



Approche sensorimotrice de la perception de l'espace pour la robotique autonome

Alban Laflaquière

► To cite this version:

Alban Laflaquière. Approche sensorimotrice de la perception de l'espace pour la robotique autonome. Robotique [cs.RO]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2013. Français. NNT : . tel-00865091

HAL Id: tel-00865091

<https://theses.hal.science/tel-00865091>

Submitted on 23 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE - PARIS 6

Approche sensorimotrice de la perception de l'espace pour la robotique autonome

Présentée par
[Alban Laflaquière](#)

pour obtenir le grade de
Docteur de L'Université Pierre et Marie Curie

à
[Ecole doctorale Sciences Mécaniques, Acoustique, Electronique et Robotique de
Paris](#)

Thèse soutenue le :
19 juillet 2013

Composition du jury :

Philippe SOUERES	Directeur de recherche - LAAS/CNRS	Rapporteur
Arnaud REVEL	Professeur - L3I/Univ. de La Rochelle	Rapporteur
J. Kévin O'REGAN	Directeur de recherche - LPP/CNRS	Examineur
Angelo ARLEO	Directeur de recherche - NPA/CNRS	Examineur
Bruno GAS	Professeur - ISIR/UPMC	Directeur de thèse
Sylvain ARGENTIERI	Maître de conférences - ISIR/UPMC	Encadrant de thèse

Résumé

Approche sensorimotrice de la perception de l'espace pour la robotique autonome

par [Alban Laflaquière](#)

L'approche classique de conception des robots obéit à une organisation interne du type *sentir-planifier-agir*, proposée dès l'apparition des problématiques d'Intelligence Artificielle. Elle implique le développement amont de modèles d'interaction entre le robot et son environnement et d'algorithmes de traitement du flux sensoriel conduisant, à terme, à la génération de commandes motrices. Dans ce contexte particulier, les caractéristiques de l'environnement *perçues* par le robot dérivent fondamentalement des traitements du flux sensoriel implémentés par le roboticien. Elles peuvent donc se révéler inadaptées vis-à-vis de l'interaction sensorimotrice réelle que le robot entretient avec le monde.

Une autre approche, développée dans cette thèse, consiste à repenser la problématique de la *perception* en robotique. Elle s'inspire de la théorie des *contingences sensorimotrices* qui propose de concevoir notre perception non pas comme un phénomène se produisant dans le cerveau mais comme une interaction que nous entretenons avec l'environnement. Cette perspective, radicalement opposée aux postulats classiques, induit que percevoir n'est pas inné mais s'acquiert par la découverte des relations sensorimotrices qui sous-tendent notre expérience du monde.

L'objectif de cette thèse est d'appliquer ce nouveau paradigme au champ de la robotique. Plus précisément, les travaux menés visent à déterminer comment un robot naïf peut découvrir et caractériser l'*espace* dans lequel son corps et l'environnement sont plongés au travers de l'analyse de son seul flux sensorimoteur. Pour se faire, une approche sera développée sur la base de la compensabilité des variations sensorielles générées par les déplacements du système robot/environnement, concept initialement introduit par H.Poincaré. Elle permettra à nos robots de déterminer la dimension de l'espace géométrique extérieur puis d'en construire une représentation interne, permettant à terme d'interpréter intrinsèquement leur expérience et de guider leur action.

Remerciements

Je souhaite remercier Bruno Gas et Sylvain Argentieri de m'avoir permis de réaliser une thèse sur un sujet aussi passionnant. Plus globalement, je remercie l'ISIR qui m'a accueilli durant ces quatre années et où collaborent des personnes de grande qualité humaine et professionnelle. Enfin, je remercie tout particulièrement Stéphane Genet et Alexander Terekhov sans qui cette thèse se serait pas ce qu'elle est aujourd'hui.

Table des matières

Résumé	iii
Remerciements	iv
Introduction	1
1 La perception sensorimotrice	3
1.1 Introduction	3
1.2 La perception classique en robotique	4
1.2.1 Le schéma de contrôle classique	4
1.2.2 Les capacités de perception dans l'approche classique	5
1.2.3 Les limitations de l'approche classique	8
1.2.4 Conclusion	9
1.3 Remise en cause du paradigme classique	9
1.3.1 Conclusion	12
1.4 L'approche sensorimotrice et la perception	13
1.4.1 La théorie des contingences sensorimotrices	13
1.4.1.1 L'insuffisance de l'approche classique	13
1.4.1.2 Reformulation du problème de la perception	14
1.4.1.3 La théorie des CSM et l'action	14
1.4.2 Données et résultats expérimentaux	15
1.4.3 Conclusion	19
1.5 Application de la théorie des CSM en robotique	20
1.5.1 Projet de l'équipe	20
1.5.2 Les difficultés de l'approche sensorimotrice	21
1.5.3 Cadre conceptuel de la thèse	22
1.5.3.1 Hypothèses de travail	22
1.5.3.2 La découverte du monde au travers de l'action	23
1.5.3.3 Représentation basse dimension de l'expérience	23
1.5.4 Conclusion	24
1.6 La perception de l'espace extérieur	24
1.6.1 L'énigmatique concept d'espace	24
1.6.2 Nature particulière des caractéristiques spatiales	25
1.6.3 La découverte des caractéristiques spatiales	25

1.6.4	Les limitations de la compensabilité	27
1.6.5	Conclusion	29
1.7	Conclusion	29
2	Représentation basse dimension de l'expérience sensorimotrice	31
2.1	Introduction	31
2.2	La problématique de la représentation basse dimension des interactions du système	32
2.2.1	Description du système jouet	32
2.2.2	Discussion sur l'expérience du robot	33
2.2.3	Conclusion	35
2.3	Modélisation de l'expérience sensorimotrice	35
2.3.1	Formalisme	35
2.3.2	Hypothèses de travail et contraintes de la représentation	39
2.3.3	Conclusion	41
2.4	Stratégie d'exploration du système	42
2.4.1	La densité de l'échantillonnage	42
2.4.2	Les bornes de l'échantillonnage	43
2.4.3	Stratégie d'exploration naïve	44
2.4.4	Conclusion	45
2.5	Choix d'une métrique dans l'espace sensorimoteur	45
2.5.1	Définition d'une métrique	46
2.5.2	La métrique euclidienne	46
2.5.3	La métrique de graphe	46
2.5.4	La métrique naturelle	48
2.5.5	Conclusion	49
2.6	Projection des sous-variétés en basse dimension	49
2.6.1	La réduction de dimension	50
2.6.2	Méthode de réduction principale : CCA	51
2.6.2.1	Minimisation de l'erreur de projection	52
2.6.2.2	Implémentation de CCA	53
2.6.2.3	Limitations de CCA :	55
2.6.3	Méthode de réduction auxiliaire : ISOMAP	56
2.6.3.1	Minimisation de l'erreur de projection	57
2.6.3.2	Limitations d'ISOMAP	58
2.6.4	Conclusion	59
2.7	Estimation de la dimension intrinsèque d'une sous-variété	60
2.7.1	La q -dimension	60
2.7.1.1	Définition de la 2-dimension	60
2.7.1.2	Estimation de la 2-dimension	61
2.7.1.3	Limitations de la 2-dimension	62
2.7.2	Les méthodes spectrales	62
2.7.2.1	Estimation spectrale de la dimension intrinsèque d'une sous-variété	63
2.7.2.2	Limitation des méthodes spectrales	64
2.7.3	Les méthodes essai-erreur	64

2.7.3.1	Estimation par essai-erreur de la dimension intrinsèque d'une sous-variété	64
2.7.3.2	Limitations des méthodes essai-erreur	65
2.7.4	Méthodes implémentées dans nos robots	65
2.7.5	Conclusion	67
2.8	Conclusion	69
3	Estimation de la dimension de l'espace	71
3.1	Les intuitions de H.Poincaré et la dimension de l'espace extérieur	71
3.1.1	Rappel : les idées de H.Poincaré	72
3.1.2	Reprise des idées de H.Poincaré	73
3.1.2.1	Estimation de la dimension de l'espace via la fixation d'un point du robot : les travaux de A.A.Frolov	74
3.1.2.2	Estimation de la dimension via le groupe des mouvements compensables : les travaux de D.Philipona	75
3.1.3	Les mouvements compensables et la dimension de l'espace	76
3.1.4	Conclusion	76
3.2	Reprise des travaux de Philipona	76
3.2.1	Formalisation mathématique	76
3.2.2	Application à un système simulé	79
3.2.2.1	Le système robot/environnement	79
3.2.3	Résultats de la simulation	81
3.2.4	Discussion	82
3.2.4.1	Autres stratégies d'estimation de d	83
3.2.5	Conclusion	84
3.3	Extension aux mouvements d'amplitude finie	84
3.3.1	Extension du formalisme	84
3.3.1.1	Exploration du système et résultats	85
3.3.2	Origine de l'échec de la méthode non-linéaire	86
3.3.2.1	Application de la méthode auxiliaire d'estimation de dimension	86
3.3.2.2	Courbure des sous-variétés sensorielles	87
3.3.2.3	Non-homogénéité de la densité d'échantillonnage	87
3.3.2.4	Asymétrie de l'échantillonnage	88
3.3.3	Conclusion	92
3.4	Réduction de l'asymétrie sensorielle par un ré-échantillonnage de l'espace d'exploration	92
3.4.1	Méthode de ré-échantillonnage de l'espace d'exploration	92
3.4.1.1	Algorithme de ré-échantillonnage	93
3.4.1.2	Application exemple	95
3.4.2	Application du ré-échantillonnage au système entier	96
3.4.3	Conclusion	100
3.5	Conclusion	101
4	Vers la découverte de la notion d'espace	103
4.1	Description du système	103
4.1.1	L'environnement	104
4.1.2	L'agent	104

4.2	Simulation 1 : l'espace découvert via les capacités d'action	106
4.2.1	Stratégie d'exploration	106
4.2.2	Analyse des données sensorielles	107
4.2.3	Résultat de la projection	108
4.2.4	Analyse des résultats	108
4.2.5	Conclusion	109
4.3	Simulation 2 : l'espace des points de vue indépendants de l'environnement	109
4.3.1	Stratégie d'exploration	109
4.3.1.1	Robot non-redondant	110
4.3.1.2	Extension aux robots redondants	110
4.3.2	Les ensembles de configurations redondantes	111
4.3.2.1	Formalisation	112
4.3.2.2	Découverte des courbes noyaux	112
4.3.3	Analyse de l'ensemble des courbes noyaux	114
4.3.3.1	Métrique de l'ensemble des courbes noyaux	115
4.3.3.2	Projection des courbes noyaux	116
4.3.4	Résultats	116
4.3.4.1	Déroulement de la simulation	116
4.3.4.2	Echantillonnage moteur et courbes noyaux	117
4.3.4.3	Dimension intrinsèque de l'ensemble des courbes noyaux	117
4.3.4.4	Projection de l'ensemble des courbes noyaux	119
4.3.5	Conclusion	119
4.4	Simulation 3 : découverte de l'espace des déplacements	120
4.4.1	Stratégie d'exploration du système	121
4.4.2	Implémentation de la stratégie d'exploration	123
4.4.2.1	Initialisation	123
4.4.2.2	Déplacements de l'objet	123
4.4.2.3	Recherche des nouvelles configurations motrices	123
4.4.2.4	Traitement des courbes noyaux	124
4.4.3	Résultats	125
4.4.4	Extension de la simulation - indépendance à $M^{(0)}$	127
4.4.4.1	Dépendance de la représentation à $M^{(0)}$	127
4.4.4.2	Extension de la stratégie d'exploration	128
4.4.4.3	Résultats de la simulation étendue	129
4.4.4.4	Résultats pour une grille de positions plus ample	129
4.4.5	Conclusion	130
4.5	Simulation 4 : régularisation de la métrique interne	132
4.5.1	La stratégie de régularisation de la métrique interne	132
4.5.1.1	Principe de la régularisation	133
4.5.1.2	Limitation de la méthode de régularisation	133
4.5.1.3	Extension à une grille de positions rétinienne	133
4.5.1.4	Formalisation de la stratégie d'exploration	135
4.5.1.5	Réalisme de l'approche	135
4.5.2	Implémentation de la simulation	136
4.5.2.1	Initialisation	136
4.5.2.2	Déplacements du système et régularisation	137
4.5.2.3	Représentation interne régulée	137

4.5.3	Résultats	138
4.5.4	Dépendance à la configuration initiale M_0	140
4.5.4.1	Extension de la stratégie d'exploration	140
4.5.4.2	Résultats de la simulation étendue	142
4.5.5	Conclusion	143
4.6	Conclusion	143
Conclusion		147
 A Méthodes de réduction de dimension		151
A.1	Réduction de dimension par conservation des distances	151
A.1.1	Distance euclidienne	151
A.1.2	Distance géodésique	154
A.1.3	Autres distances	156
A.2	Réduction de dimension par conservation de la topologie	157
A.2.1	Treillis pré-défini	157
A.2.2	Treillis non pré-défini	158
 B Méthode d'homogénéisation de distribution		161
B.1	Algorithme d'homogénéisation	161
B.2	Exemples d'application	162
B.2.1	Distribution 2D de 25000 points	162
B.2.2	Distribution 2D de 10000 points	163
B.2.3	Distribution 10D de 25000 points	164
 C Quasi-symétrie induite par le cas mono-couleur		169
C.1	La sous-variété sensorielle	169
C.2	Estimation de sa dimension intrinsèque	169
C.3	Origine de la sous-estimation	170
 Bibliographie		171

Introduction

Lors de l'émergence des problématiques d'Intelligence Artificielle (IA) dans les années 1950, la conception d'agents artificiels incarnés¹ (robots) a été envisagée comme la mise en place d'une chaîne de traitement de l'information. Cette approche computationnaliste de l'intelligence supposait qu'un robot devait posséder trois capacités : analyser les informations provenant de ses capteurs pour déterminer l'état de son environnement, raisonner sur ce dernier pour planifier l'achèvement d'un but et générer les actions motrices permettant la réalisation de ce plan.

Cette organisation interne, du type *sentir-planifier-agir*, a permis la conception de nombreux robots capables d'interagir de manière plus ou moins complexe avec leur environnement et de réaliser efficacement des tâches très diverses (manipulation d'objets, déplacement autonome, interactions avec l'Homme...). Elle a perduré jusqu'à aujourd'hui et est encore largement utilisée dans le développement des robots modernes. Pourtant ses accomplissements ne sont pas à la hauteur des ambitions qu'avaient pour elle les fondateurs de la robotique. L'approche classique requiert en effet que le roboticien fournisse au robot un ensemble d'algorithmes de traitement des informations sensorielles, de raisonnement et de génération d'action. Ces différents algorithmes reposent sur une modélisation du robot et de l'environnement qui se révèle rapidement complexe à développer à mesure qu'un nombre croissant d'interactions sont considérées. Les robots sont donc contraints d'évoluer dans des environnements contrôlés ou d'effectuer des tâches limitant leurs interactions avec l'environnement.

Face à ces limitations, différents chercheurs ont tenté de proposer une approche nouvelle de l'intelligence chez les agents artificiels. Ce mouvement de fond, qualifié de *nouvelle IA*, s'est particulièrement inspiré des êtres vivants les plus simples, tels les insectes ou les petits mammifères, pour redéfinir l'intelligence comme ancrée dans l'expérience sensorimotrice de l'agent. Cette nouvelle approche a donné naissance à différents champs de recherche : robotique évolutionnaire, développementale ou encore bio-inspirée. Elle permet également de jeter un regard original sur les phénomènes de *perception* et d'*action* qui caractérisent les être intelligents. Ainsi, là où l'approche classique concevait la perception comme une extraction passive de caractéristiques du flux sensoriel et l'action comme le résultat d'un traitement de ces caractéristiques, les approches sensorimotrices tendent à les rapprocher et à atténuer les frontières qui les séparent.

Dans ce contexte particulier, la théorie des *contingences sensorimotrices* propose de définir la *perception* des êtres vivants non pas par les propriétés des phénomènes se produisant dans le cerveau mais comme l'expérience d'une interaction avec l'environnement. Elle s'oppose ainsi aux postulats classiques considérant que les informations sensorielles peuvent être traitées passivement et que la capacité de percevoir est innée. Au contraire,

1. La possibilité de créer des agents intelligents désincarnés sous forme de programmes informatiques était également envisagée.

elle avance que percevoir s'apprend et repose sur la découverte de *contingences* caractérisant nos interactions sensorimotrices avec le monde.

Les travaux présentés dans cette thèse s'inscrivent dans une démarche visant à appliquer la théorie des contingences sensorimotrices dans le champ de la robotique. Elle suppose de re-concevoir entièrement l'approche classique de la perception des robots. Plutôt que de fournir des algorithmes de traitement du flux sensoriel destinés à caractériser l'état de l'environnement, des outils devront être implémentés pour permettre d'explorer activement le monde et de découvrir les interactions sensorimotrices à l'origine de futures perceptions.

Cette démarche est ambitieuse et demandera un effort de développement sur le long terme avant de voir émerger de nouveaux schémas de contrôle pour les robots. Une première étape consiste à étudier comment les interactions sensorimotrices d'un agent avec son environnement permettent de caractériser les propriétés de ce dernier, ou autrement dit de les percevoir. Cette thèse aborde cette problématique sous l'angle particulier de la perception de l'espace : *comment un robot n'ayant aucune connaissance a priori sur son corps ou son environnement peut-il, par la seule analyse de son flux sensorimoteur, découvrir et caractériser l'espace géométrique extérieur dans lequel il évolue ?* La découverte de l'espace permettra d'interpréter l'expérience sensorimotrice en termes de positions, distances et déplacements dans un cadre commun au robot et à son environnement. Ces différents concepts présentent un intérêt particulier en robotique où la majorité des tâches envisagées nécessitent des mouvements du robot.

Afin de pouvoir traiter la question de la perception sensorimotrice de l'espace dans des conditions idéales (absence de bruit, contrôle de l'environnement, dimension de l'espace potentiellement réduite, précision des mouvements...), les systèmes robots/environnements étudiés seront simulés. Leur conception se voudra toutefois réaliste vis-à-vis des lois physiques qui régissent les systèmes réels, en particulier pour le choix des fonctions d'excitation des capteurs des robots. Ces différents systèmes simulés nous permettront d'illustrer les concepts théoriques menant à la découverte de l'espace tout en en proposant une implémentation concrète soulignant les contraintes techniques qu'ils soulèvent ; nos travaux se situent donc à mi-chemin entre l'expérience de pensée et l'implémentation sur plateforme réelle.

Cette thèse est divisée en quatre chapitres. Le premier d'entre eux s'attache à décrire la démarche philosophique menant au développement d'une perception sensorimotrice en robotique. Peu de travaux ayant été menés sur ce sujet, il ne propose pas à proprement parler de bibliographie du domaine mais plutôt une contextualisation de la thèse. Le second chapitre a pour objectif de présenter le formalisme mathématique et la méthodologie qui nous permettront de caractériser les interactions des robots avec leur environnement au travers de l'analyse de leur flux sensorimoteur. Il est aussi l'occasion d'illustrer les difficultés de l'approche au travers de l'étude d'un système jouet. Le troisième chapitre s'attache à examiner comment un robot naïf peut estimer la dimension de l'espace géométrique extérieur. Une méthode initialement proposée dans de précédents travaux y est présentée puis étendue afin de rendre réaliste son application à un système robotique réel. Enfin, le quatrième chapitre propose une succession de simulations permettant de capturer des propriétés de l'espace de plus en plus sophistiquées. Dans chacune d'elle, une représentation interne de l'espace extérieur sera construite par le robot à partir de son expérience sensorimotrice.

Chapitre 1

La perception sensorimotrice

1.1 Introduction

Les êtres intelligents perçoivent leur environnement. Ils capturent les propriétés des objets qui les entourent, permettant ainsi l'émergence de comportements adaptés au travers desquels leur intelligence se manifeste. Ce sont ces mêmes capacités de perception et d'action que les chercheurs ont tenté de reproduire artificiellement depuis les années 1950. Pour autant, peut-on dire qu'un robot perçoit ?

Cette simple question peut laisser dubitatifs de nombreux roboticiens. Une partie d'entre eux répondront qu'un robot perçoit les caractéristiques de l'environnement qu'il a été programmé pour détecter. Les autres affirmeront en revanche qu'un robot est une machine fabriquée de la main de l'homme et ne perçoit donc rien. Cette divergence de points de vue s'explique par la variabilité des notions implicitement couvertes par le terme de "perception". Pour les uns, la perception décrit la capacité pour un agent (biologique ou robotique) d'extraire de son flux sensoriel des informations sur l'état de son corps et de son environnement. Pour les autres, elle fait référence à l'attention consciente portée par un agent biologique sur ses sensations ; excluant de fait les robots, *a priori* dénués de conscience. Les débats philosophiques complexes relatifs à la question de la conscience n'entrent pas dans l'optique de cette thèse [1–3]. L'ensemble des réflexions exposées par la suite respectent donc une définition "*a minima*" de la perception comme capacité à extraire des informations du flux sensoriel. Afin de clarifier notre propos, notons dès à présent que le terme de "sensation" sera utilisé en référence à l'unité d'information brute fournie par un capteur de l'agent. De même, le terme de "perception" fera référence à l'unité d'information extraite du flux de sensations et caractérisant partiellement l'état de l'agent ou de son environnement. Cette définition *a minima* permet naturellement d'englober les agents artificiels dans le champ de la perception. Dans ce contexte, la problématique n'est plus de savoir si les robots perçoivent, mais plutôt comment perçoivent-ils ?

Ce chapitre a comme premier objectif d'analyser les capacités de perception offertes par l'approche classique de conception des robots. Cette approche, basée sur une organisation interne du type *sentir-planifier-agir*, est un héritage direct des postulats computationnalistes érigés lors de l'émergence de la recherche en Intelligence Artificielle. Bien qu'encore très largement utilisée dans la robotique actuelle, elle induit de nombreuses limitations quant aux capacités de perception des robots. Afin de dépasser ces limitations, les paradigmes classiques ont été remis en cause par une nouvelle conception de l'intelligence artificielle. Les concepts proposés par cette *nouvelle IA* seront discutés dans une seconde partie. Un intérêt particulier sera porté aux approches sensorimotrices

de l'intelligence et notamment à la redéfinition du concept de *perception* proposée par la "*théorie des contingences sensorimotrices*". Elle propose de considérer la perception non pas comme l'excitation de corrélats neuronaux spécifiques dans notre cerveau mais comme l'expérience d'une interaction sensorimotrice avec notre environnement. Les difficultés soulevées par l'application d'une telle approche dans le domaine de la robotique seront ensuite discutées. Enfin, dans une dernière partie, la question de la perception du monde sera restreinte à la problématique de la perception de l'espace. Ainsi, nous discuterons comment un robot naïf sans représentation du monde peut découvrir l'espace extérieur dans lequel il évolue par la seule analyse de son flux sensorimoteur. Les intuitions de H.Poincaré sur comment les déplacements du robot caractérisent l'espace et se traduisent par une expérience sensorimotrice particulière seront présentées. Elles permettront, dans la suite de cette thèse, d'estimer la dimension de l'espace extérieur et d'en créer une représentation interne sans aucune connaissance *a priori*.

1.2 La perception classique en robotique

A ce jour, la très large majorité des robots existants a été conçue et fonctionne selon une même organisation interne que nous qualifierons de "classique". Cette organisation particulière, que nous nommerons également "schéma de contrôle", est analysée ci-après. Bien que fondée sur un paradigme datant de l'émergence des problématiques d'Intelligence Artificielle (IA), son utilisation toujours actuelle sera illustrée au travers de publications récentes dans le domaine de la robotique. Dans un second temps, nous étudierons comment cette approche classique définit les capacités de perception du robot, puis nous illustrerons notre propos par l'analyse du développement d'un robot mobile guidé par une caméra. Enfin, les limitations qu'induit cette approche sur les perceptions du robot seront discutées.

1.2.1 Le schéma de contrôle classique

L'approche classique de conception d'un robot repose sur le paradigme *sentir-planifier-agir* (SPA - sense-plan-act) incarné par l'architecture de contrôle représentée figure 1.1.



FIGURE 1.1: Schéma de l'approche classique du contrôle des robots. Un système central permet de traiter, interpréter et analyser les données provenant des capteurs pour générer des actions transmises aux moteurs.

L'organisation classique SPA est un héritage direct des années 1950 qui ont vu l'émergence des problématiques d'IA. Elle correspond ainsi au modèle de base de l'agent artificiel intelligent tel que décrit par S.Russell et P.Norvig dans [4]. A l'époque, et sous l'influence de neuroscientifiques comme D.Marr, le cerveau (humain) était considéré comme un système de traitement de l'information sensorielle : les informations sensorielles sont transmises au cerveau par les capteurs du corps, puis traitées via l'application de règles afin de générer une éventuelle action [5]. C'est également dans ce contexte computationnaliste [6] que les travaux d'A.Turing [7], affirmant que les traitements réalisés par le cerveau pouvaient être reproduits par un programme, ont permis d'envisager la création de robots capables de copier l'intelligence humaine [7].

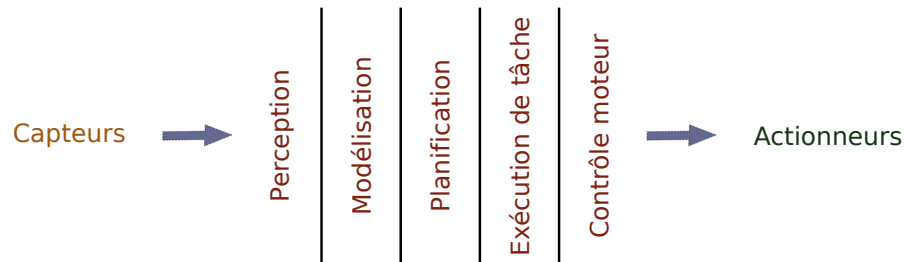


FIGURE 1.2: L'organisation générale *sentir-planifier-agir* peut être détaillée plus précisément (Décomposition proposée par Brooks [8]). Les informations provenant des capteurs sont traitées pour générer des perceptions qui sont interprétées grâce à une modélisation du système fournie *a priori*. Des algorithmes de planification permettent alors de décider quelle action effectuer pour se rapprocher d'un but souhaité. Enfin, cette action est décomposée en commandes motrices qui sont exécutées par un étage de contrôle des actionneurs du robot.

L'architecture de contrôle SPA peut être raffinée en développant chacune de ses trois composantes. Le schéma ainsi obtenu, et tel que proposé par R. Brooks, est illustré figure 1.2 [8]. Dans ce schéma détaillé, le robot reçoit tout d'abord un flux sensoriel provenant de ses différents capteurs. Ce flux est ensuite traité afin de générer des perceptions qui permettent de modéliser l'état du système robot-environnement. Des algorithmes de planification, de prise de décision et d'exécution de tâche sont alors mis en oeuvre pour amener le système dans un état désiré. Un dernier étage de contrôle permet de s'assurer que les actions désirées sont correctement effectuées en générant des commandes motrices adéquates pour chaque moteur du robot.

Bien que datant des balbutiements de la robotique, le schéma de contrôle classique est encore très largement utilisé aujourd'hui, souvent de manière implicite. Pour illustrer ce propos, le parcours des publications d'une conférence robotique récente telle que IROS 2012¹ permet, par exemple, d'extraire les schémas de contrôle présentés figure 1.3. Dans chacun d'eux, l'organisation globale *sentir-planifier-agir* se retrouve explicitement représentée². Implicitement, l'ensemble des autres travaux présentés lors de cette conférence s'inscrit également dans l'approche classique, en se focalisant généralement sur une seule des trois composantes perception, décision et action.

1.2.2 Les capacités de perception dans l'approche classique

Selon notre définition *a minima*, un robot perçoit les caractéristiques de son corps ou de l'environnement qu'il est capable d'extraire de son flux sensoriel. Comme détaillé ci-après, ses capacités de perception sont restreintes et définies *a priori* par la roboticien dans l'approche classique.

Concrètement, la conception classique d'un robot nécessite, au-delà de la construction physique de sa structure, de lui fournir l'ensemble des algorithmes de traitement du flux sensoriel, de prise de décision et de réalisation d'action évoqués précédemment. Le développement de ces algorithmes repose d'une part sur une modélisation du système formé par le robot et son environnement et d'autre part sur la sélection de caractéristiques ("features") à extraire du flux sensoriel. Si l'ensemble de ces éléments a été correctement

1. Intelligent Robots and Systems, édition 2012, IEEE/RSJ International Conference.

2. Le schéma g se démarque par la présence d'une action motrice préliminaire à la génération des perceptions ; sa présence est toutefois justifiée par la nature des sensations (flux optique) et non par une remise en cause du schéma de contrôle classique.

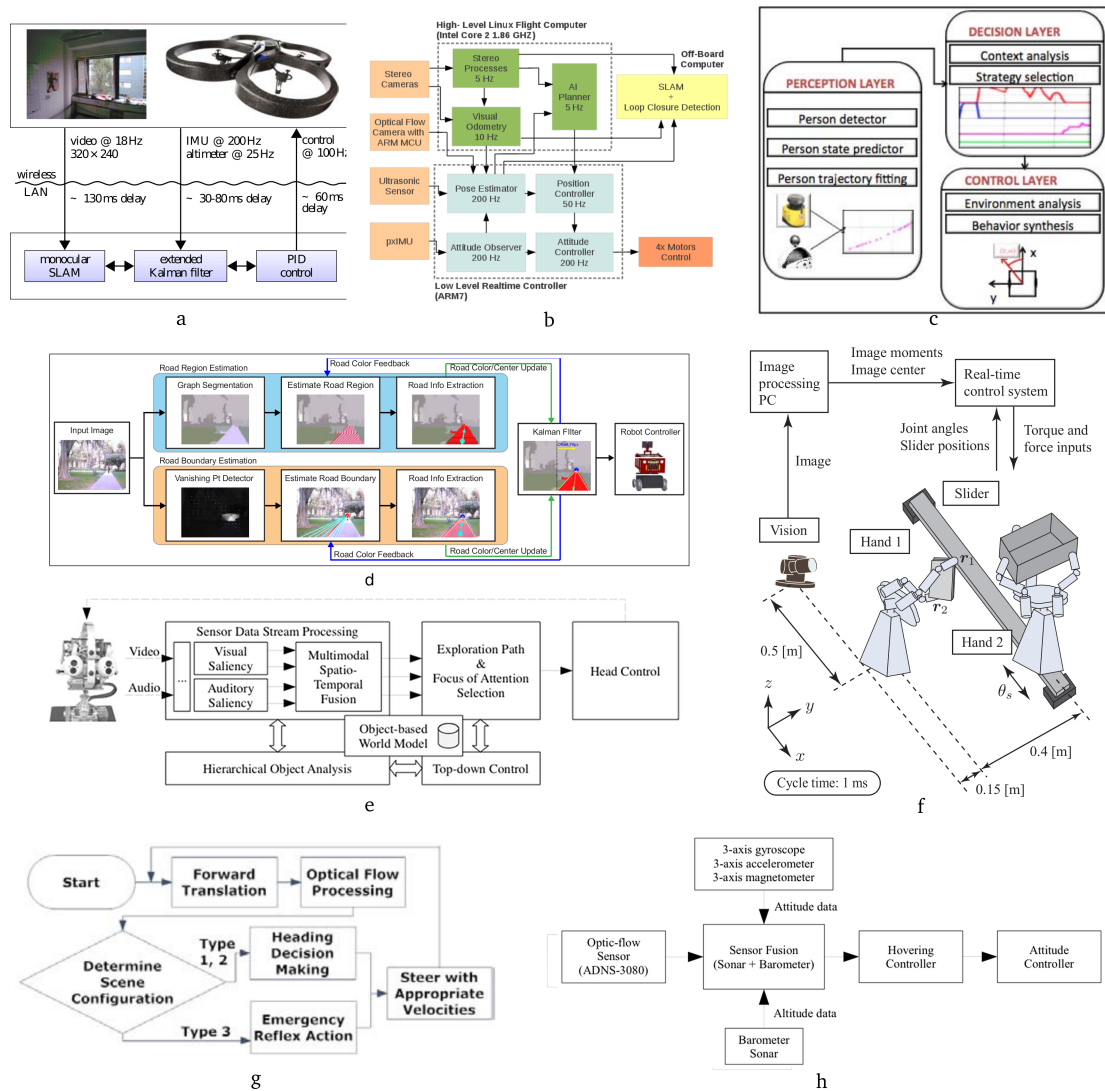


FIGURE 1.3: Huit schémas de contrôle issus des publications de IROS 2012 (dans l'ordre : [9–16]). Dans chacun d'eux, l'organisation *sentir-planifier-agir* se retrouve visuellement illustrée. Chaque schéma débute avec les informations fournies par les capteurs du robot, puis continue avec un ensemble, plus ou moins développé selon les articles, de traitements et d'analyses de ces données pour finalement mener à l'exécution d'une tâche motrice.

développé, le robot est alors capable d'analyser son flux sensoriel, d'en extraire les caractéristiques désirées, de mettre à jour sa représentation interne du système puis de décider quelle action réaliser.

Dans cette stratégie de développement, les capacités de perception du robot sont définies *a priori* par le concepteur. C'est en effet lui qui, avant même la mise en marche du robot, détermine quelles caractéristiques vont être extraites de son flux sensoriel et vont donc être *perçues*.

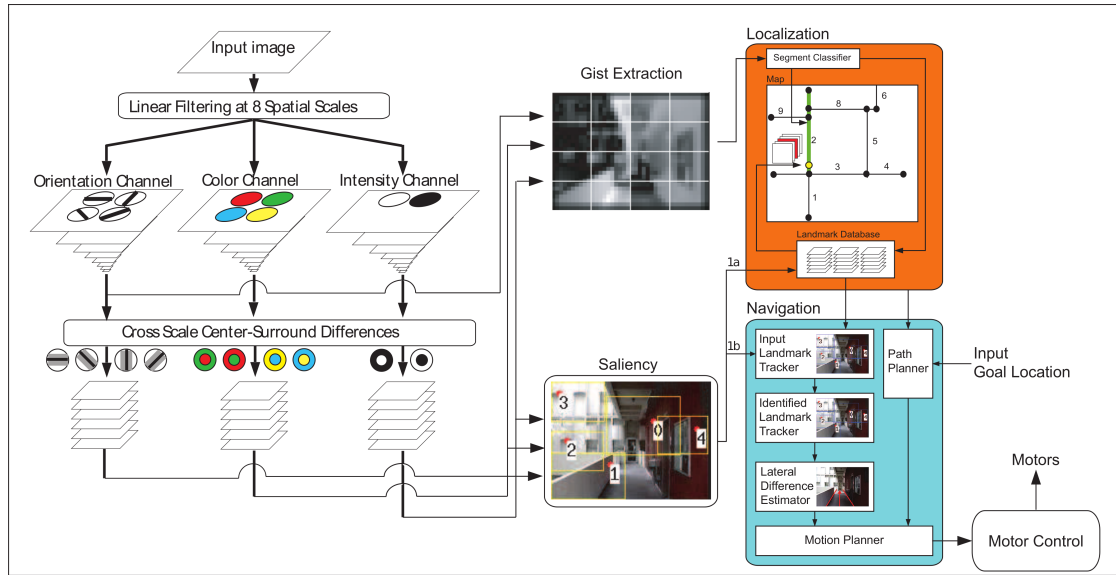


FIGURE 1.4: Schéma de contrôle issu de [17]. Le robot mobile est commandé via une simple caméra. Son flux vidéo est filtré afin d'extraire des caractéristiques de "gist" et de saillance. Ces caractéristiques sont ensuite transmises à deux blocs de localisation et navigation qui permettent de définir les commandes motrices à envoyer aux roues du robot.

Analyse d'un exemple concret : Afin d'illustrer notre propos, étudions un article récent décrivant le développement d'un robot mobile contrôlé par une caméra³. L'objectif de cette analyse n'est pas d'étudier en détail ce travail mais d'identifier l'origine des capacités de perception du robot. Pour se faire, l'architecture de contrôle proposée dans leur article est représentée figure 1.4. Ici encore, l'organisation globale *sentir-planifier-agir* se retrouve explicitement dans le schéma. Plus finement, les informations visuelles brutes fournies par la caméra sont traitées par un ensemble de filtres. Ceux-ci permettent d'extraire trois types de caractéristiques jugées intéressantes par les auteurs : orientation de lignes, couleurs et intensités. Ces trois flux de caractéristiques sont à nouveau traités ([17] pour plus de détails) afin d'extraire deux caractéristiques de "gist" (apparence générale) et de saillance. Enfin, celles-ci vont alimenter deux blocs de localisation et de navigation destinés à choisir la prochaine action à effectuer.

D'après la définition que nous avons proposée, le robot perçoit donc le "gist" et les éléments saillants des scènes qu'il observe avec sa caméra. Il est également possible d'argumenter qu'il perçoit les lignes, les couleurs et les intensités lumineuses de ces scènes, même si ces caractéristiques ne viennent pas directement alimenter les blocs de prise de décision. Dans tous les cas, ces capacités de perception sont entièrement définies par les auteurs. De plus, elles reposent sur une connaissance et une modélisation *a priori* du système. La caméra est, par exemple, supposée orientée vers l'avant du robot, permettant de générer directement les mouvements adéquats, et l'organisation des pixels dans l'image et la signification des trois composantes (rouge, vert, bleu) associées à chacun d'eux sont présumées connues, permettant ainsi d'extraire les lignes et les couleurs de l'image.

3. Les algorithmes de traitement des données sensorielles sont généralement spécifiques à une modalité (visuelle, auditive, tactile...) [17]. Historiquement, la modalité visuelle est toutefois la plus étudiée.

1.2.3 Les limitations de l'approche classique

L'architecture de contrôle classique présente l'avantage de découpler largement les étapes de perception, de décision et d'action. Différentes approches et algorithmes, parfois très sophistiqués, ont ainsi été proposés pour résoudre les problèmes spécifiques à chacune d'elles. Le développement amont du modèle du système et des algorithmes de traitement et de contrôle permet également d'étudier et de résoudre théoriquement chaque problématique avant même la conception du robot. L'approche classique présente toutefois de nombreuses limitations. La plupart d'entre elles ont notamment été évoquées par R. Brooks dans trois fameux articles où il s'oppose à l'approche computationnaliste et symbolique de l'IA [18–20]. Afin de concentrer notre propos sur les problématiques que nous développerons par la suite, seules les critiques relatives à la perception du robot sont abordées.

Capacités de perception limitées : Les capacités de perception sont définies par les algorithmes de traitement du flux sensoriel fournis au robot. Elles sont donc intrinsèquement limitées par ces derniers. Le robot est incapable de percevoir des informations présentes dans son flux sensoriel si aucun processus n'a été implémenté *a priori* pour les extraire.

Choix des caractéristiques : Le choix des caractéristiques à extraire du flux sensoriel incombe entièrement au concepteur. Il peut donc se révéler non-optimal vis-à-vis des tâches que le robot doit effectuer et des interactions réelles qu'il entretient avec l'environnement. De plus, les algorithmes de traitement implémentés peuvent eux aussi se révéler non-optimaux pour extraire les caractéristiques désirées.

Choix d'une modélisation : Comme évoqué précédemment, les algorithmes de traitement (et de prise de décision) sont développés en accord avec une modélisation *a priori* du système, elle aussi définie par le concepteur. A nouveau, le modèle choisi peut se révéler non-optimal vis-à-vis des interactions réelles entre le robot et son environnement. Les capacités de mémorisation et de calcul limitées des robots induit généralement une simplification des propriétés du système lors de sa modélisation, créant inévitablement un biais entre les informations optimales accessibles et les caractéristiques extraites.

Inadaptabilité des capacités de perception : L'implémentation immuable des algorithmes de traitement empêche toute évolution des capacités de perception du robot au cours de sa vie⁴. Les capacités de perception du robot peuvent donc aisément se révéler obsolètes en cas de panne (défaut ou détérioration d'un capteur par exemple). Le développement des algorithmes de traitement peut également se révéler délicat lorsque les caractéristiques sensorielles du robot sont amenées à évoluer au cours du temps (swarm bots [21], croissance de sa structure [22]).

Au-delà des différentes limitations évoquées ci-dessus, il est important de noter que, fondamentalement, les capacités de perception implémentées dans le robot sont jugées pertinentes du point de vue de son concepteur. Ainsi, l'expérience réelle du robot lors de son interaction avec l'environnement n'est pas prise en compte lors de l'élaboration

4. Un certain degré d'adaptation peut toutefois être envisagé et implémenté initialement dans les algorithmes de traitement.

de ses capacités de perception. Comme nous le verrons par la suite, celle-ci permettrait pourtant de faire émerger des perceptions intrinsèquement intéressantes pour le robot.

1.2.4 Conclusion

La robotique moderne est encore largement imprégnée des postulats sur l'intelligence émis par les fondateurs de l'IA. Ainsi, le schéma de contrôle de la grande majorité des robots respecte l'organisation *sentir-planifier-agir*. L'agent (artificiel) intelligent est donc conçu tel un programme capable de traiter les informations provenant de ses capteurs pour choisir la meilleure commande à envoyer à ses actionneurs. Dans ce contexte particulier, les capacités de perception du robot sont entièrement définies *a priori* par son concepteur. Le sens et l'intérêt des caractéristiques extraites du flux sensoriel dérivent directement des algorithmes de traitement développés et implémentés par le roboticien. Cette approche computationnaliste et innée de la perception et de l'intelligence induit différentes limitations que des chercheurs ont tenté de dépasser en proposant de nouveaux paradigmes pour la conception des robots, présentés ci-après.

1.3 Remise en cause du paradigme classique

Durant de nombreuses années, les travaux en Intelligence Artificielle et en robotique ont suscité de grands espoirs chez les chercheurs. Le développement d'algorithmes toujours plus sophistiqués et les avancées technologiques (vitesse de calcul, mémoire...) laissaient envisager à terme la création de robots intelligents, capables d'évoluer dans des environnements complexes. La tâche s'est toutefois révélée plus délicate que ne l'avaient songé les pionniers de l'IA. Le développement de modèles du monde et d'algorithmes de traitement des données s'est rapidement heurté à la complexité des interactions réelles entre un robot et son environnement. Face à cette difficulté, de nombreux travaux se sont orientés vers des domaines d'application spécifiques, limitant ainsi le nombre de contraintes lors de la conception des robots.

Cet échec relatif a poussé certains chercheurs à remettre entièrement en cause le paradigme computationnaliste et symbolique de l'intelligence chez les robots. De nouvelles approches ont ainsi émergé et attiré l'attention sur certaines propriétés des êtres vivants jusqu'alors ignorées en robotique. Dans la recherche de nouvelles approches de l'intelligence, les êtres vivants se sont naturellement imposés comme source d'inspiration privilégiée. Ils sont en effet le modèle incarné dont les roboticiens cherchent à reproduire artificiellement les capacités. Contrairement aux réflexions soulevées durant les premières années de l'IA, l'être humain ne s'est cependant plus imposé comme étalon de référence. Face aux difficultés soulevées par la compréhension des êtres intelligents supérieurs, les chercheurs se sont au contraire intéressés aux êtres vivants plus simples. L'observation de comportements sophistiqués chez des animaux basiques au (supposé) faible potentiel cognitif, tels les insectes, a ainsi permis de réaliser qu'un agent peut évoluer dans un environnement complexe sans nécessiter de processus internes également complexes. La biologie ne pouvant proposer un modèle complet du fonctionnement du vivant⁵, les chercheurs se sont intéressés à certaines propriétés fondamentales des êtres-vivants jusqu'alors ignorées ou sous-exploitées en robotique.

5. Seul le comportement de certains organismes très simples (bactéries, virus ou champignons) a pu être totalement étudié.

L'incarnation des agents intelligents : Par nature, les êtres vivants sont incarnés. Ils possèdent un corps qui est le lieu des phénomènes qui le définissent (concept d'*autopoïèse* proposé par F.Varela [23]) et lui permettent d'interagir avec le monde. De par son statut physique, le corps situe l'agent au coeur de son environnement. Une telle affirmation peut paraître triviale; elle est pourtant en radicale opposition avec l'approche computationnaliste fondée sur l'idée que l'intelligence peut être reproduite par un programme désincarné.

Inscrire l'agent intelligent au sein du monde physique permet de donner un sens concret aux informations qu'il capture et aux représentations internes potentielles qu'il se fait de son environnement. L'incarnation permet de combler le vide laissé par l'approche computationnaliste quant à l'ancrage physique des symboles que le robot est censé manipuler ([18]).

Situer l'agent dans son environnement permet également d'assurer un accès constant au meilleur modèle du monde : le monde lui-même [18]. Plutôt que de chercher à en produire une représentation interne, forcément imparfaite, le robot peut tirer directement les informations dont il a besoin de l'environnement dans lequel il est plongé.

Enfin, comme souligné entre autres par R.Pfeifer & J.Bongard, l'incarnation physique de l'agent permet de simplifier l'émergence de comportements [24]. Les fameux "marcheurs passifs", dont deux sont représentés figure 1.5, sont un célèbre exemple de ce type de développement. Ils démontrent que la marche bipède, comportement complexe à reproduire chez un robot, peut être générée par une structure mécanique adéquate dépourvue d'actionneur⁶. Une partie des traitements complexes réalisés dans l'approche computationnaliste peuvent ainsi être déportés vers le corps de l'agent où ils se trouvent réalisés physiquement.

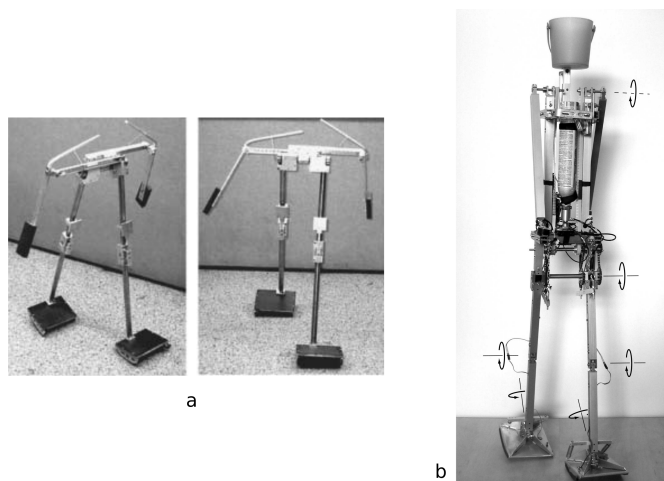


FIGURE 1.5: Deux exemples de marcheurs passifs. A gauche (a), marcheur passif de S.Collin qui, mis dans une pente descendante, peut imiter la marche bipède par sa seule structure mécanique [25]. A droite (b), marcheur passif hybride de M.Wisse capable de reproduire la marche bipède sur sol plat grâce à sa structure mécanique et un simple moteur placé au niveau des hanches [26].

La nature sensorimotrice de l'interaction avec le monde : En plus d'être incarnée, l'intelligence des êtres vivants est *située* [27, 28]. Ils interagissent constamment

6. La structure peut être munie d'un actionneur réduit à sa plus simple expression afin de compenser les pertes d'énergie de la structure.

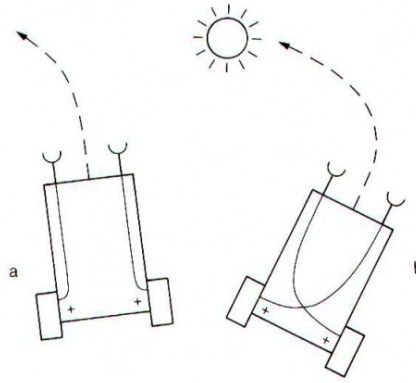


FIGURE 1.6: Véhicule de V.Braitenberg faisant preuve de phototaxie par le simple branchement de deux fils entre ses deux capteurs de lumière et ses deux roues motorisées.

avec leur environnement, générant des actions et captant des informations sur leur environnement. C'est au travers de cette activité sensorimotrice que transparait ce que nous qualifions d'intelligence.

Là où l'approche computationnaliste suppose qu'un agent raisonne passivement sur les informations sensorielles qu'il reçoit, l'approche située souligne au contraire qu'il est un acteur dans son environnement. Il y agit, modifie activement ses sensations et génère des boucles sensorimotrices afin d'adapter son comportement [29]. Ce changement de perspective peut se résumer ainsi : être intelligent n'est pas raisonner mais agir dans le monde.

L'importance accordée aux interactions sensorimotrices entre l'agent et son environnement fait également référence au concept d'*affordance* proposé par J.J.Gibson qui a inspiré de nombreux travaux en sciences cognitives et en robotique [30].

L'intelligence émergeant d'interactions simples : L'observation des animaux simples, tels les insectes, révèle que des capacités cognitives développées ne sont pas nécessaires pour évoluer dans un environnement complexe. De même, des comportements jugés complexes d'un point de vue extérieur peuvent n'être que le fruit de processus internes simples. Leur apparente complexité s'explique alors non pas par la sophistication cognitive de l'agent mais par la richesse du monde et des interactions qu'il entretient avec l'environnement.

Le cybernéticien V.Braitenberg a proposé une implémentation de ce principe au travers de différents véhicules [31]. Le plus simple d'entre eux, illustré figure 1.6, est un robot mobile capable de faire preuve de phototaxie grâce au simple branchement de deux fils électriques entre ses capteurs et ses moteurs. Selon le sens de branchement des fils, le véhicule peut ainsi être attiré par une source lumineuse ou au contraire la fuir. Pour un observateur extérieur, le comportement du robot est tel qu'il semble percevoir la source lumineuse et décide de l'action à effectuer pour s'en rapprocher ou s'en éloigner. Pourtant, la découverte du système de contrôle incarné par les deux fils électriques nous permet d'affirmer que le robot n'a construit ni représentation interne, ni raisonnement (au sens symbolique du terme) pour générer ses actions.

La complexité apparente du comportement d'un agent intelligent peut donc émerger de l'interaction entre des processus internes simples et un environnement riche. Elle peut aussi être le fruit de l'interaction d'une multitude de processus internes simples. Récemment, A.Berthoz a proposé de qualifier ce phénomène de "simplexité" [32]. C'est sur ce principe que R.Brooks a proposé en 1986 une nouvelle architecture de contrôle pour les

robots ([8]), fondée sur l'interaction de multiples systèmes de contrôle sensorimoteur basiques. Elle lui a permis, entre autres, de créer des robots inspirés des insectes et capables de se déplacer efficacement dans des environnements encombrés comme aucun robot de l'époque ne pouvait encore le faire.

La possible simplicité des systèmes de contrôle des agents intelligents remet fondamentalement en question l'approche computationnaliste pour laquelle un comportement complexe nécessite un système cognitif développé, capable de se représenter le monde et de raisonner sur des symboles pour choisir l'action la plus adaptée.

Le développement de l'intelligence : L'observation des êtres vivants les plus développés, dont l'humain est évidemment un excellent exemple, permet de remarquer que l'intelligence n'est pas nécessairement innée mais peut se développer au cours de la vie d'un individu. Comme l'a formalisé J. Piaget, les bébés connaissent ainsi différentes phases de développement au cours desquelles ils découvrent et acquièrent des capacités sensorimotrices de plus en plus sophistiquées [33, 34]. L'apprentissage de ces nouvelles compétences est graduel et repose sur la maîtrise des interactions plus simples. L'intelligence est donc en partie le résultat d'un processus d'apprentissage où chaque capacité d'interaction offre à l'agent de nouveaux champs à explorer.

Il est également intéressant de noter que le développement cognitif des êtres développés s'accompagne en général d'un développement physique de leur corps. Dans les premiers temps de la vie, les capacités d'interaction réduites permettent de restreindre l'espace des interactions à explorer et facilitent ainsi l'apprentissage de comportements basiques. Le développement progressif du corps offre ensuite à l'agent de nouveaux espaces d'interaction.

La nature acquise et développementale de l'intelligence inspirera directement la branche de la robotique développementale qui cherche à reproduire ce type de dynamique d'apprentissage chez des agents artificiels [35].

1.3.1 Conclusion

Ces nouveaux paradigmes pour l'intelligence artificielle ont permis aux chercheurs de proposer des schémas de contrôle originaux. Ce mouvement, qualifié de *nouvelle IA* [36, 37] en opposition à l'approche classique, a fait émerger des champs de recherche novateurs comme la robotique évolutionnaire [38–40], la robotique bio-inspirée [41], la robotique développementale [35] ou encore les approches sensorimotrices du contrôle auxquelles nous nous intéresserons particulièrement par la suite.

Tout comme ceux de son aînée, les succès de la nouvelle IA restent aujourd'hui encore limités et seuls les comportements des animaux les plus simples peuvent être reproduits efficacement. Ces avancées modestes sont principalement dues à la difficulté d'appréhender et de reproduire les phénomènes qui sous-tendent l'intelligence du vivant.

Néanmoins, la nouvelle IA propose de jeter un regard neuf sur les concepts d'action et de perception. Contrairement à l'approche classique où elles apparaissent globalement dissociées, ces nouveaux paradigmes tendent à les rendre interdépendantes et même à dissoudre la frontière qui les sépare. Tout comme le schéma de contrôle classique, la notion de perception comme extraction passive de caractéristiques du flux sensoriel pourrait donc se révéler obsolète.

1.4 L'approche sensorimotrice et la perception

Les approches incarnées, situées et sensorimotrices de l'intelligence laissent envisager de nouvelles manières de concevoir des robots. Que disent-elles cependant du statut et du rôle de la perception ? Si l'approche classique de la perception, consistant à extraire du flux sensoriel des caractéristiques spécifiées par le roboticien, se révèle inadaptée, une nouvelle définition doit en être proposée.

La "*théorie des contingences sensorimotrices*" propose justement de jeter un regard nouveau sur la problématique de la perception. Elle cherche à la redéfinir comme un acte de l'agent, fondé sur un savoir sensorimoteur acquis au travers de ses expériences. Ci-après, cette théorie est présentée en détail et illustrée. Dans un second temps, différents résultats expérimentaux venant étayer le contenu philosophique de la théorie sont discutés.

1.4.1 La théorie des contingences sensorimotrices

La "*théorie des contingences sensorimotrices*" (CSM) proposée en 2001 par J.K.O'Regan et A.Noé, et développée plus récemment dans un ouvrage de J.K.O'Regan, aborde la question de la perception d'un point de vue principalement philosophique⁷ [42, 43]. Elle développe ainsi son propos jusqu'à englober les notions de conscience et de pensée.

Nous éludons ici autant que possible ces problématiques philosophiques complexes pour nous concentrer sur la question de la perception. La redéfinition qu'en propose la théorie présente en effet un intérêt particulier pour le développement de nouvelles architectures de contrôle en robotique.

1.4.1.1 L'insuffisance de l'approche classique

L'énoncé de la théorie des CSM part du constat fondamental que la vision computationnaliste de l'intelligence ne permet pas d'expliquer notre expérience phénoménologique. Plus précisément, elle suppose que le cerveau manipule des symboles ou représentations internes capturant les différentes propriétés du monde qui nous entoure. Ces représentations internes seraient codées par des neurones ou groupes de neurones, appelés *corrélats neuronaux*, dont l'excitation serait à l'origine de nos ressentis en tant qu'agent conscient.

Comme le soulignent J.K.O'Regan et A.Noé, cette modélisation du cerveau ne permet en réalité pas d'expliquer *comment* l'agent ressent. Ainsi, toute tentative de rattacher la nature des ressentis ou *qualia*⁸ à une quelconque propriété du fonctionnement du cerveau sombre inévitablement dans un "*explanatory gap*" [42]. Les caractéristiques de conductance d'un neurone, sa fréquence d'excitation ou encore la manière dont il est connecté à ses voisins ne peuvent ainsi pas expliquer pourquoi un agent perçoit la couleur rouge plutôt que la couleur verte. Les hypothèses de représentations mentales et de corrélats neuronaux codant pour chaque caractéristique perçue ne sont donc pas satisfaisantes pour expliquer l'expérience sensible d'un agent.

7. La théorie s'appuie toutefois sur une collection de phénomènes observés lors d'expériences dont certaines sont décrites par la suite.

8. Les qualia sont les propriétés de l'expérience sensible, par nature subjectives et liées à des états mentaux.

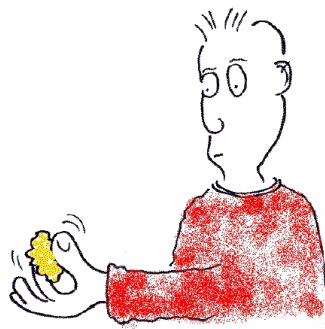


FIGURE 1.7: Schéma proposé par J.K.O'Regan. Lorsque nous percevons la souplesse d'une éponge, nous entrons dans une interaction sensorimotrice particulière avec elle qui consiste à y appliquer une pression et à sentir en retour nos doigts s'y enfoncer. D'après la théorie des CSM, les propriétés de cette interaction définissent celles de notre perception de la souplesse de l'éponge.

1.4.1.2 Reformulation du problème de la perception

Toute tentative de raccrocher la nature de nos perceptions aux propriétés physiques et physiologiques de notre système nerveux est vouée à l'échec. Les auteurs proposent donc de reformuler entièrement la problématique de la perception. Plutôt que de s'interroger sur ce qui *se passe* dans le cerveau lorsque l'agent perçoit, ils se demandent ce que *fait* le cerveau lorsque l'agent perçoit. Leur réponse est que le cerveau, via le corps, entre dans une interaction particulière avec son environnement.

Afin d'illustrer ce propos, prenons comme exemple une situation proposée par J.K.O'Regan dans [43] et illustrée figure 1.7. Lorsque nous saisissons une éponge, nous percevons sa souplesse. Ce ressenti particulier naît de l'interaction sensorimotrice que nous entretenons avec l'éponge : lorsque nous appliquons une pression sur celle-ci, nos doigts s'y enfoncent, générant en retour une sensation tactile liée à la pression appliquée. D'après la théorie des CSM, la perception de souplesse ainsi générée n'est pas liée à l'excitation d'un ensemble spécifique de neurones dans notre cerveau mais aux propriétés intrinsèques de cette interaction sensorimotrice entretenue avec l'éponge.

En cherchant à caractériser notre expérience sensible par les propriétés des interactions que nous entretenons avec l'environnement, la théorie des CSM permet de contourner la question, stérile selon les auteurs, du support matériel de nos perceptions.

1.4.1.3 La théorie des CSM et l'action

La modalité tactile impliquée dans l'exemple de l'éponge est la plus intuitive pour appréhender la théorie des CSM. Par nature, elle a en effet tendance à inclure un aspect moteur dans la génération des sensations qui lui sont associées (souplesse, rugosité, adhérence...). La théorie des CSM s'applique toutefois de manière équivalente à tout type de modalité et de perception. Il est donc important de clarifier le rôle qu'y tient l'action.

Contrairement à ce que pourrait laisser supposer l'exemple précédent, une action motrice n'est pas nécessaire pour percevoir. Plus précisément, la théorie stipule que percevoir est un mode d'exploration du monde fondé sur la connaissance des contingences⁹ sensorimotrices que l'agent peut entretenir avec l'environnement. Pour percevoir, cet agent doit

9. Une contingence est une relation stable liant un événement moteur à un événement sensoriel. Un exemple simple de contingence liée au contact d'une surface rigide avec le doigt pourrait être : si je pousse avec mon doigt, je ressens une pression plus importante sur ma peau.

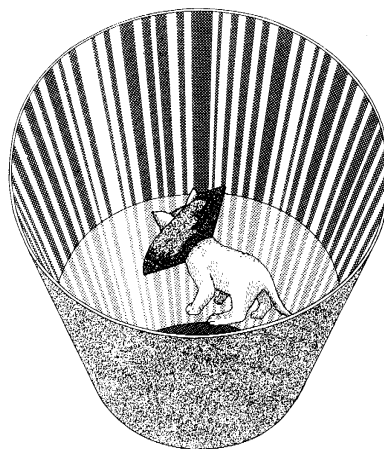


FIGURE 1.8: Schéma issu de [44]. Les chatons sont placés dans un environnement particulier où leur expérience visuelle se résume à des bandes noires et blanches horizontales ou verticales.

donc détecter quelles contingences sensorimotrices s'appliquent à la situation courante (en d'autres termes, dans quel type d'interaction avec l'environnement il se trouve). Fort de cette information, il n'a alors pas nécessairement besoin d'agir pour percevoir ; savoir comment son expérience sensorielle changerait *si* il effectuait une action est suffisant.

Par principe, la théorie des CSM suppose donc que l'agent possède un savoir sensorimoteur lui permettant d'identifier les contingences sensorimotrices dont il peut faire l'expérience. Bien que ce savoir puisse être inné, notamment dans le cas d'un agent artificiel, les auteurs proposent que ce savoir est acquis via une exploration active de l'environnement : percevoir s'apprend.

Enfin, les auteurs soulignent également que la perception est un phénomène actif à double titre. D'une part, les capacités de perception de l'agent dérivent directement des interactions sensorimotrices entre l'agent et l'environnement. D'autre part, les perceptions ne s'imposent pas passivement à l'agent mais résultent d'une attention portée activement par l'agent sur ses potentielles interactions avec l'environnement (consulter [42] pour plus de détails sur cet aspect de la théorie).

1.4.2 Données et résultats expérimentaux

La théorie des CSM propose une redéfinition fondamentale de la notion de perception. Celle-ci serait fondée sur la maîtrise de contingences sensorimotrices acquises lors d'une exploration active de l'environnement. De telles caractéristiques, si avérées, devraient pouvoir être observées et testées dans le vivant. Au même titre que la théorie des corrélats neuronaux, aucune étude n'a jusqu'à présent pu formellement valider la théorie des CSM. Différents résultats expérimentaux peuvent toutefois être évoqués pour justifier un tel changement de paradigme. Ci-dessous, plusieurs d'entre eux sont brièvement présentés et discutés.

Cécité partielle induite par l'environnement : Une étude menée en 1970 s'est intéressée à l'influence de l'environnement sur le développement des aires cérébrales visuelles chez les chats [44]. Dans une série d'expériences, les auteurs ont laissé de jeunes chatons évoluer dans des environnements artificiels composés de murs rayés noirs et blancs, comme illustré figure 1.8. La nature particulière de ces environnements a permis

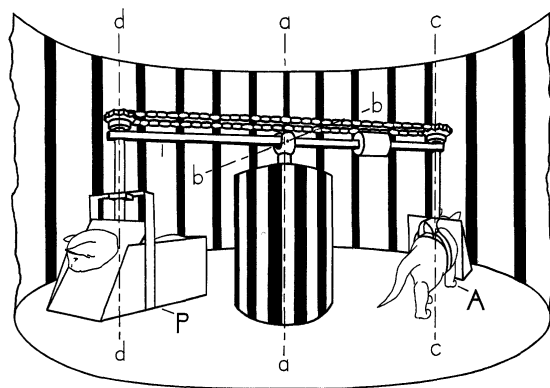


FIGURE 1.9: Schéma issu de [45]. Les chatons sont placés par paire dans un manège. Un seul des deux chatons contrôle les déplacements du manège, et donc de l'autre chaton. L'environnement visuel et le manège sont tels que les deux chatons ont une expérience visuelle similaire.

de limiter l'expérience visuelle des chats durant les premières semaines de leur vie. Les cobayes ont été partagés en deux groupes et respectivement mis en présence de bandes horizontales et verticales. Au bout de cinq mois, les chatons ont été placés dans un environnement naturel (bureau de laboratoire) afin d'observer leur comportement. Tous les chatons se sont tout d'abord montrés peu adaptés à ce nouvel environnement. Leur approche maladroite des objets, bords de table et pieds de meubles révélait une certaine inadaptation sensorimotrice.

Après quelques tests plus approfondis, les chatons se sont révélés aveugles aux stimuli dont ils n'avaient pas fait l'expérience dans leur environnement initial. Ainsi, le premier groupe ne faisait preuve d'aucune réaction face à des contours verticaux tandis que le second ne réagissait pas face aux stimuli horizontaux. Ils se montraient néanmoins intéressés lorsqu'une corde était agitée devant eux avec la même orientation que les bandes de leur environnement initial.

Les résultats qualitatifs de cette expérience semblent indiquer que la perception des stimuli extérieurs n'est pas innée. Elle nécessite une phase d'apprentissage durant laquelle l'agent peut se familiariser avec les informations sensorielles qu'ils génèrent. En l'absence d'un tel apprentissage, l'agent peut se révéler incapable de percevoir des informations qui sont pourtant disponibles dans son flux sensoriel.

Cécité liée à une exploration passive : Une travail analogue sur des chats a été proposé par R.Held et A.Hein en 1963 [45]. Ils ont ainsi également placé des chatons dans des environnements formés de murs rayés noirs et blancs. Contrairement à l'expérience précédente cependant, deux chatons étaient simultanément présents dans l'environnement. Les deux étaient installés dans un manège représenté en figure 1.9. Le premier, placé dans une boîte, ne pouvait contrôler ses déplacements¹⁰. Le second, relié au premier chaton par l'intermédiaire du manège, pouvait se déplacer librement et entraîner avec lui le premier chaton. L'environnement et le manège étaient construits de manière à ce que les mouvements et l'expérience visuelle de chaque chaton soient les mêmes (symétrie axiale).

Deux groupes de chatons, actifs et passifs, ont été placés dans cet environnement durant plusieurs jours après l'ouverture de leurs paupières. Leur comportement fut ensuite testé

10. Les pattes du chaton sont libres de bouger mais ne lui permettent pas de déplacer la boîte dans laquelle il se trouve.

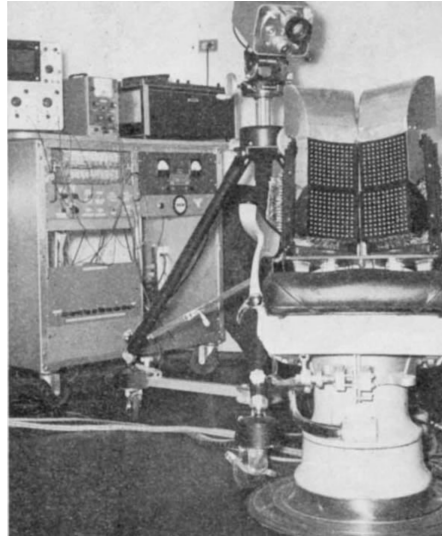


FIGURE 1.10: Image issue de [46]. Le dispositif de substitution sensorielle est constitué d'une plaque munie de vibreurs respectivement associés aux pixels d'une caméra. La plaque était placée sur le ventre ou le dos de sujets aveugles qui devaient essayer de percevoir les informations fournies via la caméra.

sur deux tâches de "reaching" et d'évitement de chute. Les chatons actifs durant la phase d'apprentissage ont rempli chacune des tâches sans difficulté. Les chatons passifs ont par contre fait preuve d'un comportement inadapté : ils ne cherchaient pas à atteindre avec leur patte un mur qui se rapprochait d'eux et ne montraient aucun comportement d'évitement du vide.

Les résultats de cette expérience suggèrent que le flux sensoriel n'est pas suffisant lors de la phase d'exploration pour générer des comportements sensorimoteurs adaptés. La composante motrice de l'exploration initiale semble ainsi nécessaire pour faire émerger chez les chatons une perception visuelle qui leur permette de réagir à des stimuli visuels ultérieurs. Les expériences sensorielles équivalentes vécues par les chatons actifs et passifs nécessitent donc d'être cohérentes avec leur expérience motrice pour permettre la découverte et l'interprétation des perceptions visuelles.

Substitution sensorielle : Le concept de *substitution sensorielle* fut introduit par Back-y-Rita à la fin des années 1960 [47]. Il consiste à transférer les informations sensorielles provenant d'une modalité (d'origine biologique ou artificielle) vers une autre modalité à l'aide d'un dispositif spécifique. Les premières expériences de substitution sensorielle consistaient ainsi à exciter la peau de sujets aveugles grâce aux informations fournies par une caméra. Le dispositif de substitution consistait en une plaque munie de vibreurs respectivement associés à chaque pixel de l'image fournie par la caméra, comme illustré figure 1.10. La plaque pouvait être placée dans le dos ou sur le ventre des sujets. Durant les premiers essais, les sujets, assis dans un fauteuil, devaient reconnaître des objets simples filmés par la caméra, elle-même placée sur un trépied à côté du fauteuil. L'expérience s'est révélée infructueuse : les sujets ne ressentaient que des sensations tactiles rendant très difficile les tâches de discrimination envisagées. Par chance, un sujet prit un jour l'initiative de saisir la caméra et d'explorer manuellement son environnement. En peu de temps, la nature de son ressenti changea. Il se mit à oublier la nature tactile de ses sensations et à percevoir des stimuli situés à l'extérieur de son corps et non

plus à sa surface. D'après son témoignage, il découvrit après une exploration plus approfondie les notions de profondeur, de parallaxe ou encore d'ombre : des caractéristiques habituellement associées aux perceptions visuelles et non tactiles.

Les expériences de Bach-y-Rita permettent de tirer différentes conclusions intéressantes. Tout d'abord, la perception des caractéristiques du monde extérieur ne dépendent pas de la modalité excitée ou des voies nerveuses transmettant l'information sensorielle. Elle émerge plutôt des caractéristiques de l'interaction entre l'agent et l'environnement que le capteur est capable de capturer. Ainsi, des informations intrinsèquement visuelles généreront des perceptions visuelles même si elles sont transmises via la modalité tactile. Dans un second temps, ces expériences permettent de souligner l'importance de l'action du sujet dans l'émergence de ces nouvelles perceptions. Non seulement le capteur doit être mobile et explorer l'environnement mais le sujet doit être directement au contrôle de ses mouvements pour que la substitution fonctionne. Il semble donc que le cerveau ait besoin à la fois des informations sensorielles et des commandes motrices qui en sont à l'origine pour pouvoir interpréter son expérience et générer des perceptions. Depuis les années 1970, de nombreuses expériences de substitutions ont été menées, variant les dispositifs de substitution et les modalités impliquées. Une vue d'ensemble de ces travaux est disponible en [48].

Modification des contingences sensorimotrices : La théorie des CSM implique qu'il est possible de modifier nos perceptions en changeant les propriétés des contingences sensorimotrices dont nous faisons l'expérience. Dans cette optique, plusieurs expériences ont été proposées par D.P.Richters et R.T.Eskew afin de vérifier cette hypothèse [49].

A l'aide d'un dispositif spécifique, ils ont associé de manière systématique les saccades oculaires de sujets avec des stimuli visuels de différentes teintes. Le stimulus visuel était rouge pour une saccade vers la gauche et vert pour une saccade vers la droite. Après 40 minutes d'un tel (ré-)apprentissage, les sujets ont dû évaluer la teinte de différents stimuli colorés observés lors de saccades oculaires. Les stimuli présentés lors de saccades vers la gauche et la droite ont respectivement été jugés plus vert et plus rouge que pour le groupe contrôle n'ayant pas subi de (ré-)apprentissage.

Les auteurs ont tenté de reproduire ces résultats via une association "sensori-sensorielle" plutôt que sensorimotrice. Lors de la phase de (ré-)apprentissage, ils ont associé les stimuli rouge et vert à deux signaux sonores de tonalités différentes. Aucune influence de ce conditionnement sur le jugement des sujets n'a été observé lors de la phase d'évaluation. Ces résultats semblent indiquer que nos perceptions des couleurs peuvent être modifiées en changeant les caractéristiques de nos interactions sensorimotrices avec l'environnement. Une telle altération de nos perceptions ne peut cependant être réalisée via une association sensori-sensorielle, soulignant le rôle particulier des informations motrices dans l'émergence de nos ressentis.

Perception des couleurs pures : Partout dans le monde, les couleurs rouge, vert, bleu et jaune sont perçues comme *pures*¹¹. L'existence de ces quatre couleurs particulières est généralement expliquée par des propriétés du système nerveux visuel ou par l'acquisition tacite de normes culturelles.

Aucune de ces explications n'est cependant satisfaisante. D'une part, les propriétés physiologiques de l'oeil, de la rétine et des fibres nerveuses avales ne permettent pas

11. Une couleur pure n'est pas ressentie comme composée d'autres couleurs. A l'inverse, les couleurs non-pures peuvent être décomposées comme un mélange de couleurs pures.

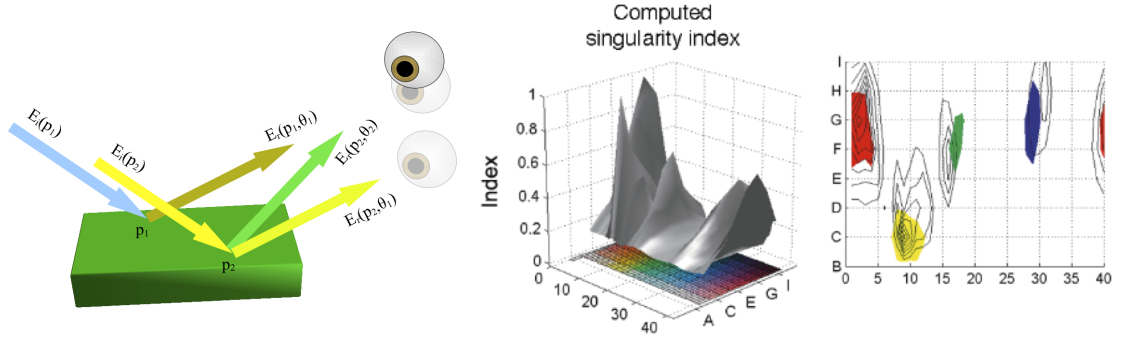


FIGURE 1.11: Figures tirées de [50]. A gauche, l'observation d'une surface colorée sous différents angles par le système de vision trichromatique de l'homme peut se réduire à un opérateur linéaire (matrice 3×3) appliqué à l'éclairage ambiant. Au centre, les ratios des coefficients de cette matrice permettent d'isoler certaines couleurs singulières pour lesquelles ces ratios sont importants (valeur "index" du schéma). A droite, vue du dessus du schéma central où les matrices singulières correspondent aux couleurs perçues comme pures par l'homme.

d'expliquer pourquoi il existe quatre couleurs pures alors que l'homme possède une vision trichromatique. D'autre part, l'hypothèse culturelle semble peu compatible avec la constance des couleurs pures dans les différentes cultures, parfois isolées, de la planète. Dans un article de 2005, D.Philipona propose d'expliquer notre perception des couleurs via les propriétés de nos interactions avec l'environnement [50]. Plus précisément, il cherche à caractériser les informations accessibles au cerveau lorsque nous observons une lumière ambiante se refléter sur une surface colorée. Lorsque nous observons une surface colorée éclairée par une lumière ambiante, les propriétés de la lumière réfléchie qui arrive jusqu'à notre rétine dépendent de l'angle d'observation. La réflexion de la lumière ambiante sur la surface et sa capture par la rétine peuvent être modélisée par un opérateur mathématique. L'auteur montre que dans le cas de la vision trichromatique humaine (rouge, vert, bleu), cet opérateur est une matrice de taille 3×3 . Les coefficients de cette matrice dépendent de la couleur de la surface observée. Estimé sur des surfaces réelles, cette matrice peut se révéler singulière du fait de rapports importants entre ses coefficients. Les couleurs de surfaces associées à ces matrices singulières sont : noir/blanc, rouge, vert, bleu et jaune, comme représenté figure 1.11.

