Blé) du portefeuille d'étude. Cela permet, dans un premier temps, d'avoir une série de rentabilités pour le portefeuille. A partir de ces rentabilités, la procédure de la méthode des excès est appliquée comme expliqué dans le Chapitre 2 concernant les actifs individuels.

Les résultats de cette nouvelle méthodologie pour le modèle conditionnel GPD sont présentés dans le Tableau 3.7 en comparaison avec la méthode FHS et le modèle GARCH de la loi normale. Nous remarquons que les pertes potentielles estimées par le modèle GPD sans la prise en compte de la copule de Student ont diminué, mais restent supérieures à celles estimées par la méthode FHS (excepté au niveau de confiance de 99,9%) et par le modèle GARCH de la loi normale. Nous pouvons également observer ces résultats sur le

Graphique 3.4.

Pour une gestion optimale des fonds propres réglementaires, le gestionnaire de risque peut utiliser la corrélation empirique entre les actifs du portefeuille au cas où il constaterait une forte surestimation du risque réel sur son portefeuille d'actifs en utilisant la théorie des copules. Cela permet d'éviter à l'établissement financier de bloquer des fonds propres réglementaires largement supérieurs au risque réel de son portefeuille, mais aussi de ne pas subir les pénalités réglementaires liées au dépassement du nombre de violations prévu par les règles du Comité de Bâle.



GRAPH. 3.4 – Performance du modèle conditionnel GPD sans la copule sur le portefeuille

P&L correspond aux pertes et profits. VaR GPD cond. est la VaR journalière au niveau de confiance de 99%. Ces résultats tiennent compte de la corrélation empirique dans le modèle conditionnel GPD comme celui de la méthode FHS.

Portefeuille	95%				99%				99,9%			
	Moyenne	Ecart type	Max	Min	Moyenne	Ecart type	Max	Min	Moyenne	Ecart type	Max	Min
VaR												
GPD cond. copule - student	-0,048	0,018	-0,028	-0,106	-0,056	0,022	-0,032	-0,129	-0,067	0,028	-0,036	-0,162
GPD cond. sans copule	-0,026	0,011	-0,014	-0,061	-0,040	0,018	-0,022	-0,095	-0,060	0,027	-0,032	-0,143
FHS	-0,025	0,011	-0,012	-0,063	-0,038	0,017	-0,019	-0,099	-0,076	0,038	-0,027	-0,207
GARCH	-0,020	0,007	-0,012	-0,040	-0,028	0,010	-0,017	-0,057	-0,037	0,013	-0,022	-0,076
ES												
GPD cond. copule - student	-0,053	0,020	-0,030	-0,120	-0,061	0,024	-0,034	-0,143	-0,071	0,030	-0,038	-0,177
GPD cond. sans copule	-0,035	0,015	-0,019	-0,082	-0,049	0,022	-0,026	-0,116	-0,069	0,031	-0,037	-0,163
FHS	-0,035	0,015	-0,018	-0,086	-0,053	0,024	-0,024	-0,141	-0,081	0,040	-0,030	-0,207
GARCH	-0,025	0,008	-0,015	-0,051	-0,032	0,011	-0,019	-0,065	-0,041	0,014	-0,024	-0,083

TAB. 3.7 – VaR et ES estimées par le modèle conditionnel GPD sans la copule

$VaR(1, P)$ correspond à la VaR calculée sur un horizon d'un jour et au niveau de confiance P (95%, 99% et 99,9%). $ES(1, P)$ correspond à l'ES calculée sur un horizon d'un jour et au niveau de confiance P (95%, 99% et 99,9%). Les estimations des paramètres ont été effectuées sur un historique de 5214 données journalières pour une période d'estimation de janvier 2008 à décembre 2010. Les valeurs de GPD cond. sans copule correspondent aux estimations des pertes sans prise en compte de l'estimation de la dépendance entre facteurs de risque par la copule de Student. Les valeurs de GPD cond. sans copule tiennent compte de la corrélation empirique dans le modèle GPD conditionnel comme celle de la méthode FHS. Les valeurs de GPD cond. copule-student correspondent aux estimations des pertes qui prennent en compte l'estimation de la dépendance entre facteurs de risque par la copule de Student.

Les pertes potentielles étant estimées sur le portefeuille global, il peut être envisagé d'évaluer la performance des modèles de mesure de risque par une procédure de contrôle ex-post. Cette procédure permettra d'évaluer statistiquement la fiabilité de chaque technique de mesure de risque sur le portefeuille.

3.2.4 Modèle GPD conditionnel validé par le contrôle ex post

Dans cette section, nous examinons les résultats du contrôle ex post réalisé sur les modèles de risque pendant la période de crise de 2008. La fiabilité des modèles de risque basées sur l'hypothèse de volatilité constante est évaluée sur le portefeuille global et les résultats sont présentés dans le Tableau 3.8. L'examen de ce tableau montre une fiabilité du modèle GPD, mais avec une forte sous-estimation du risque car les statistiques de Wald sont largement supérieures à zéro au niveau de confiance de 99% et 99,9%. La fiabilité des techniques traditionnelles de mesure de risque est complètement rejetée par le test de couverture inconditionnelle (Wald et Kupiec) et par le test de couverture conditionnelle.

Les résultats du contrôle ex post réalisé sur les modèles conditionnels de risque sont présentés dans le Tableau 3.9. L'analyse des résultats du test de Kupiec sur le modèle conditionnel GPD montre une acceptation de l'hypothèse de couverture inconditionnelle sur le portefeuille aux niveaux de confiance de 99% et 99,9%. En effet, les probabilités (P-value) associées aux statistiques calculées sont toutes supérieures aux seuils requis (5%, 1% et 0,1%). Le test de Kupiec effectué sur les techniques traditionnelles (FHS et GARCH) de mesure de risque présente des P-value nulles à tous les niveaux de confiance. Cela montre que les techniques traditionnelles de mesure de risque ne sont pas fiables pour mesurer le risque sur le portefeuille. Les résultats du test de Wald abondent dans le même sens que les résultats du test de Kupiec. Cependant, le modèle conditionnel GPD surestime fortement le risque au niveau de confiance de 95% et sous-estime fortement le risque au niveau de confiance de 99,9% sur le portefeuille. Nous constatons une forte sous-estimation du risque du portefeuille par les techniques traditionnelles de mesure de risque sur tous les niveaux de confiance retenus.

Le test d'indépendance de Markov présenté dans le Tableau 3.9, montre que pour les trois techniques de mesure de VaR, les violations sont significativement indépendantes.

En effet, toutes les probabilités associées aux statistiques sont supérieures au seuil critique requis. Ainsi, on peut considérer que la propriété d'indépendance des séries des violations est remplie par l'ensemble des techniques de mesure de risque.

Le test de couverture conditionnelle permet de tester conjointement la propriété de couverture inconditionnelle (test de Kupiec) et celle d'indépendance d'une série de violations. Ce test confirme les analyses précédentes en ce qui concerne la fiabilité des techniques de mesure de risque utilisées dans cette étude. Nous observons dans le Tableau 3.9 que le modèle conditionnel GPD assure mieux la couverture conditionnelle que les techniques traditionnelles de mesure de risque.

Les résultats du contrôle ex post réalisé sur les années 2009 et 2010 sont présentés dans les Tableaux D.2 à D.13. Nous constatons sur le portefeuille global que le modèle GPD est fiable sur les périodes de faible volatilité. De manière générale, les modèles internes de mesure de risque se sont révélés non fiables.

	GPD		SH		Normale		GPD		SH		Normale	
	Test de Kupiec		Test de Wald		Test de Kupiec		Test de Wald		Test de Kupiec		Test de Wald	
95%	0,18	(0,67)	125,71	(0,00)	107,04	(0,00)	0,44	(0,33)	15,53	(0,00)	14,07	(0,00)
99%	3,56	(0,06)	152,80	(0,00)	176,76	(0,00)	2,22	(0,01)	23,84	(0,00)	26,38	(0,00)
99,9%	4,83	(0,03)	128,51	(0,00)	211,94	(0,00)	3,50	(0,00)	37,52	(0,00)	55,53	(0,00)
	Test de couverture conditionnelle											
95%	0,40	(0,53)	0,00	(1,00)	0,00	(1,00)	0,58	(0,75)	125,71	(0,00)	107,04	(0,00)
99%	0,00	(0,95)	0,00	(1,00)	0,00	(1,00)	3,56	(0,17)	152,80	(0,00)	176,76	(0,00)
99,9%	0,00	(0,99)	0,00	(1,00)	0,00	(1,00)	4,83	(0,09)	128,51	(0,00)	211,94	(0,00)

TAB. 3.8 – Résultats du backtesting sur les modèles inconditionnels

Les valeurs entre parenthèses sont des probabilités associées aux statistiques. Les valeurs en gras sont des statistiques dont la probabilité associée est supérieure au seuil d'acceptation de 5%, 1% et 0,1%. Le test est effectué sur 5214 données journalières pour une fenêtre de backtesting de 250 jours (janvier 2008 à décembre 2008).

	GPD cond.		FHS		GARCH		GPD cond.		FHS		GARCH	
	Test de Kupiec		Test de Wald		Test de Kupiec		Test de Wald		Test de Kupiec		Test de Wald	
95%	10,81	(0,00)	38,82	(0,00)	60,77	(0,00)	-2,76	(1,00)	7,69	(0,00)	10,01	(0,00)
99%	0,11	(0,74)	15,89	(0,00)	62,83	(0,00)	-0,32	(0,62)	5,40	(0,00)	13,03	(0,00)
99,9%	1,27	(0,26)	20,55	(0,00)	62,22	(0,00)	1,50	(0,07)	9,50	(0,00)	21,51	(0,00)
	Test d'indépendance											
95%	0,00	(0,98)	0,00	(1,00)	0,00	(1,00)	10,81	(0,00)	38,82	(0,00)	60,77	(0,00)
99%	0,00	(0,99)	0,02	(0,88)	0,00	(1,00)	0,11	(0,95)	15,91	(0,00)	62,83	(0,00)
99,9%	0,00	(1,00)	0,00	(0,96)	0,02	(0,88)	1,27	(0,53)	20,55	(0,00)	62,24	(0,00)

TAB. 3.9 – Résultats du backtesting sur les modèles conditionnels

Les valeurs entre parenthèses sont des probabilités associées aux statistiques. Les valeurs en gras sont des statistiques dont la probabilité associée est supérieure au seuil d'acceptation de 5%, 1% et 0,1%. Le test est effectué sur 5214 données journalières pour une fenêtre de backtesting de 250 jours (janvier 2008 à décembre 2008).

3.3 Mesure du risque sur le long terme

La mesure du risque exige la définition d'un horizon sur lequel est estimée la perte potentielle. Cet horizon peut être exprimé en jours, en semaines, en mois ou en années. Pour un gestionnaire de fonds d'investissement, cet horizon peut correspondre à une période régulière de reporting comme le mois ou le trimestre. Les régulateurs des établissements de crédit exigent un horizon de 10 jours ouvrés pour le calcul de la VaR à des fins de mesure des fonds propres réglementaires. Les autorités de contrôle bancaire considèrent cet horizon de 10 jours comme une période nécessaire aux banques pour prendre des mesures correctives par rapport à leurs expositions aux risques et de se conformer aux règles prudentielles. Ainsi, les banques calculant leur VaR sur un horizon d'un jour c'est-à-dire sur les données journalières, sont confrontées au problème d'estimation de la VaR sur un horizon supérieur à un jour.

Ce problème peut être résolu en considérant par exemple, les rentabilités hebdomadaires ou mensuelles pour calculer la VaR de la même manière que sur les rentabilités journalières. Cette méthode est plus fiable, mais pose de sérieux problèmes de données. En effet, pour un historique de 1000 rentabilités journalières, l'utilisation de la méthode empirique sur un horizon de 10 jours entraîne une diminution de cet historique de 1000 à 100 données pour estimer un modèle de risque. Une fois que les pertes potentielles sont estimées, il faut encore plus de données pour avoir de meilleurs résultats de backtesting. Ainsi, la méthode empirique reste limitée par les données nécessaires à son application.

Il existe la règle de la racine carrée du temps ou *square-root-of-time* qui consiste à multiplier par exemple la VaR journalière par la racine carrée de l'horizon h de prévision du risque afin d'obtenir la VaR sur un horizon de h jours. Cette règle a été utilisée dans la méthode *RiskMetrics* de la banque JP Morgan. Elle a été également admise dans l'amendement de l'accord de Bâle de 1996 et a été réitérée dans le récent accord de Bâle III. Elle est suggérée par le Comité de Bâle comme un moyen pour calculer la VaR sur 10 jours à partir de la VaR journalière. Dowd (2005) indique qu'il n'est pas réaliste d'utiliser la règle de la racine carrée du temps pour effectuer une extrapolation des mesures de risque sur des horizons plus longs. En effet, la règle de la racine carrée du temps (*square-root-*

of-time) suppose que les rentabilités sont identiquement et indépendamment distribuées et suivent une distribution de loi normale.

En observant les caractéristiques des rentabilités des actifs du portefeuille d'étude, on ne peut pas appliquer la règle de la racine carrée du temps. La statistique descriptive des rentabilités des actifs du portefeuille d'étude montre que ces rentabilités ne suivent pas la loi normale et que leurs queues de distribution sont épaisses. Cette non-normalité des rentabilités du portefeuille d'étude a été confirmée par les valeurs de l'indice de queue de la distribution de Pareto généralisée qui sont différentes de zéro. C'est pourquoi, nous faisons appel à une méthodologie plus adaptée à la théorie des valeurs extrêmes afin de mesurer le risque sur le long terme.

3.3.1 Prédiction du risque à long terme dans la théorie des valeurs extrêmes

Pour les distributions à queues épaisses, Danielsson and De Vries (2000) concluent à l'utilisation d'un facteur multiplicatif $h^{1/\alpha}$ ($\alpha = 1/\xi$) pour obtenir la VaR à un horizon h . Cette méthode de prédiction sur le long terme suit les travaux de Feller (1971). Feller montre que le risque dans la queue pour les distributions à queues épaisses est, à une première approximation, linéairement additif²⁵. Rappelons que l'additivité de la loi normale implique l'utilisation de $h^{1/2}$ comme facteur multiplicatif de la VaR pour un horizon à plus d'un jour, c'est-à-dire la règle de la racine carrée du temps dans *RiskMetrics*. Pour les distributions à queues épaisses et pour les risques extrêmes, ce facteur multiplicatif est différent de celui de la loi normale. Les distributions à queues épaisses sont seulement additives dans la queue. Cela implique un facteur multiplicatif de $h^{1/\alpha}$ pour l'analyse de la VaR à un horizon h . Nous utilisons cette méthodologie pour estimer les pertes potentielles sur des horizons de plus d'un jour. Cependant, il faut noter que pour $\alpha > 2$, $h^{1/2} > h^{1/\alpha}$, c'est-à-dire que le facteur multiplicatif des distributions à queues épaisses est inférieur à celui de la loi normale.

25. Fama and Miller (1972) et Dacorogna et al. (1995) donnent également des détails sur l'additivité dans les queues de distribution pour les distributions à queues épaisses.

3.3.2 Pertes potentielles estimées sur le long terme

Les pertes potentielles journalières estimées dans ce chapitre ainsi que dans les chapitres précédents peuvent utiliser la méthode d'extrapolation présentée ci-dessus pour calculer les pertes potentielles sur le long terme. Les pertes potentielles journalières estimées par la théorie des valeurs extrêmes (distribution de Pareto généralisée) sont multipliées par le facteur h^ξ pour déterminer les pertes potentielles sur le long terme. Nous fixons l'indice de queue ξ dont dépend le facteur multiplicatif comme étant la valeur absolue la plus élevée des valeurs calculées sur la période de janvier 2008 à décembre 2010. Le choix de la valeur absolue la plus élevée permet de ne pas sous-estimer le risque sur le long terme.

Pour les techniques traditionnelles de mesure de risque basées sur la loi normale et la Simulation Historique, nous utilisons la règle de la racine carrée du temps recommandée par le Comité de Bâle pour déterminer les pertes potentielles sur le long terme.

Rappelons que l'estimation des pertes potentielles sur le long terme permet de répondre aux exigences de la réglementation bancaire, mais aussi à la gestion des risques financiers. En effet, les accords de Bâle sur le risque de marché exigent des banques le calcul du capital réglementaire sur la base de la VaR sur 10 jours. Le risque de liquidité²⁶ des marchés peut être également pris en compte comme le temps nécessaire pour liquider une position dans des conditions efficaces de marché. Ce délai peut varier en fonction de la nature des actifs financiers et des conditions du marché.

Facteur h^ξ	CAC 40	Socgen	Peugeot	S&P 500	Pétrole	Blé	Portefeuille
Indice de queue ξ	0,20	0,18	0,07	0,23	0,13	0,12	0,14
Horizon 5 jours	1,38	1,34	1,12	1,45	1,23	1,21	1,25
Horizon 10 jours	1,58	1,51	1,17	1,70	1,35	1,32	1,38
Horizon 20 jours	1,82	1,71	1,23	1,99	1,48	1,43	1,52

TAB. 3.10 – **Facteurs multiplicatifs pour la mesure du risque sur le long terme dans la théorie des valeurs extrêmes**

Les facteurs multiplicatifs pour les horizons de 5 jours, de 10 jours et de 20 jours sont déterminés respectivement par 5^ξ , 10^ξ et 20^ξ . L'indice de queue est la valeur absolue maximale déterminée sur chaque actif du portefeuille d'étude ainsi que sur le portefeuille.

26. Le traitement du risque de liquidité et son incorporation dans les mesures de VaR ont été largement abordés par des auteurs comme Bangia et al. (2002) et Angelidis and Benos (2006).

Le Tableau 3.10 présente les valeurs des facteurs multiplicatifs en fonction des valeurs estimées de l'indice de queue et de l'horizon de temps choisi. Les valeurs de ces facteurs multiplicatifs sont utilisées pour calculer les pertes potentielles sur les horizons choisis (5 jours, 10 jours, 20 jours) concernant la méthode des excès de la théorie des valeurs extrêmes. Les pertes potentielles estimées par les deux autres techniques traditionnelles de mesure de risque sont multipliées par la racine carrée des horizons de temps choisis. Les résultats de ces calculs sont présentés dans le Tableau 3.11. Ce tableau présente les valeurs moyennes de la Value at Risk estimées sur la période de janvier 2008 à décembre 2010.

L'examen du Tableau 3.11 montre que les pertes potentielles sur des horizons plus longs qu'un jour estimées par la méthode FHS et la méthode GARCH basée sur la loi normale sont supérieures à celles de la méthode basée sur la distribution de Pareto généralisée. Cette supériorité des techniques traditionnelles en terme de mesure de risque sur le long terme s'explique par le fait que le facteur multiplicatif qu'elles utilisent est largement plus grand que celui utilisé par la méthode des excès de la théorie des valeurs extrêmes. Ce facteur multiplicatif déterminé sur le CAC 40, est de 3,16 ($10^{1/2}$) pour la loi normale et de 1,58 ($10^{0,20}$) pour le modèle GPD.

Il n'est pas possible de déterminer la fiabilité de ces mesures de VaR sur des horizons plus longs qu'un jour, car nous disposons de peu de données pour effectuer le backtesting des trois techniques de mesure de risque. Pour effectuer le backtesting sur les mesures de VaR à 10 jours par exemple, nous avons à comparer les valeurs de VaR prévisionnelles à 10 jours aux rentabilités non glissantes sur dix jours. Par exemple, pour un historique de 750 données journalières disponibles sur trois ans (janvier 2008 à décembre 2010), nous avons 75 données sur 10 jours. Cet échantillon historique est insuffisant pour statuer sur la fiabilité d'une technique de mesure de risque.

VaR	95%			99%			99,9%			
	1 jour	5 jours	10 jours	1 jour	5 jours	10 jours	1 jour	5 jours	10 jours	20 jours
CAC 40										
GPD cond.	-0,033	-0,046	-0,053	-0,060	-0,049	-0,067	-0,077	-0,111	-0,127	-0,146
FHS	-0,026	-0,059	-0,083	-0,117	-0,039	-0,088	-0,125	-0,304	-0,430	-0,608
GARCH	-0,028	-0,062	-0,087	-0,124	-0,039	-0,087	-0,124	-0,304	-0,430	-0,608
Soegen										
GPD cond.	-0,067	-0,089	-0,101	-0,115	-0,102	-0,136	-0,154	-0,223	-0,253	-0,287
FHS	-0,056	-0,125	-0,176	-0,249	-0,088	-0,197	-0,279	-0,490	-0,693	-0,980
GARCH	-0,055	-0,123	-0,173	-0,245	-0,078	-0,173	-0,245	-0,230	-0,326	-0,461
Peugeot										
GPD cond.	-0,055	-0,062	-0,065	-0,068	-0,085	-0,095	-0,100	-0,146	-0,154	-0,161
FHS	-0,044	-0,099	-0,140	-0,198	-0,074	-0,166	-0,234	-0,321	-0,453	-0,641
GARCH	-0,046	-0,104	-0,147	-0,208	-0,066	-0,147	-0,208	-0,195	-0,276	-0,390
S&P 500										
GPD cond.	-0,032	-0,046	-0,054	-0,064	-0,049	-0,071	-0,084	-0,123	-0,144	-0,169
FHS	-0,025	-0,056	-0,079	-0,112	-0,039	-0,087	-0,123	-0,273	-0,386	-0,547
GARCH	-0,026	-0,058	-0,082	-0,117	-0,037	-0,082	-0,117	-0,109	-0,155	-0,219
Pétrole										
GPD cond.	-0,053	-0,065	-0,071	-0,078	-0,080	-0,099	-0,109	-0,156	-0,171	-0,187
FHS	-0,040	-0,089	-0,126	-0,179	-0,064	-0,143	-0,202	-0,390	-0,551	-0,779
GARCH	-0,043	-0,095	-0,135	-0,191	-0,060	-0,135	-0,191	-0,179	-0,253	-0,358
Blé										
GPD cond.	-0,047	-0,057	-0,061	-0,067	-0,065	-0,079	-0,086	-0,108	-0,118	-0,128
FHS	-0,039	-0,087	-0,123	-0,173	-0,059	-0,133	-0,188	-0,215	-0,304	-0,429
GARCH	-0,041	-0,091	-0,128	-0,181	-0,057	-0,128	-0,181	-0,170	-0,241	-0,341
Portefeuille										
GPD cond.	-0,048	-0,060	-0,067	-0,073	-0,056	-0,071	-0,078	-0,084	-0,093	-0,102
FHS	-0,025	-0,055	-0,078	-0,110	-0,038	-0,086	-0,121	-0,170	-0,241	-0,341
GARCH	-0,020	-0,044	-0,063	-0,089	-0,028	-0,063	-0,089	-0,083	-0,118	-0,167

TAB. 3.11 – VaR estimée sur le long terme

Les valeurs de la VaR sont estimées sur un historique de 5214 données journalières pour la période d'estimation de janvier 2008 à décembre 2010. En gras les pertes potentielles estimées par le modèle conditionnel GPD qui sont supérieures à celles estimées par le modèle GARCH de la loi normale.

3.4 Conclusion

Dans cette étude et pour la première fois dans la littérature financière, nous avons associé la méthode des excès basée sur la distribution de Pareto généralisée et la copule de Student pour mesurer le risque sur un portefeuille financier composé d'actions et de matières premières. Nous avons également associé la méthode FHS et le modèle GARCH de la loi normale respectivement à la copule de Student et à la copule normale. Les mesures de la Value at Risk et de l'Expected Shortfall basées sur la méthode des excès de la théorie des valeurs extrêmes, sur la méthode FHS et sur le modèle GARCH de la loi normale ont permis de faire une évaluation de la fiabilité de chacune des techniques de mesure de risque.

Les premiers résultats de cette étude montrent que le modèle conditionnel GPD estime des pertes potentielles supérieures à celles estimées par la méthode FHS et par le modèle GARCH de la loi normale. Il faut également noter que les pertes estimées par la méthode FHS sont supérieures à celles estimées par le modèle GARCH de la loi normale. Pendant que les méthodes FHS et GARCH enregistrent de fortes sous-estimations sur la période de crise financière et économique de 2008, le modèle conditionnel GPD enregistre une légère surestimation du risque sur le portefeuille.

La surestimation du risque estimé par le modèle conditionnel GPD a diminué sur la période de janvier 2008 à décembre 2010 en considérant la somme des rentabilités pondérées des actifs du portefeuille sans faire intervenir la théorie des copules. Cependant, nous notons un risque de sous-estimation pendant la période de crise de 2008.

La procédure statistique de contrôle ex post a révélé une fiabilité du modèle inconditionnel et conditionnel GPD à mesurer le risque sur le portefeuille. Malgré cette fiabilité, nous remarquons que le modèle inconditionnel GPD sous-estime le risque réel sur le portefeuille. Parallèlement, les techniques traditionnelles de mesure de risque basées sur la modélisation conditionnelle du risque (FHS et GARCH) et sur la modélisation inconditionnelle du risque (SH et Normale) sont rejetées par le contrôle ex post effectué sur la période de crise de l'année 2008.

Pour la détermination du capital réglementaire et la gestion des risques sur le long

terme, nous avons montré comment répondre à ces besoins en mesurant le risque de marché par la théorie des valeurs extrêmes. La méthode d'extrapolation de la VaR journalière à la VaR sur le long terme pour le modèle GPD aboutit à une estimation des pertes potentielles sur le long terme moins élevées que si on appliquait la règle de la racine carrée du temps. Cette règle est appliquée dans la méthode *RiskMetrics* et recommandée par le Comité de Bâle pour le calcul de la VaR sur une période de 10 jours au titre du capital réglementaire.

En définitif, nous retenons la fiabilité de la méthode des excès de la théorie des valeurs extrêmes à mesurer le risque sur les actifs individuels et sur le portefeuille global. Par conséquent, la méthode des excès devient une solution alternative aux modèles internes de risque de marché jusqu'à présent utilisés par les établissements financiers. La méthode des excès permet aux établissements financiers de ne pas subir les pénalités imposées par les autorités de contrôle bancaire car sa fiabilité est validée par le contrôle ex post pendant les périodes de faible volatilité et de forte volatilité des marchés. Elle permet également de bloquer moins de capital réglementaire si la Value at Risk sur 10 jours est déterminée suivant la méthodologie d'extrapolation appropriée à la théorie des valeurs extrêmes.

CONCLUSION DE LA PREMIÈRE PARTIE

Les pertes potentielles ont été estimées par le modèle GPD et par les modèles internes de risque de marché. Dans un premier temps, nous avons considéré certaines hypothèses pour évaluer leurs conséquences sur la fiabilité des modèles de mesure de risque. Puis, ces hypothèses ont été écartées et ont permis d'améliorer les modèles de mesure de risque. Enfin, compte tenu de l'utilisation de la théorie des valeurs extrêmes et du fait que la corrélation linéaire n'est pas adaptée à cette théorie, la copule de Student a été utilisée pour estimer la dépendance entre les facteurs de risque. Cela a permis de montrer comment associer la méthode POT et la copule de Student pour déterminer les pertes potentielles sur un portefeuille d'actifs composé d'actions et de matières premières.

Une modélisation inconditionnelle des pertes a été effectuée sur les actifs individuels du portefeuille d'étude par les trois techniques de mesure de risque. Nous constatons que ces trois techniques de mesure de risque de marché sous-estiment le risque des actifs individuels en période de crises économiques et financières. Dans les conditions normales de marché, les modèles internes de risque sous-estiment le des actifs du portefeuille. A l'inverse des modèles internes de risque, nous notons une surestimation du risque par le modèle GPD. Ces constats sont les conséquences de l'hypothèse de volatilité constante et de choix inapproprié des lois de distribution par rapport aux lois de distribution suivies réellement par les rentabilités financières. Bien que le modèle GPD n'impose pas de loi de distribution particulière aux distributions de rentabilités empiriques, sa fiabilité n'est pas assurée en période de crise sous l'hypothèse de volatilité constante. Sous cette hypothèse et dans les conditions normales de marché, elle surestime fortement le risque réel.

La prise en compte du changement de la volatilité dans le temps et l'effet asymétrique dans la modélisation conditionnelle des pertes sur les actifs individuels a amélioré la fiabilité des modèles de mesure de risque dans leur ensemble. Cependant, les techniques traditionnelles de mesure de risque continuent à sous-estimer les risques pendant la période de crise économique et financière de 2008. Cela est dû au fait que ces techniques traditionnelles de mesure de risque de marché ne sont pas adaptées à la mesure des risques extrêmes. Le modèle conditionnel GPD est fiable à la fois dans les conditions normales et extrêmes de marché. Elle se pose comme une alternative fiable pour l'évaluation du risque de marché sur les portefeuilles de négociation.

Pour estimer le risque sur le portefeuille d'actifs, nous avons fait appel à la théorie des copules pour les modèles paramétriques (GPD et GARCH). Cette combinaison de la méthode POT et de la copule de Student pour estimer le risque est une première et a permis de mieux estimer les pertes potentielles sur le portefeuille d'actifs. Les résultats de l'estimation et du contrôle ex post montrent une fiabilité de la méthode POT avec une légère surestimation du risque sur le portefeuille. Pour diminuer cette surestimation, nous avons proposé une méthodologie par la prise en compte de la corrélation de façon empirique comme dans la méthode FHS. Ce processus a permis de diminuer la surestimation du risque mais avec une légère sous-estimation du risque pendant la période de crise financière et économique de 2008. Les techniques traditionnelles de mesure de risque ont été rejetées par le contrôle ex post effectué sur le portefeuille global de janvier à décembre 2008.

Nous montrons dans cette première partie de l'étude que la méthode POT permet de satisfaire à la fois les établissements financiers et les autorités de contrôle bancaire. Rappelons que l'objectif des établissements financiers est de minimiser le coût du capital réglementaire. Quant aux autorités de contrôle bancaire, leur objectif principal est d'assurer la stabilité financière en exigeant que les banques détiennent un capital réglementaire suffisant, et ce afin de couvrir leurs risques, éviter tout risque de faillite et de contagion. En adoptant une méthodologie de calcul de la VaR long terme (VaR sur 10 jours par exemple) appropriée à la théorie des valeurs extrêmes, cela permet d'estimer un capital réglementaire moins coûteux pour les établissements financiers et une meilleure

couverture des risques supportés par ces derniers dans leurs portefeuilles de négociation. Cependant, en adoptant la règle de la racine carrée du temps pour la méthode POT afin de déterminer le capital réglementaire, le coût du capital réglementaire est très élevé et n'encourage pas les établissements financiers à utiliser le modèle GPD. Cela est d'autant plus vrai que les facteurs multiplicateurs qui devraient servir à pénaliser les modèles de mesure de risque non fiables, sont très faibles pour jouer ce rôle.

Face aux limites des modèles internes de risque de marché, les autorités de contrôle bancaire et les établissements financiers soulignent l'importance d'outils complémentaires de gestion des risques fondés notamment sur le recours à des techniques de stress test.

Deuxième partie

ESTIMATION DES PERTES POTENTIELLES EXTRÊMES PAR LE STRESS TEST

INTRODUCTION DE LA DEUXIÈME PARTIE

Les différents résultats obtenus dans la première partie de cette étude montrent que les modèles internes de mesure de risque de marché utilisés jusqu'à présent par les établissements financiers ne peuvent pas mesurer complètement le risque de marché. En effet, les modèles de VaR dépendent des paramètres, des données et des méthodologies utilisées. Par conséquent, ils ne sont pas toujours adaptés pour évaluer les risques (cf. Beder (1995)). Compte tenu de cette limite, nous proposons, dans cette seconde partie de l'étude, de compléter les modèles de risque par les techniques de stress test. Le stress test est un outil de gestion de risques utilisé pour évaluer l'impact sur un portefeuille d'un événement extrême ou d'une forte variation de facteurs de risque de faible occurrence. Le stress test explore les queues de distribution de pertes au-delà d'un niveau de confiance donné. Il fournit deux informations importantes : le niveau des pertes potentielles extrêmes dans une situation extrême de marché et les scénarios qui entraînent ces pertes. L'utilité du stress test comparativement aux mesures quantitatives de risque (VaR et ES) est qu'il permet aux gestionnaires de risques d'évaluer le risque extrême en reproduisant un événement extrême passé et en imaginant un événement extrême futur. Ces deux qualités principales contribuent à améliorer la mesure quantitative du risque par la prise en compte de la perception du risque futur. Le stress test devient ainsi un complément de la mesure de la VaR. C'est pourquoi nous l'utilisons dans cette étude pour une meilleure mesure et gestion des risques extrêmes.

On peut distinguer deux groupes de stress en fonction de l'objectif suivi : le macro stress test et le micro stress test. Le macro stress test est généralement utilisé par les au-

torités de contrôle bancaire pour évaluer la résilience du système financier. Le micro stress test est souvent réalisé au niveau d'un établissement financier ou dans un de ses services pour évaluer le risque extrême du portefeuille financier détenu. Cette étude concerne le micro stress test c'est-à-dire le stress test d'un portefeuille de négociation composé d'actions et de matières premières qui peut être sous gestion dans un établissement financier.

Une enquête sur la pratique du stress test dans les établissements financiers montre que la plupart des stress tests sont réalisés sur une série de scénarios basés soit sur les événements historiques, soit sur les événements hypothétiques ou soit sur la combinaison d'événements historiques et hypothétiques (cf. Basel Committee (2005)). Cependant, il existe en plus de ces scénarios historiques et hypothétiques, l'analyse de sensibilité et le stress test par algorithme (cf. Tableau 3.12). L'analyse de sensibilité consiste à évaluer l'impact sur un portefeuille de la variation d'un facteur de risque. L'algorithme permet de faire de la recherche de scénario catastrophe par un jeu de données (par simulation de Monte Carlo par exemple).

Approche	Description	Avantages	Inconvénients
Scénario historique	Réplique un événement de crise	L'événement s'est déjà produit	Multitude d'événements Pas d'interprétation probabiliste Absence d'expertise sur le futur
Scénario hypothétique	<ol style="list-style-type: none"> 1. Matrice de corrélation 2. Création d'événements 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Facile à mettre en place 2. Scénarios d'expert 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Validité empirique mitigée 2. Dépend de la qualité de l'expertise 2. Pas d'interprétation probabiliste
Analyse de sensibilité	Choc par un seul facteur de risque	Mesure l'impact d'un facteur de risque	Moins d'information sur le risque global
Scénario + Modèle de VaR	Réplique un événement de crise Création d'événements Matrice de corrélation Mesure par le modèle de VaR	Interprétation probabiliste des résultats Choc des paramètres du modèle de VaR Plusieurs scénarios possibles Stress par la volatilité et la corrélation	Multitude d'événements Dépend de la distribution supposée du modèle
Algorithme	<ol style="list-style-type: none"> 1. GPD (EVT) 2. Maximum Loss (méthode Studer) 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Possibilité d'identifier le pire scénario 1. Identifie les causes du risque extrême 1. N'impose pas de distribution aux données 2. Possibilité d'identifier le pire scénario 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Modélisation complexe 1. Temps de calcul élevé 2. Temps de calcul élevé 2. Hypothèse de normalité des données
Stress VaR de Bâle III	VaR calculée sur données extrêmes	Facile à mettre en place	Données historiques fixées par le régulateur

TAB. 3.12 – Méthodes de stress test

Les approches soulignées sont des approches qui sont appliquées dans cette étude. Scenario+Modèle VaR est une méthodologie que nous proposons sur les modèles de risque utilisés dans cette étude pour réduire la subjectivité des scénarios historiques et hypothétiques. L'approche Algorithme du modèle GPD correspond à la méthodologie que nous avons développée pour la recherche de pire scénario ou de scénario catastrophe. Les paramètres du stress VaR de Bâle III sont le niveau de confiance et l'horizon de temps qui sont fixés respectivement à 99% et à 10 jours ouvrés.

Les scénarios sont généralement sélectionnés par les autorités de contrôle bancaire, les directeurs ou gestionnaires de risques, pour évaluer le risque extrême potentiel encouru dans l'environnement actuel de marché. Les méthodes de stress test sont généralement construites hors des modèles de risque. La construction de stress test menée hors des modèles de risque (ou méthode ad hoc du stress test) consiste à modifier le prix ou le taux d'un actif financier ou d'un ensemble d'actifs, le réévaluer et comparer la valeur réévaluée et la valeur d'origine. Ces méthodes ont été critiquées pour leur manque de rigueur par Berkowitz (1999), Greenspan (2000) et Alexander and Sheedy (2008). En effet, le stress test construit hors des modèles de risque rend difficile l'attribution d'une probabilité aux scénarios ou aux pertes extrêmes et donc l'évaluation de son importance. Berkowitz (1999) défend l'idée selon laquelle le stress testing doit être basé sur un modèle de risque approprié. Ce stress test conduit dans le modèle de risque peut fournir une alternative intéressante ou compléter les méthodes ad hoc actuelles de stress test. Cette méthodologie qui consiste à intégrer le stress test dans les modèles de VaR, est souvent appelée stress VaR²⁷ (ou Stressed VaR en anglais). Elle incorpore le stress test dans la mesure de la VaR. L'avantage de cette incorporation du stress test dans les modèles de VaR est que l'analyse prend en compte le lien entre les actifs, leur évolution ainsi que celle des paramètres des modèles de risque. Elle permet aussi d'associer une probabilité aux pertes extrêmes déterminées et surtout d'assurer une crédibilité face à la direction des établissements financiers pour une meilleure réactivité dans la gestion des risques extrêmes.

Certaines études menées par des auteurs comme Kupiec (1998), Kim and Finger (2000), Longin (2000), Tan and Chan (2003) ont permis d'intégrer des stress tests dans les modèles de risque sur des hypothèses de changement de la volatilité, de la corrélation ou en fixant des niveaux de confiance plus élevés que ceux habituellement utilisés dans les modèles de VaR. Toutes ces études sont généralement basées sur la loi normale et la distribution empirique (Simulation Historique) dont nous venons de montrer leur incapacité à estimer correctement le risque du portefeuille d'étude. Aragonés et al. (2001) utilise le

27. A partir de janvier 2013, le stress VaR sera rajouté à la VaR pour le calcul du capital réglementaire selon les recommandations de Basel Committee (2009).

modèle inconditionnel GPD pour calculer la VaR extrême sur une série de rentabilités modifiées en fonction des scénarios envisagés. Il considère que l'intégration du stress test dans les modèles de risque permet de limiter la subjectivité des résultats. Alexander and Sheedy (2008) intègre du stress test dans les modèles de risque basés sur la distribution empirique, la loi normale et la loi de student pour mesurer le risque extrême sur les taux de change. Leur procédure consiste à intégrer les chocs dans les modèles de VaR en modifiant la volatilité conditionnelle déterminée par l'estimation du modèle GARCH de la loi normale. Notre étude est différente des études précédentes car elle se focalise essentiellement sur une intégration du stress test dans le modèle conditionnel GPD. Ce dernier s'est révélé plus fiable en termes de mesure de risque de marché sur le portefeuille d'étude. Le principal apport dans cette seconde partie est de développer une méthodologie pour intégrer le stress test dans les modèles conditionnels de risque et d'analyser la nouvelle méthodologie de l'accord de Bâle III pour la mesure du capital réglementaire. Il s'agit d'intégrer l'analyse des scénarios historiques, l'analyse des scénarios hypothétiques dans les modèles de VaR et de développer un algorithme basé sur le modèle conditionnel GPD.

Le premier chapitre présente une nouvelle approche de construction de scénarios historiques dans les modèles de VaR. Une construction de scénarios théoriques est effectuée dans le deuxième chapitre comme une solution alternative à la construction de scénarios historiques qui restent trop dépendants des événements historiques. La construction de scénarios théoriques regroupe la construction de scénarios hypothétiques et la recherche de scénarios catastrophes (par l'algorithme Maximum Loss et GPD). Les scénarios hypothétiques et historiques sont intégrés dans les modèles de risque, plus particulièrement dans la méthode POT de la théorie des valeurs extrêmes. Le troisième chapitre expose la méthodologie de stress VaR proposée par le Comité de Bâle et traite les questions de la mesure du capital réglementaire suivant les nouveaux accords de Bâle III. Les conséquences de ces accords sur l'évaluation des risques de marché dans les établissements financiers et sur l'économie réelle sont également analysées.

Chapitre 4

CONSTRUCTION DES SCÉNARIOS HISTORIQUES

Les scénarios historiques d'un programme de stress test cherchent à évaluer les pertes potentielles extrêmes par la reproduction d'un événement extrême historique sur un portefeuille. Ces événements extrêmes sont des événements qui ont déjà été observés par le passé et qui ont eu des impacts sur les marchés financiers. Les scénarios historiques peuvent être basés sur des variations relativement modérées des facteurs de risque qui ont une plus grande probabilité de se reproduire. Ils peuvent également être basés sur des variations extrêmes passées qui ont une faible probabilité mais dont les pertes peuvent être très élevées si elles se reproduisent.

Le stress test par des scénarios historiques est une exigence du Comité de Bâle. Ce dernier recommande aux établissements financiers d'inclure des scénarios historiques dans le test de leurs portefeuilles contre les périodes de crises économiques et financières. Parmi ces crises, citons le krach boursier de 1987, la crise du système monétaire européen de 1992-1993, la chute brutale des marchés obligataires aux États-Unis en 1994. Les établissements de crédit doivent également prendre en compte de fortes volatilités et la réduction de la liquidité associée à ces événements extrêmes (Basel Committee (2009)).

L'apport de ce chapitre est de montrer le processus d'intégration des scénarios historiques dans les modèles de mesure de risque de marché afin d'évaluer les pertes extrêmes auxquelles un portefeuille de négociation peut être exposé. La pratique actuelle de stress

test par scénario historique consiste à construire des scénarios historiques hors des modèles de mesure de risque et ne permet pas d'assigner de probabilités ni aux scénarios, ni aux pertes extrêmes estimées. Ainsi, il n'y a aucun moyen d'évaluer l'importance ou la crédibilité des résultats obtenus à partir de ces scénarios. Cette crédibilité des résultats est d'autant plus importante qu'elle permet à la direction d'un établissement financier de décider plus rapidement la mise en place des actions nécessaires à la réduction de ses expositions aux risques extrêmes. Certaines études (Greenspan (2000) et Alexander and Sheedy (2008)) proposent d'intégrer le stress test dans les modèles de risque de marché afin de lui donner plus de crédibilité. Notre étude suit cette démarche mais avec une spécificité qui consiste à intégrer le stress de la volatilité conditionnelle et de la matrice de corrélation dans la méthode POT de la théorie des valeurs extrêmes. Ainsi, nous proposons une nouvelle méthodologie qui consiste à déterminer des pertes extrêmes par le modèle GPD (Generalized Pareto Distribution) de la méthode POT en intégrant le stress de la volatilité conditionnelle et le stress de la corrélation dans la mesure de la Value at Risk et l'Expected Shortfall. A titre comparatif, nous estimons des pertes extrêmes par les modèles internes de mesure de risque, à savoir la méthode Filtered Historical Simulation (FHS) et le modèle GARCH.

Dans ce chapitre, nous décrivons tout d'abord dans les deux premières sections, le choix de la période d'événements et la spécification des paramètres de choc. Pour réaliser un stress test de type scénario historique, il est nécessaire de déterminer la période historique (dates de début et de fin) correspondante à un événement de risque extrême et de spécifier l'amplitude des chocs à effectuer sur le portefeuille. Ensuite, dans la troisième section, nous intégrons le stress test dans les modèles de mesure de risque de marché à travers la volatilité et la matrice de corrélation. Enfin, dans la quatrième section, les résultats des pertes potentielles extrêmes estimées par les différents modèles de risque sont analysés.

