



**HAL**  
open science

# Comportement en fatigue sous environnement vibratoire : prise en compte de la plasticité au sein des méthodes spectrales

Hervé Rognon

► **To cite this version:**

Hervé Rognon. Comportement en fatigue sous environnement vibratoire : prise en compte de la plasticité au sein des méthodes spectrales. Autre. Ecole Centrale Paris, 2013. Français. NNT : 2013ECAP0009 . tel-00864892

**HAL Id: tel-00864892**

**<https://theses.hal.science/tel-00864892>**

Submitted on 23 Sep 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THÈSE

Présentée par Hervé ROGNON

pour l'obtention du  
**GRADE DE DOCTEUR**

École Doctorale : École Centrale Paris (ED287)

Spécialité : Sciences pour l'ingénieur

Laboratoire d'accueil : LISMMA (EA2336)

---

### Comportement en fatigue sous environnement vibratoire : Prise en compte de la plasticité au sein des méthodes spectrales

---

Soutenue le : 22/01/2013

Devant un jury composé de :

M. SAANOUNI Khémais	Professeur des Universités	UT Troyes	Président de jury
M. LIEURADE Henri-Paul	Docteur d'État	Consultant	Rapporteur
M. ANTONI Jérôme	Professeur des Universités	INSA lyon	Rapporteur
Mme. POMMIER Sylvie	Professeur des Universités	ENS Cachan	Examinatrice
M. TAWFIQ Imad	Professeur des Universités	SUPMECA	Directeur de thèse
M. DA SILVA BOTELHO Tony	Maitre de Conférences	SUPMECA	Co-encadrant
M. BENNEBACH Mohamed	Docteur	CETIM	Co-encadrant
M. COLIN Bruno	Ingénieur	Nexter Systems	Invité

N°2013ECAP0009



# Remerciements

A messieurs Jérôme Antoni et Henri-Paul Lieurade qui ont bien voulu se prêter à la tâche de rapporteur, je veux leur exprimer toute ma reconnaissance. Je remercie également Mme Sylvie Pommier pour avoir fait partie de mon jury. Enfin, je remercie M. Khémais Saanouni pour avoir bien voulu présider ma soutenance de thèse.

Je remercie M. Pascal Souquet de la Fondation CETIM pour l'intérêt porté à mes travaux de thèse. Sans le financement de la fondation CETIM, la thèse n'aurait pas eu lieu. Je remercie mes encadrants du LISMMA, Imad Tawfiq et Tony Da Silva Botelho, pour la confiance qu'ils m'ont accordée durant la thèse.

Je remercie les pôles IVB, SIM et FCM du Cetim Senlis avec qui j'ai pris plaisir à travailler au cours de ces 3 ans de thèse. Je remercie plus particulièrement le pôle FCM et notamment Mohamed Bennebach pour avoir co-encadré ma thèse. J'ai pris plaisir à travailler et à discuter avec lui. Il a su m'aider à prendre de la hauteur sur mes travaux et me donner les bonnes directions au moment opportun de la thèse.

Je remercie André Galtier qui m'a proposé ce sujet de thèse dans lequel je me suis épanoui durant ces trois ans. J'ai toujours eu avec lui des réunions enrichissantes. Merci à lui pour la confiance qu'il m'a accordé.

Je remercie Bruno Colin, rencontré au hasard d'une conférence. Cette rencontre m'a permis d'avoir des discussions enrichissantes sur notre thématique. Au-delà de ça, j'ai pris plaisir à organiser avec lui un mini-symposium sur la fatigue vibratoire durant VCB 2012 pour réunir cette communauté souvent disséminée. Je le remercie d'avoir accepté de participer à ma soutenance de thèse.

Je remercie Arkadiusz Kosecki et Christophe Ben Brahim des pôles techniques de SUP-MECA pour leur aide durant les essais de la thèse.

Je remercie mes camarades de bureau Franck Renaud et Sylvain Thouviot pour la bonne humeur quotidienne. Je les remercie aussi pour les dépannages sur Matlab et Abaqus. Je remercie Gael Chevallier, Jean-Luc Dion et Nicolas Peyret pour les réponses à mes questions sur



---

des problèmes spécifiques ainsi que les pauses café, moments de discussions enrichissantes et de jeu !! Je remercie les doctorants du Lisma en espérant ne pas en oublier : Vincent (pour ses séances sur le bon coin), Frédéric (pour ces cours de négociation), Satia (pour sa voiture et les trajets à ECP), Julien (l'homme qui voulait tout faire mais qui a oublié q'une journée faisait 24h), Patou (pour sa boîte à outils quand je suis en panne et pour son accent du sud), Hugo (M.Wikipédia) et Stéphane (pour son bureau à 42°C). Je remercie l'équipe COSI du LISMMA pour les pauses repas et les soirées. Mille mercis à Véronique Da Silva qui m'a enlevé une aiguille du pied avec mes ordres de missions à faire en urgence.

Je remercie ma famille pour leur soutien et leurs encouragements durant ma thèse et pour leur présence à ma soutenance.

# Résumé

La première partie du travail de thèse a consisté en l'établissement d'un état de l'art sur les méthodes de dimensionnement en fatigue sous environnement vibratoire. Nous avons ainsi étudié la représentation mathématique des vibrations aléatoires, les méthodes classiques de dimensionnement en fatigue pour des chargements uni-axiaux et multi-axiaux ainsi que les méthodes de dimensionnement en fatigue formulées dans le domaine spectral. Ces dernières ont été définies pour la problématique des vibrations aléatoires, dans le cadre d'un certain nombre d'hypothèses de travail, et montrent des temps de calculs nettement plus faibles que des méthodes de dimensionnement classiques.

La deuxième partie de travail de la thèse a consisté à développer une méthode de dimensionnement en fatigue formulée dans le domaine spectral valide sur tout le domaine de fatigue, aussi bien en oligo-cyclique qu'en endurance. Les travaux ont porté sur l'intégration du comportement élasto-plastique confiné des matériaux dans les méthodes spectrales. L'approche proposée a fait l'objet d'une étude numérique comparative avec les méthodes existantes.

Le dernier volet de la thèse est la comparaison de la méthode proposée avec des essais. Pour cela, le développement d'une éprouvette spécifique à la problématique a été réalisé. Les résultats obtenus montrent une bonne corrélation entre les approches numériques et expérimentales.

## Mots clé

Processus stochastique Gaussien et non-Gaussien, Méthodes Spectrales, Méthode Rainflow, Plasticité, Méthode de Neuber, Approche E-N, Non-linéarité, Essais accélérés en fatigue vibratoire.



# Table des acronymes

Acronyme	Définition
1DDL	1 Degré De Liberté
2DDL	2 Degrés De Liberté
BR	Pseudo Bruit Rose
Dir	Méthode de Dirlik
DSP	Densité Spectrale de Puissance
FDP	Fonction de Densité de Probabilité
FRF	Fonction de Réponse en Fréquence
Lal	Méthode de Lalanne
M075	Méthode empirique $\gamma_{0.75}$
MS	Méthode Spectrale
MSC	Méthode Spectrale Classique
MSM	Méthode Spectrale Modifiée
NB	Méthode de Narrow-Band
OC	Méthode de Ortiz-Chen
PB	Passe-Bande
RMS	Moyenne quadratique / valeur efficace (en anglais : Root Mean Square)
SM	Méthode "Single Moment"
SMC	Simulation de Monte-Carlo
TB	Méthode de Tovo-Benasciutti
WL	Méthode de Wirshing-Light
ZB	Méthode de Zhao-Baker

---

# Nomenclature

Variable	Définition
$E[\bullet]$	Espérance mathématique
$\Gamma(\bullet)$	Fonction Gamma
$F(\bullet)$	Distribution gaussienne unitaire
$Erf(\bullet)$	Fonction erreur
$\otimes$	Produit tensoriel contracté une fois des tenseurs d'ordre 2
$f_X(x)$	Densité de probabilité de la variable aléatoire X
$F_X(x)$	Fonction de répartition de la variable aléatoire X
$x(t)$	Processus stochastique gaussien
$z(t)$	Processus stochastique non-gaussien
$m_x(t)$	Moyenne du processus stochastique $x(t)$
$m_x$	Moyenne du processus stochastique stationnaire $x(t)$
$m_x^n(t)$	Moment d'ordre n du processus stochastique $x(t)$
$m_x^n$	Moment d'ordre n du processus stochastique stationnaire $x(t)$
$Var_x(t)$	Variance du processus stochastique $x(t)$
$Var_x$	Variance du processus stochastique stationnaire $x(t)$
$STD_x(t)$	Écart-type du processus stochastique $x(t)$
$STD_x$	Écart-type du processus stochastique stationnaire $x(t)$
$R_x(\tau, t)$	Fonction d'auto-corrélation du processus stochastique $x(t)$
$R_x(\tau)$	Fonction d'auto-corrélation du processus stochastique stationnaire $x(t)$
$S$	Skewness du processus stochastique stationnaire $z(t)$
$K$	Kurtosis du processus stochastique stationnaire $z(t)$
$\langle x \rangle = \bar{x}$	Moyenne temporelle d'une réalisation du processus stochastique stationnaire $x(t)$
$\langle x^n \rangle = \bar{x}^n$	Moyenne temporelle d'ordre n d'une réalisation du processus stochastique stationnaire $x(t)$
$\bar{R}(\tau)$	Moyenne temporelle de la fonction d'auto-corrélation du processus stochastique stationnaire $x(t)$

Variable	Définition
$X(T, f)$	Transformée de Fourier tronquée de période T du processus stochastique stationnaire $x(t)$
$\Phi_{xx}(f)$	Densité spectrale de puissance du processus stochastique stationnaire $x(t)$
$\lambda_m$	Moment spectral d'ordre m d'un processus stochastique stationnaire ergodique gaussien et de moyenne nulle
$\nu_\sigma^+(\sigma)$	Nombre moyen de franchissements à pente positive d'un seuil $\sigma$
$\nu_0$	Nombre moyen de franchissements par zero à pente positive
$\nu_a$	Nombre de maxima
$\gamma_n$	Paramètre de la famille de la largeur de bande d'ordre n
$\gamma$ ou $\gamma_2$	Facteur d'irrégularité
<b>E</b>	Module d'Young
$\nu$	Coefficient de Poisson
Re	Limite d'élasticité
Rm	Limite à rupture
$\sigma_d$	Limite de fatigue
$k'_0$	Coefficient de résistance plastique pour un chargement monotone
$n'_0$	Exposant d'érouissage pour un chargement monotone
$k'$	Coefficient de résistance plastique pour un chargement cyclique
$n'$	Exposant d'érouissage pour un chargement cyclique
$\varepsilon_f$	Coefficient de ductilité en fatigue
$\sigma_f$	Coefficient de résistance à la fatigue
$b, c$	Constantes matériau de l'équation de Manson-Coffin-Basquin
$\varepsilon$	Amplitude de la déformation
$\Delta\varepsilon$	Étendue de la déformation
$\varepsilon_e$	Contribution élastique de la déformation
$\varepsilon_p$	Contribution plastique de la déformation
C , k	Constantes matériau de l'équation de Basquin
$\sigma_a$ ou $\sigma$	Amplitude de la contrainte
$\Delta\sigma$	Étendue de la contrainte
$\sigma_m$	contrainte moyenne
C.S	Coefficient de sécurité
$N$	Durée de vie en nombre de cycles
$D$	Dommage
$n_i$	Nombre de cycle du bloc i d'amplitude $\sigma$
$N_i$	Durée de vie en nombre de cycle du bloc i d'amplitude $\sigma$
$d_i$	Dommage partiel correspondant au dommage d'un bloc i

Variable	Définition
$h(p, v)$	Fonction de densité de probabilité conjointe de p et de v
$P_{maxima}(\sigma)$	Fonction de densité de probabilité des maxima du processus stochastique stationnaire gaussien $\sigma(t)$
$P_a(\sigma)$	Fonction de densité de probabilité des cycles du processus stochastique stationnaire gaussien $\sigma(t)$
$P_a^{rfc}(\sigma)$	Fonction de densité de probabilité des cycles Rainflow du processus stochastique stationnaire gaussien $\sigma(t)$
$D_T$	Dommages associés à une période T
$E[D_T]$	Dommages moyens associés à une période T
$E[D]$	Dommages moyens
Tf	Durée de vie en temps (secondes, heures ou jours)
$v_{WL}$	Facteur correcteur de la méthode de Wirshing & light
$v_{OC}$	Facteur correcteur de la méthode de Ortiz & Chen
$D_1, D_2, D_3, R,$ $x_m$ et $Q_D$	Paramètres de la méthode de Dirlik
$\kappa_a, \kappa_b$ et $w$	Paramètres de la méthode de Zhao & Baker
$h$	Paramètre de pondération de la méthode de Tovo & Benasciutti
$\varepsilon_e \sigma_e$	Déformation et contrainte obtenues par calcul avec comportement élastique
$\varepsilon_r \sigma_r$	Déformation et contrainte obtenues par les méthodes du type Neuber
$\varepsilon_{e_i} \sigma_{e_i}$	Déformation et contrainte obtenues par calcul avec comportement élastique pour la classe i
$\varepsilon_{r_i} \sigma_{r_i}$	Déformation et contrainte obtenues par les méthodes du type Neuber pour la classe i
$d_{r_i} d_{e_i}$	Intervalle de la classe i pour le comportement élasto-plastique et élastique
$n_{r_i} n_{e_i}$	Effectif de la classe i pour le comportement élasto-plastique et élastique
$G(\bullet)$	Transformation directe
$G^{-1}(\bullet)$ ou $g(\bullet)$	Transformation inverse
$L, \nu$ et $n$	Paramètres du modèle de Sarkani
$a$ et $\zeta$	Paramètres du modèle de Ochi & Ahn
$\kappa_1, \kappa_2$ et $\kappa_3$	Les cumulants
$\tilde{h}_3, \tilde{h}_4, h_3, h_4$ et q	Paramètres du Modèle de Hermite
RMS	Représente la valeur efficace ( $\sqrt{\lambda_0}$ ) dans les DSP des plans d'expériences
$\alpha$	Représente la largeur de bande ou la distance entre deux modes dans les DSP des plans d'expériences
$\beta$	Représente la pente de la DSP BR (pseudo Bruit Rose)
$X_i$	Représente l'amortissement dans les DSP des plans d'expériences
$\rho$	Paramètre de pondération entre les FRF pour le calcul d'une DSP équivalente
$F_0$	Représente la fréquence propre ou la fréquence médiane dans les DSP des plans d'expériences

---

Variable	Définition
$\Phi_e(f)$	Tenseur des DSP d'excitation
$FRF_\sigma(f)$ $FRF_\sigma^*(f)$	Tenseur des fonctions de réponse en fréquence des contraintes Tenseur des complexes conjugués des fonctions de réponse en fréquence des contraintes
$FRF_\varepsilon(f)$ $FRF_\varepsilon^*(f)$	Tenseur des fonctions de réponse en fréquence des déformations Tenseur des complexes conjugués des fonctions de réponse en fréquence des déformations
$\Phi_{VM}(f)$ $\Phi_{VM_\varepsilon}(f)$	DSP équivalente au sens de Von Mises en contrainte DSP équivalente au sens de Von Mises en déformation
$\sigma_{VM}(t)$ $\varepsilon_{VM}(t)$	Contrainte équivalente au sens de Von Mises Déformation équivalente au sens de Von Mises
$\sigma_{ij}(t)$ $\varepsilon_{ij}(t)$ $\Sigma_{ij}(t)$ $\Upsilon_{ij}(t)$	Composantes du tenseur des contraintes Composantes du tenseur des déformations Composantes du tenseur déviateur des contraintes Composantes du tenseur déviateur des déformations
$Q$	Matrice constante pour la définition de la DSP équivalente au sens de Von Mises en contrainte
$Q_\varepsilon$	Matrice constante pour la définition de la DSP équivalente au sens de Von Mises en déformation





# Table des matières

Remerciements	3
Résumé & Mots clé	5
Acronymes & Nomenclature	7
<i>Table des matières</i>	<b>16</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>17</b>
1.1 Contexte . . . . .	17
1.2 Organisation de la Thèse . . . . .	19
Bibliographie du chapitre 1 . . . . .	21
<b>2 Processus Stochastique</b>	<b>23</b>
2.1 Rappel probabiliste . . . . .	24
2.1.1 Définition d'une loi de probabilité . . . . .	24
2.1.2 Lois de probabilité . . . . .	24
2.2 Caractérisation d'un signal aléatoire . . . . .	25
2.2.1 Définition . . . . .	25
2.2.2 Propriétés statistiques des signaux aléatoires . . . . .	26
2.2.3 Kurtosis et skewness . . . . .	27
2.2.4 Stationnarité et ergodicité . . . . .	27
2.3 Définition d'une densité spectrale de puissance . . . . .	28
2.4 Propriétés statistiques d'un processus aléatoire gaussien . . . . .	29
2.4.1 Moments spectraux . . . . .	29
2.4.2 Franchissement de seuil . . . . .	29
2.4.3 Facteur d'irrégularité . . . . .	30
2.4.4 Distribution des maxima . . . . .	31
Bibliographie du chapitre 2 . . . . .	32
<b>3 Fatigue uniaxiale à grand nombre de cycles dans le domaine temporel</b>	<b>33</b>
3.1 Chargement périodique et courbe de Wöhler . . . . .	34
3.2 Modélisation de la courbe de Wöhler . . . . .	35
3.3 Influence de la contrainte moyenne et diagramme de Haigh . . . . .	36
3.4 Loi de cumul du dommage . . . . .	38
3.5 Méthode de comptage de cycles . . . . .	38
Bibliographie du chapitre 3 . . . . .	42

<b>4</b>	<b>Fatigue uniaxiale à grand nombre de cycles dans le domaine spectral</b>	<b>43</b>
4.1	Définition générale d'une méthode spectrale . . . . .	45
4.2	Théorie des vibrations aléatoires . . . . .	46
4.3	Théorie basée sur l'algorithme de comptage de cycle Rainflow . . . . .	48
4.4	Méthodes Spectrales associées à un type de DSP . . . . .	50
4.5	Benchmark numérique . . . . .	53
4.5.1	Définition du plan d'expérience . . . . .	53
4.5.2	Chaine de simulation de Monte-Carlo . . . . .	55
4.5.3	Principaux résultats . . . . .	57
4.6	Conclusion . . . . .	69
	Bibliographie du chapitre 4 . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Introduction à la plasticité et aux méthodes de correction de type Neuber</b>	<b>73</b>
5.1	Plasticité et modèles associés . . . . .	74
5.1.1	Seuil, écrouissage et écoulement plastique . . . . .	74
5.1.2	Modélisation des relations de comportement . . . . .	75
5.2	Méthodes de correction en plasticité . . . . .	75
5.2.1	Methode de Neuber . . . . .	76
5.2.2	Methode de Molski-Glinka . . . . .	76
5.2.3	Méthode de correction dans le cas d'un état de contrainte multiaxial . . . . .	77
	Bibliographie du chapitre 5 . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Fatigue uniaxiale à grand et faible nombre de cycles dans le domaine spectral: prise en compte de la plasticité</b>	<b>81</b>
6.1	Méthodes de la littérature . . . . .	83
6.1.1	Définition générale d'une transformation et application aux méthodes spectrales . . . . .	83
6.1.2	Transformations associées . . . . .	84
6.2	Proposition d'une nouvelle méthode . . . . .	87
6.2.1	Prise en compte de la plasticité dans la loi de Fatigue . . . . .	88
6.2.2	Correction des déformations dans le domaine spectral avec la méthode de Neuber . . . . .	89
6.3	Validation Numérique . . . . .	91
6.3.1	Simulation à partir de DSP . . . . .	91
	Bibliographie du chapitre 6 . . . . .	104
<b>7</b>	<b>Fatigue multiaxiale à grand et faible nombre de cycles dans le domaine spectral: prise en compte de la plasticité</b>	<b>107</b>
7.1	Modélisation du processus de calcul dans un état de contraintes multiaxiales . . . . .	108
7.1.1	Formulation en contraintes . . . . .	109
7.1.2	Formulation en déformation . . . . .	111
7.2	Validation numérique . . . . .	113
7.2.1	Présentation du plan d'expérience . . . . .	113
7.2.2	Présentation des chaines de calcul . . . . .	115
7.2.3	Résultats et observations . . . . .	117
	Bibliographie du chapitre 7 . . . . .	121

<b>8</b>	<b>Étude expérimentale et numérique</b>	<b>123</b>
8.1	Présentation de l'éprouvette . . . . .	124
8.1.1	Géométrie . . . . .	124
8.1.2	Caractéristiques du matériau . . . . .	126
8.1.3	État de surface et géométrie en fond d'entaille . . . . .	128
8.2	Moyen d'essai . . . . .	128
8.2.1	Principe de fonctionnement . . . . .	128
8.2.2	Principe de l'asservissement . . . . .	130
8.2.3	Critère d'arrêt des essais en fatigue . . . . .	131
8.3	Analyse dynamique par élément finis et étude des contraintes - déformations locales	132
8.3.1	Discrétisation temporelle et spatiale . . . . .	133
8.3.2	Caractéristiques dynamiques et variables locales dans l'entaille . . . . .	133
	Bibliographie du chapitre 8 . . . . .	138
<b>9</b>	<b>Observations et validation expérimentale</b>	<b>139</b>
9.1	Présentation du plan d'expérience . . . . .	140
9.2	Essais sur le 2 <sup>ème</sup> mode: Flexion . . . . .	142
9.2.1	Dépouillement des essais . . . . .	142
9.2.2	Confrontation expérience / prévisions numériques . . . . .	146
9.3	Essais sur le 1 <sup>er</sup> mode: Flexion-Torsion . . . . .	149
9.3.1	Dépouillement des essais . . . . .	149
9.3.2	Confrontation expérience / prévisions numériques . . . . .	152
9.4	Essais sur le 3 <sup>ème</sup> mode: Flexion-Torsion . . . . .	155
9.4.1	Dépouillement des essais . . . . .	156
	Bibliographie du chapitre 9 . . . . .	159
<b>10</b>	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>161</b>
<b>A</b>	<b>Les lois de distribution</b>	<b>165</b>
A.1	Loi normale . . . . .	165
A.2	Loi de Rayleigh . . . . .	166
A.3	Loi de Weibull . . . . .	166
A.4	Loi log-normale . . . . .	167
<b>B</b>	<b>Galerie photo des plans d'expériences du chapitre 4 et 6</b>	<b>169</b>
B.1	Photos du plan d'expérience du chapitre 4 . . . . .	169
B.2	Photos du plan d'expérience du chapitre 6 . . . . .	174
<b>C</b>	<b>Méthode de prévision de durée de vie dans le domaine temporel pour un état de sollicitation multiaxial</b>	<b>177</b>
C.1	Différentes approches des méthodes de prévision de durée de vie . . . . .	177
C.2	Méthode de Wang & Brown . . . . .	177
<b>D</b>	<b>Plans de l'éprouvette et données sur les vibrateurs</b>	<b>179</b>
D.1	Plan de l'éprouvette et du banc d'essai . . . . .	179
D.2	Données techniques sur les différents vibrateurs . . . . .	187
D.2.1	Vibrateur LOS 635 - 1500N . . . . .	187
D.2.2	Vibrateur LDS v964 - 89kN . . . . .	188
D.2.3	Vibrateur LDS V984 - 160kN . . . . .	188

Bibliographie générale	190
------------------------	-----

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Contexte

De très nombreuses structures mécaniques sont soumises à des chargements variables induits par des sollicitations extérieures (efforts, accélérations, thermiques, etc.). Le dimensionnement en fatigue associé à la maîtrise du risque de fissuration doit permettre l'amélioration de la sécurité des structures, ainsi qu'une réduction des coûts de fabrication et de conception. Dans la perspective du développement durable, une estimation fiable de la durée de vie des composants mécaniques s'impose également. Alors que l'approche traditionnelle en fatigue est généralement réalisée dans le domaine temporel, dans le cas de l'environnement vibratoire, il est nécessaire de se placer dans le domaine spectral, cela pour plusieurs raisons. L'une d'entre-elles est le gain de temps de calcul, une autre est l'aspect statistique que nous apporte la donnée d'entrée (la densité spectrale de puissance [1] [2] [3]) représentant le phénomène aléatoire engendré par l'environnement vibratoire.

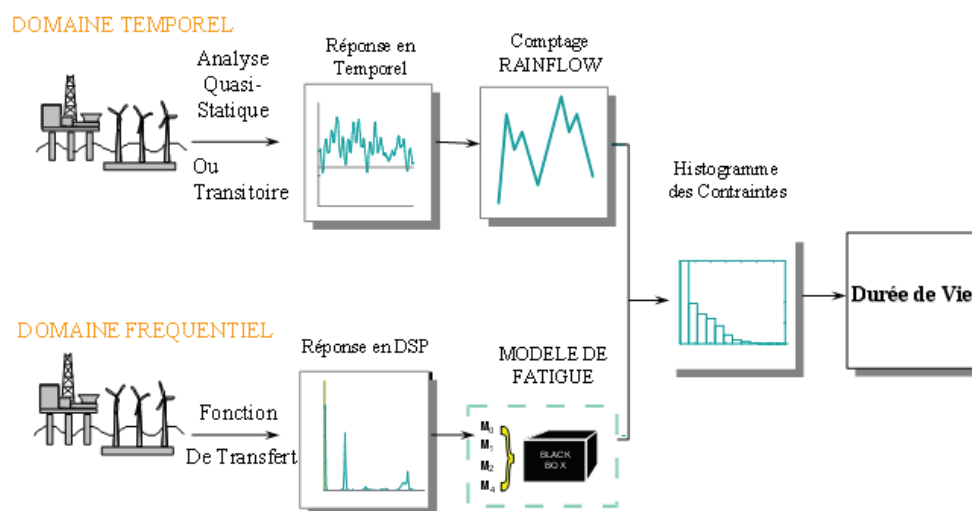


FIGURE 1.1 – Processus de calcul d'une durée de vie en temporel et fréquentiel

Le nom usuel donné aux méthodes de calcul du dommage en fatigue dans le domaine spectral est "méthode spectrale". Là où les approches en fatigue dans le domaine temporel [4] [5] [6] donnent le dommage associé à une réalisation temporelle d'un processus stochastique, obligeant à l'utilisation des méthodes de Monte-Carlo pour l'obtention de dommage moyen associé au processus stochastique, les méthodes spectrales donnent accès directement au dommage moyen engendré par le processus stochastique étudié. Le principal avantage est le gain de temps de calcul. Cet avantage est dû au fait que la distribution des cycles n'est pas obtenue à partir de l'extraction des cycles de plusieurs réalisations temporelles mais par la définition d'une fonction de densité de probabilité (FDP) des cycles propre à chaque méthode spectrale. Cette fonction de densité de probabilité des cycles est fonction des informations extraites de la densité spectrale de puissance. Les méthodes spectrales sont basées sur différentes théories et diffèrent dans la définition de la distribution des cycles. Les principales méthodes spectrales sont énumérées ci-dessous :

- La méthode de Lalanne [7] [8] et la méthode Narrow-band [9] [10] basées sur la théorie des vibrations aléatoires de Rice [11].
- les méthodes de Wirshing & Light [12] [13] et de Ortiz & Chen [14] basées sur la méthode Narrow-band avec l'ajout d'un facteur correcteur.
- La méthode Single Moment [15] basée sur un seul moment spectral.
- La méthode de Dirlik [16] et la méthode de Zhao & Baker [17] basées sur une approche empirique de la définition de la densité de probabilité des cycles Rainflow.
- La méthode de Tovo & Benasciutti [18] [19] [20] basée sur l'encadrement de la densité de probabilité des cycles Rainflow.
- Les méthodes de Jiao & Moan [21] , de Fu & Cebon [22], de Sakai & Okamura [23] et Gao & Moan [24] définies pour des processus stochastiques bimodaux ou multimodaux.

Néanmoins l'utilisation de ces méthodes spectrales sont soumises à certaines hypothèses concernant la structure et les processus stochastiques. La structure étudiée doit être linéaire et les processus stochastiques doivent être stationnaires ergodiques gaussiens et de moyenne nulle. Sous respect de ces hypothèses et dans l'utilisation dans leur cadre de définition, les méthodes spectrales donnent des résultats comparables aux résultats obtenus avec des approches temporelles associé à des simulations de Monte-Carlo [25] [26], considérés généralement comme résultats de référence.

La réalité industrielle est toute autre, les structures possèdent souvent des non-linéarités et les processus stochastiques respectent rarement toutes les hypothèses nécessaires. Ces points rendent l'utilisation des méthodes spectrales impossibles sans admettre une erreur dans l'estimation du dommage moyen du processus stochastique étudié. L'application des méthodes spectrales à des processus stochastiques particuliers ou à des structures comportant des non-linéarités est l'un des axes de recherche actuels [27] [28] [29] [30] [31].

Dans le cas d'un processus stochastique stationnaire ergodique non-gaussien provenant d'une excitation non-gaussienne ou bien d'une structure non-linéaire associé à une excitation gaussienne, il n'est pas rare de voir associées des fonctions réversibles appelées transformation et des méthodes spectrales pour l'estimation du dommage en fatigue. Les transformations sont utilisées comme passerelle entre le processus stochastique non-gaussien étudié et le processus gaussien équivalent. Le processus gaussien est injecté dans les méthodes spectrales afin d'obtenir le dommage moyen. La passerelle est inversée afin d'obtenir le dommage moyen associé au processus non-gaussien. Parmi ces transformations, on peut citer le modèle de Hermite [32] [33],

le modèle de Ochi & Ahn [34], le modèle de Sarkani [28] ou bien encore le modèle de Rychlik [27].

Le désavantage de ces méthodes est la donnée d'entrée qui se trouve être une réalisation temporelle du processus stochastique non-gaussien afin d'extraire les informations essentielles pour l'utilisation des transformations qui sont, en général, le kurtosis et le skewness. Car selon la non-linéarité étudiée, l'accès à la réalisation temporelle nécessaire n'est pas garantie ou à un certain coût en temps de calcul.

Dans le cadre d'essais vibratoires accélérés en fatigue qui sont souvent utilisés pour qualifier les pièces et les structures mécaniques soumises à un environnement vibratoire dans leur profil de mission, une non-linéarité peut apparaître selon la sévérisation de l'essai et ne pouvant pas être supportée par les méthodes de dimensionnement en fatigue actuelles. Cette non-linéarité est due au comportement élasto-plastique des matériaux qui peut exister durant ces essais accélérés. Le phénomène de plasticité n'est pas forcément lié à des essais vibratoires accélérés, on peut par exemple rencontrer cette problématique dans le cas d'approches fiabilistes afin de réduire les coûts ou bien la masse de la structure : on admet une probabilité de défaillance de la structure. Effectivement, les méthodes spectrales sont définies avec une approche S-N qui les rendent valides seulement dans le domaine polycyclique. Au cours de la thèse, nous mettrons en oeuvre les outils nécessaires afin d'étendre les approches spectrales au domaine des faibles durées de vie pour lequel peu de travaux par ailleurs ont été recensés ; on proposera un critère de dimensionnement validé par des essais. Nous nous positionnons sur des approches spectrales afin de bénéficier de leur rapidité de calcul. Cette nouvelle démarche permettra des simulations numériques plus rapides et précises, notamment dans le cadre de la personnalisation d'essais vibratoires fortement accélérés, où les structures peuvent être sollicitées dans le domaine plastique. La démarche proposée constitue, en ce sens, une avancée majeure par rapport aux approches traditionnelles.

## 1.2 Organisation de la Thèse

La thèse est articulée autour de 3 parties. La première partie est constituée des chapitres 2 à 5 qui mettent en place les notions fondamentales pour répondre à notre problématique concernant l'intégration de la plasticité au sein des méthodes spectrales. Pour cela, on aborde au chapitre 2, la définition des vibrations aléatoires. On constate que dans le cas des méthodes spectrales, les vibrations aléatoires doivent représenter un processus stochastique stationnaire ergodique gaussien et de moyenne nulle. Il est ensuite étudié en chapitre 3 les principales approches temporelles en fatigue utilisées pour la définition des méthodes spectrales. Dans le chapitre 4, il est présenté la majeure partie des méthodes spectrales de la littérature. Ces méthodes sont nombreuses et encore souvent méconnues dans le secteur industriel. Aussi, une partie du chapitre 4 porte sur la réalisation d'un benchmark numérique, visant à comparer les méthodes et à fournir un guide pratique pour leur utilisation dans un cadre industriel. Le chapitre 5 présente le phénomène de plasticité ainsi que les méthodes du type Neuber qui seront l'une des clés pour répondre à la problématique de la thèse.

La deuxième partie est constituée des chapitres 6 et 7 qui présentent notre proposition concernant une méthode spectrale permettant de prendre en compte le comportement élasto-plastique



d'un matériau. Afin de réaliser une première validation, On réalise un plan d'expérience numérique qui compare notre approche aux méthodes de la littérature et cela par rapport à différents type de densité spectrale de puissance. La méthode de référence est la méthode de calcul dans le domaine temporel imbriqué dans des simulations de Monte-Carlo afin de prendre en compte le comportement aléatoire des vibrations. On réalise en chapitre 6 le développement de la méthode pour des chargements uniaxiaux alors que dans le chapitre 7 on réalise un travail d'élargissement de la méthode au cas des chargements multiaxiaux en se basant sur les travaux de Pitoiset et Preumont [25].

La troisième et dernière partie est constituée des chapitres 8 et 9 qui présentent les travaux expérimentaux réalisés durant la thèse. Afin d'enrichir les données sur les essais en fatigue vibratoire rares dans la littérature et de mettre en condition réelle la méthode proposée, une majeure partie de la thèse a porté sur la réalisation des essais avec une éprouvette répondant à notre problématique. Au chapitre 8, On présente l'éprouvette utilisée pour les essais en fatigue vibratoire ainsi que le banc d'essai et les méthodes de détection utilisées. On présente également la modélisation numérique de l'éprouvette recalée sur les données expérimentales. Le chapitre 9 présente la synthèse des résultats des essais ainsi que les complications rencontrées durant les essais qui dans certains cas ont rendu difficiles une confrontation entre essais et prédiction. Une confrontation entre essais et prédiction est réalisée pour un cas de chargement uniaxial et pour un cas de chargement multiaxial.

## Bibliographie du chapitre 1

- [1] A. Preumont, *Vibrations aléatoires et analyse spectrale*. Presses Polytechniques Romandes, Aug. 1990.
- [2] C. Lalanne, *Mechanical Vibration & Shock Analysis : Random Vibration*, vol. Tome 3. Lavoisier, Aug. 2009.
- [3] P. Pouvil, “Densité spectrale de bruit.” ENSEA. Cours ENSEA.
- [4] J. Lemaitre and J. L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1996.
- [5] Brand A., Flavenot J.F., Gregoire R. and Tournier C., *Données technologiques sur la fatigue*. CETIM, 1999.
- [6] AFNOR, “Produits métalliques - fatigue sous sollicitations d’amplitude variable - méthode rainflow de comptage des cycles,” 1993. A03-406.
- [7] C. Lalanne, *Mechanical Vibration & Shock Analysis : Fatigue Damage*, vol. Tome 4. Lavoisier, Aug. 2009.
- [8] A. Halfpenny, “A frequency domain approach for fatigue life estimation from finite element analysis,” vol. 167-1, pp. 401–410, 1999. 3rd International Conference on Damage Assessment of Structures (DAMAS 99), DUBLIN, IRELAND, JUN 28-30, 1999.
- [9] J. Miles, “On structural fatigue under random loading,” *Journal of Aeronautical Sciences*, pp. 753–762, 1954.
- [10] S. Crandall and W. Mark, “Random vibration in mechanical systems,” in *Academic Press*, (N.Y.), 1963.
- [11] S. Rice, *Mathematical analysis of random noise*. Selected papers on noise and stochastic processes, 1954.
- [12] P. Wirsching and M. Light, “Fatigue under wide band random stresses,” *Journal of the structural division-ASCE*, vol. 106, no. 7, pp. 1593–1607, 1980.
- [13] P. Wirsching and A. Shehata, “Fatigue under wide band random stresses using rain-flow method,” *Journal of engineering materials and technology-transactions of the ASME*, vol. 99, no. 3, pp. 205–211, 1977.
- [14] K. Ortiz and N. Chen, “Fatigue damage prediction for stationary wide-band processes,” in *In ‘Fifth Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Civil Engrg*, 1987.
- [15] L. Lutes and C. Larsem, “Improved spectral method for variable amplitude fatigue prediction,” *Journal of Structural Engineering-ASCE*, vol. 116, pp. 1149–1164, APR 1990.
- [16] T. Dirlik, *Application of computers in fatigue analysis*. PhD thesis, University of Warwick, 1985.
- [17] W. Zhao and M. Baker, “On the probability density function of rainflow stress range for stationary gaussian processes,” *International Journal of Fatigue*, vol. 14, no. 2, pp. 121–135, 1992.

- [18] D. Benasciutti and R. Tovo, “Comparison of spectral methods for fatigue analysis of broadband Gaussian random processes,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 21, OCT 2006.
- [19] D. Benasciutti and R. Tovo, “On fatigue damage assessment in bimodal random processes,” *International Journal Of Fatigue*, vol. 29, pp. 232–244, FEB 2007.
- [20] D. Benasciutti and R. Tovo, “Spectral methods for lifetime prediction under wide-band stationary random processes,” *International Journal of Fatigue*, vol. 27, pp. 867–877, Aug. 2005.
- [21] G. Jiao and T. Moan, “Probabilistic analysis of fatigue due to gaussian load processes,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 5, no. 2, pp. 76 – 83, 1990.
- [22] T. Fu and D. Cebon, “Predicting fatigue lives for bi-modal stress spectral densities,” *International Journal of Fatigue*, vol. 22, pp. 11–21, JAN 2000.
- [23] S. Sakai and H. Okamura, “On the distribution of rainflow range for gaussian random-processes with bimodal PSD,” *JSME International Journal Series A-mechanics and Material Engineering*, vol. 38, pp. 440–445, OCT 1995.
- [24] Z. Gao and T. Moan, “Frequency-domain fatigue analysis of wide-band stationary Gaussian processes using a trimodal spectral formulation,” *International Journal of Fatigue*, vol. 30, pp. 1944–1955, OCT-NOV 2008.
- [25] X. Pitoiset, *Méthodes spectrales pour l’analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux*. PhD thesis, Université libre de Bruxelles, 2001.
- [26] D. Benasciutti, *Fatigue analysis of random loadings*. PhD thesis, University of Ferrara, DEC 2004.
- [27] S. Aberg, K. Podgorski, and I. Rychlik, “Fatigue damage assessment for a spectral model of non-Gaussian random loads,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 24, pp. 608–617, OCT 2009.
- [28] S. Sarkani, D. Kihl, and J. Beach, “Fatigue of welded-joints under narrow-band non-gaussian loadings,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 9, no. 3, pp. 179–190, 1994.
- [29] D. Benasciutti and R. Tovo, “Fatigue life assessment in non-Gaussian random loadings,” *International Journal Of Fatigue*, vol. 28, pp. 733–746, JUL 2006.
- [30] Z. Gao and T. Moan, “Fatigue damage induced by nonGaussian bimodal wave loading in mooring lines,” *Applied Ocean Research*, vol. 29, pp. 45–54, FEB-APR 2007.
- [31] N.-H. Ko, “Verification of correction factors for non-Gaussian effect on fatigue damage on the side face of tall buildings,” *International Journal of Fatigue*, vol. 30, pp. 779–792, MAY 2008.
- [32] S. Winterstein, “Nonlinear vibration models for extremes and fatigue,” *Journal Of Engineering Mechanics-ASCE*, vol. 114, pp. 1772–1790, OCT 1988.
- [33] S. Winterstein, “Non-Normal Responses And Fatigue Damage,” *Journal Of Engineering Mechanics-ASCE*, vol. 111, no. 10, pp. 1291–1295, 1985.
- [34] M. Ochi, “Probability distributions of peaks and troughs of non-Gaussian random processes,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 13, pp. 291–298, OCT 1998.

# Chapitre 2

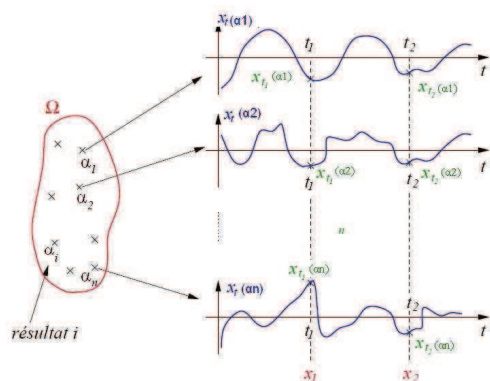
## Processus Stochastique

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Rappel probabiliste . . . . .</b>	<b>24</b>
2.1.1	Définition d'une loi de probabilité . . . . .	24
2.1.2	Lois de probabilité . . . . .	24
<b>2.2</b>	<b>Caractérisation d'un signal aléatoire . . . . .</b>	<b>25</b>
2.2.1	Définition . . . . .	25
2.2.2	Propriétés statistiques des signaux aléatoires . . . . .	26
2.2.3	Kurtosis et skewness . . . . .	27
2.2.4	Stationnarité et ergodicité . . . . .	27
<b>2.3</b>	<b>Définition d'une densité spectrale de puissance . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>2.4</b>	<b>Propriétés statistiques d'un processus aléatoire gaussien . . . . .</b>	<b>29</b>
2.4.1	Moments spectraux . . . . .	29
2.4.2	Franchissement de seuil . . . . .	29
2.4.3	Facteur d'irrégularité . . . . .	30
2.4.4	Distribution des maxima . . . . .	31
	<b>Bibliographie du chapitre 2 . . . . .</b>	<b>32</b>

---



### Résumé

---

Les vibrations aléatoires sont modélisées par des processus stochastiques dont sont extraits les principaux paramètres nécessaires pour le calcul en fatigue avec les méthodes spectrales. Le calcul de ces paramètres fait appel à des hypothèses que doit respecter le processus stochastique.

---

## Introduction

Certains phénomènes produisent des signaux dont un certain nombre ne suivent aucune règle prédéfinie, on dit qu'ils sont aléatoires. On ne peut pas prédire leurs allures avant de les avoir observés. On peut, néanmoins, caractériser ces signaux de façon probabiliste. Ces signaux aléatoires peuvent être caractérisés grâce à leurs densités de probabilité, leurs moyennes et leurs propriétés statistiques.

Dans ce chapitre, nous définissons pour notre étude ce que nous entendons par *vibrations aléatoires*. Nous associons ces vibrations aléatoires à des modélisations mathématiques. Dans notre cas, ces modélisations mathématiques sont appelées processus stochastiques. Sous certaines hypothèses, ces processus stochastiques ont des propriétés remarquables permettant de définir des paramètres caractéristiques des vibrations aléatoires étudiées. Ces paramètres sont les données d'entrées pour le calcul en fatigue à partir des méthodes spectrales que nous étudions dans le chapitre 4.

## 2.1 Rappel probabiliste

### 2.1.1 Définition d'une loi de probabilité

Considérons une expérience aléatoire. Nous notons  $\Omega$  l'ensemble de tous les résultats possibles. Une variable aléatoire  $X$  associe une valeur réelle  $x = X(a)$  à tout résultat  $a$  de l'expérience aléatoire [1].

Une variable aléatoire  $X$  est caractérisée par une loi de probabilité qui peut être définie par une densité de probabilité ou une fonction de répartition. La fonction de répartition représente la probabilité  $F_X(x)$  d'observer une réalisation  $a$  telle que  $X(a) \leq x$  :

$$F_X(x) = p(X < x) \tag{2.1}$$

La densité de probabilité  $f_X(x)$  peut être définie comme la dérivée de la fonction de répartition :

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \tag{2.2}$$

La quantité  $f_X(x)dx$  représente la probabilité d'observer un événement  $a$  tel que la variable  $X(a)$  soit comprise entre  $x$  et  $x + dx$ . Nous avons encore :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du \tag{2.3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)du = 1 \tag{2.4}$$

Où  $f_X(x) = p(x < X < x + dx)$

### 2.1.2 Loïs de probabilité

L'essentiel des lois de probabilité utilisées dans le cadre du calcul du dommage en fatigue sous environnement vibratoire sont présentées dans l'annexe A. Ces lois sont essentiellement les distributions de Gauss, Rayleigh et Weibull.

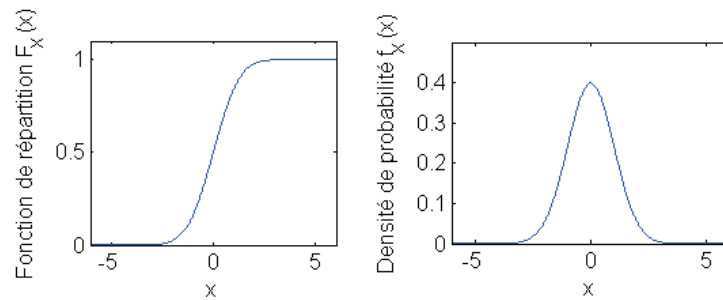


FIGURE 2.1 – Exemple pour la loi normale centrée réduite

## 2.2 Caractérisation d'un signal aléatoire

### 2.2.1 Définition

Un signal aléatoire (scalaire ou vectoriel) est une famille de variables ou de vecteurs aléatoires indexés par un ensemble de paramètres  $t \in T$  (le temps). On peut parler de tirages aléatoires ou de réalisations d'un processus stochastique.

La notation adoptée est :

$$\{x_t(\alpha) \mid t \in T\} \text{ T discret ou continu.}$$

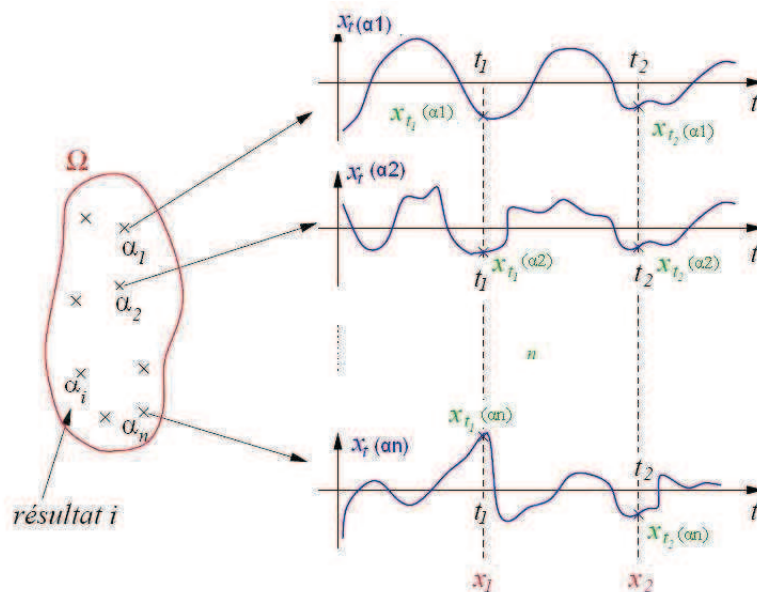


FIGURE 2.2 – schématisation de la réalisation d'un processus aléatoire [2]

- Pour chaque  $t$ ,  $x_t(\bullet)$  est une variable aléatoire égale à l'état du processus considéré à l'instant  $t$ .
- Pour  $\alpha$  fixé,  $x_\bullet(\alpha)$  est une réalisation donnée du processus qui est une fonction du temps.
- Pour  $t$  et  $\alpha$  fixés,  $x_t(\alpha)$  est un nombre.

**Définition d'un processus stochastique**

Un processus stochastique est un processus aléatoire à temps continu pouvant être noté comme  $\{x_t(\alpha) \mid t \in T\}$ .

**Définition d'un processus du second ordre**

Un processus stochastique est caractérisé entièrement par ses lois de distributions aux premier et deuxième ordres est appelé processus du second ordre [1].

- La densité de probabilité du premier ordre est donnée équation 2.5.

$$f_{x(t)}(\alpha) = p(\alpha, t) \tag{2.5}$$

- La densité de probabilité du deuxième ordre est donnée équation 2.6.

$$f_{x(t),x(\tau)}(\alpha, \beta) = p(\alpha, \beta, \tau, t) \tag{2.6}$$

Un processus gaussien est un processus du second ordre, il est caractérisé par sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation.

**2.2.2 Propriétés statistiques des signaux aléatoires**

L'ensemble des définitions présentées dans ce paragraphe sont extraites des références suivantes : [2] [3] [4].

**Moyenne d'ensemble**

Soit  $\{x_t(\alpha) \mid t \in T\}$ , noté  $x(t)$ , alors la moyenne (espérance mathématique) de  $x(t)$  est définie par l'équation 2.7 .

$$m_x(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha p(\alpha, t) d\alpha \tag{2.7}$$

On peut définir ainsi d'autres caractéristiques du processus. Le moment d'ordre n du processus est donné par l'équation 2.8.

$$m_x^n(t) = E[x^n(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^n p(\alpha, t) d\alpha \tag{2.8}$$

La fonction d'autocorrélation est définie par l'équation 2.9.

$$R_x(t, \tau) = E[x(t)x(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha\beta p(\alpha, t, \beta, \tau) d\alpha d\beta \tag{2.9}$$

La variance du processus est donnée par l'équation 2.10.

$$STD_x^2(t) = Var_x(t) = E[(x(t) - E[x(t)])^2] = m_x^2(t) - m_x(t) \tag{2.10}$$

Où  $STD_x(t)$  est l'écart-type du processus.

### Moyenne temporelle

La moyenne temporelle pour un échantillon du processus stochastique est définie par l'équation 2.11.

$$\langle x \rangle = \bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (2.11)$$

La moyenne temporelle d'ordre n pour une réalisation du processus est définie par l'équation 2.12.

$$\langle x^n \rangle = \bar{x}^n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^n(t) dt \quad (2.12)$$

La moyenne temporelle de l'autocorrélation est définie par l'équation 2.13.

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \overline{R_x}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (2.13)$$

### 2.2.3 Kurtosis et skewness

#### Skewness

Le skewness est calculé à partir du cube des écarts à la moyenne (équation 2.14) et mesure le manque de symétrie du processus (coefficient de dissymétrie).

$$S = E\left[\left(\frac{x(t) - m_x}{STD_x}\right)^3\right] \quad (2.14)$$

Un coefficient positif indique une queue de distribution étalé vers la droite. Un coefficient négatif indique une queue de distribution étalé vers la gauche. Dans le cas d'un processus gaussien on a S=0.

#### Kurtosis

Le Kurtosis est le coefficient d'aplatissement, il correspond à une mesure de l'aplatissement du processus (équation 2.15).

$$K = E\left[\left(\frac{x(t) - m_x}{STD_x}\right)^4\right] \quad (2.15)$$

Dans le d'un processus gaussien on a K=3.

### 2.2.4 Stationnarité et ergodicité

#### Stationnarité

$x(t)$  est dit stationnaire au sens large si :

- $E[x(t)] = m$  est indépendante de t
- $E[x(t)x(\tau)] = R_x(t, \tau) = R_x(\tau)$  est indépendante de t

$x(t)$  est dit stationnaire au sens strict si pour tout entier n :

- $E[x(t)^n] = m^n$  est indépendante de t



–  $E[(x(t + \tau)x(t))^n] = R_x^n(\tau)$  est indépendante de  $t$

Pour un processus d'ordre 2, il faut que la moyenne et la fonction d'autocorrélation soient indépendantes de  $t$ . Un processus gaussien stationnaire au sens large est forcément un processus gaussien stationnaire au sens strict [5].

### Ergodicité

Considérons un échantillon d'un signal aléatoire (réalisation d'un processus), que nous notons  $x(t)$ . C'est un signal temporel dont nous pouvons calculer la valeur moyenne.

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (2.16)$$

Un signal aléatoire est dit ergodique si ses valeurs moyennes statistiques sont identiques à ses moyennes temporelles pour un signal stationnaire.

$$E[x^n] = \bar{x}^n \quad (2.17)$$

Il est, alors, possible d'estimer les propriétés statistiques d'un signal aléatoire par l'analyse temporelle d'un de ses échantillons [5]. La longueur de l'échantillon (sa taille) doit être suffisante [6].

## 2.3 Définition d'une densité spectrale de puissance

Dans le cadre d'un processus aléatoire stationnaire  $x(t)$ , on ne peut pas définir sa transformée de Fourier (Équation 2.18) car elle n'existe pas, pour deux raisons : la quantité est à priori aléatoire et à priori infinie.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.18)$$

Ce problème de définition peut être contourné en réalisant une transformée de Fourier tronquée qui est donnée en équation 2.19. On fait l'approximation que le signal aléatoire stationnaire est périodique de période  $T$ . Cela signifie que, pendant la période  $T$ , le signal est aléatoire stationnaire et qu'il est nul hors de la période  $T$ .

$$X(f, T) = \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.19)$$

La densité spectrale de puissance (DSP) peut être définie, elle est donnée en équation 2.20.

$$\Phi_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[|X(f, T)|^2] \quad (2.20)$$

Cependant, en pratique, la densité spectrale de puissance est définie grâce à la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Cela est dû au Théorème de Winner-Khinchine et peut s'écrire comme suit :

$$\Phi_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (2.21)$$

En supposant que  $x(t)$  soit de moyenne nulle, sa fonction d'autocorrélation peut être alors définie par :

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{-i2\pi f\tau} df \quad (2.22)$$

## 2.4 Propriétés statistiques d'un processus aléatoire gaussien

### 2.4.1 Moments spectraux

Le moment spectral  $\lambda_m$  d'ordre  $m$  d'un processus aléatoire stationnaire de  $\Phi_{xx}(f)$  est défini dans l'équation 2.23.

$$\lambda_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(f) |f|^m df \quad (2.23)$$

Pour un processus de moyenne nulle, on peut établir les relations des équations 2.24, 2.25 et 2.26.

$$RMS_x^2 = \lambda_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(f) |f|^0 df \quad (2.24)$$

$$RMS_{\dot{x}}^2 = \lambda_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(f) |f|^2 df \quad (2.25)$$

$$RMS_{\ddot{x}}^2 = \lambda_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(f) |f|^4 df \quad (2.26)$$

Où  $RMS_x^2 = E[x(t)^2]$  est la variance du processus  $x(t)$ .

### 2.4.2 Franchissement de seuil

Rice [7] a été le premier à démontrer, pour un processus gaussien stationnaire de moyenne nulle, que le nombre moyen par unité de temps (fréquence) de franchissements à pente positive d'un seuil de niveau  $\sigma$ , noté  $\nu_\sigma^+$ , pouvait être exprimé à partir de moments spectraux, il est défini en équation 2.27.

$$\nu_\sigma^+ = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \exp\left(\frac{-\sigma}{2\lambda_0}\right) \quad (2.27)$$

On peut en déduire le nombre moyen par unité de temps de passages par zéro à pente positive. Il est donné par l'équation 2.28.

$$\nu_0 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \quad (2.28)$$

Le nombre moyen de maxima, qui est aussi un résultat de Rice [7], par unité de temps peut être aussi défini à partir des moments spectraux. Il est donné par l'équation 2.29.

$$\nu_a = \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}} \quad (2.29)$$

### 2.4.3 Facteur d'irrégularité

A partir des différentes grandeurs définies précédemment, il est possible de caractériser par une famille de paramètres la largeur de bande d'un processus, dont la définition est donnée en équation 2.30.

$$\gamma_m = \sqrt{\frac{\lambda_m}{\lambda_0 \lambda_{2m}}} \quad (2.30)$$

Le plus utilisé est appelé facteur d'irrégularité : il représente le rapport entre le nombre de passage par zéro à pente positive et le nombre de maxima. Pour alléger la notation, il sera noté  $\gamma$ .

$$\gamma_2 = \gamma = \frac{\nu_0}{\nu_a} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0 \lambda_4}} \quad (2.31)$$

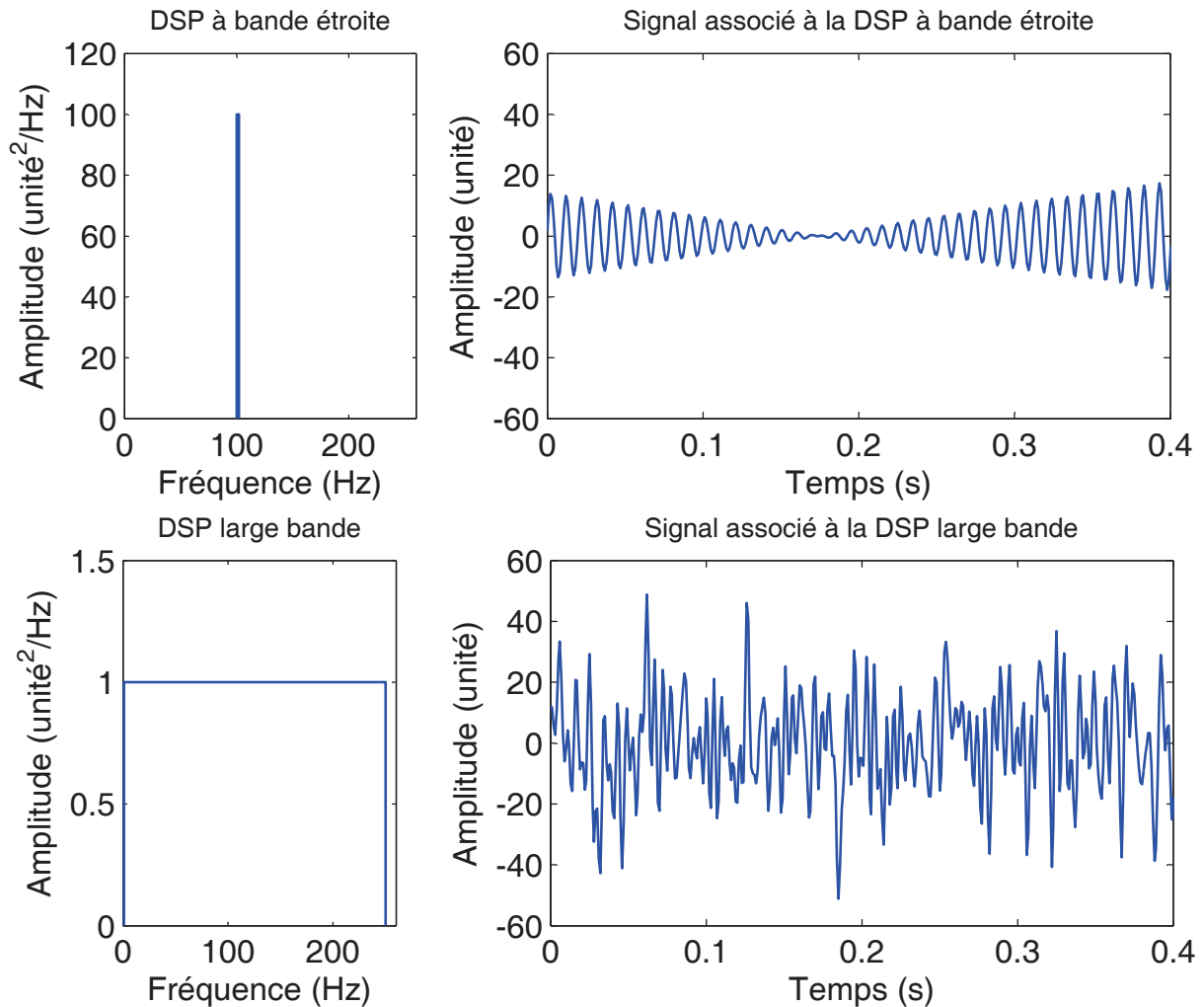


FIGURE 2.3 – Processus stochastique avec différentes largeurs de bande

#### 2.4.4 Distribution des maxima

La densité de probabilité des maxima d'un processus  $\sigma(t)$  est une combinaison linéaire d'une distribution gaussienne et d'une distribution de Rayleigh, cela a été démontré par Cartwright & Longuet-Higgins [8] et illustrée dans de nombreux ouvrages comme celui de Lalanne [9] ou de Preumont [10]. Elle est donnée par l'équation 2.32.

$$P_{maxima}(\sigma) = \frac{(1 - \gamma^2)}{\sqrt{2\pi\lambda_0}} \exp\left(\frac{-\sigma^2}{2\lambda_0(1 - \gamma^2)}\right) + \frac{\gamma\sigma}{\lambda_0} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\lambda_0}\right) F\left(\frac{\gamma\sigma}{\sqrt{2\lambda_0(1 - \gamma^2)}}\right) \quad (2.32)$$

Où  $F(-)$  est la distribution gaussienne unitaire. Elle est définie en équation 2.33.

$$F(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\xi^2}{2}\right) d\xi \quad (2.33)$$

## Conclusion

Nous définissons donc les vibrations aléatoires comme des processus stochastiques stationnaires ergodiques gaussiens de moyenne nulle. Nous réalisons ci-dessous un récapitulatif des principales propriétés abordées durant ce chapitre.

- La *stationnarité* permet de garantir que les paramètres statistiques sont stables dans le temps. Cela permet aussi de calculer une densité spectrale de puissance d'un processus stochastique.
- L'*ergodicité* permet de confondre les paramètres du processus stochastique à une réalisation temporelle de ce processus stochastique. Cela veut dire par exemple que la moyenne d'ensemble est égale à la moyenne temporelle de l'échantillon. Cela signifie aussi que la densité spectrale de puissance peut être calculée à partir de cet échantillon temporel ou que la densité spectrale de puissance permet de générer un signal temporel du processus sous condition de régénérer la phase du signal.
- L'aspect *gaussien* et de *moyenne nulle* permet d'avoir des propriétés remarquables pour les moments spectraux d'un processus stochastique. Cela permet de définir d'autres paramètres tels que le nombre de maxima ou la densité de probabilité.

L'ensemble des paramètres définis dans ce chapitre sont utilisés par les méthodes spectrales comme données d'entrée pour le calcul en fatigue. Pour certaines méthodes spectrales, la théorie de Rice est à la base de leur définition.

## Bibliographie du chapitre 2

- [1] P. Brémaud, *Initiation aux Probabilités et aux chaînes de Markov*. Springer-Verlag, 1984.
- [2] D. Arzelier, “Signaux aléatoires.” INSA, 2004. Cours INSA Toulouse.
- [3] J.-P. Tanguy, *Théorie et pratique du signal : Signaux déterministes et aléatoires en continu et en discret*. Ellipses, 2007.
- [4] P. Brémaud, *Signaux aléatoires : Pour le traitement du signal et les communications*. Ellipses, 1993.
- [5] P. Loubaton, “Notion sur les signaux aléatoires.” Université de marne la vallée. Cours université de marne la vallée.
- [6] C. Lalanne, *Mechanical Vibration & Shock Analysis : Random Vibration*, vol. Tome 3. Lavoisier, Aug. 2009.
- [7] S. Rice, *Mathematical analysis of random noise*. Selected papers on noise and stochastic processes, 1954.
- [8] D. Cartwright and M. Longuethiggins, “The statistical distribution of the maxima of a random function,” *Proceedings of the royal society of london series a-mathematical and physical sciences*, vol. 237, no. 1209, pp. 212–232, 1956.
- [9] C. Lalanne, *Mechanical Vibration & Shock Analysis : Fatigue Damage*, vol. Tome 4. Lavoisier, Aug. 2009.
- [10] A. Preumont, *Vibrations aléatoires et analyse spectrale*. Presses Polytechniques Romandes, Aug. 1990.

## Chapitre 3

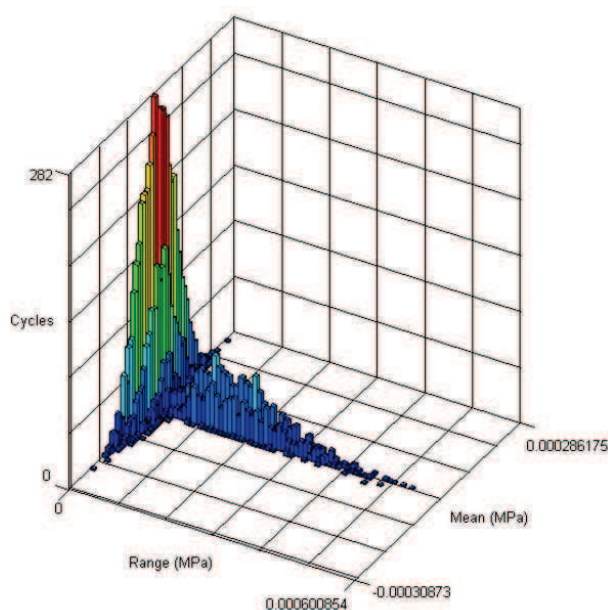
# Fatigue uniaxiale à grand nombre de cycles dans le domaine temporel

### Sommaire

---

3.1	Chargement périodique et courbe de Wöhler . . . . .	34
3.2	Modélisation de la courbe de Wöhler . . . . .	35
3.3	Influence de la contrainte moyenne et diagramme de Haigh . . . . .	36
3.4	Loi de cumul du dommage . . . . .	38
3.5	Méthode de comptage de cycles . . . . .	38
	Bibliographie du chapitre 3 . . . . .	42

---



### Résumé

---

Les méthodes de calcul du dommage en fatigue permettent de quantifier le phénomène de fatigue et ainsi de dimensionner les structures vis-à-vis de ce phénomène. Les méthodes de calcul en fatigue utilisent généralement pour cela un historique temporel de contrainte. L'historique de contrainte allant d'un signal sinusoïdal à un signal aléatoire.

---

### Introduction

Toute pièce mécanique est soumise durant son fonctionnement en service à des sollicitations de causes variables qui se traduisent souvent par des contraintes cycliques.

Or il est souvent constaté la ruine en service de structures alors que celles-ci ne sont soumises qu'à des sollicitations jugées modestes par rapport aux capacités statiques des matériaux. Ces capacités statiques sont communément définies par la résistance à la rupture et la limite d'élasticité.

Le responsable de ces ruines est très souvent le phénomène de fatigue. Cet endommagement par fatigue mené jusqu'à son terme, c'est-à-dire la ruine, comporte trois phases : l'amorçage d'une fissure (de 70% à 80% de la durée de vie de la pièce pour la fatigue à grand nombre de cycle et en l'absence de défauts), la propagation et, enfin, la rupture brutale.

Il est possible de quantifier le phénomène de fatigue par une courbe donnant la durée de vie en cycle de chargement en fonction de l'amplitude de contrainte  $\sigma_a$  sur un cycle.

On peut alors distinguer deux domaines, le premier domaine est celui de la fatigue oligocyclique, où la rupture intervient aux alentours de  $10^2 - 10^4$  cycles et où les pièces sont soumises à des contraintes dépassant généralement localement la limite d'élasticité.

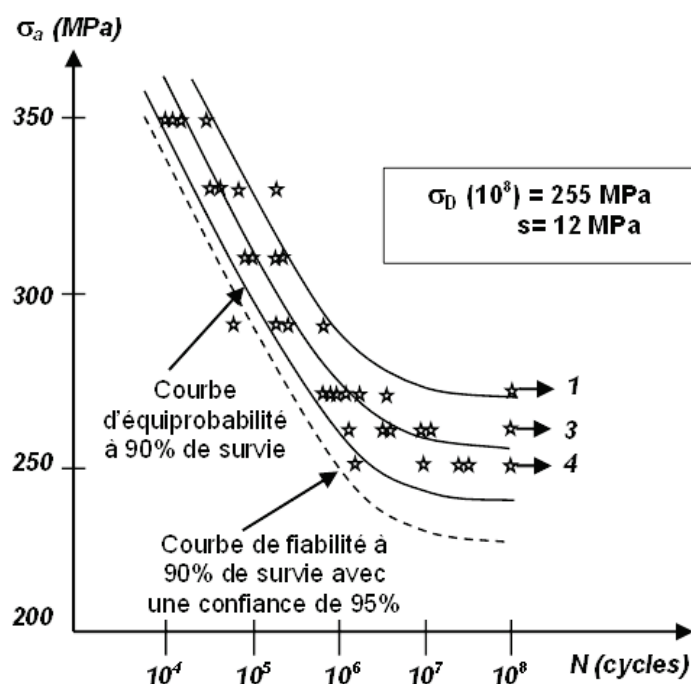
Le second domaine est celui de la fatigue dite à endurance limitée ou à grand nombre de cycles, la rupture se produisant entre  $10^4 - 10^7$  cycles, la structure est alors soumise à des contraintes ne dépassant pas la limite d'élasticité. Toutefois, il peut y avoir selon les cas une étape d'ajustement du domaine d'élasticité, on parle alors de phénomènes d'accommodation et d'adaptation. On remarque aussi que pour les aciers, il apparaît un sous domaine, appelé endurance illimitée, tel que si la contrainte ne dépasse pas la limite de fatigue  $\sigma_d$  alors théoriquement, la pièce peut tenir une infinité de cycles. Cela est représenté sur la courbe de Wöhler par une asymptote horizontale à  $\sigma_d$  et implique que les pièces sollicitées en dessous de cette limite ne seront pas rompues pour un nombre de cycles  $N \geq 10^8$ .

### 3.1 Chargement périodique et courbe de Wöhler

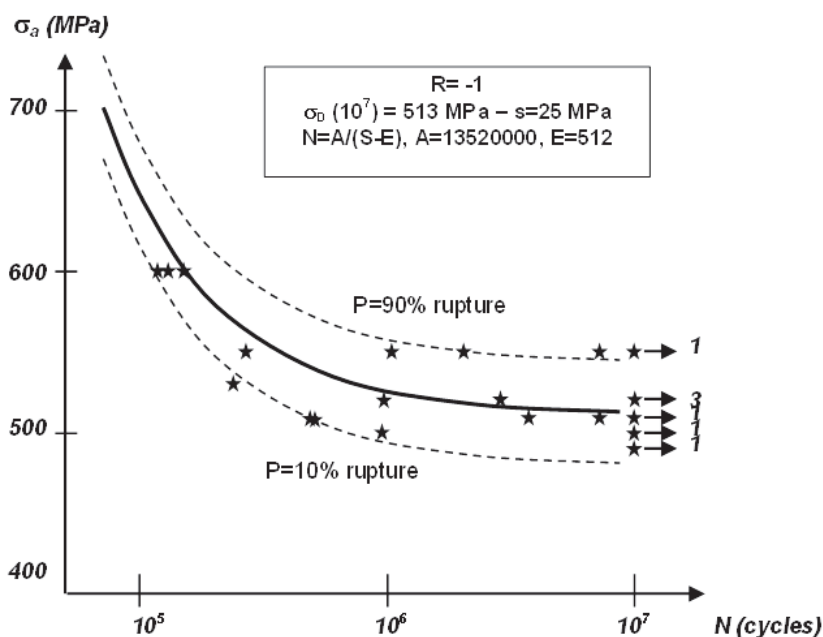
L'un des premiers à avoir travaillé sur le phénomène de fatigue est Wöhler en 1860-1870. Il a travaillé sur des essieux de chemin de fer. Wöhler a réalisé les premières études systématiques vis-à-vis du phénomène de fatigue.

