



HAL
open science

Propriétés moyennes des modèles inhomogènes en cosmologie relativiste

Xavier Roy

► **To cite this version:**

Xavier Roy. Propriétés moyennes des modèles inhomogènes en cosmologie relativiste. Autre. Université Claude Bernard - Lyon I, 2011. Français. NNT : 2011LYO10255 . tel-00864219

HAL Id: tel-00864219

<https://theses.hal.science/tel-00864219v1>

Submitted on 20 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

délivrée par

L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1

L'ÉCOLE DOCTORALE DE PHYSIQUE ET D'ASTROPHYSIQUE DE
LYON

pour l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTORAT

(arrêté du 7 août 2006)

soutenue publiquement le 5 décembre 2011

par

M. Xavier Roy

SUJET :

PROPRIÉTÉS MOYENNES DES MODÈLES INHOMOGÈNES EN
COSMOLOGIE RELATIVISTE

Directeur de thèse :

M. Thomas Buchert

Rapporteurs :

M. Roland Triay

M. Jean-Philippe Uzan

Jury :

M. Jean-Michel Alimi

M. Thomas Buchert

M^{me} Ruth Durrer

M. Julien Lesgourgues

M. Pierre Salati

Table des matières

Remerciements	5
Résumé – Abstract	9
Notations	11
1 Préambule	13
2 Introduction	15
2.1 Modèle standard de la cosmologie	15
2.1.1 Les équations d'Einstein	15
2.1.2 Les ingrédients du MCS	16
2.2 Inhomogénéités en cosmologie	21
2.2.1 Le problème de la moyenne et rétroaction	22
2.2.2 Les différentes procédures de moyennage	24
2.3 Évolution moyenne d'un univers inhomogène	24
2.3.1 Le feuilletage de l'espace-temps	25
2.3.2 La dynamique globale d'un domaine spatial compact	29
2.3.3 Les formulations équivalentes	34
2.4 Conclusion	36
3 Cosmologies inhomogènes et gaz de Chaplygin	39
4 Cosmologies inhomogènes et champ scalaire effectif	63
5 Instabilité gravitationnelle globale des fonds FL	69
6 Fluctuations de poussière autour d'un fond général	87
7 Conclusion et perspectives	109
Bibliographie	113

Remerciements

Je remercie en tout premier lieu mon superviseur de thèse, Thomas Buchert. Je le remercie pour sa sympathie et sa bonne humeur, sa constante disponibilité et sa grande patience. Je le remercie également pour son soutien et sa compréhension pendant la rédaction émotive du manuscrit. Je remercie ensuite Nathaniel Obadia pour sa sympathie, sa motivation communicative dans nos projets et pour sa relecture du manuscrit. *“Bon, c’est la vie.”* Je remercie aussi mes deux rapporteurs, Roland Triay et Jean-Philippe Uzan, pour le temps qu’ils ont consacré à la lecture du manuscrit. Leurs nombreuses remarques et corrections ont permis une amélioration appréciable. Je remercie également Jean-Michel Alimi, Ruth Durrer, Julien Lesgourgues et Pierre Salati d’avoir accepté d’être membres de mon jury de thèse, et pour le temps conséquent consacré.

Cette thèse est le produit de chaque rencontre et de chaque interaction, et mes remerciements sincères s’adressent simplement à chaque personne cotoyée.

Je remercie le CRAL pour l’ensemble des rencontres apportées, aussi bien dans ses locaux de l’observatoire que dans ceux de l’ENS. Plus particulièrement, ma première pensée amicale est pour Nataša, avec laquelle j’ai vécu mes quelques semaines de résidence au CRAL, il y a de ça trois ans maintenant. Je pense ensuite aux occupants passés ou actuels pour les sorties et loisirs partagés : Dylan (Biquette), Johan, Maxime (Mister Civ), Pierre-Yves et Thibault (“Big up!”) du côté de l’observatoire ; Jacques, Cyril, Neil, François, Jérémy et Christophe du côté de l’ENS. J’ai aussi à l’esprit le nom de tous les autres. Il suffirait de nommer chaque personne cotoyée au CRAL, et j’y associerais un souvenir plaisant. Merci à tous.

Je pense ensuite aux amis qui ont fait de mon séjour à Lyon une étape agréable de ma vie : Janice, Patricia, Loan, Kerstin et Walter (avec la découverte du ‘Feuerzangenbowle’), ainsi que Pauline, Nicolas (Mister Flow), Hervé (“On coupe en six!”), Matthieu (“Vive le twist!”), Bush et Joseph.

Mes derniers remerciements s’adressent naturellement à ma famille, mes parents, mon frère et ma soeur, pour le soutien et les encouragements que chacun a su m’apporter. Je remercie finalement Cécile, pour tout l’amour qu’elle m’a donné et pour m’avoir redonné le goût de la magie et des mystères de la vie. Sans mes proches, ce manuscrit n’aurait vu le jour, et je les en remercie infiniment.

*‘Puisque la vie est un livre d’histoires, je tâcherai
d’y écrire petit et bien avant de tourner chaque page’*

À ma famille.

Résumé & Abstract

RÉSUMÉ

Le modèle cosmologique standard possède plusieurs lacunes pour une description pertinente de l'évolution de notre univers et de ses constituants. Tout d'abord, il laisse en suspens l'explication de l'origine de la matière noire et de l'énergie sombre. Ces composants, introduits *ad hoc* afin de satisfaire aux observations, représentent ensemble environ 95% du contenu en énergie de l'univers. Un second problème concerne l'indépendance d'échelle du modèle : quelque soit l'échelle du système considéré, il est attendu une dynamique et une géométrie identiques.

Il est possible de se détourner du modèle standard et de s'intéresser à des cosmologies inhomogènes et à leur évolution moyenne. Selon ce formalisme, les inhomogénéités au sein d'une échelle influencent globalement la dynamique de cette dernière par un effet dit de rétroaction. Cette démarche très riche propose également une explication élégante au problème des constituants sombres : tous deux apparaissent comme une manifestation effective des inhomogénéités de distributions de matière et de géométrie.

Cette thèse s'intéresse aux propriétés des modèles inhomogènes moyennés en relativité générale. Nous proposons dans un premier temps de décrire le comportement global des inhomogénéités selon une évolution de Chaplygin, et selon une évolution de Ginzburg–Landau. Nous montrons également l'instabilité gravitationnelle globale des solutions de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker. Cette classe de solutions est connue comme étant localement instable sous l'introduction de perturbations ; ici nous montrons qualitativement qu'elle ne fournit pas, en général, une approximation correcte en tant que fond physique. Nous présentons finalement une nouvelle théorie relativiste perturbative, pour laquelle les inhomogénéités scalaires évoluent autour d'un fond général, et non plus autour d'un fond de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker pré-défini. Cette nouvelle étude étend l'applicabilité des cosmologies inhomogènes, et pourrait éventuellement expliquer la formation des grandes structures sans recours à l'énergie noire.

ABSTRACT

The standard cosmological model possesses some shortcomings for a relevant description of our universe and its constituents. First, it leaves in suspense the explanation of the origin of dark matter and dark energy. These components, introduced *ad hoc* in order to fit the observations, represent about 95% of the total energy. A second issue concerns the scale-independence of the model: whatever the scale of the considered system, it is expected identical dynamics and geometry.

It is advisable to abandon the standard model and to focus on inhomogeneous cosmologies, and their average evolution. According to this formalism, inhomogeneities within a chosen scale globally impact on the dynamics of this latter through a so-called backreaction effect. This very rich approach also proposes an elegant explanation for the problem of the dark constituents: both stand for an effective manifestation of the inhomogeneities in the distributions of matter and geometry.

This thesis focusses on the properties of averaged inhomogeneous models in general relativity. We first propose to describe the global behaviour of inhomogeneities according to a Chaplygin evolution, and according to a Ginzburg–Landau evolution. We also show the global gravitational instability of Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker solutions. This class of solutions is already known to be locally gravitationally unstable under the introduction of perturbations; here we show qualitatively that it does not furnish, in general, a good approximation as a physical background. We finally present a new relativistic perturbative scheme, in which scalar inhomogeneities evolve on a general background rather than on a pre-defined Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker background. This new study extends the framework of application for inhomogeneous cosmologies, and may possibly explain the large-scale structure formation without the need for dark energy.

Notations

Abréviations

BSSN	Baumgarte–Shapiro–Shibata–Nakamura
CMB	‘Cosmic Microwave Background’, ou fond diffus cosmologique
FL	Friedmann–Lemaître
LTB	Lemaître–Tolman–Bondi
MCS	Modèle Cosmologique Standard

Constantes

Λ	constante cosmologique
c	vitesse de la lumière dans le vide ($\equiv 299\,792\,458\text{ m s}^{-1}$)
k	courbure scalaire spatiale du fond FL ($= -1, 0, +1$)
G_N	constante de Newton ($= 6,673\,84(80) \times 10^{-11}\text{ m}^3\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-2}$)

Ensembles

\mathcal{M}	variété d’espace-temps à quatre dimensions
Σ_t	sous-variété de \mathcal{M} à trois dimensions de genre espace
D	domaine spatial compact de Σ_t

Scalars

α	lapse
γ	facteur de Lorentz
ϵ	densité d’énergie du fluide dans le référentiel de quadri-vitesse n^μ
Θ	taux d’expansion du fluide dans le référentiel de quadri-vitesse u^μ
ρ	densité d’énergie du fluide dans le référentiel de quadri-vitesse u^μ
σ^2	taux de cisaillement du fluide dans le référentiel de quadri-vitesse u^μ
ω^2	taux de vorticité du fluide dans le référentiel de quadri-vitesse u^μ
Ω_f	paramètre cosmologique du champ f
Ω_f^D	paramètre cosmologique effectif du champ f sur D
a	facteur d’échelle du fond FL
a_D	facteur d’échelle effectif de D
H	paramètre de Hubble du fond FL

Notations

H_D	paramètre de Hubble effective du domaine D
\mathcal{Q}_D	rétroaction cinématique sur D
p	pression du fluide dans le référentiel de quadri-vitesse u^μ
${}^3\mathcal{R}$	scalaire de Ricci de Σ_t
${}^4\mathcal{R}$	scalaire de Ricci de \mathcal{M}
\mathcal{W}_D	rétroaction de courbure sur D

Symboles

\equiv	égal par définition
\approx	égal à peu près
\propto	proportionnel
$\langle \cdot \rangle_D$	moyenne sur D
$\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu, \dots$	composantes d'espace-temps sur \mathcal{M}
a, b, \dots, i, j, \dots	composantes d'espace sur Σ_t

Tenseurs d'ordre 1

∇_μ	connexion de Levi–Civita de \mathcal{M}
β^i	shift sur Σ_t
\mathcal{D}_i	connexion de Levi–Civita de Σ_t
J_μ	densité de quantité de mouvement du fluide dans le référentiel de quadri-vitesse n^μ
n^μ	vecteur orthogonal aux hypersurfaces Σ_t
u^μ	quadri-vitesse du fluide sur \mathcal{M}
v^μ	quadri-vecteur du fluide dans le référentiel de quadri-vitesse n^μ

Tenseurs d'ordre 2

$\Theta_{\mu\nu}$	tenseur d'expansion du fluide dans le référentiel de quadri-vitesse u^μ
$\sigma_{\mu\nu}$	tenseur de cisaillement du fluide dans le référentiel de quadri-vitesse u^μ
$\omega_{\mu\nu}$	tenseur de vorticité du fluide dans le référentiel de quadri-vitesse u^μ
$g_{\mu\nu}$	tenseur métrique de \mathcal{M}
$G_{\mu\nu}$	tenseur d'Einstein de $g_{\mu\nu}$
$h_{\mu\nu}$	tenseur de projection orthogonale sur Σ_t
h_{ij}	tenseur métrique de Σ_t
K_{ij}	tenseur de courbure extrinsèque de Σ_t
${}^4\mathcal{R}_{\mu\nu}$	tenseur de Ricci de $g_{\mu\nu}$
${}^3\mathcal{R}_{ij}$	tenseur de Ricci de h_{ij}
$S_{\mu\nu}$	tenseur de contraintes du fluide dans le référentiel de quadri-vitesse n^μ
$T_{\mu\nu}$	tenseur énergie-impulsion du fluide

CHAPITRE 1

Préambule

L'évolution globale de l'univers et de ses constituants, ainsi que l'histoire de la formation de ses structures, sont fournies par le Modèle Cosmologique Standard (MCS). Ce modèle prend en compte l'existence d'une échelle spatiale, d'environ 100 Mpc/h [Amen-dola et Palladino, 1999 – Yadav *et al.*, 2005 – Thieberger et Celerier, 2008 – Labini, 2011], au-delà de laquelle l'espace observé est statistiquement homogène et isotrope, et suppose que les structures des échelles inférieures n'impactent pas sur sa dynamique globale. En d'autres termes, le MCS modélise l'évolution globale de l'univers par une distribution uniforme des sources gravitationnelles dans un espace à géométrie homogène.

Afin de rendre compte des observations cosmologiques, ce modèle considère que l'univers est constitué de matière baryonique, de matière noire et d'énergie sombre. La matière noire, composant de pression nulle, permet d'expliquer l'anomalie des courbes de rotation des galaxies [Zwicky, 1933 – Rubin et Ford, 1970 – Rubin *et al.*, 1980], et l'énergie noire, composant de pression négative, permet d'expliquer quant à elle l'expansion accélérée de l'univers [Riess *et al.*, 1998, 2007 – Perlmutter *et al.*, 1999] et la formation des structures aux grandes échelles [Colless *et al.*, 2003 – Cole *et al.*, 2005 – Percival *et al.*, 2007]. Ces deux constituants représentent dans le modèle standard plus de 95% du budget énergétique de l'univers. Leur nature demeure toutefois sujet à débat, et la recherche de leur origine constitue un des travaux principaux de la physique moderne.

Une des approches est de rechercher ces éléments manquants du côté de la physique des particules. Matière noire et énergie sombre sont alors supposées être des sources gravitationnelles fondamentales. Les candidats particuliers à la matière noire sont nombreux (voir [Feng, 2010] pour une revue), et il existe quelques propositions de champs scalaires pour l'énergie sombre (voir [Caldwell *et al.*, 1998 – Caldwell, 2002 – Kamenshchik *et al.*, 2001] pour des prétendants, et pour une revue [Copeland *et al.*, 2006]). Notons que l'énergie sombre peut également être interprétée comme une manifestation de l'énergie du vide, au travers de la constante cosmologique Λ . Les investigations dans ce secteur sont en cours et font notamment l'objet d'expériences de détection pour la matière noire (voir par exemple [CDMS, 2010 – EDELWEISS, 2011 – XENON100, 2011] pour les recherches directes, et [ANTARES, 2010 – PAMELA, 2011] pour les recherches indirectes).

Il est également possible de modifier la théorie de la gravitation d'Einstein en élargissant l'expression de son lagrangien. L'extension générale est l'ajout d'une constante cosmologique Λ , en tant que quantité géométrique. Celle-ci joue alors le rôle de constante de couplage dans l'extension du tenseur d'Einstein [Souriau, 1964, 1974 – Triay, 2010]. D'autres extensions du lagrangien peuvent être trouvées dans la littérature et sont le su-

jet d’actives recherches, tant sur un traitement isolé que sur des connexions entre elles. Citons entre autres les théories de Brans–Dicke [Brans et Dicke, 1961], les théories $f(R)$ (voir [Sotiriou et Faraoni, 2010] pour une revue) et les théories tenseur-vecteur-scalaire [Bekenstein, 2004]. Chacun des modèles reprend l’hypothèse d’un espace homogène et isotrope, et explique la matière noire et l’énergie sombre comme des manifestations effectives des degrés de liberté gravitationnelle supplémentaires introduits par les extensions.

Enfin, une alternative propose de conserver le cadre théorique de la relativité générale, mais de prendre en compte la présence d’inhomogénéités au sein de l’échelle d’homogénéité et d’isotropie statistiques. Celles-ci s’interprètent comme un effet dit de rétroaction sur la dynamique de l’espace-temps moyen et participe à l’histoire de la formation de ses structures. Les composants sombres sont ici pensés comme la manifestation des effets de rétroaction. Le problème sous-jacent est de quantifier ces effets afin de connaître leur propension à rendre compte effectivement de la matière noire et de l’énergie sombre nécessaires au MCS. L’approche initiée par Buchert [2000, 2001] dresse le formalisme permettant d’y répondre, et constitue le cadre du travail de cette thèse. Le sujet des inhomogénéités en cosmologie et de leur prise en compte pour un modèle pertinent d’évolution d’univers regroupe une communauté grandissante de chercheurs et a fait récemment l’objet d’une section spéciale dans la revue ‘Classical and Quantum Gravity’¹.

Dans le chapitre 2, nous revenons succinctement sur le modèle cosmologique standard, puis nous détaillons le problème de la moyenne évoqué et nous présentons le formalisme de Buchert dans sa forme initiale. Les chapitres 3, 4, 5 et 6 proposent différentes applications de l’approche de Buchert. Nous concluons finalement au chapitre 7 avec une discussion et quelques perspectives.

1. Classical and Quantum Gravity, Volume 28, Number 16, 21 août 2011, *Focus section on inhomogeneous cosmological models and averaging in cosmology*.

CHAPITRE 2
Introduction

Sommaire

2.1	Modèle standard de la cosmologie	15
2.1.1	Les équations d'Einstein	15
2.1.2	Les ingrédients du MCS	16
2.2	Inhomogénéités en cosmologie	21
2.2.1	Le problème de la moyenne et rétroaction	22
2.2.2	Les différentes procédures de moyennage	24
2.3	Évolution moyenne d'un univers inhomogène	24
2.3.1	Le feuilletage de l'espace-temps	25
2.3.2	La dynamique globale d'un domaine spatial compact	29
2.3.3	Les formulations équivalentes	34
2.4	Conclusion	36

2.1 Modèle standard de la cosmologie

Nous dédions cette première section à la présentation dans ses grandes lignes du Modèle Cosmologique Standard (MCS), permettant de décrire phénoménologiquement l'entière évolution de l'univers et de ses constituants, de sa période d'inflation à son actuelle expansion accélérée. Nous présentons brièvement le cadre théorique duquel il découle, le postulat fondamental amenant sa dérivation et discutons ses réussites, échecs et attentes.

2.1.1 Les équations d'Einstein

La théorie de la relativité générale [Einstein, 1916] identifie la gravitation à la courbure de l'espace-temps issue de la présence de matière et d'énergie. Selon la formule consacrée, la matière dit à l'espace-temps comment se courber, et l'espace-temps dit à la matière comment se mouvoir¹.

Le système physique étudié est formellement associé à une variété différentielle à quatre dimensions (une de temps et trois d'espace) notée \mathcal{M} et dotée d'un tenseur métrique $g_{\mu\nu}$

1. "Matter tells spacetime how to curve, and spacetime tells matter how to move" (voir page xi de [Wheeler, 1990]).

de signature $(-, +, +, +)$ ². La dynamique du couple $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ est reliée à celle de son contenu en matière, de tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$, par les équations d'Einstein :

$$G_{\mu\nu} \equiv {}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}{}^4R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

avec $G_{\mu\nu}$ le tenseur d'Einstein et ${}^4R_{\mu\nu}$ le tenseur de Ricci. ${}^4R \equiv g^{\alpha\beta} {}^4R_{\alpha\beta}$ est le scalaire de courbure de \mathcal{M} , Λ la constante cosmologique et G_N est la constante gravitationnelle. Les équations (2.1) permettent l'étude aussi bien d'objets solitaires extrêmement massifs, comme des étoiles ou des trous noirs, que de systèmes physiques plus étendus et plus complexes, comme notre système solaire, notre galaxie, voire l'univers dans son ensemble. Une fois spécifiés la forme de la métrique et le contenu en matière, nous pouvons connaître l'évolution de la géométrie du système considéré et le comportement du fluide l'emplissant³.

Le MCS s'intéresse à l'étude de l'univers dans son ensemble à grande échelle. Nous présentons ci-dessous le postulat fondamental permettant de construire sa métrique, introduisons les équations régissant son évolution globale, et nous décrivons le processus de formation de ses constituants. Nous discutons finalement les observations cosmologiques qui sous-tendent le modèle.

2.1.2 Les ingrédients du MCS

Principe copernicien

Le principe copernicien stipule qu'il n'existe aucune place privilégiée dans l'univers, et notamment que les observations effectuées depuis la Terre ne possèdent aucun caractère particulier. Appliqué au domaine de la cosmologie, et ajouté à l'isotropie spatiale observée dans le fond diffus cosmologique (voir figure 2.2), le MCS suppose l'isotropie locale de l'univers, soit son homogénéité et son isotropie à toute échelle. Le tenseur métrique de l'espace-temps prend alors la forme [Friedmann, 1922, 1924 – Lemaître, 1927 – Robertson, 1929 – Walker, 1936]

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (2.2)$$

dans le système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . $a(t) > 0$ est le facteur d'échelle de notre univers, égal après renormalisation à l'unité au temps présent⁴, sa dérivée temporelle

2. Les indices grecs représentent les coordonnées d'espace-temps, ils courent dans $\{0, 1, 2, 3\}$, et les indices latins correspondent aux coordonnées spatiales, courant dans $\{1, 2, 3\}$. Nous adoptons la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés, et travaillons dans le système unitaire tel que $c = 1$.

3. Par exemple, pour l'étude d'une étoile ou d'un trou noir statique à symétrie sphérique, on utilise la métrique de Schwarzschild [Schwarzschild, 1916]; pour l'étude d'un objet massif à symétrie sphérique en rotation, on utilise la métrique de Kerr [Kerr, 1963].

4. On note $a(t_0) = 1$, avec t_0 le temps présent.

rend compte de l'expansion ou de la contraction de l'espace ; k est la courbure spatiale et est négative, nulle ou positive pour un univers généralement qualifié d'ouvert, de plat ou de fermé, respectivement⁵. La métrique de Friedmann–Lemaître (FL) (2.2) décrit la géométrie moyenne de toute section spatiale de l'univers selon le MCS.

Aussi, les symétries d'homogénéité et d'isotropie sur $G_{\mu\nu}$ imposent au tenseur énergie-impulsion de s'écrire, dans le référentiel des observateurs fondamentaux (comobile avec le fluide),

$$T_{\mu\nu} = (\varrho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

avec u_μ la forme linéaire duale de la quadri-vitesse u^μ du fluide, ϱ sa densité d'énergie et p sa pression. u^μ est unitaire et de genre temps, $u^\alpha u_\alpha = -1$, et il est tangent aux lignes de flot du fluide. La formulation (2.3) correspond à celle d'un fluide parfait homogène, de viscosité et conductivité thermique nulles [Eckart, 1940].

Équations de Friedmann

En insérant les expressions (2.2) et (2.3) dans les équations d'Einstein, nous obtenons les équations de Friedmann :

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 8\pi G_N \varrho - 3 \frac{k}{a^2} + \Lambda, \quad (2.4)$$

$$3 \frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G_N (\varrho + 3p) + \Lambda. \quad (2.5)$$

Les identités de Bianchi amènent de plus la conservation d'énergie du fluide :

$$u_\beta \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varrho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\varrho + p) = 0, \quad (2.6)$$

avec ∇_μ la connexion de Levi–Civita sur \mathcal{M} ⁶. Le point sur une variable désigne la dérivée covariante $u^\alpha \nabla_\alpha$, ici identique à la dérivée temporelle pour les scalaires seulement.

La constante cosmologique a été introduite en tant que quantité géométrique dans les équations (2.1). Dans ce cas, elle joue le rôle de constante de couplage dans l'extension du tenseur d'Einstein [Souriau, 1964, 1974 – Triay, 2010]. Elle peut également s'apparenter, formellement, à un fluide uniforme et stationnaire si l'on pose :

$$\varrho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G_N}, \quad p_\Lambda \equiv -\frac{\Lambda}{8\pi G_N}. \quad (2.7)$$

5. Un espace est de forme soit ouverte, soit plate ou soit fermée uniquement pour une topologie simplement connexe. La forme ouverte se rapporte à une 3-hyperboloïde, la forme plate à un hyperplan et la forme fermée à une 3-sphère [Thurston, 1982 – Perelman, 2002, 2003a,b]. La topologie étant un paramètre libre dans la théorie de la relativité générale, il est concevable que l'espace soit de nature multi-connexe dans quel cas cette classification exclusive n'est plus applicable. Par exemple un hypertore, de topologie multi-connexe, est à la fois plat — courbure spatiale nulle en tout point — et fermé — fini et sans bord.

6. ∇_μ est donc sans torsion : pour tout champ scalaire ϕ nous avons $\nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \nabla_\nu \nabla_\mu \phi$; et elle est associée à la métrique de \mathcal{M} : $\nabla_\xi g_{\mu\nu} = 0$.

Chapitre 2. Introduction

On relie dans ce cas Λ à la densité d'énergie et à la pression du vide⁷. Les relations (2.4), (2.5) et (2.6) ne sont pas indépendantes ; pour connaître l'évolution du facteur d'échelle de l'univers, on doit préciser l'équation d'état du fluide, généralement supposée de forme :

$$p(t) = w(t) \varrho(t). \quad (2.8)$$

Pour un paramètre $w(t)$ constant, la conservation d'énergie (2.6) amène $\varrho \propto a^{-3(1+w)}$.

Le système ((2.4)–(2.6),(2.8)) permet de retracer l'histoire de l'évolution globale de notre univers et de ses constituants, de sa période d'inflation à son actuelle expansion accélérée (voir figure 2.1 pour une représentation schématique) :

- L'inflation est causée par un champ scalaire fondamentalement couplé ϕ , dominant l'univers et évoluant lentement vers l'état de plus basse énergie de son potentiel $U(\phi)$. La condition d'évolution lente se traduit par une énergie cinétique faible devant le potentiel :

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll U(\phi). \quad (2.9)$$

Les quantités ϕ et $U(\phi)$ sont reliées à la description hydrodynamique d'un fluide parfait selon (voir par exemple [Madsen, 1988])

$$\varrho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + U(\phi), \quad p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - U(\phi), \quad w = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - U(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + U(\phi)}. \quad (2.10)$$

Durant cette courte période, l'univers connaît une croissance quasi-exponentielle, $a \approx e^{Ht}$ avec $H \equiv \dot{a}/a$ le paramètre de Hubble, et devient globalement spatialement plat⁸.

- La phase d'expansion qui suit est causée par la radiation, fluide maintenant dominant, d'équation d'état $w = 1/3$. La densité d'énergie radiative se dilue selon $\varrho_r \propto a^{-4}$ et l'univers croît selon $a \propto t^{1/2}$.
- L'expansion se poursuit et est engendrée par la matière non relativiste sans pression, $w = 0$, de densité d'énergie $\varrho_m \propto a^{-3}$. L'univers s'étend selon $a \propto t^{2/3}$.
- L'expansion s'accélère finalement et est portée par la constante cosmologique, d'équation d'état $w = -1$. Cette période est celle que nous vivons actuellement. En présence de matière, l'univers grandit ici de façon quasi-exponentielle, $a \approx e^{(\Lambda/3)^{1/2}t}$.

7. Voir chapitre Observations, page 20, pour des remarques à ce sujet.

8. Le scénario de l'inflation a été introduit afin de répondre aux problèmes de l'horizon, de la platitude et des monopoles magnétiques [Guth, 1981]. Le mécanisme a ensuite été amélioré [Linde, 1982 – Albrecht et Steinhardt, 1982] jusqu'aux modèles couramment utilisés d'inflation chaotique [Linde, 1983]. Il existe également des extensions à deux champs scalaires de ces scénarios, tel l'inflation hybride [Linde, 1994]. Remarquons que le scénario inflationnaire est une version particulière du modèle cosmologique primordial. Le modèle présenté est le plus simple, et n'est pas encore établi à ce jour.

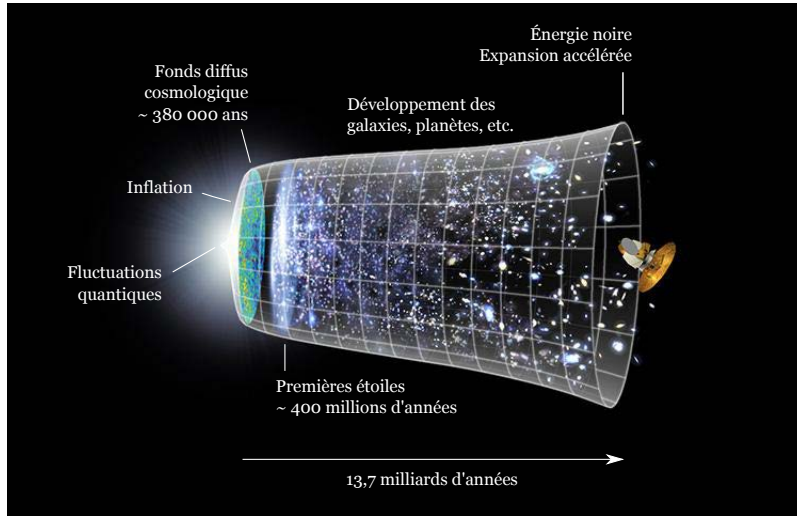


FIGURE 2.1: Représentation schématique de l'évolution de l'univers et de ses constituants selon le MCS (crédit : NASA/WMAP Science Team).

Nous nous intéressons maintenant à la description du processus de formation des structures.

Formation des structures

Les infimes inhomogénéités observées dans le CMB sont les graines des structures que nous observons actuellement : elles sont supposées être issues des fluctuations quantiques d'un champ scalaire fondamental pendant l'inflation, évoluer ensuite autour d'une géométrie homogène et isotrope, donnée par la métrique (2.2), croître au cours du temps par instabilité gravitationnelle pour finalement former des structures en certaines régions de l'espace.

Dans l'approche relativiste, les perturbations de géométrie et de matière sont définies en décomposant les distributions physiques respectives selon :

$$g_{\mu\nu} = \langle g_{\mu\nu} \rangle + \delta g_{\mu\nu}, \quad T_{\mu\nu} = \langle T_{\mu\nu} \rangle + \delta T_{\mu\nu}, \quad \langle g_{\mu\nu} \rangle = 0 = \langle T_{\mu\nu} \rangle, \quad (2.11)$$

avec $\langle \cdot \rangle$ un opérateur de moyenne sur les tenseurs. Nous n'explicitons pas ici ce dernier, mais supposons uniquement qu'il en existe un. Dans la théorie standard [Bardeen, 1980 – Kodama et Sasaki, 1984 – Mukhanov *et al.*, 1992 – Durrer, 1994], la métrique moyenne $\langle g_{\mu\nu} \rangle$ est supposée être la métrique FL (2.2), et le tenseur énergie-impulsion moyen celui d'un fluide parfait (2.3). Il est également admis que non seulement les tenseurs locaux, mais aussi leur valeur moyenne, satisfont les équations de la relativité générale.

Les perturbations $\delta g_{\mu\nu}$ de la métrique sont décomposées en parties scalaire, vectorielle et tensorielle suivant leur comportement selon les rotations spatiales [Lifshitz, 1946]. Les différentes contributions évoluent indépendamment, et seules les perturbations purement

Chapitre 2. Introduction

scalaires sont généralement considérées, car associées à la formation des structures et présentant les instabilités dominantes.

La subtilité d'une théorie relativiste des perturbations réside dans la construction de variables invariantes de jauge. Les perturbations d'une variable en un point sont la différence entre sa valeur locale, définie sur la variété \mathcal{M} , et sa valeur moyenne, définie sur la variété moyenne $\langle \mathcal{M} \rangle$. Il n'existe cependant pas de difféomorphisme, ou jauge, naturel faisant correspondre à tout point de \mathcal{M} un point de $\langle \mathcal{M} \rangle$. Il convient donc de pouvoir s'affranchir de la contribution artificielle du choix d'une jauge sur l'évolution des perturbations, afin de ne garder que la contribution physique. Ceci est assuré en construisant des quantités invariantes de jauge, c'est-à-dire invariante sous une transformation infinitésimale des coordonnées [Bardeen, 1980 – Kodama et Sasaki, 1984 – Mukhanov *et al.*, 1992 – Durrer, 1994].

Le système entier d'équations régissant les évolutions des perturbations est alors obtenu en explicitant la forme des perturbations invariantes de jauge, puis en insérant les décompositions (2.11) dans les équations d'Einstein.

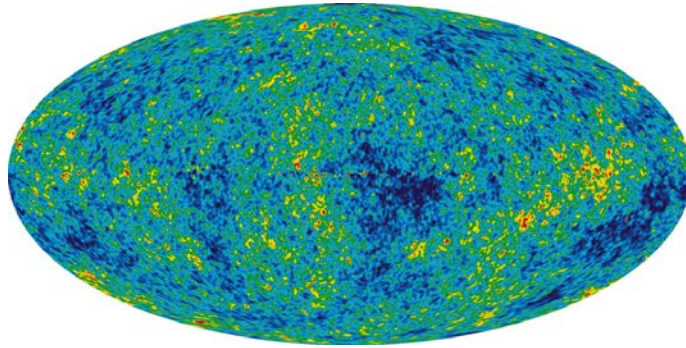


FIGURE 2.2: CMB et ses fluctuations en température, de l'ordre de 10^{-5} . Le CMB représente la surface de dernière diffusion entre électrons et photons, à la suite de laquelle la lumière se propage librement dans l'espace. (crédit : NASA/WMAP Science Team).

Observations

La confrontation du MCS aux observations fait appel à l'introduction des paramètres cosmologiques, définis à partir de l'équation (2.4) selon :

$$\Omega \equiv \frac{8\pi G_N}{3H^2} \varrho, \quad \Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2 H^2}, \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad (2.12)$$

et se sommant à l'unité. Nous avons aussi besoin de définir des distances cosmologiques, afin de connaître les distances des objets visés et le décalage en longueur d'onde de la

lumière qu'ils émettent. Ces distances dépendent systématiquement de la métrique choisie pour décrire l'univers. La justesse du principe copernicien est vérifiée par l'observation des faibles fluctuations en température du CMB, de l'ordre de 10^{-5} (voir figure 2.2), et la métrique (2.2) est donc supposée fournir une description correcte de l'évolution globale de l'univers. Toutefois, le MCS peut rendre compte des diverses analyses uniquement si nous ajoutons à son contenu, en plus de la matière baryonique, de la matière noire et de l'énergie sombre.

L'existence de matière noire, dans un modèle homogène et isotrope, a été mise en évidence à partir de l'observation des courbes de rotation de galaxies et de dispersion de vitesse dans les amas de galaxies [Zwicky, 1933 – Rubin et Ford, 1970 – Rubin *et al.*, 1980]. Cette masse manquante n'interagit pas avec la lumière, elle est donc invisible, mais elle interagit en revanche avec la gravitation. Elle est appelée matière noire froide, ou 'cold dark matter' (CDM) en anglais, et de nombreuses particules, encore théoriques, sont candidates à son explication (voir [Feng, 2010] pour une revue). L'énergie noire quant à elle permet d'expliquer, toujours dans un cadre homogène et isotrope, l'affaiblissement lumineux perçu, en comparaison à celui attendu, des supernovæ de type Ia [Riess *et al.*, 1998, 2007 – Perlmutter *et al.*, 1999]. Il existe plusieurs prétendants à son origine (voir [Copeland *et al.*, 2006] pour une revue); dans l'écriture la plus simple du MCS, elle est supposée être une manifestation de la constante cosmologique. Celle-ci s'identifie alors soit comme une constante de couplage dans l'extension du tenseur d'Einstein [Souriau, 1964, 1974 – Triay, 2010], soit comme l'énergie répulsive du vide. Matière noire froide et constante cosmologique constituent le modèle Λ -CDM permettant de décrire notre univers. Dans le cadre d'interprétation d'une cosmologie FL, l'ensemble des observations amène [Colless *et al.*, 2003 – Cole *et al.*, 2005 – Sanchez *et al.*, 2006 – Tegmark *et al.*, 2006 – Percival *et al.*, 2007 – Komatsu *et al.*, 2011]

$$H_0 = 71,0 \pm 2,5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad t_0 = 13.75 \pm 0.13 \text{ Gyr}, \quad (2.13)$$

$$\Omega_b = 0.0449 \pm 0.0028, \quad \Omega_{mat. \text{ noire}} = 0.222 \pm 0.026, \quad \Omega_\Lambda = 0.734 \pm 0.029. \quad (2.14)$$

Il convient de remarquer que le MCS est d'abord un modèle phénoménologique, ajusté afin de satisfaire aux observations. Les fluides manquants, à ce jour non observés, sont ajoutés *ad hoc* dans la situation homogène et isotrope, puis contraints par les observations⁹. Leur nature et leur origine sortent donc du cadre du MCS. La constante cosmologique, lorsque considérée comme énergie du vide, souffre d'une différence d'estimation entre sa valeur observationnelle et celle issue du cadre de la théorie quantique des champs, de l'ordre de 60 à 120 ordres de grandeur¹⁰. Si l'on veut expliquer l'énergie noire en tant que

9. Vonlanthen *et al.* [2010] ont proposé un jeu de contraintes le plus indépendant possible du modèle cosmologique choisi aux temps avancés, c'est-à-dire pour un décalage en longueur d'onde inférieur à environ 60. Il est en effet important de séparer, avant toute chose, les observations de leur interprétation dans un cadre cosmologique fixé *a priori* [Durrer, 2011].

10. En considérant les équations d'Einstein sans trace comme une alternative à la théorie de la gravitation, il est possible de réconcilier ces deux valeurs [Ellis *et al.*, 2011].

source gravitationnelle, la constante cosmologique est alors généralement abandonnée, au profit d'un champ scalaire fondamental d'équation d'état variable.

Des modifications de la théorie de la relativité générale permettent de comprendre ces composants sombres comme des manifestations des degrés de liberté supplémentaire des extensions introduites (voir par exemple la théorie de [Brans et Dicke \[1961\]](#), la théorie tenseur-vecteur-scalaire de [Bekenstein \[2004\]](#), et les théories $f(R)$ présentées dans [[Sotiriou et Faraoni, 2010](#)]). Une alternative consiste à considérer les inhomogénéités de l'univers, et à supposer qu'elles ont un impact non négligeable sur la dynamique de l'univers. Ce problème est connu sous le nom du problème de la moyenne, et nous l'introduisons maintenant.

2.2 Inhomogénéités en cosmologie

Après cette brève introduction du MCS, nous présentons le problème de la moyenne en cosmologie, mentionné initialement dans [[Shirokov et Fisher, 1963](#)] et repris en détail dans [[Ellis, 1984](#)], et remettons en cause certaines de ses hypothèses. Nous exposons quelques approches résolvant cette difficulté et nous nous attardons dans la section suivante sur l'approche de Buchert, à la base des travaux menés dans la présente thèse.

2.2.1 Le problème de la moyenne et rétroaction

Soit $g_{\mu\nu}$ la métrique physique de notre univers, contenant l'entière information sur la distribution de géométrie. Nous supposons par la suite qu'il existe une procédure de moyennage sur les tenseurs, sans toutefois l'explicitier, que nous notons $\langle \cdot \rangle$; $\langle g_{\mu\nu} \rangle$ décrit ainsi la moyenne de la géométrie. Nous avons donc affaire à deux couples : $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$, caractérisant l'espace-temps réel, et $(\langle \mathcal{M} \rangle, \langle g_{\mu\nu} \rangle)$, caractérisant l'espace-temps moyen issu du processus de moyennage.

La moyenne des équations de la relativité générale (2.1) se note simplement :

$$\langle G_{\mu\nu} \rangle \equiv \langle {}^4R_{\mu\nu} \rangle - \frac{1}{2} \langle {}^4R g_{\mu\nu} \rangle + \Lambda \langle g_{\mu\nu} \rangle = 8\pi G_N \langle T_{\mu\nu} \rangle . \quad (2.15)$$

Dans le même esprit que l'étude perturbative présentée précédemment, nous scindons le tenseur de la métrique en sa moyenne et ses écarts à la moyenne :

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} , \quad g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu , \quad (2.16)$$

où nous avons noté $\bar{g}_{\mu\nu} \equiv \langle g_{\mu\nu} \rangle$ la métrique du fond de l'espace-temps réel, autrement dit la métrique de l'espace-temps moyen, et $\bar{g}^{\mu\nu} \neq \langle g^{\mu\nu} \rangle$ son inverse. Nous avons par construction $h^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} \neq \delta g^{\mu\nu}$ et $\langle \delta g_{\mu\nu} \rangle = 0$.

Nous construisons également, à partir du tenseur $\bar{g}_{\mu\nu}$, l'ensemble des variables géométriques caractérisant $\langle \mathcal{M} \rangle$: ses symboles de Christoffel $\bar{\Gamma}^\xi_{\mu\nu}$, son tenseur de Ricci ${}^4\bar{R}_{\mu\nu}$,

son tenseur d'Einstein $\overline{G}_{\mu\nu}$, *etc.* Il en résulte systématiquement un écart entre les valeurs moyennes des tenseurs géométriques de l'espace-temps réel et les valeurs des tenseurs géométriques de l'espace-temps moyen :

$$\Delta\Gamma^\xi_\mu \equiv \langle \Gamma^\xi_{\mu\nu} \rangle - \overline{\Gamma}^\xi_{\mu\nu} \quad \Delta^4R_{\mu\nu} \equiv \langle {}^4R_{\mu\nu} \rangle - {}^4\overline{R}_{\mu\nu}, \quad \Delta G_{\mu\nu} \equiv \langle G_{\mu\nu} \rangle - \overline{G}_{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

Les équations moyennes d'Einstein (2.15) se reformule alors [Ellis, 2011 – Wiltshire, 2011] :

$$\langle G_{\mu\nu} \rangle = \overline{G}_{\mu\nu} + \Delta G_{\mu\nu} = 8\pi G_N \langle T_{\mu\nu} \rangle. \quad (2.18)$$

Le MCS fait l'hypothèse que la métrique de l'espace-temps moyen est FL, donnée par (2.2), sans néanmoins présenter une procédure explicite de moyennage. Il résoud les équations d'Einstein sur la variété $\langle \mathcal{M} \rangle$, à savoir : $\overline{G}_{\mu\nu} = 8\pi G_N \langle T_{\mu\nu} \rangle$. Comparant cette expression à (2.18), il apparaît que la dynamique moyenne de l'espace-temps réel n'est pas identique à la dynamique de l'espace-temps moyen. Ceci est naturel et est attendu au vu de la non-linéarité de la théorie d'Einstein ; la procédure de moyennage et la construction du tenseur d'Einstein ne commutent pas. Il existe généralement un terme supplémentaire $\Delta G_{\mu\nu}$, appelé terme de rétroaction, qui traduit la présence d'inhomogénéités dans l'espace-temps réel et qui impacte sur l'évolution de l'espace-temps moyen¹¹. La question est alors de savoir quelle est l'importance de cet impact sur le MCS, et si le terme $\Delta G_{\mu\nu}$ est susceptible de rendre compte de la présence effective de la matière noire et de l'énergie sombre manquantes. Autrement dit, est-il correct de négliger la contribution globale des inhomogénéités sur la dynamique de l'espace-temps moyen, et sous quelles conditions ? Il n'existe pas de consensus sur la réponse à ce jour. Dans un de ses récents papiers, Ellis [2011] adresse précisément les arguments des différentes positions.