4.1 Choix de la période d'événement

La première question que l'on se pose lors de l'élaboration des scénarios historiques est : quelle période historique pouvons-nous choisir ? Cette période historique est généralement liée à une variation relativement modérée ou à un événement extrême. Une période d'événement historique est définie de deux manières. Premièrement, la période est définie par le lien avec un événement extrême bien connu comme la crise financière de 2008. Deuxièmement, la période est définie en examinant les variations historiques des facteurs de risque relatives à un niveau donné de variations. La deuxième approche permettra sans doute de sélectionner des crises connues mais d'identifier d'autres périodes d'événement avec des variations relativement plus élevées que celles constatées sur les périodes de faible volatilité de marché. La deuxième approche est la plus utilisée du fait de l'inexistence de crise historique sur certains facteurs de risque. Le choix d'un événement de crise permet facilement de déterminer la période de crise. Ce qui n'est pas le cas lorsqu'on commence par examiner d'abord le maximum ou le minimum des variations d'un facteur de risque sur plusieurs années, pour ensuite déterminer la période d'événement historique.

Les scénarios potentiels de crise utilisés dans le cadre d'un stress test de type scénario historique peuvent inclure les événements extrêmes suivants : les chocs pétroliers (par exemple, le premier choc pétrolier d'octobre 1973 ou les guerres dans le golfe persique), le krach boursier d'octobre 1987, la crise du mécanisme de taux de change européen²⁸ en 1992, la crise du marché obligataire aux États Unis en 1994, la crise mexicaine en 1994, le défaut de la Russie et du fonds d'investissement LTCM²⁹ et la crise asiatique de 1997. L'attaque terroriste du 11 septembre 2001 est aussi considérée comme un scénario de crise. La caractérisation de ces crises³⁰ peut être utile à la fois pour assurer la plausibilité des scénarios historiques mais aussi pour guider la construction des scénarios hypothétiques.

28. Le mécanisme de taux de change européen est un mécanisme de taux de change introduit par la Communauté européenne en 1979 destiné à stabiliser les cours des devises européennes, prévenir les risques de change et accroître la confiance dans la monnaie à moyen et long terme, juguler l'inflation et développer le commerce et l'activité dans la zone intra-communautaire.

29. Long Term Capital Management est un hedge fund apparu en 1994 et dont la quasi-faillite en 1998 a fait courir un risque majeur au système bancaire international et créa des perturbations importantes sur les marchés financiers.

30. Pour plus de détails, voir Davis (2003) pour une typologie des crises financières.

Il est important de reconnaître que quel que soit le nombre d'événements historiques sélectionnés, rien ne garantit que le risque extrême futur soit totalement couvert. Cependant, nous pouvons espérer une sélection judicieuse des événements historiques qui fourniront des informations sur des zones de vulnérabilité d'un portefeuille. Cela permet d'identifier des risques extrêmes dont la mesure n'est pas évidente avec certains outils de mesure de risque de marché comme la Value at Risk. Le gestionnaire de risque doit élaborer des scénarios historiques en fonction de la composition du portefeuille et du changement de l'environnement économique.

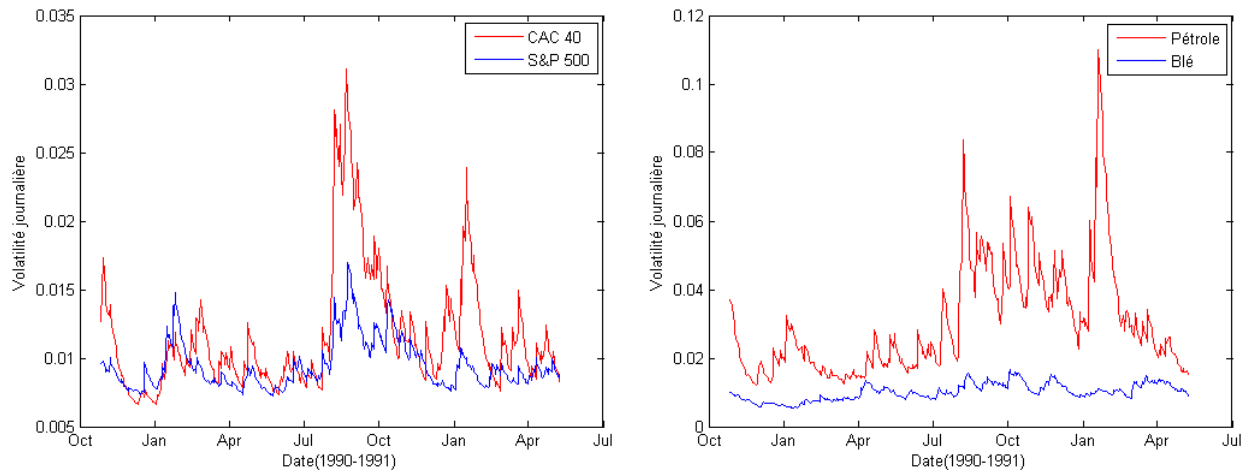
Dans le cadre de cette étude, nous choisissons la guerre du golfe de 1990-1991 et l'attentat terroriste du 11 septembre 2001 perpétré contre les États-Unis comme deux événements extrêmes pour stresser notre portefeuille d'étude. Le choix de la guerre du golfe a été effectué en fonction de la composition du portefeuille d'étude. Rappelons que le portefeuille d'étude est composé d'actions et de matières premières. L'attentat du 11 septembre 2001 a été choisi pour évaluer l'impact d'une crise qui entraîne tous les actifs du portefeuille dans la même direction. Ainsi, nous utilisons ici "l'approche événement" qui consiste à construire un scénario de stress à partir de choix préalable d'un événement de crise qui peut avoir un impact sur les facteurs de risque. Les détails sur ces deux événements historiques sont donnés ci-dessous.

4.1.1 Scénario historique 1 : la guerre du Golfe de 1990-1991

Le premier scénario historique considéré dans cette étude correspond à la deuxième guerre du golfe de 1990. Le 2 août 1990, l'Irak envahit le Koweït, causant des perturbations dans les approvisionnements de pétrole en provenance du golfe persique. Cela a eu pour conséquence une forte fluctuation du prix des actifs sur les marchés financiers et plus particulièrement sur le marché du pétrole.

Le Graphique 4.1 présente la volatilité journalière observée sur les actifs du portefeuille d'étude pendant cette guerre du golfe. Nous remarquons que la forte volatilité des marchés actions commence juste le lendemain de l'invasion du Koweït par l'Irak (3 août 1990). Sur la période de guerre de 1990 à 1991, la volatilité la plus forte a été de 3,4% sur le CAC 40 et de 1,8% sur le S&P 500. Nous remarquons également une forte volatilité sur

le Pétrole de l'ordre de 11% pour son niveau le plus haut de la période allant d'octobre 1990 à juin 1991. La volatilité enregistrée sur le Blé (1,6%) est faible comparativement à celle du Pétrole et des indices actions. Ces chiffres montrent que l'invasion du Koweït par l'Irak en 1990 a plus impacté le marché du pétrole que les autres marchés.

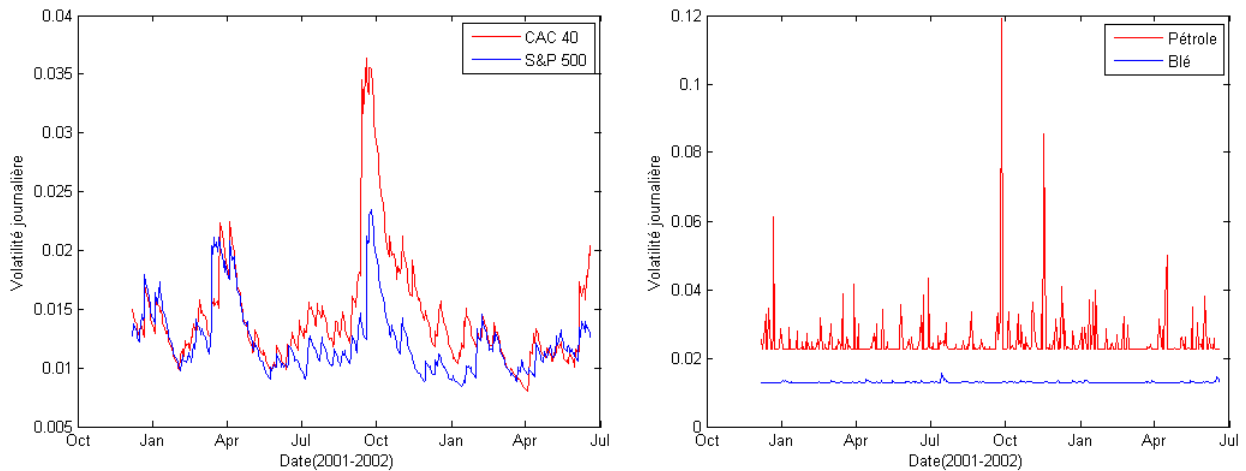


GRAPH. 4.1 – Volatilités journalières sous le scénario de la guerre du golfe de 1990-1991

4.1.2 Scénario historique 2 : l'attaque terroriste du 11 septembre 2001

Les attentats terroristes à New York ont été à l'origine d'un ralentissement économique après l'éclatement de la bulle Internet en 2000. Les attaques ont eu un impact économique important sur les Etats-Unis et les marchés mondiaux. Une forte baisse des marchés actions et du pétrole a été enregistrée juste après cet attentat. Les marchés ont clôturé la semaine du 17 au 21 septembre 2001 avec de fortes chutes. En effet, en une semaine, le S&P 500 a chuté de 11,6% et le Dow Jones Industrial Average (DJIA) de 14,26%. Ce fut l'une des pires semaines pour les marchés américains depuis la grande dépression de 1929³¹.

31. La grande dépression, dite aussi crise de 1929, est la période de l'histoire mondiale qui va du krach de 1929 aux États-Unis jusqu'à la seconde guerre mondiale. C'est la plus importante dépression économique du siècle dernier, qui s'est accompagnée d'une importante déflation et d'une explosion du chômage.



GRAPH. 4.2 – Volatilités journalières sous le scénario de l’attentat du 11 septembre 2001

Le Graphique 4.2 présente la période de fortes volatilités des marchés actions et matières premières. Sur cette période, la volatilité la plus forte a été de 3,7% sur le CAC 40 et de 2,3% sur le S&P 500. Nous constatons aussi une forte volatilité sur le Pétrole de l’ordre de 12% pour son niveau le plus haut de la période allant du mois d’août 2001 au mois de mai 2002. Cependant, il faut noter que la volatilité enregistrée sur le Blé (1,6%) est faible comparativement à celle du Pétrole et des indices actions. La volatilité du Blé ne réagit presque pas à l’attentat du 11 septembre 2001.

Après le choix de l’événement historique, il est nécessaire d’identifier les dates de début et de fin pour élaborer un scénario de stress. Ces dates permettent de déterminer l’amplitude du choc. Mais, l’identification de ces dates de début et de fin n’est pas toujours évidente pour un portefeuille varié. Néanmoins, il existe deux approches principales pour déterminer l’amplitude du choc. La première approche consiste à définir un intervalle de période en s’assurant que la période choisie contient toutes les variations significatives des facteurs de risque. Cet intervalle de temps peut être d’un jour, d’une semaine, d’un mois, d’un trimestre, voire d’une année. L’amplitude du choc pour chaque facteur de risque doit correspondre à la plus grande baisse que le facteur de risque a enregistrée indépendamment de la date de début et de fin. L’avantage de cette approche est qu’elle permet de considérer la plus grande baisse des facteurs de risque. Le désavantage est que

si les chocs sont réalisés ensemble, cela n'aura pas de sens économique.

La deuxième approche consiste à définir une période d'événement qui ne contient que les plus fortes variations des facteurs de risque. Les intervalles de temps choisis dans cette période d'événement doivent avoir comme date de début, la date correspondante au plus haut niveau (bas niveau) du facteur de risque et comme date de fin, la date correspondante au plus bas niveau (haut niveau) du facteur de risque. L'amplitude du choc dans l'intervalle de temps doit correspondre à la variation du facteur de risque entre la date de début et la date de fin. L'inconvénient de cette approche est que la fenêtre d'événement idéale ne peut pas être définie. Elle a l'avantage de pouvoir réaliser des chocs simultanés et de donner un sens économique au scénario de stress. La seconde approche est la mieux adaptée. Elle a plus de sens en exerçant des chocs simultanés sur plusieurs facteurs de risque.

Dans cette étude, nous choisissons la première approche pour évaluer les pertes extrêmes sur chaque actif du portefeuille d'étude. Nous considérons un historique de 200 observations dans lequel nous évaluons les événements extrêmes correspondant aux deux scénarios identifiés précédemment. L'historique sur chaque scénario commence quelques jours avant la date de début de l'événement historique. La période d'événement historique commence le 2 août 1990 et se termine le 28 février 1991 pour le premier scénario historique (la guerre du golfe de 1990-1991). Concernant le deuxième scénario historique (l'attaque terroriste du 11 septembre 2001 à New York), la période d'événement commence le 11 septembre 2001 et se termine le 11 janvier 2002. Ces périodes d'événement sont choisies sur une période de 200 jours.

En observant les Graphiques 4.1 et 4.2, nous remarquons que cette période de 200 jours contient les plus fortes volatilités enregistrées sur les actifs du portefeuille d'étude. Nous retenons 20 jours comme intervalle de temps pour spécifier les chocs historiques. Pour le premier scénario historique, nous choisissons l'intervalle de temps allant du premier jour (2 août 1990) au 20^{ème} jour ouvré pour spécifier le premier choc, du deuxième jour (3 août 1990) au 21^{ème} jour ouvré pour spécifier le deuxième choc, etc. Pour le deuxième scénario historique, l'intervalle de temps de 20 jours va du premier jour (11 septembre 2001) au 20^{ème} jour ouvré pour spécifier le premier choc, du deuxième jour (12 septembre 2001) au

21^{ème} jour ouvré pour spécifier le deuxième choc, etc.

4.2 Spécification des paramètres de choc

La spécification des paramètres de choc consiste à déterminer l'amplitude de la variation des facteurs de risque. Par exemple, il peut s'agir d'un choc de 5% à la baisse sur le prix de l'indice CAC 40 ou d'un choc de 4% sur la volatilité du CAC 40. Dans cette étude, les paramètres de choc sont spécifiés sur les résidus et les volatilités historiques. Les résidus et les volatilités sont déterminés sur les rentabilités journalières des actifs du portefeuille d'étude par l'estimation des modèles ARMA(1,1)-GJR(1,1) pour les modèles FHS et GPD et des modèles ARMA(1,1)-GARCH(1,1) pour le modèle GARCH. Nous avons détaillé l'estimation de ces modèles dans le chapitre 2 de la première partie de l'étude. Les paramètres de choc sont déterminés dans un intervalle de temps de 20 jours compris dans la période d'événement.

Pour le résidu, le paramètre de choc est défini comme le minimum ou le maximum de toutes les variations. Cette façon de déterminer le paramètre de choc sur les résidus ou sur les rentabilités est connue sous le nom de méthode *Drawdown* (DD) (cf. Acar and James (1997)). Si le minimum des résidus est sélectionné, la variation est équivalente à une diminution maximum du facteur de risque. Si le maximum des résidus est sélectionné, la variation est équivalente à une augmentation maximum du facteur de risque. Finalement, cette variation peut être considérée comme une valeur absolue maximum. Dans ce cas, la variation est égale à la valeur maximum de la variation que celle-ci soit en hausse ou en baisse. Cela permet de prendre en compte des situations adverses où certains facteurs de risque enregistrent des gains extrêmes pendant la période de crise. Le choix du paramètre de choc sur les résidus est effectué en respectant ces principes (cf. Tableau 4.1).

Pour le choc par la volatilité historique, le paramètre de choc correspond à la valeur maximale de la volatilité historique sur l'intervalle de temps de 20 jours. Cet intervalle de temps est le même que celui fixé pour le résidu. Les deux paramètres spécifiés (résidu et volatilité historiques) permettent d'exercer un choc simultané sur la volatilité conditionnelle future. Rappelons que l'objectif de la spécification des paramètres de choc (résidu

et volatilité historiques) est de prévoir la volatilité conditionnelle. Cette dernière dépend du résidu et de la volatilité historiques.

	Scénario 1		Scénario 2	
	Résidu	Volatilité	Résidu	Volatilité
CAC 40	0,048	0,035	0,053	0,034
S&P 500	0,024	0,019	0,049	0,018
Pétrole	0,142	0,057	0,128	0,040
Blé	0,031	0,023	0,029	0,014

TAB. 4.1 – Valeurs des paramètres de choc

Ces paramètres de choc sont déterminés à partir du 2 août 1990 pour le scénario historique 1 et à partir du 11 septembre 2001 pour le scénario historique 2, et sur un intervalle de temps de 20 jours.

Le Tableau 4.1 présente les valeurs des paramètres de choc déterminées sur les vingt premiers jours après le 2 août 1990 pour le scénario historique 1 et le 11 septembre 2001 pour le scénario historique 2. Une fois que ces paramètres de choc sont déterminés, ils sont introduits dans la formule de la volatilité conditionnelle afin de calculer des pertes extrêmes sur chaque actif du portefeuille d'étude.

4.3 Stress des paramètres des modèles de risque

4.3.1 Stress de la volatilité conditionnelle

Le stress de la volatilité historique consiste à prévoir la volatilité conditionnelle à la date t en fonction du paramètre de choc spécifié à l'instant $t - 1$. Si nous notons σ_{t-1} et ϵ_{t-1} les paramètres de choc, la transmission de ces chocs dans la volatilité conditionnelle peut être exprimée par :

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \epsilon_{t-1}^2 + \varphi I_{\epsilon_{t-1} < 0} \epsilon_{t-1}^2 \quad (4.1)$$

$$\beta_0 \geq 0, \beta_1 > 0 \text{ et } \beta_2 > 0.$$

Les paramètres β_0 , β_1 et β_2 sont déterminés sur un échantillon de rentabilités par l'estimation du modèle GJR(1,1) pour les modèles de risque FHS et GPD.

Pour le modèle GARCH, la volatilité conditionnelle et les paramètres sont estimés à partir du modèle GARCH(1,1) :

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \epsilon_{t-1}^2 \quad (4.2)$$

$$\beta_0 \geq 0, \beta_1 > 0 \text{ et } \beta_2 > 0.$$

Le modèle GARCH(1,1) ne prend pas en compte l'effet asymétrique (φ) comparativement au modèle GJR(1,1).

Après le stress des volatilités conditionnelles, les valeurs de stress VaR et de stress ES sont calculées par les formules ci-dessous qui dépendent de la volatilité stressée.

$$VaR_\alpha^t(Z) = \mu_t + \sigma_t \left[Z_{k+1} + \frac{\beta}{\xi} \left(\left(\frac{N}{k}(\alpha) \right)^{-\xi} - 1 \right) \right] \quad (4.3)$$

$$ES_\alpha^t(Z) = \mu_t + \sigma_t \left[\frac{VaR_\alpha^t(Z)}{1 - \xi} + \frac{\beta - \xi Z_{k+1}}{1 - \xi} \right] \quad (4.4)$$

où Z_{k+1} représente le seuil au-delà duquel les résidus standardisés extrêmes sont formés. Les paramètres de queue et d'échelle sont respectivement représentés par ξ et β . N est le nombre total de résidus standardisés négatifs et k , le nombre de résidus standardisés extrêmes.

4.3.2 Stress de la matrice de corrélation

Du point de vue opérationnel, le principal problème du stress test apparaît quand il s'agit d'intégrer la corrélation dans la procédure du stress test. Des études empiriques réalisées par Mori et al. (1995) et Jackson et al. (1998) ont montré que la corrélation n'est pas constante dans le temps. Ces auteurs indiquent également que la corrélation change en période de crise. Nous testons cette constance de la corrélation sur notre portefeuille d'étude. Pour réaliser ce test, nous avons calculé la corrélation avant et pendant la période

d'événements correspondante à l'invasion du Koweït par l'Irak le 2 août 1990 et à l'attentat terroriste du 11 septembre 2001. Les résultats du calcul des coefficients de corrélation sont présentés dans les Tableaux 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5. Ces coefficients de corrélation sont obtenus par l'estimation de la copule de student sur un historique de 200 rentabilités journalières avant et après le 2 août 1990 pour le premier scénario historique et le 11 septembre 2001 pour le deuxième scénario historique.

	CAC 40	S&P 500	Pétrole	Blé
CAC 40	1	0,252 (0,00)	0,050 (0,73)	0,055 (0,50)
S&P 500	0,252 (0,00)	1	0,054 (0,49)	0,072 (0,41)
Pétrole	0,050 (0,73)	0,054 (0,49)	1	-0,063 (0,44)
Blé	0,055 (0,50)	0,072 (0,41)	-0,063 (0,44)	1

TAB. 4.2 – **Coefficients de corrélation avant l'invasion du Koweït**

Les valeurs entre parenthèses correspondent aux p-value. Si elles sont inférieures à 5%, l'hypothèse de nullité de la corrélation est rejetée, sinon, l'hypothèse de corrélation est acceptée.

	CAC 40	S&P 500	Pétrole	Blé
CAC 40	1	0,296 (0,00)	-0,344 (0,00)	0,091 (0,23)
S&P 500	0,296 (0,00)	1	-0,317 (0,00)	0,048 (0,58)
Pétrole	-0,344 (0,00)	-0,317 (0,00)	1	0,006 (0,92)
Blé	0,091 (0,23)	0,048 (0,58)	0,006 (0,92)	1

TAB. 4.3 – **Coefficients de corrélation après l'invasion du Koweït**

Les valeurs entre parenthèses correspondent aux p-value. Si elles sont inférieures à 5%, l'hypothèse de nullité de la corrélation est rejetée, sinon, l'hypothèse de corrélation est acceptée.

L'examen des Tableaux 4.2 et 4.3 montre effectivement un changement de la corrélation entre les facteurs de risque d'une période à l'autre. En comparant les deux tableaux, nous remarquons que la corrélation entre les actions se renforce positivement pendant cette période de crise par une augmentation des coefficients de corrélation. Par contre, nous constatons que la corrélation entre le Pétrole et le Blé devient positive sans être significativement différente de zéro. La corrélation entre les indices actions et le Pétrole passe d'une corrélation positive non significative à une corrélation significativement négative. Ce qui veut dire que le Pétrole n'évolue pas dans la même direction que les indices actions pendant cette période de crise pétrolière. La corrélation entre le Blé et les indices actions

n'est pas significativement différente de zéro avant et pendant la guerre du golfe. Cette période de crise affectant particulièrement le Pétrole est bien reflétée dans les coefficients de corrélation avec les autres actifs du portefeuille.

Les résultats des coefficients de corrélation déterminés entre les actifs du portefeuille avant et après l'attentat terroriste du 11 septembre 2001 sont présentés dans les Tableaux 4.4 et 4.5. L'analyse de ces résultats montre un changement de corrélation entre le CAC 40 et le S&P 500. En effet, la corrélation entre le CAC 40 et S&P 500 est significativement différente de zéro. Elle passe de 0,467 à 0,497 après l'attentat du 11 septembre 2001. Cependant, la corrélation entre les indices actions et les matières premières ainsi que la corrélation entre le Pétrole et le Blé ne sont pas significativement différentes de zéro avant et après l'attentat terroriste du 11 septembre 2001.

	CAC 40	S&P 500	Pétrole	Blé
CAC 40	1	0,467 (0,00)	0,069 (0,37)	-0,010 (0,81)
S&P 500	0,467 (0,00)	1	-0,001 (0,98)	0,003 (0,74)
Pétrole	0,069 (0,37)	-0,001 (0,98)	1	0,058 (0,45)
Blé	-0,010 (0,81)	0,003 (0,74)	0,058 (0,45)	1

TAB. 4.4 – **Coefficients de corrélation avant l'attentat du 11 septembre 2001**

Les valeurs entre parenthèses correspondent aux p-value. Si elles sont inférieures à 5%, l'hypothèse de nullité de la corrélation est rejetée, sinon, l'hypothèse de corrélation est acceptée.

	CAC 40	S&P 500	Pétrole	Blé
CAC 40	1	0,493 (0,00)	0,061 (0,83)	0,127 (0,07)
S&P 500	0,493 (0,00)	1	0,154 (0,06)	0,109 (0,21)
Pétrole	0,061 (0,83)	0,154 (0,06)	1	0,090 (0,44)
Blé	0,127 (0,07)	0,109 (0,21)	0,090 (0,44)	1

TAB. 4.5 – **Coefficients de corrélation après l'attentat du 11 septembre 2001**

Les valeurs entre parenthèses correspondent aux p-value. Si elles sont inférieures à 5%, l'hypothèse de nullité de la corrélation est rejetée, sinon, l'hypothèse de corrélation est acceptée.

Nous retenons à travers cette analyse des résultats de l'estimation des coefficients de corrélation sur les actifs du portefeuille d'étude, que pendant les périodes de crise comme celles de la guerre du golfe et de l'attentat terroriste du 11 septembre 2001, la corrélation reste positive et se renforce entre les actions. Pendant les crises pétrolières,

le Pétrole est négativement corrélé avec les indices actions. La corrélation entre le Blé et les autres actifs du portefeuille n'est pas significativement différente de zéro. L'analyse des corrélations montre que le changement de corrélation entre les actifs financiers en période de crise dépend des caractéristiques propres à chaque crise. En effet, la guerre du golfe affecte principalement le marché du pétrole par une augmentation du prix et une forte volatilité. Cela peut avoir pour conséquence, une baisse des prix des actions due à un désinvestissement sur les marchés actions au profit du marché du pétrole. Quant à l'attentat terroriste du 11 septembre 2001, il entraîne tous les facteurs de risque à la baisse. Ce qui explique l'évolution des facteurs de risque dans la même direction. Ces résultats peuvent guider l'élaboration de scénarios hypothétiques basés sur la corrélation afin de leur assurer une certaine crédibilité aux yeux de la direction d'une banque.

4.4 Estimation des pertes extrêmes sur le portefeuille

Les pertes potentielles extrêmes sont estimées par le stress de la volatilité conditionnelle et des coefficients de corrélation sous les scénarios de la guerre du golfe de 1990-1991 et de l'attentat terroriste du 11 septembre 2001. Ces paramètres de modèles sont ensuite intégrés dans les mesures de la Value at Risk et l'Expected Shortfall.

L'estimation des pertes extrêmes est basée sur des données journalières allant du mois de mai 2002 au mois de septembre 2008. La Value at Risk et l'Expected Shortfall sont estimées sur les 20 premiers jours ouvrés après la faillite de la banque d'investissement Lehman Brothers le 15 septembre 2008³². Les valeurs de la VaR et de l'ES sont estimées suivant les deux scénarios cités plus haut et un scénario de base. Le scénario de base donne les valeurs de la VaR et de l'ES sans le stress des paramètres du modèle (volatilité ou corrélation) et calculées sur les mêmes données historiques que celles des scénarios de la guerre du golfe (scénario 1) et l'attentat terroriste du 11 septembre 2001 (scénario 2).

32. Lehman Brothers était une banque d'investissement aux Etats-Unis proposant des services financiers diversifiés. Elle fit faillite le 15 septembre 2008 suite à la crise des subprimes.

4.4.1 Pertes extrêmes déterminées par le stress de la volatilité

Les pertes extrêmes sont estimées sur les actifs du portefeuille à partir du stress de la volatilité conditionnelle. Ce stress de la volatilité conditionnelle est basé sur les scénarios historiques qui ont été précédemment définis. Rappelons que le stress de la volatilité conditionnelle consiste à estimer une volatilité conditionnelle future (σ_{t+1}) en exerçant un choc simultané sur le résidu (ϵ_t) et la volatilité historique (σ_t) déterminés pendant les périodes de crise. La volatilité conditionnelle stressée est ensuite intégrée dans les mesures de risque (VaR et ES) pour évaluer les pertes extrêmes que peuvent enregistrer les actifs du portefeuille. Les pertes extrêmes sont calculées suivant deux scénarios : la guerre du golfe de 1990-1991 (scénario 1) et l'attentat du 11 septembre 2001 (scénario 2). Les pertes potentielles sous le scénario de base c'est-à-dire sans stress des facteurs de risque, sont également calculées. Le scénario de base est un indicateur de sévérité des hypothèses de scénario formulées. En effet, il indique en fonction de la valeur des pertes extrêmes estimées si l'impact du scénario futur envisagé est plus ou moins extrême.

Les résultats de l'estimation de la VaR et de l'ES par les trois modèles de mesure de risque sous les deux scénarios historiques sont présentés dans les Tableaux 4.6 et 4.7. Les pertes ont été estimées sur l'horizon d'un jour et aux niveaux de confiance de 95%, 99% et 99,9% pour tous les actifs du portefeuille (CAC 40, S&P 500, Pétrole et Blé). Les pertes estimées sur le CAC 40 sous le scénario 1 et sur le Pétrole sous les scénarios 1 et 2 sont supérieures aux pertes estimées sous le scénario de base. Cela montre que si le scénario de la guerre du golfe de 1990-1991 se reproduisait, le CAC 40 et le Pétrole pourraient enregistrer des pertes plus élevées que celles calculées sans stress des facteurs de risque. Sous le scénario de l'attentat du 11 septembre 2001, le Pétrole est le seul actif du portefeuille qui ait enregistré plus de pertes extrêmes que celles enregistrées sous le scénario de base. Cela montre que l'impact de la guerre du golfe de 1990-1991 et l'attentat du 11 septembre 2001 sur le Pétrole a été plus extrême que celui sous le scénario de base. Il faut noter que les deux scénarios historiques envisagés sur les autres actifs du portefeuille sont moins extrêmes que le scénario de base.

Les pertes extrêmes estimées sur les actifs du portefeuille sous le scénario de la guerre

du golfe de 1990-1991 sont largement supérieures à celles estimées sous le scénario de l'attentat du 11 septembre 2001. Cela s'explique par les valeurs très élevées des paramètres de choc (cf. Tableau 4.1) sous le scénario de la guerre du golfe.

En termes hiérarchiques entre les trois techniques de mesure de risque dans les deux scénarios historiques, les valeurs de la VaR_{GPD} sur les actifs du portefeuille et sur le portefeuille sont supérieures à celles de la VaR_{FHS} et la VaR_{GARCH} . La mesure de la VaR_{GARCH} est à son tour supérieure à celle de la VaR_{FHS} uniquement sur le Pétrole et le blé. Cette analyse est aussi valable pour la mesure de l'Expected Shortfall c'est-à-dire la mesure de la moyenne au-delà de la VaR.

Nous retenons que le stress test par scénario historique peut s'effectuer à travers la volatilité conditionnelle en exerçant un choc simultané sur la volatilité et sur le résidu du jour précédant le jour de l'estimation des pertes extrêmes. Il faut aussi noter qu'il est possible de réaliser un choc uniquement sur le résidu. Cependant, ce type de choc aura moins d'impact sur la volatilité future parce que le coefficient du résidu dans l'estimation de la volatilité conditionnelle est très faible par rapport à celui de la volatilité passée.

	Scénario de base			Scénario 1			Scénario 2		
	GPD cond.	FHS	GARCH	GPD cond.	FHS	GARCH	GPD cond.	FHS	GARCH
VaR(1 ; 95%)									
CAC 40	-0,063	-0,059	-0,051	-0,082	-0,079	-0,063	-0,059	-0,048	-0,044
S&P 500	-0,066	-0,060	-0,046	-0,057	-0,054	-0,044	-0,035	-0,032	-0,027
Pétrole	-0,065	-0,048	-0,050	-0,121	-0,079	-0,096	-0,076	-0,060	-0,062
Blé	-0,050	-0,024	-0,050	-0,031	-0,015	-0,028	-0,024	-0,011	-0,022
Portefeuille	-0,244	-0,190	-0,196	-0,291	-0,226	-0,232	-0,194	-0,150	-0,155
VaR(1 ; 99%)									
CAC 40	-0,090	-0,067	-0,072	-0,117	-0,092	-0,090	-0,083	-0,060	-0,063
S&P 500	-0,096	-0,066	-0,065	-0,084	-0,061	-0,063	-0,051	-0,040	-0,038
Pétrole	-0,093	-0,055	-0,071	-0,171	-0,103	-0,136	-0,107	-0,070	-0,087
Blé	-0,068	-0,025	-0,070	-0,042	-0,016	-0,040	-0,033	-0,012	-0,031
Portefeuille	-0,347	-0,213	-0,278	-0,414	-0,272	-0,328	-0,274	-0,183	-0,219
VaR(1 ; 99,9%)									
CAC 40	-0,133	-0,067	-0,095	-0,173	-0,092	-0,119	-0,123	-0,060	-0,083
S&P 500	-0,148	-0,066	-0,086	-0,129	-0,061	-0,083	-0,078	-0,040	-0,051
Pétrole	-0,127	-0,055	-0,094	-0,235	-0,103	-0,180	-0,146	-0,070	-0,116
Blé	-0,099	-0,025	-0,093	-0,061	-0,016	-0,053	-0,049	-0,012	-0,042
Portefeuille	-0,508	-0,213	-0,369	-0,598	-0,272	-0,435	-0,395	-0,183	-0,292

TAB. 4.6 – Valeurs des pertes potentielles - scénario par la volatilité historique

Le scénario de base correspond à l'estimation des pertes potentielles sans stress des facteurs de risque. Le scénario 1 et le scénario 2 correspondent respectivement à l'estimation des pertes potentielles sous l'hypothèse de la guerre du golfe de 1990 et à l'estimation des pertes potentielles sous l'hypothèse de l'attentat du 11 septembre 2001. Les valeurs en gras sont des pertes estimées qui sont supérieures aux pertes estimées sous le scénario de base. Les valeurs des pertes sur le portefeuille sont déterminées par la somme des pertes sur les actifs individuels.

	Scénario de base			Scénario 1			Scénario 2		
	GPD cond.	FHS	GARCH	GPD cond.	FHS	GARCH	GPD cond.	FHS	GARCH
ES(1 ; 95%)									
CAC 40	-0,080	-0,065	-0,064	-0,104	-0,090	-0,080	-0,074	-0,059	-0,056
S&P 500	-0,085	-0,065	-0,058	-0,074	-0,060	-0,056	-0,045	-0,039	-0,034
Pétrole	-0,082	-0,054	-0,063	-0,152	-0,100	-0,120	-0,095	-0,068	-0,077
Blé	-0,061	-0,025	-0,062	-0,038	-0,016	-0,035	-0,030	-0,012	-0,028
Portefeuille	-0,309	-0,209	-0,246	-0,368	-0,266	-0,291	-0,244	-0,177	-0,195
ES(1 ; 99%)									
CAC 40	-0,109	-0,067	-0,082	-0,141	-0,092	-0,103	-0,100	-0,060	-0,072
S&P 500	-0,119	-0,066	-0,074	-0,103	-0,061	-0,072	-0,062	-0,040	-0,044
Pétrole	-0,108	-0,055	-0,081	-0,199	-0,103	-0,155	-0,124	-0,070	-0,100
Blé	-0,082	-0,025	-0,080	-0,051	-0,016	-0,045	-0,040	-0,012	-0,036
Portefeuille	-0,417	-0,213	-0,318	-0,494	-0,272	-0,376	-0,327	-0,183	-0,251
ES(1 ; 99,9%)									
CAC 40	-0,154	-0,067	-0,104	-0,201	-0,092	-0,130	-0,142	-0,060	-0,091
S&P 500	-0,177	-0,066	-0,094	-0,153	-0,061	-0,091	-0,092	-0,040	-0,055
Pétrole	-0,140	-0,055	-0,103	-0,259	-0,103	-0,196	-0,161	-0,070	-0,126
Blé	-0,115	-0,025	-0,101	-0,071	-0,016	-0,057	-0,056	-0,012	-0,045
Portefeuille	-0,586	-0,213	-0,402	-0,684	-0,272	-0,475	-0,452	-0,183	-0,318

TAB. 4.7 – Valeurs des pertes potentielles moyennes au-delà de la VaR - scénario par la volatilité historique

Le scénario de base correspond à l'estimation des pertes potentielles sans stress des facteurs de risque. Le scénario 1 et le scénario 2 correspondent respectivement à l'estimation des pertes potentielles moyennes sous l'hypothèse de la guerre du golfe de 1990 et à l'estimation des pertes potentielles moyennes sous l'hypothèse de l'attentat du 11 septembre 2001. Les valeurs en gras sont des pertes estimées qui sont supérieures aux pertes estimées sous le scénario de base. Les valeurs des pertes sur le portefeuille sont déterminées par la somme des pertes sur les actifs individuels.

4.4.2 Pertes extrêmes déterminées par le stress de la matrice de corrélation

Les pertes potentielles extrêmes sont déterminées sur le portefeuille suivant le stress des coefficients de corrélation sous les deux scénarios historiques. Il faut noter que les coefficients de corrélation pour le modèle de la loi normale conditionnelle sont déterminés par l'estimation de la copule gaussienne. Quant aux coefficients de corrélation intégrés dans le modèle GPD, ils ont été estimés par la copule de student avec un degré de liberté de 4. Ces coefficients de corrélation estimés sur les 200 premiers jours ouvrés de l'invasion du Koweït par l'Irak en 1990 et de l'attentat terroriste du 11 septembre 2001 sont considérés comme des coefficients de corrélation stressés. Donc, nous les introduisons dans les modèles GPD et GARCH pour déterminer les pertes extrêmes potentielles dont les résultats sont présentés dans le Tableau 4.8.

Dans le cadre du stress de la corrélation, il n'est pas possible de stresser la corrélation pour la méthode FHS parce qu'il n'est pas possible d'estimer la corrélation comme on peut le faire dans les modèles paramétriques ou semi-paramétriques. La structure de corrélation dans la méthode FHS est empiriquement intégrée dans la méthodologie. Par conséquent, il n'y aura pas d'éléments de comparaison concernant la méthode de simulation historique filtrée FHS.

L'examen des résultats après le stress de la corrélation dans les différents modèles de risque montre clairement la supériorité du modèle GPD par rapport au modèle GARCH de la loi normale. En effet, quel que soit le scénario retenu, les pertes extrêmes potentielles estimées par le modèle GPD sont supérieures à celles déterminées par le modèle GARCH. Les pertes extrêmes potentielles estimées par le modèle GPD sous le scénario de la guerre du golfe (scénario 1) et sous le scénario de l'attentat terroriste du 11 septembre 2001 à New York (scénario 2) sont supérieures aux pertes potentielles déterminées sous le scénario de base. Cependant, nous remarquons pour le modèle GARCH de la loi normale que les pertes extrêmes potentielles estimées sous le scénario de la guerre du golfe sont inférieures aux pertes potentielles extrêmes calculées sous le scénario de base. Ces résultats obtenus sur le modèle de la loi normale sont dus aux caractéristiques de ce modèle à sous-estimer

le risque en période de fortes fluctuations ou de risques extrêmes.

La comparaison du scénario de la guerre du golfe et du scénario de l'attentat terroriste donne une indication sur la sévérité des scénarios. En effet, les pertes extrêmes potentielles estimées sous le scénario de l'attentat terroriste du 11 septembre 2001 sont supérieures à celles déterminées sous le scénario de la guerre du golfe. Ce qui signifie que l'impact de l'attentat terroriste en terme de pertes extrêmes sur le portefeuille est plus élevé que celui de la guerre du golfe. Cette sévérité de l'attentat terroriste du 11 septembre 2001 s'explique par le fait qu'il entraîne à la baisse les prix de tous les actifs du portefeuille. Dans le scénario de la guerre du golfe, le marché du pétrole évolue dans le sens inverse des marchés actions, ce qui réduit le risque sur le portefeuille et la sévérité de ce scénario.

	Scénario de base			Scénario 1			Scénario 2		
	GPD cond.	FHS	GARCH	GPD cond.	FHS	GARCH	GPD cond.	FHS	GARCH
VaR(1;95%)	-0,066	-0,032	-0,028	-0,077	-	-0,022	-0,093	-	-0,029
VaR(1;99%)	-0,077	-0,044	-0,039	-0,099	-	-0,031	-0,117	-	-0,041
VaR(1;99,9%)	-0,089	-0,044	-0,052	-0,134	-	-0,041	-0,154	-	-0,054
ES(1;95%)	-0,073	-0,042	-0,035	-0,091	-	-0,027	-0,108	-	-0,036
ES(1;99%)	-0,082	-0,044	-0,045	-0,114	-	-0,035	-0,133	-	-0,047
ES(1;99,9%)	-0,094	-0,044	-0,057	-0,152	-	-0,045	-0,171	-	-0,059

TAB. 4.8 – Valeurs des pertes potentielles - scénario par la corrélation historique

Le scénario de base correspond à l'estimation des pertes potentielles sans stress des facteurs de risque. Le scénario 1 et le scénario 2 correspondent respectivement à l'estimation des pertes potentielles sous l'hypothèse de la guerre du golfe de 1990 et à l'estimation des pertes potentielles sous l'hypothèse de l'attentat du 11 septembre 2001. Les valeurs en gras sont des pertes estimées qui sont inférieures aux pertes estimées sous le scénario de base.

Les scénarios historiques que nous venons de spécifier ont deux grands avantages. Le premier avantage concerne la plausibilité des scénarios historiques. En effet, les événements sur lesquels sont basés les scénarios historiques se sont déjà produits dans le passé et cela leur donne une certaine plausibilité. Il est très difficile d'écarter les scénarios historiques pour la seule raison qu'ils ne se reproduiraient pas. L'expérience nous montre par exemple que le crash boursier de 1987 où l'indice Dow Jones a perdu 22,6% le 19 octobre 1987 a été plus sévère que celui de 1929 où le même indice a perdu 13% de sa valeur en un jour (le 28 octobre 1929). Le deuxième avantage est que les scénarios historiques sont rapidement compris par la Direction d'un établissement financier. Une indication selon laquelle l'entreprise perdrait X millions d'Euros si demain le krach boursier d'octobre 1987 se reproduisait, est très facile à comprendre et permet d'avoir une grande réactivité dans la gestion des risques extrêmes.

4.5 Conclusion

L'apport de ce chapitre a été de proposer une méthodologie d'intégration des scénarios historiques dans les modèles de mesure de risque de marché. Cela a consisté à modifier les paramètres de la volatilité conditionnelle et la corrélation en fonction des valeurs de rentabilité, de volatilité et de corrélation déterminées sous les scénarios de la guerre du golfe de 1990-1991 et l'attentat du 11 septembre 2001. Ensuite, ces paramètres ont été intégrés dans les mesures de la Value at Risk et de l'Expected Shortfall.

Premièrement, nous sommes partis des scénarios de la guerre du golfe et de l'attentat du 11 septembre 2001 pour effectuer un choc sur la volatilité conditionnelle. Nous observons que les pertes extrêmes estimées sur les actifs du portefeuille sous le scénario de la guerre du golfe de 1990-1991 sont largement supérieures à celles estimées sous le scénario de l'attentat du 11 septembre 2001. Nous remarquons que les pertes extrêmes estimées sur le CAC et sur le Pétrole sous les deux scénarios historiques sont plus élevées que celles déterminées sous le scénario de base c'est-à-dire sans stress des facteurs de risque. Dans le cadre de la gestion des risques extrêmes, les mesures peuvent être prises pour réduire l'exposition sur ces deux actifs du portefeuille.

Deuxièmement, nous avons effectué un choc sur la corrélation. Les pertes extrêmes potentielles estimées sous le scénario de l'attentat du 11 septembre 2001 sont supérieures à celles déterminées sous le scénario de la guerre du golfe. Cela indique que l'impact sur le portefeuille d'étude de l'attentat du 11 septembre 2001 est plus élevé que celui de la guerre du golfe. Cet impact élevé de l'attentat du 11 septembre 2001 s'explique par le fait qu'il entraîne tous les facteurs de risque dans la même direction. Pour le modèle GPD, les pertes extrêmes estimées sous les deux scénarios historiques sont supérieures à celles déterminées sous le scénario de base. Cette sévérité des deux scénarios historiques devrait amener un gestionnaire de risques à mettre en place un plan de gestion de ces risques extrêmes pour pouvoir être réactif en cas de leur réalisation effective.

