

Sur la stabilité et l'estimation des attracteurs de systèmes complexes fortement nonlinéaires

Amira Gharbi

▶ **To cite this version:**

Amira Gharbi. Sur la stabilité et l'estimation des attracteurs de systèmes complexes fortement nonlinéaires. Autre. Ecole Centrale de Lille; École nationale d'ingénieurs de Tunis (Tunisie), 2013. Français. NNT : 2013ECLI0008 . tel-00864251

HAL Id: tel-00864251

https://theses.hal.science/tel-00864251

Submitted on 20 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 221

ÉCOLE CENTRALE DE LILLE
UNIVERSITÉ DE TUNIS EL MANAR
ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE TUNIS

THÈSE

présentée en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR

en

Automatique, Génie Informatique,

Traitement du Signal et Image

par

Amira GHARBI

Doctorat délivré conjointement par l'École Centrale de Lille et l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis

Sur la stabilité et l'estimation des attracteurs de systèmes complexes fortement nonlinéaires

soutenue le 04juin 2013, devant le Jury d'Examen composé de :

Président	Noureddine ELLOUZE	Professeur, ENIT
Rapporteur	Abdellah EL MOUDNI	Professeur, UTBM
Rapporteur	Safya BELGHITH	Professeur, ENIT
Examinateur	José RAGOT	Professeur, INPL-ENSG
Directeur de Thèse	Mohamed BENREJEB	Professeur, ENIT
Directeur de Thèse	Pierre BORNE	Professeur, EC-Lille

Thèse préparée dans le Laboratoire LAGIS (EC-Lille) et dans le Laboratoire d'Automatique LARA (ENIT)
Ecole Doctorale SPI 072 (Lille I, Lille III, Artois, ULCO, UVHC, EC Lille)
PRES Université Lille Nord-de-France

À la Mémoire de Mon Très Cher Père

Aucun mot ne saurait témoigner de l'étendue des sentiments que j'éprouve à ton égard, Que ton âme trouve l'expression de ma gratitude et de ma grande affection.

À Ma Chère Maman

Aucune dédicace ne saurait exprimer ma reconnaissance, mon grand attachement à toi et mon profond amour pour toi. Que Dieu puisse m'aider à te prouver ma sincère gratitude pour ces nombreuses années de sacrifice. Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour.

À Mon Cher époux

A celui qui a su m'aimer et continuer de le faire. Ses sacrifices, son soutien moral et matériel, sa gentillesse sans égal et son profond attachement m'ont permis de réussir mes études. Sans son aide, ses conseils et ses encouragements, ce travail n'aurait vu le jour. Je lui dédie ce travail en témoignage de mon profond amour, avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.

À Mes deux Anges Razan et Adam

Votre présence a donné à mon âme et mon corps la force d'accomplir ce mémoire. Les mots ne suffisent guère pour exprimer l'attachement, l'amour et l'affection que je vous porte. Je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé, de prospérité et de réussite.

À Ma Ati Saloua

Qui a contribué par ses encouragements à l'accomplissement de cette thèse ; je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour.

À Mes Frères et Sœurs

Pour tous leurs encouragements pour la réalisation de ce travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude et de ma grande affection.

AVANT PROPOS

Cette recherche, que je présente dans ce mémoire, a été achevée conjointement au sein du Laboratoire de Recherche LARA Automatique de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT) et au Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal (LAGIS) de l'Ecole Centrale de Lille (EC-Lille).

Je suis singulièrement honorée du privilège d'avoir Monsieur Noureddine ELLOUZE, Professeur à l'ENIT, en tant que Président de mon Jury de thèse. Je tiens à lui témoigner mon respect et dévouement, tant mérités, pour sa disponibilité et sollicitude.

Devant leur générosité en temps et efforts, les mots ne peuvent être qu'avares pour exprimer mon infinie reconnaissance à mes Directeurs de thèse , Monsieur Mohamed BENREJEB, Professeur à l'ENIT et Directeur du Laboratoire de Recherche Automatique (LARA) et Monsieur Pierre BORNE, Professeur à l'EC-Lille. Leur savoir a éclairé mon chemin et leurs conseils ont guidés mes pas dans cette quête du savoir. Qu'ils reçoivent ici l'expression de mes vifs remerciements et ma profonde gratitude.

Mes vifs remerciements vont, sans dire, à Monsieur Abdellah ELMOUDNI, Professeur du Laboratoire Systèmes et Transport de l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, ainsi qu'à Madame Safya BELGHITH, Professeur à l'ENIT, pour leurs précieuses participations au Jury entant que rapporteurs. Je leur exprime ma grande estime pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger ce travail.

J'apprécie également la disponibilité de Monsieur José RAGOT, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine et Directeur du Laboratoire d'Automatique et de Recherche Appliquée de L'Ecole Nationale Supérieure de Géologie de Nancy, pour sa généreuse disponibilité de rejoindre mon Jury de thèse et évaluer mes travaux.

Je remercie également tous les membres et tous les doctorants des Laboratoires LARA Automatique et LAGIS, qui m'ont accompagnée, tout au long de ces années, pour leur sympathie et la bonne ambiance de travail qui y règne.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE..……14

Chapitre 1:Généralités sur la stabilité des systèmes continus non linéaires

INTRODUCTION……....19

I.1. Description des systèmes dynamiques étudiés……...19
I.1.1. Représentations d'un processus…..……..19
I.1.2. Représentations d'état……...20
I.2. Caractérisation des systèmes étudiés……..22
I.2.1. Introduction…… 22
I.2.2. Différentes formes de matrices caractéristiques des systèmes dynamiques……22
I.2.2.1. Matrice de forme Compagnon/ Frobenius……..22
I.2.2.2. Matrice diagonale……22
I.2.2.3. Matrices de forme en flèche de Benrejeb……23
I.2.2.3.1. Matrice de forme en flèche mince.……...23
I.2.2.3.2. Passage d'une matrice de forme Compagnon à une matrice de forme en flèche mince..……..24
I.2.2.3.2.1.Matrice initiale de forme Compagnon...……24
I.2.2.3.2.2.Matrice initiale de forme quelconque…...…….25
I.3. Méthode proposée pour l'étude de la stabilité des systèmes continus non linéaires……..26
I.3.1.Introduction…….……..26
I.3.2. Présentation des techniques d'agrégation…….....…….…27
I.3.2.1.Introduction……..……...27
I.3.2.2.Normes Vectorielles (NV)..…….27
I.3.2.3.Systèmes majorants.....……..28

I.3.2.4. Systèmes de comparaison.……...30
I.3.2.4.1.Systèmes pseudo-Majorants Homogènes (SMH).……....30
I.3.2.4.2.Systèmes pseudo-Majorants Non Homogènes (SMNH).…….31
I.4. Stabilité des systèmes continus non linéaires…….32
I.4.1.Notion de point d'équilibre stable……...……32
I.4.2. Attractivité.…….……..32
I.4.2.1. Attractivité d'une solution et domaine associé…..……...32
I.4.2.2. Attractivité d'un ensemble et domaines associés……34
I.4.3. Stabilité au sens de Lyapunov.…….36
I.4.3.1. Stabilité d'une solution et domaine associé (au sens de Lyapunov)..…....36
I.4.3.2.Stabilité d'un ensemble et domaine associé (au sens de Lyapunov)……...37
I.4.4. Stabilité asymptotique……..39
I.4.5. Stabilité exponentielle…….……....39
I.4.6. Stabilité pratique…….....39
I.4.7. Conditions de stabilité des systèmes décrits dans l'espace d'état……...40
I.4.7.1. Norme du max…….……40
I.4.7.2. Norme duale du max…...……41
I.5. Détermination des attracteurs- Position du problème ……42
I.5.1. Objectif ……..…….42
I.5.2. Mise en œuvre de la méthode……..……42

CONCLUSION ……45

Chapitre II : **Détermination des attracteurs pour les systèmes continus non linéaires**

INTRODUCTION……49

II.1. Représentations et méthodes d'étude de la stabilité des systèmes continus non linéaires.……....49
II.1.1. Introduction…….....49
II.1.2. Critère pratique de Borne et Gentina……..50
II.2. Attracteurs et zones d'attraction....……51
II.2.1. Stabilité asymptotique globale d'un point d'équilibre : Système Majorant

Homogène (SMH) linéaire……...51
II.2.2. Stabilité asymptotique globale d'un point d'équilibre : Système Majorant
Homogène (SMH) non linéaire..……...52
II.2.3. Stabilité asymptotique globale d'un attracteur : Système Majorant
Non Homogène (SMNH) linéaire……52
II.2.4. Stabilité asymptotique locale d'un attracteur : Système Majorant
Non Homogène (SMNH) linéaire local.……...……...53
II.3. Nouvelle approche de stabilisation de systèmes continus non linéaires. Détermination des attracteurs……53
II.3.1. Détermination des attracteurs emboîtés……..……54
II.3.1.1. Position du problème……..…….…….....54
II.3.1.2. Mise en œuvre de la méthode…..…...……..56
II.3.1.3. Conclusion.……..……...……..60
II.3.2.Etude de stabilité des systèmes non linéaires par diagonalisation
des matrices caractéristiques autour d'un point de fonctionnement…..……..60
II.3.2.1. Linéarisation d'un système non linéaire……..……60
II.3.2.2. Linéarisation autour d'un point de fonctionnement……..……...…..61
II.3.2.3. Stabilité des systèmes non linéaires par diagonalisation de la matrice
caractéristique instantanée..…….....62
II.3.2.3.1. Introduction...……..…….……62
II.3.2.3.2. Méthode proposée…..……...63
II.3.2.3.3. Exemple d'application…….66
II.4. Etude de stabilité des systèmes non linéaires caractérisés par une matrice de forme en flèche de Benrejeb.…....…….....74
II.4.1. Détermination d'attracteurs pour les matrices de forme en flèche……....74
II.4.2. Exemple d'application.……..79

CONCLUSION…….88

Chapitre III: Etude de la stabilisation et détermination des attracteurs des systèmes continus nonlinéaire incertains

INTRODUCTION……..…..91

III.1. Présentation unifiée du problème de stabilisation et de commande……..…...91
III.2. Etude de la stabilité des systèmes continus non linéaires incertains..……..92
III.3. Estimation de l'erreur due aux incertitudes dans le cas d'une commande d'un processus avec linéarisation par découplage……..99
III.3.1. Linéarisation entrée-sortie par retour d'état..……...……99
III.3.2.Réalisation de la commande...……...…..101
III.3.3. Influence de perturbations et/ou d'incertitudes.....…..…….....101
III.3.4. Exemples d'application……...102
III.4. Etude de la stabilisation par placement de pôles des systèmes non linéaires……....113
III.4.1 Idée de base ……..……..113
III.4.2. Méthode proposée…….……..113
III.4.3. Exemple de mise en œuvre.……..….....120
III.5. Etude de la stabilité d'un système de type Lur'e Postnikov et détermination de l'attracteur en présence d'incertitudes…..……..128
III.5.1. Description des systèmes étudiés…….……128
III.5.2. Cas du système incertain en régime non autonome (e non nulle).……..…...130
III.5.3. Simplification de l'approche tenant compte des propriétés des systèmes de Lur'e Postnikov..…….……..……...132
III.5.4. Exemple d'application..…..……..136

CONCLUSION……...……146

CONCLUSION GENERALE……..147

BIBLIOGRAPHIE……149

Table des illustrations

Figure I.1. Représentation d'état d'un système dynamique non linéaire

Figure I.2. Attractivité d'une solution $\phi(t;t_0,x_0)$

Figure I.3. Attractivité d'un ensemble d'attracteurs $D_a(\mathcal{A})$

Figure I.4. Stabilité de la solution $x(t;t_0,x_0)$

Figure I.5. Stabilité d'un ensemble $\mathcal{A}$, de domaine de stabilité $D_s(\mathcal{A})$

Figure I.6. Zone d'attraction du système

Figure II.1. Attracteurs D_1, D_2, D_3 et D_4 et évolutions des variables d'état du système

Figure II.2. Attracteur $D_3 \subset D_2 \subset D_1$ et évolution du système (S) dans l'espace d'état

Figure II.3. Attracteur et évolution du système initial

Figure III.1. Evolution des estimations successives de l'attracteur du système (S)

Figure III.2.Schéma synoptique relatif à la linéarisation entrée-sortie par retour d'état

Figure III.3. Sous- système découplé en une chaîne d'intégrateurs

Figure III.4. Evolution des variables d'état du système vers l'attracteur

Figure III.5. Evolutions des variables d'état du système vers la zone d'attraction D_1

Figure III.6. Evolution du système vers la zone d'attraction

Figure III.7. Processus de type Lur'e Postnikov

Figure III.8. Non linéarité du système étudié

Figure III.9. Evolution de l'état du système initial incertain en régime autonome vers son attracteur

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

La commande des processus nonlinéaires complexes s'avère généralement difficile, en particulier dans le cas de modèles mal définis ou imprécis et si ces processus sont soumis à des bruits ou des perturbations non identifiés sur lesquels la seule information disponible est l'amplitude des incertitudes qui en résultent sur le modèle.

Le travail présenté dans ce mémoire a pour but de proposer une méthode permettant d'estimer l'écart par rapport à l'objectif recherché dans la commande d'un processus et si possible de le minimiser.

Un processus à temps continu, ayant son évolution décrite par un ensemble d'équations différentielles, la modélisation la plus couramment utilisée est la représentation dans l'espace d'état. Toutefois, partant d'un ensemble d'équations différentielles donné, plusieurs représentations peuvent être utilisées dont le choix conditionne la précision des résultats escomptés.

En présence d'incertitudes dans la modélisation qui accroissent la complexité de l'étude de stabilité, il n'est pas toujours possible d'obtenir une loi de commande assurant la stabilité du processus par rapport à l'objectif choisi. Il convient alors d'estimer l'écart maximum par rapport à cet objectif, opération qui peut être réalisée en déterminant un attracteur correspondant au voisinage de l'objectif pour lequel la stabilité locale ne peut être garantie.

Ce mémoire comporte trois chapitres.

Le premier chapitre présente les résultats relatifs à la stabilité des systèmes continus nonlinéaires qui sont utilisés dans la suite, en particulier les travaux de Borne et Gentina relatifs à la détermination de systèmes majorants et de systèmes de comparaison d'un processus donné.

La présentation d'une procédure, permettant de déterminer un attracteur d'un processus localement instable en définissant des représentations adaptées des systèmes nonlinéaires étudiés, fait l'objet du deuxième chapitre. L'utilisation des techniques d'agrégation à partir

des normes vectorielles permet de déterminer une suite d'attracteurs emboîtés affinant ainsi le résultat obtenu en ajustant si nécessaire, à chaque étape, le choix de la modélisation.

Une approche intéressante, lorsque le linéarisé du processus est diagonalisable sur le corps des réels, est de travailler sur le modèle tel que son linéarisé soit diagonal. Lorsque cela n'est pas possible, il convient d'adapter la représentation de telle façon que le linéarisé ait la forme en flèche de Benrejeb ; ce qui permet l'obtention de résultats particulièrement intéressants pour la détermination de l'attracteur.

Le troisième chapitre présente la détermination de commandes permettant de réduire la taille de l'attracteur autour de l'objectif, donc d'accroître la précision de la commande, pour les processus complexes avec incertitudes. Deux approches sont présentées, la première concerne la commande d'un processus avec une linéarisation par découplage de la partie du modèle sans incertitudes, et la seconde est la commande par placement de pôles au niveau du linéarisé.

L'étude de la minimisation et de l'estimation de l'erreur dans le suivi de trajectoire est développée, à la fin de ce chapitre, dans le cas de processus du type Lur'e Postnikov.

Divers exemples sont présentés, tout au long du mémoire, pour illustrer la mise en œuvre et l'efficacité des méthodes proposées.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LA STABILITE DES SYSTEMES CONTINUS NON LINEAIRES

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LA STABILITE DES SYSTEMES CONTINUS NONLINEAIRES

Sommaire

INTRODUCTION……....19

I.1. Description des systèmes dynamiques étudiés……...19
I.1.1. Représentations d'un processus……..19
I.1.2. Représentations d'état……..20
I.2. Caractérisation des systèmes étudiés……..22
I.2.1. Introduction……..22
I.2.2. Différentes formes de matrices caractéristiques des systèmes dynamiques.……...22
I.2.2.1. Matrice de forme Compagnon...……..22
I.2.2.2.Matrice diagonale……...…….22
I.2.2.3. Matrices de forme en flèche de Benrejeb……23
I.2.2.3.1. Matrice de forme en flèche mince.……...23
I.2.2.3.2. Passage d'une matrice de forme Compagnon à une matrice de forme en flèche mince..……..24
I.2.2.3.2.1.Matrice initiale de forme Compagnon...……24
I.2.2.3.2.2.Matrice initiale de forme quelconque…...…….25
I.3. Méthode proposée pour l'étude de la stabilité des systèmes continus non linéaires……..26
I.3.1.Introduction…….…….26
I.3.2. Présentation des techniques d'agrégation…….....…….27
I.3.2.1.Introduction……27
I.3.2.2.Normes Vectorielles (NV)...……...27
I.3.2.3.Systèmes majorants.....……..28
I.3.2.4. Systèmes de comparaison……...30
I.3.2.4.1.Systèmes pseudo-Majorants Homogènes (SMH).……30
I.3.2.4.2.Systèmes pseudo-Majorants Non Homogènes (SMNH).…….31
I.4. Stabilité des systèmes continus non linéaires……32
I.4.1. Notion de point d'équilibre stable……...……32
I.4.2. Attractivité..……..32

I.4.2.1. Attractivité d'une solution et domaine associé…..……...32
I.4.2.2. Attractivité d'un ensemble et domaines associés……34
I.4.3. Stabilité au sens de Lyapunov.……36
I.4.3.1. Stabilité d'une solution et domaine associé (au sens de Lyapunov)..…....36
I.4.3.2.Stabilité d'un ensemble et domaine associé (au sens de Lyapunov)……..37
I.4.4. Stabilité asymptotique……..39
I.4.5. Stabilité exponentielle…….……....39
I.4.6. Stabilité pratique…….....39
I.4.7.Conditions de stabilité des systèmes décrits dans l'espace d'état……...40
I.4.7.1. Norme du max…….……40
I.4.7.2. Norme duale du max…….41
I.5. Détermination des attracteur- Position du problème ……42
I.5.1. Objectif ……..…….42
I.5.2. Mise en œuvre de la méthode……..……42

CONCLUSION ……45

INTRODUCTION

L'étude des systèmes non linéaires, en présence d'incertitudes et/ou de perturbations, s'avère en général complexe en particulier en ce qui concerne la stabilité. Lorsque la stabilité de l'état au voisinage d'un point d'équilibre ne peut être garantie localement, il convient de vérifier s'il est possible de déterminer un attracteur associé à ce point d'équilibre.

Dans notre étude, nous allons considérer de façon générale des processus continus : c'est-à-dire des systèmes évoluant avec le temps dont les variables caractéristiques prennent des valeurs parfaitement définies et évoluent de façon continue.
Pour comprendre et analyser ces systèmes évoluant avec le temps (ou systèmes dynamiques), l'étude s'effectuera sur la représentation d'état.

I.1. Description des systèmes dynamiques étudiés

I.1.1. Représentations d'un processus

La notion de système intervient dans pratiquement tous les domaines scientifiques : un processus est un système dynamique, évoluant dans le temps et échangeant matières, énergies et informations avec son environnement. Les influences de l'environnement sur le système sont souvent perçues comme des perturbations qui sont, en général, non contrôlables par l'utilisateur et qui agissent sur le processus, perturbant ainsi le fonctionnement souhaité.

L'étude et la commande d'un processus s'effectuent, généralement, à partir d'un modèle de ce processus. Il existe plusieurs types de modèles : principalement, les modèles de connaissances d'une part et les modèles de représentation et de conduite, d'autre part. Il est important de noter que, dans tous les cas, le système existe indépendamment de tous les modèles que l'on peut lui attribuer et que la modèle n'est, le plus souvent, qu'une simplification et une caricaturisation de la réalité [BOR 92].

I.1.2 Représentations d'état

Un système physique, biologique, économique, etc., peut le plus souvent être décrit, dans l'espace d'état, par un modèle mathématique de la forme (I.1):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x,u) \\ y(t) = h(t,x,u) \end{cases} \tag{I.1}$$

avec :

- x : vecteur état de composantes $x_i(.)$,i=1,2,…,n, $x \in \mathbb{R}^n$, caractérisant l'évolution du processus étudié,
- t : temps, $t \in \mathbb{R}_+$,
- $\dot{x}(t)$: dérivée par rapport au temps du vecteur état x,
- u : vecteur de commande, de composantes $u_j(.)$, j = 1,2,…,m, $u \in \mathbb{R}^m$, agissant sur l'état, donc sur l'évolution du processus,
- y :vecteur de sortie, de composantes y_j ,j = 1, 2,…, l , $y \in \mathbb{R}^l$,
- $f(.)$: fonction vectorielle, de composantes $f_i(.), i$ = 1,2,…, n,
- $h(.)$: fonction vectorielle, de composantes $h_k(.)$,k = 1,2,…, l.

Les équations (I.1) permettent de décrire l'évolution de l'état du système dans le temps.

Un point x_e est un point d'équilibre de l'équation différentielle (I.1) si on a $f(t,x_e,u(x_e,t)) = 0$

En pratique, le point d'équilibre x_e est souvent ramené à l'origine ;soit $x_e = 0$.

Dans le cas où le système analysé présente de petites variations autour du point de fonctionnement, une linéarisation autour de ce point des non linéarités f (.) et h(.) devient envisageable et intéressante.

Forme standard

Il est souvent possible de trouver un modèle mathématique de (I.1) de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(.)x(t) + B(.)u(t) \\ y(t) = C(.)x(t) + D(.)u(t) \end{cases} \tag{I.2}$$

avec :

- $A(x(t),t)$: matrice d'état de dimension $n \times n$,
- $B(x(t),t)$: matrice de commande de dimension $n \times m$,
- $C(x(t),t)$: matrice d'observation de dimension $l \times n$,
- $D(x(t),t)$: matrice de dimension $l \times m$.

Dans beaucoup de problèmes, on a : $l = m$ et $D = 0$

Le passage de la représentation de la forme (I.1)à la forme (I.2) peut s'effectuer de multiples façons ; ce qui donne une certaine liberté dans la description du processus considéré.

La figure I.1 fournit une représentation schématique de tels systèmes.

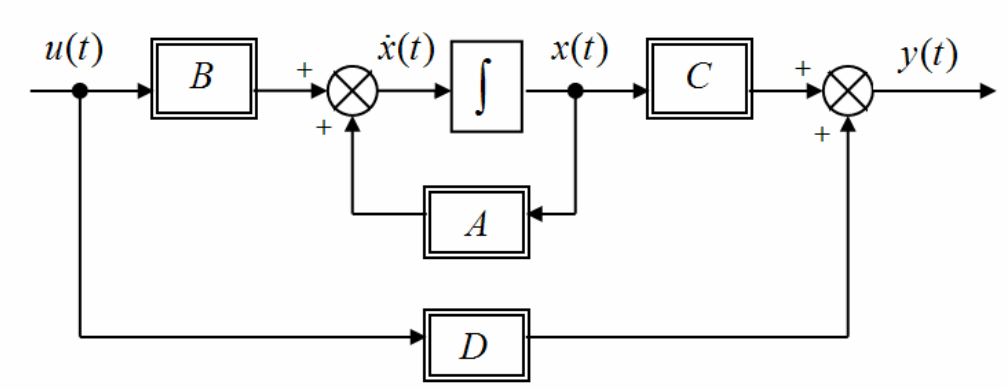


Figure I.1. Représentation d'état d'un système dynamique non linéaire

Si les matrices *A, B, C et D*

- dépendent de l'état x et du temps *t*, le système est dit non linéaire non stationnaire,
- ne dépendent que de l'état x, le système est dit non linéaire stationnaire,
- ne dépendent que du temps, le système est dit linéaire non stationnaire,
- sont constantes, le système est dit linéaire stationnaire.

Il y a une infinité de représentations d'état des systèmes non linéaires, obtenues par changement de base de la forme $x = Pz$, P étant une matrice régulière. La description la plus couramment utilisée est de la forme :

$$\dot{z}(t) = P^{-1}A(.)Pz(t) + P^{-1}B(.)u(t) \tag{I.3}$$

$$y(t) = C(.)Pz(t) + D(.)u(t) \tag{I.4}$$

I.2. Caractérisation des systèmes étudiés

I.2.1. Introduction

Un système non linéaire au sens physique est un système dont l'évolution ne peut être décrite par des équations différentielles linéaires d'où la complexité etla diversité de ces systèmes.

I.2.2. Différentes formes de matrices caractéristiques des systèmes dynamiques

Divers auteurs ont proposé un certain nombre de représentations particulières, dont nous citons les plus utilisées, à matrice caractéristique de forme Compagnon, Frobénius, diagonale ou en flèche …

I.2.2.1. Matrice de forme Compagnon / Frobénius

Cette description correspond à la forme (I.5) des matrices dans laquelle les coefficients a_i sont les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice *A*. La forme de Frobénius correspond à la transposition de la forme Compagnon.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{I.5}$$

I.2.2.2. Matrice diagonale

Lorsque les valeurs propres d'une matrice, notées λ_i, $i = 1,...,n$, sont distinctes, il existe un changement de base régulier qui transforme la matrice caractéristique du système en régime libre, par similitude, en une matrice diagonale :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{I.6}$$

I.2.2.3. Matrices de forme en flèche de Benrejeb

On distingue trois formes : la forme en flèche mince, la forme en flèche mince généralisée et la forme en flèche épaisse. Dans cette étude, nous ne considérons que la forme en flèche mince [BEN 76].

I.2.2.3.1. Matrice de forme en flèche mince

La matrice A_{fm} est dite matrice de forme en flèche mince, si seuls les éléments de la diagonale principale, de la dernière ligne et de la dernière colonne peuvent être non nuls :

$$A_{fm} = \begin{bmatrix} f_{11} & & f_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \tag{I.7}$$

La matrice A_{fm} est dite matrice de forme en flèche mince généralisée d'ordre k, si seuls les éléments de la diagonale principale, les (n-k+1) dernières colonnes et les (n-k+1) dernières lignes de la matrice caractéristique A admettent des éléments pouvant être non nuls :

$$A_{fmg} = \begin{bmatrix} f_{11} & & & f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & f_{(k-1)(k-1)} & f_{(k-1)k} & \cdots & f_{(k-1)n} \\ f_{k1} & \cdots & f_{k(k-1)} & f_{kk} & \cdots & f_{kn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{n(k-1)} & f_{nk} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \tag{I.8}$$

I.2.2.3.2. Passage d'une matrice de forme Compagnon à une matrice de forme en flèche mince

La forme en flèche des matrices caractéristiques des systèmes, déterminée à partir de la forme Compagnon, s'est avéré intéressante pour l'analyse et la synthèse des systèmes complexes [BEN 80, BEN 10]

I.2.2.3.2.1.Matrice initiale de forme Compagnon

La description sous forme canonique de la matrice caractéristique d'un système permet de mieux appréhender ses spécificités dynamiques et structurelles. Dans ce sens, la représentation en flèche a abouti à des résultats intéressants,[BEN 80], BEN 10],[ABD 95], [BEN 76], [BEN 84A], [BEN 84B], [DAUPH 83], [ELMOU 79],[GAS 89],[GAS 01], [OZG 79], [RICH 84],[ROT 83], [SOU 97], [YAR 98].

Soit la représentation d'état suivante d'un système non linéaire (S) :

$$\dot{x}(t)=A(.)\,x(t) \tag{I.9}$$

avec :

$$A(.)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(.) & -a_1(.) & \cdots & -a_{n-2}(.) & -a_{n-1}(.) \end{bmatrix} \tag{I.10}$$

où les $a_i(.)$ sont les coefficients du polynôme caractéristique instantané $\mathbb{P}(.,\lambda)$ de la matrice $A(.)$:

$$\mathbb{P}(.,\lambda)=\lambda^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_i(.)\lambda^i \tag{I.11}$$

Notons $x_f(t)$ le vecteur état du système (I.9), tel que [BEN 80] :

$$x(t)=\mathrm{P}\,x_f(t) \tag{I.12}$$

P étant la matrice de passage de la forme canonique Compagnon à la forme enflèche mince :

$$\mathrm{P}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ f_{11} & f_{22} & \cdots & f_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ (f_{11})^2 & (f_{22})^2 & \cdots & (f_{(n-1)(n-1)})^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 \\ (f_{11})^{n-1} & (f_{22})^{n-1} & \cdots & (f_{(n-1)(n-1)})^{n-1} & 1 \end{bmatrix} \tag{I.13}$$

avec :

$$f_{ii} \neq f_{jj}, \forall i \neq j \text{ et } f_{ii} \neq 0 \tag{I.14}$$

Ce changement de base conduit à une matrice caractéristique en flèche mince de la forme :

$$F(.)=\begin{bmatrix} f_{ii} & & & f_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & f_{(k-1)(k-1)} & f_{(n-1)n} \\ f_{n1}(.) & \cdots & f_{n(n-1)}(.) & f_{nn}(.) \end{bmatrix} \tag{I.15}$$

avec :

$$f_{in}=\prod_{j=1}^{n-1}(f_{ii}-f_{jj})^{-1} \qquad \forall i=1,2,\ldots n-1 \tag{I.16}$$

$$f_{ni}=-\mathbb{P}(.,f_{ii}) \qquad \forall i=1,2,\ldots n-1 \tag{I.17}$$

$$f_{nn}=-a_{n-1}(.)-\sum_{i=1}^{n-1} f_{ii} \tag{I.18}$$

On peut choisir les valeurs f_{ii} arbitrairement, pourvu qu'elles soient toutes distinctes.

I.2.2.3.2.2.Matrice initiale de forme quelconque

Soit le système monovariable à coefficients constants dont l'évolution est décrite par la relation :

$$\dot{x}(t)=A\,x(t)+B\,\mathrm{u}(t) \tag{I.19}$$

A et B étant une paire commandable, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{P}(.,\lambda)$ le polynôme caractéristique de A :

$$\mathbb{P}(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i \tag{I.20}$$

Théorème [GAS 01]

Un changement de base défini par la matrice P_1 :

$$P_1 = P_c P = [P_1^1 \quad P_1^2 \quad \dots \quad P_1^n] \tag{I.21}$$

telle que :

$$x = P_1 y_1 \tag{I.22}$$

avec :

$$\begin{cases} P_1^i = \left[A^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k,i} A^{k-1} \right] B & i = 1,\dots,n-1 \\ P_1^n = PB \end{cases} \tag{I.23}$$

$$\alpha_{k,i} = a_k + \left(f_{i,i}\right)^{n-k} + \sum_{j=1}^{n-k-1} a_{k+j} \left(f_{i,i}\right)^j \qquad k = 1,\dots,n-1,\ i = 1,\dots,n-1 \tag{I.24}$$

$f_{i,i}, \forall i = 1,\dots,n-1$, étant des paramètres non nuls arbitraires distincts, permet de décrire (I.19) par l'équation d'état (I.25) :

$$\dot{y}_1 = F y_1 + G u \tag{I.25}$$

F étant une matrice de forme en flèche mince, (I.15) avec les notations de (I.16), (I.17) et (I.18).

En se basant sur ce théorème, on peut passer de la représentation d'état (I.19) à celle relative à la forme en flèche mince.

I.3. Méthode proposée pour l'étude de la stabilité des systèmes continus non linéaires

I.3.1.Introduction

Le problème de la stabilité consiste à étudier le comportement d'un système donné après qu'il ait subi une perturbation venant l'écarter de sa position d'équilibre.

L'étude de stabilité d'un système constitue une phase importante dans l'analyse des comportements des systèmes asservis ainsi que dans la synthèse des lois de commande. Dans le cas des systèmes complexes, les méthodes usuelles d'étude des systèmes linéaires se révèlent souvent insuffisantes. Pour l'étude locale, on peut utiliser la linéarisation autour d'un point de fonctionnement qui correspond à la première méthode de Lyapunov. Dans le cas plus général, l'utilisation de la deuxième méthode de Lyapunov ou des techniques d'agrégation nécessitant l'élaboration d'un système de comparaison en utilisant les normes vectorielles, sont des approches intéressantes et efficaces.

I.3.2. Présentation des techniques d'agrégation

I.3.2.1.Introduction

Lorsque la linéarisation des systèmes non linéaires n'est pas possible ou lorsque le modèle linéarisé ne peut pas représenter suffisamment bien le comportement réel du système, il s'avère intéressant d'utiliser la deuxième méthode de Lyapunov ou les techniques d'agrégation à partir des normes vectorielles [BEN 80].