L'un des défauts principaux du MCS est d'être invariant d'échelle. Les valeurs moyennes des champs de métrique et de matière ne dépendent pas de la section spatiale de l'univers sur laquelle la moyenne est réalisée. Cette propriété est une conséquence du principe copernicien ajouté à l'isotropie observée du CMB, et implique la validité du système ((2.4)–(2.6),(2.8)) à toute échelle (pour une discussion sur, entre autres, le principe copernicien, voir [Uzan, 2010]). Il est toutefois possible d'utiliser une version plus faible du principe copernicien, et demander ainsi l'homogénéité et l'isotropie statistiques des distributions à partir d'une certaine échelle seulement. Toute moyenne effectuée sur des échelles de taille supérieure à cette échelle dite d'homogénéité est alors identique à la moyenne sur l'échelle d'homogénéité même. Pour être correcte, une telle hypothèse demande tout de même des profils de distributions particuliers, et il n'est pas évident que cela soit physiquement réalisé (voir [Labini, 2011] sur la question d'une telle échelle et une estimation récente de sa valeur). Sous les traits de ce principe allégé, le MCS néglige donc l'influence de

11. Remarquons que cette présentation formelle, proposée dans [Ellis, 2011 – Wiltshire, 2011], est avant tout symbolique. Elle permet de souligner l'existence d'un terme géométrique de rétroaction $\Delta G_{\mu\nu}$ affectant l'évolution globale de l'univers, telle que vue par le MCS.

la structure des petites échelles sur la dynamique globale de l'échelle d'homogénéité et sur l'histoire de la formation de ses structures. L'argument en faveur de cet abandon se retrouve généralement dans l'évaluation de l'amplitude des effets de rétroaction pour des modèles de perturbations autour d'un espace-temps moyen FL (voir par exemple [Kolb *et al.*, 2005 – Brown *et al.*, 2009b – Clarkson *et al.*, 2009]). Cette démarche paraît cependant incertaine, car la géométrie de l'espace-temps moyen est alors fixée *a priori*. Rien ne certifie, d'une part, que la procédure de moyennage sur l'espace-temps réel résulte en un espace-temps FL et, d'autre part, que la dynamique de l'espace-temps moyen soit donnée par les équations d'Einstein. Afin de connaître l'amplitude réelle des effets de rétroaction, il nous faut fournir un schéma analogue de traitement des perturbations, mais sur un espace-temps moyen quelconque¹².

La construction du formalisme adéquat, explicitant les effets de rétroaction autour d'un espace-temps moyen quelconque, est donc au cœur de la résolution du problème de la moyenne. Nous présentons maintenant différentes approches, et développons ensuite plus particulièrement le formalisme de Buchert, autour duquel s'organise la présente thèse.

2.2.2 Les différentes procédures de moyennage

La difficulté centrale dans la résolution du problème de la moyenne provient de la construction d'une procédure covariante de moyennage sur les tenseurs.

La gravité macroscopique, proposée par Zalaletdinov [1992, 1993, 1997], moyenne les équations de structure de Cartan [1923, 1924], caractérisant la géométrie d'une variété (pseudo-)riemannienne, afin d'obtenir la dynamique relativiste gravitationnelle des champs tensoriels moyens. Cette approche s'inspire directement de la façon dont une théorie macroscopique de l'électromagnétisme peut être dérivée à partir de la théorie microscopique de Maxwell. La structure supplémentaire introduite par Zalaletdinov est un opérateur de transport bi-local, noté $\mathcal{A}(x, x')$ où x et x' sont deux points de \mathcal{M} , permettant d'écrire l'extension bi-locale $\mathbf{T}^\mu{}_\nu$ de tout tenseur $T^\mu{}_\nu$ selon

$$\mathbf{T}^\mu{}_\nu(x, x') \equiv \mathcal{A}^\mu{}_\alpha(x, x') T^\alpha{}_\beta(x') \mathcal{A}^\beta{}_\nu(x', x). \quad (2.19)$$

La moyenne de l'extension bi-tensorielle sur un sous-domaine d'espace-temps quelconque est alors définie selon

$$\langle T^\mu{}_\nu(x) \rangle \equiv \frac{1}{V_{\mathcal{N}}} \int_{\mathcal{N}} \mathbf{T}^\mu{}_\nu(x, x') \sqrt{-g(x')} d^4x', \quad (2.20)$$

avec $V_{\mathcal{N}} \equiv \int_{\mathcal{N}} \sqrt{-g(x)} d^4x$ et $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. $\mathbf{T}^\mu{}_\nu$ se transforme en tout point comme un tenseur, mais se comporte comme un scalaire une fois intégré sur une région spécifique. La gravité macroscopique repose principalement sur le choix de \mathcal{A} , qui doit satisfaire un ensemble de conditions afin de posséder les propriétés d'un opérateur de moyenne.

12. Le lecteur trouvera le formalisme de ce schéma au chapitre 6.

Un problème majeur de la théorie de Zalaletdinov est de ne posséder que deux échelles : une macroscopique et une microscopique. La première est simplement demandée à être de taille supérieure à la seconde, et il n'existe pas *in fine* de distinction physique précise entre ces deux échelles. Les observations suggèrent également une hiérarchie de moyenne bien plus complexe, que ne peut offrir ce schéma à deux niveaux. Nous renvoyons à la lecture de [Ellis, 2011 – Wiltshire, 2011 – Clarkson *et al.*, 2011b] pour les critiques de cette approche.

Nous pouvons nous libérer de la difficulté de moyennage sur les tenseurs en réalisant des moyennes sur les quantités scalaires, de construction plus aisée. Nous ne chercherons donc pas à effectuer la moyenne des équations d'Einstein sous leur forme tensorielle (2.1), mais plutôt sous leur forme scalaire obtenue par une procédure de décomposition. Ce formalisme a été initié par Buchert [2000] et propose une expression scalaire des effets de rétroaction. Il constitue le cadre du travail de cette thèse, et nous le détaillons maintenant.

2.3 Évolution moyenne d'un univers inhomogène

Nous présentons la dérivation des équations d'évolution moyenne d'un univers inhomogène, selon le formalisme de Buchert. Nous introduisons pour cela le feuilletage (3+1) des équations de la relativité générale, et nous définissons l'opérateur permettant d'obtenir la moyenne de tout champ scalaire sur un domaine spatial de taille quelconque.

2.3.1 Le feuilletage de l'espace-temps

Expression générale

Les équations de la relativité générale sont généralement covariantes et ne dépendent donc pas du choix arbitraire d'un système de coordonnées quadri-dimensionnel. En d'autres termes, il n'existe ni espace absolu ni temps absolu. Le feuilletage de l'espace-temps use d'un choix de paramétrisation particulière pour la représentation dynamique de variables d'espace. Le formalisme (3+1) permet ainsi la réexpression des équations d'Einstein, formulées sur une variété à quatre dimensions, en un système d'équations d'évolution et de contraintes sur une famille d'hypersurfaces de genre espace [Fourès-Bruhat, 1948, 1952, 1956]. Cette réécriture est notamment utilisée pour la formulation hamiltonienne de la gravitation [Dirac, 1958, 1959 – Arnowitt *et al.*, 1962]. Le feuilletage est permis en demandant à l'espace-temps d'être globalement hyperbolique¹³. Nous construisons ci-dessous les hypersurfaces et nous définissons les outils de projection sur celles-ci et leur normale.

13. Une variété différentielle est globalement hyperbolique si elle admet une surface de Cauchy, c'est-à-dire une hypersurface de genre espace que toute courbe de genre temps ou lumière ne traverse qu'une seule et unique fois [Hawking et Ellis, 1973]. Pour des revues sur le formalisme (3+1), on se reportera à [Gourgoulhon, 2007 – Alcubierre, 2008].

Chapitre 2. Introduction

Soit \hat{t} un champ scalaire sur \mathcal{M} de gradient non nul. La variété est feuilletée en une famille d'hypersurfaces de genre espace $\Sigma_{\{t \in \mathbb{R}\}}$ selon

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Sigma_t \equiv \{\mathbf{p} \in \mathcal{M}, \hat{t}(\mathbf{p}) = t\}, \quad \forall t \neq t' \quad \Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \emptyset, \quad \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t = \mathcal{M}, \quad (2.21)$$

avec \mathbf{p} un point de \mathcal{M} . Une hypersurface Σ_t définit un ensemble de simultanéité paramétré par t . Dans la base canonique (∂_t, ∂_i) , le vecteur n^μ normal aux hypersurfaces, unitaire et de genre temps, se décompose en

$$n^\mu = \frac{1}{\alpha}(1, \beta^i). \quad (2.22)$$

Le lapse α et le shift β^i sont les fonctions libres de jauge : elles décrivent respectivement le transport orthogonal et le transport parallèle du système de coordonnées (t, x^i) de Σ_t à $\Sigma_{t+\delta t}$ ¹⁴. Étant orthogonal aux hypersurfaces, le vecteur n^μ vérifie selon le théorème de Frobenius [Malgrange, 1976] :

$$n_{[\mu} \nabla_\nu n_{\xi]} = 0, \quad (2.23)$$

où n_μ est la forme linéaire duale de n^μ d'expression

$$n_\mu = -\alpha(1, 0, 0, 0), \quad (2.24)$$

dans la base (dt, dx^i) . Les crochets désignent l'antisymétrisation sur les indices¹⁵. La projection sur la normale aux hypersurfaces est réalisée par le tenseur $U_{\mu\nu}$,

$$U_{\mu\nu} \equiv n_\mu n_\nu, \quad U^{\mu\nu} U_{\mu\nu} = 1, \quad (2.25)$$

et celle sur les hypersurfaces par le tenseur $h_{\mu\nu}$,

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 3, \quad h_{\alpha\mu} n^\alpha = 0, \quad (2.26)$$

dont les composantes spatiales h_{ij} définissent la métrique de Σ_t ¹⁶. Les expressions ((2.22)–(2.26)) permettent de décomposer en toute généralité la métrique de \mathcal{M} en

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -(\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + h_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.27)$$

avec $\beta_i \equiv h_{ai} \beta^a$, et le tenseur énergie-impulsion du fluide en

$$T_{\mu\nu} = \epsilon n_\mu n_\nu + 2n_{(\mu} J_{\nu)} + S_{\mu\nu}, \quad (2.28)$$

$$\text{avec } \epsilon \equiv n^\alpha n^\beta T_{\alpha\beta}, \quad J_\mu \equiv -h^\alpha{}_\mu n^\beta T_{\alpha\beta}, \quad S_{\mu\nu} = h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu T_{\alpha\beta}. \quad (2.29)$$

14. Pour $\beta^i = 0$, le système de coordonnées est donc transporté orthogonalement aux hypersurfaces.

15. Pour deux formes linéaires a_μ et b_ν , nous avons : $a_{[\mu} b_{\nu]} \equiv \frac{1}{2}(a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu)$.

16. h_{ij} est la première forme fondamentale des hypersurfaces.

2.3. Évolution moyenne d'un univers inhomogène

ϵ est la densité d'énergie du fluide mesurée dans le référentiel de quadri-vitesse n^μ , J_μ sa densité de quantité de mouvement et $S_{\mu\nu}$ son tenseur de contraintes. Les parenthèses indiquent la symétrisation sur les indices¹⁷.

Le feuilletage des équations d'Einstein (2.1) selon les hypersurfaces et leur normale amènent les équations de contraintes

$${}^3\mathcal{R} - K^a{}_b K^b{}_a + K^2 = 16\pi G_N \epsilon + 2\Lambda, \quad (2.30)$$

$$\mathcal{D}_a K^a{}_i - \mathcal{D}_i K = 8\pi G_N J_i, \quad (2.31)$$

respectivement la contrainte de Hamilton et la contrainte sur la densité de quantité de mouvement, et les équations d'évolution

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{ij} = -2\alpha K_{ij} + 2\mathcal{D}_{(i}\beta_{j)}, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K_{ij} = & \alpha \left({}^3\mathcal{R}_{ij} - 2K^a{}_i K_{aj} + K K_{ij} - 8\pi G_N S_{ij} + 4\pi G_N h_{ij} (S - \epsilon) - \Lambda h_{ij} \right) \\ & - \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j \alpha + \beta^a \mathcal{D}_a K_{ij} + 2K_{a(i} \mathcal{D}_{j)} \beta^a. \end{aligned} \quad (2.33)$$

\mathcal{D}_i est la connexion de Levi-Civita sur Σ_t et ${}^3\mathcal{R}_{ij}$ est le tenseur de courbure intrinsèque des hypersurfaces. $K_{ij} \equiv -h^\alpha{}_i h^\beta{}_j \nabla_\alpha n_\beta$ est le tenseur de courbure extrinsèque des hypersurfaces, il exprime le changement de direction de n^μ lors d'un transport parallèle sur les hypersurfaces, et il rend compte de la façon dont celles-ci sont immergées dans \mathcal{M} ¹⁸. Nous notons ${}^3\mathcal{R} \equiv h^{ij} {}^3\mathcal{R}_{ij}$ et $K \equiv h^{ij} K_{ij}$ leur trace respective, et S la trace de S_{ij} . Les équations de contraintes (2.30) et (2.31) sont établies sur chaque hypersurface Σ_t ; si elles sont satisfaites initialement, elles le sont à tout temps [Frittelli, 1997]¹⁹.

Nous relierons maintenant les quantités (2.29) à leurs expressions dans le repère au repos du fluide. Pour cela, nous décomposons géométriquement la quadri-vitesse du fluide en

$$u^\mu = \gamma (n^\mu + v^\mu), \quad v^\mu = (0, v^i), \quad (2.34)$$

avec $\gamma \equiv -u^\alpha n_\alpha = (1 - v^a v_a)^{-1/2}$ le facteur de Lorentz et v^i le vecteur vitesse du fluide dans le référentiel de quadri-vitesse n^μ . v^μ indique le non alignement entre u^μ et n^μ . En supposant un fluide parfait de tenseur énergie-impulsion (2.3), nous pouvons écrire, à l'aide des relations (2.28) et (2.29),

$$\epsilon = \gamma^2 (\rho + p) - p, \quad J_i = \gamma^2 (\rho + p) v_i, \quad S_{ij} = \gamma^2 (\rho + p) v_i v_j + p h_{ij}. \quad (2.35)$$

17. Pour deux formes linéaires a_μ et b_ν , nous avons : $a_{(\mu} b_{\nu)} \equiv \frac{1}{2} (a_\mu b_\nu + a_\nu b_\mu)$.

18. K_{ij} est la seconde forme fondamentale des hypersurfaces.

19. Il existe une reformulation numériquement plus robuste des équations 3+1 de la relativité générale, connue sous le nom de formulation Baumgarte–Shapiro–Shibata–Nakamura (BSSN) [Shibata et Nakamura, 1995 – Baumgarte et Shapiro, 1999]. La formulation BSSN est une réécriture du système ((2.30)–(2.33)) par l'introduction d'une métrique conforme.

L'ensemble des expressions ((2.21)–(2.35)) constitue la formulation (3+1) des équations de la relativité générale, valable pour toute cosmologie contenant un fluide parfait. Les équations scalaires d'évolution moyenne d'un univers inhomogène peuvent être obtenues à partir de celui-ci. Nous nous concentrons dans le paragraphe suivant sur un sous-type de cosmologie, d'aspect formel simplifié mais capable de rendre compte d'une large classe de systèmes physiques. Pour la formulation des équations d'évolution moyenne dans le cadre général, on se référera à [Larena, 2009 – Brown *et al.*, 2009a – Gasperini *et al.*, 2010].

Expression lagrangienne pour un fluide sans pression

Nous construisons les hypersurfaces de simultanéité orthogonalement au flot du fluide :

$$u^\mu = n^\mu, \quad v^i = 0, \quad \gamma = 1, \quad \epsilon = \varrho, \quad J_i = 0, \quad S_{ij} = p h_{ij}. \quad (2.36)$$

Le repère au repos du fluide coïncide donc avec les hypersurfaces. La dérivée covariante de la quadri-vitesse se décompose en termes cinématiques selon

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu u_\nu = -u_\mu \dot{u}_\nu + \frac{1}{3} \Theta h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}, \quad (2.37)$$

$$\text{avec} \quad \Theta \equiv \nabla_\alpha u^\alpha, \quad \sigma_{\mu\nu} \equiv h^\alpha_\mu h^\beta_\nu \nabla_{(\alpha} u_{\beta)} - \frac{1}{3} \Theta h_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} \equiv h^\alpha_\mu h^\beta_\nu \nabla_{[\alpha} u_{\beta]}. \quad (2.38)$$

Nous rappelons que le point désigne la dérivée covariante $u^\alpha \nabla_\alpha$. $\Theta_{\mu\nu}$ est le tenseur expansion du fluide et $\Theta \equiv h^{\alpha\beta} \Theta_{\alpha\beta}$ son taux d'expansion. $\sigma_{\mu\nu}$ est le tenseur de cisaillement et définit le taux de cisaillement $\sigma^2 \equiv \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}$. $\omega_{\mu\nu}$ est le tenseur de vorticité du fluide et définit son taux de vorticité $\omega^2 \equiv \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}$. Par construction, nous avons :

$$\Theta_{ij} = -K_{ij}, \quad \Theta = -K. \quad (2.39)$$

Le théorème de Frobenius (2.23) appliqué à la quadri-vitesse du fluide, orthogonale aux hypersurfaces, lui impose une vorticité nulle, $\omega_{\mu\nu} = 0$. La quadri-accélération du fluide s'écrit [Gourgoulhon, 2007 – Alcubierre, 2008]

$$\dot{u}_\mu = \frac{\mathcal{D}_\mu \alpha}{\alpha}, \quad (2.40)$$

et la conservation de la divergence du tenseur énergie-impulsion,

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\mu} = u^\mu [\dot{\varrho} + \Theta(\varrho + p)] + \dot{u}^\mu (\varrho + p) + \mathcal{D}^\mu p = 0, \quad (2.41)$$

se proj  te sur les hypersurfaces et leur normale respectivement en

$$h_{\beta\mu} \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_\mu = -\frac{\mathcal{D}_\mu p}{\varrho + p}, \quad (2.42)$$

$$u_\beta \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varrho} + \Theta(\varrho + p) = 0. \quad (2.43)$$

2.3. Évolution moyenne d'un univers inhomogène

La première égalité reformule la quadri-accélération du fluide en termes de ses quantités cinématiques. La seconde indique la conservation locale de son énergie, ce en quoi elle diffère de l'expression (2.6) valable aux grandes échelles.

Nous nous intéressons par la suite à un fluide sans pression (poussière) et fixons sans perte de généralité, d'après les relations (2.40) et (2.42), α à la constante unitaire ; les éléments de fluide sont par conséquent en chute libre, $\dot{u}_\mu = 0$, et suivent des géodésiques. Nous adoptons également une description lagrangienne du système : les coordonnées se déplacent avec le fluide orthogonalement aux hypersurfaces, $\beta^i = 0$. Sous ces conditions²⁰, la quadri-vitesse du fluide et sa forme linéaire duale s'écrivent :

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad u_\mu = -(1, 0, 0, 0), \quad (2.44)$$

et la métrique se note :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -dt^2 + h_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.45)$$

Le système ((2.30)–(2.33)) se ramènent à

$${}^3\mathcal{R} - \Theta^\alpha{}_\beta \Theta^\beta{}_\alpha + \Theta^2 = 16\pi G_N \varrho + 2\Lambda, \quad (2.46)$$

$$\mathcal{D}_\alpha \Theta^\alpha{}_\mu - \mathcal{D}_\mu \Theta = 0, \quad (2.47)$$

pour les équations de contraintes, et à

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{\mu\nu} = 2\Theta_{\mu\nu}, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Theta_{\mu\nu} = -{}^3\mathcal{R}_{\mu\nu} + 2\Theta^\alpha{}_\mu \Theta_{\alpha\nu} - \Theta \Theta_{\mu\nu} + 4\pi G_N h_{\mu\nu} \varrho + \Lambda h_{\mu\nu}. \quad (2.49)$$

pour les équations d'évolution. La conservation d'énergie (2.43) se simplifie quant à elle en :

$$\dot{\varrho} + \Theta \varrho = 0. \quad (2.50)$$

Notons dans la situation présente que la dérivée covariante est identique à la dérivée temporelle pour des scalaires.

2.3.2 La dynamique globale d'un domaine spatial compact

Nous définissons maintenant l'opérateur permettant d'obtenir la moyenne de tout champ scalaire sur un domaine spatial de taille quelconque et nous dérivons, à partir des expressions précédentes, les équations scalaires d'évolution moyenne d'un univers inhomogène.

²⁰. Nous choisissons de présenter en détail ce cas particulier, car il constitue le cadre d'étude des papiers présentés dans les chapitres 3, 4, 5 et 6.

Définition de la moyenne

La moyenne de tout champ scalaire ϕ défini sur \mathcal{M} se note [Buchert, 2000] :

$$\langle \phi \rangle_D(t) \equiv \frac{1}{V_D} \int_D \phi(t, X^i) \sqrt{h(t, X^i)} d^3 X, \quad (2.51)$$

où $D \subset \Sigma_t$ est le domaine spatial compact sur lequel la moyenne est réalisée, V_D son volume,

$$V_D(t) \equiv \int_D \sqrt{h(t, X^i)} d^3 X, \quad (2.52)$$

et h le déterminant de la métrique h_{ij} . Ayant opté pour une description lagrangienne, d'une part les coordonnées spatiales X^i étiquettent chaque élément de fluide, et d'autre part le domaine D est comobile avec le fluide. Les opérateurs ∂_t et dX commutent donc, et nous pouvons écrire à l'aide de (2.48) la valeur moyenne du taux d'expansion comme :

$$\langle \Theta \rangle_D = \frac{\dot{V}_D}{V_D}. \quad (2.53)$$

À partir de (2.48), (2.51) et (2.53), nous obtenons finalement la règle de non commutativité entre dérivée temporelle et moyenne spatiale [Buchert, 2000] :

$$\langle \dot{\phi} \rangle_D - \dot{\langle \phi \rangle}_D = \langle \Theta \rangle_D \langle \phi \rangle_D - \langle \Theta \phi \rangle_D. \quad (2.54)$$

La commutation est retrouvée uniquement pour un champ scalaire homogène ; les termes de non commutation du cas inhomogène induisent, comme nous allons le voir, un changement de dynamique globale pour le domaine par rapport à la situation FL.

Nous extrayons maintenant du système ((2.46)–(2.50)) des expressions scalaires que nous moyennons ensuite selon la procédure présentée.

Équations de Buchert

La première relation choisie est l'équation (2.46), que nous reformulons à l'aide de la décomposition (2.37) en

$$\frac{1}{3}\Theta^2 = 8\pi G_N \varrho - \frac{1}{2}{}^3\mathcal{R} + \sigma^2 + \Lambda. \quad (2.55)$$

Nous retrouvons l'expression de la contrainte d'Hamilton. Nous construisons une deuxième relation en prenant la trace de (2.49),

$$\dot{\Theta} = -{}^3\mathcal{R} - \Theta^2 + 12\pi G_N \varrho + 3\Lambda, \quad (2.56)$$

et en y insérant la relation précédente, soit :

$$\dot{\Theta} = -4\pi G_N \varrho - 2\sigma^2 - \frac{1}{3}\Theta^2 + \Lambda. \quad (2.57)$$

2.3. Évolution moyenne d'un univers inhomogène

Nous obtenons ici l'équation de Raychaudhuri. Localement, seule la constante cosmologique contribue à une augmentation du taux d'expansion, c'est-à-dire à l'accroissement de la taille d'un élément de volume. La dernière relation scalaire considérée est la conservation d'énergie (2.50). Nous définissons finalement le facteur d'échelle effectif adimensionné du domaine par :

$$a_D(t) \equiv \left(\frac{V_D(t)}{V_{D_i}} \right)^{1/3}, \quad (2.58)$$

avec D_i le domaine à l'instant initial, et réexprimons la moyenne du taux d'expansion (2.53) selon :

$$\langle \Theta \rangle_D = 3 \frac{\dot{a}_D}{a_D}. \quad (2.59)$$

Par construction, le facteur d'échelle effectif est unitaire au temps initial et non au temps présent comme dans le cas FL. Nous pourrions définir le facteur d'échelle selon $\mathbf{a}_D(t) \equiv (V_D(t)/V_{D_0})^{1/3}$, et retrouver cette propriété ; cependant, nous souhaitons ramener l'analyse à un problème de Cauchy et à la valeur initiale de chaque grandeur. Aussi, les cosmologies inhomogènes peuvent présenter des singularités, telles que les caustiques, et nous voulons nous assurer de leur absence au moins du temps initial au temps présent. Nous préférons donc définir le facteur d'échelle à partir du temps initial. Notons que l'ensemble des équations établies par la suite sont de forme inchangée sous le remplacement $a_D \rightarrow \mathbf{a}_D$. Finalement, remarquons que \dot{a}_D rend compte uniquement de la variation du volume du domaine ; pour connaître la variation de la forme du domaine, on s'attachera à l'étude de ses fonctionnelles de Minkowski (voir paragraphe 3.1.2 de [Buchert, 2008] pour leur expression dans le cas newtonien).

La moyenne lagrangienne sur D de (2.55), (2.57) et (2.50) donne, à l'aide des formules (2.54) et (2.59), les équations de Buchert [Buchert, 2000] :

$$3 \left(\frac{\dot{a}_D}{a_D} \right)^2 = 8\pi G_N \langle \varrho \rangle_D - \frac{1}{2} ({}^3\mathcal{R}_D + \mathcal{Q}_D) + \Lambda, \quad (2.60)$$

$$3 \frac{\ddot{a}_D}{a_D} = -4\pi G_N \langle \varrho \rangle_D + \mathcal{Q}_D + \Lambda, \quad (2.61)$$

$$\langle \varrho \rangle_D \dot{a}_D + 3 \frac{\dot{a}_D}{a_D} \langle \varrho \rangle_D = 0, \quad (2.62)$$

où la courbure moyenne et la rétroaction cinématique sont définies par :

$${}^3\mathcal{R}_D \equiv \langle {}^3\mathcal{R} \rangle_D, \quad \mathcal{Q}_D \equiv \frac{2}{3} \langle (\Theta - \langle \Theta \rangle_D)^2 \rangle_D - 2 \langle \sigma^2 \rangle_D. \quad (2.63)$$

La décomposition de la courbure moyenne en une courbure constante et sa déviation, ou rétroaction de courbure, selon ${}^3\mathcal{R}_D \equiv 6k_{D_i}/a_D^2 + \mathcal{W}_D$, permet la reformulation de la première équation en :

$$3 \left(\frac{\dot{a}_D}{a_D} \right)^2 = 8\pi G_N \langle \varrho \rangle_D - 3 \frac{k_{D_i}}{a_D^2} - \frac{1}{2} (\mathcal{W}_D + \mathcal{Q}_D) + \Lambda. \quad (2.64)$$

Le système ((2.61),(2.62),(2.64)) décrit l'évolution moyenne lagrangienne d'un domaine inhomogène. Il permet de connaître la dynamique des quantités scalaires de son fond, obtenues à partir de la procédure de moyennage. Nous lui ajoutons la condition d'intégrabilité, en demandant à l'équation (2.64) d'être l'intégrale de (2.61) :

$$\dot{Q}_D + 6\frac{\dot{a}_D}{a_D}Q_D + \dot{W}_D + 2\frac{\dot{a}_D}{a_D}W_D = 0. \quad (2.65)$$

Il est possible de montrer que toute autre expression scalaire dérivée des équations d'Einstein est exprimable en fonction des relations données précédemment [Kofman et Pogosyan, 1995 – Buchert, 2000]. Les équations (2.61), (2.62), (2.64) et (2.65) n'étant pas indépendantes, on précisera donc une dernière relation pour résoudre le système. La structure des inhomogénéités est fixée par la distribution réelle des champs de géométrie et de matière, et les observations permettent de contraindre nos modèles. Ainsi, le choix d'une relation de fermeture, motivé par certaines considérations physiques, doit toujours être validé par une confrontation avec les observations.

Les termes Q_D et W_D représentent les effets de rétroaction, et sont dépendants du domaine spatial à l'étude. Ils influencent la dynamique moyenne du domaine en comparaison à une cosmologie homogène et isotrope de type FL. L'expression (2.61) indique qu'une rétroaction cinématique positive, $Q_D > 0$, contribue à l'accélération de l'expansion du domaine et mime de façon effective le comportement de l'énergie noire. Une rétroaction négative, $Q_D < 0$, s'ajoute quant à elle à la gravitation, décélère l'expansion du domaine et joue effectivement le rôle de la matière noire. Il est attendu que le comportement de la rétroaction présente une nature de matière noire aux petites échelles, et une nature d'énergie noire aux grandes échelles [Wiegand et Buchert, 2010].

Il est important de séparer la dynamique moyenne d'un domaine spatial quelconque, des observations que l'on en fait. Le système d'équations ((2.61),(2.62),(2.64),(2.65)) est pertinent pour la description moyenne d'un espace-temps empli de poussière, car il se place hors de toute notion d'observateur ou d'artefact lié à un choix non motivé de référentiel²¹. Dès qu'il s'agit de confronter ce modèle aux observations, il convient d'introduire une structure supplémentaire, la métrique effective, rendant compte de la géométrie moyenne de la variété $\langle \mathcal{M} \rangle$. Les expressions des différentes distances cosmologiques sont alors affectées en comparaison au traitement FL. Il est envisageable par exemple de faire face à un domaine globalement stationnaire²², $\dot{a}_D = \ddot{a}_D = 0$, tout en revendiquant l'existence d'énergie noire dans le cadre d'interprétation FL. Dans un modèle inhomogène moyenné, les effets de la rétroaction de courbure influencent le parcours lumineux suivi et peuvent être responsables de ce biais d'interprétation.

Pour des revues détaillées sur les cosmologies inhomogènes moyennées, nous recommandons la lecture de [Buchert, 2008, 2011 – Clarkson *et al.*, 2011b – Ellis et Buchert, 2005 – Ellis, 2011 – Räsänen, 2011 – Wiltshire, 2011].

21. C'est la raison pour laquelle nous préférons travailler en description lagrangienne.

22. Nous renvoyons le lecteur à [Buchert, 2006] pour l'analyse des propriétés physiques de tels domaines.

Comparaison avec le modèle FL

Les équations d'évolution du facteur d'échelle effectif, (2.61) et (2.64), sont formellement identiques à celles d'une cosmologie homogène et isotrope, (2.4) et (2.5), composée de deux fluides²³. Notons cependant les différences fondamentales suivantes :

- Le système ((2.61),(2.62),(2.64),(2.65)) est valable pour toute métrique synchrone de forme (2.45), alors que son pendant FL ((2.4)–(2.6)) s'écrit uniquement pour une métrique synchrone spatialement homogène et isotrope, de forme (2.2)²⁴.
- Le second fluide du modèle effectif émerge du processus de moyennage effectué sur une cosmologie inhomogène à un seul fluide. Il n'est pas ajouté *ad hoc* au système physique contrairement à une cosmologie FL à deux sources. Ce fluide représente les inhomogénéités spatiales des champs de métrique et de matière. Il induit une différence de dynamique entre un fond FL et un fond plus général.
- La dynamique des variables géométriques moyennées diffère généralement de celles des modèles FL. Par exemple, la courbure spatiale moyenne ${}^3\mathcal{R}_D$ évolue de façon différente par rapport à la courbure FL réduite au même domaine, $k_{D_i} a_D^{-2}$.
- Le processus de moyennage est effectué sur un certain domaine de l'hypersurface ; il en résulte une dépendance d'échelle pour toute quantité scalaire moyennée. Au contraire, dans le cas FL, le principe copernicien supprime cette dépendance et la moyenne d'une variable ne dépend pas de l'échelle considérée.

Nous retrouvons une cosmologie FL à partir du système ((2.61),(2.62),(2.64),(2.65)) en demandant l'homogénéité et l'isotropie de tout domaine D inclus dans Σ_t . Dans cette situation, la dépendance d'échelle de toute variable moyennée disparaît, et nous pouvons écrire la rétroaction cinématique comme

$$\forall D \subset \Sigma_t \quad \{ \langle \Theta \rangle_D = \Theta, \quad \langle \sigma^2 \rangle_D = \sigma^2 = 0 \} \Rightarrow \mathcal{Q}_D = 0, \quad (2.66)$$

et, en utilisant la condition d'intégrabilité (2.65), la rétroaction de courbure comme

$$\forall D \subset \Sigma_t \quad \mathcal{W}_D = \mathcal{W} = \frac{W_i}{a^2}. \quad (2.67)$$

La courbure spatiale peut donc se reformuler comme une courbure FL selon [Buchert, 2001]

$$\forall D \subset \Sigma_t \quad \langle {}^3\mathcal{R} \rangle_D = {}^3\mathcal{R} = 6 \frac{k_i}{a^2} + \frac{W_i}{a^2} \equiv 6 \frac{\bar{k}_i}{a^2}. \quad (2.68)$$

23. Voir sous-section 2.3.3 pour l'assimilation des termes de rétroaction \mathcal{Q}_D et \mathcal{W}_D à un fluide.

24. Les formalismes étendus de [Buchert, 2001 – Larena, 2009 – Brown *et al.*, 2009a – Gasperini *et al.*, 2010] permettent le choix d'une métrique non nécessairement synchrone, de forme générale (2.27) pour les trois dernières citations.

En insérant les relations (2.66), (2.67) et (2.68) dans le système inhomogène moyenné, et en notant une nouvelle fois que pour tout domaine $a_D = a$ et $\langle \varrho \rangle_D = \varrho$, nous aboutissons bien à une cosmologie FL ((2.4)–(2.6)).

Remarquons également qu’un domaine spatial ayant une rétroaction cinématique nulle suit une évolution de type FL, mais peut contenir des inhomogénéités. L’annulation de \mathcal{Q}_D provient dans ce cas de la compensation exacte entre la variance du taux d’expansion et la valeur moyenne du cisaillement au carré²⁵. Comme nous l’avons vu, un domaine sera exactement FL uniquement si pour tout sous-domaine $D \subseteq D$, nous avons $\mathcal{Q}_D = 0$ ²⁶.

Dans les formalismes généralisés [Larena, 2009 – Brown *et al.*, 2009a – Gasperini *et al.*, 2010], la quadri-vitesse du fluide n’est pas nécessairement orthogonale aux hypersurfaces, et le fluide peut ainsi posséder une vorticité et une accélération non nulles. Pour retourner à une cosmologie FL, il nous faut demander, en plus de l’homogénéité spatiale, l’orthogonalité aux hypersurfaces de la quadri-vitesse du fluide. Un espace homogène peut en effet présenter une dynamique différente de celle FL, pour un flot dont le quadri-vecteur n’est pas colinéaire à la normale aux hypersurfaces [King et Ellis, 1973]. Les modèles FL négligent donc la vorticité et l’accélération du fluide à toute échelle, alors que leur présence aux petites échelles peut potentiellement influencer la dynamique des grandes échelles de l’univers²⁷.

Une façon de tester le principe copernicien, et de différencier ainsi un fond FL d’un fond plus général, est d’étudier le comportement de la fonction de Clarkson *et al.* [2008]. Cette fonction dépend uniquement de la métrique de l’espace-temps, et non de la théorie de la gravité considérée ou du modèle de matière en présence. C’est une fonction purement géométrique, et elle s’annule en tout point pour un modèle FL.

2.3.3 Les formulations équivalentes

Nous présentons ci-dessous des récritures des équations de Buchert en assimilant les termes de rétroaction   différentes entités physiques effectives, élargissant ainsi le domaine d’applicabilité des cosmologies inhomogènes moyennées.

25. C’est ce qu’il se passe par exemple pour un domain   symétrie sphérique, ou domaine Lemaître–Tolman–Bondi (LTB), à courbure nulle.

26. Nous discernons ici un domaine FL d’une cosmologie FL. Une cosmologie est FL si tout domaine la constituant est FL.

27. Nous fournirons dans un prochain papier l’étude de l’impact de la vorticité, dans les cosmologies inhomogènes moyennées emplies de poussière.

Le fluide de rétroaction

Les termes de rétroaction peuvent être formellement identifiés à un fluide parfait effectif, homogène, de densité d'énergie et pression [Buchert, 2001] :

$$\varrho_D^r \equiv -\frac{1}{16\pi G_N} (\mathcal{Q}_D + \mathcal{W}_D), \quad p_D^r \equiv -\frac{1}{16\pi G_N} \left(\mathcal{Q}_D - \frac{\mathcal{W}_D}{3} \right). \quad (2.69)$$

Il n'est pas nécessaire que ce fluide, étant effectif, satisfasse des conditions d'énergie, et il est par exemple envisageable qu'il viole la condition forte sur l'énergie $\varrho_D^r + 3p_D^r < 0$. Pour un fluide de rétroaction dont l'équation d'état est supposé identique à (2.8), nous avons :

$$w_D^r = \frac{\mathcal{Q}_D - \mathcal{W}_D/3}{\mathcal{Q}_D + \mathcal{W}_D}. \quad (2.70)$$

Dans ce formalisme, les expressions (2.64), (2.61) et (2.65) se reformulent respectivement selon

$$3 \left(\frac{\dot{a}_D}{a_D} \right)^2 = 8\pi G_N (\langle \varrho \rangle_D + \varrho_D^r) - 3 \frac{k_{D_i}^2}{a_D^2} + \Lambda, \quad (2.71)$$

$$3 \frac{\ddot{a}_D}{a_D} = -4\pi G_N (\langle \varrho \rangle_D + \varrho_D^r + 3p_D^r) + \Lambda, \quad (2.72)$$

$$\dot{\varrho}_r^D + 3 \frac{\dot{a}_D}{a_D} (\varrho_D^r + p_D^r) = 0. \quad (2.73)$$

La forme des deux premières équations est bien identique à celle d'une cosmologie FL à deux sources, comme mentionné précédemment, et la condition d'intégrabilité s'écrit ici comme une conservation d'énergie pour le fluide de rétroaction. Il convient de noter dans le cas présent que nous avons deux conservations d'énergie distinctes (2.62) et (2.73). Dans des situations plus générales, par exemple déjà pour un fluide avec pression en description lagrangienne [Buchert, 2001], les lois de conservations entre fluide moyenné de matière et fluide de rétroaction sont couplées.

Nous utilisons ce formalisme dans l'article présenté au chapitre 3, lorsque nous identifions le fluide de rétroaction à un gaz de Chaplygin.

Le champ scalaire réel de rétroaction

Soit ϕ un champ scalaire réel homogène, minimalement couplé et défini sur \mathcal{M} . Nous écrivons sa densité lagrangienne selon :

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{\varsigma}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + U(\phi), \quad (2.74)$$

avec $U(\phi)$ son potentiel. $\varsigma = 1$ pour un champ scalaire standard (avec une énergie cinétique positive) et -1 pour un champ scalaire fantôme (avec une énergie cinétique négative)

[Caldwell, 2002]. La variation de l'élément de lagrangien par rapport à la métrique nous donne l'expression du tenseur énergie-impulsion associé :

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\phi} &\equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\mathcal{L}_{\phi}\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \frac{\delta\mathcal{L}_{\phi}}{\delta g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{\phi} \\ &= \varsigma \partial_{\mu}\phi \partial_{\nu}\phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{\varsigma}{2} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha}\phi \partial_{\beta}\phi + U \right), \end{aligned} \quad (2.75)$$

que nous reformulons, en introduisant le quadri-vecteur unitaire de genre temps [Madsen, 1988]

$$u_{\phi}^{\mu} = -\frac{\partial^{\mu}\phi}{\psi}, \quad \psi^2 \equiv -g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha}\phi \partial_{\beta}\phi > 0, \quad (2.76)$$

sous la forme d'un fluide parfait²⁸ :

$$T_{\mu\nu}^{\phi} = (\varrho_{\phi} + p_{\phi}) u_{\mu}^{\phi} u_{\nu}^{\phi} + p_{\phi} g_{\mu\nu}, \quad (2.77)$$

$$\text{avec } \varrho_{\phi} \equiv \frac{\varsigma}{2} \psi^2 + U, \quad p_{\phi} \equiv \frac{\varsigma}{2} \psi^2 - U. \quad (2.78)$$

Dans la situation présente, puisque ϕ est homogène et $g^{00} = -1$, densité d'énergie et pression se reformulent respectivement en :

$$\varrho_{\phi} = \frac{\varsigma}{2} \dot{\phi}^2 + U, \quad p_{\phi} = \frac{\varsigma}{2} \dot{\phi}^2 - U. \quad (2.79)$$

En cosmologie, le formalisme du champ scalaire est utilisé afin d'assimiler matière noire, énergie sombre et inflaton à des champs scalaires fondamentaux (voir par exemple [Copeland *et al.*, 2006]).