La méthodologie que nous proposons dans ce chapitre permettra aux établissements financiers de mieux élaborer leurs scénarios historiques et intégrer ces scénarios dans les modèles de risque pour estimer les pertes extrêmes. Cela réduit la subjectivité des scénarios historiques construits hors des modèles de risque. Suivant les résultats du test de fiabilité des modèles de risque effectué dans la première partie de cette étude, le modèle conditionnel GPD est mieux adapté au stress test que les modèles internes de risque de marché jusqu'à présent utilisés par les établissements financiers. En effet, il est plus judicieux d'intégrer les scénarios historiques dans un modèle fiable que dans un modèle qui s'est révélé faillible en période de forte volatilité des marchés.

L'estimation des pertes extrêmes par la construction de scénarios historiques n'évalue les vulnérabilités du portefeuille que par rapport à un événement extrême passé. Le résultat des scénarios historiques reste ainsi dépendant d'événements extrêmes enregistrés dans le passé. Pour autant, rien ne garantit qu'il n'y ait pas d'événements plus extrêmes que ceux qui se sont déjà produits. La construction de scénarios hypothétiques permet d'appréhender ce type d'événements extrêmes par la formulation d'hypothèses sur l'évolution des facteurs de risque ou sur le changement de l'environnement économique ou politique dans un pays ou dans une région du monde.

Chapitre 5

CONSTRUCTION DES SCÉNARIOS THÉORIQUES

Les scénarios construits sur la base de variations historiques extrêmes ou de crises passées ne sont pas nécessairement les pires scénarios ou des scénarios catastrophes. Il peut y avoir des variations extrêmes du marché qui n'ont jamais été enregistrées dans le passé mais qui constitueraient les pires scénarios. Ce type de scénarios extrêmes n'est pas à écarter, surtout si on se réfère à l'histoire des crises financières et économiques. Par exemple, après la crise de 1929 où l'indice Dow Jones a perdu 13% sur la seule journée du lundi 28 octobre 1929, on ne pouvait pas imaginer une perte plus sévère dans le futur jusqu'au jour où le même indice Dow Jones a enregistré une perte de 22,6% sur la seule séance du 19 octobre 1987. Ainsi, pour identifier les scénarios catastrophes, on ne peut pas considérer les seuls événements extrêmes historiques, mais aussi tous les événements extrêmes potentiels futurs.

La construction de scénarios basés sur les données historiques ne tient pas nécessairement compte des caractéristiques du portefeuille. Les scénarios historiques peuvent, par exemple, être construits sur la base d'une crise monétaire sans que le portefeuille ne contienne des devises. Le portefeuille joue un rôle plus important dans la construction des scénarios hypothétiques. Le lien entre la composition du portefeuille et les scénarios catastrophes envisagés permet aussi d'assurer la crédibilité desdits scénarios. Effet, plus le lien entre l'événement de crise envisagé et le portefeuille est claire et cohérent dans la

construction de scénario, plus les résultats du stress test seront acceptés par les décideurs.

Le Comité de Bâle sur la supervision bancaire ne donne aucune indication sur la façon d'identifier les scénarios catastrophes. La solution pour un établissement financier va consister à faire appel à l'expérience et à l'expertise de ses équipes dans tous les domaines possibles. Ces experts peuvent utiliser leurs connaissances du marché, du portefeuille, des stratégies de *trading* et d'arbitrage pour identifier les situations qui pourraient entraîner de fortes pertes. Les scénarios hypothétiques sont donc construits sur la base des jugements des experts et de leurs appréhensions du futur. La construction de scénarios hypothétiques et l'intégration de ces scénarios dans les modèles de risque de marché n'ont pas été suffisamment explorées dans la littérature financière. Les établissements financiers ne dévoilent pas non plus leurs méthodologies pour la construction de leurs scénarios hypothétiques.

Ce chapitre traite principalement de deux grandes questions : comment intégrer les scénarios hypothétiques dans les modèles de risque de marché et particulièrement celui de la distribution de Pareto généralisée ? Comment faire de la recherche de scénarios catastrophes sans partir d'hypothèses de scénarios ? Ainsi, nous proposons des solutions méthodologiques nouvelles et analysons les implications de ces méthodes en termes de mesure de pertes extrêmes sur le portefeuille d'étude. Nous définissons la construction de scénarios théoriques comme étant une construction de scénarios hypothétiques et de recherche de pire scénario ou scénario catastrophe par un algorithme. Cette recherche de scénario catastrophe sera effectuée à partir du modèle GPD et de la loi normale.

L'objectif de ce chapitre est de construire des scénarios théoriques afin de déterminer la vulnérabilité du portefeuille d'étude. Pour atteindre cet objectif, nous commençons par la création des hypothèses de scénarios dans la première section. La deuxième section présente l'intégration des scénarios hypothétiques dans la volatilité conditionnelle. La construction de matrices de corrélation en fonction de scénarios hypothétiques est effectuée dans la troisième section. La recherche de scénarios catastrophes par une nouvelle méthodologie sans construction d'hypothèses préalables est proposée dans la quatrième section. Dans chacune des sections, nous analysons les pertes extrêmes déterminées.

5.1 Création des hypothèses de scénarios

La formulation des scénarios catastrophes est généralement basée sur l'hypothèse d'événements économiques ou politiques. Ces événements sont présumés causer de fortes pertes dans le portefeuille des établissements financiers. En se fondant sur une expertise économique et politique, la démarche est de déterminer étape par étape le déclenchement des événements. Ensuite, la chaîne des événements est traduite d'une manière plausible dans la variation des facteurs de risque. Cette variation des facteurs de risque constitue le scénario catastrophe à appliquer au portefeuille d'actifs.

La détermination des événements extrêmes ainsi que leur transposition dans la variation des facteurs de risque doivent être clairement définies. La qualité et la plausibilité des résultats des scénarios dépendront entièrement de l'expertise économique et du bon raisonnement. C'est pourquoi, lors de la construction de scénarios hypothétiques, l'équipe d'experts doit être fortement impliquée. Ces experts doivent avoir une expérience variée dans plusieurs secteurs d'activités économiques et dans la géopolitique des grandes régions du monde. La construction de scénarios hypothétiques doit aussi impliquer la direction de l'établissement financier parce que c'est elle qui prend les décisions les plus importantes. La crédibilité des résultats des scénarios dépend principalement de l'implication de tous les acteurs concernés lors de la construction des scénarios et de leur approbation que de tels scénarios puissent se produire.

Les scénarios hypothétiques sont quelquefois basés sur des hypothèses d'événements comme par exemple un tremblement de terre au Japon, un coup d'État en Russie, l'assassinat d'un président Américain, la faillite d'une grande banque mondiale, un problème de dette publique dans un pays ou dans une région du monde ou encore l'abandon par un pays sous pression, de la fixité du taux de change. Ainsi, en sélectionnant l'événement déclencheur, la spécificité de l'établissement et celle de son portefeuille doivent être prises en compte. En effet, les scénarios catastrophes envisagés devraient impacter significativement les facteurs de risque du portefeuille.

Un autre groupe de scénario hypothétique que nous n'allons pas développer dans cette étude mais qui reste important au niveau d'une banque est un scénario basé sur le

modèle économique (ou *business model* en anglais) et les stratégies d'investissement d'un établissement financier. La vulnérabilité de l'établissement financier peut être évaluée sous l'hypothèse du déclin futur de son marché. Cette hypothèse de déclin du marché peut être utilisée comme un événement déclencheur des scénarios hypothétiques. Dans ce cas précis, il est essentiel de donner une indication explicite de ces hypothèses de marché pour assurer la crédibilité des résultats.

5.1.1 Scénario hypothétique 1 : Une baisse des marchés européens difficilement gérable

Sous le double-effet d'une activité qui ralentit et de la crise de la dette souveraine³³, le marché des actions se retourne en Europe et aux Etats-Unis. L'incertitude sur la croissance économique entraîne une baisse du prix du pétrole sur le marché mondial. Le prix du pétrole étant un facteur déterminant de la formation du prix des produits agricoles (cf. Cluff and Jones (2011)), on assiste aussi à une baisse du prix du blé.

Il découle de ce ralentissement économique sur fond de crise de la dette publique européenne un désinvestissement dans les actions occidentales et certaines matières premières pour un investissement dans les métaux précieux comme l'or ou dans les actions chinoises et japonaises.

Les conséquences de ces hypothèses sur la composition du portefeuille d'étude sont les suivantes :

1. Une forte baisse du cours des actions européennes : -14% sur le CAC 40 avec une volatilité de 5% .
2. Une forte baisse du cours des actions américaines : -12% sur le S&P 500 avec une volatilité de 4% .
3. Une baisse modérée du prix sur le marché du pétrole : -8% sur le pétrole avec une volatilité de 5% .

33. Ce scénario s'inspire de l'analyse effectuée au mois d'octobre 2011 sur les « *Perspectives Des Marchés Financiers* » par la Banque HSBC Asset Global Management France.

4. Une baisse modérée du prix sur le marché des produits agricoles : -4% sur le blé avec une volatilité de 2% . Ces hypothèses formulées constituent des données journalières, c'est-à-dire des rentabilités et des volatilités journalières.

5.1.2 Scénario hypothétique 2 : Crise au Moyen-Orient

Une déstabilisation de la région du Moyen-Orient par une guerre entraîne la perturbation de la production du pétrole dans la région. L'approvisionnement et la production du pétrole sont impactés en conséquence. Cela provoque un choc de forte amplitude sur le marché du pétrole et un effondrement des marchés actions. L'impact de cet événement sur le prix des actifs du portefeuille d'étude est estimé en fonction des variations enregistrées lors de l'invasion du Koweït par l'Irak, mais cette fois ci avec une plus grande sévérité.

Selon une étude³⁴ menée par l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE) et l'Organisation pour l'Alimentation et l'Agriculture ou *Food and Agriculture Organization* (FAO), une variation à la baisse ou à la hausse de 25% du prix du pétrole entraînera une variation à la baisse ou à la hausse de 4% du prix du blé. Nous tenons compte dans cette étude de ce lien entre le pétrole et le blé.

La transposition de l'impact de cette crise au Moyen-Orient dans la variation des actifs du portefeuille d'étude est donnée ci-dessous :

1. Une forte hausse du prix sur le marché du pétrole : $+25\%$ sur le pétrole avec une volatilité de 10% .
2. Une baisse des actions européennes : -6% sur le CAC 40 avec une volatilité de 3% .
3. Une baisse des actions américaines : -5% sur le S&P 500 avec une volatilité de 2% .
4. Une forte hausse du prix sur le marché des produits agricoles : $+4\%$ sur le blé avec une volatilité de 2% .

34. Les détails sont donnés dans *Perspectives agricoles de l'OCDE et de la FAO 2011-2020* par Cluff and Jones (2011).

5.2 Stress de la volatilité

Cette section présente une nouvelle méthodologie de modification de la volatilité pour tenir compte de la perception du risque extrême futur. Ce risque futur peut être anticipé en spécifiant des chocs à partir de notre perception de l'incertitude qui prévaut sur le marché. Ces chocs sont ensuite introduits dans la volatilité et leurs conséquences sont évaluées en terme de pertes extrêmes sur le portefeuille d'étude.

5.2.1 Construction des chocs

Les chocs sont définis comme étant une variation extrême c'est-à-dire une discontinuité dans les prix suite à une information importante entrant sur le marché. La taille du choc est basée sur les événements hypothétiques comme spécifiés dans la Section 5.1. Le Tableau 5.1 présente les valeurs hypothétiques des chocs de rentabilité et de volatilité des actifs du portefeuille d'étude.

	Scénario 1		Scénario 2	
	Rentabilité	Volatilité	Rentabilité	Volatilité
CAC40	-0,14	0,05	-0,06	0,03
S&P500	-0,12	0,04	-0,05	0,02
Pétrole	-0,08	0,05	0,25	0,10
Blé	-0,04	0,02	0,04	0,02

TAB. 5.1 – **Rentabilités et volatilités hypothétiques**

Le scénario 1 correspond à une baisse des marchés européens sur fond de crise de la dette souveraine. Le scénario 2 correspond à une crise au Moyen-Orient qui impacte fortement le marché du pétrole.

5.2.2 Intégration des chocs dans la volatilité

Les conséquences d'un événement extrême peuvent être exprimées en terme de forte variation de la volatilité. Cette volatilité future σ_{t+1} à prévoir est déterminée par l'estimation du modèle GJR(1,1). Elle dépend de la volatilité σ_t et du résidu ϵ_t à l'instant t . La variance permettant d'obtenir cette volatilité future est définie par :

$$\sigma_{t+1}^2 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sigma_t^2 + \hat{\beta}_2 \epsilon_t^2 + \hat{\varphi} I_{\epsilon_t < 0} \epsilon_t^2 \quad (5.1)$$

où $\hat{\beta}_0 \geq 0$, $\hat{\beta}_1 > 0$ et $\hat{\beta}_2 > 0$.

Le premier jour du stress test c'est-à-dire à l'instant t , la volatilité σ_t est égale à la volatilité perceptible à la date d'estimation pour qu'elle puisse refléter les conditions du marché. Le résidu ϵ_t représente les informations disponibles à l'instant t sur le futur. Il correspond au choc de la rentabilité défini dans le Tableau 5.1. En réponse au choc à la date t , la volatilité future σ_{t+1} augmentera en fonction de l'ampleur du choc.

5.2.3 Pertes potentielles extrêmes estimées sur les actifs du portefeuille

Les pertes extrêmes sont estimées sur le portefeuille d'actifs à partir du stress de la volatilité conditionnelle. Ce stress de la volatilité conditionnelle est basé sur les scénarios hypothétiques. Le stress de la volatilité conditionnelle consiste à estimer une volatilité conditionnelle future pour la date $t + 1$ en faisant des hypothèses sur la rentabilité (ϵ_t) et la volatilité (σ_t) à la date t . Les hypothèses sur la rentabilité et la volatilité à l'instant t sont fixées en fonction de la perception du risque futur. La volatilité conditionnelle stressée est ensuite intégrée dans les mesures de risque (VaR et ES) pour évaluer les pertes extrêmes que peuvent enregistrer les actifs du portefeuille. Les pertes extrêmes sont calculées suivant deux scénarios : une baisse des marchés européens difficilement gérable (scénario 1) et une crise au Moyen-Orient (scénario 2). Les pertes extrêmes potentielles sous le scénario de base c'est-à-dire sans stress des facteurs de risque, sont également calculées. Le scénario

de base est un indicateur de sévérité des hypothèses de scénario formulées. En effet, il indique en fonction de la valeur des pertes extrêmes estimées si l'impact du scénario futur envisagé est plus ou moins extrême.

Les résultats de l'estimation de la VaR et de l'ES par les trois modèles de mesure de risque sous les deux scénarios hypothétiques sont présentés dans les Tableaux 5.2 et 5.3. Les pertes ont été estimées sur l'horizon d'un jour et aux niveaux de confiance de 95%, 99% et 99,9% pour tous les actifs du portefeuille (CAC 40, S&P 500, Pétrole et Blé). Les pertes extrêmes calculées sur le portefeuille global correspondent à un scénario catastrophe. En effet, ces pertes extrêmes sont obtenues par la somme algébrique des pertes extrêmes individuelles des actifs du portefeuille sans tenir compte de la corrélation entre les facteurs de risque.

Les pertes extrêmes estimées sous les deux scénarios hypothétiques par les modèles GPD et FHS sont supérieures aux pertes estimées sous le scénario de base. Cela montre que si ces scénarios envisagés se réalisent, les actifs du portefeuille peuvent enregistrer des pertes plus élevées que celles calculées sans le stress des facteurs de risque. Cette analyse est également valable pour le modèle GARCH sur les actifs du CAC 40, du S&P 500 et du Pétrole. Par contre, pour le Blé, le modèle GARCH estime des pertes identiques sous les deux scénarios hypothétiques mais inférieures aux pertes estimées sous le scénario de base. Il faut noter que le choc envisagé sur le blé (cf. Tableau 5.1) est un choc identique pour le modèle GARCH. En effet, ce modèle, à la différence de celui de FHS et de GPD conditionnel, est basé sur le modèle GARCH symétrique c'est-à-dire qu'il ne tient pas compte de la différence d'impact entre une rentabilité négative et une rentabilité positive.

Les pertes extrêmes estimées sur les indices actions par les trois techniques de mesure de risque sous le scénario 1 (baisse des marchés européens) sont largement supérieures à celles estimées sous le scénario 2 (crise au Moyen-Orient). Cela s'explique par l'amplitude du choc effectué sur les indices actions dans le premier scénario. Cependant, en observant les pertes extrêmes du second scénario, elles sont largement supérieures pour le Pétrole et légèrement inférieures pour le Blé à celles estimées dans le premier scénario.

En termes hiérarchiques entre les trois techniques de mesure de risque dans les deux

scénarios hypothétiques, à l'exception des pertes estimées sur le S&P 500, les valeurs de la VaR_{GPD} sur les autres actifs sont supérieures à celles de la VaR_{FHS} . La mesure de la VaR_{FHS} est à son tour supérieure à celle du modèle GARCH uniquement sur les indices actions. Cette analyse est aussi valable pour la mesure de l'Expected Shortfall.

Nous retenons que le stress test par scénario hypothétique peut s'effectuer à travers la volatilité conditionnelle en exerçant un choc simultané sur la volatilité et sur la rentabilité le jour précédant le jour de l'estimation des pertes extrêmes. Il faut aussi noter qu'il est possible de réaliser un choc uniquement sur la rentabilité. Cependant, ce type de choc aura moins d'impact sur la volatilité future parce que le coefficient de la rentabilité ou du résidu est très faible par rapport à celui de la volatilité. Nous observons dans cette étude que le modèle GARCH symétrique de la loi normale estime le même risque extrême pour une variation de plus ou moins 4% sur le Blé. Alors que l'impact d'une rentabilité de -4% doit être supérieur à celui d'une rentabilité de +4%, d'où l'importance de la prise en compte de l'effet asymétrique des rentabilités dans la modélisation des pertes extrêmes.

	Scénario de base				Scénario 1				Scénario 2			
	GPD cond.	FHS	GARCH		GPD cond.	FHS	GARCH		GPD cond.	FHS	GARCH	
VaR(1 ; 95%)												
CAC 40	-0,041	-0,039	-0,032	-0,133	-0,127	-0,102	-0,070	-0,067	-0,055			
S&P 500	-0,041	-0,149	-0,028	-0,105	-0,382	-0,076	-0,049	-0,178	-0,036			
Pétrole	-0,051	-0,040	-0,042	-0,106	-0,087	-0,086	-0,239	-0,198	-0,189			
Blé	-0,031	-0,007	-0,041	-0,045	-0,011	-0,035	-0,044	-0,010	-0,035			
Portefeuille	-0,164	-0,236	-0,143	-0,389	-0,606	-0,299	-0,402	-0,453	-0,315			
VaR(1 ; 99%)												
CAC 40	-0,060	-0,052	-0,046	-0,195	-0,168	-0,144	-0,103	-0,088	-0,077			
S&P 500	-0,065	-0,149	-0,040	-0,165	-0,382	-0,107	-0,077	-0,178	-0,051			
Pétrole	-0,077	-0,040	-0,059	-0,161	-0,087	-0,122	-0,363	-0,198	-0,268			
Blé	-0,045	-0,007	-0,058	-0,064	-0,011	-0,050	-0,063	-0,010	-0,050			
Portefeuille	-0,247	-0,249	-0,203	-0,586	-0,646	-0,423	-0,606	-0,474	-0,446			
VaR(1 ; 99,9%)												
CAC 40	-0,099	-0,052	-0,061	-0,321	-0,168	-0,191	-0,169	-0,088	-0,103			
S&P 500	-0,117	-0,149	-0,052	-0,297	-0,382	-0,142	-0,139	-0,178	-0,068			
Pétrole	-0,121	-0,040	-0,079	-0,254	-0,087	-0,162	-0,573	-0,198	-0,355			
Blé	-0,064	-0,007	-0,077	-0,091	-0,011	-0,067	-0,089	-0,010	-0,067			
Portefeuille	-0,402	-0,249	-0,269	-0,964	-0,646	-0,561	-0,970	-0,474	-0,593			

TAB. 5.2 – Valeurs des pertes potentielles - scénario par la volatilité hypothétique

Le scénario de base correspond à l'estimation des pertes potentielles sans stress des facteurs de risque. Le scénario 1 et le scénario 2 correspondent respectivement à l'estimation des pertes potentielles sous l'hypothèse d'une baisse des marchés européens et à l'estimation des pertes potentielles sous l'hypothèse d'une crise au Moyen-Orient. Les valeurs en gras sont des pertes estimées qui sont inférieures aux pertes estimées sous le scénario de base. Les valeurs des pertes sur le portefeuille sont déterminées par la somme des pertes sur les actifs individuels.

	Scénario de base				Scénario 1				Scénario 2			
	GPD cond.	FHS	GARCH		GPD cond.	FHS	GARCH		GPD cond.	FHS	GARCH	
ES(1 ; 95%)												
CAC 40	-0,054	-0,051	-0,041	-0,174	-0,164	-0,128	-0,091	-0,085	-0,069			
S&P 500	-0,057	-0,149	-0,035	-0,145	-0,382	-0,095	-0,068	-0,178	-0,045			
Pétrole	-0,067	-0,040	-0,053	-0,141	-0,087	-0,108	-0,318	-0,198	-0,237			
Blé	-0,040	-0,007	-0,051	-0,057	-0,011	-0,044	-0,055	-0,010	-0,044			
Portefeuille	-0,218	-0,247	-0,180	-0,516	-0,642	-0,375	-0,532	-0,471	-0,396			
ES(1 ; 99%)												
CAC 40	-0,077	-0,052	-0,053	-0,249	-0,168	-0,165	-0,131	-0,088	-0,089			
S&P 500	-0,087	-0,149	-0,045	-0,222	-0,382	-0,123	-0,104	-0,178	-0,059			
Pétrole	-0,096	-0,040	-0,068	-0,201	-0,087	-0,139	-0,453	-0,198	-0,306			
Blé	-0,053	-0,007	-0,066	-0,076	-0,011	-0,057	-0,074	-0,010	-0,057			
Portefeuille	-0,314	-0,249	-0,232	-0,748	-0,646	-0,484	-0,762	-0,474	-0,511			
ES(1 ; 99,9%)												
CAC 40	-0,124	-0,052	-0,067	-0,402	-0,168	-0,208	-0,211	-0,088	-0,112			
S&P 500	-0,153	-0,149	-0,057	-0,390	-0,382	-0,155	-0,182	-0,178	-0,074			
Pétrole	-0,145	-0,040	-0,086	-0,303	-0,087	-0,176	-0,682	-0,198	-0,387			
Blé	-0,073	-0,007	-0,084	-0,103	-0,011	-0,073	-0,101	-0,010	-0,073			
Portefeuille	-0,495	-0,249	-0,294	-1,198	-0,646	-0,612	-1,177	-0,474	-0,646			

TAB. 5.3 – Valeurs des pertes potentielles moyennes au-delà de la VaR - scénario par la volatilité hypothétique

Le scénario de base correspond à l'estimation des pertes potentielles sans stress des facteurs de risque. Le scénario 1 et le scénario 2 correspondent respectivement à l'estimation des pertes potentielles sous l'hypothèse d'une baisse des marchés européens et à l'estimation des pertes potentielles sous l'hypothèse d'une crise au Moyen-Orient. Les valeurs en gras sont des pertes estimées qui sont inférieures aux pertes estimées sous le scénario de base. Les valeurs des pertes sur le portefeuille sont déterminées par la somme des pertes sur les actifs individuels.

5.3 Stress de la matrice de corrélation

Certains auteurs comme Kim and Finger (2000) et McVey (2010) soutiennent que la principale caractéristique d'un événement de crise est incorporée dans la corrélation entre les actifs du portefeuille. Ils ont conduit des études empiriques dans lesquelles ils constatent l'existence de périodes de crises avec des corrélations différentes. En période de crises, les investisseurs font généralement peu de distinction entre les actifs, et la course à la sécurité entraîne souvent toutes les classes d'actifs dans la même direction. L'interconnexion entre les acteurs du marché peut se manifester dans une période de crise où un agent économique qui fait face à une crise de liquidité sur un marché, essaie de liquider ses positions dans d'autres marchés, précipitant ainsi une crise de liquidité à travers tout le système.

La forte intuition de l'augmentation de la corrélation en période de crise n'est pas unanimement acceptée par tous les auteurs. L'intuition reste cependant très forte et il est convenable de construire des scénarios de stress avec une augmentation de la corrélation. McVey (2010) observe sur des périodes de crise, une augmentation de corrélation entre les matières premières et un portefeuille composé de 60% d'actions et 40% d'obligations. Notons, cependant, que le changement de la corrélation ne garantit pas le stress d'un portefeuille. Il s'agit de construire une expérience dans laquelle les pertes potentielles sur un portefeuille augmentent suite à une augmentation de la corrélation.

La modification de la matrice de corrélation en fonction de la perception de risques futurs doit respecter certaines règles pour maintenir la cohérence et la validité de la corrélation entre les facteurs de risque. Il existe aujourd'hui des méthodologies pour modifier les matrices de corrélations sans qu'elles perdent leurs propriétés mathématiques. Par exemple Finger (1997) propose de modifier les vecteurs de rentabilités des facteurs de risque. Dans cette procédure, la modification des corrélations est induite par la modification des rentabilités. Il est également possible de modifier directement la matrice de corrélation sans passer par l'approche de modification des rentabilités. Parmi les méthodes qui permettent de modifier directement la matrice de corrélation, il y a celle de la méthode de la décomposition spectrale développée par Rebonato and Jackel (1999) (cf. Annexe G). Cette méthode permet d'avoir une matrice de corrélation valide après la modification de

la matrice de corrélation originale. Dans le cadre de cette étude, nous adoptons cette méthode de décomposition spectrale pour la modification des matrices de corrélation.

5.3.1 Matrices de corrélation historique

La matrice de corrélation historique est déterminée pour déterminer les pertes potentielles sous le scénario de base et évaluer la sévérité des deux scénarios hypothétiques. Elle est calculée sur les données historiques par l'estimation de la copule de Student pour le modèle GPD et par la copule de la loi normale pour la technique de mesure de la loi normale. Les résultats de ces estimations sont présentés dans les Tableaux 5.4 et 5.5.

	CAC 40	S&P 500	Pétrole	Blé
CAC 40	1	0,342 (0,00)	0,011 (0,52)	0,013 (0,21)
S&P 500	0,342 (0,00)	1	-0,031 (0,05)	0,001 (0,81)
Pétrole	0,011 (0,52)	-0,031 (0,51)	1	0,050 (0,00)
Blé	0,013 (0,21)	0,001 (0,81)	0,050 (0,00)	1

TAB. 5.4 – Coefficients de corrélation de la copule de Student - scénario de base

Les valeurs entre parenthèses correspondent aux p-value. Si elles sont inférieures à 5%, l'hypothèse de nullité de la corrélation est rejetée, sinon, l'hypothèse de corrélation est acceptée. Les coefficients de corrélation sont estimés sur un historique de rentabilités journalières de janvier 1988 à septembre 2008.

	CAC 40	S&P 500	Pétrole	Blé
CAC 40	1	0,327 (0,00)	0,009 (0,49)	0,016 (0,25)
S&P 500	0,327 (0,00)	1	-0,027 (0,05)	-0,006 (0,67)
Pétrole	0,009 (0,49)	-0,027 (0,05)	1	0,045 (0,00)
Blé	0,016 (0,25)	-0,006 (0,67)	0,045 (0,00)	1

TAB. 5.5 – Coefficients de corrélation de la copule de loi normale - scénario de base

Les valeurs entre parenthèses correspondent aux p-value. Si elles sont inférieures à 5%, l'hypothèse de nullité de la corrélation est rejetée, sinon, l'hypothèse de corrélation est acceptée. Les coefficients de corrélation sont estimés sur un historique de rentabilités journalières de janvier 1988 à septembre 2008.

L'examen des Tableaux 5.4 et 5.5 montre une légère différence entre les coefficients de corrélation estimés par la copule de Student et ceux estimés par la copule de la loi normale. Comparativement à la copule normale, la copule de Student estime des coefficients de

corrélations plus élevées entre les actifs de même nature et moins élevées entre les actifs de nature différente. L'hypothèse de nullité de la corrélation entre les indices actions et entre les matières premières est rejetée. Cela signifie qu'il y a une corrélation significativement positive entre les actifs de même nature. Les coefficients de corrélation ainsi déterminés servent à calculer les pertes potentielles sous le scénario de base.

5.3.2 Matrices de corrélation hypothétique

Les matrices de corrélation déterminées sur les données historiques sont à modifier en fonction des deux scénarios envisagés dans la Section 5.1. Le premier scénario correspond à une baisse des marchés européens difficilement gérable due à la crise de la dette souveraine et des perspectives négatives sur la croissance européenne. Le marché des Etats-Unis est également impacté par la contagion. Ainsi, nous supposons une forte corrélation entre tous les actifs du portefeuille d'étude. Cette forte corrélation entre les actifs (indices actions et matières premières) dans ce contexte de crise s'explique par le fait qu'avec une perspective négative de la croissance, la perspective de profit pour les entreprises et la demande de la consommation énergétique se réduisent. Cela a pour conséquence une baisse des cours des actions et du prix du pétrole. Le prix du pétrole étant un déterminant important de la formation du prix du blé, ce dernier est impacté par une baisse de son prix sur le marché. Cette interdépendance entre les actifs du portefeuille permet d'envisager une forte corrélation positive entre les indices actions et entre les matières premières, mais aussi une corrélation positive moins forte entre les indices actions et les matières premières.

	CAC 40	S&P 500	Pétrole	Blé
CAC 40	1	0,850	0,200	0,300
S&P 500	0,850	1	0,200	0,100
Pétrole	0,200	0,200	1	0,600
Blé	0,300	0,100	0,600	1

TAB. 5.6 – Coefficients de corrélation modifiés- scénario hypothétique 1

Le Tableau 5.6 présente les résultats des modifications qui ont été apportées à la matrice de corrélation du Tableau 5.4 en fonction de l'hypothèse d'une baisse des marchés

européens. Le Tableau 5.6 est utilisé pour l'estimation des pertes extrêmes par les deux modèles paramétriques de mesure de risque (GPD et GARCH). Comme on peut le remarquer dans ce tableau, nous envisageons une forte corrélation positive de 0,85 entre le CAC 40 et le S&P 500, de 0,60 entre le Pétrole et le Blé et une corrélation positive mais moins forte de 0,20 entre le CAC 40 et le Pétrole, de 0,30 entre le CAC 40 et le Blé, de 0,20 entre le Pétrole et le S&P 500 et de 0,10 entre le Blé et le S&P 500.

Dans le second scénario, nous envisageons une crise au Moyen-Orient. Cette crise correspond à un embrasement de la région du Moyen-Orient suite à une attaque d'un des pays pétroliers. Cela aura pour conséquence de perturber la production et l'approvisionnement du pétrole dans cette région et la réduction de la production mondiale du pétrole. Cette baisse de la production entraîne une tension sur le prix du pétrole sur le marché mondial, donc une augmentation du prix du baril de pétrole ainsi que celui du blé. Cependant, dans cette crise au Moyen-Orient, nous faisons l'hypothèse d'une corrélation significativement négative entre les indices actions et cette flambée du prix des matières premières.

	CAC 40	S&P 500	Pétrole	Blé
CAC 40	1	0,852	-0,351	-0,303
S&P 500	0,852	1	-0,410	-0,351
Pétrole	-0,351	-0,410	1	0,610
Blé	-0,303	-0,351	0,610	1

TAB. 5.7 – Coefficients de corrélation modifiés - scénario hypothétique 2

Le Tableau 5.7 présente les résultats des modifications qui ont été apportées à la matrice de corrélation du Tableau 5.4 en fonction de l'hypothèse d'une crise au Moyen-Orient. Comme on peut le remarquer dans ce tableau, nous envisageons une forte corrélation positive de 0,852 entre le CAC 40 et le S&P 500, de 0,61 entre le Pétrole et le Blé et une corrélation négative mais moins élevée de -0,351 entre le CAC 40 et le Pétrole, de -0,303 entre le CAC 40 et le Blé, de -0,41 entre le Pétrole et le S&P 500 et de -0,351 entre le Blé et le S&P 500. Cette matrice de corrélation est utilisée pour l'estimation des pertes extrêmes par les deux modèles de mesure de risque (GPD et GARCH).

Après la modification de la matrice de corrélations du Tableau 5.4 en fonction des deux

scénarios envisagés, il est indispensable de vérifier la validité de ces matrices de corrélation modifiées. La procédure de validation (cf. Annexe G) de la matrice de corrélation consiste à déterminer les valeurs propres (*eigenvalue*). Si toutes les valeurs propres de la matrice sont supérieures ou égales à zéro, la matrice de corrélation est valide. Dans le cas contraire, il est obligatoire de procéder à la transformation de la matrice de corrélation comme cela a été présenté dans l'Annexe G. Cette validation est indispensable dans la mesure où la matrice de corrélation doit être au moins semi-définie positive pour ne pas qu'il ait des variances négatives.

Les valeurs propres déterminées à partir des matrices de corrélation modifiées du Tableau 5.6 (Baisse du marché européen difficilement gérable) et du Tableau 5.7 (Crise au Moyen-Orient) sont respectivement $\{0,109; 0,434; 1,312, 2,146\}$ et $\{0,145; 0,387; 1,017; 2,450\}$. Toutes les valeurs propres sont supérieures à zéro.

Pour vérifier également la positivité des deux matrices, il est aussi possible de procéder à la décomposition de Cholesky des deux matrices de corrélation. Selon Alexander and Leigh (1997), pour être sûr que la matrice de corrélation soit semi-positif, il faut que la matrice respecte la propriété mathématique ci-dessous :

$$C = A \times A^T \quad (5.2)$$

où C est la matrice de corrélation modifiée ; A, la matrice de Cholesky et A^T , la matrice transposée de Cholesky.

Les résultats de la décomposition de Cholesky des deux matrices de corrélations modifiées sont présentés dans les Tableaux 5.8 et 5.9.

	CAC 40	S&P 500	Pétrole	Blé
CAC 40	1	0,850	0,200	0,300
S&P 500	0,000	0,527	0,057	-0,294
Pétrole	0,000	0,000	0,978	0,569
Blé	0,000	0,000	0,000	0,707

TAB. 5.8 – **Matrice de Cholesky - scénario hypothétique 1**

	CAC 40	S&P 500	Pétrole	Blé
CAC 40	1	0,852	-0,351	-0,303
S&P 500	0,000	0,524	-0,212	-0,177
Pétrole	0,000	0,000	0,912	0,511
Blé	0,000	0,000	0,000	0,785

TAB. 5.9 – Matrice de Cholesky - scénario hypothétique 2

Avec la détermination des valeurs propres positives de *eigenvalue* et la décomposition de Cholesky des deux matrices de corrélation, nous pouvons maintenant intégrer ces matrices de corrélation dans le calcul de la VaR et de l'ES à partir des modèles de mesure de risque (GPD et GARCH).

Pour le calcul des pertes extrêmes sur le portefeuille d'actifs, nous procédons de la même manière que la procédure présentée dans le Chapitre 3. La seule différence est que la matrice de corrélation a été modifiée en fonction des scénarios de stress envisagés.

Il faut noter que la prise en compte de la corrélation entre les actifs du portefeuille dans le modèle FHS se fait empiriquement, donc il n'y a pas de matrice de corrélation au vrai sens du terme. Cependant, pour pouvoir évaluer les pertes extrêmes sur le portefeuille à partir du modèle FHS, nous développons une procédure qui consiste à :

1. Spécifier des rentabilités de stress pour chaque facteur de risque, par exemple les rentabilités spécifiées dans le Tableau 5.1 ;
2. Considérer ces rentabilités de stress comme des rentabilités récentes (ou innovations récentes) dans le modèle FHS de Barone-Adesi et al. (2000) ;
3. Déterminer la distribution de pertes et profits pour calculer les pertes extrêmes.

Le stress du portefeuille à partir de la méthode FHS, pour tenir compte de la "corrélation empirique", est effectué en fonction des deux scénarios hypothétiques. Comme, il n'est pas possible d'intégrer directement les matrices de corrélation dans la méthode FHS, nous utilisons les rentabilités spécifiées (cf. Tableau 5.1) sous les deux scénarios hypothétiques.

5.3.3 Pertes potentielles extrêmes estimées sur le portefeuille

Les pertes extrêmes, estimées par les trois modèles de mesure de risque sous le scénario de base et sous les scénarios d'une baisse des marchés européens sur fond de crise de la dette souveraine et d'une crise au Moyen-Orient, sont présentées dans le Tableau 5.10. Ces estimations correspondent aux valeurs de la VaR et de l'ES aux niveaux de confiance de 95%, 99% et 99,9% et sur un horizon d'un jour. Les pertes estimées sous le scénario de base sont des pertes calculées sans stress des facteurs de risque.

L'examen du Tableau 5.10 montre des pertes estimées croissantes par rapport au niveau de confiance choisi pour les techniques paramétriques de mesure (GPD et GARCH). Par contre, elles sont identiques à tous les niveaux de confiance pour la technique de mesure FHS. Nous constatons que les pertes estimées à une date donnée par la méthode FHS ne changent généralement pas, quel que soit le niveau de confiance choisi ou le type de mesure de risque retenu (VaR ou ES). Ce résultat s'explique par le fait que la technique FHS utilise une procédure de simulation pour sélectionner aléatoirement dans un échantillon les rentabilités ou les résidus standardisés. Par conséquent, la probabilité de sélectionner une même rentabilité de l'échantillon est élevée. Ce qui fait qu'une même rentabilité peut se retrouver à plusieurs reprises dans les queues de distribution de rentabilités. Ainsi, si nous avons une distribution de rentabilités obtenue par cette procédure en simulant 1000 fois, nous aurons 1000 rentabilités. Dans ces 1000 simulations, nous pourrions avoir par exemple à une même date de prévision une rentabilité extrême de -6% dans les 100 premières lignes après avoir ordonné de façon croissante les rentabilités simulées. Si nous voulons déterminer la VaR au niveau de confiance de 99%, cela correspond à la rentabilité négative de rang 10 (1% multiplié par 1000), donc à coup sûr le quantile empirique donnera la rentabilité négative de -6% pour la VaR. Les valeurs de VaR à 95% et à 99,9% correspondront aussi à -6%. De même pour l'ES à 99% qui correspond à la moyenne au-delà de la VaR à 99%, elle sera égale à la moyenne des 10 premières rentabilités négatives dont la valeur sera -6%. C'est pourquoi ces valeurs de la VaR et de l'ES du Tableau 5.10 sont identiques quel que soit le niveau de confiance retenu ou le type de mesure choisi. Cependant, nous n'aurons pas ces mêmes résultats d'une date à l'autre.

L'analyse des résultats du Tableau 5.10 fait ressortir des pertes extrêmes, estimées sous le scénario d'une baisse des marchés européens, supérieures aux pertes estimées sous le scénario de base. Les pertes extrêmes estimées par la technique de mesure FHS sous le scénario d'une crise au Moyen-orient sont également supérieures aux pertes estimées sous le scénario de base. Cela montre que si ces scénarios hypothétiques envisagés se réalisaient, le portefeuille pourrait enregistrer des pertes plus élevées que celles calculées sans le stress des facteurs de risque. Cependant, les pertes estimées par les techniques de mesure GPD (à l'exception du niveau de confiance de 99,9%) et GARCH sous le second scénario sont inférieures à celles estimées sous le scénario de base. Ces résultats obtenus à partir des modèles paramétriques (GPD et GARCH) montrent que le second scénario est moins extrême. Ils s'expliquent par la corrélation négative entre les indices actions et les matières premières. Il faut noter que dans le second scénario, l'effet de la diversification du portefeuille est pris en compte et entraîne une diminution des pertes.

Les pertes extrêmes estimées sur le portefeuille d'actifs par les trois techniques de mesure de risque sous le premier scénario sont largement supérieures à celles estimées sous le second scénario. Cela est dû au type de corrélation envisagé dans le premier scénario c'est-à-dire le fait que tous les actifs du portefeuille sont fortement corrélés et de façon positive.

En termes hiérarchiques entre les trois techniques de mesure de risque sous le scénario de base et sous les deux scénarios hypothétiques, les valeurs de la $VaR_{GPDcond.}$ sont supérieures à celles de la VaR_{FHS} . La mesure de la VaR_{FHS} est à son tour supérieure à celle de la loi normale sauf au niveau de confiance de 99,9% dans le scénario de base et dans le second scénario. Cette analyse est aussi valable pour la mesure des pertes moyennes au-delà de la VaR c'est-à-dire la mesure de l'Expected Shortfall.

Nous retenons que le stress test par scénario hypothétique peut s'effectuer à travers la modification des coefficients de corrélation pour les techniques paramétriques de mesure de risque et l'exercice d'un choc simultané sur les rentabilités des actifs composant le portefeuille pour les techniques non paramétriques. L'obtention des pertes plus extrêmes dépend du type de corrélation envisagé. Comme nous venons de le voir, les techniques paramétriques génèrent moins de pertes extrêmes si le scénario est basé sur une corré-

lation négative entre les actifs du portefeuille. La corrélation négative entre actifs d'un portefeuille intègre le bénéfice de la diversification.

	Scénario de base			Scénario 1			Scénario 2		
	GPD cond.	FHS	GARCH	GPD cond.	FHS	GARCH	GPD cond.	FHS	GARCH
VaR(1 ; 95%)	-0,048	-0,034	-0,020	-0,075	-0,059	-0,026	-0,045	-0,036	-0,019
VaR(1 ; 99%)	-0,058	-0,034	-0,028	-0,104	-0,059	-0,037	-0,057	-0,036	-0,026
VaR(1 ; 99,9%)	-0,072	-0,034	-0,037	-0,159	-0,059	-0,049	-0,075	-0,036	-0,035
ES(1 ; 95%)	-0,055	-0,034	-0,025	-0,094	-0,059	-0,033	-0,052	-0,036	-0,023
ES(1 ; 99%)	-0,064	-0,034	-0,032	-0,127	-0,059	-0,043	-0,065	-0,036	-0,030
ES(1 ; 99,9%)	-0,078	-0,034	-0,040	-0,192	-0,059	-0,054	-0,084	-0,036	-0,038

TAB. 5.10 – Valeurs des pertes potentielles - scénario par la corrélation hypothétique

Le scénario de base correspond à l'estimation des pertes potentielles sans stress des facteurs de risque. Le scénario 1 et le scénario 2 correspondent respectivement à l'estimation des pertes potentielles sous l'hypothèse d'une baisse des marchés européens et à l'estimation des pertes potentielles sous l'hypothèse d'une crise au Moyen-Orient. Les valeurs en gras sont les pertes estimées qui sont inférieures aux pertes estimées sous le scénario de base.

5.4 Recherche systématique des scénarios catastrophes

Les stress tests basés sur les scénarios historiques et hypothétiques peuvent ne pas mesurer le pire scénario. La difficulté dans ces deux types de scénario de stress est que connaissant les pertes potentielles du portefeuille, cela peut conduire à croire à une certaine sécurité du portefeuille surtout si ces pertes potentielles sont gérables par l'établissement financier. En effet, l'établissement financier ne sait pas si d'autres scénarios, également plausibles, aboutiraient à des pertes plus importantes. Même dans les scénarios hypothétiques, personne ne peut savoir si les scénarios de stress élaborés sont de pires scénarios.

L'autre difficulté après avoir calculé les pertes potentielles extrêmes est qu'il est presque impossible de déterminer les facteurs de risque qui ont entraîné ces pertes. Cela est une question qui n'a pas encore trouvé de réponse dans les scénarios historiques et hypothétiques.