Les travaux de D.Philipona cherchent à expliquer notre perception des couleurs par les propriétés de nos interactions sensorimotrices avec des surfaces colorées plutôt que par les caractéristiques de notre système visuel ou des normes culturelles. Ses résultats permettent notamment d'expliquer l'origine des quatre couleurs que nous percevons comme pures. En appliquant la théorie des CSM à la problématique des couleurs, ces travaux soulignent également la pertinence de l'approche sensorimotrice dans des champs perceptifs qui en semblent intuitivement éloignés.

1.4.3 Conclusion

La théorie des contingences sensorimotrices propose de redéfinir le concept de perception. Plutôt que de la concevoir comme l'excitation de corrélats neuronaux spécifiques, elle propose de la caractériser par les interactions sensorimotrices dont le cerveau fait l'expérience lorsqu'il perçoit. La nature de nos perceptions est alors définie par les propriétés de notre expérience sensorimotrice plutôt que par celles du système nerveux qui se révèle n'être "que" le support permettant l'émergence de ces interactions.

Cette approche différente suppose que la capacité de percevoir est acquise au travers d'une exploration active de l'environnement. Elle souligne également l'importance de l'action dans l'émergence de nos perceptions. Ces hypothèses semblent en adéquation avec les résultats expérimentaux présentés précédemment. Chez les chatons, la capacité de réagir à des stimuli visuels est conditionnée par les stimuli auxquels ils ont déjà été exposés lors d'une phase initiale d'exploration du monde. De plus, le chaton doit être aux commandes des mouvements effectués durant cette exploration pour que ces stimuli soient perçus. Chez l'humain, les expériences de substitutions sensorielles semblent démontrer que l'émergence de perceptions ne dépend pas de la modalité sensorielle sollicitée mais des caractéristiques de l'interaction entre le capteur et l'environnement. Elles révèlent également que le sujet doit contrôler directement les mouvements du capteur pour que de nouvelles perceptions soient ressenties. Enfin, deux dernières études ont été présentées concernant notre perception des couleurs. La première montre qu'il est possible de modifier notre perception de surfaces colorées en altérant les contingences sensorimotrices liées aux saccades oculaires. La seconde permet d'expliquer pourquoi nous percevons les couleurs rouge, bleu, vert et jaune comme pures au travers des propriétés de nos interactions sensorimotrices avec des surfaces colorées.

1.5 Application de la théorie des CSM en robotique

La jeune équipe Perception Active Multimodale (PAM), dont cette thèse est l'une des premières productions, a pour but de développer de nouvelles architectures de contrôle fondées sur une approche sensorimotrice de la perception et de l'intelligence. Un de ses objectifs principaux est ainsi d'appliquer la théorie des CSM au domaine de la robotique. Cette démarche soulève toutefois différentes difficultés. Cette partie est consacrée à la présentation du projet de l'équipe et de ces difficultés. Le cadre conceptuel dans lequel s'inscrivent les travaux de cette thèse est également discuté en détail.

1.5.1 Projet de l'équipe

Face aux limitations de l'Intelligence Artificielle classique appliquée à la robotique, l'équipe PAM propose un changement profond de paradigme. Inspirée par la théorie des CSM, une première étape consiste à repenser comment les robots perçoivent leur environnement. L'approche sensorimotrice de la perception suppose de repenser les algorithmes de contrôle des robots et de remettre en cause l'approche classique encore aujourd'hui largement répandue. Ces nouveaux algorithmes devront permettre aux robots de découvrir leurs propres capacités de perception au travers d'une exploration du monde. Des méthodes pour traiter les informations sensorimotrices ainsi extraites devront également être proposées pour générer un comportement intéressant pour l'utilisateur final.

A court terme, un premier objectif consiste à concrétiser l'approche sensorimotrice de la perception. Des algorithmes devront ainsi être développés pour extraire de l'expérience du robot les contingences sensorimotrices sur lesquelles des capacités de perception pourront se construire. A moyen terme, l'équipe a pour but de proposer des schémas de contrôle complets capables d'utiliser les informations sensorimotrices disponibles au robot pour guider son action et générer des comportements adaptés à l'environnement. Enfin, à long terme, l'espoir porté par cette nouvelle approche est de voir émerger des robots plus adaptatifs et robustes que ceux existants à l'heure actuelle. La découverte autonome des capacités d'interaction proposée par cette nouvelle approche laisse ainsi envisager une immersion plus profonde de l'agent dans son environnement. Parallèlement, notons que

ces travaux permettront également de jeter un regard neuf sur la compréhension de la perception et de la génération de comportements dans le vivant.

1.5.2 Les difficultés de l'approche sensorimotrice

Laisser au robot le soin de découvrir de manière autonome ses capacités de perception et d'interaction avec l'environnement est un concept séduisant pour un roboticien. Il se trouve en effet déchargé de la lourde tâche de modélisation et de développement des algorithmes de traitement des informations sensorielles. Néanmoins, cette approche induit également un travail préliminaire important pour construire sur des bases vierges de nouveaux schémas de contrôle et/ou à ré-interpréter les méthodes conventionnelles au travers du prisme sensorimoteur.

Caractère non-intuitif de l'approche : La difficulté du développement de nouveaux schémas de contrôle est accentuée par le caractère non-intuitif de l'approche sensorimotrice. Pour un roboticien, l'approche classique a l'avantage de se comprendre et de s'interpréter aisément. Le concept d'analyse passive des informations sensorielles nous paraît en effet naturel ; ce qui explique d'ailleurs en partie son succès auprès des chercheurs. Au contraire, l'approche sensorimotrice nécessite de réinterpréter nos perceptions comme un savoir sensorimoteur. Afin de souligner la difficulté potentielle de cette démarche, l'exemple de la perception d'une ligne droite est considéré.

Supposons que nous soyons intéressés par la détection d'une ligne droite dans une image. Pour l'approche classique, une ligne droite est un élément visuel dont les propriétés sont bien identifiées : ce sont celles d'une ligne droite géométrique (théorique) projetée dans l'espace image formé de pixels. Une fois les potentielles distorsions induites par la caméra du robot corrigées, différents algorithmes tels que la transformée de Hough permettent de détecter des lignes droites en tirant profit de ces propriétés géométriques connues *a priori* [51]. Notons que ce "savoir" est implicitement transmis au robot par le concepteur des algorithmes de traitement d'image. Le concept de ligne droite n'a donc aucun sens intrinsèque pour le robot.

Pour l'approche sensorimotrice, le concept de ligne droite est le fruit des contingences dont le robot fait l'expérience lorsqu'il interagit avec elle. Ainsi, la contingence sensorimotrice principale permettant de la caractériser est : l'apparence d'une ligne droite ne change pas lorsque le capteur se déplace parallèlement à elle. Cette propriété fondamentale permet d'inscrire le concept de ligne droite dans l'expérience sensorimotrice de l'agent. Elle se révèle néanmoins moins intuitive pour le roboticien qui devra éventuellement traiter ce type d'information. Notons que cette définition¹² d'une ligne droite nécessite une connaissance minimale du système robot/environnement, là où l'approche classique reposait implicitement sur le large savoir du concepteur (propriétés d'une ligne droite mais également caractéristiques du capteur et structure du flux sensoriel).

Complexité de l'espace de travail : L'approche sensorimotrice suppose de travailler à la fois dans l'espace moteur et l'espace sensoriel du robot. Cette dualité implique une complexification des données à traiter mais également des informations à extraire. Elle impose aussi de travailler dans des espaces de très haute dimension (composantes motrices et sensorielles des données) où le traitement des données peut devenir délicat [52].

12. Cette définition n'est que partielle ; cette seule contingence s'applique par exemple également aux surfaces uniformes.

Richesse des informations sensorimotrices : L'approche classique permet de limiter les informations extraites du flux sensoriel grâce aux algorithmes de traitement implémentés par le roboticien. Dans l'approche sensorimotrice, ce raffinement n'est *a priori* pas réalisé et le flux sensorimoteur brut est directement traité. Le robot doit donc faire face à un magma d'informations où les propriétés de sa structure, de ses capteurs et actionneurs, de l'environnement et des lois physiques qui régissent le monde dans lequel il évolue s'entremêlent. De ce flux extrêmement riche, seules quelques caractéristiques pertinentes doivent être extraites pour permettre au robot de réaliser sa tâche.

1.5.3 Cadre conceptuel de la thèse

Les travaux présentés dans cette thèse visent à explorer le concept de *perception sensorimotrice* inspiré par la théorie des CSM. Il suppose, d'une part, que les capacités de perception d'un robot peuvent être acquises et, d'autre part, qu'elles reposent sur la découverte de contingences sensorimotrices dont le robot fait l'expérience en interagissant avec le monde. Avant d'aborder les problématiques du contrôle du robot et de la génération d'un comportement, plusieurs questions doivent être adressées : quelles contingences peuvent être extraites du flux sensorimoteur, comment elles caractérisent les capacités de perceptions, lesquelles sont pertinentes pour générer le robot et comment ce dernier peut les extraire. Ci-dessous, un cadre conceptuel est proposé pour traiter ces différentes questions.

1.5.3.1 Hypothèses de travail

L'approche sensorimotrice de la perception nécessite de poser des postulats et hypothèses de travail différents du cadre classique de conception d'un robot.

Naïveté du robot : Tout d'abord, le robot est initialement considéré naïf. Il ne possède aucune information *a priori* sur sa structure physique, la configuration et les caractéristiques de ses capteurs et actionneurs, les propriétés de l'environnement avec lequel il interagit ou celles des lois qui régissent le monde physique dans lequel il est plongé.

Sources d'information et outils d'analyse : Le robot a accès à deux sources d'information : son flux moteur, qu'il contrôle entièrement, et son flux sensoriel, qu'il ne contrôle que partiellement au travers de ses actions. Il possède également un ensemble minimal d'outils lui permettant d'analyser son flux sensorimoteur et de mémoriser les informations qui peuvent en être extraites. Notre démarche s'inscrit de fait dans le champ de la robotique développementale où le robot est poussé à apprendre et se développer de manière autonome.

Le flux sensoriel contient l'information nécessaire : Le flux sensoriel du robot est supposé contenir l'ensemble des informations nécessaires à l'élaboration d'un comportement adapté. Ainsi, le flux sensoriel est par nature structuré par l'ensemble des propriétés du robot, de l'environnement et du monde dans lequel il évolue. Cette élaboration, potentiellement complexe mais consistante, permet donc en théorie d'accéder aux différentes caractéristiques du système via le flux sensoriel.

Naturellement, cette hypothèse ne s'applique qu'aux informations susceptibles d'être capturées par les différents capteurs du robot. La couleur d'une surface ne peut par exemple

être caractérisée par des capteurs de distances. La caractérisation du système via le flux sensoriel se limite donc aux informations que le robot peut capturer.

1.5.3.2 La découverte du monde au travers de l'action

Les informations que le robot cherche à acquérir sont contenues dans son flux sensoriel. Il doit cependant pouvoir les extraire et les interpréter pour leur donner un *sens*. Dans l'approche classique, ces deux tâches sont implicitement remplies par les algorithmes de traitement et le modèle du système implémentés par le roboticien. Comme nous l'avons vu dans l'exemple d'une ligne droite (voir 1.5.2), les caractéristiques à extraire et les méthodes d'extraction y sont définies *a priori*. Le *sens* des perceptions résultantes provient directement du roboticien qui projette ses connaissances et ses propres concepts dans le robot. Dans l'approche que nous adoptons, le robot, naïf, ne possède pas initialement ces outils d'extraction et d'interprétation. Nous proposons cependant que ces rôles soient remplis par l'action.

Par nature, le flux moteur est la seule composante de l'expérience que le robot contrôle entièrement. L'action peut donc servir de support stable pour construire une représentation du monde. En agissant dans le monde, le robot induit une structure dans le flux sensoriel, permettant, par exemple, d'explorer spécifiquement certaines propriétés de son interaction avec l'environnement. Dans l'analyse de ces expériences, la composante motrice est un étalon sans lequel les riches données sensorielles seraient ininterprétables¹³. L'action permet également de donner un *sens* intrinsèque aux informations extraites en les inscrivant dans l'expérience sensorimotrice de l'agent. Elles s'y trouvent directement associées aux actions concrètes que le robot pourrait effectuer lors de la réalisation d'une tâche. La notion de contingence sensorimotrice se rapproche ainsi de la notion d'*affordance*, mais appliquée aux informations sensorimotrices plutôt qu'aux concepts plus haut niveau de comportement et d'objet.

Nous avons vu précédemment que les capacités sensorielles du robot contraignent sa perception. Il en est ici de même pour ses capacités d'action. En effet, la structure du robot et de ses actionneurs limitent nécessairement les contingences sensorimotrices dont il fait l'expérience lors de son exploration du monde. Ses perceptions, fondées sur ces contingences, s'en trouvent elles aussi contraintes par les capacités d'action du robot. En d'autres termes, une caractéristique du monde ne peut être perçue que si elle est accessible dans le flux sensoriel *et* explorable activement.

1.5.3.3 Représentation basse dimension de l'expérience

Le flux sensorimoteur est potentiellement de très grande dimension. Les informations qu'il contient sur les propriétés du monde sont pourtant généralement de faible dimensionnalité. D'un point de vue extérieur, cela signifie que les caractéristiques du système agent/environnement peuvent être modélisées par un nombre réduit de variables. Dans nos travaux, nous chercherons explicitement à générer des représentations basse dimension des caractéristiques extraites de l'expérience sensorimotrice du robot. Notons qu'un tel effort de réduction n'est en théorie pas obligatoire. Le robot pourrait en effet générer un comportement adapté en traitant directement les données dans l'espace sensorimoteur. Implicitement pourtant, ces traitements seraient équivalents à des opérations réalisées en basse dimension.

13. Sans connaissance des actions à l'origine du flux sensoriel, le traitement des données ne permettrait d'extraire que des caractéristiques très générales comme des régularités temporelles.

La contrainte de représentations internes en basse dimension permettra néanmoins, pour un observateur extérieur, une visualisation et une interprétation plus facile des données sensorimotrices. Cet effort de réduction peut également se justifier par des considérations d'optimisation d'espace mémoire, de simplicité de manipulation ou de robustesse des algorithmes¹⁴.

1.5.4 Conclusion

Le but de l'équipe PAM est d'appliquer l'approche de la perception proposée par la théorie des CSM au champ de la robotique. Un premier objectif est ainsi de développer des algorithmes permettant d'analyser les interactions sensorimotrices du robot avec son environnement pour en extraire les contingences à la base de ses perceptions. Ce nouveau paradigme induit de nombreuses difficultés dans le traitement des données sensorimotrices mais permet de faire émerger des perceptions intrinsèquement pertinentes pour le robot et directement ancrées dans son expérience sensorimotrice. À terme, l'espoir est de pouvoir développer des algorithmes de contrôle permettant une meilleure adaptabilité et une plus grande robustesse des robots dans des environnements complexes.

1.6 La perception de l'espace extérieur

Parmi les nombreuses propriétés susceptibles d'être extraites de l'expérience sensorimotrice d'un robot, celles relatives à la structure de l'espace extérieur présentent un intérêt particulier. Elles permettent, en principe, de construire une représentation interne où les observations du robot peuvent être exprimées en termes de positions, distances et déplacements. Pour un robot, dont la majorité des tâches usuelles impliquent des mouvements dans l'environnement, la découverte de l'espace extérieur offre donc des perspectives larges.

Les travaux présentés dans cette thèse ont pour objectif de comprendre comment un robot naïf peut caractériser l'espace géométrique dans lequel il évolue. Comme nous le verrons par la suite, le concept d'espace est généralement mal défini ou considéré comme acquis. Sa nature et les propriétés qui nous permettent de le percevoir questionnent pourtant fondamentalement notre compréhension du monde.

Ci-après, la problématique de l'espace est abordée du point de vue de l'expérience sensorimotrice d'un robot naïf. Les propriétés fondamentales permettant de caractériser l'espace sont tout d'abord discutées. L'ancrage de ces propriétés dans l'expérience sensorimotrice d'un agent et leur possible extraction sont ensuite étudiés en détail.

1.6.1 L'énigmatique concept d'espace

Pour la plupart des gens, et notamment pour les scientifiques, le concept d'espace semble naturel. Instinctivement, nous avons tous l'impression de le percevoir à travers nos différents sens. L'espace est un "réceptacle" dans lequel nous sommes plongés avec l'ensemble des objets qui constituent le monde qui nous entoure. Plus formellement, les mathématiques et la physique sont capables d'en fournir une description précise où la définition d'un référentiel permet de spécifier des positions, des orientations et des distances. Pourtant, ces propriétés formelles permettent-elles vraiment de capturer la notion d'espace ? Pour toute personne formée aux sciences, les concepts de référentiel ou

14. La réduction de dimension induit une généralisation des données de l'expérience.

de point se comprennent facilement, mais ils ne semblent décrire qu'approximativement notre expérience sensible de l'espace liée à nos mouvements et à ceux des objets qui nous entourent.

Tandis que les propriétés de la matière décrites par la physique, telles que la masse d'un objet ou sa température, traduisent directement des aspects de nos ressentis, les notions de référentiel et de point nécessitent de notre part un effort d'interprétation pour les intégrer à notre expérience sensorielle. Ainsi, nous ne faisons pas réellement l'expérience de ces concepts formels et abstraits mais nous les transposons aux objets qui nous entourent. L'idée d'espace comme réceptacle de la matière peut alors légitimement être remise en question. Si nous ne pouvons sentir directement l'espace mais simplement les propriétés des objets supposés y être plongés, ce réceptacle existe-t-il ? L'espace pourrait ainsi n'être qu'une construction de notre cerveau (réalisme indirect) pour représenter de manière économe des relations dites "spatiales" entre les objets que nous percevons.

Comme le soulignent ces différentes réflexions, la définition du concept d'espace n'est pas triviale. Elle est pourtant rarement abordée dans les travaux scientifiques, et notamment en robotique où la modélisation des systèmes suppose l'existence d'un espace géométrique euclidien dans lequel le robot évolue.

1.6.2 Nature particulière des caractéristiques spatiales

Ci-après, nous abordons la question de l'espace du point de vue d'un robot naïf n'ayant accès qu'à son flux sensorimoteur. Imaginons donc un agent quelconque explorant son environnement. D'un point de vue extérieur, l'état du système robot/environnement peut être caractérisé par un ensemble de caractéristiques. Celles-ci peuvent être scindées en deux groupes : les caractéristiques spatiales et non-spatiales (ou caractéristiques d'état). Les caractéristiques spatiales comprennent les positions, les vitesses, les orientations ou toute grandeur nécessitant la définition formelle d'un référentiel et d'un espace extérieur. Les caractéristiques non-spatiales regroupent les couleurs, les températures, les coefficients de frottement, les conductivités... en somme, l'ensemble des caractéristiques ou attributs pouvant être définies indépendamment de l'espace.

D'un point de vue naïf, lorsque l'espace n'est pas encore défini ou découvert, les caractéristiques spatiales et non-spatiales ne peuvent être ainsi séparées. Fondamentalement pourtant, leurs natures sont différentes. Ainsi, les caractéristiques spatiales sont partagées par le robot et l'environnement. Une même position peut par exemple être occupée (successivement) par le robot ou par un objet. De même, un déplacement dans l'espace peut être aussi bien réalisé par l'un ou par l'autre. Ce cadre commun implique que, du point de vue du robot, les propriétés spatiales des objets doivent être définies relativement aux siennes. Il en est évidemment autrement pour les caractéristiques non-spatiales qui peuvent être définies indépendamment pour chaque objet qu'elles caractérisent et indépendamment de l'agent.

Cette notion de partage des propriétés spatiales par le robot et son environnement est fondamentale pour définir l'espace. Elle s'accorde d'ailleurs parfaitement avec la description intuitive que nous en faisons comme "contenant" partagé par les différents éléments qui y sont plongés.

1.6.3 La découverte des caractéristiques spatiales

La nature commune au robot et à l'environnement des caractéristiques spatiales permet, en théorie, de les distinguer de l'ensemble des informations susceptibles de caractériser le système robot/environnement. Néanmoins, comment un agent naïf peut-il réaliser

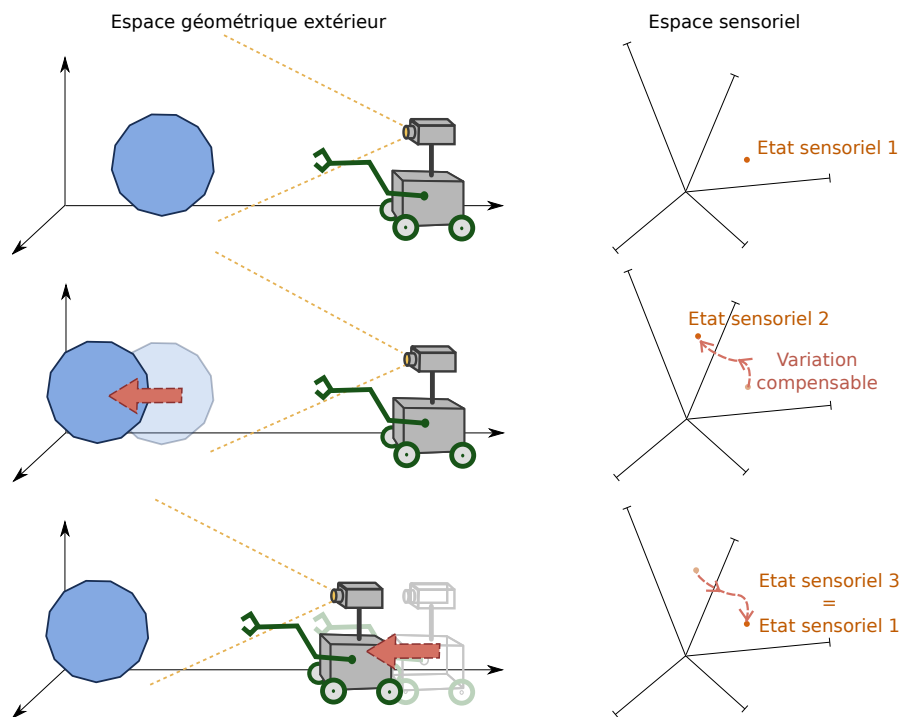


FIGURE 1.12: Les déplacements des objets de l'environnement peuvent être compensés, d'un point de vue sensoriel, par une action de l'agent. L'état sensoriel initial de lu robot est donc identique à l'état sensoriel final obtenu après les déplacements de l'objet et du robot.

une telle distinction à partir de ses expériences sensorimotrices ?

La réponse tient encore une fois à la nature particulière des caractéristiques spatiales. Comme nous l'avons vu, l'espace est tel que le robot et les objets de l'environnement peuvent réaliser les mêmes déplacements. Lors d'un tel déplacement conjoint, la configuration relative robot/environnement reste la même. Cette propriété se traduit par un phénomène particulier dans l'expérience sensorielle du robot : les déplacements sont *compensables*. En d'autres termes, si l'environnement se déplace, il est possible pour l'agent d'effectuer un mouvement équivalent tel que ses sensations se changent pas ¹⁵.

Ainsi, imaginons un robot naïf observant un objet, comme représenté figure 1.12. L'état initial du système est associé à un état sensoriel quelconque. Si les sensations du robot varient alors qu'il n'a émis aucune commande motrice, il peut en déduire que l'état de l'environnement a changé. Néanmoins, il ne sait pas si ce changement est dû à un déplacement de l'environnement ou à un changement d'état de ce dernier. Afin de le déterminer, il peut essayer de compenser la variation sensorielle dont il vient de faire l'expérience. Pour ce faire, il explore son espace moteur à la recherche d'une nouvelle configuration de son corps permettant de retrouver l'état sensoriel initial. S'il n'en trouve aucune, il peut conclure que le changement de l'environnement était non-spatial, comme illustré figure 1.13. Au contraire, s'il trouve une telle configuration, il peut en déduire que l'environnement s'était déplacé et qu'il vient lui même d'effectuer un déplacement équivalent, comme illustré figure 1.12.

Le concept de compensabilité des déplacements a été évoqué dès la fin du 19ème siècle par H.Poincaré dans un article intitulé "L'espace et la géométrie" [53]. A l'époque,

15. Les sensations peuvent éventuellement changer au cours du déplacement mais l'état sensoriel final est identique à l'état sensoriel initial.

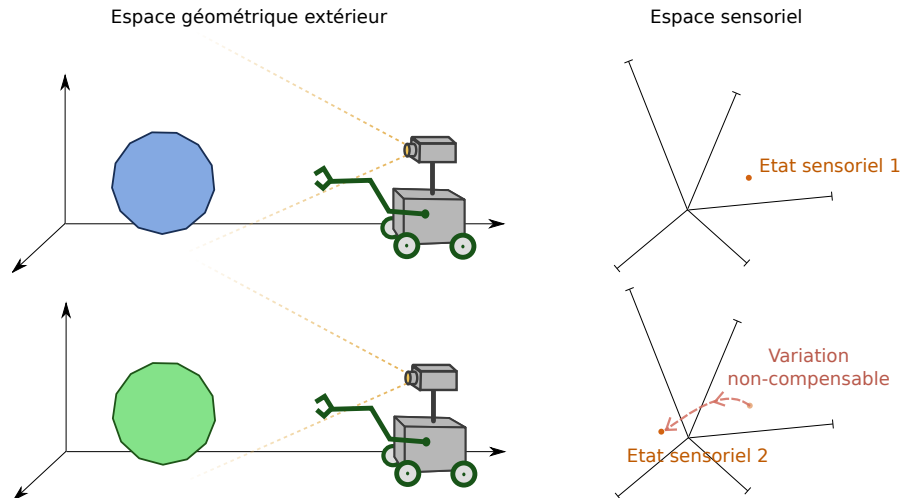


FIGURE 1.13: Les changements d'état de l'environnement sont des transformations qui ne peuvent être compensées, d'un point de vue sensoriel, par une action du robot. Le changement de couleur de l'objet mène ainsi forcément à un état sensoriel final différent, quels que soient les mouvements du robot.

le célèbre mathématicien s'y demandait comment notre cerveau, enfermé dans sa boîte crânienne, pouvait découvrir l'espace 3D euclidien extérieur qui nous paraît si naturel. Pour répondre à cette question, il proposa que l'espace que nous percevons peut être construit en étudiant les propriétés de ces variations sensorielles compensables.

1.6.4 Les limitations de la compensabilité

La compensabilité sensorielle des déplacements du système permet à un robot naïf d'extraire de ses expériences sensorimotrices les caractéristiques spatiales à l'origine de sa perception de l'espace. Cette approche présente toutefois certaines limitations discutées ci-après.

L'extéroception et la proprioception : La compensabilité sensorielle des déplacements suppose que seules des informations extéroceptives soient considérées. En effet, si le flux sensoriel contient également des informations proprioceptives¹⁶, la compensation devient impossible. Tout mouvement engendré par l'agent pour compenser les variations sensorielles générées par l'environnement (par nature extéroceptives) modifie inévitablement sa proprioception. L'état sensoriel final du robot sera donc différent de l'état recherché. Une analyse préalable du flux sensoriel doit donc être envisagée pour distinguer les informations proprioceptives et extéroceptives.

Notons toutefois qu'une telle démarche n'est pas nécessaire si le robot est capable, par une succession d'actions, de déplacer la totalité de son corps dans l'espace. Dans ce cas particulier, à distinguer des robots dont la base est fixée de manière rigide dans l'environnement, il est alors possible d'envisager une compensation totale de l'état sensoriel proprioceptif et extéroceptif après chaque déplacement du système.

16. Les informations proprioceptives renseignent sur l'état du robot (position de ses effecteurs, température interne, tension de la batterie...).

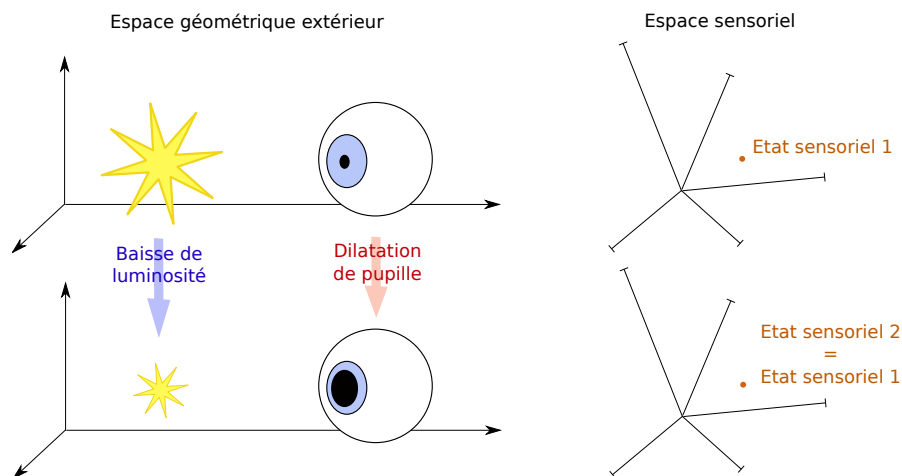


FIGURE 1.14: Certains changements d'état peuvent être compensés par une action de l'agent. Ainsi, le changement de luminosité d'une source lumineuse peut par exemple être compensé dans l'espace sensoriel par la dilatation/contraction d'une pupille.

Les caractéristiques compensables non-spatiales : Bien que les caractéristiques spatiales soient les seules à être partagées par le robot et l'environnement, elles ne sont potentiellement pas les seules à être compensables. Certaines propriétés non-spatiales de l'environnement peuvent en principe être compensées par une action de l'agent.

Pour exemple, imaginons un environnement composé de sources lumineuses et un agent muni d'un oeil dans lequel une pupille permet de contrôler la quantité de lumière parvenant à la rétine, comme représenté figure 1.14. Dans un tel système, un changement d'intensité lumineuse de l'environnement peut être compensé par une dilatation/contraction de la pupille. En s'appuyant sur sa seule compensabilité, ce changement d'état sera considéré, à tort, comme un déplacement dans l'espace. Une méthode permettant de détecter ces changements d'état compensables est proposée ci-après.

Non-distinction des translations et des rotations : La seule compensabilité ne permet pas de distinguer les rotations et les translations réalisées dans l'espace extérieur. Pour un observateur externe, ces déplacements sont pourtant de natures différentes. Cette non-distinction pourra être problématique, notamment pour estimer la dimension de l'espace à partir de l'ensemble des variations sensorielles compensables (problématique abordée au chapitre 3).

Afin de différencier les translations, les rotations et les changements d'états compensables, d'autres propriétés doivent être étudiées. La commutativité peut, par exemple, permettre de les classer en trois groupes :

- Les variations sensorielles compensables qui ne commutent pas entre elles et qui correspondent, d'un point de vue extérieur, aux rotations. L'état sensoriel final d'un agent diffère, par exemple, suivant l'ordre dans lequel il effectue deux rotations d'axes différents.
- Les variations sensorielles compensables qui commutent entre elles mais pas avec le groupe précédent. D'un point de vue extérieur, ce groupe correspond aux translations. Ainsi, l'état sensoriel final d'un agent est toujours le même, quel que soit l'ordre dans lequel il effectue une série de translations. Il dépend par contre de l'ordre si une rotation est ajoutée à la série.

- Les variations sensorielles compensables qui commutent avec toutes les autres et qui correspondent, d'un point de vue extérieur, aux changements d'état compensables. Pour reprendre l'exemple précédent de l'oeil muni d'une pupille, l'état sensoriel final de l'agent ne dépend pas de la position d'une dilatation de la pupille dans une série de variations compensables.

1.6.5 Conclusion

Le concept d'espace est généralement considéré comme intuitif, bien défini et formalisé par les mathématiques. Pourtant, les questions de sa nature et de sa perception questionnent fondamentalement notre conception du monde. Dans cette thèse, nous abordons la problématique de la perception de l'espace du point de vue d'un robot naïf sans aucune connaissance *a priori* sur le monde. Comment, à partir d'expériences sensorimotrices accumulées dans le temps un agent peut-il découvrir et caractériser l'espace géométrique extérieur dans lequel il évolue ? Comme le suggérait H. Poincaré il y a plus de 100 ans, la nature particulière de l'espace se traduit par la capacité partagée par le robot et son environnement d'effectuer les mêmes déplacements. Ce caractère commun de l'espace se traduit, en termes sensoriels, par une compensabilité des déplacements du système. La découverte de l'ensemble des variations sensorielles compensables permet alors d'accéder aux propriétés de l'espace extérieur.

Notons toutefois que la seule compensabilité ne permet pas de caractériser totalement les déplacements du système. Ainsi, des traitements supplémentaires devraient être envisagés pour distinguer, d'une part, les changements d'état compensables et, d'autre part, les translations et les rotations.

1.7 Conclusion

La question de la perception en robotique n'a globalement été abordée que d'un point de vue computationnaliste classique. Les capacités de perception des robots s'en retrouvent intrinsèquement limitées par les choix de leurs concepteurs et peuvent, de plus, se révéler inadaptés vis-à-vis des tâches à effectuer.

Les approches sensorimotrices, et en particulier la théorie des CSM, proposent de nouveaux postulats concernant la perception et l'intelligence. Plutôt que de considérer la perception comme un traitement passif des informations sensorielles en accord avec une modélisation interne du monde, celle-ci peut émerger des interactions sensorimotrices réelles entre un agent et son environnement. Cette nouvelle approche suppose que la perception est une capacité acquise via l'exploration du monde et l'identification de contingences sensorimotrices. Elle place également l'action au coeur de la perception, d'une part pour sa capacité à structurer le flux sensorimoteur et son rôle d'étalon lors de l'analyse de ce flux, et d'autre part pour le sens intrinsèque qu'elle confère aux informations ainsi extraites en les ancrant directement dans l'expérience sensorimotrice du robot.

Les travaux se conformant à une telle approche de la perception sont peu nombreux en robotique¹⁷. Nous pouvons toutefois citer quelques domaines de recherche qui tendent à étudier le contrôle des robots au travers d'interactions sensorimotrices bas-niveau et peuvent se rapprocher, parfois implicitement, de notre démarche : la robotique développementale [35], la robotique évolutionnaire [38–40], la robotique bio-inspirée [41] - en

17. Ces quelques travaux seront évoqués dans les chapitres suivants.

particulier les travaux orientés neuro-mimétisme [54–56] - ou encore la commande référencée capteur [57, 58]. D'autres travaux reposent également, explicitement ou non, sur des concepts proches de ceux proposés par la théorie des CSM [59–64]. Enfin, notons que l'approche proposée dans ce chapitre se démarque fondamentalement des nombreux travaux proposés dans le champ de la *perception active* où le robot agit de manière à maximiser les informations sur l'environnement ou à "tracker" un objet, sans pour autant remettre en question l'approche globale *sentir-planifier-agir* [65, 66].

Au-delà de la question de la perception dans son ensemble, les travaux présentés dans cette thèse s'attacheront à décrire comment un agent naïf peut découvrir l'espace géométrique extérieur dans lequel il évolue. Différents philosophes ont cherché à ancrer la perception de l'espace dans notre expérience sensorimotrice [53, 67, 68]. Parmi eux, H. Poincaré a proposé de caractériser l'espace extérieur au travers des déplacements qu'il permet. De par la nature particulière de l'espace, ces déplacements peuvent être réalisés à la fois par les objets de l'environnement et par l'agent qui les observe. Ils se traduisent donc par des variations sensorielles qui peuvent être compensées. L'ensemble des variations sensorielles compensables dont un agent naïf peut faire l'expérience nous permettra d'accéder à l'espace extérieur qu'il peut percevoir. Ainsi, les chapitres 3 et 4 seront respectivement destinés à estimer la dimension de cet espace et à en construire une représentation interne.

Chapitre 2

Représentation basse dimension de l'expérience sensorimotrice

2.1 Introduction

L'approche sensorimotrice de la perception suppose que celle-ci peut être caractérisée par l'étude des interactions sensorimotrices entre le robot et son environnement. Ainsi, un robot pourra percevoir une caractéristique de l'environnement s'il est préalablement capable d'explorer activement les contingences sensorimotrices relatives à cette caractéristique. L'objectif de ce chapitre est de proposer un formalisme et une méthodologie pour permettre à un robot naïf de découvrir ses capacités d'interaction avec l'environnement puis de construire une représentation interne basse dimension de cette interaction. Tout d'abord, un formalisme mathématique sera développé pour modéliser l'expérience sensorimotrice que le robot collecte lorsqu'il explore le monde. Les hypothèses sur lesquelles repose cette modélisation et les contraintes qu'elles imposent aux systèmes robot/environnement que nous étudierons seront présentées en détail. Dans un second temps, une méthodologie sera proposée pour capturer les capacités d'interaction du système robot/environnement. Celles-ci étant *a priori* de dimensionnalité plus faible que celle des données sensorimotrices brutes, l'objectif des méthodes implémentées dans le robot sera d'en construire une représentation de plus basse dimension que celle des données sensorimotrices brutes.

Comme décrit au chapitre 1, les informations sensorimotrices ne seront pas traitées en bloc lors de ces différentes analyses. Par nature, les informations sensorielles (extéroceptives) du robot permettent en effet de capturer des informations sur le système tandis que les informations motrices permettent de les structurer et de les interpréter (voir 1.5.3.2). La représentation basse dimension des interactions du système sera donc générée via une projection des données sensorielles. À terme, cette représentation interne permettra au robot de caractériser ses interactions avec l'environnement et donc ses capacités de perception. Elle pourra également être utilisée pour interpréter de nouvelles données sensorimotrices ou pour guider le robot dans son action.

Les lois qui régissent les interactions du système étant *a priori* non-linéaires, les données de l'expérience sensorimotrice du robot le seront également. Les difficultés soulevées par cette non-linéarité lors de la projection des informations sensorielles seront discutées et les algorithmes considérés pour traiter ces données non-linéaires seront présentés en détail. Les différentes réflexions menées dans ce chapitre seront abordées et illustrées au travers d'un système jouet de robot pendule.

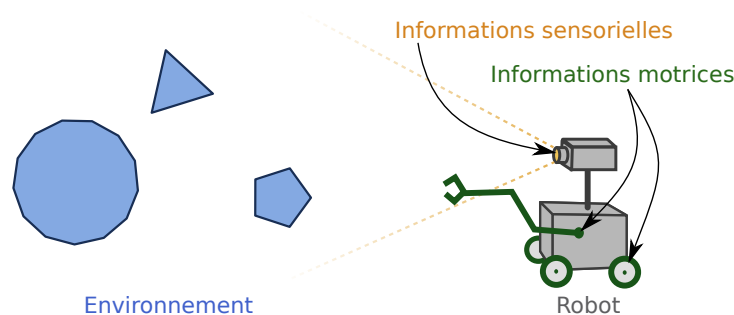


FIGURE 2.1: Durant son interaction avec l'environnement, le robot génère des actions motrices et reçoit des informations sensorielles via ses capteurs. Nous qualifions l'ensemble de ces états sensorimoteurs d'*expérience sensorimotrice*.

2.2 La problématique de la représentation basse dimension des interactions du système

Lors de son exploration du monde, un robot naïf fait l'expérience de nombreux états moteurs et sensoriels, comme illustré figure 2.1. Nous nommons l'ensemble de ces états *expérience sensorimotrice* du robot. Comme discuté dans le chapitre 1 (voir 1.5.3.1), le flux sensoriel est contraint par les propriétés du système et contient donc les informations sur l'environnement auxquelles le robot peut accéder. Le flux moteur permet lui de structurer ce flux sensoriel via une exploration contrôlée du monde et constitue un support d'analyse et d'interprétation pour les informations qui en sont extraites. Les traitements de l'*expérience sensorimotrice* que nous proposerons par la suite consistent donc principalement à une analyse du flux sensoriel, potentiellement appuyée par la connaissance des actions motrices qui en sont à l'origine.

Le robot a *a priori* accès à de multiples actionneurs et capteurs qui définissent un espace sensorimoteur de haute dimension. Les interactions du système robot/environnement et les informations sensorielles qui en résultent sont pourtant généralement de faible dimension. Imaginons par exemple une caméra observant un objet se translatant de gauche à droite. L'expérience sensorielle résultante s'inscrit dans un espace sensoriel de haute dimension formé par l'excitation des nombreux pixels de la caméra. Pourtant, l'interaction du système peut ici être décrite par une seule variable correspondant à la position horizontale de l'objet.

Comme déjà discuté en 1.5.3.3, il est intéressant pour le robot (optimisation des ressources computationnelles) et pour le roboticien (visualisation et analyse) de construire une représentation interne basse dimension des interactions du système. Afin d'optimiser au mieux les ressources computationnelles du robot, il est même souhaitable que cette dimension soit minimale. Il est pour cela nécessaire de définir une modélisation de l'expérience sensorimotrice du robot et des méthodes capables de générer une telle représentation basse dimension. Avant d'aborder en détail ces problématiques, un exemple jouet est proposé ci-après pour illustrer notre démarche.

2.2.1 Description du système jouet

Le système jouet considéré pour illustrer notre démarche est décrit en détail ci-après et illustré figure 2.2.

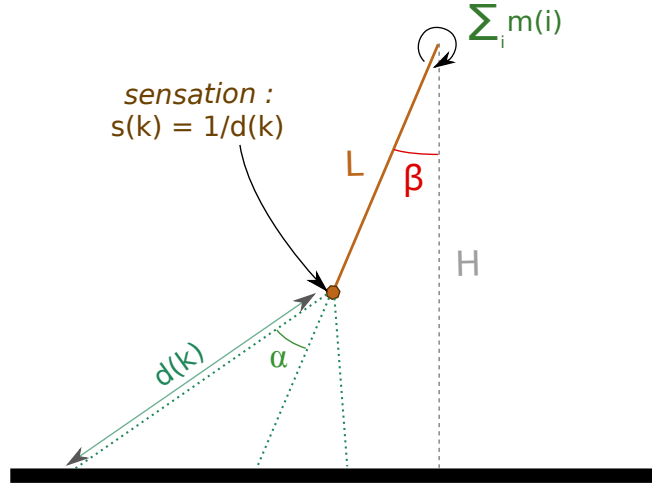


FIGURE 2.2: Le système est constitué d'un mur statique et d'un robot pendule capable de contrôler son orientation β via $N_m = 10$ commandes motrices. Le robot reçoit des informations sur le système au travers d'un ensemble de $N_s = 25$ capteurs de distance répartis à l'extrémité du pendule.

Le robot : Le robot est un pendule motorisé de longueur L dont la base est fixe dans l'espace. L'orientation β du pendule, assimilée à l'angle entre l'axe du pendule et l'axe vertical, est contrôlée par l'excitation moyenne de $N_m = 3$ commandes motrices $m(i)$ auquel le robot a accès :

$$\beta = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} m(i). \quad (2.1)$$

L'extrémité du pendule est munie de $N_s = 3$ capteurs de distance directionnels. Les orientations α des capteurs sont fixes dans le repère du pendule et régulièrement réparties dans l'intervalle $[-\pi/6, \pi/6]$. La sensation $s(k)$ générée par le capteur k est générée par la fonction suivante choisie arbitrairement :

$$s(k) = \frac{1}{d(k)}, \forall k \in [1, N_s], \quad (2.2)$$

avec $d(k)$ la distance séparant le capteur k du premier obstacle selon la direction qui lui est attribuée.

L'environnement : L'environnement est formé d'un mur rectiligne de longueur supposée infinie. Sa position est fixe dans l'espace extérieur et telle que la distance H qui le sépare de la base du robot est supérieure à la longueur L du pendule. Formellement, la sensation $s(k)$ peut être donc exprimée en fonction de l'orientation β du capteur comme suit :

$$s(k) = \frac{\cos(\beta + \alpha_k)}{H - L \cos(\beta)}, \forall k \in [1, N_s], \quad (2.3)$$

avec α_k l'orientation fixe du capteur k dans le repère attaché au pendule.

2.2.2 Discussion sur l'expérience du robot

Supposons que le robot est initialement naïf et n'a *a priori* pas accès aux propriétés du système qu'il forme avec l'environnement. Afin de découvrir ses capacités d'interaction avec l'environnement, le robot peut explorer son environnement en générant des

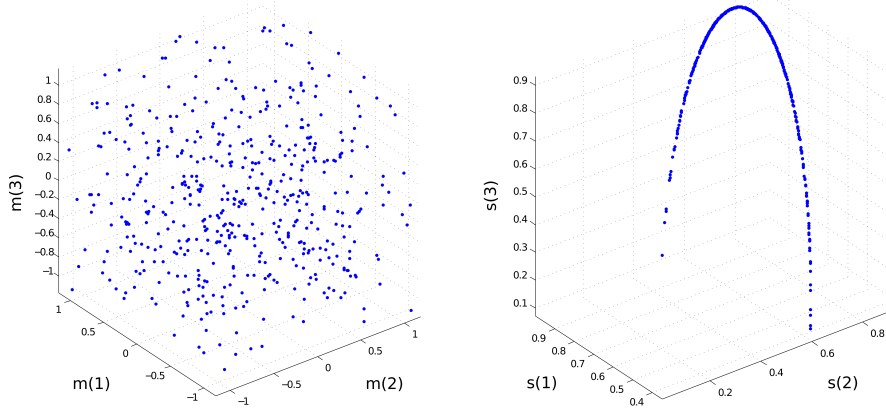


FIGURE 2.3: A gauche : exploration aléatoire réalisée dans l'espace moteur du robot. A droite : ensemble des sensations générées lors de l'exploration. Les propriétés du système robot/environnement contraignent le flux sensoriel. Les données sensorielles ne sont donc pas réparties dans tout l'espace sensoriel mais appartiennent à un sous-espace courbe de dimension 1.

commandes motrices aléatoires. D'un point de vue extérieur, cette exploration se traduit par des mouvements du pendule d'amplitudes plus ou moins grandes. La structure du système est telle que cette exploration peut être caractérisée par l'unique variable β associée à l'orientation du pendule.

Du point de vue interne du robot, la situation est toutefois bien différente. Celui-ci n'a en effet pas accès à la variable β mais uniquement au flux moteur qu'il génère et au flux sensoriel qu'il reçoit de ses capteurs. Ces deux flux sont respectivement de dimensions $N_m = 3$ et $N_s = 3$, formant à eux deux une expérience sensorimotrice de dimension 6. Comment le robot peut-il alors découvrir que l'état du système qu'il forme avec l'environnement peut être décrit par une seule variable ?

La réponse se trouve dans les propriétés de l'interaction que le robot entretient avec l'environnement. Ainsi, les propriétés du système contraignent et structurent le flux sensoriel généré lors de l'exploration. Lorsque le robot parcourt son espace moteur, les états sensoriels du robot ne sont pas répartis aléatoirement dans l'espace sensoriel mais décrivent un sous-espace plongé dans l'espace sensoriel du robot, comme illustré figure 2.3. Les interactions du système robot/environnement pouvant être décrites par une seule variable (β), ce sous-espace est ici de dimension 1. De plus, les lois régissant les mouvements du pendule et l'excitation des capteurs étant non-linéaires, nous constatons que ce sous-espace peut être courbe¹.

En analysant son flux sensoriel, le robot peut découvrir que ses interactions avec l'environnement peuvent être caractérisées par une seule variable. Il peut donc chercher à construire une représentation interne basse dimension de ces interactions, par exemple en projetant les données sensorielles dans un espace de dimension 1. L'environnement étant statique dans cet exemple, cette représentation interne permettrait également de capturer les capacités d'action réelles du robot : son flux moteur de dimension $N_m = 3$ ne contrôle en réalité qu'un seul degré de liberté dans l'espace extérieur. A terme, la représentation interne basse dimension pourra être utilisée pour interpréter de futures données sensorimotrices ou générer des actions guidées en fixant un objectif interne.

1. La non-linéarité des lois régissant le système n'est toutefois pas une propriété suffisante pour garantir que le sous-espace sensoriel est courbe.

2.2.3 Conclusion

Comme l'illustre l'exemple jouet précédent, un robot peut découvrir ses capacités d'interaction avec l'environnement au travers d'une exploration du monde et d'une analyse de son flux sensoriel. Ce dernier est en effet contraint par les propriétés du système robot/environnement et décrit un sous-espace, potentiellement courbe, dans l'espace sensoriel. Dans la suite de ce chapitre, notre objectif sera de fournir au robot des outils lui permettant d'analyser ses données sensorielles pour construire une représentation basse dimension de ses capacités d'interaction avec l'environnement. Pour ce faire, un formalisme mathématique et une modélisation des données de l'expérience du robot seront tout d'abord proposés. La problématique de la projection des données non-linéaires dans un espace de basse dimension sera ensuite abordée.

A terme, la représentation interne générée par le robot lui permettra d'interpréter les informations sensorielles qu'il reçoit et potentiellement de guider son action. Bien que cet aspect ne soit pas mis en exergue dans le système jouet précédent, il est important de souligner que l'état de l'environnement pourrait également changer (ici, le mur pourrait se déplacer). Pour autant, le robot n'aura jamais accès directement aux caractéristiques de l'environnement. Il devra les découvrir et s'en construire une représentation interne par la seule analyse de ses informations sensorimotrices.

2.3 Modélisation de l'expérience sensorimotrice

Comme illustré avec l'exemple jouet précédent, les propriétés du système robot/environnement contraignent les informations sensorielles à appartenir à un sous-espace de l'espace sensoriel. La non-linéarité des lois qui régissent le système fait que ce sous-espace peut être courbe. Dans cette partie, une modélisation de l'expérience sensorimotrice du robot est proposée. Le sous-espace sensoriel y sera formellement assimilé à une *sous-variété différentielle*, c'est-à-dire une généralisation de la notion de sous-espace euclidien à des objets pouvant présenter une courbure. Une telle modélisation nous permettra d'appliquer les outils de la géométrie différentielle pour étudier l'expérience sensorimotrice du robot.

Cette section est divisée en deux parties. Premièrement, le formalisme mathématique utilisé pour modéliser les données sensorimotrices du robot est présenté. Deuxièmement, les hypothèses sur lesquelles il repose et les contraintes qu'elles imposent aux systèmes robots/environnements que nous étudierons sont discutées.

2.3.1 Formalisme

Echantillonnage de l'expérience sensorimotrice : Soient $m(i)$ les commandes individuelles envoyées aux moteurs du robot, avec $i \in [1, N_m]$ et N_m le nombre d'actionneurs. Soient $s(j)$ les excitations sensorielles provenant de ses capteurs², avec $j \in [1, N_s]$ et N_s le nombre de capteurs. Les états moteur et sensoriel du robot sont notés M et S :

$$M = [m(1), m(2), \dots, m(N_m)]^T, \quad S = [s(1), s(2), \dots, s(N_s)]^T. \quad (2.4)$$

2. Notons que dans ce contexte, chaque pixel d'une caméra est, par exemple, considéré comme un capteur individuel.

A chaque instant, l'expérience sensorimotrice du robot est modélisée par un vecteur X dans l'espace sensorimoteur $\mathbb{R}^{N_m} \times \mathbb{R}^{N_s}$.

$$X = [M^T, S^T]^T = [x(1), \dots, x(N_m), x(N_m + 1), \dots, x(N_m + N_s)]^T. \quad (2.5)$$

Au cours du temps, une multitude d'échantillons X_k peuvent être collectés par le robot. La matrice de taille $(N_m + N_s, N)$ formée par l'ensemble de ces vecteurs colonnes $\{X_1, \dots, X_k, \dots, X_N\}$ est appelée *expérience sensorimotrice* du robot, avec N le nombre d'échantillons successifs.

Hypothèse de sous-variété différentielle : Soit $u(k)$, avec $k \in [1, l]$, un ensemble de variables indépendantes permettant de caractériser l'état du système robot/environnement. Nous les qualifierons de *variables latentes* du système. L'état latent du système est modélisé par un vecteur U dans l'espace des variables latentes $\mathbb{R}^l$:

$$U = [u(1), \dots, u(l)]^T. \quad (2.6)$$

L'état sensoriel S du robot peut être généré à partir de l'état latent U du système au travers d'une application F :

$$F : \begin{matrix} \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{N_s} \\ \left\{ \begin{array}{c} s(1) = f_1(u(1), u(2), \dots, u(l)) \\ \vdots \\ s(N_s) = f_{N_s}(u(1), u(2), \dots, u(l)) \end{array} \right\} \end{matrix}. \quad (2.7)$$

Nous faisons trois hypothèses sur cette fonction F :

- F est de classe C^1 ³.
- la dimension N_s de l'espace sensoriel est supérieure ou égale au nombre de variables latentes l .
- La Jacobienne J_F de F est de rang constant et égal l pour tout état latent U (rang plein puisque l'espace latent est de dimension l) :

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u(1)} & \frac{\partial f_1}{\partial u(2)} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u(l)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{N_s}}{\partial u(1)} & \frac{\partial f_{N_s}}{\partial u(2)} & \cdots & \frac{\partial f_{N_s}}{\partial u(l)} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

La fonction F correspond alors à un *plongement* de $\mathbb{R}^l$ dans $\mathbb{R}^{N_s}$ et le sous-espace formé par l'ensemble des états sensoriels S du robot est une *sous-variété différentielle* plongée dans $\mathbb{R}^{N_s}$ et notée $\mathcal{S}$ [69].

Une *variété* est un espace topologique qui peut être localement assimilé à l'espace euclidien [69, 70]. Pour tout point d'une variété, il existe donc un voisinage $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{V}$ est homéomorphe à l'espace euclidien $\mathbb{R}^l$ (ils sont liés par une application bijective continue). La dimension l est appelée *dimension intrinsèque* de la variété et correspond au nombre de variables indépendantes nécessaires pour positionner localement un point sur la variété. Une variété est dite *différentielle* ou *différentiable* si les transitions entre les homéomorphismes locaux associés aux différents voisinages $\mathcal{V}$ pouvant être définis

3. Une fonction est de classe C^1 si elle est continue et que sa dérivée est continue.

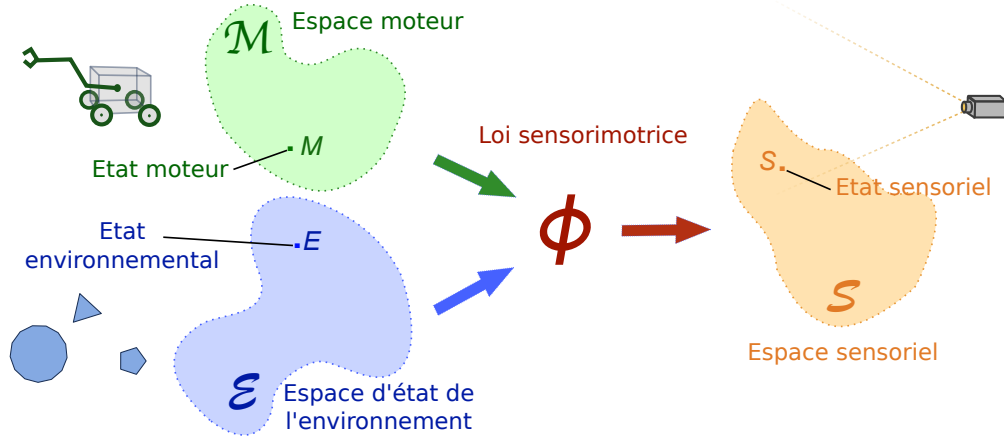


FIGURE 2.4: Pour toute configuration du système, défini par l'état E de l'environnement et l'état moteur M de l'agent, la loi sensorimotrice ϕ génère l'état sensoriel S de l'agent.

sur la variété sont régulières et différentiables [69, 70]. La différentiabilité permet d'envisager la réalisation de calcul différentiel et intégral sur la variété. De manière moins formelle, une sous-variété différentielle peut être interprétée comme un sous-espace euclidien linéaire (ici, l'espace latent $\mathbb{R}^l$) plongé dans un espace de dimension supérieure ou égale (ici, l'espace sensoriel $\mathbb{R}^{N_s}$) et ayant subi une déformation quelconque. Pour reprendre l'exemple jouet du robot pendule, l'espace décrit par ses états sensoriels est une sous-variété différentiable correspondant à une droite euclidienne plongée dans l'espace sensoriel de dimension N_s et déformée pour présenter la courbure observable figure 2.3.

La loi sensorimotrice : La modélisation du système robot/environnement par le plongement F nous permet de considérer le sous-espace des états sensoriels S comme une sous-variété différentielle $\mathcal{S}$. Néanmoins, le robot naïf n'aura jamais directement accès aux variables latentes $u(k)$ ou au plongement F . Les seules informations auxquelles il a accès sont l'état moteur M et l'état sensoriel S qui forment ses expériences sensorimotrices X . Nous introduisons donc la loi sensorimotrice ϕ qui permet de générer l'état sensoriel du robot à partir de son état moteur :

$$S = \phi(M). \quad (2.9)$$

Contrairement aux variables latentes du système $u(k)$, les variables motrices $m(i)$ sont potentiellement redondantes vis-à-vis de l'état latent du système robot/environnement. Ainsi, dans l'exemple jouet, le seul degré de liberté β du robot pendule est commandé par $N_m = 3$ variables motrices redondantes. La Jacobienne J_ϕ de ϕ n'est donc pas de rang plein :

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial m(1)} & \frac{\partial s_1}{\partial m(2)} & \cdots & \frac{\partial s_1}{\partial m(N_m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial s_{N_s}}{\partial m(1)} & \frac{\partial s_{N_s}}{\partial m(2)} & \cdots & \frac{\partial s_{N_s}}{\partial m(N_m)} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Les hypothèses posées précédemment sur le plongement F permettent néanmoins d'affirmer que le rang de J_ϕ est constant et égal à l pour tout état moteur M . Moins formellement, la loi sensorimotrice ϕ permet de générer la sous-variété différentielle $\mathcal{S}$ à partir d'un système de variables non-indépendantes. Lors de l'application de ϕ , l'espace

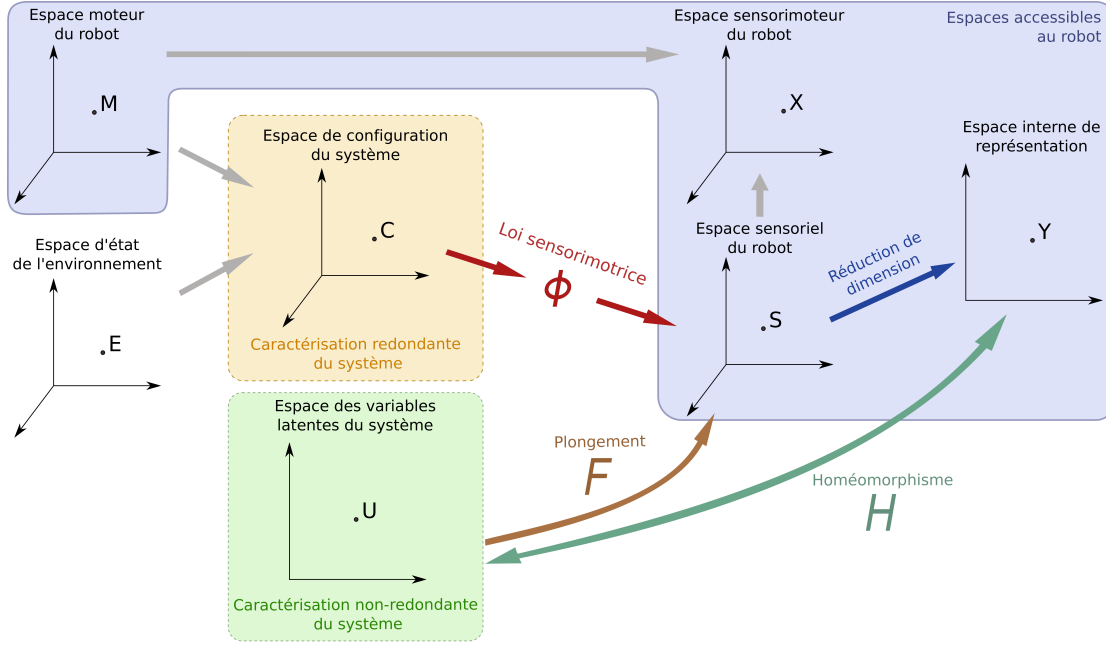


FIGURE 2.5: L'état du système est défini de manière potentiellement redondante par l'état moteur M et l'état environnemental E . Un ensemble de variables latentes indépendantes peut également être choisi pour caractériser de manière non-redondante l'état U du système. La loi sensorimotrice ϕ permet de générer l'état sensoriel S du robot à partir de l'état du système $C = [M, E]$. Le robot peut construire une représentation interne Y de son expérience sensorielle et la contextualiser via les informations motrices M auxquelles il a également accès. Cet espace de représentation interne permet de caractériser les capacités d'interaction du système robot/environnement et est lié à l'espace des variables latentes par un homéomorphisme H .

moteur euclidien $\mathbb{R}^{N_m}$ subit donc une perte de dimensionnalité avant d'être plongé dans l'espace sensoriel $\mathbb{R}^{N_s}$ puis d'être déformé, comme l'illustre la figure 2.3.

Ce formalisme permet de caractériser l'expérience sensorimotrice du robot mais n'est pas complet d'un point de vue extérieur. En effet, l'état de l'environnement intervient aussi dans la génération de l'état sensoriel du robot. Ainsi, soient $e(i)$ les variables, non-forcément indépendantes, permettant de caractériser l'état de l'environnement noté E :

$$E = [e(1), e(2), \dots, e(N_e)]^T. \quad (2.11)$$

L'état avec N_e le nombre de variables environnementales. L'état moteur du robot M et l'état environnemental E permettent de caractériser, potentiellement de manière redondante, la configuration du système notée C :

$$C = [M^T, E^T]^T = [c(1), \dots, c(N_m), c(N_m + 1), \dots, c(N_m + N_e)]^T. \quad (2.12)$$

La loi sensorimotrice ϕ est ré-exprimée pour prendre en compte l'état de l'environnement E dans la génération de S , comme illustré figure 2.4 [71] :

$$S = \phi(M, E) = \phi(C). \quad (2.13)$$

Les espaces moteur et de configuration environnementale sont des espaces euclidiens de dimensions respectives N_m et N_e . Par définition, ces espaces euclidiens sont des variétés différentielles de courbure nulle. Afin d'harmoniser nos discussions futures, ces espaces

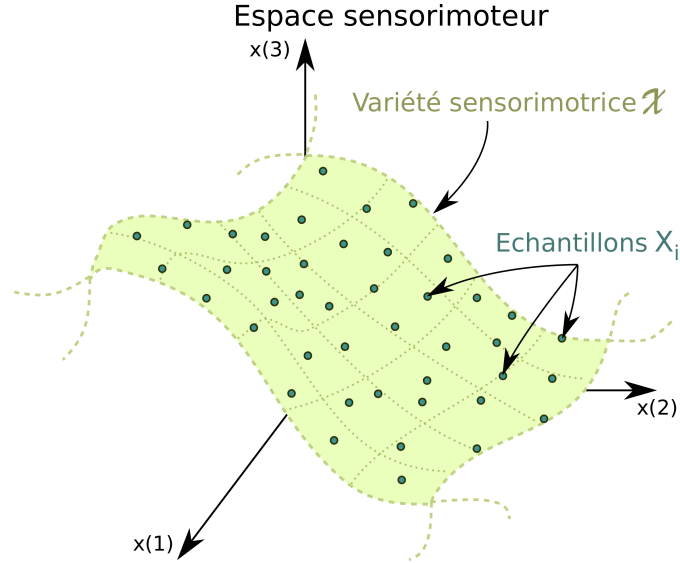


FIGURE 2.6: Exemple illustratif de l'objet de notre étude. L'expérience sensorimotrice de l'agent est modélisée par une sous-variété différentielle dans l'espace sensorimoteur. En pratique, seul un échantillonnage de cette sous-variété est accessible au robot et analysé.

seront régulièrement considérés par la suite comme des variétés différentielles nommées respectivement $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{N_m}$ et $\mathcal{E} = \mathbb{R}^{N_e}$. De même, l'espace des états sensorimoteurs du robot est noté $\mathcal{X} = \mathcal{M} \times \mathcal{S}$.

Il est important de noter que, tout comme pour le plongement F et l'état latent U , le robot n'a pas accès à la loi sensorimotrice ϕ et à la configuration environnementale E . Il n'a en effet accès qu'à ses informations motrices et sensorielles, comme illustré dans la figure récapitulative 2.5

Echantillonnage de l'expérience sensorimotrice : En pratique, le nombre d'échantillons sensorimoteurs N sera nécessairement fini. Le robot n'aura donc pas accès à la totalité de la sous-variété sensorimotrice $\mathcal{X}$ mais seulement à un échantillonnage fini, comme représenté figure 2.6. Comme nous le verrons par la suite, la définition d'une métrique dans l'espace sensoriel $\mathbb{R}^{N_s}$ permettra de calculer des distances entre ces échantillons. Rigoureusement, l'objet d'étude auquel aura accès le robot sera un *espace métrique* (ensemble de vecteurs et de distances inter-vecteurs). Pour autant, le langage dédié à l'analyse des variétés différentielles sera utilisé pour analyser nos résultats.

2.3.2 Hypothèses de travail et contraintes de la représentation

L'expérience sensorielle du robot est modélisée par un ensemble d'échantillons S_i appartenant à une sous-variété différentielle $\mathcal{S}$ et d'échantillons M_i appartenant à une variété différentielle $\mathcal{M}$. Ce choix de modélisation repose sur différentes hypothèses et impose plusieurs contraintes aux systèmes robots/environnements que nous étudierons.

- L'expérience sensorimotrice du robot peut être discretisée temporellement et ce dernier est capable de réaliser une telle discrétisation. Il peut également distinguer, mémoriser et manipuler les différents états sensorimoteurs $X_i = [M_i^T, S_i^T]^T$. Nous

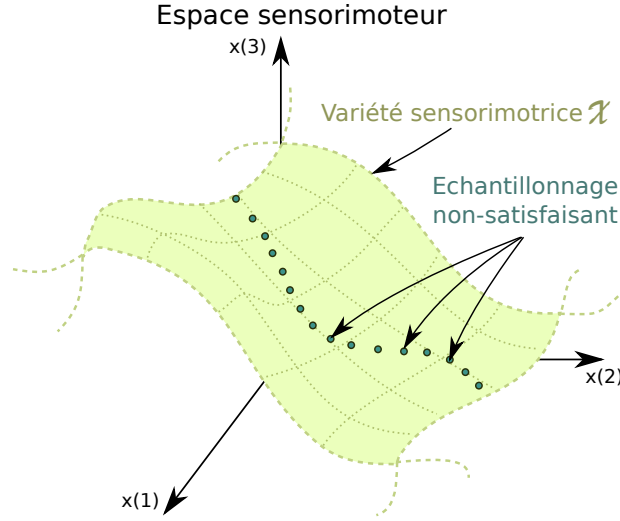


FIGURE 2.7: Exemple illustratif d'échantillonnage ne permettant pas de capturer les propriétés de la sous-variété sous-jacente. Les échantillons semblent appartenir à une courbe alors que la sous-variété est une surface.

supposons aussi que le robot peut mémoriser l'ordonnancement temporel de ces expériences, bien que cette propriété ne soit pas directement utilisée par la suite.

- Toute dynamique du système est ignorée, au profit d'une analyse statique de l'expérience sensorimotrice. Ainsi, les variables $m(i)$ permettent de commander les moteurs en position. Les capteurs du robot sont supposés sensibles aux grandeurs physiques statiques du système (par exemple une distance mais pas sa dérivée). Enfin, les changements d'état sont considérés instantanés : les phases de transition potentiellement liées à l'inertie du robot et de l'environnement ou à l'excitation des capteurs sont ignorées.
- La loi sensorimotrice ϕ (et le plongement F) est déterministe et invariable⁴ dans le temps. Toute configuration C du système est donc toujours associée à un seul et même état sensoriel S . Pour autant, ϕ peut être surjective. Deux configurations différentes du système peuvent donc être associées à un même état sensoriel. Nous supposons de plus qu'aucun bruit ne vient perturber le système et sa loi sensorimotrice ϕ .
- Les capteurs du robot permettent de capturer les informations à extraire du flux sensorimoteur. Ils doivent pour cela être suffisamment nombreux, correctement disposés sur le robot et de nature adéquate pour pouvoir caractériser sans ambiguïté les propriétés du système à découvrir.
- L'exploration du système permet de générer suffisamment d'échantillons sensorimoteurs X_i et répartis de manière à pouvoir capturer les propriétés de la sous-variété sensorimotrice $\mathcal{X}$. La figure 2.7 illustre, par exemple, un cas de mauvais échantillonnage ne respectant pas cette hypothèse. Notons qu'en pratique, la sous-variété $\mathcal{X}$ peut potentiellement être d'étendue infinie. Cette hypothèse s'applique donc à la portion de sous-variété effectivement explorée par le robot.
- La sous-variété $\mathcal{S}$ ne présente pas de singularité, c'est-à-dire de configuration S pour laquelle elle serait mal définie et où sa différentiabilité ne serait pas évaluable. Formellement, une telle singularité se traduirait par un rang de la Jacobienne J_F

4. Notons que l'invariance de ϕ peut n'être valable que sur une échelle de temps limitée à une phase d'exploration. Des changements peuvent ainsi s'envisager à des échelles de temps plus grandes si, par exemple, la structure du robot est amenée à évoluer.

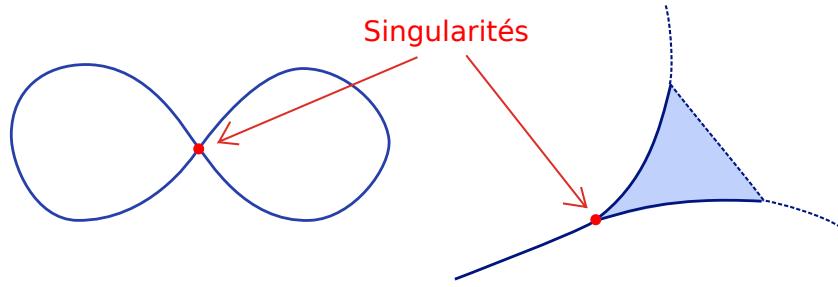


FIGURE 2.8: Deux exemples de singularités. Dans chacun des cas, la topologie de la variété est mal définie aux points mis en exergue.

du plongement F différent de l (voir (2.8)). Deux exemples de telles singularités sont illustrés figure 2.8. Comme précédemment, cette hypothèse ne s'applique en pratique qu'aux portions de sous-variétés effectivement parcourues lors de l'exploration du système.

2.3.3 Conclusion

L'expérience du robot est modélisée par un échantillonnage de ses espaces moteur et sensoriel généré lors d'une exploration du système robot/environnement. La continuité des fonctions régissant les changements de configuration du robot, les changements de configuration de l'environnement et les excitations des capteurs du robot nous permettent de supposer que l'ensemble des données sensorielles collectées par le robot appartient à une sous-variété différentielle plongée dans son espace sensoriel. Notons que ce type de modélisation a déjà été utilisé dans de nombreux travaux [62, 71–74]. Ces hypothèses de travail nous permettent d'utiliser les outils de la géométrie différentielle pour traiter les données du robot mais induisent également un certain nombre de contraintes aux systèmes que nous considérerons. Ils devront ainsi être étudiés de manière statique, sans bruit et ne présenter aucune ambiguïté sensorielle.

Différentes extensions de ce formalisme sont envisageables pour contourner à l'avenir ces limitations et proposer une modélisation plus proche de l'expérience d'un robot réel. Ces développements futurs pourront par exemple prendre en compte la présence de bruit sur les données motrices et sensorielles, ajoutant ainsi une composante statistique au formalisme. Ils pourront également incorporer la (les) dynamique(s) du système dans la modélisation. L'expérience sensorimotrice devra alors être représentée par une trajectoire dans l'espace sensorimoteur plutôt que par un vecteur (point). Un tel changement de postulat complexifiera assurément l'étude des systèmes mais permettra au robot de découvrir la dynamique de son corps, de ses capteurs et de l'environnement. Les capteurs sensibles à la dérivée des grandeurs physiques du système (par exemple, la vitesse du robot) pourront alors également être pris en compte.

Nous disposons désormais d'un formalisme pour étudier l'expérience sensorimotrice du robot. Les prochaines étapes consistent à définir une stratégie d'exploration du système robot/environnement puis à construire une représentation interne basse dimension des interactions du robot avec son environnement. Celle-ci sera générée par une projection des données sensorielles dans un espace de dimension l . Comme l'illustre la figure récapitulative 2.5, l'espace de représentation interne sera alors homéomorphe à l'espace d'état latent.

2.4 Stratégie d'exploration du système

Pour découvrir ses capacités d'interaction avec l'environnement, le robot doit analyser les données sensorielles collectées au cours d'une exploration du système. En pratique, cette exploration est réalisée au travers d'un échantillonnage de l'espace de configuration euclidien et potentiellement redondant du système robot/environnement $\mathcal{C} = \{\mathcal{M} \times \mathcal{E}\} = \mathbb{R}^{N_m} \times \mathbb{R}^{N_e}$ du système.

Cette approche soulève la question de la commandabilité des variables environnementales $e(i)$ auxquelles le robot n'a pas accès. Dans un système réel, le robot serait contraint de *subir* les changements de configuration de l'environnement en mémorisant, parfois sur de longues périodes, des informations sensorielles permettant de ne caractériser que partiellement le système. Les systèmes que nous étudierons seront en revanche simulés et nous permettront de commander directement la configuration de l'environnement. Notons toutefois qu'afin de respecter nos hypothèses de travail, le robot n'aura évidemment pas accès à ces variables environnementales.

Par nature, le nombre N d'échantillons générés lors de l'exploration du système est fini. Le nuage de données sensorielles est donc borné et seule une portion de la sous-variété $\mathcal{S}$ est effectivement explorée. Cette partie vise à spécifier les caractéristiques de l'échantillonnage sensoriel et à proposer une stratégie d'exploration par défaut du système robot/environnement. Différentes propriétés peuvent être évoquées pour caractériser l'échantillonnage sensoriel. Nous nous limiterons ici aux deux caractéristiques que nous serons directement amenés à définir dans le contexte d'une exploration naïve du système : sa densité et ses bornes. Notons que l'échantillonnage d'exploration dans l'espace de configuration du système $\mathcal{C}$ pourrait également être étudié mais présente un intérêt moindre puisqu'il sera directement défini par la stratégie d'exploration que nous mettrons en place.

2.4.1 La densité de l'échantillonnage

Nous avons précédemment fait l'hypothèse que le nombre d'échantillons N est suffisamment important pour que la sous-variété sensorielle $\mathcal{S}$ soit correctement approximée (2.3.2). Cette contrainte sur N doit en réalité être rapportée à l'étendue de la sous-variété - ou portion de sous-variété - explorée. Nous parlerons alors de *densité* d'échantillonnage.

Mesure de la densité : Le nombre d'échantillons N étant fini, la densité D de la distribution en un point S_i de l'espace sensoriel peut être estimée en dénombrant le nombre de voisins S_j contenus dans une boule de faible rayon r centrée sur S_i puis en le divisant par le volume de la boule :

$$\tilde{D} = \frac{\sum_{j=1}^N H(r - \|S_i - S_j\|_2)}{V_r}, \text{ avec } H(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 1 & \text{si } u \geq 0 \end{cases}, \quad (2.14)$$

avec V_r le volume d'une boule de rayon r dans l'espace sensoriel de dimension N_s . Le rayon r doit être suffisamment faible pour que D ait une valeur locale mais suffisamment important pour que le nombre de voisins soit significatif. L'estimation numérique de D n'est donc pas triviale et soulève ses propres difficultés. Nous n'aborderons donc la question de la densité que d'un point de vue qualitatif.