Pour caractériser la fatigue du matériau ou d'une pièce sollicitée périodiquement, il a défini une courbe  $\sigma - N$  qui est l'amplitude de contrainte  $\sigma_a$  en fonction du nombre de cycle  $N$ . La réalisation d'une courbe  $\sigma - N$  nécessite un grand nombre d'essais du fait de la dispersion qui dépend des conditions d'essais et du matériau.

La courbe de fatigue est généralement représentée sur le graphe par la courbe médiane à 50% de rupture (i.e. 50% des éprouvettes ont rompu par fatigue pour des conditions expérimentales données). Des courbes iso-probabilistes peuvent être tracées en choisissant une loi de distribution du phénomène (Voir Figure 3.1).



(a) Courbe de Wöhler probabilisée en flexion rotative pour un acier C10E(XC10,  $R_e=305$  MPa,  $R_m=400$  MPa)



(b) Courbe de Wöhler probabilisée pour un acier 42CrMo4 trempé revenu ( $R_m=1024$ MPa) en traction-compression purement alternée ( $R = -1$ )

FIGURE 3.1 – Courbe de Wöhler probabilisée pour différents matériaux et types de sollicitations

### 3.2 Modélisation de la courbe de Wöhler

De nombreuses études ont été réalisées afin de mettre en équation la courbe de Wöhler. Parmi celles que l'on trouve dans la littérature, l'équation de Basquin, est une assez bonne



approximation de la courbe de Wöhler dans le domaine polycyclique, mais ne modélise pas l'asymptote horizontale du domaine illimité de valeur  $\sigma_d$ . De plus, de par sa simplicité, la formulation de Basquin offre un bon compromis approximation de la courbe  $\sigma - N$  / temps de calcul. C'est, d'ailleurs, cette équation qui est utilisée généralement pour établir les critères de dommage en fatigue dans le domaine spectral avec les sollicitations aléatoires stationnaires gaussiennes. Elle est définie par l'équation 3.1.

$$N(\sigma)^k = C \quad (3.1)$$

Où C et k sont des constantes de fatigue propres à chaque matériau.

Nous pouvons citer d'autres équations établies pour approcher la courbe de Wöhler. Certaines d'entre elles prennent en compte l'asymptote de la limite d'endurance  $\sigma_d$ . On les trouve dans les ouvrages tels que [1] [2] [3]. Ainsi par exemple :

- La formule de Stromeyer [4] est définie par l'équation 3.2.

$$\sigma = \sigma_d + \left(\frac{N}{C}\right)^k \quad (3.2)$$

- La formule de Bastenaire [4] est définie par l'équation 3.3.

$$N + A = C \frac{e^{-k(\sigma - \sigma_d)}}{\sigma - \sigma_d} \quad (3.3)$$

### 3.3 Influence de la contrainte moyenne et diagramme de Haigh

Des études ont montré l'influence de la contrainte moyenne sur la durée de vie des matériaux et des structures. Des essais ont été menés afin de voir l'influence de cette sollicitation moyenne  $\sigma_m$ . Ils ont montré que la durée de vie diminuait lorsque  $\sigma_m > 0$  (domaine de traction) et qu'en revanche, la durée de vie augmentait lorsque  $\sigma_m < 0$  tant que l'on ne plastifie pas en compression (domaine de compression).

Le diagramme de Haigh ou de Goodman-Smith donnent pour un nombre de cycles N fixé, la contrainte  $\sigma_a$  admissible en fonction de la contrainte  $\sigma_m$ . Étant donné que ces diagrammes sont tracés à partir d'essais, la représentation pourra se faire par des courbes d'iso-probabilité avec une distribution normale. On trouve dans la littérature de nombreuses modélisations mathématiques de ce diagramme. Parmi-elles, la droite de Goodman, la parabole de Gerber ou le modèle VDI [3] [5] [4](Voir Figure 3.2).

Ces diagrammes permettent de trouver l'amplitude de la contrainte purement alternée qui causera le dommage identique à un chargement à contrainte moyenne non nulle. Ils peuvent permettre aussi de calculer un coefficient de sécurité ou une probabilité de rupture si on n'est pas en contrainte purement alternée (Voir figure 3.3). On définit alors le coefficient de sécurité comme l'équation 3.4

$$C.S = \frac{OF}{OW} \quad (3.4)$$

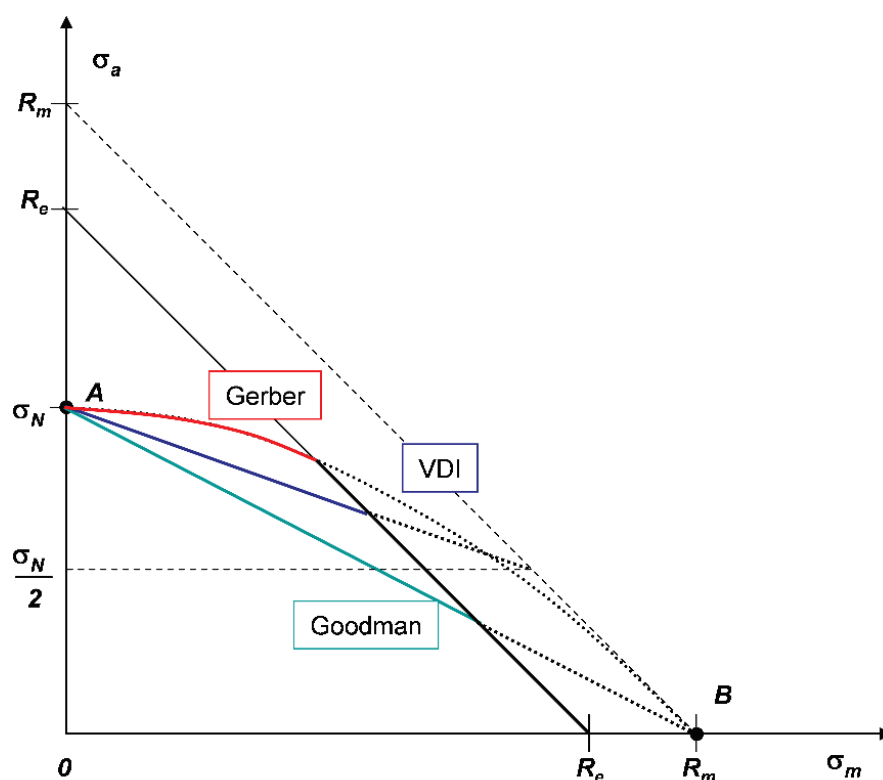


FIGURE 3.2 – Constructions simplifiées du diagramme de Haigh à partir de la limite de fatigue en traction-compression purement alternée  $\sigma_d$ , noté sur la figure  $\sigma_N$  et des caractéristiques mécaniques : résistance à rupture ( $R_m$ ) et limite d'élasticité ( $R_e$ ) [4]

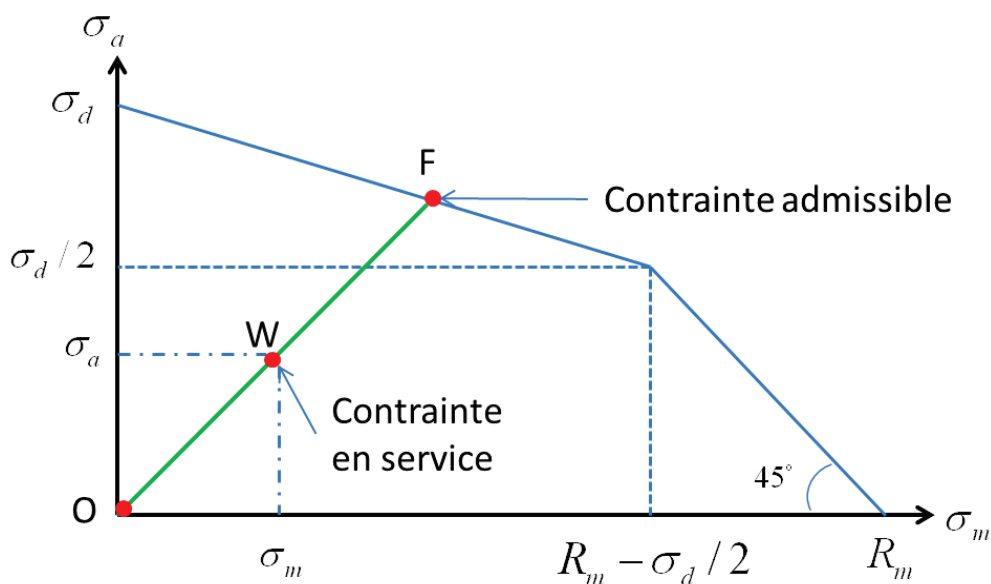


FIGURE 3.3 – Définition graphique du coefficient de sécurité avec le modèle VDI

### 3.4 Loi de cumul du dommage

Lorsque les chargements se composent de différents cycles de différentes amplitudes et de différentes moyennes, il est nécessaire de quantifier le dommage total produit par ces différents chargements. La littérature offre une multitude de lois de cumul du dommage qui ont été développées après la proposition de la règle du cumul linéaire faite par Palmgern en 1921. Aucune de ces lois de cumul du dommage n'est reconnue universellement, la loi basée sur le cumul linéaire de Palmgern proposée par Miner en 1945 [6] est la plus répandue au vu de sa simplicité d'utilisation et des résultats qu'elle donne. Loi de Miner est définie en équation 3.5.

$$\begin{cases} d_i = \frac{n_i}{N_i} \\ D = \sum_i d_i \end{cases} \quad (3.5)$$

Où,  $n_i$  est le nombre de cycles du bloc  $i$  à l'amplitude  $\sigma_i$  et  $N_i$  est la durée de vie correspondant à l'amplitude  $\sigma_i$ . L'addition de chaque bloc  $i$  d'amplitude constante  $\sigma_i$  et de moyenne constante permet de faire un cumul du dommage total vu par le matériau. L'amorçage est prédit quand le dommage vaut 1.

Il existe d'autres lois de cumul comme la loi de Lemaitre-Chaboche [2] qui est une loi de cumul non-linéaire.

Selon [7] et [8], la loi de Miner est une approche macroscopique du dommage et ne rend pas compte de tous les phénomènes du dommage observés expérimentalement, néanmoins, ils estiment que la loi de cumul de Palmgren-Miner donne une bonne approximation du dommage pour des processus aléatoires stationnaires.

### 3.5 Méthode de comptage de cycles

Les sollicitations appliquées à une structure sont généralement plus complexes que celles vues jusqu'ici. Qu'il soit d'amplitude variable ou décrit par des processus gaussiens, le comptage des cycles d'une sollicitation est une étape cruciale qui doit permettre de filtrer les informations essentielles pour le calcul du dommage total en fatigue. Il est reconnu que seuls les maxima et minima de chaque cycle de la sollicitation ont une influence significative sur la durée de vie.

La littérature offre ici encore une multitude de méthodes de comptage des cycles, elles sont toutes définies à partir d'une définition des cycles qui leur est propre. Chaque modèle possède sa définition de la notion de cycle, son évaluation du nombre de cycles. Lalanne [9] est l'un des nombreux auteurs qui fait l'étude bibliographique de ces méthodes de comptage de cycles.

Parmi les méthodes existantes, la méthode Rainflow est la plus utilisée dans le domaine de la fatigue. Elle est à la base, aussi, d'un certain nombre de critères d'évaluation du dommage dans le domaine spectral, que se soit en sollicitation uniaxiale ou multiaxiale. D'où l'importance, de définir et d'étudier ce principe Rainflow dans le domaine temporel. La méthode de comptage Rainflow définit un cycle de contrainte comme étant un cycle d'hystérésis fermé sur le diagramme contrainte-déformation, (Voir fig 3.4). Elle a été définie à la base par Mastsuishi et Endo [10]. Depuis l'étude de Dowling [11], le comptage Rainflow est considéré comme la méthode menant à des prévisions de durée de vie les plus proches de la réalité. On peut retrouver la méthode sous différents algorithmes et cela dans différents ouvrages comme la norme AFNOR A03-406

[12] ou bien Downing [13].

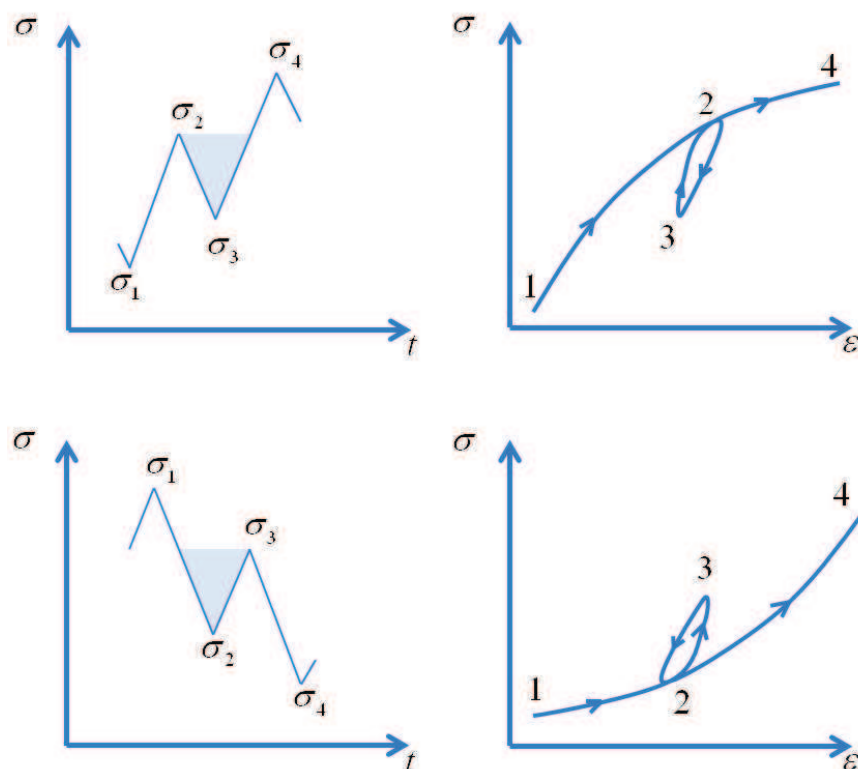


FIGURE 3.4 – Définition d'un cycle Rainflow

### Principe d'extraction des cycles

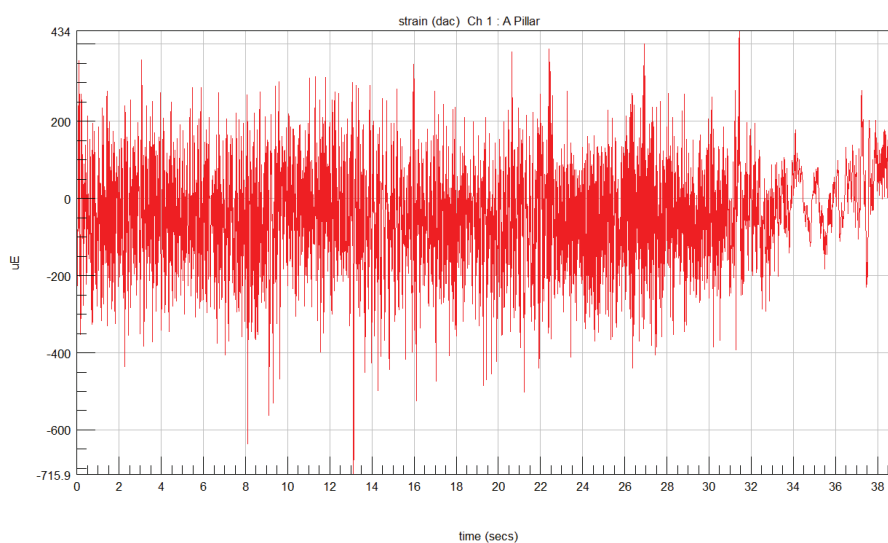
Le signal est réduit à une séquence d'extrema et de minima locaux, appelée processus des extrema. On analyse, ensuite, les quatre premiers points de la séquence en calculant les trois étendues successives  $\Delta\sigma_1 = |\sigma_2 - \sigma_1|$ ,  $\Delta\sigma_2 = |\sigma_3 - \sigma_2|$ ,  $\Delta\sigma_3 = |\sigma_3 - \sigma_4|$ . Si  $\Delta\sigma_2 \leq \Delta\sigma_1$  et  $\Delta\sigma_2 \leq \Delta\sigma_3$

→ Le cycle représenté par ses valeurs extrêmes  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  est extrait et enregistré, son amplitude est calculée en appliquant  $\sigma = |\sigma_3 - \sigma_2|/2$  et sa valeur moyenne en appliquant  $\sigma_m = (\sigma_3 + \sigma_2)/2$ . Puis les valeurs  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont éliminées, ensuite la valeur  $\sigma_1$  est raccordée à  $\sigma_4$ .

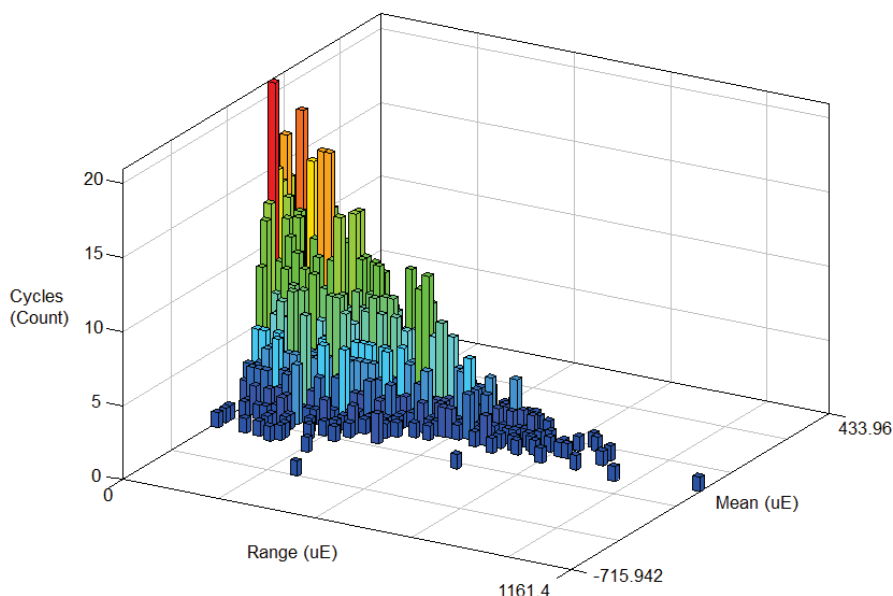
→ Sinon, le rang des quatre premiers points est incrémenté d'une unité et le test précédent est appliqué.

→ La procédure est renouvelée jusqu'au dernier extremum du signal. Le résidu de la procédure est traité en associant ce résidu à lui-même et en renouvelant la procédure une dernière fois. Il est impératif de traiter ce résidu car c'est lui qui a la plus grande étendue et qui, par conséquence, crée le plus grand dommage sur le matériau.

Toutes les informations extraites du signal sont, en général, rangées dans une matrice que l'on appelle matrice Rainflow. La figure 3.5 illustre l'utilisation de la méthode Rainflow sur un signal temporel (figure 3.5(a)) pour l'obtention de la matrice Rainflow associée (figure 3.5(b)) [14].



(a) Signal temporel



(b) Matrice Rainflow du signal temporel

FIGURE 3.5 – Exemple d’une matrice Rainflow obtenue avec le logiciel n-Code

## Conclusion

Dans ce chapitre, on a vu essentiel des méthodes de calcul du dommage en fatigue qui, dans le cadre de sollicitation uniaxiale à grand nombre de cycles, permet de quantifier le dommage en fatigue d’un chargement périodique à un chargement aléatoire. La figure 3.6 représente les différentes méthodologies de calcul du dommage en fatigue pour un historique de chargement donné.

Dans le cas d’un chargement aléatoire, nous avons vu qu’il était possible de calculer le dommage  $D$  associé à ce chargement. Néanmoins, le dommage  $D$  obtenu ne représente pas le

dommage du processus stochastique qui a généré cette réalisation temporelle du chargement. Afin d'avoir le dommage associé à ce processus stochastique en question, il faut réaliser plusieurs calculs de dommage en fatigue sur différents chargements aléatoires du même processus stochastique et en faire la moyenne afin d'obtenir le dommage moyen associé au processus stochastique. Malgré la stationnarité des vibrations aléatoires, le dommage calculé est associé à une occurrence du processus et non au processus stochastique lui-même.

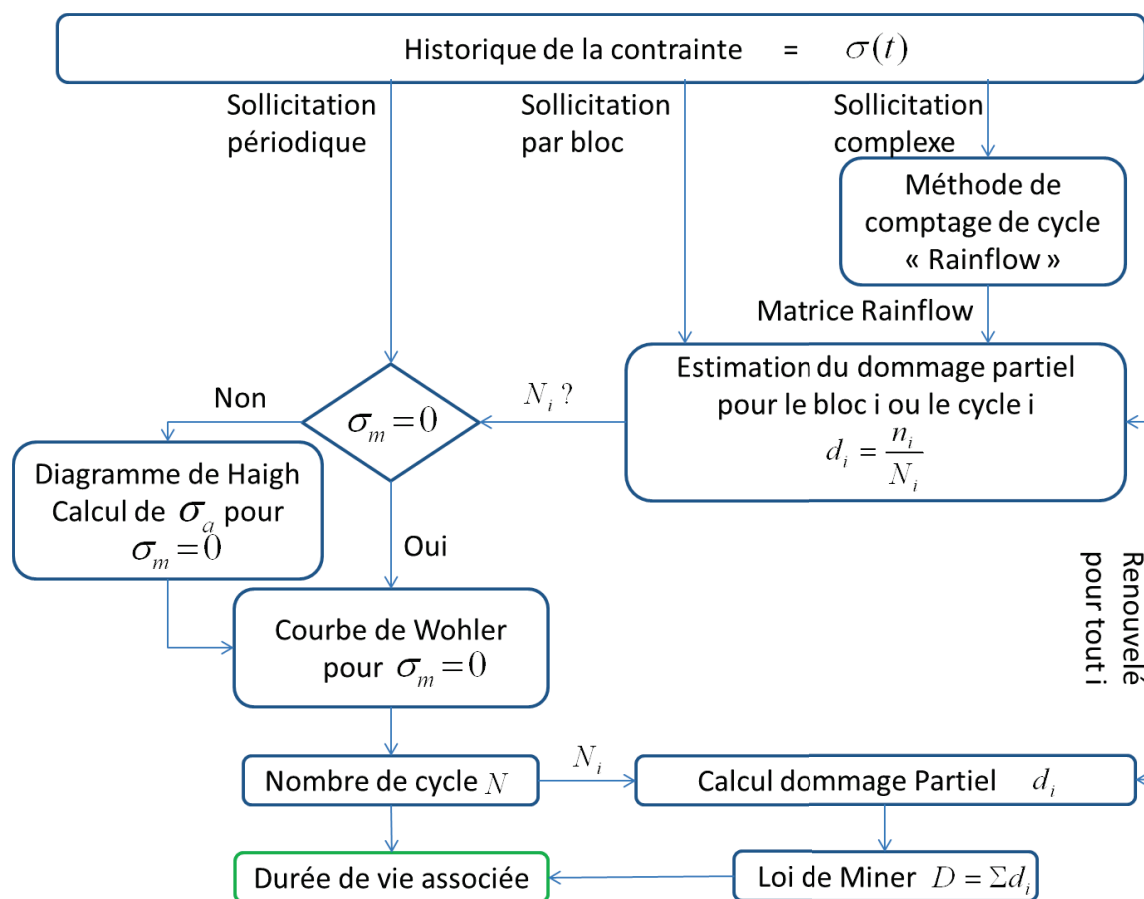


FIGURE 3.6 – Méthodologie de calcul du dommage en fatigue

### Bibliographie du chapitre 3

- [1] H-P. Lieurade et la Commission Fatigue des métaux de la S.F.2.M, *La Pratique des essais de fatigue : méthodes expérimentales et analyse des résultats*. pyc édition, 1982.
- [2] J. Lemaitre and J. L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1996.
- [3] C. Bathias and A. Pineau, *Fatigue des matériaux et des structures - Tome 1 : Introduction, endurance, amorçage et propagation des fissures, fatigue oligocyclique et gigacyclique*. LAVOISIER, 2008.
- [4] Brand A., Flavenot J.F., Gregoire R. and Tournier C., *Données technologiques sur la fatigue*. CETIM, 1999.
- [5] American Society for Metals, *Fatigue and Micro-structure*. LAVOISIER, 1978.
- [6] M. Miner, “Cumulative damage in fatigue,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, no. 3, pp. 159–164, 1945.
- [7] W. Schutz, “Prediction of fatigue life in the crack initiation and propagation stages - state of the art survey,” *Engineering fracture mechanics*, vol. 11, no. 2, pp. 405–421, 1979.
- [8] X. Pitoiset, *Méthodes spectrales pour l'analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux*. PhD thesis, Université libre de Bruxelles, 2001.
- [9] C. Lalanne, *Mechanical Vibration & Shock Analysis : Random Vibration*, vol. Tome 3. Lavoisier, Aug. 2009.
- [10] M. Matsuishi and T. Endo, “Fatigue of metals subjected to varying stress,” *Japan Soc. Mech. Engineering*, 1968.
- [11] N. Dowling, “Fatigue failure predictions for complicated stress-strain histories,” *Journal of Materials*, vol. 7, no. 1, pp. 71–&, 1972.
- [12] AFNOR, “Produits métalliques - fatigue sous sollicitations d’amplitude variable - méthode rainflow de comptage des cycles,” 1993. A03-406.
- [13] S. Downing and D. Socie, “Simple rainflow counting algorithms,” *International Journal of Fatigue*, vol. 4, no. 1, pp. 31–40, 1982.
- [14] A. Halfpenny, “A frequency domain approach for fatigue life estimation from finite element analysis,” vol. 167-1, pp. 401–410, 1999. 3rd International Conference on Damage Assessment of Structures (DAMAS 99), DUBLIN, IRELAND, JUN 28-30, 1999.

# Chapitre 4

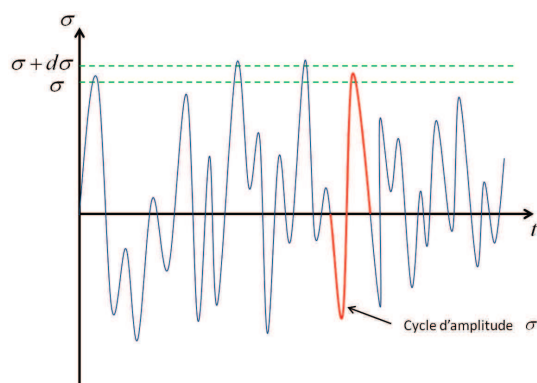
## Fatigue uniaxiale à grand nombre de cycles dans le domaine spectral

### Sommaire

---

4.1	Définition générale d'une méthode spectrale . . . . .	45
4.2	Théorie des vibrations aléatoires . . . . .	46
4.3	Théorie basée sur l'algorithme de comptage de cycle Rainflow . . .	48
4.4	Méthodes Spectrales associées à un type de DSP . . . . .	50
4.5	Benchmark numérique . . . . .	53
4.5.1	Définition du plan d'expérience . . . . .	53
4.5.2	Chaine de simulation de Monte-Carlo . . . . .	55
4.5.3	Principaux résultats . . . . .	57
4.6	Conclusion . . . . .	69
	Bibliographie du chapitre 4 . . . . .	70

---



### Résumé

---

Les méthodes spectrales permettent le calcul du dommage en fatigue pour des sollicitations aléatoires. Elle sont formulées dans le domaine fréquentiel, qui permet un gain substantiel de temps par rapport aux méthodes conventionnelles de calcul en fatigue.

---



## Introduction

Les structures mécaniques, pièces et les matériaux ne sont pas seulement soumis à des sollicitations périodiques ou pseudo-périodiques, les sollicitations qu'ils voient passer au cours du temps sont souvent complexes, mélange de sollicitations variables et de sollicitations aléatoires dues à des environnements variés : vibrations, chocs mécaniques, thermiques,...

Nous avons vu dans le chapitre 3, quelques méthodes permettant de calculer le dommage en fatigue dans le domaine temporel pour une sollicitation quelconque. Ces méthodes ont besoin de l'historique temporel des contraintes ou déformations. Afin d'obtenir cet historique des contraintes, on fait souvent appel à un calcul par éléments finis pour déterminer cette réponse en contrainte de la structure à une excitation donnée. Or souvent, la structure peut avoir une réponse dynamique avec des modes propres sollicités.

Cependant, deux problèmes restent entiers. Le premier est que, dans le domaine temporel, le temps de calcul est très important pour calculer la réponse dynamique d'une structure à une excitation temporelle donnée. Néanmoins, ce premier problème peut être très vite contourné en utilisant la transformée de Fourier de l'excitation et la fonction de réponse en fréquence de la structure qui permet d'avoir accès à la transformée de Fourier de la réponse en contrainte. Par simple transformée de Fourier inverse, on obtient l'historique des contraintes [1] [2]. Cette procédure est rapide et simple car le calcul de l'intégrale de Duhamel est remplacée dans le domaine fréquentiel par une simple multiplication. Cependant, cela ne résout en rien le deuxième problème, qui a déjà été abordé en conclusion du chapitre 3. Ce problème est que nous voulons dimensionner une structure à un processus stochastique stationnaire ergodique gaussien et de moyenne nulle et non à une réalisation temporelle de ce processus stochastique. Cette problématique est reprise figure 4.1.

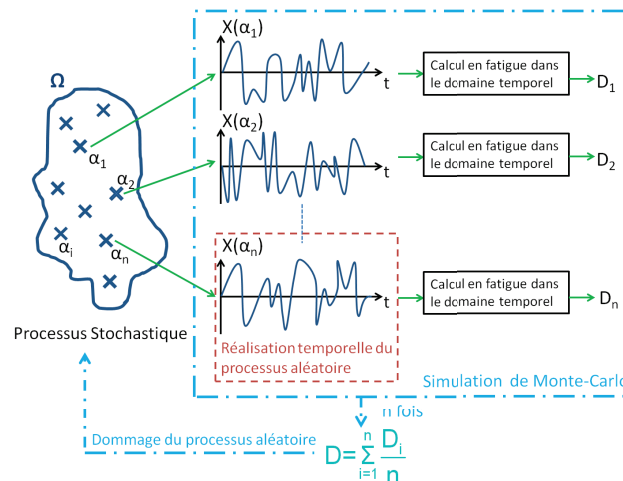


FIGURE 4.1 – Méthodologie de calcul en fatigue dans le domaine temporel pour un processus stochastique

On apporte généralement deux solutions à ce problème. On peut réaliser plusieurs calculs de dommage en fatigue à partir de plusieurs historiques de contraintes du même processus stochastique, communément appelé simulation de Monte-Carlo (Figure 4.1). Ou bien alors,

utiliser une donnée d'entrée qui représente le processus stochastique et qui permette de réaliser le calcul de dommage en fatigue avec cette donnée. Nous avons déjà rencontré cet objet, il s'agit de la densité spectrale de puissance (DSP). Elle caractérise entièrement un processus stochastique quand celui-ci est stationnaire ergodique et gaussien [3]. Néanmoins, il faut désormais une méthode de calcul qui puisse réaliser le calcul de dommage en fatigue à partir de la DSP de contrainte et cela dans le domaine spectral. Ces méthodes sont appelées méthodes spectrales et utilisent la DSP de contrainte comme donnée d'entrée pour leur calcul de dommage en fatigue (Figure 4.2). Elles font l'objet d'une étude détaillée dans ce chapitre.

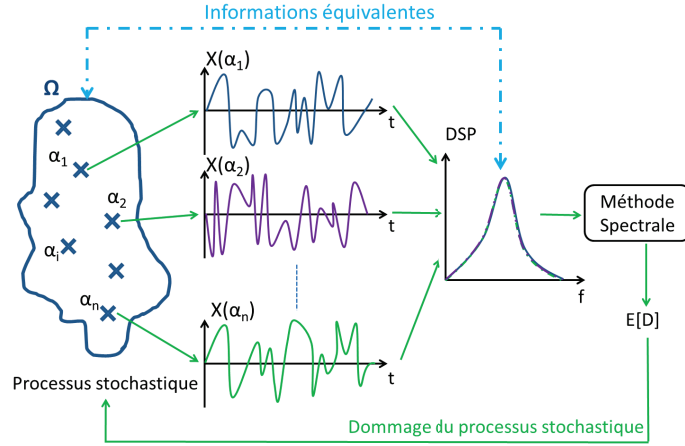


FIGURE 4.2 – Méthodologie de calcul en fatigue dans le domaine spectral pour un processus stochastique

## 4.1 Définition générale d'une méthode spectrale

Nous avons vu au chapitre 3, que dans une approche classique d'évaluation de l'endommagement, les méthodes de comptage définissaient chaque cycle extrait par un pic de niveau  $p$  et une vallée de niveau  $v$  ou une amplitude  $\sigma$  et une valeur moyenne  $\sigma_m$ . Chaque cycle extrait est un événement aléatoire qui possède sa propre probabilité de réalisation où  $h(p, v)$  est la densité de probabilité conjointe des cycles extraits. Par un simple changement de variable, la densité de probabilité conjointe des cycles est obtenue en termes d'amplitude  $\sigma$  et de valeur moyenne  $\sigma_m$ . Elle est définie dans l'équation 4.1.

$$P_{a,m}(\sigma, \sigma_m) = 2h(\sigma_m + \sigma, \sigma_m - \sigma) \quad (4.1)$$

La fonction de densité de probabilité des amplitudes est donnée dans l'équation 4.2.

$$P_a(\sigma) = \int_0^{+\infty} P_{a,m}(\sigma, \sigma_m) d\sigma_m \quad (4.2)$$

Chaque cycle de contrainte d'amplitude  $\sigma$  et de moyenne nulle produit un dommage, qui selon l'équation de Basquin  $N(\sigma)^k = C$  donne lieu à l'équation 4.3.

$$d = C^{-1} \sigma^k \quad (4.3)$$

L'espérance mathématique de la contribution à l'endommagement des cycles dont l'amplitude est comprise entre  $\sigma$  et  $\sigma + d\sigma$  est définie dans l'équation 4.4.

$$E[d] = C^{-1} \nu_a \sigma^k P_a(\sigma) d\sigma \quad (4.4)$$

Où  $\nu_a P_a(\sigma) d\sigma$  est le nombre moyen de cycles dans l'intervalle  $[\sigma; \sigma + d\sigma]$ . L'espérance du dommage par unité de temps  $E[D]$  pour la loi de cumul du dommage de Palmgren-Miner est donné dans l'équation 4.5.

$$E[D] = C^{-1} \nu_a \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a(\sigma) d\sigma \quad (4.5)$$

Pour un processus stationnaire,  $E[D]$  est constant. La durée de vie  $T_f$  pourra alors être évaluée en considérant que la valeur de dommage critique est égale à 1. La durée de vie est donnée dans l'équation 4.6.

$$T_f = \frac{1}{E[D]} \quad (4.6)$$

Néanmoins, le calcul du dommage est loin d'être réalisé car il faut pour cela avoir une formulation de la fonction de densité de probabilité des cycles (FDP). C'est sur ce point-là précisément que diffèrent les méthodes spectrales. Il y a principalement deux théories sur lesquelles sont basées ces méthodes : la théorie des vibrations aléatoires et la théorie basée sur l'algorithme de comptage Rainflow.

## 4.2 Théorie des vibrations aléatoires

La première approche est basée sur la théorie des vibrations aléatoires abordée au chapitre 2 en utilisant les principaux résultats de Rice. Cela consiste à confondre maxima et cycles, ce qui permet de définir la densité de probabilité de fonction des cycles par la densité de probabilité des maxima. De cette hypothèse, d'autres méthodes émergent pour des cas particuliers.

### Méthodes Associées

#### Méthode de Lalanne

Lalanne [4] définit la densité de probabilité des cycles à partir des travaux de Rice [5], donnée en equation 4.7.

$$P_a^{Lal}(\sigma) = \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{2\pi\lambda_0}} \exp\left(\frac{-\sigma^2}{2\lambda_0(1-\gamma^2)}\right) + \frac{\gamma\sigma}{2\lambda_0} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\lambda_0}\right) \left[1 + \text{Erf}\left(\frac{\gamma\sigma}{\sqrt{2\lambda_0(1-\gamma^2)}}\right)\right] \quad (4.7)$$

Où  $\text{Erf}(x)$  est la fonction erreur. Elle est définie par  $\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\alpha^2} d\alpha$ . Le dommage moyen peut être calculé à partir de l'équation 4.8.

$$E[D^{Lal}] = C^{-1} \nu_a \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a^{Lal}(\sigma) d\sigma \quad (4.8)$$

### Méthode Narrow-band

Dans le cas où le facteur d'irrégularité tend vers 1, la densité de probabilité des maxima tend vers une distribution de Rayleigh. Le premier à avoir proposé ce résultat est Miles [6] qui a été repris par Crandall et Mark [7]. cette méthode est connue sous le nom de méthode Narrow-band ou approximation de Rayleigh. Sa densité de probabilité est donnée dans l'équation 4.9.

$$p_a^{NB}(\sigma) = \frac{\sigma}{\lambda_0} \exp\left(\frac{-\sigma^2}{2\lambda_0}\right) \quad (4.9)$$

Le dommage moyen associé à la densité de probabilité Narrow-band est donné en équation 4.10. Il peut s'écrire aussi à partir de deux moments spectraux.

$$E[D^{NB}] = C^{-1} \nu_a \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a^{NB}(\sigma) d\sigma = C^{-1} 2^{k/2} \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \lambda_0^{(k-1)/2} \lambda_2^{1/2} \quad (4.10)$$

Où  $\Gamma(x)$  est la fonction Gamma définie comme  $\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} t^{2x-1} e^{-t^2} dt$ .

Il a été démontré par Rychlik [8] que la densité de probabilité de cycles Narrow-Band est un majorant pour la densité de probabilité de cycles Rainflow. De nombreuses simulations [9] montrent que la formulation Narrow-band est conservative par rapport à des simulations de Monte-Carlo avec un algorithme de comptage de cycles Rainflow.

### Méthode de Wirshing & Light

L'approximation de Rayleigh est trop conservative et pénalise donc le dimensionnement des structures. De nombreux auteurs [10] ont travaillé à apporter un facteur correcteur sur l'approximation Narrow-band vis-à-vis de simulations de Monte-Carlo. Parmi les premiers travaux, Wirshing & Light [11] proposent la densité de probabilité définie en équation 4.11.

$$p_a^{WL}(\sigma) = v_{WL} p_a^{NB}(\sigma) \quad (4.11)$$

Où  $v_{WL}$  est donné dans l'équation 4.12. Il est défini principalement par le facteur d'irrégularité et la pente de la droite de Basquin.

$$v_{WL} = (0.926 - 0.033k) + [1 - (0.926 - 0.033k)](1 - \sqrt{1 - \gamma^2})^{1.587k - 2.323} \quad (4.12)$$

Le dommage moyen est donné equation 4.13. Il peut être défini aussi à partir du facteur correcteur et du dommage moyen de Narrow-band.

$$E[D^{WL}] = C^{-1} \nu_a \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a^{WL}(\sigma) d\sigma = v_{WL} E[D^{NB}] \quad (4.13)$$

### Méthode de Ortiz & Chen

Ortiz & Chen [12] ont présenté une autre méthode basée sur l'approximation Narrow-band avec un facteur correcteur. Leur facteur de correction est le plus abouti en terme de définition. Il est défini à partir des moments spectraux et de la pente de la droite de Basquin. La densité de probabilité des cycles est donnée en équation 4.14.

$$p_a^{OC}(\sigma) = v_{OC} p_a^{NB}(\sigma) \quad (4.14)$$

Où  $v_{OC}$  est donné par l'équation 4.15

$$v_{OC} = \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{\lambda_2 \lambda_{2/k}}{\lambda_0 \lambda_{2+2/k}} \right]^{k/2} \quad (4.15)$$

le dommage moyen associé à la densité de probabilité des cycles est donné par l'équation 4.16.

$$E[D^{OC}] = C^{-1} \nu_a \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a^{OC}(\sigma) d\sigma = v_{OC} E[D^{NB}] \quad (4.16)$$

### 4.3 Théorie basée sur l'algorithme de comptage de cycle Rainflow

Chaque méthode de comptage génère sa propre distribution conjointe  $h(u,v)$ , cependant il est reconnu que l'utilisation de la méthode Rainflow amène à de meilleures prédictions [13]. En conséquence les méthodes spectrales se focalisent principalement sur l'estimation de la distribution des cycles Rainflow. Rychlik a proposé une définition d'un cycle Rainflow dans [14] [15], qui donne lieu à une nouvelle formulation du dommage moyen. Elle est définie en équation 4.17.

$$E[D^{rfc}] = C^{-1} \nu_a \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a^{rfc}(\sigma) d\sigma \quad (4.17)$$

Avec  $P_a^{rfc}(\sigma)$ , la densité de probabilité des amplitudes des cycles Rainflow qui peut être définie par la densité de probabilité conjointe des amplitudes et des moyennes.

Il n'existe pas de formule analytique permettant d'établir la densité de probabilité des cycles Rainflow, c'est pourquoi les méthodes spectrales basées sur une densité de probabilité des cycles Rainflow sont évaluées de manière approchée ou empirique.

#### Méthodes Associées

##### Méthode de Dirlik

En 1985, Dirlik [16], parallèlement aux travaux sur la théorie des vibrations aléatoires, propose de déterminer directement à partir de la DSP la densité de probabilité des cycles Rainflow. Il détermine la densité de probabilité des cycles Rainflow de façon empirique, à partir d'un grand nombre de simulations de Monte-Carlo avec différentes formes de DSP et de facteurs d'irrégularité. La densité de probabilité des cycles selon Dirlik est donnée en équation 4.18.

$$P_a^{Dir}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \left[ \frac{D_1}{Q_D} \exp\left(-\frac{Z}{Q_D}\right) + \frac{D_2 Z}{R^2} \exp\left(-\frac{Z^2}{2R^2}\right) + D_3 Z \exp\left(-\frac{Z^2}{2}\right) \right] \quad (4.18)$$

où

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda_0}}; \quad x_m = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_4}}; \quad D_1 = \frac{2(x_m - \gamma^2)}{1 + \gamma^2} \\ R &= \frac{\gamma - x_m - D_1^2}{1 - \gamma - D_1 - D_1^2}; \quad D_2 = \frac{1 - \gamma - D_1 - D_1^2}{1 - R} \\ D_3 &= 1 - D_1 - D_2; \quad Q_D = \frac{1.25(\gamma - D_3 - (D_2 R))}{D_1} \end{aligned} \quad (4.19)$$

L'équation 4.20 indique le dommage moyen avec la densité de probabilité des cycles selon Dirlik.

$$E[D^{Dir}] = C^{-1}\nu_a \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a^{Dir}(\sigma) d\sigma \quad (4.20)$$

### **Méthode de Zhao & Baker**

En 1992, Zhao & Baker [17] proposent une densité de probabilité des cycles Rainflow différente de celle de Dirlik. Celle-ci est basée sur une distribution de Weibull et une distribution de Rayleigh. Elle est donnée en équation 4.21.

$$p_a^{ZB}(\sigma) = w\kappa_a\kappa_b\sigma^{\kappa_b-1} \exp(-\kappa_a\sigma^{\kappa_b}) + (1-w)\sigma \exp(-\frac{\sigma^2}{2}) \quad (4.21)$$

Où  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sont les paramètres de la distribution de Weibull,  $w$  est le paramètre de pondération et  $\sigma$  l'amplitude du cycle « Rainflow ». Ils sont définis en équation 4.22.

$$\begin{cases} w = \frac{1-\gamma}{1-\Gamma(1+\frac{1}{\kappa_b})\kappa_a^{\frac{-1}{\kappa_b}}} \\ \kappa_a = 8-7\gamma \\ \kappa_b = \begin{cases} 1.1 & \text{si } \gamma \leq 0.9 \\ 1.1+9(\gamma-0.9) & \text{si } \gamma > 0.9 \end{cases} \end{cases} \quad (4.22)$$

L'équation 4.23 donne le dommage moyen avec la densité de probabilité des cycles selon Zhao & Baker.

$$E[D^{ZB}] = C^{-1}\nu_a \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a^{ZB}(\sigma) d\sigma \quad (4.23)$$

Dans [17], les auteurs apportent une amélioration à leurs formulation mais pour des pentes de Basquin  $k=3$ .

### **Méthode Single Moment**

En 1990, Lutes et Larsen [18] proposent une formulation empirique du dommage qui fait appel à un seul moment spectral, un moment singulier d'ordre fractionnaire  $k/2$ . Suite à de nombreux calculs de dommage par simulation de Monte-Carlo avec un algorithme de comptage Rainflow, ils préconisent l'utilisation de l'équation 4.24 pour le calcul du dommage moyen.

$$E[D^{SM}] = C^{-1}\nu_a \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a^{SM}(\sigma) d\sigma = C^{-1}2^{k/2}\Gamma(1+\frac{k}{2})\lambda_{2/k}^{k/2} \quad (4.24)$$

Selon Pitoiset [1], cette formulation du dommage donne les résultats, en général, les plus proches des simulations de Monte-Carlo par rapport à l'approximation de Narrow-band, la formulation de Ortiz & Chen ou la formulation de Wirshing & Light. L'autre avantage, toujours selon Pitoiset, est que cette formulation utilise un seul moment spectral et qu'elle est plus rapide en termes de vitesse de calcul. On peut donner la densité de probabilité des cycles associée à la méthode en fonction de celle de  $P_a^{NB}(\sigma)$  (Equation 4.25).

$$p_a^{SM}(\sigma) = \lambda_0^{-(k-1)/2} \lambda_2^{-1/2} \lambda_{2/k}^{k/2} \frac{\sigma}{\lambda_0} \exp(\frac{-\sigma^2}{2\lambda_0}) = \lambda_0^{-(k-1)/2} \lambda_2^{-1/2} \lambda_{2/k}^{k/2} P_a^{NB}(\sigma) \quad (4.25)$$

### Méthode de Tovo & Benasciutti

En 2002-2004, Tovo et Benasciutti [13][19] présentent une formulation approchée du dommage établie à partir de la méthode de comptage Rainflow. Pour écrire cette formulation, ils se basent sur deux résultats montrés par Dowling [20] et Rychlik [8]. Le premier est la définition du dommage Rainflow (équation 4.17). Le deuxième résultat est l'encadrement du dommage Rainflow, démontré par Rychlik. Il a encadré le dommage Rainflow en démontrant qu'il était majoré par le dommage calculé à partir de la formulation Narrow-band et minoré par le dommage calculé à partir de la méthode de comptage des étendues moyennes (RC). Le résultat est donné en équation 4.26.

$$E[D^{RC}] \leq E[D^{rc}] \leq E[D^{NB}] \quad (4.26)$$

Cela permet à Tovo et Benasciutti de définir une densité de probabilité des cycles Rainflow basée sur les densités de probabilité des méthodes minorante et majorante. Elle est fonction d'un paramètre de pondération qui sera dans les premières études de Tovo et Benasciutti, défini de façon approchée et par la suite, de façon empirique grâce à des simulations de Monte-Carlo.

$$P_a^{TB}(\sigma) = hP_a^{NB}(\sigma) + (1-h)P_a^{RC}(\sigma) \quad (4.27)$$

Où

$$P_a^{NB}(\sigma) = \frac{\sigma}{\lambda_0} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\lambda_0}\right); \quad P_a^{RC}(\sigma) = \frac{\sigma}{\lambda_0\gamma^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\lambda_0\gamma^2}\right)$$

$$h = \begin{cases} h_{\text{approché}} = \min\left\{\frac{\gamma_1 - \gamma}{1 - \gamma_1}, 1\right\} \\ h_{\text{simulations}} = \frac{(\gamma_1 - \gamma)[1.112(1 + \gamma_1\gamma - (\gamma_1 + \gamma))e^{2.11\gamma} + (\gamma_1 - \gamma)]}{(\gamma - 1)^2} \end{cases} \quad (4.28)$$

Le dommage moyen peut être défini comme précédemment ou à partir du dommage Narrow-band et du dommage des étendues moyennes. la formulation est donnée par l'équation 4.29.

$$E[D^{TB}] = C^{-1}\nu_a \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a^{TB}(\sigma) d\sigma = hE[D^{NB}] + (1-h)E[D^{RC}] \quad (4.29)$$

### Méthode empirique $\gamma_{0.75}$

Cette méthode suggérée par Lutes et al. [21] est basée sur des travaux menés sur le paramètre de bande  $\gamma_{0.75}$ . Il suggère d'utiliser comme facteur correcteur pour se rapprocher du dommage Rainflow le paramètre  $\gamma_{0.75}^2$ . La densité de probabilité est donnée par l'équation 4.30.

$$P_a^{M075}(\sigma) = \gamma_{0.75}^2 P_a^{NB}(\sigma) \quad (4.30)$$

le dommage moyen est donné en équation 4.31.

$$E[D^{M075}] = \gamma_{0.75}^2 E[D^{NB}] \quad (4.31)$$

## 4.4 Méthodes Spectrales associées à un type de DSP

Un certain nombre d'auteurs ont développés des méthodes spectrales spécifiques pour un type de DSP donné, notamment pour les DSP bimodales ou multimodales. Leurs présentations

seront réduites car elle ne feront pas l'objet d'une étude approfondie. Néanmoins, cette partie contient toutes les références nécessaires à leur compréhension et à leur mise en oeuvre.

### Définition d'une DSP bimodale

Un processus stochastique gaussien de moyenne nulle modélisé par une DSP bimodale peut être défini comme étant une combinaison de deux processus à bande étroite séparés par un intervalle fréquentiel (figure 4.3).

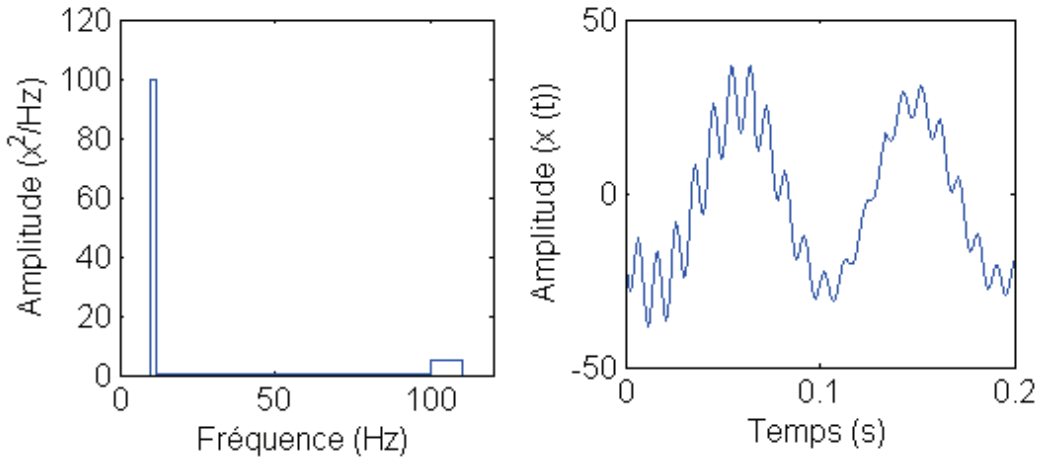


FIGURE 4.3 – Représentation d'une DSP bimodale et d'une réalisation temporelle de ce processus

Ces processus sont appelés processus bimodaux et peuvent être schématisés comme la somme de deux processus indépendants gaussiens à bande étroite.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (4.32)$$

$x_1(t)$  est la composante basse fréquence avec une fréquence propre  $f_1$  et  $x_2(t)$  est la composante haute fréquence avec une fréquence propre  $f_2$ . La DSP formée par  $x(t)$  peut être représentée comme la somme des DSP des deux composantes avec  $\Phi_{x_1}(f)$  associée à  $x_1(t)$  et  $\Phi_{x_2}(f)$  associée à  $x_2(t)$  (équation 4.33). De même, on peut définir pour chaque composante les moments spectraux et les paramètres définis en chapitre 2 car les processus associés à chaque fréquence sont indépendants.

$$\Phi_x(f) = \Phi_{x_1}(f) + \Phi_{x_2}(f) \quad (4.33)$$

La méthode de comptage Rainflow appliquée au processus  $x(t)$  va extraire deux types de cycles : les cycles de large amplitude ( $S_L$ ) qui sont l'interaction entre les composantes  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  et les cycles de faible amplitude ( $S_S$ ) générés par la composante  $x_2(t)$ . Voir figure 4.4.

À partir de ces définitions, des fonctions de densité de probabilité prenant en compte les interactions entre les composantes fréquentielles sont définies. Certaines méthodes spectrales définissent la densité de probabilité de l'enveloppe et/ou de l'amplitude du processus et l'intègrent à leur densité de probabilité des cycles.



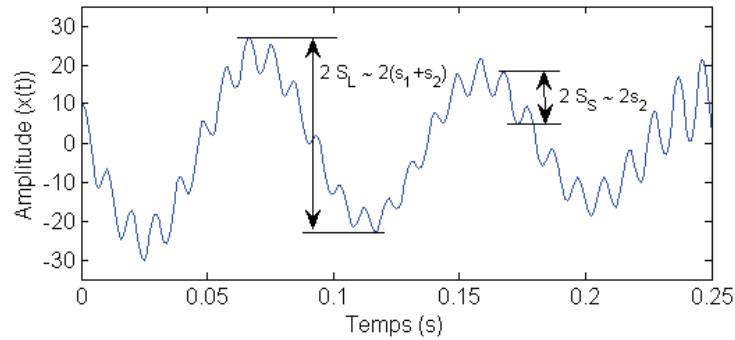


FIGURE 4.4 – Représentation d’un signal temporel d’un processus bimodal avec la définition des cycles Rainflow

### Méthodes associées

Lutes & Larsen [9] en 1990 testent la méthode Single Moment vis-à-vis de processus bimodaux. Ils montrent que dans le cas d’un processus bimodal, la méthode donne de bonnes corrélations par rapport à des simulations de Monte-Carlo avec un algorithme de comptage Rainflow.

Jiao & Moan [22] sont les premiers à donner en 1990 une définition rigoureuse du dommage pour un processus bimodal. Ils définissent la fonction de densité de probabilité des cycles comme étant la somme de la densité de probabilité des amplitudes et la densité de probabilité de la composante  $x_2(t)$ . Ils montrent qu’ils corrèlent assez bien vis-à-vis des SMC réalisées sur différents types de processus bimodaux.

Sakai & Okamura [23] en 1995 définissent une méthode spectrale pour des DSP bimodales. Ils considèrent la fonction de densité de probabilité des cycles comme étant la somme de deux densités de probabilité Narrow-Band indépendantes associées respectivement à  $f_1$  et  $f_2$ .

Fu & Cebon [24] ont proposé une définition d’une méthode spectrale en 2000 qu’ils modifient en 2005. De même que pour Jiao & Moan, la version modifiée de Fu & Cebon fait intervenir les mêmes entités dans la définition de la fonction de densité de probabilité. La méthode diffère dans la définition du nombre moyen de maxima associé à la composante  $x_2(t)$ .

Tovo & Benasciutti, éprouvent leur méthode par rapport aux processus bimodaux [25] [13]. Ils réalisent un plan d’expérience pour comparer leur méthode mais aussi les méthodes précédemment énoncées par rapport à des SMC avec un comptage Rainflow. Ils montrent la précision et la robustesse de ces méthodes par rapport à des méthodes spectrales définies dans un cadre général. Leur méthode est celle qui donne les meilleures corrélations sur les DSP bimodales testées.

Enfin Gao & Moan [26] ont récemment développé une méthode spectrale pour un processus tri-modal. De même que Jiao & Moan, ils définissent leur densité de probabilité des cycles à partir de densité de probabilité de l’enveloppe du processus  $x(t)$ .

## 4.5 Benchmark numérique

Ce benchmark a pour but de comparer l'ensemble des méthodes spectrales décrites précédemment et de retrouver certains résultats remarquables présentés par les différents auteurs.

### 4.5.1 Définition du plan d'expérience

Le plan d'expérience est basé sur 4 DSP. Il s'agit de DSP que l'on peut observer dans l'industrie mécanique. Elles sont présentées Figure 4.5. Il y a une DSP passe bande (Figure 4.5(a)) avec un paramètre  $\alpha$  qui varie de 0.05 à 1.9. La Figure 4.5(b) représente la DSP de réponse d'un système à un degré de liberté (1 DDL) avec un paramètre  $X_i$  qui représente l'amortissement du système. La figure 4.5(c) représente la DSP de réponse d'un système à deux degrés de liberté (2 DDL) qui est régie par deux paramètres, l'amortissement ( $X_i$ ) et l'espacement entre les modes  $\alpha$ . En figure 4.5(d), on montre la DSP d'un pseudo bruit rose à bande, régie par deux paramètres,  $\alpha$  pour la largeur de bande et  $\beta$  pour la pente de la DSP.

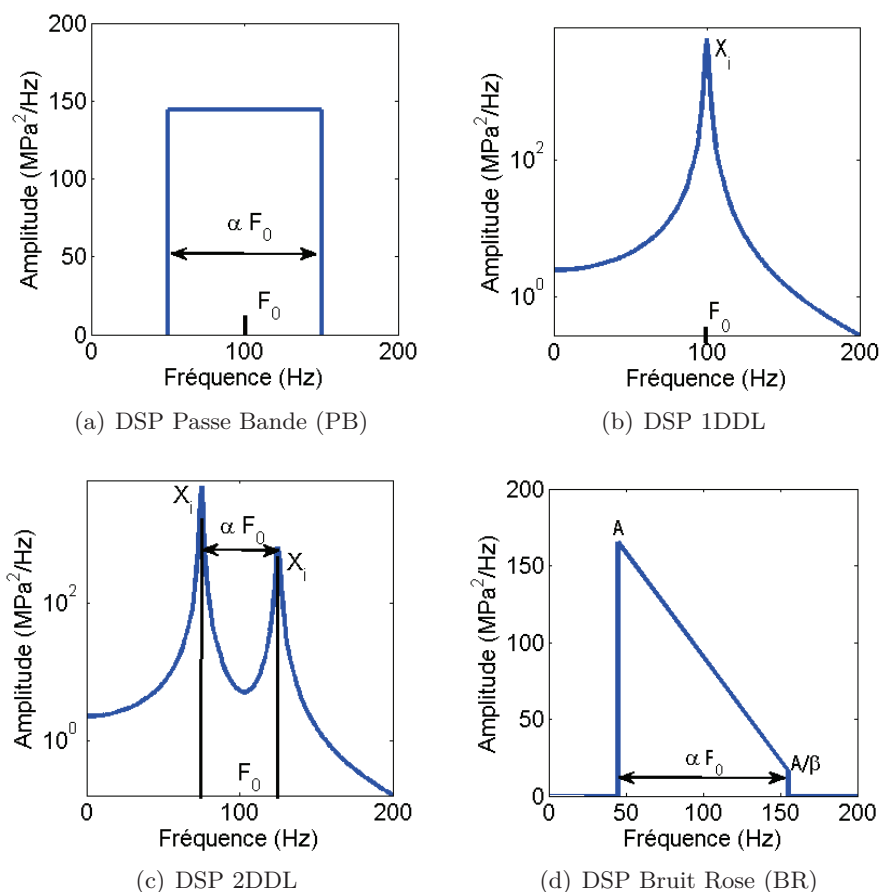


FIGURE 4.5 – DSP sélectionnées pour le plan d'expériences

L'ensemble des paramètres de chaque DSP est synthétisé dans le tableau 4.1. Les paramètres sélectionnés forment des sets. Au total, il y a 168 sets à tester.

Type de DSP	Paramètres	valeurs
Passe bande	$F_0$	100 Hz
	$RMS$	100 MPa
	$\alpha$	0.05, 0.075, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9
1 DDL	$F_0$	100 Hz
	$RMS$	100 MPa
	$X_i$	0.001, 0.0025, 0.005, 0.0075, 0.01, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1, 0.125, 0.15, 0.2
2 DDL	$F_0$	100 Hz
	$RMS$	100 MPa
	$X_i$	0.001, 0.0025, 0.005, 0.0075, 0.01, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1, 0.125, 0.15, 0.2
	$\alpha$	0.05, 0.1, 0.5, 0.9, 1.3, 1.7
Bruit Rose	$F_0$	100 Hz
	$RMS$	100 MPa
	$\alpha$	0.05, 0.075, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9
	$\beta$	10, 20, 50, 100, 200, 300

TABLE 4.1 – Valeurs sélectionnées pour les paramètres des DSP (168 jeux de paramètres)

RMS (MPa)	Pente k	C associé
750	3	1.56e+13
	5	9.76e+17
	7.5	9.65e+22
	9.5	6.03e+28
	12	5.96e+34
	15	9.31e+41
	17	5.82e+46
1200	21	2.27e+56
	3	6.40e+13
	5	1.02e+19
	7.5	3.28e+25
	9.5	5.24e+30
	12	1.68e+37
	15	1.07e+45
17	1.72e+50	
21	4.40e+60	

TABLE 4.2 – Valeurs sélectionnées pour les matériaux (soit 16 matériaux étudiés)

Pour les matériaux, il a été sélectionné des matériaux avec des pentes de la courbe de Basquin différentes et avec des limites à rupture différentes. Ces paramètres sont présentés dans le tableau 4.2. Le paramètre  $C$  est calculé pour que la courbe de Basquin passe par le point de coordonnée  $[10^6 \text{ cycles}; \frac{Rm}{3} \text{ MPa}]$ . Cela permet d'avoir des données plus génériques qu'avec des données expérimentales. Néanmoins l'ensemble de ces données peut être attribué à des matériaux réels. Par exemple, un  $Rm$  à 1200 MPa avec une pente de Basquin de 12 sont les caractéristiques expérimentales en fatigue d'un acier trempé revenu, type 30NiCrMo8. Il est

représenté en Figure 4.6, les courbes de Basquin pour un Rm de 1200 MPa.

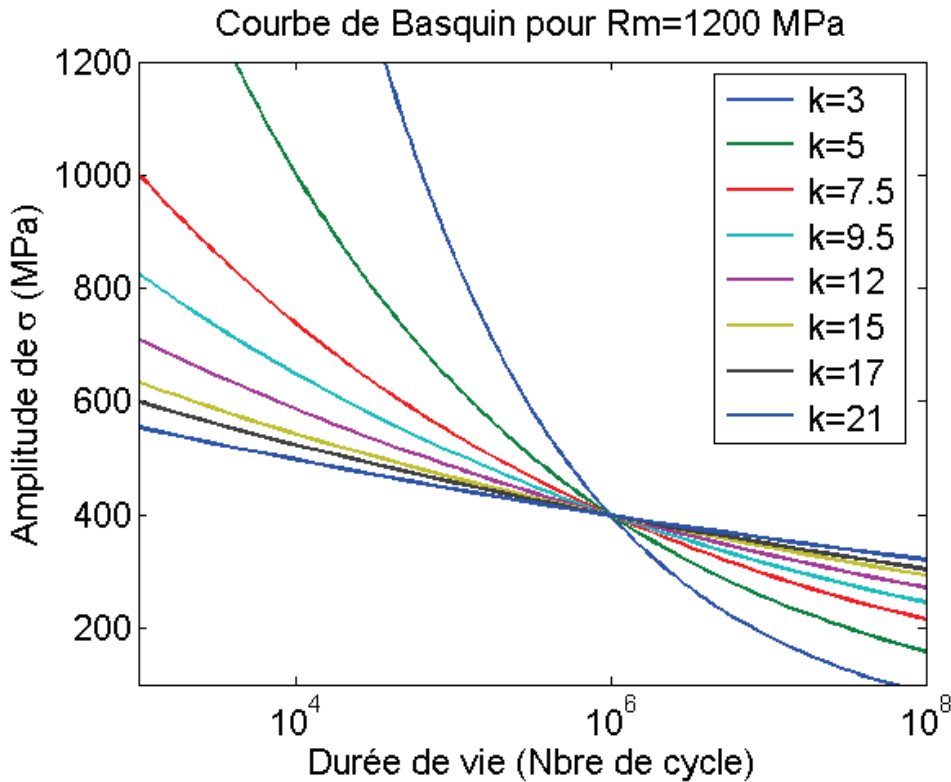


FIGURE 4.6 – Courbe de Basquin pour un Rm de 1200 MPa

#### 4.5.2 Chaîne de simulation de Monte-Carlo

Comme il a été précisé à plusieurs reprises, la méthode de référence pour comparer les méthodes spectrales est basée sur des simulations de Monte-Carlo. C'est-à-dire, réaliser  $N$  tirages temporels de notre processus stochastique afin d'effectuer un calcul du dommage en fatigue dans le domaine temporel en utilisant l'algorithme de comptage de cycles Rainflow reconnu pour donner les meilleures prédictions [20]. Cela permet d'avoir accès à un dommage  $D_T$  pour une période  $T$  donnée. En moyennant l'ensemble des dommages  $D_T$  obtenus, on obtient le dommage moyen  $E[D_T]$  pour notre processus stochastique.

Les méthodes spectrales nous donnent accès directement au dommage moyen par unité de temps du processus stochastique. Pour avoir le dommage moyen du processus stochastique associé à une période  $T$ , il suffit de multiplier le dommage moyen par unité de temps par la période  $T$ , on obtient donc  $E[D_T] = TE[D]$ . La durée de vie  $T_f$  est définie comme étant la durée de vie associée au dommage moyen par unité de temps, d'où  $T_f = 1/E[D]$ .

Dans notre cas, le nombre de tirages est de 3000 pour une période  $T$  de 1804 secondes. Ces paramètres nous garantissent que les simulations de Monte-Carlo ont convergé et que la dispersion observée par la suite est celle du processus stochastique.

Les calculs ont été effectués sur PC double coeur avec 4 Go de RAM et la version de Matlab R2010b. Ils ont été réalisés sur un ensemble de 20 machines pour diminuer le temps de calcul. Néanmoins il faut, avec l'ensemble des paramètres sélectionnés, 5 jours de calcul CPU. Alors

que pour une méthode spectrale, il faut pour l'ensemble des paramètres environ 2 minutes de calcul CPU. Soit un facteur de près de 3600.

La figure 4.7 représente les chaînes de calcul. En bleu, la chaîne de calcul pour les simulations de Monte-Carlo et en rouge, la chaîne de calcul pour les méthodes spectrales. Cela permet de voir également l'algorithme de calcul des méthodes spectrales où la donnée d'entrée principale pour le calcul est bien la DSP de contrainte. Que ce soit la densité de probabilité ou la distribution du nombre de cycles, en pratique, se sont des histogrammes de  $n$  classes [27]. Ils sont donc fonction des paramètres de la DSP mais aussi de la taille des classes choisies.

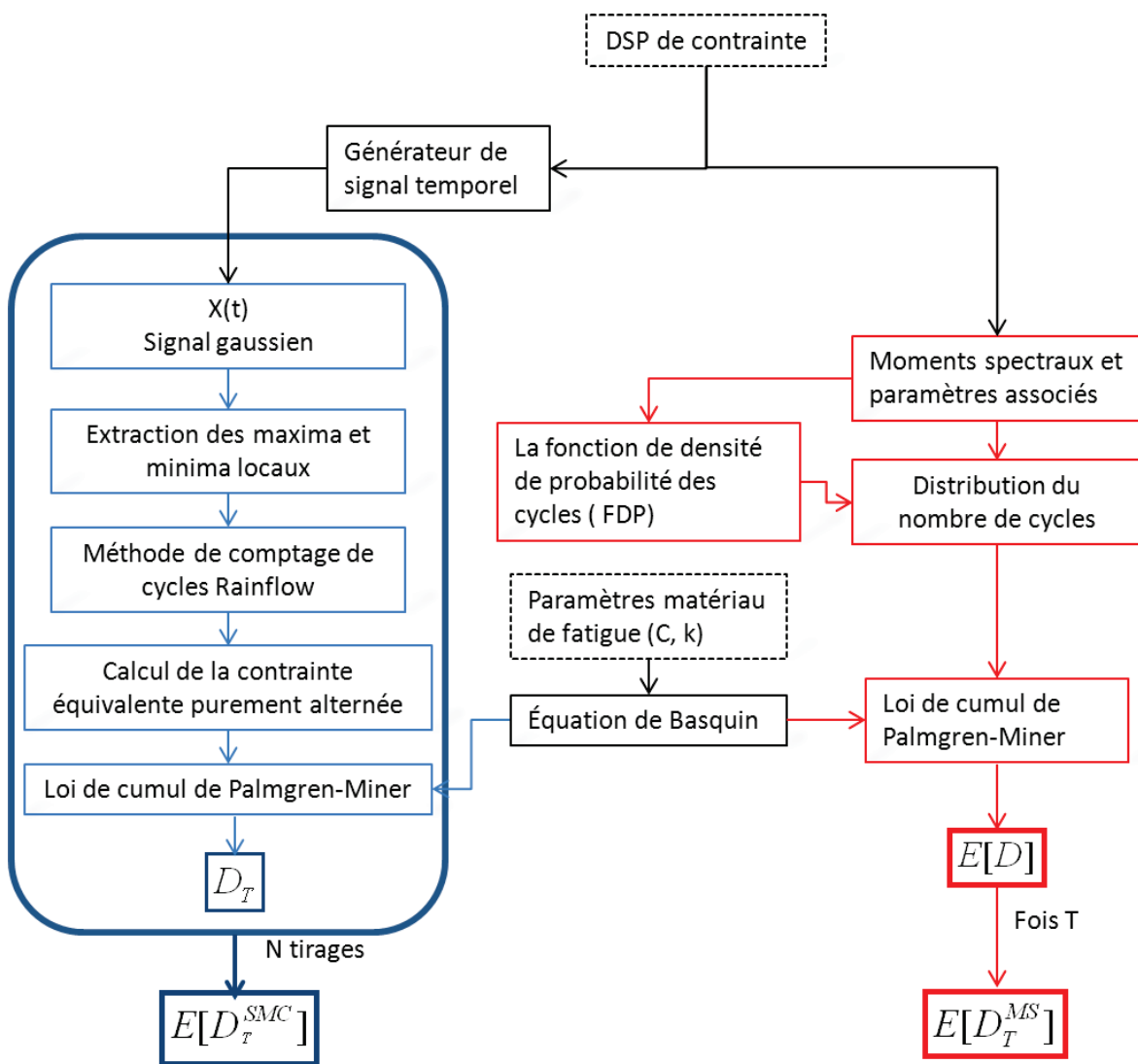


FIGURE 4.7 – Chaîne de calcul pour les simulations de Monte-Carlo et pour les méthodes spectrales (en pointillé, les données d'entrée pour le calcul)

### 4.5.3 Principaux résultats

Afin de mettre en avant les différences entre les méthodes, plusieurs entités ont fait l'objet d'une étude. Ces entités de natures diverses sont notamment la durée de vie  $T_f$ , le dommage moyen par unité de temps, la distribution des cycles, la distribution du dommage et la distribution du dommage cumulé.