Une approche de recherche des pires scénarios permet de résoudre ces problèmes. Le principal objectif est d'identifier les pires scénarios c'est-à-dire les scénarios dans lesquels le portefeuille actuel enregistrera des pertes extrêmes. Un autre objectif est de trouver les facteurs de risque qui sont principalement responsables des pertes dans les scénarios catastrophes. Une fois que ces facteurs de risque ont été identifiés, l'établissement financier peut facilement élaborer des mesures correctives à mettre en place pour faire face à ces risques.

Pour réaliser cette recherche systématique des scénarios catastrophes, nous présentons la méthode du Maximum Loss et développons une nouvelle méthodologie de recherche de scénarios catastrophes avec le modèle de la distribution de Pareto généralisée.

5.4.1 Méthode du Maximum Loss

La méthode de Maximum Loss (ML) développée par Studer (1997) permet de déterminer la perte maximale dans une région de confiance des facteurs de risque et sur une période de détention donnée. Cette définition est similaire à la définition de la VaR. Cependant, il y a une grande différence : la connaissance de la distribution des pertes et profits est nécessaire pour le calcul de la VaR, le Maximum Loss est définie directement

dans l'espace des facteurs de risque. La définition mathématique du Maximum Loss est donnée par :

$$\begin{aligned}
 ML = \min v(X) \\
 \text{s.c } X \in C \quad \text{avec } Pr(C) = \alpha
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

où X sont des facteurs de risque et C , la région de confiance des facteurs de risque. Contrairement à la VaR qui dépend d'une période de détention et d'un seuil de confiance α , le Maximum Loss a un paramètre supplémentaire appelé région de confiance. La région de confiance contient toutes les valeurs possibles des facteurs de risque en fonction du seuil de confiance α . Ainsi, l'optimisation de $v(X)$ permet de déterminer le scénario catastrophe dans cette région de confiance.

La méthodologie de détermination du Maximum Loss est décrite dans l'Annexe H. Elle est utilisée dans cette étude comme un modèle benchmark de la nouvelle méthodologie que nous développons pour la recherche de scénarios catastrophes.

Application au portefeuille

Les pertes maximales ou Maximum Loss sont estimées par la méthode de Studer sur le portefeuille d'étude composé des indices actions (CAC 40 et S&P 500) et des matières premières (Pétrole et Blé). L'estimation est effectuée sur l'année 2008 avec un historique de 5214 rentabilités journalières. Les valeurs de la VaR du portefeuille ont été également calculées pour évaluer la sévérité des pertes maximales déterminées par la méthode Studer. Le Tableau 5.11 présente les résultats de ces estimations de pertes sur les niveaux de confiance de 95%, 99% et 99,9%.

L'examen des résultats du Tableau 5.11 montre effectivement la contribution de chaque facteur de risque à la réalisation des pertes maximales. Ces pertes maximales estimées par la méthode de Studer sont supérieures aux valeurs de la VaR. Par exemple, au niveau de confiance de 99%, le Maximum Loss estimé sur le portefeuille est de 3,8%, supérieur à la VaR estimée (2,3%). Pour que cette perte maximale se réalise, il faudrait que les facteurs

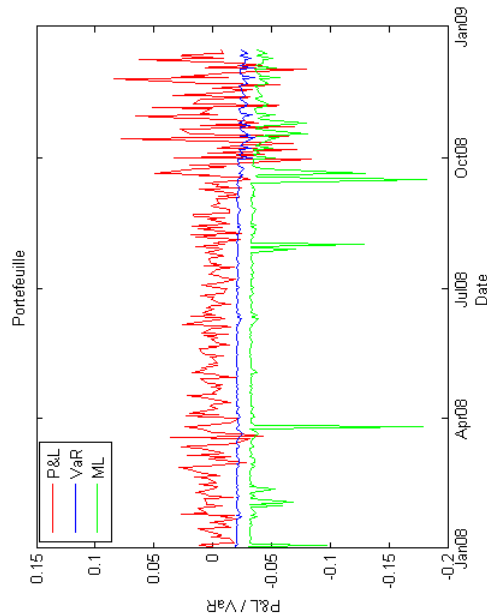
de risque CAC 40, S&P 500, Pétrole et Blé enregistrent respectivement des rentabilités de $-1,7\%$, $-1,1\%$, $-5,7\%$ et -2% . Nous remarquons que la contribution du pétrole dans la réalisation de cette perte maximale est plus importante que celle des autres facteurs de risque. Face à ce scénario catastrophe dans un établissement financier et dans le cadre de la gestion des risques extrêmes, on peut envisager de réduire la position sur le pétrole qui expose plus le portefeuille. Il faut noter que notre analyse porte sur des valeurs moyennes déterminées sur 250 jours. Il y a sur ces 250 jours d'estimation, des scénarios catastrophes où certains facteurs de risque enregistrent des rentabilités positives et d'autres des rentabilités négatives. Le Maximum (Max) dans le Tableau 5.11 correspond à certaines de ces rentabilités positives comme des variations des facteurs de risque contribuant à la réalisation des pertes maximales.

L'objectif de rechercher des pertes maximales et de déterminer la façon dont les facteurs de risque contribuent à la réalisation de ces pertes a été atteint. Mais cela veut-il dire que la méthode de Studer est fiable sur le portefeuille d'étude? La réponse à cette question est donnée par le Graphique 5.1. L'analyse de ce graphique montre clairement que la méthode de Studer sous-estime le risque extrême sur le portefeuille. En effet, les pertes réelles extrêmes enregistrés sur la période de 2008 sont largement supérieures aux pertes potentielles extrêmes estimées. C'est pourquoi, nous proposons dans cette étude une nouvelle méthodologie de recherche de scénarios catastrophes basée sur le modèle GPD (Generalized Pareto Distribution).

	95%				99%				99,9%			
	Moyenne	Écart-type	Min	Max	Moyenne	Écart-type	Min	Max	Moyenne	Écart-type	Min	Max
CAC 40	-0,010	0,050	-0,109	0,467	-0,017	0,055	-0,521	0,467	-0,016	0,054	-0,110	0,466
S&P 500	-0,007	0,026	-0,058	0,200	-0,011	0,035	-0,420	0,201	-0,009	0,040	-0,084	0,392
Pétrole	-0,049	0,026	-0,173	0,057	-0,057	0,034	-0,119	0,251	-0,068	0,031	-0,141	0,052
Blé	-0,018	0,022	-0,096	0,143	-0,020	0,042	-0,096	0,526	-0,027	0,026	-0,096	0,143
Maximum Loss	-0,035	0,030	-0,330	-0,026	-0,038	0,017	-0,182	-0,031	-0,047	0,033	-0,344	-0,036
VaR	-0,016	0,002	-0,026	-0,014	-0,023	0,003	-0,036	-0,020	-0,030	0,004	-0,048	-0,026

TAB. 5.11 – Résultats du calcul du Maximum Loss par la méthode de Studer

Les valeurs du Maximum Loss sont estimées sur un historique de 5214 données journalières pendant la période de janvier 2008 à décembre 2008. Les valeurs moyennes, minimum et maximum correspondent aux rentabilités de chaque actif et déterminent comment chaque actif contribue à la réalisation des pertes maximales (Maximum Loss).



GRAPH. 5.1 – Maximum Loss estimé sur le portefeuille

P&L correspond aux pertes et profits. VaR et ML sont des pertes potentielles déterminées sur un horizon d'un jour et au niveau de confiance de 99%.

5.4.2 Recherche de scénarios catastrophes avec le modèle GPD

L'objectif dans cette section est de chercher les scénarios catastrophes qui peuvent engendrer des pertes potentielles extrêmes sur le portefeuille d'actifs. Pour cela, nous minimisons le quantile de la distribution de Pareto généralisée (Generalized Pareto Distribution - GPD). Ce quantile que nous notons $VaRmax$, est l'inverse de la fonction de répartition de la distribution de Pareto généralisée. Il est calculé en fonction des valeurs ξ et β et sous contrainte que la log-vraisemblance négative de GPD soit inférieure à une valeur critique (VC). Cette contrainte permet d'assurer que la perte trouvée est extrême. Le problème à résoudre est un problème d'optimisation avec des contraintes d'inégalité non linéaires. Il peut être formulé comme suit :

$$\min_{\xi, \beta} VaRmax(\xi, \beta) \quad (5.4)$$

$$\text{s.c } -l(\xi, \beta/y) \leq VC$$

où $l(\xi, \beta/y)$ est la log-vraisemblance de la distribution de Pareto généralisée et VC, la valeur critique de la loi GPD associée à la loi Khi-deux.

Supposons y_i les rentabilités extrêmes ou les excès de rentabilités standardisées du portefeuille d'étude. La fonction objective $VaRmax(\xi, \beta)$ à minimiser est par définition, l'inverse de la fonction de répartition de la distribution de Pareto généralisée. Elle est donnée par la formule ci-dessous :

$$VaRmax_{\alpha}^t(\xi, \beta) = \mu_t + \sigma_t \left[Z_{k+1} + \frac{\beta}{\xi} \left(\left(\frac{N}{k}(\alpha) \right)^{-\xi} - 1 \right) \right] \quad (5.5)$$

où μ_{t+1} est la rentabilité moyenne ; σ_{t+1} , la volatilité conditionnelle ; N, le nombre total d'observations ; k , le nombre de valeurs extrêmes ; Z_{k+1} , le seuil de formation des rentabilités extrêmes et, ξ et β sont respectivement les paramètres de forme (ou indice de queue) et de dispersion.

La log-vraisemblance $l(\xi, \beta/y)$ quant à elle est définie par :

$$l(\xi, \beta/y) = \begin{cases} -n \log \beta - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \frac{\xi y_i}{\beta}\right) & \text{si } \xi \neq 0 \\ -n \log \beta - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n y_i & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Nous utilisons la méthode du rapport de vraisemblance basée sur le théorème de Neyman-Person³⁵ pour déterminer les valeurs des paramètres ξ et β . Ce théorème permet de trouver la meilleure région critique où les paramètres du modèle peuvent être déterminés. La méthode du rapport de vraisemblance indique que deux fois le rapport des log-vraisemblances négatives, appelé *Deviance* D, suit approximativement une distribution de Khi-deux.

$$D = -2 \log \left(\frac{L(\xi, \beta/y)}{L(\hat{\xi}, \hat{\beta}/y)} \right) = -2(l(\xi, \beta/y) - l(\hat{\xi}, \hat{\beta}/y)) \sim \chi^2 \quad (5.7)$$

où $L(\cdot)$ est la vraisemblance et $l(\cdot)$, la log-vraisemblance. $l(\xi, \beta/y)$ et $l(\hat{\xi}, \hat{\beta}/y)$ sont respectivement la log-vraisemblance négative recherchée et la log-vraisemblance négative estimée en fonction des paramètres $\hat{\xi}$ et $\hat{\beta}$.

Le degré de liberté de la distribution de Khi-deux doit correspondre au nombre de paramètres à estimer. Dans le cas de cette étude, ce nombre correspond à 2 représentant les deux paramètres (ξ et β) de la distribution de Pareto généralisée.

Nous cherchons les valeurs des paramètres qui minimisent le quantile de la distribution de Pareto généralisée. Ces valeurs de paramètres peuvent être trouvées dans la région critique où la log-vraisemblance négative $l(\xi, \beta/y)$ des paramètres à chercher est inférieure ou égale à la valeur critique.

$$-l(\xi, \beta/y) \leq -l(\hat{\xi}, \hat{\beta}/y) + \frac{1}{2}\chi^2 \quad (5.8)$$

La valeur critique VC est la somme de la log-vraisemblance négative $l(\hat{\xi}, \hat{\beta}/y)$ déterminée en fonction des paramètres estimés $\hat{\xi}$ et $\hat{\beta}$ et le quantile de la distribution de χ^2 .

35. Le théorème du rapport de vraisemblance est bien détaillé dans Neyman and Pearson (1928).

Elle est donnée par l'expression suivante :

$$VC = \begin{cases} n \log \hat{\beta} + (\frac{1}{\xi} + 1) \sum_{i=1}^n \log(1 + \frac{\hat{\xi} y_i}{\hat{\beta}}) + \frac{1}{2} \chi^2_{2^{-1}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ n \log \hat{\beta} + \frac{1}{\hat{\beta}} \sum_{i=1}^n y_i + \frac{1}{2} \chi^2_{2^{-1}} & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

où $\chi^2_{2^{-1}}$ est l'inverse de la fonction de répartition de la distribution khi-deux au niveau de confiance de 95% et 2 degré de liberté.

Toutes les pertes générées par l'inverse de la fonction de répartition de la distribution de Pareto généralisée dont la log-vraisemblance déterminée est inférieure ou égale à la valeur critique sont des pertes potentielles extrêmes. Ces pertes potentielles extrêmes ou VaRmax doivent être supérieures ou égales à la VaR calculée.

Application au portefeuille

Les résultats de l'application de la méthodologie de recherche des pertes potentielles extrêmes par la loi GPD sur le portefeuille d'étude sont présentés dans le Tableau 5.12. Rappelons que le portefeuille d'étude est composé du CAC 40, S&P 500, du Pétrole et du Blé. Comme il a été présenté plus haut, la procédure consiste à estimer les paramètres ξ et β qui permettent de déterminer la perte potentielle extrême. Ces paramètres ainsi que leur valeur critique associée ont été estimés. A partir de ces paramètres, nous avons calculé les pertes potentielles extrêmes ou VaRmax au niveau de confiance de 95%, 99% et 99,9% sur chaque actif puis sur le portefeuille global. Pour déterminer la VaRmax du portefeuille global, nous utilisons l'approche proposée par Longin (2000). Il propose une formule ad hoc d'agrégation de risques pour calculer la Value at Risk d'un portefeuille à partir du modèle GEV (Generalized Extreme Value).

En considérant k facteurs de risque, la VaRmax du portefeuille est donnée par la formule :

$$VaRmax_i = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \rho_{ij} w_i w_j VaRmax_i VaRmax_j} \quad (5.10)$$

où $VaRmax_i$ représente la VaRmax du facteur de risque i ; w_i , le poids de chaque facteur de risque i et ρ_{ij} la corrélation entre les facteurs i et j déterminée par l'estimation de la copule de student avec 4 degré de liberté.

Pour chaque actif, la VaRmax correspondante au quantile de la distribution de Pareto généralisée est calculée en utilisant les paramètres déterminés dans la région critique qui assure l'obtention de la perte potentielle extrême.

L'analyse des paramètres de la distribution de Pareto généralisée du Tableau 5.12 montre, à l'exception du Blé, un indice de queue positif pour le CAC 40, S&P 500 et le Pétrole. Ces résultats confirment les résultats obtenus dans la première partie de cette étude, c'est-à-dire que ces actifs sont caractérisés par une distribution à queue épaisse. Ce qui signifie que la probabilité de réaliser des pertes extrêmes est plus élevée que la probabilité de réaliser des gains. Ainsi, les pertes potentielles extrêmes sur ces actifs dépendent des valeurs positives de l'indice de queue. Contrairement à ces trois actifs, le Blé affiche en moyenne un indice de queue négatif qui montre que cet actif suit une distribution à queue fine. Cela signifie qu'il a plus de chance de réaliser des gains que des pertes.

La comparaison de la VaRmax à la VaR correspondante montre comme prévu que la VaRmax est supérieure ou égale à la VaR. La VaRmax donne une valeur égale à au moins deux fois la valeur de la VaR. L'écart entre les deux augmente quand on accroît le niveau de confiance de 95% à 99,9%. Les pertes extrêmes ou VaRmax sur le portefeuille sont calculées en adoptant la méthode bottom-up c'est-à-dire en partant de la mesure des pertes extrêmes par actif pour déterminer celles du portefeuille. Les pertes extrêmes estimées sur chaque actif du portefeuille peuvent être interprétées comme des rentabilités que chaque actif enregistre sous des scénarios catastrophes. Par exemple, en considérant la valeur moyenne de la VaRmax du portefeuille de 19,3% au niveau de confiance de 99%, la contribution des facteurs de risque CAC 40, S&P 500, Pétrole et Blé à la réalisation de cette perte correspond respectivement aux valeurs des VaRmax (ou rentabilités) de -13,8%, -17,9%, -19,8% et -18%. Dans ce scénario catastrophe, le plus grand risque porte sur le Pétrole comparativement aux autres actifs du portefeuille. Ce constat sur la contribution des facteurs de risque dans la réalisation des pertes extrêmes est le même

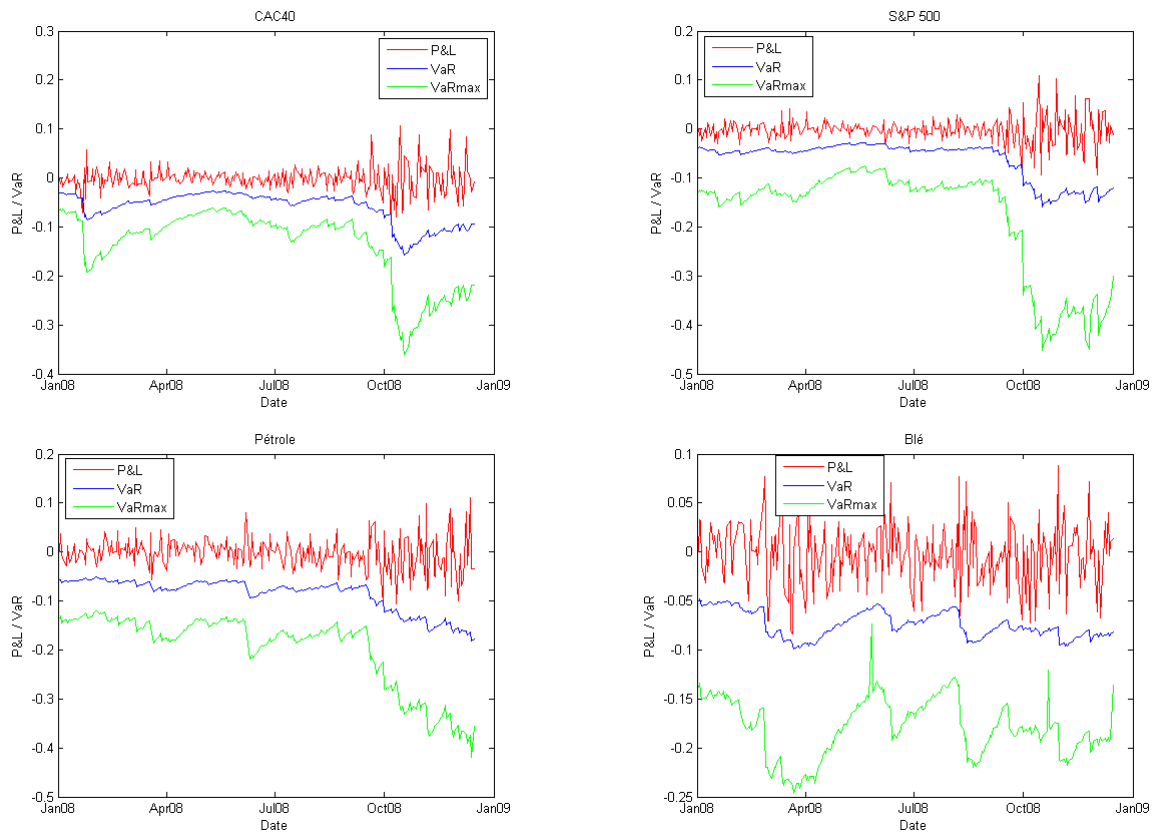
que dans la méthode de Studer mais dans des proportions différentes.

L'analyse des Graphiques 5.2 et 5.3 montre que cette nouvelle méthodologie de recherche de scénarios catastrophes basée sur la distribution de Pareto généralisée permet de couvrir le risque extrême enregistré sur le portefeuille d'étude durant la crise financière de 2008. Elle permet également, en estimant les pertes extrêmes sur le portefeuille à partir de celles estimées sur chaque actif, de déterminer la contribution de chaque actif au risque global du portefeuille.

	95%			99%			99,9%					
	Moyenne	Écart-type	Min	Max	Moyenne	Écart-type	Min	Max	Moyenne	Écart-type	Min	Max
CAC 40												
ξ	0,185	0,021	0,150	0,475	0,185	0,021	0,150	0,444	0,185	0,020	0,150	0,428
β	0,452	0,007	0,439	0,483	0,452	0,006	0,439	0,471	0,452	0,006	0,436	0,471
VC	106,173	1,730	103,062	111,087	106,173	1,730	103,062	111,087	106,173	1,730	103,062	111,087
VaR	-0,041	0,022	-0,106	-0,018	-0,060	0,032	-0,157	-0,027	-0,101	0,054	-0,262	-0,045
VaRmax	-0,082	0,044	-0,213	-0,036	-0,138	0,074	-0,359	-0,061	-0,307	0,167	-0,804	-0,131
S&P 500												
ξ	0,207	0,029	0,102	0,500	0,207	0,030	0,102	0,500	0,207	0,029	0,102	0,500
β	0,509	0,019	0,476	0,612	0,509	0,019	0,476	0,612	0,509	0,019	0,476	0,612
VC	143,203	7,299	131,209	177,659	143,203	7,299	131,209	177,659	143,203	7,299	131,209	177,659
VaR	-0,040	0,025	-0,103	-0,018	-0,062	0,039	-0,159	-0,028	-0,110	0,069	-0,281	-0,049
VaRmax	-0,093	0,058	-0,237	-0,040	-0,179	0,111	-0,452	-0,076	-0,493	0,310	-1,255	-0,202
Crude oil												
ξ	0,085	0,030	0,065	0,500	0,085	0,031	0,065	0,500	0,085	0,031	0,065	0,501
β	0,589	0,010	0,567	0,613	0,589	0,010	0,567	0,613	0,589	0,010	0,567	0,613
VC	151,777	3,253	144,793	159,805	151,777	3,253	144,793	159,805	151,777	3,253	144,793	159,805
VaR	-0,056	0,022	-0,119	-0,034	-0,086	0,034	-0,182	-0,052	-0,136	0,053	-0,285	-0,082
VaRmax	-0,120	0,047	-0,256	-0,073	-0,198	0,077	-0,419	-0,120	-0,410	0,158	-0,859	-0,250
Wheat												
ξ	-0,012	0,044	-0,042	0,439	-0,012	0,044	-0,042	0,443	-0,012	0,044	-0,042	0,456
β	0,506	0,017	0,468	0,529	0,506	0,017	0,468	0,529	0,506	0,017	0,468	0,529
VC	90,398	3,188	83,332	96,157	90,398	3,188	83,332	96,157	90,398	3,188	83,332	96,157
VaR	-0,053	0,010	-0,070	-0,034	-0,074	0,014	-0,099	-0,048	-0,105	0,019	-0,141	-0,069
VaRmax	-0,107	0,019	-0,144	-0,052	-0,180	0,030	-0,246	-0,073	-0,402	0,081	-0,581	-0,082
Portefeuille												
VaR	-0,062	0,029	-0,130	-0,033	-0,079	0,041	-0,169	-0,040	-0,106	0,062	-0,267	-0,050
VaRmax	-0,112	0,043	-0,216	-0,065	-0,193	0,076	-0,381	-0,105	-0,454	0,190	-0,929	-0,238

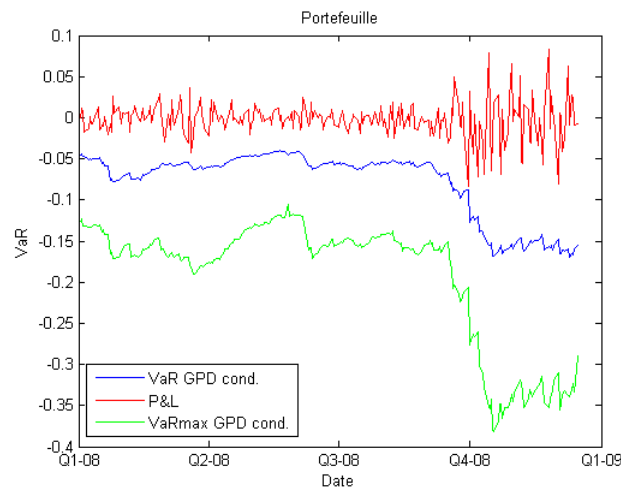
TAB. 5.12 – Résultats du calcul de la VaRmax par le modèle GPD

Les valeurs de la VaRmax sont estimées sur un historique de 5214 données journalières par actif pendant la période de janvier 2008 à décembre 2008. Les valeurs VaRmax moyennes, minimum et maximum peuvent être interprétées comme des rentabilités de chaque actif et déterminent comment chaque actif contribue à la réalisation des pertes extrêmes du portefeuille.



GRAPH. 5.2 – Comparaison VaR et VaRmax estimées sur chaque actif du portefeuille

P&L correspond aux pertes et profits. VaR et VaRmax sont des pertes potentielles déterminées sur un horizon d'un jour et au niveau de confiance de 99%.



GRAPH. 5.3 – **Comparaison VaR et VaRmax estimées sur le portefeuille**

P&L correspond aux pertes et profits. VaR et VaRmax sont des pertes potentielles déterminées sur un horizon d'un jour et au niveau de confiance de 99%.

5.5 Conclusion

Les méthodologies proposées dans ce chapitre ont permis de construire des scénarios hypothétiques afin de déterminer les pertes extrêmes que peut enregistrer un portefeuille de négociation. Premièrement, nous sommes partis des hypothèses de scénarios d'une baisse des marchés européens sur fond de crise de la dette publique et d'une crise au Moyen-Orient entraînant un choc sur le marché du pétrole. Les pertes extrêmes estimées sous ces deux scénarios hypothétiques comparativement au scénario de base ont montré que l'impact sur le portefeuille d'une baisse des marchés européens est plus élevé que celui d'une crise au Moyen-Orient. Cet impact sur le portefeuille d'étude est plus faible sous le scénario d'une crise au Moyen-Orient parce que le Pétrole n'évolue pas dans la même direction que les indices actions. Ce qui signifie que la sévérité d'un stress test peut être réduite sur un portefeuille si les facteurs de risque évoluent à contre sens pendant les périodes de crises économiques et financières.

Deuxièmement, nous montrons dans cette étude qu'il est possible avec le modèle de la distribution de Pareto généralisée de mesurer correctement les risques extrêmes. En effet, la méthodologie que nous proposons dans cette étude sur la recherche de scénarios

catastrophes s'est révélée plus fiable que certaines méthodes présentées jusqu'à présent dans la littérature sur les techniques de stress test. Cette nouvelle méthodologie a permis de déterminer les pertes extrêmes sur le portefeuille ainsi que la contribution de chaque facteur de risque à la réalisation de ces pertes extrêmes. Cette méthodologie peut être utilisée par les établissements financiers pour évaluer le risque extrême sur leurs portefeuilles financiers. Elle leur permet également de savoir dans quel contexte, ce risque extrême se réalise avec la contribution de chaque facteur de risque.

Chapitre 6

MESURE DU CAPITAL RÉGLEMENTAIRE SOUS BÂLE III

Suite à la crise financière et économique de 2007 et 2008, le Comité de Bâle sur la supervision bancaire a décidé de renforcer par un ensemble de règles l'accord de Bâle de 1996 concernant le risque de marché. En effet, la crise financière qui a commencé à la fin du premier semestre 2007 a entraîné d'énormes pertes dans les portefeuilles de négociation (actions, matières premières, taux de change, taux d'intérêt et les options associées à ces actifs) des établissements financiers. Le Comité de Bâle remarque que les pertes dans la plupart des portefeuilles des banques pendant la crise financière ont été significativement plus élevées que le capital réglementaire déterminé suivant les règles définies dans le pilier 1 au titre du risque de marché. En réponse à cette problématique, l'une des solutions du Comité de Bâle a été d'exiger des établissements financiers au titre du capital réglementaire le calcul du stress Value at Risk (sVaR). Le stress VaR est la perte potentielle mesurée en période de crise ou en période de mouvements extrêmes des facteurs de risque sur au moins douze mois continus d'observations. Ainsi, les établissements financiers doivent désormais calculer, en plus du calcul de la VaR, le stress VaR sur une période continue d'au moins douze mois d'observations de pertes significatives. Le Comité de Bâle vise également la réduction de la *procyclicité* du capital réglementaire et le dépassement du capital réglementaire pendant les périodes de crise. La *procyclicité* du capital réglementaire est défini comme une baisse du montant du capital réglementaire pendant

les périodes de crise qui entraîne à son tour une baisse du crédit à l'économie.

L'objectif de ce chapitre est d'évaluer l'impact des modifications apportées à l'accord de Bâle II sur la mesure du risque de marché et montrer la manière dont ces modifications doivent être prises en compte dans la détermination du capital réglementaire. Ainsi, les pertes potentielles sont évaluées sur le portefeuille d'étude par la nouvelle mesure de stress VaR. La première section présente les principes réglementaires de la mesure du stress VaR. La méthodologie de calcul du capital réglementaire selon l'accord de Bâle III et son application au portefeuille d'étude sont présentées respectivement dans les deuxième et troisième sections.

6.1 Mesure du stress VaR

Le Comité de Bâle a décidé au mois de mars 2008 d'augmenter l'exigence du capital réglementaire et d'améliorer les modèles internes de risque de marché. En conséquence, il a été exigé des établissements financiers de calculer, en plus de la VaR, le stress Value at Risk. Cette nouvelle mesure est la VaR qui serait calculée sur le portefeuille de négociation d'un établissement financier si les facteurs de risque étaient exposés à une crise financière et/ou économique.

La mesure du stress VaR doit respecter un certain nombre de règles définies dans l'accord de Bâle III. Ces règles concernent principalement les paramètres du stress VaR et les données historiques sur lesquelles le stress VaR doit être calculé.

6.1.1 Paramètres du stress VaR

Le calcul de la VaR est basé sur un certain nombre de paramètres : le niveau de confiance, la période de détention et la distribution de probabilité. Les deux premiers paramètres sont fixés par les autorités de contrôle bancaire à 99% pour le niveau de confiance et 10 jours ouvrés pour la période de détention. Les paramètres du stress VaR sont identiques à ceux de la VaR. En d'autres termes, le stress VaR est une mesure de perte potentielle maximale sur un horizon de détention de 10 jours ouvrés avec un niveau de confiance de 99%. Le stress VaR sur la période de détention de 10 jours ouvrés est obtenu

en multipliant le stress VaR calculé sur données journalières par $\sqrt{10}$ en appliquant le principe de la racine carrée du temps. Il faut cependant noter que pour les établissements financiers qui utilisent cette approche, le Comité de Bâle exige une justification périodique de ladite approche auprès des autorités de contrôle bancaire.

Pour le troisième paramètre qui est la distribution des facteurs de risque, les établissements financiers sont libres dans leur choix. Le Comité de Bâle ne prescrit aucune technique de mesure de stress VaR. Les établissements financiers peuvent choisir les techniques de mesure de stress VaR qui leur paraissent pertinentes et adaptées à leurs portefeuilles. Plusieurs techniques de mesure de risque de marché existent aujourd'hui à commencer par les techniques traditionnelles comme la méthode de Variance-Covariance basée sur la loi normale, la méthode de Simulation Historique ou la méthode de simulation de Monte Carlo mais aussi de nouvelles techniques de mesure comme la théorie des valeurs extrêmes.

6.1.2 Données réglementaires pour le calcul du stress VaR

Les données à utiliser pour le calcul du stress VaR doivent être des données historiques d'au moins 12 mois d'une période de crise financière significative appropriée au portefeuille de l'établissement financier. Le choix de la période doit être approuvé par les autorités de contrôle bancaire. La période des 12 mois relative aux pertes significatives de 2007 et 2008 est considérée par le Comité de Bâle comme un bon exemple. Elle reflète une période de stress pour de nombreux portefeuilles bancaires. D'autres périodes de stress plus adaptées aux portefeuilles des établissements financiers peuvent être considérées.

Les établissements financiers peuvent considérer des données antithétiques c'est-à-dire des données obtenues par l'application d'une amplitude de variation historique à la hausse ou à la baisse sans tenir compte du sens de la variation. Par exemple, si un indice action a enregistré une forte variation à la hausse, l'amplitude de cette variation peut être appliquée pour augmenter ou diminuer le cours de l'indice. Le comité de Bâle souligne que la considération des données antithétiques est particulièrement pertinente pour un portefeuille bancaire en hausse pendant une période de crise. En effet, ces données antithétiques permettent d'évaluer le risque adverse du portefeuille. Les établissements financiers peuvent également appliquer des volatilités absolues plutôt que des volatilités

relatives pour réaliser un stress VaR approprié.

Dans la spécification des facteurs de risque, bien que les établissements financiers aient le libre choix, ils doivent s'assurer que les facteurs de risque choisis captent suffisamment les risques inhérents à leurs portefeuilles. Pour cela, les facteurs de risque qui sont pertinents et utilisés dans la valorisation des portefeuilles doivent être inclus dans la mesure de la Value at Risk. Tout facteur de risque utilisé dans la valorisation d'un portefeuille et qui n'intervient pas dans la mesure de la VaR doit être justifié par l'établissement financier. La corrélation entre les différents facteurs de risque doit également être prise en compte.

Parmi les principaux facteurs de risque à spécifier, il y a les taux d'intérêt, les taux de change, les actions et les matières premières auxquels s'ajoutent les produits dérivés associés à ces facteurs de risque. Pour le taux d'intérêt, un ensemble de facteurs de risque doit correspondre au taux d'intérêt dans chacune des devises dans laquelle l'établissement financier est exposé. Pour le risque de taux de change, il doit y avoir un facteur correspondant au taux de change entre la monnaie locale et chacune des devises dans laquelle l'établissement financier détient une position importante. Les indices nationaux ou sectoriels de marché action et les actions individuelles peuvent être retenus comme facteurs de risque en fonction de la sophistication de la mesure de risque souhaitée. Il faut noter qu'il est possible de calculer l'équivalent Bêta³⁶ d'une action individuelle à partir d'un indice de marché ou d'un indice sectoriel pour déterminer le risque inhérent à une action individuelle. Pour les matières premières, le choix des facteurs de risque dépend de la position détenue par l'établissement financier. Pour une position très limitée, un seul facteur de risque pour chaque type de risque peut être choisi. Dans la mesure où la position agrégée dans une sous-catégorie de matières premières est faible, il est possible d'utiliser un indice sectoriel comme facteur de risque. Par exemple, un indice sectoriel des métaux précieux peut servir de facteur de risque pour tout type de métaux précieux. Par contre, pour les établissements financiers très actifs sur les matières premières, ils doivent prendre en compte le *convenience yield*³⁷ entre les positions des produits dérivés comme

36. L'équivalent Bêta est calculé à partir du modèle de marché (le modèle CAPM par exemple) en régressant la rentabilité d'une action ou d'un indice sectoriel sur le taux sans risque et la rentabilité de l'indice de marché.

37. le *convenience yield* est le bénéfice généré du fait de la détention d'une matière première. Il est affecté par les conditions du marché et le coût de stockage de la matière première.

les contrats à terme et les contrats d'échange, et les positions au comptant sur matières premières.

6.2 Méthode de calcul du capital réglementaire

Le capital réglementaire est défini par le régulateur des établissements financiers et correspond aux fonds propres minimums exigés par les autorités de contrôle bancaire. Dans le nouvel accord de Bâle III, l'exigence de capital réglementaire pour les établissements financiers équivaut à la somme :

- du plus élevé des deux montants de la VaR totale du jour précédent et de la moyenne des VaR au cours des soixante jours ouvrables précédents, à laquelle est appliqué un coefficient multiplicateur ;
- et du plus élevé des deux montants du stress VaR total du jour précédent et de la moyenne du stress VaR au cours des soixante jours ouvrables précédents, à laquelle est appliqué un coefficient multiplicateur.

Ainsi, le capital réglementaire noté CR est calculé par la formule suivante :

$$CR_t = \max \left\{ VaR_{t-1}; m_c \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i} \right\} + \max \left\{ sVaR_{t-1}; m_s \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} sVaR_{t-i} \right\} \quad (6.1)$$

Où VaR_{t-i} et $sVaR_{t-i}$ correspondent respectivement à la VaR et au stress VaR sur une période de détention de 10 jours et à un niveau de confiance de 99%.

Le coefficient multiplicateur noté m_c ou m_s est attribué à chaque établissement par la Commission bancaire. Il est déterminé en fonction de la qualité du système de gestion des risques, avec un minimum de 3, et majoré, le cas échéant, d'un facteur complémentaire variant de 0 à 1 conformément au Tableau 6.1. Le facteur complémentaire est déter-

miné en fonction du nombre de dépassements mis en évidence par le contrôle ex post. Le contrôle ex post est appliqué uniquement sur la VaR et non sur le stress VaR. Le facteur complémentaire est nul si les résultats du contrôle ex post sont satisfaisants et si l'établissement financier respecte tous les critères qualitatifs relatifs à la mesure du risque marché.

Nombre de dépassements	Facteur complémentaire
Moins de 5	0
5	0,4
6	0,5
7	0,65
8	0,75
9	0,85
10 ou plus	1

TAB. 6.1 – **Facteurs complémentaires**

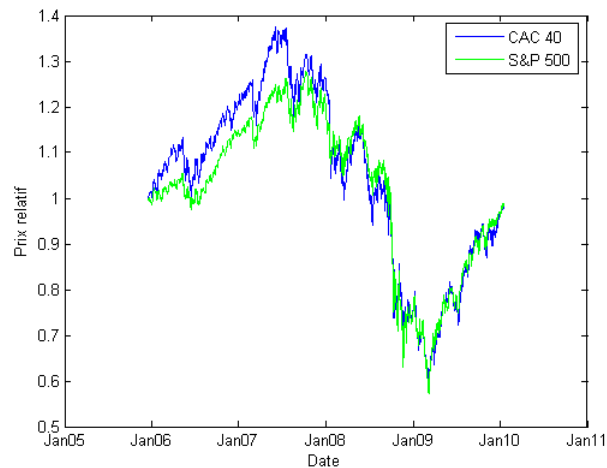
Au cas où de nombreux dépassements révèlent que le modèle n'est pas suffisamment précis, la Commission bancaire peut ne plus reconnaître le modèle aux fins du calcul des exigences en fonds propres ou peut imposer des mesures appropriées afin qu'il soit rapidement amélioré. Les banques ont l'obligation d'informer dans les cinq jours ouvrables, la Commission bancaire, des dépassements révélés par les contrôles ex post qui impliqueraient un relèvement du facteur complémentaire.

6.3 Application au portefeuille d'étude

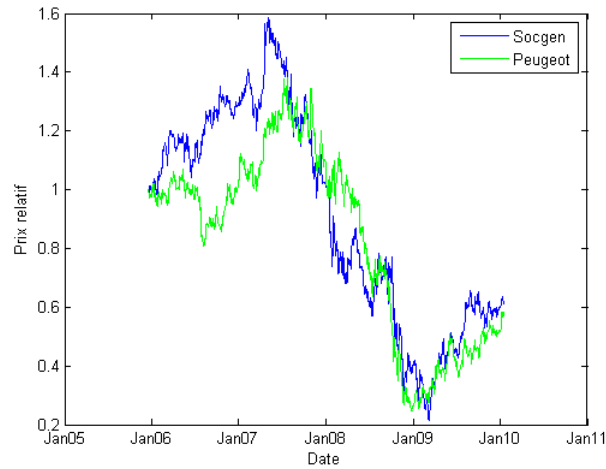
Compte tenu des modifications apportées à l'accord de Bâle II, nous évaluons dans cette section l'impact des nouvelles mesures (accord de Bâle III) sur la mesure du capital réglementaire. Pour évaluer cet impact, nous utilisons le portefeuille d'étude composé des actions individuelles (Soegen, Peugeot), des indices actions (CAC 40 et S&P 500) et des matières premières (Pétrole et Blé). Comme il a été recommandé par le Comité de Bâle, il est d'abord nécessaire de définir les facteurs de risque à retenir et la période de crise affectant les facteurs de risque afin de déterminer le stress VaR. Ainsi, nous considérons tous les facteurs de risque composant le portefeuille d'étude pour déterminer le stress

VaR sur chacun des actifs. Pour le portefeuille global, le stress VaR est déterminé sur les indices actions et les matières premières, car les actions individuelles sont déjà comprises dans l'indice CAC 40.

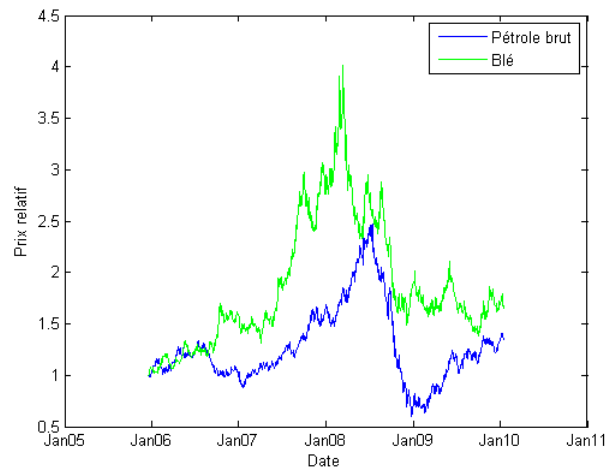
Pour le choix de la période de crise, nous suivons la recommandation du Comité de Bâle qui propose la période de crise financière et économique de 2007 et 2008. Cependant, nous vérifions bien que pendant cette période de crise, les facteurs de risque retenus dans le cadre de cette étude enregistrent de fortes baisses. La vérification est effectuée sur l'évolution du cours des facteurs de risque sur le Graphique 6.1 pour les indices actions, sur le Graphique 6.2 pour les actions individuelles et sur le Graphique 6.3 pour les matières premières.



GRAPH. 6.1 – Évolution du cours des indices actions



GRAPH. 6.2 – Évolution du cours des actions individuelles



GRAPH. 6.3 – Évolution du cours des matières premières

L'analyse de l'évolution des cours des facteurs de risque sur la période de janvier 2006 à décembre 2009 montre clairement que tous les facteurs du portefeuille d'étude ont enregistré une forte baisse de leur cours de juin 2007 à décembre 2008 pour les indices actions et les actions individuelles, de janvier 2008 à décembre 2008 pour le Blé et de juin 2008 à décembre 2008 pour le pétrole. Chacune de ces périodes par type de facteur de risque est bien comprise dans la période de crise de 2007 et 2008. Nous retenons cette période de crise élargie à 2006 pour avoir un historique suffisant afin d'obtenir des résultats robustes du fait de l'utilisation du modèle GARCH et de la théorie des valeurs

extrêmes. En effet, l'utilisation de ces deux méthodologies exige des données historiques assez longues pour obtenir des résultats escomptés. Ainsi, nous utilisons un historique de trois ans de données journalières pour calculer le stress VaR sur l'année 2009.

6.3.1 Calcul du stress VaR

Le stress VaR est par définition la VaR calculée sur une période de crise ou sur des variations extrêmes des facteurs de risque sur une position de marché à un instant donné. Le niveau de confiance de 99% et la période de détention de 10 jours comme paramètres du stress VaR sont fixés par l'accord de Bâle III. Cependant, les établissements financiers sont libres de choisir les techniques de mesure ou plus précisément les distributions de rentabilités qui caractérisent les facteurs de risque pour calculer le stress VaR. C'est pourquoi nous déterminons dans cette section le stress VaR basé sur la distribution empirique (FHS), sur la distribution de la loi normale (GARCH) et sur la distribution de Pareto généralisée (GPD).

Les résultats du calcul du stress VaR sur l'année 2009 sont présentés dans le Tableau 6.2. Les valeurs de ce tableau correspondent à la VaR et au stress VaR estimés sur une période de détention d'un jour et à un niveau de confiance de 99%. Il faut noter que les valeurs de VaR et de stress VaR sur 10 jours, comme le recommande le Comité de Bâle, sont obtenues en multipliant les mesures de VaR et de stress VaR par la racine carrée de 10.