Densité en accord avec la structure de la sous-variété : La densité de l'échantillonnage doit être adaptée aux propriétés de la sous-variété étudiée. Les échantillons

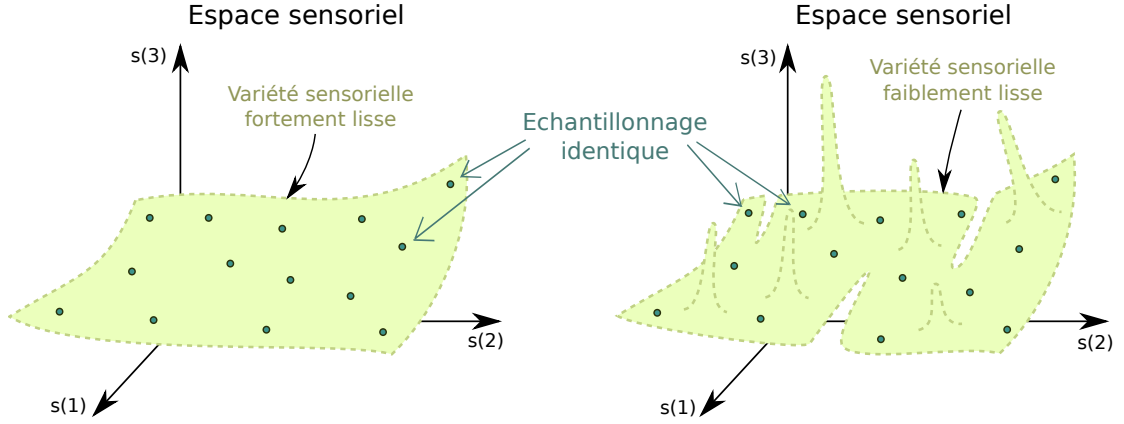


FIGURE 2.9: A gauche : la densité de l'échantillonnage est suffisante pour représenter correctement la sous-variété sous-jacente peu courbe. A droite : la densité de l'échantillonnage devrait être supérieure pour capturer correctement les propriétés de la sous-variété sous-jacente très courbe.

doivent donc être suffisamment nombreux pour capturer les informations utiles sur la sous-variété. La figure 2.9 illustre, par exemple, comment un même échantillonnage peut être adapté à la courbure locale d'une sous-variété mais inadéquat pour une autre. En théorie, un nombre très important d'échantillons permet évidemment de garantir que les informations sur la sous-variété sont correctement capturées. Néanmoins, N est limité en pratique par le temps d'exploration et la charge de calcul qu'il implique aux algorithmes de traitement de données.

Homogénéité de la densité : Afin de capturer de manière homogène la sous-variété sensorielle, il est intéressant que D soit constante en tout point S_i . Sans connaissance *a priori* sur le système, il est toutefois impossible de garantir cette homogénéité. La distribution d'exploration définie dans l'espace de configuration du système $\mathcal{C}$ est en effet déformée de manière inconnue par l'application de la loi sensorimotrice ϕ (définie en (2.13)).

Afin de contourner cette limitation, une solution consiste à sur-explorer le système en générant un grand nombre d'échantillons puis à sous-échantillonner cette distribution de manière à homogénéiser sa densité. Une méthode d'homogénéisation fonctionnant sur ce principe est proposée en annexe B de cette thèse. Contrairement aux algorithmes de quantification vectorielle qui minimisent une erreur de *distorsion*, cette méthode cherche à égaliser les distances inter-voisins dans la distribution finale [75].

2.4.2 Les bornes de l'échantillonnage

En pratique, le nombre d'échantillons N est fini et le nuage qu'ils forment dans l'espace sensoriel est donc borné. De même que pour la densité, l'application de la loi sensorimotrice ϕ modifie la forme du nuage d'échantillons définis dans l'espace de configuration $\mathcal{C}$ du système. Les contours de la distribution sensorielle ne peuvent donc être spécifiés *a priori*. De plus, la déformation induite par ϕ dépend de la portion de sous-variété explorée. La figure 2.10 illustre les modifications induites sur le nuage d'exploration par la loi sensorimotrice.

Modifier les bornes de la distribution définie dans $\mathcal{C}$ revient à changer la portion de sous-variété sensorielle $\mathcal{S}$ effectivement explorée. Un changement de l'échantillonnage d'exploration peut donc permettre de faciliter l'extraction de certaines propriétés de la

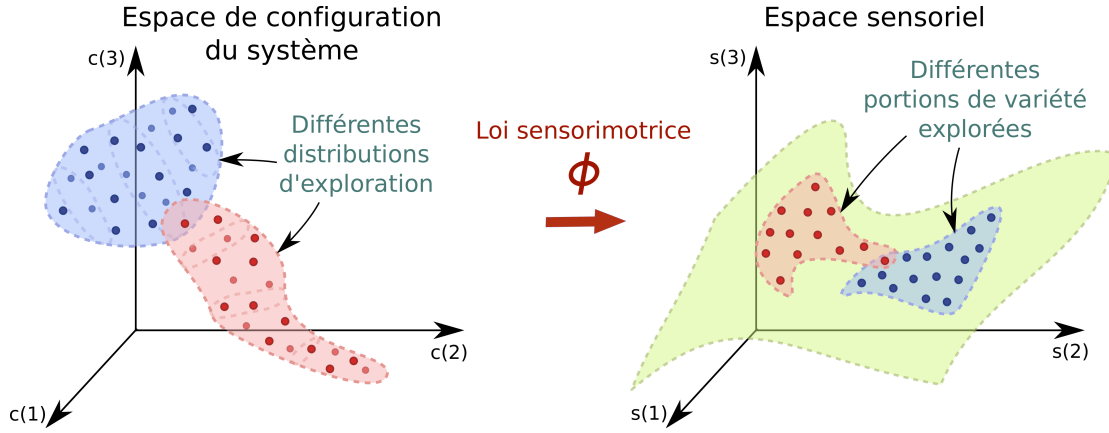


FIGURE 2.10: L'échantillonnage dans l'espace de configuration du système est par nature borné. Après l'application de la loi sensorimotrice ϕ , seule une portion de la sous-variété est donc explorée. De plus, la forme du nuage de point n'est pas conservée durant l'application de ϕ . Cette déformation dépend de la portion de sous-variété explorée.

sous-variété. Un tel phénomène sera illustré au chapitre 3 dans lequel la distribution d'exploration sera modifiée en ligne pour permettre une meilleure estimation de la dimension intrinsèque de la sous-variété sensorielle $\mathcal{S}$.

2.4.3 Stratégie d'exploration naïve

Le robot n'ayant *a priori* aucune connaissance sur le système, nous optons pour une stratégie d'exploration aléatoire. Ainsi, la distribution d'exploration est tirée aléatoirement dans une portion bornée de l'espace de configuration du système $\mathcal{C}$. Le nombre d'échantillons N sera fixé empiriquement pour chaque étude afin de garantir une densité d'échantillonnage satisfaisante tout en limitant le coût en temps de calcul du traitement des données.

Formellement, soit $C_0 = [c_0(1), \dots, c_0(N_m), c_0(N_m + 1), \dots, c_0(N_m + N_e)]^T$ l'état de référence du système autour duquel l'exploration est réalisée. Chaque échantillon d'exploration C_i , avec $i \in [1, N]$, est tiré à partir d'une loi uniforme dans $[C_0 - A, C_0 + A]^{N_m + N_e}$ ⁵, avec A l'amplitude d'exploration.

Sauf mention contraire, l'amplitude A sera la même pour toutes les variables d'état $c(k)$ du système. La distribution d'exploration appartient donc à un hypercube dans $\mathcal{C} = \mathbb{R}^{N_m} \times \mathbb{R}^{N_e}$, comme illustré figure 2.11. Notons toutefois que ce choix est tout à fait arbitraire. Une même amplitude est ainsi appliquée à des variables hétérogènes dont les conséquences sur le flux sensoriel peuvent être d'ordres de grandeur différents. De plus, différents jeux de variables peuvent être considérés pour décrire l'état du système. Suivant le jeu de variables utilisé, le même hypercube d'exploration peut donc mener à l'échantillonnage de différentes portions de la sous-variété sensorielle.

Cette stratégie d'exploration par défaut peut potentiellement générer des distributions sensorielles peu favorables à l'extraction des propriétés de la sous-variété. Dans un tel cas de figure, les caractéristiques de l'échantillonnage d'exploration peuvent être modifiées. Une telle modification peut être imposée ou réalisée par le robot lui-même après une première exploration infructueuse. Un tel processus sera présenté dans le chapitre 3.

5. Chaque variable $c_i(k)$ est tirée dans l'intervalle $[-A, +A]$ centré sur sa valeur de référence $c_0(k)$.

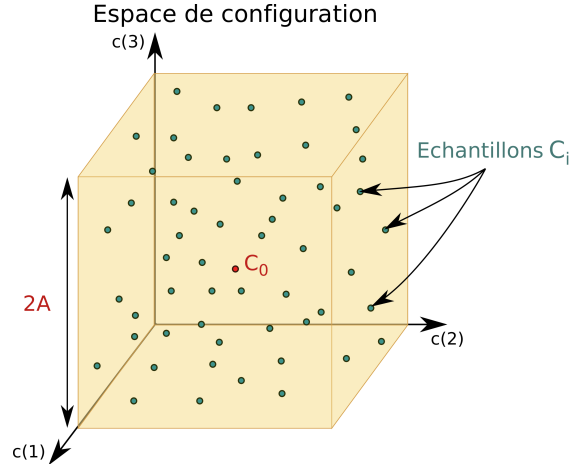


FIGURE 2.11: La stratégie d'exploration naïve consiste à tirer aléatoirement des échantillons dans un hypercube de l'espace de configuration du système $\mathcal{C} = \mathbb{R}^{N_m} + \mathbb{R}^{N_e}$, centré sur une configuration de référence C_0 et d'arête $2A$.

2.4.4 Conclusion

Nous avons défini une stratégie d'exploration par défaut pour les systèmes robots/environnements simulés que nous étudierons. Elle consiste à échantillonner aléatoirement un hypercube de l'espace d'état du système centré sur une configuration de référence et avec une amplitude A . La définition de cet hypercube est arbitraire et met sur un pied d'égalité des variables de configuration hétérogènes pouvant avoir des impacts très différents sur l'échantillonnage de la sous-variété sensorielle via la loi sensorimotrice ϕ . Cette stratégie par défaut pourra donc être modifiée si les propriétés de l'échantillonnage sensoriel ainsi généré ne permettent pas de caractériser de manière satisfaisante la sous-variété sensorielle sous-jacente aux données. Une telle modification de l'exploration sera proposée au chapitre 3 afin d'améliorer l'estimation de la dimension intrinsèque des données sensorielles.

2.5 Choix d'une métrique dans l'espace sensorimoteur

L'expérience du robot est constituée d'un ensemble d'échantillons dans ses espaces moteur et sensoriel. Une métrique doit leur être adjointe afin de pouvoir analyser ces données et, à terme, pouvoir les projeter dans un espace de plus faible dimension. Le choix de cette métrique est important puisqu'elle permet de déterminer les distances entre échantillons et donc le type d'information qui seront conservées lors de la projection.

Les caractéristiques de l'interaction entre le robot et son environnement étant capturées par le flux sensoriel, nous focaliserons ici notre propos sur la métrique appliquée aux données sensorielles S_i . Théoriquement, une même discussion pourrait être menée sur la métrique à appliquer aux données motrices M_i . Elle présenterait toutefois peu d'intérêt puisque la variété motrice $\mathcal{M}$ s'identifie à l'espace euclidien $\mathbb{R}^{N_m}$ (voir 2.3.1). La métrique euclidienne, présentée ci-après, y sera donc naturellement appliquée. De même, la métrique appliquée par la suite dans l'espace de représentation $\mathbb{R}^l$ sera euclidienne pour les mêmes raisons et pour permettre une interprétation intuitive des résultats.

Les propriétés génériques d'une métrique sont présentées dans cette partie avant l'introduction de trois métriques spécifiques. Celles-ci présentent un intérêt particulier dans nos

travaux. Les deux premières rendront possible l'application des méthodes de réduction de dimension proposées dans la suite de ce chapitre. La troisième permettra de définir des distances inter-échantillons en lien direct avec la paramétrisation de la sous-variété sensorielle.

2.5.1 Définition d'une métrique

Une métrique est une fonction qui permet de définir les distances entre tous les éléments d'un ensemble (l'échantillonnage sensoriel dans notre cas). Une infinité de métriques $f(.,.)$ différentes peuvent être appliquées aux données sensorielles. Quelques soient leurs propriétés respectives, elles doivent toutes respecter les deux axiomes suivants :

- Non-dégénérescence : pour toute paire de points S_i et S_j dans l'espace sensoriel, $f(S_i, S_j) = 0$ si et seulement si $S_i = S_j$.
- Inégalité triangulaire : pour tout triplet de points S_i, S_j et S_k , $f(S_i, S_j) \leq f(S_k, S_i) + f(S_k, S_j)$.

Les deux propriétés, souvent citées, de non-négativité et de symétrie peuvent également être déduites directement de ces deux axiomes [76].

Notons que quelle que soit la métrique appliquée au nuage de données, ses propriétés topologiques restent inchangées. Ainsi, la dimension de la sous-variété sous-jacente et l'organisation spatiale des échantillons de cette sous-variété sont constantes. Elles dépendent fondamentalement de l'interaction entre le robot et l'environnement sur laquelle le choix de la métrique n'a aucune influence. L'application de différentes métriques modifie par contre les distances mesurées entre échantillons. Naturellement, les propriétés métriques de la sous-variété sensorielle dépendent donc de la métrique appliquée aux échantillons.

Ci-après, différentes métriques présentant un intérêt particulier dans notre étude sont présentées en détail.

2.5.2 La métrique euclidienne

La métrique euclidienne $d(.,.)$ est définie comme :

$$d(S_i, S_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^{N_s} (S_i(k) - S_j(k))^2}, \quad (2.15)$$

avec N_s la dimension de l'espace sensoriel. Du point de vue du roboticien observant ces données sensorielles, elle est la plus intuitive puisqu'elle repose sur les propriétés géométriques des espaces euclidiens auxquels nous sommes naturellement habitués. Ainsi, la distance euclidienne entre deux points correspond à la longueur du segment de droite qui permet de les rejoindre, comme illustré figure 2.12. Contrairement aux deux autres métriques présentées par la suite, elle ne tient donc pas compte de la structure de la sous-variété sous-jacente aux données.

Notons que l'interprétation intuitive des distances euclidiennes dans un espace de haute dimension peut se révéler trompeuse, comme l'a souligné R.Bellman [52, 76].

2.5.3 La métrique de graphe

Bien qu'intuitive, la distance euclidienne peut se révéler trompeuse dans le cas de sous-variétés très courbées. Comme illustré plus loin dans cette thèse figure 2.15, des

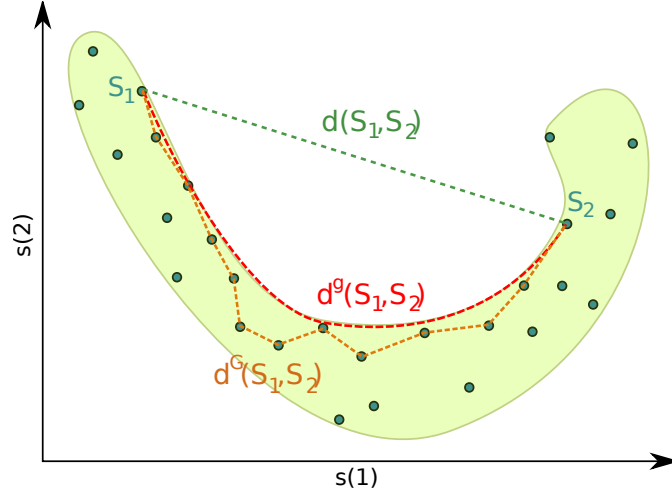


FIGURE 2.12: La distance euclidienne $d(S_1, S_2)$ ne prend pas en compte la sous-variété sous-jacente aux données. La distance géodésique $d^g(S_1, S_2)$ mesure la distance entre S_1 et S_2 en respectant la topologie de la sous-variété. Lorsque seul un échantillonnage est disponible, la distance de graphe $d^G(S_1, S_2)$ en est une approximation. Elle s'obtient en sommant les distances euclidiennes minimales pour se rendre de S_1 à S_2 dans un graphe de voisinage.

points éloignés topologiquement peuvent ainsi n'être séparés que d'une faible distance euclidienne.

Afin de tenir compte de la topologie de la sous-variété sous-jacente au nuage de données, la distance de graphe, notée $d^G(.,.)$, a été proposée. Elle est une approximation de la distance géodésique, notée $d^g(.,.)$, correspondant à la distance minimale *sur la sous-variété* pour se rendre d'un point à un autre (chemin différent d'un segment de droite pour une sous-variété courbe).

L'évaluation des distances géodésiques est en pratique une tâche difficile. La distance de graphe se révèle au contraire commode à déterminer. Elle correspond à la somme minimale des distances euclidiennes pour se rendre, de voisin en voisin, d'un point à un autre, comme illustré figure 2.12. L'approximation de la distance géodésique qu'elle propose est d'autant meilleure que le densité des échantillons est importante.

Différentes méthodes peuvent être utilisées pour calculer des distances de graphe. La méthode que nous utiliserons par la suite consiste à créer une matrice B de taille $N \times N$ dont les éléments $b_{i,j}$, correspondant à la distance de graphe entre les points S_i et S_j , sont initialement non-renseignés. Cette matrice est remplie en deux étapes successives. La première consiste à déterminer quels sont les points voisins dans la distribution en appliquant la règle des K plus proches voisins. Ainsi, pour chaque point S_i , les $K = 12$ points S_k les plus proches sont considérés comme des voisins directs et les entrées $b_{i,k}$ sont fixées à :

$$b_{i,k} = d(S_i, S_k), \quad \forall k \in \mathcal{N}(i), \quad (2.16)$$

avec $\mathcal{N}(i)$ les indices des K plus proches voisins de S_i . L'ensemble de ces distances euclidiennes permet de définir un graphe où seules les relations de voisinage sont représentées. Les entrées manquantes $b_{i,q}$ de la matrice B , avec $q \notin \mathcal{N}(i)$, sont déterminées en cherchant le chemin de longueur minimale dans le graphe pour aller de S_i à S_q . En pratique, Dijkstra a proposé un algorithme efficace pour réaliser cette recherche simultanément pour tous les $b_{i,q}$ [77].

La métrique de graphe permet de prendre en compte la structure de la sous-variété sous-jacente aux données lors du calcul des distances inter-échantillons. Pour une densité d'échantillonnage suffisamment importante, son interprétation reste intuitive mais nécessite un effort plus important que la distance euclidienne. Son coût computationnel est également plus important et peut devenir problématique pour de grandes valeurs du nombre d'échantillons N . Notons que pour une densité d'échantillonnage trop faible ou trop hétérogène, la métrique de graphe peut présenter un biais important par rapport à la métrique géodésique qu'elle est censée approximer.

2.5.4 La métrique naturelle

La métrique *naturelle* permet de définir des distances inter-échantillons directement liées à la paramétrisation de la sous-variété sensorielle. Ainsi, soit $U = \{u(1), u(2), \dots, u(l)\}$ un ensemble de variables *latentes* indépendantes permettant de caractériser l'interaction du robot avec l'environnement. Ces variables latentes permettent de définir un plongement F de $\mathbb{R}^l$ dans $\mathbb{R}^{N_s}$ (voir 2.3.1) :

$$F : \begin{matrix} \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{N_s} \\ \left\{ \begin{array}{c} s(1) = f_1(u(1), u(2), \dots, u(l)) \\ \vdots \\ s(N_s) = f_{N_s}(u(1), u(2), \dots, u(l)) \end{array} \right\} \end{matrix} \quad (2.17)$$

L'expression de F permet d'exprimer la Jacobienne J_F du plongement et le *tenseur métrique naturel* G qui lui est associé :

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u(1)} & \frac{\partial f_1}{\partial u(2)} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u(l)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{N_s}}{\partial u(1)} & \frac{\partial f_{N_s}}{\partial u(2)} & \cdots & \frac{\partial f_{N_s}}{\partial u(l)} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$G = J_F^T J_F = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1l} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{l1} & \cdots & g_{ll} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Le tenseur métrique G est dit *naturel* car il est dérivé des variables latentes choisies pour paramétriser la sous-variété. Il permet de calculer le produit scalaire entre deux vecteurs S_i et S_j exprimés dans une base $\{\vec{vect}_1, \vec{vect}_2, \dots, \vec{vect}_l\}$ comme :

$$\begin{aligned} S_i &= \sum_{k=1}^l S_i(k) \vec{vect}_k, \quad S_j = \sum_{k=1}^l S_j(k) \vec{vect}_k, \\ \langle S_i, S_j \rangle &= \sum_{k=1}^l \sum_{m=1}^l S_i(k) S_j(m) g_{km}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

A l'échelle locale, ou si G est constant sur toute la sous-variété, ce produit scalaire permet le calcul d'angles et de distances naturels. Dans le cas contraire, ces calculs sont réalisés par intégration d'une unité de longueur infinitésimale le long d'une géodésique ([70] pour plus de détails sur ce calcul). Notons que différentes variables latentes $u(k)$ peuvent être choisies pour paramétriser l'état du système de manière non-redondante. Un choix de paramétrisation différent peut ainsi mener à un tenseur métrique différent.

La métrique naturelle permet une mesure de distance en lien direct avec la paramétrisation latente du système. Pour un robot dont les commandes motrices sont indépendantes et observant un environnement statique, les $m(i)$ peuvent par exemple être choisies comme variables latentes ; la métrique naturelle se révélerait alors directement liée aux capacités d'action du robot. En pratique, ce dernier n'aura toutefois pas directement accès à une paramétrisation latente du système ou au plongement F . Il pourra néanmoins s'en construire une représentation interne qui, à terme, pourrait permettre le calcul d'une métrique "naturelle" interne (voir 2.5).

2.5.5 Conclusion

Nous venons, d'une part, de présenter les propriétés génériques d'une fonction métrique et, d'autre part, de présenter trois métriques de natures différentes. La première, euclidienne, permet de mesurer les distances inter-échantillons directement à partir de leurs coordonnées dans l'espace sensoriel $\mathbb{R}^{N_s}$. Son calcul est donc rapide et son interprétation intuitive mais elle ne permet pas de prendre en compte la structure de la sous-variété sous-jacente aux données. La seconde métrique, de graphe, est une approximation de la métrique géodésique. Elle correspond au calcul de la distance minimale pour relier deux points dans un graphe de voisinage euclidien. Pour une densité suffisante d'échantillons, elle s'identifie à la distance géodésique qui correspond au chemin le plus court *sur la sous-variété* entre ces deux points. Le calcul de la distance de graphe est plus coûteux numériquement puisqu'il nécessite la construction d'un graphe de voisinage sur toute la distribution puis la recherche de chemins optimaux pour toutes les paires d'échantillons. Elle permet cependant de prendre en compte la structure de la sous-variété sous-jacente aux données. Enfin, la troisième métrique, dite naturelle, dérive directement du choix d'une paramétrisation pour décrire la sous-variété sensorielle. Les distances dérivées de ces paramètres indépendants, qualifiés de variables latentes, correspondent formellement aux distances sur la sous-variété et dérivent directement de l'état du système robot/environnement. Leur calcul est toutefois difficile en pratique et même impossible pour le robot qui n'a *a priori* pas accès aux variables latentes du système. À terme, il peut néanmoins s'en construire une représentation interne et estimer ainsi une métrique naturelle interne.

Comme précisé en introduction de cette section, une infinité de métriques peuvent être appliquées aux données récoltées par le robot. Par la suite, seules les métriques euclidiennes et de graphe seront en pratique utilisées. Au chapitre 4, une métrique spécifique dérivée de la métrique euclidienne sera également introduite pour déterminer la distance entre deux courbes échantillonnées.

2.6 Projection des sous-variétés en basse dimension

Pour reprendre l'exemple jouet du robot pendule, nous sommes maintenant capables, d'une part, d'explorer le système et de représenter l'expérience du robot par un échantillonnage dans son espace sensorimoteur et, d'autre part, de déterminer des distances entre les données sensorielles à l'aide de la définition d'une métrique. L'étape suivante consiste à construire une représentation interne basse dimension de cette expérience.

Une telle opération ne serait pas problématique si les données à traiter appartenaient à un sous-espace linéaire de l'espace des données. Une simple Analyse en Composantes Principales (ACP) de la distribution permettrait alors de déterminer un repère associé à ce sous-espace et pouvant servir de représentation basse-dimension de l'expérience.

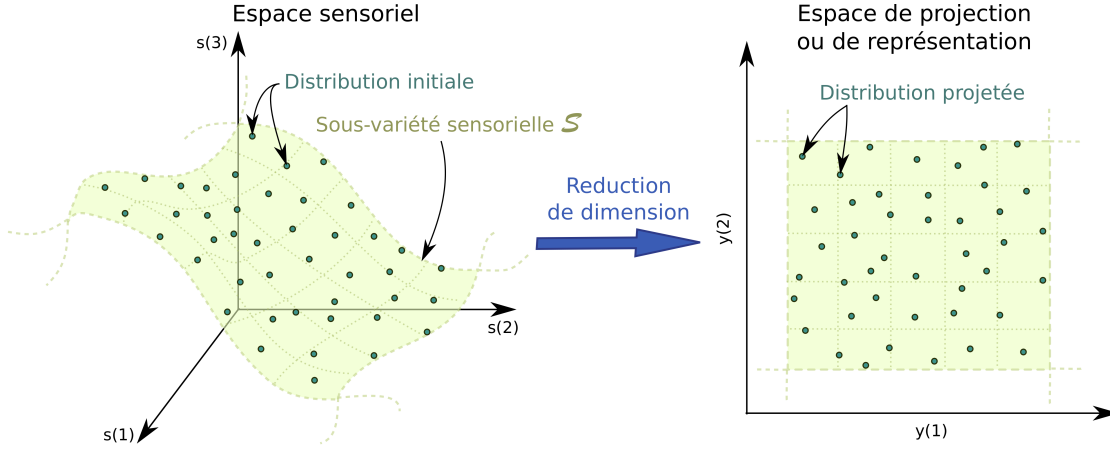


FIGURE 2.13: La réduction de dimension s'effectue par projection de la distribution dans un espace de dimension inférieure, tout en conservant sa topologie. Dans le cas de sous-variétés courbées, cette projection s'accompagne d'un dépliage.

Néanmoins, la loi sensorimotrice ϕ est potentiellement non-linéaire et la sous-variété sensorielle $\mathcal{S}$ peut donc être courbe⁶. Des méthodes de réduction de dimension capables de traiter des données non-linéaires doivent donc être envisagées pour générer la représentation interne.

Ci-après, la problématique de la réduction de dimension est brièvement discutée, puis les deux méthodes implémentées dans nos robots sont présentées en détail. Elles permettront de projeter les données dans un espace de faible dimension en conservant la topologie de la sous-variété sensorielle sous-jacente.

2.6.1 La réduction de dimension

La problématique de réduction de dimension consiste à projeter une distribution dans un espace de dimension inférieure à la dimension initiale de l'espace des données. Cette projection est réalisée en conservant certaines propriétés désirées de la distribution. Généralement, et comme c'est le cas dans nos applications, seule sa topologie est ainsi préservée, ce qui permet potentiellement une déformation importante de la distribution lors de la projection tout en conservant la structure topologique de la sous-variété sous-jacente aux données. Comme l'illustre la figure de principe 2.13, la projection s'accompagne donc d'un dépliage dans le cas où cette sous-variété présente une courbure non-nulle.

Nous considérerons dans la suite de cette section que la distribution d'échantillons sensoriels S_i est projetée dans l'espace représentatif pour caractériser les interactions du système robot/environnement. Notons toutefois qu'une telle projection peut également être réalisée avec tout type de données motrices M_i ou sensorimotrices X_i .

Pour une réduction de dimension réalisée dans de bonnes conditions, l'espace de représentation basse dimension est supposé homéomorphe à l'espace des variables latentes $\mathcal{U} = \mathbb{R}^l$ permettant de caractériser les interactions dans le système de manière non-redondante, comme représenté figure 2.5. Nous supposons donc que l'espace de représentation s'identifie à l'espace euclidien $\mathbb{R}^l$ de dimension l , la dimension intrinsèque de la sous-variété sensorimotrice. Formellement, soit $y(k)$, avec $k \in [1, l]$ les coordonnées

6. Théoriquement, la non-linéarité de ϕ n'engendre pas forcément une courbure de la sous-variété sensorielle.

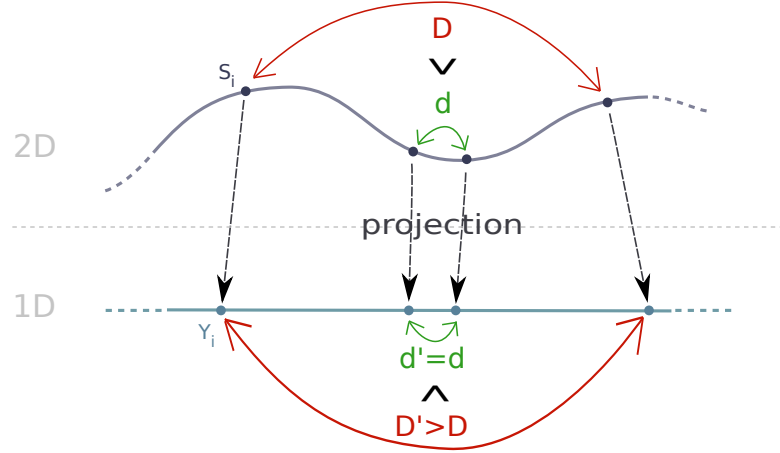


FIGURE 2.14: Lors de la projection, les faibles distances sont conservées, permettant ainsi de respecter les relations métriques locales caractéristiques de la sous-variété. Au contraire, les distances importantes peuvent être modifiées afin de permettre un dépliage de la sous-variété lors de sa projection.

d'un point Y dans l'espace de représentation $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^l$:

$$Y = [y(1), \dots, y(l)]^T. \quad (2.21)$$

La réduction de dimension consiste à associer chaque échantillon d'entrée S_i à un échantillon de sortie Y_i . De plus, le respect de la topologie de la distribution d'entrée induit la contrainte suivante : deux points topologiquement proches (resp. éloignés) dans l'espace d'entrée doivent être topologiquement proches (resp. éloignés) dans l'espace de sortie.

Une littérature très riche existe sur les problématiques spécifiques soulevées par la réduction de dimension et un nombre important de méthodes de projection ont été proposées. L'objectif de cette thèse n'est pas de réaliser une étude exhaustive de ce champ de recherche. Une brève vue d'ensemble des différentes classes de méthodes est donc proposée en annexe A et seuls les deux algorithmes implémentés dans nos robots sont présentés en détail ci-après.

2.6.2 Méthode de réduction principale : CCA

La Curvilinear Component Analysis (CCA), proposée par P.Demartines et J.Herault, est une méthode de réduction de dimension non-linéaire basée sur la conservation des faibles distances euclidiennes lors de la projection [78]. Comme illustré figure 2.14, la conservation des seules faibles distances permet d'assurer la conservation des propriétés topologiques de la distribution tout en permettant le dépliage éventuel de la sous-variété sous-jacente.

La CCA est basée sur l'utilisation de la métrique euclidienne dans l'espace des données. Par définition, elle permet de conserver dans l'espace de représentation les informations locales relatives à la métrique euclidienne dans l'espace d'entrée. L'interprétation géométrique de ces distances est donc intuitive.

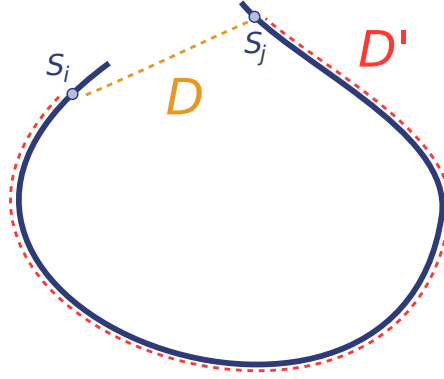


FIGURE 2.15: La forte courbure de la sous-variété implique que les points S_i et S_j sont proches dans l'espace des données, bien qu'ils soient éloignés sur la sous-variété. Lors de l'application de CCA, le dépliage de la sous-variété fait que la distance D' sera prise en compte dans la fonction de voisinage. La distance D , bien que faible, n'empêchera donc pas le dépliage complet de la sous-variété.

2.6.2.1 Minimisation de l'erreur de projection

Initialement, la CCA nécessite de tirer aléatoirement N échantillons Y_i dans l'espace de projection euclidien. Les coordonnées de ces points sont ensuite mises-à-jour itérativement afin de reproduire la topologie de la distribution à projeter.

Formellement, la CCA cherche à minimiser sur les Y_i l'erreur de projection suivante :

$$E_{CCA} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left(d(S_i, S_j) - d(Y_i, Y_j) \right)^2 F_\lambda(d(Y_i, Y_j)), \quad (2.22)$$

avec F_λ une fonction de voisinage permettant de donner plus de poids aux faibles distances. L'erreur de projection est donc minimisée lorsque les faibles distances euclidiennes $d(Y_i, Y_j)$ dans l'espace de sortie sont égales aux faibles distances euclidiennes $d(S_i, S_j)$ dans l'espace d'entrée. La CCA ne contraint pas la position absolue des Y_i et l'orientation de la distribution dans l'espace de sortie ; il existe donc une infinité de minima globaux solutions. Enfin, notons que la fonction de voisinage F_λ s'applique aux distances dans l'espace de projection plutôt que dans l'espace d'entrée. La CCA est ainsi capable de déplier des sous-variétés présentant des courbures importantes, comme illustré figure 2.15.

La minimisation de l'erreur de projection E_{CCA} est réalisée par un algorithme d'optimisation itératif de type descente de gradient. Il permet de ne faire aucune hypothèse *a priori* sur la distribution des données mais sa convergence vers un minimum global n'est pas garantie. Le gradient de E_{CCA} par rapport au vecteur Y_i dans l'espace de sortie s'écrit [76] :

$$\nabla_{Y_i} E_{CCA} = \sum_{j=1}^N (d_{in} - d_{out}) (2F_\lambda(d_{out}) - (d_{in} - d_{out}) F'_\lambda(d_{out})) \frac{Y_j - Y_i}{d_{out}}, \quad (2.23)$$

avec $d_{in} = d(S_i, S_j)$, $d_{out} = d(Y_i, Y_j)$ et $F'_\lambda(\cdot)$ la dérivée scalaire de F_λ .

La descente de gradient classique implique la règle de mise-à-jour successive des Y_i suivante :

$$Y_i \leftarrow Y_i - \alpha \nabla_{Y_i} E_{CCA}, \quad (2.24)$$

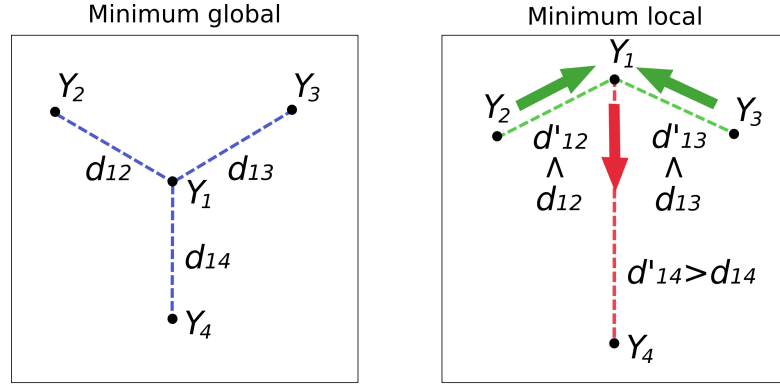


FIGURE 2.16: Cadre gauche : minimum global du système de quatre points. Cadre droit : minimum local du système où Y_2 et Y_3 tendent à pousser Y_1 vers le haut tandis que Y_4 tend à le tirer vers le bas. Ces trois contributions contradictoires s'annulent et Y_1 ne peut rejoindre sa position optimale.

où α est un taux d'apprentissage positif. La contribution des voisins Y_j sur le déplacement du point Y_i peut y être interprétée comme une force répulsive ou attractive. Lorsque ces forces sont sommées (voir équation (2.23)), elles engendrent un déplacement *moyen* de Y_i . La résultante d'une telle sommation peut être une mise-à-jour d'amplitude faible, voire nulle si les différentes forces sont contradictoires. La règle de mise-à-jour précédente a donc tendance à bloquer l'algorithme dans des minimums locaux, comme illustré figure 2.16. Pour résoudre ce problème, P.Demartines et J.Herault ont proposé une règle de mise-à-jour alternative [78]. Plutôt que de sommer les forces appliquées à Y_i , chacune d'elle est appliquée successivement. Afin de réduire le nombre d'itérations de l'algorithme, l'application de la force provenant de Y_i est réalisée parallèlement pour tous les Y_j du nuage de sortie. Concrètement, plutôt que de mettre à jour un point Y_i en appliquant l'ensemble des forces provenant de ses voisins Y_j fixes, tous les voisins Y_j sont mis à jour en appliquant la force que Y_i , fixe, exerce sur eux. Formellement, l'erreur de projection est décomposée en sous-fonctions relatives aux points i :

$$E_{CCA}^i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(d(S_i, S_j) - d(Y_i, Y_j) \right)^2 F_\lambda(d(Y_i, Y_j)). \quad (2.25)$$

La minimisation de chaque sous-fonction mène à la règle de mise à jour suivante :

$$Y_j \leftarrow Y_j - \alpha \nabla_{Y_j} E_{CCA}^i. \quad (2.26)$$

La stratégie de mise-à-jour consiste alors à déplacer l'ensemble des Y_j en considérant successivement toutes les valeurs de $i \in [1, N]$. Cette stratégie d'optimisation n'est pas strictement une descente de gradient mais son comportement moyen est similaire et permet de minimiser E_{CCA} en évitant de nombreux minimum locaux [78].

2.6.2.2 Implémentation de CCA

L'implémentation de CCA dans nos robots nécessite de définir différents paramètres et fonctions. Tout d'abord, comme proposé par P.Demartines et J.Hérault, la fonction de voisinage sélectionnée est une loi gaussienne :

$$F_\lambda(d(Y_i, Y_j)) = \exp\left(-\frac{d(Y_i, Y_j)}{\lambda}\right), \quad (2.27)$$

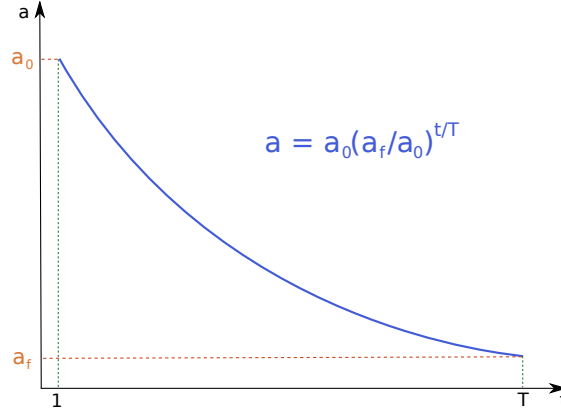


FIGURE 2.17: La loi de puissance est monotone décroissante. Contrairement à une simple droite décroissante, cette fonction privilégie les faibles valeurs du paramètre générique a .

avec λ un paramètre permettant de contrôler la largeur du voisinage. Notons que toute autre fonction monotone décroissante sur $\mathbb{R}^+$ pourrait être utilisée. Enfin, comme l'ont à nouveau proposé les concepteurs de la CCA, la dérivée F'_λ est supposée égale à 1 dans le calcul du gradient (2.23) afin de simplifier son implémentation.

Afin d'améliorer la convergence de l'algorithme, les paramètres de taux d'apprentissage α et de largeur de voisinage λ évoluent de manière décroissante avec le nombre d'itérations. Ils suivent donc chacun une loi de puissance, comme illustré figure 2.17 :

$$\alpha = \alpha_0 \left(\frac{\alpha_f}{\alpha_0} \right)^{\frac{t}{T}}, \quad (2.28)$$

$$\lambda = \lambda_0 \left(\frac{\lambda_f}{\lambda_0} \right)^{\frac{t}{T}}, \quad (2.29)$$

avec α_0 et λ_0 les valeurs initiales des paramètres, α_f et λ_f les valeurs finales des paramètres, t l'itération courante et T le nombre total d'itérations. Ce type de décroissance permet d'obtenir une évolution de la distribution de sortie très dynamique lors des premières itérations, puis de plus en plus réduite à mesure que les itérations se succèdent. La dynamique initiale implique à chaque mise-à-jour le déplacement ample de nombreux points Y_j . Elle permet à la distribution dans l'espace de sortie de perdre les propriétés qu'elle aurait pu hériter du tirage aléatoire initial au profit de celles de la structure globale du nuage d'entrée. En fin d'algorithme, moins de points sont au contraire amenés à bouger et avec une amplitude plus faible. Cette dynamique réduite permet une reproduction plus fine des propriétés de la distribution à l'échelle locale.

Résumons maintenant les différentes étapes impliquées dans la réalisation d'une CCA. Tout d'abord, les données à projeter sont centrées et normalisées afin que leur moyenne soit nulle et que leur variance soit unitaire suivant chaque axe de l'espace d'entrée. Cette étape est facultative mais permet d'offrir un cadre commun pour l'étude de différents nuages de données⁷. La projection des données est ensuite réalisée comme suit :

- Calculer les distances $d(S_i, S_j)$ pour tout i et j dans $[1, N]$.
- Tirer les Y_i aléatoirement à partir d'une loi uniforme dans un hypercube centré en 0 et d'arête 2 dans l'espace de sortie.

7. Notons que la normalisation des variances devra être ignorée lorsque les propriétés de la métrique de la sous-variété seront étudiées.

- Pour $t \in \{1, \dots, T\}$:
 - Tirer aléatoirement un point S_i .
 - Calculer les distances $d(Y_i, Y_j)$ pour tout $j \in [1, N]$.
 - Calculer $\alpha(t)$ et $\lambda(t)$.
 - Mettre à jour les coordonnées des Y_j en appliquant l'équation (2.26).
- Calculer l'erreur de projection finale E_{CCA} avec $\lambda = \lambda_f$.

Les valeurs standard des paramètres de l'algorithme considérées dans notre implémentation sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= 0.5, \\
 \alpha_f &= 5.10^{-4}, \\
 \lambda_0 &= 4, \\
 \lambda_f &= 0.8, \\
 N_{epochs} &= 100, \\
 T &= NN_{epochs}.
 \end{aligned}$$

2.6.2.3 Limitations de CCA :

La CCA est une méthode de projection très flexible mais présente toutefois certaines limitations détaillées ci-après.

Contraintes induites par l'espace de projection : Bien qu'aucune hypothèse ne soit faite sur la distribution des données dans l'espace d'entrée, la nature de l'espace de projection contraint la réduction de dimension. Implicitement, la sous-variété est supposée pouvoir être projetée dans un espace euclidien de dimension l , sa dimension intrinsèque. Pourtant, une telle hypothèse n'est pas justifiée si la sous-variété à projeter est bouclée. La projection des données n'est alors envisageable qu'au prix d'une rupture de la topologie ou d'un surdimensionnement de l'espace de sortie, comme l'illustre la figure 2.18 pour une sphère de rayon unitaire.

Convergence de l'algorithme et temps de calcul : La convergence de l'algorithme d'optimisation de CCA vers un minimum global n'est pas garantie. De plus, son comportement dépend grandement du choix des variables α , λ et N_{epochs} . L'évolution du taux d'apprentissage et de taille du voisinage au cours du temps (voir équations (2.28) et (2.29)) permet d'améliorer cette convergence. Néanmoins, le nombre d'epochs N_{epochs} doit être suffisamment important pour que les différentes dynamiques évoquées en 2.6.2.2 aient un effet notable. De plus, le nombre d'itérations T est proportionnel au nombre d'epochs N_{epochs} mais également au nombre d'échantillons N . La CCA peut donc se révéler facilement très consommatrice en temps de calcul (ordre d'idée : 34 secondes pour projeter $N = 1000$ points dans un espace de dimension 3 avec $N_{epochs} = 100$).

Twist dans le nuage projeté : Comme souligné par Hérault & al. [79], la CCA peut éventuellement rester bloquée dans des minimums locaux pour lesquels le nuage projeté présente un *twist*. Le terme de twist, ou torsion, peut en réalité être trompeur pour décrire ce phénomène illustré figure 2.19. Il se traduit par une distribution de sortie scindée en portions dont les orientations locales sont incompatibles.

Ce phénomène s'explique par le fait que la CCA ne contraint pas l'orientation de la distribution de sortie (2.6.2.1). L'aspect local des mises à jour réalisées par l'algorithme peut

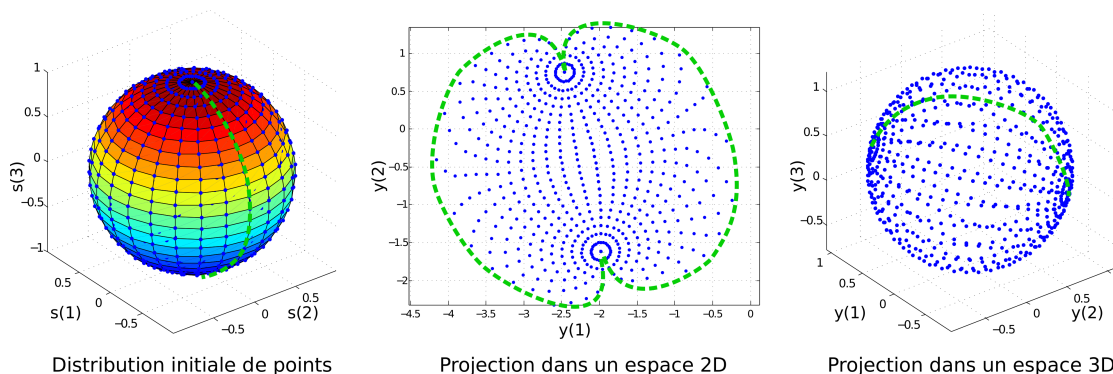


FIGURE 2.18: La dimension intrinsèque de la sphère (cadre gauche) est de 2. Pourtant, il est impossible de la projeter en dimension 2 sans briser sa topologie (cadre central). Elle est ainsi scindée suivant la ligne pointillée puis dépliée lors de la projection. Pour pouvoir conserver sa topologie de sous-variété fermée, la distribution peut être projetée dans un espace de dimension 3 (cadre droit).

alors potentiellement faire émerger des orientations locales incohérentes entre différentes portions du nuage de sortie. Si ces orientations locales se distinguent par une ou plusieurs symétries, l'algorithme reste alors bloqué dans un minimum local pour lequel toute tentative de mise en cohérence des orientations locales se traduirait temporairement par une augmentation significative de l'erreur de projection E_{CCA} . La probabilité qu'un ou plusieurs twists apparaissent dans la distribution de sortie dépend du tirage initial des Y_i dans l'espace de sortie, du nombre d'échantillons N et du nombre d'itérations T . Afin de limiter ce risque, plusieurs CCA peuvent être réalisées en parallèle avec différentes initialisations aléatoires. Celle produisant l'erreur de projection finale minimale a le plus de chance de ne présenter aucun twist ; sa projection est alors conservée comme résultat de la réduction de dimension.

Méthode non-génératrice : La CCA est une méthode de réduction de dimension *non-génératrice*. Elle associe à tout échantillon d'entrée S_i un échantillon dans l'espace de sortie Y_i mais ne fournit pas explicitement la fonction permettant de réaliser cette projection. La génération d'une projection pour tout nouveau point S_k nécessite alors une nouvelle (courte) phase de ré-apprentissage. Notons qu'une fonction de projection peut tout de même être estimée *a posteriori*, par exemple à l'aide d'une approximation polynomiale entre les coordonnées des points dans les espaces d'entrée et de sortie.

2.6.3 Méthode de réduction auxiliaire : ISOMAP

La CCA sera utilisée par défaut pour projeter nos données. Une seconde méthode de réduction de dimension est toutefois implémentée dans nos robots : l'Isometric Feature Mapping (ISOMAP). Son but est de vérifier les résultats obtenus par la CCA dans le cas de projections ambiguës ou de la supplanter lorsqu'elle ne permet pas une étude optimale des données (quelques exemples seront illustrés par la suite).

La méthode ISOMAP, proposée par J.Tenenbaum, V.de Silva et J.Langford, est une méthode non-linéaire de réduction de dimension basée sur la conservation des distances de graphe de la distribution d'entrée [80]. Le respect des distances de graphe permet d'assurer la conservation des propriétés topologiques de la distribution tout en permettant le dépliage éventuel de la sous-variété sous-jacente. Comme évoqué précédemment, les

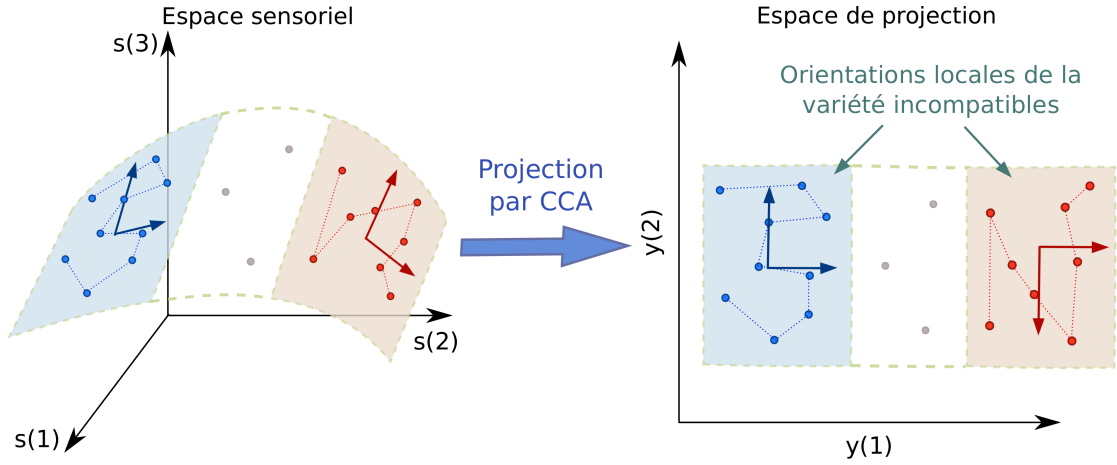


FIGURE 2.19: À gauche : une sous-variété échantillonnée dont deux portions distinctes ont été mises en évidence. Un repère local a été défini pour paramétriser la première portion de sous-variété puis transporté sur la sous-variété pour créer le repère local de la seconde portion. À droite : lors de la projection, les deux portions peuvent s'organiser localement selon des orientations incompatibles. Les repères locaux, déterminés par l'observation de l'organisation locale des échantillons, se distinguent par une symétrie horizontale.

distances de graphe permettent une interprétation relativement intuitive des résultats mais nécessitent un investissement computationnel plus important (2.5.3).

2.6.3.1 Minimisation de l'erreur de projection

La méthode ISOMAP cherche à construire une représentation basse dimension permettant de capturer le maximum de variance de la distribution définie par la matrice de distances de graphe B (2.5.3). Formellement, la méthode cherche à minimiser l'erreur de projection suivante :

$$E_{\text{ISOMAP}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left(d^G(S_i, S_j) - d(Y_i, Y_j) \right)^2. \quad (2.30)$$

Cette erreur est donc minimale lorsque les distances euclidiennes entre les échantillons Y_i dans l'espace de sortie sont égales aux distances de graphe mesurées entre les échantillons S_i dans l'espace d'entrée.

La minimisation de E_{ISOMAP} est réalisée par une méthode de résolution algébrique exacte issue des méthodes de positionnement multidimensionnel métriques (Metric MultiDimensional Scaling - MMDS) [81]. Celle-ci consiste en une décomposition en valeurs propres (DVP) de la matrice de Gram G contenant l'ensemble des produits scalaires entre les échantillons de distribution à projeter. Contrairement à la MMDS, les produits scalaires constituant G ne sont toutefois pas déterminés à partir des coordonnées cartésiennes des données dans l'espace d'entrée mais dérivés de la matrice des distances de graphe B . Cette prise en compte des distances de graphe plutôt que des distances euclidiennes permet à ISOMAP de projeter des sous-variétés courbes bien que sa méthode de résolution soit linéaire (DVP). La matrice de Gram G est déterminée en deux étapes. Tout d'abord, les distances de graphe sont élevées au carré pour générer la matrice C :

$$c_{i,j} = b_{i,j}^2. \quad (2.31)$$

La matrice de Gram G dérivée des distances de graphe est ensuite obtenue par *double centrage* de C (voir [76]) :

$$G = -\frac{1}{2} \left(C - \frac{1}{N} C 1_N 1_N^T - \frac{1}{N} 1_N 1_N^T C + \frac{1}{N^2} 1_N 1_N^T C 1_N 1_N^T \right), \quad (2.32)$$

avec 1_N un vecteur colonne de dimension N dont tous les éléments sont égaux à 1. Cette opération revient à soustraire de chaque élément $c_{i,j}$ de C la moyenne des éléments sur la ligne i et la moyenne des éléments sur le colonne j puis à rajouter la moyenne de tous les éléments de la matrice. La DVP en valeurs propres de G permet de générer la matrice carrée diagonale Σ et la matrice orthogonale U telles que :

$$G = U \Sigma U^T = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_N \end{pmatrix} U^T, \quad (2.33)$$

avec les valeurs propres λ_i triées par normes décroissantes. Enfin, les coordonnées des projections Y_i sont regroupées dans la matrice $\mathbf{Y}$ de taille $l \times N$:

$$\mathbf{Y} = I_{l \times N} \Sigma^{1/2} U^T, \quad (2.34)$$

avec $I_{l \times N}$ la matrice identité de taille $N \times N$ réduite à l lignes.

2.6.3.2 Limitations d'ISOMAP

La méthode ISOMAP permet une résolution analytique efficace de la projection, basée sur une DVP de la matrice de Gram G . Elle présente toutefois certaines limitations importantes.

Hypothèse sur la distribution d'entrée : La DVP de G suppose que la distribution définie par les distances de graphe B appartient à un espace linéaire. En d'autres termes, la sous-variété sous-jacente aux échantillons d'entrée X_i doit pouvoir être dépliée dans un espace euclidien de dimension l où chaque distance de graphe de B correspond alors à une distance euclidienne. En termes mathématiques, la sous-variété sous-jacente aux données d'entrée doit être *développable*. Cette hypothèse exclut automatiquement les sous-variétés bouclées du champ des sous-variétés pouvant être traitées par ISOMAP, contrairement à la CCA, plus flexible, qui peut les projeter au prix d'une scission de la topologie ou d'un sur-dimensionnement de l'espace de projection (voir 2.6.2.3).

Approximations liées aux distances de graphe : Les distances de graphe sont supposées approximer les distances géodésiques sur la sous-variété (voir 2.5.3). En pratique, cette approximation peut être de mauvaise qualité si la densité des échantillons n'est pas satisfaisante ou trop hétérogène. Ces approximations peuvent nuire à l'hypothèse de sous-variété développable évoquée précédemment. La méthode ISOMAP se retrouve ainsi peu adaptée pour la projection de sous-variétés dont l'échantillonnage présente des trous et pour lesquels les distances de graphe surestiment largement les distances géodésiques.

Temps de calcul : La méthode algébrique héritée de la MDS permet une résolution exacte et efficace de la minimisation de l'erreur de projection E_{ISOMAP} . Elle se révèle, de plus, peu consommatrice en temps de calcul (ordre d'idée : 3 secondes pour projeter une distribution 3D de $N = 1000$ points.). Il en est toutefois autrement pour la génération

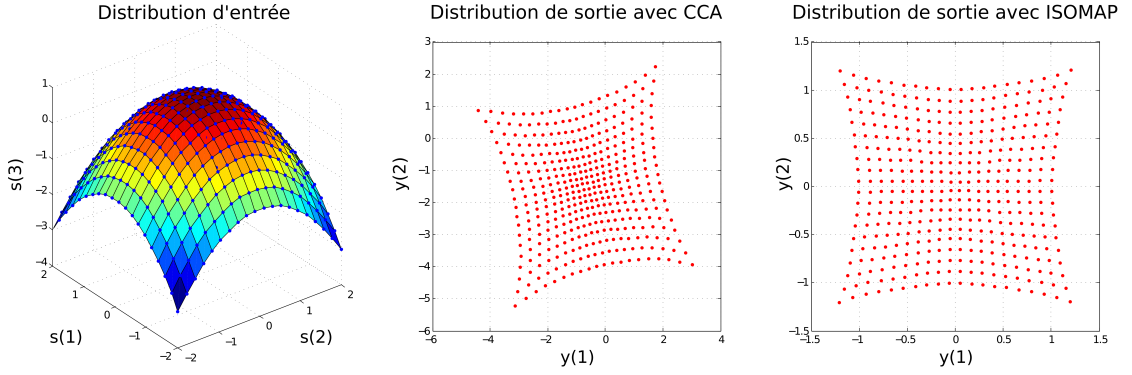


FIGURE 2.20: A gauche : distribution à projeter et sous-variété sous-jacente. Au centre : projection dans un espace 2D réalisée par CCA. A droite : projection dans un espace 2D réalisée par ISOMAP.

de la matrice B des distances de graphe. En effet, le temps de calcul nécessaire à son estimation augmente avec le nombre de points N dans le nuage, limitant en pratique les applications de la méthode (complexité de l'algorithme de Dijkstra : $O[(K + N) \times \ln(N)]$ avec K le nombre de voisins de chaque échantillon).

Méthode non-génératrice : Comme CCA, ISOMAP est une méthode de réduction non-génératrice. Elle ne fournit donc pas de fonction permettant de réaliser *a posteriori* la projection déterminée par ISOMAP pour tout nouvel échantillon S_k . Une variante d'ISOMAP a toutefois été proposée pour rendre possible une telle opération sans reprojetter l'ensemble de la distribution [82].

2.6.4 Conclusion

Les méthodes de réduction de dimension implémentées dans nos robots permettent de projeter des échantillons d'un espace d'entrée (sensoriel ici) vers un espace de représentation interne de dimension réduite en respectant leur topologie. Par défaut, la CCA sera utilisée pour réaliser ces projections. Elle permet en effet de ne pas faire d'hypothèse *a priori* sur la distribution étudiée tout en permettant une analyse intuitive des résultats grâce à l'utilisation de la métrique euclidienne dans l'espace d'entrée et l'espace de sortie. Une méthode auxiliaire, ISOMAP, sera utilisée pour confirmer les résultats de CCA si nécessaire ou la supplanter lorsqu'elle se révèle inadaptée au traitement des données (deux exemples seront présentés dans la suite de cette thèse).

Le robot pendule de notre exemple jouet est donc maintenant capable de projeter les données sensorielles récoltées au cours de l'exploration du système pour en construire une représentation interne. La faible dimension ($l = 1$) de la sous-variété sensorielle générée au travers de l'exploration du pendule ne permet pas une visualisation intéressante du type de résultats générés par CCA et ISOMAP. La figure 2.20 présente donc un exemple d'application de ces deux méthodes sur une sous-variété 2D courbe plongée dans un espace 3D. Chacune d'elle permet de déplier la sous-variété pour projeter les échantillons dans un plan, tout en conservant leur organisation spatiale (topologie).

2.7 Estimation de la dimension intrinsèque d'une sous-variété

Pour réaliser une réduction de dimension optimale, la dimension de l'espace de projection, notée p , doit être égale à la dimension intrinsèque l de la sous-variété sous-jacente aux échantillons S_i . Nous avons jusqu'à présent supposé que nous connaissions cette dimension l . Néanmoins, le robot n'y a *a priori* pas accès et doit la déterminer par l'analyse de son expérience sensorimotrice afin de pouvoir construire une représentation interne de la plus faible dimension possible.

Tout comme pour la réduction de dimension présentée dans la section précédente, l'estimation de la dimension intrinsèque de la distribution d'entrée ne présenterait pas de difficulté si les données étaient générées linéairement. Une simple ACP permettrait par exemple de déterminer le nombre d'axes porteurs de variance dans la distribution et donc le nombre de dimensions nécessaires pour sa représentation. Néanmoins, la loi sensorimotrice ϕ est non-linéaire et peut donc générer une sous-variété sensorielle $\mathcal{S}$. Les méthodes d'estimation de dimension envisagées doivent donc pouvoir traiter cette non-linéarité des données.

Au-delà de la question de l'optimalité de la réduction de dimension, la connaissance de la dimension intrinsèque de la sous-variété sous-jacente aux données est fondamentale pour l'étude de ses propriétés, telles sa topologie ou sa courbure. L'estimation de l est donc une étape essentielle dans l'analyse de l'expérience sensorielle du robot. Ci-dessous, différentes approches sont proposées pour réaliser une telle estimation. Dans un second temps, les algorithmes implémentés dans nos robots seront présentés en détail.

2.7.1 La q -dimension

La q -dimension est un terme générique regroupant différentes mesures fractales de dimension, c'est-à-dire pouvant s'appliquer à des objets fractaux et fournissant potentiellement un résultat non-entier. Suivant la valeur de q , la nature de la mesure diffère et permet d'analyser différentes propriétés de la distribution d'entrée. Les mesures les plus utilisées, de par leur signification géométrique intuitive, sont la *dimension de capacité* ($q = 0$), la *dimension d'information* ($q = 1$) et la *dimension de corrélation* ($q = 2$). Cette dernière, plus intuitive car basée sur la métrique euclidienne, est présentée en détail ci-après.

2.7.1.1 Définition de la 2-dimension

La dimension de corrélation D_2 d'une distribution est estimée en définissant une boule de voisinage sur chaque échantillon S_i puis en déterminant à quelle vitesse le nombre de voisins dans ces boules évolue lorsque leur rayon varie. Formellement, D_2 est calculée de la manière suivante :

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(C_2(\epsilon))}{\log(\epsilon)}, \quad (2.35)$$

avec $C_2(\epsilon)$ l'intégrale de corrélation définie par :

$$C_2(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(N-1)} \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^N H(\epsilon - d(S_i, S_j)) \quad (2.36)$$

$$= p(d(S_i, S_j) \leq \epsilon), \quad (2.37)$$

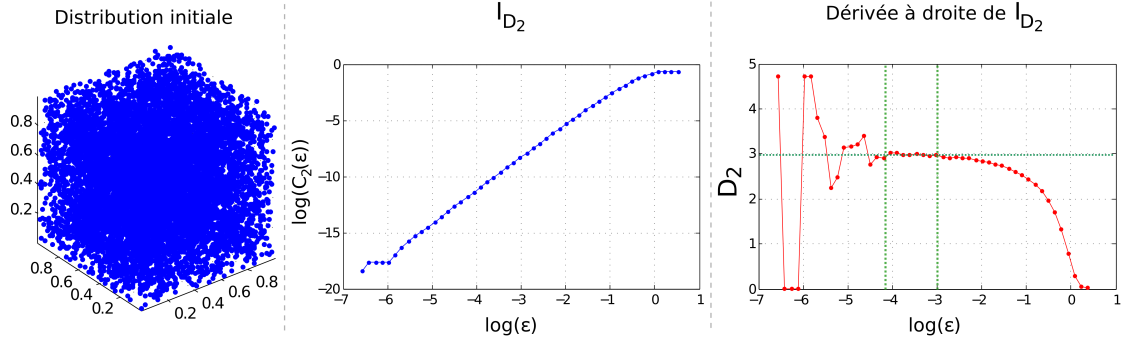


FIGURE 2.21: A gauche : distribution aléatoire uniforme de $N = 10000$ points dans un hypercube 3D. Au centre : Estimation de $C_2(\epsilon)$ pour 50 valeurs du rayon de la boule. A droite : approximation de la pente de I_{D_2} par dérivation à droite. Le choix de la valeur finale de D_2 se fait par détection d'un plateau dans la courbe de droite. Dans le cas présent, la dimension de corrélation de la distribution est de 3.

où $H(u)$ est la fonction échelon :

$$H(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 1 & \text{si } u \geq 0 \end{cases}. \quad (2.38)$$

L'intégrale de corrélation $C_2(\epsilon)$ est la probabilité moyenne qu'un échantillon S_i ait un voisin S_j dans une boule de rayon ϵ . Si la sous-variété étudiée est intrinsèquement de dimension 1, le nombre de voisins augmente (resp. diminue) comme pour une courbe lorsque le rayon ϵ augmente (resp. diminue). Si la sous-variété est de dimension 2, ce nombre évolue comme pour une surface, et ainsi de suite. En pratique, la distribution est étudiée localement en considérant des ϵ qui tendent vers 0.

2.7.1.2 Estimation de la 2-dimension

En pratique, le nombre d'échantillons N ne peut tendre vers l'infini ; la probabilité $C_2(\epsilon)$ n'est donc qu'approximée. De même, le rayon ϵ ne peut rigoureusement tendre vers 0 sous peine de voir le nombre de voisins dans chaque boule chuter à 0. En supposant que N est suffisamment important pour garantir une estimation correcte de $C_2(\epsilon)$, l'estimation de D_2 est obtenue de la manière suivante :

- Calculer l'ensemble des distances $d(S_i, S_j)$ dans la distribution.
- Déterminer la proportion $C_2(\epsilon)$ des distances inférieures ou égales à ϵ , pour différentes valeurs de ϵ comprises entre $\min_{i,j}(d(S_i, S_j))$ et $\max_{i,j}(d(S_i, S_j))$.
- Estimer la pente D_2 de la courbe $I_{D_2} = \log(C_2(\epsilon))/\log(\epsilon)$.

La figure 2.21 présente le type de courbe I_{D_2} obtenue pour une distribution aléatoire uniforme de $N = 10000$ points dans un volume 3D. Le caractère fini de N induit un biais sur chaque extrémité de la courbe I_{D_2} . Ainsi, lorsque ϵ est trop important, l'ensemble des points de la distribution sont contenus dans toutes les boules de voisinage et la courbe présente une saturation. A l'inverse, lorsque ϵ est trop faible, le nombre de voisins dans chaque boule est trop petit pour assurer une estimation correcte de $C_2(\epsilon)$. L'extrémité gauche de la courbe correspond par exemple au cas de figure où un seul voisin est présent dans une seule boule de voisinage.

L'estimation de la pente de I_{D_2} peut, par exemple, être réalisée par dérivation à droite. Les extrémités de I_{D_2} étant biaisées, l'estimation est réalisée dans la zone centrale de la courbe. Dans un cas de figure optimal, comme celui présenté figure 2.21, il est possible

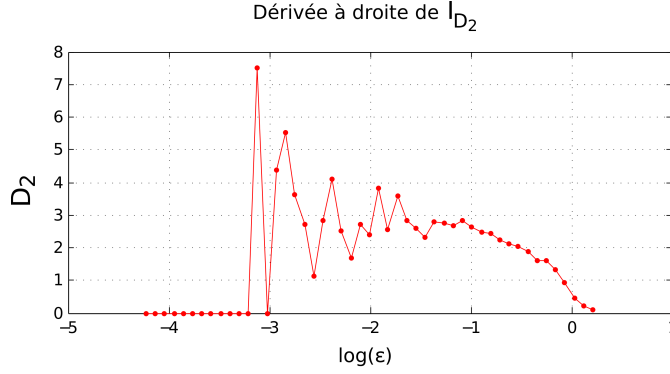


FIGURE 2.22: Avec $N = 100$ points, la courbe des pentes est bien plus bruitée et la détection d'un plateau devient plus délicate.

de repérer un plateau dans cette dérivée. La valeur de pente associée à ce plateau est alors considérée comme la dimension de corrélation de la distribution.

Notons que la dimension de corrélation estimée peut être non-entière puisque la q -dimension est une estimation fractale de dimension. Lorsque l'objet d'étude est non-fractal mais que la dimension estimée est non-entière, un choix doit donc être fait pour arrondir le résultat à sa valeur entière inférieure ou supérieure.

2.7.1.3 Limitations de la 2-dimension

Estimation de la pente de I_{D_2} : La détection d'un plateau dans la pente de I_{D_2} est généralement réalisée manuellement. L'estimation est donc subjective et souvent difficile pour des distributions moins bien conditionnées que celle de l'exemple précédent. La figure 2.22 présente, par exemple, le type de courbe obtenue si le nombre d'échantillons est réduit à $N = 100$.

Biais induit par les bornes de la distribution : En théorie, la distribution étudiée est supposée être infinie en densité mais également en étendue. En pratique, ces conditions ne sont évidemment pas remplies. Le nombre de points N est fini et la distribution est, par définition, bornée. La forme du nuage de points peut alors avoir une influence sur l'estimation de D_2 . La figure 2.23 présente, par exemple, le type de courbe obtenue lorsque la sous-variété est étirée suivant un axe. Pour des ϵ suffisamment importants, la majorité des boules de voisinage dépassent les limites de la sous-variété pour inclure une partie vide de l'espace d'entrée. L'approximation de $C_2(\epsilon)$ ainsi que son évolution en fonction de ϵ s'en retrouvent alors biaisées. La dimension de corrélation de la distribution peut alors se révéler ambiguë, voire impossible à déterminer.

2.7.2 Les méthodes spectrales

Un grand nombre de méthodes de réduction de dimension, dont fait partie ISOMAP, sont dites *spectrales* de par la nature spectrale de leur méthode de résolution (décomposition en valeurs propres pour ISOMAP) [76]. Ces méthodes permettent une estimation efficace de la dimension intrinsèque d'une sous-variété si celle-ci respecte les hypothèses de linéarité sur lesquelles elles se fondent.

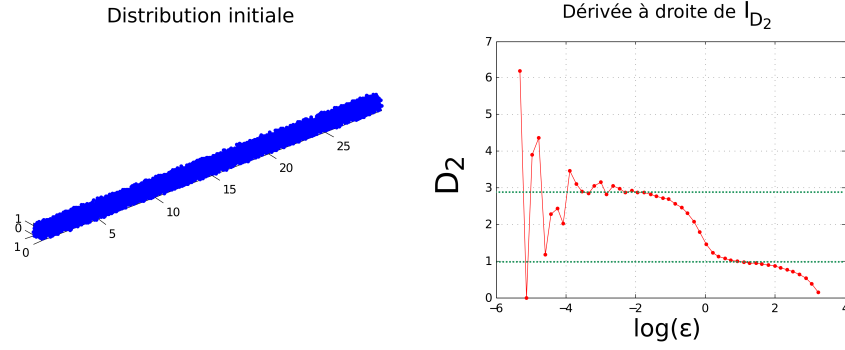


FIGURE 2.23: La distribution initiale (gauche) est étirée suivant un axe. La courbe d'estimation de D_2 présente alors 2 plateaux distincts correspondant à la valeur 3, liée à la dimension intrinsèque de la sous-variété, et à 1 liée à l'axe étiré.

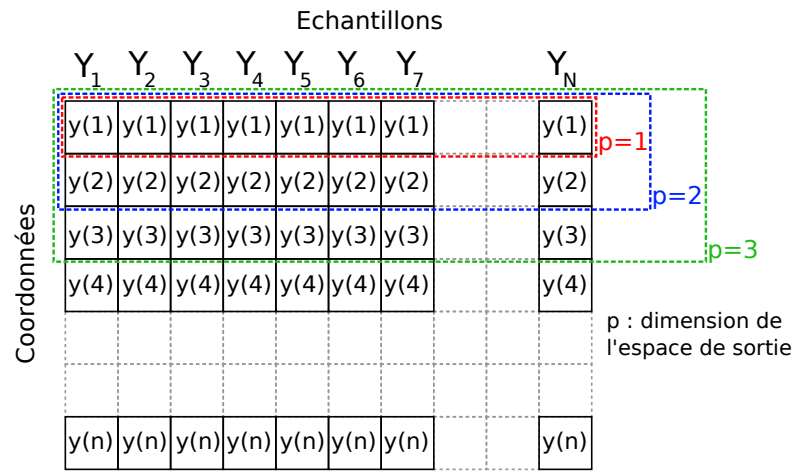


FIGURE 2.24: Les méthodes spectrales fournissent une matrice résultat comprenant les coordonnées des points projetés pour toutes les dimensions p possibles de l'espace de sortie. Chaque ligne de cette matrice est également associée à une valeur propre λ_i de la distribution de sortie, triées par ordre décroissant.

2.7.2.1 Estimation spectrale de la dimension intrinsèque d'une sous-variété

Comme nous l'avons vu précédemment dans le cas d'ISOMAP, les méthodes spectrales génèrent une matrice résultat $\mathbf{Y}$, représentée figure 2.24 (2.6.3.1). Elles contiennent potentiellement l'ensemble des coordonnées des échantillons projetés Y_i pour des espaces de sortie de dimension p comprise entre 1 et N . Pour une dimension p quelconque de l'espace de projection, seules les p premières lignes de la matrice résultat sont considérées. De plus, chaque ligne de $\mathbf{Y}$ est associée à une valeur propre λ_i , rangées par normes décroissantes et correspondant à la variance de la distribution de sortie selon le $i^{\text{ème}}$ vecteur propre colonne contenu dans U (voir (2.33)).

Pour une dimension intrinsèque l de la distribution, les l premières valeurs propres λ_i sont significatives et permettent d'expliquer la variance totale de la distribution. Au contraire, les $N - l$ dernières valeurs propres λ_i sont non-significatives puisqu'elles ne représentent que la variance résiduelle de la distribution (bruit sur les données, erreur lors de la projection ou bruit de calcul). La dimension intrinsèque l de la sous-variété sous-jacente aux données peut donc être estimée en détectant le nombre de valeurs propres

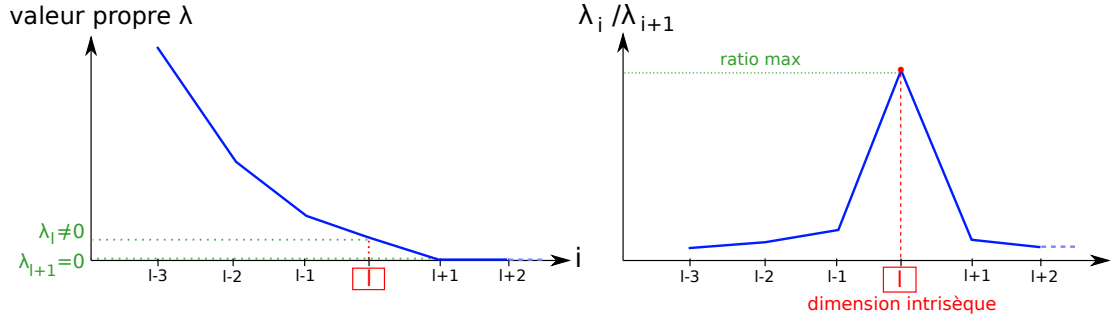


FIGURE 2.25: A gauche : les l premières valeurs propres sont en théorie significatives ; les $N - l$ autres sont négligeables. A droite : le ratio des valeurs propres successives permet de repérer la limite entre ces deux sous-ensembles et d'estimer l .