#### Résultats liés aux paramètres du plan d'expérience

Lors de la présentation des différentes méthodes spectrales, il a été mis en avant une famille de paramètres dont les méthodes sont dépendantes. Ces paramètres sont  $\gamma$  et  $\gamma_1$  qui sont associés à la largeur de bande de la DSP. Une des propriétés de cette famille de paramètres est que  $\gamma < \gamma_1$  [28].

Sur la figure 4.8, il est représenté l'ensemble des  $\gamma$  et  $\gamma_1$  pour tous les jeux de paramètres possibles. Cela permet de constater que 35% des  $\gamma$  et  $\gamma_1$  du plan d'expérience sont compris dans l'intervalle  $[0.9; 1] \times [0.9; 1]$ .

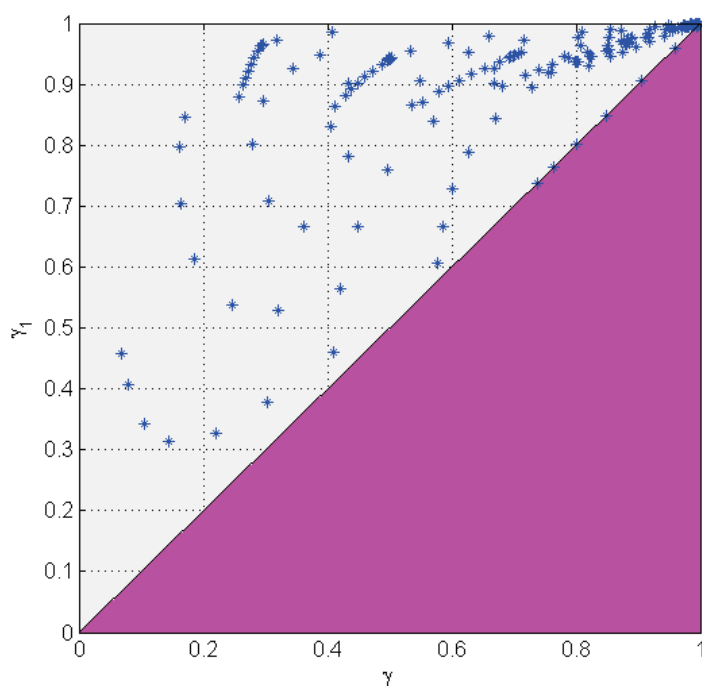
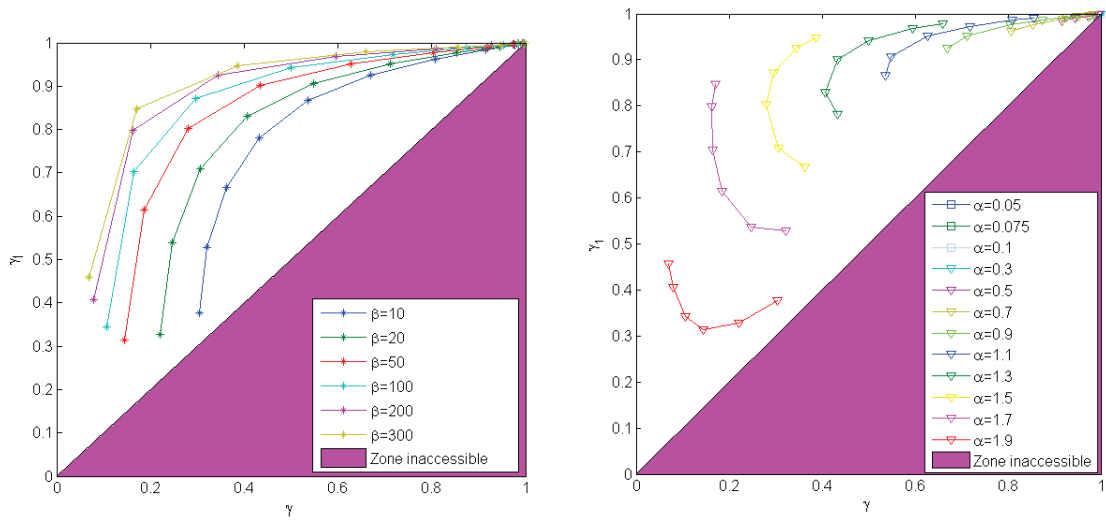


FIGURE 4.8 – Représentation des  $\gamma$  et  $\gamma_1$  pour l'ensemble des jeux de paramètres du plan d'expérience

Il est représenté sur la figure 4.9, les valeurs de  $\gamma$  et  $\gamma_1$  pour la DSP BR. C'est cette DSP qui va nous permettre avec les paramètres choisis de balayer l'espace formé par  $\gamma$  et  $\gamma_1$ . En violet, une zone inaccessible due au fait que  $\gamma > \gamma_1$ . La figure 4.9(a) représente l'influence du paramètre  $\beta$  dans l'espace  $\gamma$  et  $\gamma_1$  et la figure 4.9(a) représente l'influence du paramètre  $\alpha$  dans l'espace  $\gamma$  et  $\gamma_1$ .



(a) Représentation des  $\gamma$  et  $\gamma_1$  en fonction du paramètre  $\beta$  (b) Représentation des  $\gamma$  et  $\gamma_1$  en fonction du paramètre  $\alpha$

FIGURE 4.9 – Représentation des  $\gamma$  et  $\gamma_1$  pour la DSP BR

Résultats liés à la chaîne de Monte-Carlo

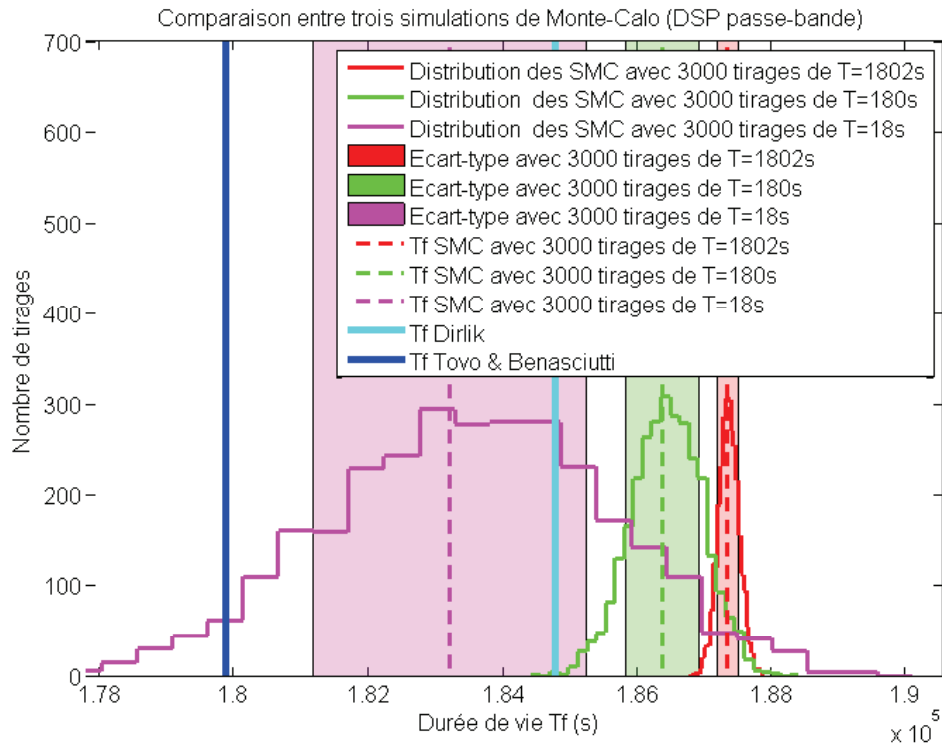


FIGURE 4.10 – Représentation de la durée de vie  $T_f$  pour trois simulations de Monte-Carlo avec des temps de simulations de 1802 s, 180 s et 18 s

Précédemment, il a été évoqué le choix des paramètres pour les simulations de Monte-Carlo. Ils ont une importance si on souhaite étudier la dispersion du processus stochastique et comparer les distributions de cycles car plus un tirage va être représentatif, plus les éléments de faible probabilité vont avoir une ou plusieurs occurrences de réalisation. Cela peut même avoir un impact sur la détermination du dommage moyen.

La figure 4.10 est un exemple concret sur le choix des paramètres pour la simulation de Monte-Carlo. Sur le graphe, trois simulations de Monte-Carlo avec des paramètres de simulations différents, la première, en rouge, avec les paramètres choisis pour le plan d'expérience, la deuxième, en vert, avec des occurrences temporelles 10 fois moins longues et la troisième, en violet, avec des occurrences temporelles 100 fois moins longues. On constate que la dispersion entre les trois simulations de Monte-Carlo est différente. Les dispersions sont d'autant plus grandes que les réalisations temporelles sont courtes. La dispersion calculée est la dispersion propre aux SMC qui dépend de la période  $T$ .

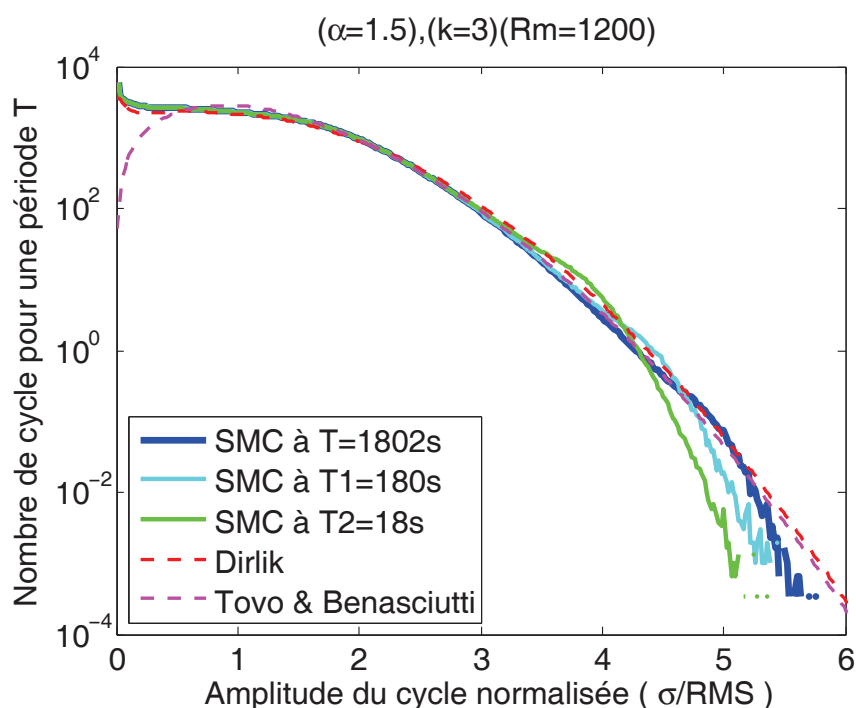


FIGURE 4.11 – Représentation des distributions des cycles des trois simulations de Monte-Carlo.

De plus on s'aperçoit que les dommages moyens ou durées de vie  $T_f$  sont différentes. Cette variation de  $T_f$  semble relativement faible d'un point de vue absolu ( $1.83e5$  s à  $1.87e5$  s). Ces différences sont-elles significatives ?

La figure 4.11 permet de répondre à cette question. Le graphe montre qu'au-dessus d'une amplitude de cycle normalisée de 3.5, les différentes simulations de Monte-Carlo présentent des différences. Cela est dû au fait que les simulations sont soumises à la même loi de probabilité mais qu'elles ont un nombre d'occurrences différent. Par exemple, la probabilité d'avoir un cycle normalisé de 4 est de  $3e-5$ . Dans le cas d'une période de 18s avec la fréquence  $F_0 = 100$  Hz, il y a environ 1800 cycles donc le nombre d'occurrences à une amplitude de 4 est de 0.05. Dans le cas d'une période de 180s avec la même fréquence, il y a environ 18000 cycles donc le nombre d'occurrences à une amplitude de 4 est de 0.5. Dans le cas d'une période de 1802s avec la même



fréquence, il y a environ 180200 cycles donc le nombre d'occurrences à une amplitude de 4 est de 5. Dans le dernier cas, une représentativité plus grande de l'amplitude dans un processus qui au contraire des méthodes spectrales n'admet que des nombres entiers. La solution est soit de mettre un cut-off sur le cumul du dommage soit de prendre une période longue qui représente bien l'espace des amplitudes possibles.

Résultats du plan d'expérience

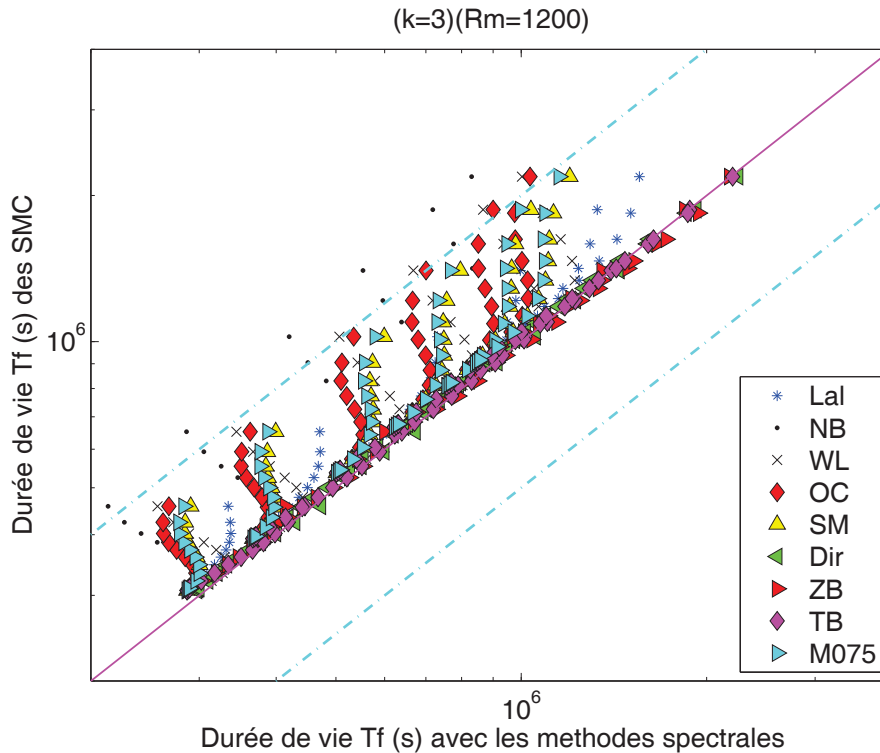


FIGURE 4.12 – Durée de vie Tf de l'ensemble des méthodes spectrales testées pour l'ensemble des paramètres de la DSP BR pour un matériau avec une pente k de 3 et une valeur Rm de 1200 MPa

Les figures 4.12 et 4.13 illustrent les résultats de durée de vie Tf pour l'ensemble des jeux de paramètres de la DSP BR et cela pour deux pentes de Basquin différentes. On constate que l'ensemble des méthodes spectrales étudiées se situent globalement dans l'intervalle  $[Tf/2 ; 2Tf]$ , quelle que soit la pente choisie.

De plus, on s'aperçoit que les méthodes Dirlik, Zhao & Baker et Tovo & Benasciutti corrént bien avec les durées de vie des SMC quel que soit le jeu de paramètres choisi. Pour les autres méthodes, on constate une divergence de l'estimation de la durée de vie quand le paramètre  $\alpha$  augmente soit quand  $\gamma$  diminue et cela quelle que soit la valeur de  $\beta$ . Ces conclusions sont valables quelle que soit la valeur Rm et la pente k.

Néanmoins, plus la pente k augmente, plus les méthodes faisant appel à ce paramètre pour leur facteur correcteur ont tendance à diverger. Cette conclusion est valable notamment pour la méthode de Wirshing & Light.

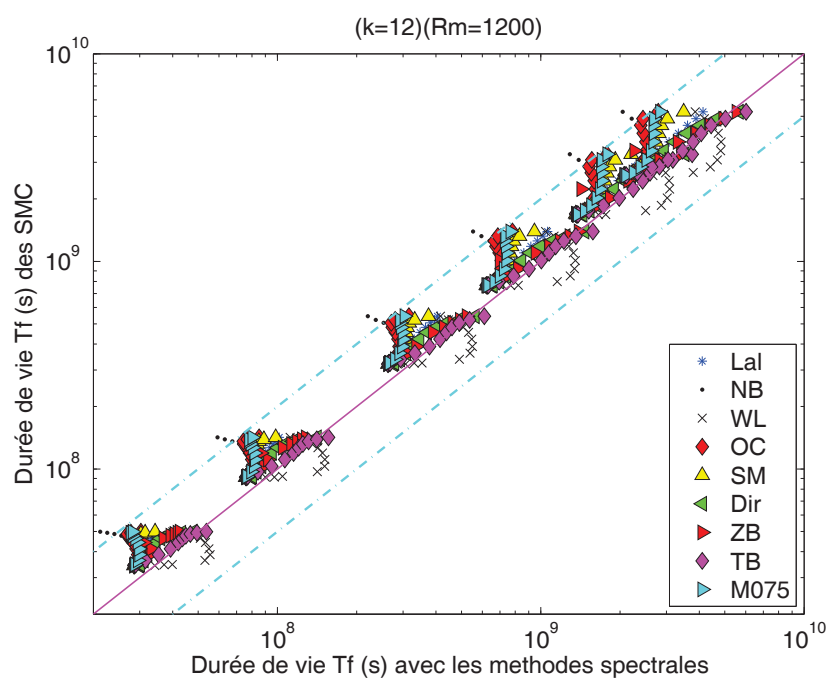


FIGURE 4.13 – Durée de vie Tf de l'ensemble des méthodes spectrales testées pour l'ensemble des paramètres de la DSP BR pour un matériau avec une pente k de 12 et une valeur Rm de 1200 MPa

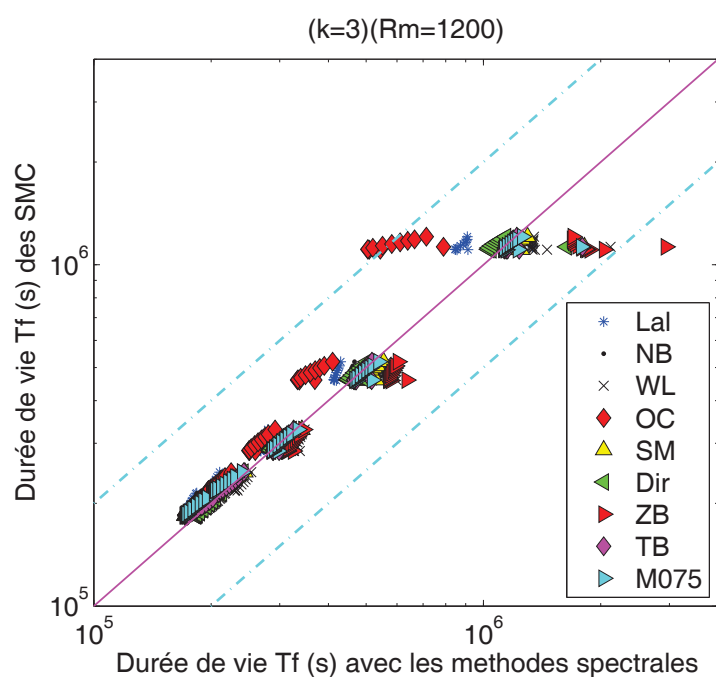


FIGURE 4.14 – Durée de vie Tf de l'ensemble des méthodes spectrales testées pour l'ensemble des paramètres de la DSP 2DDL pour un matériau avec une pente k de 3 et une valeur Rm de 1200 MPa

Les figures 4.14 et 4.15 illustrent les résultats de durée de vie  $T_f$  pour l'ensemble des jeux de paramètres de la DSP 2DDL. Dans ce cas, les résultats sont plus dispersés, notamment pour les valeurs de  $\alpha$  et de pente  $k$  élevées.

La seule méthode qui reste dans l'intervalle  $[T_f/2 \ 2T_f]$  est la méthode Tovo & Benasciutti. Comme il a été cité précédemment dans ce chapitre, Tovo & Benasciutti ont éprouvé leur méthode à des DSP du type bimodales. La conclusion de leur étude ([25] [13](chapitre 5)) est une bonne corrélation de leur méthode vis-à-vis des simulations Monte-Carlo. Les résultats obtenus sont pour l'ensemble de leurs jeux de paramètres plus proches des résultats des SMC que des méthodes spectrales développées exclusivement pour les DSP bimodales.

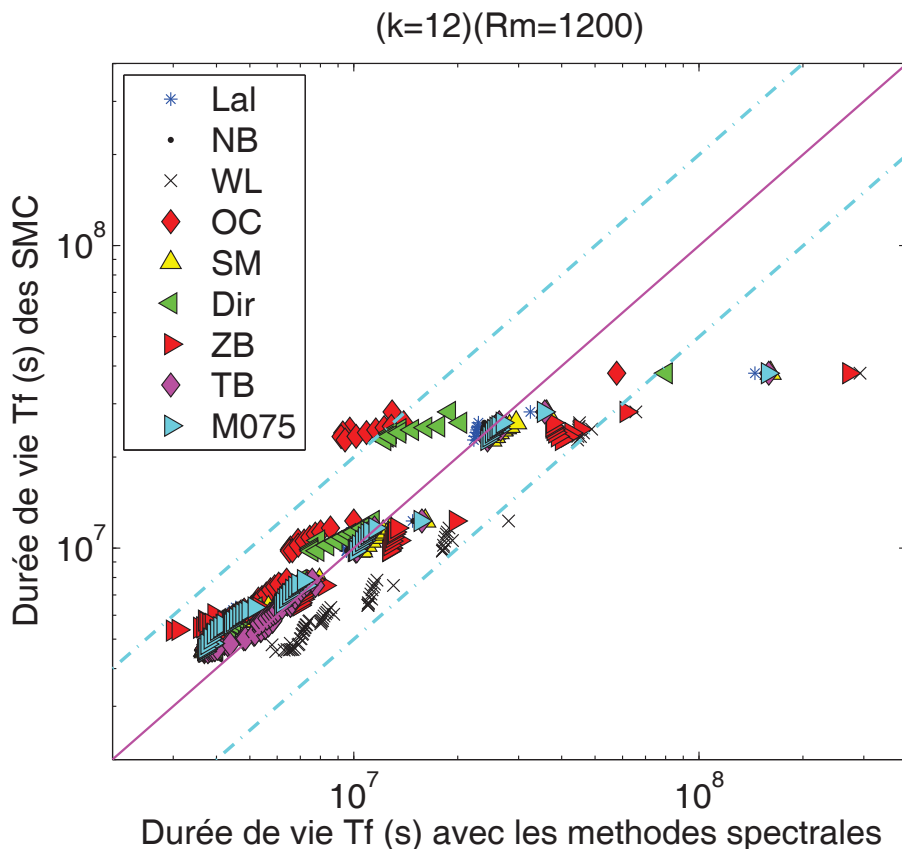


FIGURE 4.15 – Durée de vie  $T_f$  de l'ensemble des méthodes spectrales testées pour l'ensemble des paramètres de la DSP 2DDL pour un matériau avec une pente  $k$  de 12 et une valeur  $R_m$  de 1200 MPa

La figure 4.16 représente les résultats pour la DSP passe-bande pour différentes pentes  $k$ . Pitoiset dans [1](chapitre 2) avait déjà réalisé des simulations de Monte-Carlo avec la même définition de DSP. Sur les méthodes comparées les résultats sont similaires.

La méthode Narrow-Band est un majorant du dommage ou minorant de la durée de vie  $T_f$ . Les autres méthodes tendent vers des résultats équivalents à la méthode Narrow-Band quand  $\alpha$  tend vers 0, soit quand  $\gamma$  tend vers 1.

De plus, on remarque que certaines méthodes sous-estiment le dommage (sur-estiment  $T_f$ ) selon les paramètres comme la méthode de Wirshing & Light.

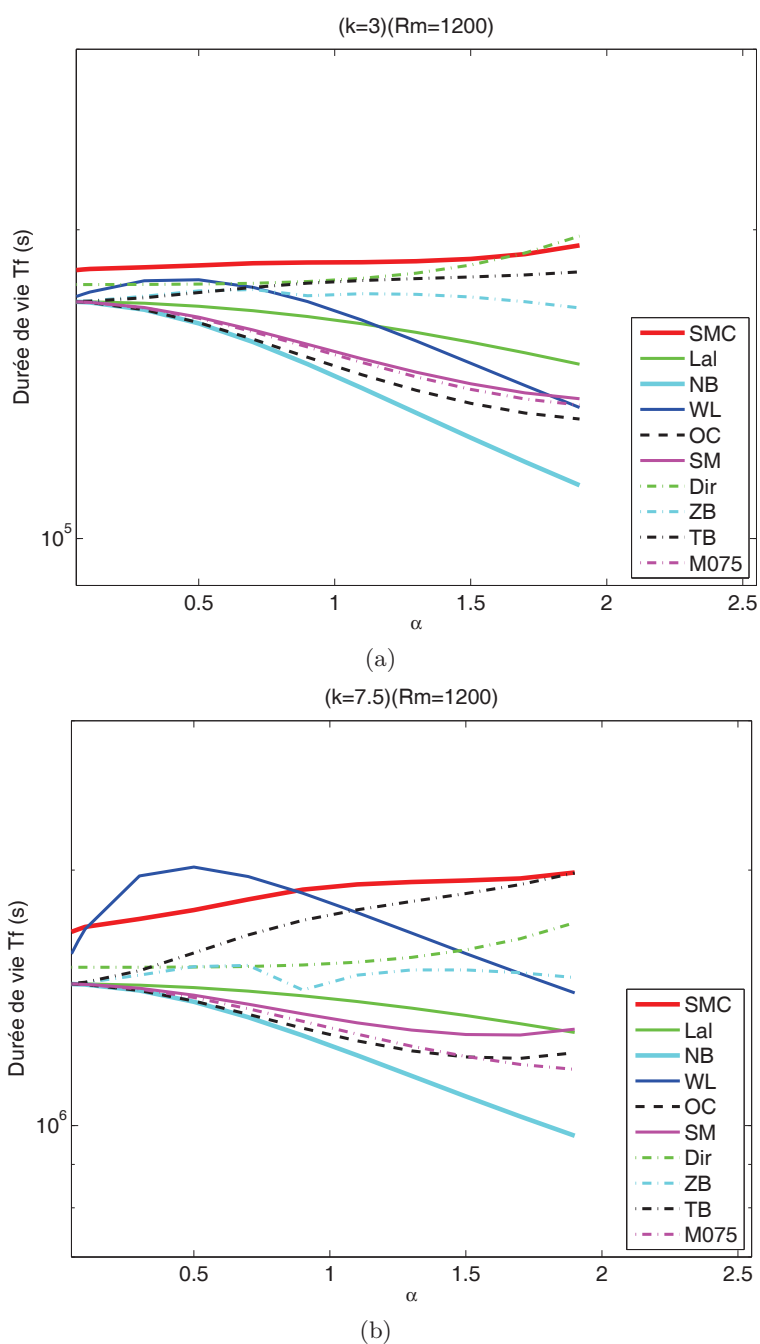
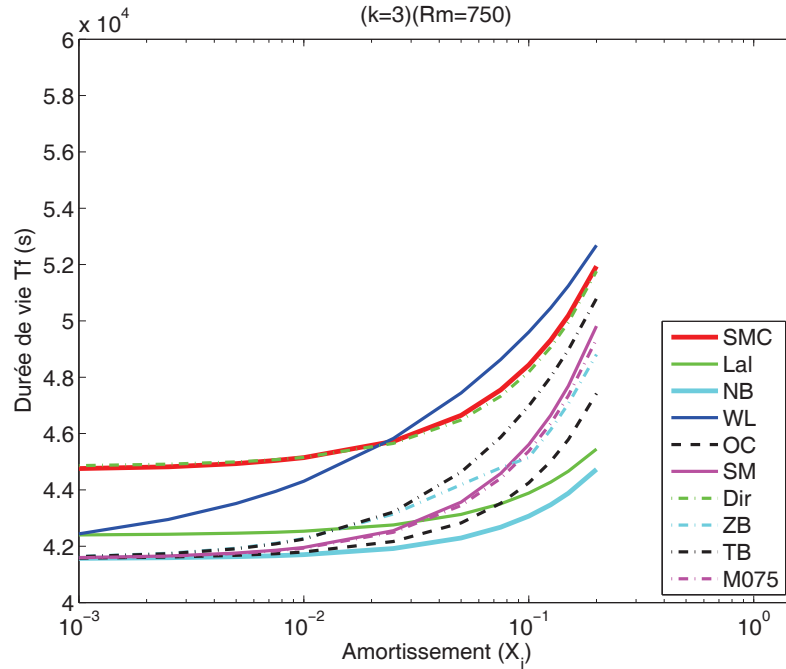


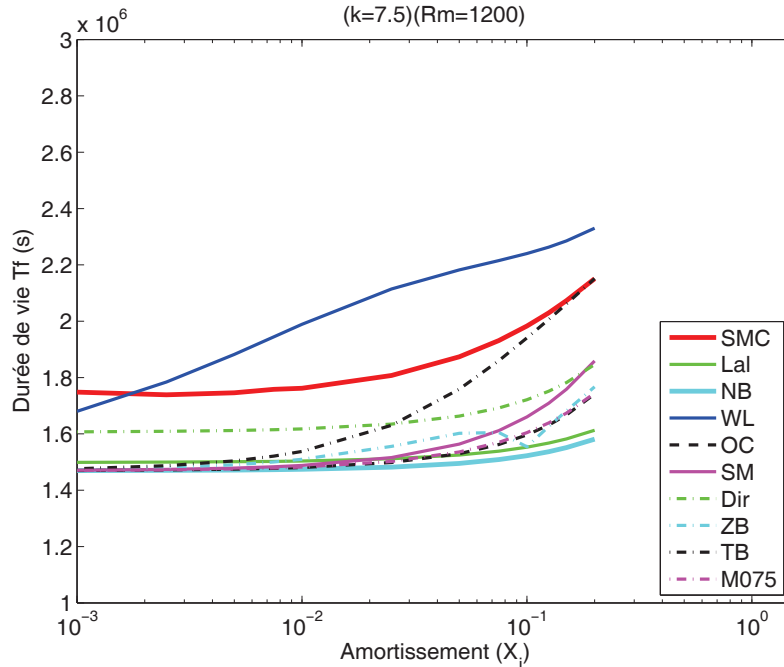
FIGURE 4.16 – Durée de vie  $T_f$  de l'ensemble des méthodes spectrales testées pour l'ensemble des paramètres de la DSP PB pour des matériaux avec une pente  $k$  de 3 (a) et de 7.5 (b)

La figure 4.17 représente les résultats pour la DSP 1DDL pour différentes pentes  $k$ . Cette DSP est définie comme étant la réponse à un système linéaire à 1 DDL. Une étude similaire a été réalisé par Pitoiset [1](chapitre 2). Néanmoins, les paramètres sélectionnés sont plus larges. Dans le cas de l'étude de Pitoiset, l'amortissement varie de  $0.01 \leq X_i \leq 0.2$ , dans notre cas, l'amortissement varie de  $0.001 \leq X_i \leq 0.2$ . Toutefois sur l'intervalle  $[0.01 ; 0.2]$  les résultats et les tendances entre les deux études sont similaires.

Dans le cas où  $k=3$ , la méthode de Dirlik est confondue avec les simulations de Monte-Carlo. Les autres méthodes corrélient bien les résultats et les tendances des SMC. L'erreur relative, quel que soit la méthode et/ou le paramètre  $\alpha$  est inférieure à 5%.



(a) Valeur Rm de 750 MPa



(b) Valeur Rm de 1200 MPa

FIGURE 4.17 – Durée de vie Tf de l'ensemble des méthodes spectrales testées pour l'ensemble des paramètres de la DSP 1DDL pour des matériaux avec une pente  $k$  de 3 (a) et de 7.5 (b)

Les figures 4.18 et 4.19 sont les distributions des cycles et du dommage pour deux jeux de paramètres de la DSP bruit rose. Pour plus de clarté, seules les méthodes de Lalanne, Narrowband, Dirlik, Zhao & Baker et Tovo & Benasciutti sont représentées sur ces graphes. Chaque figure est composée de quatre graphiques, le premier représente la distribution des cycles permettant de voir les différences sur les faibles amplitudes. Le deuxième représente la distribution des cycles avec une amplitude normalisée et une échelle logarithmique afin de comparer les tendances de chaque distribution pour les amplitudes élevées. Le troisième représente la distribution du dommage qui permet d'associer un dommage à l'amplitude d'un cycle. Et enfin, le quatrième représente la distribution du dommage cumulé avec une amplitude normalisée et une échelle logarithmique qui permet de mettre en relief les différences entre les méthodes pour les amplitudes élevées.

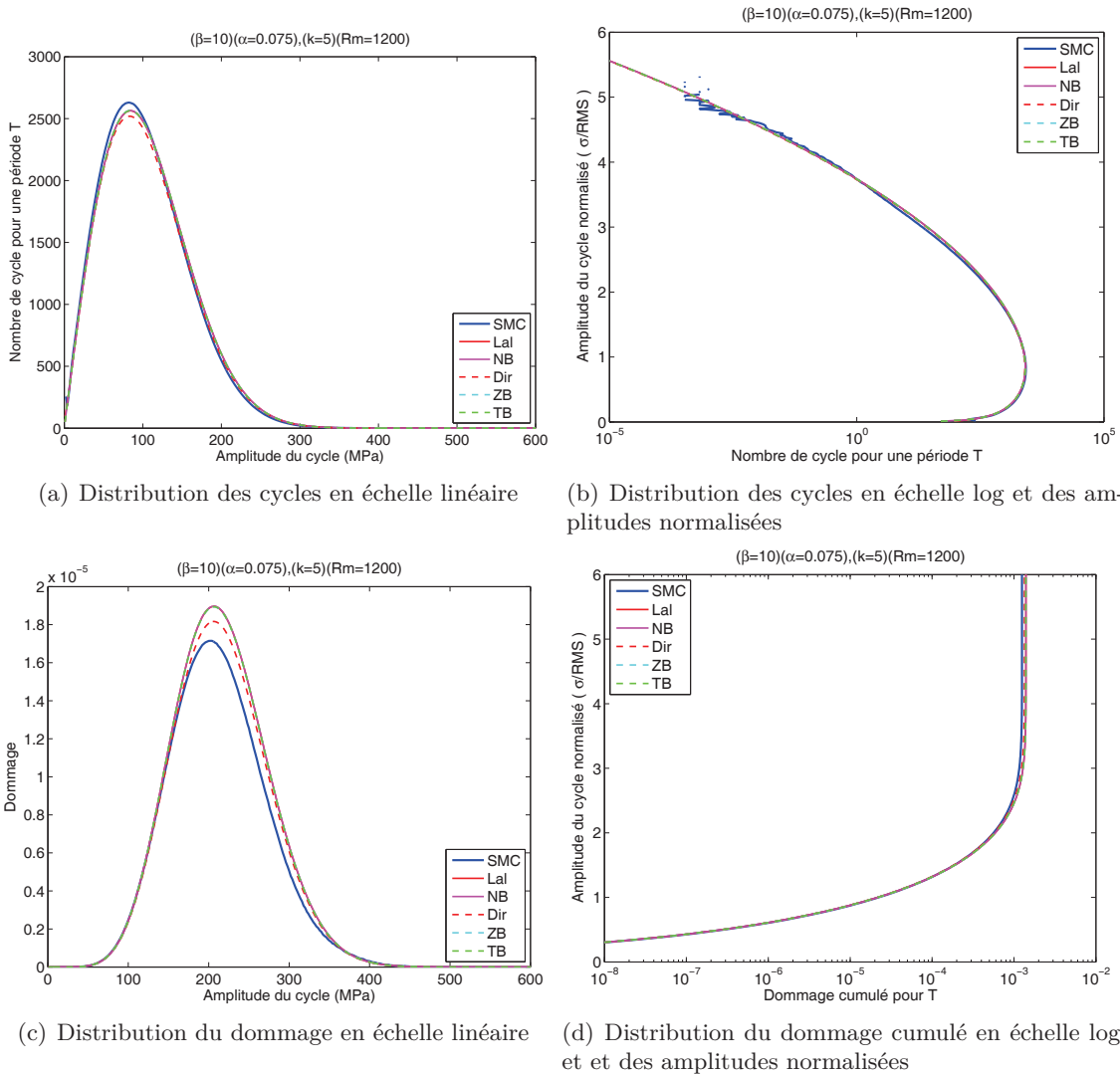
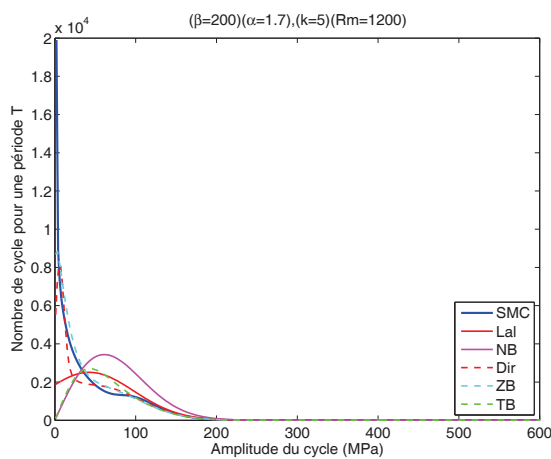


FIGURE 4.18 – Présentation de différentes distributions dans le cas de la DSP BR avec les paramètres  $\beta = 10$ ,  $\alpha = 0.075$  et un matériau avec une pente  $k=5$  et  $R_m=1200$  MPa

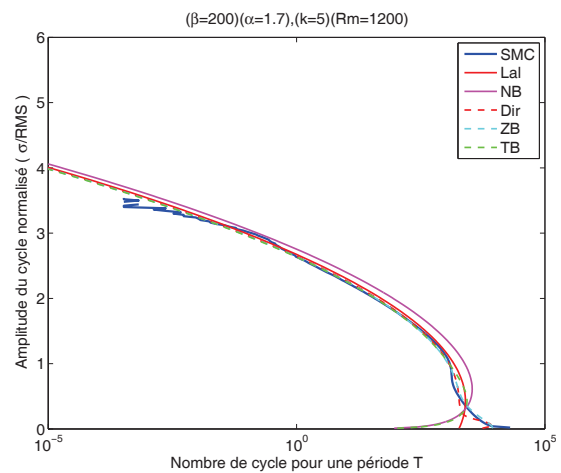
La figure 4.18 représente les résultats pour le jeu de paramètres suivant :  $\beta = 10$ ,  $\alpha = 0.075$ ,

$k=5$  et  $R_m=1200$  MPa. Pour ce jeu de paramètres, la valeur  $\gamma$  est proche de 1. D'ailleurs, on constate que la distribution des cycles des SMC est quasiment confondue avec celles des méthodes spectrales. Sur la figure 4.18(b), les méthodes spectrales ont la même pente que la distribution des cycles des SMC.

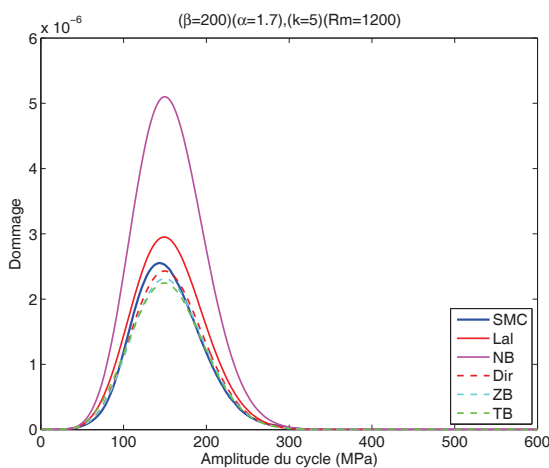
Malgré que les distributions des cycles sont quasiment confondues, on note sur la figure 4.18(c) une différence entre les distributions du dommage. Cela est dû au fait que les écarts de la distribution de cycles sont une fonction puissance de la valeur de la pente  $k$  de la droite de Basquin ( $d = C^{-1}\sigma^k$ ). Plus la pente  $k$  est élevée, plus les écarts entre les distributions de cycles seront visibles sur la distribution du dommage. On note aussi que le dommage se situe dans un intervalle d'amplitude de 100 MPa à 400 MPa. La figure 4.18(d) permet de montrer que ces écarts sont minimums.



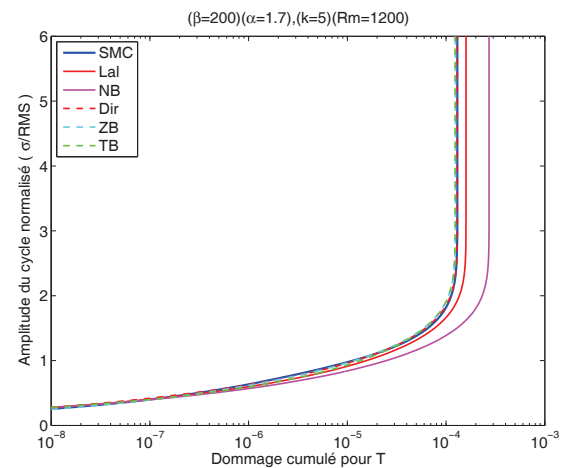
(a) Distribution des cycles en échelle linéaire



(b) Distribution des cycles en échelle log et des amplitudes normalisées



(c) Distribution du dommage en échelle linéaire



(d) Distribution du dommage cumulé en échelle log et des amplitudes normalisées

FIGURE 4.19 – Présentation de différentes distributions dans le cas de la DSP BR avec les paramètres  $\beta = 200$ ,  $\alpha = 1.7$  et un matériau avec une pente  $k=5$  et  $R_m=1200$  MPa

La figure 4.19 représente les résultats pour le jeu de paramètres suivant :  $\beta = 200$ ,  $\alpha = 1.7$ ,

$k=5$  et  $Rm=1200$  MPa. Pour ce jeu de paramètres, la valeur  $\gamma$  est de 0.2 et la valeur de  $\gamma_1$  est de 0.8. On constate sur les figures 4.19(a) et 4.19(b) de larges disparités entre la distribution des cycles SMC et les distributions des cycles des méthodes spectrales. Les distributions des méthodes spectrales sont de formes et de tendances très différentes.

La distribution des cycles des SMC tend vers une loi exponentielle. La méthode spectrale de Zhao & Baker est la méthode dont la distribution des cycles est la plus proche de celle des SMC. Cela est relativement normal car c'est la seule densité de probabilité qui dans sa définition fait appel à une loi de Weibull, qui en fonction de ces paramètres peut représenter plusieurs lois de probabilité, dont la loi de probabilité exponentielle.

Sur la figure 4.19(b), les méthodes spectrales ont la même pente que la distribution des cycles des SMC mais avec des offsets notamment pour la distribution des cycles Narrow-Band.

On note sur les figures 4.19(c) et 4.19(d) une divergence entre les distributions du dommage. Cela est dû aux écarts entre les distributions déjà énoncée au paragraphe précédent. L'écart entre la distribution Narrow-Band et SMC est encore plus marqué. Néanmoins la méthode Narrow-Band est bien dans le cas présent une méthode majorante par rapport au dommage.

Les figures 4.20 et 4.21 illustrent l'erreur relative du dommage en fonction de  $\gamma$  pour tous les jeux de paramètres du plan d'expérience et cela pour deux configurations matériaux. La définition de l'erreur relative du dommage est donnée par l'équation 4.34.

$$Erreur\ relative(\%) = \frac{|E[D^{MS}] - E[D^{SMC}]|}{E[D^{SMC}]} 100 = \frac{|E[D_T^{MS}] - E[D_T^{SMC}]|}{E[D_T^{SMC}]} 100 \quad (4.34)$$

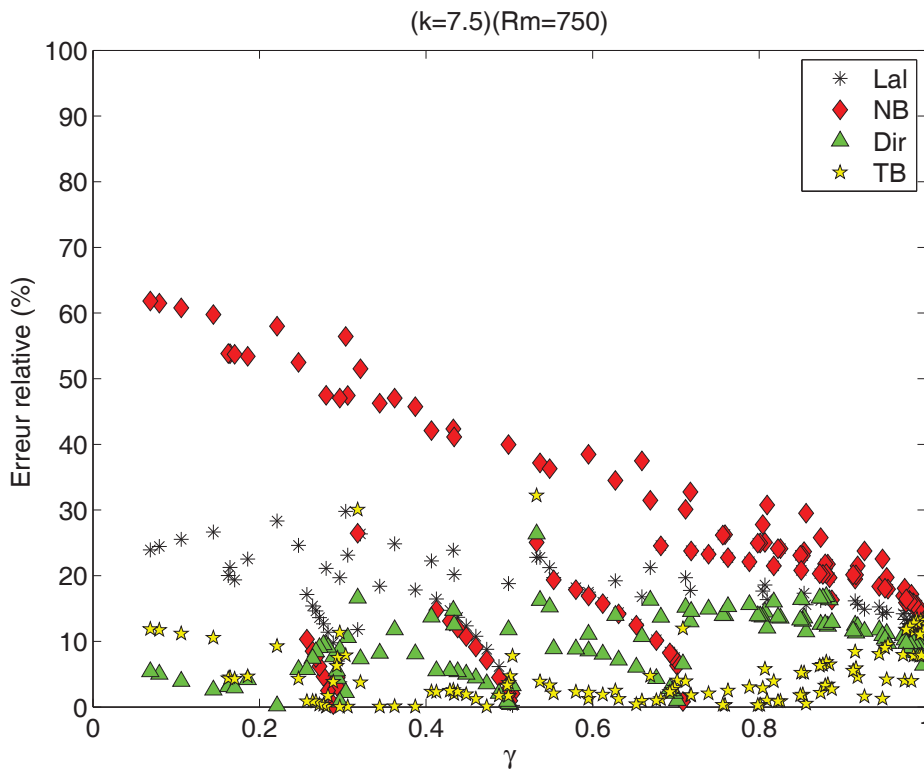


FIGURE 4.20 – Représentation de l'erreur relative du dommage par rapport à des simulations de Monte-Carlo pour le matériau  $k=7.5$  et  $Rm=750$  MPa



Seules les méthodes spectrales suivantes sont représentées sur le graphe : Narrow-Band, Lalanne, Dirlik et Tovo & Benasciutti. Pour les deux jeux de paramètres matériaux représentés sur le graphe, la méthode de Tovo & Benasciutti a une erreur relative inférieure à 15%, sauf en deux points qui sont pour des jeux de la DSP 2DDL.

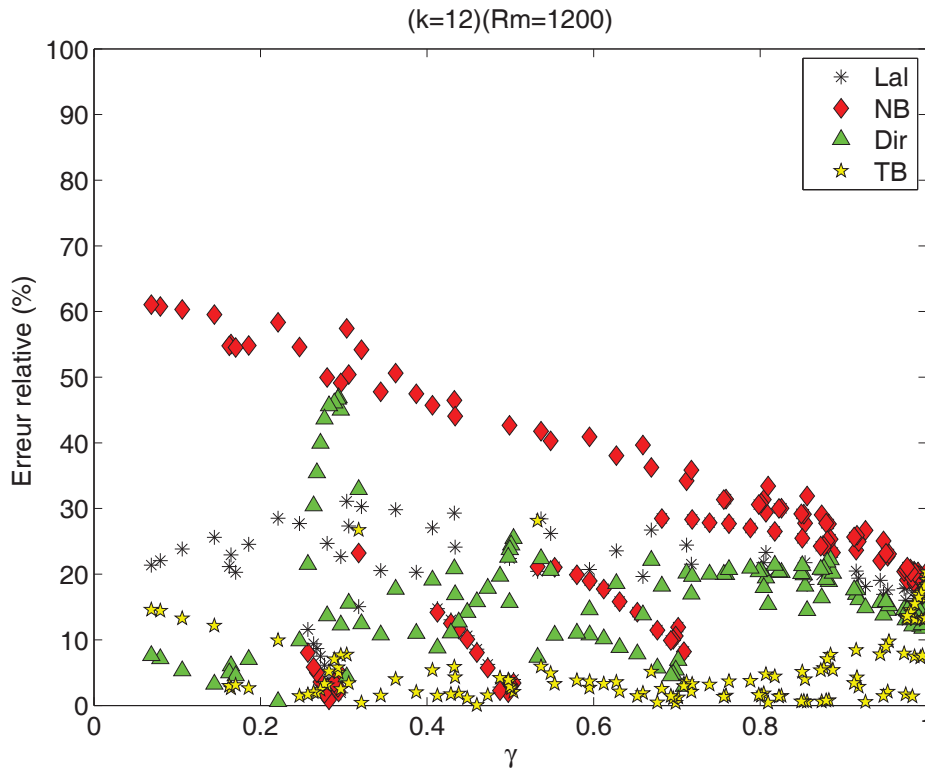


FIGURE 4.21 – Représentation de l’erreur relative du dommage par rapport à des simulations de Monte-Carlo pour le matériau  $k=12$  et  $Rm=1200$  MPa

On constate pour la méthode Narrow-band une erreur relative qui augmente quand le paramètre  $\gamma$  diminue. Cela est cohérent avec la définition de la méthode qui est donnée à l’origine pour des valeurs de  $\gamma$  tendant vers 1. L’erreur relative pour la méthode Narrow-Band atteint 65% pour des valeurs de  $\gamma$  aux alentours de 0.1. On s’aperçoit que la méthode est bien un majorant vis-à-vis des autres méthodes spectrales et des simulations de Monte-Carlo.

La figure 4.21 met en avant un dysfonctionnement dans la méthode de Dirlik. Ce problème a fait l’objet d’une étude réalisée par Colin [28] qui met en défaut la méthode de Dirlik pour certains couples  $(\gamma_1, \gamma)$ , il appelle ce défaut "la cloche de Dirlik". Elle intervient pour  $k=12$  quand  $\gamma_1$  varie entre 0.8 et 1 et quand  $\gamma$  varie entre 0.2 et 0.4 . De plus ce phénomène est accentué par des pentes  $k$  élevés. Sur la figure 4.8, il existe des couples  $(\gamma_1, \gamma)$  dans l’intervalle précédemment décrit. Ces couples sont pour des jeux de paramètres de la DSP 2DDL avec un paramètres  $\alpha$  à 1.7. Ils engendrent une erreur relative supérieure à 50%.

## 4.6 Conclusion

Les méthodes spectrales sont des outils adaptés pour réaliser un dimensionnement en fatigue à grand nombre de cycles vis-à-vis d'un processus stochastique ergodique stationnaire gaussien et de moyenne nulle. Il faut garder à l'esprit la grande diversité de ces méthodes, certaines d'entre elles sont développées pour un type de processus stochastique particulier.

Le benchmark montre que l'on retrouve les conclusions des différents auteurs qui ont travaillé à développer ces modèles et à les valider [13] [16]. La méthode Narrow-band est bien un majorant par rapport au dommage moyen. Les méthodes avec une définition proche d'un comptage Rain-flow tendent vers les simulations de Monte-Carlo comme Dirlik, Zhao & Baker ou bien encore Tovo & Benasciutti.

Le phénomène de la cloche de Dirlik est bien visible. La méthode qui est la plus robuste et la plus précise est la méthode de Tovo & Benasciutti, cependant on constate que cette méthode a une faiblesse, comme celle de Dirlik, pour certaines pentes  $k$  et paramètres  $\gamma_1$  et  $\gamma$ . L'impact de la cloche de Dirlik étudié par Colin [28] est moins prononcé sur la méthode de Tovo & Benasciutti mais afin de mieux apprécier le phénomène, il faudrait refaire l'étude de Colin avec les paramètres associés à la méthode de Tovo & Benasciutti.

## Bibliographie du chapitre 4

- [1] X. Pitoiset, *Méthodes spectrales pour l'analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux*. PhD thesis, Université libre de Bruxelles, 2001.
- [2] P. Brodtkorb, P. Johannesson, G. Lindgren, I. Rychlik, J. Ryden, and E. Sjo, "WAFO - A Matlab toolbox for analysis of random waves and loads," in *Proceedings of the 10th International Offshore and Polar Engineering Conference Proceedings, VOL III*, pp. 343–350, 2000. Seattle, WA, MAY 28-JUN 02, 2000.
- [3] A. Preumont, *Vibrations aléatoires et analyse spectrale*. Presses Polytechniques Romandes, Aug. 1990.
- [4] C. Lalanne, *Mechanical Vibration & Shock Analysis : Fatigue Damage*, vol. Tome 4. Lavoisier, Aug. 2009.
- [5] S. Rice, *Mathematical analysis of random noise*. Selected papers on noise and stochastic processes, 1954.
- [6] J. Miles, "On structural fatigue under random loading," *Journal of Aeronautical Sciences*, pp. 753–762, 1954.
- [7] S. Crandall and W. Mark, "Random vibration in mechanical systems," in *Academic Press*, (N.Y.), 1963.
- [8] I. Rychlik, "On the 'narrow-band' approximation for expected fatigue damage," *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 8, no. 1, pp. 1–4, 1993.
- [9] L. Lutes and C. Larsem, "Improved spectral method for variable amplitude fatigue prediction," *Journal of Structural Engineering-ASCE*, vol. 116, pp. 1149–1164, APR 1990.
- [10] P. Wirsching and A. Shehata, "Fatigue under wide band random stresses using rain-flow method," *Journal of engineering materials and technology-transactions of the ASME*, vol. 99, no. 3, pp. 205–211, 1977.
- [11] P. Wirsching and M. Light, "Fatigue under wide band random stresses," *Journal of the structural division-ASCE*, vol. 106, no. 7, pp. 1593–1607, 1980.
- [12] K. Ortiz and N. Chen, "Fatigue damage prediction for stationary wide-band processes," in *In 'Fifth Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Civil Engrg*, 1987.
- [13] D. Benasciutti, *Fatigue analysis of random loadings*. PhD thesis, University of Ferrara, DEC 2004.
- [14] I. Rychlik, "A new definition of the rainflow cycle counting method," *International journal of fatigue*, vol. 9, pp. 119–121, APR 1987.
- [15] G. Lindgren and I. Rychlik, "Rain flow cycle distributions for fatigue life prediction under gaussian load processes," *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 10, no. 3, pp. 251–260, 1987.
- [16] T. Dirlik, *Application of computers in fatigue analysis*. PhD thesis, University of Warwick, 1985.

- [17] W. Zhao and M. Baker, “On the probability density function of rainflow stress range for stationary gaussian processes,” *International Journal of Fatigue*, vol. 14, no. 2, pp. 121–135, 1992.
- [18] C. Larsen, “Predicting the fatigue life of offshore structures by the single-moment spectral method,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 6, no. 2, pp. 96–108, 1991.
- [19] D. Benasciutti and R. Tovo, “Spectral methods for lifetime prediction under wide-band stationary random processes,” *International Journal of Fatigue*, vol. 27, pp. 867–877, Aug. 2005.
- [20] N. Dowling, “Fatigue failure predictions for complicated stress-strain histories,” *Journal of Materials*, vol. 7, no. 1, pp. 71–&, 1972.
- [21] L. Lutes, M. Corrao, S. Hu, and J. Zimmerman, “Stochastic fatigue damage accumulation,” *Journal of Structural Engineering-ASCE*, vol. 110, no. 11, pp. 2585–2601, 1984.
- [22] G. Jiao and T. Moan, “Probabilistic analysis of fatigue due to gaussian load processes,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 5, no. 2, pp. 76 – 83, 1990.
- [23] S. Sakai and H. Okamura, “On the distribution of rainflow range for gaussian random-processes with bimodal PSD,” *JSME International Journal Series A-mechanics and Material Engineering*, vol. 38, pp. 440–445, OCT 1995.
- [24] T. Fu and D. Cebon, “Predicting fatigue lives for bi-modal stress spectral densities,” *International Journal of Fatigue*, vol. 22, pp. 11–21, JAN 2000.
- [25] D. Benasciutti and R. Tovo, “On fatigue damage assessment in bimodal random processes,” *International Journal Of Fatigue*, vol. 29, pp. 232–244, FEB 2007.
- [26] Z. Gao and T. Moan, “Frequency-domain fatigue analysis of wide-band stationary Gaussian processes using a trimodal spectral formulation,” *International Journal of Fatigue*, vol. 30, pp. 1944–1955, OCT-NOV 2008.
- [27] A. Halfpenny, “A frequency domain approach for fatigue life estimation from finite element analysis,” vol. 167-1, pp. 401–410, 1999. 3rd International Conference on Damage Assessment of Structures (DAMAS 99), DUBLIN, IRELAND, JUN 28-30, 1999.
- [28] B. Colin, “Approche stochastique de la fatigue vibratoire : comparaison entre les méthodes peak-valley et rainflow counting,” in *SF2M*, 2011.



# Chapitre 5

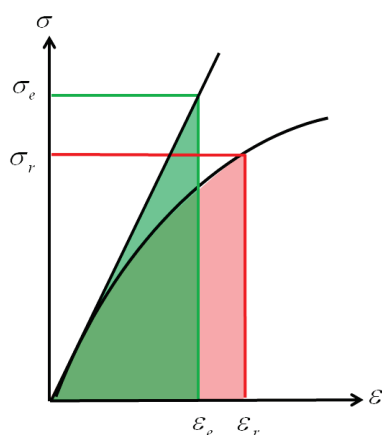
## Introduction à la plasticité et aux méthodes de correction de type Neuber

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Plasticité et modèles associés</b>	<b>74</b>
5.1.1	Seuil, écrouissage et écoulement plastique	74
5.1.2	Modélisation des relations de comportement	75
<b>5.2</b>	<b>Méthodes de correction en plasticité</b>	<b>75</b>
5.2.1	Méthode de Neuber	76
5.2.2	Méthode de Molski-Glinka	76
5.2.3	Méthode de correction dans le cas d'un état de contrainte multiaxial	77
	<b>Bibliographie du chapitre 5</b>	<b>79</b>

---



### Résumé

---

Nous introduisons ici, le phénomène de plasticité, les différents type de cas de chargement pour la plasticité ainsi que les méthodes de correction de l'état de contrainte en fond d'entaille à partir d'un calcul avec un comportement linéaire. Ces méthodes constituent la base de travail pour modifier les méthodes spectrales.

---

Les phénomènes de plasticité ont été observés dans les premiers temps sur des essais de traction simple puis ensuite sur des essais avec des sollicitations complexes. Le phénomène est caractérisé par l'apparition de déformation irréversible quand un niveau de contrainte est atteint.

Il y a donc un seuil de plasticité dans l'espace des contraintes où peuvent se manifester des phénomènes particuliers comme l'écoulement plastique ou l'écrouissage. Ceux-ci ont fait l'objet de nombreuses études aux cours du temps qui donnent lieu à des lois couplées d'écoulement plastique et d'écrouissage.

Le domaine de plasticité, aussi appelé domaine de ductilité, est limité par l'apparition de ruptures locales. Certains matériaux ne possèdent pas de domaine de ductilité et passent directement du domaine élastique à la rupture. Par exemple, cela est le cas pour les bétons. Le domaine de ductilité est surtout observé sur les matériaux cristallins grâce au mouvement de dislocations à l'intérieur des grains.

## 5.1 Plasticité et modèles associés

Il existe de nombreux modèles et représentations des phénomènes de plasticité selon les cas de chargement : monotone, cyclique, uniaxial ou encore multiaxial. Dans notre cas, nous aborderons seulement les éléments nécessaires pour les modélisations réalisées dans les chapitres suivants. Néanmoins, pour plus d'information, les ouvrages [1] [2] reprennent l'ensemble des lois et équations du domaine de plasticité.

### 5.1.1 Seuil, écrouissage et écoulement plastique

Le seuil au-delà duquel des déformations permanentes apparaissent est communément appelé limite d'élasticité. Elle est notée  $Re$  et elle est conventionnelle. Le principal problème est que sa valeur est dépendante de cette convention. Les effets élastique et plastique sont souvent découplés. Cela donne lieu à l'équation

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (5.1)$$

Où  $\varepsilon_e$  peut être déterminée par la loi de Hooke et  $\varepsilon_p$  est fonction de la contrainte et de l'historique du chargement. Cette fonction est l'écrouissage dû à l'écoulement plastique.

$$\begin{cases} \varepsilon_p = g(\sigma) & \text{si } |\sigma| > Re \\ \varepsilon_p = 0 & \text{si } |\sigma| < Re \end{cases} \quad (5.2)$$

$g(\sigma)$  peut-être définie par plusieurs modèles, dont l'équation de Ramberg-Osgood [1].

$$\varepsilon_p = g(\sigma) = \left\langle \frac{|\sigma| - Re}{k'} \right\rangle^{1/n'} \quad (5.3)$$

Où  $n'$  est l'exposant d'écrouissage et  $k'$  est la résistance plastique.  $\langle \rangle$  définit la fonction comme suit :

$$\begin{cases} \langle x \rangle = x & \text{si } x > 0 \\ \langle x \rangle = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

### 5.1.2 Modélisation des relations de comportement

#### Cas d'un chargement monotone

Dans le cas d'un solide plastique écrouissable, il est possible de définir un modèle de comportement unidimensionnel complet en chargement monotone. Ce modèle, extrait de [1], est défini en équation 5.5.

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_e + \varepsilon_p \\ \varepsilon_e &= \frac{\sigma}{\mathbf{E}} \\ \varepsilon_p &= \left(\frac{\sigma}{k'_0}\right)^{1/n'_0}\end{aligned}\tag{5.5}$$

Où  $n'_0$  est l'exposant d'écrouissage et  $k'_0$  est la résistance plastique. Négliger la limite d'élasticité  $R_e$  dans le modèle est une hypothèse souvent utilisée.

#### Cas de chargement cyclique

Dans le cas de chargement cyclique, il est intéressant de relier l'étendue de déformation avec l'étendue de contrainte pour un cycle stabilisé. Le modèle défini dans l'équation 5.6 est donné pour des cycles symétriques par rapport à l'origine (règle de Masing).

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\varepsilon}{2} &= \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} \\ \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} &= \frac{\Delta\sigma}{2\mathbf{E}} \\ \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} &= \left(\frac{\Delta\sigma}{2k'}\right)^{1/n'}\end{aligned}\tag{5.6}$$

Où  $n'$  est l'exposant d'écrouissage et  $k'$  est la résistance plastique. De même que pour le modèle précédent, on peut négliger la limite d'élasticité dans l'équation de Ramberg-Osgood.

## 5.2 Méthodes de correction en plasticité

Ces méthodes permettent d'approcher l'état réel de contrainte et de déformation dans une zone de plasticité confinée (exemple : en fond d'entaille) à partir d'un calcul de contrainte et de déformation réalisé avec une loi linéaire. Ces méthodes sont dites méthodes de calcul accéléré comme la méthode de Zarka pour le calcul des cycles stabilisés. L'hypothèse principale pour leur application est de se situer dans une zone de plasticité confinée. De plus, celles-ci sont appliquées à des variables locales en un point de la structure, le point critique de la pièce où l'on prévoit l'amorce de fissure.



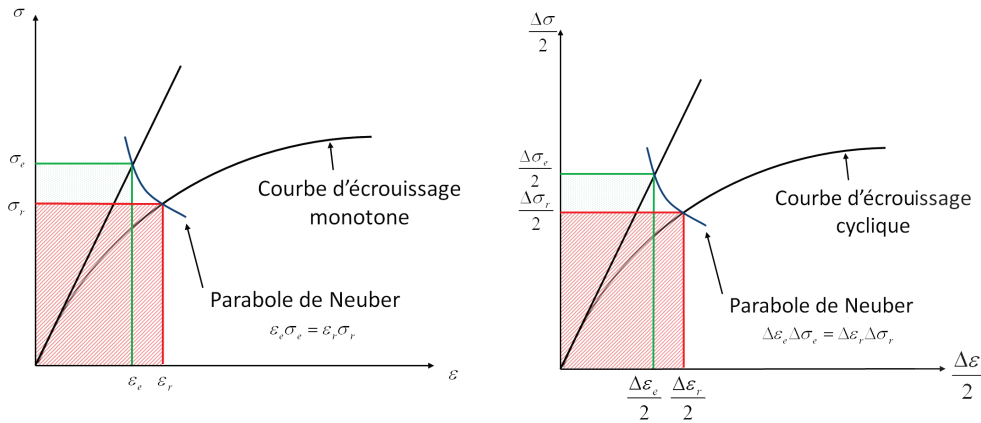
### 5.2.1 Methode de Neuber

Neuber [3], en 1961, énonce qu'il est possible d'approcher l'état réel de contrainte et de déformation en fond d'entaille à partir d'un calcul élastique. Il introduit les variables locales  $\sigma_e$  et  $\varepsilon_e$ , la contrainte et la déformation respectivement, en fond d'entaille obtenues par simple calcul élastique. Pour le calcul de la contrainte  $\sigma_r$  et de la déformation  $\varepsilon_r$  réelle, Neuber postule que le produit de la contrainte par la déformation dans une zone de plasticité confinée ne dépend pas de l'écoulement plastique. Cette règle est définie par l'équation 5.7.

$$\sigma_e \varepsilon_e = \sigma_r \varepsilon_r \quad (5.7)$$

La méthode de Neuber est illustrée figure 5.1(a). Elle est représentée dans l'espace  $\sigma - \varepsilon$  où l'aire formée par  $\sigma_e$  et  $\varepsilon_e$  est égale à l'aire définie par  $\sigma_r$  et  $\varepsilon_r$ .

La méthode peut être aussi appliquée dans le cas de chargement cyclique, comme illustré figure 5.1(b). L'approche consiste à appliquer la règle à la demi-amplitude des étendues. Cette approche ne prend pas en compte la contrainte moyenne, d'autres auteurs [1][4] ont proposé des méthodes prenant en compte le chargement d'origine.



(a) Avec un chargement monotone

(b) Avec un chargement cyclique

FIGURE 5.1 – Application de la règle de Neuber à deux type de chargement

En combinant, la règle de Neuber avec la loi de Ramberg-Osgood, on peut exprimer l'équation 5.7 à partir exclusivement des contraintes comme dans l'équation 5.8.

$$\sigma_e^2 = \sigma_r^2 + \mathbf{E} \sigma_r \left( \frac{\sigma_r}{k'} \right)^{1/n'} \quad (5.8)$$

### 5.2.2 Methode de Molski-Glinka

Sur le même principe que Neuber, Molski et Glinka [5] [6] postulent que ce sont les aires sous les courbes qui sont égales entre-elles, soit entre le chargement élastique et le chargement élasto-plastique. Cela est défini en équation 5.9.

$$\frac{1}{2} \sigma_e \varepsilon_e = \int_0^{\varepsilon_r} \sigma_r(\varepsilon) d\varepsilon \quad (5.9)$$

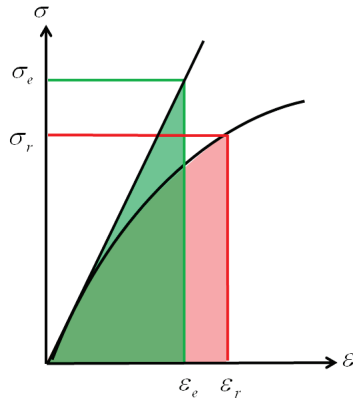


FIGURE 5.2 – Application de la règle de Molski-Glinka

De même que pour Neuber, en combinant la formulation de Molski-Glinka à la loi de Ramberg-Osgood et en dérivant l'équation, on obtient l'équation 5.10.

$$\sigma_e^2 = \sigma_r^2 + 2\mathbf{E} \frac{\sigma_r}{n' + 1} \left(\frac{\sigma_r}{k'}\right)^{1/n'} \quad (5.10)$$

Dans [7], Glinka ajoute un facteur correctif qui prend en compte l'augmentation de la taille de la zone plastique.

### 5.2.3 Méthode de correction dans le cas d'un état de contrainte multiaxial

Dans le cas d'un état de contrainte multiaxial, Ellyin et Kujawski [8] généralisent les travaux de Neuber. Ils proposent l'équation 5.11

$$\underline{\sigma}_e \otimes \underline{\varepsilon}_e = \underline{\sigma}_r \otimes \underline{\varepsilon}_r \quad (5.11)$$

Où  $\otimes$  est le produit contracté une fois des tenseurs d'ordre 2.  $\underline{\sigma}_e$  et  $\underline{\varepsilon}_e$  les tenseurs des contraintes et des déformations obtenus par calcul élastique.  $\underline{\sigma}_r$  et  $\underline{\varepsilon}_r$  les tenseurs des contraintes et des déformations réelles.

Dans [9] [10] [11], la règle de Neuber appliquée à un état de contrainte surestime la contrainte et la déformation réelle en fond d'entaille. Au contraire, la méthode de Molski-Glinka appliquée à un état de contrainte va sous-estimer l'état de contrainte réelle.

Les auteurs Moftakhar et Singh [12][13], proposent d'encadrer la solution élasto-plastique exacte en définissant deux bornes. La première est donnée par la règle de Neuber généralisée à un état multiaxial où on va surestimer la solution et la deuxième par la règle énoncée par Molski et Glinka qu'ils généralisent à un état multiaxial et qui va sous-estimer la solution.

Buczynski et Glinka en 2003 [14], proposent une nouvelle méthode dans le cas d'un état de contrainte multiaxial. Ils appliquent la règle de Neuber, non plus sur les tenseurs des contraintes

et déformations mais sur les tenseurs du déviateur des contraintes et du déviateur des déformations.

## Conclusion

les méthodes du type Neuber représentent des approximations avantageuses en terme de temps de calcul. Les calculs éléments finis peuvent être réalisés avec un comportement élastique, puis les données locales élastiques sont "corrigées" pour accéder aux grandeurs locales élastoplastiques. Le facteur sur le gain de temps est largement supérieur à 2. Ces méthodes seront utilisées par la suite pour intégrer le phénomène plastique au sein des méthodes spectrales.