L'analyse des résultats dans le Tableau 6.2 montre que le stress VaR calculé par la technique de mesure basée sur la distribution de Pareto généralisée est supérieur au stress VaR estimé par les techniques traditionnelles de mesure de risque (FHS et GARCH). Parmi les deux techniques traditionnelles de mesure de risque, celle basée sur la loi normale estime un stress VaR supérieur ou égal au stress VaR déterminé par la méthode FHS sur les indices actions CAC 40 et S&P 500 et sur l'action Socgen. Cependant, les montants du stress VaR du modèle GARCH sont inférieurs à ceux de la méthode FHS estimés sur l'action Peugeot, sur le Blé, sur le Pétrole et sur le portefeuille global. Ces résultats peuvent être vérifiés sur le Graphique 6.4 pour les indices actions, sur le Graphique 6.5 pour les actions individuelles, sur le Graphique 6.6 pour les matières premières et sur le

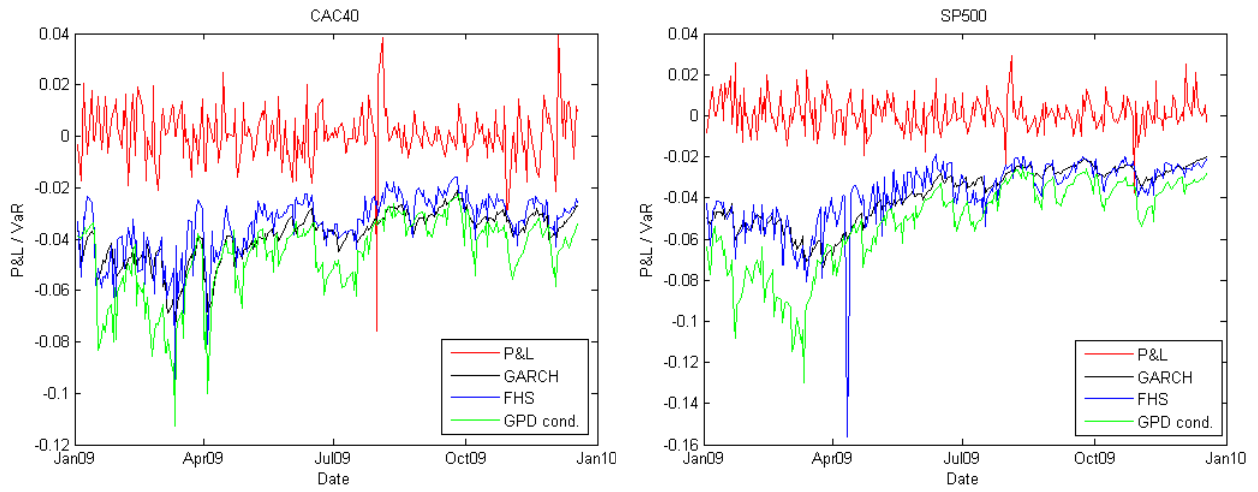
Graphique 6.7 pour le portefeuille global.

L'examen du Tableau 6.2 montre également pour la mesure de la VaR que la technique de mesure GPD estime des valeurs de VaR supérieures à celles estimées par les techniques traditionnelles de mesure de risque. Nous pouvons aussi observer qu'en moyenne et à un centième près, les valeurs de la VaR sont identiques à celles du stress VaR pour les trois techniques de mesure de risque. Ce qui signifie que la détermination du capital réglementaire se basera désormais sur au moins deux fois la VaR.

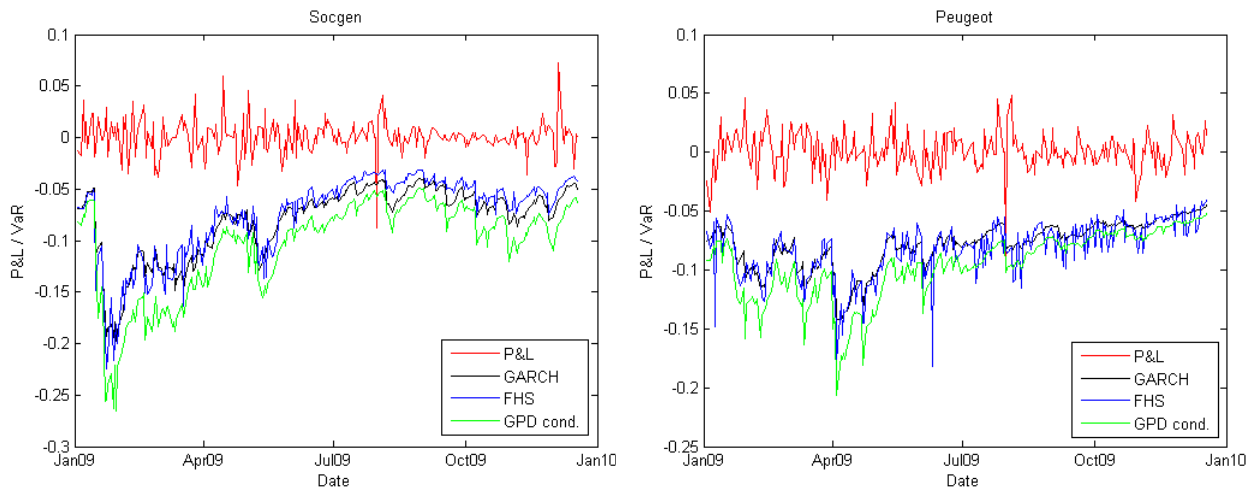
	VaR (1, 99%)			Stress VaR (1, 99%)				
	Moyenne	Écart-type	Min	Max	Moyenne	Écart-type	Min	Max
GPD cond.								
CAC 40	-0,046	0,011	-0,082	-0,026	-0,047	0,016	-0,113	-0,022
Socgen	-0,106	0,043	-0,223	-0,052	-0,105	0,046	-0,265	-0,049
Peugeot	-0,093	0,024	-0,161	-0,054	-0,096	0,029	-0,206	-0,052
S&P 500	-0,050	0,020	-0,092	-0,026	-0,052	0,022	-0,130	-0,025
Pétrole	-0,098	0,036	-0,197	-0,052	-0,083	0,029	-0,166	-0,051
Blé	-0,063	0,009	-0,086	-0,045	-0,069	0,009	-0,092	-0,052
Portefeuille	-0,062	0,018	-0,105	-0,039	-0,056	0,016	-0,107	-0,033
FHS								
CAC 40	-0,035	0,011	-0,092	-0,016	-0,035	0,012	-0,096	-0,016
Socgen	-0,099	0,050	-0,217	-0,040	-0,076	0,040	-0,225	-0,031
Peugeot	-0,059	0,015	-0,104	-0,035	-0,083	0,024	-0,182	-0,041
S&P 500	-0,043	0,017	-0,091	-0,021	-0,038	0,016	-0,156	-0,019
Pétrole	-0,086	0,036	-0,184	-0,036	-0,072	0,023	-0,144	-0,042
Blé	-0,053	0,010	-0,132	-0,036	-0,057	0,011	-0,088	-0,030
Portefeuille	-0,048	0,018	-0,082	-0,021	-0,037	0,010	-0,076	-0,021
GARCH								
CAC 40	-0,038	0,009	-0,064	-0,022	-0,039	0,010	-0,075	-0,021
Socgen	-0,080	0,032	-0,175	-0,042	-0,081	0,035	-0,198	-0,040
Peugeot	-0,074	0,019	-0,126	-0,042	-0,078	0,020	-0,143	-0,045
S&P 500	-0,040	0,015	-0,070	-0,021	-0,039	0,014	-0,075	-0,020
Pétrole	-0,073	0,027	-0,148	-0,039	-0,072	0,027	-0,152	-0,040
Blé	-0,054	0,008	-0,080	-0,041	-0,056	0,008	-0,082	-0,044
Portefeuille	-0,030	0,008	-0,048	-0,020	-0,035	0,008	-0,053	-0,024

TAB. 6.2 – Résultats du calcul de la VaR et du stress VaR

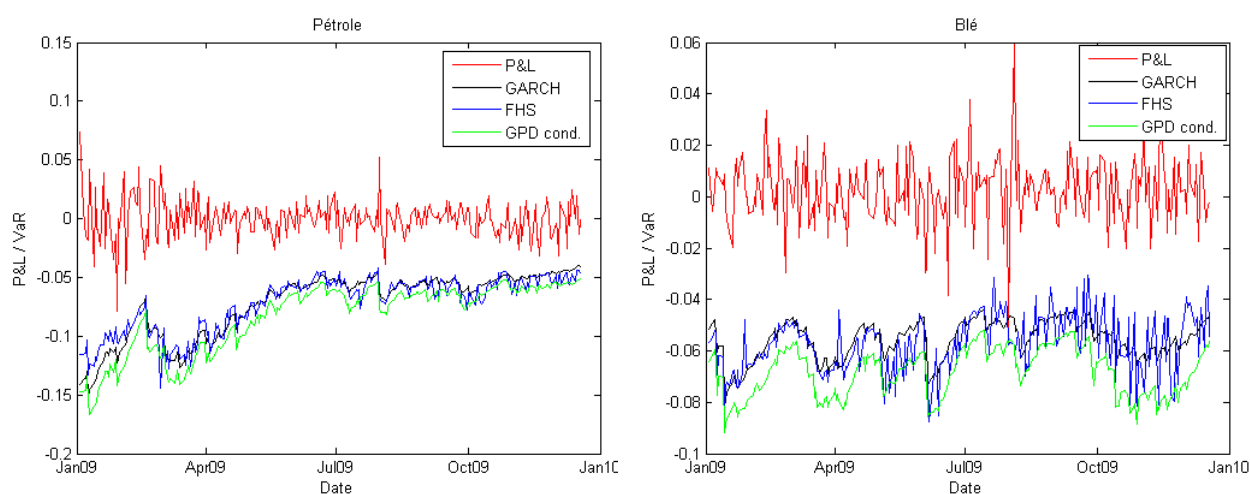
Les valeurs de la VaR et du stress VaR sont estimées respectivement sur des historiques de janvier 1988 à décembre 2008 et de janvier 2006 à décembre 2008 pour une période d'estimation de janvier 2009 à décembre 2009.



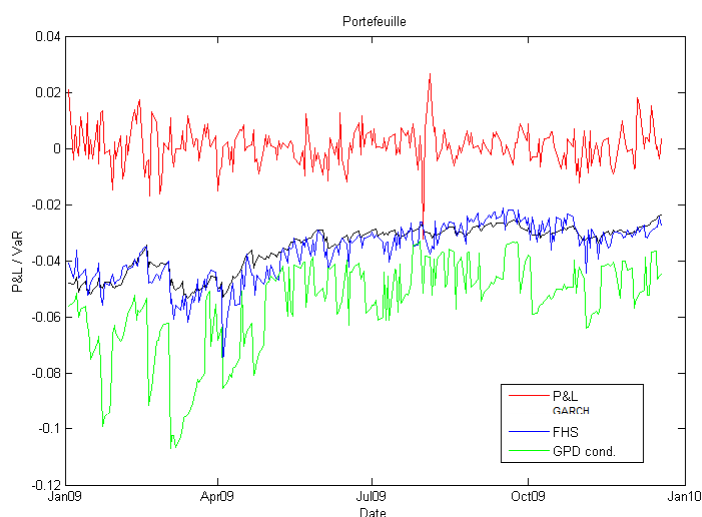
GRAPH. 6.4 – Stress VaR par modèle de risque sur les indices actions



GRAPH. 6.5 – Stress VaR par modèle de risque sur les actions individuelles



GRAPH. 6.6 – Stress VaR par modèle de risque sur les matières premières



GRAPH. 6.7 – Stress VaR par modèle de risque sur le portefeuille

L'examen du Graphique 6.4 au Graphique 6.7 montre que le stress VaR ne suit pas nécessairement l'évolution des facteurs de risque. En effet, la déconnexion de l'évolution des facteurs de risque et du stress VaR s'explique par le fait que le stress VaR est déterminé sur une période de crise où la volatilité est très élevée comparativement à la période d'estimation de 2009 qui correspond à une période où les facteurs de risque sont moins volatiles. L'objectif dans le calcul de ce type de VaR est simplement de prendre en compte les risques extrêmes enregistrés par les facteurs de risque dans le passé.

Le stress VaR est un des éléments du capital réglementaire comme défini dans l'accord de Bâle III. Il doit être additionné à la VaR pour former le capital réglementaire.

6.3.2 Détermination du capital réglementaire

La détermination du capital réglementaire exige, après la détermination de la VaR, un contrôle ex post sur la précision de l'évaluation du risque par les techniques de mesure de risque. Selon la procédure de contrôle ex post de l'accord de Bâle II, les établissements financiers doivent s'assurer que le degré de couverture observé correspond au niveau de confiance de 99%. Le contrôle ex post réglementaire consiste à déterminer le nombre d'exceptions ou de dépassement de la VaR par les pertes réelles. Le facteur complémentaire qui varie de 0 à 1 est déterminé en fonction du nombre de dépassement de la VaR (cf. Tableau 6.1).

Les contrôles ex post sont réalisés à partir des pertes et profits réels ou hypothétiques. L'approche de contrôle ex post basée sur les pertes et profits réels fournit une comparaison, pour chaque jour ouvrable, entre la mesure de la VaR sur un jour sur la base des positions en fin de journée et la variation sur un jour de la valeur du portefeuille constatée à la fin du jour ouvrable suivant. L'approche des pertes et profits hypothétiques se fonde sur une comparaison entre la mesure de la VaR et l'écart entre la valeur du portefeuille en fin de journée et sa valeur, à positions inchangées, à la fin de la journée suivante. Dans le cadre de cette étude, nous utilisons l'approche des pertes et profits hypothétiques. Rappelons que les autorités de contrôle bancaire peuvent décider qu'un établissement financier effectue ses contrôles ex post uniquement sur une base réelle ou sur une base hypothétique ou à la fois sur une base réelle et hypothétique.

Les résultats du contrôle ex post effectué sur les différents actifs financiers composant le portefeuille d'étude et sur le portefeuille global sont présentés dans le Tableau 6.3. L'examen de ces résultats montre qu'au niveau de confiance de 95%, les techniques traditionnelles de mesure de risque (FHS et GARCH), de manière générale, sous-estiment fortement le risque sur les actifs pris individuellement mais aussi sur le portefeuille global, car nous nous attendons à un dépassement de 12,5 c'est-à-dire $5\% \times 250$. Contrairement aux techniques traditionnelles de mesure de risque, celle basée sur la loi GPD couvre

mieux le risque mais surestime fortement le risque sur le portefeuille global. Cette analyse est également valable pour les niveaux de confiance de 99% et 99,9%.

Dépassement VaR	CAC 40	Socgen	Peugeot	S&P 500	Pétrole brut	Blé	Portefeuille
Prévu : 12,5 (95%)							
GPD cond.	12	7	7	11	5	8	0
FHS	23	14	24	17	14	16	16
GARCH	17	9	15	14	16	14	25
Prévu : 2,5 (99%)							
GPD cond.	0	1	0	0	0	3	0
FHS	12	3	11	1	1	6	0
GARCH	7	5	3	2	4	4	12
Prévu : 0,25 (99,9%)							
GPD cond.	0	0	0	0	0	1	0
FHS	2	0	7	0	0	1	0
GARCH	0	1	0	0	0	2	4

TAB. 6.3 – Nombre de dépassements de la VaR de janvier 2009 à décembre 2009

En regardant en détail le nombre d'exceptions ou de dépassements au niveau de confiance de 99% qui intéresse particulièrement le cadre réglementaire, nous pouvons déterminer le facteur complémentaire suivant les règles de Bâle II (cf. Tableau 6.1). Le facteur complémentaire intervient dans le calcul du capital réglementaire une fois que le nombre d'exceptions dépasse le seuil 4. En effet, ce seuil est le nombre d'exceptions dont le dépassement entraîne une pénalisation de la technique de mesure de risque par le facteur complémentaire.

La technique de mesure basée sur la loi GPD n'enregistre pas d'exceptions qui dépassent le seuil 4. Le maximum d'exceptions que la technique de mesure GPD enregistre est de 3 constaté sur le Blé. Ainsi, la moyenne de la VaR sur 60 jours doit être multipliée par le facteur multiplicateur de base qui est de 3. Suivant les principes de Bâle II, la mesure de la VaR par la distribution de Pareto généralisée est fiable car le nombre d'exceptions est inférieur ou égal à 2,5 (excepté sur le Blé) au niveau de confiance de 99%. La technique de mesure FHS est pénalisée par le facteur complémentaire de 1 sur le CAC 40 et sur Peugeot et de 0,5 sur le Blé. Cette pénalité est due au dépassement du seuil de 4 exceptions sur 250 jours. Quant à la technique de mesure de risque basée sur la loi normale, elle est pénalisée par un facteur complémentaire de 0,65 sur le CAC 40, de 0,4 sur Socgen et de 1 sur le portefeuille global. Suivant les valeurs de ces facteurs complémentaires, la technique de mesure de risque par la loi normale est moins pénalisée

que celle basée sur la méthode FHS. Ces facteurs complémentaires doivent être ajoutés au facteur multiplicateur 3 pour avoir le coefficient multiplicateur m_c et m_s (cf. Tableau 6.4) servant à multiplier la moyenne de la VaR sur 60 jours comme indiqué dans l'équation 6.1 pour la détermination du capital réglementaire.

	CAC 40	Socgen	Peugeot	S&P 500	Pétrole brut	Blé	Portefeuille
GPD cond.	3	3	3	3	3	3	3
FHS	4	3	4	3	3	3,5	3
GARCH.	3,65	3,4	3	3	3	3	4

TAB. 6.4 – **Coefficients multiplicateurs du contrôle ex post de l'accord de Bâle**

La détermination du capital réglementaire est effectuée en calculant la somme de la valeur maximum entre la VaR du jour précédent et la moyenne de la VaR sur les soixante jours précédents, multipliée par un coefficient multiplicateur ; et la valeur maximum entre le stress VaR du jour précédent et la moyenne du stress VaR sur les soixante jours précédents, multipliée par un coefficient multiplicateur. Les coefficients multiplicateurs déterminés sur le portefeuille d'étude sont présentés dans le Tableau 6.4.

Compte tenu du fait qu'il y a une moyenne de la VaR et du stress VaR à calculer, le capital réglementaire est déterminé sur les 190 derniers jours de l'année 2009. La première moyenne de VaR et de stress VaR pour le soixante-et-unième jour est déterminée sur les soixante premières valeurs de VaR et de stress VaR. Ce calcul s'effectue de façon glissante d'un jour à l'autre jusqu'au deux cent cinquantième jour de l'année 2009. Ensuite, à chaque date, la valeur maximum entre la VaR (stress VaR) et la moyenne de la VaR (moyenne de sVaR) est considérée comme capital réglementaire au titre de la VaR (du stress VaR). Les résultats de ce calcul sont présentés dans le Tableau 6.5 où CR VaR et CR sVaR correspondent respectivement au capital réglementaire déterminé par le maximum de la VaR et au capital réglementaire déterminé par le maximum du stress VaR.

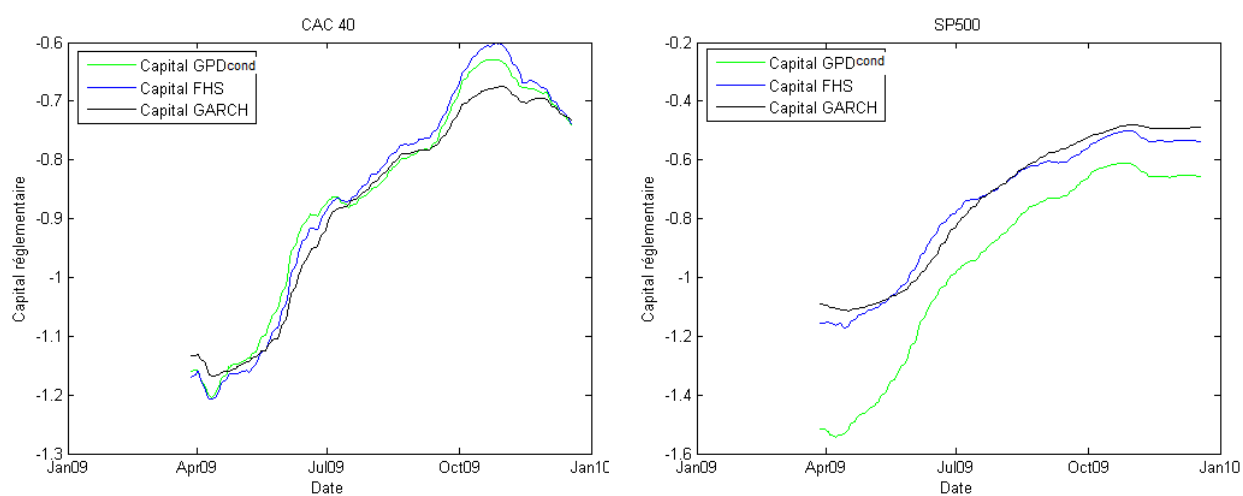
L'examen du Tableau 6.5 laisse observer des montants de capital réglementaire estimés par la technique de mesure GPD supérieurs aux montants estimés par les techniques traditionnelles de mesure de risque. La hiérarchie entre les deux techniques traditionnelles de mesure de risque dépend du type d'actifs financiers. Le capital réglementaire estimé sur la majorité des actifs par la technique de mesure basée sur la loi normale est inférieur à celui

estimé par la technique de mesure FHS. Le capital réglementaire estimé par la technique de mesure GPD reste élevé par rapport à celui estimé par les techniques traditionnelles de mesure de risque. Cet écart s'explique d'une part par la forte sous-estimation du risque par les techniques traditionnelles sur certains actifs (CAC 40, Peugeot et Portefeuille global) et d'autre part par la faiblesse du facteur complémentaire. En effet, le facteur complémentaire qui détermine la pénalité varie de 0 à 1 en fonction du nombre d'exceptions au-delà du seuil 4. Le modèle GPD est fiable mais estime du capital réglementaire très élevé par rapport aux modèles internes de mesure de risque (FHS, GARCH). Cela peut conduire à un arbitrage de la part des établissements financiers. Pour éviter cet arbitrage en faveur des modèles non fiables qui permettent de bloquer moins de fonds propres réglementaires, la solution est de revoir les valeurs du facteur complémentaire. Ainsi, les modèles de risque qui enregistrent plus de dépassements seront plus pénalisés que ceux qui n'enregistrent pas de dépassements.

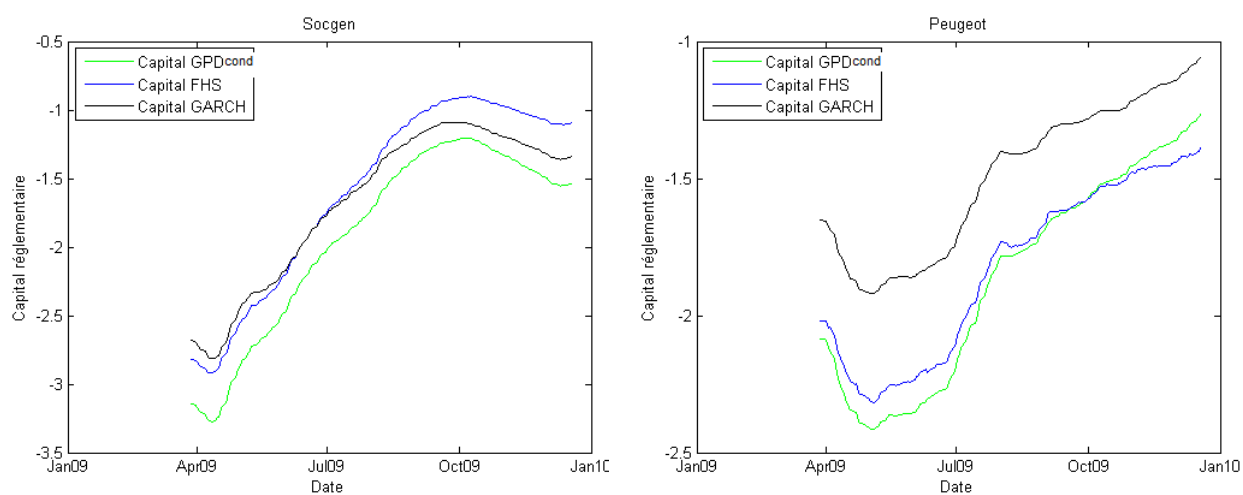
Les actions individuelles (Socgen et Peugeot) et le pétrole sont les actifs financiers qui demandent le plus de capital réglementaire. Cela s'explique par le fait que la volatilité de ces actifs financiers est très élevée comparativement aux autres actifs financiers. Il faut aussi noter que les actions individuelles et le pétrole ne bénéficient pas de la réduction du risque par l'effet de la diversification comme on peut le constater sur les indices actions et sur le portefeuille global.

	CR VaR (€)				CR sVaR (€)			
	Moyenne	Écart-type	Max	Min	Moyenne	Écart-type	Max	Min
GPD cond.								
CAC 40	0,425	0,085	0,573	0,316	0,436	0,096	0,631	0,312
Socgen	0,963	0,346	1,631	0,598	0,947	0,315	1,645	0,607
Peugeot	0,914	0,173	1,167	0,642	0,950	0,208	1,250	0,624
S&P 500	0,462	0,157	0,749	0,292	0,479	0,161	0,794	0,317
Pétrole	0,901	0,256	1,432	0,641	0,763	0,199	1,191	0,569
Blé	0,582	0,050	0,648	0,495	0,627	0,041	0,693	0,558
Portefeuille	0,566	0,139	0,836	0,438	0,519	0,104	0,718	0,413
FHS								
CAC 40	0,432	0,097	0,589	0,293	0,426	0,099	0,620	0,307
Socgen	0,909	0,400	1,666	0,509	0,678	0,272	1,261	0,387
Peugeot	0,747	0,151	0,978	0,578	1,082	0,168	1,338	0,781
S&P 500	0,399	0,132	0,637	0,251	0,351	0,098	0,540	0,249
Pétrole	0,787	0,247	1,296	0,519	0,662	0,160	0,989	0,524
Blé	0,577	0,047	0,636	0,476	0,627	0,045	0,696	0,546
Portefeuille	0,446	0,145	0,656	0,275	0,344	0,077	0,461	0,253
GARCH								
CAC 40	0,430	0,084	0,565	0,330	0,447	0,090	0,604	0,344
Socgen	0,831	0,281	1,387	0,541	0,836	0,275	1,431	0,547
Peugeot	0,724	0,140	0,935	0,507	0,771	0,138	0,984	0,550
S&P 500	0,372	0,123	0,561	0,235	0,367	0,117	0,557	0,244
Pétrole	0,672	0,191	1,073	0,481	0,659	0,182	1,049	0,481
Blé	0,501	0,043	0,578	0,434	0,520	0,030	0,581	0,467
Portefeuille	0,369	0,081	0,521	0,289	0,438	0,083	0,588	0,362

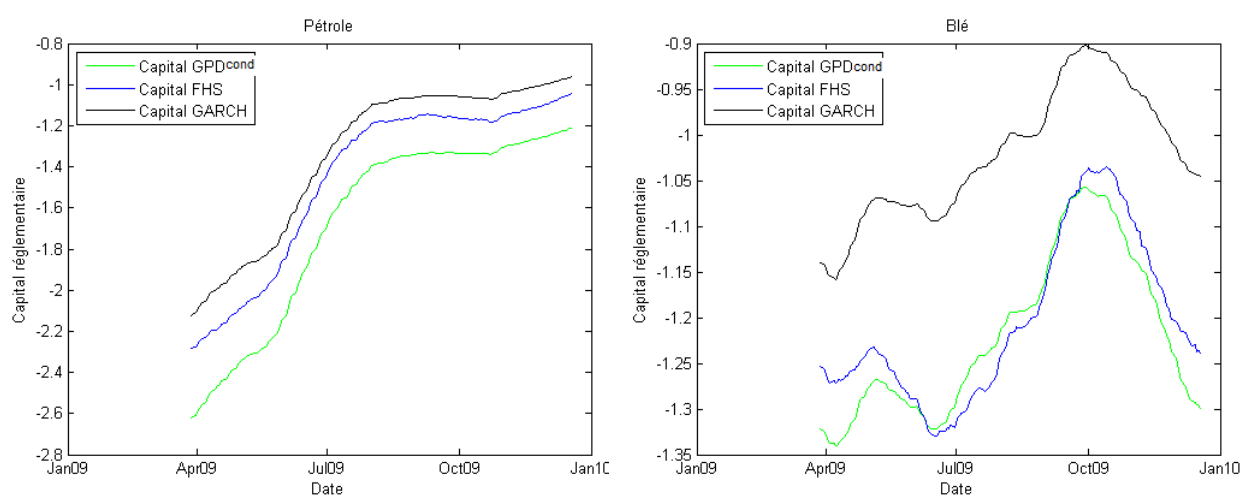
TAB. 6.5 – **Calcul capital réglementaire à partir de la VaR et du stress VaR**
 Capital réglementaire calculé sur un investissement de 1 Euro sur chaque actif et sur le portefeuille. Les valeurs de la VaR et du stress VaR sont estimées respectivement sur des historiques de janvier 1988 à décembre 2008 et de janvier 2006 à décembre 2008 pour une période d'estimation de janvier 2009 à décembre 2009.



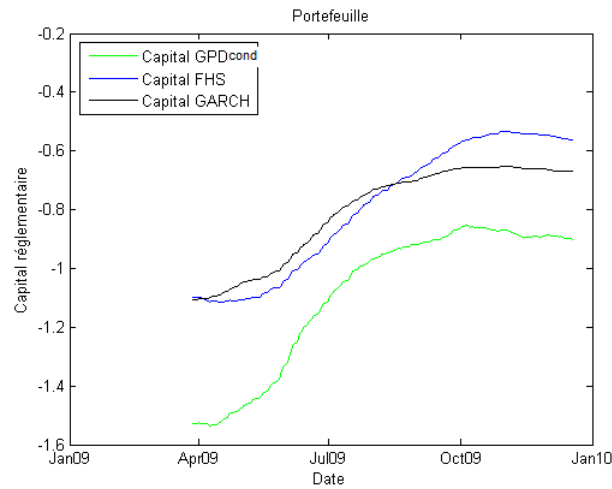
GRAPH. 6.8 – Capital réglementaire calculé sur les indices actions



GRAPH. 6.9 – Capital réglementaire calculé sur les actions individuelles



GRAPH. 6.10 – Capital réglementaire calculé sur les matières premières



GRAPH. 6.11 – Capital réglementaire calculé sur le portefeuille

	Méthode Bâle III				Méthode proposée			
	CR VaR + CR sVaR (€)				Max(CR VaR ; CR sVaR) (€)			
	Moyenne	Écart-type	Max	Min	Moyenne	Écart-type	Max	Min
GPD cond.								
CAC 40	0,861	0,181	1,205	0,628	0,436	0,096	0,631	0,316
Socgen	1,909	0,661	3,276	1,205	0,963	0,346	1,645	0,607
Peugeot	1,864	0,381	2,417	1,267	0,950	0,208	1,250	0,642
S&P 500	0,941	0,318	1,544	0,609	0,479	0,161	0,794	0,317
Pétrole	1,664	0,455	2,624	1,210	0,901	0,256	1,432	0,641
Blé	1,210	0,091	1,342	1,054	0,627	0,050	0,693	0,558
Portefeuille	1,085	0,243	1,554	0,851	0,566	0,139	0,836	0,438
FHS								
CAC 40	0,857	0,196	1,209	0,600	0,432	0,099	0,620	0,307
Socgen	1,587	0,672	2,927	0,896	0,909	0,400	1,666	0,509
Peugeot	1,829	0,319	2,316	1,359	1,082	0,168	1,338	0,781
S&P 500	0,750	0,230	1,177	0,500	0,399	0,132	0,637	0,251
Pétrole	1,449	0,406	2,285	1,043	0,787	0,247	1,296	0,524
Blé	1,204	0,092	1,331	1,022	0,627	0,047	0,696	0,546
Portefeuille	0,790	0,222	1,117	0,529	0,446	0,145	0,656	0,275
GARCH								
CAC 40	0,877	0,174	1,169	0,674	0,447	0,090	0,604	0,344
Socgen	1,667	0,555	2,818	1,088	0,836	0,281	1,431	0,547
Peugeot	1,495	0,278	1,919	1,057	0,771	0,140	0,984	0,550
S&P 500	0,739	0,240	1,118	0,478	0,372	0,123	0,561	0,244
Pétrole	1,330	0,373	2,122	0,962	0,672	0,191	1,073	0,481
Blé	1,021	0,072	1,159	0,900	0,520	0,043	0,581	0,467
Portefeuille	0,807	0,164	1,109	0,652	0,438	0,083	0,588	0,362

TAB. 6.6 – Capital réglementaire

Capital réglementaire calculé sur un investissement de 1 Euro sur chaque actif et sur le portefeuille.

La nouvelle recommandation du Comité de Bâle de calculer le stress VaR en plus de la VaR pour la détermination du capital réglementaire entraîne au minimum à un doublement de la VaR anciennement calculée par les établissements financiers. Le capital réglementaire estimé au titre de la VaR et au titre du stress VaR sur le portefeuille d'étude

nous laisse remarquer qu'en moyenne le capital réglementaire est égal à au moins 100% du montant investi dans les actifs non diversifiés (Socgen, Peugeot, Pétrole et Blé) et 50% du montant investi dans les actifs diversifiés (CAC 40, S&P 500).

L'exigence du Comité de Bâle de sommer la VaR et le stress VaR pour la détermination du capital réglementaire pose un problème de fondement économique. Par définition, le stress VaR est une VaR déterminée sur une période de crise qui correspond à un régime de forte volatilité. La VaR quant à elle, est déterminée sur la période précédente à l'année 2009. La somme des deux types de VaR signifie implicitement qu'on se place dans deux états ou régimes différents au même moment. Nous pensons qu'il est plus logique de prendre le maximum entre la VaR et le stress VaR. En effet, on ne peut pas, à un instant donné, être dans deux états du monde à la fois (état de crise et état précédent).

6.4 Conclusion

La détermination du capital réglementaire par les techniques de mesure de risque basées sur la distribution de Pareto généralisée, sur la Filtered Historical Simulation et sur la distribution normale a permis d'évaluer l'impact de la nouvelle recommandation du Comité de Bâle. Cette nouvelle réglementation demande aux établissements financiers de calculer, en plus de la VaR, le stress VaR au titre du capital réglementaire.

Notre étude montre que le montant du stress VaR est au moins égal au montant de la VaR. Par conséquent, le capital réglementaire obtenu est au moins le double de la VaR. Par cette règle prudentielle, l'objectif d'augmenter le capital réglementaire des établissements financiers est atteint. Cependant, ces nouvelles règles du Comité de Bâle ne favorisent pas les techniques de mesure de risque les plus fiables. En effet, nous avons montré que la technique de mesure basée sur la distribution de Pareto généralisée est validée par le contrôle ex post de l'accord de Bâle II. Mais le montant du capital réglementaire que le modèle GPD estime est généralement supérieur à celui estimé par les deux techniques traditionnelles de mesure de risque. Ce qui a pour conséquence de ne pas encourager les établissements financiers à adopter des techniques de mesure de risque les plus fiables.

Le problème de dépassement du capital réglementaire par les pertes même en période

de crise n'est pas lié aux règles de l'accord de Bâle II, mais plutôt aux techniques de mesure utilisées pour évaluer les risques inhérents aux actifs financiers. En effet, comme notre étude l'a montré, la technique de mesure de risque basée sur la distribution de Pareto généralisée couvre mieux le risque sur le portefeuille d'étude comparativement aux techniques traditionnelles de mesure FHS et GARCH.

Les établissements financiers doivent améliorer leurs modèles internes voire les remplacer par des modèles de risque plus fiables. Dans le cas contraire, les autorités de contrôle bancaire peuvent intervenir en augmentant le capital réglementaire comme rendu possible par l'introduction du stress VaR dans la détermination du capital réglementaire.

CONCLUSION DE LA DEUXIÈME PARTIE

Dans cette seconde partie de l'étude, nous avons exposé comment réaliser l'intégration du stress test dans les modèles de risque de marché et particulièrement dans la méthode POT basée sur la distribution de Pareto généralisée. Nous avons utilisé les paramètres de volatilité conditionnelle et de corrélation pour intégrer les hypothèses de scénarios dans les mesures de la Value at Risk et de l'Expected Shortfall pour déterminer les pertes extrêmes. Nous constatons qu'il est plus judicieux, pour l'intégration du stress dans les modèles de risque, d'utiliser les modèles de risque qui ont fait preuve de fiabilité dans la mesure de risque de marché.

La construction de scénarios historiques a révélé que les pertes extrêmes estimées sous les scénarios historiques dépendent du choix de l'amplitude du choc et du choix de la loi de distribution sur laquelle sont basées les mesures de Value at Risk et de l'Expected Shortfall. Plus la loi de distribution choisie est adaptée à la distribution empirique des rentabilités, plus les résultats du stress test sont viables et crédibles. Cela est d'autant plus important qu'il n'existe pas à ce jour de procédure de contrôle ex post des résultats du stress test.

La construction de scénarios théoriques a permis de montrer l'élaboration de scénarios hypothétiques jusqu'à leur intégration dans les modèles de mesure de risque. Nous avons construit, à partir de la distribution de Pareto généralisée, la recherche de scénarios catastrophes sans hypothèses préalables sur les facteurs de risque ou sur les paramètres des modèles de risque. Cette méthodologie de recherche de scénarios catastrophes s'est montrée plus fiable sur le portefeuille d'étude que celle proposée par Studer (1997). Elle

permet d'identifier la contribution de chaque facteur de risque à la réalisation des pertes extrêmes. Cette identification des facteurs contributifs aux pertes extrêmes permet aux gestionnaires de risques de prendre de meilleures décisions pour réduire leurs expositions aux risques extrêmes.

Le capital réglementaire a été également déterminé suivant les nouveaux accords de Bâle qui doivent entrer en vigueur début 2013. Les résultats de cette étude montrent que la nouvelle méthodologie de calcul du capital réglementaire entraîne au minimum un doublement des fonds propres réglementaires anciennement calculés par les établissements financiers. En comparant le capital réglementaire estimé par les techniques traditionnelles de mesure de risque et celui estimé par le modèle GPD suivant le nouvel accord de Bâle III, les établissements financiers ne sont pas encouragés à choisir les modèles de mesure de risque les plus fiables. En effet, malgré la défaillance des techniques traditionnelles de mesure de risque de marché et des mesures de pénalités prévues dans les accords de Bâle, leur utilisation conduit à moins de capital réglementaire que celle du modèle GPD. Cela soulève la question du coût du capital réglementaire qui sera plus élevé pour les établissements financiers s'ils choisissaient le modèle GPD.

Il est important de souligner les conséquences de l'augmentation du capital réglementaire sous les nouveaux accords de Bâle III. En effet, augmenter le capital réglementaire des établissements financiers entraîne une augmentation du coût du capital de ces établissements qu'ils vont répercuter sur l'économie réelle par un processus de tarification bancaire. Par exemple, cela peut avoir pour conséquence un resserrement de crédit à l'économie réelle ou *credit crunch*.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le capital réglementaire correspond au montant de fonds propres exigé par le régulateur, dans le but d'assurer la stabilité financière globale du système financier. La détermination de ce capital de façon fiable pour pouvoir couvrir les risques auxquels les établissements financiers sont exposés, est indispensable pour éviter toute faillite bancaire et l'effet domino que cela peut entraîner dans le système financier.

Compte tenu de cet enjeu, nous nous sommes intéressés au risque de marché sur lequel il a été constaté, suite à la crise financière et économique de 2008, un montant de capital réglementaire significativement inférieur aux pertes réelles. Rappelons que ce capital réglementaire est déterminé par des modèles internes de risque de marché élaborés et mis en place par les établissements financiers. Ainsi, pour comprendre les causes de cette insuffisance de capital réglementaire face aux risques réels dans les portefeuilles de négociation des établissements financiers, on s'est intéressé aux modèles internes de risque de marché et aux hypothèses sous-jacentes. Avec des crises financières et économiques de plus en plus fréquentes et aux conséquences désastreuses sur l'économie, il nous a paru important d'évaluer ces risques extrêmes par les modèles de risque et les techniques de stress test.

Les premiers résultats montrent que les modèles internes de risque de marché utilisés par les établissements financiers ne permettent pas de mesurer correctement le capital réglementaire quand ils supposent dans leur modélisation de risque que la volatilité est constante. En comparant les prévisions de pertes potentielles par ces modèles internes qui sont censés couvrir les pertes réelles, nous constatons une forte sous-estimation des

pertes réelles. Cette sous-estimation est encore plus élevée en période de crises financières et économiques.

Comparativement à ces modèles internes de risque de marché jusqu'à présent utilisés par les établissements financiers, nous avons étudié la méthode *Peak Over Threshold* (POT) de la théorie des valeurs extrêmes basée sur la distribution de Pareto généralisée ou *Generalized Pareto Distribution* (GPD). La performance de cette méthode a été évaluée sur le portefeuille d'étude sous l'hypothèse de volatilité constante. Contrairement aux résultats des études antérieures sur cette méthodologie, nous constatons une forte sous-estimation du risque en période de crises économiques et financières. Cependant, elle surestime fortement le risque sur le portefeuille en période d'accalmie des marchés. Si les établissements financiers utilisent le modèle GPD comme tel en période de faible volatilité, ils risquent de bloquer des fonds propres extrêmement élevés comparés à ce qui est nécessaire à la couverture de leurs risques réels.

Pour améliorer les modèles de mesure de risque de marché afin d'évaluer correctement le montant du capital réglementaire, nous avons pris en compte dans ces modèles, le changement de volatilité et l'effet asymétrique des rentabilités tout en respectant l'hypothèse d'identité et d'indépendance des rentabilités. Les résultats de cette modélisation de risque ont montré une amélioration de l'ensemble des modèles de mesure de risque sur lesquels est basée la détermination du capital réglementaire. Le contrôle ex post montre que les modèles traditionnels de risque mesurent mieux le risque en période normale de marché c'est-à-dire en période de faible volatilité. Cependant, ils continuent à sous-estimer le risque pendant la crise financière et économique de 2008. Ce sont les conséquences de ce phénomène qui ont été constatées par le Comité de Bâle en terme d'insuffisance du montant de capital réglementaire lors de la crise financière et économique de 2008 et qui ont conduit à la réforme des règles prudentielles de mesure de risque de marché. Parallèlement aux modèles traditionnels de risque, nous avons estimé les pertes potentielles avec le modèle GPD. Le contrôle ex post montre que ce modèle est fiable et adapté à la mesure du risque de marché sur le portefeuille d'étude qu'on soit en période normale ou en période de crises financières et économiques. Ce qui veut dire que quand la modélisation du risque est adaptée aux caractéristiques des actifs financiers, il est possible d'évaluer

correctement leurs risques.

Compte tenu de la fiabilité de la méthode POT à mesurer correctement le risque sur les actifs individuels du portefeuille d'étude, nous l'avons utilisée pour estimer les pertes potentielles sur le portefeuille global. En effet, les actifs dans un portefeuille ne sont pas indépendants les uns des autres et la corrélation a tendance à se renforcer pendant les périodes de crises financières et économiques. Comme il a été montré par plusieurs études que la corrélation entre les facteurs de risque n'est pas toujours linéaire, nous avons fait appel à la copule de Student pour mieux mesurer la dépendance entre les facteurs de risque composant le portefeuille d'étude. Cette étude réalisée sur le portefeuille d'actifs montre que le modèle conditionnel GPD est fiable à la fois en période normale et en période de crises pour évaluer le capital réglementaire nécessaire à la couverture des risques du portefeuille d'étude. Les modèles traditionnels de mesure de risque ne sont fiables que dans les conditions normales de marché. Ces résultats montrent que les établissements financiers peuvent utiliser la méthode POT de la théorie des valeurs extrêmes pour évaluer correctement leurs risques et le capital réglementaire nécessaire pour couvrir ces risques.