λ_i significatives comme suit, tel qu'illustré figure 2.25 :

$$\hat{l} = \operatorname{argmax}_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \right), \text{ avec } i \in [1, N - 1]. \quad (2.39)$$

2.7.2.2 Limitation des méthodes spectrales

La méthode spectrale d'estimation de dimension repose sur l'analyse des ratios successifs $\lambda_i / \lambda_{i+1}$. Par définition, elle ne permet donc pas traiter les sous-variétés de dimension intrinsèque $l = N$.

De plus, afin de garantir une estimation correcte de l , la distribution de sortie doit respecter les hypothèses induites par les méthodes spectrales. Ainsi, le nuage de points étudié en entrée doit appartenir à un hyperplan ou à une sous-variété développable (voir plus haut 2.6.3.2). En cas de non-respect de ces contraintes, le nuage de sortie peut présenter une courbure non-négligeable. Celle-ci se traduit par l'étalement de la variance de $\mathbf{Y}$ selon un nombre de dimensions supérieur à l . La frontière entre valeurs propres λ_i significatives et non-significatives ne renseigne alors plus directement sur la dimension intrinsèque l et la méthode spectrale d'estimation de dimension échoue⁸.

2.7.3 Les méthodes essai-erreur

Les méthodes d'estimation de dimension de type *essai-erreur* dérivent des méthodes de réduction de dimension non-spectrales. Elles sont plus coûteuses en temps de calcul mais ont l'avantage de n'imposer aucune hypothèse *a priori* sur la distribution.

2.7.3.1 Estimation par essai-erreur de la dimension intrinsèque d'une sous-variété

Les méthodes de réduction de dimension projettent les données d'entrée dans un espace de sortie de dimension p en minimisant une erreur de projection $E_{proj}(p)$. Lorsque p est supérieure ou égale à la dimension intrinsèque l de la sous-variété étudiée, il est possible de projeter la distribution en conservant sa topologie (un dépliage de la sous-variété

8. Certaines méthodes spectrales, telle l'ACP locale, permettent de traiter directement des sous-variétés courbes. Celle-ci repose sur une multitude de décompositions spectrales réalisées à l'échelle locale où la courbure est négligeable [83].

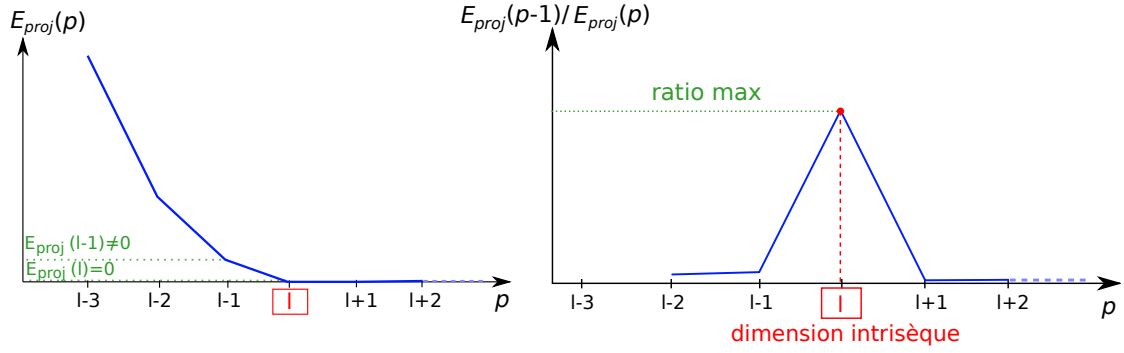


FIGURE 2.26: A gauche : pour $p < l$ l'erreur de projection est significative puisque la projection se fait au dépend de la conservation de la topologie ; au contraire, pour $p \geq l$ l'erreur de projection est négligeable. A droite : le ratio des erreurs de projection successives permet de réparer la limite entre erreurs significatives et non-significatives, et donc d'estimer l .

est toutefois possible). L'erreur de projection $E_{proj}(p)$ permettant d'évaluer le respect de la topologie du nuage d'entrée est donc faible. Au contraire, lorsque p est inférieur à l , il n'y a plus suffisamment de dimensions dans l'espace de sortie pour conserver cette topologie lors de la projection. La destruction topologique résultante se traduit par une erreur de projection $E_{proj}(p)$ importante.

Il est donc possible d'estimer la dimension intrinsèque l de la sous-variété en projetant successivement son échantillonnage dans des espaces de dimension p variable. La frontière entre erreurs de projection $E_{proj}(p)$ significatives et non-significatives permet d'estimer l comme suit, tel qu'illustré figure 2.26 :

$$\hat{l} = \operatorname{argmax}_i \frac{E_{proj}(i-1)}{E_{proj}(i)}, \text{ avec } i \in [2, n]. \quad (2.40)$$

2.7.3.2 Limitations des méthodes essai-erreur

Les méthodes d'estimation de dimension par essai-erreur reposent sur l'analyse des ratios successifs $E_{proj}(i-1)/E_{proj}(i)$. Par définition, elles ne permettent donc pas traiter les sous-variétés de dimension intrinsèque $l = 1$.

De plus, contrairement à leurs homologues spectrales, les méthodes essai-erreur ont l'avantage de ne faire aucune hypothèse sur la distribution à analyser. Cette flexibilité se traduit malheureusement par un coût en temps de calcul supérieur. D'une part, les méthodes de réduction non-spectrales reposent sur l'utilisation d'algorithmes d'optimisation itératifs consommateurs en temps de calcul. D'autre part, une nouvelle projection doit être réalisée pour chaque dimension p considérée, multipliant d'autant le coût de la méthode.

2.7.4 Méthodes implémentées dans nos robots

Deux méthodes d'estimation de dimension sont fournies à nos robots. Afin de profiter des algorithmes de réduction de dimension déjà implémentés, la méthode principale d'estimation de dimension se base sur CCA tandis que la seconde méthode, auxiliaire, repose sur ISOMAP. La première est donc de type essai-erreur tandis que la seconde est spectrale. Bien que théoriquement séduisante, la dimension de corrélation D_2 n'a pas été

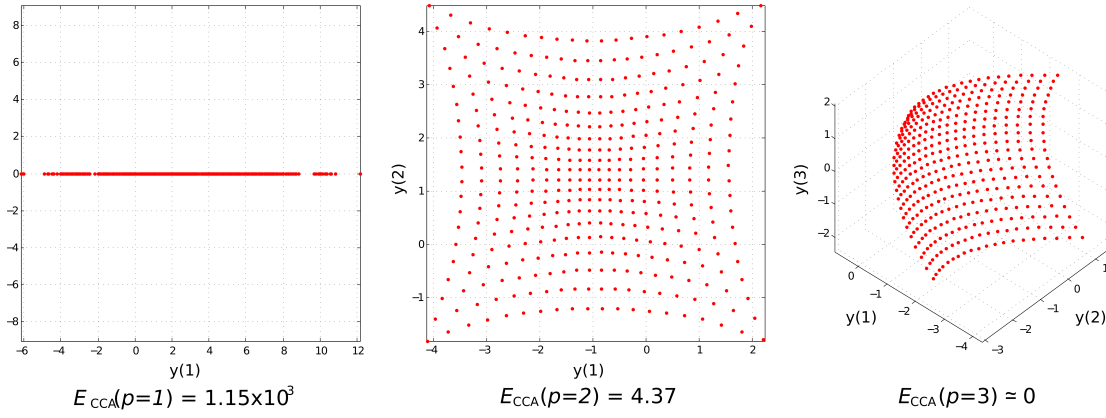


FIGURE 2.27: L'erreur de projection est faible pour $p \geq l = 2$. Au contraire, elle est importante pour $p < l = 2$ puisque la projection ne permet pas de conserver la topologie de la distribution initiale.

choisie à cause de ses fortes limitations pratiques : nécessité d'un grand nombre d'échantillons, sensibilité à la forme du nuage de données et difficulté d'automatiser l'estimation de pente (voir 2.7.1.3).

La méthode principale d'estimation de dimension intrinsèque par essai-erreur repose sur les étapes suivantes :

- Pour $p \in [1, p_{max}]$:
 - Projeter les données avec CCA dans un espace de dimension p .
 - Sauvegarder l'erreur de projection finale $E_{CCA}(p)$.
- Estimer la dimension intrinsèque de la sous-variété :

$$\hat{l} = \underset{p}{\operatorname{argmax}} \frac{E_{CCA}(p-1)}{E_{CCA}(p)}, \text{ avec } p \in [2, p_{max}]. \quad (2.41)$$

La figure 2.27 illustre l'application de cette méthode sur la sous-variété échantillonnée 2D proposée figure 2.20. Comme attendu, E_{CCA} est faible pour $p = \{2, 3\}$ et significative pour $p = 1$. Notons que l'erreur de projection n'est pas rigoureusement nulle pour $p = 2$ du fait du dépliage de la sous-variété qui altère légèrement les distances entre voisins. L'erreur est toutefois suffisamment faible pour être considérée comme non-significative ; permettant ainsi d'estimer la dimension intrinsèque de la sous-variété à $\hat{l} = 2$. Dans cet exemple particulier, nous pouvons également remarquer que $E_{CCA}(p = 3)$ est négligeable. L'estimation des ratios successifs d'erreurs de projections entraînerait donc une surestimation de l ($\hat{l} = 3$). Cet artefact peut se produire lorsque la sous-variété initiale est projetée dans un espace de dimension N_s , la dimension de l'espace dans lequel elle est initialement plongée. L'erreur de projection y est alors théoriquement nulle, générant un ratio $E_{CCA}(n-1)/E_{CCA}(n)$ infini. Pour parer à cette difficulté (qui ne sera pas rencontrée dans la suite de ces travaux), un seuil de tolérance peut être rajouté à la méthode d'estimation afin d'écarter les erreurs de projections négligeables.

La seconde méthode d'estimation de dimension intrinsèque sera appliquée pour confirmer les résultats de la méthode principale ou pour la supplanter lorsqu'elle n'est pas adaptée au traitement des données. Les étapes de cette méthode spectrale sont les suivantes :

- Projeter les données avec ISOMAP.
- Sauvegarder les valeurs propres λ_i associées à chaque dimension $i \in [1, p_{max}]$ de l'espace de sortie.

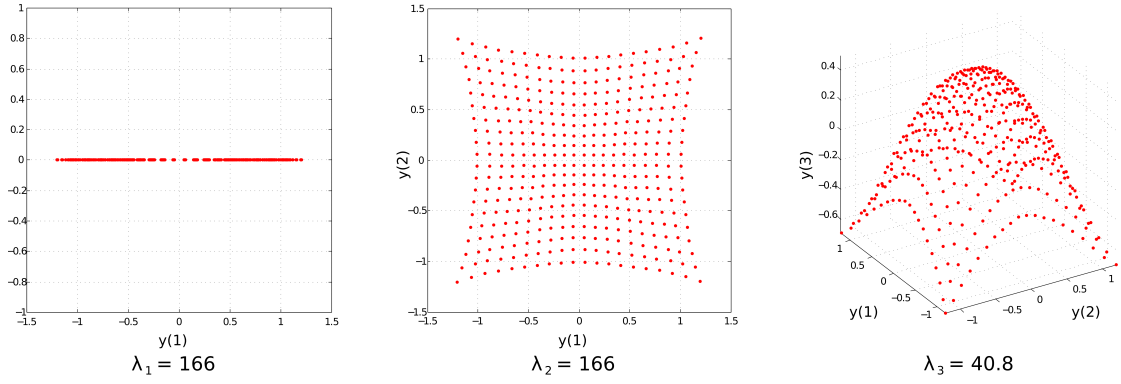


FIGURE 2.28: Les $l = 2$ premières valeurs propres de la distribution de sortie sont du même ordre de grandeur tandis que la $(l + 1)^{\text{ième}}$ est moins importante.

- Estimer la dimension intrinsèque de la sous-variété :

$$\hat{l} = \underset{i}{\operatorname{argmax}} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \right), \text{ avec } i \in [1, p_{\max}]. \quad (2.42)$$

La figure 2.28 illustre l'application de cette méthode sur la sous-variété échantillonnée 2D proposée figure 2.20. Comme attendu, Les valeurs propres λ_i associées aux deux premières dimensions de la distribution de sortie sont plus importantes que la troisième valeur propre. Notons toutefois que λ_3 est non-négligeable. Cette importance relative de la variance suivant la troisième dimension tient au fait que les hypothèses sous-tendant l'application d'ISOMAP ne sont pas rigoureusement respectées : la sous-variété projetée n'est pas développable. Pour autant, la flexibilité de la méthode d'estimation basée sur les ratios successifs des valeurs propres permet tout de même d'estimer que la dimension intrinsèque de la sous-variété est de 2.

Dans notre implémentation, la dimension maximale considérée pour l'espace de sortie $p_{\max}$ est fixée arbitrairement à $\min(N_s, 15)$, avec N_s la dimension de l'espace des données, afin de limiter le coût en temps de calcul des estimations de dimension.

2.7.5 Conclusion

La projection optimale des données de l'expérience sensorimotrice du robot suppose de connaître la dimension intrinsèque l de la sous-variété qui les sous-tend. L'estimation de cette dimension est rendue délicate par la nature non-linéaire de la loi sensorimotrice ϕ et la possible courbure de la sous-variété. Deux algorithmes d'estimation de dimension ont été implémentés dans nos robots. D'un point de vue global, ces deux méthodes reposent sur la projection des échantillons dans des espaces de sortie de dimension p variable et la détection de l'erreur générée lorsque p devient suffisamment importante pour conserver la topologie de la distribution.

Le robot pendule de l'exemple jouet considéré au début de ce chapitre est donc maintenant capable de construire une représentation basse dimension de son expérience sensorielle. Dans un premier temps, une exploration du système est réalisée en appliquant la stratégie naïve proposée en 2.4.3 avec une amplitude d'exploration $A = \pi/2$ et un nombre d'échantillons de $N = 500$. La dimension intrinsèque de la distribution générée dans l'espace sensoriel par cette exploration aléatoire est ensuite estimée en appliquant la méthode principale par essai-erreur basée sur CCA que nous venons d'implémenter. Les erreurs de projection et leurs ratios successifs sont présentés figure 2.29. La dimension

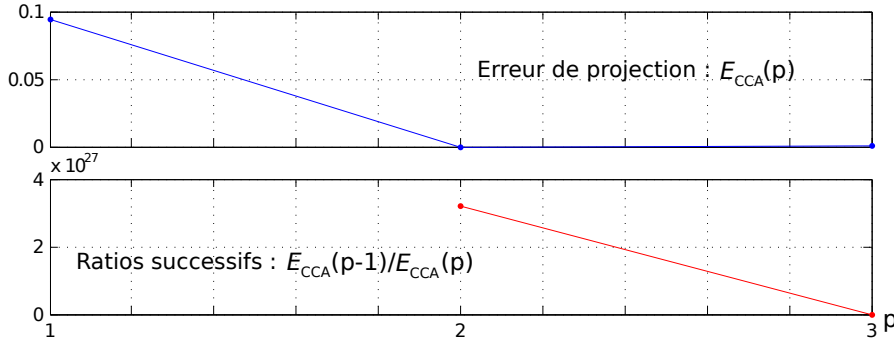


FIGURE 2.29: En haut : erreurs de projections générées par CCA pour p variant de 1 à 3. En bas : ratios successifs des erreurs de projection.

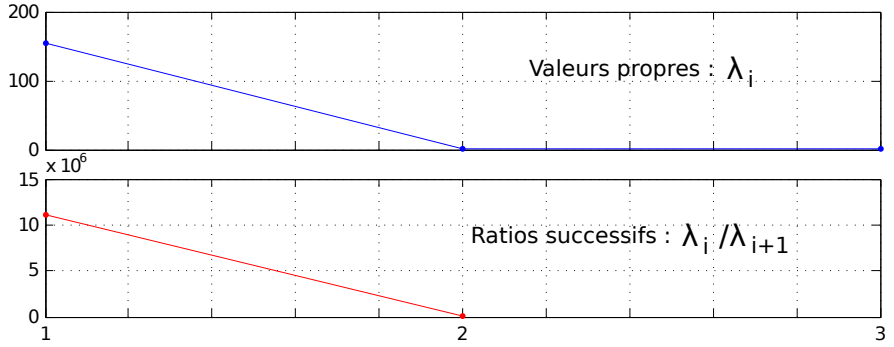


FIGURE 2.30: En haut : valeurs propres λ_i générées par Isomap pour i variant de 1 à 3. En bas : ratios successifs des valeurs propres.

intrinsèque de la sous-variété est estimée à $\hat{l} = 2$. Du fait de l'incapacité inhérente de la méthode par essai-erreur à estimer une dimension intrinsèque de 1, ce résultat est ambigu et ne peut être directement validé. La méthode spectrale auxiliaire basée sur ISOMAP est donc à son tour appliquée afin de vérifier le résultat. Les valeurs propres générées par ISOMAP et leurs ratios successifs sont présentés figure 2.30. La dimension intrinsèque de la sous-variété est cette fois-ci estimée à $\hat{l} = 1$. Ce second résultat permet de lever l'ambiguïté précédente et de certifier que la sous-variété sensorielle est une courbe.

Une représentation interne de l'expérience du robot peut donc être générée en projetant les données dans un espace de sortie de dimension $p = \hat{l} = 1$ grâce à CCA. La distribution résultante n'est pas très intéressante à visualiser du fait de l'unique dimension de l'espace de sortie⁹. Nous pouvons par contre tracer la relation entre les coordonnées internes des échantillons Y_i et les orientations β du pendule auxquelles elles sont associées d'un point de vue extérieur, comme représenté figure 2.31.

L'ensemble de ces traitements permet de constater que le robot est capable de découvrir les caractéristiques de son interaction avec l'environnement au travers de l'analyse de ses données sensorimotrices. Tout d'abord, bien que son espace moteur soit de dimension $N_m = 3$ et son espace sensoriel de dimension $N_s = 3$, il peut découvrir que, lors de son exploration, son état sensoriel décrit une sous-variété de dimension $l = 1$ dans son espace sensoriel. Son interaction avec l'environnement peut donc être décrite par une seule variable. Il peut alors construire une représentation interne euclidienne de dimensionnalité 1 de cette expérience sensorielle. La coordonnée $y(1)$ utilisée pour paramétrer cette droite permet, pour le robot, de caractériser son interaction avec le monde. La relation monotone observable entre $y(1)$ et β dans la figure 2.31 permet de constater qu'il existe

9. Elle peut toutefois être visualisée en projetant la courbe 2.31 sur l'axe des ordonnées

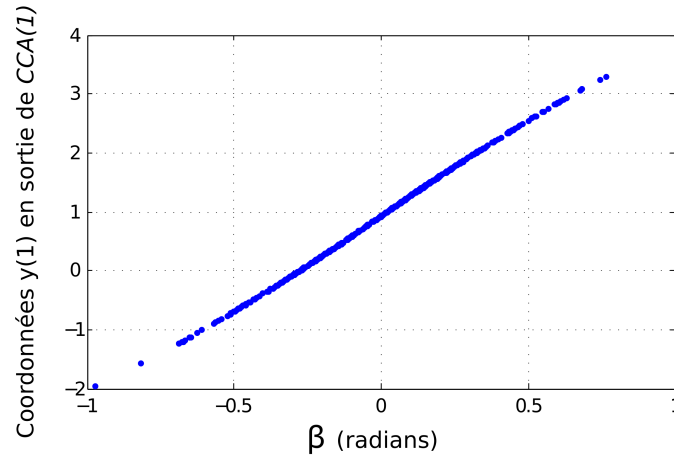


FIGURE 2.31: Il existe une relation monotone entre les coordonnées $y(1)$ des points dans l'espace de représentation (espace de sortie de CCA pour $p = 1$) et la variable β qui permet de décrire, d'un point de vue extérieur, les interactions du système.

bien un homéomorphisme entre l'état du système et la représentation que le robot s'en est construite. À terme, le robot pourra utiliser la variable interne $y(1)$ pour interpréter son flux sensoriel, fixer un objectif interne à atteindre ou encore estimer la Jacobienne de son propre corps.

2.8 Conclusion

L'approche sensorimotrice de la perception propose de caractériser les perceptions d'un robot naïf au travers des interactions qu'il entretient avec l'environnement. Comme nous l'avons vu dans le cas du système robot/environnement jouet, les capacités d'interaction du système contraignent le flux sensoriel accessible au robot. L'ensemble des états sensoriels du robot appartiennent donc à un sous-espace, potentiellement courbe, de l'espace sensoriel. Cet ensemble peut être analysé pour construire une représentation interne des capacités d'interactions du système.

Formellement, nous avons choisi de représenter l'expérience du robot par un échantillonnage de ses espaces sensoriel et moteur. La loi sensorimotrice ϕ permettant de générer l'état sensoriel du robot à partir de la configuration des moteurs et de l'environnement est supposée engendrer une sous-variété différentiable $\mathcal{S}$ plongée dans l'espace sensoriel. Le choix d'une métrique à appliquer aux données sensorielles permet d'envisager l'estimation de leur dimension intrinsèque et leur projection dans un espace de basse dimension. Pour ce faire, deux types de méthodes seront implémentées dans nos robots. La première, utilisée par défaut, est la Curvilinear Component Analysis. Elle permet de projeter les données dans un espace de dimension inférieure en conservant les informations métriques euclidiennes locales de la distribution d'entrée. La seconde, auxiliaire et basée sur ISOMAP, cherche à projeter les données en respectant les distances de graphe de la distribution d'entrée. Chacune de ces deux méthodes permet également d'estimer la dimension intrinsèque du nuage d'entrée en considérant une succession d'espaces de projection de dimension croissante et en repérant la plus faible dimension permettant de conserver la topologie des données.

La projection des données sensorielles dans un espace de représentation interne de même dimensionnalité que la sous-variété sensorielle permet d'obtenir une représentation basse dimension des capacités d'interaction du système robot/environnement. Le robot pourra

l'utiliser pour interpréter de nouvelles informations sensorielles ou encore guider son action vers un objectif fixé dans cet espace interne.

La méthodologie présentée dans ce chapitre sera appliquée dans les chapitre 3 et 4 à des systèmes plus complexes impliquant un plus grand nombre de degrés de liberté dans le système et des environnements mobiles. Elle nous permettra de caractériser l'espace géométrique extérieur que le robot peut percevoir, tout d'abord en estimant sa dimension puis en en construisant une représentation interne.

Chapitre 3

Estimation de la dimension de l'espace

L'approche sensorimotrice de la perception que nous cherchons à appliquer en robotique stipule que l'ensemble des informations nécessaires à la génération d'un comportement intelligent peuvent être extraites du flux sensorimoteur d'un robot. Parmi les nombreuses caractéristiques du monde susceptibles d'être ainsi découvertes, les propriétés spatiales présentent un intérêt particulier. La construction d'une représentation interne de l'espace extérieur peut en effet permettre de décrire l'expérience du robot en termes de positions, distances et déplacements dans un cadre commun au robot et aux différents objets de l'environnement.

Nous avons évoqué au chapitre 1 comment un agent naïf peut découvrir l'espace extérieur dans lequel il évolue. Comme l'a proposé H.Poincaré, l'analyse du flux sensorimoteur du robot peut révéler l'existence de variations sensorielles particulières, dites *compensables*, qui traduisent directement les capacités de déplacement du système robot/environnement. L'étude de cet ensemble de variations compensables permet ainsi d'accéder, sans connaissance *a priori*, aux propriétés de l'espace géométrique extérieur.

Ce chapitre est consacré à l'estimation de la dimension de l'ensemble des variations compensables, permettant indirectement de caractériser la dimension de l'espace extérieur. Tout d'abord, les idées développées par H.Poincaré concernant notre perception de la dimension de l'espace et les travaux qu'il a inspirés sont brièvement abordés. La méthode d'estimation de dimension proposée par D.Philipona est ensuite présentée en détail puis appliquée à une système simulé [71]. Enfin, une extension de ses résultats aux mouvements d'amplitude finie est proposée. Les propriétés de la loi sensorimotrice du système simulé rendront l'estimation de la dimension de l'espace par des méthodes non-linéaires délicate. Un algorithme de ré-échantillonnage actif et itératif de l'expérience du robot sera alors proposé pour améliorer les performances de ces méthodes.

3.1 Les intuitions de H.Poincaré et la dimension de l'espace extérieur

La question de la perception de l'espace géométrique extérieur a été abordée par H.Poincaré il y a plus d'un siècle. Ses intuitions concernant la manière dont notre cerveau, enfermé dans sa boîte crânienne, peut découvrir l'existence d'un espace extérieur ont déjà été largement discutées au chapitre 1. Ci-dessous, le cheminement de pensée qu'il a développé dans l'article "L'espace et la géométrie" est brièvement retracé [53]. Deux

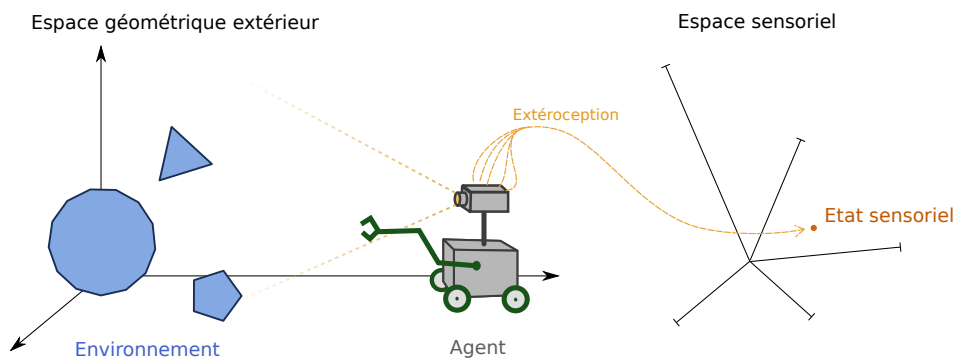


FIGURE 3.1: L'espace géométrique extérieur dans lequel l'agent et l'environnement évoluent a des propriétés différentes de l'espace sensoriel réellement accessible au système d'analyse de l'agent.

travaux récents inspirés de ses idées concernant la dimension de l'espace sont ensuite présentés en détail.

3.1.1 Rappel : les idées de H.Poincaré

Dans "L'espace et la géométrie", H.Poincaré a choisi d'abord la question de la perception de l'espace du point de vue d'un cerveau naïf enfermé dans sa boîte crânienne. A partir de ses seuls flux moteur et sensoriel, comment ce dernier peut-il découvrir et caractériser l'espace extérieur dans lequel le corps qu'il contrôle évolue ?

L'espace géométrique et l'espace sensoriel : Les réflexions d'H.Poincaré partent du constat que l'espace extérieur que nous percevons est différent de l'espace sensoriel auquel notre cerveau a accès. Ainsi, l'ensemble des excitations nerveuses provenant des capteurs du corps décrivent un espace dit *sensoriel*¹, comme illustré figure 3.1. Ses propriétés sont très différentes de celles de l'espace géométrique extérieur que nous percevons :

- L'espace géométrique est 3D tandis que la dimension de l'espace sensoriel est égale au nombre - très important - de fibres nerveuses transmettant des informations sensorielles au cerveau.
- L'espace géométrique est infini tandis que l'espace sensoriel est intrinsèquement borné par les limites d'excitabilité de ses neurones.
- L'espace géométrique est continu tandis que l'espace sensoriel peut présenter des discontinuités (par exemple : seuils d'excitabilité des neurones).
- L'espace géométrique est homogène et isotrope tandis que l'espace sensoriel est intrinsèquement hétérogène du fait des différentes natures d'informations sensorielles qui le composent.

Afin de souligner encore leur différence de nature, notons qu'un point dans l'espace géométrique est associé à une position alors qu'un point dans l'espace sensoriel correspond à un état sensoriel généré par l'observation d'une scène.

Les variations sensorielles compensables : Pour H.Poincaré, la découverte de l'espace géométrique passe par celle des *déplacements* (translations et rotations) qu'il permet

1. H.Poincaré emploie le terme *représentatif* pour qualifier cet espace ; le terme *sensoriel* lui est ici préféré afin d'éviter toute ambiguïté avec les représentations basse dimension internes que le robot peut construire.

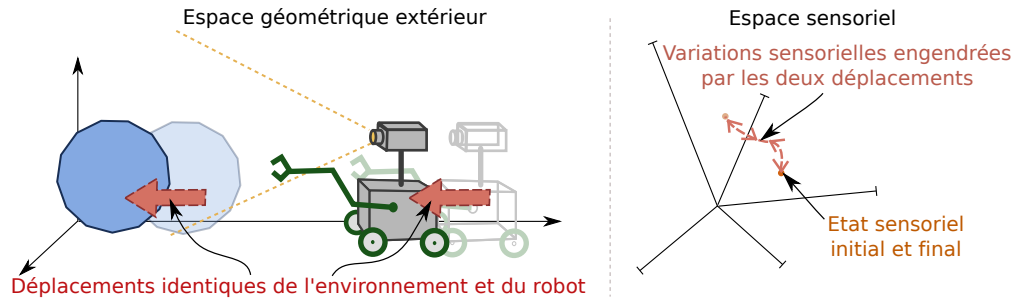


FIGURE 3.2: Les mouvements des objets de l'environnement peuvent être compensés d'un point de vue sensoriel par une action de l'agent. Ainsi, les états sensoriels associés aux configurations initiale et finale du système représenté sont identiques.

au système. La tâche pour l'agent est donc de les isoler dans le flux d'informations sensorimotrices qui lui parviennent.

Sauf exceptions évoquées au chapitre 1 (voir 1.6.4), les déplacements du système agent/environnement se traduisent, du point de vue de l'agent, par des variations sensorielles compensables. La nature particulière de l'espace permet en effet à l'agent et à son environnement d'effectuer des déplacements identiques. Lorsque l'environnement bouge, l'agent peut donc compenser la variation sensorielle engendrée en réalisant un mouvement identique et en retrouvant la même position relative initiale avec l'environnement, comme représenté figure 3.2. Notons que pour réaliser cette compensation sensorielle, seuls les capteurs du robot doivent effectuer un déplacement équivalent à celui de l'environnement ; la configuration des parties de son corps non-porteuses de capteurs peut ainsi changer durant la compensation. Pour rappel, une discussion plus détaillée sur le concept de variation sensorielle compensable est disponible en 1.6.3 et 1.6.4.

La dimension de l'espace géométrique : Pour H.Poincaré, la dimension de l'espace géométrique perçu peut être déduite de la dimensionnalité de l'ensemble des variations sensorielles compensables qu'un agent peut produire. Notons toutefois que ces deux dimensions ne sont pas directement égales. La dimension de l'espace géométrique ne peut en effet être spécifiée qu'après avoir dissocié les translations et les rotations du système à l'origine des variations sensorielles compensables (voir 1.6.4).

Cette approche propose une définition subjective de la perception de l'espace géométrique. Celle-ci est construite au travers des expériences sensorimotrices de l'agent et dépend directement de ses capacités d'action. La dimension de l'espace géométrique perçu peut ainsi varier selon les mouvements que l'agent est capable de générer. Tout déplacement de l'environnement que l'agent ne peut compenser ne sera pas perçu comme tel mais comme un changement d'état du système (voir 1.6.2).

3.1.2 Reprise des idées de H.Poincaré

Les idées de H.Poincaré ont inspiré différents travaux. En particulier, deux approches ont récemment été proposées pour estimer la dimension de l'espace extérieur au travers de l'analyse du flux sensorimoteur d'un agent naïf. Ci-dessous, chacune de ces méthodes est présentée brièvement .

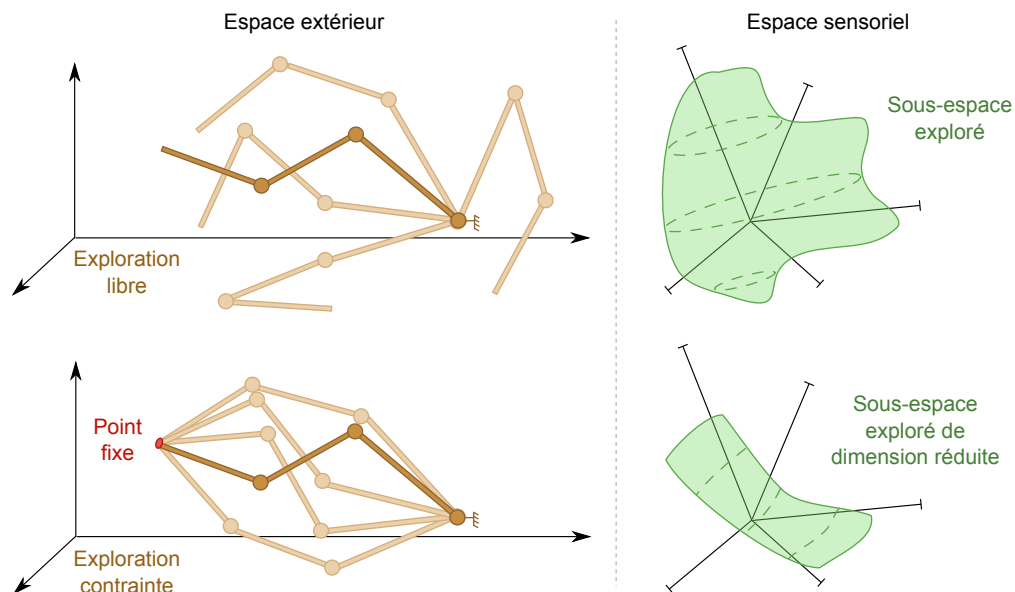


FIGURE 3.3: En haut : une exploration libre permet d'explorer un sous-espace sensoriel généré par les degrés de liberté effectifs du bras. En bas : l'ajout d'une contrainte de fixité d'un point du bras restreint le sous-espace sensoriel que l'agent peut parcourir. Le nombre de dimensions perdues lors de l'ajout de la contrainte correspond à la dimension de l'espace géométrique extérieur.

3.1.2.1 Estimation de la dimension de l'espace via la fixation d'un point du robot : les travaux de A.A.Frolov

En 2009, A.A.Frolov publiait une présentation en anglais d'un de ses articles initialement publié en russe [84]. Il y propose une méthode d'estimation de la dimension de l'espace basée sur la perte de degrés de liberté engendrée par une fixation ponctuelle de l'agent.

Principe de l'estimation : Soit un bras muni de nombreux actionneurs contrôlés par des variables $m(i)$. Comme illustré dans l'exemple de la figure 3.3, son nombre de degrés de liberté (ddl) effectifs est contraint par les propriétés du système, et notamment par la structure du bras. Il est donc potentiellement inférieur au nombre d'actionneurs N_m . Soit maintenant un ensemble de capteurs proprioceptifs et/ou extéroceptifs positionnés sur le bras. Dans un environnement fixe, l'ensemble des états sensoriels possibles de l'agent est homéomorphe à l'ensemble de ses configurations spatiales. La dimension de la sous-variété sensorielle explorable est donc égale au nombre de ddl effectifs du bras. Supposons maintenant qu'une seconde exploration est réalisée alors qu'un point du bras est contraint de rester fixe dans l'espace. Le nombre de ddl effectifs du bras se retrouve réduit d'autant de dimensions qu'il faut de variables pour fixer le point considéré, comme illustré figure 3.3. La perte de dimensionnalité engendrée correspond donc directement à la dimension de l'espace géométrique. Ainsi, si l'espace est 3D, il faut fixer les 3 coordonnées du point considéré et le nombre de ddl effectifs se retrouve réduit de 3 par rapport à l'exploration libre initiale.

Méthode proposée par A.A.Frolov : La fixation d'un point du bras permet une estimation aisée de la dimension de l'espace. Néanmoins, l'agent naïf n'a aucun moyen de garantir cette fixité puisqu'il ne possède aucune représentation de son corps ou même

de l'espace dans lequel le point est censé être stationnaire.

Afin de contourner cette difficulté, A.A.Frolov propose de réaliser l'estimation de dimension dans le cas d'un auto-contact. Ainsi, l'agent se voit adjoindre un corps couvert de capteurs tactiles et auquel le bras est rattaché. L'auto-contact est réalisé lorsque l'extrémité du bras entre en contact avec le corps de l'agent. La fixité de l'extrémité du bras peut alors être garantie en s'assurant que la sensation tactile ne varie pas lors de la seconde exploration. L'estimation de la dimension de l'espace peut alors être menée en déterminant la perte de ddl entre les explorations libre et contrainte.

Portée de l'estimation et limitations : La méthode proposée par A.A.Frolov permet une estimation facile de la dimension de l'espace. Elle souffre toutefois de plusieurs défauts.

Tout d'abord, l'estimation de dimension n'est réalisée que sur la surface tactile de l'agent et en un point. L'exploration de l'espace est donc partielle et locale. Sa dimensionnalité doit être supposée identique en dehors des frontières de l'agent.

De plus, la distinction entre les sensations tactiles (du corps de l'agent) et le reste de ses sensations (extéroceptives et proprioceptives du bras) n'est pas justifiée. Lors de l'exploration contrainte, l'agent *a priori* naïf ne peut donc choisir directement de conserver les premières constantes tandis que les secondes sont libres de varier. Une étape préalable de découverte de la modalité tactile serait donc à envisager.

Enfin, la méthode s'inspire de l'approche sensorimotrice proposée par H.Poincaré mais ne repose pas sur les variations sensorielles compensables supposées à la base de la perception de l'espace. Ainsi, l'environnement n'est jamais amené à se déplacer ; empêchant toute possibilité de compensation. La dimension extraite par la méthode ne caractérise donc pas directement l'espace géométrique extérieur mais plutôt les contraintes qu'il impose sur les ddl du bras.

3.1.2.2 Estimation de la dimension via le groupe des mouvements compensables : les travaux de D.Philipona

En 2003, Philipona & al. ont proposé une méthode d'estimation de la dimension de l'espace géométrique basée sur l'ensemble des variations sensorielles compensables d'un système [71].

Principe de l'estimation : Soit un système quelconque formé d'un agent et d'un environnement. Par l'intermédiaire d'une stratégie d'exploration particulière, il est possible d'estimer le nombre de ddl qu'ils partagent. Ces caractéristiques communes relèvent directement des propriétés spatiales du système (voir 1.6.2).

L'exploration est réalisée en trois étapes. Dans un premier temps, seul l'état de l'agent est amené à changer tandis que l'environnement est fixe. Dans un second temps, c'est l'état de l'environnement qui varie alors que l'agent est statique. Enfin, dans un troisième temps, l'ensemble du système est libre de changer.

Une sous-variété sensorielle différente est parcourue lors de chacune de ces sous-explorations. Leurs dimensionnalités respectives dépendent du nombre de ddl du système effectivement mis en jeu dans chaque cas. Néanmoins, les caractéristiques spatiales du système étant partagées par l'agent et l'environnement, un certain nombre de ddl se retrouvent impliqués à la fois lorsque seul l'agent bouge et lorsque l'environnement bouge. La dimensionnalité cumulée des deux sous-variétés sensorielles associées se retrouve ainsi supérieure à la dimension de celle engendrée lorsque l'ensemble du système bouge. La différence entre

les deux permet d'estimer le nombre de ddl spatiaux du système et donc la dimension de l'ensemble des mouvements compensables.

Une formalisation plus complète de cette approche sera proposée par la suite et permettra d'aborder les avantages et limitations de cette stratégie d'exploration.

3.1.3 Les mouvements compensables et la dimension de l'espace

Pour H.Poincaré, la dimension de l'espace géométrique perçu par un agent peut être déterminée en étudiant l'ensemble des variations sensorielles compensables du système qu'il forme avec son environnement. Les deux dimensions ne sont toutefois pas directement égales. Ainsi, un espace géométrique 3D permet par exemple d'effectuer 3 translations et 3 rotations indépendantes. Chacun de ces mouvements (et leurs différentes compositions) se traduit, du point de vue de l'agent, par une variation sensorielle compensable². Pour une exploration complète du système, l'ensemble de ces variations particulières sera donc de dimension $3 + 3 = 6$.

Une étape supplémentaire est donc à envisager afin de distinguer les rotations des translations et de déterminer la dimension réelle de l'espace. Celle-ci pourrait par exemple reposer sur la nature périodique des rotations, le fait qu'elles laissent un point de l'espace invariant ou leur propriété de non-commutativité (voir 1.6.4). A notre connaissance, aucun algorithme n'a jusqu'à présent été proposé pour réaliser une telle distinction entre translations et rotations du point de vue sensoriel du robot.

3.1.4 Conclusion

Un robot naïf peut extraire de son flux sensoriel des expériences particulières présentant la particularité d'être compensables. D'un point de vue extérieur, ces expériences correspondent à des déplacements du robot ou de l'environnement. Ainsi, lorsque l'environnement effectue un mouvement rigide quelconque, le robot peut le compenser sensoriellement en effectuant un déplacement identique (déplacement de ses capteurs).

La nature particulière des variations sensorielles compensables fut initialement évoquée par H.Poincaré pour expliquer comment notre cerveau peut découvrir l'espace géométrique euclidien extérieur. Ses intuitions ont inspiré différents travaux, dont ceux de D.Philipona qui seront repris plus en détail ci-après.

3.2 Reprise des travaux de Philipona

La méthode d'estimation de dimension de l'espace géométrique proposée par D.Philipona & al. est présentée ci-après puis appliquée à un système simulé. La formalisation mathématique de l'approche et l'algorithme d'estimation de dimension sont tout d'abord détaillés. Les résultats de la simulation et les limitations de la méthode sont ensuite discutés.

3.2.1 Formalisation mathématique

La formalisation de la méthode d'estimation de dimension est divisée en deux parties. La première s'attache à décrire la stratégie d'exploration du système ainsi que les différentes sous-variétés sensorielles générées. La seconde décrit comment la dimension de

2. on suppose ici que les capacités d'action de l'agent lui permettent d'effectuer tout type de mouvement dans l'espace.

l'ensemble des variations sensorielles compensables peut être estimée à partir de l'analyse de ces sous-variétés.

La stratégie d'exploration : Le même formalisme mathématique que celui proposé au chapitre 2 est utilisé pour décrire le système. Seule l'échelle à laquelle est réalisée l'étude est différente. Ainsi, les propriétés du système sont examinées localement autour d'un point de fonctionnement.

Soit $\{dS\}_{C_0}$ l'espace tangent à la sous-variété sensorielle $\mathcal{S}$ au point de fonctionnement $C_0 = (M_0, E_0)$ tel que $S_0 = \phi(C_0) = \phi(M_0, E_0)$, avec ϕ la loi sensorimotrice du système ((2.13) page 38). Les variations sensorielles générées par un changement d'état du système peuvent être décomposées comme suit :

$$dS|_{C_0} = \frac{\partial \phi}{\partial M}|_{C_0} \cdot dM + \frac{\partial \phi}{\partial E}|_{C_0} \cdot dE. \quad (3.1)$$

Ces deux composantes représentent les variations sensorielles dues respectivement aux changements d'état de l'agent et de l'environnement. La première appartient au sous-espace $\{dS|_{C_0}\}_{dE=0}$ contenant l'ensemble des variations générées lorsque seule la configuration motrice M varie. À l'inverse, la seconde appartient au sous-espace $\{dS|_{C_0}\}_{dM=0}$ contenant l'ensemble des variations générées lorsque seule la configuration environnementale E varie.

L'espace tangent $\{dS|_{C_0}\}$ est donc engendré par l'addition de ces deux sous-espaces :

$$\{dS|_{C_0}\} = \{dS|_{C_0}\}_{dE=0} + \{dS|_{C_0}\}_{dM=0}. \quad (3.2)$$

La stratégie d'exploration du système consiste à explorer successivement les trois espaces sensoriels $\{dS|_{C_0}\}_{dE=0}$, $\{dS|_{C_0}\}_{dM=0}$ et $\{dS|_{C_0}\}$:

- en ne faisant varier que l'état moteur M .
- en ne faisant varier que l'état environnemental E .
- en faisant varier l'état de tout le système $C = (M, E)$.

Estimation de la dimension des variations compensables : L'espace des variations sensorielles peut être engendré à partir des sous-espaces associés aux seuls changements moteurs et environnementaux. Néanmoins, l'intersection $I = \{dS|_{C_0}\}_{dE=0} \cap \{dS|_{C_0}\}_{dM=0}$ de ces sous-espaces n'est pas nécessairement nulle, comme illustré figure 3.8. En d'autres termes, il existe des variations sensorielles qui peuvent être générées soit par un changement d'état de l'agent, soit par un changement d'état de l'environnement. Ces variations sont donc liées aux propriétés spatiales du système et l'intersection I correspond à l'ensemble des variations compensables du système.

La dimension de d de l'intersection I peut être déduite des dimensions de chacun des trois espaces sensoriels parcourus lors de l'exploration. Ainsi, soit m la dimension de $\{dS|_{C_0}\}_{dE=0}$, e la dimension de $\{dS|_{C_0}\}_{dM=0}$ et b la dimension de $\{dS|_{C_0}\}$. Ces dimensions sont respectivement égales au nombre de ddl effectifs du système lorsque seul l'agent bouge, lorsque seul l'environnement bouge et lorsque l'ensemble du système bouge³. La propriété de transversalité des sous-espaces nous permet d'écrire que :

$$\begin{aligned} \dim(\{dS|_{C_0}\}) &= \dim(\{dS|_{C_0}\}_{dE=0}) + \dim(\{dS|_{C_0}\}_{dM=0}) - \dim(I), \\ b &= m + e - d, \end{aligned} \quad (3.3)$$

3. Notons que m , e et b ne sont pas nécessairement égales à N_m , N_e et $N_m + N_e$ puisque le système peut présenter des redondances.

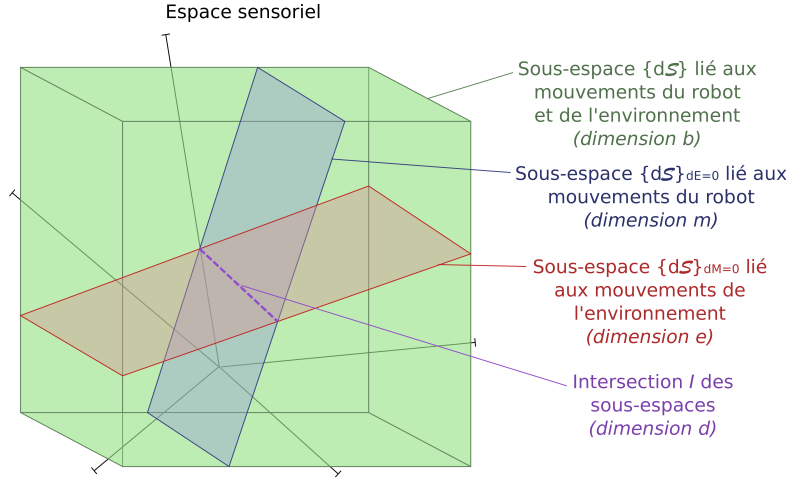


FIGURE 3.4: Représentation des sous-espaces sensoriels parcourus lorsque les configurations motrice et environnementale varient, lorsque seule la configuration motrice varie et lorsqu'uniquement la configuration environnementale varie. L'intersection de ces deux derniers sous-espaces peut être non-nulle. Certaines variations sensorielles peuvent donc être générées soit par l'agent, soit par l'environnement.

où $\dim(\cdot)$ représente la dimension de l'espace considéré.

Si le système présente une redondance liée à des propriétés spatiales, la dimension d de l'intersection est non-nulle et peut être estimée à partir de m , e et b :

$$d = m + e - b. \quad (3.4)$$

Algorithme linéaire d'estimation de d : L'estimation de d nécessite de déterminer les dimensions m , e et b des espaces sensoriels parcourus respectivement lorsque seul l'agent bouge, lorsque seul l'environnement bouge et lorsque l'ensemble du système bouge. Chacune de ces sous-explorations est réalisée en tirant aléatoirement un ensemble de $N = 1000$ variations d'état ΔC_i autour d'une configuration de référence $C_0 = (M_0, E_0)$. Suivant le type de sous-exploration considéré, seule une partie du vecteur de configuration du système C est amenée à varier⁴. L'amplitude maximale de variation A de chaque variable d'état est prise infinitésimale afin de garantir que seul l'espace tangent aux sous-variétés sensorielles est effectivement parcouru.

Les $N = 1000$ variations sensorielles générées par chaque sous-exploration sont obtenues en appliquant la loi sensorimotrice du système :

$$\Delta S_i = S_i - S_0 = \phi(C_0 + \Delta C_i) - \phi(C_0), \quad (3.5)$$

et stockées dans trois matrices de données distinctes : $Data_m$, $Data_e$ et $Data_b$ de taille $N_s \times N$. La dimension de chaque sous-espace ainsi échantillonné est estimée par une méthode spectrale linéaire basée sur une décomposition en valeurs singulières (DVS) de

4. Les variables environnementales restent égales à E_0 lorsque seul l'agent bouge et les variables motrices restent égales à M_0 lorsque seul l'environnement bouge.

ces matrices :

$$\begin{aligned} Data_j &= U.\Omega.V^T, \\ U, V &: \text{matrices unitaires,} \\ \Omega &= \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \dots \\ 0 & \omega_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

avec $j = \{m, e, b\}$. De manière équivalente à la méthode spectrale présentée en 2.7.2.1, la dimension de chaque distribution est estimée en repérant la limite entre valeurs singulières ω_i significatives et non-significatives :

$$\hat{j} = \underset{i}{\operatorname{argmax}} \left(\frac{\omega_i}{\omega_{i+1}} \right), \text{ avec } j \in \{m, e, b\}. \quad (3.7)$$

L'équation (3.8) est ensuite appliquée pour déterminer une estimation de d :

$$\hat{d} = \hat{m} + \hat{e} - \hat{b}. \quad (3.8)$$

3.2.2 Application à un système simulé

La méthode d'estimation de d proposée par D.Philipona est appliquée à un système simulé. Ci-dessus, l'environnement et l'agent sont successivement présentés. Les résultats statistiques de l'estimation de dimension sont ensuite détaillés et discutés.

3.2.2.1 Le système robot/environnement

Le système, représenté figure 3.5, est constitué d'un agent et d'un environnement plongés dans un espace géométrique 3D euclidien.

L'environnement : L'environnement est constitué de $N^{sources} = 3$ sources lumineuses ponctuelles évoluant sur une sphère de rayon 1 mètre centrée sur l'agent. La position de chaque source k est définie par son azimuth $az(k)$ et son élévation $el(k)$. Chaque source peut se déplacer indépendamment et librement sur la sphère. Ces $2N^{sources} = 6$ degrés de liberté en rotation sont commandables indépendamment par 6 variables environnementales $e(i)$. Les sources lumineuses émettent un flux lumineux identique et constant, supposé unitaire⁵.

L'agent : L'agent est une tête sphérique mobile munie de deux yeux également mobiles. La tête est centrée sur l'origine $[0, 0, 0]$ du repère monde. Au repos, la face avant de la tête et les deux yeux sont orientés dans la direction $[0, 1, 0]$. Les coordonnées du centre des yeux dans le repère de la tête sont : $P_{oeil_g}]_{tete} = [-5, 5, 5]$ cm pour l'oeil gauche et $P_{oeil_d}]_{tete} = [5, 5, 5]$ cm pour l'oeil droit. Chaque oeil est constitué d'une lentille de type sténopé⁶ et d'une rétine carrée de largeur 2 cm située à 1 cm en aval de celle-ci. Chaque rétine est parsemée aléatoirement de $N^{cones} = 20$ cellules photo-sensibles, nommées *cônes* par la suite par analogie avec le

5. Chaque source étant de même puissance, la valeur absolue du flux lumineux n'a en réalité aucune importance dans la simulation (voir (3.9)).

6. Le capteur n'est donc pas rigoureusement équipé d'une lentille mais simplement d'un objectif muni d'un trou de très faible diamètre.

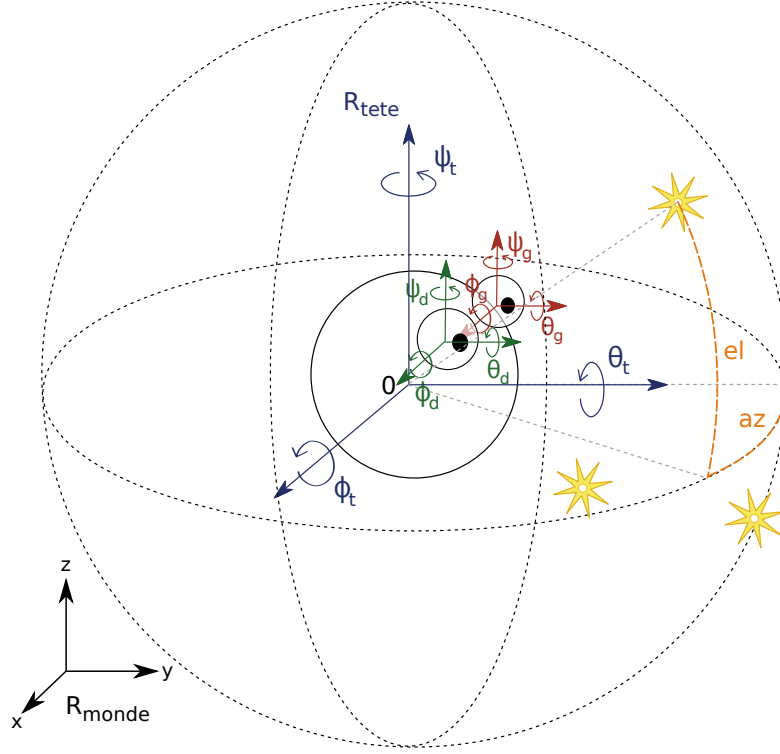


FIGURE 3.5: L'environnement est constitué de sources lumineuses ponctuelles reposant sur une sphère de rayon 1 m centrée sur la tête. Leurs positions sont définies par leurs azimuts et élévations dans le repère monde. Le robot est une tête munie de deux yeux mobiles. Les orientations de la tête dans le repère monde et des yeux dans le repère de la tête sont définies par leurs angles de tangage, roulis et lacet.

système visuel humain. La figure 3.6 illustre la structure d'un oeil et le principe de la projection des sources lumineuses.

L'excitation partielle générée par la source k sur le cône i est :

$$s(i, k) = a \frac{\exp\left(-d(P_{\text{cône}_i}|_{\text{retine}}, P_{\text{proj}_k}|_{\text{retine}})^2\right)}{d(P_{\text{oeil}}|_{\text{monde}}, P_{\text{source}_k}|_{\text{monde}})^2}, \quad (3.9)$$

avec a la sensibilité du cône fixée arbitrairement à 10^{-3} , $d(\cdot)$ la distance euclidienne, $P_{\text{cône}_i}|_{\text{retine}}$ la position du cône i sur la rétine, $P_{\text{proj}_k}|_{\text{retine}}$ la position de la projection de la source k sur la rétine, $P_{\text{oeil}}|_{\text{monde}}$ la position du centre de la lentille dans le repère monde et $P_{\text{source}_k}|_{\text{monde}}$ la position de la source k dans le repère monde. L'excitation totale du cône i générée en considérant l'ensemble des sources lumineuses de l'environnement est :

$$s(i) = \sum_{k=1}^{N_{\text{sources}}} s(i, k). \quad (3.10)$$

Les orientations de la tête et des yeux peuvent évoluer librement et indépendamment. Elles sont définies respectivement par les angles de tangage, roulis et lacet $[\alpha_t, \theta_t, \psi_t]|_{\text{monde}}$ pour la tête dans le repère monde, $[\alpha_g, \theta_g, \psi_g]|_{\text{tete}}$ pour l'oeil gauche dans le repère de la tête et $[\alpha_d, \theta_d, \psi_d]|_{\text{tete}}$ pour l'oeil droit dans le repère de la tête. Ces 9 degrés de liberté en rotation sont commandés par 9 variables motrices indépendantes $m(i)$. Notons qu'aucun phénomène de vergence n'est implémenté et que les mouvements des yeux sont indépendants.

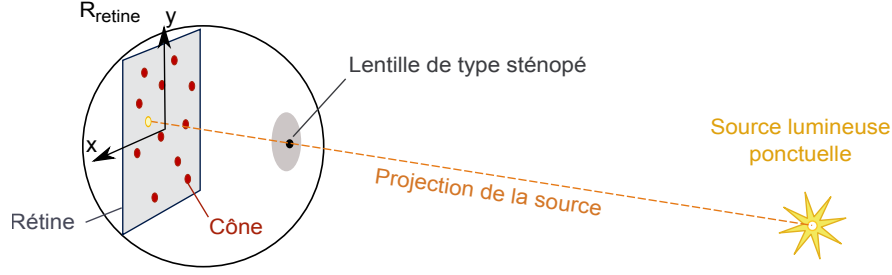


FIGURE 3.6: Les sources ponctuelles sont projetées sur la rétine de chaque oeil au travers des lentilles de type sténopé. Sur la rétine, la distance entre la projection de la source et chaque cône permet de générer les sensations visuelles du robot.

3.2.3 Résultats de la simulation

Evaluation des performances : La performance de la méthode d'estimation de d est évaluée pour différentes amplitudes de mouvement A comprises entre 10^{-6} et 10^2 degrés. Afin de disposer de résultats statistiques, 100 estimations sont réalisées pour chaque valeur de A . Chaque nouvel essai correspond à un scénario différent où la configuration de référence du système et l'ensemble des paramètres aléatoires de la simulation sont à nouveau tirés :

- les positions des cônes sur la rétine, $P_{cône_i}]_{rétine}$ avec $i \in [1, N^{cônes}]$, tirées à partir d'une distribution uniforme dans l'intervalle $[-1, 1]^2$.
- la configuration environnementale de référence E_0 associée aux positions initiales des sources lumineuses, tirée à partir d'une distribution uniforme dans l'intervalle $[-45^\circ, 45^\circ]^{N_e}$.
- l'échantillonnage de l'espace d'état du système généré via les variations de configuration ΔC_i (voir 2.4.3 et 3.2.1).

Notons que, de manière arbitraire, la configuration de référence M_0 de l'agent est fixée à $[0]^{N_m}$ pour tous les essais afin de garantir que les sources lumineuses soient situées dans son champ visuel frontal.

Résultats de l'estimation de m , e , b et d : Pour chaque amplitude A , la performance de la méthode est définie comme le pourcentage d'estimations correctes de m , e , b et d . L'ensemble de ces pourcentages sont représentés figure 3.7 en fonction de l'amplitude A . Ces courbes permettent tout d'abord de constater que l'estimation des dimensions m , e , b et d varie selon l'amplitude A . Ce phénomène s'explique par l'hypothèse d'exploration locale posée par D.Philipona (3.2.1). La méthode d'estimation de dimension linéaire décrite précédemment suppose en effet que les données sensorielles appartiennent à un sous-espace linéaire. La loi sensorimotrice ϕ étant non-linéaire et la sous-variété sensorielle qu'elle engendre étant potentiellement courbe, cette hypothèse n'est vérifiée que lorsque l'espace tangent à la sous-variété est - approximativement - exploré. Cette condition n'est remplie que pour des amplitudes A très faibles générant des petits mouvements du système et donc des variations sensorielles infinitésimales.

Cette interprétation est confirmée par l'estimation correcte des différentes dimensions pour les plus faibles amplitudes A . Ainsi, pour $A = 10^{-6}$, m , e , b et d sont respectivement estimées à 9, 6, 12 et 3. Ces valeurs correspondent bien au nombre de ddl effectifs du système dans chaque cas de figure :

- Lorsque seul l'agent bouge, le nombre de ddl du système est égal au nombre $N_m = 9$ de variables indépendantes pour décrire l'état de la tête.

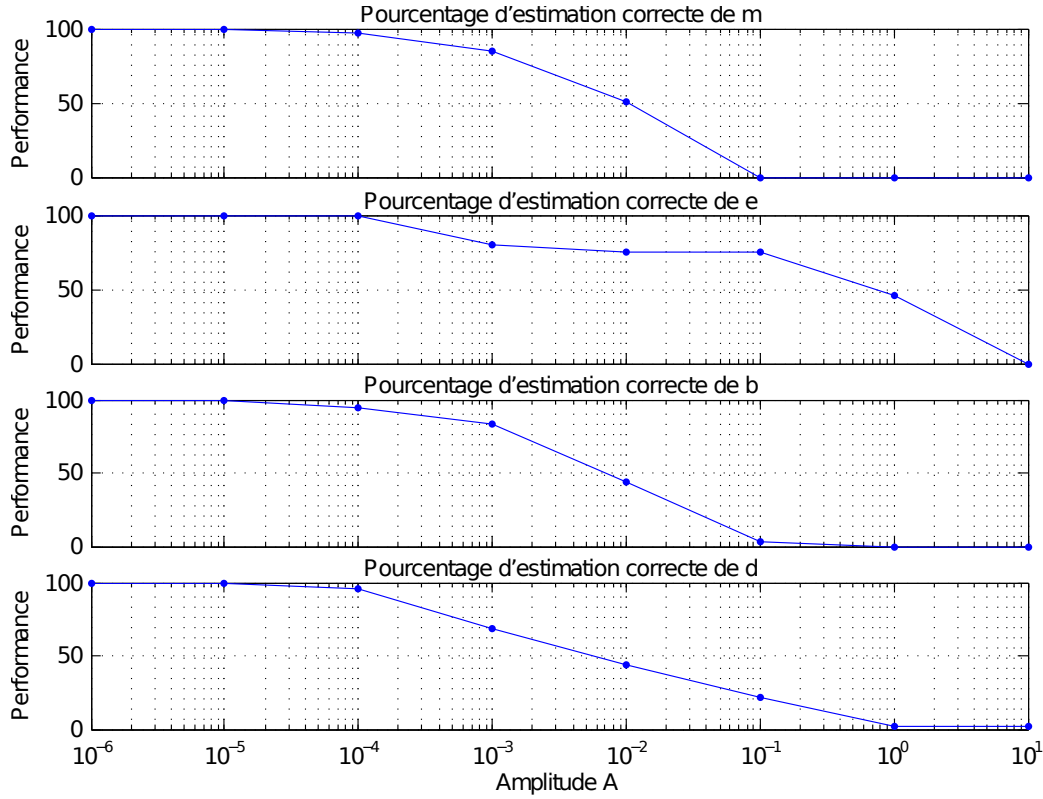


FIGURE 3.7: Pourcentage d'estimations correctes des dimensions m , e , b et d sur 100 essais successifs avec la méthode linéaire. La performance est satisfaisante pour des variations infinitésimales de la configuration du système et diminue en même temps que l'amplitude A augmente.

- Lorsque seul l'environnement bouge, le nombre de ddl du système est égal au nombre $N_e = 9$ de variables indépendantes pour décrire la configuration des sources lumineuses.
- Lorsque l'agent et l'environnement bougent, le nombre de ddl du système est inférieur à $N_m + N_e$ du fait des propriétés spatiales redondantes entre la tête et les sources lumineuses. En tant qu'observateur extérieur, nous pouvons déterminer que ces redondances, associées aux mouvements compensables du système, sont les 3 rotations de la tête et des sources centrées sur l'origine du repère monde. La dimension d de l'ensemble des variations sensorielles compensables est donc égale à 3 et l'équation (3.3) nous permet d'affirmer que b est égale à 12.

3.2.4 Discussion

La méthode proposée par D.Philipona permet d'estimer la dimension d de l'espace des variations sensorielles compensables liées aux déplacements du système. Différentes remarques sur l'intérêt et les limitations de cette approche sont discutées ci-après.

Limitation de l'amplitude des mouvements : Comme l'illustre la figure 3.7, la méthode linéaire d'estimation de dimension ne fonctionne que pour des amplitudes de mouvements infinitésimales garantissant une exploration locale des sous-variétés sensorielles. Ainsi, dans le cas du système étudié, ses performances ne sont satisfaisantes que pour des amplitudes inférieures à $A = 10^{-4}$ degrés. Au-delà, la courbure des nuages

d'échantillons générés dans l'espace sensoriel devient significative et ne permet plus l'application d'une méthode linéaire⁷. Des amplitudes aussi faibles ne permettent pas d'envisager l'application directe de la méthode à des systèmes robotiques réels pour lesquels une telle précision de mouvement est difficilement réalisable.

Réalisation de la stratégie d'exploration : La simulation des trois sous-explorations nécessaires à l'estimation de m , e et b ne pose aucune difficulté. Cette stratégie se révèle toutefois difficile à appliquer à un système réel. L'agent n'a en effet pas directement accès aux variables environnementales $e(i)$. Il ne peut donc garantir que l'environnement est statique lorsque seul son état moteur doit varier. De même, il ne peut garantir que l'état de l'environnement varie lorsque tout le système doit bouger. L'agent peut seulement garantir que les variations sensorielles générées lorsqu'aucune commande motrice n'est émise sont liées à un changement de l'environnement.

Des heuristiques d'exploration devraient donc être envisagées pour contourner ces difficultés. L'agent pourrait, par exemple, retourner à sa configuration motrice de référence M_0 après chaque mouvement afin de vérifier si l'état environnemental a changé durant ce court intervalle de temps.

Portée des estimations de dimension : L'estimation des dimensions m , e , b et d est réalisée localement autour d'un point de fonctionnement $C_0 = (M_0, E_0)$ du système. La multiplication de ces estimations en une multitude de points de fonctionnement répartis dans l'espace d'état du système peut permettre de généraliser ces résultats. Ainsi, si $\hat{m}$, $\hat{e}$, $\hat{b}$ et $\hat{d}$ ont des valeurs constantes⁸ en tout point de fonctionnement, elles peuvent être considérées comme valables sur l'ensemble des sous-variétés sensorielles considérées.

3.2.4.1 Autres stratégies d'estimation de d

Plutôt que de mettre en place la stratégie d'exploration en trois étapes proposée en 3.2.1, d'autres méthodes d'estimation de la dimension des mouvements compensables pourraient être envisagées. Une première, plus directe, consisterait à chercher directement dans le flux sensoriel des variations "compensées" lors d'une exploration aléatoire de tout le système. Ce type de démarche pose toutefois plusieurs difficultés. Tout d'abord, la probabilité que le système réalise rigoureusement un mouvement compensable est extrêmement faible puisqu'elle revient à tirer aléatoirement une variation de configuration du système pour laquelle le robot et l'environnement réalisent exactement le même déplacement. De plus, il est impossible de garantir que les variations compensables ainsi découvertes soient représentatives de l'ensemble des mouvements compensables. Sa dimension pourrait donc être sous-estimée.

Une seconde méthode pourrait consister à déterminer la dimension du noyau de la Jacobienne associée à la loi sensorimotrice ϕ . En pratique, cette dimension pourrait être estimée en déterminant le nombre de valeurs singulières non-significatives de la matrice des données sensorielles $Data_b$ générée lorsque l'ensemble du système bouge (voir 3.2.1). Le noyau de la Jacobienne correspond au sous-espace de l'espace de configuration $\mathcal{C}$

7. On peut constater que l'estimation de e reste satisfaisante pour des amplitudes plus importantes ; la sous-variété sensorielle générée par des changements d'états environnementaux présente donc probablement une courbure moins importante que dans les autres cas de figure.

8. Des pertes locales de dimensions liées à des configurations singulières du système peuvent être envisagées ; la dimension maximale estimée pour les différentes configurations de référence est alors considérée comme la dimension intrinsèque de la sous-variété.

qui n'entraîne aucune variation sensorielle. Il contient donc l'ensemble des mouvements compensables du système. Néanmoins, il contient également l'ensemble des redondances motrices et environnementales. Pour des ensemble de variables $\{m(i)\}$ et $\{e(i)\}$ respectivement indépendantes, la dimension du noyau de la Jacobienne est donc égale à d . Dans le cas contraire, une étape supplémentaire doit être envisagée pour déterminer les redondances motrices de l'agent et celles de l'environnement.

3.2.5 Conclusion

La méthode proposée par D.Philipona permet d'estimer localement la dimension de l'espace des variations sensorielles compensables. Elle repose sur une exploration contrainte durant laquelle le robot, l'environnement et l'ensemble du système sont successivement amenés à bouger. Chaque sous-exploration permet de parcourir une sous-variété différente dans l'espace sensoriel du robot. La position de l'objet étant définie relativement au robot (d'un point de vue sensoriel), l'étude des dimensions de ces trois sous-variétés permet d'estimer le nombre de degrés de liberté redondants dans le système et correspondant au nombre de déplacements indépendants du système.

Cette approche présente certaines limitations importantes. Tout d'abord, la dimension de l'espace des variations sensorielles compensables n'est pas directement égale à la dimension de l'espace extérieur. Une analyse supplémentaire devrait pour cela être réalisée afin de distinguer les translations des rotations. De plus, l'algorithme d'estimation linéaire proposé ne permet d'étudier que l'espace tangent à la sous-variété sensorielle. Seuls des mouvements infinitésimaux du système peuvent donc être envisagés afin de respecter l'hypothèse de linéarité.

3.3 Extension aux mouvements d'amplitude finie

La méthode linéaire d'estimation de d proposée précédemment (3.2.1) nécessite une exploration infinitésimale du système. Une telle limitation ne permet pas d'envisager son application à un système réel où une telle précision est difficilement atteignable et où le bruit sur les capteurs dégraderait fortement l'échantillonnage de la sous-variété sensorielle. Ci-dessous, la méthode d'estimation de dimension non-linéaire par essai-erreur basée sur CCA et décrite au chapitre 2 est appliquée au système simulé afin d'étendre l'approche aux mouvements d'amplitude finie.

3.3.1 Extension du formalisme

La formalisation mathématique de l'étude de l'espace sensoriel proposé précédemment par D.Philipona (3.2.1) peut être étendue naturellement au-delà de l'espace tangent à la sous-variété sensorielle. Ainsi, la sous-variété sensorielle $\mathcal{S}$ de dimension b liée aux mouvements du système peut être engendrée par les deux sous-variétés sensorielles $\mathcal{S}_M$ et $\mathcal{S}_E$ respectivement liées aux mouvements de l'agent et de l'environnement, comme représenté figure 3.8 :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_M + \mathcal{S}_E. \quad (3.11)$$

Ces deux sous-variétés, de dimensions m et e , sont transversales et leur intersection I est une sous-variété de dimension d :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{S}) &= \dim(\mathcal{S}_M) + \dim(\mathcal{S}_E) - \dim(I), \\ b &= m + e - d. \end{aligned} \quad (3.12)$$

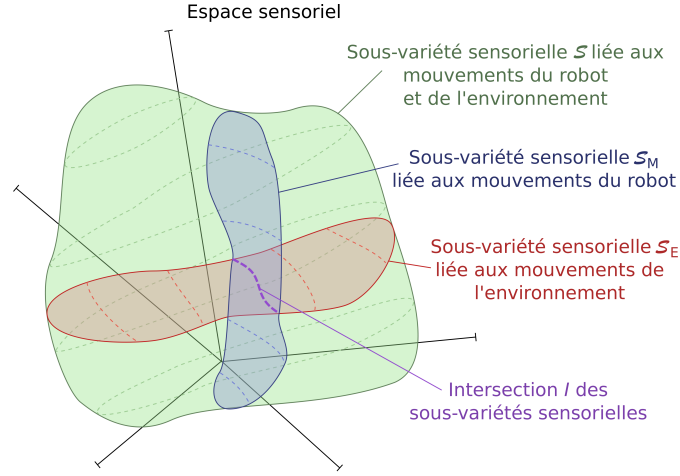


FIGURE 3.8: Représentation des sous-variétés sensorielles parcourues lorsque les configurations motrice et environnementale varient, lorsqu'uniquement la configuration motrice varie et lorsqu'uniquement la configuration environnementale varie. L'intersection de ces deux dernières sous-variétés peut être non-nulle. Certaines variations sensorielles peuvent donc être générées soit par l'agent, soit par l'environnement.

Comme précédemment, la dimension d de la sous-variété des variations sensorielles peut donc être estimée comme suit :

$$d = m + e - b. \quad (3.13)$$

Notons que ces relations sont toutefois vérifiées uniquement si les sous-variétés sensorielles - ou les portions qui en sont explorées - ne présentent pas de singularité.

3.3.1.1 Exploration du système et résultats

Exploration : Le système agent/environnement, la stratégie d'exploration en trois étapes et les paramètres de la simulation sont les mêmes que précédemment (3.2.1 et 3.2.3). Seule la méthode d'estimation des dimensions m , e et b est différente. Plutôt que de réaliser une DVS, la méthode d'estimation de dimension non-linéaire basée sur CCA (2.6.2) est appliquée aux matrices de données $Data_m$, $Data_e$ et $Data_b$.

Pour rappel, les distributions sensorielles sont projetées par CCA dans des espaces de sortie de dimension $p \in [1, p_{max}]$. La dimension intrinsèque l de chaque échantillonnage est estimée en déterminant la limite entre les erreurs de projection $E_{CCA}(p)$ significatives et non-significatives :

$$\hat{l} = \operatorname{argmax}_p \frac{E_{CCA}(p-1)}{E_{CCA}(p)}, \text{ avec } p \in [2, p_{max}], \quad (3.14)$$

avec $l = \{m, e, b\}$. En pratique, p_{max} est fixé à 15 afin de limiter le temps de calcul.

Résultats de la méthode non-linéaire : Les performances de la méthode non-linéaire d'estimation de dimension basée sur CCA sont illustrées figure 3.9 pour des amplitudes d'exploration A comprises entre 10^{-6} et 10^1 degrés. Pour rappel (3.2.3), les dimensions correctes de différentes sous-variétés sensorielles considérées sont $m = 9$, $e = 6$, $b = 12$ et $d = 3$. Les résultats de l'estimation sont donc manifestement mauvais

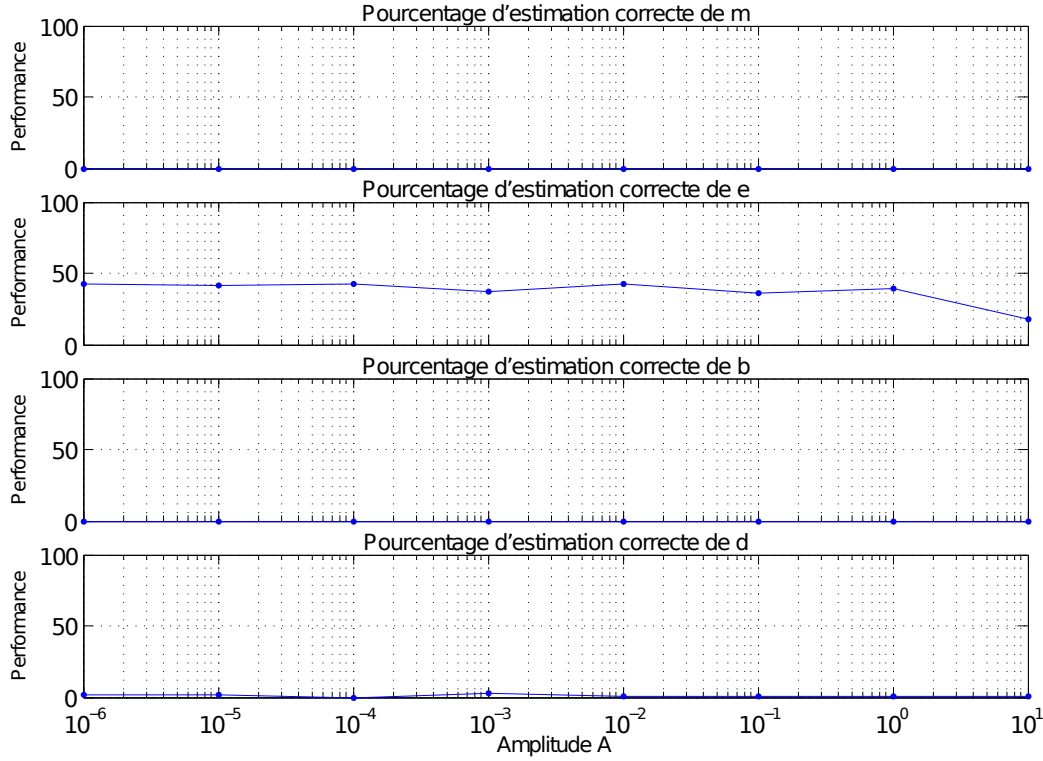


FIGURE 3.9: Pourcentage d'estimations correctes des dimensions m , e , b et d sur 100 essais successifs avec la méthode non-linéaire par essai-erreur. La performance est mauvaise pour l'estimation de e et quasi-nulle pour l'estimation de m , b et d , quelque soit l'amplitude A .

pour e (environ 40% d'estimations correctes) et médiocres pour m , b et d . L'origine de ces contre-performances est étudiée en détail ci-après.