I.3.2.2.Normes Vectorielles (NV)

Le concept de norme vectorielle a été introduit par Robert, en 1964[ROB 64], [ROB 73], afin de résoudre des problèmes d'analyse numérique liés à des récurrences linéaires. Le traitement a été étendu à l'analyse de la stabilité des processus dynamiques non linéaires continus ou discrets par Borne et Gentina (1974) , [BOR 79] , [GEN 76], [RIC 90]et[BEN 10].

Définition des normes vectorielles

Soit $\mathbb{R}^n$ un espace vectoriel et soit $\mathbb{R}^{n_i}$ un sous espace de $\mathbb{R}^n$, $\forall i = 1,2,\ldots k$, tels que :

$x \in \mathbb{R}^n, x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \forall i = 1,2,\ldots,k,$ alors on a :

$$x = [x_1^T \quad x_2^T \quad \cdots \quad x_k^T]^T \tag{I.26}$$

Soit $p_i(.)$ une norme scalaire sur $\mathbb{R}^{n_i}$, alors $p(.)$ est une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$ définie par le vecteur suivant :

$$p(x) = [p_1(x_1) \quad p_2(x_2) \quad \cdots \quad p_k(x_k)]^T \tag{I.27}$$

La norme vectorielle $p(x)$ vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} p_i(x_i) \geq 0, \forall x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \forall i = 1,2,\ldots,\mathrm{k} \\ p_i(x_i) = 0 \leftrightarrow x_i = 0, \forall i = 1,2,\ldots,\mathrm{k} \\ p_i(x_i + y_i) \leq p_i(x_i) + p_i(y_i), \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \forall i = 1,2,\ldots,\mathrm{k} \\ p_i(\lambda x_i) = |\lambda| p_i(x_i), \forall x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \forall i = 1,2,\ldots,\mathrm{k} \end{cases} \quad \text{(I.28)}$$

I.3.2.3.Systèmes majorants [BOR 79], [GEN 76b], [RICH 84]

Borne et Gentina ont été à l'origine de l'utilisation des normes vectorielles et des techniques d'agrégation et de majoration pour l'étude des systèmes complexes de grande dimension, en se basant sur la notion de système de comparaison, pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques.

Le but des méthodes de majoration est de simplifier les éléments qui auraient rendu l'étude de stabilité difficile. Ainsi, il est devenu préférable d'effectuer une majoration permettant d'obtenir un système majorant assez simple, pour permettre de conclure aisément sur la propriété étudiée.

Soit le système dont l'évolution est décrite par la relation :

$$\dot{x} = f(x,t) \quad \text{(I.29)}$$

avec :

$$f(x,t) = A(x,t)x + B(x,t), \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{(I.30)}$$

où A représente une matrice $n \times n$, Bun vecteur de $\mathbb{R}^n$ caractéristique des incertitudes ou, et des perturbations et f une fonction vectorielle de dimension n.

<u>Définition 1 :</u> Dérivées de Dini

Certaines fonctions peuvent présenter des discontinuités de leurs dérivées, par exemple $f(t) = |t|$ en zéro. Aussi, pour généraliser la définition usuelle de la dérivée, est introduite la dérivée de Dini [BOR 72] défini par:

$$\begin{aligned} D_t^+ f(t) &= \lim_{\theta \to 0^+} \frac{f(t+\theta) - f(t)}{\theta}, \\ D_t^- f(t) &= \lim_{\theta \to 0^-} \frac{f(t+\theta) - f(t)}{\theta} \end{aligned} \quad \text{(I.31)}$$

Pour $f(t)=|t|$, on en déduit $D_t^+ f(t)=1$ et $D_t^- f(t)=-1$

Notations

Soit, pour tout i, j de $\{1,2,\ldots,k\}$, les notations suivantes :

$$B_i(x,t)=P_i^* B(x,t), \quad \forall i=1,2,\ldots,k \tag{I.32}$$

$$A_{ij}(t,x)=P_i^* A(x,t)P_j^*, \quad \forall i,j=1,2,\ldots,k \tag{I.33}$$

$$m_{ij}(t,x,y)=\frac{\left[D_{y_i}^+ p_i(y_i)\right]^T A_{ij}(t,x)y_j}{p_i(y_i)} \tag{I.34}$$

où :

P_i^* est l'opérateur de projection de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n_i}$, $\forall i=1,2,\ldots,k$,

$D_{y_i}^+$ est l'opérateur de différentiation à droite,

$D_{y_i}^+ p_i(y_i)$ est le gradient à droite de $p_i(y_i)$,par rapport à la variable y_i.

Définition 2

La matrice $M(t,x)=\{\mu_{ij}(t,x)\}$, $\mu_{ij}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une matrice pseudo-majorante de A relativement à la norme p, si et seulement si :

$$M(t,x)=\{\mu_{ij}(t,x)\}, \quad \mu_{ij}\in\mathbb{R} \tag{I.35}$$

$$\mu_{ii}(t,x)=\sup_{y\in\mathbb{R}^n} m_{ii}(t,x,y), \quad \forall i=1,2,\ldots,k \tag{I.36}$$

$$\mu_{ij}(t,x)=\max\left\{0,\ \sup_{y\in\mathbb{R}^n} m_{ij}(t,x,y)\right\}, \quad \forall i\neq j=1,2,\ldots,k \tag{I.37}$$

Définition 3

Une matrice pseudo-majorante qui ne dépend que de t, telle que : $M(t)=\{\mu_{ij}(t)\}$, $\mu_{ij}(t)\in\mathbb{R}$, est une matrice pseudo-majorante de A si et seulement si on a :

$$\mu_{ii}(t)=\sup_{y\in\mathbb{R}^n} m_{ii}(t,y,y), \quad \forall i=1,2,\ldots,k \tag{I.38}$$

$$\mu_{ij}(t) = \max\left\{0, \sup_{y\in\mathbb{R}^n} m_{ij}(t,y,y)\right\}, \quad \forall i \neq j = 1,2,\ldots,k \tag{I.39}$$

Définition 4

Il est parfois possible de déterminer une matrice pseudo-majorante constante :

$$\mu_{ii} = \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n \\ t\in\mathbb{R}}} m_{ii}(t,y,y), \quad \forall i = 1,2,\ldots,k \tag{I.40}$$

$$\mu_{ij} = \max\left\{0, \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ t\in\mathbb{R}}} m_{ij}(t,x)\right\}, \quad \forall i \neq j = 1,2,\ldots,k \tag{I.41}$$

Il vient :

$$M \succ M(t) \geq M(t,x) \tag{I.42}$$

I.3.2.4. Systèmes de comparaison

Notre objectif est de déterminer une propriété qualitative d'un système initial complexe à partir de l'étude de cette propriété pour un autre système plus simple éventuellement d'ordre moins élevé ; toutefois, il faut noter que le choix d'un système de comparaison d'ordre moins élevé, s'il simplifie les calculs, est, par contre et en général, beaucoup plus conservatif.
Les systèmes de comparaison sont, en mathématique, originaires des travaux de T.Wazewski [WAZ 50].Le principal objectif est de majorer (ou de minorer) le comportement d'un système défini par une inégalité différentielle par le comportement d'un système différentiel.

I.3.2.4.1.Systèmes pseudo-Majorants Homogènes (SMH)[GEN 79]

Soit le système continu non linéaire, défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) \ \forall\, t \in \tau_0 = \left[t_0, +\infty\right] \tag{I.43}$$

La matrice $M(t,x) : \tau_0 \times S \to \Re^{k\times k}$, caractérise un système pseudo-majorant homogène (SMH)de (I.43)relatif à une norme vectorielle p , si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$D^{+}p(x) \le M(t,x)\,p(x), \forall (t,x) \in \tau_0 \times S \tag{I.44}$$

où $D^{+}p(x)$ est l'opérateur de dérivation à droite.

Lemme 1 : Si les éléments hors diagonaux de $M(t,x)$ sont tous strictement positifs, alors il existe un système de comparaison de (I.43) sur $\Re^n$ de la forme :

$$\dot{z} = M\,z \tag{I.45}$$

avec si : $p(x_0) \le z_0$

on a :

$$p(x(t)) \le z(t) \tag{I.46}$$

Cette dernière relation est vérifiée $\forall\, t \in \tau_0 = [t_0, +\infty]$:

I.3.2.4.2.Systèmes pseudo-Majorants Non Homogènes (SMNH)

Soit le système continu non linéaire défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x) \tag{I.47}$$

La paire$(M,\ N), M : \tau_0 \times S \to \Re^{k\times k}$, $N : \tau_0 \times S \to \Re_{+}^{k}$ définit un système pseudo-majorant non homogène (SMNH)de (I.47) relatif à une norme vectorielle $p(x)$, si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$D^{+}p(x) \le M(t,x)\,p(x) + N(t,x)\ \ \forall (t,x) \in \tau_0 \times S \tag{I.48}$$

Lemme 2 : Si les éléments hors diagonaux de $M(t,x)$ sont tous strictement positifs, alors il existe un système de comparaison de (I.47) sur $\Re^n$ de la forme :

$$\dot{z} = M z + N \tag{I.49}$$

avec si : $p(x_0) \leq z_0$

on a :

$$p(x(t)) \leq z(t) \tag{I.50}$$

$\forall\, t \in \tau_0 = [t_0, +\infty]$:

Si M et N sont constantes et si la matrice M est l'opposée d'une M-matrice [GEN 76a], [GEN 72], [REI 82], alors on a :

$$\lim_{t\to\infty} p(x) \leq z_\infty = -M^{-1}N \tag{I.51}$$

I.4. Stabilité des systèmes continus non linéaires

I.4.1. Notion de point d'équilibre stable

La notion de stabilité s'attache à formaliser l'intuition suivante : un point d'équilibre et dit stable si une perturbation n'entraîne que de petits écarts, pour tout temps postérieur; en bref, de petites causes n'ont que de petites conséquences.

Dans l'hypothèse non linéaire, un processus peut admettre plusieurs points d'équilibre stables ou instables et le domaine d'influence d'un point d'équilibre donné peut être limité dans l'espace d'état.

I.4.2. Attractivité

I.4.2.1. Attractivité d'une solution et domaine associé [GRU 75]

Définition 5 : La solution $\phi(t;t_0,x_0)$ du système (I-1) est attractive si :

$\forall\, \varepsilon \succ 0, \exists \mu \succ 0$ tel que $\forall x$ vérifiant $\|x - x_0\| \prec \mu, \exists\, T(x,\varepsilon) \succ 0$ tel que :

$$\|\phi(t;t_0,x) - \phi(t;t_0,x_0)\| \prec \varepsilon \text{ pour } t \succ t_0 + T(x,\varepsilon) \tag{I.52}$$

Remarque

1) La définition précédente peut être formulée, en terme de limite, comme suit :

La solution $\phi(t;t_0,x_0)$ est attractive si :

$\exists \mu \succ 0$ tel que $\forall x$ vérifiant $\|x - x_0\| \prec \mu$, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \|\phi(t;t_0,x) - \phi(t;t_0,x_0)\| = 0 . \qquad \text{(I.53)}$$

Elle peut être formulée de façon plus générale en utilisant la notion de voisinage.

La solution $\phi(t;t_0,x_0)$ est attractive si, pour tout voisinage $\mathfrak{U}$ de la solution $\phi(t;t_0,x_0)$, il existe un voisinage υ de x_0 tel que, pour toute condition initiale x de υ, il existe un temps $T(x,\mathfrak{U})$ au bout duquel les solutions $\phi(t;t_0,x)$ évoluent dans le premier voisinage $\mathfrak{U}$ sans en sortir, figure I.2.

2) Il est utile, d'un point de vue pratique, de connaître le plus grand de ces voisinages $\mathfrak{U}$. Ce qui nous amène à définir la notion de domaine d'attraction de la solution $\phi(t;t_0,x_0)$.

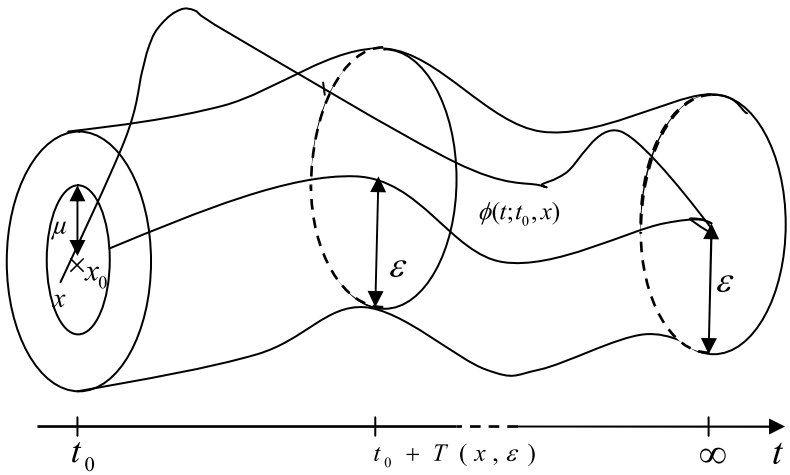


Figure I.2. Attractivité d'une solution $\phi(t;t_0,x_0)$

Définitions 6

$D_a(\phi(t;t_0,x_0))$ est domaine d'attraction de la solution $\phi(t;t_0,x_0)$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) $D_a(\phi(t;t_0,x_0))$ est un voisinage de x_0,

ii) $\forall\ \varepsilon \succ 0, \exists\ T(x,\varepsilon) \succ 0$ tel que si $x \in D_a(\phi(t;t_0,x_0))$, on a :

$$\left\|\phi(t;t_0,x) - \phi(t;t_0,x_0)\right\| \prec \varepsilon \text{ pour } t \succ t_0 + T(x,\varepsilon). \qquad \text{(I.54)}$$

I.4.2.2. Attractivité d'un ensemble et domaines associés

Dans les définitions qui suivent et pour le reste de ce chapitre, l'attracteur $\mathcal{A}$ peut être l'un des éléments suivants : un équilibre x_e ,une orbite fermée γ ou un ensemble non vide fermé $\mathcal{A}$. Ces définitions sont des extensions de celles figurant dans [GRU 86], [GRU 93], [HAN 63].

Définitions 7

1) $\mathcal{A}$ est attractif par rapport à $\mathcal{T}_i$ si :

   $\forall\ t_0 \in \mathcal{T}_i, \forall\ \varepsilon \succ 0, \exists \mu(t_0) \succ 0$ tel que :

   $\forall\ x_0$ vérifiant $\rho(x_0;\mathcal{A}) \prec \mu(t_0), \exists\ T(t_0,x_0,\varepsilon) \succ 0$ tel que l'on ait :

   $$\rho(\phi(t;t_0,x_0);\mathcal{A}) \prec \varepsilon \text{ pour } t \succ t_0 + T(t_0,x_0,\varepsilon). \text{(I.55)}$$

   où $\rho(x_0;\mathcal{A})$ désigne une distance de x_0 à l'attracteur $\mathcal{A}$,

2) $\mathcal{A}$ est attractif s'il est attractif par rapport à $\mathcal{T}_i = \mathbb{R}.$,

3) $\mathcal{A}$ est uniformément attractif par rapport à $\mathcal{T}_i$,s'il vérifie la version modifiée de 1) dans laquelle $\mu(t_0)$ ne dépend plus de t_0 $(\mu(t_0) = \mu$ et $T(t_0,x_0,\varepsilon)$ ne dépend plus que de μ et de ε (donc indépendant de t_0 et de x_0),

4) $\mathcal{A}$ est uniformément attractif, s'il est uniformément attractif par rapport à $\mathcal{T}_i = \mathbb{R}.$

Définitions 8 : (Figure I.3)

1) $D_a(t_0,\mathcal{A})$ est le domaine d'attraction de $\mathcal{A}$ par rapport à t_0 ,si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) $D_a(t_0,\mathcal{A})$ est un voisinage de $\mathcal{A}$,

ii) $\forall\ \varepsilon \succ 0, \exists\ T(t_0,x_0,\varepsilon) \succ 0$ tel que si : $x \in D_a(t_0,\mathcal{A})$, on a :

$$\rho(\phi(t;t_0,x_0));\mathcal{A}) \prec \varepsilon \text{ pour } t \succ t_0 + T(t_0,x_0,\varepsilon). \tag{I.56}$$

2) D_a $(\mathcal{T}_i,\mathcal{A})$ est le domaine d'attraction par rapport à $\mathcal{T}_i$de$\mathcal{A}$, si :

i) $\forall t_0 \in \mathcal{T}_i$, $D_a(t_0,\mathcal{A})$ existe,

ii) D_a $(\mathcal{T}_i,\mathcal{A})= \bigcup_{t_0 \in \mathcal{T}_i} D_a(t_0,\mathcal{A})$. (I.57)

3) D_{au} $(\mathcal{A})$ est le domaine d'attraction uniforme de $\mathcal{A}$ par rapport à $\mathcal{T}_i$, si :

$$D_{au}\ (\mathcal{A})= D_{au}\ (\mathcal{T}_i = \mathbb{R},\mathcal{A}). \tag{I.58}$$

4) D_{au} $(\mathcal{T}_i,\mathcal{A})$ est le domaine d'attraction uniforme de $\mathcal{A}$ par rapport à $\mathcal{T}_i$, si :

i) D_{au} $(\mathcal{T}_i,\mathcal{A})$ est un voisinage de $\mathcal{A}$,

ii) $\forall\, t_0 \in \mathcal{T}_i, \forall \varepsilon \succ 0, \exists T(\varepsilon) \succ 0$,tel que si $x_0 \in$ D_{au} $(\mathcal{T}_i,\mathcal{A})$, on a :

$$\rho(\phi(t;t_0,x_0);\mathcal{A}) \prec \varepsilon \text{ pour } t \succ t_0 + T(\varepsilon). \tag{I.59}$$

5) D_{au} $(\mathcal{A})$ est le domaine d'attraction uniforme de $\mathcal{A}$, si :

$$D_{au}\ (\mathcal{A})= D_{au}\ (\mathcal{T}_i = \mathbb{R},\mathcal{A}). \tag{I.60}$$

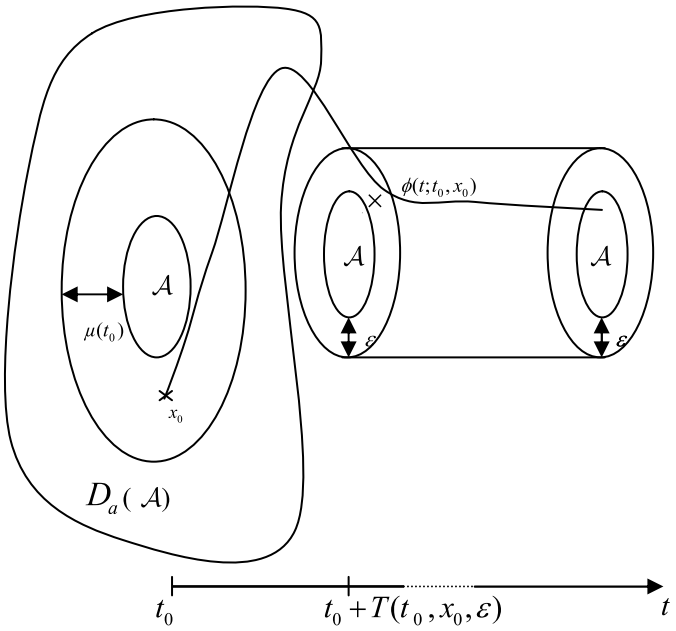


Figure I.3. Attractivité d'un ensemble d'attraction $D_a(\mathcal{A})$

I.4.3. Stabilité au sens de Lyapunov

Si une fonction est uniformément K-Lipschitizienne, les solutions $x(t;t_0,x_0)$ de l'équation différentielle sont continues par rapport à t, t_0 et x_0.

Si on prend deux solutions $x_1(t;t_0,x_{01})$ et $x_2(t;t_0,x_{02})$, avec x_{01} et x_{02} proches, la continuité implique donc que ces deux solutions peuvent rester proches que sur un petit intervalle de temps (t_0 , t). Pour obtenir une proximité de ces deux solutions sur un intervalle de temps plus grand, est introduite la notion de stabilité au sens de Lyapunov.

I.4.3.1. Stabilité d'une solution et domaine associé (au sens de Lyapunov) [GRU 75]

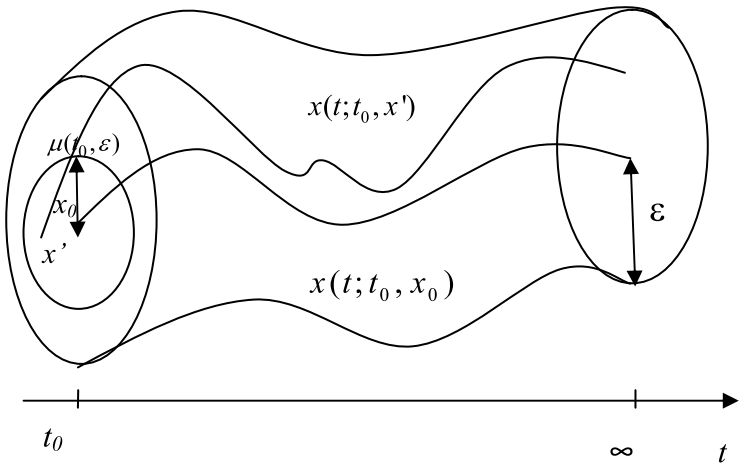
Définition 9 (FigureI.4)

La solution $x(t;t_0,x_0)$ du système S décrit par (I.1) est stable au sens de Lyapunov, si :

$\forall\, \varepsilon \succ 0, \exists \mu(t_0,\varepsilon) \succ 0$ tel que, pour tout x vérifiant : $\|x - x_0\| \prec \mu(t_0,\varepsilon)$,on a :

$$\left\| x(t\,;t_0,x_0') - x(t\,;t_0,x_0) \right\| \prec \varepsilon,\ \forall\, t \in [t_0,+\infty] \tag{I.61}$$

Dans le cas contraire, $x(t;t_0,x_0)$ est instable.



FigureI.4. Stabilité de la solution $x(t;t_0,x_0)$

Définition 10

$D_s(x(t\,;t_0,x_0))$ est le domaine de stabilité au sens de Lyapunov de la solution $x(t;t_0,x_0)$, si :

a) $D_s(x(t\,;t_0,x_0))$ est un voisinage de x_0,

$\forall \varepsilon \succ 0$, on a : $\left\|x(t\,;t_0,x_0^{'})-x(t\,;t_0,x_0)\right\| \prec \varepsilon, \forall\, t \in [t_0,+\infty]$,si et seulement si :

$$x \in D_s(x(t\,;t_0,x_0)). \tag{I.62}$$

I.4.3.2.Stabilité d'un ensemble et domaine associé (au sens de Lyapunov)

Définition 11(Figure I.5)

a) $\mathcal{A}$ est stable au sens de Lyapunov par rapport à $\mathcal{T}_i$ (un intervalle d'instants initiaux t_0) si :

$\forall t_0 \in \mathcal{T}_i$, $\forall \varepsilon \succ 0$, $\exists \mu(t_0,\varepsilon) \succ 0$ tel que :

$\forall\, x_0$ vérifiant $\rho(x_0;\mathcal{A}) \prec \mu(t_0,\varepsilon)$ on a $\rho(x(t\,;t_0,x_0)\,;\mathcal{A}) \prec \varepsilon, \forall\, t \in [t_0,+\infty]$ (I.63)

b) $\mathcal{A}$ est stable au sens de Lyapunov, s'il est stable au sens de Lyapunov par rapport à $\mathcal{T}_i = \mathbb{R}$,

c) $\mathcal{A}$ est uniformément stable au sens de Lyapunov par rapport à $\mathcal{T}_i$, s'il vérifie la version modifiée de a) dans laquelle $\mu(t_0,\varepsilon)$ ne dépend plus que de ε, c'est-à-dire $\mu(\varepsilon)$,

d) $\mathcal{A}$ est uniformément stable au sens de Lyapunov, s'il est uniformément stable au sens de Lyapunov par rapport à $\mathcal{T}_i = \mathbb{R}$,

e) Dans le cas contraire, $\mathcal{A}$ est instable.

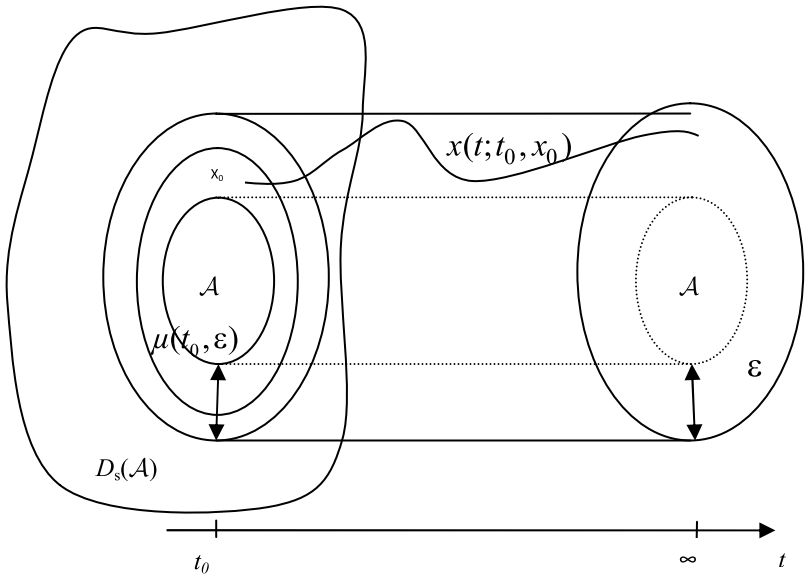


Figure I.5. Stabilité d'un ensemble $\mathcal{A}$, de domaine de stabilité $D_s(\mathcal{A})$

Définition 12

a) $D_s(t_0, \mathcal{A})$est le domaine de stabilité de$\mathcal{A}$, au sens de Lyapunov par rapport àt_0, si :

i) $\forall \varepsilon \succ 0, D_s(t_0, \varepsilon, \mathcal{A})$ est un voisinage de $\mathcal{A}$,

ii) $\rho(x(t; t_0, x_0); \mathcal{A}) \prec \varepsilon, \forall t \in [t_0, +\infty]$ si et seulement si $x_0 \in D_s(t_0, \varepsilon, \mathcal{A})$,

iii) $D_s(t_0,\mathcal{A}) = D_s(t_0, \varepsilon, \mathcal{A}), \forall \varepsilon$ (I.64)

b) $D_s(\mathcal{T}_i, \mathcal{A})$est le domaine de stabilité de $\mathcal{A}$ au sens de Lyapunov par rapport à $\mathcal{T}_i$, si:

i) $\forall t_0 \in \mathcal{T}_i, D_s(t_0, \mathcal{A})$ existe,

ii) $D_s(\mathcal{T}_i, \mathcal{A}) = \underset{t_0 \in T_i}{\cup} D_s(t_0, \mathcal{A})$, (I.65)

c) $D_s(\mathcal{A})$est le domaine de stabilité de $\mathcal{A}$ au sens de Lyapunov, si :

$$D_s(\mathcal{A}) = D_s(\mathcal{T}_i = \mathbb{R}, \mathcal{A}). \quad \text{(I.66)}$$

d) $D_{su}(\mathcal{T}_i, \mathcal{A})$ est le domaine de stabilité uniforme de$\mathcal{A}$, au sens de Lyapunov par rapport à $\mathcal{T}_i$,si :

i) $D_{su}(\mathcal{T}_i, \mathcal{A})$ est un voisinage de $\mathcal{A}$,

ii) $\forall\, t_0 \in \mathcal{T}_i, \forall \varepsilon \succ 0\ , \rho(x(t\,; t_0, x_0)\,; \mathcal{A}) \prec \varepsilon, \forall\, t \in [t_0, +\infty]$ si et seulement si :

$$x_0 \in D_{au}(\mathcal{T}_i, \mathcal{A}) \tag{I.67}$$

e) $D_{su}(\mathcal{A})$ est le domaine de stabilité uniforme de $\mathcal{A}$ au sens de Lyapunov, si :

$$D_{su}(\mathcal{A}) = D_{su}(\mathcal{T}_i = \mathbb{R}\ , \mathcal{A}) \tag{I.68}$$

I.4.4. Stabilité asymptotique

Le point $x_e = 0$ est dit asymptotiquement stable lorsqu'il est stable et en même temps attractif. On peut donc définir $D_{sa}(x_e)$ comme le domaine de stabilité asymptotique, tel que :

$$D_{sa}(x_e) = D_s(x_e) \cap D_a(x_e) \tag{I.69}$$

I.4.5. Stabilité exponentielle

La stabilité asymptotique au sens de Lyapunov assure la convergence vers x_e, mais elle ne donne aucune indication sur la rapidité de cette convergence. Ainsi, du point de vue pratique, il est nécessaire d'estimer cette rapidité. C'est dans ce sens que la notion de stabilité exponentielle a été introduite [HAN 63], [HAN 67],[LAS 61].

La stabilité exponentielle implique que le comportement du système perturbé soit majoré par celui d'un système linéaire ; elle s'exprime sous la forme suivante :

Le point $x = 0$ est dit exponentiellement stable si $\exists \alpha \geq 1$ et $\beta \succ 0$ tels que :

$$\left\| x(t; t_0, x_0) \right\| \leq \alpha \left\| x_0 \right\| e^{-(\beta(t - t_0))}, \forall t \succ t_0 \tag{I.70}$$

I.4.6. Stabilité pratique

Un processus possède la propriété de stabilité pratique, si l'écart par rapport au point d'équilibre passe en dessous d'une valeur prédéfinie, en un temps donné fini.

En pratique, les processus étudiés ont une durée de fonctionnement finie. Aussi, il apparaît nécessaire de préciser le comportement d'un système sur un intervalle de temps fini. C'est le rôle de la stabilité pratique [LAS 61] ,[MICH 77],[BOR 92].

I.4.7. Condition de stabilité des systèmes décrits dans l'espace d'état [BOR 93]

Les résultats qui suivent sont des applications directes de la seconde méthode de Lyapunov à des processus décrits sous la forme :

$$\dot{x} = f(x,t,\sigma) = A(x,t,\sigma)x, \quad A(.) = \left\{a_{ij}(.)\right\}, \tag{I.71}$$

où σ est un vecteur de perturbations et $f(0,t,\sigma) = 0$.

Les méthodes d'étude de la stabilité, proposées dans la suite, peuvent s'appliquer indifféremment sur les matrices $A(.)$ ou sur toute matrice $A'(.) = P^{-1}A(.)P$ déduite de A par changement de base P.

I.4.7.1. Norme du max

Soit : $v(x) = \max_i |x_i|$ une fonction candidate à Lyapunov.

Il vient :

$$v(x) = \max_i |x_i| = x_{i_m} \operatorname{signe}(x_{i_m}), \tag{I.72}$$

$$\dot{v}(x) = \operatorname{signe}(x_{i_m}) \sum_j a_{i_m j} x_j, \tag{I.73}$$

$$\leq \max_i \left\{ a_{ii} + \sum_j \left| a_{i_m j} \right| \right\} \max_i |x_i|, \tag{I.74}$$

La condition de stabilité est dans ce cas qu'il existe $\varepsilon \succ 0$ telque :

$$\max_i \left\{ a_{ii}(.) + \sum_{j \neq i} \left| a_{ij}(.) \right| \right\} \leq -\varepsilon, \tag{I.75}$$

Elle exprime que le maximum de la somme des termes de chaque ligne de la matrice A^*, obtenue en remplaçant les éléments hors diagonaux de la matrice A par leurs valeurs absolues est négatif.

Lorsqu'il n'y a pas stabilité illimitée, il vient qu'il existe $\varepsilon \succ 0$ tel que

$$D_N = \left\{ x, \max_i \left\{ a_{ii}(.) + \sum_{j \neq i} \left| a_{ij}(.) \right| \right\} \leq (-\varepsilon) \right\}, \tag{I.76}$$

et le domaine de stabilité correspond à la plus grande équipotentielle $v(x) = cte$ comprise dans D_N.

Un simple changement de base $P = \text{diag}\{d_i\}$ peut conduire à la condition $\dot{v} \prec 0$, définie par la relation :

$$\max_i \left\{ a_{ii}(.) + \sum_{i \neq j} \left| \frac{d_j}{d_i} a_{ij}(.) \right| \right\} \leq -\varepsilon \tag{I.77}$$

I.4.7.2. Norme dual du max

Le choix $v(x) = \sum_i |x_i|$ conduit à la condition $\dot{v} \prec 0$, définie par la relation :

$$\max_j \left\{ a_{jj}(.) + \sum_{j \neq i} \left| a_{ij}(.) \right| \right\} \leq -\varepsilon \tag{I.78}$$

La sommation des termes de la matrice A^*, précédemment définie, s'effectue alors en colonne.