Dans la deuxième partie de cette étude, nous avons suivi les recommandations du Comité de Bâle sur la mise en place des programmes de stress test. L'objectif étant d'amener les établissements financiers à évaluer les risques extrêmes et les préparer à les gérer. Dans ce cadre, nous avons proposé d'intégrer ces stress tests dans les modèles de risque afin de réduire leur subjectivité. Ainsi, les pertes extrêmes potentielles ont été estimées par l'analyse de scénarios et par la nouvelle méthodologie de calcul de stress Value at Risk proposée dans les accords de Bâle III.

Premièrement, les scénarios historiques ont été construits et intégrés dans la méthode POT et les modèles traditionnels de mesure de risque pour évaluer les pertes extrêmes potentielles. Les résultats montrent que les pertes extrêmes potentielles estimées dépendent de la fiabilité des modèles et des événements historiques choisis. Ce qui conduit à dire que le stress test basé sur des modèles non fiables entraîne une sous-estimation du risque extrême et la mise en place de mesures correctives mal adaptées.

Deuxièmement, une construction de scénarios hypothétiques et la recherche de scénarios catastrophes ont été effectuées sur le portefeuille d'actifs. Cela a permis de montrer

comment, à partir des hypothèses sur l'évolution d'une situation économique ou régionale, il est possible d'intégrer ces prévisions dans les modèles de risque pour déterminer les pertes extrêmes afin de se préparer à les affronter au cas où ces hypothèses se matérialiseraient. Cette étude sur les scénarios hypothétiques a été complétée par la recherche de scénarios catastrophes. Cette nouvelle méthodologie basée sur le modèle GPD a permis de déterminer à la fois les pertes extrêmes qu'un portefeuille d'actifs peut enregistrer dans les conditions extrêmes de marché et la contribution des facteurs de risque à la réalisation de ces pertes. Cette méthodologie que nous proposons permettra aux établissements financiers d'être plus efficaces dans l'élaboration de plans de réduction de leurs expositions aux risques extrêmes. En effet, connaissant la perte extrême sur un portefeuille et les actifs financiers qui concourent à la réalisation de cette perte, il peut s'agir de réduire ou de vendre les actifs les plus risqués.

Enfin, nous avons appliqué sur le portefeuille d'étude la nouvelle méthodologie de détermination du capital réglementaire au titre du risque de marché, dont la nouveauté est l'introduction du stress Value at Risk. L'application de cette nouvelle méthodologie entrera en vigueur à partir de début 2013. Les résultats montrent que les établissements financiers vont devoir au minimum doubler leur capital réglementaire anciennement calculé sur la base uniquement de la Value at Risk. Rappelons que dans cette nouvelle méthodologie, le capital réglementaire sera déterminé sur la base de la somme de la Value at Risk et du stress Value at Risk. Le capital réglementaire déterminé par le modèle GPD (le plus fiable) est largement supérieur à celui déterminé par les modèles traditionnels. Ces résultats ne favorisent donc pas l'adoption du modèle GPD pour déterminer le capital réglementaire car le coût du capital sera plus élevé que les pénalités imposées par les régulateurs du fait de l'utilisation des modèles traditionnels de mesure de risque de marché. La solution pour éviter que les établissements financiers ne fassent pas d'arbitrage réglementaire entre les modèles de mesure de risque de marché, est de permettre une meilleure discrimination par le facteur complémentaire.

L'introduction du stress Value at Risk permet sans doute d'augmenter le capital réglementaire des établissements financiers et de réduire la *procyclicité* de ce capital. Mais la somme de la VaR et du stress VaR pour la détermination de ce capital réglementaire

n'a pas de sens économique. En effet, le fait de sommer la VaR et le stress VaR suppose qu'à chaque instant nous soyons dans deux régimes ou états (période de forte volatilité et période de faible volatilité). Cela n'étant pas le cas dans la réalité, nous proposons de déterminer le capital réglementaire par le maximum entre la VaR et le stress VaR.

Nous avons constaté que le capital réglementaire a doublé avec les nouvelles règles de l'accord de Bâle III. L'une des conséquences de cette augmentation du capital réglementaire sera le resserrement du crédit à l'économie et la diminution du nombre de salles de marché. Certes, le Comité de Bâle a atteint un de ses objectifs, celui d'augmenter le capital réglementaire. Mais l'objectif implicite d'une évaluation fiable du risque par les établissements financiers n'est pas atteint. En effet, nous avons montré dans cette étude que les causes de l'insuffisance du capital réglementaire sont dues principalement aux hypothèses sous-jacentes et aux lois de distribution sur lesquelles ces modèles sont construits. Donc, pour déterminer le niveau de capital réglementaire suffisant, il est possible d'améliorer ces modèles traditionnels ou de les remplacer par des modèles mieux adaptés.

De manière générale, ce travail de recherche adresse, principalement aux autorités de contrôle bancaire et établissements financiers, différentes propositions pour améliorer la régulation bancaire et la gestion des risques financiers. Il suggère, tout d'abord, de citer dans les documents officiels du Comité de Bâle, le modèle *Generalized Pareto Distribution* aux côtés des méthodes de la Simulation Historique, de la loi normale et de la simulation de Monte Carlo. Cela favorisera son utilisation dans un grand nombre d'établissements financiers qui peuvent le tester sur d'autres actifs financiers et l'améliorer pour la gestion quotidienne des risques. Les résultats obtenus en termes de performance du modèle GPD permet aux établissements financiers de l'utiliser de manière optimale pour la mesure et la gestion des risques pendant les périodes d'accalmie et de turbulence des marchés.

Les résultats de cette étude sont des résultats de méthodologies appliquées sur un portefeuille composé d'actions et de matières premières. Pour les prochaines études, il serait intéressant de tester ces méthodologies sur d'autres actifs linéaires, sur les actifs non linéaires et également sur d'autres types de risques financiers. Les instruments de dérivés de crédit comme les *Credit Default Swaps* (couverture de défaillance), sont des champs à explorer avec la méthodologie que nous avons adoptée dans cette étude.

Un modèle est une simplification de la réalité, il doit être complété par l'imagination humaine pour une gestion efficace et efficiente de l'incertitude.

Annexe A

Méthode standard de mesure de risque de marché

A.1 Risque de taux d'intérêts

L'objectif des règles sur le taux d'intérêts est de fournir une bonne mesure du risque de taux d'intérêts en prenant en compte la duration et la maturité des titres de créance. Cette mesure du risque général est complétée par une mesure du risque spécifique. Par définition, le risque général pour les titres de créance est le risque d'une variation de prix provoqué par une fluctuation du niveau des taux d'intérêts. Le risque spécifique se définit par une variation de prix sous l'influence de facteurs liés à l'émetteur du titre ou de l'instrument sous-jacent.

Pour déterminer l'exigence de fonds propres au titre du risque général, les positions sur les taux d'intérêts sont déclarées en valeur de marché et classées soit selon la méthode de l'échéancier, soit selon la méthode de la duration ou soit selon la méthode utilisant un algorithme de sensibilité.

Méthode de l'échéancier

L'application de la méthode de l'échéancier commence par le classement des positions nettes en fonction des fourchettes d'échéances appropriées du Tableau A.1. Ce classement

des positions se fait également en fonction de la durée résiduelle pour les instruments à taux fixe et de la période restant à courir jusqu'à la refixation du taux pour les autres instruments. Une distinction est également faite entre les instruments assortis d'un coupon de 3% ou plus et ceux assortis d'un coupon de moins de 3%. Chacune des positions est ensuite multipliée par la pondération indiquée dans le Tableau A.1 pour la fourchette d'échéance concernée.

Zone	Coupon $\geq 3\%$	Coupon $< 3\%$	Pondération (%)	Variation présumée (%)
1	$0 \leq 1$ mois	$0 \leq 1$ mois	0,00	-
	$> 1 \leq 3$ mois	$> 1 \leq 3$ mois	0,20	1,00
	$> 3 \leq 6$ mois	$> 3 \leq 6$ mois	0,40	1,00
	$> 6 \leq 12$ mois	$> 6 \leq 12$ mois	0,70	1,00
2	$> 1 \leq 2$ ans	$> 1 \leq 1,9$ an	1,25	0,90
	$> 2 \leq 3$ ans	$> 1,9 \leq 2,8$ ans	1,75	0,80
	$> 3 \leq 4$ ans	$> 2,8 \leq 3,6$ ans	2,25	0,75
3	$> 4 \leq 5$ ans	$> 3,6 \leq 4,3$ ans	2,75	0,75
	$> 5 \leq 7$ ans	$> 4,3 \leq 5,7$ ans	3,25	0,70
	$> 7 \leq 10$ ans	$> 5,7 \leq 7,3$ ans	3,75	0,65
	$> 10 \leq 15$ ans	$> 7,3 \leq 9,3$ ans	4,50	0,60
	$> 15 \leq 20$ ans	$> 9,3 \leq 10,6$ ans	5,25	0,60
	> 20 ans	$> 10,6 \leq 12$ ans	6,00	0,60
		$> 12 \leq 20$ ans	8,00	0,60
	> 20 ans	12,50	0,60	

Source : Basel Committee on Banking Supervision

TAB. A.1 – Pondération par la méthode de l'échéancier

Le mécanisme de compensation se fait en trois temps. Premièrement, les positions courtes pondérées sont compensées avec les positions longues à l'intérieur d'une même fourchette d'échéances pour déterminer la position pondérée compensée. Le solde court ou long ainsi obtenu constitue la position pondérée non compensée de cette fourchette. Deuxièmement, les positions longues (courtes) pondérées non compensées des fourchettes de chaque zone sont additionnées pour le calcul de la position longue (courte) pondérée non compensée de cette zone. La compensation entre la position longue et la position courte dans la même zone donne la position pondérée compensée de cette zone. La partie de la position courte ou longue pondérée non compensée d'une zone ne pouvant être compensée constitue la position pondérée non compensée de cette zone. En dernier lieu,

une compensation est effectuée entre les positions longues et courtes des différentes zones afin d'obtenir les positions pondérées compensées interzones. De ces opérations de compensation interzones résultent les positions pondérées non compensées résiduelles ultimes ou positions finales.

La méthode de l'échéancier peut être résumée par les trois étapes suivantes :

1. La pondération des positions nettes déterminées préalablement instrument par instrument et par échéance. Cette pondération a pour objectif de refléter leur sensibilité aux variations générales de taux d'intérêts ;
2. La compensation des positions nettes pondérées, successivement à l'intérieur de la même fourchette, entre fourchettes différentes, à l'intérieur de chaque zone et entre zones différentes ;
3. La détermination de l'exigence de fonds propres par la somme de :
 - 10% de la somme des positions pondérées compensées de toutes les fourchettes d'échéances ;
 - 40% de la position pondérée compensée de la zone 1 ;
 - 30% de la position pondérée compensée de la zone 2 et de la zone 3 ;
 - 40% de la position pondérée compensée entre les zones 1 et 2, et entre les zones 2 et 3 ;
 - 150% de la position pondérée compensée entre les zones 1 et 3
 - 100% des positions finales

Méthode de la duration

La méthode de la duration comporte quatre étapes :

1. Le calcul de la duration modifiée de chaque titre de créance ;
2. La répartition des positions par zone de duration ;
3. La compensation des positions à l'intérieur des zones, et entre différentes zones ;
4. La détermination de l'exigence de fonds propres.

Le calcul de la duration modifiée est basée sur la valeur de marché des titres de créance. Pour le titre de créance à taux fixe, le rendement à l'échéance est le taux d'actualisation

implicite du titre. Pour les instruments à taux variable, le rendement est calculé en supposant que le principal est dû lors de la prochaine réfixation du taux d'intérêt.

La duration modifiée (DM) est donnée par l'expression :

$$DM = -\frac{1}{P} \frac{\delta P}{\delta r} \quad (\text{A.1})$$

où P est le prix du titre de créance ou de l'instrument de taux et r est le taux de rendement.

Chaque instrument de taux est classé en fonction de sa duration modifiée du Tableau A.2. La position pondérée est ensuite obtenue par la multiplication de la valeur de marché de chaque instrument par sa duration modifiée et par sa variation présumée du taux d'intérêt. Les positions pondérées sont compensées à l'intérieur de la zone et entre les zones afin d'obtenir les différentes positions compensées et non compensées. Cette compensation est effectuée de la même manière que celle de la compensation dans la méthode de l'échéancier.

L'exigence de fonds propres est ainsi déterminée par la somme de :

- 2% de la position compensée pondérée sur la base de la duration de chaque zone ;
- 40% des positions compensées pondérées sur la base de la duration entre les zones 1 et 2 et entre les zones 2 et 3 ;
- 150% de la position compensée pondérée sur la base de la duration entre les zones 1 et 3 ;
- 100% des positions pondérées résiduelles non compensées sur la base de la duration.

Zone	Duration modifiée (année)	Intérêt présumé (%)
1	$0 \leq 1$ an	1,00
2	$> 1,00 \leq 3,6$ ans	0,90 à 0,75
3	$> 3,6$ ans	0,75 à 0,60

Source : Basel Committee on Banking Supervision

TAB. A.2 – Pondération par la méthode de la duration

Algorithme de sensibilité

L'algorithme de sensibilité consiste en l'utilisation des techniques de valorisation par actualisation de flux financiers pour calculer directement, par fourchette d'échéances, les sensibilités des instruments de taux et de leur couverture. Cette sensibilité est évaluée par rapport aux fluctuations indépendantes d'un échantillon de taux sur la courbe de rendement et doit comporter un point de sensibilité au moins pour chacune des fourchettes visées au Tableau A.3.

Zone	Échéance	Intérêt présumée (%)
1	≤ 1 mois	1,00
	$> 1 \leq 3$ mois	1,00
	$> 3 \leq 6$ mois	1,00
	$> 6 \leq 12$ mois	1,00
2	$> 1 \leq 2$ ans	0,85
	$> 2 \leq 3$ ans	0,85
	$> 3 \leq 4$ ans	0,85
3	$> 4 \leq 5$ ans	0,70
	$> 5 \leq 7$ ans	0,70
	$> 7 \leq 10$ ans	0,70
	$> 10 \leq 15$ ans	0,70
	$> 15 \leq 20$ ans	0,70
	> 20 ans	0,70

Source : Basel Committee on Banking Supervision

TAB. A.3 – Pondération par la méthode de l'algorithme de sensibilité

L'établissement de crédit inclut dans le Tableau A.3 une sensibilité par catégorie d'instruments au sein de la fourchette correspondante. Cette sensibilité est pondérée par la variation présumée du taux d'intérêt. Pour les instruments valorisés sur une même courbe de taux, les sensibilités pondérées préalablement compensées peuvent être portées directement au sein d'une même fourchette. Ainsi, toute obligation est réputée être valorisée sur une courbe spécifique. Les compensations sont effectuées selon les modalités prévues pour la méthode de la durée.

L'exigence de fonds propres déterminée selon les méthodes de l'échéancier, de la durée ou de l'algorithme de sensibilité l'est au titre du risque général. A cette exigence de

fonds propres due au risque général s'ajoute l'exigence de fonds propres liée au risque spécifique. Les détails sur les catégories et les pondérations associées pour le risque spécifique sont présentés dans le Tableau A.4. La catégorie des administrations centrales ou assimilées comprend des entités publiques ou des banques multilatérales de développement. L'exigence de fonds propres pour cette catégorie est de 0% quand elle bénéficie d'une pondération de 0% dans l'approche standard du risque de crédit. Les autres éléments éligibles du Tableau A.4 sont des éléments dont leur pondération dépend, en plus de la durée résiduelle et de la notation ou qualité du crédit, des conditions de liquidité et cotation sur un marché reconnu. Nous pouvons remarquer que ces pondérations dépendent principalement de la qualification de la qualité du crédit des émetteurs.

Catégorie	Durée résiduelle	Notation	Pondération
Administrations centrales ou assimilées		AAA/AA	0,00%
Administrations centrales ou assimilées	0 – 6 mois	A/BBB	0,25%
Entreprises ou établissements	6 – 24 mois	AAA/A	1,00%
Autres éléments éligibles	+24 mois	BBB	1,60%
Administrations centrales et établissements		BB/B	8,00%
Etablissements		BBB	8,00%
Entreprises		BBB/BB	8,00%
Administrations centrales et établissements		CCC/CC	12,00%
Entreprises		B/CC	12,00%

Source : Basel Committee on Banking Supervision

TAB. A.4 – **Pondération risque spécifique sur taux d'intérêt**

L'exigence de fonds propres pour le risque de taux d'intérêt (FP^I) est la somme des fonds propres requis au titre du risque général (FP^G) et des fonds propres requis au titre du risque spécifique (FP^S). Cette exigence de fonds propres est donnée par l'expression suivante :

$$FP^I = FP^G + FP^S$$

A.2 Risque sur devises

La première étape de détermination des fonds propres sur devises est de valoriser les positions dans la monnaie de référence. Les positions sont ensuite classées en positions longue ou courte. L'exigence de fonds propres est déterminée par compensations successives des positions longues consolidées et des positions courtes consolidées jusqu'à leur épuisement. La position compensée est le montant d'une position dans une devise qui est contrebalancée par une position de sens opposé dans une autre devise. Chaque compensation s'accompagne d'une exigence de fonds propres égale au montant de la position multipliée par un coefficient en fonction de la corrélation des cours des devises ainsi compensées.

Les devises des États membres participant au nouveau mécanisme de change du système monétaire européen sont soumises à une exigence de fonds propres limitée à 1,6% multiplié par la valeur des positions compensées. Les positions en devises présentant une corrélation étroite mais dont les monnaies n'appartiennent pas au système monétaire européen sont soumises à une exigence de fonds propres égale à 4% du montant compensé.

Les autres positions compensées sont soumises à une exigence de fonds propres égale à 8% du montant compensé. Rappelons que l'or est inclus dans la catégorie des risques sur devises parce qu'il affiche une volatilité proche de celle des devises. Ainsi, la position nette sur or est soumise à une exigence de fonds propres égale à 8% de son montant en valeur absolue.

Toutefois, le calcul des fonds propres au titre du risque de change n'est requis que lorsque la position nette globale en devises, augmentée de la position sur l'or, excède 2% du total des fonds propres.

A.3 Risque sur options

Pour le calcul des exigences de fonds propres relatives à la couverture des portefeuilles d'options, principalement deux approches sont disponibles : l'approche simplifiée et l'approche intermédiaire. Pour les établissements de crédit ayant des positions importantes

sur des options, l'utilisation de la méthode sophistiquée comme les modèles internes ou à minima l'approche intermédiaire est recommandée. Les établissements de crédit qui achètent des options, ils peuvent utiliser l'approche simplifiée parce qu'ils ont une exposition limitée aux risques.

Approche simplifiée

Pour un portefeuille constitué d'une position longue sur option d'achat ou sur option de vente, l'exigence de fonds propres sera le minimum entre le montant de la somme du risque général et du risque spécifique calculé sur le sous-jacent et la valeur de l'option.

Pour un portefeuille constitué d'une position longue comptant couplée à une position longue d'option de vente, ou d'une position courte comptant couplée à une position longue comptant d'option d'achat, l'exigence de fonds propres est égale à la somme des exigences des fonds propres pour risque général (FP^G) et risque spécifique (FP^S) calculées sur la position comptant et diminuées le cas échéant de la valeur intrinsèque de la position optionnelle avec un minimum de 0. La valeur intrinsèque est par définition pour une option d'achat (option de vente), la différence entre la valeur de marché du sous-jacent (valeur d'exercice) et la valeur d'exercice (valeur de marché du sous-jacent).

Position	Fonds propres
Longue option d'achat	Minimum entre fonds propres sur le sous-jacent et la valeur de marché de l'option
Longue option de vente	
Longue au comptant + Longue option de vente	$FP^G + FP^S$ - Valeur intrinsèque position optionnelle
Courte au comptant + Longue option d'achat	

Source : Basel Committee on Banking Supervision

TAB. A.5 – Approche simplifiée sur risques optionnels

Il faut noter que les positions optionnelles et, le cas échéant, leurs positions associées sur le sous-jacent, sont dissociées des positions nettes.

Approche intermédiaire

Cette approche est basée sur la méthode Delta Plus qui consiste à convertir les positions optionnelles en équivalent delta sur le sous-jacent et intégrées dans les positions nettes. La méthode Delta Plus prévoit des exigences de fonds propres supplémentaires afin de tenir compte de risques induits par le comportement non linéaire des options (risque gamma) et par la volatilité des sous-jacents (risque vega). Les facteurs gamma et vega seront calculés pour chaque option individuelle et sont agrégés par sous-jacent. Le marché national, chaque tranche d'échéance, chaque couple de devises et l'or, les positions sur un même produit sont considérés respectivement pour les titres de propriété et indices boursiers, pour les instruments de taux, pour les devises et l'or et pour les produits de base comme un même sous-jacent.

Les facteurs vega et gamma sont déterminés respectivement par les expressions :

$$\text{Risque Vega} = \text{Vega} \times (\text{variation relative de la volatilité})$$

La variation de valeur relative de la volatilité est égale à 25% de la volatilité implicite des options.

$$\text{Risque Gamma} = \frac{1}{2} \text{Gamma} \times (\text{variation du sous-jacent})^2$$

Le Gamma est la dérivée seconde de la valeur de l'option par rapport au sous-jacent. La variation du sous-jacent est de 8% de la valeur de marché du sous-jacent pour les actions. Pour les risques sur taux d'intérêt, la variation du sous-jacent est soit la variation présumée du taux d'intérêt (cf. Section A.1) ou soit le produit de la position, de la duration modifiée et de la variation de taux conformément à l'approche de la duration (cf. Section A.1). Pour les options sur devises et l'or, la variation du sous-jacent sera de 8% du cours du couple de devises considéré ou du cours de l'or. Elle est limitée à 1,6% ou à 4% pour les couples de devises étroitement corrélés et participant au nouveau système de change du système monétaire européen.

Pour les produits de base, la variation du sous-jacent est égale à 15% de la valeur de marché du produit considéré. Ce coefficient de 15% peut être remplacé par un des coefficients du

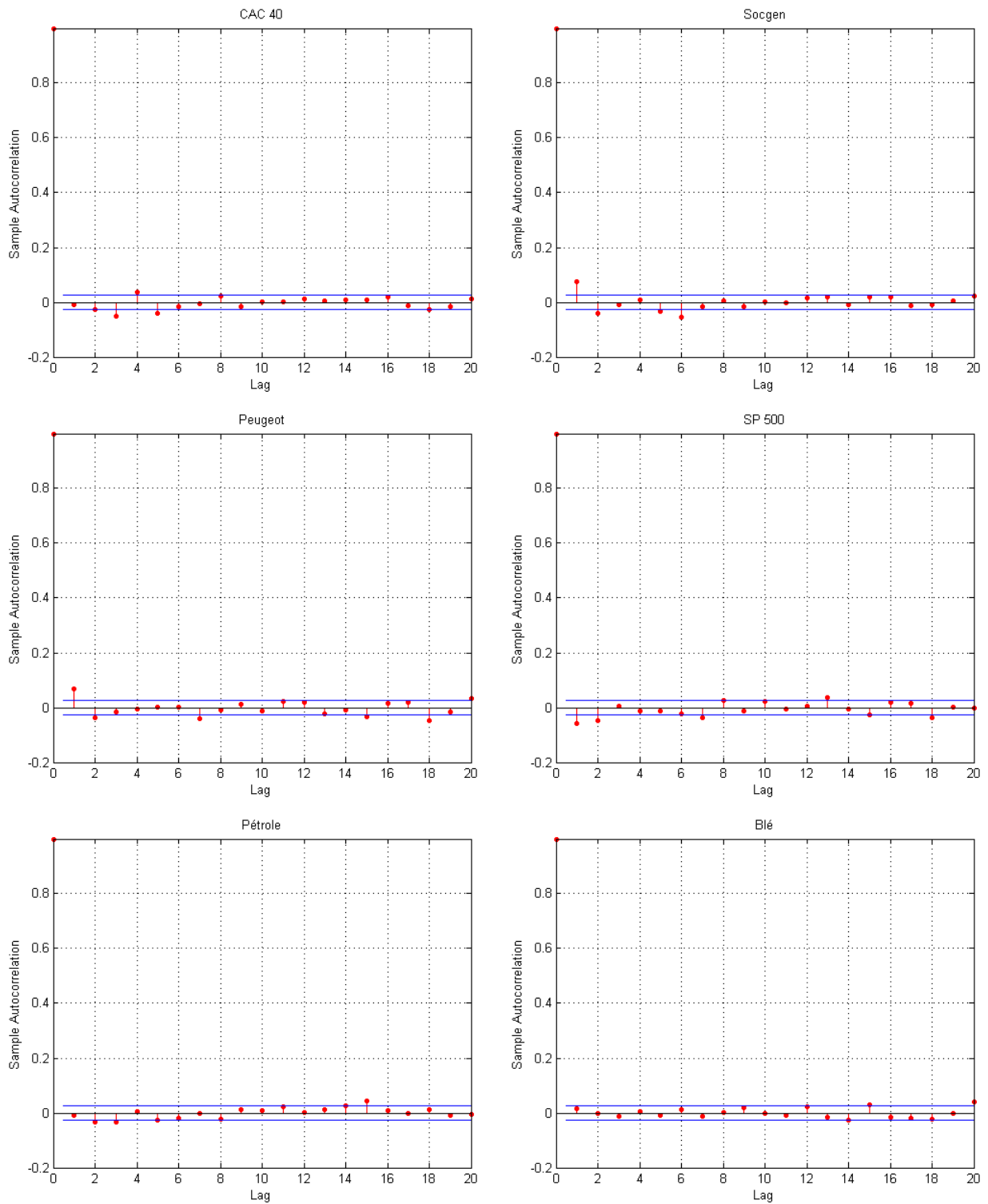
Tableau 2 en fonction du type de produits de base.

Les impacts individuels positifs ou négatifs sur le même sous-jacent sont totalisés, donnant un impact gamma net positif ou négatif pour chaque sous-jacent. Seuls les impacts gamma net qui sont négatifs seront inclus dans le calcul des fonds propres.

L'exigence supplémentaire globale pour risques optionnels au titre du risque général est la somme des valeurs absolues des risques vega et des risques gamma nets négatifs.

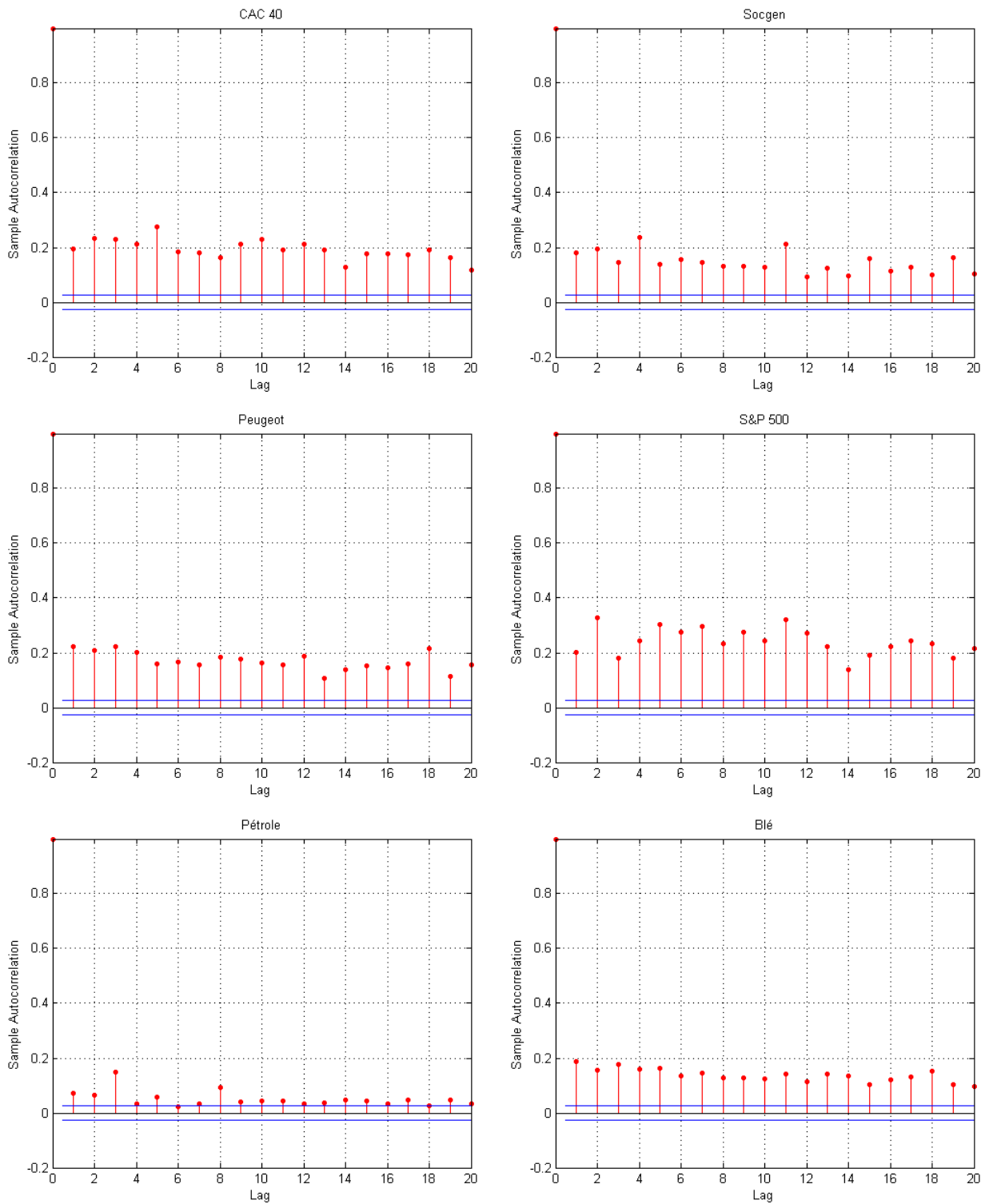
Annexe B

Caractéristiques des actifs du portefeuille



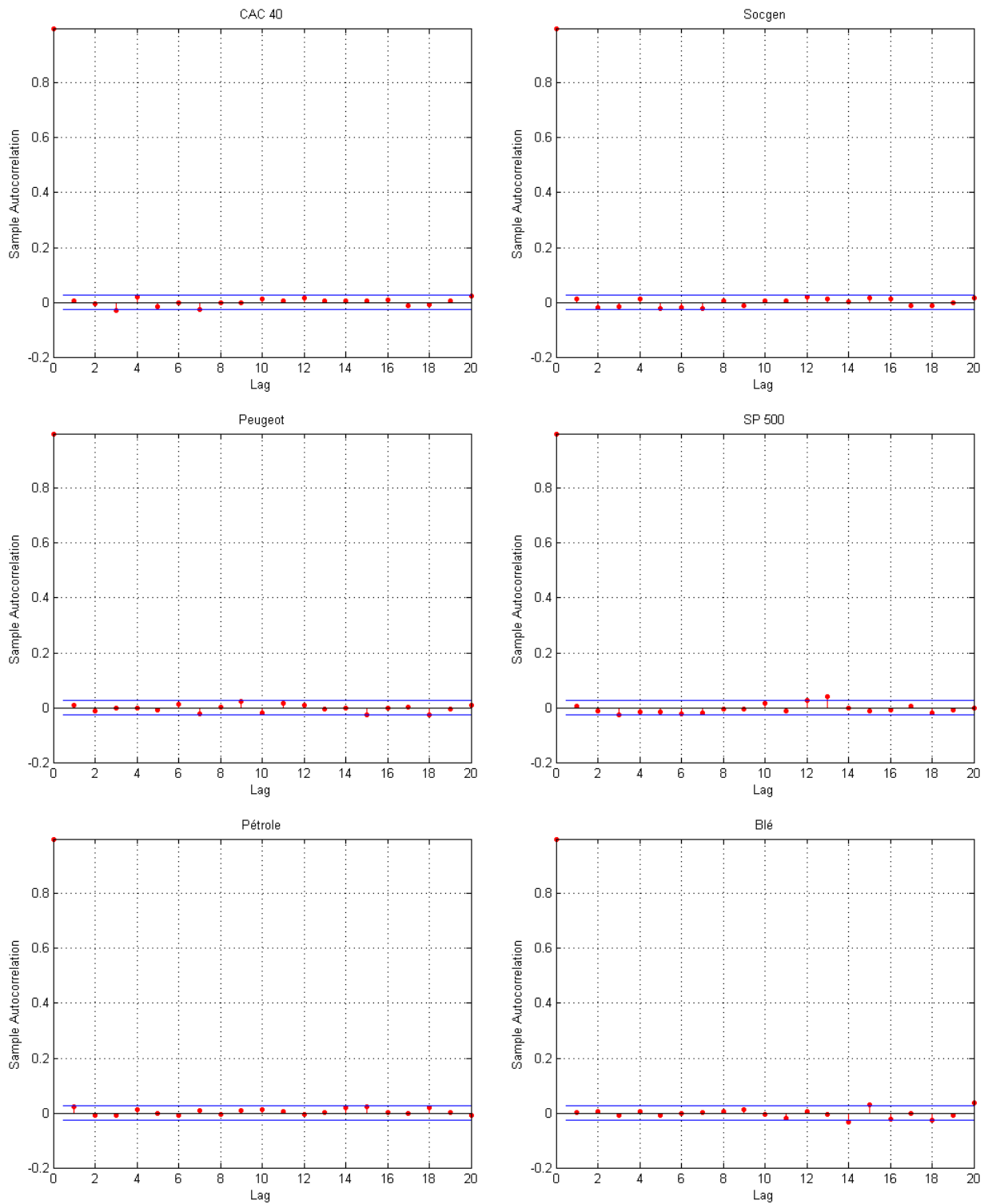
GRAPH. B.1 – Test d'autocorrélation des rentabilités

L'autocorrélogramme montre la présence de corrélation sérielle sur les rentabilités des actifs du portefeuille.



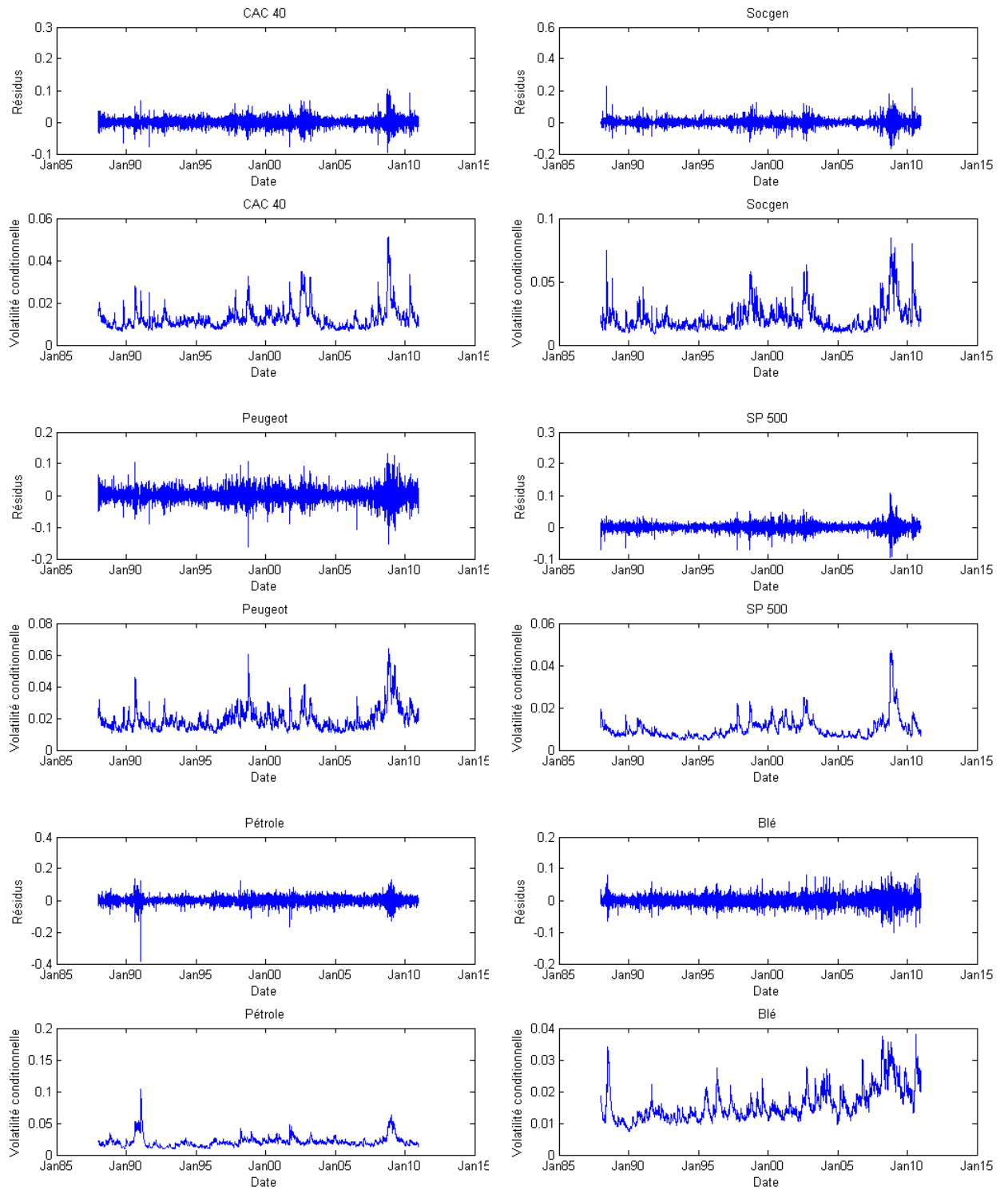
GRAPH. B.2 – Test d'autocorrélation des rentabilités au carré

L'autocorrélogramme montre la persistance de la volatilité dans les rentabilités des actifs du portefeuille.



GRAPH. B.3 – Test d'autocorrélation des résidus

L'autocorrélogramme montre l'absence de corrélation sérielle sur les résidus des actifs du portefeuille.



GRAPH. B.4 – Évolution des résidus et des volatilités conditionnelles des actifs

Annexe C

Fondements de la théorie des valeurs extrêmes

Considérons $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ une succession de variables aléatoires indépendamment et identiquement distribuées (i.i.d), mesurant les rentabilités d'un actif financier et dont la fonction de répartition F , est donnée par l'expression suivante :

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (\text{C.1})$$

Le minima et le maxima notés respectivement B_n et M_n constituent les extrema de ces variables aléatoires. Le minima se définit comme étant les plus faibles rentabilités négatives observées et le maxima correspond aux plus fortes rentabilités positives enregistrées aux instants 1, 2, ..., n :

$$M_n(X) = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (\text{C.2})$$

$$B_n(X) = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (\text{C.3})$$

Le minima et le maxima sont reliés par l'expression suivante :

$$B_n(X) = M_n(-X) \quad (\text{C.4})$$

Sous l'hypothèse de marche aléatoire des variables, la théorie établit que les fonctions de répartition associées aux maxima et aux minima, respectivement F_{M_n} et F_{B_n} peuvent être estimées au point x , à partir de la fonction parente F . La probabilité d'occurrence d'une valeur extrême est obtenue respectivement pour le maximum et le minimum par les expressions suivantes :

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) = F_{M_n}(x) = [F(x)]^n \quad (\text{C.5})$$

$$P(B_n \geq x) = P(X_1 \geq x, X_2 \geq x, \dots, X_n \geq x) = 1 - F_{B_n}(x) = [1 - F(x)]^n \quad (\text{C.6})$$

Ces deux expressions montrent que la probabilité d'obtenir une rentabilité extrême, supérieure (inférieure) à une valeur x , est égale à la probabilité d'observer une rentabilité supérieure (inférieure) à x sur l'ensemble de la période d'observation, à la puissance n .

Notons que l'influence de la loi parente sur la loi des extrema est fonction de la valeur prise par le seuil x . En effet, elle s'exercerait seulement quand le seuil x est relativement élevé en valeur absolue. Si les valeurs de x sont faibles, l'influence de F décroît avec n (Fromont (2005)).

C.1 Théorème de Fisher-Tippett

L'estimation de la loi des extrema à partir de la fonction parente F pose une difficulté majeure car, cette dernière n'est pas connue. Pour contourner cette limite, les chercheurs (Fisher-Tippett (1928)) se sont intéressés au comportement asymptotique de la variable aléatoire M_n (B_n). Il s'agit de déterminer la loi vers laquelle M_n (B_n) converge quand n tend vers l'infini afin de remplacer F par cette dernière pour les plus grandes valeurs de n .

Le théorème de Fisher-Tippett (1928) a permis de caractériser la loi de la distribution

des valeurs extrêmes sans que celle-ci soit conditionnée par la loi de la variable parente.

Considérons une suite de k extrema, $M_{n1}, M_{n2}, \dots, M_{nk}$, sélectionnés dans k périodes de n observations X_1, X_2, \dots, X_n indépendamment et identiquement distribuées³⁸. Pour trouver la loi limite d'intérêt, la variable aléatoire M_n doit être ajustée à l'aide de deux paramètres μ_n et β_n représentant respectivement un paramètre de localisation et un paramètre d'échelle. Le paramètre de localisation indique la taille moyenne des extrêmes dans la distribution parente et le paramètre d'échelle caractérise leur dispersion.

Théorème C.2 (Théorème de Fisher-Thippett) *Soit X_n des variables aléatoires indépendamment et indépendamment distribuées. S'il existe un ensemble de paramètres $\mu_n \in \mathbb{R}$, $\beta_n > 0$ et une fonction de densité non-dégénérée H tel que :*

$$\left(\frac{M_n - \mu_n}{\beta_n}\right) \xrightarrow{d} H \tag{C.7}$$

alors H appartient à l'un des trois domaines d'attraction suivants :

$$\text{Gumbel} \quad H(x) = \exp(-e^{-x}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{C.8}$$

$$\text{Weibull} \quad \begin{cases} H(x) = \exp(-(-x)^{-\alpha}) & \text{si } x \leq 0 \quad \text{et } \alpha > 0 \\ H(x) = 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{C.9}$$

$$\text{Fréchet} \quad \begin{cases} H(x) = \exp(-x^{-\alpha}) & \text{si } x > 0 \quad \text{et } \alpha > 0 \\ H(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \tag{C.10}$$

Le paramètre α mesure le poids des queues dans la distribution parente. Une valeur faible de ce paramètre indique une distribution à queue épaisse.

Le théorème de Fisher-Thippett indique que si le nombre d'observations extrêmes est élevé, la distribution des valeurs extrêmes converge vers la distribution généralisée des

38. Le relâchement des hypothèses d'indépendance et d'identité de la loi parente ne modifierait en rien la forme de la loi limite (Berman (1964), De Haan, Resnick, Rootzèn et De Vries (1989)).

valeurs extrêmes ou Generalized Extreme Value (GEV) distribution.

Les distributions de Gumbel, Weibull et Fréchet correspondent aux trois domaines d'attraction de la théorie des valeurs extrêmes. L'expression la plus générale de la loi limite $H(x)$ des valeurs extrêmes développée par Gnedenko (1943), Von Mises (1954) et Jenkinson (1955) est définie par :

$$H_{\xi,\mu,\beta}(x) = \begin{cases} \exp[-(1 + \xi \frac{x-\mu}{\beta})^{\frac{-1}{\xi}}] & \text{si } \xi \neq 0 \\ \exp[-\exp(-\frac{x-\mu}{\beta})] & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

avec $x \geq \mu$ si $\xi \geq 0$ et $\mu \leq x \leq \mu - \beta/\xi$ si $\xi < 0$.