Dans le formalisme de Buchert, nous souhaitons associer ces différentes entités à des champs scalaires effectifs, issus de la contribution globale des inhomogénéités. Nous procédons alors, par analogie à la construction précédente, à une identification du fluide de rétroaction à un champ scalaire homogène, en écrivant [Buchert *et al.*, 2006] :

$$\varrho_D^r = \frac{\varsigma}{2} \dot{\phi}_D^2 + U_D, \quad (2.80)$$

$$p_D^r = \frac{\varsigma}{2} \dot{\phi}_D^2 - U_D, \quad (2.81)$$

où U_D est le potentiel associé au champ scalaire effectif ϕ_D . Nous notons alors, à l'aide de (2.69) et (2.78),

$$\varsigma \dot{\phi}_D^2 = -\frac{1}{8\pi G_N} \left(\mathcal{Q}_D + \frac{\mathcal{W}_D}{3} \right), \quad U_D = -\frac{1}{24\pi G_N} \mathcal{W}_D. \quad (2.82)$$

La rétroaction de courbure représente le potentiel effectif du champ scalaire et la rétroaction cinématique l'écart à l'équilibre de viriel pour les inhomogénéités du domaine. Ce

²⁸. L'équivalence entre un champ scalaire non minimalement couplé et un fluide est donnée dans [Madsen, 1988].

dernier point peut être établi en introduisant l'énergie cinétique moyenne et le potentiel moyen du champ scalaire respectivement selon :

$$E_{cin} \equiv \frac{\varsigma}{2} \dot{\phi}_D^2 V_D, \quad E_p \equiv -U_D V_D, \quad (2.83)$$

et en notant :

$$2E_{cin} + E_p = -\frac{1}{8\pi G_N} \mathcal{Q}_D V_D. \quad (2.84)$$

Un domaine dont le fond est FL possède ainsi des inhomogénéités satisfaisant un équilibre virialisé.

Dans ce formalisme, les expressions (2.64), (2.61) et (2.65) se réécrivent respectivement :

$$3 \left(\frac{\dot{a}_D}{a_D} \right)^2 = 8\pi G_N (\langle \varrho \rangle_D + \frac{\varsigma}{2} \dot{\phi}_D^2 + U_D) - 3 \frac{k_{D_i}}{a_D^2} + \Lambda, \quad (2.85)$$

$$3 \frac{\ddot{a}_D}{a_D} = -4\pi G_N (\langle \varrho \rangle_D + 2\varsigma \dot{\phi}_D^2 - 2U_D) + \Lambda, \quad (2.86)$$

$$\dot{\phi}_D \left(\ddot{\phi}_D + 3 \frac{\dot{a}_D}{a_D} \dot{\phi}_D + \varsigma \frac{\partial U_D}{\partial \phi_D} \right) = 0. \quad (2.87)$$

La condition d'intégrabilité s'écrit ici comme une équation de Klein–Gordon pour le morphon. Cette correspondance permet l'interprétation des effets de rétroaction dues aux inhomogénéités en termes de propriétés de champ scalaire (par exemple en terme de champ scalaire de quintessence).

Nous utilisons ce formalisme dans l'article présenté au chapitre 3, lorsque nous identifions les effets de rétroaction à un gaz de Chaplygin, et dans le compte-rendu présenté au chapitre 4, s'appuyant en partie sur le travail de [Buchert et Obadia, 2011]. Leur étude propose un scénario d'inflation à partir d'un champ scalaire effectif émergeant des inhomogénéités de la géométrie du vide de matière, c'est-à-dire du champ gravitationnel uniquement.

2.4 Conclusion

Nous avons présenté la dynamique des cosmologies inhomogènes moyennées selon le formalisme de Buchert, et avons introduit une expression des effets de rétroaction en termes scalaires. La confrontation de ce modèle avec les observations demande, par analogie à la situation FL, la définition des paramètres cosmologiques, ici dépendants du domaine :

$$\Omega^D \equiv \frac{8\pi G_N}{H_D^2} \langle \varrho \rangle_D, \quad \Omega_k^D \equiv -\frac{k_{D_i}}{a_D^2 H_D^2}, \quad \Omega_\Lambda^D \equiv \frac{\Lambda}{3H_D^2}, \quad (2.88)$$

$$\Omega_{\mathcal{W}}^D \equiv -\frac{\mathcal{W}_D}{6H_D^2}, \quad \Omega_{\mathcal{Q}}^D \equiv -\frac{\mathcal{Q}_D}{6H_D^2}, \quad (2.89)$$

avec : $\Omega^D + \Omega_k^D + \Omega_\Lambda^D + \Omega_{\mathcal{W}}^D + \Omega_Q^D = 1$, d'après (2.64).

La première approche consiste à ajouter une structure supplémentaire au modèle, la métrique effective. Celle-ci permet de rendre compte de la géométrie effective de l'espace-temps moyen et de dériver l'ensemble des distances cosmologiques. Toute distance dépend de l'expression de la métrique, qui à son tour dépend de la courbure et de son évolution. Une des particularités des cosmologies inhomogènes, en comparaison à celles FL, est de posséder une courbure dynamique, d'évolution généralement différente de a_D^{-2} . L'ensemble des contraintes observationnelles doit donc être entièrement réinterprété dans ce nouveau cadre (voir par exemple [Clarkson *et al.*, 2011a] pour l'impact des inhomogénéités sur les observations). Larena *et al.* [2009] proposent à ce sujet la construction d'une métrique effective particulière, et il apparaît qu'une cosmologie inhomogène moyennée peut satisfaire les contraintes du CMB et de la distribution en luminosité des supernovæ.

Une seconde approche est d'effectuer une moyenne directement le long du cône de lumière. Nous sortons alors du schéma présenté précédemment, et les équations de la dynamique du système ne correspondent plus à celles présentées. Ce formalisme a été présenté dans [Gasperini *et al.*, 2011] mais n'a pas encore été appliqué.

Nous proposons dans les chapitres suivants différentes applications du formalisme de Buchert. Le chapitre 3 étudie une fermeture particulière du système d'équations : le fluide de rétroaction est assimilé à un gaz de Chaplygin, possédant la propriété similaire d'unification de matière noire et d'énergie sombre. Le travail consiste à traduire dans le langage des inhomogénéités de structure une équation d'état de Chaplygin pour les constituants sombres effectifs. Le chapitre 4 reprend ces résultats et présente en plus un modèle cosmologique d'inflation, portée par les inhomogénéités de la géométrie spatiale du vide classique (c'est-à-dire en l'absence de tout champ de matière). Dans cette analyse, nous identifions par hypothèse le fluide rétroactif au champ scalaire de Ginzburg–Landau, afin de retrouver les propriétés adéquates d'un champ permettant l'inflation. Le chapitre 5 s'attache à étudier la stabilité gravitationnelle globale des fonds FL, dans la situation de loi de puissance du facteur d'échelle effectif pour les termes de rétroaction. Finalement, le chapitre 6 présente un nouveau schéma de traitement des perturbations cosmologiques autour d'un fond général, pour un fluide irrotationnel de poussière. Cette partie apporte le cadre théorique nécessaire à une étude quantitative des effets de rétroaction dans la formation des grandes structures. L'ensemble de ces chapitres constitue le travail de la présente thèse.

Cosmologies inhomogènes et gaz de Chaplygin

Le système d'équations ((2.61),(2.62),(2.64),(2.65)) doit donc être clos afin d'obtenir l'évolution des champs scalaires moyens d'une cosmologie inhomogène. Dans l'article présenté ci-après, et ayant fait l'objet d'une publication [Roy et Buchert, 2010], le choix de la relation de fermeture repose sur la propriété de notre modèle d'unifier matière noire et énergie sombre au travers des termes de rétroaction.

Le gaz de Chaplygin généralisé [Kamenshchik *et al.*, 2001 – Bento *et al.*, 2002] est un candidat intéressant à cet égard car il unifie également matière noire et énergie sombre en un seul fluide d'équation d'état exotique

$$p_{chap} = -\frac{A}{\varrho_{chap}^\alpha}, \quad \varrho_{chap} > 0, \quad (3.1)$$

où A est une constante positive, et α un réel positif. Dans notre étude, nous nous intéressons au cas standard $\alpha = 1$, à savoir au gaz de Chaplygin (GC) dans sa formulation initiale [Kamenshchik *et al.*, 2001 – Gorini *et al.*, 2003, 2004]. Une généralisation de nos résultats, si nécessaire, est directe. L'unification des composants sombres se réalise à travers l'évolution du fluide : à ses premiers temps, et selon les conditions initiales, le GC présente un comportement assimilable à celui de la matière noire, puis il est attiré aux temps avancés vers un comportement semblable à celui de l'énergie sombre.

Notre étude traduit pour la première fois, en termes de rétroaction cinématique et de rétroaction de courbure, la dynamique globale des inhomogénéités supposées obéir à une équation d'état de Chaplygin, dépendante d'échelle. Pour tout domaine spatial D , nous écrivons donc :

$$p_D^r = -\frac{A_D}{\varrho_D^r}. \quad (3.2)$$

Souhaitons préserver l'esprit du GC, notamment sa pression négative, et optant pour une constante A_D positive quelque soit le domaine, nous imposons dans notre travail une densité d'énergie positive pour le fluide de rétroaction, $\varrho_D^r > 0$.

Notre approche permet de joindre, à l'unification 'temporelle' des composants sombres intrinsèque au GC, une unification 'spatiale' permise par la dépendance d'échelle de notre formalisme. Cette seconde unification a également été proposée dans le contexte d'un GC inhomogène et fondamental [Bilic *et al.*, 2002]; toutefois, rappelons que le GC est ici homogène et effectif, et notre unification s'inscrit donc dans un cadre différent. Sans

procéder à une analyse détaillée multi-échelle (voir [Wiegand et Buchert, 2010] pour ce sujet), nous proposons que le fluide de rétroaction se comporte comme de la matière noire Chaplygin aux petites échelles, et comme de l'énergie sombre Chaplygin aux grandes échelles.

Ce papier fournit la correspondance exhaustive entre fluide de Chaplygin et termes de rétroaction, selon les conditions initiales du système. Il pose ainsi les bases nécessaires à une confrontation du modèle avec les observations, permettant de vérifier si la structure globale des inhomogénéités peut coïncider avec une équation d'état de Chaplygin. Dans cette optique, l'exclusion du GC standard ($\alpha = 1$) proposée, par exemple, par [Amendola *et al.*, 2003 – Bento *et al.*, 2003a,b – Cunha *et al.*, 2004] n'est pas évidente. En effet, rappelons que les distances cosmologiques dépendent des propriétés de la métrique, et celles-ci sont reliées à la courbure spatiale moyenne [Larena *et al.*, 2009], qui évolue différemment dans une cosmologie inhomogène moyennée en comparaison à une cosmologie FL. La construction d'une métrique effective pour une confrontation future de notre modèle avec les observations fera l'objet d'un prochain travail, et permettra éventuellement de réhabiliter le GC.

Chaplygin gas and effective description of inhomogeneous universe models in general relativity

Xavier Roy and Thomas Buchert

Université Lyon 1, Centre de Recherche Astrophysique de Lyon, CNRS UMR 5574
9 avenue Charles André, F-69230 Saint-Genis-Laval, France

Emails: roy@obs.univ-lyon1.fr and buchert@obs.univ-lyon1.fr

Abstract. In the framework of spatially averaged inhomogeneous cosmologies in classical general relativity, effective Einstein equations govern the dynamics of averaged scalar variables in a scale-dependent way. A particular cosmology may be characterized by a cosmic equation of state, closing the hierarchy of effective equations. In this context a natural candidate is provided by the Chaplygin gas, standing for a unified description of dark energy and dark matter. In this paper, we suppose that the inhomogeneous properties of matter and geometry obey the Chaplygin equation of state. The most extreme interpretation assumes that both dark energy and dark matter are not included as additional sources, but are both manifestations of spatial geometrical properties. This feature is an important conceptual difference in comparison with the standard approach of a Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker universe filled with dust and another fundamental field characterized by the Chaplygin equation of state. We finally discuss the consequences of the resulting scenario for effective cosmological parameters in order to establish the framework of a future confrontation with observations, and we note that the standard Chaplygin gas may not be ruled out by them.

PACS numbers: 04.20.-q, 04.40.-b, 95.35.+d, 95.36.+x, 98.80.-Es, 98.80.-Jk

1. Introduction

Does an inhomogeneous universe evolve on average like a homogeneous solution in the framework of general relativity? This question is not new [26] and naturally emerges in view of the nonlinearity of the theory and, in particular, from the generally non-commuting operations of averaging and time evolution [27]. The main difficulty to answer it resides in the notion of averaging and in its construction (see, e.g., [19], section 2.2 of [4], and references therein).

Our universe is supposed to verify the strong cosmological principle which demands homogeneity and isotropy at all scales. This standard approach, known as Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) cosmology, is widely used in order to describe the dynamics of our universe and the formation of its constituents. It however leaves in suspense an explanation about the origin of dark energy and dark matter, which

respectively represent in this model about 3/4 and 1/4 of the total content of the universe. This last point might actually reveal a symptom of a deeper problem linked to this approach. Indeed, in FLRW cosmology one determines background quantities regardless of the scale and makes them evolve according to a homogeneous–isotropic solution of Einstein equations. Our first query could be reformulated in order to note the central aspect of this issue: Are the background quantities well defined within standard cosmology, i.e. as a suitable average over the inhomogeneities? Is their *evolution* well approximated in this framework, i.e. is the time dependence of the homogeneous–isotropic *averaged state* well approximated by a homogeneous–isotropic *solution*?

We shall adopt an approach that averages, in a domain–dependent way, the scalar parts of Einstein’s equations with respect to synchronous free–falling observers in a dust model [13, 14], a realization of the averaging problem that does not answer the above questions in the affirmative. The average evolution of an inhomogeneous universe differs from the evolution of a homogeneous one; in other words, even if we are entitled to describe structure formation in terms of perturbations of a background, this latter is generally not a member of the homogeneous solutions (see also [35, 36]). This difference of evolution is driven by the non–trivial geometrical structure of an inhomogeneous space, featuring deviations that are known as “backreaction”. These backreaction effects can act on average, at least qualitatively, as the dark components.

The set of equations obtained within this approach should be closed to derive the evolution of all the involved quantities, namely the effective scale factor, the averaged scalar curvature deviation and the kinematical backreaction variable. In recent papers, attention was turned to a closure under the assumption of global constraints such as a globally stationary universe [15, 16], or by exploring the solution space with exact scaling laws for the backreaction and the averaged scalar curvature [18, 38], or by symmetry requirements such as spherical symmetry (e.g. [11, 21, 28, 37, 40, 45], and references therein). In this work we want to choose the closure relation by focusing on the particularity of the model to unify the dark components through backreaction. According to this point of view, the Chaplygin gas (CG) seems to be an interesting lead since it unifies dark matter and dark energy in only one fluid, obeying an exotic equation of state [31, 32, 34]. This unification is made through the evolution of this particular fluid and it can be extended to a unification where both dark components are *simultaneously* modelled thanks to the scale dependence of our approach‡. These points motivate us to build a model in which the generically existing coupling between the backreaction and the averaged scalar curvature deviation, which encodes the particular geometrical structure evolution of an inhomogeneous universe, is furnished by a scale–dependent CG equation of state§.

‡ A ‘simultaneous’ unification has also been proposed in the context of an inhomogeneous, but fundamental CG in [8].

§ A study of inhomogeneous spherically symmetric spacetimes, presenting nonlinear perturbations constructed from the fluctuations of local variables with respect to background quantities called quasi–local scalars, has been given in [44]. As an example the CG is employed in [44] and relates the quasi–local

In section 2 we introduce the equations that govern the average evolution of an inhomogeneous universe model and briefly discuss them. We present in section 3 the CG and some of its properties. In section 4 we suppose that the backreaction and the averaged scalar curvature deviation are coupled according to the CG equation. The CG then describes a particular geometrical structure of the inhomogeneous universe and does not correspond to any fundamental field. Finally, in section 5, we reformulate the results obtained in terms of effective cosmological parameters; we compare this model to the Friedmannian framework and we study in particular the acceleration of a spatial domain.

2. Effective description of inhomogeneous universe models

Restricting attention to a universe filled with irrotational dust, i.e. irrotational pressureless matter, we spatially average the scalar parts of Einstein equations (the Hamiltonian constraint, Raychaudhuri's equation and the continuity equation) with respect to a collection of comoving (generalized fundamental) observers over a compact, restmass preserving spatial domain \mathcal{D} , and obtain the following set of equations ([13, 14, 19], [41] for details):

$$\left(\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = -\frac{\langle R \rangle_{\mathcal{D}} + Q_{\mathcal{D}}}{6}, \quad (1)$$

$$\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} + \frac{4\pi G}{3} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{Q_{\mathcal{D}}}{3}, \quad (2)$$

$$\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} + 3 \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{a_{\mathcal{D}}^6} (Q_{\mathcal{D}} a_{\mathcal{D}}^6) + \frac{1}{a_{\mathcal{D}}^2} (\langle R \rangle_{\mathcal{D}} a_{\mathcal{D}}^2) = 0, \quad (4)$$

where $a_{\mathcal{D}}$ is the effective volume scale factor

$$a_{\mathcal{D}}(t) := \left(\frac{V_{\mathcal{D}}(t)}{V_{\mathcal{D}_i}} \right)^{1/3}, \quad (5)$$

with $V_{\mathcal{D}_i}$ the initial volume of the domain and $V_{\mathcal{D}}(t)$ its volume at a proper time t , $\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = M a_{\mathcal{D}}^{-3} / V_{\mathcal{D}_i}$ the density of irrotational dust averaged over \mathcal{D} , $\langle R \rangle_{\mathcal{D}}$ the spatial scalar curvature averaged over \mathcal{D} and $Q_{\mathcal{D}}$ the kinematical backreaction

$$Q_{\mathcal{D}}(t) := \frac{2}{3} \langle (\theta - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}})^2 \rangle_{\mathcal{D}} - 2 \langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}}, \quad (6)$$

with θ the rate of expansion and $\sigma := \sqrt{\frac{1}{2} \sigma^{ij} \sigma_{ij}}$ the rate of shear with the shear tensor components σ_{ij} .

Equations (1) and (2) govern the kinematics of the effective scale factor and equations (3) and (4) express the conservation law for the dust matter and the variables' pressure and density. The reader may find connections between quasi-local variables and our averaging procedure in [43].

backreaction terms, respectively. It is important to point out that $\langle R \rangle_{\mathcal{D}}$ might evolve differently from its Friedmannian counterpart (as we shall discuss in subsection 4.3). Upon introducing the averaged scalar curvature deviation $\mathcal{W}_{\mathcal{D}} := \langle R \rangle_{\mathcal{D}} - 6k_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^{-2}$, we may rewrite equation (1) in the form

$$\left(\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \right)^2 + \frac{k_{\mathcal{D}_i}}{a_{\mathcal{D}}^2} - \frac{8\pi G}{3} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = -\frac{\mathcal{W}_{\mathcal{D}} + Q_{\mathcal{D}}}{6}. \quad (7)$$

Looking now at equations (2) and (7) one should note that both the backreaction and the averaged curvature, through $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}$, induce a change in the averaged dynamics of the domain in comparison with the Friedmannian framework. Equation (2) states that a positive backreaction contributes to accelerate the expansion of the domain and then plays against gravity: $Q_{\mathcal{D}} > 0$ effectively mimics a dark energy behaviour over \mathcal{D} . The domain will actually undergo an acceleration of its expansion only if the ‘intensity’ of dark energy is sufficient, which is the case when $Q_{\mathcal{D}} > 4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}}$. A negative backreaction contributes to decelerate the domain expansion and therefore adds to gravity: $Q_{\mathcal{D}} < 0$ effectively mimics a dark matter behaviour over \mathcal{D} . For the averaged model we may suppose that backreaction acts as dark matter on small scales (e.g. galaxy cluster and void scales) and as dark energy on the largest scales (CMB and high-redshift supernovae). In the present work, this differentiation with respect to the spatial scale will however not be made explicit. An explicit multi-scale dynamics can be formulated to refine such a description [46].

We shall assimilate here the properties of the spatial geometrical structure to a *domain-dependent* CG. To this aim we first describe the backreaction variables in terms of an effective perfect fluid whose energy density and pressure read^{||}

$$\varrho_b^{\mathcal{D}} = -\frac{1}{16\pi G} (Q_{\mathcal{D}} + \mathcal{W}_{\mathcal{D}}), \quad p_b^{\mathcal{D}} = -\frac{1}{16\pi G} (Q_{\mathcal{D}} - \frac{\mathcal{W}_{\mathcal{D}}}{3}). \quad (8)$$

We stress here that, since it is an effective description, this fluid does not have to satisfy any energy conditions (as discussed in [18]). We therefore reformulate equations (1) and (2) casting them into Friedmannian form

$$\left(\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \right)^2 + \frac{k_{\mathcal{D}_i}}{a_{\mathcal{D}}^2} - \frac{8\pi G}{3} (\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} + \varrho_b^{\mathcal{D}}) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} + \frac{4\pi G}{3} (\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} + \varrho_b^{\mathcal{D}} + 3p_b^{\mathcal{D}}) = 0. \quad (10)$$

Using the last two equations together with equation (3) one obtains the conservation law for the backreaction fluid

$$\dot{\varrho}_b^{\mathcal{D}} + 3 \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} (\varrho_b^{\mathcal{D}} + p_b^{\mathcal{D}}) = 0, \quad (11)$$

^{||} In this work we prefer to consider the deviation term $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}$ to describe the fluid, instead of the full averaged scalar curvature $\langle R \rangle_{\mathcal{D}}$. First, $(Q_{\mathcal{D}}, \mathcal{W}_{\mathcal{D}})$ incorporate the deviation from a general Friedmannian model, being equivalent to the pair $(Q_{\mathcal{D}}, \langle R \rangle_{\mathcal{D}})$ only in a zero-curvature Friedmannian model. Second, the kinematical backreaction and the curvature deviation both vanish on the background and are gauge-invariants (as shown to second-order in perturbation theory [39]).

which, if written out, reflects the generic coupling between the curvature deviation and the kinematical backreaction—a simple reformulation of equation (4):

$$\frac{1}{a_{\mathcal{D}}^6} (Q_{\mathcal{D}} a_{\mathcal{D}}^6) \cdot + \frac{1}{a_{\mathcal{D}}^2} (\mathcal{W}_{\mathcal{D}} a_{\mathcal{D}}^2) \cdot = 0. \quad (12)$$

3. The Chaplygin gas

The CG is a perfect fluid obeying the state equation

$$p_{ch} = -\frac{A}{\varrho_{ch}}, \quad (13)$$

where $\varrho_{ch} > 0$ and p_{ch} are respectively the energy density and the pressure of the fluid in a comoving frame and A is a positive constant. It was first introduced as a cosmological fluid unifying dark matter and dark energy by Kamenshchik *et al* [34] and has been since widely studied in this context (see, e.g., [2, 3, 9, 10, 20, 22, 23, 25, 29–32]). The equation of state (13) has also raised interest in particle physics thanks to its connection with string theory [12] and its supersymmetric extension [33]. The generalization of the CG [5, 34],

$$p_{ch} = -\frac{A}{\varrho_{ch}^\alpha}, \quad (14)$$

with α a free positive parameter, is commonly used in cosmological models; however in the present work we shall consider for simplicity the case $\alpha = 1$, i.e. the standard CG[¶]. Assuming that the gas verifies the energy conservation law over a spatial domain \mathcal{D} ,

$$\dot{\varrho}_{ch}^{\mathcal{D}} + 3 \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} (\varrho_{ch}^{\mathcal{D}} + p_{ch}^{\mathcal{D}}) = 0, \quad (15)$$

we obtain, making use of relation (13), the expressions

$$\varrho_{ch}^{\mathcal{D}} = \sqrt{A_{\mathcal{D}} + \frac{B_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}^6}}, \quad p_{ch}^{\mathcal{D}} = -\frac{A_{\mathcal{D}}}{\sqrt{A_{\mathcal{D}} + B_{\mathcal{D}}/a_{\mathcal{D}}^6}}, \quad (16)$$

where $B_{\mathcal{D}} = \varrho_{ch_i}^{\mathcal{D}^2} - A_{\mathcal{D}}$ determines the initial conditions of the CG and both $A_{\mathcal{D}}$ and $B_{\mathcal{D}}$ depend on the domain. Note that equations (16) describe the evolution of a homogeneous CG which is the one of interest in our work since the backreaction terms are, due to the averaging procedure, homogeneous over a spatial domain. However, since we average over inhomogeneities, there certainly exist interesting links to the inhomogeneous CG (for an investigation of the latter the reader is referred to [8]).

We now recall briefly of the different aspects of the CG according to the sign of $B_{\mathcal{D}}$.

[¶] A generalization of our ideas, using equation (14), is straightforward. We emphasize that, even if the standard CG does not seem to well fit with observations in a FLRW model, this must not be the case in our approach, since observational data have to be reinterpreted before the need for such a generalization is justified (cf section 6).

3.1. Choosing a positive integration constant

We follow [34] to present the behaviour of the CG for a positive $B_{\mathcal{D}}$. Expressions (16) become for small values of the scale factor, $a_{\mathcal{D}}^6 \ll B_{\mathcal{D}}/A_{\mathcal{D}}$,

$$\varrho_{ch}^{\mathcal{D}} \sim \frac{\sqrt{B_{\mathcal{D}}}}{a_{\mathcal{D}}^3}, \quad p_{ch}^{\mathcal{D}} \sim 0, \quad (17)$$

which indicates that the CG can behave as a dark matter component. For large values of the scale factor, $a_{\mathcal{D}}^6 \gg B_{\mathcal{D}}/A_{\mathcal{D}}$, it follows that

$$\varrho_{ch}^{\mathcal{D}} \sim \sqrt{A_{\mathcal{D}}}, \quad p_{ch}^{\mathcal{D}} \sim -\sqrt{A_{\mathcal{D}}}, \quad (18)$$

which reflects the dark energy-like behaviour of the CG in its last stage. Finally, one may also develop (16) for large values of $a_{\mathcal{D}}$ to obtain

$$\varrho_{ch}^{\mathcal{D}} \sim \sqrt{A_{\mathcal{D}}} + \frac{B_{\mathcal{D}}}{2\sqrt{A_{\mathcal{D}}}} a_{\mathcal{D}}^{-6}, \quad p_{ch}^{\mathcal{D}} \sim -\sqrt{A_{\mathcal{D}}} + \frac{B_{\mathcal{D}}}{2\sqrt{A_{\mathcal{D}}}} a_{\mathcal{D}}^{-6}. \quad (19)$$

Between the phases (17) and (18) the CG can be seen as a mixture of a cosmological constant and a stiff fluid whose pressure and energy density are equal.

To resume, for a positive $B_{\mathcal{D}}$, the CG acts first as dark matter and then as dark energy whose state equation evolves towards the one of a cosmological constant.

3.2. Choosing a negative integration constant

As already noticed in [42] the CG presents another interesting feature for a negative $B_{\mathcal{D}}$ since its density increases with the scale factor. In this situation it plays the role of phantom dark energy, and it evolves at late times towards a cosmological constant. For the pressure and energy density to be well defined one needs

$$A_{\mathcal{D}} + \frac{B_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}^6} > 0 \Leftrightarrow a_{\mathcal{D}}^6 > -\frac{B_{\mathcal{D}}}{A_{\mathcal{D}}}. \quad (20)$$

It therefore exists a minimal value for the scale factor, $a_{\mathcal{D}}^{\min} = (-B_{\mathcal{D}}/A_{\mathcal{D}})^{1/6}$, implying that this case describes a bouncing universe model at early times.

4. Evolution of the kinematical backreaction and the curvature deviation

4.1. Backreaction fluid as a Chaplygin gas

As we have outlined in section 2, the backreaction fluid inherits a *simultaneous* unification of the dark components thanks to its scale dependence. We want to build a model in which this fluid is assimilated to the Chaplygin gas in order to physically shape the behaviour of the backreaction and the curvature deviation on a given spatial scale, while also allowing for a metamorphosis of the ‘dark character’ through evolution. In this model, the Chaplygin gas emerges from the inhomogeneous structure of the universe, and is not related to any fundamental field. We then consider that the backreaction fluid

responds to the scale-dependent state equation (13) over a spatial domain \mathcal{D} . Using definitions (8), we rewrite expression (13) in the form

$$(\mathcal{W}_{\mathcal{D}} + Q_{\mathcal{D}})\left(\frac{\mathcal{W}_{\mathcal{D}}}{3} - Q_{\mathcal{D}}\right) = (16\pi G)^2 A_{\mathcal{D}}. \quad (21)$$

Since no energy condition has to be verified by the backreaction fluid, we may also consider the Chaplygin equation of state (13) with a negative energy density (and hence a negative $A_{\mathcal{D}}$ if one wants to preserve the negativity of the pressure). However, we shall restrict ourselves in this paper to the case where the backreaction fluid satisfies (13) under the usual conditions, i.e. with a positive energy density and a positive $A_{\mathcal{D}}^+$. We thus have to respect, in view of expression (21), the following constraints, which we call the *Chaplygin fluid constraints*:

$$\mathcal{W}_{\mathcal{D}} + Q_{\mathcal{D}} < 0; \quad \frac{\mathcal{W}_{\mathcal{D}}}{3} - Q_{\mathcal{D}} < 0, \quad (22)$$

or, equivalently,

$$\mathcal{W}_{\mathcal{D}} < 0, \quad \frac{\mathcal{W}_{\mathcal{D}}}{3} < Q_{\mathcal{D}} < -\mathcal{W}_{\mathcal{D}}. \quad (23)$$

In this situation, the curvature deviation of any domain is negative at any time whatever its dynamics could be. We also note that $Q_{\mathcal{D}}$ and $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}$ evolve in such a way that relation (21) is always satisfied (see figure 1). Rewriting equation (21) as a function $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(Q_{\mathcal{D}}, A_{\mathcal{D}})$ under the Chaplygin fluid constraints, we derive, for a given $A_{\mathcal{D}}$, the maximal value of the deviation term $\mathcal{W}_M = -24\pi G\sqrt{A_{\mathcal{D}}}$ obtained for $Q_{\mathcal{W}_M} = 8\pi G\sqrt{A_{\mathcal{D}}}$. We shall see in subsections 4.3 and 4.4 that these values form an attractor for the dynamics of the system.

4.2. Exact evolution equations

Inserting expressions (8) into the evolution laws (16) results in

$$\mathcal{W}_{\mathcal{D}} = -\frac{24\pi G}{\sqrt{A_{\mathcal{D}} + B_{\mathcal{D}}/a_{\mathcal{D}}^6}} \left(A_{\mathcal{D}} + \frac{B_{\mathcal{D}}}{2a_{\mathcal{D}}^6} \right), \quad (24)$$

$$Q_{\mathcal{D}} = \frac{8\pi G}{\sqrt{A_{\mathcal{D}} + B_{\mathcal{D}}/a_{\mathcal{D}}^6}} \left(A_{\mathcal{D}} - \frac{B_{\mathcal{D}}}{2a_{\mathcal{D}}^6} \right). \quad (25)$$

We may express the constants $A_{\mathcal{D}}$ and $B_{\mathcal{D}}$ in terms of the initial values of the backreaction Q_i and the curvature deviation \mathcal{W}_i over \mathcal{D} ,

$$A_{\mathcal{D}} = \frac{1}{256\pi^2 G^2} (\mathcal{W}_i + Q_i) \left(\frac{\mathcal{W}_i}{3} - Q_i \right), \quad (26)$$

$$B_{\mathcal{D}} = \frac{1}{128\pi^2 G^2} (\mathcal{W}_i + Q_i) \left(\frac{\mathcal{W}_i}{3} + Q_i \right), \quad (27)$$

and determine the evolution of $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}$ and $Q_{\mathcal{D}}$ in the form

⁺ We do not impose here any other energy conditions on the backreaction fluid.

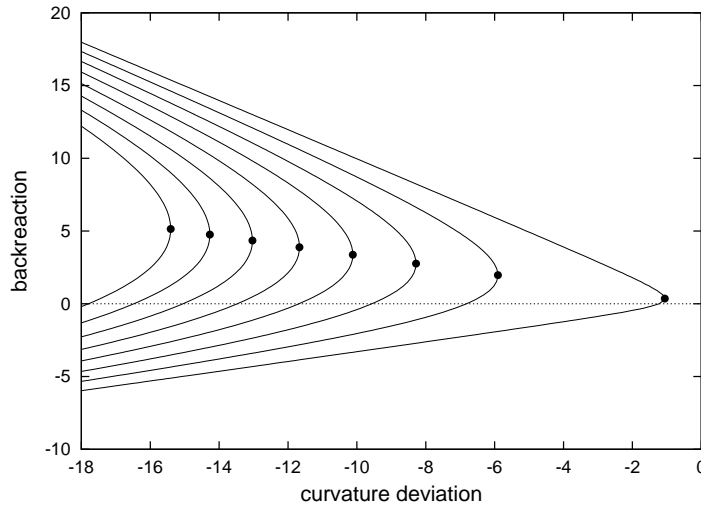


Figure 1. Each curve draws relation (21) for a different $A_{\mathcal{D}}$ (its value arithmetically increases from the curves on the right to the ones on the left) under the Chaplygin fluid constraints. For a given $A_{\mathcal{D}}$, whatever their evolution could be, $Q_{\mathcal{D}}$ and $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}$ run on the corresponding iso- $A_{\mathcal{D}}$ curve. The dots represent the maximal value of the curvature deviation for each $A_{\mathcal{D}}$. A negative $Q_{\mathcal{D}}$ mimics dark matter and a positive $Q_{\mathcal{D}}$ dark energy.

$$\mathcal{W}_{\mathcal{D}} = -\frac{3}{2} \frac{\alpha\beta + \alpha\gamma a_{\mathcal{D}}^{-6}}{(\alpha\beta + 2\alpha\gamma a_{\mathcal{D}}^{-6})^{1/2}}, \quad (28)$$

$$Q_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} \frac{\alpha\beta - \alpha\gamma a_{\mathcal{D}}^{-6}}{(\alpha\beta + 2\alpha\gamma a_{\mathcal{D}}^{-6})^{1/2}}, \quad (29)$$

where the new terms are defined as

$$\alpha := \mathcal{W}_i + Q_i, \quad \beta := \frac{\mathcal{W}_i}{3} - Q_i, \quad \gamma := \frac{\mathcal{W}_i}{3} + Q_i = \frac{1}{2}(\alpha - \beta). \quad (30)$$

The Chaplygin fluid constraints imply $\alpha < 0$ and $\beta < 0$. The evolution of $Q_{\mathcal{D}}$ and $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}$ is entirely determined by the initial values Q_i and \mathcal{W}_i of the domain or, equivalently, by α and β . The opposite sign of γ gives the sign of $B_{\mathcal{D}}$, equation (27), and therefore defines the behaviour of the Chaplygin backreaction fluid.

4.3. Evolution of the curvature deviation

The rate of change $\partial\mathcal{W}_{\mathcal{D}}/\partial a_{\mathcal{D}}$ shows that the curvature deviation grows with $a_{\mathcal{D}}$. For large values of the scale factor, $a_{\mathcal{D}}^6 \gg |\gamma/\beta|$, we get

$$\mathcal{W}_{\mathcal{D}} \sim -\frac{3}{2} (\alpha\beta)^{1/2}, \quad (31)$$

which takes the form, using equation (26),

$$\mathcal{W}_{\mathcal{D}} \sim -24\pi G \sqrt{A_{\mathcal{D}}} = \mathcal{W}_M, \quad (32)$$

where \mathcal{W}_M has been introduced before. Thus, for a given $A_{\mathcal{D}}$, the curvature deviation increases towards its attractor \mathcal{W}_M , for which the departure from the Friedmannian curvature is maximum. For $\gamma = 0$ the curvature deviation is initially set to \mathcal{W}_M and then does not evolve. It is important to remark that there exists an infinite number of couples (Q_i, \mathcal{W}_i) or, equivalently, (α, β) which yield the same $A_{\mathcal{D}}$ under the Chaplygin fluid constraints. For all of them $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}$ will live on the same iso- $A_{\mathcal{D}}$ curve and will tend towards the same attractor (see figure 1).

4.4. Evolution of the backreaction

For large values of the scale factor, $a_{\mathcal{D}}^6 \gg |\gamma/\beta|$, we have

$$Q_{\mathcal{D}} \sim \frac{1}{2} (\alpha\beta)^{1/2}, \quad (33)$$

or, equivalently, using equation (26),

$$Q_{\mathcal{D}} \sim 8\pi G \sqrt{A_{\mathcal{D}}} = Q_{\mathcal{W}_M} > 0, \quad (34)$$

where $Q_{\mathcal{W}_M}$ has been introduced before. The backreaction tends at late times towards a domain-dependent cosmological constant whose value is given by the initial conditions α and β on the domain. The same remark as in subsection 4.3 can be made for $Q_{\mathcal{D}}$. One needs to distinguish the following cases (see figure 1).

- (i) For $\gamma > 0$ the backreaction is always positive and hence only acts as dark energy over the domain. In this situation, since $\partial Q_{\mathcal{D}}/\partial a_{\mathcal{D}}$ is negative, $Q_{\mathcal{D}}$ behaves as dark energy whose intensity decreases until reaching the attractor $Q_{\mathcal{W}_M}$. We recall in this case the existence of a minimal scale factor $a_{\mathcal{D}}^{\min} = (-2\gamma/\beta)^{1/6}$. $\alpha < 0$ implies $a_{\mathcal{D}}^{\min} < 1$.
- (ii) For $\gamma = 0$ the system is initially set on the attractor; thus it does not evolve. The backreaction always acts as a cosmological constant.
- (iii) for $\gamma < 0$ we have a positive $\partial Q_{\mathcal{D}}/\partial a_{\mathcal{D}}$. Two subcases arise according to the initial value Q_i :
 - (a) for $0 \leq Q_i < -\mathcal{W}_i/3$ the backreaction acts as dark energy whose intensity increases until reaching the attractor $Q_{\mathcal{W}_M}$;
 - (b) for $\mathcal{W}_i/3 < Q_i < 0$ the backreaction changes its sign during its evolution. It first behaves as dark matter whose intensity decreases, and then as dark energy whose intensity increases until reaching the attractor. The moment of the transition dark matter-dark energy depends on the initial values of the domain since $a_{\mathcal{D}}^{\text{tr}} = (\gamma/\beta)^{1/6}$.

We conclude by emphasizing some of the characteristics of the model. First, the CG relates the backreaction terms of our inhomogeneous universe model and therefore furnishes a particular manifestation of its inhomogeneous structure. Our model does not suppose the existence of any other fundamental field, contrary to the approach of a FLRW universe filled with dust and CG. Second, the role and the evolution of the backreaction depend on the domain considered and on its initial values. As a consequence this model could be seen as an effective multi-scale model. For instance $Q_{\mathcal{D}}$ might act as dark matter on small scales (situation (iii)-(b)) with a dark energy transition occurring at very late times, and as different kinds of dark energy on larger scales (situations (i), (ii) and (iii)-(a)).

4.5. Another approach: the backreaction fluid as a scalar field

The backreaction fluid might also be described by a minimally coupled real scalar field $\phi_{\mathcal{D}}$, called the morphon field [18], evolving in an effective potential $U_{\mathcal{D}}(\phi_{\mathcal{D}})$, as follows:

$$\varrho_{\phi}^{\mathcal{D}} := \frac{\epsilon}{2} \dot{\phi}_{\mathcal{D}}^2 + U_{\mathcal{D}}, \quad p_{\phi}^{\mathcal{D}} := \frac{\epsilon}{2} \dot{\phi}_{\mathcal{D}}^2 - U_{\mathcal{D}}, \quad (35)$$

where $\epsilon = +1$ for a standard scalar field (with a positive kinetic energy) and $\epsilon = -1$ for a phantom scalar field (with a negative kinetic energy). The last expressions together with relations (8) give

$$\epsilon \dot{\phi}_{\mathcal{D}}^2 = -\frac{1}{8\pi G} \left(Q_{\mathcal{D}} + \frac{\mathcal{W}_{\mathcal{D}}}{3} \right), \quad U_{\mathcal{D}} = -\frac{1}{24\pi G} \mathcal{W}_{\mathcal{D}}. \quad (36)$$

The system evolves towards the maximal value of the curvature deviation \mathcal{W}_M , as seen in subsection 4.3, which corresponds to the minimal value of the potential. With correspondence (36) the integrability condition (12) implies that $\phi_{\mathcal{D}}$, for $\dot{\phi}_{\mathcal{D}} \neq 0$, obeys the scale-dependent Klein-Gordon equation

$$\ddot{\phi}_{\mathcal{D}} + 3 \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \dot{\phi}_{\mathcal{D}} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \phi_{\mathcal{D}}} U_{\mathcal{D}} = 0. \quad (37)$$

The above correspondence allows us to interpret the kinematical backreaction effects in terms of the properties of scalar field cosmologies, notably quintessence or phantom-quintessence scenarii that are here routed back to models of inhomogeneities. The morphon field may also be characterized by the domain-dependent equation of state $p_{\phi}^{\mathcal{D}} = w_{\phi}^{\mathcal{D}} \varrho_{\phi}^{\mathcal{D}}$, which assumes in our model the form

$$w_{\phi}^{\mathcal{D}} = \frac{-1}{1 + 2 \frac{\gamma}{\beta} a_{\mathcal{D}}^{-6}}. \quad (38)$$

For $\gamma < 0$, the morphon field acts as dark matter and ‘standard’ dark energy as mentioned in subsection 3.1. In this situation we have $-1 < w_{\phi}^{\mathcal{D}} < 0$ and $w_{\phi}^{\mathcal{D}} \rightarrow -1^+$ at late times. For $\gamma > 0$, it behaves as phantom dark energy as mentioned in subsection 3.2. In this case we have, since $a_{\mathcal{D}} > a_{\mathcal{D}}^{\min}$, $w_{\phi}^{\mathcal{D}} < -1$ and $w_{\phi}^{\mathcal{D}} \rightarrow -1^-$ at late times. We stress again that the phantom character is an effective property in our description; no

fundamental phantom field is assumed to exist [18]. Finally, for $\gamma = 0$, the morphon field mimics a scale-dependent cosmological constant and we have $w_\phi^{\mathcal{D}} = -1$.