3.3.2 Origine de l'échec de la méthode non-linéaire

L'origine des mauvaises estimations obtenues avec la méthode non-linéaire est discutée ci-après. Tout d'abord, la méthode auxiliaire d'estimation de dimension basée sur ISOMAP est appliquée afin d'éprouver ces premiers résultats. Les propriétés de l'échantillonnage des données sensorielles sont ensuite étudiées afin de déterminer la cause de cet échec. En particulier, l'influence de la courbure de la distribution sensorielle, de l'homogénéité de sa densité et de l'étirement du nuage d'échantillons dans l'espace sensoriel sera analysée.

3.3.2.1 Application de la méthode auxiliaire d'estimation de dimension

Afin de s'assurer que l'échec de la méthode précédente n'est pas lié à la CCA mais plutôt aux propriétés des nuages de données sensorielles, la méthode auxiliaire d'estimation de dimension basée sur ISOMAP est appliquée aux données. Les performances de cette seconde méthode non-linéaire sont présentées figure 3.10. Les résultats sont encore une fois médiocres. La performance de la méthode auxiliaire pour l'estimation de m , e , b et d n'est donc pas meilleure qu'avec CCA ⁹.

9. Le faible taux d'estimations correctes de d dérive de l'application de l'équation (3.13). Ainsi, d peut par chance être égale à 3 même si m , e et b sont mal estimées.

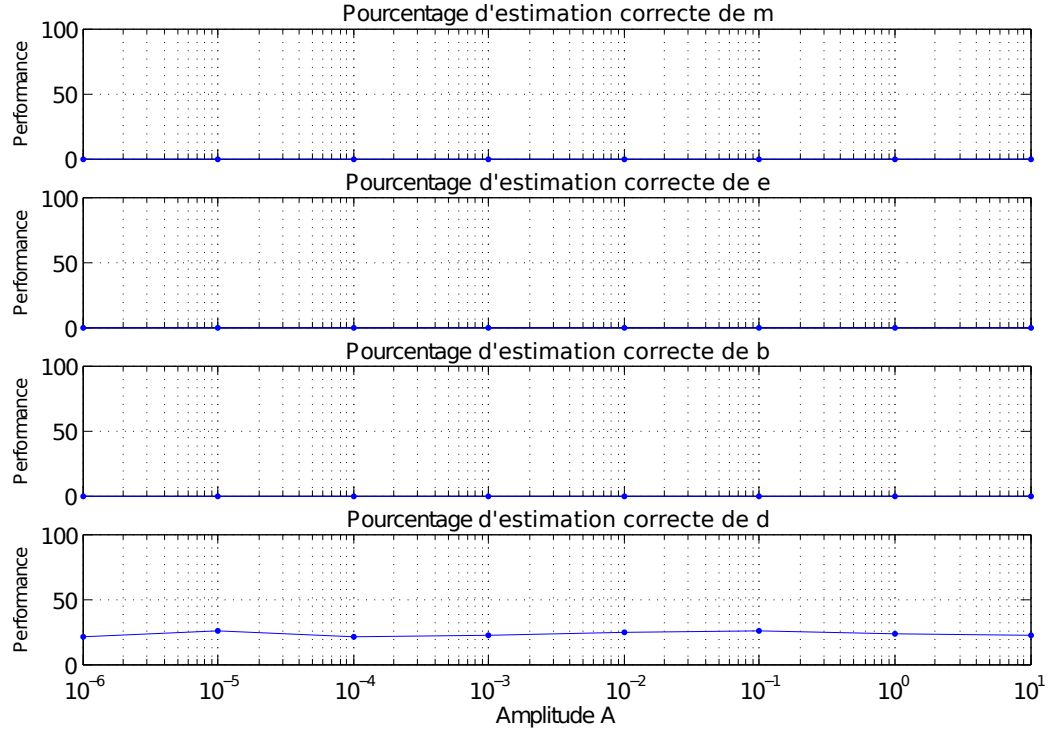


FIGURE 3.10: Pourcentage d'estimations correctes des dimensions m , e , b et d sur 100 essais successifs avec méthode non-linéaire spectrale. La performance est quasi-nulle pour l'estimation de m , e et b et mauvaise pour d quelque soit l'amplitude.

L'échec des méthodes non-linéaires s'explique donc sans doute plutôt par les propriétés des distributions sensorielles générées lors de l'exploration du système.

3.3.2.2 Courbure des sous-variétés sensorielles

Les courbes de performances présentées figures 3.9 et 3.10 démontrent que les mauvais résultats des méthodes non-linéaires ne dépendent pas de l'amplitude des mouvements d'exploration. Or la courbure des sous-variétés sensorielles est négligeable pour les plus faibles valeurs de A puisqu'elle permettait une estimation correcte des dimensions m , e , b et d par la méthode linéaire. Au-delà de leur capacité supposée à traiter des sous-variétés courbes, l'échec des méthodes non-linéaires ne peut donc être expliqué par la courbure des distributions sensorielles.

3.3.2.3 Non-homogénéité de la densité d'échantillonnage

Comme déjà discuté en 2.4.1, les distributions sensorielles générées lors de l'exploration peuvent présenter une densité d'échantillonnage non-homogène. Afin de vérifier que celle-ci n'est pas à l'origine de la contre-performance des méthodes non-linéaires, la densité de ces distributions est homogénéisée avant l'estimation de leur dimension, comme illustré figure 3.11.

Pour ce faire, l'algorithme d'homogénéisation proposé en annexe B est appliqué pour régulariser les distances entre voisins dans le nuage de points. Afin de s'affranchir de l'influence potentielle de la courbure et de limiter le temps de calcul, seule l'amplitude de mouvements $A = 10^{-6}$ degrés est considérée pour cette étude. Le nombre de mouvements initiaux est fixé à $10N$ pour chaque sous-exploration. Les distributions sont ensuite

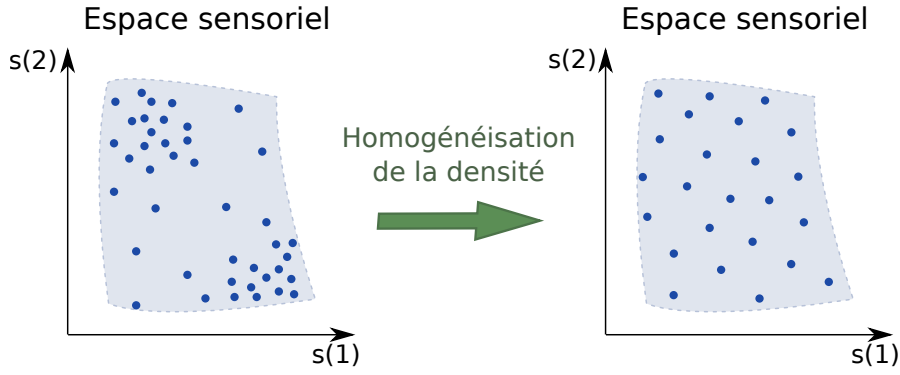


FIGURE 3.11: ...

sous-échantillonnées afin d'obtenir $N = 1000(\pm 1\%)$ points permettant d'homogénéiser la densité du nuage final.

Après application de l'algorithme d'homogénéisation, les performances de la méthode non-linéaire d'estimation de dimension basée sur CCA sont :

- 1% pour l'estimation de m .
- 16% pour l'estimation de e .
- 0% pour l'estimation de b .
- 0% pour l'estimation de d .

L'homogénéisation des distributions sensorielles ne permet donc pas d'améliorer les performances de la méthode non-linéaire. La densité potentiellement non-homogène des données sensorielles n'est donc pas à l'origine des mauvais résultats précédents.

3.3.2.4 Asymétrie de l'échantillonnage

Origine de l'asymétrie : De même que pour la densité, la forme des nuages générés dans l'espace sensoriel lors de l'exploration est *a priori* inconnue. En effet, la distribution d'exploration appartenant à un hypercube de l'espace d'état du système (2.4.3) est modifiée par l'application de la loi sensorimotrice ϕ générant les données sensorielles. Cette modification, potentiellement complexe et non-linéaire, change la forme du nuage d'échantillons. Les variances suivant les différentes dimensions de la distribution sensorielle peuvent ainsi présenter une asymétrie importante nuisant à l'estimation de leur dimension par les méthodes non-linéaires. Intuitivement, cette asymétrie peut s'interpréter comme un *étirement* que subirait l'hypercube d'exploration initiale lors de sa projection dans l'espace sensoriel et qui précéderait une potentielle courbure du nuage¹⁰. Ce phénomène est illustré figure 3.12 pour deux sous-variétés 2D.

Bien que la problématique de l'asymétrie soit ici incarnée par la forme du nuage de données sensorielles, notons tout de même qu'elle est fondamentalement liée aux caractéristiques de la loi sensorimotrice ϕ . Les propriétés du système font donc que ϕ déforme toute base utilisée pour décrire l'espace d'état $\mathcal{C}$.

Sensibilité des méthodes non-linéaires : Par nature, les méthodes non-linéaires d'estimation de dimension sont sensibles à l'asymétrie des variances de la distribution. Un trop fort étirement peut ainsi mener à une sous-estimation de la dimension intrinsèque du nuage.

10. Cette interprétation intuitive omet toutefois le fait que des dimensions peuvent également être perdues lors de l'application de ϕ .

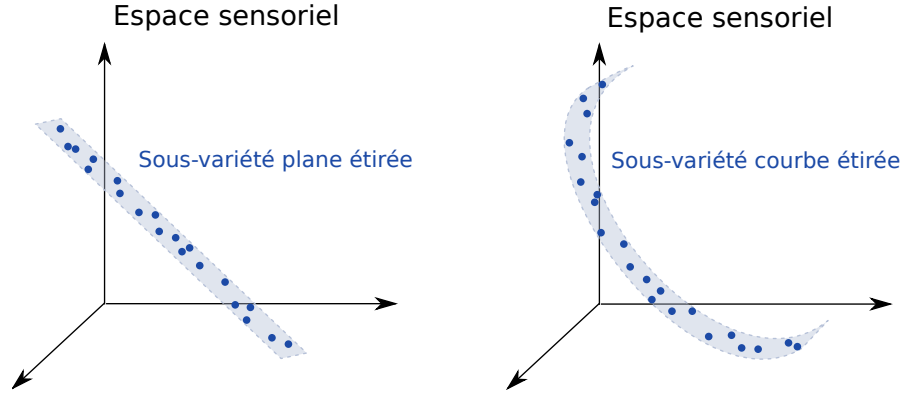


FIGURE 3.12: Représentation d'une sous-variété plane (gauche) et d'une sous-variété courbe (à droite) présentant un étirement suivant une dimension.

Ce phénomène a déjà été illustré en 2.7.1.3 pour la q -dimension. Il s'explique également pour les méthodes non-linéaires spectrales et par essai-erreur. L'asymétrie des variances suppose que certaines d'entre elles soient faibles (relativement aux variances les plus importantes). Par définition, la suppression des dimensions associées à ces faibles variances génère une modification peu significative des distances inter-échantillons. Il est donc possible de projeter les données dans un espace de dimension p inférieure à leur dimension intrinsèque l sans engendrer d'erreur de projection importante¹¹. Les méthodes d'estimation de dimension basées sur la distinction des erreurs de projections significatives et non-significatives (ou les valeurs propres équivalentes pour les méthodes spectrales) entraînent alors une sous-estimation de l . De plus, ces méthodes sont d'autant moins sensibles aux pertes des faibles variances qu'elles ont été développées pour ne pas réagir aux faibles erreurs de projection liées au possible dépliage de la sous-variété lors de la projection.

Critère d'étirement local : Afin de pouvoir étudier et quantifier l'asymétrie induite par ϕ , nous introduisons un critère d'étirement local L . Celui-ci dérive de l'analyse de la Jacobienne J_ϕ de la loi sensorimotrice :

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial s(1)}{\partial m(1)} & \cdots & \frac{\partial s(1)}{\partial m(N_m)} & \cdots & \frac{\partial s(1)}{\partial e(1)} & \cdots & \frac{\partial s(1)}{\partial e(N_e)} \\ \frac{\partial s(2)}{\partial m(1)} & \cdots & \frac{\partial s(2)}{\partial m(N_m)} & \cdots & \frac{\partial s(2)}{\partial e(1)} & \cdots & \frac{\partial s(2)}{\partial e(N_e)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial s(N_s)}{\partial m(1)} & \cdots & \frac{\partial s(N_s)}{\partial m(N_m)} & \cdots & \frac{\partial s(N_s)}{\partial e(1)} & \cdots & \frac{\partial s(N_s)}{\partial e(N_e)} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Du fait des redondances du système, J_ϕ n'est *a priori* pas de rang plein. Sa décomposition en valeurs singulières permet d'obtenir un ensemble de valeurs singulières ω_i non-nulles

11. La différence entre p et l peut être, au maximum, égale au nombre de dimensions associées à des variances faibles.

pour $i \in [1, l]$ et nulles pour $i \in [l + 1, N^m + N_e]$ ¹² :

$$\begin{aligned} J_\phi &= U \Omega V^T, \\ U, V &: \text{matrices unitaires,} \\ \Omega &= \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \dots \\ 0 & \omega_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

avec les valeurs singulières ω_i triées par ordre décroissant. Le critère d'étirement local L est alors défini comme suit :

$$L = \sqrt[l]{\prod_{i=1}^l \frac{\omega_i}{\omega_1}}, \quad (3.17)$$

où l est le nombre de valeurs propres non-nulles correspondant à la dimension intrinsèque de la sous-variété sensorielle.

Les valeurs singulières ω_i ne dépendent pas de la position ou de l'orientation de la sous-variété sensorielle dans l'espace sensoriel ; le critère L y est donc lui aussi insensible. De plus, la normalisation par la valeur singulière maximale ω_1 permet de n'étudier que les rapports de variance entre eux (en un mot, l'étirement) plutôt que leurs valeurs absolues, rendant ainsi L insensible à la dilatation de la sous-variété. Seules les l valeurs singulières non-nulles sont prises en compte dans le calcul de L . Sa valeur ne dépend donc pas de la dimension de l'espace dans lequel est plongée la sous-variété. Enfin, la racine l -ième permet également de garantir son indépendance vis-à-vis de la dimension intrinsèque de la sous-variété l et donc de comparer des sous-variétés de dimensionnalités différentes. La valeur de L appartient par définition à l'intervalle $]0, 1]$: la valeur $L = 1$ signifie que l'étirement local de la sous-variété est nul tandis qu'une valeur L tendant vers 0 correspond à un étirement très important. Le cas extrême $L = 0$ signifie que la variance est nulle suivant une ou plusieurs dimensions de la sous-variété ; sa dimension intrinsèque l doit donc être ré-estimée avant d'appliquer à nouveau le critère d'étirement local. Enfin, notons que, tout comme la Jacobienne J_ϕ , la valeur de L dépend du point de fonctionnement où l'analyse est réalisée et de la paramétrisation choisie pour décrire l'état du système.

Application du critère au système : L'étirement local L est évalué pour les 100 configurations de références initialement tirées pour les explorations d'amplitude $A = 10^{-6}$ degrés. Le tableau 3.1 présente les valeurs moyennes et écarts-types de L obtenus.

L	m	e	b
Moyenne	$2,31.10^{-2}$	$2,9.10^{-1}$	$4,13.10^{-2}$
Ecart-type	$1,05.10^{-2}$	$7,05.10^{-2}$	$1,58.10^{-2}$

TABLE 3.1: Valeurs moyennes et écarts-type du critère L pour les trois types d'explorations.

Notons que suivant le type de sous-exploration considéré, les paramètres moteurs $m(i)$ ou environnementaux $e(i)$ sont négligés dans le calcul de la Jacobienne J_ϕ (3.15).

Les valeurs très faibles de L obtenues révèlent que l'étirement local des sous-variétés sensorielles est important. L'asymétrie des distributions qui en résulte peut donc être à

12. Ou $i \in [l + 1, N_s]$ si le nombre de variables d'exploration est supérieur au nombre de capteurs N_s de l'agent)

l'origine de l'échec des méthodes non-linéaires. La valeur moyenne de L est d'ailleurs plus grande d'un ordre de grandeur pour e que pour m et b . Cette asymétrie moindre pourrait expliquer la meilleure performance observée figure 3.9 lorsque seul l'environnement bouge.

Confirmation de l'influence de l'asymétrie sur les méthodes non-linéaires :

Afin de confirmer le lien entre les faibles valeurs de L et l'échec des méthodes non-linéaires, une configuration du système est recherchée pour minimiser l'étirement local de la sous-variété. La fonction étudiée étant trop complexe, une méthode stochastique est préférée à une optimisation analytique pour maximiser L . L'espace de recherche est constitué des paramètres de position des cônes $P_{cone_i}|_{retine}$ et de configuration de référence de l'environnement E_0 (positions de référence des sources visuelles $[az_i, el_i]$) (voir 3.2.2.1). L'heuristique de recherche stochastique est la suivante :

- Pour chaque itération entre 1 et 400000 :
 - Tirer aléatoirement une configuration dans l'espace de recherche.
 - Déterminer la valeur de l'étirement local L .
 - Si L est supérieur à la valeur en mémoire, stocker cette nouvelle valeur maximale et sauvegarder la configuration du système.

Afin de réduire la dimension de l'espace de recherche et le temps de calcul, le nombre de cônes par oeil est ici réduit à $N^{cônes} = 8$ et seule l'exploration libre (cas b) est considérée. La configuration optimale ainsi obtenue est présentée dans les tableaux 3.2, 3.3 et 3.4. Elle correspond à un étirement local de $L = 0.25$ dans le cas b , approximativement réduit d'un facteur 6 par rapport à l'étirement moyen constaté dans le tableau 3.1. Pour les mêmes positions des cônes et des sources, L est estimé à 0.39 dans le cas m et 0.61 dans le cas e , correspondant respectivement à une réduction de facteurs 16 et 2 par rapport aux étirements moyens constatés dans le tableau 3.1.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x	-0,156	-0,2953	0,566	0,843	-0,701	-0,302	0,606	0,063
y	0,996	0,963	0,357	0,955	-0,966	-0,105	-0,554	0,609

TABLE 3.2: Positions optimales des cônes sur la rétine gauche

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x	0,09	0,881	0,745	-0,571	-0,735	-0,859	-0,616	0,677
y	-0,786	-0,685	0,123	0,367	0,865	-0,075	0,915	0,627

TABLE 3.3: Positions optimales des cônes sur la rétine droite

i	1	2	3
az	33,7	36,5	-35,1
el	14,8	-22,5	14,5

TABLE 3.4: Positions de référence optimales des sources

Appliquée à cette configuration du système et pour une amplitude de mouvements de $A = 10^{-6}$ degrés, la méthode non-linéaire par essai-erreur fournit les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 \hat{m} &= 9 = m, \\
 \hat{e} &= 6 = e, \\
 \hat{b} &= 2 \neq b.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ces résultats sont encourageants puisque m et e ont été correctement estimées. La méthode non-linéaire semble donc capable d'estimer la dimension des sous-variétés sensorielles lorsque L n'est pas trop important. L'étirement semble toutefois encore trop fort lorsque l'ensemble du système bouge. La valeur de L associée au cas b est en effet plus faible que pour les cas m et e .

3.3.3 Conclusion

Les résultats concernant l'influence des caractéristiques de l'échantillonnage sensoriel sur l'estimation de dimension tendent à prouver que l'étirement des distributions sensorielles induit par la loi sensorimotrice ϕ est à l'origine de l'échec des méthodes d'estimation non-linéaires. Notons que l'influence du nombre d'échantillons N sur les résultats a également été testée sans qu'aucune amélioration ne soit constatée. Le temps de calcul nécessaire à CCA augmente grandement avec le nombre d'échantillons N et ces résultats n'ont donc pas été présentés par manque statistique de données.

Une méthode de ré-échantillonnage actif de l'espace d'état du système est proposée ci-après. Elle permet de réduire l'asymétrie des nuages de données sensorielles et d'assurer une meilleure estimation de leur dimension intrinsèque.

3.4 Réduction de l'asymétrie sensorielle par un ré-échantillonnage de l'espace d'exploration

Les résultats de la section précédente permettent de penser que l'étirement des distributions sensorielles induit par la loi sensorimotrice est à l'origine de l'échec des méthodes d'estimation de dimension non-linéaires. Ci-dessous, une méthode est proposée pour ré-échantillonner activement l'espace de configuration du système de manière à améliorer la symétrie des distributions sensorielles. L'algorithme est d'abord présenté en détail puis appliqué à notre système selon deux stratégies différentes.

3.4.1 Méthode de ré-échantillonnage de l'espace d'exploration

La méthode de ré-échantillonnage est présentée ci-après. Son principe de fonctionnement est tout d'abord discuté puis traduit en un algorithme qui sera appliqué au système. L'asymétrie que nous évoquons pour qualifier les distributions sensorielles est à mettre en rapport avec la symétrie idéale de l'échantillonnage d'exploration. En effet, nous avons arbitrairement choisi en 2.4.3 de tirer les échantillons de l'espace de configuration du système dans un hypercube centré sur la configuration de référence C_0 . Cet hypercube est déformé par l'application de la loi sensorimotrice ϕ et peut générer une distribution sensorielle fortement étirée. Rien n'empêche toutefois de déformer, en amont, le nuage d'exploration pour s'opposer à l'étirement induit par ϕ . Cette déformation de l'hypercube d'exploration est autorisée par la nature purement arbitraire de sa définition initiale. Elle permet une exploration de la sous-variété sensorielle plus symétrique ; facilitant ainsi l'estimation de sa dimension intrinsèque.

Intuitivement, l'algorithme proposé ci-après a donc pour objectif d'étirer l'hypercube d'exploration initial selon les directions qui engendrent les plus faibles variances dans l'espace sensoriel. De manière idéale, l'étirement final du nuage d'exploration devrait être tel que la distribution sensorielle présente une variance identique suivant toutes les dimensions de la sous-variété qui la sous-tend. D'un point de vue comportemental, la méthode de ré-échantillonnage revient pour le robot à modifier sa stratégie d'exploration

aléatoire initiale en une nouvelle exploration lui permettant une meilleure caractérisation de la sous-variété sensorielle. Ce ré-échantillonnage est réalisé activement, par explorations successives, plutôt qu'en traitant passivement les données initiales dans l'espace sensoriel comme le font les méthodes d'analyse de données traditionnelles. La loi sensorimotrice ϕ est donc continuellement sollicitée durant le ré-échantillonnage, assurant ainsi la pertinence des nouveaux échantillons.

3.4.1.1 Algorithme de ré-échantillonnage

Ci-dessous, les différentes étapes de l'algorithme de ré-échantillonnage sont présentées en détail. Les différentes opérations qui y sont proposées supposent que l'analyse est réalisée localement, permettant l'application d'algorithmes linéaires (Décomposition en Valeurs Singulières).

Initialisation : Soit $\Delta \mathbf{C}$ l'ensemble des N variations d'état ΔC_i (vecteurs colonnes) initialement tirées dans un hypercube de l'espace d'exploration $\mathcal{C}$ centré sur l'état de référence C_0 . De même, soit $\Delta \mathbf{S}$ l'ensemble des N variations sensorielles ΔS_i (vecteurs colonnes) résultant de l'exploration. Ces deux matrices sont respectivement de tailles $(N_m + N_e) \times N$ et $N_s \times N$.

Afin de créer un cadre d'étude commun à toutes les distributions étudiées, ces deux matrices de données sont normalisées¹³ :

$$\Delta \mathbf{C} \leftarrow \frac{\Delta \mathbf{C}}{\max(|\Delta \mathbf{C}|)}, \quad (3.19)$$

$$\Delta \mathbf{S} \leftarrow \frac{\Delta \mathbf{S}}{\max(|\Delta \mathbf{S}|)}, \quad (3.20)$$

avec $\max(|\cdot|)$ la valeur absolue maximale de l'ensemble des coefficients de la matrice considérée. Notons que $\max(|\Delta \mathbf{C}|)$ est stockée dans une variable max_C pour une utilisation ultérieure en (3.32).

Détermination des faibles variances sensorielles : La première étape consiste à déterminer les directions de l'espace sensoriel selon lesquelles la variance de $\Delta \mathbf{S}$ sont les plus faibles. L'opération est réalisée via une DVS de $\Delta \mathbf{S}$:

$$\Delta \mathbf{S} = U \Omega V^T, \quad (3.21)$$

avec U une matrice unitaire de taille $N_s \times N_s$, V une matrice unitaire de taille $N \times N$ et Ω une matrice diagonale de taille $N_s \times N$ dont la diagonale contient les valeurs singulières ω_i de $\Delta \mathbf{S}$ en ordre décroissant.

Les variances var_i associées à chaque direction U_i (vecteurs colonnes) de l'espace sensoriel sont directement liées aux valeurs singulières :

$$var_i = \frac{\omega_i^2}{N}. \quad (3.22)$$

Les faibles variances correspondent donc à des faibles valeurs singulières ω_i et égaliser les unes signifie égaliser les autres.

13. La normalisation n'affecte en rien l'algorithme puisque les différentes opérations qu'il réalise sont relatives aux amplitudes maximales des vecteurs de données.

Commandes motrices associées aux variances sensorielles : Les vecteurs colonnes de V , appelés *vecteurs singuliers à droite*, sont des combinaisons linéaires des N vecteurs d'exploration ΔC . Les N_s premiers vecteurs de V sont directement associés aux *vecteurs singuliers à gauche* contenus dans U via les valeurs singulières ω_i ¹⁴. Ils forment donc une base $\mathcal{V}$ de N_s vecteurs de taille N permettant d'exprimer la variabilité totale de ΔS dans l'espace sensoriel.

Afin de pouvoir modifier la forme du nuage d'exploration ΔC , les vecteurs de cette base sont exprimés dans l'espace d'état du système $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{V}_c = \Delta C \mathcal{V}. \quad (3.23)$$

Suppression des redondances : Les variables d'état du système sont potentiellement redondantes vis-à-vis de l'expérience sensorielle¹⁵. En d'autres termes, le noyau de la loi sensorimotrice ϕ est *a priori* non-nul. Certaines combinaisons des commandes d'exploration ΔC_i peuvent donc potentiellement n'engendrer aucune variation sensorielle. Par définition, ces combinaisons sont invisibles pour la DVS réalisée précédemment.

Afin d'éviter une amplification ultérieure de ces composantes invisibles, elles sont supprimées de $\mathcal{V}_c$ grâce aux trois étapes suivantes :

- Les $N - N_s$ derniers vecteurs singuliers à droite de V , sont regroupés dans la base $\mathcal{V}^{red}$. Ces vecteurs, associés à aucune valeur singulière ω_i , permettent de décrire le sous-espace sensoriel où les données ne présentent aucune variance. Comme précédemment, $\mathcal{V}^{red}$ est exprimée dans l'espace de configuration du système $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{V}_c^{red} = \Delta C \mathcal{V}^{red}. \quad (3.24)$$

Les vecteurs de $\mathcal{V}_c^{red}$ permettent de générer le sous-espace d'exploration associé à aucune variation sensorielle.

- Les vecteurs de $\mathcal{V}_c^{red}$ n'étant *a priori* pas indépendants, une base $\mathcal{U}^{red}$ de ce sous-espace d'exploration est déterminée via une nouvelle DVS :

$$\mathcal{V}_c^{red} = \mathcal{U}^{red} \Omega^{red} (\mathcal{V}^{red})^T. \quad (3.25)$$

La diagonale de Ω^{red} contient les valeurs singulières ω_i^{red} de $\mathcal{V}_c^{red}$ par ordre décroissant. L'ensemble des ω_i^{red} supérieures à un seuil fixé à 1 sont considérées significatives. Les vecteurs singuliers à gauche associés aux ω_i significatives forment la base $\mathcal{U}^{red}$.

- Finalement, les composantes des vecteurs $\mathcal{V}_c$ appartenant au sous-espace décrit par $\mathcal{U}^{red}$ sont supprimées :

$$\mathcal{V}_c \leftarrow \mathcal{V}_c - \mathcal{U}^{red} (\mathcal{U}^{red})^+ \mathcal{V}_c, \quad (3.26)$$

où $\cdot^+$ représente la pseudo-inverse.

Déformation de l'échantillonnage d'exploration : La distribution d'exploration ΔC est modifiée afin de compenser l'asymétrie induite par ϕ . Tout d'abord, les vecteurs de ΔC sont exprimés dans $\mathcal{V}_c$ afin que chacune de leur composante soit directement associée aux valeurs singulières ω_i de la distribution sensorielle :

$$\Delta C_c = \mathcal{V}_c^+ \Delta C. \quad (3.27)$$

14. Nous supposons ici que N est supérieur à N_s ; dans le cas contraire, le raisonnement inverse s'applique et les N premiers vecteurs singuliers à gauche sont associés aux vecteurs de V via les ω_i

15. Redondances internes à l'agent et à l'environnement ou liées à leur interaction.

Les composantes de $\Delta \mathbf{C}_c$ sont ensuite amplifiées afin d'augmenter les ω_i faibles :

$$\Delta \mathbf{C}_c = \Gamma \Delta \mathbf{C}_c, \quad (3.28)$$

où Γ est la matrice diagonale :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

avec :

$$\gamma_i = \min \left\{ \ln \left(\frac{\omega_1}{\omega_i} \right) + 1, B \right\}, \quad (3.30)$$

avec B un seuil d'amplification maximale fixé arbitrairement à 10.

La présence de la fonction logarithmique et du seuil B permet de limiter les trop fortes amplifications induites par de très faibles valeurs de ω_i ou la présence de bruit numérique. Enfin, les vecteurs modifiés sont à nouveau exprimés dans la base d'exploration d'origine :

$$\Delta \mathbf{C} = \mathcal{V}_c \Delta \mathbf{C}_c. \quad (3.31)$$

Remise à l'échelle : Les vecteurs de $\Delta \mathbf{C}$ ayant été initialement normalisés, une dernière étape de remise à l'échelle est nécessaire avant de pouvoir ré-appliquer les commandes d'exploration au système ¹⁶ :

$$\Delta \mathbf{C} \leftarrow \frac{\max_C}{\max(|\Delta \mathbf{C}|)} \Delta \mathbf{C}. \quad (3.32)$$

Bien que déformée par l'algorithme, la nouvelle distribution d'exploration est ainsi toujours inscrite dans le même hypercube initial de côté $2A$.

Application itérative : La nouvelle distribution d'exploration $\Delta \mathbf{C}$ permet de générer une distribution sensorielle plus symétrique en termes de variances. Celle-ci n'est cependant pas nécessairement idéale après cette première modification, notamment à cause des limitations d'amplification introduites en (3.30). L'algorithme de ré-échantillonnage est donc appliqué itérativement jusqu'à convergence des ω_i ou pour un nombre maximal d'itérations fixé à $t_{max} = 10$ dans notre implémentation. L'ensemble des étapes détaillée précédemment sont regroupées dans l'algorithme 1.

3.4.1.2 Application exemple

Afin d'illustrer le fonctionnement de la méthode de ré-échantillonnage, le système proposé initialement en 3.2.2.1 est simplifié. Seuls les deux ddl de tangage et roulis (α_t et θ_t) sont laissés libres. L'oeil droit est supprimé et la rétine de l'oeil gauche n'est munie que de 2 cônes. Les espaces moteur et sensoriel sont donc chacun de dimension 2.

Une exploration de l'espace moteur est réalisée avec une amplitude $A = 10^{-3}$ pour laquelle les performances de la méthode linéaire proposée par D.Philipona commençait

16. Dans le cas où la normalisation initiale serait omise, cette mise à l'échelle serait toutefois nécessaire pour garantir que les amplifications réalisées précédemment n'entraînent pas des mouvements plus grands que l'amplitude A fixée pour la simulation.

Data : $\Delta \mathbf{C}^{(1)}, \Delta \mathbf{S}^{(1)}$
Result : $\Delta \mathbf{C}^{(t_{max})}$
 Initialization : $t=1, \Delta \mathbf{C}^{(1)} \leftarrow \frac{\Delta \mathbf{C}^{(1)}}{\max(|\Delta \mathbf{C}^{(1)}|)}, \Delta \mathbf{S}^{(1)} \leftarrow \frac{\Delta \mathbf{S}^{(1)}}{\max(|\Delta \mathbf{S}^{(1)}|)},$
 $max_C = \max(|\Delta \mathbf{C}^{(1)}|)$
while $t \leq t_{max}$ **do**
 $\Delta \mathbf{S}^{(t)} = U \Omega V^T$
 $\mathcal{V} = V(1:N, 1:N_s)$
 $\mathcal{V}_c = \Delta \mathbf{C}^{(t)} \mathcal{V}$
 $\mathcal{V}_c^{red} = \Delta \mathbf{C}^{(t)} \mathcal{V}^{red}$
 $\mathcal{V}_c^{red} = U^{red} \Omega^{red} (V^{red})^T$
 $\mathcal{U}^{red} = U^{red}(1:N, 1:n)$, avec n le nombre de ω_i^{red} supérieures à 1.
 $\mathcal{V}_c \leftarrow \mathcal{V}_c - \mathcal{U}^{red} (\mathcal{U}^{red})^+ \mathcal{V}_c$
 $\Delta \mathbf{C}_c = \mathcal{V}_c^+ \Delta \mathbf{C}^{(t)}$
 $\Delta \mathbf{C}_c = \Gamma \Delta \mathbf{C}_c$
 $\Delta \mathbf{C}^{(t)} = \mathcal{V}_c \Delta \mathbf{C}_c$
 $\Delta \mathbf{C}^{(t+1)} \leftarrow \frac{max_C}{\max(|\Delta \mathbf{C}^{(t)}|)} \Delta \mathbf{C}^{(t)}$
 $t = t + 1$
end

Algorithme 1: Algorithme de ré-échantillonnage actif

à chuter figure 3.7. L'environnement est considéré statique pour limiter la dimension du nuage de données. L'algorithme de ré-échantillonnage est appliqué pour symétriser la distribution sensorielle. La figure 3.13 permet de constater qu'initialement, la distribution dans l'espace moteur est symétrique, tandis que celle de l'espace sensoriel est étirée (distributions en bleu). Les itérations successives de l'algorithme permettent de déformer la distribution dans l'espace moteur afin de symétriser celle de l'espace sensoriel. Ainsi, les explorations successives génèrent de nouveaux échantillonnages sensoriels de plus en plus symétriques, jusqu'à un résultat optimal obtenu à la quatrième itération.

3.4.2 Application du ré-échantillonnage au système entier

La méthode de ré-échantillonnage est maintenant appliquée au système complet afin de vérifier qu'elle permet une meilleure estimation des dimensions m , e , b et d . Deux stratégies d'application de l'algorithme sont d'abord proposées, puis les résultats de chacune d'elles sont présentés et discutés.

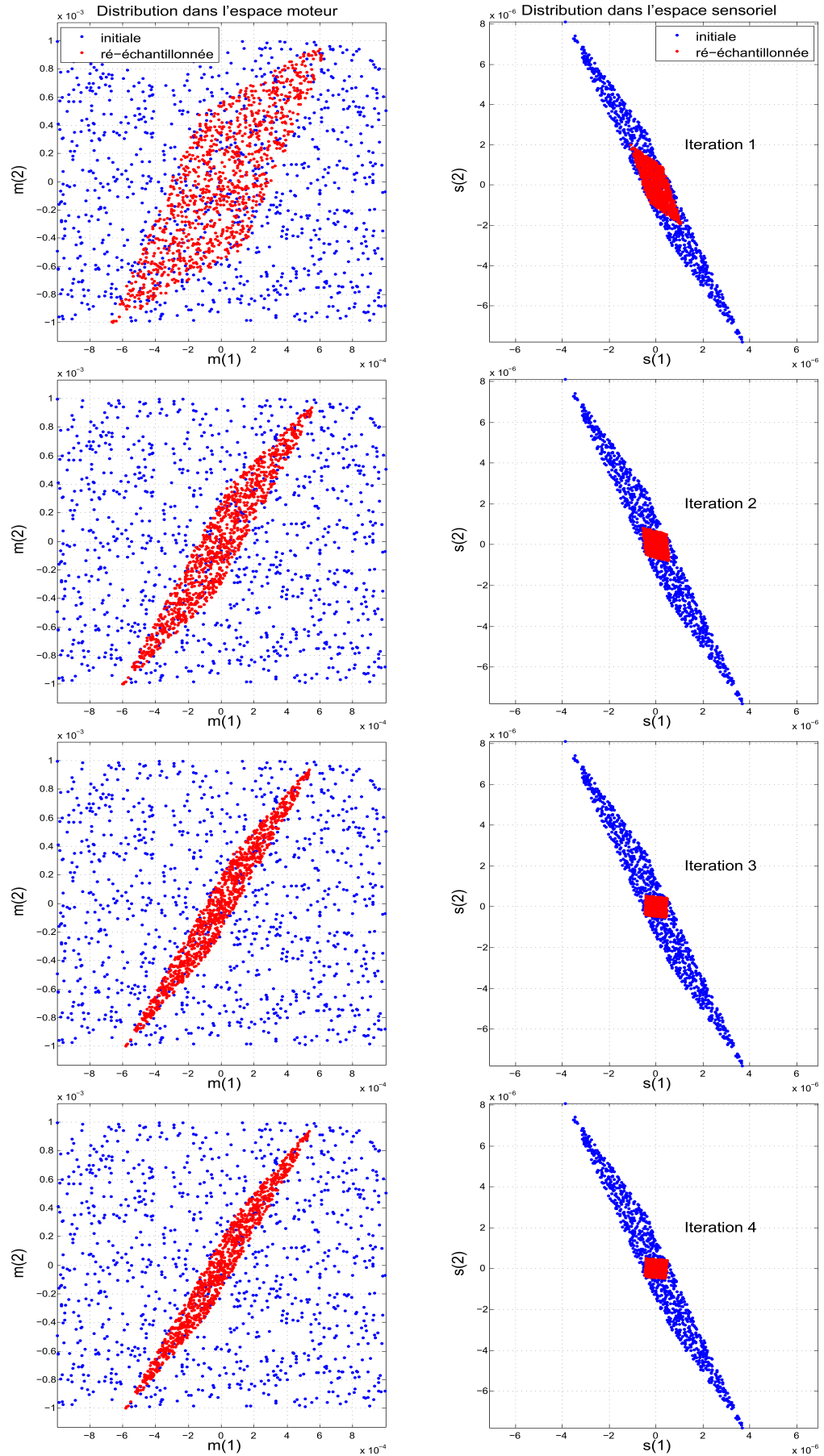


FIGURE 3.13: Au cours des itérations, la distribution motrice initiale (en bleu à gauche) est déformée (en rouge à gauche) afin de compenser l'étirement induit par la loi sensorimotrice. La distribution sensorielle initialement étirée (en bleu à droite) devient ainsi de plus en plus symétrique (en rouge à droite).

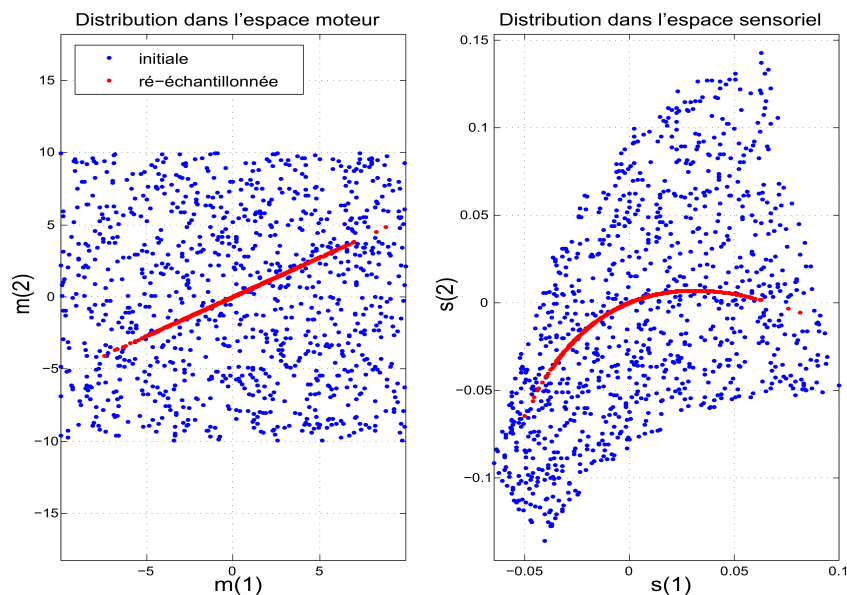


FIGURE 3.14: Ré-échantillonnage fini (après 10 itérations) : la non-linéarité des données est trop importante pour que la méthode de ré-échantillonnage, intrinsèquement linéaire, puisse fournir des résultats satisfaisants. La distribution finale s'en retrouve dégradée.

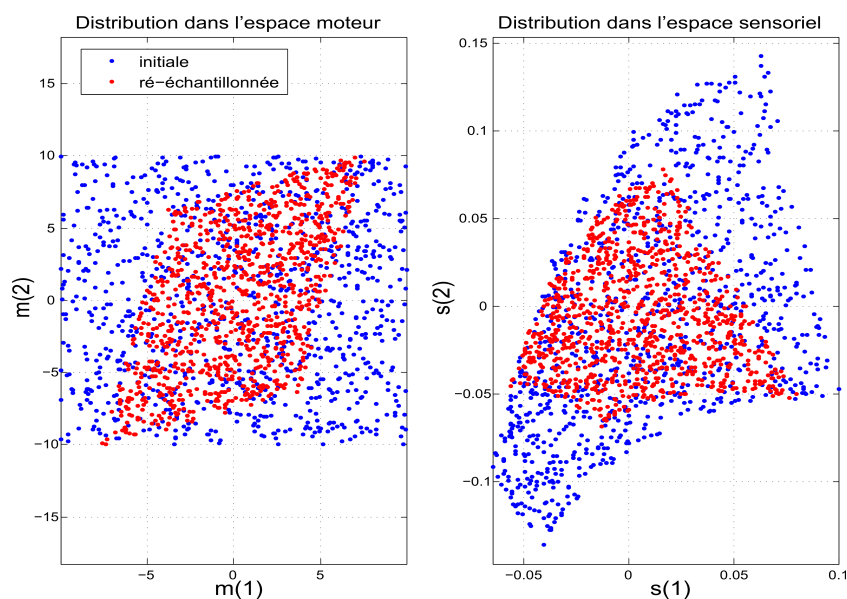


FIGURE 3.15: Ré-échantillonnage infinitésimal (après 10 itérations) : la méthode est initialement appliquée avec une amplitude de variations de $A = 10^{-6}$ pour laquelle son efficacité est localement garantie. La mise à l'échelle finale des variations de configuration permet, dans l'exemple présent, d'obtenir une meilleure distribution. Toutefois, les conséquences de la mise à l'échelle sur la distribution étant *a priori* inconnues, il n'est pas possible de généraliser ce bon comportement.

Stratégies d'application : L'algorithme de ré-échantillonnage sera appliqué suivant deux stratégies différentes. La première, qualifiée de *finie*, consiste à considérer une seule amplitude A , fixée en début de simulation, pour l'exploration initiale et le ré-échantillonnage. Selon sa valeur, la courbure des sous-variétés sensorielles peut alors être

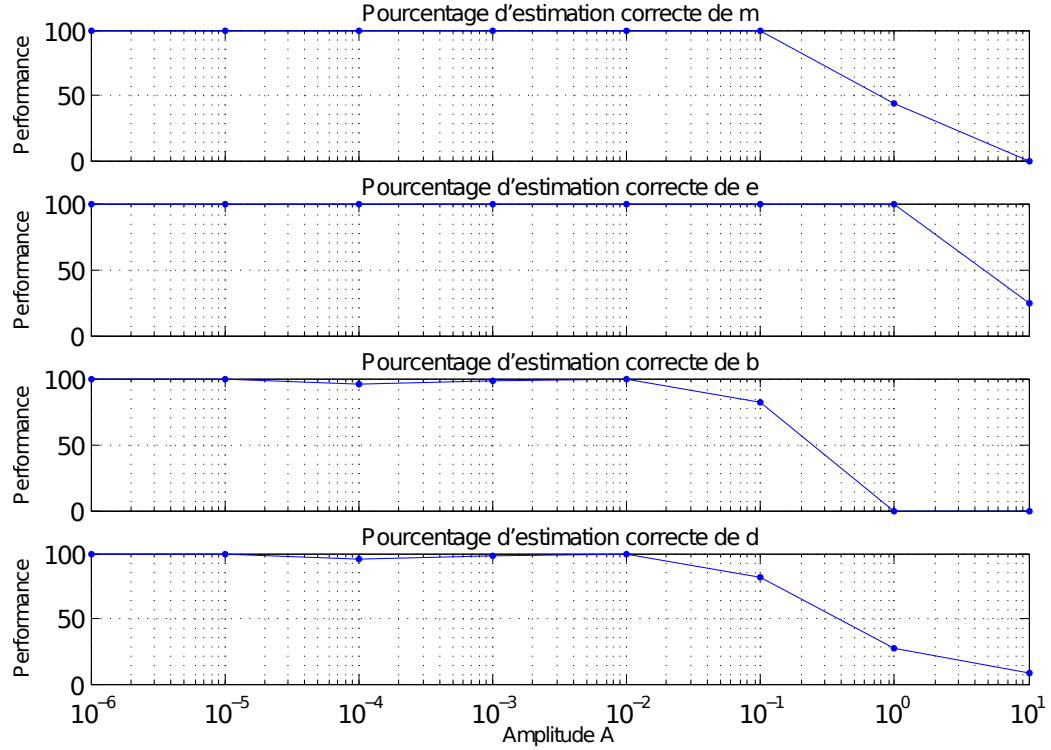


FIGURE 3.16: Pourcentage d'estimations correctes des dimensions m , e , b et d sur 100 essais successifs avec la méthode non-linéaire par essai-erreur précédée d'un ré-échantillonnage fini. La performance est satisfaisante jusqu'à une amplitude $A = 10^{-1}$.

non-négligeable. L'algorithme de ré-échantillonnage, basé sur une analyse linéaire (DVS) des données, ne permet alors pas de garantir rigoureusement la convergence vers un résultat satisfaisant.

La seconde, qualifiée d'*infinitésimale*, consiste à réaliser les phases d'exploration initiale et de ré-échantillonnage avec une amplitude de mouvement infinitésimale (10^{-6} dans notre implémentation). Une dernière étape consiste à mettre à l'échelle la distribution d'exploration ainsi générée pour obtenir l'amplitude de mouvement A désirée pour la simulation. Enfin, une dernière exploration est réalisée avec cette distribution d'exploration mise à l'échelle. Cette stratégie permet de garantir le bon fonctionnement de l'algorithme de ré-échantillonnage à l'échelle locale mais ne permet pas de prendre en compte les déformations induites par ϕ à l'échelle finie (déformations généralement non-linéaires).

Les figures 3.14 et 3.15 illustrent respectivement l'application des ré-échantillonnages fini et infinitésimal au système simplifié (voir 3.4.1.2). L'amplitude d'exploration est cette fois-ci fixée à $A = 10$ et la courbure de la sous-variété sensorielle est non-négligeable.

Résultats sur le système complet : La méthode de ré-échantillonnage est maintenant appliquée au système complet. Les paramètres de la simulation sont identiques à ceux proposés en 3.2.3. Les figures 3.16 et 3.17 présentent les performances d'estimation de m , e , b et d de la méthode essai-erreur après ré-échantillonnages fini et infinitésimal. Nous pouvons constater qu'après ré-échantillonnage, les performances de la méthode non-linéaire sont satisfaisantes. Pour la stratégie finie, les performances sont satisfaisantes jusqu'à une amplitude $A = 10^{-1}$. Elles le sont jusqu'à $A = 10^0$ dans le cas infinitésimal, et restent même supérieures à 50% pour $A = 10^1$.

Les chutes de performances observées pour les plus fortes valeurs de A sont probablement

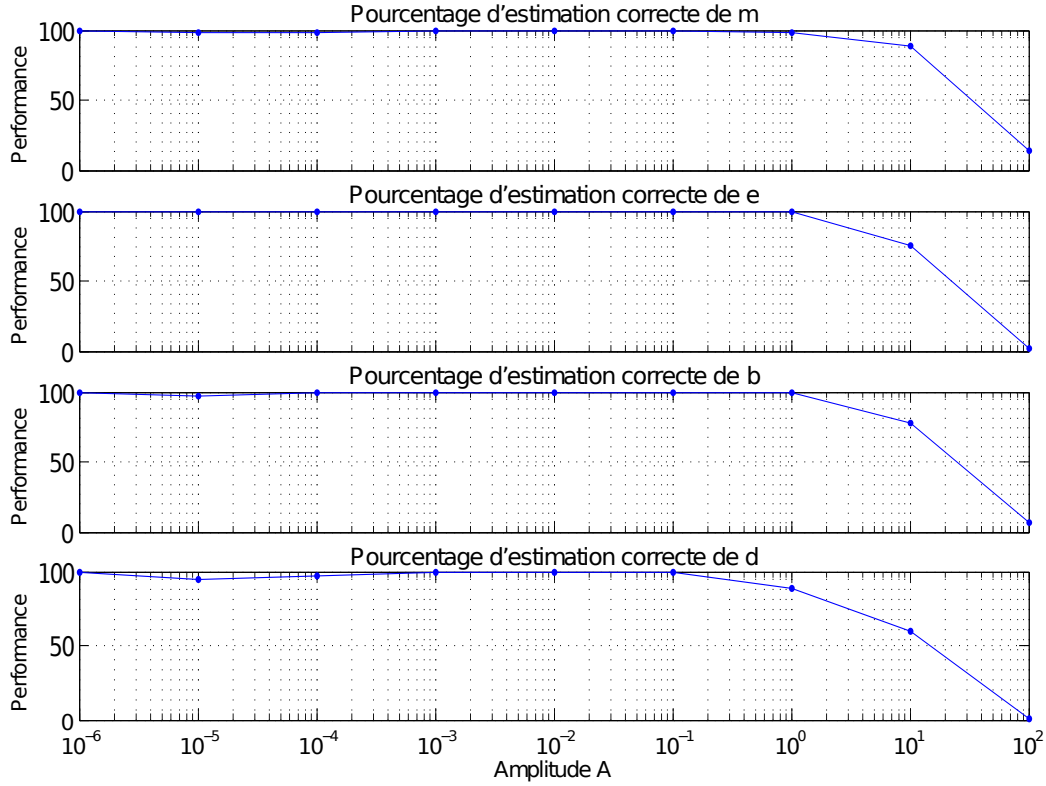


FIGURE 3.17: Pourcentage d'estimations correctes des dimensions m , e , b et d sur 100 essais successifs avec la méthode non-linéaire spectrale précédée d'un ré-échantillonnage infinitésimal. La performance est satisfaisante jusqu'à une amplitude $A = 10^0$. Notons que l'amplitude $A = 10^2$ a été rajoutée afin de pouvoir observer la chute de performance.

liées à la non-linéarité de ϕ qui empêche une bonne convergence du ré-échantillonnage dans le cas fini et déforme trop fortement la distribution sensorielle finale dans le cas infinitésimal ¹⁷.

3.4.3 Conclusion

La symétrisation des distributions sensorielles générées lors de l'exploration a permis d'améliorer les estimations de dimension fournies par la méthode non-linéaire. La stratégie de ré-échantillonnage infinitésimal permet, en simulation, d'obtenir les meilleures performances. Notons toutefois qu'elle n'est pas applicable dans le cas d'un système réel où de telles amplitudes de mouvements sont irréalistes. La stratégie de ré-échantillonnage fini permet quant à elle d'obtenir des résultats satisfaisants jusqu'à des amplitudes de 10^{-1} degrés, laissant envisager une implémentation sur un robot réel.

Fondamentalement, la méthode de ré-échantillonnage peut être interprétée comme une tentative du robot de re-calibrer ses variables motrices. La définition initiale de ces variables est en effet arbitraire et peut se révéler inadaptée à une exploration optimale de la sous-variété. Dans le cas du système étudié dans ce chapitre, les commandes motrices et environnementales originelles entraînent ainsi un fort étirement du nuage de données, rendant l'estimation de sa dimension intrinsèque délicate. Une déformation de la distribution d'exploration permet donc de compenser cet étirement et de garantir de

17. Pour les plus fortes valeurs de A , la portion de sous-variété sensorielle explorée peut également être bouclée; l'espace euclidien dans lequel sont projetées les données n'est alors plus adapté.

bonnes conditions de fonctionnement pour les méthodes d'estimation de dimension non-linéaire, par définition sensibles à l'asymétrie des données. Un raisonnement similaire pourrait être effectué en re-calibrant les variables sensorielles. Un tel traitement se révélerait néanmoins plus complexe du fait de la non-linéarité de la loi sensorimotrice et nécessiterait la définition d'une nouvelle métrique dans l'espace sensoriel.

Enfin, notons que la méthode de ré-échantillonnage est intrinsèquement active. Ainsi, les données initiales ne sont pas simplement traitées dans l'espace sensoriel mais régénérées à chaque itération au travers d'une nouvelle exploration. Cette approche permet de constamment faire intervenir la loi sensorimotrice ϕ dans le processus de correction plutôt que d'analyser passivement les données sensorielles. Une ACP de la distribution pourrait par exemple être envisagée pour compenser cet étirement mais entraînerait nécessairement une amplification importante du bruit (numérique dans notre cas).

3.5 Conclusion

L'espace géométrique extérieur dans lequel le robot et son environnement évoluent a comme propriété fondamentale de leur permettre d'effectuer des déplacements. Pour un robot naïf sans connaissance *a priori* sur l'espace extérieur, ces déplacements se traduisent par des expériences sensorielles particulières : elles sont compensables. Ainsi, un déplacement de l'environnement peut être sensoriellement compensé si le robot (plus précisément ses capteurs) effectue un déplacement identique - et inversement. Les propriétés de l'espace géométrique extérieur peuvent donc être étudiées en analysant l'ensemble des variations sensorielles compensables dont le robot peut faire l'expérience. En particulier, sa dimension peut être déduite de celle de cet ensemble.

Ce chapitre nous a permis de proposer une méthode non-linéaire d'estimation de la dimension de l'ensemble des variations sensorielles compensables et de l'appliquer à un système simulé. Celle-ci repose sur une stratégie d'exploration initialement proposée par D.Philipona [71]. Le système robot/environnement est ainsi exploré en trois phases successives : seule la configuration motrice du robot change, seule la configuration de l'environnement change et la configuration de tout le système change. Chaque sous-exploration permet d'explorer une sous-variété sensorielle différente. La dimension de chacune est égale au nombre de degrés de liberté effectifs durant la sous-exploration. La différence du nombre de degrés de liberté impliqués lorsque le robot et l'environnement bougent séparément et lorsqu'ils bougent ensemble n'est pas nulle. Il existe donc un ensemble de variations sensorielles de dimension non-nulle qui peuvent être engendrées soit par le robot, soit par l'environnement. Cette ensemble correspond aux variations sensorielles compensables du système.

La méthode linéaire proposée par D.Philipona reposait sur l'hypothèse que seul l'espace tangent à la sous-variété sensorielle est effectivement échantillonné durant l'exploration [71]. En pratique, cette hypothèse n'est vérifiée que pour des changements de configuration infinitésimaux du système. Nos algorithmes d'estimation de dimension non-linéaires ont alors été appliqués au système simulé pour dépasser cette limitation. Ceux-ci se sont toutefois révélés incapables d'estimer les dimensions respectives des sous-variétés sensorielles générées lors des sous-explorations, même pour des mouvements infinitésimaux du robot et de l'environnement. Une étude des caractéristiques des distributions sensorielles générées lors de l'exploration nous a permis de constater que l'origine de cet échec s'expliquait par leur étirement. Les méthodes non-linéaires d'estimation de dimension se montrent en effet sensibles aux forts étirements du nuage de données.

Une méthode de ré-échantillonnage actif a été proposée pour résoudre ce problème. Son

principe est de modifier les caractéristiques de l'échantillonnage d'exploration dans l'espace de configuration du système pour réduire l'étirement de la distribution sensorielle induit par l'application de la loi sensorimotrice ϕ . Cette modification est rendue possible par la définition arbitraire de la stratégie d'exploration initiale (stratégie naïve proposée en 2.4.3). La méthode de ré-échantillonnage a permis aux méthodes non-linéaires d'estimation de dimension d'atteindre des performances satisfaisantes pour des amplitudes de mouvements finies, rendant envisageable une implémentation sur un système réel. L'aspect actif de la méthode permet de continuellement faire intervenir la loi sensorimotrice ϕ durant le processus de ré-échantillonnage. Les données sensorielles ne sont donc pas traitées passivement grâce, par exemple, à une Analyse en Composantes Principales qui amplifierait fortement le bruit lors de la symétrisation de la distribution.

Des extensions futures peuvent être envisagées à la fois pour la stratégie d'estimation de la dimension de l'espace et pour la méthode de ré-échantillonnage. Tout d'abord, les résultats obtenus dans ce chapitre ne permettent pas d'estimer directement la dimension de l'espace extérieur mais celle de l'ensemble des variations sensorielles compensables. Comme nous l'avons déjà évoqué au chapitre 1 (voir 1.6.4), ces deux dimensions sont *a priori* différentes puisque des variations sensorielles compensables peuvent être engendrées par des translations, des rotations ou des changements d'état compensables. La dimension $d = 3$ estimée précédemment correspond donc à la dimension de l'espace géométrique extérieur uniquement car le système présente seulement trois déplacements compensables qui correspondent aux rotations centrées sur la tête. Des travaux précédents ont déjà montré que d peut être supérieure à 3 pour des systèmes où d'autres variations sensorielles compensables sont possibles [71]. Une méthode devrait donc être proposée pour distinguer, à partir des informations sensorimotrices du robot, les translations, les rotations et les changements d'état compensables du système et estimer la dimension réelle de l'espace extérieur.

La méthode de ré-échantillonnage actif pourrait également être étendue. L'algorithme proposé précédemment est en effet intrinsèquement linéaire puisqu'il repose sur une Décomposition de Valeurs Singulières de la distribution sensorielle. Il ne permet donc pas d'obtenir des performances satisfaisantes pour des amplitudes de mouvements importantes où la courbure de la sous-variété sensorielle induit des déformations trop importantes. Une stratégie intrinsèquement non-linéaire de ré-échantillonnage pourrait, par exemple, consister en un échantillonnage exhaustif de l'espace de configuration du système puis à ne conserver qu'un sous-échantillonnage représentant une portion peu étirée de la sous-variété sensorielle.

Enfin, notons que les résultats présentés dans ce chapitre ont permis la publication de quatre articles dans des conférences françaises et internationales [85–88].

Chapitre 4

Vers la découverte de la notion d'espace

L'approche sensorimotrice proposée au chapitre 1 suppose qu'un robot naïf peut découvrir les propriétés de l'espace géométrique dans lequel il évolue à partir de l'analyse de son expérience sensorimotrice. Le chapitre précédent nous a permis de proposer une méthode pour estimer activement la dimension de l'espace des variations sensorielles compensables qui caractérise les capacités de déplacements du système et, indirectement, la dimension de l'espace dans lequel il est plongé.

Ce dernier chapitre s'attache à décrire comment un agent naïf peut se construire une représentation interne de l'espace à partir de son flux sensorimoteur. Quatre simulations successives seront proposées afin de mettre en place quatre différentes stratégies d'exploration du système robot/environnement. Elles permettront au robot de générer des représentations internes capturant des propriétés de l'espace extérieur de plus en plus sophistiquées. Plus précisément, ces quatre stratégies d'exploration du système permettront de distinguer certaines données de l'espace sensoriel ou moteur du robot collectées durant une exploration du monde. Ces données permettront alors de définir une sous-variété dans l'espace sensoriel ou moteur qui sera projetée en basse dimension pour générer différentes représentations internes de l'espace extérieur.

De manière très basique, l'espace dans lequel est plongé le robot lui permet d'observer l'environnement selon différents "points de vue". La première simulation aura pour objectif de créer une représentation interne de l'ensemble de ces points de vue. La seconde simulation cherchera à construire une représentation interne équivalente mais indépendante de l'environnement observé par la robot. Au travers d'une stratégie d'exploration du système plus évoluée et incluant des mouvements de l'environnement, la troisième simulation cherchera à caractériser l'espace extérieur par les déplacements qu'il permet à la fois au robot et à l'environnement. Comme déjà présenté aux chapitres 1 et 3, ces déplacements se traduiront dans l'expérience du robot par des variations sensorielles *compensables*. Enfin, la dernière simulation proposera de reproduire la régularité de la métrique de l'espace extérieur dans l'espace de représentation interne.

4.1 Description du système

Un seul et même système robot/environnement est considéré pour l'ensemble des simulations. Les approches proposées dans chacune d'elles seront toutefois génériques et pourraient s'appliquer à des systèmes différents. Afin de faciliter la visualisation des

données sensorimotrices et de limiter la complexité des algorithmes d'analyse, le robot et l'environnement sont relativement simples. Cette simplicité formelle permet également de concentrer le propos sur les stratégies sensorimotrices proposées, qui représentent le coeur de ces travaux.

Le système est plongé dans un espace euclidien 2D. Il est constitué d'un bras robotique muni d'un capteur sensible aux informations lumineuses provenant de différentes sources colorées formant l'environnement. Ces deux sous-systèmes, illustrés figure 4.3, sont présentés en détail ci-après. Dans toute la suite, l'unité de longueur est le mètre, mais notons que cette information est superflue puisque seules les longueurs relatives sont pertinentes pour caractériser le système du point de vue du robot (voir la fonction d'excitation (4.1)).

4.1.1 L'environnement

L'environnement est constitué d'un objet formé de 8 sources lumineuses colorées ponctuelles. L'objet étant rigide, la configuration relative des sources est fixe. Les coordonnées de chaque source dans le repère de l'objet sont listées dans le tableau 4.1 et illustrées figure 4.1.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x	-1	-0.5	0	0.5	0.5	0.5	0	-0.5
y	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	0	0.5	0.5	0.5
Couleur	bleu	bleu	bleu	rouge	rouge	rouge	rouge	rouge

TABLE 4.1: Position et couleur des sources lumineuses ponctuelles dans le repère monde.

Les sources lumineuses sont de deux couleurs différentes. Bien que leur spécification n'ait pas réellement de sens vis-à-vis des sensations du robot (voir (4.1)), nous les qualifions arbitrairement de *bleu* et *rouge*. La structure de l'objet et la coloration des sources ont été choisies arbitrairement mais de manière à ne pas présenter de symétrie. Si cette contrainte n'est pas respectée, l'hypothèse de non-ambiguïté des sensations posée en 2.3.2 n'est pas respectée et un même état sensoriel peut être associé à deux états distincts du systèmes¹. De même, la taille de l'objet est choisie arbitrairement mais de manière à être entièrement visible par le robot.

4.1.2 L'agent

L'agent est un bras mobile constitué de 3 segments de longueur unitaire. Sa base est fixée à l'origine du repère monde et son extrémité est munie d'une rétine linéaire.

Capacités motrices : Le bras possède 4 degrés de liberté en rotation ($N^m = 4$) situés à chaque extrémité des segments. Chacune de ces rotations est commandée indépendamment par une variable motrice $m(i) \in [-\pi, \pi]$ radians.

Capacités sensorielles : La rétine est de largeur 2 cm et est précédée d'une lentille de type sténopé à une distance de 1 cm. Elle est munie de 2 couches de 3 cônes ($N_s = 6$) sensibles respectivement aux lumières bleue et rouge. Sur chaque couche, les 3 cônes sont

1. Nous parlons ici d'état caractérisé par les variables latentes du système, et non des variables motrices et environnementales qui peuvent présenter des redondances et pour lesquelles il est donc habituel d'avoir plusieurs configurations associées à une même sensation.

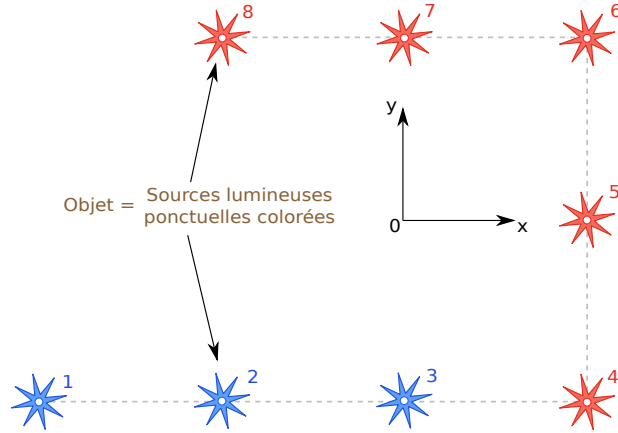


FIGURE 4.1: Structure de l'objet, placé ici au centre du repère monde avec une orientation nulle. L'objet est constitué de 8 sources lumineuses ponctuelles de deux couleurs distinctes dont l'organisation est fixe.

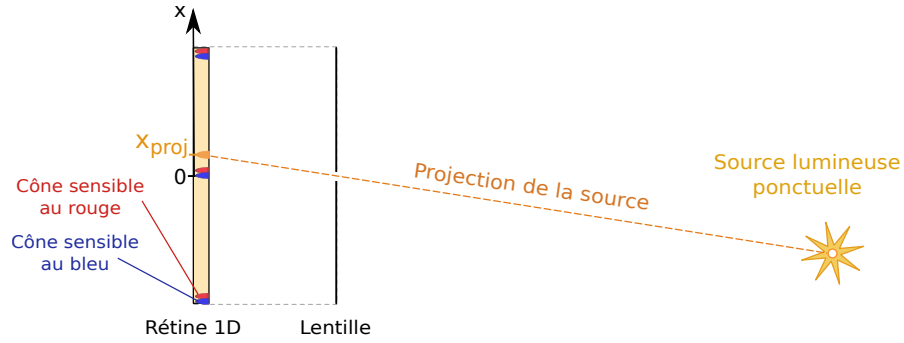


FIGURE 4.2: Les sources ponctuelles sont projetées sur la rétine au travers de la lentille de type sténopé. La distance entre la projection rétinienne de la source et les cônes permet de générer les sensations visuelles. Suivant la couleur de la source, bleue ou rouge, seul un type de cône est excité.

répartis régulièrement aux coordonnées $x_{cone_i}|_{retine} = \{-1, 0 \text{ et } 1\}$.

Pour une source lumineuse ponctuelle $source_k$ dans l'environnement, la sensation $s(i, k)$ générée par le cône i est :

$$s(i, k) = \frac{\exp\left(-\left(x_{cone_i}|_{retine} - x_{proj_k}|_{retine}\right)^2\right)}{d(P_{retine}|_{monde}, P_{source_k}|_{monde})} \times h(i, k), \quad (4.1)$$

avec

$$h(i, k) = \begin{cases} 0 & , \text{ si le cône } i \text{ n'est pas sensible à la couleur de } source_k, \\ 1 & , \text{ si le cône } i \text{ est sensible à la couleur de } source_k, \end{cases} \quad (4.2)$$

où $d(.)$ est la distance euclidienne, $x_{cone_i}|_{retine}$ la position du cône i sur la rétine, $x_{proj_k}|_{retine}$ la position de la projection de la source k sur la rétine, $P_{retine}|_{monde}$ la position du centre de la lentille dans le repère monde et $P_{source_k}|_{monde}$ la position de la source k dans le repère monde. Le principe de la projection² est illustré figure 4.2. La

2. Notons que puisque l'espace géométrique est ici 2D, le dénominateur de l'équation (4.1) n'est pas élevé au carré comme dans l'équation (3.9), page 80, proposée pour un espace 3D.

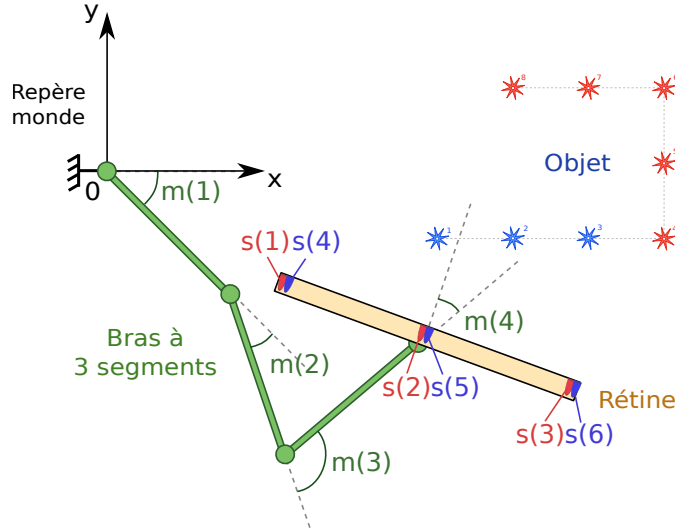


FIGURE 4.3: Le robot est un bras articulé de 3 segments de longueurs unitaires. Sa base est fixée à l'origine du repère monde. Son extrémité est munie d'une rétine précédée d'une lentille de type sténopé (non-représentée ici). L'environnement est un objet composé de 8 sources ponctuelles lumineuses de deux couleurs distinctes.

sensation totale générée pour plusieurs sources dans l'environnement est :

$$s(i) = \sum_{k=1}^{N_{sources}} s(i, k). \quad (4.3)$$

La figure 4.3 représente une configuration quelconque du système avec l'objet situé en $[2.5, 0]$ dans le repère monde.

4.2 Simulation 1 : l'espace découvert via les capacités d'action

L'existence de l'espace extérieur dans lequel est plongé le robot permet à ce dernier d'effectuer des mouvements (translations et rotations de la rétine). Ces capacités d'action se traduisent par des variations sensorielles à partir desquelles il est possible de construire une représentation interne basse dimension.

La structure ainsi extraite est loin de correspondre à la notion complexe d'espace que nous avons en tant qu'observateur extérieur. Elle en forme cependant une représentation très basique et facilement accessible par le robot. Ci-dessous, la stratégie d'exploration permettant de générer une telle représentation est présentée en détail.

4.2.1 Stratégie d'exploration

L'objectif du robot est d'explorer ses propres capacités d'action. L'environnement est donc considéré statique durant toute la simulation avec le centre de l'objet placé en $[2.5, 0]$ dans le repère monde. L'exploration est réalisée au travers d'un tirage aléatoire de $N = 5000$ configurations dans l'espace moteur du bras. En reprenant la stratégie d'exploration naïve proposée en 2.4.3, les échantillons moteurs sont tirés autour de $M_0 = 0^4$ avec une amplitude $A = \pi$ pour chaque composante $m(i)$. L'ensemble des configurations

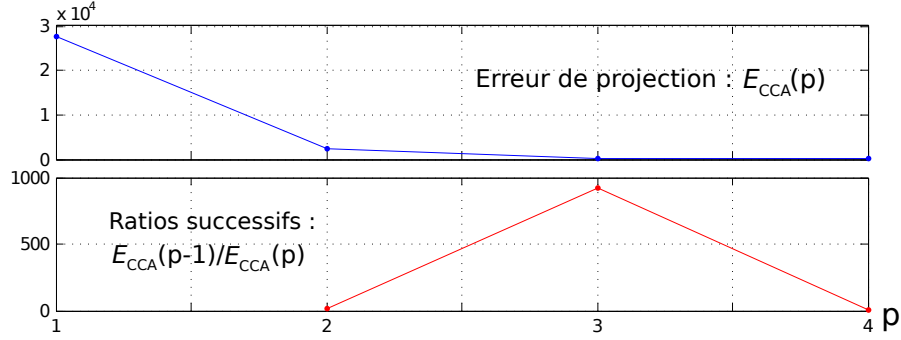


FIGURE 4.4: En haut : erreurs de projections obtenues par CCA pour $p \in [1, 4]$. En bas : ratios successifs des erreurs de projection. Le ratio est maximum pour une dimension de projection de $p = 3$.

du bras peuvent donc être ainsi explorées³.

Chaque configuration motrice M_i du bras génère un état sensoriel S_i via la loi sensorimotrice ϕ du système. Afin de faciliter le traitement de la distribution sensorielle, les échantillons S_i ne sont conservés que s'ils remplissent les critères suivants, garantissant que l'objet se trouve dans le champ de vision du robot :

- Les sources lumineuses formant l'objet se trouvent en amont de la rétine :

$$x_k|_{oeil} \geq 1, \forall k \in [1, 8], \quad (4.4)$$

avec $x_k|_{oeil}$ la première coordonnée de la source k dans le repère lié à l'extrémité du bras de l'agent⁴.

- Les excitations $s(i)$ des cônes sont supérieures à un seuil de tolérance fixé arbitrairement à $s_{min} = 0.05$:

$$s(i) \geq s_{min}, \forall i \in [1, 6]. \quad (4.5)$$

Pour tout échantillon ne remplissant pas ces critères, une nouvelle configuration M_i est tirée aléatoirement jusqu'à ce que l'état sensoriel S_i puisse être conservé.

4.2.2 Analyse des données sensorielles

La sous-variété sensorielle parcourue lors de l'exploration est contrainte par la structure de l'agent, les caractéristiques de ses moteurs et capteurs et les propriétés de l'espace géométrique dans lequel il est plongé. A chaque état moteur est ainsi associée une position et une orientation de la rétine dans le repère monde, que nous appellerons *point de vue* ou *configuration rétinienne*. L'ensemble des points de vue que peut prendre la rétine est contraint par la structure de l'espace extérieur. La sous-variété sensorielle, topologiquement liée à l'ensemble de ces points de vue⁵, peut donc être analysée pour construire une représentation interne basique de l'espace via les configurations rétinienne qu'il permet.

Puisque seules les propriétés topologiques de l'espace des points de vue nous intéressent ici, les méthodes proposées au chapitre 2 peuvent être directement appliquées pour générer une représentation basse dimension de l'expérience sensorielle.