Lorsqu'il n'y a pas stabilité illimitée, il vient qu'il existe $\varepsilon \succ 0$ tel que

$$D_N = \left\{ x, \max_j \left\{ a_{jj}(.) + \sum_{j \neq i} \left| a_{ij}(.) \right| \right\} \leq (-\varepsilon) \right\}, \tag{I.79}$$

et le domaine de stabilité correspond à la plus grande équipotentielle $v(x) = cte$ comprise dans D_N

I.5. Détermination des attracteurs - Position du problème

I.5.1. Objectif

En cas de modèle complexe et/ou incertain ou perturbé, il n'est pas toujours possible de conclure directement relativement à l'existence d'un point d'équilibre d'un processus. Il convient alors, compte tenu des informations dont nous disposons, de choisir la description la mieux adaptée à notre étude pour conclure à la stabilité ou, si le processus est localement instable, de déterminer un attracteur majorant de l'erreur par rapport à l'objectif de façon la plus précise possible.

I.5.2. Mise en œuvre de la méthode

Pour illustrer l'approche proposée pour la détermination d'attracteurs, considérons le système (S) décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \cos x_1 - 6\text{sat}x_1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 \cos x_2 + (2e^{-x_1^2} - 4)x_2 \end{aligned} \tag{I.80}$$

ou matriciellement, dans l'espace d'état, par :

$$\dot{x} = A(x,t)x + B(x,t)$$

avec :

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & \cos x_1 \\ 2\cos x_2 & -4 + 2e^{-x_1^2} \end{bmatrix} \tag{I.81}$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} 6\text{sat}x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{I.82}$$

tel que :

$$\begin{aligned} &x_i \in \Re \,/\, \text{sat}\, x_i = x_i, \text{si}\, |x_i| \prec 1, \\ &\text{sat}\, x_i = \text{signe}\, x_i, \text{sinon.} \end{aligned} \tag{I.83}$$

Cette représentation conduit, pour x= 0, à la matrice :

$$A(0)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix};\ B(0)=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{I.84}$$

Ce qui conduit à l'instabilité de l'origine.

Alors, on va chercher une autre représentation de la forme :

$$\dot{x}=A(x)x$$

avec :

$$A(x)=\begin{bmatrix}1-\dfrac{6\text{sat}x_1}{x_1} & \cos x_1\\ 2\cos x_2 & -4+2e^{-x_1^2}\end{bmatrix} \tag{I.85}$$

Il vient, à l'origine, la matrice :

$$A(0)=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix} \tag{I.86}$$

qui montre que le système est localement stable

- pour $|x_1|\prec 1,\quad \dfrac{\text{sat}x_1}{x_1}=1$ (I.87)
- pour $1\prec|x_1|\prec\alpha,\quad \dfrac{\text{sat}x_1}{x_1}\succ\dfrac{1}{\alpha}$ (I.88)

Il vient, dans ce cas, en prenant la norme vectorielle :

$$p(x)=|x|$$

avec la notation :

$$|x|\overset{\Delta}{=}\left[|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\right]^T$$

-pour la première condition du stabilité $|x_1|\prec 1,\quad \dfrac{\text{sat}x_1}{x_1}=1$, la matrice majorante est de la forme :

$$M=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix} \tag{I.89}$$

le système (I.80) est stable si :

$$\begin{cases} -5 \prec 0 \\ \det(M) \succ 0 \Rightarrow 5\times 2 - 2\times 1 \succ 0 \Rightarrow 8 \succ 0 \end{cases} \tag{I.90}$$

- pour la deuxième condition du stabilité $1 \prec |x_1| \prec \alpha$, $\dfrac{\text{sat}x_1}{x_1} \succ \dfrac{1}{\alpha}$, la majorante est de la forme :

$$M = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{6}{\alpha} & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \tag{I.91}$$

Il vient quele système de comparaison est décrit par :

$$\dot{z} = Mz \tag{I.92}$$

Le système (I.80)est stable si le système de comparaison est stable, soit :

$$\begin{cases} 1-\dfrac{6}{\alpha} \prec 0 \Rightarrow \alpha \prec 6 \\ \det(M) \succ 0 \Rightarrow -2(1-\dfrac{6}{\alpha}) - 2 \succ 0 \Rightarrow \alpha \succ 3 \end{cases} \tag{I.93}$$

Soit la fonction $v(x) = \max_i |x_i|$, il vient pour le domaine de stabilité vis à vis des conditions initiales de la figure I.6.

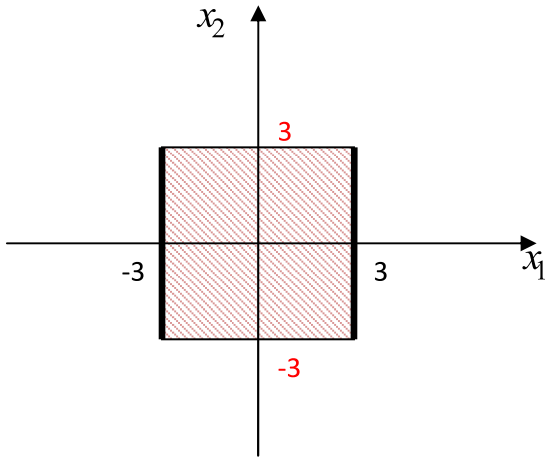


Figure I.6. Zone d'attraction du système

CONCLUSION

Il apparaît, ainsi qu'il a été montré sur l'exemple traité, que le choix de la représentation s'avère particulièrement important pour l'étude de la stabilité et ceci indépendamment des changements de base qu'il est possible d'effectuer après avoir choisi la représentation initiale. Au niveau de la norme vectorielle utilisée pour définir le système de comparaison, il est préférable de la choisir la plus simple possible et de reporter la possibilité d'adaptation sur le choix de la représentation d'état initiale.

CHAPITRE II

DETERMINATION DES ATTRACTEURS POUR LES SYSTEMES CONTINUS NON LINEAIRES

CHAPITRE II

DETERMINATION DES ATTRACTEURS POUR LES SYSTEMES CONTINUS NON LINEAIRES

Sommaire

INTRODUCTION……49

II.1. Représentations et méthodes d'étude de la stabilité des systèmes continus non linéaires……...49
II.1.1. Introduction.……49
II.1.2. Critère pratique de Borne et Gentina.……50
II.2. Attracteurs et zones d'attraction.....……51
II.2.1. Stabilité asymptotique globale d'un point d'équilibre : Système Majorant Homogène (SMH) linéaire……...51
II.2.2. Stabilité asymptotique globale d'un point d'équilibre : Système Majorant Homogène (SMH) non linéaire..……...52
II.2.3. Stabilité asymptotique globale d'un attracteur : Système Majorant Non Homogène (SMNH) linéaire……52
II.2.4. Stabilité asymptotique locale d'un attracteur : Système Majorant Non Homogène (SMNH) linéaire local.……...……...53
II.3. Nouvelle approche de stabilisation de systèmes continus non linéaires. Détermination des attracteurs……53
II.3.1. Détermination des attracteurs emboîtés.……..……...54
II.3.1.1.Position du problème……..……54
II.3.1.2. Mise en œuvre de la méthode……...……56
II.3.1.3. Conclusion.……...……60
II.3.2.Etude de stabilité des systèmes non linéaires par diagonalisation des matrices caractéristiques autour d'un point de fonctionnement…..……60
II.3.2.1. Linéarisation d'un système non linéaire……...60
II.3.2.2. Linéarisation autour d'un point de fonctionnement…….61
II.3.2.3. Stabilité des systèmes non linéaires par diagonalisation de le matrice caractéristique instantanée…….....62
II.3.2.3.1. Introduction...……..……..62
II.3.2.3.2. Méthode proposée…..…….63

II.3.2.3.3. Exemple d'application……..66
II.4. Etude de stabilité des systèmes non linéaires caractérisés par une matrice de forme en flèche de Benrejeb……..……...74
II.4.1. Détermination d'attracteurs pour les matrices de la forme en flèche……74
II.4.2. Exemple d'application……...79

CONCLUSION…….88

INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est de définir une procédure permettant de déterminer les attracteurs de processus, éventuellement localement instables, en définissant des représentations adéquates des systèmes non linéaires étudiés.

La première partie de ce chapitre traite l'étude de la stabilité, en utilisant les techniques d'agrégation à partir de l'utilisation des normes vectorielles pour déterminer une suite d'attracteurs emboîtés pour les systèmes continus non linéaires. Un exemple d'un système continu complexe du second ordre est considéré pour illustrer l'efficacité de l'approche proposée.

La deuxième partie de ce chapitre présente une approche permettant l'étude de stabilité des systèmes non linéaires et la détermination de domaines d'attraction par diagonalisation des matrices caractéristiques autour de points de fonctionnement. Celle-ci est menée par majoration en exploitant les techniques d'agrégation et le choix de représentations adéquates des systèmes. La mise en œuvre à un système complexe non linéaire du troisième ordre est proposée pour montrer l'efficacité de cette approche.

La dernière partie de ce chapitre exploite les différentes propriétés des matrices de forme en flèche mince et les techniques d'agrégation pour la détermination de la stabilité d'un système continu non linéaire. Cette approche, illustrée par l'étude d'un système du troisième ordre et de son domaine d'attraction, s'avère particulièrement intéressante lorsque le processus n'est pas diagonalisable localement.

II.1. Représentations et méthodes d'étude de la stabilité des systèmes continus nonlinéaires

II.1.1. Introduction

Pour les systèmes complexes d'ordre élevé, généralement décrits dans l'espace d'état, les conditions de stabilité sont obtenues, pour l'ensemble du système ou pour les sous-systèmes interconnectés [GEN 79], [GEN 72], [GRU 73], [SIL 72]. L'influence du choix de la description d'état et de la matrice caractéristique, sur la détermination du domaine de stabilité

apparaît fondamentaldans la mise en œuvre des critères de stabilité basés sur les travaux de Borne et Gentina [BOR 90], [GEN 79], [GEN 72], [GRU 78], [GRU 76], avec l'utilisation des normes vectorielles et la définition de systèmes de comparaison pour les processus complexes [BEN 80], [BOR 96], [BOR 90].

II.1.2. Critère pratique de Borne et Gentina [GEN 79], [GRU 76], [GRU 72]

Considérons le système continu non linéaire défini dans l'espace d'état par :

$$\dot{x} = A(x)x \tag{II.1}$$

A étant une matrice de dimension $n \times n$, à éléments non constants, $A = \{a_{i,j}\}$, et x le vecteur d'état, $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Si la matrice caractéristique $M(A)$, définie par :

$M(A(.)) = \{m_{i,j}(.)\}$

$$\begin{cases} m_{i,i} = a_{i,i} & \forall i = 1,2,\ldots n \\ m_{i,j} = |a_{i,j}| & \forall i \neq j \end{cases} \tag{II.2}$$

a ses éléments non constants isolés dans une seule ligne ou une seule colonne, l'application du lemme de Kotelyanski à cette matrice, permet de conclure à la stabilité du système(II.1).

Ce critère, utilisant les techniques d'agrégation adaptées à l'étude des systèmes de grande dimension, est basé sur le choix d'une norme vectorielle $p(x)$telle que: $p(x) = [|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|]^T$. En pratique, ce critère est vérifié si les n inégalités suivantes sont satisfaites :

$$a_{1,1} \prec 0, \begin{vmatrix} a_{1,1} & |a_{1,2}| \\ |a_{2,1}| & a_{2,2} \end{vmatrix} \succ 0, \ldots, (-1)^n \begin{vmatrix} a_{1,1} & |a_{1,2}| & \ldots & |a_{1,n}| \\ |a_{2,1}| & a_{2,2} & \ldots & |a_{2,n}| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ |a_{n,1}| & |a_{n,2}| & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \succ 0 \tag{II.3}$$

II.2. Attracteurs et zones d'attraction

Depuis plus de quarante ans, les attracteurs jouent un rôle très important pour les systèmes dynamiques. L'utilisation des normes vectorielles et des techniques d'agrégation et de majoration conduit à la généralisation des énoncés concernant la stabilité globale ou locale des ensembles d'attracteurs, [BHA 67a],[BHA 67b], [BHA 70].

II.2.1. Stabilité asymptotique globale d'un point d'équilibre : Système Majorant Homogène (SMH) linéaire [BOR 72],

Soit le système dont l'évolution est décrite par la relation :

$$\dot{x} = f(t, x, \sigma) \tag{II.4}$$

$$f : \delta_0 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \delta_0 = \left[t_0, +\infty\right]$$

avec σ vecteur des paramètres de perturbation sur l'état ou le modèle.

Théorème1 : S'il est possible de définir un système majorant homogène linéaire de (II.4) sur $\mathbb{R}^n$, relatif à une norme vectorielle p régulière :

$$D^+ p(x) \le Mp(x), \forall (t, x) \in \delta_0 \times \mathbb{R}^n \tag{II.5}$$

avec M une matrice constante opposée d'une M-matrice, (ou encore vérifiant les conditions de Kotelyansky) [GRU 76], le point d'équilibre $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

- Si en plus $(M + \varepsilon I_k)$ est stable $\forall \varepsilon \succ 0$, alors $x = 0$ est globalement exponentiellement stable (en $e^{-\varepsilon t}$).

II.2.2. Stabilité asymptotique globale d'un point d'équilibre : Système Majorant Homogène (SMH) non linéaire

Théorème2 [GRU 76]: S'il est possible de définir un système majorant homogène non linéaire et/ou non-stationnaire de (II.4) sur $\mathbb{R}^n$ relatif à une norme vectorielle p régulière :

$$D^+ p(x) \le M(t,x)\, p(x), \forall (t,x) \in \delta_0 \times \mathbb{R}^n \tag{II.6}$$

avec $M(t,x)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $M(t,x)$ est irréductible, $\forall (t,x) \in \delta_0 \times \mathbb{R}^n$;
2. $\exists \varepsilon \succ 0$ tel que $(M(t,x) + \varepsilon I_k)$ est l'opposée d'une M-matrice ;
3. les éléments non constants de $M(t,x)$ sont regroupés dans une seule et même rangée (ligne ou colonne) ;

alors $x = 0$ est globalement exponentiellement stable pour (II.4) (en $e^{-\varepsilon t}$).

II.2.3. Stabilité asymptotique globale d'un attracteur : Système Majorant Non Homogène (SMNH) linéaire

Théorème 3 [BOR 90] : S'il est possible de définir un système majorant non homogène linéaire stationnaire de (II.4) sur $\mathbb{R}^n$, relatif à une norme vectorielle p régulière, de la forme :

$$D^+ p(x) \le Mp(x) + N, \forall (t,x) \in \delta_0 \times \mathbb{R}^n \tag{II.7}$$

où la matrice constante M est l'opposée d'une M-matrice, et N un vecteur constant positif, alors il existe un attracteur L, asymptotiquement stable défini par :

$$\mathrm{L} = \left\{ x \in \Re^n ; p(x) \le -M^{-1}N \right\} \tag{II.8}$$

II.2.4. Stabilité asymptotique locale d'un attracteur : Système Majorant Non Homogène (SMNH) linéaire local

Théorème4 : Supposons qu'il soit possible de définir un système majorant non homogène stationnaire de (II.4) sur un voisinage $S \subset \mathbb{R}^n$ de l'origine $x = 0$, relatif à une norme vectorielle p régulière :

$$D^+ p(x) \leq Mp(x) + N, \forall (t, x) \in \delta_0 \times S \tag{II.9}$$

où la matrice constante M est l'opposée d'une M-matrice, et N un vecteur constant positif.

avec : $$\mathrm{L} = \left\{ x \in \Re^n ; p(x) \leq -M^{-1}N \right\} \subset S \tag{II.10}$$

Soit $V_m(S)$ le vecteur propre principal de M^T ,associé à sa valeur propre principale $\lambda_m(S)$.

On pose :

$$D = \left\{ x \in \Re^n ;\ V_m^T(S)\, p(x) \leq \alpha \right\}, D \subset S, \tag{II.11}$$

α étantune constante positive telle que L est inclus dans D.

Alors, il existe un attracteur asymptotiquement stable $\mathrm{L}_0 \subset \mathrm{L}$ de (II.4). De plus, D est une estimation de la région d'attraction de L, c'est-à-dire que toute trajectoire, issue de D à $t = t_0$, aboutit dans L.

Si $S = \mathbb{R}^n$, la propriété est globale.

II.3. Nouvelle approche de stabilisation de systèmes continus non linéaires. Détermination des attracteurs

Dans plusieurs domaines comme en industrie, la stabilité des systèmes non linéaires et la connaissance de leurs domaines de stabilité sont des propriétés très importantes à déterminer.

De nombreux travaux ont été effectués sur la recherche des domaines de stabilité; parmi les premiers résultats trouvés, on peut citer ceux de LaSalle et Lefschetz [LAS 61] concernant l'estimation des domaines de stabilité en utilisant une fonction de Lyapunov ainsi que ceux de Zubov qui donnent une approximation des domaines d'attraction [ZUB 64], [KAS 04]. .

II.3. 1. Détermination des attracteurs emboîtés [GHA 13a]

II.3.1.1.Position du problème

Cette étude traite de la détermination des attracteurs et des domaines d'attraction des systèmes non linéaires continus, par majoration à partir des techniques d'agrégation pour l'étude de la stabilité et par le choix de représentations adéquates des systèmes étudiés. La technique d'agrégation par l'utilisation des normes vectorielles permet de déterminer les systèmes de comparaison d'un modèle complexe non linéaire et / ou non stationnaire ainsi que linéaire d'un processus donné.

L'étude de la stabilité de ce système de comparaison permet de conclure facilement à la stabilité du processus initial et de définir des domaines d'attraction. Lorsque le système est localement instable, la mise en œuvre de systèmes de comparaison permet de déterminer un attracteur du système étudié dans un domaine d'attraction donné. Le travail présenté ci-dessous constitue une approche qui permet de vérifier la qualité de la loi de commande d'un processus dont l'évolution est décrite par l'équation de l'état à partir des informations accessibles sur le processus et son évolution souhaitée.

Méthode proposée

On considère le processus (S) dont l'évolution est régie par le système d'équations différentielles suivant :

$$S: \dot{x}(t) = f(x,t) \tag{II.12}$$

Pour le processus dont l'évolution est décrite par la relation de la forme (II.12), il convient de déterminer, dans le domaine d'évolution envisagé (D_1), une description de la forme :

$$\dot{x}(t) = A(x(t),t)x(t) + B(x(t),t) \tag{II.13}$$

$x(t)$ étant un vecteur du domaine D_1 avec $D_1 \subset \Re^n$, $A(x(t),t)$ une matrice $n \times n$ et $B(x(t),t)$ un vecteur d'ordre n à éléments pouvant être non constants.

A partir de la représentation (II.13) du système (II.12), nous allons étudier sa stabilité et déterminer une estimation de l'attracteur en utilisant les techniques d'agrégation.

Il s'agit d'abord d'élaborer un système de comparaison tel que sa matrice caractéristique instantanée, soit l'opposée d'une M-matrice.

Pour une norme vectorielle $p(x) = \left[|x_1|,|x_2|\ldots,|x_n|\right]^T$, il vient le système de comparaison suivant :

$$z \in \mathbb{R}^n \;/\; \dot{z}(t) = M(.)z(t) + N \tag{II.14}$$

avec :

$$p(x) \leq z$$

Si M et N sont constants et si M est l'opposée d'une M-matrice et N un vecteur positif, alors il existe un attracteur L asymptotiquement stable tel que :

$$\mathrm{L} = \left\{ x \in \Re^n ; p(x) \leq -M^{-1}N \right\} \tag{II.15}$$

En effet, si $z(t_0) \geq p(x_0)$, il vient :

$$z(t) \geq p(x(t)) \tag{II.16}$$

$\forall t \in \tau_0 = \left[t_0 ; +\infty\right]$;

$$\text{et : } \lim_{t \to +\infty} p(x) \leq \lim_{t \to +\infty} z = -M^{-1}N \tag{II.17}$$

Si le domaine D_2 défini par (II.17) est inclus dans D_1, D_2 est un attracteur du système.

Il convient, dans ce cas, de trouver une nouvelle description de système (II.12), pouvant être différente, et de recommencer l'étude de majoration pour $x \in D_2$.

Cette approche peut être réalisée plusieurs fois jusqu'à obtenir une estimation de l'attracteur la plus petite possible du vecteur état x, qui peut se réduire à 0 si le système est stable.

II.3.1.2. Mise en œuvre de la méthode

Pour illustrer l'approche proposée pour la détermination des attracteurs, considérons le système (S) défini par (II.13) tel que:

$$A\left(x(t)\right)=\begin{bmatrix}-3-x_1^2 & 0.3+\text{sat}x_2\\ \sin x_1x_2 & -1+0.1\cos x_1\end{bmatrix} \tag{II.18}$$

$$B\left(x(t)\right)=\begin{bmatrix}-\text{sat}x_1\\ 0.1+0.2\sin x_1\end{bmatrix} \tag{II.19}$$

avec la notation :

$\text{sat}\, x_i = x_i, si\ |x_i| \prec 1$, et $\text{sat}\, x_i = \text{signe}\, x_i, \text{sinon.}$

Au départ, on pose que le domaine d'attraction D_1 est tel que : $D_1 = \Re^n$

Etape1: Détermination de l'attracteur D_2 à partir de D_1

La convergence des trajectoires vers un attracteur est étudiée avec la norme vectorielle :

$$p(x)=\left[|x_1|,|x_2|\right]^T$$

Il vient le système majorant défini par :

$$M(A\left(x(t)\right))=\begin{bmatrix}-3-x_1^2 & |0.3+\text{sat}x_2|\\ |\sin x_1x_2| & -1+0.1\cos x_1\end{bmatrix} \tag{II.20}$$

et :

$$N(B\left(x(t)\right))=\begin{bmatrix}|-\text{sat}x_1|\\ |0.1+0.2\sin x_1|\end{bmatrix} \tag{II.21}$$

et le nouveau système majorant décrit par :

$$\dot{z}=\begin{bmatrix}-3 & 1.3\\ 1 & -0.9\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}1\\ 0.3\end{bmatrix} \tag{II.22}$$

Avec la vérification des conditions de stabilité :

$$\begin{cases} -(-3) \succ 0 \\ (-1)^2 \det M \succ 0 \end{cases}$$

Il vient de (II.16) et (II.17) :

$$z_\infty = \begin{bmatrix} 0.9214 \\ 1.3571 \end{bmatrix} \geq \lim_{t \to +\infty} \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{bmatrix}$$

Par conséquent, l'attracteur, correspondant à $D_2 \subset D_1$, est défini par :

$$D_2 = \left\{ x, |x_1| < 0.9214 \ , |x_2| < 1.3571 \right\} \tag{II.23}$$

Etape 2: Détermination de l'attracteur D_3

Une nouvelle description du système (S) peut être définie, dans D_2, par une description de la forme (II.24).En effet, sachant que

$|x_1| \prec 0.921 \Rightarrow \text{sat}\, x_1 = x_1$

la description devient :

$$A\left(x(t)\right) = \begin{bmatrix} -4 - x_1^2 & 0.3 + \text{sat}x_2 \\ \sin x_1 x_2 & -1 + 0.1 \cos x_1 \end{bmatrix} \tag{II.24}$$

et :

$$B\left(x(t)\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 + 0.2 \sin x_1 \end{bmatrix} \tag{II.25}$$

alors le nouveau système majorant est caractérisé par :

$$M\left(A\left(x(t)\right)\right) = \begin{bmatrix} -4 - x_1^2 & |0.3 + \text{sat}x_2| \\ |\sin x_1 x_2| & -1 + 0.1 \cos x_1 \end{bmatrix} \tag{II.26}$$

$$N(B(x(t))) = \begin{bmatrix} 0 \\ |0.1 + 0.2\sin x_1| \end{bmatrix} \tag{II.27}$$

avec :

$$|x| \le \begin{bmatrix} 0.9214 \\ 1.3571 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, on peut facilement obtenir le système de comparaison linéaire de la forme(II.14) de telle sorte que l'ont ait :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -4 & 1.3 \\ 0.95 & -0.9 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.260 \end{bmatrix} \tag{II.28}$$

Il vient de (II.16) et (II.17) :

$$z_\infty = \begin{bmatrix} 0.1429 \\ 0.4397 \end{bmatrix} \ge \lim_{t \to +\infty} \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{bmatrix}$$

Par conséquent, l'attracteur, correspondant à $D_3 \subset D_2$, est défini par :

$$D_3 = \{x, |x_1| < 0.1429 \ , |x_2| < 0.4397\} \tag{II.29}$$

Dans ce domaine D_3, nous répétons l'approche de comparaison pour déterminer un nouvel attracteur en tenant compte des conditions imposées :

$$|x| \le \begin{bmatrix} 0.1429 \\ 0.4397 \end{bmatrix}$$

Etape3 : Détermination de l'attracteur D_4

Le domaine D_3 est défini par :

$$|x| \le \begin{bmatrix} 0.1429 \\ 0.4397 \end{bmatrix}$$

dans lequel on a :

$\text{sat}\, x_2 = x_2$ puisque $|x_2| \leq 0.4397$

Le système de comparaison correspondant peut s'écrire selon (II.14):

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -4 & 0.738 \\ 0.063 & -0.9 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.130 \end{bmatrix} \tag{II.30}$$

Comme M est l'opposée d'une M-matrice, il vient :

$$z_\infty = \begin{bmatrix} 0.027 \\ 0.146 \end{bmatrix} \geq \lim_{t \to +\infty} \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{bmatrix}$$

et l'attracteur D_4 est défini par :

$$D_4 = \{x, |x_1| < 0.027 \ , |x_2| < 0.146\} \tag{II.31}$$

Les divers attracteurs et l'évolution des variables d'état du système sont présentés dans la figure II.1.

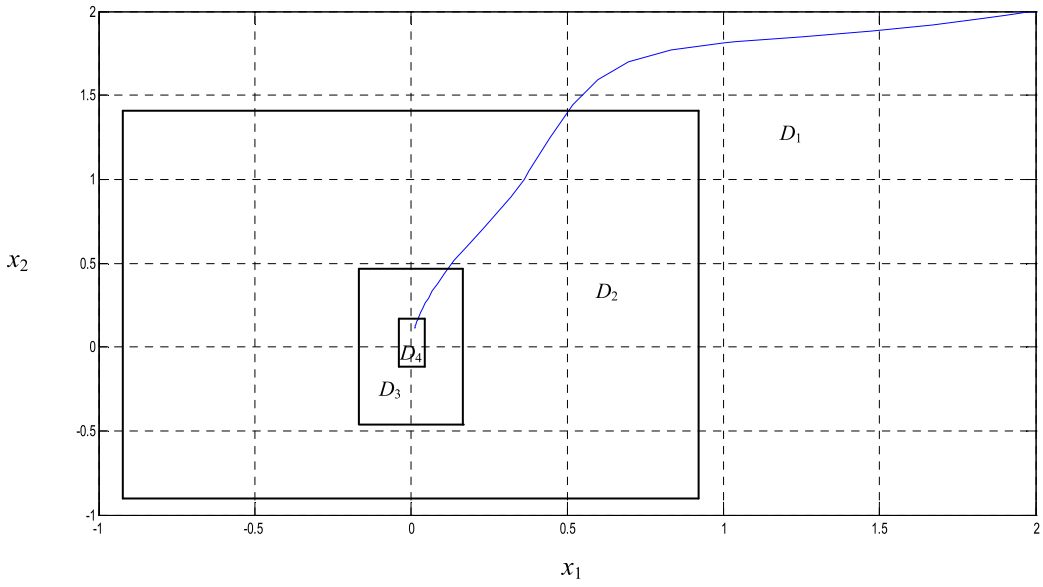


Fig. II.1 : Attracteurs emboîtés D_1, D_2, D_3 et D_4 et évolution des variables d'état du système

II.3.1.3. Conclusion

Pour les systèmes stables, l'attracteur peut être réduit à l'origine. L'exemple étudié a montré l'efficacité de la procédure proposée. Cette méthode permet de tester la précision d'un système contrôlé en fournissant un système de comparaison pour majorer l'erreur par rapport à la consigne.

II.3.2.Etude de stabilité des systèmes non linéaires par diagonalisation des matrices caractéristiques autour d'un point de fonctionnement [CHA 13b]

II.3.2.1.Linéarisation d'un système non linéaire

Soit le processus dont l'évolution est régie par les relations :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) \\ y &= h(x,u) \end{aligned} \tag{II.32}$$

avec f et h des fonctions non linéaires de x et u :

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n,u) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n,u) \end{bmatrix} \tag{II.33}$$

Soit le modèle mathématique de (II.32) de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{II.34}$$

A étant une matrice de dimension $n\times n$, B de dimension $n\times 1$, Cde dimension 1×n, et D un scalaire.

Bien que pratiquement tout système physique comporte des non-linéarités, il s'avère que souvent son comportement dans une certaine plage de fonctionnement au voisinage d'un point donné peut être raisonnablement approché par un modèle linéaire. Une des raisons pour approximer le système non linéaire (II.32) par un modèle linéaire de la forme (II.34) est qu'il est possible d'appliquer d'une manière simple et systématique des techniques de conception

de contrôle linéaire. Il faut, toutefois, garder à l'esprit qu'un modèle linéarisé n'est valable que lorsque le système fonctionne dans une plage suffisamment petite autour d'un point donné.

Des outils plus sophistiqués sont nécessaires afin de tenir compte de la présence de non-linéarités.

II.3.2.2. Linéarisation autour d'un point de fonctionnement

Étant donné un système non linéaire (II.32) et un point d'équilibre $x_l = \begin{bmatrix} x_{l1} & \dots x_{ln} \end{bmatrix}^T$ obtenu lorsque $u = u_l$, nous définissons un changement de coordonnées comme suit.

Notons $\Delta x = x - x_l$:

$$\Delta x = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_{l1} \\ \vdots \\ x_n - x_{ln} \end{bmatrix} \tag{II.35}$$

$\Delta u = u - u_l$ et $\Delta y = y - h(x_l, u_l)$, les nouvelles variables Δx, Δu, et Δy représentant les variations de x, u, et y autour de leurs valeurs d'équilibre. La linéarisation (II.32) pour x_l conduit aux relations :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y &= C\Delta x + D\Delta u \end{aligned} \tag{II.36}$$

avec :

$$A = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x_l, u_l} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_{l1}, \dots, x_{ln}, u_l) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_{l1}, \dots, x_{ln}, u_l) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_{l1}, \dots, x_{ln}, u_l) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_{l1}, \dots, x_{ln}, u_l) \end{bmatrix}$$

$$B = \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{x_l,u_l} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x_{l1},\ldots,x_{ln},u_l) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u}(x_{l1},\ldots,x_{ln},u_l) \end{bmatrix}$$

$$C = \left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]_{x_l,u_l} = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_{l1},\ldots,x_{ln},u_l), \quad \ldots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n}(x_{l1},\ldots,x_{ln},u_l)\right]$$

et $D = \left[\frac{\partial h}{\partial u}\right]_{x_l,u_l}$

II.3.2.3. Stabilité des systèmes non linéaires par diagonalisation de le matrice caractéristique instantanée

II.3.2.3.1. Introduction

La stabilité, le domaine de stabilité et l'attracteur en cas d'instabilité locale des systèmes sont des propriétés importantes à déterminer. Dans la pratique, il n'est souvent pas suffisant pour prouver la stabilité asymptotique locale d'un point d'équilibre ou d'un attracteur, et il est également nécessaire de connaître l'étendu du domaine de stabilité ou d'attraction.

Dans cette partie, est présentée une stratégie destinée à étudier la stabilité des systèmes dynamiques continus non linéaires selon le choix de la représentation matricielle et par diagonalisation des matrices caractéristiques autour de points de fonctionnement.

En fait, la diagonalisation locale est une méthode classique qui a été utilisée pour simplifier l'étude dans de nombreux domaines des mathématiques.

Les matrices les plus faciles à manipuler sont les matrices diagonales. En effet, les déterminants sont simples à calculer, les valeurs propres sont les éléments diagonaux et les vecteurs propres sont des éléments de la base standard. Bien que la plupart des matrices ne soient pas diagonales, beaucoup sont diagonalisables, c'est à dire semblables à une matrice diagonale.