Cette distribution possède trois paramètres. Les deux premiers sont μ , le paramètre de localisation - indicateur de la taille moyenne des extrêmes dans la distribution parente - et β , un paramètre d'échelle, caractéristique de la dispersion. Le troisième paramètre ξ est l'indice de queue et donne une indication de la forme (ou le poids des queues) de la distribution limite. Plus ce paramètre de forme diminue et plus la distribution considérée est à queue épaisse.

L'indice de queue ξ peut être relié au paramètre α de la GEV par les expressions suivantes :

$$\text{Fréchet : } \xi = 1/\alpha > 0$$

$$\text{Weibull : } \xi = -1/\alpha < 0$$

$$\text{Gumbel : } \xi = 0$$

Le choix de l'une des trois distributions du domaine d'attraction de la théorie des valeurs extrêmes dépend de la valeur de l'indice de queue ξ . Si $\xi > 0$, la GEV devient la distribution de Fréchet caractérisée par des queues de distribution épaisses et décroissantes à l'image d'une fonction puissance (loi de student ou loi de Pareto). Si $\xi = 0$, la GEV suit la loi de Gumbel avec des queues qui décroissent de manière exponentielle comme les lois normale et log-normale. Pour $\xi < 0$, nous avons la distribution de Weibull dont les queues de distribution sont bornées comme celles de la distribution uniforme et Bêta (De Vitry

(1988), Gamrowski (1996) et Longin (1998)).

C.3 Estimateur de Hill

La méthode généralement utilisée pour estimer l'indice de queue ξ , et la plus populaire est l'estimateur de Hill. Cet estimateur est directement appliqué aux pertes ordonnées de la plus grande valeur à la plus petite valeur. En considérant X_1, X_2, \dots, X_n ces pertes ordonnées, l'estimateur de Hill $\hat{\xi}_{n,k}^{(H)}$ est donné par l'expression suivante :

$$\hat{\xi}_{n,N_u}^{(H)} = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} \log X_i - \log X_{N_u+1} \quad (\text{C.12})$$

où N_u , le nombre d'extrêmes dans la queue, utilisé pour estimer l'estimateur de Hill, doit être choisi d'une manière appropriée. L'estimateur de Hill est une moyenne des k observations extrêmes moins le $N_u + 1$ ième observation. L'estimateur de Hill est bien connu consistant et asymptotiquement convergent, mais ses propriétés pour des petits échantillons ne sont pas bien connues. Il est considéré très sensible au choix de N_u . Cependant, malgré ces réserves, l'estimateur de Hill est considéré comme un bon estimateur de l'indice de queue. Le principal problème est comment choisir le nombre N_u . Nous savons que l'indice de queue peut être très sensible au choix de la valeur N_u et la théorie donne peu de moyens pour choisir N_u de façon optimale. Une des suggestions est de choisir l'indice de queue graphiquement en le représentant en fonction de différentes valeurs de N_u dont la méthodologie est connue sous le nom de *Hill plot*.

Annexe D

Contrôle ex post des modèles de mesure de risque

D.1 Méthodes statistiques de contrôle ex post

La première étape d'un travail de contrôle ex post ou de backtesting consiste à construire la série des violations sur laquelle sera appliquée un ensemble de tests visant à mesurer la fiabilité d'une technique de mesure de risque.

En fréquence journalière par exemple, la série des violations permet d'estimer le nombre de jours où la perte enregistrée dépasse la perte maximale estimée par la technique de mesure de risque. La série des violations notée I_t est définie par l'expression suivante :

$$I_t(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_t \leq VaR_t(\alpha) \\ 0 & \text{si } x_t > VaR_t(\alpha) \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

où x_t est la rentabilité de l'actif financier à l'instant t avec t compris entre 1 et T c'est-à-dire compris dans la fenêtre temporelle utilisée pour le contrôle ex post.

Christoffersen (1998) énonce qu'une méthode de VaR est fiable lorsque la séquence des violations I_t satisfait les propriétés de couverture inconditionnelle (*Unconditional Coverage Property*) et d'indépendance (*Independance Property*) des exceptions ou des violations.

Test de couverture inconditionnelle des violations

Les tests de couverture inconditionnelle correspondent à la première catégorie de tests développés pour estimer la fiabilité d'un modèle de mesure de la VaR.

Le test POF (*Proportion of Failures*) de Kupiec (1995), permet d'évaluer la pertinence d'une méthode de mesure de risque en comparant la proportion observée $\hat{\alpha}$ des violations de la VaR au niveau de risque retenu α . La fiabilité d'une technique de mesure de VaR sera rejetée lorsque la proportion observée diffère significativement de α .

Il s'agit de tester les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 & : \hat{\alpha} = \alpha \\ H_1 & : \hat{\alpha} \neq \alpha \end{cases}$$

Soit $I(\alpha)$ le nombre de violations dans un échantillon de T observations et supposons que $I(\alpha)$ suit une distribution binomiale avec les paramètres T et $I(\alpha)$. Le test du ratio de vraisemblance de la couverture inconditionnelle (Likelihood Ratio of unconditional coverage ou LRuc) est le suivant :

$$LRuc = 2 \log\left(\left(\frac{1 - \hat{\alpha}}{1 - \alpha}\right)^{T - I(\alpha)} \left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}\right)^{I(\alpha)}\right) \quad (D.2)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T} I(\alpha) \quad I(\alpha) = \sum_{t=1}^T I_t(\alpha)$$

L'hypothèse H_0 est rejetée lorsque la statistique LRuc est supérieure à la valeur critique du Khi-deux à un degré de liberté.

Dans le cas où la proportion de violations $\hat{\alpha}$ est exactement égale au niveau de risque retenu α pour le calcul de la VaR, la statistique prend une valeur nulle. Cela indique que la technique de mesure de risque évaluée remplit parfaitement la condition de couverture inconditionnelle de Christoffersen qui est nécessaire à la validation d'une méthode de mesure de risque. Par contre, la statistique LRuc est d'autant plus élevée que l'écart entre $\hat{\alpha}$ et α est important. Dans ce deuxième cas, on considère que la technique de mesure de risque surestime ou sous-estime significativement le niveau de risque de l'actif financier.

Le test de Kupiec présente cependant un inconvénient majeur que l'on retrouve dans la majorité des tests de contrôle ex post. Lorsque aucune violation de la VaR n'est constatée, il n'est plus possible de calculer la statistique puisque le logarithme de zéro n'existe pas.

Pour contourner cette limite, Campbell (2005) propose d'utiliser une variante de la statistique de vraisemblance de Kupiec : le test de Wald. La statistique du test de Wald notée z , se définit par l'expression suivante :

$$z = \frac{\sqrt{T}(\hat{\alpha} - \alpha)}{\sqrt{\alpha(1 - \alpha)}} \quad (\text{D.3})$$

L'hypothèse de couverture inconditionnelle de Christoffersen est rejetée lorsque la statistique z est supérieure à la valeur critique associée à la loi normale au niveau de confiance choisi.

Le test de couverture inconditionnelle statue sur la fiabilité des modèles de mesure de risque sans tenir compte de l'interdépendance entre les violations dans le temps. Pour remédier à ce problème, le test d'indépendance des violations peut être utilisé.

Test d'indépendance des violations

Cette hypothèse est établie sur la considération selon laquelle un *clustering* de violations n'a pas les mêmes conséquences que plusieurs violations dispersées dans le temps. En effet, il est souvent plus difficile de faire face à six violations successives qu'à huit violations éparses de la VaR puisque l'enregistrement de plusieurs pertes substantielles consécutives peut mener une institution financière vers la faillite. Ces regroupements de violations signalent un manque de réactivité du modèle de VaR aux changements des conditions de marché.

Plusieurs tests ont été proposés pour examiner la propriété d'indépendance de la série des violations de la VaR. Le test de Markov proposé par Christoffersen (1998) s'est révélé le plus utilisé. Il s'agit de tester si la vraisemblance d'une violation de la VaR est influencée par la violation ou non de la VaR le jour précédent. Une méthode de mesure de VaR est considérée comme fiable lorsque la probabilité d'une violation de la VaR à la date t est indépendante de ce qui s'est produit à la date précédente $t - 1$. Ce test est réalisé en

s'appuyant sur une matrice (cf. Tableau D.1) de contingence 2*2 présentant les violations de la VaR sur les jours adjacents.

	$I_{t-1} = 0$	$I_{t-1} = 1$	
$I_t = 0$	N_1	N_2	$N_1 + N_2$
$I_t = 1$	N_3	N_4	$N_3 + N_4$
	$N_1 + N_3$	$N_2 + N_4$	N

TAB. D.1 – **Matrice de contingence du test d'indépendance des exceptions**

N_1 désigne le nombre de jours successifs sans exceptions ; N_2 , le nombre de jours sans exception précédés par une exceptions ; N_3 , le nombre de jours sans exception suivis par une exception et N_4 , le nombre de jours successifs avec exceptions.

Dans le cas où les rapports $\frac{N_3}{N_1+N_3}$ et $\frac{N_4}{N_2+N_4}$ sont égaux, cela traduit que la proportion des violations qui surviennent après une précédente violation est la même que la proportion des violations qui suivent un jour où aucune violation ne s'est produite.

Sous l'hypothèse d'indépendance, la statistique du ratio de vraisemblance d'indépendance des violations (Likelihood Ratio of independance ou LRind) est donnée par :

$$\begin{cases} LRind = -2 \log\left(\frac{(1-\pi_1)^{N_1+N_3} * \pi_1^{N_2+N_4}}{(1-\pi_{01})^{N_1} * \pi_{01}^{N_3} * (1-\pi_{11})^{N_2} * \pi_{11}^{N_4}}\right) & \text{si } N_4 \neq 0 \\ LRind = -2 \log\left(\frac{(1-\pi_1)^{N_1+N_3} * \pi_1^{N_2+N_4}}{(1-\pi_{01})^{N_1} * \pi_{01}^{N_3}}\right) & \text{si } N_4 = 0 \end{cases} \tag{D.4}$$

$$\pi_1 = \frac{N_2 + N_4}{N}, \quad \pi_{01} = \frac{N_3}{N_1 + N_3} \quad \text{et} \quad \pi_{11} = \frac{N_4}{N_2 + N_4} \tag{D.5}$$

La fiabilité d'une technique de mesure de risque est rejetée lorsque la statistique est supérieure à la valeur du Khi-deux à 1 degré de liberté.

Il est possible de combiner les propriétés de couverture inconditionnelle et d'indépendance pour tester l'hypothèse de couverture conditionnelle (Likelihood Ratio of conditional coverage ou LRcc) dont la statistique est donnée par :

$$LRcc = LRuc + LRind \tag{D.6}$$

Cette statistique est distribuée comme une distribution de Khi-deux à 2 degré de liberté. La statistique LRcc permet de tester en même temps les propriétés de couverture inconditionnelle et d'indépendance des violations.

Backtesting de l'Expected Shortfall

La fiabilité de l'Expected Shortfall peut être évaluée par la statistique V proposée par Embrechts et al. (2005). Elle est donnée par :

$$V = \frac{|\sum_{t=1}^n (X_t - ES_t) I_{X_t < VaR_t}|}{\sum_{t=1}^n I_{X_t < VaR_t}} \quad (\text{D.7})$$

où $I_{X_t < VaR_t} = 1$ si $X_t < VaR_t$, sinon $I_{X_t < VaR_t} = 0$.

Suivant cette formule (cf. Marinelli et al. (2007)), la mesure de l'Expected Shortfall est fiable si la valeur de la statistique V est nulle ou tend vers zéro.

La limite de cette méthode est qu'elle n'associe aucune probabilité à la statistique calculée pour pouvoir décider définitivement de la fiabilité des modèles de mesure de l'Expected Shortfall.

D.2 Résultats complémentaires du contrôle ex post

	Test de Kupiec			Test de Wald		
	GPD	SH	Normale	GPD	SH	Normale
CAC 40						
95%	0,02 (0,88)	4,04 (0,04)	-	-0,15 (0,56)	2,18 (0,01)	0,50 (0,69)
99%	5,03 (0,02)	3,56 (0,06)	12,96 (0,00)	-1,59 (0,94)	2,22 (0,01)	4,77 (0,00)
99,9%	-	-	14,74 (0,00)	-0,50 (0,69)	-0,50 (0,69)	7,50 (0,00)
Socgen						
95%	3,09 (0,08)	36,34 (0,00)	24,89 (0,00)	1,89 (0,03)	7,40 (0,00)	5,95 (0,00)
99%	1,96 (0,16)	10,23 (0,00)	37,04 (0,00)	1,59 (0,06)	4,13 (0,00)	9,22 (0,00)
99,9%	1,27 (0,26)	1,27 (0,26)	40,19 (0,00)	1,50 (0,07)	1,50 (0,07)	15,51 (0,00)
Peugeot						
95%	7,52 (0,01)	24,89 (0,00)	24,89 (0,00)	3,05 (0,00)	5,95 (0,00)	5,95 (0,00)
99%	1,96 (0,16)	10,23 (0,00)	45,19 (0,00)	1,59 (0,06)	4,13 (0,00)	10,49 (0,00)
99,9%	-	1,27 (0,26)	20,55 (0,00)	-0,50 (0,69)	1,50 (0,07)	9,50 (0,00)
S&P 500						
95%	5,10 (0,02)	22,81 (0,00)	22,81 (0,00)	2,47 (0,01)	5,66 (0,00)	5,66 (0,00)
99%	3,56 (0,06)	12,96 (0,00)	29,40 (0,00)	2,22 (0,01)	4,77 (0,00)	7,95 (0,00)
99,9%	-	-	40,19 (0,00)	-0,50 (0,69)	-0,50 (0,69)	15,51 (0,00)
Pétrole						
95%	1,14 (0,29)	13,49 (0,00)	6,26 (0,01)	-1,02 (0,85)	4,21 (0,00)	2,76 (0,00)
99%	3,56 (0,06)	5,50 (0,02)	7,73 (0,01)	2,22 (0,01)	2,86 (0,00)	3,50 (0,00)
99,9%	-	1,27 (0,26)	26,77 (0,00)	-0,50 (0,69)	1,50 (0,07)	11,51 (0,00)
Blé						
95%	0,95 (0,33)	15,20 (0,00)	10,33 (0,00)	1,02 (0,15)	4,50 (0,00)	3,63 (0,00)
99%	0,77 (0,38)	15,89 (0,00)	25,78 (0,00)	0,95 (0,17)	5,40 (0,00)	7,31 (0,00)
99,9%	1,27 (0,26)	4,83 (0,03)	26,77 (0,00)	1,50 (0,07)	3,50 (0,00)	11,51 (0,00)
Portefeuille						
95%	4,37 (0,04)	86,08 (0,00)	69,89 (0,00)	-1,89 (0,97)	12,33 (0,00)	10,88 (0,00)
99%	5,03 (0,02)	92,10 (0,00)	113,22 (0,00)	-1,59 (0,94)	16,84 (0,00)	19,39 (0,00)
99,9%	-	-	137,39 (0,00)	-0,50 (0,69)	-0,50 (0,69)	39,52 (0,00)

TAB. D.2 – Résultats du test de Kupiec et de Wald sur les modèles inconditionnels

Les valeurs manquantes correspondent au cas où les statistiques ne sont pas calculables parce que le modèle n'a enregistré aucune violation. Les valeurs entre parenthèses sont des probabilités associées aux statistiques. Les valeurs en gras sont des statistiques dont la probabilité associée est supérieure au seuil d'acceptation (5%, 1% et 0,1%) de l'hypothèse de couverture inconditionnelle. Le backtesting est effectué sur une fenêtre de 250 jours (janvier 2009 à décembre 2009).

	Test d'indépendance			Test de couverture conditionnelle		
	GPD	SH	Normale	GPD	SH	Normale
CAC 40						
95%	0,03 (0,86)	0,15 (0,70)	-	0,05 (0,97)	4,19 (0,12)	-
99%	0,00 (1,00)	0,00 (0,95)	0,02 (0,90)	5,03 (0,08)	3,56 (0,17)	12,97 (0,00)
99,9%	-	-	0,00 (0,97)	-	-	14,74 (0,00)
Socgen						
95%	2,11 (0,15)	0,39 (0,53)	4,21 (0,04)	5,20 (0,07)	36,73 (0,00)	29,10 (0,00)
99%	3,04 (0,08)	0,50 (0,48)	0,95 (0,33)	5,00 (0,08)	10,73 (0,00)	37,99 (0,00)
99,9%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	1,00 (0,32)	1,27 (0,53)	1,27 (0,53)	41,19 (0,00)
Peugeot						
95%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	7,52 (0,02)	24,89 (0,00)	24,89 (0,00)
99%	0,00 (0,96)	0,01 (0,91)	0,13 (0,72)	1,96 (0,38)	10,24 (0,01)	45,32 (0,00)
99,9%	-	0,00 (1,00)	0,00 (0,96)	-	1,27 (0,53)	20,55 (0,00)
S&P 500						
95%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	5,10 (0,08)	22,81 (0,00)	22,81 (0,00)
99%	0,00 (0,95)	0,02 (0,90)	0,06 (0,81)	3,56 (0,17)	12,97 (0,00)	29,45 (0,00)
99,9%	-	-	0,01 (0,93)	-	-	40,20 (0,00)
Pétrole						
95%	0,01 (0,91)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	1,15 (0,56)	13,49 (0,00)	6,26 (0,04)
99%	0,00 (0,95)	0,01 (0,94)	0,01 (0,93)	3,56 (0,17)	5,50 (0,06)	7,74 (0,02)
99,9%	-	0,00 (1,00)	0,00 (0,95)	-	1,27 (0,53)	26,77 (0,00)
Blé						
95%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,95 (0,62)	15,20 (0,00)	10,33 (0,01)
99%	0,00 (0,97)	0,02 (0,88)	0,00 (1,00)	0,77 (0,68)	15,91 (0,00)	25,78 (0,00)
99,9%	0,00 (1,00)	0,00 (0,99)	0,00 (0,95)	1,27 (0,53)	4,83 (0,09)	26,77 (0,00)
Portefeuille						
95%	0,00 (0,95)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	4,37 (0,11)	86,08 (0,00)	69,89 (0,00)
99%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	5,03 (0,08)	92,10 (0,00)	113,22 (0,00)
99,9%	-	-	0,00 (1,00)	-	-	137,39 (0,00)

TAB. D.3 – Test de Christoffersen sur les modèles inconditionnels

Les valeurs manquantes correspondent au cas où les statistiques ne sont pas calculables parce que le modèle n'a enregistré aucune violation. Les valeurs entre parenthèses sont des probabilités associées aux statistiques. Les valeurs en gras sont des statistiques dont la probabilité associée est inférieure au seuil d'acceptation (5%, 1% et 0,1%) de l'hypothèse de couverture conditionnelle. Le backtesting est effectué sur une fenêtre de 250 jours (janvier 2009 à décembre 2009).

	Test de Kupiec			Test de Wald		
	GPD	SH	Normale	GPD	SH	Normale
CAC 40						
95%	3,01 (0,08)	1,54 (0,21)	1,54 (0,21)	-1,60 (0,94)	1,31 (0,10)	1,31 (0,10)
99%	5,03 (0,02)	0,09 (0,76)	3,56 (0,06)	-1,59 (0,94)	0,32 (0,38)	2,22 (0,01)
99,9%	-	-	4,83 (0,03)	-	-	3,50 (0,00)
Socgen						
95%	0,02 (0,88)	11,87 (0,00)	6,26 (0,01)	-0,15 (0,56)	3,92 (0,00)	2,76 (0,00)
99%	1,18 (0,28)	1,96 (0,16)	15,89 (0,00)	-0,95 (0,83)	1,59 (0,06)	5,40 (0,00)
99,9%	-	-	20,55 (0,00)	-	-	9,50 (0,00)
Peugeot						
95%	1,94 (0,16)	3,09 (0,08)	3,09 (0,08)	-1,31 (0,90)	1,89 (0,03)	1,89 (0,03)
99%	0,11 (0,74)	0,09 (0,76)	5,50 (0,02)	-0,32 (0,62)	0,32 (0,38)	2,86 (0,00)
99,9%	-	-	4,83 (0,03)	-	-	3,50 (0,00)
S&P 500						
95%	1,94 (0,16)	0,02 (0,89)	0,02 (0,88)	-1,31 (0,90)	0,15 (0,44)	-0,15 (0,56)
99%	5,03 (0,02)	1,96 (0,16)	5,50 (0,02)	-1,59 (0,94)	1,59 (0,06)	2,86 (0,00)
99,9%	-	-	1,27 (0,26)	-	-	1,50 (0,07)
Pétrole						
95%	14,13 (0,00)	1,94 (0,16)	4,37 (0,04)	-3,05 (1,00)	-1,31 (0,90)	-1,89 (0,97)
99%	5,03 (0,02)	5,03 (0,02)	5,03 (0,02)	-1,59 (0,94)	-1,59 (0,94)	-1,59 (0,94)
99,9%	-	-	-	-	-	-
Blé						
95%	0,02 (0,89)	6,26 (0,01)	4,04 (0,04)	0,15 (0,44)	2,76 (0,00)	2,18 (0,01)
99%	0,77 (0,38)	5,50 (0,02)	10,23 (0,00)	0,95 (0,17)	2,86 (0,00)	4,13 (0,00)
99,9%	-	1,27 (0,26)	14,74 (0,00)	-	1,50 (0,07)	7,50 (0,00)
Portefeuille						
95%	1,14 (0,29)	57,83 (0,00)	43,97 (0,00)	-1,02 (0,85)	9,72 (0,00)	8,27 (0,00)
99%	0,11 (0,74)	37,04 (0,00)	77,08 (0,00)	-0,32 (0,62)	9,22 (0,00)	14,94 (0,00)
99,9%	-	-	85,98 (0,00)	-	-	27,51 (0,00)

TAB. D.4 – Résultats du test de Kupiec et de Wald sur les modèles inconditionnels

Les valeurs manquantes correspondent au cas où les statistiques ne sont pas calculables parce que le modèle n'a enregistré aucune violation. Les valeurs entre parenthèses sont des probabilités associées aux statistiques. Les valeurs en gras sont des statistiques dont la probabilité associée est inférieure au seuil d'acceptation (5%, 1%, 0,1%) de l'hypothèse de couverture inconditionnelle. Le backtesting est effectué sur une fenêtre de 250 jours (janvier 2010 à décembre 2010).

	Test d'indépendance			Test de couverture conditionnelle		
	GPD	SH	Normale	GPD	SH	Normale
CAC 40						
95%	0,01 (0,94)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	3,01 (0,22)	1,54 (0,46)	1,54 (0,46)
99%	0,00 (1,00)	0,00 (0,98)	0,00 (0,95)	5,03 (0,08)	0,10 (0,95)	3,56 (0,17)
99,9%	-	-	0,00 (0,99)	-	-	4,83 (0,09)
Socgen						
95%	1,72 (0,19)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	1,75 (0,42)	11,87 (0,00)	6,26 (0,04)
99%	0,00 (1,00)	3,04 (0,08)	0,00 (1,00)	1,18 (0,56)	5,00 (0,08)	15,89 (0,00)
99,9%	-	-	3,04 (0,08)	-	-	23,59 (0,00)
Peugeot						
95%	0,01 (0,93)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	1,95 (0,38)	3,09 (0,21)	3,09 (0,21)
99%	0,00 (0,99)	0,00 (0,98)	0,01 (0,94)	0,11 (0,95)	0,10 (0,95)	5,50 (0,06)
99,9%	-	-	0,00 (0,99)	-	-	4,83 (0,09)
S&P 500						
95%	0,01 (0,93)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	1,95 (0,38)	0,02 (0,99)	0,02 (0,99)
99%	0,00 (1,00)	0,00 (0,96)	0,01 (0,94)	5,03 (0,08)	1,96 (0,38)	5,50 (0,06)
99,9%	-	-	0,00 (1,00)	-	-	1,27 (0,53)
Pétrole						
95%	0,00 (0,99)	0,01 (0,93)	0,00 (0,95)	14,13 (0,00)	1,95 (0,38)	4,37 (0,11)
99%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	5,03 (0,08)	5,03 (0,08)	5,03 (0,08)
99,9%	-	-	-	-	-	-
Blé						
95%	0,04 (0,84)	0,20 (0,66)	0,15 (0,70)	0,06 (0,97)	6,46 (0,04)	4,19 (0,12)
99%	0,00 (0,97)	0,01 (0,94)	0,01 (0,91)	0,77 (0,68)	5,50 (0,06)	10,24 (0,01)
99,9%	-	0,00 (1,00)	0,00 (0,97)	-	1,27 (0,53)	14,74 (0,00)
Portefeuille						
95%	0,01 (0,91)	3,20 (0,07)	4,96 (0,03)	1,15 (0,56)	61,03 (0,00)	48,93 (0,00)
99%	0,00 (0,99)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,11 (0,95)	37,04 (0,00)	77,08 (0,00)
99,9%	-	-	0,40 (0,53)	-	-	86,38 (0,00)

TAB. D.5 – Test de Christoffersen sur les modèles inconditionnels

Les valeurs manquantes correspondent au cas où les statistiques ne sont pas calculables parce que le modèle n'a enregistré aucune violation. Les valeurs entre parenthèses sont des probabilités associées aux statistiques. Les valeurs en gras sont des statistiques dont la probabilité associée est inférieure au seuil d'acceptation (5%, 1%, 0,1%) de l'hypothèse de couverture conditionnelle. Le backtesting est effectué sur une fenêtre de 250 jours (janvier 2010 à décembre 2010).

	Année 2009			Année 2010		
	GPD	SH	Normale	GPD	SH	Normale
CAC 40						
95%	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01
99%	-	0,01	0,00	-	0,01	0,00
99,9%	-	-	0,00	-	-	0,00
Socgen						
95%	0,00	0,00	-0,01	-0,01	0,00	-0,01
99%	0,02	0,01	-0,01	-0,01	-0,01	-0,02
99,9%	-	-	0,00	0,04	-0,01	-0,03
Peugeot						
95%	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	-0,01
99%	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01
99,9%	-	-	0,00	-	0,01	-0,02
S&P 500						
95%	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01
99%	0,01	0,00	0,01	0,00	-0,01	
99,9%	-	-	0,00	-	-	-0,01
Pétrole						
95%	0,02	0,01	0,00	-0,02	0,00	-0,01
99%	-	-	-	0,02	0,00	-0,03
99,9%	-	-	-	-	0,05	-0,02
Blé						
95%	0,00	0,00	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01
99%	0,00	0,00	-0,01	-0,01	0,00	-0,01
99,9%	-	0,00	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01
Portefeuille						
95%	0,00	0,00	-0,01	0,00	-0,01	-0,01
99%	0,00	0,00	-0,01	-	0,00	-0,01
99,9%	-	-	-0,01	-	-	-0,01

TAB. D.6 – Résultats du backtesting de l'Expected Shortfall sur les modèles inconditionnels

Les statistiques égales à zéro indiquent que les modèles mesurent correctement le risque moyen au-delà de la VaR.

	Test de Kupiec			Test de Wald		
	GPD cond.	FHS	GARCH	GPD cond.	FHS	GARCH
CAC 40						
95%	0,20 (0,66)	8,88 (0,00)	1,54 (0,21)	-0,44 (0,67)	3,34 (0,00)	1,31 (0,10)
99%	5,03 (0,02)	15,89 (0,00)	5,50 (0,02)	-1,59 (0,94)	5,40 (0,00)	2,86 (0,00)
99,9%	- -	9,44 (0,00)	- -	- -	5,50 (0,00)	- -
Socgen						
95%	3,01 (0,08)	2,26 (0,13)	1,14 (0,29)	-1,60 (0,94)	1,60 (0,06)	-1,02 (0,85)
99%	1,18 (0,28)	0,77 (0,38)	1,96 (0,16)	-0,95 (0,83)	0,95 (0,17)	1,59 (0,06)
99,9%	- -	- -	1,27 (0,26)	- -	- -	1,50 (0,07)
Peugeot						
95%	1,94 (0,16)	8,88 (0,00)	0,50 (0,48)	-1,31 (0,90)	3,34 (0,00)	0,73 (0,23)
99%	5,03 (0,02)	15,89 (0,00)	0,09 (0,76)	-1,59 (0,94)	5,40 (0,00)	0,32 (0,38)
99,9%	- -	33,33 (0,00)	- -	- -	13,51 (0,00)	- -
S&P 500						
95%	0,20 (0,66)	2,26 (0,13)	0,18 (0,67)	-0,44 (0,67)	1,60 (0,06)	0,44 (0,33)
99%	5,03 (0,02)	0,11 (0,74)	0,11 (0,74)	-1,59 (0,94)	-0,32 (0,62)	-0,32 (0,62)
99,9%	- -	- -	- -	- -	- -	- -
Pétrole						
95%	6,07 (0,01)	0,50 (0,48)	0,95 (0,33)	-2,18 (0,99)	0,73 (0,23)	1,02 (0,15)
99%	5,03 (0,02)	5,03 (0,02)	0,77 (0,38)	-1,59 (0,94)	-1,59 (0,94)	0,95 (0,17)
99,9%	- -	- -	- -	- -	- -	- -
Blé						
95%	3,01 (0,08)	0,95 (0,33)	0,18 (0,67)	-1,60 (0,94)	1,02 (0,15)	0,44 (0,33)
99%	0,09 (0,76)	1,96 (0,16)	0,77 (0,38)	0,32 (0,38)	1,59 (0,06)	0,95 (0,17)
99,9%	1,27 (0,26)	1,27 (0,26)	4,83 (0,03)	1,50 (0,07)	1,50 (0,07)	3,50 (0,00)
Portefeuille						
95%	25,65 (0,00)	7,52 (0,01)	41,37 (0,00)	-3,63 (1,00)	3,05 (0,00)	7,98 (0,00)
99%	5,03 (0,02)	0,11 (0,74)	41,06 (0,00)	-1,59 (0,94)	-0,32 (0,62)	9,85 (0,00)
99,9%	- -	- -	33,33 (0,00)	- -	- -	13,51 (0,00)

TAB. D.7 – Résultats du test de couverture inconditionnelle de Kupiec et de Wald sur les modèles conditionnels

Les valeurs manquantes correspondent au cas où les statistiques ne sont pas calculables parce que la technique de mesure de risque n'a enregistré aucune violation. Les valeurs entre parenthèses sont des probabilités associées aux statistiques. Les valeurs en gras sont des statistiques dont la probabilité associée est inférieure au seuil d'acceptation (5%, 1% et 0,1%) de l'hypothèse de couverture inconditionnelle. Le backtesting est effectué sur une fenêtre de 250 jours (janvier 2009 à décembre 2009).

	Test d'indépendance			Test de couverture conditionnelle		
	GPD cond.	FHS	GARCH	GPD cond.	FHS	GARCH
CAC 40						
95%	0,02 (0,88)	0,00 (1,00)	0,09 (0,77)	0,22 (0,90)	8,88 (0,01)	1,63 (0,44)
99%	0,00 (1,00)	0,02 (0,88)	0,01 (0,94)	5,03 (0,08)	15,91 (0,00)	5,50 (0,06)
99,9%	-	0,00 (0,98)	-	-	9,44 (0,01)	-
Socgen						
95%	1,57 (0,21)	0,00 (1,00)	0,50 (0,48)	4,58 (0,10)	2,26 (0,32)	1,64 (0,44)
99%	0,00 (1,00)	0,00 (0,97)	3,04 (0,08)	1,18 (0,56)	0,77 (0,68)	5,00 (0,08)
99,9%	-	-	0,00 (1,00)	-	-	1,27 (0,53)
Peugeot						
95%	0,01 (0,93)	0,26 (0,61)	0,06 (0,81)	1,95 (0,38)	9,14 (0,01)	0,56 (0,76)
99%	0,00 (1,00)	0,02 (0,88)	0,00 (0,98)	5,03 (0,08)	15,91 (0,00)	0,10 (0,95)
99,9%	-	0,01 (0,94)	-	-	33,34 (0,00)	-
S&P 500						
95%	0,02 (0,88)	0,11 (0,74)	0,05 (0,83)	0,22 (0,90)	2,36 (0,31)	0,23 (0,89)
99%	0,00 (1,00)	0,00 (0,99)	0,00 (0,99)	5,03 (0,08)	0,11 (0,95)	0,11 (0,95)
99,9%	-	-	-	-	-	-
Pétrole						
95%	0,00 (0,96)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	6,07 (0,05)	0,50 (0,78)	0,95 (0,62)
99%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (0,97)	5,03 (0,08)	5,03 (0,08)	0,77 (0,68)
99,9%	-	-	-	-	-	-
Blé						
95%	0,01 (0,94)	0,07 (0,79)	0,00 (1,00)	3,01 (0,22)	1,02 (0,60)	0,18 (0,91)
99%	0,00 (0,98)	0,00 (0,96)	0,00 (0,97)	0,10 (0,95)	1,96 (0,38)	0,77 (0,68)
99,9%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (0,99)	1,27 (0,53)	1,27 (0,53)	4,83 (0,09)
Portefeuille						
95%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	25,65 (0,00)	7,52 (0,02)	41,37 (0,00)
99%	0,00 (1,00)	0,00 (0,99)	0,00 (1,00)	5,03 (0,08)	0,11 (0,95)	41,06 (0,00)
99,9%	-	-	0,01 (0,94)	-	-	33,34 (0,00)

TAB. D.8 – Résultats du test de Christoffersen sur les modèles conditionnels

Les valeurs manquantes correspondent au cas où les statistiques ne sont pas calculables parce que la technique de mesure de risque n'a enregistré aucune violation. Les valeurs entre parenthèses sont des probabilités associées aux statistiques. Les valeurs en gras sont des statistiques dont la probabilité associée est inférieure au seuil d'acceptation (5%, 1%, 0,1%) de l'hypothèse de couverture conditionnelle. Le backtesting est effectué sur une fenêtre de 250 jours (janvier 2009 à décembre 2009).

	Test de Kupiec			Test de Wald		
	GPD cond.	FHS	GARCH	GPD cond.	FHS	GARCH
CAC 40						
95%	0,20 (0,66)	6,26 (0,01)	-	-0,44 (0,67)	2,76 (0,00)	0,73 (0,23)
99%	1,18 (0,28)	7,73 (0,01)	5,50 (0,02)	-0,95 (0,83)	3,50 (0,00)	2,86 (0,00)
99,9%	-	1,27 (0,26)	1,27 (0,26)	-0,50 (0,69)	1,50 (0,07)	1,50 (0,07)
Socgen						
95%	0,56 (0,45)	11,87 (0,00)	0,95 (0,33)	-0,73 (0,77)	3,92 (0,00)	1,02 (0,15)
99%	1,18 (0,28)	0,77 (0,38)	10,23 (0,00)	-0,95 (0,83)	0,95 (0,17)	4,13 (0,00)
99,9%	-	1,27 (0,26)	1,27 (0,26)	-0,50 (0,69)	1,50 (0,07)	1,50 (0,07)
Peugeot						
95%	0,20 (0,66)	8,88 (0,00)	-	-0,44 (0,67)	3,34 (0,00)	0,73 (0,23)
99%	1,18 (0,28)	19,02 (0,00)	0,77 (0,38)	-0,95 (0,83)	6,04 (0,00)	0,95 (0,17)
99,9%	-	26,77 (0,00)	1,27 (0,26)	-0,50 (0,69)	11,51 (0,00)	1,50 (0,07)
S&P 500						
95%	0,18 (0,67)	2,26 (0,13)	0,95 (0,33)	0,44 (0,33)	1,60 (0,06)	1,02 (0,15)
99%	1,18 (0,28)	1,96 (0,16)	10,23 (0,00)	-0,95 (0,83)	1,59 (0,06)	4,13 (0,00)
99,9%	-	1,27 (0,26)	4,83 (0,03)	-0,50 (0,69)	1,50 (0,07)	3,50 (0,00)
Pétrole						
95%	4,37 (0,04)	0,02 (0,89)	0,02 (0,88)	-1,89 (0,97)	0,15 (0,44)	-0,15 (0,56)
99%	5,03 (0,02)	0,09 (0,76)	0,09 (0,76)	-1,59 (0,94)	0,32 (0,38)	0,32 (0,38)
99,9%	-	-	-	-0,50 (0,69)	-0,50 (0,69)	-0,50 (0,69)
Blé						
95%	1,94 (0,16)	0,20 (0,66)	0,56 (0,45)	-1,31 (0,90)	-0,44 (0,67)	-0,73 (0,77)
99%	0,09 (0,76)	3,56 (0,06)	1,96 (0,16)	0,32 (0,38)	2,22 (0,01)	1,59 (0,06)
99,9%	-	4,83 (0,03)	1,27 (0,26)	-0,50 (0,69)	3,50 (0,00)	1,50 (0,07)
Portefeuille						
95%	8,19 (0,00)	33,92 (0,00)	49,35 (0,00)	-2,47 (0,99)	7,11 (0,00)	8,85 (0,00)
99%	5,03 (0,02)	7,73 (0,01)	77,08 (0,00)	-1,59 (0,94)	3,50 (0,00)	14,94 (0,00)
99,9%	-	26,77 (0,00)	85,98 (0,00)	-0,50 (0,69)	11,51 (0,00)	27,51 (0,00)

TAB. D.9 – Résultats du test de Kupiec et de Wald sur les modèles conditionnels

Les valeurs manquantes correspondent au cas où les statistiques ne sont pas calculables parce que la technique de mesure de risque n'a enregistré aucune violation. Les valeurs entre parenthèses sont des probabilités associées aux statistiques. Les valeurs en gras sont des statistiques dont la probabilité associée est inférieure au seuil d'acceptation (5%, 1% et 0,1%) de l'hypothèse de couverture inconditionnelle. Le backtesting est effectué sur une fenêtre de backtesting de 250 jours (janvier 2010 à décembre 2010).

	Test d'indépendance			Test de couverture conditionnelle		
	GPD cond.	FHS	GARCH	GPD cond.	FHS	GARCH
CAC 40						
95%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	-	0,20 (0,91)	6,26 (0,04)	-
99%	0,00 (1,00)	1,00 (0,32)	1,57 (0,21)	1,18 (0,56)	8,73 (0,01)	7,06 (0,03)
99,9%	-	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	-	1,27 (0,53)	1,27 (0,53)
Socgen						
95%	3,32 (0,07)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	3,89 (0,14)	11,87 (0,00)	0,95 (0,62)
99%	0,00 (1,00)	0,00 (0,97)	4,27 (0,04)	1,18 (0,56)	0,77 (0,68)	14,50 (0,00)
99,9%	-	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	-	1,27 (0,53)	1,27 (0,53)
Peugeot						
95%	0,02 (0,88)	0,00 (1,00)	-	0,22 (0,90)	8,88 (0,01)	-
99%	0,00 (1,00)	0,03 (0,86)	0,00 (0,97)	1,18 (0,56)	19,05 (0,00)	0,77 (0,68)
99,9%	-	0,00 (0,95)	0,00 (1,00)	-	26,77 (0,00)	1,27 (0,53)
S&P 500						
95%	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	0,18 (0,91)	2,26 (0,32)	0,95 (0,62)
99%	0,00 (1,00)	0,00 (0,96)	0,50 (0,48)	1,18 (0,56)	1,96 (0,38)	10,73 (0,00)
99,9%	-	0,00 (1,00)	0,00 (0,99)	-	1,27 (0,53)	4,83 (0,09)
Pétrole						
95%	0,00 (0,95)	1,03 (0,31)	1,72 (0,19)	4,37 (0,11)	1,05 (0,59)	1,75 (0,42)
99%	0,00 (1,00)	0,00 (0,98)	0,00 (0,98)	5,03 (0,08)	0,10 (0,95)	0,10 (0,95)
99,9%	-	-	-	-	-	-
Blé						
95%	0,01 (0,93)	0,02 (0,88)	0,02 (0,90)	1,95 (0,38)	0,22 (0,90)	0,58 (0,75)
99%	0,00 (0,98)	0,00 (0,95)	0,00 (0,96)	0,10 (0,95)	3,56 (0,17)	1,96 (0,38)
99,9%	-	0,00 (0,99)	0,00 (1,00)	-	4,83 (0,09)	1,27 (0,53)
Portefeuille						
95%	0,00 (0,97)	0,00 (1,00)	0,00 (1,00)	8,19 (0,02)	33,92 (0,00)	49,35 (0,00)
99%	0,00 (1,00)	0,01 (0,93)	0,00 (1,00)	5,03 (0,08)	7,74 (0,02)	77,08 (0,00)
99,9%	-	0,00 (0,95)	0,40 (0,53)	-	26,77 (0,00)	86,38 (0,00)

TAB. D.10 – Résultats du test de Christoffersen sur les modèles conditionnels

Les valeurs manquantes correspondent au cas où les statistiques ne sont pas calculables parce que la technique de mesure de risque n'a enregistré aucune violation. Les valeurs entre parenthèses sont des probabilités associées aux statistiques. Les valeurs en gras sont des statistiques dont la probabilité associée est inférieure au seuil d'acceptation (5%, 1%, 0,1%) de l'hypothèse de couverture conditionnelle. Le backtesting est effectué sur une fenêtre de 250 jours (janvier 2010 à décembre 2010).

	Année 2009			Année 2010		
	GPD con.	FHS	GARCH	GPD cond.	FHS	GARCH
CAC 40						
95%	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
99%	0,00	0,00	0,00	-	0,00	0,00
99,9%	-	-0,01	0,00	-	0,00	-
Socgen						
95%	0,00	0,00	-0,01	0,00	0,01	-0,02
99%	0,01	0,01	0,00	0,02	0,01	-0,01
99,9%	-	0,00	0,00	-	-	-0,02
Peugeot						
95%	0,00	-0,01	0,00	0,01	-0,01	0,00
99%	0,00	-0,01	0,00	-	-0,01	0,00
99,9%	-	-0,01	-0,01	-	-0,01	-
S&P 500						
95%	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
99%	0,00	0,00	0,00	-	0,00	0,00
99,9%	-	0,00	0,00	-	-	-
Pétrole						
95%	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00
99%	-	0,00	0,00	-	-	0,01
99,9%	-	-	-	-	-	-
Blé						
95%	0,00	0,00	-0,01	-0,01	0,00	0,00
99%	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01
99,9%	-	-0,01	0,00	0,01	-0,04	-0,01
Portefeuille						
95%	0,00	0,00	-0,01	-	0,00	0,00
99%	-	0,00	-0,01	-	0,01	0,00
99,9%	-	0,00	-0,01	-	-	0,00

TAB. D.11 – Résultats du backtesting de l'Expected Shortfall

Les statistiques égales à zéro indiquent que les modèles mesurent correctement le risque moyen au-delà de la VaR.

ES (1; P)	Année 2008			Année 2009			Année 2010		
	GPD	SH	Normale	GPD	SH	Normale	GPD	SH	Normale
95%	0,01	0,02	0,02	0,002	0,006	0,010	0,001	0,005	0,009
99%	0,00	0,02	0,02	-	0,002	0,010	0,001	0,000	0,008
99,9%	0,01	0,01	0,02	-	-	0,009	-	-	0,009

TAB. D.12 – **Résultats du backtesting de l'Expected Shortfall sur les modèles inconditionnels - Portefeuille**
 Les valeurs du tableau correspondent à la statistique calculée. Si elles sont égales à zéro, cela indique que les modèles mesurent correctement le risque moyen au-delà de la VaR.

ES (1; P)	Année 2008			Année 2009			Année 2010		
	GPD cond.	FHS	GARCH	GPD cond.	FHS	GARCH	GPD cond.	FHS	GARCH
95%	0,02	0,01	0,01	-	0,003	0,004	0,001	0,004	0,008
99%	0,01	0,01	0,01	-	0,011	0,004	-	0,005	0,007
99,9%	0,02	0,02	0,01	-	-	0,000	-	0,004	0,006

TAB. D.13 – **Résultats du backtesting de l'Expected Shortfall sur les modèles conditionnels - portefeuille**
 Les valeurs du tableau correspondent à la statistique calculée. Si elles sont égales à zéro, cela indique que les modèles mesurent correctement le risque moyen au-delà de la VaR.