3. Condition remplie si $2A \geq 2\pi$.

4. Ce repère est bien de dimension 2, contrairement au repère 1D attaché à la rétine.

5. Cette affirmation n'est vraie que si les hypothèses de travail proposées en 2.3.2 sont vérifiées.

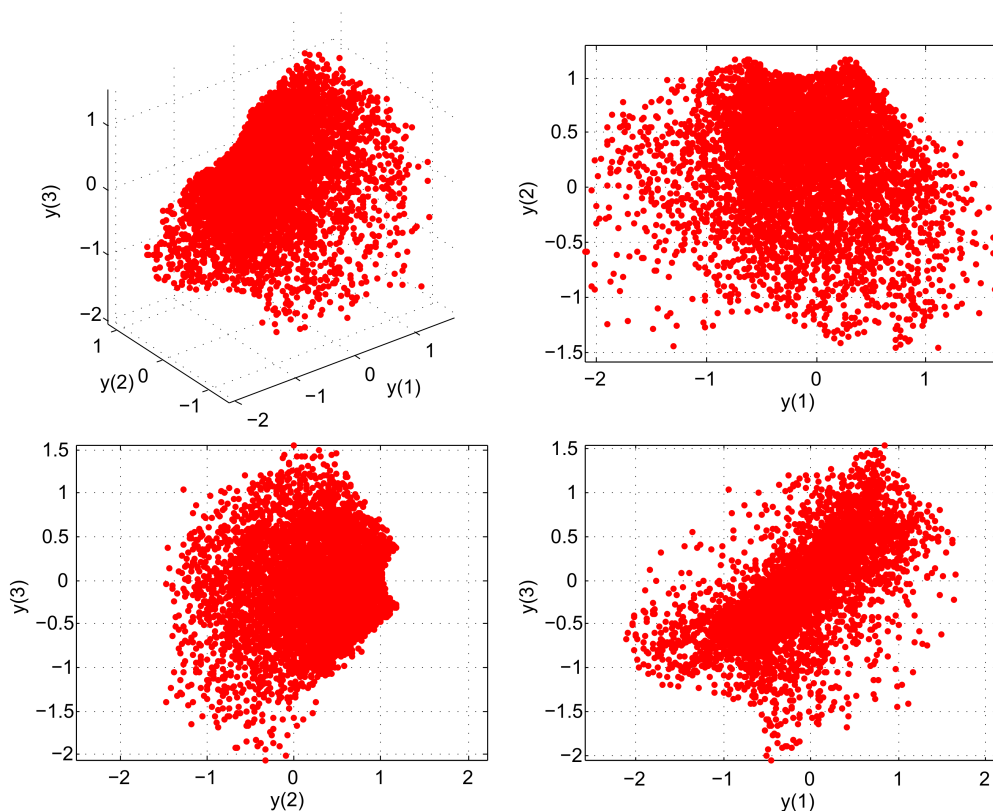


FIGURE 4.5: En haut à gauche : visualisation 3D de la projection pour $p = 3$. Autres cadres : visualisations 2D de la projection selon les différentes combinaisons de coordonnées $\{y(1), y(2), y(3)\}$.

4.2.3 Résultat de la projection

Estimation de dimension : La méthode non-linéaire d'estimation de dimension par essai-erreur est appliquée à la distribution sensorielle générée lors de l'exploration. Les erreurs de projection E_{CCA} obtenues pour $p \in [1, 4]$ ainsi que leurs ratios successifs sont présentés figure 4.4. La dimension estimée $\hat{l}$ du nuage de points, associée au ratio maximum, est de 3.

Projection des données sensorielles : Les données sensorielles sont projetées par CCA dans un espace de représentation de dimension $p = \hat{l} = 3$. La distribution obtenue est représentée figure 4.5.

4.2.4 Analyse des résultats

Les flux moteur et sensoriel du robot sont respectivement de dimension 4 et 6. L'analyse des données sensorielles collectées lors de l'exploration de l'espace moteur ont toutefois permis de découvrir une sous-variété sensorielle de dimension 3. Cette dimensionnalité réduite est due aux capacités d'action réelles réduites du robot. L'espace extérieur 2D permet en effet à la rétine de se translater selon deux directions différentes et d'effectuer une rotation dans le plan. La représentation finale obtenue permet donc de capturer ces possibilités limitées de mouvement.

Remarques : La configuration du système est telle que la rétine ne peut faire le tour complet de l'objet dans la simulation. Si les points de vue "arrières" à l'objet étaient également accessibles, la sous-variété sensorielle générée serait par définition bouclée, du fait du ddl en rotation de la rétine. Sa projection dans un espace de dimension $p = 3$ aurait donc été plus délicate (voir 2.6.2.3) et aurait par exemple nécessité de scinder l'échantillonnage⁶.

Une étude a également été réalisée avec un environnement mono-couleur. La quasi-symétrie qui en découle et ses conséquences sur la sous-variété sensorielle et la projection finale sont discutées en annexe C de cette thèse.

4.2.5 Conclusion

L'espace interne ainsi généré permet au robot d'interpréter ses informations sensorielles en terme de points de vue⁷. Il possède ainsi une représentation interne des mouvements que l'espace extérieur lui permet de réaliser. Celle-ci présente toutefois une limitation majeure : elle dépend de l'environnement. Modifier l'objet observé, ou même le déplacer, signifie en effet changer les états sensoriels parcourus lors de l'exploration, et donc la représentation interne finale. Cette dépendance est problématique et ne s'accorde pas avec la notion d'espace extérieur indépendant des objets qu'il contient. La prochaine simulation s'attache donc à extraire les capacités d'action du robot sans dépendre de l'état de l'environnement.

4.3 Simulation 2 : l'espace des points de vue indépendants de l'environnement

La première simulation a permis de découvrir les capacités d'actions réelles du robot et d'en construire une représentation interne. Néanmoins, cette dernière dépend des caractéristiques de l'environnement lors de l'exploration. L'observation d'objets différents génère ainsi une multitude de représentations internes distinctes.

Afin d'éliminer cette dépendance, une seconde stratégie d'exploration est proposée ci-après. Elle s'appuie à la fois sur les informations sensorielles et motrices du robot pour construire une représentation interne identique pour tout objet observé.

4.3.1 Stratégie d'exploration

Les données sensorielles extéroceptives, à partir desquelles était construite la représentation interne de la première simulation, sont par nature dépendantes de l'état de l'environnement. A l'inverse, les informations motrices à l'origine de l'exploration sont par définition générées par le robot de manière indépendante de l'environnement. Le flux moteur peut donc être étudié à la place du flux sensoriel afin de construire une représentation viable pour tous les états environnementaux.

Le seul flux moteur n'est toutefois pas suffisant pour extraire les capacités d'action réelles du robot. Il ne renseigne en effet aucunement sur les caractéristiques du système qui, comme nous l'avons vu au chapitre 1 (1.5.3), ne contraignent que son état sensoriel. Les

6. Les méthodes de réduction de dimension considèrent que l'espace de projection est euclidien et donc non-bouclé.

7. Le terme de point de vue a ici du sens pour un observateur extérieur ; le robot n'a lui pas accès à cette notion mais sait que son expérience sensorielle et ses capacités motrices peuvent être décrites par 3 variables indépendantes.

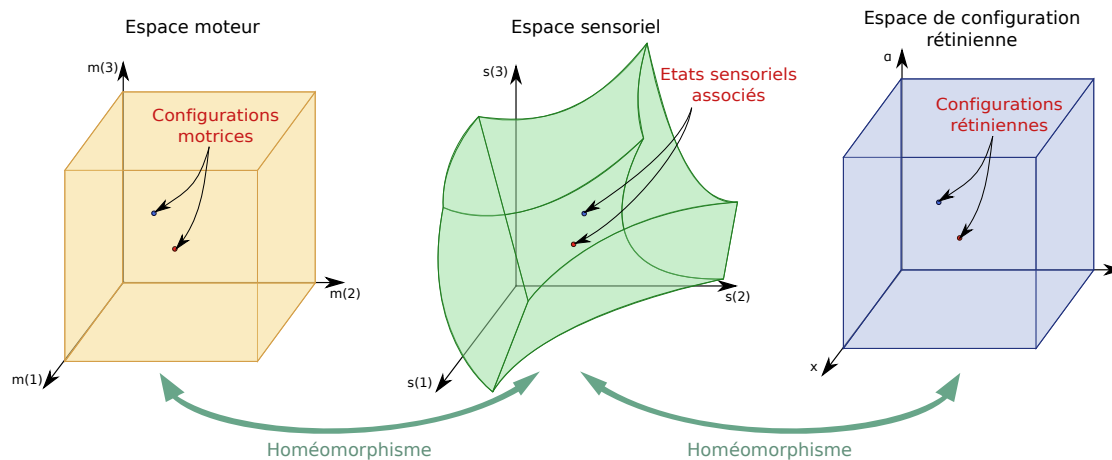


FIGURE 4.6: Pour un robot non-redondant, les commandes motrices $m(i)$ permettent de contrôler directement la configuration rétinienne et donc l'état sensoriel du robot. Les espaces moteur, sensoriel et de configuration rétinienne sont alors homéomorphes. L'espace moteur peut alors être utilisé comme représentation interne de l'espace des points de vue.

informations motrices doivent donc être analysées conjointement aux informations sensorielles afin d'assurer l'indépendance à l'environnement tout en capturant les propriétés réelles du système.

Le principe de la seconde stratégie d'exploration est explicité ci-après dans le cas d'un robot plus simple, puis étendu aux cas plus complexes.

4.3.1.1 Robot non-redondant

Supposons que le robot possède $N_m = 3$ moteurs indépendants permettant de fixer directement les 3 ddl de la rétine (position et orientation). Chaque configuration motrice correspondrait alors à un point de vue sur l'objet et à l'état sensoriel qui lui est associé. La variété motrice parcourue lors de l'exploration serait homéomorphe à la sous-variété sensorielle, elle-même homéomorphe, d'un point de vue extérieur, à la variété des points de vue, comme représentée figure 4.6. Une simple projection de la distribution motrice vers un espace de représentation interne permettrait alors de capturer les propriétés topologiques de l'ensemble des points de vue, et donc des capacités d'action réelles du robot⁸.

4.3.1.2 Extension aux robots redondants

Lorsque les commandes motrices du robot sont redondantes vis-à-vis de ses capacités d'action réelles, un ensemble de configurations motrices peuvent être associées à un même point de vue et à l'état sensoriel qui lui est associé, comme illustré figure 4.8 dans le cas du bras. La dimension de l'espace défini par cet ensemble est égale au degré de redondance du robot. Pour une seule redondance, cet ensemble décrit une courbe. Pour deux, une surface. Pour trois, un volume, et ainsi de suite. . .

Le même raisonnement que précédemment peut toutefois être mené en remplaçant chaque

8. La projection est évidemment ici accessoire puisque les espaces moteurs et représentatifs sont tous deux de dimension 3. De même, pour un robot non-redondant, les commandes motrices sont directement représentatives de ses capacités d'action réelles.

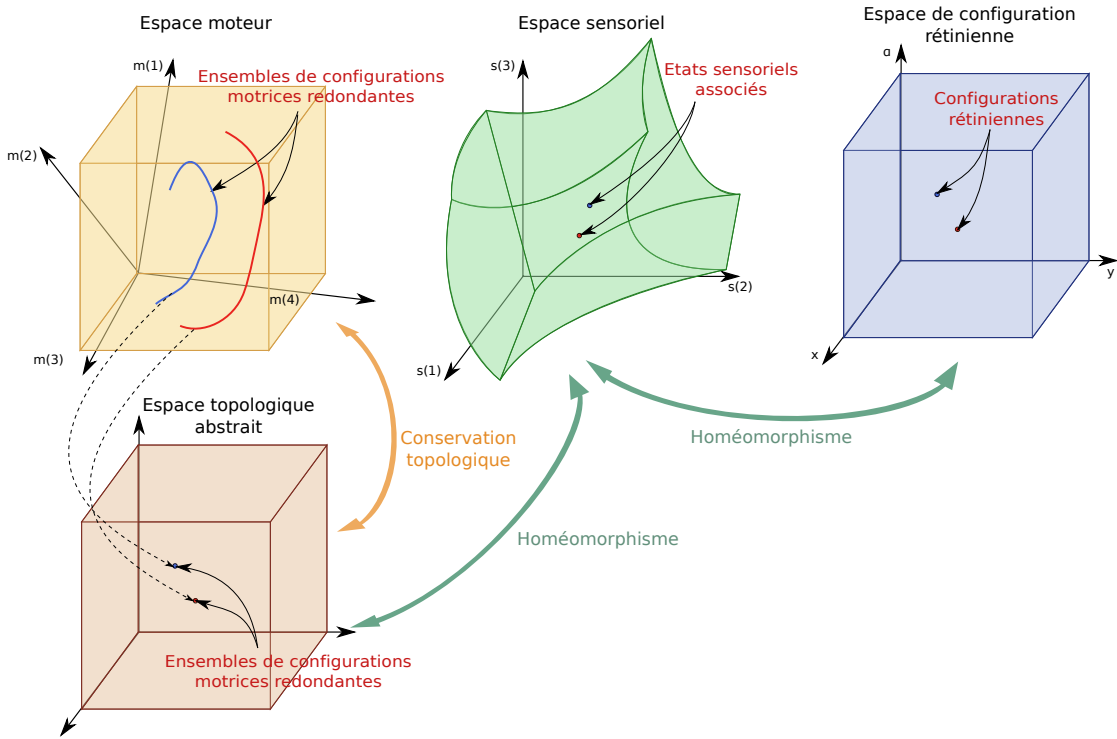


FIGURE 4.7: Pour un robot redondant (ici 1 ddl de redondance), un ensemble de configurations motrices sont associées à un même état sensoriel et donc à une même configuration de la rétine. Les ensembles de configurations motrices redondantes peuvent néanmoins être représentés par des points dans un espace où leurs relations topologiques sont conservées. Cet espace est alors homéomorphe à l'espace des points de vue.

point⁹ de l'espace moteur (cas non-redondant) par l'ensemble de configurations motrices associées au même état sensoriel (cas redondant). Chaque ensemble est ainsi associé à un état sensoriel et à un point de vue sur l'objet, comme représenté figure 4.7. Les différents ensembles de configurations motrices forment alors une variété homéomorphe à la sous-variété sensorielle, et donc à la variété des points de vue. En d'autres termes, chaque ensemble de configurations motrices associées à un même état sensoriel peut être assimilé à un point dans un espace topologique abstrait. La variété décrite par ces différents points est homéomorphe à la sous-variété sensorielle, elle-même homéomorphe à celle des points de vue. Les capacités d'action du robot peuvent donc être découvertes via l'analyse des ensembles de configurations motrices redondantes. Notons que ce raisonnement n'est viable que si deux ensembles proches de configurations redondantes sont associés à deux états sensoriels proches.

La méthode proposée pour effectuer une telle analyse dans le cas du robot à 4 ddl moteurs est présentée en détail ci-après.

4.3.2 Les ensembles de configurations redondantes

Nous présentons tout d'abord le formalisme utilisé pour décrire les ensembles de configurations motrices redondantes qui génèrent un même état sensoriel. Dans un second temps, l'algorithme utilisé pour découvrir ces ensembles est présenté en détail.

9. Le point peut être interprété comme un ensemble de dimension 0.

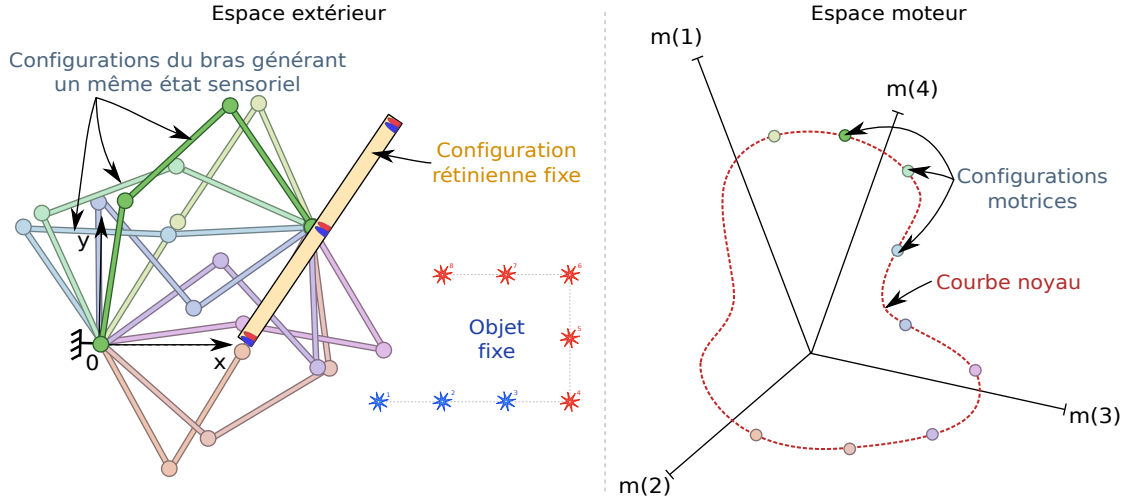


FIGURE 4.8: Le bras étant redondant, un ensemble de configurations motrices permettent de générer la même configuration rétinienne et donc le même état sensoriel. L'ensemble de ces configurations forment une courbe dans l'espace moteur du robot.

4.3.2.1 Formalisation

Le robot décrit en 4.1.2 possède $N_m = 4$ moteurs pour fixer les 3 ddl de la rétine. Il possède donc 1 ddl redondant. Comme nous l'avons vu précédemment, l'ensemble des configurations motrices, notées M_i , associées à un même état sensoriel S_i forment donc une courbe (sous-variété de dimension 1). Nous noterons M_i^j la configuration motrice j associée à l'état sensoriel S_i . L'ensemble des M_i^j constitue formellement le noyau de la fonction ϕ_{S_i} permettant de générer les variations sensorielles autour de S_i :

$$\text{Ker}(\phi_{S_i}(M)) = \text{Ker}(\phi(M, E) - S_i) = \text{Ker}(\phi(M, E) - \phi(M_i^j, E)), \quad (4.6)$$

avec E l'état constant de l'environnement et M_i^j un état moteur associé à S_i . Afin d'alléger l'écriture, le noyau de ϕ_{S_i} sera par la suite noté Ker_i et la courbe résultante formée de l'ensemble des M_i^j , illustrée figure 4.8, sera nommée *courbe noyau*.

Bien que cette propriété n'ait pas été formellement démontrée, les résultats expérimentaux révèlent que les courbes noyaux sont bouclées, comme peut le laisser supposer la nature rotative des ddl moteurs du bras.

4.3.2.2 Découverte des courbes noyaux

Soit S_i un état sensoriel quelconque du robot généré par la configuration motrice initiale M_i^0 et Ker_i la courbe noyau qui lui est associée. Le robot, naïf, n'a évidemment pas accès à l'expression analytique de Ker_i ou même ϕ_{S_i} . Il peut par contre approximer la courbe noyau par un ensemble d'échantillons moteurs M_i^j tous associés à S_i .

La découverte des M_i^j pourrait être réalisée via une exploration exhaustive de l'espace moteur du robot. Une telle démarche se révélerait toutefois très coûteuse en temps de calcul. En pratique, les échantillons sont donc générés en parcourant itérativement Ker_i à partir de M_i^0 . Notons que cette approche est adaptée pour l'échantillonnage d'une variété de dimension 1 (une courbe). Une autre méthode devrait être proposée pour des robots à plus de 1 ddl de redondance. Les différentes étapes de l'algorithme sont détaillées ci-après.

Estimation de la Jacobienne du système : La Jacobienne J de la fonction liant la configuration motrice M du robot à la configuration de sa rétine est estimée en M_i^0 . La sous-variété sensorielle étant homéomorphe à celle des configurations rétinienne, cette estimation pourrait être réalisée via une exploration infinitésimale autour de M_i^0 . Afin de réduire le coût computationnel de la simulation, l'expression analytique suivante est toutefois directement utilisée :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_{retine}}{\partial m(1)} & \frac{\partial \alpha_{retine}}{\partial m(2)} & \frac{\partial \alpha_{retine}}{\partial m(3)} & \frac{\partial \alpha_{retine}}{\partial m(4)} \\ \frac{\partial x_{retine}}{\partial m(1)} & \frac{\partial x_{retine}}{\partial m(2)} & \frac{\partial x_{retine}}{\partial m(3)} & \frac{\partial x_{retine}}{\partial m(4)} \\ \frac{\partial y_{retine}}{\partial m(1)} & \frac{\partial y_{retine}}{\partial m(2)} & \frac{\partial y_{retine}}{\partial m(3)} & \frac{\partial y_{retine}}{\partial m(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sin_1 - \sin_{12} - \sin_{123} & -\sin_{12} - \sin_{123} & -\sin_{123} & 0 \\ \cos_1 + \cos_{12} + \cos_{123} & \cos_{12} + \cos_{123} & \cos_{123} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

avec α_{retine} l'orientation de la rétine dans le repère monde, $[x_{retine}, y_{retine}]$ la position de la rétine dans le repère monde, $\sin_1 = \sin(m(1))$, $\sin_{12} = \sin(m(1) + m(2))$, $\sin_{123} = \sin(m(1) + m(2) + m(3))$, $\cos_1 = \cos(m(1))$, $\cos_{12} = \cos(m(1) + m(2))$ et $\cos_{123} = \cos(m(1) + m(2) + m(3))$.

Estimation du noyau de J : Le noyau de J est estimé localement autour de M_i^0 par une DVS :

$$J = U\Omega V^T. \quad (4.8)$$

Le dernier vecteur singulier à droite V_4^0 est associé à la plus petite valeurs singulière de J (nulle ou non-significative) car J est de taille 3×4 et de rang 3. Il correspond localement au noyau de la jacobienne et définit une direction dans l'espace moteur pour laquelle la variation sensorielle engendrée serait nulle.

Génération d'un nouvel échantillon de Ker_i : Une nouvel échantillon M_i^1 de Ker_i est généré en se déplaçant dans la direction définie par V_4^0 :

$$M_i^1 = M_i^0 + \mu \rho V_4^0, \quad (4.9)$$

avec $\mu = 10^{-3}$ un pas suffisamment petit pour respecter l'approximation linéaire locale et ρ un coefficient décrit ci-après.

Génération successive de plusieurs échantillons : L'ensemble de la courbe noyau est parcourue itérativement en répétant les étapes précédentes. Chaque échantillon M_i^j permet ainsi de générer un échantillon M_i^{j+1} via le vecteur V_4^j . Le coefficient ρ permet de garantir que Ker_i est constamment parcourue dans le même sens :

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{si } V_4^j \cdot V_4^{j-1} \geq 0 \\ -1 & \text{si } V_4^j \cdot V_4^{j-1} < 0 \\ 1 & \text{si } j = 0 \end{cases}. \quad (4.10)$$

Sa valeur de 1 pour $j = 0$ permet de fixer un sens de parcours *positif* de la courbe. La génération d'échantillons prend fin lorsque l'ensemble de la courbe bouclée a été

```

Data :  $M_i^0$ 
Result :  $M_i^j$ 
Initialization :  $j = 0, \mu = 10^{-3}, \rho = 1$ 
while  $j \leq 10000$  do
    Estimate  $J$  in  $M_i^j$ 
     $J = U\Omega V^T$ 
     $V_4^j = V(1 : 3, 4)$ 
    if  $j = 0$  then
         $\rho = 1$ 
    else
        if  $V_4^j \cdot V_4^{j-1} \geq 0$  then
             $\rho = 1$ 
        else
             $\rho = -1$ 
        end
    end
     $M_i^{j+1} = M_i^j + \mu\rho V_4^j$ 
     $j = j + 1$ 
    if  $d(M_i^j, M_i^0) \leq 10^{-2}$  and  $j \geq 50$  then
        Stop
    end
end

```

Algorithme 2: Algorithme d'échantillonnage de courbe noyau

découverte. Cette condition est remplie si M_i^j se trouve dans le voisinage de M_i^0 ¹⁰ (pour un nombre minimal d'échantillons $j \geq 50$) :

$$d(M_i^j, M_i^0) \leq 10^{-2}, \text{ avec } j \geq 50. \quad (4.11)$$

L'ensemble des étapes détaillées précédemment sont résumées dans l'algorithme 2.

Homogénéisation des échantillonnages : La longueur des courbes noyaux pouvant être variable, le nombre d'échantillons M_i^j est potentiellement différent pour des états S_i distincts. Une homogénéisation de l'échantillonnage est donc réalisée par interpolation des M_i^j afin de réduire le nombre de configurations motrices finales à $N_{ech} = 100$ pour chaque Ker_i .

4.3.3 Analyse de l'ensemble des courbes noyaux

Si deux états sensoriels proches sont associés à deux courbes noyaux proches, alors l'ensemble des Ker_i forment une variété topologiquement équivalente à la sous-variété sensorielle $\mathcal{S}$. Cette condition suppose de définir une métrique sur l'ensemble des courbes noyaux.

10. Si pour une raison quelconque, cette condition n'est pas remplie après 100000 itérations, un parcours complémentaire de la courbe noyau peut être réalisé dans le sens *négatif* en fixant $\rho = -1$ pour $j = 0$.

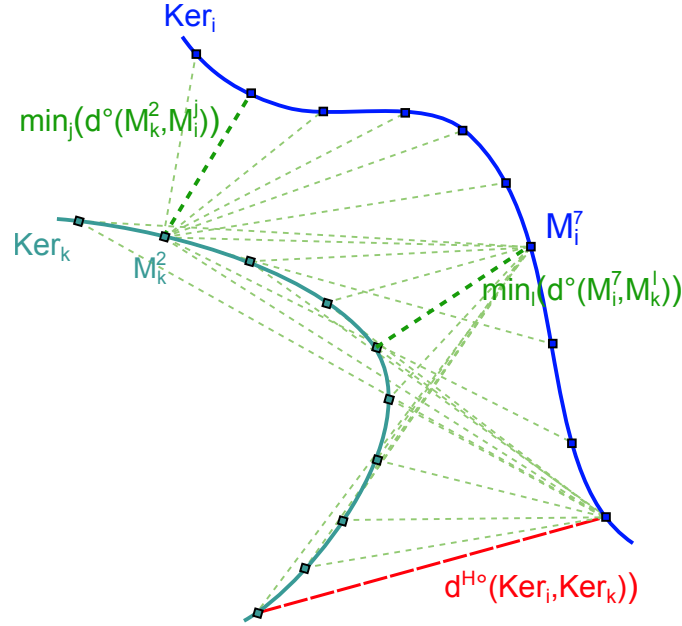


FIGURE 4.9: Pour chaque échantillon des deux courbes, la distance à l'échantillon le plus proche de l'autre courbe est déterminée en appliquant la métrique modifiée. La plus grande de ces distances minimales correspond à la distance de Hausdorff modifiée entre les deux courbes noyaux.

4.3.3.1 Métrique de l'ensemble des courbes noyaux

Dans notre système simulé, les Ker_i sont des sous-variétés de dimension 1 régulièrement échantillonnées. La métrique utilisée pour définir les distances entre ces différentes courbes fermées est une métrique de Hausdorff modifiée.

Intuitivement, la distance de Hausdorff correspond à la valeur maximale des distances euclidiennes minimales pour se rendre des échantillons d'une courbe à ceux de l'autre. Les distances euclidiennes minimales sont obtenues pour chaque point M_i^j d'une courbe, en mesurant les distances qui le séparent de tous les points M_k^l de l'autre courbe. Son principe est illustré figure 4.9.

La distance de Hausdorff est légèrement modifiée pour tenir compte de la nature périodique des commandes motrices du robot (ddl en rotation). Ainsi, les distances entre échantillons des deux courbes sont mesurées par une distance euclidienne modifiée :

$$d^o(M_i^j, M_k^l) = \sqrt{\sum_{q=1}^{N_m} h\left(M_i^j(q) - M_k^l(q)\right)^2}, \quad (4.12)$$

avec :

$$h(a) = \begin{cases} 2\pi - a & \text{si } a > \pi \\ -2\pi - a & \text{si } a < -\pi \end{cases}. \quad (4.13)$$

L'ajout de la fonction $h(\cdot)$ dans le calcul de la distance euclidienne permet de tenir compte de la périodicité des sensations générées par les rotations des segments du bras. La distance entre deux coordonnées motrices $\{m(i), m(j)\}$ ne peut ainsi être supérieure à π et la distance entre deux configurations motrices $\{M_i, M_j\}$ ne peut être supérieure à $\sqrt{4\pi^2} = 2\pi$ ¹¹.

11. Cette borne dérive de l'équation (4.12) pour un espace de dimension $N_m = 4$.

Formellement, la distance de Hausdorff modifiée est donc calculée comme suit :

$$d^{Ho}(Ker_i, Ker_k) = \max \left\{ \begin{array}{l} \max_j (\min_l (d^\circ(M_i^j, M_k^l))) \\ \max_l (\min_j (d^\circ(M_i^j, M_k^l))) \end{array} \right\}. \quad (4.14)$$

4.3.3.2 Projection des courbes noyaux

Une fois la métrique de l'ensemble des courbes noyaux déterminée, il est possible de les projeter comme une distribution traditionnelle. Notons que les Ker_i ne sont pas rigoureusement projetées. Chacune d'entre elle est plutôt assimilée à un point dans un espace abstrait de dimension inconnue. Les distances de Hausdorff modifiées estimées précédemment permettent de décrire les relations de distances entre ces points. Celles-ci permettent d'envisager la projection de ces points¹², bien que leur position absolue dans l'espace abstrait ne soit jamais définie. Chaque courbe noyau Ker_i sera donc associée à un point dans l'espace représentatif de sortie.

La dimension l de l'ensemble des courbes noyaux est estimée à l'aide de la méthode essai-erreur basée sur CCA proposée en 2.7.4. De même, la méthode de réduction non-linéaire CCA, détaillée en 2.6.2, est utilisée pour réaliser leur projection dans un espace de sortie de dimension $p = \hat{l}$.

4.3.4 Résultats

Le déroulement de la simulation et les résultats intermédiaires et finaux de la projection sont présentés successivement ci-après.

4.3.4.1 Déroulement de la simulation

La simulation se déroule en trois étapes. Premièrement, une phase d'exploration aléatoire de l'espace moteur du robot est réalisée de manière identique à la première simulation (4.2.1). Deuxièmement, les courbes noyaux Ker_i associées aux états sensoriels S_i ainsi obtenus sont générées grâce à l'algorithme présenté précédemment (4.3.2.2). Troisièmement, la métrique entre les différentes courbes noyaux est calculée et celles-ci sont projetées dans un espace représentatif.

Critère de non-scindement des courbes noyaux : Bien que les conditions d'exploration soient identiques à la première simulation, notons toutefois qu'un critère supplémentaire est considéré pour évaluer la viabilité de chaque configuration motrice. Ainsi, pour qu'un état moteur M_i soit conservé dans l'échantillonnage, il faut que la distance entre la base du robot et son extrémité soit supérieure à la longueur des segments du bras :

$$d(P_{retine}|_{monde}, P_{base}|_{monde}) \geq 1, \quad (4.15)$$

avec $P_{base}|_{monde} = [0, 0]^T$. Ce critère permet d'éviter les configurations problématiques du bras pour lesquelles la courbe noyau est scindée en deux sous-courbes distinctes, comme illustré figure 4.10. La méthode de parcours itératif des courbes noyaux décrite en 4.3.2.2 ne permettrait alors pas de découvrir les deux sous-courbes¹³.

12. Les méthodes de réduction de dimension peuvent ne prendre en compte que les distances inter-points plutôt que leurs coordonnées absolues.

13. Notons que cette limitation est bien due à la méthode proposée en 4.3.2.2 puisqu'une exploration exhaustive de l'espace moteur permettrait de découvrir les deux sous-courbes.

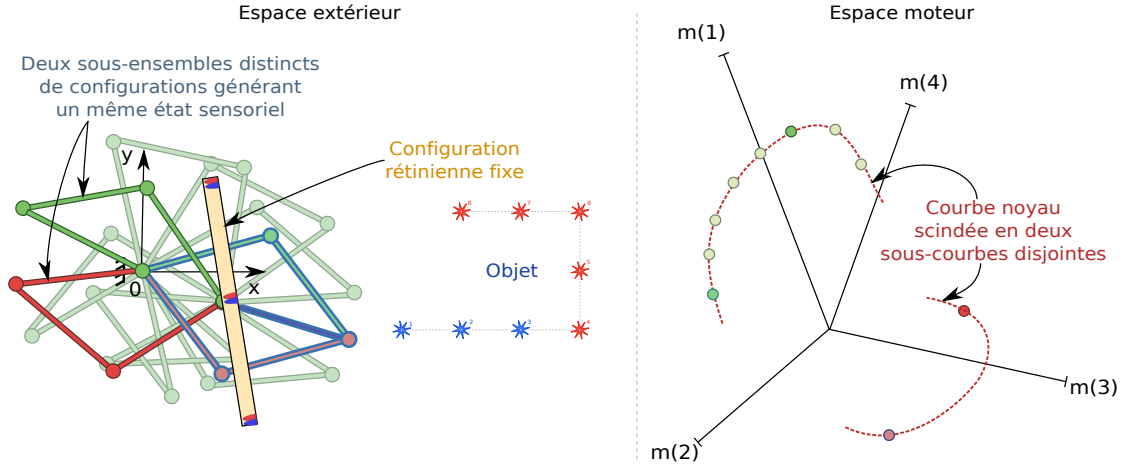


FIGURE 4.10: Configuration rétinienne problématique pour laquelle la courbe noyau est scindée en deux du fait de la trop grande proximité de la base du bras et du centre de la rétine. Partant de la configuration en vert foncé, il est impossible d'atteindre la configuration rouge foncé sans déplacer temporairement la rétine. Les configurations bordées des bleu illustrent les configurations du bras de ces deux morceaux de courbe noyau associées à une même orientation du segment final (en bleu).

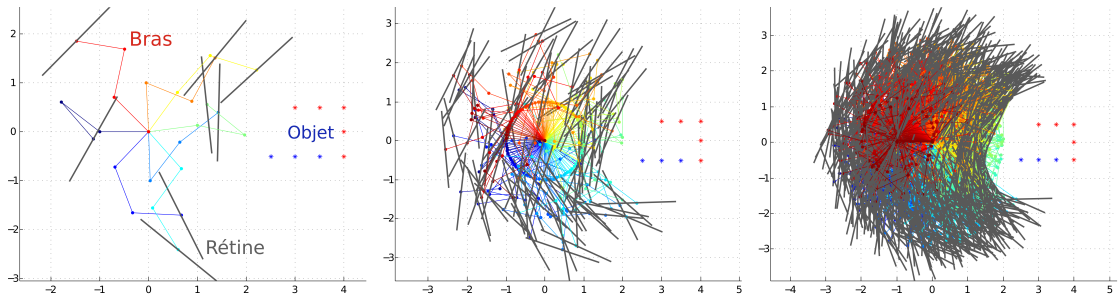


FIGURE 4.11: Configurations motrices aléatoires générant des états sensoriels viables vis-à-vis des critères de sélection. De gauche à droite : représentation de 8, 100 puis 1000 configurations du bras.

L'ajout de ce critère réduit la portion d'espace explorable par le robot. L'objet est donc déplacé en $[3.5, 0]$ afin d'élargir la zone accessible restreinte par les contraintes de viabilité proposées en 4.2.1.

4.3.4.2 Echantillonnage moteur et courbes noyaux

Les $N = 1000$ configurations motrices initiales M_i^0 viables tirées lors de l'exploration et générant les états sensoriels S_i sont représentées figure 4.11 avec différentes densités d'affichage. Les $N = 1000$ courbes noyaux Ker_i associées à ces configurations motrices et aux états sensoriels S_i correspondants sont représentées figure 4.12 avec deux densités d'affichage différentes. Enfin, la figure 4.13 permet d'observer les $N_{ech} = 100$ configurations motrices M_i^j finales associées à quelques unes des courbes noyaux.

4.3.4.3 Dimension intrinsèque de l'ensemble des courbes noyaux

Nous cherchons à présent à estimer la dimension intrinsèque de l'ensemble des courbes noyaux. Les erreurs de projection E_{CCA} obtenues par CCA et leurs rapports successifs sont présentés figure 4.14 pour des dimensions d'espace de sortie p comprises entre 1 et

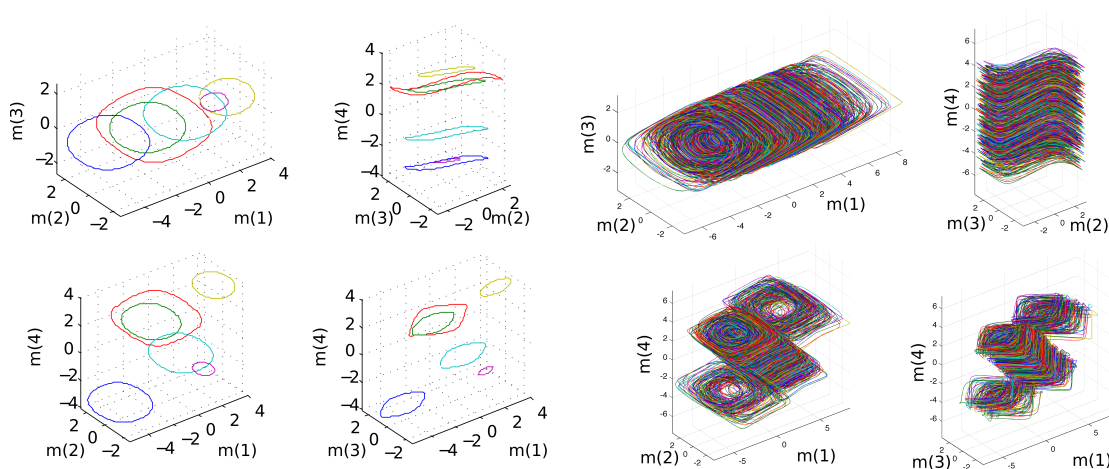


FIGURE 4.12: Projections 3D des courbes noyaux dans l'espace moteur 4D. A gauche : courbes noyaux associées à 6 états sensoriels et configurations rétinienne différentes. A droite : ensemble des $N = 1000$ courbes noyaux de la simulation.

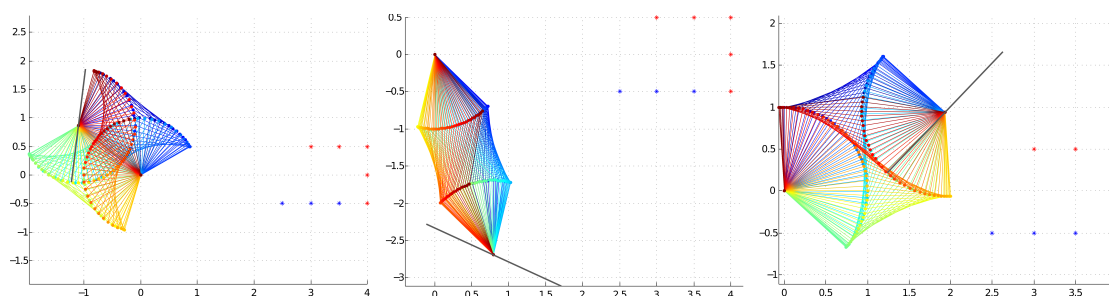


FIGURE 4.13: Trois exemples de courbes noyaux visualisées dans l'espace géométrique extérieur. Chaque configuration du bras correspond à un échantillon de la courbe noyau associée.

$p_{max} = 15$. Notons que la dimension de l'espace des données est ici inconnue (espace topologique abstrait où chaque courbe noyau est représentée par un point). Seules les distances inter-courbes sont en effet définies via la métrique de Hausdorff modifiée. La valeur de p_{max} est donc fixée arbitrairement (à 15).

Le résultat de l'estimation de dimension se révèle ambigu. Le premier rapport maximal ($p = 2$) est en effet suivi d'un second rapport ($p = 3$) de valeur équivalente. Cette ambivalence s'explique par la forme de la sous-variété projetée. Comme présentée ci-après, l'ensemble des courbes noyaux forment un nuage semblable à un cylindre épais et creux (voir figure 4.15). La scission de ce cylindre dans sa zone la moins dense et sa projection dans un espace de sortie de dimension $p = 2$ génère ainsi une erreur de projection relativement faible, expliquant l'importance du premier rapport.

Au-delà de cette interprétation, la variété des courbes noyaux est homéomorphe à la sous-variété sensorielle déjà étudiée en 4.2.3 (si toutes les hypothèses de travail sont respectées). Leur dimensionnalité est donc identique. Nous pouvons donc conclure que la dimension intrinsèque de l'ensemble des courbes noyaux est de 3¹⁴.

14. La méthode auxiliaire d'estimation de dimension n'est ici d'aucune aide puisque la méthode ISO-MAP, fondée sur les distance de graphe, se révèle très peu performante dans le cas de distributions présentant des trous (creux du cylindre dans le cas présent).

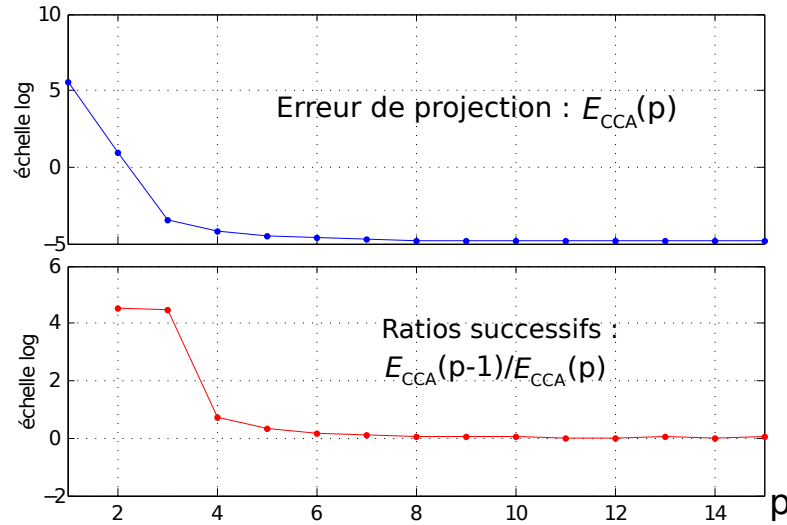


FIGURE 4.14: En haut : erreurs de projections générées par CCA pour $p \in [1, 15]$ en échelle logarithmique. En bas : ratios successifs des erreurs de projection en échelle logarithmique. Le ratio est maximum pour $p = 2$ mais quasiment équivalent pour $p = 3$. Cette ambiguïté s'explique par la forme de cylindre creux (présentée en 4.3.4.4) de la sous-variété étudiée.

4.3.4.4 Projection de l'ensemble des courbes noyaux

La distribution de sortie obtenue par CCA pour un espace de sortie de dimension $p = 3$ est représentée figure 4.15. Comme déjà évoqué précédemment, le nuage projeté est similaire à un cylindre épais et creux. Cette forme particulière s'explique par les contraintes lors de l'exploration. Ainsi, comme l'illustre la figure 4.16, la nouvelle contrainte de conservation des configurations motrices (voir (4.15)) implique qu'un disque de rayon 1 centré sur la base du robot ne peut être exploré par la rétine. Ce trou dans la zone d'exploration extérieure est à l'origine du creux dans le cylindre projeté. La sous-variété de sortie peut alors être interprétée comme suit : une coupe orthogonale à l'axe du cylindre permet de rendre compte des translations de la rétine tandis que son orientation est capturée par la longueur du cylindre.

4.3.5 Conclusion

La projection finale dans l'espace représentatif représentée figure 4.15 permet de capturer les capacités d'action réelles du robot. Cette découverte est rendue possible par l'analyse de la variété sensorielle générée par les interactions du système robot/environnement. Néanmoins, afin de pouvoir construire une représentation interne indépendante de l'environnement observé, la structure de cette variété est extraite via l'ensemble des courbes noyaux. Ce dernier présente l'avantage d'être indépendant de l'état environnemental tout en étant homéomorphe à la sous-variété sensorielle parcourue lors de l'exploration. Pour des conditions d'exploration identiques, la représentation interne construite par l'agent est donc équivalente¹⁵ quel que soit l'objet qu'il observe. Notons que pour un robot présentant un nombre de commandes motrices redondantes supérieur, il est possible d'effectuer un traitement similaire des données. L'ensemble des

15. Identique en termes de métrique puisque la position et l'orientation de la distribution projetée par CCA sont aléatoires.

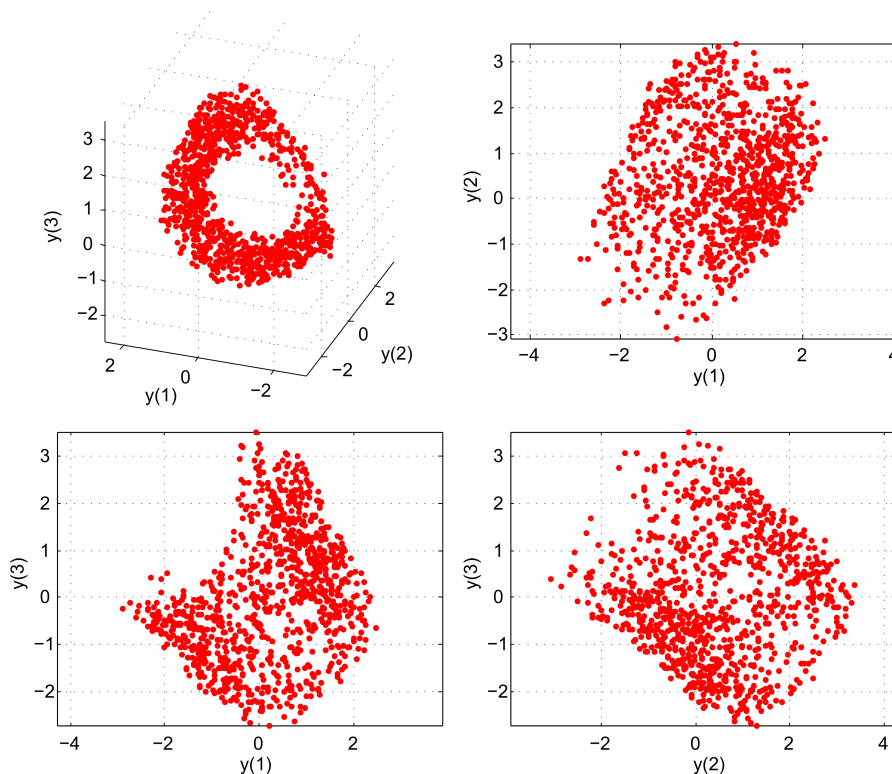


FIGURE 4.15: En haut à gauche : visualisation 3D de la projection pour $p = 3$. Autres cadres : visualisations 2D de la projection selon les différentes combinaisons de coordonnées $\{y(1), y(2), y(3)\}$.

configurations motrices redondantes ne serait alors pas assimilé à une courbe noyau mais à une variété de dimension supérieure. La méthode de parcours des courbes noyaux proposée précédemment devrait alors être généralisée à des variétés de plus grande dimension. L'assimilation de ces variétés à des points dans un espace topologique abstrait et leur projection dans l'espace de représentation interne pourraient ensuite être réalisée de manière équivalente à ce que nous avons présenté.

Les capacités de mouvements capturées par la représentation interne sont contraintes par la structure de l'espace géométrique extérieur. Elles ne sont toutefois pas suffisantes pour se construire une notion d'espace comme cadre commun aux déplacements du robot et de l'environnement. Ainsi, il est possible d'envisager des actions du robot qui ne soient pas des mouvements (exemple : rajout d'une pupille modifiant activement la quantité de lumière parvenant à la rétine.) mais qui viendraient s'ajouter aux capacités d'action découvertes. De même, les capacités de mouvement de l'objet ne sont pas prises en compte lors de la simulation, rendant impossible de capturer la nature particulière des propriétés spatiales du système qui sont communes au robot et à son environnement et permette une compensabilité sensorielle. La prochaine simulation propose donc une nouvelle stratégie d'exploration permettant de caractériser les déplacements du système.

4.4 Simulation 3 : découverte de l'espace des déplacements

Les simulations précédentes ont permis de construire des représentations internes des capacités d'action du robot, dépendante puis indépendante de l'objet observé. L'espace géométrique extérieur peut donc en partie être caractérisé par les contraintes qu'il induit

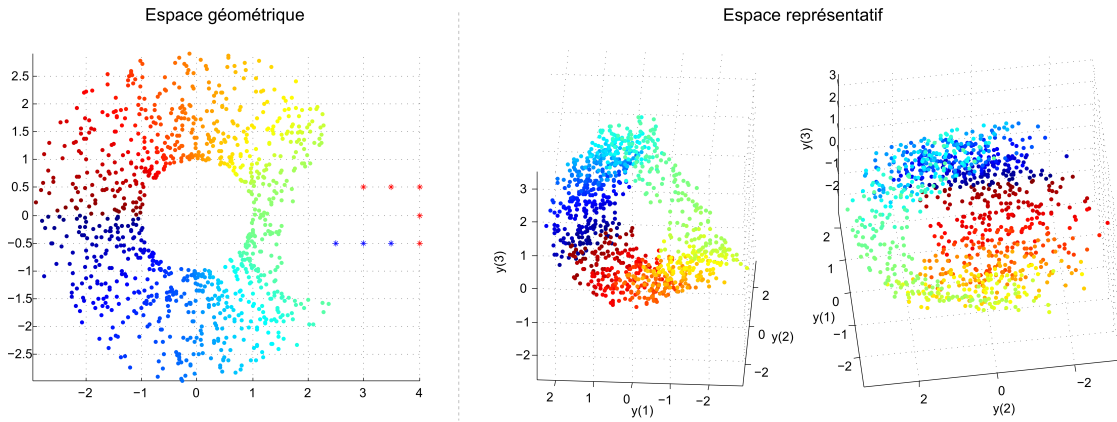


FIGURE 4.16: A gauche : Ensemble des positions prises par le centre de la rétine lors de l'exploration. Les points sont colorés suivant la position radiale de la rétine dans l'espace géométrique extérieur mais indépendamment de l'orientation de celle-ci. A droite : deux visualisations différentes de la représentation interne 3D avec respect du code couleur. Cette analyse supervisée permet de constater que les translations de la rétine sont capturées selon le plan orthogonal à l'axe du cylindre. Sa troisième dimension, selon l'axe du cylindre, capture donc les rotations de la rétine.

sur ces capacités d'action accessibles via le flux sensoriel.

La notion d'*espace* qui en résulte reste toutefois peu satisfaisante d'un point de vue extérieur. Elle ne permet pas, entre autres limitations, de définir des *positions* ou *déplacements* qui pourraient être partagés à la fois par le robot et les objets de l'environnement. Ces propriétés particulières sont pourtant celles à partir desquelles un agent naïf peut découvrir la notion d'espace qui nous est familière (1.6).

La stratégie d'exploration proposée ci-après s'attache à découvrir les capacités de *déplacement* du système. Pour ce faire, une simulation, où le robot et son environnement sont tous deux mobiles, est considérée.

4.4.1 Stratégie d'exploration du système

Principe de l'exploration : Les propriétés spatiales du système sont, par nature, partagées par le robot et son environnement. Ainsi, un même déplacement peut en théorie être réalisé par chacun d'entre eux. Du point de vue interne et naïf du robot, cette propriété se traduit par la capacité de maintenir un état sensoriel S constant lors de déplacements de l'environnement en les compensant par ses propres actions. Ce concept de compensabilité des variations sensorielles liées aux déplacements du système, introduit par H.Poincaré et présenté en 1.6.3, est à la base de cette troisième simulation. Le robot va ainsi chercher à maintenir un état sensoriel constant alors que l'objet sera amené à bouger dans l'espace extérieur. Les différentes configurations motrices résultantes seront analysées pour créer une représentation de l'espace des déplacements indépendante de l'objet observé.

Formalisation de l'approche : Soit $M^{(i)}$ une configuration motrice associée à un état sensoriel S pour une position quelconque $E^{(i)}$ de l'objet observé par le robot. Comme nous l'avons vu précédemment, cette configuration motrice est associée à une courbe noyau notée $\text{Ker}^{(i)}$ formée de l'ensemble des configurations motrices générant la même configuration rétinienne que $M^{(i)}$.

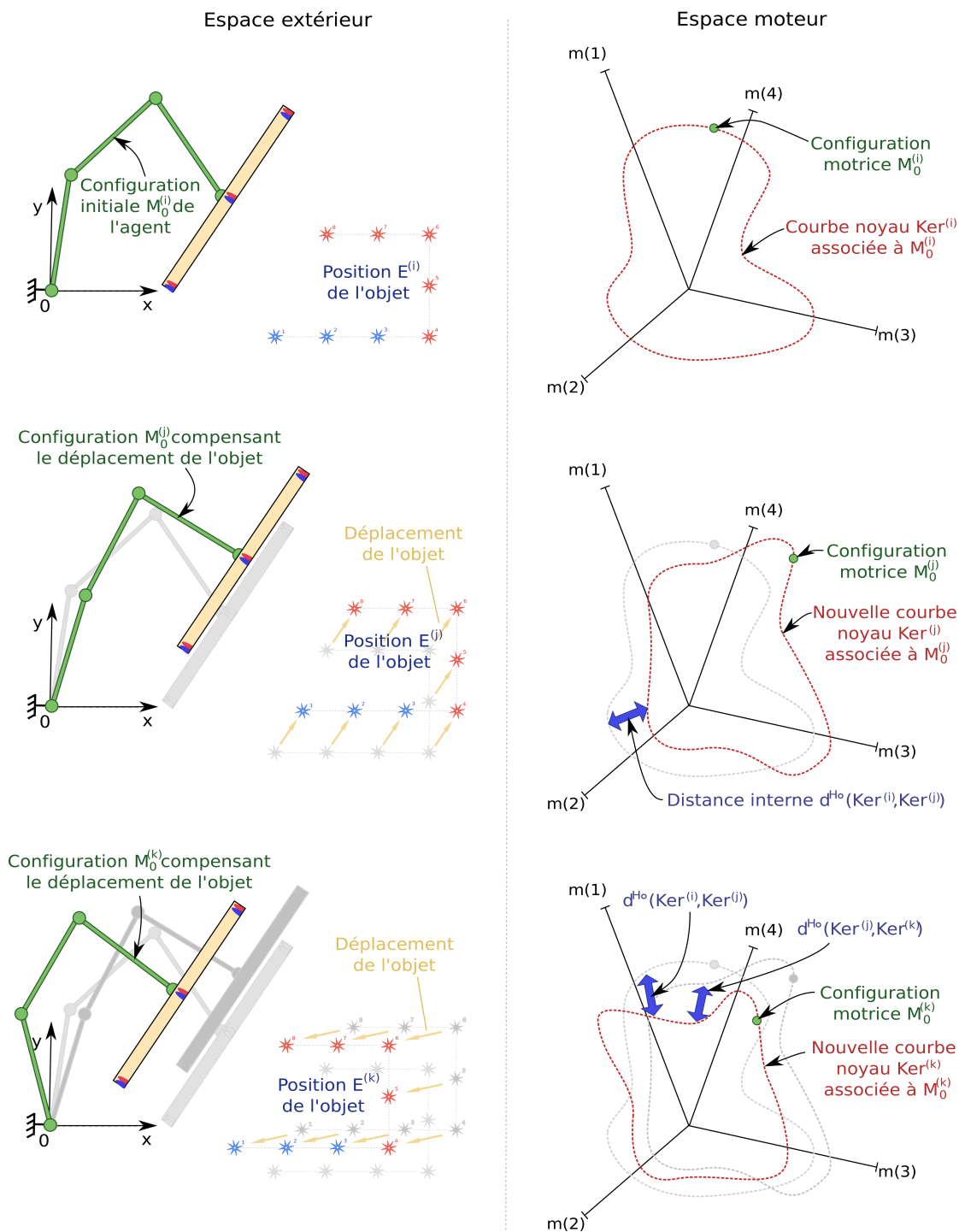


FIGURE 4.17: Colonne de gauche : une configuration motrice initiale permet d'observer l'objet selon un point de vue quelconque. A chaque déplacement de l'objet, le robot peut compenser la variation sensorielle résultante en effectuant un déplacement équivalent de sa rétine. Colonne de droite : chaque configuration motrice obtenue par compensation des déplacements de l'objet appartient à une courbe noyau dans l'espace moteur du robot. Les distances entre ces courbes noyaux peuvent être déterminées en appliquant la métrique de Hausdorff modifiée.

Lorsque l'objet se déplace dans l'espace extérieur, la configuration environnementale change. Ce nouvel état $E^{(j)}$ peut être repéré par le robot puisqu'il génère un état sensoriel différent de S sans qu'aucune commande motrice n'ait été envoyée au bras. Le robot peut donc tenter de compenser cette variation sensorielle en cherchant un nouvel état moteur $M^{(j)}$ permettant de générer à nouveau le même état sensoriel S . A nouveau, une courbe noyau $\text{Ker}^{(j)}$ est associée à cette nouvelle configuration motrice. Le principe de cette compensation est illustré figure 4.17.

Pour une multitude de déplacements de l'objet, le robot peut donc découvrir un ensemble de courbes noyaux distinctes pour chaque position de l'objet. Notons que, contrairement à la seconde simulation, toutes les courbes noyaux $\text{Ker}^{(i)}$ sont ici associées à un unique état sensoriel S mais à des configurations environnementales $E^{(i)}$ différentes. Comme précédemment, une métrique peut être définie sur cet ensemble de courbes. Elles peuvent alors être projetées dans un espace de représentation pour capturer les déplacements réalisés par le système durant l'exploration.

4.4.2 Implémentation de la stratégie d'exploration

Les différents aspects de la simulation concernant son initialisation, les déplacements de l'objet, la compensation sensorielle et le traitement des courbes noyaux sont détaillés ci-après.

4.4.2.1 Initialisation

Initialement, l'objet est placé en sa position de référence $[3.5, 0]$ dans le repère monde. Une configuration motrice $M^{(0)}$ répondant aux critères de viabilité proposés en (4.4), (4.5) et (4.15) est tirée aléatoirement pour cette première configuration environnementale $E^{(0)}$. Elle permet de générer l'état sensoriel S qui sera conservé durant toute l'exploration.

4.4.2.2 Déplacements de l'objet

Itérativement, la position de l'objet dans l'espace extérieur est modifiée de manière à définir une grille régulière centrée sur sa position de référence, comme illustré figure 4.18. L'état environnemental associé à chaque position i de l'objet est noté $E^{(i)}$.

Notons que les déplacements de l'objet pourraient être aléatoires. Une grille permet simplement une meilleure visualisation des résultats. De même, seules des translations sont considérées lors de ces différents déplacements. L'ajout de rotations de l'objet est envisageable mais pose certaines difficultés détaillées par la suite.

La grille considérée lors de la simulation est constituée de 64 positions réparties dans un carré de largeur 0.8.

4.4.2.3 Recherche des nouvelles configurations motrices

Pour chaque position de l'objet $E^{(i)}$, une nouvelle configuration motrice $M^{(i)}$ est recherchée afin, d'un point de vue extérieur, de conserver la position relative de la rétine avec l'objet et, d'un point de vue interne, de maintenir l'état sensoriel S .

La recherche de $M^{(i)}$ pourrait être réalisée exhaustivement dans l'espace moteur du robot. Néanmoins, afin de réduire le temps de la simulation, la nouvelle configuration est déterminée en minimisant, par un procédé adaptatif, l'erreur quadratique entre la

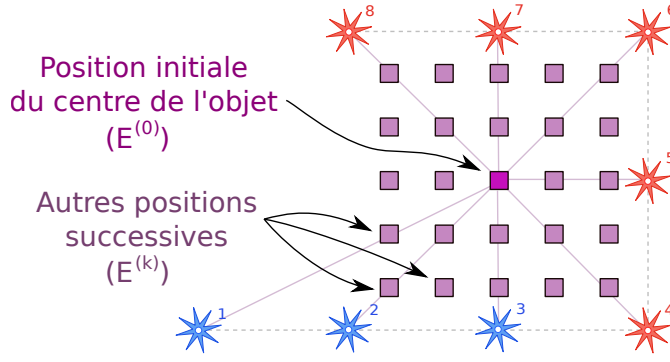


FIGURE 4.18: L'objet se déplace en différentes positions formant une grille régulière dans l'espace extérieur. La position initiale de l'objet (violet foncé) se trouve au centre de la grille. Le nombre et l'espacement des positions successives (violet clair) sont définies au lancement de la simulation. L'objet n'est ici représenté que dans sa position initiale.

configuration rétinienne courante et celle désirée. Pour se faire, la fonction d'erreur quadratique suivante est définie :

$$f_{retine} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(m(1 \dots 4), \alpha^*, x^*, y^*) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(\alpha_{retine}(m(1 \dots 4)) - \alpha^* \right)^2 \\ + \left(x_{retine}(m(1 \dots 4)) - x^* \right)^2 \\ + \left(y_{retine}(m(1 \dots 4)) - y^* \right)^2 \end{array} \right\}, \quad (4.16)$$

avec $m(1 \dots 4)$ les commandes motrices de l'agent, $\alpha_{retine}(m(1 \dots 4))$ l'orientation courante de la rétine dans le repère monde, $x_{retine}(m(1 \dots 4))$ et $y_{retine}(m(1 \dots 4))$ la position courante de la rétine dans le repère monde, α^* l'orientation désirée et x^* et y^* la position désirée. Pour chaque état environnemental $E^{(i)}$, la configuration rétinienne désirée est déterminée comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \alpha_{retine}(M^{(0)}) && : \text{orientation initiale de la rétine.}, \\ x^* &= x_{retine}(M^{(0)}) + (x_{objet}^{(i)} - x_{objet}^{(0)}) && : \text{position initiale plus décalage de l'objet selon } x, \\ y^* &= y_{retine}(M^{(0)}) + (y_{objet}^{(i)} - y_{objet}^{(0)}) && : \text{position initiale plus décalage de l'objet selon } y. \end{aligned} \quad (4.17)$$

En pratique, la minimisation de $f_{retine}(m_{1 \dots 4}, \alpha^*, x^*, y^*)$ est réalisée par un algorithme d'optimisation non-linéaire sans contrainte ("Interior Reflective Newton method" [89, 90]). Notons qu'elle ne possède pas une solution unique puisque tout état moteur de la courbe noyau $\text{Ker}^{(i)}$ permet de générer la configuration rétinienne désirée. L'ensemble de ce traitement peut être interprété comme un asservissement visuel supervisé.

4.4.2.4 Traitement des courbes noyaux

Les courbes noyaux associées aux configurations motrices $M^{(i)}$ sont déterminées et échantillonnées en appliquant l'algorithme proposé lors de la seconde simulation (4.3.2.2). A nouveau, l'ensemble de ces courbes noyaux est assimilé à une distribution dans un espace abstrait. La métrique de Hausdorff modifiée présentée en 4.3.3.1 est appliquée afin de déterminer chaque distance inter-courbes.

La dimension intrinsèque l de l'ensemble des $\text{Ker}^{(i)}$ est alors déterminée en appliquant

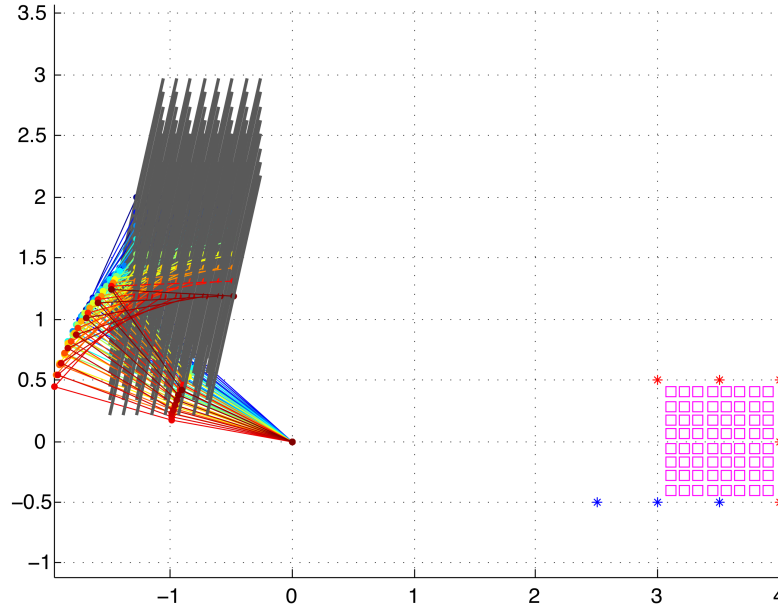


FIGURE 4.19: Ensemble des configurations du bras associées aux positions prises par l'objet (carrés magenta) et permettant de conserver une configuration rétinienne relative à l'objet constante.

la méthode d'estimation non-linéaire par essai-erreur (2.7.4). Enfin, les courbes noyaux sont projetées dans un espace de représentation de dimension $p = \hat{l}$ via une CCA.

4.4.3 Résultats

Les différents résultats intermédiaires de la simulation sont présentés et discutés ci-après.

Les configuration motrices $M^{(i)}$: Les configurations obtenues par minimisation de $f_{retine}(m_{1...4}, \alpha^*, x^*, y^*)$ et permettant de compenser, d'un point de vue sensoriel, les déplacements de l'objet sont présentées figure 4.19.

Les courbes noyaux $Ker^{(i)}$: Les 64 courbes noyaux $Ker^{(i)}$ associées aux configurations motrices $M^{(i)}$ sont représentées figure 4.20 avec un nombre d'échantillons $N_{ech} = 100$ par courbe noyau.

Dimension intrinsèque de l'ensemble des courbes noyaux : Les erreurs de projections E_{CCA} générées par la projection de l'ensemble des courbes noyaux dans des espaces de dimensions p de 1 à 15 et leurs rapports successifs sont présentés figure 4.21. La dimension intrinsèque estimée est égale à $\hat{l} = 2$. Ce résultat est cohérent avec l'expérience sensorimotrice du robot lors de l'exploration. En effet, les déplacements subis par l'objet au cours de la simulation sont des translations dans l'espace géométrique 2D extérieur. La rétine du robot, par compensation, a également réalisé les mêmes translations. L'espace des déplacements concrètement exploré par le système correspond donc à l'espace 2D des translations¹⁶.

16. Sa dimension serait égale à 3 si les rotations de l'objet avait été considérées lors de l'exploration.

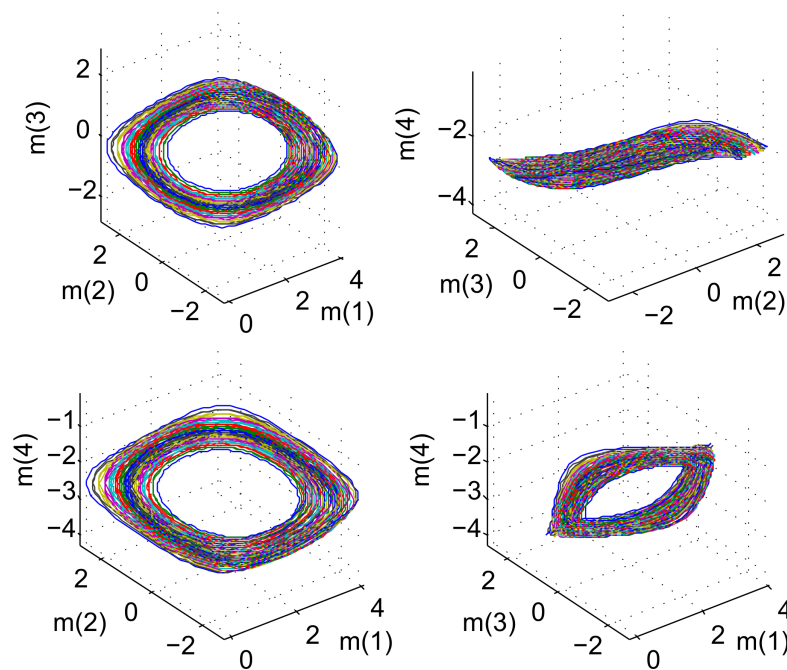


FIGURE 4.20: Projections 3D des courbes noyaux dans l'espace moteur 4D. Toutes les courbes noyaux sont associées à un même état sensoriel et une même configuration rétinienne relative à l'objet mais à des états environnementaux différents.

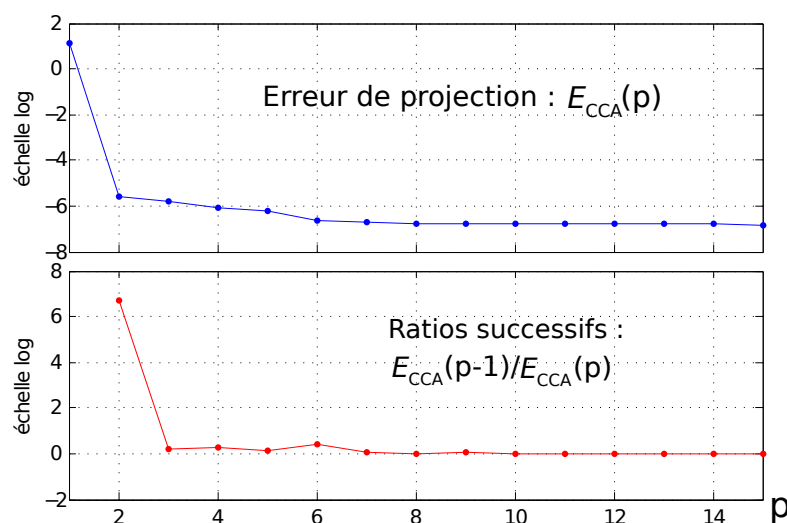


FIGURE 4.21: En haut : erreurs de projection générées par CCA pour $p \in [1, 15]$ en échelle logarithmique. En bas : ratios successifs des erreurs de projection en échelle logarithmique. La dimension intrinsèque estimée, correspondant à l'indice du ratio maximum, est $p = 2$.

Projections des courbes noyaux : La distribution de sortie obtenue en projetant l'ensemble des courbes noyaux $\text{Ker}^{(i)}$ dans un espace de dimension $p = \hat{l} = 2$ avec CCA est représentée figure 4.22. Chaque point de l'espace de sortie correspond donc à une courbe noyau. Nous retrouvons la grille définie par les positions successives de l'objet (et donc de la rétine) dans l'espace de projection. La représentation interne finale permet de capturer le concept de position dans l'espace extérieur. Plus précisément, elle représente les capacités de déplacement du système robot/environnement puisque ces positions sont relatives à celle de l'objet lors de l'observation initiale.

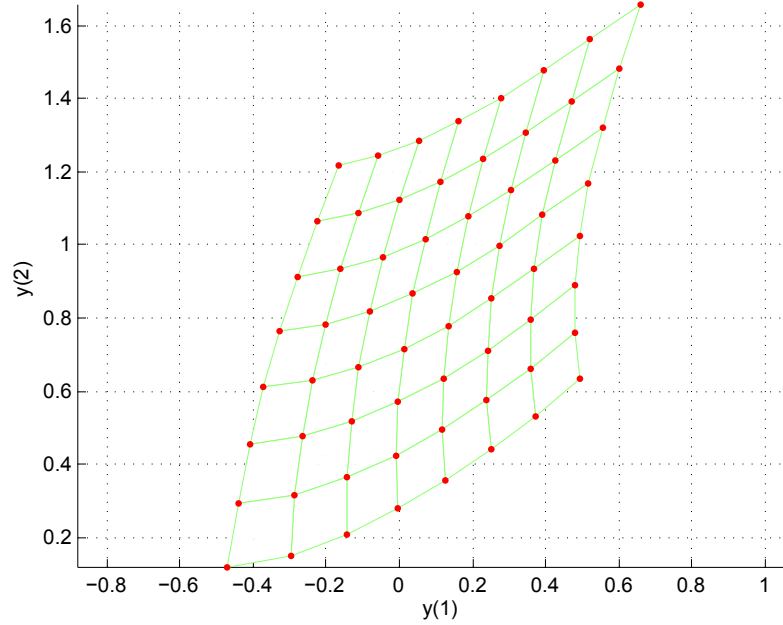


FIGURE 4.22: Projection 2D du nuage de courbes noyaux à l'aide de CCA. La grille formée par les positions de l'objet lors de l'exploration est reproduite dans l'espace de représentation interne. Elle est néanmoins déformée puisque les métriques internes et externes sont différentes.

Notons toutefois que la grille est déformée dans l'espace de représentation. Cette altération s'explique par la différence de métrique entre l'espace géométrique extérieur (euclidienne) et la métrique appliquée aux courbes noyaux (Hausdorff modifiée). N'ayant pas accès directement à l'état du système, le robot ne peut ainsi savoir *a priori* que la métrique appliquée aux déplacements est régulière et isotrope. La dernière simulation présentée dans la prochaine section permettra de résoudre en partie ce problème.

4.4.4 Extension de la simulation - indépendance à $M^{(0)}$

Bien qu'indépendante de l'objet observé, la représentation interne des capacités de déplacements peut changer suivant la configuration motrice $M^{(0)}$ générée lors de l'exploration.

4.4.4.1 Dépendance de la représentation à $M^{(0)}$

Pour un état moteur initial autre que celui considéré précédemment, les configurations rétiniennes (points de vue) initiales et générées par compensation seraient différentes. De même, l'ensemble des courbes noyaux résultantes et leurs distances inter-courbes seraient différentes, menant à une projection finale *a priori* distincte. La représentation interne des déplacements est donc dépendante de la configuration rétinienne, comme l'illustrent les différentes distributions représentées figure 4.23 obtenues pour une même grille de déplacements de l'objet mais des configurations motrices initiales différentes. Afin d'éliminer cette dépendance, une extension de la stratégie d'exploration est proposée ci-après.

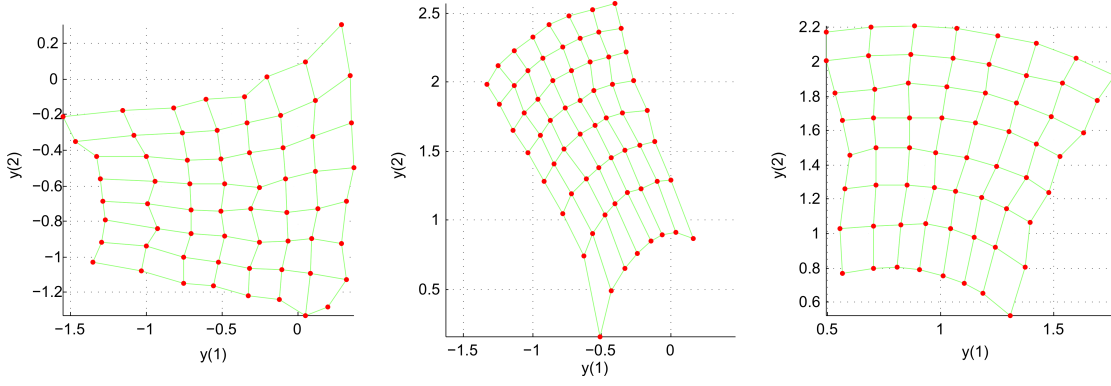


FIGURE 4.23: Représentations internes de l'espace des déplacements pour une même grille de positions de l'objet mais trois configurations rétinienne initiales différentes. Les orientations des grilles et leurs positions dans l'espace représentatif ne sont pas à considérer lors de la comparaison puisqu'elles sont non-contraintes par CCA.