## Bibliographie du chapitre 5

- [1] J. Lemaitre and J. L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1996.
- [2] A. François, D. Pineau and A. Zaoui, *Comportement mécanique des matériaux*. Hermes, 1991.
- [3] H. Neuber, “Theory of stress concentration for shear-strained prismatic bodies with arbitrary nonlinear stress- strain law.,” *Journal Appl. Mech*, vol. 28, pp. 544–551, 1961.
- [4] M. Chaudonneret and J. Culié, “Adaptation of neuber’s théorie to stress concentration in viscoplasticity,” *La recherche Aérospatiale*, vol. 4, pp. 33–40, 1985.
- [5] K. Molski and G. Glinka, “A method of elastic - plastic stress and strain calculation at a notch root,” *Materials Science And Engineering*, vol. 50, no. 1, pp. 93–100, 1981.
- [6] G. Glinka, “Energy density approach to calculation of inelastic strain stress near notches and cracks,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 22, no. 3, pp. 485–508, 1985.
- [7] G. Glinka, “Calculation of inelastic notch-tip strain stress histories under cyclic loading,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 22, no. 5, pp. 839–854, 1985.
- [8] F. Ellyin and D. Kujawski, “Generalization of notch analysis and its extension to cyclic loading,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 32, no. 5, pp. 819–826, 1989.
- [9] W. Sharpe, “ASME 1993 nadai-lecture - elastoplastic stress and strain concentrations,” *Journal of engineering materials and technology-transactions of the ASME*, vol. 117, pp. 1–7, JAN 1995.
- [10] W. Sharpe and K. Wang, “Evaluation of a modified monotonic Neuber relation,” *Journal of engineering materials and technology-transactions of the ASME*, vol. 113, pp. 1–8, JAN 1991.
- [11] K. Wang and W. Sharpe, “Evaluation of a modified cyclic Neuber relation,” *Journal of engineering materials and technology-transactions of the ASME*, vol. 113, pp. 350–353, JUL 1991.
- [12] A. Moftakhar, A. Buczynski, and G. Glinka, “Calculation of elastoplastic strains and stresses in notches under multiaxial loading,” *International Journal of Fracture*, vol. 70, no. 4, pp. 357–373, 1995.
- [13] M. Singh, G. Glinka, and R. Dubey, “Elastic-plastic stress-strain calculation in notched bodies subjected to non-proportional loading,” *International journal of fracture*, vol. 76, no. 1, pp. 39–60, 1996.
- [14] A. Buczynski and G. Glinka, “An analysis of elasto-plastic strains and stresses in notched bodies subjected to cyclic non-proportional loading paths,” in *6th International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture*, vol. 31, pp. 265–283, 2003. Lisbon, Portugal, JUN 25-28, 2001.



# Chapitre 6

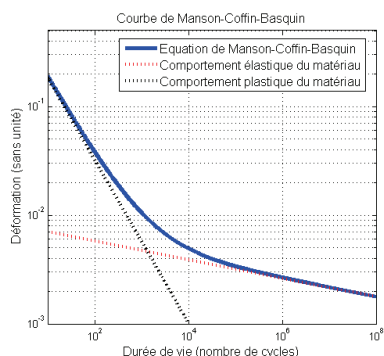
## Fatigue uniaxiale à grand et faible nombre de cycles dans le domaine spectral : prise en compte de la plasticité

### Sommaire

---

<b>6.1 Méthodes de la littérature</b> . . . . .	<b>83</b>
6.1.1 Définition générale d'une transformation et application aux méthodes spectrales . . . . .	83
6.1.2 Transformations associées . . . . .	84
<b>6.2 Proposition d'une nouvelle méthode</b> . . . . .	<b>87</b>
6.2.1 Prise en compte de la plasticité dans la loi de Fatigue . . . . .	88
6.2.2 Correction des déformations dans le domaine spectral avec la méthode de Neuber . . . . .	89
<b>6.3 Validation Numérique</b> . . . . .	<b>91</b>
6.3.1 Simulation à partir de DSP . . . . .	91
<b>Bibliographie du chapitre 6</b> . . . . .	<b>104</b>

---



### Résumé

---

Ce chapitre présente les méthodes de calcul en fatigue dans le cas des processus non-gaussiens. Dans le cas de l'élasto-plasticité, nous sommes amenés à modifier le processus de calcul des méthodes spectrales. Ces modifications sont l'apport de la loi de Neuber et de la loi de Manson-Coffin-Basquin.

---

## Introduction

Nous avons vu au cours des chapitres précédents qu'il était possible de réaliser un dimensionnement en fatigue d'une structure vis-à-vis d'un processus stochastique. Les méthodes les plus rapides sont les méthodes spectrales qui donnent directement le dommage moyen pour un processus stochastique donné. Mais l'utilisation des méthodes spectrales n'est possible que sous de nombreuses hypothèses qui sont représentées figure 6.1.

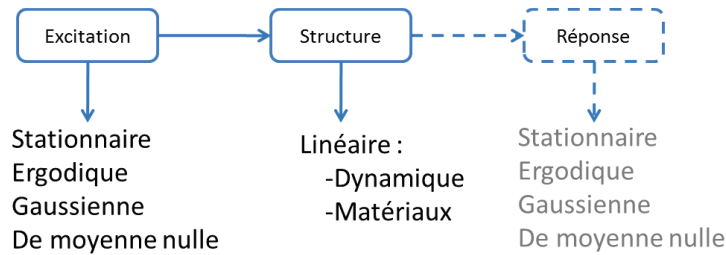


FIGURE 6.1 – Hypothèses nécessaires pour l'application des méthodes spectrales

Afin de pouvoir utiliser les résultats démontrés par Rice [1] dans le cas de vibrations aléatoires, il faut que la réponse de la structure soit un processus stochastique stationnaire, ergodique, gaussien et de moyenne nulle. Pour que la réponse ait ces propriétés, l'excitation a ces propriétés et la structure doit avoir un comportement linéaire tant d'un point de vue de la dynamique que du matériau. Cela garantit en sortie de calcul éléments finis, en général, que la réponse a les propriétés demandées. De plus, les lois de fatigue généralement utilisées ont un domaine de validité limité au domaine polycyclique, soit entre  $10^4$  et  $10^{10}$  cycles.

Il n'est pas rare de constater expérimentalement que la réponse d'un système à un processus stochastique est souvent non-gaussienne. Ce constat est réalisé par de nombreux chercheurs et concerne de nombreuses applications industrielles [2] [3] [4]. Les causes d'une réponse structurale non-gaussienne peuvent être de deux origines. La première est que l'excitation elle-même n'est pas gaussienne. Il faut garder à l'esprit qu'il est rare dans la nature d'avoir des processus stochastiques stationnaires ergodiques gaussiens et de moyenne nulle, cette modélisation mathématique est une idéalisation des processus stochastiques réels. Néanmoins des auteurs [5] [6] ont cherché à mettre en place des méthodes de calcul à partir de processus stochastiques plus complexes. La deuxième origine à une réponse non-gaussienne est due à des non-linéarités de la structure étudiée. Ces non-linéarités peuvent être de plusieurs types et de sources diverses. Dans notre cas, nous nous limiterons aux non-linéarités dues à un comportement élasto-plastique. La figure 6.2 représente le cadre de travail que l'on se propose d'adopter. Dans ce cas, l'excitation est un processus stochastique stationnaire ergodique gaussien de moyenne nulle. En ce qui concerne la structure, on considère qu'elle a une non-linéarité due à un comportement élasto-plastique. Cela implique que la réponse de la structure est un processus stationnaire ergodique non-gaussien.

Dans la littérature, on trouve des méthodes pour le calcul en fatigue de processus stochastiques stationnaires, ergodiques et non-gaussiens. Elles font l'objet d'une étude dans ce chapitre. Ces méthodes sont basées sur une transformation réversible du processus non-gaussien en processus gaussien. Elles utilisent comme principaux paramètres le kurtosis et le skewness. Elles peuvent utiliser ces paramètres car la donnée d'entrée n'est pas une DSP mais une réalisation

temporelle du processus stochastique. Le principal avantage de ces méthodes est qu'elles permettent l'étude de tous les processus stochastiques non-gaussiens.

Dans ce chapitre, nous mettons en avant les limitations des méthodes précédemment mentionnées. Par la suite, nous mettrons en place une méthode de calcul en fatigue palliant à ces défauts mais qui se limite uniquement à la non-linéarité matériau, due à un comportement élasto-plastique.

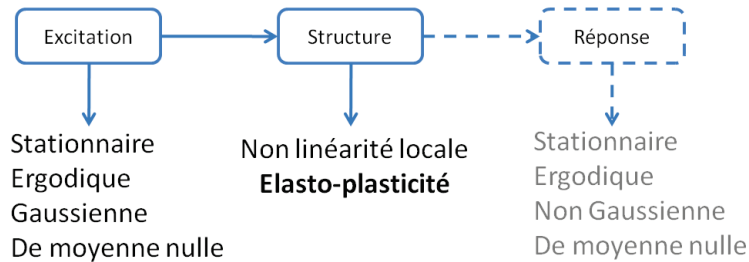


FIGURE 6.2 – Hypothèses nécessaires pour le bon fonctionnement des méthodes spectrale

## 6.1 Méthodes de la littérature

### 6.1.1 Définition générale d'une transformation et application aux méthodes spectrales

On entend par le terme transformation, une fonction inversible qui permet de passer d'une variable non-gaussienne  $Z$  à une variable gaussienne  $X$ . Cette fonction est notée  $G(\cdot)$ .

$$Z(t) = G(X(t)) \tag{6.1}$$

Par conséquent, on définit une fonction  $g(\cdot) = G^{-1}(\cdot)$  qui permet de passer de  $X$  à  $Z$ . On a  $X(t)=g(Z(t))$ .

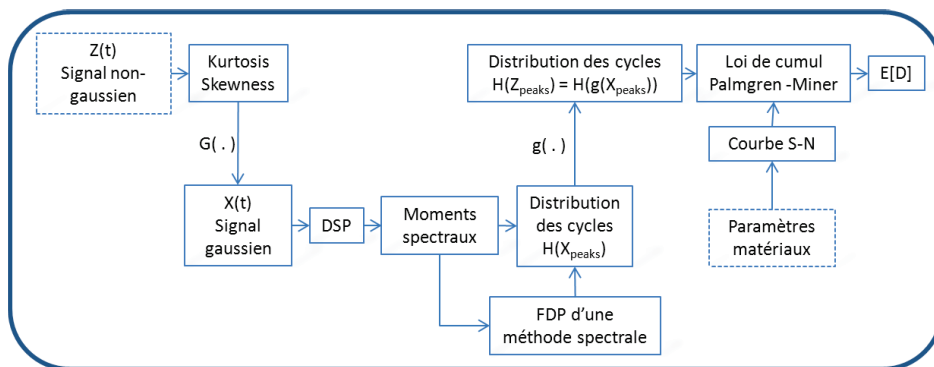


FIGURE 6.3 – Processus de calcul combinant les méthodes spectrales aux transformations

L'application d'une telle transformation dans le processus des méthodes spectrales est donnée en figure 6.3. On utilise la transformation  $G(\cdot)$  pour rendre le processus gaussien. A partir du signal  $X(t)$ , on calcule une DSP qui remplit entièrement les hypothèses nécessaires aux calculs des moments spectraux et à l'utilisation des fonctions de densité de probabilité (FDP). Cela permet d'obtenir la distribution des cycles qui est ensuite utilisée afin d'obtenir la distribution



des cycles associés au processus défini par  $Z(t)$ . Par la suite, un simple cumul de dommage permet d'avoir le dommage moyen associé à  $Z(t)$ . Benasciutti dans [7](chapitre 8) et [8], montre l'application de cette chaîne de calcul à un cas réel.

Le problème n'est pas l'application de la transformation dans le processus des méthodes spectrales mais les données d'entrée nécessaires pour réaliser le calcul de dommage. Car une non-linéarité avec un phénomène d'hystérésis n'a pas le même impact sur les différentes grandeurs physiques telles que l'accélération, la vitesse ou le déplacement [9]. Dans le cas d'un système à un degré de liberté avec un modèle de Dhal [9] qui peut représenter un comportement élasto-plastique, on s'aperçoit dans l'espace vitesse-déplacement que le modèle ne modifie pas de la même façon les propriétés stochastiques de ces grandeurs. Cela implique que si on utilise le processus décrit figure 6.3, le dommage moyen est fonction de la grandeur physique sélectionné au début du calcul. Dans ce cas, le signal  $Z(t)$  doit être obligatoirement la représentation temporelle de la contrainte afin d'avoir le bon impact sur la transformation. Dans le cas d'un comportement élasto-plastique, l'obtention d'un historique de la contrainte est expérimentalement difficile (plus de relation simple entre déformations et contraintes) et très long numériquement (Calcul temporel pas à pas (Runge-Kutta / Newton-Raphson) avec le comportement non-linéaire). Au final, le problème d'avoir une méthode de calcul rapide n'est pas résolu car le problème est reporté en amont du calcul de dommage, dans le calcul de la réponse temporelle. De plus, dans la littérature, la transformation est associée à une loi de fatigue qui ne prend pas en compte le comportement élasto-plastique.

### 6.1.2 Transformations associées

On présente dans ce chapitre les quatre transformations les plus utilisées dans le domaine de la fatigue.

#### Modèle de Sarkani

Ce modèle [10] définit une transformation construite à partir d'une fonction d'une loi de puissance. La transformation  $G(\cdot)$  est donnée en équation 6.2.

$$Z = G(X) = \frac{X + \iota \operatorname{sgn}(X)|X|^n}{L} \quad (6.2)$$

Où  $\operatorname{sgn}$  est la fonction signe ( $\operatorname{sgn}(X) = 1$  quand  $X > 0$  et  $\operatorname{sgn}(X) = -1$  quand  $X < 0$ ) et  $L$  est un paramètre qui normalise la fonction tel que la variance des deux processus  $X(t)$  et  $Z(t)$  soit la même ( $\operatorname{Var}_Z = \operatorname{Var}_X$ ).  $L$  est donnée en équation 6.3.

$$L = \sqrt{1 + \iota \frac{2^{(n+1)/2} n \Gamma(\frac{n}{2}) \operatorname{Var}_x^{(n-1)/2}}{\sqrt{\pi}} + \iota^2 \frac{2^{2n} \Gamma(n + \frac{1}{2}) \operatorname{Var}_x^{(n-1)}}{\sqrt{\pi}}} \quad (6.3)$$

Avec  $\Gamma$  qui représente la fonction Gamma.  $n$  et  $\iota$  sont déterminés à partir du kurtosis du processus  $Z(t)$ .

$$\begin{cases} K = \frac{E[Z^4]}{Var_Z^2} = \frac{1}{L^4 Var_X^2} (E[X^4] + 4\iota E[|X|^{n+3}] + 6\iota^2 E[X^{2n+2}] + 4\iota^3 E[|X|^{3n+1}] + \iota^4 E[X^{4n}]) \\ E[|X|^n] = \frac{(2 Var_X)^{n/2}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n+1}{2})} \end{cases} \quad (6.4)$$

Cette méthode est mise en application dans [7](chapitre 7). On y voit la relation entre le terme  $n$  et  $\iota$ .

### Modèle de Ochi et Ahn

Dans [11] [12], la transformation est choisie pour être une fonction exponentielle monotone croissante. La transformation est ajustée sur les trois premiers moments du processus  $Z(t)$ , soit respectivement, la moyenne, la variance et le skewness.

La transformation  $g(\cdot)$  ou  $G^{-1}(\cdot)$  est définie en équation 6.5.

$$X = g(Z) = \frac{1}{\zeta a} (1 - e^{-\zeta a Z}) \quad (6.5)$$

Où  $X$  est la variable gaussienne avec  $m_X$  et  $Var_X$  respectivement la moyenne et la variance de  $X(t)$  et  $Z$  la variable gaussienne avec  $m_Z$ ,  $Var_Z$  et  $S$  respectivement la moyenne, la variance et le skewness de  $Z(t)$ . Le paramètre  $a$  caractérise l'intensité de la non-linéarité. Le paramètre  $\zeta$  est une constante, elle est donnée en équation 6.6.

$$\zeta = \begin{cases} 1.28 & \text{si } Z \geq 0 \\ 3 & \text{si } Z < 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

Pour déterminer le paramètre  $a$ , il faut résoudre le système non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} a(m_X^2 + Var_X^2) + m_X = \kappa_1 \\ Var_X^2 + 2a Var_X^4 = \kappa_2 \\ 2a Var_X^4 (3 - 8a^2 Var_X^2) = \kappa_3 \end{cases} \quad (6.7)$$

Où  $\kappa_n$  représente les cumulants de la variable  $Z$  :

$$\begin{cases} \kappa_1 = 0 \\ \kappa_2 = Var_Z \\ \kappa_3 = Var_Z^{3/2} S \end{cases} \quad (6.8)$$

Afin de déterminer la transformation  $G(\cdot)$ , il faut chercher la solution de l'équation 6.7. Il faut trouver  $Z$  en fonction de  $X$ .

### Modèle de Hermite

Ce modèle est basé sur la recherche des approximations polynomiales de Hermite pour définir la transformation  $G(\cdot)$  et son inverse  $g(\cdot)$ . Il est calculé à partir des moments du processus non-gaussien.

Le kurtosis et le skewness permettent de décrire le comportement non-gaussien du processus.

Les modèles sont distingués selon que la distribution  $Z(t)$  est leptokurtique ( $K > 3$ ) ou platiokurtique ( $K < 3$ ). Il est présenté ici, seulement la formulation pour le cas de distributions leptokurtiques. Winterstein définit en 1985 [13] la transformation  $G(\cdot)$  comme étant :

$$Z = m_Z + \sqrt{Var_Z} q [X_0 + \tilde{h}_3((X_0^2 - 1) + \tilde{h}_4((X_0^3 - 3X_0))] \quad (6.9)$$

Dans l'équation 6.9,  $X_0$  est le processus gaussien normalisé ( $X_0 = (X - m_X)/\sqrt{Var_X}$ ).  $\tilde{h}_3$  et  $\tilde{h}_4$  représentent les moments de Hermite qui sont définis à partir du kurtosis et du skewness de  $Z(t)$ .  $q$  est un facteur d'échelle qui assure la même variance au processus  $Z(t)$  et  $X(t)$ .  $S$ ,  $K$ ,  $m_Z$ ,  $Var_Z$  représentent respectivement le skewness, le kurtosis, la moyenne et la variance du processus  $Z(t)$ .

Dans la première version du modèle (modèle au premier ordre), Winterstein définit ces paramètres comme étant :

$$\tilde{h}_n = h_n, \quad h_3 = \frac{S}{6}, \quad h_4 = \frac{(K - 3)}{24}, \quad q = 1 \quad (6.10)$$

Suite à plusieurs études [14], Winterstein introduit des paramètres au second ordre dans le modèle de Hermite. Les coefficients sont définis dans l'équation 6.11. Dans [15], Winterstein donne des coefficients pour des ordres plus élevés.

$$\tilde{h}_4 = \frac{\sqrt{1 + 1.15(K - 3)} - 1}{18}, \quad \tilde{h}_3 = \frac{S}{6(1 + 6\tilde{h}_4)}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tilde{h}_3^2 + 6\tilde{h}_4}} \quad (6.11)$$

Afin de déterminer la transformation  $g(\cdot)$  dans le cas d'une distribution leptokurtique, il faut chercher la solution de l'équation 6.9. Il faut trouver  $X_0$  en fonction de  $Z$ . Cela est donné en équation 6.12.

$$X_0 = [\sqrt{\xi^2(Z) + \eta_3 + \xi(Z)}]^{1/3} - [\sqrt{\xi^2(Z) + \eta_3 - \xi(Z)}]^{1/3} - \eta_1 \quad (6.12)$$

Où

$$\begin{aligned} \xi(Z) &= 1.5\eta_2\left(\eta_1 + \frac{Z - m_Z}{\sqrt{Var_Z}}\right) - \eta_1^3 \\ \eta_1 &= \frac{h_3}{3h_4}, \quad \eta_2 = \frac{1}{3h_4}, \quad \eta_3 = (\eta_2 - 1 - \eta_1^2)^3 \end{aligned} \quad (6.13)$$

### Modèle de Rychlik [16]

La définition de la transformation suppose que le processus gaussien soit normalisé. Rychlik utilise le nombre moyen de franchissements par zero à pente positive, noté  $\nu_X^+(X)$  et défini en chapitre 2. Dans le cas d'un processus non-gaussien  $Z(t)$ ,  $\nu_Z^+(Z)$  est obtenu par l'équation 6.14.

$$\nu_Z^+(Z) = \nu_X^+(g(X)) = \exp\left(-\frac{g(X)^2}{2}\right) \quad (6.14)$$

Où  $g(\cdot)$  est la transformation inverse de  $G(\cdot)$ . A noter que  $\nu_Z^+(Z)$  ne possède qu'un maximum local  $Z_0 = G(0)$ . La fonction  $g(\cdot)$  est définie dans l'équation 6.15.

$$X = g(Z) = \begin{cases} \sqrt{-2 \ln((1/2\pi)\nu_Z^+(Z))} & \text{si } Z \geq Z_0 \\ -\sqrt{-2 \ln((1/2\pi)\nu_Z^+(Z))} & \text{si } Z < Z_0 \end{cases} \quad (6.15)$$

Si on pouvait connaître  $\nu_Z^+(Z)$ , on pourrait déterminer la fonction  $g(\cdot)$  mais  $\nu_Z^+(Z)$  est analytiquement non déterminable; toutefois on peut l'estimer empiriquement à partir de  $Z(t)$ . La démarche est illustrée dans [17].

### Application des modèles

La figure 6.4 est l'illustration des quatre méthodes précédentes dans le cas d'un signal non-gaussien avec un distribution leptokurtique où le kurtosis est de 5 et le skewness est de 0.5. Dans ce cas, le signal non-gaussien a  $m_Z = 0$  et  $Var_Z = 1$ . Les transformations ont les mêmes tendances pour les valeurs positives de la distribution. A Contrario, pour les valeurs négatives de la distribution, on s'aperçoit de divergences qui sont dues à la définition des transformations pour les valeurs négatives. Cela dépend si la transformation est de puissance paire ou impaire.

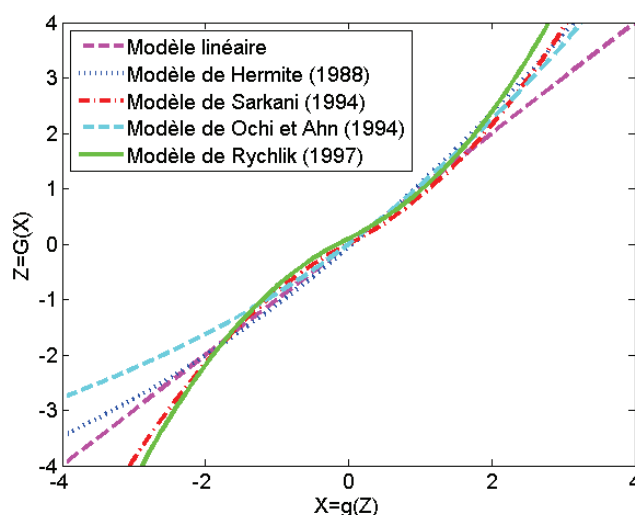


FIGURE 6.4 – Illustration des quatre transformations étudiées pour le cas où  $Z(t)$  a  $MOY_Z = 0$ ,  $Var_Z = 1$ ,  $S=0.5$  et  $K=5$

## 6.2 Proposition d'une nouvelle méthode

Comme nous avons pu le constater précédemment une non-linéarité due à un comportement élasto-plastique implique deux problèmes. Le premier est que le processus est non-gaussien et la théorie de Rice ne peut donc plus s'appliquer. Le deuxième est d'avoir une loi de fatigue au sein des méthodes spectrales qui prenne en compte le comportement élasto-plastique du matériau. Cela afin de disposer d'une méthode rapide et robuste comme le sont les méthodes spectrales actuelles. Ces deux problèmes peuvent-être résolus en utilisant comme loi de fatigue, la loi de Manson-Coffin-Basquin et comme élément de correction sur la distribution des cycles, la règle de Neuber associée à la formulation de Ramberg-Osgood pour la loi de comportement élasto-plastique.

### 6.2.1 Prise en compte de la plasticité dans la loi de Fatigue

On se propose d'utiliser comme loi de fatigue au sein des méthodes spectrales, la loi de Manson-Coffin-Basquin [18] [19]. Celle-ci a deux atouts, elle prend en compte le comportement élasto-plastique du matériau et elle permet de décrire le comportement du matériau à la fatigue du domaine oligocyclique au domaine polycyclique. La loi est régie par 4 paramètres :  $b$ ,  $c$ ,  $\sigma_f$  et  $\varepsilon_f$ . Elle est définie en équation 6.16.

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma_f}{\mathbf{E}}(2N)^b + \varepsilon_f(2N)^c \quad (6.16)$$

On définit  $f$  comme étant la fonction liant  $\varepsilon$  à  $N$  telle que  $\varepsilon = f(N)$ . Cette fonction est gouvernée par deux tendances, à faible nombre de cycles, c'est le comportement plastique qui prédomine, à grand nombre de cycles, c'est la déformation élastique qui est prépondérante. Cela est illustré en figure 6.5.

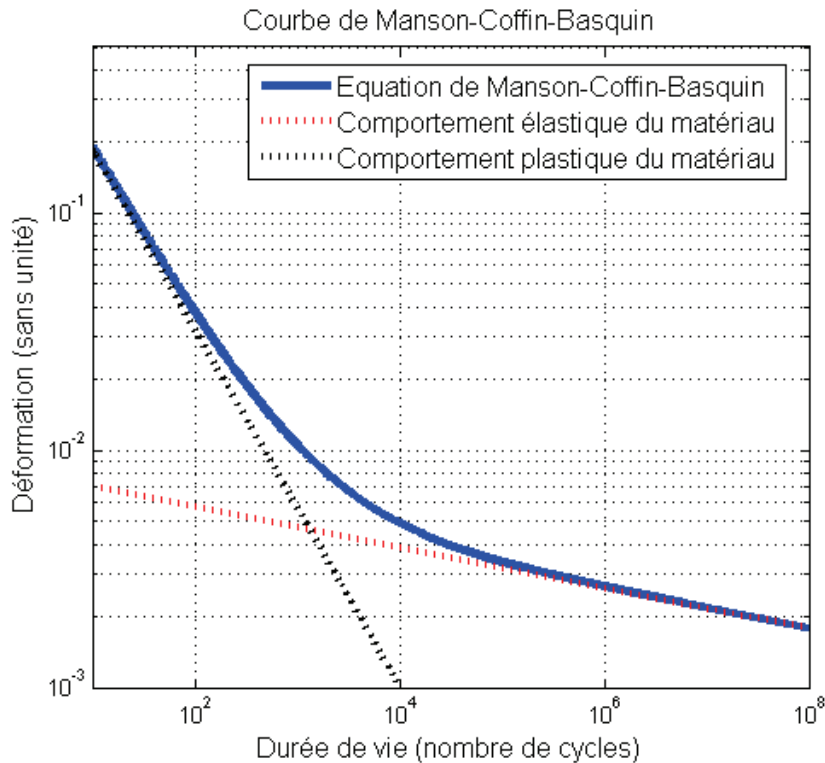


FIGURE 6.5 – Représentation de la loi de Manson-Coffin-Basquin avec l'influence de la déformation plastique et de la déformation élastique

Cette loi peut être facilement implémentée dans le processus des méthodes spectrales. Néanmoins, il faut avoir une distribution des cycles en fonction des déformations et non plus en fonction des contraintes. Dans le cas linéaire, on peut utiliser la loi de Hooke [20], en revanche dans le cas élasto-plastique, le postulat de Neuber permet d'avoir accès à cette grandeur.

### 6.2.2 Correction des déformations dans le domaine spectral avec la méthode de Neuber

Le principe est de garder un calcul de DSP de contrainte avec une formulation du comportement matériaux linéaire. Cela permet de calculer sans réserve les moments spectraux et les paramètres afférents au processus. La correction due au comportement non-linéaire du matériau n'est plus apportée en amont des méthodes spectrales, dans le calcul éléments finis, mais au sein même de ces méthodes. La correction est basée sur le principe de la règle de Neuber vue chapitre 5. Le postulat de Neuber appliqué à l'origine cette correction sur un historique temporel de la contrainte. Il est proposé dans le cas des méthodes spectrales d'appliquer le règle de Neuber sur la distribution des cycles de contrainte. Effectivement, dans le processus des méthodes spectrales, la distribution des cycles est la représentation de l'historique des contraintes. Le principe est illustré en figure 6.6.

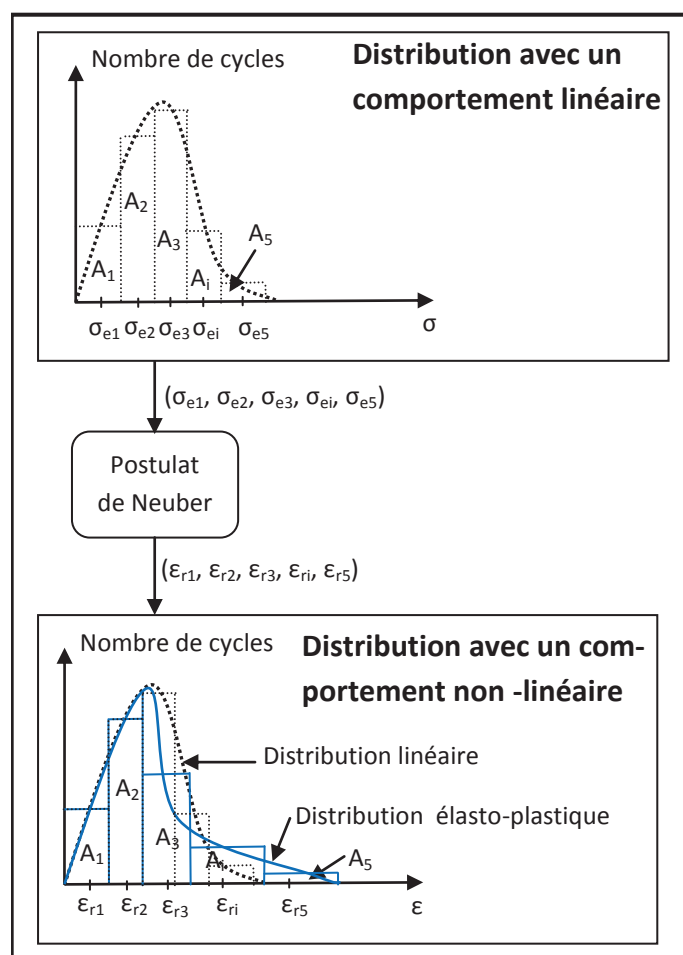


FIGURE 6.6 – Postulat de Neuber appliqué à une distribution de l'amplitude des cycles (principe)

Afin d'effectuer la correction, on discrétise la distribution des cycles en  $x$  classes de largeur  $dx$  et d'effectifs  $n$ ; ce qui est également utilisé dans les logiciels du commerce de post-traitement en fatigue, car ils représentent la distribution des cycles par un histogramme. Chaque classe à une valeur moyenne qui est utilisée pour faire la correction.

La correction est illustrée figure 6.7 et les équations utilisées sont données en équation 6.17. Pour cela, on associe le postulat de Neuber [21], la loi de Hooke et la loi de Ramberg-Osgood [22].

$$\varepsilon_{ri} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ri} \sigma_{ri} = \mathbf{E} \sigma_{ei} \sigma_{ei} \\ \varepsilon_{ri} = \frac{\sigma_{ri}}{\mathbf{E}} + \left( \frac{\sigma_{ri}}{k'} \right)^{1/n'} \end{array} \right. \quad (6.17)$$

La reconstruction de la distribution fait appel au postulat suivant, que nous proposons.

- L'aire de chaque classe  $A_i$  est la même avant et après correction.

Ce postulat est appelé H2 et fait l'objet d'une validation dans la suite du chapitre. La première conséquence est que le nombre de cycles pour une période  $T$  reste inchangé vis-à-vis d'une non-linéarité élasto-plastique. Cela implique que seule l'amplitude va être affectée par ce type de non-linéarité (hypothèse : adoucissement ou durcissement du matériau n'impacte pas la fréquence). La deuxième conséquence de ce postulat est due au fait que la largeur des classes n'est plus constant après correction, il faut donc ré-échantillonner l'effectif associé à chaque classe. Il est déterminé comme étant  $n_{ri} = n_{ei} \frac{d\varepsilon_i}{dr_i}$  avec  $dr_i = 0.5(\varepsilon_{e_{i+1}} + \varepsilon_{e_{i-1}})$  qui nous garantit que  $A_i$  est le même sur les deux distributions.

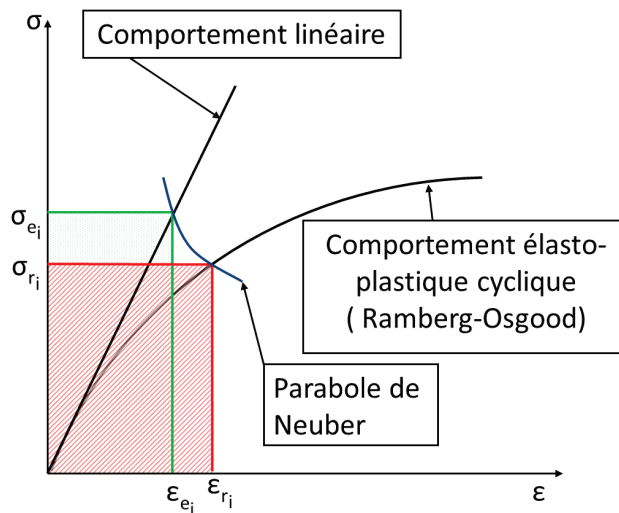


FIGURE 6.7 – Principe du postulat de Neuber pour l'amplitude d'une contrainte d'une classe  $i$

Ce principe permet d'avoir une méthode de calcul du dommage moyen en fatigue associé dans un processus stochastique pour le cas d'un comportement élasto-plastique. La méthode est rapide et le problème n'est pas reporté en amont ou en aval de la chaîne de calcul du dommage moyen. La donnée d'entrée est toujours une DSP de contrainte obtenue à partir d'un calcul de structure linéaire élastique. Les paramètres additionnels sont  $k'$ ,  $n'$  pour la loi de Ramberg-Osgood et  $b$ ,  $c$ ,  $\sigma_f$ ,  $\varepsilon_f$  pour la loi de Manson-coffin-basquin. La chaîne de calcul avec les modifications proposées est donnée en figure 6.8.

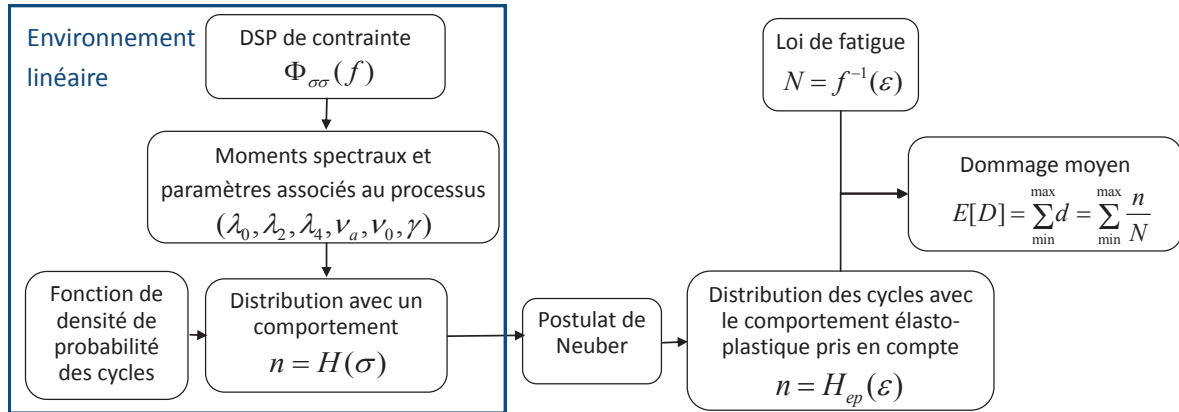


FIGURE 6.8 – Proposition d’un nouveau processus de calcul avec des méthodes spectrales

### 6.3 Validation Numérique

#### 6.3.1 Simulation à partir de DSP

Nous nous proposons de comparer la méthode précédente avec et sans l’hypothèse H2 par rapport à des simulations de Monte-Carlo ainsi que la transformation du modèle de Hermite. Dans le cas élasto-plastique, la distribution des cycles de contrainte est leptokurtique ; le modèle de Hermite nous donne une formulation dans ce cas facilement implementable. Nous disposons dans ce cas de la transformation directe et de son inverse.

#### Définition du plan d’expérience

Les principaux paramètres du plan d’expérience sont les DSP de contraintes ainsi que les propriétés du matériau. Les propriétés du matériau dans le cas présent sont celles de l’acier 30NiCrMo8. Il est également utilisé dans la suite de l’étude pour réaliser les essais. les principales propriétés de cet acier sont données dans la table 6.1. La table 6.2 donne les propriétés expérimentales en fatigue de l’acier 30NiCrMo8 ; elles sont données pour l’équation de Basquin et la loi de Manson-Coffin-Basquin. A l’origine, la pente k de la droite de Basquin est de 12.03. Elle a été réajustée sur le paramètre b (1/0.085) de la loi de Manson-Coffin-Basquin afin d’éviter les dispersions dues à des pentes de fatigue différentes. Le but de l’étude est de comparer les différentes méthodes vis-à-vis du phénomène élasto-plastique.

Module Young	Coefficient de Poisson	limite d’élasticité	limite à rupture	exposant d’écrouissage	coefficient de résistance plastique
195 GPa	0.33	945 MPa	1135 MPa	0.089	1410 MPa

TABLE 6.1 – Propriétés de l’acier 30NiCrMo8



Paramètres $\sigma$ -N		Paramètres $\varepsilon$ -N			
k	C	b	c	$\varepsilon_f$	$\sigma_f$ (MPa)
11.764	$3.659 \cdot 10^6$	-0.085	-0.752	1.741	1750.0

TABLE 6.2 – Propriétés de fatigue de l'acier 30NiCrMo8

Pour le choix des DSP de contrainte, on a sélectionné trois gabarit de DSP qu'il est courant de rencontrer dans l'industrie mécanique. Ces DSP sont décrites en Figure 6.9 et en Table 6.3.

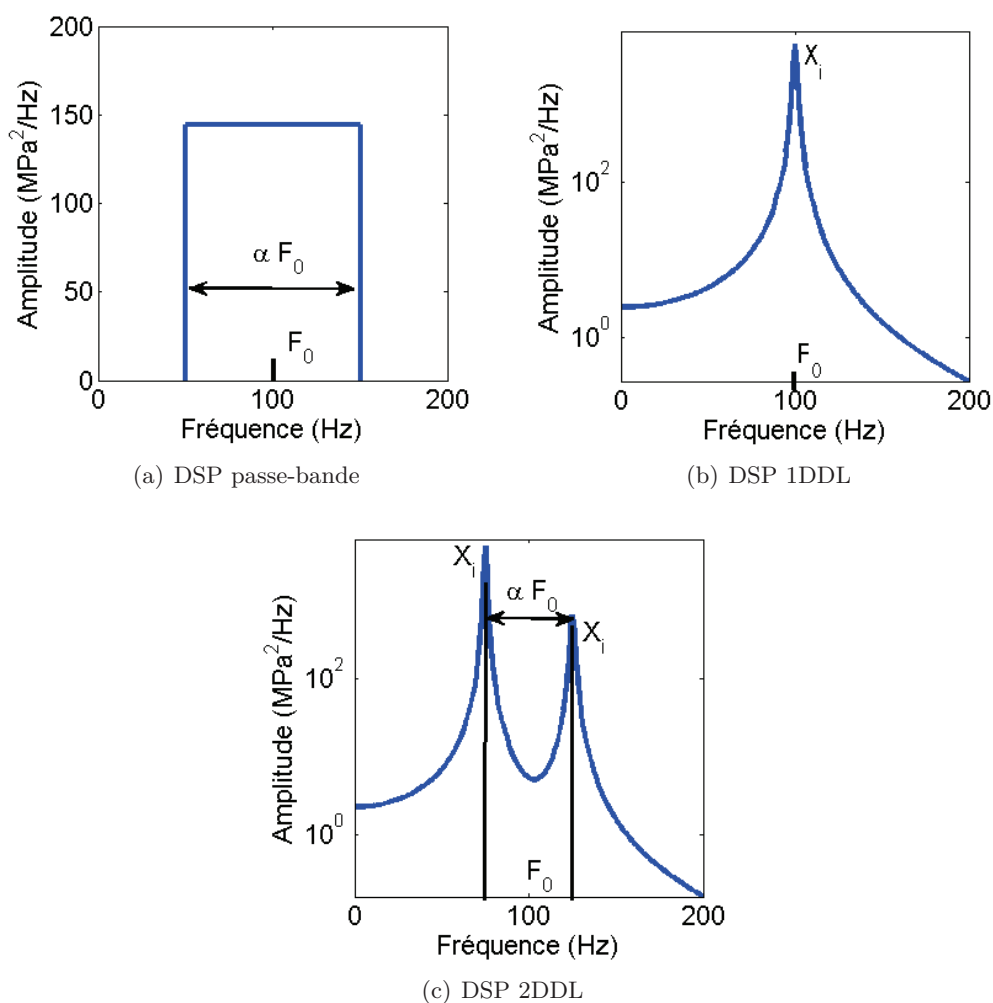


FIGURE 6.9 – Les différentes DSP choisies pour le plan d'expérience

Parmi les trois DSP sélectionnées, il y a la DSP d'une réponse d'un système à un degré de liberté (Figure 7.3(a)), La DSP d'une réponse d'un système à deux degrés de liberté (7.3(b)) et une DSP du type passe-bande (Figure 6.9(a)). Ces DSP sont définies par 3 paramètres. La Valeur RMS qui définit l'intensité de chaque DSP, en fonction de celle-ci, le phénomène élasto-plastique aura plus au moins d'impact sur l'estimation de la durée de vie. Le paramètre  $\alpha$  défini dans le cas de la DSP passe-bande, la largeur de la bande et dans le cas de la DSP 2DDL, la

distance entre les fréquences propres. Le paramètre  $X_i$  définit dans tous les cas l'amortissement du mode. Les valeurs des différents paramètres ont été choisies pour la valeur RMS en fonction des limites du matériau et pour les deux autres paramètres, en fonction de ce qu'il est commun de trouver pour un système mécanique et dans la littérature. Il y a au total 36 jeux de paramètres par type de DSP soit un total de 108 jeux de paramètres à tester.

PSD type	RMS	$\alpha$	$X_i$	nombre de jeux de paramètre
Passe-bande	120	0.05		36 jeux de paramètre
	140	0.20		
	180	0.60		
	200	1.00		
	220	1.40		
	240	1.80		
1 DDL	120		0.0010	36 jeux de paramètre
	140		0.0025	
	180		0.0050	
	200		0.0075	
	220		0.0100	
	240		0.0200	
2 DDL	120	0.05	0.0050	36 jeux de paramètre
	140	0.50	0.0100	
	180	1.00		
	200			
	220			
	240			

TABLE 6.3 – Définition des différents paramètres de l'ensemble des DSP ( Total du nombre de jeux de paramètres : 108)

### Présentation des chaines de calcul

Les simulations de Monte-Carlo sont dans notre cas, la méthode de référence car elle font appel à des méthodes temporelles de calcul en fatigue qui ont démontré leurs robustesse. Il est décrit en bleu sur la figure 6.10, la chaine de calcul pour les simulation de Monte-Carlo. La donnée d'entrée est la DSP des contraintes. A partir de cette DSP, il est généré un signal temporel qui a une durée de 1802 secondes dans notre cas (cf chapitre 4). Par la suite, la non-linéarité est introduite dans ce signal temporel. Enfin l'analyse en fatigue est effectuée afin de déterminer la durée de vie associée à ce signal temporel. L'opération est répété 2000 fois afin d'extraire le dommage moyen par unité de temps  $E[D_{SMC}] = E[D_T]/T$  du processus stochastique qui a pour caractéristique la DSP. Il faut 2 jours de calcul CPU par jeu de paramètres sur un PC double coeur avec 4 Go de RAM. Soit un temps total pour le plan d'expérience de 192 jours. Les calculs ont été réalisés sur plusieurs PC en parallèle pour diminuer le temps total de calcul, qui a été ramené à 16 jours.

La figure 6.10 illustre également les chaines de calcul pour les autres méthodes testées. En vert, la chaine de calcul pour le modèle de Hermite associé aux méthodes spectrales. En rouge, la

chaîne de calcul pour les méthodes spectrales classiques (MSC) et pour les méthodes spectrales modifiées (MSM). Chaque méthode nous donne accès au dommage moyen par unité de temps. Comme pour le chapitre 4, on définit la durée de vie comme étant  $T_f=1/E[D]$ .

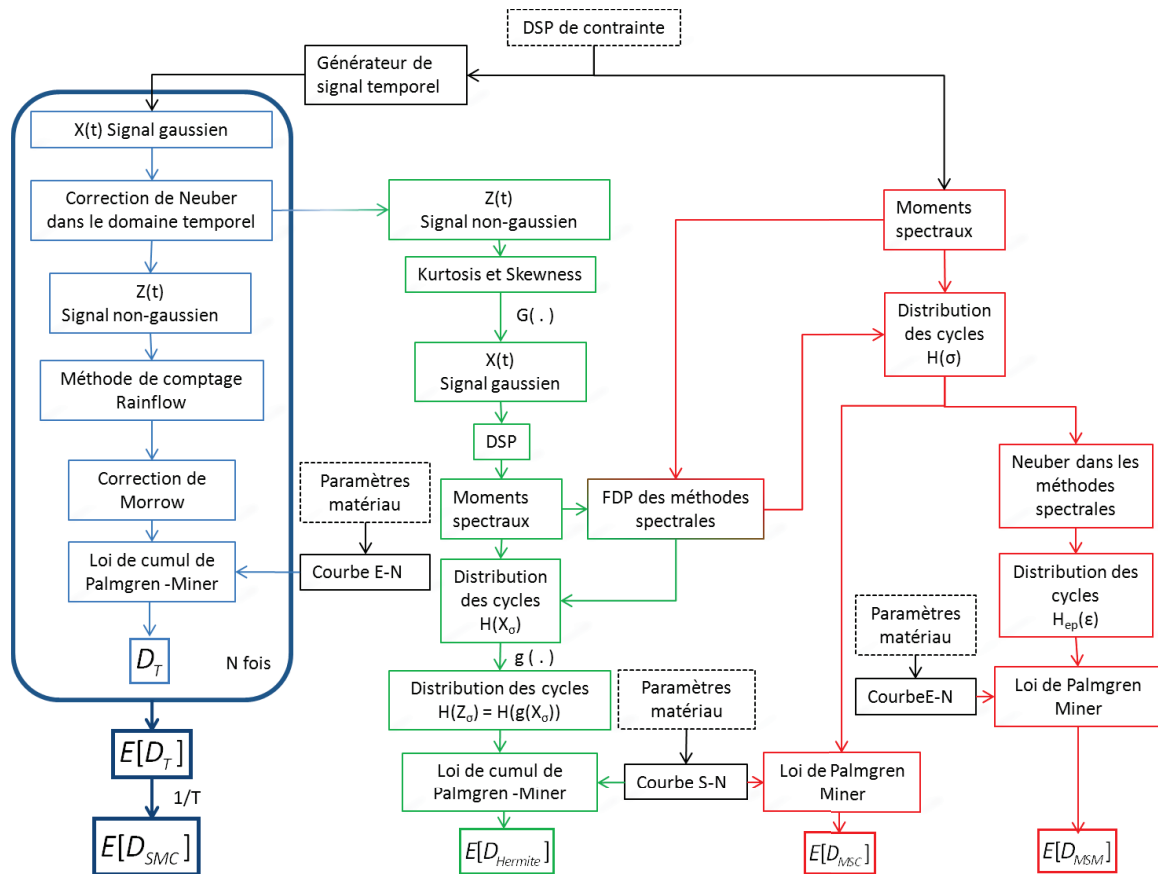


FIGURE 6.10 – Diagramme d'ensemble des différentes chaînes de calcul selon les méthodes

### Résultats et observations

Au cours des calculs, plusieurs types de résultats ont été enregistrés. Il y a tout d'abord les distributions des cycles obtenus à partir des différentes méthodes. Ensuite, le dommage cumulé associé à ces distributions. Et enfin, le dommage moyen et la durée de vie moyenne engendrée par les différentes DSP et méthodes. Dans le cas des SMC, il y a aussi les durées de vie et le dommage de tous les tirages temporels effectués lors des simulations. Cela permet d'avoir accès à la dispersion du dommage et de la durée de vie en fatigue et au processus stochastique.

Pour les figures 6.11 à 6.14, la limite en abscisse est la valeur  $R_m$  du matériau soit 1135 MPa. Les figures 6.11(a), 6.12(a), 6.13(a) et 6.14(a) sont la distribution de cycle des différentes méthodes pour la DSP passe bande avec le paramètre  $\alpha$  à 0.05 ou 1.4 et pour deux valeurs RMS distinctes, 140 MPa ou 240 MPa. L'ensemble des distributions de cycle pour des méthodes spectrales est donné pour une densité de probabilité de Dirlik. La distribution de cycle des SMC est la moyenne de l'ensemble des distributions des cycles des tirages effectués.

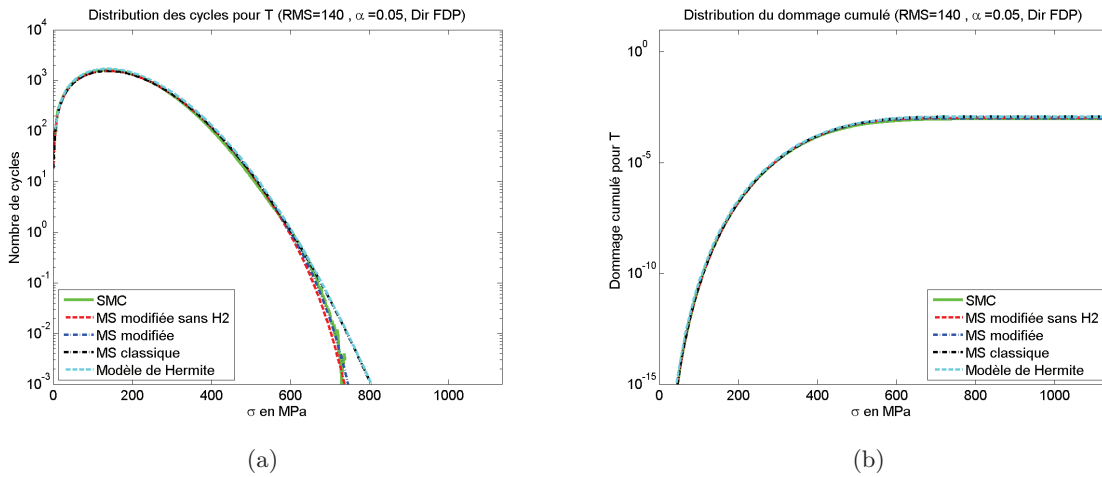


FIGURE 6.11 – Distribution des cycles et du dommage cumulé pour les différents processus de calcul dans le cas de la DSP passe-bande avec RMS=140 MPa,  $\alpha = 0.05$  et la FDP de Dirlik

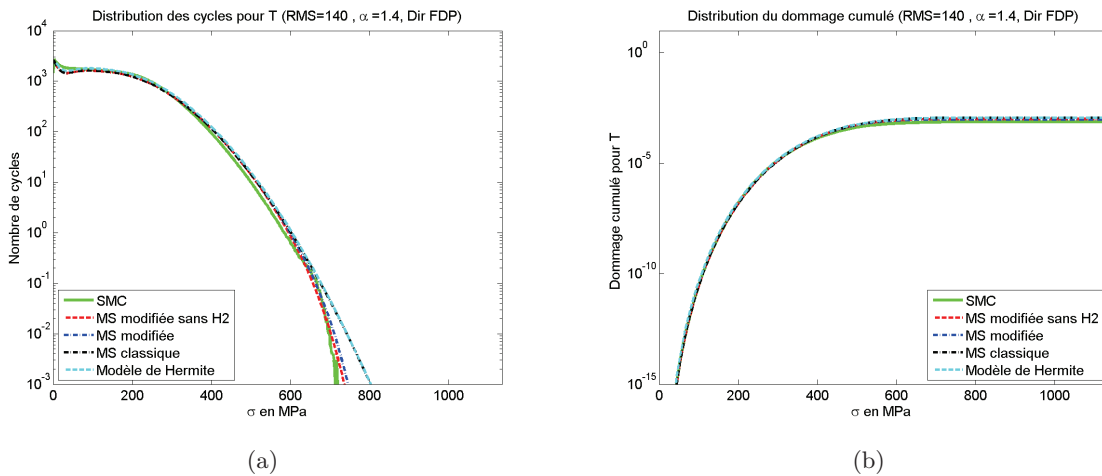


FIGURE 6.12 – Distribution des cycles et du dommage cumulé pour les différents processus de calcul dans le cas de la DSP passe-bande avec RMS=140 MPa,  $\alpha = 1.4$  et la FDP de Dirlik

Dans le cas de la Figure 6.11(a) et 6.12(a), la valeur RMS est à 140 MPa. Les distributions ont les mêmes tendances quelle que soit la valeur de la contrainte en abscisse. Mais si, la méthode spectrale classique diverge légèrement au-delà de 750 MPa, cela n'a pas d'importance, car le nombre de cycles est très faible et n'impacte plus le dommage comme on peut le constater sur la figure 6.11(b) ou 6.12(b). On constate sur les figures 6.11(b) et 6.12(b) que le dommage cumulé tend vers une limite et qu'il a déjà atteint cette limite avant la valeur de contrainte de 750 MPa. La méthode spectrale classique donne les mêmes résultats que celles des SMC car le comportement matériaux est globalement linéaire qui est l'une des hypothèses de travail de ces méthodes.

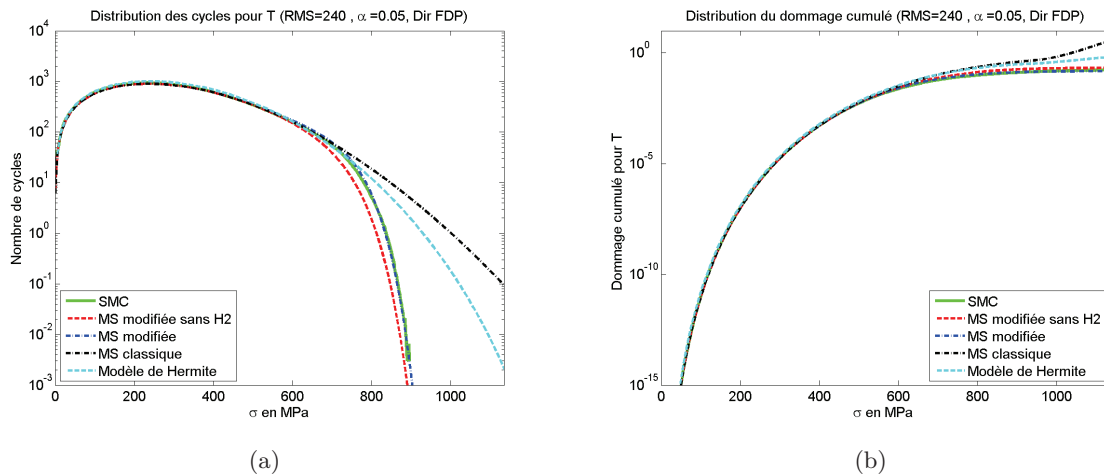


FIGURE 6.13 – Distribution des cycles et du dommage cumulé pour les différents processus de calcul dans le cas de la DSP passe-bande avec RMS=240 MPa,  $\alpha = 0.05$  et la FPD de Dirlik

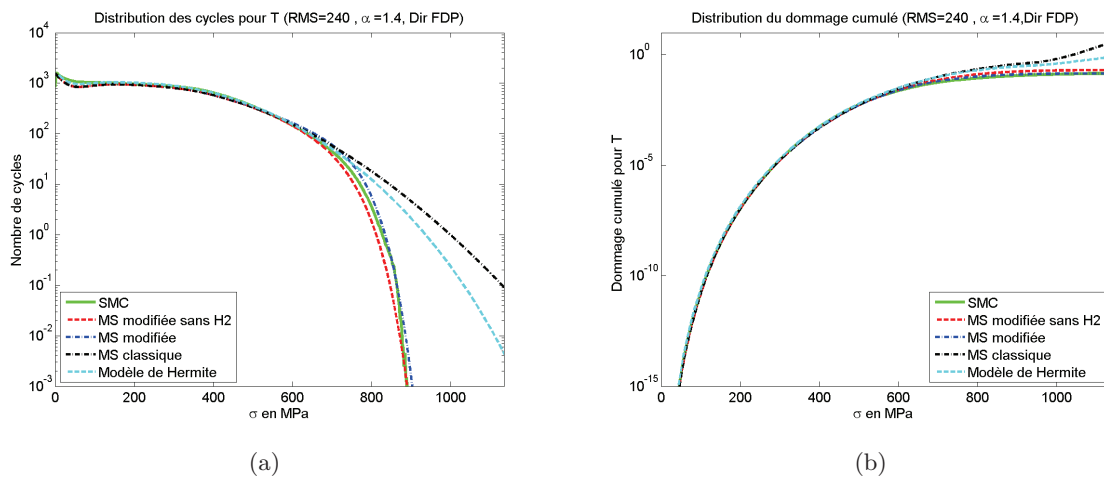


FIGURE 6.14 – Distribution des cycles et du dommage cumulé pour les différents processus de calcul dans le cas de la DSP passe-bande avec RMS=240 MPa,  $\alpha = 1.4$  et la FPD de Dirlik

Les figures 6.13(a) et 6.14(a) sont données pour une valeur RMS de 240 MPa qui met en évidence la divergence entre la méthode spectrale classique et les SMC. Et dans ce cas, cela a un fort impact sur le dommage comme on peut le voir sur les figures 6.13(b) et 6.14(b), quel que soit le paramètre  $\alpha$ .

Les figures 6.13(b) et 6.14(b) montrent que le dommage cumulé pour la méthode spectrale diverge et n'a toujours pas atteint sa limite même à  $R_m$ . On peut voir ici, l'impact du phénomène de plasticité sur la méthode spectrale classique. Les hypothèses de travail n'étant pas toutes respectées, la méthode spectrale classique surestime le dommage car les nombres de cycles sont surestimés ainsi que la contrainte par la courbe  $\sigma$ -N. Pour donner un ordre d'idée, l'erreur relative sur le dommage entre la méthode spectrale classique et les SMC pour l'ensemble des paramètres  $\alpha$  avec une valeur RMS de 240 est de 90%.

En ce qui concerne la méthode spectrale modifiée, on s'aperçoit que sa distribution de cycle et

son dommage cumulé corrèle avec celles des SMC quel que soit la valeur de RMS et le paramètre  $\alpha$ . Pour la méthode spectrale modifiée sans l'hypothèse H2, la distribution de cycle a les mêmes tendances que celle des SMC mais avec un écart quasi-constant dans la zone plastique ( $<650$  MPa (courbe d'écroutissage cyclique)) et notamment pour les valeurs de RMS élevées. Ces observations sont vraies quel que soit la FDP et/ou le paramètre  $\alpha$  sélectionné.

Les figures 6.15 à 6.17 donnent une vision plus large des résultats. Elles donnent les durées de vie moyenne ( $T_f$  en s) pour chaque DSP sur l'ensemble de leurs paramètres. Les résultats sont donnés avec une fonction de densité de probabilité des cycles de Tovo & Benasciutti ou Lalanne.

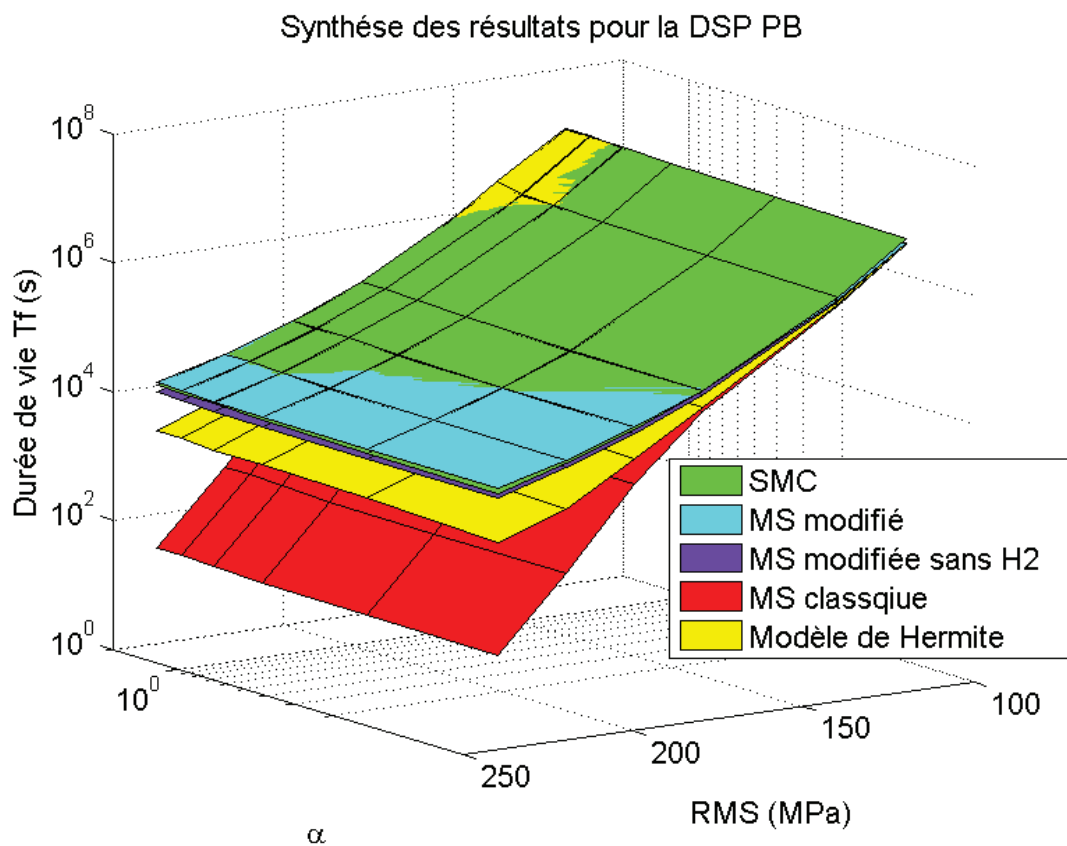


FIGURE 6.15 – Comparaison des durées de vie ( $T_f$ ) pour l'ensemble des paramètres de la DSP passe-bande avec la FDP de Lalanne.

La figure 6.15 illustre les résultats pour la DSP passe-bande. Les axes x et y représentent respectivement la valeur RMS et  $\alpha$ . On s'aperçoit que le paramètre  $\alpha$  n'a pas d'influence sur la non-linéarité. Seule la valeur RMS influe sur les résultats de durée de vie. Il n'y a pas de couplage de ces paramètres.

La méthode spectrale modifiée corrèle avec les résultats obtenus avec les SMC pour ce type de DSP. La méthode spectrale classique ainsi que le modèle de Hermite divergent quand la valeur RMS augmente soit quand la non-linéarité augmente.

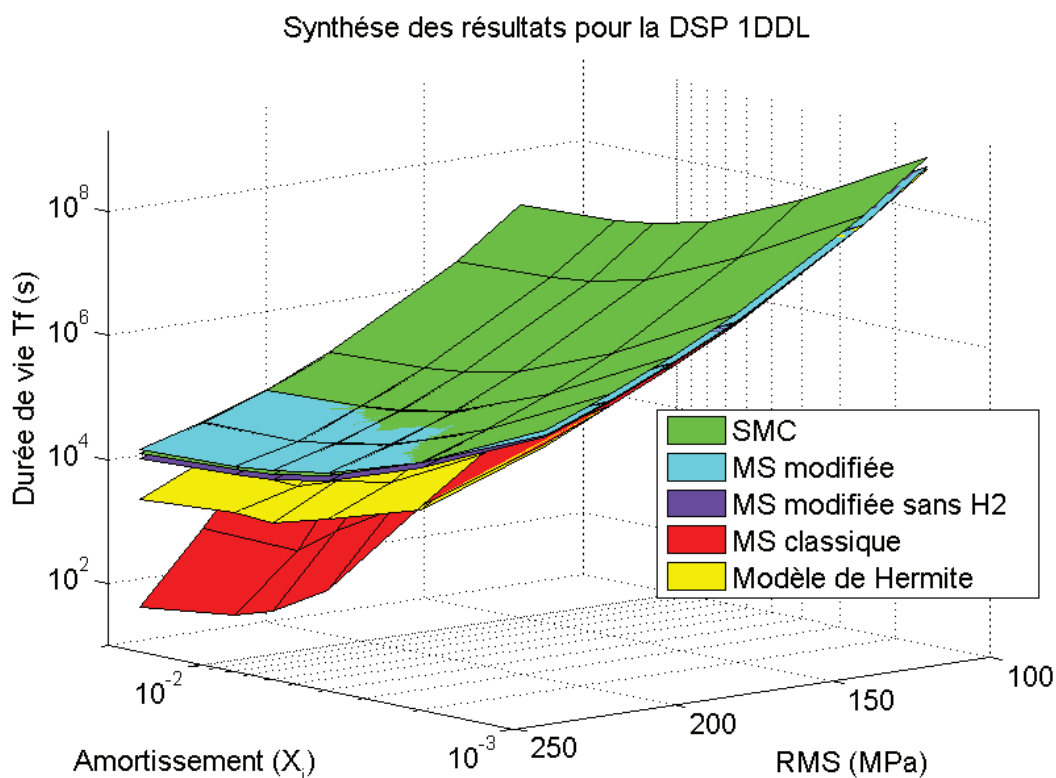


FIGURE 6.16 – Comparaison des durées de vie ( $T_f$ ) pour l'ensemble des paramètres de la DSP 1DDL avec la FDP de Lalanne.

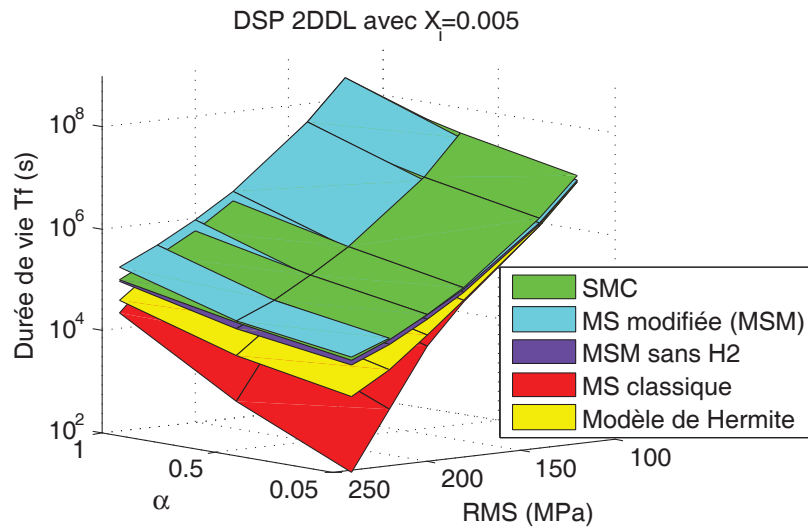
La figure 6.16 illustre les résultats pour la DSP 1 DDL. Les axes x et y représentent respectivement la valeur RMS et  $X_i$  (l'amortissement). Au contraire de la figure 6.16, on voit ici un couplage des deux paramètres, la non-linéarité n'est plus seulement impactée par la valeur RMS. On s'aperçoit que plus l'amortissement est faible, moins la non-linéarité a d'impact même pour les valeurs de RMS élevées. Un amortissement faible sur la DSP représente un DSP à bande très étroite.

Sur la figure 6.16, la méthode spectrale classique et le modèle de Hermite diverge quand la valeur RMS et l'amortissement augmente. La méthode spectrale modifiée donne les meilleures corrélations avec les SMC. La méthode spectrale modifiée sans l'hypothèse H2 donne les mêmes tendances que les SMC mais avec un offset constant dans les résultats.

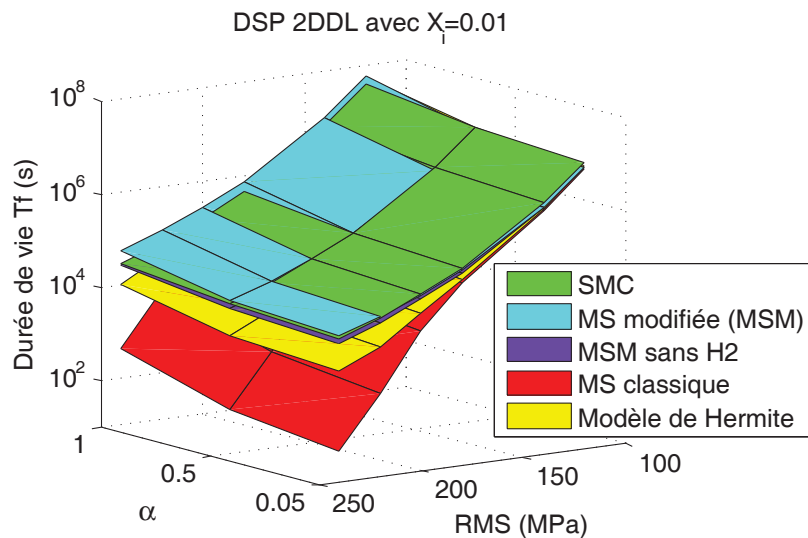
Enfin, sur la figure 6.17, on présente les résultats pour la DSP 2 DDL. Les axes x et y représentent respectivement la valeur RMS et le paramètre  $\alpha$ . La figure 6.17(a) représente les résultats obtenus pour un amortissement de 0.005 et la La figure 6.17(a) représente les résultats obtenus pour un amortissement de 0.01. On constate que la méthode proposée surestime la durée de vie notamment quand  $\alpha=1$  et RMS=240 MPa, mais cela comme nous l'avons vu au chapitre 4 dépend de la définition de la FDP sélectionnée. Celle de Tovo & Benasciutti, dans ce cas présent n'est pas la FDP la plus adaptée à cette DSP avec ces jeux de paramètres. La modification proposée ici peut être aussi appliquée aux méthodes développées pour les DSP bimodales.

Pour la méthode spectrale classique et le modèle de Hermite ont peut faire les mêmes observa-

tions que pour les DSP passe-bande et DSP 1DDL.



(a) Avec un amortissement de 0.005



(b) Avec un amortissement de 0.01

FIGURE 6.17 – Comparaison des durées de vie ( $T_f$ ) pour l'ensemble des paramètres de la DSP 2DDL avec la FDP de Tovo & Benascuitti.