II.3.2.3.2. Méthode proposée

Dans cette section, nous présentons une approche permettant l'étude de stabilité des systèmes non linéaires et la détermination des attracteurs par diagonalisation des matrices caractéristiques autour de points de fonctionnement, suivie d'une majoration exploitant les techniques d'agrégation et par le choix de représentations adéquates des systèmes étudiés.

Considérons le processus (S) dont l'évolution est régie par le système d'équations différentielles (II.13).

Nous allons étudier la stabilité de ce dernier et déterminer le domaine d'attraction en utilisant directement les techniques d'agrégation.

Il s'agit d'abord d'élaborer un système de comparaison tel que sa matrice caractéristique instantanée, soit l'opposée d'une M-matrice.

Pour une norme vectorielle $p(x) = \left[|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right]^T$, il vient le système de comparaison (II.14), les éléments $m_{i,j}$ de la matrice M étant tels que :

$$\begin{cases} m_{i,i} = \max a_{i,i} & \forall i = 1, 2, \ldots n \\ m_{i,j} = \max \left| a_{i,j} \right| & \forall i \neq j \end{cases}$$

les éléments de la matrice $A(.)$ étant notés $a_{ij}(.)$ et le vecteur N défini à partir de B par :

$$N = \max \left| B(x(t)) \right| \tag{II.37}$$

Si Met N sont constantes, M étant l'opposée d'une M-matrice, alors il existe un attracteur L asymptotiquement stable tel que :

$$\mathrm{L} = \left\{ x \in \Re^n ; p(x) \leq -M^{-1} N \right\} \tag{II.38}$$

avec :

$$z(t) \geq p(x(t)) \tag{II.39}$$

$\forall t \in \tau_0 = [t_0; +\infty]$;

pour $t \to +\infty$; si $z(t_0) \geq p(x(t_0))$

on a : $$\lim_{t \to t_0} z(t) = -M^{-1}N \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to +\infty} p(x) \leq -M^{-1}N \tag{II.40}$$

Après avoir déterminé une estimation de l'attracteur en appliquant directement, sur la représentation initiale, les techniques d'agrégation, il est intéressant maintenant d'en déterminer une nouvelle estimation à partir d'une représentation telle que la matrice caractéristique instantanée définie autour d'un point de fonctionnement soit diagonale. Le résultat obtenu est à comparer avec le précédent pour mettre en exergue l'intérêt de l'approche par diagonalisation par rapport à l'approche directe.

- **Choix de la représentation du système**

Pour déterminer le domaine d'attraction pour ce système non linéaire, nous proposons de passer par la méthode de diagonalisation.

Pour cette étude, il faut tout d'abord trouver le système linéarisé (S') de (S) défini autour du point de fonctionnement x_0=0 :

$$\text{(S')} : \dot{x}_l = A(x_0)x_l + B(x_0) \tag{II.41}$$

Si A est diagonalisable alors il existe une matrice de passage *P* inversible, relative au point de fonctionnement x_0, telle que :

$$\mathrm{D} = P^{-1}A(x_0)P \tag{II.42}$$

D étant une matrice diagonale.

Posons :

$$x = Py \text{ ou } y = P^{-1}x \tag{II.43}$$

y étant le vecteur état de processus dans la nouvelle base.

Il vient :

$$\dot{y} = P^{-1}A(x(t))Py + P^{-1}B(x(t)) = \mathrm{D}(x(t))y + P^{-1}B(x(t)) \qquad \text{(II.44)}$$

Les éléments de la matrice $\mathrm{D}(x(t))$ qui n'est plus diagonale sont notés $d_{ij}(.)$.

- **<u>Détermination de l'attracteur par la méthode de diagonalisation des matrices caractéristiques</u>**

A partir de la représentation (II.34) du système (II.32), nous allons étudier sa stabilité et déterminer son attracteur en utilisant les techniques d'agrégation.

Il s'agit d'élaborer un système de comparaison tel que sa matrice caractéristique instantanée, soit l'opposée d'une M-matrice.

Pour une norme vectorielle $p(y) = \left[|y_1|, |y_2| \ldots, |y_n|\right]^T$, il vient le système de comparaison suivant :

$$z \in \mathbb{R}^n \;/\; \dot{z} = M_d z + N_d \qquad \text{(II.45)}$$

les éléments $m_{i,j}$ de la matrice M_d étant tels que :

$$\begin{cases} m_{i,i} = \max d_{i,i} & \forall i = 1,2,\ldots n \\ m_{i,j} = \max \left| d_{i,j} \right| & \forall i \neq j \end{cases}$$

et le vecteur N est défini à partir de B par :

$$N_d = \max \left| P^{-1}B(x(t)) \right| \qquad \text{(II.46)}$$

Si M_d et N_d sont constantes et si M_d est l'opposée d'une M-matrice, alors il existe un attracteur L asymptotiquement stable tel que:

$$\mathrm{L} = \left\{ x \in \Re^n ; p(x) \leq -M_d^{-1} N_d \right\} \qquad \text{(II.47)}$$

En effet, si $z(t_0) \geq p(x_0)$, il vient :

$$z(t) \geq p(y) \qquad \text{(II.48)}$$

$\forall t \in \tau_0 = [t_0; +\infty]$ et :

$$\lim_{t \to +\infty} p(y) \leq \lim_{t \to \infty} z = -M_d^{-1} N_d \tag{II.49}$$

II.3.2.3.3. Exemple d'application

On considère le processus dont l'évolution est décrite par l'équation :

$$(S): \quad \dot{x}(t) = A(x,t)x(t) + B(x,t)x(t) \tag{II.50}$$

avec :

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{II.51}$$

et :

$$a_{11} = 4\text{sat}x_1 \cos t - 2\cos x_2 - 8.5$$
$$a_{12} = 0.08\cos x_1 - 0.16\sin x_3 + 0.04\text{sat}x_1 \cos t - 0.08$$
$$a_{13} = 0.08\cos x_1 - 0.16\sin x_3 + 0.24\text{sat}x_1 \cos t - 0.08$$
$$a_{21} = 0.1\cos x_3 - 0.15\frac{x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2}\sin x_1 - 0.1$$
$$a_{22} = 0.2e^{-x_1^2} - 0.18e^{-x_2^2} + 1.2\sin x_3 - 0.8\sin x_1 \cos t + 1.2\cos x_3 e^{-x_2^2} - 4.62$$
$$a_{23} = 1.2e^{-x_1^2} - 1.08e^{-x_2^2} + 1.2\sin x_3 - 4.8\sin x_1 \cos t + 1.2\cos x_3 e^{-x_2^2} + 2.28$$
$$a_{31} = -0.1\cos x_3 - 0.025\frac{x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2}\sin x_1 + 0.1$$
$$a_{32} = -0.2e^{-x_1^2} + 0.03e^{-x_2^2} - 0.2\sin x_3 + 0.8\sin x_1 \cos t - 0.2\cos x_3 e^{-x_2^2} - 0.23$$
$$a_{33} = -1.2e^{-x_1^2} + 0.18e^{-x_2^2} - 0.2\sin x_3 + 4.8\sin x_1 \cos t - 0.2\cos x_3 e^{-x_2^2} - 6.38$$

$$B(x(t)) = \begin{bmatrix} 0.5 + \sin x_1 \\ 0.4 + \cos x_1 \\ 0.5\text{sat}x_1 + 0.3 \end{bmatrix} \tag{II.52}$$

sachant que :

$\text{sat}\, x_i = x_i, si\, |x_i| \prec 1, \text{sinon} \;\; \text{sat}\, x_i = \text{signe}\, x_i$

avec : $D_1 = \Re^n$

- **Détermination directe de l'attracteur à partir de la représentation initiale**

Prenons la norme vectorielle $p(x)=\left[|x_1|,|x_2|,|x_3|\right]^T$, il vient le système de comparaison suivant :

$$z\in\mathbb{R}^n \;/\; \dot{z}(t)=M(.)z(t)+N$$

avec :

$$M(A(x(t)))=\begin{bmatrix} a_{11} & |a_{12}| & |a_{13}| \\ |a_{21}| & a_{22} & |a_{23}| \\ |a_{31}| & |a_{32}| & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{(II.53)}$$

et :

$$\mathrm{N}(B(x(t)))=\begin{bmatrix} |0.5\sin t| \\ |0.4\cos t| \\ |0.5\mathrm{sat}x_1+0.3| \end{bmatrix} \qquad \text{(II.54)}$$

ou encore :

$$\dot{\mathrm{z}}=\begin{bmatrix} -2.5 & 0.2 & 0.56 \\ 0.275 & -1.22 & 10.68 \\ 0.2125 & 1.63 & -1 \end{bmatrix}\mathrm{z}+\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.8 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.55)}$$

Il vient les conditions de stabilité suivantes :

$$\begin{cases} -2.5\prec 0 \\ 2.5\times 1.22-0.2\times 0.275\succ 0 \\ (-1)^3\det(M)\succ 0 \end{cases}$$

Or, on a : $(-1)^3\det(M)\prec 0$

M n'est donc pas l'opposée d'une M-matrice, et l'attracteur, s'il existe, ne peut être déterminé par cette approche.

On va chercher maintenant à déterminer une estimation de l'attracteur à partir d'une représentation de la matrice caractéristique instantanée qui soit diagonale à l'origine.

- **<u>Détermination de l'attracteur à partir d'une représentation diagonalisant la matrice caractéristique</u>**

Soit le système linéarisé (S') de (S) défini autour du point de fonctionnement x=0:

$$(\text{S'}) : \dot{x}_l = A(0)x_l + B(0)$$

avec :

$$A(0) = \begin{bmatrix} -10.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3.4 & 3.6 \\ 0 & -0.6 & -7.6 \end{bmatrix} \tag{II.56}$$

et :

$$B(0) = \begin{bmatrix} 0.5\sin t \\ 0.4\cos t \\ 0.3 \end{bmatrix} \tag{II.57}$$

Soit P la matrice de passage permettant la diagonalisation de A au point de fonctionnement. choisi.

- *<u>Détermination de P</u>*

Le polynôme $\det(\lambda I - A(0)) = \lambda^3 + 21.5\lambda^2 + 143.5\lambda + 294 = 0$, admet les racines

$$\lambda_1 = -10.5, \quad \lambda_2 = -4 \quad \text{et } \lambda_3 = -7 \tag{II.58}$$

alors :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} ; \text{et } P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0.2 & 1.2 \end{bmatrix} \tag{II.59}$$

avec :

$$\text{D} = P^{-1}A(x_0)P = \begin{bmatrix} -10.5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \tag{II.60}$$

et :

$$\mathrm{D}\left(x(\mathrm{t})\right)=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \tag{II.61}$$

avec :

$$d_{11}=-2\cos x_2+4\mathrm{sat}\,x_1\cos t-8.5$$
$$d_{12}=0.2\sin x_3-0.1(\cos x_1-1)$$
$$d_{13}=0.1\mathrm{sat}\,x_1\cos t$$
$$d_{21}=0.1\frac{x_1x_2}{x_1^2x_2^2}\sin x_1$$
$$d_{22}=-5+e^{-x_2^2}\cos x_3+\sin x_3$$
$$d_{23}=0.3(e^{-x_2^2}-1)$$
$$d_{31}=0.2(1-\cos x_3)$$
$$d_{32}=0$$
$$d_{33}=-6+4\mathrm{sat}\,x_1\cos t-e^{-x_1^2}$$

et :

$$P^{-1}B(x(t))=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{4}\sin t \\ -\dfrac{1}{5}\mathrm{sat}x_1-\dfrac{4}{25}\cos t-\dfrac{3}{25} \\ \dfrac{3}{5}\mathrm{sat}x_1+\dfrac{2}{25}\cos t+\dfrac{9}{25} \end{bmatrix} \tag{II.62}$$

- **<u>Etude de la stabilité et détermination de l'attracteur en utilisant les techniques d'agrégation</u>**

Soit la norme vectorielle $p(y)=\left[|y_1|,|y_2|,|y_3|\right]^T$,il vient le système de comparaison caractérisé par le couple (M_d,N_d) suivant :

$$M_d(x,t) = M(\mathrm{D}(x(\mathrm{t}))) = \begin{bmatrix} d_{11} & |d_{12}| & |d_{13}| \\ |d_{21}| & d_{22} & |d_{23}| \\ |d_{31}| & |d_{32}| & d_{33} \end{bmatrix} \tag{II.63}$$

et :

$$N_d(x,t) = N(P^{-1}B(x(t))) = \begin{bmatrix} \left|\frac{1}{4}\sin t\right| \\ \left|-\frac{1}{5}\mathrm{sat}x_1 - \frac{4}{25}\cos t - \frac{3}{25}\right| \\ \left|\frac{3}{5}\mathrm{sat}x_1 - \frac{2}{25}\cos t + \frac{9}{25}\right| \end{bmatrix} \tag{II.64}$$

dont l'évolution peut être décrite par le système d'équations :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -2.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.05 & -3 & 0.3 \\ 0.4 & 0 & -2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.48 \\ 1.04 \end{bmatrix} \tag{II.65}$$

M_d et N_d étant les majorantes de $M_d(x,t)$ et $N_d(x,t)$, avec les conditions :

$$\begin{cases} -2.5 \prec 0 \\ (-2.5)\times(-3) \; - \; (0.05\times 0.4) \succ 0 \\ (-1)^3 \det(M_d) \succ 0 \end{cases}$$

M_d est l'opposée d'une M-matrice

si $t = t_0$, si $z(t_0) \geq p(y(t_0))$ alors $z(t) \geq p(y(t)) \quad \forall t \succ t_0$

Il existe donc un attracteur L asymptotiquement stable tel que :

$$\mathrm{L} = \left\{ x \in \Re^n ; p(x) \leq -M_d^{-1} N_d \right\}$$

et: $\lim_{t\to+\infty} p(y) \leq \lim_{t\to+\infty} z = -M_d^{-1} N_d$

$$z_\infty = \begin{bmatrix} 0.1569 \\ 0.2178 \\ 0.5514 \end{bmatrix} \geq \lim_{t\to+\infty} \begin{bmatrix} |y_1| \\ |y_2| \\ |y_3| \end{bmatrix} \tag{II.66}$$

Or :

$$y = P^{-1}\, x(t) \tag{II.67}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0.2 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{II.68}$$

$$\lim_{t\to\infty} p(y) \le -M_d^{-1} N_d \tag{II.69}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0.5x_1 \\ -0.4x_2 - 0.4x_3 \\ 0.2x_2 + 1.2x_3 \end{bmatrix} \tag{II.70}$$

Il vient :

$$\lim_{t\to+\infty} p(P^{-1}\, x(t)) \le \begin{bmatrix} 0.1569 \\ 0.2178 \\ 0.5514 \end{bmatrix} \tag{II.71}$$

et le domaine D_2 est : $\begin{cases} |x_1| \le 0.3138 \\ |-x_2 - x_3| \le 0.5445 \\ |x_2 + 6x_3| \le 2.7570 \end{cases}$

D_2 est alors le domaine d'attraction avec : $D_2 \subset D_1$

$$D_2 = \left\{ x, |x_1| \le 0.3138\ , |-x_2 - x_3| \le 0.5445, |x_2 + 6x_3| \le 2.757 \right\} \tag{II.72}$$

On effectue, ensuite, un ensemble de majorations pour déterminer une meilleure estimation de l'attracteur. Pour cela, on recommence l'étude en tenant compte des résultats précédents.

Soit $\text{sat}x_1 = x_1 \le 0.3124$

Il vient :

$$\mathrm{D}\left(x\left(\mathrm{t}\right)\right)=\begin{bmatrix} -2\cos x_2+1.2496\cos t-8.5 & 0.2\sin x_3-0.0048 & 0.0312\cos t \\ 0.1\dfrac{x_1x_2}{x_1^2x_2^2}\sin x_1-\dfrac{0.3124}{5} & -5+e^{-x_2^2}\cos x_3+\sin x_3 & 0.3(e^{-x_2^2}-1) \\ 0.2(1-\cos x_3)+\dfrac{3}{5} & 0 & 6.907+1.2496\cos t \end{bmatrix} \tag{II.73}$$

et :

$$P^{-1}B(x\left(t\right))=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{4}\sin t \\ -\dfrac{4}{25}\cos t-\dfrac{3}{25} \\ \dfrac{2}{25}\cos t+\dfrac{9}{25} \end{bmatrix} \tag{II.74}$$

Après majoration, on trouve le système de comparaison suivant :

$$\dot{z}_1=\begin{bmatrix} -5.2504 & 0.2048 & 0.0312 \\ 0.1125 & -3 & 0.3 \\ 1 & 0 & -5.6574 \end{bmatrix}z_1+\begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.28 \\ 0.44 \end{bmatrix} \tag{II.75}$$

M_d étant l'opposée d'une M-matrice, alors :

$$z(t_0)\geq p(y_0)\ \Rightarrow \lim_{t\to+\infty}p(y)\leq z_\infty=-M_d^{-1}N_d$$

$$z_\infty=\begin{bmatrix} 0.0523 \\ 0.1064 \\ 0.0870 \end{bmatrix}\geq \lim_{t\to+\infty}\begin{bmatrix} |y_1| \\ |y_2| \\ |y_3| \end{bmatrix} \tag{II.76}$$

Or :

$$y=P^{-1}\,x(t) \tag{II.77}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0.2 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{II.78}$$

$$\lim_{t\to\infty} p(y) \le -M_d^{-1} N_d \tag{II.79}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0.5x_1 \\ -0.4x_2 - 0.4x_3 \\ 0.2x_2 + 1.2x_3 \end{bmatrix} \tag{II.80}$$

Il vient :

$$\lim_{t\to\infty} p(P^{-1}x(t)) \le \begin{bmatrix} 0.0523 \\ 0.1064 \\ 0.0870 \end{bmatrix} \tag{II.81}$$

et le domaine D_3 est : $\begin{cases} |x_1| \le 0.1046 \\ |-x_2 - x_3| \le 0.266 \\ |x_2 + 6x_3| \le 0.435 \end{cases}$

D_3 est ainsi l'attracteur tel que $D_3 \subset D_2 \subset D_1$

$$D_3 = \{x, |x_1| \le 0.1046\ , |-x_2 - x_3| \le 0.266, |x_2 + 6x_3| \le 0.435\} \tag{II.82}$$

Les diverses estimations de l'attracteur obtenues sont présentées sur la figure II.2 qui montre, de plus, l'évolution des variables d'état du système dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

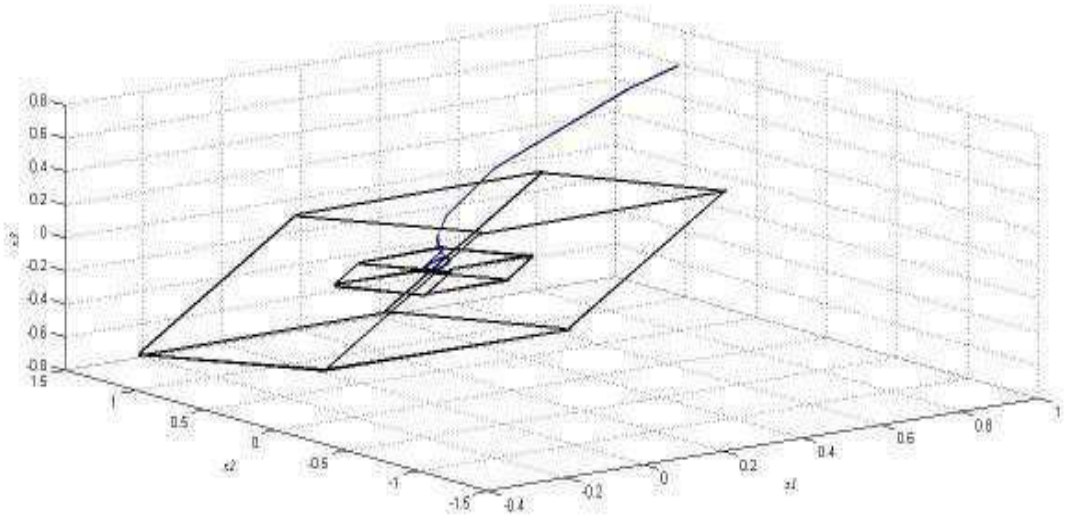


Figure II.2. Attracteur $D_3 \subset D_2 \subset D_1$ et évolution du système (S) dans l'espace

L'étude du cas d'un système du troisième ordre a montré que l'approche par diagonalisation locale est plus performante pour l'estimation de l'attracteur que celle de la détermination directe à partir de la représentation initiale.

II.4. Etude de stabilité des systèmes non linéaires caractérisé par une matrice de forme en flèche de Benrejeb [BEN 80]

II.4.1. Détermination d'attracteurs pour les matrices de forme en flèche

La forme en flèche des matrices caractéristiques des systèmes, définie à partir de la forme Compagnon, s'étant avérée intéressante pour l'analyse et la synthèse des systèmes, nous envisageons, dans ce travail, de déterminer l'attracteur en passant par cette représentation en particulier lorsque la matrice linéarisée locale n'est pas diagonalisable ou admet des valeurs propres complexes au point de fonctionnement considéré.

Idée de base

Nous nous proposons de déterminer un attracteur en se basant sur l'utilisation de la matrice linéarisée de forme en flèche au point de fonctionnement choisi, suivie d'une majoration exploitant les techniques d'agrégation.

Méthode proposée

On considère le processus (S) dont l'évolution est régie par le système d'équations différentielles suivant :

$$\dot{x} = A(.)x + B(.)$$

$x(t)$ étant un vecteur du domaine D_1 avec $D_1 = \mathbb{R}^n$, $A(x(t))$ une matrice $n \times n$ et $B(x(t))$ un vecteur d'ordre n, à éléments pouvant être non linéaires.

- **Choix de la représentation du système**

Pour déterminer l'attracteur pour ce système non linéaire, nous proposons de passer, tout d'abord par la représentation du système au point de fonctionnement par la forme Compagnon, et, ensuite, par une matrice caractéristique de forme en flèche.

Au point de fonctionnement $x_0$du système linéarisé (S') de (S), il s'agit de déterminer le changement de variables permettant d'obtenir une représentation du système décrit par l'équation (S') sous forme commandable. Un tel changement de base existe si le couple ($A(0)$,$B(0)$) satisfait les conditions de commandabilité.

Après la mise en forme en flèche de la matrice caractéristique correspondante, nous allons étudier sa stabilité et déterminer l'attracteur en utilisant les techniques d'agrégation, tout en élaborant un système de comparaison tel que sa matrice caractéristique instantanée soit l'opposée d'une M-matrice.

- **Détermination de l'attracteur**

Nous allons étudier la stabilité du processus (S) dont l'évolution est régie par le système d'équations différentielles (II.13), et déterminer le domaine d'attraction en utilisant directement les techniques d'agrégation.

Il s'agit, d'abord, d'élaborer un système de comparaison tel que sa matrice caractéristique instantanée, soit l'opposée d'une M-matrice.

Pour la norme vectorielle $p(x)=\left[|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\right]^T$, il vient le système de comparaison (II.14), les éléments $m_{i,j}$ de la matrice $M(.)$étant tels que :

$$\begin{cases} m_{i,i}=a_{i,i} & \forall i=1,2,\ldots n \\ m_{i,j}=|a_{i,j}| & \forall i\neq j \end{cases}$$

les éléments de la matrice $A(.)$ étant notés $a_{ij}(.)$et le vecteur $N(.)$défini à partir de B par :

$$N(.)=|B(x(t))| \qquad \text{(II.83)}$$

Si Met N sont constants et si M est l'opposée d'une M-matrice, on peut alors appliquer les conditions (II.15), (II.16),(II.17).

Si la détermination de l'attracteur utilisant directement les techniques d'agrégation n'est pas possible, il est intéressant de le déterminer en utilisant une modélisation du type forme en

flèche. Le résultat obtenu est à comparer avec le précédent pour mettre en exergue l'intérêt de l'approche par la forme en flèche par rapport à l'approche directe.

Soit le système linéarisé (S') défini autour du point de fonctionnement x_0 par :

$$(\text{S}') : \dot{x}_l = A(x_0)x_l + B(x_0) \tag{II.84}$$

Le changement de base de matrice de passage P_c telle que :

$$x = P_c x_c \tag{II.85}$$

permet d'obtenir une représentation du système décrit par l'équation (II.84) sous forme commandable, x_c représentant le vecteur état du processus dans la nouvelle base. Il vient :

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c, \tag{II.86}$$

$$A_c = P_c^{-1} A_l P_c, \quad B_c = P_c^{-1} B_l, \tag{II.87}$$

Notons $\mathbb{P}_A(\lambda)$ le polynôme caractéristique de la matrice A_c :

$$\mathbb{P}_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n, \tag{II.88}$$

Si le couple $(A(x_0), B(x_0))$ est commandable, la recherche d'une description du système sous forme commandable permet de caractériser le système par le couple (A_c, B_c) défini par:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il vient :

$$P_c A_c = A P_c, \quad P_c B_c = B, \tag{II.89}$$

Soit P_{c_i} la i-éme colonne de P_c telle que :

$$P_c = \left[P_{c_1} \; P_{c_2} \ldots P_{c_n} \right], \tag{II.90}$$

$$\left[P_{c_1} \; P_{c_2} \ldots P_{c_n} \right] \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} = A \left[P_{c_1} \; P_{c_2} \ldots P_{c_n} \right] \tag{II.91}$$

$$\left[P_{c_1} \; P_{c_2} \ldots P_{c_n} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = B$$

Il en résulte, en identifiant colonne à colonne les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} -a_0 P_{c_n} &= A P_{c_1}, \\ P_1 - a_1 P_{c_n} &= A P_{c_2}, \\ &\vdots \\ P_{c_{n-2}} - a_{n-2} P_{c_n} &= A P_{c_{n-1}}, \\ P_{c_{n-1}} - a_{n-1} P_{c_n} &= A P_{c_n}, \\ P_{c_n} &= B. \end{aligned} \tag{II.92}$$

Il vient, en reprenant ces relations dans l'ordre inverse :

$$P_{c_n} = B,$$

$$P_{c_{n-1}} = (A + a_{n-1} I) B,$$

$$P_{c_{n-2}} = (A^2 + a_{n-1} A + a_{n-2} I) B,$$

$$\vdots$$

$$P_{c_1} = (A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \cdots + a_1 I) B,$$

Après avoir déterminé la forme commandable, on peut, à partir du couple (A_c, B_c), mettre la matrice caractéristique sous la forme en flèche par le changement de base régulier P_{cf} tel que les paramètres arbitraires α_i soient distincts :

$$A_{cf} = P_{cf}^{-1} A_c P_{cf} \tag{II.93}$$

Il vient , dans ce cas : $$B_{cf} = P_{cf}^{-1} B_c \tag{II.94}$$

P_{cf} : matrice de passage de la forme Compagnon à la forme en flèche, telle que :

$$P_{cf}(.) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-2} & 0 \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-1} & 1 \end{bmatrix}; \quad A_{cf} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \cdots & & \beta_1 \\ \vdots & \alpha_2 & & & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \gamma_{i,1} & \gamma_{i,2} & \cdots & \gamma_{i,n-1} & \gamma_{i,n} \end{bmatrix} \tag{II.95}$$

avec :

$$\begin{aligned} &\beta_{\mathrm{j}} = \prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}-1} (\alpha_{\mathrm{j}} - \alpha_{\mathrm{k}})^{-1}; \quad \forall \mathrm{j} = 1, 2 \ldots \mathrm{n}-1 \\ &\gamma_{\mathrm{i,n}} = -\mathrm{a}_{\mathrm{n}-1} - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}-1} \alpha_{\mathrm{i}} \\ &\gamma_{\mathrm{i,j}} = -\mathbb{P}(\alpha_{\mathrm{j}}); \quad \forall \mathrm{j} = 1, 2 \ldots \mathrm{n}-1 \\ &\mathbb{P}(\alpha_{\mathrm{j}}) = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 \alpha_{\mathrm{j}} + \cdots + \mathrm{a}_{\mathrm{n}-1} \alpha_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n_i}-1} + \alpha^{\mathrm{n}} \end{aligned} \tag{II.96}$$

Appliquons maintenant les changements de base trouvés au système non linéaire :

$$x = P_f x_f$$

Il vient : $$A_f = P_f^{-1} A(x) P_f \tag{II.97}$$

et : $$B_f = P_f^{-1} B \tag{II.98}$$

avec :

$$P_f = P_c P_{cf} \text{ et } P_f^{-1} = \left(P_c P_{cf} \right)^{-1} \tag{II.99}$$

L'étape suivante consiste en l'estimation d'attracteurs des systèmes non linéaires continus et en l'étude de la stabilité de ces systèmes, basée sur les techniques d'agrégation.

L'évolution du système initial étant décrite après le changement de base(II.99) sous la forme :

$$\dot{x}_f = A_f(.)\,x_f + B_f(.) \tag{II.100}$$

une majoration convenable conduit à un système de comparaison linéaire de la forme :

$$z \in \mathbb{R}^n \;/\; \dot{z}_f(t) = M_f z_f(t) + N_f \tag{II.101}$$

où M_f et N_f sont des matrices à éléments constants.

Si M_f est l'opposée d'une M-matrice, alors il existe un attracteur L asymptotiquement stable tel que :

$$\mathrm{L} = \left\{ x \in \Re^n ; p(x_f) \le -M_f^{-1} N_f \right\} \tag{II.102}$$

avec :

$$z_f(t) \ge p(x_f(t)) \tag{II.103}$$

$\forall\, t \in \tau_0 = [t_0; +\infty]$ si cette propriété est vérifiée pour $t = t_0$.

il vient : $\lim_{t\to\infty} z_f(t) = -M_f^{-1} N_f \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to+\infty} p(x_f) \le -M_f^{-1} N_f$ (II.104)

II.4.2. Exemple d'application

On considère le processus (S) dont l'évolution est régie par le système d'équations différentielles (II.50), *x*(t) étant un vecteur du domaine D_1, avec $D_1 = \Re^n$, *A*(*x*(*t*)) une matrice *n*×*n* et *B*(*x*(*t*)) un vecteur d'ordre *n* à éléments non linéaires.