4.4.4.2 Extension de la stratégie d'exploration

Principe : Plutôt que de limiter l'observation de l'objet à un seul point de vue pour chacun de ses déplacements, l'extension de la stratégie d'exploration consiste à l'observer selon une multitude de points de vue j . Pour chaque nouvelle position de l'objet, le robot cherche donc à reproduire les multiples états sensoriels dont il a fait l'expérience initialement. Comme décrit et illustré précédemment, une représentation interne différente pourrait être construite pour chacun des points de vue j initiaux. La *moyenne* de ces distributions est alors considérée pour rendre la représentation finale indépendante de $M^{(0)}$.

Formalisation : Soient $M_j^{(0)}$ un ensemble de N configurations motrices initiales viables vis-à-vis des critères (4.4), (4.5) et (4.15). Les états sensoriels qu'elles génèrent pour l'état environnemental initial $E^{(0)}$ sont notés S_j . Les courbes noyaux associées à ces configurations motrices initiales sont notées $\text{Ker}_j^{(0)}$.

Pour chaque nouvelle position $E^{(i)}$ de l'environnement, les N nouvelles configurations motrices trouvées par le robot pour générer les états sensoriels S_j et les courbes noyaux qui leur sont associées sont respectivement notées $M_j^{(i)}$ et $\text{Ker}_j^{(i)}$.

Soit $d^{\text{Ho}}(\text{Ker}_j^{(i)}, \text{Ker}_j^{(k)})$ la distance de Hausdorff modifiée entre deux courbes noyaux associées à un même point de vue j pour deux positions i et k de l'objet. La représentation moyenne finale est obtenue en moyennant l'ensemble de ces distances sur l'ensemble des points de vue. Ainsi, pour chaque paire $\{i, k\}$ d'états environnementaux, la distance interne finale est fixée à :

$$d^{\bar{\text{Ho}}}(\text{Ker}^{(i)}, \text{Ker}^{(k)}) = \sum_{j=1}^N d^{\text{Ho}}(\text{Ker}_j^{(i)}, \text{Ker}_j^{(k)})/N. \quad (4.18)$$

Ces distances moyennes inter-courbes permettent de définir une distribution moyenne dans un espace abstrait de dimension inconnue. Sa dimension intrinsèque et sa projection dans un espace de même dimensionnalité peuvent alors être déterminées comme précédemment (voir 4.4.2.4).

Modification de la simulation : En pratique, la simulation étendue consiste à réaliser successivement $N = 1000$ itérations de la simulation de base décrite en 4.4.2 en tirant aléatoirement une configuration motrice initiale $M_j^{(i)}$ pour chacune d'elle.

Si la minimisation de f_{retine} (4.4.2.3) est infructueuse pour une position i quelconque de l'objet et une configuration rétinienne j , les données de la simulation j sont omises et la variable N est réduite d'une unité. Un tel cas de figure peut être lié à des configurations impossibles du bras ou interdites par nos critères de viabilité (4.4), (4.5) et (4.15).

Pour chaque itération j , l'ensemble des distances $d^{Ho}(\text{Ker}_j^{(i)}, \text{Ker}_j^{(k)})$ sont déterminées pour chaque couple d'états environnementaux $\{i, k\}$. Une fois les différentes itérations j de simulation terminées, les distances inter-courbes moyennes sont déterminées puis les distributions qu'elles décrivent sont projetées dans l'espace de représentation interne.

4.4.4.3 Résultats de la simulation étendue

Configurations motrices : L'ensemble des configurations initiales $M_j^{(0)}$ du bras est qualitativement similaire à celui déjà représenté figure 4.11 pour la première simulation. La grille des positions de l'objet, illustré figure 4.19, est inchangée. Un sous-échantillonnage des $M_j^{(i)}$ est illustré figure 4.24 pour différentes positions de l'objet.

Notons que sur les 1000 configurations $M_j^{(0)}$ initiales, un peu plus de la moitié ont permis de générer des configurations $M_j^{(i)}$ viables pour toutes les positions de l'objet. Le nombre final de simulations conservées est ainsi de $N = 572$.

Courbes noyaux : Le nombre de courbes noyaux estimées lors de la simulation étendue est trop important pour envisager une visualisation intéressante.

Afin de se représenter partiellement les données traitées, notons que l'ensemble des courbes noyaux $\text{Ker}_j^{(i)}$ associées à une position i de l'objet est qualitativement similaire à celui représenté précédemment figure 4.12 pour chaque itération j . De même, l'ensemble des courbes noyaux $\text{Ker}_j^{(i)}$ associées à un point de vue j est qualitativement similaire à celui représenté figure 4.20 pour chaque position i de l'objet.

Dimension intrinsèque : Les erreurs de projection E_{CCA} et leurs rapports successifs obtenus en appliquant la méthode d'estimation de dimension par essai-erreur sur la distribution définie par les distances inter-courbes moyennes sont présentés figure 4.25. Une nouvelle fois, la dimension intrinsèque de la distribution est estimée $\hat{l} = 2$.

Projection de la distribution moyenne : La distribution finale obtenue en projetant la distribution moyenne dans un espace de sortie de dimension $p = \hat{l} = 2$ avec CCA est représentée figure 4.26. La grille des déplacements subis par l'objet est à nouveau identifiable dans la projection. Sa déformation est toutefois moindre que lorsqu'une seule configuration motrice initiale est considérée (voir figure 4.22). Cette plus grande régularité est due à la contribution égale des grilles individuelles générées pour chaque $M_j^{(0)}$ et présentant des déformations contradictoires.

4.4.4.4 Résultats pour une grille de positions plus ample

La figure 4.27 présente la représentation interne obtenue en considérant une grille de déplacements de l'objet deux fois plus large (grille régulière de 64 positions et de largeur 1.6). Bien que la structure de la grille ne soit en théorie pas un obstacle, sa largeur se révèle

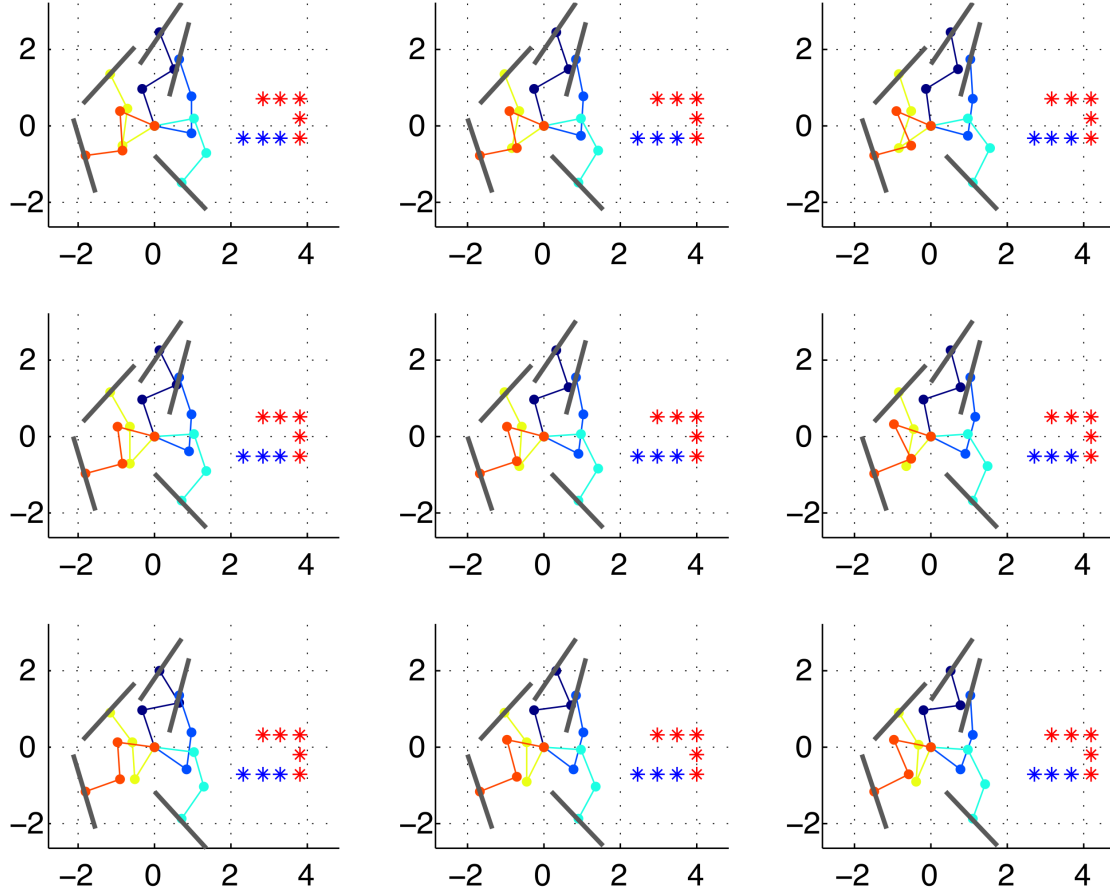


FIGURE 4.24: Sous-échantillonnage de 5 configurations motrices initiales de l'agent $M_i^{(0)}$ et leurs configurations associées $M_i^{(k)}$ pour 9 positions différentes $E^{(k)}$ de l'objet.

limitante vis-à-vis des configurations possibles du bras. Ainsi, pour cette grille élargie, seules $N = 18$ des 1000 simulations de base ont permis de générer des configurations motrices $M_j^{(i)}$ viables pour toutes les positions i de l'objet. L'impact réduit du moyennage se traduit visuellement par une déformation plus marquée de la grille dans l'espace de représentation. Bien que les grilles ne puissent être directement superposées (elles sont issues de deux applications de CCA indépendantes), il est intéressant de constater qu'une grille de positions de l'objet deux fois plus grande se traduit qualitativement par une grille deux fois plus grande dans la représentation interne.

4.4.5 Conclusion

Cette troisième simulation et sa version étendue ont permis de découvrir et capturer les capacités de déplacements du système. La représentation interne finale est construite à partir des informations motrices du robot, assurant ainsi son indépendance vis-à-vis de l'environnement observé. Néanmoins, contrairement à la seconde simulation où l'ensemble des actions effectives du robot étaient caractérisées, cette nouvelle stratégie d'exploration se fonde sur la compensabilité des propriétés spatiales. Les actions spécifiques ainsi découvertes se limitent donc aux capacités de *déplacement* de la rétine¹⁷ et permettent de construire une notion d'*espace* plus satisfaisante, d'un point de vue extérieur.

17. La distinction avec d'éventuels changements d'état compensables nécessiterait une analyse plus approfondie (voir 1.6.4).

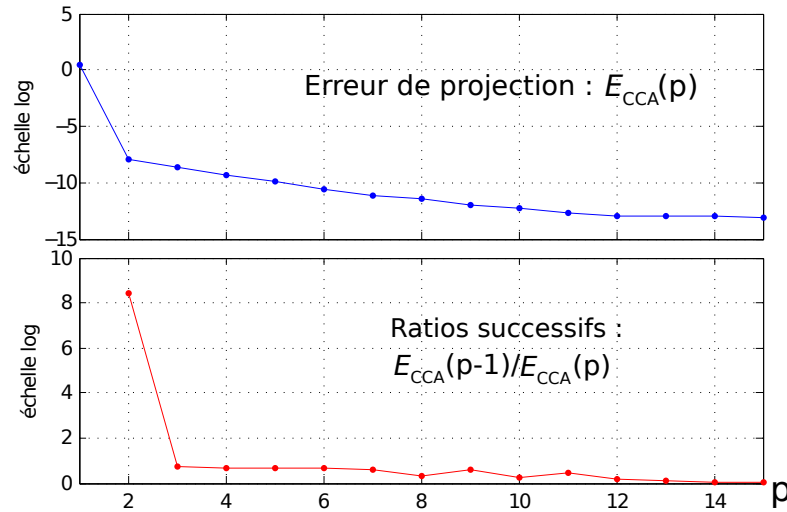


FIGURE 4.25: En haut : erreurs de projections générées par CCA pour $p \in [1, 15]$ en échelle logarithmique. En bas : ratios successifs des erreurs de projection en échelle logarithmique. La dimension intrinsèque estimée, correspondant à l'indice du ratio maximum, est $p = 2$.

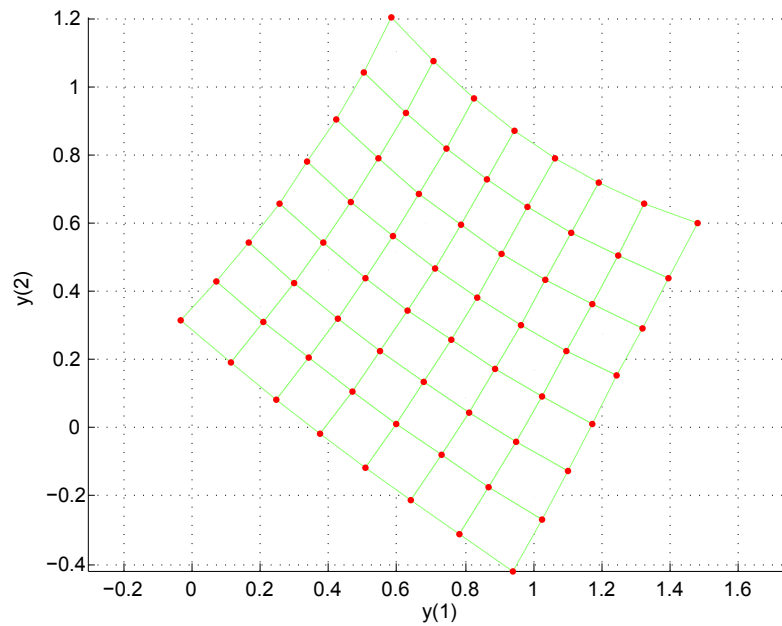


FIGURE 4.26: Projection 2D du nuage de courbes noyaux avec métrique moyenne à l'aide de CCA. La grille formée par les positions de l'objet est reproduite dans l'espace de représentation. La déformation de la grille est moindre que précédemment du fait des distances moyennes prises en compte entre les points de la grille.

L'extension de la méthode permet quant à elle de rendre la représentation interne indépendante du point de vue adopté lors de la première observation de l'objet. D'un point de vue comportemental, elle consiste à observer ce dernier sous différents angles après chacun de ses déplacements. La prise en compte de ces multiples points de vue permet de générer une projection interne "moyenne" indépendante de la configuration du bras.

Cette simulation nous a permis de découvrir la topologie de l'espace extérieur, capturée via les déplacements du système. La prochaine étape, présentée ci-après, consiste à caractériser sa métrique, et plus précisément sa régularité.

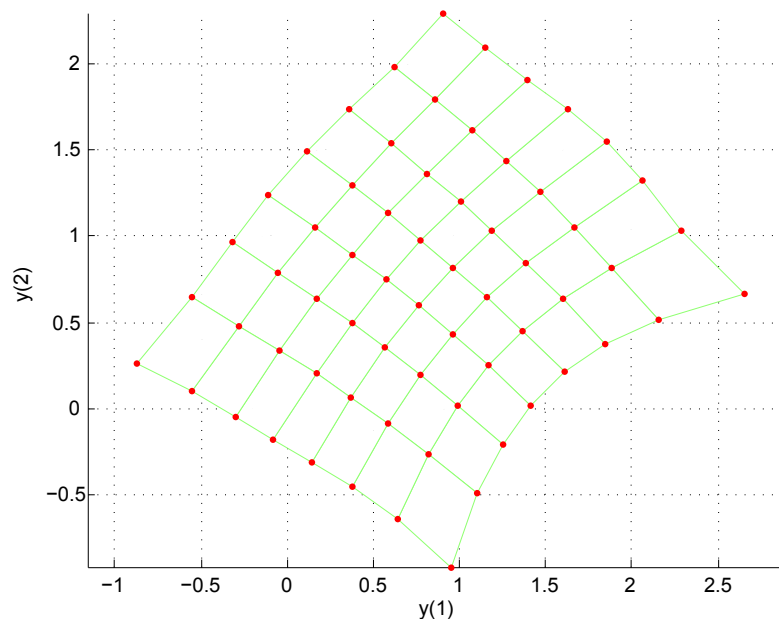


FIGURE 4.27: Projection 2D du nuage de courbes noyaux avec métrique moyenne à l'aide de CCA. La grille des positions de l'objet est ici deux fois plus large que figure 4.26. La déformation de la grille est plus importante du fait de l'impact réduit de la moyenne (seulement $N = 18$ ensembles de courbes viables).

4.5 Simulation 4 : régularisation de la métrique interne

La simulation précédente a permis de générer une représentation interne des capacités de déplacements du système. Chaque point peut donc y être associé topologiquement à une position dans l'espace extérieur. Les métriques interne et extérieure sont toutefois différentes et des distances égales dans l'espace géométrique euclidien peuvent se traduire par des distances différentes dans l'espace représentatif interne. Ce phénomène est notamment à l'origine des déformations de la grille de positions observées figures 4.26 et 4.27.

La simulation présentée dans cette dernière section propose de modifier la métrique de l'espace de représentation interne afin de reproduire - partiellement - la régularité de la métrique euclidienne externe. Ci-après, le principe de la nouvelle stratégie d'exploration est présenté, puis les détails et résultats de la simulation qui en résultent sont discutés. Enfin, une extension similaire à celle proposée dans la section pour la troisième simulation est considérée et appliquée au système.

4.5.1 La stratégie de régularisation de la métrique interne

D'un point de vue théorique, les métriques interne et externe ne peuvent être rigoureusement égales. La base utilisée pour décrire l'espace euclidien et l'unité de mesure qui en dérive (le mètre dans nos simulations) sont en effet définies arbitrairement. Elles sont de plus inaccessibles dans l'expérience sensorimotrice du robot. Seules des informations sur des relations de distances dans l'espace extérieur peuvent être extraites de cette expérience. La métrique interne pourra donc au mieux reproduire les propriétés de la métrique extérieure à un facteur d'échelle près¹⁸ et avec une unité de longueur liée à l'expérience sensorimotrice du robot.

18. En termes géométriques, les deux métriques sont liées par une *similitude*.

Le principe et la formalisation de la stratégie proposée pour régulariser la métrique interne sont présentés successivement ci-après.

4.5.1.1 Principe de la régularisation

Le but de la régularisation est d'égaliser dans l'espace interne les distances qui correspondent à un même déplacement dans l'espace extérieur. Afin d'exposer son principe, un cas simple est d'abord considéré.

Soient deux configurations quelconques du système pour lesquelles le robot observe l'objet avec une même orientation de la rétine. Lorsque l'objet effectue une translation quelconque, le robot peut chercher deux nouvelles configurations motrices lui permettant, pour chaque point de vue, de compenser sensoriellement ce déplacement.

Comme pour les simulations précédentes, le robot peut associer à chaque point de vue une courbe noyau et déterminer les distances internes qui les séparent. Ces distances sont *a priori* toutes différentes mais le robot peut analyser son expérience sensorimotrice pour découvrir que deux paires de distances devraient être égales :

- Premièrement, la compensation permet au robot d'effectuer, pour chaque point de vue, le même déplacement que l'objet. La configuration relative de deux positions de la rétine sont donc les mêmes avant et après le déplacement. Les distances internes séparant les deux points de vue avant et après la compensation doivent donc être identiques. Nous dirons que cette égalité est de type *point de vue*.
- Deuxièmement, le robot ayant effectué le même déplacement que l'objet pour chacun des deux points de vue initiaux, il peut en déduire que les distances internes séparant un même point de vue avant et après la compensation sont identiques. Nous dirons que cette égalité est de type *déplacement*.

Ces deux types d'égalités sont illustrés en figure 4.28.

4.5.1.2 Limitation de la méthode de régularisation

Ce concept de base peut être étendu à une multitude de points de vue et mouvements de l'objet. Il n'est cependant pas suffisant pour régulariser entièrement la métrique interne. Ainsi, pour un ensemble de J configurations motrices initiales, le nombre de nouvelles configurations générées à chaque déplacement de l'objet est de J . Pour un seul déplacement, le nombre de distances internes entre les $2J$ différentes courbes noyaux associées est égal à $2J(2J - 1)/2$. Or la méthode de régularisation proposée précédemment permet globalement d'égaliser J^2 distances :

- Les égalités de type *points de vue* permettent de rendre $J(J - 1)$ distances égales par paires.
- Les égalités de type *déplacement* permettent de rendre J distances égales entre elles.

Le nombre de distances créées est donc plus important que le nombre de contraintes métriques.

4.5.1.3 Extension à une grille de positions rétinienne

Afin de contourner le problème du nombre de contraintes inférieur au nombre de distances créées, un cas particulier est considéré : l'objet est initialement observé selon un ensemble de J configurations M_j telles que les positions de la rétine forment une grille régulière dans l'espace extérieur, comme illustré figure 4.29 (l'orientation de la rétine est identique pour tous les points de vue).

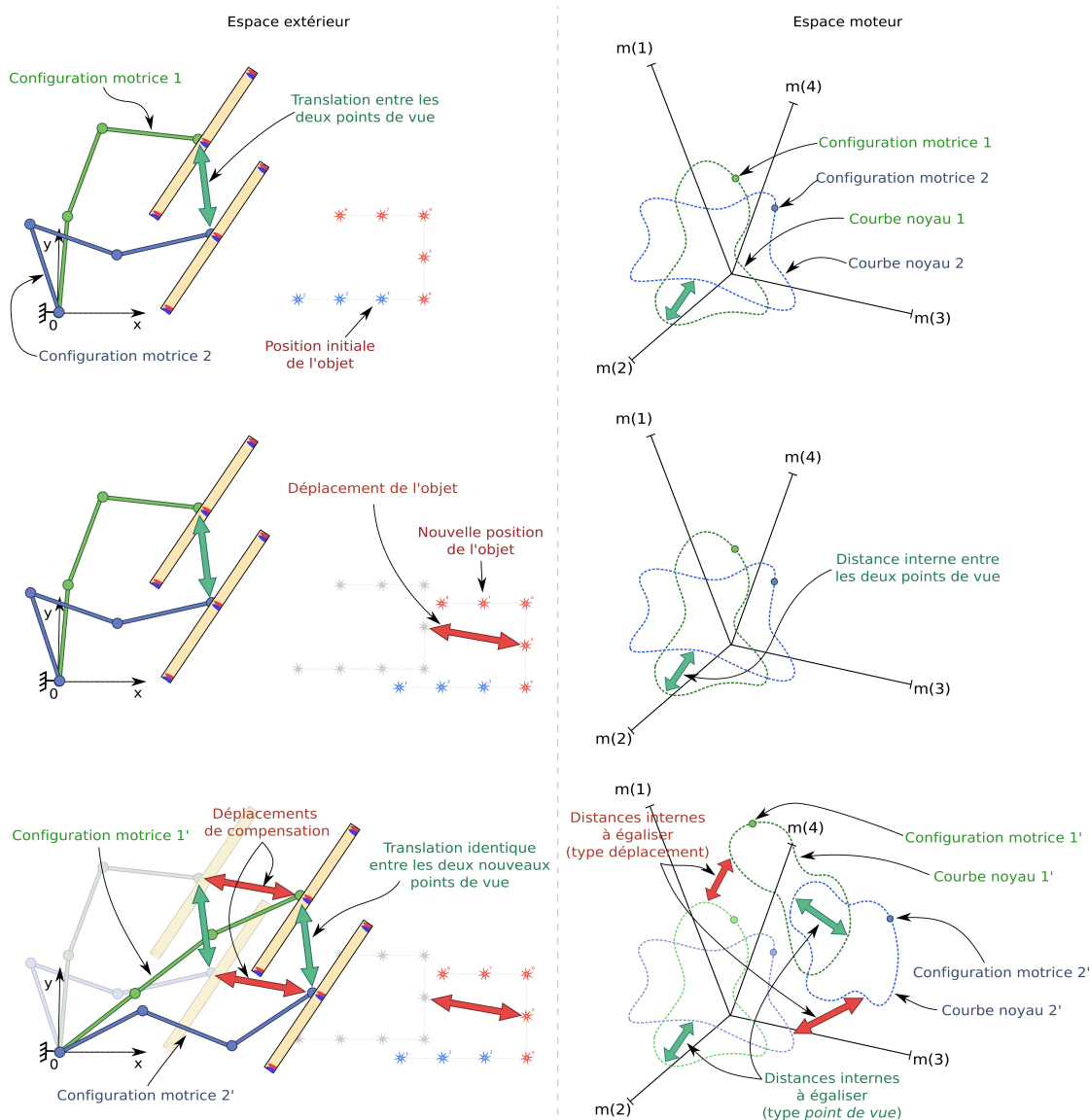


FIGURE 4.28: Colonne de gauche : pour deux points de vue associés à une même orientation de la rétine, chaque déplacement du système permet de générer deux nouvelles configurations du bras par compensation sensorielle. La distance entre les deux configurations initiales et les deux nouvelles configurations sont identiques (en cyan - type *point de vue*). Les distances entre les configurations associées à un même point de vue avant et après le déplacement de l'objet sont identiques (en rouge - type *déplacement*). Colonne de droite : chaque configuration motrice appartient à une courbe noyau dans l'espace moteur du robot. Les distances internes entre ces courbes noyaux ne respectent *a priori* pas les égalités évoquées précédemment.

Plutôt que de considérer un déplacement quelconque de l'environnement ¹⁹, nous supposons que l'objet effectue une translation identique à celle nécessaire pour se rendre d'une position quelconque de la grille rétinienne à une autre. Dans ce cas particulier, la nouvelle grille de positions rétinienne obtenue après compensation du déplacement se superpose en partie à la grille initiale.

En omettant les nouvelles configurations créées en dehors de la zone couverte par la

19. Ce cas de figure mènerait à la même impasse que celle décrite en 4.5.1.2.

grille initiale, les nouveaux points de vue se superposent aux anciens²⁰. Aucune nouvelle configuration rétinienne n'est donc créée et le nombre de distances internes reste égal à $J(J-1)/2$. Pour autant, le nombre d'égalisation rendues possibles par la méthode de régularisation est inchangé²¹. De plus, puisque le mouvement de l'objet est égal à un déplacement entre des points de vue de la grille, les égalités de type *points de vue* et *déplacement* sont équivalentes et permettent de rendre strictement égales un plus grand nombre de distances. La réalisation par l'objet des différents déplacements possibles dans la grille rétinienne permet donc, à terme, de régulariser l'ensemble de la métrique interne sans créer de distances internes superflues.

4.5.1.4 Formalisation de la stratégie d'exploration

Soient M_j les différentes configurations motrices telles que les positions de la rétine forment une grille régulière dans l'espace extérieur et que l'orientation de la rétine est constante. Soient $E^{(i)}$ un ensemble de configurations environnementales telles que les positions de l'objet forment une grille identique à la grille rétinienne²² et que son orientation soit constante. Comme illustré figure 4.29, les déplacements rendus possibles dans les grilles rétinienne et environnementale sont donc les mêmes.

Soient Ker_j les courbes noyaux associées aux points de vue générés par les M_j . La distance de Hausdorff modifiée (4.3.3.1) $d^{\text{Ho}}(\text{Ker}_j, \text{Ker}_k)$ qui sépare les courbes j et k est notée d_{jk} afin d'alléger les équations.

Pour chaque déplacement de l'objet entre les états i et l de la grille environnementale, la régularisation des distances d_{jk} supposées identiques est réalisée en les rendant égales à leur valeur moyenne $\bar{d}$:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{j,k} d_{jk} \cdot g(j, k, i, l)}{\sum_{j,k} g(j, k, i, l)}, \quad (4.19)$$

avec

$$g(j, k, i, l) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si le déplacement rétinien entre } j \text{ et } k \text{ est identique} \\ & \text{au déplacement environnemental entre } i \text{ et } l. \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right\}. \quad (4.20)$$

Le principe de cette régularisation est illustré figure 4.30.

4.5.1.5 Réalisme de l'approche

La stratégie d'exploration décrite ci-dessus peut paraître artificielle. En effet, lors d'une interaction réelle, le parcours des grilles de positions rétiniennes et environnementales est improbable. Pour autant, elle représente un échantillonnage grossier du résultat qui pourrait être obtenu au travers d'une exploration continue des espaces moteur et extérieur.

Ainsi, supposons que l'objet est observé selon un ensemble quelconque irrégulier de points de vue. Pour chaque déplacement arbitraire de l'environnement, une multitude de nouvelles configurations motrices et de courbes noyaux sont découvertes par compensation. Pour un nombre infiniment grand de mouvements environnementaux, l'ensemble de l'espace moteur sera ainsi exploré. En supposant, par une malchance démesurée, qu'aucun

20. Le déplacement effectué par l'agent *compense* un des déplacements de la grille rétinienne.

21. En pratique, ce nombre dépend du déplacement effectué par l'objet et du nombre de nouvelles configurations motrices sortant de la grille initiale et omises par la suite.

22. La grille est identique en terme d'organisation et d'orientation mais n'est évidemment pas centrée sur la même référence que la grille rétinienne.

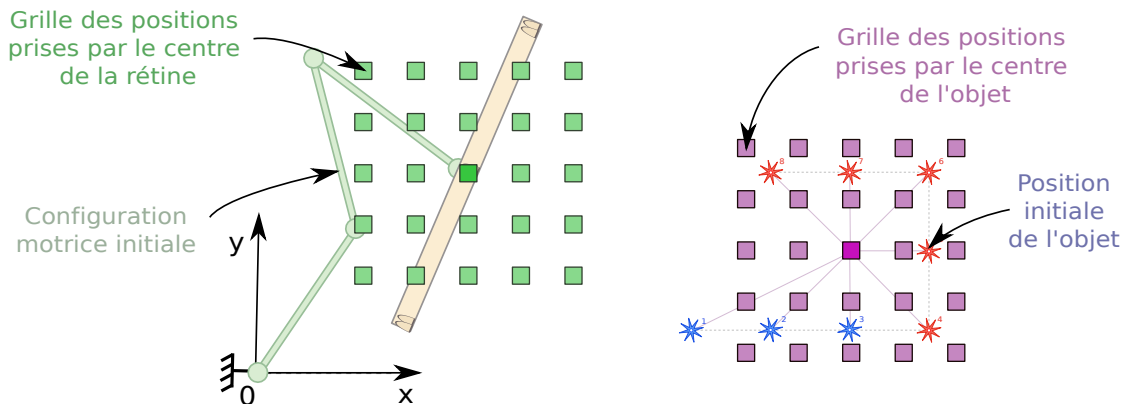


FIGURE 4.29: Grille violette : ensemble des positions prises par l'objet au cours de l'exploration. Grille verte : ensemble des positions rétinienne considérées. La grille rétinienne est dérivée d'une configuration motrice initiale permettant de fixer l'orientation de la rétine. Les structures des deux grilles sont identiques.

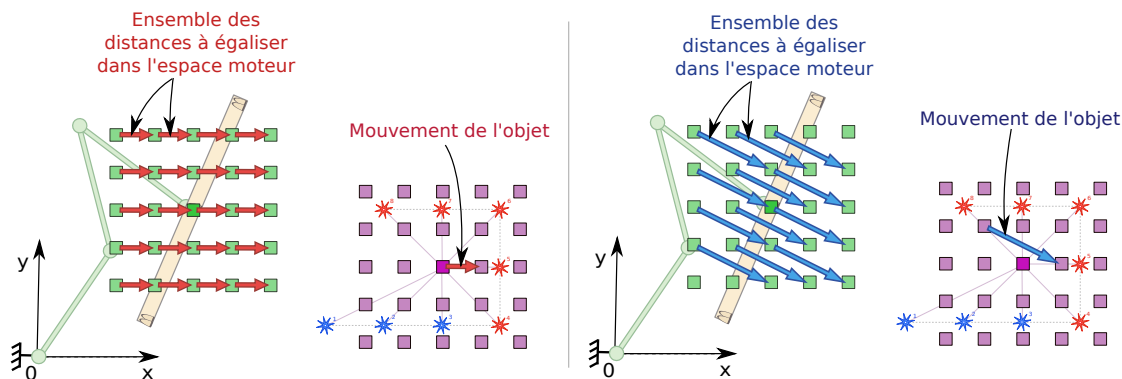


FIGURE 4.30: Deux exemples de déplacements hypothétiques de l'objet permettant d'égaliser des distances internes entre les courbes noyaux associées aux positions de la grille rétinienne.

point de vue n'ait jusqu'ici été identique à un point de vue passé, tout déplacement supplémentaire de l'objet générera nécessairement des points de vue déjà parcourus pour d'autres états de l'environnement. Un nombre infiniment grand d'égalités de distances pourront alors en être déduites afin de régulariser la métrique interne. Le cas particulier des grilles rétinienne et environnementale est donc une version discrète et implémentable de cette exploration continue.

4.5.2 Implémentation de la simulation

La stratégie d'exploration présentée ci-dessus est mise en place dans une simulation dont les différentes étapes sont décrites ci-après.

4.5.2.1 Initialisation

Initialement, une configuration motrice quelconque M_0 est tirée aléatoirement dans l'espace moteur du robot et l'objet est positionné en $E^{(0)} = [3.5, 0]$ dans l'espace géométrique extérieur. Une grille régulière de 64 positions rétinienne et de largeur 0.8 est définie et centrée sur la position rétinienne associée à la configuration M_0 . Pour chaque position j de la grille, une configuration motrice M_j est déterminée afin de déplacer la

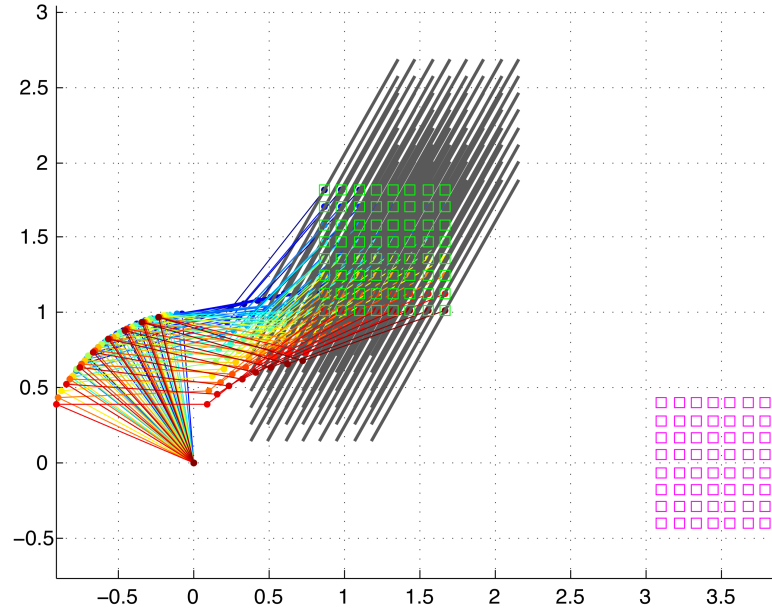


FIGURE 4.31: Représentation des grilles rétiniennes et environnementale pour une configuration motrice initiale aléatoire. Les configurations du bras permettant de générer la grille rétinienne sont également représentées.

rétine en position j et de conserver son orientation. Plutôt que de réaliser une recherche exhaustive dans l'espace moteur du robot, la méthode proposée en 4.4.2.3 basée sur une minimisation de la fonction f_{retine} est utilisée pour déterminer M_j .

Si la minimisation de f_{retine} se révèle infructueuse pour certaines positions ou si certaines configurations M_j ne respectent pas les critères proposés en (4.4), (4.5) et (4.15), alors une nouvelle initialisation est réalisée avec un état moteur initial M_0 différent.

Comme pour les simulations précédentes, l'ensemble des courbes noyaux Ker_j associées aux configurations M_j sont déterminées en appliquant l'algorithme proposé en 4.3.2.2. La distance entre chaque paire de courbes est déterminée en appliquant la métrique de Hausdorff modifiée (voir 4.3.3.1).

4.5.2.2 Déplacements du système et régularisation

La stratégie d'exploration de cette quatrième simulation, présentée en 4.5.1.1, repose sur le déplacement de l'objet et la compensation sensorielle que le robot peut effectuer. En pratique néanmoins, le cas particulier de la grille de positions rétiniennes permet d'éviter cette composante de la simulation. En effet, le déplacement environnemental n'apparaît qu'indirectement dans l'équation de régularisation proposée en (4.19).

A la place, toutes les possibilités de mouvement offertes par la grille de positions environnementales sont successivement considérées sans être réellement exécutées. Chaque déplacement "factice" de l'objet permet ainsi d'égaliser l'ensemble des distances liées à la même translation dans la grille rétinienne grâce à l'équation (4.19), comme illustré figure 4.30.

4.5.2.3 Représentation interne régulée

Une fois l'ensemble des déplacements environnementaux considérés et les égalités métriques résultantes appliquées, la métrique interne entre les courbes noyaux Ker_j est régularisée. Comme précédemment, cette nouvelle métrique décrit une distribution dans un

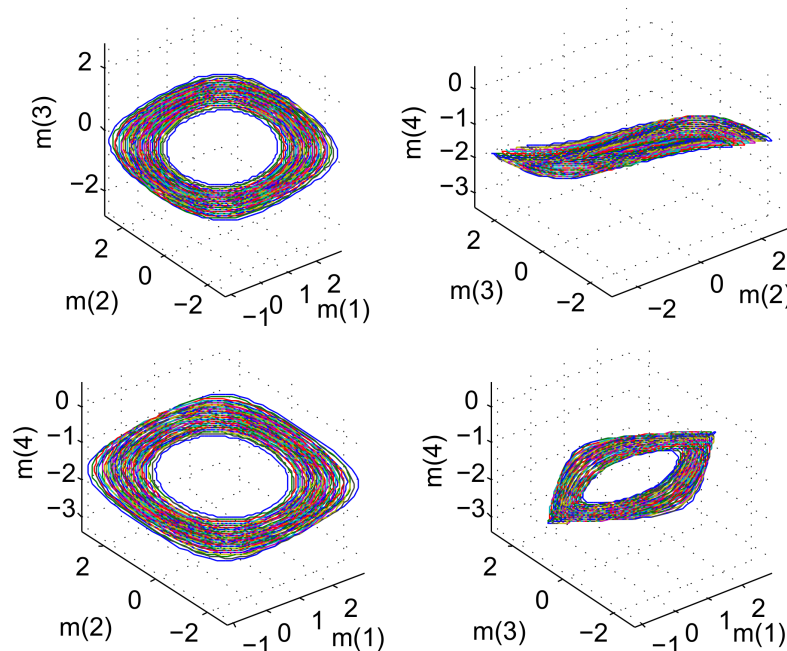


FIGURE 4.32: Projections 3D des courbes noyaux dans l'espace moteur 4D associées aux configurations motrices présentées en figure 4.31.

espace abstrait de dimension inconnue. La méthode non-linéaire d'estimation de dimension par essai-erreur lui est alors appliquée afin de déterminer sa dimension intrinsèque l . Enfin, la représentation interne régularisée est obtenue en projetant les données dans un espace de dimension $p = \hat{l}$ avec CCA.

4.5.3 Résultats

Les résultats des différentes étapes de la simulation sont présentés en détail ci-après.

Ensembles des points de vue et courbes noyaux : L'ensemble des configurations du bras associées à la grille des positions rétinienne est représenté figure 4.31. La grille des positions environnementales y est également représentée bien que les déplacements de l'objet ne soient pas réellement exécutés lors de la simulation (voir 4.5.2.2). L'ensemble des courbes noyaux associées aux configurations du bras est présenté figure 4.32.

Dimension intrinsèque : Les distances entre courbes noyaux sont déterminées en appliquant la métrique de Hausdorff modifiée puis régularisées par la méthode proposée précédemment. La dimension de la distribution décrite par cet ensemble de distances régularisées est estimée par la méthode non-linéaire de type essai-erreur. Les erreurs de projection E_{CCA} et leurs rapports successifs sont présentés figure 4.33. La dimension du nuage est estimée à $\hat{l} = 2$. Comme pour la troisième simulation, ce résultat est cohérent puisque les déplacements du système se limitent aux deux translations dans l'espace géométrique extérieur.

Représentation interne régularisée : La distribution décrite par la métrique régularisée est projetée dans un espace de représentation de dimension $p = \hat{l} = 2$. La figure 4.34 présente la projection obtenue avec et sans prise en compte de la régularisation. Le

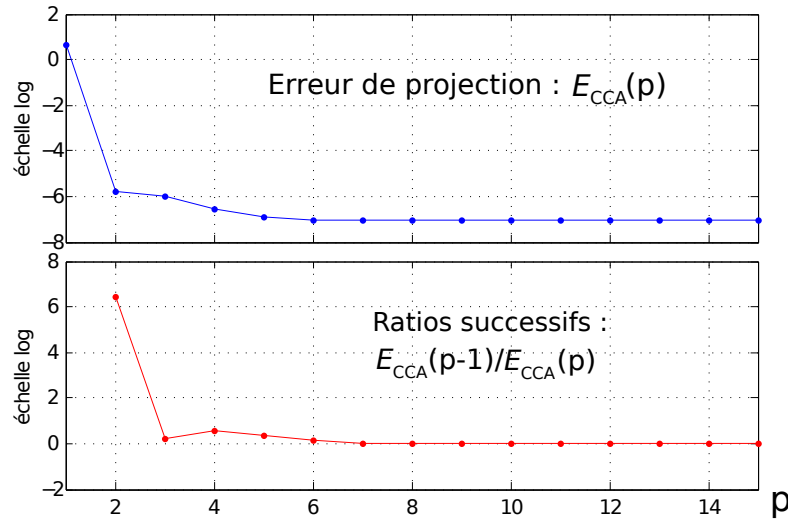


FIGURE 4.33: En haut : erreurs de projections générées par CCA pour $p \in [1, 15]$ en échelle logarithmique. En bas : ratios successifs des erreurs de projection en échelle logarithmique. La dimension intrinsèque estimée, correspondant à l'indice du ration maximum, est $p = 2$.

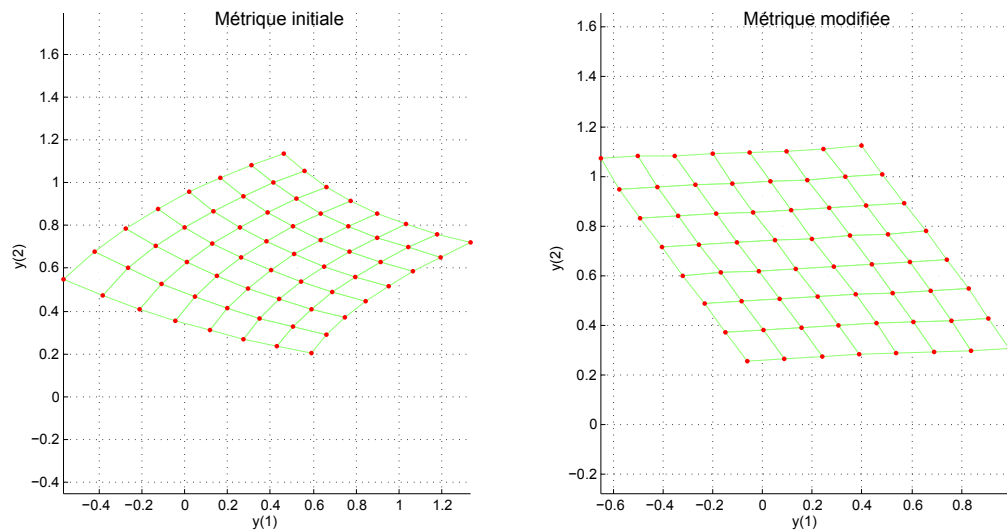


FIGURE 4.34: A gauche : projection 2D du nuage de courbes noyaux par CCA avec la métrique initiale non régularisée. A droite : projection 2D du même nuage après régularisation de la métrique interne. L'égalisation des distances associées à un même déplacement a permis de régulariser la projection de la grille, bien que sa déformation globale soit conservée. Les orientations et positions des grilles ne sont pas pertinentes dans la comparaison puisque non-contraintes par CCA.

résultat de la projection réalisée sans l'étape de régularisation est équivalent à celui de la troisième simulation. La grille des déplacements du système s'y retrouve donc déformée. Au contraire, la grille projetée après régularisation de la métrique interne présente une forte régularité héritée de la métrique de l'espace externe.

Notons toutefois que les angles droits des grilles de positions ne sont pas respectés dans l'espace de projection ; la représentation interne régularisée conserve ainsi la même déformation globale que la grille non-régularisée²³. Ce phénomène est lié à la stratégie

23. En termes géométriques, les métriques interne et externe sont liées par une *application affine* qui conserve les parallélismes.

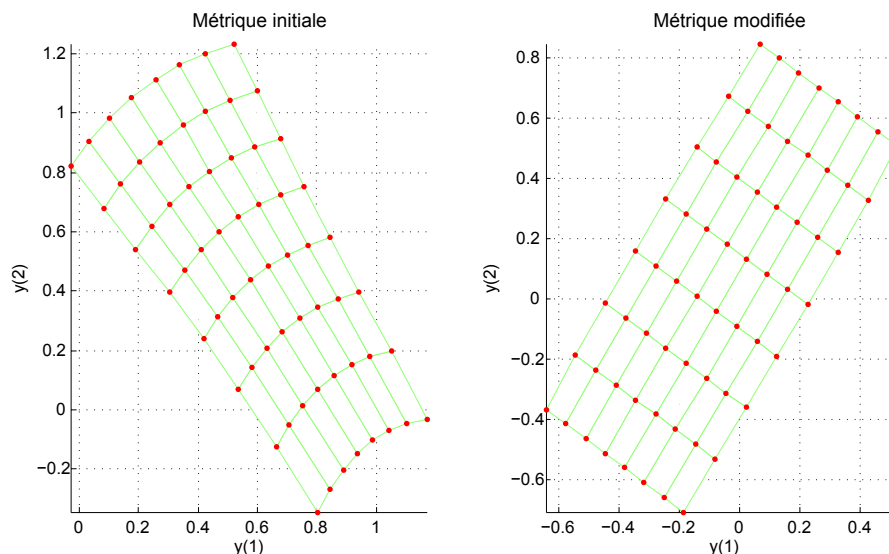


FIGURE 4.35: A gauche : projection 2D du nuage de courbes noyaux avec métrique non-régularisée pour une configuration motrice initiale différente. A droite : projection 2D du même nuage après régularisation de la métrique interne.

d'exploration qui ne permet pas de découvrir que les diagonales associées à chaque carré de la grille sont égales. La découverte d'une telle propriété nécessiterait de prendre en compte les rotations du système. Le robot pourrait alors constater que la distance parcourue le long d'une diagonale est identique à celle parcourue le long de la seconde après une rotation de 90 degrés²⁴. La prise en compte des rotations dans la simulation pose toutefois d'autres difficultés détaillées ci-après.

4.5.4 Dépendance à la configuration initiale M_0

Tout comme pour la troisième simulation (4.4), la représentation interne obtenue est indépendante de l'objet observé mais dépend du point de vue initial à partir duquel la grille rétinienne est générée. Afin d'illustrer ce phénomène, la figure 4.35 présente la projection régularisée finale obtenue pour une configuration initiale M_0 différente. La grille interne est cette fois-ci encore régulière mais sa déformation globale est différente de celle représentée figure 4.34.

4.5.4.1 Extension de la stratégie d'exploration

Afin de rendre la représentation interne régularisée indépendante de la configuration motrice initiale M_0 , la même stratégie que celle proposée pour la troisième simulation est mise en place.

Principe : La simulation de base est telle que chaque position de la grille environnementale est associée à une position de la grille rétinienne. Cette dernière pourrait donc être obtenue en fixant une configuration M_0 pour l'état $E^{(0)}$ de l'environnement puis en compensant chaque déplacement de l'objet dans sa grille par un mouvement de la rétine. Afin de supprimer la dépendance à M_0 , un grand nombre N de configurations motrices

24. Les métriques interne et externe seraient alors liées par une *similitude* qui conserve les rapports de distance.

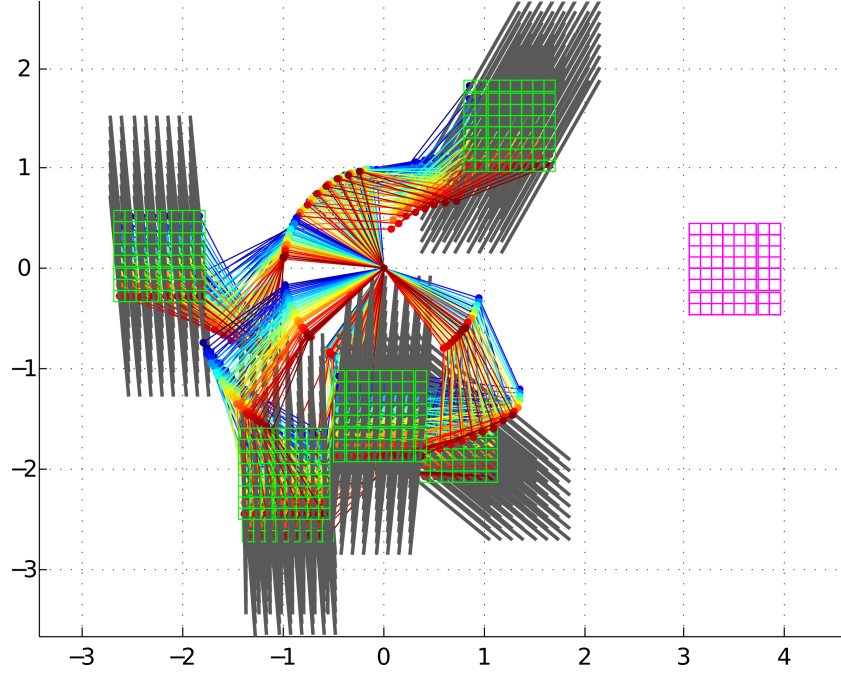


FIGURE 4.36: Représentation de 5 grilles rétiniennes générées à partir de configurations motrices initiales différentes et les configurations du bras associées. La grille des positions de l'objet est identique à la simulation précédente.

initiales $M_{0,n}$ (avec $n \in [1, N]$) sont considérées. L'objet est donc observé suivant une multitude de points de vue avec des orientations différentes pour chaque position de la grille.

Pour chaque nouvelle position $E^{(j)}$ de l'objet dans la grille environnementale, l'agent cherche N nouvelles configurations motrices $M_{j,n}$ par compensations sensorielles. Chaque "position" de la grille rétiniennne n'est donc plus associée à un seul point de vue mais à N points de vue différents²⁵. La métrique interne est alors composée de $NJ(NJ - 1)/2$ distances, avec J le nombre de positions dans la grille rétiniennne.

La régularisation de la métrique interne est alors réalisée en deux étapes successives :

- Premièrement, de la même manière qu'en 4.5.4.1, la contribution moyenne de l'ensemble des points de vue est déterminée. Ainsi, les N distances internes entre chaque couple $\{j, k\}$ de positions rétiniennes sont moyennées afin de générer une distance unique entre chaque paire de points de la grille rétiniennne.
- Deuxièmement, les $J(J - 1)/2$ distances moyennes déterminées lors de la première étape sont régularisées en appliquant rigoureusement la même méthode que précédemment (voir 4.5.1.4).

Formalisation : Soit $M_{j,i}$ la configuration motrice associée à la position j de la grille rétiniennne et au point de vue i , avec $j \in [1, J]$ et $i \in [1, N]$. La courbe noyau associée à cette configuration est notée $\text{Ker}_{j,i}$. La distance entre les courbes noyaux $\text{Ker}_{j,i}$ et $\text{Ker}_{k,l}$ est notée $d_{jk,il}$.

La contribution moyenne des N points de vue permet de générer la distance moyenne

²⁵. Chaque position de la grille rétiniennne peut alors, par exemple, être associée au barycentre des N points de vue qui lui sont associés ou à un point de vue n particulier.

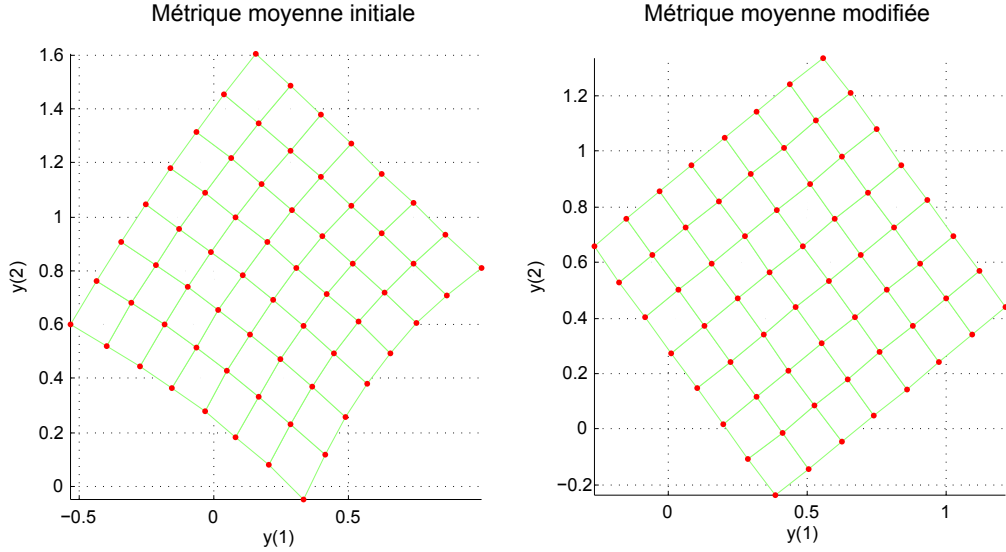


FIGURE 4.37: A gauche : projection 2D du nuage de courbes noyaux avec la métrique de Hausdorff moyenne mais non-régularisée. A droite : projection 2D du même nuage après régularisation de la métrique interne moyenne. Ici encore, les orientations et positions des grilles ne sont pas pertinentes pour la comparaison puisque non-contraignantes par CCA.

$\bar{d}_{jk}^-$ pour chaque couple $\{j, k\}$ de positions :

$$\bar{d}_{jk}^- = \sum_{i=1}^N d_{jk,ii} / N. \quad (4.21)$$

La régularisation de cette métrique moyenne est ensuite réalisée comme précédemment (4.19), en remplaçant les distances d_{jk} par leurs valeurs moyennes $\bar{d}_{jk}^-$ qui vient d'être déterminée.

Modification de l'exploration : Initialement, N configurations motrices $M_{0,i}$ sont tirées aléatoirement dans l'espace moteur du robot et l'objet est positionné en $E^{(0)} = [3.5, 0]$ dans l'espace géométrique extérieur. Une grille régulière de 64 positions rétinienne et de largeur 0.8 est définie et centrée sur la position rétinienne associée à la configuration $M_{0,1}$. Pour chaque position j de la grille, les N configurations motrices $M_{j,i}$ sont déterminées par minimisation de la fonction f_{retine} (voir 4.4.2.3).

Si la minimisation de f_{retine} se révèle infructueuse pour certains couples $\{j, i\}$ ou si certaines configurations $M_{j,i}$ ne respectent pas les critères proposés en (4.4), (4.5) et (4.15), alors le point de vue i est supprimé de la simulation et N est réduit d'une unité.

La détermination des courbes noyaux, l'estimation de la dimension intrinsèque de la distribution décrite par la métrique moyenne régularisée et sa projection sont réalisées de manière identique à la simulation de base (voir 4.4.2.4).

4.5.4.2 Résultats de la simulation étendue

Sur les 1000 points de vue $M_{0,i}$ aléatoires initiaux, $N = 570$ se sont révélés viables pour toutes les positions de la grille et ont été conservés pour la suite de la simulation. Un sous-échantillonnage de ces configurations du bras est représenté figure 4.36 conjointement aux configurations qui leurs sont associées lors de l'exploration de la grille.

La visualisation de l'ensemble des courbes noyaux générées lors de la simulation ne présente pas d'intérêt du fait du trop grand nombre de configurations motrices et de leurs différents statuts²⁶.

Finalement, la projection finale moyenne et régularisée est représentée figure 4.37 parallèlement à la grille obtenue à partir de la métrique moyenne mais sans régularisation. Les effets conjugués du moyennage et de la régularisation permettent d'obtenir une représentation interne très régulière et qualitativement proche de la grille des positions réellement parcourue dans l'espace extérieur.

4.5.5 Conclusion

Cette quatrième simulation a permis, d'une part, de découvrir les capacités de déplacement du système (la grille des positions rétinienne peut être obtenue par compensation des déplacements de l'objet) et, d'autre part, de reproduire dans l'espace interne la régularité de la métrique externe. La représentation finale de la grille des positions est donc très proche des grilles réelles décrites par l'objet et la rétine dans l'espace extérieur. Elles ne sont toutefois pas rigoureusement identiques. Tout d'abord, l'orientation de la grille projetée est aléatoire puisque la CCA ne cherche à reproduire que les distances inter-points sans se soucier de leurs positions absolues. De plus, la grille interne sera, au mieux, équivalente à la grille extérieure à un facteur d'échelle près. Le robot n'a en effet aucune connaissance sur le système de coordonnées choisi pour décrire l'espace extérieur et n'a aucun moyen d'y accéder via son expérience sensorielle. Il peut par contre déterminer des relations entre les distances dont il fait l'expérience et se construire ainsi une représentation interne où les rapports de distances sont conservés. L'unité de référence de cette représentation interne, bien qu'accessoire est ici dérivée des caractéristiques motrices du robot. Enfin, comme pour la simulation précédente, les angles droits de la grille des positions ne sont pas respectés dans l'espace interne. La découverte de ces angles droits nécessiterait de considérer les rotations du système grâce auquel le robot pourrait déterminer que la distance parcourue le long d'une diagonale de la grille (ou d'une case de la grille) est égale à celle de l'autre diagonale après rotation de 90 degrés. L'ajout des rotations dans le système induit toutefois des difficultés supplémentaires évoquées dans la conclusion de ce chapitre.

4.6 Conclusion

Ce chapitre a permis d'illustrer comment un robot naïf peut construire une représentation interne - partielle - de l'espace géométrique extérieur au travers de l'analyse de son flux sensorimoteur et de différentes stratégies d'exploration. Une approche très basique nous a d'abord amenés à capturer les capacités d'action réelles du robot via une analyse de son flux sensoriel. En présence d'un environnement statique, ses capacités d'action sont en effet contraintes par la structure de l'espace géométrique et permettent donc de la caractériser partiellement (deux translations et une rotation dans le cas de l'espace 2D de cette simulation). Cette représentation interne présentait néanmoins le défaut de dépendre de l'état de l'environnement. La seconde simulation nous a alors permis de capturer les capacités d'actions réelles du robot tout en assurant que la représentation interne soit indépendante de l'environnement. Pour ce faire, les capacités d'actions réelles ont été déterminées via une analyse du flux sensoriel du robot, tandis

26. Chaque courbe noyau est associée à une position de la grille et à un point de vue, rendant la lecture d'une quelconque représentation délicate.

que la représentation interne a été élaborée à partir des informations motrices associées aux données sensorielles. Une telle démarche est triviale si les moteurs permettent de commander de manière indépendante les degrés de liberté réels du robot. Elle nécessite une étape supplémentaire lorsque le robot est redondant, comme dans le système étudié dans ce chapitre. Chaque état sensoriel se retrouve ainsi associé à un ensemble de configurations motrices redondantes (les courbes noyaux dans notre étude). La topologie de ces ensembles de configurations est identique à celle de la sous-variété sensorielle, et donc de l'espace des points de vue. Ils peuvent donc être projetés en basse dimension pour former une représentation interne homéomorphe à l'espace des points de vue totalement indépendant de l'environnement.

La troisième simulation présentée a permis de construire une représentation interne de l'espace plus sophistiquée. Elle s'inspire des idées de H. Poincaré en introduisant des déplacements de l'environnement et en caractérisant l'espace extérieur au travers des compensations sensorielles que le robot peut effectuer. Tout déplacement de l'objet est ainsi compensé sensoriellement par une action du robot. Chaque configuration motrice obtenue après compensation (et l'ensemble des configurations motrices qui lui sont équivalentes à cause de la redondance des commandes motrices) permet de créer un point dans un espace topologique quelconque. Pour une multitude de déplacements de l'environnement, l'espace décrit par ces points peut être projeté en basse dimension pour former une représentation interne de l'espace des déplacements permis par l'espace extérieur.

Enfin, la dernière simulation a permis de reproduire la représentation interne de la troisième simulation tout en reproduisant - partiellement - la régularité de la métrique euclidienne externe. Cette régularité est déterminée en analysant l'expérience sensorimotrice du robot et en constatant que certaines distances entre les points de la représentation internes sont associées à un unique déplacement de l'environnement ; elles doivent donc être égales. La représentation interne finale permet donc de capturer à la fois les capacités de déplacement du système mais également une partie de la régularité de la métrique euclidienne extérieure.

Une extension a également été proposée pour les simulations 3 et 4 afin de rendre leurs représentations internes respectives indépendantes du premier point de vue selon lequel le robot observe l'environnement avant que celui-ci ne se déplace. Pour chacune des simulations, l'extension consiste à observer l'environnement suivant un grand nombre de points de vue aléatoires puis à réaliser la compensation sensorielle pour chacun de ces points de vue lorsque l'environnement se déplace. Finalement, une métrique moyenne est calculée sur l'ensemble des points de vue et permet d'obtenir une représentation interne moyenne plus régulière et indépendante du point de vue sur l'objet.

Dans les simulations 3 et 4, les rotations du système, et plus précisément de l'objet, n'ont pas été prises en compte. L'ajout de ce degré de liberté est en théorie possible mais soulève différentes difficultés. Tout d'abord, les rotations de l'objet sont compensables mais sont périodiques vis-à-vis de l'état sensoriel du robot. Ainsi, la variété à projeter gagnerait une dimension ($l = 3$) mais deviendrait également bouclée. Sa projection dans un espace euclidien poserait donc des difficultés : nécessité d'avoir $p > 3$ ou scission de la variété lors du dépliage. De plus, les rotations ne présentent pas les mêmes régularités que les translations. Ainsi, la distance parcourue lors d'une rotation de compensation dépend de la distance à l'objet. Sans connaissance de cette distance, il est impossible de régulariser les distances internes liées aux rotations du système comme il a été fait pour les translations. Tout comme pour l'estimation de la dimension de l'espace réalisée au chapitre 3, il serait donc nécessaire d'envisager un traitement préalable de l'expérience

sensorimotrice permettant de distinguer les rotations des translations et de caractériser plus finement l'espace des variations sensorielles compensables.

Enfin, notons que les résultats présentés dans ce dernier chapitre ont permis de soumettre un article de conférence à IROS 2013²⁷. Une présentation plus complète de notre approche et de nos résultats est également prévue dans un article de revue actuellement en cours de rédaction.

27. Intelligent Robots and Systems, édition 2013, IEEE/RSJ International Conference.

Conclusion

Les travaux présentés dans cette thèse proposent d’explorer et d’appliquer le concept de *perception sensorimotrice* au champ de la robotique. La perception des agents artificiels est classiquement considérée comme un traitement des informations sensorielles provenant de leurs capteurs et l’extraction passive de caractéristiques permettant de modéliser l’état de l’environnement. L’approche sensorimotrice, inspirée de la théorie des *contingences sensorimotrices*, redéfinit au contraire la perception comme l’expérience d’interactions sensorimotrices avec l’environnement. Elle suppose que la capacité de percevoir n’est pas innée (définie *a priori* par les algorithmes de traitement implémentés par le roboticien) mais s’apprend au travers d’une exploration active du monde et de la découverte de ces interactions.

A terme, la finalité de cette démarche est de dépasser les limitations de l’approche classique en concevant de nouveaux schémas de contrôle offrant aux robots une plus grande autonomie et une meilleure adaptabilité dans des environnements complexes. Cet objectif est ambitieux et sa réalisation nécessitera certainement un effort soutenu sur le long terme. Une première problématique consiste à déterminer comment un robot sans connaissance *a priori* sur le monde peut découvrir ses capacités d’interaction avec l’environnement et caractériser les relations sensorimotrices à l’origine de ses perceptions futures. Les travaux présentés dans cette thèse abordent cette question sous l’angle particulier de la perception de l’espace dans lequel le robot évolue.

Comme l’avait déjà évoqué H. Poincaré il y a plus d’un siècle, un agent naïf peut accéder aux propriétés de l’espace géométrique externe par l’analyse de son expérience sensorimotrice et la découverte de variations sensorielles dites *compensables*. Ces dernières sont générées par les déplacements du robot ou de l’environnement (translations et rotations). La nature particulière de l’espace implique en effet qu’ils peuvent tous deux réaliser les mêmes déplacements et donc compenser la variation sensorielle engendrée par le déplacement de l’un par le déplacement équivalent de l’autre. L’ensemble des variations compensables dont un robot peut faire l’expérience permettent donc d’accéder aux capacités de déplacement offertes au système robot/environnement par l’espace extérieur. Les travaux présentés précédemment s’appuient sur le concept de variations sensorielles compensables pour étudier comment un robot naïf peut capturer les propriétés de l’espace extérieur. Les systèmes robots/environnements étudiés ont été simulés afin de pouvoir générer et traiter l’expérience sensorimotrice du robot dans des conditions idéales (absence de bruit et de dynamique du système, contrôle de l’environnement, dimension potentiellement réduite de l’espace géométrique, précision des mouvements...). Ces simulations permettent d’illustrer les concepts théoriques sous-jacents à notre démarche et de proposer une implémentation concrète des méthodes que nous avons développées, tout en évitant les difficultés techniques liées aux expérimentations sur plateformes réelles. Ainsi, nous avons pu étudier comment le flux sensoriel du robot peut le renseigner sur ses capacités d’interaction réelles avec l’environnement et comment le flux moteur permet à la fois d’explorer ces interactions et de contextualiser les informations sensorielles

collectées (attribution de variations sensorielles au robot ou à l'environnement (chapitre 3) ou encore conservation d'un sous-ensemble d'états sensoriels liés à des compensations motrices (chapitre 4)).

Le système simulé du chapitre 3 a permis d'étudier une méthode d'estimation de la dimension de l'espace par un robot naïf déjà proposée dans la littérature. Celle-ci est basée sur la découverte de l'ensemble des variations compensables au travers d'une exploration dissociée du système robot/environnement. Par nature, l'approche se veut indépendante des propriétés du système (structure de l'environnement, caractéristiques des moteurs et capteurs du robot, codage de l'expérience sensorimotrice. . .) mais la méthode linéaire initialement proposée ne permet que la réalisation de mouvements infinitésimaux lors de l'exploration. Une extension non-linéaire de celle-ci a donc été développée. Ses performances se sont toutefois révélées très décevantes du fait de l'étirement des distributions sensorielles générées par la loi sensorimotrice du système robot/environnement. Un algorithme de ré-échantillonnage actif a donc été proposé pour améliorer les propriétés de symétrie de la distribution sensorielle en modifiant l'exploration du système. Il a permis à la méthode non-linéaire d'estimation de dimension d'atteindre des performances satisfaisantes pour des amplitudes de mouvements réalisables par un robot réel.

Le chapitre 4 a été l'occasion d'étudier comment un robot naïf peut capturer des propriétés de plus en plus sophistiquées de l'espace extérieur et s'en construire une représentation interne. Une première approche, basique, a consisté à déterminer les capacités d'action offertes au robot par la structure de l'espace extérieur. Bien qu'éloignée de la notion d'espace que nous pouvons avoir en tant qu'observateur extérieur, la représentation interne ainsi générée a permis d'illustrer comment les flux moteurs et sensoriels pouvaient être analysés conjointement pour construire un espace interne indépendant de l'environnement observé. Cette propriété fondamentale fait écho à l'idée intuitive que la structure de l'espace est indépendante des objets qui s'y trouvent. Une seconde approche, plus sophistiquée, a visé à caractériser l'espace au travers des déplacements du système robot/environnement et des compensations sensorielles qu'ils permettent. Deux simulations successives ont ainsi permis de construire une représentation interne des capacités de déplacement du système puis à reproduire dans cet espace interne la régularité de la métrique euclidienne externe. La représentation interne finale se révèle ainsi très proche de la notion d'espace intuitive que nous pouvons avoir en tant qu'observateur extérieur.

Bien qu'appliquées à des systèmes robots/environnement relativement simples, les méthodes développées dans cette thèse se veulent génériques. Elles pourraient ainsi être appliquées à des systèmes plus complexes, avec une diversité de capteurs importante et des environnements riches. Leurs principales limitations dérivent directement de celles du concept de *compensabilité* à l'origine de notre caractérisation de l'espace. Ainsi, comme nous l'avons évoqué dans le chapitre 1, les variations sensorielles compensables regroupent à la fois les translations du système mais aussi ses rotations et tout changement d'état compensable (le changement de luminosité d'une source peut par exemple être compensé par une dilatation de la pupille). Différentes propriétés comme leurs commutativités respectives peuvent être estimées pour les dissocier mais aucun algorithme capable d'effectuer une telle analyse n'a pour l'heure été proposé. La dimension de l'espace des variations sensorielles compensables déterminée dans nos simulations ne permet donc qu'une caractérisation indirecte de l'espace. De plus, la possibilité pour un robot de faire rigoureusement l'expérience de variations sensorielles compensables est très faible. En effet, dans un environnement réel, l'ensemble des objets de la scène ne réalisent pas de déplacements rigides cohérents. Au contraire, les objets se déplacent souvent indépendamment tandis que la majorité de l'environnement reste statique (par exemple, dans

une vidéo l'objet observé peut se déplacer mais le fond reste fixe). La compensation des déplacements d'un objet nécessite alors de focaliser son attention sur lui en omettant les informations relatives au reste de l'environnement. Une telle démarche nécessite cependant pour le robot naïf de développer une notion (potentiellement basique) d'objet. Au-delà des limitations apportées par la compensabilité, notons que les algorithmes que nous avons implémentés en simulations ne permettent pas un portage direct sur un robot réel. En effet, ils reposent partiellement sur une analyse linéaire des données reposant sur la réalisation peu réaliste de très faibles mouvements dans le système (méthode de ré-échantillonnage dans le chapitre 3 et parcours des courbes noyaux dans le chapitre 4). Les différentes méthodes développées devraient également être rendues robustes au bruit avant d'envisager une application réelle. Enfin, nous avons régulièrement accéléré nos simulations en remplaçant de potentielles phases d'exploration exhaustives des configurations du système par des résolutions analytique supervisées (voir chapitre 4). Cette démarche est une entorse au cadre conceptuel de la thèse qui suppose que le robot ne possède aucune connaissance *a priori* sur le système. Des méthodes et heuristiques de parcours de l'espace des configurations du robot et de l'environnement pourraient donc être envisagées afin de proposer une résolution rigoureusement naïve de ces problématiques.

L'approche sensorimotrice de la perception en robotique n'en est qu'à ses débuts. Les travaux relatifs à la perception de l'espace devront être étendus aux autres propriétés non-spatiales de l'environnement (telle la perception des couleurs, évoquée au chapitre 1). A moyen terme, des méthodes de contrôle devront être développées pour permettre d'utiliser ce savoir intrinsèquement sensorimoteur et générer un comportement adapté du robot. Les nouveaux schémas de contrôle qui en émergeront permettront d'ancrer l'agent artificiel intelligent directement dans l'expérience sensorimotrice collectée au cours de son exploration du monde. Bien qu'inscrits dans le champ de la robotique, ces travaux pourraient également être une source d'inspiration intéressante pour comprendre comment les êtres vivants perçoivent leur environnement et quels phénomènes sous-tendent leur intelligence.

Annexe A

Méthodes de réduction de dimension

Il n'est pas dans l'optique de cette thèse de réaliser un état de l'art exhaustif de toutes les techniques de réduction de dimension. Seul un bref tour d'horizon des différents types de méthodes est proposé ci-dessous. Pour plus de détails sur chaque algorithme, le lecteur est invité à consulter la bibliographie accompagnant chacune des descriptions.

Dans toute la suite, les données sont notées X_i dans l'espace d'entrée euclidien de dimension n et Y_i dans l'espace de sortie euclidien de dimension p , avec $i \in [1, N]$ et N le nombre de données.

Les méthodes de réduction présentées ci-après cherchent toutes à projeter les données d'entrée X_i dans un espace de sortie en conservant leur topologie. Elles peuvent néanmoins être regroupées en deux catégories suivant qu'elles cherchent explicitement à conserver les distances données X_i ou leurs relations topologiques. Ces deux approches sont présentées successivement ci-après.

A.1 Réduction de dimension par conservation des distances

La conservation des distances a historiquement été le premier critère considéré en projection non-linéaire de données. Si lors d'une projection les points proches restent proches et les points éloignés restent éloignés, alors la structure topologique du nuage de données a été conservée, comme illustré figure [A.1](#).

En pratique, pour la majorité des méthodes de réduction de dimension, la contrainte de conservation de distance est d'autant plus forte lors de la projection que la distance dans l'espace d'entrée est faible. Les relations de voisinage caractéristiques de la topologie de la variété sous-jacente s'en retrouvent inchangées alors que les grandes distances sont libres d'être modifiées, permettant un possible dépliage du nuage de données si celui-ci présente une courbure.

La métrique utilisée pour déterminer les relations de distances entre les données X_i d'entrée peut varier d'une méthode à l'autre. Trois sous-catégories de méthodes sont présentées ci-dessous suivant qu'elles se basent sur la mesure de distances euclidiennes, de distances géodésique (en pratique approximée par la distance de graphe) ou d'autres distances.

A.1.1 Distance euclidienne

L'expression de la distance euclidienne $d(.,.)$ a déjà été proposée dans le coeur de la thèse (voir [\(2.15\)](#), [46](#)). Elle est la plus intuitive pour mesurer les relations de distance

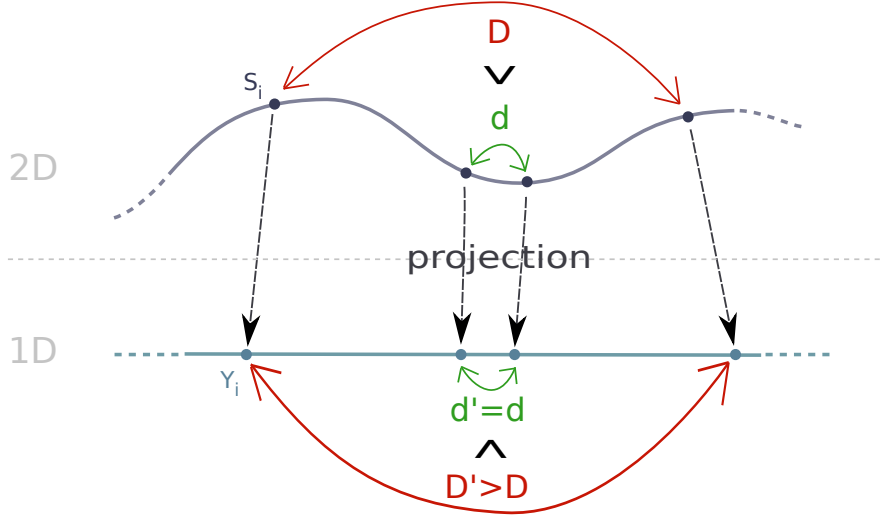


FIGURE A.1: Lors de la projection de l'espace 2D à l'espace 1D, les faibles distances restent faibles et les grandes distances restent grandes : la structure géométrique de la variété est conservée.

entre les points dans l'espace d'entrée puisqu'elle correspond à la métrique euclidienne qui nous semble géométriquement naturelle. Par la suite, la distance $d(X_i, X_j)$ sera souvent notée $d(i, j)$ afin d'alléger les équations.