Using equations (28) and (29), relations (35) become

$$\epsilon \dot{\phi}_{\mathcal{D}}^2 = \frac{1}{8\pi G} \frac{\alpha\gamma a_{\mathcal{D}}^{-6}}{(\alpha\beta + 2\alpha\gamma a_{\mathcal{D}}^{-6})^{1/2}}, \quad (39)$$

$$U_{\mathcal{D}} = \frac{1}{16\pi G} \frac{\alpha\beta + \alpha\gamma a_{\mathcal{D}}^{-6}}{(\alpha\beta + 2\alpha\gamma a_{\mathcal{D}}^{-6})^{1/2}}. \quad (40)$$

The scalar field dynamics can be reconstructed by evaluating the following integral, e.g. to find $U_{\mathcal{D}}(\phi_{\mathcal{D}})$:

$$\epsilon(\phi'_{\mathcal{D}})^2 = \frac{3}{4\pi G} \frac{\alpha\gamma a_{\mathcal{D}}^{-8}}{\left[16\pi G \frac{M}{V_{\mathcal{D}_i}} a_{\mathcal{D}}^{-3} + (\alpha\beta + 2\alpha\gamma a_{\mathcal{D}}^{-6})^{1/2} - 6k_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^{-2}\right] (\alpha\beta + 2\alpha\gamma a_{\mathcal{D}}^{-6})^{1/2}}, \quad (41)$$

where the prime denotes the derivation w.r.t. the volume scale factor. This relation does not seem analytically integrable in the general case. In the vacuum with a zero-Friedmanian curvature ($k_{\mathcal{D}_i} = 0$), expression (41) becomes

$$\epsilon(\phi'_{\mathcal{D}})^2 = \frac{3}{4\pi G} \frac{\alpha\gamma a_{\mathcal{D}}^{-8}}{\alpha\beta + 2\alpha\gamma a_{\mathcal{D}}^{-6}}. \quad (42)$$

From this last relation, we get the following expression for a standard scalar field ($\epsilon = +1$ and $\gamma < 0$):

$$\phi_{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{D}}) = \mp \frac{1}{\sqrt{24\pi G}} \operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{A + Ba_{\mathcal{D}}^{-6}}{A}} + \phi_0, \quad (43)$$

where ϕ_0 is an integration constant. The potential is then written [34]

$$U_{\mathcal{D}}(\phi_{\mathcal{D}}) = \frac{1}{32\pi G} \sqrt{\alpha\beta} \left(\cosh \sqrt{24\pi G}(\phi_{\mathcal{D}} - \phi_0) + \frac{1}{\cosh \sqrt{24\pi G}(\phi_{\mathcal{D}} - \phi_0)} \right). \quad (44)$$

For a phantom scalar field ($\epsilon = -1$ and $\gamma > 0$) we get from the relation (42)

$$\phi_{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{D}}) = \mp \frac{1}{\sqrt{24\pi G}} \arccos \sqrt{\frac{A + Ba_{\mathcal{D}}^{-6}}{A}} + \phi_0, \quad (45)$$

and the potential reads

$$U_{\mathcal{D}}(\phi_{\mathcal{D}}) = \frac{1}{32\pi G} \sqrt{\alpha\beta} \left(\cos \sqrt{24\pi G}(\phi_{\mathcal{D}} - \phi_0) + \frac{1}{\cos \sqrt{24\pi G}(\phi_{\mathcal{D}} - \phi_0)} \right). \quad (46)$$

Note that this last expression can be obtained directly from relation (44) by the simple reparametrization $\phi_{\mathcal{D}} - \phi_0 \rightarrow i(\phi_{\mathcal{D}} - \phi_0)$. This is obvious in view of the form of the kinetic term of the morphon field: for a standard scalar field it is written $\dot{\phi}_{\mathcal{D}}^2$ and for a phantom field $-\dot{\phi}_{\mathcal{D}}^2$.

In the following section, we reformulate the different results obtained in this section in terms of effective cosmological parameters and we study the dynamics of the model.

5. Effective cosmological parameters

5.1. Constraints and evolution equations for the cosmological parameters

Expressed through the domain-dependent cosmological parameters

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} := \frac{8\pi G}{3H_{\mathcal{D}}^2} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}}, \quad \Omega_k^{\mathcal{D}} := -\frac{k_{\mathcal{D}i}}{H_{\mathcal{D}}^2 a_{\mathcal{D}}^2}, \quad (47)$$

$$\Omega_{\mathcal{W}}^{\mathcal{D}} := -\frac{\mathcal{W}_{\mathcal{D}}}{6H_{\mathcal{D}}^2}, \quad \Omega_Q^{\mathcal{D}} := -\frac{Q_{\mathcal{D}}}{6H_{\mathcal{D}}^2}, \quad (48)$$

where $H_{\mathcal{D}} = \dot{a}_{\mathcal{D}}/a_{\mathcal{D}}$ is the volume Hubble functional, the averaged Hamiltonian constraint (1) assumes the form [19]

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} + \Omega_k^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{W}}^{\mathcal{D}} + \Omega_Q^{\mathcal{D}} = 1. \quad (49)$$

The Chaplygin fluid constraints (22) may be expressed as

$$\Omega_{\mathcal{W}}^{\mathcal{D}} + \Omega_Q^{\mathcal{D}} > 0, \quad \frac{\Omega_{\mathcal{W}}^{\mathcal{D}}}{3} - \Omega_Q^{\mathcal{D}} > 0. \quad (50)$$

Equations (28) and (29) furnish the evolution laws for $\Omega_{\mathcal{W}}^{\mathcal{D}}$ and $\Omega_Q^{\mathcal{D}}$:

$$\Omega_{\mathcal{W}}^{\mathcal{D}} = \frac{3}{2} \frac{H_i^2}{H_{\mathcal{D}}^2} \frac{\Omega_{\alpha}\Omega_{\beta} + \Omega_{\alpha}\Omega_{\gamma} a_{\mathcal{D}}^{-6}}{(\Omega_{\alpha}\Omega_{\beta} + 2\Omega_{\alpha}\Omega_{\gamma} a_{\mathcal{D}}^{-6})^{1/2}}, \quad (51)$$

$$\Omega_Q^{\mathcal{D}} = -\frac{1}{2} \frac{H_i^2}{H_{\mathcal{D}}^2} \frac{\Omega_{\alpha}\Omega_{\beta} - \Omega_{\alpha}\Omega_{\gamma} a_{\mathcal{D}}^{-6}}{(\Omega_{\alpha}\Omega_{\beta} + 2\Omega_{\alpha}\Omega_{\gamma} a_{\mathcal{D}}^{-6})^{1/2}}, \quad (52)$$

where the new terms are defined by

$$\Omega_{\alpha} := -\frac{\alpha}{6H_i^2}, \quad \Omega_{\beta} := -\frac{\beta}{6H_i^2}, \quad \Omega_{\gamma} := -\frac{\gamma}{6H_i^2} = \frac{1}{2}(\Omega_{\alpha} - \Omega_{\beta}). \quad (53)$$

The sign of Ω_{γ} determines the behaviour of $\Omega_{\mathcal{W}}^{\mathcal{D}}$ and $\Omega_Q^{\mathcal{D}}$. One may reformulate constraints (50) in terms of the initial conditions,

$$0 < \Omega_{\alpha}, \quad 0 < \Omega_{\beta}. \quad (54)$$

5.2. Evolution of the Hubble functional

Equation (49) together with equations (51) and (52) provide the evolution equation for the Hubble functional (see appendix A for the study of $H_{\mathcal{D}}$ in a particular case):

$$\frac{H_{\mathcal{D}}^2}{H_i^2} = \Omega_k^i a_{\mathcal{D}}^{-2} + \Omega_m^i a_{\mathcal{D}}^{-3} + (\Omega_{\alpha}\Omega_{\beta} + 2\Omega_{\alpha}\Omega_{\gamma} a_{\mathcal{D}}^{-6})^{1/2}. \quad (55)$$

$H_{\mathcal{D}}$ tends, at late times, towards

$$\frac{H_{\mathcal{D}}^2}{H_i^2} \sim (\Omega_{\alpha}\Omega_{\beta})^{1/2}. \quad (56)$$

5.3. Evolution of the cosmological density parameters

One finds, for large values of the scale factor,

$$\Omega_{\mathcal{W}}^{\mathcal{D}} \sim \frac{3}{2}, \quad \Omega_Q^{\mathcal{D}} \sim -\frac{1}{2}. \quad (57)$$

It is interesting to note that the cosmological parameters tend towards a value independent of the initial conditions (see appendix A for the study of $\Omega_{\mathcal{W}}^{\mathcal{D}}$ and $\Omega_Q^{\mathcal{D}}$ in a particular case). We may also introduce the cosmological parameter $\Omega_X^{\mathcal{D}}$, the so-called X-matter, defined as

$$\Omega_X^{\mathcal{D}} := \Omega_{\mathcal{W}}^{\mathcal{D}} + \Omega_Q^{\mathcal{D}} = \frac{H_i^2}{H_{\mathcal{D}}^2} (\Omega_{\alpha}\Omega_{\beta} + 2\Omega_{\alpha}\Omega_{\gamma} a_{\mathcal{D}}^{-6})^{1/2}. \quad (58)$$

We have noticed in section 2 that the kinematical backreaction might explain the origin of dark matter and dark energy, and we have presented its behaviour in subsection 4.4. If one wants to compare our model to a scale-dependent Friedmannian cosmology in terms of cosmological parameters, $\Omega_X^{\mathcal{D}}$ has to be considered as the origin of the dark components, instead of $\Omega_Q^{\mathcal{D}}$ alone. This simply means that the curvature deviation, since it also participates in the departure from the Friedmannian framework, may also act, qualitatively, as the dark components. In fact we know from previous work that the curvature deviation is actually quantitatively more important than the backreaction term itself [19].

We depict in figure 2 two situations to illustrate our model. The initial moment is chosen to be the epoch of the CMB, and we set $\Omega_k^{\mathcal{D}} = 0^*$, $\Omega_m^i = 1 - 10^{-5}$ and $\Omega_X^i = 10^{-5}$. In the upper figure, the X-matter only stands for dark energy; $\Omega_X^{\mathcal{D}}$ corresponds to Ω_{DE}^F (the dark energy in the concordance model) and $\Omega_m^{\mathcal{D}}$ to $\Omega_b + \Omega_{DM}^F$ (respectively the baryons and the dark matter in the concordance model). In the lower figure, the X-matter stands for dark energy and dark matter (since it can play both roles, it is regarded in this case as a result of different contributions on different scales); $\Omega_X^{\mathcal{D}}$ corresponds to $\Omega_{DE}^F + \Omega_{DM}^F$ and $\Omega_m^{\mathcal{D}}$ to Ω_b . The two situations describe a universe initially close to a homogeneous-isotropic Friedmannian universe ($\Omega_X^i \sim 0$) with zero-curvature ($\Omega_k^{\mathcal{D}} = 0$). This low deviation, however, becomes larger with the growth of the scale factor to reach in the first case $\Omega_X^{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{D}} \sim 1000) = \Omega_X^0 = \Omega_{DE}^0 \sim 0.72$ (where the superscript denotes the ‘today’-value), and in the second case $\Omega_X^{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{D}} \sim 1000) = \Omega_X^0 = \Omega_{DE}^0 + \Omega_{DM}^0 \sim 0.95\ddagger$. The origin and magnitude of the dark energy (first situation) and of both dark energy and

* This choice allows us to roughly compare our model to the concordance model. In this situation we have $\mathcal{W}_{\mathcal{D}} = \langle R \rangle_{\mathcal{D}}$.

‡ If we choose the initial moment to be the CMB epoch, $a_{\mathcal{D}} \sim 1000$ is chosen to roughly correspond to the ‘today’-value of the scale factor in a Friedmannian cosmology. Under the assumption that the metric of our universe does not significantly differ from a Euclidean metric, the scale factor, calculated through this metric (equation (5)), evolves in our model approximately like its Friedmannian counterpart. Thus, we are entitled to assume $a_{\mathcal{D}}^0 \sim 1000$. However, backreaction terms, encoding the inhomogeneities, involve first and second derivatives of the metric and can therefore not be neglected, even if the metrical amplitudes are considered to be near-Euclidean (see the discussion in [17] and numerical applications therein).

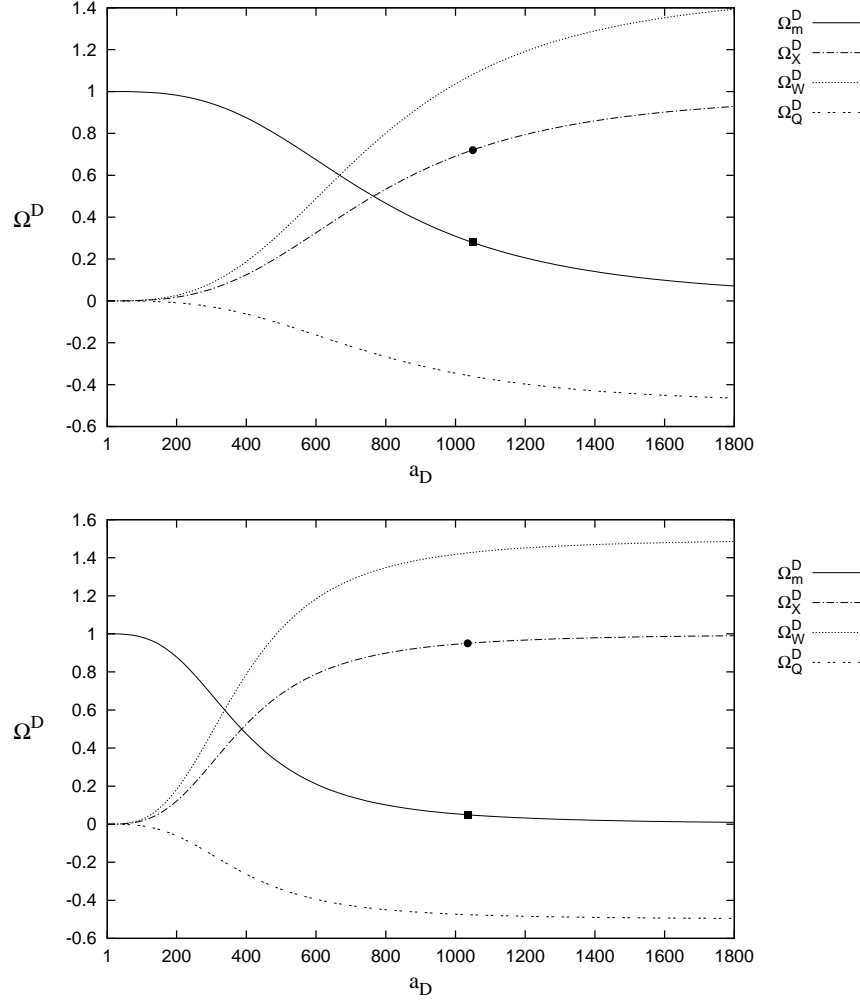


Figure 2. Evolution of the cosmological parameters $\Omega_m^{\mathcal{D}}$, $\Omega_X^{\mathcal{D}}$, $\Omega_W^{\mathcal{D}}$ and $\Omega_Q^{\mathcal{D}}$ w. r. t. the scale factor. We set $\Omega_k^{\mathcal{D}} = 0$, $\Omega_m^i = 1 - 10^{-5}$ and $\Omega_X^i = \Omega_\alpha = 10^{-5}$ where the initial moment is the CMB epoch. Upper figure: $\Omega_\beta = 5 \cdot 10^{-13}$; we have $\Omega_X^{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{D}} \sim 1000) = \Omega_{DE}^0 \sim 0.72$ (dot) and $\Omega_m^{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{D}} \sim 1000) = \Omega_b^0 + \Omega_{DM}^0 \sim 0.28$ (square). Lower figure: $\Omega_\beta = 3 \cdot 10^{-11}$; we have $\Omega_X^{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{D}} \sim 1000) = \Omega_{DE}^0 + \Omega_{DM}^0 \sim 0.95$ (dot) and $\Omega_m^{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{D}} \sim 1000) = \Omega_b^0 \sim 0.05$ (square).

dark matter (second situation) are then entirely explained by the particular geometrical structure of an inhomogeneous space obeying the Chaplygin equation of state.

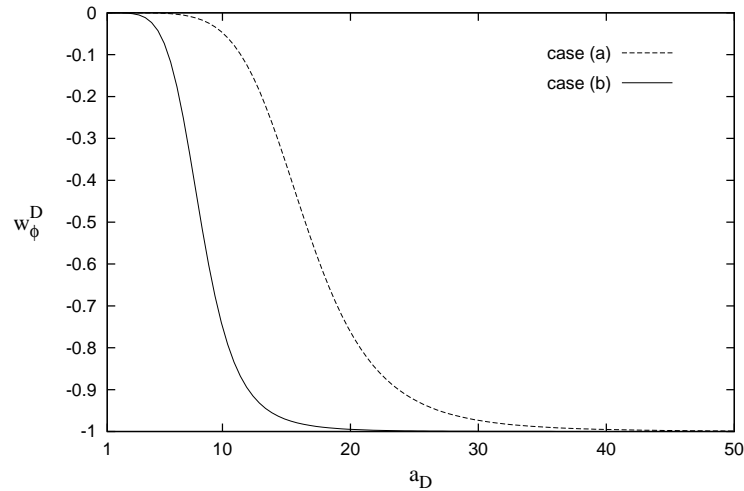


Figure 3. Evolution of $w_\phi^{\mathcal{D}}$ w. r. t. the scale factor. $\Omega_k^{\mathcal{D}} = 0$, $\Omega_m^i = 1 - 10^{-5}$ and $\Omega_X^i = \Omega_\alpha = 10^{-5}$; the initial moment is the CMB epoch. Case (a): $\Omega_\beta = 5 \cdot 10^{-13}$ and $\Omega_X^{\mathcal{D}} = \Omega_{DE}^F$. Case (b): $\Omega_\beta = 3 \cdot 10^{-11}$ and $\Omega_X^{\mathcal{D}} = \Omega_{DE}^F + \Omega_{DM}^F$. In both situations $w_\phi^{\mathcal{D}}$ quickly evolves towards -1 , which corresponds to the cosmological constant-like behaviour of the backreaction fluid.

5.4. Another approach: the morphon equation of state

Using the effective cosmological parameters, we rewrite equation (38) as

$$w_\phi^{\mathcal{D}} = \frac{-1}{1 + 2 \frac{\Omega_\gamma}{\Omega_\beta} a_{\mathcal{D}}^{-6}}. \quad (59)$$

The behaviour of $w_\phi^{\mathcal{D}}$ is known in terms of cosmological parameters simply by replacing γ with $-\Omega_\gamma$ through subsection 4.5 (see also figure 3).

5.5. Dynamics of the fluid volume

Depending on the initial conditions, the domain \mathcal{D} might undergo a decelerated or an accelerated expansion at different periods of its evolution. To learn how it behaves we throw an eye on the volume deceleration parameter

$$q_{\mathcal{D}} = -\frac{1}{H_{\mathcal{D}}^2} \frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = \frac{1}{2} \Omega_m^{\mathcal{D}} + 2 \Omega_Q^{\mathcal{D}}. \quad (60)$$

At late times, since $q_{\mathcal{D}} \sim -1$, the fluid volume undergoes an accelerated expansion, we are indeed dealing with a cosmological constant in this situation. Three different cases occur for the dynamics of the domain (see figure 4, and appendix A for a detailed analysis in a particular case):

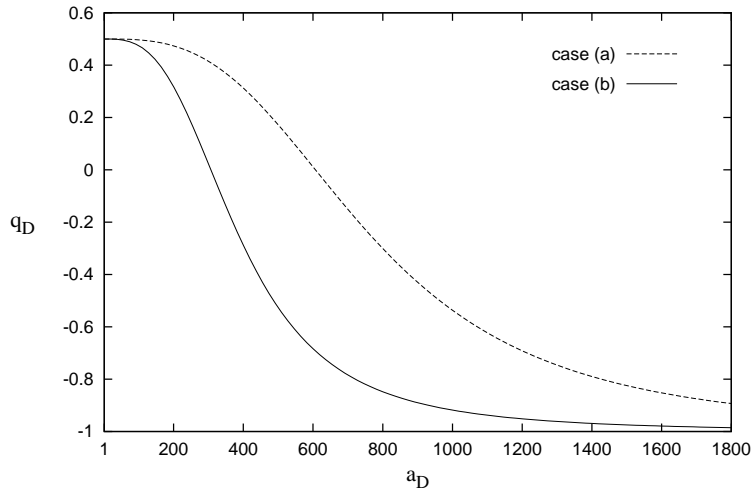


Figure 4. Evolution of the deceleration parameter w. r. t. the scale factor. $\Omega_k^{\mathcal{D}} = 0$, $\Omega_m^i = 1 - 10^{-5}$ and $\Omega_X^i = \Omega_\alpha = 10^{-5}$; the initial moment is the CMB epoch. Case (a): $\Omega_\beta = 5 \cdot 10^{-13}$ and $\Omega_X^{\mathcal{D}} = \Omega_{DE}^F$. Case (b): $\Omega_\beta = 3 \cdot 10^{-11}$ and $\Omega_X^{\mathcal{D}} = \Omega_{DE}^F + \Omega_{DM}^F$. The evolution of the deceleration parameter is only shaped by $\Omega_m^{\mathcal{D}}$ and $\Omega_Q^{\mathcal{D}}$ ($\Omega_X^{\mathcal{D}}$ does not contribute to it, see equation (60)). In both situations the expansion of the domain is first decelerated ($q_{\mathcal{D}} > 0$), then accelerated ($q_{\mathcal{D}} < 0$).

- (i) its expansion is first decelerated then accelerated;
- (ii) its expansion is always accelerated;
- (iii) its expansion is accelerated, then decelerated and again accelerated.

The latter case is an interesting situation: the kinematical backreaction is responsible for two accelerated phases. Our model only concerns the matter-dominated universe; however this situation allows to imagine that the primordial inflation and the one occurring today might be driven by the same effect studied in a more general model.

6. Concluding Remarks

We have built in this paper a model in which the backreaction fluid acts as a domain-dependent effective CG, focusing for simplicity on the case where its effective energy density is positive. The behaviour of the kinematical backreaction only depends on the initial conditions of the domain and may correspond to dark matter or different types of dark energy according to the scale and the time evolution. Our model kinematically resembles a Friedmannian cosmology with two fluids (dust and CG), but conceptual implications differ. First, the origin of dark energy (or, in the extreme case, of both dark components) is related to the non-trivial geometrical structure of an inhomogeneous space; we do not assume the existence of other fundamental constituents or fields.

Second, the geometrical structure that complies with the Chaplygin equation of state can in principle be verified by concrete inhomogeneous models and also observationally; the model is no longer phenomenological in the sense that no free parameters remain. Free parameters in the standard approach (being homogeneous) are here traced back to the initial data for the inhomogeneities and are therefore, in this sense, not arbitrary. Any fitting of observational data of our model will lead to unambiguous initial data that can be constraint by structure formation. Third, one has to be careful when cosmological observables are derived. Indeed, angular diameter and luminosity distances, for instance, depend on metrical properties. These latter are affected and related, in our description, to the averaged scalar curvature, which evolves differently compared with its Friedmannian counterpart. It is therefore necessary to reinterpret observational data, using e.g. the lines of the analysis performed for the exact scaling solutions in [38]. In light of this remark it is premature to exclude [1,6,7,24] the standard Chaplygin equation of state as providing a good match with observational data. The construction of an effective metric for a cosmology with a Chaplygin backreaction fluid and a comparison with observations are the subjects of a future work.

Acknowledgements:

We wish to thank Charly Nayet and Brice Riba for useful discussions. Also, we wish to thank Ugo Moschella, Alexander Kamenshchik, Roberto Sussman and Gary Tupper for their useful comments on the manuscript and interesting suggestions. This work was supported by ‘Fédération de Physique André Marie Ampère’. XR acknowledges support by École Doctorale, Lyon.

References

- [1] L. Amendola, F. Finelli, C. Burigana and D. Carturan: WMAP and the generalized Chaplygin gas. *JCAP* **0307**, 005 (2003)
- [2] P. P. Avelino, L. M. G. Beca, J. P. M. de Carvalho, C. J. A. P. Martins and P. Pinto: Alternatives to quintessence model building. *Phys. Rev. D* **67**, 023511 (2003)
- [3] R. Bean and O. Dore: Are Chaplygin gases serious contenders for the dark energy? *Phys. Rev. D* **68**, 023515 (2003)
- [4] J. Behrend: Metric renormalization in general relativity. arXiv:0812.2859 (2008)
- [5] M. C. Bento, O. Bertolami and A. A. Sen: Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy–Matter unification. *Phys. Rev. D* **66**, 043507 (2002)
- [6] M. C. Bento, O. Bertolami and A. A. Sen: Generalized Chaplygin gas model: dark energy - dark matter unification and CMBR constraints. *Gen. Rel. Grav.* **35**, 2063 (2003)
- [7] M. C. Bento, O. Bertolami and A. A. Sen: WMAP constraints on the generalized Chaplygin gas model. *Phys. Lett. B* **575**, 172 (2003)
- [8] N. Bilic, G. B Tupper and R. D. Viollier: Unification of dark matter and dark energy: the inhomogeneous Chaplygin gas. *Phys. Lett. B* **535**, 17 (2002)
- [9] N. Bilic, R. J. Lindebaum, G. B. Tupper and R. D. Viollier: Nonlinear evolution of dark matter and dark energy in the Chaplygin gas cosmology. *JCAP* **0411**, 008 (2004)
- [10] N. Bilic, G. B Tupper and R. D. Viollier: Cosmological tachyon condensation. *Phys. Rev. D* **80**, 023515 (2009)
- [11] K. Bolejko and L. Andersson: Apparent and average acceleration of the universe. *JCAP* **0810**, 003 (2008)

- [12] M. Bordemann and J. Hoppe: The dynamics of relativistic membranes. Reduction to 2-dimensional fluid dynamics. *Phys. Lett. B* **317**, 315 (1993)
- [13] T. Buchert: On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: 1. dust cosmologies. *Gen. Rel. Grav.* **32**, 105 (2000)
- [14] T. Buchert: On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: 2. perfect fluid cosmologies. *Gen. Rel. Grav.* **33**, 1381 (2001)
- [15] T. Buchert: A cosmic equation of state for the inhomogeneous universe: can a global far-from-equilibrium state explain dark energy? *Class. Quant. Grav.* **22**, L113 (2005)
- [16] T. Buchert: On globally static and stationary cosmologies with or without a cosmological constant and the dark energy problem. *Class. Quant. Grav.* **23**, 817 (2006)
- [17] T. Buchert, G. F. R. Ellis and H. Van Elst: Geometrical order-of-magnitude estimates for spatial curvature in realistic models of the universe. *Gen. Rel. Grav.* **41**, 2017 (2009)
- [18] T. Buchert, J. Larena and J.-M. Alimi: Correspondence between kinematical backreaction and scalar field cosmologies – the ‘morphon field’. *Class. Quant. Grav.* **23**, 6379 (2006)
- [19] T. Buchert: dark energy from structure – a status report. *Gen. Rel. Grav.* **40**, 467 (2008)
- [20] D. Carturan and F. Finelli: Cosmological effects of a class of fluid dark energy models. *Phys. Rev. D* **68**, 103501 (2003)
- [21] M.-N. C el erier, K. Bolejko, A. Krasinski, C. Hellaby: A (giant) void is not mandatory to explain away dark energy with a Lemaitre–Tolman model. arXiv:0906.0905 (2009)
- [22] L. P. Chimento, A. S. Jakubi and D. Pavo: dark energy, dissipation, and the coincidence problem. *Phys. Rev. D* **67**, 087302 (2003)
- [23] L. P. Chimento: Extended tachyon field, Chaplygin gas, and solvable k-essence cosmologies. *Phys. Rev. D* **69**, 123517 (2004)
- [24] J. V. Cunha, J. S. Alcaniz and J. A. S. Lima: Cosmological constraints on Chaplygin gas dark energy from galaxy clusters X-ray and supernova data. *Phys. Rev. D* **69**, 083501 (2004)
- [25] A. Dev, J. S. Alcaniz and D. Jain: Cosmological consequences of a Chaplygin gas dark energy. *Phys. Rev. D* **67**, 023515 (2003)
- [26] G.F.R. Ellis: Relativistic cosmology: its nature, aims and problems. In *General Relativity and Gravitation* (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1984), pp. 215–288
- [27] G.F.R. Ellis and T. Buchert: The universe seen at different scales. *Phys. Lett. A. (Einstein Special Issue)* **347**, 38 (2005)
- [28] K. Enqvist: Lemaitre Tolman Bondi model and accelerating expansion. *Gen. Rel. Grav.* **40**, 451 (2008)
- [29] J. C. Fabris, S. V. B. Goncalves and P. E. de Souza: Density perturbations in a universe dominated by the Chaplygin gas. *Gen. Rel. Grav.* **34**, 53 (2002)
- [30] J. C. Fabris, S. V. B. Goncalves and P. E. de Souza: Mass power spectrum in a universe dominated by the Chaplygin gas. *Gen. Rel. Grav.* **34**, 2111 (2002)
- [31] V. Gorini, A. Kamenshchik and U. Moschella: Can the Chaplygin gas be a plausible model for dark energy? *Phys. Rev. D* **67**, 063509 (2003)
- [32] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier: The Chaplygin gas as a model for dark energy. In: Proc. MG10, Rio de Janeiro, Brazil, 20-26 July 2003, M. Novello, S. Perez Bergliaffa, R. Ruffini (eds.). World Scientific, p. 840 (2005)
- [33] R. Jackiw and A. P. Polychronakos: Supersymmetric fluid mechanics. *Phys. Rev. D* **62**, 085019 (2000)
- [34] A. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier: An alternative to quintessence. *Phys. Lett. B* **511**, 265 (2001)
- [35] E.W. Kolb, V. Marra and S. Matarrese: Description of our cosmological spacetime as a perturbed conformal Newtonian metric and implications for the backreaction proposal for the accelerating universe. *Phys. Rev. D* **78** 103002 (2008)
- [36] E.W. Kolb, V. Marra and S. Matarrese: Cosmological background solutions and cosmological backreactions. arXiv:0901.4566 (2009)

- [37] E. W. Kolb and C. R. Lamb: Light-cone observations and cosmological models: implications for inhomogeneous models mimicking dark energy. arXiv:0911.3852 (2009)
- [38] J. Larena, J.-M. Alimi, T. Buchert, M. Kunz and P.-S. Corasaniti: Testing backreaction effects with observations. Phys. Rev. D **79**, 083011 (2009)
- [39] N. Li and D. J. Schwarz: On the onset of cosmological backreaction. Phys. Rev. D **76**, 083011 (2007)
- [40] A. Paranjape and T. P. Singh: The possibility of cosmic acceleration via spatial averaging in Lemaitre–Tolman–Bondi models. Class. Quant. Grav. **23**, 6955 (2006)
- [41] S. Räsänen: Accelerated expansion from structure formation. JCAP **0611**, 003 (2006)
- [42] M.R. Setare: Interacting generalized Chaplygin gas model in non-flat universe. Eur. Phys. J. C **52**, 689 (2007)
- [43] R.A. Sussman: Quasi-local variables, non-linear perturbations and backreaction in spherically symmetric spacetimes. arXiv:0809.3314 (2008)
- [44] R.A. Sussman: Quasi-local variables and inhomogeneous cosmological sources with spherical symmetry. AIP Conf. Proc. 1083, pp. 228-235 (2008)
- [45] R.A. Sussman: Quasi-local variables in spherical symmetry: numerical applications to dark matter and dark energy sources. Phys. Rev. D **79**, 025009 (2009)
- [46] A. Wiegand and T. Buchert: Multiscale cosmology and structure-emerging dark energy: a plausibility analysis. Phys. Rev. D **82**, 023523 (2010)

Appendix A. Study of the model in the case $\Omega_k^{\mathcal{D}} = 0$

Setting $\Omega_k^{\mathcal{D}}$ to 0 allows to compare our model to the concordance model (we also suppose here that $\Omega_m^{\mathcal{D}} \neq 0$ for any domain). In this situation equation (49) becomes

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{W}}^{\mathcal{D}} + \Omega_Q^{\mathcal{D}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Omega_m^i = 1 - \Omega_\alpha. \quad (\text{A.1})$$

Since $\Omega_m^{\mathcal{D}}$ and $\Omega_{\mathcal{W}}^{\mathcal{D}} + \Omega_Q^{\mathcal{D}}$ are both positive under the Chaplygin fluid constraints (see equation (50)), one also needs

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} < 1, \quad \Omega_{\mathcal{W}}^{\mathcal{D}} + \Omega_Q^{\mathcal{D}} < 1. \quad (\text{A.2})$$

A.1. Evolution of the Hubble functional

Equation (55) becomes

$$H_{\mathcal{D}}^2 = H_i^2 \left[(1 - \Omega_\alpha) a_{\mathcal{D}}^{-3} + (\Omega_\alpha \Omega_\beta + 2 \Omega_\alpha \Omega_\gamma a_{\mathcal{D}}^{-6})^{1/2} \right]. \quad (\text{A.3})$$

For $\Omega_\gamma \geq 0$ $H_{\mathcal{D}}^2$ always decreases, and for $\Omega_\gamma < 0$ it increases in the interval $(a_{\mathcal{D}}^{\min}, a_1)$ and decreases in $(a_1, +\infty)$ with

$$(a_{\mathcal{D}}^{\min})^6 = -2 \frac{\Omega_\gamma}{\Omega_\beta}, \quad (a_1)^6 = -2 \frac{\Omega_\gamma}{\Omega_\beta} + 4 \frac{\Omega_\alpha \Omega_\gamma^2}{\Omega_\beta (1 - \Omega_\alpha)^2}. \quad (\text{A.4})$$

A.2. Evolution of $\Omega_{\mathcal{W}}^{\mathcal{D}}$ and $\Omega_Q^{\mathcal{D}}$

The derivatives of equations (51) and (52) show that, for $\Omega_\gamma \geq 0$, $\Omega_{\mathcal{W}}^{\mathcal{D}}$ increases and $\Omega_Q^{\mathcal{D}}$ decreases. For $\Omega_\gamma < 0$, $\Omega_{\mathcal{W}}^{\mathcal{D}}$ decreases in $(a_{\mathcal{D}}^{\min}, a_2)$ and increases in $(a_2, +\infty)$, and $\Omega_Q^{\mathcal{D}}$ increases in $(a_{\mathcal{D}}^{\min}, a_3)$ and decreases in $(a_3, +\infty)$, with

$$(a_2)^6 = \frac{-\Omega_\gamma [3(1 - \Omega_\alpha)^2 - 2\Omega_\alpha\Omega_\gamma] + 2\sqrt{\Omega_\alpha\Omega_\gamma^3 [\Omega_\alpha\Omega_\gamma - (1 - \Omega_\alpha)^2]}}{(1 - \Omega_\alpha)^2 \Omega_\beta}, \quad (\text{A.5})$$

$$(a_3)^6 = \frac{-\Omega_\gamma [5(1 - \Omega_\alpha)^2 - 18\Omega_\alpha\Omega_\gamma] + 6\sqrt{3\Omega_\alpha\Omega_\gamma^3 [3\Omega_\alpha\Omega_\gamma - (1 - \Omega_\alpha)^2]}}{(1 - \Omega_\alpha)^2 \Omega_\beta}. \quad (\text{A.6})$$

A.3. Evolution of the deceleration parameter

We define the quantities

$$(a_4)^6 := -\frac{5}{2} \frac{\Omega_\alpha - \Omega_\beta}{\Omega_\beta}, \quad (\text{A.7})$$

$$(a_5)^6 := \frac{8\Omega_\alpha\Omega_\gamma + (1 - \Omega_\alpha)^2 - (1 - \Omega_\alpha)\sqrt{(1 - \Omega_\alpha)^2 + 48\Omega_\alpha\Omega_\gamma}}{8\Omega_\alpha\Omega_\beta}, \quad (\text{A.8})$$

$$(a_6)^6 := \frac{8\Omega_\alpha\Omega_\gamma + (1 - \Omega_\alpha)^2 + (1 - \Omega_\alpha)\sqrt{(1 - \Omega_\alpha)^2 + 48\Omega_\alpha\Omega_\gamma}}{8\Omega_\alpha\Omega_\beta}, \quad (\text{A.9})$$

$$\Omega_{\alpha_1} := \frac{12\Omega_\beta + 1 - 2\sqrt{6(3\Omega_\beta - 1)(2\Omega_\beta + 1)}}{25}, \quad (\text{A.10})$$

$$\Omega_{\alpha_2} := \frac{12\Omega_\beta + 1 + 2\sqrt{6(3\Omega_\beta - 1)(2\Omega_\beta + 1)}}{25}, \quad (\text{A.11})$$

$$\Omega_{\alpha_3} := \frac{1}{5}. \quad (\text{A.12})$$

and the situations

- (a) $\forall a_{\mathcal{D}} \in (a_{\mathcal{D}}^{\min}, +\infty)$ $q_{\mathcal{D}} < 0$;
- (b) $\forall a_{\mathcal{D}} \in (a_{\mathcal{D}}^{\min}, +\infty) \setminus \{a_4\}$ $q_{\mathcal{D}} < 0$, and $q_{\mathcal{D}}(a_4) = 0$;
- (c) $\forall a_{\mathcal{D}} \in (a_{\mathcal{D}}^{\min}, a_5) \cup (a_6, +\infty)$ $q_{\mathcal{D}} < 0$, $q_{\mathcal{D}}(a_5) = q_{\mathcal{D}}(a_6) = 0$, and $\forall a_{\mathcal{D}} \in (a_5, a_6)$ $q_{\mathcal{D}} > 0$;
- (d) $\forall a_{\mathcal{D}} \in (0, a_6)$ $q_{\mathcal{D}} > 0$, $q_{\mathcal{D}}(a_6) = 0$, and $\forall a_{\mathcal{D}} \in (a_6, +\infty)$ $q_{\mathcal{D}} < 0$.

Table 1 presents the exact evolution of the deceleration parameter in these situations.

	$(0, \Omega_\beta)$	$[\Omega_\beta, 1)$
$0 < \Omega_\beta < 1/3$	(c)	(d)

	$(0, \Omega_{\alpha_3})$	Ω_{α_3}	$(\Omega_{\alpha_3}, \Omega_\beta)$	$[\Omega_\beta, 1)$
$\Omega_\beta = 1/3$	(c)	(b)	(c)	(d)

	$(0, \Omega_{\alpha_1})$	Ω_{α_1}	$(\Omega_{\alpha_1}, \Omega_{\alpha_2})$	Ω_{α_2}	$(\Omega_{\alpha_2}, \Omega_\beta)$	$[\Omega_\beta, 1)$
$1/3 < \Omega_\beta < 1$	(c)	(b)	(a)	(b)	(c)	(d)

	$(0, \Omega_{\alpha_1})$	Ω_{α_1}	$(\Omega_{\alpha_1}, 1)$
$1 \leq \Omega_\beta$	(c)	(b)	(a)

Table 1. Evolution of the deceleration parameter for the different values of Ω_α and Ω_β under the Chaplygin fluid constraints with $\Omega_k^{\mathcal{D}} = 0$. In situations (a) and (b) the expansion of the domain is always accelerated; in situation (c) it is first accelerated, then decelerated and again accelerated; in situation (d) it is first decelerated, then accelerated.

Cosmologies inhomogènes et champ scalaire effectif

Le compte-rendu présenté ci-après, et déposé en ligne [Buchert *et al.*, 2010], est une contribution au workshop ‘New Directions in Modern Cosmology’, organisé au Lorentz Center (Leiden, Pays-Bas) en septembre 2010. Il reprend les travaux publiés et en cours de Roy et Buchert [2010] et de Buchert et Obadia [2011].

En cosmologie, le formalisme du champ scalaire est utilisé afin d’assimiler matière noire, énergie sombre et inflaton à des champs scalaires fondamentaux (voir par exemple [Copeland *et al.*, 2006]). Dans le formalisme de Buchert, il est possible d’associer à ces différentes entités des champs scalaires effectifs. Cette correspondance permet l’interprétation des effets de rétroaction dues aux inhomogénéités en termes de propriétés de champ scalaire (voir paragraphe 2.3.3).

L’article de Buchert et Obadia [2011] propose un scénario d’inflation cosmologique dans le cadre des modèles inhomogènes moyennés. L’espace-temps est considéré vide de matière et de courbure nulle, nous avons donc respectivement $T_{\mu\nu} = 0$ et ${}^4R_{\mu\nu} = 0$, mais le tenseur de Weyl $C_{\mu\nu\lambda\xi}$ n’est pas contraint. L’espace-temps est donc uniquement rempli d’un champ gravitationnel¹. En supposant également l’existence d’un champ scalaire régulier (c’est-à-dire de gradient non nul) permettant une paramétrisation de la dynamique du système, le formalisme (3+1) exposé précédemment peut s’appliquer aux équations d’Einstein. Le papier se place dans le cas d’un lapse unitaire et d’un shift nul ($\alpha = 1$ et $\beta^i = 0$ dans l’écriture (2.22)). Il en résulte les équations suivantes d’évolution moyenne d’un domaine spatial D :

$$\left(\frac{\dot{a}_D}{a_D}\right)^2 = -\frac{k_{D_i}}{a_D^2} - \frac{1}{6}(\mathcal{W}_D + \mathcal{Q}_D), \quad (4.1)$$

$$\frac{\ddot{a}_D}{a_D} = \frac{\mathcal{Q}_D}{3}, \quad (4.2)$$

avec $\mathcal{W}_D = \langle {}^3\mathcal{R} \rangle_D - 6k_{D_i}a_D^{-2}$ la rétroaction de courbure, et \mathcal{Q}_D la rétroaction cinématique définie géométriquement par :

$$\mathcal{Q}_D \equiv \langle K^2 - K^{ab}K_{ab} \rangle_D - \frac{2}{3}\langle K \rangle_D^2. \quad (4.3)$$

1. Remarquons que l’étude ne précise pas la métrique de l’espace-temps, les seules conditions à respecter étant la nullité du tenseur énergie-impulsion et du tenseur de Ricci de \mathcal{M} . Il est donc envisageable de traiter, dans ce formalisme, aussi bien un espace-temps de Minkowski que de Schwarzschild, par exemple.

Les effets de rétroaction proviennent, dans ce contexte, d'une part de la façon dont les hypersurfaces sont immergées dans l'espace-temps, au travers de la courbure extrinsèque, et d'autre part directement de leur courbure intrinsèque. Ces deux courbures spatiales sont *a priori* non nulles et non uniformes. Les effets de rétroaction sont ainsi ramenés à la structure inhomogène de la géométrie du vide classique de matière ou, en d'autres termes, uniquement aux inhomogénéités du champ gravitationnel. L'article de [Buchert et Obadia \[2011\]](#) n'adresse pas le problème de la construction d'hypersurfaces de genre espace dans un espace-temps vide, mais propose un traitement générique du scénario d'inflation, pour une classe d'hypersurfaces à lapse unitaire et shift nul. Les résultats sont donc à interpréter de la façon suivante : la structure inhomogène d'une géométrie tri-dimensionnelle, plongée dans une variété plate de dimension supérieure, peut conduire en moyenne à une phase inflationnaire.