Notations :

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

avec :

$$a_{11}=\left[\frac{1395}{514}\cos x_1-\frac{1}{2}\cos x_2-\frac{847}{514}\cos t\sin x_1-4\right]$$

$$a_{12}=\left[\frac{346}{257}\cos x_1-\frac{60}{257}\cos t\sin x_1\right]$$

$$a_{13}=\left[-257\cos x_1-\frac{9}{257}\cos t\sin x_1\right]$$

$$a_{21}=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{24}e^{-x_2^2}-\frac{48203}{1542}e^{-x_1^2}-\frac{1395}{2056}\cos x_2^2-\frac{43}{6}e^{-x_3^2}+\frac{111233}{3084}\cos x_1-\frac{79}{12}\cos x_2-\frac{59985}{2056}\sin x_1\\-\frac{847}{1542}\sin x_2-\frac{66913}{3084}\cos t\sin x_1+\frac{26287}{3084}\end{array}\right]$$

$$a_{22}=\left[-\frac{6149}{771}e^{-x_1^2}-\frac{173}{514}\cos x_2^2+\frac{13667}{771}\cos x_1-\frac{7439}{514}\sin x_1+\frac{20}{257}\sin x_2+\frac{790}{257}\cos t\sin x_1-\frac{855}{257}\right]$$

$$a_{23}=\left[\frac{860}{257}e^{-x_1^2}+\frac{129}{1028}\cos x_2^2-6.6089\cos x_1+\frac{5547}{1028}\sin x_1-\frac{3}{257}\sin x_2-\frac{237}{514}\cos t\sin x_1-\frac{129}{514}\right]$$

$$a_{31}=\left[\begin{array}{l}\frac{5}{18}e^{-x_2^2}-\frac{193933}{2313}e^{-x_1^2}-\frac{2325}{514}\cos x_2^2-\frac{173}{9}e^{-x_3^2}+\frac{1043095}{9252}\cos x_1-\frac{733}{36}\cos x_2-\frac{80445}{1028}\sin x_1\\-\frac{8470}{2313}\sin x_2-\frac{620851}{9252}\cos t\sin x_1+\frac{65386}{2313}\end{array}\right]$$

$$a_{32}=\left[-\frac{49478}{2313}e^{-x_1^2}-\frac{1730}{771}\cos x_2^2+\frac{126809}{2313}\cos x_1-\frac{29929}{771}\sin x_1+\frac{400}{771}\sin x_2+\frac{7330}{771}\cos t\sin x_1+\frac{3460}{771}\right]$$

$$a_{33}=\left[\frac{6920}{771}e^{-x_1^2}+\frac{215}{257}\cos x_2^2-\frac{31519}{1542}\cos x_1+\frac{7439}{514}\sin x_1-\frac{20}{257}\sin x_2-\frac{733}{514}\cos t\sin x_1-\frac{1458}{257}\right]$$

$$\text{et}: B(x(t))=\left[\begin{array}{c}\frac{27}{100}\sin t\sin x_2\\\frac{3}{25}e^{-x_3^2}+\frac{129}{20}\sin x_1+\frac{711}{200}\sin t\sin x_2+\frac{9}{50}\\\frac{4}{5}e^{-x_3^2}+\frac{173}{10}\sin x_1+\frac{2199}{200}\sin t\sin x_2+\frac{6}{5}\end{array}\right] \qquad \text{(II.105)}$$

- **<u>Détermination directe de l'attracreur par les techniques d'agrégation</u>**

Prenons la norme vectorielle $p(x)=\left[|x_1|,|x_2|,|x_3|\right]^T$, il vient le système de comparaison suivant :

$$z\in\mathbb{R}^n\ /\ \dot{z}(t)=M(.)z(t)+N$$

avec :

$$M(A(x(t))) = \begin{bmatrix} a_{11} & |a_{12}| & |a_{13}| \\ |a_{21}| & a_{22} & |a_{23}| \\ |a_{31}| & |a_{32}| & a_{33} \end{bmatrix} \tag{II.107}$$

et :

$$\mathrm{N}(B(x(t)) = \begin{bmatrix} \left|\frac{27}{100}\sin t \sin x_2\right| \\ \left|\frac{3}{25}e^{-x_3^2} + \frac{129}{20}\sin x_1 + \frac{711}{200}\sin t \sin x_2 + \frac{9}{50}\right| \\ \left|\frac{4}{5}e^{-x_3^2} + \frac{173}{10}\sin x_1 + \frac{2199}{200}\sin t \sin x_2 + \frac{6}{5}\right| \end{bmatrix} \tag{II.108}$$

d'où :

$$\dot{\mathrm{z}} = \begin{bmatrix} \text{-8.8619} & 1.5798 & 0.537 \\ 124.6543 & \text{-46.9896} & 15.6984 \\ 361.4455 & 122.8163 & \text{-42.9267} \end{bmatrix} \mathrm{z} + \begin{bmatrix} 0.27 \\ 10.305 \\ 30.295 \end{bmatrix} \tag{II.109}$$

Les conditions pour que *M* soit l'opposée d'une M-matrice s'écrivent :

$$\begin{cases} -8.8619 \prec 0 \\ (-8.8619 \times -46.9896) - (1.5798 \times 124.6543) \succ 0 \\ (-1)^3 \det(M) \succ 0 \end{cases}$$

or : $(-1)^3 \det(M) \prec 0$

M n'est donc pas l'opposée d'une M-matrice, alors on ne peut pas déterminer l'attracteur (s'il existe) directement par les techniques d'agrégation à partir de cette représentation.

- **Détermination de l'attracteur D_2 utilisant une représentation en flèche à l'origine**

Elle passe par sept étapes.

Etape1 : Linéarisation au point de fonctionnement $x_0 = 0$

avec :

$$A(0)=\begin{bmatrix}-1.7860 & -1.3463 & -0.5019\\ -1.0554 & -6.0875 & -3.3881\\ 13.3379 & 35.6770 & -16.3016\end{bmatrix} \text{ et } B(0)=\begin{bmatrix}0\\0.3\\2\end{bmatrix} \quad \text{(II.110)}$$

Etape2: Représentation du système sous forme commandable

$$\det(\lambda I - A_0) = \ = \lambda^3 + 12\lambda^2 + 48\lambda + 63 = (\lambda_1 + 3)(\lambda_1 + 4.5 + i\frac{\sqrt{3}}{2})(\lambda_1 + 4.5 - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad \text{(II.111)}$$

$$P_3 = B_0 = \begin{bmatrix}0\\0.3\\2\end{bmatrix};\quad P_2 = (A_0 + a_2 I)B_0 = \begin{bmatrix}0.4\\-1\\0\end{bmatrix};\quad P_1 = A_0 P_2 + a_1 P_1 = \begin{bmatrix}1\\-0.2\\0\end{bmatrix}$$

$$P_c = [P_1, P_2, P_3] = \begin{bmatrix}1 & 0.4 & 0\\ -0.2 & -1 & 0.3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix};\quad P_c^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0.4 & 0\\ -0.2 & -1 & 0.3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \quad \text{(II.112)}$$

$$A_c = P_c^{-1} A_0 P_c == \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -63 & -48 & -12\end{bmatrix} \quad \text{(II.113)}$$

Etape3: Représentation du système sous forme en flèche

A partir du couple (A_c, B_c), on peut mettre le système sous la forme en flèche, avec :

$$A_{cf} = P_{cf}^{-1} A_c(x_0) P_{cf} \quad \text{(II.114)}$$

$$P_{cf} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0\\ \alpha_1^2 & \alpha_1^2 & 1\end{bmatrix};\ P_{cf}^{-1} = \begin{bmatrix}\dfrac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} & -\dfrac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} & 0\\ -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} & \dfrac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} & 0\\ \alpha_2\alpha_1 & -(\alpha_2 + \alpha_1) & 1\end{bmatrix} \quad \text{(II.115)}$$

avec :

$$\mathbb{P}(\alpha_1) = 63 + 48\alpha_1 + 14\alpha_1^2 + \alpha_1^3$$

$$\mathbb{P}(\alpha_2) = 63 + 48\alpha_2 + 12\alpha_2^2 + \alpha_2^3 : \quad \text{(II.116)}$$

$$P_f^{-1} = \left(P_c P_{cf}\right)^{-1} \text{ et } P_f = P_c P_{cf}$$

$$P_f = \begin{bmatrix} -\frac{3\alpha_1 + 9}{5} & -\frac{3\alpha_2 + 9}{5} & 0 \\ \frac{3\alpha_1^2}{10} - \frac{27\alpha_1}{20} - \frac{3}{10} & \frac{3\alpha_2^2}{10} - \frac{27\alpha_2}{20} - \frac{3}{10} + 1 & \frac{3}{10} \\ 2\alpha_1^2 + \frac{21\alpha_1}{10} + \frac{28}{5} & 2\alpha_2^2 + \frac{21\alpha_1}{10} + \frac{28}{5} & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(II.117)}$$

On peut prendre pour α_1 et α_2 les valeurs propre de $A(0)$ les plus négatives, soit :

$$\begin{cases} \alpha_1 = -3 \\ \alpha_2 = -4.5 \end{cases} \quad \text{(II.118)}$$

Il vient :

$$P_{cf} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -4.5 & 0 \\ 9 & 20.25 & 1 \end{bmatrix}; P_{cf}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0.6667 & 0 \\ -2 & -0.6667 & 0 \\ 13.5 & 7.5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(II.119)}$$

$$P_f = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 & 0 \\ 6.45 & 11.85 & 0.3 \\ 17.3 & 36.65 & 2 \end{bmatrix}; \quad P_f^{-1} = \begin{bmatrix} -1.831 & 0.2594 & -0.0389 \\ 1.1111 & 0 & 0 \\ -4.5233 & -2.2438 & 0.8366 \end{bmatrix} \quad \text{(II.120)}$$

Etape4: Conditionnement de la représentation du système initial

Le système initial auquel nous allons appliquer les changements de base rendant la matrice caractéristique du système linéaire sous forme en flèche, a ainsi pour matrice caractéristique instantanée:

$$A_f = P_f^{-1} A(\mathrm{x}) P_f$$

$$A_f(x)=\begin{bmatrix} -4+e^{-x_1^2} & 1-e^{-x_3^2} & \sin x_1+0.6667e^{-x_1^2} \\ \sin x_1\cos t & -4-0.5\cos x_2 & -0.6667\cos x_1 \\ \sin x_2 & \cos x_1+0.125e^{-x_2^2} & -5+0.5\cos x_2^2 \end{bmatrix} \quad \text{(II.121)}$$

et : $B_f(x)=P_f^{-1}B(x)$

$$B_f(x(t))=\begin{bmatrix} \sin x_1 \\ 0.3\sin x_2\sin t \\ 0.6+0.4e^{-x_1^2} \end{bmatrix} \quad \text{(II.122)}$$

Etape5 : Etude de la stabilité du système en appliquant les techniques d'agrégation et détermination de l'attracteur D_2, avec $D_1 \subset \Re^n$

Pour la norme vectorielle $p(x_f)=\left[\left|x_{f1}\right|,\left|x_{f2}\right|,\left|x_{f3}\right|\right]^T$, on peut définir un système de comparaison de la forme : $z\in\mathbb{R}^n \,/\, \dot{z}(t)=M_f z(t)+N_f$, M_f étant la matrice obtenue par majoration de $A_f(.)$:

$$M_f=\max(M(A_f))=\begin{bmatrix} -3 & 1 & \frac{5}{3} \\ 1 & -3.5 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1.125 & -4.5 \end{bmatrix} \quad \text{(II.123)}$$

Conditions pour que M_f soit l'opposée d'une M-matrice :

$$\begin{cases} -3\prec 0 \\ (-3)\times(-3.5)\ \ -1\succ 0 \\ \left(-1^3\right)\det(M_f)\succ 0 \end{cases}$$

et :

$$N_f = \max(N\left(B_{\mathrm{f}}(x(t))\right)) = \max\begin{bmatrix} |\sin x_1| \\ |0.3\sin x_2 \sin t| \\ \left|0.6+0.4e^{-x_1^2}\right| \end{bmatrix} \tag{II.124}$$

D'où :

$$N_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{II.125}$$

Pour le système de comparaison défini par:

$z \in \mathbb{R}^n \ / \ \dot{z} = M_f z + N_f$

il vient :

$$\lim_{t\to+\infty}\left|P_f^{-1}x\right| \le -M_f^{-1}N_f = \begin{bmatrix} 0.7288 \\ 0.3855 \\ 0.4805 \end{bmatrix} \tag{II.126}$$

L'attracteur D_2 est déterminé par les inégalités suivantes :

$$(D_2): \begin{cases} \left|\text{-}1.831x_1 + 0.2594x_2 \text{-} 0.0389x_3\right| \le 0.7288 \\ \left|x_1\right| \le 0.347 \\ \left|-4.5233x_1 \text{-} 2.2438x_2 + 0.8366x_3\right| \le 0.4805 \end{cases} \tag{II.127}$$

Etape 6 : Détermination d'un nouvel attracteur D_3

Une nouvelle représentation du système (S) peut être définie, dans D_2 , par une description de la forme (II.100).

En effet, pour : $|x_1| \prec 0.347$ la description du système étudié devient :

$$A_f = \begin{bmatrix} -3.1134 & 1-e^{-x_3^2} & 0.9312 \\ 0.3401\cos t & -4-0.5\cos x_2 & -0.627 \\ \sin x_2 & \cos x_1 + 0.125e^{-x_2^2} & -5+0.5\cos x_2^2 \end{bmatrix} \quad \text{(II.128)}$$

et :

$$B_f(x(t)) = \begin{bmatrix} 0.3401 \\ 0.3\sin x_2 \sin t \\ 0.9546 \end{bmatrix} \quad \text{(II.129)}$$

Le nouvel attracteur est alors caractérisé par le doublet (M_f, N_f) suivant, à éléments constants:

$$M_f = \begin{bmatrix} -3.1134 & 1 & 0.9312 \\ 0.3401 & -3.5 & 0.627 \\ 1 & 1.0654 & -4.5 \end{bmatrix} \quad \text{(II.130)}$$

$$N_f = N(B(x(t))) = \begin{bmatrix} 0.3401 \\ 0.3 \\ 0.9546 \end{bmatrix} \quad \text{(II.131)}$$

et décrit sous la forme (II.14) par :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -3.1134 & 1 & 0.9312 \\ 0.3401 & -3.5 & 0.627 \\ 1 & 1.0654 & -4.5 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0.3401 \\ 0.3 \\ 0.9546 \end{bmatrix} \quad \text{(II.132)}$$

Il vient par application de (II.17) et (II.18) :

$$z_\infty = \begin{bmatrix} 0.2545 \\ 0.1656 \\ 0.3079 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} |x_{f_1}| \\ |x_{f_2}| \\ |x_{f_3}| \end{bmatrix}$$

et le domaine D_3délimité par les inégalités suivantes :

$$(D_3): \quad \begin{cases} |-1.831x_1 + 0.2594x_2 - 0.0389x_3| \leq 0.2545 \\ |x_1| \leq 0.1490 \\ |-4.5233x_1 - 2.2438x_2 + 0.8366x_3| \leq 0.3079 \end{cases} \qquad \text{(II.133)}$$

Etape 7 : Résultats de simulation

La figure II.3 présente l'évolution du système initial dans l'espace d'état et, le positionnement de cette évolution par rapport aux domaines d'attraction emboîtés D_2 et D_3.

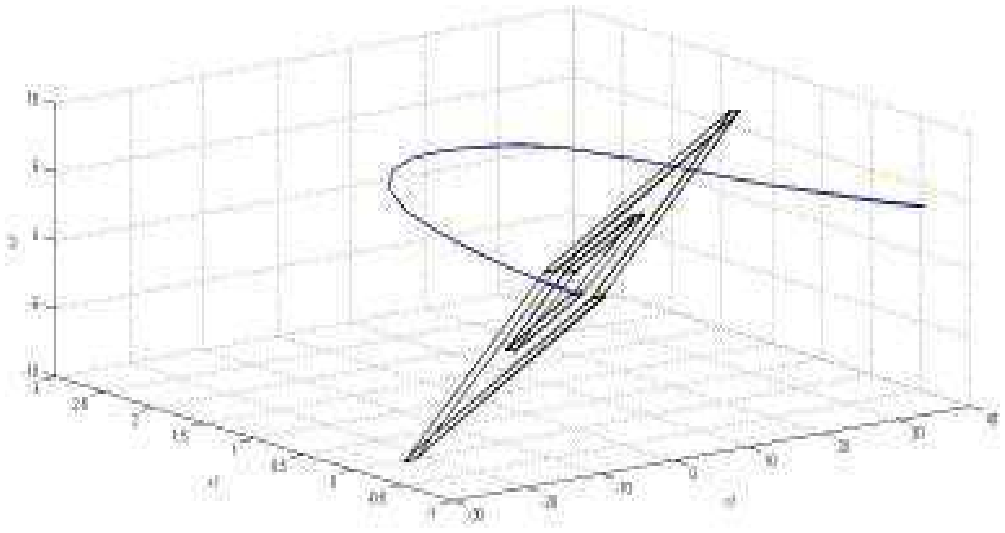


Figure .II.3. AttracteursD_2, D_3 et évolution du système initial

L'étude dans le cas du système du troisième degré considéré, envisagé par les deux approches, montre que l'approche exploîtant la forme en flèche des matrices est la plus performante sur le plan estimation de l'attracteur.

CONCLUSION

Le concept de norme vectorielle, associé à la définition de systèmes de comparaison définis par l'approche de la stabilité Borne et Gentina,à été utilisé dans ce travail, avec succès, pour déterminer différents attracteurs imbriqués.

Dans ce travail, nous avons proposé une approche permettant un estimation de l'attracteur. Elle consiste d'abord à diagonaliser la matrice caractéristique instantanée autour de l'origine ; une autre approche, lorsque la diagonalisation n'est pas possible, consiste à déterminer la forme en flèche de la matrice caractéristique du système étudié linéarisé en passant par l'intermédiaire de la forme canonique Compagnon et à déterminer un système majorant pouvant conduire à une estimation de l'attracteur, plus intéressante que celle obtenue par utilisation directe des techniques d'agrégation.

CHAPITRE III

ETUDE DE LA STABILISATION ET DETERMINATION DES ATTRACTEURS DES SYSTEMES CONTINUS NON LINEAIRES INCERTAINS

CHAPITRE III

ETUDE DE LA STABILISATION ET DETERMINATION DES ATTRACTEURS DES SYSTEMES CONTINUS NON LINEAIRES INCERTAINS

Sommaire

INTRODUCTION……..…91

III.1.Présentation unifiée du problème de stabilisation et de commande...……...…….91
III.2. Etude de la stabilité des systèmes continus non linéaires incertains……..92
III.3. Estimation de l'erreur due aux incertitudes dans le cas d'une commande d'un processus avec linéarisation par découplage..……..99
III.3.1. Linéarisation entrée-sortie par retour d'état……...……99
III.3.2.Réalisation de la commande…….....101
III.3.3. Influence de perturbations et/ou d'incertitudes…….....101
III.3.4. Exemples d'application…...…….....102
III.4. Etude de la stabilisation par placement de pôles des systèmes non linéaires……...…113
III.4.1. Idée de base..……..……113
III.4.2.Méthode proposée……..113
III.4.3. Exemple de mise en œuvre…….……...120
III.5. Etude de la stabilité d'un système de type Lur'ePostnikov et détermination de l'attracteur en présence d'incertitudes.…….…….……..128
III.5.1. Présentation de la méthode...…….……128
III.5.2. Cas du système incertain en régime non autonome (e non nulle).……130
III.5.3. Simplification de l'approche tenant compte des propriétés des systèmes de Lur'e Postnikov…….……..…….……...132
III.5.4.Exemple d'application……...136

CONCLUSION……...……..146

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, sont étudiés diverses approches de stabilisation et de commande pour des systèmes continus nonlinéaires dont l`évolution est initialement décrite sous la forme :

$$\dot{x} = f(x,u,t) + \delta(.) \tag{III.1}$$

avec :

- x : vecteur état, $x \in \mathbb{R}^n$
- u : vecteur de commande, $u \in \mathbb{R}^m$
- $\delta(.)$: vecteur regroupant les influences des défauts de modélisation et des incertitudes tel que :

  $|\delta(.)| \leq \delta_M$

Pour le calcul d'une commande performante, nous envisageons, dans ce chapitre, la mise en œuvre des techniques de détermination des attracteurs, présentées au chapitre II, nécessaire lorsqu'il est difficile de démontrer la stabilité du système étudié décrit par (III.1) ou par : $\frac{dx}{dt} = A(.)x + B(.)u + \delta(.)$.

Dans ce sens, les trois méthodes développées, pour la détermination de l`attracteur délimitant l`erreur par rapport à la consigne, sont basées soit sur la linéarisation par découplage, soit sur la stabilisation par placement de pôles, ou la minimisation et l'estimation de l'erreur dans le suivi de trajectoire, cette dernière étant considérée pour le cas des processus du type Lur'e Postnikov.

III.1. Présentation unifiée du problème de stabilisation ou de commande

L'approche consiste à choisir pour le processus nominal des modélisations tenant compte du domaine d'évolution du vecteur état en mettant, dans le cas d'une étude de la stabilité, le modèle du processus en régime autonome sous la forme:

$$\dot{x} = A(x,t)x + B(x,t) \tag{III.2}$$

et dans le cas d'un système commandé sous la forme :

$$\dot{x} = A(x,t)x + B(x,t)u \tag{III.3}$$

Pour l'étude de la stabilité au voisinage de l'origine x=0, il convient de réaliser une majoration comme décrite au chapitre II, permettant de déterminer un attracteur de ce voisinage dans lequel la modélisation peut être modifiée par étapes de même que la majoration, permettant ainsi d'affiner progressivement l'estimation de l'attracteur.

Pour les problèmes de commande et de stabilisation, l'objectif est de déterminer une commande $u(x)$ permettant une mise du système bouclé sous la forme :

$$\dot{x} = \mathcal{A}\ (x,t)x \tag{III.4}$$

et dans le cas des systèmes avec incertitudes et/ou perturbations sous la forme :

$$\dot{x} = \mathcal{A}\ (x,t)x + \delta(.) \tag{III.5}$$

avec : $|\delta(.)| \le \delta_M$; cette inégalité étant vérifiée composante à composante.

Différentes approches, envisageables pour la détermination de la commande $u(x)$, sont proposées dans la suite, telles que :

$$u(x) = K(x)x = -L(x)x \tag{III.6}$$

ou dans le but de suivre une trajectoire donnée $e(t)$:

$$u(x) = L(x)(e - C^T x) \tag{III.7}$$

La commande choisie doit alors permettre de déterminer l'écart limite entre la consigne et l'évolution réelle de l'état ou de la sortie.

III.2. Etude de la stabilité des systèmes continus non linéaires incertains

Un système est dit incertain s'il présente des imprécisions dans ses paramètres ou a des dynamiques non modélisées, et est soumis à des perturbations externes entachant son fonctionnement.

Soit le système (S) suivant :

$$(\mathrm{S}): \dot{x}(t) = A(x(t),t)x(t) + B(x(t))u(x(t)) \tag{III.8}$$

$$u\left(x\left(\mathrm{t}\right)\right) = k(x(t))x\left(\mathrm{t}\right) \tag{III.9}$$

avec :

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} -4+\cos t+\sin x_2 & -2-\mathrm{e}^{-x_2^2}(1+\sin x_2) \\ 2+\mathrm{e}^{-x_1^2} & -(10+\sin x_1+\mathrm{e}^{-x_1^2}) \end{bmatrix} \tag{III.10}$$

et :

$$B(x(t)) = \begin{bmatrix} 1+\sin x_2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad u\left(x\left(\mathrm{t}\right)\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3+\mathrm{e}^{-x_2^2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{III.11}$$

Ce système est complexe et présente une forte non linéarité.

Pour simplifier le calcul, la description du système bouclé peut se mettre sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}\,(x(t))\,x(t) \tag{III.12}$$

avec :

$$\mathcal{A}\,(x(t)) = A(x(t)) + B(x(t))k(x(t)) \tag{III.13}$$

et :

$$\mathcal{A}\,(x(t)) = \begin{bmatrix} -5+\cos t & 1+3\sin x_2 \\ \mathrm{e}^{-x_1^2} & -4-(\sin x_1-\mathrm{e}^{-x_2^2}) \end{bmatrix} \tag{III.14}$$

Etude de la stabilité

Le choix de la norme vectorielle $p(x) = [|\,x_1\,|,|\,x_2\,|]^T$ conduit à un système majorant de la forme $\dot{z}(t) = M(.)z(t)$, M étant l'opposée d'une M-matrice ; il vient $p(x) \le z$ si cette inégalité est vérifiée à l'instant initial.

Pour caractériser un système majorant, on remplace d'abord les éléments hors diagonaux de la matrice par leurs valeurs absolues telles que :

$$M(\mathcal{A}(x(t))) = \begin{bmatrix} -5+\cos t & |1+3\sin x_2| \\ |e^{-x_1^2}| & -4-(\sin x_1 - e^{-x_2^2}) \end{bmatrix} \quad \text{(III.15)}$$

Ce qui, après majoration, donne :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} z \quad \text{(III.16)}$$

Il vient les conditions de stabilité :

$$\begin{cases} -4 \prec 0 \\ \det(M) \succ 0 \end{cases}$$

qui montrent que le système nominal est stable.

Système (S) avec incertitudes

Maintenant, on va étudier le système (S) en présence d'incertitudes dont l'effet est regroupé dans le vecteur $\delta(x)$. Le système (S) est, dans ce cas, supposé décrit sous la forme (S') :

$$(S') : \dot{x}(t) = A(x(t),t)x(t) + B(x(t))u(x(t)) + \delta(x) \quad \text{(III.17)}$$

ou encore :

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}(x(t))\, x(t) + \delta(x) \quad \text{(III.18)}$$

$\delta(x)$ étant supposé borné tel que :

$$\delta_1 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} \leq \delta(.) \leq \delta_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{(III.19)}$$

Etape1: Etude de stabilité

Le choix de la norme vectorielle $p(x) = [|x_1|, |x_2|]^T$ conduit à un système majorant de la forme : $\dot{z}(t) = M(.)z(t) + N(.)$ .Si M est l'opposée d'une M-matrice et N un vecteur à coefficients positifs, alors $p(x) \leq z$, si cette inégalité est vérifiée à l'instant initial.

Il vient par majoration:

$$\dot{z}(t) = Mz(t) + N \tag{III.20}$$

avec :

$$N(\delta(x)) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix} \tag{III.21}$$

D'où :

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix} \tag{III.22}$$

Sachant que :

$$\frac{d}{dt}\left(p\left(x\right)\right) \le Mp\left(x\right) + N \tag{III.23}$$

on a :

$$\lim_{t \to +\infty} p\left(z\right) \le z_{\infty} = -M^{-1}N \tag{III.24}$$

$$\le -\begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ -0.25 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix} \tag{III.25}$$

$$\le \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.55 \end{bmatrix} \tag{III.26}$$

Il vient l'attracteur délimité par le domaine D_1 :

$$D_1 = \left\{x, |x_1| \prec 0.6, |x_2| \prec 0.55\right\} \tag{III.27}$$

Etape 2 : Détermination du domaine D_2 à partir de D_1

Le système majorant de (S) est caractérisé par (III.15).

Il vient après majoration :

$$\dot{z}(t)=\begin{bmatrix}-4 & 2.5681\\ 1 & -2.4354\end{bmatrix}z(t)+\begin{bmatrix}0.2\\ 0.5\end{bmatrix} \tag{III.28}$$

Les conditions suivantes :

$$\begin{cases}-4\prec 0\\ \det(M)\succ 0\end{cases}$$

étant vérifiées, le système nominal est alors stable.

D'après (III.23) et (III.24), il vient les conditions:

$$\lim_{t\to+\infty} p(z)\le\begin{bmatrix}0.2469\\ 0.3067\end{bmatrix} \tag{III.29}$$

qui conduisent à l'attracteur affiné D_2 suivant :

$$D_2=\left\{x,|x_1|\prec 0.2469,|x_2|\prec 0.3067\right\} \tag{III.30}$$

Etape 3 : L'étude du système (S) est envisagée, dans cette partie, dans le domaine D_2 délimité par :

$|x_1|\prec 0.2469,|x_2|\prec 0.3067$

Après majoration, il vient :

$$\dot{z}(t)=\begin{bmatrix}-4 & 1.9057\\ 1 & -2.7556\end{bmatrix},z(t)+\begin{bmatrix}0.2\\ 0.5\end{bmatrix} \tag{III.31}$$

Les conditions suivantes :

$$\begin{cases}-4\prec 0\\ \det(M)\succ 0\end{cases}$$

étant vérifiées, le système nominal estdonc stable.

Sachant que :

$$\frac{d}{dt}\left(p\left(x\right)\right) \le Mp\left(x\right) + N \tag{III.32}$$

et :

$$\lim_{t\to+\infty} p\left(z\right) \le z_{\infty} = -M^{-1}N \tag{III.33}$$

ou encore :

$$\lim_{t\to+\infty} p\left(z\right) \le \begin{bmatrix} 0.1650 \\ 0.2413 \end{bmatrix} \tag{III.34}$$

il vient l'attracteur D_3 , plus précis que le précédent :

$$D_3 = \left\{x, \left|x_1\right| \prec 0.1650,\ \left|x_2\right| \prec 0.2413\right\} \tag{III.35}$$

Etape 4 :L'étude du système (S) dans le domaine D_3 délimité par :

$$\left|x_1\right| \prec 0.1650, \left|x_2\right| \prec 0.2413$$

donne, après majoration :

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1.9057 \\ 1 & -2.7610 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix} \tag{III.36}$$

Les conditions de stabilité :

$$\begin{cases} -4 \prec 0 \\ \det(M) \succ 0 \end{cases}$$

étant vérifiées, le système nominal est donc stable.

Donc, d'après (III.32) et (III.33) , il vient les conditions :

$$\lim_{t\to+\infty} p(z) \leq \begin{bmatrix} 0.136 \\ 0.2303 \end{bmatrix} \tag{III.37}$$

et le nouvel attracteur D_4 suivant:

$$D_4 = \{x, |x_1| \prec 0.136, |x_2| \prec 0.2303\} \tag{III.38}$$

Résultat de simulation

Les différents domaines emboîtés D_1, D_2,D_3 et D_4 correspondant aux estimations successives de l'attracteur relatif au système (S) sont présentés dans figure III.1.

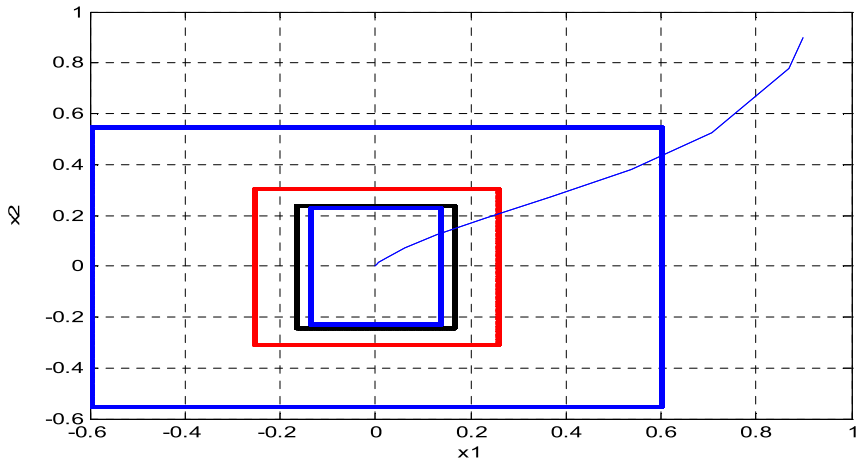


Figure III.1. Evolution des estimations successives de l'attracteur du système (S)

Dans l'approche proposée, on voit que la prise en compte, à chaque étape, des valeurs limites du vecteur état, déterminées à l'étape précédente, permet une meilleure détermination de l'attracteur.

III.3. Estimation de l'erreur due aux incertitudes dans le cas d'une commande d'un processus avec linéarisation par découplage

Ayant un processus à entrées et sorties multiples, le découplage consiste à faire une précompensation de façon à ce que chaque sortie soit commandée par une seule des nouvelles variables d'entrée. Cette approche valable pour les processus continus permet également de réaliser une linéarisation par retour d'état. [VIS 04],[H.K 02].

III.3.1. Linéarisation entrée-sortie par retour d'état

La linéarisation entrée-sortie par retour d'état est une approche qui a attiré ces dernières années beaucoup de recherches [JAK 80] ,[HED 05], [LEV 04],[MAR 93] .

Soit le processus supposé commandable dont l'évolution est décrite par un modèle affine en la commande de la forme:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + G(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{III.39}$$

avec : $x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m]^T$, $y = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]^T$ et $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{bmatrix}^T$

La méthode consiste à dériver chaque composante y_i du vecteur de sortie jusqu'à faire apparaître le vecteur de commande.

En notant :

$$\begin{aligned} &h(x) = [h_1(x), \quad h_2(x), \quad \cdots, \quad h_m(x)]^T \\ &h_i(x) = h_i^0(x) \\ &h_i^j(x) = h_{i,x}^{j-1T}(x) f(x) \\ &h_{i,x}^j = \frac{\partial h_i^j(x)}{\partial x} \\ &G_i^j(x) = h_{i,x}^{j-1T}(x) G(x) \end{aligned} \tag{III.40}$$

avec :

$$\forall j \le d_i,\ G_i^j(x) = 0 \text{ et } G_i^{d_i+1}(x) \neq 0 \tag{III.41}$$

il vient :

$$y^* = \begin{pmatrix} y_1^{(d_1+1)} \\ \vdots \\ y_i^{(d_i+1)} \\ \vdots \\ y_m^{(d_m+1)} \end{pmatrix},\ f^* = \begin{pmatrix} h_1^{d_1+1}(x) \\ \vdots \\ h_i^{d_i+1}(x) \\ \vdots \\ h_m^{d_m+1}(x) \end{pmatrix},\ G^* = \begin{pmatrix} G_1^{d_1+1}(x) \\ \vdots \\ G_i^{d_i+1}(x) \\ \vdots \\ G_m^{d_m+1}(x) \end{pmatrix}, \text{ et } y^* = f^* + G^* u \tag{III.42}$$

Si G^* est inversible dans le domaine d'évolution du vecteur d'état, en posant :

$$u = G^{*^{-1}}(x)(v - h^*(x)) \tag{III.43}$$

il vient, figure. III.2 :

$$y_i^{(d_i+1)} = v_i,\ \forall i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m\ . \tag{III.44}$$

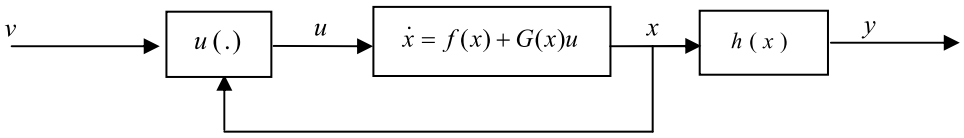


Figure III.2. Schéma synoptique relatif à la linéarisation entrée-sortie par retour d'état

Cette représentation n'est valable que si le retour d'état n'a pas rendu non observable des éléments instables du processus.