Les principales méthodes fondées sur le calcul des distances euclidiennes dans l'espace d'entrée sont présentées ci-après.

Metric Multi-Dimensional scaling : La *Metric Multi-Dimensional Scaling* (MMDS) [91] est une méthode linéaire de projection cherchant à minimiser l'erreur de projection suivante :

$$\begin{aligned} E_{\text{MMDS}} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left(d(X_i, X_j) - d(Y_i, Y_j) \right)^2, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left(d_{\text{in}}(i, j) - d_{\text{out}}(i, j) \right)^2, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

où d_{in} et d_{out} sont respectivement les distances euclidiennes dans l'espace d'entrée et l'espace de sortie. Elle cherche donc à reproduire toutes les distances d'entrée dans l'espace de sortie.

Le terme *scaling* renvoie au fait de chercher une configuration de points en respectant au mieux leurs relations de distance. La MMDS correspond au cas particulier où l'espace de destination est l'espace Euclidien. Comme toutes les méthodes linéaires, la MMDS repose sur l'hypothèse sous-jacente que les données appartiennent à un sous-espace linéaire plongé dans l'espace d'entrée. Ses performances sont donc mauvaises si la distribution de points présente une courbure.

D'un point de vue algorithmique, la recherche de la configuration des points Y_i est réalisée par une méthode de résolution algébrique exacte similaire à une Analyse en Composante Principale (ACP). Bien que leurs formalisations soient différentes, les résultats fournis par ces deux méthodes sont identiques.

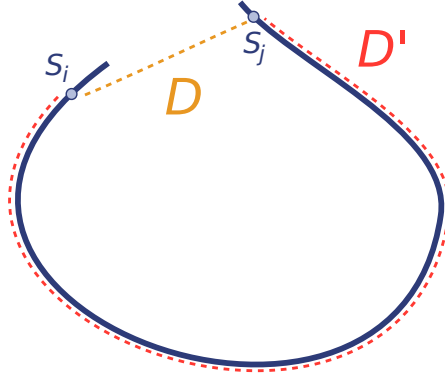


FIGURE A.2: La forte courbure de la variété implique que les points X_1 et X_2 sont proches dans l'espace des données, bien qu'ils soient en réalité éloignés sur la variété. La distance D est donc plus faible que la distance D' . La NLM aura des difficultés pour déplier une telle variété puisqu'elle s'appuie sur les distances dans l'espace d'entrée, similaires à D . Au contraire, la CCA s'appuie sur les distances dans l'espace de sortie, similaires à D' à partir du moment où la variété se déplie.

Sammon's nonlinear mapping : La *Sammon's nonlinear mapping* (NLM) [92] cherche à minimiser l'erreur de projection suivante :

$$E_{\text{NLM}} = \frac{1}{c} \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^N \frac{\left(d_{\text{in}}(i, j) - d_{\text{out}}(i, j) \right)^2}{d_{\text{in}}(i, j)}, \quad (\text{A.2})$$

avec :

$$c = \sum_{i=1, i < j}^N d_{\text{in}}(i, j). \quad (\text{A.3})$$

La différence avec la MMDS présentée précédemment tient à la présence du dénominateur $d_{\text{in}}(i, j)$ dans l'équation (A.2). Celui-ci a pour objectif de renforcer la contrainte de conservation pour les faibles distances dans l'espace d'entrée. Il permet ainsi à la méthode de déplier des variétés (peu) courbes. La figure A.1 vue précédemment peut illustrer ce principe : si on veut conserver les petites distances (d) lors de la projection, les grandes distances (D) se retrouvent étirées du fait de la courbure initiale de la variété.

Cependant, ce que NLM gagne en flexibilité par rapport à MMDS, elle le perd en terme de résolution. La méthode algébrique exacte est ici remplacée par un algorithme d'optimisation itératif dont la convergence vers un minimum global n'est pas garantie.

Curvilinear Component Analysis : Comme présenté dans le coeur de la thèse, la *Curvilinear Component Analysis* (CCA) [78] cherche à minimiser l'erreur de projection suivante :

$$E_{\text{CCA}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left(d_{\text{in}}(i, j) - d_{\text{out}}(i, j) \right)^2 F_{\lambda}(d_{\text{out}}(i, j)), \quad (\text{A.4})$$

avec F_{λ} une fonction de voisinage permettant de privilégier la conservation des faibles distances dans l'espace de sortie.

Contrairement à la NLM où la pondération des erreurs de projections se fait par rapport aux distances dans l'espace d'entrée (voir (A.2)), la CCA propose de le faire par rapport aux distances dans l'espace de sortie. Intuitivement, comme l'illustre la figure A.2, la

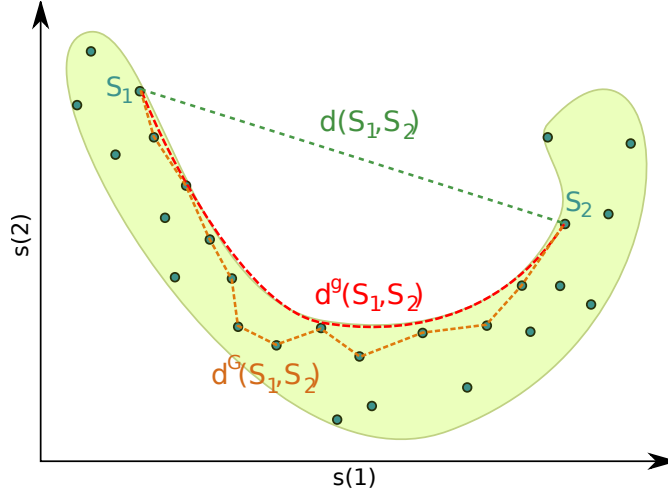


FIGURE A.3: La distance géodésique $d^g(1, 2)$ mesure la distance entre X_1 et X_2 respectant la topologie de la variété. Lorsque seul un échantillonnage est disponible, la distance de graphe $d^G(1, 2)$ est une approximation de $d^g(1, 2)$.

méthode est donc capable de déplier des variétés présentant des courbures importantes. La résolution du problème est ici encore réalisée par un algorithme d'optimisation itératif dont la convergence vers un minimum global n'est pas garantie.

A.1.2 Distance géodésique

Bien que naturelle, la distance euclidienne n'est pas forcément la plus adaptée pour décrire les relations entre les points d'une distribution. Comme illustré dans la figure A.2, elle peut être trompeuse si la variété est très courbée. Des points très éloignés topologiquement peuvent n'être séparés que d'une faible distance euclidienne. Ce phénomène s'explique par le fait que la topologie de la variété n'est pas prise en compte pour calculer $d(i, j)$. Mesurer cette distance revient à parcourir le chemin le plus court entre les deux points, même s'il faut pour cela "sortir" de la sous-variété sous-jacente.

La distance *géodésique*, notée $d^g(., .)$ permet au contraire de prendre en compte la topologie de la sous-variété portant les données lors de la mesure de distance. Intuitivement, elle correspond à la distance la plus courte mesurée lorsqu'on se rend d'un point à un autre en parcourant la sous-variété. La distance D' dans la figure A.2 correspond ainsi à la distance géodésique entre X_1 et X_2 .

En pratique, même lorsqu'une expression analytique de la variété est disponible, le calcul de distance géodésique est une tâche difficile. Elle devient même impossible lorsque seul un échantillonnage de celle-ci est connu. Dans les algorithmes que nous allons présenter, elle est donc approximée par la *distance de graphe*, notée $d^G(., .)$. Intuitivement, elle correspond à la somme minimale des distance euclidiennes pour se rendre de voisins en voisins d'un point à un autre, comme illustré dans la figure A.3. La distance de graphe repose donc sur la mesure de distances euclidiennes mais uniquement à l'échelle locale. Par nature, la distance de graphe $d^G(i, j)$ est supérieure à $d^g(i, j)$ (voir figure A.3). Néanmoins, elle en est une approximation acceptable si la densité de la distribution d'entrée est suffisamment importante.

Isomap : La méthode *Isomap* [80], déjà présentée dans le corps de la thèse, est équivalente à la MMDS, à la différence qu'elle considère en entrée les distances de graphe

plutôt que les distances euclidiennes dans l'espace des données. L'erreur de projection qu'elle minimise est la suivante :

$$\begin{aligned} E_{\text{ISOMAP}} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left(d^G(X_i, X_j) - d(Y_i, Y_j) \right)^2, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left(d_{in}^G(i, j) - d_{out}(i, j) \right)^2, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

où d_{in}^G est la distance de graphe dans l'espace d'entrée.

La méthode cherche donc à reproduire dans l'espace de sortie des distances euclidiennes qui soient identiques aux distances de graphe dans l'espace d'entrée. La prise en compte des distances de graphe lui permet de traiter des variétés courbes. Néanmoins, Isomap repose intrinsèquement sur l'hypothèse que la distribution appartient à un hyperplan, où les mesures de distance sont euclidiennes et ayant subi une transformation quelconque dans l'espace d'entrée (la sous-variété sous-jacente aux données doit être *développable*). La méthode repose sur une résolution algébrique exacte, identique à celle de la MMDs.

Geodesic Nonlinear Mapping : La méthode *Geodesic Nonlinear Mapping* (GNLM) est une variante de la NLM qui prend en entrée des distances de graphe plutôt que des distances euclidiennes [93]. L'erreur de projection qu'elle cherche à minimiser est la suivante :

$$E_{\text{GNLM}} = \frac{1}{c} \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^N \frac{\left(d_{in}^G(i, j) - d_{out}(i, j) \right)^2}{d_{in}^G(i, j)}, \quad (\text{A.6})$$

avec :

$$c = \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^N d_{in}^G(i, j). \quad (\text{A.7})$$

De part l'utilisation de la métrique de graphe dans l'espace d'entrée, la GNLM permet de projeter correctement des variétés présentant de fortes courbures ; ce qui était une des limitations principales de NLM.

D'un point de vue algorithmique, cette variante est identique à l'originale et repose sur une méthode d'optimisation itérative dont la convergence vers un minimum global n'est pas garantie.

Curvilinear Distance Analysis : La *Curvilinear Distance Analysis* (CDA) est une variante de la CCA prenant en entrée des distances de graphe plutôt que des distances euclidiennes [94]. L'erreur de projection qu'elle cherche à minimiser est la suivante :

$$E_{\text{CDA}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left(d_{in}^G(i, j) - d_{out}(i, j) \right)^2 F_{\lambda}(d_{out}(i, j)), \quad (\text{A.8})$$

Comme pour CCA, la résolution du système s'effectue à l'aide d'un algorithme d'optimisation itératif dont la convergence vers un minimum global n'est pas garantie.

A.1.3 Autres distances

Les distances euclidienne et géodésique reposent sur des considérations géométriques, globales pour la première et locales pour la seconde. Néanmoins, certaines méthodes reposent sur des mesures de distances moins intuitives, voire inconnues. Deux de ces méthodes sont présentées ci-après.

Kernel PCA : La *Kernel PCA* (KPCA) est une extension de la MMDS qui étend sa méthode de résolution algébrique à des variétés non-linéaires en introduisant une nouvelle mesure de distance sans signification géométrique directe [95]. Plutôt que de considérer les données dans l'espace d'entrée, la méthode repose sur leur mapping préalable dans un espace de grande dimension, voire de dimension infinie. Ce mapping peut être non-linéaire, ce qui permet à KPCA de traiter des variétés courbes, mais son but est justement de linéariser la distribution dans ce nouvel espace. Si un tel mapping est découvert, les données appartiennent alors à un sous-espace linéaire. La mesure des distances euclidiennes dans ce nouvel espace permet d'appliquer le même algorithme de résolution analytique que pour la MMDS.

Rigoureusement, la KPCA cherche à minimiser l'erreur de projection suivante :

$$E_{\text{KPCA}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left(d_{\text{in}}(f(X_i), f(X_j)) - d_{\text{out}}(Y_i, Y_j) \right)^2, \quad (\text{A.9})$$

où $f(\cdot)$ est une fonction de mapping non-linéaire.

En pratique, l'expression explicite du mapping n'est pas nécessaire car seuls les produits scalaires dans l'espace d'arrivée du mapping sont calculés grâce à une *fonction noyau* [96]. Néanmoins le choix de la fonction noyau est primordial puisqu'elle doit permettre de linéariser la distribution.

Semidefinite Embedding : La *Semidefinite embedding* (SDE) s'inspire de la KPCA mais cherche à construire une fonction noyau adaptée aux données [97]. Formellement, la SDE cherche à minimiser l'erreur de projection suivante :

$$E_{\text{SDE}} = \frac{2}{\sum_{i,j=1}^N d_{\text{out}}(i, j)^2}. \quad (\text{A.10})$$

Minimiser E_{SDE} revient à maximiser son dénominateur et donc à maximiser les distances dans l'espace de sortie. Cette optimisation s'effectue bien-sûr sous contrainte. Dans le cas contraire, une solution triviale serait de projeter tous les points à l'infini. La méthode de résolution repose sur la construction d'une matrice de Gram (matrice des produits scalaires) des données dans l'espace de sortie. Par définition, cette matrice doit être symétrique et semi-définie positive. De plus, les distances à l'échelle locale dans l'espace d'entrée y sont conservées, tandis que les autres sont susceptibles d'être modifiées pour optimiser la projection des données.

La résolution du système s'appuie à la fois sur une méthode d'optimisation sur l'ensemble des matrices semi-définies positives et sur un algorithme de résolution algébrique exacte identique à celui de la MMDS.

A.2 Réduction de dimension par conservation de la topologie

Lors de la réduction de dimension, la conservation des distances peut se révéler une contrainte trop importante. Certaines méthodes cherchent plutôt à respecter la topologie de la variété, c'est-à-dire leur organisation spatiale sans respect spécifique de la métrique. Des déformations importantes de la variété sont alors envisageables lors de la projection. Les méthodes présentées ci-après sont divisées en deux sous-catégories selon qu'elles reposent ou non sur l'introduction d'un treillis pré-défini dans l'espace de sortie.

A.2.1 Treillis pré-défini

Les deux méthodes suivantes reposent sur l'introduction d'un treillis dont la structure dans l'espace de sortie est définie à l'avance. Le manque de flexibilité induit par cette contrainte est en partie compensé par les importantes déformations autorisées par l'approche topologique de la projection. On peut noter que, en général, ces méthodes sont appliquées avec des espaces de sortie de dimension restreinte ($p = 1$ ou $p = 2$), bien que des dimensions supérieures soient envisageables en théorie.

Self-Organizing Maps : Les Self-Organizing Maps (SOM) sont des réseaux de neurones permettant de réaliser une quantification vectorielle des données de l'espace d'entrée parallèlement à une projection dans un espace de sortie [98]. Aucune formalisation compacte de la fonction d'erreur qu'ils minimisent n'a actuellement été proposée. Globalement, les SOM cherchent un ensemble de représentants appartenants à la sous-variété sous-jacente aux données en prenant en compte les relations de voisinage induites par le treillis pré-défini dans l'espace de sortie.

Le processus de quantification de la méthode est réalisé de la manière suivante. Les points du treillis dans l'espace de sortie sont les représentants. Ils se voient associés des coordonnées aléatoires R_i dans l'espace d'entrée des données alors que leurs coordonnées Y_i dans l'espace de sortie sont fixes et définies par le treillis. A chaque itération, un point X_i de la distribution initiale est sélectionné. Dans l'espace d'entrée, le représentant le plus proche est alors choisi et ses coordonnées sont mises à jour afin de le rapprocher du point sélectionné :

$$R_s \leftarrow R_s + \alpha(X_s - R_s), \quad (\text{A.11})$$

avec R_s les coordonnées du représentant choisi, X_s les coordonnées du point choisi et α un taux d'apprentissage scalaire inférieur ou égal à 1.

La prise en compte de la structure du treillis est réalisée en modifiant l'équation (A.11) de la manière suivante :

$$R_i \leftarrow R_i + \alpha \mathcal{V}(Y_i, Y_s)(X_s - R_i), \quad \forall i \in [1, N^r] \quad (\text{A.12})$$

avec $\mathcal{V}$ une fonction de voisinage dans l'espace de sortie et N^r le nombre de représentants. La fonction de voisinage est en général monotone décroissante et permet de privilégier les faibles distances dans l'espace de sortie.

Pour chaque point X_s sélectionné dans l'espace d'entrée, les coordonnées de l'ensemble des représentants sont maintenant mises à jour. L'amplitude de leur déplacement dépend de la distance qui les sépare dans l'espace de sortie du représentant qui a été sélectionné. Ainsi, les représentants proches dans le treillis tendent à rester proches sur la sous-variété de l'espace d'entrée.

La méthode présente plusieurs limitations importantes. Premièrement, la quantification n'est pas optionnelle et fait partie intégrante de la méthode. Le nombre de représentants est donc inférieur au nombre de données initiales. Deuxièmement, la convergence de l'algorithme n'a jamais été prouvée. Enfin, la donnée *a priori* de la structure du treillis contraint la représentation.

Generative Topographic Mapping : La *Generative Topographic Mapping* (GTM) cherche à modéliser la distribution de points dans l'espace d'entrée par un nombre réduit de variables latentes w_i [99]. Chacune d'elle se voit assignée une probabilité de distribution (habituellement gaussienne) à laquelle sont, par la suite, appliqués les outils du calcul Bayésien. La GTM cherche ainsi à maximiser la vraisemblance :

$$L = \ln(p(\mathbf{X}|W)) \quad (\text{A.13})$$

avec $p(\cdot)$ est la probabilité de distribution et W le vecteur des variables latentes. La résolution s'effectue à l'aide d'un algorithme d'"Expectation-Maximisation" [100]. Elle nécessite au préalable de définir une dimension pour l'espace des variables latentes, une distribution *a priori* dans l'espace des variables latentes, un mapping de l'espace des variables latentes vers l'espace des données et une fonction d'erreur.

A.2.2 Treillis non pré-défini

La définition *a priori* d'un treillis n'est pas idéale lorsque la structure de ce dernier ne correspond pas à celle de la sous-variété à projeter. Les méthodes présentées ci-après cherchent au contraire à adapter le treillis aux données sans faire d'hypothèse sur sa structure.

Locally Linear Embedding : La *Locally Linear Embedding* (LLE) propose une approche basée sur une transformation conforme (qui conserve localement les angles) [101]. Elle repose sur l'hypothèse que chaque point de la distribution d'entrée peut être exprimé comme une combinaison linéaire de ses voisins. De plus, cette reconstruction linéaire - indépendante des translations, rotations et dilatations - est supposée être une propriété intrinsèque de la sous-variété, valable pour tous les points de la distribution. La géométrie locale de la variété est alors caractérisée par une matrice de reconstruction W . La fonction d'erreur minimisée par LLE est la suivante :

$$E_{\text{LLE}}(W) = \sum_{i=1}^N \left\| X_i - \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} w_{i,j} X_j \right\|_2^2, \quad (\text{A.14})$$

avec $\mathcal{N}(i)$ le set de voisins du point X_i et $w_{i,j}$ les entrées de W .

Une fois W déterminée, la projection des données dans l'espace de sortie est réalisée par décomposition en valeurs propres de cette matrice.

Laplacian Eigenmaps : La méthode *Laplacian Eigenmap* (LE) s'appuie sur la théorie des graphes et une minimisation des distances locales pour construire une représentation basse dimension d'une distribution d'entrée [102]. Premièrement, un graphe de la distribution représentant les relations de voisinages entre les points est construit. La LE

cherche ensuite à minimiser l'erreur de projection suivante :

$$E_{LE} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \|Y_i - Y_j\|_2^2 w_{i,j}, \quad (\text{A.15})$$

avec :

$$\begin{cases} w_{i,j} = 0 & , \text{ si } X_i \text{ et } X_j \text{ ne sont pas voisins,} \\ w_{i,j} = \exp\left(-\frac{\|X_i - X_j\|_2^2}{2T^2}\right) & , \text{ si } X_i \text{ et } X_j \text{ sont voisins,} \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

avec T un paramètre dit de "température". Ce critère peut être ré-écrit pour faire apparaître la matrice Laplacienne pondérée L :

$$L = W - D, \quad (\text{A.17})$$

où W est la matrice regroupant les poids $w_{i,j}$ et D est la matrice diagonale définie par $d_{i,i} = \sum_{j=1}^N w_{i,j}$. La résolution du problème s'effectue alors de manière algébrique et exacte par une décomposition en valeurs propres de la matrice L .

Isotop : La méthode *Isotop* peut être assimilée à une SOM inversée [103]. Comme pour cette dernière, aucune formalisation compacte de la fonction d'erreur de projection qu'elle minimise n'a été proposée.

La construction de la représentation basse dimension des données se fait d'abord par la création d'une matrice de distances de graphe (voir 2.5.3). Chaque paire de point s'y voit associée une distance égale soit à la distance euclidienne qui les sépare s'ils sont voisins, soit à la distance de graphe qui les sépare s'ils ne sont pas voisins. Cette matrice de distances de graphe définit la structure du treillis sur lequel les données seront projetées. Dans un second temps, l'ensemble des données Y_i sont placées à l'origine de l'espace de sortie. Une probabilité de distribution (généralement un noyau gaussien) est associée à chacun d'eux. Les coordonnées des Y_i sont ensuite mises à jour itérativement de la manière suivante :

$$Y_i \leftarrow Y_i + \alpha \mathcal{V}(X_i, X_s)(A - Y_i), \quad (\text{A.18})$$

avec α le taux d'apprentissage, A un point tiré aléatoirement à partir des probabilités de distribution associées aux Y_i , X_s la donnée dans l'espace d'entrée associée au Y_i le plus proche de A dans l'espace de sortie et $\mathcal{V}(\cdot)$ une fonction de voisinage s'appliquant aux distances reportées dans le graphe. La distribution de sortie, initialement concentrée en un seul point, se déploie donc en tenant compte du treillis défini par la matrice de distances de graphe.

Annexe B

Méthode d'homogénéisation de distribution

La méthode d'homogénéisation présentée dans cette annexe propose de sous-échantillonner une distribution de N_{init} points en respectant les deux critères suivants :

- aucun point ne se trouve à moins d'une distance r de ses voisins.
- les distances inter-points sont minimisées.

De manière itérative, une valeur de rayon r est recherchée afin de respecter les contraintes précédentes avec un nombre d'échantillons final désiré de N .

B.1 Algorithme d'homogénéisation

Soit $\mathbf{X}$ une matrice de données regroupant N_{init} échantillons X_i de dimension n . Soit β un vecteur binaire de taille N_{init} tel que $\beta(i) = 1$ si l'échantillon X_i est sélectionné pour faire partie de la distribution finale. Soit ω un vecteur binaire de taille N_{init} tel que $\omega(i) = 1$ si l'échantillon X_i n'a pas encore été évalué.

La valeur optimale du rayon r étant inconnue, sa valeur est déterminée itérativement par dichotomie dans l'intervalle $[r_{min}, r_{max}]$. Sauf information *a priori* sur la distribution, les valeurs standards suivantes sont utilisées :

- $r_{min} = 0$,
- $r_{max} = 2D_{max}$,

avec $D_{max} = \max_i (d(X_i, \bar{X}))$ et $\bar{X}$ le barycentre de la distribution $\mathbf{X}$.

Tant que le nombre de points sélectionnés est différent du nombre final de points désiré,

$$\sum_{k=1}^{N_{init}} \beta(k) \neq (N \pm \epsilon), \text{ avec } \epsilon \text{ un seuil de tolérance,} \quad (\text{B.1})$$

les étapes suivantes sont réalisées :

- Le rayon r est déterminé par dichotomie pour l'itération courante :

$$r = (r_{min} + r_{max})/2. \quad (\text{B.2})$$

- Tant que $\omega \neq 0^{N_{init}}$, tous les échantillons n'ont pas été évalués et les étapes suivantes sont réalisées :

- ◇ Un échantillon X_i est sélectionné pour faire partie de la distribution finale. Celui-ci est choisi afin de minimiser la somme des distances aux échantillons déjà sélectionnés :

$$\sum_{k=1}^{N_{init}} d(X_i, X_k) \times \beta(k). \quad (\text{B.3})$$

Si aucun point n'a encore été sélectionné, X_i est tiré aléatoirement.

- ◇ Les vecteurs β et ω sont mis à jour :

$$\begin{aligned} \beta(i) &= 1, \\ \omega(i) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

- ◇ Le vecteur D des distances entre X_i et les points de la distribution est calculé :

$$D(k) = d(X_i, X_k), \text{ avec } k \in [1, N_{init}]. \quad (\text{B.5})$$

- ◇ Les points X_k trop proches de X_i sont retirés de l'ensemble des échantillons à évaluer :

$$\omega(k) = 0, \text{ si } D(k) < r. \quad (\text{B.6})$$

- L'intervalle de recherche $[r_{min}, r_{max}]$ est mis-à-jour :

$$\begin{aligned} r_{min} &= r, \text{ si } \sum_{k=1}^{N_{init}} \beta(k) > N + \epsilon, \\ r_{max} &= r, \text{ si } \sum_{k=1}^{N_{init}} \beta(k) < N - \epsilon. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

B.2 Exemples d'application

B.2.1 Distribution 2D de 25000 points

Soit $\mathbf{X}$ une distribution aléatoire 2D de $N_{init} = 25000$ échantillons X_i tels que :

$$X_i(k) = u^4, \forall k \in [1, n], \quad (\text{B.8})$$

avec n la dimension de l'espace des données et u une variable aléatoire tirée à partir d'une distribution uniforme dans $[0, 1]$. La distribution $\mathbf{X}$ est illustrée dans la figure B.1. L'algorithme d'homogénéisation est appliqué à $\mathbf{X}$ avec un nombre de points désiré de $N = 1000$ et un seuil de tolérance ϵ de 1%. Les distributions sous-échantillonnées obtenues à la fin des itérations 1, 3, 5, 7, 9 et 12 sont présentées dans la figure B.2 avec la valeur courante du rayon r et du nombre de points sélectionnés $N^{select} = \sum_{k=1}^{N_{init}} \beta(k)$. Afin d'évaluer le gain en régularité de la distribution, le critère de densité (non-normalisée) $\tilde{D}(i)$ est proposé :

$$\tilde{D}(i) = \sum_{j=1}^N H(r - \|X_i - X_j\|_2), \text{ avec } H(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 1 & \text{si } u \geq 0 \end{cases}, \quad (\text{B.9})$$

avec r variant de 0 à r_{max} , la distance maximale séparant le barycentre de la distribution au point qui en est le plus éloigné.

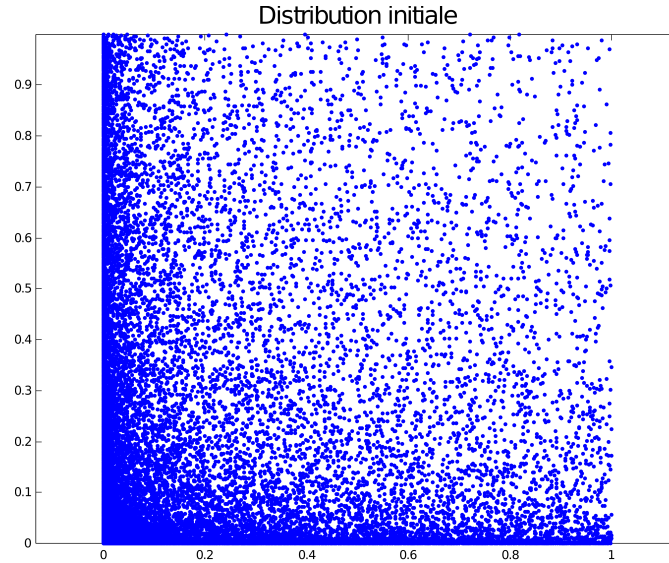


FIGURE B.1: Distribution initiale non-homogène de $N_{init} = 25000$ points présentant une plus forte densité vers l'origine.

L'évolution de $\tilde{D}(i)$ en fonction de r est évaluée pour trois distributions distinctes :

- 1006 points de la distribution initiale $\mathbf{X}$ tirés aléatoirement.
- la distribution sous-échantillonnée de l'itération finale (itération 12).
- une distribution optimale de 1006 régulièrement espacés dans $[0, 1]^2$.

Ces trois distributions sont représentées dans la figure B.8 conjointement à l'évolution de l'écart-type de $\tilde{D}(i)$ évalué pour tous les échantillons i . Cet écart-type représente, pour un rayon r donné, à quel point le nombre de voisins varie d'un échantillon X_i de la distribution à un autre.

Les courbes d'évolution des écarts-type de $\tilde{D}(i)$ en fonction de r permettent d'illustrer que la variation de densité locale de la distribution sous-échantillonnée est inférieure à celle de la distribution initiale (pour un même nombre de points N). De plus, cette variation est très proche de celle obtenue avec la distribution optimale. Notons d'ailleurs que l'écart-type de $\tilde{D}(i)$ est non-nul même dans le cas optimal puisque les bordures du nuage de points induisent un biais dans l'estimation de $\tilde{D}(i)$.

B.2.2 Distribution 2D de 10000 points

Soit $\mathbf{X}_2$ une distribution aléatoire 2D de $N_{init} = 10000$ échantillons X_i générés de manière identique à la distribution $\mathbf{X}$ (voir (B.8)). La distribution $\mathbf{X}_2$ est représentée figure B.4. L'algorithme d'homogénéisation est appliqué à $\mathbf{X}_2$ avec un nombre de points désiré de $N = 1000$ et un seuil de tolérance ϵ de 1%. La distribution sous-échantillonnée finale est présentée figure B.5. A l'oeil nu, celle-ci semble plus dense dans sa partie inférieure-gauche. Ce phénomène s'explique par les propriétés de la distribution initiale et la nature non-génératrice de la méthode de sous-échantillonnage. L'algorithme ne peut que conserver des échantillons présents dans la distribution initiale. Localement, la qualité de l'homogénéisation est alors d'autant plus grande que la densité initiale est importante. Dans les zones de faible densité, l'algorithme n'a à sa disposition qu'un ensemble réduit d'échantillons. Ceux sélectionnés peuvent donc être significativement éloignés de la position hypothétique d'un échantillon idéal.

La figure B.6 présente les courbes d'évolution de l'écart-type de $\mathcal{D}(i)$ en fonction de

r . La variation de densité locale est à nouveau plus faible pour la distribution sous-échantillonnée que pour la distribution initiale. Néanmoins, elle est cette fois-ci légèrement supérieure à l'écart-type lié à la distribution initiale. Cette perte d'homogénéité s'explique par le nombre réduit de points dans la distribution initiale, induisant des zones de faible densité qui biaisent l'homogénéisation comme expliqué précédemment.

B.2.3 Distribution 10D de 25000 points

Soit $\mathbf{X}_3$ une distribution aléatoire 10D de $N_{init} = 25000$ échantillons X_i générés de manière identique à la distribution $\mathbf{X}$ (voir (B.8)). La distribution $\mathbf{X}_3$ ne peut être représentée comme ses prédécesseurs du fait de la dimensionnalité de l'espace dans lequel elle est définie.

L'algorithme d'homogénéisation est appliqué à $\mathbf{X}_3$ avec un nombre de points désiré de $N = 1000$ et un seuil de tolérance ϵ de 1%. La figure B.7 présente les courbes d'évolution de l'écart-type de $\mathcal{D}(i)$ en fonction de r . Une fois encore, la variation de densité locale est plus faible pour la distribution homogénéisée que pour la distribution initiale, pour des valeurs de r inférieures à 1,45. Le positionnement relatif des courbes n'est en réalité pertinent que pour les plus faibles valeurs de r . En effet, le calcul de $\tilde{D}(i)$ se trouve fortement biaisé pour les plus fortes valeurs de r . Dans l'exemple présent, la forte dimensionnalité de l'espace des données induit un fort isolement des points les plus éloignés de l'origine. Une grande majorité des échantillons étant proches de l'origine (du fait de la non-linéarité de la distribution), les valeurs de $\tilde{D}(i)$ qui leur sont associées sont très similaires pour les grandes valeurs de r . Les points fortement éloignés de l'origine et présentant des valeurs très différentes de $\tilde{D}(i)$ sont comparativement peu nombreux. L'écart-type de $\tilde{D}(i)$ s'en retrouve ainsi relativement faible. Lorsque la distribution est homogénéisée, la meilleure répartition des points induit également une plus forte variance des $\tilde{D}(i)$ pour des rayons r important. L'écart-type de $\tilde{D}(i)$ peut alors être supérieur dans le cas de la distribution homogène que dans le cas initial pour les fortes valeurs de r . La figure B.8 présente l'évolution de la densité locale $\tilde{D}(i)$ en fonction de r pour 100 échantillons i aléatoires des distributions initiale et homogénéisée. L'observation des courbes pour les plus fortes valeurs de r permet de constater qu'une majorité des points présentent une valeur similaire de $\tilde{D}(i)$ dans le cas de la distribution initiale alors que celle-ci est plus variable pour la distribution homogénéisée. La forte similarité et régularité des courbes de la figure droite permet également de constater que l'homogénéisation est effective.

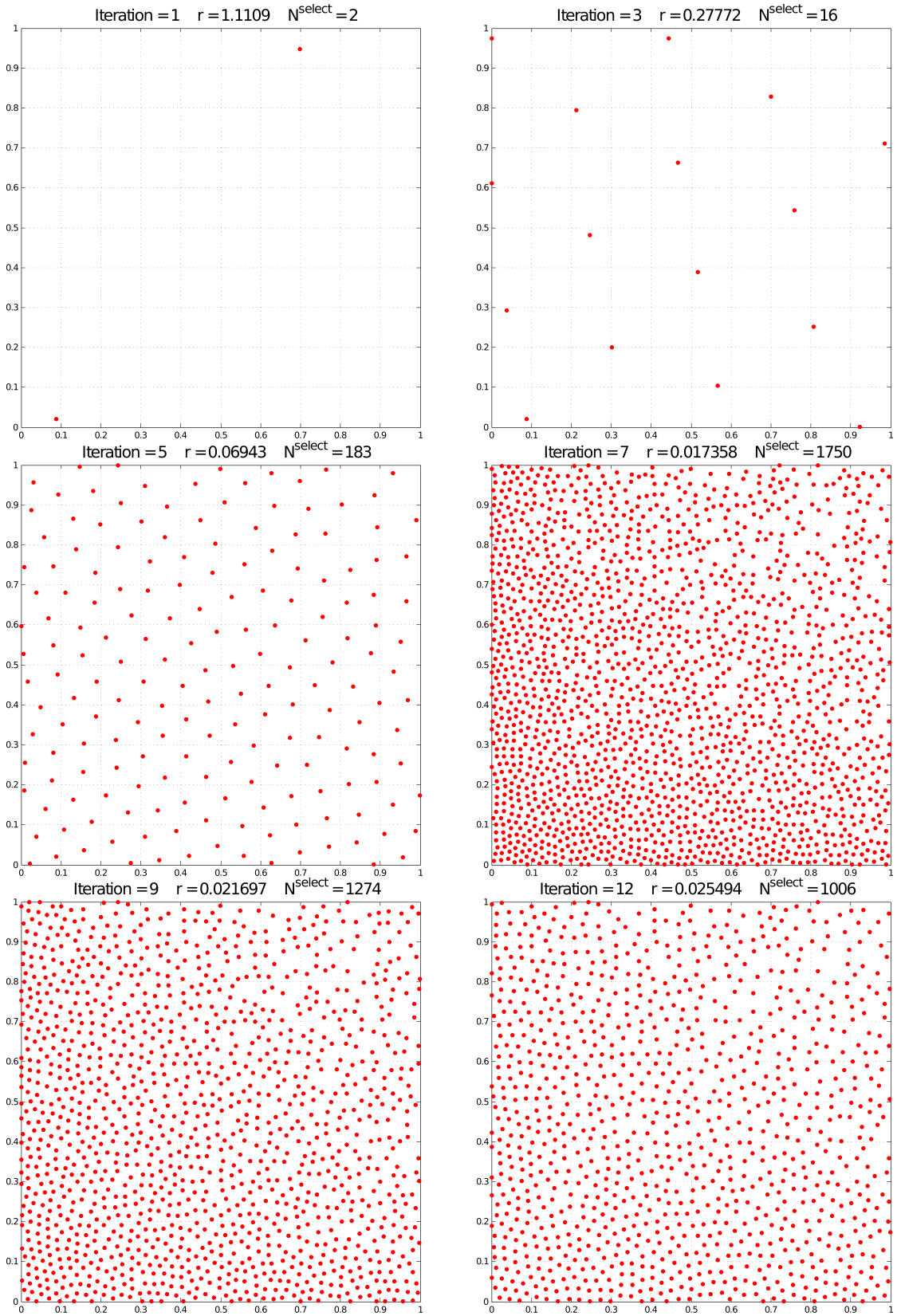


FIGURE B.2: Sous-échantillonnages obtenus pour les valeurs de rayon r associées aux itérations 1, 3, 5, 7, 9 et 12.

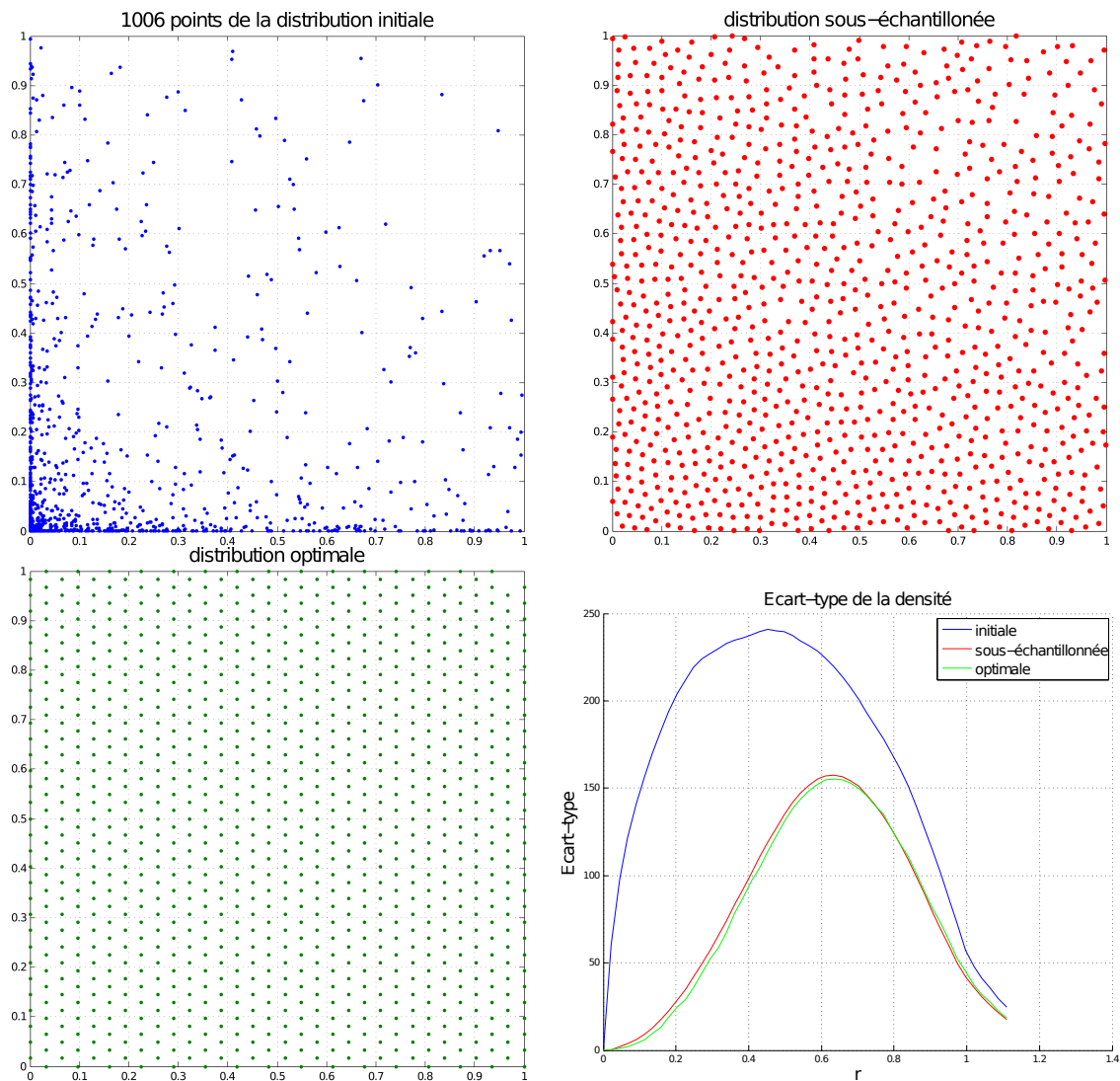


FIGURE B.3: En haut à gauche : sous-échantillonnage aléatoire de la distribution initiale. En haut à droite : sous-échantillonnage obtenu par homogénéisation. En bas à gauche : distribution optimale. En bas à droite : écarts-type des densités locales en fonction de r pour les trois distributions étudiées.

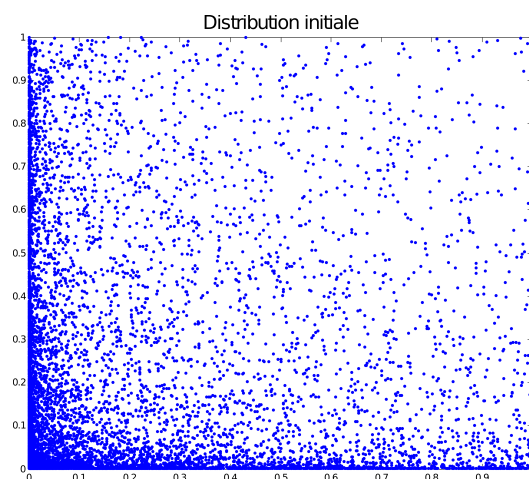


FIGURE B.4: Distribution initiale non-homogène de $N_{init} = 10000$ points présentant une plus forte densité vers l'origine.

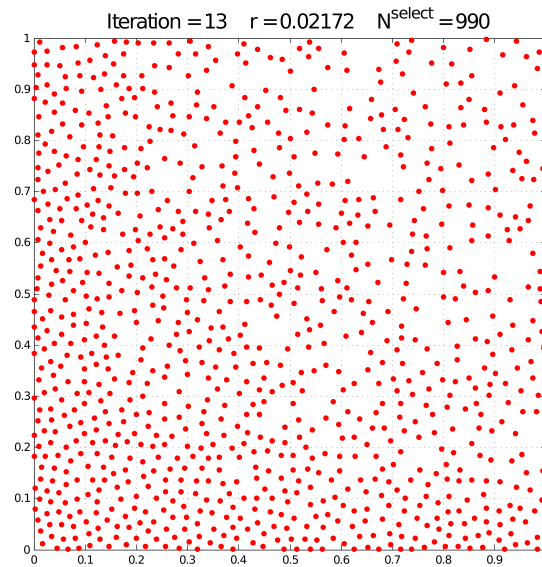


FIGURE B.5: Sous-échantillonnage obtenu lors de la dernière itération de l'algorithme d'homogénéisation.

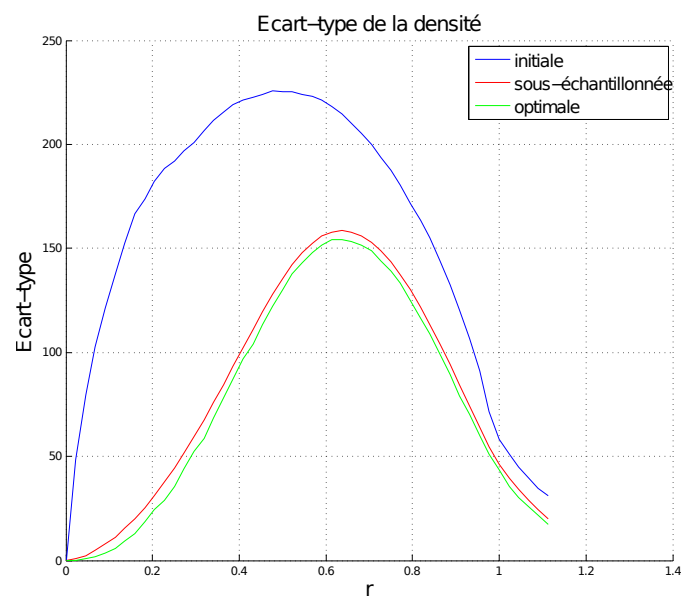


FIGURE B.6: Ecarts-type de densité locale en fonction de r pour un sous-échantillonnage aléatoire de la distribution initiale, le sous-échantillonnage obtenu par homogénéisation et une distribution optimale.

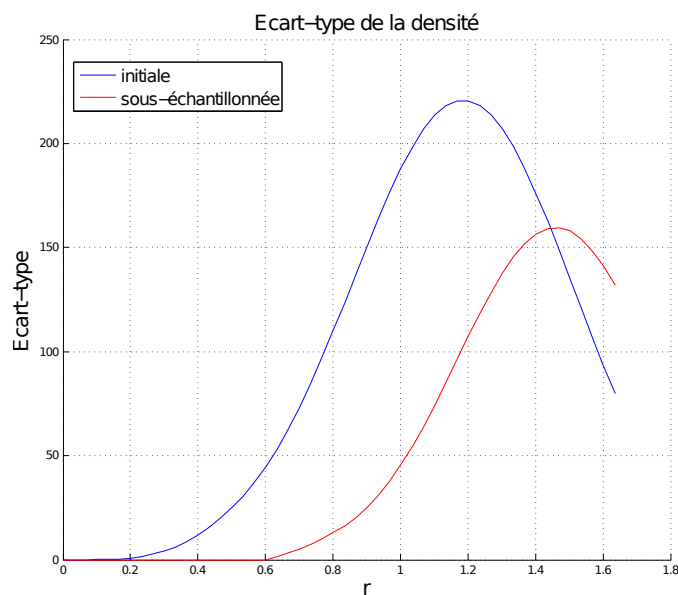


FIGURE B.7: Ecarts-type de densité locale en fonction de r pour un sous-échantillonnage aléatoire de la distribution initiale et le sous-échantillonnage obtenu par homogénéisation.

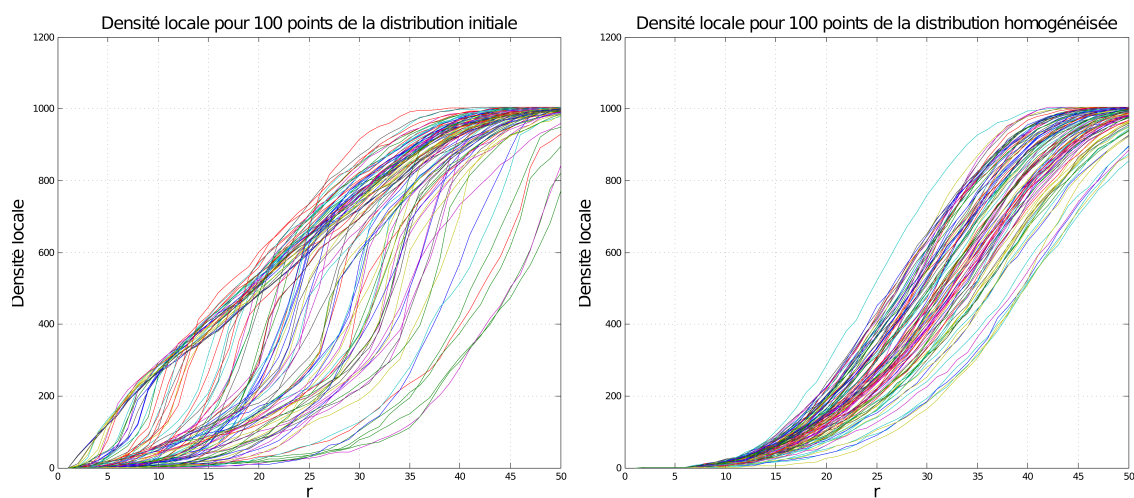


FIGURE B.8: A gauche : densités locales pour 100 points de la distribution initiale sous-échantillonnée aléatoirement. A droite : densités locales pour 100 points de la distribution homogénéisée.

Annexe C

Quasi-symétrie induite par le cas mono-couleur

La première simulation du chapitre 4 a également été menée dans le cas où toutes les sources lumineuses de l'environnement sont de la même couleur. Les résultats obtenus pour ce cas particulier sont présentés et discutés dans cette annexe.

C.1 La sous-variété sensorielle

Toutes les sources constituant l'objet sont considérées d'une même couleur (bleu ou rouge). Seuls 3 des 6 cônes de la rétine sont alors sensibles à l'environnement et génèrent des excitations non-nulles lors de l'exploration. La distribution sensorielle 3D résultante peut donc être visualisée, comme le montre la figure C.1.

C.2 Estimation de sa dimension intrinsèque

L'espace des données n'étant que de dimension 3, la projection du nuage dans un espace de dimension $p = 3$ peut se révéler problématique pour la méthode d'estimation de dimension par essai-erreur basée sur CCA (voir 2.7.4). La méthode auxiliaire spectrale d'estimation de dimension basée sur ISOMAP est donc utilisée pour estimer la dimension intrinsèque l des données sensorielles.

Les valeurs propres obtenues avec Isomap et leurs rapports successifs sont présentés dans le tableau C.1. La dimension intrinsèque du nuage de données est estimée à 2, ce qui confirme l'estimation visuelle qui pouvait en être faite en C.1. Ce résultat est toutefois étonnant puisque les propriétés d'interaction du système sont inchangées. La rétine peut en effet toujours se traduire dans deux directions différentes et effectuer une rotation dans le plan. La dimension intrinsèque attendue est donc de 3.

i	1	2	3
Valeurs propres	318,8	126.8	4.2
Rapports	2.5	30.4	.

TABLE C.1: Valeurs propres obtenues par Isomap et leurs rapports successifs.

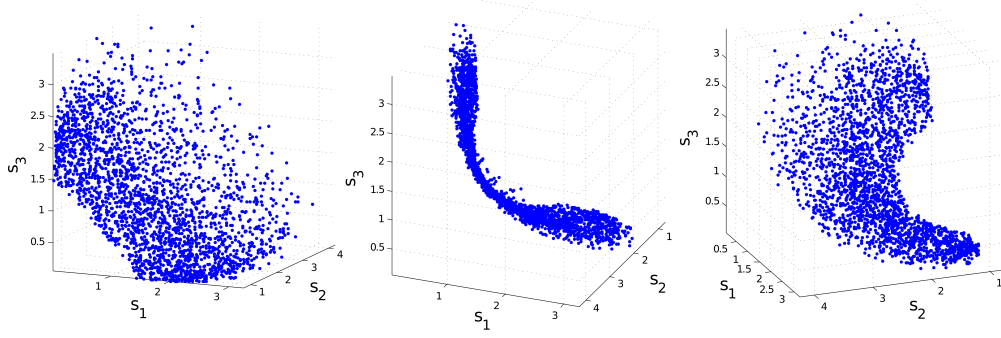


FIGURE C.1: La sous-variété sensorielle générée dans le cas mono-couleur observée selon trois orientations différentes. A l'œil nu, le nuage de points semble avoir une structure à deux dimensions.

C.3 Origine de la sous-estimation

Afin de comprendre l'origine de la sous-estimation de l , un échantillon S_i est sélectionné au hasard dans la distribution sensorielle. Les configurations motrices qui ont généré S_i et ses 5 plus proches voisins S_j sont extraites de la distribution motrice à l'origine de l'exploration. Pour chacune d'elles, la configuration de l'objet dans le repère de l'œil est déterminée. Les 6 points de vue résultants sont représentés figure C.2.

Les configurations de l'objet associées à ces 6 états sensoriels voisins permettent d'observer une forte variabilité du point de vue. Malgré leurs différences manifestes, notamment en termes de rotation autour de l'objet, ces différents points de vue génèrent pourtant des états sensoriels proches. La nature mono-couleur des sources et la simplicité de l'objet et des capteurs du robot font donc que l'expérience sensorielle est ambiguë. Une quasi-symétrie apparaît dans le système telle que différentes configurations de la rétine¹ se retrouvent associées à des états sensoriels quasi-identiques. La sous-variété sensorielle résultante présente alors une variance très faible, voir négligeable, selon une de ses dimensions intrinsèques ; ce qui explique l'origine de l'estimation $\hat{l} = 2$ produite par la méthode non-linéaire d'estimation de dimension.

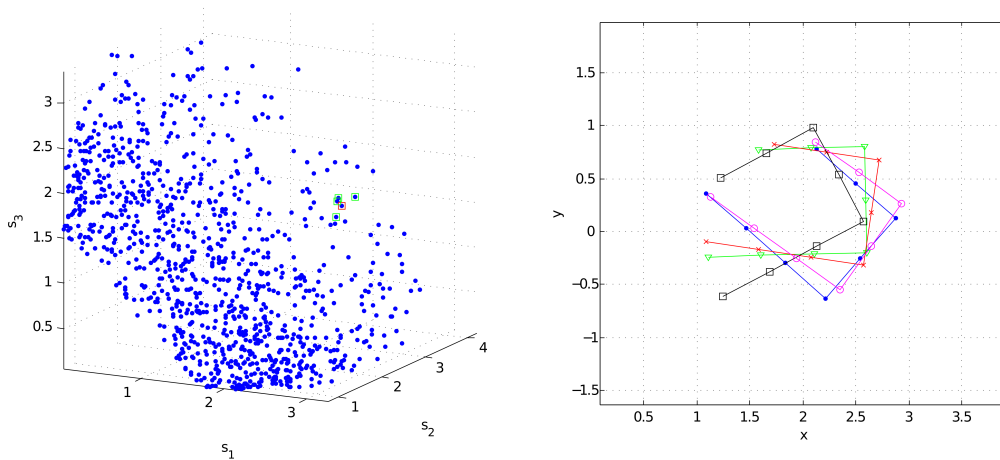


FIGURE C.2: A gauche : sous-variété sensorielle avec le point sélectionné (en rouge) et ses voisins (en vert). A droite : configurations de l'objet dans le repère lié à l'extrémité du bras pour l'état sensoriel sélectionné et ses voisins.

1. Du point de vue des variables latentes et non des variables motrices du robot qui peuvent être redondantes.

Bibliographie

- [1] David M Rosenthal. *Consciousness and Mind*. Oxford : Clarendon Press, 2005.
- [2] R. HOUDART. Essai sur la conscience. *L' Encéphale*, 20(2) :159–168, 1994. ISSN 0013-7006.
- [3] Steven Lehar. The Function of Conscious Experience : An Analogical Paradigm of Perception and Behavior. *Consciousness & Cognition*, 2000.
- [4] Stuart J Russell, Peter Norvig, John F Candy, Jitendra M Malik, and Douglas D Edwards. *Artificial intelligence : a modern approach*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1996. ISBN 0-13-103805-2.
- [5] David Marr. *Vision : A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information*. Henry Holt & Company, June 1983. ISBN 0716715678.
- [6] Steven Horst. The Computational Theory of Mind. In Edward N Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Spring 201 edition, 2011.
- [7] Alan Turing. *The Essential Turing : Seminal Writings in Computing, Logic, Philosophy, Artificial Intelligence, and Artificial Life plus The Secrets of Enigma*. {Oxford University Press, USA}, October 2004. ISBN 0198250800.
- [8] R Brooks. A robust layered control system for a mobile robot. *Robotics and Automation, IEEE Journal of*, 2(1) :14–23, March 1986. ISSN 0882-4967. doi : doi:10.1109/jra.1986.1087032.
- [9] Jakob Engel, Jurgen Sturm, and Daniel Cremers. Camera-based navigation of a low-cost quadcopter. *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2815–2821, October 2012. doi : 10.1109/IROS.2012.6385458.
- [10] Friedrich Fraundorfer, Lionel Heng, Dominik Honegger, Gim Hee Lee, Lorenz Meier, Petri Tanskanen, and Marc Pollefeys. Vision-based autonomous mapping and exploration using a quadroter MAV. *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 4557–4564, October 2012. doi : 10.1109/IROS.2012.6385934.
- [11] Consuelo Granata and Philippe Bidaud. A framework for the design of person following behaviors for social mobile robots. *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 4652–4659, October 2012. doi : 10.1109/IROS.2012.6385976.

- [12] Chin-Kai Chang, Christian Siagian, and Laurent Itti. Mobile robot monocular vision navigation based on road region and boundary estimation. *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 1043–1050, October 2012. doi : 10.1109/IROS.2012.6385703.
- [13] Benjamin Kuhn, Boris Schauerte, Kristian Kroschel, and Rainer Stiefelhagen. Multimodal saliency-based attention : A lazy robot’s approach. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2012 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 807–814. IEEE, 2012. ISBN 1467317373.
- [14] Yuji Yamakawa, Akio Namiki, and Masatoshi Ishikawa. Card Manipulation using a High-speed Robot System with High-speed Visual Feedback. pages 4762–4767, 2012.
- [15] Yung Siang Liao, Qun Zhang, Yanan Li, and Shuzhi Sam Ge. Non-Metric Navigation for Mobile Robot Using Optical Flow. (Idmi) :4953–4958, 2012.
- [16] Hyon Lim, Hyeonbeom Lee, and H. Jin Kim. Onboard flight control of a micro quadrotor using single strapdown optical flow sensor. *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 495–500, October 2012. doi : 10.1109/IROS.2012.6386045.
- [17] Chin-Kai Chang, C Siagian, and L Itti. Mobile robot vision navigation and localization using Gist and Saliency. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 4147–4154, 2010. doi : 10.1109/IROS.2010.5649136.
- [18] Rodney A Brooks. Elephants don’t play chess. *Robotics and Autonomous Systems*, 6 :3–15, 1990.
- [19] Rodney Brooks. Intelligence Without Representation. *Artificial Intelligence*, 47 : 139–159, 1991.
- [20] Rodney A. Brooks. Intelligence Without Reason. pages 569–595. Morgan Kaufmann, 1991.
- [21] Y Mohan and S G Ponnambalam. An extensive review of research in swarm robotics. In *Nature Biologically Inspired Computing, 2009. NaBIC 2009. World Congress on*, pages 140–145, 2009. doi : 10.1109/NABIC.2009.5393617.
- [22] John Rieffel, Davis Knox, Schuyler Smith, and Barry Trimmer. Growing and Evolving Soft Robots. *Artificial Life*, pages 1–20, February 2013. doi : doi: 10.1162/artl_a_00101.
- [23] Varela F.G., Maturana H.R., and Uribe R. Autopoiesis : the organization of living systems, its characterization and a model. *Currents in modern biology*, 5(4) :187–196, 1974. ISSN 0011-4014 PM - 4407425.
- [24] Rolf Pfeifer and Josh Bongard. *How the body shapes the way we think : A new view of intelligence*. A Bradford Book, October 2006. ISBN 0262162393.
- [25] Steven H Collins, Martijn Wisse, and Andy Ruina. A three-dimensional passive-dynamic walking robot with two legs and knees. *The International Journal of Robotics Research*, 20(7) :607–615, 2001.

- [26] M. Wisse. Three additions to passive dynamic walking ; actuation, an upper body, and 3D stability. *4th IEEE/RAS International Conference on Humanoid Robots, 2004.*, 1 :113–132, 2004. doi : 10.1109/ICHR.2004.1442118.
- [27] Tom Ziemke. The construction of “reality” in the robot : Constructivist perspectives on situated artificial intelligence and adaptive robotics. *Foundations of Science*, 6(1-3) :163–233, 2001. ISSN 1233-1821.
- [28] A Drogoul and J.-A. Meyer, editors. *Intelligence artificielle située*. Hermès, 1999.
- [29] Martin Hülse, Steffen Wischmann, Poramate Manoonpong, Arndt von Twickel, and Frank Pasemann. 50 years of artificial intelligence. chapter Dynamical, pages 186–195. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007. ISBN 3-540-77295-2, 978-3-540-77295-8.
- [30] James Gibson. The theory of affordances. In *The Ecological Approach To Visual Perception*, pages 127–143. Lawrence Erlbaum Associates, September 1986. ISBN 0898599598.
- [31] Valentino Braitenberg. *Vehicles : Experiments in Synthetic Psychology*. The MIT Press, February 1984. ISBN 0262521121.
- [32] A Berthoz. *La Simplexité*. Sciences (Ed. O. Jacob). Editions Odile Jacob, 2009. ISBN 9782738121691.
- [33] J Piaget. *La Construction du réel chez l’enfant. 2. ed.* Actualités pédagogiques et psychologiques ... Université de Genève. Delachaux et Niestlé S. A., 1950.
- [34] J Piaget. *L’Épistémologie génétique*. Que Sais-Je ? Presses Universitaires de France, 1970.
- [35] Max Lungarella, Giorgio Metta, Rolf Pfeifer, and Giulio Sandini. Developmental robotics : a survey. *CONNECTION SCIENCE*, 15 :151–190, 2003.
- [36] R A Brooks. *Cambrian Intelligence : The Early History of the New Ai*. A Bradford book. BRADFORD BOOK, 1999. ISBN 9780262522632.
- [37] Luc Steels and Rodney Allen Brooks. *The artificial life route to artificial intelligence : Building embodied, situated agents*. Routledge, 1995. ISBN 080581518X.
- [38] Inman Harvey, Ezequiel Di Paolo, Rachel Wood, Matt Quinn, Elio Tuci, and Elio Tuci Iridia. Evolutionary robotics : A new scientific tool for studying cognition. *Artificial life*, 11(1-2) :79–98, 2005. ISSN 1064-5462.
- [39] I Harvey, P Husbands, D Cli, Inman Harvey, Phil Husbands, and Dave Cli. Seeing The Light : Artificial Evolution , Real Vision. 1994(April), 1994.
- [40] T Gomi and A Griffith. Evolutionary robotics-an overview. In *Evolutionary Computation, 1996., Proceedings of IEEE International Conference on*, pages 40–49, 1996. ISBN VO -. doi : 10.1109/ICEC.1996.542331.
- [41] G Asuni, G Teti, C Laschi, E Guglielmelli, and P Dario. A bio-inspired sensory-motor neural model for a neuro-robotic manipulation platform. In *Advanced Robotics, 2005. ICAR ’05. Proceedings., 12th International Conference on*, pages 607–612, 2005. ISBN VO -. doi : 10.1109/ICAR.2005.1507471.

- [42] J K O'Regan and A Noë. A sensorimotor account of vision and visual consciousness. *The Behavioral and brain sciences*, 24(5) :939–73; discussion 973–1031, October 2001. ISSN 0140-525X.
- [43] J K O'Regan. *Why Red Doesn't Sound Like a Bell : Understanding the Feel of Consciousness*. OUP USA, 2011. ISBN 9780199775224.
- [44] COLIN BLAKEMORE and GRAHAME F COOPER. Development of the Brain depends on the Visual Environment. *Nature*, 228(5270) :477–478, October 1970.
- [45] Richard Held and Alan Hein. Movement-produced stimulation in the development of visually guided behavior. *J Comp Physiol Psychol*, pages 872–876, 1963.
- [46] PAUL BACH-Y-RITA, CARTER C COLLINS, FRANK A SAUNDERS, BENJAMIN WHITE, and LAWRENCE SCADDEN. Vision Substitution by Tactile Image Projection. *Nature*, 221(5184) :963–964, March 1969.
- [47] P Bach-y Rita. *Brain Mechanisms in Sensory Substitution*. Acad. Press, 1972. ISBN 9780120710409.
- [48] M Auvray. *Immersion et perception spatiale : l'exemple des dispositifs de substitution sensorielle*. 2004.
- [49] David P Riechers and Rhea T Eskew. Quantifying the effect of natural and arbitrary sensorimotor contingencies on chromatic judgments. *Journal of Vision*, 9(4), 2009. doi : 10.1167/9.4.27.
- [50] DAVID L PHILIPONA and J KEVIN O'REGAN. Color naming, unique hues, and hue cancellation predicted from singularities in reflection properties. *Visual Neuroscience*, 23(3-4) :331–339, 2006. ISSN 1469-8714. doi : 10.1017/S0952523806233182.
- [51] Richard O Duda and Peter E Hart. Use of the Hough transformation to detect lines and curves in pictures. *Communications of the ACM*, 15(1) :11–15, 1972.
- [52] Richard Bellman. *Adaptive control processes : a guided tour*, volume 4. Princeton university press Princeton, 1961.
- [53] H Poincaré. L'espace Et la Géométrie. *Revue de Métaphysique Et de Morale*, 3 (6) :631–646, 1895.
- [54] Alexis Drogoul and Jean-Arcady Meyer. *Intelligence artificielle située : cerveau, corps et environnement*. Hermès science publications, 1999. ISBN 2746200767.
- [55] Nicolas Cuperlier, Adrien Jauffret, Marwen Belkaid, Philippe Gaussier, and Philippe Tarroux. Frustration as a way toward autonomy and self-improvement in robotic navigation. *to appear*, 2013.
- [56] Mathieu Lefort, Yann Boniface, and Bernard Girau. Self-organization of neural maps using a modulated BCM rule within a multimodal architecture. In *From Brains to Systems-Preprints of the BICS 2010 Conference on Brain-Inspired Cognitive Systems*, 2010.
- [57] François Chaumette and Seth Hutchinson. Visual servo control. I. Basic approaches. *Robotics & Automation Magazine, IEEE*, 13(4) :82–90, 2006. ISSN 1070-9932.

- [58] P Soueres, V Cadenat, and M Djeddou. Dynamical sequence of multi-sensor based tasks for mobile robots navigation. In *7th Symp. on Robot Control (SYROCO-03)*, volume 2, pages 423–428, 2002.
- [59] Yoonsuck Choe, Huei-Fang Yang, and N Misra. Motor system’s role in grounding, receptive field development, and shape recognition. In *Development and Learning, 2008. ICDL 2008. 7th IEEE International Conference on*, pages 67–72, 2008. ISBN VO -. doi : 10.1109/DEVLRN.2008.4640807.
- [60] David Pierce and Benjamin J Kuipers. Map learning with uninterpreted sensors and effectors. *Artificial Intelligence*, 92(1) :169–227, 1997. ISSN 0004-3702.
- [61] Benjamin Kuipers. Drinking from the firehose of experience. *Artificial intelligence in medicine*, 44(2) :155–70, October 2008. ISSN 1873-2860. doi : 10.1016/j.artmed.2008.07.010.
- [62] Murat Aytakin, Cynthia F Moss, and Jonathan Z Simon. A sensorimotor approach to sound localization. *Neural computation*, 20(3) :603–35, March 2008. ISSN 0899-7667. doi : 10.1162/neco.2007.12-05-094.
- [63] Dario Floreano, Mototaka Suzuki, and Dario Mattiussi. Active vision and receptive field development in evolutionary robots. *Evolutionary computation*, 13(4) :527–44, January 2005. ISSN 1063-6560. doi : 10.1162/106365605774666912.
- [64] PY Oudeyer. Intrinsic motivation systems for autonomous mental development. *IEEE Transactions on*, 11(2) :265–286, 2007.
- [65] Lazaros Nalpantidis, Marten Bjorkman, and Danica Kragic. YES - YEt another object segmentation : Exploiting camera movement. *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2116–2121, October 2012. doi : 10.1109/IROS.2012.6385890.
- [66] C Collewet and F Chaumette. Visual Servoing Based on Structure From Controlled Motion or on Robust Statistics. In *Robotics, IEEE Transactions on*, volume 24, pages 318–330, 2008. ISBN 1552-3098 VO - 24. doi : 10.1109/TRO.2007.913996.
- [67] H.Helmholtz. The facts of perception, 1878.
- [68] Jean Nicod. *La géométrie dans le monde sensible*. F. Alcan, 1924.
- [69] Catherine Doss-Bachelet, Jean-Pierre Françoise, and Claude Piquet. *Géométrie différentielle*. Ellipses Éd. Marketing, 2000. ISBN 2729803211.
- [70] J J Stoker. *Differential Geometry*. Wiley-Interscience, New York, 1969.
- [71] D Philipona, J K O’Regan, and J.-P. Nadal. Is there something out there? : Inferring space from sensorimotor dependencies. *Neural Comput.*, 15(9) :2029–2049, 2003. ISSN 0899-7667. doi : 10.1162/089976603322297278.
- [72] Jakob Verbeek. Learning nonlinear image manifolds by global alignment of local linear models. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 28(8) :1236–1250, 2006. ISSN 0162-8828.
- [73] Armin Biess, Dario G Liebermann, and Tamar Flash. A computational model for redundant human three-dimensional pointing movements : integration of independent spatial and temporal motor plans simplifies movement dynamics. *The Journal of Neuroscience*, 27(48) :13045–13064, 2007. ISSN 0270-6474.

- [74] H Sebastian Seung and Daniel D Lee. The Manifold Ways of Perception. *Science*, 290(5500) :2268–2269, December 2000. doi : 10.1126/science.290.5500.2268.
- [75] Chang-da Bei and R M Gray. An Improvement of the Minimum Distortion Encoding Algorithm for Vector Quantization. *Communications, IEEE Transactions on*, 33(10) :1132–1133, 1985. ISSN 0090-6778. doi : 10.1109/TCOM.1985.1096214.
- [76] John A Lee and Michel Verleysen. *Nonlinear dimensionality reduction*. Springer, 2007. ISBN 038739351X.
- [77] Edsger Wybe Dijkstra. A short introduction to the art of programming. 1971.
- [78] P Demartines and J Herault. Curvilinear component analysis : a self-organizing neural network for nonlinear mapping of data sets. *IEEE transactions on neural networks / a publication of the IEEE Neural Networks Council*, 8(1) :148–54, January 1997. ISSN 1045-9227. doi : 10.1109/72.554199.
- [79] Anne Guérin-Dugué, Pascal Teissier, Gaspar Delso Gafaro, and Jeanny Héroult. Curvilinear Component Analysis for high-dimensional data representation : II. Examples of additional mapping constraints in specific applications. In *Engineering Applications of Bio-Inspired Artificial Neural Networks*, pages 635–644. Springer, 1999. ISBN 3540660682.
- [80] Joshua Tenenbaum, Vin de Silva, and John Langford. A Global Geometric Framework for Nonlinear Dimensionality Reduction. *Science*, 290(5500) :2319–2323, December 2000. ISSN 1095-9203. doi : doi:10.1126/science.290.5500.2319.
- [81] T F Cox and A A Cox. *Multidimensional Scaling, Second Edition*. Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability. Taylor & Francis, 2010. ISBN 9781584880943.
- [82] Martin H C Law. Nonlinear Manifold Learning For Data Stream. In *Proceedings of the Fourth SIAM International Conference on Data Mining*, page 33. Society for Industrial Mathematics, 2004. ISBN 0898715687.
- [83] A Weingessel and K Hornik. Local PCA algorithms. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, 11(6) :1242–1250, 2000. ISSN 1045-9227. doi : 10.1109/72.883408.
- [84] A.A.Frolov. Physiological basis of 3-D external space perception : approach of Henri Poincaré. In *History of the neurosciences in France and Russia*. Hermann edition, 2011.
- [85] Alban Laflaquiere, Sylvain Argentieri, Bruno Gas, and Eduardo Castillo-Castenada. Space dimension perception from the multimodal sensorimotor flow of a naive robotic agent. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 1520–1525. IEEE, 2010. ISBN 1424466741.
- [86] Alban Laflaquiere, Sylvain Argentieri, Olivia Breysse, Stephane Genet, and Bruno Gas. A non-linear approach to space dimension perception by a naive agent. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2012 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 3253–3259. IEEE, 2012. ISBN 1467317373.
- [87] A Laflaquiere, B Gas, and S Argentieri. Perception de la dimension de l’espace via une exploration active. In *Atelier "Raisonnement sur le Temps et l’Espace", RFIA*, pages 973–978, 2012.

- [88] C Couverture, A Laflaquiere, and B Gas. Perception active multimodale pour la robotique mobile. In *Conference Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle*, page 7p, Caen, France, 2010.
- [89] Thomas F Coleman and Yuying Li. On the convergence of interior-reflective Newton methods for nonlinear minimization subject to bounds. *Mathematical programming*, 67(1-3) :189–224, 1994. ISSN 0025-5610.
- [90] Thomas F Coleman and Yuying Li. An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds. *SIAM journal on optimization*, 6(2) :418–445, 1996. ISSN 1052-6234.
- [91] Hervé Abdi. Metric multidimensional scaling (MDS) : analyzing distance matrices. *Encyclopedia of measurement and statistics*. Sage, Thousand Oaks, CA, pages 1–13, 2007.
- [92] John W Sammon Jr. A nonlinear mapping for data structure analysis. *Computers, IEEE Transactions on*, 100(5) :401–409, 1969. ISSN 0018-9340.
- [93] Li Yang. Sammon’s nonlinear mapping using geodesic distances. In *Pattern Recognition, 2004. ICPR 2004. Proceedings of the 17th International Conference on*, volume 2, pages 303–306. IEEE, 2004. ISBN 0769521282.
- [94] John Aldo Lee, Amaury Lendasse, and Michel Verleysen. Nonlinear projection with curvilinear distances : Isomap versus curvilinear distance analysis. *Neurocomputing*, 57 :49–76, 2004. ISSN 0925-2312.
- [95] Bernhard Schölkopf, Alexander Smola, and Klaus-Robert Müller. Nonlinear Component Analysis as a Kernel Eigenvalue Problem. *Neural Computation*, 10(5) : 1299–1319, July 1998. ISSN 0899-7667. doi : 10.1162/089976698300017467.
- [96] A Aizerman, Emmanuel M Braverman, and L I Rozoner. Theoretical foundations of the potential function method in pattern recognition learning. *Automation and remote control*, 25 :821–837, 1964.
- [97] Kilian Q Weinberger and Lawrence K Saul. Unsupervised learning of image manifolds by semidefinite programming. In *Computer Vision and Pattern Recognition, 2004. CVPR 2004. Proceedings of the 2004 IEEE Computer Society Conference on*, volume 2, pages II–988. IEEE, 2004. ISBN 0769521584.
- [98] Teuvo Kohonen. The self-organizing map. *Proceedings of the IEEE*, 78(9) :1464–1480, 1990. ISSN 0018-9219.
- [99] Christopher M Bishop, Markus Svensén, and Christopher K I Williams. GTM : The generative topographic mapping. *Neural computation*, 10(1) :215–234, 1998. ISSN 0899-7667.
- [100] Arthur P Dempster, Nan M Laird, and Donald B Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 1–38, 1977. ISSN 0035-9246.
- [101] Sam T Roweis and Lawrence K Saul. Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding. *Science*, 290(5500) :2323–2326, 2000. ISSN 0036-8075.

-
- [102] Mikhail Belkin and Partha Niyogi. Laplacian Eigenmaps and Spectral Techniques for Embedding and Clustering. In *Advances in Neural Information Processing Systems 14*, pages 585–591. MIT Press, 2001.
 - [103] John A Lee and Michel Verleysen. Nonlinear projection with the isotop method. In *Artificial Neural Networks ICANN 2002*, pages 933–938. Springer, 2002. ISBN 3540440747.