Dans l'étude proposée, le fluide rétroactif est identifié par hypothèse au champ scalaire de Ginzburg–Landau, afin de lui attribuer les propriétés adéquates amenant une inflation. L'inflaton correspond ici à un champ scalaire effectif, le morphon, et celui-ci est relié à la configuration du champ gravitationnel, et par là même aux rétroactions cinématique et de courbure. Son potentiel se note :

$$U_D = \frac{\lambda}{4} \left(\phi_D^2 - \frac{M_\phi^2}{\lambda} \right)^2, \quad (4.4)$$

avec λ et M_ϕ deux paramètres dépendant de la taille moyenne du rayon de Hubble auquel l'inflation a lieu ; ils permettent de fixer la durée de l'inflation. Le potentiel de Ginzburg–Landau, associé au morphon, permet donc de conduire à une phase inflationnaire, portée par les inhomogénéités du champ gravitationnel.

Un prochain travail sera d'étendre ce scénario d'inflation à un mécanisme à deux champs scalaires : un champ scalaire fondamental inhomogène et son champ de rétroaction. Nous construirons ainsi un modèle inflationnaire en nous inspirant des mécanismes de double inflation ou d'inflation hybride.

Effective Inhomogeneous Cosmologies and Emerging Scalar Fields*

Thomas Buchert¹, Nathaniel Obadia² and Xavier Roy¹

¹ *Université Lyon 1, Centre de Recherche Astrophysique de Lyon,
9 Avenue Charles André, F-69230 Saint-Genis-Laval, France and*

² *École Normale Supérieure de Lyon, Centre de Recherche Astrophysique de Lyon,
46 Allée d'Italie, F-69364 Lyon Cedex 07, France*

In this contribution we summarize two recent applications of a correspondence between backreaction terms in averaged inhomogeneous cosmologies and an effective scalar field (the “morphon”). Backreaction terms that add to the standard sources of Friedmannian kinematical laws and that emerge from geometrical curvature invariants built from inhomogeneities, can be interpreted in terms of a minimally coupled scalar field in the case of a dust matter source. We consider closure conditions of the averaged equations that lead to different evolution scenarios: a) the standard Chaplygin equation of state imposed as an effective relation between kinematical fluctuations and intrinsic curvature of space sections, and b) an inflationary scenario that emerges out of inhomogeneities of the Einstein vacuum, where averaged curvature inhomogeneities model the potential of an effective classical inflaton.

PACS numbers: 98.80.-k, 98.80.Cq, 95.36.+x, 98.80.Es, 98.80.Jk, 04.20.-q, 04.20.Cv

I. INTRODUCTION

Our universe is supposed to verify the strong cosmological principle which demands homogeneity and isotropy at all scales. This standard approach, known as Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) cosmology obeys the set of equations,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \varrho_{(i)} - \frac{k}{a^2}, \quad (1a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i (\varrho_{(i)} + 3p_{(i)}), \quad (1b)$$

$$\dot{\varrho}_{(i)} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varrho_{(i)} + p_{(i)}) = 0, \quad (1c)$$

that, together with equations of state as relations between the homogeneous variables, e.g. between the pressures and energy densities, forms a closed system. The FLRW framework is widely used in order to describe the dynamics of our Universe and the formation of its constituents. It, however, leaves in suspense an explanation about the origin of Dark Energy and Dark Matter, which respectively represent in this model about 3/4 and 1/4 of the total content of the universe model. This last point might actually reveal a symptom of a deeper problem linked to this approach. Indeed, in FLRW cosmology one determines background quantities regardless of the scale and makes them evolve according to a homogeneous–isotropic solution of Einstein’s equations. But, are the background quantities well–defined within standard cosmology, *i.e.* as a suitable average over the inhomogeneities? Is their evolution well–approximated in this framework, *i.e.* is the time dependence of the

homogeneous–isotropic averaged state well approximated by a homogeneous–isotropic solution? All these issues can be routed back to the nonlinearity of the gravitational equations and the averaging problem [1–3].

Rewriting Einstein’s equations via the ADM formalism and spatially averaging, in a domain–dependent way, the scalar parts of the equations with respect to free–falling fluid elements, the averaged dynamics of an inhomogeneous universe model filled with a pressureless fluid assumes the following form [1, 4, 5]:

$$\left(\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{k_{\mathcal{D}i}}{a_{\mathcal{D}}^2} - \frac{\mathcal{W}_{\mathcal{D}} + Q_{\mathcal{D}}}{6}, \quad (2a)$$

$$\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = -\frac{4\pi G}{3} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} + \frac{Q_{\mathcal{D}}}{3}, \quad (2b)$$

$$\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} + 3\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = 0, \quad (2c)$$

$$\frac{1}{a_{\mathcal{D}}^6} (Q_{\mathcal{D}} a_{\mathcal{D}}^6)' + \frac{1}{a_{\mathcal{D}}^2} (\mathcal{W}_{\mathcal{D}} a_{\mathcal{D}}^2)' = 0, \quad (2d)$$

where $a_{\mathcal{D}}$ is the effective scale factor, $\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}}$ is the energy density of the irrotational dust averaged over a compact, mass–preserving domain \mathcal{D} , $Q_{\mathcal{D}}$ is the kinematical backreaction term (an extrinsic curvature invariant), and finally $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}$ is the curvature deviation from a constant–curvature $k_{\mathcal{D}i}$ according to the FLRW solution (an intrinsic curvature invariant). These variables are defined as

$$\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}}(t) = \frac{M_{\mathcal{D}i}}{V_{\mathcal{D}i}} a_{\mathcal{D}}^{-3}, \quad a_{\mathcal{D}}(t) := \left(\frac{V_{\mathcal{D}}(t)}{V_{\mathcal{D}i}}\right)^{1/3}, \quad (3a)$$

$$Q_{\mathcal{D}}(t) := \frac{2}{3} \left\langle (\theta - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}})^2 \right\rangle_{\mathcal{D}} - 2 \langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}}, \quad (3b)$$

$$\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(t) := \langle R \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{6k_{\mathcal{D}i}}{a_{\mathcal{D}}^2}, \quad (3c)$$

with $V_{\mathcal{D}i}$ the initial volume of the domain and $V_{\mathcal{D}}(t)$ its volume at a proper time t , θ the rate of expansion, σ the

*Contribution presented at the workshop *New Directions in Modern Cosmology*, Leiden, The Netherlands, 27.9. – 1.10., 2010.

rate of shear, and R the 3–Ricci scalar curvature. Comparing the set of equations (1) and (2), one easily notices that the average evolution of an inhomogeneous universe model differs from the evolution of a homogeneous one. The change of the cosmological background evolution is here driven by the non–trivial geometrical structure of an inhomogeneous space, and the corresponding deviations are encoded into the backreaction terms $Q_{\mathcal{D}}$ and $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}$, which are coupled through the relation (2d).

Other formulations of the effective inhomogeneous equations can be done. The first one aims at considering the backreaction terms as an effective fluid by introducing an effective perfect fluid energy momentum tensor with

$$\varrho_b^{\mathcal{D}} = -\frac{1}{16\pi G}(Q_{\mathcal{D}} + \mathcal{W}_{\mathcal{D}}); \quad p_b^{\mathcal{D}} = -\frac{1}{16\pi G}(Q_{\mathcal{D}} - \frac{1}{3}\mathcal{W}_{\mathcal{D}}), \quad (4)$$

leading to the following reformulation of the system (2):

$$\left(\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\langle\varrho\rangle_{\mathcal{D}} + \varrho_b^{\mathcal{D}}) - \frac{k_{\mathcal{D},i}}{a_{\mathcal{D}}^2}, \quad (5a)$$

$$\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = -\frac{4\pi G}{3}(\langle\varrho\rangle_{\mathcal{D}} + \varrho_b^{\mathcal{D}} + 3p_b^{\mathcal{D}}), \quad (5b)$$

$$\langle\varrho\rangle_{\mathcal{D}} + 3\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}}\langle\varrho\rangle_{\mathcal{D}} = 0, \quad (5c)$$

$$\dot{\varrho}_b^{\mathcal{D}} + 3\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}}(\varrho_b^{\mathcal{D}} + p_b^{\mathcal{D}}) = 0, \quad (5d)$$

where we see that the coupling between the backreaction terms now stands for the conservation law of the backreaction fluid. We also appreciate that, like in the standard model, we need an equation of state to close the system that here is dynamical and furnishes a relation between the effective sources. We shall consider two of such equations of state employed as closure conditions for the set of equations (5).

The second reformulation, suggested by the form of the effective sources (4) [6], consists in describing the backreaction fluid by a minimally coupled real scalar field $\phi_{\mathcal{D}}$, called the *morphon field*, evolving in an effective potential $U_{\mathcal{D}}(\phi_{\mathcal{D}})$ [7]:

$$\varrho_b^{\mathcal{D}} = \varrho_{\phi}^{\mathcal{D}} := \epsilon\dot{\phi}_{\mathcal{D}}^2/2 + U_{\mathcal{D}}; \quad p_b^{\mathcal{D}} = p_{\phi}^{\mathcal{D}} := \epsilon\dot{\phi}_{\mathcal{D}}^2/2 - U_{\mathcal{D}}, \quad (6)$$

where $\epsilon = +1$ for a standard scalar field (with a positive kinetic energy), and $\epsilon = -1$ for a phantom scalar field (with a negative kinetic energy). The scalar field language leads to the following *correspondence relations*:

$$\epsilon\dot{\phi}_{\mathcal{D}}^2 = -\frac{1}{8\pi G}(Q_{\mathcal{D}} + \frac{1}{3}\mathcal{W}_{\mathcal{D}}), \quad (7a)$$

$$U_{\mathcal{D}} = -\frac{1}{24\pi G}\mathcal{W}_{\mathcal{D}}, \quad (7b)$$

$$\ddot{\phi}_{\mathcal{D}} + 3\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}}\dot{\phi}_{\mathcal{D}} + \epsilon\frac{\partial}{\partial\phi_{\mathcal{D}}}U_{\mathcal{D}} = 0, \quad (7c)$$

where the Klein–Gordon equation is simply the counterpart of the conservation law for the backreaction

fluid. This correspondence allows us to interpret the kinematical backreaction effects in terms of the properties of scalar field cosmologies, notably quintessence or phantom–quintessence scenarii that are here routed back to models of inhomogeneities.

II. BACKREACTION FLUID AS A CHAPLYGIN GAS

In the above introduced effective inhomogeneous cosmologies, the dark components may be unified through the kinematical backreaction: $Q_{\mathcal{D}} < 0$ effectively mimics Dark Matter and $Q_{\mathcal{D}} > 0$ effectively mimics Dark Energy. Both Dark Energy and Dark Matter are then not included as additional sources but are both manifestations of spatial geometrical properties.

Another unification of the dark components is realized thanks to the standard Chaplygin gas (CG). This exotic fluid, whose state equation reads $p = -A/\varrho$, with $A > 0$, has the interesting property to connect Dark Matter and Dark Energy behaviors via its evolution [8, 9].

The two previous features motivate us to build a model in which the backreaction fluid is supposed to obey a scale–dependent CG equation of state: $p_b^{\mathcal{D}} = -A_{\mathcal{D}}/\varrho_b^{\mathcal{D}}$ with $A_{\mathcal{D}} > 0$ [10]. This construction allows to unify the dark components, first, simultaneously, thanks to the scale dependence of the backreaction fluid, and, second, through its evolution.

The origin and the magnitude of the Dark Energy (first situation in Figure 1) and of both Dark Energy and Dark Matter (second situation in Figure 1) can be entirely explained by the particular geometrical structure of an inhomogeneous space obeying the Chaplygin equation of state.

In our framework, it is necessary to reinterpret observational data. Indeed, angular diameter and luminosity distances, for instance, depend on metrical properties related to the averaged scalar curvature which evolves differently compared with its Friedmannian counterpart. In light of this remark it is premature to exclude [11, 12] the standard Chaplygin equation of state as providing a good match with observational data.

Finally, note also that, depending on the initial conditions of the kinematical backreaction, the volume of the domain \mathcal{D} might undergo different dynamics: its expansion is first decelerated then accelerated; its expansion is always accelerated; or its expansion is accelerated, then decelerated and again accelerated [10]. The latter case is an interesting situation since two accelerated phases occur. Our model only concerns the matter–dominated universe; however, this situation allows us to imagine that the accelerated phase in primordial inflation and the one occurring today might be driven by the same mechanism that has to be studied in a more general model. Indeed, we are going to explain the first steps towards a modeling of Inflation in the next section.

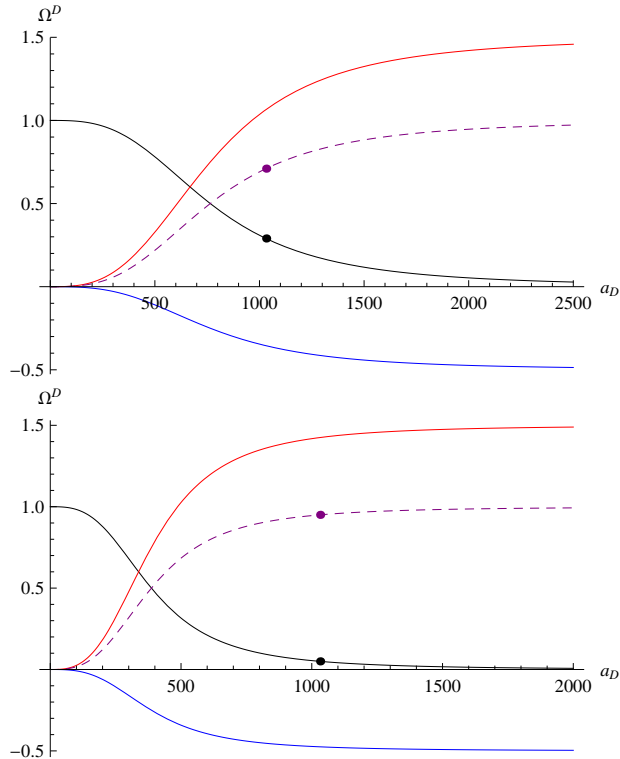


FIG. 1: [10] Evolution of the domain-dependent cosmological parameters Ω_m^D (black), $\Omega_{\mathcal{W}}^D$ (red), Ω_Q^D (blue) and $\Omega_X^D = \Omega_{\mathcal{W}}^D + \Omega_Q^D$ (dashed) w.r.t. the effective scale factor.

Upper figure: $\Omega_X^D(a_D \sim 1000) = \Omega_{DE}^0 \sim 0.72$ (purple dot) and $\Omega_m^D(a_D \sim 1000) = \Omega_b^0 + \Omega_{DM}^0 \sim 0.28$ (black dot).

Lower figure: $\Omega_X^D(a_D \sim 1000) = \Omega_{DE}^0 + \Omega_{DM}^0 \sim 0.95$ (purple dot) and $\Omega_m^D(a_D \sim 1000) = \Omega_b^0 \sim 0.05$ (black dot).

III. INFLATION FROM INHOMOGENEITIES

The effect of inhomogeneities can play a role in *primordial* cosmology too, when using the morphon description. Indeed, Inflation, the most prevalent paradigm used to cure the flatness, smoothness and horizon issues of the standard model of cosmology, is often described through the dominance of a slow-rolling scalar field, namely the inflaton, over the other components of the energy budget. Furthermore, there is a general trend relying on the FLRW description to assume Inflation unsustainable when the initial conditions are even slightly inhomogeneous, contrary to the idea that Inflation should stem from *chaotic* initial conditions.

We offer the idea [13] that the morphon can formally play the role of an effective inflaton and that inhomogeneities could be the actual cause of a de Sitter-like era prior to the last scattering surface. In this case, several interpretations emerge and differ from ordinary Chaotic Inflation:

- the nature of the inflaton is solved;

- the inflaton/morphon is purely classical, therefore its value is no longer bounded by M_{Pl} , and Eternal Inflation is naturally avoided;
- the inflaton's wave equation does not come from an additional term in the action but is rather given by the morphon's integrability condition (2d., 7c);
- the choice of the potential is forced by physical requirements such as
 - a true initial conditions' freedom of choice ($Q_{\mathcal{D}_i} \leq 0$, see Figure 2),
 - the necessity to end the expansion at one point,
 - the necessity to describe the vanishing of inhomogeneities at that end,
- the emergence of Inflation within a (physical) inhomogeneous background is allowed/favored.

Motivated by these requirements we choose the Ginzburg–Landau potential,

$$U_D^{GL} = \frac{\lambda}{4} \left(\phi_D^2 - \frac{M_\phi^2}{\lambda} \right)^2 = \frac{M_\phi^4}{4\lambda} - \frac{1}{2} M_\phi^2 \phi_D^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_D^4, \quad (8)$$

as a sufficiently generic and conservative example of an initial conditions poorly dependent potential, while the kinetic part of the morphon is canonical ($\epsilon = +1$).

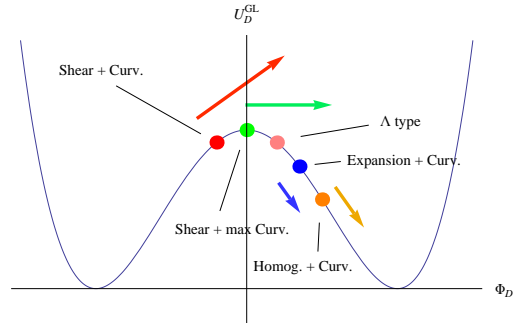


FIG. 2: [13] Reinterpretation of the initial conditions in the language of the backreaction quantities: the Ginzburg–Landau potential in arbitrary units and the possible initial conditions as well as their physical meaning. All conditions possess some curvature $\mathcal{W}_D^i < 0$. The arrows schematically indicate the amplitude of the morphon's initial speed $\dot{\Phi}_D^i$. In the order of the points (from left to right): the first two points dominated by shear fluctuations (red, green) are obtained for $Q_D^i < 0 \Leftrightarrow \dot{\Phi}_D^{i2} > 2(H_D^{i2} + k_D^i)$; the next points dominated by expansion fluctuations (blue, pink) for $\dot{\Phi}_D^{i2} < 2(H_D^{i2} + k_D^i)$, where the de Sitter– Λ equivalent case has a stiff morphon $\dot{\Phi}_D^i = 0$; the homogeneous case (last point, orange) is obtained for $\dot{\Phi}_D^{i2} = 2(H_D^{i2} + k_D^i)$.

The two parameters λ and M_ϕ both depend on the average size of the Hubble radius at which Inflation takes place and fix the number of e-folds the latter lasts.

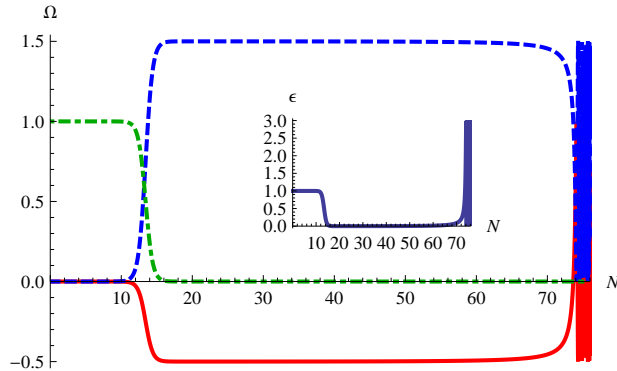


FIG. 3: [13] The energy densities Ω_m^D (solid, red), Ω_W^D (dashed, blue), and Ω_k^D (dot-dashed, green) for one of the cases of Fig. 2 as a function of the number of e-folds $N = \ln a_D$. Here we considered the effect of inhomogeneities of curvature only, *i.e.* the matter density is assumed to be zero. The initial value of the homogeneous part of the intrinsic curvature has been taken arbitrary large (e.g. $\Omega_D^{k_i} \simeq 1$) to underline the fact that it vanishes anyway after a few e-folds. In the inset, the slow-roll parameter ϵ_D for the same configuration is shown. Since $\epsilon_D = \Omega_D^k + \Phi_D^2/2$ always holds, $\epsilon \simeq 1$ in the pre-inflation era when $\Omega_D^k \gg \Omega_D^Q, \Omega_D^W$, and $\epsilon \simeq 0$ during Inflation when $U_D^{GL} \gg \Phi_D^2/2$.

We consider the energy budget in the averaged models,

$$\Omega_m^D + \Omega_k^D + \Omega_W^D + \Omega_Q^D = 1, \quad (9a)$$

$$\Omega_m^D = \frac{8\pi G \langle \rho \rangle_D}{3H_D^2}, \quad \Omega_k^D = -\frac{k_D}{a_D^2 H_D^2},$$

$$\Omega_W^D = -\frac{W_D}{6H_D^2}, \quad \Omega_Q^D = -\frac{Q_D}{6H_D^2}, \quad (9b)$$

and show in Figure 3 how, even in the absence of matter ($\Omega_m^D = 0$), the energy density in the Friedmannian curvature Ω_k^D strongly decays and converts into the backreaction terms, while

$$\epsilon_D := -\dot{H}_D/H_D^2 = 1 + 2\Omega_Q^D < 1 \quad (10)$$

is the condition tantamount to Inflation. In the presence of pressure-less matter, the same scenario occurs, irrespective of the initial conditions.

Related publications will soon appear on the the various attempts we made to render Inflation implicit and duration natural in inhomogeneous cosmologies. We shall consider the interaction of the morphon with radiation, dust, and a fundamental scalar field, and we shall address the horizon problem. Another analysis is dedicated to the global instability of the FLRW backgrounds employing a dynamical system analysis of the averaged equations in the phase space of the cosmological parameters. The application to scalar field models for Dark Matter forms the subject of a further parallel attempt.

Acknowledgments.

We would like to thank Francesco Sylos-Labini and Giovanni Marozzi for interesting discussions during the workshop. This work is supported by ‘‘Fédération de Physique André-Marie Ampère’’.

-
- [1] T. Buchert: Dark Energy from structure – a status report. *Gen. Rel. Grav.* **40**, 467 (2008)
 - [2] G.F.R. Ellis: Relativistic cosmology: its nature, aims and problems. In *General Relativity and Gravitation* (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht), pp. 215–288 (1984)
 - [3] G.F.R. Ellis and T. Buchert: The Universe seen at different scales. *Phys. Lett. A.* (Einstein Special Issue) **347**, 38 (2005)
 - [4] T. Buchert: On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: 1. dust cosmologies. *Gen. Rel. Grav.* **32**, 105 (2000)
 - [5] T. Buchert: On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: 2. perfect fluid cosmologies. *Gen. Rel. Grav.* **33**, 1381 (2001)
 - [6] T. Buchert: On globally static and stationary cosmologies with or without a cosmological constant and the dark energy problem. *Class. Quant. Grav.* **23**, 817 (2006)
 - [7] T. Buchert, J. Larena and J.-M. Alimi: Correspondence between kinematical backreaction and scalar field cosmologies – the ‘morphon field’. *Class. Quant. Grav.* **23**, 6379 (2006)
 - [8] V. Gorini, A. Kamenshchik and U. Moschella: Can the Chaplygin gas be a plausible model for Dark Energy? *Phys. Rev. D* **67**, 063509 (2003)
 - [9] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier: The Chaplygin gas as a model for Dark Energy. In: *Proc. MG10, Rio de Janeiro, Brazil, 20-26 July 2003*, M. Novello, S. Perez Bergliaffa, R. Ruffini (eds.). World Scientific, p. 840 (2005)
 - [10] X. Roy and T. Buchert: Chaplygin gas and effective description of inhomogeneous universe models in general relativity. *Class. Quant. Grav.* **27**, 175013 (2010).
 - [11] L. Amendola, F. Finelli, C. Burigana and D. Carturan: WMAP and the generalized Chaplygin gas. *JCAP* **0307**, 005 (2003)
 - [12] M. C. Bento, O. Bertolami and A. A. Sen: Generalized Chaplygin gas model: dark energy – dark matter unification and CMBR constraints. *Gen. Rel. Grav.* **35**, 2063 (2003)
 - [13] T. Buchert and N. Obadia: Effective Inhomogeneous Inflation: curvature inhomogeneities of the Einstein vacuum, submitted. arXiv:1010.4512 (2010)

Instabilité gravitationnelle globale des fonds FL

Le schéma standard de la formation des structures considère des perturbations évoluant autour d'un fond FL, dont la dynamique obéit aux relations ((2.4)–(2.6)). Il est ainsi supposé que les effets de rétroaction, représentant les inhomogénéités induites par ces perturbations, sont négligeables et n'influencent que peu ou prou la dynamique des champs scalaires moyens aux grandes échelles. L'argument en faveur d'un tel abandon se retrouve généralement dans l'évaluation de l'amplitude des effets de rétroaction pour des modèles de perturbations sur un espace-temps moyen FL (voir par exemple [Kolb *et al.*, 2005 – Brown *et al.*, 2009b – Clarkson *et al.*, 2009]). Cette démarche semble cependant incertaine, car la géométrie de l'espace-temps moyen est alors fixé *a priori*. Rien ne certifie, d'une part, que la procédure de moyennage sur l'espace-temps réel résulte en un espace-temps FL et, d'autre part, que la dynamique de l'espace-temps moyen soit donnée par les équations d'Einstein.

Il est toutefois envisageable qu'une solution homogène et isotrope des équations de la relativité générale fournisse, dans certains régimes spatiaux et temporels, une approximation correcte à la description dynamique des distributions moyennes de tout champ. Une façon de répondre à cette question est d'analyser la stabilité gravitationnelle globale des fonds FL dans l'espace des solutions des cosmologies inhomogènes moyennées. Nous étudions pour cela l'espace des phases de ces dernières, en termes des paramètres cosmologiques effectifs Ω_m^D , Ω_Q^D , $\Omega_{\mathcal{W}}^D$ et Ω_k^D . Nous choisissons la relation de fermeture du système en établissant une analogie formelle entre les termes de rétroaction et un fluide dont la densité d'énergie et la pression dépendent du volume du domaine :

$$\mathcal{Q}_D \propto V_D^\alpha, \quad \mathcal{W}_D \propto V_D^\beta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Q}_D \propto a_D^n, \quad \mathcal{W}_D \propto a_D^p, \quad (5.1)$$

avec n et p des réels quelconques.

Ce travail, présenté ci-dessous, a fait l'objet d'une récente publication [Roy *et al.*, 2011]. Notre étude montre que les inhomogénéités induites par les perturbations contribuent systématiquement à écarter la dynamique du fond de tout domaine de la classe des solutions FL dépendantes d'échelle. Nous classons les différents scénarios selon leur stabilité ou leur instabilité. Motivés par certaines considérations physiques, nous relierons les secteurs de matière noire et d'énergie sombre aux instabilités du système dynamique étudié, et nous montrons que dans les cas de formation des structures et d'expansion accélérée, les fonds

Chapitre 5. Instabilité gravitationnelle globale des fonds FL

FL sont instables. Pour les cas de stabilité, nous expliquons également que ces fonds ne fournissent pas *a priori* une approximation correcte pour la dynamique.

Remarquons que la structure des inhomogénéités est fixée par la distribution réelle des champs de géométrie et de matière, et qu'elle peut être contrainte dans nos modèles par les observations. Dans notre article, nous avons choisi un comportement en puissance du facteur d'échelle pour les termes de rétroaction, mais nous n'apportons pas de preuve établissant qu'un tel comportement puisse décrire l'ensemble des instabilités des fonds FL. Il est cependant peu probable qu'ils constituent l'unique sous-classe de solutions des cosmologies inhomogènes où des instabilités apparaissent. Le but étant d'étudier la stabilité des domaines FL dépendants d'échelle, l'utilisation de cette relation de fermeture est légitime, et a en partie valeur d'illustration détaillée. Nous pouvons également supposer que ce type de solutions constitue le bloc fondamental utile à la description de tout type de comportement de rétroaction, puisque toute fonction analytique se décompose en une série de Laurent. Toutefois, cette correspondance n'est pas triviale au vu de la non-linéarité du problème et appelle à de nouvelles études. Un premier pas vers une généralisation sera d'analyser la stabilité gravitationnelle globale des fonds FL pour une superposition de loi de puissance pour les termes de rétroaction.

Finalement, il est important de noter que, quelque soit la relation de fermeture choisie, les secteurs de matière noire et d'énergie sombre peuvent toujours être reliés aux instabilités des fonds FL. Ceci est justement une des propriétés majeures des cosmologies inhomogènes moyennées. Le phénomène d'expansion accélérée, par exemple, se situe par construction dans les instabilités des fonds FL.

Global gravitational instability of FLRW backgrounds —interpreting the dark sectors

Xavier Roy¹, Thomas Buchert¹, Sante Carloni² and Nathaniel Obadia³

¹ Université Lyon 1, Centre de Recherche Astrophysique de Lyon, 9 avenue Charles André, F-69230 Saint-Genis-Laval, France

² ESA Advanced Concepts Team, ESTEC, DG-PF, Keplerlaan 1, Postbus 299, 2200 AG Noordwijk, The Netherlands

³ École Normale Supérieure de Lyon, Centre de Recherche Astrophysique de Lyon, 46 Allée d'Italie, F-69364 Lyon Cedex 07, France

Emails: roy@obs.univ-lyon1.fr, buchert@obs.univ-lyon1.fr, sante.carloni@esa.int, nathaniel.obadia@ens-lyon.fr

Abstract. The standard model of cosmology is based on homogeneous–isotropic solutions of Einstein’s equations. These solutions are known to be gravitationally unstable to local inhomogeneous perturbations, commonly described as evolving on a background given by the same solutions. In this picture, the FLRW backgrounds are taken to describe the average over inhomogeneous perturbations for all times. We study in the present article the (in)stability of FLRW dust backgrounds within a class of averaged inhomogeneous cosmologies. We examine the phase portraits of the latter, discuss their fixed points and orbital structure and provide detailed illustrations. We show that FLRW cosmologies are unstable in some relevant cases: averaged models are driven away from them through structure formation and accelerated expansion. We find support for the proposal that the dark components of the FLRW framework may be associated to these instability sectors. Our conclusion is that FLRW cosmologies have to be considered critically as for their role to serve as reliable models for the physical background.

PACS numbers: 04.20.-q, 04.25.-D, 04.40.-b, 95.35.+d, 95.36.+x, 98.80.Es, 98.80.Cq

1. The problem of a physical background in cosmology

The standard description of the global evolution of the universe relies on the class of homogeneous–isotropic Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) solutions of Einstein’s equations. By construction all inhomogeneities in matter and geometry, responsible for the formation of structures, average out on this given background. The conjecture is held that the FLRW background is the actual physical background.

This widely adopted framework needs to be challenged for several reasons. First, apart from the question of how to technically implement an average (a non-trivial subject for tensors), the result will depend in any case on the spatial domain over

which inhomogeneities are considered: a *scale dependence* of the averaged variables must generically result, casting strong doubts on the scale-independent averaged values issued from the FLRW solutions (see [20] for a summary of these thoughts). Secondly, it is actually naive to expect that a strictly homogeneous model provides the average, given the non-linearity of Einstein's equations and its implications (e.g. the non-commutativity of the time-evolution and averaging). This background issue may also be identified as the crucial question in the discussion of whether or not the need for dark components can be replaced by employing inhomogeneous models [22].

Looking at current cosmological structure formation models based on perturbation theories or N -body simulations, we find that the extra (backreaction) terms due to the averaging procedure vanish on the background of a homogeneous-isotropic solution. A closer look reveals that this property results *by construction* rather than by derivation, and it is a consequence of employing Newtonian or quasi-Newtonian schemes with periodic boundary conditions and a flat background geometry (see [9] for the proof). This construction is not expected to work in the framework of general relativity because of: (i) the relevance of the spatial intrinsic curvature (the second derivatives of the metric may be significant even if the metric perturbations are negligible [10]), together with (ii) the fact that inhomogeneities are coupled to the spatial curvature evolution [3], and finally (iii) the absence of a conservation law for the averaged intrinsic curvature [8].

It is of course conceivable that the homogeneous solutions provide *in some spatial and temporal regimes* a good approximation for the evolution of the averaged distribution. A systematic approach to address this assumption is to analyze the stability of the FLRW solutions in the space of averaged cosmologies. Although FLRW solutions are known to be unstable to local perturbations, we may be able to find that they enjoy stability if subjected to perturbations on average and on some large scale. In the present paper we follow this approach, and we find that the FLRW solutions can also be globally unstable within a class of averaged models. Structure formation and accelerated expansion imply that the physical background is driven away from the FLRW background in relevant cases. Our investigation is independent of the choice of scale, and it therefore contains all the dynamical situations a domain can undergo.

For the class of inhomogeneous cosmologies we consider in this work, we shall employ a framework that averages the scalar parts of Einstein's equations, in which case the averaged model is unambiguously defined (reviewed in [6, 7]) and, due to its covariant implementation, is under control [4, 21, 24, 26]. We are going to explore the phase space of averaged cosmologies by working within a class of exact scaling solutions, generalizing previous results [11]‡.

The study of the phase space of dynamical systems has a long tradition. The

‡ In [11] the scaling law was applied to the total averaged curvature, and we choose here to apply it to the averaged curvature deviation from a constant (Friedmannian) curvature. Taking a null constant curvature in our work leads back to the results of [11]. This difference of approach allows to study in this paper the stability of all FLRW backgrounds, not fully addressed in [11]. Note already that the phase portraits drawn in [11] correspond to the one-dimensional locus $\Omega_k^D = 0$ in the plots of figure 1.

most comprehensive study of FLRW cosmologies that include radiation, dust and a cosmological constant has been provided by Ehlers and Rindler [19]. Other studies, including Bianchi models, were treated by Wainwright and Ellis [28] who proposed the so-called dynamical system approach, which we shall use in this paper. The same technique can be followed to investigate the dynamics of minimally coupled scalar fields in the FLRW framework [18]. Note that the backreaction fluid we study in this paper can also be interpreted as an effective scalar field [11] that allows comparison of this work with our analysis. More recently, dynamical system analysis was used for modified theories of gravity (fourth order [13,14,16,23], scalar tensor [15] and Hořava–Lifshitz [17]) leading to a greater understanding of the cosmology of these theories. Also, results of a recent investigation of LTB models [27] are in accord with our findings§.

In the next section, we introduce the basic framework of averaged inhomogeneous cosmologies, choosing a vanishing cosmological constant for simplicity. We consider in section 3 the backreaction terms to obey scaling evolution laws, and present and analyze the corresponding autonomous dynamical system. In section 4, we summarize and discuss the results, and we conclude in section 5.

2. Effective description of inhomogeneous cosmologies

Let us consider an *inhomogeneous*, irrotational and pressureless fluid (dust). The spatial average over a compact, restmass preserving domain \mathcal{D} of the Raychaudhuri equation, the Hamilton constraint and the dust continuity equation reads in its rest frame (see [3,4,6] for details):

$$\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} + \frac{4\pi G}{3} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{Q_{\mathcal{D}}}{3}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \right)^2 - \frac{8\pi G}{3} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} + \frac{k_{\mathcal{D}_i}}{a_{\mathcal{D}}^2} = -\frac{\mathcal{W}_{\mathcal{D}} + Q_{\mathcal{D}}}{6}, \quad (2)$$

$$\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} \dot{} + 3 \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = 0, \quad (3)$$

where the angular brackets stand for the Riemannian spatial volume average, and the overdot is the partial time derivative, here identical to the covariant derivative. $a_{\mathcal{D}}$ is the effective scale factor, $\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}}$ is the averaged energy density of the dust, $Q_{\mathcal{D}}$ is the kinematical backreaction term, and $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}$ is the averaged curvature deviation from a constant curvature, defined as:

$$a_{\mathcal{D}} := (V_{\mathcal{D}}/V_{\mathcal{D}_i})^{1/3}, \quad \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^{-3}, \quad (4)$$

$$Q_{\mathcal{D}} := \frac{2}{3} \langle (\theta - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}})^2 \rangle_{\mathcal{D}} - 2 \langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}}, \quad \mathcal{W}_{\mathcal{D}} := \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} - 6k_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^{-2}, \quad (5)$$

with $V_{\mathcal{D}}$ being the volume of the domain, \mathcal{R} its three-Ricci scalar curvature and θ and σ the expansion and shear rates of the dust. (Here and in the following, the subscript

§ In [27], Sussman used quasi-local variables instead of averaged ones. The relation he gave between them allows us to establish common findings.

i stands for the initial value.) Equation (2) is an integral of equation (1) under the conservation law (3), if and only if $Q_{\mathcal{D}}$ and $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}$ obey the integrability condition

$$a_{\mathcal{D}}^{-6} (Q_{\mathcal{D}} a_{\mathcal{D}}^6)^\cdot + a_{\mathcal{D}}^{-2} (\mathcal{W}_{\mathcal{D}} a_{\mathcal{D}}^2)^\cdot = 0. \quad (6)$$

The set of equations (1-3) formally resembles, from a kinematical point of view, a Friedmannian cosmology sourced by two fluids, but there are some fundamental differences between the two frameworks. First, the system is valid for *any* metric, whereas the FLRW equations only hold for maximally symmetric metrics. Second, the second fluid (the backreaction fluid) emerges *from the averaging process*; it is *not* added in our model contrary to a two-fluid FLRW cosmology. This fluid represents the difference between the dynamics of a Friedmannian dust background and of a physical dust background obtained through the averaging procedure^{||}. Third, the dynamics of the averaged geometrical variables of our model generally differs from that of the FLRW model: $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$ might evolve differently from the Friedmannian curvature $k_{\mathcal{D}, a_{\mathcal{D}}^{-2}}$ restricted to the same domain. Fourth and last, the averaging procedure is performed over a chosen domain, and it implies a *scale dependence* of all the variables. In particular, one expects the backreaction fluid to exhibit rather distinct behaviors according to the scale [29].

For void domains ($\varrho = 0$) the backreaction terms, encoded through geometrical invariants, correspond to inhomogeneities of the *spatial geometry of the vacuum*. For domains over which $Q_{\mathcal{D}} = 0$, inhomogeneities could still be locally present even though the kinematical backreaction identically vanishes on \mathcal{D} due to an exact compensation between the expansion fluctuations and the shear[¶]. In the same spirit $\mathcal{W}_{\mathcal{D}} = 0$ only states that the averaged curvature deviation vanishes on \mathcal{D} , but nothing can be inferred about the local curvature deviations within the domain. Homogeneity is only achieved, if the backreaction variables are required to vanish on all scales.

Since we aim at studying the instability of Friedmannian dust backgrounds, we shall consider for our analysis the quantity $X_{\mathcal{D}} := Q_{\mathcal{D}} + \mathcal{W}_{\mathcal{D}}$, which corresponds to the *whole averaged departure from the Friedmannian framework*. From the constraint (6), a null $X_{\mathcal{D}}$ implies vanishing $Q_{\mathcal{D}}$ and $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}$, in which case we recover a FLRW background *on average*. Also, the dark components can be thought of as the manifestations of the deviation of the physical background from a FLRW one: a positive $Q_{\mathcal{D}}$ contributes to accelerate the expansion of the domain and plays against gravity, whereas a negative $Q_{\mathcal{D}}$ participates in the deceleration of the domain's expansion and adds to gravity (see equation (1)). In this sense, the instability sectors, defined through $X_{\mathcal{D}}$, represent the dark components of the concordance model.

^{||} This is an essential remark when one considers perturbations, the choice of the background being crucial.

[¶] For example, this happens for zero-curvature, spherically symmetric Lemaitre–Tolman–Bondi solutions, see [7] in this volume.

3. Dynamical system for the scaling solutions

3.1. The scaling solutions

We need one additional relation to solve the system (1-3), and this closure relation expresses the freedom of the choice for the local structure of the inhomogeneities, encoded on average by the dynamics of the backreaction fluid⁺. A natural choice is given by establishing a formal analogy between the backreaction terms and a fluid, whose energy density and pressure depend on the volume of the domain [11]:

$$Q_{\mathcal{D}} \propto V_{\mathcal{D}}^{\alpha}, \quad \mathcal{W}_{\mathcal{D}} \propto V_{\mathcal{D}}^{\beta} \quad \Rightarrow \quad Q_{\mathcal{D}} = Q_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^n, \quad \mathcal{W}_{\mathcal{D}} = \mathcal{W}_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^p, \quad (7)$$

where the scaling parameters n and p are real constants. Expressions (7) together with (6) result in the following constraint the dynamical system has to satisfy:

$$(n+6) Q_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^n + (p+2) \mathcal{W}_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^p = 0. \quad (8)$$

In what follows we shall concentrate on the class of scaling solutions $n = p^*$, for which relation (8) implies

$$(n+2) \mathcal{W}_{\mathcal{D}} = -(n+6) Q_{\mathcal{D}} \quad \Rightarrow \quad (n+2) X_{\mathcal{D}} = -4 Q_{\mathcal{D}}. \quad (9)$$

3.2. The autonomous system

Let us introduce the Hubble functional $H_{\mathcal{D}} := \dot{a}_{\mathcal{D}}/a_{\mathcal{D}}$ and the volume deceleration functional $q_{\mathcal{D}} := -1 - \dot{H}_{\mathcal{D}}/H_{\mathcal{D}}^2$. We define *domain-dependent* dimensionless cosmological characteristics as

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} := \frac{8\pi G}{3H_{\mathcal{D}}^2} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}}, \quad \Omega_k^{\mathcal{D}} := -\frac{k_{\mathcal{D}_i}}{a_{\mathcal{D}}^2 H_{\mathcal{D}}^2}, \quad \Omega_X^{\mathcal{D}} := -\frac{X_{\mathcal{D}}}{6H_{\mathcal{D}}^2}, \quad (10)$$

which by construction add up to 1 according to the Hamilton constraint (2). Upon using the expressions (9,10) we replace the system (1-3,6) by

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} - (n+2)\Omega_X^{\mathcal{D}} = 2q_{\mathcal{D}}, \quad (11)$$

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} + \Omega_k^{\mathcal{D}} + \Omega_X^{\mathcal{D}} = 1, \quad (12)$$

$$\Omega_m^{\mathcal{D}'} = \Omega_m^{\mathcal{D}} (\Omega_m^{\mathcal{D}} - (n+2)\Omega_X^{\mathcal{D}} - 1), \quad (13)$$

$$\Omega_X^{\mathcal{D}'} = \Omega_X^{\mathcal{D}} (\Omega_m^{\mathcal{D}} - (n+2)\Omega_X^{\mathcal{D}} + n+2), \quad (14)$$

where the prime denotes the derivative with respect to the evolution parameter $N_{\mathcal{D}} := \ln a_{\mathcal{D}}$. The two last equations are easily derived noting that $(1/H_{\mathcal{D}}^2)' = 2(q_{\mathcal{D}} + 1)/H_{\mathcal{D}}^2$. The autonomous system (13,14) determines the orbit of a cosmological state, defined by the quartet $(\Omega_m^{\mathcal{D}}, \Omega_X^{\mathcal{D}}, \Omega_k^{\mathcal{D}}, n)$, in the corresponding phase space, and its fixed points are provided in table 1. The phase space $(\Omega_m^{\mathcal{D}}, \Omega_X^{\mathcal{D}})$ presents three invariant lines under the phase flow: $\Omega_m^{\mathcal{D}} = 0$, $\Omega_X^{\mathcal{D}} = 0$ and $\Omega_k^{\mathcal{D}} = 1 - \Omega_m^{\mathcal{D}} - \Omega_X^{\mathcal{D}} = 0$.