Afin de connaître l'impact de la modification proposée sur l'ensemble des différentes méthodes spectrales testées, il est représenté sur la figure 6.18 l'ensemble des résultats de durée de vie pour tous les jeux de paramètres testés. Seules les fonctions de densités de probabilité changent sur le graphe. On s'aperçoit que la majorité des résultats obtenus avec les différentes FDP est conservatif par rapport à la fatigue. Néanmoins pour la FDP de Tovo & Benascuitti, il y a un certain nombre de points en-dessous de la médiane, ce qui signifie que la durée de vie trouvée est supérieure à celle trouvée avec les SMC. Ces points correspondent majoritairement à des jeux de paramètres de la DSP 2DDL.



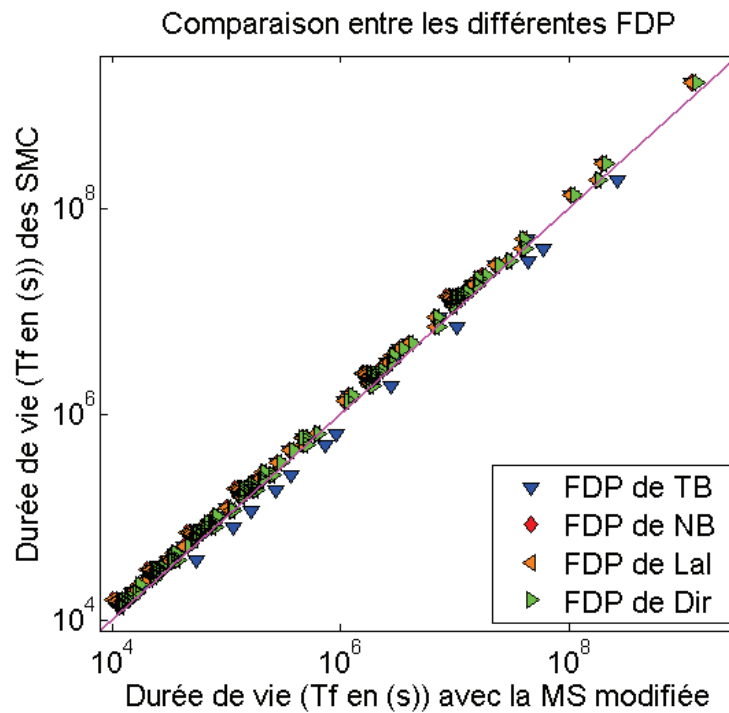


FIGURE 6.18 – Comparaison des différentes FDP testées sur l’ensemble des paramètres avec la méthode proposée

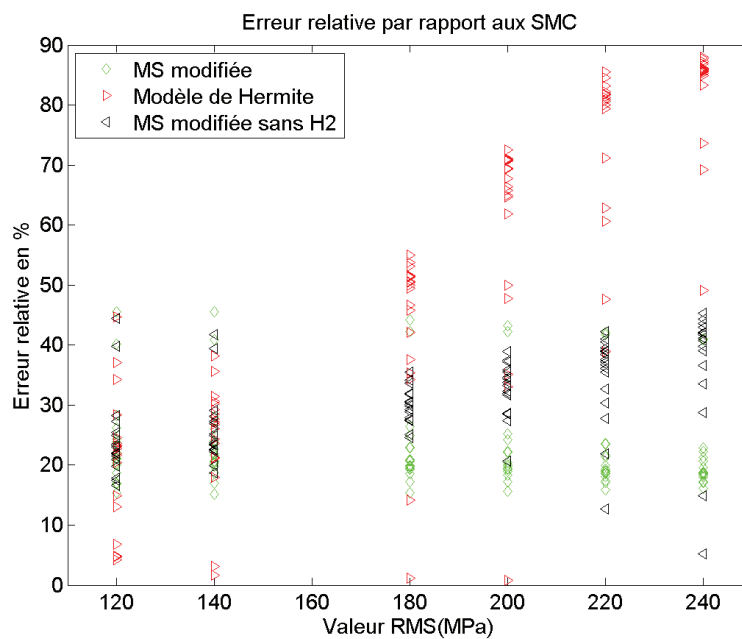


FIGURE 6.19 – Représentation de l’erreur relative en fonction de la valeur RMS pour les méthodes de calcul avec un processus non-gaussien et cela pour la FDP de Tovo & Benasciutti

La Figure 6.19 représente l'erreur relative vis-à-vis des simulations de Monte-Carlo. Elle est calculée pour la méthode de Hermite, la méthode spectrale modifiée et la méthode spectrale modifiée sans l'hypothèse H2. Elle est définie dans l'équation 6.18.

$$Erreur\ relative(\%) = \frac{|E[D_{methode}] - E[D_{SMC}]|}{E[D_{SMC}]} 100 \tag{6.18}$$

Ce graphe permet de constater que l'erreur relative avec la méthode proposée est globalement constante quelle que soit la valeur RMS, elle est voisine de 20%. Alors que les autres méthodes montrent une augmentation de la valeur relative quand la valeur RMS augmente. De plus pour la méthode de Hermite, pour des valeurs RMS supérieures à 220 MPa, l'erreur relative est supérieure à 80%. Malgré que ce graphe donne de bonnes tendances, il n'est pas représentatif de l'écart entre les méthodes.

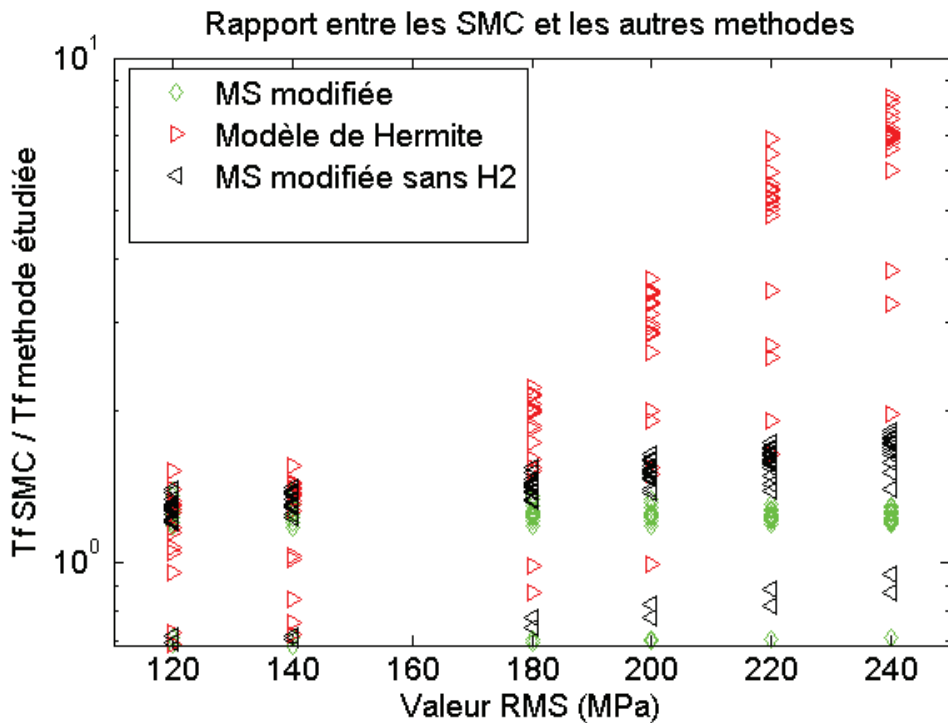


FIGURE 6.20 – Représentation du rapport entre les SMC et les méthodes étudiées avec une FDP de Tovo & Benascuitti

La figure 6.20 fait apparaître un meilleur indicateur sur la performance de chaque méthode étudiée. Elle représente le rapport de durée de vie ( $T_f\ SMC / T_f\ methode\ étudiée$ ) en fonction de la valeur RMS. Si la méthode est performante et robuste, le rapport tend vers 1 quelle que soit la valeur RMS. Dans notre cas, pour la méthode proposée, le rapport est globalement compris entre 1 et 1.5 sauf pour 2 valeurs qui sont inférieures à 1. Ces valeurs correspondent à des jeux de paramètres de la DSP 2DDL.

La figure 6.21 montre cet indicateur mais seulement avec la méthode proposée, cela permet de mieux apprécier les écarts en fonction des valeurs RMS. On constate que le rapport entre SMC et la méthode proposé est compris dans l'intervalle  $[0.6; 1.6]$ .

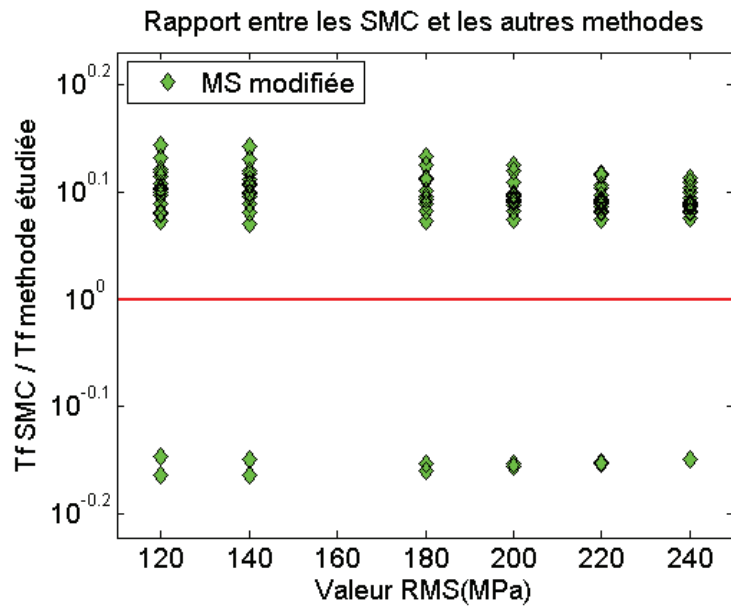


FIGURE 6.21 – Représentation du rapport entre les SMC et la méthodes proposé avec une FDP de Tovo & Benasciutti

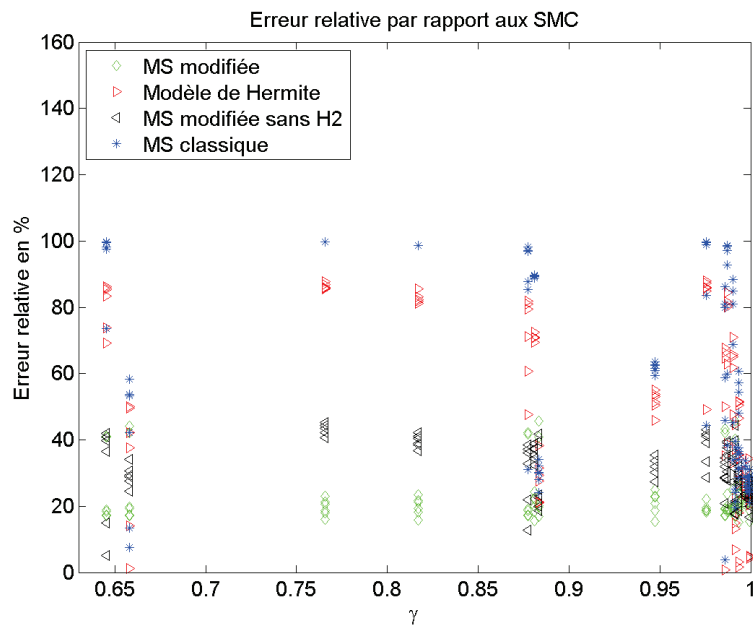


FIGURE 6.22 – Représentation de l'erreur relative en fonction de la valeur de  $\gamma$  pour une FDP Narrow-band

Afin de vérifier s'il y a un impact du paramètre  $\gamma$  sur les méthodes, on représente sur la figure 6.22, l'erreur relative en fonction de la valeur  $\gamma$ . Pour le plan d'expérience étudié,  $\gamma$  varie de 0,6 à 1. Le graphe permet de constater qu'il n'y a pas d'influence du  $\gamma$  sur les méthodes étudiées.

## Conclusion

Au vu des résultats du plan d'expérience numérique réalisé, la méthode proposée avec l'hypothèse H2 rend mieux compte du phénomène élasto-plastique que les autres démarches de calcul présentées. C'est la méthode qui donne le moins d'erreur relative sur l'ensemble des DSP testées. De plus, cette méthode est rapide car la donnée d'entrée est toujours un DSP de contrainte obtenue avec un comportement linéaire.

Vis-à-vis des résultats, la méthode est robuste et précise, cependant, il est nécessaire de la tester par rapport à des essais réels avec un comportement élasto-plastique pour valider le choix de la méthode de Neuber au sein des méthodes spectrales. La méthode proposée donne les mêmes résultats que les méthodes spectrales classiques quand le comportement est linéaire. Nous avons bien étendu le champ d'utilisation des méthodes spectrales, cela grâce à la loi de Manson-Coffin-Basquin et la correction de Neuber.

En ce qui concerne les méthodes du type Hermite, l'introduction de la loi de Manson-Coffin-Basquin dans la chaîne de calcul pourrait être une piste d'amélioration, néanmoins le passage de la contrainte à la déformation reste à faire. De plus, la problématique du temps de calcul pour l'obtention de la donnée d'entrée reste entière.

## Bibliographie du chapitre 6

- [1] S. Rice, *Mathematical analysis of random noise*. Selected papers on noise and stochastic processes, 1954.
- [2] D. Benasciutti and R. Tovo, “Fatigue life assessment in non-Gaussian random loadings,” *International Journal Of Fatigue*, vol. 28, pp. 733–746, JUL 2006.
- [3] N.-H. Ko, “Verification of correction factors for non-Gaussian effect on fatigue damage on the side face of tall buildings,” *International Journal of Fatigue*, vol. 30, pp. 779–792, MAY 2008.
- [4] C. Braccesi, F. Cianetti, G. Lori, and D. Pioli, “The frequency domain approach in virtual fatigue estimation of non-linear systems : The problem of non-Gaussian states of stress,” *International Journal Of Fatigue*, vol. 31, pp. 766–775, APR 2009.
- [5] D. Benasciutti and R. Tovo, “Frequency-based fatigue analysis of non-stationary switching random loads,” *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 30, pp. 1016–1029, NOV 2007.
- [6] S. Gupta and I. Rychlik, “Rain-flow fatigue damage due to nonlinear combination of vector gaussian loads,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 22, no. 3, pp. 231–249, 2007.
- [7] D. Benasciutti, *Fatigue analysis of random loadings*. PhD thesis, University of Ferrara, DEC 2004.
- [8] N. Petrone, F. Giubilato, A. Giro, and N. Mutinelli, “Development of instrumented downhill bicycle components for field data collection,” *Procedia Engineering*, vol. 34, no. 0, pp. 514 – 519, 2012. Engineering of sport conference 2012.
- [9] A. A. Majid, *Dissipation de l'énergie en mécanique vibratoire*. PhD thesis, Ecole doctorale des sciences pour l'ingénieur de Lyon, 2002.
- [10] S. Sarkani, D. Kihl, and J. Beach, “Fatigue of welded-joints under narrow-band non-gaussian loadings,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 9, no. 3, pp. 179–190, 1994.
- [11] M. Ochi, “Probability distributions of peaks and troughs of non-Gaussian random processes,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 13, pp. 291–298, OCT 1998.
- [12] M. Ochi and K. Ahn, “Probability distribution applicable to non-gaussian random processes,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 9, no. 4, pp. 255–264, 1994.
- [13] S. Winterstein, “Non-Normal Responses And Fatigue Damage,” *Journal Of Engineering Mechanics-ASCE*, vol. 111, no. 10, pp. 1291–1295, 1985.
- [14] S. Winterstein, “Nonlinear vibration models for extremes and fatigue,” *Journal Of Engineering Mechanics-ASCE*, vol. 114, pp. 1772–1790, OCT 1988.
- [15] S. Winterstein, T. Ude, and T. Marthinsen, “Volterra Models Of Ocean Structures - Extreme And Fatigue Reliability,” *Journal Of Engineering Mechanics-ASCE*, vol. 120, pp. 1369–1385, JUN 1994.

- [16] S. Aberg, K. Podgorski, and I. Rychlik, “Fatigue damage assessment for a spectral model of non-Gaussian random loads,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 24, pp. 608–617, OCT 2009.
- [17] I. Rychlik, P. Johannesson, and M. Leadbetter, “Modelling and statistical analysis of ocean-wave data using transformed gaussian processes,” *Marine Structures*, vol. 10, no. 1, pp. 13 – 47, 1997.
- [18] A. Banvillet, T. Lagoda, E. Macha, A. Nieslony, T. Palin-Luc, and J. Vittori, “Fatigue life under non-Gaussian random loading from various models,” *International Journal Of Fatigue*, vol. 26, pp. 349–363, APR 2004.
- [19] T. Herbland, *Une méthode de correction élastoplastique pour le calcul en fatigue des zones de contraction de contraintes sous chargement cyclique non proportionnel*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, 2009.
- [20] A. François, D. Pineau and A. Zaoui, *Comportement mécanique des matériaux*. Hermes, 1991.
- [21] H. Neuber, “Theory of stress concentration for shear-strained prismatic bodies with arbitrary nonlinear stress- strain law.,” *Journal Appl. Mech.*, vol. 28, pp. 544–551, 1961.
- [22] J. Lemaitre and J. L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1996.



# Chapitre 7

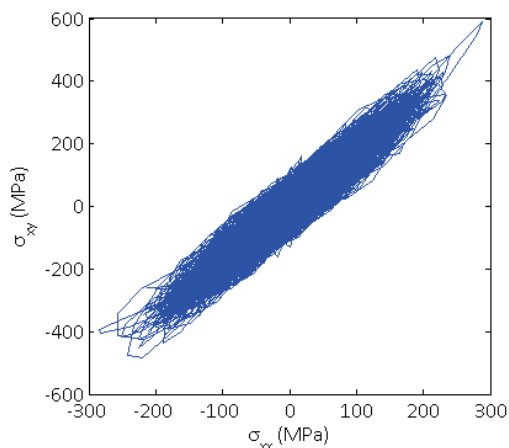
## Fatigue multiaxiale à grand et faible nombre de cycles dans le domaine spectral : prise en compte de la plasticité

### Sommaire

---

7.1	Modélisation du processus de calcul dans un état de contraintes multiaxiales . . . . .	108
7.1.1	Formulation en contraintes . . . . .	109
7.1.2	Formulation en déformation . . . . .	111
7.2	Validation numérique . . . . .	113
7.2.1	Présentation du plan d'expérience . . . . .	113
7.2.2	Présentation des chaînes de calcul . . . . .	115
7.2.3	Résultats et observations . . . . .	117
	Bibliographie du chapitre 7 . . . . .	121

---



### Résumé

---

Nous intégrons le modèle précédemment proposé dans une chaîne de calcul pour un état de chargement multiaxial. Pour ce faire, nous utilisons les travaux réalisés par Preumont et Pitoiset sur la définition d'une DSP équivalente au sens de Von Mises. A cette occasion, nous proposons une formulation exclusivement en déformation.

---



## Introduction

Nous avons vu jusqu'ici qu'il était possible de calculer le dommage moyen associé à un processus non-gaussien, uniaxial, dans le cas d'un comportement élasto-plastique. Nous avons montré que la méthode proposée résout les problèmes rencontrés par les méthodes existantes par rapport à une non-linéarité due à un comportement élasto-plastique. De plus, cette méthode est robuste et rapide par rapport aux méthodes existantes pour traiter les processus non-gaussiens.

Néanmoins, les pièces et les structures sont le plus souvent soumises à des états multiaxiaux de contraintes et/ou de déformations, contrairement à ce que l'on a vu jusqu'ici. De plus, dans le cas de plusieurs sources d'excitations selon différentes directions, l'état de contraintes risque d'être à la fois multiaxial et non-proportionnel. La proportionnalité dans le cas d'un état multiaxial caractérise le déphasage entre les composantes principales. Par exemple, un triangle de suspension va avoir plusieurs sources d'excitation : la vibration de la route transmise par la roue, la réaction de l'amortisseur ainsi que la réponse du châssis. Dans ce cas, les sollicitations sont généralement déphasées, ce qui crée sur le triangle des contraintes ou déformations non-proportionnelles.

De nombreux critères à seuil en fatigue multiaxiale ont été développés. Ces critères permettent un dimensionnement à la fatigue des structures à la limite d'endurance du matériau (domaine polycyclique illimité). Parmi les nombreux ouvrages référençant les critères, nous citerons la thèse de Weber [1] qui réalise une synthèse des critères existants. On distingue les approches macroscopiques comme de critère de Crossland et les approches mésoscopiques comme le critère de Dang Van [2] [3]. D'autres chercheurs [4] [5] [6] ont développé des méthodes de prévision de durée de vie pour le domaine polycyclique ainsi que pour des états de contraintes non-proportionnelles.

Une bibliographie synthétique est proposée en Annexe C. Elle présente en détail notamment la méthode de calcul temporelle qui servira de point de comparaison dans le plan d'expériences de ce chapitre.

Dans notre cas, il n'est pas question de développer une nouvelle approche ou méthode de calcul pour la fatigue multiaxiale mais plutôt de trouver comment étendre les travaux réalisés dans un état uniaxial à un état multiaxial. La réponse réside dans les travaux réalisés par Preumont et Pitoiset [7] [5] qui donnent la définition d'une DSP équivalente au sens de Von Mises. Sur la base de leurs travaux, nous proposons une formulation exclusivement en déformation équivalente.

### 7.1 Modélisation du processus de calcul dans un état de contraintes multiaxiales

On présente deux approches, la première reprend les travaux de Pitoiset et les combine avec la méthode proposée dans le chapitre 6. La deuxième est basée sur la définition du critère de Von Mises en déformation. Cela nous amène à définir la DSP équivalente et à expliciter le passage d'une distribution des cycles de déformation obtenue de façon linéaire à une distribution des cycles de déformation pour un comportement élasto-plastique.

Les développements seront donnés pour un état de contraintes planes. Majoritairement, l'amorce de fissure se situe sur une surface libre de la structure. On considère  $\sigma_{zz}, \sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  comme nulles

( $\vec{z}$  est la normale à la surface libre).

### 7.1.1 Formulation en contraintes

Tout d'abord, on présente le calcul pratique du tenseur des DSP de contraintes. Dans le cas d'une structure soumise à  $k$  excitations, le tenseur des DSP d'excitation est de taille  $k \times k$ . Chaque composante est dépendante de la fréquence.

$$\Phi_e(f) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(f) & \cdots & \Phi_{1k}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{k1}^*(f) & \cdots & \Phi_{kk}(f) \end{bmatrix}$$

Où  $\Phi_{k1}^*(f)$  est le complexe conjugué de  $\Phi_{1k}(f)$ . Cela permet de calculer le tenseur des DSP de contrainte qui est de taille  $6 \times 6$  dans le cas général et de taille  $3 \times 3$  dans le cas d'un état de contraintes plan.

$$\Phi_{\sigma\sigma}(f) = FRF_{\sigma}^*(f) \Phi_e(f) FRF_{\sigma}^T(f) \quad (7.1)$$

Où  $FRF_{\sigma}^T(f)$  est la transposée de la matrice des fonctions de réponses en fréquence de chaque composante et excitation, soit un tenseur de taille  $k \times 6$  dans le cas général et  $k \times 3$  dans le cas étudié.  $FRF_{\sigma}^*(f)$  est le tenseur des complexes conjugués de la matrice des fonctions de réponses en fréquence.

Pour synthétiser, le calcul tensoriel dans le cas d'une seule source d'excitation et un état de contraintes plan est donné par :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{\sigma_x\sigma_x}(f) & \Phi_{\sigma_x\sigma_y}(f) & \Phi_{\sigma_x\sigma_{xy}}(f) \\ \Phi_{\sigma_y\sigma_x}^*(f) & \Phi_{\sigma_y\sigma_y}(f) & \Phi_{\sigma_x\sigma_x}(f) \\ \Phi_{\sigma_{xy}\sigma_x}^*(f) & \Phi_{\sigma_{xy}\sigma_y}^*(f) & \Phi_{\sigma_{xy}\sigma_{xy}}(f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FRF_{\sigma_x}^*(f) \\ FRF_{\sigma_y}^*(f) \\ FRF_{\sigma_{xy}}^*(f) \end{bmatrix} [\Phi_e(f)] \begin{bmatrix} FRF_{\sigma_x}(f) & FRF_{\sigma_y}(f) & FRF_{\sigma_{xy}}(f) \end{bmatrix}$$

Preumont et Piefort sont les premiers à avoir travaillé sur la définition d'une DSP équivalente au sens de Von Mises à partir de tenseur des DSP des contraintes  $\Phi_{\sigma\sigma}(f)$ . Le principe de cette méthode est de trouver une contrainte équivalente uniaxiale au sens de Von Mises à une sollicitation multiaxiale. Elle a pour but, après l'obtention de cette contrainte équivalente, d'estimer le dommage grâce aux méthodes vues au chapitre 4 pour les sollicitations uniaxiales.

L'équation 7.2 donne la définition de la contrainte de Von Mises dans le domaine temporel dans le cas d'un état de contraintes plan.

$$\sigma_{VM}^2(t) = \frac{3}{2} \Sigma_{ij}(t) \Sigma_{ij}(t) = \sigma_{xx}^2(t) + \sigma_{yy}^2(t) - \sigma_{xx}(t) \sigma_{yy}(t) + 3\sigma_{xy}^2(t) \quad (7.2)$$

Où  $\Sigma_{ij}(t)$  sont les composantes du tenseur déviateur des contraintes calculées à partir du tenseur des contraintes  $\sigma(t) = [\sigma_{xx}(t), \sigma_{yy}(t), \sigma_{xy}(t)]$ .

Preumont et Pitoiset [8] [7] remarquent que la nature quadratique de la contrainte  $\sigma_{VM}(t)$  définie dans le domaine temporel pose plusieurs problèmes :

- la contrainte de Von Mises n'est pas gaussienne, ni de moyenne nulle, même si toutes les composantes du tenseurs des contraintes sont gaussiennes et de moyenne nulle.

- Le contenu fréquentiel de  $\sigma_{VM}(t)$  n'est pas cohérent avec celui des composantes du tenseur des contraintes. En d'autres termes, les DSP des composantes du tenseur des contraintes

présentent un pic à chaque fréquence  $f_i$ , alors que la DSP de  $\sigma_{VM}(t)$  définie par l'équation 7.2 ne fait pas apparaître de pic à chaque fréquence  $f_i$ .

Ils proposent, pour contourner ces différents problèmes, de considérer l'équation 7.2 au sens de son carré moyen et en transformant ce processus aléatoire dans le domaine fréquentiel. L'équation 7.2 est une fonction de  $\sigma(t)$  et peut s'écrire comme dans l'équation 7.3 .

$$\sigma_{VM}^2 = \sigma^T Q \sigma = Trace(Q[\sigma\sigma^T]) \quad (7.3)$$

Où Q est une matrice constante définie comme suit :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Cette contrainte de Von Mises est un processus aléatoire gaussien dont l'espérance mathématique  $E[.]$  est donnée par la relation

$$E[\sigma_{VM}^2] = Trace(QE[\sigma\sigma^T]) \quad (7.4)$$

Où  $E[\sigma\sigma^T]$  est une matrice de covariance du vecteur des contraintes. Cette matrice de covariance s'obtient en intégrant la matrice des densités spectrales de puissance du vecteur des contraintes comme suit :

$$E[\sigma\sigma^T] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\sigma}(f) df \quad (7.5)$$

Par définition, il existe aussi une relation entre la moyenne quadratique  $E[\sigma_{VM}^2]$  et la DSP de la contrainte équivalente de Von Mises :

$$E[\sigma_{VM}^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{VM}(f) df \quad (7.6)$$

En combinant les équations 7.5 et 7.6, on obtient l'équation 7.7.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{VM}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} Trace(Q\Phi_{\sigma}(f)) df \quad (7.7)$$

Cette relation intégrale est exacte et ne nécessite pas d'hypothèse. Elle définit la contrainte équivalente de Von Mises comme en équation 7.8 .

$$\Phi_{VM}(f) = Trace(Q\Phi_{\sigma}(f)) = \sum_{i,j} Q_{ij} \Phi_{\sigma_i \sigma_j}(f) \quad (7.8)$$

Premont et Pitoiset appellent ce processus scalaire gaussien : 'contrainte équivalente de Von Mises'. Pour notre cas la DSP équivalente de Von Mises est définie en équation 7.9.

$$\Phi_{VM}(f) = \Phi_{\sigma_x^2}(f) + \Phi_{\sigma_y^2}(f) - Re(\Phi_{\sigma_x \sigma_y}(f)) + 3\Phi_{\sigma_{xy}^2}(f) \quad (7.9)$$

Des améliorations à la définition de ce processus ont été apportées notamment dans le cas d'excitations multiples [9] [10].

Une fois la DSP équivalente uniaxiale calculée, la chaine de calcul est exactement la même que celle proposée en chapitre 6. La figure 7.1 montre le processus de calcul en fatigue dans le cas d'un état multiaxial et d'un comportement élasto-plastique.

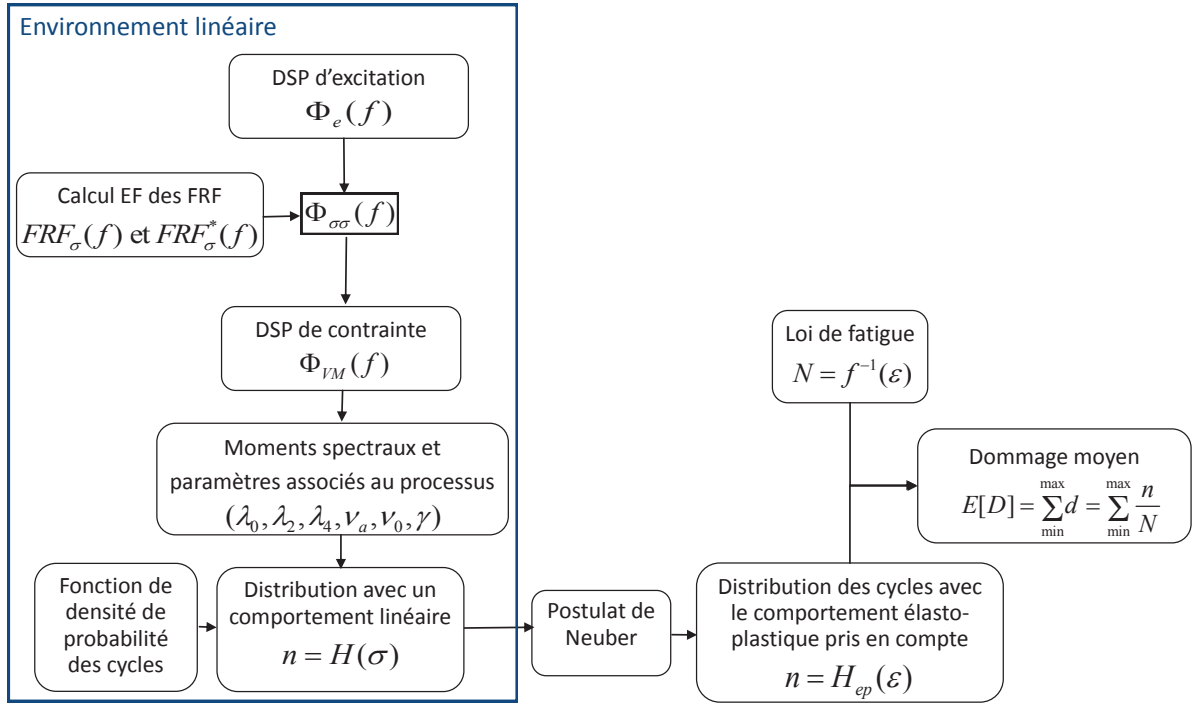


FIGURE 7.1 – Chaîne de calcul en fatigue multiaxiale formulée en contraintes dans le cas d'un comportement élasto-plastique

### 7.1.2 Formulation en déformation

Pour l'approche en déformation, l'état de déformations est triaxial dans le cas d'un état de contraintes plan. Par exemple dans le cas d'une poutre en traction simple, il y a seulement une contrainte dans la direction de traction mais des déformations dans les trois directions. Dans ce cas,  $\Phi_{\varepsilon\varepsilon}(f)$  est de taille 6 x 6 et  $FRF_{\varepsilon}(f)$  qui représente le tenseur des fonctions de réponses en fréquence des déformations est de taille 1 x 6. La définition de  $\Phi_{\varepsilon\varepsilon}(f)$  est donnée dans l'équation 7.10.

$$\Phi_{\varepsilon\varepsilon}(f) = FRF_{\varepsilon}^*(f) \Phi_e(f) FRF_{\varepsilon}^T(f) \quad (7.10)$$

L'équation 7.11 donne la définition de la déformation de Von Mises dans le domaine temporel [11] dans le cas d'un état plan de contrainte.

$$\varepsilon_{VM}^2(t) = \frac{2}{3} \Upsilon_{ij}(t) \Upsilon_{ij}(t) \quad (7.11)$$

$$\varepsilon_{VM}^2(t) = \frac{4}{9} (\varepsilon_{xx}^2(t) + \varepsilon_{yy}^2(t) + \varepsilon_{zz}^2(t) - \varepsilon_x(t)\varepsilon_y(t) - \varepsilon_x(t)\varepsilon_z(t) - \varepsilon_y(t)\varepsilon_z(t)) + \frac{4}{3} \varepsilon_{xy}^2(t)$$

Où  $\Upsilon_{ij}(t)$  sont les composantes du tenseur déviateur des déformations calculées à partir du tenseur des déformations  $\varepsilon(t) = [\varepsilon_{xx}(t), \varepsilon_{yy}(t), \varepsilon_{zz}(t), \varepsilon_{xy}(t), \varepsilon_{xz}(t), \varepsilon_{yz}(t)]$  où les composantes  $\varepsilon_{xz}(t)$  et  $\varepsilon_{yz}(t)$  sont nulles (surface libre de normale  $\vec{z}$ ).

On peut faire la même remarque que dans le cas de la formulation en contrainte, la nature quadratique de la déformation  $\varepsilon_{VM}(t)$  définie dans le domaine temporel pose plusieurs problèmes :

- la déformation de Von Mises n'est pas gaussienne, ni de moyenne nulle, même si toutes les composantes du tenseurs des déformations sont gaussiennes et de moyenne nulle.

- Le contenu fréquentiel de  $\varepsilon_{VM}(t)$  n'est pas cohérent avec celui des composantes du tenseur des déformations. En d'autres termes, les DSP des composantes du tenseur des déformations présentent un pic à chaque fréquence  $f_i$ , alors que la DSP de  $\varepsilon_{VM}(t)$  définie par l'équation 7.2 ne fait pas apparaître de pic à chaque fréquence  $f_i$ .

Ces problèmes peuvent être contournés en considérant l'équation 7.11 au sens de son carré moyen et en transformant ce processus aléatoire dans le domaine fréquentiel. L'équation 7.11 est une fonction de  $\varepsilon(t)$  et peut s'écrire comme dans l'équation 7.12 .

$$\varepsilon_{VM}^2 = \varepsilon^T Q_\varepsilon \varepsilon = Trace(Q[\varepsilon\varepsilon^T]) \quad (7.12)$$

Où  $Q_\varepsilon$  est une matrice constante avec la définition ci-dessous.

$$Q_\varepsilon = \begin{bmatrix} 4/9 & -2/9 & -2/9 & 0 & 0 & 0 \\ -2/9 & 4/9 & -2/9 & 0 & 0 & 0 \\ -2/9 & -2/9 & 4/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette déformation de Von Mises est un processus aléatoire gaussien dont l'espérance mathématique  $E[.]$  est donnée par la relation

$$E[\varepsilon_{VM}^2] = Trace(QE[\varepsilon\varepsilon^T]) \quad (7.13)$$

Où  $E[\varepsilon\varepsilon^T]$  est une matrice de covariance du vecteur des déformations. Cette matrice de covariance s'obtient en intégrant la matrice des densités spectrales de puissance du vecteur des déformations comme suit :

$$E[\varepsilon\varepsilon^T] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varepsilon\varepsilon}(f)df \quad (7.14)$$

Par définition, il existe aussi une relation entre la moyenne quadratique  $E[\varepsilon_{VM}^2]$  et la DSP de la déformation équivalente de Von Mises :

$$E[\varepsilon_{VM}^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{VM_\varepsilon}(f)df \quad (7.15)$$

En combinant les équations 7.14 et 7.15, on obtient l'équation 7.16.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{VM_\varepsilon}(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} Trace(Q\Phi_{\varepsilon\varepsilon}(f))df \quad (7.16)$$

Cette relation intégrale est exacte et ne nécessite pas d'hypothèse. Elle définit la déformation équivalente de Von Mises comme étant l'équation 7.17 .

$$\Phi_{VM_\varepsilon}(f) = Trace(Q_\varepsilon\Phi_{\varepsilon\varepsilon}(f)) = \sum_{i,j} (Q_\varepsilon)_{ij}\Phi_{\varepsilon_i\varepsilon_j}(f) \quad (7.17)$$

On appellera ce processus scalaire gaussien : 'Déformation équivalente de Von Mises'. Pour notre cas la DSP équivalente de Von Mises est définie en équation 7.18.

$$\Phi_{VM_\varepsilon}(f) = \frac{4}{9}(\Phi\varepsilon_{xx}^2(f) + \Phi\varepsilon_{yy}^2(f) + \Phi\varepsilon_{zz}^2(f) - Re(\Phi\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}(f) + \Phi\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}(f) + \Phi\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}(f))) + \frac{4}{3}\Phi\varepsilon_{xy}^2(f) \quad (7.18)$$

Une fois la DSP de la déformation équivalente au sens de Von Mises [12] définie, elle peut être intégrée dans la chaîne de calcul comme sur la figure 7.2. Le passage de la fonction de distribution des cycles de déformation  $H(\varepsilon)$  à la fonction de distribution des cycles de déformation  $H_{ep}(\varepsilon)$  est réalisé à partir des équations du postulat de Neuber [13] et de l'équation de Ramberg-Osgood [11].

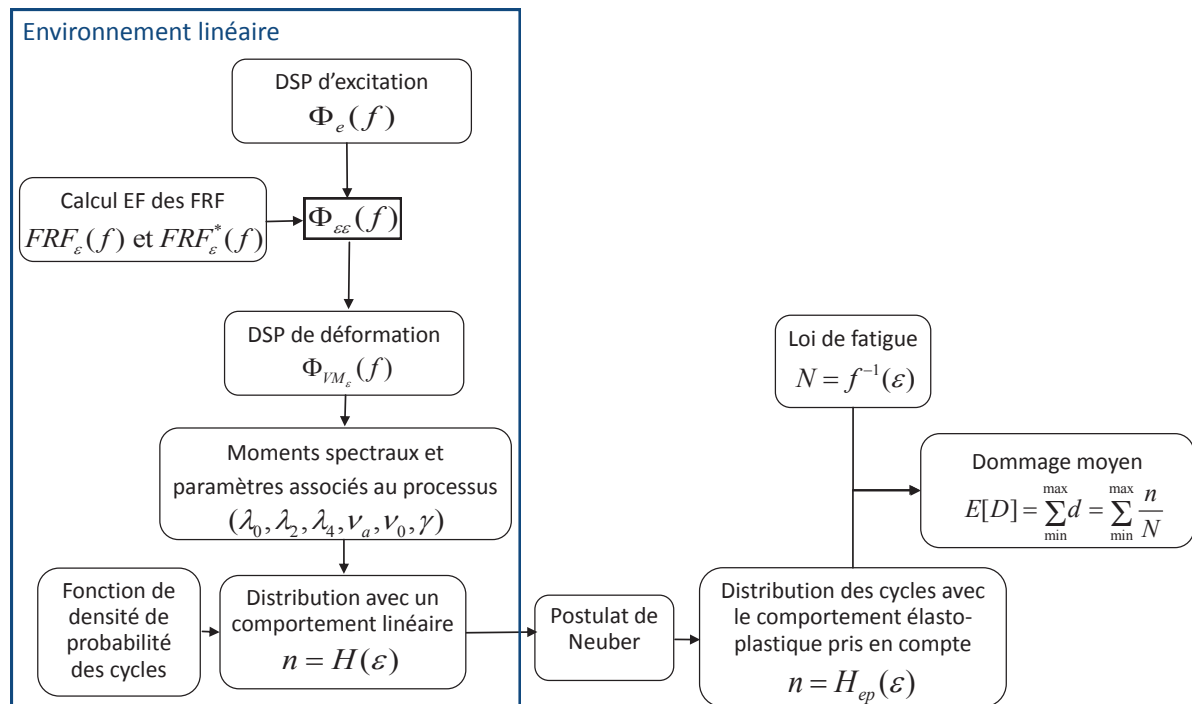


FIGURE 7.2 – Chaîne de calcul en fatigue multiaxiale formulée en déformation dans le cas d'un comportement élasto-plastique

## 7.2 Validation numérique

Comme dans le chapitre précédent, la modélisation proposée est testée numériquement par confrontation avec des SMC.

### 7.2.1 Présentation du plan d'expérience

Dans le cas d'un état de contrainte multiaxial, une multitude de paramètres peuvent influencer l'estimation de la durée de vie. Afin d'éviter de surcharger le plan d'expérience, le nombre de niveaux par paramètre sera limité à 2, sauf le paramètre valeur RMS de la DSP équivalente

de Von Mises qui a 3 niveaux (Table 7.1).

DSP équivalente de Von Mises			
RMS (MPa)	130	180	230

TABLE 7.1 – Définition des valeurs RMS de la DSP équivalente au sens de Von Mises

On a choisi comme type de DSP pour chaque composante, une DSP à 1DDL et une DSP à 2DDL qui sont l'une des représentations d'une réponse dynamique d'une structure à une excitation sur un ou deux modes propres. Elles sont d'ailleurs définies à partir d'une DSP d'excitation unitaire et les FRF en contrainte décrites en figure 7.3.

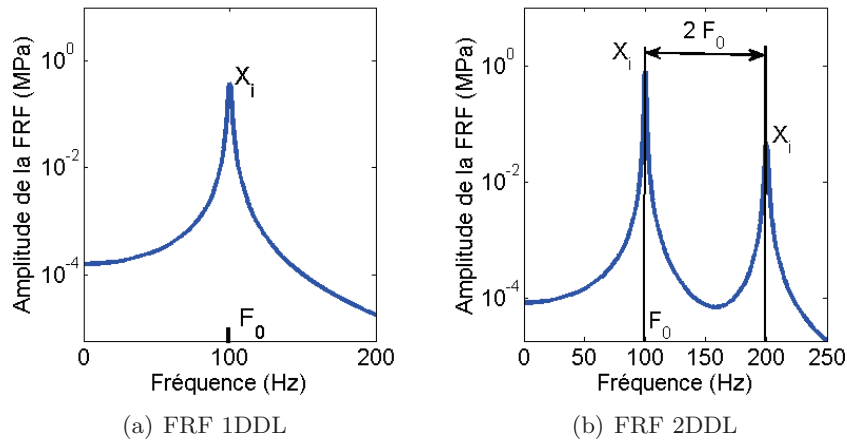


FIGURE 7.3 – Les différentes DSP choisies pour le plan d'expérience

	niveau 1	niveau 2
Type de sollicitation	Proportionnelle	Non-proportionnelle
Type de DSP	1 DDL	Mixte $\sigma_{xx}, \sigma_{yy} \Rightarrow 1$ DDL $\sigma_{xy} \Rightarrow 2$ DDL
Tendance	mode 1 ("flexion") $\sigma_{xx} \Rightarrow \rho = 0.95$ $\sigma_{yy} \Rightarrow \rho = 0.30$ $\sigma_{xy} \Rightarrow \rho = 0.30$	mode 2 ("Torsion") $\sigma_{xx} \Rightarrow \rho = 0.30$ $\sigma_{yy} \Rightarrow \rho = 0.15$ $\sigma_{xy} \Rightarrow \rho = 0.55$
Amortissement $X_i$	0.0025	0.0250

TABLE 7.2 – Définition des différents paramètres de l'ensemble des DSP (le total du nombre de jeux de paramètres est de 96)

Pour rappel, l'état de contraintes est considéré comme plan (surface libre de normale  $\vec{z}$ ), seules  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  sont non nulles. Donc,  $FRF_{\sigma}(f)$  est un tenseur de taille 1 x 3. Les amplitudes de ces FRF sont définies à partir de la valeur RMS de la  $DSP_{VM}$  et du paramètre

de pondération  $\rho$  qui favorise une prédominance de l'un ou l'autre mode dans la réponse. Le paramètre  $\rho$  est donné dans le tableau 7.2. Les autres paramètres tels que le type de sollicitation ou bien les valeurs d'amortissement  $X_i$  sont donnés dans le tableau 7.2.

En ce qui concerne le choix du matériau, nous avons conservé les mêmes paramètres que pour le chapitre 6. Le matériau est l'acier trempé revenu 30NiCrMo8, c'est également le matériau sélectionné par la suite pour effectuer des essais sur vibreur.

### 7.2.2 Présentation des chaînes de calcul

Dans le cas de ce plan d'expérience, deux logiciels vont être utilisés. Pour la chaîne de calcul des simulations de Monte-Carlo avec la méthode Wang & Brown, nous avons utilisé un logiciel du commerce [14] (En bleu sur la figure 7.4). En rouge et en vert sur la figure 7.4, les chaînes de calcul réalisées à partir du logiciel MATLAB R2010a. Pour des raisons de temps de calcul, il est difficile de garder un nombre de tirages de 3000 pour les simulations de Monte-Carlo. Le nombre de tirages est réduit à 20 et avec une période  $T= 600$  secondes. Étant donné le faible nombre de tirages, une étude sur le dommage moyen  $E[D]$  ou la durée de vie associé  $Tf$  peut être réalisée mais une étude sur les distributions des cycles ou de la dispersion des dommages est à proscrire car le nombre d'échantillons est trop faible pour établir de réelles tendances.

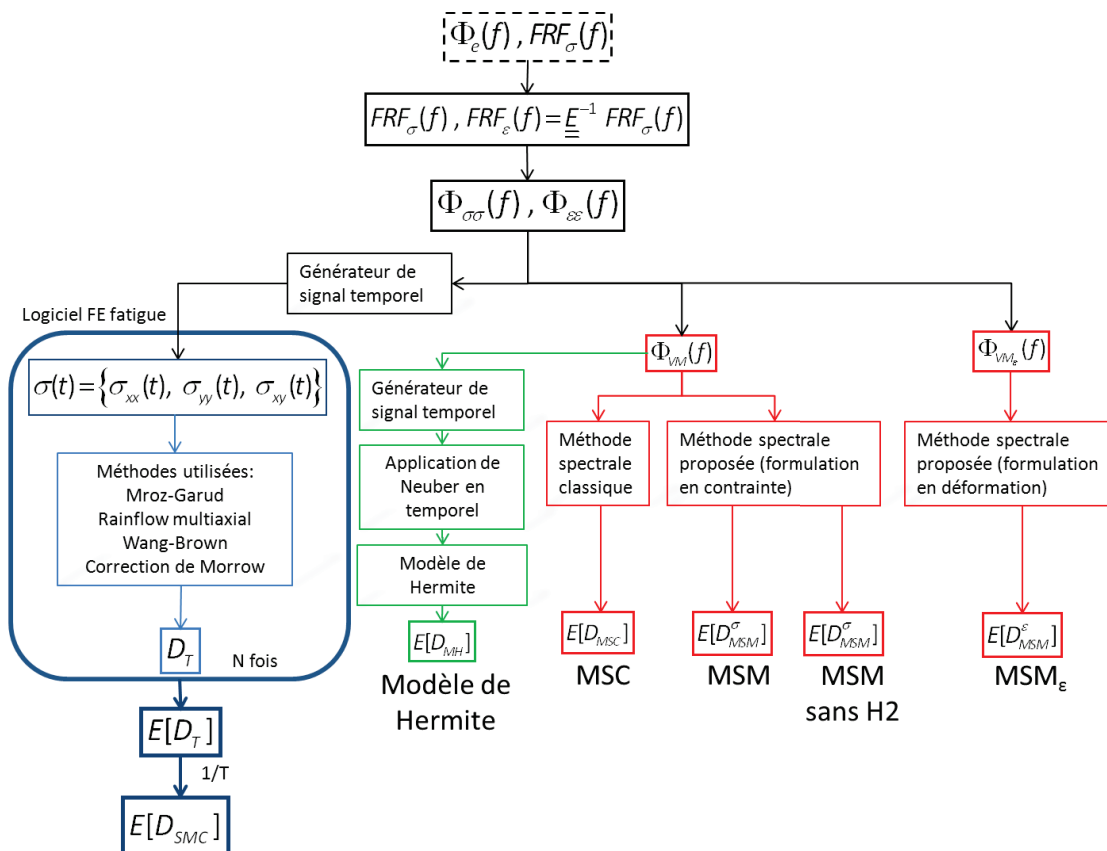


FIGURE 7.4 – Différentes chaînes de calcul pour le plan d'expérience avec un état de contraintes multiaxial plan

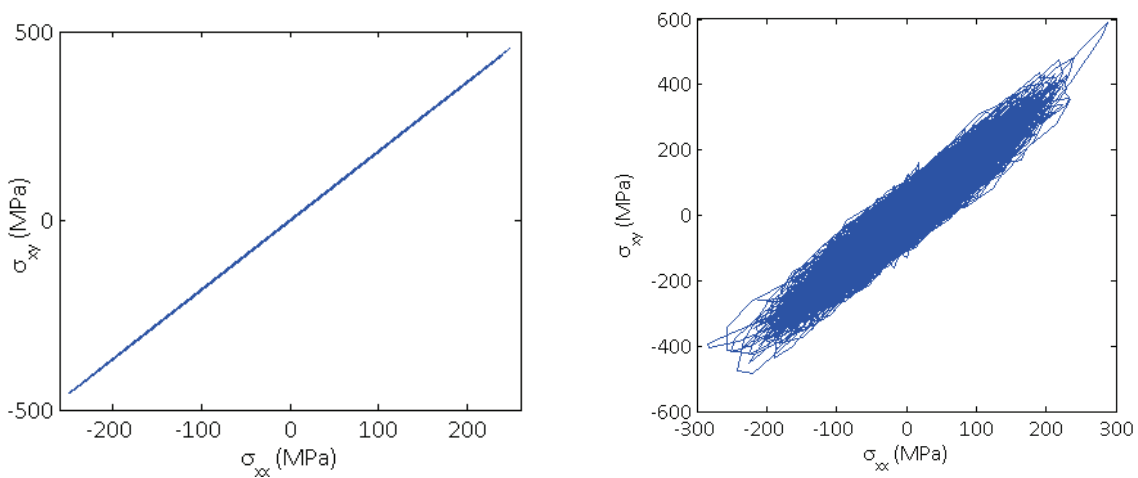


## Chapitre 7 : *Fatigue multiaxiale à grand et faible nombre de cycles dans le domaine spectral : prise en compte de la plasticité*

L'aspect proportionnel ou non-proportionnel du chargement dans le cas des simulations de Monte-Carlo est réalisé par le générateur de signal temporel. La méthode que nous avons adoptée pour générer des signaux proportionnels ou non proportionnels est la suivante :

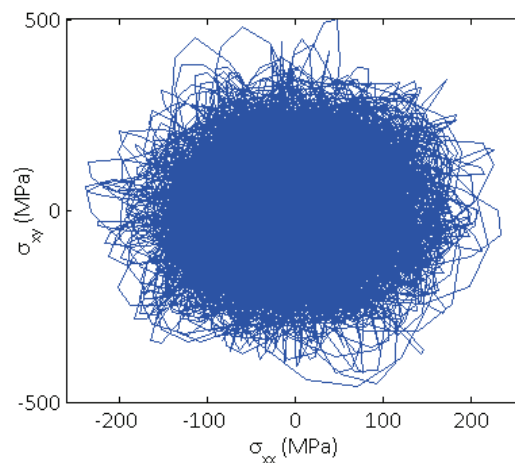
-Dans le cas de chargement proportionnel, nous avons attribué la même phase régénérée à toutes les composantes. (Figure 7.5(a) et 7.5(b)).

-Dans le cas de chargement non-proportionnel, nous avons attribué des phases différentes régénérées à chacune des composantes. (Figure 7.5(c)).



(a) Chargement proportionnel avec DSP 1DDL

(b) Chargement proportionnel avec des DSP mixtes



(c) Chargement non-proportionnel avec DSP 1DDL

FIGURE 7.5 – Différentes représentations dans l'espace des contraintes du trajet des chargement en fonction des paramètres sélectionnés

### 7.2.3 Résultats et observations

La figure 7.6 représente l'ensemble des résultats de durée de vie  $T_f$  du plan d'expérience pour les différentes méthodes étudiées. La fonction de densité de probabilité choisie pour représenter les résultats des méthodes spectrales et du modèle de Hermite est celle de Tovo & Benasciutti [15]. En ce qui concerne les simulations de Monte-Carlo, la méthode sélectionnée est celle de Wang-Brown [16] [17].

On constate sur la figure 7.6 que pour une durée de vie faible les durées de vie obtenues avec les méthodes spectrales classiques (MSC) s'éloignent des résultats des SMC. Alors que majoritairement, les autres méthodes donnent de bonne corrélations par rapport aux SMC quelle que soit la durée de vie. Néanmoins, les résultats de durées de vie obtenus avec le modèle de Hermite [18] [19] sont très dépendants des jeux de paramètres du plan et de plus, dans certains cas, les résultats sont encore moins bons qu'avec les méthodes spectrales classiques.

En ce qui concerne les méthodes spectrales modifiées avec les différentes formulations, la formulation en contrainte donne les meilleures prédictions de durée de vie par rapport aux SMC. Néanmoins, la formulation en déformation donne des résultats cohérents avec ceux des SMC. La définition de la déformation au sens de Von mises n'est pas universelle comme pour la contrainte au sens de Von Mises, et il n'est pas rare dans certains codes de trouver un version modifiée de celle-ci. La définition choisie dans notre cas peut-être retrouvée dans Lemaitre & Chaboche [11]. Néanmoins, cette définition n'est pas un avantage pour la méthode car elle donne des résultats de durée de vie majoritairement non-conservatifs vis-à-vis de la fatigue.

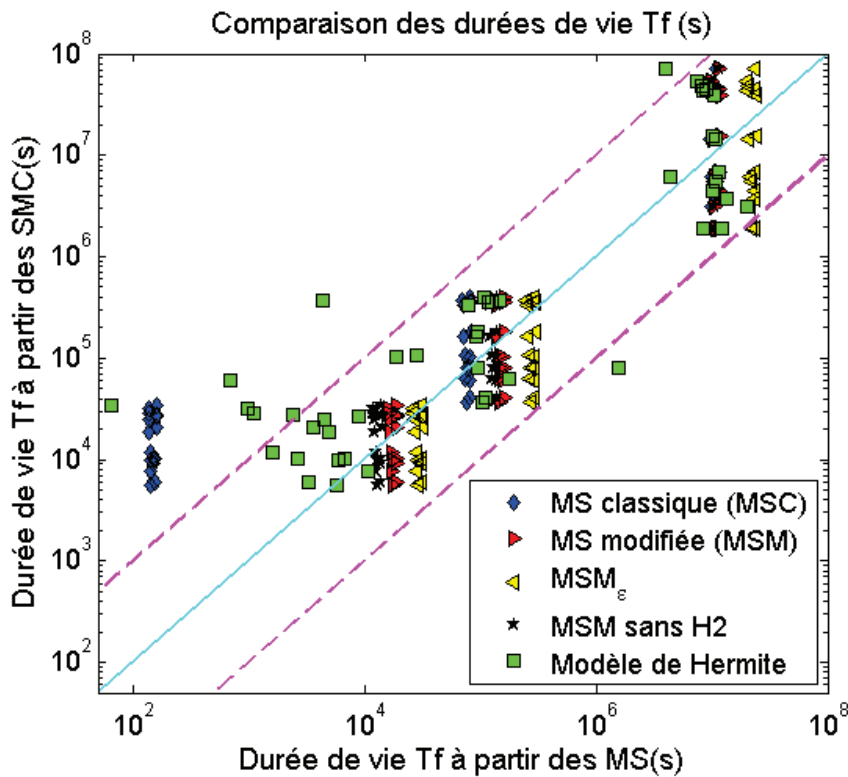


FIGURE 7.6 – Ensemble des résultats du plan d'expérience avec pour les méthodes spectrales la FDP de Tovo & Benasciutti

## Chapitre 7 : *Fatigue multiaxiale à grand et faible nombre de cycles dans le domaine spectral : prise en compte de la plasticité*

La figure 7.7 représente en 7.7(a) les résultats de durée de vie dans le cas où le chargement est proportionnel et en 7.7(b) les résultats de durée de vie dans le cas où le chargement est non-proportionnel. Cela permet de voir si le chargement impacte les méthodes de calcul. Dans le cas présent, ce paramètre n'a pas d'influence notable sur les méthodes spectrales ou le modèle de Hermite.

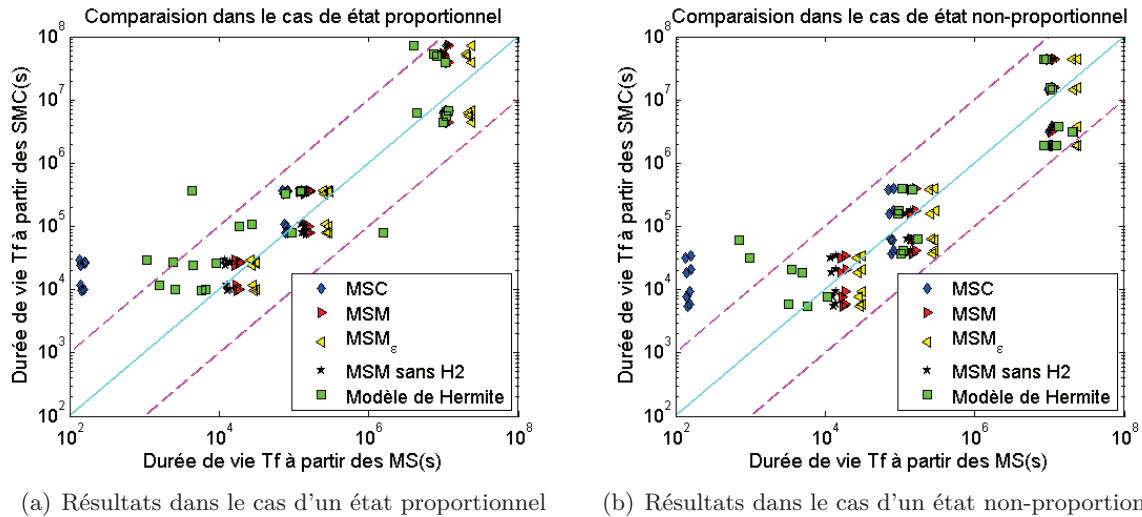


FIGURE 7.7 – Comparaison des durées de vie entre les méthodes étudiées et les SMC en fonction du type de pondération

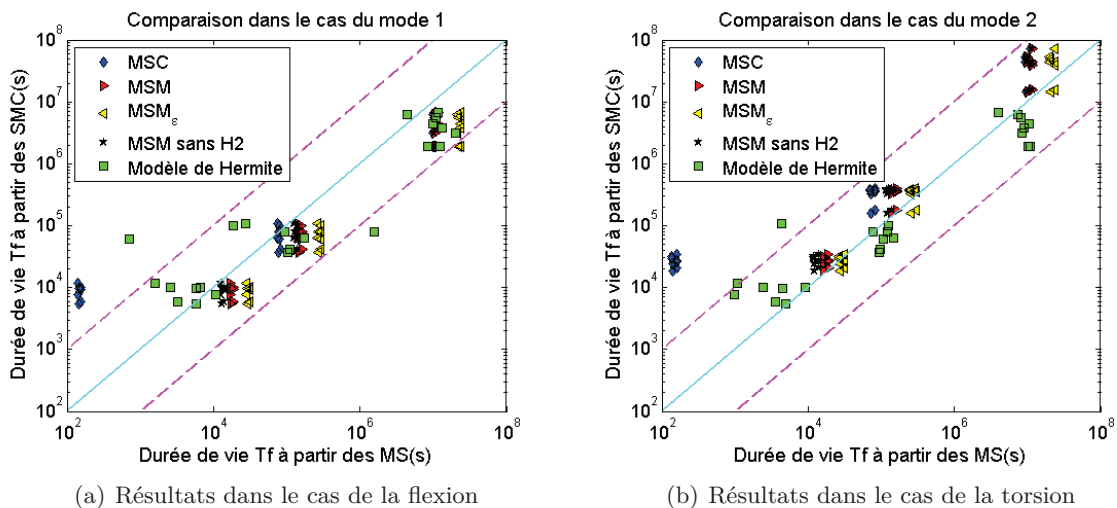


FIGURE 7.8 – Comparaison des durées de vie entre les méthodes étudiées et les SMC en fonction du paramètre de pondération

La figure 7.8 représente en 7.8(a) les résultats de durée de vie dans le cas d'une prédominance au phénomène du mode 1 et en 7.8(b) les résultats de durée de vie dans le cas d'une prédominance au phénomène du mode 2. Dans ce cas, on constate une influence de ce paramètre sur l'estimation des durées de vie avec les méthodes spectrales. Dans le cas du mode 1,

la prédiction de durée de vie est majoritairement non-conservative. Alors qu'à contrario pour le mode 2, les résultats avec les méthodes spectrales sont majoritairement conservatifs. Cela est principalement dû au fait que le poids des deux phénomènes n'est pas le même entre la définition de la contrainte équivalente de Von Mises et la méthode Wrang-Brown.

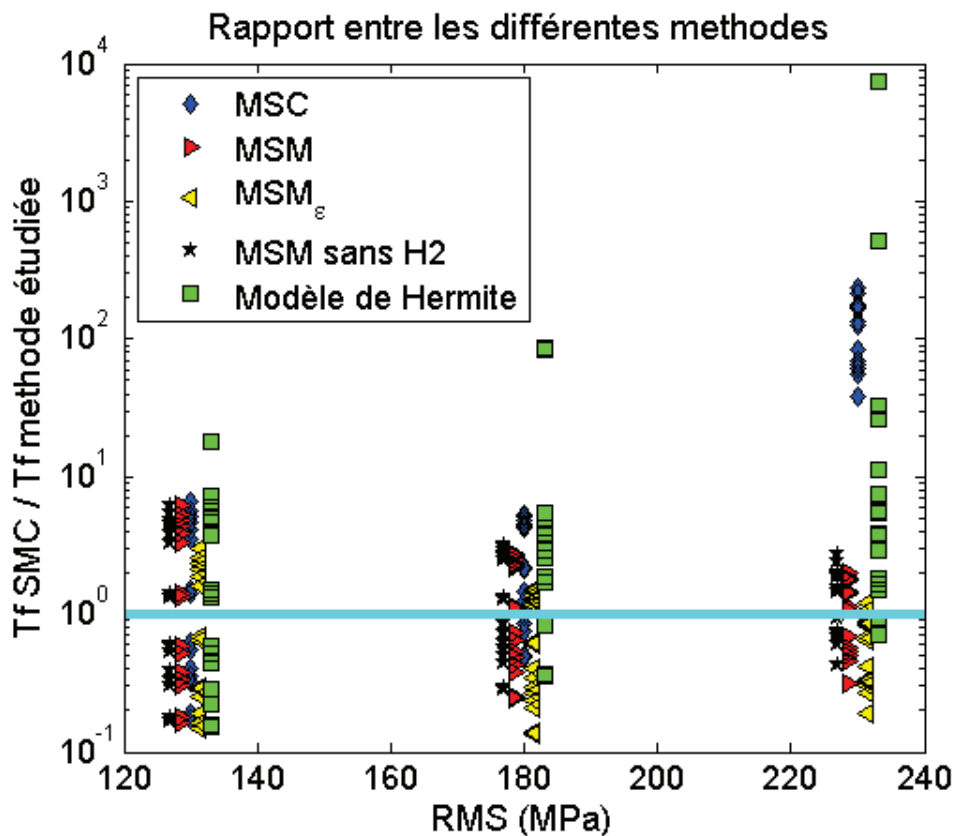


FIGURE 7.9 – Rapport des durées de vie avec la fonction de densité de probabilité de Dirlik

La figure 7.9 montre le rapport entre les durées de vie avec les méthodes étudiées par rapport aux durées de vie avec les SMC. Pour plus de clarté, les résultats ont été décalés de quelques MPa sur l'axe des abscisses par rapport à leur valeur réelle. On sait que plus la valeur RMS augmente plus le phénomène non-linéaire a de l'importance sur notre système. Cela est bien représenté sur la figure 7.9 car les méthodes spectrales classiques qui ne prennent pas en compte les phénomènes non-linéaires donnent des prédictions de plus en plus erronées par rapport aux SMC quand la valeur RMS augmente. Les méthodes spectrales modifiées quand à elles, donnent de bonnes corrélations quelle que soit la valeur RMS. Pour les méthodes spectrales modifiées formulées en déformation, les résultats obtenus sont assez proches des résultats des SMC mais avec une tendance à être non-conservatifs.

## **Conclusion**

Ce chapitre nous a permis de constater qu'il était possible d'introduire la méthode spectrale développée au chapitre 6 avec un critère d'équivalence tel que celui proposé par Preumont et Pitoiset, afin de prédire la durée de vie associée à un état de contrainte multiaxial.

Une formulation en déformation du critère d'équivalence a été proposée, les résultats obtenus avec ce critère sont moins précis qu'avec le critère formulé en contrainte, le critère pourrait être amélioré en prenant une définition de la déformation équivalente différente de celle sélectionnée dans notre cas. De plus, dans certains cas, seule l'information en déformation est accessible.

Les méthodes de la littérature donnent des résultats erronés en présence d'une non-linéarité comme pour les méthodes spectrales classiques ou pour certains cas de chargement comme pour le modèle de Hermite.

Les résultats obtenus avec le plan d'expérience sont prometteurs, néanmoins afin de valider la méthode sur un éventail plus large de cas, il est nécessaire d'éprouver cette méthode sur plus de niveaux et sur d'autres paramètres. Le travail présenté ici montre qu'il y a des méthodes alternatives aux méthodes formulées dans le domaine temporel pour le calcul de durée de vie.

## Bibliographie du chapitre 7

- [1] B. Weber, *Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1999.
- [2] M. Jabbado, *Fatigue polycyclique des structures métalliques : durée de vie sous chargements variables*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2006.
- [3] C. Krebs, *Endurance limitée des structures sous chargement multiaxial d'amplitude variable*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2010.
- [4] A. Banvillet, *Prévision de durée de vie en fatigue multiaxiale sous chargements réels : vers des essais accélérés*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2001.
- [5] X. Pitoiset and A. Preumont, "Spectral methods for multiaxial random fatigue analysis of metallic structures," *International Journal of Fatigue*, vol. 22, pp. 541–550, AUG 2000.
- [6] C. Wang and M. Brown, "On plastic deformation and fatigue under multiaxial loading," *Nuclear engineering and design*, vol. 162, pp. 75–84, MAR 1996. 12th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT-12), Stuttgart, Germany, AUG 15-20, 1993.
- [7] X. Pitoiset, *Méthodes spectrales pour l'analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux*. PhD thesis, Université libre de Bruxelles, 2001.
- [8] A. Preumont and X. Pitoiset, "Discussion : "Estimating the probability distribution of von Mises stress for structures undergoing random excitation,"" *Journal Of Vibration And Acoustics-Transactions Of The ASME*, vol. 122, p. 336, JUL 2000.
- [9] M. Bonte, A. de Boer, and R. Liebrechts, "Determining the von mises stress power spectral density for frequency domain fatigue analysis including out-of-phase stress components," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 302, pp. 379–386, Apr. 2007.
- [10] S. Lambert, E. Pagnacco, and L. Khalij, "A probabilistic model for the fatigue reliability of structures under random loadings with phase shift effects," *International Journal of Fatigue*, vol. 32, pp. 463–474, FEB 2010.
- [11] J. Lemaitre and J. L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1996.
- [12] H. Rognon and al., "Formulation d'une méthode spectrale en déformations pour le calcul du dommage en fatigue," in *SF2M*, 2011.
- [13] H. Neuber, "Theory of stress concentration for shear-strained prismatic bodies with arbitrary nonlinear stress- strain law.," *Journal Appl. Mech.*, vol. 28, pp. 544–551, 1961.
- [14] A. Halfpenny, "A frequency domain approach for fatigue life estimation from finite element analysis," vol. 167-1, pp. 401–410, 1999. 3rd International Conference on Damage Assessment of Structures (DAMAS 99), DUBLIN, IRELAND, JUN 28-30, 1999.
- [15] D. Benasciutti, *Fatigue analysis of random loadings*. PhD thesis, University of Ferrara, DEC 2004.

- [16] C. Wang and M. Brown, “Life prediction techniques for variable amplitude multiaxial fatigue .1. Theories,” *Journal of engineering materials and technology-transactions of the ASME*, vol. 118, pp. 367–370, JUL 1996.
- [17] C. Wang and M. Brown, “Life prediction techniques for variable amplitude multiaxial fatigue .2. Comparison with experimental results,” *Journal of engineering materials and technology-transactions of the ASME*, vol. 118, pp. 371–374, JUL 1996.
- [18] S. Winterstein, “Nonlinear vibration models for extremes and fatigue,” *Journal Of Engineering Mechanics-ASCE*, vol. 114, pp. 1772–1790, OCT 1988.
- [19] S. Winterstein, “Non-Normal Responses And Fatigue Damage,” *Journal Of Engineering Mechanics-ASCE*, vol. 111, no. 10, pp. 1291–1295, 1985.