Ce retour d'état transforme ainsi chaque sous-système découplé en une chaîne d'intégrateurs, figure III.3.

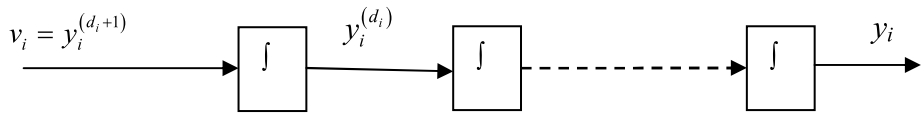


Figure III.3. Sous-système découplé en une chaîne d'intégrateurs

Il est alors nécessaire de concevoir un retour d'état supplémentaire assurant au système ainsi corrigé un comportement satisfaisant.

III.3.2. Réalisation de la commande

La linéarisation par découplage a permis d'obtenir pour chaque sortie une commande de la forme :

$$y_i^{(d_i+1)} = v_i \tag{III.45}$$

En pratique, en appelant y_i^c la consigne pour la i^{ème} sortie, il est nécessaire d'obtenir pour le système bouclé des transmittances de la forme :

$$\frac{Y_i(s)}{Y_i^c(s)} = \frac{a_{i,0} + a_{i,1}s + \cdots + a_{i,\alpha_i}s^{\alpha_i}}{a_{i,0} + a_{i,1}s + \cdots + a_{i,d_i}s^{d_i} + s^{d_i+1}}. \tag{III.46}$$

Pour cela, il suffit de prendre :

$$v_i = a_{i,0}(y_i^c - y_i) + a_{i,1}(y_i^{c(1)} - y_i^{(1)}) + \cdots + a_{i,\alpha_i}(y_i^{c(\alpha_i)} - y_i^{(\alpha_i)}) - a_{i,\alpha_{i-1}}y_i^{(d_i+1)} - a_{i,\alpha_i}y_i^{(d_i)}, \tag{III.47}$$

avec : $$y_i^{(\beta_i)} = h_i^{\beta_i}(x), \beta_i \le d_i \tag{III.48}$$

III.3.3. Influence des perturbations et/ou des incertitudes

Le système (III.39) est soumis aux erreurs δf et δG telles que:

$|\delta G| \le \Delta G$ et $|\delta f| \le \Delta f$

Il vient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \delta f + (G(x) + \delta G)u \\ &= f(x) + G(x)u + \delta f + \delta G u \end{aligned} \tag{III.49}$$

En remplaçant *u* et *v* par leurs valeurs, il vient, pour $y^c = 0$,une description de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = A(x,t)x + B(x,t) \tag{III.50}$$

Pour étudier la stabilité du système, on va déterminer l'attracteur du système, pouvant éventuellement se réduire à l'origine *x*= 0, en utilisant les techniques d'agrégation, et en élaborant un système de comparaison tel que sa matrice caractéristique instantanée soit l'opposée d'une M-matrice.

Pour la norme vectorielle $p(x) = \left[|x_1|,|x_2|\ldots,|x_n|\right]^T$, il vient par majoration le système de comparaison suivant :

$$z \in \mathbb{R}^n \;/\; \dot{z}(t) = Mz(t) + N \tag{III.51}$$

M et *N* étant des matrices à coefficients constants.

III.3.4. Exemples d'application

- **Exemple d'ordre 2**

Soit le système d'ordre 2 suivant :

$$(S): \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + {x_2}^2 u_1 - u_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1x_2 + u_1 + u_2 \end{cases} \tag{III.52}$$

Il peut être décrit sous la forme :

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \tag{III.53}$$

avec :

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 2x_1x_2 \end{bmatrix}; \quad G(x) = \begin{bmatrix} x_2^2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.54}$$

Pour les grandeurs de sorties :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \tag{III.55}$$

$h(x)$ est défini par :

$$h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{III.56}$$

Pour vérifier si le système admet une linéarisation entrée-sortie, il faut déterminer le degré relatif, en dérivant y :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \dot{x}_1 = -x_1 + {x_2}^2 u_1 - u_2 \\ \dot{y}_2 = \dot{x}_2 = 2x_1 x_2 + u_1 + u_2 \end{cases} \tag{III.57}$$

Puisque l'entrée apparaît dès la première dérivée de $y, \det(h_x^T G) \neq 0$, on va arrêter le calcul,

Il vient :

$$h^*(x) = f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 2x_1 x_2 \end{bmatrix} \tag{III.58}$$

Sachant que :

$$G^* = \begin{bmatrix} x_2^2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \tag{III.59}$$

on a :

$$G^{*-1} = \frac{1}{x_2^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & x_2^2 \end{bmatrix} \tag{III.60}$$

Puisque G^* est inversible, on peut poser l'entrée u égale à :

$$u = G^{*-1}(-h^* + v) \tag{III.61}$$

Or :

$$y^* = h^* + G^* u = v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{III.62}$$

Il vient :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_2^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + v_1 \\ -2x_1 x_2 + v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_2^2 + 1} \begin{bmatrix} x_1 + v_1 - 2x_1 x_2 + v_2 \\ -x_1 - v_1 - 2x_1 x_2^3 + x_2^2 v_2 \end{bmatrix} \tag{III.63}$$

et le comportement entrée-sortie du système est ainsi linéarisé.

La commande du processus conduit à choisir

$$v_i = \frac{1}{\tau_i}\left(y_i^c - y_i\right) \tag{III.64}$$

Soit, puisque $y_i = x_i$ et pour $y_i^c = 0$:

$$\dot{x}_i = \frac{1}{\tau_i} x_i \tag{III.65}$$

En tenant compte des perturbations et/ou des incertitudes sur f, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1 + \delta f_1 = -\frac{x_1}{\tau_1} + \delta f_1 \\ \dot{x}_2 &= v_2 + \delta f_2 = -\frac{x_2}{\tau_2} + \delta f_2 \end{aligned} \tag{III.66}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \delta f_2 \end{bmatrix} \tag{III.67}$$

avec :

$$\left|\delta f_i\right| \le \delta f_{N_i} \tag{III.68}$$

Pour la norme vectorielle $p(x) = \left[\left|x_1\right|, \left|x_2\right|\right]^T$, il vient le système de comparaison suivant :

$$z \in \mathbb{R}^n \;/\; \dot{z} = Mz + N \tag{III.69}$$

Dans cet exemple $M = A$, et le vecteur N est à coefficients positifs avec :

$$N = \delta f_N \tag{III.70}$$

Alors on a :

$$\lim_{t\to\infty} \left|x\right| \le -M^{-1}N = \begin{bmatrix} \tau_1 \delta f_{N_1} \\ \tau_2 \delta f_{N_2} \end{bmatrix} \tag{III.71}$$

Pour les données suivantes :

$$\tau_1 = \tau_2 = 1s \text{ , et } \delta f_{N_1} = \delta f_{N_2} = 0.01 \tag{III.72}$$

il vient :

$$\lim_{t\to\infty} \left|x\right| \le -M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix} \tag{III.73}$$

La convergence des variables d'état du système étudié vers l'attracteur calculé est illustrée dans la figure III.4.

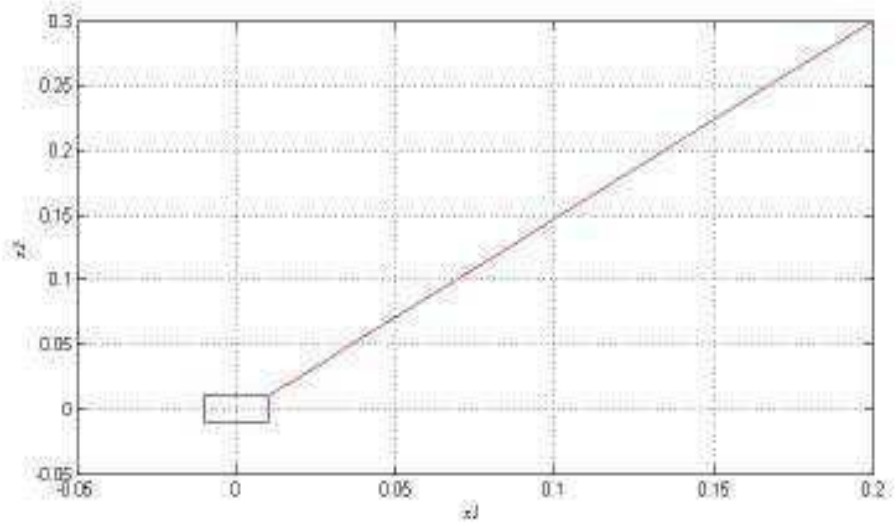


Figure III.4. Evolutions des variables du système vers l'attracteur

Exemple d'ordre 3

Considérons maintenant le système d'ordre3 dont l'évolution est décrite ci-dessous :

$$(S):\begin{cases}\dot{x}_1 = -2x_1\cos x_2 + x_3 + (1+e^{-x_1^2})u_1 + u_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + \sin x_3 + 3u_1 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2^2 x_3 - 0.4x_3 - 0.1\text{sat}x_3\end{cases} \quad \text{(III.74)}$$

Adoptons les notations suivantes :

$$f(x) = \begin{bmatrix} -2x_1\cos x_2 + x_3 \\ -3x_2 + \sin x_3 \\ x_1 - x_2^2 x_3 - 0.4x_3 - 0.1\text{sat}x_3 \end{bmatrix}; \quad G(x) = \begin{bmatrix} 1+e^{-x_1^2} & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(III.75)}$$

$$h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.76)}$$

les grandeurs de sorties étant :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \tag{III.77}$$

Pour vérifier si le système admet une linéarisation entrée-sortie, il faut déterminer le degré relatif, en dérivant *y* :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \dot{x}_1 = -2x_1 \cos x_2 + x_3 + (1 + e^{-x_1^2})u_1 + u_2 \\ \dot{y}_2 = \dot{x}_2 = -3x_2 + \sin x_3 + 3u_1 \end{cases} \tag{III.78}$$

Puisque l'entrée apparaît dès la première dérivée de *y*, $\det(h_x^T G) \neq 0$, on arrête le calcul.

Il vient :

$$h^*(x) = f(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 \cos x_2 + x_3 \\ -3x_2 + \sin x_3 \end{bmatrix} \tag{III.79}$$

$$\text{et : } G^* = \begin{bmatrix} 1 + e^{-x_1^2} & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad G^{*-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 + e^{-x_1^2} \end{bmatrix} \tag{III.80}$$

Puisque G^* est inversible, alors on peut imposer l'entrée *u* définie par :

$u = G^{*-1}(-h^* + v)$

ou, explicitement, par :

$$u = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 + e^{-x_1^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2x_1 \cos x_2 - x_3 + v_1 \\ 3x_2 - \sin x_3 + v_2 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3x_2 - \sin x_3 + v_2}{3} \\ 2x_1 \cos x_2 - x_3 + v_1 - \dfrac{1}{3}(1 + e^{-x_1^2})(3x_2 - \sin x_3 + v_2) \end{bmatrix} \tag{III.81}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \dot{x}_1 = -2x_1\cos x_2 + x_3 + (1+e^{-x_1^2})(\dfrac{3x_2 - \sin x_3 + v_2}{3}) + (2x_1\cos x_2 - x_3 + v_1 - \dfrac{1}{3}(1+e^{-x_1^2})(3x_2 - \sin x_3 + v_2)) \\ \dot{y}_2 = \dot{x}_2 = -3x_2 + \sin x_3 + 3(\dfrac{3x_2 - \sin x_3 + v_2}{3}) \end{cases} \tag{III.82}$$

On a :

$$y^* = h^* + G^* u = v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{III.83}$$

il vient :

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = v_1 \\ \dot{y}_2 = v_2 \end{cases} \tag{III.84}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\tau_1}(y_1^c - y_1) \\ v_2 &= \frac{1}{\tau_2}(y_2^c - y_2) \end{aligned} \tag{III.85}$$

Pour $y_j^c = cste, \quad \forall j = 1,2$, il vient, d'après (III.64) :

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\frac{\dot{y}_1}{\tau_1} = -\frac{\dot{x}_1}{\tau_1} = -\frac{1}{\tau_1} v_1 \\ \dot{v}_2 &= -\frac{\dot{y}_2}{\tau_2} = -\frac{\dot{x}_2}{\tau_2} = -\frac{1}{\tau_2} v_2 \end{aligned} \tag{III.86}$$

On prend maintenant en compte la présence d'incertitudes sur f et G, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1 + \delta f_1 + G_{11}u_1 + \delta G_{12}u_2 \\ \dot{x}_2 &= v_2 + \delta f_2 + G_{21}u_2 + \delta G_{22}u_2 \\ \dot{x}_3 &= \delta f_3 + x_1 - x_2^2 x_3 - 0.4x_3 - 0.1\text{sat}x_3 \end{aligned} \tag{III.87}$$

Soit :

$$|\delta G| \le \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0.03 & 0.01 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } |\delta f| \le \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \\ 0.02 \end{bmatrix} \tag{III.88}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{x_1}{\tau_1} + \delta f_1 + \delta G_{11} u_1 + \delta G_{12} u_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{x_2}{\tau_2} + \delta f_2 + \delta G_{21} u_1 + \delta G_{22} u_2 \\ \dot{x}_3 &= \delta f_3 + x_1 - x_2^2 x_3 - 0.4 x_3 - 0.1 \text{sat} x_3 \end{aligned} \tag{III.89}$$

Pour la norme vectorielle $p(x) = \left[|x_1|, |x_2|, |x_3|\right]^T$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d|x_1|}{dt} &\le -\frac{|x_1|}{\tau_1} + Max|\delta f_1| + Max|\delta G_{11} u_1| + Max|\delta G_{12} u_2| \\ \frac{d|x_2|}{dt} &\le -\frac{|x_2|}{\tau_2} + Max|\delta f_2| + Max|\delta G_{21} u_2| + Max|\delta G_{22} u_2| \\ \frac{d|x_3|}{dt} &\le Max|\delta f_3| + |x_1| - x_2^2 |x_3| - 0.4|x_3| - 0.1|\text{sat} x_3| \end{aligned} \tag{III.90}$$

ou encore :

$$\frac{d|x_1|}{dt} \le \begin{cases} -\frac{|x_1|}{\tau_1} + Max|\delta f_1| + Max\left|0.01\left(\frac{3x_2 - \sin x_3 + v_2}{3}\right)\right| \\ +Max\left|0.01\left(2x_1 \cos x_2 - x_3 + v_1 - \frac{1}{3}(1 + e^{-x_1^2})(3x_2 - \sin x_3 + v_2)\right)\right| \end{cases}$$

$$\frac{d|x_2|}{dt} \le \begin{cases} -\frac{|x_2|}{\tau_2} + Max|\delta f_2| + Max\left|0.03\left(\frac{3x_2 - \sin x_3 + v_2}{3}\right)\right| \\ +Max\left|0.01\left(2x_1 \cos x_2 - x_3 + v_1 - \frac{1}{3}(1 + e^{-x_1^2})(3x_2 - \sin x_3 + v_2)\right)\right| \end{cases} \tag{III.91}$$

$$\frac{d|x_3|}{dt} \le Max|\delta f_3| + |x_1| - x_2^2 |x_3| - 0.4|x_3| - 0.1|\text{sat} x_3|$$

Soit pour : $\tau_1 = 1$ et $\tau_2 = 0.5$: (III.92)

$$\frac{d|x_1|}{dt} \leq \begin{cases} -\frac{|x_1|}{\tau_1} + Max|\delta f_1| + Max\left|0.01\left(\frac{3x_2 - \sin x_3 - 2x_2}{3}\right)\right| \\ +Max\left|0.01\left(2x_1\cos x_2 - x_3 - x_1 - \frac{1}{3}(1+e^{-x_1^2})(3x_2 - \sin x_3 - 2x_2)\right)\right| \end{cases}$$

$$\frac{d|x_2|}{dt} \leq \begin{cases} -\frac{|x_2|}{\tau_2} + Max|\delta f_2| + Max\left|0.03\left(\frac{3x_2 - \sin x_3 - 2x_2}{3}\right)\right| \\ +Max\left|0.01\left(2x_1\cos x_2 - x_3 - x_1 - \frac{1}{3}(1+e^{-x_1^2})(3x_2 - \sin x_3 - 2x_2)\right)\right| \end{cases} \quad \text{(III.93)}$$

$$\frac{d|x_3|}{dt} \leq Max|\delta f_3| + |x_1| - x_2^2|x_3| - 0.4|x_3| - 0.1\left|\frac{\text{sat}x_3}{x_3}\right||x_3|$$

ou encore :

$$\frac{d|x_1|}{dt} \leq \begin{cases} -|x_1| + Max|\delta f_1| + Max\left|0.01\left(\frac{x_2 - \sin x_3}{3}\right)\right| \\ +Max\left|0.01\left(x_1(2\cos x_2 - 1) - x_3 - \frac{1}{3}(1+e^{-x_1^2})(x_2 - \sin x_3)\right)\right| \end{cases}$$

$$\frac{d|x_2|}{dt} \leq \begin{cases} -2|x_2| + Max|\delta f_2| + Max\left|0.03\left(\frac{x_2 - \sin x_3}{3}\right)\right| \\ +Max\left|0.01\left(x_1(2\cos x_2 - 1) - x_3 - \frac{1}{3}(1+e^{-x_1^2})(x_2 - \sin x_3)\right)\right| \end{cases} \quad \text{(III.94)}$$

$$\frac{d|x_3|}{dt} \leq Max|\delta f_3| + |x_1| - x_2^2|x_3| - 0.4|x_3| - 0.1\left|\frac{\text{sat}x_3}{x_3}\right||x_3|$$

Soit en tenant compte de (III.88) :

$$\frac{d|x_1|}{dt} \le \begin{cases} |x_1|\left(-1+0.01|2\cos x_2 - 1|\right) + |x_2|\left(\frac{0.01}{3} + \frac{1}{3}(1+e^{-x_1^2})\right) + 0.01 + \left|\frac{-0.01\sin x_3}{3}\right| \\ -0.01|x_3| + \frac{0.01}{3}\left|(1+e^{-x_1^2})(\sin x_3)\right| + 0.01 \end{cases}$$

$$\frac{d|x_2|}{dt} \le \begin{cases} |x_2|(-2+0.01+\frac{0.01}{3}(1+e^{-x_1^2})) + 0.02 + \left|\frac{0.03\sin x_3}{3}\right| \\ +0.01|x_3| + \frac{0.01}{3}\left|(1+e^{-x_1^2})(\sin x_3)\right| + |x_1|(0.02\cos x_2 - 0.01) + 0.02 \end{cases} \quad \text{(III.95)}$$

$$\frac{d|x_3|}{dt} \le 0.02 + |x_1| - x_2^2|x_3| - 0.4|x_3| - 0.1\left|\frac{\text{sat}x_3}{x_3}\right||x_3|$$

Il vient :

$$\frac{dp(x)}{dt} \le M(x)p(x) + N(x) \quad \text{(III.96)}$$

avec :

$$M(x) = \begin{bmatrix} -1+0.01(2\cos x_2 - 1) & \left|\frac{0.01}{3} + \frac{1}{3}(1+e^{-x_1^2})\right| & |-0.01| \\ |0.02\cos x_2 - 0.01| & -2+0.01-\frac{0.01}{3}(1+e^{-x_1^2}) & |-0.01| \\ 1 & 0 & -0.4 - x_2^2 - 0.1\left|\frac{\text{sat}x_3}{x_3}\right| \end{bmatrix} \quad \text{(III.97)}$$

et après majoration :

$$M = \begin{bmatrix} -0.97 & 0.67 & 0.01 \\ 0.03 & -1.983 & 0.01 \\ 1 & 0 & -0.4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} -1.0794 & -0.3647 & -0.0361 \\ -0.0299 & -0.5144 & -0.0136 \\ -2.6986 & -0.9118 & -2.5903 \end{bmatrix} \quad \text{(III.98)}$$

Les conditions suivantes :

$$\begin{cases} -0.97 \prec 0 \\ \left(-0.97 \times -1.983\right) - \left(0.03 \times 0.67\right) \succ 0 \\ \left(-1\right)^3 \det(M) \prec 0 \Rightarrow \left(-1\right)^3 \times \left(\text{-}0.7348\right) \succ 0 \end{cases} \tag{III.99}$$

étant vérifiées *M*, est l'opposée d'une M-matrice.

Par ailleurs, la majoration de *N(x)* :

$$N(x) = \begin{bmatrix} 0.01 + \left|\dfrac{-0.01\sin x_3}{3}\right| + \dfrac{0.01}{3}\left|(1+e^{-x_1^2})(\sin x_3)\right| \\ 0.02 - \left|\dfrac{0.03\sin x_3}{3}\right| + \dfrac{0.01}{3}\left|(1+e^{-x_1^2})(\sin x_3)\right| \\ 0.02 \end{bmatrix} \tag{III.100}$$

donne:

$$N = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.0367 \\ 0.02 \end{bmatrix} \tag{III.101}$$

Il en résulte :

$$\lim_{t \to +\infty} p\left(z\right) \leq -M^{-1}N \tag{III.102}$$

$$\lim_{t \to +\infty} p\left(z\right) \leq \begin{bmatrix} 0.0357 \\ 0.0197 \\ 0.1392 \end{bmatrix} \tag{III.103}$$

La figure III.5 montre les évolutions de l'état du système vers l'attracteur calculé.

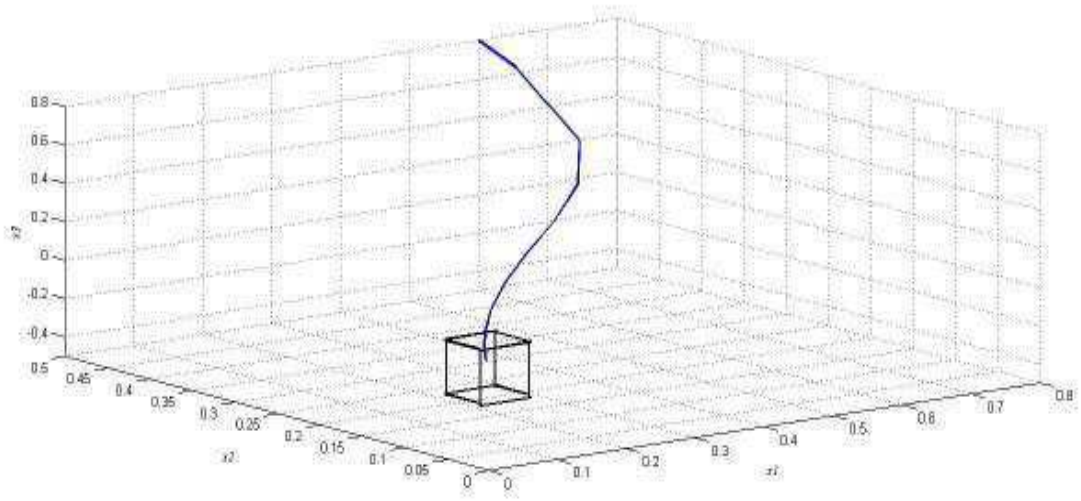


Figure III.5. Evolutions des variables d'état du système vers la zone d'attraction D_1

III.4. Etude de la stabilisation par placement de pôles des systèmes non linéaires

La commande des processus par placement de pôles est une des formes les plus utilisées de la commande par retour d'état [BOR 90]. Elle permet, non seulement de stabiliser un processus, mais également de contrôler sa dynamique. De plus, les commandes optimales à critères quadratiques des systèmes linéaires conduisent en fait à des placements de pôles.

III.4.1 Idée de base

Dans ce travail, nous présentons une approche permettant l'étude de la stabilisation des systèmes non linéaires et la détermination des attracteurs par diagonalisation des matrices caractéristiques définies autour de points de fonctionnement, en passant par le placement de pôles par retour d'état et en utilisant les techniques d'agrégation.

III.4.2. Méthode proposée

Soit le processus dont l'évolution est décrite par l'équation :

$$\dot{x}(t) = A(.)x(t) + B(.)u + B'(.) \qquad \text{(III.104)}$$

dans laquelle $B'(.)$ caractérise l'influence des incertitudes.

Il convient tout d'abord de linéariser le système (III.104), sans les incertitudes. Autour du point de fonctionnement ($x_0 = 0$) choisi, on obtient :

$$\dot{y}(t) = A(0)y + B(0)u \tag{III.105}$$

Il est possible de définir une loi de commande par retour d'état de la forme :

$$u = -Lx \tag{III.106}$$

dans laquelle, dans le cas monovariable, L désigne un vecteur ligne de dimension n :

$$L = \begin{bmatrix} l_0 & l_1 & \dots & l_{n-1} \end{bmatrix} \tag{III.107}$$

-Calcul du gain de retour d'état L

Soit le système (III.104) défini par le doublet (A, B) et l'état $x(t)$; on suppose que le système est commandable, c'est à dire qu'il vérifie la condition de commandabilité suivante :

$$\text{rang}C_{(A,B)} = n \text{ avec } C_{(A,B)} = \begin{bmatrix} B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B \end{bmatrix}, \tag{III.108}$$

qui s'exprime également sous la forme :

$$\det\begin{bmatrix} B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B \end{bmatrix} \neq 0, \tag{III.109}$$

Notons P_c la matrice de passage permettant de décrire le système linéarisé (III.105) sous la forme canonique commandable:

$$x = P_c x_c, \tag{III.110}$$

Il vient :

$$\dot{x}_c = Ax_c + B_c u \tag{III.111}$$

x_c étant le vecteur état du processus dans la nouvelle base :

$$x = P_c\, x_c, \quad \Rightarrow \dot{x} = P_c\, \dot{x}_c \tag{III.112}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu \tag{III.113}$$

Or : $$u = -Lx \tag{III.114}$$

il vient : $$\dot{x}(t) = Ax(t) - BLx(t) \tag{III.115}$$

et

$$P_c\, \dot{x}_c(t) = AP_c x_c(t) - BLP_c x_c(t) \tag{III.116}$$

ou encore :

$$\dot{x}_c(t) = P_c^{-1} AP_c x_c(t) - P_c^{-1} BLP_c x_c(t) \tag{III.117}$$

On pose :

$$P_c^{-1} AP_c = A_c \tag{III.118}$$

$$P_c^{-1} B = B_c \tag{III.119}$$

$$LP_c = L_c \tag{III.120}$$

il vient :

$$\dot{x}_c(t) = \mathcal{A}_c\, x_c(t) \tag{III.121}$$

avec : $$\mathcal{A}_c = A_c - B_c L_c \tag{III.122}$$

La loi de commande par retour d'état s'écrit sous la forme :

$$u = -Lx(t) = -LP_c x_c(t) = -L_c x_c(t) = \begin{bmatrix} l_{c_0} & l_{c_1} & \ldots\ldots l_{c_{n-1}} \end{bmatrix} x_c(t) \qquad \text{(III.123)}$$

où L_c est le gain du retour d'état dans la base commandable.

Dans cette base, les matrices A_c, et B_c s'écrivent comme suit :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.124)}$$

Les coefficients de a_i, $i \in \{0, n-1\}$, étant les coefficients du polynôme caractéristique associé à la matrice A, $\mathrm{P}_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$; comme celui-ci est invariant par changement de base, on a : $\mathrm{P}_{A_c}(\lambda) = \mathrm{P}_A(\lambda)$

D'après (III.121), (III.122) et (III.124), il vient :

$$\mathcal{A}_c = A_c - B_c L_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -(a_0 + l_{c_0}) & -(a_1 + l_{c_1}) & \cdots & & -(a_{n-1} + l_{c_{n-1}}) \end{bmatrix} \qquad \text{(III.125)}$$

La matrice $A_c - B_c L_c$, étant sous la forme canonique Compagnon, on peut aisément calculer le polynôme caractéristique du système en boucle fermée :

$$\mathrm{P}_{\mathcal{A}_c}(\lambda) = \det(\lambda I - (A_c - B_c L_c)) = \lambda^n + (a_{n-1} + l_{c_{n-1}})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_0 + l_{c_0}) \qquad \text{(III.126)}$$

On peut imposer à la matrice $A-BL$ un polynôme caractéristique $\mathrm{P}_{A-BL}(\lambda)$, dont les coefficients α_i sont choisis convenablement, tel que :

$$\mathrm{P}_{A_c-B_cL_c}(\lambda)=\mathrm{P}_{A-BL}(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n \qquad \text{(III.127)}$$

Ce qui permet d'imposer les pôles du système, pôles que nous choisissons réels et distincts.

Nous en déduisons la valeur du gain L_c :

$$\begin{cases} l_{c_0}=-a_0+\alpha_0 \\ l_{c_0}=-a_1+\alpha_1 \\ \vdots \\ l_{c_n}=-a_n+\alpha_n \end{cases} \qquad \text{(III.128)}$$

Une fois L_c déterminé, un simple calcul de $L=L_cP_c^{-1}$ permet de déterminer le retour d'état dans la base initiale ; il vient :

$$\mathcal{A}(x)=(A(x)-B(x)L) \qquad \text{(III.129)}$$

Soit P le changement de base qui diagonalise $\mathcal{A}(0)$.

En appliquant ce changement de base à la représentation initiale :

$\mathcal{A}(x)=(A(x)-B(x)L)$

il vient :

$$\mathcal{A}_D(x)=P^{-1}\mathcal{A}(x)\ P \qquad \text{(III.130)}$$

$\mathcal{A}_D(0)$ étant une matrice diagonale.

Si *B'(.)* caractérise les incertitudes dans la base initiale, en notant :

$$B'_D = P^{-1}B' \tag{III.131}$$

il vient :

$$\dot{x}_D = \mathcal{A}_D(x)x_D + B'_D(.) \tag{III.132}$$

Après le changement de base permettant la mise du système linéarisé compensé sous forme diagonale, nous allons étudier la stabilité et déterminer l'attracteur du système initial soumis au même retour en utilisant les techniques d'agrégation, et en élaborant un système de comparaison tel que sa matrice caractéristique instantanée, soit l'opposée d'une M-matrice.

Pour la norme vectorielle $p(x_D) = \left[|x_{D1}|, |x_{D2}| \ldots, |x_{Dn}|\right]^T$, il vient le système de comparaison suivant :

$$\frac{d}{dt}p(x_D) \le M(.)p(x_D) + N(.) \tag{III.133}$$

En majorant $M(.)$ par M et $N(.)$ par N, il vient le système de comparaison :

$$z = Mz + N \text{ avec } z(t) \ge p(x_D(t)) \quad \text{si } z(t_0) \ge p(x_D(t_0)) \tag{III.134}$$

où M et N sont les majorantes de $M(.)$ et $N(.)$

Si M est l'opposée d'une M-matrice, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} z(t) = -M^{-1}N \tag{III.135}$$

et :

$$\lim_{t\to+\infty} p(x_D(t)) \le -M^{-1}N \tag{III.136}$$

Soit l'attracteur défini par :

$$p(x_D(t)) \leq -M^{-1}N \tag{III.137}$$

et :

$$p(P^{-1}x(t)) \leq -M^{-1}N \tag{III.138}$$

$M(.)$ étant obtenue en remplaçant des éléments hors diagonaux de $\mathcal{A}_D(x) = \{d_{ij}(x)\}$ par leurs valeurs absolues telles que :

$$\begin{cases} m_{i,i} = d_{i,i} & \forall i = 1,2,\ldots n \\ m_{i,j} = \left|d_{i,j}\right| & \forall i \neq j \end{cases} \tag{III.139}$$

il vient :

$$M(\mathcal{A}_D(x)) = \begin{bmatrix} d_{11} & \left|d_{12}\right| & \left|d_{13}\right| \\ \left|d_{21}\right| & d_{22} & \left|d_{23}\right| \\ \left|d_{31}\right| & \left|d_{32}\right| & d_{33} \end{bmatrix} \tag{III.140}$$

et :

$$N(.) = \left|P^{-1}B'(.)\right| = \left|B'_D(.)\right| \ . \tag{III.141}$$

Notons N le vecteur à coefficients positifs majorant le vecteur caractérisant l'effet des incertitudes et M la majorante constante de la matrice $M(x)$ caractérisant le système sans incertitudes.

Nous obtenons le système de comparaison, $\dot{z}(t) = Mz(t) + N$ alors $z(t) \geq p(x(t)); \quad \forall t \succ t_0$, si cette propriété est vérifiée à l'instant initial.