⁺ The need for a closure relation is also present in the standard FLRW framework, and it corresponds to the choice of an equation of state for the fluid sources.

^{*} Note that the unique solution for $n \neq p$ ($n = -6, p = -2$) is physically equivalent to the case $n = p = -6$: $Q_{\mathcal{D}}$ follows the same evolution law in both situations, and so does the total averaged curvature $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$ which evolves proportionally to $a_{\mathcal{D}}^{-2}$.

Table 1. Fixed points of the dynamical system (13,14). The sign of their eigenvalues determines their stability [1].

	Coordinates ($\Omega_m^{\mathcal{D}}, \Omega_X^{\mathcal{D}}$)	Scale factor	Stability {eigenvalues}
point \mathcal{A}	(0,0)	$a_{\mathcal{D}}(t) = H_{\mathcal{D}_i}(t - t_i) + 1$	$n < -2$, attractor $n > -2$, saddle {-1, $n + 2$ }
point \mathcal{B}	(1,0)	$a_{\mathcal{D}}(t) = (\frac{3}{2}H_{\mathcal{D}_i}(t - t_i) + 1)^{\frac{2}{3}}$	$n < -3$, saddle $n > -3$, repeller {1, $n + 3$ }
point \mathcal{C}	(0,1)	$a_{\mathcal{D}}(t) = (-\frac{n}{2}H_{\mathcal{D}_i}(t - t_i) + 1)^{-\frac{2}{n}}$ ($n \neq 0$) $a_{\mathcal{D}}(t) = \exp(H_{\mathcal{D}_i}(t - t_i))$ ($n = 0$)	$n < -3$, repeller $-3 < n < -2$, saddle $n > -2$, attractor {- $n - 3$, - $n - 2$ }
line \mathcal{L}_1	$\Omega_m^{\mathcal{D}} + \Omega_X^{\mathcal{D}} = 1$	$a_{\mathcal{D}}(t) = (\frac{3}{2}H_{\mathcal{D}_i}(t - t_i) + 1)^{2/3}$	($n = -3$)
line \mathcal{L}_2	$\Omega_m^{\mathcal{D}} = 0$	$a_{\mathcal{D}}(t) = H_{\mathcal{D}_i}(t - t_i) + 1$	($n = -2$)

There are five situations for which the stability of the fixed points does not change: $n < -3$, $n = -3$, $-3 < n < -2$, $n = -2$ and $n > -2$. The fixed point \mathcal{A} shares the same properties as a Milne domain (i.e. a void domain with FLRW kinematics and FLRW curvature on average); the fixed point \mathcal{B} corresponds to an Einstein–de Sitter dust domain (i.e. FLRW kinematics and zero FLRW curvature), and the fixed point \mathcal{C} corresponds to domains filled only with the backreaction fluid. The stability of \mathcal{A} and \mathcal{B} can change according to the value of the scaling parameter, but they always depict the same cosmological models. In return, \mathcal{C} always describes different cosmological models which might also have a different stability. For the bifurcation value $n = -3$, there is a transfer of stability between \mathcal{B} and \mathcal{C} which both belong to the line of fixed points \mathcal{L}_1 , while at the bifurcation value $n = -2$, there is a transfer of stability between \mathcal{A} and \mathcal{B} , both belonging to the line \mathcal{L}_2 .

Finally, note that the dynamical system (13,14) is written according to the evolution parameter $N_{\mathcal{D}}$ and *not according to a time parameter*. Consequently, the phase portraits drawn from this system do not suffice to deduce the *time evolution* of a cosmological state, since we also need information about the time evolution of $N_{\mathcal{D}}$ or, equivalently, $a_{\mathcal{D}}$. We shall therefore also indicate for all phase portraits the behavior of the scale factor.

3.3. Phase portraits

The phase portraits of the five cases are shown in figure 1, and the numbers (background colors) of their regions correspond to the evolutions of $a_{\mathcal{D}}$ given in figure 2. To deduce the time evolution of a state, one shall refer to these two sets of plots. For the sake of clarity, we provide hereafter a detailed explanation of the correspondence between them in the situation $n < -3$ (first plot of figure 1).

A state $(\Omega_m^{\mathcal{D}}, \Omega_X^{\mathcal{D}})$ belonging to the region I (red) evolves from the fixed point \mathcal{C} when its scale factor is zero (plot I (red) of figure 2), through its initial conditions, to infinity when its scale factor attains its maximum. This divergence is due to the singularity of the cosmological parameters for $H_{\mathcal{D}} = 0$ and not due to a physical boundless blow of the domain. Having reached its maximal extension, the domain shrinks and $(\Omega_m^{\mathcal{D}}, \Omega_X^{\mathcal{D}})$ comes back from infinity and tends to \mathcal{C} , while $a_{\mathcal{D}}$ decreases from its maximum to zero. Hence, the fixed point \mathcal{C} is both a past repeller and a future attractor.

In the region II.a (green), the states evolve from \mathcal{C} , when $a_{\mathcal{D}}$ is zero, toward \mathcal{A} , when $a_{\mathcal{D}}$ tends to infinity (plot II.a (green) of figure 2), without any accelerated period. In this region, \mathcal{C} is a past repeller and \mathcal{A} is a future attractor.

A state in IV (blue) leaves the fixed point \mathcal{A} , while the scale factor decreases from infinity to its minimum in the past, and reaches infinity. It then goes back to \mathcal{A} when the scale factor grows to infinity (plot IV.a (blue) of figure 2). The state undergoes an accelerated period when operating its bouncing back from infinity. Here, \mathcal{A} is a past repeller and a future attractor.

Finally, in the region V (brown), $(\Omega_m^{\mathcal{D}}, \Omega_X^{\mathcal{D}})$ runs from infinity at the minimum of $a_{\mathcal{D}}$ to infinity at its maximum, and it oscillates (plot V (brown) of figure 2). The minimum of $a_{\mathcal{D}}$ is reached when the orbit runs below the dashed line since it corresponds to a positive acceleration.

All the orbits that go to infinity only describe part of the evolution, i.e. up to a maximum or minimum of the scale factor. The rest of the evolution is described not by reversing the direction of time, but by reversing the monotonicity of $a_{\mathcal{D}}$. In other words, the state travels back on the orbit of the phase portraits.

The other generic orbits expounded in figure 1 are the following (see also figure 2): a state in IV.b (blue) follows the same type of evolution as a state in IV.a except that it always undergoes an acceleration; the evolution of a state in II.b (green) differs from that of II.a by the fact that it experiences an acceleration from a finite time; and a state in III (darkest green) evolves from \mathcal{B} , when $a_{\mathcal{D}}$ is zero, toward \mathcal{C} , when $a_{\mathcal{D}}$ tends to infinity. In this region, \mathcal{B} is a past repeller and \mathcal{C} is a future attractor.

Finally, we present the evolution of the scale factor for domains lying on an invariant line. If a state belongs to the segment between two fixed points, it experiences a big-bang and a future expanding phase. If it belongs to a semiline, either the domain undergoes a big-bang and big-crunch evolution when the arrow on the invariant line leaves the fixed point, or the domain undergoes a past and future expanding phase when the arrow is orientated toward the fixed point.

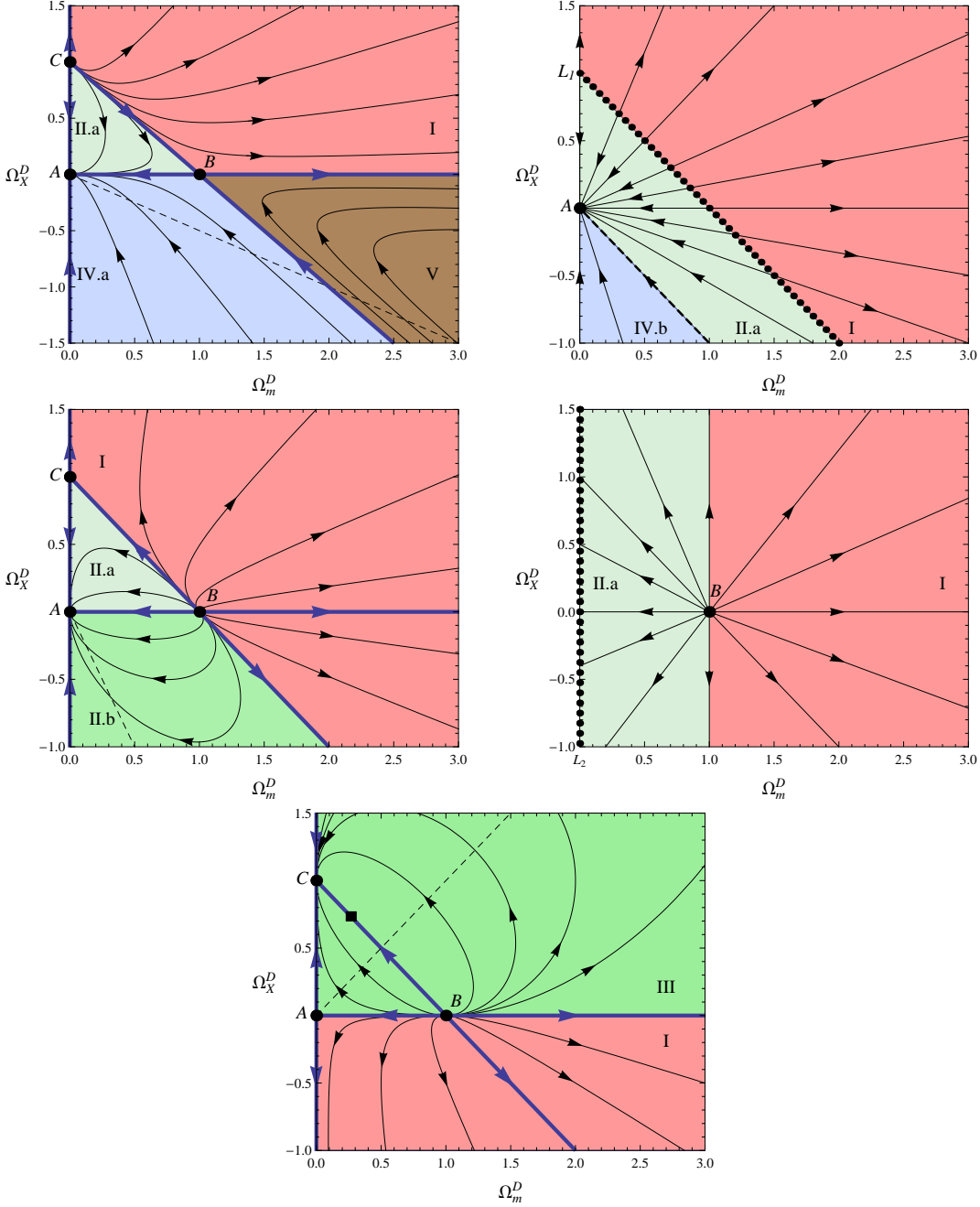


Figure 1. Phase space (Ω_m^D, Ω_X^D) of the dynamical system (13,14). From left to right and top to bottom: $n < -3$ ($n = -4$ for the illustration), $n = -3$, $-3 < n < -2$ ($n = -2.5$), $n = -2$ and $n > -2$ ($n = -1$). The thick straight lines (dark blue) are the invariant lines $\Omega_m^D = 0$, $\Omega_X^D = 0$ and $\Omega_k^D = 1 - \Omega_m^D - \Omega_X^D = 0$. Every line parallel to the latter, the inclined line, corresponds to a constant Ω_k^D , with values increasing downwards. The dashed line shows a vanishing q_D ; it is an orbit only for $n = -3$, and it coincides with $\Omega_m^D = 0$ for $n = -2$. A domain is accelerated below this line and decelerated above when $n < -2$, and this correspondence is inverted for $n > -2$. The arrows show an increasing N_D , the dots are the fixed points of table 1, and the square in the last plot stands for the observational values (see section 4.3).

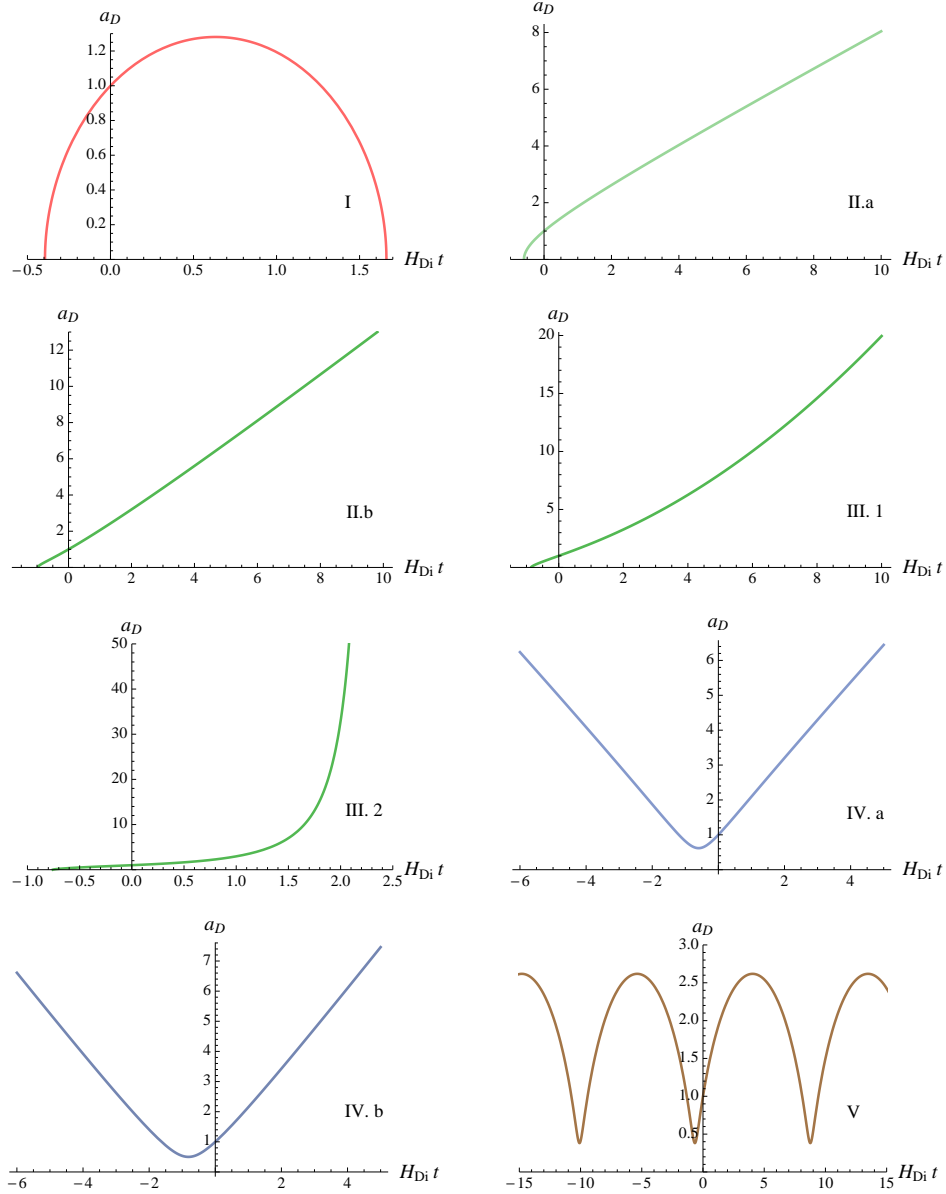


Figure 2. Evolution of the scale factor of a domain with respect to $H_{\mathcal{D}_i} t$. The numbers (colors) refer to the different regions of the phase spaces in figure 1. All the states of a region have a scale factor which evolves in the same way. We have chosen a positive $H_{\mathcal{D}_i}$ to deal with initially expanding domains and a null t_i . Region I (red) shows big-bang and big-crunch domains, regions II show big-bang and future expanding (with an asymptotically null acceleration) domains, region III.1 (darkest green) describes big-bang and future expanding (accelerating) domains for $-2 < n \leq 0$, region III.2 (darkest green) describes big-bang and big-rip domains for $n > 0$, regions IV (blue) show past and future expanding domains, and region V (brown) shows oscillating domains. We distinguish two subcases for the regions II and IV: for the former, region II.a is never accelerated, while region II.b is accelerated from a finite time onward; for the latter, region IV.a is accelerated during a finite period of time, while region IV.b is always accelerated.

4. Summary and discussion

First and foremost, we clarify the definitions of the different types of domains at stake. A domain \mathcal{D} is *Friedmannian*, i.e. locally homogeneous and isotropic, if and only if for all subdomains $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$ one has $\Omega_Q^\mathcal{E} = \Omega_W^\mathcal{E} = 0$ or, equivalently, $\Omega_X^\mathcal{E} = 0$. We have focused our analysis on one single domain \mathcal{D} without any multiscale considerations; so it is fair to assert that the Friedmannian realization is not achieved in our approach since no additional suppositions are made. A domain with a null $\Omega_X^\mathcal{D}$ and with nothing more inferred about the $\Omega_X^\mathcal{E}$ of the subdomains, is most probably non-Friedmannian: as noted in section 2, the cancellation of the backreaction fluid can be the result of an exact compensation between the expansion variance and the shear, and inhomogeneities and anisotropies may still be locally present. Nevertheless, such domains are destined to follow *on average* a Friedmannian evolution since their inhomogeneities do not contribute *on average* to the kinematics. We shall call these domains *Friedmann-like* domains. Therefore, we shall deal with *Milne-like* and *Einstein-de Sitter-like* domains, instead of locally Milne and Einstein-de Sitter domains. This complies with the actual physical situation: Friedmannian models as dynamical models for the average evolution are only realized for strictly homogeneous distributions of matter and geometry, but there exist situations—called *Friedmann-like*—in which Friedmannian models do provide the evolution on average, i.e. in which they describe the *physical background*.

Another terminology we employ makes use of equation (9): for $n < -2$, $\Omega_X^\mathcal{D} > 0$ corresponds to shear-dominated domains, and $\Omega_X^\mathcal{D} < 0$ labels expansion variance-dominated domains. This correspondence is inverted for $n > -2$.

4.1. Summary of results

Before delving into details, simply recall that the orbits strongly depend on the leading term in the cosmic trio $\Omega_m^\mathcal{D} \propto a_\mathcal{D}^{-3} H_\mathcal{D}^{-2}$, $\Omega_k^\mathcal{D} \propto a_\mathcal{D}^{-2} H_\mathcal{D}^{-2}$ and $\Omega_X^\mathcal{D} \propto a_\mathcal{D}^n H_\mathcal{D}^{-2}$. When $n < -2$, the constant curvature $k_{\mathcal{D}_i}$, useful to compare the effective background with the Friedmann-like background, determines the dynamics of the domain, while in the remaining situations the backreaction fluid is the relevant quantity.

For $n < -3$ and for a negative constant-curvature $k_{\mathcal{D}_i}$, shear-dominated and expansion variance-dominated domains are attracted by a Milne-like state. In the past, the former originates from a state with $\Omega_X^\mathcal{D} \simeq 1$, whereas the latter comes from a Milne-like state. Expansion variance-dominated domains are therefore asymptotically, in the past and in the future, dominated by a negative constant curvature. The bounce of these domains occurs when the contribution of the backreaction fluid is no longer negligible. For a positive $k_{\mathcal{D}_i}$, expansion variance-dominated domains are oscillating (this is the only situation where it occurs): when the volume of the domain is sufficiently small, the backreaction fluid—mimicking a dark energy behavior—becomes preponderant over the other components, thus avoiding the collapse. In contrast, shear-dominated domains—mimicking a dark matter behavior—evolve toward a domain filled only with $\Omega_X^\mathcal{D}$ and collapse in a finite time.

At $n = -3$, all domains with a negative $k_{\mathcal{D}_i}$ approach a Milne-like state, and all domains with a positive $k_{\mathcal{D}_i}$ eventually collapse. The attractor state of these latter depends on the initial conditions: though it always exhibits $\Omega_k^{\mathcal{D}} = 0$, all the values of $\Omega_m^{\mathcal{D}}$ and $\Omega_X^{\mathcal{D}}$ are attainable provided the Hamilton constraint is satisfied. For the particular state $\Omega_k^{\mathcal{D}_i} = 1$ (dashed line of the second plot of figure 2), the domain experiences a stationary expansion ($\dot{a}_{\mathcal{D}} = \text{const}$). $\Omega_k^{\mathcal{D}}$ always being equal to 1 in this situation, the dust and backreaction fluid energies exactly compensate each other along the whole evolution. Furthermore, we here confirm that this stationary state is *stable*: any perturbation always leads back to a stationary state (as was conjectured in [5], see also [2, 25] for comparisons).

For $-3 < n < -2$, shear-dominated and expansion variance-dominated domains have the same qualitative asymptotic properties. For a negative $k_{\mathcal{D}_i}$, they originate from an Einstein-de Sitter-like dust state and are attracted by a Milne-like state, whereas for a positive constant curvature they emanate from and converge to an Einstein-de Sitter-like state and eventually collapse. In these last scenarios, even if the backreaction fluid mimics a dark energy behavior over the domain, its intensity is not sufficient enough to counterbalance the collapse contrary to the case $n < -3$.

In all the previous situations (except for the region V (brown)), a positive constant-curvature domain is bound to collapse, and a negative constant-curvature domain always converges toward a Milne-like state. Therefore, a small perturbation around a null $k_{\mathcal{D}_i}$ seals a totally different fate according to its sign.

For $n = -2$, domains with $\Omega_m^{\mathcal{D}_i} < 1$ are attracted by a Milne-like state, and domains with $\Omega_m^{\mathcal{D}_i} > 1$ converge to an Einstein-de Sitter-like state and collapse within a finite time. The constraint (6) here implies $Q_{\mathcal{D}} = 0$ and $\mathcal{W}_{\mathcal{D}} \propto a_{\mathcal{D}}^{-2}$, which means that there is no kinematical backreaction, but also no curvature deviation from a constant curvature *stricto sensu*. All states follow the kinematics of a Friedmann-like state on average, and the whole drawn phase portrait is physically equivalent to the line $\Omega_X^{\mathcal{D}} = 0$.

Finally, for $n > -2$, shear-dominated domains emerge from and are attracted by an Einstein-de Sitter-like dust state, and they eventually collapse. Expansion variance-dominated domains also originate from an Einstein-de Sitter-like state, but they are attracted by a state filled only with the backreaction fluid, and they experience an accelerating expansion from a finite time onward. As an example for the latter: void domains that are nearly Friedmannian on average ($\Omega_m^{\mathcal{D}} = 0$, $\Omega_X^{\mathcal{D}} \gtrsim 0$) are unstable and driven away toward this expanding state; this instability is the origin of the possible onset of an inflationary scenario created from initial curvature inhomogeneities of the Einstein vacuum [12].

4.2. Discussion: instability sectors

A state leaves the class of FLRW *backgrounds* and enters into what we define as an *instability sector*[‡] as soon as the backreaction fluid contributes to the kinematics of the domain. The existence of a non-vanishing averaged contribution of inhomogeneities invokes deviations of a cosmic state from its Friedmann-like characteristics. Given the generic behavior of any domain, we now address the issue of the stability of the FLRW backgrounds: does a Friedmann-like state, lying on the line $\Omega_X^{\mathcal{D}} = 0$, converge *on average* to the same or another Friedmann-like state when subjected to perturbations?

A convergence toward any Friedmann-like state or, equivalently, toward the class of FLRW backgrounds, happens when the two following conditions are met: first, $X_{\mathcal{D}} \rightarrow 0$, which entails that inhomogeneities are negligible *on average*; second, $\Omega_X^{\mathcal{D}} \rightarrow 0$, which states that the energy contribution of the backreaction fluid becomes subdominant *on average* compared to the other components. Note that for the particular case $n = -2$, as explained above, the averaged contribution of inhomogeneities vanishes, and all the states are Friedmann-like. This situation does not admit any global inhomogeneity effect, and we shall therefore disregard it in our discussion.

Based on the previous analyses, we conclude that FLRW backgrounds are stable for: (i) $n < -2$ and $k_{\mathcal{D}_i} < 0$, the Milne-like state is an attractor for any inhomogeneous deviations, and (ii) $n < -3$ and $k_{\mathcal{D}_i} = 0$, the Einstein-de Sitter-like dust state is eventually reached. In these situations the FLRW backgrounds are stable, in the situation (i) the background can only be attained asymptotically.

In the other situations, the perturbations of any Friedmann-like state lead either to $\Omega_X^{\mathcal{D}} \rightarrow 1$ or $X_{\mathcal{D}} \rightarrow \infty$ or both, namely to a non Friedmann-like state. The FLRW backgrounds are therefore globally unstable for: (iii) $n < -2$ and $k_{\mathcal{D}_i} > 0$, (iv) $-3 \leq n < -2$ and $k_{\mathcal{D}_i} = 0$, and (v) $n > -2$. In these situations they obviously constitute an incorrect approximation to the physical background.

4.3. Discussion: interpretation as dark sectors

The different cosmological observations interpreted in the context of FLRW cosmologies constrain the instability sectors to which the dark components could be associated. For instance, we may put a conservative upper bound on the present-day cosmic state, $\Omega_{m,\text{today}}^{\mathcal{D}} < 1$, i.e. any physical orbit should respect this bound, if we consider small-scale (galaxy clusters and voids) or large-scale (CMB and high-redshift supernovae) cosmological domains. For instance, this restriction forbids some of the orbits for these gravitational systems: they cannot belong to the region V (brown) of figure 1, and so we cannot have oscillating domains.

The *dark matter* component can be associated with domains that are dominated by

[‡] From figure 1 it is obvious that no Friedmann-like *state* is stable (except the point \mathcal{A}), i.e. in those unstable cases no perturbation slightly above the $\Omega_X^{\mathcal{D}} = 0$ line relaxes to its original point of the phase space diagram. Therefore, we address the more general issue of stability of the *class of backgrounds* with Friedmann-like behavior.

shear fluctuations, and which eventually collapse. The instability sectors of the regions I (red) in the first plot of figure 1, in the second and third plots (with $\Omega_X^{\mathcal{D}} > 0$), and in the fifth plot (with $\Omega_X^{\mathcal{D}} < 0$) may present an effective dark matter behavior for the backreaction fluid. Concerning the *dark energy* component, it is effectively mimicked in the instability sectors of the region IV.b (blue) in the second plot, II.b (green) in the third plot, and III (darkest green) in the last plot. In each of these cases, there is a global acceleration of the domain. Note, interestingly, that the sign of the third derivative of $a_{\mathcal{D}}$ may also change, allowing for a variety of different dynamical evolution histories of the dark energy component. In the following, we pick two proto-type examples of instability sectors to which the dark components can effectively be associated.

Consider a small domain filled mainly with dust ($\Omega_m^{\mathcal{D}_i} \simeq 1$), dominated by its shear fluctuation ($\Omega_X^{\mathcal{D}_i} \gtrsim 0$), with an initially slightly positive constant curvature ($\Omega_k^{\mathcal{D}_i} \lesssim 0$) and such that $n \lesssim -3$. This situation can correspond to negative or positive averaged scalar curvature $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$, and it describes a pancake-like configuration of dust, like a proto-sheet (or proto-filament). Such a domain evolves toward a state dominated by the backreaction fluid, passing close to the observational ratio $\Omega_m^{\mathcal{D}}/\Omega_X^{\mathcal{D}} = \Omega_{baryon}/\Omega_{DM} \simeq 0.21$, and eventually collapses^{††} (see figures 1 and 2). This example shows that the backreaction terms can turn out to play the role of a dark matter component, thereby accelerating the formation of structures by adding gravity and accreting the dust.

Consider a large domain, say our Hubble sphere, endowed with an initially slightly negative constant curvature ($\Omega_k^{\mathcal{D}_i} \gtrsim 0$) and mainly composed of dust ($\Omega_m^{\mathcal{D}_i} \simeq 1$). Suppose also that the expansion variance slowly varies and dominates the backreaction fluid (so $-2 < n \lesssim 0$ and $\Omega_X^{\mathcal{D}_i} \gtrsim 0$). Such a domain is always characterized by a negative averaged scalar curvature $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$ and enters, from a finite time onward, a phase of accelerated expansion, may pass close to the observational value ($\Omega_m^{\mathcal{D}}, \Omega_X^{\mathcal{D}} \simeq (0.27, 0.73)$) (the square in figure 1), and eventually ends up being entirely dominated by the backreaction fluid. Recall that the backreaction fluid can be formulated as a scalar field [11], and here its equation of state would be given by $\omega = -1 - n/3 \gtrsim -1$. These accelerated expansion scenarios include the case found in perturbation theory [24], and they would be interpreted as the signature of dark energy in the standard model.

These two examples, though not depicting exhaustively all the possible scenarios, show how the instability sectors of FLRW backgrounds can be linked to the dark components.

5. Concluding remarks

We have studied in the present paper the global gravitational stability of FLRW backgrounds in the class of scaling averaged inhomogeneous models. Our investigation has led to a detailed classification of stability and instability sectors in the phase space

^{††}Note that our effective model does not take into consideration either the pressure or the vorticity of the matter at stake, which obviously cannot be neglected at the end of the collapse process.

of the scaling averaged cosmologies, and it has shown that averaged models are driven away from FLRW backgrounds through structure formation and accelerated expansion. Furthermore, motivated by reasonable physical assumptions, we have been able to relate both dark components of the cosmological concordance model to the instability sectors of the dynamical system.

As for the cases where the FLRW backgrounds are found to enjoy stability, we have to add a disclaimer. Despite their stable character, these FLRW backgrounds might not serve as reliable approximations in the role of physical backgrounds. As an example we look at the region II.b (green) in figure 1: we appreciate that the background experiences a transient acceleration period in between an initial and an asymptotic Friedmann-like state. Such a situation shows that FLRW backgrounds, even if globally stable, do *a priori* not provide a correct approximation for the physical background during the entire evolution.

A last remark concerns the use of exact scaling solutions for the class of averaged models analyzed. Indeed, there is no proof that scaling solutions depict all the instabilities of FLRW backgrounds, but it is also highly improbable that this is the only class of averaged models where instability occurs. Since our point was to explicitly demonstrate the possible unstable character of Friedmann-like domains, the use of scaling solutions is perfectly legitimate, though not exhaustive. In other words, our study is restrictive in this sense, since scaling solutions, albeit exact, are only indicative for the existing instabilities. One could also speculate that scaling solutions are acceptable building blocks to describe any backreaction behavior, as any analytical function is the sum of a Laurent series; however the correspondence is not that trivial due to the nonlinearity of the problem.

Acknowledgements: The authors are thankful for the valuable comments of the anonymous referees. XR thanks Miv Oto for useful discussions. This work is supported by “Fédération de Physique André-Marie Ampère” of Université Lyon 1 and École Normale Supérieure de Lyon.

References

- [1] D.K. Arrowsmith and C.M. Place: An introduction to dynamical systems. In *Cambridge University Press* (1990)
- [2] J.D. Barrow, G.F.R. Ellis, R. Maartens and C.G. Tsagas: On the stability of the Einstein static universe. *Class. Quant. Grav.* **20**, L155 (2003)
- [3] T. Buchert: On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: dust cosmologies. *Gen. Rel. Grav.* **32**, 105 (2000)
- [4] T. Buchert: On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: perfect fluid cosmologies. *Gen. Rel. Grav.* **33**, 1381 (2001)
- [5] T. Buchert: On globally static and stationary cosmologies with or without a cosmological constant and the dark energy problem. *Class. Quant. Grav.* **23**, 817 (2006)
- [6] T. Buchert: Dark energy from structure – a status report. *Gen. Rel. Grav.* **40**, 467 (2008)
- [7] T. Buchert: Towards physical cosmology: focus on inhomogeneous geometry and its non-perturbative effects. To appear in *Class. Quant. Grav. Focus Section on inhomogeneous cosmological models and averaging in cosmology*; arXiv:1103.2016 (2011)

- [8] T. Buchert and M. Carfora: On the curvature of the present day universe. *Class. Quant. Grav.* **25**, 195001 (2008)
- [9] T. Buchert and J. Ehlers: Averaging inhomogeneous Newtonian cosmologies. *Astron. Astrophys.* **320**, 1 (1997)
- [10] T. Buchert, G. F. R. Ellis and H. Van Elst: Geometrical order-of-magnitude estimates for spatial curvature in realistic models of the universe. *Gen. Rel. Grav.* **41**, 2017 (2009)
- [11] T. Buchert, J. Larena and J.-M. Alimi: Correspondence between kinematical backreaction and scalar field cosmologies – the ‘morphon field’. *Class. Quant. Grav.* **23**, 6379 (2006)
- [12] T. Buchert, N. Obadia: Effective inhomogeneous inflation: curvature inhomogeneities of the Einstein vacuum. To appear as Fast Track Communication in *Class. Quant. Grav.*; arXiv:1010.4512 (2011)
- [13] S. Carloni, P. K. S. Dunsby, S. Capozziello and A. Troisi: Cosmological dynamics of R^n gravity. *Class. Quant. Grav.* **22**, 4839 (2005)
- [14] S. Carloni and P. K. S. Dunsby: A dynamical system approach to higher order gravity. *J. Phys. A* **40**, 6919 (2007)
- [15] S. Carloni, J. A. Leach, S. Capozziello and P. K. S. Dunsby: Cosmological dynamics of scalar tensor gravity. *Class. Quant. Grav.* **25**, 035008 (2008)
- [16] S. Carloni, A. Troisi and P. K. S. Dunsby: Some remarks on the dynamical systems approach to fourth order gravity *Gen. Rel. Grav.* **41**, 1757 (2009)
- [17] S. Carloni, E. Elizalde and P. J. Silva: An analysis of the phase space of Hořava–Lifshitz cosmologies. *Class. Quant. Grav.* **27**, 045004 (2010)
- [18] E. J. Copeland, A. R. Liddle and D. Wands: Exponential potentials and cosmological scaling solutions. *Phys. Rev. D* **57**, 4686 (1998)
- [19] J. Ehlers and W. Rindler: A phase-space representation of Friedmann–Lemaître universes containing both dust and radiation and the inevitability of a big-bang. *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **238**, 503 (1989)
- [20] G.F.R. Ellis and T. Buchert: The universe seen at different scales. *Phys. Lett. A (Einstein Special Issue)* **347**, 38 (2005)
- [21] M. Gasperini, G. Marozzi and G. Veneziano: A covariant and gauge invariant formulation of the cosmological “backreaction”. *JCAP* **02**, 009 (2010)
- [22] E.W. Kolb, V. Marra and S. Matarrese: Cosmological background solutions and cosmological backreactions. *Gen. Rel. Grav.* **42**, 1399 (2010)
- [23] J. A. Leach, S. Carloni and P. K. S. Dunsby: Shear dynamics in Bianchi I cosmologies with R^n -gravity. *Class. Quant. Grav.* **23**, 4915 (2006)
- [24] N. Li and D. J. Schwarz: On the onset of cosmological backreaction. *Phys. Rev. D* **76**, 083011 (2007)
- [25] B. Losic and W.G. Unruh: Initial value problem for second order scalar fluctuations in the Einstein static universe. *Phys. Rev. D* **71**, 044011 (2005)
- [26] G. Marozzi: The cosmological backreaction: gauge (in)dependence, observers and scalars. *JCAP* **01**, 012 (2011)
- [27] R. A. Sussman and G. Izquierdo: A dynamical systems study of the inhomogeneous Λ CDM model. arXiv:1004.0773 (2010)
- [28] J. Wainwright and G. F. R. Ellis: Dynamical System in Cosmology. In *Cambridge University Press* (1997)
- [29] A. Wiegand and T. Buchert: Multiscale cosmology and structure-emerging dark energy: a plausibility analysis. *Phys. Rev. D.* **82**, 023523 (2010)

Fluctuations de poussière autour d'un fond général

Dans le schéma standard de formation des structures, il est supposé que les effets de rétroaction, issus des inhomogénéités induites par les perturbations, sont négligeables et n'influencent que très faiblement la dynamique des champs scalaires moyens aux grandes échelles. Les arguments en faveur de cet abandon se trouvent dans les différents traitements perturbatifs généralement abordés : celui newtonien (voir par exemple [Tatekawa *et al.*, 2001, 2002]) et celui quasi-newtonien (voir par exemple [Russ *et al.*, 1996, 1997 – Kolb *et al.*, 2005 – Brown *et al.*, 2009b – Clarkson *et al.*, 2009 – Zhao et Mathews, 2011]). Néanmoins, les effets de rétroaction des inhomogénéités s'annulent par construction dans le premier traitement, dû au choix d'une géométrie non dynamique. D'autres inconvénients apparaissent dans le second traitement : même si les effets de rétroaction cinématique sont pris en compte, l'hypothèse de conditions périodiques au bord sur des sections spatiales initialement plates, ou la restriction de la courbure scalaire à une courbure constante, supprime tout effet d'interaction entre les structures et le fond. Un autre désavantage de cette démarche est l'évaluation de l'amplitude des effets de rétroaction autour d'un espace-temps fixé *a priori*, ce qui constitue en soi une approche restrictive.

Nous avons également appris (voir chapitre 5) que, dès qu'un système gravitationnel est perturbé, les inhomogénéités induites entraînent un écart de sa dynamique moyenne de celle des modèles FL. En d'autres termes, les fonds FL ne constituent pas une approximation correcte pour une description pertinente de l'évolution globale de l'univers. Ceci est d'importance pour une théorie des perturbations : l'évolution du fond influence l'évolution des perturbations et leur amplitude, et en retour les inhomogénéités des structures affectent l'évolution du fond. Cet effet inverse a jusqu'alors été négligé. Afin de connaître l'évolution exacte des effets de rétroaction et leur amplitude réelle, il convient de fournir un schéma de traitement des perturbations autour d'un espace-temps moyen quelconque. Seulement alors une infirmation ou une confirmation de la négligence des effets de rétroaction sur la formation des structures pourra être établie.

Nous présentons ci-après un nouveau formalisme pour l'étude des perturbations relativistes scalaires autour d'un fond général. Nous nous intéressons au cas particulier d'un fluide irrotationnel de poussière dans la jauge synchrone. En utilisant les travaux de Buchert [2001] et Gasperini *et al.* [2010], par exemple, nous pouvons aisément généraliser notre étude à des fluides avec pression, dans un formalisme totalement invariant de jauge. L'approche que nous exposons ici est exacte et non perturbative, aucune approximation ou

Chapitre 6. Fluctuations de poussière autour d'un fond général

linéarisation n'est effectuée. Nous espérons être capables de décrire à l'aide de ce schéma la formation des structures à grande échelle sans recourir à un champ fondamental d'énergie sombre, et uniquement grâce à la présence d'inhomogénéités. Le prochain travail sera de proposer un schéma de résolution pour le système d'équations ainsi obtenu.

Relativistic cosmological perturbation scheme on a general background: scalar perturbations for irrotational dust

Xavier Roy and Thomas Buchert

Université Lyon 1, Centre de Recherche Astrophysique de Lyon
9 avenue Charles André, F-69230 Saint-Genis-Laval, France

Emails: roy@obs.univ-lyon1.fr, buchert@obs.univ-lyon1.fr

Abstract. In standard perturbation approaches and N -body simulations, inhomogeneities are described to evolve on a predefined background cosmology, commonly taken as the homogeneous–isotropic solutions of Einstein’s field equations (FLRW cosmologies). In order to make physical sense, this background cosmology must provide a reasonable description of the effective, i.e. spatially averaged, evolution of structure inhomogeneities also in the nonlinear regime. Guided by the insights that (i) the average over an inhomogeneous distribution of matter and geometry is in general not given by a homogeneous solution of general relativity, and that (ii) the class of FLRW cosmologies is not only locally but also globally gravitationally unstable in relevant cases, we here develop a perturbation approach that describes the evolution of inhomogeneities on a general background being defined by the spatially averaged evolution equations. This physical background interacts with the formation of structures. We derive and discuss the resulting perturbation scheme for the matter model ‘irrotational dust’ in the Lagrangian picture, restricting attention to scalar perturbations in the present paper.

PACS numbers: 98.80.-k, 95.36.+x, 98.80.Jk, 04.20.-q, 04.20.Cv, 04.25.Nx

(To be submitted)

1. A new approach to perturbation theory

Perturbation theory is a key tool in cosmology to describe the formation of structures in the weakly nonlinear regime and to initialize the N -body simulations of cosmic structures. The standard motivation to describe perturbations on a homogeneous–isotropic Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) background comes from the known gravitational instability of the latter. However, this background is supposed, implicitly, to also describe the evolution of structures on average in the nonlinear regime, and this is implemented as a construction principle in most known relativistic, quasi-Newtonian and Newtonian perturbation schemes, and Newtonian N -body simulations [6]. We remark that such a construction is correct in Newtonian cosmology: if structures evolve on a Euclidean geometry, and if they are subjected to periodic boundary

conditions on some large scale, then the average of inhomogeneities is given by the assumed background. This torus architecture of Newtonian models is even a unique possibility, since otherwise the solution of the involved elliptic boundary value problem is not uniquely possible in a cosmological context (see [5] for the proofs).