## Chapitre 8

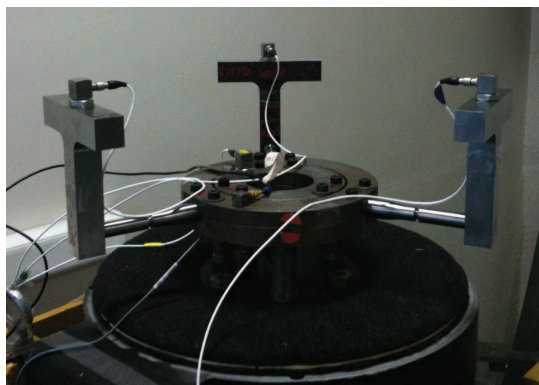
# Étude expérimentale et numérique

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Présentation de l'éprouvette . . . . .</b>	<b>124</b>
8.1.1	Géométrie . . . . .	124
8.1.2	Caractéristiques du matériau . . . . .	126
8.1.3	État de surface et géométrie en fond d'entaille . . . . .	128
<b>8.2</b>	<b>Moyen d'essai . . . . .</b>	<b>128</b>
8.2.1	Principe de fonctionnement . . . . .	128
8.2.2	Principe de l'asservissement . . . . .	130
8.2.3	Critère d'arrêt des essais en fatigue . . . . .	131
<b>8.3</b>	<b>Analyse dynamique par élément finis et étude des contraintes - déformations locales . . . . .</b>	<b>132</b>
8.3.1	Discrétisation temporelle et spatiale . . . . .	133
8.3.2	Caractéristiques dynamiques et variables locales dans l'entaille . . . . .	133
	<b>Bibliographie du chapitre 8 . . . . .</b>	<b>138</b>

---



### Résumé

---

Une grande partie des travaux a porté sur l'étude et la réalisation d'une éprouvette permettant de valider expérimentalement les différentes approches décrites jusqu'ici. La problématique est de développer une éprouvette qui remplit toutes les hypothèses nécessaires à la mise en oeuvre des méthodes de calcul en fatigue.

---



## Introduction

Nous présentons ici toutes les données concernant les essais en fatigue vibratoire. Dans le cadre de la thèse, nous avons choisi de réaliser des essais car ceux-ci sont assez rares dans la littérature et permettent de confronter les méthodes spectrales à des essais réels dont on maîtrise les paramètres. De plus, une double corrélation avec les simulations numériques est réalisée pour la méthode développée.

Ces essais permettront notamment de valider le choix de la méthode de correction plastique, dans notre cas, les méthodes du type Neuber.

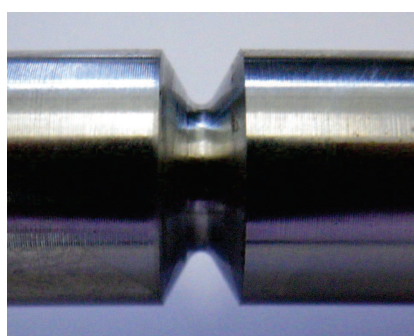
Au cours du chapitre seront présentés l'éprouvette utilisée pour les essais, le moyen d'essai avec sa chaîne de commande, les moyens de détection de fissure et enfin le modèle éléments finis de l'éprouvette qui permettra de comparer les durées de vie expérimentales avec les prédictions obtenues par les différentes méthodes étudiées.

## 8.1 Présentation de l'éprouvette

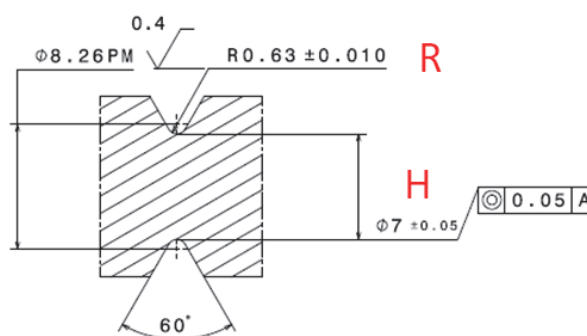
La conception de l'éprouvette a fait l'objet d'une étude approfondie. Celle-ci a été réalisée de sorte que selon l'orientation de la masselotte associée à l'éprouvette cylindrique, le comportement dynamique et le mode de défaillance sont modifiés (Figure 8.14).

### 8.1.1 Géométrie

On a cherché une géométrie d'éprouvette qui répondait à plusieurs critères. Le premier est le respect du postulat de Neuber. L'éprouvette doit contenir une zone de plasticité confinée et l'amorce en fatigue doit se situer dans cette zone. Pour répondre à cette problématique, nous avons considéré une éprouvette avec une entaille (Figure 8.1) qui engendre un coefficient de concentration de contraintes en flexion de 2,15.



(a) Photo de l'entaille sur un éprouvette avant essai



(b) plan de l'entaille de l'éprouvette

FIGURE 8.1 – Photo et schéma de l'entaille pour l'éprouvette de fatigue

Un autre critère est que seul le comportement élasto-plastique du matériau doit apporter une non-linéarité. C'est pour cela qu'on a choisi une éprouvette volumique (cf figure 8.2). En effet dans une étude préliminaire [1], nous avons remarqué que lors d'essais en fatigue vibratoire

## Présentation de l'éprouvette

d'une éprouvette réalisée en utilisant une tôle en acier, celle-ci était sujette aussi bien à des non-linéarités matériau que dynamiques dues à des grands débattement et à une géométrie favorisant l'apparition de l'amortissement dû à l'air qui est une fonction des niveaux d'excitations.

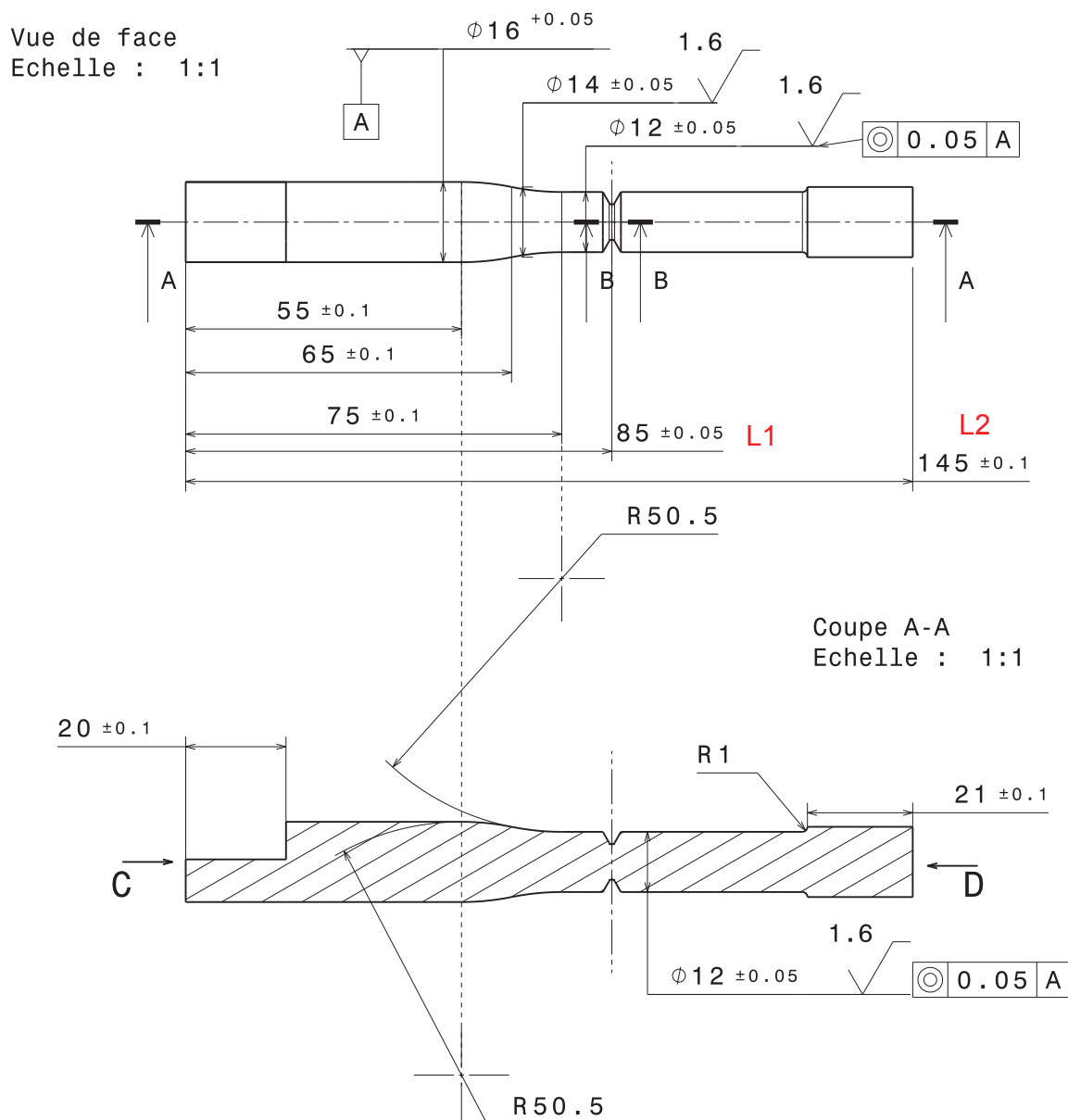


FIGURE 8.2 – Plan partiel de l'éprouvette de fatigue

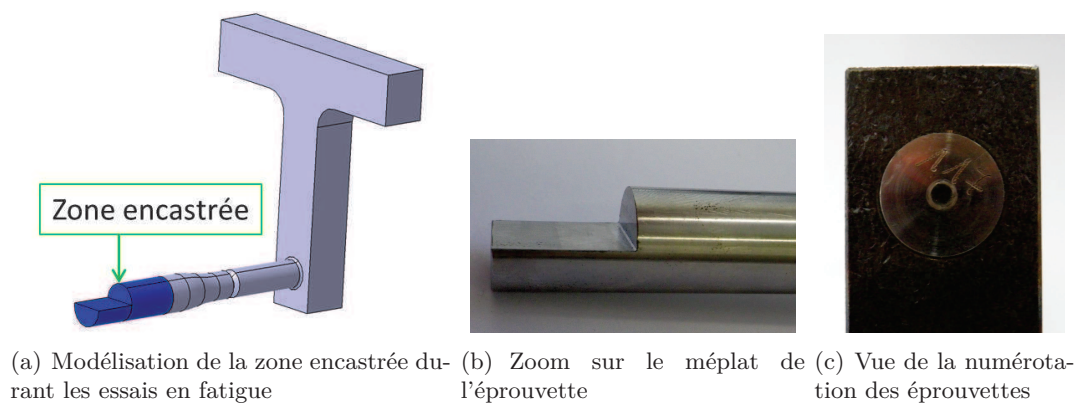
Nous avons cherché à avoir plusieurs modes propres de la structure sur une bande de fréquence relativement faible. Ces modes propres devaient être de différents types (flexion ou torsion) ainsi que permettre différents états de contraintes (uniaxial ou multiaxial). Pour répondre à cette problématique nous avons placé une masselotte à l'une des extrémités de l'éprouvette. L'assemblage de deux éléments est réalisé par frettage pour garantir un transfert total des efforts dynamiques durant les essais vibratoires.



(a) Vue globale de l'éprouvette de fatigue (b) Vue sur la zone de frettage entre la partie cylindrique et la masselotte

FIGURE 8.3 – Différentes vues de l'éprouvette de fatigue

Plusieurs itérations ont été nécessaires, afin de résoudre certains problèmes rencontrés durant les essais préliminaires (exemple : fretting dans l'encastrement de l'éprouvette). Les figures 8.3 et 8.4 donnent la représentation finale de l'éprouvette retenue pour les essais de fatigue vibratoire. L'annexe D donne accès au plan complet de l'éprouvette et de l'interface d'encastrement. Le choix d'une éprouvette "académique" par rapport à une pièce mécanique réelle (type équerre) offre certains avantages comme la possibilité de contrôler plus finement la chaîne d'usinage et ainsi la dispersion géométrique de l'entaille qui peut avoir, dans le cas d'une concentration de contraintes élevée, un impact visible sur la dispersion des durées de vie expérimentales. Les figures 8.4(a) et 8.4(b) montrent la zone d'encastrement de l'éprouvette. Elle se compose de deux parties, une partie avec un méplat afin d'empêcher les rotations de l'éprouvette et une partie cylindrique pour réaliser un encastrement le plus parfait possible. Comme on peut le constater sur la figure 8.4(c), chaque éprouvette est référencée par un identifiant.



(a) Modélisation de la zone encastrée durant les essais en fatigue (b) Zoom sur le méplat de l'éprouvette (c) Vue de la numérotation des éprouvettes

FIGURE 8.4 – différentes vues sur les particularités de l'éprouvette

### 8.1.2 Caractéristiques du matériau

La partie cylindrique de l'éprouvette est réalisé en acier 30NiCrMo8 alors que la masselotte est réalisé en acier XC42. Les principales caractéristiques matériau de l'acier trempé revenu

30NiCrMo8 [2] sont réunies dans les tableaux 8.1 et 8.2.

Module Young	Coefficient de Poisson	Limite d'élasticité	Limite à rupture	Exposant d'écrouissage	Coefficient de résistance plastique
195 GPa	0.33	945 MPa	1135 MPa	0.089	1410 MPa

TABLE 8.1 – Propriétés de l'acier 30NiCrMo8 (source [2])

Paramètres $\sigma$ -N		Paramètres $\varepsilon$ -N			
k	C	b	c	$\varepsilon_f$	$\sigma_f$ (MPa)
11.764	3.659*10e36	-0.085	-0.752	1.741	1750.000

TABLE 8.2 – Propriétés en fatigue de l'acier 30NiCrMo8 (source [2])

Les paramètres en fatigue donnés dans le tableau 8.2 correspondent à l'équation de Basquin et Manson-Coffin-Basquin. La pente de la droite de basquin a été ajustée sur la pente de la partie élastique de l'équation de Manson-Coffin-Basquin.

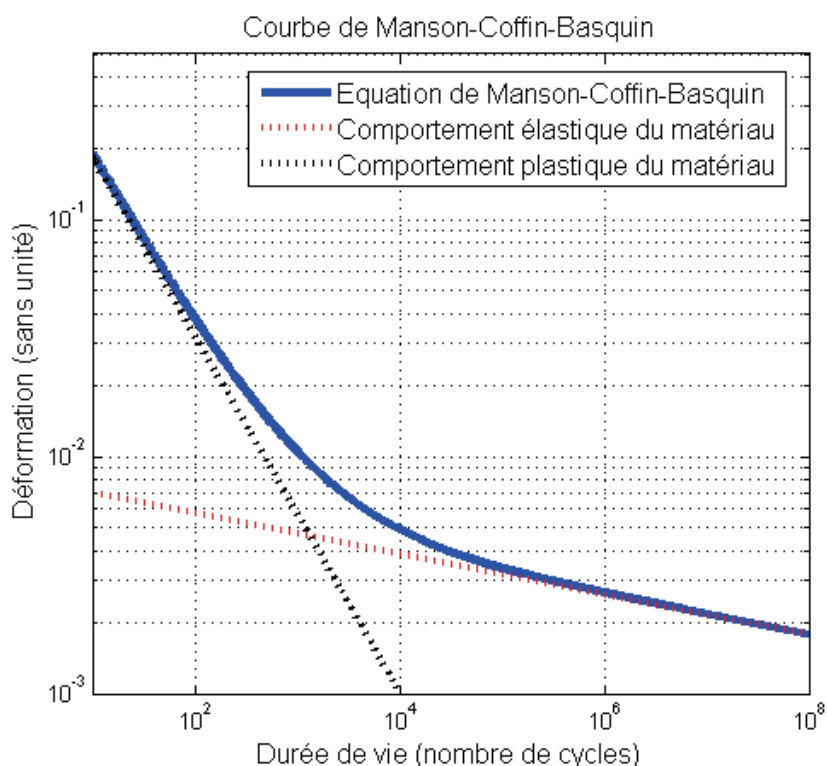


FIGURE 8.5 – Représentation de la courbe de Manson-Coffin-Basquin pour l'acier 30NiCrMo8

### 8.1.3 État de surface et géométrie en fond d'entaille

La partie entaillée de l'éprouvette a été rectifiée afin de garantir un état de surface et une géométrie en fond d'entaille conformes aux plans. Des essais préliminaires nous ont montré que l'entaille était un élément déterminant pour la répétabilité des essais. L'état de contraintes est sensible à l'amortissement et au facteur de concentration de contraintes, soit la géométrie en fond l'entaille. Nous avons effectué sur l'ensemble du lot d'éprouvettes des mesures dimensionnelles et de rugosité [3]. Le Tableau 8.3 donne la synthèse des mesures effectuées (moyenne et écart-type) sur l'ensemble des 120 éprouvettes. Les cotes L1, L2, H et R mesurées dans le tableau 8.3 sont définies sur les figures 8.1(b) et 8.2.

Cote	L1(mm)	L2(mm)	H (mm)	R(mm)	$R_a$ ( $\mu\text{m}$ )
Cote nominale + tolérance	$85^{+0.05}_{-0.05}$	$145^{+0.1}_{-0.1}$	$7^{+0.05}_{-0.05}$	$0.63^{+0.01}_{-0.01}$	0.4
Moyenne	85.01	144.96	6.98	0.57	0.53
Ecart-type	0.02	0.04	0.01	0.01	0.03

TABLE 8.3 – Synthèse des contrôles dimensionnels sur le lot d'éprouvette en fatigue

Les éprouvettes réelles présentent de faibles écarts avec les plans et tolérances, néanmoins, l'information la plus importante est la dispersion faible entre les éprouvettes, car il suffira d'ajuster le modèle numérique aux cotes mesurées pour éviter une dispersion entre les durées de vie expérimentales et numériques. Alors qu'une dispersion entre les éprouvettes serait plus difficile à prendre en compte sur le modèle numérique.

## 8.2 Moyen d'essai

### 8.2.1 Principe de fonctionnement

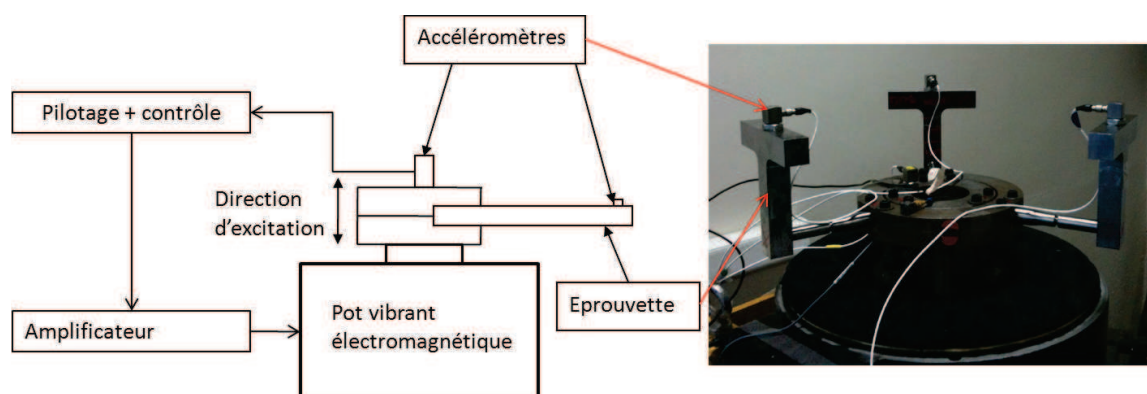
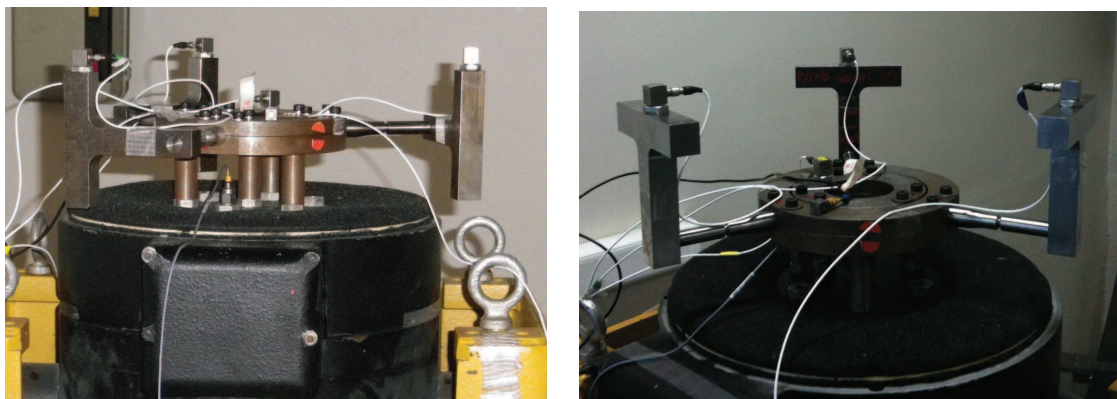


FIGURE 8.6 – Représentation schématique du banc d'essai pour les essais en fatigue

La figure 8.6 schématise l'environnement expérimental des essais en fatigue. Cet environnement est assez simple, il est composé d'une PC avec un système de pilotage et d'asservissement,

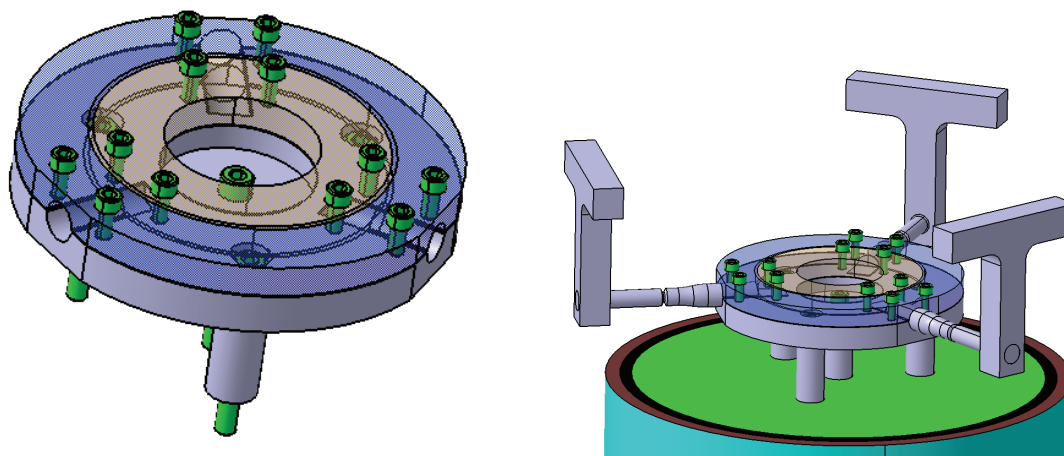
d'un vibreur avec son amplificateur et enfin d'accéléromètres pour mesurer l'excitation vue par les éprouvettes.



(a) banc d'essai avec la configuration pour solliciter le premier et troisième mode de la structure (b) banc d'essai avec la configuration pour solliciter le deuxième mode de la structure

FIGURE 8.7 – Photos des différentes configurations possibles des éprouvettes en fatigue

Comme il a été signalé en première partie de ce chapitre, selon l'orientation de la masselotte, les modes pouvant être sollicités sont différents. La Figure 8.7(b) représente un essai de fatigue vibratoire qui sollicite le deuxième mode de l'éprouvette. Quand à la figure 8.7(a), elle représente un essai en fatigue vibratoire qui sollicite le premier mode propre de l'éprouvette.



(a) CAO de l'interface

(b) CAO de l'interface avec des éprouvettes de fatigue

FIGURE 8.8 – Différentes représentations CAO de l'interface d'encastrement

Les éprouvettes sont couplées à un exciteur électromagnétique (pot vibrant) par une interface d'encastrement représentée en figure 8.8. L'interface compte trois pièces principales dans lesquelles sont encastrées 3 éprouvettes simultanément. La partie haute de l'interface est composée de deux parties qui viennent "emprisonner" l'éprouvette dans l'empreinte de la partie basse



de l'interface. L'interface haute est composée de deux parties car il y a deux zones distinctes de l'éprouvette à encaster, le méplat et une partie du cylindre (figure 8.9). Cela permet un meilleur positionnement de l'éprouvette pour l'essai. Le serrage des vis est réalisé à l'aide d'une clé dynamométrique, en respectant le couple de serrage des vis sélectionnées (M6 de classe 12.9).

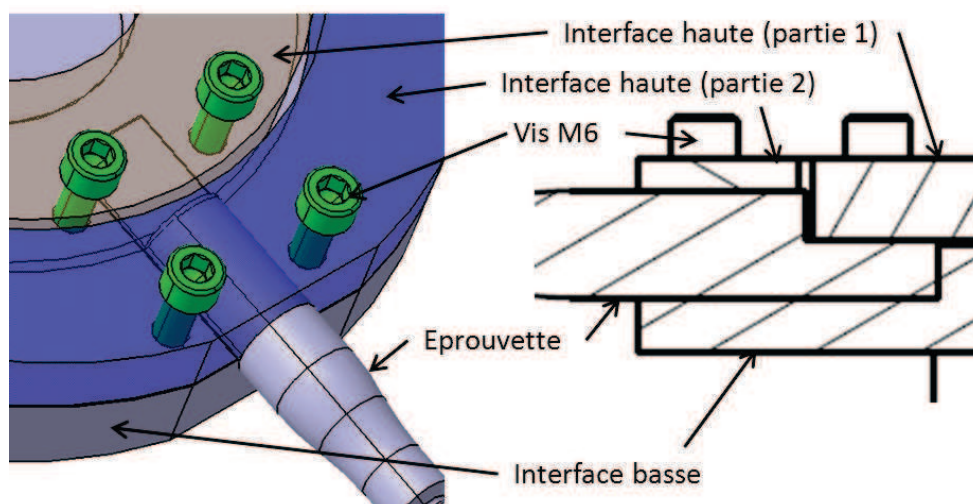


FIGURE 8.9 – Représentation de la zone d'encastrement de l'interface avec l'éprouvette

Chaque essai est composé de trois éprouvettes qui sont en symétrie de révolution par rapport à l'axe d'excitation. Cette configuration permet d'auto-équilibrer l'ensemble des efforts dynamiques radiaux générés par les masselottes et évite de transmettre à la bobine du vibreur des efforts radiaux importants qui peuvent le détériorer. Ce choix technologique impacte directement les essais car il existe un couplage dynamique entre chaque éprouvette d'un essai, néanmoins, le fait que le pot vibrant soit asservi durant les essais en fatigue et que l'excitation soit un bruit blanc réduisent l'influence du couplage.

### 8.2.2 Principe de l'asservissement

Dans notre cas, la consigne est sous forme de DSP d'accélération. Le système de pilotage se compose d'un PC avec le logiciel VR (Vibration Reseach software) [4] associé à un module d'asservissement VR (Vibration Reseach hardware) qui va générer un signal aléatoire avec les caractéristique de la DSP de consigne. Ce signal est amplifié et transmis au pot vibrant. Afin de contrôler que l'excitateur respecte la consigne envoyée et qu'il ne diverge pas, un retour d'information est réalisé dans notre cas par un accéléromètre placé sur la plateforme du vibreur. L'information transmise par l'accéléromètre est traitée par le module d'asservissement afin d'extraire des données à comparer avec la consigne, voir figure 8.10. Dans notre cas, il y a deux entités qui sont la DSP elle-même et la valeur RMS de la DSP. Le module reajuste la consigne en fonction des informations mesurées à  $t - \Delta t$ .

les borne inférieure et supérieure de l'asservissement sont propres à chaque type d'essai en fatigue. Les essais en fatigue se composent de plusieurs niveaux d'excitation, si le niveau **a** est supérieur au niveau **b**, alors la borne inférieure du niveau **a** sera supérieure à la borne supérieure

du niveau b.

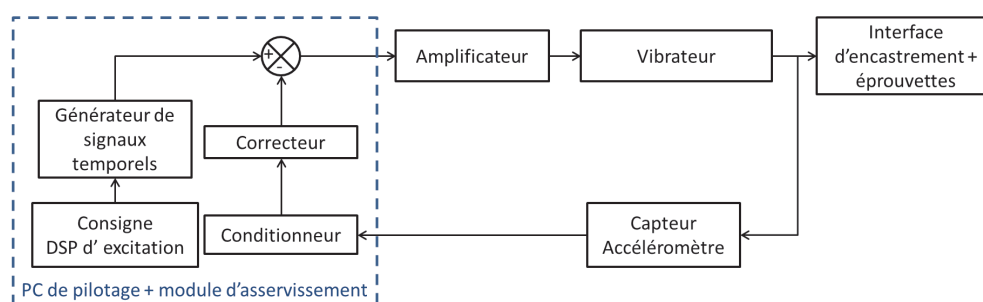


FIGURE 8.10 – Représentation de la chaîne d'asservissement du moyen d'essai

### 8.2.3 Critère d'arrêt des essais en fatigue

L'un des choix que nous avons dû faire pour les essais vibratoires en fatigue est le critère d'arrêt et le mode de détection. Concernant le critère, plusieurs choix s'offrent à nous : aller jusqu'à la rupture de l'éprouvette ou bien arrêter l'essai à l'amorçage de la fissure. Dans notre cas nous avons choisi la détection de l'amorce de la fissure car premièrement, la loi E-N est établie à l'amorce de fissure et deuxièmement, la fissure modifie la rigidité de l'éprouvette qui provoque une forte modification de la fréquence propre et de l'amortissement pouvant grandement interagir dans l'estimation de durée de vie, voire arrêter la propagation de la fissure.

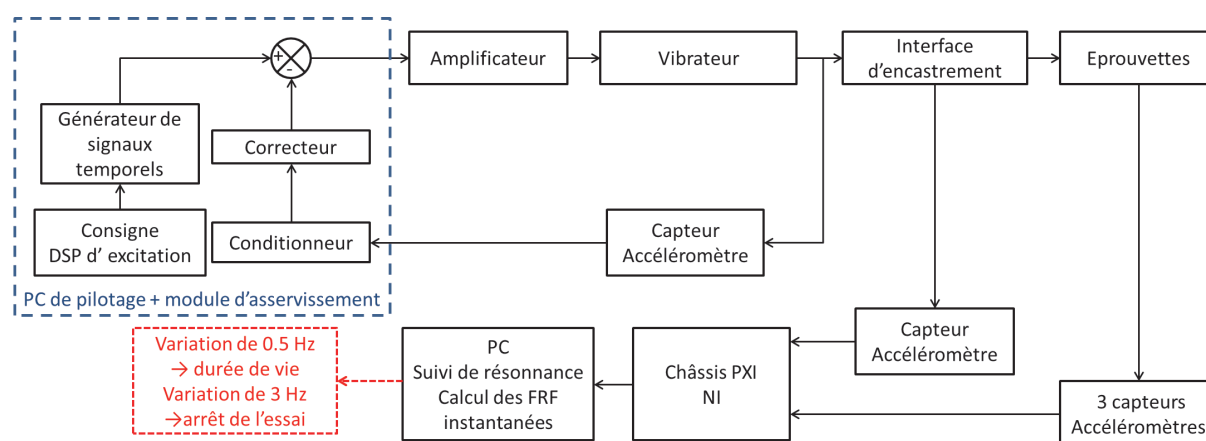


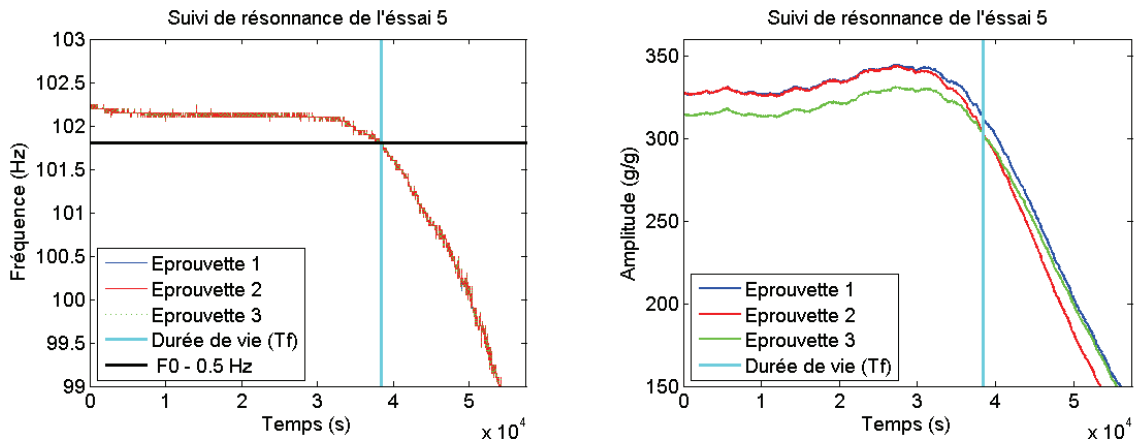
FIGURE 8.11 – Représentation de la chaîne de pilotage et de détection de fissure

En ce qui concerne les moyens pour détecter l'amorce d'une ou plusieurs fissures dans une entaille, il sont assez réduit car l'accès difficile en fond d'entaille fait que des procédés classiques comme le contrôle par ressuage ou le contrôle par traitement d'image avec une camera rapide sont inopérants. Afin de détecter l'amorce de fissure, nous nous sommes intéressés aux entités dynamiques de notre structure. Comme nous avons signalé précédemment, l'apparition d'une fissure modifie la rigidité. Ce qui entrainera une modification de la fréquence propre. Donc afin de détecter l'amorce de fissure et le début de la propagation de fissure, nous allons mesurer la fré-



quence et l'amplitude du mode propre étudié de chaque éprouvette au cours des essais en fatigue.

Un logiciel de suivi de la résonance développé sous Labview est intégré à la chaîne de pilotage comme décrit en figure 8.11. Sur une période définie par l'utilisateur, la fonction de réponse en fréquence de chaque éprouvette est calculée. Cela permet d'extraire la fréquence et l'amplitude du mode. La figure 8.12, illustre le suivi de la fréquence et de l'amplitude du deuxième mode de la structure. On constate une nette modification de la fréquence et de l'amplitude du mode quand la fissure s'amorce. Pour cet essai, la durée de l'essai est d'environ 15 heures pour une amorce de fissure au bout de 11 heures. On constate aussi que la mesure de la fréquence est nettement plus stable que pour l'amplitude. C'est pour cela que nous avons basé la détermination de la durée de vie sur une déviation de la fréquence propre. Pour les essais, la durée de vie est la durée entre le début de l'essai et le moment où la fréquence propre a dévié de 0.5 Hz. Comme pour la valeur  $R_e$ , la détermination de la valeur de durée de vie de nos essais dépend de la convention choisie. Néanmoins, Cette convention prend en compte la résolution spectrale choisie pour nos calculs ainsi que les variations fréquentielles dues à la chaîne de pilotage et au rodage des éprouvettes.



(a) Suivi de la fréquence du mode sollicité durant un essai en fatigue (b) Suivi de l'amplitude du mode sollicité durant un essai en fatigue

FIGURE 8.12 – Capture graphique du suivi en fréquence et en amplitude d'un essai en fatigue

### 8.3 Analyse dynamique par élément finis et étude des contraintes - déformations locales

Afin de comparer les différentes méthodes numériques décrites jusqu'à présent avec les essais, il est nécessaire de disposer d'une modélisation éléments finis de l'éprouvette. Cette modélisation permet d'extraire en tous points de la structure les fonctions de réponse en fréquence des contraintes et des déformations à une excitation unitaire. Cette modélisation a été réalisée grâce au logiciel ABAQUS. Après extraction des contraintes et déformations en tous points de la structure, les prédictions de durée de vie seront réalisées sous MATLAB.

### 8.3.1 Discrétisation temporelle et spatiale

Afin de décrire au mieux les fonctions de réponses en fréquences associées à chaque noeud, il est essentiel de vérifier que la modélisation a convergé tant d'un point de vue fréquentiel que spatial. Si la discrétisation spatiale n'est pas assez fine, l'interpolation des valeurs de contraintes ou de déformations obtenues pour une fréquence donnée sera erronée. Il en est de même avec la discrétisation fréquentielle, si le pas fréquentiel est trop grossier, l'amplitude du mode obtenue peut en être tronquée.

Comme on peut le constater dans le tableau 8.4, l'amortissement pour les deux premiers modes est très faible, inférieur à 0.2 %, pour cette raison, le pas fréquentiel choisi autour du mode étudié d'une bande de 5 Hz est égal à 0.05 Hz. De plus, un des pas de calcul de la FRF est la valeur de la fréquence propre, cela est réalisé par itération avec l'analyse modale.

Afin d'assurer la convergence spatiale de la modélisation, nous avons réalisé des calculs successifs avec une taille de maille réduite de moitié à chaque itération cela dans la zone critique (l'entaille). Les types éléments utilisés pour la modélisation sont des C3D8R, des éléments hexagonaux linaires à 8 noeuds avec une intégration réduite. Avec ce type d'éléments, la taille de maille en fond d'entaille (profondeur x longueur x largeur) est  $180 \times 180 \times 50 \mu m$  (figure 8.13).

Si on réalise une synthèse de la modélisation qui a été retenue, elle contient 260000 noeuds avec 88335 noeuds qui sont situés dans l'entaille, soit environ 1/3 du nombre de noeuds dans l'entaille pour seulement 5 % du volume de l'éprouvette.

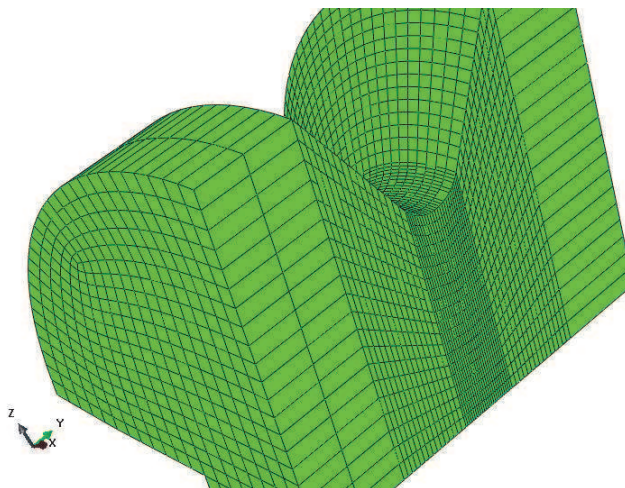


FIGURE 8.13 – Visualisation du maillage de l'éprouvette dans la zone de l'entaille (représentation de 1/4 de l'entaille)

### 8.3.2 Caractéristiques dynamiques et variables locales dans l'entaille

L'analyse expérimentale et numérique montre que dans la bande [50-500 Hz] l'éprouvette contient 4 modes propres. Deux modes de flexion et deux modes de flexion-torsion. Dans notre cas, nous nous concentrons sur les trois premiers modes car les essais en fatigue vont porter

principalement sur ces modes. Dans le cas d'une excitation selon  $\vec{Z}$ , si la masselotte est symétrique par rapport au plan XY, les deux modes pouvant être sollicités sont le premier et le troisième mode qui sont les modes de flexion-torsion (figure 8.14 1<sup>er</sup> et 3<sup>ème</sup> mode). Toujours dans le cas d'une excitation selon  $\vec{Z}$ , mais cette fois avec la masselotte symétrique au plan XZ, le mode sollicité est le deuxième mode propre de l'éprouvette qui est un mode de flexion (figure 8.14 2<sup>ème</sup> mode). La figure 8.14 représente la déformée des trois premiers modes de l'éprouvette dans la configuration précédemment citée.

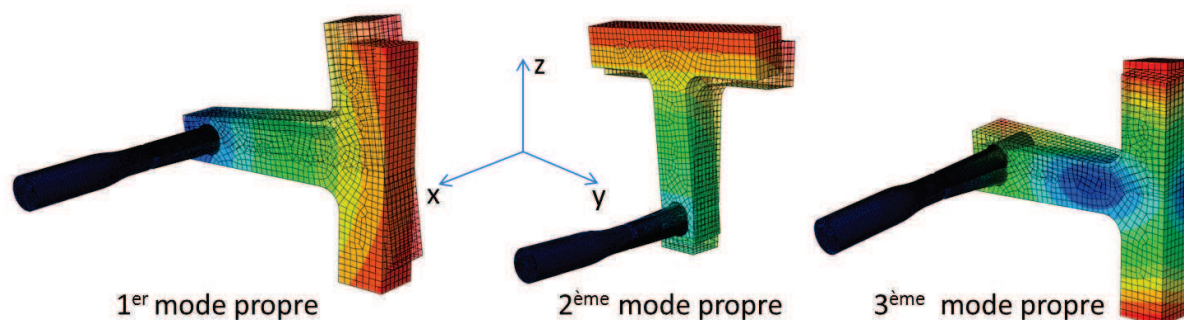


FIGURE 8.14 – Représentation des déformées modales de l'éprouvette en fatigue pour les modes étudiés

Afin de réaliser un comparatif cohérent, la modélisation éléments finis a été recalée sur des données expérimentales comme l'amortissement et les cotes moyennes réelles des éprouvettes. Les valeurs expérimentales de l'amortissement ont été obtenues à la fois par une caractérisation modale sur pot vibrant ainsi qu'en réalisant un ensemble de moyennes sur les essais en fatigue. Les conditions aux limites ont fait l'objet d'une étude préliminaire durant les essais de validation de l'éprouvette. Au final, l'encastrement de l'éprouvette n'est réalisé que sur les éléments de surface de la zone d'encastrement (figure 8.15). Le tableau 8.4 synthétise l'ensemble des données numériques et expérimentales.

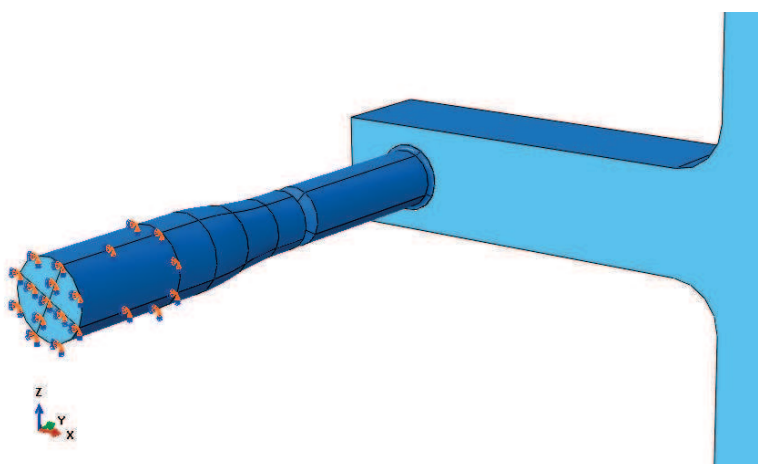


FIGURE 8.15 – Visualisation des conditions aux limites pour la modélisation numérique (ABAQUS)

## Analyse dynamique par élément finis et étude des contraintes - déformations locales

Mode propre	Fréquence expérimentale (Hz)	Fréquence numérique (Hz)	Amortissement(%)	Type de chargement	État (dans la zone critique)
1 <sup>er</sup>	93.7	92.5 (-0.55%)	0.11	flexion & torsion	multiaxial
2 <sup>ème</sup>	102.1	102.7 (+0.59%)	0.16	flexion	uniaxial
3 <sup>ème</sup>	260.0	264.0 (+1.54%)	2.50	flexion & torsion	multiaxial

TABLE 8.4 – Synthèse des données dynamiques expérimentales et numériques de l'éprouvette en fatigue

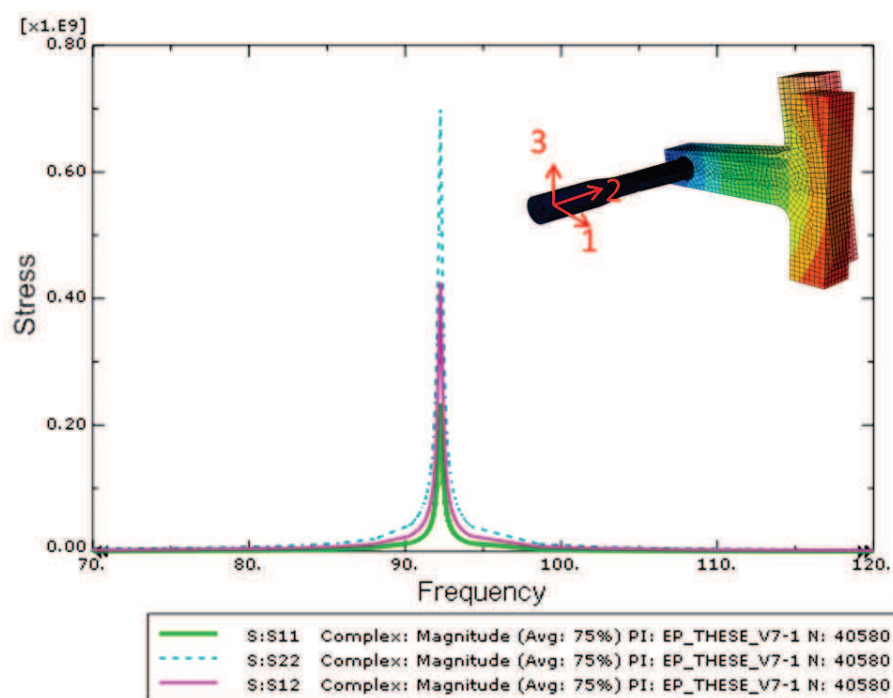


FIGURE 8.16 – Fonctions de réponse en fréquence du premier mode propre de la structure au point critique (amplitude en Pa)

Les figures 8.16, 8.17 et 8.18 représentent les fonctions de réponse en fréquence pour les différents modes étudiés durant les essais en fatigue et cela au noeud le plus critique dans l'entaille. Comme on pouvait s'y attendre, les modes 1 et 3 ont le même point critique tandis que le mode 2 est différent. On constate sur la figure 8.16 qui représente les contraintes en fonction de la fréquence au point critique du premier mode de la structure que les contraintes  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  ont un facteur 2 entre elles. Mais comme dans critères d'équivalence étudiés,  $\sigma_{12}$  a un facteur 3 par rapport aux contraintes normales, On peut dire qu'elles auront toutes deux un impact sur le dommage. On peut assimiler l'état de contrainte à un état biaxial. Le même constat peut être fait sur la figure 8.18 malgré que la contrainte  $\sigma_{12}$  soit en-dessous  $\sigma_{11}$ . A contrario, la figure 8.17 qui représente les contraintes au point critique en fonction de la fréquence du deuxième mode de la structure, montre que la contrainte  $\sigma_{22}$  est prépondérante par rapport aux autres contraintes. On peut assimiler l'état de contraintes à un état uniaxial.

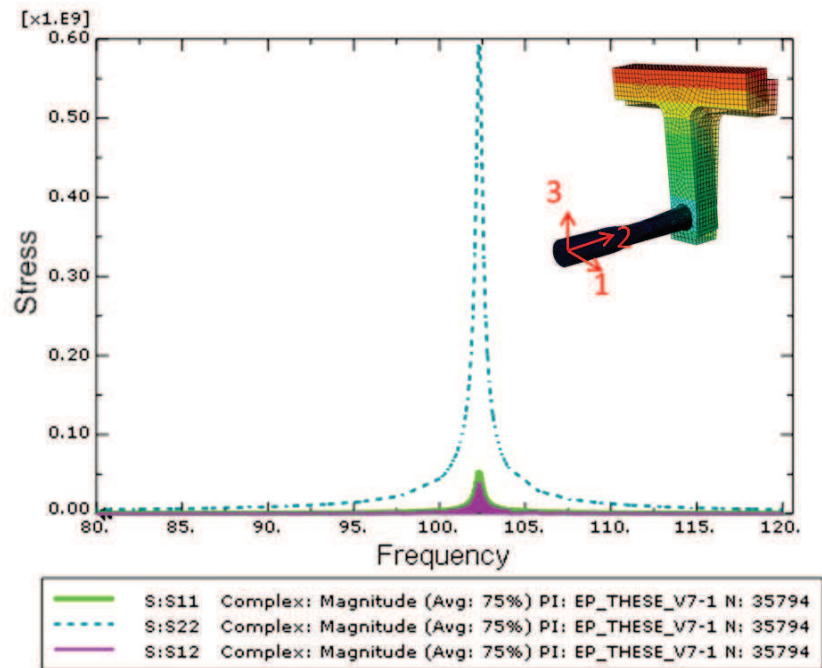


FIGURE 8.17 – Fonctions de réponse en fréquence du deuxième mode propre de la structure au point critique (amplitude en Pa)

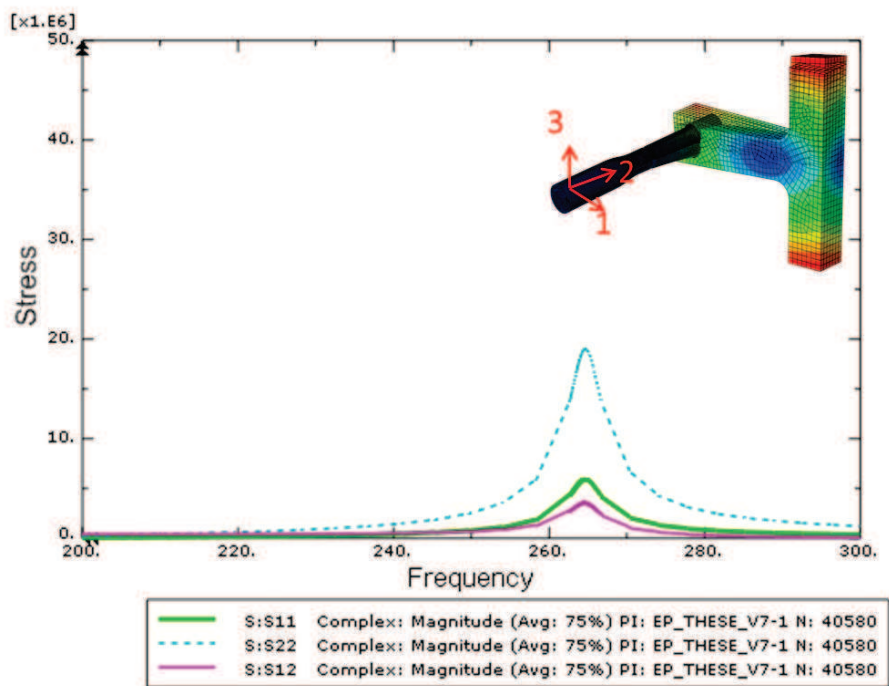


FIGURE 8.18 – Fonction de réponse en fréquence du troisième mode propre de la structure au point critique (amplitude en Pa)

## **Conclusion**

Nous avons synthétisé dans ce chapitre l'ensemble des données expérimentales associées aux essais en fatigue réalisés dans le cadre de la thèse. Nous avons présenté en détail les informations essentielles concernant l'éprouvette en fatigue et le moyen expérimental utilisé pour la réalisation des essais. Les essais préliminaires et la modélisation numérique vont nous permettre par la suite de définir un plan d'expérience expérimental associé aux caractéristiques de l'éprouvette. Les chaînes d'asservissement et de détection de fissure ont été présentés afin de mieux appréhender le calcul de la durée de vie expérimentale.

La modélisation de l'éprouvette dans un code éléments finis tel que ABAQUS est nécessaire afin d'avoir accès aux fonctions de réponse de chaque mode. Les FRF, une fois calculées, pourront être utilisées afin de déterminer le tenseur des DSP de contrainte associées à chaque niveau d'excitation des essais en fatigue. Ainsi les prévisions des durées de vie de chaque méthode étudiée pourront être comparées avec les durées de vie expérimentales.

## **Bibliographie du chapitre 8**

- [1] H. Rognon, *Comportement en fatigue vibratoire*. CETIM , rapport interne, 2009.
- [2] J.-F. Flavenot, *Caractérisation en fatigue de l'acier 30CrNiMo8*. CETIM, Juillet 2007.
- [3] R. Coquet, *Synthèse des résultats de mesure des éprouvettes CMC*. CETIM, 2011.
- [4] Vibration Reseach, *Guide utilisateur du module vibration reseach software*. B & K, 1995.



# Chapitre 9

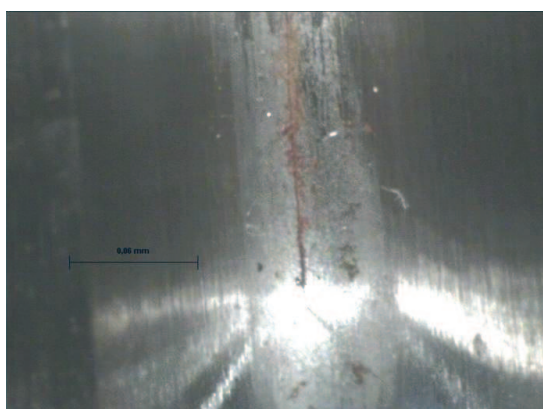
## Observations et validation expérimentale

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Présentation du plan d'expérience</b>	<b>140</b>
<b>9.2</b>	<b>Essais sur le 2<sup>ème</sup> mode: Flexion</b>	<b>142</b>
9.2.1	Dépouillement des essais	142
9.2.2	Confrontation expérience / prévisions numériques	146
<b>9.3</b>	<b>Essais sur le 1<sup>er</sup> mode: Flexion-Torsion</b>	<b>149</b>
9.3.1	Dépouillement des essais	149
9.3.2	Confrontation expérience / prévisions numériques	152
<b>9.4</b>	<b>Essais sur le 3<sup>ème</sup> mode: Flexion-Torsion</b>	<b>155</b>
9.4.1	Dépouillement des essais	156
	<b>Bibliographie du chapitre 9</b>	<b>159</b>

---



### Résumé

---

La réalisation des essais a permis de comparer les différentes méthodes de calcul en fatigue par rapport à plusieurs types de sollicitations. Comme tous essais expérimentaux, ils comportent des problématiques secondaires comme la dispersion expérimentale ou la détermination de paramètres prédominants dans le calcul en fatigue tel que l'amortissement.

---



## Introduction

Nous présentons dans ce chapitre l'ensemble des essais réalisés durant la thèse ainsi que la confrontation des durées de vie expérimentales avec les durées de vie obtenues via les méthodes de prédiction de durée de vie en fatigue. Ces essais ont été réalisés pour trois modes propres de la structure afin d'avoir divers cas de chargement. Nous avons aussi modifié les niveaux de sollicitation pour déterminer l'influence du comportement élasto-plastique du matériau.

Tous les cas de charges sont réunis sous la forme d'un plan d'expérience qui fait l'objet d'une présentation en début de chapitre. Comme on a vu que le mode 2 est uniaxial et les modes 1 et 3 sont biaxiaux, on présentera d'abord les résultats du 2<sup>ème</sup> mode, plus simples, puis ceux des modes 1 et 3.

Au cours des essais, quelques complications expérimentales sont apparues, elles seront abordées dans ce chapitre ainsi que les causes de ces complications. Dans certains cas, nous avons été obligés de faire évoluer le plan d'expérience présenté dans ce chapitre.

### 9.1 Présentation du plan d'expérience

Nous présentons ici le plan d'expérience théorique, car en fonction des problématiques expérimentales, ce plan a évolué pour permettre la réalisation des essais.

Le but de ce plan d'expérience est de réaliser pour chaque type de sollicitation plusieurs niveaux d'excitation afin d'avoir différentes durées de vie (figure 9.1). Le principe est d'avoir au moins un niveau d'excitation où le comportement de l'éprouvette soit linéaire, avec une durée de vie associée élevée, et trois essais avec un comportement élasto-plastique plus ou moins prononcé. D'un point de vue de la fatigue, certains niveaux d'excitations verront leurs niveaux de contraintes associés répartis dans le domaine polycyclique et oligocyclique.

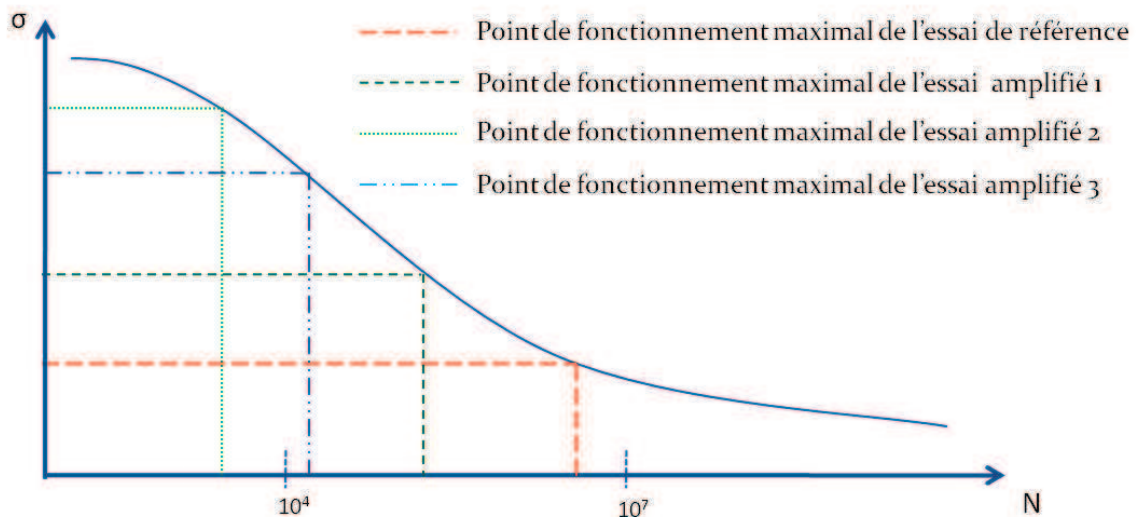


FIGURE 9.1 – Schéma des points de fonctionnement maximaux des différents niveaux d'excitation envisagés

## Présentation du plan d'expérience

Suite aux études préliminaires réalisées sur l'éprouvette, nous avons sélectionné 4 DSP d'excitation différentes qui vont engendrer des réponses en contraintes distinctes.

Sur la figure 9.2(a), la DSP d'excitation qui va solliciter le deuxième mode propre de la structure et qui en fond d'entaille, donne dans la zone critique un état de contraintes quasi uniaxial.

Sur la figure 9.2(b) et 9.2(c), les DSP d'excitation vont respectivement exciter le premier mode propre de la structure et le troisième mode propre de la structure. L'état de contraintes en fond d'entaille dans la zone critique peut être considéré comme multiaxial. ces essais diffèrent de par l'amortissement de chaque mode ainsi que de par la répartition de chaque niveau de contrainte. Néanmoins, étant donné qu'il y a une seule source d'excitation, la réponse en contrainte sera proportionnelle dans les deux cas.

La DSP d'excitation, figure 9.2(d), va solliciter le premier et troisième mode propre en même temps, cela va permettre d'étudier le cumul du dommage avec une réponse bimodale.

Pour rappel, le mode 2 est orthogonal aux modes 1 et 3, par conséquent, la DSP de la figure 9.2(a) sollicite seulement le mode 2 et la DSP de la figure 9.2(b) sollicite seulement le mode 1 même si les deux modes se trouvent dans la bande fréquentielle de ces DSP.

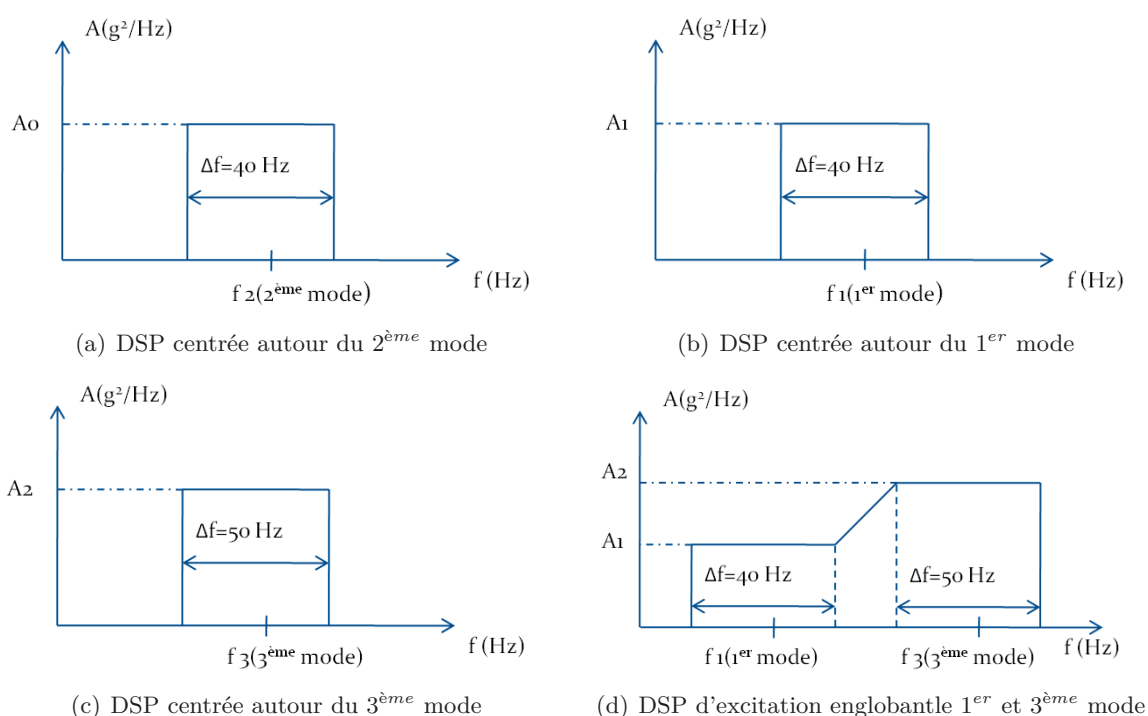


FIGURE 9.2 – Représentation des DSP d'accélération choisies comme excitations d'entrée pour les essais

La table 9.1 représente le nombre d'essais en fonction du type d'essai et du niveau. A savoir, chaque essai est composé de trois éprouvettes. Au total, il faut pour réaliser le plan d'expérience 108 éprouvettes.

	Niveau référence	Niveau accéléré 1	Niveau accéléré 2	Niveau accéléré 3	Nombre d'éprouvettes
DSP 2 <sup>ème</sup> mode	3 essais	3 essais	3 essais	3 essais	36
DSP 1 <sup>er</sup> mode	2 essais	2 essais	2 essais	2 essais	24
DSP 3 <sup>ème</sup> mode	2 essais	2 essais	2 essais	2 essais	24
DSP 1 <sup>er</sup> et 3 <sup>ème</sup> modes	2 essais	2 essais	2 essais	2 essais	24
Nombre d'éprouvettes	27	27	27	27	108

TABLE 9.1 – Représentation du nombre d'essais en fonction du type de DSP et du niveau d'excitation

## 9.2 Essais sur le 2<sup>ème</sup> mode : Flexion

Les essais en fatigue sur le deuxième mode [1] ont été réalisés à SUPMECA au LISMMA sur un pot vibrant de 1500N dont les principales caractéristiques sont disponibles dans l'annexe D. Ces essais en fatigue ont été les premiers essais réalisés, l'état de contraintes de la zone critique pouvant être considéré comme uniaxial. On pourra donc réaliser la confrontation des durées de vies expérimentales aux prédictions des méthodes spectrales modifiées avec la formulation réalisée au chapitre 6.

### 9.2.1 Dépouillement des essais

Afin de déterminer les niveaux d'accélération des DSP que nous devons avoir pour respecter le plan d'expérience, nous avons réalisé deux essais préliminaires. Ces essais ont permis de déterminer les niveaux nécessaires pour avoir les durées de vie en accord avec le plan d'expérience (figure 9.2(a)). Les amplitudes d'accélération de chaque DSP ainsi que la bande fréquentielle sont présentées au tableau 9.2. Comme on pourra le remarquer lors de la présentation des résultats de durée de vie, les niveaux ont été sélectionnés pour avoir des durées de vie variant de 3 heures à 40 heures.

Niveau	Bande fréquentielle (Hz)	Niveau ( $g^2/Hz$ )	RMS ( $g$ )
1	80 - 120	0.0040	0.160
2	80 - 120	0.0034	0.136
3	80 - 120	0.0030	0.120
4	80 - 120	0.0026	0.104

TABLE 9.2 – Niveaux d'excitations réellement choisis pour la DSP centrée autour du 2<sup>ème</sup> mode

Le tableau 9.3 donne l'ensemble des durées de vie pour chaque éprouvette testée pour ce type de DSP et selon l'amplitude d'accélération de la DSP. On constate que certaines éprouvettes ont subi plusieurs essais car nous avons constaté que quand une ou plusieurs éprouvettes fissurent,

cela crée un déséquilibre dynamique sur le pot vibrant qui ne sollicite plus les éprouvettes non-fissurées. Il est alors nécessaire de remonter 3 éprouvettes non-fissurées ensemble pour les amener à la fissuration.

Cela est repris sur la figure 9.3, quand il n'y a pas de présence de fissure, la somme des efforts transverses dus à l'inertie des masselottes est équilibré et le pot vibrant fonctionne correctement. Dans le cas où une à deux éprouvettes sont fissurées, la somme des efforts transverses dus à l'inertie des masselottes est non-nulle et varie au cours du temps. Afin de revenir à un état d'équilibre, la bobine du vibreur va se mettre à osciller pour équilibrer la masse embarquée. Cela aura pour conséquence que la ou les éprouvettes non-fissurées ne sont plus sollicitées par les niveaux qui engendrent du dommage. Ce phénomène est peu présent dans le cas des essais uniaxiaux mais le sera beaucoup plus dans le cas des essais multiaxiaux.

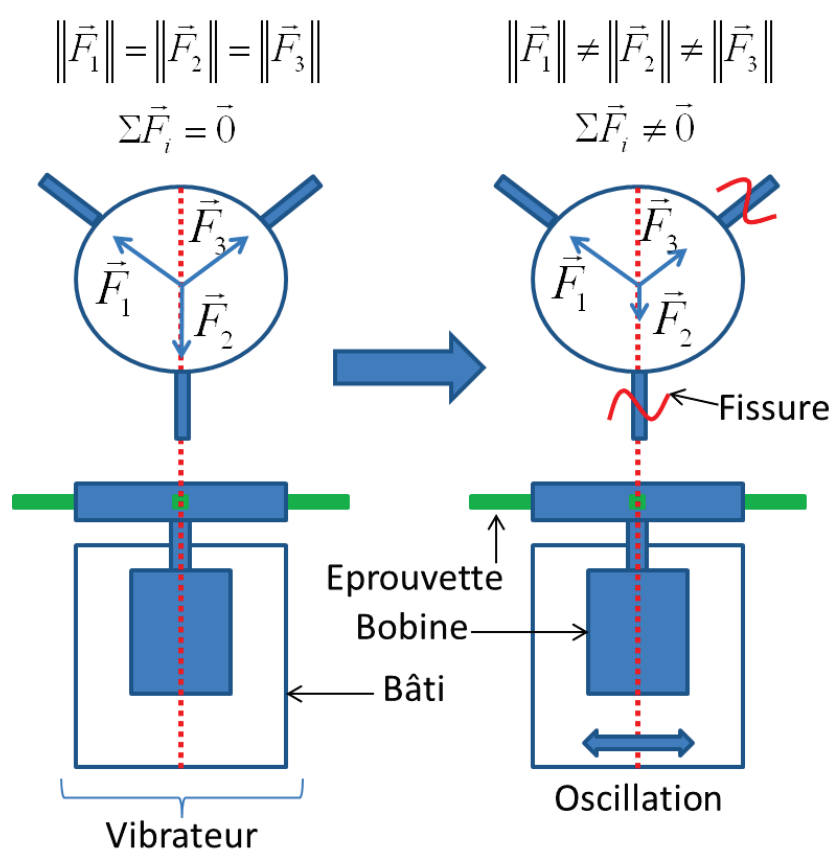


FIGURE 9.3 – Schématisation de la problématique due aux efforts transverses après fissuration d'une ou plusieurs éprouvettes

Pour ces raisons, dans le tableau 9.3, les éprouvettes surlignées en jaune sont les éprouvettes qui ont fissuré sur le premier essai et les éprouvettes surlignées en orange sont les éprouvettes qui ont été remontées une deuxième fois. Pour ces éprouvettes, la durée de vie est le cumul de la durée du premier et du second essai.

Le tableau 9.3 regroupe la durée de vie à l'amorce de fissuration pour chaque éprouvette ainsi que la durée de vie moyenne et l'écart-type par niveau d'excitation.

Niveau excitation	Numéro éprouvette	Durée de vie associée (h)	Durée de vie moyenne par niveau d'excitation (h)	Ecart-type par niveau d'excitation (h)
0.0040 g <sup>2</sup> /Hz	19	4.1	4.4	0.8
	92	4.1		
	91	5.2		
	73	3.6		
	11	3.6		
	118	3.6		
	6	4.3		
	37	5.4		
	44	5.4		
0.0034 g <sup>2</sup> /Hz	93	10.6	9.6	1.2
	45	10.6		
	75	10.6		
	27	10.2		
	32	10.2		
	23	10.2		
	39	8.1		
	25	8.1		
	85	8.1		
0.0030 g <sup>2</sup> /Hz	A16	18.1	17.6	2.2
	A8	18.1		
	A9	20.6		
	109	19.7		
	4	19.7		
	63	17.2		
	29	15.1		
	18	15.1		
	3	15.1		
0.0026 g <sup>2</sup> /Hz	72	33.0	29.7	5.0
	22	22.7		
	97	22.7		
	81	25.6		
	50	35.9		
	16	35.9		
	41	30.3		
	36	30.3		
78	30.5			

TABLE 9.3 – Synthèse des durées de vie à l'amorçage en fonction du niveau d'excitation et du numéro de l'éprouvette

Le tableau 9.4 présente la moyenne et l'écart-type des durées de vie obtenues pour chaque niveau d'amplitude de la DSP. On constate que la durée de vie diminue lorsque le niveau d'excitation augmente.

Pour chaque niveau la durée de vie est donnée en heures, en secondes et en nombre de cycles. En ce qui concerne la donnée sur le nombre de cycles, il s'agit juste d'un indicateur du nombre moyen approximatif de cycles à l'amorçage qu'engendre le niveau d'excitation. Le nombre moyen approximatif de cycles comptabilise aussi bien les cycles qui se situent dans le domaine oligo-

cyclique que les cycles en-dessous de la limite en fatigue.

La dernière information dans le tableau 9.4 est le coefficient de variation qui est le rapport entre la durée de vie moyenne et l'écart-type. On s'aperçoit que ce rapport est quasi-constant quel que soit le niveau d'excitation. La dispersion est directement liée à la valeur de la durée de vie moyenne.

Niveau ( $g^2/Hz$ )	Durée de vie (amorçage)	Moyenne	Écart-type	Écart-type / Moyenne
0.0040	Heures	4.4	0.8	0.175
	Secondes	1.6+E04	2.8+E03	
	Cycles ( $F_0 \times Tf$ )	1.6+E06	2.8+E05	
0.0034	Heures	9.6	1.2	0.120
	Secondes	3.5E+04	4.2E+03	
	Cycles ( $F_0 \times Tf$ )	3.5E+06	4.3E+05	
0.0030	Heures	17.6	2.2	0.124
	Secondes	6.3E+04	7.8E+03	
	Cycles ( $F_0 \times Tf$ )	6.3E+06	7.8E+05	
0.0026	Heures	29.7	5.0	0.164
	Secondes	1.1E+05	1.8E+04	
	Cycles ( $F_0 \times Tf$ )	1.1E+07	1.9E+06	

TABLE 9.4 – Durée de vie moyenne par niveau d'excitation ainsi que l'écart-type associé

La figure 9.4 est une représentation graphique du tableau 9.4 où les marqueurs rouge illustrent de l'écart-type pour chaque niveau d'excitation. On constate que pour un niveau donné, la durée de vie à +/- un écart-type n'est pas confondue avec la durée de vie des autres niveaux.