Si M est l'opposée d'une M-matrice, alors il existe un attracteur W asymptotiquement stable tel que :

$$\mathrm{W} = \left\{x_D \in \Re^n ; p(x_D) \leq -M^{-1}N\right\}; \quad \text{avec} \quad x_D = P^{-1}x; \quad P = P_c P_D \tag{III.142}$$

III.4.3. Mise en œuvre de la méthode dans le cas d'un système du troisième ordre

Nous considérons le processus (S) dont l'évolution est décrite par l'équation :

$$(S): \quad \dot{x}(t) = A(x,t)x(t) + B(x,t)u(t) + B'(.) \tag{III.143}$$

avec :

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} -10 - 0.5\cos x_1 & 0 & 0.04(\cos x_1 - e^{-x_2^2}) \\ -0.01\dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}\sin x_1 & -3.52 + 0.12e^{-x_1^2} & 3.28 + 0.32e^{-x_1^2} \\ 0.01\sin x_3 & -0.6e^{-x_1^2} & -7.38 - 0.22\cos x_1 \end{bmatrix} \tag{III.144}$$

et :

$$B(x(t)) = \begin{bmatrix} 0.5 + 0.01\sin x_1 \\ 0.4 \\ 0.02\text{sat}x_1 + 0.3 \end{bmatrix} \tag{III.145}$$

$$\left|B'\right| \le B_m \tag{III.146}$$

avec :

$$B_m = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.15 \\ 0.1 \end{bmatrix} \tag{III.147}$$

En linéarisant le système sans incertitudes autour du point de fonctionnement ($x_0 = 0$), on obtient :

$$\dot{y}(t) = A(0)y + B(0)u \tag{III.148}$$

avec :

$$A(0) = \begin{bmatrix} -10.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3.4 & 3.6 \\ 0 & -0.6 & -7.6 \end{bmatrix} \tag{III.149}$$

et :
$$B(0)=\begin{bmatrix}0.5\\0.4\\0.3\end{bmatrix} \tag{III.150}$$

Puis, en mettant le système linéarisé sous forme canonique commandable, il vient :

$$\dot{x}_c = Ax_c + B_c u \tag{III.151}$$

Le polynôme caractéristique du système ainsi linéarisé s'écrit :

$$\det(\lambda I - A(0)) = \det\begin{bmatrix}\lambda+10.5 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+3.4 & -3.6\\ 0 & 0.6 & \lambda+7.6\end{bmatrix} = \lambda^3 + 21.5\lambda^2 + 143.5\lambda + 294$$

soit :

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 + 21.5\lambda^2 + 143.5\lambda + 294 \tag{III.152}$$

A ce polynôme, correspond la forme canonique commandable suivante :

$$A_c = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -294 & -143.5 & -21.5\end{bmatrix};\quad B_c = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{III.153}$$

Pour la détermination du gain de retour d'état L, considérons le système bouclé décrit dans l'espace d'état par :

$$\dot{x}_c = (A_c - B_c L_c)x_c$$

$$= \left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -294 & -143.5 & -21.5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_{c_0} & l_{c_1} & l_{c_2}\end{bmatrix}\right)x_c \tag{III.154}$$

Choisissons les pôles correspondant au polynôme caractéristique $P_{A_c - B_c L_c}(\lambda)$ de la forme :

$$\mathrm{P}_{A_c - B_c L_c}(\lambda) = (\lambda+8)(\lambda+9)(\lambda+10) = \lambda^3 + 27\lambda^2 + 242\lambda + 720 \qquad \text{(III.155)}$$

à laquelle correspond la matrice caractéristique $\mathcal{A}_c$ suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -720 & -242 & -27 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.156)}$$

telle que :

$$\dot{x}_c = (A_c - B_c L_c)x_c = \mathcal{A}_c x_c$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -294 & -143.5 & -21.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c_0} & l_{c_1} & l_{c_2} \end{bmatrix} \right) x_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -720 & -242 & -27 \end{bmatrix} x_c \qquad \text{(III.157)}$$

Le gain du retour d'état doit vérifier les conditions suivantes :

$$-(294 + l_{c_0}) = -720 \quad \rightarrow l_{c_0} = 426$$
$$-(143.5 + l_{c_1}) = -242 \quad \rightarrow l_{c_1} = 98.5$$
$$-(21.5 + l_{c_2}) = -27 \quad \rightarrow l_{c_2} = 5.5$$

soit :

$$u = -\begin{bmatrix} 426 & 98.5 & 5.5 \end{bmatrix} x_c = -\begin{bmatrix} l_{c_1} & l_{c_2} & l_{c_3} \end{bmatrix} x_c \qquad \text{(III.158)}$$

Sachant que :

$$L_c = LP_c$$

$$P_c = \begin{bmatrix} 14 & 5.5 & 0.5 \\ 43.26 & 8.32 & 0.4 \\ 8.19 & 3.93 & 0.3 \end{bmatrix} \text{ et } P_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0879 & 0.03 & -0.1865 \\ -0.9231 & 0.01 & 1.5251 \\ 9.6923 & -0.9491 & -11.551 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.159)}$$

on a :

$$L = L_c P_c^{-1}$$

D'où :

$$L = \begin{bmatrix} -0.1648 & 8.5315 & 7.2328 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.160)}$$

On pose :

$$\mathcal{A}(x) = (A(x) - B(x)L)$$

-Linéarisation du système en boucle fermée autour du point de fonctionnement x_0 =0

Soit $\mathcal{A}(0)$ la matrice du régime libre du système linéarisé bouclé :

$$\mathcal{A}(0) = A(0) - B(0)L$$

$$= \begin{bmatrix} -10.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3.4 & 3.6 \\ 0 & -0.6 & -7.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1648 & 8.5315 & 7.2328 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.4176 & -4.2657 & -3.6164 \\ 0.0659 & -6.8126 & 0.7069 \\ 0.0495 & -3.1594 & -9.7698 \end{bmatrix}$$

-Calcul du changement de base diagonalisant $\mathcal{A}(0)$

- Soit P ce changement de base, il vient :

$$P = P_c P_D = \begin{bmatrix} 14 & 5.5 & 0.5 \\ 43.26 & 8.32 & 0.4 \\ 8.19 & 3.93 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & -9 & -10 \\ 64 & 81 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 2.3 & 0.78 & 0.06 \\ -4.05 & -2.88 & -1.11 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.161)}$$

D'où :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.033 & 0.969 & 0.3197 \\ -0.1099 & -1.6284 & -0.9790 \\ 0.1648 & 0.6893 & 0.4729 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.162)}$$

On a :

$$\mathcal{A}_D(x) = P^{-1}\mathcal{A}(x)\ P \quad ; \quad B_D = P^{-1}B' \tag{III.163}$$

il vient :

$$\dot{x}_D = \mathcal{A}_D(x)x_D + B_D$$

et on a :

$$\mathcal{A}(x) = (A(x) - B(x)L)$$

avec :

$$\mathcal{A}(x(t)) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{III.164}$$

et :

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 0.0016\sin x_1 - 0.5\cos x_1 - 9.9176 \\
a_{12} &= -0.0853\sin x_1 - 4.2657 \\
a_{13} &= 0.04(\cos x_1 - e^{-x_2^2}) - 0.0723\sin x_1 - 3.6164 \\
a_{21} &= -0.01\frac{x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2}\sin x_1 + 0.0659 \\
a_{22} &= 0.12\cos x_1 - 6.9326 \\
a_{23} &= 0.32e^{-x_1^2} + 0.3869 \\
a_{31} &= 0.0033\text{sat}x_1 + 0.01\sin x_1 + 0.0495 \\
a_{32} &= -0.1706\text{sat}x_1 - 0.6e^{-x_2^2} - 2.5594 \\
a_{33} &= -0.1447\text{sat}x_1 - 0.22\cos x_1 - 9.5498
\end{aligned} \tag{III.165}$$

Il vient :

$$\mathcal{A}_D(x) = P^{-1}\mathcal{A}(x)\ P$$

avec :

$$\mathcal{A}_D(x(t)) = \begin{bmatrix} a_{d11} & a_{d12} & a_{d13} \\ a_{d21} & a_{d22} & a_{d23} \\ a_{d31} & a_{d32} & a_{d33} \end{bmatrix} \tag{III.166}$$

avec :

$$a_{d11} = 0.0639\text{sat}x_1 - 1.697e^{-x_1^2} + 0.0053e^{-x_2^2} + 0.514\cos x_1 + 0.0033\sin x_1 + 0.0064\sin x_3 - 0.0194\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\sin x_1 - 6.8223$$

$$a_{d12} = 0.0959\text{sat}x_1 - 1.0427e^{-x_1^2} + 0.0038e^{-x_2^2} + 0.207\cos x_1 + 0.0049\sin x_1 + 0.016\sin x_3 - 0.0485\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\sin x_1 + 0.8318$$

$$a_{d13} = 0.0575\text{sat}x_1 - 0.35571e^{-x_1^2} + 0.0015e^{-x_2^2} - 0.0648\cos x_1 + 0.003\sin x_1 + 0.0288\sin x_3 - 0.0872\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\sin x_1 + 0.419$$

$$a_{d21} = -0.1958\text{sat}x_1 + 3.4614e^{-x_1^2} - 0.0178e^{-x_2^2} - 1.194\cos x_1 - 0.011\sin x_1 - 0.0196\sin x_3 + 0.0326\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\sin x_1 - 2.2496$$

$$a_{d22} = -0.2937\text{sat}x_1 + 1.9589e^{-x_1^2} - 0.0127e^{-x_2^2} - 0.4853\cos x_1 - 0.0165\sin x_1 - 0.049\sin x_3 + 0.0814\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\sin x_1 - 10.4609$$

$$a_{d23} = -0.1762\text{sat}x_1 + 0.6136e^{-x_1^2} - 0.0049e^{-x_2^2} + 0.2486\cos x_1 - 0.0099\sin x_1 - 0.0881\sin x_3 + 0.1466\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\sin x - 0.8573$$

$$a_{d31} = 0.0946\text{sat}x_1 - 1.5459e^{-x_1^2} + 0.0267e^{-x_2^2} + 0.42\cos x_1 + 0.0165\sin x_1 + 0.095\sin x_3 - 0.0138\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\sin x_1 + 1.0992$$

$$a_{d32} = 0.1419\text{sat}x_1 - 0.8566e^{-x_1^2} + 0.019e^{-x_2^2} + 0.067\cos x_1 + 0.0247\sin x_1 + 0.0236\sin x_3 - 0.0275\text{sat}x_1\cos t - 0.0345\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\sin x_1 + 0.9045$$

$$a_{d33} = 0.0851\text{sat}x_1 - 0.2619e^{-x_1^2} + 0.0073e^{-x_2^2} - 0.6286\cos x_1 + 0.0148\sin x_1 + 0.0426\sin x_3 - 0.062\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\sin x_1 - 9.1168 \quad \text{(III.167)}$$

En majorant $M(.)$ par M et $N(.)$ par N, il vient le système de comparaison :

$$z = Mz + N$$

$$N(.) = \left|P^{-1}B'(.)\right| = \left|B'_D(.)\right|$$

$$\max\left|P^{-1}B'(.)\right| \le \max\left|B_m\right|$$

$$N = \max\left|P^{-1}B'(.)\right|' \le \begin{bmatrix} 0.033 & 0.969 & 0.3197 \\ 0.1099 & 1.6284 & 0.9790 \\ 0.1648 & 0.6893 & 0.4729 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.15 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1839 \\ 0.3641 \\ 0.1836 \end{bmatrix} \quad \text{(III.168)}$$

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -6.2197 & 1.1837 & 0.6182 \\ 3.7041 & -7.6168 & 1.4583 \\ 1.7589 & 1.1973 & -8.3074 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0.1839 \\ 0.3641 \\ 0.1836 \end{bmatrix} \quad \text{(III.169)}$$

Les conditions suivantes :

$$\begin{cases} -6.2197 \prec 0 \\ \left(-6.2197 \times -7.6168\right) - \left(3.7041 \times 1.1837\right) \succ 0 \\ \left(-1\right)^3 \det(M) \prec 0 \Rightarrow \left(-1\right)^3 \times \left(\text{-}332.2047\right) \succ 0 \end{cases} \quad \text{(III.170)}$$

étant vérifiées, M est l'opposée d'une M-matrice et on a :

$$\lim_{t \to +\infty} z(t) = -M^{-1}N \quad \text{(III.171)}$$

$$\lim_{t \to +\infty} p(x_D(t)) \leq -M^{-1}N \quad \text{(III.172)}$$

Il vient l'attracteur défini par :

$$p(x_D(t)) \leq -M^{-1}N$$

$$p(x_D(t)) \leq -\begin{bmatrix} \text{-}0.1852 & \text{-}0.0318 & \text{-}0.0194 \\ \text{-}0.1003 & \text{-}0.1523 & \text{-}0.0342 \\ \text{-}0.0537 & \text{-}0.0287 & \text{-}0.1294 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1839 \\ 0.3641 \\ 0.1836 \end{bmatrix} \quad \text{(III.173)}$$

$$p(P^{-1}x(t)) \leq \begin{bmatrix} 0.0492 \\ 0.0802 \\ 0.0441 \end{bmatrix} \quad \text{(III.174)}$$

Sachant que :

$$\lim_{t \to \infty} p(P^{-1}x(t)) \leq -M^{-1}N \quad \text{(III.175)}$$

$$\text{le domaine } D_1 \text{ est : } \begin{cases} \left|0.033x_1 + 0.969x_2 + 0.3197x_3\right| \leq 0.0492 \\ \left|-0.1099x_1 - 1.6284x_2 - 0.9790x_3\right| \leq 0.0802 \\ \left|0.1648x_1 + 0.6893x_2 + 0.4729x_3\right| \leq 0.0441 \end{cases} \quad \text{(III.176)}$$

La figure (III.6) montre les évolutions de l'état du système vers l'attracteur calculé.

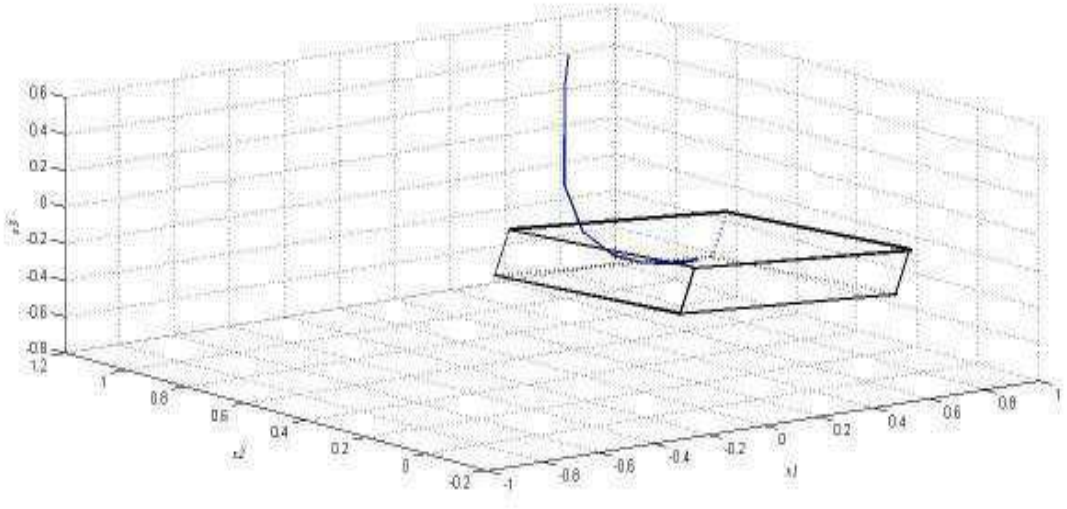


Figure.III.6. Evolution du système vers la zone d'attraction

III.5. Etude de la stabilité d'un système de type Lur'e Postnikov et détermination de l'attracteur en présence d'incertitudes

Les modèles à non linéarité séparable du type Lur'e Postnikov sont très utilisés dans la commande des processus, ce qui justifie notre intérêt pour cette classe de processus.

III.5. 1. Description des systèmes étudiés

Considérons le système de type Lur'e Postnikov de la figure III.7.

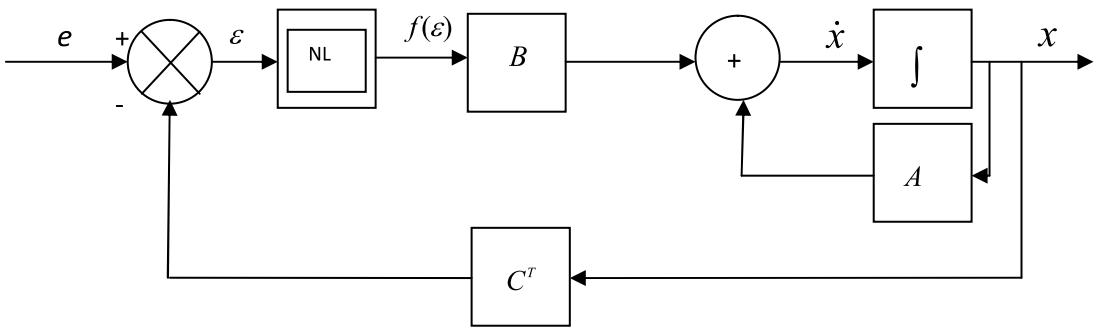


Figure III.7. Processus de type Lur'e Postnikov

La partie linéaire est caractérisée par le triplet de matrices (A, B, C) et la non linéarité est définie dans un secteur délimité par les droites $f_1(\varepsilon)=f_M\,\varepsilon$ et $f_2(\varepsilon)=f_m\,\varepsilon$, figure III.8.

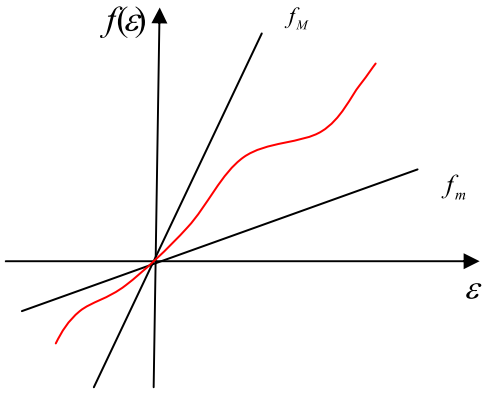


Figure III.8. Non linéarité du système étudié

Si $\left.\dfrac{f(\varepsilon)}{\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ est définie, alors $\dfrac{f(\varepsilon)}{\varepsilon}$, notée $f^*(\varepsilon)$, est supposée telle que $f_m \le f^*(\varepsilon) \le f_M$.

Le système monovariable de la figure III.7 peut être décrit dans l'espace d'état par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bf(\varepsilon) \\ \varepsilon = e - C^T x \end{cases} \qquad \text{(III.177)}$$

ou encore par :

$$\dot{x} = (A - BC^T f^*(.))x + Bf^*(.)e \qquad \text{(III.178)}$$

En régime autonome ($e=0$), le système est supposé soumis à la perturbation $\delta(.)$ et a son évolution décrite par la relation :

$$\dot{x} = \psi(x)x + \delta(.) \qquad \text{(III.179)}$$

avec :

$$\psi(.) = A - BC^T f^*(.) \tag{III.180}$$

III.5.2. Cas du système incertain en régime non autonome (e non nulle)

Considérons les systèmes (III.181) et (III.182) suivants :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Ax_1 + Bf(\varepsilon_1) \\ \varepsilon_1 = e - C^T x_1 \end{cases} \tag{III.181}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = Ax_2 + Bf(\varepsilon_2) + \delta(.) \\ \varepsilon_2 = e - C^T x_2 \end{cases} \tag{III.182}$$

où (III.181) correspond au système non perturbé et (III.182) au système perturbé, avec :

- x_1 trajectoire désirée, c'est-à-dire celle du système non perturbé,
- x_2 trajectoire perturbée,
- e entrée du processus définie sur $\Re$,
- A matrice carrée constante $n \times n$,
- B vecteur constant d'ordre n d'éléments $b_i, \forall i = 1,\ldots,n,$
- C vecteur constant d'ordre $n,$
- $\delta(.)$ perturbation.

L'évolution de l'écart des réponses de ces systèmes peut être décrite par la relation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = A(x_1 - x_2) + B(f(\varepsilon_1) - f(\varepsilon_2)) - \delta(.) \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -C^T(x_1 - x_2) \end{cases} \tag{III.183}$$

L'application du théorème des accroissements finis donne :

$$f(\varepsilon_1) - f(\varepsilon_2) = f^*(\varepsilon)\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) \tag{III.184}$$

$f^*(.)$ prenant ses valeurs parmi celles de la dérivée de f par rapport à ε de la caractéristique de la non linéarité $f(\varepsilon)$.

En posant $x_1 - x_2 = \xi$, il vient :

$$\dot{\xi} = \varphi(x)\xi - \delta(.) \tag{III.185}$$

avec :

$$\varphi(.) = A - BC^T f^*(.) \tag{III.186}$$

-Détermination du domaine d'attraction ou de l'écart limite par rapport à la trajectoire nominale par les techniques d'agrégation

Pour la norme vectorielle $p(\xi) = \left[|\xi_1|, |\xi_2| \ldots, |\xi_n|\right]^T$, il vient le système de comparaison suivant :

$$z \in \mathbb{R}^n \,/\, \dot{z}(t) = M(.)z(t) + N \tag{III.187}$$

avec :

$$p(\xi) \le z \tag{III.188}$$

Si M et N sont des matrices constantes et si M est l'opposée d'une M-matrice, comme N est un vecteur positif, alors il existe pour l'écart ξ un attracteur D asymptotiquement stable tel que :

$$\mathrm{D} = \left\{\xi \in \Re^n ; p(\xi) \le -M^{-1}N\right\} \tag{III.189}$$

M étant la matrice obtenue en prenant la valeur maximale des éléments diagonaux, les valeurs les plus défavorables des modules des éléments hors diagonaux de $\varphi(x)$ et les éléments de N égaux aux maxima des modules des éléments de δ soit :

$$N = \max|\delta| \tag{III.190}$$

Il vient, si M est l'opposée d'une M-matrice :

$$\lim_{t\to+\infty} p(\xi) \le \lim_{t\to+\infty} z = -M^{-1}N \tag{III.191}$$

III.5.3. Simplification de l'approche tenant compte des propriétés des systèmes de Lur'e Postnikov

L'étude de stabilité, envisagée, ici est limitée aux systèmes monovariables.

Soit le processus étudié précédemment :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bf(\varepsilon) \\ \varepsilon = -C^T x \end{cases} \tag{III.192}$$

L'étude de la stabilité fait intervenir la matrice $\psi(x) = A - BC^T f^*(x)$ avec : $f^* = \dfrac{f(\varepsilon)}{\varepsilon}$ représentant, lorsque cette expression est définie, le gain équivalent de la non linéarité.

Dans la mise en équation initiale avec : $y = C^T x$, il est intéressant de prendre $x_n = y$ comme dernière composante du vecteur x. Dans ce cas, il vient :

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{III.193}$$

La matrice $\psi(x) = A - BC^T f^*(x)$ prend alors la forme :

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} & & \vdots & a_{1,n} - b_1 f^*(.) \\ & A_\psi & \vdots & a_{2,n} - b_2 f^*(.) \\ \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} - b_n f^*(.) \end{bmatrix} \qquad \text{(III.194)}$$

les éléments de la matrice $A(.)$ étant notés $a_{ij}(.)$, $\forall\ i, j = 1, 2, \ldots n.$

Dans cette représentation, les éléments du bloc A_ψ sont constants, les $a_{n,i}$ constants, et seuls les éléments de la dernière colonne non constants.

Pour l'étude de $\psi(x)$, deux cas sont envisageables.

Premier cas

- Si A_ψ, qui est constante, est diagonalisable par la matrice P_1 telle que $D_{A_\psi} = P_1^{-1} A_\psi P_1$,

alors le choix de la matrice de changement de base P pour la matrice $\psi(.)$ donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} & & \vdots & 0 \\ & P_1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.195)}$$

conduit pour le système global à la matrice $D_\psi(x) = P^{-1}\psi(x)P$ de forme en flèche mince,

telle que :

$$D_\psi(x) = \begin{bmatrix} & & \vdots & \times_1 \\ & D_{A_\psi} & \vdots & \times_2 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \bullet_1 & \cdots & \bullet_{n-1} & \times_n \end{bmatrix} \qquad \text{(III.196)}$$

dans laquelle les éléments du bloc D_{A_ψ} sont constants, les éléments notés $\bullet_i$ sont constants et seuls les éléments $\times_i$ de la dernière colonne peuvent être non constants.

- **Etude de la stabilité et détermination de l'attracteur en utilisant les techniques d'agrégation.**

Soit x_D le nouveau vecteur d'état avec $x_D = P^{-1}x$.

Le choix de la norme vectorielle $p(x_D) = \left[\left|x_{D_1}\right|, \left|x_{D_2}\right| \ldots, \left|x_{D_n}\right|\right]^T$, permet une majoration de la matrice $D_\psi(x)$ de la forme :

- pour la dernière colonne, la majoration consiste à prendre le cas le plus défavorable pour $\max\left|\times_i\right|, \forall i = 1, \ldots, n-1$,
- pour la dernière ligne, la majoration égale au $\left|\bullet_i\right|, \forall i = 1, \ldots, n-1$,
- pour $\times_n$, la majoration consiste à la remplacer par sa plu grande valeur qui est normalement négative.

Il vient :

$$\dot{x}_D = D_\psi(.)x_D + P^{-1}\delta(.) \tag{III.197}$$

Soit si $M(D_\psi(x))$ est l'opposée d'une M-matrice :

$$\lim_{t\to+\infty} p(x_D) \le \lim_{t\to+\infty} z = -M^{-1}N \tag{III.198}$$

avec :

$$N = \max\left|P^{-1}\delta(.)\right| \tag{III.199}$$

Deuxième cas

- Si A_ψ ,qui est constante, n'est pas diagonalisable sur le corps des réels, alors on applique à $\psi(x)$ un changement de base P_F de même forme que *P*,défini dans le paragraphe précédent, mais dans lequel P_1 est telle que $A_F = P_1^{-1} A_\psi P_1$ est une matrice de forme en flèche mince.

Ce qui conduit pour le système global à la matrice $F_\psi(x) = P^{-1}\psi(x)P$ de forme en flèche mince généralisée d'ordre avec :

$$F_\psi(x) = \begin{bmatrix} \ddots & 0 & \bullet & \times_1 \\ 0 & \ddots & \vdots & \times_2 \\ \bullet_{n-1,1} & \cdots & \bullet_{n-1,n-1} & \vdots \\ \bullet_{n,1} & \cdots & \bullet_{n,n-1} & \times_n \end{bmatrix} \qquad \text{(III.200)}$$

dans laquelle seuls les éléments $\times_i$ de la dernière colonne peuvent être non constants.

- **Etude de la stabilité et détermination de l'attracteur en utilisant les techniques d'agrégation**

Soit x_F le nouveau vecteur d'état avec $x_F = P_F^{-1} x$.

La norme vectorielle $p(x_F) = \left[\left|x_{F_1}\right|, \left|x_{F_2}\right| \ldots, \left|x_{F_n}\right|\right]^T$, permet une majoration *M* de la matrice $F_\psi(x)$ de la forme :

- pour les éléments hors diagonaux, la majoration consiste à remplacer chacun d'eux par la valeur la plus défavorable de son module,
- pour les éléments de la diagonale, y compris l'élément $\times_n$, la majoration consiste à remplacer chacun par sa plus grande valeur, qui est normalement négative.

Si M est l'opposée d'une M-matrice, il vient :

$$\lim_{t\to+\infty} p(x_F) \le \lim_{t\to+\infty} z = -M^{-1}N \tag{III.201}$$

avec :

$$N = \max\left|P_F^{-1}\delta(.)\right| \tag{III.202}$$

III.5.4. Exemple d'application

Considérons le système de type Lur'e Postnikov d'ordre trois de vecteur état x_{I1} et le système avec incertitudes de vecteur état x_{I2} , tels que :

$$\begin{cases} \dot{x}_{I2} = A_I x_{I2} + B_I f(\varepsilon_2) + \delta_I(.) \\ \varepsilon_2 = e - C_I^T x_{I2} \end{cases} \tag{III.203}$$

avec :

$$A_I = \begin{bmatrix} 2.25 & -10.75 & -1.375 \\ 3.5 & -10 & -0.75 \\ -39.5 & 72.5 & 5.25 \end{bmatrix};\quad B_I = \begin{bmatrix} 23.25 \\ 13.5 \\ -23.5 \end{bmatrix};\quad C_I^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -0.5 \end{bmatrix} \tag{III.204}$$

Il faut faire, tout d'abord, un changement de base P_I pour que $C_I^T x_{I2}$ soit la dernière composante du vecteur état x ; il vient pour le vecteur caractérisant la sortie :

$$x_{I2} = P_I x_2. \tag{III.205}$$

$$C^T = C_I^T P_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.206}$$

Il existe une infinité de changements de base qui correspondent à ce résultat.

Pour P_I définie par :

$$P_I = \begin{bmatrix} -2 & 0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{III.207}$$

il vient :

$$\dot{x}_2 = Ax_2 + Bf(\varepsilon_2) + \delta(.) \tag{III.208}$$

avec :

$$A = P_I^{-1} A_I P_I; \quad B = P_I^{-1} B_I; \quad \delta(.) = P_I^{-1} \delta_I(.) \tag{III.209}$$

et :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1.5 \\ 0.5 & -4.5 & -0.5 \\ -3 & 5 & 5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -13.5 \\ -7.5 \\ 8 \end{bmatrix}; \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.210}$$

ou encore en régime libre :

$$\dot{x}_2 = (A - Bf^* C^T) x_2 + \delta(.)$$

$$\dot{x}_2 = \psi(x_2) x_2 + \delta(.) \tag{III.211}$$

avec :

$$\psi(.) = A - Bf^+(.) C^T \tag{III.212}$$

en posant :

$$f(\varepsilon_2) = \frac{f(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2} \varepsilon_2 = f^* \varepsilon_2 \tag{III.213}$$

Pour le changement de base P_1 qui diagonalise le mineur principal d'ordre 2 de A :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.214}$$

il vient, pour la matrice $\psi(x)$, le changement de base P donné par (III.215) tel que $x_2 = Px_{2D}$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.215}$$

qui conduit à la caractérisation du système global par la matrice caractéristique $D_\psi(x_2) = P^{-1}\psi(x_2)P$, de forme en flèche mince :

$$\dot{x}_{2D} = P^{-1}APx_{2D} - P^{-1}BC^T f^* Px_{2D} + P^{-1}\delta(.) \tag{III.216}$$

avec :

$$\dot{x}_{2D} = D_\psi(x_2)x_{2D} + \delta_D(.) \tag{III.217}$$

et :

$$D_\psi(x_2) = \begin{bmatrix} -3.5 & 0 & -1+6f^* \\ 0 & -4 & 0.5+1.5f^* \\ -1 & 2 & 5-8f^* \end{bmatrix} \tag{III.218}$$

- **Etude de la stabilité et détermination de l'attracteur en utilisant les techniques d'agrégation**

La norme vectorielle $p(x_{2D}) = \left[\left|x_{2D_1}\right|, \left|x_{2D_2}\right| \ldots, \left|x_{2D_n}\right|\right]^T$ permet une majoration $M(f^*(.))$ de la matrice $D_\psi(x_2)$

$$\frac{dp}{dt}\left|x_{2D}\right| \le M(f^*)p(\left|x_{2D}\right|) + \left|\delta_D(.)\right| \tag{III.219}$$

avec :

$$M(f^*) = \begin{bmatrix} -3.5 & 0 & \left|-1+6f^*\right| \\ 0 & -4 & \left|0.5+1.5f^*\right| \\ 1 & 2 & 5-8f^* \end{bmatrix} \tag{III.220}$$

Il vient le système de comparaison correspondant aux conditions les plus défavorables :

$$\dot{z} = Mz + N$$

avec, pour $f^* \succ \frac{5}{8}$:

$$M = \begin{bmatrix} -3.5 & 0 & -1+6f^* \\ 0 & -4 & 0.5+1.5f^* \\ 1 & 2 & 5-8f^* \end{bmatrix} \tag{III.221}$$

Les éléments non linéaires étant isolés dans la dernière colonne de *M*, les conditions pour que *M* soit l'opposée d'une M-matrice sont :

$$\begin{cases} -3.5 \prec 0 \\ (-3.5)(-4) \succ 0 \\ \det(M) \prec 0 \end{cases} \tag{III.222}$$

Elles se réduisent à la seule condition suivante à satisfaire :

$$\Delta = -3.5(-4\times\left(5-8f^*\right) - 2\times\left|0.5+1.5f^*\right|) + 1(4\times\left|-1+6f^*\right|) \prec 0 \tag{III.223}$$

soit :

$$\Delta = 14\times\left(5-8f^*\right) + 7\times\left|0.5+1.5f^*\right| + 4\times\left|-1+6f^*\right| \prec 0 \tag{III.224}$$

Comme $\left(5-8f^*\right)\prec 0$:

$$f^* \succ \frac{5}{8} = 0.625 \tag{III.225}$$

Le cas le plus défavorable correspond à : $f^* = f_m$,

Comme $f^* \succ \frac{5}{8}$, la limite est pour l'égalité à 0, c'est-à-dire :

$$14\left(5-8f^*\right)+7\left(0.5+1.5f^*\right)+4\left(6f^*-1\right)=0 \tag{III.226}$$

Il vient :

$$f^* = \frac{69.5}{77.5} = 0.8968 \tag{III.227}$$

Pour avoir la stabilité du système sans erreur de modélisation ni incertitude, il faut que : $f^* \succ 0.8968$.