Obviously, a Newtonian cosmology has to be considered as highly restrictive when one moves to the framework of general relativity, and the previous construction cannot be expected to work there because of: (i) the relevance of the spatial intrinsic curvature (the second derivatives of the metric may be significant even if the metric perturbations are small [14, 27–29, 39, 40]), together with (ii) the fact that inhomogeneities are coupled to the spatial curvature evolution [8], and finally (iii) the absence of a conservation law for the averaged intrinsic curvature [13]. Also, it has been recently shown [42], in the special class of scaling laws for the spatially averaged inhomogeneities (so-called backreaction terms), that FLRW backgrounds are not only locally but also globally unstable as a result of structure formation and accelerated expansion, when subjected to perturbations whose global contribution does not vanish. As soon as a homogeneous and isotropic self-gravitating system is perturbed, the related inhomogeneities invoke a departure of its average from a FLRW background. This property is of great significance for a theory of perturbations: in the standard approach the background evolution is known to impact on the evolution of perturbations, but the converse effect, namely that the structure inhomogeneities also affect the evolution of the background, has been neglected thus far by construction. Note that such a property is expected from first principles: it expresses the fact that, in Einstein’s theory, the formation of structures and the evolution of geometry are mutually (and generically) coupled. An evolution of structures on a predefined background is, in light of these remarks, a highly restricted approach.

Looking at perturbations in the universe, we can only apprehend their strength and their evolution correctly if we know with respect to which background they have to be considered. Previous work that has addressed the issue in Newtonian cosmology [48, 49] faces the drawback that, on some large scale, all averages are strictly free of backreaction from inhomogeneities due to the restriction to a non-dynamical geometry and the necessity of a torus architecture, as explained above. The same drawback remains in quasi-Newtonian relativistic perturbation schemes for the evolution of gauge-invariant variables on a predefined background, even if they take into account backreaction effects [31–35, 43, 44, 53]. For example, the assumption of periodic boundary conditions on initially flat space sections or the restriction of the scalar curvature to a constant curvature suppress any interaction effect between structures and the background. Beyond the usual FLRW perturbation scheme, Clarkson *et al.* have furnished in [19] a complete system of master equations that represent the general linear perturbations to Lemaître–Tolman–Bondi (LTB) cosmologies. In [23], Giesel *et al.* have given the full gauge-invariant relativistic perturbation theory holding for any background metric.

The framework presented in this paper provides in a simple fashion the needed tools to implement a background as the average over fluctuating fields, which is not based

on the introduction of a predefined background and deviations thereof; it furnishes the evolution of the scalar parts of the deviation fields off this general background in a non-perturbative way. We expect from this improvement that we shall be able to explicitly imprint structure inhomogeneities into the background that eventually describes the expansion history of the universe without the need to invoke, e.g., a dark energy fundamental component. A further aim is to understand initial conditions for relativistic numerical simulations of inhomogeneities that are not restricted to vanish on average on a predefined background.

We proceed as follows. In section 2, we briefly recall the local and averaged evolution and constraint equations for the description of inhomogeneous dust cosmologies, and we provide a system of equations for the deviation fields off a general background (an application of our framework to deviations from generic averaged LTB cosmologies is given in appendix A). This is followed, in section 3, by a thorough discussion of the properties of this new deviation scheme. We conclude the paper in section 4 with some prospects.

2. Perturbation scheme on a general background

2.1. Local and averaged equations for inhomogeneous cosmologies

Let us consider a globally hyperbolic four-dimensional manifold, endowed with some metric tensor ${}^4\mathbf{g}$. An irrotational fluid congruence, defined by a unit timelike vector field \mathbf{u} , will be used to foliate the spacetime into a family of flow-orthogonal spacelike hypersurfaces. We shall restrict ourselves, in what follows, to the case of a pressureless irrotational fluid (irrotational dust), $T_{\mu\nu} = \varrho u_\mu u_\nu$, with ϱ its energy density, as described in the Lagrangian picture \ddagger . In the canonical bases (∂_t, ∂_i) and (dt, dX^i) , the four-velocity of the fluid assumes the form

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad u_\mu = (-1, 0, 0, 0), \quad (1a)$$

and the line element is written

$$ds^2 = {}^4g_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu = -dt^2 + h_{ij}dX^i dX^j, \quad (1b)$$

X^i being the Lagrangian spatial coordinates (coordinates comoving with the fluid), and \mathbf{h} the inhomogeneous three-metric of the t -constant hypersurfaces. The foliation of Einstein's equations with respect to \mathbf{u} implies the well-known Raychaudhuri equation and Hamilton constraint:

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 = -4\pi G\varrho - 2\sigma^2 + \Lambda, \quad (2a)$$

$$\frac{1}{3}\Theta^2 = 8\pi G\varrho - \frac{\mathcal{R}}{2} + \sigma^2 + \Lambda. \quad (2b)$$

\ddagger Greek indices refer to spacetime components, they run in $\{0, 1, 2, 3\}$, and Latin indices denote space components, running in $\{1, 2, 3\}$. For a presentation of the (3+1)-splitting of Einstein's equations, see e.g. [1, 24, 45].

Throughout our study, the overdot will stand for the covariant derivative (here identical to the partial time derivative ∂_t). $\Theta := h^{ij}\Theta_{ij} := \frac{1}{2}h^{ij}\dot{h}_{ij}$ and $\sigma := (\frac{1}{2}\sigma^{ij}\sigma_{ij})^{1/2}$ are the expansion and shear rates, respectively, while \mathcal{R} is the three-Ricci scalar curvature of the hypersurfaces, and Λ is the cosmological constant that we carry along for the sake of generality. Those relations may be supplemented by the fluid continuity equation and a balance relation between \mathcal{R} and σ :

$$\dot{\varrho} + \Theta\varrho = 0, \quad (2c)$$

$$\dot{\mathcal{R}} + \frac{2}{3}\Theta\mathcal{R} = 2(\sigma^2)\cdot + 4\Theta\sigma^2, \quad (2d)$$

where the latter is obtained upon requiring equation (2b) to be an integral of (2a) (we shall simply call, hereafter, ‘integrability condition’ the result of this procedure). The local system (2) will be used, later on, to derive the evolution of the deviation fields inside any spatial domain. For notational ease, we have omitted the time and space dependences, but the reader should bear in mind that all variables at stake are inhomogeneous.

Let us now consider a scalar field ψ . Its spatial average performed on some compact domain \mathcal{D} , contained within the hypersurfaces and transported along the fluid flow lines (Lagrangian averaging), is defined as (see [7] for details):

$$\langle\psi\rangle_{\mathcal{D}} := \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \psi \sqrt{\det h_{ij}} d^3X, \quad (3a)$$

with $V_{\mathcal{D}} := \int_{\mathcal{D}} \sqrt{\det h_{ij}} d^3X$ the volume of the domain under consideration satisfying $\dot{V}_{\mathcal{D}}/V_{\mathcal{D}} = \langle\Theta\rangle_{\mathcal{D}}$. We shall also make frequent use of the commutation rule between spatial averaging and differentiation with respect to time:

$$\langle\dot{\psi}\rangle_{\mathcal{D}} - \dot{\langle\psi\rangle}_{\mathcal{D}} = \langle\Theta\psi\rangle_{\mathcal{D}} - \langle\Theta\rangle_{\mathcal{D}}\langle\psi\rangle_{\mathcal{D}}, \quad (3b)$$

where the right-hand side reduces to zero for a homogeneous domain. Equipped with these relations, we can provide the Lagrangian averaging on \mathcal{D} of Raychaudhuri’s equation and Hamilton’s constraint[§]:

$$\langle\Theta\rangle_{\mathcal{D}}\cdot + \frac{1}{3}\langle\Theta\rangle_{\mathcal{D}}^2 = -4\pi G\langle\varrho\rangle_{\mathcal{D}} + \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \Lambda, \quad (4a)$$

$$\frac{1}{3}\langle\Theta\rangle_{\mathcal{D}}^2 = 8\pi G\langle\varrho\rangle_{\mathcal{D}} - \frac{\langle\mathcal{R}\rangle_{\mathcal{D}}}{2} - \frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}}{2} + \Lambda, \quad (4b)$$

$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ being the kinematical backreaction defined as^{||}

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} := \frac{2}{3}\langle(\Theta - \langle\Theta\rangle_{\mathcal{D}})^2\rangle_{\mathcal{D}} - 2\langle\sigma^2\rangle_{\mathcal{D}}, \quad (4c)$$

[§] For comprehensive reviews on averaged inhomogeneous cosmologies in general relativity, we recommend the reading of [12, 16, 20, 21, 37, 38] (and references therein).

^{||} Note that $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ may also be written in terms of the extrinsic curvature of the hypersurfaces, $K_{ij} =: -\Theta_{ij}$, as $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = \langle K^2 - K^{ij}K_{ij}\rangle_{\mathcal{D}} - \frac{2}{3}\langle K\rangle_{\mathcal{D}}^2$.

and we obtain the conservation law for the total rest mass within \mathcal{D} and the integrability condition for the averaged variables as:

$$\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} \dot{} + \langle \Theta \rangle_{\mathcal{D}} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = 0, \quad (4d)$$

$$\dot{\mathcal{Q}}_{\mathcal{D}} + 2 \langle \Theta \rangle_{\mathcal{D}} \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} \dot{} + \frac{2}{3} \langle \Theta \rangle_{\mathcal{D}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = 0. \quad (4e)$$

Equations (4), the averaged counterpart of (2), will also be used in the following to obtain the evolution of the deviation fields in the interior of \mathcal{D} . $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ determines the global contribution of fluid inhomogeneities inside the domain; it is dynamically coupled to the averaged scalar curvature (equation (4e)), and it influences the evolution of the background of the domain (equations (4a,b)). Equation (4e) also shows that the averaged curvature does not individually obey a conservation law like the fluid density; rather a combined expression of intrinsic and extrinsic curvature invariants is conserved. It is important to notice that the background is scale-dependent: for another domain we have in general a different background. There so exists a deep correlation between the background of any domain and the inhomogeneities inside. This feature is habitually absent in the usual cosmological perturbation schemes and, as we are about to see, this will impact in several ways on the dynamics of the deviations.

Finally, it is also convenient for later discussion to introduce two of the scalar invariants of the expansion tensor $\Theta^i_j := \sigma^i_j + \frac{1}{3} \Theta h^i_j$, its trace and the dispersion of its non-diagonal components:

$$\text{I} := \text{tr}(\Theta^i_j) = \Theta, \quad \text{II} := \frac{1}{2} (\text{tr}^2(\Theta^i_j) - \text{tr}(\Theta^i_j \Theta^j_k)) = \frac{1}{3} \Theta^2 - \sigma^2. \quad (5)$$

Both systems (2a,b) and (4a,b) assume the same form with these variables,

$$\dot{\text{I}} + \text{I}^2 = 2\text{II} - 4\pi G \varrho + \Lambda, \quad \text{II} = 8\pi G \varrho - \frac{\mathcal{R}}{2} + \Lambda, \quad (6a)$$

$$\langle \text{I} \rangle_{\mathcal{D}} \dot{} + \langle \text{I} \rangle_{\mathcal{D}}^2 = 2 \langle \text{II} \rangle_{\mathcal{D}} - 4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} + \Lambda, \quad \langle \text{II} \rangle_{\mathcal{D}} = 8\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}}{2} + \Lambda, \quad (6b)$$

and so do equations (2d) and (4e),

$$\dot{\mathcal{R}} + \frac{2}{3} \text{I} \mathcal{R} + \left(2\text{II} - \frac{2}{3} \text{I}^2 \right) \dot{} + 2\text{I} \left(2\text{II} - \frac{2}{3} \text{I}^2 \right) = 0, \quad (6c)$$

$$\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} \dot{} + \frac{2}{3} \langle \text{I} \rangle_{\mathcal{D}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} + \left(2 \langle \text{II} \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{2}{3} \langle \text{I} \rangle_{\mathcal{D}}^2 \right) \dot{} + 2 \langle \text{I} \rangle_{\mathcal{D}} \left(2 \langle \text{II} \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{2}{3} \langle \text{I} \rangle_{\mathcal{D}}^2 \right) = 0, \quad (6d)$$

where we have reformulated the kinematical backreaction as $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = 2 \langle \text{II} \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{2}{3} \langle \text{I} \rangle_{\mathcal{D}}^2$. This statement obviously holds true for the local and averaged continuity equations.

2.2. Equations for the deviation fields

We now provide the basic equations for the deviation fields off the background of a general comoving compact domain. As is customary, we shall designate the deviation (or peculiar) field of any scalar field ψ from its background value by $\delta\psi := \psi - \langle \psi \rangle_{\mathcal{D}}$. In this paragraph we only add a few remarks about each equation; a thorough discussion follows in section 3.

2.2.1. Deviations in density Using the local and averaged conservation laws (2c) and (4d), we find the following continuity equation for the fluid density deviations, which we formulate in the form of a first proposition.

Proposition 1a: The evolution equation for the density deviations on a compact domain \mathcal{D} is given by:

$$(\delta\rho)^\cdot + \langle\Theta\rangle_{\mathcal{D}} \delta\rho = -\delta\Theta (\langle\rho\rangle_{\mathcal{D}} + \delta\rho) , \quad (7a)$$

or, equivalently, in terms of scalar invariants:

$$(\delta\rho)^\cdot + \langle\mathbf{I}\rangle_{\mathcal{D}} \delta\rho = -\delta\mathbf{I} (\langle\rho\rangle_{\mathcal{D}} + \delta\rho) . \quad (7b)$$

Remarks: The density deviation field does not obey a conservation law like the local and averaged densities. We are faced with a source term involving the deviation of the expansion rate from its background value. By making use of the commutation rule, the average on \mathcal{D} of the equations of this first proposition results in identities.

For later discussion we shall prefer to use an alternative form of this proposition. Consider to this end the scale-dependent contrast density $\Delta_{\mathcal{D}} := \delta\rho/\rho$ ($-\infty < \Delta_{\mathcal{D}} < 1$), which is more adapted to the Lagrangian picture and the nonlinear situation than the conventional definition, that we restrict to the same domain, $\delta_{\mathcal{D}} := \delta\rho/\langle\rho\rangle_{\mathcal{D}}$ used in Eulerian perturbation theory [2,3]. By means of the local and averaged Raychaudhuri equations (2a) and (4a), we end up with the following evolution equations for $\Delta_{\mathcal{D}}$.

Proposition 1b: The evolution equations for the contrast density on a compact domain \mathcal{D} are written:

$$\dot{\Delta}_{\mathcal{D}} = \delta\Theta (\Delta_{\mathcal{D}} - 1) , \quad (7c)$$

$$\ddot{\Delta}_{\mathcal{D}} + \frac{2}{3} \langle\Theta\rangle_{\mathcal{D}} \dot{\Delta}_{\mathcal{D}} - 4\pi G \langle\rho\rangle_{\mathcal{D}} \Delta_{\mathcal{D}} = \delta\mathcal{Q} (\Delta_{\mathcal{D}} - 1) , \quad (7d)$$

or, equivalently, in terms of scalar invariants:

$$\dot{\Delta}_{\mathcal{D}} = \delta\mathbf{I} (\Delta_{\mathcal{D}} - 1) , \quad (7e)$$

$$\ddot{\Delta}_{\mathcal{D}} + \frac{2}{3} \langle\mathbf{I}\rangle_{\mathcal{D}} \dot{\Delta}_{\mathcal{D}} - 4\pi G \langle\rho\rangle_{\mathcal{D}} \Delta_{\mathcal{D}} = 2 \left(\delta\mathbf{II} - \frac{2}{3} \langle\mathbf{I}\rangle_{\mathcal{D}} \delta\mathbf{I} \right) (\Delta_{\mathcal{D}} - 1) . \quad (7f)$$

Remarks: We here have introduced the local contribution of fluid inhomogeneities within the domain, $\mathcal{Q} := \frac{2}{3}(\Theta - \langle\Theta\rangle_{\mathcal{D}})^2 - 2\sigma^2 = 2\mathbf{II} - \frac{2}{3} \langle\mathbf{I}\rangle_{\mathcal{D}} (2\mathbf{I} - \langle\mathbf{I}\rangle_{\mathcal{D}})$. By construction $\langle\mathcal{Q}\rangle_{\mathcal{D}} = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$, and $\delta\mathcal{Q}$ stands for the deviation of the kinematical backreaction. Taking the averages of these relations and using the definition of $\Delta_{\mathcal{D}}$ and the commutation rule, we get identities, as it should be for a proper definition of deviation fields.

2.2.2. Deviations in kinematical variables Using the local and averaged systems (2a,b) and (4a,b), we find the following equations for the kinematical deviations, that we also write in the form of a proposition.

Proposition 2: The evolution and constraint equations for the kinematical deviations on a compact domain \mathcal{D} read:

$$(\delta\Theta)\cdot + (\delta\Theta)^2 + \frac{2}{3}\langle\Theta\rangle_{\mathcal{D}}\delta\Theta = -4\pi G\delta\varrho + \delta\mathcal{Q}, \quad (7g)$$

$$\frac{2}{3}\langle\Theta\rangle_{\mathcal{D}}\delta\Theta = 8\pi G\delta\varrho - \frac{1}{2}\delta\mathcal{R} - \frac{1}{2}\delta\mathcal{Q}, \quad (7h)$$

or, equivalently, in terms of scalar invariants:

$$(\delta\text{I})\cdot + (\delta\text{I})^2 + 2\langle\text{I}\rangle_{\mathcal{D}}\delta\text{I} = 2\delta\text{II} - 4\pi G\delta\varrho, \quad (7i)$$

$$\delta\text{II} = 8\pi G\delta\varrho - \frac{1}{2}\delta\mathcal{R}. \quad (7j)$$

Remarks: Contrary to the relation (7j), the shape of (7i) is not identical to that of the first relations in (6a) and (6b). The nonlinear character of the latter indeed makes appear the extra term $2\langle\text{I}\rangle_{\mathcal{D}}\delta\text{I}$. Taking the averages of these expressions, and using the commutation rule for the first one, we end up with identities.

2.2.3. Integrability condition for the kinematical deviations Finally, demanding equation (7h) to be an integral of (7g), we get the integrability condition for the kinematical deviations, which we formulate in the form of a last proposition.

Proposition 3: The integrability condition for the kinematical deviations on a compact domain \mathcal{D} reads:

$$(\delta\mathcal{R})\cdot + \frac{2}{3}\langle\Theta\rangle_{\mathcal{D}}\delta\mathcal{R} + (\delta\mathcal{Q})\cdot + 2\langle\Theta\rangle_{\mathcal{D}}\delta\mathcal{Q} = -\delta\Theta\left(\frac{2}{3}\langle\mathcal{R}\rangle_{\mathcal{D}} + 2\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \delta\mathcal{R} + \delta\mathcal{Q}\right), \quad (7k)$$

or, equivalently, in terms of scalar invariants:

$$(\delta\mathcal{R})\cdot + \langle\text{I}\rangle_{\mathcal{D}}\delta\mathcal{R} + 2(\delta\text{II})\cdot + 2\langle\text{I}\rangle_{\mathcal{D}}\delta\text{II} = -16\pi G\delta\text{I}(\langle\varrho\rangle_{\mathcal{D}} + \delta\varrho). \quad (7l)$$

Remarks: Here again a source term involving the deviation of the expansion rate is present in the equation; in terms of scalar invariants, this term is the same as that of proposition 1a. The average of the equations of this proposition also results in identities.

The cosmological constant does not explicitly appear in the dynamics of the deviation fields, as it is the case in the standard perturbation scheme.

3. Properties of the deviation scheme

3.1. Discussion

We have generalized the usual dust perturbation scheme off a predefined background to deviations off a general background, that was obtained through the spatial average of inhomogeneous fields on a generic domain. The background of a pressureless self-gravitating system is then not restricted to follow a predefined evolution, but rather an evolution depending on the inhomogeneous distribution of matter and geometry. As we shall see further below, deviations off FLRW backgrounds are recovered for globally isotropic domains having a vanishing kinematical backreaction; they constitute a subclass of solutions within the present framework. Here, we prefer to speak in terms of deviations rather than perturbations, since by construction our scheme is non-perturbative (no approximation or linearization have been performed). A consequence of this property, and accordingly a second interesting feature of our approach, is that we do not get any constraint on the strength of deviations, apart from the requirement of regularity of the solutions.

It is also worth noting that our scheme is metric-independent, and all the equations outlined above would keep the same form for any spatial metric. The role of the three-metric was indeed entirely implicit for the derivation of our scheme: we did not need to compute an averaged metric from the local one in order to eventually obtain the dynamics of the deviation fields off a general background. This is a nice feature, and one can choose any spatial metric and end up with a solution. We recognize that the disadvantage is to be able to deal only with the scalar modes of the deviations, and not the vectorial and tensorial ones. However, we think that the results expounded here clearly constitute a first useful step for an understanding of cosmological deviations off a general background.

The generalization we have proposed shows that the kinematical backreaction, which encodes the global contribution of fluid inhomogeneities within a spatial domain, impacts in several ways on the dynamics of the deviations. Not only $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ affects the evolution of deviations through that of the background, as it is implied by the coefficients like $\langle \Theta \rangle_{\mathcal{D}}$ in the left-hand side of equations (7b,e,f), but it also acts as a source through the peculiar backreaction $\delta \mathcal{Q}$ (right-hand side of (7b,e,f)). Comparing the evolution of averaged inhomogeneous cosmologies to that of scale-dependent FLRW models, it appears natural that the extra term involved in the evolution of density deviations off a general background is precisely the kinematical backreaction (see subsection 3.4). One also may recall that another difference between a general domain and a FLRW domain is the fact that the spatial curvature of the former is not a constant-curvature model. The different evolution histories of the background curvature influence the dynamics of the background, which modifies in turn the evolution of the deviation fields—again in comparison to that of a FLRW background. In addition, inhomogeneities in geometry also act as a source in the evolution equations (the term $\delta \mathcal{R}$ in equation (7h)).

3.2. Steps toward an exact resolution

Let us first consider the systems for the local variables, the averaged variables, and the deviation variables individually.

- The local system (2) needs one additional relation to be solved, since we deal with three independent expressions for four variables (ϱ , Θ , σ and \mathcal{R}). The hierarchy would continue with the evolution equation for the shear, but it will never be closed on the level of ordinary differential equations (see [7] and also [26]);
- The averaged system (4) also requires a last relation (one on the averaged variables) since in this situation we also have three independent expressions for four variables ($\langle\varrho\rangle_{\mathcal{D}}$, $\langle\Theta\rangle_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ and $\langle\mathcal{R}\rangle_{\mathcal{D}}$) (see *ibid.*);
- Finally, the deviation field system (7) calls for three additional relations, since we have three independent equations for now six variables ($\delta\varrho$, $\langle\varrho\rangle_{\mathcal{D}}$, $\delta\Theta$, $\langle\Theta\rangle_{\mathcal{D}}$, $\delta\mathcal{Q}$ and $\delta\mathcal{R}$).

However, the two last systems are obviously related to the first one. Given any closure relation for the local system, we can solve all sets of equations and eventually obtain an exact solution for the deviation scheme. One can think of choosing a specific form for the spatial metric (see appendix A, where we have chosen the LTB metric), or of giving a constraint on kinematical or geometrical variables (e.g. considering a ‘silent universe model’—see [30] for deviations off a FLRW background). If we instead provide a constraint on the averaged variables on a chosen scale, we cannot end up with a solution for the deviation scheme; nevertheless, by doing so we reduce the needed number of relations to one in order to exactly resolve it, since there will remain four variables ($\delta\varrho$, $\delta\Theta$, $\delta\mathcal{Q}$ and $\delta\mathcal{R}$) for the three-equations system (7). The second approach to get a solution may then be realized by reducing the space of possible backgrounds, e.g. with scaling laws [10, 42], or particular effective state equations [15, 41] for the backreaction terms, or multiscale partitionings combined with closure assumptions, e.g. [50, 51], and then by considering the resulting equations for the deviation fields. Although being straightforward to get working models of structure formation, this latter approach shall always call for physical verification of the closure relations used.

3.3. Definition of a global physical background and deviations thereof

We dedicate this subsection to the reformulation of the deviation field system (7) with the help of a spatial metric comoving with the global physical background, that we shall define in the ensuing paragraph¶.

¶ The formalism propounded hereafter may as well be viewed as a reformulation of our scheme for spatial coordinates rescaled by the scale factor of the global background. Although reminiscent of the standard procedure of introducing ‘comoving coordinates’, we shall not pursue this possibility since our approach is coordinate-invariant in the hypersurfaces, and such coordinate changes would add no physical insight here. Comoving coordinates make sense if a global coordinate system, e.g., on a constant-curvature domain, can be introduced. In general this is not possible, and a conformal transformation of local coordinates seems unnecessary (it may be of technical help in calculations).

3.3.1. The global physical background in cosmology We have discussed thus far the evolution and constraint equations for the deviation fields off a general physical background, obtained from the spatial averaging procedure. Let us now consider a compact spatial domain of the universe—we shall call it Σ —that we may assume to cover the homogeneity scale, namely that spatial scale beyond which all averages do no longer depend on scale. Such an assumption, common to cosmology, is not necessary, but it enables us to define a scale over which we think the universe is representative (any larger scale would not provide new insights) and to have a more transparent frame of comparison with the standard cosmological model and its usual perturbation schemes. We emphasize, again, that the following reformulation does not rely on the existence of a homogeneity scale, and it may equivalently be employed to describe globally inhomogeneous models, in which case Σ would cover the whole manifold, e.g. a spherical space without boundary (see [9] for the average properties of such universe models).

We shall identify the scale of homogeneity as the one where the global physical background is defined (in practice such a scale would correspond to statistical homogeneity—see [47] for an examination of the subject; the idea realized here corresponds to the ABS (“Average Background Solution”) discussed by Kolb and collaborators [28, 29]). All averages indexed by Σ shall then refer to ‘global’ averages that define our background.

3.3.2. A globally volume-preserving metric Let us introduce, on Σ , the conformally rescaled Riemannian three-metric $\tilde{\mathbf{h}}$ as

$$h_{ij} := a_\Sigma^2 \tilde{h}_{ij}, \quad h^{ij} := a_\Sigma^{-2} \tilde{h}^{ij}, \quad h^i_j = \tilde{h}^i_j = \delta^i_j, \quad (8a)$$

where a_Σ is the dimensionless effective scale factor of the global domain Σ , defined as, and satisfying:

$$a_\Sigma := \left(\frac{V_\Sigma}{V_{\Sigma_i}} \right)^{1/3}, \quad 3 \frac{\dot{a}_\Sigma}{a_\Sigma} = \frac{\dot{V}_\Sigma}{V_\Sigma} = \langle \Theta \rangle_\Sigma, \quad (8b)$$

with Σ_i the domain at initial time. The definition (8a) guarantees that the metric $\tilde{\mathbf{h}}$ conserves the volume of the domain Σ : $\tilde{V}_\Sigma := \int_\Sigma (\det \tilde{h}_{ij})^{1/2} d^3X = a_\Sigma^{-3} V_\Sigma$. We may say that $\tilde{\mathbf{h}}$ stands for the spatial metric “comoving” with the global background. Remark that, the conformal three-metric being inhomogeneous, we still have local variations of volume elements in $\tilde{\mathbf{h}}$.

We now propose to construct, in this metric, all the scalar fields we shall need for the reformulation of our scheme. Upon defining the corresponding expansion tensor as

$$\tilde{\Theta}^i_j := \frac{1}{2} \tilde{h}^{ik} \dot{\tilde{h}}_{kj}, \quad (9a)$$

we are able to write, with the help of equations (8):

$$\tilde{\Theta}^i_j = \Theta^i_j - \frac{1}{3} \langle \Theta \rangle_\Sigma h^i_j = \sigma^i_j + \frac{1}{3} (\Theta - \langle \Theta \rangle_\Sigma) h^i_j. \quad (9b)$$

The trace of this equality and the average of the resulting expression respectively yield:

$$\tilde{\Theta} = \Theta - \langle \Theta \rangle_\Sigma = \delta\Theta, \quad \langle \tilde{\Theta} \rangle_\Sigma = 0. \quad (9c)$$

The first relation reveals that $\tilde{\Theta}$ pinpoints the deviation of the local expansion rate from the \mathbf{h} -background expansion rate of the global domain, and it thus defines the peculiar expansion rate of the latter. These expressions are consistent with the stationarity of the $\tilde{\mathbf{h}}$ -background of Σ , $\langle \tilde{\Theta} \rangle_\Sigma = 0$, and with the existence, in general, of local variations of volume elements evaluated with $\tilde{\mathbf{h}}$, $\tilde{\Theta} \neq 0$ ($\tilde{\Theta}$ vanishes only if the global domain is homogeneous).

By means of equation (9b), we define the ‘tilde’ shear tensor of the fluid as $\tilde{\sigma}^i_j := \sigma^i_j$ and end up with $\tilde{\sigma} = \sigma$. Concerning the spatial curvature of the global domain, a straightforward calculation, calling for the use of equation (8a), results in $\tilde{\mathcal{R}} = a_\Sigma^2 \mathcal{R}$. Finally, the tilde energy density $\tilde{\varrho}$ is obtained by considering the fluid conservation law

$$\dot{\tilde{\varrho}} + \tilde{\Theta} \tilde{\varrho} = 0, \quad (9d)$$

which is simply the counterpart of (2c) in the spatial geometry generated from the conformally rescaled metric. Writing

$$\tilde{\Theta} = \Theta - \langle \Theta \rangle_\Sigma = -\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} + \frac{\langle \dot{\varrho} \rangle_\Sigma}{\langle \varrho \rangle_\Sigma} = -\left(\frac{\varrho}{\langle \varrho \rangle_\Sigma} \right) \cdot \frac{\langle \dot{\varrho} \rangle_\Sigma}{\varrho}, \quad (9e)$$

we get:

$$\tilde{\varrho} := \frac{\varrho}{\langle \varrho \rangle_\Sigma}, \quad \langle \tilde{\varrho} \rangle_\Sigma = 1. \quad (9f)$$

The last relation is naturally expected since, the total rest mass within the global domain being conserved, the matter tilde density has to remain globally constant (here normalized) in the frozen volume \tilde{V}_Σ . (Consider the invariant total rest mass $\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}} = \tilde{V}_\Sigma \langle \tilde{\varrho} \rangle_\Sigma$; its conservation implies $\langle \dot{\tilde{\varrho}} \rangle_\Sigma = 0$.) We also remark that σ is the only scalar field we shall use that is not affected by the conformal rescaling. This characteristic is due to the fact that $\tilde{\mathbf{h}}$ is built such to provide a volume-preserving metric and thus only transforms quantities related to the trace part of tensors.

In terms of scalar invariants, we are able to write the following equalities:

$$\text{I} = \langle \text{I} \rangle_\Sigma + \tilde{\text{I}}, \quad \text{II} = \tilde{\text{II}} + \frac{1}{3} \langle \text{I} \rangle_\Sigma^2 + \frac{2}{3} \langle \text{I} \rangle_\Sigma \tilde{\text{I}}, \quad (10a)$$

where we have introduced the scalar invariants of $\tilde{\Theta}^i_j$ as $\tilde{\text{I}} := \text{tr}(\tilde{\Theta}^i_j) = \tilde{\Theta}$ and $\tilde{\text{II}} := \frac{1}{2}(\text{tr}^2(\tilde{\Theta}^i_j) - \text{tr}(\tilde{\Theta}^i_j \tilde{\Theta}^j_k)) = \frac{1}{3} \tilde{\Theta}^2 - \tilde{\sigma}^2$. Averaging over Σ the last relation, and inserting the result back into it, gives⁺

$$\text{II} = \langle \text{II} \rangle_\Sigma + \tilde{\text{II}} - \langle \tilde{\text{II}} \rangle_\Sigma + \frac{2}{3} \langle \text{I} \rangle_\Sigma \tilde{\text{I}}. \quad (10b)$$

⁺ To be rigorous we should write $\lambda \tilde{\psi}_\Sigma$ the average over Σ of any tilde scalar field, with $\lambda \cdot_\Sigma := (1/\tilde{V}_\Sigma) \int_\Sigma \cdot \sqrt{\det \tilde{h}_{ij}} d^3 X$. However, one can easily check that, for any spacetime scalar field, $\lambda \cdot_\Sigma = \langle \cdot \rangle_\Sigma$.

$\tilde{\text{I}} = \delta\text{I}$ represents the deviation field of the first local scalar invariant from its average on the global domain, and $\tilde{\text{II}} - \langle \tilde{\text{II}} \rangle_\Sigma + \frac{2}{3} \langle \text{I} \rangle_\Sigma \tilde{\text{I}} = \delta\text{II}$ is that of the second local scalar invariant. Using those relations, we may also recast the local contribution of fluid inhomogeneities into $\tilde{\mathcal{Q}} = \frac{2}{3} \tilde{\Theta}^2 - 2\tilde{\sigma}^2 = 2\tilde{\text{II}} = \mathcal{Q}$ (hence we have $\tilde{\mathcal{Q}}_\Sigma = \frac{2}{3} \langle \tilde{\Theta}^2 \rangle_\Sigma - 2 \langle \tilde{\sigma}^2 \rangle_\Sigma = 2 \langle \tilde{\text{II}} \rangle_\Sigma = \mathcal{Q}_\Sigma$).

3.3.3. Deviations off a global physical background From the propositions given in section 2 a set of corollaries follows, which determines the evolution and constraint equations for the deviation fields off the global background, as expressed in a globally volume-preserving metric:

Corollary 1: The evolution equations for the contrast density on a global background Σ read:

$$\dot{\tilde{\Delta}}_\Sigma = \tilde{\text{I}}(\tilde{\Delta}_\Sigma - 1), \quad (11a)$$

$$\ddot{\tilde{\Delta}}_\Sigma + \frac{2}{3} \langle \text{I} \rangle_\Sigma \dot{\tilde{\Delta}}_\Sigma - 4\pi G \langle \varrho \rangle_\Sigma \tilde{\Delta}_\Sigma = 2\delta\tilde{\text{II}}(\tilde{\Delta}_\Sigma - 1). \quad (11b)$$

Remarks: We have used the relations $\Delta_\Sigma = \delta\varrho/\varrho = \delta\tilde{\varrho}/\tilde{\varrho} = \tilde{\Delta}_\Sigma$.

Corollary 2: The evolution and constraint equations for the tilde scalar invariants on a global background Σ are written:

$$\dot{\tilde{\text{I}}} + \tilde{\text{I}}^2 + \frac{2}{3} \langle \text{I} \rangle_\Sigma \tilde{\text{I}} = 2\delta\tilde{\text{II}} - 4\pi G \langle \varrho \rangle_\Sigma \delta\tilde{\varrho}, \quad (11c)$$

$$\delta\tilde{\text{II}} + \frac{2}{3} \langle \text{I} \rangle_\Sigma \tilde{\text{I}} = 8\pi G \langle \varrho \rangle_\Sigma \delta\tilde{\varrho} - \frac{1}{2} \frac{\delta\tilde{\mathcal{R}}}{a_\Sigma^2}. \quad (11d)$$

Corollary 3: The integrability condition for the tilde scalar invariants on a global background Σ is given by:

$$\frac{(\delta\tilde{\mathcal{R}})^\cdot}{a_\Sigma^2} + 2(\delta\tilde{\text{II}})^\cdot + 4\langle \text{I} \rangle_\Sigma \delta\tilde{\text{II}} = -\tilde{\text{I}} \left(\frac{2}{3} \frac{\langle \tilde{\mathcal{R}} \rangle_\Sigma}{a_\Sigma^2} + 4\langle \tilde{\text{II}} \rangle_\Sigma + \frac{\delta\tilde{\mathcal{R}}}{a_\Sigma^2} + 2\delta\tilde{\text{II}} \right). \quad (11e)$$

3.4. The limit of a FLRW background

FLRW cosmologies are recovered only if, for any compact region \mathcal{D} lying in the interior of Σ , we ask for the vanishing of $\mathcal{Q}_\mathcal{D}$ (the integrability condition (4e) then imposes \mathcal{R} to be the Friedmannian curvature). In this situation, any scalar field equals its background value; the local and averaged systems (2) and (4) are identical, and there do not exist deviations over Σ . The existence of deviations, and hence the possibility to form structures, then demands the global domain not to remain locally isotropic. In other words, we need to abandon the strong cosmological principle in favor of, for instance, a weaker version that defines a scale of homogeneity (see subsection 3.3). For

our concern, this implies that we shall consider Σ to follow globally, and not locally, a FLRW evolution. Requiring the shear rate to be globally null (global isotropy of the domain) and the kinematical backreaction to solely vanish on Σ , ensures that the background of the latter is globally Friedmannian, but at the same time does not prevent local inhomogeneities to live inside the global domain. In this picture, the cancellation of \mathcal{Q}_Σ would be the result of an exact compensation between the expansion variance and the average of the shear squared*.

Facing such a global domain constrains the averaged system with the conditions $\langle \sigma \rangle_\Sigma = 0^\ddagger$ and $\mathcal{Q}_\Sigma = 2\langle \tilde{\Pi} \rangle_\Sigma = 0$, and it allows us to write the second order differential equation of the contrast density as

$$\ddot{\tilde{\Delta}}_\Sigma + 2\frac{\dot{a}_\Sigma}{a_\Sigma}\dot{\tilde{\Delta}}_\Sigma - 4\pi G \langle \varrho \rangle_\Sigma \tilde{\Delta}_\Sigma = 2\tilde{\Pi}(\tilde{\Delta}_\Sigma - 1), \quad (12a)$$

where a_Σ is the global scale factor satisfying:

$$3\frac{\ddot{a}_\Sigma}{a_\Sigma} = -4\pi G \frac{\langle \varrho \rangle_{\Sigma_i}}{a_\Sigma^3} + \Lambda, \quad 3\left(\frac{\dot{a}_\Sigma}{a_\Sigma}\right)^2 = 8\pi G \frac{\langle \varrho \rangle_{\Sigma_i}}{a_\Sigma^3} - \frac{1}{2}\frac{\langle \mathcal{R} \rangle_{\Sigma_i}}{a_\Sigma^2} + \Lambda. \quad (12b)$$

We recover with (12) the standard framework of density deviations off a FLRW background cosmology [4], which therefore constitutes a subclass of solutions of our deviation scheme. We leave it to the reader to simplify the other deviation field equations using the above conditions.

Let us moreover suppose that the fluid inhomogeneities weakly contribute to the local kinematics of the deviation fields. We can then neglect the quadratic invariant $\tilde{\Pi}$ and end up with:

$$\ddot{\tilde{\Delta}}_\Sigma + 2\frac{\dot{a}_\Sigma}{a_\Sigma}\dot{\tilde{\Delta}}_\Sigma - 4\pi G \langle \varrho \rangle_\Sigma \tilde{\Delta}_\Sigma = 0, \quad (13a)$$

which gives the evolution of the first-order Lagrangian (relativistic) density perturbations off a FLRW background. This equation corresponds to the linearization in $\tilde{\Delta}_\Sigma$ of (11b), and it is solved by the exact relativistic form of Zel'dovich's approximation [25, 52], systematically derived in a forthcoming paper [17].

We finally take advantage of this small-deviation picture to make a digression about the usefulness of the contrast density $\tilde{\Delta}_\Sigma$ over the density contrast $\delta_\Sigma = \tilde{\Delta}_\Sigma/(1 - \tilde{\Delta}_\Sigma)$. Expressing relation (13a) in terms of δ_Σ yields:

$$\begin{aligned} & \ddot{\delta}_\Sigma + 2\frac{\dot{a}_\Sigma}{a_\Sigma}\dot{\delta}_\Sigma - 4\pi G \langle \varrho \rangle_\Sigma \delta_\Sigma \\ & + \delta_\Sigma \left(\ddot{\delta}_\Sigma + 2\frac{\dot{a}_\Sigma}{a_\Sigma}\dot{\delta}_\Sigma - 8\pi G \langle \varrho \rangle_\Sigma \delta_\Sigma - 4\pi G \langle \varrho \rangle_\Sigma \delta_\Sigma^2 \right) - 2\dot{\delta}_\Sigma^2 = 0. \end{aligned} \quad (13b)$$

* This is what happens, for instance, for spatially averaged zero-curvature LTB models (see appendix A), the difference with a FLRW background being the globally non vanishing shear.

‡ We point out that we do *not* have $\langle \sigma^2 \rangle_\Sigma = 0$, since otherwise Σ would be locally Friedmannian ($\mathcal{Q}_\Sigma = 0$ and $\langle \sigma^2 \rangle_\Sigma = 0$ indeed imply $\Theta = \langle \Theta \rangle_\Sigma$).

This illustrates that the solution to the linear equation (13a) for $\tilde{\Delta}_\Sigma$ substantially goes beyond that for δ_Σ , $\ddot{\delta}_\Sigma + 2(\dot{a}_\Sigma/a_\Sigma)\dot{\delta}_\Sigma - 4\pi G \langle \rho \rangle_\Sigma \delta_\Sigma = 0$. Hence, first-order Lagrangian (relativistic) deviations off a FLRW background already involve nonlinearities in the dependent variable δ_Σ , which demonstrates the inherently nonlinear character of a Lagrangian perturbation approach. Remark at last that the density contrast coincides by construction with the density deviations $\delta\tilde{\varrho}$ evaluated in the globally comoving metric; it is simply the relativistic extension of the density deviation field used in the standard Eulerian cosmological perturbation theory [36].

4. Concluding remarks and outlook

We have generalized, in the present paper, the dust scalar perturbation scheme off a predefined background to deviations off a general background. The kinematical backreaction, which determines the global contribution of fluid inhomogeneities within a generic domain, is at the very core of this non-perturbative scheme: it not only influences the dynamics of a general background, as it is well known, but it also explicitly impacts on that of the deviation fields. Our longterm expectation from this improvement is to be able to describe large-scale structure formation uniquely from the existence of inhomogeneities and without the need to invoke a dark energy fundamental component.

Our scheme may be exactly solved either by considering a specific three-metric, or by imposing local dynamical constraints, or by restricting attention to subclasses of backgrounds and then constraining the deviation fields. Another, and we think the most promising, strategy to solve the deviation equations would be to develop an iterative procedure. The reason why an iterative procedure takes better care, compared to a perturbative approach, of the nonlinear character of the proposed scheme is obvious: a perturbation point of view runs into contradiction due to the fact that the background (the zeroth-order solution) is generally modified by the kinematical backreaction (a second-order term). Hence, for situations where the backreaction term does not vanish, the notion of, e.g., first-order deviations off a general background would be ill-defined. An iterative point of view also entails methods that are known to numerical simulations, and we expect that the simplest application of the presented scheme is numerical in nature. A realization of this iterative strategy is the subject of forthcoming work.