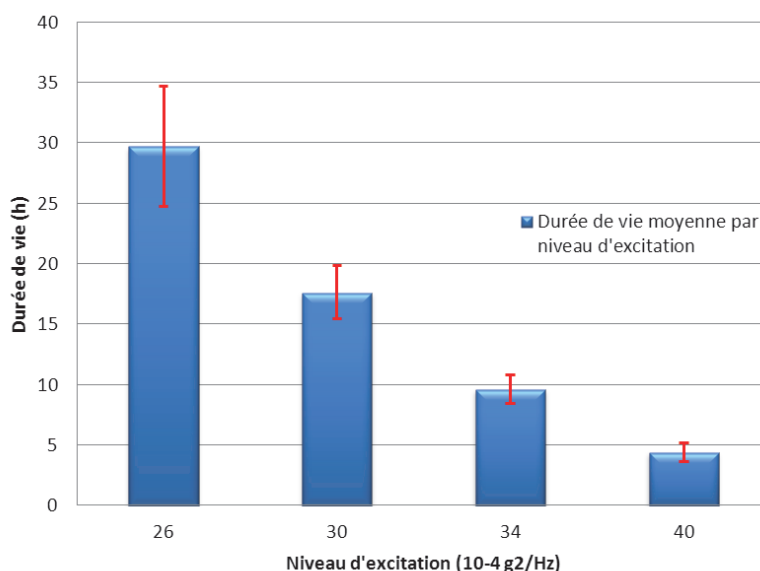


FIGURE 9.4 – Représentation de la durée de vie moyenne et de l'écart-type pour chaque niveau d'excitation

### 9.2.2 Confrontation expérience / prévisions numériques

Nous avons comparé les durées de vie expérimentales avec différentes méthodes de calcul en fatigue. Les différentes chaînes de calcul sont représentées sur la figure 9.5. Les méthodes étudiées sont les méthodes spectrales dans leur formulation classique, les méthodes spectrales dans la formulation réalisée au chapitre 6 et enfin le modèle de Hermite [2] avec l'intégration de la correction de Neuber [3] dans le domaine temporel. Nous avons sélectionné deux FDP pour réaliser les comparaisons, ces FDP sont celles de Dirlik [4] et de Lalanne [5]. Les comparaisons seront réalisées sur la moyenne des durées de vie expérimentales réalisée sur chaque niveau (cf tableau 9.4). Le calcul des FRF est réalisé sous le logiciel ABAQUS, l'ensemble des calculs de durée via les différentes méthodes est réalisé sous Matlab ainsi que des cartographies de durée de vie en fond d'entaille.

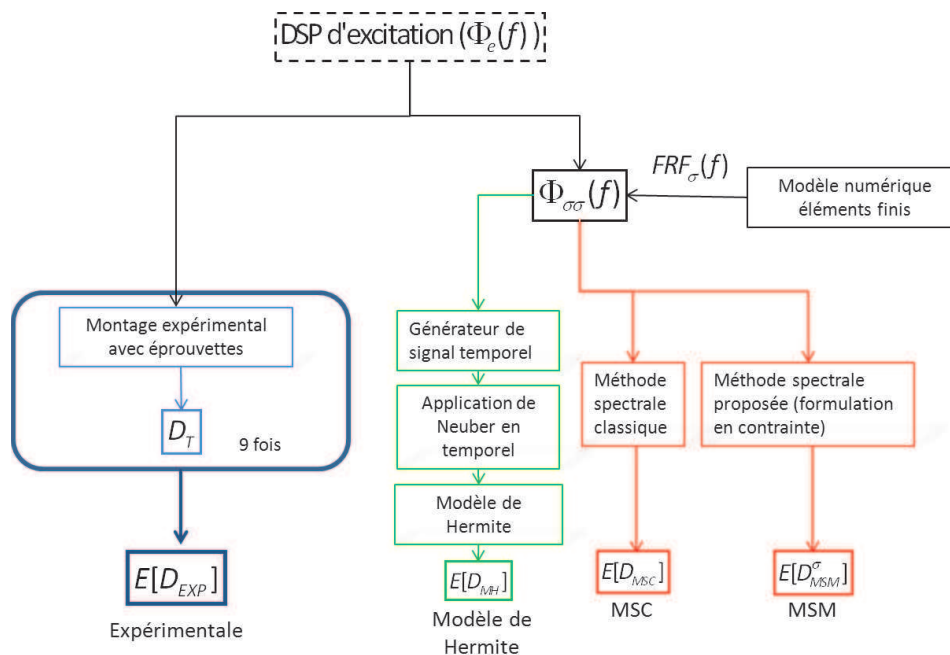


FIGURE 9.5 – Schématisation des différentes chaînes de calcul comparées aux essais expérimentaux

Le tableau 9.5 synthétise la durée de vie au point critique obtenue en fonction des différentes méthodes étudiées. L'information de la valeur RMS de la DSP de contrainte  $y$  est aussi affichée pour chaque niveau d'excitation. Cela permet de faire une comparaison avec le plan d'expérience numérique du chapitre 6 et de s'apercevoir que même pour la durée de vie la plus élevée, il est fort probable que le comportement du matériau ne soit pas totalement linéaire. Car pour le plan d'expérience numérique, au-delà d'une valeur RMS de 150 MPa, on observait des différences dans la distribution des cycles, signe d'un comportement non-linéaire. Il faut signaler que durant la réalisation des essais, un essai en fatigue avec un niveau d'excitation à  $0.0022 g^2/Hz$  a été réalisé. Au bout de plus de 120 heures d'essais, aucune fissure n'a été repérée avec les différents outils de détection. Une grande partie des cycles doit être en-dessous de la limite de fatigue du matériau.

Concernant les résultats de durée de vie avec les différentes méthodes, on constate que le modèle

de Hermite et les méthodes spectrales modifiées donnent d'assez bonnes corrélations avec les durées de vie expérimentales.

Niveau ( $g^2/Hz$ )	Durée de vie expéri- mentale (s)	Données numériques						
		Valeur RMS (MPa)	MSM (s)		MSC (s)		Hermite (s)	
			Dirlik	Lalanne	Dirlik	Lalanne	Dirlik	Lalanne
0.0040	1.6E+04	229	1.2E+04	1.4E+04	1.6E+02	1.1E+02	3.1E+03	2.9E+03
0.0034	3.5E+04	211	3.4E+04	3.2E+04	1.6E+03	1.5E+03	1.4E+04	3.5E+04
0.0030	6.3E+04	197	5.7E+04	5.4E+04	9.2E+03	8.7E+03	3.8E+04	6.3E+04
0.0026	1.1E+05	175	1.1E+05	1.0E+05	7.6E+04	7.2E+04	9.5E+05	1.1E+05

TABLE 9.5 – Synthèse des durées de vie selon les différentes méthodes testées, au point critique de la structure

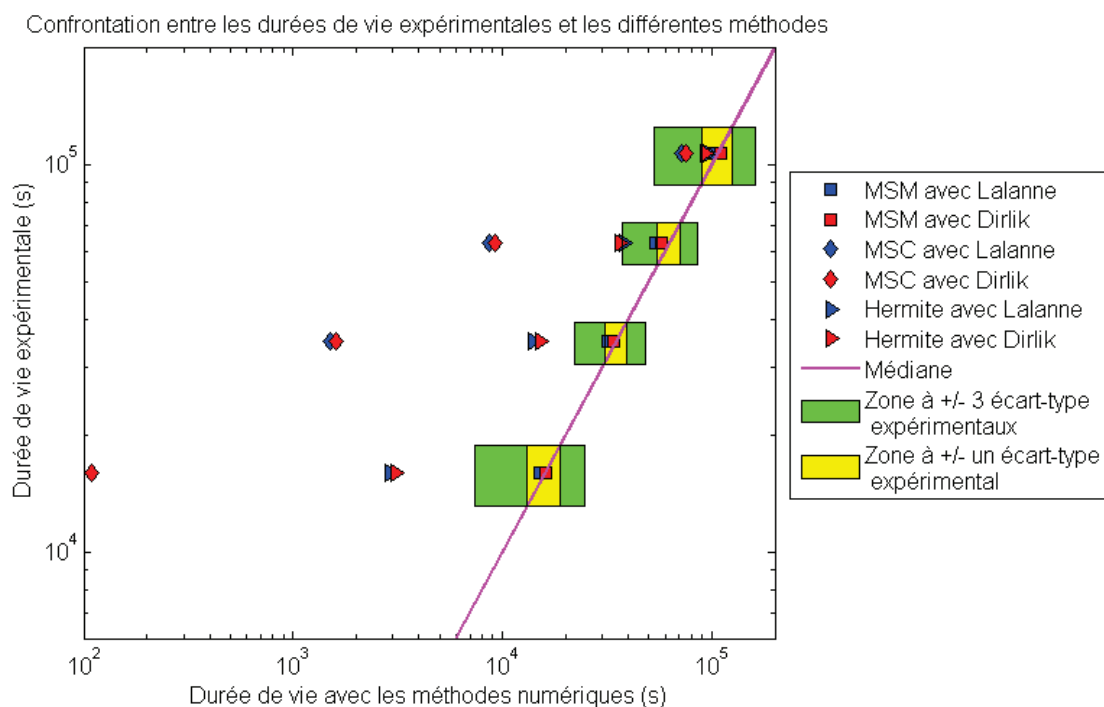


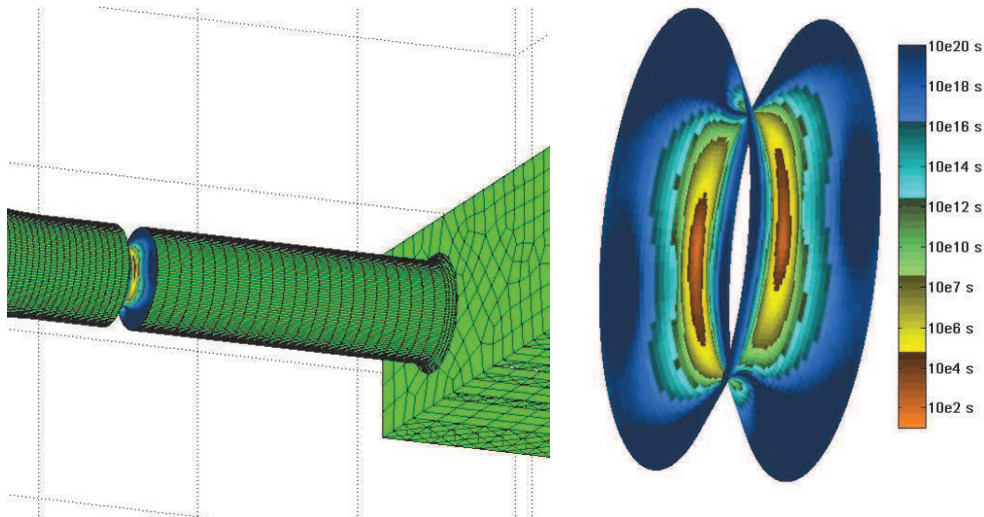
FIGURE 9.6 – Représentation graphique des résultats de durées de vie pour le point critique

La figure 9.6 est la représentation graphique des résultats de durées de vie du tableau 9.5. On remarque que plus la durée de vie diminue, plus les durées de vie obtenues avec les méthodes spectrales classiques s'éloignent des durées de vie expérimentales. On retrouve la même conclusion que pour le plan d'expérience numérique du chapitre 6.

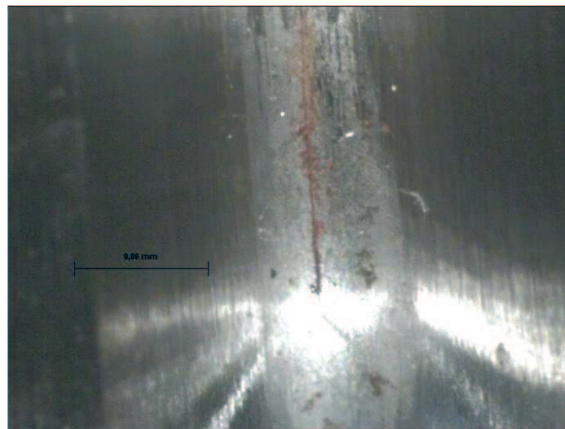
A noter que, le modèle de Hermite donne de meilleurs résultats pour les essais que pour le plan d'expérience numérique. Pour une valeur RMS de 230 MPa, Le rapport entre la durée de vie expérimentale et celle obtenue avec le modèle de Hermite est de 4 alors que le rapport entre la durée de vie des SMC et celle obtenue avec le modèle de Hermite est globalement de 8.



On remarque que les trois méthodes sont globalement conservatives vis-à-vis des essais réalisés sur le mode 2 de l'éprouvette. De plus, les résultats obtenus avec la méthode proposée avec la FDP de Dirlik sont tous dans l'intervalle de l'écart-type expérimentale associé à chaque niveau.



(a) Représentation partielle du modèle numérique de l'éprouvette (b) Cartographie des durées de vie dans la zone de l'entaille



(c) Vue de l'entaille prise au microscope(x16) pour une éprouvette sollicitée sur le mode 2

FIGURE 9.7 – Cartographie des durées de vie pour le niveau d'excitation  $0.0040 g^2/\text{Hz}$  et pour la méthode spectrale classique avec la FDP de Dirlik

Le calcul de durée de vie avec les différentes méthodes n'a pas été seulement déterminé pour le point critique mais sur l'ensemble des noeuds au niveau de l'entaille. Afin de visualiser la cartographie des durées de vie dans cette zone, nous avons reconstruit la surface de l'éprouvette sous Matlab et affecté à chaque noeud la durée de vie associée. La figure 9.7(b) représente la cartographie des durées de vie obtenues avec les méthodes spectrales classiques pour la FDP de Dirlik, cela pour le niveau d'excitation  $0.0040 g^2/\text{Hz}$ . La figure 9.7(a) permet de situer la zone critique par rapport à l'orientation de la masselotte. Avec la figure 9.7(c), on s'aperçoit que la

fissure engendrée par un essai sur le mode 2 est situé dans la même zone que la zone d'iso durée de vie orange de la figure 9.7(b).

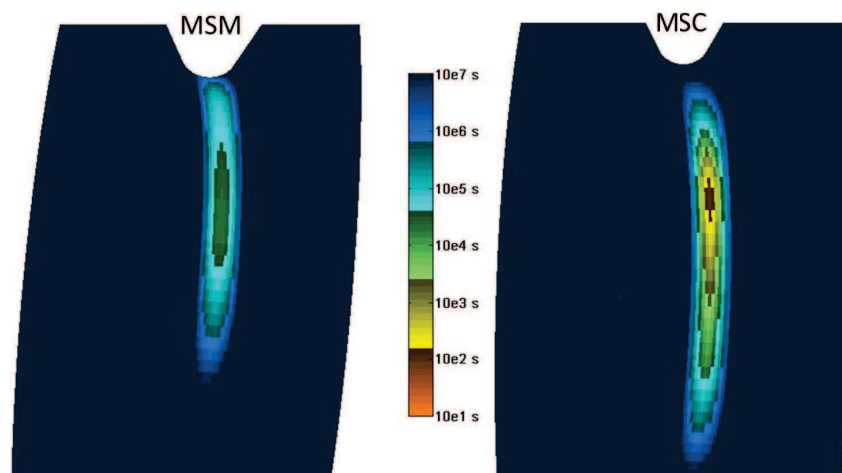


FIGURE 9.8 – Zoom sur la cartographie des durées de vie pour la méthode spectrale classique (MSC) et pour la méthode spectrale modifiée (MSM), cela pour un niveau excitation de  $0.0040 g^2/\text{Hz}$

La figure 9.8 représente les durées de vie dans l'entaille pour le niveau excitation  $0.0040 g^2/\text{Hz}$  pour la méthode spectrale modifiée et pour la méthode spectrale classique où la FDP est celle de Lalanne (Rice). On retrouve sur cette figure les ordres de grandeurs de durée de vie synthétisés dans le tableau 9.5.

### 9.3 Essais sur le 1<sup>er</sup> mode : Flexion-Torsion

Les essais en fatigue sur le premier mode ont été réalisés à SUPMECA au LISMMA sur un pot vibrant de 1500N. Pour rappel, ces essais en fatigue ont un état de contraintes multiaxial dans la zone critique qui est multiaxial. On pourra réaliser la confrontation des durées de vies expérimentales avec les méthodes spectrales modifiées établies au chapitre 7 et dans [6].

#### 9.3.1 Dépouillement des essais

Dans le tableau 9.6, nous avons indiqué les niveaux d'excitations qui ont été retenus pour réaliser les essais en fatigue. On note que contrairement au plan d'expérience théorique présenté en première partie de ce chapitre, celui-ci ne comporte que 3 niveaux car on a souhaité consolider les résultats pour chaque niveau en réalisant 3 essais au lieu de 2 essais initialement prévus. Cette décision est notamment due à la problématique de déséquilibre du pot lorsqu'une ou deux éprouvettes ont fissuré. D'ailleurs les essais multiaxiaux sont plus affectés par ce phénomène que les essais concernant le mode 2 car les masselottes engendrent des efforts transverses plus importants.

Niveau	Bande fréquentielle (Hz)	Niveau ( $g^2/Hz$ )	RMS (g)
1	70 - 110	0.0035	0.14
2	70 - 110	0.0030	0.12
3	70 - 110	0.0025	0.10

TABLE 9.6 – Niveaux d’excitation réellement choisis pour la DSP centrée autour du 1<sup>er</sup> mode

Niveau excitation	Numéro éprouvette	Durée de vie associée (h)	Durée de vie moyenne par niveau d’excitation (h)	Ecart-type par niveau d’excitation (h)
0.0035 $g^2/Hz$	110	8.0	7.1	0.9
	111	8.0		
	59	8.2		
	12	7.0		
	98	6.4		
	83	5.5		
	34	6.3		
	55	7.6		
0.0030 $g^2/Hz$	87	6.9	12.5	2.2
	51	11.0		
	103	11.0		
	14	12.7		
	15	16.4		
	113	14.4		
	82	13.8		
	24	12.1		
0.0025 $g^2/Hz$	26	10.1	27.5	6.4
	88	11.0		
	62	34.8		
	58	29.9		
	47	32.8		
	95	29.5		
	74	29.5		
	49	33.9		
90	17.4			
67	20.9			
99	20.9			

TABLE 9.7 – Synthèse des durées de vie en fonction du niveau d’excitation et du numéro de l’éprouvette (voir annexe D pour avoir les numéros d’essai associé)

Le tableau 9.7 réunit l'ensemble des durées de vie pour les éprouvettes testées pour la DSP centrée sur le premier mode. Le code couleur concernant le nombre essais avant l'apparition d'une fissure est le suivant : jaune pour l'apparition d'une fissure après un essai, orange pour l'apparition d'une fissure après deux essais, rouge pour l'apparition d'une fissure après trois essais et violet pour l'apparition d'une fissure après quatre essais. Chaque éprouvette est classée par niveau d'excitation.

Niveau ( $g^2/Hz$ )	Durée de vie (amorçage)	Moyenne	Écart-type	Écart-type / Moyenne
0.0035	Heures	7.1	0.9	0.127
	Secondes	2.6e+04	3.3e+03	
	Cycles ( $F_0 \times Tf$ )	2.4e+06	3.1e+05	
0.0030	Heures	12.5	2.0	0.162
	Secondes	4.5e+04	7.3e+03	
	Cycles ( $F_0 \times Tf$ )	4.1e+06	6.7e+05	
0.0025	Heures	27.7	6.4	0.240
	Secondes	1.0e+05	2.4e+04	
	Cycles ( $F_0 \times Tf$ )	9.2e+06	2.1e+06	

TABLE 9.8 – Représentation de la durée de vie moyenne par niveau d'excitation ainsi que l'écart-type associé

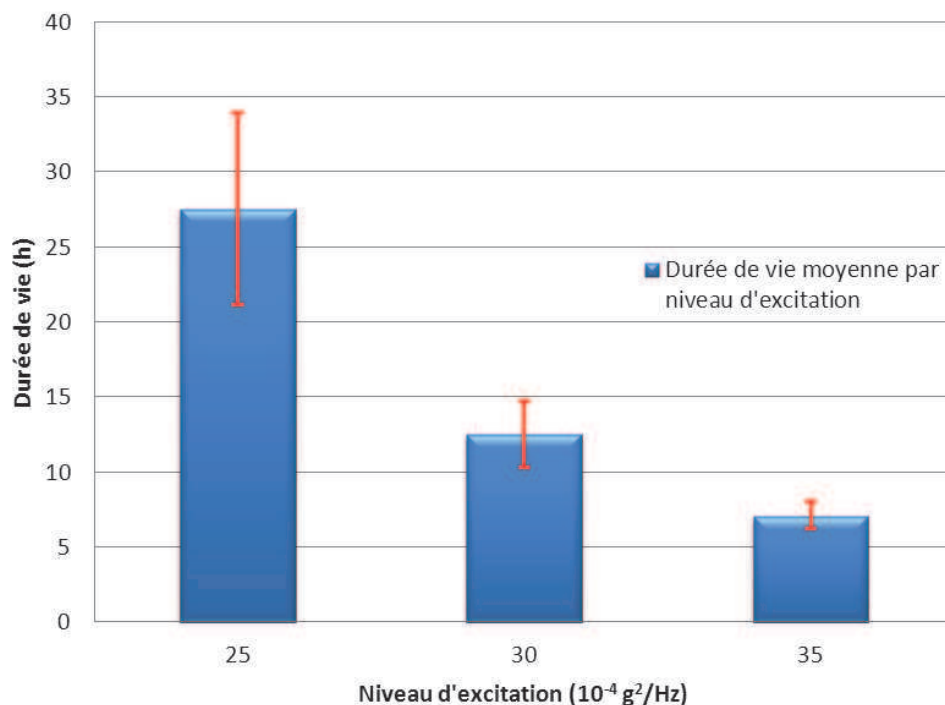


FIGURE 9.9 – Représentation de la durée de vie moyenne et de l'écart-type pour chaque niveau d'excitation

La tableau 9.8 donne la moyenne et l'écart type de durée de vie par niveau d'excitation. Ces informations sont données en heures, en secondes et en nombre moyen approximatif de cycles. De même que pour le mode 2, plus le niveau d'excitation augmente plus les niveaux de contraintes au point critique augmente impliquant une diminution de la durée de vie.

La dernière information dans le tableau 9.4 est le coefficient de variation. On s'aperçoit que ce rapport varie peu en fonction de la durée de vie moyenne associé.

On remarque que pour un niveau d'excitation équivalent avec la DSP centrée sur le deuxième mode, les durées de vie sont plus faibles en moyenne, cela est principalement dû à un amortissement moindre (Tableau 8.4) et à un état de contraintes multiaxial en fond d'entaille. L'écart-type associé à une durée de vie moyenne est du même ordre de grandeur que celui relevé pour la DSP centrée autour du deuxième mode.

La figure 9.9 donne une représentation graphique du tableau 9.8 où les marqueurs rouge sont la représentation de l'écart-type pour chaque niveau d'excitation. On constate que pour un niveau donné, la durée de vie à +/- un écart-type n'est pas confondue avec la durée de vie des autres niveaux.

### 9.3.2 Confrontation expérience / prévisions numériques

Nous avons comparé les durées de vie expérimentales avec différentes méthodes de calcul en fatigue. Ces méthodes sont les mêmes que pour la DSP centrée sur le deuxième mode à une différence près. L'état de contrainte étant multiaxial, l'utilisation d'un critère d'équivalence pour appliquer les méthodes précédentes s'impose. Dans notre cas, nous avons utilisé les travaux développé dans le chapitre 7.  $\Phi_{\sigma\sigma}(f)$  n'est plus un vecteur mais un tenseur 3 x 3 fonction de la fréquence. A partir de ce tenseur, on calcule la DSP équivalente au sens de Von Mises qui sert de donnée d'entrée pour le calcul en fatigue.

Niveau ( $g^2/Hz$ )	Durée de vie expéri- mentale (s)	Données numériques						
		Valeur RMS (MPa)	MSM (s)		MSC (s)		Hermite (s)	
			Dirlik	Lalanne	Dirlik	Lalanne	Dirlik	Lalanne
0.0035	2.6E+04	230	2.0E+04	1.9E+04	1.5E+02	1.4E+02	6.3E+02	6.2E+02
0.0030	4.5E+04	208	4.1E+04	3.8E+04	2.1E+03	2.0E+03	1.6E+04	1.7E+04
0.0025	1.0E+05	187	1.0E+04	0.9E+04	3.8E+04	4.1E+04	8.3E+04	8.4E+04

TABLE 9.9 – Synthèse des durées de vie selon les différentes méthodes testées cela pour le point critique de la structure

Le tableau 9.9 donne les durées de vie au point critique pour les différentes méthodes étudiées et cela pour deux FDP. On donne dans ce tableau la valeur RMS de la DSP équivalente au sens de von mises pour le point critique.

La figure 9.10 est la représentation graphique des résultats de durée de vie du tableau 9.9. On remarque, comme pour le mode 2, que plus la durée de vie diminue plus les durées de vie obtenues avec les méthodes spectrales classiques et le modèle de Hermite s'éloignent des durées de vie expérimentales. On retrouve globalement les mêmes tendances que pour le plan

d'expérience numérique du chapitre 7.

La méthode proposée ne se situe pas pour tous les niveaux dans l'intervalle d'un écart-type expérimental comme pour le mode 2, l'une des raisons pouvant être dans la définition de la DSP équivalente.

On note que les trois méthodes sont globalement conservatives vis-à-vis des essais réalisés sur le mode 1 de l'éprouvette.

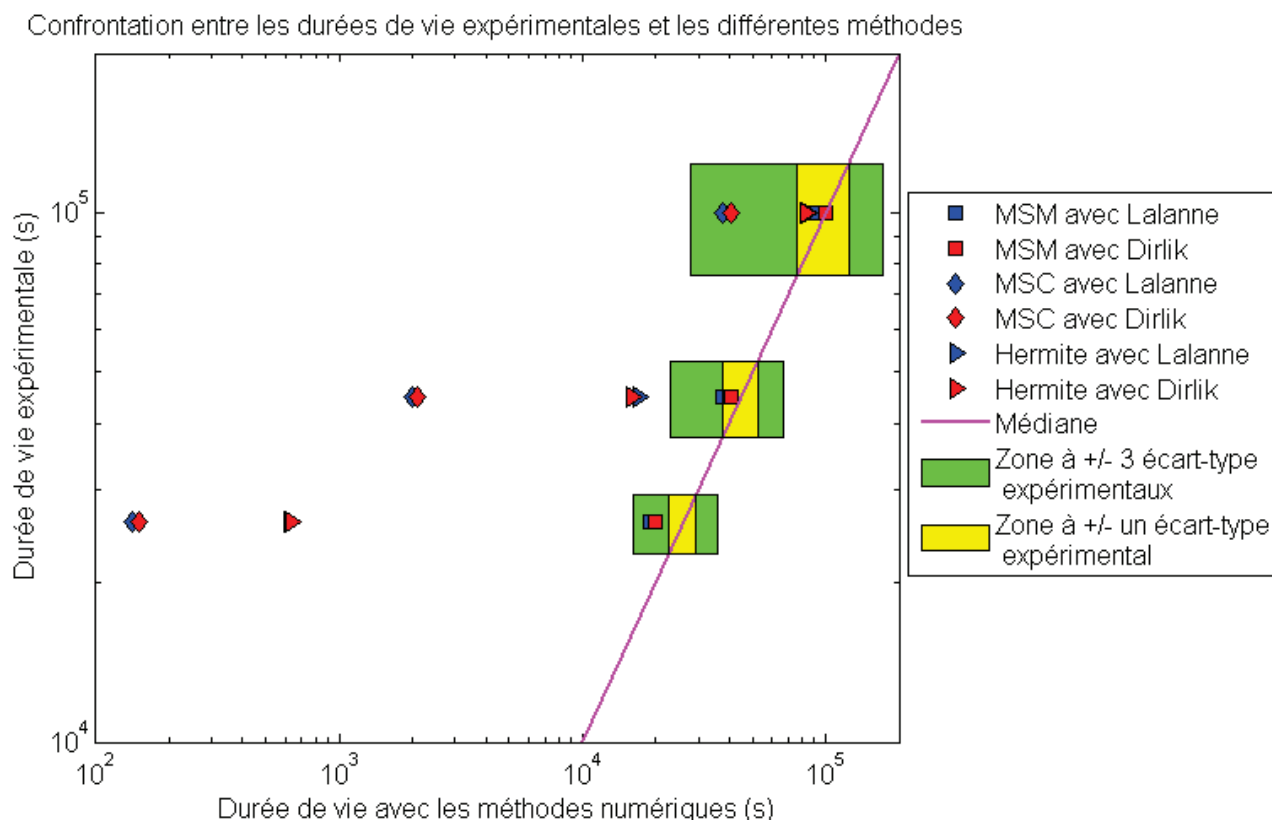


FIGURE 9.10 – Représentation graphique des résultats de durées de vie pour le point critique

La figure 9.11 donne une cartographie des durées de vie dans l'entaille, dans le cas d'une amplitude d'excitation à  $0.0035 g^2/Hz$ . Afin de mieux identifier les durées de vie en fond d'entaille, nous avons représenté en figure 9.12 seulement la zone de l'entaille. La figure 9.12(a) donne la cartographie des durées de vie avec la méthode spectrale proposé et la figure 9.12(b), la cartographie des durées de vie avec la méthode spectrale classique. On remarque sur ces cartographies l'influence de la torsion et de la flexion cumulée sur l'état de contrainte.

Si on observe la figure 9.13(c) illustrant la fissure dans l'entaille d'une éprouvette après un essai avec une DSP centrée sur le premier mode, on remarque que la fissure se situe dans la zone iso-durée de vie représenté sur les figures 9.12(a) et 9.12(b).

Les figures 9.13(b) et 9.13(a) représentent le faciès de rupture d'une éprouvette. Pendant la phase de démontage de l'éprouvette, celle-ci a rompu. Une partie du faciès est caractéristique de la rupture brutale due à la rupture soudaine durant le démontage. Mais sur le pourtour de

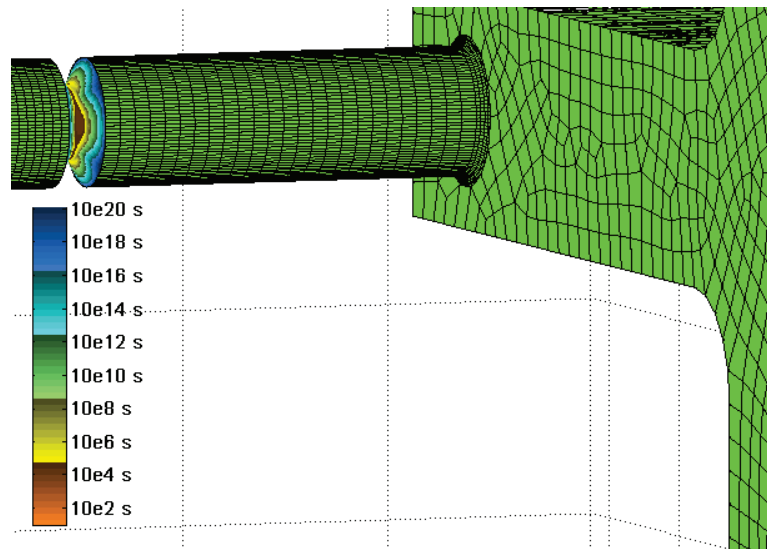


FIGURE 9.11 – Représentation partielle du modèle numérique de l'éprouvette pour le niveau d'excitation de  $0.0035 \text{ g}^2/\text{Hz}$

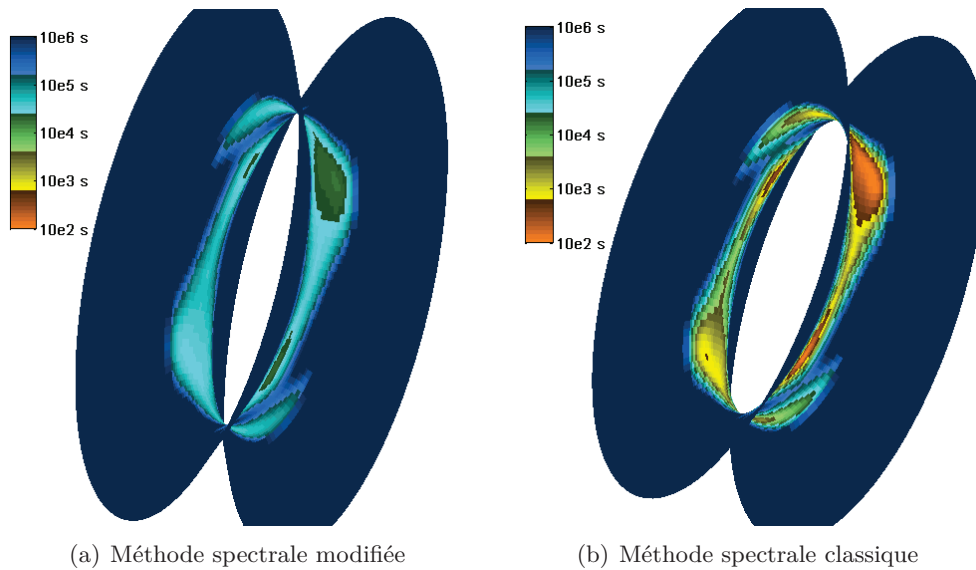
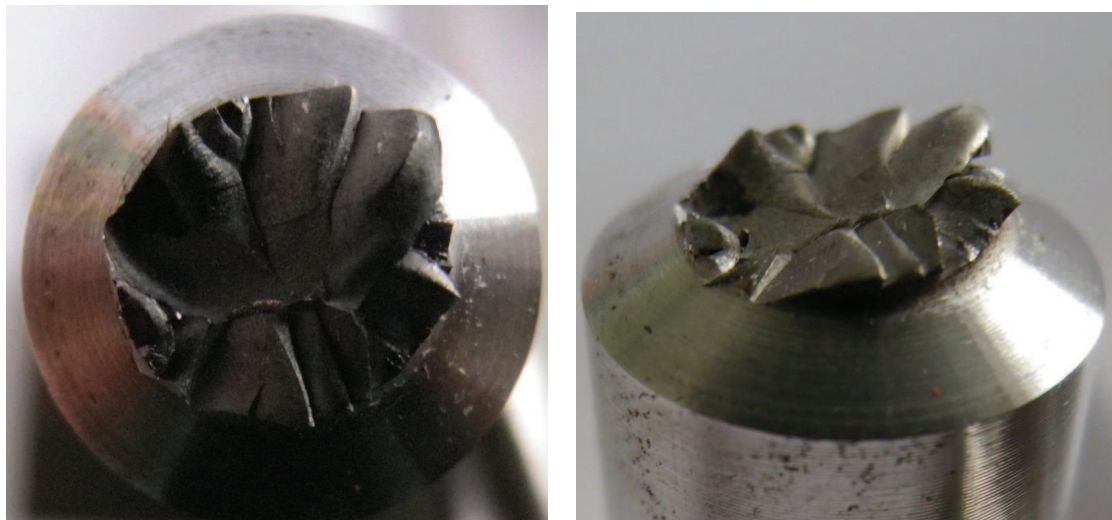


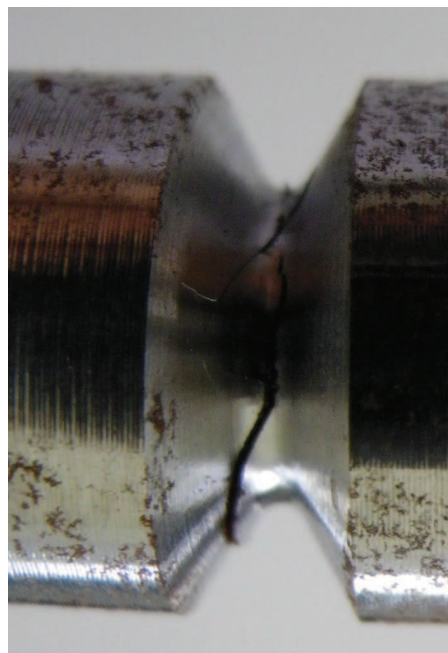
FIGURE 9.12 – Cartographie des durées de vie dans l'entaille pour le niveau d'excitation  $0.004 \text{ g}^2/\text{Hz}$  et avec la FDP de Dirlik

l'éprouvette, cela est dû à la fatigue. A cette occasion on remarque des plan à  $45^\circ$  sur le faciès caractéristique de la torsion et une dissymétrie du faciès de l'éprouvette caractéristique de la flexion.





(a) Faciès de rupture d'une éprouvette après démon- (b) Faciès de rupture d'une éprouvette après démon-  
tage (de face) tage (de profil)



(c) Photo de l'entaille après essai

FIGURE 9.13 – Photos de l'éprouvette après un essai avec la DSP centrée sur le 1<sup>er</sup> mode

#### 9.4 Essais sur le 3<sup>ème</sup> mode : Flexion-Torsion

Les essais en fatigue sur le troisième mode ont été réalisés au CETIM au pôle Ingénierie Bruit et Vibration (IBV) sur deux pots vibrants de 89 KN et 162 KN. Les données techniques de ces vibreurs sont en annexe D. Nous avons dû changer de moyen d'essai car l'amortissement associé au troisième mode est plus élevé ( $\approx 3\%$ ) que pour le premier ou deuxième mode. Pour cette raison, si on souhaite avoir des durées de vie du même ordre de grandeur que les précédents essais, il faut augmenter en conséquence les niveaux d'excitations de la DSP centrée



autour du troisième mode. Pour rappel, ces essais en fatigue ont un état de contraintes de la zone critique qui est multiaxial.

### 9.4.1 Dépouillement des essais

Dans le tableau 9.10, nous avons indiqué les niveaux d'excitations qui ont été retenus pour réaliser les essais en fatigue. Étant donné que dans le cas présent, la masse du pot vibrant est largement supérieure à la masse dynamique embarquée. La problématique de déséquilibre de la bobine du vibreur énoncée pour les essais précédents, n'a plus lieu d'être. Pour cette raison, nous avons effectué le plan comme il avait été défini en première partie de ce chapitre, soit quatre niveaux d'excitation avec deux essais par niveau (tableau 9.10).

Niveau	Bande fréquentielle (Hz)	Niveau ( $g^2/Hz$ )	RMS ( $g$ )
1	235 - 285	0.0450	2.25
2	235 - 285	0.0350	1.75
3	235 - 285	0.0300	1.50
4	235 - 285	0.0275	1.38

TABLE 9.10 – Niveaux d'excitations réellement choisis pour la DSP centrée autour du 3<sup>ème</sup> mode

Le tableau 9.11 rassemble les essais réalisés pour cette DSP. On associe à chaque éprouvette sa durée de vie en fonction de son niveau d'excitation. Dans le cas où il n'y a pas de fissure, nous n'avons pas comptabilisé l'éprouvette dans l'analyse statistique. Le moyen d'essai étant alloué pour une période restreinte, il n'a pas été possible d'amener toutes les éprouvettes à fissuration. On constate sur le tableau que les durées de vie pour un même niveau d'excitation sont très dispersées. Dans certain cas, comme pour l'éprouvette numéro 17, on constate que la durée de vie est largement inférieure à celle d'autres éprouvettes qui ont pourtant un niveau d'excitation largement supérieur comme l'éprouvette 58.

Afin de comprendre pourquoi il y a autant de dispersion entre les durées de vie d'un même niveau, nous avons ajouté dans le tableau l'amortissement moyen mesuré sur la première 1/2 h de l'essai en fatigue associé à chaque éprouvette. On constate une grande disparité dans ces amortissements. Alors que l'erreur relative sur l'amortissement pour le premier et deuxième mode n'excède pas 3 %, dans le cas du troisième mode l'erreur relative est supérieur à 85 %.

La principale raison de cette disparité est un problème de rigidité dû à l'encastrement. Au fil des essais, l'empreinte au niveau de l'interface d'encastrement s'est matée, cela est principalement dû au fait que l'amortissement choisi pour le troisième mode de l'éprouvette pour le dimensionnement de l'interface d'encastrement était plus faible que l'amortissement réel. Ceci conduit à des niveaux d'excitation plus importants que ceux prévus à l'origine et donc des efforts entre les éprouvettes et l'interface plus importants.

Cela rend difficile la confrontation des durées de vie expérimentales avec les durées de vie données par les méthodes sélectionnées. Le tableau 9.11 représente la moyenne et l'écart type des

durées de vie par niveau d'excitation. On s'aperçoit que l'écart-type pour les niveaux 0.0300 et 0.0275  $g^2/Hz$  sont du même ordre de grandeur que la durée de vie moyenne pour ces mêmes niveaux.

Niveau excitation	Numéro éprouvette	Amortissement (%)	Durée de vie associée (h)	Durée de vie moyenne par niveau	Ecart-type par niveau d'excitation (h)	Écart-type / Moyenne
0.0450 $g^2/Hz$	102	2.1	1.1	1.6	0.4	0.240
	13	2.9	1.7			
	10	4.1	Pas de fissure après 6.5h			
	30	2.1	1.5			
	53	3.5	2.0			
0.0350 $g^2/Hz$	56	3.1	Pas de fissure après 8h	5.9	1.1	0.190
	54	5.1	7.3			
	65	3.5	6.2			
	89	3.2	4.1			
	104	4.1	6.8			
	107	3.8	5.5			
0.0300 $g^2/Hz$	61	3.1	5.7	18.8	10.8	0.546
	8	7.1	Pas de fissure après 12h			
	105	3.5	7.8			
	120	2.5	5			
	29	5.0	28.1			
	71	3.6	20.5			
0.0275 $g^2/Hz$	108	6.2	Pas de fissure après 32h	38.4	26.8	0.698
	17	2.1	7.2			
	116	4.2	34.5			
	33	7.1	Pas de fissure après 56h			
	76	1.9	23.2			
	77	3.5	49.8			
	79	6.4	77.5			

TABLE 9.11 – Synthèse des durées de vie en fonction du niveau d'excitation et du numéro de l'éprouvette

Afin de comparer ces durées de vie expérimentales correctement, il ne faut pas faire un calcul de DSP par niveau d'excitation, mais plutôt, un calcul de DSP pour chaque éprouvette avec son amortissement propre mesuré. Cela implique un calcul éléments finis avec des conditions aux limites propres à chaque éprouvette afin d'obtenir les FRF correctement pour le calcul en fatigue. Un problème que nous n'avons pas abordé est le risque que l'amortissement soit non-linéaire au cours d'un même essai. Au vu des problèmes de robustesse et de répétabilité de ces essais, nous n'avons pas réalisé dans le cadre de la thèse de confrontation entre les durées de vie expérimentales et les durées de vie estimées par les méthodes numériques de calcul en fatigue.

## Conclusion

La confrontation des essais avec les méthodes numériques de calcul en fatigue, nous a montré que les méthodes spectrales proposées en chapitre 6 et 7 donnent de bonnes estimations de durée de vie quel que soit l'impact du comportement plastique du matériau sur la durée de

vie. Cela permet de valider le choix des méthodes du type Neuber dans le cas d'une plasticité confinée et dans le cas de vibrations aléatoires. Les méthodes spectrales classiques donnent de bonnes tendances quand le comportement du matériau est globalement linéaire mais donnent des résultats erronés quand le comportement devient élasto-plastique. La méthode de Hermite donne de meilleurs résultats sur les durées de vie expérimentales que pour le plan d'expérience numérique réalisé au chapitre 6. Néanmoins quand le comportement est élasto-plastique, les durées de vie avec le modèle de Hermite ne sont pas du même ordre de grandeur que les durées de vie expérimentales.

Concernant les essais, nous avons pu constater toute la complexité de l'environnement expérimental. Il est difficile d'anticiper toutes les complications expérimentales notamment quand ces essais ne sont pas encadrés par des normes définissant les règles d'usage. Néanmoins, la grande majorité des essais du plan d'expérience a produit des résultats exploitables. L'autre partie des résultats du plan d'expériences sont exploitables mais demandent une étude pour chaque éprouvette et non pour chaque niveau d'excitation. Cette étude n'est pas présentée dans la thèse. De même, les essais concernant la DSP d'excitation englobant le premier et troisième mode ont été partiellement réalisés mais ne sont pas présentés car ils n'ont pas tous été réalisés et on retrouve les problématiques énoncées pour la DSP d'excitation centrée autour du troisième mode pour certains de ces essais bien que l'interface d'encastrement ait été reprise.

## **Bibliographie du chapitre 9**

- [1] H. Rognon and al., “Spectral methods plasticity modeling for fatigue damage estimation :experimental application,” in *VISHNO 2012* (SUPMECA, ed.), (Clamart, French), Jun 2012.
- [2] S. Winterstein, “Nonlinear vibration models for extremes and fatigue,” *Journal Of Engineering Mechanics-ASCE*, vol. 114, pp. 1772–1790, OCT 1988.
- [3] H. Neuber, “Theory of stress concentration for shear-strained prismatic bodies with arbitrary nonlinear stress- strain law.,” *Journal Appl. Mech*, vol. 28, pp. 544–551, 1961.
- [4] T. Dirlik, *Application of computers in fatigue analysis*. PhD thesis, University of Warwick, 1985.
- [5] C. Lalanne, *Mechanical Vibration & Shock Analysis : Fatigue Damage*, vol. Tome 4. Lavoisier, Aug. 2009.
- [6] H. Rognon and al., “Formulation d’une méthode spectrale en déformations pour le calcul du dommage en fatigue,” in *SF2M*, 2011.



# Chapitre 10

## Conclusions et Perspectives

### Conclusions

La fatigue sous environnement vibratoire est un sujet d'étude complexe de part la transdisciplinarité des domaines à maîtriser tels que la fatigue, les processus stochastiques ou bien encore la dynamique des structures. Néanmoins, de nombreux auteurs ont développé des méthodes de prédiction de durée de vie formulées dans le domaine spectral. L'essentiel des travaux dans le domaine des méthodes spectrales portent soit sur une redéfinition de la fonction de densité de probabilité des cycles, soit une modification et/ou l'ajout d'une loi dans la chaîne de calcul des méthodes spectrales afin d'élargir leur champs d'utilisation ou de mieux prendre en compte la réalité industrielle.

Cette thèse se compose principalement de deux parties. La première est la proposition d'une nouvelle méthode de dimensionnement en fatigue avec la prise en compte du comportement élasto-plastique. La deuxième est la définition et l'étude d'une éprouvette vibratoire ainsi que la mise en place et la réalisation d'essais de fatigue vibratoire permettant de valider ce modèle sous sollicitations uniaxiale et multiaxiale.

Au fil des chapitres, nous avons mis en place les aspects théoriques et pratiques pour définir et valider une nouvelle méthode permettant de prendre en compte les problématiques énoncées dans l'introduction du mémoire. Cette méthode est basée sur les travaux réalisés sur les méthodes spectrales afin de conserver leur atout majeur en termes de rapidité de calcul. L'ajout et la modification des lois dans la chaîne de calcul de ces méthodes spectrales, nous a permis de prendre en compte le comportement élasto-plastique des matériaux. Les modifications portent sur la loi de fatigue et sur la représentation de la distribution des cycles. Elles sont réalisées en utilisant le postulat de Neuber et la loi de fatigue de Manson-Coffin-Basquin. L'utilisation du postulat de Neuber étend le champ d'utilisation de la méthode proposée à des zones de plasticité confinées. Dans le cadre des méthodes spectrales, nous avons émis une hypothèse sur la redistribution du nombre de cycle qui a été validée au fil des plans d'expériences numériques. La comparaison de la méthode proposée vis-à-vis des simulations de Monte-Carlo et d'autres méthodes telles que le modèle de Hermite ou les méthodes spectrales classiques a montré la robustesse et la rapidité du modèle proposée par rapport à l'ensemble des DSP étudiées dans le

plan d'expérience numérique. La méthode proposée est conservative sur 95 % des jeux de paramètres testés. Néanmoins, l'analyse du plan d'expérience a montré que pour un petit nombre de jeux de paramètres du plan, la méthode proposée était non-conservative.

La validation de la méthode a été réalisée pour l'acier 30NiCrMo8, mais les aciers ayant des caractéristiques similaires au 30NiCrMo8 devraient donner des résultats comparables. La méthode proposée peut être utilisée sur tous matériaux où le postulat de Neuber est applicable (principalement des aciers).

Comme il a été rappelé à plusieurs reprises, les méthodes spectrales étudiées concernent des chargements uniaxiaux. Afin d'élargir le champ d'utilisation de la méthode proposée, nous avons intégré à cette méthode les travaux réalisés par Preumont et Pitoiset sur la définition d'une DSP équivalente au sens de Von Mises. Pour valider notre proposition, nous avons réalisé un plan d'expérience succinct au vu de l'ensemble des paramètres influents. Les résultats de ce plan d'expérience donnent satisfaction vis-à-vis de la proposition formulée. La partie sur l'étude de la multiaxialité présentée dans cette thèse représente une piste d'investigation pour répondre à la problématique de la prédiction de durée de vie sous sollicitation multiaxiale .

Les essais ont constitué une partie importante des travaux de la thèse. Premièrement, nous avons développé une éprouvette vibratoire répondant à certains critères tels qu'une zone de plasticité confinée ainsi que le banc d'essai associé à l'éprouvette. Deuxièmement, nous avons défini le protocole expérimental comprenant la chaîne d'asservissement ainsi que la chaîne de détection de fissure. A la suite de cela, la réalisation des essais par rapport à un plan d'expérience ont été réalisés afin d'établir une comparaison avec le modèle numérique proposé. Les essais ont mis en évidence certaines complications qui n'avaient pas été forcément anticipées mais, qui dans la majeure partie des cas, ont pu être résolues sans compromettre la validité des résultats expérimentaux. Dans le cas du problème de rigidité dû à l'encastrement rencontré lors des essais centrés sur le 3<sup>ème</sup> mode de l'éprouvette, les confrontations n'ont pas pu être réalisées mais une solution afin d'exploiter les résultats a été proposée. Cette solution pourra faire l'objet de travaux ultérieurs.

## Perspectives

Les perspectives au vu des ces travaux sont multiples. Tout d'abord, concernant la méthode proposée, une étude temporelle et fréquentielle sur des modèles mécaniques simples type 1DDL ou 2DDL modélisant un comportement élasto-plastique via le modèle de Dahl peut-être réalisée pour quantifier l'impact sur la durée de vie d'un comportement isotrope ou cinématique. De plus ce type d'étude permettrait de voir l'influence réelle du comportement élasto-plastique sur la variation de la fréquence propre instantanée du mode avant fissuration et sur le nombre de cycles pour une période donnée. Enfin, une étude de ce type permettrait de voir si une déformation moyenne subsiste et l'impact du comportement hystérétique (problématique de dissipation d'énergie).

Concernant la méthode proposée, on peut envisager un élargissement de celle-ci en appliquant la méthode à des zones de plasticité non-confinées. Des études sur l'élargissement de l'application des méthodes de Neuber et Glinka ont été réalisées dans le domaine temporel. De plus,

---

cela sera l'occasion de définir la chaîne de calcul avec la méthode de Glinka. La réalisation de plans d'expériences numériques avec d'autres caractéristiques matériaux que celles de l'acier 30NiCrMo8 est également envisageable afin de valider la méthode sur d'autres matériaux. Pour la problématique de la multiaxialité, on peut envisager le passage du critère de Wang-Brown dans le domaine spectral comme pour les critères de Crossland et Mataka, utilisés par Pitoiset.

En ce qui concerne les essais, une multitude de données peuvent être encore exploitées. La durée de vie n'est qu'une des informations que nous pouvons extraire de ce type d'essais. On peut envisager une étude de sensibilité approfondie de l'amortissement vis-à-vis des dispersions géométriques et des dispersions de la masse. une autre piste d'étude serait l'obtention de la profondeur de fissure grâce à la FRF d'un choc réalisé après l'essai en fatigue. A propos du problème de rigidité, la modélisation correcte des conditions aux limites sur une structure ayant des comportements non-linéaires est un problème actuel et récurrent. Les essais qui ont souffert de cette problématique pourraient servir de base de travail à une modélisation de contact sous environnement vibratoire.

Des essais complémentaires sont possibles, où on pourrait envisager d'exciter les trois premiers modes malgré que le deuxième mode soit perpendiculaire aux deux autres. Pour cela, il suffit d'avoir la masselotte orienté à  $45^\circ$  par rapport au plan d'excitation, de cette manière, les trois premiers modes seraient sollicités. D'autres essais avec la même géométrie d'éprouvette mais des matériaux différents peuvent-être envisagés pour élargir le domaine de validité de la méthode proposée.





# Annexe A

## Les lois de distribution

### A.1 Loi normale

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi normale si sa densité de probabilité a pour équation :

$$f_X(x, MOY_X, STD_X) = \frac{1}{STD_X \sqrt{2\pi}} e^{-0.5 \left( \frac{x - MOY_X}{STD_X} \right)^2} \quad (A.1)$$

Avec  $STD_X$  représentant l'écart-type et  $MOY_X$  représentant la moyenne du processus aléatoire. Une telle variable aléatoire est dite variable gaussienne. La fonction de répartition est donnée en équation A.2.

$$F_X(x) = \frac{1}{STD_X \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-0.5 \left( \frac{\alpha - MOY_X}{STD_X} \right)^2} d\alpha \quad (A.2)$$

La figure A.1 représente la densité de probabilité et la fonction de répartition d'une variable gaussienne pour différentes valeurs de paramètres.

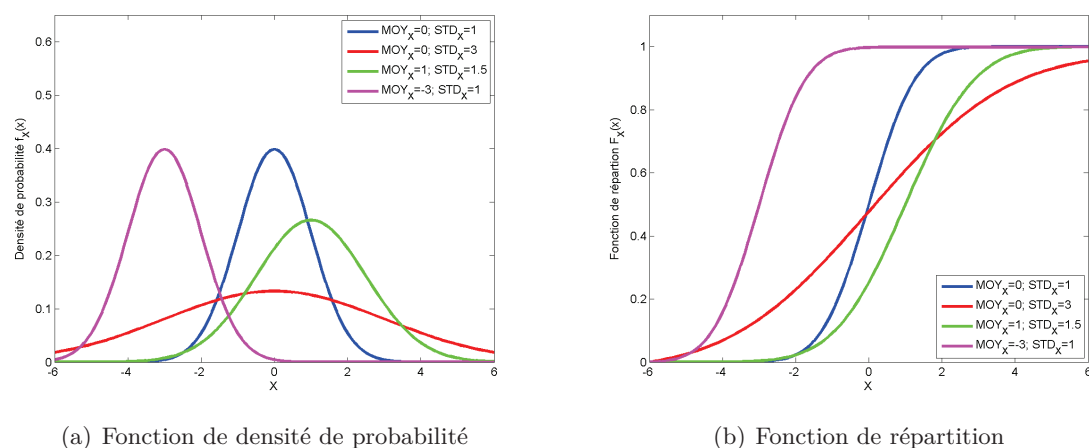


FIGURE A.1 – Représentation de la loi normale pour différentes valeurs d'écart-type et de moyenne

## A.2 Loi de Rayleigh

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Rayleigh si sa densité de probabilité a pour équation :

$$f_X(x, MOY_X, STD_X) = \frac{x}{STD_X^2} e^{-0.5(\frac{x}{STD_X})^2} \quad (A.3)$$

Avec  $STD_X$  représentant l'écart-type du processus aléatoire. La fonction de répartition est donnée en équation A.4.

$$F_X(x) = \frac{1}{STD_X^2} \int_{-\infty}^x \alpha e^{-0.5(\frac{\alpha}{STD_X})^2} d\alpha \quad (A.4)$$

La figure A.2 représente la densité de probabilité et la fonction de répartition d'une loi de Rayleigh pour différentes valeurs de paramètres.

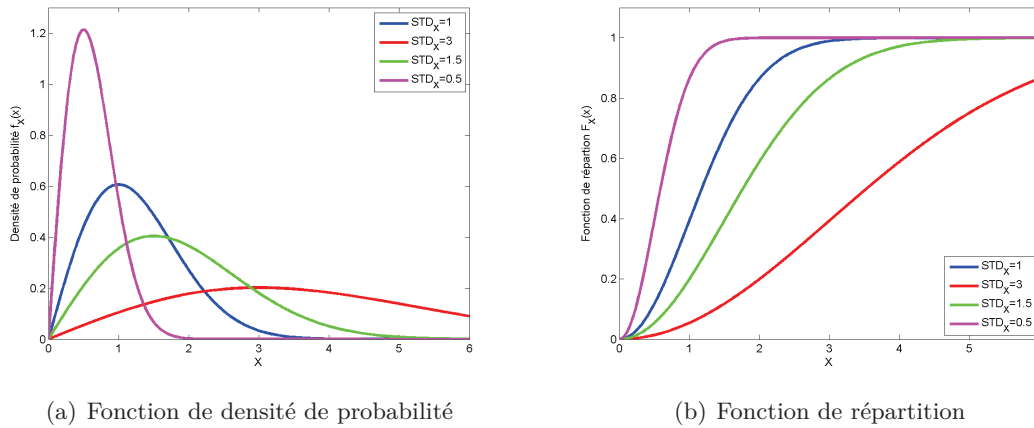


FIGURE A.2 – Représentation de la loi normale pour différentes valeurs d'écart-type

## A.3 Loi de Weibull

La densité de probabilité d'une loi de Weibull est donnée par l'équation A.5.

$$f_X(x, a, b, c) = \frac{a}{b} \left(\frac{x-c}{b}\right)^{(a-1)} e^{-\left(\frac{x-c}{b}\right)^a} \quad (A.5)$$

Où  $a > 0$  est le paramètre de forme,  $b > 0$  est le paramètre d'échelle et  $c$  est le paramètre de localisation de la distribution. La fonction de répartition est donnée par l'équation A.6.

$$F_X(x, a, b, c) = 1 - e^{-\left(\frac{x-c}{b}\right)^a} \quad (A.6)$$

La figure A.3 représente la densité de probabilité et la fonction de répartition d'une loi de Rayleigh pour différentes valeurs de paramètre. On constate que cette loi de probabilité permet, grâce à ces trois paramètres, de modéliser d'autres lois de probabilité telles que la loi normale ou la loi exponentielle.

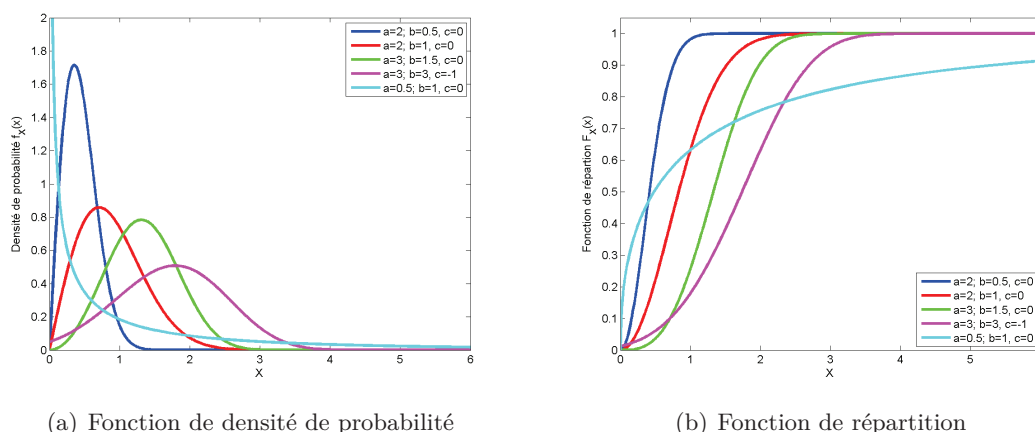


FIGURE A.3 – Représentation de la loi normale pour différentes valeurs de a, b et c

## A.4 Loi log-normale

Une variable aléatoire X suit une loi log-normale si sa densité de probabilité a pour équation :

$$f_X(x, MOY_X, STD_X) = \frac{1}{STD_X \sqrt{2\pi} x} e^{-0.5 \left( \frac{\ln(x) - MOY_X}{STD_X} \right)^2} \quad (A.7)$$

Avec  $STD_X$  représentant l'écart-type et  $MOY_X$  représentant la moyenne du processus aléatoire. La fonction de répartition est donnée en équation A.8.

$$F_X(x) = \frac{1}{STD_X \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\alpha} e^{-0.5 \left( \frac{\ln(\alpha) - MOY_X}{STD_X} \right)^2} d\alpha \quad (A.8)$$

La figure A.4 représente la densité de probabilité et la fonction de répartition d'une loi log-normale pour différentes valeurs de paramètre.

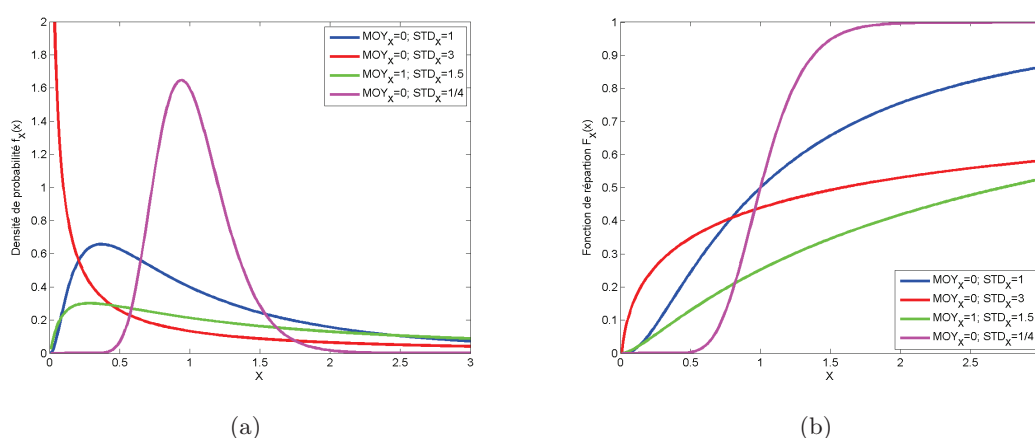


FIGURE A.4 – Représentation de la loi normale pour différentes valeurs d'écart-type et de moyenne



## Annexe B

# Galerie photo des plans d'expériences du chapitre 4 et 6

### B.1 Photos du plan d'expérience du chapitre 4

Les figures ci-dessous se composent de figure sur la durée de vie obtenue avec des DSP BR et 2DDL pour différents matériaux. Il y a des figures sur la distribution de cycle et de dommage dans le cas de la DSP BR ainsi que des figures sur le calcul d'erreur relative pour différents matériaux. On remarquera à cette occasion pour la figure B.8(b), le phénomène de la cloche de Dirlik.