Annexe E

Théorie des copules

E.1 Propriétés des copules

Théorème de Sklar

Une copule, $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, est par définition une fonction de distribution multivariée dont les distributions marginales sont uniformément distribuées sur $[0, 1]$.

La théorie des copules est basée sur le théorème de Sklar du nom de celui qui a introduit le concept de copule en 1959. Ce théorème précise le lien défini par la copule C , déterminée à partir de la distribution jointe F , entre les fonctions de répartition marginales univariées et la distribution jointe.

Théorème E.2 *Soit F une fonction de répartition à n dimensions avec des distributions marginales F_1, \dots, F_n , alors il existe une n copule C telle que pour tout x de R^n , $F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$.*

C est unique lorsque les distributions marginales F_1, \dots, F_n sont continues.

Une copule permet d'exprimer une fonction de répartition multivariée selon ses marginales. Cette copule résume toute la structure de dépendance. Une copule par définition est une fonction de répartition multivariée C définie sur l'hypercube $[0; 1]^n$ et dont les marginales sont uniformes sur $[0; 1]$, ce qui conduit à une expression probabiliste simple de la copule :

$$C(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n).$$

Avec les copules, on ne travaille plus en nombre ou montant mais en rang, c'est-à-dire que dans la pratique, on transforme linéairement les observations x_1, \dots, x_n en uniformes empiriques u_1, \dots, u_n où $u_i = \frac{\text{Rang}(x_i)}{n+1}$ pour tout i de 1 à n .

La fonction de densité c d'une copule C , si elle existe, est définie par :

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\delta^n C}{\delta u_1, \dots, \delta u_n}(u_1, \dots, u_n) \quad (\text{E.1})$$

Bornes de Fréchet

Toute copule doit être comprise entre la copule minimum et la copule maximum communément appelée les bornes de Fréchet.

1- la copule minimum qui a pour expression

$$C^-(u_1, \dots, u_n) = \max(u_1 + u_2 + \dots + u_n - 1, 0) \quad \text{avec} \quad (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$$

2- la copule maximum qui s'écrit

$$C^+(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{avec} \quad (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$$

Pour toute copule C , nous avons :

$$C^-(u_1, \dots, u_n) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq C^+(u_1, \dots, u_n)$$

Les copules minimum C^- et maximum C^+ sont essentielles puisqu'elles définissent des copules extrémales de toute copule, que l'on appelle les bornes de Fréchet.

Théorème d’invariance

L’un des théorèmes essentiel à la théorie des copules est celui de l’invariance par transformations strictement croissantes.

Théorème E.3 *Soit des variables aléatoires continues x_1, \dots, x_n de marges F_1, \dots, F_n et de copule associée à la distribution jointe F du vecteur aléatoire $x = (x_1, \dots, x_n)$, que nous notons $C(x_1, \dots, x_n)$. Si F_1, \dots, F_n sont des fonctions strictement croissantes, alors :*

$$C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = C(x_1, \dots, x_n).$$

La copule est invariante par transformations strictement croissantes des variables aléatoires.

E.4 Copule de Student multivariée

Un vecteur de variables aléatoires $X = (X_1, \dots, X_d)'$ suit une distribution multivariée³⁹ de Student de degré de liberté ν , de vecteur de moyennes μ et de matrice de dispersion positive et finie Σ , noté $X \sim t_d(\nu, \mu, \Sigma)$, si sa fonction de densité est donnée par

$$f(X) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{(\pi\nu)^d|\Sigma|}} \left(1 + \frac{(X - \mu)'\Sigma^{-1}(X - \mu)}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}} \tag{E.2}$$

Il faut noter que dans l’équation (E.2), la covariance $cov(X) = \frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$, donc la matrice de covariance n’est pas exactement égale à Σ et est seulement finie si $\nu > 2$.

La copule de Student reste invariante après une standardisation des distributions marginales, c’est-à-dire qu’elle est invariante par transformations strictement croissantes du vecteur de variables aléatoires X . Cela signifie que la copule d’une distribution $t_d(\nu, \mu, \Sigma)$ est identique à celle de la distribution $t_d(\nu, 0, \Lambda)$ où Λ est la matrice de corrélation déduite de la matrice de dispersion Σ . Cette copule unique est donnée par :

$$C_{\nu,\Lambda}^t(u) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_d)} \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{(\pi\nu)^d|\Lambda|}} \left(1 + \frac{(X' \Lambda^{-1} X)}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}} dX \tag{E.3}$$

39. Kotz et al. (2000) donne plus de détails sur les distributions continues multivariées.

où t_ν^{-1} représente le quantile de la fonction de distribution standard de Student univariée t_ν . Dans le cas bivarié, la notation simplifiée est $C_{\nu,\rho}^t$ où ρ est constitué des éléments non diagonaux de la matrice Λ . Pour des questions d'estimation, il est intéressant de noter que la fonction de densité de la copule peut être calculée à partir de l'équation (E.1) et présentée sous la forme

$$C_{\nu,\Lambda}^t(u) = \frac{f_{\nu,\Lambda}(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_d))}{\prod_{i=1}^d f_\nu(t_\nu^{-1}(u_i))}, \quad u \in (0, 1)^d \quad (\text{E.4})$$

où $f_{\nu,\Lambda}$ est la densité jointe de la distribution $t_d(\nu, 0, \Lambda)$ du vecteur de variables aléatoires X et f_ν , la fonction de densité de la distribution de Student univariée avec ν le degré de liberté.

E.5 Copule normale multivariée

Soit ρ une matrice symétrique définie positive avec $\text{diag } \rho = 1$ et Φ_ρ une distribution normale multivariée avec une matrice de corrélation ρ . La copule normale multivariée est définie par

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n, \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \quad (\text{E.5})$$

La densité de la copule normale est donnée par

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n, \rho) = \frac{1}{|\rho|} \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^T(\rho^{-1} - \mathbf{I})\zeta\right) \quad (\text{E.6})$$

où $\zeta_i = \Phi^{-1}(u_i)$ et \mathbf{I} , la matrice identité de dimension $(n \times n)$.

La densité normale multivariée quant à elle est donnée par l'équation suivante :

$$f(X) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\rho|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}X^T \rho^{-1} X\right) \quad (\text{E.7})$$

La copule normale multivariée peut être ainsi définie par

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n, \rho) = \frac{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\rho|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^T \rho^{-1} \zeta\right)}{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^T \zeta\right)} \quad (\text{E.8})$$

E.6 Dépendance de queue

Le concept de dépendance de queue fournit une description de la dépendance au niveau des queues de distribution, très intéressante pour étudier la survenance simultanée de valeurs extrêmes. C'est une mesure locale contrairement au tau de Kendall et au rho de Spearman qui mesure la dépendance sur l'ensemble de la distribution.

Le coefficient de dépendance de queue inférieure (lower tail dependance coefficient) et le coefficient de dépendance de queue supérieure (upper tail dependance coefficient) de deux variables aléatoires se déduisent des probabilités conditionnelles suivantes :

$$P(U_1 \leq u_1 / U_2 \leq u_2) = \frac{P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)}{P(U_2 \leq u_2)} = \frac{C(u_1, u_2)}{u_2} \quad (\text{E.9})$$

$$P(U_1 > u_1 / U_2 > u_2) = \frac{P(U_1 > u_1, U_2 > u_2)}{P(U_2 > u_2)} = \frac{1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2)}{1 - u_2} \quad (\text{E.10})$$

Une copule C a une dépendance de queue à gauche (lower tail dependance) si :

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}$$

existe et $\lambda_L \in (0, 1]$. Si $\lambda_L = 0$, alors elle n'a pas de dépendance de queue à gauche.

Une copule C a une dépendance de queue à droite (upper tail dependance) si :

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}$$

existe et $\lambda_U \in (0, 1]$. Si $\lambda_U = 0$, alors elle n'a pas de dépendance de queue à droite. Quand le coefficient de dépendance λ est supérieur à zéro, cela indique une tendance pour la copule à générer en même temps des événements extrêmes. Si $\lambda_L > 0$, par exemple, nous pouvons dire qu'il y a une dépendance dans la queue gauche ; si $\lambda_L = 0$, cela signifie qu'il y a une indépendance asymptotique dans la queue gauche.

Pour les distributions elliptiques et symétriques comme la distribution de Student,

les deux mesures λ_L et λ_U coïncident, et sont notées simplement par λ . Pour la copule normale, leur valeur est zéro et pour la copule de Student, elle est positive. Pour calculer le coefficient de dépendance de la copule de Student, Embrechts et al. (2003) propose la formule

$$\lambda = 2t_{\nu+1}(-\sqrt{\nu+1}\sqrt{1-\rho}/\sqrt{1+\rho}) \quad (\text{E.11})$$

Les coefficients de la dépendance de queue pour la copule de Student sont présentés dans le Tableau E.1. La copule de Student donne une dépendance asymptotique dans la queue de distribution à la fois pour les coefficients de corrélation négative et zéro. La dernière ligne du tableau est un cas particulier de la copule de Student quand le degré de liberté tend vers l'infini correspondant à l'absence de dépendance dans la queue (cas de la copule normale).

ν/ρ	-0,5	0	0,5	0,9	1
2	0,06	0,18	0,39	0,72	1
4	0,01	0,08	0,25	0,63	1
6	0,00	0,03	0,17	0,56	1
10	0,00	0,01	0,08	0,46	1
∞	0	0	0	0	1

TAB. E.1 – Coefficient de dépendance de la copule de Student

Coefficients de dépendance de la copule de Student en fonction du degré de liberté et du coefficient de corrélation.

L'examen du Tableau E.1 montre que plus le degré de liberté est faible et la corrélation élevée entre les actifs, plus la dépendance est forte. Inversement, plus le degré de liberté tend vers des valeurs élevées et une corrélation faible entre les actifs, plus la dépendance dans la queue s'amenuise.

E.7 Méthodes d'inférence statistique

Méthode des moments

La méthode des moments est fondée dans le cas des copules sur les relations existantes entre le tau τ de Kendall ou le rho ρ_s de Spearman et les paramètres des copules. Nous présentons le cas particulier de l'estimation par la méthode des moments de la copule gaussienne. Cette copule est basée sur une dépendance linéaire mesurée par la corrélation linéaire que nous notons ρ . Cette corrélation exprime la dépendance linéaire entre les variables aléatoires et elle n'est pas préservée quand on applique une transformation non linéaire sur les variables aléatoires. C'est pourquoi, les coefficients de corrélation de rangs comme le tau de Kendal et le rho de Spearman sont plus appropriés parce qu'ils restent approximativement les mêmes après transformations non linéaires. Contrairement aux coefficients de corrélation linéaire qui mesurent la corrélation en terme de valeurs entre les variables aléatoires, les coefficients de corrélation non linéaire mesurent la dépendance en terme de rangs entre les variables aléatoires.

Par exemple, pour une distribution normale bivariée, il existe des relations entre les coefficients de corrélation de rangs et les coefficients de corrélation linéaire.

$$\text{Coefficient de corrélation : } \rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (\text{E.12})$$

où cov est la covariance entre les deux variables aléatoires et σ l'écart-type.

$$\text{tau de Kendall : } \tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho) \quad (\text{E.13})$$

$$\text{rho de Spearman : } \rho_s = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho}{2}\right) \quad (\text{E.14})$$

	CAC 40	S&P 500	Pétrole	Blé
CAC 40	1	0,372	-0,043	0,024
S&P 500	0,372	1	-0,066	0,013
Pétrole	-0,043	-0,066	1	0,040
Blé	0,024	0,013	0,040	1

TAB. E.2 – **Coefficients de corrélation linéaire**Coefficients de corrélation linéaire ρ sur des rentabilités de janvier 1988 à décembre 2007.

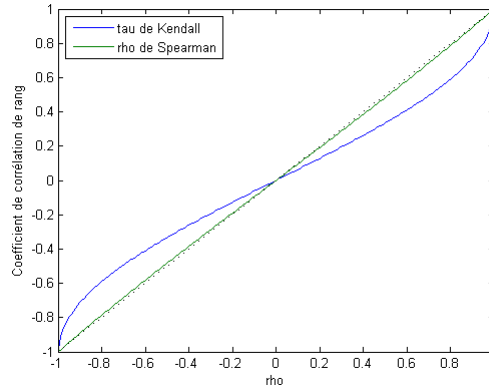
	CAC 40	S&P 500	Pétrole	Blé
CAC 40	1	0,243	-0,027	0,015
S&P 500	0,243	1	-0,042	0,008
Pétrole	-0,027	-0,042	1	0,025
Blé	0,015	0,008	0,025	1

TAB. E.3 – **Tau de Kendall - coefficients de corrélation**Tau de Kendall τ sur des rentabilités de janvier 1988 à décembre 2007.

	CAC 40	S&P 500	Pétrole	Blé
CAC 40	1	0,357	-0,041	0,023
S&P 500	0,357	1	-0,063	0,012
Pétrole	-0,041	-0,063	1	0,038
Blé	0,023	0,012	0,038	1

TAB. E.4 – **Rho de Spearman - coefficients de corrélation**Rho de Spearman ρ_s sur des rentabilités de janvier 1988 à décembre 2007.

Le rho ρ_s de Spearman est presque identique aux coefficients de corrélation linéaire que nous pouvons remarquer dans les Tableaux E.2 et E.4. Cependant, cela n'est pas vrai une fois que les variables aléatoires sont transformées. Le Graphique E.1 montre la relation entre le tau de Kendall ou le rho de Spearman et le coefficient de corrélation linéaire. Le tau de Kendall a des valeurs supérieures (inférieures) correspondantes aux valeurs inférieures (supérieures) du coefficient de corrélation linéaire.



GRAPH. E.1 – Relation entre les coefficients de corrélation de rang et le coefficient de corrélation linéaire.

Méthode du maximum de vraisemblance

A partir du théorème de Sklar et sous des conditions de continuité, la densité jointe de la distribution de F s'écrit :

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

Soient $[(x_1^t, \dots, x_n^t)]_{t=1}^T$ l'échantillon d'observations, θ le vecteur des paramètres à estimer et Θ l'espace dans lequel θ prend ses valeurs.

La log-vraisemblance s'exprime alors par :

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \log c(F_1(x_1^t), \dots, F_n(x_n^t)) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^n \log f_k(x_k^t) \quad (\text{E.15})$$

L'estimateur de θ , noté $\hat{\theta}_{MLE}$ s'obtient par la maximisation de la log-vraisemblance par l'expression suivante :

$$\hat{\theta}_{MLE} = \max_{\theta \in \Theta} l(\theta) \quad (\text{E.16})$$

L'estimateur $\hat{\theta}_{MLE}$ vérifie la propriété de normalité asymptotique :

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{MLE} - \theta_0) \rightarrow N(0, I^{-1}(\theta_0))$$

où $I(\theta_0)$ est la matrice d'information de Fisher et θ_0 la vraie valeur.

L'utilisation de cette méthode d'estimation peut engendrer des temps de calcul très longs dans le cas d'une grande dimension car elle nécessite d'estimer conjointement les paramètres des distributions marginales et les paramètres de la structure de dépendance. De plus, l'estimation de la copule est sensible à une éventuelle erreur d'estimation des marginales car celles ci interviennent directement dans le calcul de la log-vraisemblance.

Méthode IFM (Inference Functions for Margins)

La méthode des fonctions d'inférence des marginales ou IFM a été proposée par Joe and Xu (1996). Elle repose sur le fait que la représentation en copule permet de séparer les paramètres spécifiques de la structure de dépendance de ceux des distributions marginales. Ainsi, les paramètres peuvent être estimés en deux étapes à partir de la décomposition de la formule suivante :

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \log c(F_1(x_1^t, \theta_1), \dots, F_n(x_n^t, \theta_n); a) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^n \log f_k(x_k^t; \theta_k) \quad (\text{E.17})$$

où $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n; a)$ le vecteur des paramètres contenant les paramètres de chaque marginale et les paramètres de la copule. La maximisation se fait en deux étapes :

Les paramètres de chaque marginale sont estimés

$$\hat{\theta}_k = \arg \max l_k(\theta_k) = \arg \max \sum_{t=1}^T \log f_k(x_k^t; \theta_k) \quad (\text{E.18})$$

puis les paramètres a de la copule sont estimés à partir des estimateurs précédents

$$\hat{a} = \arg \max l_c(a) = \arg \max \sum_{t=1}^T \log c(F_1(x_1^t, \hat{\theta}_1), \dots, F_n(x_n^t, \hat{\theta}_n); a) \quad (\text{E.19})$$

Dans la méthode IFM, l'estimateur $\hat{\theta}_{IFM} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n; \hat{a})$ vérifie également la propriété de normalité asymptotique et nous avons :

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{IFM} - \theta_0) \rightarrow N(0, G^{-1}(\theta_0))$$

où $G(\theta_0)$ est la matrice d'information de Godambe.

Si on définit

$$g(\theta) = \left(\frac{\delta}{\delta\theta_1} l_1, \dots, \frac{\delta}{\delta\theta_n} l_n \right) \quad (\text{E.20})$$

alors la matrice de Godambe s'écrit (Joe and Xu (1996)) :

$$G(\theta_0) = D^{-1} M (D^{-1})^T \quad (\text{E.21})$$

$$D = E\left[\frac{\delta}{\delta\theta}(g(\theta)^T)\right] \quad \text{et} \quad M = E[g(\theta)^T g(\theta)]$$

Cette méthode présente l'avantage de reposer sur des calculs plus légers que ceux générés par la méthode du maximum de vraisemblance mais la détermination de la matrice de Godambe peut s'avérer très complexe en raison de multiples calculs de dérivées. L'estimation de la copule dans la méthode IFM est également sensible à une éventuelle erreur d'estimation des marginales car elles interviennent directement dans le calcul de la log-vraisemblance.

Méthode CML (Canonical Maximum Likelihood)

Les paramètres de la copule sont estimés sans spécifier les distributions marginales. La méthode d'estimation consiste à transformer l'échantillon d'observations $[(x_1^t, \dots, x_n^t)]_{t=1}^T$ en variables uniformes $[(u_1^t, \dots, u_n^t)]_{t=1}^T$ et d'estimer les paramètres de la copule. Cette méthode peut être décrite comme suit :

Estimer les distributions marginales en utilisant les distributions empiriques (sans supposition de formes paramétriques des distributions), c'est-à-dire $\hat{F}_i(x_i^t)$ avec $i = 1, \dots, n$.

Estimer par le maximum de vraisemblance les paramètres de la copule

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \sum_{t=1}^T \log c(\hat{F}_1(x_1^t), \dots, \hat{F}_n(x_n^t); \theta) \quad (\text{E.22})$$

Cette méthode recommandée par Bouye et al. (2000) est voisine de la méthode IFM à la différence qu'elle ne nécessite pas d'avoir recours à l'estimation des marginales. Ainsi, elle présente l'avantage de procéder à une estimation paramétrique de la copule totalement indépendante de la forme paramétrique des distributions marginales. En outre, le temps de calcul nécessaire à son estimation est très limité. Ce sont deux atouts majeurs qui la rendent très attractive.

Annexe F

Modèles internes de mesure de risque de marché

F.1 Méthode de la Simulation Historique

Cette méthode a été choisie pour sa popularité dans l'industrie bancaire. En effet, une enquête qui a été menée par Perignon and Smith (2010) montre que 73% des banques utilisent la Simulation Historique pour calculer la VaR. Elle ne suppose aucune hypothèse sur la distribution des rentabilités historiques. Cependant, la méthode de Simulation Historique suppose l'hypothèse de l'indépendance et de l'identité de distribution (i.i.d) des rentabilités. Si la distribution empirique de rentabilités expose des queues épaisses, la VaR calculée à un niveau de confiance plus élevé sera plus grande que celle calculée sous l'hypothèse de normalité. Cette capacité à s'adapter aux queues épaisses est sans doute ce qui rend la méthode de Simulation Historique plus attractive.

Dans cette méthodologie, la VaR est définie comme α quantile de la distribution empirique des rentabilités et l'Expected Shortfall au seuil de α est la moyenne de toutes les rentabilités empiriques au-delà de la VaR.

F.2 Méthode Filtered Historical Simulation

Cette méthode est une adaptation de la méthode Filtered Historical Simulation de Barone-Adesi and Bourgoin (1998). La méthode commence par l'estimation du modèle GARCH asymétrique sur les rentabilités, puis les rentabilités sont standardisées par le rapport entre les résidus et les volatilités conditionnelles actuelles estimés. Nous simulons les résidus standardisés, puis nous déterminons α quantile des résidus standardisés multiplié par la volatilité conditionnelle prévisionnelle pour la VaR. L'Expected Shortfall est déterminée en calculant la moyenne des résidus standardisés au-delà de la VaR multipliée par la volatilité conditionnelle prévisionnelle.

F.3 Méthode Variance-Covariance

Cette méthode est utilisée dans cette étude comme un modèle de benchmark. Nous supposons dans cette approche que les rentabilités logarithmiques X_t sont i.i.d et suivent une loi normale :

$$X_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (\text{F.1})$$

Sous cette hypothèse, la VaR et l'ES sont respectivement calculées au seuil de confiance α par :

$$VaR_\alpha = q_\alpha \sigma \quad (\text{F.2})$$

et

$$ES_\alpha = \alpha^{-1} \phi(q_\alpha) \sigma \quad (\text{F.3})$$

où q_α est la valeur critique de la loi normale standard inverse au seuil de $\alpha\%$, σ est la volatilité et ϕ est la fonction de densité de la loi normale.

F.4 Méthode GARCH de la loi normale

Dans cette approche les rentabilités ajustées de leur moyenne $\epsilon_t = X_t - \bar{X}$ sont supposées conditionnellement et normalement distribuées avec une variance conditionnelle

suivant un processus GARCH(1,1) symétrique :

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 (\epsilon_{t-1})^2 \quad (\text{F.4})$$

où $\beta_0 \geq 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ et $\beta_1 + \beta_2 < 1$.

Les paramètres β_0 , β_1 et β_2 sont déterminés par l'estimation du modèle GARCH(1,1).

La VaR et l'ES sont calculées respectivement comme dans les équations F.2 et F.3 mais cette fois ci la volatilité est une volatilité conditionnelle déterminée par l'estimation du modèle GARCH(1,1).

Annexe G

Validation de la matrice de corrélation modifiée

La méthode de décomposition spectrale d'une matrice symétrique⁴⁰ développée par Rebonato and Jackel (1999) consiste à déterminer une matrice de corrélation valide en calculant les valeurs propres (*eigenvalues*) λ_i et les vecteurs propres supérieurs (*eigenvectors*) s_i de la matrice de corrélation stressée C tel que

$$C \times S = \Lambda \times S \quad \text{avec} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_i), \quad (\text{G.1})$$

et définir les éléments non négatifs de la matrice diagonale Λ' par :

$$\Lambda' : \quad \lambda'_i = \begin{cases} \lambda_i : & \lambda_i \geq 0 \\ 0 : & \lambda_i < 0 \end{cases} \quad (\text{G.2})$$

Si la matrice de corrélation stressée C n'est pas semi-définie positive c'est-à-dire qu'au moins une des valeurs de λ_i est négative, les valeurs négatives doivent être mises à zéro.

Il faut également définir les éléments non négatifs de la matrice diagonale T tout en respectant l'espace propre (*eigensystem*) S par :

40. Méthode connue aussi sous le nom de l'analyse en composantes principales

$$T : t_i = \left[\sum_m S_{im}^2 \lambda'_m \right]^{-1} \quad (\text{G.3})$$

Les vecteurs propres s_i sont multipliés par les valeurs propres λ'_i associées "corrigées" et rangées comme les colonnes de la matrice B' .

$$B' := S\sqrt{\Lambda'} \quad (\text{G.4})$$

Finalement, B est obtenu à partir de B' en normalisant les vecteurs ligne de B' à longueur unitaire.

$$B := S\sqrt{T}B' = \sqrt{T}S\sqrt{\Lambda'} \quad (\text{G.5})$$

Par construction, la matrice de corrélation valide est donnée par :

$$\hat{C} := B \times B^T \quad (\text{G.6})$$

La matrice de corrélation \hat{C} est une matrice semi-définie positive avec une diagonale unitaire. Il représente une matrice de corrélation valide qui est presque identique à la matrice de corrélation stressée C .

Annexe H

Maximum Loss

Méthode de Studer

La méthode de la perte maximale ou Maximum Loss (ML) développée par Studer (1997) est définie comme la perte la plus maximale dans une région de confiance donnée C des facteurs de risques et sur une période de détention ou sur un horizon donné. Cette définition est presque similaire à la définition de la VaR. Cependant, il y a une différence notable : tandis que le calcul de la VaR nécessite la connaissance de la distribution des pertes et profits, la perte maximale est directement définie dans l'espace des facteurs de risque. La définition mathématique de la perte maximale est donnée par :

$$ML = \min v(X) \quad \text{s.c.} \quad X \in C \quad (\text{H.1})$$

où $Pr(C) = \alpha$.

Contrairement à la VaR qui dépend de l'horizon t et du niveau de confiance $(1 - \alpha)$, la méthode de la perte maximale a un paramètre supplémentaire qui est la région de confiance C . La région de confiance est valide pour toute combinaison de valeurs dans l'espace des facteurs de risque avec une probabilité α . L'optimisation de la perte maximale permet de déterminer le scénario catastrophe dans cette région de confiance.

La région de confiance est définie à l'aide de la fonction de densité de distribution des facteurs de risque. En supposant que les facteurs de risque $X(X_1, X_2, \dots, X_M)$ suivent une

distribution normale multivariée (comme le suppose Studer (1997)) avec une moyenne nulle et une matrice de covariance Ω , la fonction de densité jointe est définie par :

$$f(X) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det \Omega}} \exp\left(-\frac{1}{2} X' \Omega^{-1} X\right) \quad (\text{H.2})$$

où M est le nombre de facteurs de risque considérés.

L'objectif est de trouver la région C qui couvre la probabilité α et inclut les scénarios $x = 0$. Un choix possible est de chercher une constante c tel que :

$$Pr(X|f(X) \geq c) = \alpha \quad (\text{H.3})$$

L'équation H.3 a un sens si $f(X)$ atteint son maximum aux points $X = 0$ et donne une région de confiance minimale. En éliminant les constantes, le problème peut être reformulé en recherchant c_α de telle sorte que :

$$Pr(X|X' \Omega^{-1} X \leq c_\alpha) = \alpha \quad (\text{H.4})$$

$$X' \Omega^{-1} X = \sum_{i=1}^M Z_i^2 \quad (\text{H.5})$$

où Z_i sont des variables indépendantes suivant une loi normale standard. Ainsi, $\sum_{i=1}^M Z_i^2$ suit une distribution de Khi-deux avec M degré de liberté. En conséquence, la région de confiance valide est déterminée en choisissant :

$$C = (X|X' \Omega^{-1} X \leq c_\alpha), \quad (\text{H.6})$$

où c_α est le quantile α de la distribution de Khi-deux avec M degré de liberté.

Sous les conditions de multinormalité des variables X et de la linéarité de la fonction de distribution des pertes et profits $v(X) = \sum_{i=1}^M w_i X_i$, il est possible de déduire une expression analytique de la perte maximale ML :

$$\min_x w'X \quad \text{s.c.} \quad X'\Omega^{-1}X \leq c_\alpha \quad (\text{H.7})$$

où $w'X$ est la distribution de perte et profit du portefeuille.

Le choix de la région de confiance est effectué en utilisant le quantile α de la distribution Khi-deux par :

$$c_\alpha = X'\Omega^{-1}X \quad (\text{H.8})$$

En supposant $X'\Omega^{-1}X \leq c_\alpha$ pour une constante c_α , cela exige que les rentabilités des facteurs de risque soient dans la région de confiance. La matrice de variance-covariance Ω peut être spécifiée selon les données historiques ou par le stress de la matrice de covariance.

En définissant les fonctions $f(X) = w'X$ et $g(X) = X'\Omega^{-1}X - c_\alpha$, le problème d'optimisation peut se réécrire comme suit :

$$\min f(X) \quad \text{s.c.} \quad g(X) \leq 0 \quad (\text{H.9})$$

Comme $f(X)$ et $g(X)$ sont des fonctions convexes, la solution X^* doit satisfaire les trois conditions de *Kuhn-Tucker* :

$$\nabla f(X^*) = -\lambda \nabla g(X^*) \quad (\text{H.10})$$

$$\lambda g(X^*) = 0 \quad (\text{H.11})$$

$$\lambda \neq 0 \quad (\text{H.12})$$

En considérant l'équation H.11, λ est exprimé par :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2\sqrt{C_\alpha}}{\sqrt{w'\Omega w}} \quad (\text{H.13})$$

L'équation H.10 implique

$$w = -2\lambda\Omega^{-1}X^* \quad (\text{H.14})$$

et donc $\lambda \neq 0$.

En substituant la valeur de λ dans l'équation H.14, nous pouvons déterminer les valeurs des facteurs de risque par l'expression :

$$X^* = -\frac{\sqrt{C_\alpha}}{\sqrt{w'\Omega w}}\Omega w \quad (\text{H.15})$$

et la perte maximale peut être donnée par :

$$ML = -\sqrt{C_\alpha}\sqrt{w'\Omega w} \quad (\text{H.16})$$

Bibliographie

- Acar, E. and S. James (1997). Maximum loss and maximum drawdown in financial markets. In *Forecasting Financial Markets Conference in London*.
- Acerbi, C. and D. Tasche (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance* 26(7), 1487–1503.
- Alexander, C. and C. Leigh (1997). On the covariance matrices used in value at risk models. *The Journal of Derivatives* 4(3), 50–62.
- Alexander, C. and E. Sheedy (2008). Developing a stress testing framework based on market risk models. *Journal of Banking & Finance* 32(10), 2220–2236.
- Angelidis, T. and A. Benos (2006). Liquidity adjusted value-at-risk based on the components of the bid-ask spread. *Applied Financial Economics* 16(11), 835–851.
- Aragones, J., C. Blanco, and K. Dowd (2001). Incorporating stress tests into market risk modeling. *Derivatives Quarterly* 7(3), 44–50.
- Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance* 9(3), 203–228.
- Balkema, A. A. and L. d. Haan (1974). Residual life time at great age. *The Annals of Probability* 2(5), 792–804.

- Bangia, A., F. Diebold, T. Schuermann, and J. Stroughair (2002). Modeling liquidity risk, with implications for traditional market risk measurement and management. *Risk Management : The State of the Art*, 3–13.
- Barone-Adesi, G. and F. Bourgoïn (1998). Don't look back. *Risk* 11(8), 100–103.
- Barone-Adesi, G., F. Bourgoïn, and K. Giannopoulos (1998). A probabilistic approach to worst case scenarios. *Risk*.
- Barone-Adesi, G., K. Giannopoulos, and L. Vosper (1999). VaR without correlations for portfolios of derivative securities. *Journal of Futures Markets* 19(5), 583–602.
- Barone-Adesi, G., K. Giannopoulos, and L. Vosper (2000). Filtered historical simulation. *BacktestAnalysis, University of Westminster*.
- Basel Committee, B. S. (1998). International convergence of capital measurement and capital standards. *Bank for International Settlements*.
- Basel Committee, B. S. (2005). A survey of stress tests and current practice at major financial institutions. *Bank for International Settlements*.
- Basel Committee, B. S. (2008). Principles for sound liquidity risk management and supervision. *Bank for International Settlements*.
- Basel Committee, B. S. (2009). Revisions to basel II market risk framework. *Bank for International Settlements*.
- Basel Committee, B. S. (2010). Basel III : a global regulatory framework for more resilient banks and banking systems. *Bank for International Settlements*.
- Beder, T. (1995). VaR : seductive but dangerous. *Financial Analysts Journal*, 12–25.
- Berkowitz, J. (1999). A coherent framework for stress-testing. *FEDS Working Paper No. 99-29*.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics* 31(3), 307–327.

-
- Bouye, E., V. Durrleman, A. Nikeghbali, G. Riboulet, and T. Roncalli (2000). Copulas for finance : A reading guide and some applications. *Manuscript, Financial Econometrics Research Center*.
- Box, G., G. Jenkins, and G. Reinsel (1994). Time series analysis. *Forecasting, and Control*.
- Breymann, W., A. Dias, and P. Embrechts (2003). Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance.
- Campbell, S. (2005). *A review of backtesting and backtesting procedures*. Citeseer.
- Cherubini, U., E. Luciano, and W. Vecchiato (2004). *Copula methods in finance*. John Wiley and Sons.
- Christoffersen, P. (1998). Evaluating interval forecasts. *International economic review*, 841–862.
- Cluff, M. and W. Jones (2011). Perspectives agricoles de l'OCDE et de la FAO 2011-2010.
- Costinot, A., G. Riboulet, T. Roncalli, and C. Lyonnais (2000). Stress testing et théorie des valeurs extrêmes : une vision quantifiée du risque extrême. *Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais*.
- Dacorogna, M. M., U. A. Muller, O. V. Pictet, C. G. De Vries, and T. Institute (1995). *The distribution of extremal foreign exchange rate returns in extremely large data sets*. Citeseer.
- Danielsson, J. and C. G. De Vries (2000). Value-at-risk and extreme returns. *Annales d'Economie et de Statistique*, 239–270.
- Davis, E. (2003). Towards a typology for systemic financial instability. *Economics*.
- Davison, A. C. and R. L. Smith (1990). Models for exceedances over high thresholds. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 52(3), 393–442.
- Demarta, S. and A. J. McNeil (2005). The t copula and related copulas. *International Statistical Review* 73(1), 111–129.

- Ding, Z., C. Granger, and R. Engle (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of empirical finance* 1(1), 83–106.
- Dowd, K. (2005). *Measuring market risk* (2nd ed. ed.). Chichester England ,Hoboken NJ : John Wiley & Sons.
- Dumontier, P., D. Dupre, and C. Martin (2008). *Gestion et contrôle des risques bancaires : l'apport des IFRS et de Bale II*. Paris : "Revue Banque" Ed.
- Embrechts, P., R. Kaufmann, and P. Patie (2005). Strategic long-term financial risks : Single risk factors. *Computational optimization and applications* 32(1), 61–90.
- Embrechts, P., C. Kluppelberg, and T. Mikosch (1997). *Modelling extremal events for insurance and finance*. Springer Verlag.
- Embrechts, P., F. Lindskog, and A. McNeil (2003). Modelling dependence with copulas and applications to risk management. *Handbook of heavy tailed distributions in finance* 8(329-384), 1.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica* 50(4), 987–1007.
- Fama, E. (1965). Portfolio analysis in a stable paretian market. *Management science*, 404–419.
- Fama, E. F. and M. H. Miller (1972). *The theory of finance*. Holt, Rinehart and Winston New York.
- Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 2* (2 ed.). Wiley.
- Fender, I. and J. Gyntelberg (2008). Vue d'ensemble - mesures sans précédent face à une crise financière mondiale. *Bank for International Settlements*.
- Finger, C. (1997). A methodology to stress correlations. *RiskMetrics Monitor* 4, 3–11.

-
- Fromont, E. (2005). Modélisation des rentabilités extrêmes des distributions de hedge funds. *Banque & Marchés* (79), 31–41.
- Gavin, J. (2000). Extreme value theory-an empirical analysis of equity risk.
- Genest, C., K. Ghoudi, and L. P. Rivest (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika* 82(3), 543.
- Glosten, L. R., R. Jagannathan, and D. E. Runkle (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The Journal of Finance* 48(5), 1779–1801.
- Gnedenko, B. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire. *The Annals of Mathematics* 44(3), 423–453.
- Greenspan, A. (2000). Greenspan's plea for stress testing. *Risk* (13).
- Jackson, P., D. Maude, and W. Perraudin (1998). Bank capital and value at risk. *Bank of England Working Paper No. 79*.
- Jenkinson, A. F. (1955). The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 81(348), 158–171.
- Joe, H. and J. J. Xu (1996). The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. *Department of Statistics, University of British Columbia, Technical Report 166*.
- Jorion, P. (2000). *Value at risk : the new benchmark for managing financial risk*. (2. edition. ed.). London : McGraw-Hill.
- Kim, J. and C. Finger (2000). A stress test to incorporate correlation breakdown. *Journal of Risk* 2, 5–20.
- Kotz, S., N. L. Johnson, and N. Balakrishnan (2000). *Continuous multivariate distributions : models and applications*, Volume 1. Wiley-Interscience.

- Kourouma, L., D. Dupre, G. Sanfilippo, and O. Taramasco (2011). Extreme value at risk and expected shortfall during financial crisis. *CERAG, Cahier de recherche N° 2011-03E2*.
- Kupiec, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of derivatives* 3(2), 73–84.
- Kupiec, P. (1998). Stress testing in a value at risk framework. *The Journal of Derivatives* 6(1), 7–24.
- Lo, A. and A. Craig MacKinlay (1990). An econometric analysis of nonsynchronous trading. *Journal of Econometrics* 45(1-2), 181–211.
- Longin, F. (1996). The asymptotic distribution of extreme stock market returns. *Journal of Business* 69(3), 383–408.
- Longin, F. (1998). Value at risk : Une nouvelle approche fondée sur les valeurs extrêmes. *Annales d'Economie et de Statistique* (52).
- Longin, F. (2000). From value at risk to stress testing : The extreme value approach. *Journal of Banking & Finance* 24(7), 1097–1130.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *The journal of business* 36(4), 394–419.
- Marinelli, C., S. d'Addona, and S. Rachev (2007). A comparison of some univariate models for Value-at-Risk and expected shortfall. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 10(6), 1043–1075.
- McNeil, A. J. (1999). Extreme value theory for risk managers. *Internal modelling and CAD II* 3.
- McNeil, A. J. et al. (2005). Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory. *Astin Bulletin* 27(1), 117–138.

-
- McNeil, A. J. and R. Frey (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series : an extreme value approach. *Journal of empirical finance* 7(3-4), 271–300.
- McVey, H. H. (2010, February). Commodities : Friends or foe? *Morgan Stanley*.
- Mori, A., M. Ohsawa, and T. Shimizu (1995). A framework for more effective stress testing. pp. 403–430. EconPapers.
- Neftci, S. N. (2000). Value at risk calculations, extreme events, and tail estimation. *The Journal of Derivatives* 7(3), 23–37.
- Neyman, J. and E. Pearson (1928). On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference : Part i. *Biometrika* 20(1/2), 175–240.
- Perignon, C. and D. Smith (2010). The level and quality of Value-at-Risk disclosure by commercial banks. *Journal of Banking and Finance* 34(2), 362–377.
- Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *The Annals of Statistics* 3(1), 119–131.
- Prato, O. (2006). Mieux appréhender les risques du portefeuille de négociation. *RSF REVUE*, 53.
- Rebonato, R. and P. Jackel (1999). The most general methodology to create a valid correlation matrix for risk management and option pricing purposes. *Quantitative Research Centre of the NatWest Group* 19.
- Roncalli, T. (2009). *La gestion des risques financiers*. Paris : Economica.
- Sardi, A. (2008). *Bale II : transposition en France*. Paris : Afges ed. bancaire.
- Studer, G. (1997). *Maximum loss for measurement of market risk*. Ph. D. thesis, Swiss Federal Institute of Technology Zurich.
- Tan, K. and I. Chan (2003). Stress testing using VaR approach : a case for asian currencies. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money* 13(1), 39–55.

Zeevi, A. and R. Mashal (2002). Beyond correlation : Extreme co-movements between financial assets. *Columbia University*.

1.5

Résumé

Suite à la crise financière et économique de 2008, il a été constaté sur le portefeuille de négociation des banques un montant de capital réglementaire significativement inférieur aux pertes réelles. Pour comprendre les causes de cette insuffisance de capital réglementaire, il nous a paru important d'évaluer la fiabilité des modèles de mesure de risque de marché et de proposer des méthodologies de stress test pour la gestion des risques extrêmes. L'objectif est de mesurer le capital réglementaire sur un portefeuille de négociation composé d'actions et de matières premières par la mesure de la Value at Risk (VaR) et l'Expected Shortfall. Pour réaliser cet objectif, nous avons utilisé le modèle *Generalized Pareto Distribution* (GPD) et deux modèles internes des banques : méthode de la Simulation Historique et modèle de la loi normale.

Une première évaluation de la fiabilité effectuée sur les trois modèles de risque sous l'hypothèse de volatilité constante, montre que les modèles internes des banques et le modèle GPD ne mesurent pas correctement le risque du portefeuille d'étude pendant les périodes de crise. Néanmoins, le modèle GPD est fiable en période de faible volatilité mais avec une forte surestimation du risque réel ; cela peut conduire les banques à bloquer plus de fonds propres réglementaires qu'il est nécessaire. Une seconde évaluation de la fiabilité des modèles de risque a été effectuée sous l'hypothèse du changement de la volatilité et par la prise en compte de l'effet asymétrique des rentabilités financières. Le modèle GPD s'est révélé le plus fiable quelles que soient les conditions des marchés. La prise en compte du changement de la volatilité a amélioré la performance des modèles internes des banques.

L'intégration des scénarios historiques et hypothétiques dans les modèles de risque a permis d'évaluer le risque extrême tout en diminuant la subjectivité reprochée aux techniques de stress test. Le stress test réalisé avec les modèles internes des banques ne permet pas une mesure correcte du risque extrême. Le modèle GPD est mieux adapté pour le stress test. Nous avons développé un algorithme de stress test qui permettra aux banques d'évaluer le risque extrême de leurs portefeuilles et d'identifier les facteurs de risque contribuant à la réalisation de ce risque. Le calcul du capital réglementaire sur la base de la somme de la VaR et du stress VaR n'est pas logique et entraîne un doublement des fonds propres réglementaires des banques. Le doublement de ces fonds propres aura pour conséquence le resserrement du crédit à l'économie. Nous observons que le coefficient multiplicateur et le principe de la racine carrée du temps de l'accord de Bâle conduisent les banques à faire un arbitrage en faveur des modèles de risque non fiables.

Mots-clés: Capital réglementaire, Risque de marché, Value at Risk, Expected Shortfall, Stress test, Théorie des valeurs extrême.

Abstract

During the financial and economic crisis of 2008, it was noticed that the amount of capital required for banks' trading portfolio was significantly less than the real losses. To understand the causes of this low capital requirement, it seemed important to estimate the reliability of the market risk models and to propose stress testing methodologies for the management of extreme risks. The objective is to measure the capital requirement on a trading portfolio composed of shares and commodities by the measure of Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall. To achieve this goal, we use the Generalized Pareto Distribution (GPD) and two internal models commonly used by banks : historical simulation method and model of normal law.

A first evaluation of the reliability made on the three risk models under the hypothesis of constant volatility, shows that the internal banks' models and the GPD model do not measure correctly the risk of the portfolio during the crisis periods. However, GPD model is reliable in periods of low volatility but with a strong overestimation of the real risk ; it can lead banks to block more capital requirement than necessary. A second evaluation of the reliability of the risk models was made under the hypothesis of the change of the volatility and by considering the asymmetric effect of the financial returns. GPD model is the most reliable of all, irrespective of market conditions. The performance of the internal banks' risk models improves when considering the change of the volatility.

The integration of the historic and hypothetical scenarios in the risk models, improves the estimation of the extreme risk, while decreasing the subjectivity blamed to the stress testing techniques. GPD model is better adapted for the stress testing. We developed an algorithm of stress testing which allow banks to estimate the extreme risk of their portfolios and to identify the risk factors causing this risk. The calculation of the capital requirement based on the sum of the VaR and the stress VaR is not logical and leads to doubling the capital requirement of banks. Consequently, it conducts to a credit crunch in the economy. We observe that the multiplier coefficient and the principle of the square root of time of the Basel's agreement lead banks to make arbitration in favor of the risk models that are not reliable.

Keywords: Capital requirement, Market risk, Value at Risk, Expected Shortfall, Stress testing, Extreme Value Theory.