Considérons le cas où ;

$$2 \le f^* \le f_M \tag{III.228}$$

Pour le cas le plus défavorable, correspondant à : $f^* = f_m = 2$, il vient :

$$M = \begin{bmatrix} -3.5 & 0 & 11 \\ 0 & -4 & 3.5 \\ 1 & 2 & -11 \end{bmatrix} \tag{III.229}$$

Les conditions suivantes :

$$\begin{cases} -3.5 \prec 0 \\ (-3.5)(-4) \succ 0 \\ \det(M) = -51 \prec 0 \end{cases} \tag{III.230}$$

étant vérifiées, le système sans perturbations ni incertitudes est stable.

Comme : $\delta_D(.) = P^{-1}P_I^{-1}\delta_I(.)$, alors on a :

$$N = \max\left|\delta_D(.)\right| = \max\left|P^{-1}P_I^{-1}\delta_I(.)\right|$$

Soit : $\delta_{\mathrm{Im}} \prec \delta_I \prec \delta_{IM}$

avec :

$$\delta_{\mathrm{Im}} = \begin{bmatrix}-0.1 & -0.05 & -0.15\end{bmatrix}^T ; \quad \delta_{IM} = \begin{bmatrix}0.05 & 0.1 & 0.1\end{bmatrix}^T \tag{III.231}$$

Il vient :

$$P^{-1}P_I^{-1}\delta_{\mathrm{Im}} \prec \delta_D \prec P^{-1}P_I^{-1}\delta_{IM} \tag{III.232}$$

avec :

$$P^{-1}P_I^{-1} = \begin{bmatrix}-2 & 3 & 0\\ 4 & -7 & 0\\ 1 & -2 & -0.5\end{bmatrix} \tag{III.233}$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix}0.05 & -0.05 & 0.075\end{bmatrix}^T \prec \delta_D \prec \begin{bmatrix}0.2 & -0.5 & -0.2\end{bmatrix}^T \tag{III.234}$$

et :

$$N = \max\left|\delta_D(.)\right| = \begin{bmatrix}0.2 & 0.5 & 0.2\end{bmatrix}^T \tag{III.235}$$

Si $M(D_\psi(x_2))$ est l'opposée d'une M-matrice, il vient :

$$\lim_{t\to+\infty} p(x_{2D}) \le \lim_{t\to+\infty} z = -M^{-1}N \tag{III.236}$$

soit, dans la représentation initiale :

$$\lim_{t\to+\infty}\left|P^{-1}P_I^{-1}x_{I2}\right| \le -M^{-1}N \tag{III.237}$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{t\to\infty} p(P^{-1}P_I^{-1}x_{I2}) \le \begin{bmatrix} 0.3181 \\ 0.1977 \\ 0.0830 \end{bmatrix} \tag{III.238}$$

- **Envisageons maintenant le cas où l'entrée e est non nulle**

Soit le processus du système sans incertitudes dont la modélisation initiale correspond au vecteur état x_{I1} :

$$\begin{cases} \dot{x}_{I1} = A_I x_{I1} + B_I f(\varepsilon_1) \\ \varepsilon_1 = e - C_I^T x_{I1} \end{cases} \tag{III.239}$$

L'évolution de l'écart des réponses du système nominal de vecteur état x_{I1} et du système incertain de vecteur état x_{I2} soumis à la même entrée est décrite par la relation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_{I1} - \dot{x}_{I2} = A_I(x_{I1} - x_{I2}) + B_I(f(\varepsilon_1) - f(\varepsilon_2)) - \delta(.) \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -C_I^T(x_{I1} - x_{I2}) \end{cases} \tag{III.240}$$

Si $f(.)$ est dérivable, l'application du théorème des accroissements finis donne :

$$f(\varepsilon_1) - f(\varepsilon_2) = f'(\theta)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \tag{III.241}$$

avec $\varepsilon_1 \prec \theta \prec \varepsilon_2$

Il vient :

$$\dot{x}_{I1} - \dot{x}_{I2} = A_I(x_{I1} - x_{I2}) - B_I f^*(\varepsilon) C_I^T(x_{I1} - x_{I2}) - \delta(.) \tag{III.242}$$

Posons :

$$x_{I1} - x_{I2} = \xi_I \tag{III.243}$$

Nous envisageons d'appliquer, tout d'abord un changement de base P_I pour que $C_I^T \xi_I$ corresponde à la dernière composante du vecteur état ξ, : $\xi_I = P_I \xi$. Dans ce cas, on a :

$$\dot{\xi}_I = P_I^{-1} A_I P_I \xi_I - P_I^{-1} B_I f^*(.) C_I^T P_I \xi_I - P_I^{-1} \delta_I(.) \tag{III.244}$$

ou encore : $$\dot{\xi} = \left(A - B f^*(.) C^T{}_I \right) \xi - \delta(.) \tag{III.245}$$

expression de la forme :

$$\dot{\xi} = \varphi(.) \xi - \delta(.) \tag{III.246}$$

avec :

$$\varphi(.) = A - B C^T f^*(.) \tag{III.247}$$

On applique, maintenant, un changement de base P qui diagonalise le mineur principal d'ordre 2 de A et qui conduit à la matrice caractéristique de forme en flèche, avec :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.248}$$

Il vient :

$$\dot{\xi} = P^{-1} A P \xi - P^{-1} B f^*(\varepsilon) P C^T \xi - P^{-1} \delta(.) \tag{III.249}$$

ou encore :

$$\dot{\xi} = \left(A_D - B_D f^*(.) C_D^T \right) \xi_D - \delta_D(.)$$

soit :

$$\dot{\xi}_D = \begin{bmatrix} -3.5 & 0 & -1 + 6 f^* \\ 0 & -4 & 0.5 + 1.5 f^* \\ -1 & 2 & 5 - 8 f^* \end{bmatrix} \xi_D - \delta_D(.) \tag{III.250}$$

La majorante de la matrice $\left(A_D - B_D f^*(.) C_{DI}^T\right)$ est définie, comme précédemment, par :

$$M\left(f^*\right) = \begin{bmatrix} -3.5 & 0 & \left|-1+6f^*\right| \\ 0 & -4 & \left|0.5+1.5f^*\right| \\ 1 & 2 & \left(5-8f^*\right) \end{bmatrix} \tag{III.251}$$

Considérons une non linéarité $f(.)$ telle que :

$$f_m \le f^* \le f_M \tag{III.252}$$

Si on a, par exemple $f_m = 1.5$, il vient, compte tenu des résultats précédents relatifs au cas le plus défavorable, la majorante :

$$M = \begin{bmatrix} -3.5 & 0 & -1+6f_m^* \\ 0 & -4 & 0.5+1.5f_m^* \\ 1 & 2 & 5-8f_m^* \end{bmatrix} \tag{III.253}$$

qui s'exprime numériquement par :

$$M = \begin{bmatrix} -3.5 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 2.75 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix} \tag{III.252}$$

Les conditions suivantes:

$$\begin{cases} -3.5 \prec 0 \\ (-3.5)(-4) \succ 0 \\ \det(M) = -51 \prec 0 \end{cases} \tag{III.253}$$

étant satisfaites, la matrice M est l'opposée d'une M-matrice, et le système nominal est stable.

D'après la relation (III.199), N est définie par :

$$N = \max\left|\delta_D(.)\right| = \begin{bmatrix}0.2 & 0.5 & 0.2\end{bmatrix}^T \tag{III.254}$$

M étant est l'opposée d'une M-matrice, alors on a :

$$\lim_{t\to+\infty} p(\xi_D) \le \lim_{t\to+\infty} z = -M^{-1}N \tag{III.255}$$

soit dans la représentation initiale :

$$\lim_{t\to+\infty}\left|P^{-1}P_I^{-1}\xi_D\right| \le -M^{-1}N$$

et :

$$\lim_{t\to\infty} p(P^{-1}P_I^{-1}\xi_D) \le \begin{bmatrix}0.4043\\0.2294\\0.1519\end{bmatrix} \tag{III.256}$$

La figure (III.9) montre l'évolution de l'état du système initial en régime autonome vers l'attracteur calculé précédemment.

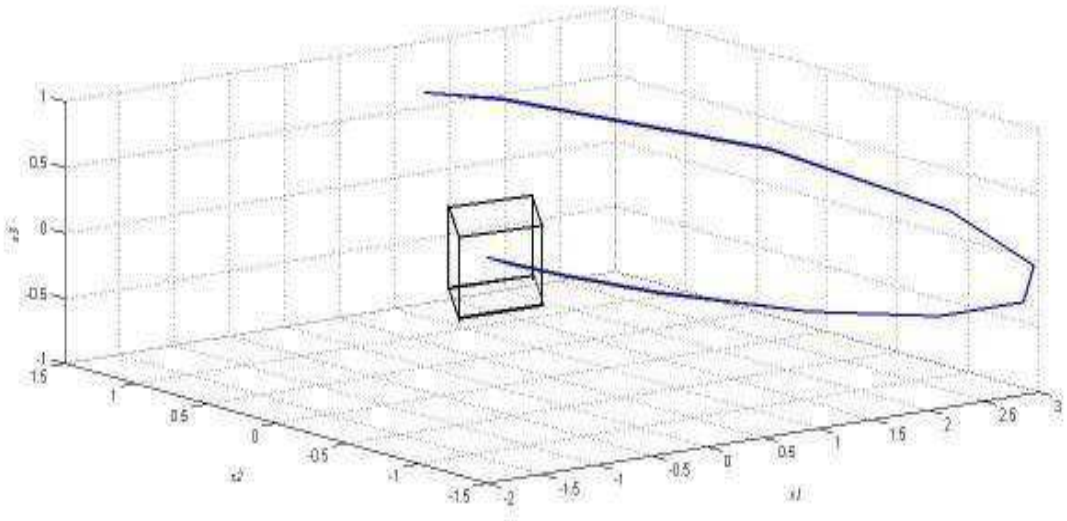


Figure.III.9. Evolution de l'état du système initial incertain en régime autonome vers son attracteur

La technique de détermination de l'écart, entre la trajectoire désirée et la trajectoire réelle du processus, s'exprime de façon simple à mettre en œuvre dans le cas des processus de type Lur'e Postnikov ainsi qu'il apparaît sur l'exemple traité.

CONCLUSION

L'approche proposée, dans ce chapitre, montre que la prise en compte à chaque étape des valeurs limites du vecteur état permet une meilleure estimation de l'attracteur.

La réalisation de commandes du type linéarisation par difféomorphisme n'est pas altérée par la présence d'incertitudes dans la définition du modèle utilisé, simplement l'imprécision du modèle se répercute au niveau de la précision dans l'atteinte de l'objectif, précision qui peut être estimée par la détermination de l'attracteur.

L'étude de la commande par placement de pôles, qui est parmi les plus utilisées, a montré l'efficacité et l'importance de l'approche utilisée pour estimer la qualité de la commande mise en œuvre. Dans ce cas également, l'étude de l'impact d'incertitudes bornées sur la précision des résultats a été étudié.

Concernant les processus du type Lur'e Postnikov, la technique de détermination de l'écart entre la trajectoire désirée et la trajectoire réelle du processus s'estime de façon simple à mettre en œuvre par la technique de majoration proposée.

CONCLUSION GENERALE

Le concept de norme vectorielle, associé à la définition des systèmes de comparaison par l'approche de la stabilité de Borne et Gentina, est utilisé dans ce travail, avec succès, pour étudier la stabilité des processus complexes de modèles éventuellement incertains afin de déterminer une estimation la moins conservative possible de l'attracteur en cas de systèmes dont la stabilité locale ne peut être garantie. Pour les systèmes stables, l'attracteur peut être réduit à l'origine. Cette méthode permet de tester la précision d'un système contrôlé en fournissant un système de comparaison pour majorer l'erreur de la sortie par rapport à la consigne.

Le choix de la représentation matricielle s'avère particulièrement important pour l'étude de la stabilité et ceci indépendamment des changements de base qu'il est possible d'effectuer après avoir choisi la représentation initiale. Au niveau de la norme vectorielle, utilisée pour définir le système de comparaison, il est préférable de la choisir de façon à obtenir une estimation de l'attracteur la plus précise possible ; ce qui conduit à prendre celle-ci de même ordre que le vecteur état et de reporter la possibilité d'adaptation sur le choix de la représentation d'état initiale et des modèles et des systèmes de comparaison utilisés.

Dans ce travail, nous avons proposé une approche permettant une estimation de l'attracteur par étapes successives en définissant une succession d'attracteurs imbriqués. L'étude du cas d'un système du troisième ordre a montré que l'approche par utilisation de modèles tels que le linéarisé au niveau de l'objectif soit sous forme diagonale ou en flèche, donne des résultats plus performants pour l'estimation de l'attracteur que celle de sa détermination directe à partir d'une représentation initiale quelconque ainsi qu'il apparaît sur les exemples proposés.

La prise en compte du domaine d'évolution du vecteur état dans la modélisation du processus permet de relâcher les contraintes lors d'une étude de stabilité en régime autonome.

Nous avons montré, dans ce mémoire, l'efficacité et l'importance des différentes approches utilisées pour estimer la qualité de la commande mise en œuvre en développant deux cas de commande importants : la linéarisation par difféomorphisme et le placement de pôles.

Dans ces deux cas, l'étude de l'impact d'incertitudes bornées sur la précision des résultats a été étudié.

Le cas des systèmes de type Lur'e Postnikov a été plus particulièrement développé, notamment concernant la majoration de l'erreur dans le problème du suivi de trajectoires.

Comme perspectives, il serait intéressant de traiter le cas de processus dont l'évolution est décrite par des inégalités différentielles ou des multimodèles, d'étendre l'approche proposée aux processus à temps discret, et de réaliser une mise en œuvre pratique sur un benchmark correspondant à un problème réel.

BIBLIOGRAPHIE

[ABD 85] M. N. ABDELKRIM
« Sur la modélisation et la synthèse des systèmes singulièrement perturbés. Application aux processus dynamiques », Thèse de Doctorat de Spécialité, ENIT, Tunis.(1985).

[AMR10] I. AMRI, D. SOUDANI, M. BENREJEB
«Delay dependent robust exponential stability criterion for perturbed and uncertain neutral systems with time varying delays». Studies in Informatics and Control, 19 (2), 135, 2010.

[AUS 79] J.AUSLANDER, N.P.BHATIA, P. SEIBERT
«Attractors in dynamical systems». Bol. Soc. Mat. Mex. 9, 55-66, 1964.

[BEN 76] M.BENREJEB
« Sur la synchronisation des systèmes continus non linéaires en régime forcé »,Thèse de Docteur Ingénieur, USTL, Lille, France. (1976).

[BEN 78] M.BENREJEB, P. BORNE
« On an algebraic stability criterion for non-linear processes. Interpretation in the frequency domain», Proc. of MECO 78, 678-682,1978.

[BEN 80] M. BENREJEB
« Sur l'analyse et la synthèse de processus complexes hiérarchisés. Application aux systèmes singulièrement perturbés », Thése de Doctorat ès Sciences Physiques, USTL, Lille, France. (1980).

[BEN 82] M. BENREJEB, P. BORNE, F. LAURENT

« Sur une application de la représentation en flèche à l'analyse des processus », RAIRO Automatique, Vol. 16, n° 2, pp. 133-146, 1982.

[BEN 84a] M. BENREJEB, M. N. ABDELKRIM

« Nouvelle méthode de séparation des échelles de temps des systèmes linéaires singulièrement perturbés », 5 èmes JTEA, Tunis , pp. 133-146, 1984.

[BEN 84b] M. BENREJEB, M. GASMI

« Sur la réduction de l'ordre des systèmes asservis en boucle fermée par la méthode des perturbations singulières », 5èmes JTEA, Tunis, pp. 6.1-6.3,1984.

[BEN 01] M.BENREJEB, M.GASMI

«On the use of an arrow form matrix for modeling and stability analysis of singularly perturbed non-linear systems», Systems Analysis Modeling Simulation 40 (4), 509, 2001.

[BEN 03] M.BENREJEB, M. N.ABDELKRIM

«On order reduction and stabilization of TSK non linear fuzzy models by using arrow form matrix», SAMS, vol. 43, n°7, pp. 977-991, 2003.

[BEN 05] M. BENREJEB, M. GASMI, P. BORNE

«New stability conditions for TS fuzzy continuous nonlinear models», Nonlin. Dynam. and Syst. Theory 5 (4), 369-379, 2005.

[BEN 08] M.BENREJEB, A. SAKLY, K. B. OTHMAN, P. BORNE

«Choice of conjunctive operator of TSK fuzzy systems and stability domain study»,Mathematics and Computers in Simulation, 76 (5), 410-421, 2008.

[BEN 10] M. BENREJEB
« Stability study of two level hierarchical nonlinear systems »,IFAC LSS Symposium on Large Scale Complex Systems Theory and Applications, Plenary lecture, 9 (1), 30-41, 2010.

[BHA 67a] N. P. BHATIA, G. P. SZEGÖ
« An Extension Theorem for Asymptotic Stability and its Application to a Control Problem», Differential Equations and Dynamical Systems, J. K. Hale, J. P. LaSalle, Academic Press New York London, p.147-153, 1967.

[BHA 67b] N. P. BHATIA, A. C. LAZER, G. P. SZEGÖ
«On Global Weak Attractors in Dynamical Systems »,Differential Equations and Dynamical Systems, J. K. Hale, J. P. LaSalle, Academic Press New York London, p.375-379, 1967.

[BHA 70] N. P. BHATIA, G. P. SZEGÖ
« Stability Theory of Dynamical Systems », Springer Verlag Berlin, 1970.

[BOR 72] P. BORNE, J. C. GENTINA, F. LAURENT,
«Sur la stabilité des systèmes échantillonnés non linéaires»,RAIRO Revue Jaune, AFCET, J2, pp.96–105, Mai 1972.

[BOR 77] P. BORNE, M.BENREJEB
«On the stability of a class of interconnected systems.Application to the forced Working conditions »,4th IFAC Symposium MTS, Fredericton, Canada, 1977.

[BOR 79] P. BORNE
«Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires de grande dimension. Applications aux systèmes interconnectés », Thèse de Doctorat, USTL, Lille, (1979).

[BOR 87] P. BORNE
« Nonlinear system stability. Vector norm approach, System and Control Encyclopedia», Pergamon Press, Lille, France, 5, pp .3402-3406, 1987.

[BOR 90] P.BORNE, J.P.RICHARD, M. TAHIRI
«Estimation of attractive domains forlocally stable or unstable systems», Systems Analysis Modelling Simulation,AkademicVerlag, Berlin, 7,8, 595-610, 1990.

[BOR 92a] P. BORNE, G. DAUPHIN-TANGUY, J. P. RICHARD, F. ROTELLA et I. ZAMBETTAKIS
«Modélisation et identification des processus», Tome I, Ed. Technip, Paris,1992.

[BOR 92b] P.BORNE, J. P. RICHARD, N.E.RADHY
« Non linear systems: 2. Stability stabilization», Ouvrage collectif réalisé dans le cadre du Groupe Non Linéaire DRET/AFCET ,1992.

[BOR 93] P. BORNE, G. DAUPHIN-TANGUY, J. P. RICHARD, F. ROTELLA et I. ZAMBETTAKIS
« Analyse et Régulation des processus industriels » Tome I, Régulation continue, Paris, 1993.

[BOR 96] P. BORNE, J.P.RICHARD, N. E.RADHY
« Stability, stabilization, regulation using vector norms, Nonlinear Systems, 2, Stability and Stabilization», Chapman & Hall, Chapter 2, pp. 45-90, 1996.

[BOR 07a] P. BORNE, P. VANHEEGHE, E. DUFLOS
« Automatisation des processus dans l'espace d'état ». Technip, paris,2007

[BOR 07b] P. BORNE, M.BENREJEB
« On the representation and the stability study of large scale systems » International Journal of Computers Communications and Control, 3 (suppl. 5), 55-66, 2008.

[BOR 13] P. BORNE, D. POPESCU, F.G.FILIP, D.STEFANOIU
« Optimization in Engineering Sciences. Exact Methods » Wiley, 2013

[BRA 95] E. B. BRAIEK, F. ROTELLA, M. BENREJEB
« Algebraic criteria for global stability analysis of non-linear systems »,Systems Analysis Modeling Simulation 17 (3), 211-227, 1995.

[CHE, al. 05] E. CHERRIER, M. BOUTAYEB, J. RAGOT
« Observers based synchronization and input recovery for a class of chaotic models ». In 44nd IEEE. Conference on Decision and Control and European Control Conference, Seville. 93

[CHE, al. 06] E. CHERRIER, M. BOUTAYEB, J. RAGOT
« Observers based synchronization and input recovery for a class of nonlinear systems». IEEE Transactions on Circuits and Systems I, 53(9):1977–1988. 93

[DAU 83] G. DAUPHIN-TANGUY
« Sur la représentation multi-modèles des systèmes singulièrement perturbés. Application à l'analyse et à la synthèse », Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Lille, France, 1983.

[ELM 79] A. EL MOUDNI
« Introduction de nouveaux outils mathématiques pour la description des systèmes discrets non linéaires de grandes dimensions » , Thèse de Doctorat de Troisième Cycle, N°888 ,Lille, France, 1981.

[GAS 89] M. GASMI
« Contribution à la modélisation par une nouvelle méthode de localisation des dynamique des systèmes singulièrement perturbés : méthode du cercle », Thèse de Doctorat de Spécialité, ENIT, Tunis, 1989.

[GAS 01] M. GASMI
« Contribution à la modélisation et à l'étude de la stabilité des systèmes continus complexes de grande dimension. Cas des systèmes singulièrement perturbés et des systèmes dynamiques à commande floue de type TSK », Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, ENIT, Tunis, 2001.

[GEN 72] J.C. GENTINA, P. BORNE, F. LAURENT,
«Stabilité des systèmes continus non linéaires de grande dimension», RAIRO, Août, pp. 69-77, 1972.

[GEN 76a] L. T. GENTINA, P. BORNE, F. LAURENT
« General aggregation of large scale system by vector Lyapunov functions and vector norm »: Int. J. of Control, volume 24, 4, pp 529-550, 1976.

[GEN 76b] J. C. GENTINA
« Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension », Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1976.

[GEN 79] J.C.GENTINA, P.BORNE, C. BURGAT, J. BERNOUSOU, L.T.GRUJIC « Sur la stabilité des systèmes de grande dimension. Normes vectorielles », RAIRO, volume 13, 1, pp. 57-75, 1979.

[GHA 13b] A. GHARBI, M. BENREJEB, P. BORNE « New Approch for the Determination of Attractors for Nonlinear Systems », second International Conference on Systems and Computer Science ICSCS-Villeneuve d' d'ASCQ, Lille, 2013

[GRU 73] L. T. GRUJIC, D. D. SILJAK « Asymptotic stability and instability of large scale systems », IEEE Trans. on Auto. Control, volume 18, 6, 1973.

[GRU 75] L.T. GRUJIC « Novel Development of Lyapunov Stability of Motion », Int. J. of Control, Vol.22, No. 4, pp.525-549, 1975.

[GRU 78] LJ. T.GRUJIC, J.C.GENTINA, P.BORNE, C.BURGAT, J. BERNOUSOU « Sur la stabilité des systèmes de grande dimension. Fonctions de Lyapunov vectorielles», RAIRO, volume 12, 4, pp. 319-348, 1978.

[GRU 79] LJ. T. GRUJIC, P. BORNE, J.C. GENTINA « Matrix approaches to the absolute stability of time-varying Lur'e Postnikov systems », International Journal of Control, Vol. 30, n° 6, pp. 967-980, 19790.

[GRU 86] LJ.T. GRUJIC «Stability Domains of General and Large Scale Systems», Proceeding IMACS-IFACS, Modelling and Simulation for Control of Lumped and Distributed Parameter Systems, Villeneuve d'ASCQ, 3-6 Juin, p.267-27, 1986.

[GRU 93] LJ.T. GRUJIC, P.BORNE, J. C. GENTINA, J.P. RICHARD
«Stability Domains: Time-Invariant Continious-Time Systems», manuscrit du livre du même nom, en préparation,1993.

[GRU 04] LJ.T. GRUYITCH, J.P. RICHARD, P. BORNE, J.C. GENTINA
« Stability domains »Chapman and Hall, 2004

[HAM 09] S.HAMMAMI, K. Ben SAAD, M.BENREJEB
« On the synchronization of identical and non-identical 4-D chaotic systems using arrow form matrix »,Chaos, Solitons& Fractals 42 (1), 101-112, 2009.

[HAM 10] S.HAMMAMI, M.BENREJEB, P.BORNE
« On Nonlinear Continuous Systems Stabilization Using Arrow Form Matrices », International Review of Automatic Control (IREACO), Vol.3 N°2, pp. 106-114, 2010.

[HAN 63] W. HAHN
« Theory and Application of Liapunov's Direct Method »,Prentice-Hall,Englewood Cliffs , N.J., 1963 .

[HAN 67] W. HAHN
« Stability of Motion », Springer-Verlag, N.Y., 1967.

[HED 05] J. K..HEDRICK, A. GIRARD
« Feedback Linearization ».Control of Nonlinear DynamicSystems: Theory and Applications, 2005.

[H.K 02] H.K. KHALIL.
« Nonlinear Systems », Third edition, Prentice Hall, 2002.

[JAK 80] B. JAKUBCZYK, W. RESPONDEK
« On linearization of control systems». Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math, vol 28, no. 9-10, pp. 517-522, 1980.

[KAS 04] E.KASLIK, A.M.BALINT, and ST.BALINT,
« Methods for Determination and Approximation of the Domain of Attraction».Research Report, 2004.

[LAS 61] J.P. LASALLE, S.LEFSCHETZ
«Stability by Liapunov's Direct Method with Applications », Academic Press, New York , 1961.

[LAK 69] V. LAKSHMIKANTHAM, S. LEELA
«Differential and Integral Inequalities», Vol.1, Academic Press, New York»,1969.

[LEV 04] J. LEVINE
« Analyse et Commande des Systèmes Non linéaires», Centre Automatique et Systèmes, Ecole des Mines de Paris, Mars, 2004.

[MAG 04] M. N. MAGHRAOUI et S. BELGHITH
« Synchronisation chaotique basée sur le Backstepping. Application à la sécurisation de l'information », CTGE'04, pp. 188-193, 2004.

[MAG 06] M. N. MAGHRAOUI, S. BELGHITH et M. DJEMAI
« A chaotic systems synchronization method applied to secure communication », 2nd International Symposium on Communication, Control and Signal Processing, ISCCSP'06, n° 168, 2006.

[MAR 93] R. MARINO, S. PERESADA, P. VALIGI,
«Adaptative Input-Output Linearizing Control of Induction Motors», IEEE Transcations on Automatic Control, vol.38, no.2, pp. 208- 221, February, 1993.

[MIC 77] A.N. MICHEL, R.K. MILLER
« Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems », Academic Press, New York , 1977 .

[OZG 79] U. OZGUNER
« Near optimal of composite systems : the multi-time-scale approach », IEEE Trans. on Aut. Control, vol.24, N°4 ,pp.652-655, 1979.

[REI 82] H. REINHARD
« Equation Différentielles, Fondements et Applications », Gauthier-Villars, Ed. Bordas, Paris, 1982.

[RIC 84] J.P. RICHARD
« Définitions d'invariants polynomiaux adaptés à la modélisation et à l'étude des systèmes non linéaires et non stationnaires » , Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Lille, France, 1984.

[RIC 88] J.P. RICHARD, P. BORNE, J.C. GENTINA
« Estimation of stability domains by use of vector norms », Information and Decision Technologies, Nord -Holland, Vol. 14, pp. 241-251, 1988.

[RIC 90] J.P. RICHARD
«Local and global stability of attractors by use of vectors norms »The Lyapunov fonction method and applications, J.C. Baltzer AG, Scient. Pub. Co., (IMACS), 53-62, 1990.

[ROB 64] F. ROBERT
«Normes vectorielles de vecteurs et de matrices», Rev. Française Traitement Information Chiffres 7, 261–299, 1964.

[ROB 73] F. ROBERT
« Matrices non négative et normes vectorielles» National Polytechnical Institute of Grenoble, DEA manual, 1973.

[ROT 83] F. ROTELLA, J.P. RICHARD
« Modélisation et synthèse des systèmes monovariables de type Lurie-Postnicov », Actes Congrès Applied Informatiques, Lille, 1983.

[SIL 72] D.D. SILJAC
« Stability of large scale systems under structural perturbations», IEEE Trans. on Syst. Man and Cyber., volume 2, 5, 1972.

[SOU 97] D. SOUDANI
« Sur la détermination explicite de solutions à des problèmes d'analyse et de synthèse de systèmes singulièrement perturbés », Thèse de Doctorat, ENIT, Tunis, 1997.

[VIS 04] C.VISA.
«Commande non linéaire et observateurs, application à la MRV en grande vitesse »,Thèse de Doctorat, Université de Paul Verlaine-Metz, France, Dec, 2004.

[WAZ50] T. WAZEWSKI
«Système des Equations et des Inégalités Différentielles Ordinaires aux Seconds Membres Monotones et leurs Applications», Ann. Soc. Polon.Math., Vol.23, p.112-166, 1950.

[YAR 98] A. YARBA, M. GASMI, M. BENREJEB
« Etude de la robustesse des régulateurs linéaires quadratiques pour une perturbation modulée de la commande », Annales Magrébines de l'Ingénieur, vol. 12,N°Hors série, Tome I, pp.265-268, 19980.

[ZUB 64] V. I. ZUBOV
« Methods of A.M. Lyapunov and their Application». Noordhoff , 1964.

Sur la stabilité et l'estimation des attracteurs de systèmes complexes fortement nonlinéaires

Résumé :

Les travaux effectués dans le cadre de cette thèse présentent une nouvelle approche permettant d'estimer et si possible minimiser l'écart maximum de la sortie par rapport à l'objectif dans le cas des processus non linéaires pour lesquels il n'est pas toujours possible de déterminer une commande permettant d'atteindre exactement un objectif donné.
Le concept de norme vectorielle, associé à la définition des systèmes de comparaison par l'approche de la stabilité Borne et Gentina, et le choix de la représentation matricielle qui s'avère particulièrement importante pour l'étude de la stabilité, est utilisé dans ce travail, avec succès, pour étudier la stabilité des processus complexes de modèles éventuellement incertains
Nous avons défini une technique d'estimation des attracteurs caractérisant le maximum de l'erreur par rapport à l'objectif et, par la prise en compte des résultats ainsi obtenus, de les affiner par des itérations successives de la procédure présentée.
Dans la recherche de commandes, l'approche a été réalisée en définissant celle-ci par retours d'état calculés soit directement, soit à partir d'une linéarisation du modèle du processus dans le voisinage de l'objectif. Une attention toute particulière a été accordée aux processus du type Lur'e Postnikov.

Mots-clefs :

Systèmes complexes, Systèmes continus nonlinéaires, Systèmes incertains, Systèmes majorants, Commande, Stabilité, Normes vectorielles, Technique d'agrégation.

Stability and estimation attractors of nonlinear complex systems

Abstract :

A new approach of the estimation of the error between the desired output of a nonlinear complex system and the real one's is studied by the use of Borne-Gentina vector norm approach and the Benrejeb arrow form description.
A new technique of definition of the attractors characterizing the precision of control laws is defined, implementing successive improved determinations.
The research of control laws by various types of state or output feedback in presence of uncertainties is proposed, based on a local linearization and control of the system.
A special attention has been devoted to the control of nonlinear Lur'e Postnikov type systems

keywords:

Complex systems, Nonlinear continuous systems; Uncertain systems, Overvaluing systems, Control, Stability, Vector norms, Aggregation technics. Arrow form matrices, Stability, Stabilization.