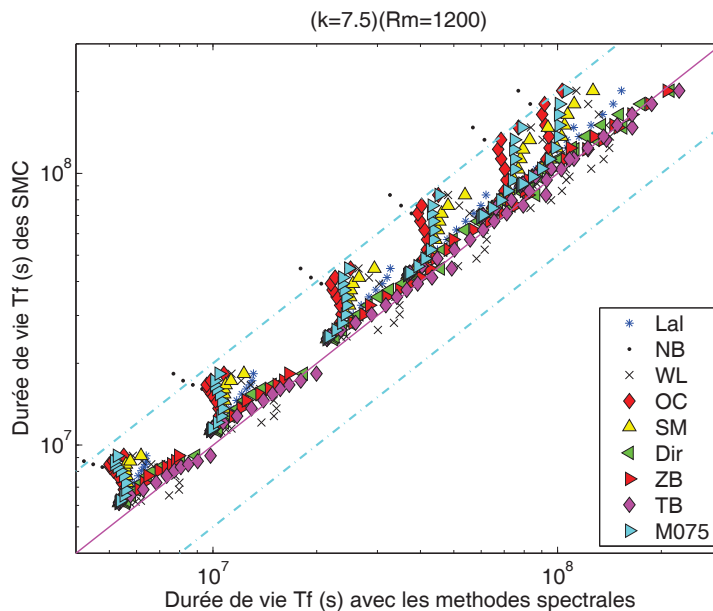


FIGURE B.1 – Durée de vie Tf de l'ensemble des méthodes spectrales testées pour l'ensemble des paramètres de la DSP BR pour un matériau avec une pente k de 7.5 et une valeur RM de 1200 MPa

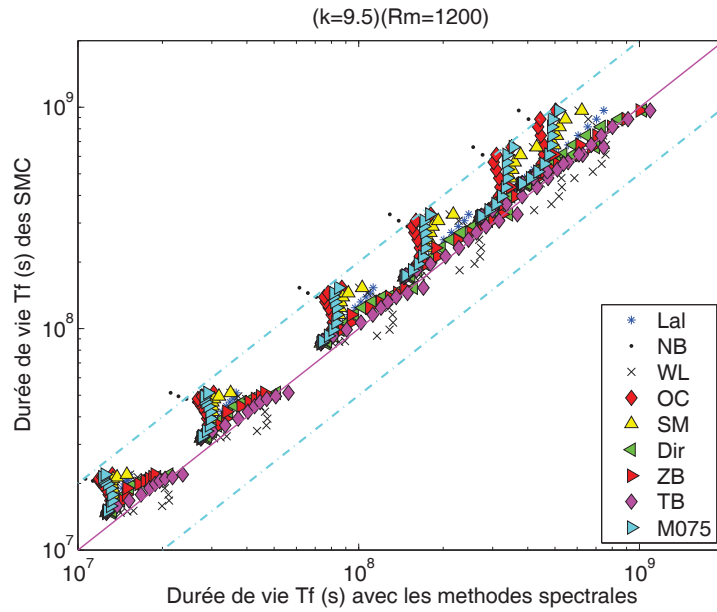


FIGURE B.2 – Durée de vie Tf de l'ensemble des méthodes spectrales testées pour l'ensemble des paramètres de la DSP BR pour un matériau avec une pente k de 9.5 et une valeur RM de 1200 MPa

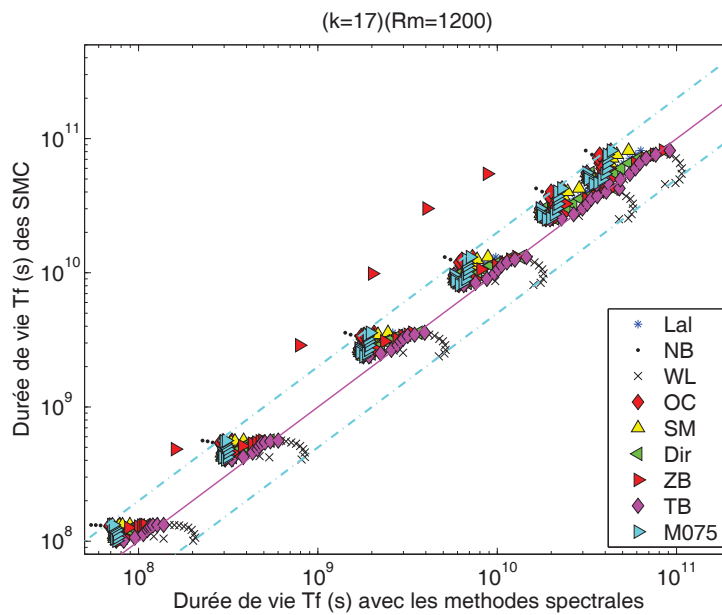


FIGURE B.3 – Durée de vie Tf de l'ensemble des méthodes spectrales testées pour l'ensemble des paramètres de la DSP BR pour un matériau avec une pente k de 17 et une valeur RM de 1200 MPa

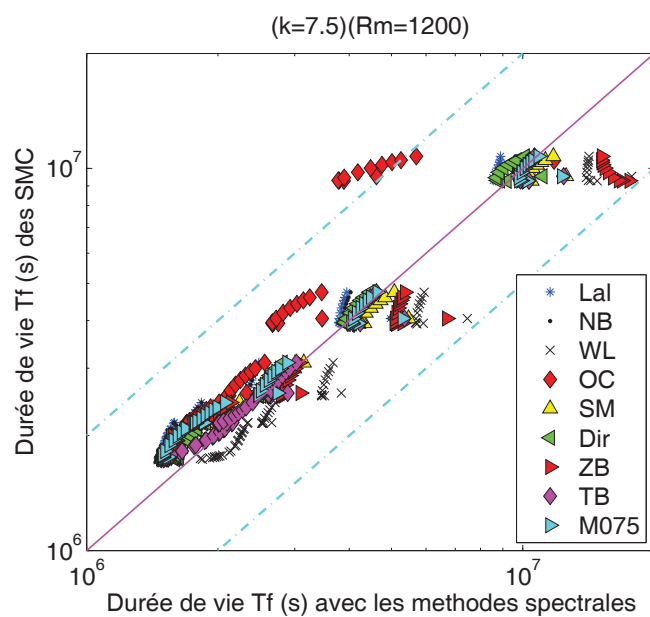


FIGURE B.4 – Durée de vie Tf de l'ensemble des méthodes spectrales testées pour l'ensemble des paramètres de la DSP 2DDL pour un matériau avec une pente  $k$  de 7.5 et une valeur RM de 1200 MPa

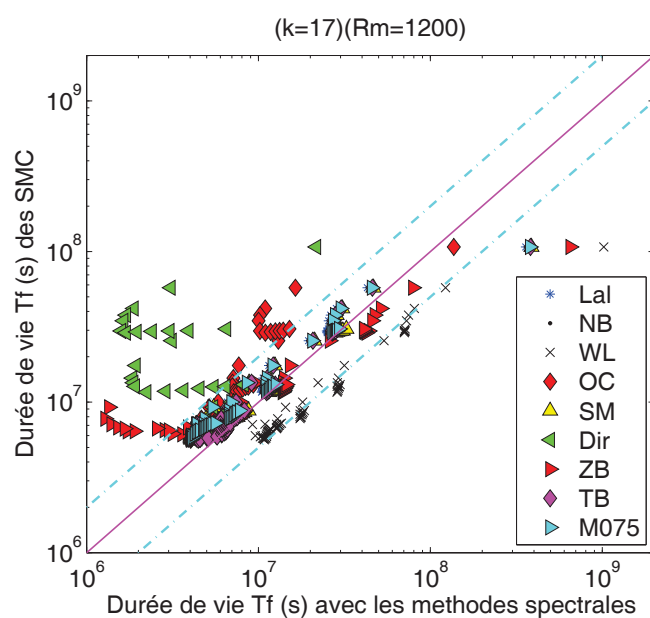


FIGURE B.5 – Durée de vie Tf de l'ensemble des méthodes spectrales testées pour l'ensemble des paramètres de la DSP 2DDL pour un matériau avec une pente  $k$  de 17 et une valeur RM de 1200 MPa



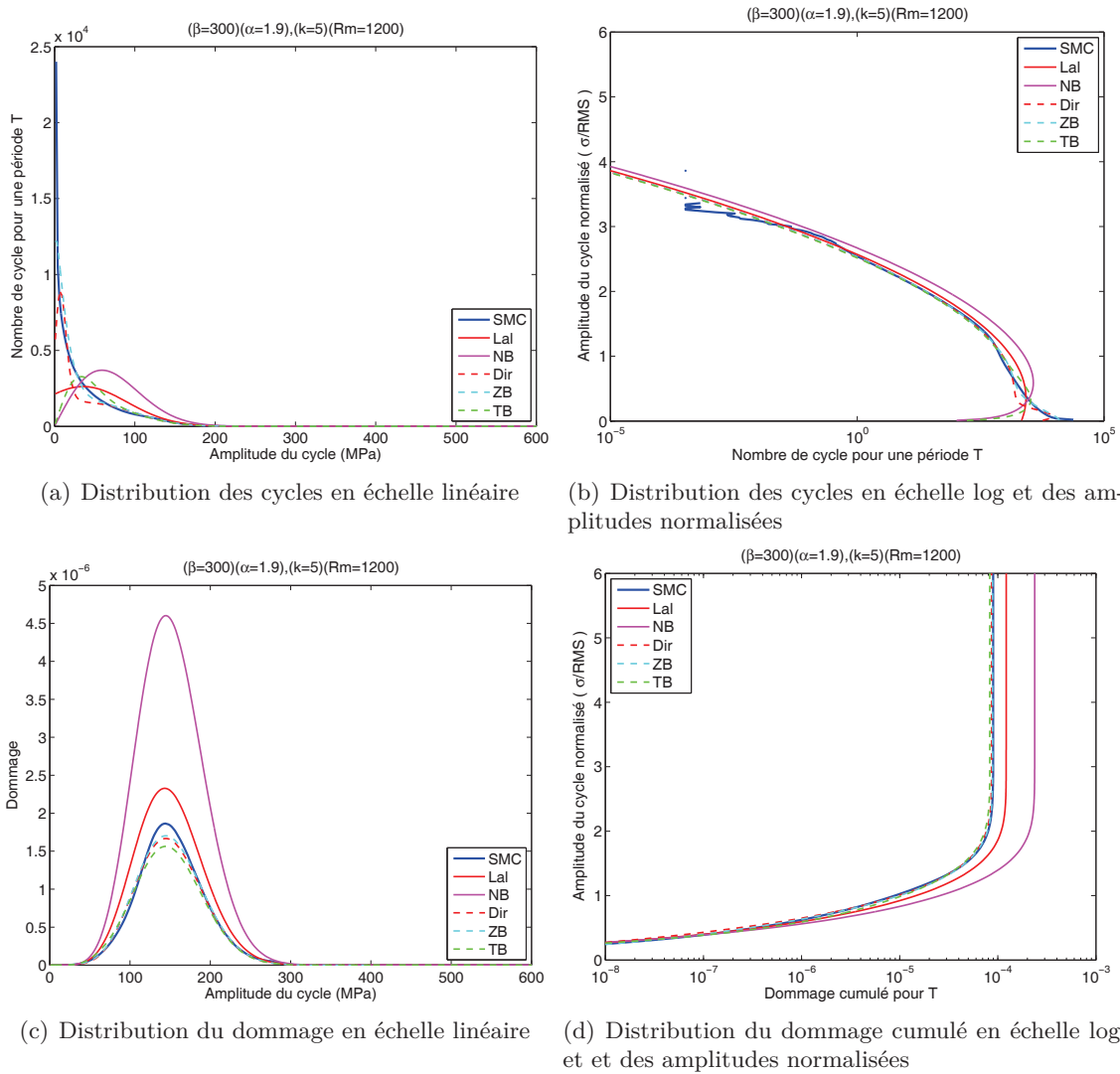


FIGURE B.6 – Présentation de différentes distributions dans le cas de la DSP BR avec les paramètres  $\beta$  à 300,  $\alpha$  à 1.9 et un matériau avec une pente  $k=5$  et  $R_m=1200$  MPa

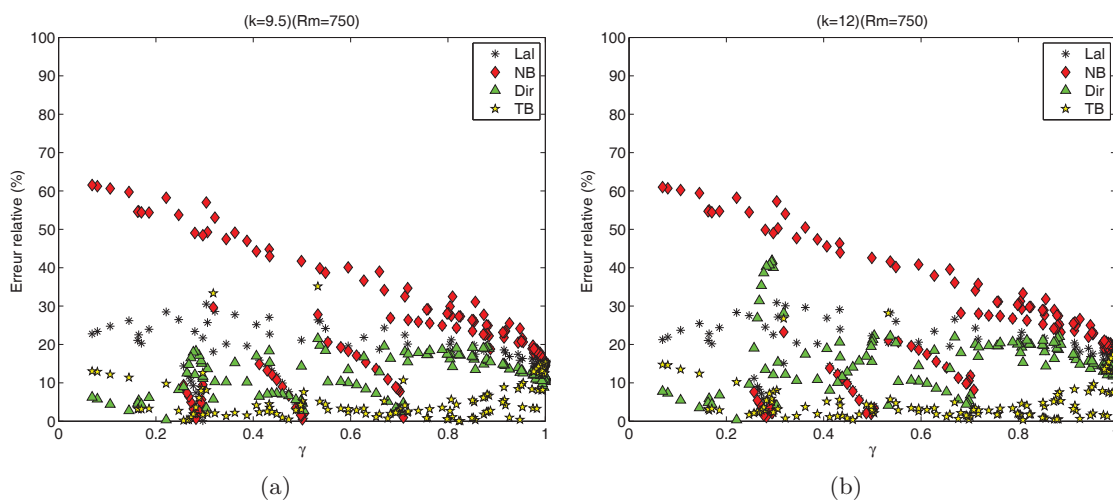


FIGURE B.7 – Représentation de l'erreur relative par rapport à des simulations de Monte-Carlo pour deux matériaux

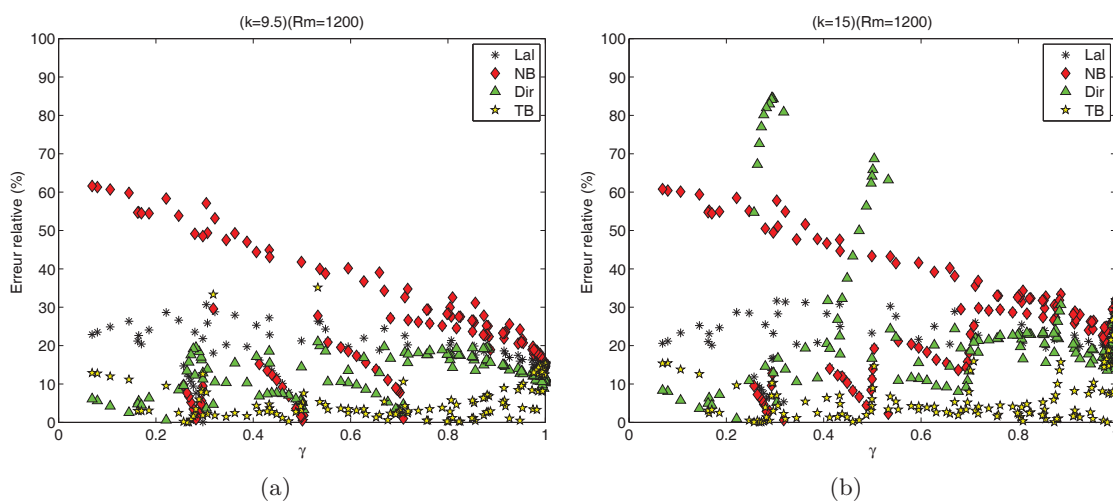


FIGURE B.8 – Représentation de l'erreur relative par rapport à des simulations de Monte-Carlo pour deux matériaux

## B.2 Photos du plan d'expérience du chapitre 6

Les figures de cette partie viennent compléter les figures sur la distribution de cycle et de dommage présentées au chapitre 6. Elles présentent la distribution de cycle et de dommage pour d'autres fonctions de densité de probabilité et d'autres jeux de paramètres.

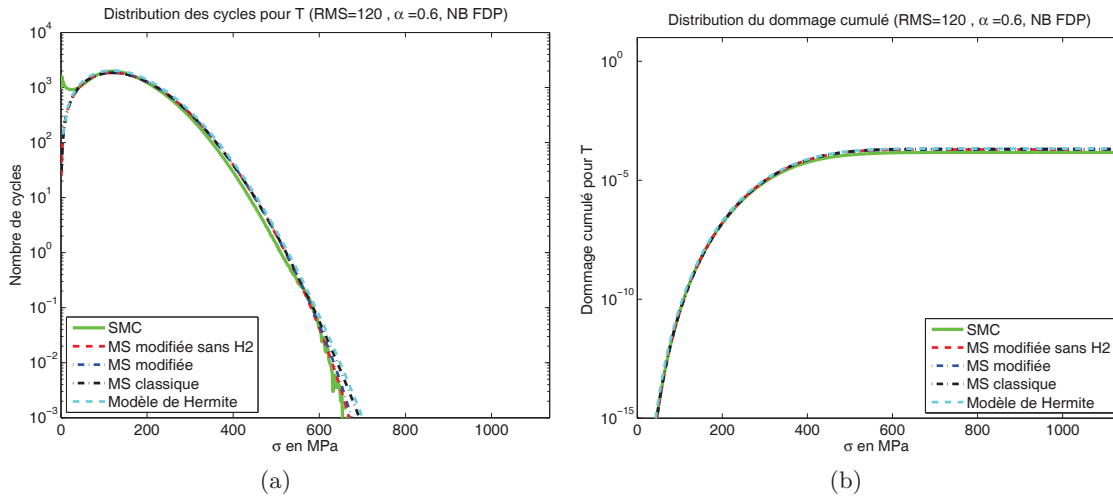


FIGURE B.9 – Distribution des cycles et du dommage cumulé pour les différents processus de calcul dans le cas de la DSP passe-bande avec RMS=120 MPa,  $\alpha = 0.6$  et la FDP Narrow-band

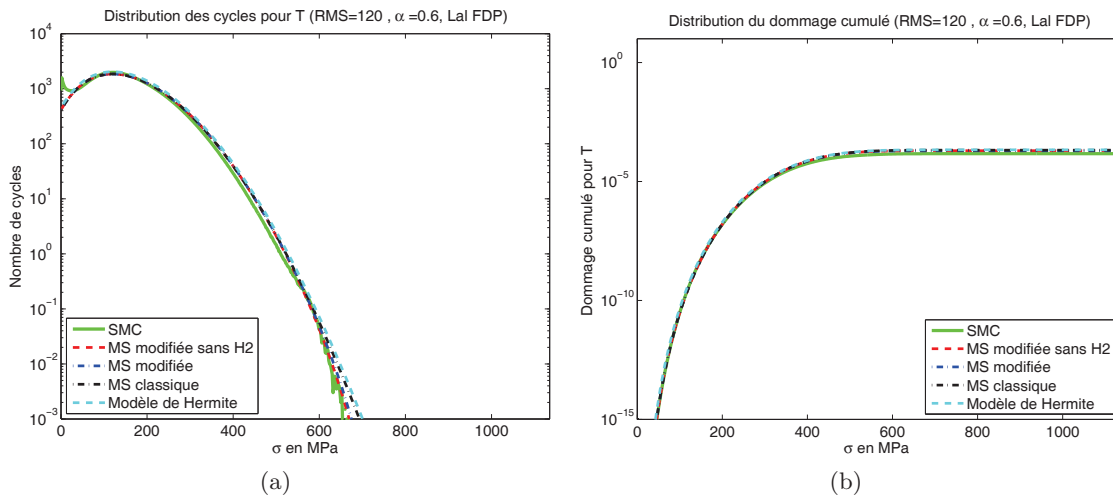


FIGURE B.10 – Distribution des cycles et du dommage cumulé pour les différents processus de calcul dans le cas de la DSP passe-bande avec RMS=120 MPa,  $\alpha = 0.6$  et la FDP de Lalanne

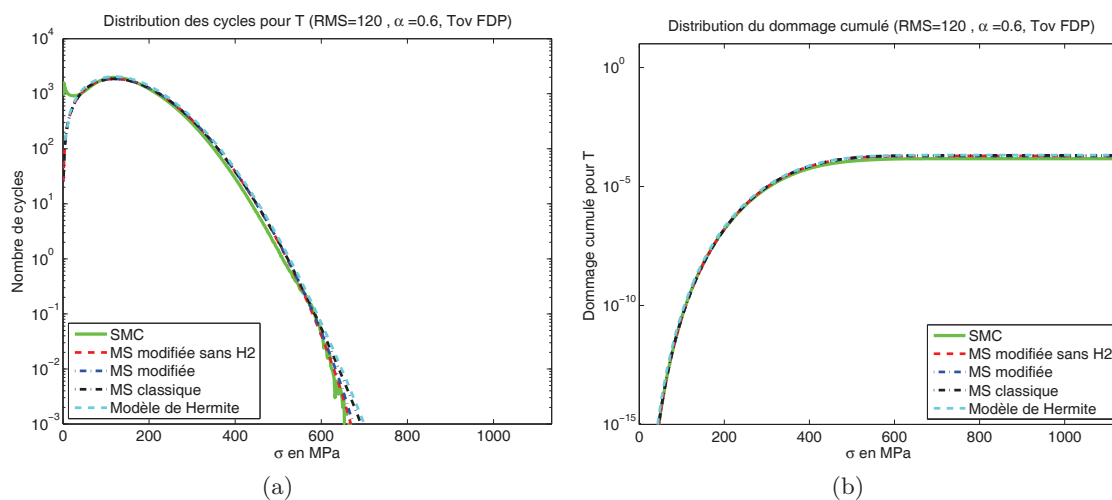


FIGURE B.11 – Distribution des cycles et du dommage cumulé pour les différents processus de calcul dans le cas de la DSP passe-bande avec RMS=120 MPa , $\alpha = 0.6$  et la FPD de Tovo & Benasciutti

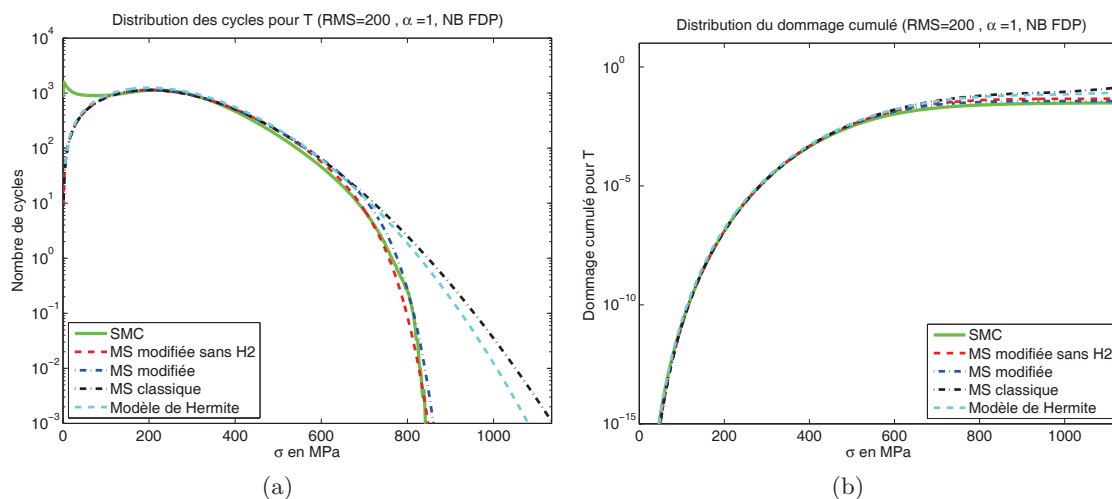


FIGURE B.12 – Distribution des cycles et du dommage cumulé pour les différents processus de calcul dans le cas de la DSP passe-bande avec RMS=200 MPa , $\alpha = 1$  et la FPD Narrow-band

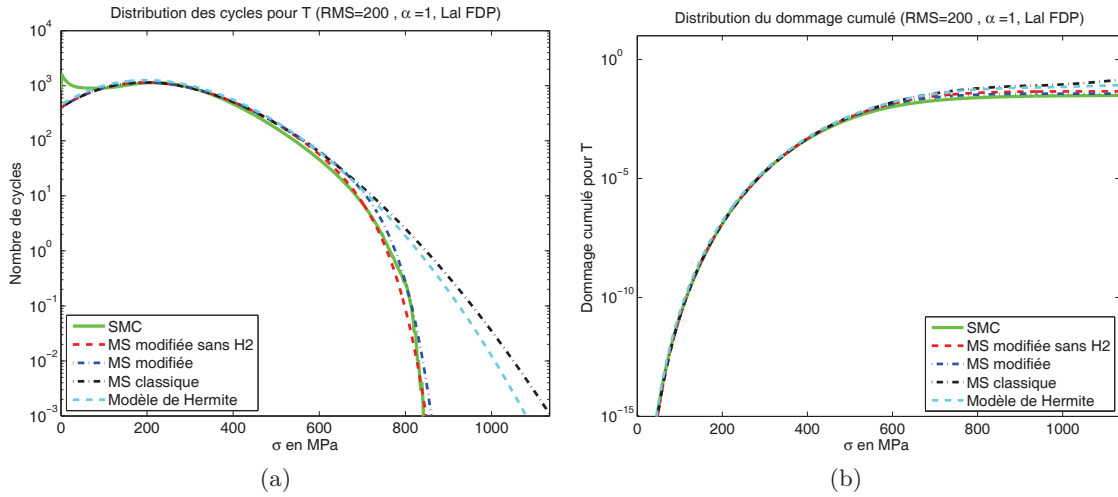


FIGURE B.13 – Distribution des cycles et du dommage cumulé pour les différents processus de calcul dans le cas de la DSP passe-bande avec RMS=200 MPa,  $\alpha = 1$  et la FPD de Lalanne

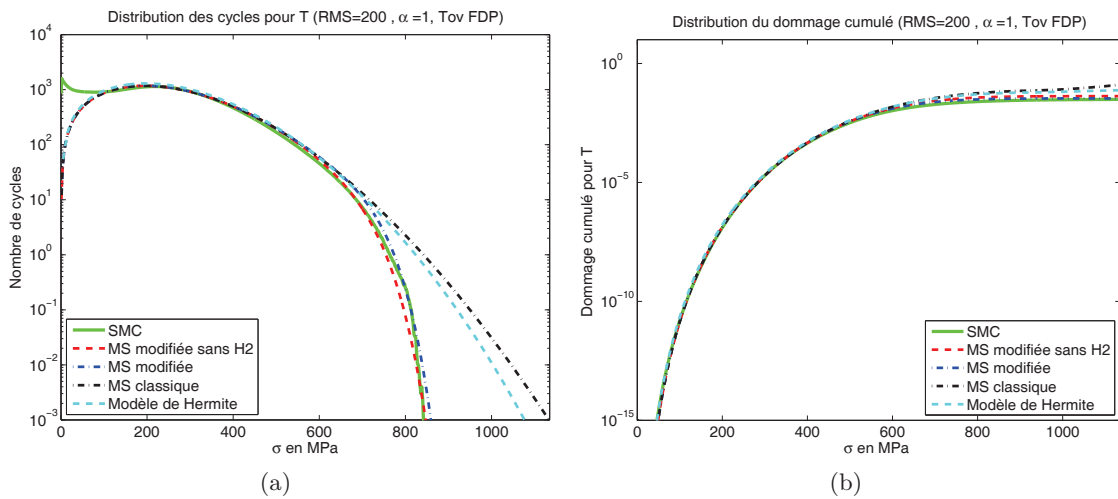


FIGURE B.14 – Distribution des cycles et du dommage cumulé pour les différents processus de calcul dans le cas de la DSP passe-bande avec RMS=200 MPa,  $\alpha = 1$  et la FPD de Tovo & Benasciutti

## Annexe C

# Méthode de prévision de durée de vie dans le domaine temporel pour un état de sollicitation multiaxial

### C.1 Différentes approches des méthodes de prévision de durée de vie

On peut classer les méthodes de prévision de durée de vie en trois catégories : les approches en déformation issues de la fatigue oligocyclique, les approches en contrainte et les approches énergétiques issues de la fatigue polycyclique. Pour chaque type d'approche, nous citons quelques méthodes :

Les approches en déformation :

- La méthode de Wang & Brown [93] [94] [95] [99] (1993)
- La méthode de Fatemi & Socie [33] (1988)

Les approches énergétiques :

- La méthode de Lagoda & Macha [49] (1998)
- La méthode de Bannantine [5] (1989)

Les approches en contrainte :

- La méthode de Stephanov [89] [90] (1993)
- La méthode de Morel [65] (1994)
- La méthode de Robert [23] [101] (1996)

### C.2 Méthode de Wang & Brown

Wang & Brown [94] [95] basent leur méthode de prédiction de durée de vie sur le critère défini par Brown & Miller [21] en 1973. Ce critère est donné en équation C.1. Ils proposent ce critère en se basant sur des observations microscopiques sur l'orientation de la fissure et en supposant que le cisaillement maximum est à l'origine du phénomène de plasticité.

$$\tau_a^\varphi + S \varepsilon_{n_a}^\varphi \leq \text{constante} \quad (\text{C.1})$$

Où  $\tau_a$  et  $\varepsilon_{n_a}$  sont respectivement l'amplitude de déformation de cisaillement et la déformation normale au plan de cisaillement maximum. S et  $\varphi$  sont des constantes propres au matériau étu-

dié. Dans le cas de la méthode de prédiction de durée de vie, Wang & Brown prennent  $\varphi$  égal à 1. L'équation C.2 est la méthode proposée par les auteurs qui couple le critère avec la courbe de Manson-Coffin-Basquin en sollicitations purement alternées et la correction de Morrow.

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\tau_a + S \Delta\varepsilon_n}{1 + \nu' + S(1 - \nu')} = \frac{\sigma_f - \bar{\sigma}_n}{\mathbf{E}} (2N)^b + \varepsilon_f (2N)^c \quad (\text{C.2})$$

Où  $\bar{\sigma}_n$  et  $\Delta\varepsilon_n$  sont respectivement la contrainte moyenne normale au plan de cisaillement maximal et l'étendue de la déformation normale au plan de cisaillement maximal.  $\nu'$  est le coefficient de Poisson effectif, il est défini en équation C.3.  $\varepsilon_e$  et  $\varepsilon_p$  représentent les parties plastique et élastique de la déformation.  $\nu_p$  est égal à 0.5 si on fait l'hypothèse que le matériau est incompressible.

$$\nu' = \frac{\varepsilon_e \nu_e + \nu_p \varepsilon_p}{\varepsilon_e + \varepsilon_p} \quad (\text{C.3})$$

La figure C.1 montre la méthodologie d'application de la méthode de Wang & Brown du tenseur des contraintes et des déformations jusqu'à l'obtention du dommage associé à un chargement de période T.

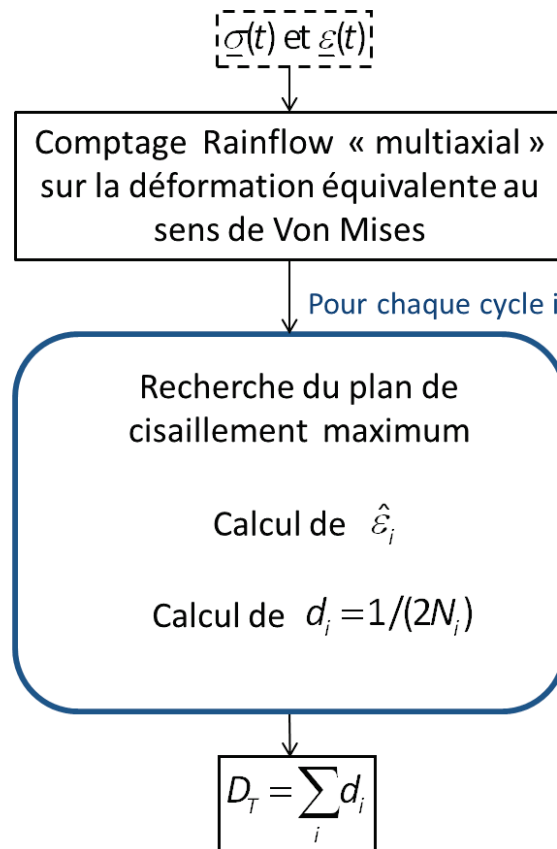


FIGURE C.1 – Organigramme de la méthode de prévision de durée de vie de Wang & Brown.

## Annexe D

# Plans de l'éprouvette et données sur les vibrateurs

### D.1 Plan de l'éprouvette et du banc d'essai

Nous présentons ici, les plans détaillés de l'éprouvette avec les deux configurations étudiées durant la thèse ainsi que les plans de l'interface d'encastrement pour l'implantation sur le pot vibrant 1500 N.

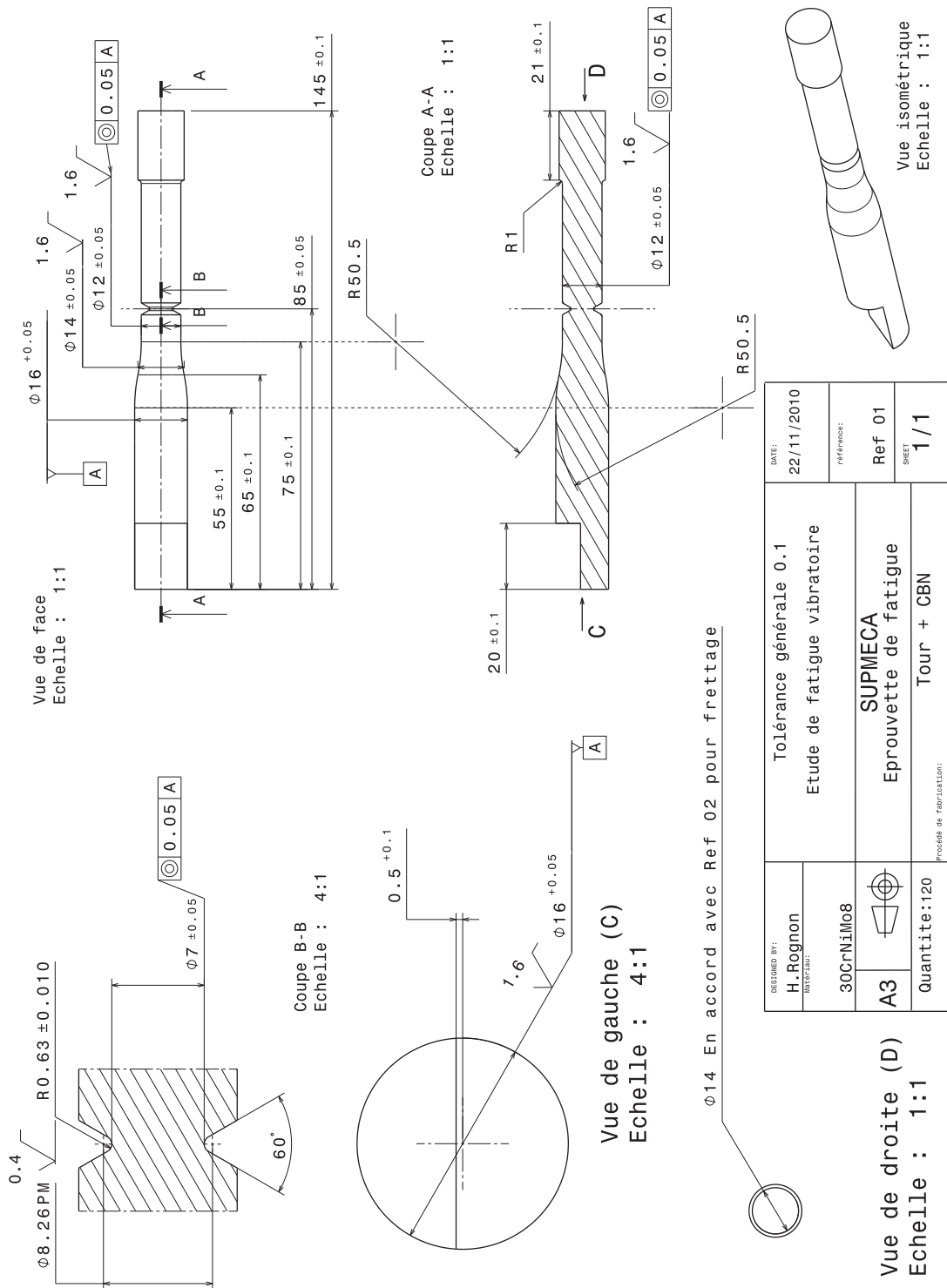


FIGURE D.1 – Éprouvette dans la configuration pour solliciter le deuxième mode propre de la structure. Méplat perpendiculaire au plan de symétrie de la masselotte

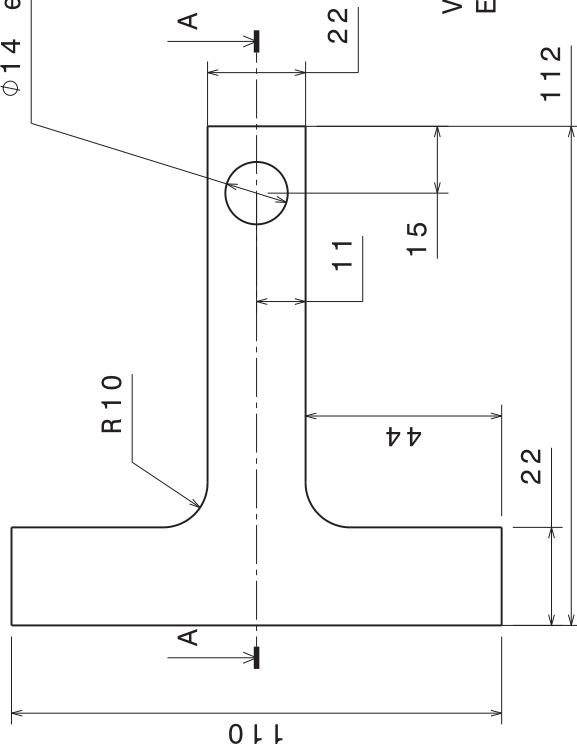


FIGURE D.2 – Éprouvette dans la configuration pour solliciter le premier et / ou le troisième mode propre de la structure. Méplat parallèle au plan de symétrie de la masselotte

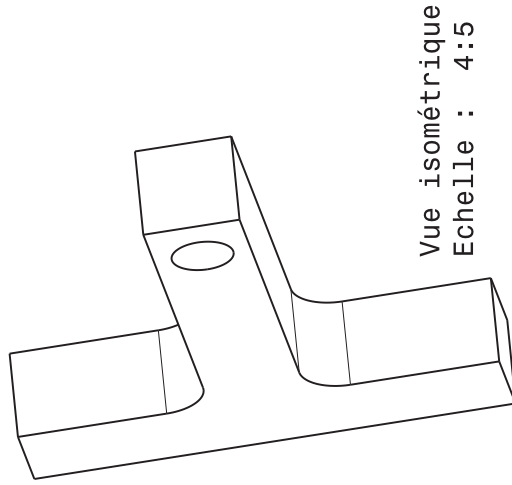




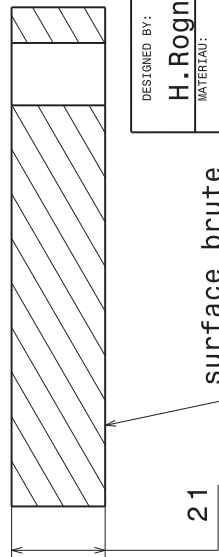
Φ14 en accord avec Ref 01 pour frettage



Vue de face  
Echelle : 4:5



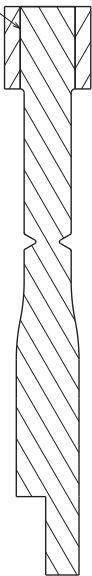
Vue isométrique  
Echelle : 4:5



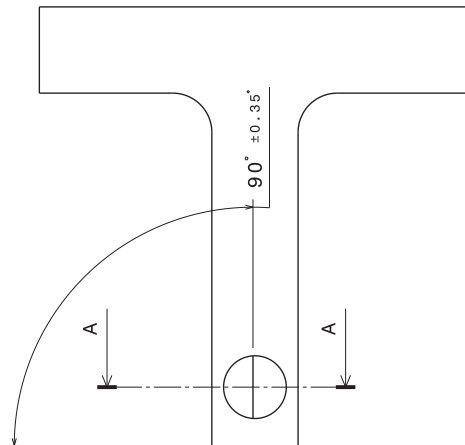
Coupe A-A  
Echelle : 4:5

DESIGNED BY: <b>H. Rognon</b>	Tolérance générale 0.1		DATE: 22/11/2010
MATÉRIAU: <b>E24-2</b>	Etude de fatigue vibratoire		référence: Ref 02
<b>A4</b>	<b>SUPMECA</b>		SHEET <b>1/1</b>
Quantite:120	Masselette de l'éprouvette		

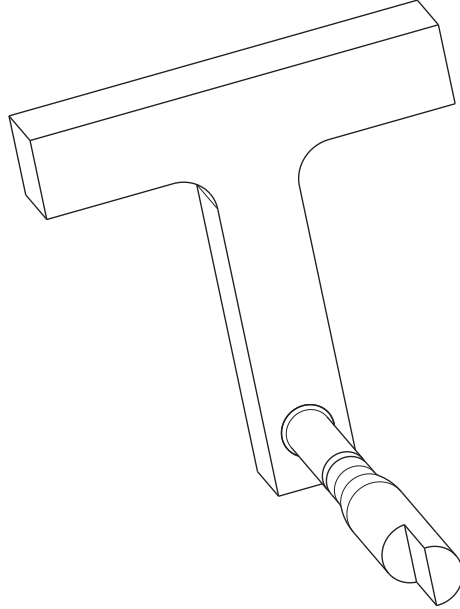
assemblage réalisé par frettage



Coupe A-A  
Echelle : 1:1

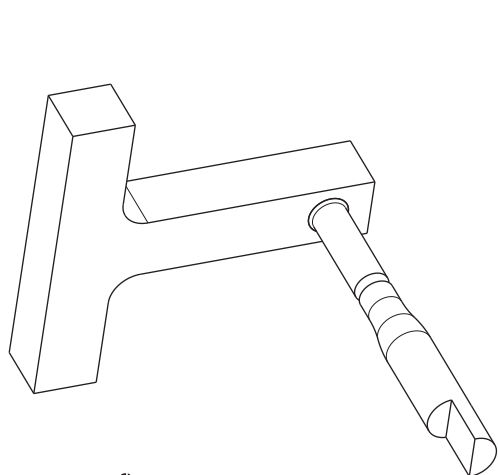


Vue de face  
Echelle : 1:1

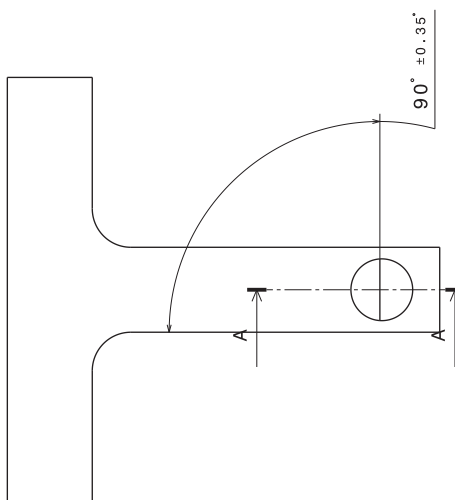


Vue isométrique  
Echelle : 1:1

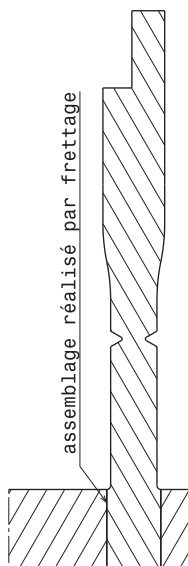
DESIGNED BY: <b>H. Rognon</b> <small>INGENIEUR</small>	DATE: 22/11/2010
A3	Assemblage par frettage Etude de fatigue vibratoire
	réfERENCE: Ref 06
Quantité:90	SHEET 1 / 1
SUPMECA assemblage de l'ep multiaxiale	



Vue isométrique  
Echelle : 4:5

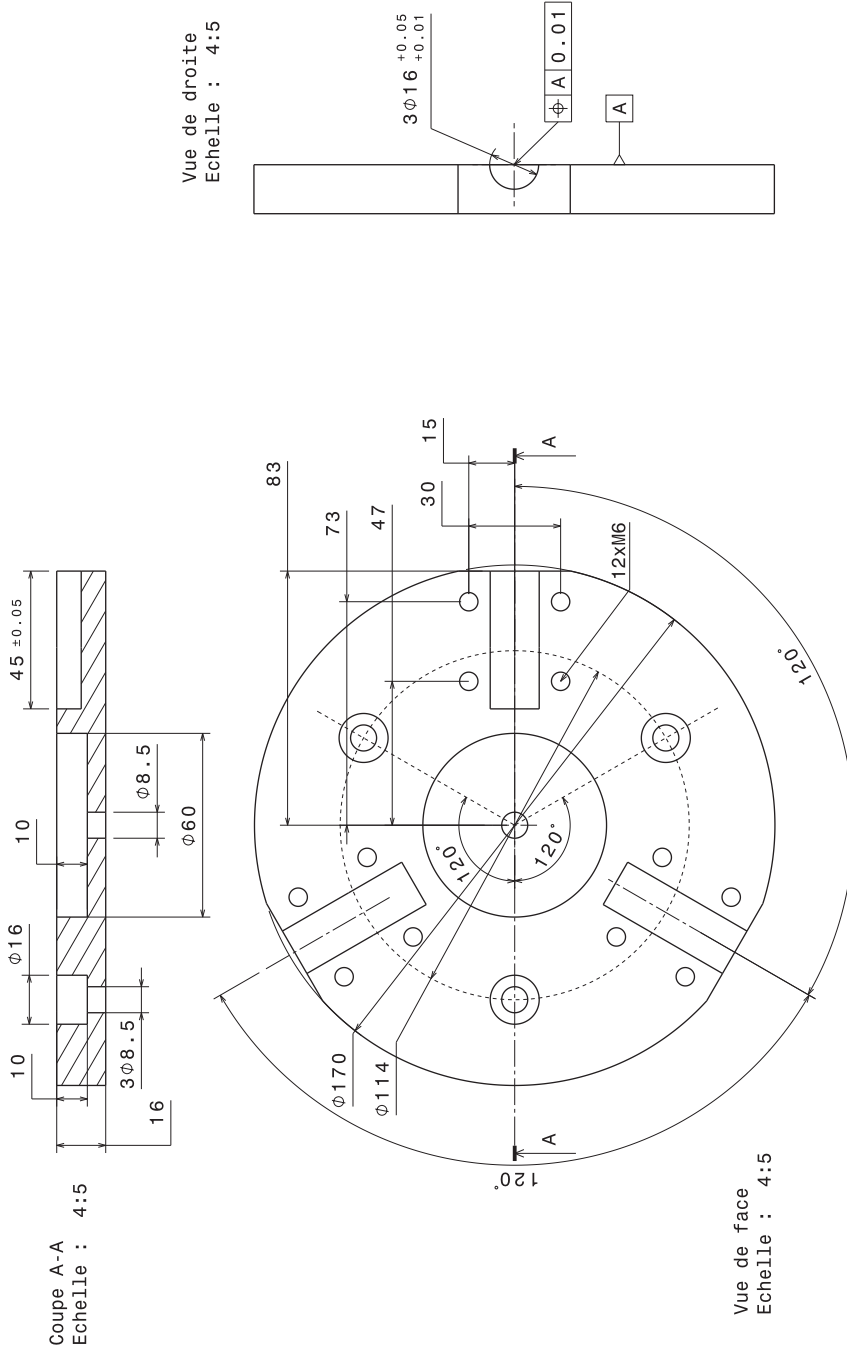


Vue de face  
Echelle : 1:1

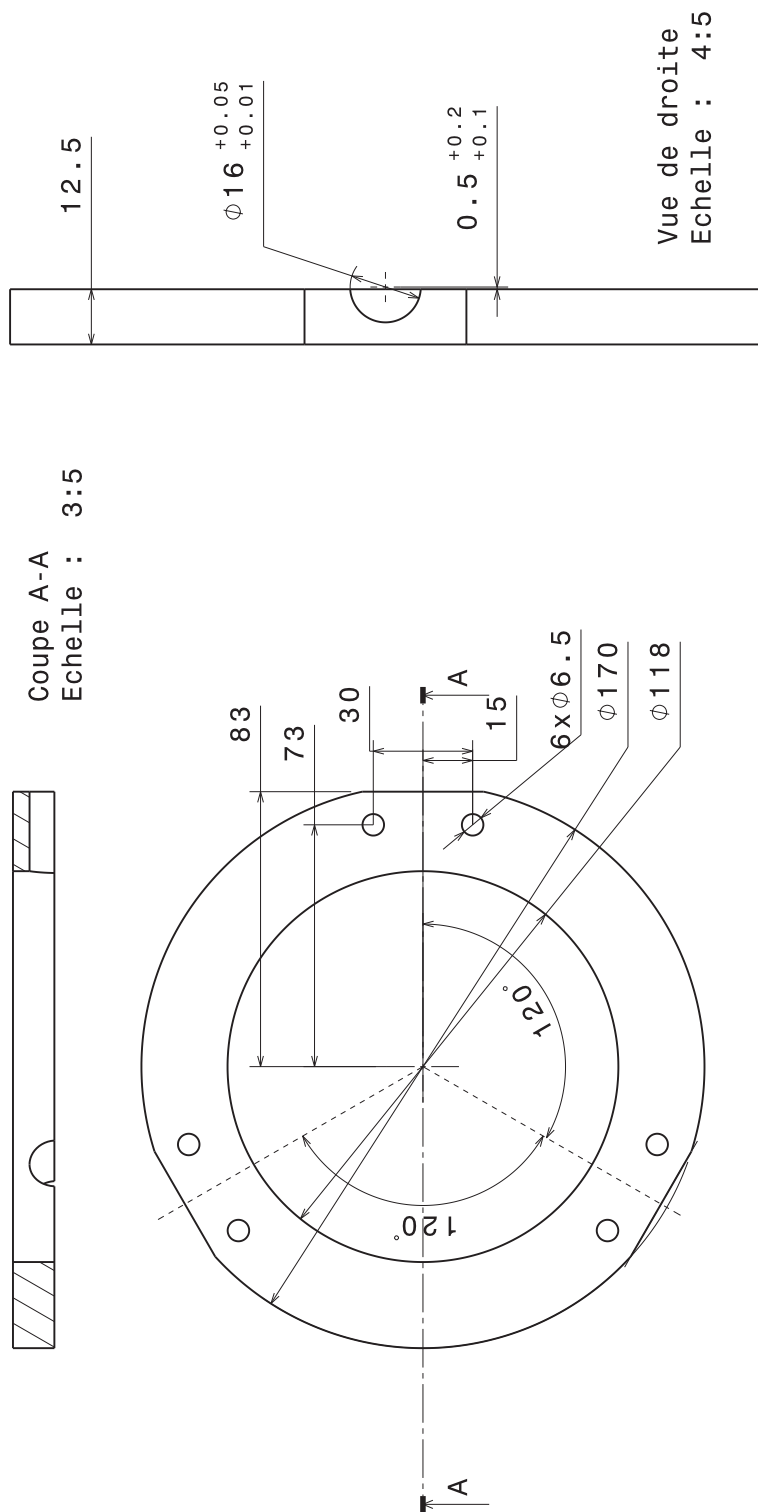


Coupe A-A  
Echelle : 1:1

DESIGNED BY: H. Rognon INTERFAIR	DATE: 22/11/2010
	REFERENCE: Ref 07 SHEET 1 / 1
A3	assemblage par frettage Etude de fatigue vibratoire SUPMECA
Quantite:30	assemblage de l'ep uniaxiale

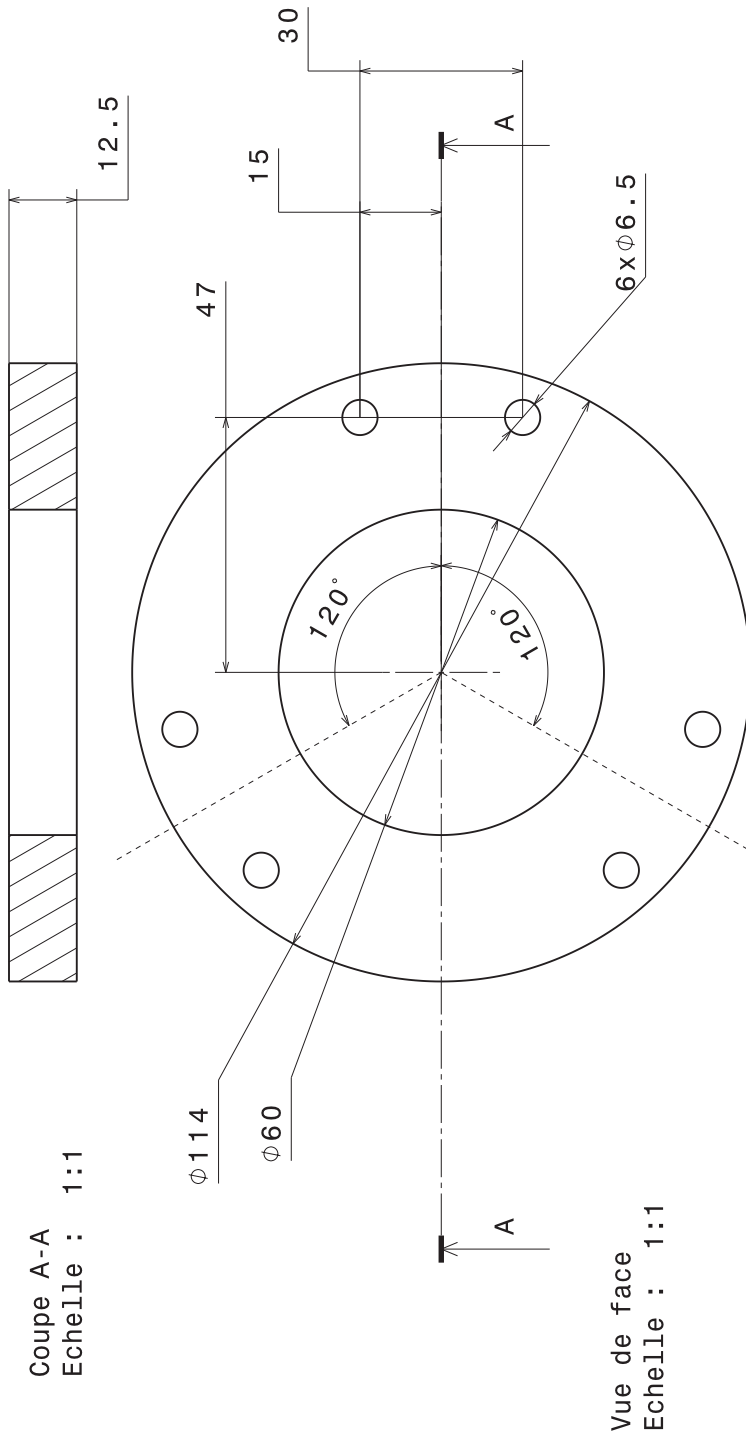


DESIGNED BY: H. Rognon	DATE: 22/11/2010
REVISION: XC38	REFERENCE: Ref 03
A3	SHEET 1 / 1
Quantite: 1	Tolérance générale 0.1 Etude de fatigue vibratoire
	SUPMECA
	Interface basse



DESIGNED BY: <b>H. Rognon</b> Matériau:	DATE: 22/11/2010	
	référence: Ref 05	
XC38	SHEET 1/1	
A4	SUPMECA	
Quantite:1	Interface haute part1	
Tolérance générale 0.2 Etude de fatigue vibratoire		

**Vue de face**  
Echelle : 3:5



DESIGNED BY: <b>H. Rognon</b> <small>MATÉRIAU</small>	DATE: <b>22/11/2010</b>	
XC38	référence: <b>Ref 04</b>	
A4	SHEET <b>1 / 1</b>	
Quantite:1	Tolérance générale 0.2 Etude de fatigue vibratoire	
	SUPMECA	
	Interface haute part2	

## D.2 Données techniques sur les différents vibrateurs

Afin de réaliser l'ensemble des essais du plan d'expériences, plusieurs vibrateurs ont été utilisés. La majorité des essais ont été réalisés à SUPMECA mais pour les essais sur le troisième mode de la structure, un pot vibrant plus puissance était nécessaire. Ces derniers ont été réalisés au CETIM de Senlis(60) au sein du pôle IBV. Ci-dessous, une rapide présentation des différents vibrateurs utilisés

### D.2.1 Vibrateur LOS 635 - 1500N

Ce pot vibrant est celui situé à Supmecca au LISMMA. Nous avons réalisé les essais en fatigue du premier et du deuxième mode propre de la structure sur ce pot vibrant. Ces principales caractéristiques sont réunis en table D.1.

Caractéristique	Données
Bande fréquentielle utile	10 Hz - 5.70 KHz
Force maximal	1500 N
Déplacement maximal	17.6 mm
Vitesse maximale	1.78 m/s
Accélération maximale	541 m/s <sup>2</sup> (55 g)
Type de refroidissement	Air forcée

TABLE D.1 – Caractéristiques du pot vibrant LOS 635 ( Données pour un sinus)



FIGURE D.3 – Vibrateur LOS modèle 635

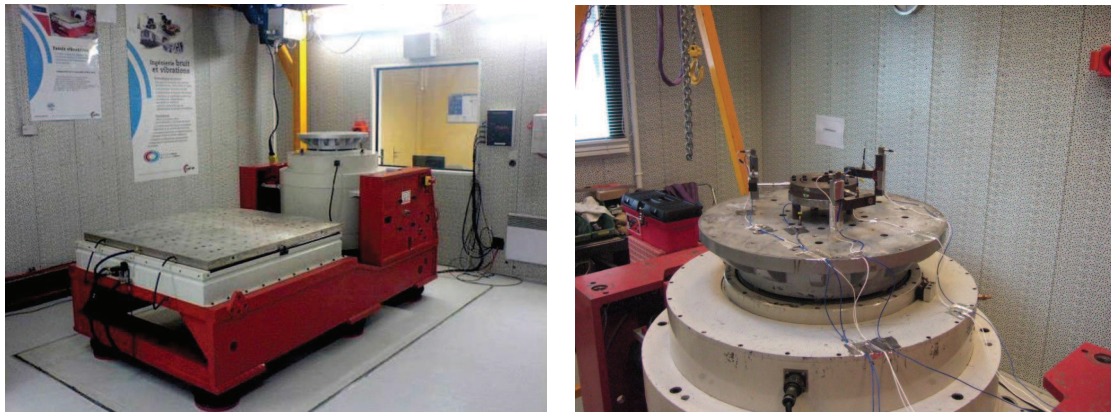


### D.2.2 Vibrateur LDS v964 - 89kN

Ce pot vibrant est celui situé au CETIM au pôle IBV. Nous avons réalisé principalement sur ce pot vibrant, les essais en fatigue sur le troisième mode propre de la structure. Ces principales caractéristiques sont réunies en table D.2.

Caractéristique	Données
Bande fréquentielle utile	5 Hz - 2.5 KHz
Force maximal	89 KN
Déplacement maximal	50.8 mm
Vitesse maximale	2 m/s
Type de refroidissement	Circuit d'eau

TABLE D.2 – Caractéristiques du pot vibrant LDS V964 ( Données pour un sinus)



(a) Pot vibrant à vide

(b) Pot vibrant avec les éprouvettes de la thèse

FIGURE D.4 – Vibrateur LDS V964

### D.2.3 Vibrateur LDS V984 - 160kN

Ce pot vibrant est celui situé au CETIM au pôle IBV. Nous avons réalisé principalement sur ce pot vibrant, les essais en fatigue multimode (premier et troisième mode en simultané). Ces principales caractéristiques sont réunies en table D.3.

Caractéristique	Données
Bande fréquentielle utile	5 Hz - 2.5 KHz
Force maximal	160 KN
Déplacement maximal	50.8 mm
Vitesse maximale	2 m/s
Type de refroidissement	Circuit d'eau

TABLE D.3 – Caractéristiques du pot vibrant LDS V984 ( Données pour un sinus)



FIGURE D.5 – Vibrateur LDS V984

## Bibliographie générale

- [1] S. Aberg, K. Podgorski, and I. Rychlik. Fatigue damage assessment for a spectral model of non-Gaussian random loads. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 24(4) :608–617, OCT 2009.
- [2] AFNOR. Produits métalliques - fatigue sous sollicitations d'amplitude variable - méthode rainflow de comptage des cycles. 1993. A03-406.
- [3] American Society for Metals. *Fatigue and Micro-structure*. LAVOISIER, 1978.
- [4] D. Arzelier. Signaux aléatoires. INSA, 2004. Cours INSA Toulouse.
- [5] J. Bannantine. *A variable amplitude fatigue life prediction method*. PhD thesis, University of illinois, 1989.
- [6] A. Banvillet. *Prévision de durée de vie en fatigue multiaxiale sous chargements réels : vers des essais accélérés*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2001.
- [7] A. Banvillet, T. Lagoda, E. Macha, A. Nieslony, T. Palin-Luc, and J. Vittori. Fatigue life under non-Gaussian random loading from various models. *International Journal Of Fatigue*, 26(4) :349–363, APR 2004.
- [8] C. Bathias and A. Pineau. *Fatigue des matériaux et des structures - Tome 1 : Introduction, endurance, amorçage et propagation des fissures, fatigue oligocyclique et gigacyclique*. LAVOISIER, 2008.
- [9] D. Benasciutti. *Fatigue analysis of random loadings*. PhD thesis, University of Ferrara, DEC 2004.
- [10] D. Benasciutti and R. Tovo. Spectral methods for lifetime prediction under wide-band stationary random processes. *International Journal of Fatigue*, 27(8) :867–877, Aug. 2005.
- [11] D. Benasciutti and R. Tovo. Comparison of spectral methods for fatigue analysis of broadband Gaussian random processes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21(4), OCT 2006.
- [12] D. Benasciutti and R. Tovo. Fatigue life assessment in non-Gaussian random loadings. *International Journal Of Fatigue*, 28(7) :733–746, JUL 2006.
- [13] D. Benasciutti and R. Tovo. Frequency-based fatigue analysis of non-stationary switching random loads. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 30(11) :1016–1029, NOV 2007.
- [14] D. Benasciutti and R. Tovo. On fatigue damage assessment in bimodal random processes. *International Journal Of Fatigue*, 29(2) :232–244, FEB 2007.
- [15] M. Bonte, A. de Boer, and R. Liebrechts. Determining the von mises stress power spectral density for frequency domain fatigue analysis including out-of-phase stress components. *Journal of Sound and Vibration*, 302(1-2) :379–386, Apr. 2007.
- [16] C. Braccesi, F. Cianetti, G. Lori, and D. Pioli. The frequency domain approach in virtual fatigue estimation of non-linear systems : The problem of non-Gaussian states of stress. *International Journal Of Fatigue*, 31(4) :766–775, APR 2009.

- [17] Brand A., Flavenot J.F., Gregoire R. and Tournier C. *Données technologiques sur la fatigue*. CETIM, 1999.
- [18] P. Brémaud. *Initiation aux Probabilités et aux chaînes de Markov*. Springer-Verlag, 1984.
- [19] P. Brémaud. *Signaux aléatoires : Pour le traitement du signal et les communications*. Ellipses, 1993.
- [20] P. Brodtkorb, P. Johannesson, G. Lindgren, I. Rychlik, J. Ryden, and E. Sjo. WAFO - A Matlab toolbox for analysis of random waves and loads. In *Proceedings of the 10th International Offshore and Polar Engineering Conference Proceedings, VOL III*, pages 343–350, 2000. Seattle, WA, MAY 28-JUN 02, 2000.
- [21] M. Brown and K. Miller. A theory for fatigue under multiaxial stress-strain conditions. In *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers*, volume 187, pages 745–756, 1973.
- [22] A. Buczynski and G. Glinka. An analysis of elasto-plastic strains and stresses in notched bodies subjected to cyclic non-proportional loading paths. In *6th International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture*, volume 31, pages 265–283, 2003. Lisbon, Portugal, JUN 25-28, 2001.
- [23] A. Carmet, B. Weber, and J. Robert. Fatigue life assessment of components and structures under multiaxial service loading. In *Fatigue 2000 : Fatigue & Durability assessment of materials, components and structures*, pages 295–304, 2000. 4th International Conference of the Engineering-Integrity-Society, Cambridge, England, APR 10-12, 2000.
- [24] D. Cartwright and M. Longuethiggins. The statistical distribution of the maxima of a random function. *Proceedings of the royal society of london series a-mathematical and physical sciences*, 237(1209) :212–232, 1956.
- [25] M. Chaudonneret and J. Culié. Adaptation of neuber’s théorie to stress concentration in viscoplasticity. *La recherche Aérospatiale*, 4 :33–40, 1985.
- [26] B. Colin. Approche stochastique de la fatigue vibratoire : comparaison entre les méthodes peak-valley et rainflow counting. In *SF2M*, 2011.
- [27] R. Coquet. *Synthèse des résultats de mesure des éprouvettes CMC*. CETIM, 2011.
- [28] S. Crandall and W. Mark. Random vibration in mechanical systems. In *Academic Press*, N.Y., 1963.
- [29] T. Dirlik. *Application of computers in fatigue analysis*. PhD thesis, University of Warwick, 1985.
- [30] N. Dowling. Fatigue failure predictions for complicated stress-strain histories. *Journal of Materials*, 7(1) :71–8, 1972.
- [31] S. Downing and D. Socie. Simple rainflow counting algorithms. *International Journal of Fatigue*, 4(1) :31–40, 1982.
- [32] F. Ellyin and D. Kujawski. Generalization of notch analysis and its extension to cyclic loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 32(5) :819–826, 1989.

- [33] A. Fatemi and D. Socie. A Critical Plane Approach to Multiaxial Fatigue Damage Including Out-of-Phase Loading. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 11(3) :149–166, 1988.
- [34] J.-F. Flavenot. *Caractérisation en fatigue de l'acier 30CrNiMo8*. CETIM, Juillet 2007.
- [35] A. François, D. Pineau and A. Zaoui. *Comportement mécanique des matériaux*. Hermes, 1991.
- [36] T. Fu and D. Cebon. Predicting fatigue lives for bi-modal stress spectral densities. *International Journal of Fatigue*, 22(1) :11–21, JAN 2000.
- [37] Z. Gao and T. Moan. Fatigue damage induced by nonGaussian bimodal wave loading in mooring lines. *Applied Ocean Research*, 29(1-2) :45–54, FEB-APR 2007.
- [38] Z. Gao and T. Moan. Frequency-domain fatigue analysis of wide-band stationary Gaussian processes using a trimodal spectral formulation. *International Journal of Fatigue*, 30(10-11) :1944–1955, OCT-NOV 2008.
- [39] G. Glinka. Calculation of inelastic notch-tip strain stress histories under cyclic loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 22(5) :839–854, 1985.
- [40] G. Glinka. Energy density approach to calculation of inelastic strain stress near notches and cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 22(3) :485–508, 1985.
- [41] S. Gupta and I. Rychlik. Rain-flow fatigue damage due to nonlinear combination of vector gaussian loads. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 22(3) :231–249, 2007.
- [42] H-P. Lieurade et la Commission Fatigue des métaux de la S.F.2.M. *La Pratique des essais de fatigue : méthodes expérimentales et analyse des résultats*. pyc édition, 1982.
- [43] A. Halfpenny. A frequency domain approach for fatigue life estimation from finite element analysis. volume 167-1, pages 401–410, 1999. 3rd International Conference on Damage Assessment of Structures (DAMAS 99), DUBLIN, IRELAND, JUN 28-30, 1999.
- [44] T. Herbland. *Une méthode de correction élastoplastique pour le calcul en fatigue des zones de contraction de contraintes sous chargement cyclique non proportionnel*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, 2009.
- [45] M. Jabbado. *Fatigue polycyclique des structures métalliques : durée de vie sous chargements variables*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2006.
- [46] G. Jiao and T. Moan. Probabilistic analysis of fatigue due to gaussian load processes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 5(2) :76 – 83, 1990.
- [47] N.-H. Ko. Verification of correction factors for non-Gaussian effect on fatigue damage on the side face of tall buildings. *International Journal of Fatigue*, 30(5) :779–792, MAY 2008.
- [48] C. Krebs. *Endurance limitée des structures sous chargement multiaxial d'amplitude variable*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2010.



- [49] T. Lagoda, E. Macha, and W. Bedkowski. A critical plane approach based on energy concepts : application to biaxial random tension-compression high-cycle fatigue regime. *International Journal of Fatigue*, 21(5) :431–443, MAY 1999.
- [50] C. Lalanne. *Mechanical Vibration & Shock Analysis : Fatigue Damage*, volume Tome 4. Lavoisier, Aug. 2009.
- [51] C. Lalanne. *Mechanical Vibration & Shock Analysis : Random Vibration*, volume Tome 3. Lavoisier, Aug. 2009.
- [52] S. Lambert, E. Pagnacco, and L. Khalij. A probabilistic model for the fatigue reliability of structures under random loadings with phase shift effects. *International Journal of Fatigue*, 32(2) :463–474, FEB 2010.
- [53] C. Larsen. Predicting the fatigue life of offshore structures by the single-moment spectral method. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 6(2) :96–108, 1991.
- [54] J. Lemaitre and J. L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1996.
- [55] G. Lindgren and I. Rychlik. Rain flow cycle distributions for fatigue life prediction under gaussian load processes. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 10(3) :251–260, 1987.
- [56] P. Loubaton. Notion sur les signaux aléatoires. Université de marne la vallée. Cours université de marne la vallée.
- [57] L. Lutes, M. Corrao, S. Hu, and J. Zimmerman. Stochastic fatigue damage accumulation. *Journal of Structural Engineering-ASCE*, 110(11) :2585–2601, 1984.
- [58] L. Lutes and C. Larsen. Improved spectral method for variable amplitude fatigue prediction. *Journal of Structural Engineering-ASCE*, 116(4) :1149–1164, APR 1990.
- [59] A. A. Majid. *Dissipation de l'énergie en mécanique vibratoire*. PhD thesis, Ecole doctorale des sciences pour l'ingénieur de Lyon, 2002.
- [60] M. Matsuishi and T. Endo. Fatigue of metals subjected to varying stress. *Japan Soc. Mech. Engineering*, 1968.
- [61] J. Miles. On structural fatigue under random loading. *Journal of Aeronautical Sciences*, pages 753–762, 1954.
- [62] M. Miner. Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, 12(3) :159–164, 1945.
- [63] A. Moftakhar, A. Buczynski, and G. Glinka. Calculation of elastoplastic strains and stresses in notches under multiaxial loading. *International Journal of Fracture*, 70(4) :357–373, 1995.
- [64] K. Molski and G. Glinka. A method of elastic - plastic stress and strain calculation at a notch root. *Materials Science And Engineering*, 50(1) :93–100, 1981.
- [65] F. Morel. *Fatigue multiaxiale sous chargement d'amplitude variable*. PhD thesis, ENSMA de Poitiers, 1996.

- [66] H. Neuber. Theory of stress concentration for shear-strained prismatic bodies with arbitrary nonlinear stress- strain law. *Journal Appl. Mech*, 28 :544–551, 1961.
- [67] M. Ochi. Probability distributions of peaks and troughs of non-Gaussian random processes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 13(4) :291–298, OCT 1998.
- [68] M. Ochi and K. Ahn. Probability distribution applicable to non-gaussian random processes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 9(4) :255–264, 1994.
- [69] K. Ortiz and N. Chen. Fatigue damage prediction for stationary wide-band processes. In *Fifth Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Civil Engng*, 1987.
- [70] N. Petrone, F. Giubilato, A. Giro, and N. Mutinelli. Development of instrumented downhill bicycle components for field data collection. *Procedia Engineering*, 34(0) :514 – 519, 2012. Engineering of sport conference 2012.
- [71] X. Pitoiset. *Méthodes spectrales pour l'analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux*. PhD thesis, Université libre de Bruxelles, 2001.
- [72] X. Pitoiset and A. Preumont. Spectral methods for multiaxial random fatigue analysis of metallic structures. *International Journal of Fatigue*, 22(7) :541–550, AUG 2000.
- [73] P. Pouvil. Densité spectrale de bruit. ENSEA. Cours ENSEA.
- [74] A. Preumont. *Vibrations aléatoires et analyse spectrale*. Presses Polytechniques Romandes, Aug. 1990.
- [75] A. Preumont and X. Pitoiset. Discussion : “Estimating the probability distribution of von Mises stress for structures undergoing random excitation. *Journal Of Vibration And Acoustics-Transactions Of The ASME*, 122(3) :336, JUL 2000.
- [76] S. Rice. *Mathematical analysis of random noise*. Selected papers on noise and stochastic processes, 1954.
- [77] H. Rognon. *Comportement en fatigue vibratoire*. CETIM , rapport interne, 2009.
- [78] H. Rognon and al. Formulation d’une méthode spectrale en déformations pour le calcul du dommage en fatigue. In *SF2M*, 2011.
- [79] H. Rognon and al. Spectral methods plasticity modeling for fatigue damage estimation :experimental application. In SUPMECA, editor, *VISHNO 2012*, Clamart, French, Jun 2012.
- [80] I. Rychlik. A new definition of the rainflow cycle counting method. *International journal of fatigue*, 9(2) :119–121, APR 1987.
- [81] I. Rychlik. On the ‘narrow-band’ approximation for expected fatigue damage. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 8(1) :1–4, 1993.
- [82] I. Rychlik, P. Johannesson, and M. Leadbetter. Modelling and statistical analysis of ocean-wave data using transformed gaussian processes. *Marine Structures*, 10(1) :13 – 47, 1997.

- [83] S. Sakai and H. Okamura. On the distribution of rainflow range for gaussian random processes with bimodal PSD. *JSME International Journal Series A-mechanics and Material Engineering*, 38(4) :440–445, OCT 1995.
- [84] S. Sarkani, D. Kihl, and J. Beach. Fatigue of welded-joints under narrow-band non-gaussian loadings. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 9(3) :179–190, 1994.
- [85] W. Schutz. Prediction of fatigue life in the crack initiation and propagation stages - state of the art survey. *Engineering fracture mechanics*, 11(2) :405–421, 1979.
- [86] W. Sharpe. ASME 1993 nadai-lecture - elastoplastic stress and strain concentrations. *Journal of engineering materials and technology-transactions of the ASME*, 117(1) :1–7, JAN 1995.
- [87] W. Sharpe and K. Wang. Evaluation of a modified monotonic Neuber relation. *Journal of engineering materials and technology-transactions of the ASME*, 113(1) :1–8, JAN 1991.
- [88] M. Singh, G. Glinka, and R. Dubey. Elastic-plastic stress-strain calculation in notched bodies subjected to non-proportional loading. *International journal of fracture*, 76(1) :39–60, 1996.
- [89] S. Stephanov. A curvilinear integral method for multiaxial fatigue life computing under nonproportional, arbitrary or random stressing. *International Journal of Fatigue*, 15(6) :467–472, NOV 1993.
- [90] S. Stephanov. A curvilinear integral method : Computer realization and testing 1 (under non-proportional reversed axial force and torque). *International Journal of Fatigue*, 17(8) :567–475, 1995.
- [91] J.-P. Tanguy. *Théorie et pratique du signal : Signaux déterministes et aléatoires en continu et en discret*. Ellipses, 2007.
- [92] Vibration Reseach. *Guide utilisateur du module vibration reseach software*. B & K, 1995.
- [93] C. Wang and M. Brown. A path-independent parameter for fatigue under proportional and nonproportional loading. *Fatigue & fracture of engineering materials & structures*, 16(12) :1285–1298, DEC 1993.
- [94] C. Wang and M. Brown. A study of the deformation-behavior under multiaxial loading. *European journal of mechanics a-solids*, 13(2) :175–188, 1994.
- [95] C. Wang and M. Brown. Modeling of the deformation-behavior of flake graphite iron under multiaxial cyclic loading. *Journal of strain analysis for engineering design*, 29(4) :277–288, OCT 1994.
- [96] C. Wang and M. Brown. Life prediction techniques for variable amplitude multiaxial fatigue .1. Theories. *Journal of engineering materials and technology-transactions of the ASME*, 118(3) :367–370, JUL 1996.
- [97] C. Wang and M. Brown. Life prediction techniques for variable amplitude multiaxial fatigue .2. Comparison with experimental results. *Journal of engineering materials and technology-transactions of the ASME*, 118(3) :371–374, JUL 1996.



- [98] C. Wang and M. Brown. On plastic deformation and fatigue under multiaxial loading. *Nuclear engineering and design*, 162(1) :75–84, MAR 1996. 12th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT-12), Stuttgart, Germany, AUG 15-20, 1993.
- [99] K. Wang and W. Sharpe. Evaluation of a modified cyclic Neuber relation. *Journal of engineering materials and technology-transactions of the ASME*, 113(3) :350–353, JUL 1991.
- [100] B. Weber. *Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1999.
- [101] Weber, B., Carmet, A., Kenmeugne, B., and Robert, J.-L. A stress based approach for fatigue assessment under multiaxial variable amplitude loading. In *Multiaxial Fatigue and Fracture*, pages 218–233, 1999.
- [102] S. Winterstein. Non-Normal Responses And Fatigue Damage. *Journal Of Engineering Mechanics-ASCE*, 111(10) :1291–1295, 1985.
- [103] S. Winterstein. Nonlinear vibration models for extremes and fatigue. *Journal Of Engineering Mechanics-ASCE*, 114(10) :1772–1790, OCT 1988.
- [104] S. Winterstein, T. Ude, and T. Marthinsen. Volterra Models Of Ocean Structures - Extreme And Fatigue Reliability. *Journal Of Engineering Mechanics-ASCE*, 120(6) :1369–1385, JUN 1994.
- [105] P. Wirsching and M. Light. Fatigue under wide band random stresses. *Journal of the structural division-ASCE*, 106(7) :1593–1607, 1980.
- [106] P. Wirsching and A. Shehata. Fatigue under wide band random stresses using rain-flow method. *Journal of engineering materials and technology-transactions of the ASME*, 99(3) :205–211, 1977.
- [107] W. Zhao and M. Baker. On the probability density function of rainflow stress range for stationary gaussian processes. *International Journal of Fatigue*, 14(2) :121–135, 1992.