Acknowledgements:

XR acknowledges support from École Doctorale de Lyon. We would like to thank Charly Nayet for related discussions, and for valuable remarks on the manuscript. This work is supported by “Fédération de Physique André-Marie Ampère” of Université Lyon 1 and École Normale Supérieure de Lyon.

References

- [1] Alcubierre M: Introduction to 3 + 1 numerical relativity. *Oxford Univ. Press* (2008)

- [2] Buchert T: A class of solutions in Newtonian cosmology and the pancake theory. *Astron. Astrophys.* **223**, 9 (1989)
- [3] Buchert T: Lagrangian theory of gravitational instability of Friedmann–Lemaître cosmologies and the ‘Zel’dovich approximation’. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **254**, 729 (1992)
- [4] Buchert T: Lagrangian perturbation approach to the formation of large-scale structure. *I.O.P. Press Amsterdam*, 543 (1996)
- [5] Buchert T and Ehlers J: Averaging inhomogeneous Newtonian cosmologies. *Astron. Astrophys.* **320**, 1 (1997)
- [6] Buchert T: On average properties of inhomogeneous cosmologies. In: 9th JGRG Meeting, Hiroshima 1999, Y.Eriguchi et al. (eds.), *J.G.R.G.* **9**, 306 (2000)
- [7] Buchert T: On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: dust cosmologies. *Gen. Rel. Grav.* **32**, 105 (2000)
- [8] Buchert T: On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: perfect fluid cosmologies. *Gen. Rel. Grav.* **33**, 1381 (2001)
- [9] Buchert T: On globally static and stationary cosmologies with or without a cosmological constant and the dark energy problem. *Class. Quant. Grav.* **23**, 817 (2006)
- [10] Buchert T, Larena J and Alimi JM: Correspondence between kinematical backreaction and scalar field cosmologies—the ‘morphon field’. *Class. Quant. Grav.* **23**, 6379 (2006)
- [11] Buchert T: The non-perturbative regime of cosmic structure formation. *Astron. Astrophys.* **454**, 415 (2006)
- [12] Buchert T: Dark energy from structure: a status report. *Gen. Rel. Grav.* **40**, 467 (2008)
- [13] Buchert T and Carfora M: On the curvature of the present day universe. *Class. Quant. Grav.* **25**, 195001 (2008)
- [14] Buchert T, Ellis GFR and Van Elst H: Geometrical order-of-magnitude estimates for spatial curvature in realistic models of the universe. *Gen. Rel. Grav.* **41**, 2017 (2009)
- [15] Buchert T and Obadia N: Effective inhomogeneous inflation: curvature inhomogeneities of the Einstein vacuum. *Class. Quant. Grav.* **28**, 162002 (2011)
- [16] Buchert T: Toward physical cosmology: focus on inhomogeneous geometry and its non-perturbative effects. *Class. Quant. Grav.* **28**, 164007 (2011), Focus Section ‘Inhomogeneous cosmological models and averaging in cosmology’
- [17] Buchert T and Ostermann M: Lagrangian theory of structure formation in relativistic cosmology I: Lagrangian framework and definition of a non-perturbative approximation. *in preparation*.
- [18] Buchert T, Nayet C and Wiegand A: Lagrangian theory of structure formation in relativistic cosmology II: a generic evolution model for average characteristics. *in preparation*.
- [19] Clarkson C, Clifton T and February S: Perturbation theory in Lemaître–Tolman–Bondi cosmology. *J.C.A.P.* **06**, 25 (2009)
- [20] Clarkson C and Maartens R: Inhomogeneity and the foundations of concordance cosmology. *Class. Quant. Grav.* **27**, 124008 (2010)
- [21] Ellis GFR: Inhomogeneity effects in cosmology. *Class. Quant. Grav.* **28**, 164001 (2011), Focus Section ‘Inhomogeneous cosmological models and averaging in cosmology’
- [22] Enqvist K: Lemaître–Tolman–Bondi model and accelerating expansion. *Gen. Rel. Grav.* **40**, 451 (2008)
- [23] Giesel K, Hofmann S, Thiemann T and Winkler O: Manifestly gauge-invariant general relativistic perturbation theory: I. Foundations. *Class. Quant. Grav.* **27**, 055005 (2010)
- [24]ourgoulhon E: 3 + 1 formalism and bases of numerical relativity. arXiv:gr-qc/0703035 (2007)
- [25] Kasai M: Tetrad-based perturbative approach to inhomogeneous universes: a general relativistic version of the Zel’dovich approximation. *Phys. Rev. D* **52**, 5605 (1995)
- [26] Kofman L and Pogosyan D: Equations of gravitational instability are non-local. *Ap. J.* **442**, 30 (1995)
- [27] Kolb EW, Marra V and Matarrese S: Description of our cosmological spacetime as a perturbed conformal Newtonian metric and implications for the backreaction proposal for the accelerating

- universe. *Phys. Rev. D* **78**, 103002 (2008)
- [28] Kolb EW, Marra V and Matarrese S: Cosmological background solutions and cosmological backreactions. *Gen. Rel. Grav.* **42** 1399 (2010)
- [29] Kolb EW: Backreaction of inhomogeneities can mimic dark energy. *Class. Quant. Grav.* **28**, 164009 (2011), Focus Section ‘Inhomogeneous cosmological models and averaging in cosmology’
- [30] Matarrese S, Pantano O and Saez D: General relativistic dynamics of irrotational dust: cosmological implications. *Phys. Rev. Letter* **72**, 320 (1994)
- [31] Matarrese S and Mohayaee R: The growth of structure in the intergalactic medium. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **329**, 37 (2002)
- [32] Matsumoto J: On the necessity of the revisions for the cosmological matter perturbations from the general relativity. *Phys. Rev. D* **83**, 124040 (2011)
- [33] Miedema PG: Cosmological perturbation theory and the evolution of small-scale inhomogeneities. arXiv:1106.0627 (2011)
- [34] Morita M, Nakamura K and Kasai M: Relativistic Zel’dovich approximation in spherically symmetric model. *Phys. Rev. D* **57**, 6094 (1998)
- [35] Mukhanov VF, Abramo LRW and Brandenberger RH: Backreaction problem for cosmological perturbations. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1624 (1997)
- [36] Peebles PJE: The large scale structure of the universe. *Princeton Univ. Press* (1980)
- [37] Räsänen S: Dark energy from backreaction. *J.C.A.P.* **02**, 003 (2004)
- [38] Räsänen S: Accelerated expansion from structure formation. *J.C.A.P.* **11**, 003 (2006)
- [39] Räsänen S: Applicability of the linearly perturbed FRW metric and Newtonian cosmology. *Phys. Rev. D* **81**, 103512 (2010)
- [40] Räsänen S: Backreaction: directions of progress. *Class. Quant. Grav.* **28**, 164008 (2011), Focus Section ‘Inhomogeneous cosmological models and averaging in cosmology’
- [41] Roy X and Buchert T: Chaplygin gas and effective description of inhomogeneous universe models in general relativity. *Class. Quant. Grav.* **27**, 175013 (2010)
- [42] Roy X, Buchert T, Carloni S and Obadia N: Global gravitational instability of FLRW backgrounds—interpreting the dark sectors. *Class. Quant. Grav.* **28**, 165004 (2011)
- [43] Russ H, Morita M, Kasai M and Böerner G: The Zel’dovich-type approximation for an inhomogeneous universe in general relativity: second-order solutions. *Phys. Rev. D* **53**, 6881 (1996)
- [44] Russ H, Soffel MH, Kasai M and Böerner G: Age of the universe: influence of the inhomogeneities on the global expansion-factor. *Phys. Rev. D* **56**, 2044 (1997)
- [45] Smarr L and York JW: Kinematical conditions in the construction of spacetime. *Phys. Rev. D* **17**, 2529 (1978)
- [46] Sussman RA: A comprehensive study of back-reaction and effective acceleration in generic LTB dust models. *To be published in Class. Quant. Grav.*, arXiv:1102.2663 (2011)
- [47] Sylos Labini F: Inhomogeneities in the universe. *Class. Quant. Grav.* **28**, 164003 (2011), Focus Section ‘Inhomogeneous cosmological models and averaging in cosmology’
- [48] Tatekawa T, Suda M, Maeda K and Kubotani H: Inhomogeneities in Newtonian cosmology and its backreaction to the evolution of the universe. arXiv:astro-ph/0109501 (2001)
- [49] Tatekawa T, Suda M, Maeda K, Morita M and Anzai H: Perturbation theory in Lagrangian hydrodynamics for a cosmological fluid with velocity dispersion. *Phys. Rev. D* **66**, 064014 (2002)
- [50] Wiegand A and Buchert T: Multiscale cosmology and structure-emerging dark energy: a plausibility analysis. *Phys. Rev. D.* **82**, 023523 (2010).
- [51] Wiltshire DL: What is dust? – Physical foundations of the averaging problem in cosmology. *Class. Quant. Grav.* **28**, 164006 (2011), Focus Section ‘Inhomogeneous cosmological models and averaging in cosmology’
- [52] Zeldovich YB: Gravitational instability: an approximate theory for large density perturbations. *Astron. Astrophys.* **5**, 84 (1970)

[53] Zhao X and Mathews GJ: Effects of structure formation on the expansion rate of the universe: an estimate from numerical simulations. *Phys. Rev. D* **83**, 023524 (2011)

A. Deviations from generic averaged LTB cosmologies

Let us apply, in this appendix, our deviation scheme to a simply connected comoving LTB region \mathcal{D} lying within some global domain Σ . We shall assume that the reader is familiar with the local LTB geometry. Specifying the metrical properties explicitly still permits us to account for a large variety of models (we may think of, for instance, LTB bubbles living inside a global FLRW background), the only requirement being that, when determining the averages over Σ , the limit $\Sigma \rightarrow \mathcal{D}$ shall give the results presented below.

A.1. Local and averaged equations

The LTB solutions generalize the FLRW solutions for dust: their metric not only depends on the time coordinate as in FLRW models, but also on the radial coordinate. The spherical domain can be seen as a superposition of infinitesimally thick homogeneous shells governed by their own dynamics. (A comprehensive study of LTB solutions in relation to the backreaction formalism is provided by Sussman [46]; we here employ results on the averaged LTB solution obtained first in [18].) In a comoving synchronous setting (see e.g. [22] for a demonstration but with different notations) the line element within the region \mathcal{D} has the form:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R'^2(t, r)}{1 + 2E(r)} dr^2 + R^2(t, r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (\text{A.1a})$$

E being a free intrinsic spatial curvature function of r satisfying $E(r) > 1/2$; the prime denotes partial differentiation with respect to r . In this metric, the scalar parts of Einstein field equations are usually given by

$$4\pi\varrho(t, r) = \frac{M'(r)}{R'(t, r)R^2(t, r)}, \quad (\text{A.1b})$$

$$E(r) = \frac{1}{2}\dot{R}^2(t, r) - \frac{GM(r)}{R(t, r)}, \quad (\text{A.1c})$$

M being another free function of r related to the radial density profile. We shall prefer to consider, hereafter, a reformulation of Raychaudhuri's equation (A.1b) in terms of the function R only and, on the other hand, a derivative version of (A.1c) which corresponds to the Hamilton constraint:

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}'}{R'} = -4\pi G\varrho, \quad (\text{A.1d})$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + 2\frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} = 8\pi G\varrho - \frac{\mathcal{R}}{2}, \quad (\text{A.1e})$$

where we have used the expressions

$$\mathcal{R} = -4 \frac{\partial_r(ER)}{R^2 R'}, \quad \text{I} = 2 \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{R}'}{R'}, \quad \text{II} = \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + 2 \frac{\dot{R}' \dot{R}}{R' R}, \quad (\text{A.1f})$$

and dropped the time and radial dependences for the sake of clarity.

We list below the expressions for all quantities of interest that involve averages over the LTB region at stake:

- volume of the spherical region:

$$V_{\mathcal{D}} = \frac{4\pi}{3} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r(R^3)}{\sqrt{1+2E}} dr, \quad (\text{A.2a})$$

- averaged scalar invariants:

$$\langle \text{I} \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{4\pi}{V_{\mathcal{D}}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r(\dot{R}R^2)}{\sqrt{1+2E}} dr, \quad \langle \text{II} \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{4\pi}{V_{\mathcal{D}}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r(\dot{R}^2 R)}{\sqrt{1+2E}} dr, \quad (\text{A.2b})$$

- averaged spatial curvature:

$$\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = -\frac{16\pi}{V_{\mathcal{D}}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r(ER)}{\sqrt{1+2E}} dr, \quad (\text{A.2c})$$

- local contribution of fluid inhomogeneities:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = & 2 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + 4 \frac{\dot{R}' \dot{R}}{R' R} \\ & - \frac{8\pi}{3V_{\mathcal{D}}} \left(\int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r(\dot{R}R^2)}{\sqrt{1+2E}} dr \right) \left(4 \frac{\dot{R}}{R} + 2 \frac{\dot{R}'}{R'} - \frac{4\pi}{V_{\mathcal{D}}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r(\dot{R}R^2)}{\sqrt{1+2E}} dr \right), \end{aligned} \quad (\text{A.2d})$$

- global contribution of fluid inhomogeneities:

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = \frac{8\pi}{V_{\mathcal{D}}} \left\{ \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r(\dot{R}^2 R)}{\sqrt{1+2E}} dr - \frac{4\pi}{3V_{\mathcal{D}}} \left(\int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r(\dot{R}R^2)}{\sqrt{1+2E}} dr \right)^2 \right\}, \quad (\text{A.2e})$$

with $r_{\mathcal{D}}$ the radius of the spherical region. The averaged Raychaudhuri equation and the averaged Hamilton constraint in general read:

$$3 \frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = -4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} + \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}, \quad (\text{A.3a})$$

$$3 \left(\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \right)^2 = 8\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}}{2} - \frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}}{2}, \quad (\text{A.3b})$$

and can be here cast into the alternative form:

$$\frac{4\pi}{V_{\mathcal{D}}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r(\ddot{R}R^2)}{\sqrt{1+2E}} dr = -4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}}, \quad (\text{A.3c})$$

$$\frac{4\pi}{V_{\mathcal{D}}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r(\dot{R}^2 R)}{\sqrt{1+2E}} dr = 8\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}}{2}. \quad (\text{A.3d})$$

A.2. Deviation field equations

A.2.1. *General formulation* The system of deviation field equations directly follows from the previous relations:

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{R}'}{R'} - \frac{4\pi}{V_{\mathcal{D}}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r(\ddot{R}R^2)}{\sqrt{1+2E}} dr = -4\pi G\delta\varrho, \quad (\text{A.4a})$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + 2\frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} - \frac{4\pi}{V_{\mathcal{D}}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r(\dot{R}^2R)}{\sqrt{1+2E}} dr = 8\pi G\delta\varrho - \frac{\delta\mathcal{R}}{2}, \quad (\text{A.4b})$$

where the dust source term on the right-hand sides may also be formulated as

$$\delta\varrho = \varrho - \langle\varrho\rangle_{\mathcal{D}} = \frac{M'}{S_{\mathcal{D}}R'} - \frac{\mathcal{M}}{V_{\mathcal{D}}}, \quad (\text{A.4c})$$

\mathcal{M} being the conserved total rest mass within the LTB region,

$$\mathcal{M} = \int_{\mathcal{D}} \varrho \sqrt{\det h_{ij}} d^3X = \int_{\mathcal{D}} \frac{M'}{\sqrt{1+2E}} dr = \text{const.}, \quad (\text{A.4d})$$

and $S_{\mathcal{D}}(t, r) = 4\pi R^2(t, r)$ the surface of the two-sphere of radius r .

The system (A.4) determines the dynamics of the deviation fields from generic LTB backgrounds.

A.2.2. *A special subcase* For LTB regions having a constant E , the model simplifies as follows:

- volume of the spherical region:

$$V_{\mathcal{D}} = \frac{4\pi}{3} \frac{R|_{r_{\mathcal{D}}}^3}{\sqrt{1+2E}}, \quad (\text{A.5a})$$

- averaged scalar invariants:

$$\langle\text{I}\rangle_{\mathcal{D}} = 3\frac{\dot{R}}{R}\Big|_{r_{\mathcal{D}}}, \quad \langle\text{II}\rangle_{\mathcal{D}} = 3\left(\frac{\dot{R}}{R}\Big|_{r_{\mathcal{D}}}\right)^2, \quad \langle\text{I}\rangle_{\mathcal{D}}^2 = 3\langle\text{II}\rangle_{\mathcal{D}}, \quad (\text{A.5b})$$

- local and averaged spatial curvatures:

$$\mathcal{R} = -\frac{4E}{R^2}, \quad \langle\mathcal{R}\rangle_{\mathcal{D}} = -\frac{12E}{R|_{r_{\mathcal{D}}}^2}, \quad (\text{A.5c})$$

- local and global contributions of fluid inhomogeneities:

$$\mathcal{Q} = 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + 4\frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} - 2\frac{\dot{R}}{R}\Big|_{r_{\mathcal{D}}} \left(4\frac{\dot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}'}{R'} - 3\frac{\dot{R}}{R}\Big|_{r_{\mathcal{D}}}\right), \quad \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = 0, \quad (\text{A.5d})$$

- total rest mass:

$$\mathcal{M} = \frac{M}{\sqrt{1+2E}}, \quad (\text{A.5e})$$

where the symbol $|_{r_{\mathcal{D}}}$ refers to the value of any function taken at the edge of the spherical region. In this situation the local contribution of fluid inhomogeneities vanishes on the edge of the two-sphere, $Q(t, r_{\mathcal{D}}) = 0$. The evolution equations for the deviation fields accordingly reduce to the simpler form:

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{R}'}{R'} - 3\frac{\ddot{R}}{R}\Big|_{r_{\mathcal{D}}} = -4\pi G\delta\varrho, \quad (\text{A.5f})$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + 2\frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} - 3\left(\frac{\dot{R}}{R}\Big|_{r_{\mathcal{D}}}\right)^2 = 8\pi G\delta\varrho - 4E\left(\frac{1}{R^2} - \frac{3}{R|_{r_{\mathcal{D}}}^2}\right). \quad (\text{A.5g})$$

Conclusion et perspectives

La présente thèse s’est attachée à étudier les propriétés moyennes des modèles inhomogènes en cosmologie relativiste.

Dans le chapitre 2, nous avons présenté dans ses grandes lignes le Modèle Cosmologique Standard (MCS), supposé décrire de façon pertinente l’entière évolution de l’univers ainsi que l’histoire de la formation de ses structures. Nous avons souligné ses succès face aux observations, et nous avons noté ses différents manquements, notamment la mise en suspens de l’explication de l’origine des composants sombres. Le problème de la moyenne en cosmologie a ensuite été soulevé, et nous avons proposé d’y répondre formellement en usant du formalisme de Buchert, que nous avons alors détaillé et discuté. Selon cette approche, les inhomogénéités de structure induisent des effets de rétroaction sur l’évolution globale de l’univers, et les constituants manquants du MCS sont alors à interpréter en termes de manifestation effective de ces effets.

Au chapitre 3, nous avons étudié une fermeture particulière du système d’équations ainsi établi : le fluide de rétroaction, issu de la contribution globale des inhomogénéités, a été assimilé à un fluide de Chaplygin, possédant la propriété similaire d’unification de la matière noire et de l’énergie sombre. Ce travail a permis de traduire en termes d’inhomogénéités une équation d’état de Chaplygin pour les composants sombres effectifs.

Au chapitre 4, nous sommes revenus sur une proposition de scénario d’inflation, conduit par les inhomogénéités de la géométrie du vide de matière. Cette étude abandonne ainsi l’idée d’un inflaton fondamental au profit d’un champ scalaire effectif, le morphon, relié aux inhomogénéités du champ gravitationnel. Il a été choisi de modéliser le morphon par un potentiel de Ginzburg–Landau, possédant les propriétés adéquates pour une inflation.

Nous nous sommes ensuite concentrés, au chapitre 5, sur l’analyse des instabilités gravitationnelles globales des espaces-temps FL. Pour illustration, nous avons choisi une relation de fermeture en puissance du facteur d’échelle effectif pour les termes de rétroaction. Notre étude a montré que les inhomogénéités induites par la perturbation d’un système gravitationnel homogène et isotrope contribuent systématiquement à écarter la dynamique de son fond de la classe des solutions FL dépendantes d’échelle. Nous avons alors classé les différents scénarios selon leur stabilité ou leur instabilité. Nous avons ensuite relié les secteurs des composants sombres aux instabilités du système dynamique, et nous avons montré que dans les cas de formation des structures et d’expansion accélérée, les fonds FL sont instables. Pour les cas de stabilité, nous avons expliqué que de tels fonds ne fournissent pas *a priori* une approximation correcte pour la dynamique globale de l’univers.

Chapitre 7. Conclusion et perspectives

Finalement, nous avons construit, au chapitre 6, un nouveau schéma de traitement des perturbations cosmologiques autour d'un fond général, pour un fluide irrotationnel de poussière. Nous avons ainsi généralisé le schéma standard de perturbations scalaires autour d'un fond FL, fixé *a priori*. Cette partie a dressé le cadre théorique nécessaire à une étude quantitative des effets de rétroaction dans la formation des grandes structures. Nous espérons à l'avenir pouvoir expliquer cette dernière sans recourir à l'énergie sombre.

Les travaux exposés dans la présente thèse seront poursuivis en post-doctorat à l'université du Cap, en Afrique du Sud, parmi le 'Cosmology and Gravity Group'.

Nous vérifierons si la structure des inhomogénéités est compatible avec une équation d'état de Chaplygin, en introduisant une métrique effective afin de confronter notre modèle aux observations. Le scénario inflationnaire à un champ sera étendu à un modèle à deux champs : un champ fondamental inhomogène et son champ de rétroaction. Nous construirons ainsi un modèle inflationnaire en nous inspirant des mécanismes de double inflation ou d'inflation hybride. Nous dresserons également les stratégies nécessaires à une résolution itérative du schéma perturbatif introduit ici, et nous proposerons des tests numériques et observationnels. Des confirmations de l'exactitude de notre modèle consoliderait, de façon quantitative, l'idée que l'énergie sombre peut être un champ scalaire effectif, issu des inhomogénéités, et non un champ scalaire fondamental. Ce nouveau traitement des perturbations modifierait aussi l'interprétation de tout résultat observationnel, les perturbations étant vues comme évoluant autour d'un fond ayant une dynamique différente en comparaison au modèle standard.

Le travail suivant consistera en la généralisation théorique de cette approche perturbative pour des fluides avec pression, afin d'inclure par exemple la dispersion de vitesse de la matière. Ceci permettra la modélisation et l'étude de la formation des structures aux petites échelles. Des simulations et tests observationnels pourraient conduire à d'intéressants résultats, notamment l'abandon, au moins partiel, de la matière noire dans ces processus de formation.

Un sous-projet s'inscrit dans la continuité d'un travail de [Larena \[2009\]](#). La procédure de moyennage construite, étant lagrangienne, impose à la quadri-vitesse du fluide de coïncider avec celle de l'observateur. En d'autres termes, la description lagrangienne impose au référentiel d'être comobile avec le fluide. Appliquant cette condition aux systèmes d'équations moyennes, ce qui n'a pas été effectué dans l'article correspondant, des simplifications apparaissent. Un travail sera ainsi d'utiliser ce formalisme pour étudier la dynamique moyenne d'un fluide sans pression, mais avec vorticité. Ceci fournira la contrepartie exacte en relativité générale de l'étude newtonienne de poussière, permettant ainsi des analogies claires.

Le sous-projet suivant sera d'étendre la métrique effective proposée dans [[Larena et al., 2009](#)]. Ce modèle a montré que les cosmologies inhomogènes moyennées peuvent satisfaire les observations. Nous étendrons ce travail en considérant le cas d'une métrique de Lemaître–Tolman–Bondi (LTB) dépendantes du domaine, ce qui pourrait améliorer la

correspondance avec les observations et contraindre les effets de rétroaction.

Un dernier sous-projet concernera les applications physiques du formalisme de moyenne invariant de jauge, récemment proposé par [Gasperini *et al.* \[2011\]](#). Ce travail donne la procédure de moyennage sur le cône de lumière, et dérive ainsi explicitement les expressions de la moyenne du décalage en longueur d'onde et de la distance luminosité. Il fournit un nouveau cadre de confrontation des cosmologies inhomogènes avec les observations. Les résultats de ces travaux pourront être combinés avec les projets évoqués afin de fournir des estimations détaillées des distances cosmologiques dans les cosmologies inhomogènes.

Bibliographie

- Albrecht A. et Steinhardt P. J. (1982). Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220–1223.
- Alcubierre M. *Introduction to 3 + 1 numerical relativity*. Oxford University Press, 2008.
- Amendola L., Finelli F., Burigana C. et Carturan D. (2003). WMAP and the generalized Chaplygin gas. *JCAP* **07**, 005.
- Amendola L. et Palladino E. (1999). The scale of homogeneity in the Las Campanas Redshift Survey. *Astrop. J.* **514**, L1.
- ANTARES Collaboration (2010). The ANTARES collaboration: contributions to the 31st International Cosmic Ray Conference (ICRC 2009), Lodz, Poland, July 2009. [arxiv:1002.0701].
- Arnouitt R., Deser S. et Misner C. W. *The Dynamics of general relativity*. Dans *Gravitation: an introduction to current research*, 227–265. Wiley, New York, 1962.
- Bardeen J. M. (1980). Gauge-invariant cosmological perturbations. *Phys. Rev. D* **22**, 1882–1905.
- Baumgarte T. W. et Shapiro S. L. (1999). Numerical integration of Einstein’s field equations. *Phys. Rev. D* **59**, 024007.
- Bekenstein J. D. (2004). Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm. *Phys. Rev. D* **70**, 083509.
- Bento M. C., Bertolami O. et Sen A. A. (2002). Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy-Matter unification. *Phys. Rev. D* **66**, 043507.
- Bento M. C., Bertolami O. et Sen A. A. (2003a). Generalized Chaplygin gas model: dark energy - dark matter unification and CMBR constraints. *Gen. Rel. Grav.* **35**, 2063–2069.
- Bento M. C., Bertolami O. et Sen A. A. (2003b). WMAP constraints on the generalized Chaplygin gas model. *Phys. Lett. B* **575**, 172–180.
- Bilic N., Tupper G. B. et Viollier R. D. (2002). Unification of dark matter and dark energy: the inhomogeneous Chaplygin gas. *Phys. Lett. B* **535**, 17–21.
- Brans C. et Dicke R. H. (1961). Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.* **124**, 925–935.

Bibliographie

- Brown I. A., Behrend J. et Malik K. A. (2009a). Gauges and cosmological backreaction. *JCAP* **11**, 027.
- Brown I. A., Robbers G. et Behrend J. (2009b). Averaging Robertson–Walker cosmologies. *JCAP* **04**, 016.
- Buchert T. (2000). On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: dust cosmologies. *Gen. Rel. Grav.* **32**, 105–125.
- Buchert T. (2001). On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: perfect fluid cosmologies. *Gen. Rel. Grav.* **33**, 1381–1405.
- Buchert T. (2006). On globally static and stationary cosmologies with or without a cosmological constant and the dark energy problem. *Class. Quantum Grav.* **23**, 817–844.
- Buchert T. (2008). Dark energy from structure — a status report. *Gen. Rel. Grav.* **40**, 467–527.
- Buchert T. (2011). Toward physical cosmology: focus on inhomogeneous geometry and its non-perturbative effects. *Class. Quantum Grav.* **28**, 164007.
- Buchert T., Larena J. et Alimi J. M. (2006). Correspondence between kinematical backreaction and scalar field cosmologies – the ‘morphon field’. *Class. Quantum Grav.* **23**, 6379–6408.
- Buchert T. et Obadia N. (2011). Effective inhomogeneous inflation: curvature inhomogeneities of the Einstein vacuum. *Class. Quantum Grav.* **28**, 162002.
- Buchert T., Obadia N. et Roy X. (2010). Effective inhomogeneous cosmologies and emerging scalar fields. [arXiv:1012.3083].
- Caldwell R. R. (2002). A phantom menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state. *Phys. Lett. B* **545**, 23–29.
- Caldwell R. R., Dave R. et Steinhardt P. J. (1998). Cosmological imprint of an energy component with general equation of state. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582–1585.
- Cartan É. (1923). Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (première partie)p. 1-25. *Annales scientifiques de l’É.N.S* **40**, 325–412.
- Cartan É. (1924). Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (première partie) (Suite). *Annales scientifiques de l’É.N.S* **41**, 1–25.
- CDMS II Collaboration (2010). Dark matter search results from the CDMS II experiment. *Science* **327**, 1619–1621.

- Clarkson C., Ananda K. et Larena J. (2009). Does the growth of structure affect our dynamical models of the universe? *Phys. Rev. D* **80**, 083525.
- Clarkson C., Bassett B. A. et Lu T. Hui-Ching (2008). A general test of the Copernican principle. *Phys. Rev. Lett.* **101**, 011301.
- Clarkson C., Ellis G. F. R., Faltenbacher A., Maartens R., Umeh O. et Uzan J. P. (2011a). (mis-)Interpreting supernovae observations in a lumpy universe. [arxiv:1109.2484].
- Clarkson C., Ellis G. F. R., Larena J. et Umeh O. (2011b). Does the growth of structure affect our dynamical models of the universe? The averaging, backreaction and fitting problems in cosmology. [arxiv:1109.2314].
- Cole S., Percival W. J., Peacock J. A. et al. (2005). The 2dF Galaxy Redshift Survey: power-spectrum analysis of the final dataset and cosmological implications. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **362**, 505–534.
- Colless M., Peterson B. A., Jackson C. et al. (2003). The 2dF Galaxy Redshift Survey: final data release. [arXiv:astro-ph/0306581].
- Copeland E. J., Sami M. et S. Tsujikawa (2006). Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753–1935.
- Cunha J. V., Alcaniz J. S. et Lima J. A. S. (2004). Cosmological constraints on Chaplygin gas dark energy from galaxy clusters x-ray and supernova data. *Phys. Rev. D* **69**, 083501.
- Dirac P. A. M. (1958). The theory of gravitation in Hamiltonian form. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **246**, 333–343.
- Dirac P. A. M. (1959). Fixation of coordinates in the Hamiltonian theory of gravitation. *Phys. Rev.* **114**, 924–930.
- Durrer R. (1994). Gauge invariant cosmological perturbation theory: A general study and its application to the texture scenario of structure formation. *Fund. Cosmic Phys.* **15**, 209–339.
- Durrer R. (2011). What do we really know about dark energy? [arxiv:1103.5331]. *To appear in Phil. Trans. R. Soc. A* .
- Eckart C. (1940). The thermodynamics of irreversible processes: III. Relativistic theory of the simple fluid. *Phys. Rev.* **58**, 919–924.
- EDELWEISS Collaboration (2011). Final results of the EDELWEISS-II WIMP search using a 4-kg array of cryogenic germanium detectors with interleaved electrodes. *Phys. Lett. B* **702**, 329–335.

Bibliographie

- Einstein A. (1916). Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Ann. Phys.* **49**, 769–822.
- Ellis G. F. R. *Relativistic cosmology: its nature, aims and problems*. Dans *General Relativity and Gravitation*, 215–288. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1984.
- Ellis G. F. R. (2011). Inhomogeneity effects in cosmology. *Class. Quantum Grav.* **28**, 164001.
- Ellis G. F. R. et Buchert T. (2005). The universe seen at different scales. *Phys. Lett. A (Einstein Special Issue)* **347**, 38–46.
- Ellis G. F. R., van Elst H., Murugan J. et Uzan J. P. (2011). On the trace-free Einstein equations as a viable alternative to general relativity. [arxiv:1008.1196].
- Feng J. L. (2010). Dark matter candidates from particle physics and methods of detection. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **48**, 495–545.
- Fourès-Bruhat Y. (Choquet-Bruhat Y.) (1948). Sur l’intégration des équations d’Einstein. *C. R. Acad. Sci. Paris* **226**, 1071–1073.
- Fourès-Bruhat Y. (Choquet-Bruhat Y.) (1952). Théorème d’existence pour certains systèmes d’équations aux dérivées partielles non linéaires. *Acta Math.* **88**, 141–225.
- Fourès-Bruhat Y. (Choquet-Bruhat Y.) (1956). Sur l’intégration des équations de la relativité générale. *J. Rat. Mech. Anal.* **5**, 951–966.
- Friedmann A. (1922). Über die Krümmung des Raumes. *Zeits. Phys.* **10**, 377–386.
- Friedmann A. (1924). Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. *Zeits. Phys.* **21**, 326–332.
- Frittelli S. (1997). Note on the propagation of the constraints in standard 3+1 general relativity. *Phys. Rev. D* **55**, 5992–5996.
- Gasperini M., Marozzi G., Nugier F. et Veneziano G. (2011). Light-cone averaging in cosmology: formalism and applications. *JCAP* **07**, 008.
- Gasperini M., Marozzi G. et Veneziano G. (2010). A covariant and gauge invariant formulation of the cosmological “backreaction”. *JCAP* **02**, 009.
- Gorini V., Kamenshchik A. et Moschella U. (2003). Can the Chaplygin gas be a plausible model for dark energy? *Phys. Rev. D* **67**, 063509.
- Gorini V., Kamenshchik A., Moschella U. et Pasquier V. (2004). The Chaplygin gas as a model for dark energy. [arxiv:gr-qc/0403062].

- Gourgoulhon E. (2007). 3 + 1 formalism and bases of numerical relativity. [arxiv:gr-qc/0703035].
- Guth A. H. (1981). Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D* **23**, 347–356.
- Hawking S. W. et Ellis G. F. R. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1973.
- Kamenshchik A., Moschella U. et Pasquier V. (2001). An alternative to quintessence. *Phys. Lett. B* **511**, 265–268.
- Kerr R. P. (1963). Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237–238.
- King A. R. et Ellis G. F. R. (1973). The universe seen at different scales. *Commun. Math. Phys.* **31**, 209–242.
- Kodama H. et Sasaki M. (1984). Cosmological perturbation theory. *Prog. Theor. Phys. Supp* **78**, 1–166.
- Kofman L. et Pogosyan D. (1995). Equations of gravitational instability are non-local. *Astrop. J.* **442**, 30–38.
- Kolb E. W., Matarrese S., Notari A. et Riotto A. (2005). Effect of inhomogeneities on the expansion rate of the universe. *Phys. Rev. D* **71**, 023524.
- Komatsu E., Smith K. M., Dunkley J. et al. (2011). Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation. *Astrophys. J. Suppl.* **192**, 18.
- Labini F. Sylos (2011). Inhomogeneities in the universe. *Class. Quantum Grav.* **28**, 164003.
- Larena J. (2009). Spatially averaged cosmology in an arbitrary coordinate system. *Phys. Rev. D* **79**, 084006.
- Larena J., Alimi J. M., Buchert T., Kunz M. et Corasaniti P. S. (2009). Testing backreaction effects with observations. *Phys. Rev. D* **79**, 083011.
- Lemaître G. (1927). Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles A* **47**, 49–59.
- Lifshitz E. M. (1946). On the gravitational stability of the expanding universe. *J. Phys. (URSS)* **10**, 116.

Bibliographie

- Linde A. D. (1982). A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Phys. Lett. B* **108**, 389–393.
- Linde A. D. (1983). Chaotic inflation. *Phys. Lett. B* **129**, 177–181.
- Linde A. D. (1994). Hybrid inflation. *Phys. Rev. D* **49**, 748–754.
- Madsen M. S. (1988). Scalar fields in curved spacetime. *Class. Quantum Grav.* **5**, 627–639.
- Malgrange B. (1976). Frobenius avec singularités, I. Codimension un. *Pub. Math. IHES* **46**, 163–173.
- Mukhanov V. F., Feldman H. A. et Brandenberger R. H. (1992). Theory of cosmological perturbations. *Phys. Rep.* **215**, 203–333.
- PAMELA Collaboration (2011). PAMELA measurements of cosmic-ray proton and helium spectra. *Science* **332**, 69–72.
- Percival W. J., Nichol R. C., Eisenstein D. J. et al. (2007). The shape of the SDSS DR5 galaxy power spectrum. *Astrop. J.* **657**, 645–663.
- Perelman G. (2002). The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. [arxiv:math/0211159].
- Perelman G. (2003a). Ricci flow with surgery on three-manifolds. [arxiv:math/0303109].
- Perelman G. (2003b). Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. [arxiv:math/0307245].
- Perlmutter S., Aldering G., Goldhaber G. et al. (1999). Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae. *Astrop. J.* **517**, 565–586.
- Räsänen S. (2011). Backreaction: directions of progress. *Class. Quantum Grav.* **28**, 164008.
- Riess A. G., Filippenko A. V., Challis P. et al. (1998). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.* **116**, 1009–1038.
- Riess A. G., Strolger L. G., S.Casertano et al. (2007). New hubble space telescope discoveries of type Ia supernovæ at $z > 1$: Narrowing constraints on the early behavior of dark energy. *Astrop. J.* **659**, 98–121.
- Robertson H. P. (1929). On the foundations of relativistic cosmology. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **15**, 822–829.

- Roy X. et Buchert T. (2010). Chaplygin gas and effective description of inhomogeneous universe models in general relativity. *Class. Quantum Grav.* **27**, 175013.
- Roy X., Buchert T., Carloni S. et Obadia N. (2011). Global gravitational instability of FLRW backgrounds—interpreting the dark sectors. *Class. Quantum Grav.* **28**, 165004.
- Rubin V. C. et Ford W. K. (1970). Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *Astrop. J.* **159**, 379–403.
- Rubin V. C., Thonnard N. et Ford W. K. (1980). Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 ($R = 4$ kpc) to UGC 2885 ($R = 122$ kpc). *Astrop. J.* **238**, 471–487.
- Russ H., Morita M., Kasai M. et Böerner G. (1996). The Zel’dovich-type approximation for an inhomogeneous universe in general relativity: second-order solutions. *Phys. Rev. D* **53**, 6881–6888.
- Russ H., Soffel M. H., Kasai M. et Böerner G. (1997). Age of the universe: influence of the inhomogeneities on the global expansion-factor. *Phys. Rev. D* **56**, 2044–2050.
- Sanchez A.G., Baugh C. M., Percival W. J. et al. (2006). Cosmological parameters from CMB measurements and the final 2dF-GRS power spectrum. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **366**, 189–207.
- Schwarzschild K. (1916). Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein’schen Theorie. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* **7**, 189–196.
- Shibata M. et Nakamura T. (1995). Evolution of three-dimensional gravitational waves: harmonic slicing case. *Phys. Rev. D* **52**, 5428–5444.
- Shirokov M. F. et Fisher I. Z. (1963). Isotropic spaces with discrete gravitational-field sources. On the theory of a nonhomogeneous isotropic universe. *Sov. Astron. J.* **6**, 699–705.
- Sotiriou T. P. et Faraoni V. (2010). $f(R)$ theories of gravity. *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451–497.
- Souriau J. M. *Géométrie et relativité*. Hermann, Paris, 1964.
- Souriau J. M. (1974). Modèle de particule à spin dans le champ électromagnétique et gravitationnel. *Annales de l’I.H.P. A* **20**, 315–364.
- Tatekawa T., Suda M., Maeda K. et Kubotani H. (2001). Inhomogeneities in Newtonian cosmology and its backreaction to the evolution of the universe. [arxiv:astro-ph/0109501].

Bibliographie

- Tatekawa T., Suda M., Maeda K., Morita M. et Anzai H. (2002). Perturbation theory in Lagrangian hydrodynamics for a cosmological fluid with velocity dispersion. *Phys. Rev. D* **66**, 064014.
- Tegmark M., Eisenstein D., Strauss M. et Weinberg D. (2006). Cosmological constraints from the SDSS luminous red galaxies. *Phys. Rev. D* **74**, 123507.
- Thieberger R. et Celerier M. N. (2008). Scaling regimes as obtained from the DR5 Sloan Digital Sky Survey. [arxiv:0802.0464].
- Thurston W. P. (1982). Three dimensional manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.* **6**, 357–381.
- Triay R. (2010). Dark energy: fiction or reality? *AIP Conference Proceedings* **1246**, 105–113.
- Uzan J. P. *Dark energy, gravitation and the Copernican principle*. Dans *Dark Energy: observational and theoretical approaches*, chapitre I. P. Ruiz-Lapuente, Cambridge University Press, 2010.
- Vonlanthen M., Räsänen S. et Durrer R. (2010). Model-independent cosmological constraints from the CMB. *JCAP* **08**, 023.
- Walker A. G. (1936). On Milne’s theory of world-structure. *P. Lond. Math. Soc.* **42**, 90–126.
- Wheeler J. A. *A Journey Into Gravity and Spacetime*. Scientific American Library, San Francisco: W. H. Freeman, 1990.
- Wiegand A. et Buchert T. (2010). Multiscale cosmology and structure-emerging dark energy: a plausibility analysis. *Phys. Rev. D* **82**, 023523.
- Wiltshire D. (2011). What is dust?—Physical foundations of the averaging problem in cosmology. *Class. Quantum Grav.* **28**, 164006.
- XENON100 Collaboration (2011). The XENON100 dark matter experiment. [arxiv:1107.2155].
- Yadav J., Bharadwaj S., Pandey B. et Seshadri T. R. (2005). Testing homogeneity on large scales in the Sloan Digital Sky Survey: Data release one. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **364**, 601–606.
- Zalaletdinov R. M. (1992). Averaging out the Einstein equations. *Gen. Rel. Grav.* **24**, 1015–1031.

Zalaletdinov R. M. (1993). Towards a theory of macroscopic gravity. *Gen. Rel. Grav.* **25**, 673–695.

Zalaletdinov R. M. (1997). Averaging problem in general relativity, macroscopic gravity and using Einstein's equations in cosmology. *Bull. Astron. Soc. India* **25**, 401–416.

Zhao X. et Mathews G. J. (2011). Effects of structure formation on the expansion rate of the universe: an estimate from numerical simulations. *Phys. Rev. D* **83**, 023524.

Zwicky F. (1933). Spectral displacement of extra galactic nebulae. *Helv. Phys. Acta* **6**.